

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**Ю.О. Карпов, Ю.Г. Ведміцький, В.В. Кухарчук**

**ТЕОРЕТИЧНІ  
ОСНОВИ  
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

**МАГНІТНЕ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЯ**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як  
навчальний посібник для студентів вищих навчальних  
закладів

*Рецензенти:*

- В. І. Сенько*, доктор технічних наук професор (НТУУ «КПІ»)  
*І. М. Богаєнко*, доктор технічних наук професор (НВК «КІА»)  
*П. Д. Лежнюк*, доктор технічних наук професор (ВНТУ)

Рекомендовано до видання Міністерством освіти і науки України.  
Лист № 14/18.2–1513 від 30.06.2005

**Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В.**  
К 26 **Теоретичні основи електротехніки. Магнітне та електромагнітне  
поля.** Навчальний посібник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005.  
– 167с.

**ISBN 966-641-155-5**

У навчальному посібнику викладена теорія магнітного та електромагнітного полів. Наведено велику кількість прикладів розрахунку і побудови картини полів та визначення параметрів різних електротехнічних пристроїв, які зустрічаються в електросенергетиці, радіотехніці, засобах автоматики та вимірювальної техніки. Матеріал подано в обсязі, необхідному для проведення теоретичних та технічних розрахунків. Навчальний посібник призначений для студентів і аспірантів електротехнічних і енергетичних спеціальностей вищих навчальних закладів і може бути корисним інженерам, які займаються теорією поля.

УДК 621.3

**ISBN 966-641-155-5**

## ЗМІСТ

<b>1</b>	<b>Магнітне поле постійних струмів</b>	<b>5</b>
1.1	Закон Біо-Савара	5
1.2	Закон повного струму	8
1.3	Магнітний потік	14
1.4	Намагнічування речовини	15
1.5	Скалярний і векторний магнітні потенціали	21
1.6	Магнітне поле на межі двох середовищ	27
1.7	Електромагнітна індукція	32
1.8	Індуктивність. Взаємна індуктивність	36
1.9	Енергія магнітного поля	41
1.10	Механічні сили в магнітному полі	46
1.11	Аналогія математичних співвідношень між параметрами магнітних та електростатичних полів	51
1.12	Питання для самоперевірки	52
<b>2</b>	<b>Методи розрахунку магнітних полів постійного струму</b>	<b>54</b>
2.1	Стисла характеристика задач та методів розрахунку магнітних полів	54
2.2	Використання закону Біо-Савара	55
2.3	Використання закону повного струму	63
2.4	Використання рівнянь Пуассона та Лапласа	72
2.5	Розрахунок індуктивностей та взаємних індуктивностей	80
2.6	Енергія і механічні сили в магнітному полі	86
<b>3</b>	<b>Рівняння електромагнітного поля</b>	<b>93</b>
3.1	Стислі зауваження до характеристики електромагнітного поля	93

3.2	Узагальнене поняття електричного струму .....	93
3.3	Неперервність повного струму .....	97
3.4	Перше та друге рівняння Максвелла .....	101
3.5	Повна система рівнянь електромагнітного поля .....	104
3.6	Рівняння Д'Аламбера .....	106
3.7	Запізнілі електродинамічні потенціали .....	110
3.8	Питання для самоперевірки .....	113
<b>4</b>	<b>Передача енергії електромагнітного поля .....</b>	<b>115</b>
4.1	Теорема Умова-Пойнтінга .....	115
4.2	Передача енергії коаксіальним кабелем .....	118
4.3	Поширення електромагнітної енергії двопровідною лінією .....	124
4.4	Питання для самоперевірки .....	127
<b>5</b>	<b>Плоскі електромагнітні хвилі .....</b>	<b>128</b>
5.1	Рівняння плоскої хвилі .....	128
5.2	Гармонічні плоскі хвилі в ідеальному діелектрику .....	131
5.3	Гармонічні плоскі хвилі в провідному середовищі .....	135
5.4	Поверхневий ефект .....	140
5.5	Питання для самоперевірки .....	143
<b>6</b>	<b>Приклади розв'язування задач з теорії електромагнітного поля .....</b>	<b>145</b>
	<b>Додатки .....</b>	<b>158</b>
	<b>Література .....</b>	<b>165</b>

# 1 МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНИХ СТРУМІВ

## 1.1 Закон Біо-Савара

Магнітне поле, як і електричне, є окремим проявом і складовою єдиного електромагнітного поля. Проте у випадках, коли електричне поле не впливає на характеристики магнітного поля, основні закономірності та фізичні процеси в останньому можна розглядати незалежно від електричного поля. Це стає можливим за умови, якщо магнітне поле створене електричними зарядами, що рухаються рівномірно (наприклад, постійним електричним струмом провідності). Незалежно від фізичної природи провідника з електричним струмом, навколо нього завжди створюється магнітне поле. Важливою особливістю, притаманною магнітному полю постійних струмів, як і полю електростатичному, є та обставина, що для його підтримки не витрачається енергія. Енергія ж з зовні потрібна лише для створення магнітного поля.

Магнітне поле постійних струмів є *статичним*, тобто таким, що не змінюється у часі.

Помітити присутність магнітного поля можна таким чином:

- за відхиленням магнітної стрілки;
- за силовою дією на рухомі електричні заряди (провідник зі струмом);
- за наведенням електрорушійної сили в провіднику, що рухається в магнітному полі.

Якщо в магнітному полі з постійною швидкістю  $v$  рухається електрично заряджене точкове тіло із зарядом  $q_0$ , то на нього діє сила, що визначається за *законом Лоренца*

$$\vec{F} = q_0 [\vec{v} \vec{B}], \quad (1.1)$$

де  $\vec{B}$  – вектор, що характеризує напрям магнітного поля, його інтенсивність та силу дію на рухомі електричні заряди. Називається ця величина *магнітною індукцією*. Одиницею її вимірювання є *тесла*, Т (як в даному випадку, так і надалі ми будемо користуватися системою СІ).

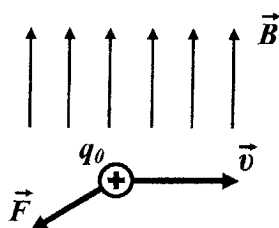


Рисунок 1.1

Векторний добуток векторів  $\vec{v}$  і  $\vec{B}$  в (1.1) вказує на те, що сила  $\vec{F}$  перпендикулярна площині, в якій лежать вектори  $\vec{v}$  та  $\vec{B}$ . Вона набуває свого максимального значення, якщо вектори  $\vec{v}$  і  $\vec{B}$  перпендикулярні (рис. 1.1), і дорівнює нулю, якщо ці вектори паралельні між собою.

Застосуємо закон Лоренца до електричного струму  $I$ , що проходить по відрізку проводу довжиною  $dl$  і площею поперечного перерізу  $S$  та знаходиться в магнітному полі з індукцією  $B$  (рис. 1.2).

Нехай  $dq$  – заряд об'єму відрізка провідника довжиною  $dl$ , що рухається вздовж його осі з постійною швидкістю  $v$ . Тоді на цей відрізок провідника буде діяти елементарна сила

$$d\vec{F} = dq [\vec{v} \vec{B}].$$

Якщо заряд  $dq$  крізь переріз провідника проходить відрізок  $dl$  за час  $dt$ , то швидкість його руху

$$v = \frac{dl}{dt},$$

а величина струму в провіднику

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

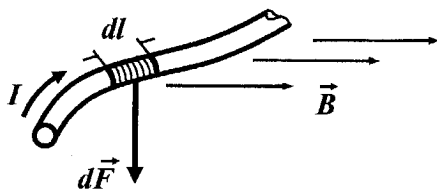


Рисунок 1.2

Таким чином,

$$dq\vec{v} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = I d\vec{l}$$

i

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}] \quad (1.2)$$

або

$$d\vec{F} = I dl B \sin(\widehat{d\vec{l} \vec{B}})$$

Вираз (1.2) називають *законом Ампера*. За його допомогою можна знайти величину магнітної індукції через відому силу дію магнітного поля на елемент провідника зі струмом.

Слід зауважити, що закон Ампера не часто використовується для визначення магнітної індукції. Більш важливим в цьому відношенні є визначений дослідним шляхом *закон Біо-Савара*, котрий пов'язує величину магнітної індукції поля зі струмом, що створює це поле.

Відповідно до цього закону елементарна величина магнітної індукції

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \vec{r}^0]}{r^2}, \quad (1.3)$$

де  $I$  - струм, що проходить по провіднику,

$d\vec{l}$  - елемент довжини провідника,

$r$  - відстань від елемента довжини провідника

$dl$  до точки  $m$ , в якій визначається магнітна індукція,

$\vec{r}^0$  - одиничний вектор відстані, направлений до точки  $m$  (рис. 1.3),

$\mu_0$  - коефіцієнт, що характеризує магнітні властивості пустоти. Він називається *магнітною сталюю* і дорівнює

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

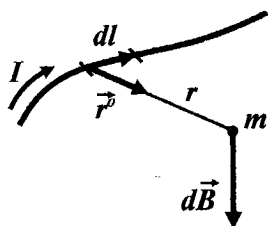


Рисунок 1.3

Щоб знайти результуючу магнітну індукцію в точці  $m$ , необхідно обчислити інтеграл по всій довжині провідника

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_I \frac{d\vec{l} \vec{r}^0}{r^2}. \quad (1.4)$$

Слід зауважити, що обчислення такого інтеграла зазвичай проводять тільки для простих за формою провідників зі струмом.

Оскільки підінтегральною функцією є векторний добуток векторів  $d\vec{l}$  і  $\vec{r}^0$ , то вектор  $\vec{B}$  в точці  $m$  має бути перпендикулярним до цих двох векторів. При цьому напрям вектора магнітної індукції визначають за правилом гвинта. Якщо поступальний рух гвинта направити за струмом, то напрям його обертання покаже напрям вектора магнітної індукції.

Лінії в магнітному полі, що утворюються сукупністю точок, в кожній з яких вектор магнітної індукції направлений по дотичній, називаються *магнітними лініями* або ж лініями магнітної індукції.

Неважко помітити, що лінії магнітної індукції навколо прямолінійного провідника зі струмом являють собою кола, які лежать в нормальних до провідника площинах, а їх центри знаходяться на осі проводу (рис. 1.4).

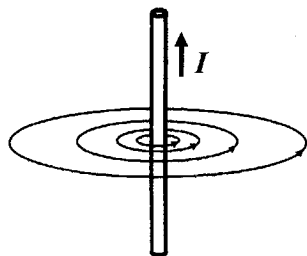


Рисунок 1.4

## 1.2 Закон повного струму

В багатьох випадках для знаходження магнітної індукції більш зручним є закон повного струму, аніж закон Біо-Савара.

Розглянемо магнітне поле, що створене струмом  $I$ , який проходить по замкнутому провіднику (рис. 1.5).



Величина магнітної індукції в точці  $m$  від струму  $I$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{[d\vec{l}_1 \vec{r}^0]}{r^2}. \quad (1.5)$$

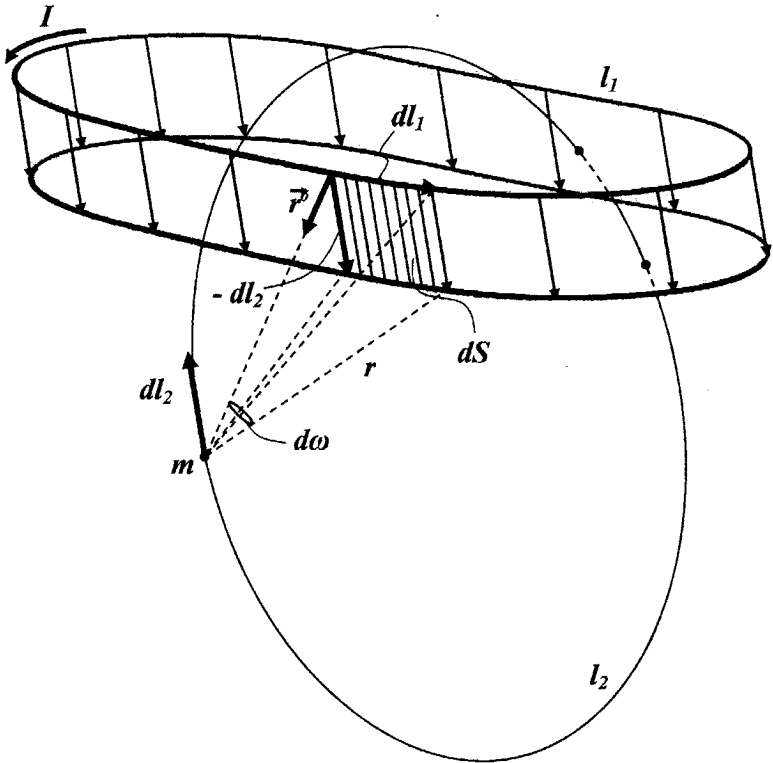


Рисунок 1.5

Обчислимо інтеграл від магнітної індукції  $\oint_{l_2} \vec{B} d\vec{l}_2$  вздовж замкненого контуру  $l_2$ , що перетинає контур  $l_1$ . Запишемо підінтегральний вираз з врахуванням (1.5)

$$\vec{B} d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_2 [d\vec{l}_1 \vec{r}^0]}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{[d\vec{l}_2 d\vec{l}_1]}{r^2} \vec{r}^0. \quad (1.6)$$

Переміщення точки спостереження  $m$  на відстань  $d\vec{l}_2$  відносно нерухомого контуру струму є еквівалентним переміщенню контуру струму в протилежному напрямку, тобто на  $-\vec{d}l_2$ , відносно нерухокої точки спостереження.

З врахуванням зміни знака при  $d\vec{l}_2$  вираз (1.6) можна записати у вигляді

$$\vec{B}d\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{[-d\vec{l}_2 d\vec{l}_1]}{r^2} \vec{r}^{\circ}.$$

Векторний добуток  $[-d\vec{l}_2 d\vec{l}_1] = d\vec{S}$  є площею елементарної поверхні, яку утворює елемент довжини  $dl_1$  при переміщенні його на відстань  $-dl_2$ . Підінтегральний вираз – це елементарний тілесний кут  $d\omega$ , з якого видно цю поверхню  $dS$  з точки спостереження  $m$  (рис. 1.5)

$$d\omega = \frac{d\vec{S} \vec{r}^{\circ}}{r^2},$$

а тому

$$\vec{B}d\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_1} d\omega.$$

В свою чергу, інтеграл  $\oint_{l_1} d\omega$  є елементарним тілесним кутом  $d\Omega$ , з якого видно елементарну кільцеподібну поверхню, окреслену всім замкненим контуром  $l_1$  при переміщенні його на відстань  $-\vec{d}l_2$ .

Таким чином,

$$\vec{B}d\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega. \quad (1.7)$$

Обчислимо інтеграл  $\oint_{l_2} \vec{B}d\vec{l}_2$  з врахуванням (1.7). Для цього проведемо заміну  $dl_2$  на  $dl$ .

Тоді

$$\oint_l \bar{B} d\bar{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d\Omega.$$

Подивимося як буде змінюватися тілесний кут  $\Omega$  при переміщенні точки  $m$  вздовж замкнутого контуру  $l$ , вважаючи цей кут додатним, якщо для спостерігача в точці  $m$  струм в контурі  $l_1$  направлений проти годинникової стрілки.

З рис 1.6 видно, що в початковій точці  $m_0$  тілесний кут  $\Omega_n$ , з якого видно контур  $l_1$  від'ємний, оскільки струм в контурі для спостерігача в точці  $m_0$  направлений за годинниковою стрілкою ( $\Omega_n = -\Omega_0$ ).

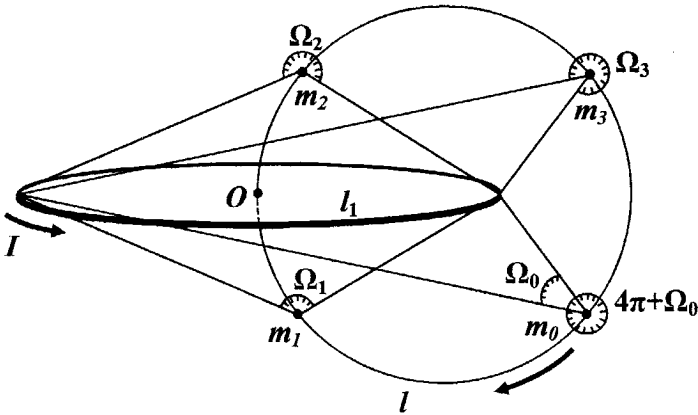


Рисунок 1.6

З переміщенням точки  $m$  вздовж контуру  $l$  ( $m_0, m_1, m_2 \dots$ ) абсолютне значення тілесного кута весь час збільшується, хоча сам кут при цьому залишається від'ємним. Після повного обходу контуру  $l$  та повернення в точку  $m_0$  тілесний кут, маючи від'ємне значення, за модулем збільшиться на  $4\pi$ , тобто його кінцеве значення буде

$$\Omega_n = -(4\pi + \Omega_0).$$

Таким чином,

$$\oint_l d\Omega = \int_{\Omega_0}^{\Omega_0} d\Omega = -(4\pi + \Omega_0) - (-\Omega_0) = -4\pi$$

i

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (1.8)$$

При зміні напрямку обходу контуру інтегрування, знак в правій частині виразу (1.8) зміниться на протилежний. Отже, якщо шлях інтегрування, що зчеплений з контуром струму, утворює з додатним напрямом струму правогвинтову систему, то струм  $I$  входить у вираз (1.8) зі знаком “плюс”, в протилежному випадку – “мінус”.

Якщо контур інтегрування зчеплений одночасно з кількома струмами (рис. 1.7), то ці струми будуть входити в праву частину виразу з відповідними знаками. Для випадку, зображеного на рис. 1.7

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3).$$

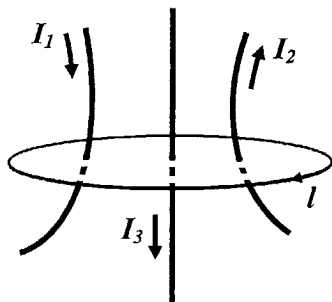


Рисунок 1.7

Таким чином, узагальнюючи, маємо

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I. \quad (1.9)$$

Лінійний інтеграл від вектора магнітної індукції, обчислений вздовж замкненого контуру, дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що перетинають поверхню, обмежену контуром інтегрування, помноженій на магнітну сталу  $\mu_0$ .

Вираз (1.9) називають *законом повного струму в інтегральній формі*.

Якщо ж контур інтегрування не зчеплений зі струмом, то

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 0. \quad (1.10)$$

Співвідношення (1.9) вказує на тісний зв'язок між магнітним полем та електричним струмом, оскільки електричний струм завжди оточений магнітним полем.

Закон повного струму зручно використовувати для розрахунку магнітних полів у випадках, коли магнітне поле і розподіл струмів, що створюють його, мають певну симетрію. Для більш загальних задач доцільніше застосовувати закон повного струму в диференціальній формі, коли встановлюється співвідношення між магнітною індукцією та густиною електричного струму в кожній точці поля.

Запишемо суму струмів в (1.9) через густину струмів. Тоді

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{\delta} d\vec{S}. \quad (1.11)$$

Поверхневий інтеграл правої частини виразу поширюється на поверхню, обмежену замкненим контуром  $l$ , причому ні на довжину, ні на форму шляху цього контуру не накладається ніяких обмежень. Тому розглянемо невеликий контур (рис. 1.8), вздовж якого визначимо лінійний інтеграл вектора магнітної індукції  $\vec{B}$ . За малої площі поверхні  $\Delta S$ , обмеженої цим контуром, можна вважати, що густина струму  $\vec{\delta}$  в межах даної поверхні є незмінною, і тому струм, що пронизує цю поверхню

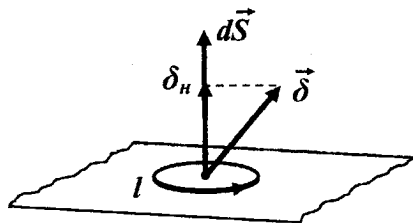


Рисунок 1.8

$$\Delta i = \vec{\delta} \Delta \vec{S} = \delta_n \Delta S,$$

де  $\delta_n$  – проекція вектора  $\vec{\delta}$  на нормаль до площини  $\Delta S$ .

Таким чином,

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \delta_n \Delta S.$$

Розділимо обидві частини рівності на  $\Delta S$  за умови  $\Delta S$  прямує до нуля

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \vec{B} d\vec{l}}{\Delta S} = \mu_0 \delta_n.$$

Ліва частина рівності в математиці називається проекцією *ротора*  $\vec{B}$  на напрям нормалі до поверхні  $\Delta S$ , тому

$$\text{rot}_n \vec{B} = \mu_0 \delta_n.$$

Якщо поверхню  $\Delta S$  зорієнтувати в просторі так, щоб напрям нормалі до неї збігався з напрямом вектора густини струму, то

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{\delta}. \quad (1.12)$$

Цей вираз називають *законом повного струму в диференціальній формі*.

На тих ділянках простору, де густина струму відрізняється від нуля, ротор вектора магнітної індукції також не дорівнює нулю. Це означає, що в цих точках простору має місце прояв вихрового характеру магнітного поля. Лінії вектора магнітної індукції замкнені самі на себе, не маючи ні початку, ні кінця, а площини, в яких лежать ці вихори, перпендикулярні до вектора густини струму.

Вираз (1.12) можна отримати з (1.11), використавши теорему Стокса

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S}.$$

### 1.3 Магнітний потік

Потік вектора магнітної індукції крізь деяку поверхню  $S$  називають *магнітним потоком*  $\Phi$

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (1.13)$$

Магнітний потік вимірюють у *веберах*, Вб.

З (1.13) випливає, що

$$B = \frac{\partial \Phi}{\partial S} \quad (1.14)$$

і що магнітну індукцію можна вважати *густиною* магнітного потоку.

Оскільки, лінії вектора магнітної індукції є замкненими, як було показано в попередньому параграфі, то магнітний потік крізь замкнену поверхню завжди дорівнює нулю, що підтверджують і численні досліди

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (1.15)$$

Застосуємо до останнього виразу теорему Остроградського-Стокса

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV.$$

Ця рівність є дійсною для будь-якого об'єму  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$ , тому

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.16)$$

Формула (1.15) відображає *принцип неперервності* магнітного потоку в інтегральній формі, формула (1.16) – в диференціальній.

Магнітне поле не має ні витоків, ні стоків.

## 1.4 Намагнічування речовини

До цих пір ми досліджували магнітні поля, що були створені постійними струмами у пустоті.

Проте, якщо в простір, де попередньо збуджено магнітне поле, внести деяке фізичне тіло, то це призведе до зміни в цьому просторі магнітного поля. Ця зміна є наслідком виникнення в речовині тіла під дією зовнішнього магнітного поля певної переважаючої орієнтації елементарних внутрішньомолекулярних та внутрішньоатомних електричних струмів, які зазвичай називають *молекулярними* струмами.

За відсутності зовнішнього магнітного поля у вільному для себе стані молекулярні струми всередині речовини орієнтовані хаотично, а створені ними магнітні поля, компенсуючи один одного, зовні ніяк не проявляються. Під дією ж зовнішнього магнітного поля в речовині з'являється узго-

джена орієнтація молекулярних струмів і, отже, їх сумарне додаткове магнітне поле, накладаючись на зовнішнє, змінює його.

В деяких речовинах, що називаються *діамагнетиками*, додаткове магнітне поле направлене протилежно зовнішньому і послаблює його. До таких речовин відносять мідь, срібло, ртуть, вісмут, свинець, золото, деякі інші елементи, а також інертні гази, воду, багато органічних та неорганічних сполук.

В деяких інших речовинах (наприклад, алюміній, магній, кальцій, хром, платина, кисень, а значить, і повітря) додаткове магнітне поле, збігаючись за напрямом з зовнішнім полем, підсилює його. Такі речовини називають *парамагнетиками*.

І в діамагнітних, і в парамагнітних речовинах додаткові магнітні поля незначні і практично не змінюють зовнішнього магнітного поля.

Є ще й третій різновид речовин. Їх додаткові магнітні поля, по-перше, збігаються за напрямом з зовнішнім магнітним полем, по-друге, значно його перевищують і, по-третє, не зникають повністю після зникнення зовнішнього поля. Такі речовини називають *ферромагнетиками*. До складу таких речовин відносять залізо, нікель, кобальт, а також ряд сплавів на їх основі.

Докладне та ґрунтовне пояснення причин такої різної поведінки речовин в зовнішньому магнітному полі можливе тільки за допомогою квантової електродинаміки.

Орієнтація внутрішніх магнітних полів під дією зовнішнього магнітного поля називається *намагнічуванням* речовини.

Розглянемо котушку з струмом  $I$ , що має  $w$  витків. Всередині цієї котушки нехай знаходиться якесь фізичне тіло (рис. 1.9).

Складемо лінійний інтеграл для магнітної індукції вздовж замкненого контуру  $AmCnA$ , що охоплює всі витки котушки. Як бачимо, частина контуру інтегрування ( $AmC$ ) розміщена всередині фізичного тіла, а інша час-



тина ( $CnA$ ) – ззовні. Під дією магнітного поля, збудженого струмом  $I$  котушки, молекулярні струми в речовині орієнтуються більш-менш узгоджено. Тому крізь поверхню, обмежену контуром інтегрування, крім струму  $I$ , що  $w$  разів перетинає цю поверхню, на ділянці  $AmC$  проходить ще й сума молекулярних струмів  $I'$ .

За законом повного струму

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 w I + \mu_0 I'. \quad (1.17)$$

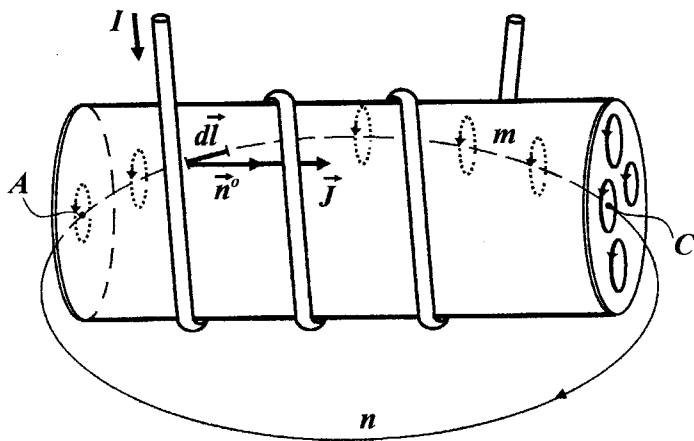


Рисунок 1.9

Позначимо суму молекулярних струмів, що припадають на елементарний відрізок контуру  $dl$ , через  $di'$ . Таку суму молекулярних струмів одиниці довжини лінії, проведеної через дану точку простору таким чином, щоб ця сума була найбільшою, називають *намагніченістю* речовини і позначають буквою  $\vec{J}$ . Якщо, наприклад, сума молекулярних струмів максимальна в напрямі  $\vec{n}^o$  (рис. 1.9), то

$$\vec{J} = \frac{di'}{dn} \vec{n}^o. \quad (1.18)$$

Для довільного напрямку відрізка лінії  $dl$  отримуємо

$$\frac{di'}{dl} = J \cos \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут між напрямом вектора  $\vec{J}$  та напрямом дотичної до лінії  $AmC$  в даній точці.

Враховуючи сказане, можна записати

$$I' = \int_{AmC} \frac{di'}{dl} dl = \int_{AmC} J \cos \alpha dl = \int_{AmC} \vec{J} d\vec{l}.$$

На ділянці  $CnA$  замкненого контуру інтегрування молекулярних струмів немає, тому

$$I' = \int_{AmC} \vec{J} d\vec{l} = \oint_{AmCnA} \vec{J} d\vec{l}. \quad (1.19)$$

Вираз (1.17) перепишемо з врахуванням (1.19)

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 w I + \mu_0 \oint \vec{J} d\vec{l}$$

або

$$\oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = w I. \quad (1.20)$$

Векторну величину, що знаходиться в дужках під знаком інтеграла, позначають буквою  $\vec{H}$  і називають *напруженістю магнітного поля*. Напруженість магнітного поля, як і намагніченість, вимірюється в *амперах на метр*, А/м.

Таким чином,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

і

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (1.21)$$

Закон повного струму в цьому випадку записується в інтегральній формі у вигляді

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = wI \quad (1.22)$$

і в диференціальній формі –

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta}. \quad (1.23)$$

Вирази (1.22) та (1.23) не залежать від магнітних властивостей середовища, що в багатьох випадках при розрахунках магнітних полів надає перевагу використанню напруженості поля  $H$ , ніж магнітної індукції  $B$ .

Намагніченість речовини прямо пропорційна напруженості магнітного поля

$$\vec{J} = \kappa \vec{H}. \quad (1.24)$$

Безрозмірний коефіцієнт пропорційності  $\kappa$  називається *магнітною сприйнятливістю* речовини і характеризує її здатність намагнічуватись в зовнішньому магнітному полі. Для діамagnetиків та парамагнетиків цей коефіцієнт за незмінних зовнішніх умов є сталою і досить малою величиною. Крім того для діамagnetних речовин він має ще й від'ємне значення.

Вираз для магнітної індукції (1.21) з урахуванням (1.24) набуває такого вигляду:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} (1 + \kappa)$$

або

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (1.25)$$

де  $\mu_a = \mu_0 (1 + \kappa)$  – *абсолютна магнітна проникність* речовини, що характеризує його магнітні властивості. Часто при розрахунках використовують безрозмірну величину – *відносну магнітну проникність*, що показує: в скільки разів магнітна проникність тієї чи іншої речовини більша за магнітну сталу  $\mu_0$  (магнітну проникність пустоти)

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}. \quad (1.26)$$

Для електротехнічних розрахунків відносну магнітну проникність всіх, окрім феромагнітних, речовин зазвичай вважають рівною одиниці, оскільки, наприклад, для вісмуту (діамагнетик)  $\mu = 0,99983$ , а для платини (парамагнетик)  $\mu = 1,000036$ .

Для феромагнітних матеріалів залежність між  $\vec{J}$  та  $\vec{H}$  і, відповідно, між  $\vec{B}$  та  $\vec{H}$  є нелінійною і неоднозначною (рис. 1.10), а максимальне значення відносної магнітної проникності може досягати декількох десятків тисяч.

Ввівши поняття магнітної проникності, закон повного струму для магнітної індукції в будь-якому однорідному середовищі можна записати у вигляді:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_a \sum I \quad (1.27)$$

для інтегральної форми та

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta} \quad (1.28)$$

для диференціальної.

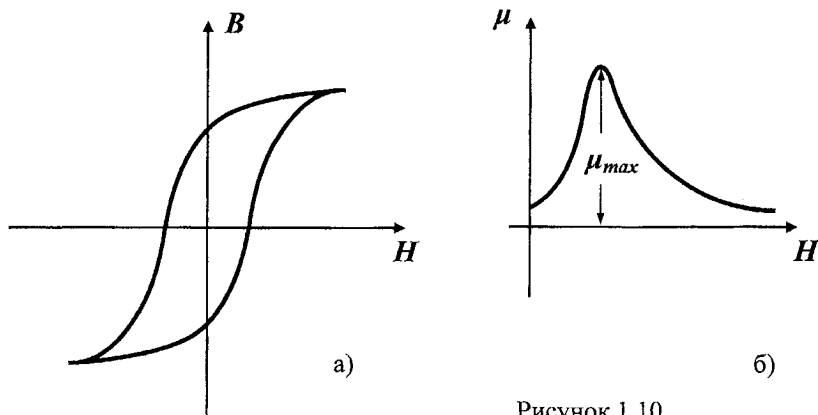


Рисунок 1.10

## 1.5 Скалярний і векторний магнітні потенціали

Співвідношення між магнітною індукцією  $\vec{B}$  і напруженістю магнітного поля  $\vec{H}$  багато в чому подібні співвідношенням між електричним зміщенням  $\vec{D}$  та напруженістю електричного поля  $\vec{E}$ .

Дійсно, для електричного поля в частинах простору, вільних від електричних зарядів

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \oint \vec{D} d\vec{S} = 0, \quad \oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Для магнітного ж поля в просторі, де відсутні електричні струми

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad \oint \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad \oint \vec{H} d\vec{l} = 0.$$

Співвідношення  $\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$  показує, що магнітне поле в тій частині простору, де немає струмів, є полем *потенціальним*. Тому для характеристики такого поля за аналогією з електростатичним полем можна ввести скалярну величину – *магнітний скалярний потенціал*  $\varphi_m$ , який пов'язаний з напруженістю магнітного поля співвідношенням

$$\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m. \quad (1.29)$$

Оскільки (1.16)

$$\text{div } \vec{B} = \text{div } \mu_a \vec{H} = 0,$$

то для  $\mu_a = \text{const}$

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

і з врахуванням (1.29)

$$\text{div } \text{grad } \varphi_m = 0. \quad (1.30)$$

Отриманий вираз можна записати через оператор набла  $\nabla$

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (1.31)$$

Таким чином, скалярний потенціал магнітного поля  $\varphi_m$ , про який можна вести мову лише для ділянок простору, де відсутні електричні струми, підпорядковується рівнянню Лапласа.

Різниця магнітних потенціалів між точками  $A$  і  $B$ , що зображені на рис. 1.11

$$\varphi_{MA} - \varphi_{MB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{l}. \quad (1.32)$$

Одиницею вимірювання скалярного потенціалу є *ампер*.

