

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ



ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

в лінійних колах

СИНТЕЗ

лінійних кіл

Електричні та магнітні

НЕЛІНІЙНІ КОЛА



Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

Ю. О. Карпов Ю. Г. Ведміцький В. В. Кухарчук С. Ш. Кацив

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ
в лінійних колах

СИНТЕЗ
лінійних кіл

Електричні та магнітні
НЕЛІНІЙНІ КОЛА

Підручник

Вінниця
ВНТУ
2011

УДК 621.3(075)

ББК 31.211я73

Т33

Автори:

**Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук,
С. Ш. Кацев**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів.
Лист № 1/11 10710 від 23.11.2010.

Рецензенти:

В. І. Сенько, доктор технічних наук, професор

П. Г. Стахів, доктор технічних наук, професор

Л. В. Сібрук, доктор технічних наук, професор

Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник / [Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. та ін.] за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 530 с.

ISBN 978-966-641-446-8

У підручнику викладено теорію електричних і магнітних кіл, де розглянуто перехідні процеси в лінійних колах із зосередженими та розподіленими параметрами, синтез лінійних кіл, нелінійні електричні й магнітні кола за усталених і динамічних режимів роботи та наведено велику кількість прикладів теоретичного і практичного спрямування. Матеріал подано в обсязі, необхідному для проведення теоретичних і технічних розрахунків із застосуванням сучасного програмного забезпечення. Підручник розрахований на студентів, аспірантів і викладачів вищих навчальних закладів.

УДК 621.3

ББК 31.211я73

ISBN 978-966-641-446-8

© Ю. Карпов, Ю. Ведміцький, В. Кухарчук, С. Кацев, 2011

Зміст

Перехідні процеси в лінійних колах

Вступ	12
Розділ 1 Класичний метод розрахунку перехідних процесів	14
1.1 Вмикання кола r, L на постійну напругу	14
1.2 Вмикання кола r, C на постійну напругу	18
1.3 Відімкнення кола r, L від джерела постійної напруги	22
1.4 Під'єднання кола r, L до джерела синусоїдної напруги	25
1.5 Перехідний процес в розгалужених колах, що містять один реактивний елемент	28
1.6 Незалежні і залежні початкові умови	31
1.7 Під'єднання кола з елементами r, L, C до джерела постійної напруги	36
1.8 Розрахунок перехідних процесів в складних розгалужених колах	44
1.9 Методи складання характеристичних рівнянь ...	56
1.9.1 Метод алгебризації диференціальних рівнянь	56
1.9.2 Метод вхідного опору	58
1.10 Закони комутації в узагальненій формі	62
1.11 Розрахунок перехідних процесів класичним методом за допомогою програм комп'ютерної математики. Система Maple	68
<i>Запитання для самоперевірки</i>	75

Розділ 2	Операторний метод розрахунку перехідних процесів	77
2.1	Деякі властивості перетворення Лапласа	77
2.2	Використання перетворення Лапласа для розрахунку перехідних процесів	82
2.3	Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі	84
2.4	Операторні схеми	92
2.5	Перехід від зображення до оригіналу	95
2.6	Розрахунок перехідних процесів операторним методом за допомогою програм комп'ютерної математики Mathcad і Maple	103
	<i>Затитання для самоперевірки</i>	<i>111</i>
Розділ 3	Перехідні процеси в електричних колах під час дії вхідних збуджень складної форми	113
3.1	Одинична функція і перехідна характеристика кола	113
3.2	Перехідні процеси за дії східчастої напруги	118
3.3	Розрахунок перехідних процесів при довільних збудженнях	119
3.4	Імпульсна функція і імпульсна характеристика кола	124
3.5	Розрахунок перехідних процесів при довільних збудженнях з використанням імпульсної характеристики	126
3.6	Розрахунок перехідних процесів за допомогою перехідних та імпульсних характеристик кола через інтеграл Дюамеля в програмах Mathcad і Maple	128
	<i>Затитання для самоперевірки</i>	<i>145</i>
Розділ 4	Частотний метод розрахунку перехідних процесів	147
4.1	Розрахунок перехідних процесів методом періо-	

	дизації неперіодичних збуджень	147
4.2	Спектри періодичних і неперіодичних функцій ..	151
4.3	Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів	157
4.4	Наближений спосіб розрахунку перехідних процесів частотним методом	160
4.5	Врахування ненульових початкових умов	163
4.6	Приклади використання різних методів розрахунку перехідних процесів	166
	4.6.1 Класичний метод	166
	4.6.2 Операторний метод	171
	4.6.3 Застосування інтеграла Дюамеля	175
	4.6.3.1 Використання перехідної характеристики	175
	4.6.3.2 Використання імпульсної характеристики	177
	4.6.4 Метод періодизації неперіодичного збудження	179
	4.6.5 Частотний метод	182
	<i>Запитання для самоперевірки</i>	<i>187</i>
Розділ 5	Перехідні процеси в колах з розподіленими параметрами	189
5.1	Виникнення перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами	189
5.2	Розв'язування телеграфних рівнянь однорідної довгої лінії класичним методом	190
5.3	Виникнення хвиль внаслідок під'єднання довгої лінії до джерела постійної напруги	196
5.4	Пряма хвиля, що утворюється внаслідок під'єднання до лінії довільного джерела	200
5.5	Відбиття хвилі від кінця довгої лінії	209
5.6	Відбиття хвилі від кінця довільно навантаженої лінії	213
5.7	Відбиття та заломлення хвиль в точці спряження	

	двох однорідних ліній	220
5.8	Багаторазове відбиття хвиль із прямокутним фронтом	230
5.9	Перехідні процеси при ненульових початкових умовах	246
	<i>Запитання для самоперевірки</i>	255

Синтез лінійних кіл

Розділ 6	Основи синтезу лінійних двополюсників	258
6.1	Основні етапи синтезу електричних кіл	258
6.2	Властивості вхідних функцій двополюсників ...	259
6.3	Перевірка вхідної функції на умови реалізації ..	264
6.4	Найпростіші вхідні функції і їх реалізація	270
6.5	Синтез двополюсників розкладанням вхідної функції на прості дроби	272
6.6	Синтез двополюсників поданням вхідної функції у вигляді неперервних дробів	278
	<i>Запитання для самоперевірки</i>	285

Електричні та магнітні нелінійні кола

Розділ 7	Загальна характеристика нелінійних електричних кіл	288
7.1	Основні поняття і означення	288
7.2	Аналітичне подання характеристик нелінійних елементів	293
	7.2.1 Метод інтерполяції	294
	7.2.2 Метод найменших квадратів	299
	7.2.3 Метод кусково-лінійної апроксимації ...	301
	<i>Запитання для самоперевірки</i>	303
Розділ 8	Методи розрахунку нелінійних кіл постійного струму	304
8.1	Графічні методи розрахунку	304
	8.1.1 Найпростіші схеми з'єднання нелінійних	

	опорів	304
	8.1.2 Метод еквівалентного генератора	309
	8.1.3 Метод двох вузлів	311
8.2	Графоаналітичний метод: метод лінеаризації	314
8.3	Аналітичний метод	316
8.4	Аналіз нелінійних кіл постійного струму в математичній системі Mathcad	320
	8.4.1 Метод нелінійного еквівалентного генератора	327
	<i>Затитання для самоперевірки</i>	333
Розділ 9	Магнітні кола постійного струму	334
	9.1 Загальна характеристика властивостей магнітних матеріалів	334
	9.2 Основні закони та особливості магнітних кіл	336
	9.3 Розрахунок нерозгалужених магнітних кіл	340
	9.4 Розрахунок розгалужених магнітних кіл	348
	9.5 Аналіз магнітних кіл постійного струму в математичній системі Mathcad	353
	<i>Затитання для самоперевірки</i>	368
Розділ 10	Методи розрахунку нелінійних кіл змінного струму	369
	10.1 Особливості аналізу нелінійних кіл змінного струму	369
	10.2 Метод еквівалентних синусоїд	372
	10.3 Котушка з феромагнітним осердям	376
	10.4 Ферорезонанси	382
	10.5 Трансформатор з феромагнітним осердям	390
	10.6 Метод гармонічної лінеаризації	400
	10.7 Метод гармонічного балансу	404
	10.8 Метод малого параметра	410
	10.9 Метод кусково-лінійної апроксимації (метод припасування)	417

10.10	Випрямлення змінного струму	418
10.10.1	Напівпровідникові діоди	418
10.10.2	Однопівперіодний випрямляч змінного струму	420
10.10.3	Мостовий випрямляч	422
10.10.4	Однопівперіодний випрямляч з ємнісним фільтром	426
	<i>Запитання для самоперевірки</i>	434
Розділ 11	Перехідні процеси в нелінійних електричних колах	436
11.1	Метод умовної лінеаризації	436
11.2	Метод кусково-лінійної апроксимації	444
11.3	Метод графічного інтегрування	450
11.4	Метод малого параметра	455
11.5	Числові методи розрахунку перехідних процесів	459
11.6	Метод рівнянь стану	466
11.7	Стійкість станів рівноваги в нелінійних колах ..	474
11.8	Визначення стійкості станів рівноваги методом фазових траєкторій	486
11.9	Автоколивання	494
11.10	Аналіз перехідних процесів в нелінійних електричних колах засобами математичної системи Mathcad	497
	<i>Запитання для самоперевірки</i>	521
Література		523
Предметний покажчик		525

Передмова

В підручнику, який складається з одинадцяти розділів, розглядаються методи розрахунку перехідних процесів в лінійних колах із зосередженими і розподіленими параметрами, синтез лінійних електричних кіл, усталені режими роботи й перехідні процеси в нелінійних електричних і магнітних колах.

Так, в *першому* розділі розкрито основні поняття перехідних процесів в лінійних електричних колах із зосередженими параметрами, а також наведено класичний метод їх розрахунку.

В *другому, третьому і четвертому* розділах розглянуто операторний і частотний методи аналізу перехідних процесів та метод розрахунку за допомогою перехідних (імпульсних) характеристик і інтеграла Дюамеля.

В *п'ятому* розділі увагу прикуто до основних методів розрахунку і аналізу перехідних процесів в лінійних колах з розподіленими параметрами.

Шостий розділ присвячений синтезу лінійних електричних кіл, зокрема синтезу лінійних двополюсників.

Починаючи з *сьомого* розділу, вивчаються нелінійні електричні та магнітні кола. В цьому розділі дається загальна характеристика нелінійних кіл.

У *восьмому і дев'ятому* розділах наводяться основні методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл постійного струму, відповідно.

В *десятому* розділі викладаються базові методи розрахунку нелінійних електричних кіл змінного струму.

В *одинадцятому* розділі розглядаються перехідні процеси в нелінійних електричних колах і наводяться основні методи їх аналізу.

Для полегшення розуміння і засвоєння курсу основні положення теорії в кожному розділі супроводжуються численними прикладами з докладними числовими розв'язками, якісними графічними ілюстраціями та застосуванням сучасного програмного забезпечення, що дозволяє здійснювати автоматизацію розрахун-

ку, аналізу і моделювання розв'язуваних задач. При цьому залучено поширені на сьогодні системи комп'ютерної математики – програмні комплекси Mathcad та Maple.

Автори підручника висловлюють щиру й глибоку подяку шановним професору, доктору технічних наук, професору кафедри теоретичної електротехніки Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут” В. І. Сеньку, доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри теоретичної та загальної електротехніки Національного університету “Львівська політехніка” П. Г. Стахіву, доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри електродинаміки національного авіаційного університету Л. В. Сібруку та викладачам кафедри теоретичної електротехніки Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”: члену НМК з напрямку 6.050701 – “Електротехніка та електротехнології”, доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри А. А. Щербі, кандидату технічних наук, професору І. А. Курило, кандидату технічних наук, професору В. І. Шеховцову, кандидату технічних наук, доценту Ю. Ф. Видолобу за критичні зауваження, рекомендації і слушні побажання, висунуті під час рецензування підручника, врахування яких, безумовно, поліпшило якість викладеного матеріалу.

Автори

*Перехідні процеси
в лінійних колах*

ВСТУП

Якщо в електричному колі електрорушійні сили (е.р.с.) джерел енергії є постійними або періодичними функціями часу, а струми і напруги віток кола також або залишаються постійними, або змінюються у часі періодично, то такий режим роботи електричного кола називають *усталеним*. Проте появі нового усталеного режиму зазвичай передує *перехідний процес*, за якого струми і напруги є неперіодичними. Перехідний процес виникає переважно внаслідок примусової зміни параметрів елементів кола або його структури і триває певний час (допоки не наступить новий усталений режим). Будь-які зміни параметрів елементів кола або його структури називають *комутацією*. Вважають, що комутація, тобто вмикання, розмикання або перемикування в колі, відбувається миттєво.

Виникнення перехідного процесу пов'язано з тим, що кожному усталеному стану кола відповідає деякий запас енергії електричних і магнітних полів. Перехід до нового усталеного режиму пов'язаний із зміною енергії в цих полях. Миттєво такі зміни енергії відбутися не можуть, оскільки це відповідало би наявності джерел безмежно великої потужності, що фізично неможливо. Дійсно, якщо в початковому усталеному режимі кількість енергії в електричному колі була W_1 , а в новому усталеному режимі – W_2 , причому ця зміна енергії відбулася за час Δt , то потужність джерел можна визначити за допомогою виразу $p = \frac{W_2 - W_1}{\Delta t}$. Якщо

допустити, що час Δt прямує до нуля, тобто перехідний процес відсутній, то це відповідає безмежно великій потужності, що, як говорилось вище, фізично неможливо, а відповідно припущення про відсутність перехідного процесу є помилковим.

В електричних колах енергія накопичується в електричних полях конденсаторів і магнітних полях котушок, тому в колах, які містять тільки резистори, перехід від одного усталеного стану до іншого відбувається миттєво. Проте в будь-яких реальних електричних пристроях завжди є електричні і магнітні поля, що дає

право стверджувати про існування перехідних процесів в будь-яких реальних електричних колах.

Незважаючи на відносно малий реальний час перебігу перехідних процесів, їх аналіз і розрахунок мають практичний інтерес, оскільки під час перехідних процесів в колах можуть виникати небезпечно великі напруги чи струми.

Та обставина, що енергія в електричних колах не може змінитися миттєво, дає підставу та можливість сформулювати два закони, які отримали назву *законів комутації*.

Енергія магнітного поля визначається за допомогою виразу $W_m = \frac{Li_L^2}{2}$, де i_L – струм через індуктивність. Оскільки W_m не може змінитися стрибком (миттєво), то й струм через індуктивність також не змінюється миттєво.

Перший закон комутації формулюється так:

струм через індуктивність в початковий момент часу після комутації залишається таким же, яким він був безпосередньо перед комутацією.

Момент комутації приймають за початок відліку часу перехідного процесу. Вважають, що комутація відбувається в момент часу $t = 0$. Якщо першу мить часу після комутації позначити через $t = 0_+$, а останню мить безпосередньо перед комутацією як $t = 0_-$, то перший закон комутації можна записати математично

$$i_L(0_+) = i_L(0_-). \quad (1)$$

Енергія електричного поля $W_e = \frac{Cu_C^2}{2}$, де u_C – напруга на ємності.

Аналогічно сформулюємо *другий закон комутації*:

напруга на ємності в початковий момент після комутації дорівнює напрузі на ємності безпосередньо перед комутацією.

В математичному вигляді

$$u_C(0_+) = u_C(0_-). \quad (2)$$

Інші струми і напруги електричного кола в момент комутації можуть змінюватися стрибком.

Розділ 1

КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1 Вмикання кола r, L на постійну напругу

Розглянемо вмикання кола, яке складається із послідовно з'єднаних резистора і індуктивності, до джерела постійної напруги (рис. 1.1). Після замикання ключа в колі виникає змінний неперіодичний струм i .

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа

$$L \frac{di}{dt} + ri = U. \quad (1.1)$$

Одержаний вираз є неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку з сталими коефіцієнтами. Як відомо, повний розв'язок цього рівняння складається з суми частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку однорідного рівняння.

Частинний розв'язок диференціального рівняння визначається його правою

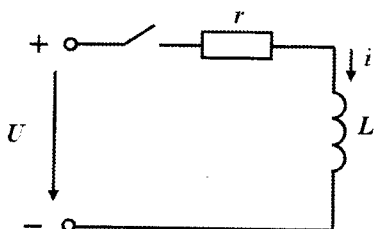


Рисунок 1.1

частиною і називається *примусовою складовою* i_{np} .

Загальний розв'язок не залежить від прикладеної напруги, але залежить від параметрів кола та початкових умов. Його називають *вільною складовою* i_s .

Таким чином,

$$i = i_{np} + i_s. \quad (1.2)$$

Оскільки права частина рівняння (1.1) є сталою величиною, то примусова складова теж величина стала

$$i_{np} = I, \quad (1.3)$$

яка i є частинним розв'язком рівняння (1.1).

Підставляючи (1.3) в (1.1), одержуємо

$$L \frac{dI}{dt} + rI = U$$

або

$$rI = U,$$

оскільки $\frac{dI}{dt} = 0$, звідки

$$i_{np} = I = \frac{U}{r}. \quad (1.4)$$

Якщо розглянути новий усталений режим в колі, то в ньому протікає постійний струм, величина якого визначається з виразу

$$I = \frac{U}{r},$$

оскільки опір індуктивності постійному струму дорівнює нулю. Звідси видно, що примусову складову можна визначити також із розрахунку нового усталеного режиму.

Вільна складова є розв'язком однорідного диференціального рівняння

$$L \frac{di_g}{dt} + ri_g = 0. \quad (1.5)$$

Звідси

$$i_g = Ae^{pt}, \quad (1.6)$$

де A – стала інтегрування,

p – корінь характеристичного рівняння.

Для знаходження p записуємо *характеристичне рівняння*,

для чого в (1.5) $\frac{di_g}{dt}$ замінюємо на p , а i_g – на одиницю. Відтак

$$Lp + r = 0, \quad p = -\frac{r}{L}. \quad (1.7)$$

Повний розв'язок рівняння (1.5) з врахуванням знайдених примусової (1.4) і вільної (1.6) складових має вигляд

$$i = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}, \quad (1.8)$$

де A є невідомою сталою.

Для визначення сталої інтегрування A скористаємося *початковими умовами*, тобто значеннями струму для $t = 0_+ (i(0_+))$. Оскільки струм i проходить через індуктивність, то він підпорядковується закону комутації $i(0_+) = i(0_-)$. Значення струму $i(0_-)$ відповідає значенню струму в момент, що безпосередньо передує комутації, тобто коли ключ був розімкнутий. При розімкнутому ключі струму в колі не було ($i(0_-) = 0$), тому $i(0_-) = i(0_+) = 0$.

Підставляючи значення $t = 0$ і $i(0) = 0$ в (1.8), отримуємо $0 = \frac{U}{r} + A$, звідки

$$A = -\frac{U}{r}. \quad (1.9)$$

Таким чином, вільна складова $i_g = -\frac{U}{r}e^{-\frac{r}{L}t}$ і струм перехідного процесу

$$i = \frac{U}{r} - \frac{U}{r}e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right). \quad (1.10)$$

Побудуємо графік струму перехідного процесу (i), показавши окремо примусову і вільну складові (рис. 1.2).

Показник степеня є величиною безрозмірною, тому величина $\frac{r}{L}$ має розмірність $\frac{1}{\text{с}}$, $\frac{L}{r}$ – розмірність часу. Позначимо

$$\frac{L}{r} = \tau \quad (1.11)$$

і назвемо цю величину *сталюю часу*.

Тоді вільна складова струму $i_g = -\frac{U}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Для побудови вільної складової будемо задавати значення t , кратні τ , і одержимо таблицю 1.1 або в числових значеннях – таблицю 1.2.

Таблиця 1.1

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
i_a	$-\frac{U}{r}$	$-\frac{U}{r}e^{-1}$	$-\frac{U}{r}e^{-2}$	$-\frac{U}{r}e^{-3}$	$-\frac{U}{r}e^{-4}$	$-\frac{U}{r}e^{-5}$

Таблиця 1.2

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
i_a	$-\frac{U}{r}$	$-0,368\frac{U}{r}$	$-0,135\frac{U}{r}$	$-0,05\frac{U}{r}$	$-0,0183\frac{U}{r}$	$-0,0067\frac{U}{r}$

Побудована згідно з цими даними крива i_a , примусова складова i_{np} (1.4), а також повний розв'язок, який дорівнює їх сумі, зображені на рис. 1.2.

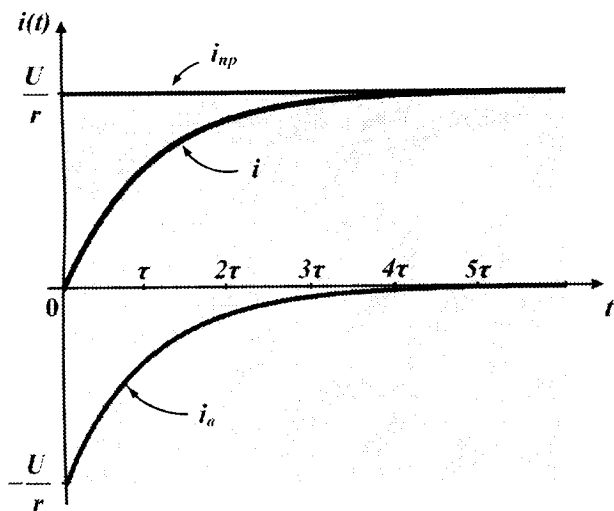


Рисунок 1.2

З графіка видно, що струм перехідного процесу з перебігом часу асимптотично наближається до свого усталеного значення i_{np} , а вільна складова практично перетворюється на нуль вже за час $t = (4 \div 5)\tau$. Тому за *практичну тривалість* перехідного процесу зазвичай приймають проміжок часу, що складає $(4 \div 5)\tau$.

Отже, стала часу τ електричного кола визначає практичну тривалість перехідного процесу.

1.2 Вмикання кола r, C на постійну напругу

Розглянемо перехідний процес в колі (рис. 1.3) при вмиканні його до джерела постійної напруги.

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для кола після замикання ключа (післякомутаційний стан)

$$ri + \frac{1}{C} \int idt = U. \quad (1.12)$$

Щоб із (1.12) одержати диференціальне рівняння, його треба продиференціювати за часом

$$r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$

проте в цьому випадку шуканою змінною буде струм i , який не

підпорядковується законам комутації і відповідно при знаходженні початкових умов для визначення сталої інтегрування зустрінуться деякі труднощі. Тому зручніше за змінну вибрати таку величину, щоб для неї виконувався закон комутації. В нашому випадку краще

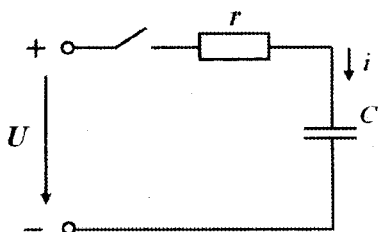


Рисунок 1.3

ще знаходити напругу на ємності u_C . Враховуючи те, що струм і напруга на ємності взаємопов'язані співвідношенням

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad (1.13)$$

і підставляючи (1.13) в (1.12), одержимо

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = U. \quad (1.14)$$

Як і в попередньому підрозділі, одержано неоднорідне диференціальне рівняння. Його повний розв'язок записуємо у вигляді суми примусової і вільної складових

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cв}. \quad (1.15)$$

Примусова складова знаходиться із розрахунку нового усталеного режиму. В новому усталеному режимі, коли перехідний процес вже закінчився, струму в колі не буде, оскільки ємність для постійного струму являє собою безмежно великий опір. Напруга на резисторі також дорівнює нулю. Отже, в усталеному режимі відповідно до другого закону Кірхгофа напруга на ємності дорівнює прикладеній напрузі

$$u_{Cnp} = U. \quad (1.16)$$

Вільна складова має такий самий вигляд, як і в попередньому випадку, тобто

$$u_{Cв} = Ae^{pt}. \quad (1.17)$$

Характеристичне рівняння записуємо за диференціальним рівнянням (1.14)

$$rCp + 1 = 0 \quad \text{і} \quad p = -\frac{1}{rC}. \quad (1.18)$$

Таким чином, повний розв'язок

$$u_C = U + Ae^{-\frac{1}{rC}t}. \quad (1.19)$$

Для визначення сталої інтегрування A знаходимо початкові умови. Напруга на ємності підпорядковується закону комутації

$$u_C(0_-) = u_C(0_+).$$

До комутації коло було розімкнуте і, якщо допустити, що конденсатор не був попередньо зарядженим, то

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0. \quad (1.20)$$

Підставляючи значення $t = 0$ і $u_C(0) = 0$ в (1.19), одержуємо

$$0 = U + A.$$

Звідки

$$A = -U.$$

Таким чином, повний розв'язок

$$u_C = U - Ue^{-\frac{1}{rC}t}. \quad (1.21)$$

Стала часу в загальному випадку може бути записана в такому вигляді:

$$\tau = \frac{1}{|p|}, \quad (1.22)$$

тому $\tau = rC$.

Побудуємо графік аналогічно попередньому прикладу і одержимо криву зміни напруги на ємності u_C від часу (рис. 1.4).

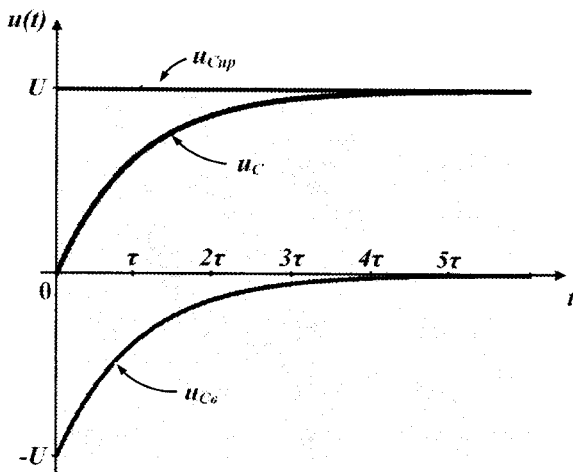


Рисунок 1.4

Знайдемо закон зміни струму в даному колі. Для цього використаємо вираз (1.13), який встановлює взаємозв'язок між стру-

мом і напругою на ємності. Отже, замість u_C в (1.13) підставимо співвідношення (1.21), тоді

$$i = C \frac{d\left(U - Ue^{-\frac{1}{\tau C}t}\right)}{dt} = C(-U)\left(-\frac{1}{rC}\right)e^{-\frac{1}{\tau C}t} = \frac{U}{r}e^{-\frac{1}{\tau C}t}. \quad (1.23)$$

Вираз (1.23) показує, що примусова складова повного струму дорівнює нулю. Це ж впливає і із розгляду нового усталеного режиму. Було показано раніше, що в новому усталеному режимі струм в колі не протікає, отже, примусова складова струму дорівнює нулю.

Графік зміни струму перехідного процесу зображений на рис. 1.5.

Оскільки i_C не підпорядковується закону комутації, то він здатен змінюватися стрибком. Це і підтверджує графік $i(t)$, який зображений на рис. 1.5. Із рисунка видно, що струм через ємність в момент комутації змінюється стрибком від значення, яке дорівнює нулю, до значення $\frac{U}{r}$.

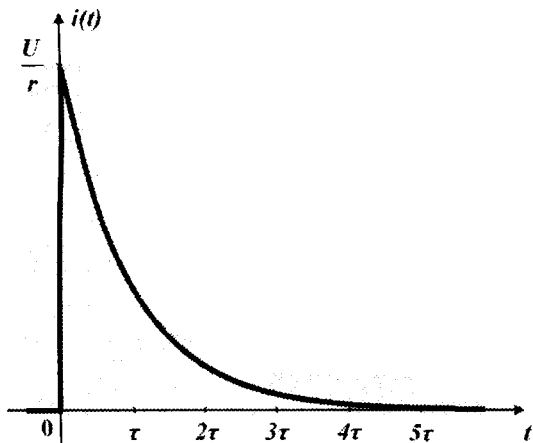


Рисунок 1.5

1.3 Відімкнення кола r, L від джерела постійної напруги

Розглянемо перехідний процес в колі, схема якого зображена на рис.1.6.

До комутації, тобто до розмикання ключа, через вольтметр протікає струм від точки a до точки b і вольтметр показує напругу, яка дорівнює напрузі джерела живлення

$$U_{ab} = U.$$

Через котушку протікає постійний струм

$$I_0 = \frac{U}{r}. \quad (1.24)$$

В магнітному полі котушки накопичена енергія

$$W_M = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{LU^2}{2r^2}. \quad (1.25)$$

В початковий момент після комутації струм в котушці не змінює ні свого значення, ні напрямку, тому через вольтметр струм після комутації протікає від точки b до точки a .

За другим законом Кірхгофа для контура, який складається із котушки і вольтметра, можна записати

$$L \frac{di}{dt} + ri + r_0 i = 0. \quad (1.26)$$

Оскільки в контурі немає е.р.с., то сума напруг дорівнює нулю.

Повний розв'язок рівняння (1.26) запишемо у вигляді

$$i = i_{np} + i_g.$$

В новому усталеному режимі струм в контурі дорівнює нулю, оскільки відсутнє джерело е.р.с., тому

$$i_{np} = 0.$$

Вільна складова

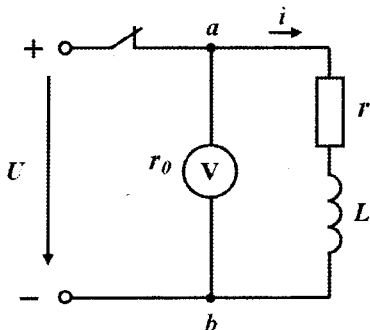


Рисунок 1.6

$$i_g = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$Lp + (r + r_0) = 0$$

і його корінь

$$p = -\frac{r + r_0}{L}.$$

Таким чином,

$$i = Ae^{-\frac{r+r_0}{L}t}. \quad (1.27)$$

Визначимо початкові умови.

Струм в котушці індуктивності підпорядковується закону комутації, тому

$$i(0_+) = i(0_-).$$

Значення $i(0_-)$ дорівнює струму в котушці в момент, який безпосередньо передує комутації, тобто до розмикання ключа. Як встановлено раніше (1.24),

$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{U}{r}.$$

Підставляючи початкові умови в (1.27), одержуємо

$$\frac{U}{r} = A, \quad (1.28)$$

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{r+r_0}{L}t}. \quad (1.29)$$

Покажемо, що енергія, яка накопичена в магнітному полі котушки за час перехідного процесу, повністю витрачається на нагрівання опорів r і r_0 .

Енергія, яка виділяється на опорах за час перехідного процесу, визначається виразом

$$W = \int_0^{\infty} i^2 (r + r_0) dt.$$

Підставимо замість струму i його значення із (1.29) і виконаємо необхідні перетворення

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{\infty} \left(\frac{U}{r} e^{-\frac{r+r_0}{L} t} \right)^2 (r+r_0) dt = \frac{U^2}{r^2} (r+r_0) \int_0^{\infty} e^{-\frac{2(r+r_0)}{L} t} dt = \\
 &= \frac{U^2}{r^2} (r+r_0) \frac{L}{-2(r+r_0)} \cdot e^{-\frac{2(r+r_0)}{L} t} \Big|_0^{\infty} = \frac{LU^2}{2r^2}. \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

Порівнюючи (1.30) і (1.25), бачимо, що енергія, яка накопичена в магнітному полі до комутації, повністю витрачається під час перехідного процесу на нагрівання опорів r і r_0 .

Визначимо напругу на вольтметрі під час перехідного процесу, яка дорівнює напрузі між точками a і b . Раніше було з'ясовано, що під час перехідного процесу струм тече від точки b до точки a , тому

$$u_V = u_{ab} = -ir_0$$

або

$$u_V = -U \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r+r_0}{L} t}. \quad (1.31)$$

Найбільшого значення напруга на вольтметрі набуває в момент $t = 0$, тобто

$$u_{V \max} = -U \frac{r_0}{r}. \quad (1.32)$$

Зазвичай опір вольтметра значно більший опору ділянки кола, на якій вимірюється напруга, тобто $r_0 \gg r$, тому напруга на вольтметрі в момент $t = 0$ значно перевищує напругу джерела, до того ж вона має протилежну полярність, що може спричинити пошкодження приладу.

Розглянемо числові значення.

Нехай $U = 100$ В, $L = 1$ Гн, $r = 10$ Ом, $r_0 = 90$ Ом.

Напруга на вольтметрі до комутації

$$U_V = U = 100 \text{ В.}$$

Напруга на вольтметрі в початковий момент після комутації ($t=0$) визначається згідно з (1.32)

$$u_V = -U \frac{r_0}{r} = -100 \frac{90}{10} = -900 \text{ В.}$$

Стала часу

$$\tau = \frac{L}{r + r_0} = \frac{1}{10 + 90} = 0,01 \text{ с.}$$

Практична тривалість перехідного процесу

$$t_{np} = (4 \div 5) \tau = (0,04 \div 0,05) \text{ с.}$$

1.4 Під'єднання кола r, L до джерела синусоїдної напруги

Розглянемо коло, схема якого зображена на рис. 1.1, коли прикладена напруга змінюється за синусоїдним законом

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (1.33)$$

Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа, одержуємо

$$L \frac{di}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (1.34)$$

Повний розв'язок рівняння

$$i = i_{np} + i_g.$$

Примусова складова струму знаходиться із розрахунку нового усталеного режиму, тому ця складова може бути розрахована комплексним методом і змінюється за синусоїдним законом

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi),$$

де амплітуда струму

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}},$$

а

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}.$$

Вільна складова, яка є розв'язком однорідного диференціального рівняння, має такий же вигляд, як і при підімкненні кола r, L до джерела постійної напруги, тобто

$$i_g = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння $Lp + r = 0$, а його корінь $p = -r/L$.
 Таким чином, повний розв'язок

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) + Ae^{pt}. \quad (1.35)$$

Сталу інтегрування A знаходимо, використовуючи початкові умови. Оскільки в колі, яке розглядається, початкові умови нульові (струму в колі до комутації не було), то для $t = 0$

$$i(0_+) = i(0_-) = 0.$$

Підставимо $t = 0$ і $i(0) = 0$ в (1.35) та одержимо

$$0 = I_m \sin(\beta - \varphi) + A.$$

Звідси

$$A = -I_m \sin(\beta - \varphi). \quad (1.36)$$

Тоді

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) - [I_m \sin(\beta - \varphi)] e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (1.37)$$

Побудуємо графік зміни струму в колі (рис. 1.7), коли стала часу кола значно більша періоду синусоїдної функції $\tau \gg T$.

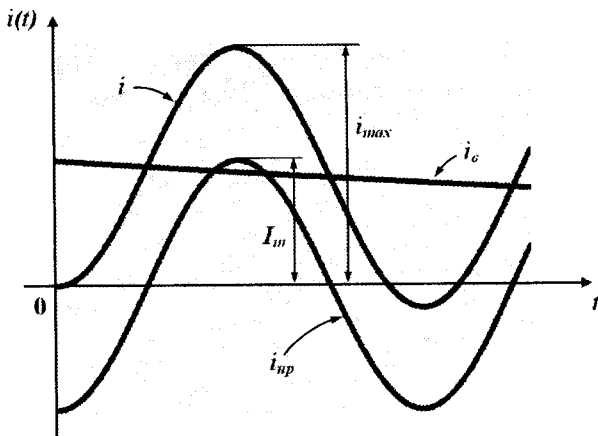


Рисунок 1.7

Примусова складова являє собою синусоїдну функцію.

Припустимо, що ключ замикається в момент, коли примусова складова набуває найменшого з своїх від'ємних значень ($\beta - \varphi = -\pi/2$)

$$i_{np}(0_+) = -I_m.$$

В цьому випадку вільна складова для $t = 0$

$$i_s(0_+) = -i_{np}(0_+) = I_m,$$

оскільки повний струм $i(0_+) = 0$.

Максимальне значення струму перехідного процесу i_{max} перевищує амплітуду усталеного значення струму майже в два рази (рис. 1.7), тоді як при під'єднанні такого кола до джерела постійної напруги струм перехідного процесу не перевищує усталеного значення (рис. 1.2).

При зміні моменту вмикання змінюються значення $i_{np}(0_+)$ і $i_s(0_+)$, що змінює і характер перехідного процесу.

Нехай, наприклад, коло вмикається в момент, коли різниця $\beta - \varphi \approx 0$, як це показано на рис. 1.8.

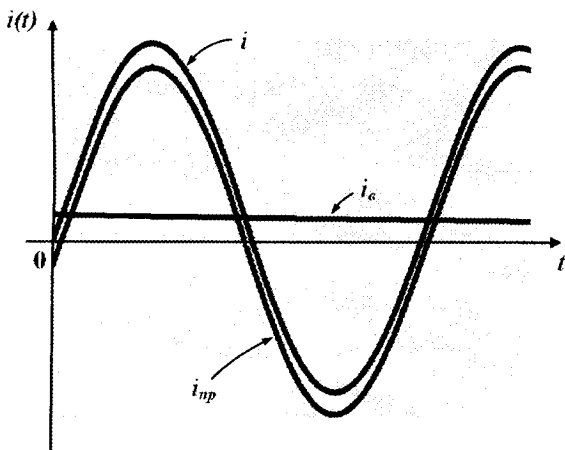


Рисунок 1.8

В цьому випадку $i_s(0_+) = -i_{np}(0_+)$ набувають близьких до

нуля значень і струм i перехідного процесу мало відрізняється від усталеної складової.

Якщо ключ замикається в момент часу, коли примусова складова струму проходить через нуль ($\beta - \varphi = 0$), то вільна складова дорівнює нулю, і в колі зразу ж встановлюється новий усталений режим.

Таким чином, при під'єднанні кола r, L до джерела синусоїдної напруги струм перехідного процесу може перевищувати амплітуду струму усталеного режиму, а характер перехідного процесу залежить від моменту вмикання.

1.5 Перехідний процес в розгалужених колах, що містять один реактивний елемент

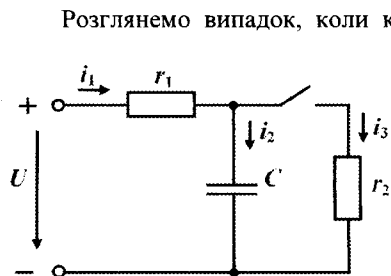


Рисунок 1.9

Розглянемо випадок, коли коло містить декілька контурів (рис. 1.9). Після замикання ключа у всіх вітках кола протікають струми перехідного процесу. Для їх знаходження складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану кола ($t \geq 0$, ключ замкнений) і

доповнимо цю систему рівнянням, яке взаємопов'язує струм і напругу на ємності:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ r_1 i_1 + u_C = U, \\ r_2 i_2 + u_C = 0, \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (1.38)$$

Для розв'язання задачі необхідно із системи (1.38) одержати одне диференціальне рівняння відносно однієї невідомої. Такою

невідомою в цьому прикладі зручно взяти напругу на ємності u_C , тому що вона підпорядковується закону комутації. Виразимо решту змінних (i_1, i_2, i_3) через u_C . Змінну i_1 виразимо через u_C із другого рівняння системи, i_2 – із третього і i_3 – із четвертого.

$$i_1 = \frac{U - u_C}{r_1}, \quad i_2 = \frac{u_C}{r_2}, \quad i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.39)$$

Підставимо одержані значення струмів в перше рівняння системи

$$\frac{U - u_C}{r_1} - \frac{u_C}{r_2} - C \frac{du_C}{dt} = 0$$

або

$$C \frac{du_C}{dt} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) u_C = \frac{U}{r_1}.$$

Отже, ми одержали неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуємо його так само, як і в попередніх прикладах.

Повний розв'язок

$$u = u_{np} + u_{\epsilon}.$$

Примусову складову визначаємо із розрахунку нового усталеного режиму. В новому усталеному режимі ключ замкнений, в колі тече постійний струм через опори r_1 і r_2 , через вітку з ємністю струм не тече, оскільки ємність для постійного струму є безмежно великим опором.

Величина постійного струму

$$i_{1np} = i_{3np} = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Напруга на ємності дорівнює напрузі на опорі R_2 , оскільки ці елементи з'єднані паралельно, тому

$$u_{Cnp} = i_{3np} r_2 = \frac{U}{r_1 + r_2} r_2. \quad (1.41)$$

Вільна складова

$$u_{C\epsilon} = A e^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$Cp + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 0$$

і його корінь

$$p = -\frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{C} = -\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}.$$

Повний розв'язок з врахуванням знайдених примусової і вільної складових

$$u_C = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2} + Ae^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}. \quad (1.42)$$

Визначаємо початкові умови. Оскільки напруга на ємності підпорядковується закону комутації, то

$$u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Знайдемо $u_C(0_-)$. Оскільки в усталеному (до комутаційного) режимі напруга на вході постійна, постійною має бути і напруга на ємності $u_C = const$. В цьому випадку струм через ємність

$$i_2(0_-) = C \frac{du_C}{dt} = 0. \text{ Водночас враховуючи, що для } t = 0_- \text{ — ключ}$$

розімкнено, опір r_1 і ємність C виявляються з'єднаними послідовно, тому і струм $i_1(0_-) = i_2(0_-) = 0$. За другим законом Кірхгофа

$$r_1 i_1(0_-) + u_C(0_-) = U. \text{ Оскільки } i_1(0_-) = 0, \text{ то}$$

$$u_C(0_-) = U. \quad (1.43)$$

Відповідно

$$u_C(0_+) = U.$$

Підставляючи $t = 0$ і значення $u_C(0_+)$ в (1.42), одержимо

$$U = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2} + A.$$

Звідси

$$A = U - \frac{Ur_2}{r_1 + r_2} = U \frac{r_1 + r_2 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{Ur_1}{r_1 + r_2} \quad (1.44)$$

і повний розв'язок

$$u_C = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2} + \frac{Ur_1}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2 C} t}. \quad (1.45)$$

Якщо потрібно знайти закони зміни струмів в колі, то можна скористатися співвідношеннями (1.39) і (1.45).

$$i_1 = \frac{U - u_C}{r_1} = \frac{U}{r_1} - \frac{Ur_2}{r_1(r_1 + r_2)} - \frac{Ur_1}{r_1(r_1 + r_2)} e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2 C} t} =$$

$$= \frac{U}{r_1 + r_2} - \frac{U}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2 C} t},$$

$$i_2 = \frac{u_C}{r_2} = \frac{Ur_2}{r_2(r_1 + r_2)} + \frac{Ur_1}{r_2(r_1 + r_2)} e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2 C} t} = \frac{U}{r_1 + r_2} + \frac{Ur_1}{r_2(r_1 + r_2)} e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2 C} t},$$

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d\left(\frac{Ur_2}{r_1 + r_2} + \frac{Ur_1}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2 C} t}\right)}{dt} =$$

$$= C \frac{UR_1}{r_1 + r_2} \left(-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}\right) e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2 C} t} = -\frac{U}{r_2} e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2 C} t}.$$

1.6 Незалежні і залежні початкові умови

В попередньому підрозділі за базові змінні, тобто такі змінні, відносно яких складалося диференціальне рівняння, були обрані або напруга на ємності u_C , або струм в індуктивності i_L , оскільки для них виконуються закони комутації і легко знаходяться початкові умови.

Початкові умови для цих змінних ($u_C(0_+)$ і $i_L(0_+)$) називаються *незалежними*.

Початкові умови для всіх інших змінних називаються *залежними*.

Вміння визначити залежні початкові умови дозволяє надалі вибирати будь-яку невідому величину за базову змінну.

Розглянемо числовий приклад і покажемо на ньому, як знаходити залежні початкові умови.

Приклад 1.1

Для даного кола (рис.1.10) визначити закон зміни струму i_1 в перехідному режимі, якщо

$$r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом}, r_3 = r_4 = 20 \text{ Ом}, C = 100 \text{ мкФ}, U = 200 \text{ В}.$$

Для кола після комутації запишемо систему диференціальних рівнянь за законами

Кірхгофа

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ r_1 i_1 + u_C + r_3 i_3 = U, \\ r_2 i_2 - r_3 i_3 - u_C = 0, \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (1.53)$$

Складемо із одержаної системи одне диференціальне рівняння відносно шуканої невідомої i_1 .

Для цього виразимо всі інші змінні (i_2 , i_3 , u_C) за допомогою i_1 .

Безпосередньо із рівнянь системи не можна виразити ні однієї змінної через i_1 , тому додамо друге і третє рівняння системи.

Тоді

$$r_1 i_1 + r_2 i_2 = U.$$

$$\text{Звідки маємо } i_2 = \frac{U - r_1 i_1}{r_2}.$$

Із першого рівняння системи

$$i_3 = i_1 - i_2 = i_1 - \frac{U - r_1 i_1}{r_2} = i_1 - \frac{U}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} i_1 = i_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) - \frac{U}{r_2}.$$

Із третього рівняння системи

$$u_C = r_2 i_2 - r_3 i_3 = r_2 \left(\frac{U - r_1 i_1}{r_2} \right) - r_3 \left(i_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) - \frac{U}{r_2} \right) =$$

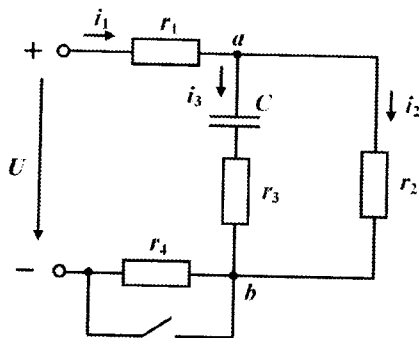


Рисунок 1.10

$$= U - r_1 i_1 - r_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) i_1 + U \frac{r_3}{r_2} = U \left(1 + \frac{r_3}{r_2}\right) - \left(r_1 + r_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right) i_1.$$

Підставимо значення i_3 і u_C , що виражені через i_1 , в четверте рівняння системи

$$\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) i_1 - \frac{U}{r_2} = C \frac{d \left(U \left(1 + \frac{r_3}{r_2}\right) - \left(r_1 + r_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right) i_1 \right)}{dt}.$$

Проведемо перетворення

$$\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) i_1 - \frac{U}{r_2} = -C \left(r_1 + r_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right) \frac{di_1}{dt}$$

або

$$C \left(r_1 + r_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right) \frac{di_1}{dt} + \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) i_1 = \frac{U}{r_2}. \quad (1.54)$$

Повний розв'язок диференціального рівняння (1.54)

$$i_1 = i_{1np} + i_{1\sigma}.$$

Примусову складову знаходимо із розрахунку нового усталеного режиму. В цьому режимі опір r_4 закорочений, через вітку з ємністю струм не протікає, тому

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + r_2} = \frac{200}{10 + 10} = 10 \text{ А}. \quad (1.55)$$

Вільна складова

$$i_{1\sigma} = A e^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$C \left(r_1 + r_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right) p + \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = 0$$

і його корінь

$$p = - \frac{\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)}{C \left(r_1 + r_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right)} = - \frac{r_1 + r_2}{C (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)} =$$

$$= -\frac{10+10}{100 \cdot 10^{-6}(10 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 20)} = -400 \text{ 1/c.}$$

Повний розв'язок з врахуванням знайдених складових

$$i_1 = 10 + Ae^{pt}. \quad (1.56)$$

Щоб визначити сталу інтегрування A , треба спочатку знайти залежну початкову умову для струму $i_1(0_+)$. Цей струм закону комутації не підпорядковується.

Для знаходження залежної початкової умови запишемо систему (1.53) для моменту часу $t = 0_+$.

$$\begin{cases} i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) = 0, \\ r_1 i_1(0_+) + u_C(0_+) + r_3 i_3(0_+) = U, \\ r_2 i_2(0_+) - r_3 i_3(0_+) - u_C(0_+) = 0, \\ i_3(0_+) = C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+}. \end{cases} \quad (1.57)$$

Доповнимо цю систему законом комутації

$$u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Значення $u_C(0_-)$ – це напруга на ємності безпосередньо перед комутацією, тобто коли ключ ще розімкнений. В цьому випадку в вітці з ємністю струму немає, тому напруга на ємності дорівнює напрузі між точками a і b або напрузі на опорі r_2 .

Струм в колі до комутації тече через опори r_1 , r_2 і r_4 (ключ розімкнений) і може бути знайдений за законом Ома

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{U}{r_1 + r_2 + r_4}.$$

Тому

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = i_2(0_-) r_2 = \frac{U r_2}{r_1 + r_2 + r_4}, \quad (1.58)$$

або в числових значеннях

$$u_C(0_+) = \frac{200 \cdot 10}{10 + 10 + 20} = 50 \text{ В.}$$

Розв'язуючи систему (1.57) з врахуванням початкового значення напруги на ємності (1.58), знаходимо $i_1(0_+)$.

Із другого рівняння системи

$$i_1(0_+) = \frac{U - u_C(0_+) - r_3 i_3(0_+)}{r_1} = \frac{U}{r_1} - \frac{u_C(0_+)}{r_1} - \frac{r_3 i_3(0_+)}{r_1}. \quad (1.59)$$

Із першого рівняння системи

$$i_2(0_+) = i_1(0_+) - i_3(0_+).$$

Підставимо одержане значення $i_2(0_+)$ в третє рівняння системи

$$r_2(i_1(0_+) - i_3(0_+)) - r_3 i_3(0_+) - u_C(0_+) = 0$$

або

$$r_2 i_1(0_+) - r_2 i_3(0_+) - r_3 i_3(0_+) - u_C(0_+) = 0.$$

Звідси

$$i_3(0_+) = \frac{r_2 i_1(0_+) - u_C(0_+)}{r_2 + r_3}. \quad (1.60)$$

Підставляючи тепер (1.60) в (1.59), отримаємо

$$i_1(0_+) = \frac{U}{r_1} - \frac{u_C(0_+)}{r_1} - \frac{r_3}{r_1} \frac{r_2 i_1(0_+) - u_C(0_+)}{r_2 + r_3}$$

або

$$i_1(0_+) \left(1 + \frac{r_2 r_3}{r_1 (r_2 + r_3)} \right) = \frac{U}{r_1} - u_C(0_+) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{r_3}{r_1 (r_2 + r_3)} \right).$$

Підставимо числові значення

$$i_1(0_+) \left(1 + \frac{10 \cdot 20}{10 \cdot (10 + 20)} \right) = \frac{200}{10} - 50 \left(\frac{1}{10} - \frac{20}{10 \cdot (10 + 20)} \right),$$

звідси

$$i_1(0_+) = \frac{55}{5} = 11 \text{ А.}$$

Підставляючи $t = 0$ і $i_1(0_+) = 11 \text{ А}$ в (1.56) отримаємо

$$11 = 10 + A,$$

звідси

$$A = 1$$

і остаточний розв'язок

$$i_1 = (10 + e^{-400t}) \text{ А.}$$

1.7 Під'єднання кола з елементами r, L, C до джерела постійної напруги

Розглянемо перехідний процес в колі, яке містить два реактивних елементи (рис. 1.11).

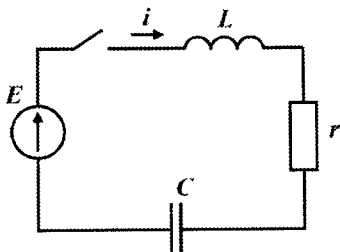


Рисунок 1.11

Рівняння за другим законом Кірхгофа для кола після замикання ключа має вигляд

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_C = E. \quad (1.61)$$

Співвідношення, яке взаємопов'язує струм i і напругу на ємності,

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.62)$$

Підставляючи (1.62) в (1.61), одержуємо

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad (1.63)$$

неоднорідне диференціальне рівняння *другого* порядку.

Повний його розв'язок записується також як сума примусової і вільної складових

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cв}.$$

Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму. В цьому режимі струм в колі відсутній, немає напруги на опорі R і індуктивності L , тому напруга на ємності дорівнює е.р.с. джерела

$$u_{Cnp} = E.$$

Перед тим, як записати вільну складову, складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені. Для цього замінимо в

однорідному рівнянні, одержаному із (1.63), $\frac{d^2 u_C}{dt^2}$ на p^2 , $\frac{du_C}{dt}$ на p , а u_C на одиницю. Тоді

$$LCp^2 + rCp + 1 = 0 \quad (1.64)$$

або

$$p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Характеристичне рівняння має два корені, які визначаються за виразом

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

В залежності від параметрів кола корені можуть мати значення.

1. Якщо $\frac{r^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, то під коренем від'ємна величина і корені будуть комплексно-спряженими, тобто

$$p_1 = -\delta + j\omega_g, \quad p_2 = -\delta - j\omega_g,$$

де для даної схеми

$$\delta = \frac{r}{2L}; \quad \omega_g = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}.$$

Як відомо з математики, вільну складову в цьому випадку зручно записувати у вигляді

$$u_{Cg} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_g t + A_2 \cos \omega_g t), \quad (1.65)$$

де A_1 і A_2 – сталі інтегрування.

2. Якщо $\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, то корені будуть від'ємні, дійсні і різні

$$p_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad p_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

і вільна складова записується у вигляді

$$u_{Cg} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (1.66)$$

де A_1 і A_2 – сталі інтегрування.

3. Якщо $\frac{r^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$, то в цьому випадку корені будуть від'ємні, дійсні і рівні

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{r}{2L}$$

і вільна складова записується у вигляді

$$u_{C\theta} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}. \quad (1.67)$$

Розглянемо всі три випадки.

1. Нехай корені будуть комплексно-спряженими. Тоді

$$u_{C\theta} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_\theta t + A_2 \cos \omega_\theta t)$$

і повний розв'язок

$$u_C = E + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_\theta t + A_2 \cos \omega_\theta t). \quad (1.68)$$

Знайдемо початкові умови для визначення сталих інтегрування. Оскільки напруга на ємності підпорядковується закону комутації, то, припустивши, що до комутації ємність була не зарядженою, одержуємо

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

Підставляючи $t = 0$ і $u_C(0) = 0$ в (1.68) будемо мати

$$0 = E + 1 \cdot (A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1),$$

звідки

$$A_2 = -E. \quad (1.69)$$

Для знаходження сталої інтегрування A_1 використаємо другу змінну, яка відповідає закону комутації, тобто струм через індуктивність i . До комутації струму в колі не було, тому

$$i(0_+) = i(0_-) = 0. \quad (1.70)$$

Щоб використати ці початкові умови, потрібно виразити струм i через сталі інтегрування A_1 і A_2 . З цією метою в (1.62) підставимо (1.68). Тоді

$$\begin{aligned} i = C \frac{du_C}{dt} &= C \frac{d[E + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_\theta t + A_2 \cos \omega_\theta t)]}{dt} = \\ &= C(-\delta) e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_\theta t + A_2 \cos \omega_\theta t) + \\ &+ C e^{-\delta t} (\omega_\theta A_1 \cos \omega_\theta t - \omega_\theta A_2 \sin \omega_\theta t). \end{aligned}$$

Підставляючи початкові умови в останнє рівняння ($t=0$, $i(0)=0$), одержуємо

$$0 = C [(-\delta) \cdot 1 \cdot (A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1) + 1 \cdot (\omega_\theta A_1 \cdot 1 - \omega_\theta A_2 \cdot 0)]$$

або

$$0 = -\delta A_2 + \omega_g A_1.$$

Звідси з урахуванням (1.69)

$$A_1 = \frac{\delta}{\omega_g} A_2, \quad A_1 = -\frac{\delta}{\omega_g} E.$$

Повний розв'язок

$$u_C = E - e^{-\delta t} \left(E \frac{\delta}{\omega_g} \sin \omega_g t + E \cos \omega_g t \right). \quad (1.71)$$

З математики відомо, що

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = A \sin(\alpha + \gamma),$$

де

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$\gamma = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b}{a}\right), & a \geq 0, \\ \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \pm 180^\circ, & a < 0. \end{cases}$$

Застосовуючи це перетворення до (1.71), одержимо

$$u_C = E - A e^{-\delta t} \sin(\omega_g t + \gamma), \quad (1.72)$$

де

$$A = \sqrt{\left(E \frac{\delta}{\omega_g}\right)^2 + E^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega_g}{\delta}.$$

Із (1.72) видно, що вільна складова являє собою згасаючу синусоїду з періодом

$$T_g = \frac{2\pi}{\omega_g}.$$

Кутова частота ω_g називається *кутовою частотою вільних коливань*, а величина $e^{\delta T_g}$ – *декрементом коливань*.

Графік зміни вільної складової напруги на ємності показаний на рис. 1.12.

Штрихові лінії є обвідними загасаючої синусоїди і описуються виразом $\pm A e^{-\delta t}$.

Коливання в таких колах виникають внаслідок періодичного перетворення енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки. Ці коливання супроводжуються втратами енергії на активних опорах.

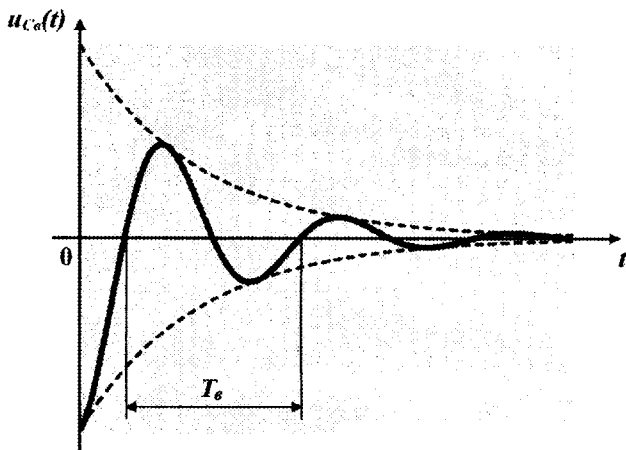
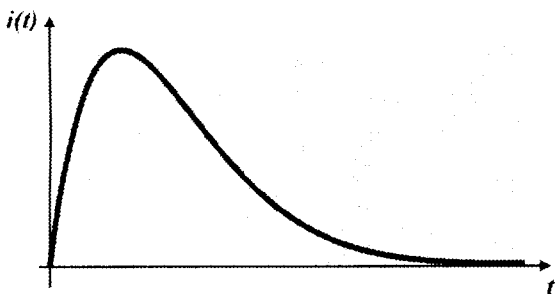


Рисунок 1.12

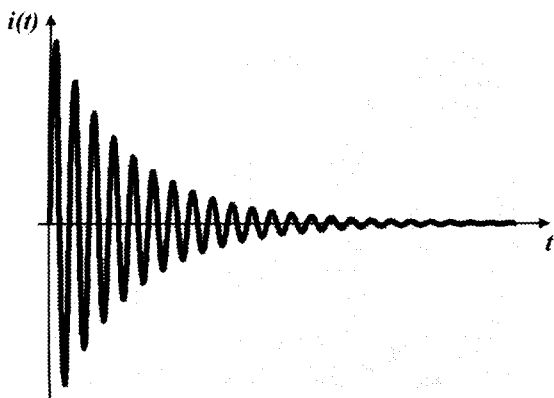
Такий режим перехідного процесу називається *коливальним* або *періодичним* і він може виникати тільки в колах, які мають реактивні елементи різного характеру, тобто ємності і індуктивності.

Як і в колах, які описуються диференціальними рівняннями першого порядку, в цьому випадку можна ввести сталу часу $\tau = 1/\delta$, яка визначає практичну тривалість перехідного процесу.

Для коливального режиму перехідного процесу, що зображений на рис. 1.13, а струм у колі затухає раніше, ніж встигає зробити навіть одне коливання. Така залежність буде мати місце у випадку, коли стала часу, а значить і тривалість перехідного процесу $(4 \div 5)\tau$, буде значно менша за період вільних коливань ($\tau \ll T_g$). Для порівняння на рис. 1.13, б наведений коливальний режим перехідного процесу за умови $\tau \gg T_g$.



а)



б)

Рисунок 1.13

2. Припустимо, що корені характеристичного рівняння (1.64) p_1 і p_2 дійсні від'ємні різні, тоді

$$u_{C8} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

і повний розв'язок

$$u_C = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.73)$$

Початкові умови залишаються ті ж, що і в пункті 1 ($t = 0$ і $u_C(0) = 0$).

Підставимо їх в (1.73) і запишемо

$$0 = E + A_1 + A_2. \quad (1.74)$$

Щоб одержати друге рівняння для знаходження A_1 і A_2 виразимо струм i (1.62) через u_C (1.73)

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t})}{dt} = C(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}). \quad (1.75)$$

Підставляючи в (1.75) $t = 0$ і початкові умови (1.70), одержуємо $0 = C(A_1 p_1 + A_2 p_2)$ або

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \quad (1.76)$$

Розв'яжемо разом рівняння (1.74) і (1.76). Тоді

$$A_1 = \frac{E p_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = -\frac{E p_1}{p_1 - p_2}. \quad (1.77)$$

Повний розв'язок

$$u_C(t) = E + \frac{E p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{E p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (1.78)$$

На рис. 1.14 наведено графік зміни вільної складової, причому показані окремо $u_{C1\phi} = A_1 e^{p_1 t}$ і $u_{C2\phi} = A_2 e^{p_2 t}$.

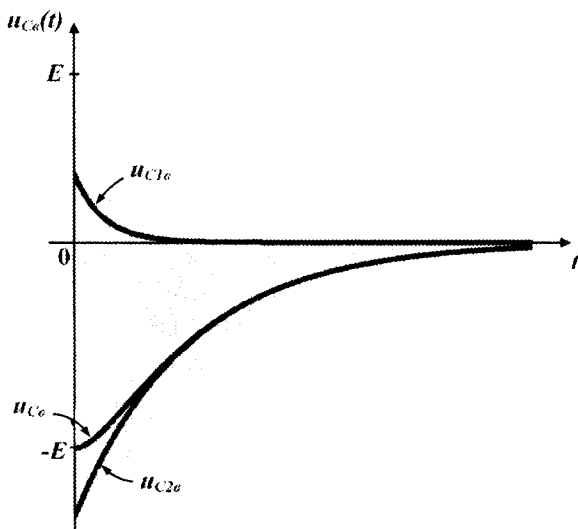


Рисунок 1.14

Графік показує, що при різних коренях характеристичного рівняння вільна складова ($u_{C\theta}$) наближається асимптотично до нуля, не створюючи коливань, тому такий режим перехідного процесу називається *аперіодичним*. В цьому випадку є дві сталі часу – $\tau_1 = \frac{1}{|p_1|}$, $\tau_2 = \frac{1}{|p_2|}$ і практична тривалість перехідного процесу визначається за більшим значенням τ , тобто

$$t_{np} = (4 \div 5) \tau_{max}.$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні від'ємні рівні ($p_1 = p_2 = p$), що є *граничним режимом* між періодичним і аперіодичним, то вільна складова записується у вигляді

$$u_{C\theta} = e^{pt}(A_1 + A_2 t)$$

і повний розв'язок

$$u_C = E + e^{pt}(A_1 + A_2 t). \quad (1.79)$$

Для визначення сталих інтегрування підставимо початкові умови $t = 0$ і $u_C(0) = 0$ в (1.79) $0 = E + A_1$, звідки

$$A_1 = -E. \quad (1.80)$$

Виражаємо струм i через u_C

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(E + e^{pt}(A_1 + tA_2))}{dt} = \\ &= Cpe^{pt}(A_1 + tA_2) + Ce^{pt}A_2. \end{aligned}$$

Підставимо в це рівняння другу початкову умову (1.70)

$$0 = CpA_1 + CA_2.$$

Звідки з врахуванням (1.80)

$$A_2 = -pA_1 = pE. \quad (1.81)$$

Повний розв'язок

$$u_C = E - Ee^{pt} + ptEe^{pt}. \quad (1.82)$$

На рис.1.15 зображений графік вільної складової, де окремо показані

$$u_{C1\theta} = -Ee^{pt}, \quad u_{C2\theta} = ptEe^{pt}.$$

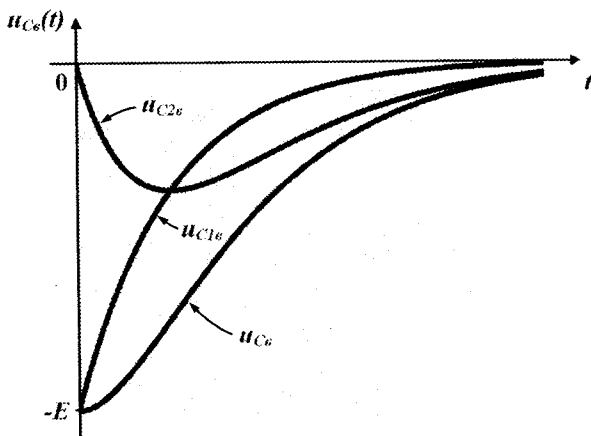


Рисунок 1.15

В цьому режимі вільна складова так само асимптотично наближається до нульового значення.

Практична тривалість перехідного процесу

$$t_{np} = (4 \div 5)\tau,$$

де $\tau = 1/|p|$.

Такий режим перехідного процесу називається *граничним* або *критичним*.

1.8 Розрахунок перехідних процесів в складних розгалужених колах

На основі розглянутих прикладів можна сформулювати загальний підхід до розрахунку перехідних процесів *класичним методом* в будь-яких складних колах.

1. Для післякомутаційного стану кола за законами Кірхгофа для миттєвих значень записується система диференціальних рівнянь.

2. Одержана система зводиться до одного диференціального рівняння відносно однієї базової невідомої (x), для чого всі інші невідомі виражаються через базову.

3. Повний розв'язок одержаного диференціального рівняння записується в вигляді суми примусової (x_{np}) і вільної (x_e) складових.

4. Примусова складова знаходиться із розрахунку нового усталеного режиму.

Наприклад, якщо діяння (прикладена напруга) постійне, то постійна і примусова складова; якщо діяння синусоїдне, то примусова складова синусоїдна і може бути знайдена комплексним методом.

5. Визначаються корені характеристичного рівняння, число яких дорівнює порядкові диференціального рівняння.

Припустимо, що одержане диференціальне рівняння має вигляд

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t), \quad (1.83)$$

де a_k – коефіцієнти, які залежать від параметрів кола;

x – базова невідома;

$f(t)$ – діяння;

n – порядок диференціального рівняння.

Характеристичне рівняння

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1.84)$$

6. В залежності від виду коренів характеристичного рівняння записується вільна складова.

Якщо всі корені дійсні різні від'ємні, то

$$x_e = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_k e^{p_k t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.85)$$

Якщо частина коренів комплексно-спряжена, наприклад, $p_{2,3} = -\delta_1 \pm j\omega_{01}$, а $p_{4,5} = -\delta_2 \pm j\omega_{02}$, то вільна складова записується у вигляді

$$x_e = A_1 e^{p_1 t} + e^{-\delta_1 t} (A_2 \sin \omega_{01} t + A_3 \cos \omega_{01} t) + e^{-\delta_2 t} (A_4 \sin \omega_{02} t + A_5 \cos \omega_{02} t) + A_6 e^{p_6 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.86)$$

Якщо частина коренів кратна, наприклад, $p_6 = p_7 = p$, то вільна складова визначається за виразом

Відзначимо, що в лінійних електричних колах без зворотних зв'язків всі вільні складові з перебігом часу перетворюються в нуль, тому завжди дійсна частина комплексно-спряжених коренів, а також дійсні корені характеристичних рівнянь є завжди від'ємними.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.2

Визначити закон зміни вхідного струму (i_1) при розмиканні ключа (рис. 1.16).

$$r_1 = 200 \text{ Ом}, r_2 = 50 \text{ Ом}, L = 0,1 \text{ Гн}, C = 50 \text{ мкФ}, E = 200 \text{ В}.$$

Складемо для миттєвих значень за законами Кірхгофа систему диференціальних рівнянь для післякомутаційного стану кола (ключ розімкнутий).

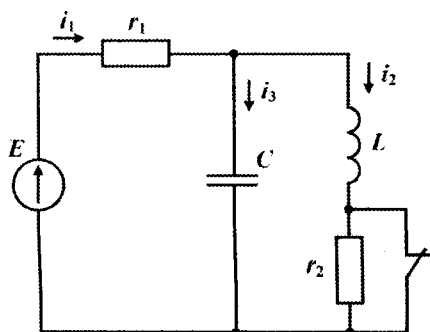


Рисунок 1.16

тему диференціальних рівнянь для післякомутаційного стану кола (ключ розімкнутий).

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + u_C &= E \\ L \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 - u_C &= 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 &= C \frac{du_C}{dt} \end{aligned} \right\} (1.91)$$

Зведемо цю систему до одного диференціального рівняння відносно струму i_1 , виражаючи через i_1 всі інші невідомі. Із першого рівняння системи маємо

$$u_C = E - r_1 i_1. \quad (1.91 \text{ а})$$

Із четвертого рівняння

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(E - r_1 i_1)}{dt} = -Cr_1 \frac{di_1}{dt}. \quad (1.91 \text{ б})$$

Із третього рівняння системи

$$i_2 = i_1 - i_3 = i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}. \quad (1.91 \text{ в})$$

Підставивши одержані значення в друге рівняння системи, отримаємо

$$L \frac{d\left(i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}\right)}{dt} + r_2 \left(i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}\right) - (E - r_1 i_1) = 0$$

або

$$L \frac{di_1}{dt} + LC r_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + r_2 i_1 + r_1 r_2 C \frac{di_1}{dt} - E + r_1 i_1 = 0.$$

Зведемо подібні члени

$$LC r_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (r_1 r_2 C + L) \frac{di_1}{dt} + (r_1 + r_2) i_1 = E.$$

Після підстановки числових значень, отримаємо

$$10^{-3} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + 0,6 \frac{di_1}{dt} + 250 i_1 = 200. \quad (1.92)$$

Маємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Повний розв'язок цього рівняння

$$i_1 = i_{1np} + i_{1c}. \quad (1.93)$$

Знаходимо примусову складову із розрахунку нового усталеного режиму. В новому усталеному режимі ключ розімкнутий, е.р.с. постійна, струм через ємність не протікає, тому

$$i_{1np} = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{200}{200 + 50} = 0,8 \text{ А}. \quad (1.94)$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$10^{-3} p^2 + 0,6 p + 250 = 0$$

і визначаємо його корені

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,36 - 4 \cdot 250 \cdot 10^{-3}}}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,36 - 1}}{2 \cdot 10^{-3}} = \\ &= \frac{-0,6 \pm \sqrt{-0,64}}{2 \cdot 10^{-3}} = -300 \pm j400. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Корені виявились комплексно-спряженими, де

$$\delta = 300 \text{ 1/с}, \quad \omega_0 = 400 \text{ рад/с},$$

у зв'язку з чим режим перехідного процесу періодичний.

Стала часу

$$\tau = \frac{1}{300} = 3,333 \cdot 10^{-1} \text{ с,}$$

період коливань

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Вільна складова

$$i_{1e} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t).$$

Повний розв'язок

$$i_1 = 0,8 + e^{-300t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (1.96)$$

Для знаходження залежних початкових умов $i_1(0_+)$ та $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+}$ запишемо систему (1.91) для моменту часу $t = 0_+$

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1(0_+) + u_C(0_+) &= E \\ L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} + r_2 i_2(0_+) - u_C(0_+) &= 0 \\ i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) &= 0 \\ i_3(0_+) &= C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} \end{aligned} \right\}. \quad (1.97)$$

Доповнимо її незалежними початковими умовами, знайденими за законами комутації.

Закони комутації виконуються для струму через індуктивність (i_2) і напруги на ємності (u_C)

$$i_2(0_+) = i_2(0_-), \quad u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Значення $i_2(0_-)$ і $u_C(0_-)$ можна знайти, якщо розрахувати коло до комутації. Оскільки прикладена до кола напруга постійна, то в колі до комутації (при замкненому ключі) були постійні струми. Струм у вітці з ємністю не протікав. Також не протікав струм і через опір R_2 , оскільки його замкнено ключем, тому

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = i_1(0_-) = \frac{E}{r_1} = \frac{200}{200} = 1 \text{ А.} \quad (1.98)$$

Напруга на ємності при замкненому ключі дорівнює напрузі на індуктивності (паралельно з'єднані вітки).

Оскільки опір індуктивності при постійному струмі дорівнює нулю, то і напруга на індуктивності дорівнює нулю, і, відповідно,

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0. \quad (1.99)$$

Система (1.97) з допомогою незалежних початкових умов (1.98) і (1.99) дозволяє знайти $i_1(0_+)$. Із першого рівняння (1.97)

$$i_1(0_+) = \frac{E - u_C(0_+)}{r_1} = \frac{200 - 0}{200} = 1 \text{ А}. \quad (1.100)$$

Похідної $\frac{di_1}{dt}$ немає в системі (1.91) і (1.97), тому продиференціюємо перше рівняння системи (1.91)

$$r_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

і запишемо його для $t = 0_+$

$$r_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} + \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = 0.$$

Звідси

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = -\frac{1}{r_1} \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+}. \quad (1.101)$$

Значення $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+}$ виразимо із четвертого рівняння системи

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{1}{C} i_3(0_+),$$

тому

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = -\frac{1}{r_1 C} i_3(0_+).$$

Значення $i_3(0_+)$ знайдемо із третього рівняння системи (1.97) з врахуванням (1.98) і (1.100)

$$i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = 1 - 1 = 0.$$

Таким чином

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = 0. \quad (1.102)$$

Використаємо одержані початкові умови для знаходження A_1 і A_2 . Підставимо (1.100) в (1.96)

$$1,0 = 0,8 + 1 \cdot (A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1),$$

звідси

$$A_2 = 1,0 - 0,8 = 0,2. \quad (1.103)$$

Продиференціюємо (1.96)

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} = & (-300)e^{-300t} (A_1 \sin 400t + A_2 \cos 400t) + \\ & + e^{-300t} (A_1 \cdot 400 \cos 400t - A_2 \cdot 400 \sin 400t) \end{aligned}$$

і підставимо початкові умови $t = 0$ і (1.102) в одержане рівняння

$$0 = (-300) \cdot 1 \cdot (A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1) + 1 \cdot (A_1 \cdot 400 \cdot 1 - A_2 \cdot 400 \cdot 0)$$

або

$$-300A_2 + A_1 \cdot 400 = 0.$$

Звідси

$$A_1 = 0,15. \quad (1.104)$$

Остаточний розв'язок

$$i_1 = 0,8 + e^{-300t} (0,15 \sin 400t + 0,2 \cos 400t) \text{ А.} \quad (1.105)$$

Вираз (1.105) можна записати у вигляді

$$i_1 = 0,8 + Ae^{-300t} \sin(400t + \gamma),$$

де

$$A = \sqrt{0,15^2 + 0,2^2} = 0,25,$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{0,2}{0,15}, \quad \gamma \approx 53,2^\circ.$$

Таким чином,

$$i_1 = 0,8 + 0,25e^{-300t} \sin(400t + 53,2^\circ) \text{ А.}$$

Якщо необхідно знайти інші змінні, то можна використати співвідношення (1.91а) - (1.91в).

Визначимо, наприклад, струм i_2 , використавши (1.91 в)

$$\begin{aligned}
i_2 &= i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt} = \\
&= i_1 + 50 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \frac{di_1}{dt} = i_1 + 10^{-2} \frac{di_1}{dt} = 0,8 + e^{-300t} \times \\
&\times (0,15 \sin 400t + 0,2 \cos 400t) + 10^{-2} (-300) e^{-300t} \times \\
&\times (0,15 \sin 400t + 0,2 \cos 400t) + 10^{-2} e^{-300t} \times \\
&\times (0,15 \cdot 400 \cos 400t - 0,2 \cdot 400 \sin 400t) = \\
&= 0,8 + e^{-300t} (0,15 \sin 400t - 0,45 \sin 400t - 0,8 \sin 400t + \\
&+ 0,2 \cos 400t - 0,6 \cos 400t + 0,6 \cos 400t) = \\
&= 0,8 + e^{-300t} (-1,1 \sin 400t + 0,2 \cos 400t) = \\
&= 0,8 + 1,11 e^{-300t} \sin(400t + 169,7^\circ), \text{ А.}
\end{aligned}$$

Приклад 1.3

Визначити закон зміни струму i_2 в колі (рис. 1.17), якщо відомі його параметри: $r_1 = 150$ Ом, $r_2 = r_3 = 100$ Ом, $L_1 = 0,1$ Гн, $L_2 = 0,133$ Гн, $U = 200$ В.

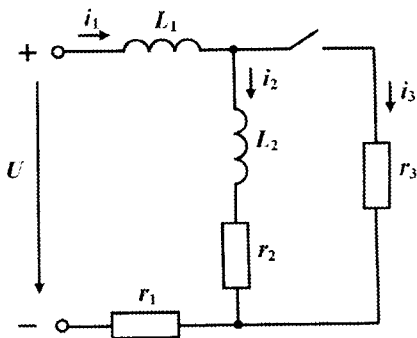


Рисунок 1.17

Запишемо систему диференціальних рівнянь для миттєвих значень напруг та струмів за законами Кірхгофа для післякомутаційного кола.

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + r_1 i_1 &= U \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 - r_3 i_3 &= 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.106)$$

Одержимо із цієї системи одне диференціальне рівняння відносно i_2 .

Із другого рівняння системи виражаємо струм i_3 через i_2

$$i_3 = \frac{L_2}{r_3} \frac{di_2}{dt} + \frac{r_2}{r_3} i_2, \quad (1.107)$$

а із третього рівняння — i_1

$$i_1 = i_2 + i_3 = i_2 + \frac{L_2}{r_3} \frac{di_2}{dt} + \frac{r_2}{r_3} i_2 = \frac{L_2}{r_3} \frac{di_2}{dt} + \left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right) i_2. \quad (1.108)$$

Підставимо значення струму i_1 із (1.108) в перше рівняння системи і запишемо

$$L_1 \frac{d\left(\frac{L_2}{r_3} \frac{di_2}{dt} + \left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right) i_2\right)}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + r_1 \left(\frac{L_2}{r_3} \frac{di_2}{dt} + \left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right) i_2\right) = U$$

або

$$\frac{L_1 L_2}{r_3} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_1 \left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right) \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + \frac{r_1}{r_3} L_2 \frac{di_2}{dt} + r_1 \left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right) i_2 = U.$$

Після перетворень

$$\frac{L_1 L_2}{r_3} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(L_1 \left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right) + L_2 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right)\right) \frac{di_2}{dt} + \left(r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}\right) i_2 = U.$$

Підставляючи числові значення, одержимо

$$1,33 \cdot 10^{-4} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 0,533 \frac{di_2}{dt} + 400 i_2 = 200. \quad (1.109)$$

Повний розв'язок рівняння

$$i_2 = i_{2np} + i_{2\sigma}. \quad (1.110)$$

Примусова складова знаходиться із розрахунку нового установеного режиму (ключ замкнений). Знайдемо спочатку i_{1np} , врахо-

вуючи, що опір індуктивності при постійному струмі дорівнює нулю.

