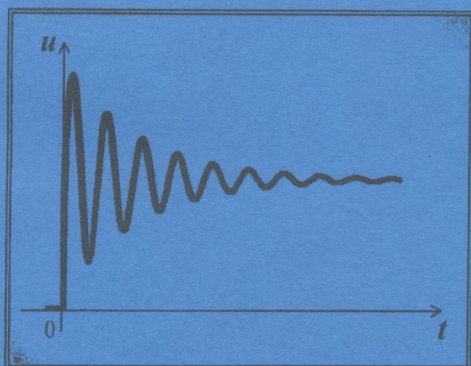


Ю.О. Карпов Т.Є. Магас

Ю.Г. Ведміцький

теоретичні основи електротехніки

Перехідні процеси *в лінійних електричних колах*



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Ю.О. Карпов, Т.Є. Магас, Ю.Г. Ведміцький

Теоретичні основи електротехніки

Перехідні процеси в лінійних електричних колах

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів.

УДК 621.3
К 26

Рецензенти:

В.І. Сенько, доктор технічних наук, професор
П.Д. Лежнюк, доктор технічних наук, професор
В.М. Лисогор, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Міністерством освіти і науки України.
Лист №14/18.2-1179 від 4.07.03 р.

Ю.О. Карпов, Т.Є. Магас, Ю.Г. Ведміцький
К 26 **Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних електричних колах.** - Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця", 2004. - 159 с.

ISBN 966-641-077-X

В навчальному посібнику розглянуті основні методи аналізу перехідних процесів в лінійних колах - класичний, операторний, частотний, а також метод, що базується на застосуванні інтеграла Дюамеля. Теоретичні положення ілюструються великою кількістю числових прикладів. Закінчується посібник прикладами моделювання перехідних процесів на основі розглянутих методів в програмному середовищі математичної системи Maple.

Навчальний посібник відповідає вимогам державних стандартів України і призначений для студентів і аспірантів вищих технічних навчальних закладів.

УДК 621.3

ISBN 966-641-077-X

© Ю. Карпов, Т. Магас, Ю. Ведміцький, 2004

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| Вступ | 5 |
| 1 Класичний метод розрахунку перехідних процесів | 7 |
| 1.1 Вмикання кола R, L на постійну напругу | 7 |
| 1.2 Вмикання кола R, C на постійну напругу | 11 |
| 1.3 Відключення кола R, L від джерела постійної напруги | 14 |
| 1.4 Вмикання кола R, L до джерела синусоїдної напруги .. | 17 |
| 1.5 Перехідний процес в розгалужених колах, які містять один реактивний елемент | 20 |
| 1.6 Незалежні і залежні початкові умови | 26 |
| 1.7 Вмикання кола, яке містить елементи R, L, C, до дже- рела постійної напруги | 31 |
| 1.8 Розрахунок перехідних процесів в складних розгалуже- них колах | 39 |
| 1.9 Методи складання характеристичних рівнянь | 50 |
| 1.9.1 Метод алгебризації диференціальних рівнянь | 51 |
| 1.9.2 Метод вхідного опору | 52 |
| 1.10 Про "порушення" законів комутації | 57 |
| 2 Операторний метод розрахунку перехідних процесів | 62 |
| 2.1 Деякі властивості перетворення Лапласа | 62 |
| 2.2 Використання перетворення Лапласа для розрахунку перехідних процесів | 66 |
| 2.3 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі | 69 |
| 2.4 Операторні схеми | 76 |
| 2.5 Перехід від зображення до оригіналу | 80 |
| 3 Перехідні процеси в електричних колах під час дії вхідних збуджень складної форми | 88 |
| 3.1 Одинична функція і перехідна характеристика кола ... | 88 |
| 3.2 Використання перехідних характеристик для розрахун- | |

| | |
|--|-----|
| ку перехідних процесів | 92 |
| 3.3 Розрахунок перехідних процесів при довільних збудженнях | 93 |
| 3.4 Імпульсна функція і імпульсна характеристика кола ... | 97 |
| 3.5 Розрахунок перехідних процесів при довільних збудженнях з використанням імпульсної функції | 98 |
| 4 Частотний метод розрахунку перехідних процесів | 101 |
| 4.1 Розрахунок перехідних процесів методом періодизації неперіодичних збуджень | 101 |
| 4.2 Спектри періодичних і неперіодичних функцій | 104 |
| 4.3 Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів | 109 |
| 4.4 Наближений спосіб розрахунку перехідних процесів частотним методом | 111 |
| 4.5 Розрахунок ненульових початкових умов | 114 |
| 4.6 Приклад використання різних методів розрахунку перехідних процесів | 116 |
| 4.6.1 Класичний метод | 116 |
| 4.6.2 Операторний метод | 122 |
| 4.6.3 Використання інтегралу Дюамеля | 126 |
| 4.6.3.1 Використання перехідної характеристики | 126 |
| 4.6.3.2 Використання імпульсної характеристики | 127 |
| 4.6.4 Метод періодизації неперіодичного збудження | 129 |
| 4.6.5 Частотний метод | 132 |
| Додаток А Приклади моделювання перехідних процесів в математичному середовищі Maple | 137 |
| Література | 158 |

ВСТУП

Якщо в електричному колі електрорушійні сили (е.р.с.) джерел енергії постійні або періодичні функції часу, а струми і напруги віток кола теж незмінні або періодичні функції часу, то такий режим роботи електричного кола називають *усталеним*.

Якщо в колі змінюються параметри його елементів або структура кола, то в ньому через деякий час наступить новий усталений режим. Появі нового усталеного режиму найчастіше передує *перехідний* процес, при якому струми і напруги змінюються неперіодично.

Будь-які зміни параметрів елементів кола або структури кола називають *комутацією*, при цьому вважають, що комутації, тобто вмикання, розмикання або перемикання в колі відбуваються миттєво.

Виникнення перехідного процесу пов'язано з тим, що кожному усталеному стану кола відповідає деякий запас енергії електричних і магнітних полів. Перехід до нового усталеного режиму пов'язаний із зміною енергії в цих полях. Миттєво такі зміни енергії відбутися не можуть, оскільки це відповідало би наявності джерел безмежно великої потужності, що фізично неможливо. Дійсно, якщо в початковому усталеному режимі кількість енергії в електричному колі була W_1 , а в новому усталеному режимі – W_2 , причому ця зміна енергії відбулася за час Δt , то потужність джерел можна визначити за допомогою виразу

$$P = \frac{W_2 - W_1}{\Delta t}.$$

Якщо допустити, що час Δt прямує до нуля, тобто перехідний процес відсутній, то це відповідає безмежно великій потужності, що, як говорилось вище, фізично не можливо, а відповідно припущення про відсутність перехідного процесу є помилковим.

В електричних колах енергія накопичується в електричних полях конденсаторів і магнітних полях котушок, тому в колах, які містять тільки резистори, перехід від одного усталеного стану до іншого відбувається миттєво. Проте в будь-яких реальних електричних пристроях завжди є електричні і магнітні поля, що дає право стверджувати про існування перехідних процесів в будь-яких реальних електричних колах. Не дивлячись на відносно малий реальний час протікання перехідних процесів, їх аналіз і розрахунок представляють великий практичний інтерес, оскільки під час перехідних процесів можуть виникнути небезпечно великі напруги або струми в електричних колах.

Та обставина, що енергія в електричних колах не може змінитися миттєво, дає підставу та можливість сформулювати два закони, які отримали назву *закони комутації*.

Енергія магнітного поля визначається за допомогою виразу

$$W_M = \frac{Li_L^2}{2},$$

де i_L - струм через індуктивність.

Оскільки W_M не може змінитися стрибком (миттєво), то і струм через індуктивність теж не може змінитися миттєво.

Перший закон комутації формулюється так: *струм через індуктивність в початковий момент після комутації залишається таким же, яким він був безпосередньо перед комутацією.*

Момент комутації приймають за початок відліку часу перехідного процесу, тобто комутація відбувається в момент часу $t = 0$. Якщо першу мить часу після комутації позначити через $t = 0_+$, а останню мить безпосередньо перед комутацією через $t = 0_-$, то можна записати перший закон комутації в математичному вигляді

$$i_L(0_+) = i_L(0_-). \quad (1)$$

Енергія електричного поля

$$W_C = \frac{Cu_c^2}{2},$$

де u_c - напруга на ємності.

Аналогічно з попереднім сформулюємо **другий закон комутації**: *напруга на ємності в початковий момент після комутації дорівнює напрузі на ємності безпосередньо перед комутацією.*

В математичному вигляді

$$u_c(0_+) = u_c(0_-). \quad (2)$$

Інші струми і напруги кола: струми через резистори і ємності, напруги на резисторах і індуктивностях в момент комутації можуть змінюватися стрибком.

1 КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1 Вмикання кола R, L на постійну напругу

Розглянемо вмикання кола, яке складається із послідовного з'єднання резистора і індуктивності до джерела постійної напруги (рис. 1.1). Після замикання ключа в колі протікає змінний неперіодичний струм i .

Рівняння за другим законом Кірхгофа має вигляд:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U . \quad (1.1)$$

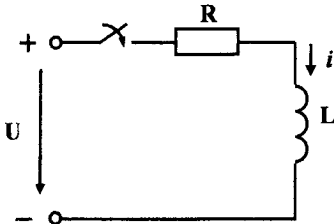


Рисунок 1.1

Одержаний вираз є неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку з постійними коефіцієнтами. Як відомо, повний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку однорідного рівняння.

Частинний розв'язок визначається виглядом правої частини і називається примусовою складовою i_{np} .

Загальний розв'язок не залежить від прикладеної напруги, він визначається параметрами кола та початковими умовами і називається вільною складовою $i_в$.

$$i = i_{np} + i_в . \quad (1.2)$$

Оскільки права частина рівняння (1.1) є постійна величина, то примусова складова теж величина постійна

$$i_{np} = I \quad (1.3)$$

і є розв'язком рівняння (1.1). Підставляючи (1.3) в (1.1), одержуємо

$$L \frac{di}{dt} + RI = U$$

або

$$RI = U ,$$

оскільки

$$\frac{dI}{dt} = 0.$$

Звідси

$$i_{np} = I = \frac{U}{R}. \quad (1.4)$$

Якщо розглянути новий усталений режим в колі, то в ньому протікає постійний струм, величина якого визначається з виразу

$$I = \frac{U}{R},$$

оскільки опір індуктивності постійному струмові дорівнює нулю. Звідси видно, що примусову складову можна визначити також із розрахунку нового усталеного режиму.

Вільна складова є розв'язком однорідного диференціального рівняння

$$L \frac{di_g}{dt} + Ri_g = 0. \quad (1.5)$$

Звідси

$$i_g = Ae^{pt}, \quad (1.6)$$

де A - постійна інтегрування,
 p - корінь характеристичного рівняння.

Для знаходження p запишемо характеристичне рівняння, для чого в

(1.5) $\frac{di_g}{dt}$ замінюємо на p , а i_g - на одиницю.

$$Lp + R = 0; \quad p = -\frac{R}{L}. \quad (1.7)$$

Повний розв'язок рівняння (1.5) з врахуванням знайдених примусової (1.4) і вільної (1.6) складових має вигляд

$$i = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}, \quad (1.8)$$

де A є невідомою сталою.

Для визначення постійної інтегрування A скористасмося початковими умовами, тобто значеннями струму для $t = 0_+$ ($i(0_+)$). Оскільки струм i протікає через індуктивність, то він підпорядковується закону комутації $i(0_+) = i(0_-)$. Значення струму $i(0_-)$ відповідає значенню струму в момент, що

безпосередньо передувє комутації, тобто коли ключ був розімкнутий. При розімкненому ключі струму в колі не було ($i(0_-) = 0$), тому

$$i(0_-) = i(0_+) = 0.$$

Підставляючи значення $t = 0$ і $i(0) = 0$ в (1.8), отримуємо

$$0 = \frac{U}{R} + A,$$

звідки

$$A = -\frac{U}{R}. \quad (1.9)$$

Таким чином вільна складова

$$i_g = -\frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

і струм перехідного процесу

$$i_g = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (1.10)$$

Побудуємо графік струму перехідного процесу (i), показавши окремо примусову і вільну складові (рис. 1.2).

Показник степеня є величиною безрозмірною, тому величина $\frac{R}{L}$ має розмірність $1/c$, $\frac{L}{R}$ - розмірність часу.

Позначимо

$$\frac{L}{R} = \tau \quad (1.11)$$

і назвемо цю величину *постійною часу*.

Тоді

$$i_g = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Для побудови вільної складової будемо задавати значення t , кратні τ , і одержимо таку таблицю:

Таблиця 1.1

| t | 0 | τ | 2τ | 3τ | 4τ | 5τ |
|-------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| i_a | $-\frac{U}{R}$ | $-\frac{U}{R}e^{-1}$ | $-\frac{U}{R}e^{-2}$ | $-\frac{U}{R}e^{-3}$ | $-\frac{U}{R}e^{-4}$ | $-\frac{U}{R}e^{-5}$ |

або

Таблиця 1.2

| t | 0 | τ | 2τ | 3τ | 4τ | 5τ |
|-------|----------------|---------------------|---------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| i_a | $-\frac{U}{R}$ | $-0,368\frac{U}{R}$ | $-0,135\frac{U}{R}$ | $-0,05\frac{U}{R}$ | $-0,0183\frac{U}{R}$ | $-0,0067\frac{U}{R}$ |

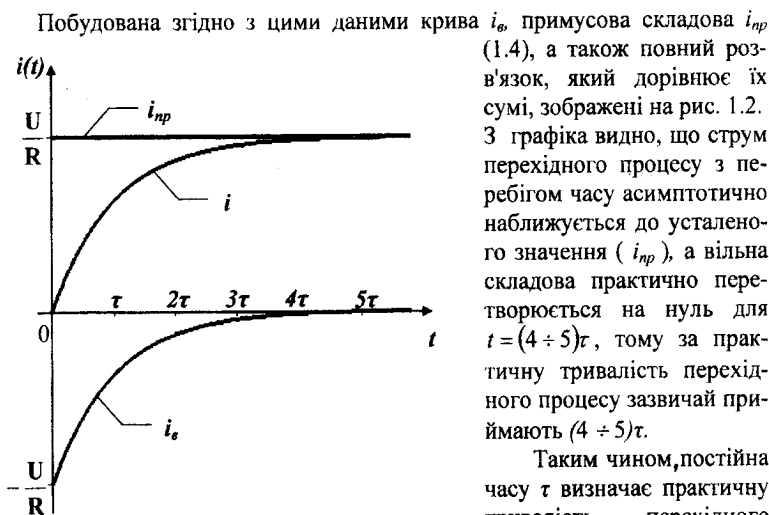


Рисунок 1.2

Таким чином, постійна часу τ визначає практичну тривалість перехідного процесу.

1.2 Вмикання кола R, C на постійну напругу

Розглянемо перехідний процес в колі (рис. 1.3) при вмиканні його до джерела постійної напруги.

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для кола після замикання ключа (післякомутаційний стан)

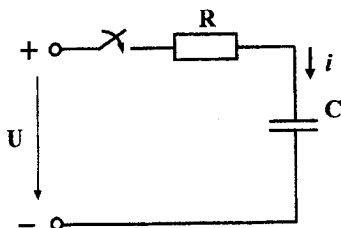


Рисунок 1.3

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = U. \quad (1.12)$$

Щоб із (1.12) одержати диференціальне рівняння його треба продиференціювати за часом

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$

проте в цьому випадку шуканою змінною буде струм i , який не підпорядковується законам комутації і, відповідно, при знаходженні початкових умов для визначення постійної інтегрування зустрінуться деякі труднощі. Тому зручніше в якості змінної вибирати таку величину, щоб для неї виконувались закони комутації. В нашому випадку краще шукати напругу на ємності u_C . Враховуючи те, що струм i напруга на ємності зв'язані співвідношенням

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad (1.13)$$

і підставляючи (1.13) в (1.12), одержимо

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U. \quad (1.14)$$

Як і в попередньому параграфі одержане неоднорідне диференціальне рівняння, повний розв'язок якого запишемо в вигляді суми примусової і вільної складових

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cs}. \quad (1.15)$$

Примусова складова знаходиться із розрахунку нового усталеного режиму. В новому усталеному режимі, коли перехідний процес вже закінчився, струму в колі не буде, оскільки ємність для постійного струму представляє собою безмежно великий опір. Напруга на резисторі також дорів-

ное нулю, отже, в усталеному режимі в відповідності із другим законом Кірхгофа напруга на ємності дорівнює прикладеній напрузі

$$u_{Cnp} = U. \quad (1.16)$$

Вільна складова має такий самий вигляд, як і в попередньому випадку, тобто

$$u_{C\phi} = Ae^{pt}. \quad (1.17)$$

Характеристичне рівняння записуємо за диференціальним рівнянням (1.14)

$$RCp + 1 = 0 \quad \text{і} \quad p = -\frac{1}{RC}. \quad (1.18)$$

Таким чином, повний розв'язок

$$u_C = U + Ae^{-\frac{1}{RC}t}, \quad (1.19)$$

Для визначення постійної інтегрування A знаходимо початкові умови. Напруга на ємності підпорядковується законові комутації, тому

$$u_C(0_-) = u_C(0_+).$$

До комутації коло було розімкнуте і, якщо допустити, що конденсатор не був попередньо зарядженим, то

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0. \quad (1.20)$$

Підставляючи значення $t = 0$ і $u_C(0) = 0$ в (1.19), одержуємо

$$0 = U + A.$$

Звідки

$$A = -U.$$

Таким чином, повний розв'язок

$$u_C = U - Ue^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (1.21)$$

Постійна часу в загальному випадку може бути записана в такому вигляді:

$$\tau = \frac{1}{|p|}, \quad (1.22)$$

тому

$$\tau = RC.$$

Проводячи побудову графіка аналогічно попередньому прикладові, одержуємо криву зміни напруги на ємності u_c в залежності від часу (рис. 1.4).

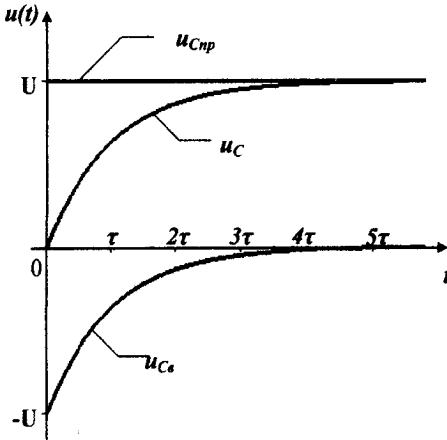


Рисунок 1.4

Знайдемо закон зміни струму в даному колі. Для цього використовуємо вираз (1.13), який зв'язує струм і напругу на ємності. Замість u_c в (1.13) підставимо його значення (1.21), тоді

$$i = C \frac{d \left(U - U e^{-\frac{1}{RC}t} \right)}{dt} = C(-U) \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (1.23)$$

Вираз (1.23) показує, що примусова складова повного струму дорівнює нулю. Це ж впливає і із розгляду нового усталеного режиму. Було показано раніше, що в новому усталеному режимі струм в колі не протікає, отже примусова складова струму дорівнює нулю.

Графік зміни струму перехідного процесу зображений на рис. 1.5.

Оскільки i_c не підпорядковується закономірності комутації, то він може змінюватися стрибком. Це і підтверджує графік $i(t)$, який зображений на

рис. 1.5. Із рисунка видно, що струм через смінь в момент комутації змінюється стрибком від значення, яке дорівнює нулю, до значення $\frac{U}{R}$.

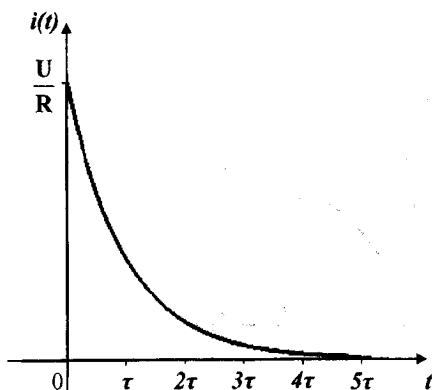


Рисунок 1.5

1.3 Відключення кола R, L від джерела постійної напруги

Розглянемо перехідний процес в колі, схема якого зображена на рис.1.6.

До комутації, тобто до розмикання ключа, через вольтметр протікає струм від точки *a* до точки *b* і вольтметр показує напругу, яка дорівнює напрузі джерела живлення

$$U_{ab} = U.$$

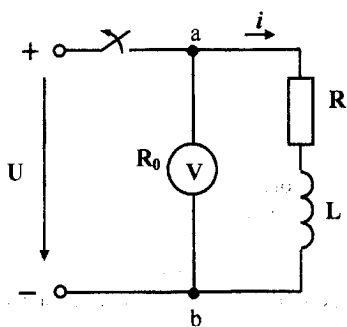


Рисунок 1.6

Через котушку протікає постійний струм

$$I_0 = \frac{U}{R}. \quad (1.24)$$

В магнітному полі котушки накопичена енергія

$$W_M = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{LU^2}{2R^2}. \quad (1.25)$$

В початковий момент після ко-

мутації струм в котушці не змінює ні свого значення, ні напрямку, тому через вольтметр струм після комутації протікає від точки b до точки a .

За другим законом Кірхгофа для контура, який складається із котушки і вольтметра, можна записати

$$L \frac{di}{dt} + Ri + R_0 i = 0. \quad (1.26)$$

Оскільки в контурі немає е.р.с., то сума напруг прирівнюється до нуля.

Повний розв'язок рівняння (1.26) записуємо у вигляді

$$i = i_{np} + i_g.$$

В новому усталеному режимі струм в контурі дорівнює нулю, оскільки відсутнє джерело е.р.с., тому

$$i_{np} = 0.$$

Вільна складова

$$i_g = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$Lp + (R + R_0) = 0$$

і його корінь

$$p = -\frac{R + R_0}{L}.$$

Таким чином

$$i = Ae^{-\frac{R+R_0}{L}t}. \quad (1.27)$$

Визначимо початкові умови. Струм в котушці підпорядковується законам комутації, тому

$$i(0_+) = i(0_-).$$

Значення $i(0_-)$ дорівнює струмові в котушці в момент, який безпосередньо передє комутації, тобто до розмикання ключа. Як встановлено раніше (1.24),

$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{U}{R}$$

Підставляючи початкові умови в (1.27), одержуємо

$$\frac{U}{R} = A, \quad (1.28)$$

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{R+R_0}{L}t} \quad (1.29)$$

Покажемо, що енергія, яка накопичена в магнітному полі котушки за час перехідного процесу, повністю витрачається на нагрівання опорів R і R_0 .

Енергія, яка виділяється на опорах за час перехідного процесу, визначається виразом

$$W = \int_0^{\infty} i^2 (R + R_0) dt$$

Підставимо замість струму i його значення із (1.29) і проведемо необхідні перетворення

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} \left(\frac{U}{R} e^{-\frac{R+R_0}{L}t} \right)^2 (R + R_0) dt = \\ &= \frac{U^2}{R^2} (R + R_0) \int_0^{\infty} e^{-\frac{2(R+R_0)}{L}t} dt = \frac{U^2}{R^2} (R + R_0) \frac{L}{-2(R + R_0)} \cdot e^{-\frac{2(R+R_0)}{L}t} \Bigg|_0^{\infty} = (1.30) \\ &= \frac{LU^2}{2R^2} \end{aligned}$$

Порівнюючи (1.30) і (1.25), бачимо, що енергія, яка накопичена в магнітному полі до комутації повністю витрачається під час перехідного процесу на нагрівання опорів R і R_0 .

Визначимо напругу на вольтметрі під час перехідного процесу, яка дорівнює напрузі між точками a і b . Раніше було з'ясовано, що під час перехідного процесу струм тече від точки b до точки a , тому

або

$$u_V = u_{ab} = -iR_0$$
$$u_V = -U \frac{R_0}{R} e^{-\frac{R+R_0}{L}t} \quad (1.31)$$

Найбільше значення напруга на вольтметрі приймає в момент $t = 0$, тобто

$$u_{V \max} = -U \frac{R_0}{R} \quad (1.32)$$

Зазвичай опір вольтметра значно більший опору ділянки кола, на якій вимірюється напруга, тобто $R_0 \gg R$, тому напруга на вольтметрі в момент $t = 0$ значно перевищує напругу джерела, до того ж вона має протилежну полярність, що може спричинити до пошкодження приладу.

Розглянемо числові значення. Нехай $U = 100$ В, $L = 1$ Г, $R = 10$ Ом, $R_0 = 90$ Ом.

Напруга на вольтметрі до комутації

$$U_V = U = 100 \text{ В.}$$

Напруга на вольтметрі в початковий момент після комутації ($t=0$) визначається згідно (1.32)

$$u_V = -U \frac{R_0}{R} = -100 \frac{90}{10} = -900 \text{ В.}$$

Постійна часу

$$\tau = \frac{L}{R + R_0} = \frac{1}{10 + 90} = 0,01 \text{ с.}$$

Практична тривалість перехідного процесу

$$t_{np} = (4 \div 5) \tau = (0,04 \div 0,05) \text{ с.}$$

1.4 Вмикання кола R, L до джерела синусоїдної напруги

Розглянемо коло, схема якого зображена на рис. 1.1, коли прикладена напруга змінюється за синусоїдним законом

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta) \quad (1.33)$$

Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа, одержуємо

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (1.34)$$

Повний розв'язок рівняння

$$i = i_{np} + i_g.$$

Примусова складова струму знаходиться із розрахунку нового усталеного режиму, тому ця складова може бути розрахована комплексним методом і змінюється за синусоїдним законом

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi),$$

де амплітуда струму

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

а

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Вільна складова, яка є розв'язком однорідного диференціального рівняння, має такий же вигляд, як і при підключенні кола R, L до джерела постійної напруги, тобто

$$i_g = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння $Lp + R = 0$, а його корінь $p = -R/L$. Таким чином, повний розв'язок

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) + Ae^{pt}. \quad (1.35)$$

Постійну інтегрування A знаходимо використовуючи початкові умови. Оскільки в колі, яке розглядається, початкові умови нульові (струму в колі до комутації не було), то для $t = 0$

$$i(0_+) = i(0_-) = 0.$$

Підставимо $t = 0$ і $i(0) = 0$ в (1.35) та одержимо

$$0 = I_m \sin(\beta - \varphi) + A.$$

Звідси

$$A = -I_m \sin(\beta - \varphi) \quad (1.36)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) - [I_m \sin(\beta - \varphi)] e^{-\frac{R}{L}t} \quad (1.37)$$

Побудуємо графік зміни струму в колі (рис. 1.7), коли постійна часу кола значно більша періоду синусоїдної функції $\tau \gg T$.

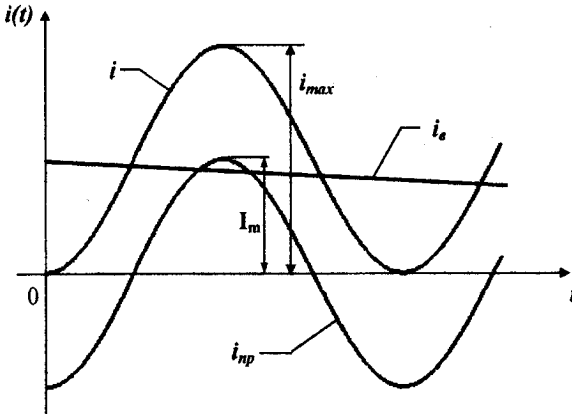


Рисунок 1.7

Примусова складова представляє собою синусоїдну функцію. Припустимо, що ключ замикається в момент, коли примусова складова приймає максимальне від'ємне значення ($\beta - \varphi = -\pi/2$)

$$i_{np}(0_+) = -I_m.$$

В цьому випадку вільна складова для $t = 0$

$$i_e(0_+) = -i_{np}(0_+) = I_m,$$

оскільки повний струм для $t=0$, $i(0_+) = 0$. Максимальне значення струму перехідного процесу i_{max} перевищує амплітуду усталеного значення струму майже в два рази (рис. 1.7), тоді як при включенні такого кола до джерела постійної напруги струм перехідного процесу не перевищує усталеного значення (рис. 1.2).

При зміні моменту вмикання змінюються значення $i_{np}(0_+)$ і $i_e(0_+)$, що змінює і характер перехідного процесу.

Нехай, наприклад, коло вмикається в момент, коли $\beta - \varphi \ll 90^\circ$, як це показано на рис. 1.8.

В цьому випадку $i_a(0_+) = -i_{np}(0_+)$ приймають значення близькі до нуля і струм i перехідного процесу мало відрізняється від усталеного значення. Якщо ключ замикається в момент часу, коли примусова складова струму проходить через нуль ($\beta - \varphi = 0$), то вільна складова дорівнює нулю і в колі зразу ж встановлюється новий усталений режим.

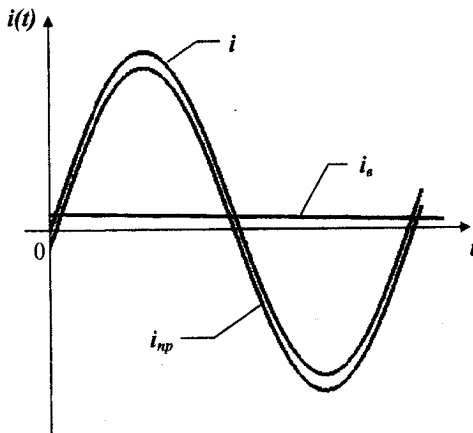


Рисунок 1.8

Таким чином, при вмиканні кола R, L до джерела синусоїдної напруги струм перехідного процесу може перевищувати амплітуду струму усталеного режиму, а характер перехідного процесу залежить від моменту вмикання.

1.5 Перехідний процес в розгалужених колах, які містять один реактивний елемент

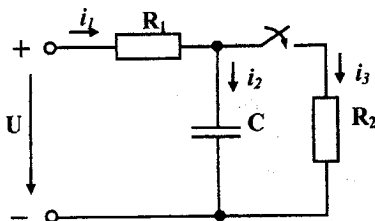


Рисунок 1.9

Розглянемо випадок, коли коло містить декілька контурів (рис. 1.9).

Після замикання ключа у всіх вітках кола протікають струми перехідного процесу. Для їх знаходження складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану кола

($t \geq 0$, ключ замкнений) і доповнимо цю систему рівнянням, яке зв'язує струм і напругу на ємності:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ R_1 i_1 + u_C = U, \\ R_2 i_2 + u_C = 0, \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (1.38)$$

Для розв'язання задачі необхідно із системи (1.38) одержати одне диференціальне рівняння відносно однієї невідомої. Такою невідомою в цьому прикладі зручно взяти напругу на ємності u_C , тому що вона підпорядковується закону комутації. Виразимо всі останні змінні (i_1, i_2, i_3) через u_C . Змінну i_1 виразимо через u_C із другого рівняння системи, i_2 - із третього і i_3 - із четвертого.

$$\begin{cases} i_1 = \frac{U - u_C}{R_1}, \\ i_2 = \frac{u_C}{R_2}, \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (1.39)$$

Підставимо одержані значення струмів в перше рівняння системи

$$\frac{U - u_C}{R_1} - \frac{u_C}{R_2} - C \frac{du_C}{dt} = 0$$

або

$$C \frac{du_C}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_C = \frac{U}{R_1}.$$

Отже, ми одержали неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуємо його так само, як і в попередніх прикладах.

Повний розв'язок

$$u = u_{np} + u_{\theta}.$$

Примусову складову визначаємо із розрахунку нового усталеного режиму. В новому усталеному режимі ключ замкнений, в колі тече постійний струм через опори R_1 і R_2 , через вітку з ємністю струм не тече, оскільки ємність для постійного струму є безмежно великим опором. Величина постійного струму - $U/(R_1 + R_2)$.

Напруга на ємності дорівнює напрузі на опорі R_2 , оскільки ці вітки з'єднані паралельно, тому

$$u_{Cnp} = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2. \quad (1.41)$$

Вільна складова

$$u_{Cв} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$Cp + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

і його корінь

$$p = -\frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{C} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}.$$

Повний розв'язок з врахуванням знайдених примусової і вільної складових

$$u_C = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} + Ae^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}. \quad (1.42)$$

Визначаємо початкові умови. Оскільки напруга на ємності підпорядковується закону комутації, то

$$u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Знайдемо $u_C(0_-)$, враховуючи, що для $t = 0_-$ - ключ був розімкнутий. Коло представляло собою послідовне з'єднання опору R_1 і ємності C , тому в колі струм був відсутнім ($i_1(0_-) = 0$).

За другим законом Кірхгофа

$$R_1 i_1(0_-) + u_C(0_-) = U.$$

Оскільки $i_1(0_-) = 0$, то

$$u_C(0_-) = U. \quad (1.43)$$

Відповідно

$$u_C(0_+) = U.$$

Підставляючи $t = 0$ і значення $u_C(0_+)$ в (1.42), одержимо

$$U = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} + A.$$

Звідси

$$A = U - \frac{UR_2}{R_1 + R_2} = U \frac{R_1 + R_2 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{UR_1}{R_1 + R_2} \quad (1.44)$$

і повний розв'язок

$$u_C = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} + \frac{UR_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \quad (1.45)$$

Якщо потрібно знайти закони зміни струмів в колі, то можна скористатися співвідношеннями (1.39) і (1.45).

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{U - u_C}{R_1} = \frac{U}{R_1} - \frac{UR_2}{R_1(R_1 + R_2)} - \frac{UR_1}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} = \\ &= \frac{U}{R_1 + R_2} - \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{u_C}{R_2} = \frac{UR_2}{R_2(R_1 + R_2)} + \frac{UR_1}{R_2(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} = \\ &= \frac{U}{R_1 + R_2} + \frac{UR_1}{R_2(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_3 &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d \left(\frac{UR_2}{R_1 + R_2} + \frac{UR_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right)}{dt} = \\ &= C \frac{UR_1}{R_1 + R_2} \left(-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} = -\frac{U}{R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}. \end{aligned}$$

Розглянемо ще один приклад (рис. 1.10).

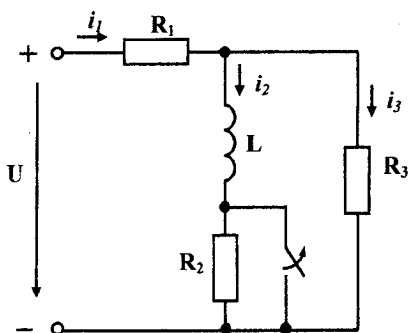


Рисунок 1.10

Запишемо систему рівнянь для післякомутаційного стану кола ($t \geq 0_+$, ключ розімкнутий).