Різниця магнітних потенціалів між точками  $A$  і  $B$ , що визначена інтегруванням вздовж лінії  $A1B$ , дорівнює різниці потенціалів між цими точками, розрахованої інтегруванням вздовж деякої іншої лінії, наприклад,  $A2B$ , оскільки згідно з законом повного струму

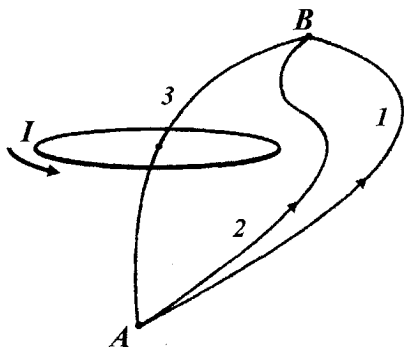


Рисунок 1.11

$$\oint_{A1B2A} \vec{H} d\vec{l} = \int_{A1B} \vec{H} d\vec{l} - \int_{A2B} \vec{H} d\vec{l} = 0.$$

Ситуація змінюється, якщо між двома лініями інтегрування з'являється провідник зі струмом.

Для замкненого контуру  $A1B3A$ , що охоплює провідник зі струмом

$$\oint_{A1B3A} \vec{H} d\vec{l} = I.$$

Звідки

$$\int_{A1B} \vec{H} d\vec{l} - \int_{A3B} \vec{H} d\vec{l} = I$$

і

$$\int_{A1B} \vec{H} d\vec{l} = \int_{A3B} \vec{H} d\vec{l} + I. \quad (1.33)$$

Якщо контур обійти  $n$  разів, то

$$\int_{A1B} \vec{H} d\vec{l} = \int_{A3B} \vec{H} d\vec{l} + nI$$

або

$$\varphi_{MA} - \varphi_{MB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{l} + nI. \quad (1.34)$$

З виразу (1.34) випливає, що величина скалярного магнітного потенціалу в певній точці є величиною *неоднозначною*, вона залежить від шляху інтегрування, якщо тільки цей шлях охоплює провідник зі струмом.

В просторі, де густина струму відмінна від нуля (наприклад, всередині провідника), магнітне поле має вихровий характер і тому саме поняття скалярного магнітного потенціалу для даного випадку є неприйнятним. Таким чином, скалярний потенціал магнітного поля стає в нагоді тільки для розрахунку магнітних полів в тій частині простору, де електричні струми відсутні.

Загальні властивості магнітного поля, включаючи і простір, де густина струму не дорівнює нулю і, отже, поле є вихровим, характеризують через допоміжний вектор  $\vec{A}$  - *векторний потенціал* магнітного поля, що є функцією від струму і від координат точок поля.

Векторна просторова похідна від скалярного магнітного потенціалу  $\varphi_m$  ( $\text{grad } \varphi_m$ ), що взята з протилежним знаком, являє собою напруженість магнітного поля (1.29). Векторний потенціал  $\vec{A}$  зв'язують з магнітною індукцією таким чином, щоб векторна просторова похідна від векторного потенціалу  $\vec{A}$  ( $\text{rot } \vec{A}$ ) дорівнювала вектору магнітної індукції

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (1.35)$$

Проте вираз (1.35) ще не достатньо повно визначає вектор  $\vec{A}$ . Для однозначного його визначення потрібно знати ще і його дивергенцію, значення якої визначимо дещо пізніше.

Відзначимо, що одиницею вимірювання векторного потенціалу є *вебер на метр*, Вб/м, хоча при цьому слід зауважити, що векторний потенціал являє собою лише допоміжну розрахункову величину і ніякого фізичного змісту не має.

Запишемо закон повного струму в диференціальній формі (1.28)

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta}$$

і замість  $\vec{B}$  підставимо його значення через векторний потенціал  $\vec{A}$  (1.35)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (1.36)$$

З векторного аналізу відомо, що

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Задамо тепер значення дивергенції  $\vec{A}$  таким, щоб спростити наведене рівняння. Вочевидь, що необхідно покласти

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (1.37)$$

За цієї умови отримаємо

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta} \quad (1.38)$$

рівняння Пуассона для векторного магнітного потенціалу. Для точок простору, де  $\vec{\delta} = 0$ ,

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (1.39)$$

маємо рівняння Лапласа.

Вирази (1.35) і (1.37) показують, що лінії векторного потенціалу замкнені самі на себе, не мають ні витоків, ні стоків і скрізь перпендикулярні до ліній магнітної індукції.

Рівняння (1.38) можна замінити системою з трьох рівнянь, кожне з яких пов'язане з проекціями векторів  $\vec{A}$  і  $\vec{\delta}$  на осі координат. Для прямокутної системи координат ці рівняння мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} &= -\mu_a \delta_x, \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} &= -\mu_a \delta_y, \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -\mu_a \delta_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$



або у векторній формі

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (1.41)$$

Порівнюючи рівняння (1.38) з рівнянням Пуассона для потенціалу  $\varphi$  електростатичного поля

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a},$$

де  $\rho$  – об'ємна густина заряду, яке має, як відомо, частинний розв'язок

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r},$$

за аналогією можна записати частинний розв'язок і для векторного потенціалу магнітного поля

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta} dV}{r}, \quad (1.42)$$

де  $r$  – відстань від елемента об'єму  $dV$  з густиною струму  $\delta$  до точки, в якій визначається векторний потенціал.

Рівняння (1.38) і його розв'язок (1.42) є прийнятними тільки для середовища де  $\mu_a = \text{const}$ . Для середовища, що складається з кількох областей з

різними магнітними проникностями, необхідно обчислювати векторний потенціал для кожної області окремо з врахуванням при цьому граничних умов.

Якщо магнітне поле створене провідником з площею поперечного перерізу  $S$ , радіус якого значно менший за відстань  $r$  (рис. 1.12), то вираз (1.42) може бути спрощений. Нехай по провіднику проходить постійний струм  $I$ , тоді нескінченно мале значення векторного потенціала

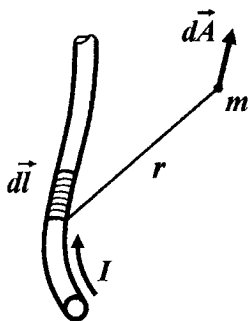


Рисунок 1.12

лу  $d\vec{A}$ , обумовлене струмом  $I$  в елементі довжини  $dl$ , можна визначити відповідно до (1.42)

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{\delta dV}{r} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{\delta S dl}{r}.$$

Для постійного струму  $I$  густина струму буде однаковою в межах перерізу і

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a I d\vec{l}}{4\pi r}. \quad (1.43)$$

Як бачимо із співвідношення (1.43), вектор  $d\vec{A}$  є паралельним до елемента струму.

Векторний потенціал в точці  $m$  від всього контуру зі струмом  $I$

$$\vec{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r}. \quad (1.44)$$

На відміну від скалярного магнітного потенціалу  $\phi_m$ , який може бути визначений тільки для тієї частини простору, яка знаходиться поза джерелами поля (вільна від струмів), векторний потенціал можна визначити та застосовувати для дослідження і характеристики магнітних полів як для простору, де проходять електричні струми, так і за його межами.

Зручним є, наприклад, використання векторного потенціалу для обчислення магнітного потоку  $\Phi$ .

Так, для знаходження магнітного потоку застосувати вираз (1.13)

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

можна тільки за умови, коли відоме значення магнітної індукції  $\vec{B}$  для кожної точки поверхні  $S$ .

Оскільки  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ , то

$$\Phi = \int_S \text{rot}\vec{A} d\vec{S}.$$

На підставі теореми Стокса поверхневий інтеграл може бути зведений до лінійного

$$\int_S \text{rot} \vec{A} \, d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \, d\vec{l}.$$

Таким чином,

$$\Phi = \oint_l \vec{A} \, d\vec{l}. \quad (1.45)$$

Останній вираз доводить, що величина магнітного потоку, який проходить через поверхню  $S$ , не залежить від її форми, а лише від контуру, що обмежує цю поверхню, і може бути розрахована, якщо тільки буде відоме значення векторного потенціалу  $\vec{A}$  вздовж цього контуру.

## 1.6 Магнітне поле на межі двох середовищ

Для однозначного розв'язування диференціальних рівнянь Пуассона та Лапласа необхідно використати граничні умови.

Розглянемо замкнену циліндричну поверхню  $S$ , яка перетинає іншу поверхню – межу поділу двох середовищ з різними магнітними проникностями (рис. 1.13).

Площини  $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$  є доволі малими, а тому припустимо, що вектор  $\vec{B}$  в межах цих площин має те саме значення.

Відповідно до принципу неперервності магнітного потоку потік вектора  $\vec{B}$  крізь всю замкнену циліндричну поверхню  $S$  дорівнює нулю. Поділимо весь магнітний потік на три частини:  $\Phi_1$  – потік крізь нижню площину  $\Delta S_1$ ,  $\Phi_2$  – потік крізь верхню площину  $\Delta S_2$  та  $\Phi_0$  – потік через бічну циліндричну поверхню  $S_0$ . При цьому має виконуватися рівність

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_0 = 0.$$

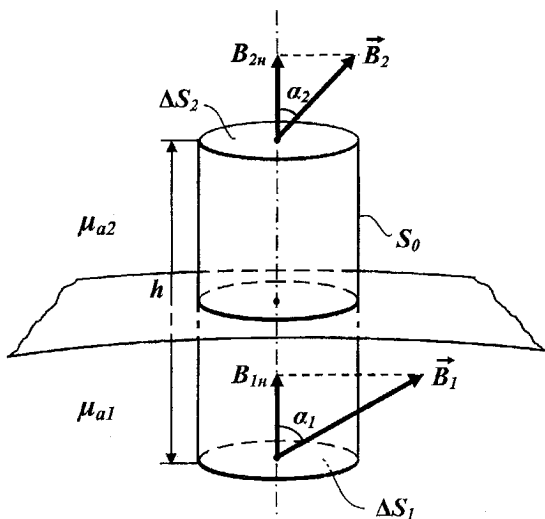


Рисунок 1.13

Оскільки

$$\Phi_1 = \vec{B}_1 \Delta \vec{S}_1 = -B_1 \Delta S \cos \alpha_1,$$

$$\Phi_2 = \vec{B}_2 \Delta \vec{S}_2 = B_2 \Delta S \cos \alpha_2,$$

то

$$-B_1 \Delta S \cos \alpha_1 + B_2 \Delta S \cos \alpha_2 + \Phi_0 = 0$$

або

$$-B_{1n} \Delta S + B_{2n} \Delta S + \Phi_0 = 0.$$

Оберемо висоту циліндра такою, щоб і верхня, і нижня площадки практично збіглися з поверхнею поділу, тобто  $h \rightarrow 0$ . В цьому випадку потік крізь бічну поверхню  $S_0$  буде рівним нулю і

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (1.46)$$

Оскільки векторний потенціал скрізь перпендикулярний до вектора магнітної індукції, то з (1.46) випливає

$$A_{1\theta} = A_{2\theta}. \quad (1.47)$$

Таким чином, на межі двох середовищ рівними між собою будуть нормальні складові вектора магнітної індукції та дотичні складові векторного магнітного потенціалу. Оскільки  $B = \mu_a H$ , то

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}. \quad (1.48)$$

Нормальні складові векторів напруженості магнітного поля на межі двох середовищ обернено пропорційні магнітним проникностям цих середовищ.

Щоб отримати другу граничну умову, перпендикулярно до поверхні поділу проведемо прямокутник (рис. 1.14) зі сторонами, що будуть паралельними до лінії межі поділу. Ширину цього прямокутника позначимо через  $\Delta l$ , а його висоту – через  $\Delta h$ .

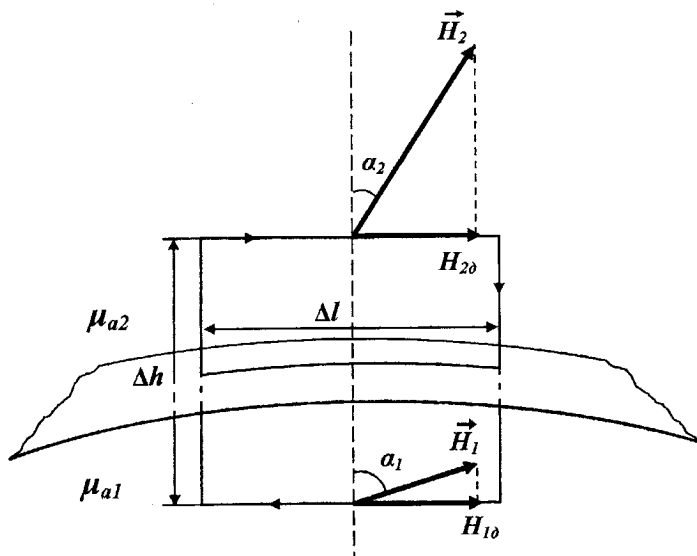


Рисунок 1.14

Обходячи утворений побудованим прямокутником контур за стрілкою годинника, використаємо закон повного струму в інтегральній формі

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I.$$

Якщо довжина сторін прямокутника  $\Delta l$  невелика, то можна вважати величину напруженості  $H$  просторово незмінною для всіх точок кожної з його сторін.

Замкнений інтеграл запишемо через суму трьох інтегралів: вздовж верхньої сторони прямокутника, вздовж нижньої сторони, а також вздовж його бічних ділянок, тобто

$$\vec{H}_1 \Delta \vec{l}_1 + \vec{H}_2 \Delta \vec{l}_2 + \int_{l_{\text{бiчн}}} \vec{H} d\vec{l} = \sum I$$

або

$$H_1 \Delta l \sin \alpha_1 - H_2 \Delta l \sin \alpha_2 + \int_{l_{\text{бiчн}}} \vec{H} d\vec{l} = \sum I.$$

Права частина цього виразу являє собою струм, який проходить через площину  $\Delta S$ , обмежену прямокутним контуром інтегрування. Якщо обидва середовища мають різні питомі провідності, то можуть бути різними і густини струмів, тому в загальному випадку

$$\sum I = \int_{\Delta S_1} \vec{\delta}_1 d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{\delta}_2 d\vec{S}, \quad (1.49)$$

де  $\Delta S_1$  і  $\Delta S_2$  — площини в першому та другому середовищах, при цьому  $\Delta S_1 + \Delta S_2 = \Delta S$ .

Зменшуючи висоту прямокутника так, щоб його сторони  $\Delta l$  нескінченно наблизилися до межі поділу ( $\Delta h \rightarrow 0$ ), отримаємо, що, поперше, інтеграл вздовж бічних сторін зрівняється з нулем, а, по-друге, і сума струмів в (1.49) також буде дорівнювати нулю, оскільки стануть рівними нулю площі  $\Delta S_1$  і  $\Delta S_2$ .

Таким чином,

$$H_{10} \Delta l - H_{20} \Delta l = 0$$

або

$$H_{1\partial} = H_{2\partial}. \quad (1.50)$$

На межі поділу двох середовищ рівними між собою будуть дотичні складові векторів напруженості магнітного поля.

Виразивши напруженість поля  $H$  через магнітну індукцію, отримаємо

$$\frac{B_{1\partial}}{B_{2\partial}} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}} = \frac{\mu_{a1}\mu_0}{\mu_{a2}\mu_0} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (1.51)$$

Знайдемо співвідношення між кутами  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , які називають кутом падіння ( $\alpha_1$ ) та кутом заломлення ( $\alpha_2$ ).

З рисунків 1.13 і 1.14 видно, що

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{B_{1\partial}}{B_{1n}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{B_{2\partial}}{B_{2n}}.$$

Враховуючи (1.51),

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{B_{2\partial} \frac{\mu_1}{\mu_2}}{B_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg}\alpha_2$$

або

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (1.52)$$

Як уже зазначалось, для всіх середовищ, крім феромагнітних, магнітні проникності практично не відрізняються від магнітної проникності пустоти ( $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$ ), тому в розрахунках магнітних полів для цих середовищ вважають, що під час переходу з одного середовища до іншого не змінюються величини та напрямки магнітної індукції і напруженості магнітного поля. При переході ж магнітного поля з феромагнетика до неферомагнітного середовища ( $\mu_1 \gg \mu_2$ ) для будь-якого, але відмінного від нуля кута  $\alpha_1$ , кут  $\alpha_2$  близький до  $0^\circ$ , тобто напрям вектора магнітної індукції для неферомагнітного середовища майже перпендикулярний до межі поділу.

## 1.7 Електромагнітна індукція

Явище електромагнітної індукції полягає в тому, що будь-яка зміна магнітного поля супроводжується виникненням електричного поля і навпаки.

Електричне поле, збуджене завдяки електромагнітній індукції, відрізняється від електростатичного поля тим, що останнє обумовлене присутністю нерухомих електричних зарядів і для будь-якої точки простору являє собою поле *потенціальне*. Воно починається позитивними зарядами і закінчується зарядами негативними. Наведене ж електромагнітною індукцією електричне поле є полем *вихровим*.

Розглянемо замкнений контур  $l$ , утворений тонким провідником, який розміщений в магнітному полі (рис. 1.15). Крізь поверхню  $S$ , обмежену цим контуром, проходить магнітний потік  $\Phi$ .

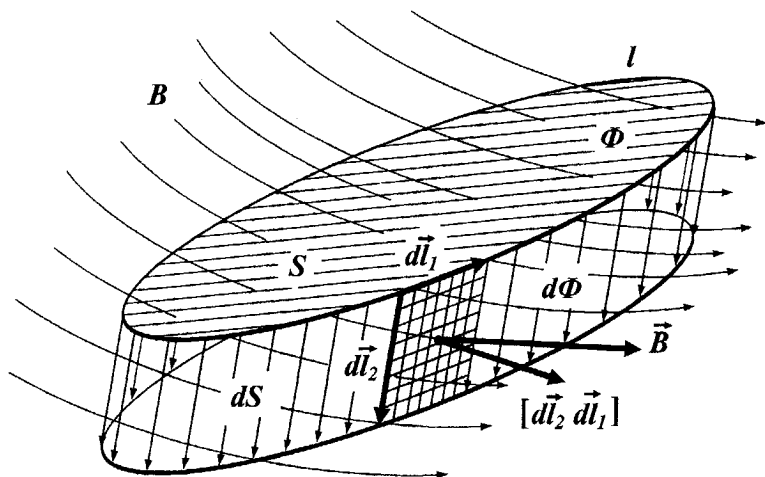


Рисунок 1.15



Припустимо, що даний контур переміщується в магнітному полі за час  $dt$  так, що кожний його елемент  $d\vec{l}_1$  при цьому проходить шлях  $d\vec{l}_2$ , після чого контур займає нове положення. Крізь елементарну поверхню  $[\vec{d}\vec{l}_2, \vec{d}\vec{l}_1]$ , утворену елементом  $d\vec{l}_1$  під час його руху, проходить елементарний магнітний потік, що дорівнює  $\vec{B}[\vec{d}\vec{l}_2, \vec{d}\vec{l}_1]$ .

За правилами векторної алгебри

$$\vec{B}[\vec{d}\vec{l}_2, \vec{d}\vec{l}_1] = [\vec{B} d\vec{l}_2] d\vec{l}_1 = -[d\vec{l}_2 \vec{B}] d\vec{l}_1.$$

Магнітний потік  $d\Phi$ , що проходить крізь всю поверхню  $dS$  смуги, утвореної під час руху контуру  $l$ , є зміною магнітного потоку  $\Phi$  через поверхню  $S$  при переміщенні цього контуру  $l$ .

Отже,

$$d\Phi = -\oint_l [d\vec{l}_2 \vec{B}] d\vec{l}_1. \quad (1.53)$$

Під час руху разом з провідником переміщуються і вільні електрично заряджені частинки, які знаходяться в ньому. На кожен з таких частинок із зарядом  $q$ , що рухається в магнітному полі зі швидкістю  $v = \frac{d\vec{l}_2}{dt}$ , з боку останнього діє сила Лоренца (1.1) (стороння сила)

$$\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}] = q\left[\frac{d\vec{l}_2}{dt}\vec{B}\right].$$

Якщо цю силу співвіднести до величини заряду  $q$ , то отримаємо напруженість електричного поля, що створене сторонніми силами, які рухають провідник.

Таким чином, стороння напруженість

$$\vec{E}_{стор} = \frac{\vec{F}}{q} = \left[\frac{d\vec{l}_2}{dt}\vec{B}\right].$$

Обчислимо інтеграл від сторонньої напруженості поля вздовж замкненого контуру  $l$

$$\oint_l \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}_1 = \oint_l \left[ \frac{d\vec{l}_2}{dt} \vec{B} \right] d\vec{l}_1.$$

Оскільки час ( $dt$ ) не залежить від відстані ( $d\vec{l}_1$ ), то можна записати

$$\oint_l \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}_1 = \frac{\oint_l [d\vec{l}_2 \vec{B}] d\vec{l}_1}{dt}.$$

З врахуванням (1.53)

$$\oint_l \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.54)$$

Під час розгляду електричного поля постійних струмів було визначено, що лінійний інтеграл від напруженості поля вздовж замкненого контуру за умови присутності на одній із ділянок контуру сторонньої напруженості являє собою електрорушійну силу (е.р.с.)  $e$ .

Таким чином, у всіх випадках, коли магнітний потік, який проходить крізь поверхню, обмежену деяким контуром, змінюється з часом, в контурі індукується е.р.с., яка дорівнює швидкості зміни магнітного потоку функції, узятій з протилежним знаком

$$e = \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.55)$$

Це рівняння виражає закон електромагнітної індукції.

Напрямок наведеної е.р.с., або ж сторонньої напруженості електричного поля, можна визначити за правилом правої руки, орієнтуючи її таким чином, щоб лінії індукції поля входили в долоню, а відставлений великий палець при цьому збігався з напрямом швидкості руху, тоді чотири інших пальці вкажуть напрям е.р.с.

Напрямок е.р.с. в загальному випадку визначає принцип електромагнітної індукції, сформульований Ленцем: під час будь-якої зміни магнітного поля в контурі виникає електрорушійна сила, яка намагається виклика-

ти струм, спрямований таким чином, щоб протидіяти зміні магнітного потоку.

Вираз (1.55) отримано з припущення, що контур  $l$  рухається в зовнішньому магнітному полі. Проте в цьому контурі буде наводитись е.р.с. та збуджуватись електричне поле і за відсутності руху контуру, але за умови зміни в часі магнітного потоку  $\Phi$  з будь-якої причини.

Сторонню напруженість електричного поля можна виразити через векторний магнітний потенціал. Якщо в виразі (1.55) замість магнітного потоку підставити з (1.45) його значення через векторний потенціал  $\vec{A}$ , то

$$\oint_l \vec{E}_{\text{сноп}} d\vec{l} = - \oint_l \frac{d\vec{A}}{dt} d\vec{l}.$$

Оскільки ця рівність прийнятна для будь-яких контурів інтегрування, то

$$\vec{E}_{\text{сноп}} = - \frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (1.56)$$

Електрорушійна сила визначається з виразу (1.55), якщо контур має всього один виток. В багатьох випадках магнітний потік охоплюється кількома витками одного провідника (рис. 1.16), в кожному з яких наводиться е.р.с., що також може бути розрахована за виразом (1.55).

Оскільки всі витки з'єднані послідовно, то загальна е.р.с. такого контуру дорівнює сумі е.р.с. окремих витків

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n$$

або

$$e = - \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} - \frac{d\Phi_3}{dt} - \dots - \frac{d\Phi_n}{dt} = - \frac{d(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_n)}{dt}.$$

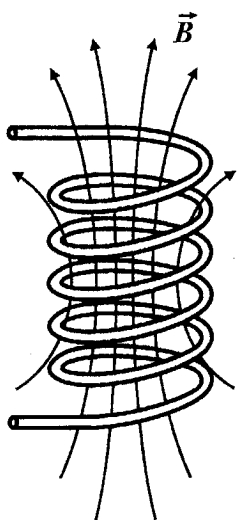


Рисунок 1.16

Вираз в дужках позначають буквою  $\Psi$

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_n \quad (1.57)$$

і називають *потокозчепленням*, що характеризує зчеплення окремих ділянок електричного кола з магнітним потоком. Одиницею вимірювання потокозчеплення є *вебер*, Вб.

Якщо всі витки електричного кола однакові і пронизуються тим самим магнітним потоком, то

$$\Psi = w\Phi, \quad (1.58)$$

де  $w$  – кількість витків.

Електрорушійна сила в загальному випадку

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (1.59)$$

Необхідно сказати про принципову різницю між магнітним потоком та потокозчепленням. Магнітний потік – фізична величина, яка характеризує магнітне поле незалежно від того чи знаходяться в полі контури, чи ні. Магнітне потокозчеплення ж визначає взаємодію контурів кола з магнітним полем і має сенс, таким чином, тільки за умови наявності реальних фізично існуючих контурів.

## 1.8 Індуктивність. Взаємна індуктивність

Е.р.с. наводиться в будь-якому контурі, якщо тільки змінюється магнітний потік, який проходить через цей контур. Зміна ж магнітного потоку може відбуватися внаслідок зміни струму як в самому контурі, так і в будь-якому іншому, в магнітному полі якого знаходиться даний контур.

Явище наведення е.р.с. в контурі внаслідок зміни в ньому струму називається *самоіндукцією*. У випадку одного контуру зчеплений з ним магнітний потік буде залежати тільки від струму  $i$ , що проходить цим контуром. Такий потік називається *власним* магнітним потоком або

поток самоіндукції  $\Phi_L$ . Власне поточозчеплення  $\Psi_L$  пов'язане з власним потоком співвідношенням

$$\Psi_L = w\Phi_L$$

і для неферомагнітних середовищ ( $\mu_a = \text{const}$ ) пропорційне струму контуру

$$\Psi_L = Li : \quad (1.60)$$

Коефіцієнт пропорційності

$$L = \frac{\Psi_L}{i} \quad (1.61)$$

називають *власною індуктивністю* або частіше просто *індуктивністю*. Одиницею вимірювання індуктивності є *генрі*, Гн. Величина індуктивності залежить від геометричної форми та розмірів контуру, а також від магнітних властивостей навколишнього середовища і провідника.

При зміні власного поточозчеплення в контурі виникає е.р.с. самоіндукції

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -L\frac{di}{dt} . \quad (1.62)$$

Явище наведення е.р.с. в *одному* контурі внаслідок зміни струму в *іншому* (рис. 1.17) називається *взаємною індукцією*.

Розглянемо магнітне поле, що створюється лише струмом першого контуру ( $i_1 \neq 0$ ,  $i_2 = 0$ ). Тоді через цей контур буде проходити власний магнітний потік  $\Phi_{11}$ , а через другий контур тільки його частина (рис. 1.17). Ця частина магнітного потоку  $\Phi_{21}$ , що створена струмом  $i_1$ , який проходить в першому контурі, називається *взаємним магнітним потоком*.

Взаємне поточозчеплення пропорційне струму  $i_1$

$$\Psi_{21} = M_{21}i_1 . \quad (1.63)$$

Якщо ж струм проходить тільки другим контуром ( $i_1 = 0$ ,  $i_2 \neq 0$ ), то, за аналогією, взаємне поточозчеплення з першим контуром буде

$$\Psi_{12} = M_{12}i_2 . \quad (1.64)$$

Коефіцієнти пропорційності  $M_{12}$  і  $M_{21}$  називають *взаємними індуктивностями*. Взаємні індуктивності вимірюються також в генрі.

Взаємні індуктивності

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}, \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \quad (1.65)$$

залежать від геометричної форми і розмірів контурів, їх взаємної орієнтації, а також від магнітних властивостей навколишнього середовища та провідників.

Обчислити власну та взаємні індуктивності можна безпосередньо за виразами (1.61) і (1.65), визначивши попередньо власне та взаємні потокозчеплення. Якщо ж для цієї мети використати векторний магнітний потенціал, то в багатьох випадках розрахунки спрощуються.

Розглянемо розрахунок взаємної індуктивності між двома одновитковими контурами 1 та 2 (рис. 1.17), тобто випадок, коли  $\Psi_{21} = \Phi_{21}$ .

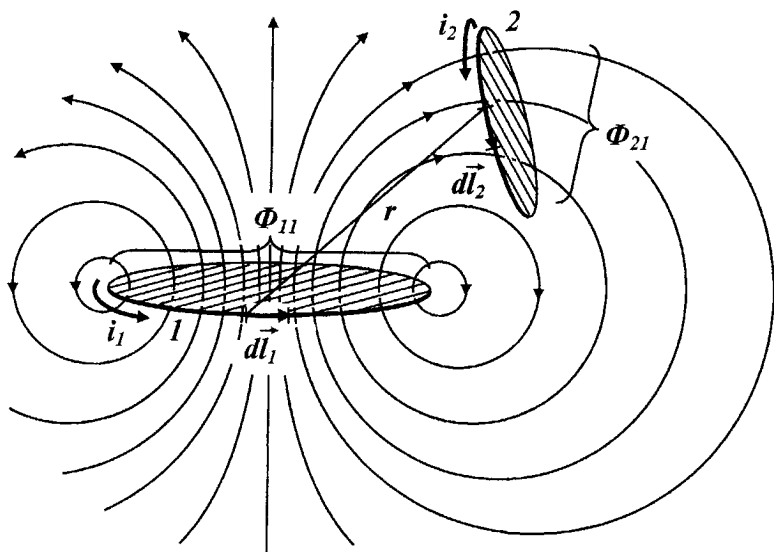


Рисунок 1.17

Припустимо, що діаметри провідників досить малі у порівнянні з розмірами контурів та відстанню між ними.

Магнітний потік  $\Phi_{21}$  можна обчислити, знаючи значення векторного потенціалу  $\vec{A}_2$  для всіх точок контуру 2 (1.45)

$$\Phi_{21} = \oint_{l_2} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_2.$$

Векторний потенціал для точок, що належать другому контуру, можна знайти за (1.44)

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_a i_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1}{r},$$

тому

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_a i_1}{4\pi} \iint_{l_1 l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r} \quad (1.66)$$

і

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{l_1 l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}. \quad (1.67)$$

Аналогічно можна визначити і взаємну індуктивність

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{l_2 l_1} \frac{d\vec{l}_2 d\vec{l}_1}{r}.$$

Оскільки від перестановки співмножників скалярний добуток не змінюється ні за величиною, ні за знаком, то

$$M_{12} = M_{21} = M, \quad (1.68)$$

тобто взаємна індуктивність контуру 1 з контуром 2 має те саме значення, що і взаємна індуктивність контуру 2 з контуром 1.

Взаємна індуктивність може бути як додатною, так і від'ємною величиною.

Взаємна індуктивність буде додатною, якщо додатні напрями обходу контурів, збігаючись з додатними напрямими струмів  $i_1$  та  $i_2$ , утворюють з

напрямом зчепленого з цими контурами магнітного потоку правогвинтову систему.

Іншими словами: взаємна індуктивність додатна, коли власний та взаємні магнітні потоки, що пронизують контури, збігаються за напрямом.

Розглянемо розрахунок власної індуктивності. Поділимо власне потікозчеплення  $\Psi_{11} = w_1 \Phi_{11}$  на дві складові – зовнішнє потікозчеплення, тобто таке, яке пронизує тільки охоплену контуром частину простору, та потікозчеплення внутрішнє, існуюче лише в межах об'єму проводу.

$$\Psi_{11} = \Psi_{11\text{зовн}} + \Psi_{11\text{внутр}}$$

і

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{\Psi_{11\text{зовн}}}{i_1} + \frac{\Psi_{11\text{внутр}}}{i_1}.$$

Визначимо зовнішню індуктивність ( $L_{\text{зовн}}$ ) контуру, що має тільки один виток (рис. 1.18), по якому проходить постійний струм  $I$ . При розрахунку зовнішнього потікозчеплення можна вважати, що весь струм проходить по осьовій лінії провідника (пунктирна лінія на рис. 1.18), елементом довжини якої є  $dl_1$ .

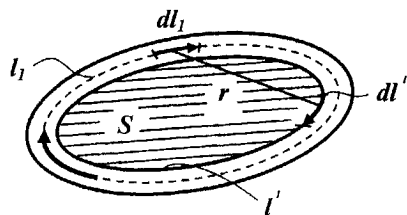


Рисунок 1.18

Власний магнітний потік пронизує поверхню  $S$ , обмежену по внутрішньому периметру проводу контуром  $l'$  з елементом довжини  $dl'$ , і може бути визначений з виразу

$$\Phi_{11} = \Psi_{11} = \oint_{l'} \vec{A}_1 d\vec{l}'.$$

Векторний потенціал для точок контуру  $l'$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1}{r}.$$

Звідси зовнішня індуктивність

$$L_{1\text{зовн}} = \frac{\Psi_{11}}{I} = \frac{\Phi_{11}}{I} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l'} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}' d\vec{l}_1}{r}. \quad (1.69)$$



Визначення внутрішньої індуктивності та приклади розрахунку зовнішніх індуктивностей для різних контурів наведені в другому розділі.

## 1.9 Енергія магнітного поля

Стационарне магнітне поле має певний запас накопиченої в ньому енергії. Вона розподілена по всьому простору, де тільки існує це магнітне поле. Дана енергія з'являється за рахунок тієї роботи, яка виконується електричним струмом під час створення магнітного поля.

Розглянемо магнітне поле, яке збуджується електричним струмом, що проходить через нерухому котушку з індуктивністю  $L$  та активним опором  $R$ . Нехай в момент часу  $t = 0$  котушка вмикається до джерела постійної напруги з е.р.с.  $E$ .

