

Ю.О. Карпов, В.Г. Мадьяров

Теоретичні основи електротехніки

Розділ “Електричні кола з розподіленими параметрами”

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Ю.О. Карпов, В.Г. Мадьяров

Теоретичні основи електротехніки

Розділ “Електричні кола з розподіленими параметрами”

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напряму підготовки 0906 - "Електротехніка". Протокол № 8 від березня 2006 р.

Вінниця ВНТУ 2006

УДК 621.3

К 26

Рецензенти:

В.І. Сенько, доктор технічних наук, професор

П.Д. Лежнюк, доктор технічних наук, професор

М.Й. Бурбело, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Ю.О.Карпов, В.Г. Мадьяров

К 26 **Теоретичні основи електротехніки. Розділ “Електричні кола з розподіленими параметрами”.** Навчальний посібник.– Вінниця: ВНТУ, 2006.– 102 с.

В посібнику розглянуті усталені та перехідні режими роботи електричних кіл з розподіленими параметрами. Проведено порівняльний аналіз впливу параметрів та довжини ліній на вхідний опір, довжину та швидкість поширення хвилі, характер відбиття та виникнення стоячих хвиль. Розглянуті перехідні процеси при підключенні до лінії джерела та навантаження, виникнення відбитих та заломлених хвиль в місці з'єднання двох ліній та деякі аварійні режими. Теоретичні викладки ілюструються великою кількістю числових прикладів.

УДК 621.3

Зміст

1. Електричні кола з розподіленими параметрами в усталеному режимі

1.1. Вступ.....	4
1.2. Диференційні рівняння однорідної лінії	6
1.3. Усталений режим роботи лінії при синусоїдній вхідній напрузі.....	8
1.4. Біжучі хвилі	10
1.5. Вторинні параметри однорідної лінії.....	13
1.6. Відбиття хвиль. Коефіцієнт відбиття.....	20
1.7. Передача потужності і коефіцієнт корисної дії.....	23
1.8. Схема заміщення лінії.....	26
1.9. Вхідний опір лінії.....	30
1.10. Коротке замикання і холостий хід довгої лінії	32
1.11. Лінія без спотворень	36
1.12. Лінія без втрат.....	38
1.13. Холостий хід і коротке замикання лінії без втрат	41
1.14. Реактивне навантаження лінії без втрат.....	46
1.15. Довільне навантаження лінії без втрат	48
1.16. Застосування відрізків довгих ліній	54

2. Перехідні процеси в колах з розподіленими параметрами

2.1. Виникнення перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами.....	59
2.2. Розв'язання телеграфних рівнянь однорідної лінії класичним методом.....	59
2.3. Розв'язання телеграфних рівнянь лінії операторним методом	63
2.4. Виникнення хвиль при підключенні лінії до джерела напруги	65
2.5. Падаюча хвиля при підключенні до лінії довільного джерела	67
2.6. Відбиття хвилі від кінця лінії	71
2.7. Відбиття хвилі від кінця лінії при довільному навантаженні	73
2.8. Відбиття і заломлення хвиль в місці спряження двох однорідних ліній	79
2.9. Багатократне відбиття хвиль із прямокутним фронтом	88
2.10. Перехідні процеси при ненульових початкових умовах	94
2.11. Блукаючі хвилі	99

Література.....	101
-----------------	-----

1. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Вступ

При протіканні електричного струму вздовж всього кола виникають електричне і магнітне поля та незворотні перетворення електромагнітної енергії в тепло. На одних ділянках кола, наприклад, в конденсаторах, виступають на перший план електричне поле та явища, пов'язані з його змінами; на інших ділянках, наприклад, в індуктивних котушках, переважає магнітне поле; перетворення електромагнітної енергії в тепло часто буває зосереджене в основному в одній або декількох ділянках кола. Такі кола є колами із *зосередженими параметрами*. Ділянки кола, де в основному зосереджене електричне поле, на схемах зображують ємностями C , ділянки, де переважає магнітне поле, зображують індуктивностями L , а ділянки, в яких суттєве значення має перетворення електромагнітної енергії в інші види (теплову, механічну, хімічну і т. п.), зображують активними опорами R .

В електротехніці, однак, часто доводиться зустрічатися з електричними колами, в яких не можна виділити окремі ділянки зосередження електричного та магнітного полів або перетворення електромагнітної енергії в інші види. Ці явища поширені вздовж всього електричного кола. Такі кола називають *колами з розподіленими параметрами*. До них відносяться лінії електропередач, лінії телеграфного і телефонного зв'язку, антени і фідери радіо- і телепередачі і приймачі, обмотки трансформаторів і електричних машин при впливі на них імпульсів струмів та напруг і т. п.

Вивчення електромагнітних процесів в колах з розподіленими параметрами проведемо на прикладі двопроводової лінії з активним опором проводів, індуктивністю, ємністю між проводами та активною провідністю струму витоку між проводами внаслідок недосконалості ізоляції та тліючого електричного розряду навколо поверхні проводів, який називається короною.

Для спрощення досліджень приймемо, що параметри лінії розподілені вздовж неї *рівномірно*. Таку лінію називають *однорідною* і характеризують *первинними параметрами*, тобто параметрами, віднесеними до одиниці довжини:

r_0 [Ом/км] – активний опір двох проводів лінії,

L_0 [Г/км] – індуктивність двох проводів лінії,

C_0 [Ф/км] – результуюча ємність між проводами,

g_0 [$1/\text{Ом}\cdot\text{км}$] – активна провідність між проводами.

Лінії передач, які можна вважати колами з розподіленими параметрами, за конструкцією поділяються на повітряні і кабельні. Повітряні лінії

виконуються неізолюваними проводами (сталевими, мідними, алюмінієвими), що підвішуються за допомогою ізоляторів до металевих, дерев'яних або залізобетонних опор (щогл, стовпів).

Кабельні лінії частіше прокладаються під землею або під водою, але інколи і підвішуються на опорах. Проводи кабелю ізолюють і розташовують всередині екранованої та захисної оболонки.

Первинні параметри повітряної лінії можна обчислити за виразом:

$$r_0 = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot \rho}{S}, \quad [\text{Ом/км}]; \quad L_0 = \frac{\mu \cdot 10^3}{\pi} \cdot \ln \frac{D}{r}, \quad [\text{Г/км}];$$

$$C_0 = \frac{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot 10^3}{\ln \frac{D}{r}}, \quad [\text{Ф/км}],$$

де ρ – питомий опір матеріалу проводу в $\frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$,

S – переріз проводу в мм^2 ;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м}$ – магнітна проникність повітря,

$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Ф/м}$ – діелектрична проникність повітря,

D – відстань між проводами,

r – радіус проводу.

(Вирази для обчислення L_0 і C_0 наведені без врахування впливу землі).

Активна провідність g_0 визначається для повітряних ліній найчастіше експериментально і складає $(0,01 - 0,1) \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}}$

Для кабельних ліній активний опір r_0 і індуктивність L_0 визначають так само, як і для повітряних ліній,

$$C_0 = \frac{\pi \cdot \epsilon_a \cdot 10^3}{\ln 0,6 \cdot \frac{D}{r}}, \quad [\text{Ф/км}],$$

де ϵ_a – діелектрична проникність ізоляції в кабелі.

Активна провідність витoku в кабелях вища, ніж у повітряних ліній і складає $g_0 = (0,5 - 1) \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}}$

В табл. 1.1 наведено орієнтовні значення первинних параметрів деяких повітряних і кабельних силових ліній і ліній зв'язку.

В подальшому первинні параметри будемо вважати відомими і постійними. В дійсності первинні параметри лінії залежать від частоти доданої напруги, від метеорологічних умов і т. п.

Табл. 1.1

Найменування Параметра		f	r_0 Ом/км	g_0 См/км	L_0 Г/км	C_0 Ф/км
Повітряні лінії напругою 10-400 кВ		50 Гц	0,008-0,2	$(0,01-0,1)10^{-6}$	$(1,2-1,5)10^{-3}$	$(8-9)10^{-9}$
Силові кабелі напругою 10 кВ		50 Гц	0,3-0,5	$(0,3-0,5)10^{-6}$	$(0,3-0,4)10^{-3}$	$(0,15-0,2)10^{-9}$
Повітряні лінії зв'язку	Мідні проводи	800 Гц	2,5-4	$(0,1-0,5)10^{-6}$	$(1,5-2)10^{-3}$	$(6-7)10^{-9}$
	Стальні проводи	800 Гц	30-50	$(0,1-0,5)10^{-6}$	$(7-9)10^{-3}$	$(6-7)10^{-9}$
Кабелі зв'язку		800 Гц	20-30	$(0,7-1,0)10^{-6}$	$(0,5-0,7)10^{-3}$	$(30-40)10^{-9}$
Мідний коаксіальний кабель		1 МГц	25-30	$(30-40)10^{-6}$	$(0,2-0,4)10^{-3}$	$(50-60)10^{-9}$

Розподілений характер параметрів вздовж лінії призводить до того, що напруги і струми по довжині лінії неперервно змінюються і є функціями не тільки часу t , але і просторової координати – відстані від одного з кінців лінії x .

1.2. Диференціальні рівняння однорідної лінії

Дослідження процесів у лінії почнемо з визначення величин струму i в проводах і напруги u між проводами в будь-якій точці лінії в довільний момент часу.

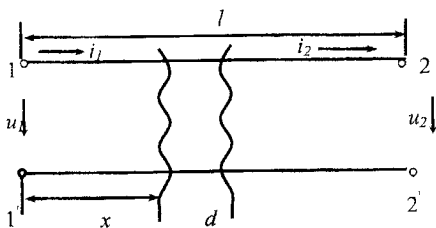


Рис. 1.1, а

Будемо вважати початком однорідної лінії затискачі джерела живлення (точки 1-1'), а кінцем лінії – затискачі навантаження (2-2') (рис. 1.1, а). За початок відліку виберемо початок лінії i на відстані x від нього виділимо елементарну ділянку лінії, довжиною dx . Цю елементарну ділянку лінії зображимо колом з зосередженими параметрами – активним

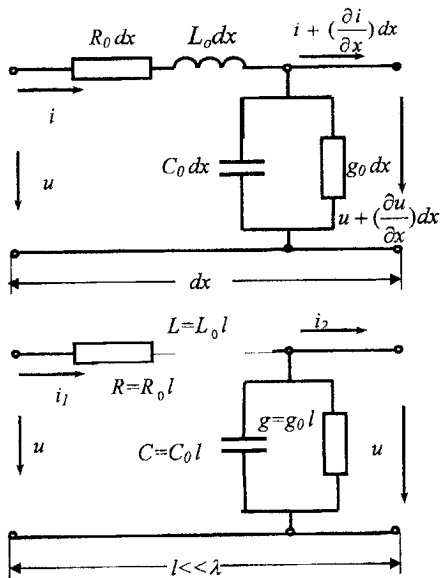


Рис. 1.1, б

опором $r_0 dx$, індуктивністю $L_0 dx$, активною провідністю $g_0 dx$ і ємністю $C_0 dx$ (рис. 1.1, б). Враховуючи те що струм і напруга, як вже відзначалося, є функціями як часу t , так і відстані x , то швидкість зміни струму вздовж лінії $\frac{\partial i}{\partial x}$ і напруги -

$\frac{\partial u}{\partial x}$ визначаються через часткові похідні. Якщо позначити струм і напругу на вході елементарної ділянки лінії через i і u , то на виході цього відрізка лінії при зміні відстані на dx струм і напруга отримують відповідно приріст

$\frac{\partial i}{\partial x} dx$ та $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ (рис. 1.1, б).

Зв'язок між вхідною та вихідною напругами згідно з другим законом Кірхгофа

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = r_0 dx \cdot i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}.$$

За першим законом Кірхгофа визначаємо співвідношення між вхідним і вихідним струмами

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial t} dx \right) = g_0 dx \cdot \left(u + \frac{\partial u}{\partial t} dx \right) + C_0 dx \frac{\partial \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)}{\partial t}.$$

Якщо обидва рівняння скоротити на dx і знехтувати в другому рівнянні членами другого порядку малості (що містять величину в $(dx)^2$), то отримаємо основні рівняння однорідної лінії

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 \cdot i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 \cdot u + C_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Ці рівняння називають в літературі *телеграфними рівняннями*. Однозначне рішення цих рівнянь, тобто знаходження функцій $i(x, t)$ і $u(x, t)$, можливе при використанні початкових і граничних умов.

1.3. Усталений режим роботи лінії при синусоїдній вхідній напрузі

При живленні кола з розподіленими параметрами від джерела синусоїдної напруги струм та напруга в усталеному режимі в довільній точці лінії також змінюються за синусоїдним законом, що дозволяє застосовувати символічний метод. Як відомо, при цьому миттєвим синусоїдним значенням струмів та напруг відповідають комплекси відповідних величин,

$$\left. \begin{aligned} i &= I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) \rightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j\alpha}, \\ u &= U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta) \rightarrow \underline{U} = U \cdot e^{j\beta}, \end{aligned} \right\}$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

а операціям диференціювання синусоїдних функцій – операції множення комплексного числа на $j\omega$. Застосовуючи символічний метод, рівняння (1.1) можна записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= r_0 \cdot \underline{I} + j \cdot \omega L_0 \cdot \underline{I}, \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= g_0 \cdot \underline{U} + j \cdot \omega C_0 \cdot \underline{U}. \end{aligned} \right\}$$

В цих диференціальних рівняннях комплексні значення \underline{U} і \underline{I} не є функціями часу t , тому частинні похідні замінюються на звичайні.

Якщо позначити: $r_0 + j\omega L_0 = \underline{Z}_0$ – повздовжній комплексний опір лінії на одиницю довжини та $g_0 + j\omega C_0 = \underline{Y}_0$ – поперечна комплексна провідність лінії на одиницю довжини, то

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= \underline{Z}_0 \cdot \underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= \underline{Y}_0 \cdot \underline{U} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Отримаємо з системи двох рівнянь з двома невідомими одне рівняння. З цією метою продиференціюємо перше рівняння ще раз

$$-\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \cdot \frac{d\underline{I}}{dx}.$$

Підставимо в отриманий вираз значення $\frac{dI}{dx}$ з другого рівняння системи (1.2)

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0 \cdot \underline{U} \quad \text{або} \quad \frac{d^2U}{dx^2} - \gamma^2 \cdot \underline{U} = 0, \quad (1.3)$$

$$\text{де} \quad \gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(r_0 + j \cdot \omega L_0) \cdot (g_0 + j \cdot \omega C_0)}. \quad (1.4)$$

Рівняння (1.3) це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку, загальне рішення якого записується в вигляді

$$\underline{U} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}, \quad (1.5)$$

де \underline{U} – комплексне діюче значення напруги в лінії на відстані x від її початку,

γ та $-\gamma$ – корені характеристичного рівняння $p^2 - \gamma^2 = 0$, \underline{A}_1 і \underline{A}_2 – постійні інтегрування.

Комплексне значення струму в лінії на відстані x від її початку можна визначити з першого рівняння системи (1.2), підставивши туди вираз (1.5)

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot (-\gamma \cdot \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \gamma \cdot \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}).$$

Підставляючи значення γ (1.4), отримуємо:

$$\underline{I} = \frac{\gamma}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}) = \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{\underline{Z}_0}} (\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}).$$

Комплексний вираз $\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$ має розмірність опорного, тому позначимо

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega \cdot L_0}{g_0 + j\omega \cdot C_0}} = \underline{Z}_C, \quad (1.6)$$

назвемо \underline{Z}_C хвильовим опором лінії і перепишемо вираз для струму в вигляді

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} \cdot e^{\gamma x}. \quad (1.7)$$

Фізичний зміст опорного \underline{Z}_C і коефіцієнта γ з'ясуємо трохи пізніше.

Постійні інтегрування \underline{A}_1 і \underline{A}_2 визначаються з граничних умов. Якщо на початку лінії ($x = 0$) відомі напруга \underline{U}_1 і струм \underline{I}_1 , то рівняння (1.5) і (1.7) набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C}. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язуючи цю систему визначаємо постійні інтегрування

$$A_1 = \frac{U_1 + Z_C \cdot I_1}{2}, \quad (1.8)$$

$$A_2 = \frac{U_1 - Z_C \cdot I_1}{2}.$$

Таким чином, рішенням системи (1.2) є значення

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2}(U_1 + Z_C \cdot I_1) \cdot e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(U_1 - Z_C \cdot I_1) \cdot e^{\gamma x}, \\ \underline{I} &= \frac{1}{2 \cdot Z_C} [(U_1 + Z_C \cdot I_1) \cdot e^{-\gamma x} - (U_1 - Z_C \cdot I_1) \cdot e^{\gamma x}] \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

1.4. Біжучі хвилі

Для з'ясування фізичного змісту складових в виразі (1.5) запишемо їх миттєві значення, враховуючи, що постійні інтегрування – комплексні числа і коефіцієнт γ – також комплексне число:

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\psi_1}, \quad \underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\psi_2}, \quad \gamma = \alpha + j \cdot \beta.$$

Розглянемо спочатку тільки першу складову виразу (1.5), позначивши його \underline{U}_n

$$\underline{U}_n = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} = A_1 \cdot e^{j\psi_1} \cdot e^{-(\alpha + j\beta)x} = A_1 \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\psi_1 - \beta x)}.$$

Миттєве значення цієї складової

$$u_n = A_1 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_1 - \beta \cdot x). \quad (1.10)$$

З виразу (1.10) випливає, що складова напруги u_n в будь-якій точці x лінії змінюється залежно від часу за синусоїдним законом. При фіксованому значенні часу $t = t_1$, напруга вздовж лінії змінюється також за синусоїдним законом (рис. 1.2, а) із затухаючою амплітудою $A_1 \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha x}$.

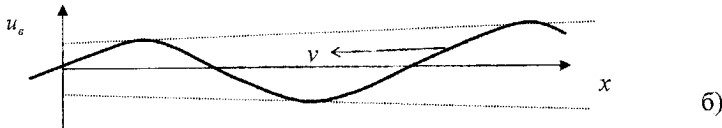
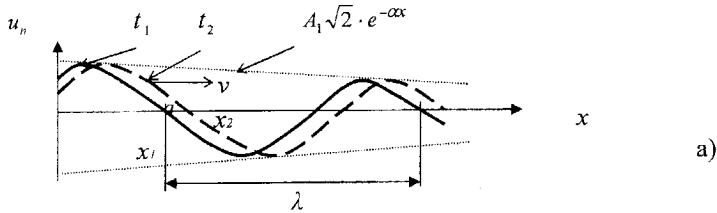


Рис. 1. 2

В момент t_1 в точці a синусоїди, що знаходиться на відстані x , від початку лінії, напруга $u_n = 0$, отже,

$$\sin(\omega \cdot t_1 + \psi_1 - \beta \cdot x_1) = 0,$$

а фаза коливань становить

$$\omega \cdot t_1 + \psi_1 - \beta \cdot x_1 = k \cdot \pi \quad (k = 0, 1, 2, 3 \dots) \quad (1.11)$$

Розглянемо момент часу $t_2 > t_1$ і визначимо, в якому місці лінії (x_2) виявиться точка a синусоїди, фаза якої залишається незмінною. В відповідності з (1.11)

$$\omega \cdot t_2 + \psi_1 - \beta \cdot x_2 = k \cdot \pi \quad (k = 0, 1, 2, 3 \dots) \quad (1.12)$$

Порівнюючи (1.12) і (1.11), бачимо, що, якщо $t_2 > t_1$, то і $x_2 > x_1$. Точно такі ж міркування можна провести відносно будь-якої точки синусоїди, а це означає, що за час $\Delta t = t_2 - t_1$ вся синусоїда змістилась праворуч на відстань $\Delta x = x_2 - x_1$.

Таким чином, з часом синусоїдна хвиля напруги u_n переміщується від початку лінії до її кінця. Цю хвилю називають *прямою* або *падаючою*, *біжучою*. Швидкість руху хвилі визначимо, наприклад, за точкою, в якій напруга u_n дорівнює нулю. Фаза цієї точки при її русі залишається постійною і дорівнює

$$\omega \cdot t + \psi_1 - \beta \cdot x = k \cdot \pi$$

Продиференціювавши за t обидві частини рівності, отримуємо

$$\omega - \beta \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{або} \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}, \quad (1.13)$$

де v – *фазова швидкість* хвилі.

Для біжучої хвилі можна визначити *довжину хвилі* λ , що являє собою відстань між двома найближчими точками в напрямі поширення хвилі, фази коливання в яких відрізняються на $2 \cdot \pi$ (рис.1.2, а). Отже,

$$(\omega \cdot t + \psi_1 - \beta \cdot x) - [\omega \cdot t + \psi_1 - \beta \cdot (x + \lambda)] = 2 \cdot \pi, \quad \text{звідки}$$

$$\beta \cdot \lambda = 2 \cdot \pi \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta}. \quad (1.14)$$

Враховуючи (1.13), можна записати

$$\lambda = \frac{v}{f} = vT, \quad (1.15)$$

де T – період коливань.

З виразу (1.10) ясно, що величина α характеризує зміну амплітуди хвилі при її русі вздовж лінії. Цю величину називають *коефіцієнтом затування* або *коефіцієнтом ослаблення*. Одиницею виміру α є непер на км $\left[\frac{Hn}{\text{км}} \right]$. Затуванню в один непер на км відповідає зміна амплітуди падаючої хвилі в e раз при поширенні хвилі на один кілометр. Іншими словами

$$\alpha \left[\frac{Hn}{\text{км}} \right] = \ln \frac{U_1}{U_2}.$$

В багатьох випадках за одиницю виміру коефіцієнта затухання приймають бел на км $\alpha \left[\frac{\text{Б}}{\text{км}} \right] = 2 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2}$. Затухання в $1 \frac{\text{Б}}{\text{км}}$ відповідає зменшенню амплітуди падаючої хвилі напруги в 3.162 раза.

Ще частіше застосовується децибел на км $\alpha \left[\frac{\text{дБ}}{\text{км}} \right] = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2}$.

Затуханню в $1 \frac{\text{дБ}}{\text{км}}$ відповідає зменшення амплітуди в 1.122 раза.

Згідно з цим мають місце співвідношення: $1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}$, $1 \text{ Нп} = 8,68 \text{ дБ}$.

Величина β характеризує зміну фази хвильової напруги при її переміщенні вздовж лінії, вона називається *фазовим коефіцієнтом* і вимірюється в радіанах на км $\left[\frac{\text{рад}}{\text{км}} \right]$.

Комплексна величина $\gamma = \alpha + j \cdot \beta$ називається *коефіцієнтом поширення* або *постійною поширення*.

Якщо так само проаналізувати першу складову виразу (1.7) для струму, то можна переконатися, що миттєве значення i_n являє собою падаючу хвилю струму, що спадає та рухається від початку лінії до її кінця з фазовою швидкістю v .

Друга складова в виразах (1.5) і (1.7) для напруги і струму відрізняються від перших складових знаком змінної x та постійної інтегрування (замість $A_1 - A_2$), тому миттєве значення другої складової напруги

$$u_e = A_2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_2 + \beta \cdot x)$$

являє собою біжучу затухаючу синусоїдну хвилю, що поширюється від кінця лінії до її початку з тією ж фазовою швидкістю v (рис. 1.2, б). Ці хвилі називають *зворотними* або *відбитими*.

Таким чином, розподіл напруги вздовж лінії в будь-який момент часу можна розглядати як результат накладання напруг двох хвиль – прямої та зворотної, що рухаються в протилежних напрямках з однаковою фазовою швидкістю v , причому жодна з цих хвиль спадає в напрямі руху

$$u = u_n + u_e.$$

Миттєве значення струму визначається як різниця падаючої і відбитої хвиль

$$i = i_n - i_e.$$

Комплексні значення напруги і струму в будь-якій точці лінії можна записати в вигляді

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_n + \underline{U}_e \\ \underline{I} &= \underline{I}_n - \underline{I}_e \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

З (1.16) і (1.9) випливає, що

$$\frac{U_n}{I_n} = \frac{U_b}{I_b} = Z_c. \quad (1.17)$$

Таким чином, хвильовий опір лінії – це опір в довільній точці, який спричиняє лінія струму падаючої або відбитої хвилі.

1.5. Вторинні параметри однорідної лінії

Введені раніше коефіцієнт поширення та хвильовий опір

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)} \quad Z_c = \sqrt{\frac{r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} = z_c \cdot e^{j\theta}$$

залежать від первинних параметрів лінії та частоти і повністю визначають властивості лінії як пристрою для передачі енергії або інформації, тому ці параметри часто називають *вторинними* або *хвильовими*.

Звернемо увагу на те, що коефіцієнти затухання α та фазовий β невід'ємні.

Дійсно, якщо

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0 = Z_0 \cdot e^{j\varphi_0},$$

$$\underline{Y}_0 = g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0 = Y_0 \cdot e^{j\psi_0},$$

то
$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{z_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot y_0 \cdot e^{j\psi_0}} = \sqrt{z_0 \cdot y_0} \cdot e^{j \frac{\varphi_0 + \psi_0}{2}}$$

або

$$\gamma = \sqrt{z_0 \cdot y_0} \cdot e^{j\vartheta}, \quad (1.18)$$

де
$$\vartheta = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 + \psi_0).$$

При будь-яких значеннях первинних параметрів $0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$,

$0 \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2}$, тому і $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

Запишемо (1.18) у вигляді

$$\gamma = \alpha + j \cdot \beta = \sqrt{z_0 \cdot y_0} \cdot \cos \vartheta + j \cdot \sqrt{z_0 \cdot y_0} \sin \vartheta.$$

При $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ $\cos \vartheta \geq 0$ та $\sin \vartheta \geq 0$ і, отже,

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Визначимо α і β через первинні параметри та частоту. З виразу для γ випливає, що

$$\alpha^2 + 2 \cdot j \cdot \alpha \cdot \beta - \beta^2 = (r_0 \cdot g_0 - \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0) + j \cdot \omega \cdot (L_0 \cdot g_0 + r_0 \cdot C_0),$$

звідки

$$\alpha^2 - \beta^2 = r_0 \cdot g_0 - \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0,$$

$$2 \cdot \alpha \cdot \beta = \omega \cdot (L_0 \cdot g_0 + r_0 \cdot C_0)$$

Вирішуючи спільно ці два рівняння, отримаємо

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[r_0 \cdot g_0 - \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0 + \sqrt{(r_0^2 + \omega^2 \cdot L_0^2) \cdot (g_0^2 + \omega^2 \cdot C_0^2)} \right]}, \quad (1.19)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0 - r_0 \cdot g_0 + \sqrt{(r_0^2 + \omega^2 \cdot L_0^2) \cdot (g_0^2 + \omega^2 \cdot C_0^2)} \right]}. \quad (1.20)$$

Вирази (1.19) і (1.20) показують, що коефіцієнти α та β залежать від частоти навіть тоді, коли первинні параметри від неї не залежать. Побудуємо залежності $\alpha(\omega)$ і $\beta(\omega)$. При $\omega = 0$, як це випливає з (1.19) і (1.20), $\alpha_0 = \sqrt{r_0 \cdot g_0}$, $\beta_0 = 0$.

Щоб знайти значення α_∞ при $\omega \rightarrow \infty$ перетворимо (1.19)

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[r_0 \cdot g_0 - \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0 + \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{r_0^2}{\omega^2 \cdot L_0^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{g_0^2}{\omega^2 \cdot C_0^2}\right)} \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[r_0 \cdot g_0 - \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0 + \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0 \cdot \left(1 + \frac{r_0^2}{\omega^2 \cdot L_0^2}\right)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{g_0^2}{\omega^2 \cdot C_0^2}\right)^{1/2} \right]}. \end{aligned}$$

При $\omega \rightarrow \infty$ $\frac{r_0^2}{\omega^2 \cdot L_0^2} \ll 1$, $\frac{g_0^2}{\omega^2 \cdot C_0^2} \ll 1$.

З математики відомо, що при $a \ll 1$

$$\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \dots$$

Тому, нехтуючи в силу малості всіма складовими окрім перших двох, маємо:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[r_0 \cdot g_0 - \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0 + \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0 \cdot \left(1 + \frac{r_0^2}{2 \cdot \omega^2 \cdot L_0^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{g_0^2}{2 \cdot \omega^2 \cdot C_0^2}\right) \right]}.$$

Після нескладних перетворень отримуємо:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[r_0 \cdot g_0 + \frac{r_0^2 \cdot C_0}{2 \cdot L_0} + \frac{g_0^2 \cdot L_0}{2 \cdot C_0} + \frac{r_0^2 \cdot g_0^2}{4 \cdot \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0} \right]}.$$

При $\omega \rightarrow \infty$ остання складова прямує до нуля, тому

$$\alpha_\infty = \frac{r_0 \cdot C_0 + g_0 \cdot L_0}{2 \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}}.$$

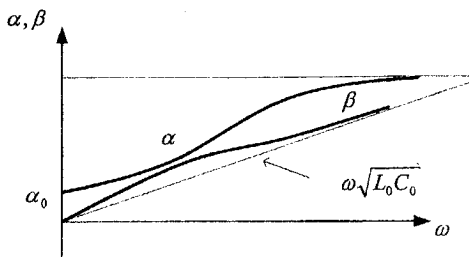


Рис.1.3

Коефіцієнт β при $\omega \rightarrow \infty$, згідно з (1.20), прямує до нескінченності і при високих частотах $\beta \approx \omega \sqrt{L_0 \cdot C_0}$. Залежності $\alpha(\omega)$ і $\beta(\omega)$ показані на рис.1.3. Підкреслимо ще раз, що ці графіки побудовані з припущенням, що первинні параметри не залежать від частоти, хоча насправді із зростанням частоти ці параметри істотно змінюються.

Фазова швидкість $v = \frac{\omega}{\beta}$ також залежить від частоти і тільки при дуже високих частотах $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}$ практично від них не залежить. Зважаючи на вирази для L_0 і C_0 , наведені в першому параграфі, отримуємо для повітряних ліній на високих частотах

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}},$$

де $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$, $\frac{\Gamma}{\text{м}}$ – магнітна стала,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9}, \frac{\Phi}{\text{м}}$$
 – діелектрична стала.

Підставивши ці значення в вираз для фазової швидкості хвилі в повітряних лініях отримаємо $v = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, рівну швидкості світла.

На рис. 1.4 показані залежності фазової швидкості хвилі від частоти f і типу лінії (1 – лінія з мідними проводами, 2 – із сталевими, 3– телефонний кабель). Шкала по осі абсцис наведена в логарифмічному масштабі. Різноманітного роду інформація (мова, музика, сигнали управління і т.п.) передається по лінії в вигляді електричних сигналів і в загальному випадку являє собою неперіодичні функції часу. Як відомо, в таких випадках неперіодичні струми і напруги можна розкласти в неперервний спектр частот. Оскільки коефіцієнт згасання і фазова швидкість залежать від частоти, то окремі гармонійні складові спектру рухаються по лінії з різними фазовими швидкостями, що призводить до зміни форми кривих струму і напруги в кінці лінії, порівняно з їхньою формою на початку лінії.