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}} = \frac{200}{150 + \frac{100 \cdot 100}{100 + 100}} = \frac{200}{200} = 1 \text{ А.}$$

Знаючи i_{1np} , знаходимо i_{2np}

$$i_{2np} = i_{1np} \frac{r_3}{r_2 + r_3} = 1 \cdot \frac{100}{100 + 100} = 0,5 \text{ А.}$$

Запишемо характеристичне рівняння згідно з диференціальним рівнянням (1.109)

$$1,33 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,533 p + 400 = 0.$$

Знайдемо його корені

$$p_{1,2} = \frac{-0,533 \pm \sqrt{0,533^2 - 4 \cdot 400 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4}}}{2 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4}} = \frac{-0,533 \pm 0,267}{2,66 \cdot 10^{-4}}.$$

Звідси

$$p_1 = -1000 \text{ с}^{-1}; \quad p_2 = -3000 \text{ с}^{-1}. \quad (1.111)$$

Оскільки корені дійсні і різні, то

$$i_{2c} = A_1 e^{-1000t} + A_2 e^{-3000t}. \quad (1.112)$$

Повний розв'язок

$$i_2 = 0,5 + A_1 e^{-1000t} + A_2 e^{-3000t}. \quad (1.113)$$

Продиференціюємо одержане рівняння

$$\frac{di_2}{dt} = -1000 A_1 e^{-1000t} - 3000 A_2 e^{-3000t} \quad (1.114)$$

і потому знайдемо початкові умови $i_2(0_+)$ і $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+}$.

Струм i_2 протікає через індуктивність L_2 і підпорядковується закону комутації $i_2(0_+) = i_2(0_-)$. Тому знайдемо значення $i_2(0_-)$ із розрахунку кола до комутації. При розімкненому ключі

$$i_2(0_-) = \frac{U}{r_1 + r_2} = \frac{200}{150 + 200} = 0,8 \text{ А,}$$

тому

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = 0,8 \text{ А.} \quad (1.115)$$

Величина $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+}$ є залежною початковою умовою, тому пе-

репишемо два останніх рівняння системи (1.106) для моменту часу $t = 0_+$

$$\left. \begin{aligned} L_2 \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0_+} + r_2 i_2(0_+) - r_3 i_3(0_+) &= 0 \\ i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.116)$$

Із першого рівняння системи (1.116)

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{r_3}{L_2} i_3(0_+) - \frac{r_2}{L_2} i_2(0_+). \quad (1.117)$$

В останньому виразі невідоме $i_3(0_+)$. Виразимо його із другого рівняння системи (1.116)

$$i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+),$$

тому

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{r_3}{L_2} i_1(0_+) - \frac{r_3}{L_2} i_2(0_+) - \frac{r_2}{L_2} i_2(0_+). \quad (1.118)$$

Струм i_1 протікає через індуктивність L_1 , тому він підпорядковується закону комутації

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = \frac{U}{r_1 + r_2} = \frac{200}{250} = 0,8 \text{ А}. \quad (1.119)$$

Підставивши значення (1.115) і (1.119) в співвідношення (1.118), одержуємо

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{100}{0,133} \cdot 0,8 - \frac{100}{0,133} \cdot 0,8 - \frac{100}{0,133} \cdot 0,8 = -600 \frac{\text{А}}{\text{с}}. \quad (1.120)$$

Підставимо початкові значення (1.115) і (1.120) в (1.113) і (1.114)

$$\left. \begin{aligned} 0,8 &= 0,5 + A_1 + A_2 \\ -600 &= -1000A_1 - 3000A_2 \end{aligned} \right\}$$

або

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0,3 \\ -A_1 - 3A_2 &= -0,6 \end{aligned} \right\}. \quad (1.121)$$

Розв'язуючи систему (1.121), одержуємо

$$A_1 = 0,15, \quad A_2 = 0,15. \quad (1.122)$$

Повний розв'язок

$$i_2 = 0,5 + 0,15e^{-1000t} + 0,15e^{-3000t} \text{ А.} \quad (1.123)$$

1.9 Методи складання характеристичних рівнянь

Уважний аналіз розглянутих вище прикладів показує, що формування одного диференціального рівняння, складеного відносно однієї невідомої функції миттєвої напруги або струму, є не завжди простим. Оскільки таке рівняння необхідне для отримання характеристичного рівняння, постає задача у висвітленні і інших методів побудови характеристичних рівнянь. Деякі з них наразі розглянемо.

1.9.1 Метод алгебризації диференціальних рівнянь

Розглянемо електричне коло, що зображене на рисунку 1.18.

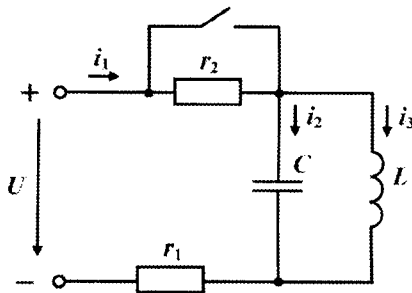


Рисунок 1.18

Складемо для післякомутаційного стану цього кола за законами Кірхгофа систему інтегро-диференціальних рівнянь відносно миттєвих значень напруг та струмів

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt = U \\ L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.124)$$

Повний розв'язок для будь-якої змінної складається із примусової і вільної складових. Вільна складова залежить від початкових умов та параметрів кола і не залежить від зовнішніх дій. Тому систему (1.124) можна записати для вільних складових, за умови, що прикладена напруга дорівнює нулю.

Таким чином,

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{1s} + \frac{1}{C} \int i_{3s} dt = 0 \\ L \frac{di_{2s}}{dt} - \frac{1}{C} \int i_{3s} dt = 0 \\ i_{1s} - i_{2s} - i_{3s} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.125)$$

Будь-яка вільна складова складається із суми складових виду Ae^{pt} , причому кожна складова є розв'язком системи (1.125). Якщо позначити цю складову $i_s = Ae^{pt}$, то похідна дорівнює

$$\frac{di_s}{dt} = \frac{d(Ae^{pt})}{dt} = pAe^{pt} = pi_s,$$

а інтеграл

$$\int i_s dt = \int Ae^{pt} dt = \frac{Ae^{pt}}{p} = \frac{i_s}{p}.$$

Враховуючи ці співвідношення, систему (1.125) запишемо

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{1s} + \frac{1}{Cp} i_{3s} = 0 \\ Lpi_{2s} - \frac{1}{Cp} i_{3s} = 0 \\ i_{1s} - i_{2s} - i_{3s} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.126)$$

Одержана однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Із математики відомо, що така система має відмінний від нуля розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю. Система (1.126) має розв'язок, оскільки в колі буде вільна складова всіх струмів. Тому визначник повинен дорівнювати нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{Cp} \\ 0 & Lp & -\frac{1}{Cp} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.127)$$

Розкриваючи цей визначник, одержуємо

$$-r_1 Lp - \frac{L}{C} - \frac{r_1}{Cp} = 0,$$

або

$$r_1 L C p^2 + Lp + r_1 = 0. \quad (1.128)$$

Одержаний вираз являє собою характеристичне рівняння для заданого кола.

1.9.2 Метод вхідного опору

Припустимо, що до кола, схема якого зображена на рис. 1.18 прикладена синусоїдна напруга $u(t) = U_m \sin \omega t$.

Схема кола після комутації наведена на рис. 1.19.

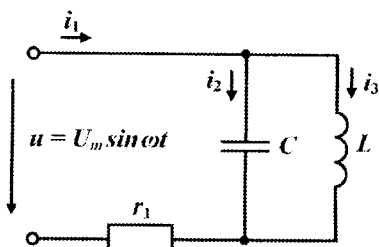


Рисунок 1.19

У вітках кола протікають синусоїдні струми.

Запишемо рівняння за законами Кірхгофа для комплексних діючих значень струмів і напруг

$$\left. \begin{aligned} r_1 I_1 + \frac{1}{j\omega C} I_2 &= \underline{U} \\ j\omega L I_3 - \frac{1}{j\omega C} I_2 &= 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.129)$$

Визначимо вхідний струм I_1 за правилом Крамера. Тоді для вхідного струму I_1 можна записати

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (1.130)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad (1.131)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{U} & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \underline{U} \begin{vmatrix} j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{U} \Delta_{11}. \quad (1.132)$$

Тут позначено

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (1.133)$$

Підставляємо (1.132) в (1.130) і одержуємо

$$\underline{I}_1 = \frac{U \underline{\Delta}_{11}}{\underline{\Delta}}. \quad (1.134)$$

Визначимо вхідний опір кола при синусоїдній напрузі

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{U}{\underline{I}_1},$$

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{\Delta}}{\underline{\Delta}_{11}}$$

або з врахуванням (1.131) та (1.133)

$$\underline{Z}_{ex}(j\omega) = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & 0 & 1 \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}. \quad (1.135)$$

Позначимо $j\omega$ через p і підставимо в (1.135)

$$\underline{Z}_{ex}(p) = \frac{U}{I} = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & 0 & 1 \\ 0 & pL & -\frac{1}{pC} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pL & -\frac{1}{pC} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}. \quad (1.136)$$

Порівнюючи чисельник виразу (1.136) і визначник (1.127), бачимо, що вони однакові. Прирівнюючи до нуля визначник алгебраїзованої системи (1.127), ми одержали характеристичне рівняння. А значить характеристичне рівняння можна одержати і прирівнюючи до нуля $Z_{ex}(p)$.

Приклад 1.4

Знайдемо характеристичне рівняння методом вхідного опору

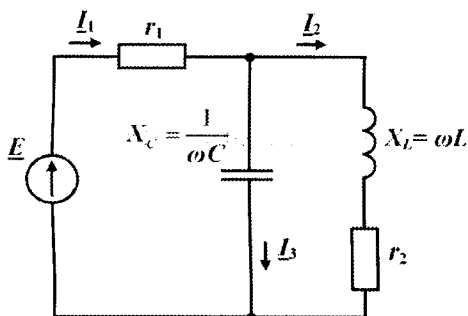


Рисунок 1.20

для кола, схема якого зображена на рис. 1.16. Прикладемо до кола після комутації синусоїдну напругу

$$e(t) = E_m \sin \omega t.$$

Схема кола при синусоїдній е.р.с. після комутації має вигляд (рис. 1.20).

Комплексний вхідний опір кола

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = r_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C}(r_2 + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + r_2 + j\omega L}.$$

Замінімо $j\omega$ на p , тоді

$$Z_{\text{вх}}(p) = r_1 + \frac{\frac{1}{pC}(r_2 + pL)}{\frac{1}{pC} + r_2 + pL}.$$

Перетворимо останній вираз так, щоб $Z_{\text{вх}}(p)$ було відношенням двох поліномів від p

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}}(p) &= r_1 + \frac{r_2 + pL}{1 + r_2 Cp + LCp^2} = \frac{LCr_1 p^2 + r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2 + Lp}{LCp^2 + r_2 Cp + 1} = \\ &= \frac{LCr_1 p^2 + (r_1 r_2 C + L)p + r_1 + r_2}{LCp^2 + r_2 Cp + 1}. \end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля $Z_{\text{вх}}(p)$, що відповідає рівності нулю чисельника, одержуємо характеристичне рівняння

$$LCr_1 p^2 + (r_1 r_2 C + L)p + r_1 + r_2 = 0. \quad (1.137)$$

Треба пам'ятати, що для знаходження $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ зручніше записувати комплексний опір ємності у вигляді $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, а не у вигляді $Z_C = -j\frac{1}{\omega C}$.

1.10 Закони комутації в узагальненій формі

У вступі було сформульовано два закони комутації, які стверджують, що струми в індуктивностях $i_L(t)$ і напруги на ємностях $u_C(t)$ є неперервними функціями часу і в момент комутації миттєво не змінюються. Це твердження базується на тому, що інакше мала б змінюватися стрибком і енергія, яка накопичується в електричному та магнітному полях кола, що, в свою чергу, потребує нескінченно великої потужності. Для переважної більшості

реальних кіл такі міркування є абсолютно прийнятними і правильними. Водночас в окремих випадках аналіз перехідного процесу потребує ідеалізації або самого електричного кола, або дії на нього вхідного джерела енергії.

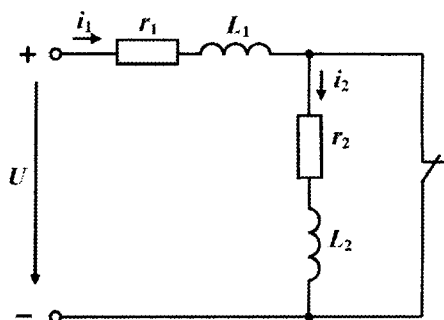


Рисунок 1.21

Це призводить до необхідності виявлення нових істотних закономірностей, які потрібно враховувати під час аналізу.

Відтак розглянемо перехідний процес, викликаний розмиканням ключа в колі, яке зображене на рис. 1.21. Диференціальне рівняння для кола після комутації має вигляд

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 = U, \quad i_1 = i_2 = i.$$

Розв'язок цього рівняння

$$i = i_{np} + Ae^{-\frac{r_1+r_2}{L_1+L_2}t},$$

де примусове значення струму визначається із розрахунку нового усталеного режиму

$$i_{np} = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Для знаходження сталої інтегрування визначають початкові умови, зазвичай використовуючи для цього закони комутації. В прикладі, який розглядається, закон комутації порушується. В момент $t = 0_-$ струм в першій котушці $i_1(0_-) = \frac{U}{r_1}$, а в другій $i_2(0_-) = 0$, оскільки струм проходить по вітці з замкнутим ключем, а отже і опором, рівним нулю.

В початковий момент після комутації ($t = 0_+$) струми в обох котушках однакові $i_1(0_+) = i_2(0_+) = i(0_+)$. Звідси випливає, що струми в котушках повинні змінитися *стрибком*. Оскільки напруга на індуктивності $u_L = L \frac{di}{dt}$, то при стрибкоподібній зміні струму напруга на індуктивності набуває нескінченно великого значення. В розглядуваному колі прикладена напруга має скінченне значення, напруги на опорах r_1 та r_2 мають також скінченні значення на проміжку $0_- < t < 0_+$, оскільки скінченними є струми i_1 та i_2 . Тому відповідно до другого закону Кірхгофа на цьому часовому проміжку скінченною має бути і сума $L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$.

Кожну із похідних можна подати як границю відношення $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ для $\Delta t \rightarrow 0$. Прирости струмів на інтервалі $0_- < t < 0_+$ відповідно дорівнюють $\Delta i_1 = i_1(0_+) - i_1(0_-)$, $\Delta i_2 = i_2(0_+) - i_2(0_-)$.

Суму напруг на індуктивностях в такому випадку можна подати у вигляді

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L_1 \Delta i_1 + L_2 \Delta i_2}{\Delta t}.$$

Ця сума має кінцеве значення для $\Delta t \rightarrow 0$ тільки за умови, що

$$L_1 \Delta i_1 + L_2 \Delta i_2 \rightarrow 0,$$

або

$$L_1 i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-).$$

Оскільки

$$Li = \Psi$$

є потокозчеплення індуктивності, то останній вираз можна записати у вигляді

$$\Psi_1(0_+) + \Psi_2(0_+) = \Psi_1(0_-) + \Psi_2(0_-). \quad (1.138)$$

Це рівняння виражає більш загальний закон комутації – закон неперервності магнітного потокозчеплення.

В більш загальному випадку він формулюється таким чином: *алгебраїчна сума потокозчеплень індуктивностей в будь-якому замкнутому контурі безпосередньо після комутації дорівнює алгебраїчній сумі потокозчеплень безпосередньо перед комутацією*, тобто сумарне потокозчеплення індуктивностей не може змінюватись стрибком.

В прикладі, який розглядається,

$$L_1 i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-)$$

або

$$(L_1 + L_2)i(0_+) = L_1 \frac{U}{r_1}.$$

Звідси

$$i(0_+) = \frac{UL_1}{r_1(L_1 + L_2)}$$

і стала інтегрування A визначається із рівняння

$$\frac{UL_1}{r_1(L_1 + L_2)} = \frac{U}{r_1 + r_2} + A.$$

Оскільки

$$A = \frac{UL_1}{r_1(L_1 + L_2)} - \frac{U}{r_1 + r_2},$$

то повний розв'язок

$$i_1 = i_2 = i = \frac{U}{r_1 + r_2} + \left(\frac{UL_1}{r_1(L_1 + L_2)} - \frac{U}{r_1 + r_2} \right) e^{-\frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2} t}.$$

Графіки зміни струмів i_1 (штрихова лінія) та i_2 (суцільна лінія) показані на рис. 1.22.

Цікаво відзначити ще одну обставину: величина енергії, яка накопичена в магнітному полі першої індуктивності безпосередньо перед комутацією

$$W_m(0_-) = \frac{L_1}{2} i_1^2(0_-) = \frac{L_1}{2} \left(\frac{U}{r_1} \right)^2$$

більша, ніж величина енергії, яка накопичена в магнітних полях обох індуктивностей в початковий момент після комутації

$$W_m(0_+) = \frac{L_1 + L_2}{2} i^2(0_+) = \frac{L_1}{2} \left(\frac{U}{r_1} \right)^2 \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

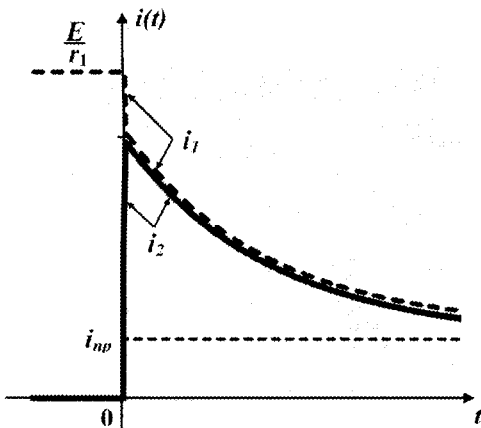


Рисунок 1.22

На перший погляд, закони збереження енергії та комутації порушуються. Проте це є результатом *граничної ідеалізації* і самого кола, і фізичного процесу, що в ньому відбувається. В дійсності комутація відбувається хоч і за малий, але кінцевий проміжок часу, і опір ключа не змінюється миттєво від нуля до нескінченності, що за умов суттєвого зростання напруги на ньому призводить до виникнення електричної дуги, електричні властивості якої і фізичні процеси в якій в таких випадках не можуть бути проігнорованими. Окрім того будь-яка реальна котушка крім індуктивності має ще розподілену між її витками ємність, що визначає зростання струму в початковий період перехідного процесу, хоч і за малий, але скінченний інтервал часу. Також необхідно зважати на втрати енергії, які спостерігаються не тільки в активних опорах r_1 і r_2 , але і в електричній дузі, і в самій котушці, і в з'єднувальних проводах тощо.

Якщо врахувати всі ці малі параметри, то закони комутації для i_L та u_C будуть повністю виконуватись, але істотно ускладнюються розрахунок кола, наприклад, за рахунок збільшення порядку диференціального рівняння або за рахунок втрати колом лінійних властивостей.

“Порушення” закону комутації можна прослідкувати і в колах з ємністю.

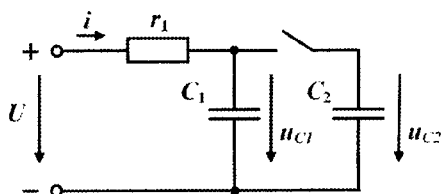


Рисунок 1.23

Розглянемо перехідний процес в колі, яке зображено на рис.1.23.

Припустимо, що до замикання ключа конденсатор C_2 не був зарядженим.

Диференціальне рівняння кола після замикання ключа має вигляд $r(C_1 + C_2) \frac{du_C}{dt} + u_C = U$.

Його розв'язок $u_C = u_{Cnp} + Ae^{-\frac{t}{r(C_1+C_2)}}$.

Примусова складова $u_{Cnp} = U$.

До комутації $u_{C_1}(0_-) = U$ і $u_{C_2}(0_-) = 0$.

В початковий момент після комутації напруга на конденсаторах має бути однаковою

$$u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+) = u_C(0_+).$$

Закони комутації порушуються, тому що при відсутності опору в вітках з конденсаторами по них будуть протікати імпульси струму безмежної амплітуди та безмежно малої тривалості.

В цьому випадку необхідно або врахувати малі параметри кола, або використовувати більш загальний закон комутації – закон збереження (неперервності) заряду:

алгебраїчна сума зарядів ємностей, які приєднані до спільних вузлів, є неперервною.

Для випадку, який розглядається,

$$q_1(0_+) + q_2(0_+) = q_1(0_-) + q_2(0_-). \quad (1.139)$$

Оскільки $q = Cu$, то $(C_1 + C_2)u_C(0_+) = C_1U$.

$$\text{Звідси } u_C(0_+) = \frac{C_1U}{C_1 + C_2}.$$

Стала інтегрування визначається з рівняння

$$\frac{C_1U}{C_1 + C_2} = U + A,$$

$$A = \frac{C_1U}{C_1 + C_2} - U.$$

Енергія ємності C_1 до комутації

$$W_E(0_-) = C_1 \frac{U^2}{2}$$

більша, ніж енергія електричного кола в початковий момент після комутації

$$W_E(0_+) = \frac{C_1 + C_2}{2} u_C^2(0_+) = \frac{C_1U^2}{2} \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Ці порушення пов'язані, як і в попередньому випадку, з ідеалізацією кола.

1.11 Розрахунок перехідних процесів класичним методом за допомогою програм комп'ютерної математики. Система Maple

Аналіз перехідних процесів в лінійних електричних колах класичним методом з математичної точки зору являє собою безпосереднє розв'язування за заздалегідь відомих початкових умов системи лінійних диференціальних рівнянь, складених за допомогою законів Кірхгофа та компонентних співвідношень відносно миттєвих струмів та напруг електричного кола (задача Коші). Тому природно, що для цього доцільно залучити обчислювальну техніку і сучасні програми комп'ютерної математики, наприклад, такі як Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica тощо.

Необхідно зауважити, що названі програми є досить потужними програмними пакетами, призначеними для автоматизації символічних і числових розрахунків. Їх функціональні можливості охоплюють основні розділи математики, а саме: лінійну алгебру, основи математичного аналізу, диференціальне й інтегральне числення, диференціальні рівняння, інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа, комплексний аналіз, векторний аналіз та елементи теорії поля, теорію ймовірностей тощо, що цілком достатньо для розв'язування більшості задач теоретичної електротехніки в цілому і перехідних процесів зокрема.

Приклад 1.5

Необхідно визначити, якою буде напруга на ємності $u_C(t)$ під час перехідного процесу в електричному колі другого порядку, показаному на рис. 1.24, якщо е.р.с. $E=75$ В, а $L=5$ мГн, $C=85$ мкФ, $r_1=75$ Ом, $r_2=100$ Ом, $r_3=150$ Ом, $r_4=1$ Ом.

Окрім напруги на ємності додатково провести розрахунок миттєвого струму $i_4(t)$, що проходить через замкнений ключ (див. рис. 1.24).

Через те, що система Maple має потужний символічний процесор, вона помітно виділяється серед інших програм комп'ютер-

ної математики. Нагадаємо, що символічними в комп'ютерній математиці називаються такі обчислення, які подаються аналітично у вигляді формул.

Тому задачу розв'яжемо в програмному середовищі Maple, показавши основні підходи розрахунку та аналізу перехідних процесів в лінійних колах класичним методом на основі аналітичного способу розв'язування систем диференціальних рівнянь.

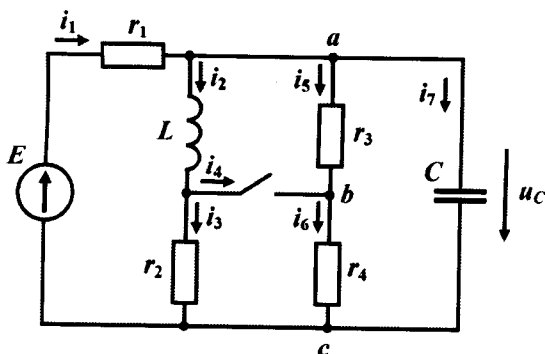


Рисунок 1.24

Отже, насамперед проведемо розрахунок незалежних початкових умов – напруги на ємності $u_C(0_+)$ та струму через індуктивність $i_L(0_+)$ в першу мить після комутації.

Для цього скористаємося першим і другим законами комутації та спрощеною схемою докомутаційного кола, наведену на рис. 1.25.

Через сталість струмів та напруг в докомутаційному колі напруга на індуктивності $u_L = L \frac{di_2}{dt}$ і струм в ємності $i_7 = C \frac{du_C}{dt}$ будуть відсутніми, що і відображено на рисунку.

Як видно із схеми, напруга на ємності буде дорівнювати

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_{ac} = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2(r_3 + r_4)}{r_2 + r_3 + r_4}} \cdot \frac{r_2(r_3 + r_4)}{r_2 + r_3 + r_4}, \quad (1.140)$$

а струм в індуктивності

$$i_L(0_+) = i_2(0_+) = i_2(0_-) = \frac{u_{ac}}{r_2} = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2(r_3+r_4)}{r_2+r_3+r_4}} \cdot \frac{r_3+r_4}{r_2+r_3+r_4}. \quad (1.141)$$

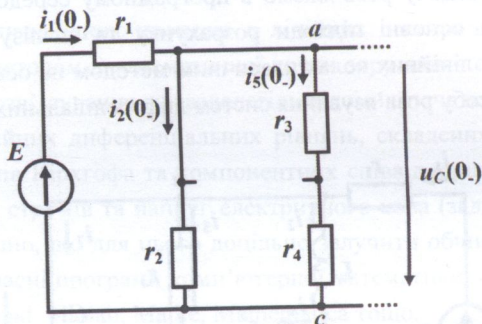


Рисунок 1.25

Числові значення незалежних початкових умов отримаємо, попередньо ввівши до системи Maple вихідні дані прикладу та користавшись отриманими виразами (1.140) і (1.141) (рис.1.26).

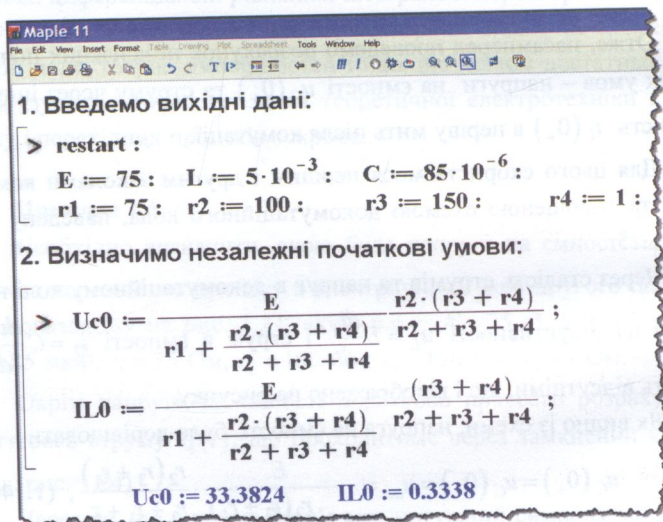


Рисунок 1.26

Як видно з рисунка, за результатами розрахунку значення напруги на ємності в першу мить після комутації складатиме $u_C(0_+) = 33,382$ В, а струм в індуктивності $i_L(0_+) = 0,334$ А.

Розрахунок перехідного процесу в заданому лінійному колі класичним методом являє собою за відомих початкових умов розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь, складених на підставі законів Кірхгофа та компонентних співвідношень для післякомутаційного кола (рис. 1.27),

$$\left. \begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_5 + i_7 &= 0 \\ -i_2 + i_3 + i_4 &= 0 \\ i_1 - i_3 - i_6 - i_7 &= 0 \\ r_1 i_1 + L \frac{di_2}{dt} + r_2 i_3 &= E \\ L \frac{di_2}{dt} - r_3 i_5 &= 0 \\ r_2 i_3 - r_4 i_6 &= 0 \\ r_3 i_5 + r_4 i_6 - u_C &= 0 \\ i_7 &= C \frac{du_C}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.142)$$

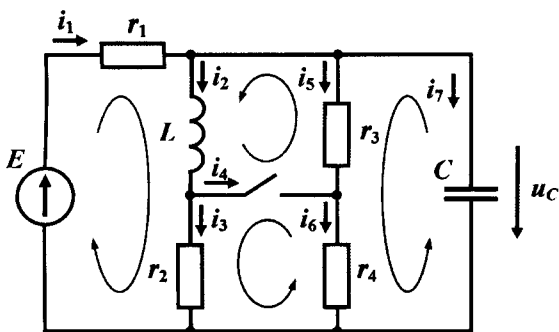


Рисунок 1.27

Введемо дану систему рівнянь в програмне середовище Maple, подавши цю систему деякою змінною (рис. 1.28).

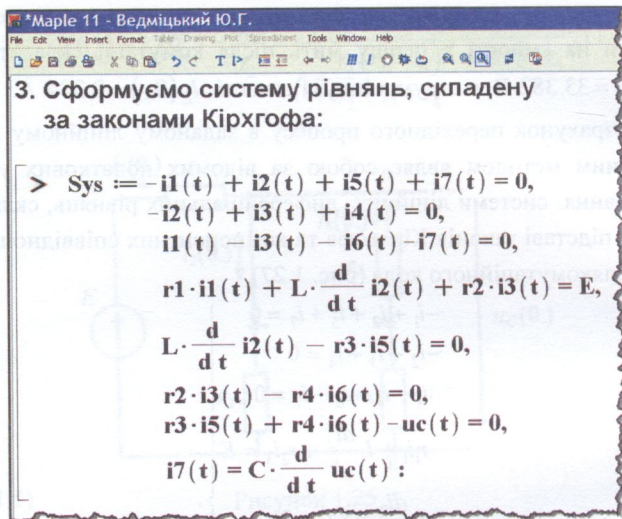


Рисунок 1.28

Скористаємося вбудованою в програму Maple командою `dsolve()` і розв'яжемо цю систему лінійних диференціальних рівнянь (рис. 1.29).

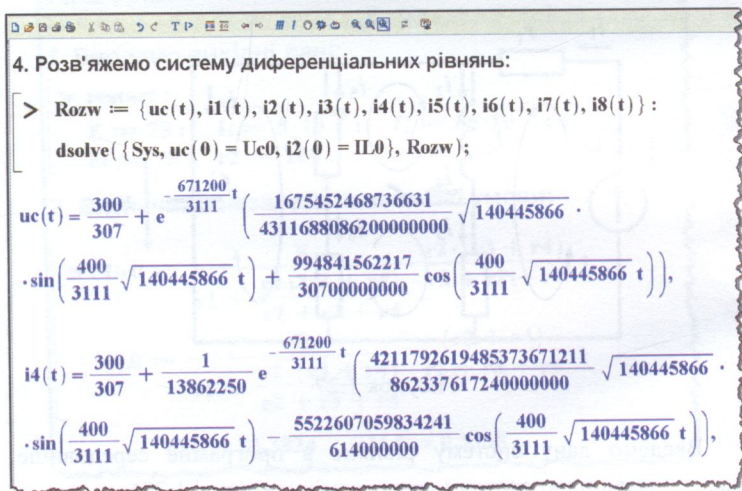


Рисунок 1.29

Таким чином, математична програма Maple не тільки дозволяє безпосередньо розв'язати систему диференціальних рівнянь, але і здатна зробити це аналітично.

Однак через складність отриманих виразів постає необхідність у їх спрощенні (рис. 1.30 а і б).

5. Спростимо отримані функції

а) напруги $u_c(t)$

> Digits := 5 :

$$u_c(t) := \text{simplify} \left(\frac{300.0}{307} + e^{-\frac{671200}{3111}t} \left(\frac{1675452468736631}{4311688086200000000} \cdot \sqrt{140445866} \sin \left(\frac{400}{3111} \sqrt{140445866} t \right) + \frac{994841562217}{30700000000} \cdot \cos \left(\frac{400}{3111} \sqrt{140445866} t \right) \right) \right);$$

$$0.97720 + 4.6051 e^{-215.75t} \sin(1523.8t) + 32.405 e^{-215.75t} \cos(1523.8t)$$

а)

б) струму $i_4(t)$

> Digits := 5 :

$$i_4(t) := \text{simplify} \left(\frac{300.0}{307} + \frac{1}{13862250} e^{-\frac{671200}{3111}t} \cdot \left(\frac{4211792619485373671211}{862337617240000000} \sqrt{140445866} \sin \left(\frac{400}{3111} \sqrt{140445866} t \right) - \frac{5522607059834241}{614000000} \cos \left(\frac{400}{3111} \sqrt{140445866} t \right) \right) \right);$$

$$0.97720 + 4.1756 e^{-215.75t} \sin(1523.8t) - 0.64885 e^{-215.75t} \cos(1523.8t)$$

б)

Рисунок 1.30

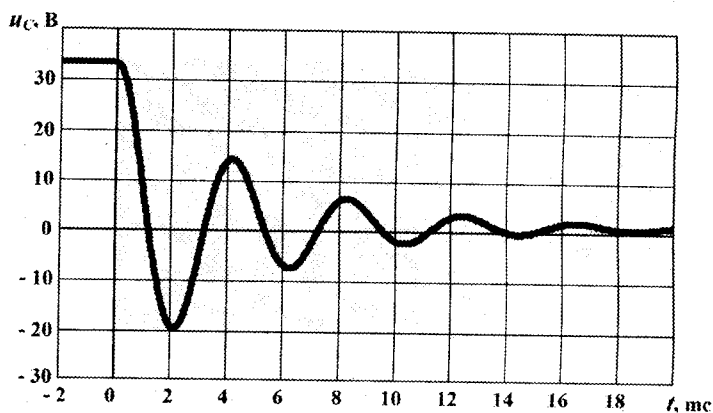
Отже, як видно з обох рисунків, розв'язками системи (1.142) за визначених незалежних початкових умов, а отже, і шуканими розв'язками нашої задачі є функції: для напруги на ємності

$$u_C = 0,977 + e^{-216t} (4,605 \sin 1524t + 32,405 \cos 1524t) \text{ В} \quad (1.143)$$

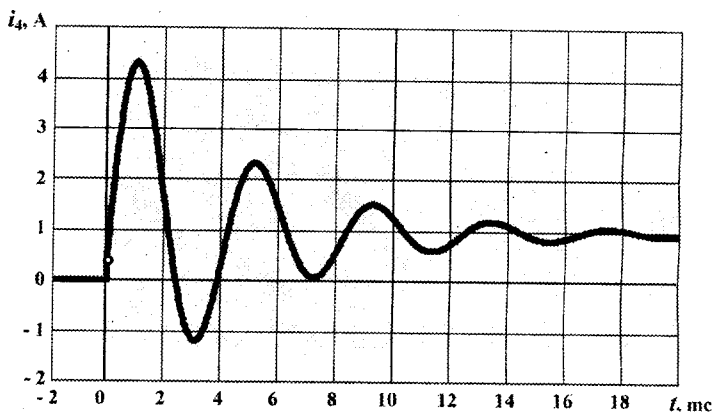
та для миттєвого струму, що тече через ключ,

$$i_4 = 0,977 + e^{-216t} (4,176 \sin 1524t - 0,649 \cos 1524t) \text{ А.} \quad (1.144)$$

Графіки цих функцій наведено на рис. 1.31 а і б.



а)



б)

Рисунок 1.31

Запитання для самоперевірки

- 1. Чим відрізняється усталений режим роботи електричного кола від перехідного процесу?*
- 2. Які причини виникнення перехідних процесів в електричних колах?*
- 3. Яку дію називають комутацією? В чому полягає її ідеалізація?*
- 4. Як формулюються і записуються закони комутації? Обґрунтуйте ці закони.*
- 5. Що вважають незалежними початковими умовами для електричного кола і яким чином їх визначають?*
- 6. Які початкові умови тоді будуть називати залежними і у який спосіб їх визначають?*
- 7. Поясніть суть класичного методу розрахунку перехідних процесів в лінійних колах.*
- 8. Яку роль відіграють закони Кірхгофа в розрахунку перехідного процесу в електричному колі?*
- 9. У який спосіб одержують диференціальне рівняння, що описує перехідний процес в колі?*
- 10. Що називають характеристичним рівнянням кола?*
- 11. Які ви знаєте способи складання характеристичного рівняння?*
- 12. Який вигляд буде мати вираз для вільної складової в залежності від кількості і виду коренів характеристичного рівняння?*
- 13. Що таке примусова складова і яким чином вона визначається?*
- 14. Що називають сталими інтегрування і у який спосіб їх розраховують?*
- 15. Як довго триває перехідний процес в електричному колі з теоретичної точки зору і практично?*
- 16. Що називають сталою часу і як вона пов'язана із практичною тривалістю перехідного процесу?*

17. Чим відрізняється розрахунок перехідних процесів в колах з джерелом постійної напруги від розрахунку процесів в колах з джерелом гармонічної напруги?

18. Визначіть напругу на індуктивності в першу мить після комутації $u_L(0_+)$ в електричному колі, що показано на рис. 1.32, якщо параметри цього кола дорівнюють: $U = 160$ В, $r_1 = 8$ Ом, $r_2 = 3$ Ом, $r_3 = 6$ Ом.

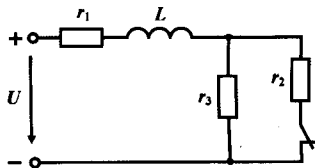


Рисунок 1.32

Відповідь: $u_L(0_+) = -64$ В.

19. Обчисліть струм через ємність $i_C(0_+)$ та напругу на індуктивності $u_L(0_+)$ безпосередньо після комутації в колі (рис. 1.33) з параметрами $U = 80$ В, $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 8$ Ом, $r_3 = 10$ Ом.

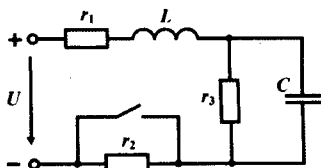


Рисунок 1.33

Відповідь: $i_C(0_+) = 0$ А,

$u_L(0_+) = 32$ В.

20. Для електричних кіл, наведених на рис. 1.32 та рис. 1.33, скласти різними методами їх характеристичні рівняння.

21. Послідовно з'єднані опір $r = 100$ Ом і заряджену ємність $C = 100$ мкФ в момент часу $t = 0$ під'єднують до джерела е.р.с. $e = 141 \sin\left(377t + \frac{\pi}{6}\right)$ В. Необхідно визначити в колі миттєве значення струму $i(t)$, якщо початкова напруга на ємності дорівнює 50 В.

Відповідь: $i = 1,37 \sin(377t + 44,8^\circ) + 0,241 e^{-100t}$ А.

Розділ 2

ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

2.1 Деякі властивості перетворення Лапласа

В попередньому розділі було показано, що розрахунок перехідних процесів класичним методом зводиться до розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

Основою операторного методу є те, що диференціальні рівняння в області дійсної змінної t перетворюються в алгебраїчні рівняння в області комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$, ($\sigma > 0$).

Такий перехід здійснюється за допомогою перетворення Лапласа, яке має вигляд

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.1)$$

Перетворення Лапласа однозначно переводить функцію дійсної змінної $f(t)$, яку називають *оригіналом*, в функцію комплексної змінної $F(p)$, яку називають *зображенням* $f(t)$. Таке перетворення умовно записують в формі $F(p) \stackrel{\Delta}{=} f(t)$ або $f(t) \stackrel{\Delta}{=} F(p)$.

Часто використовують й іншу умовну форму запису

$$F(p) = L[f(t)] \quad \text{і} \quad f(t) = L^{-1}[F(p)].$$

Перетворенню Лапласа властива єдиність, яка доводиться в курсі математики і яка може бути сформульована таким чином: якщо функція $f(t)$ має перетворення Лапласа $F(p)$, то це перетворення єдине; з іншого боку, якщо задана функція $F(p)$ і знайдена функція $f(t)$, яка задовольняє перетворення (2.1), то функція $f(t)$ єдина.

Функція $f(t)$ має зображення, якщо вона задовольняє умови Дірихле (має скінченне число розривів першого роду і скінченне

число мінімумів та максимумів) і належить до функцій обмеженого зростання, тобто

$$|f(t)| < Ae^{at}, \quad (2.2)$$

де A і a – сталі додатні величини, причому $a > \sigma$.

Відзначимо, що функції, які описують можливі реальні зовнішні дії на електричні кола, струми і напруги, які при цьому виникають, завжди задовольняють вказані умови і можуть бути перетворені за Лапласом.

Припустимо, що оригінал $f(t)$ має зображення $F(p)$, знайдемо зображення функції

$$f_1(t) = Cf(t), \quad (2.3)$$

де C – стала величина.

Підставимо (2.3) в (2.1), тоді

$$f_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} F_1(p) = \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-pt} dt = C \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = CF(p). \quad (2.4)$$

Таким чином, зображення функції $f(t)$, помножене на сталу величину (2.3), дорівнює сталій величині, помноженій на зображення цієї функції (2.4).

Нехай є декілька функцій $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, які мають відповідно зображення $F_1(p)$, $F_2(p)$, ..., $F_n(p)$. Знайдемо зображення суми цих функцій

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t). \quad (2.5)$$

Використовуючи (2.1), одержуємо

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} (f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t))e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-pt} dt + \dots + \int_0^{\infty} f_n(t)e^{-pt} dt = \\ &= F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p), \end{aligned} \quad (2.6)$$

тобто зображення суми функцій дорівнює сумі зображень цих окремих функцій.

Така властивість перетворення Лапласа, коли виконуються умови (2.4) і (2.6), називається властивістю *лінійності*.

Знайдемо зображення деяких функцій, які широко використовуються в теорії кіл.

Нехай $f(t) = A$, де A є сталою величиною. Знайдемо зображення цієї функції, використовуючи (2.1).

$$F(p) = A \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = A \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p},$$

тобто $A \doteq \frac{A}{p}$.

Якщо $f(t) = e^{-\alpha t}$, (α – може бути дійсним або комплексним числом), то

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+p)t} dt = \frac{e^{-(\alpha+p)t}}{-(\alpha+p)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p+\alpha}.$$

Таким чином,

$$e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{p+\alpha}. \quad (2.8)$$

Якщо $f(t) = e^{\alpha t}$, то змінивши знак перед α в (2.8), одержуємо

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}. \quad (2.9)$$

Використаємо вираз (2.9) для знаходження зображення синусоїдної і косинусоїдної функцій, прийнявши $\alpha = j\omega$.

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t. \quad (2.10)$$

Зображення $e^{j\omega t}$

$$\frac{1}{p-j\omega} = \frac{p+j\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2} + j \frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \quad (2.11)$$

Порівнюючи (2.10) і (2.11), одержуємо

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad (2.12)$$

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \quad (2.13)$$

Нехай функція $f(t)$ має зображення $F(p)$. Знайдемо зображення похідної цієї функції.

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt.$$

Візьмемо інтеграл частинами. Як відомо

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Позначимо $u = e^{-pt}$, $v = f(t)$, тоді $du = (-p)e^{-pt} dt$ і підставимо одержані значення

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-p)e^{-pt} dt = \frac{f(t)}{e^{pt}}\Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Згідно з умовою (2.2) функція $f(t)$ зростає не швидше, ніж функція e^{pt} , тому при підстановці верхньої границі в першу складову, вона перетворюється на нуль, а при підстановці нижньої границі перша складова перетворюється в $f(0)$, тобто в значення функції $f(t)$ для $t = 0$. Інтеграл в другій складовій відповідно до (2.1) є зображенням функції $f(t)$, тобто $F(p)$. Таким чином,

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv pF(p) - f(0). \quad (2.14)$$

Знайдемо зображення інтеграла від попередньої функції $f(t)$.

Позначимо

$$\varphi(t) = \int f(t) dt = \int_0^t f(t) dt + \varphi(0). \quad (2.15)$$

де $\varphi(0)$ є значення функції $\varphi(t)$ для $t = 0$.

Враховуючи (2.15) і властивість лінійності, запишемо

$$L\left[\int f(t) dt\right] = L\left[\int_0^t f(t) dt\right] + L[\varphi(0)]. \quad (2.16)$$

Оскільки похідна $\left[\int_0^t f(t) dt\right]' = f(t)$, то

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right]' = L[f(t)] = F(p) \quad (2.17)$$

і відповідно до (2.14)

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right]' = pL\left[\int_0^t f(t) dt\right] - L\left[\int_0^0 f(t) dt\right]. \quad (2.18)$$

Оскільки останній інтеграл дорівнює нулю, то з врахуванням (2.17)

$$F(p) = pL\left[\int_0^t f(t) dt\right]$$

і

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p}. \quad (2.19)$$

У виразі (2.16) $\varphi(0)$ – стала величина, тому згідно з (2.7)

$$L[\varphi(0)] = \frac{\varphi(0)}{p}.$$

Таким чином,

$$\varphi(t) = \int f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p} + \frac{\varphi(0)}{p}. \quad (2.20)$$

Вирази (2.14) і (2.20) показують, що операціям диференціювання і інтегрування функцій дійсної змінної t відповідають алгебраїчні операції множення і ділення зображень цих функцій на комплексну змінну p (при нульових початкових умовах). Якщо початкові умови ненульові, їх враховують так, як показано в (2.14) і (2.20). Це означає, що диференціальним рівнянням оригіналів відповідають алгебраїчні рівняння зображень.

Сформулюємо ще окремі теореми, відомі із курсу математики.

Теорема про запізнення

Якщо $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f(t-t_0) \doteq e^{-pt_0} F(p). \quad (2.21)$$

Теорема зсуву

Якщо $f(t) \doteq F(p)$, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \doteq F(p+\alpha). \quad (2.22)$$

2.2 Використання перетворення Лапласа для розрахунку перехідних процесів

Розглянемо перехідний процес в колі, схема якого зображена на рис.2.1. Диференціальне рівняння, що описує перехідний процес в цьому колі, записане за другим законом Кірхгофа, має вигляд

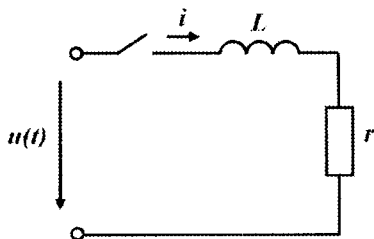


Рисунок 2.1

за другим законом Кірхгофа, має вигляд

$$L \frac{di}{dt} + ri = u(t).$$

Позначимо зображення струму $i(t)$ через $I(p)$, а зображення прикладеної напруги $u(t)$ через $U(p)$.

Використаємо перетворення Лапласа до записаного рівняння, враховуючи властивості лінійності і зображення похідної (2.14)

$$L[pI(p) - i(0)] + rI(p) = U(p)$$

або

$$I(p)(pL + r) = U(p) - Li(0).$$

Звідки

$$I(p) = \frac{U(p) - Li(0)}{pL + r}.$$

В цьому колі за законом комутації

$$i(0_+) = i(0_-) = 0,$$

тому

$$I(p) = \frac{U(p)}{pL + r}.$$

Якщо прикладена напруга постійна ($u(t) = U$), то її зображення, згідно з (2.7) дорівнює $\frac{U}{p}$ і

$$I(p) = \frac{U}{p(pL + r)}.$$

Останній вираз можна подати у вигляді

$$I(p) = \frac{U}{p} - \frac{U}{p + \frac{r}{L}}.$$

Відповідно до (2.7) і (2.8),

$$i(t) = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Розглянемо використання операторного методу до розгалуженого електричного кола (рис. 2.2).

Запишемо для післякомутаційного стану кола систему рівнянь за законами Кірхгофа для миттєвих значень.

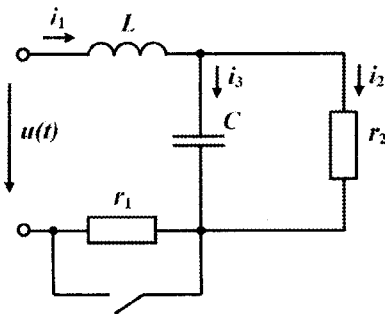


Рисунок 2.2

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int i_3 dt = u(t), \\ r_2 i_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Запишемо систему (2.23) в операторній формі, попередньо знайшовши зображення напруги на ємності,

з використанням (2.15) і (2.20)

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_3 dt = \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt + u_C(0) \equiv \frac{I_3(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} = U_C(p). \quad (2.24)$$

Таким чином, система (2.23) в операторній формі:

$$\begin{cases} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0, \\ sLI_1(p) - Li_1(0) + \frac{I_3(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} = U(p), \\ r_2 I_2(p) - \frac{I_3(p)}{pC} - \frac{u_C(0)}{p} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Тут $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$ є зображення невідомих струмів $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$.

Значення $u_C(0)$ і $i_L(0)$ визначаються за законами комутації, а $U(p)$ для відомої $u(t)$ можна знайти за (2.1).

Розв'язуючи систему (2.25), можна знайти зображення будь-якого струму. Знаходження оригіналу за відомим зображенням розглядається в п.2.5.

2.3 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

В попередньому параграфі операторні рівняння одержані із

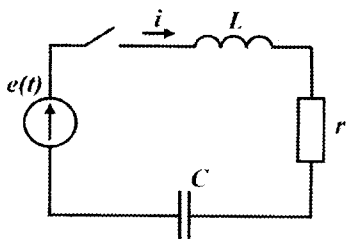


Рисунок 2.3

рівнянь для миттєвих значень, складених за законами Кірхгофа. Проте зручніше безпосередньо записувати систему рівнянь в операторній формі. Для цього необхідно сформулювати закони Ома і Кірхгофа в операторній формі.

Розглянемо послідовний контур (рис.2.3), який містить

всі елементи і складемо рівняння для миттєвих значень за другим законом Кірхгофа

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int idt = e(t). \quad (2.26)$$

Запишемо одержане рівняння в операторній формі з врахуванням (2.24).

$$L(pI(p) - i(0)) + rI(p) + \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} = E(p).$$

Після нескладних математичних перетворень одержуємо

$$I(p) \left(pL + r + \frac{1}{pC} \right) = E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}. \quad (2.27)$$

Позначимо

$$pL + r + \frac{1}{pC} = Z(p) \quad (2.28)$$

і назвемо цю величину *операторним опором*. Відзначимо, що операторний опір для $p = j\omega$, являє собою комплексний опір кола при синусоїдному струмі з кутовою частотою ω .

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L + r + \frac{1}{j\omega C}.$$

Перепишемо (2.27) з врахуванням (2.28).

$$I(p)Z(p) = E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}. \quad (2.29)$$

Для нульових початкових умов

$$I(p)Z(p) = E(p). \quad (2.30)$$

Порівнюючи (2.30) з законом Ома для кола синусоїдного струму, записаного для комплексних діючих значень

$$\underline{I}\underline{Z} = \underline{E},$$

бачимо, що при нульових початкових умовах закон Ома правильний і для зображень.

Якщо початкові умови ненульові, то крім зображень зовнішніх е.р.с. $E(p)$ з'являються ще дві е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в магнітному ($Li(0)$) і електричному

$\left(-\frac{u_C(0)}{p}\right)$ полях. Таким чином, в загальному випадку, тобто при

ненульових початкових умовах, закон Ома також правильний для

зображень, якщо врахувати додаткові е.р.с. $Li(0)$ і $\left(-\frac{u_C(0)}{p}\right)$.

Оскільки струм через індуктивність і напруга на ємності підпорядковуються законам комутації, то знаки перед початковими значеннями струму $i(0)$ і напруги $u_C(0)$ визначаються відповідно до напрямку струму через індуктивність і напруги на ємності в момент, який безпосередньо передує комутації ($t=0_-$).

Так, наприклад, якщо конденсатор був заряджений до напруги U_0 з полярністю, яка показана на рис. 2.4, а, то початкова на-

пруга на ємності збігається з напрямом струму після комутації (отже, з напругою u_C) і $u_C(0) = U_0$.

В колі, яке показано на рис. 2.4, б, початкова напруга на конденсаторі направлена назустріч струму після комутації (тобто назустріч u_C), тому $u_C(0) = -U_0$. Початкове значення струму в обох випадках $i(0) = 0$.

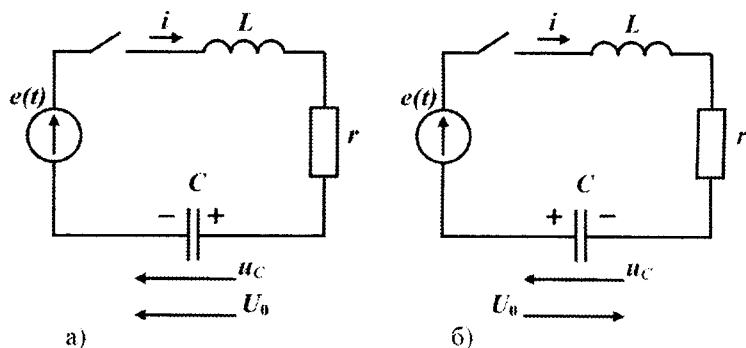


Рисунок 2.4

Розглянемо ще один випадок (рис. 2.5).

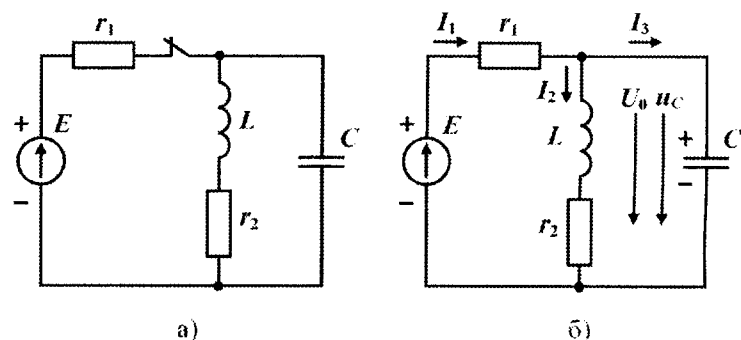


Рисунок 2.5

За постійної е.р.с. E в колі до комутації в показаних на рис. 2.5, б напрямках протікали постійні струми I_1 та I_2 :

$$I_1 = I_2 = \frac{E}{r_1 + r_2}.$$

Струм $I_3 = 0$, оскільки в цій вітці є ємність. Напруга на конденсаторі має полярність, яка показана на тому ж рисунку і величина цієї напруги

$$U_0 = \frac{E}{r_1 + r_2} r_2.$$

Після комутації (ключ розімкнутий) коло складається із одного контура і напрям струму в цьому контурі можна вибрати довільно (рис. 2.6, а і рис. 2.6, б).

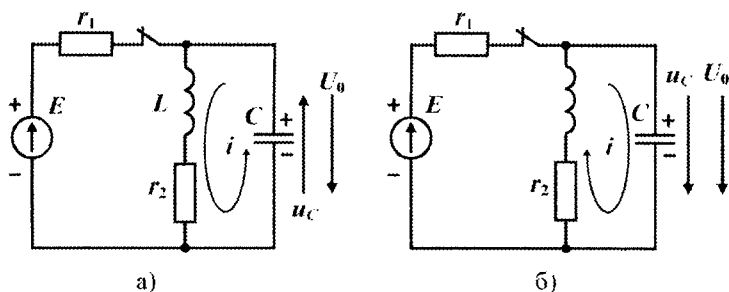


Рисунок 2.6

Відповідно до напрямку струму i визначається і перехідна напруга на ємності u_C . Операторне рівняння в обох випадках записується однаково

$$I(p) \left(pL + r_2 + \frac{1}{pC} \right) = Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}. \quad (2.31)$$

Зовнішня е.р.с. в розглядуваному контурі відсутня, тому в правій частині рівняння є тільки додаткові е.р.с., значення яких будуть мати різні знаки в залежності від вибраного додатного напрямку струму.

Для електричного кола, яке зображено на рис. 2.6, а напрям струму через індуктивність до комутації і після комутації збігаються, тому

$$i(0) = I_2 = \frac{E}{r_1 + r_2}.$$

Перехідна напруга на ємності u_C спрямована назустріч напрузі на ємності, яка була безпосередньо перед комутацією, тому

$$u_C(0) = -U_0 = -\frac{Er_2}{r_1 + r_2}.$$

В другому колі (рис.2.6,б) напрям струму через індуктивність після комутації вибраний назустріч струму до комутації, тому

$$i(0) = -I_2 = -\frac{E}{r_1 + r_2},$$

а перехідна напруга на ємності u_C збігається з напрямом напруги U_0 , а значить

$$u_C(0) = U_0 = \frac{Er_2}{r_1 + r_2}.$$

Рівняння (2.31) для обох кіл після підстановки конкретних значень початкових умов будуть відрізнятися тільки знаком, що відповідає додатним напрямом струмів.

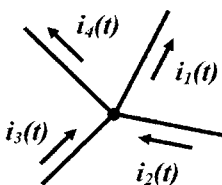


Рисунок 2.7

Ці ж міркування слід враховувати і в класичному методі розрахунку при знаходженні початкових умов для визначення сталих інтегрування.

Розглянемо закони Кірхгофа.

Нехай, наприклад, у вузлі деякого електричного кола (рис. 2.7) з'єднуються чотири вітки зі струмами, додатні напрями яких показано стрілками.

Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0.$$

В операторній формі

$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) + I_4(p) = 0.$$

В загальному поданні для миттєвих значень перший закон Кірхгофа має вигляд

$$\sum_{k=0}^n i_k = 0,$$

а в операторній формі

$$\sum_{k=0}^n I_k(p) = 0. \quad (2.32)$$

Таким чином, перший закон Кірхгофа в операторній формі є чинним без жодних обмежень.

Для розгляду другого закону Кірхгофа виділимо із довільного електричного кола контур, який містить n віток, в кожній із яких є джерело е.р.с. $e_k(t)$, індуктивність L_k , резистор r_k і ємність C_k .

Складемо рівняння для миттєвих значень за другим законом Кірхгофа для цього контура

$$\sum_{k=1}^n \left(L_k \frac{di_k}{dt} + r_k i_k + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^n e_k(t).$$

Нагадаємо, що в цьому рівнянні обидві суми є алгебраїчними.

Переходячи до зображень, з врахуванням (2.24) одержуємо

$$\sum_{k=1}^n \left(pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + r_k I_k(p) + \frac{1}{pC_k} I_k(p) + \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right) = \sum_{k=1}^n E_k(p).$$

Після деяких перетворень отримаємо

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) \left(pL_k + r_k + \frac{1}{pC_k} \right) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right].$$

З врахуванням (2.28)

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right]. \quad (2.33)$$

При нульових початкових умовах

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p). \quad (2.34)$$

Отже, другий закон Кірхгофа в операторній формі виконується при нульових початкових умовах, тобто алгебраїчна сума

зображень напруг на ділянках контура дорівнює алгебраїчній сумі зображень е.р.с. в цьому контурі.

Якщо початкові умови ненульові, то необхідно врахувати не тільки зовнішні е.р.с., але і додаткові $L_k i_k(0)$ і $\frac{u_{Ck}(0)}{p}$, які характеризують початкові запаси енергії в магнітному і електричному полях.

Треба врахувати при цьому, що додаткові е.р.с. $L_k i_k(0)$ направлені за напрямом струму $i_k(t)$, а додаткові е.р.с. $\frac{u_{Ck}(0)}{p}$ направлені назустріч струму $i_k(t)$. Значення ж $i_k(0)$, $u_{Ck}(0)$ і їх знаки визначаються з врахуванням міркувань, які висловлені раніше.

Таким чином, маючи сформульовані закони Ома і Кірхгофа в операторній формі, можна зразу записати систему рівнянь за законами Кірхгофа в операторній формі для післякомутаційного стану електричних кіл.

Приклад 2.1

Складемо розрахункову систему рівнянь в операторній формі для кола, схема якого наведена на рис. 2.8.

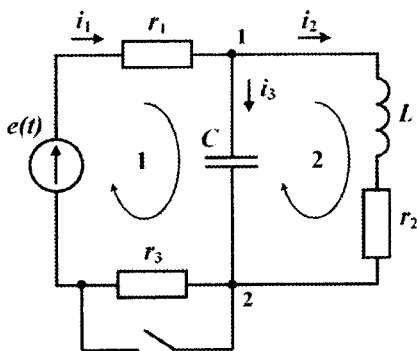


Рисунок 2.8

Вибравши напрям обходу контурів 1 і 2 так, як показано на рисунку 2.8, складемо рівняння за другим законом Кірхгофа. Перший контур містить два елементи r_1 і C , через які протікають відповідно струми i_1 і i_3 (опір r_3 замкнений ключем).

Оскільки напрям обходу контура збігається з напрямом струмів

i_1 і i_3 , то обидві операторні напруги на цих елементах входять в рівняння із знаком плюс. В правій частині рівняння крім операторного зображення зовнішньої е.р.с. $E(p)$, яка входить в рівняння із знаком плюс, оскільки напрям е.р.с. $e(t)$ збігається з напрямом обходу контура, треба врахувати додаткову е.р.с. $\frac{u_C(0)}{p}$ із знаком мінус, оскільки додаткова е.р.с. направлена назустріч струму i_3 і тому назустріч напрямку обходу контура.

Таким чином, для першого контура

$$I_1(p)r_1 + I_3(p)\frac{1}{pC} = E(p) - \frac{u_C(0)}{p}. \quad (2.35)$$

При складанні рівняння для другого контура враховуємо, що в лівій частині рівняння три складові, причому зображення напруги на ємності входить із знаком мінус, оскільки напрям обходу контура і напрям струму i_3 протилежні, а в правій частині рівняння враховуються тільки дві додаткові е.р.с., напрями яких збігаються з напрямом обходу контура (зовнішня е.р.с. в контурі відсутня), тому

$$I_2(p)(pL + r_2) - I_3(p)\frac{1}{pC} = Li_2(0) + \frac{u_C(0)}{p}. \quad (2.36)$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0. \quad (2.37)$$

Знайдемо початкові умови для випадку $e(t) = E = const$.

Струм через індуктивність до комутації при постійній е.р.с. дорівнює $i_2(0) = \frac{E}{r_1 + r_2 + r_3}$, напруга на ємності $u_C(0) = \frac{Er_2}{r_1 + r_2 + r_3}$.

Маючи три рівняння (2.35) - (2.37) і початкові умови, можна знайти зображення будь-якого струму.

В прикладі, який розглядається, операторні рівняння безпосередньо отримано із законів Кірхгофа. Проте для врахування додаткових е.р.с., визначення їх напрямків та складання рівнянь за законами Кірхгофа відразу в операторній формі зручніше використовувати операторні схеми. До того ж такі схеми задля аналізу перехідних процесів створюють можливість використання алго-

ритмів тих методів, які зазвичай застосовують для розрахунку усталених режимів (метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів, метод еквівалентного генератора, метод пропорційних величин, метод накладання тощо).

2.4 Операторні схеми

Задля спрощення розрахунку зображень шуканих фізичних величин та створення можливості безпосереднього застосування вже відомих методів аналізу електричних кіл (еквівалентних перетворень, еквівалентного генератора, контурних струмів, вузлових потенціалів тощо) використовують операторні схеми.

Операторною схемою називають таку допоміжну схему, вітками якої внаслідок дії зображень е.р.с. (або струмів) джерел живлення проходять зображення миттєвих струмів, через що на ділянках з операторними опорами елементів спостерігаються зображення спадів миттєвих напруг. Кожна операторна схема складається за схемою заданого кола, яке перебуває в післякомутаційному стані, відтак вона зберігає топологічну структуру цього кола. Визначення зображень відомих за умовою задачі е.р.с. (чи струмів) джерел енергії виконується на підставі виразу (2.1).

Наразі ж розглянемо зображення окремих елементів схем.

Для вітки, яка містить один резистор (рис.2.9, а) напруга між точками a і b визначається з виразу $u = ir$, що відповідає

$$U(p) = rI(p),$$

тому в операторній схемі резистор подається елементом, операторний опір якого дорівнює r (рис. 2.9, б).

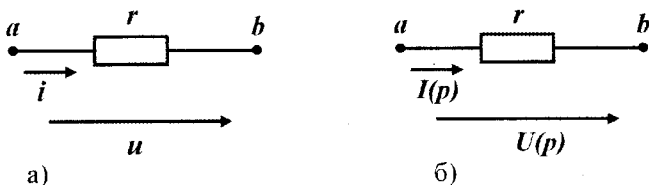


Рисунок 2.9

Для вітки з індуктивністю (рис. 2.10, а) $u = L \frac{di}{dt}$. В операторній формі зображенням цієї напруги є функція

$$U(p) = pLI(p) - Li(0),$$

через що операторна схема індуктивності має складатися з двох елементів: операторного опору pL і додаткової е.р.с. $Li(0)$, яку направлено за напрямом струму $I(p)$ (див. рис.2.10, б).

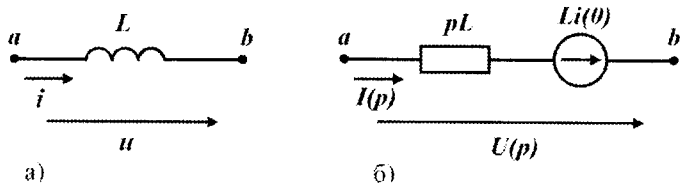


Рисунок 2.10

Для ділянки з ємністю (рис.2.11, а) напруга $u = \frac{1}{C} \int idt$.

В операторній формі ця напруга між точками a і b

$$U(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_c(0)}{p}$$

також складається із двох складових, що відповідає двом елементам операторної схеми – операторного опору $\frac{1}{pC}$ і додаткової

е.р.с. $\frac{u_c(0)}{p}$, яка направлена назустріч струму $I(p)$ (рис.2.11, б).

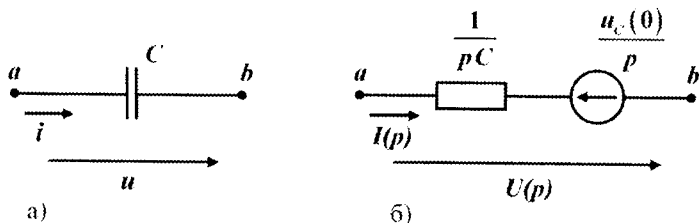


Рисунок 2.11

Одержані операторні схеми окремих елементів дозволяють подавати будь-які задані електричні схеми у вигляді операторних схем. Потрібно пам'ятати, що операторні схеми складаються для післякомутаційного стану кола, тому в операторних схемах ключі не зображаються.

Наведемо для прикладу схему, яка зображена на рис. 2.8, в операторному вигляді (рис. 2.12).

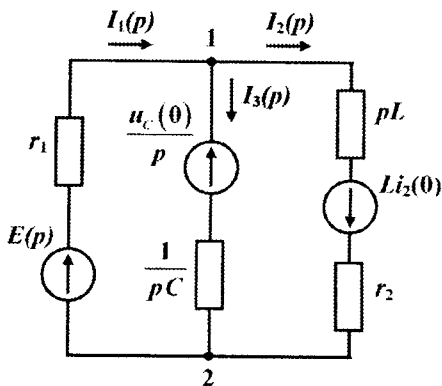


Рисунок 2.12

Маючи операторну схему, можна для знаходження зображення струмів використовувати будь-які відомі методи аналізу лінійних електричних кіл (метод вузлових потенціалів, контурних струмів, еквівалентного генератора і под.).

Складемо, наприклад, для схеми (рис.2.12) рівняння для визначення зображення потенціалу вузла 1 методом двох вузлів, вважаючи точку 2 заземленою ($\varphi_2(p) = 0$).

$$\varphi_1(p) \left(\frac{1}{r_1} + pC + \frac{1}{pL + r_2} \right) = E(p) \frac{1}{r_1} + \frac{u_c(0)}{p} pC - \frac{Li_2(0)}{pL + r_2}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \varphi_1(p) &= \frac{\frac{E(p)}{r_1} + u_c(0)C - \frac{Li_2(0)}{pL + r_2}}{\frac{1}{r_1} + pC + \frac{1}{pL + r_2}} = \\ &= \frac{E(p)(pL + r_2) + u_c(0)r_1C(pL + r_2) - r_1Li_2(0)}{(pL + r_2) + r_1pC(pL + r_2) + r_1}. \end{aligned}$$

Знаючи зображення потенціалу вузла 1, можна знайти зображення струмів у всіх вітках. Так, наприклад, зображення струму у другій вітці

$$\begin{aligned}
 I_2(p) &= \frac{\varphi_1(p) + Li_2(0)}{pL + r_2} = \\
 &= \frac{E(p)(pL + r_2) + u_C(0)r_1C(pL + r_2) - r_1Li_2(0)}{(pL + r_2) + r_1pC(pL + r_2) + r_1} + Li_2(0) = \\
 &= \frac{E(p)(pL + r_2) + u_C(0)r_1C(pL + r_2) - r_1Li_2(0) + Li_2(0)(pL + r_2) +}{\left[(pL + r_2) + r_1pC(pL + r_2) + r_1 \right] \times} \\
 &\quad \frac{+ r_1Li_2(0)pC(pL + r_2) + r_1Li_2(0)}{\times (pL + r_2)} = \\
 &= \frac{(pL + r_2) \left[E(p) + u_C(0)r_1C + Li_2(0)(1 + r_1pC) \right]}{\left[(pL + r_2) + r_1pC(pL + r_2) + r_1 \right] (pL + r_2)} = \\
 &= \frac{E(p) + u_C(0)r_1C + Li_2(0)(1 + r_1pC)}{(pL + r_2) + r_1pC(pL + r_2) + r_1}.
 \end{aligned}$$

2.5 Перехід від зображення до оригіналу

Для одержання остаточного розв'язку перехідного процесу необхідно перейти від зображень шуканих величин до оригіналів як функцій часу.

Існують різні методи переходу до оригіналу. В цьому підрозділі розглянемо використання для цієї мети теореми розкладання.

В прикладах, які розглянуті раніше, операторні зображення шуканих функцій одержували у вигляді відношення двох поліномів

$$X(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (2.38)$$

причому $m < n$.

Як правило, і в інших випадках зображення величин, які шу-

кають при розрахунку перехідного процесу в лінійних електричних колах, можуть бути зведеними до вигляду (2.38).

Припустимо, що всі корені знаменника прості (некратні), серед них можуть бути як дійсні корені, так і комплексно-спряжені. В цьому випадку, як відомо із математики, вираз (2.38) можна записати в вигляді суми простих дробів

$$X(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \dots + \frac{A_k}{p-p_k} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k}, \quad (2.39)$$

де p_k – корені знаменника,

A_k – невідомі сталі.

Для знаходження значень A_k помножимо праву і ліву частину (2.39) на $p-p_k$

$$\frac{A(p)}{B(p)}(p-p_k) = A_1 \frac{p-p_k}{p-p_1} + A_2 \frac{p-p_k}{p-p_2} + \dots + A_k + \dots + A_n \frac{p-p_k}{p-p_n}$$

і спрямуємо p до p_k .

В правій частині рівняння всі доданки, крім A_k , перетворюються на нуль, а в лівій частині виходить невизначеність виду $\frac{0}{0}$, оскільки при $p \rightarrow p_k$, $(p-p_k) \rightarrow 0$ і $B(p_k) \rightarrow 0$, тому що p_k є коренем знаменника. Таким чином,

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{A(p)(p-p_k)}{B(p)} = A(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{(p-p_k)}{B(p)}. \quad (2.40)$$

Розкриємо невизначеність в (2.40) за правилом Лопітала.

Тоді

$$A_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}. \quad (2.41)$$

Підставляючи значення A_k в (2.39), одержуємо

$$X(p) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \frac{1}{p-p_k}.$$

Відповідно до (2.9)

$$\frac{1}{p-p_k} \doteq e^{p_k t}.$$

Тому оригіналом зображення $X(p)$ є функція

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (2.42)$$

де n – число коренів знаменника;

p_k – корені знаменника $B(p)$;

$A(p_k)$ – значення чисельника функції $X(p)$ при $p = p_k$;

$B'(p_k)$ – значення похідної знаменника функції $X(p)$ при $p = p_k$.

Отриманий вираз (2.42) називається *формулою розкладання або теоремою розкладання*.

Приклад 2.2

Визначити оригінал функції

$$X(p) = \frac{p^2 + 4p + 8}{p(p^2 + 6p + 8)}.$$

Тут $A(p) = p^2 + 4p + 8$, $B(p) = p(p^2 + 6p + 8)$.

Знаходимо корені знаменника, прирівнюючи його до нуля

$$p(p^2 + 6p + 8) = 0,$$

$$p_1 = 0,$$

$$p_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2}, \quad p_2 = -2, \quad p_3 = -4.$$

Визначасмо значення чисельника при $p = p_k$,

$$A(p_1) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 8 = 8;$$

$$A(p_2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 8 = 4;$$

$$A(p_3) = (-4)^2 + 4 \cdot (-4) + 8 = 8.$$

Знаходимо похідну від знаменника

$$B'(p) = (p^2 + 6p + 8) + p(2p + 6)$$

і її значення для $p = p_k$

$$B'(p_1) = 0^2 + 0 \cdot 6 + 8 + 0 \cdot (2 \cdot 0 + 6) = 8;$$

$$B'(p_2) = (-2)^2 + (-2) \cdot 6 + 8 + (-2) \cdot [2 \cdot (-2) + 6] = -4;$$

$$B'(p_3) = (-4)^2 + (-4) \cdot 6 + 8 + (-4) \cdot [2 \cdot (-4) + 6] = 8.$$

Підставляючи одержані значення в (2.42), маємо

$$x(t) = \frac{8}{8} \cdot e^{0t} + \frac{4}{-4} \cdot e^{-2t} + \frac{8}{8} \cdot e^{-4t} = 1 - e^{-2t} + e^{-4t}.$$

Розглянемо декілька прикладів розрахунку перехідних процесів операторним методом.

Приклад 2.3

Визначити закон зміни у часі струму i_2 . Коло зображено на рис. 2.13, а. $r_1 = 50$ Ом, $r_2 = 100$ Ом, $C = 200$ мкФ, $E = 300$ В.

Враховуючи напрям комутації (коло приєднується до джерела постійної е.р.с. E), конденсатор на момент комутації був розрядженим, тому в операторній схемі (рис. 2.13, б) додаткова е.р.с.

$\frac{u_C(0)}{p}$ відсутня.

В цьому випадку легко знайти вхідний струм $I_1(p)$

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z(p)},$$

$$Z(p) = r_1 + \frac{r_2 \frac{1}{pC}}{r_2 + \frac{1}{pC}} = r_1 + \frac{r_2}{r_2 Cp + 1} = \frac{r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2}{r_2 Cp + 1}.$$

Таким чином,

$$I_1(p) = \frac{E(p)(r_2 Cp + 1)}{r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2}.$$

Струм $I_2(p)$ знаходиться з виразу

$$I_2(p) = I_1(p) \frac{\frac{1}{pC}}{r_2 + \frac{1}{pC}} = I_1(p) \frac{1}{r_2 Cp + 1} = \frac{E(p)(r_2 Cp + 1)}{(r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2)(r_2 Cp + 1)} =$$

$$= \frac{E(p)}{r_1 r_2 C p + r_1 + r_2}.$$

Враховуючи, що $E(p) = \frac{E}{p}$ і підставляючи числові дані,

одержуємо

$$I_2(p) = \frac{300}{p(p+150)}. \quad (2.43)$$

Для знаходження оригіналу використовуємо теорему розкладання (2.42).

В даному прикладі

$$A(p) = 300,$$

$$B(p) = p(p+150).$$

Знаходимо корені знаменника

$$p(p+150) = 0;$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -150.$$

Визначаємо значення $A(p_k)$.

Оскільки $A(p)$ не залежить від p , то

$$A(p_1) = 300, \quad A(p_2) = 300.$$

Похідна від знаменника

$$B'(p) = (p+150) + p,$$

і відповідні її числові значення для p_1 і p_2

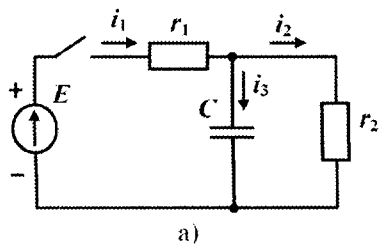
$$B'(p_1) = 150, \quad B'(p_2) = -150.$$

Таким чином,

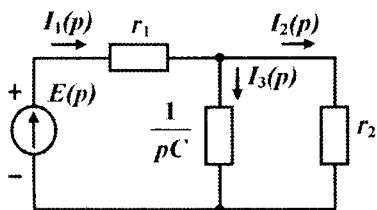
$$i_2(t) = \frac{300}{150} \cdot e^{0t} + \frac{300}{-150} \cdot e^{-150t} = 2 - 2 \cdot e^{-150t} \text{ А.} \quad (2.44)$$

Звернемо увагу на те, що знаменник виразу (2.43) має два корені, причому один корінь $p = 0$ з'явився після підстановки

$$E(p) = \frac{E}{p}$$



а)



б)

Рисунок 2.13

i визначає першу складову в виразі (2.44), тобто примусову складову, а другий корінь ($p_2 = -150$) залежить від параметрів кола і визначає вільну складову.