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ R_1 i_1 + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = U, \\ R_3 i_3 - R_2 i_2 - L \frac{di_2}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1.46)$$

Із системи (1.46) одержимо одне диференціальне рівняння відносно невідомої i_2 , оскільки для i_2 (струм через індуктивність) виконується закон комутації.

Із другого рівняння системи виражаємо струм i_1 через i_2 , а із третього рівняння системи струм i_3 через i_2 .

$$\begin{cases} i_1 = \frac{U}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2}{R_1} i_2, \\ i_3 = \frac{L}{R_3} \frac{di_2}{dt} + \frac{R_2}{R_3} i_2. \end{cases} \quad (1.47)$$

Підставляємо одержані значення струмів i_1 і i_3 в перше рівняння системи

$$\frac{U}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2}{R_1} i_2 - i_2 - \frac{L}{R_3} \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2}{R_3} i_2 = 0.$$

Після перетворень одержуємо

$$L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{di_2}{dt} + \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} + 1 \right) i_2 = \frac{U}{R_1}. \quad (1.48)$$

Повний розв'язок диференціального рівняння

$$i_2 = i_{2np} + i_{2\theta}.$$

Примусову складову струму через індуктивність знаходимо із розрахунку нового усталеного режиму, в якому через усі вітки кола протікають постійні струми, причому опір індуктивності при постійному струмі дорівнює нулю.

Знаходимо спочатку примусове значення струму першої вітки

$$i_{1np} = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Струм другої вітки визначається за виразом

$$i_{2np} = i_{1np} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{UR_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (1.49)$$

Вільна складова струму i_2

$$i_{2в} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) p + \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} + 1 \right) = 0$$

і його корінь

$$p = - \frac{\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} + 1 \right)}{L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)} = - \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{L(R_1 + R_3)}.$$

Повний розв'язок

$$i_2 = \frac{UR_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + Ae^{pt}. \quad (1.50)$$

Для визначення постійної інтегрування знаходимо початкові умови. З виразу

$$i_2(0_+) = i_2(0_-)$$

знайдемо струм через індуктивність до комутації (ключ замкнений). В другій вітці присутня тільки одна індуктивність (опір R_2 закорочено ключем), опір якої при постійному струмі дорівнює нулю, тому через опір R_3 струм

протікати не буде. (Паралельно опору R_3 підключена вітка з індуктивністю, опір якої при постійному струмі дорівнює нулю). Таким чином, струм протікає тільки через опір R_1 і індуктивність L відповідно,

$$i_2(0_-) = \frac{U}{R_1} = i_2(0_+). \quad (1.51)$$

Підставляючи $t = 0$ і значення $i_2(0_+)$ в (1.50), одержуємо

$$\frac{U}{R_1} = \frac{UR_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} + A.$$

Звідси

$$A = \frac{U}{R_1} - \frac{UR_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{UR_2(R_1 + R_3)}{R_1(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}$$

і

$$i_2 = \frac{UR_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} + \frac{UR_2(R_1 + R_3)}{R_1(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} e^{-\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{L(R_1 + R_3)}t}. \quad (1.52)$$

Останні змінні i_1 і i_3 можна знайти із (1.47).

1.6 Незалежні і залежні початкові умови

В попередньому параграфі в якості базової змінної, тобто тієї змінної, відносно якої складалося диференціальне рівняння, вибиралися u_C або i_L , оскільки для них виконуються закони комутації і легко знаходяться початкові умови.

Ці початкові умови ($u_C(0)$ і $i_L(0)$) називаються *незалежними*. Початкові умови для всіх останніх змінних називаються *залежними*.

Вміння визначити залежні початкові умови дозволяє вибирати в якості базової змінної будь-яку невідому величину.

Розглянемо приклад і покажемо на ньому як знаходити залежні початкові умови.

Для даного кола (рис.1.11) визначити закон зміни струму i_1 в перехідному режимі. ($R_1=R_2=10$ Ом, $R_3=R_4=20$ Ом, $C=100$ мкФ, $U=200$ В).

Для кола після комутації запишемо систему диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа.

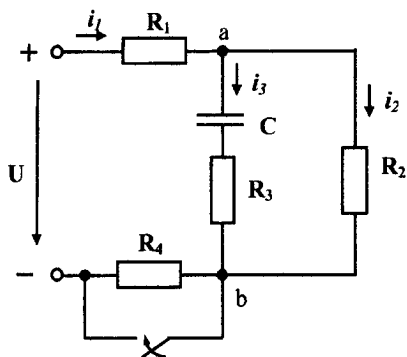


Рисунок 1.11

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ R_1 i_1 + u_C + R_3 i_3 = U, \\ R_2 i_2 - R_3 i_3 - u_C = 0, \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (1.53)$$

Складемо із одержаної системи одне диференціальне рівняння відносно шуканої невідомої i_1 . Для цього виразимо всі інші змінні (i_2, i_3, u_C) за допомогою i_1 .

Безпосередньо із рівнянь системи не можна виразити ні

однієї змінної через i_1 , тому додамо друге і третє рівняння системи. Тоді

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = U.$$

Звідки маємо

$$i_2 = \frac{U - R_1 i_1}{R_2}.$$

Із першого рівняння системи

$$i_3 = i_1 - i_2 = i_1 - \frac{U - R_1 i_1}{R_2} = i_1 - \frac{U}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} i_1 = i_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{U}{R_2}.$$

Із третього рівняння системи

$$\begin{aligned} u_C &= R_2 i_2 - R_3 i_3 = R_2 \left(\frac{U - R_1 i_1}{R_2} \right) - R_3 \left(i_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{U}{R_2} \right) = \\ &= U - R_1 i_1 - R_3 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) i_1 + U \frac{R_3}{R_2} = U \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) - \left(R_1 + R_3 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right) i_1. \end{aligned}$$

Підставимо значення i_3 і u_C , що виражені через i_1 , в четверте рівняння системи

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) i_1 - \frac{U}{R_2} = C \frac{d \left(U \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) - \left(R_1 + R_3 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right) i_1 \right)}{dt}.$$

Проведемо перетворення

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_1 - \frac{U}{R_2} = -C \left(R_1 + R_3 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \right) \frac{di_1}{dt}$$

або

$$C \left(R_1 + R_3 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \right) \frac{di_1}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_1 = \frac{U}{R_2}. \quad (1.54)$$

Повний розв'язок диференціального рівняння (1.54)

$$i_1 = i_{1np} + i_{1e}.$$

Примусову складову знаходимо із розрахунку нового усталеного режиму. В цьому режимі опір R_4 закорочений, через вітку з смістю струм не протікає, тому

$$i_{1np} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{200}{10 + 10} = 10 \text{ А}. \quad (1.55)$$

Вільна складова

$$i_{1e} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$C \left(R_1 + R_3 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \right) p + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = 0$$

і його корінь

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)}{C \left(R_1 + R_3 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \right)} = -\frac{R_1 + R_2}{C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = \\ &= -\frac{10 + 10}{100 \cdot 10^{-6} (10 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 20)} = -400 \text{ 1/c}. \end{aligned}$$

Повний розв'язок з врахуванням знайдених складових

$$i_1 = 10 + Ae^{pt}. \quad (1.56)$$

Щоб визначити постійну інтегрування A , треба спочатку знайти залежну початкову умову для струму $i_1(0_+)$. Цей струм законові комутації не підпорядковується.

Для знаходження залежної початкової умови запишемо систему (1.53) для моменту часу $t = 0_+$.

$$\begin{cases} i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) = 0, \\ R_1 i_1(0_+) + u_C(0_+) + R_3 i_3(0_+) = U, \\ R_2 i_2(0_+) - R_3 i_3(0_+) - u_C(0_+) = 0, \\ i_3(0_+) = C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+}. \end{cases} \quad (1.57)$$

Доповнимо цю систему законом комутації

$$u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Значення $u_C(0_-)$ відповідає значенню напруги на ємності безпосередньо перед комутацією, тобто коли ключ ще розімкнутий. В цьому випадку в вітці з ємністю струму немає, тому напруга на ємності дорівнює напрузі між точками a і b , або напрузі на опорі R_2 .

Струм в колі до комутації тече через опори R_1 , R_2 і R_4 (ключ розімкнутий) і може бути знайдений за законом Ома

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_4}.$$

Тому

$$\begin{aligned} u_C(0_+) = u_C(0_-) = i_2(0_-) R_2 &= \frac{U R_2}{R_1 + R_2 + R_4} = \\ &= \frac{200 \cdot 10}{10 + 10 + 20} = 50 \text{ В}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Розв'язуючи систему (1.57) з врахуванням початкового значення напруги на ємності (1.58), знаходимо $i_1(0_+)$.

Із другого рівняння системи

$$i_1(0_+) = \frac{U - u_C(0_+) - R_3 i_3(0_+)}{R_1} = \frac{U}{R_1} - \frac{u_C(0_+)}{R_1} - \frac{R_3 i_3(0_+)}{R_1}. \quad (1.59)$$

Із першого рівняння системи

$$i_2(0_+) = i_1(0_+) - i_3(0_+).$$

Підставимо одержане значення $i_2(0_+)$ в третє рівняння системи

$$R_2(i_1(0_+) - i_3(0_+)) - R_3 i_3(0_+) - u_C(0_+) = 0$$

або

$$R_2 i_1(0_+) - R_2 i_3(0_+) - R_3 i_3(0_+) - u_C(0_+) = 0.$$

Звідси

$$i_3(0_+) = \frac{R_2 i_1(0_+) - u_C(0_+)}{R_2 + R_3}. \quad (1.60)$$

Підставляючи тепер (1.60) в (1.59), отримаємо

$$i_1(0_+) = \frac{U}{R_1} - \frac{u_C(0_+)}{R_1} - \frac{R_3}{R_1} \frac{R_2 i_1(0_+) - u_C(0_+)}{R_2 + R_3}$$

або

$$i_1(0_+) \left(1 + \frac{R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3)} \right) = \frac{U}{R_1} - u_C(0_+) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_1 (R_2 + R_3)} \right).$$

Підставимо числові значення

$$i_1(0_+) \left(1 + \frac{10 \cdot 20}{10 \cdot (10 + 20)} \right) = \frac{200}{10} - 50 \left(\frac{1}{10} - \frac{20}{10 \cdot (10 + 20)} \right),$$

звідси

$$i_1(0_+) = \frac{55}{5} = 11 \text{ А.}$$

Підставляючи $t = 0$ і $i_1(0_+) = 11 \text{ А}$ в (1.56) отримаємо

$$11 = 10 + A,$$

звідси

$$A = 1$$

і остаточний розв'язок

$$i_1 = (10 + e^{-400t}) \text{ А.}$$

1.7 Вмикання кола, яке містить елементи R, L, C до джерела постійної напруги

Розглянемо перехідний процес в колі, яке містить два реактивних елементи (рис. 1.12).

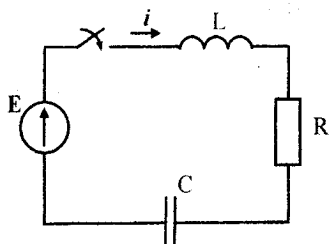


Рисунок 1.12

Рівняння за другим законом Кірхгофа для кола після замикання ключа має вигляд

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = E. \quad (1.61)$$

Співвідношення, яке зв'язує струм і напругу на ємності,

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.62)$$

Підставляючи (1.62) в (1.61), одержуємо

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad (1.63)$$

неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку.

Повний його розв'язок записується також як сума примусової і вільної складових

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cв}.$$

Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму. В цьому режимі струм в колі відсутній, немає напруги на опорі R і індуктивності L , тому напруга на ємності дорівнює е.р.с. джерела

$$u_{Cnp} = E.$$

Перед тим, як записати вільну складову, запишемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені. Для цього замінимо в однорідному рівнянні, одержаному із (1.63), $\frac{d^2 u_C}{dt^2}$ на p^2 , $\frac{du_C}{dt}$ на p , а u_C на одиницю.

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0 \quad (1.64)$$

або

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Характеристичне рівняння має два корені, які визначаються за виразом

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

В залежності від параметрів кола корені можуть мати значення:

1. Якщо $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, то під коренем від'ємна величина і корені будуть комплексно-спряженими, тобто

$$p_1 = -\delta + j\omega_0, \quad p_2 = -\delta - j\omega_0,$$

де для даної схеми

$$\delta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Як відомо з математики вільну складову в цьому випадку зручно записувати у вигляді

$$u_{C\theta} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t), \quad (1.65)$$

де A_1 і A_2 – постійні інтегрування.

2. Якщо $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ то корені будуть від'ємними дійсними різними

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

і вільна складова записується у вигляді

$$u_{C\theta} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (1.66)$$

де A_1 і A_2 - постійні інтегрування.

3. Якщо $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$, то в цьому випадку корені будуть від'ємні дійсні рівні

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L}$$

і вільна складова записується у вигляді

$$u_{C\theta} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}. \quad (1.67)$$

Розглянемо всі три випадки.

1. Нехай корені будуть комплексно-спряженими. Тоді

$$u_{C\theta} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t)$$

і повний розв'язок

$$u_C = E + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (1.68)$$

Знайдемо початкові умови для визначення постійних інтегрування. Оскільки напруга на ємності підпорядковується закону комутації, то, припустивши, що до комутації ємність була не зарядженою, одержуємо

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

Підставляючи $t = 0$ і $u_C(0) = 0$ в (1.68) будемо мати

$$0 = E + 1 \cdot (A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1)$$

і

$$A_2 = -E. \quad (1.69)$$

Для знаходження постійної інтегрування A_1 використаємо другу змінну, яка відповідає закону комутації, тобто струм через індуктивність i . До комутації струму в колі не було, тому

$$i(0_+) = i(0_-) = 0. \quad (1.70)$$

Щоб використати цю початкову умову треба виразити струм i через постійні інтегрування A_1 і A_2 . З цією метою в (1.62) підставимо (1.68). Тоді

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(E + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t))}{dt} =$$

$$= C((- \delta) e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) + e^{-\delta t} (\omega_0 A_1 \cos \omega_0 t - \omega_0 A_2 \sin \omega_0 t)).$$

Підставляючи початкові умови в останнє рівняння ($t=0, i(0)=0$), одержуємо

$$0 = C((- \delta) \cdot 1 \cdot (A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1) + 1 \cdot (\omega_0 A_1 \cdot 1 - \omega_0 A_2 \cdot 0))$$

або

$$0 = -\delta A_2 + \omega_0 A_1.$$

Звідси з урахуванням (1.69)

$$A_1 = \frac{\delta}{\omega_0} A_2, \quad A_1 = -\frac{\delta}{\omega_0} E.$$

Повний розв'язок

$$u_C = E - e^{-\delta t} \left(E \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0 t + E \cos \omega_0 t \right). \quad (1.71)$$

З математики відомо, що

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = A \sin(\alpha + \gamma),$$

де

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\gamma = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b}{a}\right), & a \geq 0, \\ \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \pm 180^\circ, & a < 0. \end{cases}$$

Застосовуючи це перетворення до (1.71), одержимо

$$u_C = E - A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \gamma), \quad (1.72)$$

де

$$A = \sqrt{\left(E \frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 + E^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega_0}{\delta}.$$

Із (1.72) видно, що вільна складова представляє собою згасаючу синусоїду з періодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Кутова частота ω_0 називається *кутовою частотою вільних коливань*. Величина $e^{\delta T_0}$ називається *декрементом коливань*. Графік зміни вільної складової напруги на ємності показаний на рис. 1.13.

Світлого кольору лінії є обвідними синусоїди і описуються виразом $\pm Ae^{\delta t}$.

Коливання в таких колах виникають внаслідок періодичного перетворення енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки, причому ці коливання супроводжуються втратами енергії в опорах.

Такий режим перехідного процесу називається *коливальним* або *періодичним* і він може виникати тільки в колах, які мають реактивні елементи різного характеру, тобто ємності і індуктивності.

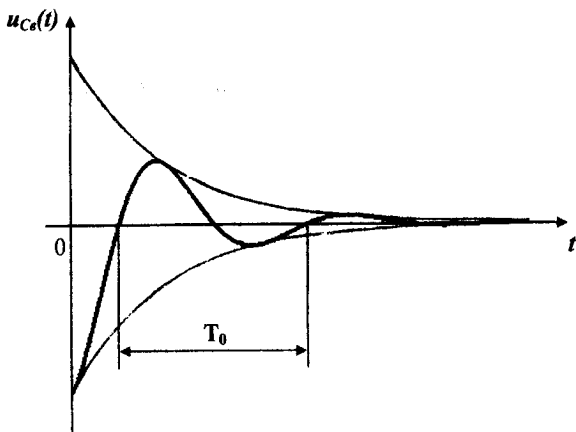


Рисунок 1.13

Як і в колах, які описуються диференціальними рівняннями першого порядку, в цьому випадку можна ввести постійну часу $\tau = 1/\delta$, яка визначає практичну тривалість перехідного процесу.

Для коливального режиму перехідного процесу, що зображений на рис. 1.14,а струм у колі затухає раніше, ніж встигає зробити навіть одне коливання. Така залежність буде мати місце у випадку, коли постійна часу, а значить і тривалість перехідного процесу $(4\div 5)\tau$, буде значно менша за

період вільних коливань ($\tau \ll T_0$). Для порівняння на рис. 1.14,б наведений коливальний режим перехідного процесу для $\tau \approx T_0$.

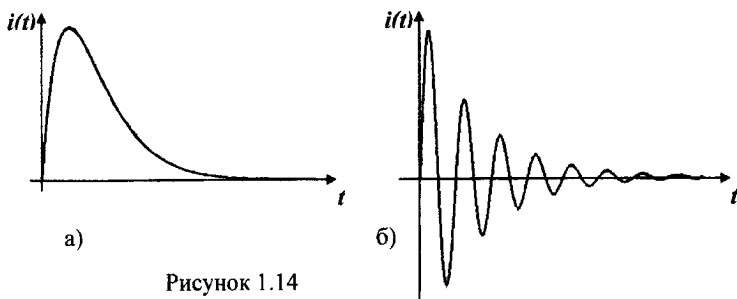


Рисунок 1.14

2. Припустимо, що корені характеристичного рівняння (1.64) p_1 і p_2 дійсні від'ємні різні, тоді

$$u_{C\theta} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

і повний розв'язок

$$u_C = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.73)$$

Початкові умови залишаються ті ж, що і в пункті 1 ($t = 0$ і $u_C(0) = 0$). Підставляючи їх в (1.73), одержуємо

$$0 = E + A_1 + A_2. \quad (1.74)$$

Щоб одержати друге рівняння для знаходження A_1 і A_2 виразимо струм i (1.62) через u_C (1.73)

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t})}{dt} = C(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}). \quad (1.75)$$

Підставляючи в (1.75) $t = 0$ і початкові умови (1.70), одержуємо

$$0 = C(A_1 p_1 + A_2 p_2)$$

або

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \quad (1.76)$$

Розв'язуючи разом рівняння (1.74) і (1.76), одержуємо

$$A_1 = \frac{Ep_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = -\frac{Ep_1}{p_1 - p_2}. \quad (1.77)$$

Повний розв'язок

$$u_C(t) = E + \frac{Ep_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{Ep_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (1.78)$$

На рис. 1.15 зображений графік зміни вільної складової, причому показані окремо $u_{C1e} = A_1 e^{p_1 t}$ і $u_{C2e} = A_2 e^{p_2 t}$.

Графік показує, що при різних коренях характеристичного рівняння вільна складова (u_{Ce}) наближається асимптотично до нуля, не створюючи коливань, тому такий режим перехідного процесу називається *апериодичним*. В цьому випадку є дві постійні часу - $\tau_1 = \frac{1}{|p_1|}$, $\tau_2 = \frac{1}{|p_2|}$ і практична тривалість перехідного процесу визначається за більшим значенням τ , тобто $t_{np} = (4 \div 5) \tau_{max}$.

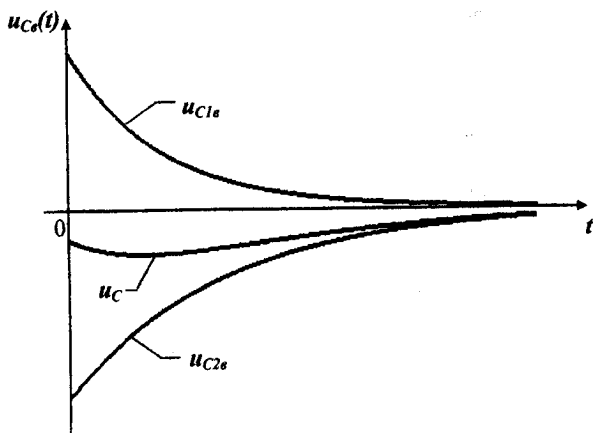


Рисунок 1.15

3. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні від'ємні рівні ($p_1 = p_2 = p$), що є *граничним* режимом між періодичним і апериодичним, то вільна складова записується в вигляді

$$u_{Ce} = e^{pt} (A_1 + A_2 t)$$

і повний розв'язок

$$u_C = E + e^{p't}(A_1 + A_2 t). \quad (1.79)$$

Для визначення постійних інтегрування підставимо початкові умови $t = 0$ і $u_C(0) = 0$ в (1.79)

$$0 = E + A_1,$$

звідки

$$A_1 = -E. \quad (1.80)$$

Виражаємо струм i через u_C

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(E + e^{p't}(A_1 + tA_2))}{dt} = Cpe^{p't}(A_1 + tA_2) + Ce^{p't}A_2.$$

Підставимо в це рівняння другу початкову умову (1.70)

$$0 = CpA_1 + CA_2.$$

Звідки з врахуванням (1.80)

$$A_2 = -pA_1 = pE. \quad (1.81)$$

Повний розв'язок

$$u_C = E - Ee^{p't} + ptEe^{p't}. \quad (1.82)$$

На рис.1.16 зображений графік вільної складової, де окремо показані

$$u_{C_1\theta} = -Ee^{p't}, \quad u_{C_2\theta} = ptEe^{p't}.$$

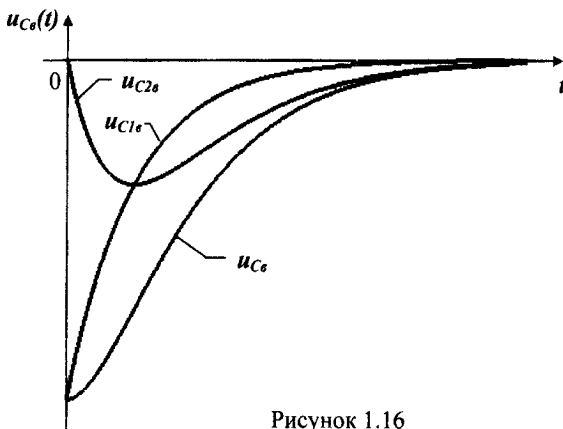


Рисунок 1.16

В цьому режимі вільна складова так само асимптотично наближається до нульового значення. Практична тривалість перехідного процесу $t_{np} = (4 \div 5)\tau$, де $\tau = 1/|p|$. Такий режим перехідного процесу називається *граничним* або *критичним*.

1.8 Розрахунок перехідних процесів в складних розгалужених колах

На основі розглянутих прикладів можна сформулювати загальний підхід до розрахунку перехідних процесів класичним методом в будь-яких складних колах.

1. Для післякомутаційного стану кола за законами Кірхгофа для миттєвих значень записується система диференціальних рівнянь.

2. Одержана система приводиться до одного диференціального рівняння відносно однієї базової невідомої (x), для чого всі інші невідомі виражаються через базу.

3. Повний розв'язок одержаного диференціального рівняння записується в вигляді суми примусової (x_{np}) і вільної (x_0) складових.

4. Примусова складова знаходиться із розрахунку нового усталеного режиму. Якщо діяння (прикладена напруга) постійне, то постійна і примусова складова; якщо діяння синусоїдне, то і примусова складова синусоїдна і може бути знайдена комплексним методом і т.п.

5. Визначаються корені характеристичного рівняння, число яких дорівнює порядкові диференціального рівняння.

Припустимо, що одержане диференціальне рівняння має вигляд

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d^1 x}{dt^1} + a_0 = f(t), \quad (1.83)$$

де a_k - коефіцієнти, які залежать від параметрів кола,

x - базова невідома,

$f(t)$ - діяння,

n - порядок диференціального рівняння.

Характеристичне рівняння

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1.84)$$

6. В залежності від виду коренів характеристичного рівняння записується вільна складова.

Якщо всі корені дійсні різні від'ємні, то

$$x_0 = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_k e^{p_k t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.85)$$

Якщо частина коренів комплексно-спряжена, наприклад, $p_{2,3} = -\delta_1 \pm j\omega_{01}$, а $p_{4,5} = -\delta_2 \pm j\omega_{02}$, то вільна складова записується в вигляді

$$x_g = A_1 e^{p_1 t} + e^{\delta_1 t} (A_2 \sin \omega_{01} t + A_3 \cos \omega_{01} t) + e^{\delta_2 t} (A_4 \sin \omega_{02} t + A_5 \cos \omega_{02} t) + A_6 e^{p_6 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.86)$$

Якщо частина коренів кратна, наприклад, $p_6 = p_7 = p$, то вільна складова визначається за виразом

$$x_g = A_1 e^{p_1 t} + e^{\delta_1 t} (A_2 \sin \omega_{01} t + A_3 \cos \omega_{01} t) + e^{\delta_2 t} (A_4 \sin \omega_{02} t + A_5 \cos \omega_{02} t) + A_6 e^{p_6 t} + t A_7 e^{p_7 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.87)$$

В будь-якому випадку число постійних інтегрування дорівнює числу коренів характеристичного рівняння.

7. Записується повний розв'язок з врахуванням знайдених значень примусової і вільної складових

$$x = x_{np} + x_g, \quad (1.88)$$

де x_g визначається з виразу (1.85), або (1.86), або (1.87).

8. Знаходяться початкові умови для визначення постійних інтегрування. Часто в якості початкових умов (їх число дорівнює числу постійних інтегрування, тобто n) використовуються залежні початкові умови

$$x(0_+), \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0_+}, \dots, \left. \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \right|_{t=0_+}, \quad (1.89)$$

які визначаються, як вказувалося раніше, із системи диференціальних рівнянь, яка записана для $t = 0_+$ і доповнена незалежними початковими умовами, які знайдені за законами комутації.

9. Знаючи початкові умови, складається система рівнянь для визначення постійних інтегрування.

Припустимо для визначеності, що примусова складова стала величина ($x_{np} = K$), а вільна складова записана в вигляді (1.85), тоді система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned}
 x(0_+) &= K + A_1 + A_2 + \dots + A_n, \\
 \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0_+} &= p_1 A_1 + p_2 A_2 + \dots + p_n A_n, \\
 \left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{t=0_+} &= p_1^2 A_1 + p_2^2 A_2 + \dots + p_n^2 A_n, \\
 &\dots \\
 \left. \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right|_{t=0_+} &= p_1^{n-1} A_1 + p_2^{n-1} A_2 + \dots + p_n^{n-1} A_n.
 \end{aligned} \tag{1.90}$$

Розв'язуючи дану систему, визначають постійні інтегрування.

Відмітимо, що в лінійних електричних колах без зворотних зв'язків всі вільні складові з перебігом часу перетворюються в нуль, тому завжди дійсна частина комплексно-спряжених коренів, а також дійсні корені характеристичних рівнянь є завжди від'ємними.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.1. Визначити закон зміни вхідного струму (i_1) при розмиканні ключа (рис. 1.17). $R_1=200$ Ом, $R_2=50$ Ом, $L=0,1$ Г, $C=50$ мкФ, $E=200$ В.

Складемо для миттєвих значень за законами Кірхгофа систему диференціальних рівнянь для післякомутаційного стану кола (ключ розімкнутий).

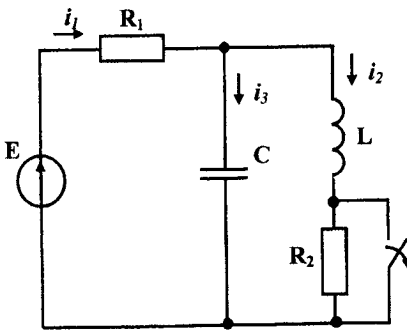


Рисунок 1.17

$$\left. \begin{aligned}
 R_1 i_1 + u_C &= E, \\
 L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - u_C &= 0, \\
 i_1 - i_2 - i_3 &= 0, \\
 i_3 &= C \frac{du_C}{dt}.
 \end{aligned} \right\} \tag{1.91}$$

Приведемо цю систему до одного диференціального рівняння відносно струму i_1 , виражаючи через i_1 всі інші невідомі.

Із першого рівняння системи маємо

$$u_C = E - R_1 i_1. \tag{1.91 a}$$

Із четвертого рівняння

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(E - R_1 i_1)}{dt} = -CR_1 \frac{di_1}{dt}. \quad (1.91 \text{ б})$$

Із третього рівняння системи

$$i_2 = i_1 - i_3 = i_1 + CR_1 \frac{di_1}{dt}. \quad (1.91 \text{ в})$$

Підставивши одержані значення в друге рівняння системи, отримаємо

$$L \frac{d\left(i_1 + CR_1 \frac{di_1}{dt}\right)}{dt} + R_2 \left(i_1 + CR_1 \frac{di_1}{dt}\right) - (E - R_1 i_1) = 0$$

або

$$L \frac{di_1}{dt} + LCR_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_2 i_1 + R_1 R_2 C \frac{di_1}{dt} - E + R_1 i_1 = 0.$$

Приведемо подібні члени

$$LCR_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (R_1 R_2 C + L) \frac{di_1}{dt} + (R_1 + R_2) i_1 = E.$$

Після підстановки числових значень, отримаємо

$$10^{-3} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + 0,6 \frac{di_1}{dt} + 250 i_1 = 200. \quad (1.92)$$

Масмо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Повний розв'язок цього рівняння

$$i_1 = i_{1np} + i_{1e}. \quad (1.93)$$

Знаходимо примусову складову із розрахунку нового усталеного режиму. В новому усталеному режимі ключ розімкнутий, е.р.с. постійна, струм через ємність не протікає, тому

$$i_{1np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{200}{200 + 50} = 0,8 \text{ А}. \quad (1.94)$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$10^{-3} p^2 + 0,6p + 250 = 0$$

і визначаємо його корені

$$p_{1,2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,36 - 4 \cdot 250 \cdot 10^{-3}}}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,36 - 1}}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{-0,64}}{2 \cdot 10^{-3}} = -300 \pm j400. \quad (1.95)$$

Корені вийшли комплексно-спряжені, причому $\delta = 300$ 1/с, $\omega_0 = 400$ рад/с, відповідно, режим перехідного процесу періодичний.

Стала часу

$$\tau = \frac{1}{300} = 3,333 \cdot 10^{-3} \text{ с},$$

період коливань

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Вільна складова

$$i_{1e} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t).$$

Повний розв'язок

$$i_1 = 0,8 + e^{-300t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (1.96)$$

Для знаходження залежних початкових умов $i_1(0_+)$ та $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+}$ запи-

шемо систему (1.91) для моменту часу $t = 0_+$

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1(0_+) + u_C(0_+) &= E, \\ L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} + R_2 i_2(0_+) - u_C(0_+) &= 0, \\ i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) &= 0, \\ i_3(0_+) &= C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+}. \end{aligned} \right\} \quad (1.97)$$

Доповнимо її незалежними початковими умовами, знайденими за законами комутації.

Закони комутації виконуються для струму через індуктивність (i_2) і напруги на ємності (u_C)

$$i_2(0_+) = i_2(0_-), \quad u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

Значення $i_2(0_-)$ і $u_C(0_-)$ можна знайти, якщо розрахувати коло до комутації. Оскільки прикладена до кола напруга постійна, то в колі до комутації (при замкненому ключі) текли постійні струми. Струм у вітці з ємністю не протікав. Також не протікав струм і через опір R_2 , оскільки він закорочений ключем, тому

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1} = \frac{200}{200} = 1 \text{ А.} \quad (1.98)$$

Напруга на ємності при замкненому ключі дорівнює напрузі на індуктивності (паралельно з'єднані вітки). Оскільки опір індуктивності при постійному струмі дорівнює нулю, то і напруга на індуктивності дорівнює нулю, і, відповідно,

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0. \quad (1.99)$$

Система (1.97) з допомогою незалежних початкових умов (1.98) і (1.99) дозволяє знайти $i_1(0_+)$. Із першого рівняння (1.97)

$$i_1(0_+) = \frac{E - u_C(0_+)}{R_1} = \frac{200 - 0}{200} = 1 \text{ А.} \quad (1.100)$$

Похідної $\frac{di_1}{dt}$ немає в системі (1.91) і (1.97), тому продиференціюємо перше рівняння системи (1.91)

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

і запишемо його для $t = 0_+$

$$R_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} + \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = 0.$$

Звідси

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = -\frac{1}{R_1} \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} \quad (1.101)$$

Значення $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+}$ виразимо із четвертого рівняння системи (1.97)

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{1}{C} i_3(0_+).$$

тому

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = -\frac{1}{R_1 C} i_3(0_+).$$

Значення $i_3(0_+)$ знайдемо із третього рівняння системи (1.97) з врахуванням (1.98) і (1.100)

$$i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = 1 - 1 = 0.$$

Таким чином

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = 0. \quad (1.102)$$

Використасмо одержані початкові умови для знаходження A_1 і A_2 . Підставимо (1.100) в (1.96)

$$1,0 = 0,8 + 1 \cdot (A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1),$$

звідси

$$A_2 = 1,0 - 0,8 = 0,2. \quad (1.103)$$

Продиференціюємо (1.96)

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} = & (-300)e^{-300t} (A_1 \sin 400t + A_2 \cos 400t) + \\ & + e^{-300t} (A_1 \cdot 400 \cos 400t - A_2 \cdot 400 \sin 400t) \end{aligned}$$

і підставимо початкові умови $t = 0$ і (1.102) в одержане рівняння

$$0 = (-300) \cdot 1 \cdot (A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1) + 1 \cdot (A_1 \cdot 400 \cdot 1 - A_2 \cdot 400 \cdot 0)$$

або

$$-300A_2 + A_1 \cdot 400 = 0.$$

Звідси

$$A_1 = 0,15. \quad (1.104)$$

Остаточний розв'язок

$$i_1 = 0,8 + e^{-300t} (0,15 \sin 400t + 0,2 \cos 400t) \text{ А}. \quad (1.105)$$

Вираз (1.105) можна записати у вигляді

$$i_1 = 0,8 + Ae^{-300t} \sin(400t + \gamma),$$

де

$$A = \sqrt{0,15^2 + 0,2^2} = 0,25,$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{0,2}{0,15}, \quad \gamma \approx 53,2^\circ.$$

Таким чином,

$$i_1 = 0,8 + 0,25e^{-300t} \sin(400t + 53,2^\circ) \text{ А}.$$

Якщо необхідно знайти інші змінні, то можна використати співвідношення (1.91а)-(1.91в).