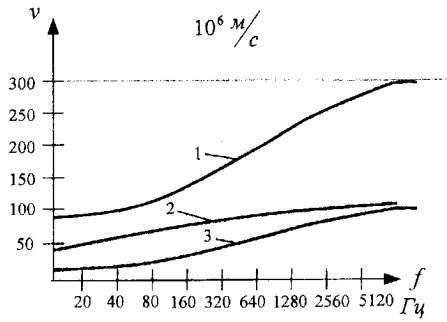


Рис.1.4

Ці викривлення називаються фазовими. Неоднакові згашання різних гармонічних складових також змінюють форму кривих. Такі викривлення називаються амплітудними.

Модуль хвильового опору лінії і його аргумент, згідно з (1.6) також залежать від частоти. При $\omega = 0$ $Z_{c0} = \sqrt{r_0/g_0}$, а при $\omega \rightarrow \infty$ $Z_{c\infty} = \sqrt{L_0/C_0}$. Для повітряних ліній модуль хвильового опору лежить звичайно в межах (400–600) Ом, для кабельних – (50–150) Ом.

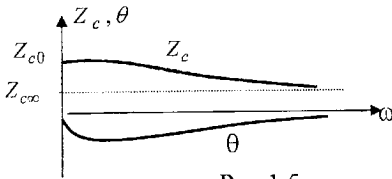


Рис.1.5

Аргумент хвильового опору θ при $\omega = 0$ і $\omega \rightarrow \infty$ дорівнює нулю, а на всіх інших частотах $\theta < 0$, тому що у реальних ліній

$$\frac{\omega \cdot C_0}{g_0} > \frac{\omega \cdot L_0}{r_0}.$$

Залежності $Z_c(\omega)$ і $\theta(\omega)$ показані на рис.1. 5.

Приклад 1.1. Первинні параметри повітряної лінії високої напруги:
 $r_0 = 0,08 \text{ Ом/км}$, $L_0 = 1,34 \text{ мГ/км}$, $C_0 = 8,6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$, $g_0 = 3,75 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}}$. Знайти хвильові параметри для частоти $f = 50 \text{ Гц}$.

Визначимо позовжній питомий опір

$$\underline{Z}_0 = 0,08 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 1,34 \cdot 10^{-3} = 0,08 + j \cdot 0,421 = 0,428 \cdot e^{j79,2^\circ} \text{ Ом/км}$$

і поперечну питому провідність:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_0 &= g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0 = 3,75 \cdot 10^{-8} + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 8,6 \cdot 10^{-9} = 3,75 \cdot 10^{-8} + j \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} = \\ &= 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j89,2^\circ} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт поширення:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{0,428 \cdot e^{j79,2^\circ} \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j89,2^\circ}} = 1,075 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j84,2^\circ} = \\ &= 1,083 \cdot 10^{-4} + j \cdot 1,07 \cdot 10^{-3}; \\ \alpha &= 1,083 \cdot 10^{-4} \text{ Нн/км}, \quad \beta = 1,07 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}. \end{aligned}$$

Хвильовий опір лінії:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{0,428 \cdot e^{j79,2^\circ}}{2,7 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j89,2^\circ}}} = 400 \cdot e^{-j5^\circ} \text{ Ом}.$$

Фазова швидкість хвилі:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50}{1,07 \cdot 10^{-3}} = 2,93 \cdot 10^5 \text{ км/с}.$$

Довжина хвилі:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2,93 \cdot 10^5}{50} = 5860 \text{ км}.$$

Приклад 1.2. Задані первинні параметри повітряної лінії зв'язку з мідними проводами –

$$\begin{aligned} r_0 &= 2,87 \text{ Ом/км}, L_0 = 1,94 \cdot 10^{-3} \text{ Г/км}, C_0 = 6,53 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}, \\ g_0 &= 0,14 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}}. \end{aligned}$$

а) Визначити хвильові параметри лінії на частотах

а) $f_1 = 50 \text{ Гц}$, б) $f_2 = 800 \text{ Гц}$, в) $f_3 = 150 \text{ кГц}$.

Знаходимо позовжні опори лінії

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0 = 2,87 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3} = 2,934 \cdot e^{j11,99^\circ} \text{ Ом/км},$$

$$\text{б) } \underline{Z}_0 = 2,87 + j \cdot 2\pi \cdot 800 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3} = 10,16 \cdot e^{j73,6^\circ} \text{ Ом/км},$$

$$\text{в) } \underline{Z}_0 = 2,87 + j \cdot 2\pi \cdot 150 \cdot 10^3 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3} = 1828 \cdot e^{j89,91^\circ} \text{ Ом/км}.$$

Поперечна провідність лінії

$$\text{а) } \underline{Y}_0 = g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0 = 0,14 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 50 \cdot 6,35 \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j85,98^\circ} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}},$$

$$\text{б) } \underline{Y}_0 = 0,14 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6,35 \cdot 10^{-9} = 3,192 \cdot 10^{-5} \cdot e^{j89,75^\circ} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}},$$

$$\text{в) } \underline{Y}_0 = 0,14 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 150 \cdot 6,35 \cdot 10^{-9} = 5,985 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j89,998^\circ} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}}.$$

Коефіцієнт поширення

$$\text{а) } \gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = 2,422 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j48,99^\circ} = 1,589 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,828 \cdot 10^{-3},$$

$$\text{б) } \gamma = 1,801 \cdot 10^{-2} \cdot e^{j81,67^\circ} = 2,608 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,782 \cdot 10^{-2},$$

$$\text{в) } \gamma = 3,308 \cdot e^{j89,95^\circ} = 2,635 \cdot 10^{-3} + j \cdot 3,308.$$

Коефіцієнт затухання

$$\text{а) } \alpha = 1,589 \cdot 10^{-3} \text{ Нн/км}, \text{ б) } \alpha = 2,608 \cdot 10^{-3} \text{ Нн/км}, \text{ в) } \alpha = 2,635 \cdot 10^{-3} \text{ Нн/км}.$$

Фазовий коефіцієнт

$$\text{а) } \beta = 1,828 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}, \text{ б) } \beta = 1,782 \cdot 10^{-2} \text{ рад/км}, \text{ в) } \beta = 3,308 \text{ рад/км}.$$

Фазова швидкість

$$\text{а) } V = \frac{\omega}{\beta} = 1,719 \cdot 10^5 \text{ км/с}, \text{ б) } V = 2,82 \cdot 10^5 \text{ км/с}, \text{ в) } V = 2,849 \cdot 10^5 \text{ км/с}.$$

Довжина хвилі

$$\text{а) } \lambda = \frac{V}{f} = 3438 \text{ км}, \text{ б) } \lambda = 352,5 \text{ км}, \text{ в) } \lambda = 1,9 \text{ км}.$$

Хвильовий опір

$$\text{а) } \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = 1211 \cdot e^{-j37^\circ} \text{ Ом}, \text{ б) } \underline{Z}_c = 564,3 \cdot e^{-j8,07^\circ} \text{ Ом}, \text{ в) } \underline{Z}_c = 552,7 \cdot e^{-j0,044^\circ} \text{ Ом}.$$

Приклад 1.3. Первинні параметри силового кабелю напругою 10 кВ:

$$r_0 = 0,36 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, L_0 = 0,35 \frac{\text{мГ}}{\text{км}}, C_0 = 0,185 \frac{\text{мкФ}}{\text{км}}, g_0 = 0,5 \frac{\text{мкСм}}{\text{км}}.$$

Знайдемо хвильові параметри на частоті $f = 50 \text{ Гц}$.

$$\underline{Z}_0 = 0,36 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,35 \cdot 10^{-3} = 0,376 \cdot e^{j16,98} \frac{\text{Ом}}{\text{км}};$$

$$\underline{Y}_0 = 0,5 \cdot 10^{-6} + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,185 \cdot 10^{-6} = 5,81 \cdot 10^{-5} \cdot e^{j89,51} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}};$$

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = 4,68 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j53,24} = 2,8 \cdot 10^{-3} + j \cdot 3,75 \cdot 10^{-3};$$

$$\alpha = 2,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Нп}}{\text{км}}, \beta = 3,75 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{км}}, V = 0,838 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}, \lambda = 1676,6 \text{ км},$$

$$\underline{Z}_c = 80,5 \cdot e^{-j36,26} \text{ Ом}.$$

Приклад 1.4. Первинні параметри коаксіального кабелю --

$$r_0 = 20 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, L_0 = 2,63 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Г}}{\text{км}}, C_0 = 46,5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Ф}}{\text{км}}, g_0 = 32 \cdot 10^{-6} \frac{\text{См}}{\text{км}}.$$

Знайдемо хвильові параметри лінії при частоті $f = 1 \text{ МГц}$.

$$\underline{Z}_0 = 20 + j \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 2,63 \cdot 10^{-4} = 1652 \cdot e^{j89,3} \frac{\text{Ом}}{\text{км}};$$

$$\underline{Y}_0 = 32 \cdot 10^{-6} + j \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 46,5 \cdot 10^{-9} = 0,292 \cdot e^{j89,99} \frac{\text{См}}{\text{км}};$$

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = 21,97 \cdot e^{j89,65} = 0,134 + j \cdot 21,97.$$

$$\alpha = 0,134 \frac{\text{Нп}}{\text{км}}, \beta = 21,57 \frac{\text{рад}}{\text{км}}, V = 2,86 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}, \lambda = 0,286 \text{ км},$$

$$\underline{Z}_c = 75,2 \cdot e^{-j0,343} \text{ Ом}.$$

З наведених прикладів видно, що довжина хвилі залежить передусім від частоти. Лінію, довжина якої співмірна з довжиною хвилі, звичайно називають *довгою лінією*. В цьому випадку спостерігається хвилеподібна зміна напруги і струму вздовж лінії. У ліній, довжина яких значно менша довжини хвилі, не спостерігається суттєвої зміни напруги і струму вздовж лінії, тому такі лінії часто можна розглядати як кола з зосередженими параметрами (див. рис. 1.1, в). Так, наприклад, лінія електропередачі довжиною до 200 км може розглядатися як коротка. Одна і та ж лінія, залежно від частоти f і, отже, довжини хвилі λ , в одних випадках ($l \approx \lambda$) повинна розраховуватися як довга, а в інших ($l \ll \lambda$) може вважатися короткою.

Поняття про падаючі відбиті хвилі, хвильовий опір і коефіцієнт поширення застосовуються і до симетричних трифазних ліній. В цьому випадку первинні параметри визначаються на одну фазу, а під струмами і напругами хвиль слід розуміти фазні струми і напруги.

1.6. Відбиття хвиль. Коефіцієнт відбиття

В п.1.3 отримані вирази для комплексних значень напруги (1.5) і струму (1.7) в будь-якій точці лінії через постійні інтегрування A_1 і A_2 , що легко визначаються з (1.8) при відомих значеннях струму і напруги на початку лінії \underline{I}_1 і \underline{U}_1 . Часто зручніше виразити струми і напруги в будь-якій точці лінії через струм і напругу в кінці лінії \underline{I}_2 і $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_n$, де \underline{Z}_n – опір навантаження. В цьому випадку зручніше за початок відліку відстані взяти відстань від кінця лінії. Якщо замінити в виразах (1.5) і (1.7) x на $l - x$, де l – довжина лінії, то отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma(l-x)} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma(l-x)}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma(l-x)} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma(l-x)} \end{aligned} \right\}$$

Позначивши $\underline{A}_3 = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma l}$, $\underline{A}_4 = \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma l}$, де $\underline{A}_3, \underline{A}_4$ – нові постійні інтегрування, отримаємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_3 \cdot e^{\gamma x} + \underline{A}_4 \cdot e^{-\gamma x}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{A}_3}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma x} - \frac{\underline{A}_4}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

в яких координата x відраховується від кінця лінії.

В кінця лінії ($x = 0$) маємо $\underline{U} = \underline{U}_2$, $\underline{I} = \underline{I}_2$ або $\underline{U}_2 = \underline{A}_3 + \underline{A}_4$, $\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c = \underline{A}_3 - \underline{A}_4$.

Звідси

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c), \underline{A}_4 = \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c). \quad (1.22)$$

Таким чином,

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_n + \underline{U}_b = \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{\gamma x} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{-\gamma x}, \\ \underline{I} &= \underline{I}_n - \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c}{2 \cdot \underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma x} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c}{2 \cdot \underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Перегрупуємо складові в (1.23)

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \cdot \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}. \end{aligned}$$

Ввівши гіперболічні функції, остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot \operatorname{ch} \gamma \cdot x + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot \operatorname{sh} \gamma \cdot x, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \operatorname{sh} \gamma \cdot x + \underline{I}_2 \cdot \operatorname{ch} \gamma \cdot x. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Формули (1.24) дозволяють визначити струм і напругу в будь-якій точці лінії за їхніми значеннями в кінці лінії. Певна незручність в комутуванні ними полягає в необхідності знаходити значення гіперболічних функцій $ch\gamma \cdot x$ і $sh\gamma \cdot x$ від комплексного аргументу $\gamma \cdot x$.

За формулам (1.24) можна визначити значення напруги і струму на початку лінії, якщо прийняти $x = l$. В цьому випадку

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cdot ch\gamma \cdot l + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot sh\gamma \cdot l, \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot sh\gamma \cdot l + \underline{I}_2 \cdot ch\gamma \cdot l. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Приклад 1.5. Лінія високої напруги, довжиною $l = 200$ км з первинними параметрами, що взяті з прикладу 1.1 – $r_0 = 0,08 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}$,

$L_0 = 1,34 \frac{\text{мГ}}{\text{км}}$, $C_0 = 8,6 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Ф}}{\text{км}}$, $g_0 = 3,75 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}}$, – має напругу в кінці лінії $U_2 = 110$ кВ, опір навантаження $\underline{Z}_n = 137,5 \cdot e^{j30^\circ} \text{Ом}$. Знайти струм і напругу на початку лінії при частоті $f = 50$ Гц.

Значення хвильового опору \underline{Z}_c і коефіцієнта поширення γ візьмемо з рішення прикладу 1.1

$\underline{Z}_c = 400 \cdot e^{-j5^\circ} \text{Ом}$, $\gamma = 1,075 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j84,2^\circ} = 1,083 \cdot 10^{-4} + j \cdot 1,07 \cdot 10^{-3}$,
 $\gamma \cdot l = 0,215 \cdot e^{j84,2^\circ} = 2,166 \cdot 10^{-2} + j \cdot 0,214$, $\alpha \cdot l = 2,166 \cdot 10^{-2} \text{ Нп}$, $\beta \cdot l = 0,214 \text{ рад}$.
 Знаходимо струм навантаження

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_n} = \frac{110 \cdot 10^3}{137,5 \cdot e^{j30^\circ}} = 800 \cdot e^{-j30^\circ} \text{ А}.$$

Напругу і струм на вході лінії визначасмо за (1.25), визначивши заздалегідь функції від комплексного аргументу $\gamma \cdot l$

$$ch\gamma \cdot l = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = 0,977 \cdot e^{j0,27^\circ}, \quad sh\gamma \cdot l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} = 0,213 \cdot e^{j84,3^\circ}.$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot ch\gamma \cdot l + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot sh\gamma \cdot l = 110 \cdot 10^3 \cdot 0,977 \cdot e^{j0,27^\circ} + 800 \cdot e^{-j30^\circ} \cdot 400 \times e^{-j5^\circ} \cdot 0,213 \cdot e^{j84,3^\circ} = 160 \cdot 10^3 \cdot e^{j19^\circ} \text{ В}.$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot sh\gamma \cdot l + \underline{I}_2 \cdot ch\gamma \cdot l = \frac{110 \cdot 10^3}{400 \cdot e^{-j5^\circ}} \cdot 0,213 \cdot e^{j84,3^\circ} + 800 \cdot e^{-j30^\circ} \cdot 0,977 \times \\ &\times e^{j0,27^\circ} = 760 \cdot e^{-j25,6^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Так як довжина хвилі $\lambda = 5860$ км (див. приклад 1.1) набагато більша довжини лінії $l = 200$ км, то розглянуту лінію можна вважати короткою і розраховувати вхідні струм і напругу лінії потрібно для кола з зосередженими параметрами (рис. 1.1, в)

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \cdot (g + j \cdot \omega \cdot C) = 800 \cdot e^{-j30^\circ} + 110 \cdot 10^3 \cdot (7,5 \cdot 10^{-6} + j \cdot 5,4 \cdot 10^{-4}) =$$

$$= 772 \cdot e^{-j24,1^\circ} \text{ A.}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_1 \cdot (r + j \cdot \omega \cdot L) = 110 \cdot 10^3 + 772 \cdot e^{-j26,1^\circ} \cdot (16 + j \cdot 84,2) =$$

$$= 159 \cdot 10^3 \cdot e^{j19,5^\circ} \text{ B.}$$

Порівнюючи точні значення цих величин, отримані за рівняннями (1.25), і наближені відзначаємо, що відносна похибка розрахунку складає:

за модулем для струму $\delta = 1,58\%$,

для напруги $\delta = 1,12\%$;

за аргументом для струму $\delta = 1,95\%$,

для напруги $\delta = 2,63\%$.

Рівняння (1.25) аналогічні рівнянням чотириполюсника з гіперболічними функціями, при цьому постійна поширення всієї лінії $\gamma \cdot l$ відповідає постійній передачі g чотириполюсника. Однорідна лінія, таким чином, це один з прикладів симетричного чотириполюсника.

У виразах (1.23) другі складові напруги і струму являють собою зворотні або відбиті хвилі. Величину відбитої хвилі зручно визначати, якщо ввести поняття коефіцієнта відбиття N . Коефіцієнт відбиття - це комплексна величина, що дорівнює відношенню комплексного значення напруги (струму) відбитої хвилі в кінці лінії ($x = 0$) до комплексного значення падаючої хвилі напруги (струму) в кінці лінії.

$$N = \frac{\underline{U}_{n(x=0)}}{\underline{U}_{n(x=0)}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c} = \frac{A_4}{A_3} \quad (1.26)$$

Враховуючи, що $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_n$:

$$N = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c} = n \cdot e^{j\phi_0} \quad (1.27)$$

Таким чином, величина відбитої хвилі залежить від співвідношення між опором навантаження і хвильовим опором лінії.

Якщо опір навантаження дорівнює хвильовому опору ($\underline{Z}_n = \underline{Z}_c$), то коефіцієнт відбиття дорівнює нулю ($N = 0$), відбита хвиля буде відсутня і вся енергія, яка переноситься падаючою хвилею, поглинається навантаженням. Такий режим роботи називається *узгодженням*. Так як в цьому режимі $\underline{U}_b = 0$, $\underline{I}_b = 0$, а $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c$, то з (1.23) одержуємо

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma x}, \quad \underline{I} = \underline{I}_2 \cdot e^{\gamma x} \quad (1.28)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma l}, \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cdot e^{\gamma l} \quad (1.29)$$

З (1.28) виходить, що в узгодженому режимі в будь-якій точці лінії відношення напруги до струму дорівнює хвильовому опору

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_c.$$

Вхідний опір лінії

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \underline{Z}_c \quad (1.30)$$

також дорівнює хвильовому опору і не залежить від довжини лінії.

При короткому замиканні лінії ($\underline{Z}_n = 0$) коефіцієнт відбиття $\underline{N} = -1$, а при холостому ході $\underline{N} = 1$. В цих режимах має місце повне відбиття падаючої хвилі, тому що відсутнє поглинання енергії навантаженням.

1.7. Передача потужності і коефіцієнт корисної дії

В узгодженому режимі активна потужність, що проходить через будь-який переріз лінії, дорівнює

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi,$$

де φ – зсув фаз між напругою і струмом.

В узгодженому режимі зсув фаз дорівнює аргументу хвильового опору ($\varphi = \theta$).

Активна потужність джерела

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \theta.$$

Оскільки $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma l} = \underline{U}_2 \cdot e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}$, а $I_1 = I_2 \cdot e^{\gamma l} = I_2 \cdot e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}$, то модулі напруги і струму $U_1 = U_2 \cdot e^{\alpha l}$, $I_1 = I_2 \cdot e^{\alpha l}$, тому

$$P_1 = U_2 \cdot I_2 \cdot e^{2\alpha l} \cdot \cos \theta.$$

Враховуючи, що $U_2 = I_2 \cdot z_c$, де z_c – модуль хвильового опору, маємо

$$P_1 = I_2^2 \cdot z_c \cdot e^{2\alpha l} \cdot \cos \theta.$$

Активна потужність навантаження

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \theta = I_2^2 \cdot z_c \cdot \cos \theta.$$

Звідки коефіцієнт корисної дії лінії в узгодженому режимі

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \quad (1.31)$$

Активна потужність, що передається по лінії при узгодженому навантаженні, називається *натуральною* потужністю.

В випадку неузгодженого навантаження ($\underline{Z}_n \neq \underline{Z}_c$) не вся потужність, що постачається падаючою хвилею, поглинається навантаженням. Частина потужності повертається джерелу відбитою хвилею, що призводить до додаткових втрат енергії в лінії. Якщо внутрішній опір джерела, яке живить лінію, не дорівнює хвильовому опору лінії, то відбита хвиля, досягнувши початку лінії, зазнає чергового відбиття, знову переміщується до кінця лінії і т. д. Втрати енергії, що відбуваються при цьому в лінії, знижують загальний к.к.д. передачі.

Ефект відбиття в лініях небажаний і в лініях передачі інформації, бо багаторазово відбитий сигнал погіршує розбірливість мовлення, чіткість зображення телевізійних передач, надійність сигналів управління і т. п.

Приклад 1.6. Визначимо потужність джерела, навантаження і к.к.д. лінії для режиму лінії, заданого в прикладі 1.5.

Активна потужність джерела

$$P_1 = \operatorname{Re}[U_1 \cdot \dot{I}_1] = \operatorname{Re}[160,8 \cdot 10^3 \cdot e^{j19^\circ} \cdot 754,85 \cdot e^{j25,83^\circ}] = 86,08 \text{ МВт}.$$

Активна потужність навантаження

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_n = 110 \cdot 10^3 \cdot 800 \cdot \cos 30^\circ = 76,21 \text{ МВт}.$$

К.к.д. лінії $\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{76,21}{86,08} = 0,885$. Оскільки $\underline{Z}_n \neq \underline{Z}_c$, лінія працює в

неузгодженому режимі і коефіцієнт відбиття становить

$$\underline{N} = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c} = \frac{137,5 \cdot e^{j30^\circ} - 400 \cdot e^{-j5^\circ}}{137,5 \cdot e^{j30^\circ} + 400 \cdot e^{-j5^\circ}} = 0,57 \cdot e^{j156^\circ}.$$

Якщо лінія буде працювати в узгодженому режимі, тобто коли $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c$, то к.к.д. лінії $\eta = e^{-2\alpha l} = 0,958$.

Визначимо к.к.д. лінії в загальному випадку, для чого скористаємось виразами (1.21).

Активна потужність навантаження $P_2 = \operatorname{Re}[\underline{U}_2 \cdot \dot{I}_2]$, де \underline{U}_2 і \dot{I}_2 знайдемо з (1.21) при $x = 0$.

$$P_2 = \operatorname{Re} \left[\frac{(\underline{A}_3 + \underline{A}_4) \cdot (\dot{A}_3 - \dot{A}_4)}{\dot{Z}_c} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{\underline{A}_3 \cdot \dot{A}_3 + \underline{A}_4 \cdot \dot{A}_3 - \underline{A}_3 \cdot \dot{A}_4 - \underline{A}_4 \cdot \dot{A}_4}{\dot{Z}_c} \right]$$

(зірочка над комплексним числом означає спряжене комплексне число).

Якщо $\underline{A}_3 = A_3 \cdot e^{j\varphi_3}$, $\underline{A}_4 = A_4 \cdot e^{j\varphi_4}$, то

$$\underline{A}_4 \cdot \dot{A}_3 - \underline{A}_3 \cdot \dot{A}_4 = A_3 \cdot A_4 \cdot e^{j(\varphi_4 - \varphi_3)} - A_3 \cdot A_4 \cdot e^{-j(\varphi_4 - \varphi_3)} = j \cdot 2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \sin(\varphi_4 - \varphi_3)$$

(1.26) і (1.27) впливає, що $\varphi_4 - \varphi_3 = \delta_0$ – аргумент коефіцієнта відбиття.

Так як $\underline{A}_3 \cdot \dot{A}_3 = A_3^2$, $\underline{A}_4 \cdot \dot{A}_4 = A_4^2$, то

$$P_2 = \operatorname{Re} \left[\frac{A_3^2 - A_4^2 + j \cdot 2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \sin \delta_0 \cdot e^{j\theta}}{\dot{Z}_c} \right] = \frac{(A_3^2 - A_4^2) \cdot \cos \theta - 2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \sin \delta_0 \cdot \sin \theta}{Z_c}, \quad (1.32)$$

де θ – аргумент хвильового опору \underline{Z}_c .

Активна потужність, що віддається джерелом в лінію

$$P_1 = \operatorname{Re}[U_1 \cdot \dot{I}_1] = \operatorname{Re}[(\underline{A}_3 \cdot e^{\gamma l} + \underline{A}_4 \cdot e^{-\gamma l}) \cdot \frac{\dot{A}_3 \cdot e^{-\gamma l} - \dot{A}_4 \cdot e^{\gamma l}}{\dot{Z}_c}].$$

Після ряду перетворень, аналогічних проведеним вище, отримуємо

$$P_1 = \frac{(A_3^2 \cdot e^{2\alpha l} - A_4^2 \cdot e^{-2\alpha l}) \cdot \cos \theta - 2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \sin(\delta_0 - 2 \cdot \beta \cdot l) \cdot \sin \theta}{Z_c} \quad (1.33)$$

Коефіцієнт корисної дії передачі по лінії

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{(A_3^2 - A_4^2) \cdot \cos \theta - 2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \sin \delta_0 \cdot \sin \theta}{(A_3^2 \cdot e^{2\alpha l} - A_4^2 \cdot e^{-2\alpha l}) \cdot \cos \theta - 2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \sin(\delta_0 - 2 \cdot \beta \cdot l) \cdot \sin \theta}$$

Якщо врахувати, що $\frac{A_4}{A_3} = n$ – модуль коефіцієнта відбиття, то

$$\eta = \frac{1 - n^2 - 2 \cdot n \cdot \sin \delta_0 \cdot \operatorname{tg} \theta}{e^{2\alpha l} - n^2 \cdot e^{-2\alpha l} - 2 \cdot n \cdot \sin(\delta_0 - 2 \cdot \beta \cdot l) \cdot \operatorname{tg} \theta} \quad (1.34)$$

Якщо хвильовий опір чисто активний ($\theta = 0$), то к.к.д. лінії

$$\eta = \frac{1 - n^2}{e^{2\alpha l} - n^2 \cdot e^{-2\alpha l}} \quad (1.35)$$

В загальному випадку режим узгодженого навантаження не є оптимальним з точки зору максимального к.к.д., тому що цей режим забезпечує відсутність втрат в лінії за рахунок відбитих хвиль, але не дає зменшення втрат за рахунок реактивних складових струмів.

Дослідження на максимум виразу (1.34) дає наступні результати:

$$x_{\text{нопт}} = -\frac{2 \cdot \rho \cdot a \cdot \sin^2 \beta \cdot l}{4 \cdot \alpha \cdot l + a \cdot \sin 2 \cdot \beta \cdot l}, \quad (1.36)$$

$$r_{\text{нопт}} = 2 \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot l^2 - a^2 \cdot \sin^2 \beta \cdot l}}{4 \cdot \alpha \cdot l + a \cdot \sin 2 \cdot \beta \cdot l}, \quad (1.37)$$

$$\eta_{\text{max}} = \frac{1}{1 + \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot l^2 - a^2 \cdot \sin^2 \beta \cdot l}}, \quad (1.38)$$

де позначено $\rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad a = \frac{g_0}{\omega \cdot C_0} - \frac{r_0}{\omega \cdot L_0}$.

Приклад 1.7. Визначити оптимальні параметри навантаження і максимальний к.к.д. лінії, первинні параметри якої дані в прикладі 1.5.

Визначимо спочатку $\rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{1,34 \cdot 10^{-3}}{8,6 \cdot 10^{-9}}} = 395 \text{ Ом},$

$$a = \frac{g_0}{\omega \cdot C_0} - \frac{r_0}{\omega \cdot L_0} = \frac{3,75 \cdot 10^{-8}}{2,7 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,08}{0,421} = -0,176.$$

За формулами (1.35) – (1.38) визначаємо:

$$x_{\text{нопт}} = -\frac{2 \cdot 395 \cdot (-0,176) \cdot \sin^2 0,214}{4 \cdot 2,166 \cdot 10^{-2} + (-0,176) \cdot \sin 2 \cdot 0,214} = 461 \text{ Ом},$$

$$r_{\text{ном}} = 2 \cdot 395 \cdot \frac{\sqrt{(4 \cdot 2,166 \cdot 10^{-2})^2 - (-0,176)^2 \cdot \sin^2 0,214}}{4 \cdot 2,166 \cdot 10^{-2} + (-0,176) \cdot \sin 2 \cdot 0,214} = 1292 \text{ Ом},$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \sqrt{(4 \cdot 2,166 \cdot 10^{-2})^2 - (-0,176)^2 \cdot \sin^2 0,214}} = 0,978.$$

Отриманий к.к.д. вищий, ніж при погодженому режимі (див. приклад 1.6).

1.8. Схеми заміщення лінії

В п.1.6 вже відзначалося, що однорідна лінія є симетричним чотириполюсником, тому в тих випадках, коли цікавлять величини струмів, напруг і потужності тільки на кінцях лінії, зручно застосовувати еквівалентні Т- або П-подібні схеми заміщення.

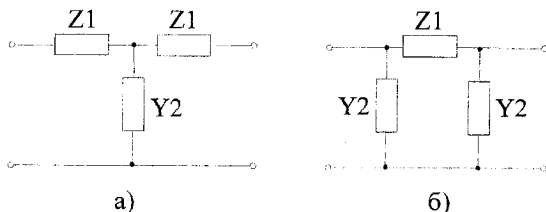


Рис.1. 6.

Найбільш точні результати можна отримати якщо струми і напруга в лінії синусоїдні. Розглянемо ряд схем заміщення стосовно до ліній електропередач. На рис. 1.6 наведені Т-подібна (рис.1. 6, а) і П-подібна (рис.1.6, б) схеми заміщення.