Приклад 2.4

Знайти операторним методом струм в колі (рис. 2.14, а), якщо

$$u(t) = U_m \cos \omega t.$$

Оскільки в колі початкові умови нульові, то в операторній схемі (рис. 2.14, б) буде відсутня додаткова е.р.с. $Li(0)$. Тому

$$I(p) = \frac{U(p)}{pL + r}. \quad (2.45)$$

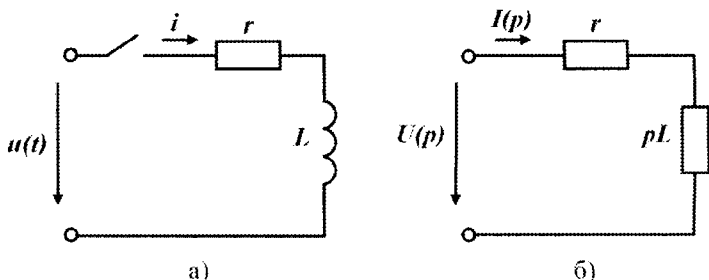


Рисунок 2.14

Зображення косинусної напруги відповідно до (2.13)

$$U(p) = \frac{U_m p}{p^2 + \omega^2};$$

$$I(p) = \frac{U_m p}{(p^2 + \omega^2)(pL + r)}. \quad (2.46)$$

Для знаходження оригіналу $i(t)$ використаємо формулу розкладання (2.42).

$$A(p) = U_m p;$$

$$B(p) = (p^2 + \omega^2)(pL + r).$$

Корені знаменника

$$\begin{aligned}p^2 + \omega^2 &= 0, \\p_1 = j\omega, \quad p_2 &= -j\omega, \\pL + r &= 0, \\p_3 &= -\frac{r}{L}.\end{aligned}$$

Значення чисельника для $p = p_k$

$$\begin{aligned}A(p_1) &= U_m j\omega; \\A(p_2) &= U_m (-j\omega); \\A(p_3) &= -\frac{U_m}{L}.\end{aligned}$$

Похідна від знаменника

$$B'(p) = 2p(pL + r) + L(p^2 + \omega^2)$$

і її значення для $p = p_k$

$$\begin{aligned}B'(p_1) &= 2j\omega(r + j\omega L); \\B'(p_2) &= -j2\omega(r - j\omega L); \\B'(p_3) &= L\left(\frac{r^2}{L^2} + \omega^2\right).\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$r + j\omega L = \underline{Z} = Ze^{j\varphi},$$

де

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\varphi &= \frac{\omega L}{r}, \\Z &= \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}, \\r - j\omega L &= Ze^{-j\varphi},\end{aligned}$$

а

$$B'(p_3) = L\left(\frac{r^2}{L^2} + \omega^2\right) = \frac{r^2 + (\omega L)^2}{L} = \frac{Z^2}{L},$$

одержуємо

$$B'(p_1) = 2j\omega Ze^{j\varphi};$$

$$B'(p_2) = -j2j\omega Ze^{-j\varphi};$$

$$B'(p_3) = \frac{Z^2}{L}.$$

Підставляючи знайдені значення в (2.42) отримаємо

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U_m j\omega}{2j\omega Ze^{j\varphi}} e^{j\omega t} + \frac{-U_m j\omega}{-2j\omega Ze^{-j\varphi}} e^{-j\omega t} + \frac{-U_m r}{\frac{Z^2}{L}} e^{-\frac{r}{L}t} = \\ &= \frac{U_m}{2Z} e^{j(\omega t - \varphi)} + \frac{U_m}{2Z} e^{-j(\omega t - \varphi)} - \frac{U_m r}{Z^2} e^{-\frac{r}{L}t}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{U_m}{Z} = I_m,$$

$$\frac{r}{Z} = \cos \varphi,$$

то

$$i(t) = I_m \frac{e^{j(\omega t - \varphi)} + e^{-j(\omega t - \varphi)}}{2} - I_m \cos \varphi e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Відомо, що

$$\frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \cos \alpha,$$

тому

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) - I_m \cos \varphi e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (2.47)$$

Перший доданок (2.47) являє собою примусову складову, яка одержана після підстановки в (2.42) значень

$$p_1 = j\omega \text{ і } p_2 = -j\omega,$$

які є коренями частини знаменника $(p^2 + \omega^2)$, що з'явилася в (2.45), після підстановки зображення прикладеної напруги.

Другий доданок в (2.47) є вільна складова, яка одержана після підстановки p_3 в (2.42) і є коренем знаменника, що залежить від параметрів кола.

Таким чином, можна стверджувати, що знаменник зображення шуканої функції в будь-якому електричному колі складається із двох частин

$$B(p) = B_1(p) B_2(p).$$

Перший співмножник $B_1(p)$ залежить від виду прикладеної напруги і визначає примусову складову.

Другий співмножник $B_2(p)$ знаходиться в залежності від параметрів і конфігурації кола і, в свою чергу, характеризує вільну складову.

Корені $B_2(p)$ є коренями характеристичного рівняння в класичному методі розрахунку і відповідно дійсна частина їх в лінійних колах повинна бути від'ємною.

2.6 Розрахунок перехідних процесів операторним методом за допомогою програм комп'ютерної математики Mathcad і Maple

Розрахунок перехідних процесів операторним методом, як було висвітлено вище, складається з двох етапів і полягає спочатку у визначенні зображення (за Лапласом) шуканої миттєвої напруги (чи струму) із наступним його перетворенням й одержанням самої функції від часу (оригіналу). Оскільки на першому етапі для складних кіл зазвичай доводиться розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, складених у той чи інший спосіб відносно зображень, а на другому – здійснювати обернене інтегральне перетворення Лапласа, то застосування програм комп'ютерної математики є не тільки виправданим, але в таких випадках і необхідним.

Приклад 2.5

В програмному середовищі Mathcad потрібно розв'язати задачу, умову якої було наведено в прикладі 1.5 (див. п. 1.11), визначивши операторним методом напругу на ємності $u_C(t)$ під час перехідного процесу.

Відповідно до операторного методу, спочатку необхідно за заданих вихідних даних розрахувати незалежні початкові умови $u_C(0_+)$ та $i_L(0_+)$. Однак ці умови було одержано раніше (див. приклад 1.5 п. 1.11), тому початкова частина програмного коду даного прикладу буде повністю збігатися із програмою, наведеною на рис. 1.26.

Складемо для заданого кола (рис. 2.15, а) його операторну схему (рис. 2.15, б).

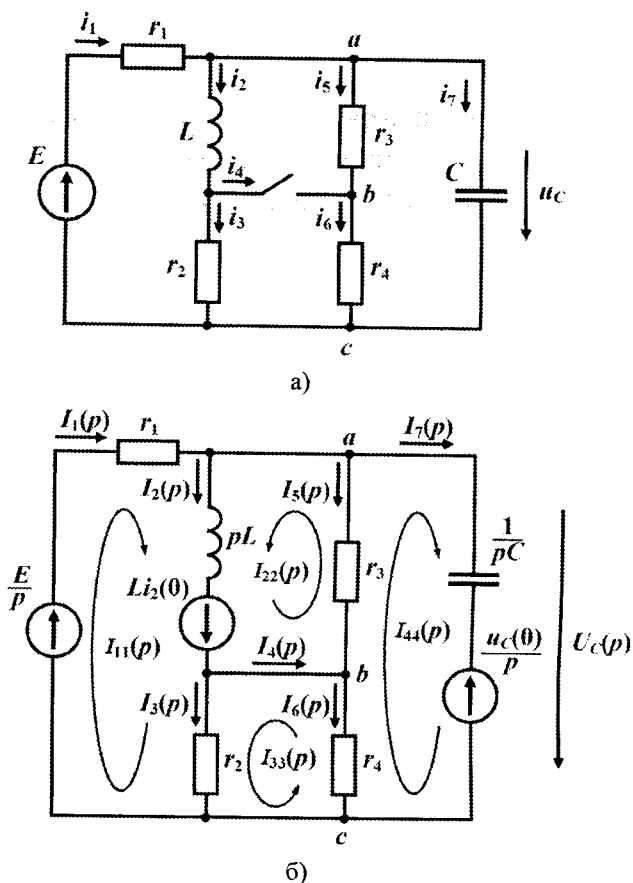


Рисунок 2.15

Зображення напруги на ємності $U_C(p)$ визначимо через зображення струму $I_7(p)$. Цю ж функцію розрахуємо засобами програми Mathcad, розв'язавши складену за методом контурних струмів систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} (pL + r_1 + r_2)I_{11}(p) + pLI_{22}(p) + r_2I_{33}(p) &= \frac{E}{p} + Li_L(0) \\ pLI_{11}(p) + (pL + r_3)I_{22}(p) + r_3I_{44}(p) &= Li_L(0) \\ r_2I_{11}(p) + (r_2 + r_4)I_{33}(p) + r_4I_{44}(p) &= 0 \\ r_3I_{22}(p) + r_4I_{33}(p) + \left(\frac{1}{pC} + r_3 + r_4\right)I_{44}(p) &= -\frac{u_C(0)}{p} \end{aligned} \right\} \cdot (2.48)$$

як це показано на рис. 2.16 та рис. 2.17.

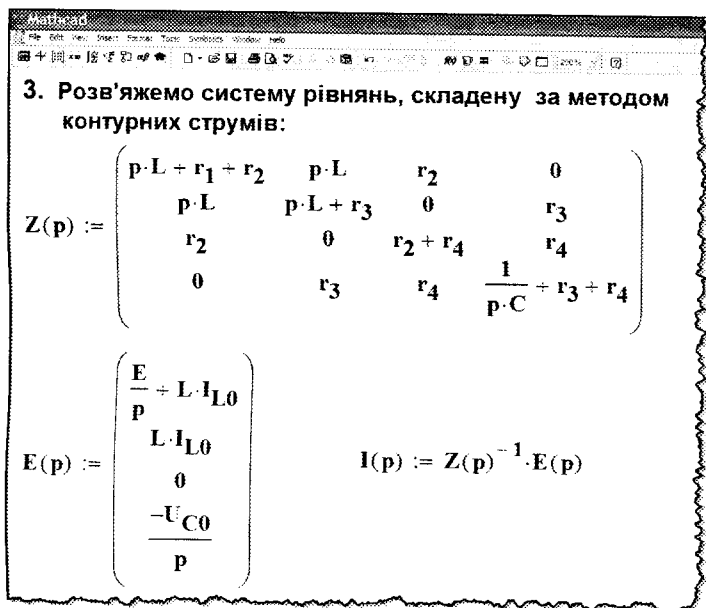


Рисунок 2.16

Функція $I(p)$ являє собою вектор, елементами якого є зображення контурних струмів

$$I(p) = \begin{bmatrix} I_{11}(p) \\ I_{22}(p) \\ I_{33}(p) \\ I_{44}(p) \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$I_7(p) = I_{44}(p),$$

то, як видно з рисунка, зображенням струму $I_7(p)$ буде функція

$$I_7(p) = \frac{0,00217p - 6527}{p^2 + 432p + 2,37 \cdot 10^6}.$$

The screenshot shows a Mathcad window with the following content:

$$I(p) \begin{cases} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{cases} \rightarrow \frac{\frac{239.0 \cdot p + 0.555 \cdot p^2 + 2.34e6}{p \cdot (432.0 \cdot p + p^2 + 2.37e6)} \cdot \frac{1.0 \cdot (6.88e19 \cdot p - 2.01e24)}{1.34e23 \cdot p + 3.11e20 \cdot p^2 + 7.37e26}}{\frac{1.0 \cdot (2.68e23 \cdot p + 8.55e20 \cdot p^2 + 3.6e27)}{p \cdot (6.71e23 \cdot p + 1.56e21 \cdot p^2 + 3.68e27)}} = \frac{0.00217 \cdot p - 6527.0}{432.0 \cdot p + p^2 + 2.37e6}$$

Рисунок 2.17

Тоді зображення напруги на ємності $U_C(p)$ можна визначити за формулою, скориставшись законом Ома в операторній формі

$$U_C(p) = U_{ac}(p) = \frac{1}{pC} I_7(p) + \frac{u_C(0)}{p}.$$

На рис. 2.18 наведено результат такого розрахунку програмою Mathcad, звідки видно, що зображенням напруги на ємності буде функція

$$U_C(p) = \frac{0,977}{p} + \frac{32,4p - 14008}{p^2 + 431p + 2,37 \cdot 10^6} \text{ В} \cdot \text{с.}$$

4. Отримаємо зображення напруги на ємності $U_C(p)$:

ORIGIN := 1 I₇(p) := I(p)₄

$$U_C(p) := \frac{U_{C0}}{p} + I_7(p) \cdot \frac{1}{p \cdot C}$$

$$U_C(p) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \frac{0.977}{p} + \frac{32.4 \cdot p + 14008.0}{431.0 \cdot p + p^2 + 2.37e6}$$

Рисунок 2.18

Необхідно наголосити, що професійні версії системи Mathcad здатні здійснювати основні інтегральні перетворення і в змозі їх проводити в аналітичній формі. Зокрема це стосується і прямого та оберненого перетворень Лапласа.

Тому на другому етапі розрахунку задачі за допомогою спеціальної директиви `invlaplace` безпосередньо отримаємо оригінал функції $U_C(p)$ – миттєве значення напруги на ємності $u_C(t)$ (див. рис. 2.19).

5. Визначимо миттєву напругу на ємності $u_C(t)$:

$$U_C(p) \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{invlaplace}, p, t \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 32.4 \cdot \cos(1524.0 \cdot t) \cdot e^{-216.0 \cdot t} + 4.61 \cdot \sin(1524.0 \cdot t) \cdot e^{-216.0 \cdot t} + 0.977$$

Рисунок 2.19

Як видно з рисунка, напруга на ємності має дорівнювати

$$u_C(t) = e^{-216t} (4,61 \sin 1524t + 32,4 \cos 1524t) + 0,977 \text{ В,}$$

що з прийнятною точністю збігається з результатами розрахунку класичним методом, наведеним в прикладі 1.5 (див. п. 1.11).

Графік цієї напруги наведено на рис. 1.29.

Приклад 2.6

Тепер розв'яжемо ту ж саму задачу в програмному середовищі Maple.

Оскільки незалежні початкові умови $u_C(0_+)$ та $i_L(0_+)$ були визначені вище в прикладі 1.6. п.1.11, то за тих же вихідних даних початкова частина програмного коду цього прикладу буде цілком збігатися із програмою, наведеною на рис. 1.36.

В даному прикладі зображення напруги на ємності $U_C(p)$ отримаємо, скориставшись методом вузлових потенціалів.

Відповідно до цього методу за допомогою операторної схеми (див. рис. 2.15, б) складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно зображень потенціалів вузлів $\varphi_a(p)$ і $\varphi_b(p)$, вважаючи зображення потенціалу вузла c таким, що дорівнює нулю

$$\varphi_c(p) = 0.$$

Тоді маємо систему

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{pL} + pC + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) \varphi_a(p) - \left(\frac{1}{pL} + \frac{1}{r_3} \right) \varphi_b(p) &= I_a(p) \\ - \left(\frac{1}{pL} + \frac{1}{r_3} \right) \varphi_a(p) + \left(\frac{1}{pL} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right) \varphi_b(p) &= I_b(p) \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

де

$$I_a(p) = \frac{E}{p} \frac{1}{r_1} - Li_L(0) \frac{1}{pL} + \frac{u_C(0)}{p} pC,$$

$$I_b(p) = Li_L(0) \frac{1}{pL} -$$

зображення вузлових струмів схеми.

Занесемо систему рівнянь (2.49) до математичної програми Maple (див. рис. 2.20).

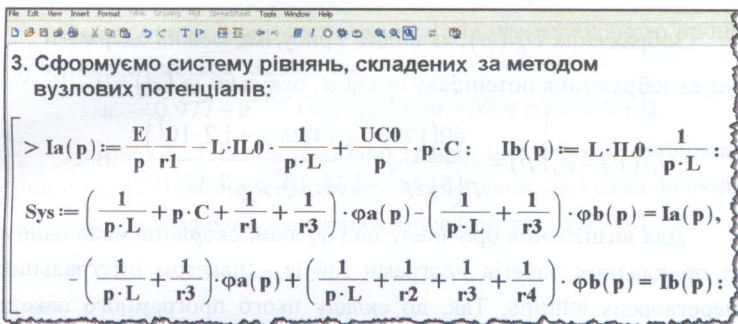


Рисунок 2.20

Розв'яжемо цю систему рівнянь, скориставшись командою solve(a, b), де a – множина рівнянь, b – множина змінних.

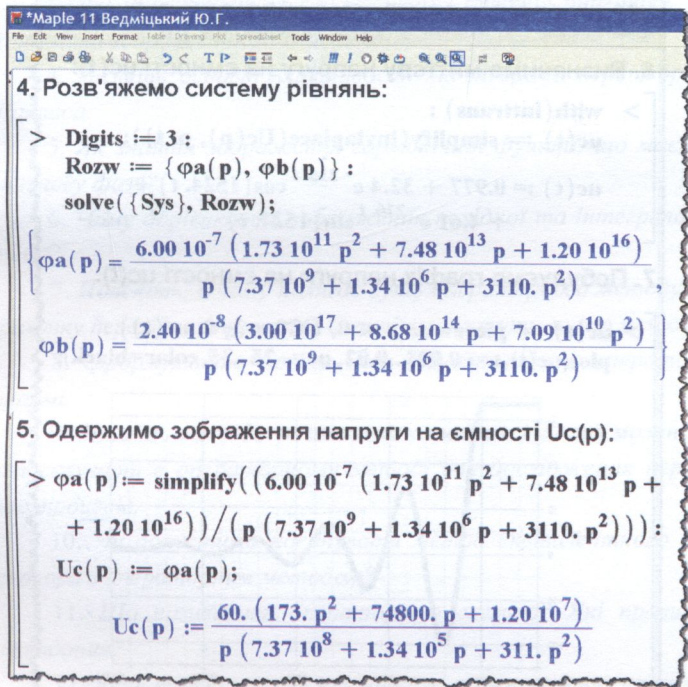


Рисунок 2.21

Зображення $U_C(p)$, як видно з рисунка, можна одержати через зображення потенціалу вузла a , оскільки $\varphi_c(p) = 0$

$$U_C(p) = \varphi_a(p) = \frac{60(173p^2 + 74800p + 1,2 \cdot 10^7)}{p(311p^2 + 1,34 \cdot 10^5 p + 7,37 \cdot 10^8)} \text{ В} \cdot \text{с.}$$

Для визначення оригіналу цієї функції скористаємося одним із прикладних пакетів програми Maple – пакетом інтегральних перетворень `intrans`. Так, до складу цього програмного пакета входить Maple-функція `invlaplace(F(p),p,t)`, за допомогою якої, здійснивши обернене інтегральне перетворення Лапласа, і визначимо миттєве значення напруги на ємності $u_C(t)$, як це показано на рис. 2.22.



Рисунок 2.22

Таким чином, напруга на ємності під час перехідного процесу змінюватиметься за законом

$$u_C = 0,977 + e^{-216t} (4,61 \sin 1524t + 32,4 \cos 1524t) \text{ В.}$$

На рис. 2.22 також показано графік цієї функції, побудований в математичному середовищі Maple, який, як і сама функція, збігається із графіком, наведеним вище (див рис. 1.29 п.1.11).

Запитання для самоперевірки

1. Розкрийте суть інтегрального перетворення Лапласа?
2. В якому взаємозв'язку перебувають оригінал та його зображення?
3. Які умови повинна задовольняти функція оригіналу, щоб вона мала зображення за Лапласом?
4. Назвіть основні властивості та теореми перетворення Лапласа.
5. Як знайти зображення гармонічної функції, що має початкову фазу?
6. Чому дорівнюють зображення похідної та інтеграла функції?
7. Поясніть, в чому полягає суть операторного методу розрахунку перехідних процесів? Опишіть алгоритм цього методу.
8. Сформулюйте закони Ома та Кірхгофа в операторній формі.
9. Назвіть методи розрахунку складних кіл, які можна застосовувати в операторному методі для дослідження перехідних процесів.
10. Чи допустимо поєднувати метод еквівалентного генератора з операторним методом?
11. Що називають операторною схемою? Які правила її складання?
12. Який вигляд мають операторні схеми окремих елементів електричного кола?

13. Спростують чи ускладнюють нульові незалежні умови операторну схему?

14. Які еквівалентні перетворення можливі в операторній схемі?

15. Яким чином здійснюють перехід від зображення до оригіналу?

16. Запишіть теорему розкладання, розкрийте її суть.

17. Наведіть алгоритм переходу за допомогою теореми розкладання від зображення до оригіналу.

18. Для схем, показаних на рис. 1.32 та рис. 1.33 складіть їх операторні схеми.

19. Знайдіть оригінали за відомими зображеннями

$$\text{а) } \frac{3p}{(p^2+1)(p^2+4)}, \quad \text{б) } \frac{p+1}{p^2+2p}, \quad \text{в) } \frac{1}{p(p^2+2p+5)}.$$

Відповідь:

$$\text{а) } \cos t - \cos 2t, \quad \text{б) } \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}), \quad \text{в) } \frac{1}{5} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-t} (2 \cos 2t + \sin 2t) \right].$$

20. Розрахуйте операторним методом перехідний процес, визначивши напругу на індуктивності в електричному колі, наведеному на рис. 1.32.

21. Зробіть те ж саме, що і в попередньому пункті, тільки для електричного кола, наведеного на рис. 1.33.

Розділ 3

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ПІД ЧАС ДІЇ ВХІДНИХ ЗБУДЖЕНЬ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Метод розрахунку, який розглядається в цьому розділі, базується на принципі накладання. Заданий вхідний сигнал складної форми розкладається на подібні одна одній складові більш простої форми (прямокутні східці або прямокутні імпульси), для яких легко знайти реакцію кола.

Визначивши реакцію кола на кожну елементарну складову дії і додаючи ці реакції, знаходимо реакцію кола на складний сигнал. Вмикання елементарних складових сигналу в коло і викликаних ними реакцій кола виражають за допомогою двох функцій – *одиничної* або *імпульсної*.

3.1 Одинична функція і перехідна характеристика кола

Одинична східчаста функція (рис. 3.1, а), яка ще називається *функцією Хевісайда*, визначається таким чином

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

За допомогою одиничної функції дію $f(t)$ будь-якої миттєвої напруги або струму на коло можна описати добутком

$$f(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & t > 0. \end{cases}$$

Якщо коло в момент $t = 0$ вмикається на постійну напругу U_0 , то відповідно маємо

$$U_0 \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_0, & t > 0. \end{cases}$$

Цей вираз вказує на те, що напруга зростає від нуля до U_0 стрибком в момент вмикання ($t = 0$) і далі діє неперервно, залишаючись постійною, тобто зникає потреба у використанні ключа.

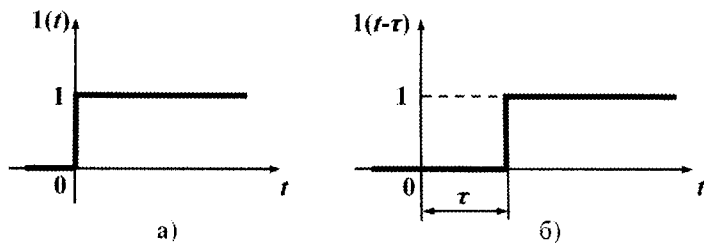


Рисунок 3.1

Якщо дія подається на коло не в момент $t = 0$, а із запізненням на час τ , то її також можна описати за допомогою одиничної функції (рис. 3.1, б) з аргументом запізнення ($t - \tau$)

$$i(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t > \tau. \end{cases} \quad (3.2)$$

Добуток

$$U_0 \cdot i(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ U_0, & t > \tau \end{cases}$$

показує, що напруга величиною U_0 вмикається в коло в момент часу $t = \tau$.

На будь-яке зовнішнє збудження (дію напруги або струму) електричне коло реагує зміною свого стану, через що струми у вітках і напруги на його ділянках, які і визначають цей стан, зазнають зміни у часі. Кожний з таких миттєвих струмів (або напруг) буде *реакцією* даного кола на відповідну зовнішню дію.

Перехідною характеристикою називають реакцію знеструмленого кола (нульові незалежні початкові умови) на одиничну східчасту дію входної напруги, віднесену до одиниці вимірювання останньої. В залежності від природи реакції розрізняють перехідні характеристики за напругою $h_u(t) = \frac{u(t)}{1B}$ і перехідні характе-

ристики за струмом (або перехідні провідності) $h_i(t) = \frac{i(t)}{1\text{В}}$. Пер-

ші є безрозмірними функціями від часу, одиницями ж вимірювання других є сименси.

З електротехнічної точки зору дія одиничної східчастої напруги на коло рівноцінна вмиканню кола в момент $t = 0$ під постійну напругу 1 В. Тому для визначення перехідної характеристики кола $h(t)$ слід знайти необхідну реакцію (згідно з умовою задачі), розраховавши перехідний процес в колі, схема якого наведена на рис.3.2 (початкові умови нульові). Такий розрахунок можна проводити як класичним, так і операторним методом. Знайдена реакція і буде шуканою перехідною характеристикою $h(t)$.

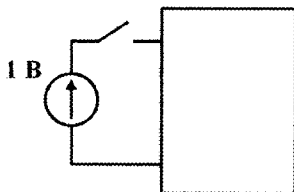


Рисунок 3.2

Наприклад, при вмиканні кола, яке складається із послідовно з'єднаних опору r і індуктивності L , на напругу складної форми, де потрібно знайти струм, перехідною характеристикою буде струм (тобто реакція), віднесений до дії постійної напруги на вході в 1 В. Оскільки струм в такому колі від дії постійної напру-

ги U , як відомо,

$$i = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

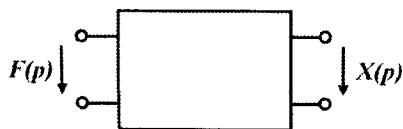
то перехідна характеристика

$$h(t) = \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right). \quad (3.3)$$

В складних колах доцільно спочатку знаходити зображення перехідної характеристики



а)



б)

Рисунок 3.3

$H(p)$, а потім за теоремою розкладання визначати $h(t)$.

Уявімо собі будь-яке коло у вигляді чотирипол'юсника (рис.3.3, а), до якого прикладено деяке збудження $f(t)$ з реакцією на виході $x(t)$. Для знаходження зображення реакції $X(p)$ подамо схему в операторній формі (рис. 3.3, б).

Оскільки початкові умови нульові, то ніяких додаткових е.р.с. в чотирипол'юснику не з'являється і зв'язок між зображеннями реакції $X(p)$ і збудження $F(p)$ записується у вигляді

$$X(p) = K(p)F(p), \quad (3.4)$$

де $K(p)$ – передатна функція кола, яка залежить тільки від параметрів елементів кола і виду їх з'єднання поміж собою.

Якщо збудження є одиничною східчастою функцією $1(t)$, його зображення можна знайти, застосувавши інтеграл Лапласа

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{p}; \quad 1(t) \equiv \frac{1}{p}. \quad (3.5)$$

Тоді зображення перехідної характеристики визначається за виразом

$$H(p) = \frac{K(p)}{p}. \quad (3.6)$$

Приклад 3.1

Знайти перехідну характеристику для напруги на ємності в колі, яке зображене на рис. 3.4, а.

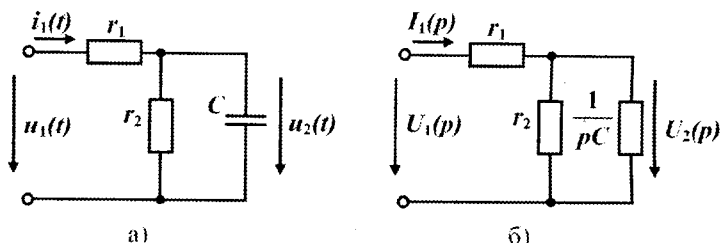


Рисунок 3.4

Подамо схему в операторній формі за нульових початкових умов (рис. 3.4, б) і виразимо напругу $U_c(p) = U_2(p)$ через $U_1(p)$.

Вхідний струм

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{pC}}} = \frac{U_1(p)}{r_1 + \frac{r_2}{r_2 Cp + 1}}$$

або

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)(r_2 Cp + 1)}{r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2}$$

Шукана напруга

$$U_2(p) = I_1(p) \frac{r_2 \frac{1}{pC}}{r_2 + \frac{1}{pC}} = I_1(p) \frac{r_2}{r_2 Cp + 1} = \frac{U_1(p) r_2}{r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2}$$

Враховуючи, що

$$F(p) = U_1(p) \text{ і } X(p) = U_2(p),$$

передатна функція кола

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{r_2}{r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2}$$

Зображення перехідної характеристики для напруги на ємності згідно з (3.6)

$$H(p) = \frac{K(p)}{p} = \frac{r_2}{p(r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2)}$$

Використовуючи теорему розкладання, знаходимо оригінал перехідної характеристики

$$h(t) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} - \frac{r_2}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}$$

Знаючи перехідну характеристику, легко визначити значення $u_C(t)$ для будь-якої величини постійної вхідної напруги.

Дійсно, якщо на вході увімкнена постійна напруга U_1 , то миттєва напруга

$$u_2(t) = U_1 h(t).$$

3.2 Перехідні процеси за дії східчастої напруги

Нехай до деякого кола, для якого відома перехідна характеристика $h(t)$, прикладена східчаста напруга $u(t)$ (рис.3.5).

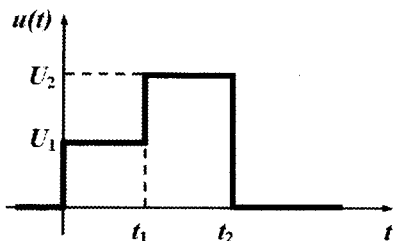


Рисунок 3.5

Визначимо реакцію кола через перехідну характеристику. Підкреслимо ще раз, що всі подальші міркування відносяться до кіл з нульовими початковими умовами.

Перехідний процес в цих випадках визначають окремо на різних інтервалах часу.

На інтервалі $0 < t < t_1$ до кола прикладена постійна напруга U_1 , тому

$$x(t) = U_1 h(t), \quad 0 < t < t_1. \quad (3.7)$$

На інтервалі $t_1 < t < t_2$ продовжує діяти постійна напруга U_1 і відповідно існує реакція на цю напругу $U_1 h(t)$.

В момент часу t_1 додатково вмикається постійна напруга $(U_2 - U_1)$, і з'являється складова реакції від цього стрибка напруги, яка зміщена на час t_1 , тобто $(U_2 - U_1)h(t - t_1)$.

Таким чином, загальна реакція на цьому інтервалі

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1), \quad t_1 < t < t_2. \quad (3.8)$$

На інтервалі $t_2 < t < \infty$ реакція кола складається із трьох складових:

- продовжує діяти напруга U_1 – реакція $U_1 h(t)$;
- продовжує діяти постійна напруга $(U_2 - U_1)$, яка виникає в момент t_1 – реакція $(U_2 - U_1)h(t - t_1)$;
- в момент $t = t_2$ з'являється постійна напруга $(-U_2)$, реакція від якої $(-U_2)h(t - t_2)$.

Розгортання цих складових у часі наведено на рис. 3.6.

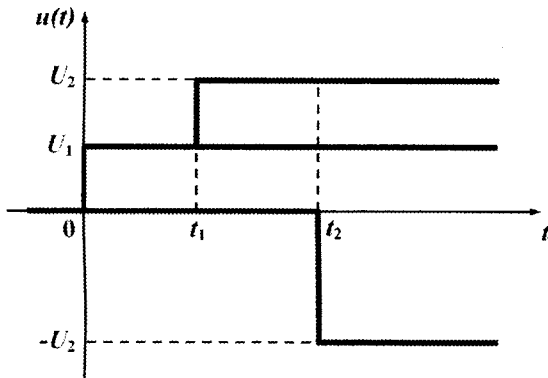


Рисунок 3.6

Отже, для часового інтервалу $t_2 < t < \infty$ можна записати

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1) - U_2 h(t - t_2), \quad t > t_2. \quad (3.9)$$

3.3 Розрахунок перехідних процесів при довільних збудженнях

Описаний підхід до визначення реакції кола на східчасту дію дозволяє розглядати перехідний процес при будь-яких складних вхідних збудженнях.

Розглянемо знаходження реакції кола з відомою перехідною характеристикою $h(t)$ при вмиканні його до джерела напруги $u(t)$ довільної форми (рис.3.7) за нульових початкових умов.

Виберемо деякий довільний фіксований момент спостереження t і розрахуємо реакцію (струм або напругу) для цього моменту часу. Незважаючи на те, що момент вибирається довільно, він фіксується і стає сталою величиною – параметром. В зв'язку з цим вводиться нове позначення змінної часу τ , яка змінюється в границях $0 < \tau < t$.

Подамо прикладену напругу у вигляді східчастого збудження (рис.3.7), коли через рівні проміжки часу $\Delta\tau = \frac{t}{n}$ додаються східці напруги Δu_k (n – відповідає числу східців, за допомогою яких подається вхідна напруга).

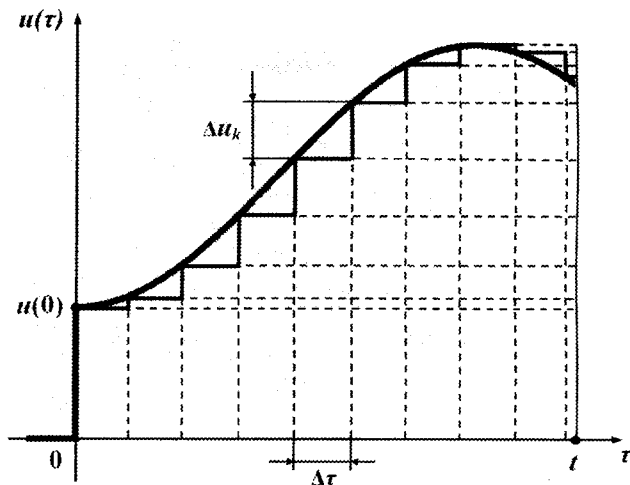


Рисунок 3.7

Дію східців на коло опишемо за допомогою одиничних функцій:

- на проміжку часу $0 < t < \Delta\tau$ реакція кола від дії напруги $u(0) 1(t)$, тобто від дії нульового східця, який наближено замінює напругу на цьому проміжку

$$x(t) \approx u(0)h(t);$$

- на проміжку $\Delta\tau < t < 2\Delta\tau$ додається реакція від дії напруги $\Delta u_1 1(t - \Delta\tau)$, тобто від дії першого східця

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau);$$

- на проміжку $2\Delta\tau < t < 3\Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_2 1(t - 2\Delta\tau)$, тобто від другого східця

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau);$$

на проміжку часу $n\Delta\tau < t < (n+1)\Delta\tau$ додається реакція від напруги Δu_n $1(t - n\Delta\tau)$, тобто від дії n -ого східця

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau) + \dots + \Delta u_k h(t - k\Delta\tau) + \dots + \Delta u_n h(t - n\Delta\tau)$$

або

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta u_k h(t - k\Delta\tau). \quad (3.10)$$

Вираз (3.10) дає наближене значення реакції кола $x(t)$, оскільки справжня крива $u(t)$ замінена східчастими збудженнями.

Для одержання точного значення реакції кола спрямуємо Δt до нескінченно малої величини dt . Тоді

$$\Delta u_k = \frac{\Delta u_k}{\Delta\tau} \Delta\tau \rightarrow u'(\tau) d\tau,$$

$$k\Delta\tau \rightarrow \tau.$$

Сума в (3.10) перетворюється на інтеграл з границями інтегрування від нуля до t , тобто

$$x(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t - \tau) d\tau. \quad (3.11)$$

Вираз (3.11) називають *інтегралом накладання* або інакше – *інтегралом Дюамеля*.

Приклад 3.2

Визначити закон зміни напруги на ємності в колі (рис.3.8) під час дії експоненціальної напруги

$$u(t) = Ue^{-\beta t}.$$

Перехідна характеристика цього кола для напруги на ємності

$$h(t) = 1 - e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \frac{1}{rC}.$$

Визначимо всі величини, які входять в інтеграл Дюамеля (3.11)

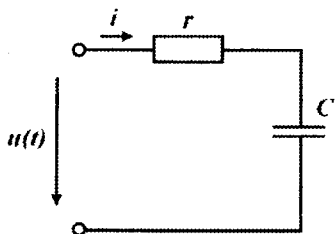


Рисунок 3.8

$$u(0) = U,$$

$$u'(\tau) = (Ue^{-\beta\tau})' = -\beta Ue^{-\beta\tau},$$

$$h(t-\tau) = 1 - e^{-\alpha(t-\tau)}.$$

Відзначимо, що змінною інтегрування в (3.11) є змінна τ , тому t при знаходженні інтеграла розглядається як стала величина.

Підставимо одержані величини в (3.11)

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t (-\beta) U e^{-\beta\tau} (1 - e^{-\alpha(t-\tau)}) d\tau = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\int_0^t e^{-\beta\tau} d\tau - \int_0^t e^{-\beta\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\left(\frac{1}{-\beta} e^{-\beta\tau} \right) \Big|_0^t - e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\frac{e^{-\beta t}}{-\beta} + \frac{1}{\beta} \right) + \beta U e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)\tau} \right) \Big|_0^t = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) + U e^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} (e^{(\alpha-\beta)t} - 1) = \\ &= U - U e^{-\alpha t} + U e^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} - \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} = \\ &= U e^{-\beta t} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) - U e^{-\alpha t} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) = \frac{\alpha U}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

Якщо прикладена напруга не може бути описана одним аналітичним виразом (рис.3.9)

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t < t_1, \\ u_2(t), & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2, \end{cases}$$

то реакцію кола слід визначити для кожного інтервалу часу, де діє відповідна напруга.

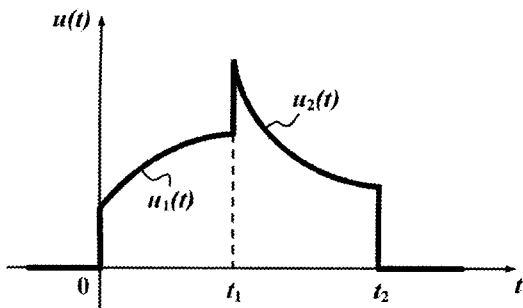


Рисунок 3.9

Для інтервалу $0 < t < t_1$ маємо

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

При визначенні реакції кола на інтервалі $t_1 < t < t_2$ враховуємо такі обставини:

- ще продовжує впливати реакція кола на дію попередньої напруги $u_1(t)$. Однак оскільки її дія обмежена часом t_1 , верхньою границею інтеграла, який визначає відповідну реакцію, буде t_1 ;
- при визначенні реакції від напруги $u_2(t)$ слід мати на увазі, що і дана напруга починає діяти на коло з моменту t_1 , тому нижньою границею для іншого відповідного інтеграла Дюамеля є t_1 ;
- в момент t_1 вхідна напруга стрибком змінюється від $u_1(t_1)$ до $u_2(t_1)$, тому цей стрибок враховується при визначенні реакції як дія постійної напруги $u_2(t_1) - u_1(t_1)$ в момент часу t_1 .

Таким чином, для $t_1 < t < t_2$ необхідно записати

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Для часу $t > t_2$ враховується стрибок напруги $0 - u_2(t_2)$ в момент t_2 і перестає діяти в цей же момент напруга $u_2(t)$.

Для $t > t_2$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (0 - u_2(t_2))h(t-t_2).$$

3.4 Імпульсна функція і імпульсна характеристика кола

Імпульсною характеристикою кола називають реакцію кола на одиничну імпульсну функцію при нульових початкових умовах.

Для одиничної імпульсної функції, яку ще називають функцією Дірака або δ -функцією, площа імпульсу дорівнює одиниці, а амплітуда прямує до нескінченності, коли $t \rightarrow 0$. Для всіх інших значень t ця функція дорівнює нулю

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \infty, & t = 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

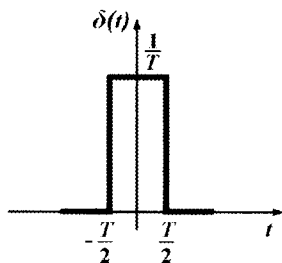


Рисунок 3. 10

На рис. 3.10 показаний імпульс шириною T і висотою $\frac{1}{T}$ площа якого дорівнює одиниці.

Одиничну імпульсну функцію $\delta(t)$ одержують із цього імпульсу за умови $T \rightarrow 0$.

Для δ -функції дійсним є співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1, \quad (3.13)$$

якщо $t_1 < 0$, $t_2 > 0$.

Добре видно, що

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1(t),$$

або

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (3.14)$$

Якщо взяти добуток функцій $f(t)$ на $\delta(t)$, то цей добуток для всіх $t \neq 0$ перетворюється на нуль, а для $t = 0$ має значення $f(0)\delta(t)$, тобто $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$.

Відповідно до цього

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0). \quad (3.15)$$

Операторне зображення δ -функції

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-p \cdot 0} \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.16)$$

Враховуючи одержане співвідношення і визначення імпульсної характеристики, можна стверджувати, що операторне зображення імпульсної характеристики дорівнює зображенню передатної функції. Якщо позначити зображення імпульсної характеристики $g(t)$ через $G(p)$, то

$$G(p) = K(p). \quad (3.17)$$

Для кола, яке розглядалося вище (рис. 3.4, а),

$$G(p) = K(p) = \frac{r_2}{r_1 r_2 C p + r_1 + r_2},$$

$$g(t) = \frac{1}{r_1 C} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}.$$

Якщо на вході кола (рис.3.4, а) діє імпульс напруги, площа якого дорівнює A , тобто $u_1(t) = A\delta(t)$ то напруга на ємності $u_2(t) = Ag(t)$.

3.5 Розрахунок перехідних процесів при довільних збудженнях з використанням імпульсної характеристики

За допомогою міркувань, аналогічних проведеним в 3.3, знайдемо реакцію електричного кола на дію напруги довільної форми (рис. 3.11), використавши імпульсну характеристику.

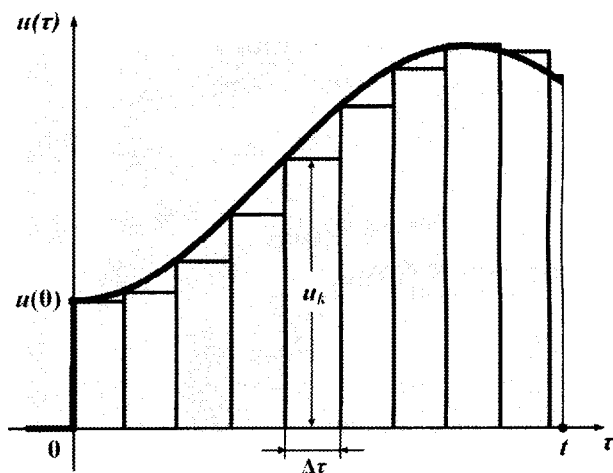


Рисунок 3.11

Для цього задану вхідну напругу розбиваємо на n прямокутних імпульсів (рис. 3.11) шириною $\Delta\tau$ і висотою u_k . Площа будь-якого імпульсу $u_k \Delta\tau$.

Реакція кола від дії окремого k -го імпульсу визначається як добуток площі імпульсу на імпульсну характеристику, яка зміщена на $k\Delta\tau$, тобто

$$\Delta x_k = u_k \Delta \tau g(t - k\Delta \tau). \quad (3.18)$$

Реакція ж кола на вхідну напругу в момент часу t наближено подається як сума реакцій від дії n імпульсів.

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^n u_k \Delta \tau g(t - k\Delta \tau). \quad (3.19)$$

При $\Delta \tau \rightarrow d\tau$ сума перетворюється на інтеграл, $k\Delta \tau \rightarrow \tau$, дискретні значення u_k стають безперервними миттєвими значеннями $u(\tau)$, тому

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (3.20)$$

Приклад 3.3

Визначимо напругу на ємності через імпульсну характеристику для кола (рис. 3.8) при вхідній напрузі $u(t) = Ue^{-\beta t}$.

Знайдемо імпульсну характеристику кола для напруги на ємності. Напруга на ємності в операторній формі

$$U_C(p) = \frac{U(p) \frac{1}{pC}}{r + \frac{1}{pC}} = \frac{U(p)}{rCp + 1}.$$

Передатна функція кола і, отже, зображення імпульсної характеристики

$$K(p) = G(p) = \frac{1}{rCp + 1}.$$

Оригінал цього зображення $g(t) = \frac{1}{rC} e^{-\frac{1}{rC}t}$.

Якщо позначити $\alpha = \frac{1}{rC}$, то $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$.

Підставляємо всі дані в (3.20), одержуємо

$$u_C(t) = \int_0^t Ue^{-\beta \tau} \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = U\alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= U\alpha e^{-\alpha t} \left(\frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta} \right) \Big|_0^t = U\alpha e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha-\beta} \left(e^{(\alpha-\beta)t} - 1 \right) = \\
 &= \frac{U\alpha}{\alpha-\beta} \left(e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t} \right).
 \end{aligned}$$

При розв'язанні задачі (рис.3.9) з використанням інтеграла Дюамеля, записаного через імпульсну характеристику (3.20) стрибки напруги в моменти t_1 і t_2 враховуються самими функціями $u_1(t)$ і $u_2(t)$ безпосередньо при інтегруванні, тобто:

$$\text{- для } 0 < t < t_1 \quad x(t) = \int_0^t u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau;$$

$$\text{- для } t_1 < t < t_2 \quad x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau;$$

$$\text{- для } t > t_2 \quad x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

3.6 Розрахунок перехідних процесів за допомогою перехідних та імпульсних характеристик кола через інтеграл Дюамеля в програмах Mathcad і Maple

Сучасні програми комп'ютерної математики (Mathcad, Maple, Matlab, Mathematica тощо) здатні забезпечити автоматизацію обчислень як при визначенні перехідних та імпульсних характеристик електричних кіл, так і при розрахунку та аналізі перехідних процесів за допомогою інтеграла Дюамеля. Вхідні напруги (зовнішні діяння) при цьому можуть бути як завгодно складними у часі, а самі кола – розгалуженими і з доволі складною будовою.

Наведемо декілька прикладів розрахунку перехідних характеристик та перехідних процесів за допомогою інтеграла Дюамеля в програмних середовищах Mathcad і Maple.

Приклад 3.4

Для електричного кола (рис. 3.12) в математичному середовищі Mathcad необхідно розрахувати, скориставшись інтегралом Дюамеля, за допомогою перехідної характеристики, струм $i_4(t)$, що проходить через індуктивність L .

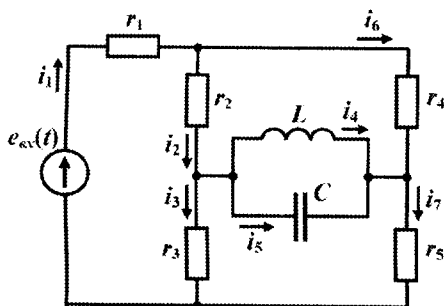


Рисунок 3.12

Параметри елементів кола такі: $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = 7$ Ом, $r_3 = 25$ Ом, $r_4 = 25$ Ом, $r_5 = 7$ Ом, $L = 500$ мкГн, $C = 185$ мкФ.

Вхідна е. р. с. змінюється в часі за законом

$$e_{ax}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 10e^{75t} \sin 6570t \text{ В}, & 0 \leq t < t_1, \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases} \quad (3.21)$$

де $t_1 = 20$ мс (рис. 3.13).

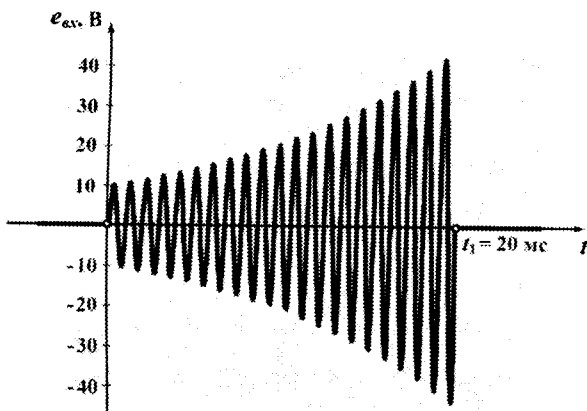


Рисунок 3.13

Розв'язання задачі розпочнемо із визначення перехідної характеристики (перехідної провідності) кола $h_{i_4}(t)$ для струму i_4 .

Для цього до входу кола прикладемо одиничне східчасте діяння, тобто напругу $E \cdot 1(t)$, де $E=1$ В. Зображення реакції кола $I_4(p)$ на цю напругу отримаємо, скориставшись операторним методом. Операторну схему побудуємо для заданого кола за нульових незалежних початкових умов (рис. 3.14).

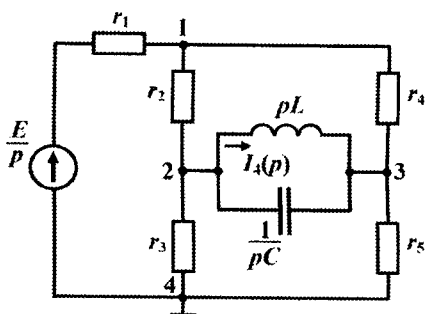


Рисунок 3.14

Покладемо зображення потенціалу вузла 4 рівним нулю $\varphi_4 = 0$. Тоді, відповідно до методу вузлових потенціалів, маємо систему, складену відносно зображень потенціалів інших вузлів,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} \right) \varphi_1(p) - \frac{1}{r_2} \varphi_2(p) - \frac{1}{r_4} \varphi_3(p) &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{E}{p} \\ -\frac{1}{r_2} \varphi_1(p) + \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{pL} + pC \right) \varphi_2(p) - \left(\frac{1}{pL} + pC \right) \varphi_3(p) &= 0 \\ -\frac{1}{r_4} \varphi_1(p) - \left(\frac{1}{pL} + pC \right) \varphi_2(p) - \left(\frac{1}{pL} + pC + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} \right) \varphi_3(p) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Розв'яжемо цю систему засобами програми Mathcad (рис. 3.15).

Зображення $I_4(p)$ визначимо за законом Ома

$$I_4(p) = \frac{\varphi_2(p) - \varphi_3(p)}{pL}$$

Оскільки перехідною характеристикою h_{i_4} є відношення реакції кола i_{4p} на дію напруги $E \cdot 1(t)$ до E , де $E=1$ В

$$h_{i_4}(t) = \frac{i_{4p}(t)}{E},$$

то зображенням цієї реакції, враховуючи лінійність перетворення Лапласа, буде відношення

$$H_{i_4}(p) = \frac{I_4(p)}{E}$$

1. Введемо вихідні дані:

$L := 5 \cdot 10^{-4}$	$r_1 := 5$	$r_4 := 25$
$C := 185 \cdot 10^{-6}$	$r_2 := 7$	$r_5 := 7$
$t_1 := 20 \cdot 10^{-3}$	$r_3 := 25$	$E := 1$

$$e_{вх}(t) := \begin{cases} 10 \cdot e^{75 \cdot t} \cdot \sin(6570 \cdot t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$Y(p) := \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} & \frac{-1}{r_2} & \frac{-1}{r_4} \\ \frac{-1}{r_2} & \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{p \cdot L} + p \cdot C & -\left(\frac{1}{p \cdot L} + p \cdot C\right) \\ \frac{-1}{r_4} & -\left(\frac{1}{p \cdot L} + p \cdot C\right) & \frac{1}{p \cdot L} + p \cdot C + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} \end{bmatrix}$$

$$I(p) := \begin{pmatrix} \frac{E}{p} \cdot \frac{1}{r_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi(p) := Y(p)^{-1} \cdot I(p)$$

3. Визначимо зображення $I_4(p)$:

ORIGIN := 1

$$I_4(p) := \frac{\Phi(p)_2 - \Phi(p)_3}{p \cdot L}$$

Рисунок 3.15

І як видно з рис. 3.16, зображенням шуканої перехідної характеристики буде функція

$$H_{i_4}(p) = \frac{2,4 \cdot 10^8}{p(629p^2 + 2,8 \cdot 10^5 p + 6,8 \cdot 10^9)} \text{ См} \cdot \text{с.}$$

4. Знайдемо зображення $H_{i_4}(p)$:

$$H_{i_4}(p) := \frac{I_4(p)}{E}$$

$$H_{i_4}(p) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \frac{2.4e8}{p \cdot (280000.0 \cdot p + 629.0 \cdot p^2 + 6.8e9)}$$

Рисунок 3.16

Тепер за допомогою директиви `invlaplace` безпосередньо одержимо оригінал функції $H_{i_4}(p)$, тобто саму перехідну характеристику $h_{i_4}(t)$ заданого кола для струму i_4 (рис. 3.17).

5. Отримаємо перехідну характеристику $h_{i_4}(t)$:

$$H_{i_4}(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, p, t \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow -0.0353 \cdot \cos(3280.0 \cdot t) \cdot e^{-223.0 \cdot t} -$$

$$-0.00239 \cdot \sin(3280.0 \cdot t) \cdot e^{-223.0 \cdot t} + 0.0353$$

Рисунок 3.17

Відтак шуканою перехідною характеристикою для струму $i_4(t)$ буде функція

$h_{i_4}(t) = 0,0353 - e^{-223t} (0,0353 \cos 3280t + 0,00239 \sin 3280t)$ См,
графік якої наведено на рис. 3.18.

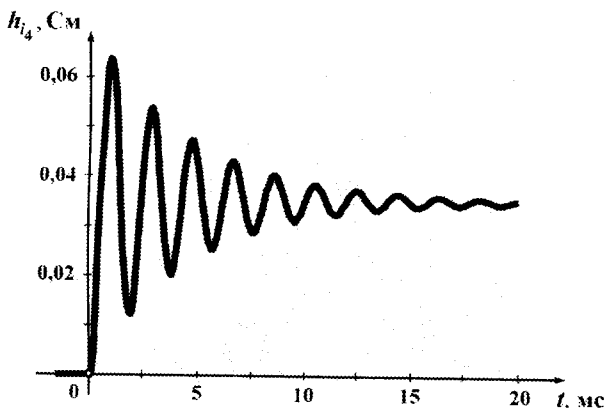


Рисунок 3.18

На другому етапі розв'язування даної задачі за допомогою визначеної перехідної характеристики $h_{i_4}(t)$ проведемо розрахунок миттєвого струму i_4 за заданої в умові вхідної е. р. с. $e_{\text{ex}}(t)$ (3.21). Для цього скористаємося інтегралом Дюамеля.

Тоді для часового проміжку $0 \leq t < t_1$ запишемо

$$i_4 = e_{\text{ex}}(0)h_{i_4}(t) + \int_0^t h_{i_4}(t-\tau) e'_{\text{ex}}(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

а для проміжку $t \geq t_1$

$$i_4 = e_{\text{ex}}(0)h_{i_4}(t) + \int_0^{t_1} h_{i_4}(t-\tau) e'_{\text{ex}}(\tau) d\tau - e_{\text{ex}}(t_1)h_{i_4}(t-t_1). \quad (3.23)$$

Численні розрахунки інтегралів (3.22) та (3.23) проведемо в математичному середовищі Mathcad (рис. 3.19, а), на основі яких побудуємо графік шуканого струму $i_4(t)$ (рис. 3.19, б).

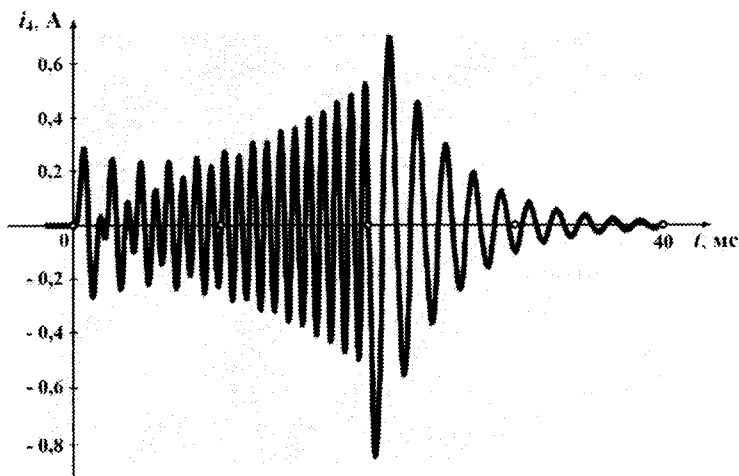
Під час розрахунку можна врахувати, що значення $e_{\text{ex}}(0) = 0$, через що вирази (3.22) і (3.23) дещо спростяться. Ми ж запишемо ці співвідношення в повному вигляді, поклавши процедуру спрощення на програму Mathcad.

6. Проведемо розрахунок перехідного процесу:

$$h_{i_4}(t) := 0.0353 - e^{-223 \cdot t} \cdot (0.0353 \cdot \cos(3280 \cdot t) + 0.00239 \cdot \sin(3280 \cdot t))$$

$$i_4(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ e_{BX}(0) \cdot h_{i_4}(t) + \int_0^t h_{i_4}(t - \tau) \cdot \frac{d}{d\tau} e_{BX}(\tau) d\tau & \text{if } 0 \leq t < t_1 \\ e_{BX}(0) \cdot h_{i_4}(t) \div \int_0^{t_1} h_{i_4}(t - \tau) \cdot \frac{d}{d\tau} e_{BX}(\tau) d\tau - e_{BX}(t_1) \cdot h_{i_4}(t - t_1) & \text{if } t > t_1 \end{cases}$$

а)



б)

Рисунок 3.19

Приклад 3.5

Розв'яжемо задачу, сформульовану в попередньому прикладі, в програмному середовищі Maple. Необхідно зазначити, що дана програма дозволяє визначити перехідну характеристику для струму i_4 безпосередньо.

Для цього спочатку складемо систему рівнянь для заданого кола (рис. 3.12) за законами Кірхгофа

$$\left. \begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_6 &= 0 \\ -i_2 + i_3 + i_4 + i_5 &= 0 \\ -i_4 - i_5 - i_6 + i_7 &= 0 \\ r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 &= e \\ -L \frac{di_4}{dt} - r_2 i_2 + r_4 i_6 &= 0 \\ L \frac{di_4}{dt} - u_C &= 0 \\ u_C - r_3 i_3 + r_5 i_7 &= 0 \\ i_5 &= C \frac{du_C}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Оскільки перехідні характеристики, що характеризують реакцію кола на одиничну східчасту функцію (функцію Хевісайда) за нульових початкових умов, пропорційні цій реакції, то систему (3.24) можна подати іншою системою, замінивши в ній струми і напругу на ємності на їх перехідні характеристики, а е.р.с. – на функцію Хевісайда

$$\left. \begin{aligned} -h_{i_1} + h_{i_2} + h_{i_6} &= 0 \\ -h_{i_2} + h_{i_3} + h_{i_4} + h_{i_5} &= 0 \\ -h_{i_4} - h_{i_5} - h_{i_6} + h_{i_7} &= 0 \\ r_1 h_{i_1} + r_2 h_{i_2} + r_3 h_{i_3} &= 1(t) \\ -L \frac{dh_{i_4}}{dt} - r_2 h_{i_2} + r_4 h_{i_6} &= 0 \\ L \frac{dh_{i_4}}{dt} - h_{u_C} &= 0 \\ h_{u_C} - r_3 h_{i_3} + r_5 h_{i_7} &= 0 \\ h_{i_5} &= C \frac{dh_{u_C}}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Задля визначення $h_{i_4}(t)$ розв'яжемо систему диференціальних рівнянь (3.25) в математичному середовищі Maple.

Для цього спочатку задамо вихідні дані задачі та сформуємо систему (3.25) таким чином, як це показано на рис. 3.20.

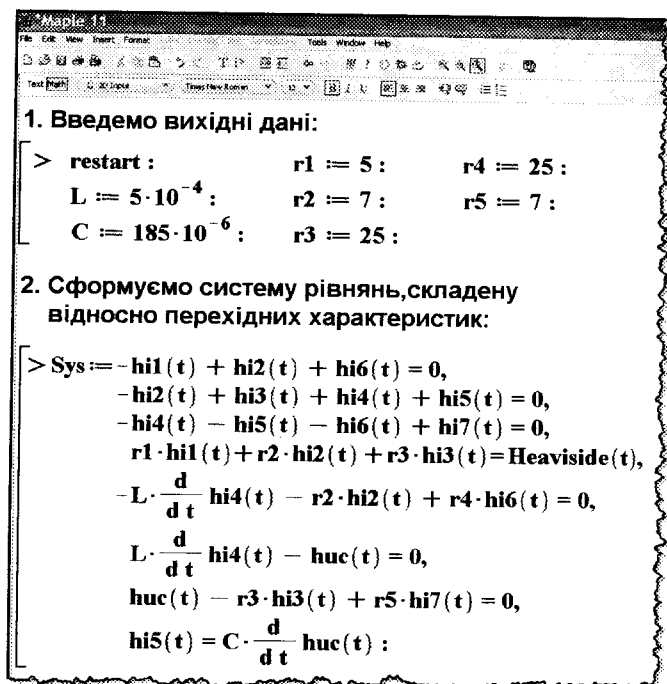


Рисунок 3.20

Оскільки математична програма Maple дозволяє безпосередньо розв'язати таку систему диференціальних рівнянь і здатна зробити це аналітично, скористаємося для цього вбудованою командою `dsolve()`. Результатом виконання цієї команди буде створення множини функцій всіх перехідних характеристик, що входять як невідомі до складу системи (3.25). Зокрема одним із елементів цієї множини розв'язків буде шукана функція перехідної характеристики $h_{i_4}(t)$ (рис. 3.21), що визначена за нульових початкових умов ($h_{uc}(0) = 0, h_{i_L}(0) = 0$).

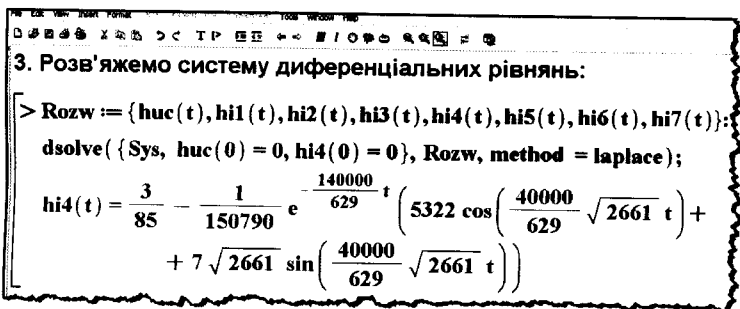


Рисунок 3.21

Однак через складність отриманого аналітичного виразу перехідної характеристики постає необхідність у його спрощенні. Зробимо це за допомогою команди `simplify()` (рис. 3.22).

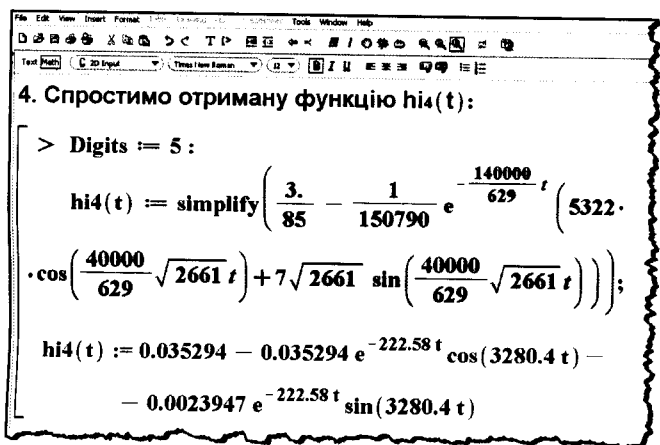


Рисунок 3.22

Таким чином, як видно з рисунка, перехідною характеристикою заданого кола для струму $i_4(t)$ буде функція

$$h_{i_4}(t) = 0,0353 - e^{-223t} (0,0353 \cos 3280t + 0,00239 \sin 3280t) \text{ См,}$$

що цілком збігається з результатом, отриманим в попередньому прикладі.

Нагадаємо, графік цієї функції наведено на рис. 3.18.

Відшукавши перехідну характеристику $h_{i_4}(t)$, тепер скористаємось інтегралом Дюамеля і за заданої вхідної е.р.с. (3.21)

$$e_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 10e^{75t} \sin 6570t \text{ В}, & 0 \leq t < t_1, \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases}$$

визначимо миттєвий струм $i_4(t)$.

Для цього спочатку введемо до системи Maple функцію заданої е.р.с. (рис. 3.23).

5. Задамо вхідну е.р.с. $e_{\text{вх}}(t)$ і побудуємо її графік:

```
> e1(t) := 10 * exp(75 * t) * sin(6570 * t) :
t1 := 0.02 :
e_vx(t) := piecewise(t < 0, 0, 0 <= t < t1, e1(t), t > t1, 0):
e_vx(t) := { 0 t < 0
10 e^{75 t} sin(6570 t) 0 <= t and t < 0.02
0 0.02 < t
> plot(e_vx(t), t = -0.005 .. 0.025, color = black);
```

Рисунок 3.23

Розрахунок струму $i_4(t)$ за інтегралом Дюамеля проведемо для кожного з двох часових проміжків окремо:

а) в першому випадку для $0 \leq t < t_1$ – за формулою (3.22)

$$i_4 = e_{\text{вх}}(0)h_{i_4}(t) + \int_0^t h_{i_4}(t-\tau) e'_{\text{вх}}(\tau) d\tau;$$

б) в другому для $t \geq t_1$ – (3.23)

$$i_4 = e_{\text{вх}}(0)h_{i_4}(t) + \int_0^{t_1} h_{i_4}(t-\tau) e'_{\text{вх}}(\tau) d\tau - e_{\text{вх}}(t_1)h_{i_4}(t-t_1).$$

На рис. 3.24 наведено заключний фрагмент програми.

```

*Maple 11  Ведміцький Ю. Г.
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Worksheet Tools Window Help
[Icons]
Text Math C Maple Input Monospaced
6. Проведемо розрахунок струму i4(t):
[
> hi4(t-τ) := eval(hi4(t), t = t - τ) :
  hi4(t - t1) := eval(hi4(t), t = t - t1) :
  e1(τ) := eval(e1(t), t = τ) :
  а) для часового проміжку 0 ≤ t < t1
[
> i4a(t) := hi4(t) · (e1(t) |_{t=0}) + ∫_0^t hi4(t - τ) · (d/dτ e1(τ) dτ;
  i4a(t) := 0.014081 e^{-222.58 t} cos(3280 t) + 0.23434 e^{-222.58 t}
  · sin(3280 t) - 0.11637 e^{75 t} sin(6570 t) - 0.014081 e^{75 t} cos(6570 t)
  б) для часового проміжку t ≥ t1
[
> i4b(t) := hi4(t) · (e1(t) |_{t=0}) + ∫_0^{t1} hi4(t - τ) · (d/dτ e1(τ) dτ -
  - hi4(t - t1) · (e1(t) |_{t=t1}) :
  i4b(t) := expand(i4b(t));
  i4b(t) := 11.423 e^{-222.58 t} cos(3280 t) +
  + 81.974 e^{-222.58 t} sin(3280 t)
7. Побудуємо графік струму i4(t):
[
> i4(t) := piecewise(t < 0, 0, 0 ≤ t < t1, i4a(t), t > t1, i4b(t)) :
  plot(i4(t), t = -0.005 .. 0.04, color = black);

```

Рисунок 3.24

Отже, як видно з рисунка, в програмному середовищі Maple розв'язок отримано аналітично.

Відтак остаточно для миттєвого струму $i_4(t)$ запишемо

$$i_4(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -e^{-75t} (0,0141 \cos 6570t + 0,116 \sin 6570t) + \\ + e^{-223t} (0,0141 \cos 3280t + 0,234 \sin 3280t) \text{ А}, & 0 \leq t < t_1, \\ e^{-223t} (11,423 \cos 3280t + 81,974 \sin 3280t) \text{ А}, & t \geq t_1. \end{cases}$$

Графік, що побудований за наведеними співвідношеннями, повністю збігається з графіком, показаним на рис. 3.19, б (див. приклад 3.4).

Приклад 3.6

Розв'яжемо задачу прикладу 3.4 за допомогою імпульсної характеристики. Для цього насамперед визначимо таку характеристику $g_{i_4}(t)$ для струму i_4 .

Оскільки імпульсна характеристика описує реакцію кола на одиничну імпульсну функцію (функцію Дірака чи δ -функцію), для якої, як відомо,

$$\delta(t) = \frac{dl(t)}{dt}, \quad (3.26)$$

то $g_{i_4}(t)$ можна одержати таким чином:

а) або безпосередньо за відомою перехідною характеристикою $h_{i_4}(t)$

$$g_{i_4}(t) = \frac{dh_{i_4}(t)}{dt}. \quad (3.27)$$

Однак в цьому випадку необхідно враховувати таке: якщо перехідна характеристика $h_x(t)$ для деякого струму чи напруги в момент часу $t=0$ зазнаватиме стрибкоподібної зміни, тобто $h_x(0_+) \neq 0$, то до складу відповідної імпульсної характеристики $g_x(t)$ має входити одинична імпульсна функція додатковою складовою $h_x(0)\delta(t)$ і тоді співвідношення (3.27) повинно бути записане в узагальненому вигляді

$$g_x(t) = \frac{dh_x(t)}{dt} = h_x(0)\delta(t) + \frac{dh_{x_1}(t)}{dt}; \quad (3.28)$$

б) або скориставшись операторним методом, за попередньо визначеним зображення $G_{i_4}(p)$ імпульсної характеристики.

В цьому випадку достатньо знайти передатну функцію відносно зображення струму $I_4(p)$

$$K_{i_4}(p) = \frac{I_4(p)}{U_{ax}(p)} = \frac{I_4(p)}{E} p = H(p)p - h_{i_4}(0),$$

оскільки

$$G_{i_4}(p) = K_{i_4}(p),$$

(див. п. 3.4), і скористатися оберненим перетворенням Лапласа;

в) або продиференціювавши ліві та праві частини всіх рівнянь системи (3.25), яка, в свою чергу, була складена на основі законів Кірхгофа (3.24). За такої дії, врахувавши співвідношення (3.26), систему (3.25) можна замістити системою диференціальних рівнянь, складеною відносно імпульсних характеристик для струмів у вітках електричного кола та напруги на ємності

$$\left. \begin{aligned} -g_{i_1} + g_{i_2} + g_{i_6} &= 0 \\ -g_{i_2} + g_{i_3} + g_{i_4} + g_{i_5} &= 0 \\ -g_{i_4} - g_{i_5} - g_{i_6} + g_{i_7} &= 0 \\ r_1 g_{i_1} + r_2 g_{i_2} + r_3 g_{i_3} &= \delta(t) \\ -L \frac{dg_{i_4}}{dt} - r_2 g_{i_2} + r_4 g_{i_6} &= 0 \\ L \frac{dg_{i_4}}{dt} - g_{u_C} &= 0 \\ g_{u_C} - r_3 g_{i_3} + r_5 g_{i_7} &= 0 \\ g_{i_5} &= C \frac{dg_{u_C}}{dt} \end{aligned} \right\}. \quad (3.29)$$

Скористаємося третім способом і, попередньо ввівши вихідні дані задачі (див. рис. 3.20), сформуємо в програмному середовищі Марле систему рівнянь (3.29) (рис. 3.25).

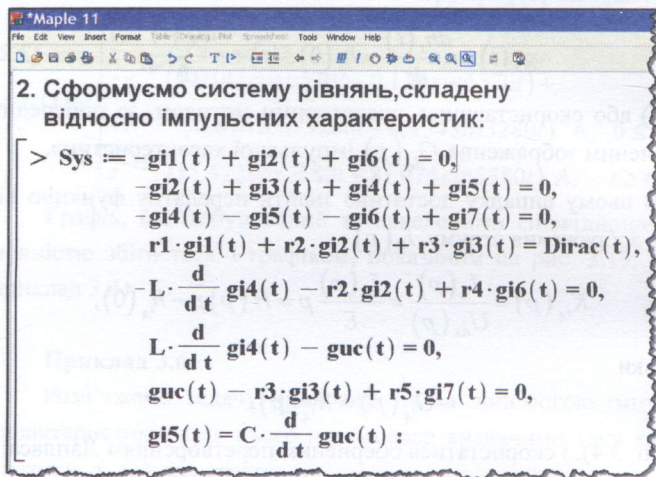


Рисунок 3.25

Розв'яжемо систему (3.29) аналітично методом Лапласа за нульових початкових умов. Зробимо це за допомогою вбудованої Maple-команди `dsolve()`, як показано на рис. 3.26.

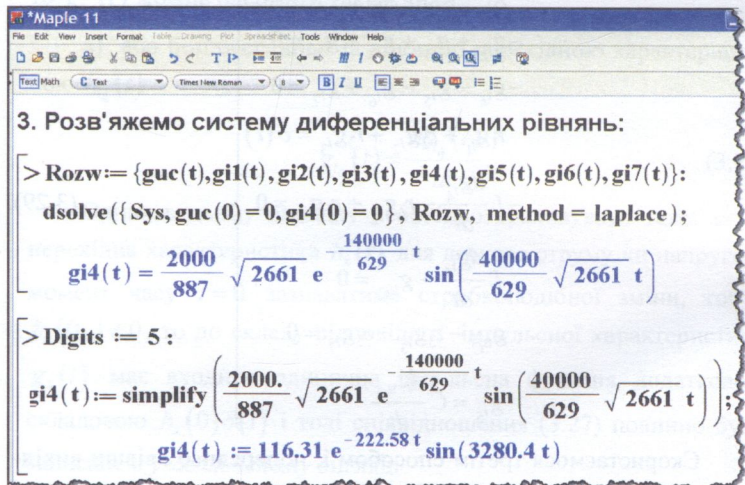


Рисунок 3.26

Отже, як видно з рисунка, імпульсною характеристикою заданого кола для струму i_4 буде функція

$$g_{i_4}(t) = 116,31e^{-222,58t} \sin 3280t \frac{\text{CМ}}{\text{c}}, \quad (3.30)$$

графік якої показано на рис. 3.27.

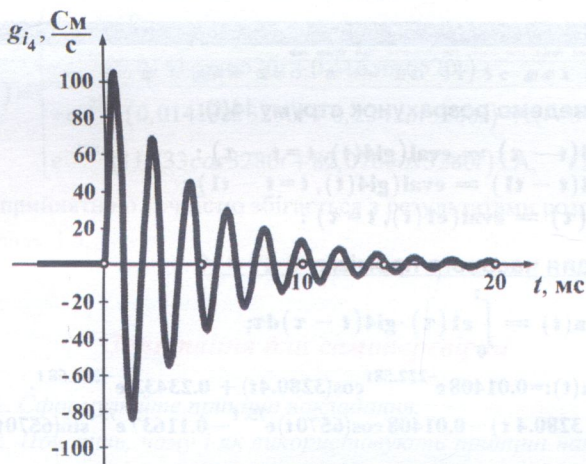


Рисунок 3.27

Через те, що $h_4(0) = 0$, розв'язок системи (3.29) $g_{i_4}(t)$ не містить одиничної імпульсної функції $\delta(t)$. Однак до складу більшості інших імпульсних характеристик з системи (3.29) така функція входить і тому програмою Maple ці характеристики подаються узагальнено (рис. 3.28) у вигляді співвідношення (3.28).

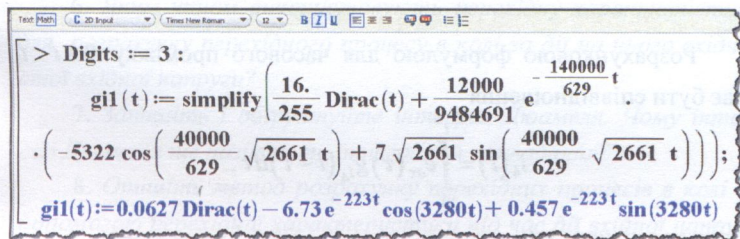


Рисунок 3.28

Миттєвий струм $i_4(t)$ визначимо через отриману імпульсну характеристику $g_{i_4}(t)$ (3.30). Для цього, попередньо задавшись вхідною е.р.с. $e_{ax}(t)$, як це було зроблено в прикладі 3.5 (див. рис. 3.23), скористаємося інтегралом Дюамеля (рис. 29).

4. Проведемо розрахунок струму $i_4(t)$:

> $gi_4(t - \tau) := eval(gi_4(t), t = t - \tau) :$
 $gi_4(t - t_1) := eval(gi_4(t), t = t - t_1) :$
 $e_1(\tau) := eval(e_1(t), t = \tau) :$

а) для часового проміжку $0 \leq t < t_1$

> $i_{4a}(t) := \int_0^t e_1(\tau) \cdot gi_4(t - \tau) d\tau;$

$i_{4a}(t) := 0.01408 e^{-222.58 t} \cos(3280.4 t) + 0.23433 e^{-222.58 t} \cdot \sin(3280.4 t) - 0.01408 \cos(6570 t) e^{75 \cdot t} - 0.11637 e^{75 t} \sin(6570 t)$

б) для часового проміжку $t \geq t_1$

> $i_{4b}(t) := \int_0^{t_1} e_1(\tau) \cdot gi_4(t - \tau) d\tau :$

$i_{4b}(t) := expand(i_{4b}(t));$

$i_{4b}(t) := 11.333 e^{-222.58 t} \cos(3280.4 t) + 82.076 e^{-222.58 t} \sin(3280.4 t)$

Рисунок 3.29

Розрахунковою формулою для часового проміжку $0 \leq t < t_1$ має бути співвідношення

$$i_4(t) = \int_0^t e_{ax}(\tau) g_{i_4}(t - \tau) d\tau,$$

а для проміжку $t \geq t_1$

$$i_4(t) = \int_0^{t_1} e_{\text{вх}}(\tau) g_{i_4}(t-\tau) d\tau.$$

Таким чином, відповідно до розрахунку за допомогою імпульсної характеристики миттєвий струм i_4 в заданому колі за вхідної дії (3.21) буде змінюватися за законом

$$i_4(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -e^{-75t} (0,0141 \cos 6570t + 0,116 \sin 6570t) + \\ + e^{-223t} (0,0141 \cos 3280t + 0,234 \sin 3280t) \text{ А,} & 0 \leq t < t_1, \\ e^{-223t} (11,333 \cos 3280t + 82,076 \sin 3280t) \text{ А,} & t \geq t_1, \end{cases}$$

що з прийнятною точністю збігається з результатами розрахунку прикладу 3.5.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте принцип накладання.
2. Поясніть, чому і як використовують принцип накладання для розрахунку перехідних процесів в колах під час дії вхідної напруги складної форми.
3. Яку з функцій називають одичиною східчастою функцією? Опишіть її основні властивості.
4. Що називають перехідними характеристиками кола?
5. Чи можна відшукати перехідну характеристику електричного кола за його відомою передатною функцією? Відповідь обґрунтуйте аналітично.
6. Яким чином використовують перехідну характеристику для розрахунку перехідного процесу в колі за дії на нього східчастої вхідної напруги?
7. Затишіть і обґрунтуйте інтеграл Дюамеля. Чому інтеграл Дюамеля ще називають інтегралом накладання?
8. Опишіть метод розрахунку перехідних процесів в колі за допомогою перехідної характеристики під час дії вхідної напруги складної форми.

9. Яка з функцій є одиничною імпульсною функцією?

10. Чи пов'язані між собою одинична східчаста і одинична імпульсна функції?

11. Що називають імпульсними характеристиками кола?

12. Назвіть основні способи визначення імпульсних характеристик кола. Відповідь обґрунтуйте аналітично.

13. Опишіть метод розрахунку перехідних процесів в колі за допомогою імпульсної характеристики під час дії вхідної напруги складної форми через інтеграл Дюамеля.

14. Як пов'язані між собою перехідна та імпульсна характеристики кола? У якому співвідношенні перебувають їх зображення?

15. Отримайте перехідну характеристику для струму в опорі r_2 електричного кола, показаного на рис. 3.30.

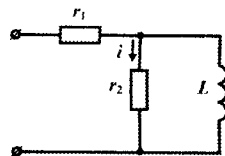


Рисунок 3.30

Відповідь:
$$h_i(t) = \frac{1}{r_1+r_2} e^{-\frac{r_1 r_2}{L(r_1+r_2)} t} \text{ СМ.}$$

16. Знайдіть перехідну характеристику та струм в колі, що показане на рис.