За другим законом Кірхгофа е.р.с. джерела врівноважує напругу на активному опорі кола та е.р.с. самоіндукції

$$E = iR + \frac{d\psi}{dt}.$$

Перемножимо обидві частини рівності на  $idt$

$$Ei dt = i^2 R dt + i d\psi. \quad (1.70)$$

Ліва частина виразу (1.70) являє собою енергію, яку віддало джерело за час  $dt$ . Перша складова правої частини є енергією, яка перетворилася на опорі  $R$  за час  $dt$  в тепло. Друга складова – це накопичена за час  $dt$  енергія магнітного поля окремої нездатної до деформації котушки індуктивності.

Позначимо цю енергію

$$dW_M = i d\psi.$$

Після закінчення перехідного процесу в котушці встановляється постійний струм  $I$  та потокозчеплення  $\Psi$ . Енергія, яка буде накопичена в магнітному полі під час зміни потокозчеплення від

нуля до  $\Psi$

$$W_M = \int_0^{\Psi} i d\psi. \quad (1.71)$$

Для котушок з неферомагнітним осердям  $\psi=Li$ , тому

$$W_M = \int_0^I Li di = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi I}{2}. \quad (1.72)$$

Нехай магнітне поле створено двома індуктивно зв'язаними котушками. Енергію магнітного поля розрахуємо як суму енергій, визначених за (1.71)

$$W_M = W_{M_1} + W_{M_2} = \int_0^{\Psi_1} i_1 d\psi_1 + \int_0^{\Psi_2} i_2 d\psi_2. \quad (1.73)$$

У виразі (1.73) в потокозчеплення котушок  $\psi_1$  і  $\psi_2$  входять як власні, так і взаємні потокозчеплення, тобто

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{11} + \psi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2, \\ \psi_2 &= \psi_{22} + \psi_{21} = L_2 i_2 + M_{21} i_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

Перепишемо (1.73) у вигляді:

$$W_M = \int_0^{I_1} i_1 L_1 di_1 + \int_0^{I_2} i_1 M_{12} di_2 + \int_0^{I_2} i_2 L_2 di_2 + \int_0^{I_1} i_2 M_{21} di_1, \quad (1.75)$$

де  $I_1, I_2$  – усталені значення струмів відповідно в першій та другій котушках.

Після підключення даної системи індуктивно-зв'язаних котушок до джерела постійної напруги в момент часу  $t = 0$ , струми перехідного процесу в котушках будуть змінюватися в часі таким чином

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_1 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \\ i_2 &= I_2 + A_3 e^{p_1 t} + A_4 e^{p_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

Оскільки

$$\left. \begin{aligned} di_1 &= (A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}) dt, \\ di_2 &= (A_3 p_1 e^{p_1 t} + A_4 p_2 e^{p_2 t}) dt, \end{aligned} \right\}$$

а

$$M_{12} = M_{21} = M, \quad p_1 < 0, \quad p_2 < 0.$$

то, підставивши (1.76) в (1.75), можна записати

$$W_M = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M \int_0^{\infty} (I_1 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) (A_3 p_1 e^{p_1 t} + A_4 p_2 e^{p_2 t}) dt + \\ + M \int_0^{\infty} (I_2 + A_3 e^{p_1 t} + A_4 e^{p_2 t}) (A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}) dt.$$

Враховуючи, що за першим законом комутації  $A_1 + A_2 = -I_1$ , а  $A_3 + A_4 = -I_2$ , після перетворень отримаємо вираз для повної енергії магнітного поля двох індуктивно зв'язаних котушок

$$W_M = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2 = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{M_{12} I_2 I_1}{2} + \frac{M_{21} I_1 I_2}{2} \quad (1.77) \\ = \frac{\Psi_{11} I_1}{2} + \frac{\Psi_{22} I_2}{2} + \frac{\Psi_{12} I_1}{2} + \frac{\Psi_{21} I_2}{2} = \frac{1}{2} (\Psi_1 I_1 + \Psi_2 I_2).$$

Можна довести, що енергія магнітного поля, створеного  $n$  індуктивно зв'язаними котушками з струмами  $I_k$

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k, \quad (1.78)$$

дорівнює півсумі добутків струмів в котушках на повні потокозчеплення в них.

Знайдемо густину енергії магнітного поля, тобто величину енергії, приведеної до одиниці об'єму.

Розрахуємо поодинокий контур, що складається з одного витка зі струмом  $I$  (рис. 1.19).

Енергія магнітного поля

$$W_M = \frac{\Psi I}{2}.$$

За умови одного витка  $\Psi = \Phi$ . Щоб визначити як енергія розподілена в просторі магнітного поля, проведемо перетворення цього виразу.

Обмежену контуром поверхню  $S$ , поділимо на елементарні площадки

$dS$ . Виділимо в просторі замкнену трубку з незмінним по всій її довжині елементарним магнітним потоком  $d\Phi$  і з площею поперечного перерізу

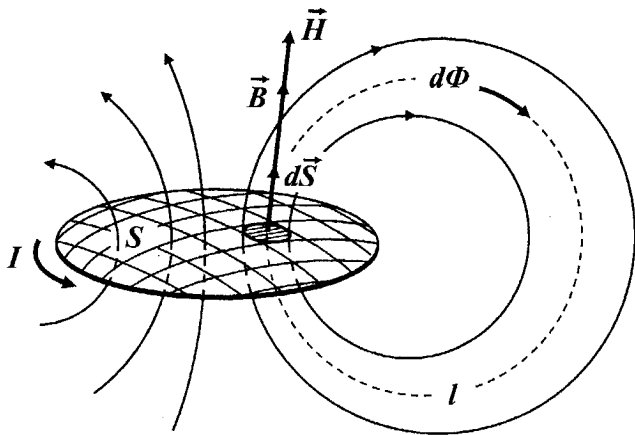


Рисунок 1.19

$dS$  в місці перерізу цієї трубки з поверхню  $S$ . Тоді величину елементарного магнітного потоку в трубці можна записати

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S}.$$

Якщо на всіх елементарних контурах, що обмежують площадки  $dS$ , побудувати подібні трубки, то вони заповнять весь об'єм  $V$  простору, зайнятого магнітним полем. Для замкненого контуру  $l$ , що являє собою середню лінію трубки, за законом повного струму

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I.$$

Елементарна енергія магнітного поля, яка замкнена в кожній трубці

$$dW_M = \frac{I d\psi}{2} = \frac{I d\Phi}{2} = \frac{1}{2} \vec{B} d\vec{S} \oint_l \vec{H} d\vec{l}.$$

Елементарний магнітний потік  $d\Phi$  в межах однієї трубки є незмінним, а значить він не залежить від змінної  $d\vec{l}$  і може бути занесений під знак

інтеграла як стала величина

$$dW_M = \frac{I}{2} \oint_l \vec{B} \vec{H} \vec{d}l \vec{dS}. \quad (1.79)$$

Енергія ж, замкнена в об'ємі всіх трубок, дорівнює енергії всього магнітного поля

$$W_M = \int_S dW_M = \int_S \oint_l \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} \vec{d}l \vec{dS}.$$

Оскільки скалярний добуток  $\vec{d}l \vec{dS} = dV$  – це елемент об'єму трубки, а подвійний інтеграл по замкненому контуру  $l$ , який охоплює контур з струмом, та по поверхні  $S$  являє собою інтеграл по всьому об'єму магнітного поля, то

$$W_M = \int_V \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} dV. \quad (1.80)$$

Таким чином, енергія магнітного поля виражена через основні характеристики магнітного поля  $\vec{B}$  та  $\vec{H}$  і може бути застосована для найбільш загальних випадків. Зокрема, формула (1.80) буде правильною для випадку кількох контурів.

Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$W_{0M} = \frac{\partial W_M}{\partial V} = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2}. \quad (1.81)$$

Оскільки

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H},$$

то

$$W_{0M} = \frac{\mu_a H^2}{2},$$

або

$$W_{0M} = \frac{B^2}{2\mu_a}. \quad (1.82)$$

## 1.10 Механічні сили в магнітному полі

Відповідно до закону Ампера в магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$  на елемент довжини провідника  $d\vec{l}$  зі струмом  $I$  діє елементарна сила  $d\vec{F}$

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}].$$

Для розрахунку ж сили, яка буде діяти на весь провідник, візьмемо лінійний інтеграл по довжині цього провідника

$$\vec{F} = \int_l I [d\vec{l} \vec{B}].$$

Закон Ампера можна поширити і на взаємодію двох контурів зі струмами (рис. 1.20). В точці  $m$ , що знаходиться на провіднику з струмом  $I_2$ ,

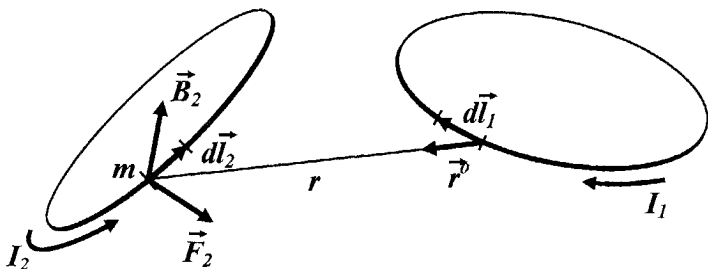


Рисунок 1.20

елемент  $d\vec{l}_1$  провідника з струмом  $I_1$  створює елементарну магнітну індукцію  $d\vec{B}_2$ , яку можна визначити за законом Біо-Савара

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{[d\vec{l}_1 \vec{r}^0]}{r^2},$$

де  $\vec{r}^0$  – одиничний вектор відстані, що спрямований від провідника  $l$  до провідника 2.

Магнітна індукція  $\vec{B}_2$  в точці  $m$  від дії всього першого контуру

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{[d\vec{l}_1 \vec{r}^0]}{r^2}.$$

За законом Ампера на елемент довжини  $d\vec{l}_2$  з струмом  $I_2$ , що знаходиться в магнітному полі з індукцією  $\vec{B}_2$ , діє елементарна сила

$$d\vec{F}_2 = I_2 [d\vec{l}_2 \vec{B}_2]$$

або

$$d\vec{F}_2 = I_2 \left[ d\vec{l}_2 \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{[d\vec{l}_1 \vec{r}^0]}{r^2} \right] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{[d\vec{l}_2 [d\vec{l}_1 \vec{r}^0]]}{r^2}.$$

Сила, що діє на весь другий контур

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{[d\vec{l}_2 [d\vec{l}_1 \vec{r}^0]]}{r^2}. \quad (1.83)$$

Вираз (1.83) можна використовувати тільки в простих випадках, а в більш загальних випадках зручніше пов'язувати сили взаємодії зі зміною енергії магнітного поля.

Нехай магнітне поле створено кількома контурами зі струмами (рис. 1.21), причому тільки один із них (контур  $k$ ) має змогу рухатися в на-

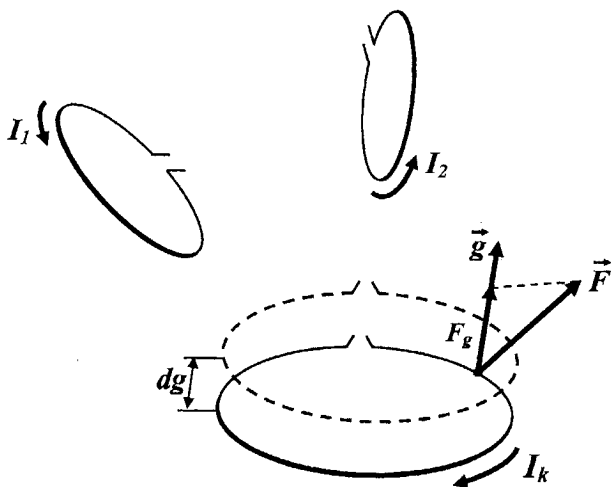


Рисунок 1.21

прямі координати  $g$ . Інші контури – нерухомі.

Припустимо, що внаслідок дії сили  $\vec{F}$  контур  $k$  переміщується за час  $dt$  на відстань  $dg$  і при цьому виконується робота

$$dA = \vec{F} d\vec{g} = F_g dg. \quad (1.84)$$

За цей час підключені до контурів зовнішні джерела енергії віддають енергію, яка йде на утворення тепла в опорах контурів, на зміну величини енергії магнітного поля  $dW_M$  та на виконання механічної роботи  $dA$  по переміщенню контуру  $k$ . Опишемо це у вигляді рівняння

$$\sum_{k=1}^n e_k i_k dt = \sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + dW_M + F_g dg. \quad (1.85)$$

За другим законом Кірхгофа

$$e_k = i_k R_k + \frac{d\psi_k}{dt}.$$

Підставимо значення е.р.с.  $e_k$  в рівняння (1.85)

$$\sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k = \sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + dW_M + F_g dg$$

або

$$\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k = dW_M + F_g dg. \quad (1.86)$$

Рівняння (1.86) визначає баланс енергії для системи контурів і показує, що та частина роботи джерел, яка пов'язана зі зміною потоків в контурах, витрачається на зміну енергії магнітного поля і на механічну роботу.

Розглянемо два випадки: коли при переміщенні контурів залишаються незмінними їх потокозчеплення ( $\psi_k = const$ ) і другий випадок, коли постійними залишаються струми в контурах ( $i_k = const$ ).

Нехай незмінними є потокозчеплення контурів. В цьому випадку



$d\psi_k = 0$  і  $\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k = 0$ , тому (1.86) набуває вигляду:

$$0 = dW_M + F_g dg, \quad \psi_k = \text{const}$$

або

$$dW_M = -F_g dg, \quad \psi_k = \text{const}. \quad (1.87)$$

Останній вираз показує, що за умови  $\psi_k = \text{const}$  переміщення контуру  $k$  призводить до зменшення енергії магнітного поля. При цьому величина електромагнітної сили буде дорівнювати:

$$F_g = -\frac{dW_M}{dg}. \quad (1.88)$$

Розглянемо тепер випадок, коли зовнішні джерела енергії підтримуватимуть в контурах постійні струми ( $i_k = \text{const}$ ), а поточозчеплення будуть змінюватися.

Відповідно до виразу (1.78), за яким визначається величина енергії магнітного поля, створеного  $n$  контурами, зміна цієї енергії

$$dW_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k, \quad i_k = \text{const}. \quad (1.89)$$

Рівняння балансу енергії (1.86) набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k + F_g dg, \quad i_k = \text{const}. \quad (1.90)$$

З виразів (1.89) і (1.90) випливає, що приріст енергії магнітного поля є додатним, тобто енергія магнітного поля при незмінних струмах в контурах і переміщенні контуру  $k$  збільшується за рахунок зовнішніх джерел енергії, а робота, що витрачається на переміщення контуру, дорівнює цьому приросту енергії

$$F_g dg = dW_M, \quad i_k = \text{const}.$$

і

$$F_g = \frac{dW_M}{dg}, \quad i_k = \text{const}. \quad (1.91)$$

Обидва вирази для сили дорівнюють один одному

$$F_g = - \left( \frac{dW_M}{dg} \right)_{\psi_k = \text{const}} = + \left( \frac{dW_M}{dg} \right)_{i_k = \text{const}}$$

Різниця в знаках при визначенні сили ((1.88) і (1.91)) означає тільки те, що в першому випадку при переміщенні контуру енергія магнітного поля зменшується, а в другому випадку за рахунок зовнішніх джерел енергії вона збільшується.

Використаємо замість абстрактної координати  $g$  і, відповідно, проєкції на неї сили  $F_g$  прямокутну систему координат. В цьому випадку проєкції вектора сили на координатні осі можна визначити за виразами

$$F_x = - \frac{dW_M}{dx}, \quad F_y = - \frac{dW_M}{dy}, \quad F_z = - \frac{dW_M}{dz}, \quad \psi_k = \text{const},$$

$$F_x = \frac{dW_M}{dx}, \quad F_y = \frac{dW_M}{dy}, \quad F_z = \frac{dW_M}{dz}, \quad i_k = \text{const}.$$

Вектор сили

$$\vec{F} = - \left( \frac{dW_M}{dx} \vec{i} + \frac{dW_M}{dy} \vec{j} + \frac{dW_M}{dz} \vec{k} \right), \quad \psi_k = \text{const},$$

$$\vec{F} = \left( \frac{dW_M}{dx} \vec{i} + \frac{dW_M}{dy} \vec{j} + \frac{dW_M}{dz} \vec{k} \right), \quad i_k = \text{const}.$$

Або

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= -\text{grad} W_M, \quad \psi_k = \text{const}, \\ \vec{F} &= \text{grad} W_M, \quad i_k = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

## 1.11 Аналогія математичних співвідношень між параметрами магнітних і електростатичних полів

Як відомо, в тій частині простору, де вільних зарядів немає, електростатичне поле характеризується співвідношеннями:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{rot} \vec{E} = 0, \quad \vec{E} = -\text{grad} \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

В магнітному полі для тих точок простору, в яких струми відсутні, співвідношення між основними параметрами поля мають вигляд:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{rot} \vec{H} = 0, \quad \vec{H} = -\text{grad} \varphi_m, \quad \nabla^2 \varphi_m = 0.$$

Як бачимо, система рівнянь електростатичного поля (для простору, де  $\rho=0$ ) подібна системі рівнянь магнітного поля (у випадку, коли  $\vec{j}=0$ ). При цьому аналогом вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  є вектор електричного зміщення  $\vec{D}$ , а аналогом вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  – вектор напруженості електростатичного поля  $\vec{E}$ . Потенціал електростатичного поля  $\varphi$  і скалярний потенціал магнітного поля  $\varphi_m$  задовольняють рівняння Лапласа.

Подібними є і граничні умови:

$$\begin{aligned} E_{1\partial} &= E_{2\partial}, & H_{1\partial} &= H_{2\partial}, \\ D_{1n} &= D_{2n}, & B_{1n} &= B_{2n}, \\ \frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} &= \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}, & \frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} &= \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}. \end{aligned}$$

Оскільки скалярний магнітний потенціал, подібно до потенціалу електростатичного поля, задовольняє рівняння Лапласа та граничні умови, то за аналогією слушно стверджувати, що теорема єдності, як і її наслідки, є прийнятними і для магнітного поля. Це означає, що методи аналізу електростатичних полів можна застосовувати і для розрахунку полів магнітних, а також здійснювати моделювання та дослідження магнітних полів за допомогою відомих подібних задач електростатичного поля або електрично-

го поля постійних струмів.

## Питання для самоперевірки

1. Які основні величини характеризують магнітне поле постійних струмів? Назвіть одиниці їх вимірювання.
2. Запишіть принцип неперервності магнітного потоку в інтегральній та диференціальній формах.
3. Чому поняття скалярного магнітного потенціалу  $\varphi_m$  для тих точок простору, через які проходять електричні струми, немає сенсу?
4. Що характеризує магнітна проникність середовища?
5. Що є причиною запровадження векторного магнітного потенціалу?
6. В чому полягає відмінність між діамагнетиками, парамагнетиками та феромагнетиками?
7. Що являють собою власний та взаємний магнітні потоки?
8. Як пов'язані між собою магнітна індукція  $\vec{B}$ , напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  та намагніченість речовини  $\vec{J}$ ?
9. Як пов'язані між собою кути падіння ( $\alpha_1$ ) та заломлення ( $\alpha_2$ ) ліній вектора магнітної індукції на межі двох середовищ з магнітними проникностями  $\mu_1$  і  $\mu_2$ ?
10. Поясніть різницю між магнітним потоком та магнітним потокозчепленням.
11. Розкрийте фізичний зміст від'ємного знака, що може з'явитися під час обчислень за виразом (1.92) механічної сили в магнітному полі.
12. За якої умови магнітне поле можна вважати потенціальним?
13. Що характеризує намагніченість речовини  $\vec{J}$  і в яких одиницях вона вимірюється?
14. Як формулюється закон електромагнітної індукції? Наведіть рівняння, що його описує.

15. Що являють собою самоіндукція та взаємна індукція?

16. Як можна виразити магнітний потік через векторний магнітний потенціал?

17. Як напрямлені один відносно одного вектори магнітної індукції  $\vec{B}$  та векторного магнітного потенціалу  $\vec{A}$ ?

18. Чи можна записати рівняння Пуассона для скалярного магнітного потенціалу  $\varphi_m$ ?

19. Що являють собою зовнішня та внутрішня індуктивності контурів?

20. Чому векторний потенціал  $\vec{A}$  є більш узагальненою характеристикою магнітного поля, аніж скалярний магнітний потенціал  $\varphi_m$ ?

21. Як визначити ту складову енергії магнітного поля двох контурів зі струмами, яка обумовлена їх взаємним магнітним зв'язком?

22. Чи може потокозчеплення бути меншим за магнітний потік? Якщо так, то в яких випадках?

23. В яких областях простору магнітне поле можна вважати потенціальним?

24. Які обмеження необхідно накласти на вибір шляху інтегрування вектора напруженості магнітного поля, щоб його скалярний потенціал був однозначним?

25. Як записують закон повного струму в математичній формі?

26. За якої умови в провіднику, що знаходиться в незмінному у часі магнітному полі, може бути наведена е.р.с.?

## 2 МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

### 2.1 Стисла характеристика задач та методів розрахунку магнітних полів

Застосування того чи іншого методу розрахунку магнітних полів в значній мірі залежить від типу самих задач, що підлягають розв'язанню.

До основних типів задач магнітного поля можна віднести такі задачі:

- визначення основних параметрів магнітного поля (магнітної індукції  $\vec{B}$  або напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ ), що створене наперед заданим розподілом у просторі електричних струмів;

- знаходження розподілу електричних струмів в деякій частині простору з метою отримання заданої картини поля;

- визначення індуктивностей та взаємних індуктивностей системи контурів;

- розрахунок механічних сил, які діють на заряджені частинки, провідники або феромагнітні тіла, що рухаються в магнітному полі.

В залежності від конкретного типу задачі для її розв'язання використовують:

- в найпростіших випадках – закон Біо-Савара;

- за наявності певної симетрії магнітного поля – закон повного струму в поєднанні з принципом накладання (суперпозиції);

- аналітичні методи розв'язання рівнянь Пуассона та Лапласа;

- різні числові методи тощо.

## 2.2 Використання закону Біо-Савара

### Приклад 1. Магнітне поле прямолінійного провідника з струмом

Визначити магнітну індукцію в точці  $m$ , що знаходиться на відстані  $a$  від осі провідника довжиною  $l$ , по якому проходить струм  $I$  (рис. 2.1).

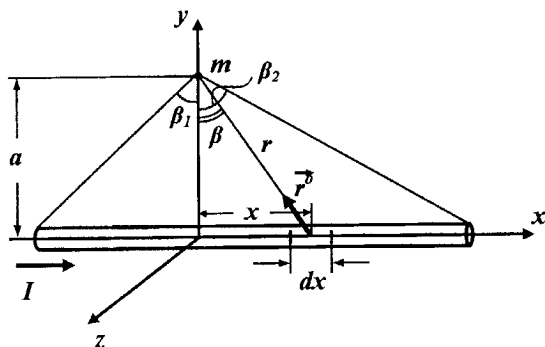


Рисунок 2.1

Розв'язання. За законом Біо-Савара магнітна індукція в точці  $m$ , що віддалена від елемента довжини провідника  $d\vec{l} = d\vec{x}$  з струмом  $I$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \vec{r}^\circ]}{r^2}.$$

Визначимо всі величини, що входять до формули, через одну змінну, наприклад, кут  $\beta$  і скористаймося прямокутною системою координат як показано на рис. 2.1.

$$x = a \operatorname{tg} \beta,$$

$$d\vec{l} = d\vec{x} = \frac{a d\beta}{\cos^2 \beta} \vec{i},$$

$$\vec{r}^\circ = -\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{j},$$

$$r = \frac{a}{\cos \beta}$$

Після підстановки всіх співвідношень отримаємо

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\left[ \frac{a d\beta}{\cos^2 \beta} \vec{i} \cdot (-\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{j}) \right] \cos^2 \beta}{a^2}.$$

Врахуємо, що

$$[\vec{i} \vec{j}] = \vec{k}, [\vec{i} \vec{i}] = 0,$$

тоді після нескладних перетворень будемо мати

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \cos \beta}{4\pi a} d\beta \vec{k}. \quad (2.1)$$

Звідки магнітна індукція в точці  $m$  від дії всього провідника довжиною  $l$ , в якому проходить струм  $I$

$$\vec{B} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0 I \cos \beta}{4\pi a} \vec{k} d\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \vec{k}. \quad (2.2)$$

Отриманий вираз показує, що вектор індукції магнітного поля, яке створене прямолінійним провідником з струмом  $I$ , напрямлений вздовж осі  $z$ .

Якщо провідник досить довгий ( $l \gg a$ ), то можна вважати, що

$$\beta_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad \beta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

і тоді

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{k}. \quad (2.3)$$

Напруженість магнітного поля в точці  $m$

$$H = \frac{I}{2\pi a} \quad (2.4)$$

також буде напрямлена вздовж осі  $z$ .

Необхідно наголосити, що отримані вирази описують магнітне поле тільки поза межами провідника.



## Приклад 2. Магнітне поле колового витка з струмом $I$

Визначити магнітну індукцію та напруженість магнітного поля в точці  $m$ , що знаходиться на осі колового витка радіуса  $a$  (рис. 2.2). Відстань від точки  $m$  до площини витка дорівнює  $b$ .

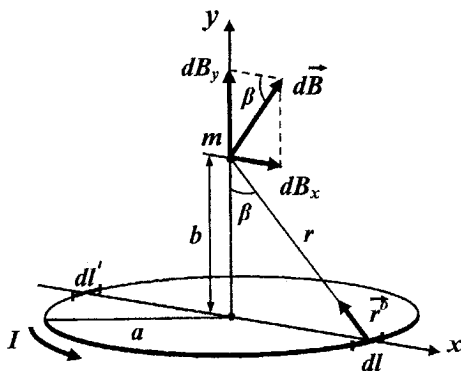


Рисунок 2.2

Розв'язання. Відповідно до закону Біо-Савара елементарна магнітна індукція  $d\vec{B}$  в точці  $m$ , що створена елементом струму  $I d\vec{l}$ , напрямлена перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори  $\vec{r}$  та  $I d\vec{l}$ , і визначається таким чином

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} [d\vec{l} \vec{r}^0].$$

Якщо розкласти вектор  $d\vec{B}$  на осі  $x$  і  $y$  відповідно на складові  $dB_x$  і  $dB_y$ , то неважко помітити, що для будь-якої складової  $dB_x$  від кожного елемента  $dl$  внаслідок симетрії завжди знайдеться рівна їй, але напрямлена в зворотному напрямі складова  $dB'_x$  від елемента  $dl'$ , розміщеного діаметрально протилежно від  $dl$ . Тому магнітна індукція буде мати тільки складову вздовж осі  $y$ .

З рисунка 2.2 видно, що  $dB_y = dB \sin\beta$ , а вектори  $d\vec{l}$  і  $\vec{r}^0$  - перпен-

дикулярні один до одного, тобто

$$[d\vec{l} \vec{r}^\circ] = dl r^\circ \sin(\widehat{d\vec{l} \vec{r}^\circ}) = dl,$$

тому

$$dB_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \beta}{r^2},$$

а магнітна індукція  $B$  в точці  $m$  від струму всього колового витка напрямлена вздовж осі  $Oy$  і дорівнює:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \beta}{r^2} dl.$$

Кут  $\beta$  та відстань  $r$  від витка до точки  $m$  не залежать від змінної інтегрування  $dl$ , довжина ж витка (контуру інтегрування)  $l=2\pi a$ , тому

$$B = \frac{\mu_0 I a \sin \beta}{2r^2}.$$

Виразивши відстань  $r$  через кут  $\beta$

$$r = \frac{a}{\sin \beta},$$

отримаємо

$$B = \frac{\mu_0 I \sin^3 \beta}{2a}. \quad (2.5)$$

Якщо кут  $\beta$  записати через радіус колового витка  $a$  та відстань  $b$ , то

$$\sin \beta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

і

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (2.6)$$

В центрі колового витка  $b = 0$  і

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}. \quad (2.7)$$

### Приклад 3. Магнітне поле соленоїда

Соленоїдом називають одношарову кругову котушку індуктивності, яка має  $w$  витків, які намотані на циліндричний каркас радіусом  $a$  і довжиною  $l$  (рис. 2.3).

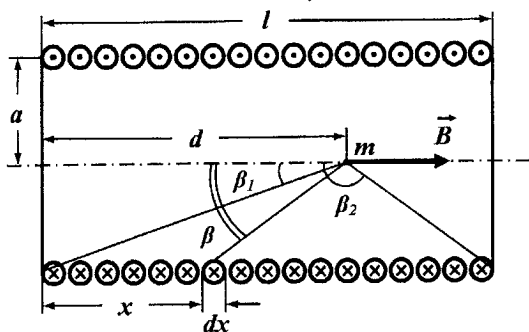


Рисунок 2.3

Котушкою проходить струм  $I$ . Необхідно визначити магнітну індукцію в точці  $m$ , що знаходиться на осі соленоїда на відстані  $d$  від його лівого краю.

**Р о з в ' я з а н н я .** Припустимо, що струм нижньої частини котушки входить в поверхню рисунка, від нас (навскісний хрест в перерізі провідника), струм верхньої ж половини напрямлений до нас (точка в перерізі провідника). При такому напрямі струму магнітна індукція в точці  $m$  буде спрямована направо.

На одиницю довжини котушки припадає  $\frac{w}{l}$  витків. Розіб'ємо всю довжину котушки на елементарні відрізки  $dx$ , уявляючи при цьому котушку як сукупність окремих колових витків з струмом

$$\Delta i = \frac{w}{l} I dx.$$

Магнітна індукція в точці  $m$ , що створена струмом одного колового

витка, який знаходиться на відстані  $x$  від лівого краю котушки, за формулою (2.5) буде

$$dB = \frac{\mu_0 \Delta i \sin^3 \beta}{2a} = \frac{\mu_0 wI \sin^3 \beta dx}{2al}.$$

Оскільки  $d - x = a \cdot \operatorname{ctg} \beta$ ,  $dx = -\frac{a}{\sin^2 \beta} d\beta$ , то магнітна індукція в точці

$m$ , яка збуджена струмами всіх колових витків соленоїда

$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0 wI a \sin^3 \beta}{2al \sin^2 \beta} d\beta = \frac{\mu_0 wI}{2l} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta$$

або

$$B = \frac{\mu_0 wI}{2l} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2). \quad (2.8)$$

Якщо довжина соленоїда значно більша за його радіус ( $l \gg a$ ), то кути  $\beta_1 \approx 0$ ,  $\beta_2 \approx 180^\circ$ , а значить,

$$B = \frac{\mu_0 wI}{l}. \quad (2.9)$$

Напруженість магнітного поля

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{wI}{l}. \quad (2.10)$$

Вирази (2.9) і (2.10) показують, що для досить довгого соленоїда значення магнітної індукції  $B$  не залежить від положення точки  $m$  всередині соленоїда, тобто для будь-якої його точки магнітна індукція (відповідно і напруженість магнітного поля) має те ж саме значення. А значить, магнітне поле всередині досить довгого соленоїда однорідне.

Магнітний потік всередині соленоїда

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = BS = \frac{\mu_0 wI \pi a^2}{l}. \quad (2.11)$$

## Потокозчеплення

$$\psi = w\Phi = \mu_0 \frac{w^2 I \pi a^2}{l}.$$

Індуктивність соленоїда

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 w^2 \pi a^2}{l}. \quad (2.12)$$

## Приклад 4

Заряджене з об'ємною густиною заряду  $\rho$  тонке діелектричне кільце обертається навколо осі, що проходить перпендикулярно до площини цього кільця через його центр (рис. 2.4). Частота обертання кільця –  $n$  обертів за секунду.

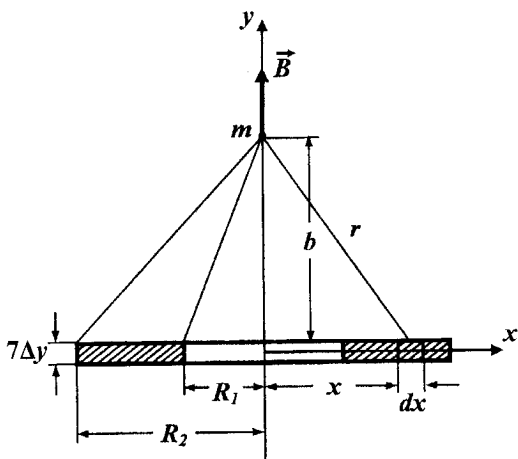


Рисунок 2.4

Визначити магнітну індукцію в точці  $m$ , що належить осі обертання і знаходиться на відстані  $b$  від площини кільця. Геометричні розміри вказані на рис. 2.4.

**Розв'язання.** Кутова швидкість обертання кільця  $\omega = 2\pi n$ . Тоді лінійна швидкість обертання елемента кільця  $dx$ , що знаходиться на від-

стані  $x$  від осі  $v = \omega \cdot x = 2\pi n x$ .