Визначимо, наприклад, струм i_2 , використавши (1.91 в)

$$\begin{aligned} i_2 &= i_1 + CR_1 \frac{di_1}{dt} = i_1 + 50 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \frac{di_1}{dt} = i_1 + 10^{-2} \frac{di_1}{dt} = 0,8 + e^{-300t} \times \\ &\times (0,15 \sin 400t + 0,2 \cos 400t) + 10^{-2} ((-300)e^{-300t} (0,15 \sin 400t + 0,2 \cos 400t) + e^{-300t} \times \\ &\times (0,15 \cdot 400 \cos 400t - 0,2 \cdot 400 \sin 400t)) = 0,8 + e^{-300t} (0,15 \sin 400t - 0,45 \sin 400t - \\ &- 0,8 \sin 400t + 0,2 \cos 400t - 0,6 \cos 400t + 0,6 \cos 400t) = 0,8 + e^{-300t} (-1,1 \sin 400t + \\ &+ 0,2 \cos 400t) = 0,8 + 1,1e^{-300t} \sin(400t + 169,7^\circ) \text{ А}. \end{aligned}$$

Приклад 1.2. Визначити закон зміни струму i_2 в колі (рис. 1.18), якщо відомі його параметри: $R_1 = 150 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,1 \text{ Г}$, $L_2 = 0,133 \text{ Г}$, $U = 200 \text{ В}$.

Записуємо систему диференціальних рівнянь для миттєвих значень за законами Кірхгофа для кола після комутації

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + R_1 i_1 &= U, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - R_3 i_3 &= 0, \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.106)$$

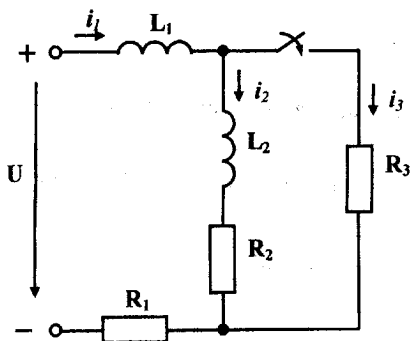


Рисунок 1.18

Одержимо із цієї системи одне диференціальне рівняння відносно i_2 .
Із другого рівняння системи виражаємо струм i_3 через i_2

$$i_3 = \frac{L_2}{R_3} \frac{di_2}{dt} + \frac{R_2}{R_3} i_2, \quad (1.107)$$

а із третього рівняння — i_1

$$i_1 = i_2 + i_3 = i_2 + \frac{L_2}{R_3} \frac{di_2}{dt} + \frac{R_2}{R_3} i_2 = \frac{L_2}{R_3} \frac{di_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) i_2. \quad (1.108)$$

Підставивши значення струму i_1 із (1.108) в перше рівняння системи, одержуємо

$$L_1 \frac{d\left(\frac{L_2}{R_3} \frac{di_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) i_2\right)}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + R_1 \left(\frac{L_2}{R_3} \frac{di_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) i_2\right) = U$$

або

$$\frac{L_1 L_2}{R_3} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{R_1}{R_3} L_2 \frac{di_2}{dt} + R_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) i_2 = U.$$

Після перетворень

$$\frac{L_1 L_2}{R_3} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(L_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) + L_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) \right) \frac{di_2}{dt} + \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \right) i_2 = U.$$

Підставляючи числові значення, одержимо

$$1,33 \cdot 10^{-4} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 0,533 \frac{di_2}{dt} + 400 i_2 = 200. \quad (1.109)$$

Повний розв'язок рівняння

$$i_2 = i_{2np} + i_{2a}. \quad (1.110)$$

Примусова складова знаходиться із розрахунку нового усталеного режиму (ключ замкнений). Знайдемо спочатку i_{1np} , враховуючи, що опір індуктивності при постійному струмі дорівнює нулю.

$$i_{1np} = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{200}{150 + \frac{100 \cdot 100}{100 + 100}} = \frac{200}{200} = 1 \text{ А.}$$

Знаючи i_{1np} знаходимо i_{2np}

$$i_{2np} = i_{1np} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 1 \cdot \frac{100}{100 + 100} = 0,5 \text{ А.}$$

Запишемо характеристичне рівняння згідно диференціального рівняння (1.109)

$$1,33 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,533 p + 400 = 0.$$

Знайдемо його корені

$$P_{1,2} = \frac{-0,533 \pm \sqrt{0,533^2 - 4 \cdot 400 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4}}}{2 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4}} = \frac{-0,533 \pm 0,267}{2,66 \cdot 10^{-4}}$$

Звідси

$$p_1 = -1000 \text{ c}^{-1}; \quad p_2 = -3000 \text{ c}^{-1}. \quad (1.111)$$

Оскільки корені дійсні і різні, то

$$i_{2\theta} = A_1 e^{-1000t} + A_2 e^{-3000t}. \quad (1.112)$$

Повний розв'язок

$$i_2 = 0,5 + A_1 e^{-1000t} + A_2 e^{-3000t}. \quad (1.113)$$

Продиференціюємо одержане рівняння

$$\frac{di_2}{dt} = -1000 A_1 e^{-1000t} - 3000 A_2 e^{-3000t} \quad (1.114)$$

і будемо шукати початкові умови $i_2(0_+)$ і $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+}$.

Струм i_2 протікає через індуктивність L_2 і підпорядковується закону комутації $i_2(0_+) = i_2(0_-)$. Тому знайдемо значення $i_2(0_-)$ із розрахунку кола до комутації. При розімкненому ключі

$$i_2(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{200}{150 + 200} = 0,8 \text{ A},$$

тому

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = 0,8 \text{ A}. \quad (1.115)$$

Величина $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+}$ є залежною початковою умовою, тому перепишемо два останніх рівняння системи (1.106) для моменту часу $t = 0_+$.

$$\left. \begin{aligned} L_2 \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} + R_2 i_2(0_+) - R_3 i_3(0_+) &= 0, \\ i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.116)$$

Із першого рівняння системи (1.116)

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{R_3}{L_2} i_3(0_+) - \frac{R_2}{L_2} i_2(0_+). \quad (1.117)$$

В останньому виразі невідоме $i_3(0_+)$. Виразимо його із другого рівняння системи (1.116)

$$i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+),$$

тому

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{R_3}{L_2} i_1(0_+) - \frac{R_3}{L_2} i_2(0_+) - \frac{R_2}{L_2} i_2(0_+). \quad (1.118)$$

Струм i_1 протікає через індуктивність L_1 , тому він підпорядковується закону комутації

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{200}{250} = 0,8 \text{ А}. \quad (1.119)$$

Підставивши значення (1.115) і (1.119) в (1.118), одержуємо

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{100}{0,133} \cdot 0,8 - \frac{100}{0,133} \cdot 0,8 - \frac{100}{0,133} \cdot 0,8 = -600 \text{ Ас}^{-1}. \quad (1.120)$$

Підставимо початкові значення (1.115) і (1.120) в (1.113) і (1.114)

$$\left. \begin{aligned} 0,8 &= 0,5 + A_1 + A_2, \\ -600 &= -1000A_1 - 3000A_2 \end{aligned} \right\}$$

або

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0,3, \\ -A_1 - 3A_2 &= -0,6. \end{aligned} \right\} \quad (1.121)$$

Розв'язуючи систему (1.121), одержуємо

$$A_1 = 0,15; \quad A_2 = 0,15. \quad (1.122)$$

Повний розв'язок

$$i_2 = 0,5 + 0,15e^{-1000t} + 0,15e^{-3000t} \text{ А}. \quad (1.123)$$

1.9 Методи складання характеристичних рівнянь

Уважний аналіз розглянутих вище прикладів показує, що одержання одного диференціального рівняння відносно однієї невідомої не завжди просте, хоча саме це рівняння необхідне для знаходження характеристич-

ного рівняння. Проте характеристичне рівняння можна одержати й іншими методами.

Розглянемо деякі із них.

1.9.1 Метод алгебризації диференціальних рівнянь

Розглянемо цей метод на прикладі конкретного кола (рис. 1.19).

Складемо за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану кола систему інтегро-диференціальних рівнянь для миттєвих значень.

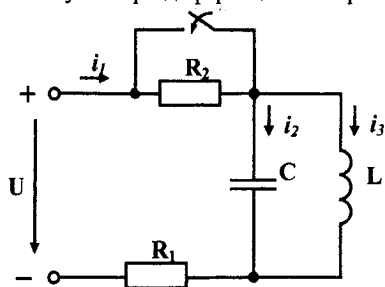


Рисунок 1.19

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt &= U, \\ L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C} \int i_3 dt &= 0, \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (1.124)$$

Повний розв'язок для будь-якої змінної складається із примусової і вільної складових. Вільна складова залежить від початкових умов і параметрів кола і не залежить від зовнішніх дій. Тому систему (1.124) можна записати для вільних складових, якщо прийняти, що прикладена напруга дорівнює нулю. Таким чином,

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_{1e} + \frac{1}{C} \int i_{3e} dt &= 0, \\ L \frac{di_{2e}}{dt} - \frac{1}{C} \int i_{3e} dt &= 0, \\ i_{1e} - i_{2e} - i_{3e} &= 0. \end{aligned} \right\} (1.125)$$

Будь-яка вільна складова складається із суми складових виду Ae^{pt} , причому кожна складова є розв'язком системи (1.125). Якщо позначити цю складову $i_e = Ae^{pt}$, то

$$\frac{di_e}{dt} = \frac{d(Ae^{pt})}{dt} = pAe^{pt} = pi_e,$$

а

$$\int i_e dt = \int Ae^{pt} dt = \frac{Ae^{pt}}{p} = \frac{i_e}{p}.$$

Враховуючи ці співвідношення, систему (1.125) можна записати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_{1e} + \frac{1}{Cp} i_{3e} &= 0, \\ Lp i_{2e} - \frac{1}{Cp} i_{3e} &= 0, \\ i_{1e} - i_{2e} - i_{3e} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.126)$$

Одержана однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Із математики відомо, що така система має розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю.

Система (1.126) має розв'язок, оскільки в колі буде вільна складова всіх струмів. Тому визначник повинен дорівнювати нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} R_1 & 0 & \frac{1}{Cp} \\ 0 & Lp & -\frac{1}{Cp} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.127)$$

Розкриваючи цей визначник, одержуємо

$$-R_1 Lp - \frac{L}{C} - \frac{R_1}{Cp} = 0,$$

або

$$R_1 L C p^2 + Lp + R_1 = 0. \quad (1.128)$$

Одержаний вираз і представляє собою характеристичне рівняння для кола, яке розглядається.

1.9.2 Метод вхідного опору

Припустимо, що до кола, схема якого зображена на рис. 1.19, прикладена синусоїдна напруга

$$u(t) = U_m \sin \omega t.$$

Схема кола після комутації приведена на рис. 1.20, а. В вітках кола протікають синусоїдні струми.

Запишемо рівняння за законами Кірхгофа для комплексних діючих значень струмів і напруг (рис. 1.20, б).

$$\left. \begin{aligned} R_1 I_3 + \frac{1}{j\omega C} I_3 &= \underline{U}, \\ j\omega L I_2 - \frac{1}{j\omega C} I_3 &= 0, \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.129)$$

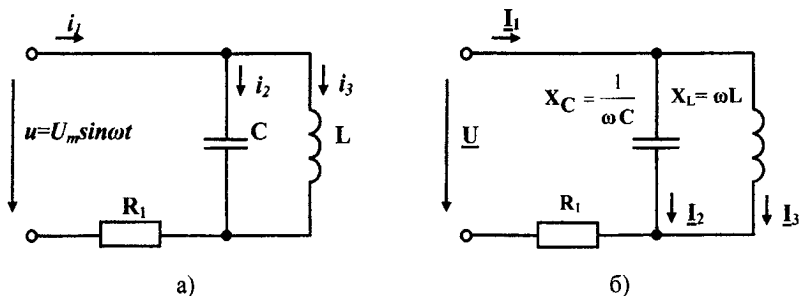


Рисунок 1.20

Визначимо вхідний струм I_1 методом Крамера

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (1.130)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (1.131)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{U} & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{U} \begin{vmatrix} j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{U} \Delta_{11}. \quad (1.132)$$

Тут позначено

$$\underline{\Delta}_{11} = \begin{vmatrix} j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (1.133)$$

Підставляючи (1.132) в (1.130) одержуємо

$$I_1 = \frac{U \underline{\Delta}_{11}}{\underline{\Delta}}. \quad (1.134)$$

Визначимо вхідний опір кола при синусоїдній напрузі

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{U}{I} = \frac{\underline{\Delta}}{\underline{\Delta}_{11}}$$

або з врахуванням (1.131) та (1.133)

$$\underline{Z}_{ex}(j\omega) = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}. \quad (1.135)$$

Позначимо $j\omega$ через p і підставимо в (1.135)

$$\underline{Z}_{ex}(p) = \frac{U}{I} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & 0 & \frac{1}{pC} \\ 0 & pL & -\frac{1}{pC} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pL & -\frac{1}{pC} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}. \quad (1.136)$$

Порівнюючи чисельник виразу (1.136) і визначник (1.127), бачимо, що вони однакові. Прирівнюючи до нуля визначник алгебраїзованої системи (1.127), ми одержали характеристичне рівняння. А значить характеристичне рівняння можна одержати і прирівнюючи до нуля $Z_{ex}(p)$.

Приклад 1.3. Знайдемо характеристичне рівняння методом вхідного опору для кола, схема якого зображена на рис. 1.17. Прикладемо до кола після комутації синусоїдну напругу $e(t) = E_m \sin \omega t$.

Комплексна схема заміщення кола після комутації має вигляд (рис. 1.21).

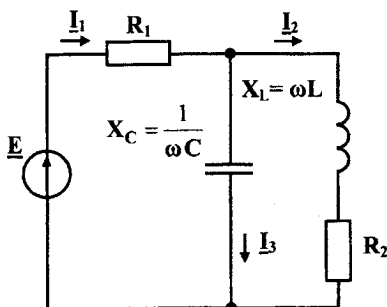


Рисунок 1.21

$$\underline{Z}_{ex}(j\omega) = R_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C}(R_2 + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + R_2 + j\omega L}$$

Замінімо $j\omega$ на p , тоді

$$Z_{ex}(p) = R_1 + \frac{\frac{1}{pC}(R_2 + pL)}{\frac{1}{pC} + R_2 + pL}$$

Перетворимо останній вираз так, щоб $Z_{ex}(p)$ було відношенням двох поліномів від p

$$\begin{aligned} Z_{ex}(p) &= R_1 + \frac{R_2 + pL}{1 + R_2 Cp + LCp^2} = \frac{LCR_1 p^2 + R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2 + Lp}{LCp^2 + R_2 Cp + 1} = \\ &= \frac{LCR_1 p^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2}{LCp^2 + R_2 Cp + 1} \end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля $Z_{ex}(p)$, що відповідає рівності нулю чисельника, одержуємо характеристичне рівняння

$$LCR_1 p^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2 = 0. \quad (1.137)$$

Треба пам'ятати, що при знаходженні $Z_{ex}(j\omega)$ зручніше записувати комплексний опір ємності у вигляді $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, а не у вигляді

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C}.$$

Приклад 1.4. Знайдемо характеристичне рівняння методом вхідного опору для кола, яке зображене на рис. 1.18.

Комплексна схема заміщення кола після комутації при вхідній синусоїдній напрузі

$$u(t) = U_m \sin \omega t$$

зображена на рис. 1.22.

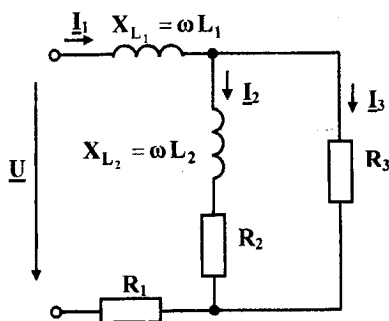


Рисунок 1.22

Вхідний опір

$$Z_{ex}(j\omega) = j\omega L_1 + R_1 + \frac{(j\omega L_2 + R_2)R_3}{j\omega L_2 + R_2 + R_3}.$$

Замінімо $j\omega$ на p . Тоді

$$Z_{ex}(p) = pL_1 + R_1 + \frac{(pL_2 + R_2)R_3}{pL_2 + R_2 + R_3}.$$

Після перетворень

$$Z_{ax}(p) = \frac{L_1 L_2 p^2 + (L_1(R_2 + R_3) + L_2(R_1 + R_3))p + (R_2 + R_3)R_1 + R_2 R_3}{p L_2 + R_2 + R_3}$$

Прирівнюючи до нуля $Z_{ax}(p)$, одержуємо характеристичне рівняння

$$L_1 L_2 p^2 + (L_1(R_2 + R_3) + L_2(R_1 + R_3))p + (R_2 + R_3)R_1 + R_2 R_3 = 0.$$

1.10 Про “порушення” законів комутації

У “Вступі” наведені закони комутації, які стверджують, що струми в індуктивностях $i_L(t)$ та напруги на ємностях $u_C(t)$ є неперервними функціями часу, тобто в момент комутації вони не можуть змінюватись стрибком. Це твердження базується на тому, що в протилежному випадку буде змінюватись стрибком енергія, яка накопичується в електричному та магнітному полях кола, що відповідає нескінченно великій потужності джерела. Для реальних кіл ці міркування абсолютно правильні. Але в багатьох випадках при аналізі електричних кіл ідеалізують або електричне коло, або дію на нього вхідного джерела енергії, що приводить до істотних особливостей, які необхідно враховувати.

Розглянемо перехідний процес при розмиканні ключа в колі, яке зображено на рис. 1.23.

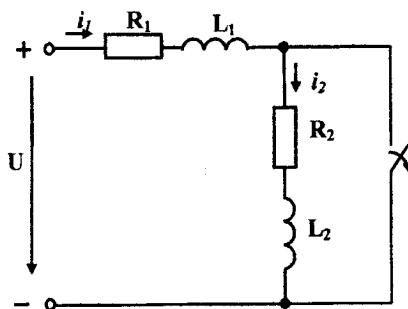


Рисунок 1.23

Диференціальне рівняння для кола після комутації має вигляд

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = U,$$

причому $i_1 = i_2 = i$.

Розв'язок цього рівняння

$$i = i_{np} + Ae^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} t},$$

де примусове значення струму визначається із розрахунку нового усталеного режиму

$$i_{np} = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Для знаходження постійної інтегрування визначають початкові умови, зазвичай використовуючи для цього закони комутації. В прикладі, який розглядається, закон комутації порушується. В момент $t = 0_-$ струм в першій котушці $i_1(0_-) = \frac{U}{R_1}$, а в другій $i_2(0_-) = 0$, оскільки струм проходить по вітці з замкнутим ключем, яка має опір рівний нулю.

В початковий момент після комутації ($t = 0_+$) струми в обох котушках однакові $i_1(0_+) = i_2(0_+) = i(0_+)$. Звідси випливає, що струми в котушках повинні змінитися стрибком, оскільки напруга на індуктивності $u_L = L \frac{di}{dt}$, то при стрибкоподібній зміні струму напруга на індуктивності приймає нескінченно велике значення. В розглядуваному колі прикладена напруга має кінцеве значення, напруга на опорах R_1 та R_2 має також кінцеве значення на проміжку $0_- < t < 0_+$, оскільки кінцеве значення мають струми i_1 та i_2 , відповідно за другим законом Кірхгофа повинна мати кінцеве значення на цьому проміжку і сума $L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$.

Кожну із похідних можна представити як межу відношення $\Delta i / \Delta t$ для $t \rightarrow 0$. Прирости струмів на інтервалі $0_- < t < 0_+$ відповідно дорівнюють $\Delta i_1 = i_1(0_+) - i_1(0_-)$, $\Delta i_2 = i_2(0_+) - i_2(0_-)$.

Суму напруг на індуктивностях в такому випадку можна представити в вигляді

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L_1 \Delta i_1 + L_2 \Delta i_2}{\Delta t}.$$

Ця сума має кінцеве значення для $\Delta t \rightarrow 0$ тільки за умови, що $L_1 \Delta i_1 + L_2 \Delta i_2 = 0$, або

$$L_1 i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-).$$

Оскільки $Li = \Psi$ є потокозчеплення індуктивності, то останній вираз можна записати у вигляді

$$\Psi_1(0_+) + \Psi_2(0_+) = \Psi_1(0_-) + \Psi_2(0_-). \quad (1.138)$$

Це рівняння виражає більш загальний закон комутації - закон безперервності магнітного потокозчеплення. В більш загальному випадку він формулюється таким чином:

алгебраїчна сума потокозчеплень індуктивностей в будь-якому замкнутому контурі безпосередньо після комутації дорівнює алгебраїчній сумі потокозчеплень безпосередньо перед комутацією, тобто сумарне потокозчеплення індуктивностей не може змінюватись стрибком.

В прикладі, який розглядається,

$$L_1 i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-),$$

або

$$(L_1 + L_2) i(0_+) = L_1 \frac{U}{R_1}.$$

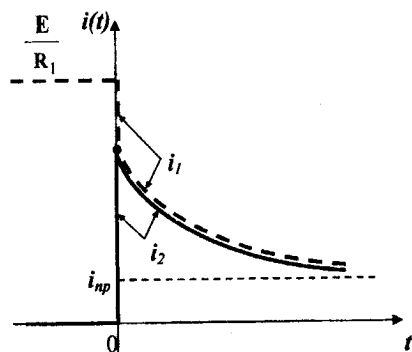


Рисунок 1.24

Звідси

$$i(0_+) = \frac{UL_1}{R_1(L_1 + L_2)}$$

і постійна інтегрування A визначається із рівняння

$$\frac{UL_1}{R_1(L_1 + L_2)} = \frac{U}{R_1 + R_2} + A.$$

Оскільки

$$A = \frac{UL_1}{R_1(L_1 + L_2)} - \frac{U}{R_1 + R_2},$$

то повний розв'язок

$$i_1 = i_2 = i = \frac{U}{R_1 + R_2} + \left(\frac{UL_1}{R_1(L_1 + L_2)} - \frac{U}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} t}.$$

Графіки зміни струмів i_1 (штрихова лінія) та i_2 (суцільна лінія) показані на рис. 1.24.

Цікаво відмітити ще одну обставину: величина енергії, яка накопичена в магнітному полі першої індуктивності безпосередньо перед комутацією

$$W_m(0_-) = \frac{L_1}{2} i_1^2(0_-) = \frac{L_1}{2} \left(\frac{U}{R_1} \right)^2,$$

більша, ніж величина енергії, яка накопичена в магнітних полях обох індуктивностей в початковий момент після комутації

$$W_m(0_+) = \frac{L_1 + L_2}{2} i_1^2(0_+) = \frac{L_1}{2} \left(\frac{U}{R_1} \right)^2 \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Як здається, порушуються закони збереження енергії та комутації. Але це є результат граничної ідеалізації кола та процесу, який в ньому протікає. Ясно, що комутація відбувається хоч і за малий, але кінцевий проміжок часу, опір ключа не змінюється ривком від нуля до безмежності, будь-яка реальна котушка має крім індуктивності ще розподілену ємність між її витками, що визначає зростання струму в початковий період перехідного процесу, хоч і за малий, але кінцевий інтервал часу, а також витрати енергії в опорах проводів та електричній дузі ключа.

Якщо врахувати всі ці малі параметри, то закони комутації для i_L та

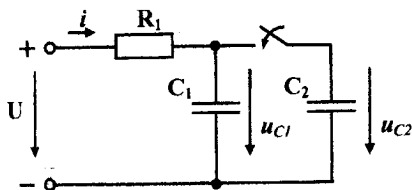


Рисунок 1.25

u_C будуть повністю виконуватись, але істотно ускладнюється розрахунок кола за рахунок збільшення порядку диференціального рівняння.

Таке ж "порушення" закону комутації можна прослідкувати і в колах з ємністю. Розглянемо перехідний процес в колі, яке зображено

на рис.1.25. Припустимо, що до замикання ключа конденсатор C_2 не був зарядженим.

Диференціальне рівняння кола після замикання ключа має вигляд

$$R(C_1 + C_2) \frac{du_C}{dt} + u_C = U.$$

Його розв'язок

$$u_C = u_{Cnp} + A e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}.$$

Примусова складова

$$u_{Cnp} = U.$$

До комутації

$$u_{C1}(0_-) = U; \quad u_{C2}(0_-) = 0.$$

В початковий момент після комутації напруга на конденсаторах повинна бути однакова

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = u_C(0_+).$$

Закони комутації порушуються, тому що при відсутності опору в вітках з конденсаторами по них будуть протікати імпульси струму безмежної амплітуди та безмежно малої тривалості.

В цьому випадку необхідно або врахувати малі параметри кола, або використовувати більш загальний закон комутації (закон збереження (неперервності) заряду) - *алгебраїчна сума зарядів ємностей, які приєднані до спільних вузлів, неперервна.*

Для випадку, який розглядається,

$$q_1(0_+) + q_2(0_+) = q_1(0_-) + q_2(0_-). \quad (1.139)$$

Оскільки $q = C u$, то

$$(C_1 + C_2)u_C(0_+) = C_1 U.$$

Звідси

$$u_C(0_+) = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2}.$$

Постійна інтегрування визначається із рівняння

$$\frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = U + A, \quad A = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} - U.$$

Енергія ємності C_1 до комутації $W_E(0_-) = C_1 \frac{U^2}{2}$ більша ніж енергія електричного кола в початковий момент після комутації

$$W_E(0_+) = \frac{C_1 + C_2}{2} u_C^2(0_+) = \frac{C_1 U^2}{2} \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Ці порушення пов'язані, як і в попередньому випадку, з ідеалізацією кола.

2 ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

2.1 Деякі властивості перетворення Лапласа

В попередньому розділі було показано, що розрахунок перехідних процесів класичним методом зводиться до розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

Основою операторного методу є те, що диференціальні рівняння в області дійсної змінної t перетворюються в алгебраїчні рівняння в області комплексної змінної $s = \sigma + j\omega$, ($\sigma > 0$).

Такий перехід здійснюється за допомогою перетворення Лапласа, яке має вигляд

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (2.1)$$

Перетворення Лапласа однозначно переводить функцію дійсної змінної $f(t)$, яку називають *оригіналом*, в функцію комплексної змінної $F(s)$, яку називають *зображенням* $f(t)$. Таке перетворення умовно записують в формі $F(s) \doteq f(t)$ або $f(t) \doteq F(s)$.

Часто використовують і другу умовну форму запису $F(s) = L[f(t)]$ і $f(t) = L^{-1}[F(s)]$.

Перетворенню Лапласа властива єдиність, яка доводиться в курсі математики і яка може бути сформульована таким чином: якщо функція $f(t)$ має перетворення Лапласа $F(s)$, то це перетворення єдине; з іншого боку, якщо задана функція $F(s)$ і знайдена функція $f(t)$, яка задовольняє перетворення (2.1), то функція $f(t)$ єдина.

Функція $f(t)$ має зображення, якщо вона задовольняє умови Дірихле (має кінцеве число розривів першого роду і кінцеве число мінімумів і максимумів), для $t < 0$ тотожна нулю і є функцією обмеженого зростання, тобто

$$|f(t)| < Ae^{at}, \quad (2.2)$$

де A і a - постійні додатні величини, причому $a > \sigma$.

Відмітимо, що функції, які описують можливі реальні зовнішні дії на електричні кола, струми і напруги, які при цьому виникають, завжди задовольняють вказані умови і можуть бути перетворені за Лапласом.

Припустимо, що оригінал $f(t)$ має зображення $F(s)$, знайдемо зображення функції

$$f_1(t) = Cf(t), \quad (2.3)$$

де C - постійна величина.

Підставимо (2.3) в (2.1), тоді

$$f_1(t) \doteq F_1(s) = \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Cf(t)e^{-st} dt = C \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = CF(s). \quad (2.4)$$

Таким чином, зображення функції $f(t)$, помножене на постійну величину (2.3), дорівнює постійній величині, помноженій на зображення цієї функції (2.4).

Нехай є декілька функцій $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$, які мають, відповідно, зображення $F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)$. Знайдемо зображення суми цих функцій

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t). \quad (2.5)$$

Використовуючи (2.1), одержуємо

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} (f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t))e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt + \\ &+ \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt + \dots + \int_0^{\infty} f_n(t)e^{-st} dt = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тобто зображення суми функцій дорівнює сумі зображень цих окремих функцій.

Така властивість перетворення Лапласа, коли виконуються умови (2.4) і (2.6), називається властивістю **лінійності**.

Знайдемо зображення деяких функцій, які широко використовуються в теорії кіл.

Нехай $f(t) = A$, де A є сталою величиною. Знайдемо зображення цієї функції, використовуючи (2.1).

$$F(s) = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = A \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{A}{s},$$

тобто

$$A \doteq \frac{A}{s}.$$

Якщо $f(t) = e^{-at}$, (a - може бути дійсним або комплексним числом), то

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \left. \frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}.$$

Таким чином,

$$e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{s + \alpha}. \quad (2.8)$$

Якщо $f(t) = e^{\alpha t}$, то змінивши знак перед α в (2.8), одержуємо

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{s - \alpha}. \quad (2.9)$$

Використаємо вираз (2.9) для знаходження зображення синусоїдної і косинусоїдної функцій, прийнявши $\alpha = j\omega$.

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t. \quad (2.10)$$

Зображення $e^{j\omega t}$

$$\frac{1}{s - j\omega} = \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.11)$$

Порівнюючи (2.10) і (2.11), одержуємо

$$\cos \omega t \doteq \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad (2.12)$$

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.13)$$

Нехай функція $f(t)$ має зображення $F(s)$. Знайдемо зображення похідної цієї функції.

$$L \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt.$$

Візьмемо інтеграл частинами. Як відомо

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Позначимо $u = e^{-st}$, $v = f(t)$, тоді $du = (-s)e^{-st} dt$ і підставимо одержані значення

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st} dt = \frac{f(t)}{e^{st}}\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Згідно умови (2.2) функція $f(t)$ зростає не швидше ніж функція e^{st} , тому при підстановці верхньої межі в першу складову, вона перетворюється на нуль, а при підстановці нижньої межі перша складова перетворюється в $f(0)$, тобто в значення функції $f(t)$ для $t = 0$. Інтеграл в другій складовій в відповідності з (2.1) є зображення функції $f(t)$, тобто $F(s)$. Таким чином,

$$\frac{df(t)}{dt} \doteq sF(s) - f(0). \quad (2.14)$$

Знайдемо зображення інтеграла від попередньої функції $f(t)$. Позначимо

$$\varphi(t) = \int f(t) dt = \int_0^t f(t) dt + \varphi(0). \quad (2.15)$$

де $\varphi(0)$ є значення функції $\varphi(t)$ для $t = 0$.

Враховуючи (2.15) і властивість лінійності, запишемо

$$L\left[\int f(t) dt\right] = L\left[\int_0^t f(t) dt\right] + L[\varphi(0)]. \quad (2.16)$$

Оскільки похідна

$$\left[\int_0^t f(t) dt\right]' = f(t),$$

то

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right]' = L[f(t)] = F(s) \quad (2.17)$$

і в відповідності з (2.14)

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right]' = sL\left[\int_0^t f(t) dt\right] - \int_0^0 f(t) dt. \quad (2.18)$$

Оскільки останній інтеграл дорівнює нулю, то з врахуванням (2.17)

$$F(s) = sL \left[\int_0^t f(t) dt \right]$$

$$L \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} \quad (2.19)$$

У виразі (2.16) $\varphi(0)$ - постійна величина, тому згідно (2.7)

$$L[\varphi(0)] = \frac{\varphi(0)}{s}$$

Таким чином,

$$\varphi(t) = \int f(t) dt \doteq \frac{F(s)}{s} + \frac{\varphi(0)}{s} \quad (2.20)$$

Вирази (2.14) і (2.20) показують, що операціям диференціювання і інтегрування функцій дійсної змінної t відповідають алгебраїчні операції множення і ділення зображень цих функцій на комплексну змінну s (при нульових початкових умовах). Якщо початкові умови не нульові, їх враховують так, як показано в (2.14) і (2.20). Це означає, що диференціальним рівнянням оригіналів відповідають алгебраїчні рівняння зображень.

Відмітимо ще деякі теореми, які відомі із курсу математики.

Теорема про запізнення. Якщо $f(t) \doteq F(s)$, то

$$f(t - t_0) \doteq e^{-st_0} F(s) \quad (2.21)$$

Теорема зсуву. Якщо $f(t) \doteq F(s)$, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \doteq F(s + \alpha) \quad (2.22)$$

2.2 Використання перетворення Лапласа для розрахунку перехідних процесів

Розглянемо перехідний процес в колі, схема якого зображена на рис.2.1. Диференціальне рівняння, яке описує перехідний процес в цьому колі і яке записане за другим законом Кірхгофа, має вигляд

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t).$$

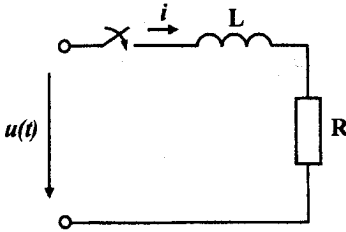


Рисунок 2.1

Позначимо зображення струму $i(t)$ через $I(s)$, а зображення прикладеної напруги $u(t)$ через $U(s)$.