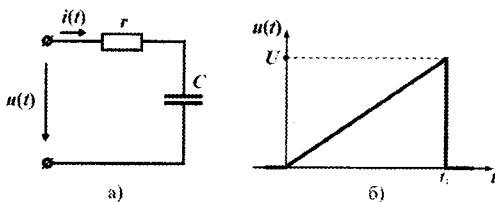


Рисунок 3.31

3.31, а, за допомогою інтеграла Дюамеля, скориставшись цією характеристикою, якщо до кола прикладено напругу у вигляді

трикутного імпульсу (див. рис. 3.31, б).

Відповідь:
$$h_i(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{1}{rC} t} \text{ СМ.}$$

$$i(t) = \begin{cases} \frac{UC}{t_1} \left(1 - e^{-\frac{1}{rC} t} \right) \text{ А,} & 0 \leq t < t_1, \\ \frac{U}{r} \left(\frac{rC}{t_1} - 1 \right) e^{-\frac{1}{rC} (t-t_1)} - \frac{UC}{t_1} e^{-\frac{1}{rC} t} \text{ А,} & t \geq t_1. \end{cases}$$

Розділ 4

ЧАСТОТНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

4.1 Розрахунок перехідних процесів методом періодизації неперіодичних збуджень

В попередньому розділі розглянуто використання перехідних та імпульсних характеристик для розрахунку перехідних процесів. Суть такого підходу полягає в тому, що довільне збудження спочатку подається у вигляді суми стандартних дій – східчастих або імпульсних. Знаходиться реакція кола на кожну дію і згідно з принципом накладання знаходиться наближене значення реакції як сума знайдених реакцій від кожної дії. Точний розв'язок визначається граничним переходом при спрямуванні інтервалу між окремими діями до нескінченно малої величини, при цьому сума переходить в інтеграл.

Подібний підхід можна застосувати, якщо взяти за стандартну дію синусоїдну функцію, а зовнішнє збудження подати через суму синусоїдних дій. Наближене значення реакції кола можна знайти як суму реакцій від кожної синусоїдної дії, а далі для знаходження точного розв'язку провести граничний перехід.

Складність полягає в тому, що якщо збудження неперіодичне, то його не можна подати рядом Фур'є. Однак, коли таке збудження є функцією $f_1(t)$, яка діє тільки на деякому проміжку часу, то її можна продовжити як періодичну і надалі штучно вважати такою (рис. 4.1).

При цьому необхідно врахувати такі обставини. Після закінчення дії вхідного збудження в момент $t = t_1$ реакція кола має тільки вільну складову, яка з перебігом часу в лінійних колах прямує до нуля. Як відомо, практична тривалість перехідного процесу дорівнює $(4 \div 5)\tau_{max}$, тобто вважається, що до цього часу

всі вільні складові перетворюються на нуль. Таким чином, якщо прийняти $T > t_1 + (4 \div 5)\tau_{max}$, то до початку дії наступного імпульсу перехідний процес від дії першого імпульсу закінчується і надалі не впливає на реакцію кола від дії наступних (уявних) імпульсів.

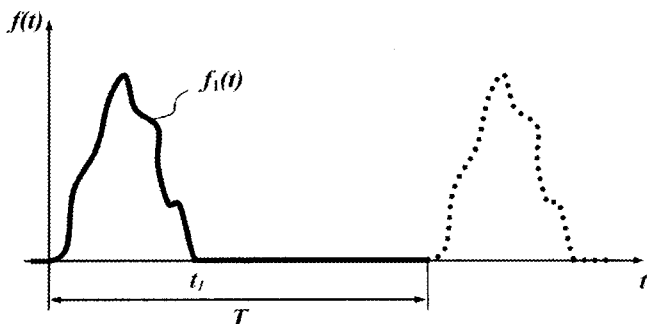


Рисунок 4.1

Таким чином, реакція кола теж буде періодичною, при цьому закон зміни реакції кола за перший період T буде близьким до справжнього перехідного процесу. Звичайно ж, такий підхід "періодизації" зовнішнього збудження вносить деяку похибку, передусім за рахунок того, що при практичному розв'язуванні задачі, по-перше, буде врахованим лише скінченне число гармонік, а, по-друге, із збіганням часу T перехідний процес ще не завершиться, а триватиме і далі. Однак водночас, як доводить практика, метод "періодизації" дає цілком задовільні і прийнятні результати.

Приклад 4.1

Визначити закон зміни струму в колі, яке зображене на рисунку 4.2, а, при прикладеній напрузі, яка показана на рис. 4.2, б.

Визначимо сталу часу, для чого складемо диференціальне і характеристичне рівняння

$$r \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0,$$

$$rp + \frac{1}{C} = 0,$$

$$p = -\frac{1}{rC}, \quad \tau = rC.$$

Виберемо період "періодизованої" напруги

$$T > t_1 + (4 \div 5)\tau_{max}$$

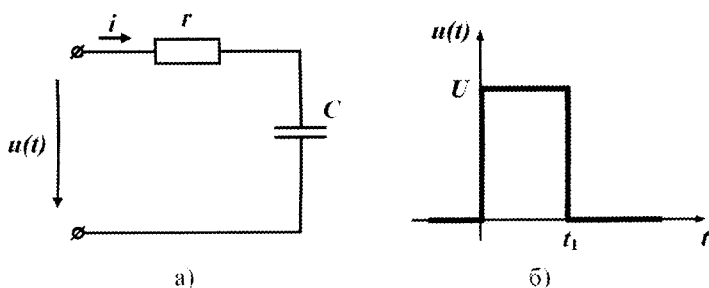


Рисунок 4.2

В результаті цього одержимо періодичну напругу (рис.4.3).

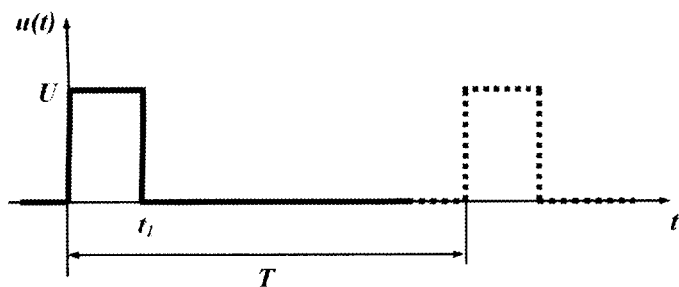


Рисунок 4.3

Подамо цю напругу (рис.4.3) рядом Фур'є, обмежившись скінченним числом гармонік

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^n B_k \cos k\omega t \quad (4.1)$$

Коефіцієнти ряду Фур'є визначимо згідно з виразами

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} u(t) dt = \frac{U t_1}{T},$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_1} U \sin k\omega t dt = -\frac{2U}{Tk\omega} \cos k\omega t \Big|_0^{t_1} =$$

$$= \frac{2U}{Tk\omega} (1 - \cos k\omega t_1) = \frac{2U}{k\pi} (1 - \cos k\omega t_1),$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_1} U \cos k\omega t dt = \frac{2U}{Tk\omega} \sin k\omega t \Big|_0^{t_1} =$$

$$= \frac{2U}{Tk\omega} \sin k\omega t_1 = \frac{2U}{k\pi} \sin k\omega t_1,$$

Подамо напругу $u(t)$ у вигляді

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n C_k \sin(k\omega t + \beta_k)$$

де

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; \quad \beta_k = \begin{cases} \arctg\left(\frac{B_k}{A_k}\right), & A_k \geq 0, \\ \arctg\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \pm 180^\circ, & A_k < 0. \end{cases}$$

Знаходимо опір кола для k -тої гармоніки

$$\underline{Z}(jk\omega) = r + \frac{1}{jk\omega C} = \frac{1 + jk\omega C}{jk\omega C}$$

і визначаємо k -ту гармоніку струму

$$I_k = \frac{C_k}{\underline{Z}(jk\omega)} = I_k e^{j\alpha_k}.$$

Наближене значення шуканого струму

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n I_{mk} \sin(k\omega t + \alpha_k).$$

На рис. 4.4 показано точний розв'язок струму і наближений розв'язок, одержаний частотним методом при врахуванні для прикладу тільки семи гармонік.

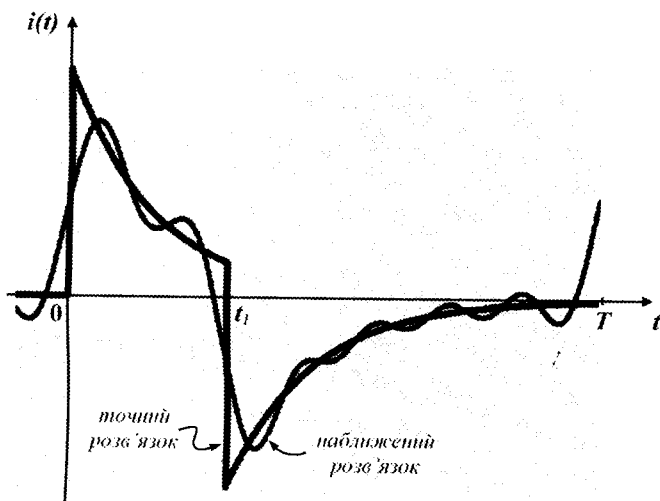


Рисунок 4.4

4.2 Спектри періодичних і неперіодичних функцій

Як відомо з курсу математики, будь-яка періодична функція, яка задовольняє умови Дірихле, може бути записана у вигляді нескінченного ряду синусоїдних і косинусоїдних функцій

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos k\omega_1 t, \quad (4.2)$$

де коефіцієнти ряду Фур'є визначаються за виразами

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt, & A_k &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt \\ B_k &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

В (4.2) стала складова на відміну від (4.1) записана $\frac{A_0}{2}$ для того, щоб у виразах (4.3) перед інтегралами був той самий множник $\frac{2}{T_1}$, а частота першої гармоніки позначена ω_1 .

Запишемо ряд (4.2) в комплексній формі. Для цього врахуємо, що

$$\begin{aligned} \sin k\omega_1 t &= \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j}, \\ \cos k\omega_1 t &= \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

і перепишемо (4.2) у вигляді

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} + B_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} \right) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{jk\omega_1 t} \frac{B_k - jA_k}{2} + e^{-jk\omega_1 t} \frac{B_k + jA_k}{2} \right) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k - jA_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k + jA_k}{2} e^{-jk\omega_1 t}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В другій складовій (4.5) замінимо k на $(-k)$. В цьому випадку

$$\begin{aligned} A_{-k} &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(-k\omega_1 t) dt = -\frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt = -A_k; \\ B_{-k} &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(-k\omega_1 t) dt = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt = B_k. \end{aligned}$$

При заміні k на $(-k)$ в другій сумі (4.5) границями суми будуть (-1) і $(-\infty)$, тому (4.5) записується у вигляді

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k - jA_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{B_k - jA_k}{2} e^{jk\omega_1 t}.$$

В останньому ряду під знаком суми знаходяться одні й ті ж вирази, тому дві останні складові можна записати у вигляді однієї суми з границями знаходження суми від $(-\infty)$ до $(+\infty)$ без одного члена для $k = 0$.

Визначимо значення A_k і B_k для $k = 0$. Із (4.3) випливає, що за цієї умови $A_k = 0$, $B_k = A_0$, тому

$$\left. \frac{B_k - jA_k}{2} \right|_{k=0} = \frac{A_0}{2}.$$

Отже, якщо першу складову підставити під знак суми, то

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{B_k - jA_k}{2} e^{jk\omega_1 t}. \quad (4.6)$$

Позначимо

$$\frac{B_k - jA_k}{2} = \underline{C}_k = C_k e^{j\varphi_k}$$

і назвемо цю величину комплексною амплітудою ряду Фур'є.

З (4.2) видно, що

$$\underline{C}_k = \frac{B_k - jA_k}{2} = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt - \frac{j}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt$$

або

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (4.7)$$

Отже,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_1 t}. \quad (4.8)$$

Закон розподілу амплітуд гармонічних складових C_k в залежності від частоти називають спектром амплітуд або *амплітудно-частотним спектром*.

Для періодичної функції $f(t)$, яка зображена на рис. 4.5, амплітудно-частотний спектр зображений на рис. 4.6 за співвідношення $T_1 = 4\tau$.

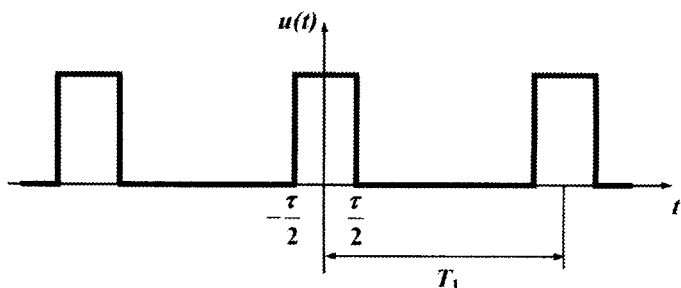


Рисунок 4.5

Як видно із рис. 4.6, спектри періодичних функцій являють собою ряд окремих ліній, тому такі спектри називають *лінійними* або *дискретними*.

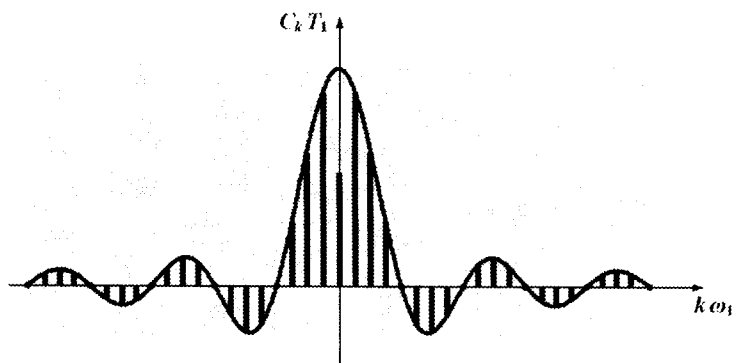


Рисунок 4.6

Амплітудний і фазовий спектри повністю визначають періодичну функцію.

Виконаємо перехід до неперіодичної функції. З цією метою будемо збільшувати період T_1 . Оскільки

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1},$$

то при збільшенні T_1 частота ω_1 зменшується, зменшується і інтервал між сусідніми частотами, отже, лінійний спектр стає все гущішим (рис. 4.7, а і б).

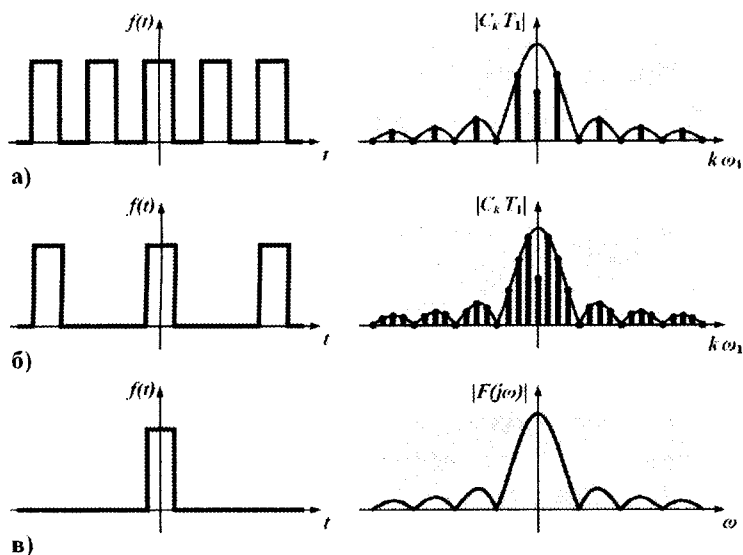


Рисунок 4.7

Оскільки відповідно до (4.7) амплітуда C_k також зменшується (T_1 в знаменнику), на рис. 4.7 показані величини $C_k T_1$, які залишаються незмінними при збільшенні T_1 .

Коли T_1 прямує до нескінченності, різниця між сусідніми частотами

$$\Delta\omega = (k+1)\omega_1 - k\omega_1$$

стає нескінченно малою величиною $d\omega$ частот ω . Комплексна амплітуда також нескінченно зменшується

$$d\underline{C}(j\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.9)$$

Тому спектр неперіодичної функції ($T_1 \rightarrow \infty$) стає *неперервним* або *суцільним*. Для його характеристики вводять функцію

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.10)$$

яку називають *спектральною характеристикою* або *спектром* функції (рис.4.7, в).

Враховуючи (4.9) і (4.10), а також ту обставину, що при граничному переході, коли $(T_1 \rightarrow \infty)$ сума в (4.8) переходить в інтеграл, можна записати

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(j\omega) e^{j\omega t}$$

або

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.11)$$

Інтегральні перетворення (4.10) і (4.11) називають відповідно *прямим* (4.10) і *оберненим* (4.11) *перетвореннями Фур'є*.

Таким чином, неперіодична функція подається нескінченно великим числом гармонічних складових нескінченно малої амплітуди $dC(j\omega)$, частоти яких відрізняються одна від одної на нескінченно малу величину $d\omega$.

Вираз (4.10) дозволяє знайти спектральну характеристику функції $f(t)$, а вираз (4.11) дає можливість знайти функцію часу $f(t)$ за відомою її спектральною характеристикою.

Якщо функція $f(t) = 0$ для $t < 0$, що зазвичай має місце при розгляданні перехідних процесів, то (4.10) можна записати у вигляді

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} d\omega t. \quad (4.12)$$

Таке перетворення називають *одностороннім*.

Легко виявити зв'язок одностороннього перетворення Фур'є з перетвореннями Лапласа, якщо формально замінити p на $j\omega$. Така заміна дещо звужує коло функцій, які можна піддати перетворенню Фур'є, оскільки необхідною умовою такого перетворення, крім умов Дірихле, є абсолютна інтегрованість функції $f(t)$, тобто

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt \leq M, \quad (4.13)$$

де M – стала зі скінченним числовим значенням.

Заміна неперіодичних функцій сукупністю гармонічних коливань дозволяє розраховувати перехідні процеси в лінійних електричних колах, використовуючи методи розрахунку усталених синусоїдних процесів.

4.3 Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів

Припустимо, що деяке лінійне коло (рис.4.8), яке має комплексний вхідний опір $Z(j\omega)$, вмикається в момент $t = 0$ при нульових початкових умовах до джерела напруги $e(t)$.

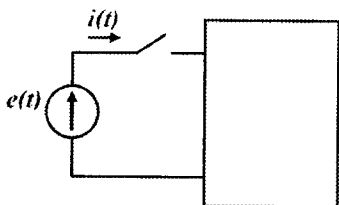


Рисунок 4.8

Визначивши спектральну характеристику вхідного збудження за (4.10) і позначивши її через $E(j\omega)$, можна знайти спектральну характеристику

вхідного струму

$$I(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{Z(j\omega)} = E(j\omega)Y(j\omega), \quad (4.14)$$

де $Y(j\omega)$ – комплексна провідність двополюсника.

Використовуючи обернене перетворення Фур'є, можна знайти оригінал струму

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Знаходження останнього інтеграла не завжди просте, тому вираз (4.11) часто записують в іншій формі.

Подамо спектральну характеристику (4.10) у вигляді

$$F(j\omega) = F_1(\omega) - jF_2(\omega), \quad (4.15)$$

де

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Під час розрахунку перехідних процесів функція $f(t)$ являє собою вхідну напругу, що подається на вхід електричного кола за нульових початкових умов, тому $f(t) = 0$ при $t < 0$ і тоді

$$F_1(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$F_2(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (4.16)$$

Вирази (4.16) доводять, що функція $F_1(\omega)$ парна, для якої $F_1(\omega) = F_1(-\omega)$, а функція $F_2(\omega)$ непарна через те, що для неї $F_2(\omega) = -F_2(-\omega)$.

Враховуючи (4.15), запишемо (4.11) у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) - jF_2(\omega)) (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t) d\omega + \right.$$

$$\left. + j \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) \sin \omega t - F_2(\omega) \cos \omega t) d\omega \right).$$

Другий інтеграл в останньому виразі повинен дорівнювати нулю, оскільки функція $f(t)$ не має уявної складової, тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (4.17)$$

Вираз під інтегралом в (4.17) відносно змінної ω є парною функцією, оскільки добуток двох парних функцій $F_1(\omega)\cos\omega t$ є парною функцією, а добуток двох непарних функцій $F_2(\omega)\sin\omega t$ також є парною функцією.

Внаслідок цього в інтегралі (4.17) можна прийняти границі інтегрування від 0 до ∞ , а результат подвоїти, тобто

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_1(\omega)\cos\omega t + F_2(\omega)\sin\omega t) d\omega. \quad (4.18)$$

Було прийнято, що $f(t)=0$ для $t < 0$, тому

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_1(\omega)\cos(-\omega t) + F_2(\omega)\sin(-\omega t)) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_1(\omega)\cos\omega t - F_2(\omega)\sin\omega t) d\omega = \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega)\cos\omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega)\sin\omega t d\omega = 0.$$

Звідси

$$\int_0^{\infty} F_1(\omega)\cos\omega t d\omega = \int_0^{\infty} F_2(\omega)\sin\omega t d\omega \quad (4.20)$$

і

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega)\cos\omega t d\omega. \quad (4.21)$$

Таким чином, функцію часу можна визначити, якщо відома тільки дійсна частина спектральної характеристики.

Вираз (4.21) також не завжди можна визначити аналітично, але зведення задачі до визначення інтеграла (4.21) робить зручним розрахунок наближеними методами. Особливо це зручно, коли характеристика $F(\omega)$ задана в табличній формі або графічно.

В такому випадку ані один із методів, окрім частотного, не дає задовільних результатів.

4.4 Наближений спосіб розрахунку перехідних процесів частотним методом

Розглянемо графоаналітичний метод розрахунку перехідних процесів. Ідея методу полягає в тому, що характеристики $F(\omega)$ подають у вигляді суми деяких типових кривих $F_{1k}(\omega)$, для яких відносно просто розраховується інтеграл (4.21)

$$F_1(\omega) = \sum_{k=1}^n F_{1k}(\omega). \quad (4.22)$$

За такі функції найчастіше приймають трапеції (рис. 4.9).

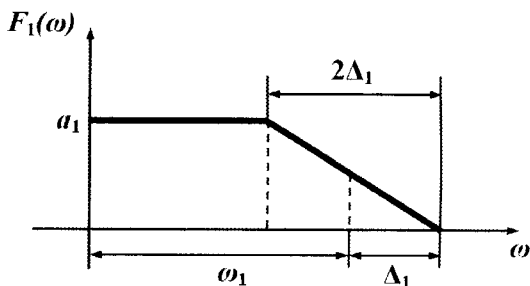


Рисунок 4.9

Нехай дійсна частина спектральної характеристики $F_1(\omega)$ має вигляд трапеції.

Визначимо за заданою характеристикою $F_1(\omega)$ функцію $f(t)$. Для цього вираз (4.21) запишемо так

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \frac{1}{t} d(\sin \omega t). \quad (4.23)$$

Застосуємо до виразу (4.23) формулу інтегрування частинами, позначивши $u = F_1(\omega)$, $dv = d(\sin \omega t)$, тоді $du = dF_1(\omega)$, а $v = \sin \omega t$.

Оскільки $F_1(\omega) = 0$ для $\omega \geq \omega_1 + \Delta_1$, то

$$f(t) = \frac{2}{\pi t} (F_1(\omega) \sin \omega) \Big|_0^{\omega_1 + \Delta_1} - \frac{2}{\pi t} \int_0^{\omega_1 + \Delta_1} \sin \omega t \frac{dF_1(\omega)}{d\omega} d\omega.$$

Перша складова при підстановці верхньої і нижньої границь інтегрування перетворюється на нуль, оскільки $\sin \omega t = 0$ для $\omega = 0$, а для частоти $\omega = \omega_1 + \Delta_1$ значення функції $F(\omega_1 + \Delta_1) = 0$.

Похідна під інтегралом $\frac{dF_1(\omega)}{d\omega}$ відрізняється від нуля тільки на проміжку $\omega_1 - \Delta_1 < \omega < \omega_1 + \Delta_1$, де вона має значення

$$\frac{dF_1(\omega)}{d\omega} = -\frac{\alpha_1}{2\Delta_1},$$

тому

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{2}{\pi t} \int_{\omega_1 - \Delta_1}^{\omega_1 + \Delta_1} \left(-\frac{\alpha_1}{2\Delta_1} \right) \sin \omega t d\omega = \frac{\alpha_1}{\pi \Delta_1 t} \left(-\frac{1}{t} \cos \omega t \right) \Big|_{\omega_1 - \Delta_1}^{\omega_1 + \Delta_1} = \\ &= -\frac{\alpha_1}{\pi \Delta_1 t^2} (\cos(\omega_1 + \Delta_1)t - \cos(\omega_1 - \Delta_1)t). \end{aligned}$$

Якщо різницю косинусів подати як

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

то

$$f(t) = \frac{2\alpha_1}{\pi \Delta_1 t^2} \sin \omega_1 t \sin \Delta_1 t.$$

Зазвичай цей вираз записують в симетричній формі

$$f(t) = 2 \frac{\alpha_1 \omega_1}{\pi} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \frac{\sin \Delta_1 t}{\Delta_1 t}. \quad (4.24)$$

Реальні характеристики $F_1(\omega)$ в окремих випадках можна подати у вигляді однієї трапеції, однак за допомогою декількох трапецій можна апроксимувати з більшим чи меншим ступенем точності практично будь-яку характеристику.

На рис.4.10, а наведено деяку спектральну характеристику $F_1(\omega)$, а на рис.4.10, б – трапеції, що її апроксимують.

Апроксимацію здійснюють таким чином.

Проводиться декілька прямих, які є дотичними або хордами заданої характеристики, щоб ламана лінія $abcdef$ з відповідною точністю апроксимувала задану характеристику $F_1(\omega)$. Одержані на рис. 4.10, а трапеції переносяться на окремий рисунок (рис. 4.10, б). Трапеція 1 є перенесеною з рис. 4.10, а трапецією $ncba$, трапеція 2 – трапеція $tefd$, трапеція 3 – трапеція $ndem$. Параметрами трапецій 1, 2, 3 для використання виразу (4.24) є відповідні значення α_k , ω_k , Δ_k .

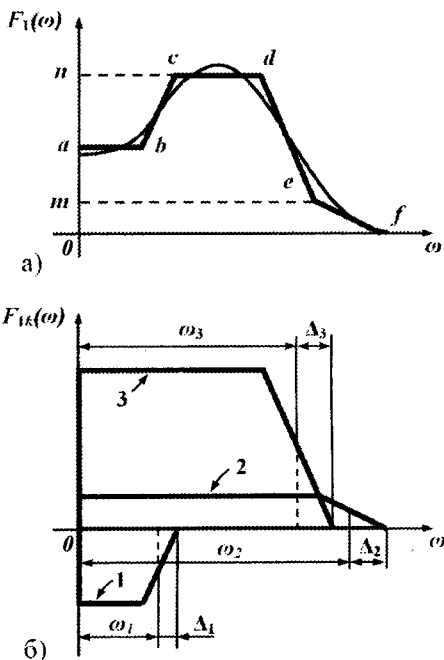


Рисунок 4.10

Функція часу буде визначатися з виразу

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \alpha_k \omega_k \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k t} \frac{\sin \Delta_k t}{\Delta_k t}, \quad (4.25)$$

де для даного прикладу $n = 3$.

4.5 Врахування ненульових початкових умов

При вивченні частотного методу, а також методу розрахунку перехідних процесів за допомогою перехідних і імпульсних характеристик (див. розділ 3), окремою і обов'язковою вимогою була наявність нульових початкових умов в колі. Проте на практиці перехідному процесу в досліджуваних колах не завжди передують їх знеструмлений стан, що зазвичай призводить до порушення вищезначеної вимоги.

Розглянемо один із методів врахування ненульових початкових умов у спосіб еквівалентного зведення вихідного кола з ненульовими початковими умовами до сукупності кіл, для кожного з яких незалежні початкові умови будуть нульовими.

Нехай коло (рис. 4.11, а) за допомогою ключа K перемикається від джерела постійної е.р.с. E до джерела е.р.с. довільної форми $e(t)$ (комутація, тобто перемикування ключа, вважаємо, відбувається миттєво).

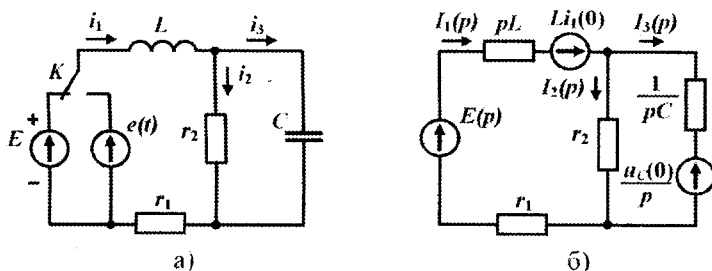


Рисунок 4.11

Незалежні початкові умови цього кола ненульові, оскільки значеннями струму через індуктивність і напруги на ємності в першу мить після комутації відповідно будуть

$$i_1(0) = \frac{E}{r_1 + r_2}, \quad u_C(0) = \frac{Er_2}{r_1 + r_2}.$$

Для обґрунтування зазначеного підходу скористаємося операторним методом і подамо вихідну схему, що на рис. 4.11, а, її

операторною формою (рис. 4.11, б), в якій, як видно з рисунка, діють три е.р.с. – зовнішня $E(p)$ і дві додаткові $Li_1(0)$ і $\frac{u_c(0)}{p}$.

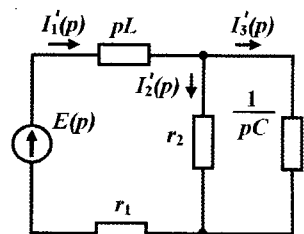
На підставі *принципу накладання* перейдемо від отриманої операторної схеми з трьома е.р.с. до трьох схем, в кожній із яких діятиме тільки одна е.р.с. (рис. 4.12) з частковими операторними струмами у вітках.

Тепер зробимо ще один перехід – від операторних схем, що на рис. 4.12, до звичайних електричних схем, в яких струми (напруги) і е.р.с. будуть функціями часу (рис. 4.13).

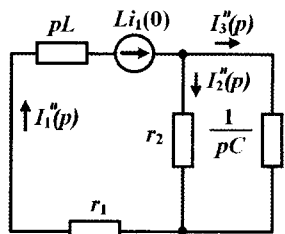
В результаті таких штучних дій отримуємо електричні кола, кожне із яких має нульові початкові умови!

Визначимо для цих схем їхні е.р.с. як функції часу.

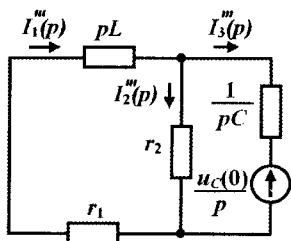
В першій схемі (рис. 4.13, а) зображенню е.р.с. $E(p)$ відповідає



а)



б)



в)

Рисунок 4.12

вихідна функція часу $e(t)$.

В другій схемі (рис. 4.13, б) зображенню додаткової е.р.с. $Li_1(0)$, яка є сталою величиною, відповідає оригінал $Li_1(0)\delta(t)$ – імпульсна функція, площа якої $Li_1(0)$.

В третій схемі (рис. 4.13, в) зображенню додаткової е.р.с.

$\frac{u_C(0)}{p}$ відповідає оригінал $u_C(0)$, який є сталою величиною.

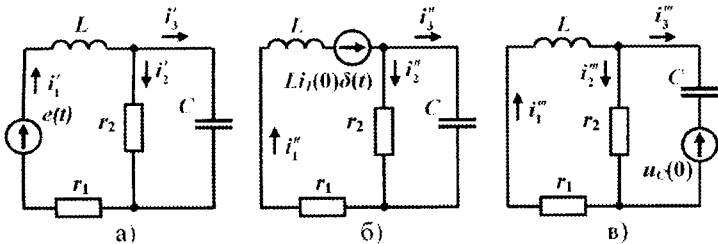


Рисунок 4.13

Таким чином, відповідно до принципу накладання врахування ненульових початкових умов зводиться до розрахунку перехідних процесів з нульовими початковими умовами в трьох часткових схемах – заданій з прикладеною е.р.с. $e(t)$ і двох додаткових, в яких діють оригінали додаткових е.р.с. $Li_1(0)\delta(t)$ і $u_C(0)$, відповідно.

Тоді відповідно до даного методу для знаходження, наприклад, струму i_1 в заданому колі з ненульовими початковими умовами (рис. 4.11, а) необхідно спочатку розрахувати три часткових струми в колах (рис. 4.13, а, б, і в), початкові умови яких є нульовими, і за теоремою накладання ці струми алгебраїчно (з врахуванням знаку) додати між собою

$$i_1 = i_1' + i_1'' + i_1'''.$$

В свою ж чергу, часткові струми можуть бути визначені або за допомогою перехідних і імпульсних характеристик та інтеграла Дюамеля, як наприклад,

$$i_1' = \int_0^t e(\tau) g_1(t-\tau) d\tau, \quad i_1'' = Li_1(0) g_2(t), \quad i_1''' = -\int_0^t u_C(0) g_3(t-\tau) d\tau,$$

або за допомогою частотного методу за тими алгоритмами, що були наведені вище в розділах 3 і 4, відповідно.

4.6 Приклад використання різних методів розрахунку перехідних процесів

За нульових початкових умов визначимо струм $i_1(t)$ в колі (рис. 4.14, а) з параметрами $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 80$ Ом, $L = 0,2$ Гн різними методами, якщо до цього кола прикладено напругу $u(t)$, графік якої показано на рис. 4.14, б, де $t_1 = 10$ мс, $U_1 = 40$ В, $U_2 = 100$ В.

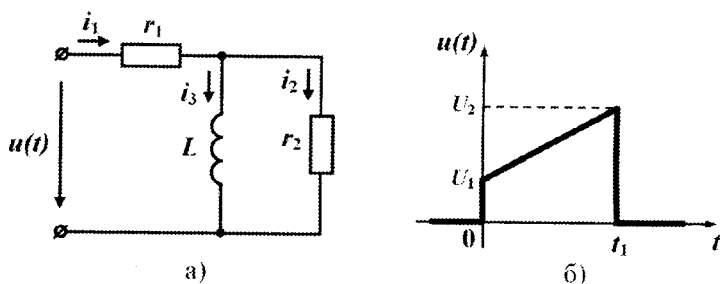


Рисунок 4.14

4.6.1 Класичний метод

Розв'язання цієї задачі необхідно проводити окремо для проміжку $0 < t < t_1$ і на проміжку $t > t_1$.

Запишемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для проміжку часу $0 < t < t_1$

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + L \frac{di_3}{dt} &= u(t) \\ r_1 i_1 + r_2 i_2 &= u(t) \\ i_1 &= i_2 + i_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Виразимо струми i_2 та i_3 через струм i_1 . Із другого рівняння системи

$$i_2 = \frac{u(t) - r_1 i_1}{r_2}.$$

Із третього рівняння системи

$$i_3 = i_1 - i_2 = i_1 - \frac{u(t)}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} i_1 = i_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) - \frac{u(t)}{r_2}. \quad (4.27)$$

Підставляємо одержані значення в перше рівняння системи

$$r_1 i_1 + \frac{L d \left(i_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) - \frac{u(t)}{r_2} \right)}{dt} = u(t),$$

$$r_1 i_1 + L \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \frac{di_1}{dt} - \frac{L}{r_2} \frac{du(t)}{dt} = u(t).$$

Звідси

$$L \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 = \frac{L}{r_2} \frac{du(t)}{dt} + u(t). \quad (4.28)$$

Запишемо вхідну напругу $u(t)$ аналітично. Із рис.4.14, б видно, що це рівняння прямої лінії

$$u(t) = \frac{U_2 - U_1}{t_1} t + U_1 = (6000 t + 40) \text{ В.}$$

Підставляючи числові значення в (4.28), одержуємо

$$0,2 \left(1 + \frac{20}{80} \right) \frac{di_1}{dt} + 20 i_1 = \frac{0,2}{80} 6000 + 6000 t + 40,$$

$$0,25 \frac{di_1}{dt} + 20 i_1 = 6000 t + 55. \quad (4.29)$$

Повний розв'язок цього рівняння $i_1 = i_{1np} + i_{1в}$.

Залежність примусової складової струму i_{1np} від часу має такий самий вигляд, який має права частина (4.29), тобто

$$i_{1np} = at + b. \quad (4.30)$$

Оскільки примусова складова струму є розв'язком диференціального рівняння (4.29), то підставимо (4.30) в (4.29) і знайдемо коефіцієнти a і b :

$$0,25 \frac{d(at + b)}{dt} + 20(at + b) = 6000t + 55$$

або

$$0,25a + 20at + 20b = 6000t + 55.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної t справа і зліва від знаку рівності, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} 0,25a + 20b &= 55 \\ 20a &= 6000 \end{aligned} \right\}.$$

Звідси $a = 300$, $b = -1$. Таким чином,

$$i_{1np} = 300t - 1 \text{ А.}$$

Вільна складова

$$i_{1в} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння і його корінь

$$0,25p + 20 = 0, \quad p = -80 \text{ с}^{-1}.$$

Повний розв'язок

$$i_1 = 300t - 1 + Ae^{-80t}.$$

Для визначення сталої інтегрування A знайдемо початкову умову для струму i_1 . Оскільки струм i_1 не підпорядковується закону комутації (залежна початкова умова), запишемо систему (4.26) для моменту часу $t = 0_+$, врахувавши те, що $i_3(0_+) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1(0_+) + L \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0_+} &= u(0) \\ r_1 i_1(0_+) + r_2 i_2(0_+) &= u(0) \\ i_1(0_+) &= i_2(0_+) + i_3(0_+) \end{aligned} \right\}.$$

Оскільки $i_3(0_+) = 0$, то із третього рівняння системи отримуємо, що

$$i_1(0_+) = i_2(0_+).$$

Із другого рівняння системи

$$r_1 i_1(0_+) + r_2 i_1(0_+) = u(0)$$

та

$$i_1(0_+) = \frac{u(0)}{r_1 + r_2}.$$

Оскільки $u(0) = 40$ В, то

$$i_1(0_+) = \frac{40}{20 + 80} = 0,4 \text{ А.}$$

Таким чином,

$$0,4 = 0 - 1 + A.$$

звідси

$$A = 1,4$$

і

$$i_1(t) = 300t - 1 + 1,4e^{-80t} \text{ А,} \quad 0 < t < t_1. \quad (4.31)$$

На проміжку часу $t_1 < t < \infty$ вхідна напруга дорівнює нулю, тому система рівнянь за законами Кірхгофа має вигляд

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + L \frac{di_2}{dt} &= 0 \\ r_1 i_1 + r_2 i_2 &= 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.32)$$

Виражаючи аналогічно попередньому проміжку струми i_2 і i_3 через i_1 , отримаємо диференціальне рівняння

$$L \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 = 0 \quad (4.33)$$

або

$$0,25 \frac{di_1}{dt} + 20 i_1 = 0.$$

Оскільки права частина рівняння (4.33) дорівнює нулю, то примусова складова струму i_1 на цьому проміжку дорівнює нулю, і повний розв'язок складається тільки із вільної складової. Враховуючи, що перехідний процес на цьому проміжку починається з моменту $t = t_1$, отримуємо

$$i_1 = i_{1\sigma} = A e^{p(t-t_1)}. \quad (4.34)$$

Характеристичне рівняння

$$0,25p + 20 = 0,$$

а його корінь

$$p = -80 \text{ с}^{-1}.$$

Для знаходження сталої інтегрування A знайдемо залежне початкове значення i_1 в момент $t = t_{1+}$, тобто $i_1(t_{1+})$. Запишемо систему (4.32) для моменту $t = t_{1+}$

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1(t_{1+}) + L \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=t_{1+}} &= 0 \\ r_1 i_1(t_{1+}) + r_2 i_2(t_{1+}) &= 0 \\ i_1(t_{1+}) - i_2(t_{1+}) - i_3(t_{1+}) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.35)$$

Із другого рівняння системи

$$i_2(t_{1+}) = -\frac{r_1}{r_2} i_1(t_{1+}) = -0,25 i_1(t_{1+}).$$

Підставимо це значення в третє рівняння системи (4.35)

$$i_1(t_{1+}) + 0,25 i_1(t_{1+}) - i_3(t_{1+}) = 0.$$

Звідси

$$i_1(t_{1+}) = -\frac{i_3(t_{1+})}{1,25}. \quad (4.36)$$

Оскільки струм i_3 підпорядковується закону комутації, то

$$i_3(t_{1-}) = i_3(t_{1+}).$$

Значення $i_3(t_{1-})$ знайдемо із розв'язку задачі на проміжку часу $0 < t < t_1$.

У виразі (4.27) струм i_3 виражений через струм i_1 . Підставимо в (4.27) отримане значення струму i_1 із (4.31), тоді

$$\begin{aligned} i_3 &= i_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) - \frac{u(t)}{r_2} = (300t - 1 + 1,4e^{-80t}) 1,25 - \frac{6000t + 40}{80} = \\ &= 375t - 1,25 + 1,75e^{-80t} - 75t - 0,5 = \\ &= 300t - 1,75 + 1,75e^{-80t} \text{ А.} \end{aligned}$$

Для $t = t_{1-}$

$$\begin{aligned} i_3(t_{1-}) &= 300t_1 - 1,75 + 1,75e^{-80t_1} = 300 \cdot 0,01 - 1,75 + 1,75e^{-80t_1} = \\ &= 1,25 + 1,75e^{-80t_1} \text{ А.} \end{aligned}$$

Таким чином,

$$i_3(t_{1+}) = i_3(t_{1-}) = 1,25 + 1,75e^{-80t_1} \text{ А.}$$

Підставимо одержане значення $i_3(t_{1+})$ в (4.36), тоді

$$\begin{aligned} i_1(t_{1+}) &= \frac{1,25 + 1,75e^{-80t_1}}{1,25} = \\ &= 1 + 1,4e^{-80t_1} \text{ А.} \end{aligned}$$

Підставляючи в (4.34) початкові умови, одержуємо

$$A = 1 + 1,4e^{-80t_1}.$$

Таким чином, на проміжку $t < t < \infty$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= (1 + 1,4e^{-80t_1})e^{-80(t-t_1)} = \\ &= 1,4e^{-80t} + 1e^{-80(t-t_1)} \text{ А.} \end{aligned}$$

Остаточний розв'язок

$$\left. \begin{aligned} i_1(t) &= 300t - 1 + 1,4e^{-80t} \text{ А,} & 0 < t < t_1 \\ i_1(t) &= 1,4e^{-80t} + e^{-80(t-t_1)} \text{ А,} & t_1 < t < \infty \end{aligned} \right\}. \quad (4.37)$$

4.6.2 Операторний метод

Оскільки незалежні початкові умови в колі, схема якого зо-

бражена на рис. 4.14, а, нульові, то операторна схема має вигляд (рис. 4.15).

Зображення вхідного струму визначається за виразом

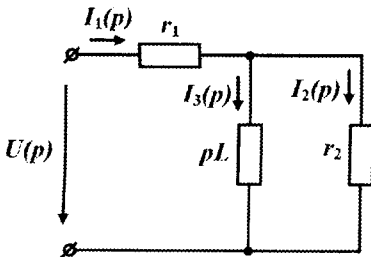


Рисунок 4.15

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (4.38)$$

Операторний опір

$$Z(p) = r_1 + \frac{pLr_2}{pL + r_2} =$$

$$= \frac{pLr_1 + r_1r_2 + pLr_2}{pL + r_2} = \frac{pL(r_1 + r_2) + r_1r_2}{pL + r_2} = \frac{20p + 1600}{0,2p + 80}.$$

Знаходимо зображення прикладеної напруги

$$U(p) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt. \quad (4.39)$$

Оскільки напруга $u(t) = 6000t + 40$ діє тільки на проміжку $0 < t < t_1$, а для $t > t_1$, $u(t) = 0$, то в (4.39) верхньою границею інтегрування буде t_1 , тому

$$U(p) = \int_0^{t_1} (6000t + 40) e^{-pt} dt = 6000 \int_0^{t_1} t e^{-pt} dt + 40 \int_0^{t_1} e^{-pt} dt.$$

Перший інтеграл табличний

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right),$$

тому

$$U(p) = 6000 \left(\frac{e^{-pt}}{-p} \left(t + \frac{1}{p} \right) \right) \Big|_0^{t_1} + 40 \left(\frac{e^{-pt}}{-p} \right) \Big|_0^{t_1}$$

або

$$\begin{aligned} U(p) &= \frac{6000}{-p} \left(e^{-pt_1} \left(t_1 + \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{p} \right) - \frac{40}{p} (e^{-pt_1} - 1) = \\ &= -\frac{6000t_1}{p} e^{-pt_1} - \frac{6000}{p^2} e^{-pt_1} + \frac{6000}{p^2} - \frac{40}{p} e^{-pt_1} + \frac{40}{p} = \\ &= \frac{40p + 6000 - (100p + 6000)e^{-pt_1}}{p^2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Підставимо одержані значення $Z(p)$ і $U(p)$ в (4.38)

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{(40p + 6000 - (100p + 6000)e^{-pt_1})(0,2p + 80)}{p^2(20p + 1600)} = \\ &= \frac{(40p + 6000)(0,2p + 80)}{p^2(20p + 1600)} - \frac{(100p + 6000)(0,2p + 80)}{p^2(20p + 1600)} e^{-pt_1}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Співмножник e^{-pt_1} в другій складовій показує, що оригінал цієї складової зміщений за часом на t_1 (теорема зміщення), тому друга складова враховується тільки при визначенні струму на проміжку $t_1 < t < \infty$.

Для знаходження оригіналу струму на проміжку $0 < t < t_1$ необхідно враховувати тільки першу складову. Зазначимо, що

знаменник має три корені $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -80$, причому перший кратний. Оскільки теорема розкладання в другому розділі виведена тільки для простих коренів, одержимо оригінал струму безпосереднім розкладанням першої складової на прості дроби.

Запишемо першу складову

$$I_1'(p) = \frac{(40p + 6000)(0,2p + 80)}{p^2(20p + 1600)} = \frac{8p^2 + 4400p + 48 \cdot 10^4}{p^2(20p + 1600)} =$$

$$= \frac{0,4p^2 + 220p + 24 \cdot 10^3}{p^2(p + 80)}$$

і подамо її у вигляді суми простих дроби

$$I_1'(p) = \frac{0,4p^2 + 220p + 24 \cdot 10^3}{p^2(p + 80)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p + 80}. \quad (4.42)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів A_1 , A_2 і A_3 зведемо прості дроби до спільного знаменника

$$I_1'(p) = \frac{A_1p(p + 80) + A_2p(p + 80) + A_3p^2}{s^2(s + 80)} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_3)p^2 + (80A_1 + A_2)p + 80A_2}{p^2(p + 80)} \quad (4.43)$$

і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях s у чисельниках (4.43) і (4.42). В результаті цього одержимо систему рівнянь для визначення A_1 , A_2 і A_3 .

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_3 &= 0,4 \\ 80A_1 + A_2 &= 220 \\ 80A_2 &= 24 \cdot 10^3 \end{aligned} \right\}.$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо

$$A_1 = -1, \quad A_2 = 300, \quad A_3 = 1,4.$$

Таким чином,

$$I_1'(p) = \frac{-1}{p} + \frac{300}{p^2} + \frac{1,4}{p + 80}.$$

Оскільки

$$\frac{A}{p} \doteq A; \quad \frac{A}{p^2} \doteq A \cdot t; \quad \frac{A}{p+a} \doteq A e^{-at},$$

то струм на проміжку часу $0 < t < t_1$ визначається за виразом

$$i_1(t) = i_1'(t) = -1 + 300t + 1,4e^{-80t}; \quad 0 < t < t_1,$$

що збігається з (4.31).

Для знаходження оригіналу струму i_1 на проміжку $t_1 < t < \infty$ знайдемо оригінал другої складової $i_1''(t)$ і додамо його до оригіналу першої складової

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t), \quad t_1 < t < \infty.$$

Запишемо другу складову (4.41) у вигляді

$$\begin{aligned} I_1''(p) &= \frac{(100p + 6000)(0,2p + 80)}{-p^2(20p + 1600)} e^{-pt_1} = \\ &= \frac{20p^2 + 9200p + 48 \cdot 10^4}{p^2(20p + 1600)} e^{-pt_1} = \frac{p^2 + 460p + 24 \cdot 10^3}{p^2(p + 80)} e^{-pt_1}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Подано (4.44) у вигляді суми простих дробів

$$\begin{aligned} I_1''(p) &= \frac{p^2 + 460p + 24 \cdot 10^3}{p^2(p + 80)} e^{-pt_1} = - \left(\frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p + 80} \right) e^{-pt_1} = \\ &= \frac{A_1 p(p + 80) + A_2(p + 80) + A_3 p^2}{p^2(p + 80)} e^{-pt_1} = \\ &= \frac{(A_1 + A_3)p^2 + (80A_1 + A_2)p + 80A_2}{p^2(p + 80)} e^{-pt_1}. \end{aligned}$$

Аналогічно складемо систему рівнянь для знаходження A_1 , A_2 та A_3

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_3 &= 1 \\ 80A_1 + A_2 &= 460 \\ 80A_2 &= 24 \cdot 10^3 \end{aligned} \right\}.$$

Звідси $A_1 = 2$, $A_2 = 300$, $A_3 = -1$.

Отже,

$$I_1''(p) = - \left(\frac{2}{p} + \frac{300}{p^2} - \frac{1}{p + 80} \right) e^{-pt_1}. \quad (4.45)$$

Множник e^{-pt_1} в (4.45) означає, що в оригіналі замість t треба записувати $t - t_1$.

Тому

$$i_1''(t) = -2 - 300(t - t_1) + e^{-80(t-t_1)} \text{ А.}$$

Таким чином, на проміжку $t_1 < t < \infty$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_1'(t) + i_1''(t) = \\ &= -1 + 300t + 1,4e^{-80t} - 2 - 300(t - t_1) + e^{-80(t-t_1)} = \\ &= -3 + 1,4e^{-80t} + 300 \cdot 0,01 + e^{-80(t-t_1)} = 1,4e^{-80t} + e^{-80(t-t_1)} \text{ А,} \end{aligned}$$

що також збігається з розв'язком, який одержаний класичним методом.

4.6.3 Застосування інтеграла Дюамеля

4.6.3.1 Використання перехідної характеристики

Знайдемо перехідну характеристику для струму i_1 .

Зображення струму $I_1(p)$ визначимо за (4.38) з врахуванням, одержаного значення $Z(p)$

$$I_1(p) = \frac{U(p)(pL + r_2)}{pL(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

Передатна функція

$$K(p) = \frac{I_1(p)}{U(p)} = \frac{pL + r_2}{pL(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{0,2p + 80}{20p + 1600}. \quad (4.46)$$

Зображення перехідної характеристики

$$H(p) = \frac{K(p)}{p} = \frac{0,2p + 80}{p(20p + 1600)}.$$

Оригінал перехідної характеристики знайдемо, використавши теорему розкладання

$$h(t) = 0,05 - 0,04e^{-80t}.$$

Запишемо напругу $u(t)$, яка зображена на рис.4.14,б, в аналітичному вигляді

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = \frac{U_2 - U_1}{t_1} t + U_1 = 6000 t + 40, & 0 < t < t_1, \\ u_2(t) = 0, & t_1 < t < \infty. \end{cases}$$

Струм в колі також визначається для двох проміжків часу: $0 < t < t_1$ та $t_1 < t < \infty$.

Так, для проміжку $0 < t < t_1$

$$i_1(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau) d\tau. \quad (4.47)$$

Оскільки $u_1'(\tau) = 6000 \frac{\text{В}}{\text{с}}$ і $u_1(0) = 40 \text{ В}$, то

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 40(0,05 - 0,04e^{-80t}) + \int_0^t 6000(0,05 - 0,04e^{-80(t-\tau)}) d\tau = \\ &= (2 - 1,6e^{-80t}) + \int_0^t 300 d\tau - \int_0^t 240e^{-80(t-\tau)} d\tau = (2 - 1,6e^{-80t}) + 300 \int_0^t d\tau - \\ &- 240e^{-80t} \int_0^t e^{+80\tau} d\tau = (2 - 1,6e^{-80t}) + 300t - \frac{240e^{-80t}}{80} (e^{80t} - 1) = \\ &= 2 - 1,6e^{-80t} + 300t - 3 + 3e^{-80t} = 300t - 1 + 1,4e^{-80t} \text{ А.} \end{aligned}$$

Для проміжку $t_1 < t < \infty$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau) d\tau + (0 - U_2)h(t-t_1) = \\ &= 40(0,05 - 0,04e^{-80t}) + \int_0^{t_1} 6000(0,05 - 0,04e^{-80(t-\tau)}) d\tau - 100(0,05 - \\ &- 0,04e^{-80(t-t_1)}) = 2 - 1,6e^{-80t} + \int_0^{t_1} 300 d\tau - 240e^{-80t} \int_0^{t_1} e^{80\tau} d\tau - 5 + \\ &+ 4e^{-80(t-t_1)} = 2 - 1,6e^{-80t} + 300t_1 - \frac{240e^{-80t}}{80} (e^{80t_1} - 1) = 2 - 1,6e^{-80t} + \\ &+ 3 - 3e^{-80(t-t_1)} + 3e^{-80t} - 5 + 4e^{-80(t-t_1)} \end{aligned}$$

або остаточно

$$i_1(t) = 1,4e^{-80t} + e^{-80(t-t_1)} \text{ А.}$$

Одержані значення струму i_1 збігаються із знайденими значеннями струму i_1 іншими методами.

4.6.3.2 Використання імпульсної характеристики

Зображення імпульсної характеристики

$$G(p) = K(p) = \frac{0,2p + 80}{20p + 1600}.$$

Найвищі степені p в чисельнику і знаменнику $G(p)$ однакові, тому теорему розкладання, яка наводилася раніше, використовувати не можна, оскільки ця теорема розкладання виведена за умови, що найвищий степінь p в чисельнику менший найвищого степеня p в знаменнику. Тому розділимо один раз чисельник на знаменник

$$G(p) = 0,01 + \frac{64}{20p + 1600} = 0,01 + \frac{3,2}{p + 80}.$$

Оскільки $\frac{A}{p + \alpha} \doteq Ae^{-\alpha t}$, $A \doteq A\delta(t)$, то

$$g(t) = 0,01\delta(t) + 3,2e^{-80t},$$

де $\delta(t)$ – функція Дірака.

Як і в попередньому випадку струм визначаємо окремо на двох проміжках

$$0 < t < t_1 \quad \text{та} \quad t_1 < t < \infty.$$

Для проміжку $0 < t < t_1$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t (6000\tau + 40) (0,01\delta(t-\tau) + 3,2e^{-80(t-\tau)}) d\tau = \\ &= \int_0^t 60\tau \delta(t-\tau) d\tau + \int_0^t 0,4\delta(t-\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t 19200\tau e^{-80(t-\tau)} d\tau + \int_0^t 128 e^{-80(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Оскільки $f(\tau) \delta(t-\tau) = f(t) \delta(t-\tau)$, тому що функція $\delta(t-\tau)$ дорівнює нулю всюди крім $\tau = t$, то

$$\int_0^t f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t) \delta(t-\tau) d\tau = f(t) \int_0^t \delta(t-\tau) d\tau = f(t).$$

Тому перші два інтеграли в (4.48) відповідно рівні

$$\int_0^t 60\tau \delta(t-\tau) d\tau = 60t, \quad \int_0^t 0,4 \delta(t-\tau) d\tau = 0,4.$$

Отже,

$$i_1(t) = 60t + 0,4 + 19200e^{-80t} \int_0^t \tau e^{80\tau} d\tau + 128e^{-80t} \int_0^t e^{80\tau} d\tau.$$

Оскільки

$$\int x e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right),$$

то

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 60t + 0,4 + 19200e^{-80t} \left(\frac{e^{80\tau}}{80} \left(\tau - \frac{1}{80} \right) \right) \Big|_0^t + \frac{128e^{-80t}}{80} \left(e^{80\tau} \right) \Big|_0^t = \\ &= 60t + 0,4 + \frac{19200}{80} e^{-80t} \left(e^{80t} \left(t - \frac{1}{80} \right) + \frac{1}{80} \right) + 1,6e^{-80t} (e^{80t} - 1) = \\ &= 60t + 0,4 + 240t - 3 + 3e^{-80t} + 1,6 - 1,6e^{-80t} = 300t - 1 + 1,4e^{-80t} \text{ А.} \end{aligned}$$

Для проміжку $t_1 < t < \infty$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \int_0^{t_1} u(\tau) g(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{t_1} (6000\tau + 40) \left(0,01\delta(t-\tau) + 3,2e^{-80(t-\tau)} \right) d\tau = \\ &= \int_0^{t_1} 60\tau \delta(t-\tau) d\tau + \int_0^{t_1} 0,4 \delta(t-\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^{t_1} 19200\tau e^{-80(t-\tau)} d\tau + \int_0^{t_1} 128 e^{-80(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \tag{4.49}$$

В інтегралах виразу (4.49) змінна t змінюється від t_1 до нескінченності, тому δ -функція, яка не дорівнює нулю тільки для $\tau = t$ та дорівнює нулю для всіх $\tau < t_1$, і відповідно функція

$\delta(t - \tau)$ в перших двох інтегралах (4.49) дорівнює нулю, оскільки границями інтегрування їх є значення $\tau = 0$ та $\tau = t_1$. Таким чином,

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 19200 e^{-80t} \int_0^{t_1} \tau e^{80\tau} d\tau + 128 e^{-80t} \int_0^{t_1} e^{80\tau} d\tau = \\ &= 19200 e^{-80t} \left(\frac{e^{80\tau}}{80} \left(\tau - \frac{1}{80} \right) \right) \Big|_0^{t_1} + \frac{128 e^{-80t}}{80} (e^{80\tau}) \Big|_0^{t_1} = \\ &= 240 t_1 e^{-80t} \left(e^{80t_1} \left(t_1 - \frac{1}{80} \right) + \frac{1}{80} \right) + 1,6 e^{-80t} (e^{80t_1} - 1) = \\ &= 240 t_1 e^{-80(t-t_1)} - 3 e^{-80(t-t_1)} + 3 e^{-80t} + 1,6 e^{-80(t-t_1)} - 1,6 e^{-80t} = \\ &= 1,4 e^{-80t} + e^{-80(t-t_1)} \text{ А.} \end{aligned}$$

Остаточний розв'язок

$$i_1(t) = 300t - 1 + 1,4 e^{-80t} \text{ А, } 0 < t < t_1,$$

$$i_1(t) = 1,4 e^{-80t} + e^{-80(t-t_1)} \text{ А, } t_1 < t < \infty.$$

4.6.4 Метод періодизації неперіодичного збудження

Для розрахунку перехідного процесу в колі (рис.4.14, а) даним методом будемо вважати, що на вході діє періодична напруга $u_1(t)$ з періодом T_1 (рис.4.16).

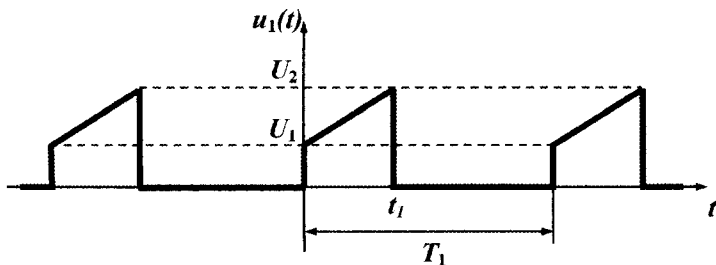


Рисунок 4.16

В границях першого періоду напруга на проміжку $0 < t < t_1$ описується рівнянням

$$u(t) = \frac{U_2 - U_1}{t_1} t + U_1 = 6000t + 40 \text{ В.}$$

Оскільки стала часу кола

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{80} = 0,0125 \text{ с,}$$

необхідно, щоб

$$T_1 > t_1 + (4 \div 5)\tau = 0,01 + (4 \div 5)0,0125 \text{ с.}$$

Нехай $T_1 = 0,0628 \text{ с}$, тоді

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 100 \text{ рад с}^{-1}.$$

Розкладемо вхідну періодичну напругу в ряд Фур'є.

Для цього насамперед визначимо його коефіцієнти

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T_1} \int_0^{t_1} u(t) \sin k\omega_1 t dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{t_1} (6000t + 40) \sin k\omega_1 t dt = \\ &= \frac{19,1}{k^2} \sin k\omega_1 t_1 - \frac{31,83}{k} \cos k\omega_1 t_1 - \frac{12,73}{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{T_1} \int_0^{t_1} u(t) \cos k\omega_1 t dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{t_1} (6000t + 40) \cos k\omega_1 t dt = \\ &= \frac{19,1}{k^2} (\cos k\omega_1 t_1 - 1) + \frac{31,83}{k} \sin k\omega_1 t_1. \end{aligned}$$

Обмежуючись п'ятьма гармоніками і сталою складовою, одержуємо ряд Фур'є у вигляді

$$\begin{aligned} u(t) &= 11,16 + 11,6 \sin \omega_1 t + 18 \cos \omega_1 t + 17,33 \sin 2\omega_1 t + 7,71 \cos 2\omega_1 t + \\ &+ 5,05 \sin 3\omega_1 t - 2,73 \cos 3\omega_1 t + 7,48 \sin 4\omega_1 t - 8 \cos 4\omega_1 t + \\ &+ 0,008 \sin 5\omega_1 t - 6,65 \cos 5\omega_1 t \text{ В,} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} u(t) &= 11,16 + 21,42 \sin(\omega_1 t + 57,2^\circ) + 19 \sin(2\omega_1 t + 24^\circ) + 15,3 \sin(3\omega_1 t + \\ &+ 10,27^\circ) + 10,95 \sin(4\omega_1 t - 46,91^\circ) + 6,65 \sin(5\omega_1 t - 89,93^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Знаходимо комплексний вхідний опір кола для довільної k -ї гармоніки

$$\underline{Z}^{(k)} = r_1 + \frac{r_2 j k \omega_1 L}{r_2 + j k \omega_1 L} = 20 + \frac{1600k}{6400 + j20k} \text{ Ом.}$$

Визначимо вхідний струм для кожної гармоніки окремо за формулою

$$\underline{I}_{m1}^{(k)} = \frac{U_m^{(k)}}{\underline{Z}^{(k)}}.$$

В результаті розрахунків одержуємо

$$k = 0, \quad \underline{I}_1^{(0)} = \frac{U^{(0)}}{\underline{Z}^{(0)}} = \frac{U^{(0)}}{r_1} = \frac{11,16}{20} = 0,558 \text{ А,}$$

$$k = 1, \quad \underline{I}_{m1}^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{21,42e^{j57,2^\circ}}{31,06e^{j37,30^\circ}} = 0,69e^{j19,9^\circ} \text{ А,}$$

$$k = 2, \quad \underline{I}_{m1}^{(2)} = \frac{U_m^{(2)}}{\underline{Z}^{(2)}} = \frac{18,97e^{j24^\circ}}{48,17e^{j41,63^\circ}} = 0,394e^{-j17,63^\circ} \text{ А,}$$

$$k = 3, \quad \underline{I}_{m1}^{(3)} = \frac{U_m^{(3)}}{\underline{Z}^{(3)}} = \frac{15,3e^{-j10,27^\circ}}{62,1e^{j38,2^\circ}} = 0,246e^{-j48,47^\circ} \text{ А,}$$

$$k = 4, \quad \underline{I}_{m1}^{(4)} = \frac{U_m^{(4)}}{\underline{Z}^{(4)}} = \frac{10,95e^{-j46,91^\circ}}{72,11e^{j33,69^\circ}} = 0,152e^{-j80,6^\circ} \text{ А,}$$

$$k = 5, \quad \underline{I}_{m1}^{(5)} = \frac{U_m^{(5)}}{\underline{Z}^{(5)}} = \frac{6,652e^{-j89,93^\circ}}{79,08e^{j29,57^\circ}} = 0,084e^{-j119,5^\circ} \text{ А.}$$

Миттєве значення вхідного струму

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I^{(0)} + i_1^{(1)}(t) + i_1^{(2)}(t) + i_1^{(3)}(t) + i_1^{(4)}(t) + i_1^{(5)}(t) = \\ &= 0,558 + 0,69 \sin(\omega_1 t + 19,9^\circ) + 0,394 \sin(2\omega_1 t - \\ &\quad - 17,63^\circ) + 0,246 \sin(3\omega_1 t - 48,47^\circ) + 0,152 \times \quad (4.50) \\ &\quad \times \sin(4\omega_1 t - 80,6^\circ) + 0,084 \sin(5\omega_1 t - 119,5^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

На рис. 4.17 побудовані графіки зміни струму i_1 в залежності від часу за результатами розрахунків: відповідно до виразу (4.37) точний і наближений за формулою (4.50).

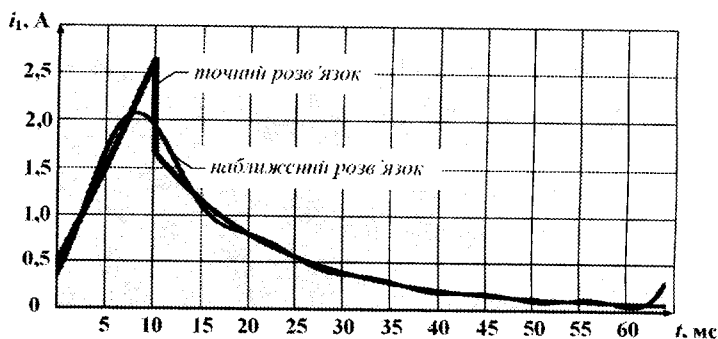


Рисунок 4.17

Графік показує, що найбільша похибка спостерігається в момент часу t_1 , коли струм i_1 змінюється стрибком.

Підвищити ж точність можна, врахувавши під час розрахунку більшу кількість гармонік.

4.6.5 Частотний метод

При використанні частотного методу необхідно знайти спектральну характеристику вхідного струму $I_1(j\omega)$, для чого потрібно заздалегідь визначити спектральну характеристику вхідної напруги $U(j\omega)$ і частотну характеристику вхідного опору $Z(j\omega)$.

$$I_1(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)}. \quad (4.51)$$

Спектральну характеристику вхідної напруги знайдемо, використовуючи пряме одностороннє перетворення Фур'є

$$U(j\omega) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Як вказувалося, спектральну характеристику можна одержати, знаючи зображення вхідної напруги шляхом заміни p на $j\omega$. Зображення $U(p)$ одержане раніше (4.40)

$$U(p) = \frac{(40p + 6000) - (100p + 6000)e^{-pt_1}}{p^2}.$$

Для $p = j\omega$

$$U(j\omega) = \frac{(6000 + j40\omega) - (6000 + j100\omega)e^{-j\omega t_1}}{-\omega^2}.$$

Подано $U(j\omega)$ як суму дійсної та уявної складових,
 $t_1 = 0,01$ с.

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \frac{(6000 + j40\omega) - (6000 + j100\omega)(\cos \omega 0,01 - j \sin \omega 0,01)}{-\omega^2} = \\ &= \frac{6000 - 6000 \cos \omega 0,01 - 100\omega \sin \omega 0,01}{-\omega^2} + \\ &+ j \frac{40\omega - 100\omega \cos \omega 0,01 + 6000 \sin \omega 0,01}{-\omega^2} = \\ &= \frac{100}{\omega^2} (60 \cos \omega 0,01 + \omega \sin \omega 0,01 - 60) + \\ &+ j \frac{100}{\omega^2} (\omega \cos \omega 0,01 - 60 \sin \omega 0,01 - 0,4\omega) \end{aligned}$$

або

$$U(j\omega) = U_1(\omega) + jU_2(\omega). \quad (4.52)$$

Отже,

$$U_1(\omega) = \frac{100}{\omega^2} (60 \cos \omega 0,01 + \omega \sin \omega 0,01 - 60),$$

а

$$U_2(\omega) = \frac{100}{\omega^2} (\omega \cos \omega 0,01 - 60 \sin \omega 0,01 - 0,4\omega).$$

Частотна характеристика опору

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= r_1 + \frac{r_2 j\omega L}{r_2 + j\omega L} = \\ &= r_1 + \frac{r_2 j\omega L (r_2 - j\omega L)}{r_2^2 + \omega^2 L^2} = \\ &= r_1 + \frac{r_2 (\omega L)^2}{r_2^2 + (\omega L)^2} + j \frac{r_2^2 \omega L}{r_2^2 + (\omega L)^2}. \end{aligned}$$

Введемо позначення для

$$Z_1 = r_1 + \frac{r_2 (\omega L)^2}{r_2^2 + (\omega L)^2} = \frac{100\omega^2 + 3,2 \cdot 10^6}{\omega^2 + 16 \cdot 10^4}$$

і для

$$Z_2 = \frac{r_2^2 \omega L}{r_2^2 + (\omega L)^2} = \frac{3,2 \cdot 10^4 \omega}{\omega^2 + 16 \cdot 10^4}.$$

Тоді для $Z(j\omega)$ можемо записати

$$Z(j\omega) = Z_1 + jZ_2. \quad (4.53)$$

Підставляючи (4.52) і (4.53) в (4.51), одержуємо

$$\begin{aligned} I_1(j\omega) &= \frac{U_1(\omega) + jU_2(\omega)}{Z_1(\omega) + jZ_2(\omega)} = \\ &= \frac{(U_1(\omega) + jU_2(\omega))(Z_1(\omega) - jZ_2(\omega))}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)} = \\ &= \frac{U_1(\omega)Z_1(\omega) + U_2(\omega)Z_2(\omega)}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)} + j \frac{U_2(\omega)Z_1(\omega) - U_1(\omega)Z_2(\omega)}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)}. \end{aligned}$$

Позначивши

$$\left. \begin{aligned} I_1'(\omega) &= \frac{U_1(\omega)Z_1(\omega) + U_2(\omega)Z_2(\omega)}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)} \\ I_1''(\omega) &= \frac{U_2(\omega)Z_1(\omega) - U_1(\omega)Z_2(\omega)}{Z_1^2(\omega) + Z_2^2(\omega)} \end{aligned} \right\}. \quad (4.54)$$

одержуємо

$$I_1(j\omega) = I_1'(\omega) + jI_1''(\omega). \quad (4.55)$$

Знаючи дійсну частину спектральної характеристики струму $I_1'(\omega)$ можна з (4.21) знайти оригінал струму

$$i_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} I_1'(\omega) \cos \omega t dt. \quad (4.56)$$

Якщо замість $I_1(\omega)$ підставити його значення із (4.54) з врахуванням всіх складових, що є функціями від ω , то розрахунок інтеграла (4.56) буде доволі складним. Тому для знаходження $i_1(t)$ скористаємося методом трапецій.

Побудуємо дійсну частину $I_1'(\omega)$ спектральної характеристики $I_1(j\omega)$ за виразом (4.54). Графік цієї характеристики наведено на рис 4.18.

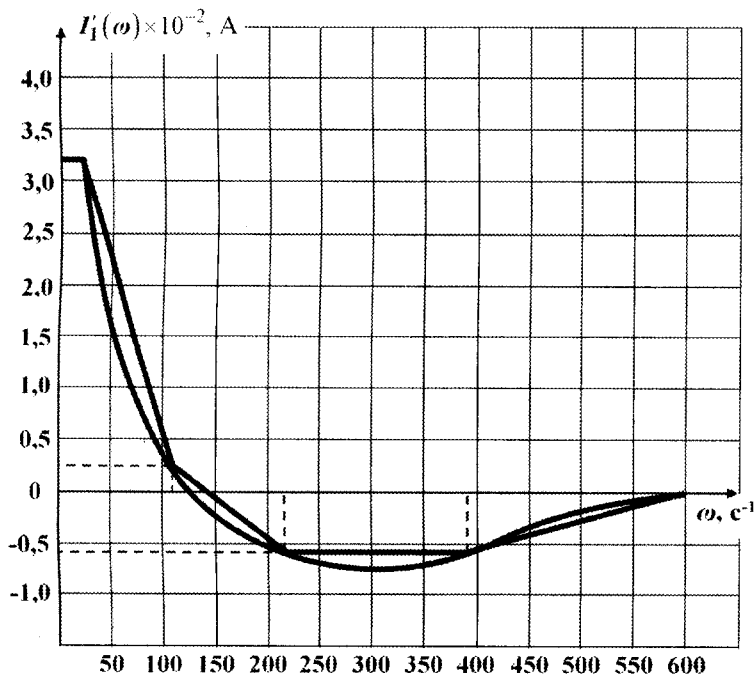


Рисунок 4.18

Апроксимуємо одержану характеристику трьома трапеціями так, як це показано на рис. 4.19. Параметри трапецій обчислюємо, скориставшись графіками даного рисунка:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 3,2 \cdot 10^{-2}, & a_2 &= 0,87 \cdot 10^{-2}, & a_3 &= -0,57 \cdot 10^{-2}, \\
 \omega_1 &= 65, & \omega_2 &= 170, & \omega_3 &= 490, \\
 \Delta_1 &= 55, & \Delta_2 &= 50, & \Delta_3 &= 110.
 \end{aligned}$$

За виразом (4.25), визначаємо вхідний струм $i_1(t)$.

В табл. 4.1 наведено точні значення струму $i_1(t)$ і значення, які одержані методом трапецій і методом періодизації вхідної напруги.

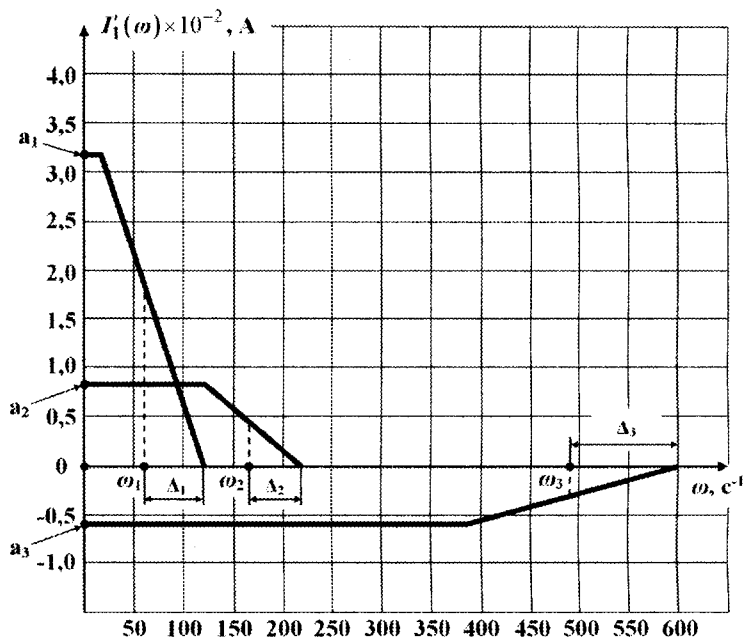


Рисунок 4.19

Із таблиці видно, що результати, які отримали методом періодизації, найбільше відрізняються від результатів, що отримані точними методами. Точність цього методу можна підвищувати враховуючи більшу кількість гармонік.

Таблиця 4.1

Методи розрахунку	t , мс	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>точний</i>	i , А	0,400	0,592	0,793	1,000	1,217	1,438	1,666	1,900
<i>трапецій</i>	i , А	0,488	0,554	0,745	1,026	1,351	1,668	1,930	2,100
<i>періодизації</i>	i , А	0,265	0,472	0,731	1,022	1,319	1,594	1,818	1,970

Продовження таблиці 4.1

Методи розрахунку	t , мс	8	9	10	10+	15	20	25	30
<i>точний</i>	i , А	2,138	2,381	2,630	1,629	1,092	0,732	0,491	0,329
<i>трапецій</i>	i , А	2,163	2,119	1,987	1,060	0,760	0,436	0,272	0,170
<i>періодизації</i>	i , А	2,038	2,019	1,924	1,924	1,012	0,751	0,480	0,321

Продовження таблиці 4.1

Методи розрахунку	t , мс	35	40	45	50	55	60
<i>точний</i>	i , А	0,220	0,148	0,0991	0,0664	0,0445	0,0298
<i>трапецій</i>	i , А	0,170	0,141	0,065	0,0095	0,0025	0,011
<i>періодизації</i>	i , А	0,239	0,127	0,125	0,0384	0,0762	-0,0017

Запитання для самоперевірки

1. Який ряд називають рядом Фур'є? Відносно яких функцій його складають?
2. Запишіть всі форми ряду Фур'є? У який спосіб визначають його коефіцієнти і яким чином вони взаємопов'язані між собою?
3. Що називають спектром періодичної напруги? Як можна визначити її амплітудно-частотний та фазочастотний спектри?
4. Поясніть, чому і як використовують ряд Фур'є для розрахунку перехідних процесів в колах під час дії періодичної вхідної напруги складної форми. Яке значення при цьому має принцип накладання?
5. Розкрийте суть та алгоритм частотного методу розрахунку перехідних процесів в колі за дії періодичних вхідних напруг складної форми. Чому цей метод є наближенням?
6. Навіщо проводять періодизацію неперіодичної напруги?

7. Що називають інтегральним перетворенням Фур'є? Опишіть його основні властивості.

8. Яке перетворення називають одностороннім перетворенням Фур'є?

9. У чому полягає подібність перетворень Фур'є та Лапласа? Чим вони різняться?

10. В яких випадках доцільно застосовувати для розрахунку перехідних процесів перетворення Фур'є, а в яких – перетворення Лапласа?

11. Яку характеристику називають спектральною? Чому?

12. Яким чином можна визначити амплітудно-частотний та фазочастотний спектри неперіодичної напруги?

13. В чому полягає різниця між спектрами неперіодичної і періодичної напруги?

14. Поясніть, як використовують перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів в колах під час дії неперіодичної вхідної напруги. Опишіть алгоритм спектрального методу.

15. Що називають комплексною передатною функцією кола? Яким чином її можна розрахувати?

16. Які характеристики електричних кіл називають амплітудно-частотними, а які – фазочастотними? Яку інформацію вони надають? Як їх визначають?

Розділ 5

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В КОЛАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1 Виникнення перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами

В колах із розподіленими параметрами, як і в колах із зосередженими параметрами, внаслідок різного роду комутацій, тобто вмикань або вимикань джерел чи споживачів енергії, окремих ділянок самого кола, виникають перехідні процеси.

До виникнення перехідних процесів в лініях призводять також і аварійні режими: обриви проводів, короткі замикання, а також близькі грозові розряди тощо.

Теоретично перехідний режим в лінії має тривати нескінченно довго, але як і в колах із зосередженими параметрами, зазвичай користуються поняттям *практичної тривалості* перехідного процесу, яка залежить від первинних параметрів лінії, внутрішнього опору джерела і опору навантаження.