Густина струму зарядів, які будуть направлено рухатися під час обертання кільця

$$\delta = \rho v = \rho 2\pi n x.$$

Тоді елементарний струм, що проходить по кільцю через переріз  $dS = \Delta y dx$

$$di = \delta dS = \rho 2\pi n \Delta y x dx.$$

За законом Біо-Савара магнітну індукцію на осі, яка обумовлена цим елементарним струмом  $di$ , можна знайти за виразом (2.6)

$$dB = \frac{\mu_0 x^2 di}{2(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \rho 2\pi n \Delta y x^3}{2(x^2 + b^2)^{3/2}} dx.$$

Звідси магнітна індукція в точці  $m$  від струму всього кільця знайдемо шляхом інтегрування отриманого виразу в границях зміни  $x$  від  $R_1$  до  $R_2$

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 \rho \pi n \Delta y \int_{R_1}^{R_2} \frac{x^3}{(x^2 + b^2)^{3/2}} dx = \\ &= \mu_0 \rho \pi n \Delta y \left[ \sqrt{b^2 + R_2^2} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + R_2^2}} - \sqrt{b^2 + R_1^2} - \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + R_1^2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В центрі кільця для  $b = 0$

$$B = \mu_0 \rho \pi n \Delta y (R_2 - R_1).$$

Якщо  $R_1 = 0$ , тобто коли кільце перетворюється в диск радіусом  $R_2$ , то

$$B = \mu_0 \rho \pi n \Delta y \left[ \sqrt{b^2 + R_2^2} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + R_2^2}} - 2b \right]. \quad (2.14)$$

Слід зазначити, що для всіх цих випадків вектор магнітної індукції збігається з напрямом осі  $y$ .

## 2.3 Використання закону повного струму

### Приклад 5. *Магнітне поле довгого поодинокого прямолінійного проводу*

Необхідно визначити основні характеристики магнітного поля поза межами та всередині провідника колового перерізу радіуса  $R$ , довжиною  $l$  та струмом  $I$ , що проходить по ньому (рис. 2.5).

Розв'язання. В однорідному середовищі навколо прямолінійно-

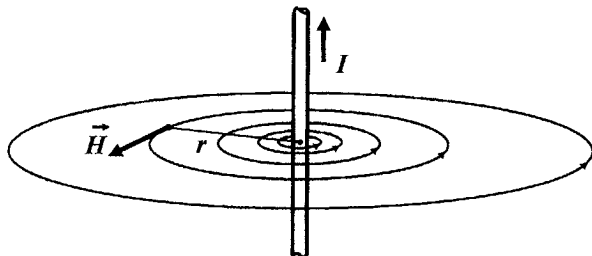


Рисунок 2.5

го провідника з струмом створюється колове магнітне поле. Напрямок індукції і напруженості магнітного поля визначається за правилом гвинта. Лінії вектора  $\vec{H}$  є колами, центри яких знаходяться на осі провідника (рис. 2.5).

Розглянемо спочатку поле за межами провідника. Запишемо закон повного струму в інтегральній формі

$$\oint \vec{H}_l d\vec{l} = I,$$

вважаючи контуром інтегрування коло радіусом  $r$ . Внаслідок симетрії модуль вектора напруженості  $H_l$  для всіх точок контуру інтегрування є однаковим, а сам вектор напрямлений за дотичною до цього колового контуру,

тому

$$\oint_l \vec{H}_l \cdot d\vec{l} = H_l \int_l dl = H_l \cdot 2\pi r = I.$$

Звідси

$$H_l = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_l = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r > R. \quad (2.15)$$

Слід зазначити, що такий же вираз (2.4) був отриманий при розв'язуванні цієї задачі за допомогою закону Біо-Савара.

Знайдемо векторний магнітний потенціал  $\vec{A}_l$ . Його напрям збігається з напрямом вектора густини струму  $\vec{\delta}$ , отже, вектор  $\vec{A}_l$  буде напрямлений паралельно до прямолінійного проводу. Скористаємося циліндричною системою координат і сумістимо вісь  $z$  з віссю цього проводу (рис. А.1, б). В цьому випадку вектор  $\vec{A}_l$  буде мати тільки одну проекцію на вісь  $z$   $A_l = A_{lz}$ , а вектор магнітної індукції  $\vec{B}_l$  - тільки одну складову вздовж осі  $\theta$   $B_l = B_{l\theta}$ . Обидві величини  $A_l$  і  $B_l$  залежать тільки від координати  $r$ .

Таким чином,

$$\left. \begin{aligned} A_{lr} = 0, \quad A_{l\theta} = 0, \quad \frac{\partial A_l}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial A_l}{\partial z} = 0, \\ B_{lr} = 0, \quad B_{lz} = 0, \quad \frac{\partial B_l}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial B_l}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Для знаходження вектора  $\vec{A}_l$  скористаємось співвідношенням

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Для циліндричної системи координат (А.22)

$$\vec{B}_l = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{i}_r & \vec{i}_\theta & \frac{1}{r} \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_{lr} & r A_{l\theta} & A_{lz} \end{vmatrix}.$$



З врахуванням (2.16) отримаємо

$$B_l = -\frac{\partial A_l}{\partial r}. \quad (2.17)$$

Звідси

$$A_l = -\int B_l dr = -\int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C_1,$$

де  $C_1$  – стала інтегрування.

Векторний потенціал магнітного поля, як і скалярний, визначається з точністю до сталої величини, тому сталу інтегрування  $C_1$  можна знайти вважаючи, наприклад, що на поверхні провідника ( $r = R$ ) векторний потенціал дорівнює нулю

$$0 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R + C_1, \quad C_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R.$$

Таким чином, векторний потенціал за межами провідника

$$A_l = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r}, \quad r > R. \quad (2.18)$$

Визначимо магнітне поле всередині циліндричного проводу з постійним струмом  $I$  (рис. 2.6).

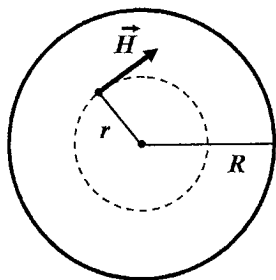


Рисунок 2.6

Для обчислення напруженості магнітного поля застосуємо диференціальну форму закону повного струму

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}.$$

Міркуючи як і у випадку з дослідженням поля поза межами провідника, легко довести, що вектор напруженості магнітного поля має складову тільки на осі  $\theta$   $H_z = H_{z\theta}$  і залежить лише від координати  $r$ . Вектор густини струму  $\vec{\delta}$  має

складову вздовж осі  $z$  і для всіх точок площини перерізу є однаковим

$$\delta = \delta_z = \frac{I}{\pi R^2}. \quad (2.19)$$

Записуючи ротор для циліндричної системи координат, отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_2)}{\partial r} = \delta,$$

розв'язком якого є вираз

$$H_2 = \frac{\delta r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (2.20)$$

З врахуванням (2.19)

$$H_2 = \frac{I r}{2\pi R^2} + \frac{C_2}{r}.$$

Сталу інтегрування  $C_2$  визначимо за допомогою граничних умов.

Вектор напруженості магнітного поля для  $r = R$  як зовні, так і всередині провідника, напрямлений по дотичній до поверхні проводу, що являє собою межу поділу двох середовищ.

Відповідно до (1.50) на межі поділу однаковими є дотичні складові напруженості магнітного поля. Отже, для  $r = R$

$$H_1 = H_2$$

або

$$\frac{I}{2\pi R} = \frac{I R}{2\pi R^2} + \frac{C_2}{R}.$$

Звідси  $C_2 = 0$  і

$$H_2 = \frac{I r}{2\pi R^2}. \quad (2.21)$$

Магнітна індукція

$$B_2 = \frac{\mu_a I r}{2\pi R^2}, \quad r < R. \quad (2.22)$$

Векторний магнітний потенціал всередині провідника визначається за диференціальним рівнянням

$$B_2 = B_{2\theta} = -\frac{\partial A_2}{\partial r}.$$

Його розв'язок

$$A_2 = - \int B_2 dr = - \frac{\mu_a I r^2}{4\pi R^2} + C_3. \quad (2.23)$$

Стала інтегрування  $C_3$  визначається за допомогою граничних умов. Оскільки векторні потенціали  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$  напрямлені вздовж осі  $z$ , то вони за умови  $r = R$  є дотичними до поверхні межі поділу, і, у відповідності до (1.47), дорівнюють один одному.

Таким чином,

$$\frac{\mu_a I}{2\pi} \ln \frac{R}{R} = - \frac{\mu_a I R^2}{4\pi R^2} + C_3.$$

Звідси

$$C_3 = \frac{\mu_a I}{4\pi}$$

і

$$A_2 = \frac{\mu_a I}{4\pi} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad r < R. \quad (2.24)$$

На рис. 2.7 наведені графіки зміни величин  $H$ ,  $B$  і  $A$  в залежності від

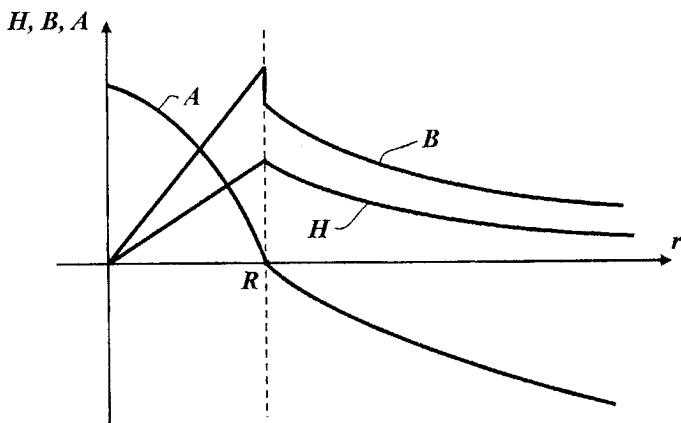


Рисунок 2.7

координати  $r$  за умови  $\mu_a > \mu_0$ .

Знайдемо магнітний потік всередині проводу. Елементарний магнітний потік крізь площину ширини  $dr$  та довжини  $l$ , що знаходиться на відстані  $r$  від осі проводу (рис. 2.8)

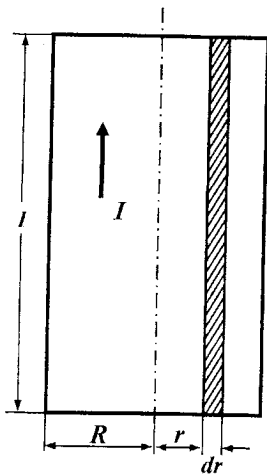


Рисунок 2.8

$$d\Phi_{\text{внутр}} = Bl dr.$$

Увесь внутрішній магнітний потік

$$\Phi_{\text{внутр}} = \int_0^R Bl dr = \int_0^R \frac{\mu_a I l r}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_a I l}{4\pi}. \quad (2.25)$$

Внутрішній магнітний потік проводу можна обчислити за векторним потенціалом (1.45)

$$\Phi_{\text{внутр}} = \oint_l \vec{A}_2 d\vec{l}.$$

За контур інтегрування необхідно вибрати вісь проводу та лінію, що проходить його поверхнею вздовж всієї довжини цього проводу.

На осі проводу ( $r = 0$ ) вздовж всієї його довжини векторний потенціал має те саме значення і визначається за (2.24)

$$A_2(0) = \frac{\mu_a I}{4\pi},$$

на поверхні проводу ( $r = R$ ) скрізь  $A_2(R) = 0$ , тому

$$\Phi_{\text{внутр}} = A_2(0)l - A_2(R)l = \frac{\mu_a I l}{4\pi}. \quad (2.26)$$

Напрями обох векторів  $A_2(0)$  і  $A_2(R)$  збігаються з напрямом вектора густини струму  $\vec{\delta}$ , що і пояснює знак мінус біля другої складової виразу.

Визначимо внутрішню індуктивність  $L_{\text{внутр}}$  поодинокого проводу, для чого на початку обчислимо його внутрішнє потокозчеплення. Елементарний магнітний потік  $d\Phi_{\text{внутр}}$  крізь площину  $dS = l dr$  зчіплюється не з усім струмом  $I$ , а тільки з його частиною  $I_r$ , що проходить через переріз прові-

дника радіуса  $r$

$$I_r = \delta \pi r^2 = \frac{I r^2}{R^2}.$$

Отже,

$$d\psi_{\text{внутр}} = d\Phi_{\text{внутр}} \frac{I_r}{I} = \frac{\mu_a I l r^3 dr}{2\pi R^4}.$$

Внутрішнє потокозчеплення

$$\psi_{\text{внутр}} = \int_0^R \frac{\mu_a I l r^3}{2\pi R^4} dr = \frac{\mu_a I l}{8\pi}. \quad (2.27)$$

Таким чином, внутрішнє потокозчеплення вдвічі менше за внутрішній магнітний потік.

Внутрішня індуктивність поодинокого проводу

$$L_{\text{внутр}} = \frac{\psi_{\text{внутр}}}{I} = \frac{\mu_a l}{8\pi}. \quad (2.28)$$

### Приклад 6. Магнітне поле двопровідної лінії

Двopовідна лінія довжиною  $l$  утворена двома прямими пара-

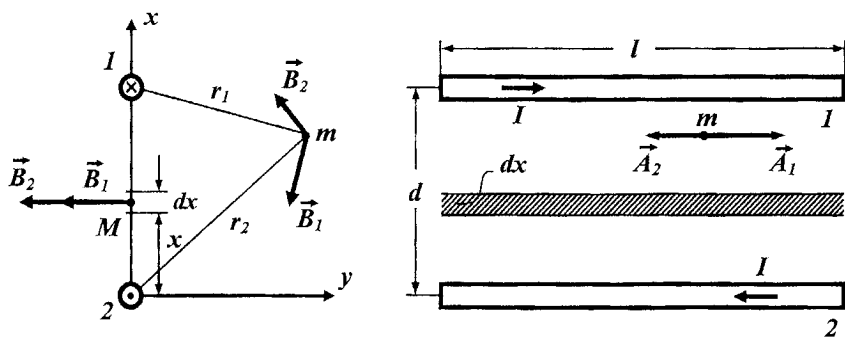


Рисунок 2.9

лельними проводами, що мають однаковий радіус  $R$  та знаходяться на відстані  $d$  один від одного (рис. 2.9), причому  $l \gg d$ , а  $d \gg R$ . Магнітна проникність навколишнього середовища  $\mu_0$ , матеріалу проводів  $\mu_a$ . Необхідно визначити основні характеристики магнітного поля, яке буде створене струмом  $I$  цієї двопровідної лінії.

**Р о з в ' я з а н н я.** Основні характеристики магнітного поля (магнітну індукцію, векторний потенціал) в довільній точці  $m$  знайдемо, скориставшись принципом накладання. В точці  $m$  магнітна індукція  $\vec{B}_1$  створюється струмом першого (верхнього) проводу, а магнітна індукція  $\vec{B}_2$  – струмом другого (нижнього) проводу. Тоді величини цих магнітних індукцій можна визначити за виразом (2.15)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

і

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Знайдемо векторний потенціал в точці  $m$ , також скориставшись принципом накладання. Векторні потенціали  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$ , оскільки вони мають збігатися за напрямками з відповідними струмами, будуть напрямлені паралельно до проводів і взаємно протилежними.

Використовуючи вираз (2.18), одержимо

$$A_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r_1}, \quad A_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r_2}.$$

Звідси

$$A = A_1 - A_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.29)$$

Знайдемо зовнішній магнітний потік, що проходить між проводами двопровідної лінії. В точці  $M$ , що лежить в площині проводів (рис. 2.9), магнітна індукція

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \quad (2.30)$$

а векторний магнітний потенціал

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x}{d-x}. \quad (2.31)$$

Елементарний магнітний потік, що проходить крізь елемент площини  $dS = l dx$  (заштрихована ділянка рис. 2.9)

$$d\Phi_{\text{зовн}} = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{l}{d-x} + \frac{l}{x} \right) l dx.$$

Тоді зовнішній магнітний потік

$$\Phi_{\text{зовн}} = \int_R^{d-R} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{l}{d-x} + \frac{l}{x} \right) l dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}. \quad (2.32)$$

Зовнішній магнітний потік неважко також обчислити і за допомогою векторного потенціалу.

Векторні потенціали на поверхні верхнього проводу (при  $x = d - R$  у виразі (2.31))

$$A_{\text{в}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d-R}{R}$$

і на поверхні нижнього проводу (при  $x = R$ )

$$A_{\text{н}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{d-R}$$

мають однакове значення вздовж всієї довжини своїх провідників.

Зовнішній магнітний потік знайдемо за допомогою (1.45), обходячи контур, що складається з двох проводів лінії, за годинниковою стрілкою

$$\Phi_{\text{зовн}} = \oint_l \vec{A} d\vec{l} = A_{\text{в}} \cdot l - A_{\text{н}} \cdot l = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}.$$

## 2.4 Використання рівнянь Пуассона та Лапласа

### Приклад 7. Магнітне поле поодинокого прямолінійного проводу з постійним струмом

Визначимо магнітне поле поодинокого прямолінійного проводу з постійним струмом  $I$ , що має радіус  $R$  та довжину  $l$ , за умови  $l \gg R$  (рис. 2.10).

Розв'язання. Для розв'язування задачі скористаємось циліндричною системою координат, сумістивши вісь  $z$  з віссю проводу.

Векторний потенціал як поза проводом, так і в його середині збігається за напрямом з вектором густини струму  $\vec{j}$ , тому він має тільки одну складову по осі  $z$  і залежить лише від координати  $r$ .

Розглянемо спочатку магнітне поле поза межами проводу ( $r > R$ ), де воно підпорядковується рівнянню Лапласа

$$\nabla^2 \vec{A}_I = 0.$$

Для циліндричної системи координат за зазначених вище умов це рівняння набуває вигляду:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_I}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.33)$$

Послідовно двічі проінтегруємо це рівняння. Після першого інтегрування отримаємо

$$\frac{\partial A_I}{\partial r} = \frac{C_1}{r},$$

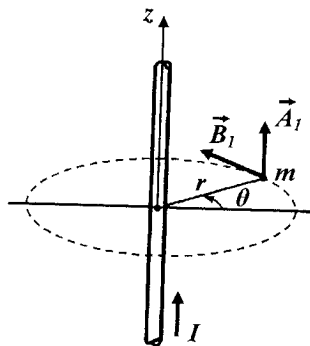


Рисунок 2.10



після другого –

$$A_1 = C_1 \ln r + C_2.$$

Магнітну індукцію обчислимо за відомим векторним потенціалом з диференціального рівняння (2.17)

$$B_1 = -\frac{\partial A_1}{\partial r} = -\frac{C_1}{r}.$$

Напруженість магнітного поля

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = -\frac{C_1}{\mu_0 r}.$$

Для визначення сталих інтегрування відшукаємо спочатку аналогічні величини магнітного поля всередині провідника, а потім скористаємось граничними умовами.

Всередині провідника ( $r < R$ ) магнітне поле підпорядковується рівнянню Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A}_2 = -\mu_a \vec{\delta},$$

яке для циліндричної системи координат має вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_2}{\partial r} \right) = -\mu_a \delta,$$

$$\delta = \frac{I}{\pi R^2}.$$

Звідси

$$\frac{\partial A_2}{\partial r} = -\frac{\mu_a \delta r}{2} + \frac{C_3}{r},$$

$$A_2 = -\frac{\mu_a \delta r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4. \quad (2.34)$$

Магнітна індукція

$$B_2 = -\frac{\partial A_2}{\partial r} = \frac{\mu_a \delta r}{2} - \frac{C_3}{r}.$$

Сталі інтегрування визначимо за допомогою таких умов.

1. На осі проводу ( $r = 0$ ) магнітна індукція не може набути нескінченно великих значень, тому  $C_3 = 0$  і

$$B_2 = \frac{\mu_a \delta r}{2}, \quad H_2 = \frac{\delta r}{2} = \frac{I r}{2\pi R^2}.$$

2. Задамо, що на поверхні проводу векторний потенціал  $A_2$  ( $r = R$ ) дорівнює нулю. Тоді з (2.34) випливає

$$0 = -\frac{\mu_a \delta R^2}{4} + C_4,$$

$$C_4 = \frac{\mu_a \delta R^2}{4} = \frac{\mu_a I}{4\pi}$$

i

$$A_2 = -\frac{\mu_a I r^2}{4\pi R^2} + \frac{\mu_a I}{4\pi} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

3. Оскільки на межі поділу двох середовищ (для  $r = R$ ) рівними між собою є дотичні складові напруженості магнітного поля ( $H_1 = H_2$ ) та дотичні складові векторного потенціалу ( $A_1 = A_2$ ), то

$$-\frac{C_1}{\mu_0 R} = \frac{I R}{2\pi R^2},$$

$$C_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

i

$$C_1 \ln R + C_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( 1 - \frac{R^2}{R^2} \right).$$

Звідси

$$C_2 = -C_1 \ln R = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R.$$

Таким чином, для магнітного поля за межами провідника ( $r > R$ )

$$A_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r}, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad H_1 = \frac{I}{2\pi r},$$

а всередині проводу ( $r < R$ ) –

$$A_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( I - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad B_2 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, \quad H_2 = \frac{I r}{2\pi R^2}.$$

Ті ж самі вирази були отримані і в прикладі 5 за допомогою закону повного струму.

**Приклад 8. Магнітне поле порожнистого циліндричного провідника з постійним струмом**

Вздовж порожнистого циліндричного провідника з внутрішнім радіусом  $R_1$  та зовнішнім –  $R_2$  проходить постійний струм  $I$  (рис. 2.11).

Магнітна проникність навколишнього середовища дорівнює  $\mu_0$ , а магнітна проникність матеріалу проводу –  $\mu_a$ .

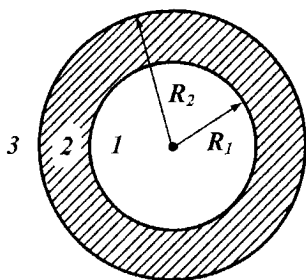


Рисунок 2.11

Розв'язання. Застосуємо рівняння Лапласа та Пуассона для трьох ділянок простору.

Магнітне поле області  $I$  ( $0 < r < R_1$ ), де відсутні електричні струми, описується рівнянням Лапласа

$$\nabla^2 \vec{A}_I = 0.$$

В циліндричній системі координат, вісь  $z$  якої є суміщеною з віссю проводу, диференціальне рівняння відносно  $A_I$  за аналогією до (2.33) буде мати вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_I}{\partial r} \right) = 0.$$

Розв'язування цього рівняння

$$\frac{\partial A_I}{\partial r} = \frac{C_1}{r},$$

$$A_I = C_1 \ln r + C_2,$$

$$B_1 = -\frac{\partial A_1}{\partial r} = -\frac{C_1}{r},$$

$$H_1 = -\frac{C_1}{\mu_0 r}.$$

Для області простору 2 ( $R_1 < r < R_2$ ) з густиною струму

$$\delta = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)},$$

магнітне поле підпорядковується рівнянню Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A}_2 = -\mu_a \vec{\delta}.$$

В циліндричній системі координат за аналогією до прикладу 7 диференціальне рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_2}{\partial r} \right) = -\mu_a \delta.$$

Його розв'язування

$$\frac{\partial A_2}{\partial r} = -\frac{\mu_a \delta r}{2} + \frac{C_3}{r},$$

$$A_2 = -\frac{\mu_a \delta r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4,$$

$$B_2 = -\frac{\partial A_2}{\partial r} = \frac{\mu_a \delta r}{2} - \frac{C_3}{r},$$

$$H_2 = \frac{\delta r}{2} - \frac{C_3}{\mu_a r}.$$

Для точок області 3 ( $r > R_2$ ), де немає електричних струмів, також можна записати рівняння Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_3}{\partial r} \right) = 0.$$

Розв'язування цього рівняння

$$\frac{\partial A_3}{\partial r} = \frac{C_5}{r},$$

$$A_3 = C_5 \ln r + C_6,$$

$$B_3 = -\frac{\partial A_3}{\partial r} = -\frac{C_5}{r},$$

$$H_3 = -\frac{C_5}{\mu_0 r}.$$

Для обчислення шести сталих інтегрування використаємо граничні умови.

На осі проводу ( $r = 0$ ) магнітна індукція  $B_1$  не може набувати безмежно великих значень, тому  $C_1 = 0$  і

$$B_1 = 0,$$

$$H_1 = 0,$$

тобто в першій області магнітного поля немає, а значить, нулю має дорівнювати і векторний магнітний потенціал  $A_1 = 0$ . Таким чином,  $C_2 = 0$ .

На межі поділу двох середовищ дотичні складові вектора напруженості магнітного поля дорівнюють одна одній.

Отже, для  $r = R_1$ ,  $H_1 = H_2$ , тобто

$$0 = \frac{\delta R_1}{2} - \frac{C_3}{\mu_a R_1}, \quad C_3 = \frac{\mu_a \delta R_1^2}{2}.$$

Таким чином, для другої області ( $R_1 < r < R_2$ )

$$B_2 = \frac{\mu_a \delta}{2} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right),$$

$$H_2 = \frac{\delta}{2} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right).$$

Для  $r = R_2$   $H_2 = H_3$ , тому

$$\frac{\delta}{2} \left( R_2 - \frac{R_1^2}{R_2} \right) = -\frac{C_5}{\mu_0 R_2},$$

$$C_5 = -\frac{\mu_0 \delta}{2} (R_2^2 - R_1^2) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}.$$

Для третьої області ( $r > R_2$ )

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad H_3 = \frac{I}{2\pi r}.$$

Щоб обчислити сталі інтегрування  $C_4$  і  $C_6$ , скористаємось рівністю дотичних складових векторних потенціалів на межі поділу двох середовищ.

Для  $r = R_1$   $A_1 = A_2$ , а значить,

$$0 = -\frac{\mu_a \delta R_1^2}{4} + \frac{\mu_a \delta R_1^2}{2} \ln R_1 + C_4$$

і

$$C_4 = \frac{\mu_a \delta R_1^2}{4} - \frac{\mu_a \delta R_1^2}{2} \ln R_1.$$

Таким чином, для другої області маємо

$$A_2 = \frac{\mu_a \delta}{4} (R_1^2 - r^2) + \frac{\mu_a \delta R_1^2}{2} \ln \frac{r}{R_1}.$$

Для  $r = R_2$   $A_2 = A_3$ , тобто

$$\frac{\mu_a \delta}{4} (R_1^2 - R_2^2) + \frac{\mu_a \delta R_1^2}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R_2 + C_6.$$

Звідси

$$C_6 = \frac{\mu_a \delta}{4} (R_1^2 - R_2^2) + \frac{\mu_a \delta R_1^2}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R_2$$

і для третьої області ( $r > R_2$ )

$$A_3 = \frac{\mu_a \delta R_1^2}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{\mu_a I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{r}.$$

### Приклад 9. Перехід магнітного поля з одного середовища в інше

Нехай відбувається перехід однорідного магнітного поля з феромагнітного середовища (сталь,  $\mu_1 = 2000$ ) до повітряного ( $\mu_2 = 1$ ). При цьому магнітна індукція  $B_1 = 1,5$  Т спрямована під кутом  $\alpha_1 = 88^\circ$  до

нормалі (рис. 2.12).

Розв'язання. Визначимо напруженість магнітного поля в сталі

$$H = \frac{B_1}{\mu_{a1}} = \frac{B_1}{\mu_1 \mu_0} = \frac{1,5}{2 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 600 \text{ А/м.}$$

Оскільки тангенс кута заломлення (1.52)

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{2000} \operatorname{tg} 88^\circ = 0,0143,$$

то

$$\alpha_2 = 49,2'.$$

Тоді нормальна та дотична складові магнітної індукції в сталі відповідно будуть

$$B_{1n} = B_1 \cos \alpha_1 = 1,5 \cdot \cos 88^\circ = 5,23 \cdot 10^{-2} \text{ Т,}$$

і

$$B_{1d} = B_1 \sin \alpha_1 = 1,5 \cdot \sin 88^\circ = 1,499 \text{ Т.}$$

Враховуючи граничні умови, для нормальної складової магнітної індукції в повітрі на межі поділу можна записати

$$B_{2n} = B_{1n} = 5,23 \cdot 10^{-2} \text{ Т.}$$

Дотичну ж складову магнітної індукції для повітря обчислимо за формулою

$$B_{2d} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1d} = \frac{1}{2000} \cdot 1,499 = 7,45 \cdot 10^{-4} \text{ Т.}$$

Оскільки індукція магнітного поля в повітряному середовищі дорівнює

$$B_2 = \sqrt{B_{2n}^2 + B_{2d}^2} = 5,23 \cdot 10^{-2} \text{ Т,}$$

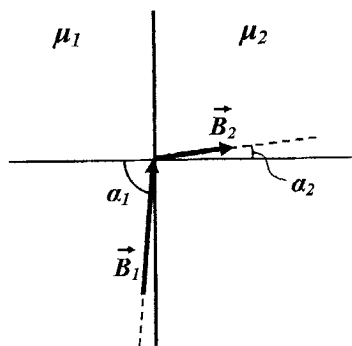


Рисунок 2.12

то його напруженість

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{5,23 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 4,16 \cdot 10^4 \text{ А/м.}$$

Таким чином, напрям вектора магнітної індукції в повітрі ( $\alpha_2 = 49,2'$ ) при переході поля з феромагнітного середовища до повітряного буде майже перпендикулярним до феромагнітної поверхні.

## 2.5 Розрахунок індуктивностей та взаємних індуктивностей

### Приклад 10. Індуктивність двопровідної лінії

Знайти індуктивність двопровідної лінії довжиною  $l$ , що утворена проводами радіусом  $R$ , які віддалені один від одного на відстань  $d$  (рис. 2.9).

Розв'язання. Індуктивність двопровідної лінії складається із зовнішньої складової  $L_{зовн}$ , обумовленої потокозчепленням з проводами лінії та внутрішньої індуктивності двох проводів, тобто

$$L = L_{зовн} + 2L_{внутр}.$$

Внутрішня індуктивність проводу була визначена в прикладі 5 (вираз (2.28)). Зовнішню ж індуктивність обчислимо за співвідношенням

$$L_{зовн} = \frac{\Psi_{зовн}}{I}.$$

Зовнішнє потокозчеплення двопровідної лінії  $\Psi_{зовн}$  дорівнює зовнішньому магнітному потоку  $\Phi_{зовн}$ , оскільки останній зчеплений тільки з одним витком, утвореним проводами лінії, а тому

$$L_{зовн} = \frac{\Phi_{зовн}}{I}.$$

Скориставшись виразом (2.32) прикладу 6, отримаємо



$$L_{\text{зовн}} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R} + \frac{\mu_a l}{4\pi}. \quad (2.35)$$

Індуктивність одиниці довжини двопровідної лінії

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d-R}{R} + \frac{\mu}{4} \right), \quad (2.36)$$

де  $\mu$  - відносна магнітна проникність проводу.

**Приклад 11. Магнітне поле котушки, витки якої намотані на феромагнітне осердя кільцеподібної форми прямокутного перерізу**

На осердя, магнітна проникність якого  $\mu_a = 800 \mu_0$ , рівномірно та щільно намотана котушка з кількістю витків  $w = 600$ . Радіуси  $R_1 = 6$  см,  $R_2 = 9$  см, висота  $h = 4$  см (рис. 2.13). По котушці проходить постійний струм  $I = 10$  А.

Визначити мінімальну і максимальну напруженість магнітного поля всередині осердя та знайти індуктивність котушки.

**Розв'язання.** Для кола радіуса  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ), що проходить всередині осердя, запишемо закон повного струму в інтегральній формі

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = wI.$$

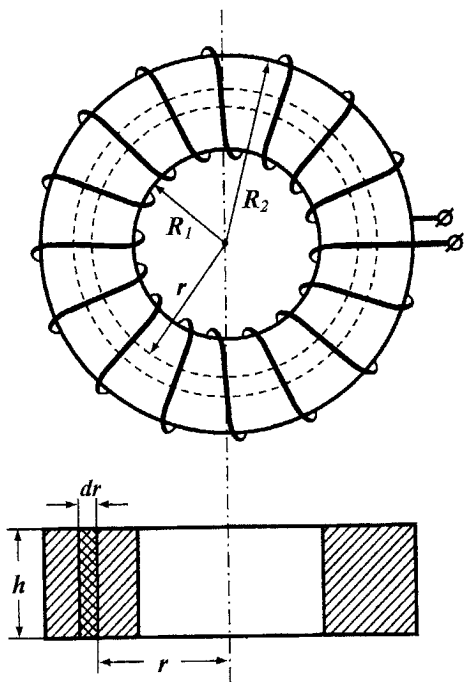


Рисунок 2.13

Внаслідок симетрії та щільності прилягання один до одного витків обмотки напруженість  $H$  буде однаковою по всій довжині кола, тому

$$H 2\pi r = wI, \quad H = \frac{wI}{2\pi r}.$$

Тоді максимальне значення напруженості магнітного поля для  $r = R_1$  буде

$$H_{max} = \frac{wI}{2\pi R_1} = \frac{600 \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = 1,59 \cdot 10^4 \text{ А/м},$$

а її мінімальне значення для  $r = R_2$

$$H_{min} = \frac{wI}{2\pi R_2} = \frac{600 \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^{-2}} = 1,061 \cdot 10^4 \text{ А/м}.$$

Оскільки магнітна індукція

$$B = \frac{\mu_a wI}{2\pi r},$$

то елементарний потік  $d\Phi$  через елемент площини  $dS = dr h$

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S} = \frac{\mu_a wI h dr}{2\pi r}.$$

Магнітний потік за всією площею поперечного перерізу осердя

$$\Phi = \oint \vec{B} d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_a wI h dr}{2\pi r} = \frac{\mu_a wI h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Скориставшись цим виразом, для потокозчеплення запишемо

$$\Psi = w\Phi = \frac{\mu_a w^2 I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Індуктивність котушки

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_a w^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 600^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2\pi} \ln \frac{9}{6} = 0,934 \text{ Гн}.$$

Досить часто в феромагнітних середовищах магнітну індукцію в межах всієї площини перерізу вважають незмінною величиною і визначають її на середній лінії осердя  $l_{cp}$

$$B_{cp} = \frac{\mu_a w I}{l_{cp}}.$$

Магнітний потік в осерді

$$\Phi = B_{cp} S = \frac{\mu_a w I S}{l_{cp}}.$$

Потокозчеплення

$$\Psi = w \Phi = \frac{\mu_a w^2 I S}{l_{cp}}.$$

Тоді для індуктивності можна записати

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_a w^2 S}{l_{cp}}. \quad (2.37)$$

Оскільки для котушки даного прикладу

$$l_{cp} = 2\pi R_{cp} = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{2}, \quad S = (R_2 - R_1)h,$$

то наближене значення індуктивності котушки дорівнює:

$$L' = \frac{\mu_a w^2 h (R_2 - R_1)}{\pi (R_1 + R_2)} = 0,9216 \text{ Гн.}$$

Похибка обчислень при цьому складе 1,35 %.