Використаємо перетворення Лапласа до записаного рівняння, враховуючи властивості лінійності і зображення похідної (2.14)

$$L[sI(s) - i(0)] + RI(s) = U(s)$$

або

$$I(s)(sL + R) = U(s) - Li(0).$$

Звідки

$$I(s) = \frac{U(s) - Li(0)}{sL + R}.$$

В цьому колі за законом комутації

$$i(0_+) = i(0_-) = 0,$$

тому

$$I(s) = \frac{U(s)}{sL + R}.$$

Якщо прикладена напруга постійна ($u(t) = U$), то її зображення, згідно з (2.7) дорівнює $\frac{U}{s}$ і

$$I(s) = \frac{U}{s(sL + R)}.$$

Останній вираз можна представити в вигляді

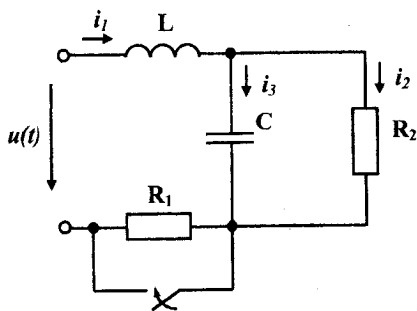


Рисунок 2.2

$$I(s) = \frac{U/R}{s} - \frac{U/R}{s + R/L}$$

У відповідності з (2.7) і (2.8),

$$i(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Розглянемо використання операторного методу до розгалуженого електричного кола (рис.2.2).

Запишемо для післякомутаційного стану кола систему рівнянь за законами Кірхгофа для миттєвих значень.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int i_3 dt = u(t), \\ R_2 i_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Запишемо систему (2.23) в операторній формі, попередньо знайшовши зображення напруги на ємності, з використанням (2.15) і (2.20)

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_3 dt = \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt + u_C(0) \doteq \frac{I_3(s)}{sC} + \frac{u_C(0)}{s} = U_C(s). \quad (2.24)$$

Таким чином, система (2.23) в операторній формі має вигляд:

$$\begin{cases} I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) = 0, \\ sLI_1(s) - Li_1(0) + \frac{I_3(s)}{sC} + \frac{u_C(0)}{s} = U(s), \\ R_2 I_2(s) - \frac{I_3(s)}{sC} - \frac{u_C(0)}{s} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Тут $I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$ є зображення невідомих струмів $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$.

Значення $u_C(0)$ і $i_L(0)$ визначається за законами комутації, а $U(s)$ для відомої $u(t)$ можна знайти за (2.1).

Розв'язуючи систему (2.25), можна знайти зображення будь-якого струму. Знаходження оригіналу за відомим зображенням розглядається в п.2.5.

2.3 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

В попередньому параграфі операторні рівняння одержані із рівнянь для миттєвих значень, складених за законами Кірхгофа. Проте зручніше сформулювати закони Ома і Кірхгофа в операторній формі та записати систему рівнянь в операторній формі.

Розглянемо послідовний контур (рис.2.3), який містить всі елементи і складемо рівняння для миттєвих значень за законами Кірхгофа

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e(t). \quad (2.26)$$

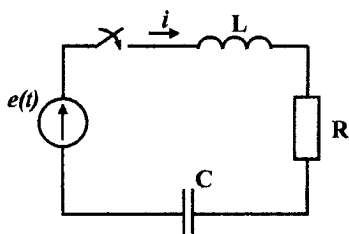


Рисунок 2.3

Запишемо одержане рівняння в операторній формі з врахуванням (2.24).

$$L(sI(s) - i(0)) + RI(s) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0)}{s} = E(s).$$

Після нескладних математичних перетворень одержуємо

$$I(s) \left(sL + R + \frac{1}{sC} \right) = E(s) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{s}. \quad (2.27)$$

Позначимо

$$sL + R + \frac{1}{sC} = Z(s) \quad (2.28)$$

і назвемо цю величину *операторним опором*. Відмітимо, що операторний опір для $s = j\omega$, представляє собою комплексний опір кола при синусоїдному струмі з кутовою частотою ω .

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}.$$

Перепишемо (2.27) з врахуванням (2.28).

$$I(s)Z(s) = E(s) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{s}. \quad (2.29)$$

Для нульових початкових умов

$$I(s)Z(s) = E(s). \quad (2.30)$$

Порівнюючи (2.30) з законом Ома для кола синусоїдного струму, записаного для комплексних діючих значень

$$\underline{IZ} = \underline{E},$$

бачимо, що при нульових початкових умовах закон Ома правильний і для зображень.

Якщо початкові умови не нульові, то крім зображень зовнішніх е.р.с. $E(s)$ з'являються ще дві е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в магнітному ($Li(0)$) і електричному $\left(-\frac{u_C(0)}{s}\right)$ полях. Таким чином, в загальному випадку, тобто при ненульових початкових умовах, закон Ома також правильний для зображень, якщо врахувати додаткові е.р.с. $Li(0)$ і $\left(-\frac{u_C(0)}{s}\right)$. Оскільки струм через індуктивність і напруга на ємності підпорядковуються законам комутації, то знаки перед початковими значеннями струму $i(0)$ і напруги $u_C(0)$ визначаються в відповідності з напрямом струму через індуктивність і напруги на ємності в момент, який безпосередньо передє комутації ($t=0$).

Так, наприклад, якщо конденсатор був заряджений до напруги U_0 з полярністю, яка показана на рис. 2.4, а, то початкова напруга на ємності збігається з напрямом струму після комутації (отже, з напругою u_C) і $u_C(0) = U_0$.

В колі, яке показано на рис. 2.4, б, початкова напруга на конденсаторі направлена назустріч струмові після комутації (тобто назустріч u_C), тому $u_C(0) = -U_0$. Початкове значення струму в обох випадках $i(0) = 0$.

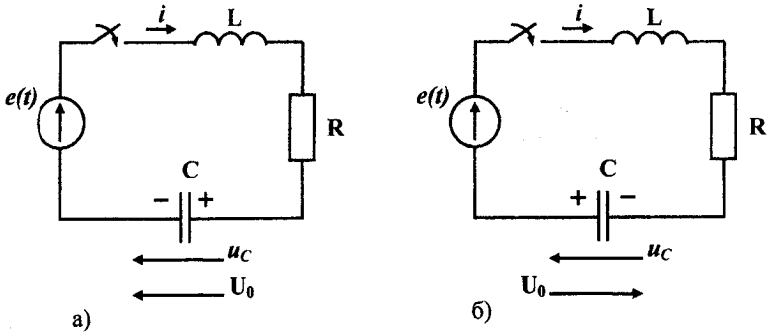


Рисунок 2.4

Розглянемо ще один випадок (рис. 2.5).

При постійній е.р.с. E в колі до комутації протікали в показаних на рис.2.5, б напрямках постійні струми $I_1 = I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}$. Струм $I_3 = 0$, оскільки в цій вітці є ємність. Напряга на конденсаторі має полярність, яка показана на тому ж рисунку і величина цієї напряги

$$U_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2.$$

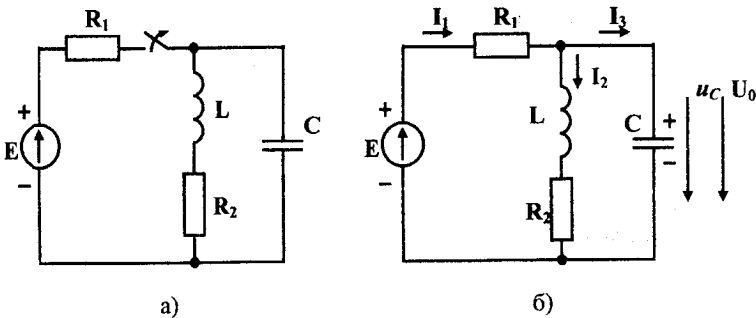


Рисунок 2.5

Після комутації (ключ розімкнутий) коло складається із одного контуру і напрям струму в цьому контурі можна вибрати довільно (рис. 2.6, а і рис.2.6, б).

Відповідно напрямові струму i визначається і перехідна напруга на ємності u_C . Операторне рівняння в обох випадках записується однаково

$$I(s) \left(sL + R_2 + \frac{1}{sC} \right) = Li(0) - \frac{u_C(0)}{s}. \quad (2.31)$$

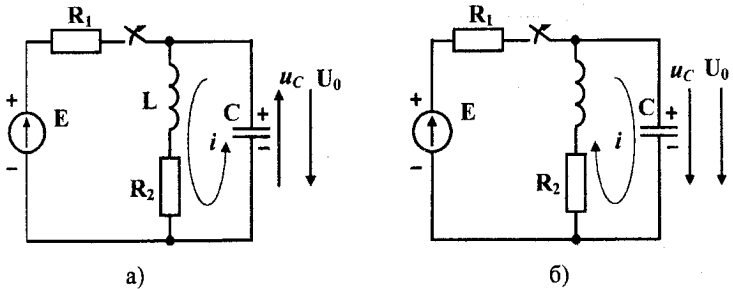


Рисунок 2.6

Зовнішня е.р.с. в розглядуваному контурі відсутня, тому в правій частині рівняння є тільки додаткові е.р.с., початкові значення яких будуть мати різні знаки в залежності від вибраного додатного напрямку струму.

Для кола, яке зображене на рис. 2.6,а напрям струму через індуктивність до комутації і після комутації збігаються, тому

$$i(0) = I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Перехідна напруга на ємності u_C направлена назустріч напрузі на ємності, яка була безпосередньо перед комутацією, тому

$$u_C(0) = -U_0 = -\frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

В другому колі (рис.2.6,б) напрям струму через індуктивність після комутації вибраний назустріч струму до комутації, тому

$$i(0) = -I_2 = -\frac{E}{R_1 + R_2},$$

а перехідна напруга на ємності u_C збігається з напрямом напруги U_0 , а значить

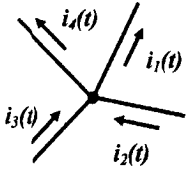
$$u_C(0) = U_0 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

Рівняння (2.31) для обох кіл після підстановки конкретних значень початкових умов будуть відрізнятися тільки знаком, що відповідає додатнім напрямкам струмів.

Ці ж міркування слід враховувати і в класичному методі розрахунку при знаходженні початкових умов для визначення постійних інтегрування.

Розглянемо закони Кірхгофа.

Нехай, наприклад, у вузлі деякого електричного кола (рис. 2.7) з'єднуються чотири вітки, по яких течуть струми, додатні напрями яких показані стрілками.



Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0.$$

В операторній формі

$$I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) + I_4(s) = 0.$$

Рисунок 2.7

В загальному вигляді для миттєвих значень перший закон Кірхгофа буде мати вигляд

$$\sum_{k=0}^n i_k = 0,$$

а в операторній формі

$$\sum_{k=0}^n I_k(s) = 0. \quad (2.32)$$

Таким чином, перший закон Кірхгофа в операторній формі є чинним без жодних обмежень.

Для розгляду другого закону Кірхгофа виділимо із довільного електричного кола контур, який містить n віток, в кожній із яких є джерело е.р.с. $e_k(t)$, індуктивність L_k , резистор R_k і ємність C_k .

Складемо рівняння для миттєвих значень за другим законом Кірхгофа для цього контуру

$$\sum_{k=1}^n \left(L_k \frac{di_k}{dt} + R_k i_k + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^n e_k(t).$$

Тут суму розуміють алгебраїчну.

Переходячи до зображень, з врахуванням (2.24) одержуємо

$$\sum_{k=1}^n \left(sL_k I_k(s) - L_k i_k(0) + R_k I_k(s) + \frac{1}{sC_k} I_k(s) + \frac{u_{Ck}(0)}{s} \right) = \sum_{k=1}^n E_k(s).$$

Після деяких перетворень отримаємо

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) \left(sL_k + R_k + \frac{1}{sC_k} \right) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(s) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{s} \right].$$

З врахуванням (2.28)

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) Z_k(s) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(s) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{s} \right]. \quad (2.33)$$

При нульових початкових умовах

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) Z_k(s) = \sum_{k=1}^n E_k(s). \quad (2.34)$$

Отже, другий закон Кірхгофа в операторній формі виконується при нульових початкових умовах, тобто алгебраїчна сума зображень напруг на ділянках контуру дорівнює алгебраїчній сумі зображень е.р.с. в цьому контурі.

Якщо початкові умови не нульові, то необхідно врахувати не тільки зовнішні е.р.с., але і додаткові $L_k i_k(0)$ і $\frac{u_{Ck}(0)}{s}$, які характеризують початкові запаси енергії в магнітному і електричному полях.

Треба врахувати при цьому, що додаткові е.р.с. $L_k i_k(0)$ направлені за напрямом струму $i_k(t)$, а додаткові е.р.с. $\frac{u_{Ck}(0)}{s}$ направлені назустріч струму $i_k(t)$. Значення ж $i_k(0)$, $u_{Ck}(0)$ і їх знаки визначаються з врахуванням міркувань, які висловлені раніше.

Таким чином, маючи сформульовані закони Ома і Кірхгофа в операторній формі, можна зразу записати систему рівнянь за законами Кірхгофа в операторній формі для післякомутаційного стану електричних кіл.

Приклад 2.1. Складемо розрахункову систему рівнянь в операторній формі для кола, схема якого приведена на рис. 2.8.

За першим законом Кірхгофа

$$I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) = 0. \quad (2.35)$$

Вибравши напрям обходу контурів 1 і 2 так, як показано на рис. 2.8, складемо рівняння за другим законом Кірхгофа. Перший контур містить два елементи R_1 і C , через які протікають відповідно струми i_1 і i_3 (опір R_3 закорочений ключем). Оскільки напрям контуру збігається з напрямом струмів i_1 і i_3 , то обидві операторні напруги на цих елементах входять в рівняння із знаком плюс. В правій частині рівняння крім операторного зображення зовнішньої е.р.с. $E(s)$, яка входить в рівняння із знаком плюс, оскільки напрям е.р.с. $e(t)$ збігається з напрямом обходу контура, треба врахува-

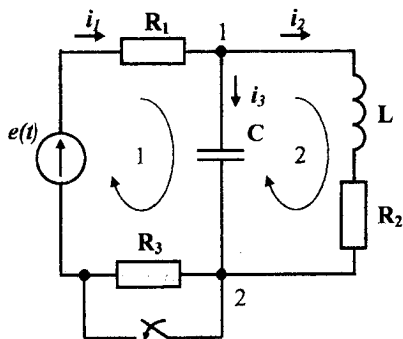


Рисунок 2.8

ти додаткову е.р.с. $\frac{u_{Ck}(0)}{s}$ із знаком мінус, оскільки додаткова е.р.с. напруга введена назустріч струму i_3 і тому назустріч напрямку обходу контуру. Таким чином, для першого контуру

$$I_1(s)R_1 + I_3(s)\frac{1}{sC} = E(s) - \frac{u_C(0)}{s}. \quad (2.36)$$

При складанні рівняння для другого контуру враховуємо, що в лівій частині рівняння три складові, причому зображення напруги на ємності входить із знаком мінус, оскільки напрям обходу контуру і напрям струму i_3 протилежні, а в правій частині рівняння враховуються тільки дві додаткові е.р.с., напрямки яких збігаються з напрямом обходу контуру (зовнішня е.р.с. в контурі відсутня), тому

$$I_1(s)(sL + R_2) - I_3(s)\frac{1}{sC} = Li_2(0) + \frac{u_C(0)}{s}. \quad (2.37)$$

Знайдемо початкові умови для випадку, що $e(t) = E = \text{const}$. Струм через індуктивність до комутації протікає в тому ж напрямі, що і після комутації через опори R_1, R_2 і R_3 , тому при постійній е.р.с.

$$i_2(t) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Маючи три рівняння (2.35)-(2.37) і початкові умови, можна знайти зображення будь-якого струму.

В прикладі, який розглядається, операторні рівняння складені безпосередньо на основі законів Кірхгофа, проте певні труднощі виникають при врахуванні додаткових е.р.с. і особливо в визначенні їх напрямів. Цих труднощів можна уникнути, якщо електричні схеми зображати в операторному вигляді.

2.4 Операторні схеми

Під операторними схемами будемо розуміти такі схеми, в яких діють зображення джерел живлення, через вітки протікають зображення струмів і вітки містять зображення елементів схеми.

Визначення зображення джерел енергії виконується при відомих е.р.с. цих джерел за виразом (2.1).

Розглянемо, як одержати зображення елементів схем.

Для вітки, яка містить один резистор (рис.2.9,а) напруга між точками a і b визначається з виразу

$$u = iR.$$

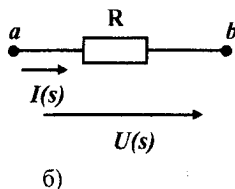
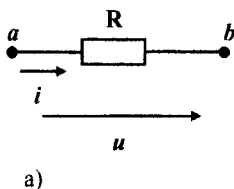


Рисунок 2.9

В операторній формі

$$U(s) = RI(s),$$

тому резистор замінюється на операторній схемі елементом, величина якого дорівнює R (рис. 2.9,б).

Для вітки з індуктивністю (рис. 2.10,а)

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

В операторній формі ця напруга між точками a і b

$$U(s) = sLI(s) - Li(0)$$

складається з двох складових, одна складова $sLI(s)$, яка залежить від струму $I(s)$, і друга $Li(0)$, яка не залежить від струму $I(s)$. Отже, операторна схема індуктивності складається із двох елементів: операторного опору sL і додаткової е.р.с. $Li(0)$, яка направлена за напрямом струму $I(s)$ (рис.2.10,б).

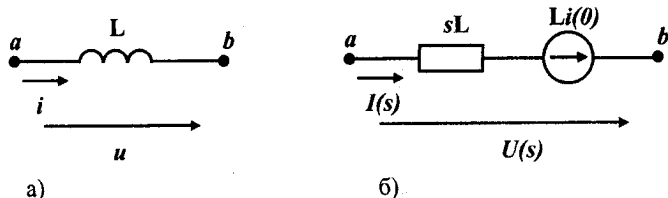


Рисунок 2.10

Для ділянки, яка містить ємність (рис.2.11,а), напруга

$$u = \frac{1}{C} \int i dt.$$

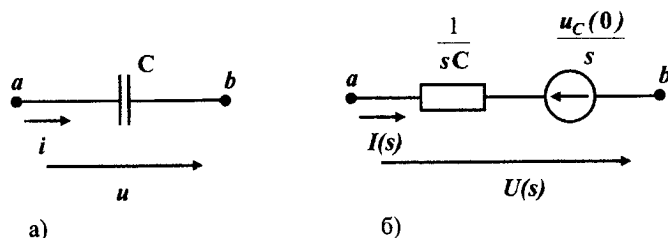


Рисунок 2.11

В операторній формі ця напруга між точками a і b

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_C(0)}{s}$$

також складається із двох складових, що відповідає двом елементам операторної схеми - операторного опору $\frac{1}{sC}$ і додаткової е.р.с. $\frac{u_C(0)}{s}$, яка направлена назустріч струму $I(s)$ (рис.2.11,б).

Одержані операторні схеми окремих елементів дозволяють представляти будь-які задані електричні схеми у вигляді операторних схем. Потрібно пам'ятати, що операторні схеми складаються для післякомутаційного стану кола, тому в операторних схемах ключі не зображаються.

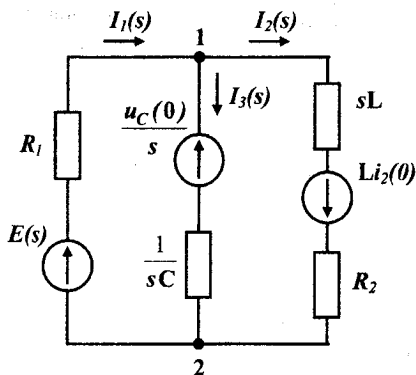


Рисунок 2.12

визначення зображення потенціалу вузла 1 методом двох вузлів, вважаючи точку 2 заземленою ($\varphi_2(s) = 0$).

$$\varphi_1(s) \left(\frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL + R_2} \right) = E(s) \frac{1}{R_1} + \frac{u_C(0)}{s} sC - \frac{Li_2(0)}{sL + R_2}.$$

Звідси

$$\varphi_1(s) = \frac{\frac{E(s)}{R_1} + u_C(0)C - \frac{Li_2(0)}{sL + R_2}}{\frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL + R_2}} = \frac{E(s)(sL + R_2) + u_C(0)R_1C(sL + R_2) - R_1Li_2(0)}{(sL + R_2) + R_1sC(sL + R_2) + R_1}.$$

Знаючи зображення потенціалу вузла 1, можна знайти зображення струмів у всіх вітках. Так, наприклад, зображення струму у другій вітці

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{\varphi_1(s) + Li_2(0)}{sL + R_2} = \frac{E(s)(sL + R_2) + u_C(0)R_1C(sL + R_2) - LR_1i_2(0)}{(sL + R_2) + R_1Cs(sL + R_2) + R_1} + Li_2(0) \\ &= \frac{E(s)(sL + R_2) + u_C(0)R_1C(sL + R_2) - LR_1i_2(0) + Li_2(0)(sL + R_2) + [Li_2(0)R_1Cs(sL + R_2) + LR_1i_2(0)]}{[(sL + R_2) + R_1Cs(sL + R_2) + R_1] \times (sL + R_2)} \\ &= \frac{(sL + R_2)[E(s) + u_C(0)R_1C + Li_2(0)(1 + R_1Cs)]}{[(sL + R_2) + R_1Cs(sL + R_2) + R_1] \times (sL + R_2)} = \frac{E(s) + u_C(0)R_1C + Li_2(0)(1 + R_1Cs)}{(sL + R_2) + R_1Cs(sL + R_2) + R_1}. \end{aligned}$$

Представимо для прикладу схему, яка зображена на рис. 2.8, в операторному вигляді (рис. 2.12).

Маючи операторну схему, можна для знаходження зображення струмів використовувати будь-які відомі методи аналізу лінійних електричних кіл (метод вузлових потенціалів, контурних струмів, еквівалентного генератора і т.п.).

Складемо, наприклад, для схеми (рис.2.12) рівняння для

Розглянемо ще один приклад (рис. 2.13).

Операторна схема, яка відповідає заданій, зображена на рис. 2.13,б. Визначимо початкові значення $i_3(0)$ і $u_C(0)$ і відповідно додаткові е.р.с.

У колі до комутації протікали постійні струми I_1, I_2, I_3 , в вітці з розімкнутим ключем і в вітці, яка містить послідовно з'єднані елементи C і R_4 струми не протікали, тому

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Отже,

$$i_3(0_+) = i_3(0_-) = i_3(0) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

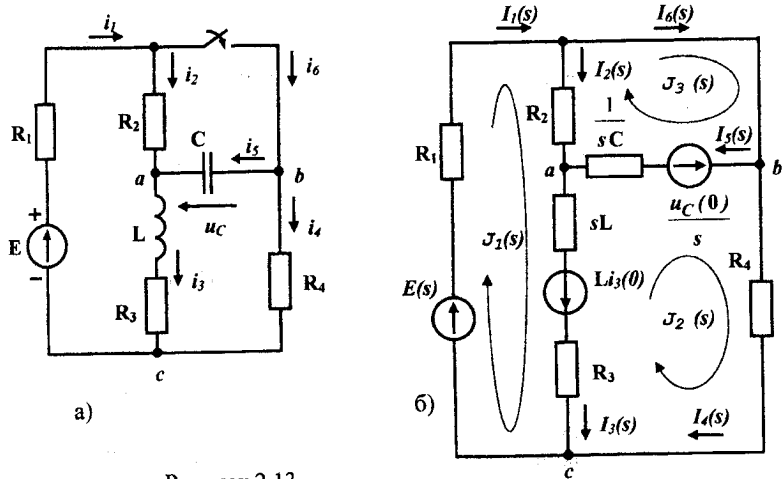


Рисунок 2.13

Напруга на ємності до комутації дорівнює напрузі між точками a і b , а оскільки за відсутності струму через опір R_4 , потенціал точки b дорівнює потенціалу точки c , то

$$U_{ab} = U_{ac} = I_3 R_3 = \frac{E R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Перехідна напруга u_C при вибраних напрямках струмів після комутації направлена назустріч напрузі U_{ab} , тому

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = -U_{ab} = \frac{E R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Складемо для знаходження зображень струмів систему рівнянь за методом контурних струмів. В схемі три незалежних контури і при вибраних напрямках контурних струмів одержуємо

$$\begin{aligned} J_1(s)(R_1 + R_2 + sL + R_3) - J_2(s)(sL + R_3) - J_3(s)R_2 &= \frac{E}{s} + Li_3(0), \\ -J_1(s)(sL + R_3) - J_2(s)(R_3 + sL + \frac{1}{sC} + R_4) - J_3(s)\frac{1}{sC} &= -Li_3(0) + \frac{u_C(0)}{s}, \\ -J_1(s)R_2 - J_2(s)\frac{1}{sC} + J_3(s)(R_2 + \frac{1}{sC}) &= -\frac{u_C(0)}{s}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему, можна знайти зображення контурних струмів, зображення струмів в вітках визначаються через зображення контурних струмів:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= J_1(s), & I_2(s) &= J_1(s) - J_3(s), & I_3(s) &= J_1(s) - J_2(s), \\ I_4(s) &= J_2(s), & I_5(s) &= -J_2(s) + J_3(s), & I_6 &= J_3(s). \end{aligned}$$

2.5 Перехід від зображення до оригіналу

Для одержання остаточного розв'язку перехідного процесу необхідно перейти від зображення шуканих величин до оригіналу як функцій часу.

Існують різні методи переходу до оригіналу. В цьому параграфі розглянемо використання для цієї мети теореми розкладання.

В прикладах, які розглянуті раніше, операторні зображення шуканих функцій одержували в вигляді відношення двох поліномів

$$X(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0}, \quad (2.38)$$

причому $m < n$.

Як правило, зображення величин, які шукають при розрахунку перехідного процесу в лінійних електричних колах, задовольняють ці умови.

Припустимо, що всі корені знаменника прості (не кратні), серед них можуть бути як дійсні корені, так і комплексно-спряжені. В цьому випадку, як відомо із математики, вираз (2.38) можна записати в вигляді суми простих дробів

$$X(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_k}{s - s_k} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k}, \quad (2.39)$$

де s_k - корені знаменника,

A_k - невідомі сталі.

Для знаходження значень A_k помножимо праву і ліву частину (2.39) на $s - s_k$

$$\frac{A(s)}{B(s)}(s - s_k) = A_1 \frac{s - s_k}{s - s_1} + A_2 \frac{s - s_k}{s - s_2} + \dots + A_k + \dots + A_n \frac{s - s_k}{s - s_n}$$

і спрямуємо s до s_k .

В правій частині рівняння всі складові, крім A_k перетворюються на нуль, а в лівій частині виходить невизначеність виду $\frac{0}{0}$, оскільки при $s \rightarrow s_k$, $(s - s_k) \rightarrow 0$ і $B(s_k) \rightarrow 0$, тому що s_k є коренем знаменника. Таким чином,

$$A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{A(s)(s - s_k)}{B(s)}. \quad (2.40)$$

Розкриємо невизначеність в (2.40) за правилом Лопіталя, тобто продиференціюємо окремо чисельник $A(s)(s - s_k)$ і знаменник $B(s)$ виразу, який знаходиться під знаком границі (\lim) і підставимо $s = s_k$. Тоді

$$A_k = \frac{A(s_k)}{B'(s_k)}. \quad (2.41)$$

Підставляючи значення A_k в (2.39), одержуємо

$$X(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} \frac{1}{s - s_k}$$

У відповідності з (2.9)

$$\frac{1}{s - s_k} \doteq e^{s_k t}$$

Тому оригіналом зображення $X(s)$ є функція

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t}, \quad (2.42)$$

де n - число коренів знаменника,

s_k - корені знаменника $B(s)$,

$A(s_k)$ - значення чисельника функції $X(s)$ для $s = s_k$,

$B'(s_k)$ - значення похідної знаменника функції $X(s)$ для $s = s_k$.

Отриманий вираз (2.42) називається *формулою розкладання* або *теоремом розкладання*.

Приклад 2.2. Визначити оригінал функції

$$X(s) = \frac{s^2 + 4s + 8}{s(s^2 + 6s + 8)}.$$

Знаходимо корені знаменника, прирівнюючи його до нуля

$$s(s^2 + 6s + 8) = 0,$$

$$s_1 = 0, \quad s_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2}, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -4.$$

Визначаємо значення чисельника для $s = s_k$,

$$A(s_1) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 8 = 8;$$

$$A(s_2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 8 = 4;$$

$$A(s_3) = (-4)^2 + 4 \cdot (-4) + 8 = 8.$$

Знаходимо похідну від знаменника

$$B'(s) = (s^2 + 6s + 8) + s(2s + 6)$$

і її значення для $s = s_k$

$$B'(s_1) = 0^2 + 0 \cdot 6 + 8 + 0 \cdot (2 \cdot 0 + 6) = 8;$$

$$B'(s_2) = (-2)^2 + (-2) \cdot 6 + 8 + (-2) \cdot [2 \cdot (-2) + 6] = -4;$$

$$B'(s_3) = (-4)^2 + (-4) \cdot 6 + 8 + (-4) \cdot [2 \cdot (-4) + 6] = 8.$$

Підставляючи одержані значення в (2.42), маємо

$$x(t) = \frac{8}{8} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{4}{-4} \cdot e^{-2 \cdot t} + \frac{8}{8} \cdot e^{-4 \cdot t} = 1 - e^{-2 \cdot t} + e^{-4 \cdot t}.$$

Розглянемо декілька прикладів розрахунку перехідних процесів операторним методом.

Приклад 2.3. Визначити закон зміни струму i_2 , якщо $R_1=50$ Ом, $R_2=100$ Ом, $C=200$ мкФ, $E=300$ В. Коло зображено на рис.2.14,а.

Враховуючи, що коло підключається до джерела постійної е.р.с. E , конденсатор не був зарядженим, тому в операторній схемі (рис. 2.14, б) відсутня додаткова е.р.с. $\frac{u_C(0)}{s}$. В цьому випадку легко знайти вхідний струм $I_1(s)$

$$I_1(s) = \frac{E(s)}{Z(s)}, \quad Z(s) = R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = R_1 + \frac{R_2}{R_2Cs + 1} = \frac{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}{R_2Cs + 1}$$

Таким чином,

$$I_1(s) = \frac{E(s)(R_2Cs + 1)}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}$$

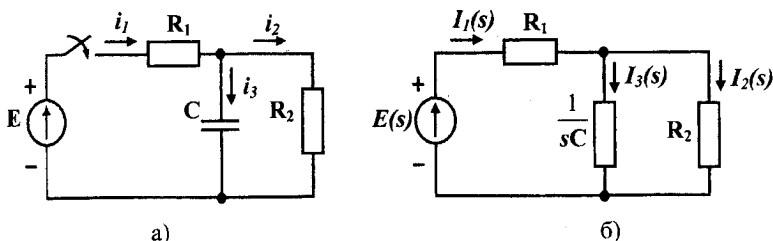


Рисунок 2.14

Струм $I_2(s)$ знаходиться з виразу

$$I_2(s) = I_1(s) \frac{\frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = I_1(s) \frac{1}{R_2Cs + 1} = \frac{E(s)(R_2Cs + 1)}{(R_1R_2Cs + R_1 + R_2)(R_2Cs + 1)} = \frac{E(s)}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}$$

Враховуючи, що

$$E(s) = \frac{E}{s}$$

і підставляючи числові дані, одержуємо

$$I_2(s) = \frac{300}{s(s+150)} \quad (2.43)$$

Для знаходження оригіналу використовуємо теорему розкладання (2.42).

В даному прикладі

$$A(s) = 300; \quad B(s) = s(s+150).$$

Знаходимо корені знаменника

$$s(s+150) = 0; \quad s_1 = 0; \quad s_2 = -150.$$

Знаходимо значення $A(s_k)$. Оскільки $A(s)$ не залежить від s , то

$$A(s_1) = 300; \quad A(s_2) = 300.$$

Визначаємо похідну від знаменника

$$B'(s) = (s+150) + s$$

і відповідні числові значення для s_1 і s_2

$$B'(s_1) = 150; \quad B'(s_2) = -150.$$

Таким чином,

$$i(t) = \frac{300}{150} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{300}{-150} \cdot e^{-150 \cdot t} = 2 - 2 \cdot e^{-150 \cdot t} \quad (A) \quad (2.44)$$

Звернемо увагу на те, що знаменник виразу (2.43) має два корені, причому один корінь $s = 0$ з'явився після підстановки $E(s) = \frac{E}{s}$ і визначає першу складову в виразі (2.44), тобто примусову складову, а другий корінь ($s_2 = -150$) залежить від параметрів кола і визначає вільну складову.