Під час перехідного процесу можлива поява перенапруг або великих струмів, що можуть призвести до пошкодження ізоляції або інших частин електротехнічного обладнання та порушення нормального передавання інформації.

На відміну від перехідних процесів у колах з зосередженими параметрами, в колах із розподіленими параметрами в різних своїх частинах зміна струмів і напруг не відбувається одночасно.

Так, зміна струму або напруги, що розпочалася в будь-якому місці електричного кола, поширюється на інші ділянки з деякою скінченною швидкістю.

У повітряних лініях ця швидкість є близькою до швидкості світла, а в кабельних – приблизно вдвічі меншою.

Отже, основною задачею розрахунку перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами будемо вважати визначення залежності струмів та напруг в різних частинах кола від часу.

5.2 Розв'язування телеграфних рівнянь однорідної довгої лінії класичним методом

Для дослідження перехідних процесів в колах із розподіленими параметрами розглянемо диференціальні рівняння довгої лінії (телеграфні рівняння):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

де r_0 , L_0 , C_0 , g_0 – первинні параметри лінії;

x – відстань від початку довгої лінії (рис. 5.1).

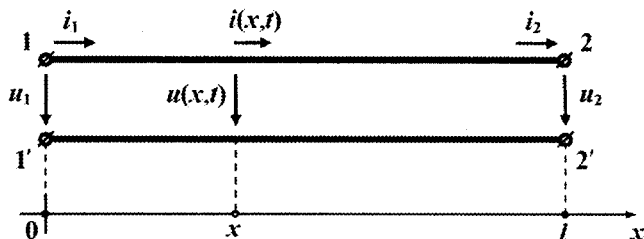


Рисунок 5.1

Отже, задача аналізу перехідних процесів в довгій лінії полягає в розв'язанні системи диференціальних рівнянь (5.1) і зводиться до знаходження такого загального розв'язку $u = u(x, t)$ та $i = i(x, t)$ цієї системи, який водночас задовольнятиме заздалегідь відомі початкові ($t = 0$) та граничні ($x = 0$ чи $x = l$) умови (задача Коші).

Розв'язування такої задачі в загальному вигляді є досить

складним, тому наразі отримаємо розв'язок системи (5.1) для лінії без втрат, що дозволить значно спростити розрахунки і водночас створить можливості для якісного дослідження основних ознак перехідного процесу в довгій лінії.

Таким чином, для лінії без втрат маємо

$$r_0 = 0, \quad g_0 = 0.$$

Тоді система диференціальних рівнянь (5.1) набуде вигляду

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\}. \quad (5.2)$$

Продиференціюємо перше рівняння цієї системи за координатою x , а друге – за часом t , внаслідок чого отримаємо

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}, \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} &= C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Оскільки змінні x і t є незалежними одна від одної, то

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$

і тоді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Відомо, що для лінії без втрат

$$L_0 C_0 = \frac{1}{v^2},$$

де v є фазовою швидкістю руху хвилі, тому отримаємо одне диференціальне рівняння із однією невідомою функцією

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.3)$$

Рівняння вигляду (5.3) називають *хвильовими рівняннями*.

Розв'язком хвильового рівняння є сума функцій двох змінних

$$u = \psi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \psi_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \quad (5.4)$$

Доведемо це, для чого введемо нові змінні

$$\xi = t - \frac{x}{v}, \quad \eta = t + \frac{x}{v}.$$

За правилами диференціювання складних функцій для частинної похідної за x отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(-\frac{1}{v}\right) \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{v} \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}, \quad (5.5)$$

оскільки

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{v}.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{v}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2}. \quad (5.6)$$

З іншого боку, частинна похідна миттєвої напруги за часом t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \quad (5.7)$$

через те, що

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 1.$$

У зв'язку з цим друга похідна

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2}. \quad (5.8)$$

Підставляємо (5.8) в (5.6) і отримуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

що і потрібно було довести.

• Вид функцій ψ_1 та ψ_2 для кожної конкретної задачі визначається формою і параметрами прикладеної напруги, а також початковими умовами.

Розглянемо докладніше першу складову напруги $\psi_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ співвідношення (5.4).

Нехай для деякого моменту часу $t = t_0$ розподіл цієї складової напруги вздовж лінії буде являти собою функцію $\psi_1\left(t_0 - \frac{x}{v}\right)$, показану на графіку рис. 5.2.

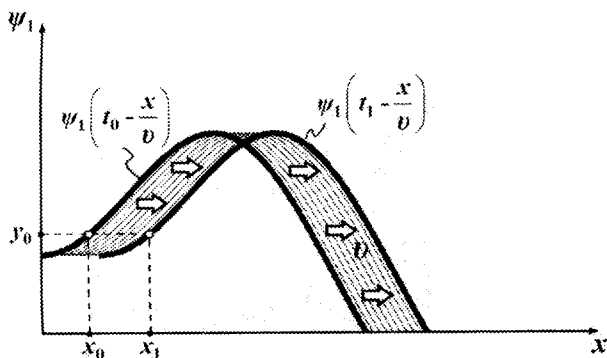


Рисунок 5.2

Тоді в деякій довільно обраній точці $x = x_0$ довгої лінії значення даної функції буде дорівнювати

$$y_0 = \psi_1\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right).$$

Такого ж значення ця функція набуде в наступний момент часу t_1 в точці лінії з координатою x_1 , для якої виконуватиметься рівність

$$t_0 - \frac{x_0}{v} = t_1 - \frac{x_1}{v},$$

звідки

$$x_1 = x_0 + v(t_1 - t_0).$$

Оскільки $t_1 > t_0$, то, як впливає із рівняння,

$$x_1 > x_0.$$

Це означає, що точка лінії, яка відповідає значенню ординати

$$y_0 = \psi_1\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right)$$

початкової кривої здійснює рух вздовж довгої лінії *вправо* і за час

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

переміщується на відстань

$$\Delta x = x_1 - x_0 = v \Delta t,$$

(див. рис. 5.2).

Подібних висновків можна дійти і для будь-якої іншої ординати початкової кривої.

Тому за будь-який інтервал часу Δt графік функції $\psi_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ без зміни амплітуди та форми переміщується вздовж лінії в додатному напрямі осі x на відстань $\Delta x = v \Delta t$, а сама ж функція описує хвилю напруги – хвилю, що поширюється вздовж заданої лінії без втрат зі сталою швидкістю

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

і під час свого руху не зазнає ані затухань, ані спотворень.

Таку хвилю називають *прямою* або *падаючою хвилею*.

Оскільки аргументи функцій ψ_1 і ψ_2 відрізняються тільки знаками перед тими складовими, в які входить швидкість, то функція $\psi_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ має визначати хвилю напруги, що переміщується

від кінця довгої лінії до її початку.

Цю хвилю напруги називають *зворотною* або *відбитою*.

У загальному випадку напруга лінії відповідно до (5.4) складається з напруг прямої і зворотної хвиль

$$u = u_n + u_z, \tag{5.9}$$

де

$$u_n = \psi_1 \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad u_3 = \psi_2 \left(t + \frac{x}{v} \right). \quad (5.10)$$

Для знаходження функції миттєвого струму $i(x, t)$ в лінії без втрат скористаємося другим рівнянням системи (5.2)

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

і підставимо до нього частинну похідну за часом із рівняння (5.7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}.$$

Тоді для частинної похідної за x одержимо

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right).$$

З рівняння (5.5) випливає

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = -v \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = v \frac{\partial \psi_2}{\partial x},$$

тому

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = -C_0 v \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + v C_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial x}.$$

Оскільки

$$C_0 v = C_0 \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} = \frac{1}{Z_C},$$

де Z_C – хвильовий опір лінії

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

то останнє диференціальне рівняння можна переписати

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{Z_C} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{1}{Z_C} \frac{\partial \psi_2}{\partial x}. \quad (5.11)$$

Проінтегруємо рівняння (5.11) і тоді для функції миттєвого струму отримаємо

$$i = \frac{1}{Z_C} \psi_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) - \frac{1}{Z_C} \psi_2 \left(t + \frac{x}{v} \right). \quad (5.12)$$

Обидві сталі інтегрування в цьому випадку дорівнюють нулю, оскільки в напругах прямої та зворотної хвиль

$$u_n = \psi_1 \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

$$u_z = \psi_2 \left(t + \frac{x}{v} \right)$$

складових, що не залежали б від x та t , немає.

Таким чином, струм в лінії являє собою різницю від струмів його прямої та зворотної хвиль

$$i = i_n - i_z, \quad (5.13)$$

де

$$i_n = \frac{1}{Z_C} \psi_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) = \frac{u_n}{Z_C}, \quad i_z = \frac{1}{Z_C} \psi_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) = \frac{u_z}{Z_C}. \quad (5.14)$$

5.3 Виникнення хвиль внаслідок під'єднання довгої лінії до джерела постійної напруги

Наразі необхідно зауважити, що в цьому та наступному підрозділах відображені лише процеси *формування прямої хвилі*, оскільки внаслідок під'єднання до зовнішнього джерела напруги в однорідній лінії, що до цього перебувала за нульових початкових умов, спочатку виникає тільки одна хвиля – пряма, яка поширюється вздовж лінії зі швидкістю v , доки не досягне кінця лінії.

Це лише частина перехідного процесу в лінії.

І тільки після цього ми розглянемо явища, пов'язані із *формуванням зворотної хвилі* і її впливом на перебіг перехідного процесу.

Отже, розглянемо лінію без втрат, до якої в момент часу $t = 0$ під'єднують ідеальне джерело постійної напруги U_0 з внутрішнім опором, що дорівнює нулю.

Після під'єднання джерела до лінії напруга на її початку відразу ж досягає постійного значення U_0 , внаслідок чого виникає

хвиля прямокутної форми, яка переміщується вздовж лінії зі швидкістю v (рис. 5.3).

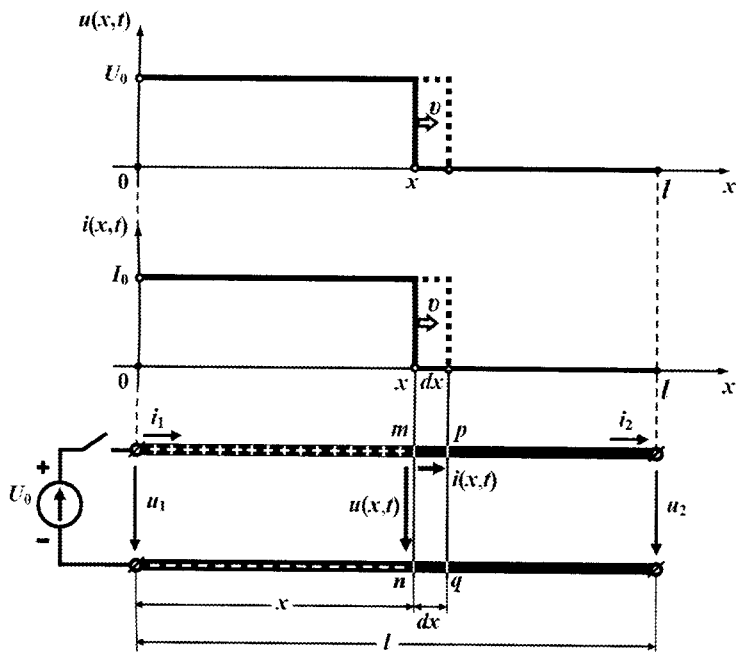


Рисунок 5.3

Припустимо, що в деякий момент часу t хвиля досягла перетину mn . Тоді в усіх точках, що розташовані ліворуч від цього перетину, напруга між проводами лінії дорівнюватиме U_0 , а праворуч – нулю.

Початкову частину хвилі, яка першою рухається вздовж лінії, називають *фронтом хвилі*.

На поверхні верхнього проводу накопичується додатний заряд, величина якого в точках, розташованих ліворуч від перетину mn , на одиницю довжини складає

$$q_0 = C_0 U_0.$$

Оскільки під час свого руху хвиля за час dt зміститься вправо від перетину mn на відстань

$$dx = v dt,$$

відрізок лінії dx отримає заряд

$$dq = q_0 dx = C_0 U_0 dx,$$

який проходить верхнім проводом аж до лінії перетину pq (див. рис. 5.3). Цей рух заряду утворює по всій довжині лінії від джерела до перетину pq електричний струм

$$i = \frac{dq}{dt} = C_0 U_0 \frac{dx}{dt} = C_0 U_0 v = C_0 U_0 \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} = \frac{U_0}{Z_C} = I_0. \quad (5.15)$$

Водночас з появою на поверхні верхнього проводу додатного заряду на поверхні нижнього проводу лінії з'явиться від'ємний заряд. Протилежні заряди утворюють електричне поле, яке буде існувати між проводами лише тієї ділянки лінії, по якій вже пройшла хвиля.

При утворенні електричного поля на фронті хвилі між щойно зарядженими ділянками проводів mn і pq проходить струм зміщення.

З рухом хвилі шлях проходження струму збільшується, але для лінії без втрат величина самого струму залишається незмінною.

В контурі, що охоплюється цим струмом, створюється магнітний потік, силові лінії якого лежать в площинах, перпендикулярних до осей проводів. З переміщенням хвилі на довжину $dx = v dt$ цей магнітний потік через поверхню, обмежену контуром струму, зазнає зміни і збільшується на величину

$$d\Phi = L_0 dx I_0 = L_0 I_0 v dt.$$

Внаслідок зміни магнітного потоку $d\Phi$ в контурі $mpqn$ наводиться е.р.с. самоіндукції, яка відповідно до закону електромагнітної індукції дорівнює

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_0 I_0 v. \quad (5.16)$$

Рух хвиль напруги і струму супроводжується передаванням вздовж лінії електромагнітної енергії, яка зосереджена в електричному та магнітному полях, що оточують лінію.

Під час свого руху на кожному пройденому хвилею одиничному відрізку лінії накопичується енергія і в електричному, і в магнітному полях

$$W_0^e = \frac{1}{2} C_0 U_0^2, \quad W_0^m = \frac{1}{2} L_0 I_0^2.$$

Оскільки за одиницю часу хвиля проходить відстань, що чисельно дорівнює ν , то добуток $\nu(W_0^e + W_0^m)$ являтиме собою накопичену в лінії електромагнітну енергію, зведену до одиниці часу.

З іншого боку, енергія, яку віддає джерело за ту ж одиницю часу, складає $U_0 I_0$ і для лінії без втрат йде виключно на утворення електричного і магнітного полів.

Тоді відповідно до закону збереження енергії

$$U_0 I_0 = \nu \left(\frac{C_0 U_0^2}{2} + \frac{L_0 I_0^2}{2} \right).$$

Підставимо в ліву частину цього виразу значення струму з виразу (5.15)

$$I_0 = C_0 U_0 \nu,$$

внаслідок чого отримаємо

$$\frac{C_0 U_0^2}{2} = \frac{L_0 I_0^2}{2}. \quad (5.17)$$

Це означає, що на будь-якій пройденій хвилею ділянці довгої лінії значення енергій електричного та магнітного полів рівні між собою.

Якщо до лінії під'єднати джерело з деяким активним внутрішнім опором r_a , струм і напруга прямої хвилі зменшаться, оскільки

$$u_n = U_0 - r_a i_n, \quad i_n = \frac{u_n}{Z_C},$$

і тому

$$u_n = \frac{U_0 Z_C}{Z_C + r_6}, \quad i_n = \frac{U_0}{Z_C + r_6}. \quad (5.18)$$

5.4 Пряма хвиля, що утворюється внаслідок під'єднання до лінії довільного джерела

Розглянемо, якою має бути форма прямої хвилі в довгій лінії, якщо до неї під'єднати ідеальне джерело з експоненціальною формою зміни напруги $u(t) = U_0 e^{-\epsilon t}$ (рис. 5.4).

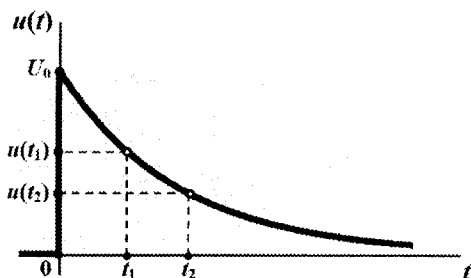


Рисунок 5.4

Нагадаємо, що наразі досліджується початкова стадія перехідного процесу, яка пов'язана із формуванням та рухом тільки прямої хвилі.

У момент під'єднання $t=0$ напруга на вхідних затискачах лінії $x=0$ буде дорівнювати напрузі джерела $u(0) = U_0$.

Таким чином, фронт прямої хвилі має напругу U_0 .

За час t_1 фронт з напругою

$$u_n(x_1, t_1) = U_0 e^{-\epsilon \left(t_1 - \frac{x_1}{v} \right)} = U_0$$

зміститься на відстань

$$x_1 = v t_1.$$

Напруга ж на вхідних затискачах лінії в цей час дорівнюватиме

$$u(0, t_1) = U_0 e^{-\varepsilon t_1},$$

що буде меншим від напруги U_0 (рис. 5.4).

В наступний момент часу $t_2 > t_1$ фронт хвилі досягне відстані

$$x_2 = v t_2 > x_1$$

від початку лінії (рис. 5.5) і напруга дорівнюватиме

$$u_n(x_2, t_2) = U_0 e^{-\varepsilon \left(t_2 - \frac{x_2}{v} \right)} = U_0.$$

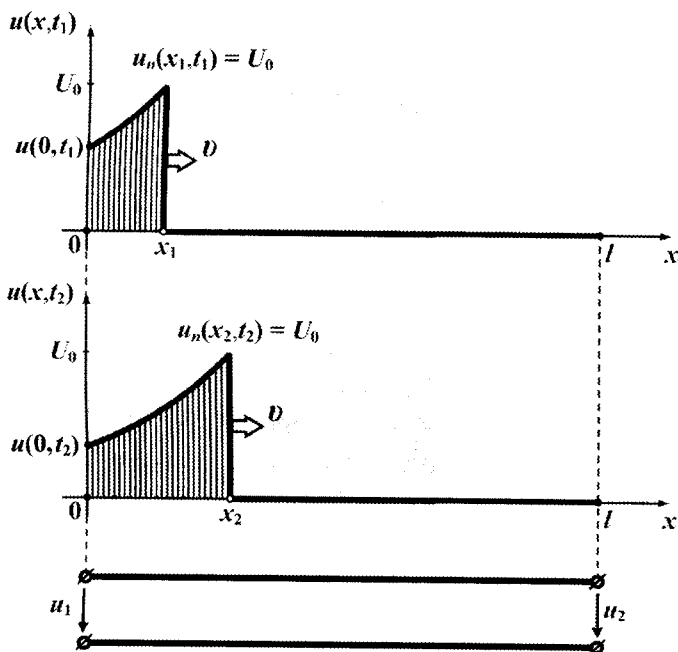


Рисунок 5.5

На вхідних затискачах у цей момент часу t_2 напруга зазнає зміни і складатиме

$$u_n(0, t_2) = U_0 e^{-\varepsilon t_2}.$$

Оскільки $t_1 < t_2$, то, як впливає із наведених формул,

$$u_n(0, t_1) > u_n(0, t_2).$$

Отже, функцію $u_n(x, t)$ прямої хвилі напруги можна аналітично описати таким чином:

$$u_n(x, t) = \begin{cases} U_0 e^{-\varepsilon\left(t-\frac{x}{v}\right)}, & x \leq vt, \\ 0, & x > vt. \end{cases} \quad (5.19)$$

Оскільки хвильовий опір Z_C лінії без втрат суто активний, то, відповідно до (5.14)

$$i_n = \frac{u_n}{Z_C},$$

пряма хвиля струму за формою відтворюватиме хвилю напруги

$$i_n(x, t) = \begin{cases} \frac{U_0}{Z_C} e^{-\varepsilon\left(t-\frac{x}{v}\right)}, & x \leq vt, \\ 0, & x > vt. \end{cases}$$

Так само потрібно проводити аналіз перехідних процесів і у випадках, якщо напруга зовнішнього джерела енергії буде змінюватися за іншим, аніж експоненціальний, законом.

Так, на рис. 5.7 показано графік розподілу прямої хвилі напруги для моменту часу t_1 вздовж лінії без втрат внаслідок під'єднання до неї джерела синусоїдної напруги (рис. 5.6).

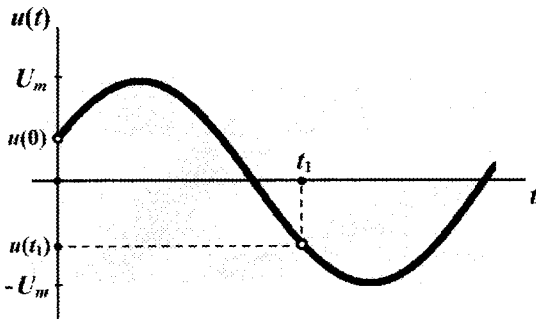


Рисунок 5.6

Отже, теоретично пряма хвиля напруги (струму) в лінії без втрат визначається виключно напругою зовнішнього джерела енергії, якщо тільки це джерело буде ідеальним.

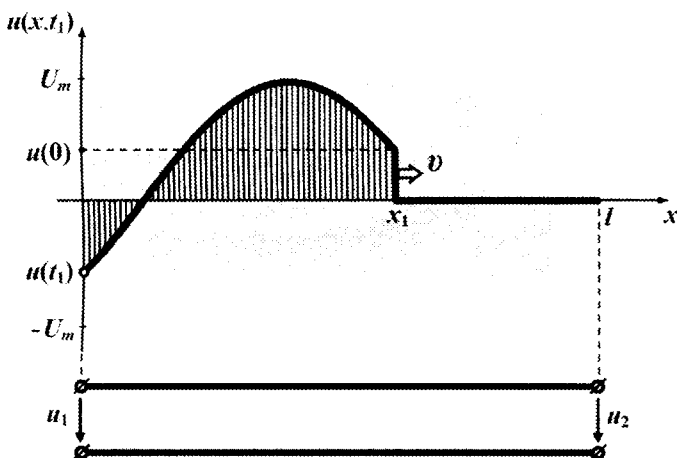


Рисунок 5.7

Однак наразі необхідно зауважити таке.

Якщо, наприклад, довжина лінії $l = 100$ км, то за фазової швидкості, порівняної із швидкістю світла, час руху прямої хвилі по цій лінії складатиме

$$t_p = \frac{l}{v} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \text{ с},$$

що є набагато меншим від періоду T коливань напруги зовнішнього джерела енергії з частотою $f = 50$ Гц і відповідно періодом $T = 0,02$ с,

$$t_p \ll T.$$

Практично це означає, що оскільки зміна повної фази джерела за весь час t_p руху прямої хвилі лінією становитиме всього біля 6° , то можна вважати, що протягом цього часу форма хвилі суттєвих змін не зазнає і залишиться практично прямокутною.

Якщо ж джерело напруги не буде ідеальним, то форма прямої хвилі залежатиме не тільки від закону зміни напруги цього джерела, але й від характеру та величини його внутрішнього опору. За певних умов ця залежність може бути помітною навіть протягом часу t_p .

Для прикладу розглянемо джерело з постійною е.р.с. та індуктивним внутрішнім опором (див. рис. 5.8), що під'єднують до вхідних затискачів лінії без втрат.

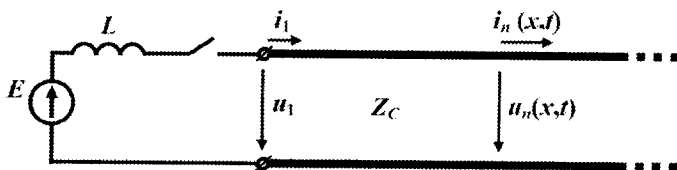


Рисунок 5.8

За другим законом Кірхгофа

$$L \frac{di_1}{dt} + u_1 = E, \quad (5.20)$$

де u_1 , i_1 – миттєві вхідні напруга й струм, вони ж – прямі хвилі напруги і струму на початку лінії

$$u_1 = u_n(0, t), \quad i_1 = i_n(0, t).$$

Оскільки, відповідно до (5.14),

$$u_n = Z_C i_n,$$

то рівняння (5.20) перепишемо з врахуванням цього співвідношення

$$L \frac{di_1}{dt} + Z_C i_1 = E. \quad (5.21)$$

Диференціальному рівнянню (5.21) відповідає еквівалентна електрична схема (рис. 5.9), в якій довгу лінію замінено на активний опір, що дорівнює хвильовому Z_C .

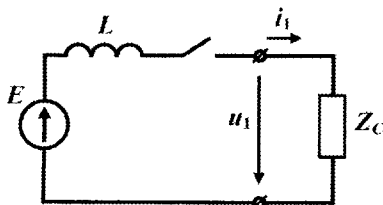


Рисунок 5.9

За нульових початкових умов розв'язком рівняння (5.21) є функція

$$i_1 = \frac{E}{Z_C} \left(1 - e^{-\frac{Z_C}{L}t} \right),$$

яка являтиме собою закон зміни миттєвого струму на початку лінії.

Вхідна напруга u_1 буде мати вигляд

$$u_1 = Z_C i_1 = E \left(1 - e^{-\frac{Z_C}{L}t} \right).$$

Графік цієї напруги від часу показано на рис. 5.10.

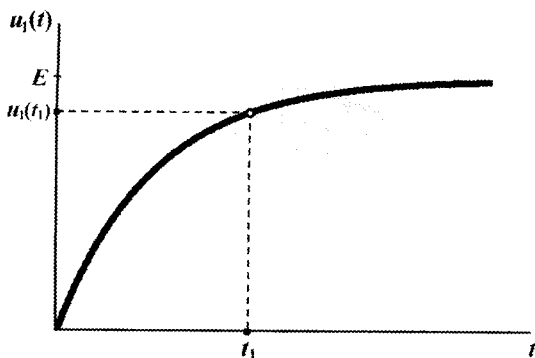


Рисунок 5.10

Тоді пряма хвиля напруги аналітично може бути описана функцією двох змінних

$$u_n(x,t) = \begin{cases} E \left[1 - e^{-\frac{Z_C}{L} \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right], & x \leq vt, \\ 0, & x > vt, \end{cases} \quad (5.22)$$

а струму

$$i_n(x,t) = \begin{cases} \frac{E}{Z_C} \left[1 - e^{-\frac{Z_C}{L} \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right], & x \leq vt, \\ 0, & x > vt. \end{cases} \quad (5.23)$$

Важливо відзначити, що форма прямої хвилі не залежить від навантаження лінії.

На рис. 5.11 наведено графік розподілу прямої напруги вздовж лінії в момент часу $t = t_1$, коли фронт хвилі пройшов відстань

$$x_1 = vt_1$$

від початку цієї лінії.

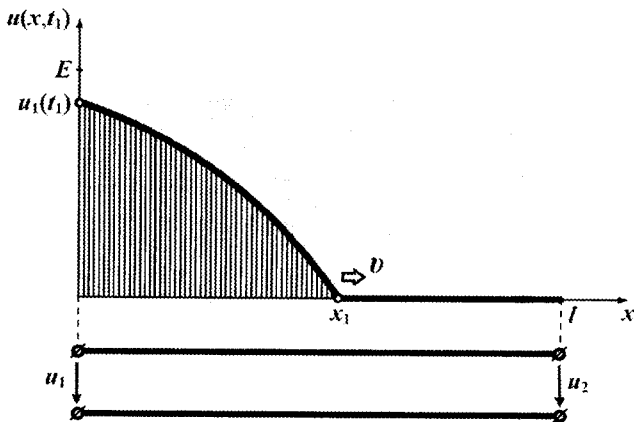


Рисунок 5.11

Перехід до еквівалентної схеми дозволяє визначити форму хвилі не тільки за будь-яких внутрішніх опорів джерел, але і за

наявності додаткових зосереджених навантажень на початку лінії, наприклад, як це показано на рис. 5.12.

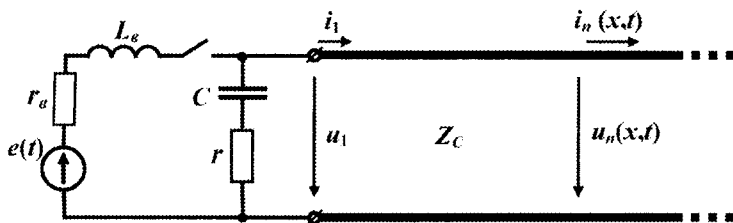


Рисунок 5.12

Оскільки для будь-якої лінії без втрат хвильовий опір Z_C завжди дійсне число, то в еквівалентних схемах таку лінію заміщують суто активним опором Z_C , утворюючи коло із зосередженими параметрами.

Так, наприклад, на рис. 5.13 показано еквівалентну схему довгої лінії, що була наведена на рис. 5.12.

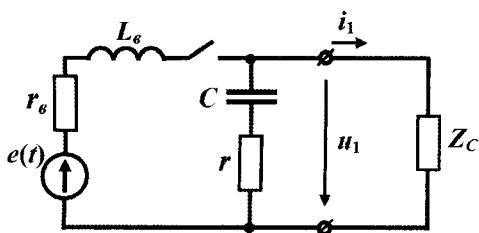


Рисунок 5.13

У цій еквівалентній схемі всі її елементи є зосередженими, тому для визначення вхідних напруги $u_1 = u_n(0,t)$ та струму $i_1 = i_n(0,t)$ можна використовувати будь-який з вже відомих методів розрахунку перехідного процесу в колі із зосередженими параметрами: класичний, операторний, частотний або ж метод, що базується на інтегралі Дюамеля.

Приклад 5.1

Знайти закон зміни прямої хвилі напруги $u_n(x, t)$ в довгій лінії, показаній на рис. 5.12, де $e(t) = E = 20$ В, $r_g = 200$ Ом, $r = 100$ Ом, $C = 200$ нФ, $Z_C = 600$ Ом. Індуктивність L_g дорівнює нулю.

Насамперед розрахуємо пряму хвилю напруги на початку лінії $u_1 = u_n(0, t)$ і зробимо це класичним методом, застосувавши цей метод до еквівалентної схеми, наведеної на рис. 5.13.

Оскільки $L_g = 0$, перехідний процес в колі описується диференціальним рівнянням першого порядку, тому повний розв'язок складається із суми примусової та вільної складових

$$u_1 = u_{1np} + u_{1в},$$

де u_{1np} – примусова складова напруги на вході лінії

$$u_{1np} = \frac{E}{r_g + Z_C} Z_C = 15 \text{ В};$$

$u_{1в}$ – її вільна складова

$$u_{1в} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння відшукаємо методом вхідного опору. Відповідно до цього методу комплексний вхідний опір кола

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ex}(j\omega) &= r_g + \frac{Z_C \left(r + \frac{1}{j\omega C} \right)}{Z_C + r + \frac{1}{j\omega C}} = r_g + \frac{Z_C (j\omega Cr + 1)}{(Z_C + r)j\omega C + 1} = \\ &= \frac{j\omega C [r_g(Z_C + r) + Z_C r] + (r_g + Z_C)}{j\omega C(Z_C + r) + 1} \end{aligned}$$

і тоді характеристичне рівняння буде мати вигляд

$$pC [r_g(Z_C + r) + Z_C r] + (r_g + Z_C) = 0,$$

Це рівняння має один корінь

$$p = -\frac{r_g + Z_C}{[r_g(Z_C + r) + Z_C r]C} = -2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином, напруга на початку лінії як функція від часу описуватиметься загальним виразом

$$u_1 = u_n(0, t) = 15 + Ae^{-2 \cdot 10^4 t},$$

де A – невідома стала інтегрування.

Наразі відшукаємо її.

В першу мить після комутації ($t = 0_+$) напруга на ємності

$$u_C(0) = 0,$$

тому через те, що струм джерела

$$i(0) = \frac{E}{r_s + \frac{r Z_C}{r + Z_C}} = 0,07 \text{ А},$$

напруга безпосередньо на вході лінії в цей момент часу буде дорівнювати

$$u_1(0) = u_n(0, 0) = i(0) \frac{r Z_C}{r + Z_C} = 6 \text{ В}.$$

Звідки стала інтегрування

$$A = u_1(0) - u_{1np} = 6 - 15 = -9 \text{ В}$$

і вхідна напруга

$$u_1 = u_n(0, t) = 15 - 9e^{-2 \cdot 10^4 t} \text{ В}.$$

Тоді пряма хвиля напруги являтиме собою функцію двох змінних і буде мати вигляд

$$u_n(x, t) = \begin{cases} 15 - 9e^{-2 \cdot 10^4 \left(t - \frac{x}{v}\right)} \text{ В}, & x \leq vt, \\ 0, & x > vt, \end{cases}$$

5.5 Відбиття хвилі від кінця довгої лінії

В однорідній лінії, що під'єднується до джерела за нульових початкових умов (до комутації напруга і струм відсутні), виникає тільки одна пряма хвиля напруги (струму), що поширюється вздовж лінії зі швидкістю v , доки вона не досягне кінця лінії. До-

сгннувши ж кінця лінії, хвиля, якщо навантаження неузгоджене, частково відбивається, що призводить до появи зворотної хвилі.

Як було показано вище, ця хвиля буде рухатися з тією ж швидкістю, що і пряма, тільки назустріч їй, тобто в зворотному напрямку: від кінця лінії до її початку.

Наразі розглянемо навантажену на активний опір r_n лінію без втрат із хвильовим опором Z_C , до якої під'єднують джерело постійної напруги U_0 з нульовим внутрішнім опором (рис. 5.14).

Джерело вмикається в момент часу $t=0$, внаслідок чого в лінії виникає пряма хвиля напруги прямокутної форми $u_n = U_0$.

Через час $t_1 = \frac{l}{v}$ вона досягає кінця довгої лінії, де частково відбивається і породжує зворотну хвилю u_3 .

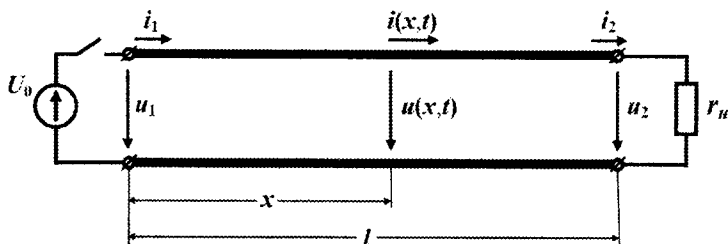


Рисунок 5.14

Напругу і струм в кінці лінії можна записати у вигляді:

$$u_2 = u_n + u_3, \quad i_2 = i_n - i_3. \quad (5.24)$$

Водночас, відповідно до закону Ома,

$$u_2 = r_n i_2.$$

Враховуючи, що

$$i_n = \frac{u_n}{Z_C}, \quad i_3 = \frac{u_3}{Z_C},$$

співвідношення (5.24) перепишемо

$$r_n i_2 = u_n + u_3, \quad Z_C i_2 = u_n - u_3.$$

Додамо та віднімемо ці рівняння, внаслідок чого отримаємо

$$2u_n = (r_n + Z_C)i_2, \quad 2u_3 = (r_n - Z_C)i_2.$$

Тоді коефіцієнт відбиття N , оскільки

$$N = \frac{u_3}{u_n},$$

набуває вигляду

$$N = \frac{r_n - Z_C}{r_n + Z_C}. \quad (5.25)$$

На рис. 5.15, а показано графіки розподілу вздовж лінії прямої і зворотної хвиль напруги та її сумарні значення

$$u = u_n + u_3.$$

Подібні побудови наведено і на рис. 5.15, б – тільки вже для струму, де враховано, що

$$i = i_n - i_3.$$

Зроблено ці побудови для деякого моменту часу t_1 , коли пряма хвиля, вже дійшовши до кінця лінії, утворила зворотну і та встигла подолати деяку відстань $l - x_1$.

Під час побудови було прийнято, що $r_n = 4Z_C$, тому $N = 0,6$.

Як видно з рисунків, до точок лінії з координатами $x < x_1$ зворотна хвиля ще не дійшла і сумарна напруга в них визначається виключно тільки напругою прямої хвилі

$$u = u_n = U_0.$$

Подібно і для струму

$$i = i_n = \frac{U_0}{Z_C}.$$

Однак в точках лінії, що мають координати

$$x > x_1,$$

миттєві напруга і струм формуються за рахунок накладання їх прямої та зворотної хвиль

$$u = u_n + u_3 = U_0 + 0,6U_0 = 1,6U_0,$$

$$i = i_n - i_3 = \frac{U_0}{Z_C} - 0,6 \frac{U_0}{Z_C} = 0,4 \frac{U_0}{Z_C}.$$

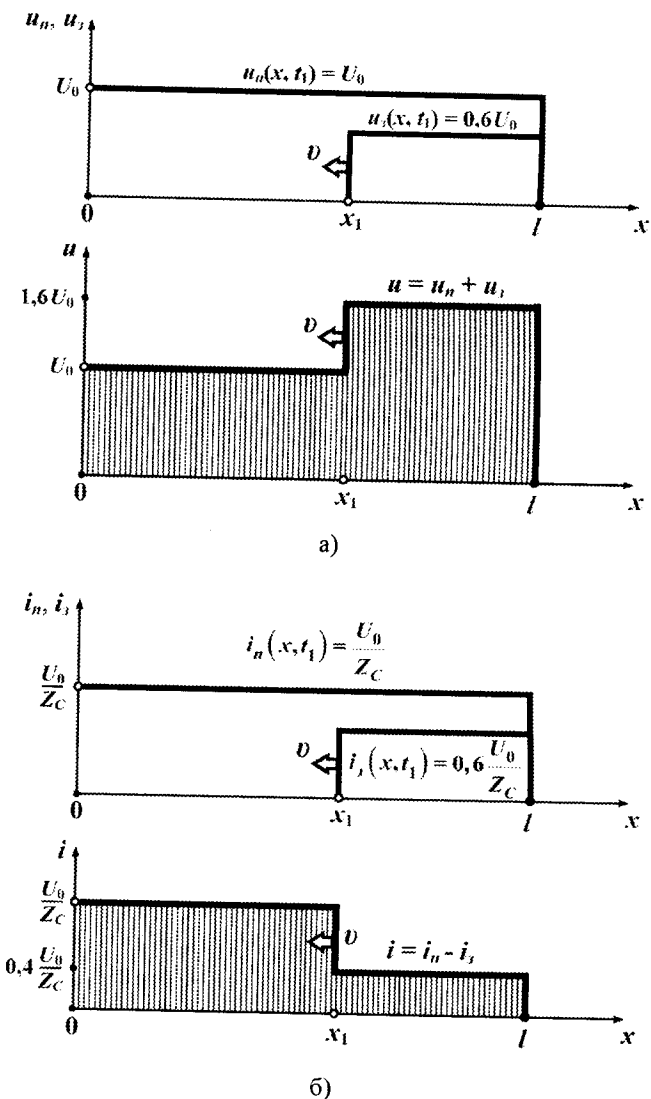


Рисунок 5.15

В окремому випадку, коли лінію розімкнено на кінці і має місце режим холостого ходу $r_n = \infty$, коефіцієнт відбиття

$$N = 1,$$

і хвиля відбивається повністю без зміни знаку, внаслідок чого миттєва напруга $u = u_n + u_3$ в лінії подвоюється, а струм $i = i_n - i_3$ спадає до нуля.

Якщо ж лінія на кінці короткозамкнена $r_n = 0$, то коефіцієнт відбиття для режиму короткого замикання

$$N = -1.$$

Це означає, що хвиля відбивається повністю зі зміною знака, тому в такому режимі напруга з приходом зворотної хвилі зменшується до нуля, а струм подвоюється.

З виразу (5.25) випливає: якщо опір навантаження перевищує хвильовий опір лінії $r_n > Z_C$, то коефіцієнт відбиття додатний ($N > 0$) і напруга в лінії після відбиття хвилі зростає, а струм зменшується, а якщо ж $r_n < Z_C$, то $N < 0$, і навпаки – напруга зменшується, а струм збільшується.

Коли лінію узгоджено із навантаженням $r_n = Z_C$, коефіцієнт відбиття дорівнює нулю $N = 0$ і зворотної хвилі немає.

Це означає, що як тільки-но пряма хвиля дійде до кінця лінії, в ній напруга і струм стануть постійними. Енергія ж, що переноситься прямою хвилею, повністю споживається опором навантаження r_n .

Перехідний процес в узгодженому режимі триває стільки часу, скільки необхідно для того, щоб пряма хвиля пройшла відстань від початку лінії до її кінця

$$t_n = \frac{l}{v}$$

і цей час є мінімальним порівняно з іншими режимами роботи.

5.6 Відбиття хвилі від кінця довільно навантаженої лінії

Нехай до лінії з хвильовим опором Z_C , що навантажена на пасивний двополосник, під'єднують джерело напруги (рис. 5.16),

внаслідок чого в ній утворюються заздалегідь відомі прямі хвилі напруги і струму.

Напруга на вході двополюсника водночас є напругою в кінці лінії і тому може бути записана у вигляді суми прямої $u_n(l, t)$ і зворотної $u_3(l, t)$ хвиль у цій точці, а струм – їх різниці

$$u_2 = u_n + u_3, \quad i_2 = i_n - i_3.$$

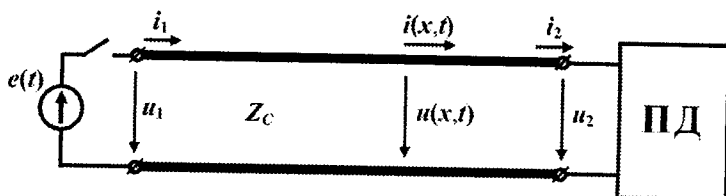


Рисунок 5.16

Якщо ж врахувати, що

$$u_n = Z_C i_n,$$

маємо

$$u_2 = u_n + u_3,$$

$$Z_C i_2 = u_n - u_3.$$

Звідки, склавши два останніх рівняння, отримаємо

$$2u_n = Z_C i_2 + u_2. \quad (5.26)$$

Рівняння (5.26) є основним розрахунковим рівнянням для визначення напруги u_2 і струму i_2 в точці відбиття хвилі.

Цьому рівнянню відповідає еквівалентна схема заміщення із зосередженими параметрами (рис. 5.17), яка дозволяє за допомогою вивчених раніше методів проводити аналіз перехідного процесу і визначати функції миттєвих напруги $u_2(t)$ та струму $i_2(t)$ в кінці лінії, що використовують для розрахунку зворотних хвиль $u_3(x, t)$ і $i_3(x, t)$.

Отже, для складання схеми заміщення і її розрахунку необхідно (див. рис. 5.17):

- з'єднати послідовно з активним опором, що дорівнює хви-

льовому опорі лінії Z_C , пасивний двополюсник з відомою внутрішньою структурою та параметрами елементів;

- в момент часу $t_1 = \frac{l}{v}$, який відповідає моменту приходу прямої хвилі до кінця довгої лінії, увімкнути до схеми заміщення генератор з напругою, що дорівнює подвоєній напрузі $2u_n$ прямої хвилі в кінці лінії.

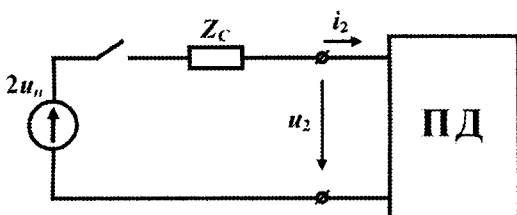


Рисунок 5.17

Відлік часу для розрахунку схеми заміщення краще розпочинати не з моменту t_1 , а з нуля, тому зручно ввести нову змінну часу τ , де

$$\tau = t - t_1.$$

Таким чином, розрахунок перехідного процесу в довгій лінії поділяють на два етапи, для кожного із яких складають свою еквівалентну схему заміщення із зосередженими параметрами: перший раз – для визначення прямої хвилі напруги (чи струму), другий – для знаходження її зворотної хвилі.

Приклад 5.2

Лінію без втрат з хвильовим опором $Z_C = 400$ Ом та активно-індуктивним навантаженням $r_n = 20$ Ом, $L_n = 1$ Гн під'єднують до джерела постійної напруги $U_0 = 420$ В (рис. 5.18).

Необхідно побудувати графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії після відбиття хвилі від кінця лінії ($t_1 < t < 2t_1$).

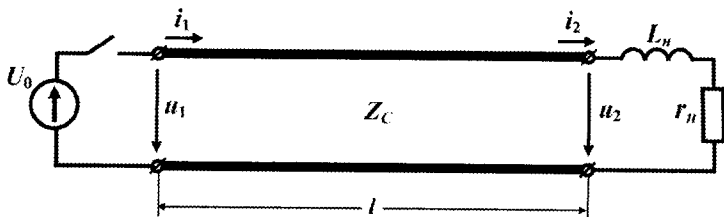


Рисунок 5.18

Для визначення напруги u_2 та струму i_2 в кінці лінії складемо схему заміщення (рис. 5.19) і запишемо для неї диференціальне рівняння за другим законом Кірхгофа

$$L_n \frac{di_2}{dt} + (Z_C + r_n) i_2 = 2u_n,$$

де $u_n = u_n(l, t)$ – пряма хвиля напруги в точці її відбиття.

Відповідно до аналізу, проведеного в п. 5.3,

$$u_n = U_0.$$

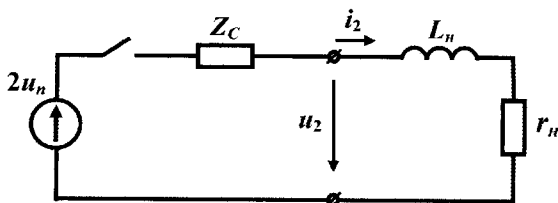


Рисунок 5.19

Розв'язком цього диференціального рівняння за нульової початкової умови $i_2(0) = 0$ буде

$$i_2 = \frac{2U_0}{Z_C + r_n} \left(1 - e^{-\frac{Z_C + r_n}{L} \tau} \right) \text{ А},$$

де $\tau = t - t_1$, а $t_1 = \frac{l}{v}$ – час, що потрібен для проходження прямої хвилі від початку лінії до її кінця.

Тоді в числових значеннях

$$i_2 = 2(1 - e^{-420\tau}) \text{ А.}$$

Миттєва напруга в кінці лінії (див. рис. 5.19)

$$u_2 = r_n i_2 + L_n \frac{di_2}{dt}$$

або в числових значеннях

$$u_2 = 40 + 800e^{-420\tau} \text{ В.}$$

Оскільки в будь-якій точці лінії

$$u = u_n + u_3,$$

то зворотна хвиля $u_3(x, \tau)$ в кінці довгої лінії, де $x = l$, буде дорівнювати

$$\begin{aligned} u_3(l, \tau) &= u_2 - u_n(l, \tau) = u_2 - U_0 = \\ &= 40 + 800e^{-420\tau} - 420 = -380 + 800e^{-420\tau} \text{ В.} \end{aligned}$$

Запишемо формулу для зворотної хвилі в довільній точці лінії як функцію двох змінних – часу τ і відстані y , яка відрховується від кінця лінії і в напрямку до її початку.

Тоді

$$u_3(y, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ -380 + 800e^{-420\left(\tau - \frac{y}{v}\right)}, & 0 \leq \tau \leq t_1. \end{cases}$$

Якщо ж повернутися до початкових змінних x та t , то, враховуючи, що $y = l - x$, а $\tau = t - t_1 = t - \frac{l}{v}$, отримаємо

$$u_3(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_1, \\ -380 + 800e^{-420\left(t + \frac{x}{v} - \frac{2l}{v}\right)}, & t_1 \leq t \leq 2t_1 \end{cases} \quad (5.27)$$

(див. рис. 5.20).

Коефіцієнт відбиття в кінці лінії

$$N = \frac{u_3}{u_n} = \frac{-380 + 800e^{-420\tau}}{420} = 1,9e^{-420\tau} - 0,9. \quad (5.28)$$

З виразу (5.28) випливає, що як тільки-но пряма хвиля досягає кінця лінії (в момент часу $\tau = 0$ або $t = t_1$), коефіцієнт відбиття в цей момент часу дорівнює одиниці

$$N(0) = 1.$$

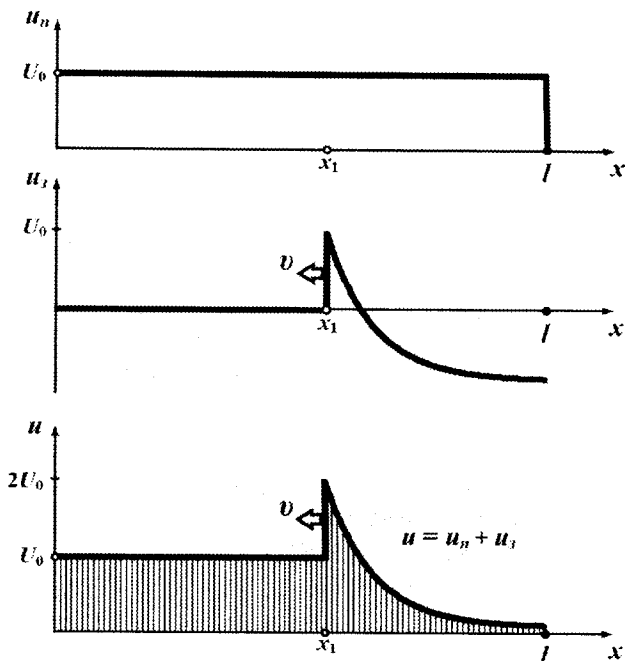


Рисунок 5.20

Це відповідає розімкненій лінії і пояснюється тим, що струм в індуктивності не може змінитися стрибком і, таким чином, пряма хвиля повністю відбивається без зміни знака.

Зі збільшенням часу τ фронт зворотної хвилі переміщується до початку лінії, а коефіцієнт відбиття та зворотна хвиля зменшуються.

На рис. 5.20 і на рис. 5.21 наведені графіки розподілу вздовж лінії прямої і зворотної хвиль напруги й струму, а також загальні

напруга $u = u_n + u_3$ та струм $i = i_n - i_3$. Зроблено це для моменту часу $\tau_1 = \frac{l_1}{v}$, коли відбита хвиля здодала відстань $l_1 = l - x_1$ від кінця лінії.

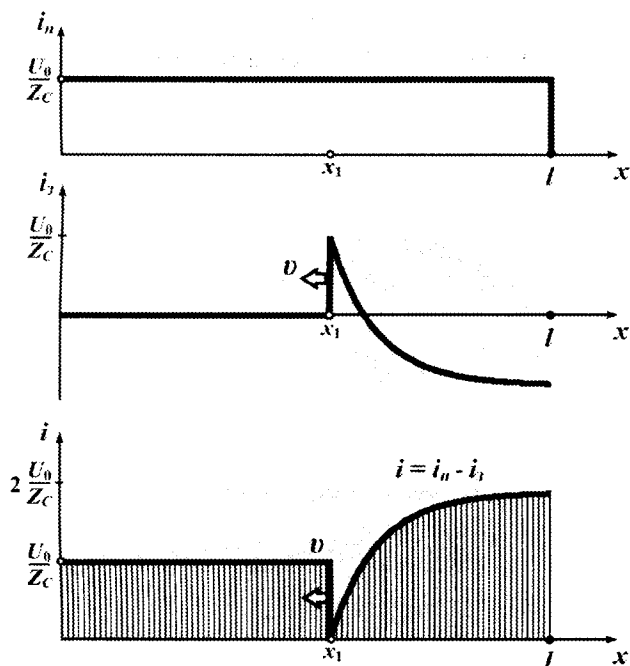


Рисунок 5.21

Зі збільшенням τ коефіцієнт відбиття асимптотично прямує до

$$N(\infty) = -0,9,$$

що відповідає такому значенню, коли лінія була б навантажена виключно тільки на активний опір r_n . Це пояснюється тим, що в режимі постійного струму опір індуктивності дорівнює нулю.

Даний приклад показує, що в момент падіння хвилі на індуктивність, напруга подвоюється, створюючи небезпеку пробоя

ізоляції котушки. Тому перші витки обмоток трансформаторів у відповідних випадках виконують зі значно посиленою ізоляцією.

5.7 Відбиття та заломлення хвиль в точці спряження двох однорідних ліній

Явище відбиття хвиль відбувається не тільки в кінці лінії за неузгодженого навантаження, але і в точках з'єднання двох однорідних довгих ліній, якщо тільки їх хвильові опори будуть різними.

Так, на практиці непоодинокі випадки, коли, наприклад, повітряна лінія зв'язку переходить в кабельну і навпаки. Необхідність такого переходу зумовлена зовнішніми обставинами, що постають наразі під час проходження лінії зв'язку по пересіченій місцевості з ріками, горами, за наявності високовольтних чи залізничних ліній тощо.

В таких випадках дві лінії виявляються ввімкненими послідовно. Хвилі, що рухаються по одній із них, потрапляючи на іншу, змінюють свою амплітуду і частково відбиваються від місця спряження ліній. Досить часто в тих місцях де лінії з'єднуються, додатково включають елементи із зосередженими параметрами – індуктивні котушки, конденсатори або резистори.

Їхнє призначення буває найрізноманітнішим. Це і обмеження перенапруг в лінії, і захист від струмів короткого замикання, і зменшення викривлення сигналів або спотворення інформації, і створення узгодженого режиму роботи тощо.

Додаткові елементи істотно впливають на характер перехідного процесу в системах з'єднаних довгих ліній.

Отже, розглянемо спочатку випадок двох послідовно з'єднаних довгих ліній без втрат з різними хвильовими опорами $Z_{C_1} \neq Z_{C_2}$, в одному випадку – $Z_{C_1} < Z_{C_2}$ (рис. 5.22, а), а в іншому – $Z_{C_1} > Z_{C_2}$ (рис. 5.22, б).

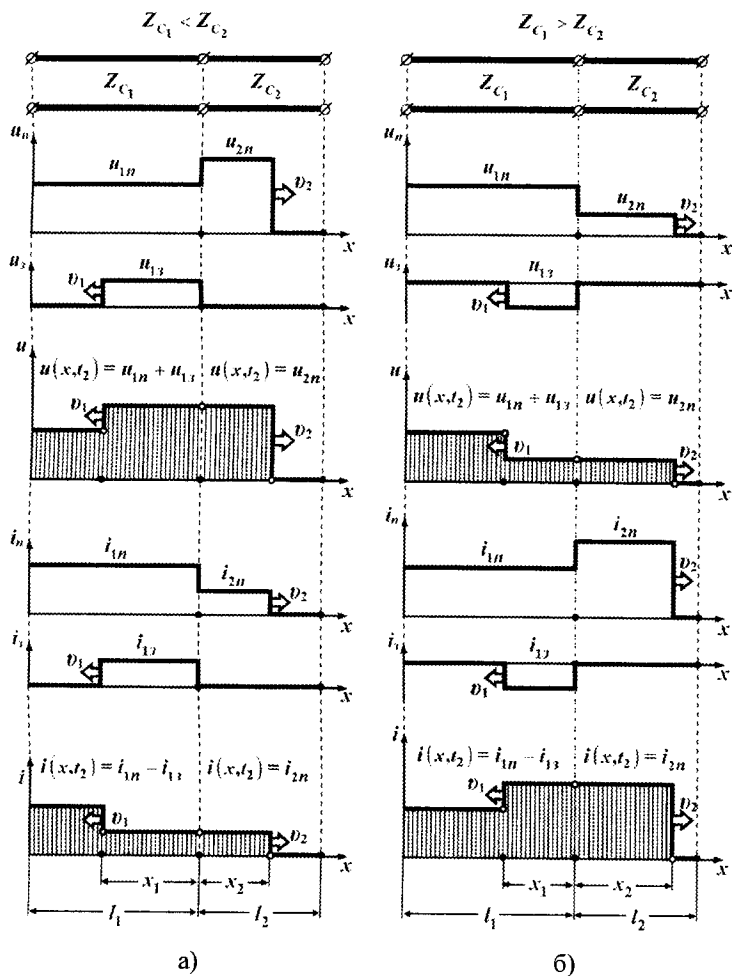


Рисунок 5.22

Нехай внаслідок ввімкнення до джерела постійної е.р.с. першої лінії, що має довжину l_1 , в ній утворилася пряма хвиля напруги прямокутної форми $u_{1n} = U_0$, яка здійснює рух вздовж

цієї лінії з швидкістю v_1 . В момент часу $t_1 = \frac{l_1}{v_1}$, пряма хвиля досягає кінця першої лінії.

Якщо на час, що передував приходу прямої хвилі u_{1n} до місця спряження з другою лінією, напруги в тій не було, то безпосередньо після приходу цієї хвилі на вхідних затискачах другої лінії утвориться пряма хвиля u_{2n} , яка розпочинає свій рух вздовж другої лінії від початку в напрямку її кінця із швидкістю v_2 . Цю хвилю називають *заломленою*.

Одночасно із появою в другій лінії заломленої хвилі u_{2n} в першій лінії внаслідок відбиття від місця спряження утвориться зворотна хвиля $u_{1з}$, якщо $Z_{C_1} \neq Z_{C_2}$.

Позначимо сумарні миттєві напруги і струми в кінці першої лінії через u_1 та i_1 , а на початку другої лінії – через u_2 й i_2 , відповідно.

В місці спряження мають виконуватися рівності

$$u_1 = u_2, \quad i_1 = i_2.$$

Тоді для моменту часу формування та руху заломленої хвилі можна записати

$$u_1 = u_{1n} + u_{1з} = u_2 = u_{2n},$$

$$i_1 = i_{1n} - i_{1з} = i_2 = i_{2n}$$

або

$$\left. \begin{aligned} u_{1n} + u_{1з} &= u_{2n} \\ u_{1n} - u_{1з} &= \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_2}} u_{2n} \end{aligned} \right\}, \quad (5.29)$$

оскільки

$$u_{1n} = Z_{C_1} i_{1n},$$

$$u_{1з} = Z_{C_1} i_{1з},$$

$$u_{2n} = Z_{C_2} i_{2n}.$$

Для визначення зворотних та заломлених хвиль через прямі хвилі напруги й струму в першій лінії з (5.29) одержимо

$$\left. \begin{aligned} u_{13} &= \frac{Z_{C_2} - Z_{C_1}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}} u_{1n} \\ i_{13} &= \frac{Z_{C_2} - Z_{C_1}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}} i_{1n} \\ u_{2n} &= \frac{2Z_{C_2}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}} u_{1n} \\ i_{2n} &= \frac{2Z_{C_1}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}} i_{1n} \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

З отриманих співвідношень випливає, що в даному випадку зворотні і заломлені хвилі мають таку ж форму, як і прямі хвилі.

Для характеристики проходження хвилі в місці спряження з однієї лінії до іншої вводять фізичну величину, яку називають *коефіцієнтом заломлення*.

Так, для напруги коефіцієнт заломлення визначають як

$$K_u = \frac{u_{2n}}{u_{1n}} = \frac{2Z_{C_2}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}}, \quad (5.31)$$

а для струму

$$K_i = \frac{i_{2n}}{i_{1n}} = \frac{2Z_{C_1}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}}. \quad (5.32)$$

Коефіцієнт відбиття ж дорівнює

$$N = \frac{u_{13}}{u_{1n}} = \frac{Z_{C_2} - Z_{C_1}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}}. \quad (5.33)$$

Останній вираз показує, що друга лінія відносно першої у визначенні зворотних хвиль поводить себе як зосереджений активний опір Z_{C_2} .

Коефіцієнти заломлення можна записати через коефіцієнт відбиття

$$K_u = 1 + N, \quad K_i = 1 - N. \quad (5.34)$$

На рис. 5.22 а і б показано графіки розподілу хвиль напруги і струму в момент часу t_2 , коли зворотна хвиля пройшла від місця спряження ліній відстань x_1 .

Легко помітити, і про це вже було сказано, що в загальному випадку швидкості руху хвиль в лініях можуть відрізнятися одна від одної, тому будуть різними і відстані x_1 та x_2 .

З виразів (5.30), і це відображено на рис. 5.22, випливає, що за умови $Z_{C_1} < Z_{C_2}$ (наприклад, під час переходу хвилі з кабельної лінії в повітряну) напруга заломленої хвилі буде більшою від напруги прямої хвилі і може перевищувати її майже вдвічі.

І навпаки, якщо $Z_{C_1} > Z_{C_2}$, то заломлена хвиля напруги буде меншою, аніж пряма.

Приклад 5.3

Пряма прямокутна хвиля напруги $U_0 = 110$ кВ переходить з повітряної лінії, хвильовий опір якої $Z_{C_1} = 400$ Ом, на дві кабельні лінії з $Z_{C_2} = 50$ Ом та $Z_{C_3} = 75$ Ом, відповідно (рис. 5.23).

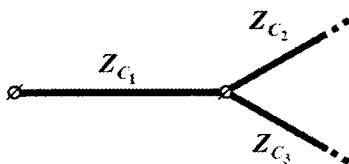


Рисунок 5.23

Потрібно визначити величини заломлених хвиль напруги і струму в кабельних лініях.

Навантаженням першої лінії слугують дві паралельно з'єднані кабельні лінії

$$r_n = \frac{Z_{C_2} Z_{C_3}}{Z_{C_2} + Z_{C_3}} = 30 \text{ Ом.}$$

Тоді коефіцієнт відбиття для першої лінії

$$N = \frac{r_n - Z_{C1}}{r_n + Z_{C1}} = -0,86.$$

Це дозволяє розрахувати значення напруги зворотної хвилі в місці її утворення, тобто в точці спряження

$$u_{13} = Nu_{1n} = NU_0 = -94,6 \text{ кВ}$$

і визначити напругу в кінці першої лінії.

$$u_1 = u_{1n} + u_{13} = 110 - 94,6 = 15,4 \text{ кВ.}$$

Ця ж напруга буде заломленою хвилею водночас в обох кабельних лініях, оскільки ті з'єднані паралельно,

$$u_{2n} = u_{3n} = 15,4 \text{ кВ.}$$

Тоді струми в кабельних лініях

$$i_{2n} = \frac{u_{2n}}{Z_{C2}} = 308 \text{ А}, \quad i_{3n} = \frac{u_{3n}}{Z_{C3}} = 205 \text{ А.}$$

Приклад 5.4

Визначити величину активного опору r (рис. 5.24, а), який потрібно додатково включити між повітряною та двома кабельними лініями, розглянутими в попередньому прикладі (див. рис. 5.23), щоб в повітряній лінії не було зворотної хвилі. Окрім того, знайти заломлені хвилі напруги і струму в обох кабельних лініях.

Розрахункова еквівалентна схема для аналізу перехідного процесу в кінці лінії показана на рис. 5.24, б.

Як видно з схеми, навантаженням повітряної лінії є опір, що дорівнює

$$r_n = r + \frac{Z_{C2} Z_{C3}}{Z_{C2} + Z_{C3}}.$$

Відбиття хвилі в повітряній лінії тоді не буде, якщо тільки

$$r_n = Z_{C1},$$

і в цьому випадку коефіцієнт відбиття

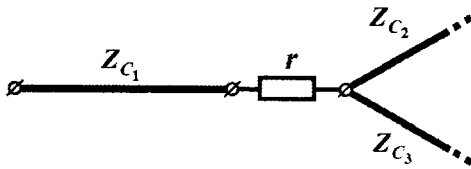
$$N = \frac{r_n - Z_{C1}}{r_n + Z_{C1}} = 0.$$

Тому значення опору r визначимо з умови

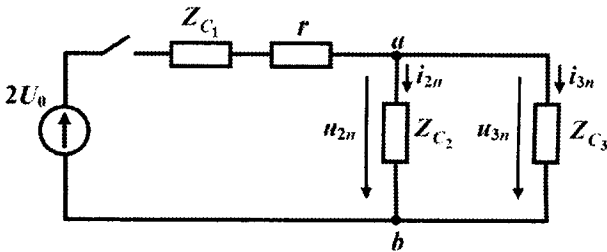
$$Z_{C1} = r + \frac{Z_{C2} Z_{C3}}{Z_{C2} + Z_{C3}},$$

звідки

$$r = Z_{C1} - \frac{Z_{C2} Z_{C3}}{Z_{C2} + Z_{C3}} = 400 - \frac{50 \cdot 75}{50 + 75} = 370 \text{ Ом.}$$



а)



б)

Рисунок 5.24

Напряга заломлених хвиль в кабельних лініях дорівнює напрузі між вузлами a і b в еквівалентній схемі (див. рис. 5.24, б), тому

$$u_{2n} = u_{3n} = \frac{2U_0 \frac{Z_{C2} Z_{C3}}{Z_{C2} + Z_{C3}}}{Z_{C1} + r + \frac{Z_{C2} Z_{C3}}{Z_{C2} + Z_{C3}}} = 8,25 \text{ кВ,}$$

а струми в кабельних лініях дорівнюватимуть

$$i_{2n} = \frac{u_{2n}}{Z_{C_2}} = \frac{8,25 \cdot 10^3}{50} = 165 \text{ A,}$$

$$i_{3n} = \frac{u_{3n}}{Z_{C_3}} = \frac{8,25 \cdot 10^3}{75} = 110 \text{ A.}$$

Наведені приклади показують, що увімкнення додаткового активного опору в місці з'єднання ліній помітно знижує рівень інтенсивності заломлених хвиль.

Тепер розглянемо рух хвиль в системі з'єднаних ліній, коли в місці з'єднання цих ліній додатково включено зосереджену індуктивність L (рис. 5.25). Прямою хвилею u_{1n} при цьому нехай буде хвиля прямокутної форми з напругою U_0 .

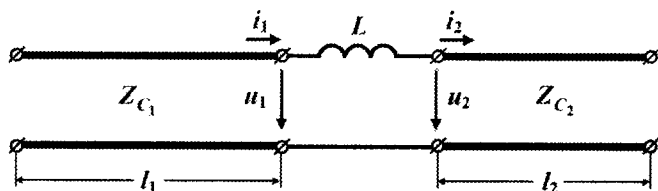


Рисунок 5.25

Насамперед складемо розрахункову еквівалентну схему для знаходження перехідного процесу в кінці першої лінії (рис. 5.26).

Для цієї схеми відповідно до другого закону Кірхгофа можна записати диференціальне рівняння

$$L \frac{di_1}{dt} + (Z_{C_1} + Z_{C_2}) i_1 = 2u_{1n},$$

розв'язком якого за нульових початкових умов буде струм

$$i_1 = \frac{2u_{1n}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} \left(1 - e^{-\frac{Z_{C_1} + Z_{C_2}}{L} \tau} \right), \quad (5.35)$$

де τ – час, який відраховують з моменту приходу прямої хвилі до кінця першої лінії.

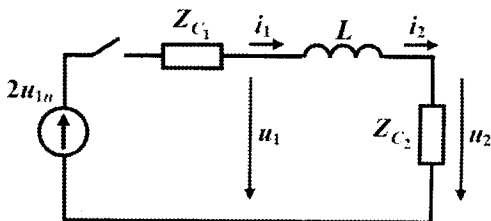


Рисунок 5.26

Оскільки, як видно з еквівалентної схеми (рис. 5.26), напруга в кінці першої лінії

$$u_1 = 2u_{1n} - Z_{C1}i_1,$$

то, врахувавши (5.35), після нескладних перетворень отримаємо

$$u_1 = 2u_{1n} \left(\frac{Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} + \frac{Z_{C1}}{Z_{C1} + Z_{C2}} e^{-\frac{Z_{C1} + Z_{C2}}{L} \tau} \right). \quad (5.36)$$

Це дозволяє визначити рівень зворотної хвилі напруги в кінці першої лінії

$$u_{1z} = u_1 - u_{1n} = u_{1n} \left(\frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} + \frac{2Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} e^{-\frac{Z_{C1} + Z_{C2}}{L} \tau} \right). \quad (5.37)$$

Оскільки індуктивність з'єднана послідовно і є зосередженою, в точках з'єднання має місце рівність

$$i_1 = i_2,$$

тому заломлену хвилю на початку другої лінії можна знайти із співвідношення

$$u_2 = u_{2n} = Z_{C2}i_2 = Z_{C2}i_1 = \frac{2u_{1n}Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \left(1 - e^{-\frac{Z_{C1} + Z_{C2}}{L} \tau} \right). \quad (5.38)$$

Як видно із рівнянь (5.37) та (5.38), в момент часу $\tau = 0$ (а на цей момент пряма хвиля першої лінії, подолавши відстань l_1 , щойно досягла місця з'єднання) для прямої, зворотної та заломленої хвиль можна записати $u_{1z} = u_{1n}$, $u_{2n} = 0$. Це означає, що ко-

ефіцієнт відбиття в цей момент часу дорівнює одиниці $N(0)=1$, тобто лінія поводить ся як лінія, яку розімкнено на кінці.

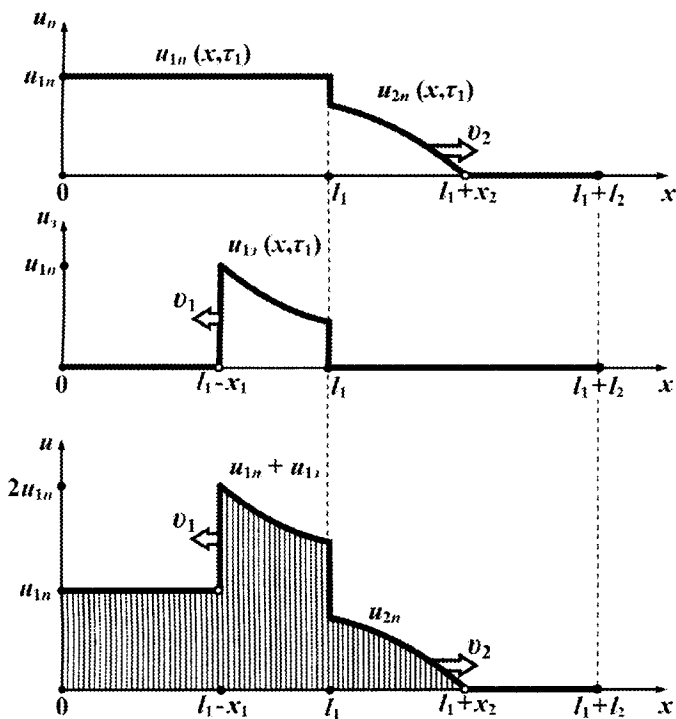


Рисунок 5.27

Далі з перебігом часу зворотна і заломлена хвилі будуть рухатися від місця свого утворення в протилежних напрямках і з різними швидкостями: перша хвиля – зі швидкістю v_1 в напрямку початку першої лінії, а друга хвиля – в напрямку кінця другої лінії зі швидкістю v_2 . Відбуватися це буде так, як показано на рис. 5.27 для напруг та рис. 5.28 для струмів.

З рисунків (рис. 5.27, рис. 5.28) видно, що внаслідок присутності реактивної котушки фронт заломлених хвиль набуває

пологого характеру навіть при прямовисному фронті прямих хвиль, однак напруга на початкових витках котушки в перші моменти часу подвоюється.

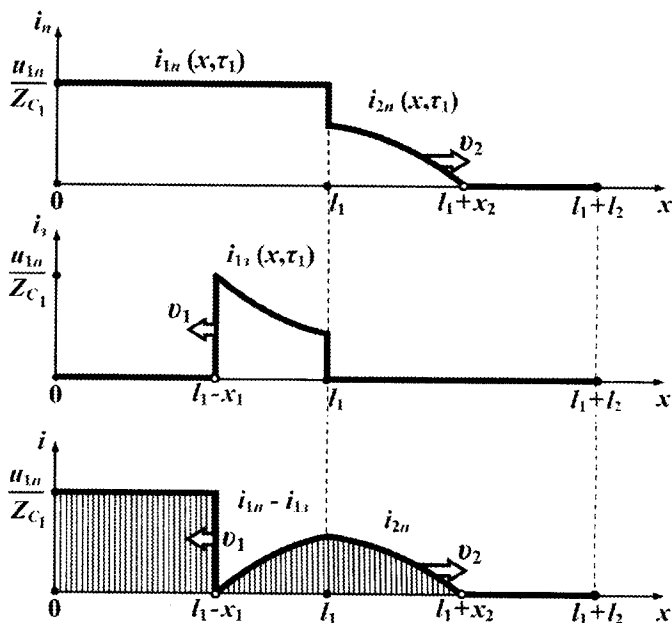


Рисунок 5.28

5.8 Багаторазове відбиття хвиль із прямокутним фронтом

В довгій лінії, якщо тільки її хвильовий опір не узгоджено водночас ні з опором навантаження $Z_C \neq Z_n$, ані з внутрішнім опором генератора $Z_C \neq Z_g$, під час перехідного процесу спостерігається явище багаторазового відбиття хвиль і від кінця довгої лінії, і від її початку.

Для з'ясування характеру цього явища розглянемо приклад.

Нехай задано лінію без втрат, навантажену на активний опір r_n , до якої вмикають джерело постійної напруги з внутрішнім опором r_g (рис. 5.29).

Відомо, що лінія є неузгодженою з обох боків, тобто

$$Z_C \neq r_g, \quad Z_C \neq r_n.$$

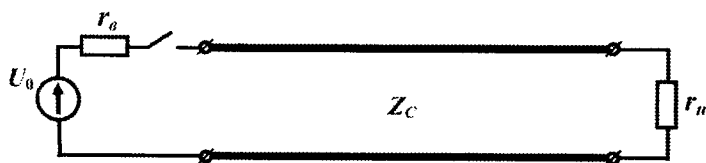


Рисунок 5.29

Знайдемо коефіцієнти відбиття цієї лінії від її початку N_1 (у випадку зворотного руху хвилі)

$$N_1 = \frac{r_g - Z_C}{r_g + Z_C},$$

та від кінця N_2 (для прямої хвилі)

$$N_2 = \frac{r_n - Z_C}{r_n + Z_C}.$$

Оскільки *перші* прямі хвилі напруги й струму відповідно до (5.18) дорівнюють

$$u_n^{(1)} = \frac{U_0 Z_C}{Z_C + r_g},$$

$$i_n^{(1)} = \frac{U_0}{Z_C + r_g},$$

то їх зворотними хвилями будуть

$$u_3^{(1)} = N_2 u_n^{(1)},$$

$$i_3^{(1)} = N_2 i_n^{(1)},$$

що на даній стадії перехідного процесу з'являться вперше.

Ці перші зворотні хвилі напруги й струму рухатимуться з тією ж швидкістю v тільки в протилежному відносно прямих хвиль напрямку, переміщуючись від кінця лінії до її початку. В

момент часу $t = \frac{2l}{v}$, дійшовши до вхідних затискачів, там через неузгодженість лінії вони знову відіб'ються, але вже від генератора.

Внаслідок цього утвориться ще одна (друга за рахунком) пряма хвиля.

Так, для хвилі напруги

$$u_n^{(2)} = N_1 u_3^{(1)} = N_1 N_2 u_n^{(1)},$$

а для хвилі струму

$$i_n^{(2)} = N_1 i_3^{(1)} = N_1 N_2 i_n^{(1)}.$$

Оскільки явище відбиття надалі буде багаторазово повторюватися, то аналогічно можна визначити і всі наступні прямі та зворотні хвилі напруги чи струму. Зокрема для напруги маємо

$$u_3^{(2)} = N_2 u_n^{(2)} = N_1 N_2^2 u_n^{(1)},$$

$$u_n^{(3)} = N_1 u_3^{(2)} = N_1^2 N_2^2 u_n^{(1)},$$

...

$$u_3^{(k)} = N_2 u_n^{(k)} = N_1^{k-1} N_2^k u_n^{(1)},$$

$$u_n^{(k+1)} = N_1 u_3^{(k)} = N_1^k N_2^k u_n^{(1)},$$

де $u_3^{(k)}$ – k -та зворотна хвиля напруги, $u_n^{(k+1)}$ – її наступна $k+1$ -а пряма хвиля.

Загальна миттєва напруга в будь-якій точці лінії визначається як сума всіх її прямих і зворотних хвиль, що вже існують на даний поточний момент часу t в цій точці.

Так, для моменту часу $\frac{2(k-1)l}{v} \leq t < \frac{(2k-1)l}{v}$ загальна напруга дорівнює

$$u = \left(u_n^{(1)} + u_3^{(1)} \right) + \left(u_n^{(2)} + u_3^{(2)} \right) + \dots + u_n^{(k)} = \sum_{m=1}^{k-1} \left(u_n^{(m)} + u_3^{(m)} \right) + u_n^{(k)},$$

а для моменту часу $\frac{(2k-1)l}{v} \leq t < \frac{2kl}{v}$

$$u = (u_n^{(1)} + u_3^{(1)}) + (u_n^{(2)} + u_3^{(2)}) + \dots + (u_n^{(k)} + u_3^{(k)}) = \sum_{m=1}^k (u_n^{(m)} + u_3^{(m)}).$$

Загальний миттєвий струм в будь-якій точці лінії визначається як сума різниць

$$i = (i_n^{(1)} - i_3^{(1)}) + (i_n^{(2)} - i_3^{(2)}) + \dots + i_n^{(k)} = \sum_{m=1}^{k-1} (i_n^{(m)} - i_3^{(m)}) + i_n^{(k)}$$

для моменту часу $\frac{2(k-1)l}{v} \leq t < \frac{(2k-1)l}{v}$ та

$$i = (i_n^{(1)} - i_3^{(1)}) + (i_n^{(2)} - i_3^{(2)}) + \dots + (i_n^{(k)} - i_3^{(k)}) = \sum_{m=1}^k (i_n^{(m)} - i_3^{(m)})$$

для $\frac{(2k-1)l}{v} \leq t < \frac{2kl}{v}$.

З вищенаведених співвідношень випливає, що загальні напруга u та струм i визначаються своїми першими прямими хвилями $u_n^{(1)}$ та $i_n^{(1)}$ і їм пропорційні

$$u = n_u^{(k)} u_n^{(1)}, \quad (5.39)$$

$$i = n_i^{(k)} i_n^{(1)}, \quad (5.40)$$

де $n_u^{(k)}$ і $n_i^{(k)}$ – коефіцієнти, які залежать від обох коефіцієнтів відбиття та кількості $k = 1, 2, \dots$ прямих та зворотних хвиль в лінії на даний момент часу t .

У випадку наявності k -ої зворотної хвилі

$$n_u^{(k)} = (1 + N_2) \sum_{m=0}^{k-1} (N_1 N_2)^m, \quad (5.41)$$

$$n_i^{(k)} = (1 - N_2) \sum_{m=0}^{k-1} (N_1 N_2)^m, \quad (5.42)$$

якщо ж ця хвиля відсутня, то

$$n_u^{(k)} = (1 + N_2) \sum_{m=0}^{k-1} (N_1 N_2)^m - N_1^{k-1} N_2^k, \quad (5.43)$$

$$n_i^{(k)} = (1 - N_2) \sum_{m=0}^{k-1} (N_1 N_2)^m - N_1^{k-1} N_2^k, \quad (5.44)$$

відповідно.