### **Приклад 12. Взаємна індуктивність між проводами двопровідної лінії та рамкою**

Визначити взаємну індуктивність між двопровідною лінією і рамкою, коли остання лежить симетрично між проводами, в одній з ними площині (рис. 2.14). При цьому рамка має  $w = 100$  витків, її геометричні розміри  $a = 25$  мм,  $b = 50$  мм, а відстань між проводами двопровідної лінії  $d = 40$  мм.

**Розв'язання.** Для визначення взаємної індуктивності  $M$  необ-

хідно знайти взаємне магнітне потокозчеплення з рамкою магнітного поля,

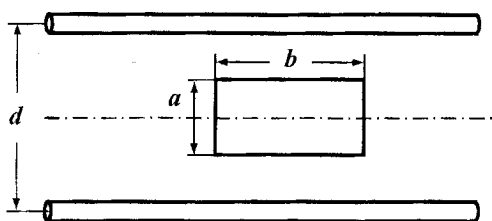


Рисунок 2.14

створеного струмом двопрвідної лінії

$$\Psi_{21} = w \Phi_{21}.$$

В цьому виразі  $\Phi_{21}$  – магнітний потік, що проходить крізь рамку. Для його обчислення скористаємось виразом (2.32) прикладу 6 де

необхідно лише змінити межі інтегрування та довжину

$$\Phi_{21} = \int_{\frac{d-a}{2}}^{\frac{d+a}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{l}{d-x} + \frac{l}{x} \right) b dx = \frac{\mu_0 I b}{\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}.$$

Таким чином,

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I} = \frac{w \Phi_{21}}{I} = \frac{\mu_0 w b}{\pi} \ln \frac{d+a}{d-a} = \frac{100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{\pi} \ln \frac{40+25}{40-25}.$$

$$M = 2,93 \text{ мкГн.}$$

### Приклад 13. Взаємна індуктивність між лінією електропередачі та лінією зв'язку

Визначити взаємну індуктивність двох двопрвідних ліній (рис. 2.15), якщо  $d_1 = 2$  м,  $d_2 = 0,6$  м,  $b = 1$  м,  $c = 0,3$  м. Довжина ліній дорівнює  $l$ .

Розв'язання. Припустимо, що в проводі  $l$  постійний струм  $I$  спрямований від нас, а в проводі  $l'$  – до нас (рис. 2.16). При цьому радіуси проводів  $R$  значно менші ніж відстані між ними.

Відпукаємо на поверхні проводу 2 векторний потенціал магнітного поля, створеного струмом  $I$  проводу 1, скориставшись формулою (2.18)

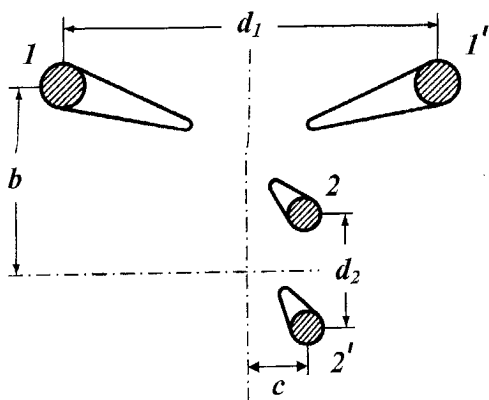


Рисунок 2.15

$$A_{21} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{d_{12}}.$$

Напряг векторного потенціалу  $A_{21}$  збігається з струмом  $I$  проводу  $1$ , тобто вектор  $A_{21}$  напрямлений від нас.

Векторний потенціал магнітного поля, створеного струмом  $I$  проводу  $1'$  на поверхні проводу  $2$

$$A_{21'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{d_{1'2}},$$

направлений так само як і струм  $I$  проводу  $1'$ , тобто до нас. Таким чином, векторний потенціал  $A_2$  на поверхні проводу  $2$

$$A_2 = A_{21} - A_{21'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d_{1'2}}{d_{12}}.$$

За аналогією можна відшукати векторний потенціал на поверхні проводу  $2'$

$$A_{2'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d_{12'}}{d_{1'2'}}.$$

Обидва векторних потенціали є незмінними по всій довжині проводів і спрямовані в одну сторону.

Отже, взаємний магнітний потік, що пронизує другу двопровід-

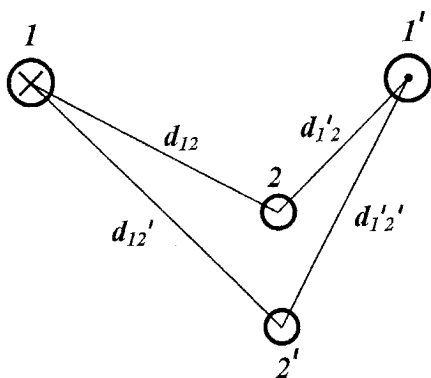


Рисунок 2.16

ну лінію

$$\Phi_{21} = A_2' l - A_2 l = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_{12}' d_{12}}{d_{12}' d_{12}}.$$

Взаємне потокозчеплення дорівнює взаємному магнітному потоку (для одного витка), тому

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d_{12}' d_{12}}{d_{12}' d_{12}}.$$

З рисунка 2.15 видно, що

$$d_{12}' = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2} - c\right)^2 + \left(b + \frac{d_2}{2}\right)^2} = 1,476 \text{ м},$$

$$d_{12} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2} + c\right)^2 + \left(b - \frac{d_2}{2}\right)^2} = 1,476 \text{ м},$$

$$d_{12}' = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2} + c\right)^2 + \left(b + \frac{d_2}{2}\right)^2} = 1,838 \text{ м},$$

$$d_{12} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2} - c\right)^2 + \left(b - \frac{d_2}{2}\right)^2} = 0,99 \text{ м}.$$

Таким чином, взаємна індуктивність між двома лініями для  $l = 1$  км

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3}{2\pi} \ln \frac{1,476 \cdot 1,476}{1,838 \cdot 0,99} = 36 \text{ мкГн}.$$

## 2.6 Енергія і механічні сили в магнітному полі

**Приклад 14.** Енергія і сила в тороїдальній котушці, намотаній на стальне осердя із зазором

На тороїдальному сталевому осерді (рис. 2.17) намотана обмотка, що має  $w = 600$  витків. В кільці осердя створений повітряний зазор  $\delta = 0,4$  мм. При цьому довжина осердя по його середній лінії  $l = 0,4$  м, а площа поперечного перерізу  $S = 10$  см<sup>2</sup>. Відносна магнітна

проникність сталі  $\mu = 800$ . Визначити енергію магнітного поля в сталі  $W_c$  та зазорі  $W_s$  для струму  $I = 1$  А. Знайти також силу, що намагається зменшити величину зазора.

Розв'язання. Обравши контуром інтегрування середню лінію котушки, відповідно до закону повного струму маємо

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = wI.$$

Розіб'ємо замкнений контур інтегрування на дві частини і обчислимо лінійні інтеграли по довжині повітряного зазора та власне сталюго осердя. Внаслідок симетрії для точок вздовж всієї довжини осердя напруженість  $H_c$  є однаковою. Напруженість магнітного поля в повітряному зазорі  $H_s$  вздовж середньої лінії також не змінюється.

Тому

$$H_c l + H_s \delta = wI.$$

Магнітна індукція є однаковою для всіх точок, що належать замкненій середній лінії як в сталюму середовищі осердя, так і в його повітряному зазорі.

Отже,

$$H_c = \frac{B}{\mu_a}, \quad H_s = \frac{B}{\mu_0}$$

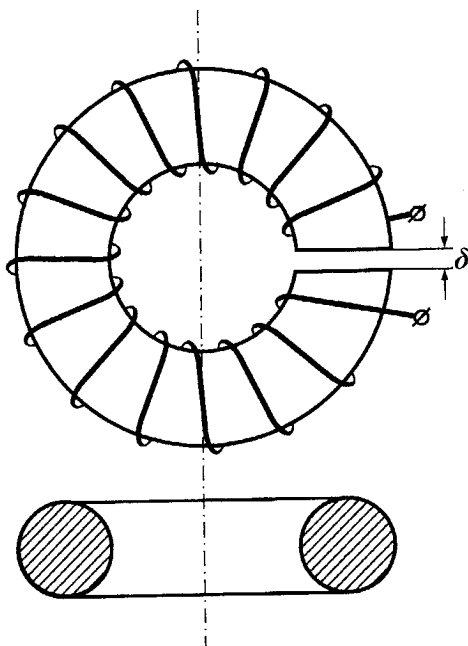


Рисунок 2.17

$$B \left( \frac{l}{\mu_a} + \frac{\delta}{\mu_0} \right) = wI.$$

Звідси магнітна індукція

$$B = \left( \frac{wI}{\frac{l}{\mu_a} + \frac{\delta}{\mu_0}} \right) = \frac{600 \cdot I}{\frac{0,4}{800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} + \frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 0,838 \text{ Т.}$$

Енергію магнітного поля в осерді знайдемо через добуток об'ємної густини енергії  $W_{0m}$  (1.80) на об'єм осердя

$$W_c = \frac{B^2 S l}{2\mu_a} = \frac{0,838^2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4}{2 \cdot 800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 0,14 \text{ Дж.} \quad (2.38)$$

Енергія магнітного поля в повітряному зазорі

$$W_\delta = \frac{B^2 S \delta}{2\mu_0} = \frac{0,838^2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 0,112 \text{ Дж.} \quad (2.39)$$

Силу, що намагається зменшити повітряний зазор, визначимо за виразом (1.89), вважаючи струм в обмотці незмінним

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial g}.$$

В цьому виразі величина  $W_m$  являє собою енергію магнітного поля повітряного зазора. Координатою  $g$  нехай буде довжина цього зазора. Тоді

$$F = \frac{\partial W_\delta}{\partial \delta} = \frac{B^2 S}{2\mu_0} = \frac{0,838^2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 279,4 \text{ Н}$$

або

$$F = 28,5 \text{ кг.}$$

Слід зауважити, що знаючи енергію магнітного поля можна обчислити і індуктивність котушки.

Адже, як відомо, енергія поля поодинокій котушки відповідно



до (1.72)

$$W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

Звідки індуктивність котушки

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{2(W_c + W_\delta)}{I^2} = \frac{2 \cdot (0,14 + 0,112)}{I^2} = 0,5044 \text{ Гн.}$$

### Приклад 15. Сила взаємодії між двома паралельними проводами зі струмом

По двох проводах лінії передачі проходить в протилежних напрямках струм  $I_1 = I_2 = 200 \text{ А}$  (рис.2.18). Визначити силу взаємодії між проводами, якщо відстань між ними  $D = 1 \text{ м}$ , їх радіус  $R = 4 \text{ мм}$ , а довжина лінії  $l = 500 \text{ м}$ .

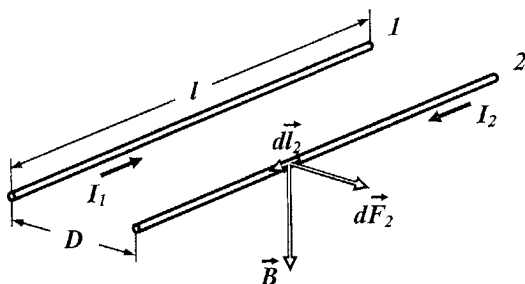


Рисунок 2.18

Розв'язання. За законом Ампера елементарна сила  $d\vec{F}_2$ , що діє на елемент довжини  $dl_2$  відповідно до (1.2)

$$d\vec{F}_2 = I_2 [d\vec{l}_2 \vec{B}],$$

де  $\vec{B}$  - магнітна індукція поля, створеного струмом  $I_1$  першого проводу в точках простору, який займає другий провід. Для достатньо довгих прямолінійних проводів індукція  $B$  є однаковою для всіх точок проводу 2 та перпендикулярною до елемента довжини  $dl_2$ , а тому сила, що діє на весь

другий провід

$$F_2 = \int_l I_2 B dl_2 = I_2 Bl.$$

Напрямок дії сили  $F_2$  зображений на рис. 2.18.

Індукція  $B$  магнітного поля визначається за виразом (2.15)

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi D}.$$

Звідси сила взаємодії між двома паралельними проводами

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi D}. \quad (2.40)$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$F_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 200 \cdot 500}{2\pi l} = 4 \text{ Н}$$

або

$$F_2 = 0,408 \text{ кг}.$$

Слід зауважити, що така ж відштовхуюча сила  $F_1$  діє і на перший провід.

Таким чином, два паралельних проводи зі струмами відштовхуються один від одного з силою (2.40), якщо струми в кожному з них мають протилежні напрями, і притягуються, якщо напрями цих струмів однакові.

### Приклад 16. Розрахунок електромагніта

Обмотка електромагніта, що складається з  $w = 900$  витків, має активний опір  $R = 20$  Ом. Вважаючи, що весь магнітний потік проходить через ярмо та якір (рис. 2.19), необхідно знайти величину е.р.с. джерела живлення, при якій якір електромагніта буде притягуватися до ярма з силою  $F = 100$  кг або  $F = 981$  Н. Площа поперечного перерізу осердя  $S = 20$  см<sup>2</sup>,  $l_1 = 55$  см,  $l_2 = 15$  см,  $\delta_1 = 2$  мм. Якір та ярмо виготовлені з феромагнітного матеріалу, магнітна проникність якого  $\mu_a = 400 \mu_0$ .

Крім того необхідно розрахувати індуктивність електромагніта при відшнурованому та притягнутому якорі.

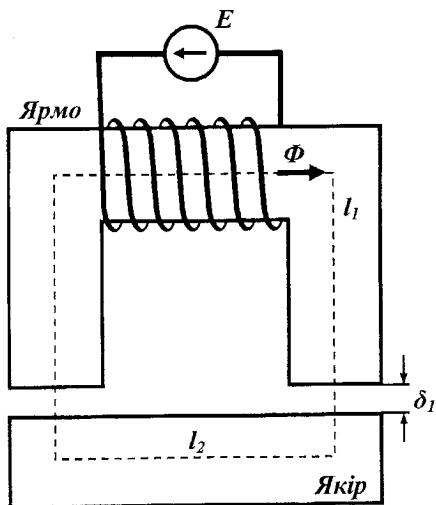


Рисунок 2.19

Розв'язання. Енергія магнітного поля в зазорі (2.39)

$$W_{\delta} = \frac{B^2 S \delta}{2\mu_0}.$$

Оскільки в нашому випадку має місце два повітряних зазори, тобто  $\delta = 2\delta_1$ , то

$$W_{\delta} = \frac{B^2 S \delta_1}{\mu_0}.$$

Сила притягання якоря

$$F = \frac{\partial W_{\delta}}{\partial \delta_1} = \frac{B^2 S}{\mu_0}.$$

Тоді необхідна величина

магнітної індукції для заданої сили

$$B = \sqrt{\frac{F\mu_0}{S}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{20 \cdot 10^{-4}}} = 0,785 \text{ Т.}$$

Напруженість магнітного поля зазора

$$H_{\delta} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{0,785}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 6,25 \cdot 10^5 \text{ А/м.}$$

Магнітна індукція в феромагнітному осерді та сама, що і в повітряному зазорі, тому напруженість поля в осерді

$$H_c = \frac{B}{\mu_a} = \frac{0,785}{400 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 1562 \text{ А/м.}$$

На підставі закону повного струму

$$H_c(l_1 + l_2) + H_{\delta}\delta = wI.$$

Звідси

$$I = \frac{H_c(l_1 + l_2) + H_\delta \delta}{w} = \frac{1562 \cdot 0,7 + 6,25 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2}}{900} = 4 \text{ А.}$$

Отже, е.р.с. джерела

$$E = R \cdot I = 20 \cdot 4 = 80 \text{ В.}$$

Визначимо енергію магнітного поля при відпущеному якорі

$$\begin{aligned} W_{m_1} &= W_{c_1} + W_{\delta_1} = \frac{B^2 S (l_1 + l_2)}{2\mu_a} + \frac{B^2 S 2\delta_1}{2\mu_0} = \\ &= \frac{0,785^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 0,7}{2 \cdot 400 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} + \frac{0,785^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 2,82. \end{aligned}$$

Тоді індуктивність електромагніта за умови відпущеного якоря

$$L_1 = \frac{2W_{m_1}}{I^2} = \frac{2 \cdot 2,82}{4^2} = 0,354 \text{ Гн.}$$

Для притягнутого якоря, коли буде відсутнім повітряний зазор, індуктивність котушки можна визначити за формулою (2.37)

$$L_2 = \frac{\mu_a w^2 S}{l_{cp}} = \frac{\mu_a w^2 S}{l_1 + l_2} = \frac{400 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 900^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{0,7} = 1,163 \text{ Гн.}$$

Порівнюючи значення індуктивностей електромагніта із зазором та без нього, можна відзначити, що навіть незначна поява повітряного зазора суттєво зменшує індуктивність пристрою.

## 3 РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 3.1 Стислі зауваження до характеристики електромагнітного поля

Для стаціонарних електричних та магнітних полів основні характеристики ( $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ) не залежать від часу і ця обставина дозволяє розглядати та вивчати поля окремо і незалежно один від одного.

Проте при дослідженні полів, що змінюються у часі, електричні і магнітні явища необхідно розглядати як прояви єдиного електромагнітного поля в неперервній взаємодії та взаємозв'язку.

Величини  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ , що характеризують електромагнітне поле, змінюються як у часі, так і просторі. Ці зміни, як і взаємозв'язки між характеристиками електромагнітного поля, підпорядковані певним законам, які описуються *рівняннями Максвелла*.

Отже, рівняння Максвелла виявляють зв'язки між характеристиками поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  для будь-якої окремої точки простору в будь-який окремо взятий момент часу, а значить, вони мають бути записані в диференціальній формі.

Обмежимося розглядом системи рівнянь Максвелла для нерухомих середовищ, вважаючи нерухомими також і фізичні тіла, що в них знаходяться.

### 3.2 Узагальнене поняття електричного струму

Під час вивчення електричного поля в провідному середовищі та магнітного поля постійних струмів ми розглядали тільки один різновид струму – *струм провідності*, тобто впорядкований рух постійних електричних зарядів в провіднику внаслідок дії сил електричного поля. Густина струму

провідності пропорційна напруженості електричного поля

$$\vec{\delta}_{np} = \gamma \vec{E}, \quad (3.1)$$

де  $\gamma$  – питома провідність середовища.

Проте існують і інші різновиди електричного струму.

Якщо під дією сил електричного поля чи сил іншої природи (наприклад, механічних тощо) в вільному просторі (пустоті) рухаються заряджені фізичні тіла або ж частинки, не зустрічаючи при цьому на своєму шляху ніяких перешкод, то такий різновид струму називають *струмом переносу* або *струмом конвекції*.

Визначимо густину струму переносу. Нехай заряджені частинки рухаються з деякою середньою швидкістю  $v$ . Виділимо в просторі прямокутний паралелепіпед з паралельними до швидкості руху частинки ребрами довжиною  $dl$ . Площу його торцевої поверхні позначимо через  $dS$  (рис. 3.1). Всередині об'єму паралелепіпеда  $dV = dl \cdot dS$  знаходиться заряд  $dq = \rho \cdot dl \cdot dS$ , де  $\rho$  – об'ємна густина заряду. За умови проходження всіма зарядженими частинками шляху  $dl$  весь цей заряд пройде через поверхню  $dS$  за час  $dt$ .

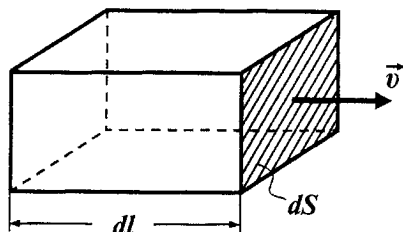


Рисунок 3.1

Таким чином, середня швидкість частинок  $v = \frac{dl}{dt}$ . Елементарний струм через поверхню  $dS$

$$di = \frac{dq}{dt} = \rho \frac{dl}{dt} dS = \rho v dS.$$

Оскільки  $di = \delta \cdot dS$ , то густина струму переносу в векторній формі

$$\vec{\delta}_{nep} = \rho \vec{v}, \quad (3.2)$$

тобто густина струму переносу прямо пропорційна об'ємній густині рухомих зарядів і швидкості їх руху.

Розглянемо ще один різновид струму – *струм поляризації*, який виникає в діелектрику внаслідок зміни електричного поля або тільки в часі при нерухомому діелектрику, або у зв'язку з рухом останнього. Як відомо, будь-яка зміна електричного поля в діелектрику супроводжується його поляризацією, тобто зміщенням в молекулах їх заряджених частинок. Ступінь поляризації молекул діелектрика характеризується вектором поляризації речовини  $\vec{P}$ , величина якого пов'язана із зарядом  $dQ$ , що проходить через площину  $dS$ , співвідношенням

$$dQ = \vec{P} d\vec{S}.$$

При зміні величини вектора поляризації в часі через площину  $dS$  проходить елементарний струм

$$di = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Звідки густина струму поляризації

$$\vec{\delta}_{\text{пол}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (3.3)$$

дорівнює швидкості зміни в часі вектора поляризації.

В формулі (3.3) обчислюється частинна похідна, оскільки вектор  $\vec{P}$  може залежати і від просторових координат.

Для електростатичного поля доведено співвідношення

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_a \vec{E},$$

де  $\vec{D}$  – вектор електричного зміщення,

$\epsilon_a$  – діелектрична проникність середовища,

$\epsilon_0$  – діелектрична стала або діелектрична проникність пустоти.

Якщо електричне поле є змінним у часі, то змінними будуть всі векто-

рні величини останнього рівняння, тому

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Друга складова являє собою густину струму поляризації (3.3). Отже, і перша складова має розмірність густини струму. З іншого боку, перша складова характеризує процес в пустоті (просторі, в якому відсутня будь-яка речовина), тобто там, де не може бути жодного руху заряджених частинок. І все ж цю складову  $\vec{D}$ . Максвелл запропонував називати густиною струму зміщення в пустоті

$$\vec{\delta}_{0zm} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Цей різновид струму, хоча і не має наочної фізичної інтерпретації, проте характеризує процес зміни електричного поля, і також супроводжується збудженням магнітного поля, що, як відомо, властиве для будь-якого різновиду струму.

Таким чином, похідну  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  називають густиною струму зміщення

$$\vec{\delta}_{zm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\delta}_{0zm} + \vec{\delta}_{пол}. \quad (3.5)$$

Слід зауважити, що для змінного електричного поля струми зміщення існують не тільки в діелектриках, але і в інших речовинах, включаючи і провідники (подібно до того як струми провідності можуть виникати і в діелектриках). Однак в провідниках струми зміщення зазвичай значно менші, аніж струми провідності, як і в діелектриках струмами провідності можна знехтувати в порівнянні зі струмами зміщення.

Отже, повним електричним струмом називають сукупність всіх фізичних явищ, що збуджують магнітне поле. Густину повного струму для довільної точки простору можна записати у вигляді:

$$\vec{\delta} = \vec{\delta}_{пр} + \vec{\delta}_{пер} + \vec{\delta}_{зм}. \quad (3.6)$$



Струми провідності і переносу можуть існувати як в постійних, так і в змінних за часом електричних полях. На противагу струми зміщення існують тільки в електричних полях, що змінюються у часі.

Надалі не будемо враховувати струм переносу і повним струмом будемо називати тільки сукупність струмів провідності та зміщення.

### 3.3 Неперервність повного струму

Під час дослідження електричного поля в провідному середовищі був сформульований принцип неперервності *постійного струму*: лінії вектора густини струму провідності завжди замкнені і не мають ні початку, ні кінця

$$\operatorname{div} \vec{\delta}_{np} = 0.$$

Для випадку змінного струму провідності цей принцип втрачає свою силу.

Розглянемо електричне коло, що містить конденсатор, через який проходить змінний струм (рис. 3.2). Між обкладками цього конденсатора знаходиться ідеальний діелектрик. В цьому випадку в проводах з питомою провідністю  $\gamma$  буде проходити тільки струм провідності ( $\vec{\delta}_{np} = \gamma \vec{E}$ ), а між

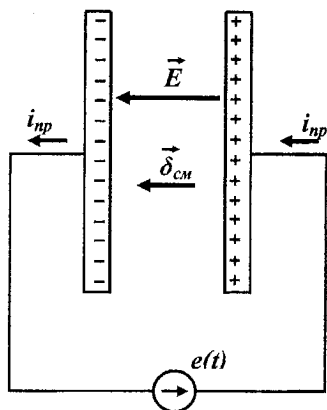
обкладками конденсатора – тільки струм зміщення ( $\vec{\delta}_{zm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ).

Неперервність струму провідності тут вочевидь порушується, оскільки цей струм починається на одній пластині конденсатора, а закінчується на другій.

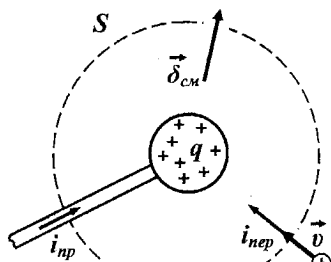
Припустимо, що в деякий момент часу позитивний заряд правої пластини конденсатора зростає. Струм провідності, який підходить проводом до цієї пластини

$$i_{np} = \frac{dq}{dt}.$$

Тоді напруженість електричного поля  $\vec{E}$  між обкладками конденсатора, яка напрямлена від позитивно зарядженої пластини до негативно



а)



б)

Рисунок 3.2

зарядженої (рис. 3.2, а), також має зростати, тому в діелектрику виникає струм. Цей струм і є струмом зміщення. Його густина

$$\vec{\delta}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

збігається за напрямом з напруженістю електричного поля.

Між пластинами плоского конденсатора поле рівномірне, на поверхні пластини електричне зміщення  $D$  дорівнює поверхневій густині заряду

$$D = \sigma = \frac{q}{S},$$

де  $S$  – поверхня пластини, тому величина густини струму зміщення в діелектрику

$$\delta_{зм} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt}.$$

Струм зміщення, що проходить по всьому діелектрику

$$i_{зм} = \int_S \vec{\delta}_{зм} d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$$

дорівнює струму провідності.

Таким чином, лінії струму провідності, які перериваються на пластинах конденсатора, замикаються через лінії струму зміщення.

Розглянемо більш загальний випадок. Нехай в діелектрику знаходиться замкнена поверхня  $S$  (рис. 3.2, б), всередині якої заряджається деяке тіло. Збільшення позитивного заряду  $q$  в цій області може здійснюватися як за рахунок струму провідності  $i_{np}$ , так і струму переносу  $i_{nep}$ . Сума цих двох струмів чисельно дорівнює швидкості зміни заряду

$$i_{np} + i_{nep} = \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Густина струму зміщення, що виникає у зв'язку зі зміною напруженості електричного поля,

$$\vec{\delta}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

а струм зміщення через всю поверхню  $S$

$$i_{зм} = \oint_S \vec{\delta}_{зм} d\vec{S} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial \oint_S \vec{D} d\vec{S}}{\partial t}.$$

Змінимо напрями струмів  $i_{np}$  і  $i_{nep}$  таким чином, щоб всі струми виходили із заданого об'єму назовні. Тоді

$$i_{np} + i_{nep} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Визначимо суму всіх струмів

$$i_{np} + i_{nep} + i_{зм} = -\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \oint_S \vec{D} d\vec{S}}{\partial t}.$$

За теоремою Гаусса  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$ , тому

$$i_{np} + i_{nep} + i_{зм} = -\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0.$$

Отже, сума струмів всіх різновидів – провідності, переносу та зміщення через довільну замкнену поверхню в будь-який момент часу дорівнює нулю.

Покажемо, що наведене твердження є істинним для довільної точки простору.

Запишемо в (3.7) струми провідності і переносу через їх густини

$$\int_{S_1} \vec{\delta}_{np} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{\delta}_{nep} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

В цій формулі  $S_1$  – площа перерізу провідника, а  $S_2 = S - S_1$ .

Оскільки через поверхню  $S_1$  не проходить струм переносу, а через  $S_2$  струм провідності, то інтегрування лівої частини рівності можна провести по замкненій поверхні  $S$ , тобто

$$\int_S \vec{\delta}_{np} d\vec{S} + \int_S \vec{\delta}_{nep} d\vec{S} = \int_S (\vec{\delta}_{np} + \vec{\delta}_{nep}) d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Якщо врахувати, що  $q = \int_V \rho dV$ , то

$$\int_S (\vec{\delta}_{np} + \vec{\delta}_{nep}) d\vec{S} = -\frac{\partial \int_V \rho dV}{\partial t}.$$

Застосувавши теорему Остроградського-Гаусса, отримаємо

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{\delta}_{np} + \vec{\delta}_{nep}) dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

або

$$\operatorname{div}(\vec{\delta}_{np} + \vec{\delta}_{nep}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.8)$$

За відсутності струму переносу дивергенція густини струму провідності чисельно дорівнює швидкості зміни густини електричних зарядів. В точці простору, де об'ємна густина зарядів зменшується  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0\right)$ , лінії вектора густини струму провідності беруть свій початок  $(\operatorname{div} \vec{\delta}_{np} > 0)$ .

Коли в точці простору існують всі різновиди струмів (повний струм)

$$\vec{\delta} = \vec{\delta}_{np} + \vec{\delta}_{nep} + \vec{\delta}_{zm},$$

то, взявши дивергенцію від обох частин рівності

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = \operatorname{div}(\vec{\delta}_{np} + \vec{\delta}_{nep}) + \operatorname{div} \vec{\delta}_{zm}$$

та врахувавши (3.8) і (3.5), отримаємо

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Змінимо порядок диференціювання в другій складовій

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{D})}{\partial t}.$$

Відповідно до диференціальної форми теореми Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

тому

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

Отже, дивергенція густини повного струму в довільній точці простору в будь-який момент часу дорівнює нулю. Це означає, що *лінії вектора густини повного електричного струму завжди неперервні.*

### 3.4 Перше та друге рівняння Максвелла

*Перше рівняння Максвелла* являє собою диференціальну форму запису закону повного струму (1.23)  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$ , за умови, що правою частиною цієї рівності буде густина *повного* струму.

Якщо виключити з розгляду струм переносу, то перше рівняння Максвелла має вигляд:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Для середовищ з незмінною діелектричною проникністю, пам'ятаючи, що  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ , рівняння (3.10) можна переписати

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.11)$$

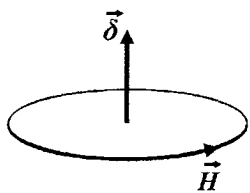


Рисунок 3.3

Фізичний зміст цього рівняння полягає в тому, що як *струм провідності*, так і *змінне у часі електричне поле збуджують у просторі вихрове магнітне поле*. Просторовий зв'язок між векторами  $\vec{H}$

і  $\vec{\delta}$  пояснює рис. 3.3.

Якщо середовище являє собою ідеальний діелектрик ( $\gamma=0$ ), то

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Для пустоти ( $\epsilon_a = \epsilon_0$ )

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Незмінне у часі електромагнітне поле є тільки окремим випадком електромагнітного поля – магнітним полем постійних струмів, для нього  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ , і тоді перше рівняння Максвелла за цих умов набуває вигляду

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}_{np}.$$

Другим рівнянням Максвелла є закон електромагнітної індукції в диференціальній формі.

Пригадаємо, що закон електромагнітної індукції в інтегральній формі (1.55)

$$e = \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

В полі з індукцією  $\vec{B}$  магнітний потік  $\Phi$  через обмежену контуром  $l$

довільну поверхню  $S$

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

тому

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \int_S \vec{B} d\vec{S}}{\partial t} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Необхідно зауважити, що частинні похідні використовуються в рівнянні тому, що і магнітний потік, і магнітна індукція залежать не тільки від часу, але й від просторових координат.

Перепишемо ліву частину отриманої рівності з урахуванням теореми Стокса

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S},$$

тоді

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (3.14)$$

Рівність (3.14) виконується для будь-яких як за формою, так і за площею поверхонь  $S$ , що можливо тільки за умови рівності між підінтегральними виразами, тому

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Отриманий вираз являє собою диференціальну форму запису закону електромагнітної індукції і називається *другим рівнянням Максвелла*. Фізичний зміст цього закону полягає в такому: *будь-яка зміна у часі магнітного поля породжує вихрове електричне поле*.

Напрямок ліній векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  показаний на рисунку 3.4.