Основні рівняння симетричного чотириполюсника через А-параметри

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{11} \cdot \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Порівнюючи їх з виразами (1.25), отримуємо:

$$\underline{A}_{11} = ch \gamma \cdot \ell, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_c \cdot sh \gamma \cdot \ell, \quad \underline{A}_{21} = \frac{sh \gamma \cdot \ell}{\underline{Z}_c}.$$

Параметри Т-подібної схеми заміщення:

$$\underline{Z}_1 = \frac{A_{11}-1}{A_{21}} = \underline{Z}_c \cdot \frac{chy \cdot \ell - 1}{sh\gamma \cdot \ell} = \underline{Z}_c \cdot th \frac{\gamma \cdot \ell}{2}, \quad (1.40)$$

$$\underline{Y}_2 = A_{21} = \frac{sh\gamma \cdot \ell}{\underline{Z}_c}.$$

Для II-подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_1 = A_{12} = \underline{Z}_c \cdot sh\gamma \cdot \ell, \quad \underline{Y}_{21} = \frac{A_{11}-1}{A_{12}} = \frac{chy \cdot \ell - 1}{\underline{Z}_c \cdot sh\gamma \cdot \ell} = \frac{tg \frac{\gamma \cdot \ell}{2}}{\underline{Z}_c}. \quad (1.41)$$

Обчислення гіперболічних функцій від комплексного аргументу складає певні труднощі, тому часто їх подають в формі рядів:

$$\begin{aligned} sh\gamma \cdot \ell &= \gamma \cdot \ell + \frac{(\gamma \cdot \ell)^3}{3!} + \frac{(\gamma \cdot \ell)^5}{5!} + \dots \\ th \frac{\gamma \cdot \ell}{2} &= \frac{\gamma \cdot \ell}{2} - \frac{(\gamma \cdot \ell)^3}{24} + \frac{(\gamma \cdot \ell)^5}{240} - \dots \end{aligned} \quad (1.42)$$

Вирази (1.40) і (1.41) можна тоді записати в вигляді: для T-подібної схеми заміщення:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_c \cdot th \frac{\gamma \cdot \ell}{2} = \frac{\underline{Z}_c \cdot \gamma \cdot \ell}{\gamma \cdot \ell} \cdot th \frac{\gamma \cdot \ell}{2} = \frac{\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} \cdot \sqrt{\underline{Y}_0 \cdot \underline{Z}_0} \cdot \ell}{\gamma \cdot \ell} \cdot th \frac{\gamma \cdot \ell}{2} = \\ &= \underline{Z}_0 \cdot \ell \left[\frac{1}{2} - \frac{(\gamma \cdot \ell)^2}{24} + \frac{(\gamma \cdot \ell)^4}{240} - \dots \right] \\ \underline{Y}_2 &= \frac{1}{2} \cdot sh\gamma \cdot \ell = \frac{\gamma \cdot \ell}{\underline{Z}_c \cdot \gamma \cdot \ell} \cdot sh\gamma \cdot \ell = \frac{\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} \cdot \ell}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} \cdot \gamma \cdot \ell} \cdot sh\gamma \cdot \ell = \\ &= \underline{Y}_0 \cdot \ell \cdot \left[1 + \frac{(\gamma \cdot \ell)^2}{3!} + \frac{(\gamma \cdot \ell)^4}{5!} + \dots \right] \end{aligned} \right\}, \quad (1.43)$$

для II-подібної схеми:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_c \cdot sh\gamma \cdot \ell = \underline{Z}_0 \cdot \ell \cdot \left[1 + \frac{(\gamma \cdot \ell)^2}{3!} + \frac{(\gamma \cdot \ell)^4}{5!} + \dots \right], \\ \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_c} \cdot th \frac{\gamma \cdot \ell}{2} = \underline{Y}_0 \cdot \ell \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{(\gamma \cdot \ell)^2}{24} + \frac{(\gamma \cdot \ell)^4}{240} - \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Залежно від величини $\gamma \cdot \ell$ можна обмежуватися одним, двома або трьома першими членами розкладання гіперболічних функцій.

Приклад 1.8. Визначити параметри схем заміщення лінії, первинні параметри якої наведені в прикладі 1.5.

З рішення прикладу 1.5 маємо:

$$\underline{Z}_0 = 0,428 \cdot e^{j79,2^\circ} \text{ Ом/км}, \quad \underline{Y}_0 = 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j89,2^\circ} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}}, \quad \gamma = 1,075 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j84,2^\circ},$$

$$\gamma \cdot \ell = 0,215 \cdot e^{j84,2^\circ}, \quad \text{sh} \gamma \cdot \ell = 0,213 \cdot e^{j84,3^\circ}, \quad \text{ch} \gamma \cdot \ell = 0,977 \cdot e^{j0,27^\circ},$$

$$\underline{Z}_c = 400 \cdot e^{-j5^\circ} \text{ Ом}.$$

Точні значення параметрів схем заміщення за виразами (1.40), (1.41):

а) для Т-подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \cdot \frac{\text{ch} \gamma \cdot \ell - 1}{\text{sh} \gamma \cdot \ell} = 43,2 \cdot e^{j79,37^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{\text{sh} \gamma \cdot \ell}{\underline{Z}_c} = 5,34 \cdot 10^{-4} \cdot e^{j89,3^\circ} \frac{1}{\text{Ом}};$$

б) для П-подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \cdot \text{sh} \gamma \cdot \ell = 85,43 \cdot e^{j79,3^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{\text{ch} \gamma \cdot \ell - 1}{\underline{Z}_c \cdot \text{sh} \gamma \cdot \ell} = 2,7 \cdot 10^{-4} \cdot e^{j89,2^\circ} \frac{1}{\text{Ом}}.$$

Значення параметрів, визначені за виразами (1.43), (1.44) при врахуванні тільки однієї складової:

а) для Т-подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_0 \cdot \ell}{2} = 42,8 \cdot e^{j79,2^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{Y}_2 = \underline{Y}_0 \cdot \ell = 5,4 \cdot 10^{-4} \cdot e^{j89,2^\circ} \frac{1}{\text{Ом}}.$$

б) для П-подібної схеми заміщення

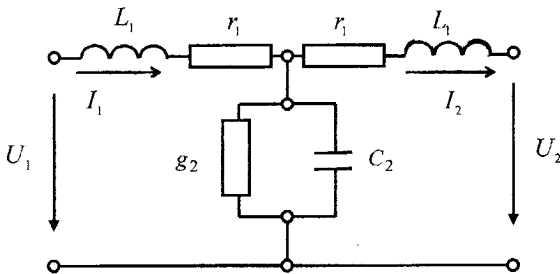
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_0 \cdot \ell = 85,6 \cdot e^{j79,2^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{Y}_0 \cdot \ell}{2} = 2,7 \cdot 10^{-4} \cdot e^{j89,2^\circ} \frac{1}{\text{Ом}}.$$

Для заданого значення $|\gamma \cdot \ell| = 0,215$ результати практично однакові.

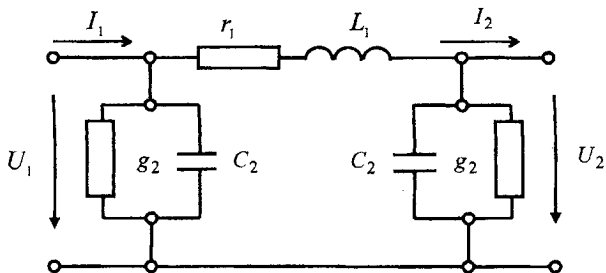
На рис. 1.7 зображені схеми заміщення лінії з конкретними значеннями параметрів:

а) $r_1 = 8 \text{ Ом}, \quad L_1 = 0,134 \text{ Г}, \quad g_2 = 7 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом}}, \quad C_2 = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$

б) $r_1 = 15,9 \text{ Ом}, \quad L_1 = 0,267 \text{ Г}, \quad g_2 = 3,77 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом}}, \quad C_2 = 8,59 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$



а)



б)

Рис. 1.7

Для повітряних ліній електропередач, довжина яких не перевищує 200 км, при визначенні параметрів схем заміщення в виразах (1.43), (1.44) можна обмежуватися тільки першими складовими. Для кабельних ліній електропередач ця умова справедлива для ліній, довжиною меншою ніж 50 км.

Для ліній електропередач, як кабельних, так і повітряних, в більшості випадків без великої похибки можна нехтувати активною провідністю g_0 .

На відміну від струмів і напруг ліній електропередач напруги і струми ліній передачі інформації, як правило, несинусоїдні. Враховуючи те, що вторинні параметри лінії залежать від частоти, то для кожної гармонічної складової сигналу параметри схеми заміщення виходять різні, що не дозволяє замінити лінію Т- або П-подібною схемою заміщення. В деяких випадках така схема може бути застосована, але лише для коротких ліній. Більш довгу лінію слід розбити на ряд коротких ділянок, для кожної з яких складається своя схема заміщення. Якщо лінія однорідна і довжини всіх ділянок однакові, то і всі чотириполосники будуть однаковими. Таким чином довга лінія замінюється ланцюговим сполученням однакових чотириполосників. Такі схеми називаються однорідними ланцюговими схемами або однорідними штучними лініями. Такі схеми збирають при лабораторних дослідженнях різноманітних режимів роботи ліній передачі електроенергії або інформації.

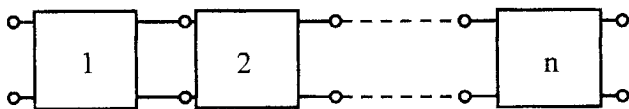


Рис.1.8

1.9. Вхідний опір лінії

Вхідний опір лінії при відомих напругах і струмах джерела та навантаження легко визначити за рівняннями (1.25).

$$Z_{ex} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cdot ch\gamma \cdot \ell + I_2 \cdot Z_c \cdot sh\gamma \cdot \ell}{\frac{U_2}{Z_c} \cdot sh\gamma \cdot \ell + I_2 \cdot ch\gamma \cdot \ell}$$

Поділимо чисельник і знаменник на $ch\gamma \cdot \ell$ і врахуємо, що $U_2 = Z_n \cdot I_2$, де Z_n - опір навантаження. Тоді отримаємо

$$Z_{ex} = Z_c \cdot \frac{Z_n + Z_c \cdot th\gamma \cdot \ell}{Z_c + Z_n \cdot th\gamma \cdot \ell} \quad (1.45)$$

Цей вираз доводить, що вхідний опір лінії залежить від її параметрів, довжини і опору навантаження. Визначимо залежність вхідного опору від довжини лінії при незмінному опорі навантаження. Для цього позначимо

$$\frac{Z_n}{Z_c} = thM.$$

Оскільки

$$thM = \frac{e^M - e^{-M}}{e^M + e^{-M}} = \frac{e^{2M} - 1}{e^{2M} + 1} = \frac{Z_n}{Z_c},$$

то

$$M = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + \frac{Z_n}{Z_c}}{1 - \frac{Z_n}{Z_c}}$$

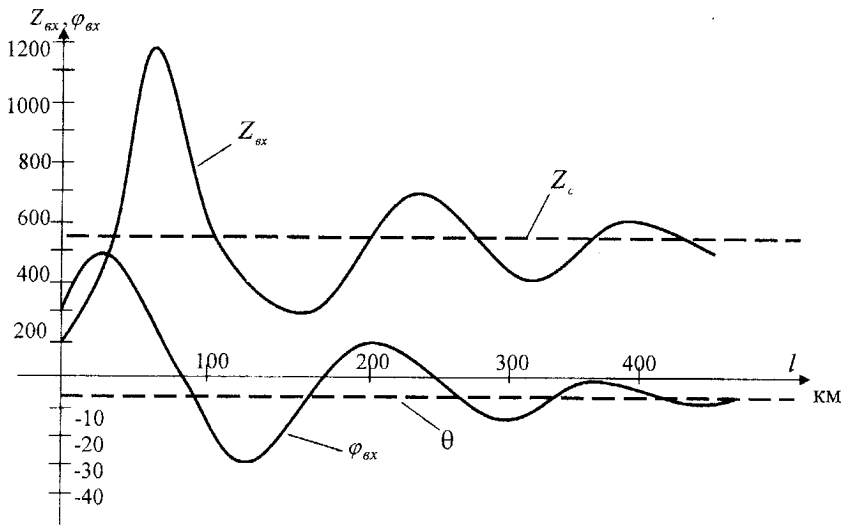


Рис. 1. 9

З урахуванням останніх співвідношень вираз (1.45) запишемо у вигляді

$$\underline{Z}_{ex} = Z_{ex} \cdot e^{j\varphi_{ex}} = \underline{Z}_c \cdot \frac{th \underline{M} + th \gamma \cdot \ell}{1 + th \underline{M} \cdot th \gamma \cdot \ell} = \underline{Z}_c \cdot th(\gamma \cdot \ell + \underline{M}). \quad (1.46)$$

На рис.1. 9 показана залежність модуля Z_{ex} і аргументу φ_{ex} від довжини лінії, параметри якої взяті з прикладу 1.2, б). Навантаження лінії $\underline{Z}_n = 200 \cdot e^{j30^\circ} \text{ Ом}$.

На графіку чітко видно хвильовий характер зміни вхідного опору з чергуванням максимумів і мінімумів, при цьому відстань між максимумами (мінімумами) модуля Z_{ex} дорівнює половині довжини лінії. З прикладу 1.2, б) $\lambda = 352 \text{ км}$, тому $\lambda/2 = 176 \text{ км}$. При зростанні довжини лінії розмах коливань стає меншим, тому що падаюча хвиля затухає все більше, амплітуда відбитої хвилі зменшується, її вплив на режим на початку лінії стає все меншим і вхідний опір наближається до опору струму падаючої хвилі, тобто до хвильового опору \underline{Z}_c , тому коливання Z_{ex} і φ_{ex} відбуваються відносно Z_c і θ .

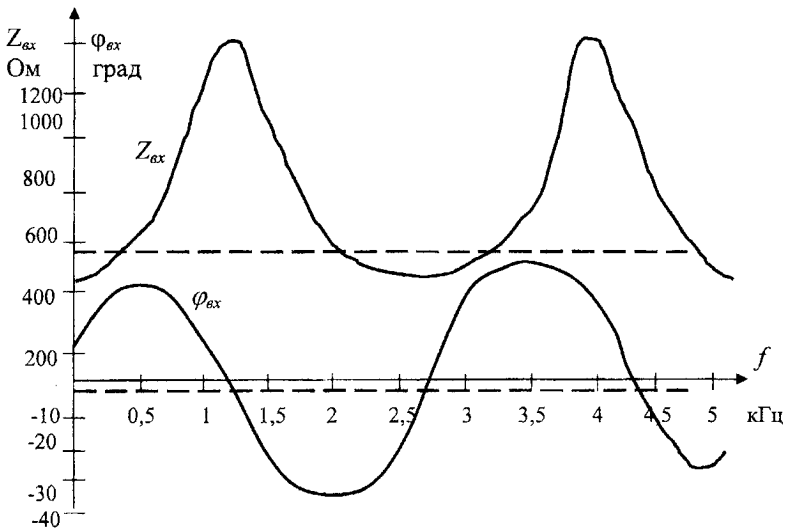


Рис.1. 10

Такий самий характер зміни Z_{ex} і φ_{ex} залежно від частоти показаний на рис.1.10 для тієї ж лінії при довжині $\ell = 50 \text{ км}$. Розмах коливань залежить як від параметрів лінії, так і від опору навантаження – чим менше відрізня-

ється опір навантаження \underline{Z}_n від хвильового \underline{Z}_c , тим коливання вхідного опору менш помітні. Для $\underline{Z}_n = Z_{ex}$ при будь-якій довжині лінії вхідний опір рівний хвильовому $Z_{ex} = \underline{Z}_c$.

З наведених графіків видно, що при деяких значеннях довжини лінії або частоти аргумент вхідного опору φ_{ex} дорівнює нулю, що відповідає чисто активному вхідному опору. Такі довжини лінії або частоти називаються *резонансними*.

Вхідний опір можна виразити і через коефіцієнт відбиття. Через те що

$$N = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c},$$

то

$$\frac{\underline{Z}_n}{\underline{Z}_c} = \frac{1 - N}{1 + N}.$$

І вираз (1.45) після нескладних перетворень набуде вигляду:

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_c \cdot \frac{1 + N \cdot e^{-2\gamma \ell}}{1 - N \cdot e^{-2\gamma \ell}}. \quad (1.47)$$

Виразами (1.45) і (1.47) можна користуватися і при обчисленні вхідного опору відрізка лінії в будь-якій її точці, замінюючи довжину лінії ℓ на координату точки x .

1.10. Коротке замикання і холостий хід довгої лінії

При короткому замиканні лінії ($\underline{Z}_n = 0$, $\underline{U}_2 = 0$) рівняння (1.25) набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{1k} &= \underline{I}_{2k} \cdot \underline{Z}_c \cdot \operatorname{sh} \gamma \cdot \ell, \\ \underline{I}_{1k} &= \underline{I}_{2k} \cdot \operatorname{ch} \gamma \cdot \ell. \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Вхідний опір лінії з (1.48)

$$\underline{Z}_k = \frac{\underline{U}_{1k}}{\underline{I}_{1k}} = \underline{Z}_c \cdot \operatorname{th} \gamma \cdot \ell. \quad (1.49)$$

При холостому ході ($\underline{Z}_n = \infty$, $\underline{U}_n = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{1x} &= \underline{U}_{2x} \cdot \operatorname{ch} \gamma \cdot \ell, \\ \underline{I}_{1x} &= \underline{U}_{2x} / \underline{Z}_c \cdot \operatorname{sh} \gamma \cdot \ell. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Вхідний опір лінії

$$\underline{Z}_x = \frac{\underline{Z}_c}{\operatorname{th} \gamma \cdot \ell}. \quad (1.51)$$

Оскільки вхідний опір лінії при короткому замиканні і холостому ході залежить тільки від параметрів лінії, то параметри лінії часто визначають експериментально, вимірюючи Z_k і Z_x .

Хвильовий опір лінії з (1.49) і (1.51)

$$Z_c = Z_c \cdot e^{j\theta} = \sqrt{Z_k \cdot Z_x}, \quad (1.52)$$

а

$$\text{th}\gamma \cdot \ell = T \cdot e^{j\tau} = \sqrt{\frac{Z_k}{Z_x}}. \quad (1.53)$$

Оскільки

$$\text{th}\gamma \cdot \ell = \frac{e^{\gamma \ell} - e^{-\gamma \ell}}{e^{\gamma \ell} + e^{-\gamma \ell}} = \frac{e^{2\gamma \ell} - 1}{e^{2\gamma \ell} + 1} = T \cdot e^{j\tau},$$

то

$$\gamma \cdot \ell = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + T \cdot e^{j\tau}}{1 - T \cdot e^{j\tau}} = \alpha \cdot \ell + j \cdot \beta \cdot \ell. \quad (1.54)$$

Позначимо

$$\frac{1 + T \cdot e^{j\tau}}{1 - T \cdot e^{j\tau}} = W \cdot e^{j\sigma}. \quad (1.55)$$

Тоді

$$\alpha \cdot \ell + j \cdot \beta \cdot \ell = \frac{1}{2} \cdot \ln(W \cdot e^{j\sigma}). \quad (1.56)$$

При обчисленні $\alpha \cdot \ell$ та $\beta \cdot \ell$ за (1.56) потрібно врахувати наступні умови. По-перше, як з'ясовано раніше, коефіцієнти α та β не можуть бути від'ємними, а по-друге, рівняння

$$e^{j\sigma} = e^{j(\sigma + 2k\pi)},$$

де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

показує, що для визначення β вираз (1.56) не дає однозначного рішення. Із (1.56) отримаємо

$$\alpha \cdot \ell = \frac{1}{2} \cdot \ln W, \quad \beta \cdot \ell = \frac{1}{2} (\sigma + 2 \cdot k \cdot \pi), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.57)$$

Правильність вибору величини k перевіряється за рядом умов:

- коефіцієнт β не повинен бути від'ємним;
- фазова швидкість хвилі, розрахована за виразом $v = \omega / \beta$, не повинна перевищувати швидкість світла c ;
- первинні параметри лінії не повинні бути від'ємними.

Визначивши вторинні параметри лінії \underline{Z}_c та γ легко знайти її первинні параметри.

Оскільки

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{Y_0}}, \quad \text{а} \quad \gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot Y_0},$$

то

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0 = \gamma \underline{Z}_c, \quad (1.58)$$

$$Y_0 = g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0 = \gamma / \underline{Z}_c. \quad (1.59)$$

Розглянемо приклад знаходження первинних параметрів і вибір коефіцієнта k в (1.57) за відомими опорами холостого ходу і короткого замикання.

Приклад 1.9. На частоті 50 кГц були виміряні опори короткого замикання і холостого ходу повітряної лінії, довжиною $\ell = 20$ км, $\underline{Z}_k = 146 \cdot e^{-j75,5^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_x = 2284 \cdot e^{j75,2^\circ}$ Ом. Знайти первинні і вторинні параметри лінії.

Розв'язання: Характеристичний опір лінії:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_k \cdot \underline{Z}_x} = \sqrt{146 \cdot e^{-j75,5^\circ} \cdot 2284 \cdot e^{j75,2^\circ}} = 577,5 \cdot e^{-j0,15^\circ} \text{ Ом}.$$

Визначимо

$$\text{th}\gamma \cdot \ell = T \cdot e^{j\tau} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_x}} = \sqrt{\frac{146 \cdot e^{-j75,5^\circ}}{2284 \cdot e^{j75,2^\circ}}} = 0,2528 \cdot e^{-j75,35^\circ}.$$

З виразу (1.55) знаходимо

$$W \cdot e^{j\sigma} = \frac{1 + T \cdot e^{j\tau}}{1 - T \cdot e^{j\tau}} = 1,1284 \cdot e^{-j0,482},$$

$$\alpha \cdot \ell = \frac{1}{2} \cdot \ln W = 0,0604 \text{ Hn},$$

$$2 \cdot \beta \cdot \ell = (\sigma + 2 \cdot \pi \cdot k) = (-0,482 + 2 \cdot \pi \cdot k), \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Ціле число k знаходимо на підставі орієнтовного розрахунку величини $2 \cdot \beta \cdot \ell$, якщо виходити з наближеного значення фазової швидкості в повітряній лінії. Для повітряної лінії фазова швидкість хвилі приблизно дорівнює швидкості світла $\nu = 3 \cdot 10^8$ км/с.

$$\text{Оскільки } \beta = \frac{\omega}{v}, \text{ то } 2 \cdot \beta \cdot \ell \cong \frac{2 \cdot \omega}{v} \cdot \ell = \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^5} \cdot 20 \cong 41,89 \text{ рад.}$$

$$\text{Звідки } 41,89 = -0,482 + 2 \cdot \pi \cdot k, \text{ або } k = \frac{41,89 + 0,482}{2 \cdot \pi} = 6,74.$$

Оскільки k - ціле число, то вибираємо $k = 7$. В цьому випадку

$$\beta \cdot \ell = \frac{1}{2} \cdot (-0,482 + 2 \cdot \pi \cdot 7) = 21,75 \text{ рад.}$$

$$\begin{aligned} \text{Таким чином } \alpha &= 3,02 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/}_{\text{км}}, \quad \beta = 1,0875 \text{ рад/}_{\text{км}}, \\ \gamma &= 3,02 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,0875 \cdot e^{j89,83^\circ} = 1,0875 \cdot e^{j89,83^\circ}. \end{aligned}$$

Знайдене β невід'ємне і фазова швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^3}{1,0875} = 2,887 \cdot 10^5 \text{ км/}_{\text{с}}.$$

Поздовжній опір

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_c \cdot \gamma = 577,5 \cdot e^{-j0,15^\circ} \cdot 1,0875 \cdot e^{j89,83^\circ} = 628 \cdot e^{j89,68^\circ} = 3,5 + j \cdot 628 \frac{\text{Ом}}{\text{км}},$$

$$\text{Звідки } r_0 = 3,5 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, \quad L_0 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Г}}{\text{км}}.$$

Поперечна провідність

$$\underline{Y}_0 = \frac{\gamma}{\underline{Z}_c} = 1,88 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j89,98^\circ} = 6,5 \cdot 10^{-7} + j \cdot 7,88 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}},$$

$$\text{або } g_0 = 6,5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}}, \quad C_0 = 6 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Ф}}{\text{км}}.$$

Перевіримо, чи не можна вибрати інше значення k . Нехай $k = 6$, тоді

$$\beta \cdot \ell = \frac{1}{2} \cdot (-0,482 + 2 \cdot \pi \cdot 6) = 18,61 \text{ рад}, \quad \beta = 0,9305 \text{ рад/}_{\text{км}}.$$

Перевіримо фазову швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^4}{0,9305} = 3,376 \cdot 10^5 \text{ км/}_{\text{с}} > c, \quad \text{де } c - \text{швидкість світла.}$$

Отже, значення $k = 6$ не підходить.

Фізичний зміст числа k в тому, що воно показує ціле число півхвиль, які можна розгашувати вздовж довжини лінії.

Візьмемо $k = 8$.

$$\beta \cdot \ell = \frac{1}{2} \cdot (-0,482 + 2 \cdot \pi \cdot 8) = 24,89 \text{ рад}; \quad \beta = 1,2445 \text{ рад/}_{\text{км}};$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^3}{1,2445} = 2,52 \cdot 10^5 \text{ км/}_{\text{с}} < c;$$

$$\gamma = 3,02 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,2445 = 1,2445 \cdot e^{j89,86^\circ};$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_c \cdot \gamma = 577,5 \cdot e^{-j^{0^{\circ}15'}} \cdot 1,2445 \cdot e^{j^{89,86^{\circ}}} = 718,7 \cdot e^{j^{89,71^{\circ}}} = 3,64 + j \cdot 718,7 \frac{\text{Ом}}{\text{км}};$$

$$r_0 = 3,64 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}; \quad L_0 = 2,29 \cdot 10^{-3} \frac{\Gamma}{\text{км}}.$$

$$Y_0 = \frac{\gamma}{\underline{Z}_c} = \frac{1,2445 \cdot e^{j^{89,86^{\circ}}}}{577,5 \cdot e^{-j^{0^{\circ}15'}}} = 2,155 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j^{90,01^{\circ}}} = -3,76 \cdot 10^{-7} + j \cdot 2,155 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{км}};$$

Оскільки аргумент \underline{Y}_0 більший 90° ($g_0 < 0$), то значення $k = 8$ також не може бути прийняте.

Вхідний опір довгої лінії при будь-якому опорі навантаження \underline{Z}_n також можна визначити за відомими значеннями опорів короткого замикання і холостого ходу.

Підставляючи (1.49) і (1.51) в (1.45), отримаємо

$$\underline{Z}_{ax} = \underline{Z}_x \cdot \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_k}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_x}. \quad (1.60)$$

11.1. Лінія без спотворень

Як вже відзначалося при передачі по лінії складних сигналів виникають амплітудні та фазові спотворення, тому що гармонічні складові різних частот мають різне затухання і різні фазові швидкості. Для того, щоб амплітудні спотворення були відсутні, необхідно щоб коефіцієнт затухання був величиною сталою ($\alpha = const$). Фазові спотворення будуть відсутні при постійній фазовій швидкості ($v = const$).

Визначимо умови, які повинні задовольняти параметри однорідної лінії, щоб не виникали спотворення сигналів. Коефіцієнт поширення визначається виразом (1.4)

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} = \sqrt{r_0 \cdot \left(1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L_0}{r_0}\right) \cdot g_0 \cdot \left(1 + j \cdot \omega \cdot \frac{C_0}{g_0}\right)}.$$

Якщо виконати умову

$$\frac{L_0}{r_0} = \frac{C_0}{g_0}, \quad (1.61)$$

то

$$\gamma = \sqrt{r_0 \cdot g_0} + j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}, \quad (1.62)$$

тобто $\alpha = \sqrt{r_0 \cdot g_0}$ не залежить від частоти, $\beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}$ лінійно залежить від частоти, і тому фазова швидкість $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}$ не залежить від частоти.

Лінія, параметри якої відповідають умові (1.61), називається *лінією без спотворень*.

Хвильовий опір при виконанні умови (1.62)

$$Z_c = \sqrt{\frac{r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (1.63)$$

чисто активний і не залежить від частоти. Як у повітряних, так і у кабельних ліній передачі сигналів відношення $\frac{L_0}{r_0}$ звичайно в декілька раз менше відношення $\frac{C_0}{g_0}$. Отримати рівність (1.61) можливо, змінюючи будь-який з параметрів лінії. Наприклад, зменшити r_0 , збільшуючи діаметр провідів, однак це призводить до істотного збільшення вартості лінії. Можна збільшувати провідність g_0 , що призводить до зростання затухання сигналів. Не можна також і зменшувати ємність C_0 , бо ускладнюється конструкція лінії і збільшується її вартість.

Найкращим засобом для наближення первинних параметрів до виконання умови (1.61) є штучне збільшення індуктивності за допомогою вмикання в лінію через певні проміжки індуктивних котушок. Однак збільшення індуктивності L_0 призводить до зменшення фазової швидкості, що не припустимо на лініях передачі інформації великої довжини, тому часто для ліній дальнього зв'язку застосовують спеціальні корегуючі пристрої.

Дотримання умови (1.61) недостатньо для неспотвореної передачі сигналів, ще необхідно узгодження навантаження з лінією у всьому діапазоні частот сигналу. Якщо умова (1.61) неспотвореної передачі виконується, але $Z_n \neq Z_c$, то сигнал по лінії передається без спотворення, але в приймачі виникає відбиття, причому коефіцієнт відбиття N буде різним для різних частотних складових сигналу, оскільки модуль і аргумент коефіцієнта відбиття залежить від частоти. В результаті відбитий сигнал спотворений, порівняно з падаючим, і сигнал в приймачі також викривляється, оскільки для будь-якої гармоніки сигналу U_2 і I_2 є результатом накладання падаючої і відбитої хвилі в кінці лінії. Таким чином, для неспотвореної передачі сигналів по лінії необхідні такі умови:

- а) коефіцієнт затухання α не повинен залежати від частоти,
- б) фазова швидкість хвилі не повинна залежати від частоти,
- в) лінія повинна працювати в узгодженому режимі.

Приклад 1.10. Визначити величини індуктивностей, що їх потрібно ввімкнути через кожні 2 км, щоб лінія з параметрами, наведеними в прикладі 1.9, була лінією без спотворень.

Розв'язання. Визначимо величину індуктивності, необхідну для неспотвореної передачі, з (1.61)

$$L'_0 = C_0 \cdot \frac{r_0}{g_0} = 6 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{3,5}{6,5 \cdot 10^{-7}} = 3,23 \cdot 10^{-2} \text{ Г/км}.$$

Оскільки власна індуктивність лінії $L_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Г/км}$, то додатково необхідно ввімкнути $\Delta L = L'_0 - L_0 = 3,03 \cdot 10^{-2} \text{ Г/км}$. Оскільки довжина лінії $\ell = 20 \text{ км}$, то через 2 км треба ввімкнути індуктивності в 9 точках. Таким чином в кожній такій точці необхідно увімкнути

$$L = \frac{\Delta L \cdot \ell}{9} = \frac{3,03 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{9} = 0,673 \text{ Г}.$$

При цьому хвильовий опір лінії стане

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{3,03 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-9}}} = 2320 \text{ Ом},$$

коефіцієнт затухання

$$\alpha = \sqrt{r_0 \cdot g_0} = \sqrt{3,5 \cdot 6,5 \cdot 10^{-7}} = 1,396 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км},$$

фазовий коефіцієнт

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L'_0 \cdot C_0} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{3,23 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-9}} = 4,373 \text{ рад/км}.$$

Фазова швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'_0 \cdot C_0}} = 0,748 \cdot 10^5 \text{ км/с}.$$

Розглянутий приклад показує, що хвильовий опір збільшився в 4 рази, коефіцієнт затухання зменшився в 2.16 рази, фазова швидкість зменшилася в 3.86 рази.