Приклад 2.4. Знайти операторним методом струм в колі (рис. 2.15,а), якщо

$$u(t) = U_m \cos \omega t.$$

Оскільки в колі початкові умови нульові, то в операторній схемі (рис. 2.15,б) буде відсутня додаткова е.р.с. $Li(0)$. Тому

$$I(s) = \frac{U(s)}{sL + R}. \quad (2.45)$$

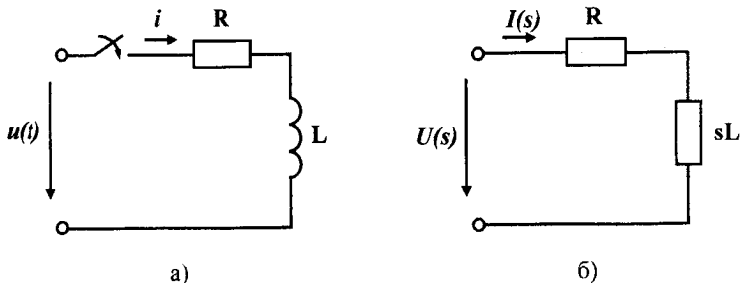


Рисунок 2.15

Зображення косинусної напруги в відповідності з (2.13)

$$U(s) = \frac{U_m s}{s^2 + \omega^2};$$

$$I(s) = \frac{U_m s}{(s^2 + \omega^2)(sL + R)}. \quad (2.46)$$

Для знаходження оригіналу $i(t)$ використаємо формулу розкладання (2.42).

$$A(s) = U_m s; \quad B(s) = (s^2 + \omega^2)(sL + R).$$

Корені знаменника

$$s^2 + \omega^2 = 0; \quad s_1 = j\omega; \quad s_2 = -j\omega; \quad sL + R = 0; \quad s_3 = -\frac{R}{L}.$$

Значення чисельника для $s = s_k$

$$A(s_1) = U_m j \omega; \quad A(s_2) = U_m (-j \omega); \quad A(s_3) = -\frac{U_m}{L}.$$

Похідна від знаменника

$$B'(s) = 2s(sL + R) + L(s^2 + \omega^2)$$

і її значення для $s = s_k$

$$B'(s_1) = 2j\omega(j\omega L + R); \quad B'(s_2) = -j2j\omega(R - j\omega L);$$

$$B'(s_3) = L \left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2 \right).$$

Враховуючи, що

$$R + j\omega L = \underline{Z} = Ze^{j\varphi},$$

де

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}; \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2};$$

$$R - j\omega L = Ze^{-j\varphi},$$

а

$$B'(s_3) = L \left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2 \right) = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{L} = \frac{Z^2}{L},$$

одержуємо

$$B'(s_1) = 2j\omega Ze^{j\varphi};$$

$$B'(s_2) = -j2j\omega Ze^{-j\varphi};$$

$$B'(s_3) = \frac{Z^2}{L}.$$

Підставляючи знайдені значення в (2.42) отримаємо

$$i(t) = \frac{U_m j \omega}{2j\omega Ze^{j\varphi}} e^{j\omega t} + \frac{-U_m j \omega}{-2j\omega Ze^{-j\varphi}} e^{-j\omega t} + \frac{-U_m R}{\frac{Z^2}{L}} e^{-\frac{R}{L}t} =$$

$$= \frac{U_m}{2Z} e^{j(\omega t - \varphi)} + \frac{U_m}{2Z} e^{-j(\omega t - \varphi)} - \frac{U_m R}{Z^2} e^{-\frac{R}{L} t}$$

Оскільки

$$\frac{U_m}{Z} = I_m, \quad \frac{R}{Z} = \cos \varphi,$$

то

$$i(t) = I_m \frac{e^{j(\omega t - \varphi)} + e^{-j(\omega t - \varphi)}}{2} - I_m \cos \varphi e^{-\frac{R}{L} t}$$

Відомо, що

$$\frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \cos \alpha,$$

тому

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) - I_m \cos \varphi e^{-\frac{R}{L} t} \quad (2.47)$$

Перша складова (2.46) представляє собою примусову складову, яка одержана після підстановки в (2.42) значень $s_1 = j\omega$ і $s_2 = -j\omega$, які є коренями частини знаменника ($s^2 + \omega^2$), що з'явилася в (2.45), після підстановки зображення прикладеної напруги.

Друга складова в (2.46) є вільна складова, яка одержана після підстановки s_3 в (2.42) і є коренем знаменника, що залежить від параметрів кола.

Таким чином, можна стверджувати, що знаменник зображення шуканої функції в будь-якому електричному колі складається із двох частин

$$B(s) = B_1(s) \cdot B_2(s).$$

Перший співмножник $B_1(s)$ залежить від виду прикладеної напруги і визначає примусову складову, а другий співмножник залежить від параметрів і конфігурації кола і визначає вільну складову. Корені $B_2(s)$ є коренями характеристичного рівняння в класичному методі розрахунку і, відповідно, дійсна частина їх в лінійних колах повинна бути від'ємною.

3 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ПІД ЧАС ДІЇ ВХІДНИХ ЗБУДЖЕНЬ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Метод розрахунку, який розглядається в цьому розділі, базується на принципі накладення. Заданий вхідний сигнал складної форми розкладається на подібні один одному складові більш простої форми (прямокутні сходишки або прямокутні імпульси), для яких легко знайти реакцію кола.

Визначивши реакцію кола на кожну елементарну складову дію і додаючи ці реакції, знаходимо реакцію кола на складний сигнал. Вмикання елементарних складових сигналу в коло і викликаних ними реакцій кола виражають за допомогою двох функцій - *одиночної* або *імпульсної*.

3.1 Одинична функція і перехідна характеристика кола

Одинична східчаста функція (рис.3.1,а), яка називається *функцією Хевісайда*, визначається таким чином

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

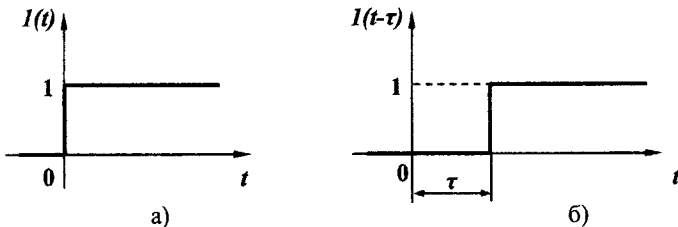


Рисунок 3. 1

За допомогою одиничної функції дію будь-якої напруги на коло можна описати добутком

$$f(t) \cdot I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f(t), & t > 0. \end{cases}$$

Якщо коло в момент $t = 0$ вмикається на постійну напругу U_0 , то це можна описати добутком

$$U_0 \cdot I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ U_0, & t > 0. \end{cases}$$

Цей вираз вказує на те, що напруга зростає від нуля до U_0 стрибком в

момент вмикання ($t = 0$), далі діє безперервно, залишаючись постійною, тобто відпадає необхідність у використанні ключа.

Якщо збудження подається на коло не в момент $t = 0$, а з запізненням на час τ , то його слід записувати за допомогою одиничної функції (рис.3.1 ,б) з аргументом запізнення $(t - \tau)$

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau ; \\ 1, & t > \tau . \end{cases} \quad (3.2)$$

Добуток

$$U_0 \cdot 1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau ; \\ U_0, & t > \tau \end{cases}$$

вказує на те, що напруга величиною U_0 вмикається в коло в момент часу $t = \tau$.

Реакція кола на одиничну східчасту функцію при нульових початкових умовах називається *перехідною характеристикою* кола і позначається $h(t)$. Під нульовими початковими умовами розуміють нульові значення незалежних початкових умов.

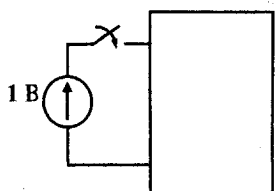


Рисунок 3.2

З електротехнічної точки зору дія одиничної східчастої напруги на коло рівноцінна вмиканню кола в момент $t = 0$ під постійну напругу 1 В. Таким чином, для визначення перехідної характеристики кола $h(t)$ слід знайти необхідну реакцію (згідно умови задачі), розрахувавши перехідний процес в колі, схема якого приведена на рис.3.2 (початкові умови нульові).

Такий розрахунок можна проводити як класичним, так і операторним методом. Знайдена реакція і буде шуканою перехідною характеристикою $h(t)$.

Наприклад, при вмиканні кола, яке складається із послідовно з'єднаних опору R і індуктивності L , на напругу складної форми, де в якості реакції треба знайти струм, перехідною характеристикою є струм від дії постійної напруги на вході 1 В. Оскільки струм в такому колі від дії постійної напруги U , як відомо,

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

то перехідна характеристика

$$h(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (3.3)$$

В складних колах зручно спочатку знаходити зображення перехідної характеристики $H(s)$, а потім за теоремою розкладання визначити $h(t)$.

Представимо будь-яке коло в вигляді чотириполосника (рис.3.3,а), до якого прикладене деяке збудження $f(t)$ і реакція на нього на виході $x(t)$. Для знаходження зображення реакції $X(s)$ перерисуємо схему в операторній формі (рис. 3.3,б).

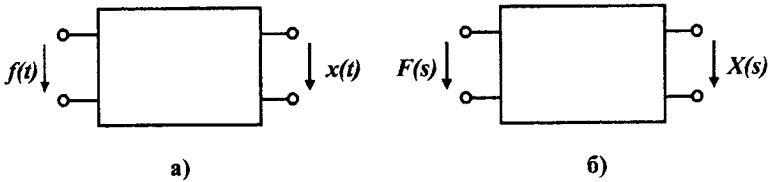


Рисунок 3.3

Оскільки початкові умови нульові, то ніяких додаткових с.р.с. в чотириполоснику не з'являється і зв'язок між зображеннями реакції $X(s)$ і збудження $F(s)$ записується в вигляді

$$X(s) = K(s)F(s), \quad (3.4)$$

де $K(s)$ - передаточна функція кола, яка залежить тільки від параметрів кола і виду їх з'єднання між собою.

Якщо збудження є одиничною східчастою функцією $1(t)$, то його зображення можна знайти, використовуючи інтеграл Лапласа

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s}; \quad 1(t) \doteq \frac{1}{s}. \quad (3.5)$$

Тоді зображення перехідної характеристики визначається за виразом

$$H(s) = \frac{K(s)}{s}. \quad (3.6)$$

Приклад 3.1. Знайти перехідну характеристику для напруги на ємності в колі, яке зображене на рис.3.4,а.

Представимо схему в операторній формі (початкові умови нульові, рис.3.4,б) і виразимо напругу $U_C(s) = U_2(s)$ через вхідну напругу $U_1(s)$.

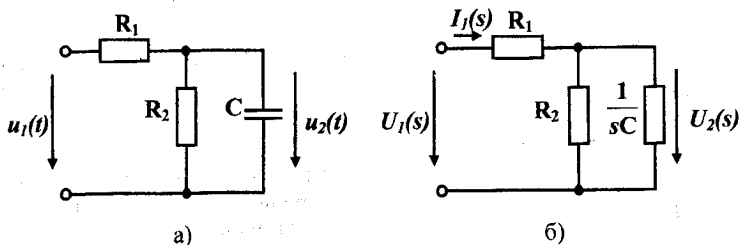


Рисунок 3. 4

Вхідний струм

$$I_1(s) = \frac{U_1(s)}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}}} = \frac{U_1(s)}{R_1 + \frac{R_2}{R_2Cs + 1}} = \frac{U_1(s)(R_2Cs + 1)}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}$$

Шукана напруга

$$U_2(s) = I_1(s) \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = I_1(s) \frac{R_2}{R_2Cs + 1} = \frac{U_1(s)R_2}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}$$

Враховуючи, що $F(s) = U_1(s)$, $X(s) = U_2(s)$, передаточна функція кола

$$K(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}$$

і зображення перехідної характеристики для напруги на ємності згідно (3.6)

$$H(s) = \frac{K(s)}{s} = \frac{R_2}{s(R_1R_2Cs + R_1 + R_2)}$$

Використовуючи теорему розкладання, знаходимо оригінал перехідної характеристики

$$h(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}t}$$

Знаючи перехідну характеристику, легко визначити значення $u_C(t)$ для будь-якої величини постійної вхідної напруги. Дійсно, якщо на вході включена постійна напруга U_1 , то

$$u_2(t) = U_1 h(t).$$

3.2 Використання перехідних характеристик для розрахунку перехідних процесів

Нехай до деякого кола, для якого відома перехідна характеристика $h(t)$, прикладена східчаста напруга $u(t)$ (рис.3.5).

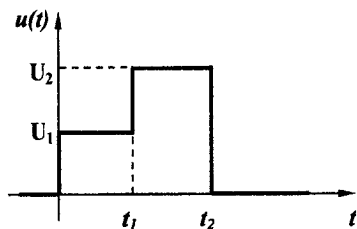


Рисунок 3.5

прикладена постійна напруга U_1 , тому

$$x(t) = U_1 h(t), \quad 0 < t < t_1. \quad (3.7)$$

На інтервалі $t_1 < t < t_2$ продовжує діяти постійна напруга U_1 і відповідно існує реакція на цю напругу $U_1 h(t)$. В момент часу t_1 додатково підключається постійна напруга $(U_2 - U_1)$ і з'являється складова реакції від цього стрибка напруги, яка зміщена на час t_1 , тобто $(U_2 - U_1)h(t - t_1)$. Таким чином, загальна реакція на цьому інтервалі

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1)h(t - t_1), \quad t_1 < t < t_2. \quad (3.8)$$

На інтервалі $t_2 < t < \infty$ реакція кола складається із трьох складових (рис.3.6):

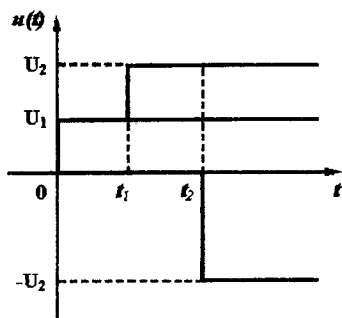


Рисунок 3.6

- продовжує діяти напруга U_1 - реакція $U_1 h(t)$;

- продовжує діяти постійна напруга $(U_2 - U_1)$, яка виникає в момент t_1 – реакція $(U_2 - U_1)h(t - t_1)$;
- в момент $t = t_2$ з'являється постійна напруга $(-U_2)$, реакція від якої $(-U_2)h(t - t_2)$.

Таким чином для $t_2 < t < \infty$

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1) - U_2 h(t - t_2), \quad t > t_2. \quad (3.9)$$

3.3 Розрахунок перехідних процесів при довільних збудженнях

Такий підхід до визначення реакції кола на східчасту дію дозволяє розглядати перехідний процес при будь-яких складних вхідних збудженнях.

Розглянемо знаходження реакції кола з відомою перехідною характеристикою $h(t)$ при вмиканні його до джерела напруги $u(t)$ довільної форми (рис.3.7) за нульових початкових умов.

Виберемо деякий довільний фіксований момент спостереження t і розрахуємо реакцію (струму або напруги) до цього моменту часу. Не дивлячись на те, що момент вибирається довільно, він фіксується і стає постійною величиною - параметром. В зв'язку з цим вводиться нове позначення змінного часу τ , який змінюється в межах $0 < \tau < t$.

Представимо прикладену напругу в вигляді східчастого збудження (рис.3.7), коли через рівні проміжки часу $\Delta\tau = \frac{t}{n}$ додаються сходинки напруги Δu_k (n - відповідає числу сходинок, за допомогою яких представляється вхідна напруга).

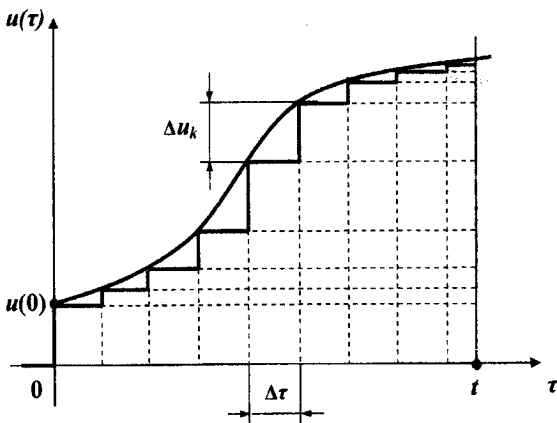


Рисунок 3.7

Дію сходинок на коло опишемо за допомогою одиничних функцій. На проміжку часу $0 < t < \Delta\tau$ реакція кола від дії напруги $u(0)l(t)$, тобто від нульової сходинок, яка наближено заміняє напругу на цьому проміжку

$$x(t) \approx u(0)h(t);$$

на проміжку $\Delta\tau < t < 2\Delta\tau$ добавляється реакція від напруги $\Delta u_1 l(t - \Delta\tau)$, тобто від першої сходинок

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau);$$

на проміжку $2\Delta\tau < t < 3\Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_2 l(t - 2\Delta\tau)$, тобто від другої сходинок

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau);$$

на проміжку часу $n\Delta\tau < t < (n+1)\Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_n l(t - n\Delta\tau)$, тобто від дії n -ої сходинок

$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau) + \dots + \Delta u_k h(t - k\Delta\tau) + \dots + \Delta u_n h(t - n\Delta\tau)$
або

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta u_k h(t - k\Delta\tau). \quad (3.10)$$

Вираз (3.10) дає наближене значення реакції кола $x(t)$, оскільки справжня крива $x(t)$ замінена східчастими збудженнями.

Для одержання точного значення реакції кола спрямуємо $\Delta\tau$ до нескінченно малої величини $d\tau$.

Тоді

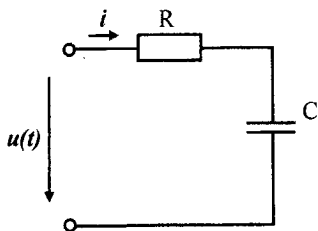
$$\Delta u_k = \frac{\Delta u_k}{\Delta\tau} \Delta\tau \rightarrow u'(\tau) d\tau, \\ k\Delta\tau \rightarrow \tau.$$

Сума в (3.10) перетворюється на інтеграл з межами інтегрування від нуля до t , тобто

$$x(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t - \tau) d\tau. \quad (3.11)$$

Вираз (3.11) називають *інтегралом накладання* або *інтегралом Дюамеля*.

Приклад 3.2. Визначити закон зміни напруги на ємності в колі (рис.3.8) під час дії експоненційної напруги



$$u(t) = Ue^{-\beta t}$$

Перехідна характеристика цього кола для напруги на ємності

$$h(t) = 1 - e^{-\alpha t}; \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

Рисунок 3.8

Визначимо всі величини, які входять в інтеграл Дюамеля (3.11).

$$u(0) = U; \quad u'(\tau) = (Ue^{-\beta\tau})' = -\beta Ue^{-\beta\tau};$$

$$h(1-\tau) = 1 - e^{-\alpha(t-\tau)}$$

Відмітимо, що змінною інтегрування в (3.11) є змінна τ , тому t при знаходженні інтеграла розглядається як стала величина. Підставимо одержані величини в (3.11)

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t (-\beta) Ue^{-\beta\tau} (1 - e^{-\alpha(t-\tau)}) d\tau = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\int_0^t e^{-\beta\tau} d\tau - \int_0^t e^{-\beta\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\left(\frac{1}{-\beta} e^{-\beta\tau} \right)_0^t - e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\frac{e^{-\beta t}}{-\beta} + \frac{1}{\beta} \right) + \beta U e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)\tau} \right)_0^t = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) + Ue^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} (e^{(\alpha-\beta)t} - 1) = \\ &= U - Ue^{-\alpha t} + Ue^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} - \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} = \\ &= Ue^{-\beta t} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) - Ue^{-\alpha t} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) = \frac{\alpha U}{\alpha - \beta} (Ue^{-\beta t} - Ue^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

Якщо прикладена напруга не може бути описана одним аналітичним

виразом (рис.3.9)

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t < t_1, \\ u_2(t), & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2, \end{cases}$$

то реакцію кола слід визначити для кожного інтервалу часу, де діє відповідна напруга.

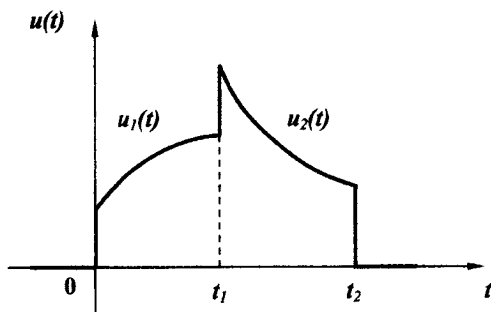


Рисунок 3.9

Для $0 < t < t_1$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

При визначенні реакції кола на інтервалі $t_1 < t < t_2$ враховуємо такі обставини:

- продовжує діяти реакція кола на напругу $u_1(t)$, яка існує до моменту часу t_1 , тому верхня межа цього інтегралу буде t_1 ;
- при визначенні реакції від напруги $u_2(t)$ слід мати на увазі, що ця напруга діє на коло з моменту часу t_1 , тому нижня межа даного інтервалу t_1 ;
- в момент t_1 вхідна напруга стрибком змінюється від $u_1(t_1)$ до $u_2(t_1)$, тому цей стрибок враховується при визначенні реакції як дія постійної напруги $(u_2(t_1) - u_1(t_1))$ в момент t_1 .

Таким чином, для $t_1 < t < t_2$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Для часу $t > t_2$ враховується стрибок напруги $(0 - u_2(t_2))$ в момент t_2 і перстає діяти в цей же момент напруга $u_2(t)$.

Для $t > t_2$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (0 - u_2(t_2))h(t-t_2).$$

3.4 Імпульсна функція і імпульсна характеристика кола

Імпульсною характеристикою кола називають реакцію кола на одиничну імпульсну функцію при нульових початкових умовах.

Одинична імпульсна функція, її називають *функцією Дірка* або δ -функцією, визначається тим, що її площа дорівнює одиниці, величина імпульсу при цьому прямує до безмежності, якщо $t \rightarrow 0$, а для всіх інших значень t вона дорівнює нулю

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

На рис.3.10 показаний імпульс шириною T і висотою $1/T$, площа якого дорівнює одиниці.

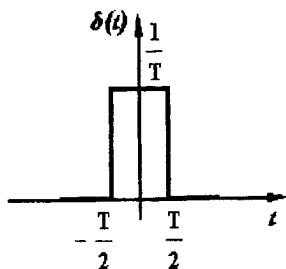


Рисунок 3.10

Одиничну імпульсну функцію $\delta(t)$ одержують із цього імпульсу для $T \rightarrow 0$. Для δ -функції правильне співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1, \quad (3.13)$$

якщо $t_1 < 0, t_2 > 0$.

Добре видно, що

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

отже,

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1(t),$$

або

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \quad (3.14)$$

Якщо взяти добуток функцій $f(t)$ на $\delta(t)$, то цей добуток для всіх $t \neq 0$ перетворюється на нуль, а для $t = 0$ має значення $f(0)\delta(t)$, тобто

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$

У відповідності з цим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0). \quad (3.15)$$

Операторне зображення δ -функції

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} \int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1. \quad (3.16)$$

Враховуючи одержане співвідношення і визначення імпульсної характеристики можна стверджувати, що операторне зображення імпульсної характеристики дорівнює зображенню передаточної функції.

Якщо позначити зображення імпульсної характеристики $g(t)$ через $G(s)$, то

$$G(s) = K(s). \quad (3.17)$$

Для кола, яке розглядалося вище (рис.3.4,а),

$$G(s) = K(s) = \frac{R_2}{R_1 R_2 C s + R_1 + R_2} \quad \text{і} \quad g(t) = \frac{1}{R_1 C} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}$$

Якщо на вході кола (рис.3.4, а) діє імпульс напруги, площа якого дорівнює A , тобто $u_1(t) = A\delta(t)$, то напруга на ємності $u_2(t) = Ag(t)$.

3.5 Розрахунок перехідних процесів при довільних збудженнях з використанням імпульсної функції

За допомогою міркувань, аналогічних проведеним в 3.3, знайдемо реакцію кола на дію напруги довільної форми, використавши імпульсну характеристику. Для цього задану вхідну напругу розбиваємо на n прямо-

кутних імпульсів (рис.3.11) шириною $\Delta\tau$ і висотою u_k . Площа будь-якого імпульсу $u_k \Delta\tau$.

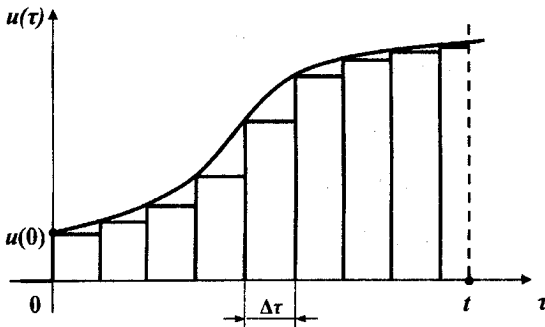


Рисунок 3.11

Реакція кола від дії окремого k -го імпульсу визначається як добуток площі імпульсу на імпульсну характеристику, яка зміщена на $k\Delta\tau$, тобто

$$\Delta x_k = u_k \Delta\tau \cdot g(t - k\Delta\tau). \quad (3.18)$$

Реакція ж кола на вхідну напругу в момент часу t наближено представляється як сума реакцій від дії n імпульсів.

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^n u_k \Delta\tau \cdot g(t - k\Delta\tau). \quad (3.19)$$

При $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ сума перетворюється на інтеграл, $k\Delta\tau \rightarrow \tau$, дискретні значення u_k стають безперервними миттєвими значеннями $u(\tau)$, тому

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (3.20)$$

Приклад 3.3. Визначимо напругу на ємності через імпульсну характеристику для кола (рис.3.8) при вхідній напрузі

$$u(t) = Ue^{-\beta t}.$$

Знайдемо імпульсну характеристику кола для напруги на ємності.

Напруга на ємності в операторній формі

$$U_C(s) = \frac{U(s) \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{U(s)}{RCs + 1}.$$

Передаточна функція кола і, отже, зображення імпульсної характеристики

$$K(s) = G(s) = \frac{1}{RCs + 1}.$$

Оригінал цього зображення

$$g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Якщо позначити $\alpha = \frac{1}{RC}$, то $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$.

Підставляємо всі дані в (3.20), одержуємо

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \int_0^t U e^{-\beta\tau} \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = U \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau = U \alpha e^{-\alpha t} \left(\frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta} \right) \Big|_0^t = \\ &= U \alpha e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha-\beta} (e^{(\alpha-\beta)t} - 1) = \frac{U \alpha}{\alpha-\beta} (e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t}). \end{aligned}$$

При розв'язанні задачі (рис.3.9) з використанням інтеграла Дюамеля, записаного через імпульсну характеристику (3.20) стрибки напруги в моменти t_1 і t_2 враховуються самими функціями $u_1(t)$ і $u_2(t)$ безпосередньо при інтегруванні, тобто для $0 < t < t_1$

$$x(t) = \int_0^t u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau ;$$

для $t_1 < t < t_2$

$$x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau ;$$

для $t > t_2$

$$x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau .$$

4 ЧАСТОТНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

4.1 Розрахунок перехідних процесів методом періодизації неперіодичних збуджень

В попередньому розділі розглянуто використання перехідних та імпульсних характеристик для розрахунку перехідних процесів. Суть такого підходу полягає в тому, що довільне збудження спочатку представляється в вигляді суми стандартних дій - східчастих або імпульсних. Знаходиться реакція кола на кожну дію і згідно принципу накладання знаходиться наближене значення реакції як сума знайдених реакцій від кожної дії. Точний розв'язок визначається граничним переходом при спрямуванні інтервалу між окремими діями до нескінченно малої величини, при цьому сума переходить в інтеграл.

Подібний підхід можна застосувати, якщо взяти за стандартну дію синусоїдну функцію, тобто зовнішнє збудження представити в виді суми синусоїдних дій. Наближене значення реакції кола можна знайти як суму реакцій від кожної синусоїдної дії, а далі для знаходження точного розв'язку провести граничний перехід.

Складність полягає в тому, що якщо збудження неперіодичне, то його не можна представити рядом Фур'є, проте якщо воно представляє собою функцію $f_1(t)$, яка діє тільки на деякому проміжку часу (рис.4.1), то її можна продовжити як періодичну.

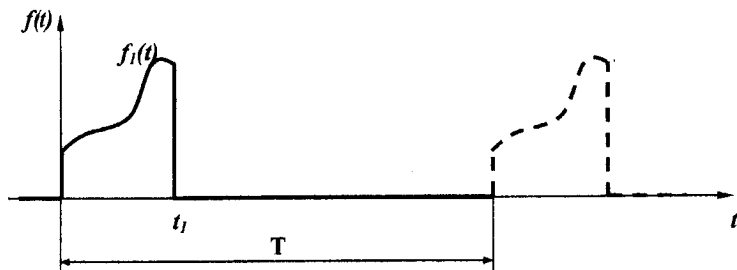


Рисунок 4.1

При цьому необхідно врахувати такі обставини. Після закінчення дії вхідного збудження в момент $t = t_1$ реакція кола має тільки вільну складову, яка з перебігом часу в лінійних колах прямує до нуля. Як відомо, практична тривалість перехідного процесу дорівнює $(4+5)\tau_{\max}$, тобто вважається, що до цього часу всі вільні складові перетворюються на нуль. Таким чином, якщо прийняти $T > (t_1 + (4+5)\tau_{\max})$, то до початку дії наступного ім-

пульсу перехідний процес від дії першого імпульсу закінчується і не впливає на реакцію кола від другого імпульсу.

Таким чином, реакція кола теж буде періодичною, при цьому закон зміни реакції кола за перший період буде близькою до справжнього перехідного процесу. Такий процес "періодизації" зовнішнього збудження вносить деяку похибку до розрахунку, передусім за рахунок того, що при практичному розрахунку враховується кінцеве число гармонік i , крім того, за час T перехідний процес все-таки не закінчується. Тим не менше такий підхід дає задовільні результати.

Приклад 4.1. Визначити закон зміни струму в колі, яке зображено на рис. 4.2,а, при прикладеній напрузі, яка показана на рис. 4.2,б.

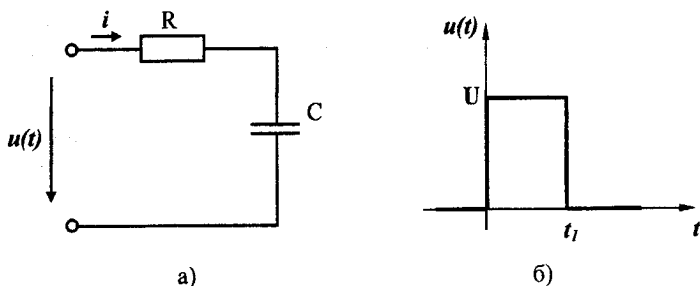


Рисунок 4.2

Визначимо постійну часу, для чого складемо диференціальне і характеристичне рівняння

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0; \quad Rp + \frac{1}{C} = 0; \quad p = -\frac{1}{RC}; \quad \tau = RC.$$

Виберемо період "періодизованої" напруги

$$T > (t_1 + (4 \div 5)\tau).$$

В результаті цього одержимо періодичну напругу (рис.4.3).

Представимо цю напругу (рис.4.3) рядом Фур'є, обмежившись кінцевим числом гармонік

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^n A_k \cos k\omega t \quad (4.1)$$

Коефіцієнти ряду Фур'є визначимо згідно виразів

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} u(t) dt = \frac{U t_1}{T},$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_1} U \cos k\omega t dt = \frac{2U}{Tk\omega} \sin k\omega t \Big|_0^{t_1} = \frac{2U}{Tk\omega} \sin k\omega t_1 = \frac{U}{k\pi} \sin k\omega t_1,$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_1} U \sin k\omega t dt = -\frac{2U}{Tk\omega} \cos k\omega t \Big|_0^{t_1} = \frac{2U}{Tk\omega} \sin k\omega t_1 = \frac{U}{k\pi} (1 - \cos k\omega t_1).$$

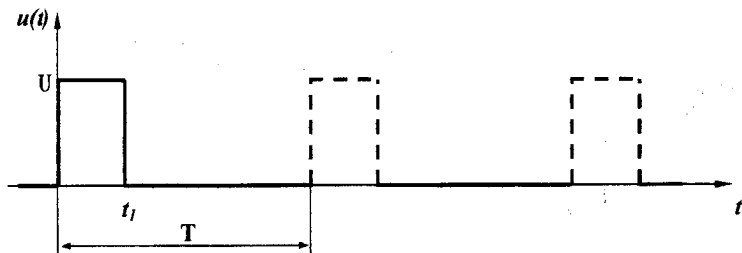


Рисунок 4.3

Представимо напругу $u(t)$ у вигляді

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n C_k \sin(k\omega t + \beta_k),$$

де

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \beta_k = \begin{cases} \arctg\left(\frac{A_k}{B_k}\right), & B_k \geq 0, \\ \arctg\left(\frac{A_k}{B_k}\right) \pm 180^\circ, & B_k < 0. \end{cases}$$

Знаходимо опір кола для k -тої гармоніки

$$\underline{Z}(jk\omega) = R + \frac{1}{jk\omega C} = \frac{1 + jk\omega C}{jk\omega C}$$

і визначаємо k -ту гармоніку струму

$$I_k = \frac{C_k}{\underline{Z}(jk\omega)} = I_k e^{j\alpha_k}.$$

Наближене значення шуканого струму

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n I_{mk} \sin(k\omega t + \alpha_k).$$

На рис.4.4 показано точне значення струму (суцільна лінія) і струму, одержаного даним методом при врахуванні трьох гармонік (пунктирна лінія).

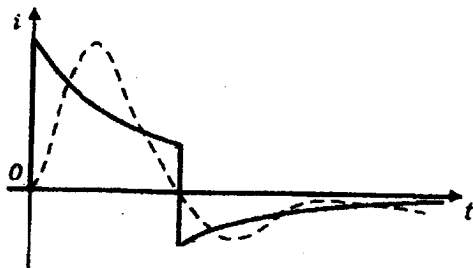


Рисунок 4.4

4.2 Спектри періодичних і неперіодичних функцій

Як відомо, будь-яка періодична функція, яка задовольняє умови Діріхле, може бути представлена в вигляді нескінченного ряду синусоїдних і косинусоїдних функцій

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^n B_k \sin k\omega_1 t, \quad (4.2)$$

де коефіцієнти ряду Фур'є визначаються за виразами

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt; \\ A_k &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt; \\ B_k &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

В (4.2) постійна складова на відміну від (4.1) записана $\frac{A_0}{2}$ для того, щоб у виразах (4.3) перед інтегралами був один і той самий множник $\frac{2}{T_1}$, а частота першої гармоніки позначена ω_1 .

Запишемо ряд (4.2) в комплексній формі. Для цього врахуємо, що

$$\begin{aligned} \sin k\omega_1 t &= \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j}, \\ \cos k\omega_1 t &= \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

і перепишемо (4.2) у вигляді

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(B_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} + A_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} \right) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(e^{jk\omega_1 t} \frac{A_k - jB_k}{2} + e^{-jk\omega_1 t} \frac{A_k + jB_k}{2} \right) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k + jB_k}{2} e^{-jk\omega_1 t}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В другій складовій (4.5) замінимо k на $(-k)$. В цьому випадку

$$\begin{aligned} A_{-k} &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(-k\omega_1 t) dt = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt = A_k; \\ B_{-k} &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(-k\omega_1 t) dt = -\frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt = -B_k. \end{aligned}$$

При заміні k на $(-k)$ в другій сумі (4.5) границями суми будуть (-1) і $(-\infty)$, тому (4.5) записується у вигляді

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{A_k + jB_k}{2} e^{jk\omega_1 t}.$$

В останньому ряді під знаком суми знаходяться одні і ті ж вирази, тому дві останні складові можна записати в вигляді однієї суми з межами

знаходження суми від $(-\infty)$ до $(+\infty)$ без одного члена для $k=0$. Визначимо значення A_k і B_k для $k=0$. Із (4.3) випливає, що для $k=0$ $A_k = A_0$, $B_k = 0$, тому $\left. \frac{A_k - jB_k}{2} \right|_{k=0} = \frac{A_0}{2}$. Отже, якщо першу складову підставити під знак суми, то

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_1 t}. \quad (4.6)$$

Позначимо $\frac{A_k - jB_k}{2} = \underline{C}_k = C_k e^{j\varphi_k}$ і назовемо цю величину комплексною амплітудою ряду Фур'є. Із (4.2) видно, що

$$\underline{C}_k = \frac{A_k - jB_k}{2} = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt - \frac{j}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt$$

або

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (4.7)$$

Отже,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_1 t}. \quad (4.8)$$

Закон розподілу амплітуд гармонійних складових C_k в залежності від частоти називають спектром амплітуд або *амплітудно-частотним спектром*. Закон розподілу початкових фаз φ_k комплексних амплітуд називають спектром фаз або *фазово-частотним спектром* функції $f(t)$.