Для розрахунку загальних миттєвих напруг чи струмів в лінії та їх аналізу зручно користуватися *діаграмою руху хвиль*, яка показана на рис. 5.30. На цій діаграмі по осі абсцис відкладають відстань від початку лінії x , а по осі ординат – час t . За такої побудови рух прямих і зворотних хвиль вздовж лінії буде відображено у графічний спосіб.

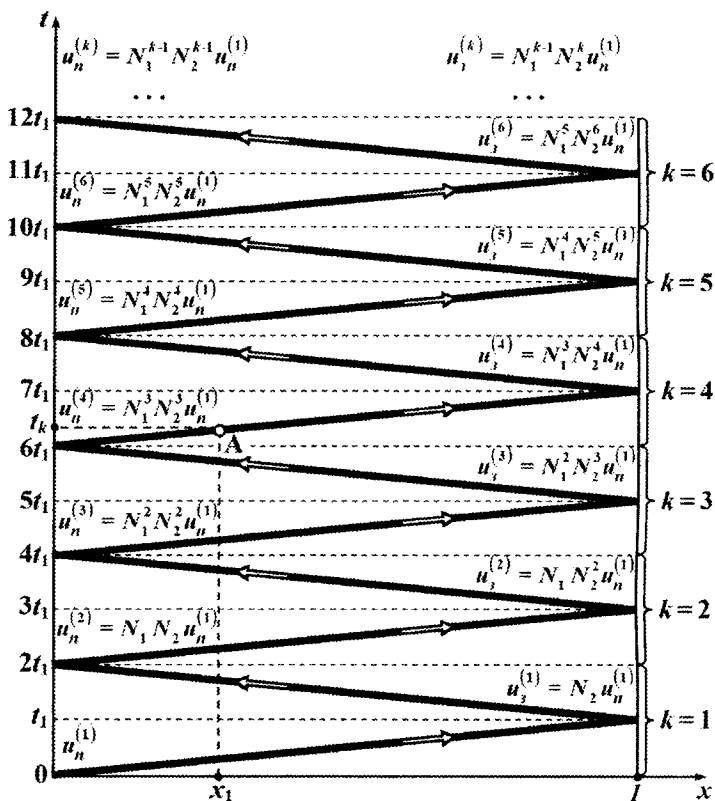


Рисунок 5.30

Якщо, наприклад, необхідно визначити миттєве значення результуючої напруги в точці, що знаходиться на відстані x_1 від початку лінії в деякий поточний момент часу t_k , то спочатку відкладають точку A на діаграмі руху, з якої безпосередньо визначають кількість прямих та зворотних хвиль в лінії на цей момент часу, тобто число k .

Потім на підставі співвідношень (5.39) - (5.44) розраховують загальні напругу і струм в лінії через перші прямі хвилі $u_n^{(1)}$ й $i_n^{(1)}$.

Так, на прикладі рис. 5.30 видно, що до моменту часу t_k точку A пройшло 4 прямих і 3 зворотних хвилі, тому, оскільки $k = 4$, відповідно до (5.43), коефіцієнт

$$n_u^{(4)} = (1 + N_2) \sum_{m=0}^3 (N_1 N_2)^m - N_1^3 N_2^4,$$

і загальна напруга в точці x_1 , як це впливає із (5.39),

$$u(x_1, t_k) = n_u^{(4)} u_n^{(1)}.$$

Аналогічно для струму

$$i(x_1, t_k) = n_i^{(4)} i_n^{(1)},$$

з тією тільки різницею, що, як це впливає із співвідношення (5.44), коефіцієнт

$$n_i^{(4)} = (1 - N_2) \sum_{m=0}^3 (N_1 N_2)^m - N_1^3 N_2^4.$$

Приклад 5.5

Побудувати графіки зміни струму i_1 на початку лінії і напруги u_2 в її кінці в залежності від часу, якщо до джерела $U_0 = 10$ кВ з внутрішнім опором $r_g = 0$ під'єднують лінію без втрат з хвильовим опором $Z_C = 400$ Ом, яку навантажено на активний опір

r_n , де: а) $r_n = 1600$ Ом; б) $r_n = \frac{400}{3}$ Ом.

а) насамперед визначимо коефіцієнти відбиття

$$N_1 = \frac{r_g - Z_C}{r_g + Z_C} = \frac{0 - 400}{0 + 400} = -1,$$

$$N_2 = \frac{r_n - Z_C}{r_n + Z_C} = \frac{1600 - 400}{1600 + 400} = 0,6.$$

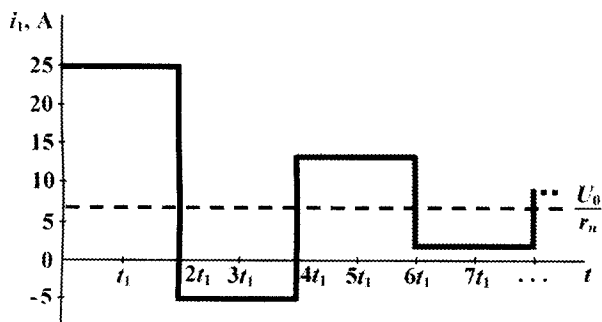
Розрахунок даної задачі проведемо, скориставшись діаграмою руху (рис. 5.30), результати обчислень запишемо у вигляді таблиці (див. табл. 5.1), а після цього за даними з таблиці побудуємо графіки функцій струму $i_1(t)$ (рис. 5.31, а) та напруги $u_2(t)$ (рис. 5.31, б).

Таблиця 5.1

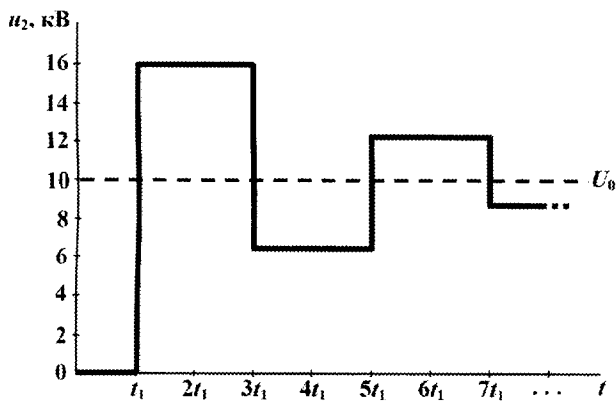
Проміжок часу	i_1, A	$u_2, \text{кВ}$
$0 \leq t < t_1$	$i_n^{(1)} = \frac{U_0}{Z_C} = 25$	0
$t_1 \leq t < 2t_1$	$i_n^{(1)} = 25$	$u_n^{(1)} + u_3^{(1)} = 10 + 6 = 16$
$2t_1 \leq t < 3t_1$	$i_n^{(1)} - i_3^{(1)} + i_n^{(2)} =$ $= 25 - 15 - 15 = -5$	$u_n^{(1)} + u_3^{(1)} = 16$
$3t_1 \leq t < 4t_1$	$i_n^{(1)} - i_3^{(1)} + i_n^{(2)} = -5$	$u_n^{(1)} + u_3^{(1)} + u_n^{(2)} + u_3^{(2)} =$ $= 10 - 6 + 6 - 3,6 = 6,4$
$4t_1 \leq t < 5t_1$	$\sum_{m=1}^2 (i_n^{(m)} - i_3^{(m)}) + i_n^{(3)} = 13$	$\sum_{m=1}^2 (u_n^{(m)} + u_3^{(m)}) = 6,4$
$5t_1 \leq t < 6t_1$	$\sum_{m=1}^2 (i_n^{(m)} - i_3^{(m)}) + i_n^{(3)} = 13$	$\sum_{m=1}^3 (u_n^{(m)} + u_3^{(m)}) = 12,16$
$6t_1 \leq t < 7t_1$	$\sum_{m=1}^3 (i_n^{(m)} - i_3^{(m)}) + i_n^{(4)} = 2,2$	$\sum_{m=1}^3 (u_n^{(m)} + u_3^{(m)}) = 12,16$
...
$t \rightarrow \infty$	$\frac{U_0}{r_n} = 6,25$	$U_0 = 10$

Як бачимо, з перебігом часу обидві фізичні величини наближаються до своїх усталених значень: напруга u_2 – до U_0 , а струм

$$i_1 \text{ – до } \frac{U_0}{r_n}.$$



а)



б)

Рисунок 5.31

б) визначимо тепер коефіцієнти відбиття для другого випадку. Якщо з боку початку лінії коефіцієнт відбиття N_1 зміни не знає

$$N_1 = \frac{r_n - Z_C}{r_n + Z_C} = -1,$$

то внаслідок зміни опору навантаження для $r_n = \frac{400}{3}$ Ом коефіцієнт відбиття в кінці лінії зміниться

$$N_2 = \frac{r_n - Z_C}{r_n + Z_C} = \frac{\frac{400}{3} - 400}{\frac{400}{3} + 400} = -0,5$$

і набуде від'ємного значення.

Як і в попередньому випадку, результати обчислень зведемо до таблиці (табл. 5.2). За цими даними побудуємо графіки функцій струму $i_1(t)$ (рис. 5.32, а) та напруги $u_2(t)$ (рис. 5.32, б).

Таблиця 5.2

Проміжок часу	i_1, A	$u_2, \text{кВ}$
$0 \leq t < t_1$	25	0
$t_1 \leq t < 2t_1$	25	5
$2t_1 \leq t < 3t_1$	50	5
$3t_1 \leq t < 4t_1$	50	7,5
$4t_1 \leq t < 5t_1$	62,5	7,5
$5t_1 \leq t < 6t_1$	62,5	8,875
$6t_1 \leq t < 7t_1$	68,75	8,875
...
$t \rightarrow \infty$	$\frac{U_0}{r_n} = 75$	$U_0 = 10$

І в цьому випадку з перебігом часу напруга u_2 наближається до свого усталеного значення U_0 , а струм i_1 – до $\frac{U_0}{r_n}$. Однак характер наближення, як видно з рисунка, дещо інший: замість коливання навколо асимптотичних значень, як це було в поперед-

ньому випадку, в даному випадку має місце послідовне наближення до них.

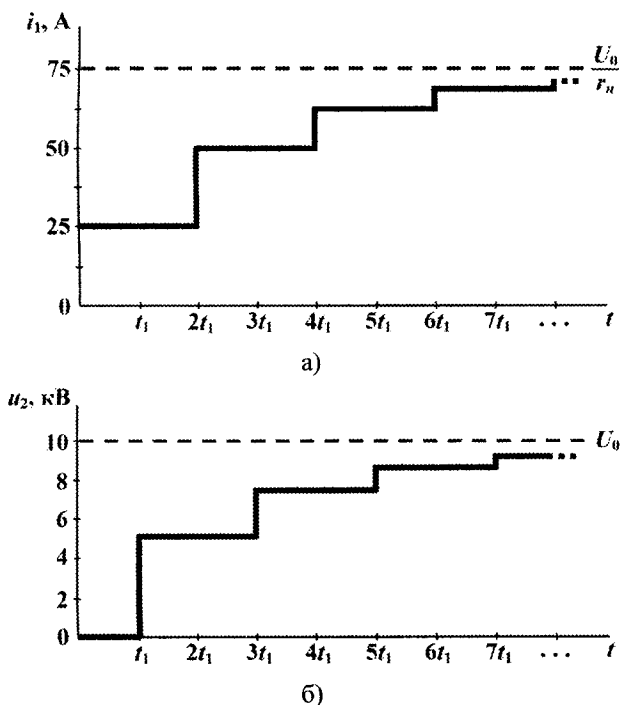


Рисунок 5.32

Розглянемо деякі окремі прості випадки багаторазового відбиття хвиль в довгих лініях.

1. Розімкнену на кінці лінії (холостий хід) під'єднують до ідеального ($r_g = 0$) джерела постійної напруги U_0 (рис. 5.33).

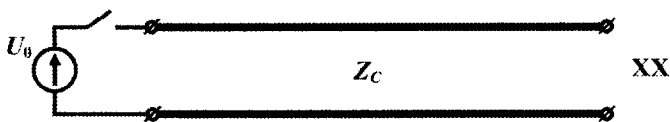


Рисунок 5.33

В цьому випадку коефіцієнти відбиття лінії дорівнюють

$$N_1 = -1, \quad N_2 = 1.$$

Побудуємо графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії для різних інтервалів часу (рис. 5.34).

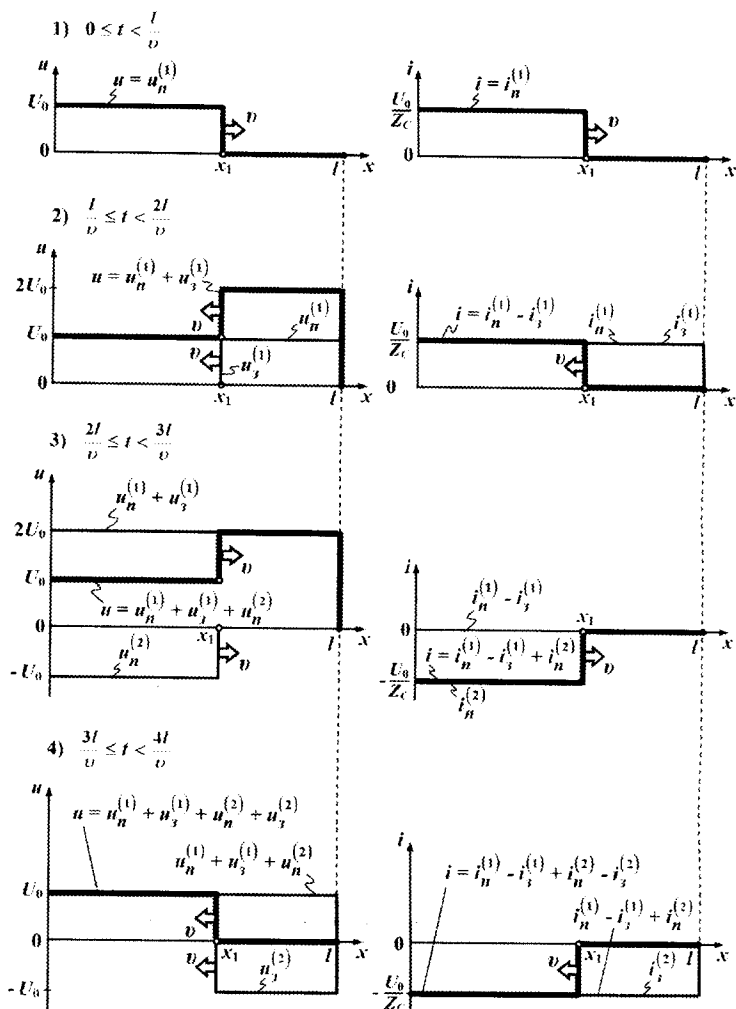


Рисунок 5.34

В інтервалі $0 \leq t < \frac{l}{v}$ в лінії існують тільки прямі хвилі напруги $u_n^{(1)} = U_0$ та струму $i_n^{(1)} = \frac{U_0}{Z_C}$, які ще не дісталися кінця лінії.

Дійшовши до кінця лінії, ці хвилі зазнають там повного відбиття без зміни свого знака, внаслідок чого виникають перші зворотні хвилі напруги й струму

$$u_3^{(1)} = N_2 u_n^{(1)} = U_0,$$

$$i_3^{(1)} = N_2 i_n^{(1)} = \frac{U_0}{Z_C},$$

які переміщуються в напрямку до початку лінії. З рухом хвиль загальна напруга в лінії подвоюється, а струм стає рівним нулю

$$u = u_n^{(1)} + u_3^{(1)} = 2U_0,$$

$$i = i_n^{(1)} - i_3^{(1)} = 0.$$

Коли перша зворотна хвиля досягає початку лінії, вона відбивається і з'являється друга пряма хвиля напруги

$$u_n^{(2)} = N_1 u_3^{(1)} = -U_0.$$

Аналогічно і для струму

$$i_n^{(2)} = N_1 i_3^{(1)} = -\frac{U_0}{Z_C}.$$

Таким чином, в інтервалі часу $\frac{2l}{v} \leq t < \frac{3l}{v}$ вздовж лінії рухаються наступні (другі за рахунком) прямі хвилі напруги й струму, що накладаються на перші – прямі та зворотні. Це приводить до того, що загальна напруга в лінії знижується до напруги

$$u = \left(u_n^{(1)} + u_3^{(1)} \right) + u_n^{(2)} = 2U_0 - U_0 = U_0,$$

а струм набуває від'ємного значення

$$i = \left(i_n^{(1)} - i_3^{(1)} \right) + i_n^{(2)} = 0 - \frac{U_0}{Z_C} = -\frac{U_0}{Z_C}.$$

Після відбиття цих хвиль від кінця лінії з'являються другі за рахунком зворотні хвилі напруги $u_3^{(2)}$ і струму $i_3^{(2)}$, які через те, що коефіцієнт відбиття в кінці лінії $N_2 = 1$, дорівнюють

$$u_3^{(2)} = N_2 u_n^{(2)} = -U_0,$$

$$i_3^{(2)} = N_2 i_n^{(2)} = -\frac{U_0}{Z_C}.$$

Ці хвилі також накладаються на попередні, і в результаті, коли в момент часу $t = \frac{4l}{v}$ вони досягнуть початку лінії загальні напруга і струм всюди (окрім самого початку лінії) виявляться рівними нулю

$$u = \left(u_n^{(1)} + u_3^{(1)} + u_n^{(2)} \right) + u_3^{(2)} = U_0 - U_0 = 0,$$

$$i = \left(i_n^{(1)} - i_3^{(1)} + i_n^{(2)} \right) - i_3^{(2)} = -\frac{U_0}{Z_C} - \left(-\frac{U_0}{Z_C} \right) = 0,$$

тобто такими, якими вони були до підключення джерела напруги.

Отже, з цього моменту часу перехідний процес в лінії буде повторюватися. Період повторення рівний часу чотирикратного пробігу хвилі вздовж лінії

$$T = \frac{4l}{v}.$$

В кожній точці лінії напруга і струм змінюються періодично, але криві зміни в різних точках не є однаковими.

На рис. 5.35 показано графік зміни напруги в кінці лінії.

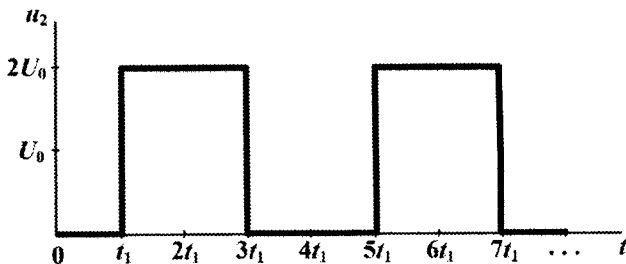


Рисунок 5.35

До моменту $t_1 = \frac{l}{v}$ (допоки хвиля не дійшла до кінця лінії), напруга в кінці лінії дорівнює нулю, однак в момент часу t_1 ця напруга стрибкоподібно зростає до значення

$$u_2 = u_n^{(1)} + u_3^{(1)} = 2U_0,$$

яке зберігається до тих пір, поки, а це станеться в момент часу $t = 3t_1$, не прийде наступна (друга за рахунком) пряма хвиля і напруга не зменшиться до нуля

$$u_2 = u_n^{(1)} + u_3^{(1)} + u_n^{(2)} + u_3^{(2)} = 0$$

і т. д.

Струм i_2 в кінці лінії в будь-який момент часу дорівнює нулю, що пояснюється режимом холостого ходу в лінії.

На рис. 5.36 показано графік зміни напруги в точці x_1 , де $x_1 > \frac{l}{2}$ (див. рис. 5.34).

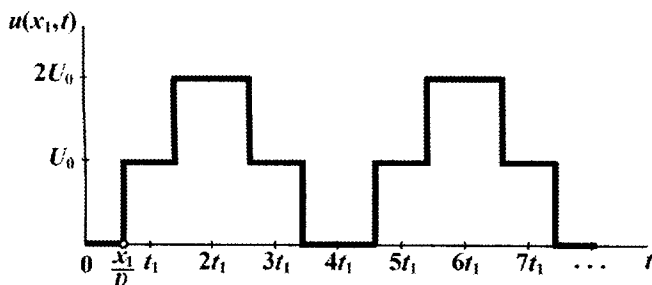


Рисунок 5.36

В даній точці напруга буде дорівнювати нулю до моменту часу $\frac{x_1}{v}$, поки перша пряма хвиля $u_n^{(1)}$ не досягне координати x_1 , після чого значення напруги в цій точці складатиме

$$u(x_1, t) = u_n^{(1)} = U_0.$$

Ця напруга буде триматися до тих пір, допоки перша пряма хвиля в момент часу t_1 не дійде до кінця лінії і її зворотна хвиля $u_3^{(1)} = U_0$ через час $\frac{l-x_1}{v}$ знову не повернеться до точки з координатою x_1 , після чого напруга в цій точці стане рівною

$$u(x_1, t) = u_n^{(1)} + u_3^{(1)} = 2U_0$$

і т. д.

Реальні лінії завжди мають втрати. Наявність втрат приводить до того, що хвилі напруги і струму під час їх руху вздовж лінії зменшуються, через що кожна наступна хвиля стає меншою, ніж попередня, і значення напруги й струму поступово наближаються до тих значень, які вони матимуть за усталеного режиму холостого ходу: напруга буде дорівнювати U_0 , а струм – нулю.

2. Розглянемо тепер перехідний процес в короткозамкненій на кінці лінії (рис. 5.37).

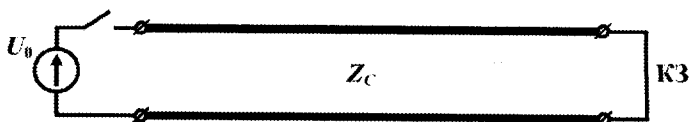


Рисунок 5.37

В цьому режимі пряма хвиля напруги відбивається від кінця лінії із зміною знака, тобто коефіцієнт відбиття в кінці

$$N_2 = -1,$$

тому після повернення зворотної хвилі до початку лінії, загальна напруга в лінії буде дорівнювати нулю, а струм подвоїться.

Оскільки всі наступні відбиття хвилі як від джерела, так і від короткозамкненого кінця лінії будуть відбуватися із зміною знака, то напруга в лінії змінюватиметься від нуля до напруги джерела, а струм зростатиме на величину первинного струму, що показано на рис. 5.38.

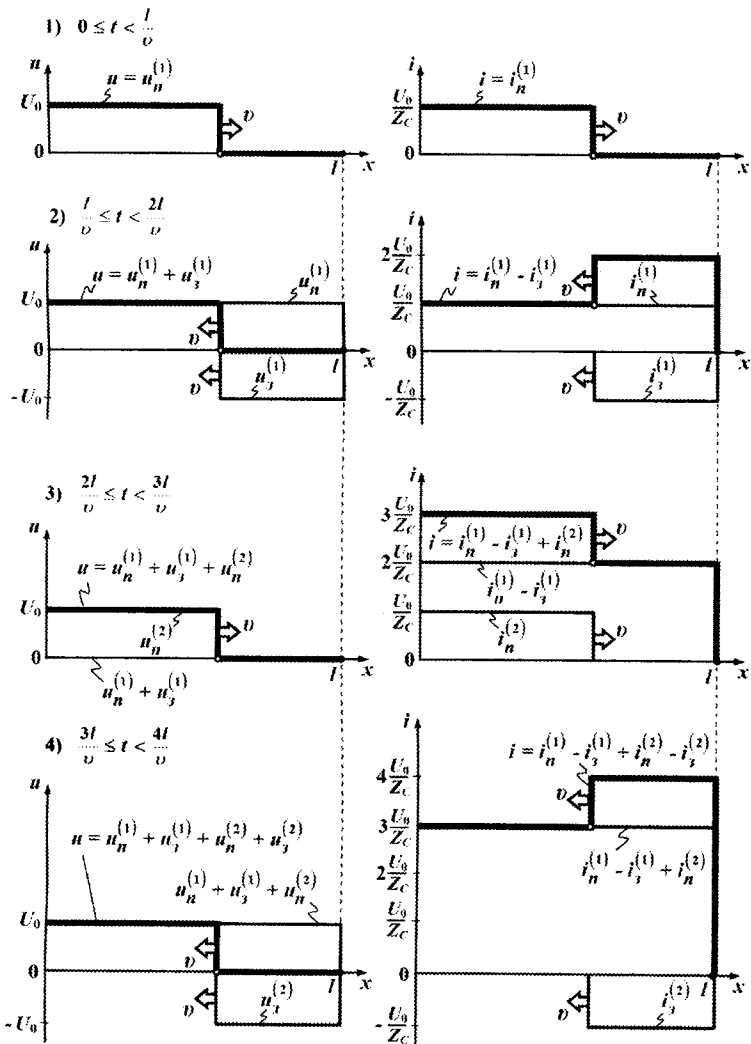


Рисунок 5.38

Однак необмеженого зростання струму в лінії в дійсності не буде, оскільки реальні лінії мають втрати, а реальні джерела –

внутрішній опір, тому струм в лінії з перебігом часу буде наближатися до того значення, яке він повинен мати в новому усталеному режимі з врахуванням цих опорів.

5.9 Перехідні процеси при ненульових початкових умовах

1. Розглянемо приклад, в якому навантажену на активний опір r_n лінію в момент часу $t = 0$ відмикають від джерела постійної напруги U_0 (рис. 5.39).

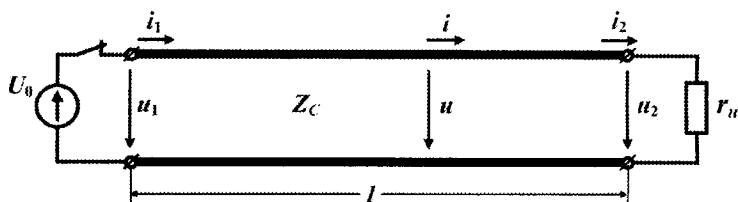


Рисунок 5.39

До комутації в лінії існував усталений режим і в будь-якій її точці напруга складала U_0 , а струм $-I_0 = \frac{U_0}{r_n}$.

В першу ж мить після комутації внаслідок розмикання кола миттєвий струм i на початку лінії відразу зникає. Це означає, що комутація приводить до утворення першої прямої хвилі струму, яка накладається на усталений струм I_0 і дорівнює

$$i_n^{(1)} = -I_0,$$

через що їхня сума

$$i = I_0 + i_n^{(1)} = 0$$

(рис. 5.40). Водночас виникає пряма хвиля електричної напруги

$$u_n^{(1)} = i_n^{(1)} Z_C = -\frac{U_0}{r_n} Z_C.$$

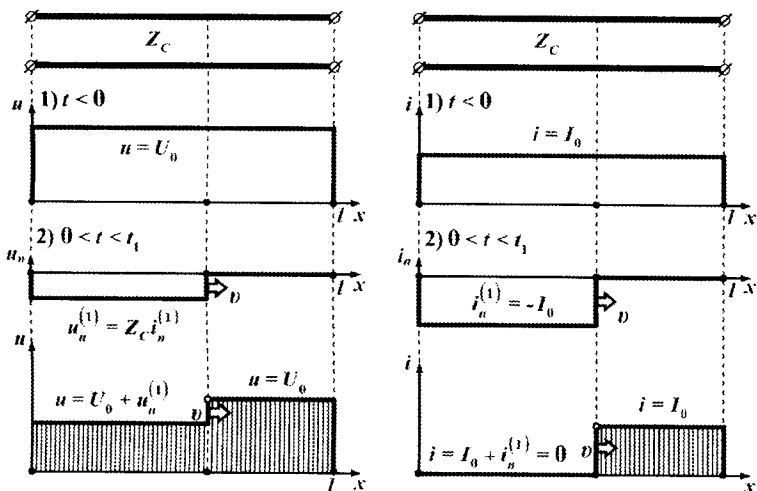


Рисунок 5.40

Обидві хвилі здійснюють рух в напрямку кінця лінії і досягають його за час $t_1 = \frac{l}{v}$. Там відбувається відбиття хвиль від кінця лінії з коефіцієнтом відбиття

$$N_2 = \frac{r_n - Z_C}{r_n + Z_C},$$

що породжує зворотні хвилі напруги і струму. Ці хвилі, рухаючись в зворотному напрямку, досягають початку лінії за той же час, однак відбиття від початку лінії відбувається вже з іншим коефіцієнтом відбиття $N_1 = 1$, оскільки лінію з боку джерела напруги розімкнуто.

Покажемо, що за означених умов відбувається повне згасання хвильового процесу – в новому усталеному режимі напруга й струм в будь-якій точці лінії дорівнюватимуть нулю. Для цього зручно подати процес руху хвиль та їх багаторазове відбиття за допомогою діаграми руху хвиль (рис. 5.41).

Як видно з цієї діаграми, для будь-якої точки лінії за умови $t \rightarrow \infty$ напруга

$$\begin{aligned}
 u &= U_0 + u_n^{(1)} + u_s^{(1)} + u_n^{(2)} + u_s^{(2)} + \dots = \\
 &= U_0 + u_n^{(1)} (1 + 2N_2 + 2N_2^2 + 2N_2^3 + \dots) = U_0 - u_n^{(1)} + 2u_n^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} N_2^k.
 \end{aligned}$$

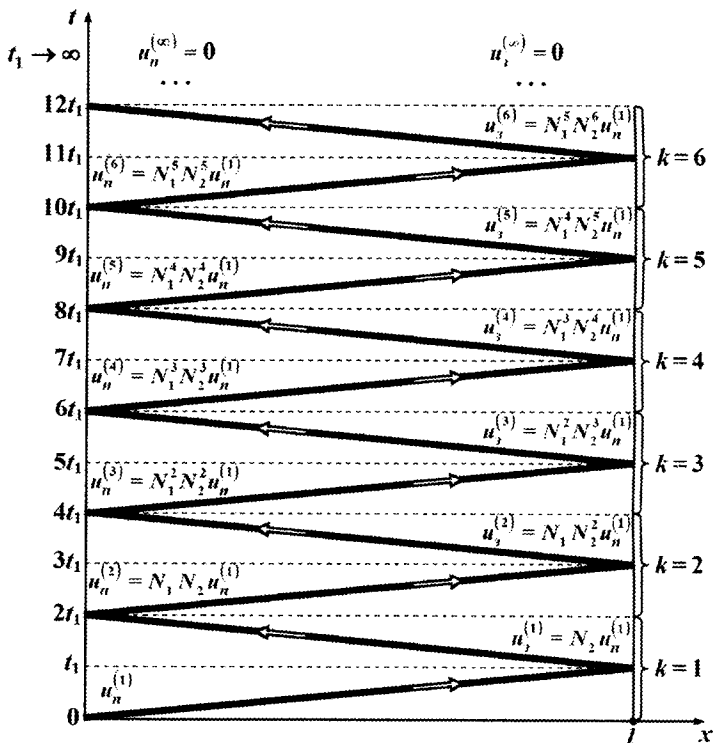


Рисунок 5.41

Числова послідовність (N_2^k) являє собою нескінченну геометричну прогресію із знаменником N_2 і першим членом $N_2^0 = 1$. Оскільки в нашому випадку $N_2 = \frac{r_n - Z_C}{r_n + Z_C}$ і за будь-якого співвід-

ношення між r_n і Z_C . модуль коефіцієнта відбиття $|N_2| < 1$, то сума

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_2^k = \frac{1}{1 - N_2}.$$

Тоді, врахувавши, що для першої хвилі напруги

$$u_n^{(1)} = -\frac{U_0}{r_n} Z_C,$$

загальна напруга u з часом прямує до нуля і за граничного переходу ($t \rightarrow \infty$)

$$u = U_0 + U_0 \frac{Z_C}{r_n} - 2U_0 \frac{Z_C}{r_n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_H - Z_C}{r_H + Z_C}} = 0.$$

Струм в будь-якій точці лінії за умови $t \rightarrow \infty$ також дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} i &= I_0 + i_n^{(1)} - i_3^{(1)} + i_n^{(2)} - i_3^{(2)} + \dots = \\ &= I_0 + i_n^{(1)} (1 + N_2 + N_2^2 + N_2^3 + \dots) - i_n^{(1)} (N_2 + N_2^2 + N_2^3 + \dots) = \\ &= I_0 + i_n^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

На рис. 5.42 і 5.43 показано графіки зміни напруги в кінці лінії u_2 для коефіцієнтів відбиття $N_2 = 0,5$ і $N_2 = -0,5$ відповідно.

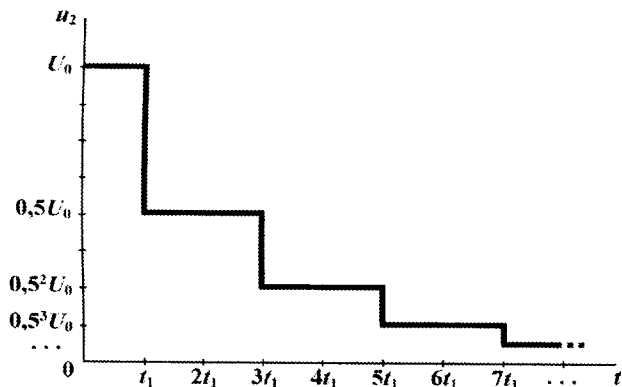


Рисунок 5.42

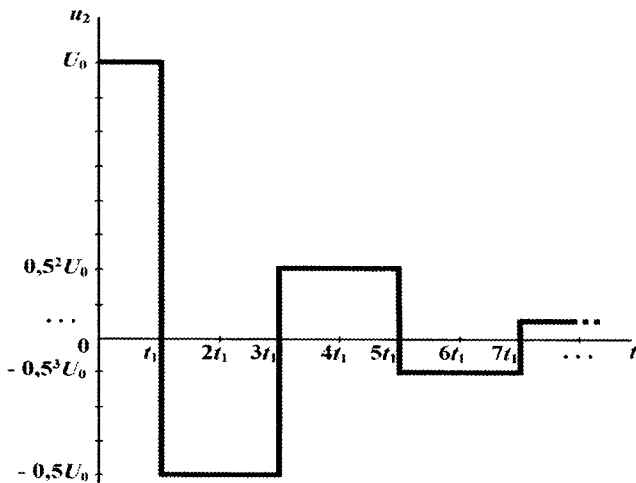


Рисунок 5.43

2. Випадок, коли в довгій лінії, приєднаній до джерела напруги, вимикають активне навантаження r_n (рис. 5.44), також призводить до порушення усталеного режиму, внаслідок чого з'являються зворотні хвилі напруги і струму (рис. 5.45).

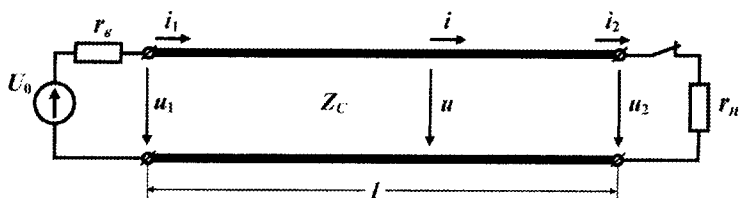


Рисунок 5.44

Перехідний процес являє собою процес багаторазового відбиття хвиль з коефіцієнтом відбиття на початку лінії

$$N_1 = \frac{r_g - Z_C}{r_g + Z_C}, \text{ де } r_g - \text{внутрішній опір джерела, і коефіцієнтом від-}$$

биття в кінці лінії $N_2 = 1$, що пояснюється відсутністю опору навантаження (ключ розімкнуто).

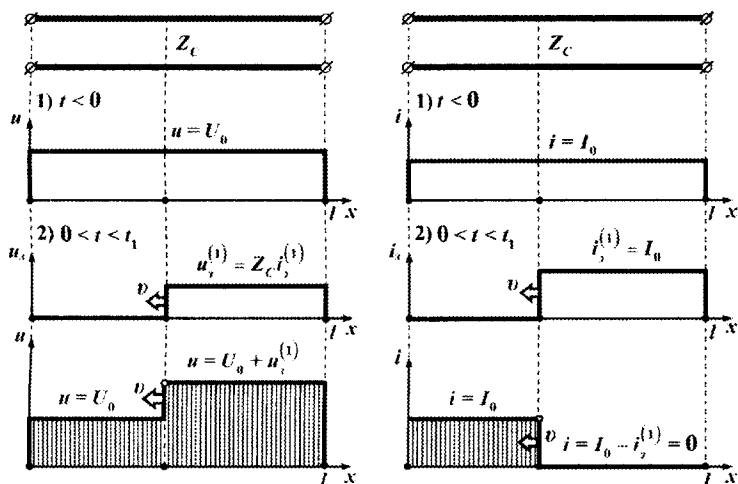


Рисунок 5.45

Розрахунок перехідного процесу в такому колі є подібним розрахунку, проведеному в попередньому прикладі.

3. Аналіз перехідних процесів в лініях з ненульовими початковими умовами можна звести до розрахунку кіл з нульовими початковими умовами. Теоретичною підставою для цього є *принцип накладання*, дія якого поширюється і на лінійні системи з розподіленими параметрами:

а) так, якщо перехідний процес спричинено замиканням ключа (рис. 5.46, а), то на усталений режим в лінії, який існував до комутації, необхідно накласти той перехідний процес, який в ній виникне внаслідок заміщення ключа джерелом постійної напруги. Е.р.с. такого джерела має збігатися зі значенням напруги, яка спостерігалася на затискачах ключа вихідного кола на момент комутації;

б) коли ж ключ розмикається (рис. 5.46, б), то для розрахунку перехідного процесу в такому колі необхідно на попередній усталений режим накласти перехідний процес, який виникне в лінії внаслідок включення джерела струму в місце розташування ключа за умови, що струм джерела буде, по-перше, рівним за значенням тому струму, який протікав у вітці з ключем на момент комутації, і, по-друге, відносно нього протилежно направленим.

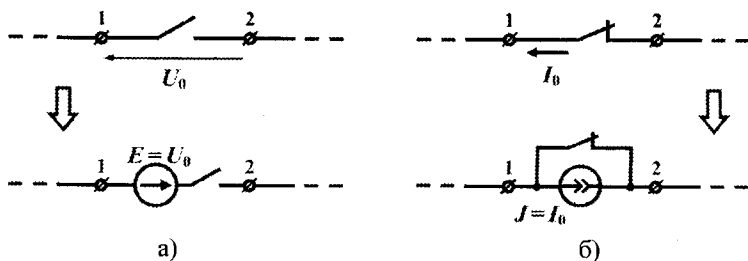


Рисунок 5.46

Продемонструємо сказане на прикладі.

Приклад 5.6

Проведемо розрахунок перехідного процесу та відшукаємо хвилі миттєвих напруги і струму, які утворяться внаслідок відключення опору r_1 , розташованого в місці з'єднання двох ліній з хвильовими опорами Z_{C1} і Z_{C2} (рис. 5.47).

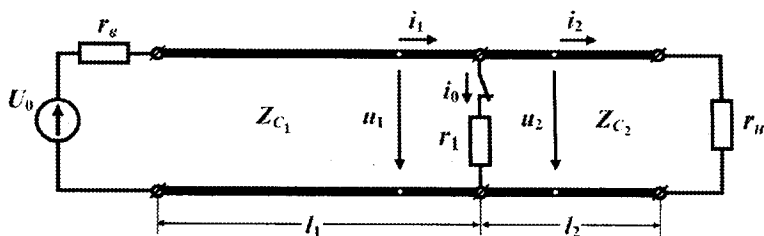


Рисунок 5.47

Початкові умови даного прикладу ненульові. Для їх врахування скористаємося принципом накладання і накладемо на попередній усталений режим перехідний процес, який виникне внаслідок включення в місце розташування ключа джерела струму і відбудуватиметься за нульових початкових умов.

До комутації усталені струми в обох лініях були різними. Так, в другій лінії цей струм визначався законом Ома

$$I_2 = \frac{U_0}{r_n},$$

а в першій – першим законом Кірхгофа

$$I_1 = I_0 + I_2,$$

де $I_0 = \frac{U_0}{r_1}$ – усталений струм, який проходив віткою з ключем

до комутації. Тоді

$$I_1 = \frac{U_0}{r_1} + \frac{U_0}{r_n}.$$

Напряга в лініях всюди була постійною і дорівнювала U_0 .

Еквівалентну схему заміщення для розрахунку хвиль напру-

ги і струму після розмикання ключа показано на рис. 5.48. В цій схемі обидві довгі лінії заміщено зосередженими опорами зі значеннями Z_{C_1} та Z_{C_2} , відповідно. Окрім цього, з метою переходу до схеми з нульовими початковими умовами в місце розташування

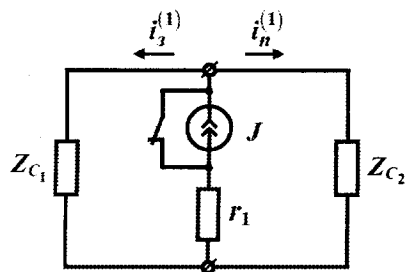


Рисунок 5.48

включення ключа увімкнемо джерело зі струмом $J = I_0$.

Внаслідок комутації в місці з'єднання ліній водночас утворюються дві хвилі струму (рис. 5.49), які в загальному випадку рухаються з різними швидкостями. Одна з хвиль є зворотною і її

шлях пролягає вздовж першої лінії в напрямку джерела (початку першої лінії), а інша є прямою хвилею. Вона здійснює свій рух другою лінією до опору навантаження r_n (кінця другої лінії).

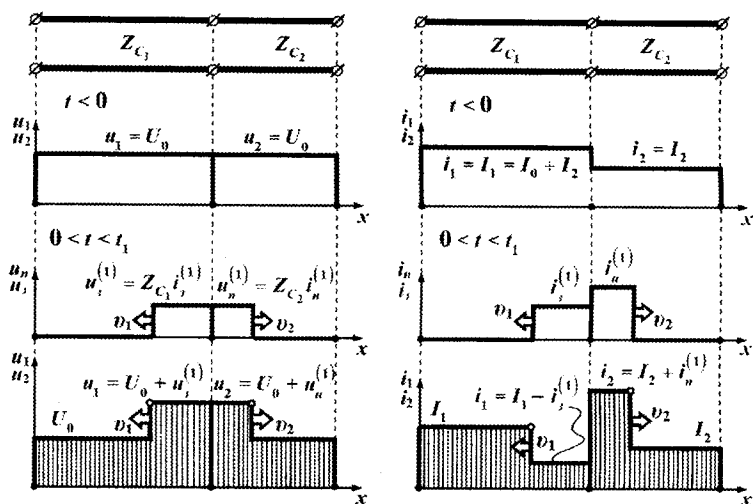


Рисунок 5.49

З врахуванням додатних напрямків струмів, показаних на рис. 5.48, перші хвилі цих струмів відповідно дорівнюють

$$i_3^{(1)} = J \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} = I_0 \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} = \frac{U_0}{r_1} \cdot \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}},$$

$$i_n^{(1)} = J \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} = I_0 \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} = \frac{U_0}{r_1} \cdot \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}},$$

а перші хвилі напруг

$$u_3^{(1)} = i_3^{(1)} Z_{C_1},$$

$$u_n^{(1)} = i_n^{(1)} Z_{C_2}.$$

Тоді відповідно до принципу накладання миттєві напруга і струм в першій лінії дорівнюватимуть

$$u_1 = U_0 + u_3^{(1)},$$

$$i_1 = I_1 - i_3^{(1)},$$

а в другій

$$u_2 = U_0 + u_n^{(1)},$$

$$i_2 = I_2 + i_n^{(1)}$$

(див. рис. 5.49).

Повторні хвилі напруг і струмів, що утворюються внаслідок багаторазового відбиття і заломлення в обох лініях, розраховуються за описаними вище методиками. Так, для розрахунку та аналізу перехідного процесу доцільно скласти діаграму руху хвиль, яка дозволить визначити значення напруги або струму в довільній точці ліній в будь-який момент часу за різного співвідношення між фазовими швидкостями.

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть причини, що породжують перехідні процеси в електричних колах із розподіленими параметрами.
2. У чому полягає відмінність перехідних процесів в електричних колах із розподіленими параметрами від перехідних процесів в колах із зосередженими параметрами?
3. Запишіть телеграфні рівняння і поясніть їх.
4. Сформулюйте основну задачу, яка постає під час розрахунку перехідних процесів у колах із розподіленими параметрами.
5. Яке рівняння називають хвильовим? Отримайте це рівняння для лінії без втрат.
6. Які хвилі називають прямими, а які зворотними?
7. Опишіть і поясніть основні властивості прямої та зворотної хвилі. Зробіть це аналітично.
8. Як визначають миттєві значення напруги та струму в довгій лінії?
9. Опишіть процеси формування прямої та зворотної хвилі в довгій лінії внаслідок її під'єднання до джерела постійної напруги.

10. Що називається фронтом хвилі?
11. Чому на будь-якій пройденій хвилею ділянці довгої лінії значення енергії електричного та магнітного полів є однаковими?
12. Як аналітично визначити пряму хвилю, що утвориться внаслідок під'єднання до лінії довільного джерела?
13. Від чого залежить форма прямої хвилі і від чого – зворотної?
14. Навіщо потрібні еквівалентні схеми при розрахунку перехідних процесів у колах із розподіленими параметрами? За якими принципами їх складають?
15. Що називають відбиттям хвилі і що – її заломленням? Якими коефіцієнтами характеризують ці явища і як їх визначають?
16. Розкрийте суть явища багаторазового відбиття хвиль?
17. Запишіть, за якими формулами визначають миттєві напругу та струм в довільній точці лінії в будь-який момент часу за багаторазового відбиття хвиль із прямокутним фронтом.
18. Для чого і як будують діаграму руху хвиль?

СИМПЛЕЗ
лінійних кіл

ОСНОВИ СИНТЕЗУ ЛІНІЙНИХ ДВОПОЛЮСНИКІВ

6.1 Основні етапи синтезу електричних кіл

При проектуванні електричних пристроїв виникає необхідність підбору схем і параметрів електричних кіл, які відповідають певним вимогам. Вирішення цієї проблеми здійснюють з допомогою *синтезу* електричних кіл.

Вимоги, які заздалегідь висувають до лінійних електричних кіл, практично завжди враховуються їх частотними характеристиками. Для двополюсників такими характеристиками є залежності опору $Z(j\omega)$ або провідності $Y(j\omega)$ від частоти, які називають *вхідними функціями* двополюсників.

Частотну характеристику електричного кола переважно задають у вигляді графіків або таблиць. Однак для побудови схеми із заданою частотною характеристикою потрібно мати її аналітичний вираз. Тому *першим етапом* розв'язання задачі синтезу є задача апроксимації частотної характеристики, тобто подання графічно або таблично заданої залежності у вигляді аналітичного виразу.

Проте не будь-якому аналітичному виразу відповідає схема, яку можна фізично реалізувати. Тому частотну характеристику необхідно апроксимувати таким виразом, щоб можна було здійснити побудову схеми фізично. Для цього потрібно знати властивості функцій електричного кола.

Другим етапом розв'язання задачі синтезу є реалізація заданої функції кола у вигляді конкретної схеми. На відміну від задачі аналізу, в якій шукану величину (струм або напругу) за заданих топології, параметрів і дій одержують однозначно, задача синтезу може мати декілька розв'язків, що означає існування для однієї і тієї ж функції кола кількох різних схем.

Ця обставина приводить до *третього етапу* розв'язування задачі синтезу – вибору оптимальної схеми з відповідною топологією та параметрами. Цей вибір залежить від ряду факторів, які в кожному конкретному випадку мають різну вагу та значення. До таких факторів, наприклад, можна віднести мінімальну кількість елементів в схемі, їх вартість тощо.

6.2 Властивості вхідних функцій двополюсників

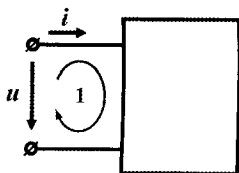


Рисунок 6.1

Розглянемо деякий лінійний пасивний двополюсник, який складається із n контурів (рис. 6.1).

Знайдемо вхідний операторний опір двополюсника, скориставшись методом контурних струмів. Незалежні контури виберемо таким чином, щоб

вітка, яка містить джерело, входила тільки в один перший контур.

Одержані рівняння мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11}(p)I_1(p) + Z_{12}(p)I_2(p) + \dots + Z_{1k}(p)I_k(p) + \\ + \dots + Z_{1n}(p)I_n(p) = U(p) \\ Z_{21}(p)I_1(p) + Z_{22}(p)I_2(p) + \dots + Z_{2k}(p)I_k(p) + \\ + \dots + Z_{2n}(p)I_n(p) = 0 \\ \dots \\ Z_{n1}(p)I_1(p) + Z_{n2}(p)I_2(p) + \dots + Z_{nk}(p)I_k(p) + \\ + \dots + Z_{nn}(p)I_n(p) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (6.1)$$

де $I_1(p) = I(p)$ – зображення вхідного струму;

$I_k(p)$ – зображення k -го струму;

$Z_{kk}(p)$ – власний опір k -го контура;

$Z_{jk}(p)$ – загальний опір j -го та k -го контурів.

Вхідний струм із системи (6.1) визначається з виразу

$$I(p) = U(p) \frac{\Delta_{11}(p)}{\Delta(p)}, \quad (6.2)$$

де $\Delta(p)$ – визначник системи (6.1) n -го порядку;

$\Delta_{11}(p)$ – алгебраїчне доповнення $(n-1)$ -го порядку елемента $Z_{11}(p)$.

Вхідний опір двополюсника дорівнює

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{\Delta(p)}{\Delta_{11}(p)}, \quad (6.3)$$

а його вхідна провідність

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{\Delta_{11}(p)}{\Delta(p)}. \quad (6.4)$$

Якщо двополюсник містить тільки пасивні елементи r , L , C , то всі коефіцієнти (6.1) є сумами вигляду $\left(Lp + r + \frac{1}{Cp} \right)$.

Після розкриття визначників вхідний опір може бути записано у вигляді відношення двох поліномів

$$Z(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (6.5)$$

де коефіцієнти a_k і b_k є дійсними числами, оскільки елементи r , L , C , з комбінацій яких ці коефіцієнти складаються, є дійсними.

Вираз (6.5) можна записати у вигляді

$$Z(p) = H \frac{(p-p'_1)(p-p'_2)\dots(p-p'_k)\dots(p-p'_n)}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\dots(p-p_m)}, \quad (6.6)$$

де p'_1, p'_2, \dots, p'_n – корені чисельника $A(p)$, які називаються нулями функції $Z(p)$;

p_1, p_2, \dots, p_m – корені знаменника $B(p)$, що називають полюсами функції $Z(p)$;

$$H = \frac{a_n}{b_m} \text{ – стала величина.}$$

В загальному випадку полюси і нулі можуть бути як дійсними, так і комплексними. Для кожного нуля чисельник функції при $p = p'_k$ перетворюється на нуль і функція $Z(p)$ також стає

рівною нулю. Для кожного полюса при $p = p_k$ знаменник дорівнює нулю і функція $Z(p)$ стає нескінченною.

Якщо у вираз (6.5) підставити $p = j\omega$, то отримаємо

$$Z(j\omega) = \operatorname{Re}[Z(j\omega)] + j \operatorname{Im}[Z(j\omega)],$$

де $\operatorname{Re}[Z(j\omega)]$ є дійсною частиною, а $\operatorname{Im}[Z(j\omega)]$ уявною частиною комплексної функції $Z(j\omega)$.

Активна потужність, яку споживає пасивний двополюсник, визначається як

$$P = I^2 \operatorname{Re}[Z(p)] \text{ для } p = j\omega.$$

Оскільки ця потужність завжди додатна або дорівнює нулю, то має виконуватися умова

$$\operatorname{Re}[Z(p)] \geq 0, \quad p = j\omega. \quad (6.7)$$

Функцію $F(p)$ вхідного опору чи провідності називають *додатною дійсною функцією* (д. д. ф.), якщо вона задовольняє такі умови:

- функція $F(p)$ є дійсною за дійсних значень p ;
- дійсна частина функції $F(p)$ є додатною за додатних значень дійсної частини p .

Під час дослідження перехідного процесу вхідний струм за нульових початкових умов в операторній формі записується у вигляді

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p)B(p)}{A(p)}. \quad (6.8)$$

Корені знаменника $A(p)$ визначають вигляд вільної складової. Якщо всі корені дійсні і від'ємні, то вільною складовою буде функція

$$i_g(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (6.9)$$

яка за умови $t \rightarrow \infty$ прямує до нуля.

Якщо ж є пара кратних коренів, наприклад $p_k = p_{k+1} = p$, то

вільна складова для таких коренів має вигляд

$$i_{k_g} = e^{pt} (A_k + A_{k+1}t) \quad (6.10)$$

і за від'ємних значень p також прямує до нуля за умови $t \rightarrow \infty$.

Для пари комплексно спряжених коренів з від'ємною дійсною частиною $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_k$ вільна складова дорівнює

$$i_{k_g} = e^{-\delta_k t} (A_k \sin \omega_k t + A_{k+1} \cos \omega_k t), \quad (6.11)$$

що являє собою затухаюче синусоїдне коливання.

Всі розглянуті випадки приводять до стійкого стану системи, тому що з перебігом часу вільна складова прямує до нуля.

Розглянемо випадок, коли є пара спряжених, але суто уявних коренів

$$p_{k,k+1} = \pm j\omega_k.$$

В цьому випадку формула (6.11) набуває вигляду

$$i_{k_g} = A_k \sin \omega_k t + A_{k+1} \cos \omega_k t \quad (6.12)$$

і вільна складова являє собою незатухаючу коливальну функцію. Сама ж система при цьому буде стійкою.

Якщо корені будуть кратними і суто уявними, то вільна складова дорівнюватиме

$$i_{k_g} = (A_1 \sin \omega_k t + A_2 \cos \omega_k t) + t(A_3 \sin \omega_k t + A_4 \cos \omega_k t), \quad (6.13)$$

і, як випливає з формули, з часом нескінченно зростатиме, внаслідок чого система втратить стійкість.

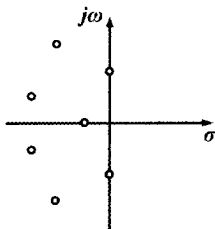


Рисунок 6.2

Оскільки лінійне електричне коло завжди стійке, то дійсна частина нулів функції $Z(p)$ повинна бути *недодатною*.

Розглядаючи положення нулів на комплексній площині, можна стверджувати, що всі нулі функції $Z(p)$ розташовані в лівій півплощині, враховуючи і уявну вісь (рис. 6.2). Нулі на уявній осі мають бути простими.

Якщо до двополюсника (рис. 6.1) під'єднують джерело струму, то напруга двополюсника буде дорівнювати

$$U(p) = I(p)Z(p) = \frac{I(p)}{Y(p)} = \frac{I(p)A(p)}{B(p)}. \quad (6.14)$$

В цьому випадку всі попередні міркування однаково можна віднести також і до коренів полінома $B(p)$, тобто до полюсів функції $Z(p)$.

Тому для вхідних функцій справедливими є такі твердження:

- нулі і полюси вхідної функції мають знаходитися в лівій півплощині, враховуючи і уявну вісь;
- на уявній осі нулі і полюси повинні бути виключно простими (некратними).

За цих умов коефіцієнти поліномів $A(p)$ та $B(p)$, тобто всі коефіцієнти a_k і b_k , мають бути додатними.

Одержані результати дозволяють виявити ще одну важливу властивість вхідних функцій.

Нехай функцію $Z(p)$ записано у вигляді

$$Z(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{A(p)}{B(p)}. \quad (6.15)$$

Припустимо, що $n > m$, тоді простим діленням полінома $A(p)$ на $B(p)$ можна одержати вираз

$$Z(p) = C_r p^r + C_{r-1} p^{r-1} + \dots + C_1 p + C_0 + \frac{A_1(p)}{B(p)}, \quad (6.16)$$

де $r = (n - m)$ – різниця порядків чисельника і знаменника;

$\frac{A_1(p)}{B(p)}$ – правильний раціональний дріб, для якого степінь полінома $A_1(p)$ на одиницю менший, аніж степінь полінома $B(p)$.

Вираз (6.16) показує, що за умови $p \rightarrow \infty$ функція $Z(p)$ перетворюється в нескінченність, тому значення $p = \infty$ є полюсом функції $Z(p)$. Точка в нескінченності може розглядатися як точка, яка знаходиться на уявній осі $+j$, а як було виявлено раніше, полюси на уявній осі в лінійному електричному колі повинні бути простими, тому r не може перевищувати одиницю.

Якщо степінь полінома $B(p)$ більший за степінь полінома $A(p)$, тобто $m > n$, то, розглядаючи вхідну функцію $Y(p)$, можна, аналогічно розмірковуючи, встановити, що і в цьому випадку різниця $m - n$ не повинна перевищувати одиницю.

Таким чином, для вхідної функції лінійного електричного кола степені чисельника і знаменника у виразі (6.15) не повинні відрізнятись більше, аніж на одиницю.

Отже, для того, щоб вхідна функція двополосника могла бути реалізована у вигляді фізично існуючого кола, вона повинна задовольняти такі необхідні і достатні умови, які називають *умовами реалізації*.

1. Всі коефіцієнти a_k і b_k поліномів $A(p)$ та $B(p)$ в (6.15) мають бути дійсними і додатними.

2. Найбільші степені p поліномів $A(p)$ та $B(p)$ не можуть відрізнятись один від одного більше, ніж на одиницю.

3. Всі нулі і полюси вхідної функції розташовані в лівій півплощині.

4. Якщо вхідна функція має нулі або полюси на уявній осі, то вони можуть бути тільки простими (некратними).

5. Дійсна частина вхідної функції за суто уявних значень p є невід'ємною, тобто $Re[F(j\omega)] \geq 0$ при $p = j\omega$.

6.3 Перевірка вхідної функції на умови реалізації

Перевірка перших двох умов реалізації труднощів не викликає і виконується безпосередньо за виразом вхідної функції.

Якщо вхідна функція задовольняє третю та четверту умови, то поліноми $A(p)$ і $B(p)$ називають *поліномами Гурвіца*.

Розглянемо без доведення один із способів перевірки, чи є поліноми $A(p)$ і $B(p)$ поліномами Гурвіца. Позначимо сукупність складових з парними степенями p в $A(p)$ і $B(p)$ відповідно через $M_1(p)$ та $M_2(p)$, а непарними – через $N_1(p)$ і $N_2(p)$.

Відтак, поліноми $A(p)$ і $B(p)$ будуть тоді поліномами Гурвіца, якщо при поданні відношень $\frac{M_1(p)}{N_1(p)}$ та $\frac{M_2(p)}{N_2(p)}$ (або до них обернених) у вигляді ланцюгового дроби всі коефіцієнти цього дроби будуть додатними.

Приклад 6.1

Перевірити чи є поліномом Гурвіца поліном

$$A(p) = 18p^5 + 6p^4 + 24p^3 + 7p^2 + 5p + 1.$$

Виділимо парну і непарну частини полінома $A(p)$

$$M(p) = 6p^4 + 7p^2 + 1, \quad N(p) = 18p^5 + 24p^3 + 5p$$

і виконаємо їх послідовне ділення.

$$\begin{array}{r}
 18p^5 + 24p^3 + 5p \quad | \quad 6p^4 + 7p^2 + 1 \\
 \underline{18p^5 + 21p^3 + 3p} \quad | \quad 3p \\
 6p^4 + 7p^2 + 1 \quad | \quad 3p^3 + 2p \\
 \underline{6p^4 + 4p^2} \quad | \quad 2p \\
 3p^3 + 2p \quad | \quad 3p^2 + 1 \\
 \underline{3p^3 + p} \quad | \quad p \\
 3p^2 + 1 \quad | \quad p \\
 \underline{3p^2} \quad | \quad 3p \\
 p \quad | \quad 1 \\
 \underline{p} \quad | \quad p \\
 0
 \end{array}$$

Таким чином, відношення поліномів $N(p)$ і $M(p)$ ланцюговим дробом має вигляд:

$$\frac{N(p)}{M(p)} = \frac{18p^5 + 24p^3 + 5p}{6p^4 + 7p^2 + 1} = 3p + \frac{1}{2p + \frac{1}{p + \frac{1}{3p + \frac{1}{p}}}}.$$

Оскільки всі коефіцієнти цього дробу є додатними, поліном $A(p)$ є поліномом Гурвіца.

Приклад 6.2

Перевірити чи є поліном $A(p) = 2p^3 + p^2 + p + 1$ поліномом Гурвіца.

Непарна частина полінома

$$N(p) = 2p^3 + p,$$

парна частина полінома

$$M(p) = p^2 + 1.$$

Знайдемо коефіцієнти ланцюгового дробу

$$\begin{array}{r} 2p^3 + p \quad | \quad p^2 + 1 \\ \hline 2p^3 + 2p \quad | \quad 2p \\ \hline p^2 + 1 \quad | \quad -p \\ \hline p^2 \quad | \quad -p \\ \hline -p \quad | \quad 1 \\ \hline -p \quad | \quad -p \\ \hline 0 \end{array}$$

Отже, ланцюговий дріб має вигляд:

$$\frac{N(p)}{M(p)} = 2p + \frac{1}{-p + \frac{1}{-p}}.$$

Оскільки в даному ланцюговому дробі присутні від'ємні коефіцієнти, то поліном $A(p)$ не буде поліномом Гурвіца. Приклад розв'язано.

Що ж стосується останньої із наведених вище п'яти умов реалізації, то її перевірку виконують за допомогою *функцій Штурма*. Функція $F(p)$ подається дробом, чисельник і знаменник якого записують у вигляді суми членів з парними і непарними степенями p

$$F(p) = \frac{M_1(p) + N_1(p)}{M_2(p) + N_2(p)}.$$

Перемноживши чисельник і знаменник на $M_2(p) - N_2(p)$, одержимо

$$F(p) = \frac{M_1(p)M_2(p) - N_1(p)N_2(p)}{M_2^2(p) - N_2^2(p)} + \frac{N_1(p)M_2(p) - M_1(p)N_2(p)}{M_2^2(p) - N_2^2(p)}. \quad (6.17)$$

При $p = j\omega$ перша складова є дійсною, а друга – уявною, тому

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = \frac{M_1(j\omega)M_2(j\omega) - N_1(j\omega)N_2(j\omega)}{M_2^2(j\omega) - N_2^2(j\omega)}. \quad (6.18)$$

Оскільки знаменник (6.18) додатний за всіх значень ω , відповідно повинна виконуватись умова

$$M_1(j\omega)M_2(j\omega) - N_1(j\omega)N_2(j\omega) \geq 0.$$

Отже, введемо функції Штурма.

Першою функцією Штурма називають функцію

$$f_0(x) = M_1M_2 - N_1N_2,$$

де $x = \omega^2$.

Другою функцією Штурма називають похідну

$$f_1(x) = f_0'(x).$$

Третю функцію Штурма $f_2(x)$ визначають як залишок від ділення першої функції Штурма $f_0(x)$ на другу $f_1(x)$, взятий з протилежним знаком. Ділення виконується до тих пір, поки найвищий степінь залишку буде на одиницю менший за найвищий степінь другої функції $f_1(x)$.

Четверта функція Штурма $f_3(x)$ являє собою залишок від ділення другої функції Штурма на третю, взятий з протилежним знаком.

Процес визначення функцій Штурма закінчується лише тоді, коли залишок стає сталою величиною.

Потім визначають алгебраїчні (тобто додатні або від'ємні) значення функцій Штурма на границі діапазону $x = \omega^2$, тобто зазвичай для $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$, і обчислюють для всіх функцій Штурма число змін знаків $W(x_1)$ та $W(x_2)$, які одержують із зіставлення знаків для кожних двох функцій, які стоять поряд. Якщо знаки однакові, то зміна знака дорівнює нулю, якщо знаки різні, то зміна знака дорівнює одиниці. Якщо деякі із функцій Штурма дорівнюють нулю, то вони взагалі не розглядаються.

Наприклад, для функцій Штурма, наведених в табл. 6.1, зміна знаків для $x = x_1$ відбувається тричі $W(x_1) = 3$, а при $x = x_2$ — двічі $W(x_2) = 2$.

Таблиця 6.1

$f(x)$	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Число змін знака
$x = x_1$	+	-	-	+	-	3
$x = x_2$	+	-	0	+	+	2

Тоді різниця змін знаків складе

$$W(x_1) - W(x_2) = 3 - 2 = 1.$$

Поліном $f(x)$ буде додатним для всіх значень x , якщо різниця змін знаків дорівнює нулю і функція $f_0(x)$ при $x = 0$ додатна.

Приклад 6.3

Перевірити виконання п'ятої умови реалізації для функції

$$F(p) = \frac{p^4 + 2p^3 + 4p^2 + 3p + 2}{p^4 + 5p^3 + 9p^2 + 7p + 2}.$$

Визначимо парну і непарну частину поліномів $A(p)$ і $B(p)$ функції $F(p)$

$$M_1(p) = p^4 + 4p^2 + 2, \quad N_1(p) = 2p^3 + 3p,$$

$$M_2(p) = p^4 + 9p^2 + 2, \quad N_2(p) = 5p^3 + 7p$$

і складаємо функцію

$$f_0(p) = M_1(p)M_2(p) - N_1(p)N_2(p)$$

або

$$\begin{aligned} f_0(p) &= (p^4 + 4p^2 + 2)(p^4 + 9p^2 + 2) - (2p^3 + 3p)(5p^3 + 7p) = \\ &= p^8 + 3p^6 + 11p^4 + 5p^2 + 4. \end{aligned}$$

Замінімо p на $j\omega$. Оскільки $p = j\omega$, то $p^2 = -\omega^2$, $p^4 = -\omega^4$, $p^6 = -\omega^6$, $p^8 = -\omega^8$, а $f_0(\omega^2) = \omega^8 - 3\omega^6 + 11\omega^4 - 5\omega^2 + 4$.

Введемо змінну $x = \omega^2$. Тоді

$$f_0(x) = x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 5x + 4.$$

Отже, одержали першу функцію Штурма.

Друга функція Штурма визначається як похідна від першої

$$f_1(x) = f_0'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 22x - 5.$$

Розділимо $f_0(x)$ на $f_1(x)$.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 5x + 4 & 4x^3 - 9x^2 + 22x - 5 \\ \hline x^4 - 2,25x^3 + 5,5x^2 - 1,25x & 0,25x - 0,1875 \\ \hline -0,75x^3 + 5,5x^2 - 3,75x + 4 & \\ -0,75x^3 + 1,688x^2 - 4,125x + 0,9375 & \\ \hline & 3,812x^2 + 0,375x + 3,0625 \end{array}$$

Третя функція Штурма дорівнює залишку, взятому з від'ємним знаком $f_2(x) = -3,812x^2 - 0,375x - 3,0625$.

Розділимо другу функцію $f_1(x)$ на третю $f_2(x)$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 9x^2 + 22x - 5 & -3,812x^2 - 0,375x - 3,0625 \\ \hline 4x^3 + 0,394x^2 + 3,216x & -1,05x + 2,464 \\ \hline -9,394x^2 + 18,784x - 5 & \\ -9,394x^2 - 0,924x - 7,546 & \\ \hline & 19,708x + 2,546 \end{array}$$

Четверта функція Штурма $f_3(x) = -19,708x - 2,546$.

Проводимо чергове ділення, а саме $f_2(x)$ на $f_3(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
 -3,812x^2 - 0,375x - 3,0625 & -19,708x - 2,546 \\
 \hline
 -3,812x^2 - 0,492x & 0,1934x - 0,006 \\
 \hline
 0,117x - 3,0625 & \\
 0,117x + 0,0152 & \\
 \hline
 -3,0777 &
 \end{array}$$

П'ята і остання функція Штурма $f_4(x) = -3,0777$.

Складемо табл. 6.2, в якій запишемо знаки функцій Штурма для $x = x_1 = 0$ та $x = x_2 = \infty$.

Таблиця 6.2

$f(x)$	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$W(x)$
$x_1 = 0$	+	-	-	-	+	2
$x_2 = \infty$	+	+	-	-	+	2

Різниця змін знаків $W(x_1) - W(x_2) = 2 - 2 = 0$.

Отже, оскільки функція $f_0(x)$ при $x = 0$ є додатною, то розглянута вхідна функція $F(p)$ задовольняє п'яту умову реалізації.

6.4 Найпростіші вхідні функції і їх реалізація

Перш ніж приступити до розгляду методів синтезу двополосників, розглянемо найпростіші з'єднання елементів і визначимо їх вхідні функції.

Для окремих елементів r , L , C їх операторними опорами будуть відповідно функції

$$Z(p) = r, \quad Z(p) = Lp, \quad Z(p) = \frac{1}{Cp}, \quad (6.19)$$

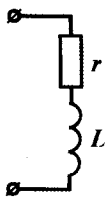
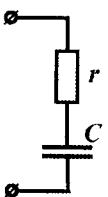
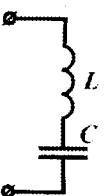
а провідностями

$$Y(p) = \frac{1}{r}, \quad Y(p) = \frac{1}{Lp}, \quad Y(p) = Cp. \quad (6.20)$$

Це дозволяє визначити вхідні опори та провідності схем за послідовного та паралельного з'єднань цих елементів.

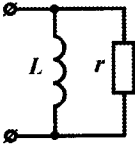
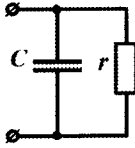
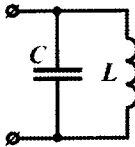
1. Послідовне з'єднання елементів (табл. 6.3).

Таблиця 6.3

 <p>Рисунок 6.3</p>	$\left. \begin{aligned} Z(p) &= Lp + r = a_1 p + a_0 \\ Y(p) &= \frac{1}{Lp + r} = \frac{\frac{1}{L}}{p + \frac{r}{L}} = \frac{a_0}{p + b_0} \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$
 <p>Рисунок 6.4</p>	$\left. \begin{aligned} Z(p) &= r + \frac{1}{Cp} = \frac{p + \frac{1}{rC}}{\frac{1}{r}p} = \frac{p + a_0}{b_1 p} \\ Y(p) &= \frac{Cp}{rCp + 1} = \frac{\frac{1}{r}p}{p + \frac{1}{rC}} = \frac{a_1 p}{p + b_0} \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$
 <p>Рисунок 6.5</p>	$\left. \begin{aligned} Z(p) &= Lp + \frac{1}{Cp} = \frac{LCp^2 + 1}{Cp} = \frac{p^2 \frac{1}{LC}}{\frac{1}{L}p} = \frac{p^2 + a_0}{b_1 p} \\ Y(p) &= \frac{Cp}{LCp^2 + 1} = \frac{\frac{1}{L}p}{p^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{a_1 p}{p^2 + b_0} \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$

2. Паралельне з'єднання елементів (табл. 6.4).

Таблиця 6.4

 <p>Рисунок 6.6</p>	$\left. \begin{aligned} Z(p) &= \frac{rLp}{Lp+r} = \frac{rp}{p+\frac{r}{L}} = \frac{a_1p}{p+b_0} \\ Y(p) &= \frac{p+\frac{r}{L}}{rp} = \frac{a_0+p}{pb_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$
 <p>Рисунок 6.7</p>	$\left. \begin{aligned} Z(p) &= \frac{r\frac{1}{Cp}}{r+\frac{1}{Cp}} = \frac{\frac{1}{C}}{p+\frac{1}{rC}} = \frac{a_0}{p+b_0} \\ Y(p) &= \frac{rCp+1}{r} = \frac{p+\frac{1}{Cr}}{\frac{1}{C}} = \frac{p+a_0}{b_0} \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$
 <p>Рисунок 6.8</p>	$\left. \begin{aligned} Z(p) &= \frac{Lp\frac{1}{pC}}{Lp+\frac{1}{pC}} = \frac{p\frac{1}{C}}{p^2+\frac{1}{LC}} = \frac{a_1p}{p^2+b_0} \\ Y(p) &= \frac{LCp^2+1}{Lp} = \frac{p^2+\frac{1}{LC}}{\frac{1}{C}p} = \frac{p^2+a_0}{b_1p} \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$

6.5 Синтез двополюсників розкладанням вхідної функції на прості дроби

Нехай вхідну функцію записано раціональним дробом, в якому $m-n=1$,

$$Z(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{A(p)}{B(p)}. \quad (6.27)$$

Виділимо простим діленням $A(p)$ на $B(p)$ дві складові – $A_\infty p$ і A_0 , внаслідок чого запишемо

$$Z(p) = A_\infty p + A_0 + \frac{A_1(p)}{B(p)}, \quad (6.28)$$

де $A_1(p)$ має степінь на одиницю менший, ніж знаменник.

Якщо всі корені знаменника від'ємні, дійсні і прості $p_k = -a_k$, то (6.28) можна записати у вигляді

$$Z(p) = A_\infty p + A_0 + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_m}{p - p_m}, \quad (6.29)$$

де коефіцієнти A_k визначаються за виразом (2.41)

$$A_k = \frac{A_1(p_k)}{B'(p_k)}.$$

Кожній складовій, яка має вигляд $\frac{A_k}{p - p_k} = \frac{A_k}{p + a_k}$, відповідає паралельне з'єднання резистора r_k і ємності C_k (див. рис. 6.7), в якому $C_k = \frac{1}{A_k}$, $r_k = \frac{A_k}{a_k}$.

Перші дві складові в формулі (6.29) реалізуються у вигляді індуктивності $L = A_\infty$ і резистора $r = A_0$.

Таким чином, вхідна функція (6.29) може бути реалізована схемою, яку показано на рис. 6.9.

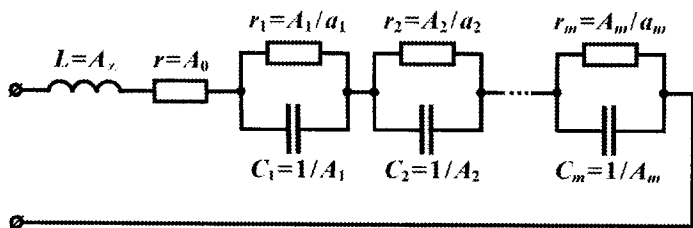


Рисунок 6.9

Якщо на прості дроби розкладена вхідна провідність

$$Y(p) = A_{\infty}p + A_0 + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_m}{p - p_m}, \quad (6.30)$$

то реалізована схема має вигляд паралельно з'єднаних двополіусників.

Перша складова реалізується у вигляді ємності $C = A_{\infty}$, друга – через резистор з провідністю $g = A_0$ або $r = \frac{1}{A_0}$.

Складові, які мають вигляд

$$\frac{A_k}{p - p_k} = \frac{A_k}{p + a_k}$$

подають послідовним з'єднанням індуктивностей $L_k = \frac{1}{A_k}$ і резистора

$$r_k = \frac{a_k}{A_k}.$$

Таким чином, загальну схему, яка реалізує функцію вхідної провідності (6.30), показано на рис. 6.10.

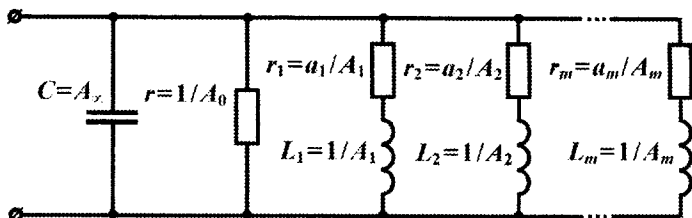


Рисунок 6.10

Якщо в (6.28) найвищі степені p поліномів $A_1(p)$ і $B(p)$ однакові, але $A_1(p)$ не містить сталої складової, що не залежить від p , то дріб $\frac{A_1(p)}{B(p)}$ можна подати у вигляді

$$\frac{A_1(p)}{B(p)} = p \frac{A_2(p)}{B(p)},$$

де найвищий степінь полінома $A_2(p)$ буде на одиницю менший, ніж степінь полінома $B(p)$.

Розкладання $\frac{A_1(p)}{B(p)}$ на прості дробі можна записати так:

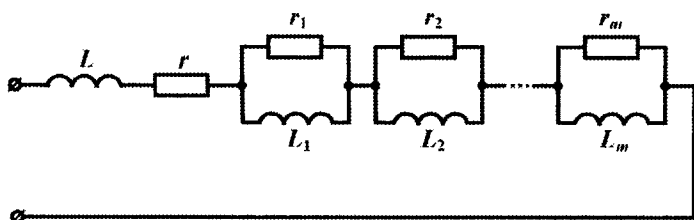
$$\frac{A_1(p)}{B(p)} = p \left(\frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_m}{p-p_m} \right). \quad (6.31)$$

Якщо $p_k = -b_k$, то вхідна функція має вигляд

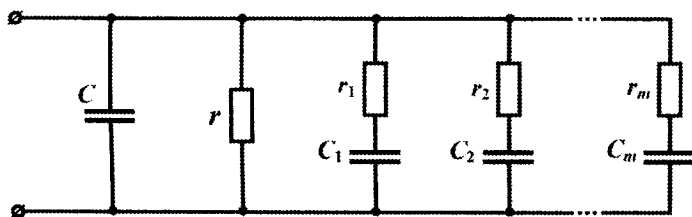
$$Z(p) = A_\infty p + A_0 + \frac{A_1 p}{p+b_1} + \frac{A_2 p}{p+b_2} + \dots + \frac{A_k p}{p+b_k} + \dots + \frac{A_m p}{p+b_m}. \quad (6.32)$$

Складова $\frac{A_k p}{p+b_k}$ реалізується паралельним з'єднанням резистора

і індуктивності (див. рис. 6.6), де $r_k = A_k$ і $L_k = \frac{A_k}{b_k}$. Схема, яка відповідає опорі $Z(p)$ (6.32), зображена на рис. 6.11, а.



а)



б)

Рисунок 6.11

Якщо вхідною функцією є вхідна провідність

$$Y(p) = A_{\infty}p + A_0 + \frac{A_1p}{p+b_1} + \frac{A_2p}{p+b_2} + \dots + \frac{A_kp}{p+b_k} + \dots + \frac{A_m p}{p+b_m}, \quad (6.33)$$

то відповідна схема показана на рис. 6.11, б, де $r_k = \frac{1}{A_k}$, $C_k = \frac{A_k}{b_k}$.