1.12. Лінія без втрат

В деяких випадках виявляється корисним знехтувати активним опором і провідністю лінії порівняно з відповідними реактивними складовими. Така ідеалізація допускається для наближеної якісної і кількісної оцінки явищ, що досліджуються. Це дозволяє істотно спростити математичні перетворення.

Припускаємо, таким чином, що $r_0 \approx 0$ і $g_0 \approx 0$. В цьому випадку

$$\begin{aligned} \gamma &= j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}, & \alpha &= 0, & \beta &= \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}, & (1.64) \\ v &= \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}; & Z_c &= R_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \end{aligned}$$

Таким чином, затухання в такій лінії будуть відсутні і вона називається *лінією без втрат*. Оскільки фазова швидкість не залежить від часто-

ти, то в лінії будуть відсутні як амплітудні, так і фазові спотворення, тому лінія без втрат водночас є і лінією без спотворень. Хвильові опори такої лінії дійсні і не залежать від частоти.

До ліній без втрат можна з достатньо великим ступенем точності віднести лінії порівняно невеликих довжин, які використовуються в області порівняно високих частот (фідери, елементи радіотехнічних приладів, вимірвальні лінії, погоджувальні прилади і т.д.)

Приклад 1.11. Визначити, чи є лінією без втрат, лінія з коаксіального кабелю, довжиною $\ell = 6$ м, на частоті $f = 100$ МГц з первинними параметрами: $r_0 = 30$ Ом/км, $L_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ Г/км, $C_0 = 48 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $g_0 = 30 \cdot 10^{-6}$ См/км.

Розв'язання. Знаходимо позовжній опір

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0 = 30 + j \cdot 1,885 \cdot 10^5 \text{ Ом},$$

і поперечну провідність

$$\underline{Y}_0 = g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0 = 30 \cdot 10^{-6} + j \cdot 30,6 \text{ См/км},$$

коефіцієнт розповсюдження $\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = 0,2 + j \cdot 2,4 \cdot 10^3$,

коефіцієнт затухання $\alpha = 0,2$ Нн/км,

фазовий коефіцієнт $\beta = 2,4 \cdot 10^3$ рад/км,

фазова швидкість $v = \frac{\omega}{\beta} = 2,6 \cdot 10^5$ км/с,

довжина хвилі $\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} = 2,6$ м.

Незважаючи на невелику довжину лінії ($\ell = 6$ м) лінія є довгою, оскільки $\ell > \lambda$.

Коефіцієнт затухання, порівняно з раніше розглянутими прикладами, має велике значення. Якщо б лінія мала довжину $\ell_1 = 1$ км, то при узгодженому навантаженні напруга в кінці лінії

$$U_2 = e^{-\alpha \cdot \ell_1} \cdot U_1 = 0,82 \cdot U_1, \quad \alpha \cdot \ell_1 = 0,2 \text{ Нн},$$

к.к.д. лінії

$$\eta = e^{-2\alpha \cdot \ell_1} = 0,67,$$

тому в лінії довжиною $\ell_1 = 1$ км втратами знехтувати не можна.

В лінії довжиною $\ell = 6 \cdot 10^{-3}$ км $\alpha \cdot \ell = 1,2 \cdot 10^{-3}$ Нн,

$U_2 = e^{-\alpha \cdot \ell} \cdot U_1 = 0,9988 \cdot U_1$, $\eta = 0,9976$, втратами можна знехтувати і задана лінія може вважатися лінією без втрат.

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = 79 \text{ Ом.}$$

Зважаючи на те, що гіперболічні функції від уявного аргументу перетворюються в тригонометричні

$$shj \cdot \beta \cdot x = j \cdot \sin \beta \cdot x, \quad chj \cdot \beta \cdot x = \cos \beta \cdot x,$$

рівняння (1.24) для напруги та струму в будь-якій точці лінії набувають вигляду

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot \cos \beta \cdot x + j \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot \sin \beta \cdot x, \\ \underline{I} &= j \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \sin \beta \cdot x + \underline{I}_2 \cdot \cos \beta \cdot x. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Вхідний опір лінії

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{ex} &= \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_n + j \cdot \underline{Z}_c \cdot tg \beta \cdot \ell}{\underline{Z}_c + j \cdot \underline{Z}_n \cdot tg \beta \cdot \ell}, \\ \underline{Z}_{ex} &= \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{N} \cdot e^{-j2\beta\ell}}{1 - \underline{N} \cdot e^{-j2\beta\ell}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

або

Режим лінії без втрат визначається як властивостями самої лінії, так і навантаженням на її кінці.

При узгодженому навантаженні $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c$ напруга і струм в лінії згідно з (1.65) та врахуванням $\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c = \underline{U}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot \cos \beta \cdot x + j \cdot \underline{U}_2 \cdot \sin \beta \cdot x = \underline{U}_2 \cdot e^{j\beta x}, \\ \underline{I} &= j \cdot \underline{I}_2 \cdot \sin \beta \cdot x + \underline{I}_2 \cdot \cos \beta \cdot x = \underline{I}_2 \cdot e^{j\beta x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Коефіцієнт відбиття дорівнює нулю $\underline{N} = 0$ і відбита хвиля відсутня. Вся потужність падаючої хвилі поглинається навантаженням.

Приймемо початкову фазу напруги в кінці лінії нульовою ($\underline{U}_2 = U_2$), тоді миттєве значення напруги і струму падаючої (біжучої) хвилі

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= U_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot x), \\ i(x, t) &= I_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot x). \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Напруга і струм вздовж лінії в будь-який момент часу змінюються за синусоїдним законом без затування (рис. 1.11). (В виразах (1.68) x - відстань від кінця лінії).

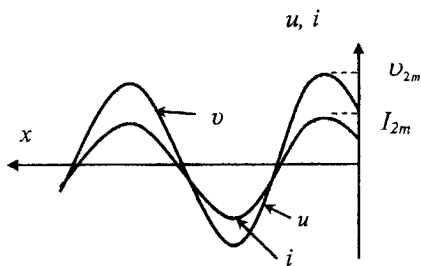


Рис. 1.11

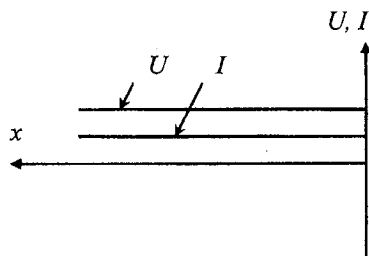


Рис. 1.12

Оскільки амплітуди напруги і струму вздовж лінії не згасають і відбита хвиля відсутня, то діючі значення струму і напруги не залежать від відстані x та постійні вздовж всієї лінії (рис. 1.12). Напруга на затискачах генератора U_1 дорівнює нарузі на затискачах навантаження U_2 .

Вхідний опір узгодженої лінії не залежить від довжини лінії (1.66) і дорівнює хвильовому опорю. Так як хвильовий опір лінії без втрат активний, то лінія без втрат з узгодженим навантаженням є для генератора активним навантаженням. Цей режим роботи лінії часто називають режимом біжучих хвиль.

Переваги цього режиму такі:

1. При відсутності відбитої хвилі вся потужність поглинається навантаженням; інакше частина потужності падаючої хвилі повертається джерелу відбитою хвилею, тобто потужність в навантаженні зменшується.
2. Генератор працює на постійний активний опір і не залежить від частоти та довжини лінії.
3. Будь-якій реальній лінії властиві втрати. В неузгодженому режимі втрати виникають при прямому і зворотному русі хвиль. Втрати в узгодженій лінії при чисто активному хвильовому опорі мінімальні.

1.13. Холостий хід та коротке замикання лінії без втрат

При холостому ході ($Z_n = \infty$) коефіцієнт відбиття (1.27) $\underline{N} = 1$ і потужність падаючої хвилі повністю повертається джерелу, а амплітуда відбитої хвилі дорівнює амплітуді падаючої хвилі.

Рівняння (1.65) при холостому ході ($I_2 = 0$) набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot \cos \beta \cdot x, \\ \underline{I} &= j \cdot \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \cdot \sin \beta \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

Якщо прийняти початкову фазу напруги U_2 за нуль ($\underline{U}_2 = U_2$), то миттєві значення напруги і струму

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_{2m} \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \cos \beta \cdot x, \\ i(x, t) &= \frac{U_{2m}}{Z_c} \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \sin \beta \cdot x. \end{aligned}$$

Виразимо коефіцієнт фази β через довжину хвилі $\beta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$, тоді

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= U_{2m} \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x, \\ i(x, t) &= \frac{U_{2m}}{Z_c} \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

Розглянемо, як змінюються напруга і струм в різних точках лінії залежно від часу. В кінці лінії ($x=0$) $\cos \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x = 1$, $\sin \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x = 0$ – струм в будь-який момент часу дорівнює нулю. Це саме можна сказати і про точки лінії, для яких $x = k \cdot \frac{\lambda}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, тобто коли довжина лінії кратна півхвилі. Напруга в кінці лінії змінюється за синусоїдним законом з максимальною амплітудою U_{2m} . Якщо взяти точки на лінії на відстані $\frac{\lambda}{4} < x_1 < \frac{3\lambda}{4}$, для яких $\cos \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x_1 < 1$, $1 > \sin \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x_1 > 0$, то в них напруга і струм змінюються за синусоїдним законом з амплітудами, меншими максимальних. При $x = \frac{\lambda}{4}$ напруга в будь-який момент часу дорівнює нулю, а струм змінюється за синусоїдним законом з максимальною амплітудою.

На рис. 1.13 а), б) показані графіки зміни напруги та струму вздовж лінії в різні послідовні моменти часу t . Для моменту часу t_0 , для якого $\omega \cdot t_0 = \frac{\pi}{2}$, $\sin \omega \cdot t_0 = 1$, $\cos \omega \cdot t_0 = 0$, напруга вздовж лінії змінюється за синусоїдним законом з максимальною амплітудою U_{2m} , а струм в цей момент в усіх точках лінії дорівнює нулю. Для моменту часу $t_1 > t_0$, для якого $\omega \cdot t_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3}$, $\sin \omega \cdot t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \omega \cdot t_1 = -0,5$, напруга вздовж лінії також змінюється за синусоїдним законом, але величина амплітуди в усіх точках лінії менша в $\sin \omega \cdot t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ рази. Струм в цей момент змінюється вздовж лінії за синусоїдним

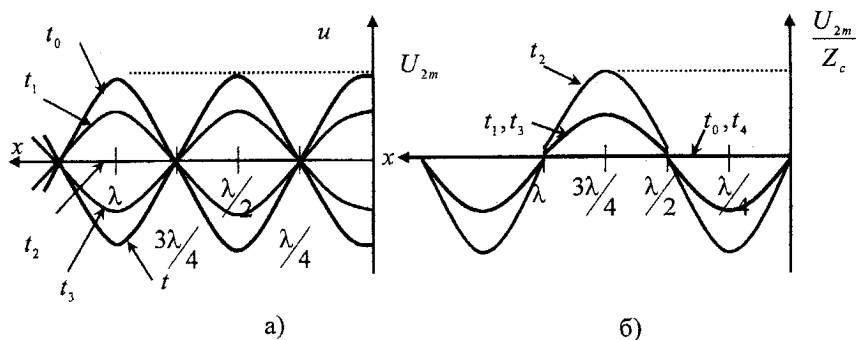


Рис. 1.13

законом з амплітудою $0,5 \cdot \frac{U_{2m}}{Z_c}$ і на ділянці $0 < x < \lambda/2$ набуває від'ємних значень. При $t = t_2 > t_1$, коли $\omega \cdot t_2 = \pi$, напруга в усіх точках лінії дорівнює нулю, а струм змінюється за синусоїдним законом з максимальною амплітудою $\frac{U_{2m}}{Z_c}$. Так само можна побудувати графіки зміни струму і напруги в моменти часу t_3 і t_4 , коли $t_4 > t_3 > t_2$.

Таким чином, в усіх точках лінії напруга і струм змінюються залежно від часу за синусоїдним законом з різними амплітудами. Іншими словами, має місце пульсуюча зміна струму та напруги. Такий режим роботи лінії називають режимом *стоячих хвиль*. Точки з координатами $x = 0, \lambda/2, \lambda, \dots$, де амплітуда напруги найбільша, називають *пучностями* (видугами) напруги. Точки, де $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3 \cdot \lambda}{4}, \frac{5 \cdot \lambda}{4}, \dots$ і амплітуда напруги дорівнює нулю, називають *вузлами* напруги.

З рис. 13 видно, що вузли напруги збігаються з пучностями струму і навпаки. На рис. 14 показаний графік розподілу діючих значень напруги і струму вздовж лінії.

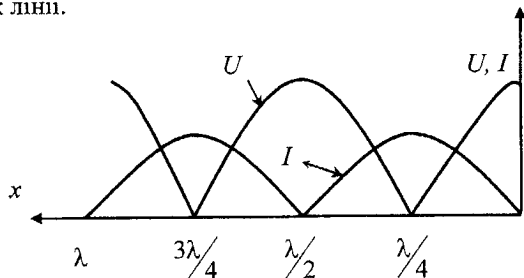


Рис. 1.14

Оскільки коефіцієнт відбиття $N = 1$, то стоячі хвилі можна уявити як результат накладення однакових падаючої і відбитої хвиль, що рухаються в протилежних напрямках.

У випадку стоячої хвилі передачі енергії вздовж лінії немає, бо лінія без втрат і споживач енергії відсутній, проте в самій лінії відбувається обмін енергією між електричним і магнітним полями на кожній ділянці лінії довжиною $\lambda/4$ (між вузлами напруги і струму). Коли напруга досягає в усіх точках лінії найбільших значень, а струм дорівнює нулю ($t = t_0$ на рис. 1.13), весь запас енергії зосереджений в електричному полі. Коли напруга спадає до нуля, струм досягає максимально можливих значень ($t = t_2$) і енергія зосереджується в магнітному полі.

У випадку короткого замикання лінії ($\underline{Z}_n = 0, \underline{U}_2 = 0$) рівняння (1.65) набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= j \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot \sin \beta \cdot x, \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 \cdot \cos \beta \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

Якщо прийняти $\underline{I}_2 = I_2$, то миттєві значення напруги і струму

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= I_{2m} \cdot \underline{Z}_c \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x, \\ i(x, t) &= I_{2m} \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

По аналогії з попереднім відзначимо, що при короткому замиканні в лінії утворюються стоячі хвилі, тільки тепер в кінці лінії у напруги вузол ($u = 0$), а у струму – пучність, тобто вузли і пучності напруги при короткому замиканні збігаються відповідно з вузлами і пучностями струму при холостому ході, а вузли і пучності струму – з вузлами і пучностями напруги.

На рис. 1.15 наведено графік розподілу діючих значень напруги і струму вздовж лінії. Коефіцієнт відбиття при короткому замиканні $\underline{N} = -1$, тому амплітуда відбитої хвилі дорівнює амплітуді падаючої хвилі.

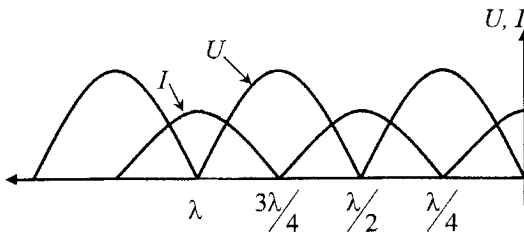


Рис. 1.15

Визначимо вхідний опір лінії для цих двох режимів. При холостому ході з (1.69) одержуємо

$$\underline{Z}_x = -j \cdot \underline{Z}_c \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot x = -j \cdot Z_c \cdot \operatorname{ctg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x. \quad (1.73)$$

Оскільки хвильовий опір в лінії без втрат активний, то вхідний опір лінії реактивний, величина якого при заданому Z_c і частоті залежить від довжини лінії x .

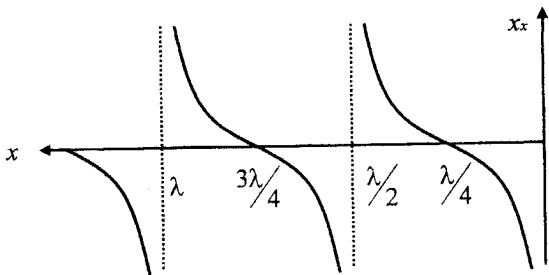


Рис.1. 16

На рис. 1.16 показано графік зміни реактивного вхідного опору лінії x_x залежно від довжини лінії.

При довжині лінії $0 < \ell < \lambda/4$ вхідний опір Z_x , розімкненої на кінці лінії без втрат, ємнісний ($x_x < 0$) і зменшується зі збільшенням довжини лінії. При $\ell = \lambda/4$ вхідний опір лінії дорівнює нулю. Якщо $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$, то вхідний опір індуктивний і збільшується із зростанням довжини лінії. Коли довжина лінії дорівнює половині довжини хвилі ($\ell = \lambda/2$), вхідний опір лінії нескінченно великий. При $\lambda/2 < \ell < 3 \cdot \lambda/4$ вхідний опір знову ємнісний, при $3 \cdot \lambda/4 < \ell < \lambda$ - індуктивний і т. п.

При короткому замиканні лінії без втрат вхідний опір

$$\underline{Z}_x = -j \cdot \underline{Z}_c \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot x = j \cdot Z_c \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x \quad (1.74)$$

також носить реактивний характер.

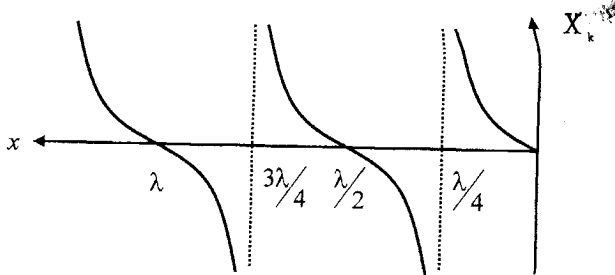


Рис. 1.17

При довжині лінії $0 < \ell < \lambda/4$ вхідний опір індуктивний і при $\ell = \lambda/4$ стає нескінченно великим (рис. 1.17). При $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$ він ємнісний і т. д.

Таким чином, вхідний опір короткозамкненої або розімкненої на кінці лінії без втрат залежно від довжини лінії має ємнісний або індуктивний характер і може набувати будь-яких числових значень від нуля до нескінченності.

1.14. Реактивне навантаження лінії без втрат

Якщо лінія без втрат навантажена на тільки реактивний опір $Z_n = \pm j \cdot X_n$, то коефіцієнт відбиття

$$\underline{N} = \frac{\pm j \cdot X_n - z_c}{\pm j \cdot X_n + z_c}$$

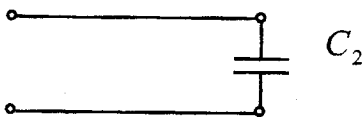
При дійсному хвильовому опорі модуль коефіцієнта відбиття

$$n = \frac{\sqrt{z_c^2 + x_n^2}}{\sqrt{z_c^2 + x_n^2}} = 1.$$

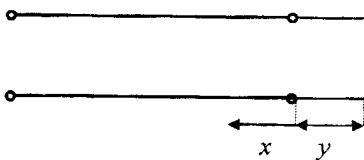
Це означає, що амплітуда відбитої хвилі дорівнює амплітуді падаючої хвилі і при накладанні виникає стояча хвиля. Цей висновок можна отримати з енергетичних міркувань. Лінія без втрат з реактивним навантаженням не поглинає енергії, а значить немає її переносу.

Для побудови графіків розподілу напруги і струму вздовж лінії, індуктивний або ємнісний опір навантаження можна замінити відрізком короткозамкненої або розімкненої лінії без втрат.

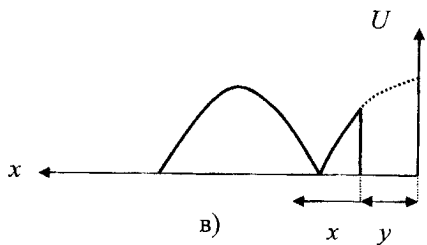
Припустимо, що лінія без втрат навантажена на ємність (рис. 1.18, а).



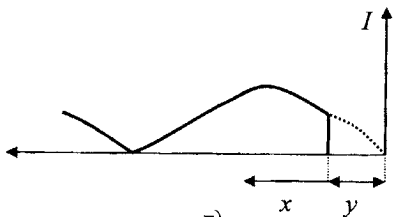
а)



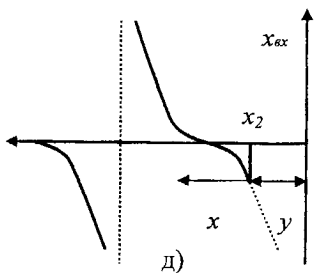
б)



в)



г)



д)

Рис. 1.18

Тоді $Z_2 = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot X_2$; зосереджену ємність C_2 можна замінити від-
різком розімкненою на кінці лінії, довжиною y , причому $0 < y < \lambda/4$. З
рис.1.16 видно, що на цій ділянці вхідний опір розімкненої лінії носить єм-
нісний характер і його величина змінюється в межах від нуля до нескін-
ченності. Зрозуміло, що завжди можна підібрати такий відрізок лінії дов-
жиною y , вхідний опір якого дорівнює Z_2 . Для визначення величини y
складемо рівняння

$$-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot z_c \cdot \text{ctg} \beta \cdot y.$$

Звідки

$$y = \frac{1}{\beta} \cdot \text{arcctg} \left(\frac{1}{z_c \cdot \omega \cdot C_2} \right),$$

де z_c - хвильовий опір відрізка лінії без втрат, що заміщає ємність C_2 . Він
може збігатися з хвильовим опором основної лінії, а може і не збігатися.
Така заміна дозволяє на підставі розглянутих раніше виразів і графіків для
розімкненої лінії відразу побудувати криві розподілу діючих значень на-
пруги (рис. 1.18, а), струму (рис. 1.18, г) і вхідного опору лінії (рис.
1.18, д).

Якщо лінія навантажена на індуктивність L_2 , то її можна замінити
відрізком короткозамкненої лінії, при чому довжина цього відрізка y ви-
значається з умови $\omega \cdot L_2 = z_c \cdot \text{tg} \beta \cdot y$ і

$$y = \frac{1}{\beta} \cdot \text{arctg} \left(\frac{\omega \cdot L_2}{z_c} \right). \quad (1.76)$$

З рис. 1.17 виходить, що $y < \lambda/4$. Рис. 1.16 і 1.17 показують крім того, що
ємність C_2 можна замінити і короткозамкненою лінією, а індуктивність L_2
розімкненою лінією, якщо $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$.

Коли лінія навантажена на реактивний опір то, як видно з рис. 1.18,
в кінці лінії немає ані пучності, ані вузла струму чи напруги.

1.15. Довільне навантаження лінії без втрат

Розглянемо режим роботи лінії без втрат при довільному опорі на-
вантаження Z_n . Як відомо, напругу (струм) в будь-якій точці лінії можна
подати у вигляді суми (різниці) двох хвиль – падаючої та відбитої:

$$U = U_n + U_b, \quad I = I_n - I_b.$$

При довільному навантаженні модуль n коефіцієнта відбиття мен-
ший одиниці (неповне відбиття). Частина енергії, що передається по лінії,

поглинається навантаженням, а частина повертається джерелу. Амплітуди напруги і струму відбитої хвилі менші відповідних амплітуд падаючої хвилі

$$\underline{U}_b = \underline{N} \cdot \underline{U}_{2n}, \quad \underline{I}_{20} = \underline{N} \cdot \underline{I}_{2n}. \quad (1.77)$$

У виразі (1.21) перша складова являє собою падаючу, а друга – відбиту хвилі. Для лінії без втрат $\gamma = j \cdot \beta$, тому

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_n &= \underline{U}_{2n} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot x}, & \underline{U}_b &= \underline{U}_{2b} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot x}, \\ \underline{I}_n &= \underline{I}_{2n} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot x}, & \underline{I}_b &= \underline{I}_{2b} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

де індекс 2 визначає належність відповідних величин до кінця лінії ($x = 0$).

Нагадаємо, що

$$\frac{\underline{U}_n}{\underline{I}_n} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{I}_b} = \frac{\underline{U}_{2n}}{\underline{I}_{2n}} = \frac{\underline{U}_{2b}}{\underline{I}_{2b}} = \underline{Z}_c. \quad (1.79)$$

Побудуємо векторну діаграму струмів та напруг в кінці лінії. Величина вектора струму \underline{I}_{2b} менша величини вектора струму \underline{I}_{2n} ($n < 1$), і ці вектори зсунуті за фазою на кут δ_0 (1.77), який дорівнює аргументу коефіцієнта відбиття \underline{N} (рис.1. 19). Оскільки лінія без втрат, то z_c чисто активний опір і напруга кожної хвилі збігається за фазою зі струмом цієї ж хвилі (1.79).

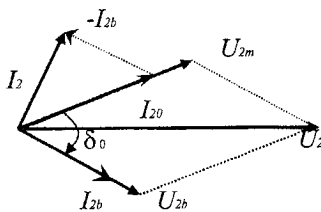


Рис.1.19

Сума \underline{U}_{2n} і \underline{U}_{2b} дає напругу в кінці лінії \underline{U}_2 , а різниця \underline{I}_{2n} і \underline{I}_{2b} - струм \underline{I}_2 в кінці лінії (рис. 1.19).

Аналогічно побудуємо діаграму в інших точках лінії. Якщо, наприклад, треба побудувати векторну діаграму на відстані x від кінця лінії, то вектори падаючої хвилі необхідно повернути на кут $\beta \cdot x$, а вектори відбитої хвилі -- на кут $\beta \cdot x$ (рис. 1.20). Довжини векторів при цьому не змінюються (затухання відсутнє).

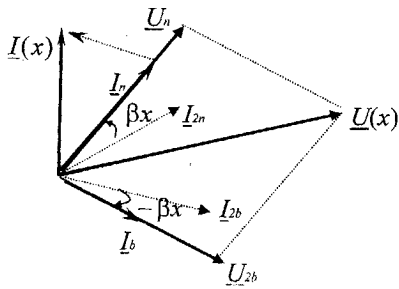


Рис.1. 20

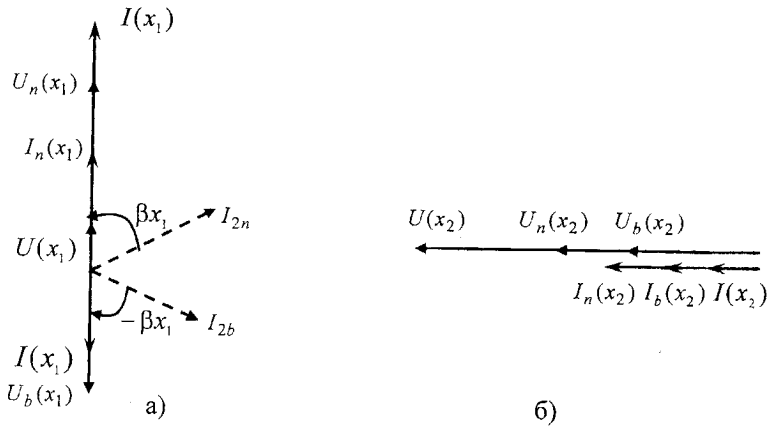


Рис.1.21

Можна підібрати таке значення $x = x_1$, для якого струми і напруги падаючої та відбитої хвиль будуть відрізнятися за фазою на π (рис.1.21, а), при цьому напруга лінії буде мінімальною, а струм – максимальним.

$$\left. \begin{aligned} U_{min} &= U_{2n} - U_{2b}, \\ I_{max} &= I_{2n} + I_{2b}. \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

Якщо вектори повернути ще на кут $\frac{\pi}{2}$, тобто $\beta \cdot x_2 = \beta \cdot x_1 + \frac{\pi}{2}$ і $x_2 = x_1 + \frac{\pi}{2 \cdot \beta}$ або $x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{4}$ (рис. 1.21, б), то напруга лінії набуде максимального значення, а струм – мінімального:

$$\left. \begin{aligned} U_{max} &= U_{2n} + U_{2b}, \\ I_{min} &= I_{2n} - I_{2b}. \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

Мінімуми напруги і максимуми струмів будуть періодично повторюватися вздовж лінії в точках з координатами $x = x_1 + k \cdot \frac{\lambda}{2}$, де $k = 0, 1, 2, \dots$, а мінімуми напруги і максимуми струму – в точках з координатами $x = x_2 + k \cdot \frac{\lambda}{2}$.

На рис.1.22 а), б) наведені графіки розподілу діючих значень напруги і струму вздовж лінії. Вони змінюються вздовж лінії хвилеподібно, як у стоячих хвиль, однак вони змінюються не за синусоїдним законом, і їх мінімальне значення не досягає нуля. Такий режим в лінії формально зображають в вигляді накладання падаючої біжучої хвилі та стоячої хвилі і називають *режимом змішаних хвиль*. Відношення мінімальної напруги до максимальної визначає ступінь погодження навантаження з лінією і називається *коефіцієнтом біжучої хвилі*:

$$k_{\phi} = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{U_n - U_{2b}}{U_{2n} + U_{2b}} = \frac{1 - \frac{U_{2b}}{U_{2n}}}{1 + \frac{U_{2b}}{U_{2n}}}.$$

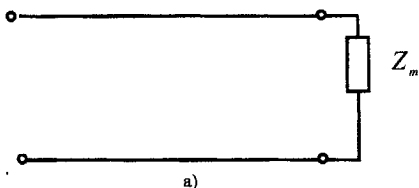


Рис. 1.22

Враховуючи те, що $\frac{U_{2b}}{U_{2n}} = n$ – модуль коефіцієнта відбиття, отримаємо

$$k_{\phi} = \frac{1 - n}{1 + n} \quad (1.82)$$

Обернену йому величину називають *коефіцієнтом стоячої хвилі*:

$$k_c = \frac{1}{k_0} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1+n}{1-n}. \quad (1.83)$$

Коефіцієнт біжучої хвилі при узгодженому навантаженні ($U_{\max} = U_{\min} = U$) дорівнює 1, а при холостому ході і короткому замиканні ($U_{\min} = 0$) дорівнює нулю. Відповідно коефіцієнт стоячої хвилі змінюється при цьому від одиниці до нескінченності. Для реальних ліній передачі інформації коефіцієнт біжучої хвилі звичайно не менший за 0,5 – 0,6.