Для періодичної функції $f(t)$, яка зображена на рис.4.5, амплітудно-

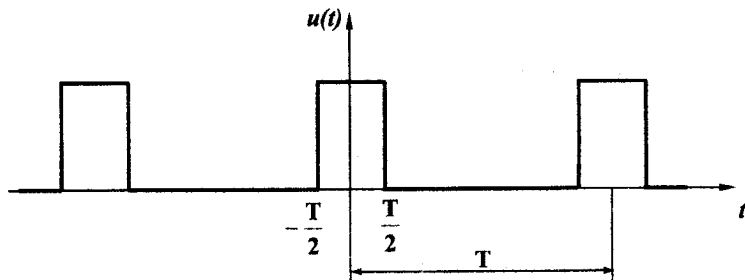


Рисунок 4.5

частотний спектр зображений на рис.4.6,а, а фазово-частотний - на рис.4.6,б, при $T_1 = 4\tau$.

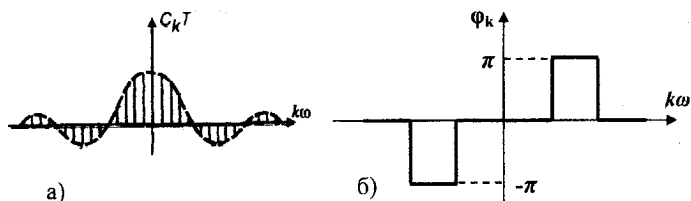


Рисунок 4.6

Як видно із рисунків, спектри періодичних функцій являють собою ряд окремих ліній, тому такі спектри називають *лінійними* або *дискретними*.

Амплітудний і фазовий спектри повністю визначають періодичну функцію.

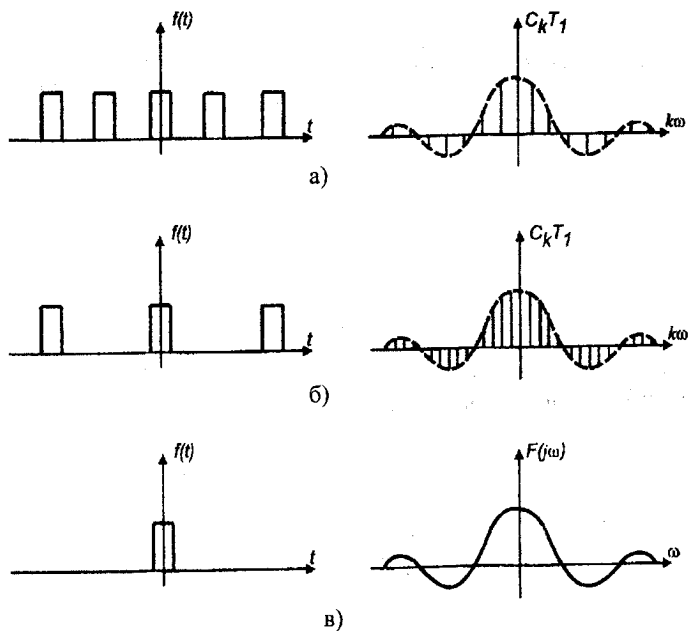


Рисунок 4.7

Виконаємо перехід до неперіодичної функції. Для цієї мети будемо збільшувати її період. Оскільки $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, то при збільшенні T_1 частота ω_1 зменшується, зменшується і інтервал між сусідніми частотами, отже, лінійний спектр стає все густішим (рис.4.7).

Оскільки в відповідності з (4.7) амплітуда C_k також зменшується (T_1 в знаменнику), на рис. 4.7 показані величини $C_k T_1$, які залишаються незмінними при збільшенні T_1 .

Коли T_1 прямує до нескінченності, різниця між сусідніми частотами $\Delta\omega = (k+1)\omega_1 - k\omega_1$ стає безмежно малою величиною $d\omega$ частот ω , а комплексна амплітуда стає безмежно малою величиною.

$$dC(j\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4.9)$$

Спектр неперіодичної функції ($T_1 \rightarrow \infty$) стає *неперервним* або *суцільним* (рис.4.7,в), а функцію

$$F(j\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.10)$$

називають *спектральною характеристикою* або *спектром* функції.

Враховуючи (4.9) і (4.10), а теж ту обставину, що при граничному переході, коли ($T_1 \rightarrow \infty$) сума в (4.8) переходить в інтеграл, можна записати

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(j\omega)e^{j\omega t}$$

або

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.11)$$

Інтегральні перетворення (4.10) і (4.11) називають відповідно *прямим* (4.10) і *оберненим* (4.11) *перетворюваннями Фур'є*.

Таким чином, неперіодична функція представляється безмежно великим числом гармонічних складових безмежно малої амплітуди $dC(j\omega)$, частоти яких відрізняються одна від одної на безмежно малу величину $d\omega$.

Вираз (4.10) дозволяє знайти спектральну характеристику функції $f(t)$, а вираз (4.11) дає можливість знайти функцію часу $f(t)$ за відомою її спектральною характеристикою.

Якщо функція $f(t)=0$ для $t < 0$, що зазвичай має місце при розгляданні періодичних процесів, то (4.10) можна записати в вигляді

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} d\omega t. \quad (4.12)$$

Таке перетворення називають *одностороннім*.

Легко виявити зв'язок одностороннього перетворення Фур'є з перетвореннями Лапласа, якщо формально замінити s на $j\omega$. Така заміна дещо звужує коло функцій, які можна піддати перетворенню Фур'є, оскільки необхідною умовою такого перетворення, крім умов Дірихле, є абсолютна інтегрованість функції $f(t)$, тобто

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt \leq M, \quad (4.13)$$

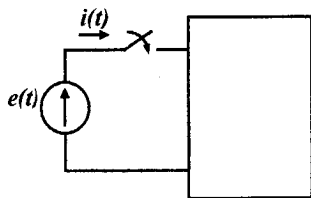
де M - число з кінцевим значенням.

Представлення неперіодичних функцій в вигляді сукупності гармонічних коливань дозволяє розраховувати перехідні процеси в лінійних електричних колах, використовуючи методи розрахунку усталених синусоїдних процесів.

4.3 Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів

Припустимо, що деяке лінійне коло (рис.4.8), яке має комплексний вхідний опір $Z(j\omega)$, вмикається в момент $t = 0$ при нульових початкових умовах до джерела напруги $e(t)$.

Визначивши спектральну характеристику вхідного збудження за (4.10) і позначивши її через $E(j\omega)$, можна знайти спектральну характеристику вхідного струму



$$I(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{Z(j\omega)} = E(j\omega)Y(j\omega), \quad (4.14)$$

де $Y(j\omega)$ – комплексна провідність двополюсника.

Використовуючи обернене перетворення Фур'є, можна знайти оригінал струму

Рисунок 4.8

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Знаходження останнього інтегралу не завжди просте, тому вираз (4.11) часто представляють в іншій формі.

Запишемо спектральну характеристику (4.10) у вигляді

$$F(j\omega) = F_1(\omega) - jF_2(\omega), \quad (4.15)$$

де

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Як вказувалося раніше, для всіх практично існуючих в теорії кіл сигналів, $f(t)=0$ для $t < 0$, тому

$$F_1(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$F_2(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (4.16)$$

Останні вирази показують, що функція $F_1(\omega)$ парна, бо $F_1(\omega) = F_1(-\omega)$, а функція $F_2(\omega)$ непарна, оскільки $F_2(\omega) = -F_2(-\omega)$. Враховуючи (4.15), запишемо (4.11) у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) - jF_2(\omega)) (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t) d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) \sin \omega t - F_2(\omega) \cos \omega t) d\omega \right).$$

Другий інтеграл в останньому виразі повинен дорівнювати нулю, оскільки функція $f(t)$ не має уявної складової, тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (4.17)$$

Вираз під інтегралом в (4.17) відносно змінної ω є парною функцією, оскільки добуток двох парних функцій $F_1(\omega)\cos\omega t$ є парною функцією, а добуток двох непарних функцій $F_2(\omega)\sin\omega t$ є теж парною функцією.

Внаслідок цього в інтегралі (4.17) можна прийняти межі інтегрування від 0 до ∞ , а результат подвоїти, тобто

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_1(\omega)\cos\omega t + F_2(\omega)\sin\omega t) d\omega. \quad (4.18)$$

Було прийнято, що $f(t)=0$ для $t < 0$, тому

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_1(\omega)\cos(-\omega t) + F_2(\omega)\sin(-\omega t)) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_1(\omega)\cos\omega t - F_2(\omega)\sin\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega)\cos\omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega)\sin\omega t d\omega = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Звідси

$$\int_0^{\infty} F_1(\omega)\cos\omega t d\omega = \int_0^{\infty} F_2(\omega)\sin\omega t d\omega \quad (4.20)$$

і

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega)\cos\omega t d\omega. \quad (4.21)$$

Таким чином, функцію часу можна визначити, якщо відома тільки дійсна частина спектральної характеристики.

Вираз (4.21) також не завжди можна визначити аналітично, але приведення задачі до визначення інтеграла (4.21) робить зручним розрахунок наближеними методами. Це особливо зручно коли характеристика $F(\omega)$ задана в табличній формі або графічно.

В такому випадку ні один із методів, крім частотного, не дає задовільних результатів.

4.4 Наближений спосіб розрахунку перехідних процесів частотним методом

Розглянемо графоаналітичний метод розрахунку перехідних процесів. Ідея методу полягає в тому, що характеристики $F(\omega)$ представляють в ви-

гляді суми деяких типових кривих $F_{1k}(\omega)$, для яких відносно просто вираховується інтеграл (4.21)

$$F_1(\omega) = \sum_{k=1}^n F_{1k}(\omega). \quad (4.22)$$

В якості таких функцій найчастіше приймають трапецію (рис. 4.9).

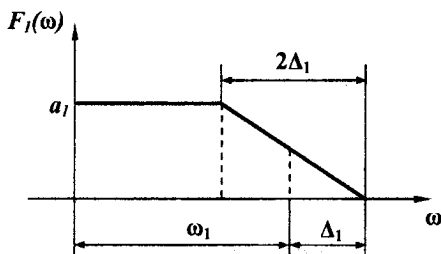


Рисунок 4.9

Нехай дійсна частина спектральної характеристики $F_1(\omega)$ має вигляд трапеції. Визначимо за заданою характеристикою $F_1(\omega)$ функцію $f(t)$. Для цього вираз (4.21) представимо так

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \frac{1}{t} d(\sin \omega t). \quad (4.23)$$

Використаємо до (4.23) формулу інтегрування частинами, позначивши $u = F_1(\omega)$, $dv = d(\sin \omega t)$, тоді $du = dF_1(\omega)$, а $v = \sin \omega t$.

Оскільки $F_1(\omega) = 0$ для $\omega \geq \omega_1 + \Delta_1$, то

$$f(t) = \frac{2}{\pi t} (F_1(\omega) \sin \omega t) \Big|_0^{\omega_1 + \Delta_1} - \frac{2}{\pi t} \int_0^{\omega_1 + \Delta_1} \sin \omega t \frac{dF_1(\omega)}{d\omega} d\omega.$$

Перша складова при підстановці верхньої і нижньої межі інтегрування перетворюється на нуль, оскільки для $\omega = 0$ $\sin \omega t = 0$, а для $\omega = \omega_1 + \Delta_1$ $F_1(\omega_1 + \Delta_1) = 0$. Похідна під інтегралом $\frac{dF_1(\omega)}{d\omega}$ відрізняється від нуля тільки на проміжку $\omega_1 - \Delta_1 < \omega < \omega_1 + \Delta_1$, де вона має значення

$$\frac{dF_1(\omega)}{d\omega} = -\frac{\alpha_1}{2\Delta_1},$$

тому

$$f(t) = -\frac{2}{\pi t} \int_{\omega_1 - \Delta_1}^{\omega_1 + \Delta_1} \left(-\frac{\alpha_1}{2\Delta_1} \right) \sin \omega t d\omega = \frac{\alpha_1}{\pi \Delta_1 t} \left(-\frac{1}{t} \cos \omega t \right) \Big|_{\omega_1 - \Delta_1}^{\omega_1 + \Delta_1} =$$

$$= -\frac{\alpha_1}{\pi \Delta_1 t^2} (\cos(\omega_1 + \Delta_1)t - \cos(\omega_1 - \Delta_1)t).$$

Якщо різницю косинусів подати як

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

то

$$f(t) = \frac{2\alpha_1}{\pi \Delta_1 t^2} \sin \omega_1 t \sin \Delta_1 t.$$

Зазвичай цей вираз записують в симетричній формі

$$f(t) = 2 \frac{\alpha_1 \omega_1}{\pi} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \frac{\sin \Delta_1 t}{\Delta_1 t}. \quad (4.24)$$

Реальні характеристики $F_1(\omega)$ в рідких випадках можна представити в вигляді однієї трапеції, проте за допомогою декількох трапецій можна апроксимувати з більшим чи меншим ступенем точності практично будь-яку характеристику.

На рис.4.10,а представлена деяка спектральна характеристика $F_1(\omega)$, а на рис.4.10,б - трапеція, що апроксимує її.

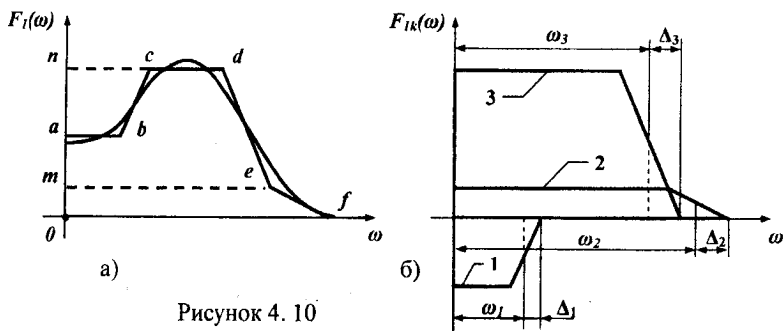


Рисунок 4.10

Апроксимація проводиться таким чином. Проводиться декілька прямих, які є дотичними або хордами заданої характеристики, щоб ламана лінія $abcdef$ з відповідною точністю апроксимувала задану характеристику

$F_1(\omega)$. Одержані на рис.4.10,а трапеції переносяться на окремий рисунок (рис. 4.10,б). Трапеція 1 є перенесеною з рис.4.10,а трапецією $ncba$, трапеція 2 - трапеція $mef\theta$, трапеція 3 - трапеція $ndem$. Параметрами трапецій 1,2,3 для використання виразу (4.24) є відповідні значення α_k , ω_k , Δ_k .

Функція часу буде визначатися з виразу

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \alpha_k \omega_k \frac{\sin \omega_k t \sin \Delta_k t}{\omega_k t \Delta_k t}, \quad (4.25)$$

де в даному прикладі $n = 3$.

4.5 Розрахунок ненульових початкових умов

При розгляді частотного методу і використанні перехідних і імпульсних характеристик зазначалася обов'язкова умова - початкові умови нульові.

Розглянемо один із методів врахування ненульових початкових умов.

Нехай коло (рис.4.11,а) за допомогою ключа K переключиться від джерела постійної е.р.с. E до джерела е.р.с. довільної форми $e(t)$ (комутація, тобто перемикаання ключа, вважаємо, відбувається миттєво).

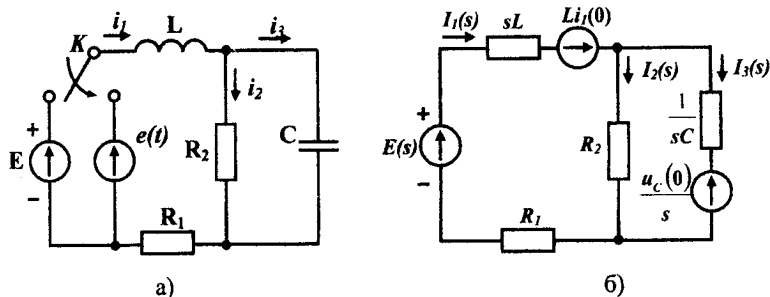


Рисунок 4.11

Початкові значення струму через індуктивність і напруги на ємності відповідно рівні

$$i_1(0) = \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad u_C(0) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

Представимо вихідну схему в операторній формі (рис.4.11, б). В цій схемі діють три е.р.с. - зовнішня $E(s)$ і дві додаткові $Li_1(0)$ і $\frac{u_C(0)}{s}$.

Використовуючи принцип накладання, операторну схему представимо в вигляді трьох схем, в кожній із яких діє тільки одна е.р.с. (рис.4.12) і протікають в кожній вітці часткові операторні струми.

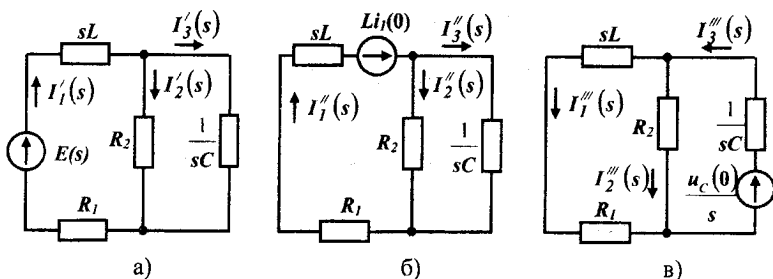


Рисунок 4.12

Переведемо три одержані операторні схеми на звичайні, в яких струми і е.р.с. будуть функціями часу, але кожна із схем тепер буде мати нульові початкові умови.

Визначимо в кожній схемі е.р.с. як функцію часу. В першій схемі зображенню е.р.с. $E(s)$ відповідає вихідна функція часу $e(t)$, в другій схемі зображенню е.р.с. $Li_1(0)$, яка є постійною величиною, відповідає оригінал $Li_1(0)\delta(t)$ - імпульсна функція, площа якої $Li_1(0)$. В третій схемі зображенню е.р.с. $\frac{u_c(0)}{s}$ відповідає оригінал $u_c(0)$ - постійна величина.

Таким чином, схеми мають вигляд, як це показано на рис.4.13.

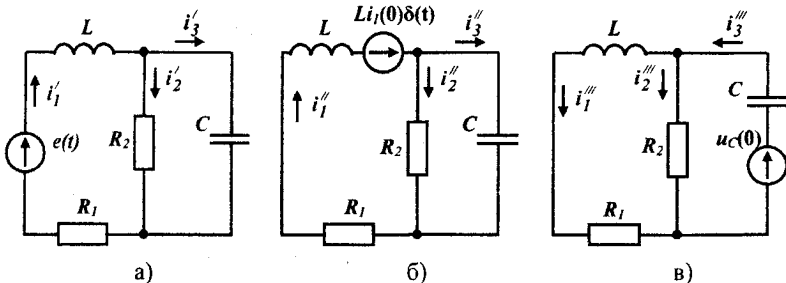


Рисунок 4.13

Використовуючи теорему накладання і імпульсні характеристики для знаходження, наприклад, струму i_1 , одержимо

$$i_1 = i_1' + i_1'' - i_1'''$$

де

$$i_1' = \int_0^t e(\tau) g_1(t-\tau) d\tau,$$

$$i_1'' = Li_1(0) g_2(t),$$

$$i_1''' = \int_0^t u_C(0) g_3(t-\tau) d\tau.$$

Імпульсні характеристики визначаються так, як це вказано в п.3.1.

4.6 Приклад використання різних методів розрахунку перехідних процесів

Визначимо струм $i_1(t)$ в колі (рис.4.14,а) різними методами, якщо до кола прикладена напруга $u(t)$ (рис.4.14,б), $R_1=20$ Ом, $R_2=80$ Ом, $L=0,2$ Г, $t_1=10$ мс, $U_1=40$ В, $U_2=100$ В при нульових початкових умовах.

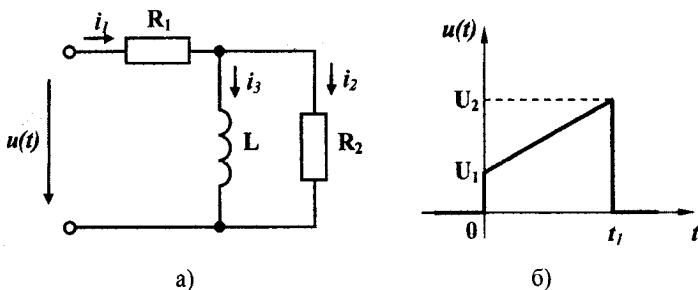


Рисунок 4.14

4.6.1 Класичний метод

Розв'язання цієї задачі необхідно проводити окремо для проміжку $0 < t < t_1$ і на проміжку $t > t_1$.

Запишемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для проміжку часу $0 < t < t_1$

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1 + L \frac{di_3}{dt} &= u(t), \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 &= u(t), \\ i_1 &= i_2 + i_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Виразимо струми i_2 та i_3 через струм i_1 . Із другого рівняння системи

$$i_2 = \frac{u(t) - R_1 i_1}{R_2}.$$

Із третього рівняння системи

$$i_3 = i_1 - i_2 = i_1 - \frac{u(t)}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} i_1 = i_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{u(t)}{R_2}. \quad (4.27)$$

Підставляємо одержані значення в перше рівняння системи

$$R_1 i_1 + \frac{L d \left(i_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{u(t)}{R_2} \right)}{dt} = u(t),$$

$$R_1 i_1 + L \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{di_1}{dt} - \frac{L}{R_2} \frac{du(t)}{dt} = u(t).$$

Звідси

$$L \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = \frac{L}{R_2} \frac{du(t)}{dt} + u(t). \quad (4.28)$$

Представимо вхідну напругу $u(t)$ в аналітичному вигляді. Із рис.4.14,6 видно, що це рівняння прямої лінії

$$u(t) = \frac{U_2 - U_1}{t_1} t + U_1 = (6000 t + 40) \text{ В.}$$

Підставляючи числові значення в (4.28), одержуємо

$$0,2 \left(1 + \frac{20}{80} \right) \frac{di_1}{dt} + 20 i_1 = \frac{0,2}{80} 6000 + 6000 t + 40$$

або

$$0,25 \frac{di_1}{dt} + 20 i_1 = 6000 t + 55. \quad (4.29)$$

Повний розв'язок цього рівняння

$$i_1 = i_{1np} + i_{1e}.$$

Залежність примусової складової струму i_{1np} від часу має такий самий вигляд, який має права частина (4.29), тобто

$$i_{1np} = at + b. \quad (4.30)$$

Оскільки примусова складова струму є розв'язком диференціального рівняння (4.29), то підставимо (4.30) в (4.29) і знайдемо коефіцієнти a і b :

$$0,25 \frac{d(at + b)}{dt} + 20(at + b) = 6000t + 55.$$

або

$$0,25a + 20at + 20b = 6000t + 55.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної t справа і зліва від знаку рівності, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} 0,25a + 20b &= 55, \\ 20a &= 6000. \end{aligned} \right\}$$

Звідси $a = 300$, $b = -1$. Таким чином,

$$i_{1np} = 300t - 1.$$

Вільна складова

$$i_{1e} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння і його корінь

$$0,25p + 20 = 0, \quad p = -80 \text{ с}^{-1}.$$

Повний розв'язок

$$i_1 = 300t - 1 + Ae^{-80t}.$$

Для визначення постійної інтегрування A знайдемо початкову умову для струму i_1 . Оскільки струм i_1 не підпорядковується законів комутації (залежна початкова умова), запишемо систему (4.26) для моменту часу $t=0_+$, врахувавши те, що $i_3(0_+) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1(0_+) + L \frac{di_3}{dt} \Big|_{t=0_+} &= u(0), \\ R_1 i_1(0_+) + R_2 i_2(0_+) &= u(0), \\ i_1(0_+) &= i_2(0_+) + i_3(0_+). \end{aligned} \right\}$$

Оскільки $i_3(0_+) = 0$, то із третього рівняння системи отримуємо, що

$$i_1(0_+) = i_2(0_+).$$

Із другого рівняння системи

$$R_1 i_1(0_+) + R_2 i_1(0_+) = u(0)$$

та

$$i_1(0_+) = \frac{u(0)}{R_1 + R_2}.$$

Оскільки $u(0) = 40$ В, то

$$i_1(0_+) = \frac{40}{20 + 80} = 0,4 \text{ А.}$$

Таким чином,

$$0,4 = 0 - 1 + A.$$

звідси

$$A = 1,4$$

і

$$i_1(t) = 300t - 1 + 1,4e^{-80t} \text{ А,} \quad 0 < t < t_1. \quad (4.31)$$

На проміжку часу $t_1 < t < \infty$ вхідна напруга дорівнює нулю, тому система рівнянь за законами Кірхгофа має вигляд

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1 + L \frac{di_3}{dt} &= 0, \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 &= 0, \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Виражаючи аналогічно попередньому проміжку струми i_2 і i_3 через i_1 , отримаємо диференціальне рівняння

$$L\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = 0 \quad (4.33)$$

або

$$0,25 \frac{di_1}{dt} + 20 i_1 = 0.$$

Оскільки права частина рівняння (4.33) дорівнює нулю, то примусова складова струму i_1 на цьому проміжку дорівнює нулю, і повний розв'язок складається тільки із вільної складової. Враховуючи, що перехідний процес на цьому проміжку починається з моменту $t = t_1$, отримуємо

$$i_1 = i_{10} = A e^{p(t-t_1)}. \quad (4.34)$$

Характеристичне рівняння

$$0,25p + 20 = 0,$$

а його корінь

$$p = -80 \text{ с}^{-1}.$$

Для знаходження постійної інтегрування A знайдемо залежне початкове значення i_1 в момент $t = t_{1+}$, тобто $i_1(t_{1+})$. Запишемо систему (4.32) для моменту $t = t_{1+}$.

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1(t_{1+}) + L \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=t_{1+}} &= 0, \\ R_1 i_1(t_{1+}) + R_2 i_2(t_{1+}) &= 0, \\ i_1(t_{1+}) - i_2(t_{1+}) - i_3(t_{1+}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Із другого рівняння системи

$$i_2(t_{1+}) = -\frac{R_1}{R_2} i_1(t_{1+}) = -0,25 i_1(t_{1+}).$$

Підставимо це значення в третє рівняння системи (4.35)

$$i_1(t_{1+}) + 0,25 i_1(t_{1+}) - i_3(t_{1+}) = 0.$$

Звідси

$$i_1(t_{1+}) = -\frac{i_3(t_{1+})}{1,25} \quad (4.36)$$

Оскільки струм i_3 підпорядковується закономірності комутації, то

$$i_3(t_{1-}) = i_3(t_{1+}).$$

Значення $i_3(t_{1-})$ знайдемо із розв'язку задачі на проміжку часу $0 < t < t_1$.

В виразі (4.27) струм i_3 виражений через струм i_1 . Підставимо в (4.27) отримане значення струму i_1 із (4.31), тоді

$$i_3 = i_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{u(t)}{R_2} = (300t - 1 + 1,4e^{-80t}) \cdot 1,25 - \frac{6000t + 40}{80} =$$

$$375t - 1,25 + 1,75e^{-80t} - 75t - 0,5 = 300t - 1,75 + 1,75e^{-80t} \text{ А.}$$

Для $t = t_1$

$$i_3(t_{1-}) = 300t_1 - 1,75 + 1,75e^{-80t_1} = 300 \cdot 0,01 - 1,75 + 1,75e^{-80t_1} =$$

$$= 1,25 + 1,75e^{-80t_1} \text{ А.}$$

Таким чином,

$$i_3(t_{1+}) = i_3(t_{1-}) = 1,25 + 1,75e^{-80t_1} \text{ А.}$$

Підставимо одержане значення $i_3(t_{1+})$ в (4.36), тоді

$$i_1(t_{1+}) = \frac{1,25 + 1,75e^{-80t_1}}{1,25} = 1 + 1,4e^{-80t_1} \text{ А.}$$

Підставляючи в (4.34) початкові умови, одержуємо

$$A = 1 + 1,4e^{-80t_1}.$$

Таким чином, на проміжку $t < t < \infty$

$$i_1(t) = (1 + 1,4e^{-80t_1}) e^{-80(t-t_1)} = 1,4e^{-80t} + 1e^{-80(t-t_1)} \text{ А.}$$

Остаточний розв'язок

$$\left. \begin{aligned} i_1(t) &= 300t - 1 + 1,4e^{-80t} \text{ А,} & 0 < t < t_1 \\ i_1(t) &= 1,4e^{-80t} + e^{-80(t-t_1)} \text{ А,} & t_1 < t < \infty \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

4.6.2 Операторний метод

Оскільки незалежні початкові умови в колі, схема якого зображена на рис.4.14,а, нульові, то операторна схема має вигляд (рис.4.15).

Вхідний струм визначається за виразом

$$I_1 = \frac{U(s)}{Z(s)}. \quad (4.38)$$

Операторний опір

$$\begin{aligned} Z(s) &= R_1 + \frac{sLR_2}{sL + R_2} = \frac{sLR_1 + R_1R_2 + sLR_2}{sL + R_2} = \\ &= \frac{sL(R_1 + R_2) + R_1R_2}{sL + R_2} = \frac{20s + 1600}{0,2s + 80}. \end{aligned}$$

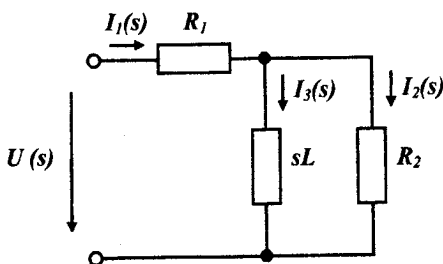


Рисунок 4.15

Знаходимо зображення прикладеної напруги

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt. \quad (4.39)$$

Оскільки напруга $u(t) = 6000t + 40$ діє тільки на проміжку $0 < t < t_1$, а для $t > t_1$, $u(t) = 0$, то верхня межа інтегрування в (4.39) буде t_1 , тому

$$U(s) = \int_0^{t_1} (6000t + 40)e^{-st} dt = 6000 \int_0^{t_1} te^{-st} dt + 40 \int_0^{t_1} e^{-st} dt.$$

Перший інтеграл табличний

$$\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right),$$

тому

$$\begin{aligned}
 U(s) &= 6000 \left(\frac{e^{-st}}{-s} \left(t + \frac{1}{s} \right) \right) \Big|_0^{t_1} + 40 \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) \Big|_0^{t_1} = \\
 &= \frac{6000}{-s} \left(e^{-st_1} \left(t_1 + \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s} \right) - \frac{40}{s} (e^{-st_1} - 1) = \\
 &= -\frac{6000t_1}{s} e^{-st_1} - \frac{6000}{s^2} e^{-st_1} + \frac{6000}{s^2} - \frac{40}{s} e^{-st_1} + \frac{40}{s} = \\
 &= \frac{40s + 6000 - (100s + 6000)e^{-st_1}}{s^2}.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Підставимо одержані значення $Z(s)$ і $U(s)$ в (4.38)

$$\begin{aligned}
 I_1(s) &= \frac{(40s + 6000 - (100s + 6000)e^{-st_1})(0.2s + 80)}{s^2(20s + 1600)} = \\
 &= \frac{(40s + 6000)(0.2s + 80)}{s^2(20s + 1600)} - \frac{(100s + 6000)(0.2s + 80)}{s^2(20s + 1600)} e^{-st_1}.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Співмножник e^{-st_1} в другій складовій показує, що оригінал цієї складової зміщений за часом на t_1 (теорема зміщення), тому друга складова враховується тільки при визначенні струму на проміжку $t_1 < t < \infty$.

Для знаходження оригіналу струму на проміжку $0 < t < t_1$ необхідно враховувати тільки першу складову. Відмітимо, що знаменник має три корені $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = -80$, причому перший кратний. Оскільки теорема розкладання в другому розділі виведена тільки для простих коренів, одержимо оригінал струму безпосереднім розкладанням першої складової на прості дробі.

Запишемо першу складову в вигляді

$$\begin{aligned}
 I_1'(s) &= \frac{(40s + 6000)(0.2s + 80)}{s^2(20s + 1600)} = \frac{8s^2 + 4400s + 48 \cdot 10^4}{s^2(20s + 1600)} = \\
 &= \frac{0,4s^2 + 220s + 24 \cdot 10^3}{s^2(s + 80)}
 \end{aligned}$$

і представимо її в вигляді суми простих дробів

$$I_1'(s) = \frac{0,4s^2 + 220s + 24 \cdot 10^3}{s^2(s + 80)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s + 80}. \tag{4.42}$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів A_1 , A_2 і A_3 приведемо прості дробу до спільного знаменника

$$I_1'(s) = \frac{A_1 s(s+80) + A_2 s(s+80) + A_3 s^2}{s^2(s+80)} = \frac{(A_1 + A_3)s^2 + (80A_1 + A_2)s + 80A_2}{s^2(s+80)} \quad (4.43)$$

і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях s у чисельниках (4.43) і (4.42). В результаті цього одержимо систему рівнянь для визначення A_1 , A_2 і A_3 .

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_3 &= 0,4, \\ 80A_1 + A_2 &= 220, \\ 80A_2 &= 24 \cdot 10^3. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо

$$A_1 = -1, \quad A_2 = 300, \quad A_3 = 1,4.$$

Таким чином,

$$I_1'(s) = \frac{-1}{s} + \frac{300}{s^2} + \frac{1,4}{s+80}.$$

Оскільки

$$\frac{A}{s} \doteq A; \quad \frac{A}{s^2} \doteq A \cdot t; \quad \frac{A}{s+a} \doteq A e^{-at}.$$

то струм на проміжку часу $0 < t < t_1$ визначається за виразом

$$i_1(t) = i_1'(t) = -1 + 300t + 1,4e^{-80t}; \quad 0 < t < t_1.$$

що збігається з (4.31).