Приклад 6.4

Реалізувати функцію

$$Y(p) = \frac{4p^3 + 8p^2 + 11p + 5}{4p^2 + 6p + 2}.$$

Простим діленням виділимо складову з p і сталу величину

$$Y(p) = p + \frac{1}{2} + \frac{6p + 4}{4p^2 + 6p + 2}.$$

Корені знаменника

$$p_1 = -\frac{1}{2}, \quad p_2 = -1.$$

Перепишемо вхідну провідність у вигляді

$$Y(p) = p + \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}p + 1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)(p + 1)} = p + \frac{1}{2} + \frac{A_1}{p + \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{p + 1}.$$

Знаходимо A_1 і A_2

$$A_1 = \frac{\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{\frac{3}{2}(-1) + 1}{2(-1) + \frac{3}{2}} = 1.$$

Тоді

$$Y(p) = p + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}} + \frac{1}{p + 1}.$$

Реалізовану схему показано на рис. 6.12.

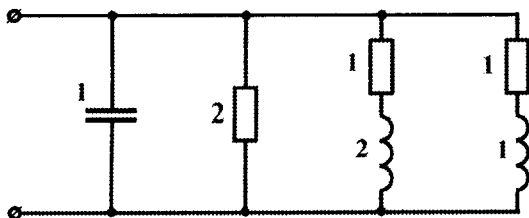


Рисунок 6.12

Приклад 6.5

Реалізувати функцію

$$Z(p) = \frac{2p^3 + 15p^2 + 18p + 4}{2p^2 + 5p + 2}.$$

Поділивши чисельник на знаменник, одержимо

$$Z(p) = p + \frac{10p^2 + 16p + 4}{2p^2 + 5p + 2}.$$

Подальше ділення чисельника на знаменник, починаючи з вищих степенів, приводить до появи від'ємних коефіцієнтів. Тому ділення проводимо з нульових степенів p .

$$\begin{array}{r|l} 4 + 16p + 10p^2 & 2 + 5p + 2p^2 \\ 4 + 10p + 4p^2 & 2 \\ \hline 6p + 6p^2 & \end{array}$$

Вхідна функція має вигляд

$$Z(p) = p + 2 + \frac{6p^2 + 6p}{2p^2 + 5p + 2}.$$

Оскільки в одержаному дробові немає сталої складової, то на прості дроби розкладаємо функцію $\frac{6p + 6}{2p^2 + 5p + 2}$.

Корені знаменника $p = -\frac{1}{2}$, $p = -2$, тому

$$\frac{6p + 6}{2\left(p^2 + \frac{5}{2}p + 1\right)} = \frac{A_1}{p + \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{p + 2}.$$

Знаходимо A_1 і A_2

$$A_1 = \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) + 3}{2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}} = 1, \quad A_2 = \frac{3(-2) + 3}{2(-2) - \frac{5}{2}} = 2.$$

Вхідна функція

$$Z(p) = p + 2 + \frac{p}{p + \frac{1}{2}} + \frac{2p}{p + 2}.$$

Схема даної вхідної функції показана на рис. 6.13.

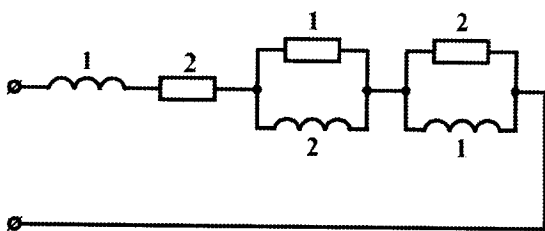


Рисунок 6.13

6.6 Синтез двополюсників поданням вхідної функції у вигляді неперервних дробів

Нехай вхідний опір задано у вигляді відношення двох поліномів

$$Z(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

де найвищий степінь змінної p чисельника (n) більший від найвищого степеня p знаменника (m) на одиницю. Розділимо чисельник на знаменник таким чином, щоб найвищий степінь залишку від ділення був на одиницю меншим, аніж найвищий степінь чисельника, тобто

$$Z(p) = N_1 p + M_1 + \frac{A_1(p)}{B(p)} = N_1 p + M_1 + Z_1(p). \quad (6.34)$$

Схемна реалізація функції (6.34) являє собою послідовне з'єднання трьох елементів – індуктивності $L_1 = N_1$, резистора $r_1 = M_1$ і деякого допоки ще невідомого опору Z_1 (рис. 6.14).

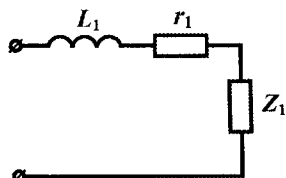


Рисунок 6.14

Запишемо (6.34) у вигляді

$$Z(p) = N_1 p + M_1 + \frac{1}{Y_1(p)}, \quad (6.35)$$

де $Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{B(p)}{A_1(p)}$. Для функції $Y_1(p)$ найвищий степінь чисельника на одиницю більший від найвищого степеня знаменника.

Аналогічно виконуємо ділення $B(p)$ на $A_1(p)$, внаслідок чого одержуємо

$$Y_1(p) = N_2 p + M_2 + \frac{B_1(p)}{A_1(p)} = N_2 p + M_2 + Y_2(p). \quad (6.36)$$

Найвищий степінь $B_1(p)$ на одиницю менший, ніж найвищий степінь $A_1(p)$. Схемна реалізація функції (6.36) являє собою паралельне з'єднання ємності $C_2 = N_2$, резистора $r_2 = \frac{1}{M_2}$ і невідомої провідності $Y_2(p)$ (рис. 6.15, а).

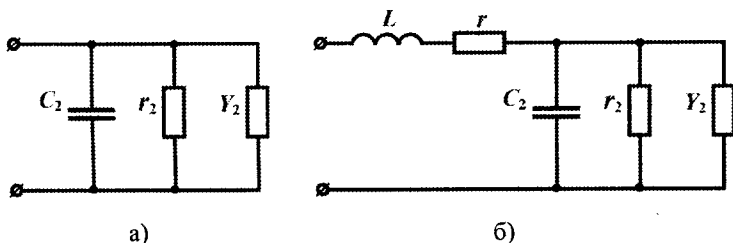


Рисунок 6.15

На рис. 6.15,б показано реалізацію вхідної функції (6.36)

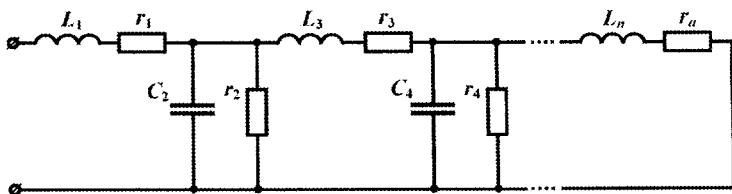
$$Z(p) = N_1 p + M_1 + \frac{1}{N_2 p + M_2 + Y_2(p)}$$

Продовжуючи процес ділення, вхідний опір можна записати

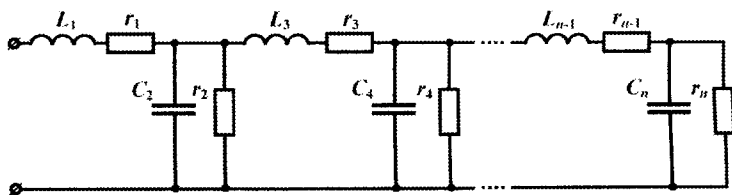
$$Z(p) = N_1 p + M_1 + \frac{1}{N_2 p + M_2 + \frac{1}{N_3 p + M_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{N_n p + M_n}}}} \quad (6.37)$$

Потрібно врахувати, що схему можна реалізувати, якщо тільки всі коефіцієнти N_k і M_k ланцюгового дроби (6.37) будуть додатними.

Якщо n є непарним числом, то вхідний опір реалізується у вигляді схеми, яку показано на рис. 6.16, а, якщо ж n парне число, то – у вигляді схеми рис. 6.16, б.



а)



б)

Рисунок 6.16

В деяких випадках члени в поліномах $A(p)$ і $B(p)$ перед діленням можуть бути розташовані за спадаючими степенями p .

Якщо вхідною функцією буде задано вхідну провідність, то всі попередні міркування збережуть свою силу, однак в цьому випадку непарним коефіцієнтам відповідає паралельне з'єднання смності і резистора (див. рис. 6.7), а парним – послідовне з'єднання індуктивності і резистора (див. рис. 6.6).

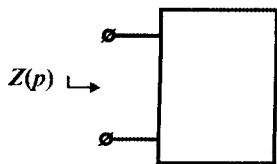


Рисунок 6.17

Приклад 6.6

Необхідно реалізувати двополюсник, вхідний опір якого являє собою функцію

$$Z(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + 5p + 2}{p^2 + p + 1}.$$

Для розв'язування задачі проведемо послідовне ділення чисельника

$A(p) = 2p^3 + 3p^2 + 5p + 2$ на знаменник $B(p) = p^2 + p + 1$.

$$\begin{array}{r}
 2p^3 + 3p^2 + 5p + 2 \quad | \quad p^2 + p + 1 \\
 \underline{2p^3 + 2p^2 + 2p} \\
 p^2 + 3p + 2 \\
 \underline{p^2 + p + 1} \\
 p^2 + p + 1 \quad | \quad 2p + 1 \\
 \underline{p^2 + 0,5p} \\
 0,5p + 1 \\
 \underline{0,5p + 0,25} \\
 2p + 1 \quad | \quad 3/4 \\
 \underline{2p} \quad | \quad 8/4p + 4/3 \\
 1 \\
 \quad | \\
 \quad | \quad 1 \\
 \quad | \quad 0
 \end{array}$$

Таким чином,

$$Z(p) = 2p + 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + \frac{8}{3} \frac{1}{p + \frac{4}{3}}}$$

Реалізовану схему наведено на рис. 6.18.

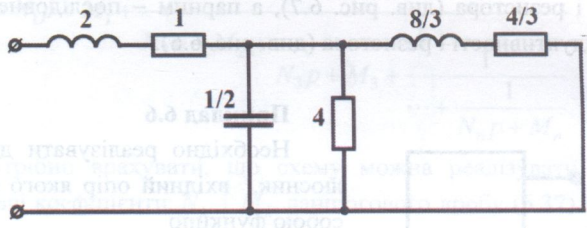


Рисунок 6.18

Необхідно зауважити, що для розв'язування задач синтезу електричних кіл доцільно залучати сучасні системи комп'ютерної математики, які мають чисельні бібліотеки з потужними функціями, цілком здатними забезпечити потрібну автоматизацію обчислень. Так, на рис. 6.19 даний приклад виконано в математичній програмі Mathcad, де використана одна із директив – parfrac, яка здатна здійснювати розкладання дробово-раціональної функції на елементарні дроби, а на рис. 6.20 – неперервний дріб отримано в

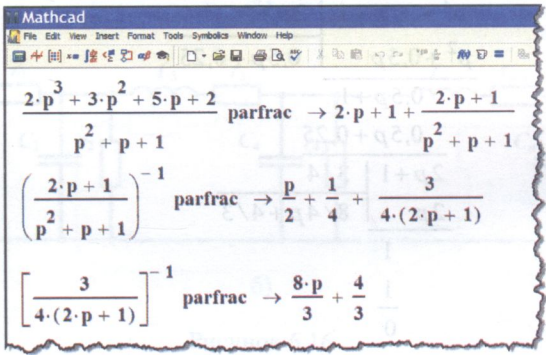


Рисунок 6.19

програмному середовищі Maple, для чого були використані бібліотека numtheory і функція з цієї бібліотеки cfrac().

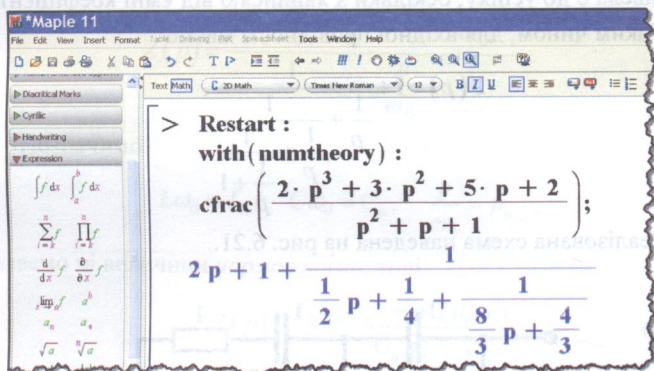


Рисунок 6.20

Приклад 6.7

Реалізувати вхідну провідність $Y(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{p^3 + 2p^2 + p + 1}$.

Ділення проведемо, розмістивши члени поліномів за зростаючими степенями змінної

$$\begin{array}{r}
 1 + 2p + 3p^2 + 2p^3 \quad | \quad 1 + p + 2p^2 + p^3 \\
 \underline{1 + \quad p + 2p^2 + \quad p^3} \\
 p + p^2 + p^3 \\
 \underline{p + p^2 + p^3} \\
 0 \\
 \\
 1 + p + p^2 \quad | \quad 1 + p + 2p^2 + p^3 \\
 \underline{1 + \quad p + \quad p^2} \\
 0 \\
 \\
 p + p^2 + p^3 \quad | \quad p + p^2 + p^3 \\
 \underline{p + p^2} \\
 p^3 \\
 \underline{p^3} \\
 0 \\
 \\
 p^2 + p^3 \quad | \quad p^3 \\
 \underline{p^2} \\
 p^3 \\
 \underline{p^3} \\
 0 \\
 \\
 p^3 \quad | \quad p^3 \\
 \underline{p^3} \\
 0
 \end{array}$$

Це було пов'язано з тим, що спроба провести ділення, розташувавши члени поліномів за спадаючими степенями змінної p не привела б до успіху, оскільки з'явилися б від'ємні коефіцієнти.

Таким чином, для вхідної провідності маємо

$$Y(p) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{1}{p} + 1}}.$$

Реалізована схема наведена на рис. 6.21.

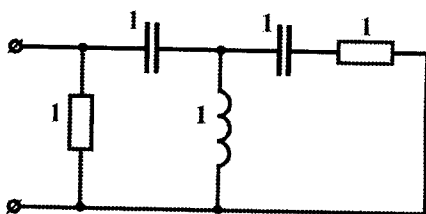


Рисунок 6.21

Якщо вхідна функція не реалізується розглянутими вище методами, то використовують інші методи, які описані в спеціалізованій літературі із синтезу лінійних електричних кіл.

Для того, щоб коефіцієнти вхідних функцій мали однаковий порядок, що спрощує розрахунки, використовують нормування параметрів за частотою.

Для послідовно з'єднаних резистора, індуктивності і ємності вхідний опір

$$Z(p) = r + Lp + \frac{1}{Cp} = \frac{LCp^2 + rCp + 1}{Cp}. \quad (6.38)$$

Якщо $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$, $r = 20 \text{ Ом}$, то

$$Z(p) = \frac{10^{-7} p^2 + 2 \cdot 10^{-4} p + 1}{10^{-4} p}.$$

Виберемо частоту нормування $\omega_0 = 10^3 \text{ с}^{-1}$ і перепишемо (6.38) у вигляді

$$Z(p) = \frac{L\omega_0 C\omega_0 \frac{p^2}{\omega_0^2} + rC\omega_0 \frac{p}{\omega_0} + 1}{C\omega_0 \frac{p}{\omega_0}}.$$

Позначимо

$$L\omega_0 = L_n, \quad C\omega_0 = C_n, \quad \frac{p}{\omega_0} = p_n$$

і назвемо ці величини *нормованими*, тоді

$$Z(p) = \frac{L_n C_n p_n^2 + r C_n p_n + 1}{C_n p_n}. \quad (6.39)$$

Підставивши значення нормованих величин в (6.39), одержимо

$$Z(p) = \frac{0,1p^2 + 0,2p + 1}{0,1p} = \frac{p^2 + 2p + 10}{p}. \quad (6.40)$$

Перехід від нормованих величин до реальних виконується з допомогою виразів

$$L = \frac{L_n}{\omega_0}, \quad C = \frac{C_n}{\omega_0}.$$

Всі параметри в наведених вище прикладах одержані в нормованих значеннях.

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть основні етапи синтезу електричних кіл.
2. Сформулюйте умови фізичної реалізації двополюсника.
3. Які поліноми називаються поліномами Гурвіца?
4. Що таке додатні дійсні функції?
5. Визначіть, чи будуть функції

$$F_1(p) = \frac{p^2 + p + 4}{p^2 + p + 1}, \quad F_2(p) = \frac{p^3 + 3p^2 + 2p + 2}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1},$$

$$F_3(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+2}$$

додатними дійсними функціями.

Відповідь: Функції $F_1(p)$ і $F_2(p)$ є додатними дійсними, $F_3(p)$ – ні.

6. Методом розкладання на прості дроби реалізуйте схему двополюсника за заданою функцією

$$Z(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{p(p+2)}$$

Відповідь: $Z(p) = 1 + \frac{3/2}{p} + \frac{1/2}{p+2}$.

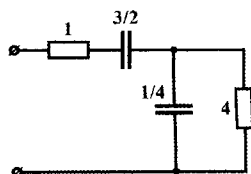


Рисунок 6.22

Схему показано на рис. 6.22.

7. Реалізувати схему двополюсника за функцією

$$Z(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{p(p+2)}$$

методом розкладання на неперервні дроби.

Відповідь:

$$Z(p) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{4 + \frac{1}{6}p}}$$

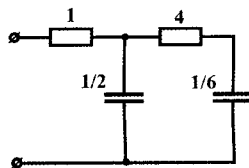


Рисунок 6.23

Схему показано на рис. 6.23.

Електричні та магнітні
НЕЛІНІЙНІ КОЛА

Розділ 7

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

7.1 Основні поняття і означення

Електричні кола, які вивчають в курсі теоретичних основ електротехніки, поділяють на *лінійні* та *нелінійні*.

Лінійні електричні кола складаються тільки з лінійних елементів, для яких відповідні параметри їх опорів r , індуктивностей L і ємностей C мають певні й сталі значення, а між електричними та магнітними величинами на цих елементах існують лінійні пропорційні зв'язки:

$$\left. \begin{aligned} u &= ri \\ \psi &= Li \\ q &= Cu \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Нелінійними колами називаються електричні кола, до складу яких входить хоча б один нелінійний елемент. Параметри нелінійних елементів не є сталими величинами, а залежать явно чи опосередковано або від струмів, що через ці елементи проходять, або від прикладених до них напруг, або від зовнішніх умов роботи. Тому залежності між електричними та магнітними величинами для нелінійних елементів є більш складними і в загальному випадку їх можна подати у вигляді функціональних зв'язків

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(i) \\ \psi &= f_2(i) \\ q &= f_3(u) \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

які називаються *характеристиками нелінійних елементів*. Такі характеристики зазвичай визначають експериментально і подають графічно, у табличний спосіб або аналітичними виразами.

Електричні властивості нелінійного резистивного елемента задає *вольт-амперна характеристика* $u = f(i)$.

Характеристику нелінійного індуктивного елемента називають *вебер-амперною характеристикою*, оскільки та встановлює зв'язок між потокозчепленням котушки індуктивності і її електричним струмом $\psi = f(i)$.

Нелінійна ємність характеризується *кулон-вольтною характеристикою*, яка задає зв'язок між накопиченим на електродах електричним зарядом і прикладеною напругою $q = f(u)$.

Загальні позначення нелінійних елементів (опорів, ємностей, індуктивностей) в електричних схемах показано на рис. 7.1. Окремі з нелінійних елементів мають власні умовні графічні позначення, які обумовлені існуючою нормативною документацією.



Рисунок 7.1

Нелінійні елементи електричного кола за виглядом їх характеристики поділяють на такі, що мають:

- *симетричну* відносно початку координат характеристику (рис. 7.2, в, г), для якої виконується рівність $y(x) = -y(-x)$, або *несиметричну* (рис. 7.2, а, б), якщо така рівність не виконується;

- *монотонну*, коли похідна $\frac{dy}{dx}$ завжди додатна і не змінює свого знака будь-де в межах всієї характеристики (рис. 7.2, б, в, г), та *немонотонну* (рис. 7.2, д), якщо ця похідна на окремих ділянках характеристики набуває від'ємного знака;

- *однозначну*, коли кожному значенню змінної x відповідає одне і тільки одне значення y (рис. 7.2, в), і *неоднозначну*, якщо одному значенню змінної x можуть відповідати декілька значень змінної y (рис. 7.2, е).

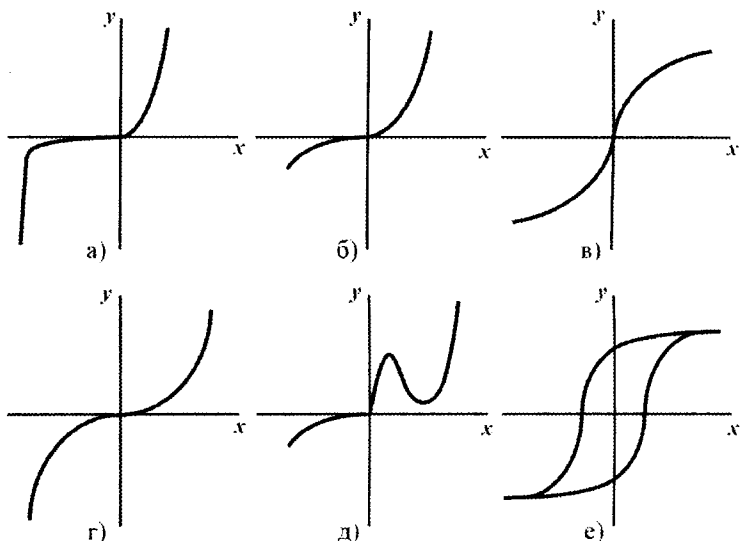


Рисунок 7.2

Окрім наведеної класифікації нелінійні елементи можуть бути керованими та некерованими.

Керованими нелінійними елементами є такі елементи електричного кола, характеристики яких перебувають в залежності від

деякої фізичної величини, яку називають *керуючою*. Керуючими можуть бути напруга, струм, температура, тиск, освітленість тощо.

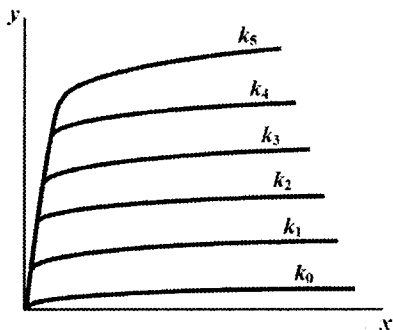


Рисунок 7.3

Кожен з керованих нелінійних елементів має сімейство характеристик, що визначені за деяких різних заданих сталих значень керуючої величини.

На рис. 7.3 наведено приклад такого сімейства характерис-

тик $y = f(x, k)$, де k – керуюча фізична величина.

Для кожної точки нелінійної характеристики вводять поняття статичного та динамічного (диференціального) параметрів.

Так, *статичним опором* нелінійного резистивного елемента в точці a (рис. 7.4, а) називають відношення визначених в даній точці постійної напруги U_a нелінійного елемента і його постійного струму I_a

$$r_{cm} = \frac{U_a}{I_a}. \quad (7.3)$$

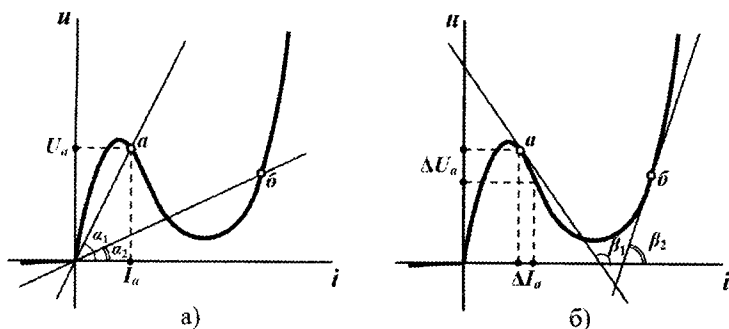


Рисунок 7.4

Відповідно для *статичної індуктивності* та *статичної ємності* співвідношення носять аналогічний характер

$$\left. \begin{aligned} L_{cm} &= \frac{\psi_0}{I_0} \\ C_{cm} &= \frac{q_0}{U_0} \end{aligned} \right\}. \quad (7.4)$$

Статичні параметри пропорційні тангенсу кута між віссю абсцис і прямою, проведеною через початок координат та задану поточну точку. Наприклад, для точки a цим кутом буде кут α_1 , а для точки b – кут α_2 (див. рис. 7.4, а).

Для опору віссю ординат має слугувати вісь напруг, для індуктивності – потокозчеплень, а для ємності – зарядів (рис. 7.1).

Статичні параметри залежать від положення точки, яка характеризує поточний стан елемента, і є завжди додатними.

Динамічним (диференціальним) опором нелінійного резистивного елемента називають відношення малого приросту напруги Δu в точці a до відповідного приросту струму Δi в цій же точці за умови, що останній прямує до нуля, тобто

$$r_{\partial} = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}. \quad (7.5)$$

Аналогічно

$$\left. \begin{aligned} L_{\partial} &= \frac{d\psi}{di} \\ C_{\partial} &= \frac{dq}{du} \end{aligned} \right\}. \quad (7.6)$$

Динамічні параметри пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної в заданій точці до осі абсцис. Так, на рис. 7.4, б для точки a таким кутом є кут β_1 , для точки b – кут β_2 .

Динамічні параметри можуть набувати як додатного знака (наприклад, точка b на рис. 7.4, б), так і від'ємного – на ділянках спаду характеристики (точка a на тому ж рисунку).

Електромагнітні процеси в нелінійних електричних колах порівняно з лінійними є більш складними й різноманітними.

Назвемо деякі явища, які притаманні виключно нелінійним колам, спостерігати їх в лінійних колах неможливо в принципі:

- під час дії на коло синусоїдного сигналу реакція кола може бути несинусоїдною функцією від часу, що дозволяє здійснювати перетворення частоти або випрямлення змінної напруги;

- за зміни рівня вхідної напруги або величини навантаження в широкому діапазоні величина напруги або струму в навантаженні можуть залишатися практично незмінними. В цьому випадку здійснюється стабілізація вихідної напруги або струму;

- за дії на вході кола джерела постійної напруги на виході кола з'являється періодична напруга різної форми, тобто можливе виникнення автоколивань;

- за наявності різних початкових умов для того самого кола можуть існувати різні усталені режими;

- під час плавної зміни величини вхідної напруги або струму можлива *стрибкоподібна* зміна величини вихідної напруги або струму.

Наведений перелік можливостей нелінійних кіл далеко не повний, але і він дає змогу зрозуміти: чому нелінійні кола знайшли широке застосування в електротехніці, радіоелектроніці, автоматичній та обчислювальній техніці.

Разом з тим, нелінійність характеристик елементів приводить до того, що електромагнітні процеси в нелінійних колах описуються *нелінійними* алгебраїчними або диференціальними рівняннями. Ще однією надзвичайно важливою властивістю нелінійних електричних кіл є неможливість застосування щодо них *принципу накладання*.

Тому аналіз процесів в нелінійних колах зазвичай проводять *наближеними* методами, оскільки на сьогодні не існує яких-небудь загальних прийомів аналітичного розв'язування нелінійних алгебраїчних та диференціальних рівнянь.

7.2 Аналітичне подання характеристик нелінійних елементів

Як було сказано, характеристики нелінійних елементів зазвичай подають у вигляді таблиць або графіків, які були отримані експериментально. Для аналітичних методів розрахунку нелінійні характеристики мають бути подані аналітичними виразами. Однак практично таке подання може бути тільки наближеним і тільки для окремої ділянки характеристики.

Звичайно, що точність наближення буде зростати, якщо тільки ускладнювати аналітичний вираз характеристики. Однак це, в свою чергу, призводить до ускладнень під час розв'язування математичних рівнянь, що описують процеси в нелінійних електричних колах. Тому на практиці під час аналізу нелінійного кола

необхідно вибирати, з одного боку, між складністю подання аналітичної функції нелінійної характеристики, а з іншого – точністю її наближення.

Оцінюючи точність наближення, потрібно мати на увазі, що певні похибки з'являються вже на етапі експериментального визначення характеристики через нестабільність параметрів та характеристик елементів електричного кола під час його роботи. Таким чином, у всіх випадках бажано, щоб *апроксимація* (аналітичний опис) нелінійної характеристики, була по можливості більш точною і охоплювала всі її своєрідні якості.

В той же час, необхідно, щоб апроксимуючий вираз не був складним.

Виконання цих суперечливих вимог суттєво залежить від виду апроксимуючих функцій. Останніми можуть бути такі функції, як степеневі поліноми, експоненційні поліноми, гіперболічні функції тощо. На вибір тієї чи іншої функції суттєво впливає вид конкретної характеристики нелінійного елемента.

Розглянемо деякі методи апроксимації нелінійної характеристики різними функціями.

7.2.1 Метод інтерполяції

Суть *методу інтерполяції* полягає в такому.

Нехай задано нелінійну характеристику (рис. 7.5), яку необхідно апроксимувати степеневим поліномом

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \quad (7.7)$$

тобто визначити невідомі коефіцієнти $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Ці коефіцієнти розраховують з умови збігу значень апроксимуючого полінома (7.7) та значень, які отримані за характеристикою в заданих чи наперед вибраних точках (рис. 7.5). Число вибраних точок характеристики повинно дорівнювати числу невідомих коефіцієнтів.

Якщо $n = 3$, то вибирають три точки 1, 2, 3, для яких з характеристики визначають значення $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$.

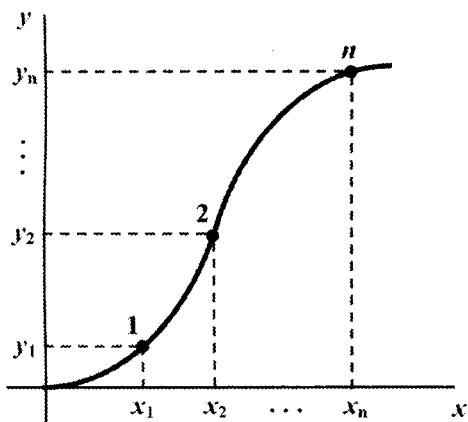


Рисунок 7.5

Підставивши значення x_i, y_i в (7.7), одержують систему лінійних рівнянь для знаходження a_1, a_2, a_3 .

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 &= y_1 \\ a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 &= y_2 \\ a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 &= y_3 \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Недолік цього методу полягає в тому, що в проміжних точках похибка не контролюється і у деяких випадках може бути доволі великою, однак у вибраних точках апроксимуючий поліном (7.7) та характеристика дають значення, які збігаються абсолютно.

Приклад 7.1

Нехай характеристику нелінійного елемента задано у табличний спосіб (див. табл. 7.1).

Таблиця 7.1

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,12	0,3	0,5	0,7	0,95	1,2

Продовження таблиці 7.1

x	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
y	1,55	1,95	2,5	3	3,9	4,8	5,35	7

Апроксимуємо задану характеристику поліномом третього степеня

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

За вузли інтерполяції оберемо з таблиці точки із координа-

$$\text{тами } x_1 = 2, y_1 = 0,7;$$

$$x_2 = 5, y_2 = 3;$$

$$x_3 = 7, y_3 = 7.$$

Підставимо значення x_i та y_i в (7.8) і одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів a_1, a_2, a_3

$$\left. \begin{aligned} 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 0,7 \\ 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 &= 3 \\ 7a_1 + 49a_2 + 343a_3 &= 7 \end{aligned} \right\}.$$

Розв'яжемо цю систему

$$a_1 = 0,4167, \quad a_2 = -0,08, \quad a_3 = 0,0233.$$

Таким чином, апроксимуючий поліном має вигляд

$$y = 0,4167x - 0,08x^2 + 0,0233x^3. \quad (7.9)$$

Апроксимуємо цю ж характеристику експоненціальною функцією

$$y = a(e^{\alpha x} - 1). \quad (7.10)$$

В (7.10) невідомими є дві величини: a та α .

Для їх визначення виберемо дві точки характеристики з координатами:

$$x_1 = 3, y_1 = 1,2$$

та

$$x_2 = 6, y_2 = 4,8.$$

Підставляємо вибрані значення в (7.10) й одержуємо два рівняння

$$\left. \begin{aligned} a(e^{\alpha x_1} - 1) &= y_1 \\ a(e^{\alpha x_2} - 1) &= y_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Поділимо перше рівняння системи (7.11) на друге

$$\frac{a^{\alpha x_1} - 1}{a^{\alpha x_2} - 1} = \frac{y_1}{y_2} = k.$$

Отримане рівняння має одну невідому α .

Після підстановки числових значень маємо

$$\frac{a^{3\alpha} - 1}{a^{6\alpha} - 1} = \frac{1,2}{4,8} = 0,25.$$

Позначимо

$$e^{3\alpha} = z.$$

Тоді

$$\frac{z-1}{z^2-1} = \frac{z-1}{(z+1)(z-1)} = 0,25,$$

$$\frac{1}{z+1} = 0,25$$

або

$$1 = 0,25z + 0,25,$$

звідки

$$z = 3.$$

Звідси

$$3\alpha = \ln 3,$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \ln 3 = 0,3662.$$

Із першого рівняння системи (7.11)

$$a = \frac{y_1}{e^{\alpha x_1} - 1} = \frac{1,2}{e^{0,3662 \cdot 3} - 1} = \frac{1,2}{3-1}$$

або

$$a = 0,6.$$

Таким чином,

$$y = 0,6(e^{0,3662x} - 1). \quad (7.12)$$

В табл. 7.2 для порівняння наведені значення y , що були розраховані за допомогою (7.9) та (7.12):

- y_0 (рядок 2) дає значення ординат відповідно до табл. 7.1;
- y_1 (рядок 3) – значення, отримані згідно з (7.9);
- y_2 (рядок 5) – значення, отримані згідно з (7.12),

а також:

- δ_{01} (рядок 4) та δ_{02} (рядок 6) – відносні похибки кожної апроксимації, що подані у відсотках.

Таблиця 7.2

1	x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
2	y_0	0	0,12	0,3	0,5	0,7	0,95
3	y_1	0	0,1912	0,36	0,5237	0,7	0,9062
4	δ_{01}	0	59,3	20	4,74	0	4,61
5	y_2	0	0,1206	0,2653	0,4392	0,648	0,899
6	δ_{02}	0	0,5	11,6	12,2	7,43	5,37
7	y_3	0	0,184	0,349	0,513	0,693	0,906
8	δ_{03}	0	53,3	16,3	2,6	1,0	4,6

Продовження таблиці 7.2

1	x	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
2	y_0	1,2	1,55	1,95	2,5	3,0	3,9	4,8	5,35	7,0
3	y_1	1,16	1,478	1,88	2,381	3,0	3,753	4,66	5,736	7,0
4	δ_{01}	3,33	4,6	3,59	4,76	0	3,75	2,92	1,95	0
5	y_2	1,2	1,562	1,996	2,518	3,144	3,896	4,8	5,889	7,188
6	δ_{02}	0	0,774	2,36	0,72	4,8	0,10	0	0,6	2,68
7	y_3	1,169	1,5	1,916	2,434	3,071	3,845	4,773	5,871	7,159
8	δ_{03}	2,58	3,22	1,74	2,64	2,37	1,41	0,56	0,36	2,27

Порівняння результатів апроксимації показує, що в вузлах інтерполяції, тобто у вибраних точках, апроксимуючі вирази да-

ють точні значення, а в інших же точках існують розбіжності.

Найбільша похибка за апроксимації степеневим поліномом (59,3 %) отримана для $x = 0,5$, а найбільша похибка апроксимації експоненціальною функцією (12,2 %) – для $x = 1,5$. Якщо така похибка за умовою розрахунку конкретного кола є занадто великою, то можна змінити вузли інтерполяції. Так, оскільки апроксимація степеневим поліномом призводить до великих похибок на початку функціональної залежності, то можна за перший вузол інтерполяції обрати значення $x = 1$ і повторити розрахунки.

7.2.2 Метод найменших квадратів

Розглянемо *метод найменших квадратів* на прикладі апроксимації характеристики степеневим поліномом

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (7.13)$$

В цьому випадку кількість точок на характеристиці можна вибрати більше, ніж степінь полінома. Нехай їх буде m , тобто $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$. За допомогою характеристики нелінійного елемента (табл. 7.1) визначимо відповідні значення $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$.

Цей метод не вимагає абсолютного збігу значень апроксимуючої функції із значеннями ординат характеристики нелінійного елемента у вибраних точках, тому для кожної точки аргумента x буде існувати деяка похибка між значеннями функції y , що були отримані за виразом (7.13), та значеннями y_i , узятими безпосередньо із нелінійної характеристики. Ця похибка для довільного i -го аргумента дорівнює

$$\varepsilon_i = y_i - (a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3). \quad (7.14)$$

Піднесемо похибку ε_i до квадрата, додамо всі квадрати похибки

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 \quad (7.15)$$

та накладемо умову мінімуму для цієї суми квадратів похибки, що дозволить визначити коефіцієнти a_1 , a_2 і a_3 . З цією метою

прирівняємо до нуля часткові похідні від ε^2 за коефіцієнтами a_1 , a_2 і a_3

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_3} = 0. \quad (7.16)$$

Для полінома третього степеня детально розписані рівняння (7.16) мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_1} &= \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^m \left[y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) \right]^2 \right]}{\partial a_1} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \left[y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) \right] x_i = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_2} &= 2 \sum_{i=1}^m \left[y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) \right] x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_3} &= 2 \sum_{i=1}^m \left[y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) \right] x_i^3 = 0. \end{aligned}$$

Після деяких перетворень одержимо

$$\left. \begin{aligned} a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^4 &= \sum_{i=1}^m y_i x_i \\ a_1 \sum_{i=1}^m x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^5 &= \sum_{i=1}^m y_i x_i^2 \\ a_1 \sum_{i=1}^m x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^5 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^6 &= \sum_{i=1}^m y_i x_i^3 \end{aligned} \right\}. \quad (7.17)$$

Система (7.17) дає можливість знайти невідомі коефіцієнти полінома.

Приклад 7.2

Використаємо метод найменших квадратів для апроксимації розглянутої раніше характеристики нелінійного елемента степеневим поліномом третього степеня.

Для знаходження коефіцієнтів полінома візьмемо шість точок ($m = 6$) з координатами x_i, y_i

$$\begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 0,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 = 2 \\ y_2 = 0,7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 = 3 \\ y_3 = 1,2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_4 = 4 \\ y_4 = 1,95 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_5 = 5 \\ y_5 = 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_6 = 6 \\ y_6 = 4,8 \end{pmatrix}.$$

Підставимо ці значення в (7.17) і отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} 91a_1 + 441a_2 + 2275a_3 &= 56,9 \\ 441a_1 + 2275a_2 + 12201a_3 &= 292,9 \\ 2275a_1 + 12201a_2 + 67171a_3 &= 1574,9 \end{aligned} \right\},$$

розв'язками якої будуть

$$a_1 = 0,398, \quad a_2 = -0,0718, \quad a_3 = 0,023.$$

Таким чином, апроксимуючий поліном набуде вигляду

$$y = 0,398x - 0,0718x^2 + 0,023x^3.$$

Значення функції y_3 , які отримані згідно з даним виразом за методом найменших квадратів, наведено в рядку 7 табл. 7.2. В рядку 8 цієї таблиці подамо відносні похибки.

Як видно із таблиці, похибки у всіх точках, крім вузлів інтерполяції, за методом найменших квадратів є меншими, аніж апроксимацією степеневим поліномом за методом інтерполяції.

7.2.3 Метод кусково-лінійної апроксимації

За методом кусково-лінійної апроксимації нелінійну характеристику на окремих ділянках замінують прямолінійними відрізками. Означену заміну можна реалізувати за допомогою графічних побудов, як це, наприклад, показано на рис 7.6. Точність апроксимації залежатиме від кількості лінійних ділянок на заданому проміжку. Така кусково-лінійна заміна характеристики повністю визначається координатами (x_k, y_k) точок перелому, які задають межі між суміжними проміжками. Початкова (x_0, y_0)

та кінцева (x_n, y_n) точки позначають робочу ділянку характеристики і не є точками перелому.

Рівняння відрізка прямої k -ої лінійної ділянки між двома сусідніми точками перелому (x_k, y_k) та (x_{k+1}, y_{k+1}) можна записати як

$$\frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Після перетворення

$$y = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} x + \frac{y_k x_{k+1} - x_k y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} = a_k x + b_k, \quad (7.18)$$

де a_k – кутовий коефіцієнт прямої,

b_k – ордината точки перетину прямої з віссю y .

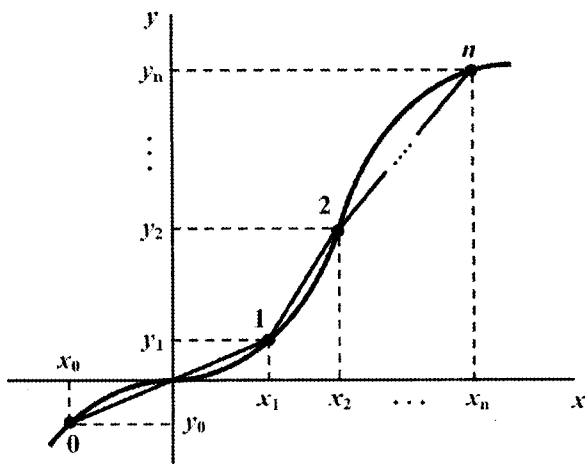


Рисунок 7.6

Перевага кусково-лінійної апроксимації полягає в тому, що на кожному проміжку нелінійний елемент розглядається як лінійний і для аналізу такого кола на цих проміжках можна використовувати апарат теорії лінійних електричних кіл.

Заняття для самоперевірки

1. Які кола не можна вважати лінійними? Чому?
2. Поясніть, в чому полягає різниця між лінійними та нелінійними елементами електричного кола? Як це позначається на властивостях електричного кола та на системі його рівнянь?
3. Сформулюйте принцип накладання та назвіть методи розрахунку кіл, що базуються на цьому принципі.
4. Чи можна використовувати принцип накладання для розрахунку нелінійних кіл?
5. Яким чином описують електричні властивості нелінійних елементів?
6. Назвіть основні характеристики нелінійних елементів? За якими ознаками проводять їх класифікацію?
7. В чому полягає різниця між статичними та динамічними параметрами нелінійних елементів?
8. Чи можуть статичні та динамічні параметри нелінійних елементів набувати від'ємних значень? Відповідь обґрунтуйте аналітично.
9. Назвіть процеси та явища, що притаманні виключно нелінійним колам.
10. Розкрийте суть основних методів аналітичного подання характеристик нелінійних елементів:
 - методу інтерполяції;
 - методу найменших квадратів;
 - методу кусково-лінійної апроксимації.Покажіть їх недоліки та переваги. В яких випадках застосовують ці методи?

Розділ 8

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НЕЛІНІЙНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

8.1 Графічні методи розрахунку

Під час розрахунку графічними методами характеристики нелінійних та лінійних елементів електричного кола подаються графічно і розв'язок задачі шукається за допомогою відповідних графічних побудов.

Надалі будемо вважати, що характеристики нелінійних елементів є відомими.

8.1.1 Найпростіші схеми з'єднання нелінійних опорів

1. Розглянемо спочатку випадок, коли електричне коло складається із джерела постійної напруги та тільки одного нелінійного елемента (рис. 8.1).

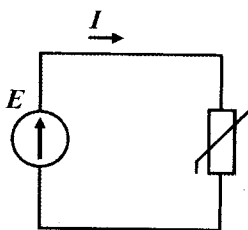


Рисунок 8.1

Назвемо таке коло *початковим*.

Вольт-амперну характеристику нелінійного резистивного елемента показано на рис. 8.2.

Оскільки електрична напруга джерела $U = E$ безпосередньо прикладена до нелінійного елемента, то за допомогою його вольт-амперної характеристики відразу ж можна визначити струм I , що проходить через цей елемент (рис. 8.2).

Точку P на вольт-амперній характеристиці нелінійного резистивного елемента (див. рис. 8.2) називають *робочою точкою*. Вона визначає струм і напругу на нелінійному елементі в заданому робочому режимі.

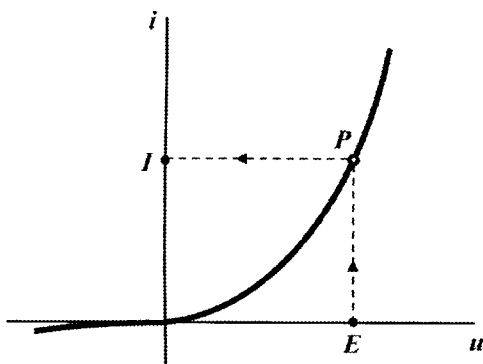


Рисунок 8.2

2. Нехай тепер електричне коло має два нелінійних елементи: 1 і 2, з'єднаних між собою *послідовно* (рис. 8.3).

Вольт-амперні характеристики обох нелінійних опорів показано на рис. 8.4.

Здану схему можна привести до початкової, якщо ці два послідовно з'єднані опори замінити одним також з нелінійною вольт-амперною характеристикою, яку одержують методом додавання характеристик першого й другого опорів.

Оскільки опори з'єднані послідовно і через них проходить той самий електричний струм, то для знаходження результуючої вольт-амперної характеристики еквівалентного опору необхідно задатися послідовністю точок, які відповідають різним можливим значенням струму i_1, i_2, i_3, \dots та i_k , після чого окремо для кожного з цих струмів знайти значення на-

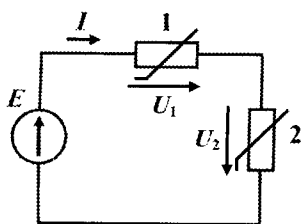


Рисунок 8.3

пруг на обох нелінійних елементах і скласти їх між собою, як того вимагає другий закон Кірхгофа.

У такий спосіб визначають абсциси точок характеристики еквівалентного опору для відповідних значень ординат (рис. 8.4).

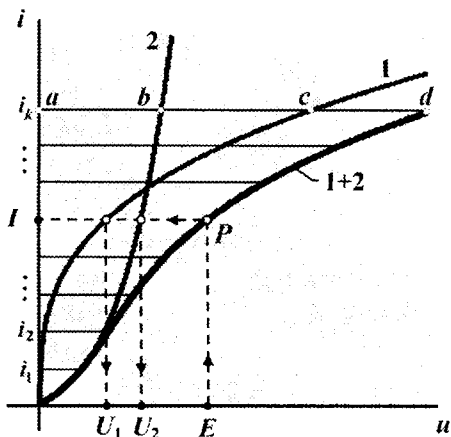


Рисунок 8.4

Наприклад, для струму i_k точку d отримано додаванням двох відрізків: ab , який відповідає напрузі на другому опорі, та ac , що в заданій системі координат є напругою на першому опорі.

Тоді шуканий електричний струм I знаходять безпосередньо за результуючою вольт-амперною характеристикою (умовно її позначено $1+2$ на рис. 8.4) еквівалентного опору за напруги $U = E$ (точка P). Напруги U_1 і U_2 на кожному з двох опорів визначають абсцисами точок перетину їх власних вольт-амперних характеристик з горизонтальною прямою, що проходить через робочу точку P (див. рис. 8.4).

Вищенаведений метод є графічною інтерпретацією розв'язання нелінійного математичного рівняння, складеного за другим законом Кірхгофа,

$$u_1 + u_2 = E,$$

де $u_1 = f_1(i)$ та $u_2 = f_2(i)$ є вольт-амперними характеристиками нелінійних резистивних елементів.

Коли до складу електричного кола входить декілька послідовно з'єднаних опорів, серед яких можуть бути і лінійні, то точки

загальної характеристики знаходять додаванням напруг на всіх елементах за однакових значень струму.

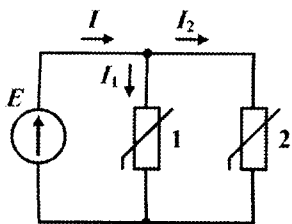


Рисунок 8.5

3. Якщо опори з'єднані *паралельно* (рис. 8.5), то загальна характеристика кола визначається шляхом додавання характеристик паралельно з'єднаних опорів за довільно заданих однакових значень напруг u_1, u_2, \dots та u_k (рис. 8.6).

Це пояснюється дією двох чинників, першим з яких є перший закон Кірхгофа, внаслідок чого результуючий (вхідний) струм має дорівнювати сумі струмів, що проходять паралельними вітками, а другим чинником є те, що до паралельних віток прикладена та сама електрична напруга.

Потому за заданим значенням, наприклад, вхідного струму I на загальній характеристиці кола знаходять прикладену до опорів напругу $U = E$, а струми через опори 1 та 2 визначають за відповідними характеристиками нелінійних опорів (рис. 8.6).

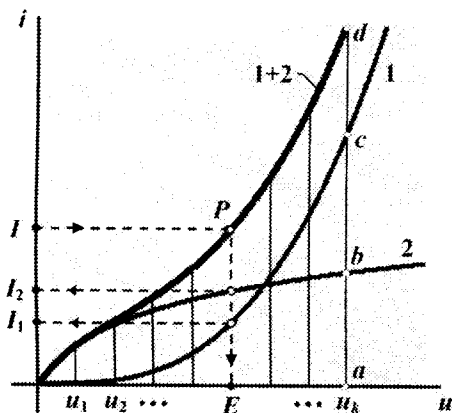


Рисунок 8.6

4. За змішаного з'єднання опорів (рис. 8.7) загальну характе-

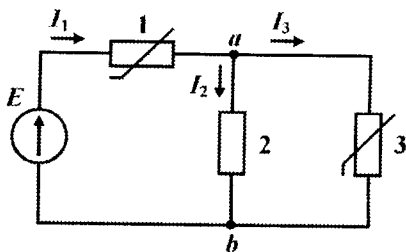


Рисунок 8.7

ристику електричного кола отримують шляхом його поступового спрощення і побудови для окремих ділянок за вищеописаними методиками допоміжних результуючих вольт-амперних характеристик. Кінцевою

метою таких еквівалентних перетворень є початкове коло (див. рис. 8.1) і загальна характеристика його еквівалентного нелінійного опору.

Отже, наприклад, для кола, наведеного на рис. 8.7, спочатку необхідно визначити характеристику еквівалентного опору, яким заміщають ділянку кола між вузлами a і b . Оскільки опори 2 та 3 з'єднані паралельно, то ця характеристика знаходиться шляхом додавання ординат характеристик 2 і 3 за умови довільно заданих однакових абсцис u_1, u_2, \dots та u_k . На рис. 8.8 умовно криву отриманої у такий спосіб характеристики позначено як $2+3$.

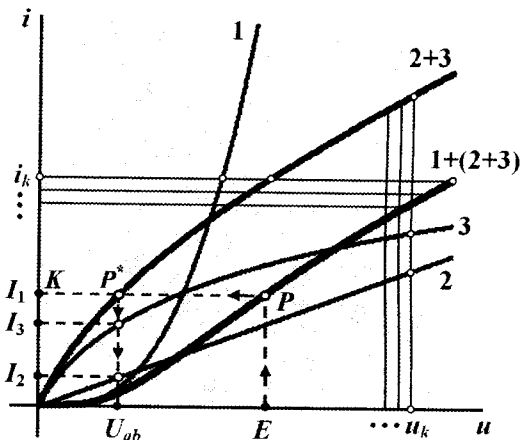


Рисунок 8.8

Загальна ж характеристика всього кола знаходиться додаванням абсцис характеристик 1 і (2+3) за довільно заданих однакових значень ординат i_1 , i_2 , ... та i_k , оскільки з'єднання є послідовним. Одержану характеристику наведено на рис. 8.8, її умовно позначено як криву 1+(2+3).

Тоді, як видно з рисунка, безпосередньо на загальній характеристиці за заданої вхідної напруги $U = E$ визначають вхідний струм I_1 та положення робочої точки P цієї характеристики. Перетин прямої PK з характеристикою 2+3 (точка P^*) дає напругу U_{ab} , за якої за допомогою характеристик 2 і 3 одержують відповідно електричні струми I_2 й I_3 .

8.1.2 Метод еквівалентного генератора

Якщо в складному електричному колі є тільки один нелінійний елемент (рис. 8.9, а), то всю лінійну ділянку цього кола зручно подати еквівалентним генератором з е.р.с. $E_{екв}$ і внутрішнім опором $r_{екв}$ (рис. 8.9, б).

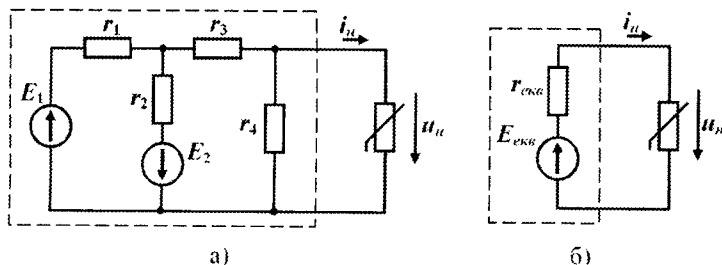


Рисунок 8.9

За такої еквівалентної заміни схема набуває простого вигляду і може бути легко розрахована у графічний спосіб.

Для знаходження струму i_n в отриманому еквівалентному колі (рис. 8.9, б) використаємо дещо інший графічний метод, аніж той, який був наведений вище.

Для цього розв'яжемо у графічний спосіб нелінійну систему з двох рівнянь, перше з яких складене за другим законом Кірхгофа, а друге являє собою вольт-амперну характеристику нелінійного резистивного елемента (рис. 8.10),

$$\left. \begin{aligned} r_{екв} i_n + u_n &= E_{екв} \\ i_n &= f(u_n) \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Перепишемо перше рівняння (8.1) відносно струму i_n

$$i_n = \frac{E_{екв}}{r_{екв}} - \frac{u_n}{r_{екв}} \quad (8.2)$$

і побудуємо графік цієї функції в системі координат вольт-амперної характеристики нелінійного опору

$$i_n = f(u_n).$$

Рівняння (8.2) є рівнянням прямої лінії, тому для її побудови в системі координат необхідно знати положення лише двох точок. Координати цих точок визначаємо з тих умов, що за струму $i_n = 0$ напруга $u_n = E_{екв}$, як це впливає з (8.2), а за напруги $u_n = 0$ струм $i_n = \frac{E_{екв}}{r_{екв}}$.

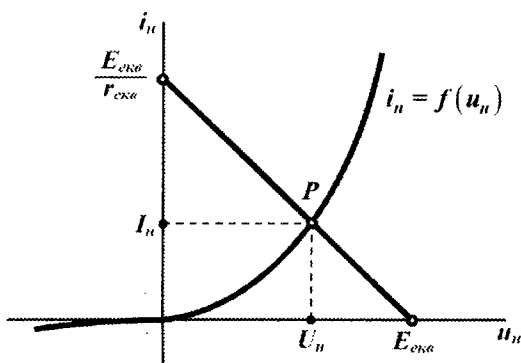


Рисунок 8.10

Точка перетину двох графіків (точка P на рис. 8.10), кожний з яких задано окремим рівнянням нелінійної системи (8.1), дає її

графічний розв'язок. Тому координати I_n і U_n робочої точки P є шуканими значеннями струму i_n та напруги u_n на нелінійному опорі в заданому й еквівалентному електричних колах (рис. 8.9).

8.1.3 Метод двох вузлів

Метод двох вузлів застосовують для графічного розрахунку електричного кола, яке нараховує тільки два вузли, наприклад, як це показано на рис. 8.11. За такої умови кількість віток в електричному колі може бути необмеженою, як необмеженою може бути і кількість елементів (джерел електричної енергії, лінійних та нелінійних опорів тощо), що входять до його складу.

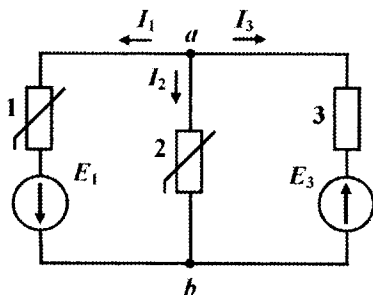


Рисунок 8.11

Нехай характеристики нелінійних опорів задано у вигляді графіків (рис. 8.12), що показують функціональні залежності струмів від напруг на цих елементах $i_k = f_k(u_k)$.

Для розв'язання задачі методом двох вузлів необхідно задатися у вітках додатними напрямками струмів і побудувати в єдиній системі координат залежності цих струмів від спільної напруги, якою є напруга між вузлами a і b , тобто $i_k = f_k(u_{ab})$.

Так, за обраного напрямку струму I_1 для першої вітки маємо

$$u_{ab} = u_1 - E_1. \quad (8.3)$$

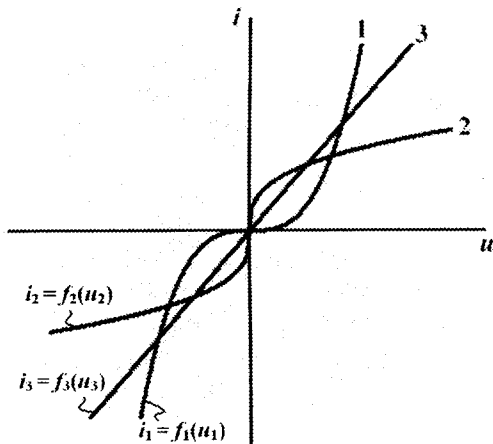


Рисунок 8.12

Вираз (8.3) показує, що будь-якому значенню напруги u_1 на першому нелінійному опорі відповідає значення напруги u_{ab} , яке зменшене на E_1 , тому кожна точка вольт-амперної характеристики опору під час переходу до напруги u_{ab} зміщується по осі абсцис вліво на величину E_1 (рис. 8.13).

Для третьої вітки

$$u_{ab} = u_3 + E_3, \quad (8.4)$$

тому всі точки її характеристики $i_3 = f_3(u_3)$ будуть зміщені вправо на величину E_3 відносно графіка $i_3 = f(u_3)$.

Графік вольт-амперної характеристики другої вітки $i_2 = f_2(u_2)$ збігається із графіком $i_2 = f(u_2)$, оскільки $u_{ab} = u_2$ (рис 8.13).

Таким чином, для методу двох вузлів можна сформулювати загальне правило побудови характеристик віток за вольт-амперними характеристиками опорів.

Якщо дія е.р.с. E_k у вітці збігається за напрямом зі струмом цієї вітки, то характеристика самої вітки має бути зміщеною відносно вольт-амперної характеристики k -го опора на величину

E_k в напрямку від'ємних значень. Коли ж дія е.р.с. E_k спрямована назустріч струму I_k , характеристика вітки зміщується в сторону додатних значень на ту ж величину E_k .

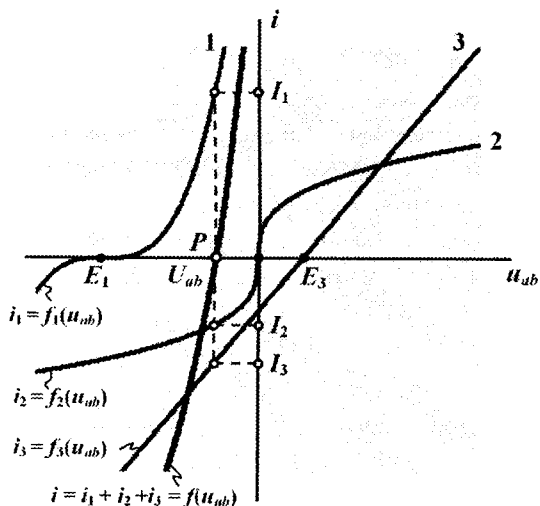


Рисунок 8.13

Для визначення струмів побудуємо в цій же системі координат ще одну криву – графік функції

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = f(u_{ab}) \quad (8.5)$$

(див. рис. 8.13), який отримаємо у графічний спосіб шляхом складання значень ординат (струмів) перших трьох графіків за довільно заданих значень абсцис (напруг).

Оскільки для вузла a (рис. 8.11) має виконуватися перший закон Кірхгофа, то вочевидь, що точка перетину кривої (8.5) з віссю абсцис (точка P на рис. 8.13) і буде графічним розв'язком нелінійного рівняння

$$f(u_{ab}) = i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Як видно з рис. 8.13, за розташуванням точки P безпосередньо можна визначити напругу U_{ab} , а вже за цією напругою, скориставшись вольт-амперними характеристиками самих віток, – і електричні струми I_1, I_2, I_3 .

Як бачимо, в нашому випадку напруга U_{ab} буде від'ємною. Сказане стосується і електричних струмів I_2 та I_3 .

Однією із основних операцій наведеного методу двох вузлів була побудова результируючих характеристик віток, до складу яких входять джерела е.р.с. В більш загальному випадку такі еквівалентні перетворення відносяться до окремого методу – *методу побудови вольт-амперних характеристик активних віток* і його дія поширюється на більш складні, аніж двовузлові, електричні кола.

8.2 Графоаналітичний метод: метод лінеаризації

До графоаналітичних методів відносять комбіновані методи розрахунку нелінійних електричних кіл, в яких розв'язок задачі шукається переважно аналітично, але в поєднанні з відповідними графічними побудовами.

Розглянемо електричне коло з одним нелінійним резистивним елементом (рис. 8.14), характеристика якого зображена на рис. 8.15.

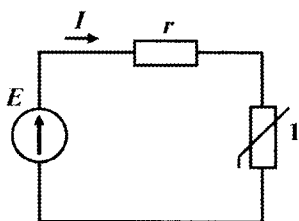


Рисунок 8.14

Припустимо, що робоча точка P знаходиться на ділянці ab вольт-амперної характеристики. Замінімо цю криволінійну ділянку прямою лінією, яка, як видно з рис. 8.15, проходить через точки a та b і перетинає вісь абсцис в деякій точці E_0 .

Практично така заміна означає, що нелінійний опір замінюється віткою, до складу якої входять два елементи: лінійний опір r_0 і е.р.с. E_0 . Остання має бути направлена назустріч струму I , оскільки характеристика цієї вітки зміщена вправо відносно точки початку координат.

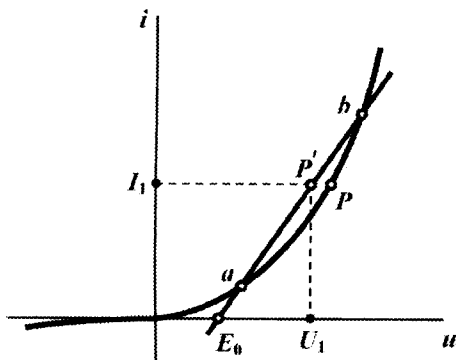


Рисунок 8.15

Таким чином, отримано лінійне електричне коло, схема якого наведена на рис. 8.16.

Величина е.р.с. E_0 визначається у графічний спосіб безпосередньо з рисунка вольт-амперної характеристики (рис. 8.15), а опір r_0 можна розрахувати за виразом

$$r_0 = \frac{U_1 - E_0}{I_1}, \quad (8.6)$$

при цьому точка P' вибирається довільно.

Для такого лінеаризованого кола легко визначити струм за законом Ома

$$I = \frac{E - E_0}{r + r_0}, \quad (8.7)$$

що є основною перевагою даного методу, який називають *методом лінеаризації*.

Після визначення струму I необхідно перевірити чи знаходиться знайдений струм в межах

ділянки ab характеристики. Якщо так, то розрахунок закінчено, в протилежному ж випадку необхідно вибрати нову ділянку лінеаризації кривої і наразі повторити розрахунок.

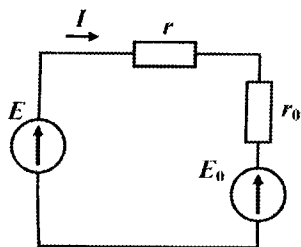


Рисунок 8.16

До недоліків відносять деяку неточність результатів розрахунку. Це пояснюється заміщенням реальної нелінійної ділянки вольт-амперної характеристики прямолінійною наближеною, що призводить до зміщення робочої точки з P в P' (див. рис. 8.15).

Для розрахунку електричного кола з кількома нелінійними елементами підхід подібний: кожен із нелінійних елементів замінюється віткою, що має складатися з лінійного опору r_k та е.р.с. E_k . Отриману лінійну схему заміщення аналізують аналітично відомими з теорії лінійних кіл методами, а всі знайдені значення струмів перевіряються на відповідність їх лінеаризованим ділянкам характеристик.

8.3 Аналітичний метод

При використанні *аналітичного методу* вольт-амперні характеристики подають аналітично у вигляді функціональних залежностей.

Нехай, наприклад, характеристику нелінійного опору електричного кола, наведеного на рис. 8.14, задано співвідношенням

$$i = a_1 u_n + a_2 u_n^2 + a_3 u_n^3. \quad (8.8)$$

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа

$$ri + u_n = E. \quad (8.9)$$

З врахуванням (8.8) отримаємо

$$a_1 r u_n + a_2 r u_n^2 + a_3 r u_n^3 + u_n = E. \quad (8.10)$$

Розв'язуючи це нелінійне алгебраїчне рівняння, знаходимо напругу u_n на нелінійному опорі, а скориставшись формулою (8.8) – шуканий струм i .

Розв'язок задачі i в цьому випадку одержуємо наближено, оскільки нелінійне алгебраїчне рівняння майже завжди розв'язується числовими методами.

Одним із достатньо простих та ефективних числових методів наближеного розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь є *метод Ньютона - Рафсона*.

Нехай маємо нелінійне алгебраїчне рівняння

$$f(x) = 0. \quad (8.11)$$

Припустимо, що значення x_0 – нульове наближення розв'язку рівняння (8.11).

Позначимо наступний наближений розв'язок

$$x_1 = x_0 + h \quad (8.12)$$

де h – поправка до нульового наближення.

Підставимо (8.12) в (8.11) та розкладемо функцію у ряд Тейлора, обмежившись двома першими членами розкладання

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0. \quad (8.13)$$

Звідси

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

де $f'(x_0)$ – значення похідної функції $f(x)$ при $x = x_0$.

Відповідно до (8.12)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (8.14)$$

Продовжимо знаходити наступні наближення і для $k+1$ -го наближення отримаємо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (8.15)$$

Ітераційний процес припиняють тоді, коли із заздалегідь заданою точністю буде виконуватися умова

$$x_{k+1} \approx x_k.$$

Приклад 8.1

Розрахувати електричне коло, показане на рис. 8.14, а, якщо $E = 10$ В, $r = 2$ Ом.

Характеристика нелінійного елемента апроксимована виразами, які одержані в підрозділі 7.2,

$$i = 0,4167u_H - 0,08u_H^2 + 0,0233u_H^3, \quad (8.16)$$

$$i = 0,6 \left(e^{0,3662u_n} - 1 \right). \quad (8.17)$$

1. В першому випадку, підставляємо формулу (8.16) в (8.9) і одержуємо співвідношення

$$0,8334u_n - 0,16u_n^2 + 0,0466u_n^3 + u_n = 10 \quad (8.18)$$

або

$$1,8334u_n - 0,16u_n^2 + 0,0466u_n^3 - 10 = 0.$$

Позначимо

$$f(u_n) = 1,8334u_n - 0,16u_n^2 + 0,0466u_n^3 - 10$$

та знайдемо похідну

$$f'(u_n) = 1,8334 - 0,32u_n + 0,14u_n^2.$$

Приймемо за нульове наближення

$$u_{n_0} = 5 \text{ В.}$$

Тоді відповідно до (8.14) перше наближення дорівнює

$$u_{n_1} = 5 - \frac{1,8334 \cdot 5 - 0,16 \cdot 5^2 + 0,0466 \cdot 5^3 - 10}{1,8334 - 0,32 \cdot 5 + 0,14 \cdot 5^2} = 4,734 \text{ В.}$$

Друге наближення

$$u_{n_2} = 4,734 - \frac{1,8334 \cdot 4,734 - 0,16 \cdot 4,734^2 + 0,0466 \cdot 4,734^3 - 10}{1,8334 - 0,32 \cdot 4,734 + 0,14 \cdot 4,734^2} = 4,7231 \text{ В.}$$

Третє наближення

$$u_{n_3} = 4,7231 - \frac{1,8334 \cdot 4,7231 - 0,16 \cdot 4,7231^2 + 0,0466 \cdot 4,7231^3 - 10}{1,8334 - 0,32 \cdot 4,7231 + 0,14 \cdot 4,7231^2} = 4,7231 \text{ В.}$$

Оскільки результати повторюються, то ітераційний процес припиняємо.

Отже, розв'язком рівняння (8.18) буде напруга

$$u_n = 4,7231 \text{ В.}$$

Підставимо це значення напруги в формулу (8.16) і отримаємо значення струму

$$i = 2,638 \text{ А.}$$

2. Тепер розв'яжемо задачу, скориставшись характеристикою, заданою виразом (8.17).

Підставимо співвідношення (8.17) в формулу (8.9)

$$1,2(e^{0,3662u_n} - 1) + u_n = 10. \quad (8.19)$$

Позначимо

$$f(u_n) = 1,2(e^{0,3662u_n} - 1) + u_n - 10$$

та знайдемо похідну

$$f'(u_n) = 1,2 \cdot 0,3662 \cdot e^{0,3662u_n} + 1.$$

Задаємо те ж саме нульове наближення

$$u_{n_0} = 5 \text{ В.}$$

Тоді перше наближення

$$u_{n_1} = 5 - \frac{1,2(e^{0,3662 \cdot 5} - 1) + 5 - 10}{0,4394 \cdot e^{0,3662 \cdot 5} + 1} = 4,656 \text{ В.}$$

Для другого наближення маємо

$$\begin{aligned} u_{n_2} &= 4,656 - \frac{1,2(e^{0,3662 \cdot 4,656} - 1) + 4,656 - 10}{0,4394 \cdot e^{0,3662 \cdot 4,656} + 1} = \\ &= 4,639 \text{ В.} \end{aligned}$$

Третє наближення

$$\begin{aligned} u_{n_3} &= 4,639 - \frac{1,2(e^{0,3662 \cdot 4,639} - 1) + 4,639 - 10}{0,4394 \cdot e^{0,3662 \cdot 4,639} + 1} = \\ &= 4,639 \text{ В.} \end{aligned}$$

Ітераційний процес припиняємо у зв'язку з повторенням результату.

Таким чином, розв'язок нелінійного рівняння (8.19)

$$u_n = 4,639 \text{ В.}$$

Шуканий струм визначаємо за формулою (8.17)

$$i = 0,6(e^{0,3662 \cdot 4,639} - 1) = 2,68 \text{ А.}$$

Отже, як бачимо, результати розрахунків є достатньо близькими один до одного.

8.4 Аналіз нелінійних кіл постійного струму в математичній системі Mathcad

Будь-який метод аналізу нелінійних електричних кіл постійного струму, про що неодноразово наголошувалось вище, з математичної точки зору являє собою спосіб розв'язування нелінійної системи рівнянь з кількома невідомими, яка складається виключно за законами Кірхгофа. Розв'язок такої системи рівнянь за будь-якої форми подання вольт-амперних характеристик (графічної, табличної або аналітичної) являє собою складну розрахункову задачу, особливо у випадках, коли необхідно провести аналіз кола за зміни тих чи інших його параметрів.

Тому природно, що для розв'язання таких задач необхідно і потрібно залучати обчислювальну техніку і сучасні програми комп'ютерної математики, наприклад, такі як Mathcad, Maple, Matlab, Mathematica тощо. Тим більше, що розв'язування нелінійних рівнянь і систем є традиційною областю їх застосування.

Наразі розв'яжемо кілька задач аналізу нелінійних електричних кіл постійного струму в програмному середовищі Mathcad.

Приклад 8.2

Проведемо розрахунок складного нелінійного кола постійного струму, електричну схему якого наведено на рис. 8.17.

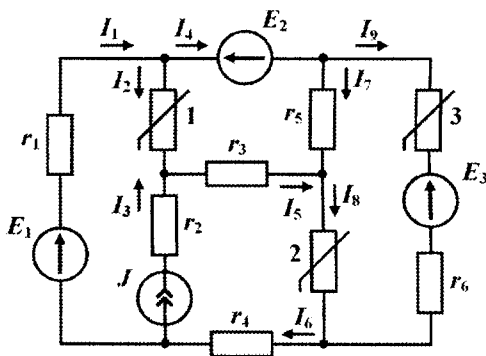


Рисунок 8.17

Відомо, що:

- значення опорів даного кола

$$r_1 = 5 \text{ Ом}, \quad r_2 = 3 \text{ Ом}, \quad r_3 = 10 \text{ Ом}, \quad r_4 = 7 \text{ Ом}, \\ r_5 = 6 \text{ Ом}, \quad r_6 = 3 \text{ Ом};$$

- параметри ідеальних джерел е.р.с.

$$E_1 = 10 \text{ В}, \quad E_2 = 5 \text{ В}, \quad E_3 = 7 \text{ В};$$

- джерела струму

$$J = 1 \text{ А.}$$

Вольт-амперні характеристики нелінійних резистивних елементів наведено на рис. 8.18.

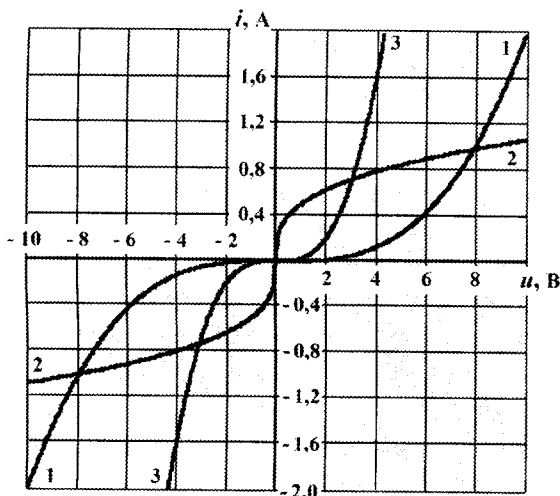


Рисунок 8.18

Насамперед надамо системі Mathcad вихідні дані, які необхідні для розв'язування даної задачі. До них віднесемо параметри та характеристики елементів (рис. 8.19) електричного кола. Стосовно вольт-амперних характеристик нелінійних опорів, подамо їх у табличній (матричній) формі і з огляду на симетричність – тільки для додатних напруг.

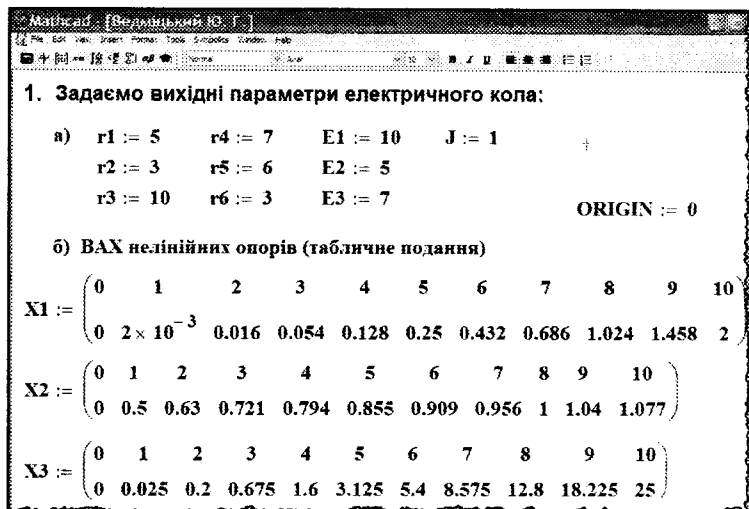


Рисунок 8.19

Перший (нульовий) рядок матриць X1, X2 та X3 містить послідовність значень прикладеної до нелінійного елемента напруги, а другий – електричного струму, що цій напрузі відповідає (рис. 8.18). Вважаючи наведені точки напруг та струмів вузловими, проведемо апроксимацію означених вольт-амперних характеристик шляхом їх лінійної інтерполяції. Сформуємо інтерполяційні функції оберненими до заданих вольт-амперних характеристик (рис. 8.18), тобто подамо електричні напруги на нелінійних елементах як функції від їх струмів (рис. 8.20).

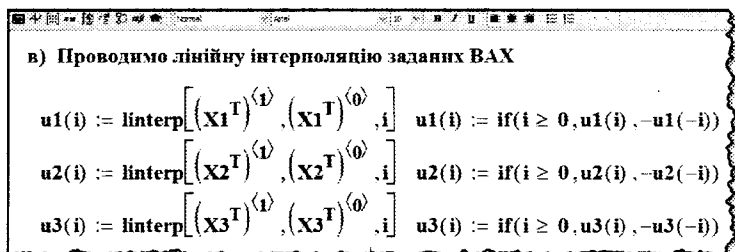


Рисунок 8.20

На рис. 8.20 $u_1(i)$ – напруга на першому нелінійному опорі, $u_2(i)$ – на другому і $u_3(i)$ – на третьому.

Для заданого нелінійного електричного кола (див. рис. 8.17), складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа

$$\left. \begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_4 &= 0 \\ -i_2 - i_3 + i_5 &= 0 \\ -i_4 + i_7 + i_9 &= 0 \\ -i_5 - i_7 + i_8 &= 0 \\ i_6 - i_8 - i_9 &= 0 \\ r_1 i_1 + u_3(i_9) + r_6 i_9 + r_4 i_6 &= E_1 - E_2 - E_3 \\ r_5 i_7 - r_3 i_5 - u_1(i_2) &= -E_2 \\ u_3(i_9) + r_6 i_9 - u_2(i_8) - r_5 i_7 &= -E_3 \\ i_3 &= J \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Через нелінійність складових напруг $u_1(i_2)$, $u_2(i_8)$ та $u_3(i_9)$ на опорах 1, 2 і 3, всі три рівняння, складені за другим законом Кірхгофа, будуть нелінійними, внаслідок чого нелінійною буде і сама система рівнянь (8.20).

Розв'яжемо цю нелінійну систему в математичному середовищі Mathcad, що означатиме і розв'язання поставленої задачі в цілому, оскільки невідомими в означеній системі рівнянь будуть шукані електричні струми у вітках заданого кола.

Насамперед, перш ніж розв'язувати систему (8.20), задамося початковими значеннями шуканих струмів. Зазвичай це потрібно робити з такої причини. Як буде показано далі, деякі нелінійні системи можуть мати водночас кілька розв'язків і який саме з цих розв'язків буде відповідати існуючому електричному режиму в колі, залежить не тільки від структури і параметрів самого електричного кола, але ще й від його попереднього стану, в якому це коло перебувало. Такі явища за певних додаткових умов можуть спостерігатися, наприклад, в електричних колах, до складу яких входять нелінійні елементи з немонотонними вольт-амперними характеристиками.

В нашому ж випадку характеристики всіх елементів є монотонними (див. рис. 8.18), тобто жодна з них не має спадної ділянки з від'ємним динамічним опором, і тому система (8.20) матиме тільки один розв'язок, що дозволяє початкові значення шуканих струмів задати довільно, наприклад, такими, що дорівнюють нулю (рис. 8.21).