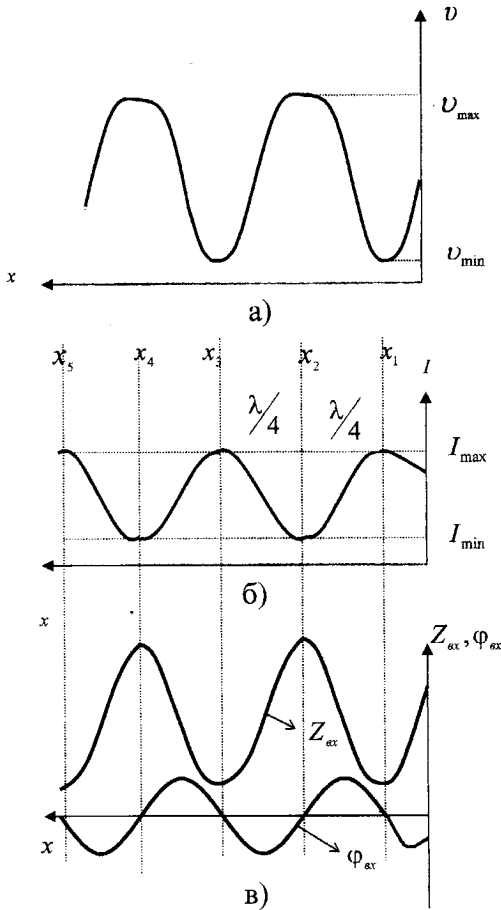


Рис. 1.22

Вхідний опір можна знайти за формулою (1.66), однак деякі загальні результати можна отримати, розглядаючи графіки на рис.1.22 а), б) та векторні діаграми на рис. 1.19 – рис.1. 21.

При $x = 0$ (в кінці лінії) вхідний опір дорівнює опору навантаження. Згідно з векторною діаграмою (рис. 1.19) напруга U_2 відстає від струму I_2 , отже, $\varphi_{\text{вх}} < 0$. При $x = x_1 + k \cdot \frac{\lambda}{2}$ напруга лінії мінімальна, струм

максимальний і вони збігаються за фазою (векторна діаграма на рис.1.21, а), тому вхідний опір активний і мінімальний $z_{ax\ min} = \frac{U_{min}}{I_{max}} = z_c \cdot \frac{U_{min}}{U_{max}} = z_c \cdot k \cdot \delta$. При $x = x_2 + k \cdot \frac{\lambda}{2}$ напруга лінії максимальна, струм мінімальний і також збігаються за фазою (рис.1.21, б), отже в цих точках лінії опір активний і максимальний $z_{ax\ max} = \frac{U_{max}}{I_{min}} = z_c \cdot \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{z_c}{k \cdot \delta}$. На рис. 1.22, в) показані криві зміни модуля і аргументу вхідного опору залежно від довжини лінії.

Приклад 1.12. Для коаксіального кабеля, параметри якого подані в прикладі 1.11, знайти перші дві точки від кінця, відносно яких опір кабеля активний. Знайти величини цих опорів, якщо при частоті $f = 100$ МГц опір навантаження $z_n = 150 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ}$ Ом.

Розв'язання. З розв'язання прикладу 1.11 відомо, що хвильовий опір кабеля $z_c = 79$ Ом, фазовий коефіцієнт $\beta = 2,4 \cdot 10^3$ рад/км.

Вхідний опір лінії без втрат (1.66)

$$\underline{Z}_{ax} = z_c \cdot \frac{1 + \underline{N} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \beta \cdot \ell}}{1 - \underline{N} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \beta \cdot \ell}},$$

де \underline{N} – комплексний коефіцієнт відбиття,

ℓ – довжина лінії.

Знайдемо

$$\underline{N} = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c} = 0,408 \cdot e^{-j \cdot 36^\circ} = 0,408 \cdot e^{-j \cdot 0,629},$$

$$n = 0,408, \delta_0 = -0,629 \text{ рад.}$$

Перепишемо \underline{Z}_{ax} у вигляді

$$\underline{Z}_{ax} = z_c \cdot \frac{1 + n \cdot e^{-j(2\beta\ell - \delta_0)}}{1 - n \cdot e^{-j(2\beta\ell - \delta_0)}}.$$

Вхідний опір буде активним, коли $e^{-j(2\beta\ell - \delta_0)} = \pm 1$ або $2 \cdot \beta \cdot \ell - \delta_0 = k \cdot \pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Перша точка, в якій вхідний опір активний ($\ell = x_1$) визначається при $k = 1$, тобто

$$x_1 = \frac{\pi + \delta_0}{2 \cdot \beta} = \frac{\pi - 0,629}{2 \cdot 2,4 \cdot 10^3} = 0,52 \text{ м.}$$

(Не можна брати $k = 0$, оскільки при $\delta_0 < 0$ значення x_1 також буде від'ємним).

Друга точка визначається при $k = 2$

$$x_2 = \frac{2 \cdot \pi + \delta_0}{2 \cdot \beta} = \frac{2 \cdot \pi - 0,629}{2 \cdot 2,4 \cdot 10^3} = 1,18 \text{ м.}$$

По відстані точок лінії з максимальною або мінімальною напругою від її кінця і величині коефіцієнта біжучої хвилі, можна розрахувати опір навантаження лінії.

1.16. Застосування відрізків довгих ліній

а) Для узгодження лінії з навантаженням.

Як відомо, в режимі погодженого навантаження $Z_n = Z_c$. В багатьох випадках є приймачі, величину опорів яких не можна регулювати, точно так не можна змінити і хвильовий опір питомої лінії. В такому випадку необхідно застосування спеціальних узгоджувальних приладів.

Нехай на високій частоті ($f = (50 \div 100) \text{ МГц}$) лінія має активний хвильовий опір z_c і опір навантаження $R_n \neq z_c$. Для погодження між лінією і приймачем включають відрізок лінії довжиною $\lambda/4$ (рис.1.23). Такий відрізок називають *чвертьхвильовим трансформатором*.

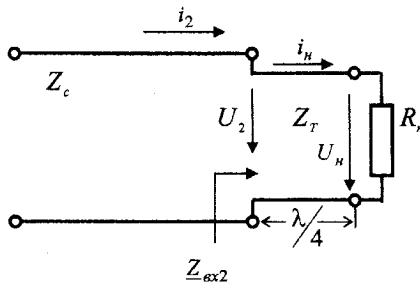


Рис. 1.23

Хвильовий опір цього відрізка вибирають таким, щоб вхідний опір Z_{ex2} трансформатора, навантаженого на R_n , дорівнював хвильовому опору лінії передачі z_c .

Відповідно до (1.66)

$$Z_{ex2} = z_T \cdot \frac{1 + n \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \beta \cdot \ell}}{1 - n \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \beta \cdot \ell}},$$

де z_m – хвильовий опір трансформатора, активний (лінія без втрат);

$n = N = \frac{R_n - z_m}{R_n + z_m}$ – коефіцієнт відбиття на виході трансформатора, дійсне

число.

Враховуючи, що $\beta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$ і $\ell = \lambda/4$, а для погодження вхідний опір трансформатора повинен дорівнювати хвильовому опорі лінії передачі, отримаємо

$$z_c = z_T \cdot \frac{1 + n \cdot e^{-j \cdot \pi}}{1 - n \cdot e^{-j \cdot \pi}} = z_T \cdot \frac{1 - n}{1 + n} = z_T \cdot \frac{1 - \frac{R_n - z_T}{R_n + z_T}}{1 + \frac{R_n - z_T}{R_n + z_T}}$$

Після нескладних перетворень

$$z_c = \frac{z_T^2}{R_n},$$

звідси

$$z_T = \sqrt{z_c \cdot R_n}. \quad (1.84)$$

Напряга і струм на виході трансформатора відповідно до (1.65)

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_n \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} + j \cdot \underline{I}_n \cdot z_T \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = j \cdot \underline{I}_n \cdot z_T = j \cdot \underline{U}_n \cdot \frac{z_T}{R_n};$$

$$\underline{I}_2 = j \cdot \frac{\underline{U}_n}{z_T} \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} + \underline{I}_n \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = j \cdot \frac{\underline{U}_n}{z_T} = j \cdot \underline{I}_n \cdot \frac{R_n}{z_T}.$$

Таким чином, напруга в кінці лінії передачі або на вході трансформатора більша, ніж напруга на опорі навантаження в $\frac{z_T}{R_n}$ разів, а струм менший в стільки ж разів.

Якщо опір навантаження має і реактивну складову $\underline{Z}_n = z_n \cdot e^{j \cdot \varphi_n}$, то

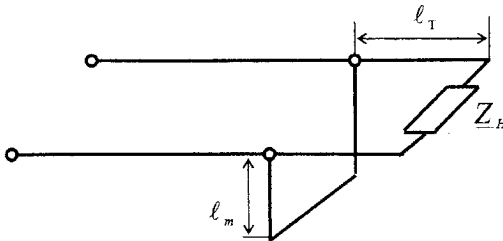


Рис.1.24

узгоджувальний прилад складається з двох відрізків ліній – трансформатора з хвильовим опором $z_T = z_c$ довжиною ℓ_T (рис. 1.24) і відрізка короткозамкненої лінії (шлейфу) з хвильовим опором $z_{ш} = z_c$ і довжиною $\ell_{ш}$. В усіх розглядуваних прикладах вважається, що відстань між проводами набагато менша довжини хвилі.

Довжина ℓ_m вибирається такою, щоб активна складова вхідної комплексної провідності відрізка лінії, навантажена на z_n , була рівна $1/z_c$, тобто

$$Y_{ex} = \frac{1}{z_c} - j \cdot b.$$

Довжину хвилі короткозамкненого шлейфу вибирають так, щоб його провідність була рівна $j \cdot b$, тоді сумарна провідність в місці приєднання рівна $1/z_c$, і вхідний опір в цій точці буде дорівнювати z_c – хвильовому опору основної лінії. При таких умовах в основній лінії буде біжуча хвиля.

б) В якості елементів резонансного кола.

В п. 1.12 було показано, що вхідний опір розімкнених та короткозамкнених ліній реактивний. Залежно від довжини лінії змінюється величина опору, причому вона може бути і індуктивною і ємнісною. Ця обставина і дозволяє застосовувати відрізки ліній замість котушок індуктивності і конденсаторів, бо використання котушок і конденсаторів звичайних конструкцій в діапазоні занадто високих частот не завжди зручне і раціональне.

Довжину відрізка лінії, що застосовується в якості індуктивності або ємності, вибирають мінімальною. Так, лінія-індуктивність звичайно короткозамкнена, довжиною $0 < \ell < \lambda/4$, лінія-ємність – розімкнена, довжиною $0 < \ell < \lambda/4$.

Приклад 1.13. Якої довжини потрібно взяти короткозамкнену лінію без втрат з первинними параметрами $L_0 = 1,36 \text{ мкГ/м}$, $C_0 = 8,17 \text{ пФ/м}$, щоб послідовний коливальний контур з ємністю $C_0 = 4,5 \text{ пФ}$ на частоті $f = 120 \text{ МГц}$ працював в резонансному режимі.

Визначимо спочатку величину індуктивності при якій в колі має місце резонанс. Для послідовного контура при резонансі виконується умова

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}.$$

Звідси

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 1,2 \cdot 10^8)^2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-12}} = 0,391 \text{ мкГ}.$$

Вхідний опір короткозамкненої лінії без втрат

$$Z_{ex} = j \cdot z_c \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \ell$$

повинен дорівнювати опору індуктивності

$$Z_{ex} = j \cdot \omega_0 \cdot L = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1,2 \cdot 10^8 \cdot 0,391 \cdot 10^{-6} = j \cdot 294,8 \text{ Ом.}$$

Хвильовий опір лінії

$$z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{1,36 \cdot 10^{-6}}{8,17 \cdot 10^{-12}}} = 408 \text{ Ом}$$

і

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \ell = \frac{Z_{ex}}{j \cdot z_c} = \frac{294,8}{408} = 0,722.$$

Звідси $\beta \cdot \ell = 0,626 \text{ рад.}$

Коефіцієнт затухання $\beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0} = 2,513 \text{ рад/м.}$

Звідси $\ell = \frac{0,626}{2,513} = 0,25 \text{ м.}$

Довжина хвилі $\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} = 2,5 \text{ м.}$

в) Для закріплення ліній передач на надвисоких частотах.

Відрізок короткозамкненої лінії без втрат довжиною в чверть хвилі має нескінченно великий вхідний опір. Якщо навіть врахувати втрати в лінії, то її вхідний опір буде дуже великим, але скінченним. Ця властивість використовується для закріплення проводів ліній передач в діапазоні надвисоких частот. Якщо лінії передач в цьому діапазоні підвішувати на звичайні ізолятори, то це призведе до великих втрат і створить додаткове витікання струму.

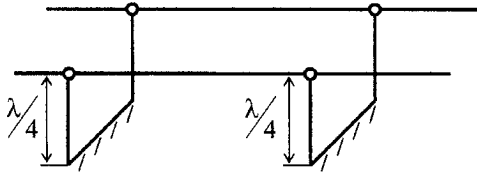


Рис. 1. 25

Тому часто замість звичайних ізоляторів для закріплення проводів ліній передач використовують так звані металеві ізолятори, що являють собою чвертьхвильові відрізки короткозамкнених ліній (рис. 1.25), на які спираються проводи лінії. Внаслідок великого вхідного опору такі відрізки практично не впливають на режим передачі енергії по основній лінії.

г) Для вимірювання опорів навантаження.

Для вимірювання опорів навантаження \underline{Z}_n в діапазоні надвисоких частот часто застосовують так названу *вимірювальну лінію*. До кінця вимірювальної лінії приєднують вимірювальний опір \underline{Z}_n (рис. 1.22). Після цього відзначають положення найближчого до опору навантаження мінімуму напруги (x_1) і величини максимальної U_{\max} і мінімальної U_{\min} напруг.

Вхідний опір лінії відносно точки з координатами x_1 (1.66)

$$\underline{Z}_{ex} = z_c \cdot \frac{\underline{Z}_n + j \cdot z_c \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot x_1}{z_c + j \cdot \underline{Z}_n \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot x_1}.$$

В той же час в точці, де $u = U_{\min}$,

$$z_{ex} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = z_c \cdot k_\delta,$$

де $k_\delta = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}$ – коефіцієнт біжучої хвилі.

Прирівняємо праві частини рівнянь і після невеликих перетворень отримаємо

$$\underline{Z}_n = z_c \cdot \frac{k_\delta - j \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot x_1}{1 - j \cdot k_\delta \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot x_1}. \quad (1.84)$$

Таким чином, вимірявши відстань x_1 , визначивши коефіцієнт біжучої хвилі і параметри вимірювальної лінії (z_c, β), можна розрахувати модуль і аргумент комплексного опору.

Такі вимірювальні лінії можна застосовувати для вимірювання опорів в діапазоні дециметрових хвиль.

З допомогою вимірювальних ліній можна визначити довжину хвилі (частоту) коливань, що виробляються деяким генератором. Для цього на вході вимірювальної лінії підключають генератор, який досліджується, а на виході її замикають накоротко або залишають розімкненою. Визначивши положення точок лінії, в якому напруга приймає мінімальне U_{\min} ($x = x_1$) і максимальне U_{\max} ($x = x_2$) (рис. 1.22) значення, одержуємо:

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{4},$$

звідси

$$\lambda = 4 \cdot (x_2 - x_1).$$

2. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В КОЛАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Виникнення перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами

В колах з розподіленими параметрами, так само, як і в колах із зосередженими параметрами, при різноманітних комутаціях, тобто вмиканнях або вимиканнях джерел живлення, споживачів енергії, окремих ділянок, виникають перехідні процеси. Перехідні процеси в лініях виникають також при аварійних режимах (обривах проводів, коротких замиканнях, при грозових розрядах і т. п.).

Теоретично перехідний режим в лінії триває нескінченно довго, але як і в колах із зосередженими параметрами, звичайно користуються поняттям практичної тривалості, що залежить від первинних параметрів лінії, внутрішнього опору джерела і опору навантаження. Під час перехідного процесу можлива поява перенапруг або великих струмів, що можуть призвести до пошкодження ізоляції або інших частин електротехнічного обладнання та порушення нормальної передачі інформації.

На відміну від перехідних процесів в колах із зосередженими параметрами, зміна струмів і напруг в колах з розподіленими параметрами відбувається неодноразово в різних частинах кола. Зміни струму і напруги, які почалися в будь-якому місці кола, поширюються на інші ділянки з кінцевою швидкістю, в повітряних лініях близькою до швидкості світла, в кабельних – приблизно в два рази меншою. Основною задачею розрахунку перехідних процесів будемо вважати визначення залежності струмів і напруг в різних частинах кола від часу.

2.2. Розв'язання телеграфічних рівнянь однорідної лінії класичним методом

Для дослідження перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами розглянемо диференціальні рівняння довгої лінії, що виведені в першій главі для однорідної лінії:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

де r_0, L_0, C_0, g_0 – первинні параметри лінії,

x – координата точки, що розглядається, яка відраховується від початку лінії.

Задача розв'язання диференціальних рівнянь зводиться до знаходження загального розв'язку цих рівнянь, які задовольняють дані

початкові ($t = 0$) та граничні ($x = 0, x = \ell$) умови. Розв'язання цієї задачі в загальному випадку досить складне, тому розглянемо спочатку випадок лінії без спотворень, для якої виконується умова (1.61)

$$\frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0} = \delta. \quad (2.2)$$

Систему (2.1) можна розв'язувати як класичним, так і операторним методами.

Розглянемо спочатку розв'язання цієї задачі класичним методом. Для цього в колі введемо замість u і i нові функції u_1 і i_1 ,

$$u_1 = u \cdot e^{\delta \cdot t}, \quad i_1 = i \cdot e^{\delta \cdot t}.$$

Запишемо похідні в (2.1) через нові функції, враховуючи, що $u = u_1 \cdot e^{-\delta \cdot t}$, $i = i_1 \cdot e^{-\delta \cdot t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot e^{-\delta \cdot t}, & \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} \cdot e^{-\delta \cdot t} - \delta \cdot u_1 \cdot e^{-\delta \cdot t}, \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{\partial i_1}{\partial x} \cdot e^{-\delta \cdot t}, & \frac{\partial i}{\partial t} &= \frac{\partial i_1}{\partial t} \cdot e^{-\delta \cdot t} - \delta \cdot i_1 \cdot e^{-\delta \cdot t}. \end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази в (2.1)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot e^{-\delta \cdot t} &= L_0 \cdot \left(\delta \cdot i + \frac{\partial i_1}{\partial t} \cdot e^{-\delta \cdot t} - \delta \cdot i_1 \cdot e^{-\delta \cdot t} \right), \\ -\frac{\partial i_1}{\partial x} \cdot e^{-\delta \cdot t} &= C_0 \cdot \left(\delta \cdot u + \frac{\partial u_1}{\partial t} \cdot e^{-\delta \cdot t} - \delta \cdot u_1 \cdot e^{-\delta \cdot t} \right). \end{aligned}$$

Скоротивши першу і третю складові в дужках і розділивши обидва вирази на $e^{-\delta \cdot t}$, отримуємо:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_1}{\partial x} &= L_0 \cdot \frac{\partial i_1}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i_1}{\partial x} &= C_0 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Продиференціюємо перше рівняння за x , а друге за t

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L_0 \cdot \frac{\partial^2 i_1}{\partial t \partial x}, \quad -\frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t} = C_0 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Звідки

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L_0 \cdot C_0 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Величину $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}$ називають хвильовою швидкістю, тому (2.5)

можна записати в вигляді рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad (2.6)$$

яке відоме під назвою *хвильового рівняння*.

Введемо нові змінні

$$\xi = x - v \cdot t, \quad \eta = x + v \cdot t. \quad (2.7)$$

Запишемо декілька похідних, необхідних для розв'язування хвильового рівняння (2.6)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2 \cdot v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}.$$

Підставивши отримані значення похідних в (2.6), отримуємо

$$v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2 \cdot v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \cdot v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}.$$

Звідки

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.8)$$

Перепишемо останнє рівняння в вигляді $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) = 0$, звідки виходить, що $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}$ не залежить від змінної ξ , а є тільки функцією η , тобто

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \varphi(\eta).$$

Проінтегруємо останній вираз

$$u_1 = \int \varphi(\eta) d\eta + f_1(\xi).$$

Тут перша складова – деяка функція від η , а друга складова – постійна інтегрування функції $\varphi(\eta)$ за η , але яка залежить від змінної ξ .

Таким чином,

$$u_1 = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

де $f_2(\eta) = \int \varphi(\eta) d\eta$.

Переходячи до попередніх змінних x і t (2.9) отримуємо

$$u_1(x, t) = f_1(x - v \cdot t) + f_2(x + v \cdot t), \quad (2.9)$$

а для напруги u

$$u(x, t) = [f_1(x - v \cdot t) + f_2(x + v \cdot t)] \cdot e^{-\delta \cdot t}. \quad (2.10)$$

Для знаходження i_1 підставимо (2.9) в друге рівняння (2.4)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_1}{\partial x} &= C_0 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t} = C_0 \cdot \frac{\partial [f_1(\xi) + f_2(\eta)]}{\partial t} = C_0 \cdot \left[\frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f_2(\eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] = \\ &= C_0 \cdot \left[-v \cdot \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi} + v \cdot \frac{\partial f_2(\eta)}{\partial \eta} \right] = -\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \cdot \left[\frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial f_2(\eta)}{\partial \eta} \right]. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} = z_c$ - хвильовий опір лінії без спотворень, а

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \quad \text{та} \quad \frac{\partial f_2}{\partial \eta} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

отримаємо:

$$\frac{\partial i_1}{\partial x} = \frac{1}{z_c} \cdot \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right].$$

Проінтегрувавши останній вираз, маємо:

$$i_1 = \frac{1}{z_c} \cdot [f_1(x - v \cdot t) - f_2(x + v \cdot t)].$$

Постійну інтегрування, якщо вона не дорівнює нулю, можна включити в функції f_1 і f_2 . В результаті для струму i в лінії отримуємо

$$i = \frac{1}{z_c} \cdot [f_1(x - v \cdot t) - f_2(x + v \cdot t)] \cdot e^{-\delta \cdot t}. \quad (2.11)$$

Перетворюємо (2.10) і (2.11). Так як $\frac{r_0}{L_0} \cdot \frac{g_0}{C_0} = \alpha^2 \cdot v^2$, де $\alpha = \sqrt{r_0 \cdot g_0}$ -

коефіцієнт затухання, а $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}$ - хвильова швидкість для лінії без

спотворень, то

$$\delta \cdot t = \alpha \cdot v \cdot t \quad \text{і} \quad e^{-\delta \cdot t} = e^{-\alpha \cdot v \cdot t} = e^{\alpha(x - vt)} \cdot e^{-\alpha \cdot x} = e^{-\alpha(x + vt)} \cdot e^{\alpha \cdot x}.$$

Перепишемо (2.10) і (2.11) в вигляді:

$$\begin{aligned} u &= [f_1(x - v \cdot t) \cdot e^{\alpha(x - vt)} \cdot e^{-\alpha \cdot x} + f_2(x + v \cdot t) \cdot e^{-\alpha(x + vt)} \cdot e^{\alpha \cdot x}], \\ i_1 &= \frac{1}{z_c} [f_1(x - v \cdot t) \cdot e^{\alpha(x - vt)} \cdot e^{-\alpha \cdot x} - f_2(x + v \cdot t) \cdot e^{-\alpha(x + vt)} \cdot e^{\alpha \cdot x}], \end{aligned}$$

або

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi_1(x - v \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot x} + \varphi_2(x + v \cdot t) \cdot e^{\alpha \cdot x}, \\ i_1 &= \frac{1}{z_c} \cdot [\varphi_1(x - v \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot x} - \varphi_2(x + v \cdot t) \cdot e^{\alpha \cdot x}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Вирази (2.12) дадуть загальний розв'язок хвильового рівняння (2.6), конкретний вигляд функцій $\varphi_1(x - v \cdot t)$ і $\varphi_2(x + v \cdot t)$ визначається конкретними умовами задачі.

2.3. Розв'язання телеграфних рівнянь операторним методом

Визначимо похідні функцій u та i за x і t в операторній формі:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= pU(p, x) - u(0, x), & \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{d}{dx}U(p, x) \\ \frac{\partial i}{\partial t} &= pI(p, x) - i(0, x), & \frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{d}{dx}I(p, x) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Тоді телеграфні рівняння (2.1) при нульових початкових умовах $[u(0, x) = 0, i(0, x) = 0]$ набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dU(p, x)}{dx} &= (r_0 + p \cdot L_0) \cdot I(p, x), \\ -\frac{dI(p, x)}{dx} &= (g_0 + p \cdot C_0) \cdot U(p, x). \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Продиференціювавши перше рівняння за x і використовуючи друге, отримуємо:

$$\frac{d^2U(p, x)}{dx^2} = \gamma^2 U(p, x), \quad (2.15)$$

де $\gamma = \sqrt{(r_0 + p \cdot L_0) \cdot (g_0 + p \cdot C_0)}$ – операторний коефіцієнт поширення.

Розв'язок рівняння (2.15) має вигляд

$$U(p, x) = A_1(p) \cdot e^{-\gamma x} + A_2(p) \cdot e^{\gamma x}, \quad (2.17)$$

де $A_1(p), A_2(p)$ – операторні постійні інтегрування, що не залежать від x .

Для операторного зображення струму з другого рівняння (2.14) з урахуванням (2.17) отримуємо:

$$I(p, x) = \frac{1}{Z_c(p)} \cdot [A_1(p) \cdot e^{-\gamma x} - A_2(p) \cdot e^{\gamma x}], \quad (2.18)$$

де $Z_c(p) = \sqrt{\frac{r_0 + p \cdot L_0}{g_0 + p \cdot C_0}}$ – операторний хвильовий опір.

Розглянемо лінію без спотворень, коли $\frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0}$.

В цьому випадку $Z_c(p) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$, а $\gamma = \sqrt{r_0 \cdot g_0} + p \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}$.

Або $\gamma = \alpha + \frac{p}{v}$, де $\alpha = \sqrt{r_0 \cdot g_0}$, $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}$.

Зображення струмів та напруг в довільній точці лінії можна тоді записати:

$$\left. \begin{aligned} U(p, x) &= A_1(p) \cdot e^{-p \frac{x}{v}} \cdot e^{-\alpha x} + A_2(p) \cdot e^{p \frac{x}{v}} \cdot e^{\alpha x}, \\ I(p, x) &= \frac{1}{Z_c(p)} \cdot \left[A_1(p) \cdot e^{-p \frac{x}{v}} \cdot e^{-\alpha x} - A_2(p) \cdot e^{p \frac{x}{v}} \cdot e^{\alpha x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Для знаходження оригіналів напруги $u(x, t)$ і струму $i(x, t)$ необхідно знайти оригінали кожної складової в (2.20).

Нехай оригіналом зображення $A_1(p)$ є функція часу $\psi_1(t)$, тобто $A_1(p) = L[\psi_1(t)]$ і $A_2(p) = L[\psi_2(t)]$. Коефіцієнти $e^{-\alpha x}$ і $e^{\alpha x}$ не залежать від p і, отже, вони залишаються множниками і для оригіналів. За теоремою зміщення для зображень при $F(p) = L[f(t)]$

$$e^{-T \cdot p} \cdot F(p) = L[f(t - T)]. \quad (2.21)$$

Таким чином, напруга і струм в будь-якій точці лінії відповідно до вищезгаданого

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \psi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \cdot e^{-\alpha x} + \psi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \cdot e^{\alpha x}, \\ i(x, t) &= \frac{1}{z_c} \cdot \left[\psi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \cdot e^{-\alpha x} - \psi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \cdot e^{\alpha x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Якщо в (2.22) ввести позначення $\psi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = \varphi_1(x - v \cdot t)$ і

$\psi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = \varphi_2(x + v \cdot t)$, то отримаємо вирази, що збігаються з (2.12).

Розглянемо детальніше першу складову в першому рівнянні (2.22), припустивши для спрощення, що $\alpha = 0$ (лінія без втрат). Нехай в деякий момент часу $t = t_0$ розподіл функції $\psi_1\left(t_0 - \frac{x}{v}\right)$ вздовж лінії поданий графіком, зображеним на рис. 2.1

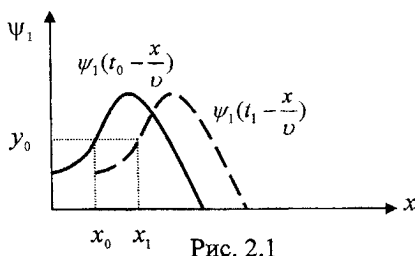


Рис. 2.1

В точці лінії $x = x_0$ значення цієї функції $y_0 = \psi_1\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right)$.

Таке ж значення функції буде мати в момент $t_1 > t_0$ та точка лінії, для якої виконується рівність
$$t_0 - \frac{x_0}{v} = t_1 - \frac{x_1}{v},$$

тобто $x_1 = x_0 + v \cdot (t_1 - t_0)$. Звідси випливає, що ордината $y_0 = \psi_1\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right)$ початкової кривої за час $\Delta t = t_1 - t_0$ переміщується вздовж лінії на відстань $\Delta x = x_1 - x_0 = v \cdot \Delta t$ (рис. 2.1). Подібне міркування справедливо для будь-якої ординати початкової кривої. Тому можна вважати, що за будь-який інтервал часу Δt функція $\psi_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ переміщується без спотворення і зміни амплітуди вздовж лінії в додатному напрямі осі x на відстань $\Delta x = v \cdot \Delta t$. Інакше кажучи, ця функція визначає хвилю напруги, що поширюється вздовж лінії без втрат у вигляді хвилі без спотворення і затухання з постійною швидкістю $v = 1/\sqrt{L_0 \cdot C_0}$. Таку хвилю називають *прямою* або *падаючою хвилею*.

Оскільки аргументи функцій ψ_1 і ψ_2 відрізняються тільки знаками перед тими складовими, до яких входить швидкість, то функція ψ_2 визначає хвилю напруги, що переміщується від кінця лінії до її початку. Цю хвилю напруги називають *зворотною* або *відбитою*.

В загальному випадку напруга лінії складається з напруг прямої і зворотної хвилі.

$$u = u_n + u_b, \quad (2.23)$$

а струм є різницею струмів падаючої та відбитої хвиль

$$i = i_n - i_b, \quad (2.24)$$

причому

$$i_n = \frac{u_n}{z_c}, \quad i_b = \frac{u_b}{z_c}. \quad (2.25)$$

Наявність в виразах для u та i множників $e^{-\alpha \cdot x}$ і $e^{\alpha \cdot x}$ показує, що обидві хвилі, пряма і зворотна, із просуванням їх вздовж лінії затухають за показниковим законом. Причиною затухання хвиль є поступове перетворення електромагнітної енергії в тепло, що виділяється в проводах і в середовищі навколо них.