Для знаходження оригіналу струму i_1 на проміжку $t_1 < t < \infty$ знайдемо оригінал другої складової $i_1''(t)$ і додамо його до оригіналу першої складової

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t), \quad t_1 < t < \infty.$$

Запишемо другу складову (4.41) в вигляді

$$I_1''(s) = \frac{(100s + 6000)(0,2s + 80)}{-s^2(20s + 1600)} e^{-st_1} = \frac{20s^2 + 9200s + 48 \cdot 10^4}{s^2(20s + 1600)} e^{-st_1} = \quad (4.44)$$

$$= \frac{s^2 + 460s + 24 \cdot 10^3}{s^2(s + 80)} e^{-st_1}.$$

Представимо (4.44) в вигляді суми простих дробів

$$I_1''(s) = \frac{s^2 + 460s + 24 \cdot 10^3}{s^2(s + 80)} e^{-st_1} = \left(\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s + 80} \right) e^{-st_1} =$$

$$= \frac{A_1 s(s + 80) + A_2(s + 80) + A_3 s^2}{s^2(s + 80)} e^{-st_1} = \frac{(A_1 + A_3)s^2 + (80A_1 + A_2)s + 80A_2}{s^2(s + 80)} e^{-st_1}.$$

Аналогічно складемо систему рівнянь для знаходження A_1 , A_2 та A_3

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_3 &= 1, \\ 80A_1 + A_2 &= 460, \\ 80A_2 &= 24 \cdot 10^3. \end{aligned} \right\}$$

Звідси

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 300, \quad A_3 = -1.$$

Отже,

$$I_1''(s) = \left(\frac{2}{s} + \frac{300}{s^2} - \frac{1}{s + 80} \right) e^{-st_1}. \quad (4.45)$$

Множник e^{-st_1} в (4.45) означає, що в оригіналі замість t треба записувати $t - t_1$, тому

$$i_1''(t) = -2 - 300(t - t_1) + e^{-80(t - t_1)} \text{ А.}$$

Таким чином, на проміжку $t_1 < t < \infty$

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t) = -1 + 300t + 1,4e^{-80t} - 2 - 300(t - t_1) + e^{-80(t - t_1)} =$$

$$= -3 + 1,4e^{-80t} + 300 \cdot 0,01 + e^{-80(t - t_1)} = 1,4e^{-80t} + e^{-80(t - t_1)} \text{ А,}$$

що також збігається з розв'язком, який одержаний класичним методом.

4.6.3 Використання інтеграла Дюамеля

4.6.3.1 Використання перехідної характеристики

Знайдемо перехідну характеристику для струму i_1 .

Зображення струму $I_1(s)$ визначимо за (4.38) з врахуванням, одержаного значення $Z(s)$

$$I_1(s) = \frac{U(s)(sL + R_2)}{sL(R_1 + R_2) + R_1R_2}.$$

Передаточна функція

$$K(s) = \frac{I_1(s)}{U(s)} = \frac{sL + R_2}{sL(R_1 + R_2) + R_1R_2} = \frac{0,2s + 80}{20s + 1600}. \quad (4.46)$$

Зображення перехідної характеристики

$$H(s) = \frac{K(s)}{s} = \frac{0,2s + 80}{s(20s + 1600)}.$$

Оригінал перехідної характеристики знайдемо, використавши теорему розкладання

$$h(t) = 0,05 - 0,04e^{-80t}.$$

Запишемо напругу $u(t)$, яка зображена на рис.4.14,б, в аналітичному вигляді

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = \frac{U_2 - U_1}{t_1}t + U_1 = 6000t + 40, & 0 < t < t_1; \\ u_2(t) = 0, & t_1 < t < \infty. \end{cases}$$

Струм в колі визначається для двох проміжків часу ($0 < t < t_1$) та ($t_1 < t < \infty$).

Для проміжку ($0 < t < t_1$)

$$i_1(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (4.47)$$

Оскільки $u_1'(\tau) = 6000 \frac{\text{В}}{\text{с}}$; $u_1(0) = 40 \text{ В}$, то

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= 40(0,05 - 0,04e^{-80t}) + \int_0^t 6000(0,05 - 0,04e^{-80(t-\tau)})d\tau = \\
 &= (2 - 1,6e^{-80t}) + \int_0^t 300d\tau - \int_0^t 240e^{-80(t-\tau)}d\tau = (2 - 1,6e^{-80t}) + \\
 &+ 300 \int_0^t d\tau - 240e^{-80t} \int_0^t e^{+80\tau}d\tau = (2 - 1,6e^{-80t}) + 300t - \frac{240e^{-80t}}{80}(e^{80t} - 1) = \\
 &= 2 - 1,6e^{-80t} + 300t - 3 + 3e^{-80t} = 300t - 1 + 1,4e^{-80t} \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Для проміжку $t_1 < t < \infty$.

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (0 - U_2)h(t-t_1) = \\
 &= 40(0,05 - 0,04e^{-80t}) + \int_0^{t_1} 6000(0,05 - 0,04e^{-80(t-\tau)})d\tau - 100(0,05 - 0,04e^{-80(t-t_1)}) = \\
 &= 2 - 1,6e^{-80t} + \int_0^{t_1} 300d\tau - 240e^{-80t} \int_0^{t_1} e^{80\tau}d\tau - 5 + 4e^{-80(t-t_1)} = 2 - 1,6e^{-80t} + 300t_1 - \\
 &- \frac{240e^{-80t}}{80}(e^{80t_1} - 1) - 5 + 4e^{-80(t-t_1)} = 2 - 1,6e^{-80t} + 3 - 3e^{-80(t-t_1)} + 3e^{-80t} - 5 + \\
 &+ 4e^{-80(t-t_1)} = 1,4e^{-80t} + e^{-80(t-t_1)} \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Одержані значення струму i_1 збігаються із знайденими значеннями струму i_1 іншими методами.

4.6.3.2 Використання імпульсної характеристики

Зображення імпульсної характеристики

$$G(s) = K(s) = \frac{0,2s + 80}{20s + 1600}.$$

Найвищі степені s в чисельнику і знаменнику $G(s)$ однакові, тому теорему розкладання, яка приводилася раніше, використовувати не можна, оскільки ця теорема розкладання виведена за умови, що найвищий ступінь s в чисельнику менший найвищого степеня s в знаменнику. Тому розділимо один раз чисельник на знаменник

$$G(s) = 0,01 + \frac{64}{20s + 1600} = 0,01 + \frac{3,2}{s + 80}.$$

Оскільки

$$\frac{A}{s + \alpha} \doteq Ae^{-\alpha t}, \quad A \doteq A\delta(t),$$

то

$$g(t) = 0,01\delta(t) + 3,2e^{-80t},$$

де $\delta(t)$ – функція Дірака.

Як і в попередньому випадку струм визначаємо окремо на двох проміжках

$$0 < t < t_1 \quad \text{та} \quad t_1 < t < \infty.$$

Для проміжку $0 < t < t_1$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t (6000\tau + 40)(0,01\delta(t-\tau) + 3,2e^{-80(t-\tau)})d\tau = \\ &= \int_0^t (60\tau\delta(t-\tau)d\tau + \int_0^t 0,4\delta(t-\tau)d\tau + \int_0^t 19200\tau e^{-80(t-\tau)}d\tau + \int_0^t 128e^{-80(t-\tau)}d\tau. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Оскільки $f(\tau)\delta(t-\tau) = f(t)\delta(t-\tau)$, тому що функція $\delta(t-\tau)$ дорівнює нулю всюди крім $\tau = t$, то

$$\int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) \int_0^t \delta(t-\tau)d\tau = f(t).$$

Тому перші два інтеграли в (4.48) відповідно рівні

$$\int_0^t 60\tau\delta(t-\tau)d\tau = 60t, \quad \int_0^t 0,4\delta(t-\tau)d\tau = 0,4,$$

отже,

$$i_1(t) = 60t + 0,4 + 19200e^{-80t} \int_0^t \tau e^{80\tau}d\tau + 128e^{-80t} \int_0^t e^{80\tau}d\tau.$$

Оскільки

$$\int xe^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right),$$

то

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= 60t + 0,4 + 19200e^{-80t} \left(\frac{e^{80\tau}}{80} \left(\tau - \frac{1}{80} \right) \right) \Big|_0^t + \frac{128e^{-80t}}{80} \left(e^{80\tau} \right) \Big|_0^t = \\
 &= 60t + 0,4 + \frac{19200}{80} e^{-80t} \left(e^{80t} \left(t - \frac{1}{80} \right) + \frac{1}{80} \right) + 1,6e^{-80t} (e^{80t} - 1) = \\
 &= 60t + 0,4 + 240t - 3 + 3e^{-80t} + 1,6 - 1,6e^{-80t} = 300t - 1 + 1,4e^{-80t} \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Для проміжку $t_1 < t < \infty$

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= \int_0^{t_1} u(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{t_1} (6000\tau + 40)(0,01\delta(t-\tau) + 3,2e^{-80(t-\tau)})d\tau = \\
 &= \int_0^{t_1} (60\tau\delta(t-\tau)d\tau + \int_0^{t_1} 0,4\delta(t-\tau)d\tau + \int_0^{t_1} 19200\tau e^{-80(t-\tau)}d\tau + \int_0^{t_1} 128e^{-80(t-\tau)}d\tau. \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

В інтегралах виразу (4.49) змінна t змінюється від t_1 до безмежності, тому δ -функція, яка не дорівнює нулю тільки для $\tau = t$ та дорівнює нулю для всіх $\tau < t_1$, і відповідно функція $\delta(t-\tau)$ в перших двох інтегралах (4.49) дорівнює нулю, оскільки межами інтегрування їх є значення $\tau = 0$ та $\tau = t_1$.

Таким чином,

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= 19200e^{-80t} \int_0^{t_1} \tau e^{80\tau} d\tau + 128e^{-80t} \int_0^{t_1} e^{80\tau} d\tau = \\
 &= 19200e^{-80t} \left(\frac{e^{80\tau}}{80} \left(\tau - \frac{1}{80} \right) \right) \Big|_0^{t_1} + \frac{128e^{-80t}}{80} \left(e^{80\tau} \right) \Big|_0^{t_1} = 240e^{-80t} \left(e^{80t_1} \left(t_1 - \frac{1}{80} \right) + \frac{1}{80} \right) + \\
 &+ 1,6e^{-80t} (e^{80t_1} - 1) = 240t_1 e^{-80(t-t_1)} - 3e^{-80(t-t_1)} + 3e^{-80t} + 1,6e^{-80(t-t_1)} - 1,6e^{-80t} = \\
 &= 1,4e^{-80t} + e^{-80(t-t_1)} \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Остаточний розв'язок

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= 300t - 1 + 1,4e^{-80t} \text{ А; } & 0 < t < t_1, \\
 i_1(t) &= 1,4e^{-80t} + e^{-80(t-t_1)} \text{ А; } & t_1 < t < \infty.
 \end{aligned}$$

4.6.4 Метод періодизації неперіодичного збудження

Для розрахунку перехідного процесу в колі (рис.4.14,а) даним методом будемо вважати, що на вході діє періодична напруга $u_1(t)$ з періодом T_1 (рис.4.16).

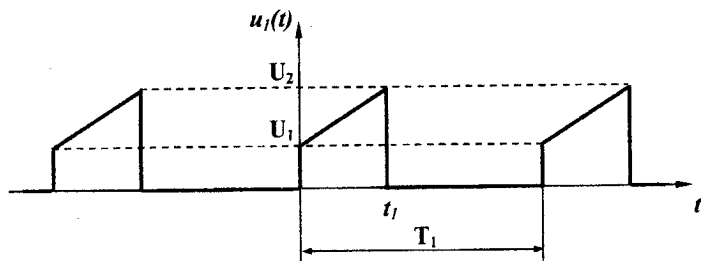


Рисунок 4.16

В межах першого періоду напруга на проміжку $0 < t < t_1$ описується рівнянням

$$u(t) = \frac{U_2 - U_1}{t_1} t + U_1 = 6000t + 40 \text{ В.}$$

Оскільки постійна часу кола

$$\tau = \frac{T}{|p|} = \frac{1}{80} = 0,0125 \text{ с,}$$

необхідно, щоб

$$T_1 > t_1 + (4 \div 5)\tau = 0,01 + (4 \div 5)0,0125 \text{ с.}$$

Нехай $T_1 = 0,0628 \text{ с}$, тоді

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 100 \text{ рад с}^{-1}.$$

Розкладемо вхідну періодичну напругу в ряд Фур'є. Для цього насамперед визначимо його коефіцієнти за виразами

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T_1} \int_0^{t_1} u(t) \cos k\omega_1 t dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{t_1} (6000t + 40) \cos k\omega_1 t dt = \\ &= \frac{19.1}{k^2} (\cos k\omega_1 t_1 - 1) + \frac{31.83}{k} \sin k\omega_1 t_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{T_1} \int_0^{t_1} u(t) \sin k\omega_1 t dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{t_1} (6000t + 40) \sin k\omega_1 t dt = \\ &= \frac{19.1}{k^2} \sin k\omega_1 t_1 - \frac{31.83}{k} \cos k\omega_1 t_1 - \frac{12.73}{k}. \end{aligned}$$

Обмежуючись п'ятьма гармоніками і постійною складовою, одержуємо ряд Фур'є у вигляді

$$u(t) = 11,16 + 11,6 \sin \omega_1 t + 18 \cos \omega_1 t + 17,33 \sin 2\omega_1 t + 7,71 \cos 2\omega_1 t + 5,05 \sin 3\omega_1 t - 2,73 \cos 3\omega_1 t + 7,48 \sin 4\omega_1 t - 8 \cos 4\omega_1 t + 0,008 \sin 5\omega_1 t - 6,65 \cos 5\omega_1 t \quad \text{В,}$$

або

$$u(t) = 11,16 + 21,42 \sin(\omega_1 t + 57,2^\circ) + 19 \sin(2\omega_1 t + 24^\circ) + 15,3 \sin(3\omega_1 t - 10,27^\circ) + 10,95 \sin(4\omega_1 t - 46,91^\circ) + 6,65 \sin(5\omega_1 t - 89,93^\circ) \quad \text{В.}$$

Знаходимо комплексний вхідний опір кола для k -ї гармоніки

$$\underline{Z}^{(k)} = R_1 + \frac{R_2 j k \omega_1 L}{R_2 + j k \omega_1 L} = 20 + \frac{1600k}{6400 + j20k} \quad \text{Ом.}$$

Визначимо вхідний струм для кожної гармоніки окремо.

$$\underline{I}_{m1}^{(k)} = \frac{U_m^{(k)}}{\underline{Z}^{(k)}}.$$

В результаті розрахунків одержуємо

$$k = 0, \quad \underline{I}_1^{(0)} = \frac{U^{(0)}}{Z^{(0)}} = \frac{U^{(0)}}{R_1} = \frac{11,16}{20} = 0,558 \quad \text{А.}$$

$$k = 1, \quad \underline{I}_{m1}^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{Z^{(1)}} = \frac{21,42 e^{j57,2^\circ}}{31,06 e^{j37,30^\circ}} = 0,69 e^{j19,9^\circ} \quad \text{А.}$$

$$k = 2, \quad \underline{I}_{m1}^{(2)} = \frac{U_m^{(2)}}{Z^{(2)}} = \frac{18,97 e^{j24^\circ}}{48,17 e^{j41,63^\circ}} = 0,394 e^{-j17,63^\circ} \quad \text{А.}$$

$$k = 3, \quad \underline{I}_{m1}^{(3)} = \frac{U_m^{(3)}}{Z^{(3)}} = \frac{15,3 e^{-j10,27^\circ}}{62,1 e^{j38,2^\circ}} = 0,246 e^{-j48,47^\circ} \quad \text{А.}$$

$$k = 4, \quad \underline{I}_{m1}^{(4)} = \frac{U_m^{(4)}}{Z^{(4)}} = \frac{10,95 e^{-j46,91^\circ}}{72,11 e^{j33,69^\circ}} = 0,152 e^{-j80,6^\circ} \quad \text{А.}$$

$$k = 5, \quad I_{m1}^{(5)} = \frac{U_m^{(5)}}{Z^{(5)}} = \frac{6,652e^{-j89,93^\circ}}{79,08e^{j29,57^\circ}} = 0,084e^{-j119,5^\circ} \text{ A.}$$

Миттєве значення вхідного струму

$$i_1(t) = I^{(0)} + i_1^{(1)}(t) + i_1^{(2)}(t) + i_1^{(3)}(t) + i_1^{(4)}(t) + i_1^{(5)}(t) = 0,558 + 0,69 \times \\ \times \sin(\omega_1 t + 19,9^\circ) + 0,394 \sin(2\omega_1 t - 17,63^\circ) + 0,246 \sin(3\omega_1 t - 48,47^\circ) + \\ + 0,152 \sin(4\omega_1 t - 80,6^\circ) + 0,084 \sin(5\omega_1 t - 119,5^\circ) \text{ A.} \quad (4.50)$$

За результатами розрахунків побудований графік зміни струму i_1 в залежності від часу (рис.4.17). Темного кольору лінія - наближене значення струму i_1 за виразом (4.50), світлого - точне значення струму i_1 за виразом (4.37).

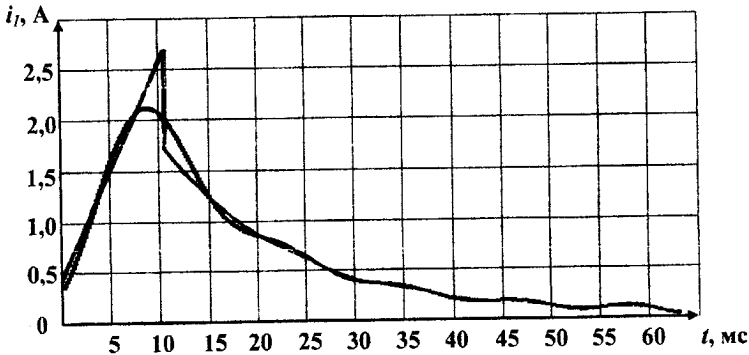


Рисунок 4.17

Графік показує, що найбільша похибка одержана для t , близьких до t_1 , коли струм i_1 змінюється стрибком. Більшу точність можна одержати, якщо враховувати більше число гармонік.

4.6.5 Частотний метод

При використанні частотного методу необхідно знайти спектральну характеристику вхідного струму $I_1(j\omega)$, для чого потрібно заздалегідь визначити спектральну характеристику вхідної напруги $U(j\omega)$ і частотну характеристику вхідного опору $Z(j\omega)$.

$$I_1(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)}. \quad (4.51)$$

Спектральну характеристику вхідної напруги знайдемо, використовуючи пряме одностороннє перетворення Фур'є

$$U(j\omega) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Як вказувалося, спектральну характеристику можна одержати, знаючи зображення вхідної напруги шляхом заміни s на $j\omega$. Зображення $U(s)$ одержане раніше (4.40)

$$U(s) = \frac{(40s + 6000) - (100s + 6000)e^{-st_1}}{s^2}.$$

Для $s = j\omega$

$$U(j\omega) = \frac{(6000 + j40\omega) - (6000 + j100\omega)e^{-j\omega t_1}}{-\omega^2}.$$

Представимо $U(j\omega)$ як суму дійсної та уявної складових, $t_1 = 0,01$ с.

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \frac{(6000 + j40\omega) - (6000 + j100\omega)(\cos\omega 0,01 - j\sin\omega 0,01)}{-\omega^2} = \\ &= \frac{6000 - 6000\cos\omega 0,01 - 100\omega\sin\omega 0,01}{-\omega^2} + j\frac{40\omega - 100\omega\cos\omega 0,01 + 6000\sin\omega 0,01}{-\omega^2} = \quad (4.52) \\ &= \frac{100}{\omega^2}(60\cos\omega 0,01 + \omega\sin\omega 0,01 - 60) + j\frac{100}{\omega^2}(\omega\cos\omega 0,01 - 60\sin\omega 0,01 - 0,4\omega) = \\ &= U_1(\omega) + jU_2(\omega). \end{aligned}$$

Отже,

$$U_1(\omega) = \frac{100}{\omega^2}(60\cos\omega 0,01 + \omega\sin\omega 0,01 - 60),$$

$$U_2(\omega) = \frac{100}{\omega^2}(\omega\cos\omega 0,01 - 60\sin\omega 0,01 - 0,4\omega).$$

Частотна характеристика опору

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= R_1 + \frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L} = R_1 + \frac{R_2 j\omega L(R_2 - j\omega L)}{R_2^2 + \omega^2 L^2} = \\ &= R_1 + \frac{R_2(\omega L)^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} + j\frac{R_2^2 \omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2}. \end{aligned}$$

Позначивши

$$Z_1 = R_1 + \frac{R_2(\omega L)^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} = \frac{100\omega^2 + 3,2 \cdot 10^6}{\omega^2 + 16 \cdot 10^4},$$

$$Z_2 = \frac{R_2^2 \omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2} = \frac{3,2 \cdot 10^4 \omega}{\omega^2 + 16 \cdot 10^4},$$

одержимо

$$Z(j\omega) = Z_1 + jZ_2. \quad (4.53)$$

Підставляючи (4.52) і (4.53) в (4.51), одержуємо

$$\begin{aligned} I_1(j\omega) &= \frac{U_1(\omega) + jU_2(\omega)}{Z_1(\omega) + jZ_2(\omega)} = \frac{(U_1(\omega) + jU_2(\omega))(Z_1(\omega) - jZ_2(\omega))}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)} = \\ &= \frac{U_1(\omega)Z_1(\omega) + U_2(\omega)Z_2(\omega)}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)} + j \frac{U_2(\omega)Z_1(\omega) - U_1(\omega)Z_2(\omega)}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)}. \end{aligned}$$

Позначивши

$$\left. \begin{aligned} I_1'(\omega) &= \frac{U_1(\omega)Z_1(\omega) + U_2(\omega)Z_2(\omega)}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)}, \\ I_1''(\omega) &= \frac{U_2(\omega)Z_1(\omega) - U_1(\omega)Z_2(\omega)}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

одержуємо

$$I_1(j\omega) = I_1'(j\omega) + I_1''(j\omega). \quad (4.55)$$

Знаючи дійсну частину спектральної характеристики струму $I_1'(\omega)$ можна з (4.21) знайти оригінал струму

$$i_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} I_1'(\omega) \cos \omega t dt. \quad (4.56)$$

Якщо замість $I_1(\omega)$ підставити його значення із (4.54) з врахуванням всіх складових, що є функціями від ω , то розрахунок інтегралу (4.56) буде доволі складним. Тому скористаємося для знаходження $i_1(t)$ методом трапецій.

Побудуємо для цієї мети дійсну частину $I_1'(\omega)$ спектральної характеристики $I_1(j\omega)$ за виразом (4.54) (рис.4.18). Апроксимуємо одержану ха-

рактеристику трьома трапеціями (рис.4.19), параметри яких визначасмо із графіків

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 3,2 \cdot 10^{-2}, & a_2 &= 0,87 \cdot 10^{-2}, & a_3 &= -0,57 \cdot 10^{-2}, \\
 \omega_1 &= 65, & \omega_2 &= 170, & \omega_3 &= 490, \\
 \Delta_1 &= 55, & \Delta_2 &= 50, & \Delta_3 &= 110.
 \end{aligned}$$

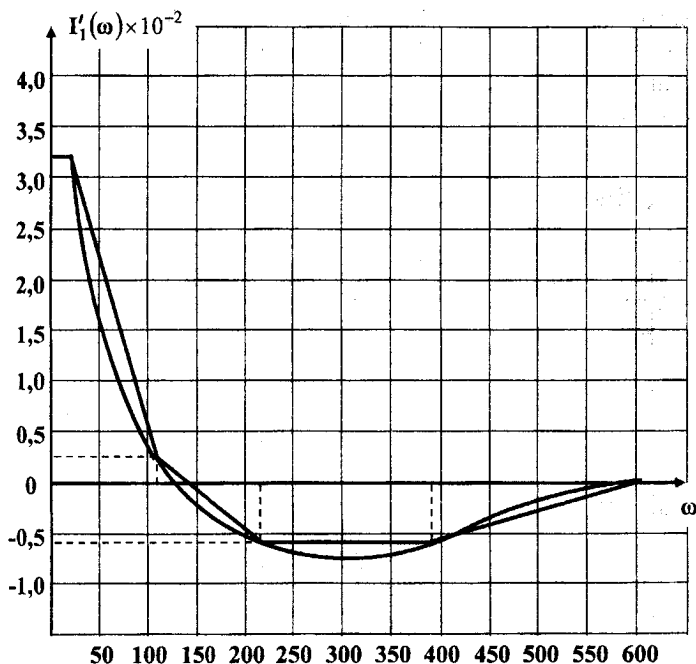


Рисунок 4.18

Скориставшись виразом (4.25), визначаємо вхідний струм $i_1(t)$. В табл. 1 приведені точні значення струму $i_1(t)$ і значення, які одержані методом трапецій і методом періодизації вхідної напруги.

Таблиця 1

| Методи розрахунку | t , мс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| точний | i , А | 0,400 | 0,592 | 0,793 | 1,000 | 1,217 | 1,438 | 1,666 | 1,900 |
| трапецій | i , А | 0,488 | 0,554 | 0,745 | 1,026 | 1,351 | 1,668 | 1,930 | 2,100 |
| періодизації | i , А | 0,265 | 0,472 | 0,731 | 1,022 | 1,319 | 1,594 | 1,818 | 1,970 |

Продовження таблиці 1

| Методи розрахунку | $t, \text{мс}$ | 8 | 9 | 10 | 10 ₊ | 15 | 20 | 25 | 30 |
|-------------------|----------------|-------|-------|-------|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| точний | i, A | 2,138 | 2,381 | 2,630 | 1,629 | 1,092 | 0,732 | 0,491 | 0,329 |
| трапецій | i, A | 2,163 | 2,119 | 1,987 | 1,060 | 0,760 | 0,436 | 0,272 | 0,170 |
| періодизації | i, A | 2,038 | 2,019 | 1,924 | 1,924 | 1,012 | 0,751 | 0,480 | 0,321 |

Продовження таблиці 1

| Методи розрахунку | $t, \text{мс}$ | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
|-------------------|----------------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| точний | i, A | 0,220 | 0,148 | 0,0991 | 0,0664 | 0,0445 | 0,0298 |
| трапецій | i, A | 0,170 | 0,141 | 0,065 | 0,0095 | 0,0025 | 0,011 |
| періодизації | i, A | 0,239 | 0,127 | 0,125 | 0,0384 | 0,0762 | -0,0017 |

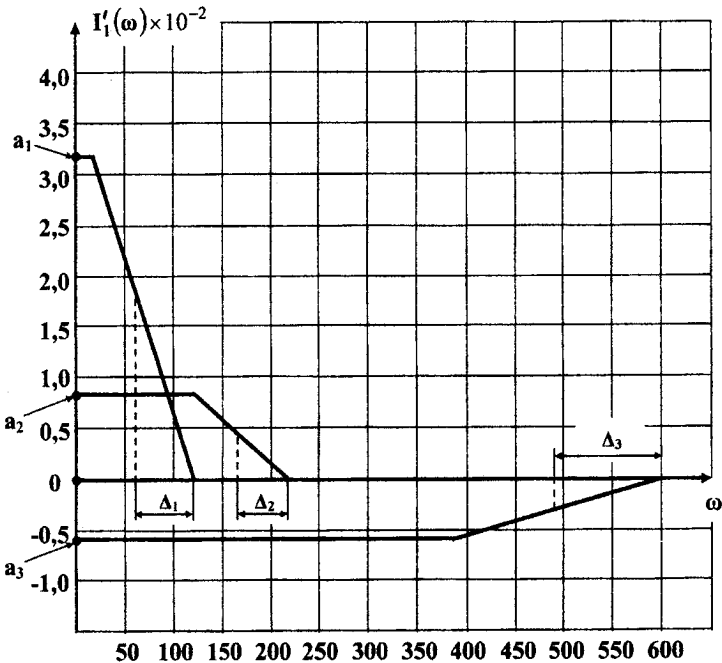


Рисунок 4.19

Із таблиці видно, що результати, які отримали методом періодизації, найбільше відрізняється від результатів, що отримані точними методами. Точність цього методу можна підвищувати враховуючи більшу кількість гармонік.

Приклади моделювання перехідних процесів в математичному середовищі Maple

Математична система Maple – це досить потужний програмний пакет, призначений для автоматизації символічних та числових розрахунків. Його функціональні можливості охоплюють основні розділи математики, зокрема такі як лінійна алгебра, диференціальне та інтегральне числення, інтегральні перетворення, векторний аналіз, геометрія, статистика, що цілком достатньо для розв'язання більшості задач теоретичної електротехніки.

Розглянемо кілька прикладів, в яких за допомогою математичної системи Maple проведемо моделювання перехідних процесів в лінійних електричних колах.

Приклад А.1. Розрахунок перехідного процесу в колі 1-го порядку класичним методом.

Для кола, що зображено на рис. А.1 потрібно знайти струм i_4 та напругу на ємності u_C , якщо параметри його елементів: $E=10$ В, $R_1=10$ Ом, $R_2=20$ Ом, $R_3=15$ Ом, $R_4=5$ Ом, $R_5=7$ Ом, $R_6=10$ Ом, $C=10$ мкФ.

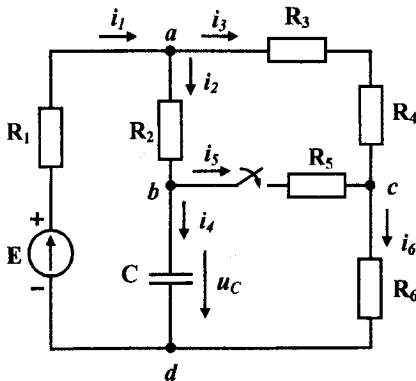


Рисунок А.1

Насамперед задамо в Maple значення параметрів елементів електричного кола:

```
> restart:
> E:=10: R1:=10: R2:=20: R3:=15: R4:=5: R5:=7:
R6:=10: C:=10*10^(-6):
```

Визначимо незалежну початкову умову:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{E(R_3 + R_4 + R_6)}{R_1 + R_3 + R_4 + R_6}. \quad (1)$$

Для післякомутаційного кола складемо за законами Кірхгофа систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ i_2 - i_4 - i_5 = 0, \\ i_3 + i_5 - i_6 = 0, \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 + u_C = E, \\ -R_2 i_2 + (R_3 + R_4) i_3 - R_5 i_5 = 0, \\ R_5 i_5 + R_6 i_6 - u_C = 0, \\ i_4 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (2)$$

Таким чином, розв'язок задачі зводиться до розв'язання даної системи диференціальних рівнянь для визначеної незалежної початкової умови $u_C(0_+)$ (задача Коші).

Опишемо цю систему рівнянь мовою Maple:

```
> Sys:= i1(t)-i2(t)-i3(t)=0, i2(t)-i4(t)-i5(t)=0,
i3(t)+i5(t)-i6(t)=0, i1(t)*R1+i2(t)*R2+uc(t)=E,
-i2(t)*R2+i3(t)*(R3+R4)-i5(t)*R5=0, i5(t)*R5+
+i6(t)*R6-uc(t)=0, i4(t)=C*diff(uc(t),t);
```

```
Sys := i1(t) - i2(t) - i3(t) = 0, i2(t) - i4(t) - i5(t) = 0, i3(t) + i5(t) - i6(t) = 0,
10 i1(t) + 20 i2(t) + uc(t) = 10, -20 i2(t) + 20 i3(t) - 7 i5(t) = 0,
```

```
7 i5(t) + 10 i6(t) - uc(t) = 0, i4(t) =  $\frac{1}{100000} \left( \frac{\partial}{\partial t} uc(t) \right)$ 
```

Для зручності зведемо всі невідомі функції часу в одну множину Rozw :

```
> Rozw:={uc(t), i1(t), i2(t), i3(t), i4(t), i5(t), i6(t)}:
```

і за допомогою Maple-команди `dsolve` розв'яжемо систему лінійних диференціальних рівнянь:

```
> dsolve({Sys, uc(0)=E*(R3+R4+R6)/(R1+R3+R4+R6)}, Rozw):
```

$$\begin{aligned} \{u_C(t) &= \frac{305}{74} + \frac{125}{37} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}, i_4(t) = -\frac{50}{157} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}, i_2(t) = \frac{5}{37} - \frac{600}{5809} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}, \\ i_5(t) &= \frac{5}{37} + \frac{1250}{5809} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}, i_1(t) = \frac{47}{148} - \frac{1525}{11618} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}, \\ i_6(t) &= \frac{47}{148} + \frac{2175}{11618} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}, i_3(t) = \frac{27}{148} - \frac{325}{11618} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)} \} \end{aligned}$$

Отже, напруга на ємності після комутації буде змінюватися в часі за законом:

$$u_C(t) = \frac{305}{74} + \frac{125}{37} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)} \text{ В,} \quad (3)$$

а струм i_4 –

$$i_4(t) = -\frac{50}{157} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)} \text{ А.} \quad (4)$$

Побудуємо графіки знайдених функцій.

Для цього спочатку визначимося з практичною тривалістю перехідного процесу.