Для середовища з постійною магнітною проникністю ( $\mu_a = \text{const}$ )

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (3.16)$$

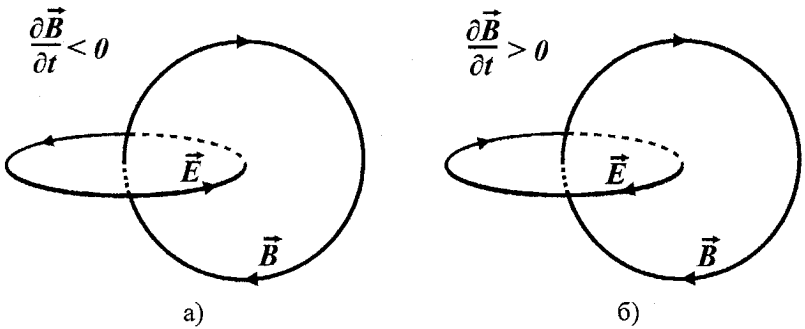


Рисунок 3.4

### 3.5 Повна система рівнянь електромагнітного поля

Основними рівняннями електромагнітного поля є рівняння Максвелла (3.10) і (3.15). Проте ротор деякої векторної функції не визначає її однозначно. Для цього потрібно знати ще дивергенцію даної функції. Тому основні рівняння Максвелла повинні бути доповнені ще співвідношеннями, що визначають просторове положення джерел електромагнітного поля. Перше таке співвідношення говорить *взагалі про відсутність у просторі джерел вектора магнітної індукції* (1.16)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.17)$$

Як відомо, цей вираз був нами обґрунтований для незмінного в часі магнітного поля. Доведемо що він буде дійсним і для змінного магнітного поля.

Для цього застосуємо до обох частин рівності (3.15) операцію дивергенції

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$



Замінивши місцями в правій частині рівняння операції диференціювання за часом та за просторовими координатами і врахувавши, що дивергенція ротора будь-якої функції дорівнює нулю, запишемо

$$\frac{\partial \operatorname{div} \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Отриманий вираз показує, що  $\operatorname{div} \vec{B}$  не залежить від часу і що співвідношення (3.17) є дійсним для будь-яких магнітних полів.

Друге додаткове до основної системи рівнянь Максвелла співвідношення являє собою диференціальну форму теорему Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (3.18)$$

де  $\rho$  – об'ємна густина заряду.

Для характеристики середовища, в якому збуджується електромагнітне поле, до системи рівнянь Максвелла необхідно дописати ще два рівняння, які у випадку однорідного середовища, тобто коли параметри цього середовища є постійними ( $\epsilon_a = \text{const}$ ,  $\mu_a = \text{const}$ ), будуть мати вигляд:

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (3.19)$$

Таким чином, повна система рівнянь електромагнітного поля складається з шести рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \vec{B} &= \mu_a \vec{H}, \\ \vec{D} &= \epsilon_a \vec{E}. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Система рівнянь (3.20) показує, що магнітне поле завжди є вихровим і утворюється як рухомими електричними зарядами, так і змінним у часі

електричним полем. Причиною ж збудження електричного поля з одного боку можуть бути нерухомі заряди, і тоді електричне поле є завжди потенціальним ( $\text{rot } \vec{E} = 0$ ), з іншого – змінне у часі магнітне поле. В останньому випадку електричне поле, як і магнітне, буде вихровим. І змінне електричне поле, і змінне магнітне поле пов'язані між собою неперервним взаємоперетворенням.

Система рівнянь (3.20) є *повною* (тобто коли електромагнітне поле у всіх точках простору визначене однозначно) тільки у випадку, якщо будуть задані початкові значення векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  (для моменту часу  $t = 0$ ) та визначені граничні умови. Зауважимо, що на межі поділу середовищ електромагнітне поле має задовольняти граничні умови, що визначені для електростатичного поля, а також для електричного та магнітного полів постійного струму.

### 3.6 Рівняння Д'Аламбера

Розглянемо систему рівнянь (3.20) для однорідного простору з сталими  $\epsilon_a$  та  $\mu_a$ , вважаючи, що розподіли густин струму і заряду є заданими для всіх точок простору в будь-який момент часу. Перепишемо перші чотири рівняння системи (3.20) через змінні  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{H} &= 0, \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Безпосередній розрахунок величин  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  за системою (3.21)

пов'язаний зі значними труднощами, тому зазвичай використовують відомі з теорії статичних полів скалярний потенціал електричного поля  $\varphi$  та векторний потенціал  $\vec{A}$  магнітного поля.

Проте слід зауважити, що в електромагнітному полі ці величини є функціями не тільки просторових координат, але й часу, тому їх не можна повністю ототожнювати з відповідними потенціалами статичних полів.

Векторний потенціал  $\vec{A}$  пов'язаний з магнітною індукцією співвідношенням (1.35)

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

тоді

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{A}. \quad (3.22)$$

Для стаціонарного магнітного поля була заданою і дивергенція вектора  $\vec{A}$  (1.37)  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Для електромагнітного ж поля зі значенням дивергенції вектора  $\vec{A}$  визначимося трохи пізніше.

В електричному полі, яке створене змінним магнітним полем, з'являється стороння напруженість, що зв'язана з векторним магнітним потенціалом за виразом (1.56)

$$\vec{E}_{\text{стор}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Якщо в даному просторі є до того ж і нерухомі заряди, то статична напруженість від цих зарядів буде пов'язана зі скалярним потенціалом співвідношенням

$$\vec{E}_{\text{стат}} = -\text{grad } \varphi.$$

Таким чином, сумарна напруженість

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}_{\text{стат}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (3.23)$$

Перепишемо перше рівняння Максвелла (3.20), враховуючи (3.22) і (3.23)

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\vec{A}\right)=\vec{\delta}+\varepsilon_a\frac{\partial\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi\right)}{\partial t}$$

або

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\mu_a\vec{\delta}-\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\operatorname{grad}\left(\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \quad (3.24)$$

Відомо, що

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\nabla^2\vec{A}.$$

Співвідношення  $\frac{1}{\varepsilon_a\mu_a}$  має розмірність квадрата швидкості, тому зро-

бимо таке позначення

$$\varepsilon_a\mu_a=\frac{1}{v^2}, \quad v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}. \quad (3.25)$$

Із врахуванням цього виразу (3.24) можна записати так:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\nabla^2\vec{A}=\mu_a\vec{\delta}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\operatorname{grad}\left(\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

або

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A}+\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\mu_a\vec{\delta}.$$

Виберемо таке значення дивергенції вектора  $\vec{A}$ , щоб можна було спростити отриманий вираз

$$\operatorname{div}\vec{A}=-\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (3.26)$$

В цьому випадку будемо мати

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial(vt)^2}=-\mu_a\vec{\delta}. \quad (3.27)$$

В рівняння  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$  підставимо значення  $\vec{E}$  з (3.23)

$$\operatorname{div} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Оскільки  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi$ , то

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial \operatorname{div} \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Підставивши з формули (3.26) значення  $\operatorname{div} \vec{A}$ , остаточно отримаємо

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (\nu t)^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (3.28)$$

Таким чином, ми отримали два однакових за формою диференціальних рівняння відносно векторного (3.27) та скалярного (3.28) потенціалів. Ці рівняння називають *рівняннями Д'Аламбера*.

Для тих ділянок простору, де відсутні струми та заряди, рівняння Д'Аламбера переходять в *хвильові рівняння*

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial (\nu t)^2} = 0, \quad (3.29)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (\nu t)^2} = 0. \quad (3.30)$$

Якщо потенціали не залежать від часу (у випадку статичних полів), то рівняння Д'Аламбера переходять в рівняння Пуассона

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= -\mu_a \vec{\delta}, \\ \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

а хвильові рівняння – в рівняння Лапласа

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= 0, \\ \nabla^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

### 3.7 Запізнілі електродинамічні потенціали

Розв'яжемо хвильове рівняння (3.30) відносно потенціалу  $\varphi$ , вважаючи, що поле створюється електричним зарядом  $q$ , який розміщений в точці початку системи координат. При цьому об'ємна густина заряду відмінна від нуля тільки в незначній частині простору  $\Delta V$ , яка охоплює початок координат. Якщо заряд змінюється з часом  $q = q(t)$ , то потенціал  $\varphi$  являє собою також функцію часу.

Для всього простору крім ділянки  $\Delta V$  запишемо рівняння (3.30) у вигляді

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (vt)^2}.$$

Оскільки область  $\Delta V$ , в якій розподілений заряд, є досить малою, то заряд можна вважати точковим, і, отже, для подальшого аналізу доцільно використовувати сферичну систему координат. З міркувань симетрії зрозуміло, що потенціал  $\varphi$  залежить від часу і лише від однієї координати  $r$ , тому для сферичної системи координат можна записати

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (vt)^2}$$

або

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial (vt)^2}. \quad (3.33)$$

Розв'язком цього рівняння є сума двох функцій від аргументів  $\left(t - \frac{r}{v}\right)$

і  $\left(t + \frac{r}{v}\right)$

$$\varphi = \frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2 \left(t + \frac{r}{v}\right). \quad (3.34)$$

Вигляд цих функцій визначається законом зміни  $q = q(t)$  та гранични-

ми умовами.

Слід нагадати, що подібні функції в теоретичній електротехніці зустрічаються під час дослідження перехідних процесів в довгих лініях, де перша складова рівняння (3.34) являє собою падаючу електромагнітну хвилю, що рухається вздовж довгої лінії в напрямі від джерела зі швидкістю  $v$ , а друга складова – відбиту хвилю з протилежним напрямом руху.

Обмежимося розглядом тільки падаючої електромагнітної хвилі.

З виразу (3.34) випливає, що його першою складовою є сферична хвиля, що поширюється зі швидкістю  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$  в напрямі від початку координат (тобто від місцезнаходження змінного в часі точкового заряду  $q$ ) та згасає обернено пропорційно відстані  $r$ .

Швидкість поширення електромагнітної хвилі в пустоті

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

дорівнює швидкості світла, що дало підставу Максвеллу вважати світло нічим іншим як електромагнітною хвилею.

Якщо заряд не залежить від часу (статичне електричне поле), то потенціал точки, що знаходиться на відстані  $r$  від заряду

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \epsilon_a r}.$$

Якщо ж заряд є функцією від часу, то

$$\varphi = \frac{f_1 \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r}.$$

Порівнюючи цих два вирази можна вважати, що

$$f_1 \left( t - \frac{r}{v} \right) = \frac{q \left( t - \frac{r}{v} \right)}{4\pi \epsilon_a} \quad (3.35)$$

Тоді потенціал поля змінного точкового заряду (розв'язок хвильового рівняння (3.30))

$$\varphi = \frac{q \left( t - \frac{r}{v} \right)}{4\pi \epsilon_a r}.$$

Для області, що має об'ємні заряди

$$f_1 \left( t - \frac{r}{v} \right) = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \int_V \rho \left( t - \frac{r}{v} \right) dV$$

і потенціал поля визначається за виразом (розв'язок рівняння Д'Аламбера (3.28))

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \int_V \frac{\rho \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} dV. \quad (3.36)$$

За аналогією можна вважати, що розв'язком рівняння Д'Аламбера (3.27) є вираз

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta} \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} dV. \quad (3.37)$$

Таким чином, формули (3.36) і (3.37) являють собою загальний розв'язок рівнянь Д'Аламбера, а величини  $\vec{A}$  та  $\varphi$  називають *електродинамічними потенціалами*.

Суттєвою відмінністю потенціалів змінного струму (електродинамічних потенціалів) від потенціалів електричного і магнітного стаціонарних полів полягає в тому, що значення електродинамічних потенціалів в деякій точці спостереження  $a$ , яка знаходиться на відстані  $r$  від джерела поля, в момент часу  $t_2$  визначаються станом "збудників" поля (струму та заряду) не в момент часу  $t_2$ , а в момент  $t_1 = t_2 - \frac{r}{v}$ , який передує  $t_2$  на



проміжок часу  $\Delta t = \frac{r}{v}$ , що необхідний для поширення електромагнітної хвилі від джерела поля до точки спостереження.

Іншими словами, зміна електродинамічних потенціалів в точці спостереження запізнюється відносно зміни джерел поля, тому електродинамічні потенціали називають ще *запізненими потенціалами*.

В зв'язку з високою швидкістю поширення хвиль поля це запізнення стає помітним і позначається тільки на досить великих відстанях.

За відомими скалярним  $\varphi$  та векторним  $\vec{A}$  електродинамічними потенціалами з (3.22) та (3.23) можна розрахувати напруженості магнітного  $\vec{H}$  і електричного полів  $\vec{E}$  з врахуванням граничних умов, тобто повністю визначити параметри електромагнітного поля.

### Питання для самоперевірки

1. Які різновиди струмів утворюють повний електричний струм?
2. Що являють собою ці різновиди струмів?
3. Запишіть вирази для густин різних видів струмів.
4. В яких випадках не виконується принцип неперервності для струму провідності?
5. В чому полягає фізичний зміст першого та другого рівнянь Максвелла?
6. Якими співвідношеннями необхідно доповнити перше та друге рівняння Максвелла, щоб отримати повну систему рівнянь електромагнітного поля?
7. Чому під час розв'язування рівнянь електромагнітного поля зручно спочатку знайти скалярний та векторний потенціали?
8. Чи відрізняється векторний магнітний потенціал стаціонарного магнітного поля від векторного потенціалу електромагнітного поля? Якщо

відрізняється, то чим?

9. Запишіть рівняння Д'Аламбера для векторного та скалярного потенціалів.

10. Чим відрізняються хвильові рівняння від рівнянь Д'Аламбера?

11. Для яких ділянок простору необхідно складати хвильові рівняння?

12. Чи існує зв'язок між рівняннями Д'Аламбера, хвильовими рівняннями і рівняннями Пуассона та Лапласа?

13. Чому електродинамічні потенціали називають запізненими?

14. З якою швидкістю поширюються електромагнітні хвилі в пустоті?

15. Для якої відстані від джерела електромагнітної хвилі запізнення потенціалів в повітрі складе  $0,001$  с?

16. В яких умовах струм зміщення пов'язаний із рухом зарядів в змінному полі?

17. В яких умовах струм зміщення не пов'язаний із рухом зарядів в змінному полі?

18. Наслідком якого закону в інтегральній формі є друге рівняння Максвелла?

19. Чи можливе створення магнітного поля за відсутності рухомих електричних зарядів?

20. В яких випадках виникає вихрове електричне поле?

21. В одному середовищі відносні значення проникностей  $\mu_1$  і  $\epsilon_1$ , в іншому –  $\mu_2$  і  $\epsilon_2$ . Відомо, що  $\mu_1 > \mu_2$ ,  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ . В якому з цих двох середовищ час запізнення електромагнітної хвилі при проходженні однакової відстані  $r$  виявиться більшим?

22. В чому полягає принципова різниця між другим рівнянням Максвелла та законом електромагнітної індукції?

## 4 ПЕРЕДАЧА ЕНЕРГІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПОЛЕМ

### 4.1 Теорема Умова - Пойнтінга

Теорема Умова-Пойнтінга виражає закон збереження енергії в електромагнітному полі.

Нехай в деякому об'ємі  $V$ , обмеженому замкненою поверхнею  $S$ , існує змінне в часі електромагнітне поле. В деякий момент часу енергія електричного поля для всього об'єму

$$w_E = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a E^2 dV,$$

а енергія магнітного поля

$$w_M = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV.$$

Тоді енергія електромагнітного поля

$$w = w_E + w_M = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2) dV.$$

Зміна енергії в цьому об'ємі

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V (\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2) dV \right]$$

Замінімо місцями операції диференціювання за часом та інтегрування за об'ємом, тоді

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2) dV = \int_V \left( \epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV. \quad (4.1)$$

З основних рівнянь Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H} - \gamma \vec{E},$$

$$\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E}$$

та підставимо їх в (4.1), тоді

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \int_V [\vec{E}(\text{rot} \vec{H} - \gamma \vec{E}) - \vec{H} \text{rot} \vec{E}] dV = \int_V (\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E}) dV - \int_V \gamma \vec{E}^2 dV.$$

З векторного аналізу відомо, що

$$\vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H} = \text{div} [\vec{E} \vec{H}],$$

тому

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \int_V \text{div} [\vec{E} \vec{H}] dV + \int_V \gamma \vec{E}^2 dV. \quad (4.2)$$

За теоремою Остроградського-Гаусса

$$\int_V \text{div} [\vec{E} \vec{H}] dV = \oint_S [\vec{E} \vec{H}] dS. \quad (4.3)$$

Позначимо підінтегральний вираз правої частини останньої рівності через вектор  $\vec{P}$

$$\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}]. \quad (4.4)$$

Цей вектор є перпендикулярним до площини, якій належать вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , утворює з ними правогвинтову систему та має розмірність Вт/м<sup>2</sup>. Вектор  $\vec{P}$  називають *вектором Пойнтінга*. Він характеризує величину і напрям переміщення енергії, яка проходить за одиницю часу через одиницю площі, що є перпендикулярною до цього вектора.

Інтеграл вектора Пойнтінга по деякій поверхні  $S$  є *поток* вектора Пойнтінга, що являє собою потужність електромагнітної хвилі, яка проходить крізь дану поверхню

$$P = \int_S \vec{P} d\vec{S}.$$

Перепишемо рівняння (4.2) з урахуванням (4.3) та (4.4)

$$-\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma \vec{E}^2 dV + \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Отримана формула являє собою математичний запис *теорему Умова-Пойнтінга*. Розглянемо докладніше кожен складову виразу (4.5). Першою складовою його правої частини буде потужність, яка характеризує *перехід* електромагнітної енергії деякого об'єму простору  $V$  в інші види енергії (теплову, механічну, хімічну тощо), і вона завжди додатна.

Друга складова правої частини – це потужність, що характеризує *зміну* величини електромагнітної енергії в об'ємі  $V$ . При її від'ємному значенні енергія в заданому об'ємі зменшується, а при додатному – зростає.

Лівою ж частиною виразу (4.5) є потужність потоку електромагнітної енергії, що або ззовні надходить в об'єм  $V$ , або ж виходить з нього.

Вектор елемента поверхні  $d\vec{S}$  має додатне значення, коли він спрямований із заданого об'єму назовні. Звідси випливає, що якщо вектор Пойнтінга напрямлений всередину об'єму (вектор  $\vec{\Pi}_1$  на рис.4.1), то ліва частина рівняння (4.5) буде *додатною*, що відповідає надходженню електромагнітної енергії *всередину* об'єму  $V$ . Якщо ж вектор Пойнтінга напрямлений назовні із об'єму  $V$  (вектор  $\vec{\Pi}_2$  на рис. 4.1), то це означає, що ліва частина рівняння (4.5) від'ємна і електромагнітна енергія передається із

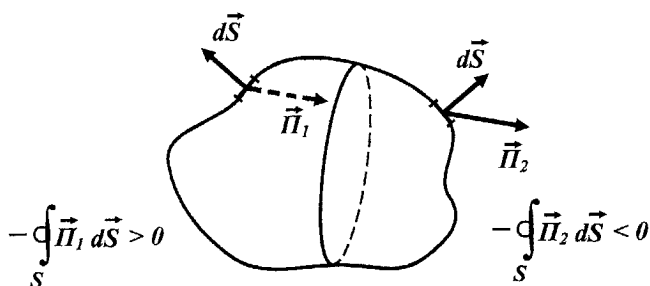


Рисунок 4.1

заданого об'єму через поверхню  $S$  назовні.

Отже, теорема Умова-Пойнтінга виражає баланс потужностей в заданому об'ємі простору і може бути сформульована таким чином: *електромагнітна енергія, що надходить ззовні в деякий об'єм простору витрачається на перетворення цієї енергії в інші види енергії та на збільшення запасу електромагнітної енергії в самому об'ємі.*

Якщо в об'ємі  $V$  є джерела енергії з миттєвою потужністю  $P_{\text{дж}}$ , то теорему Умова-Пойнтінга необхідно записати у вигляді:

$$P_{\text{дж}} = \frac{\partial w}{\partial t} + \int_V \gamma \vec{E}^2 dV + \oint_S \vec{H} d\vec{S}. \quad (4.6)$$

В цьому випадку потужність джерел енергії в об'ємі простору  $V$  дорівнює сумі потужності зміни енергії електромагнітного поля в об'ємі  $V$ , потужностей теплових втрат та потужності енергії, яка виходить із заданого об'єму через граничну поверхню  $S$  назовні.

## 4.2 Передача енергії коаксіальним кабелем

Нехай коаксіальний кабель довжиною  $l$  передає енергію від генератора з постійною напругою  $U_1$  до навантаження. Радіус внутрішньої жили кабелю  $r_0$ , радіуси його зовнішньої оболонки  $r_1$  і  $r_2$ . Питома провідність провідної частини  $\gamma$ . Відшукаємо величини, що характеризують електромагнітне поле в площині перерізу, який зроблений на початку кабелю (рис. 4.2). Для заданих напрямів струмів внутрішня жила кабелю заряджена позитивно, зовнішня оболонка – негативно.

Радіальна складова напруженості електричного поля  $E_r$  (напрявлена по радіусу) на відстані  $r$  від осі кабелю в ізолюючому прошарку ( $r_0 < r < r_1$ ) може бути визначена за теоремою Гаусса та розрахована через напругу  $U_1$  між жилами кабелю (див. розділ “Електричне поле”)

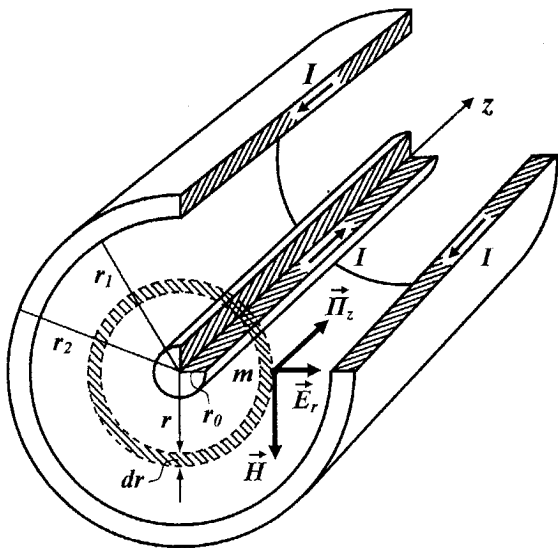


Рисунок 4.2

$$E_r = \frac{U_1}{r \ln \frac{r_1}{r_0}}. \quad (4.7)$$

По внутрішній жилі та оболонці кабелю проходить постійний струм  $I$ . Густина струму в жилі кабелю

$$\delta_1 = \frac{I}{\pi r_0^2},$$

а в його оболонці

$$\delta_2 = \frac{I}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Всередині проводів напруженість електричного поля має тільки осьову складову  $E_z$  у відповідності з напрямом струму. В внутрішній жилі кабелю вона дорівнює відповідно до закону Ома

$$E_{1z} = \frac{\delta_1}{\gamma} = \frac{I}{\pi \gamma r_0^2}, \quad (4.8)$$

в оболонці

$$E_{2z} = \frac{\delta_2}{\gamma} = \frac{I}{\pi \gamma (r_2^2 - r_1^2)}. \quad (4.9)$$

Радіальна складова напруженості електричного поля  $E_r$  в провідній частині кабелю відсутня.

Напруженість магнітного поля в ізолюючому прошарку ( $r_0 < r < r_1$ ) визначається за законом повного струму

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Вона напрямлена перпендикулярно до радіуса  $r$ .

Зовні кабелю електричне та магнітне поле відсутнє.

Знайдемо вектор Пойнтінга в різних точках перерізу кабелю. В ізолюючій його частині на відстані  $r$  від осі кабелю в точці  $m$  (рис. 4.2) напруженість електричного поля має як радіальну складову  $E_r$ , так і осьову  $E_z$ .

Вектор Пойнтінга також має дві складові – осьову

$$P_z = E_r H = \frac{U_1 I}{2\pi r^2 \ln \frac{r_1}{r_0}} \quad (4.10)$$

і радіальну

$$P_r = E_z H. \quad (4.11)$$

Розглянемо спочатку осьову складову вектора Пойнтінга, напрямлену вздовж осі  $z$  від генератора до навантаження. З виразу (4.10) можна побачити, що  $P_z$  з віддаленням від осі кабелю зменшується обернено пропорційно квадрату радіуса та має найбільше значення поблизу внутрішньої жили. На рис. 4.3 схематично наведений вектор Пойнтінга  $\vec{P}$  в оболонці кабелю, його ізолюючій частині та центральній жилі.

Оскільки всередині провідників відсутня радіальна складова напруженості електричного поля ( $E_r = 0$ ), то і вектор Пойнтінга там не має своєї осьової складової ( $P_z = 0$ ). Таким чином, електромагнітна енергія вздовж



осі  $z$  від джерела до споживача передається не по проводах кабелю, а в просторі між ними – ізолюючій частині кабелю. А внутрішня жила кабелю і його оболонка лише направляють потік енергії в необхідному напрямі.

Визначимо величину потоку енергії за одиницю часу (потужність) че-

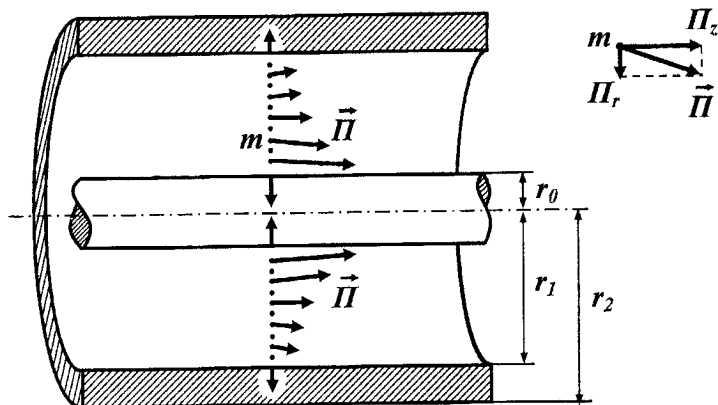


Рисунок 4.3

рез поперечний переріз кабелю.

Елементарна потужність, що проходить через елемент площі перерізу ізоляції кабелю  $dS = 2\pi r dr$  (заштрихована частина ізоляції на рис. 4.2)

$$dP = P_z 2\pi r dr = \frac{U_1 I 2\pi r dr}{2\pi r^2 \ln \frac{r_1}{r_0}} = \frac{U_1 I dr}{\ln \frac{r_1}{r_0} r}$$

Тоді повна потужність, що проходить через даний поперечний переріз коаксіального кабелю

$$P = \int_{r_0}^{r_1} \frac{U_1 I}{\ln \frac{r_1}{r_0} r} dr = \frac{U_1 I}{\ln \frac{r_1}{r_0}} \ln \frac{r_1}{r_0} = U_1 I, \quad (4.12)$$

як бачимо, дорівнює величині активної потужності, яку віддає джерело енергії в коло.

Визначимо потужність  $P_2$ , що проходить через поперечний переріз кабелю, який знаходиться на відстані  $l_1$  від джерела. На цьому перерізі напруга між центральною жилою кабелю та його оболонкою  $U_2$  буде меншою від напруги  $U_1$  на величину спаду напруги в проводах кабелю

$$U_1 - U_2 = IR_1 + IR_2, \quad (4.13)$$

де  $R_1 = \frac{l_1}{\gamma \pi r_0^2}$ ,  $R_2 = \frac{l_1}{\gamma \pi (r_2^2 - r_1^2)}$  - активні опори відповідно внутрішньої жили і оболонки кабелю.

Формулу (4.13) можна переписати з врахуванням (4.8) та (4.9)

$$U_1 - U_2 = (E_{1z} + E_{2z}) l_1. \quad (4.14)$$

Таким чином, потужність, яка проходить через даний переріз

$$P_2 = U_2 I,$$

менша від потужності на першому перерізі на величину

$$\Delta P = P_1 - P_2,$$

яка являє собою потужність втрат в проводах кабелю.

Дійсно,

$$\Delta P = P_1 - P_2 = (U_1 - U_2) I = I^2 R_1 + I^2 R_2. \quad (4.15)$$

Визначимо потужність втрат внутрішньої жили кабелю, використовуючи вектор Пойнтінга.

Для цього відшукаємо величину енергії, яка надходить в провідник довжиною  $l_1$  за одну секунду (рис. 4.4).

Осьова складова напруженості на поверхні внутрішньої жили кабелю відповідно до виразу (4.8)

$$E_{1z} = \frac{I}{\pi \gamma r_0^2}.$$

Напруженість магнітного поля на поверхні провідника

$$H = \frac{I}{2\pi r_0}.$$

Радіальну складову вектора Пойнтінга  $\Pi$ , можна визначити за виразом (4.11)

$$\Pi_r = E_{iz} H = \frac{I^2}{\gamma 2\pi^2 r_0^2}.$$

Потужність, яка надходить в провідник через замкнену поверхню  $S$  (4.5)

$$P_I = - \oint_S \vec{\Pi}_r \cdot d\vec{S}.$$

Всю замкнену поверхню циліндра розіб'ємо на три частини – дві торцеві і одну бокову  $S_I = 2\pi r_0 l_I$ . Поверхневі інтеграли через торцеві поверхні

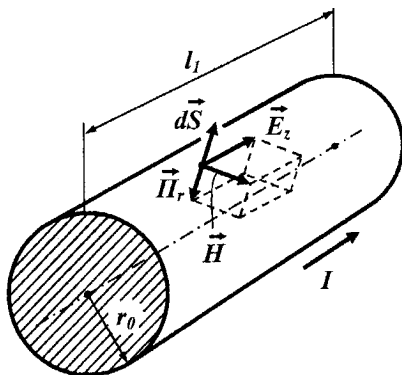


Рисунок 4.4

циліндра дорівнюють нулю, оскільки вектори  $\vec{\Pi}_r$  і  $d\vec{S}$  перпендикулярні один до одного. Величина вектора Пойнтінга є однаковою на всій поверхні провідника, а напрями векторів  $\vec{\Pi}_r$  і  $d\vec{S}$  – протилежні, тому

$$P_I = - \int_{S_I} \vec{\Pi}_r \cdot d\vec{S} = - \int_{S_I} (-\Pi_r) dS = \frac{I^2 l_I}{\gamma \pi r_0^2} = I^2 R_I,$$

що і являє собою втрати потужності на відрізку внутрішньої жили кабелю довжиною  $l_I$ .

Аналогічно можна визначити втрати потужності і в оболонці кабелю. Можна показати, що і для випадку інших видів ліній передачі елект-

ромагнітної енергії потік енергії від джерела до споживача проходить діелектриком, що знаходиться між проводами лінії передачі.

### 4.3 Поширення електромагнітної енергії двопровідною лінією

Якщо до двопровідної лінії прикласти постійну електричну напругу, то в режимі холостого ходу (відсутнє навантаження) струм в лінії не проходить, магнітне поле буде відсутнім, а лінії напруженості електричного поля – перпендикулярними до проводів лінії (рис. 4.5, а).

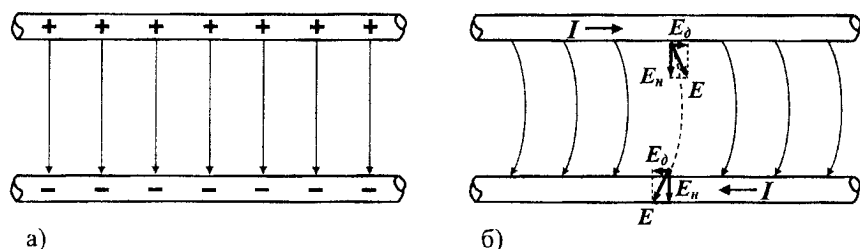


Рисунок 4.5

За умови проходження постійного електричного струму всередині провідника, враховуючи і його поверхню, з'явиться дотична складова електричного поля  $E_t$ , яка за величиною буде значно меншою, ніж нормальна складова  $E_n$ , і картина електричного поля, як наслідок, дещо зміниться (рис. 4.5, б). Як бачимо з рисунка, дотична складова електричного поля напрямлена вздовж провідника і пов'язана з густиною струму законом Ома

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$$

Під час проходження електричного струму по провіднику навколо останнього збуджується магнітне поле, напруженість  $\vec{H}$  якого в точках  $a$  і  $b$  (рис. 4.6) за заданого напрямку струму напрямлена в площину рисунка.

На цьому ж рисунку зображені складові векторів напруженості електричного поля та вектора Пойнтінга в означених точках. Дотичні складові вектора Пойнтінга  $\vec{\Pi}_\delta$  напрямлені від джерела до навантаження і, як у

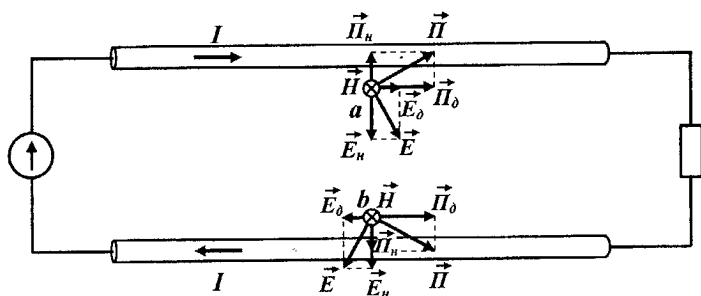


Рисунок 4.6

випадку коаксіального кабелю, визначають потік в цьому ж напрямку. Нормальні складові вектора Пойнтінга  $\vec{\Pi}_n$  напрямлені всередину проводів і характеризують втрати потужності в проводах.