2.4. Виникнення хвиль при підключення лінії до джерела постійної напруги

Розглянемо лінію без втрат, яка в момент часу $t = 0$ під'єднується до джерела постійної напруги U_0 з внутрішнім опором, рівним нулю.

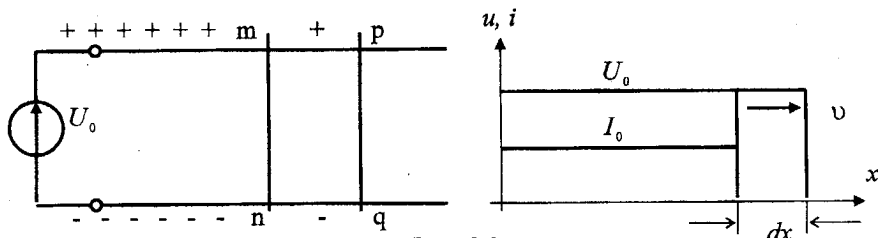


Рис. 2.2

Після підключення джерела до лінії на початку лінії відразу ж досягає постійного значення U_0 і виникає хвиля прямокутної форми, що переміщується вздовж лінії зі швидкістю v (рис. 2.2). Припустимо, що в будь-який момент t хвиля досягла перетину mn . Тоді в усіх точках лівіше цього перетину між проводами напруга дорівнюватиме U_0 , а правіше цього перетину напруга дорівнюватиме нулю. Точка, що обмежує ділянки лінії, до якої дійшло хвильове збудження, називається *фронтом хвилі*. На поверхні верхнього проводу накопичується позитивний заряд, величина якого лівіше перетину mn на одиницю довжини складає $q_0 = C_0 \cdot U_0$. За час dt хвиля зміститься правіше перетину mn на відстань $dx = v \cdot dt$, при цьому відрізок лінії dx отримає заряд $dq = C_0 \cdot U_0 \cdot dx$, що проходить по верхньому проводу до перетину pq (рис. 2.2.). Цей рух заряду створює по всій довжині лінії від джерела до перетину pq струм

$$i = \frac{dq}{dt} = C_0 \cdot U_0 \cdot \frac{dx}{dt} = C_0 \cdot U_0 \cdot v = C_0 \cdot U_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} = \frac{U_0}{z_c} = I_0. \quad (2.26)$$

Водночас з появою на поверхні верхнього проводу лінії позитивного заряду на поверхні нижнього проводу з'являється негативний заряд. Протилежні заряди утворюють електричне поле між проводами по всій довжині ділянки лінії, якою вже пройшла хвиля. При виникненні електричного поля на фронті хвилі між щойно зарядженими ділянками проводів (mn і pq) протікає струм зміщення. При просуванні хвилі шлях струму збільшується, але для лінії без втрат величина струму залишається незмінною.

В контурі, що охоплюється цим струмом, створюється магнітний потік, лінії якого лежать в площинах, перпендикулярних до осей проводів. При переміщенні хвилі на довжину $dx = v \cdot dt$, магнітний потік через поверхню контура збільшується на величину $d\Phi = L_0 dx \cdot I_0 = L_0 \cdot I_0 \cdot v \cdot dt$. При виникненні потоку $d\Phi$ в контурі $mpqn$ наводиться е.р.с. самоіндукції

$$\frac{d\Phi}{dt} = L_0 \cdot I_0 \cdot v. \quad (2.27)$$

Енергія, що віддається джерелом за одиницю часу, дорівнює $U_0 \cdot I_0$. Хвиля за одиницю часу переміщається на довжину, чисельно рівну v . Таким чином на кожному одиничному відрізьку лінії, пройденому хвилею, накопичується енергія $C_0 \cdot U_0^2/2$ в електричному полі та $L_0 \cdot I_0^2/2$ в магнітному полі. За законом збереження енергії:

$$U_0 \cdot I_0 = v \cdot \left(\frac{C_0 \cdot U_0^2}{2} + \frac{L_0 \cdot I_0^2}{2} \right).$$

Підставивши в ліву частину цього виразу значення струму $I_0 = C_0 \cdot U_0 \cdot v$ (2.26), отримаємо:

$$\frac{C_0 \cdot U_0^2}{2} = \frac{L_0 \cdot I_0^2}{2}, \quad (2.28)$$

тобто, на пройденій хвилею ділянці лінії значення енергії електричного та магнітного полів рівні між собою.

Якщо до лінії під'єднується джерело з активним внутрішнім опором r_s , струм і напруга падаючої хвилі зменшуються, тому що

$$\begin{aligned} u_n &= U_0 - i_n \cdot r_s, & i_n &= \frac{u_n}{z_c}, \\ u_n &= \frac{U_0 \cdot z_c}{z_c + r_s}, & i_n &= \frac{U_0}{z_c + r_s}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В цьому і наступному параграфіях відображені лише процеси формування падаючої хвилі. Процеси в лінії, коли падаюча хвиля досягає кінця лінії, – описуються в наступних параграфіях.

2.5. Падаюча хвиля при підключенні до лінії довільного джерела

Розглянемо форму падаючої хвилі, коли до лінії під'єднується джерело без втрат з експоненціальною формою зміни напруги $u(t) = U_0 \cdot e^{-\varepsilon t}$ (рис. 2.3, а). В момент підключення ($t = 0$) напруга на затискачах лінії ($x = 0$) $u(0,0) = U_0$. Таким чином, фронт падаючої хвилі має напругу U_0 . За час t_1 фронт хвилі з напругою $u_n(x_1, t_1) = U_0 \cdot e^{-\varepsilon \left(t_1 - \frac{x_1}{v} \right)} = U_0$ переміщується на відстань $x_1 = v \cdot t_1$, а на затискачах лінії ($x = 0$) напруга буде дорівнювати $u_n(0, t_1) = U_0 \cdot e^{-\varepsilon \cdot t_1} < U_0$ (рис. 2.3, б). В момент часу $t_2 > t_1$ фронт хвилі досягне відстані $x_2 = v \cdot t_2 > x_1$ від початку лінії (рис. 2.3, б),

при цьому $u_n(x_2, t_2) = U_0 \cdot e^{-\varepsilon \cdot \left(t_2 - \frac{x_2}{v} \right)} = U_0$. На початку лінії напруга стане $u_n(0, t_2) = U_0 \cdot e^{-\varepsilon \cdot t_2} < u_n(0, t_1)$.

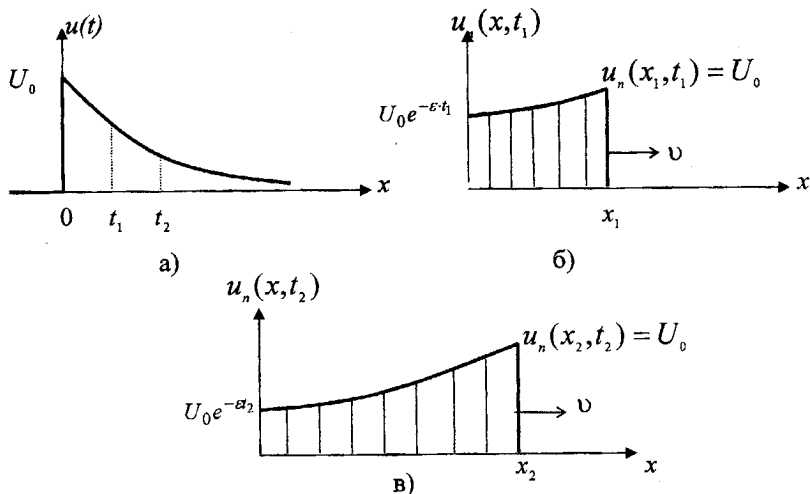


Рис. 2.3

Падаючу хвилю напруги можна записати в аналітичному вигляді:

$$u(x, t) = \begin{cases} U_0 \cdot e^{-\varepsilon \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right)}, & x < v \cdot t; \\ 0, & x > v \cdot t. \end{cases} \quad (2.30)$$

Оскільки хвильовий опір лінії чисто активний, то падаюча хвиля струму повторює хвилю напруги.

На рис.2.4, б) показано графік розподілу падаючої хвилі напруги в момент t_1 при підключенні до лінії джерела синусоїдної напруги (рис.2.4, а).

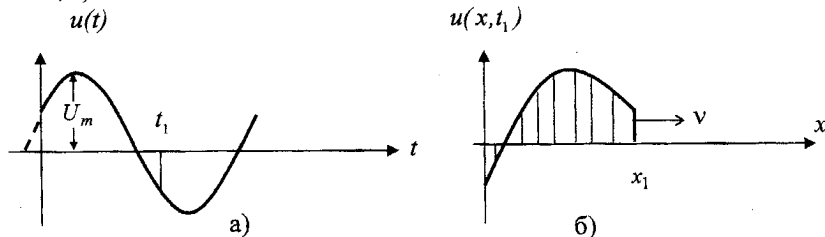


Рис. 2.4

Як вже вказувалося раніше, при довжині лінії $\ell = 100$ км час руху хвилі $t_p = \frac{\ell}{v} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} c$ (при промисловій частоті $f = 50$ Гц, $T = 0,02 c$) і зміна

фази напруги джерела становить всього близько 6° , тому можна вважати, що форма хвилі залишається прямокутною.

Форма падаючої хвилі суттєво залежить від характеру та величини внутрішнього опору джерела.

Розглянемо джерело з постійною е.р.с. та індуктивним внутрішнім опором, яке під'єднується до лінії (рис. 2.5, а).

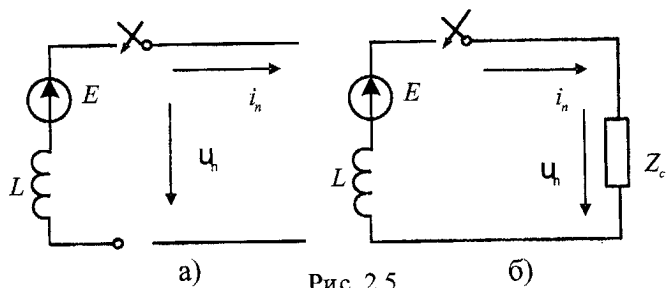


Рис. 2.5

За другим законом Кірхгофа:

$$L \frac{di_n}{dt} + u_n = E. \quad (2.31)$$

Оскільки $u_n = Z_c \cdot i_n$, то

$$L \frac{di_n}{dt} + z_c \cdot i_n = E. \quad (2.32)$$

Рівнянню (2.32) відповідає еквівалентна схема (рис. 2.5, б), в якій лінія замінена активним хвильовим опором Z_c . При нульових початкових умовах розв'язок рівняння (2.32) має вигляд:

$$i_n = \frac{E}{z_c} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_c}{L}t} \right), \quad u_n = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_c}{L}t} \right). \quad (2.33)$$

Графік залежності падаючої хвилі напруги на початку лінії від часу показаний на рис. 2.6, а).

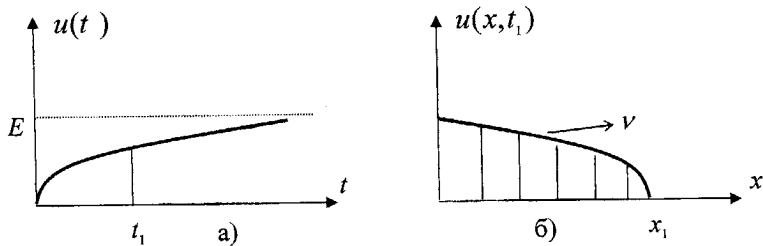


Рис. 2.6

На рис. 2.6, б) показано графік розподілу напруги вздовж лінії в момент $t = t_1$, коли фронт хвилі змістився на відстань $x_1 = v \cdot t_1$ від її початку.

Перехід до еквівалентної схеми дозволяє визначити форму хвилі при будь-яких внутрішніх опорах джерел і додаткових зосереджених навантаженнях на початку лінії. Важливо відзначити, що форма падаючої хвилі не залежить від навантаження лінії. Оскільки для лінії без втрат завжди $u_n = i_n \cdot z_c$, де z_c – дійсне число, то на еквівалентних схемах лінія зображається активним опором z_c . Так, наприклад, на рис. 2.7, б) показана

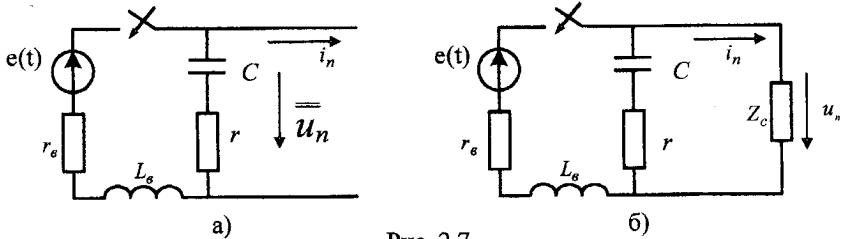


Рис. 2.7

еквівалентна схема для визначення падаючих хвиль на початку лінії, коли вона під'єднується до джерела за схемою рис. 2.7, а).

Для розрахунку падаючої хвилі напруги u_n в еквівалентній схемі можна користуватися будь-яким відомим методом розрахунку перехідного процесу в колі із зосередженими параметрами – класичним, операторним, за допомогою інтеграла Дюамеля і т.д.

Приклад 2.1. Знайти закон зміни падаючої хвилі напруги від часу для лінії, показаної на рис. 2.7, а). Параметри кола: $e(t) = E = 20 \text{ В}$, $r_g = 200 \text{ Ом}$, $r = 100 \text{ Ом}$, $z_c = 600 \text{ Ом}$, $C = 200 \text{ нФ}$, $L_g = 0$.

Розв'язання. Розрахуємо u_n класичним методом. Оскільки при $L_g = 0$ перехідний процес описується диференціальним рівнянням першого порядку, то повний розв'язок складатиметься із суми примусової та вільної складових

$$u_n = u_{np} + u_{ne},$$

де $u_{np} = \frac{E}{r_g + z_c} \cdot z_c = 15 \text{ В}$ – примусова складова; $u_{ne} = A \cdot e^{p \cdot t}$ – вільна складова.

Характеристичне рівняння знаходимо методом вхідного опору.

$$Z_{ax}(p) = r_s + \frac{z_c \cdot \left(r + \frac{1}{C \cdot p} \right)}{z_c + r + \frac{1}{C \cdot p}} = r_s + \frac{z_c \cdot (r \cdot C \cdot p + 1)}{(z_c + r) \cdot C \cdot p + 1} =$$

$$= \frac{[r_s \cdot (z_c + r) + z_c \cdot r] \cdot C \cdot p + (r_s + z_c)}{(z_c + r) \cdot C \cdot p + 1} = 0,$$

звідки
$$p = -\frac{r_s + z_c}{[r_s \cdot (z_c + r) + z_c \cdot r] \cdot C} = -2 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}.$$

Таким чином:

$$u_n = 15 + A \cdot e^{-2 \cdot 10^4 \cdot t}.$$

При $t = 0$ $u_c(0) = 0$, струм джерела

$$i(0) = \frac{E}{r_s + \frac{r \cdot z_c}{r + z_c}} = 0,07 \text{ A};$$

$$u_n(0) = i(0) \cdot \frac{r \cdot z_c}{r + z_c} = 6 \text{ B}.$$

Звідки

$$A = u_n(0) - u_{нпр} = 6 - 15 = -9 \text{ B},$$

$$u_n = 15 - 9 \cdot e^{-2 \cdot 10^4 \cdot t} \text{ B}.$$

2.6. Відбиття хвилі від кінця лінії

В однорідній лінії, що під'єднується до джерела при нульових початкових умовах (відсутні напруга і струм до комутації) виникає тільки одна падаюча хвиля напруги і струму, що поширюється вздовж лінії зі швидкістю v , доки вона не досягне кінця лінії. Досягнувши кінця лінії, хвиля при неузгодженому навантаженні частково відбивається, і виникає відбита хвиля. Розглянемо лінію без втрат з хвильовим опором z_c , яка навантажена на активний опір r_n і під'єднується до джерела постійної напруги U_0 з нульовим внутрішнім опором (рис. 2.8, а). Джерело вмикається в момент часу $t = 0$ і в лінії виникає падаюча хвиля напруги прямокутної форми $u_n = U_0$, що через час $t_1 = \frac{\ell}{v}$ досягає кінця лінії, де відбивається, і виникає відбита хвиля u_s . Напругу і струм в кінці лінії можна записати в вигляді:

$$u_2 = u_n + u_B, \quad i_2 = i_n - i_B, \quad (2.34)$$

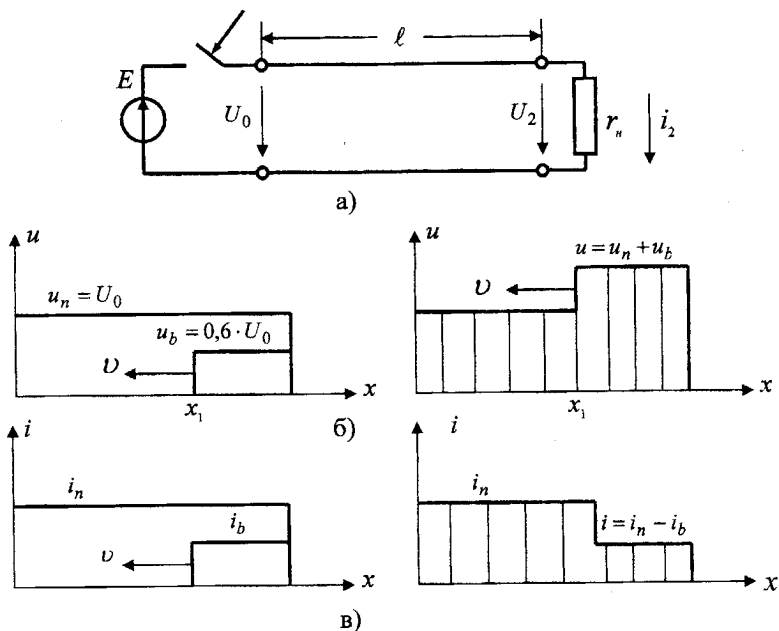


Рис. 2.8

Причому $u_2 = r_n \cdot i_2$.

Враховуючи, що $i_n = \frac{u_n}{z_c}$ і $i_2 = \frac{u_2}{z_c}$, перепишемо (2.34):

$$i_2 \cdot r_n = u_n + u_b, \quad i_2 \cdot z_c = u_n - u_b.$$

Додамо спочатку ці рівняння, а потім віднімемо і будемо мати:

$$2 \cdot u_n = i_2 \cdot (r_n + z_c), \quad 2 \cdot u_b = i_2 \cdot (r_n - z_c).$$

Оскільки коефіцієнт відбиття $n = \frac{u_b}{u_n}$, отримуємо:

$$n = \frac{r_n - z_c}{r_n + z_c}. \quad (2.35)$$

На рис. 2.8, б) і в) показані графіки розподілу напруги і струму падаючої та відбитої хвиль та підсумкових напруг $u = u_n + u_b$ й струму $i = i_n - i_b$, коли відбита хвиля пройшла деяку відстань від кінця лінії $(\ell - x_1)$. При побудові прийнято, що $r_n = 4 \cdot z_c$ і $n = 0,6$.

До точок з координатами $x < x_1$ відбита хвиля ще не дійшла, і напруга в лінії $u = u_n + U_0$ та $i = i_n = \frac{U_0}{z_c}$. Для точок лінії с координатами $x > x_1$:

$$u = u_n + u_B = U_0 + 0,6 \cdot U_0 = 1,6 \cdot U_0,$$

$$i = i_n - i_B = \frac{U_0}{z_c} - 0,6 \cdot \frac{U_0}{z_c} = 0,4 \cdot \frac{U_0}{z_c}.$$

В окремому випадку, коли лінія розімкнена на кінці (холостий хід) $r_n = \infty$, $n = 1$, хвиля відбивається повністю без зміни знаку, підсумкова напруга подвоюється, а струм спадає до нуля. Якщо лінія на кінці короткозамкнена ($r_n = 0$), то $n = -1$, хвиля відбивається повністю зі зміною знаку, напруга зменшується до нуля, а струм подвоюється.

З виразу (2.35) випливає, що при $r_n > z_c$, $n > 0$ напруга в лінії після відбиття хвилі зростає, а струм зменшується. Якщо ж $r_n < z_c$, $n < 0$, то напруга зменшується, а струм збільшується.

Коли $r_n = z_c$, має місце узгоджений режим, $n = 0$, відбитої хвилі немає. Як тільки падаюча хвиля дійде до кінця, в лінії встановлюються постійні струм і напруга, і вся енергія, що приноситься падаючою хвилею, повністю поглинається опором r_n . Перехідний процес триває стільки часу, скільки необхідно для того, щоб хвиля пройшла відстань від початку лінії до кінця $t_n = \frac{\ell}{v}$.

2.7. Відбиття хвилі від кінця лінії при довільному навантаженні

Нехай після підключення лінії до джерела вздовж неї переміщуються відомі падаючі хвилі напруги u_n і струму i_n , причому $u_n = i_n \cdot z_c$, де z_c – хвильовий опір лінії. Лінія навантажена на пасивний двополосник (рис.2.9, а).

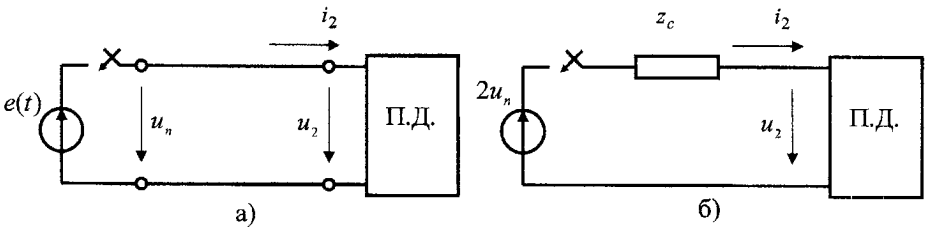


Рис. 2.9

Напруга на вході двополосника або, що те ж саме, в кінці лінії може бути подана у вигляді суми падаючої і відбитої хвиль, а струм – їх різниці

$$u_2 = u_n + u_B, \quad i_2 = i_n - i_B, \quad (2.36)$$

або

$$u_2 = u_n + u_B, \quad i_2 \cdot z_c = u_n - u_B. \quad (2.37)$$

Додавши два останніх рівняння, отримуємо

$$2 \cdot u_n = i_2 \cdot z_c + u_2. \quad (2.38)$$

Рівняння (2.38) є основним розрахунковим рівнянням для визначення напруги і струму в місці відбиття хвилі. Рівнянню (2.38) відповідає еквівалентна схема заміщення з зосередженими параметрами, (рис. 2.9, б), що дозволяє розрахувати перехідний процес в кінці лінії, тобто знайти u_2 і i_2 , а після цього і відбиті хвилі напруги та струму. Для складання схеми заміщення необхідно:

- послідовно з опором навантаження, що включений в кінці лінії, з'єднати активний опір, який дорівнює хвильовому опору лінії z_c ;
- за допомогою ключа під'єднати цю схему до джерела з напругою, що дорівнює подвоєній напрузі падаючої хвилі в момент часу t_1 , відповідний моменту приходу падаючої хвилі, який відстає від моменту підключення лінії до джерела на $t_1 = \ell/v$.

Відлік часу при розрахунку схеми заміщення краще починати з моменту t_1 і тому зручно ввести нову змінну $\tau = t - t_1$.

Таким чином, при розрахунку перехідних процесів в лінії застосовуються двічі еквівалентні схеми заміщення з зосередженими параметрами – один раз для визначення форми падаючої хвилі, другий – для знаходження відбитих хвиль напруги і струму.

Приклад 2.2. Лінія без втрат з хвильовим опором $z_c = 400 \text{ Ом}$ та активно-індуктивним навантаженням ($r_n = 20 \text{ Ом}, L_n = 1 \text{ Г}$),

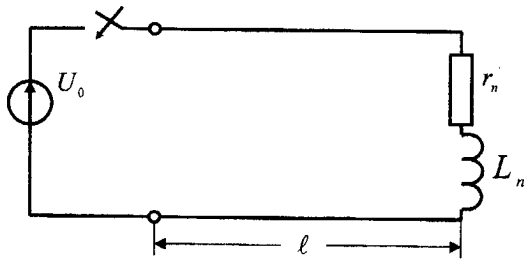


Рис. 2.10

під'єднується до джерела постійної напруги $U_0 = 420 \text{ В}$. Побудувати графіки розподілу напруги і струму після відбиття хвилі від кінця лінії ($t_1 < t < 2t_1$).

Розв'язання. Складемо схему заміщення для визначення i_2 і u_2 (рис.2.11) і запишемо диференціальне рівняння за другим законом Кірхгофа

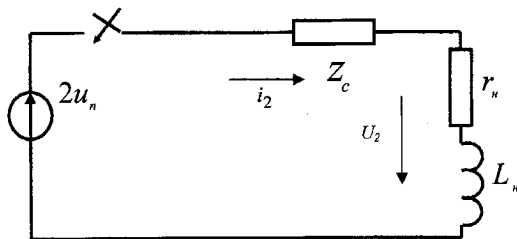


Рис. 2.11

$$L_n \cdot \frac{di_2}{dt} + (z_c + r_n) \cdot i_2 = 2 \cdot u_n,$$

причому $u_n = U_0$. Рішення цього рівняння при початкових нулевих умовах ($\tau = 0, i_2 = 0$) для кінця лінії

$$i_2 = \frac{2 \cdot U_0}{z_c + r_n} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_c + r_n}{L} \cdot \tau} \right) = 2 \cdot \left(1 - e^{-420 \cdot \tau} \right), \text{ А};$$

де $\tau = t - t_1$, $t_1 = \frac{\ell}{v}$ - час проходження падаючої хвилі від початку лінії до її кінця.

Оскільки

$$u_2 = r_n \cdot i_2 + L_n \cdot \frac{di_2}{dt},$$

то

$$u_2 = 40 + 800 \cdot e^{-420 \cdot \tau}, \text{ В};$$

відбита хвиля в кінці лінії

$$u_g = u_2 - u_{2n} = 40 + 800 \cdot e^{-420 \cdot \tau} - 420 = -380 + 800 \cdot e^{-420 \cdot \tau}, \text{ В}.$$

Відбита хвиля в довільній точці лінії, якщо позначити через y координату хвилі від кінця лінії,

$$u_g(y,t) = 380 + 800 \cdot e^{-420 \left(\tau - \frac{y}{v} \right)} \quad 0 < \tau < t_1,$$

$$u_g(y,t) = 0 \quad \tau < 0$$

Якщо врахувати, що $\tau = t - \frac{\ell}{v}$, а $y = \ell - x$, то для ($t_1 < t < 2t_1$).

$$u_g(y,t) = \begin{cases} -380 + 800 \cdot e^{-420 \left(t + \frac{x}{v} - \frac{2\ell}{v} \right)} & (t_1 < t < 2t_1) \\ 0 & (0 < t < t_1) \end{cases} \quad (2.39)$$

де y – відстань від кінця лінії,

x – відстань від початку лінії,

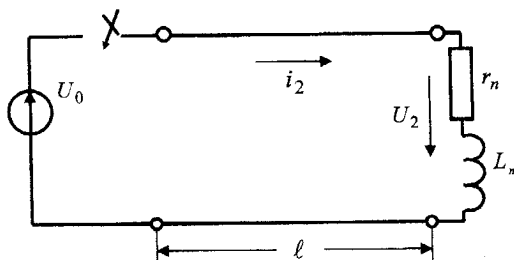
t – час від початку моменту руху прямої хвилі.

Коефіцієнт відбиття в кінці лінії

$$n = \frac{u_g}{u_{2n}} = \frac{-380 + 800 \cdot e^{-420 \cdot \tau}}{420} = 1,9 \cdot e^{-420 \cdot \tau} - 0,9. \quad (2.40)$$

З виразу (2.40) випливає, що як тільки падаюча хвиля досягає кінця лінії ($t = t_1, \tau = 0$), коефіцієнт відбиття $n = 1$, що відповідає розімкненій лінії (струм в індуктивності не може змінитися стрибком) і падаюча хвиля повністю відбивається без зміни знаку. Із збільшенням часу τ фронт відбитої хвилі переміщується до початку лінії, а коефіцієнт відбиття n зменшується, і відбита хвиля в кінці лінії також зменшується. На рис. 2.12 показані графіки розподілу вздовж лінії падаючої і відбитої хвиль і сумарного значення напруги і струму для моменту часу, коли відбита хвиля минула відстань ℓ_1 від кінця лінії ($\tau_1 = \frac{\ell_1}{v}$).

Зі збільшенням τ коефіцієнт відбиття прямує до $n = -0,9$, що відповідає значенню, коли лінія замкнена тільки на опір r_n . В режимі, що встановився при постійному струмі, індуктивність відповідає короткому замиканню.



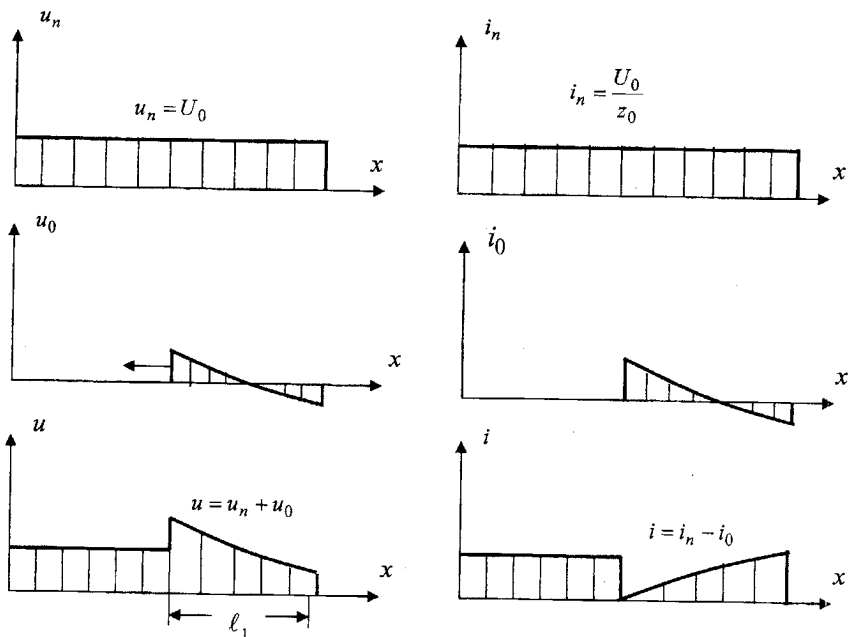


Рис. 2.12

Даний приклад показує, що в момент падіння хвилі на індуктивність напруга подвоюється, створюючи небезпеку пробоею ізоляції котушки. Тому перші витки обмоток трансформаторів у відповідних випадках виконують зі значно посиленою ізоляцією.

Приклад 2.3. Визначити закон зміни падаючої і відбитої хвиль напруги при вмиканні лінії (рис. 2.13) на джерело напруги $u = -8 \cdot 10^4 \cdot t + 200 [B]$.