Як відомо, стала часу для кола 1-го порядку τ дорівнює:

$$\tau = \frac{1}{|p|},$$

де p - корінь характеристичного рівняння. В нашому випадку, як видно з формули (3) або (4),

$$p = -\frac{1480000}{157} \text{ с}^{-1}.$$

Практична тривалість перехідного процесу t_l дорівнює $(4+5)\tau$.

```
> tau:= 1/abs(-1480000/157);
```

$$\tau := \frac{157}{1480000}$$

```
> tl:=5*tau;
```

$$tl := \frac{157}{296000} ;$$

Тоді графік напруги $u_c(t)$ буде мати вигляд (рис. А.2):

```
> uc(t) := 305/74 + 125/37 * exp(-1480000/157*t);
> plot(uc(t), t=0..t1, uc=0..8, color=black);
```

$$u_c(t) := \frac{305}{74} + \frac{125}{37} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}$$

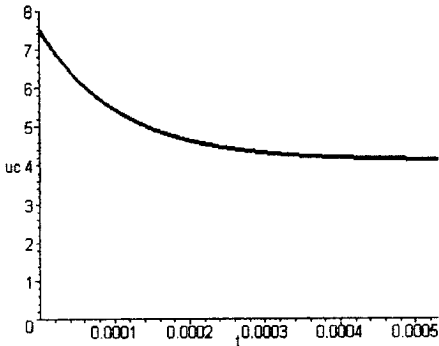


Рисунок А.2

Графік струму $i_d(t)$ побудуємо аналогічно, але вже зобразивши струм i для $t < 0$. Для цього сформуємо наступну функцію струму $i_d(t)$:

$$i_d(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -\frac{50}{157} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}, & t \geq 0. \end{cases}$$

та введемо її в комп'ютер за допомогою Маріє-функції *piecewise*:

```
> i4:=t-> piecewise
(t<0,0, t>=0,-50/157*
*exp(-1480000/157*t));
```

Побудуємо графік струму $i_d(t)$ (рис. А.3):

```
> plot(i4(t), t=-tau..
t1, color=black);
```

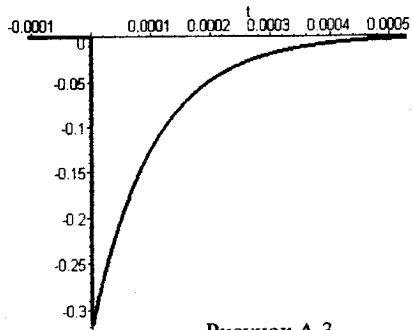


Рисунок А.3

Приклад А.2. Розрахунок перехідного процесу в колі 1-го порядку операторним методом.

Для того ж самого кола, що зображене на рис. А.1 знайдемо струм i_4 та напругу на ємності u_C за допомогою операторного методу.

Як і в попередньому випадку задамо значення параметрів елементів електричного кола:

```
> restart;
> E:=10: R1:=10: R2:=20: R3:=15: R4:=5: R5:=7:
R6:=10: C:=10*10^(-6):
```

і визначимо незалежну початкову умову $u_C(0_+)$:

```
> uc(0) := E * (R3 + R4 + R6) / (R1 + R3 + R4 + R6);
```

$$uc(0) := \frac{15}{2}$$

Для операторної схеми (рис. А.4) складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа в операторній формі (5):

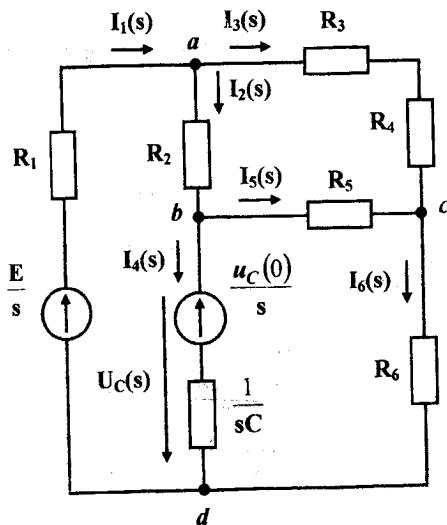


Рисунок А.4

$$\begin{cases} I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) = 0, \\ I_2(s) - I_4(s) - I_5(s) = 0, \\ I_3(s) + I_5(s) - I_6(s) = 0, \\ R_1 I_1(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{sC} I_4(s) = \frac{E}{s} - \frac{u_C(0)}{s}, \\ -R_2 I_2(s) + (R_3 + R_4) I_2(s) - R_5 I_5(s) = 0, \\ -\frac{1}{sC} I_4(s) + R_5 I_5(s) + R_6 I_6(s) = \frac{u_C(0)}{s}. \end{cases} \quad (5)$$

Опишемо цю систему мовою Maple:

```
> Sys := { I1(s) - I2(s) - I3(s) = 0, I2(s) - I4(s) - I5(s) = 0,
  I3(s) + I5(s) - I6(s) = 0, I1(s) * R1 + I2(s) * R2 + I4(s) * (1 /
  / (s * C)) = E / s - uc(0) / s, -I2(s) * R2 + I3(s) * (R3 + R4) - I5(s) *
  * R5 = 0, -I4(s) * (1 / (s * C)) + I5(s) * R5 + I6(s) * R6 = uc(0) / s ;
```

```
Sys := { I1(s) - I2(s) - I3(s) = 0, I2(s) - I4(s) - I5(s) = 0, I3(s) + I5(s) - I6(s) = 0.
```

$$10 I1(s) + 20 I2(s) + \frac{100000 I4(s)}{s} = \frac{5 I}{2 s}, -20 I2(s) + 20 I3(s) - 7 I5(s) = 0,$$

$$-100000 \frac{I4(s)}{s} + 7 I5(s) + 10 I6(s) = \frac{15 I}{2 s} \}$$

та за допомогою функції *solve* розв'яжемо її.

```
> Rozw := { I1(s), I2(s), I3(s), I4(s), I5(s), I6(s) } :
> solve(Sys, Rozw) ;
```

$$\left\{ \begin{aligned} I4(s) &= -50 \frac{1}{1480000 + 157s}, I2(s) = 5 \frac{s + 40000}{s(1480000 + 157s)}, \\ I3(s) &= \frac{1}{4} \frac{97s + 1080000}{s(1480000 + 157s)}, I5(s) = 5 \frac{11s + 40000}{s(1480000 + 157s)}, \\ I6(s) &= \frac{1}{4} \frac{317s + 1880000}{s(1480000 + 157s)}, I1(s) = \frac{1}{4} \frac{117s + 1880000}{s(1480000 + 157s)} \end{aligned} \right\}$$

Таким чином, зображенням струму $i_4(t)$ буде функція:

$$I_4(s) = -50 \frac{1}{1480000 + 157s}.$$

Опишемо її за допомогою Maple:

```
> I4(s) := -50 * 1 / (157 * s + 1480000) :
```

Для визначення оригіналу функції за відомим зображенням через зворотне перетворення Лапласа скористаємось одним з найважливіших прикладних пакетів Maple – пакетом інтегральних перетворень *inttrans*. Для цього активізуємо його.

```
> with(inttrans);
```

```
[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]
```

В склад цього пакета входить Maple-функція *invlaplace*, за допомогою якої ми і відшукаємо оригінал комплексної функції $I_4(s)$.

```
> invlaplace(I4(s), s, t);
```

$$-\frac{50}{157} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}$$

Отже, струм i_4 після комутації буде змінюватися в часі за законом:

$$i_4(t) = -\frac{50}{157} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)} \text{ А.} \quad (6)$$

За допомогою закона Ома в операторній формі визначимо зображення напруги на ємності (рис. А.4):

$$U_C(s) = U_{bd}(s) = \frac{u_C(0)}{s} + \frac{1}{sC} I_4(s).$$

Скориставшись Maple, отримасмо:

```
> Uc(s) := uc(0)/s + I4(s) * (1/(s*C));
```

$$Uc(s) := \frac{15}{2} \frac{1}{s} - \frac{5000000}{(157s + 1480000)s}$$

Тоді оригіналом зображення напруги на ємності $U_C(s)$ буде функція:

```
> invlaplace(Uc(s), s, t);
```

$$\frac{305}{74} + \frac{125}{37} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)}$$

Таким чином, напруга на ємності після комутації буде змінюватися в часі за законом:

$$u_C(t) = \frac{305}{74} + \frac{125}{37} e^{\left(-\frac{1480000}{157}t\right)} \text{ В}, \quad (7)$$

що в порівнянні з (3) доводить істинність проведеного розрахунку.

Приклад А.3. Розрахунок перехідного процесу в колі 2-го порядку для коливального режиму при дії синусоїдальної е.р.с. класичним методом.

Для кола, що зображене на рис. А.5 знайдемо напругу на ємності u_C , якщо $e(t) = E_m \sin \omega t$, де $E_m = 100$ В, $\omega = 314$ с⁻¹, а параметри елементів кола: $R = 700$ Ом, $L = 0,25$ Г, $C = 50$ мкФ. При цьому слід врахувати, що комутація відбувається в момент часу $t = 0$.

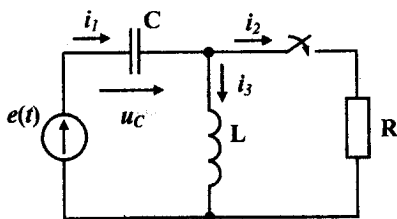


Рисунок А.5

На початку підготуємо комп'ютер до розрахунків, вказавши точність (п'ять знаків після десяткової коми) та задавши значення параметрів елементів електричного кола:

```
> restart;
> Digits:=5:
> Em:=100: w:=314.: R:=700: L:=0.25: C:=5*10^(-5):
```

Для даного кола визначимо *незалежні початкові умови*.

Оскільки на вході кола діє синусоїдальна е.р.с., то для знаходження незалежних початкових умов ($u_C(0_+) = u_C(0_-)$, $i_L(0_+) = i_L(0_-)$), слухним буде скористатися методом комплексних амплітуд (символічним методом).

Вхідний комплексний опір докомутаційного кола дорівнює:

$$\underline{Z} = j(X_L - X_C),$$

де $X_L = \omega L$ - індуктивний опір індуктивності L ,

$X_C = 1/\omega C$ - ємнісний опір ємності C .

Тоді відповідно до закону Ома в комплексній формі комплексна амплітуда струму, що протікав через індуктивність до комутації, буде мати вигляд:

$$I_{m3} = I_{m1} = \frac{E_m}{Z} = \frac{E_m}{j(X_L - X_C)},$$

а комплексна амплітуда напруги на ємності:

$$\underline{U}_{mC} = I_{m3}(-jX_C).$$

Проведемо розрахунок в Maple, оскільки ця система дозволяє працювати і з комплексними числами.

```
> j:=sqrt(-1);
> e(t):=Em*sin(w*t);
                                     e(t):= 100 sin(314. t)
> Xc:=1/(w*C);   XL:=w*L;
                                     Xc:= 63.694
                                     Xl:= 78.50
> Z:=j*(XL-Xc);
                                     Z:= 14.806 I
> IL:=Em/(j*XL-j*Xc);
> Uc:=IL*(-j*Xc);
                                     Il:= -6.7540 I
                                     Uc:= -430.19
> iL(t):=abs(IL)*sin(w*t+argument(IL));
                                     6.7540 sin(314 t - 1.5708)
> uC(t):=abs(Uc)*sin(w*t+argument(Uc));
                                     430.19 sin(314. t + 3.1416)
```

Отже, до комутації струм індуктивності змінюється за законом

$$i_L = 6,754 \sin(314t - 1,5708) \text{ А,}$$

а напруга на ємності –

$$u_C = 430,19 \sin(314t - 3,1416) \text{ В.}$$

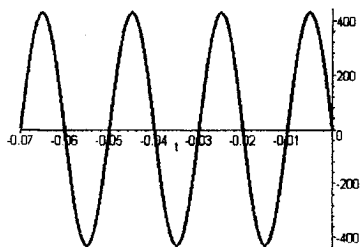
Як видно з рисунків А.6, а та А.6, б, напруга на ємності та струм через індуктивність, що до комутації (в усталеному режимі) змінюються в часі за синусоїдальним законом, на момент комутації ($t=0$.) набудуть таких значень:

```

> iL(0):=limit(iL(t), t=0);
-6.7540
> uC(0):=limit(uC(t), t=0);
0
> plot(uC(t), t=-0.07..0, color=black);
> plot(iL(t), t=-0.07..0, color=black);

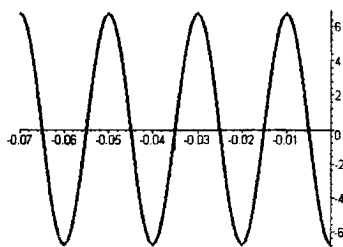
```

430.19 sin(314. t + 3.1416)



а) Напряга на ємності до комутації

6.7540 sin(314. t - 1.5708)



б) Струм через індуктивність до комутації

Рисунок А.6

Таким чином, незалежними початковими умовами для заданого кола будуть:

$$u_C(0_+) = u_C(0) = 0 \text{ В} \quad \text{і} \quad i_L(0_+) = i_L(0) = -6,754 \text{ А.} \quad (8)$$

Для післякомутаційного кола за законами Кірхгофа складемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ u_C + L \frac{di_3}{dt} = e, \\ Ri_2 - L \frac{di_3}{dt} = 0, \\ i_2 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (9)$$

Опишемо цю систему мовою Maple і розв'яжемо її.

```

> Sys:=i1(t)-i2(t)-i3(t)=0,    uC(t)+L*diff(i3(t),t)=
=e(t),    i2(t)*R-L*diff(i3(t),t)=0,    i1(t)=C*
*diff(uC(t),t):

```

```
> Rozw:={i1(t), i2(t), i3(t), uc(t)};
> dsolve({Sys, uc(0)=0, i3(0)=-6.754}, Rozw);
```

$$u_C(t) := -330.10 \sin(314.t) - 207.50 \cos(314.t) + 207.50 e^{(-14.286t)} \cos(282.49t) - 100.77 e^{(-14.286t)} \sin(282.49t)$$

Або, спротивши, отримаємо:

```
> Digits:=4;
> uc(t):=simplify(uc(t), trig);
```

$$u_C(t) := -230.7 e^{(-14.286t)} \sin(282.49t - 1.119) - 390.0 \sin(314t + .5612)$$

Отже, напруга на смності до комутації і після змінюється в часі за таким законом:

$$u_C(t) = \begin{cases} 430.19 \sin(314t + \pi), & t < 0, \text{ В,} \\ -230.7 e^{-14.286t} \sin(282.49t - 1.119) - 390 \sin(314t + 0.5612), & t \geq 0, \text{ В.} \end{cases} \quad (10)$$

Побудуємо графік цієї функції, врахувавши і докомутаційний час (рис. А.7).

```
> uc:=t-> piecewise(t<0, 430.19*sin(314.*t+3.1416),
t>=0, -230.7* exp(-14.286*t)*sin(282.49*t-1.119)
-390*sin(314.*t+0.5612):
> plot(uc(t), t=-0.15..0.3, color=black);
```

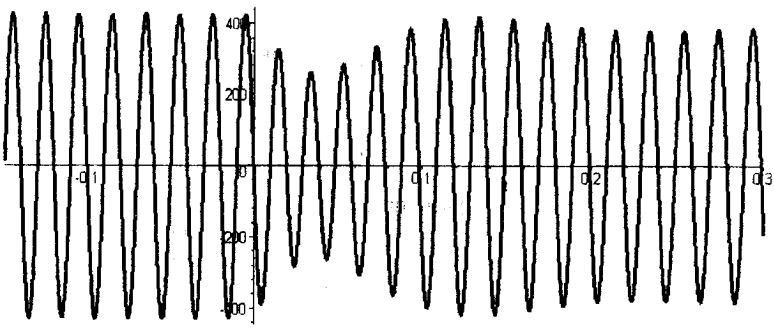


Рисунок А.7

Приклад А.4. Розрахунок операторним методом перехідного процесу в колі 2-го порядку для коливального режиму при дії синусоїдальної е.р.с..

Розв'яжемо попередню задачу (приклад А.3) операторним методом.

Для цього спочатку визначимо незалежні початкові умови. Методика їх визначення наведена в прикладі А.3, тому нагадаємо лише результат (8):

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \text{ В} \quad \text{і} \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = -6,754 \text{ А.}$$

Для післякомутаційного електричного кола (див. рис. А.5) складемо операторну схему (рис. А.8).

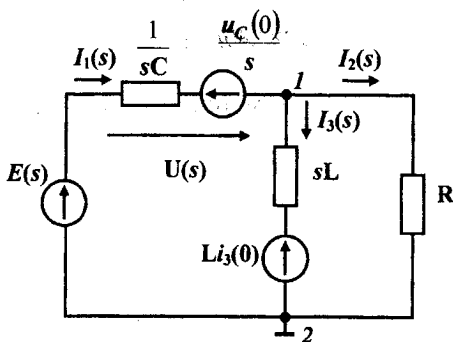


Рисунок А.8

Оскільки миттєва е.р.с. змінюється в часі за синусоїдним законом:

$$e(t) = E_m \sin \omega t,$$

то її зображенням за інтегральним перетворенням Лапласа буде комплексна функція:

$$E(s) = E_m \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

У зв'язку з тим, що операторна схема має два вузли, для визначення зображення потенціалу вузла 1 доцільно скористатися методом двох вузлів (метод вузлових потенціалів). Відповідно до цього методу, якщо зображення потенціалу одного із вузлів прийняти за 0 (наприклад, $\varphi_2(s) = 0$), то для іншого вузла будемо мати:

$$\varphi_1(s) = \frac{\left(E(s) - \frac{u_C(0)}{s} \right) sC - Li(0) \frac{1}{sL}}{sC + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R}}$$

Тоді на підставі другого закону Кірхгофа в операторній формі можна визначити зображення напруги на ємності:

$$U_C(s) = E(s) - \varphi_1(s).$$

Для виконання розрахункової частини скористаємося математичною системою Maple.

```
> restart;
> Digits:=4;
> Em:=100; w:=314.; R:=700; L:=0.25; C:=5*10^(-5);
> uc(0):=0; iL(0):=-6.754;
> E(s):=Em*w/(s^2+w^2);
```

$$E(s) := 31400. \frac{1}{s^2 + 98600.}$$

```
> phil(s) := ((E(s) - uc(0)/s) * s * C - L * iL(0) / (s * L)) / (s * C +
+ 1 / (s * L) + 1 / R);
```

$$\phi_1(s) := \frac{1.570 \frac{s}{s^2 + 98600.} + \frac{6.754}{s}}{\frac{1}{20000} s + \frac{4.000}{s} + \frac{1}{700}}$$

```
> Uc(s) := E(s) - phil(s);
```

$$U_C(s) := 31400. \frac{1}{s^2 + 98600.} - \frac{1.570 \frac{s}{s^2 + 98600.} + \frac{6.754}{s}}{\frac{1}{20000} s + \frac{4.000}{s} + \frac{1}{700}}$$

Для приведення отриманого результату до вигляду раціонального дробу використаємо Maple-функцію – *simplify*:

```
> Uc(s) := simplify(Uc(s));
```

$$U_C(s) := -40. \frac{23639s^2 + .1891110^{10} - 157000s}{(s^2 + 98596)(7.s^2 + 560000 + 200.s)}$$

А залучивши Maple-функцію *invlaplace* за визначеним зображенням напруги на ємності $U_C(s)$ відшукаємо і сам оригінал – напругу на ємності $u_C(t)$:

```
> with(inttrans):
> uc(t):=invlaplace(UC(s), s, t);
```

$$u_C(t) = -207.50 \cos(314. t) - 330.10 \sin(314. t) + 207.50 e^{(-14.28 t)} \cos(282.49 t) - 100.76 e^{(-14.28 t)} \sin(282.49 t)$$

Після спрощення з врахуванням докомутаційного часу запишемо:

$$u_C(t) = \begin{cases} 43019 \sin(314t + \pi), & t < 0, \text{ В,} \\ -23067 e^{-14.286t} \sin(282.49t - 1.1187) - 389.9 \sin(314t + 0.5612), & t \geq 0, \text{ В,} \end{cases}$$

що з достатньою точністю збігається з результатом розрахунків (10), проведених за допомогою класичного методу (див. приклад А.3).

Приклад А.5. Розрахунок перехідного процесу за допомогою перехідних характеристик кола.

Для кола, що зображене на рис. А.9, а, визначимо струм через індуктивність $i_L(t)$, якщо параметри елементів кола: $R_1=R_4=7 \text{ Ом}$, $R_2=R_3=21 \text{ Ом}$, $L=10 \text{ мГ}$, а е. р. с. $e(t)$ змінюється в часі за законом (рис. А.9, б):

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 10e^{900t}, & 0 \leq t < t_1, \\ At + B, & t_1 \leq t < t_2, \\ 0, & t \geq t_2, \end{cases}$$

де $t_1=10 \text{ мс}$, а $t_2=20 \text{ мс}$.

Оскільки закон зміни е.р.с. $e(t)$ в інтервалі часу $t_1 \leq t < t_2$ визначений лише якісно, за допомогою рисунка А.9, б знайдемо коефіцієнти A та B лінійної функції $e_2(t)$.

Для двох крайніх точок цього проміжку (t_1 та t_2) маємо:

$$\begin{aligned} e_2(t_1) &= At_1 + B = 10 \text{ В,} \\ e_2(t_2) &= At_2 + B = 0 \text{ В.} \end{aligned}$$

Звідки, розв'язавши систему з двох алгебраїчних рівнянь, визначимо A та B :

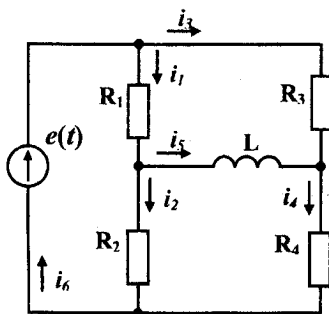
```

> restart:
> Digits:=4:
> t1:=1.*10^(-3): t2:=2.*10^(-3):
> solve({A*10^(-3)+B=10, A*2*10^(-3)+B=0},{A,B});
      {B=20, A=-10000}

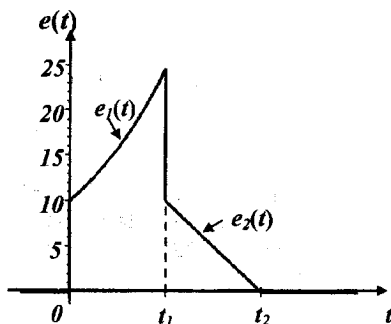
```

Таким чином,

$$e_2(t) = -10000t + 20.$$



а)



б)

Рисунок А.9

Складемо для кола систему рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases}
 i_1 - i_2 - i_5 = 0, \\
 i_3 - i_4 + i_5 = 0, \\
 i_2 + i_4 - i_6 = 0, \\
 R_1 i_1 + R_2 i_2 = e, \\
 -R_1 i_1 - R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 = 0, \\
 -R_2 i_2 + L \frac{di_5}{dt} + R_4 i_4 = 0.
 \end{cases} \quad (11)$$

Знайдемо перехідну характеристику $h_{i_5}(t)$ кола для струму $i_5(t)$.

Оскільки перехідна характеристика є реакція кола на одиничну східчасту функцію (функцію Хевісайда) за нульової початкової умови, то для її визначення скористаємося системою (11), замінивши в ній діючу е.р.с. $e(t)$ на безрозмірну функцію Хевісайда $1(t)$, а миттєві струми на перехідні характеристики кола для цих струмів:

$$\begin{cases} h_{i1} - h_{i2} - h_{i5} = 0, \\ h_{i3} - h_{i4} + h_{i5} = 0, \\ h_{i2} + h_{i4} - h_{i6} = 0, \\ R_1 h_{i1} + R_2 h_{i2} = 1(t), \\ -R_1 h_{i1} - R_2 h_{i2} + R_3 h_{i3} + R_4 h_{i4} = 0, \\ -R_2 h_{i2} + L \frac{dh_{i5}}{dt} + R_4 h_{i4} = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему відносно $h_{i5}(t)$ засобами Maple.

```
> R1:=7: R2:=21: R3:=21: R4:=7: L:=10*10^(-3):
> Sys:= hil(t)-hi2(t)-hi5(t)=0, hi3(t)-hi4(t)+
+hi5(t)=0, hi2(t)+hi4(t)-hi6(t)=0, hil(t)*R1+
+hi2(t)*R2=Heaviside(t), -hil(t)*R1-hi2(t)*R2+
+hi3(t)*R3+hi4(t)*R4=0, -hi2(t)*R2+L*diff(hi5(t),
t)+hi4(t)*R4=0:
> Rozw:={hil(t),hi2(t),hi3(t),hi4(t),hi5(t),hi6(t)}:
> dsolve({Sys, hi5(0)=0}, Rozw, method=laplace);
.04762-.04762e(-1050t)
```

Таким чином, перехідною характеристикою кола для струму $i_5(t)$ буде функція:

$$h_{i5}(t) = 0,04762(1 - e^{-1050t}) \text{ СМ.} \quad (12)$$

Струм у колі визначається для трьох проміжків часу: $0 \leq t < t_1$, $t_1 \leq t < t_2$ та $t_2 \leq t < \infty$.

Для проміжку $0 \leq t < t_1$, використовуючи інтеграл Дюамеля, можна записати:

$$i_5(t) = e(0)h_{i5}(t) + \int_0^t e_1'(\tau)h_{i5}(t-\tau)d\tau. \quad (13)$$

Для інтегрування (13) використаємо математичну систему Maple.

```
> hi5(t):= .04762(1-exp(-1050.*t)):
> hi5(t-tau):= .04762(1-exp(-1050.*(t-tau))):
> i5[1](t):=e(0)*hi5(t)+int(diff(10*exp(900*tau),
tau)*hi5(t-tau),tau=0..t);
```

$$.4762 - .2564 e^{(-1050.t)} + .2564 e^{(900.t)} - .4762 e^{(-1050.t)} e^{(1050.t)}$$

Для спрощення виразу використаємо функцію *simplify*.

```
> i5[1](t) := simplify(i5[1](t));
```

$$-.2564 e^{(-1050.t)} + .2564 e^{(900.t)}$$

Отже, на проміжку $0 \leq t < t_1$ струм $i_5(t)$ буде змінюватися за законом:

$$i_5(t) = 0,2564(e^{900t} - e^{-1050t}) \text{ А.}$$

Для проміжку $t_1 \leq t < t_2$ запишемо:

$$i_5(t) = e(0) h_{i_5}(t) + \int_0^{t_1} e_1'(\tau) h_{i_5}(t - \tau) d\tau + (e_2(t_1) - e_1(t_1)) h_{i_5}(t - t_1) + \int_{t_1}^t e_2'(\tau) h_{i_5}(t - \tau) d\tau. \quad (14)$$

Скориставшись Maple, отримаємо:

```
> e1(t) := 10*exp(900*t);
> e1(t1) := limit(e1(t), t=t1);
> e2(t) := -10000*t+20;
> e2(t1) := limit(e2(t), t=t1);
> hi5(t-t1) := .4762e-1*(1-exp(-1050.*(t-t1)));

> i5[2](t) := e(0)*hi5(t)+int(diff(10*exp(900*tau),
tau)*hi5(t-tau), tau=0..t1)+(e2(t1)-e1(t1))*hi5(t-
-t1)+int(diff(-10000*tau+20, tau)*hi5(t-tau), tau=
=t1..t);
> i5[2](t) := simplify(i5[2](t));
```

$$1.4059 - 1.8012 e^{(-1050.t)} + 2.415 e^{(-1050.t+1.05)} - 476.2 t$$

```
> expand(i5[2](t));
```

$$1.4059 - 1.111 e^{(-1050.t)} - 476.2 t$$

Таким чином, на проміжку $t_1 \leq t < t_2$ струм $i_5(t)$ буде змінюватися за законом:

$$i_5(t) = 1,4059 - 1,111 e^{-1050t} - 476,2t \text{ А.}$$

Для проміжку $t_2 \leq t < \infty$ можна записати:

$$i_5(t) = e(0) h_{i5}(t) + \int_0^{t_1} e_1'(\tau) h_{i5}(t-\tau) d\tau + (e_2(t_1) - e_1(t_1)) h_{i5}(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e_2'(\tau) h_{i5}(t-\tau) d\tau. \quad (15)$$

За допомогою Maple визначимо струм $i_5(t)$ на цьому проміжку:

- ```
> i5[3](t) := e(0)*hi5(t)+int(diff(10*exp(900*tau),
tau)*hi5(t-tau), tau=0..t1)+(e2(t1)-e1(t1))*hi5(t-
-t1)+int(diff(-10000*tau+20,tau)*hi5(t-tau), tau=
=t1..t2):
> i5[3](t) := simplify(i5[3](t)):
> i5[3](t) := expand(i5[3](t));
```

$$2.5926 e^{(-1050. t)}$$

Отже, підводячи підсумок, для струму  $i_5(t)$  запишемо:

$$i_5(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0,2564 (e^{900t} - e^{-1050t}), & 0 \leq t < t_1, \\ 1,4059 - 1,111e^{-1050t} - 476,2t, & t_1 \leq t < t_2, \\ 2,5926 e^{-1050t}, & t \geq t_2, \end{cases} \quad \text{A.} \quad (16)$$

Побудуємо графік отриманої функції струму (рис. А.10).

- ```
> i5:=t-> piecewise(t<0, 0, (t>=0) and(t<t1),
.2564*(exp(900*t)-exp(-1050*t)), (t>=t1) and(t<t2),
1.4059-1.111*exp(-1050.*t)-476.2*t, t>=t2,
2.5926*exp(-1050.*t)):
> plot(i5(t), t=-0.001..0.007, color=black);
```

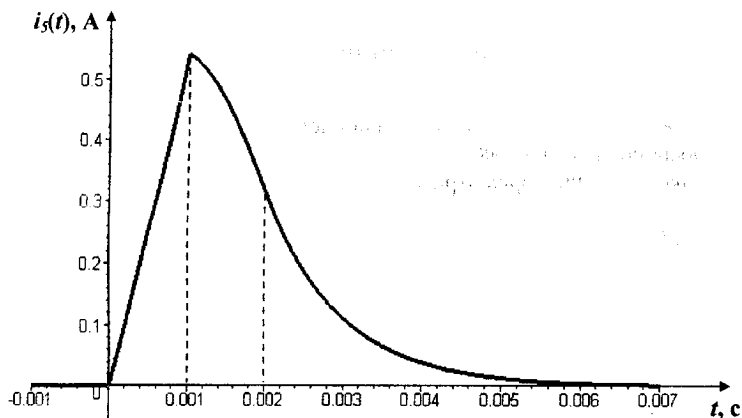


Рисунок А.10

Приклад А.6. Розрахунок перехідного процесу за допомогою імпульсних характеристик кола.

Розв'яжемо задачу прикладу А.5 за допомогою імпульсної характеристики кола для струму $i_5(t)$.

Як відомо, імпульсною характеристикою кола називають реакцію кола на одиничну імпульсну функцію $\delta(t)$ (функцію Дірака) при нульових незалежних початкових умовах.

Тому для визначення імпульсної характеристики кола для струму $i_5(t)$ можна

- або в систему рівнянь (11) замість $e(t)$ підставити $\delta(t)$, а замість струмів - відповідно, їх імпульсні характеристики, і розв'язати систему по відношенню до $g_{i5}(t)$ подібно тому, як це було зроблено в попередньому прикладі при визначенні перехідної характеристики,
- або, за вже відомою перехідною характеристикою $h_{i5}(t)$ (12)

$$h_{i5}(t) = 0,04762(1 - e^{-1050t}) \text{ Сл,}$$

знайти її похідну і отримати, таким чином, імпульсну характеристику:

$$g_{i5}(t) = \frac{dh_{i5}(t)}{dt},$$

оскільки імпульсна характеристика може бути визначена як:

$$g_{i5}(t) = h_{i5}(0) \delta(t) + \frac{dh_{i5}(t)}{dt},$$

а за умови нульової незалежної початкової умови - $h_{i5}(0)=0$.
Оберемо другий шлях.

Використавши Maple, отримаємо:

```
> hi5(t) := 1/21 - 1/21 * exp(-1050*t);
> gi5(t) := diff(hi5(t), t);
                    50 e(-1050t)
```

Тобто, при дії на коло одиничної імпульсної функції його реакцією буде функція:

$$g_{i5}(t) = 50e^{-1050t} \frac{C_M}{c}. \quad (17)$$

Використавши інтеграл Дюамеля, для проміжку $0 \leq t < t_1$ запишемо:

$$i_5(t) = \int_0^t e_1(\tau) g_{i5}(t - \tau) d\tau, \quad (18)$$

для проміжку $t_1 \leq t < t_2$ -

$$i_5(t) = \int_0^{t_1} e_1(\tau) g_{i5}(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^t e_2(\tau) g_{i5}(t - \tau) d\tau, \quad (19)$$

а для проміжку $t_2 \leq t < \infty$ -

$$i_5(t) = \int_0^{t_1} e_1(\tau) g_{i5}(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} e_2(\tau) g_{i5}(t - \tau) d\tau, \quad (20)$$

Тоді,

```
> gi5(t-tau) := 50 * exp(-1050 * (t-tau));
> i5[1](t) := int(10. * exp(900 * tau) * gi5(t-tau), tau=0..
t);
                    2564103 e(900.t) - 2564103 e(-1050.t)
> i5[2](t) := int(10 * exp(900 * tau) * gi5(t-tau), tau=0..
t1) + int(-10000 * tau + 20) * gi5(t-tau), tau=t1..t);
> i5[2](t) := simplify(i5[2](t));
```

```

> i5[2](t):=expand(i5[2](t));
      -1.109327 e(-1050.t) - 476.1905 t + 1.405896
> i5[3](t):=int(10*exp(900*tau)*gi5(t-tau), tau=0..
t1)+int((-10000*tau+20)*gi5(t-tau), tau=t1..t2):
> i5[3](t):=simplify(i5[3](t)):
> i5[3](t):=expand(i5[3](t));
      2.594153 e(-1050.t)

```

Отже, для струму $i_3(t)$ маємо остаточний розв'язок:

$$i_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0,2564 (e^{900t} - e^{-1050t}), & 0 \leq t < t_1, \\ 1,4059 - 1,11e^{-1050t} - 476,2t, & t_1 \leq t < t_2, \\ 2,5942 e^{-1050t}, & t \geq t_2, \end{cases} \quad \text{A,} \quad (21)$$

що з достатньою інженерною точністю збігається з результатами розраху-
нку (16) прикладу А.5.

ЛІТЕРАТУРА

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Ч.1. Линейные электрические цепи. - М. : Энергия, 1978. - 592 с.
2. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т.1, - М.: Энергоиздат, 1981. - 522 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. - М. : Высш. школа, 1973.-750с.
4. Перхач В.С. Теоретична електротехніка: Лінійні кола. - К. : Вища школа, 1992.-439с.
5. Ю.О. Карпов, Т.Є Магас, В.Г. Мадьяров. Конспект лекцій з курсу "Теоретичні основи електротехніки". Ч. 1, -Вінниця: ВДГУ, 1992. -174с.

Навчальне видання

**Юхим Овдійович Карпов,
Тарас Євстахович Магас,
Юрій Григорович Ведміцький**

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ
ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ
В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Ю.Г. Ведміцьким

Редактор С.А. Малішевська

Видавництво ВНТУ “УНІВЕРСУМ-Вінниця”
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 14.01.04.
Формат 29,7x42 1/4
Друк різнографічний
Тираж 100 прим.
Зам. № 2004-8

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 8,83

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ
Тел.: (0432) 44-01-59