Дійсно, на поверхні проводу напруженість магнітного поля можна розрахувати за законом повного струму

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

де  $r$  – радіус проводу, а дотичну складову напруженості електричного поля – із закону Ома

$$E_\delta = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{\pi r^2 \gamma}.$$

Оскільки вектори  $H$  і  $E_\delta$  перпендикулярні один до одного, то

$$\vec{\Pi}_n = E_\delta H = \frac{I}{\pi r^2 \gamma} \cdot \frac{I}{2\pi r} = \frac{I^2}{2\pi^2 \gamma r^3}.$$

Потік вектора Пойнтінга, що входить в провід через його бічну поверхню довжиною  $l$ , визначається за виразом (див. рис. 4.1)

$$-\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \oint_S \vec{\Pi}_n d\vec{S} = \frac{I^2}{2\pi^2 \gamma r^3} \cdot 2\pi r l = \frac{I^2 l}{\pi \gamma r^2}.$$

Оскільки  $\frac{l}{\pi \gamma r^2}$  – опір ділянки проводу довжиною  $l$ , то отримане

співвідношення визначає потужність втрат в цьому проводі.

Отже, потік електромагнітної енергії проходить діелектриком між проводами двопровідної лінії від генератора до навантаження, частково проникаючи при цьому до проводів та перетворюючись там в тепло.

Розглянемо наразі передачу електромагнітної енергії при синусоїдальній напрузі за умови наявності зсуву фаз (рис. 4.7, а) між вхідними напругою та струмом (випадок активно-індуктивного навантаження).

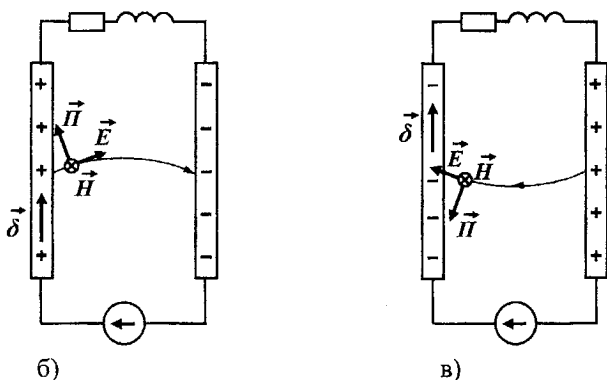
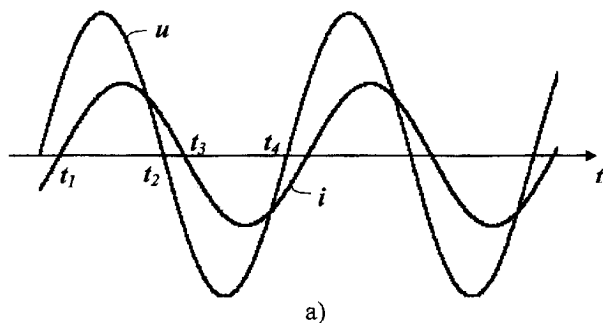


Рисунок 4.7

В інтервалі часу  $t_1 - t_2$  (рис. 4.7, а) струм і напруга додатні, картина векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{P}$  (рис. 4.7, б) буде аналогічною до розглянутої на

рис. 4.6, тобто енергія має передаватися від джерела до навантаження.

В інтервалі часу  $t_2 - t_3$  струм все ще залишається додатним, а напру-га лінії вже змінила свій знак, що свідчить про зміну знака і зарядів на по-верхні проводів, а отже, і зміну напрямку ліній електричного поля (рис. 4.7, в). Дотична складова вектора Пойнтінга в цьому випадку напря-млена від навантаження до генератора, що говорить про повертання енер-гії, яка була накопичена в магнітному полі індуктивного навантаження, до генератора.

Нормальні складові вектора Пойнтінга і в інтервалі часу  $t_1 - t_2$ , і в інтервалі часу  $t_2 - t_3$  спрямовані до середини проводів, тому втрати в про-водах не залежать від напрямку поширення основної енергії.

Таким чином, як за постійної, так і за синусоїдальної напруги проводи в лінії відіграють роль напрямних щодо потоку електромагнітної енергії.

### Питання для самоперевірки

1. Який загальний закон відображає теорема Умова-Пойнтінга?
2. На що вказують величина та напрям вектора Пойнтінга?
3. Як напрямлений вектор Пойнтінга відносно векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ ?
4. На що витрачається потужність джерел енергії в замкненому об'ємі відповідно до теореми Умова-Пойнтінга?
5. Що характеризують на поверхні внутрішньої жили коаксіального кабелю осьова  $P_z$  та радіальна  $P_r$  складові вектора Пойнтінга?
6. Чим можна пояснити зміну напрямку вектора Пойнтінга в різних то-чках коаксіального кабелю?
7. Яку роль відіграють провідники при передачі енергії від джерела до споживача електромагнітної енергії?
8. Чому в проводах коаксіального кабелю відсутня осьова складова  $P_z$  вектора Пойнтінга?

### 5.1 Рівняння плоскої хвилі

В розділі 3 було доведено, що електричний заряд  $q$ , який знаходиться в досить малому об'ємі  $\Delta V$ , змінюючись у часі, стає джерелом збудження в просторі сферичних електромагнітних хвиль, що поширюються у всіх напрямках, віддаляючись від даного заряду.

При цьому на досить великих відстанях від джерела електромагнітних хвиль радіус їх сфери  $r$  стає настільки значним, що невелику частину сферичної поверхні можна вважати вже плоскою. Оскільки внаслідок сферичної симетрії для всіх точок сфери вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  мають бути в будь-який момент часу однаковими, то поле плоскої хвилі є *однорідним*.

Для дослідження такого поля зручно скористатися прямокутною системою координат. Зорієнтуємо її таким чином, щоб площина електромагнітної хвилі сумістилася з площиною  $XOY$  і, як наслідок, вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  не мали б проекцій на вісь  $z$ , тобто

$$E_z = 0, \quad H_z = 0. \quad (5.1)$$

Оскільки поле однорідне, то вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  не залежать від координат  $x$  і  $y$ , тому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Основні рівняння Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \gamma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned}$$



запишемо для прямокутної системи координат

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_x \vec{H} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x + \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}_y \vec{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E_y + \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}_z \vec{H} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \gamma E_z + \varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_x \vec{E} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}_y \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}_z \vec{E} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_a \frac{\partial H_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Враховуючи (5.1) і (5.2), обидві системи перепишемо в більш простій формі

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \gamma E_x + \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \gamma E_y + \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Повернемо координатну площину  $XOY$  таким чином, щоб вісь  $x$  збіг-

ляся б з напрямом вектора  $\vec{E}$ , тоді  $E_x = E$ ,  $E_y = 0$ , а системи (5.5) і (5.6) набудуть вигляду:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \gamma E + \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= 0, \\ 0 &= -\mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

З другого та третього рівнянь системи (5.7) випливає, що проекція  $H_x$  не залежить ні від просторових координат  $x, y, z$ , ні від часу  $t$ , але оскільки ми розглядаємо змінне електромагнітне поле, в якому немає сталих величин, то це означає, що  $H_x = 0$ ,  $H_y = H$ . Таким чином, з'ясовано, що якщо напрям вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  збігається з віссю  $x$ , то вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  буде напрямлений по осі  $y$ . Іншими словами, в плоскій хвилі вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  є перпендикулярними один до одного. Тоді систему рівнянь (5.7), що описує плоску хвилю, необхідно записати у вигляді

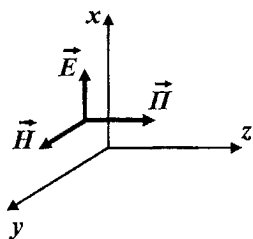


Рисунок 5.1

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial z} &= \gamma E + \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}, \\ -\frac{\partial E}{\partial z} &= \mu_a \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Вектор Пойнтінга

$$\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}]$$

напрямлений перпендикулярно до площини, якій належать вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , тобто по осі  $z$ .

## 5.2 Гармонічні плоскі хвилі в ідеальному діелектрику

В ідеальному діелектрику питома провідність дорівнює нулю, тобто відсутні струми провідності, тому система (5.8) має вигляд

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial z} &= \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}, \\ -\frac{\partial E}{\partial z} &= \mu_a \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Розглянемо окремий випадок плоскої хвилі, коли напруженості електричного і магнітного полів в будь-якій точці простору змінюються у часі за синусоїдним законом

$$\left. \begin{aligned} E &= E_m \sin(\omega t + \beta), \\ H &= H_m \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

За аналогією до теорії електричних кіл від синусоїдних функцій можна і доцільно перейти до комплексних чисел, що дозволить виключити з рівнянь (5.9) час  $t$  і перейти до повних похідних.

Система рівнянь (5.9) в комплексній формі буде мати вигляд

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{H}}{dz} &= j\omega \varepsilon_a \underline{E}, \\ -\frac{d\underline{E}}{dz} &= j\omega \mu_a \underline{H}. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

$\underline{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\beta}$ ,  $\underline{H} = \frac{H_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha}$  – комплексні діючі значення напруженостей відповідно до електричного та магнітного полів.

Продиференціюємо друге рівняння системи (5.11)

$$-\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} = j\omega \mu_a \frac{d\underline{H}}{dz}$$

і в отриманий вираз замість  $\frac{d\underline{H}}{dz}$  підставимо його значення з першого рі-

вняння цієї системи

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} = -\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \underline{E}$$

або

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \underline{E} = 0. \quad (5.12)$$

Таким чином, отримали лінійне диференціальне однорідне рівняння другого порядку. Його розв'язком є вираз

$$\underline{E} = \underline{A}_1 e^{p_1 z} + \underline{A}_2 e^{p_2 z}, \quad (5.13)$$

де  $p_1$  і  $p_2$  - корені характеристичного рівняння

$$p^2 + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a = 0.$$

Звідси

$$p_1 = -j\omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, \quad p_2 = j\omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}.$$

Відповідно до введеного в підрозділі 3.6 позначення  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$

(3.25) можна записати

$$p_1 = -j\frac{\omega}{v}, \quad p_2 = j\frac{\omega}{v}. \quad (5.14)$$

Таким чином,

$$\underline{E} = \underline{A}_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z} + \underline{A}_2 e^{j\frac{\omega}{v}z}, \quad (5.15)$$

де  $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$ ,  $\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$  - сталі інтегрування, які можуть бути визначені з граничних умов.

Розглянемо більш докладно першу складову формули (5.15), записавши її у вигляді синусоїдної функції

$$E_n = A_{1m} \sin\left(\omega t + \psi_1 - \frac{\omega}{v}z\right). \quad (5.16)$$

Подібний вираз вже зустрічався при вивченні електричних кіл з розподіленими параметрами. Він подає біжучу хвилю як *незатухаючу* синусо-

їду, що поширюється в напрямі осі  $z$  з фазовою швидкістю  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ .

Таку хвилю називають *падаючою*. Відстань, яку проходить ця хвиля за час одного періоду  $T$ , називається довжиною хвилі

$$\lambda = vT, \quad \lambda = \frac{v}{f}. \quad (5.17)$$

Друга складова виразу (5.15) відрізняється від першої знаком біля координати  $z$ , а тому вона являє собою *відбиту* хвилю. Якщо середовище не буде обмеженим щодо напрямку поширення падаючої хвилі, то відбитої хвилі не буде і стала інтегрування  $A_2$  перетвориться в нуль.

Визначимо закон зміни напруженості магнітного поля. Для цього виразимо  $\vec{H}$  з другого рівняння (5.11)

$$\underline{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{dE}{dz}$$

і в отриманий вираз підставимо значення  $\vec{E}$  з (5.15)

$$\begin{aligned} \underline{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu_a} \left( -j\frac{\omega}{v} \underline{A}_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z} + j\frac{\omega}{v} \underline{A}_2 e^{j\frac{\omega}{v}z} \right) = \\ &= \frac{1}{v\mu_a} \left( \underline{A}_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z} - \underline{A}_2 e^{j\frac{\omega}{v}z} \right). \end{aligned}$$

Оскільки  $\frac{1}{v\mu_a} = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}}$ , то

$$\underline{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \left( \underline{A}_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z} - \underline{A}_2 e^{j\frac{\omega}{v}z} \right). \quad (5.18)$$

Подамо першу складову (5.18) в синусоїдній формі

$$H_n = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} A_{1m} \sin\left(\omega t + \psi_1 - \frac{\omega}{v}z\right). \quad (5.19)$$

Неважко побачити, що ця складова напруженості магнітного поля являє собою падаючу незатухаючу синусоїдну хвилю.

Відношення комплексного значення падаючої хвилі напруженості електричного поля до комплексного значення падаючої хвилі напруженості магнітного поля

$$\frac{\underline{E}_n}{\underline{H}_n} = \frac{A_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z}}{\sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} A_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (5.20)$$

Це відношення, яке має розмірність опору, називається *хвильовим опором середовища* і позначається буквою  $\underline{Z}_{xs}$ .

Таким чином,

$$\underline{Z}_{xs} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (5.21)$$

Для пустоти

$$\underline{Z}_{xs} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \text{ Ом.}$$

Вираз (5.21) показує, що для ідеального діелектрика хвильовий опір є дійсним числом, тому напруженості електричного та магнітного полів збігаються за фазою. На рис. 5.2 зображені просторові криві миттєвих значень

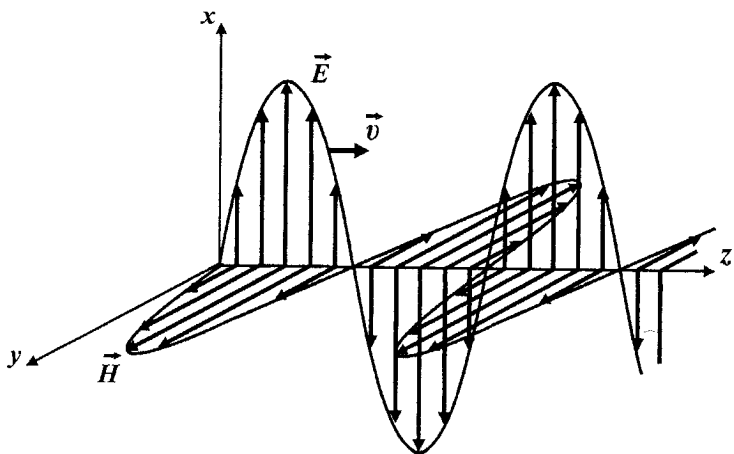


Рисунок 5.2

$\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , побудованих для моменту часу за умови  $\omega t + \psi_1 = \pi$ .

З формули (5.20) випливає, що  $\frac{\epsilon_a E^2}{2} = \frac{\mu_a H^2}{2}$ , тобто об'ємні густини енергій електричного та магнітного полів є рівними між собою.

Таким чином, за отриманими результатами можна зробити такі висновки.

1. В плоскій електромагнітній хвилі поле однорідне, а вектори напруженостей електричного  $\vec{E}$  і магнітного  $\vec{H}$  полів *перпендикулярні* один до одного.

2. Падаюча хвиля поширюється в напрямі, перпендикулярному до площини хвилі зі швидкістю  $v$  *без затухання*, оскільки в діелектрику немає струмів провідності і, отже, втрат енергії у вигляді тепла.

3. Відношення амплітуди напруженості електричного поля до амплітуди напруженості магнітного поля падаючої чи відбитої хвилі називається хвильовим опором і є дійсним числом.

4. Швидкість поширення хвилі, а також хвильовий опір залежать виключно від властивостей середовища.

### 5.3 Гармонічні плоскі хвилі в провідному середовищі

В провідному середовищі густини струмів провідності значно більші, ніж густина струму зміщення, тому в системі рівнянь (5.8) можна знехтувати складовою  $\epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Тоді система рівнянь плоскої хвилі для провідного

середовища набуде вигляду

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial z} &= \gamma E, \\ -\frac{\partial E}{\partial z} &= \mu_a \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Для синусоїдно змінних величин можна записати систему рівнянь в комплексній формі

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{H}}{dz} &= \gamma \underline{E}, \\ -\frac{d\underline{E}}{dz} &= j\mu_a \omega \underline{H}. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Друге рівняння ще раз продиференціюємо за  $z$  і замість  $\frac{d\underline{H}}{dz}$  підставимо його значення з першого рівняння

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} = j\omega \gamma \mu_a \underline{E}$$

або

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} - j\omega \gamma \mu_a \underline{E} = 0. \quad (5.24)$$

Характеристичне рівняння

$$p^2 - j\omega \gamma \mu_a = 0,$$

а його корені

$$p_{1,2} = \mp \sqrt{j\omega \gamma \mu_a}.$$

Оскільки  $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$ , то

$$p_{1,2} = \mp (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}}.$$

Позначимо

$$k = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}},$$

$$p_{1,2} = \mp (1 + j)k. \quad (5.25)$$

Розв'язком диференціального рівняння (5.24) буде

$$\underline{E} = \underline{A}_1 e^{p_1 z} + \underline{A}_2 e^{p_2 z} = \underline{A}_1 e^{-(1+j)kz} + \underline{A}_2 e^{(1+j)kz}. \quad (5.26)$$



З другого рівняння (5.23)

$$\underline{H} = -\frac{l}{j\mu_a\omega} \frac{dE}{dz} = \frac{(l+j)k}{j\mu_a\omega} [A_1 e^{-(l+j)kz} - A_2 e^{(l+j)kz}].$$

Оскільки

$$\frac{(l+j)k}{j\mu_a\omega} = (l-j) \sqrt{\frac{\gamma}{2\mu_a\omega}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu_a\omega}} e^{-j45^\circ},$$

то

$$\underline{H} = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu_a\omega}} e^{-j45^\circ} [A_1 e^{-(l+j)kz} - A_2 e^{(l+j)kz}]. \quad (5.27)$$

Запишемо першу складову виразу (5.26) через синусоїдну функцію

$$E_n = A_{1m} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_1 - kz). \quad (5.28)$$

Наведене рівняння являє собою *згасаючу* синусоїдну хвилю, що рухається в напрямі осі  $z$ . Така хвиля є *падаючою*. Нехай під час її руху фаза деякої точки цієї хвилі залишається сталою, тобто

$$\omega t + \psi_1 - kz = \text{const}.$$

Взявши похідну за часом від цього виразу, отримаємо

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0.$$

Звідки фазова швидкість хвилі буде

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\omega}{\gamma\mu_a}}. \quad (5.29)$$

Оскільки довжина хвилі – це відстань, яку хвиля проходить за період  $T$ , то

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu_a\omega}}. \quad (5.30)$$

Падаюча хвиля напруженості магнітного поля

$$H_n = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu_a\omega}} A_{1m} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_1 - 45^\circ - kz). \quad (5.31)$$

Хвильовий опір середовища

$$\underline{Z}_{xs} = \frac{\underline{E}_n}{\underline{H}_n} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\gamma}} e^{j45^\circ} \quad (5.32)$$

є комплексним числом, тому напруженість магнітного поля  $H_n$  відстає за часом від напруженості електричного поля  $E_n$  на  $1/8$  частину періоду, що відповідає куту  $45^\circ$ . На рис. 5.3 графічно наведена зміна напруженостей електричного та магнітного полів в залежності від координати  $z$  для фіксованого моменту часу, коли  $\omega t + \psi_1 = \pi$ .

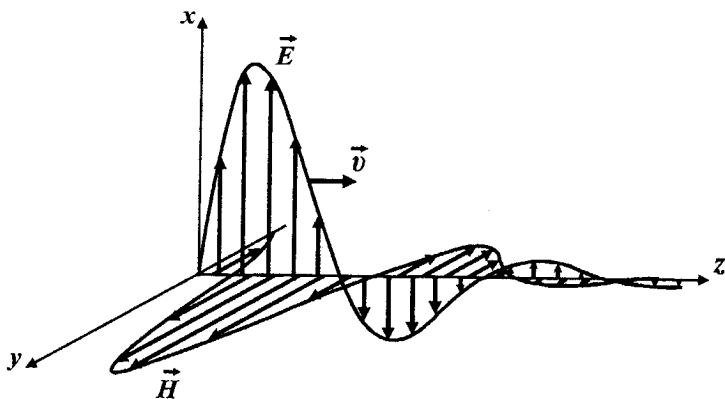


Рисунок 5.3

Відстань  $z_0$ , вздовж якої амплітуда падаючої хвилі зменшиться в  $e$  разів, називають *глибиною проникнення* електромагнітної хвилі. З (5.28) або (5.31) випливає, що при цьому  $kz_0 = 1$  і

$$z_0 = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_a \omega}}. \quad (5.33)$$

В добре провідних середовищах падаюча хвиля досить швидко затухає. Так, наприклад, на відстані довжини хвилі ( $z = \lambda$ ) амплітуда електромагнітної хвилі зменшується в  $e^{k\lambda} = e^{2\pi} = 536$  разів, тобто на глибині, що дорівнює довжині хвилі, електромагнітна хвиля в провіднику практично повністю зникає.

В табл. 5.1 наведені деякі параметри електромагнітних хвиль для різних середовищ та різних частот.

Таблиця 5.1

Матеріал	Частота $f$ , Гц	Фазова швидкість $v$ , м/с	Довжина хвилі $\lambda$ , м	Модуль хвильового опору $Z_{хв}$ , Ом
Мідь $\gamma=5,8 \cdot 10^7$ См/м $\mu_a=\mu_0$	50	2,94	$5,9 \cdot 10^{-2}$	$2,61 \cdot 10^{-6}$
	800	11,74	$1,47 \cdot 10^{-2}$	$10,44 \cdot 10^{-6}$
	$5 \cdot 10^5$	293,6	$0,59 \cdot 10^{-2}$	$2,61 \cdot 10^{-4}$
Сталь $\gamma=10^7$ См/м $\mu_a=10^3 \mu_0$	50	0,224	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	800	0,894	$1,12 \cdot 10^{-3}$	$7,95 \cdot 10^{-4}$
	$5 \cdot 10^5$	22,36	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-2}$
Морська вода $\gamma=4$ См/м $\mu_a=\mu_0$	50	$11,2 \cdot 10^3$	224	0,01
	800	$44,7 \cdot 10^3$	56	0,04
	$5 \cdot 10^5$	$1,12 \cdot 10^6$	2,24	1,0

Отже, поширення електромагнітної хвилі в провідному середовищі властиво таке.

1. Вектори напруженостей електричного та магнітного полів перпендикулярні один до одного.

2. Електромагнітна хвиля поширюється перпендикулярно до площини хвилі із затушенням, під час якого хвиля практично повністю затухає вже на відстані, що дорівнює довжині хвилі.

3. Падаюча хвиля напруженості магнітного поля відстає за фазою від напруженості електричного поля на кут  $45^\circ$ .

4. Швидкість поширення хвилі і хвильовий опір залежать не тільки від параметрів середовища, але і від частоти.

## 5.4 Поверхневий ефект

Затухання електромагнітного поля під час його поширення в провідному середовищі призводить до того, що в цьому середовищі величина густини струму буде більшою біля його поверхні, аніж на глибині, оскільки густина струму пропорційна напруженості електричного поля. Інакше кажучи, для змінного струму його густина в провідному середовищі є нерівномірною.

Явище нерівномірного розподілу густини змінного струму по перерізу провідника називається *поверхневим ефектом*. Оскільки довжина електромагнітної хвилі в провіднику залежить від параметрів середовища і частоти, то і поверхневий ефект в залежності від цих величин виявляє себе по різному.

Як відомо, активний опір провідника пропорційний площі його поперечного перерізу. Через поверхневий ефект більша частина струму проходить поблизу поверхні циліндричного провідника, що рівнозначно проходженню струму вже не по суцільному, а по *порожнистому* циліндричному провіднику, що за рахунок зменшення площі поперечного перерізу суттєво збільшує опір цього провідника змінному струму. Таким чином, головною струмопровідною частиною проводу для струмів досить високої частоти (більше 5000 Гц) є поверхневий шар провідника. Тому його серцевину можна виготовляти з дешевого міцного матеріалу з поганою провідністю (наприклад, сталі), а саму оболонку – вже із дорогого металу, що має високу провідність (*біметалеві* проводи).

Необхідно додати, що поверхневий ефект змінює не тільки активний опір проводу, але і його внутрішню індуктивність.

Розглянемо як зміняться ці параметри під час так званого *різкого* поверхневого ефекту, коли довжина електромагнітної хвилі набагато менша радіуса циліндричного провідника. В цьому випадку можна використати

співвідношення, отримані для плоскої хвилі, враховуючи при цьому за відсутності відбитої наявність тільки падаючої складової цієї хвилі.

Комплексне значення напруженостей електричного і магнітного полів для падаючої хвилі з (5.26) та (5.32)

$$\underline{E} = \underline{A}_1 e^{p_1 z},$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_{xs}} e^{p_1 z}.$$

Якщо початок системи координат помістити на поверхні провідника і позначити значення напруженості електричного поля на цій поверхні через  $\underline{E}_0$ , то з граничних умов (для  $z = 0$ ,  $\underline{E} = \underline{E}_0$ ) маємо  $\underline{A}_1 = \underline{E}_0$  і

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{p_1 z},$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_{xs}} e^{p_1 z} = \underline{H}_0 e^{p_1 z}.$$

Нехай комплексне значення синусоїдного струму, що проходить провідником, дорівнює  $\underline{I}$ , тоді на поверхні циліндричного провідника діаметром  $d_0$  за законом повного струму напруженість магнітного поля

$$\underline{H}_0 = \frac{\underline{I}}{2\pi \frac{d_0}{2}} = \frac{\underline{I}}{\pi d_0}.$$

Напруженість електричного поля в точках, прилеглих до поверхні провідника зсередини, має тільки одну складову, яка напрямлена вздовж осі проводу (рис. 5.4), і яку можна виразити через напругу  $\Delta U$  на відрізьку проводу довжиною  $\Delta l$

$$\underline{E}_0 = \frac{\Delta U}{\Delta l}.$$

Комплексний опір цієї ділянки проводу

$$\underline{Z} = \frac{\Delta U}{\underline{I}} = \frac{\underline{E}_0 \Delta l}{\underline{H}_0 \pi d_0} = \underline{Z}_{xs} \frac{\Delta l}{\pi d_0}.$$

З врахуванням (5.32)

$$\underline{Z} = (l + j) \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\gamma}} \frac{\Delta l}{\pi d_0}.$$

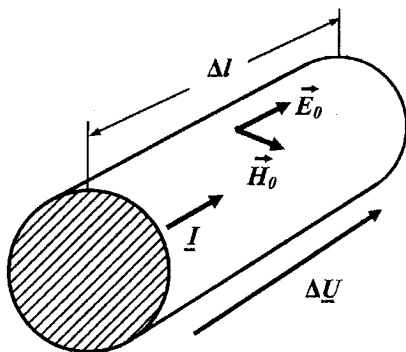


Рисунок 5.4

Звідси активний опір відрізка проводу довжиною  $\Delta l$  за умови впливу поверхневого ефекту

$$R = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\gamma}} \frac{\Delta l}{\pi d_0}, \quad (5.34)$$

а внутрішня індуктивність за цієї ж умови

$$L_{\text{внутр}} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\gamma}} \frac{\Delta l}{\pi d_0 \omega} = \sqrt{\frac{\mu_a}{2\omega\gamma}} \frac{\Delta l}{\pi d_0}. \quad (5.35)$$

Для постійного струму активний опір

$$R_0 = \frac{4 \Delta l}{\gamma \pi d_0^2},$$

внутрішня індуктивність поодинокого проводу відповідно до співвідношення (2.28)

$$L_{0\text{внутр}} = \frac{\mu_a \Delta l}{8\pi}.$$

Визначимо відношення цих величин

$$\frac{R}{R_0} = \frac{d_0}{4} \sqrt{\frac{\mu_a \omega \gamma}{2}}, \quad (5.36)$$

$$\frac{L_{\text{внутр}}}{L_{0\text{внутр}}} = \frac{4}{d_0} \sqrt{\frac{2}{\mu_a \omega \gamma}}. \quad (5.37)$$

Необхідно ще раз наголосити, що ці співвідношення є дійсними для різкого поверхневого ефекту, коли  $d_0 < 10\lambda$ .

Явище затухання електромагнітної хвилі в поверхневому шарі металу використовують для *екранування* різних пристроїв від дії зовнішнього змінного електромагнітного поля. Такі екрани являють собою металеві порожнисті оболонки, всередині яких і знаходяться прилади чи пристрої. Для якісного екранування товщина металевої стінки екрана має бути порівнянна з довжиною хвилі в цьому екрані.

Поверхневий ефект використовують також для нагрівання металевих деталей перед початком кування чи штампування, а також для сушіння деревини, розміщуючи її в електромагнітному полі відносно низької частоти (5-20 кГц). Часто сталеві вироби піддають поверхневому загартуванню дією електромагнітного поля високої частоти (20 – 500 кГц), при цьому сильно нагрівається тільки тонкий поверхневий шар такого виробу.

### Питання для самоперевірки

1. Яку електромагнітну хвилю можна назвати плоскою?
2. Під яким кутом один до одного напрямлені вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  плоскої електромагнітної хвилі?
3. Від яких параметрів залежить фазова швидкість поширення електромагнітної хвилі в діелектрику?
4. Чому плоска електромагнітна хвиля в діелектрику поширюється без затухання?

5. Яка різниця між першими рівняннями Максвелла для провідного середовища та для діелектрика?
6. Від яких параметрів залежить фазова швидкість поширення електромагнітної хвилі і хвильовий опір провідного середовища?
7. Що називають глибиною проникнення електромагнітної хвилі в провідному середовищі?
8. В скільки разів модуль вектора  $\vec{H}$  падаючої хвилі на поверхні провідного середовища більший, ніж модуль вектора  $\vec{H}$  на глибині проникнення цього середовища?
9. Що являє собою явище поверхневого ефекту?
10. Чи буде нагріватися феромагнітний екран:
  - а) в постійних електричному та магнітному полях;
  - б) в змінному електромагнітному полі?
11. Чому в високочастотній техніці замість суцільного проводу можна використовувати біметалевий?
12. Що являє собою біметалевий провід і в яких випадках його доцільно використовувати?
13. Чому опір циліндричного провідника для постійного струму буде меншим, ніж для змінного?
14. Чим можна пояснити, що електромагнітна хвиля затухає, проникаючи в провідне середовище?
15. За якої частоти фазові швидкості плоских електромагнітних хвиль будуть однаковими і в міді ( $\gamma = 5,95 \cdot 10^7$  См/м), і в повітрі?



## 6 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### Приклад 1

Фізичне тіло з питомою провідністю  $\gamma = 10^{-4}$  См/м, відносною діелектричною проникністю  $\epsilon = 6$  та відносною магнітною проникністю  $\mu = 1$  знаходиться в електромагнітному полі. При цьому напруженість електричного поля змінюється за законом

$$E = 100 \sin(\omega t + \beta) \text{ В/м.}$$

Розрахувати частоту, за якої густина струму провідності та густина струму зміщення будуть рівними. Знайти величину густини одного з цих струмів.

Розв'язання. Амплітуда густини струму провідності

$$\delta_{m \text{ пр}} = \gamma E_m. \quad (6.1)$$

Густина струму зміщення

$$\delta_{zm} = \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_a \omega E_m \cos(\omega t + \beta).$$

Амплітуда густини струму зміщення

$$\delta_{m \text{ зм}} = \epsilon_a \omega E_m. \quad (6.2)$$

Прирівнявши праві частини (6.1) та (6.2), отримаємо

$$\epsilon_a \omega = \gamma.$$

Звідки

$$f = \frac{\gamma}{2\pi \epsilon_a} = \frac{10^{-4} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{2\pi \cdot 6} = 3 \cdot 10^5 \text{ Гц.}$$

Амплітуда густин струмів

$$\delta_{m \text{ пр}} = \delta_{m \text{ зм}} = \gamma E_m = 10^{-4} \cdot 100 = 10^{-2} \text{ А/м}^2.$$

## Приклад 2

Визначити тангенс кута  $\alpha$  між нормаллю до поверхні внутрішньої жили кабелю та вектором напруженості електричного поля на цій поверхні (рис. 6.1). Знайти величину потоку вектора Пойнтінга через бічну поверхню жили. Розрахувати потужність, що надходить до внутрішньої жили кабелю довжиною 1 метр, і порівняти цю величину з потужністю втрат енергії

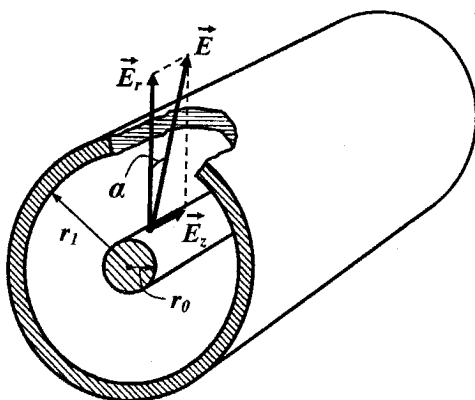


Рисунок 6.1

в жилі кабелю тієї ж довжини.

Радіус внутрішньої жили  $r_0 = 0,3$  см, внутрішній радіус оболонки  $r_1 = 1$  см. По кабелю проходить постійний струм  $I = 50$  А. Напруга між жилою і оболонкою на початку кабелю  $U = 1$  кВ. Внутрішня жила виготовлена з міді ( $\gamma = 5,8 \cdot 10^7$  См/м).