Хвильовий опір лінії $z_c = 400 \text{ Ом}$, $r = 400 \text{ Ом}$, $L = 0,5 \text{ Г}$, $C = 12,5 \text{ мкФ}$.

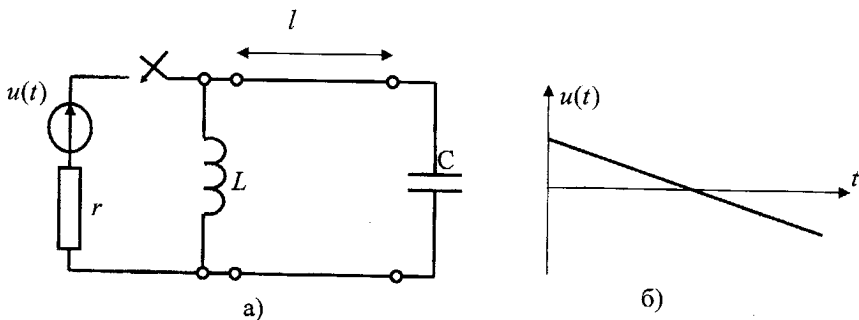


Рис.2.13

Розв'язання. Визначимо закон зміни падаючої хвилі, склавши з цією метою схему заміщення (рис. 2.14, а).

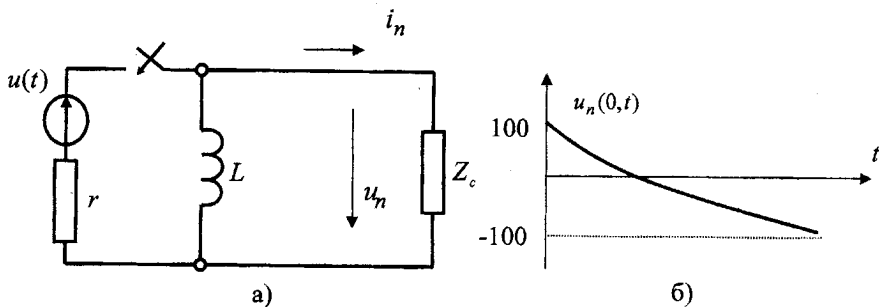


Рис.2.14

Для визначення $u_n(t)$ використовуємо інтеграл Дюамеля

$$u_n(t) = U(0) \cdot h(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau, \quad (2.41)$$

де $U(0)$ – значення напруги джерела при $t = 0$,
 $h(t)$ – перехідна характеристика для напруги $u_n(t)$.

Для заданої схеми:

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-400t}, \quad u'(\tau) = -8 \cdot 10^4, \text{ В/с.}$$

Після підстановки одержуємо закон зміни падаючої хвилі на початку лінії ($x = 0$) (рис. 2.14, б): $u_n(0, t) = -100 + 200 \cdot e^{-400t}$.

Відповідно до (2.30) залежність падаючої хвилі напруги від часу визначається виразом:

$$u_n(x, t) = \begin{cases} -100 + 200 \cdot e^{-400\left(t - \frac{x}{v}\right)}, & x < v \cdot t \\ 0, & x > v \cdot t \end{cases} \quad (2.42)$$

Знайдемо напругу в кінці лінії, коли падаюча хвиля досягає кінця лінії ($x = \ell$), розрахувавши схему заміщення (рис. 2.15).

Оскільки напруга джерела має складний вигляд, для знаходження $u_2(t)$ застосовуємо інтеграл Дюамеля (2.41). Враховуючи, що $U(0) = -100 \text{ В}$,

$$h(t) = 1 - e^{-200\left(t - \frac{\ell}{g}\right)}; \quad 2 \cdot u_n = -200 + 400 \cdot e^{-400\left(t - \frac{\ell}{v}\right)}.$$

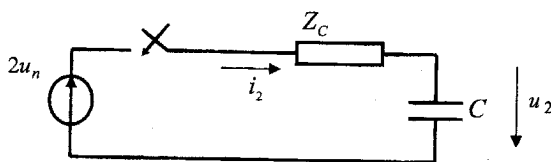


Рис.2.15

Ввівши нову змінну $\tau = t - \frac{\ell}{v}$, одержуємо

$$u_2(\tau) = -200 + 600 \cdot e^{-200\tau} - 400 \cdot e^{-400\tau}, \text{ В.} \quad (2.42)$$

Відбита хвиля в кінці лінії

$$u_s = u_2 - u_{2n} = -100 + 600 \cdot e^{-200\tau} - 600 \cdot e^{-400\tau}, \text{ В.}$$

Коефіцієнт відбиття в кінці лінії

$$n = \frac{u_s}{u_{2n}} = \frac{-1 + 6 \cdot e^{-200\tau} - 6 \cdot e^{-400\tau}}{-1 + 2 \cdot e^{-400\tau}}. \quad (2.43)$$

Аналітичний вираз відбитої хвилі в будь-якій точці лінії в будь-який момент часу за аналогією з (2.39) для

$$u_s(x, t) = \begin{cases} -100 + 600 \cdot e^{-200\left(t + \frac{x}{v} - \frac{2 \cdot \ell}{v}\right)} - 400 \cdot e^{-400\left(t + \frac{x}{v} - \frac{2 \cdot \ell}{v}\right)} & (t_1 < t < 2t_1), \\ 0 & (0 < t < t_1). \end{cases}$$

В момент $\tau = 0$ коефіцієнт відбиття $n = -1$, що відповідає короткому замиканню лінії, тому що незаряджена ємність в перший момент перехідного процесу аналогічна короткому замиканню. Із збільшенням τ збільшується і n , приймаючи при $\tau \rightarrow \infty$ значення $n = 1$.

2.8. Відбиття і заломлення хвиль в місці спряження двох однорідних ліній

Відбиття хвиль відбувається не тільки в кінці лінії при непогодженому навантаженні, але і в точках сполучення двох однорідних ліній з різноманітними хвильовими опорами.

Дуже часто повітряна лінія переходить в кабельну і навпаки. Такий перехід можливий при пересіканні лінії зв'язку з високовольтними або залізничними лініями, при пересіканні широких рік і т.п. В таких випадках дві лінії виявляються ввімкненими послідовно. Хвилі, що рухаються по одній лінії, потрапляючи на іншу, змінюють свою амплітуду (заломлюються) і частково відбиваються від місця спряження двох ліній. Часто в тому місці, де лінії з'єднуються, вмикають елементи з зосередженими сталими — індуктивні котушки, конденсатори або

резистори. Їхнє призначення може бути найрізноманітнішим – обмеження перенапруг, струмів короткого замикання, зменшення викривлень і т.п. Ці елементи істотно впливають на характер перехідних процесів.

Розглянемо спочатку випадок, коли послідовно з'єднані дві лінії з різнорозмірними хвильовими опорами (рис. 2.16).

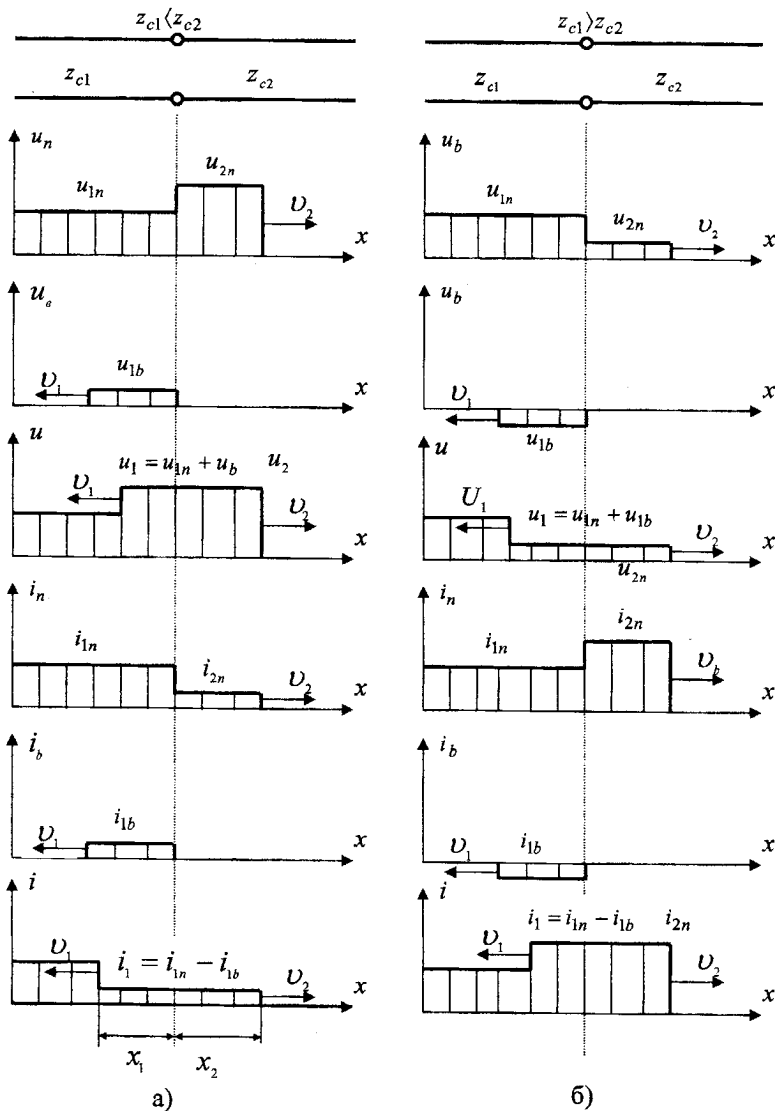


Рис.2.16

Нехай падаюча хвиля прямокутної форми $u_{1n} = U_0$ переміщається по першій лінії після її ввімкнення до джерела постійної е.р.с. В момент $t_1 = \frac{\ell_1}{v}$ (ℓ_1 – довжина першої лінії) падаюча хвиля досягла кінця першої лінії. Позначимо напругу і струм в кінці першої лінії через u_1 і i_1 , а на початку другої лінії – u_2 і i_2 . В місці спряження виконуються рівності $u_1 = u_2$, $i_1 = i_2$. Якщо на час переходу хвилі з першої лінії в другу напруги не було, то безпосередньо після приходу хвилі до місця спряження в другій лінії виникає хвиля u_{2n} , що біжить в тому ж напрямку, що і хвиля u_{1n} , і називається *заломленою* хвилею, в той час як в першій лінії окрім хвилі u_m при $z_{c2} \neq z_{c1}$ обов'язково виникає відбита хвиля u_e , при цьому

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1n} + u_{1b} = u_2 = u_{2n}, \\ i_1 &= i_{1n} - i_{1b} = i_2 = i_{2n} \end{aligned}$$

або

$$\left. \begin{aligned} u_{1n} + u_{1b} &= u_{2n}, \\ u_{1n} - u_{1b} &= u_{2n} \cdot \frac{z_{c1}}{z_{c2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Оскільки $u_{1n} = i_{1n} \cdot z_{c1}$, $u_e = i_{1b} \cdot z_{c1}$, $u_{2n} = i_{2n} \cdot z_{c2}$ з (2.44) одержуємо

$$\left. \begin{aligned} u_{2n} &= \frac{2 \cdot z_{c2}}{z_{c2} + z_{c1}} \cdot u_{1n}, & u_{1b} &= \frac{z_{c2} - z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}} \cdot u_{1n}, \\ i_{2n} &= \frac{2 \cdot z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}} \cdot i_{1n}, & i_{1b} &= \frac{z_{c2} - z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}} \cdot i_{1n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

З отриманих співвідношень випливає, що в даному випадку заломлені і відбиті хвилі мають ту саму форму, що і падаючі хвилі. Для характеристики проходження хвилі в місці спряження ліній звичайно вводять величину, що називається *коефіцієнтом заломлення*. Для напруги

$$q_u = \frac{u_{2n}}{u_{1n}} = \frac{2 \cdot z_{c2}}{z_{c2} + z_{c1}}; \quad (2.46)$$

для струму

$$q_i = \frac{i_{2n}}{i_{1n}} = \frac{2 \cdot z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}}. \quad (2.47)$$

коефіцієнт відбиття

$$n = \frac{u_{1b}}{u_{1n}} = \frac{z_{c2} - z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}}. \quad (2.48)$$

Останній вираз показує, що друга лінія відносно першої при визначенні відбитих хвиль поводить як зосереджений активний опір z_{c2} .

Коефіцієнт заломлення можна записати через коефіцієнт відбиття

$$q_u = 1+n, \quad q_i = 1-n. \quad (2.49)$$

На рис. 2.16 показані графіки розподілу хвиль напруги і струму, коли відбита хвиля пройшла від місця спряження ліній відстань x_1 . Легко помітити, що в загальному випадку швидкості руху хвиль в лініях можуть відрізнятися одна від одної, тому будуть різні і відстані x_1 і x_2 .

З виразів (2.45) і рис. 2.16 випливає, що за умови $z_{c2} > z_{c1}$ (наприклад, при переході хвилі з кабельної лінії в повітряну), напруга заломленої хвилі більша напруги падаючої хвилі і може перевищити майже вдвічі напругу падаючої хвилі першої дільниці.

При $z_{c2} > z_{c1}$ заломлена хвиля напруги менша ніж падаючої.

Приклад 2.4. Прямокутна хвиля величиною $U_0 = 110 \text{ кВ}$ переходить з повітряної лінії з $z_{c1} = 400 \text{ Ом}$ на дві кабельні лінії з $z_{c2} = 50 \text{ Ом}$, $z_{c3} = 75 \text{ Ом}$ (рис. 2.17).



Рис.2.17

Визначити величину заломлених хвиль напруги і струму в кабельних лініях.

Розв'язання. Навантаженням першої лінії є паралельно з'єднані дві кабельні лінії

$$r_n = \frac{z_{c2} \cdot z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}} = 30 \text{ Ом} .$$

Коефіцієнт відбиття для першої лінії

$$n = \frac{r_n - z_{c1}}{r_n + z_{c1}} = -0,86 .$$

Величина відбитої хвилі

$$u_b = n \cdot u_{in} = n \cdot U_0 = -94,6 \text{ кВ} .$$

Напруга в кінці першої лінії

$$u_1 = u_{in} + u_b = 110 - 94,6 = 15,4 \text{ кВ}$$

Ця ж напруга буде заломленою в кабельних лініях, оскільки вони з'єднані паралельно

$$u_{2n} = u_{3n} = 15,4 \text{ кВ} .$$

Струми в кабельних лініях

$$i_{2n} = \frac{u_{2n}}{z_{c2}} = 308 \text{ A}, \quad i_{3n} = \frac{u_{3n}}{z_{c3}} = 205 \text{ A}.$$

Приклад 2.5. Визначити величину активного опору R , який потрібно під'єднати у місця сполучення ліній (рис. 2.18, а), щоб у повітряній лінії не було відбитих хвиль.

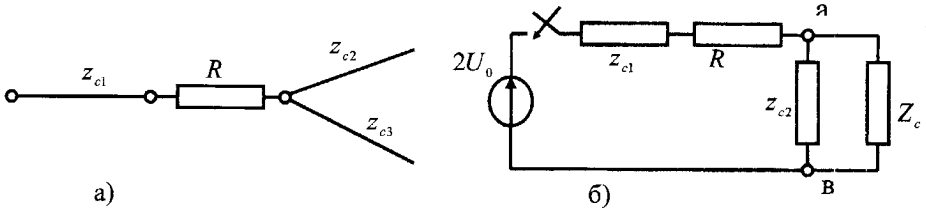


Рис.2.18

Знайти при цьому падаючі хвилі напруги і струму в кабельних лініях.

Розв'язання. Розрахункова схема для визначення перехідного процесу в кінці лінії показана на рис. 2.18, б). Як видно з схеми, навантаженням повітряної лінії є опір

$$r_n = R + \frac{z_{c2} \cdot z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}}.$$

Відбиття в повітряній лінії буде відсутнє, якщо $r_n = z_{c1}$, оскільки в цьому випадку коефіцієнт відбиття

$$n = \frac{r_n - z_{c1}}{r_n + z_{c1}} = 0.$$

Визначимо значення опору R

$$R = z_{c1} - \frac{z_{c2} \cdot z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}} = 400 - \frac{50 \cdot 75}{50 + 75} = 370 \text{ Ом}.$$

Напруга падаючих хвиль в кабельних лініях визначається напругою між вузлами a і $в$, тобто

$$u_{2n} = u_{3n} = \frac{2 \cdot U_0 \cdot \frac{z_{c2} \cdot z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}}}{z_{c1} + R + \frac{z_{c2} \cdot z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}}} = 8,25 \text{ кВ}.$$

$$i_{2n} = \frac{u_{2n}}{z_{c2}} = \frac{8,25 \cdot 10^3}{50} = 165 \text{ A},$$

$$i_{3n} = \frac{u_{2n}}{z_{c3}} = \frac{8,25 \cdot 10^3}{75} = 110 \text{ A}.$$

Наведені приклади показують, що включення активного опору в місці сполучення ліній знижує величину заломлених хвиль напруги.

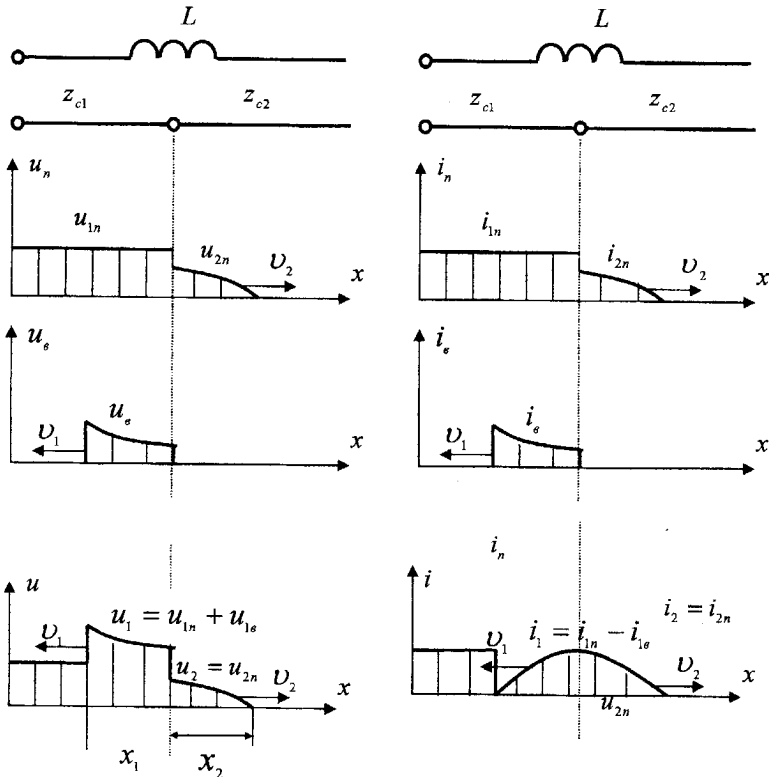


Рис.2.19

Розглянемо рух хвиль, коли в місці сполучення двох ліній ввімкнена індуктивність L (рис. 2.19), а падаюча хвиля прямокутної форми напругою U_0 .

Розрахункова еквівалентна схема для знаходження перехідного процесу в кінці першої лінії показана на рис. 2.20. Для цієї схеми справедливо диференціальне рівняння

$$L \cdot \frac{di_1}{dt} + (z_{c1} + z_{c2}) \cdot i_1 = 2 \cdot u_{1n}.$$

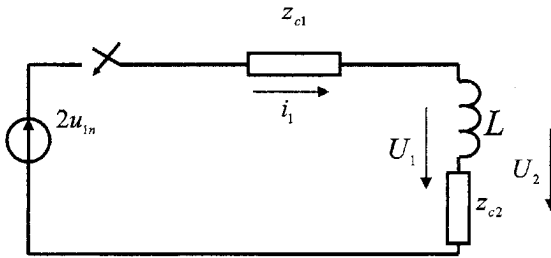


Рис.2.20

Його розв'язок при нульових початкових умовах

$$i_1 = \frac{2 \cdot u_{1n}}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_{c1} + z_{c2}}{L} \cdot \tau} \right), \quad (2.50)$$

де τ – час, що відраховується від моменту приходу до кінця першої лінії, падаючої хвилі.

Оскільки $u_1 = 2 \cdot u_{1n} - z_{c1} \cdot i_1$, то

$$u_1 = 2 \cdot u_{1n} \cdot \left(\frac{z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} + \frac{z_{c1}}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot e^{-\frac{z_{c1} + z_{c2}}{L} \cdot \tau} \right). \quad (2.51)$$

Відбита хвиля в кінці першої лінії

$$u_{1b} = u_1 - u_{1n} = u_{1n} \cdot \left[\frac{z_{c2} - z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}} + \frac{2 \cdot z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}} \cdot e^{-\frac{z_{c1} + z_{c2}}{L} \cdot \tau} \right]. \quad (2.52)$$

В місці сполучення ліній має місце рівність $i_1 = i_2$, тому падаючу (заломлену) хвилю на початку другої лінії можна знайти з виразу

$$u_2 = u_{2n} = i_2 \cdot z_{c2} = i_1 \cdot z_{c2} = \frac{2 \cdot u_{1n} \cdot z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_{c1} + z_{c2}}{L} \cdot \tau} \right). \quad (2.53)$$

В момент $\tau = 0$ (падаюча хвиля першої лінії досягла місця сполучення) $u_{1b} = u_{1n}$, $u_{2n} = 0$ коефіцієнт відбиття $n = 1$, тобто лінія веде себе як розімкнена на кінці. Із збільшенням часу відбита хвиля рухається зі швидкістю U_1 до початку першої лінії, заломлена хвиля зі швидкістю U_2 – до кінця другої лінії (рис. 2.19). З малюнку видно, що в результаті

ввімкнення реактивної котушки фронт заломлених хвиль набуває пологого характеру навіть при прямовисному фронті падаючих хвиль, однак напруга на початкових витках котушки в перші моменти часу подвоюється.

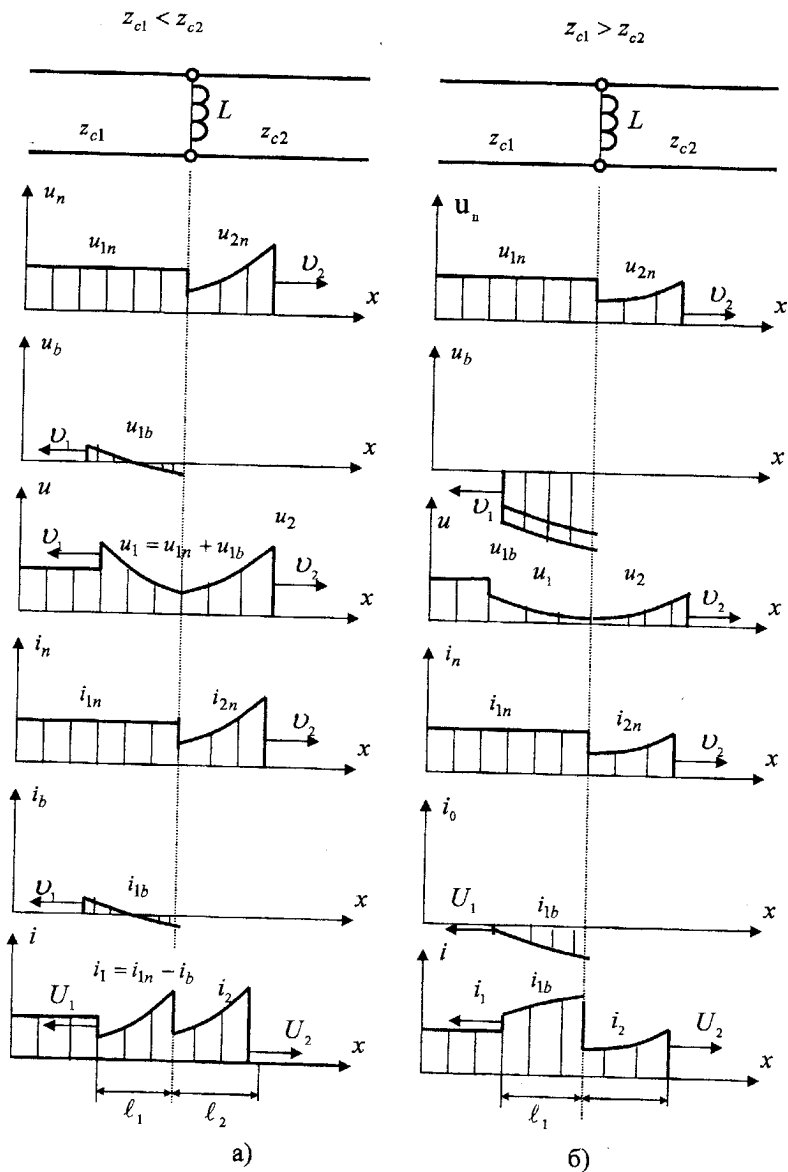


Рис. 2.21

Розглянемо випадок, коли індуктивність увімкнена між проводами лінії в місці з'єднання двох ліній (рис. 2.21).

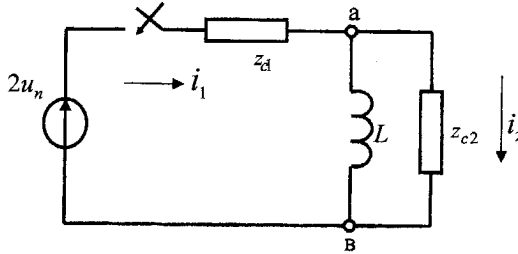


Рис. 2.22

Нехай по першій лінії рухається хвиля прямокутної форми. Складемо розрахункову схему для визначення перехідного процесу в кінці лінії (рис. 2.22). Вирішуючи будь-яким методом перехідний процес в цьому колі з зосередженими параметрами, знайдемо величину струму i_2 на початку другої лінії.

$$i_2 = i_{2n} = \frac{2 \cdot u_{1n}}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot e^{p \cdot \tau}, \quad (2.53)$$

де τ – час, що відраховується від моменту приходу падаючої хвилі до кінця першої лінії;

$p = -\frac{z_{c1} \cdot z_{c2}}{(z_{c1} + z_{c2}) \cdot L}$ – корінь характеристичного рівняння.

Відповідно до рис. 2.21 $u_1 = u_2$, тому

$$u_1 = u_2 = u_{2n} = i_2 \cdot z_{c2} = \frac{2 \cdot u_{1n} \cdot z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot e^{p \cdot \tau}. \quad (2.54)$$

Звідси

$$u_{1b} = u_1 - u_{1n} = u_{1n} \cdot \left[\frac{2 \cdot z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot e^{p \cdot \tau} - 1 \right]. \quad (2.55)$$

Вирази (2.54) і (2.55) дозволяють побудувати графіки розподілу хвиль в лініях. В момент $\tau = 0$ напруга відбитої хвилі першої лінії має таке саме значення, як при спряженні двох ліній без індуктивності.

$$u_{1b}(0) = u_{1n} \cdot \frac{z_{c2} - z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}},$$

напруга заломленої хвилі при $\tau = 0$

$$u_{2n}(0) = \frac{2 \cdot u_{1n} \cdot z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}}.$$

Із збільшенням часу напруга відбитої хвилі в місці спряження зменшується і прямує до значення $-u_{1n}$, а напруга заломленої хвилі

пряме до нуля. На рис. 2.21, а) показані графіки для $z_{c2} < z_{c1}$, на рис. 2.21, б) для $z_{c2} > z_{c1}$.

Аналогічно можна розрахувати і побудувати графіки руху хвиль при увімкненні в місце спряження двох ліній конденсатора.

2.9. Багатократне відбиття хвиль із прямокутним фронтом

Для з'ясування характеру багатократного відбиття хвиль розглянемо вмикання лінії, замкненої на навантаження з активним опором R_n , до джерела постійної напруги з внутрішнім опором R_g (рис. 2.23).

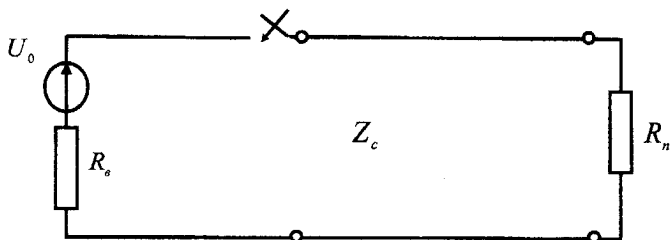


Рис. 2.23

Знайдемо коефіцієнти відбитої від початку n_1 і кінця n_2 лінії.

$$n_1 = \frac{R_g - z_c}{R_g + z_c}, \quad n_2 = \frac{R_n - z_c}{R_n + z_c}.$$

Перша падаюча хвиля відповідно виразу (2.25) має напругу

$$u_{n1} = \frac{U_0 \cdot z_c}{z_c + R_g} \quad \text{і струм} \quad i_{n1} = \frac{U_0}{z_c + R_g}.$$

Перша відбита хвиля має напругу $u_{b1} = u_{n1} \cdot n_2$ та струм $i_{b1} = i_{n1} \cdot n_2$.

Перша відбита хвиля рухається від кінця лінії до початку, відбивається від початку лінії і створює другу падаючу хвилю, $u_{n2} = u_{b1} \cdot n_1 = u_{n1} \cdot n_1 \cdot n_2$. Аналогічно визначаються всі наступні хвилі

$$\begin{aligned} u_{b2} &= u_{n2} \cdot n_2 = u_{n1} \cdot n_1 \cdot n_2^2, & u_{n3} &= u_{b2} \cdot n_1 = u_{n1} \cdot n_1^2 \cdot n_2^2, \\ u_{b3} &= u_{n3} \cdot n_2 = u_{n1} \cdot n_1^2 \cdot n_2^3, & u_{n4} &= u_{b3} \cdot n_1 = u_{n1} \cdot n_1^3 \cdot n_2^3 \text{ і т.д.} \end{aligned}$$

Таким чином, для k -ої відбитої хвилі $u_{bk} = u_{n1} \cdot (n_1 \cdot n_2)^{k-1} \cdot n_2$, а для $(k+1)$ -ої падаючої — $u_{n(k+1)} = u_{n1} \cdot (n_1 \cdot n_2)^k$. Підсумкова напруга в будь-якій точці лінії визначається як сума всіх відбитих і падаючих хвиль в даній точці до заданого моменту часу, а результуючий струм — як різниця сум відбитих і падаючих хвиль. Для підрахунку цих величин зручно користуватися діаграмою руху хвиль. На діаграмі по осі абсцис відкладена

координата x , а по осі ординат – час t і умовно показаний рух падаючих і відбитих хвиль по

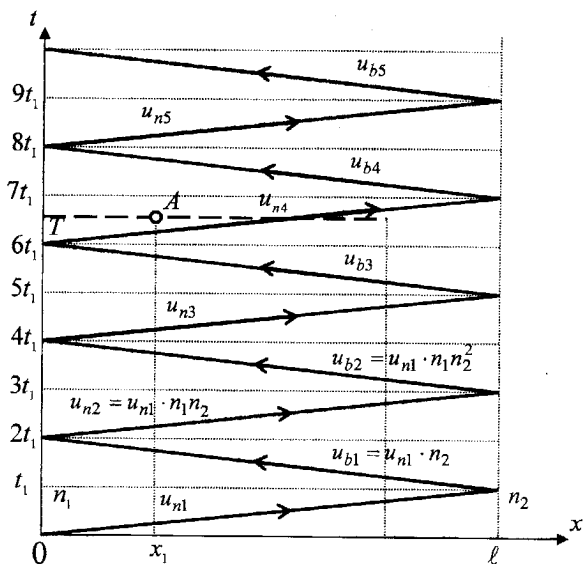


Рис. 2.24

лінії. Якщо, наприклад, необхідно визначити величини результуючих напруги і струму в точці, що знаходиться на відстані x_1 від початку лінії в момент T_1 (рис. 2.24), то, побудувавши точку A , бачимо, що до цього моменту точку A пройшли 4 падаючих і 3 відбитих хвилі, тому

$$\begin{aligned}
 u(x_1, T_1) &= (u_{n1} + u_{n2} + u_{n3} + u_{n4}) + (u_{b1} + u_{b2} + u_{b3}) = \\
 &= u_{n1} \cdot (1 + n_2 + n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_2^2 + n_1^2 \cdot n_2^2 + n_1^2 \cdot n_2^3 + n_1^3 \cdot n_2^3), \\
 i(x_1, T_1) &= (i_{n1} + i_{n2} + i_{n3} + i_{n4}) - (i_{b1} + i_{b2} + i_{b3}).
 \end{aligned}$$

Приклад 2.6. Побудувати графіки зміни струму на початку лінії i_1 і напруги в кінці лінії u_2 залежно від часу, якщо до джерела напруги $U_0 = 10 \text{ кВ}$ з внутрішнім опором $R_e = 0$ під'єднується лінія без втрат з хвильовим опором $z_c = 400 \text{ Ом}$, що має на активний опір навантаження

- а) $R_n = 1600 \text{ Ом}$; б) $R_n = \frac{400}{3} \text{ Ом}$

Розв'язання. а) Для побудови графіків використаємо діаграму (рис. 2.24), заздалегідь визначивши, що

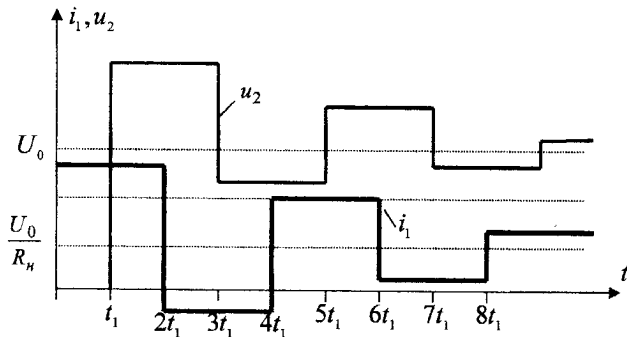
$$n_1 = -1; \quad n_2 = 0,6.$$

Результати спочатку запишемо в вигляді таблиці 2.1, а після цього зобразимо в вигляді графіка (рис. 2.25, а)

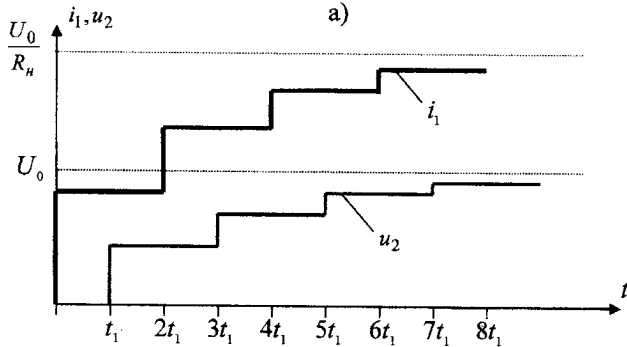
Табл.2.1

Проміжок часу	$i_1(A)$	$u_2(\kappa B)$
$0 < t < t_1$	$i_{n1} = \frac{U_0}{z_c} = 25$	0
$t_1 < t < 2 \cdot t_1$	$i_{n1} = 25$	$u_{n1} + u_{b1} = 10 + 6 = 16$
$2 \cdot t_1 < t < 3 \cdot t_1$	$i_{n1} + i_{n2} - i_{e1} = 25 - 15 - 15 = -5$	$u_{n1} + u_{b1} = 16$
$3 \cdot t_1 < t < 4 \cdot t_1$	$i_{n1} + i_{n2} - i_{e1} = -5$	$u_{n1} + u_{n2} + u_{b1} + u_{b2} = 10 - 6 + 6 - 3,6 = 6,4$
$4 \cdot t_1 < t < 5 \cdot t_1$	$i_{n1} + i_{n2} + i_{n3} - i_{b1} - i_{b2} = 13$	6,4
$5 \cdot t_1 < t < 6 \cdot t_1$	13	12,16
$6 \cdot t_1 < t < 7 \cdot t_1$	2,2	12,16
.....
$t \rightarrow \infty$	6,25	10

На рис. 2.25, б) показані графіки зміни напруги u_2 і струму i_1 для випадку б).



а)



б)

Рис. 2.25

В обох випадках напруга і струм наближаються до усталених значень U_0 та U_0/R_c , але в першому випадку напруга і струм коливаються близько цих значень.

Розглянемо деякі окремі прості випадки. Нехай розімкнута на кінці лінія (холостий хід) під'єднується до ідеального джерела напруги U_0 ($R_c = 0$).

В цьому випадку $n_1 = -1$, $n_2 = 1$. Побудуємо графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії (рис. 2.26).

При $0 < t < \frac{\ell}{v}$ в лінії існують тільки падаючі хвилі напруги U_0 та струму U_0/Z_c , які не досягли кінця лінії. Дійшовши до кінця лінії хвилі повністю відбиваються, не змінюючи знаку, і виникають перші хвилі, що переміщуються до початку лінії. З часом рух хвиль підсумкова напруга в лінії подвоюється, а струм стає рівним нулю.

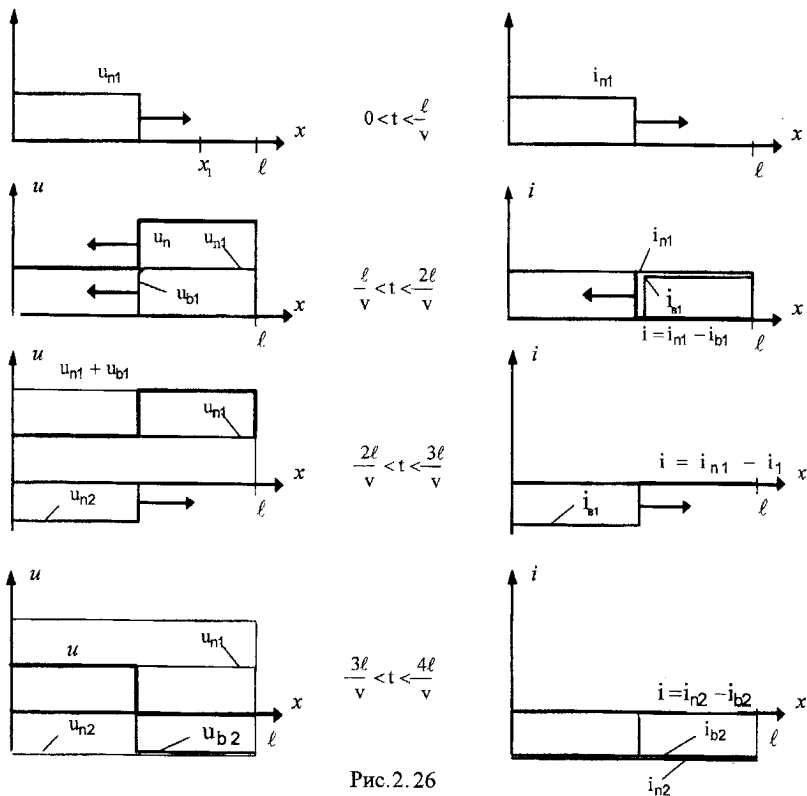


Рис. 2. 26

Коли перша відбита хвиля досягне початку лінії, вона відбивається і з'являється друга падаюча хвиля u_{n2} . Оскільки на початку лінії $n = -1$, то $u_{n2} = -U_0$, $i_{n2} = -U_0/z_c$. По лінії рухається від початку до кінця $\left(\frac{2 \cdot \ell}{v} < t < \frac{3 \cdot \ell}{v}\right)$ чергова хвиля, що накладається на дві перші. Підсумкова напруга в лінії знижується до напруги U_0 , а струм стає рівним $-U_0/z_c$. Після відбиття цієї хвилі від кінця лінії ($n = 1$) з'являється друга відбита хвиля $u_{b2} = u_{n2} \cdot n_2 = -U_0$ і $i_{b2} = i_{n2} \cdot n_2 = -\frac{U_0}{z_c}$. Ця хвиля також накладається на попередні. В результаті, коли остання хвиля досягне початку лінії $\left(t = \frac{4 \cdot \ell}{v}\right)$ підсумкова напруга і струм в лінії всюди виявляються рівними нулю, як було до підключення джерела напруги. Отже, з цього моменту перехідний процес в лінії буде повторюватися. Період повторення процесів T рівний часу чотирикратного пробігу хвилі вздовж лінії $T = \frac{4 \cdot \ell}{v}$.

В кожній точці лінії напруга і струм змінюються періодично, але криві зміни в різних точках не однакові.

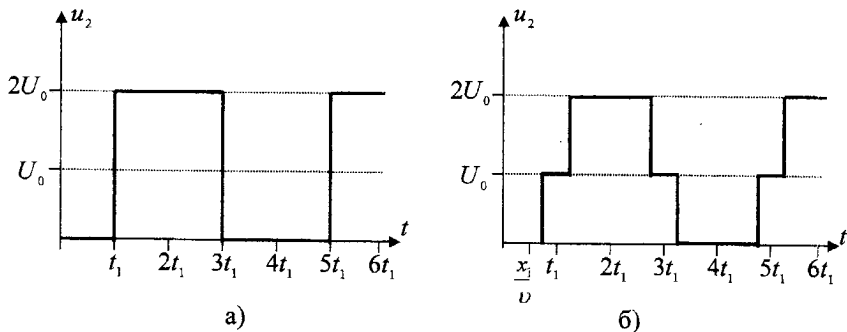


Рис. 2.27

На рис. 2.27, а) показано графік зміни напруги в кінці лінії. До моменту $t_1 = \frac{\ell}{v}$ (поки хвиля не дійшла до кінця лінії) напруга в кінці лінії дорівнює нулю. В момент t_1 напруга в кінці лінії зростає стрибком до значення $u_2 = u_{n1} + u_{b1} = 2 \cdot U_0$ і зберігається до тих пір, поки до кінця лінії

($t = 3 \cdot t_1$) не прийде друга падаюча хвиля, і напруга зменшиться до нуля і т.д. Струм в кінці лінії в будь-який момент часу дорівнює нулю.

На рис. 2.27, б) показано графік зміни напруги в точці лінії $x_1 > \ell/2$.

В цій точці напруга дорівнює нулю до моменту часу $\frac{x_1}{v}$, поки падаюча хвиля не досягне точки x_1 , після чого в цій точці буде напруга $u_{n1} = U_0$ до тих пір, поки падаюча хвиля не дійде до кінця лінії в момент t_1 , і не повернеться в точку x_1 перша відбита хвиля $u_{b1} = U_0$, після чого напруга в цій точці стає рівною $2 \cdot U_0$ і т.д.

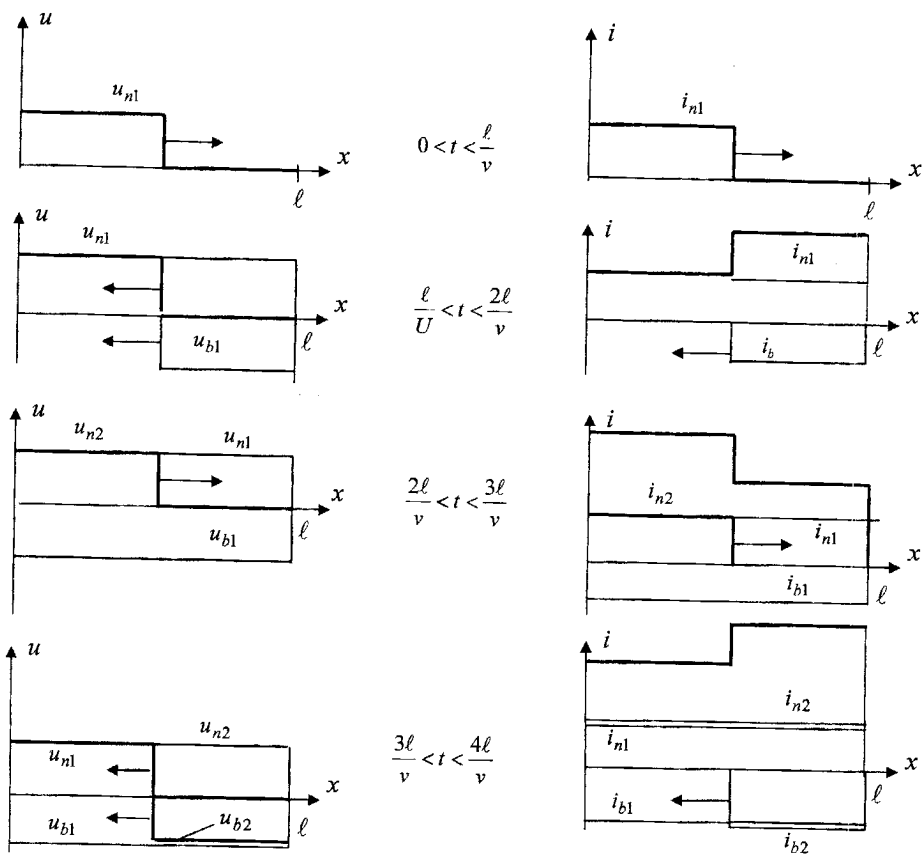


Рис. 2.28

Реальні лінії завжди мають втрати. Наявність втрат веде до того, що хвилі напруги і струму в міру їх руху вздовж лінії зменшуються, кожна наступна відбита хвиля стає меншою, і величини напруги і струму поступово наближаються до тих значень, які вони повинні мати при усталеному режимі холостого ходу – напруга дорівнює U_0 , а струм – нулю.

У випадку вмикання лінії, кінець якої замкнений накоротко, хвиля напруги, що поширюється від джерела, відбивається від кінця лінії із зміною знака ($n = -1$), тому після повернення відбитої хвилі до початку лінії, загальна напруга в лінії буде рівною нулю, а струм подвоїться. Оскільки при всіх наступних відбиваннях і від джерела, і від короткозамкненого кінця лінії хвилі відбиваються з переміною знаку, то напруга в лінії змінюється від нуля до напруги джерела, а підсумковий струм зростає на величину первісного струму (рис. 2.28).

Нескінченного зростання струму в дійсності не відбувається, оскільки реальні лінії мають втрати, а реальні джерела внутрішній опір, тому струм в лінії з плином часу буде наближатися до того значення, яке він повинен мати в режимі, що встановився після короткого замикання.

2.10. Перехідні процеси при ненульових початкових умовах

Розглянемо випадок, коли лінія відмикається від джерела постійної напруги. Нехай лінія навантажена на активний опір R_n , в лінії встановився струм $I_0 = \frac{U_0}{R_n}$ і напруга в будь-якій точці лінії U_0 . В момент $t = 0$ відключено джерело енергії (рис. 2.29). Підсумковий струм i на початку

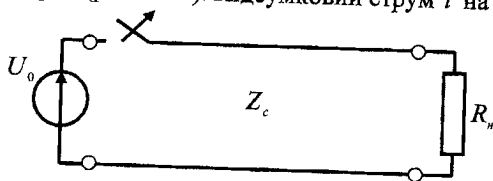


Рис. 2.29

лінії відразу стане рівним нулю, тому можна уявити, що на встановлене значення струму I_0 накладається перша падаюча хвиля струму $i_{n1} = -I_0$, так що їх сума $i = I_0 + i_{n1} = 0$ згортається в нуль.

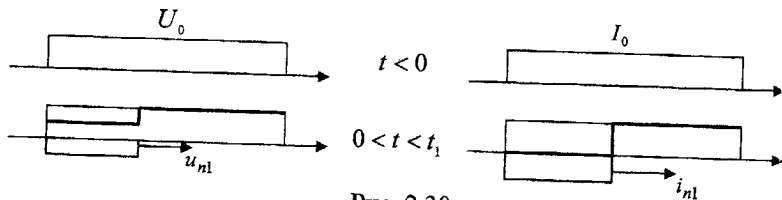


Рис. 2.30

Одночасно виникає падаюча хвиля напруги $u_{n1} = i_{n1} \cdot z_c = -U_0 \cdot \frac{z_c}{R_n}$

(рис. 2.30). Досягнувши за час $t_1 = \frac{\ell}{U}$ кінця лінії, хвилі напруги і струму

відбиваються від кінця з коефіцієнтом відбиття $n_2 = \frac{R_n - z_c}{R_n + z_c}$ і, повернувшись до початку лінії, відбиваються з коефіцієнтом відбиття $n_1 = 1$ (розімкнута лінія).

Рух хвиль до їхнього згасання зручно зобразити на діаграмі (рис. 2.31).

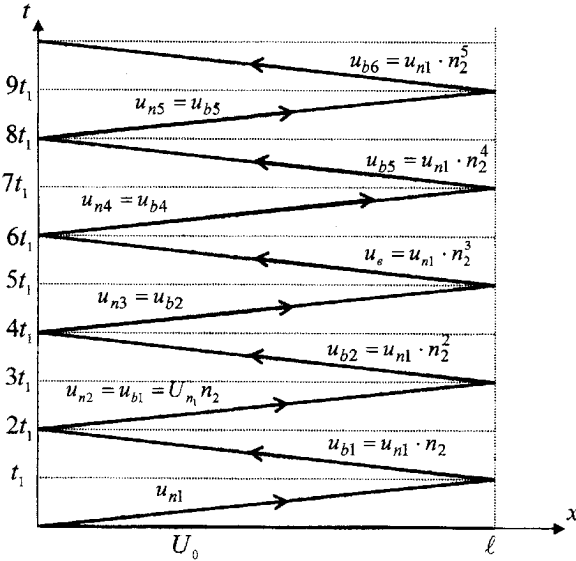


Рис. 2.31

Для будь-якої точки лінії при $t \rightarrow \infty$ напруга відповідно до діаграми

$$u = U_0 + u_{n1} \cdot (1 + 2 \cdot n_2 + 2 \cdot n_2^2 + 2 \cdot n_2^3 + \dots)$$

або

$$u = U_0 \cdot u_{n1} + 2 \cdot u_{n1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} n_2^k.$$

Так як

$$u_{n1} = -U_0 \cdot \frac{z_c}{R_n},$$

а

$$n_2 < 1, \text{ то } \sum_{k=0}^{\infty} n_2^k = \frac{1}{1 - n_2}$$

$$u = U_0 + U_0 \cdot \frac{z_c}{R_H} - 2 \cdot U_0 \cdot \frac{z_c}{R_H} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_H - z_c}{R_H + z_c}} = 0,$$

струм в будь-якій точці лінії при $t \rightarrow \infty$

$$i = I_0 + i_{n1} \cdot (1 + n_2 + n_2^2 + n_2^3 + \dots) - i_{n1} \cdot (n_2 + n_2^2 + n_2^3 + \dots) = I_0 + i_{n1} = 0.$$

Таким чином, після відключення лінії від джерела, напруга і струм в лінії в новому усталеному режимі будуть відсутні. На рис. 2.32, а) показано графік зміни напруги в кінці лінії u_2 залежно часу для $n_2 = 0,5$, а на рис. 2.32, б) така залежність для $n_2 = -0,5$.

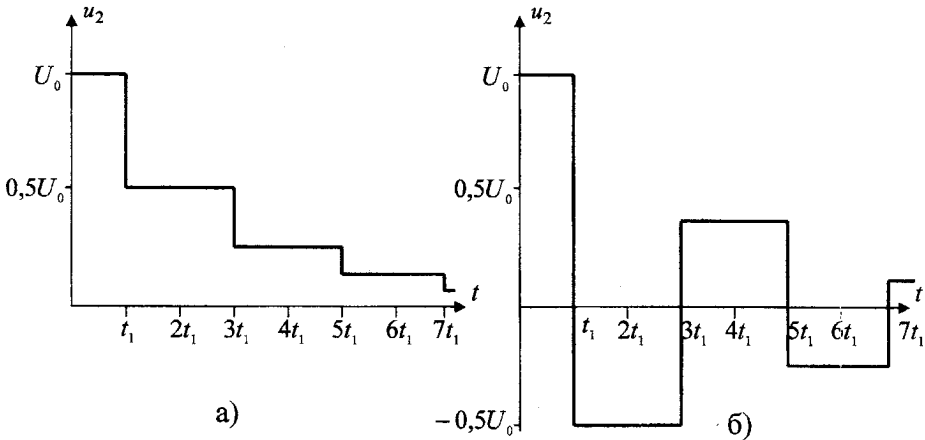


Рис. 2.32

Розглянемо тепер випадок, коли вимикається активне навантаження R_H від лінії, яка підключена до джерела постійної напруги (рис. 2.33).

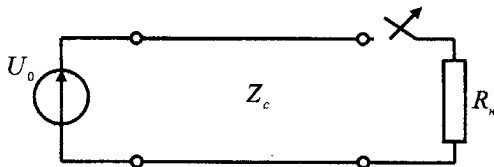


Рис. 2.33

Вимкнення навантаження призводить до порушення усталеного режиму і появи відбитої хвилі струму, що рухається до початку лінії від кінця $n_1 = \frac{R_o - z_c}{R_o + z_c}$, де R_o – внутрішній опір джерела. Побудувавши діаграму аналогічно рис. 2.31, можна побудувати графіки залежності струму і напруги від часу в будь-якій точці лінії.

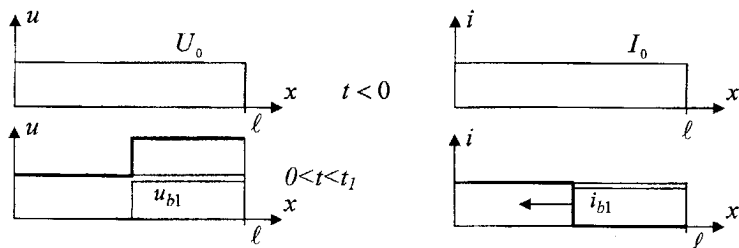


Рис. 2.34

Розглянуті вище приклади виникнення хвиль при ненульових початкових умовах можна звести, використовуючи принцип накладання, до розрахунку кола з нульовими початковими умовами. Якщо перехідний процес викликається замиканням ключа, то необхідно на режим, що існував до комутації, накласти режим, що виникає при під'єднанні на затискачі ключа джерела напруги, рівної напрузі на затискачах до комутації. При розмиканні ключа на режим, що існував до комутації, потрібно накласти режим, який виникає при вмиканні джерела струму в місце знаходження ключа, при цьому струм джерела повинен бути рівний струму, що раніше протікав в вітці з ключем, але бути протилежно направленим.

Приклад 2.7. Знайти хвилі, що виникають при відключенні опору R_1 в місці спряження двох ліній з хвильовими опорами z_{c1} і z_{c2} (рис. 2.35).

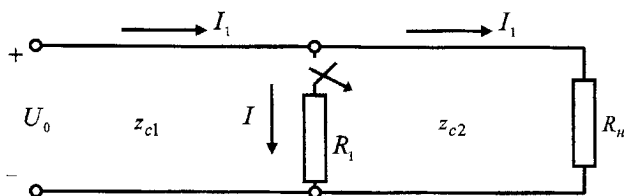


Рис. 2.35

Еквівалентна схема заміщення для визначення хвиль після розми-
кання ключа показана на рис. 2.34, де лінії замінені зосередженими опора-
ми z_{c1} і z_{c2} , а в місце знаходження ключа під'єднується джерело струму.

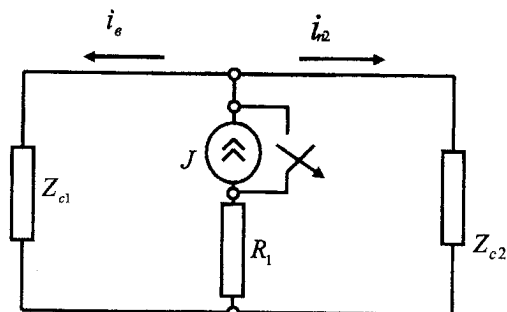


Рис. 2.36

До комутації струм в опорі R_1 $I = \frac{U_0}{R_1}$, тому $y = I = U_0/R$.

$$i_{b1} = y \cdot \frac{z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} = \frac{U_0}{R_1} \cdot \frac{z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}}, \quad u_{b1} = i_{b1} \cdot z_{c1}.$$

$$i_{n2} = y \cdot \frac{z_{c1}}{z_{c1} + z_{c2}} = \frac{U_0}{R_1} \cdot \frac{z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}}, \quad u_{n2} = i_{n2} \cdot z_{c2}.$$

До комутації струм в другій лінії $I_2 = \frac{U_0}{R_n}$, в першій лінії –

$I_1 = \frac{U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_n}$, напруга в лінії всюди U_0 . Після розмикання ключа на режим,
що встановився, накладаються відбиті і падаючі хвилі струму і напруги
(рис. 2.37).

Для знаходження графіка залежності струму чи напруги в будь-якій
точці лінії необхідно побудувати діаграми з урахуванням відбивання і
заломлення хвиль аналогічно діаграмам, побудованим на рис. 2.24 і
рис. 2.31.

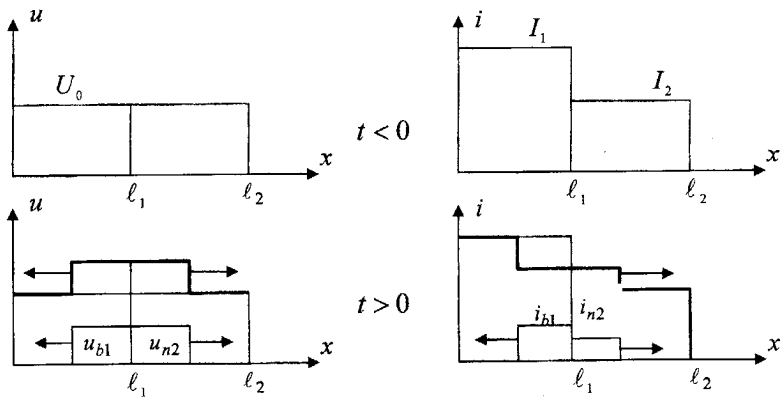


Рис. 2.37

2.11. Блукаючі хвилі

Окрім хвиль напруги і струму, що виникають в лініях при різноманітного роду комутаціях, хвилі в лініях електропередач і зв'язки виникають і під дією атмосферних явищ. Якщо поблизу лінії знаходиться грозова хмара, яка заряджена, наприклад, негативно, то вона індукуює на найближчій до неї ділянці лінії позитивні заряди (рис. 2.38). Позитивні заряди на проводах знаходяться в зв'язаному стані з зарядами хмари і можуть бути зосереджені на невеликій довжині лінії, а вільні негативні заряди у міру свого виникнення поширюються по всій довжині лінії і через недосконалу ізоляцію стікають на землю. Дія їх непомітна завдяки малій густині цих зарядів. Після грозового розряду хмари на землю чи сусідні хмари, позитивні заряди на проводах вже не утримуються зарядами хмари. В результаті від місця накопичення зарядів по лінії в обидві сторони підуть хвилі.

На рис. 2.38 для декількох моментів часу показаний розподіл руху хвиль напруги, які рухаються до початку і кінця лінії.

В початковий момент часу ($t = 0$), коли заряди нерухомі, струм в лінії дорівнює нулю

$$i(x,0) = i_n(x,0) - ib(x,0) = 0.$$

Напруга в лінії нулю не дорівнює

$$u(x,0) = u_n(x,0) + ub(x,0).$$

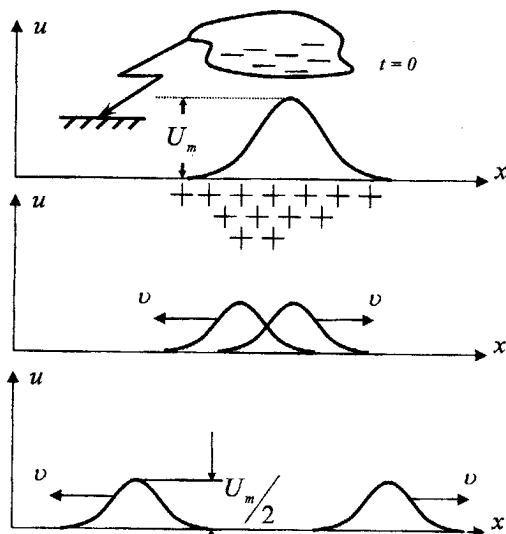


Рис. 2.38

Так як

$$i(x,0) = \frac{u_n(x,0)}{z_c} - \frac{u_b(x,0)}{z_c} = 0,$$

то

$$u_n(x,0) = u_b(x,0) = \frac{u(x,0)}{2}.$$

Накопичені заряди в лінії після звільнення розпадаються на дві однакові хвилі, напруга кожної з них складатиме половину напруги, зумовленої індукованими зарядами. Ці хвилі (пряма і зворотна) переміщуються в різні сторони незалежно одна від одної, викликаючи появу хвиль струму. В точках порушення однорідності лінії, також на початку і кінці лінії хвилі відбиваються, що призводить до багатократного відбиття блукаючих хвиль, аналогічно розглянутим вище прямокутним хвилям. В реальних лініях наявність втрат призводить до затухання блукаючих хвиль і у міру витрачання всієї енергії хвилі зникають.

Література

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники – М. –Л.: Энергоиздат, 1981. – Т.1. – 522 с.
2. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1986. – 542 с.
3. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969. – 424 с.
4. Жуховицкий Б.Я. Негневицкий И.Б. Теоретические основы электротехники, Ч. II. – М – Л.: Энергия, 1965. – 240 с.
5. Зевске Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 440 с.
6. Афанасьев Б.И., Гольдин О.Е., Кляцкин И.Г., Пинес Г.Я. Теория линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1973. – 592 с.
7. Перхач В.С. Теоретична електротехніка: Лінійні кола. – К.: Вища школа, 1992. – 439 с.

Навчальне видання

Юхим Овдійович Карпов,
В'ячеслав Губейович Мадьяров

Теоретичні основи електротехніки
Розділ “Електричні кола з розподіленими параметрами”

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор Т.О. Старічек

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 24.01.2007 р. Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7 x 42 ¼ Папір офсетний
Друк різнографічний Ум. друк. арк. 5.8
Тираж 75 прим.
Зам. № 2007-009

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