**Розв'язання.** Нормальна (радіальна) складова напруженості електричного поля на поверхні жили кабелю відповідно до (4.7)

$$E_r = \frac{U}{r_0 \ln \frac{r_1}{r_0}} = \frac{10^3}{3 \cdot 10^{-3} \cdot \ln \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}}} = 2,77 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Дотична (осьова) складова напруженості електричного поля на пове-

рхні жили кабелю (4.8)

$$E_z = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{\pi r_0^2 \gamma} = \frac{50}{\pi \cdot 3^2 \cdot 10^{-6} \cdot 5,8 \cdot 10^{-7}} = 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ В/м.}$$

Тоді тангенс кута  $\alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_z}{E_r} = \frac{3,05 \cdot 10^{-2}}{2,77 \cdot 10^5} = 1,1 \cdot 10^{-7}.$$

Напруженість магнітного поля на поверхні внутрішнього провідника

$$H = \frac{I}{2\pi r_0} = \frac{50}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 2,65 \cdot 10^3 \text{ А/м.}$$

Усередины жили кабелю проникає радіальна складова вектора Пойнтінга

$$P_r = E_z H = 3,05 \cdot 10^{-2} \cdot 2,65 \cdot 10^3 = 80,8 \text{ Вт/м}^2.$$

Потужність електромагнітного поля, що надходить крізь бокову поверхню до жили кабелю довжиною  $l_1 = 1 \text{ м}$

$$P_1 = P_r \cdot 2\pi r_0 l_1 = 80,8 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 1,523 \text{ Вт.}$$

Потужність втрат на активному опорі  $R$  жили кабелю довжиною  $l_1$

$$P_0 = I^2 R = I^2 \frac{l_1}{\gamma \pi r_0^2} = \frac{50^2 \cdot 1}{5,8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 10^{-6}} = 1,523 \text{ Вт.}$$

Як бачимо ці потужності, як і слід було очікувати, дорівнюють одна одній.

### Приклад 3

Для захисту від дії електромагнітного поля частотою  $f = 4 \text{ кГц}$  прилад помістили до циліндричного феромагнітного екрана з стінкою завтовшки  $\delta = 3 \text{ мм}$ . Питома провідність сталі  $\gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ См/м}$ , її відносна магнітна проникність  $\mu = 20$ , радіус екрана  $R_1 = 10 \text{ см}$ .

Розрахувати в скільки разів величини напруженостей електричного  $E$  та магнітного  $H$  полів на зовнішній поверхні екрана будуть більшими, ніж на внутрішній.

Розв'язання. Знайдемо довжину електромагнітної хвилі в екрані

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_a \omega}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{5 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 4 \cdot 10^3}} = 5 \text{ мм.}$$

Оскільки довжина хвилі набагато менша за радіус екрана, цю хвилю можна вважати плоскою. Коефіцієнт екранування визначається як відношення величини напруженості магнітного чи електричного поля на внутрішній поверхні екрана  $H_1 (E_1)$  до напруженості на його зовнішній частині  $H_0 (E_0)$ , тобто

$$k_e = \frac{H_1}{H_0}. \quad (6.3)$$

Враховуючи значне затухання електромагнітної хвилі в провіднику, можна знехтувати в першому наближенні впливом відбитої хвилі. Тоді

$$k_e = e^{-k\delta}, \quad (6.4)$$

де

$$k = \sqrt{\frac{\mu_a \gamma \omega}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{20 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^6}{2}} = 1256 \text{ 1/м.}$$

Звідси

$$k_e = e^{-k\delta} = e^{-1256 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 2,3 \cdot 10^{-2},$$

тобто напруженість магнітного поля біля внутрішньої поверхні екрана буде в 43 рази меншою, ніж напруженість зовні поза екраном.

Якщо ж враховувати вплив відбитої електромагнітної хвилі, то необхідно користуватися виразом, що наведений в [10]

$$k_e = \frac{1}{\left| \operatorname{ch} p_2 \delta + \frac{R_1}{2} \sqrt{j \frac{\mu_0 \gamma \omega}{\mu}} \operatorname{sh} p_2 \delta \right|}, \quad p_2 = (1 + j) \sqrt{\frac{\mu_a \gamma \omega}{2}}. \quad (6.5)$$

Після підстановки числових значень отримаємо

$$k_a = 9 \cdot 10^{-3}.$$

#### Приклад 4

По алюмінієвому ( $\mu_a = \mu_0$ ,  $r = 3,5 \cdot 10^7$  См/м) проводу, що має діаметр  $d_0 = 20$  мм, проходить струм частотою  $f = 50$  кГц. На якій відстані від поверхні проводу напрям густини струму ( $\delta_1$ ) буде протилежним до напрямку густини цього струму на його поверхні ( $\delta_0$ ) в будь-який момент часу.

Розв'язання. Знайдемо довжину електромагнітної хвилі в проводі

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_a \omega}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3,5 \cdot 10^7 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^4}} = 2,4 \text{ мм.}$$

Оскільки  $\lambda \ll d_0$ , електромагнітну хвилю можна вважати плоскою.

Для плоскої хвилі в провідному середовищі

$$E = E_{0m} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_1 - kz)$$

і

$$\delta = \gamma E = \gamma E_{0m} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_1 - kz),$$

$$\text{де } k = \sqrt{\frac{\mu_a \gamma \omega}{2}}.$$

На поверхні провідника ( $z = 0$ ) густина струму

$$\delta_0 = \gamma E_{0m} \sin(\omega t + \psi_1).$$

Під час поширення електромагнітної хвилі на відстань, що дорівнює її довжині, фаза цієї хвилі змінюється на  $2\pi$ . Густина струму  $\delta_1$  буде напрямлена протилежно до густини струму  $\delta_0$  тоді, коли початкова фаза  $\delta_1$  відрізнятиметься від початкової фази  $\delta_0$  на кут  $\pi$ . Це означає, що умова задачі має бути виконана на відстані  $z = \frac{\lambda}{2}$ .

Таким чином, густина струму в проводі  $\delta_1$  буде протилежно напрям-

лена до густини струму на його поверхні  $\delta_0$  на відстані  $z = \frac{\lambda}{2} = 1,2$  мм від поверхні цього проводу.

### Приклад 5

По внутрішній сталій жилі коаксіального кабелю ( $\mu_a = 10^3 \cdot \mu_0$ ,  $\gamma = 10^7$  См/м), що має діаметр  $d_0 = 4$  мм, проходить синусоїдний струм частотою  $f = 10$  кГц. Знайти відношення між активним опором і внутрішньою індуктивністю жили для синусоїдного струму та їх значеннями для постійного струму.

Розв'язання. Довжина електромагнітної хвилі в провіднику

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_a \omega}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{10^7 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^4}} = 0,32 \text{ мм.}$$

Оскільки  $\lambda \ll d_0$ , електромагнітну хвилю вважаємо плоскою і використовуємо формули (5.36) і (5.37)

$$\frac{R}{R_0} = \frac{d_0}{4} \sqrt{\frac{\gamma \mu_a \omega}{2}} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4} \sqrt{\frac{10^7 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^4}{2}} = 20,$$

$$\frac{L_{\text{внутр}}}{L_{0\text{внутр}}} = \frac{4}{d_0} \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_a \omega}} = \frac{4}{4 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{2}{10^7 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^4}} = 0,05.$$

### Приклад 6

Приймальна антена виготовлена у вигляді рамки (рис. 6.2) з розмірами  $a = 20$  см,  $b = 10$  см. Рамка знаходиться в електромагнітному полі, діюче значення напруженості магнітного поля якого  $H_1 = 150$  мкА/м. Визначити значення е.р.с., що наводиться в рамці

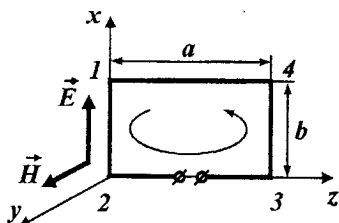


Рисунок 6.2

при частоті  $f = 5$  МГц. Електромагнітну хвилю при цьому вважати плоскою.

**Розв'язання.** Використаємо систему прямокутних координат як це показано на рисунку. Дану задачу розв'яжемо двома способами, в першому випадку, скориставшись напруженістю електричної складової  $\vec{E}$  електромагнітного поля, а в другому – напруженістю магнітної складової  $\vec{H}$ .

*Варіант 1.* Визначимо е.р.с. через електричну складову електромагнітного поля за допомогою формули

$$e = \oint \vec{E} d\vec{l}.$$

Під час поширення електромагнітної хвилі вздовж осі  $z$  (враховуємо тільки падаючу хвилю) комплекси діючих значень напруженостей електричного та магнітного полів описуються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{E}_1 e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}z}, \\ \underline{H} &= \underline{H}_1 e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}z}, \end{aligned}$$

де  $\underline{E}_1$  та  $\underline{H}_1$  – значення напруженостей електричного та магнітного полів в точці початку координат ( $z = 0$ ).

Величину  $\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = \frac{\omega}{v} = k$  називають *хвильовим числом*, тоді

$$\underline{E} = \underline{E}_1 e^{-jkz}, \quad \underline{H} = \underline{H}_1 e^{-jkz}.$$

Задамо аргумент  $\underline{E}_1$  рівним нулю ( $\underline{E}_1 = E_1$ ). Оскільки  $\underline{E}_1 = \underline{H}_1 Z_{xg}$ ,

де  $Z_{xg} = Z_{xg} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$  – дійсне число, аргументи комплексних значень  $\underline{E}_1$

та  $\underline{H}_1$  будуть рівними один одному, тому і аргумент  $\underline{H}_1$  також буде рівним нулю ( $\underline{H}_1 = H_1$ ). В цьому випадку

$$\underline{E} = H_1 Z_{xg} e^{-jkz}.$$

Обчислимо лінійний інтеграл від вектора  $\vec{E}$  вздовж замкненої рамки, обходячи її проти годинникової стрілки. Для цього розіб'ємо увесь контур на чотири прямолінійних ділянки 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, тоді комплексне значення е.р.с.  $\underline{E}_{e.p.c.}$

$$\underline{E}_{e.p.c.} = \oint \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_2 d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_3 d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E}_4 d\vec{l}.$$

На ділянках 2-3 і 4-1 вектори  $\vec{E}$  та  $d\vec{l}$  перпендикулярні один одному і інтеграли на цих ділянках дорівнюють нулю. На ділянці 3-4 ( $z = a$ )  $\underline{E}_3 = H_1 Z_{xs} e^{-jka}$ , а вектори  $\vec{E}_3$  та  $d\vec{l}$  збігаються за напрямом. На ділянці 1-2 ( $z = 0$ )  $\underline{E}_1 = E_1 = H_1 Z_{xs}$ , вектори ж  $\vec{E}_1$  та  $d\vec{l}$  є протилежними один одному. Тому

$$\underline{E}_{e.p.c.} = E_3 b - E_1 b = H_1 Z_{xs} (e^{-jka} - 1) b.$$

Підставимо числові значення:

$$Z_{xs} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 377 \text{ Ом},$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 0,105.$$

Звідси комплекс діючого значення наведеної е.р.с.

$$\underline{E}_{e.p.c.} = 150 \cdot 10^{-6} \cdot 377 \cdot (e^{-j0,105 \cdot 0,2} - 1) \cdot 0,1 = -j118,4 \text{ мкВ},$$

а її діюче значення

$$E_{e.p.c.} = 118,4 \text{ мкВ}.$$

*Варіант 2.* Обчислимо величину діючого значення наведеної е.р.с. за допомогою напруженості  $\vec{H}$  магнітної складової електромагнітного поля, скориставшись співвідношенням

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$



## Магнітний потік

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{H} d\vec{S}.$$

Вектори  $\vec{H}$  та  $d\vec{S}$  збігаються за напрямом, тому

$$\Phi = \mu_0 \int_S H dS.$$

На відстані  $z$  від початку координат виділимо площадку  $dS = b dz$

(рис. 6.3). В межах цієї площадки

$$H = H_1 e^{-jkz},$$

тому

$$\Phi = \mu_0 \int_0^a H_1 e^{-jkz} b dz = \frac{\mu_0 b H_1}{-jk} (e^{-jka} - 1),$$

де  $\Phi$  - комплексне значення магнітного потоку.

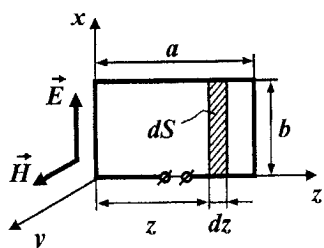


Рисунок 6.3

Тоді комплекс діючого значення наведеної е.р.с.

$$\underline{E}_{e.p.c.} = -j\omega\Phi = \frac{\omega\mu_0 b H_1}{k} (e^{-jka} - 1).$$

Оскільки

$$\frac{\omega\mu_0}{k} = \frac{\omega\mu_0 v}{\omega} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_{xv},$$

то

$$\underline{E}_{e.p.c.} = H_1 b Z_{xv} (e^{-jka} - 1),$$

що цілком збігається з отриманим раніше результатом.

## Приклад 7

Як зміниться значення е.р.с. в рамці, що знаходиться в електромагнітному полі (див. попередній приклад 6) за умов:

- зміни геометричних розмірів рамки, зокрема її довжини  $a$ ;

б) повороту рамки навколо осі  $x$ ?

Розв'язання:

а) з попереднього прикладу відомо, що комплекс діючого значення наведеної е.р.с.

$$\underline{E}_{e.p.c.} = A(e^{-jka} - 1),$$

де  $A = H_1 b Z_{xв}$  або

$$\underline{E}_{e.p.c.} = 2A \sin \frac{ka}{2} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{ka}{2}\right)}.$$

Підставивши числові значення, отримаємо

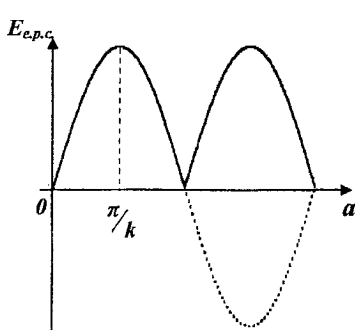


Рисунок 6.4

$$\underline{E}_{e.p.c.} = 11,31 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \frac{ka}{2} \cdot e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{ka}{2}\right)} \text{ В.}$$

Як бачимо і модуль, і аргумент е.р.с. є функціями від  $a$ . Відповідно до даного співвідношення діюче значення е.р.с. буде залежати від довжини рамки  $a$  таким чином

$$E_{e.p.c.} = 11,31 \cdot |\sin(0,0525 \cdot a)| \text{ мВ.}$$

Графік цієї функції наведено на рис. 6.4.

Зв'яжемо діюче значення наведеної в рамці е.р.с.  $E_{e.p.c.}$  з довжиною електромагнітної хвилі  $\lambda$ .

Як відомо, хвильове число

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v}, \text{ швидкість } v = \lambda f.$$

$$\text{Тоді } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Враховуючи цю обставину, для діючого значення наведеної е.р.с. можна записа-

ти

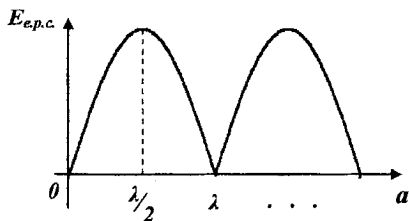


Рисунок 6.5

$$E_{e.p.c.} = 2A \sin \frac{\pi a}{\lambda}$$

Графік цієї функції має вигляд (рис. 6.5).

б) для відповіді на другу частину задачі припустимо, що рамку повернули за годинниковою стрілкою (вигляд згори) навколо осі  $x$  по відношенню до вихідного положення на деякий кут  $\beta$  (рис. 6.6).

Як і в прикладі 6 розв'яжемо цю задачу двома способами, в першому випадку, скориставшись напруженістю електричної складової  $\vec{E}$  електромагнітного поля, а в другому – напруженістю магнітної складової  $\vec{H}$ .

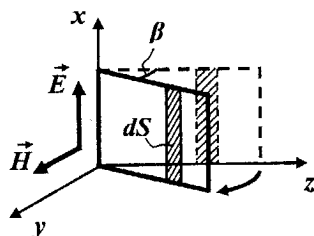


Рисунок 6.6

*Варіант 1.* Визначимо е.р.с. через електричну складову електромагнітного поля за допомогою формули

$$e = \oint \vec{E} d\vec{l}$$

Як зазначалося в прикладі 6, комплексне значення е.р.с.

$$\underline{E}_{e.p.c.} = \oint \underline{E} d\vec{l} = \int_1^2 \underline{E}_1 d\vec{l} + \int_2^3 \underline{E}_2 d\vec{l} + \int_3^4 \underline{E}_3 d\vec{l} + \int_4^1 \underline{E}_4 d\vec{l}$$

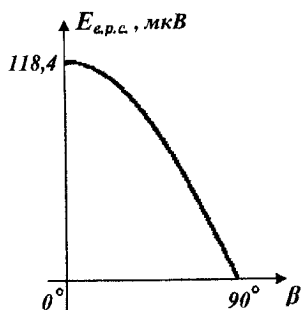


Рисунок 6.7

На ділянках 2-3 і 4-1 вектори  $\vec{E}$  та  $d\vec{l}$  і після повороту рамки навколо осі  $x$  на кут  $\beta$  залишаються перпендикулярними один одному і тому інтеграли на цих ділянках будуть, як і раніше, дорівнювати нулю. На ділянці 3-4 ( $z = a \cos \beta$ )  $\underline{E}_3 = H_1 Z_{x\beta} e^{-jkz} = H_1 Z_{x\beta} e^{-jk a \cos \beta}$ , а вектори  $\vec{E}_3$  та  $d\vec{l}$  будуть збігатися за напрямом.

На ділянці 1-2 ( $z = 0$ )  $\underline{E}_1 = E_1 = H_1 Z_{x\beta}$ , вектори ж  $\vec{E}_1$  та  $d\vec{l}$  залишаться протилежними один одному. Тому

$$\underline{E}_{e.p.c.} = E_3 b - E_1 b = H_1 Z_{x\theta} b \left( e^{-jk a \cos \beta} - 1 \right).$$

Виділивши в останньому співвідношенні модуль, отримаємо формулу функціональної залежності діючого значення наведеної е.р.с. від кута повороту  $\beta$

$$E_{e.p.c.} = 11,31 \cdot |\sin(0,0105 \cdot \cos \beta)| \text{ мВ},$$

графік якої наведено на рис. 6.7.

*Варіант 2.* Визначимо залежність діючого значення наведеної е.р.с. від кута  $\beta$  за допомогою напруженості  $\vec{H}$  магнітної складової електромагнітного поля.

Магнітний потік через виділену на відстані  $l$  в площині рамки площадку  $dS$

$$d\Phi = \mu_0 \vec{H} d\vec{S}.$$

Оскільки вектори  $\vec{H}$  та  $d\vec{S}$  після повороту рамки на кут  $\beta$  вже не будуть збігатися за напрямом (рис. 6.8), то

$$d\Phi = \mu_0 H \cos \beta dS$$

або, враховуючи, що  $dS = b dl$ , де  $dl$  – елемент довжини рамки в напрямку осі  $l$ ,

$$d\Phi = \mu_0 H \cos \beta b dl,$$

а для комплексного значення магнітного потоку

$$d\Phi = \mu_0 \underline{H} \cos \beta b dl.$$

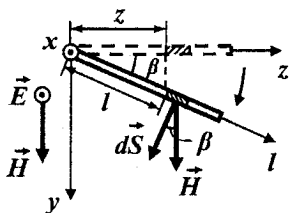


Рисунок 6.8

Відомо, що комплекс діючого значення напруженості магнітного поля в координатній осі  $z$  -  $\underline{H} = H_1 e^{-jkz}$ . Перехід до іншої координатної осі  $l$  призведе до зміни цього виразу. Тому, оскільки  $z = l \cdot \cos \beta$ , для осі  $l$  маємо

$$\underline{H} = H_1 e^{-jkl \cos \beta}.$$

Тоді

$$d\Phi = \mu_0 H_1 e^{-jkl \cos \beta} \cos \beta b dl ,$$

а комплексне значення магнітного потоку через всю площину рамки

$$\underline{\Phi} = \mu_0 \int_0^a H_1 e^{-jkl \cos \beta} \cos \beta b dl = \frac{\mu_0 b H_1}{-jk} (e^{-jka \cos \beta} - 1).$$

Отже, комплекс діючого значення наведеної е.р.с.

$$\underline{E}_{e.p.c.} = \frac{\omega \mu_0 b H_1}{k} (e^{-jka \cos \beta} - 1)$$

або

$$\underline{E}_{e.p.c.} = H_1 b Z_{xs} (e^{-jka \cos \beta} - 1),$$

що збігається з отриманим в варіанті 1 результатом.

## ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Більшість фізичних величин характеризується електромагнітним полем, яке є векторним, тому висвітливо основні положення векторної алгебри.

Векторна величина або вектор характеризується не тільки числовим значенням цієї величини, але і напрямком її дії в просторі. Її позначають буквою з стрілкою зверху, наприклад,  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ . Буква без стрілки ( $A$ ) характеризує числове значення (модуль) вектора. Вектор можна записати у вигляді:

$$\vec{A} = A\vec{a}^\circ,$$

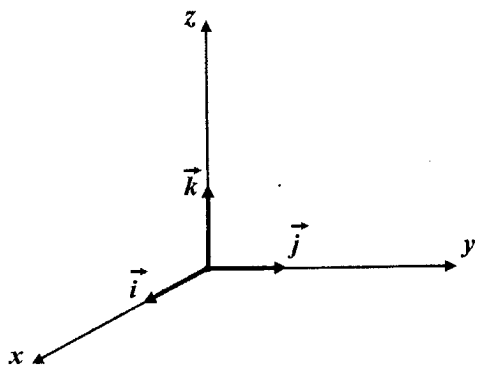
де  $\vec{a}^\circ$  – одиничний вектор (орт), направлений так само, як і вектор  $\vec{A}$ .

В тривимірному просторі будь-який вектор можна виразити через його проекції на три координатні осі. В прямокутній системі координат (рис. А.1, а) одиничним векторам присвоєно такі позначення:  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – відповідно до напрямку по осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Отже, якщо позначити проекції вектора  $\vec{A}$  на осі координат відповідно  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ , то

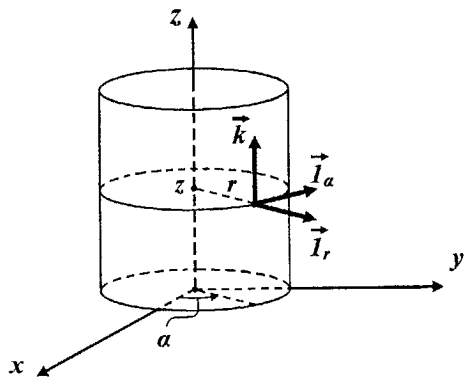
$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}. \quad (\text{A.1})$$

В процесі розв'язування конкретних задач часто зручніше використовувати циліндричну (рис. А.1, б) або сферичну (рис. А.1, в) системи координат. В циліндричній системі координат  $(r, \alpha, z)$  одиничні вектори позначають: радіальний –  $\vec{i}_r$ , дотичний –  $\vec{i}_\alpha$ , осьовий –  $\vec{k}$ . В сферичній системі  $(r, \theta, \alpha)$  – радіальний –  $\vec{i}_r$ , меридіанний –  $\vec{i}_\theta$ , довготний –  $\vec{i}_\alpha$ .

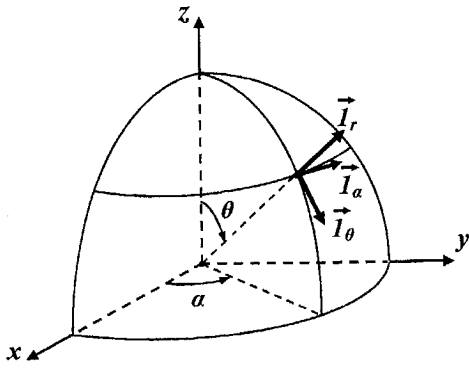
Результатом суми двох векторів  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$  є вектор  $\vec{C}$  ( $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ), який є діагоналлю паралелограма (рис. А.2).



a)



б)



в)

Рисунок А.1

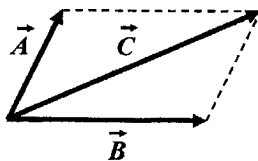


Рисунок А.2

Віднімання двох векторів  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$  можна звести до операції суми

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}).$$

Розрізняють два види перемноження векторів  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$  – скалярне і векторне.

Результатом *скалярного добутку* є скалярна величина і цю дію подають у вигляді

$$C = \vec{A}\vec{B} = AB \cos \alpha, \quad (\text{A.2})$$

де  $\alpha$  - кут між векторами  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$ .

Скалярний добуток двох однойменних одиничних векторів

$$\vec{i}\vec{i} = 1, \vec{j}\vec{j} = 1, \vec{k}\vec{k} = 1, \quad (\text{A.3})$$

тому що кут між цими векторами дорівнює нулю.

Скалярний добуток двох різнойменних одиничних векторів

$$\vec{i}\vec{j} = 0, \vec{i}\vec{k} = 0, \vec{j}\vec{k} = 0, \quad (\text{A.4})$$

оскільки кут між векторами дорівнює  $90^\circ$ .

Визначимо скалярний добуток між векторами через їхні проєкції в прямокутній системі координат.

$$\vec{A}\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}).$$

Врахувавши (A.3) і (A.4), отримаємо

$$\vec{A}\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{A.5})$$

Із цього співвідношення видно, що має місце рівність

$$\vec{A}\vec{B} = \vec{B}\vec{A}. \quad (\text{A.6})$$



Векторним добутком двох векторів  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$  називають новий вектор  $\vec{C}$ , направлений перпендикулярно площині, в якій розміщені вектори  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$ , і чисельно рівний

$$C = AB \sin \alpha.$$

Цю дію записують у вигляді:

$$\vec{C} = [\vec{A}\vec{B}]. \quad (\text{A.6})$$

Позитивний напрямок вектора  $\vec{C}$  визначають за правилом правоходо- вого гвинта (рис. А.3).

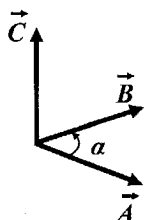


Рисунок А.3

Якщо обертати гвинт в площині векторів  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$  від першого вектора ( $\vec{A}$ ) до другого ( $\vec{B}$ ) по дузі меншій ніж  $180^\circ$ , то поступальний рух гвинта вказує напрямок вектора  $\vec{C}$ . З цього правила видно, що

$$[\vec{A}\vec{B}] = -[\vec{B}\vec{A}]. \quad (\text{A.7})$$

Векторний добуток можна записати через проекції векторів. В прямокутній системі координат

$$[\vec{A}\vec{B}] = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x).$$

Зручно даний вираз записати також у вигляді визначника

$$[\vec{A}\vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Запишемо ще два добутки:

$$[\vec{A}\vec{B}]\vec{C} = \vec{A}[\vec{B}\vec{C}] - \vec{B}[\vec{C}\vec{A}] \quad (\text{A.9})$$

$$[[\vec{A}\vec{B}]\vec{C}] = \vec{B}(\vec{C}\vec{A}) - \vec{A}(\vec{B}\vec{C}). \quad (\text{A.10})$$

Якщо добутки є неперервними функціями координат, то над ними можна проводити операції диференціювання. У векторному аналізі розрізняють три види диференціальних операцій.

Векторна просторова похідна ( $\vec{A}$ ) від скалярної функції  $B(x,y,z)$ . Якщо похідна взята в напрямку найбільшого зростання функції, то вона називається *градієнтом* скалярної функції

$$\vec{A} = \text{grad } B. \quad (\text{A.11})$$

В прямокутній системі координат

$$\text{grad } B = \frac{\partial B}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial B}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial B}{\partial z} \vec{k}, \quad (\text{A.12})$$

в циліндричній

$$\text{grad } B = \frac{\partial B}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vec{i}_\alpha + \frac{\partial B}{\partial z} \vec{k}, \quad (\text{A.13})$$

в сферичній

$$\text{grad } B = \frac{\partial B}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial B}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vec{i}_\alpha \right). \quad (\text{A.14})$$

Для позначення операції просторового диференціювання часто використовують символ  $\nabla$  (читається «набла»), який називають диференціальним оператором або оператором Гамільтона, і формально його розглядають як умовний вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (\text{A.15})$$

Вираз градієнта (A.11) можна розглядати як добуток вектора  $\nabla$  на скалярну величину  $B$

$$\vec{A} = \nabla B.$$

Скалярна просторова похідна  $A$  від векторної функції  $\vec{B}(x,y,z)$  називається дивергенцією векторної функції  $\vec{B}$

$$A = \text{div } \vec{B}. \quad (\text{A.16})$$

Застосувавши символ  $\nabla$ , можна записати (A.16) у вигляді скалярного добутку двох векторів

$$A = \nabla \vec{B}. \quad (\text{A.16})$$

Для прямокутної системи координат

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (\text{A.17})$$

для циліндричної

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (\text{A.18})$$

для сферичної

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(B_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} \right]. \quad (\text{A.19})$$

Векторна просторова похідна  $\vec{A}$  від векторної функції  $\vec{B}(x, y, z)$  називають *ротором* функції  $\vec{B}$

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}. \quad (\text{A.20})$$

В різних системах координат цю похідну зручно записувати у вигляді визначника.

В прямокутній системі координат

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

в циліндричній

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{l}_r & \vec{l}_\alpha & \frac{1}{r} \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_r & rB_\alpha & B_z \end{vmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

в сферичній

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \vec{I}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \vec{I}_\theta & \frac{1}{r} \vec{I}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ B_r & r B_\theta & r B_\alpha \sin \theta \end{vmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Вираз (A.20) можна записати як векторний добуток векторів  $\nabla$  і  $\vec{B}$

$$\vec{A} = [\nabla \vec{B}]. \quad (\text{A.24})$$

Згадаємо ще декілька співвідношень

$$\operatorname{div}(a \vec{A}) = \nabla(a \vec{A}) = a \nabla \vec{A} + \vec{A} \nabla a = a \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad} a \quad (\text{A.25})$$

$$\operatorname{div}[\vec{A} \vec{B}] = \nabla[\vec{A} \vec{B}] = \vec{B} [\nabla \vec{A}] - \vec{A} [\nabla \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}. \quad (\text{A.26})$$

*Теорема Остроградського-Гаусса*

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV. \quad (\text{A.27})$$

Поверхневий інтеграл від вектора  $\vec{A}$  по довільній замкненій поверхні  $S$  дорівнює інтегралу від дивергенції даного вектора по об'єму  $V$ , обмеженому цією поверхнею  $S$ .

*Теорема Стокса*

$$\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S}. \quad (\text{A.28})$$

Лінійний інтеграл від вектора  $\vec{A}$  вздовж будь-якого замкненого контуру  $l$  дорівнює поверхневому інтегралу від ротора вектора  $\vec{A}$  по довільній поверхні  $S$ , яку обмежує цей контур  $l$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. – СПб:Питер, 2003. – Т.3 – 376с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 264с.
3. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля. – М.: Энергоиздат, 1960. – 464с.
4. Круг К.А. Основы электротехники. – М.: Госэнергоиздат, 1946. – Т.1 и Т.2. – 472с.
5. Купалян С.Д. Теоретические основы электротехники. Ч.3. – М.: Энергия, 1970. – 248с.
6. Лавров В.М. Теория электромагнитного поля и основы распространения радиоволн. – М.: Связь, 1964. – 368с.
7. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – М.: Высшая школа, 1964. – 424с.
8. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. – М.: Энергия, 1988. – Т.1 и Т.2. – 522с.
9. Нестеренко А.О. Введение в теоретическую электротехнику. – К.: Наукова думка, 1969. – 352с.
10. Нетушил А.В., Поливанов К.М. Основы электротехники. Ч.Ш. – М.: Госэнергоиздат, 1964. – 192с.
11. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч.Ш. – М.: Энергия, 1974. – 352с.
12. Теоретические основы электротехники. Под ред. проф. П.А. Ионкина. – М.: Высшая школа, 1976. – Т.П – 384с.
13. Чиженко И.М., Бойко В.С. Линейные электрические цепи и методы их анализа. – К.: Вища школа, 1979. – 112с.

14. Шимони К. Теоретические основы электротехники. – М.: Мир, 1964. – 774с.
15. Зайцев И.А., Лурье А.Г. Задачник по теоретическим основам электротехники. – М.: Госэнергоиздат, 1952. – 440с.
16. Колли Я.Н., Соболева Л.П., Фрадкин Б.Н. Задачник по теоретическим основам электротехники (теория поля) – М.: Энергия, 1972. – 168с.
17. Сборник задач по теоретическим основам электротехники Под. ред. Л.А. Бессонова. – М.: Высшая школа, 1975. – 498с.

Навчальне видання

**Юхим Овдійович Карпов, Юрій Григорович Ведміцький,  
Василь Васильович Кухарчук**

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ  
МАГНІТНЕ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЯ**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Ю. Г. Ведміцьким

Редактор О. Д. Скалоцька

Видавництво ВНТУ «УНІВЕРСУМ-Вінниця»  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, головний корпус, к. 114  
тел.: (0432) 58-05-32

Підписано до друку 26.12.2005р.  
Формат 29,7 x 42<sup>1</sup>/<sub>4</sub> Папір офсетний  
Гарнітура Times New Roman  
Друк різнографічний Ум. друк. арк. 9,35  
Тираж 100 прим. Зам. № 2005-223

Відруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького національного технічного університету  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001  
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, головний корпус, к. 114  
тел.: (0432) 58-01-59