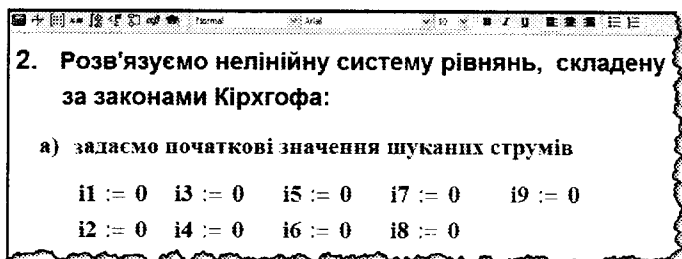


Рисунок 8.21

Для безпосереднього розв'язання системи (8.20) скористаємося службовою директивою Given та подамо ці рівняння так, як того вимагає система Mathcad (див. рис. 8.22).

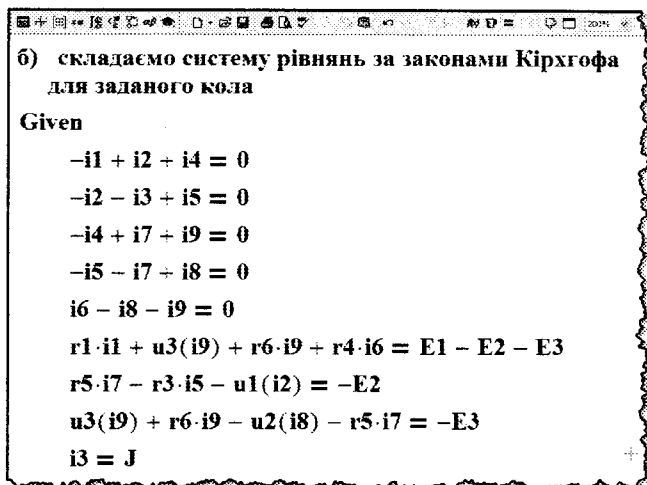


Рисунок 8.22

Повернемо розв'язок поданої нелінійної системи (8.20) за допомогою функції Find() (рис. 8.23).

```

ORIGIN := 1
в) розв'язуємо систему і визначаємо електричні струми
у вітках
I := Find(i1 ,i2 ,i3 ,i4 ,i5 ,i6 ,i7 ,i8 ,i9)
I1 = -0.491      I4 = -0.359      I7 = -0.059
I2 = -0.132      I5 = 0.868        I8 = 0.809
I3 = 1           I6 = 0.509        I9 = -0.3
    
```

Рисунок 8.23

З рисунка видно, що програма повернула вектор I , елементами якого є розв'язки системи (8.20) – шукані значення струмів: $I_1 = -0,491$ А, $I_2 = -0,132$ А, $I_3 = 1$ А, $I_4 = -0,359$ А, $I_5 = 0,868$ А, $I_6 = 0,509$ А, $I_7 = -0,059$ А, $I_8 = 0,809$ А, $I_9 = -0,3$ А. Перевіримо отриманий результат (рис. 8.24), скориставшись законами

```

3. Проводимо перевірку результатів розрахунку:
а) за законами Кірхгофа
-I1 + I2 + I4 = 0
-I2 - I3 + I5 = 0
-I4 + I7 + I9 = 0
-I5 - I7 + I8 = 0
I6 - I8 - I9 = 0
r1·I1 + u3(I9) + r6·I9 + r4·I6 - (E1 - E2 - E3) = 0
r5·I7 - r3·I5 - u1(I2) + E2 = 0
u3(I9) + r6·I9 - u2(I8) - r5·I7 + E3 = 0
I3 - J = 0
    
```

Рисунок 8.24

Кірхгофа. Як бачимо, всі рівняння (8.20) внаслідок підстановки отриманих значень струмів перетворилися на тотожності.

Тепер складемо баланс потужностей.

Загальна потужність, яка розсіюється на резистивних елементах дорівнює

$$P_{cn} = r_1 I_1^2 + r_2 I_3^2 + r_3 I_5^2 + r_4 I_6^2 + r_5 I_7^2 + r_6 I_9^2 + u_1(I_2)I_2 + u_2(I_8)I_8 + u_3(I_9)I_9.$$

З іншого боку, алгебраїчна сума потужностей джерел енергії

$$P_{дж} = E_1 I_1 - E_2 I_4 - E_3 I_9 + U_{cmp} J,$$

де U_{cmp} – напруга на джерелі струму

$$U_{cmp} = r_2 I_3 + r_3 I_5 + u_2(I_8) + r_4 I_6.$$

Як показує розрахунок за наведеними формулами, для отриманих значень струмів сумарні потужності джерел електричної енергії та її споживачів є збалансованими

$$P_{дж} = P_{cn},$$

як того і вимагає закон збереження енергії (рис. 8.25).

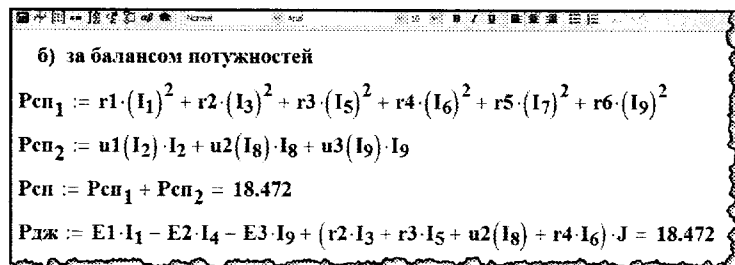


Рисунок 8.25

Необхідно зауважити, що точне виконання балансу потужностей ще не говорить про точне визначення струмів, оскільки навіть за комп'ютерного моделювання результати розрахунку є наближеними.

В даному випадку одним з джерел похибки є лінійна апроксимація вольт-амперних характеристик нелінійних опорів.

Окрім того, і розв'язання самої нелінійної системи рівнянь програмою Mathcad здійснюється за алгоритмами числових методів, тобто наближено.

З іншого боку, в програмному середовищі Mathcad існує достатньо інших засобів, аби нівелювати означену похибку і звести її до прийнятної в науковій чи інженерній практиці значення.

8.4.1 Метод нелінійного еквівалентного генератора

Приклад 8.3

Продемонструємо деякі інші можливості математичної системи Mathcad щодо аналізу процесів в нелінійних електричних колах. Це дозволить узагальнити і сформулювати основні положення *методу нелінійного еквівалентного генератора*.

Задля цього розглянемо нелінійне електричне коло та програмний код, що наведені в попередньому прикладі (див. приклад 8.2). Нескладна модифікація програми надалі дозволить не тільки проводити розрахунок струмів та напруг (рис. 8.17) за різних значень параметрів елементів заданого кола, але і створить потужний інструмент для його аналітичного дослідження. Відтак подамо параметри всіх, окрім нелінійних опорів, елементів кола як незалежні змінні величини, що можуть набувати довільних значень. Практично це означає, що під час формування вихідних даних задачі (рис. 8.19) потрібно задати тільки вольт-амперні характеристики нелінійних опорів, а числових значень параметрам інших елементів кола не надавати. Як наслідок, змін має зазнати фрагмент програми, показаний на рис. 8.23. Яких саме, наведено на рис. 8.26. На цьому рисунку вектор I являє собою функцію, для якої незалежними змінними є параметри всіх елементів даного електричного кола, окрім нелінійних, як про це було сказано вище. Водночас елементами вектора I є всі шукані струми i_1, \dots, i_9 . Відтак отримано функціональну залежність будь-якого з шуканих струмів від параметрів всіх елементів кола

$$i_k = f_k(E_1, E_2, E_3, J, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6). \quad (8.21)$$

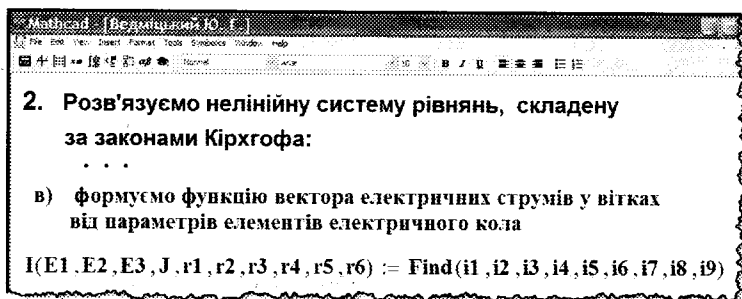


Рисунок 8.26

Функцію від багатьох незалежних змінних (8.21) можна досліджувати майже всіма засобами математичного аналізу системи Mathcad. Покажемо це на прикладі заданого кола (рис. 8.17).

Замінімо всю схему відносно вітки з опором r_3 еквівалентним генератором і визначимо його параметри, задля чого проведемо дослідження функціональної залежності струму i_5 та напруги u на опорі r_3 за умови зміни останнього.

Тоді функція (8.21) зводиться до функції однієї змінної $i_5 = f_5(r_3)$ із задалегідь заданими значеннями параметрів інших елементів (рис. 8.27). Напругу ж на лінійному опорі r_3 визначимо за законом Ома $u(r_3) = r_3 i_5(r_3)$.

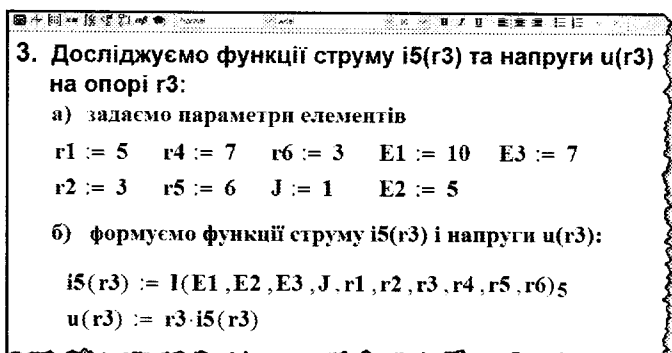
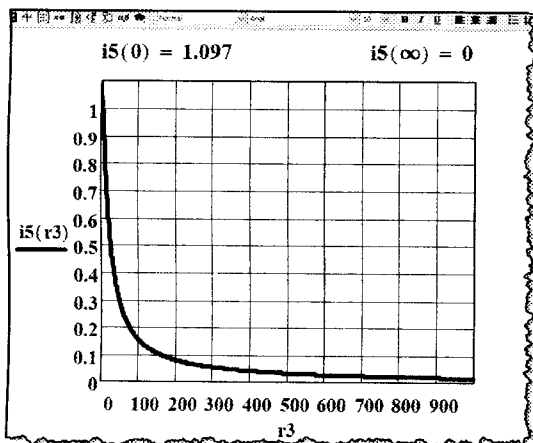
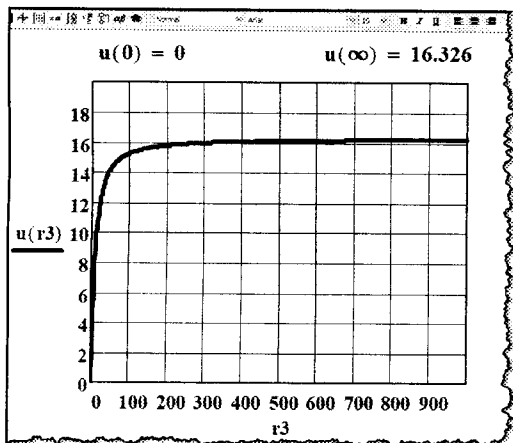


Рисунок 8.27

На рис. 8.28 наведено графіки струму $i_5(r_3)$ і напруги $u(r_3)$.



а)



б)

Рисунок 8.28

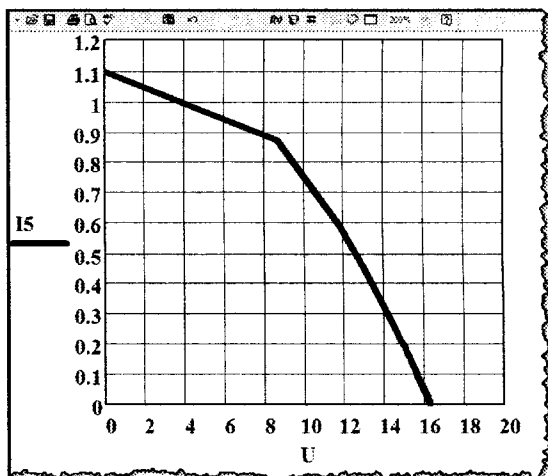
Функції струму $i_5(r_3)$ і напруги $u(r_3)$ можна розглядати як параметричні рівняння, що залежать від єдиної і спільної незале-

жної змінної r_3 . Остання обставина дозволяє вилучити цю змінну і побудувати функціональну залежність безпосередньо між струмом і напругою $i_5 = f(u)$ (рис. 8.29).

```

ORIGIN := 0
в) будемо графік функції струму i5(u):
r3 := 0, 10.. 10000   i5_r3 := i5(r3)   U_r3 := u(r3)
                    10                10
    
```

а)



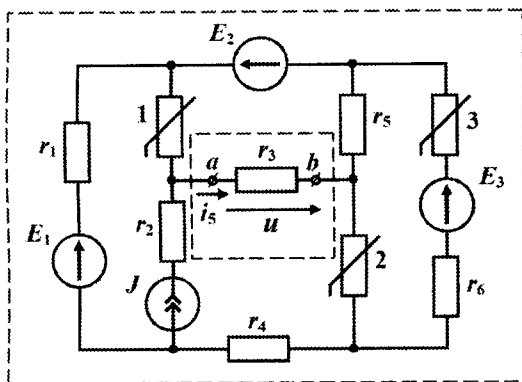
б)

Рисунок 8.29

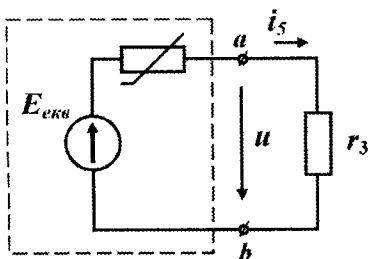
Необхідно наголосити, що це є не характеристика лінійного опору при незмінному r_3 , а залежність струму від напруги на цьому опорі за умови зміни r_3 від нуля до нескінченності.

Дана залежність по суті являє собою зовнішню (навантажувальну) характеристику джерела енергії, з'єднаного послідовно з опором r_3 , що дозволяє задане нелінійне електричне коло заміни-

ти нелінійним еквівалентним генератором так, як це показано на рис. 8.30, а і рис. 8.30, б, відповідно.



а)



б)

Рисунок 8.30

Оскільки отримана характеристика нелінійна (рис. 8.29), то і нелінійним є внутрішній опір еквівалентного генератора, а е.р.с. дорівнює напрузі u в режимі холостого ходу ($i_5 = 0$), тобто коли опір $r_3 = \infty$. Як видно з рис. 8.28, б, для нашого прикладу

$$E_{екв} = 16,326 \text{ В.}$$

Нелінійну характеристику $i_n = f_n(u_n)$ внутрішнього опору легко визначити із графіка $i_5 = f(u)$ на рис. 8.29.

Дійсно, оскільки напруга

$$u = E_{\text{екв}} - u_n,$$

а струм спільний $i_n = i_5$, то можна записати

$$i_n = f_n(u_n) = f(E_{\text{екв}} - u),$$

і вольт-амперна характеристика нелінійного внутрішнього опору еквівалентного генератора матиме вигляд, наведений на рис. 8.31.

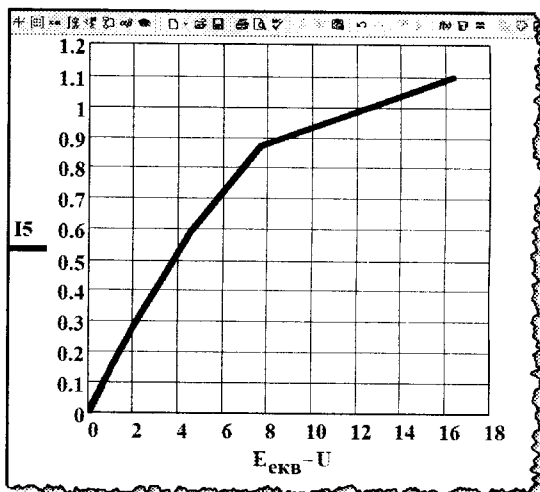


Рисунок 8.31

Параметри отриманого нелінійного еквівалентного генератора залишаються незмінними за будь-яких значень опору r_3 , якщо тільки цей опір зберігатиме лінійність.

Метод нелінійного еквівалентного генератора доцільно використовувати тоді, коли в складному нелінійному колі є лінійне або нелінійне навантаження, яке часто змінює свій параметр. В цьому випадку достатньо провести тільки один раз досить складний розрахунок для побудови нелінійної навантажувальної характеристики еквівалентного генератора, а потім легко у графічний спосіб визначати напруги та струми в навантаженні у випадках його зміни.

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть існуючі методи розрахунку нелінійних кіл постійного струму. Розкрийте їх переваги та недоліки.
2. Які методи розрахунку нелінійних кіл відносять до графічних?
3. Нарисуйте схему кола, яке називають початковим.
4. Чим відрізняється побудова результуючих вольт-амперних характеристик за послідовного та за паралельного з'єднань?
5. Чи має обмеження метод еквівалентних перетворень?
6. Побудуйте вольт-амперну характеристику активної вітки? Чим ця характеристика буде відрізнятися від характеристики пасивної вітки?
7. Поясніть суть методу двох вузлів. В яких випадках доцільно використовувати цей метод?
8. Який метод вважають графоаналітичним? Поясніть його суть та розкрийте переваги і недоліки.
9. В яких випадках доцільно використовувати аналітичний метод розрахунку нелінійних кіл?
10. Нарисуйте схему нелінійного еквівалентного генератора і поясніть, в чому полягає суть однойменного методу.
11. Чи можна для розрахунку нелінійних кіл використовувати метод контурних струмів? Чому?

МАГНІТНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

9.1 Загальна характеристика властивостей магнітних матеріалів

Сукупність пристроїв з переважно феромагнітних матеріалів, призначених для створення і концентрації в певному місці магнітного потоку, називають *магнітним колом*.

Основна частина магнітного потоку в таких колах проходить по замкненій або майже замкненій системі феромагнітних тіл з великою магнітною проникністю.

Феромагнітні тіла є невід'ємною частиною електромагнітних реле, електромагнітів, трансформаторів, електродвигунів, електромашинних генераторів тощо.

Властивості магнітних матеріалів найчастіше характеризують залежністю між *магнітною індукцією* B (одиниця вимірювання – тесла [Тл]) та *напруженістю* H (одиниця вимірювання – А/м) магнітного поля, яка визначається експериментально і подається графічно або таблицею.

Характеристика $B = B(H)$ для феромагнітних матеріалів є водночас і нелінійною, і неоднозначною. Її графік являє собою замкнену криву, яку називають *петлею гістерезису* (рис 9.1).

На рис 9.1 тонкими лініями показані *часткові петлі гістерезису*, які отримані за різних значень H_{max} . Зі збільшенням значення H_{max} збільшується ширина цих петель і дещо змінюється їх форма.

За деякого граничного значення H_{max} (див. рис. 9.1) форма петлі змінюватися вже не буде. Отриману у такий спосіб замкнуту криву називають *граничною петлею гістерезису* (потовщена лінія на рис 9.1). Значення магнітної індукції B_r при $H = 0$ має

назву залишкової індукції, а значення напруженості H_c магнітного поля за $B = 0$ – коерцитивної сили.

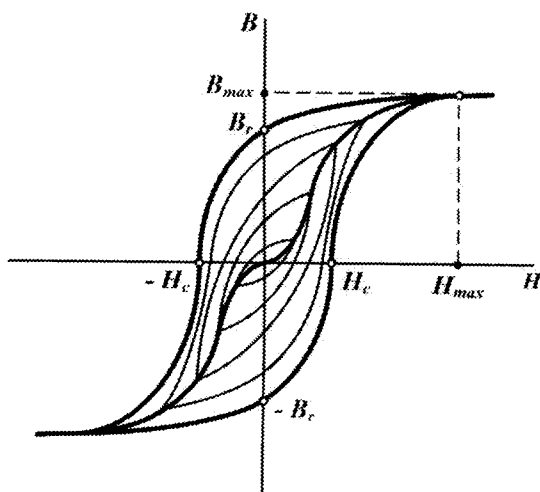


Рисунок 9.1

Побудовану на точках вершин петель гістерезису лінію називають *основною кривою намагнічування*, яку зазвичай і обирають за основну характеристику магнітних матеріалів.

На рис. 9.1 її показано як потовщену симетричну криву лінії, що проходить через точку початку координат.

Зв'язок між магнітною індукцією та напруженістю магнітного поля визначається співвідношенням

$$B = \mu_a H, \quad (9.1)$$

де $\mu_a = \mu \mu_0$ – абсолютна магнітна проникність матеріалу;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала;

μ – відносна магнітна проникність.

Для феромагнітних матеріалів μ_a не є сталою величиною і нелінійно залежить від напруженості магнітного поля, а її значення може до десятків тисяч разів перевищувати μ_0 .

9.2 Основні закони та особливості магнітних кіл

Потік вектора магнітної індукції \vec{B} через деяку поверхню S називають *магнітним потоком* і позначають через Φ

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (9.2)$$

Якщо магнітна індукція у всіх точках цієї поверхні є однаковою (магнітне поле однорідне), а сам вектор \vec{B} – перпендикулярним до поверхні S , то формулу (9.2) можна переписати таким чином

$$\Phi = BS. \quad (9.3)$$

Відповідно до *принципу неперервності* силових ліній магнітного поля магнітний потік крізь замкнену поверхню дорівнює нулю

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (9.4)$$

Під час розрахунку магнітних кіл опираються на *закон повного струму*

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum_k i_k, \quad (9.5)$$

де правою частиною є алгебраїчна сума тих струмів, які охоплені контуром інтегрування l .

Розглянемо найпростіше магнітне коло постійного струму з повітряним проміжком δ в феромагнітному осерді (рис. 9.2).

Визначимо для нього основні співвідношення та зробимо необхідні припущення.

Обмотка, що розміщена на осерді і яка має w витків, створює в ньому магнітний потік, напрям якого визначається за правилом правого гвинта (рис. 9.2).

Більша частина цього магнітного потоку замикається осердям і називається *основним магнітним потоком* Φ . Окремі силові лінії створеного струмом I магнітного поля проходять повітрям і їх потік називають *потокм розсіювання* Φ_s . Потік розсіювання є

незначним і зазвичай значно меншим, аніж основний магнітний потік $\Phi_S \ll \Phi$, тому за наближених розрахунків ним нехтують.

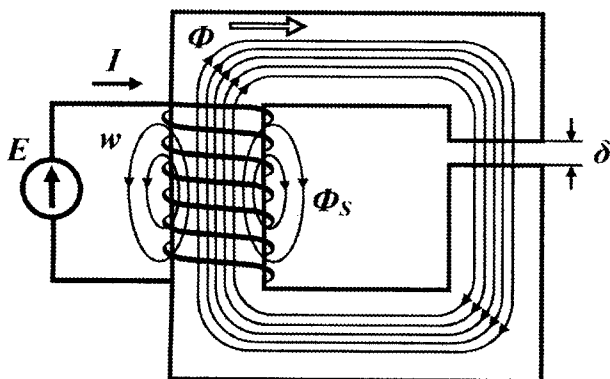


Рисунок 9.2

З рисунка також видно, що магнітні силові лінії напруженості поля в різних точках перерізу осердя неоднакові за довжиною. Врахування цієї обставини суттєво ускладнює розрахунки, тому переважно аналіз магнітного кола проводять за середньою довжиною магнітної лінії.

Окрім того, вважають, що значення B та H для всіх точок поперечного перерізу S осердя є однаковими.

Отже, розрахунки магнітних кіл постійного струму проводять за таких припущень:

- нехтують потоком розсіювання;
- довжину магнітної силової лінії вважають рівною середній довжині магнітопроводу;
- величини B і H вважають однаковими для всіх точок поперечного перерізу осердя.

За зазначених припущень основний магнітний потік Φ вздовж всього магнітопроводу однаковий, тому, якщо поперечний переріз S осердя скрізь, враховуючи і повітряний зазор, буде

незмінним, то магнітні індукції і в осерді B_{oc} , і в повітряному зазорі B_0 також будуть рівними поміж собою

$$B_{oc} = B_0 = \frac{\Phi}{S}. \quad (9.6)$$

Напруженості магнітного поля в осерді

$$H_{oc} = \frac{B_{oc}}{\mu_a}$$

і в проміжку

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (9.7)$$

суттєво відрізняються одна від одної, оскільки $\mu_a \gg \mu_0$.

Тобто для феромагнітного осердя $H_{oc} \ll H_0$.

Скористаємося законом повного струму (9.5) і проведемо інтегрування вздовж середньої лінії осердя з довжиною l . Оскільки напруженість магнітного поля вздовж шляху інтегрування має два різних значення H_{oc} та H_0 , то розіб'ємо інтеграл на дві складові

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_l \vec{H}_{oc} d\vec{l} + \int_\delta \vec{H}_0 d\vec{l}.$$

Вздовж всього шляху інтегрування, по-перше, напрями векторів \vec{H} і $d\vec{l}$ збігаються, а, по-друге, напруженості H_{oc} та H_0 є сталими, тому можна записати

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_{oc} l + H_0 \delta.$$

Права частина формули(9.5) дорівнює

$$\sum_k i_k = wI,$$

оскільки струм I , що проходить обмоткою, пронизує контур інтегрування w разів, де w – число витків обмотки.

Таким чином, співвідношення (9.5) можна переписати як

$$H_{oc} l + H_0 \delta = wI. \quad (9.8)$$

Виразимо напруженість магнітного поля в формулі (9.8) через магнітний потік

$$H = \frac{B}{\mu_a} = \frac{\Phi}{\mu_a S}.$$

Тоді

$$\frac{\Phi}{\mu_a S} l + \frac{\Phi}{\mu_0 S} \delta = wI. \quad (9.9)$$

Добуток wI , який вимірюється в амперах, називають *намагнічувальною силою* або *магніторушійною силою*. Її часто позначають буквою F

$$F = wI.$$

Додатний напрям магніторушійної сили збігається з рухом вістря правого гвинта, якщо тільки його обертати за напрямом проходження струму в обмотці.

Добуток HI , який також вимірюється в амперах, називають *магнітною напругою* U_m

$$U_m = HI.$$

Вираз (9.8) являє собою *другий закон Кірхгофа для магнітних кіл*.

Сформулюємо його:

алгебраїчна сума магніторушійних сил у будь-якому замкненому контурі магнітного кола дорівнює алгебраїчній сумі магнітних напруг на окремих ділянках цього ж контуру.

В загальному вигляді цей закон аналітично можна записати

$$\sum wI = \sum HI. \quad (9.10)$$

Між магнітними та електричним колом існує формальна аналогія, яка проявляє себе в такому:

- електрична напруга U відповідає магнітній напрузі

$$U_m = HI;$$

- електрорушійна сила E відповідає магніторушійній силі

$$F = wI;$$

- електричному струмові I відповідає магнітний потік Φ ;

- опір R електричного кола відповідає магнітному опору

ділянки кола. Так, наприклад, для повітряного проміжку відповідно до (9.9) його магнітний опір

$$R_m = \frac{\delta}{\mu_0 S};$$

- другому закону Кірхгофа для електричного кола

$$\sum E = \sum U$$

відповідає другий закон Кірхгофа для магнітного кола

$$\sum wI = \sum HI;$$

- першому закону Кірхгофа для електричного кола

$$\sum I = 0$$

відповідає перший закон Кірхгофа для магнітного кола

$$\sum \Phi = 0. \quad (9.11)$$

Необхідно зауважити, що *перший закон Кірхгофа для магнітних кіл* випливає із принципу неперервності магнітного потоку і формулюється таким чином:

алгебраїчна сума магнітних потоків у будь-якому вузлі магнітного кола дорівнює нулю.

На практиці такі ознаки формальної аналогії дозволяють під час розрахунку магнітних кіл використовувати вже існуючі методи аналізу електричних кіл: лінійних і нелінійних.

9.3 Розрахунок нерозгалужених магнітних кіл

Аналіз магнітних кіл постійного струму з наперед відомою геометричною структурою і розмірами всіх її ділянок та заздалегідь заданими характеристиками матеріалів осердь зазвичай передбачає розв'язання двох можливих задач:

- або за заданими величинами потоків визначають магніторушійні сили, які необхідні для створення цих потоків;
- або за заданими магніторушійними силами знаходять розподіл потоків та магнітні індукції на всіх ділянках магнітного кола.

Оскільки розглядаються магнітні кола саме постійного струму, то для характеристики магнітних матеріалів може бути використана їх основна крива намагнічування.

Отже, нехай маємо магнітне коло (рис. 9.2), для якого задані середня довжина осердя l , його площа поперечного перерізу S , значення повітряного проміжку δ і основна крива намагнічування магнітного матеріалу (рис. 9.3).

1. Розглянемо розв'язок першої задачі.

Будемо вважати заданою магнітну індукцію B_0 в повітряному проміжку феромагнітного осердя.

Знайти ж потрібно магніторушійну силу $F = wI$.

Як було встановлено раніше, магнітний потік вздовж всієї довжини осердя є однаковим. Оскільки поперечний переріз теж скрізь однаковий, то магнітні індукції в осерді B_{oc} і повітряному проміжку B_0 є рівними між собою $B_{oc} = B_0$.

Для знаходження магніторушійної сили використаємо другий закон Кірхгофа для магнітного кола (9.8), попередньо визначивши напруженість магнітного поля в проміжку та осерді.

Так, напруженість магнітного поля в повітряному проміжку знайдемо за виразом (9.7), а напруженість в осерді — за основною кривою намагнічування магнітного матеріалу (рис. 9.3).

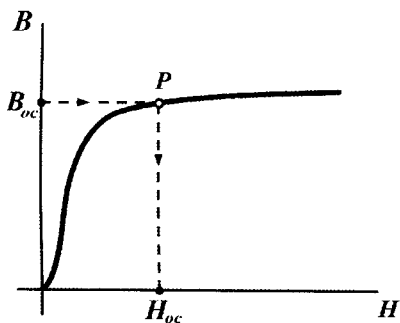


Рисунок 9.3

Тоді

$$H_{oc}l + H_0\delta = wI.$$

Якщо ж частина осердя (рис. 9.4), наприклад, ділянка 1 виконана з одного матеріалу і має поперечний переріз S_1 , а ділянка 2 виготовлена з іншого магнітного матеріалу з поперечним перерізом S_2 , то відповідно до другого закону Кірхгофа можна записати

$$H_1l_1 + H_2l_2 + H_0\delta = wI, \quad (9.12)$$

де l_1 і l_2 – середні довжини відповідно першої та другої ділянок.

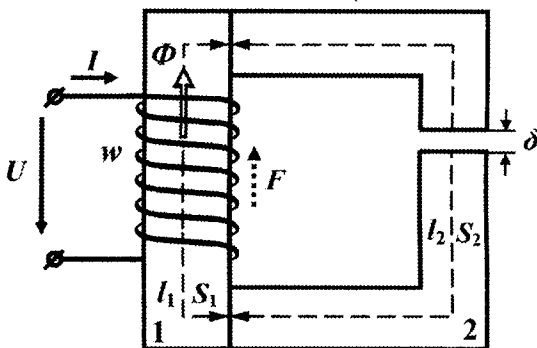


Рисунок 9.4

Для магнітної індукції першої ділянки $B_1 = \frac{\Phi}{S_1}$.

Для другої ділянки, як і в попередньому випадку, магнітний потік Φ вздовж всієї довжини осердя є однаковим. Тому, вважаючи, що площа поперечного перерізу повітряного проміжку не змінюється і дорівнює площі поперечного перерізу ділянки 2, однаковими мають бути магнітні індукції

$$B_2 = B_0,$$

і магнітний потік дорівнювати

$$\Phi = B_0 S_2,$$

звідки

$$B_0 = B_2 = \frac{\Phi}{S_2}.$$

Отже, визначивши магнітні індукції B_0 , B_1 і B_2 , наразі можна знайти напруженості магнітного поля на різних ділянках магнітопроводу.

Так, напруженість магнітного поля в повітряному проміжку обчислюється за формулою (9.7)

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0},$$

а напруженості H_1 і H_2 відповідно на 1-ій та 2-ій ділянках можна визначити безпосередньо за допомогою характеристик їх магнітних матеріалів, так, як це було показано в попередній задачі на рис. 9.3.

Отже, розрахувавши напруженості магнітного поля H_0 , H_1 і H_2 , за допомогою формули (9.12) визначаємо магніторушійну силу F .

2. Розв'яжемо другу задачу.

Цю задачу можна розв'язати, скориставшись формальною аналогією між магнітними та електричними колами, тобто існуючими методами розрахунку нелінійних електричних кіл, про що вже говорилось вище.

В цьому випадку *магнітне* коло, яке зображене на рис. 9.2, формально подамо як нелінійне *електричне* коло, еквівалентну

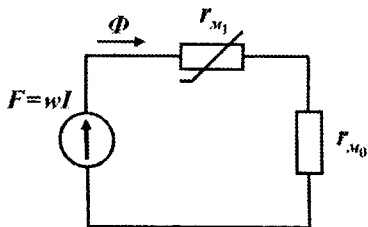


Рисунок 9.5

схему якого показано на рис. 9.5.

В цьому електричному колі магніторушійна сила, яка дорівнює

$$F = wI,$$

відповідає електрорушійній силі, магнітний потік Φ – електричному струму, маг-

нітний опір осердя r_{m1} – електричному опору деякого нелінійного

резистора, а магнітний опір повітряного проміжку r_{m_0} – опору лінійного резистора.

Замість вольт-амперних характеристик електричних нелінійних опорів $I = f(U)$ необхідно використовувати вебер-амперні характеристики $\Phi = f(U_m)$ або $\Phi = f(Hl)$ відповідних магнітних опорів.

Їх будують на основі кривої намагнічування $B = f(H)$ магнітного матеріалу осердя. Для цього задають $(8 \div 10)$ значень магнітної індукції B_i і визначають відповідні значення напруженості магнітного поля H_i (рис. 9.6). Щоб отримати точки вебер-амперної характеристики необхідно:

- задані значення індукції B_i помножити на площу поперечного перерізу даної ділянки магнітного кола $\Phi_i = B_i S$, одержавши значення ординат Φ_i ;
- відповідні значення напруженостей H_i перемножити з довжиною ділянки l магнітного кола $U_{m_i} = H_i l$ і отримати абсциси точок шуканої вебер-амперної характеристики.

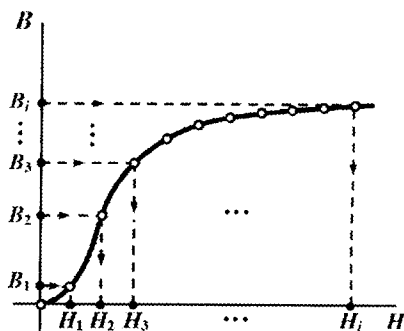


Рисунок 9.6

Результати розрахунків зручно сформувані у вигляді таблиці (див. табл. 9.1).

Таблиця 9.1

Основна крива намагнічування $B = f(H)$						
H_i	H_1	H_2	...	H_7	H_8	...
B_i	B_1	B_2	...	B_7	B_8	...
Вебер-амперна характеристика $\Phi = f(U_M)$						
$U_M = H_i l$	$H_1 l$	$H_2 l$...	$H_7 l$	$H_8 l$...
$\Phi = B_i S$	$B_1 S$	$B_2 S$...	$B_7 S$	$B_8 S$...

Отже, вебер-амперна характеристика будується за отриманими значеннями третього і четвертого рядків цієї таблиці, як це показано на рис. 9.7.

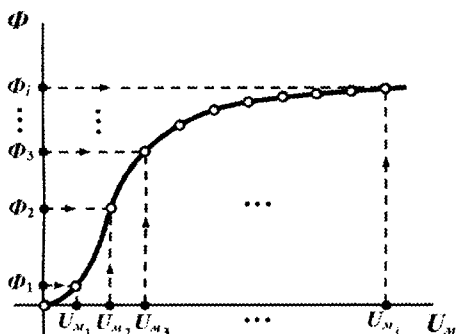


Рисунок 9.7

Для подальшого розрахунку побудуємо вебер-амперну характеристику лінійної ділянки магнітного кола, яка являє собою пряму лінію.

Для цього задамося довільним значенням магнітної індукції B_0 і визначимо відповідне значення напруженості H_0 магнітного поля за формулою (9.7) $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$.

Після цього помножимо індукцію B_0 на площу S , а напруженість H_0 на значення довжини повітряного проміжку δ . Це дозволить отримати відповідно ординату та абсцису точки, яка має належати шуканій вебер-амперній характеристиці. Другою точкою цієї характеристики має бути точка початку координат. Через названі точки проводимо пряму лінію, яка і являтиме собою вебер-амперну характеристику лінійної ділянки магнітного кола (пряма 0 на рис. 9.8).

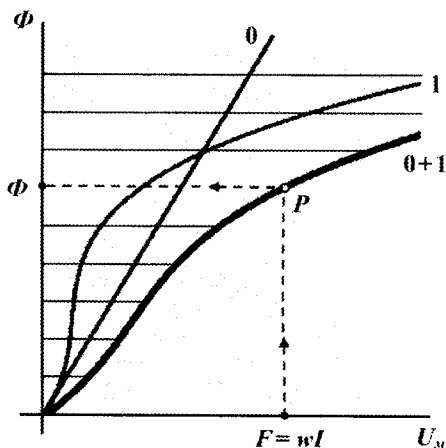


Рисунок 9.8

Оскільки еквівалентне електричне коло (рис. 9.5) складається з двох послідовно з'єднаних опорів, скористаємося графічним методом аналізу нелінійних електричних кіл і додамо абсциси отриманих характеристик за однакових ординат (див. п. 8.1). Побудована внаслідок характеристика і буде загальною вебер-амперною характеристикою всього кола (потовщена лінія 0+1 на рис. 9.8).

Магнітний потік Φ визначимо за загальною вебер-амперною характеристикою та заданим значенням магніторушійної сили

$$F = wI,$$

а магнітну індукцію – за формулою $B = \frac{\Phi}{S}$.

На рис. 9.9 показано схему електричного кола, яка є аналогом наведеного на рис. 9.4 магнітного кола.

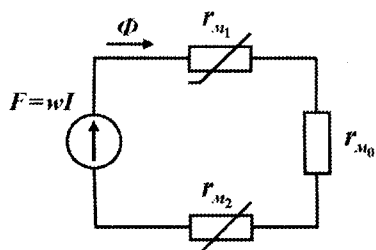


Рисунок 9.9

І в цьому електричному колі магніторушійна сила $F = wI$ також відповідає електрорушійній силі, магнітний потік Φ – електричному струму, магнітні опори першої r_{m1} і другої r_{m2}

ділянок осердя з нелінійними вебер-амперними характеристиками (1 і 2 на рис. 9.10) – електричним опорам нелінійних резисторів, а магнітний опір повітряного проміжку r_{m0} з лінійною характеристикою (0 на рис. 9.10) – лінійному електричному опору.

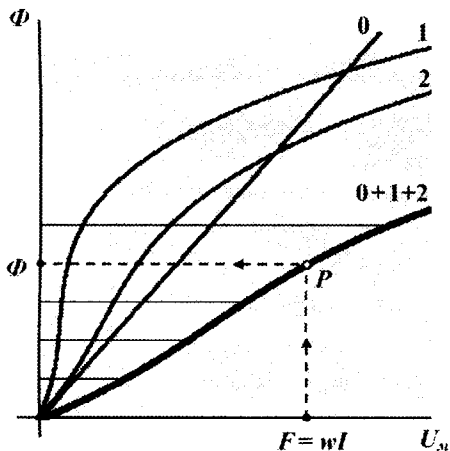


Рисунок 9.10

Для розв'язку даної задачі необхідно побудувати три вебер-амперні характеристики (див рис. 9.10), послідовно додати їх і

визначити за заданою магніторушійною силою магнітний потік та індукції і напруженості магнітного поля на різних ділянках магнітного осердя.

9.4 Розрахунок розгалужених магнітних кіл

1. Спочатку розглянемо методику розв'язування першої задачі (див. п. 9.3) для розгалуженого магнітного кола, наприклад, такого, яке наведене на рис. 9.11.

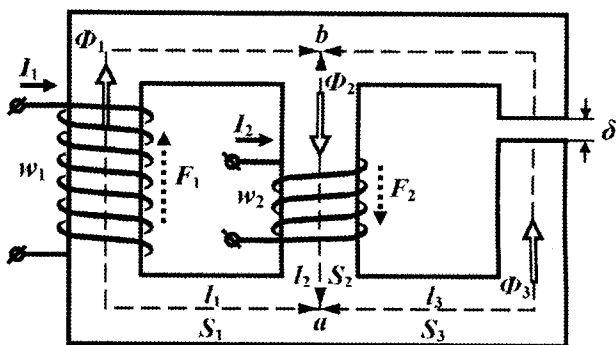


Рисунок 9.11

За умовою задачі відомими є магнітна індукція в повітряному зазорі B_0 , магніторушійна сила $F_1 = w_1 I_1$, геометрична структура та розміри магнітного осердя (площа поперечного перерізу віток S_i , їх довжини l_i і довжина повітряного зазору δ), а також матеріал, з якого виготовлено осердя, та його основна крива намагнічування. Потрібно визначити величину другої магніторушійної сили F_2 .

Напрями магнітних потоків Φ_1 та Φ_2 оберемо відповідно до напрямів дій магніторушійних сил F_1 та F_2 , які, як відомо, безпосередньо пов'язані з напрямками намотування обмоток і напрямками проходження по цих обмотках електричних струмів I_1 та I_2 .

Напрямок магнітного потоку Φ_3 задамо довільно.

Залишимо в силі ті ж припущення, що мали місце в попередньому підрозділі. Тоді для третьої вітки (третього стержня) магнітного кола $B_3 = B_0$, магнітний потік в цій вітці

$$\Phi_3 = B_3 S_3.$$

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для контура, до складу якого входять перша та третя вітки, обходячи його за годинниковою стрілкою,

$$H_1 l_1 - H_3 l_3 - H_0 \delta = w_1 I_1. \quad (9.13)$$

В рівнянні перед другою та третьою складовими стоїть знак мінус, оскільки напрям обходу контуру та напрям магнітного потоку Φ_3 є протилежними.

Напруженість магнітного поля H_0 в повітряному зазорі визначимо за формулою (9.7), а напруженість H_3 – з кривої намагнічування за відомим значенням магнітної індукції B_3 .

Із співвідношення (9.13) визначимо напруженість магнітного поля в першій вітці

$$H_1 = \frac{w_1 I_1 + H_3 l_3 + H_0 \delta}{l_1}.$$

Розрахувавши магнітну напруженість H_1 , по кривій намагнічування можна одержати магнітну індукцію B_1 , а за співвідношенням $\Phi_1 = B_1 S_1$ – і магнітний потік у першій вітці.

З першого закону Кірхгофа для магнітного кола

$$-\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \quad (9.14)$$

знаходимо магнітний потік у другій вітці, тобто $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$,

а потім – і магнітну індукцію $B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}$.

Напруженість H_2 визначимо із кривої намагнічування за знайденим значенням магнітної індукції B_2 .

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, що складається з першої та другої віток магнітного кола

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = w_1 I_1 + w_2 I_2,$$

звідки і визначаємо другу магніторушійну силу

$$F_2 = w_2 I_2 = H_1 l_1 + H_2 l_2 - w_1 I_1. \quad (9.15)$$

2. Для розв'язання другої задачі, коли відомі магніторушійні сили

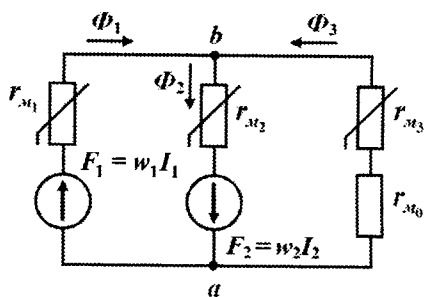


Рисунок 9.12

і необхідно визначити розподіл магнітних потоків у стержнях, скористаємося одним із існуючих методів розрахунку нелінійних електричних кіл – методом двох вузлів. Для цього зобразимо електричне коло (рис.

9.12), яке є аналогом магнітного кола (рис. 9.11), і покажемо, як задля розв'язання задачі можна використати даний метод.

Насамперед побудуємо вебер-амперні характеристики віток магнітного кола $\Phi_i = f_i(U_{Mab})$. Для цього на підставі другого закону Кірхгофа запишемо:

- для першої вітки магнітного кола

$$U_{Mab}^{(1)} = H_1 l_1 - w_1 I_1; \quad (9.16, a)$$

- для другої вітки

$$U_{Mab}^{(2)} = -H_2 l_2 + w_2 I_2; \quad (9.16, б)$$

- для третьої вітки

$$U_{Mab}^{(3)} = H_3 l_3 + H_0 \delta. \quad (9.16, в)$$

З метою побудови характеристик зручно скласти таблицю для кожної вітки окремо на зразок табл. 9.2.

Таблиця 9.2

1 вітка		Вебер-амперна характеристика $\Phi = f_1(U_{Mab}^{(1)})$	
B_1	H_1	$\Phi_1 = B_1 S_1$	$U_{Mab}^{(1)} = H_1 l_1 - w_1 I_1$
...
...

В перших двох стовпцях записують $(8 \div 10)$ довільно обраних значень магнітної індукції B_i і відповідних їм значень напруженостей магнітного поля H_i , визначених за допомогою основної кривої намагнічування магнітного матеріалу осердя.

Значення магнітних індукцій можуть бути як додатними, так і від'ємними, тому необхідно використовувати симетричність кривої намагнічування.

В наступних двох стовпцях таблиці 9.2, які і являють собою шукану вебер-амперну характеристику k -ої вітки, для точок магнітної індукції B_i і напруженості H_i за формулою $\Phi_k = B_k S_k$ обчислюють можливі значення магнітного потоку в k -ій вітці, а за формулами (9.16, а), (9.16, б) або (9.16, в) – відповідні значення магнітної напруги на цій вітці $U_{m_{ba}}^{(k)}$.

Розраховані у такий спосіб вебер-амперні характеристики трьох віток магнітного кола (рис. 9.11) наведено на рис. 9.13.

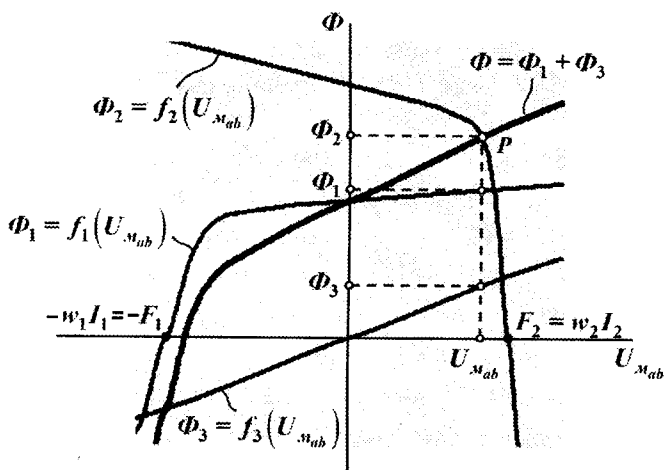


Рисунок 9.13

Оскільки для магнітних потоків має виконуватися перший закон Кірхгофа

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3,$$

то побудуємо в тій же системі координат (див. рис. 9.13) за допомогою вже визначених вебер-амперних характеристик першої та третьої віток

$$\Phi_1 = f_1(U_{Mab}^{(1)}) \quad \text{та} \quad \Phi_3 = f_3(U_{Mab}^{(3)})$$

залежність

$$\Phi_1 + \Phi_3 = f_4(U_{Mab}).$$

На рис. 9.13 графік останньої залежності показано дещо потовщеною лінією.

Тоді відповідно до першого закону Кірхгофа точка перетину (точка P) цієї залежності з характеристикою

$$\Phi_2 = f_2(U_{Mab}^{(2)})$$

дає значення магнітної напруги U_{Mab} , а також магнітних потоків Φ_1 , Φ_2 і Φ_3 , за яких цей закон виконується (рис. 9.13).

Визначивши магнітні потоки у вітках магнітного кола, можна розрахувати всі інші величини, наприклад, магнітні індукції та напруженості магнітного поля на тих чи інших ділянках магнітного кола:

- індукції магнітного поля обчислюються за формулами

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}, \quad B_3 = B_0 = \frac{\Phi_3}{S_3};$$

- напруженості H_1 , H_2 і H_3 в магнітних осердях віток визначають за допомогою основної кривої намагнічування магнітного матеріалу $B = f(H)$;
- напруженість H_0 магнітного поля в повітряному проміжку розраховують через співвідношення (9.7)

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}.$$

Правильність розрахунку перевіряють за другим законом Кірхгофа для магнітних кіл.

Для нашої задачі це будуть рівняння:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = w_1 I_1 + w_2 I_2$$

для контуру, утвореного першою і другою вітками, і

$$H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_0 \delta = w_2 I_2$$

для контуру, що складається з другої і третьої віток заданого магнітного кола.

І наостанок. Алгоритм розв'язання даної задачі в числах наведено в наступному підрозділі (див. п. 9.5) в прикладі 9.1, де розглянуто розрахунок магнітних кіл за допомогою комп'ютерної програми Mathcad.

9.5 Аналіз магнітних кіл постійного струму в математичній системі Mathcad

Приклад 9.1

Для магнітного кола, наведеного на рис. 9.11 (див. п. 9.4), розрахувати *методом двох вузлів* магнітні потоки Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 у вітках, магнітні індукції B_1 , B_2 , B_3 і напруженості магнітного поля H_1 , H_2 , H_3 , H_δ на різних ділянках магнітопроводу, якщо геометричні розміри феромагнітного осердя наведено в таблиці 9.3. В цій же таблиці вказано число витків обмоток та значення електричних струмів в них.

Таблиця 9.3

1-а вітка				2-а вітка				3-я вітка			
I_1	S_1	w_1	I_1	I_2	S_2	w_2	I_2	I_3	S_3	δ	
см	см ²	-	А	см	см ²	-	А	см	см ²	мм	
20	4	500	1,5	12	7	300	0,75	30	3	0,5	

Магнітопровід кола виготовлено із однорідного феромагнітного матеріалу, основна крива намагнічування $B = f(H)$ якого подана таблицею 9.4.

Таблиця 9.4

Основна крива намагнічування $B = f(H)$												
H	А/м	0	50	100	200	300	400	600	800	1000	2000	3000
B	Тл	0	0,06	0,16	0,47	0,76	0,99	1,26	1,39	1,46	1,57	1,63

Розв'язування задачі розпочнемо з введення до системи Mathcad вихідних параметрів заданого магнітного кола, що і показано на рис. 9.14.

1. **Задаємо вихідні параметри магнітного кола:**

а) $l_1 := 20 \cdot \text{cm}$ $l_2 := 12 \cdot \text{cm}$ $l_3 := 30 \cdot \text{cm}$
 $S_1 := 4 \cdot \text{cm}^2$ $S_2 := 7 \cdot \text{cm}^2$ $S_3 := 3 \cdot \text{cm}^2$ $\delta := 0.5 \cdot \text{mm}$
 $w_1 := 500$ $w_2 := 300$ $w_3 := 0$
 $I_1 := 1.5 \cdot \text{A}$ $I_2 := 0.75 \cdot \text{A}$ $I_3 := 0$ $\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\text{H}}{\text{m}}$

б) **основна крива намагнічування $B(H)$** **ORIGIN := 0**

$H_m := (0 \ 50 \ 100 \ 200 \ 300 \ 400 \ 600 \ 800 \ 1000 \ 2000 \ 3000) \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}}$
 $B_m := (0 \ 0.06 \ 0.16 \ 0.47 \ 0.76 \ 0.99 \ 1.26 \ 1.39 \ 1.46 \ 1.57 \ 1.63) \cdot \text{T}$

$i := 0..20$ $H_i := \text{if}[i < 10, (-H_m^T)_{10-i}, (H_m^T)_{i-10}]$
 $B_i := \text{if}[i < 10, (-B_m^T)_{10-i}, (B_m^T)_{i-10}]$

Рисунок 9.14

Останній блок програмного коду рис. 9.14 розширює область визначення функції кривої намагнічування $B = f(H)$ на від'ємні значення, оскільки точка можливого розв'язку може перебувати і в цій області, тобто за від'ємних значень напруженостей та індукцій магнітного поля.

В даному випадку використано притаманну основній кривій намагнічування симетричність.

Відповідно до методу двох вузлів за формулами

$$\Phi_1 = B_1 S_1, \Phi_2 = B_2 S_2, \Phi_3 = B_3 S_3$$

для магнітних потоків і за співвідношеннями (9.16)

$$U_{M_{ab}}^{(1)} = H_1 l_1 - w_1 I_1,$$

$$U_{M_{ab}}^{(2)} = w_2 I_2 - H_2 l_2,$$

$$U_{M_{ab}}^{(3)} = H_3 l_3 + H_0 \delta,$$

для магнітних напруг сформуємо вебер-амперні характеристики окремих віток $\Phi_i = f_i(U_{M_{ab}})$ (рис. 9.15), подавши ці функції в табличній формі (матрично).

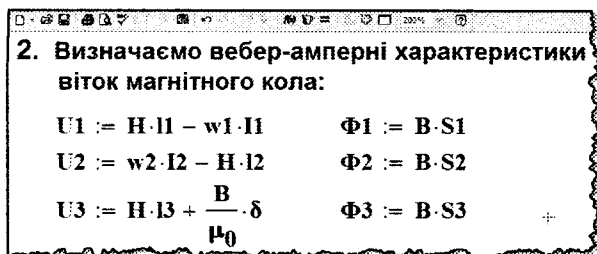


Рисунок 9.15

Для подальшого розв'язання задачі необхідно перейти від табличного подання функціональних залежностей до неперервних функцій. Зробимо це у спосіб лінійної інтерполяції заданих табличних значень кривої намагнічування (рис. 9.16) та характеристик віток (рис. 9.17).

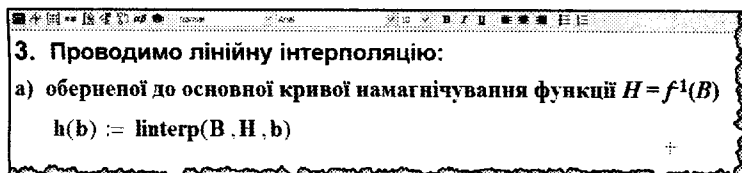


Рисунок 9.16

б) вебер-амперних характеристик віток

$u_{1i} := \text{if}(U_{120} > U_{10}, U_{1i}, U_{120-i})$
 $\phi_{1i} := \text{if}(U_{120} > U_{10}, \phi_{1i}, \phi_{120-i})$ $\Phi_1(U_{ab}) := \text{interp}(u_1, \phi_1, U_{ab})$
 $u_{2i} := \text{if}(U_{220} > U_{20}, U_{2i}, U_{220-i})$
 $\phi_{2i} := \text{if}(U_{220} > U_{20}, \phi_{2i}, \phi_{220-i})$ $\Phi_2(U_{ab}) := \text{interp}(u_2, \phi_2, U_{ab})$
 $u_{3i} := \text{if}(U_{320} > U_{30}, U_{3i}, U_{320-i})$
 $\phi_{3i} := \text{if}(U_{320} > U_{30}, \phi_{3i}, \phi_{320-i})$ $\Phi_3(U_{ab}) := \text{interp}(u_3, \phi_3, U_{ab})$

Рисунок 9.17

На рис. 9.18 наведено графіки отриманих характеристик.

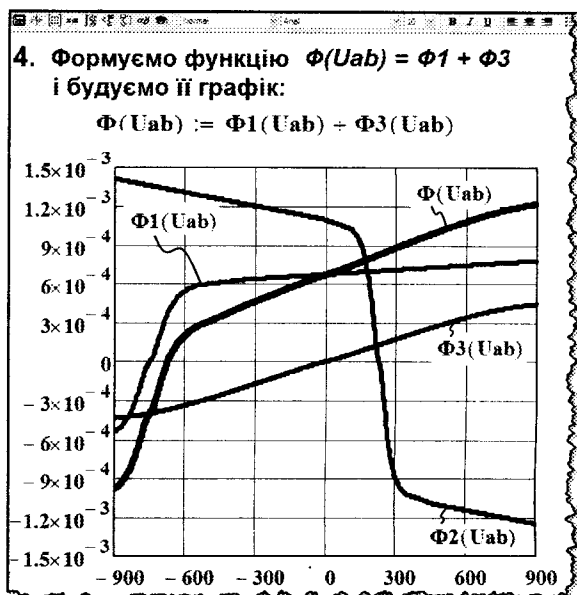


Рисунок 9.18

Функція $\Phi(U_{m,ab})$ на рис. 9.18 являє собою суму

$$\Phi(U_{ab}) = \Phi_1(U_{ab}) + \Phi_3(U_{ab})$$

і оскільки для магнітного кола має виконуватися перший закон Кірхгофа

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3,$$

то задача звелася до необхідності розв'язання нелінійного рівняння

$$\Phi_2(U_{ab}) - \Phi(U_{ab}) = 0,$$

складеного відносно магнітної напруги U_{ab} .

Це нелінійне рівняння можна розв'язати як у графічний спосіб, як це було показано вище (див. п. 9.4), так і чисельно за допомогою функції $\text{root}(F, x)$, яка повертає із заданою точністю (системна змінна TOL) значення x , за якого рівняння $F(x) = 0$.

5. Знаходимо магнітну напругу U_{ab} , за якої виконується 1-ий закон Кірхгофа $\Phi_2 - (\Phi_1 + \Phi_3) = 0$:

Здаємо наближене значення: $U_{ab} := 0$

Розв'язуємо нелінійне рівняння $\Phi_2 - (\Phi_1 + \Phi_3) = 0$:

$U_{ab} := \text{root}(\Phi_2(U_{ab}) - \Phi(U_{ab}), U_{ab}) = 165.748 \text{ A}$

Рисунок 9.19

Рівняння розв'язано і наразі визначено шукану магнітну напругу U_{ab} між вузлами a і b магнітного кола.

Оскільки ця напруга водночас є напругою і на вітках даного кола, то безпосередньо за їх вебер-амперними характеристиками одержуємо значення магнітних потоків Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , що відповідають отриманій магнітній напрузі, а через них розраховуємо і магнітні індукції B_1 , B_2 , B_3 (рис. 9.20).

6. Обчислюємо магнітні потоки Φ_1, Φ_2, Φ_3 :

$$\Phi_1(U_{ab}) = 6.899 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2(U_{ab}) = 7.816 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_3(U_{ab}) = 9.172 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

7. Визначаємо магнітні індукції B_1, B_2, B_3 :

$$B_1 := \frac{\Phi_1(U_{ab})}{S_1} = 1.725 \text{ T}$$

$$B_2 := \frac{\Phi_2(U_{ab})}{S_2} = 1.117 \text{ T}$$

$$B_3 := \frac{\Phi_3(U_{ab})}{S_3} = 0.306 \text{ T}$$

Рисунок 9.20

Напруженості H_1, H_2, H_3 магнітного поля на феромагнітних ділянках віток магнітопроводу отримаємо, скориставшись функцією $H = f^{-1}(B)$, що є оберненою до основної кривої намагнічування $B = f(H)$ (рис. 9.21).

8. Розраховуємо напруженості H_1, H_2, H_3, H_0 :

$$H_1 := h(B_1) = 4.579 \times 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_2 := h(B_2) = 493.765 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_3 := h(B_3) = 147.009 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_0 := \frac{B_3}{\mu_0} = 2.433 \times 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Рисунок 9.21

Напруженість H_0 в повітряному зазорі розрахуємо за формулою (9.7) $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$, врахувавши, що $B_0 = B_3$, тобто

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B_3}{\mu_0}$$

(див. рис. 9.21).

Задачу розв'язано.

Однак необхідно пересвідчитися в правильності проведеного розрахунку магнітного кола. Зазвичай це роблять за допомогою рівнянь, складених за законами Кірхгофа.

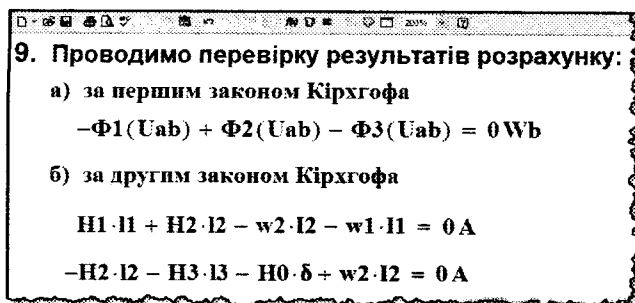


Рисунок 9.22

Як видно з рис. 9.22, всі рівняння за одержаних значень магнітних напруженостей і індукцій перетворюються на тотожності.

Результати розрахунку зведемо до таблиці 9.5.

Таблиця 9.5

1-а вітка	2-а вітка	3-я вітка
$\Phi_1 = 6,899 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$	$\Phi_2 = 7,816 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$	$\Phi_3 = 9,172 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}$
$B_1 = 1,725 \text{ Тл}$	$B_2 = 1,117 \text{ Тл}$	$B_3 = 0,306 \text{ Тл}$
$H_1 = 4,579 \cdot 10^3 \text{ А/м}$	$H_2 = 493,765 \text{ А/м}$	$H_3 = 147,009 \text{ А/м}$
$U_{m_{ab}} = 165,748 \text{ А}$		$H_0 = 2,433 \cdot 10^5 \text{ А/м}$

Приклад 9.2

Скористаємося можливостями, які здатне надати математичне програмне середовище Mathcad, і проведемо розрахунок магнітного кола постійного струму за ускладненої геометрії його магнітопроводу (рис. 9.23).

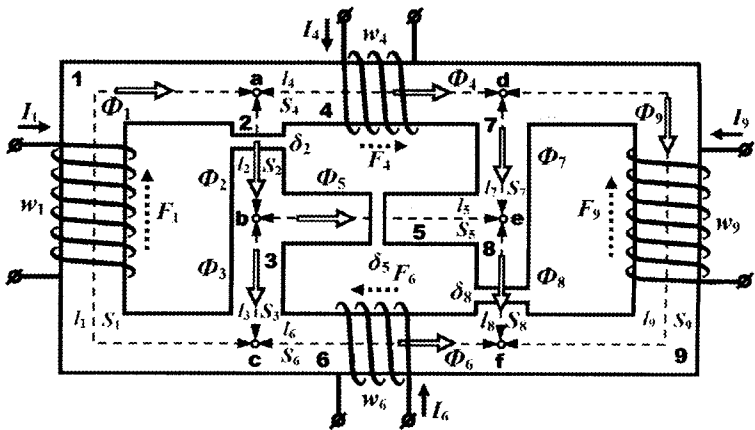


Рисунок 9.23

В даній задачі необхідно визначити напруженості магнітного поля у всіх вітках заданого магнітного кола, враховуючи і повітряні зазори, а також магнітні індукції та магнітні потоки.

Магнітопровід кола виготовлено із однорідного феромагнітного матеріалу, основна крива намагнічування $B = f(H)$ якого подана таблицею 9.4 (див. приклад 9.1).

Геометричні розміри феромагнітного осердя та інші параметри цього кола наведено в таблиці 9.6.

Таблиця 9.6

1-а вітка			2-а вітка			3-я вітка		
I_1	S_1	w_1	I_1	I_2	S_2	δ_2	I_3	S_3
см	см ²	-	А	см	см ²	мм	см	см ²
24	6	300	1,7	5	4	0,3	5	4

Продовження таблиці 9.6

4-а вітка				5-а вітка			6-а вітка			
I_4	S_4	w_4	I_4	I_5	S_5	δ_5	I_6	S_6	w_6	I_6
см	см ²	-	А	см	см ²	мм	см	см ²	-	А
10	5	175	0,3	10	5	0,5	10	5	50	0,5

Продовження таблиці 9.6

7-а вітка		8-а вітка			9-а вітка			
I_7	S_7	I_8	S_8	δ_8	I_9	S_9	w_9	I_9
см	см ²	см	см ²	мм	см	см ²	-	А
5	4	5	4	0,3	24	6	200	1,5

Для розв'язування задачі насамперед занесемо вихідні параметри магнітного кола до системи і зробимо це у табличний (матричний) спосіб (рис. 9.24).

1. Задаємо вихідні параметри магнітного кола:

a) $\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\text{H}}{\text{m}}$ ORIGIN := 1

$S := (6 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5 \ 4 \ 4 \ 6) \cdot \text{cm}^2$

$l := (24 \ 5 \ 5 \ 10 \ 10 \ 10 \ 5 \ 5 \ 24) \cdot \text{cm}$

$\delta := (0 \ 0.3 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0.3 \ 0) \cdot \text{mm}$

$I := (1.7 \ 0 \ 0 \ 0.3 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 1.5) \cdot \text{A}$

$w := (300 \ 0 \ 0 \ 175 \ 0 \ 50 \ 0 \ 0 \ 200)$

$S := S^T \quad l := l^T \quad \delta := \delta^T \quad I := I^T \quad w := w^T$

Рисунок 9.24

Що ж стосується основної кривої намагнічування, то подамо її так, як це було зроблено в попередньому прикладі (див. рис. 9.14), і проведемо її лінійну інтерполяцію (рис. 9.25).

2. Проводимо лінійну інтерполяцію основної кривої намагнічування $B = f(H)$:

$$b(h) := \text{linterp}(H, B, h)$$

Рисунок 9.25

В основу розв'язання даної задачі засобами програми Mathcad покладемо безпосереднє рішення системи нелінійних рівнянь, складених за законами Кірхгофа, відносно напруженостей H_k . Тому задля формування такої системи рівнянь для заданого магнітного кола (рис. 9.23) побудуємо його еквівалентну електричну схему (рис. 9.26).

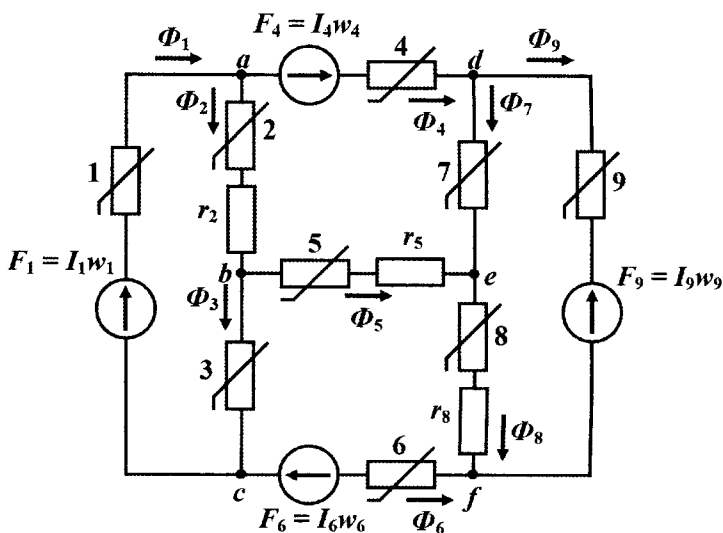


Рисунок 9.26

Відповідно до цієї схеми система рівнянь, складена за законами Кірхгофа для заданого магнітного кола, має вигляд

$$\left. \begin{aligned}
 -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4 &= 0 \\
 -\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_5 &= 0 \\
 -\Phi_4 + \Phi_7 + \Phi_9 &= 0 \\
 -\Phi_5 - \Phi_7 + \Phi_8 &= 0 \\
 -\Phi_8 - \Phi_9 + \Phi_6 &= 0 \\
 H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0^{(2)} \delta_2 + H_3 l_3 &= I_1 w_1 \\
 H_4 l_4 + H_7 l_7 - H_5 l_5 - H_0^{(5)} \delta_5 - H_2 l_2 - H_0^{(2)} \delta_2 &= I_4 w_4 \\
 H_5 l_5 + H_0^{(5)} \delta_5 + H_8 l_8 + H_0^{(8)} \delta_8 - H_6 l_6 - H_3 l_3 &= I_6 w_6 \\
 H_9 l_9 - H_8 l_8 - H_0^{(8)} \delta_8 - H_7 l_7 &= -I_9 w_9 \\
 H_0^{(2)} = \frac{B_2}{\mu_0}, \quad H_0^{(5)} = \frac{B_5}{\mu_0}, \quad H_0^{(8)} = \frac{B_8}{\mu_0}
 \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

В цій системі за невідомі величини оберемо напруженості H_1, H_2, \dots, H_9 магнітного поля у відповідних феромагнітних частинах магнітопроводу.

Тоді магнітні індукції B_1, B_2, \dots, B_9 і потоки $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_9$ в вітках магнітного кола визначатимуться основною кривою намагнічування $B_k = f(H_k)$ та співвідношенням $\Phi_k = B_k S_k$ відповідно і в обох випадках являтимуть собою нелінійні функції від напруженості H_k , де $k = 1, 2, \dots, 9$ – номер вітки.

Необхідно зауважити, що за невідомі в системі (9.17) можна обрати і інші магнітні фізичні величини, наприклад, індукції магнітного поля або магнітні потоки. Однак за такого вибору попередньо в програмі потрібно буде сформувати не функцію $B = f(H)$ (див. рис. 9.25), а обернену до неї функцію $H = f^{-1}(B)$.

Отже, задача звелася до необхідності розв'язування нелінійної системи рівнянь (9.17), в якій невідомими є магнітні напруженості.

Розв'яжемо цю нелінійну систему в програмному середовищі Mathcad.

Насамперед задамося наближено початковими значеннями шуканих напруженостей магнітного поля (рис. 9.27).

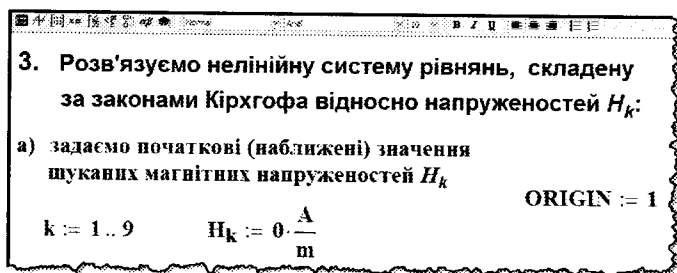


Рисунок 9.27

Тут необхідно зауважити таке. На відміну від електричних, всі характеристики магнітних кіл постійного струму, звичайно ж, якщо знехтувати гістерезисом, є монотонними та симетричними, внаслідок чого система нелінійних рівнянь буде мати тільки один розв'язок і не залежатиме від передстану магнітного кола. Проте точність числового розрахунку в Mathcad в багатьох випадках залежить від того, якими були задані початкові значення. Скажана, в першу чергу, пов'язане із структурою та параметрами складного магнітного кола, що безпосередньо позначається на системі нелінійних рівнянь, а зрештою – і на ітераційному процесі числового (наближеного) розв'язання цієї системи математичною програмою Mathcad. Отже, як наслідок, по-перше, необов'язково початкові значення напруженостей мають дорівнювати нулю, як це, наприклад, було зроблено в нашій задачі, по-друге, їх можна задавати різними значеннями, і, по-третє, завжди потрібно робити перевірку результатів розрахунку за законами Кірхгофа, що буде показано далі, і за результатами цієї перевірки у випадку необхідності задля підвищення точності змінювати раніше задані початкові значення на інші.

Для розв'язання системи (9.17) скористаємося службовою директивою Given та подамо ці рівняння так, як того вимагає математична система Mathcad (див. рис. 9.28).

б) складаласмо систему рівнянь за законами Кірхгофа

Given

$$-b(H_1) \cdot S_1 + b(H_2) \cdot S_2 + b(H_4) \cdot S_4 = 0$$

$$-b(H_2) \cdot S_2 + b(H_3) \cdot S_3 + b(H_5) \cdot S_5 = 0$$

$$-b(H_4) \cdot S_4 + b(H_7) \cdot S_7 + b(H_9) \cdot S_9 = 0$$

$$-b(H_5) \cdot S_5 - b(H_7) \cdot S_7 + b(H_8) \cdot S_8 = 0$$

$$-b(H_8) \cdot S_8 - b(H_9) \cdot S_9 + b(H_6) \cdot S_6 = 0$$

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + \frac{b(H_2)}{\mu_0} \cdot \delta_2 + H_3 \cdot l_3 = I_1 \cdot w_1$$

$$H_4 \cdot l_4 + H_7 \cdot l_7 - H_5 \cdot l_5 - \frac{b(H_5)}{\mu_0} \cdot \delta_5 - H_2 \cdot l_2 - \frac{b(H_2)}{\mu_0} \cdot \delta_2 = I_4 \cdot w_4$$

$$H_5 \cdot l_5 + \frac{b(H_5)}{\mu_0} \cdot \delta_5 + H_8 \cdot l_8 + \frac{b(H_8)}{\mu_0} \cdot \delta_8 - H_6 \cdot l_6 - H_3 \cdot l_3 = I_6 \cdot w_6$$

$$H_9 \cdot l_9 - H_8 \cdot l_8 - \frac{b(H_8)}{\mu_0} \cdot \delta_8 - H_7 \cdot l_7 = -I_9 \cdot w_9$$

в) розв'язуємо систему і визначаємо магнітні напруженості

$$H := \text{Find}(H) = \begin{pmatrix} 1.129 \times 10^3 \\ 319.864 \\ 616.433 \\ 499.565 \\ -168.385 \\ 297.385 \\ 920.6 \\ 390.094 \\ -14.83 \end{pmatrix} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Рисунок 9.28

Розв'язок системи повернемо функцією Find() (рис. 9.28).

Як видно з рисунка, отримано *вектор* значень напруженостей в феромагнітних осердях віток магнітопроводу, за яких і будуть виконуватися закони Кірхгофа (9.17).

Так, значення напруженості в першій вітці заданого магнітного кола буде складати $H_1 = 1,129 \cdot 10^3$ А/м, а в дев'ятій вітці – $H_9 = -14,83$ А/м, тобто в дійсності магнітне поле в цій вітці буде спрямоване протилежно попередньо обраному напрямку. Це ж стосується і магнітних індукцій B_9 та потоку Φ_9 .

Тепер за допомогою кривої намагнічування $B = f(H)$ визначимо магнітні індукції, а через них і магнітні потоки у всіх вітках заданого магнітного кола (рис. 9.29).

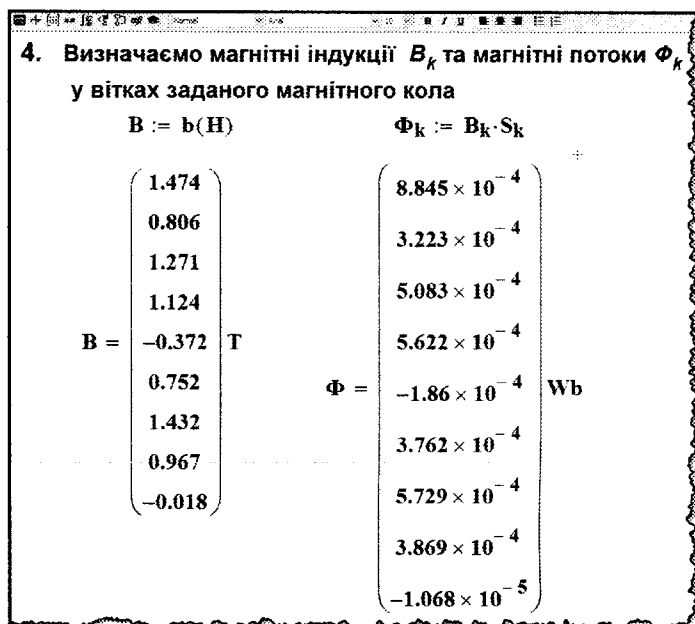


Рисунок 9.29

Розрахунок напруженостей магнітного поля в повітряних зазорах показано на рис. 9.30.

5. Обчислюємо значення напруженостей в повітряних зазорах:

$$H_{02} := \frac{B_2}{\mu_0} = 6.411 \times 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad H_{05} := \frac{B_5}{\mu_0} = -2.96 \times 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{08} := \frac{B_8}{\mu_0} = 7.697 \times 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Рисунок 9.30

Перевіримо отриманий результат (рис. 8.24), скориставшись системою рівнянь, складеною за законами Кірхгофа (9.17). Як видно з рисунка, всі отриманні значення дійсно є розв'язками системи (9.17).

Задачу розв'язано.

6. Проводимо перевірку результатів розрахунку:

а) за першим законом Кірхгофа

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4 = 0 \text{ Wb}$$

$$-\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_5 = 0 \text{ Wb}$$

$$-\Phi_4 + \Phi_7 + \Phi_9 = 0 \text{ Wb}$$

$$-\Phi_5 - \Phi_7 + \Phi_8 = 0 \text{ Wb}$$

$$-\Phi_8 - \Phi_9 + \Phi_6 = 0 \text{ Wb}$$

б) за другим законом Кірхгофа

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + \frac{b(H_2)}{\mu_0} \cdot \delta_2 + H_3 \cdot l_3 - I_1 \cdot w_1 = -5.684 \times 10^{-14} \text{ A}$$

$$H_4 \cdot l_4 + H_7 \cdot l_7 - \frac{b(H_5)}{\mu_0} \cdot \delta_5 - H_5 \cdot l_5 - H_2 \cdot l_2 - \frac{b(H_2)}{\mu_0} \cdot \delta_2 - I_4 \cdot w_4 = 0 \text{ A}$$

$$H_5 \cdot l_5 + \frac{b(H_5)}{\mu_0} \cdot \delta_5 + H_8 \cdot l_8 + \frac{b(H_8)}{\mu_0} \cdot \delta_8 - H_6 \cdot l_6 - H_3 \cdot l_3 - I_6 \cdot w_6 = 0 \text{ A}$$

$$H_9 \cdot l_9 - H_7 \cdot l_7 - H_8 \cdot l_8 - \frac{b(H_8)}{\mu_0} \cdot \delta_8 + I_9 \cdot w_9 = 0 \text{ A}$$

Рисунок 9.31

Запитання для самоперевірки

1. На які групи поділяють речовини за їх магнітними властивостями?
2. Назвіть основні величини, що характеризують магнітне поле. Розкрийте зв'язок між ними.
3. Поясніть, що означає «нелінійність» та «неоднозначність» основної характеристики магнітних матеріалів.
4. Нарисуйте основну криву намагнічування та петлю гістерезису. Які ще величини характеризують магнітні властивості речовини?
5. В чому полягає принцип неперервності силових ліній магнітного поля?
6. Розкрийте суть і запишіть закон повного струму.
7. Які кола називають магнітними?
8. Що називають магнітним потоком? Які потоки розрізняють в магнітних колах?
9. Поясніть фізичний зміст терміну «магнітна напруга».
10. Як визначають значення та додатні напрямки дії магніторухійних сил в магнітному колі?
11. За яких спрощень зазвичай проводять розрахунок магнітних кіл?
12. Що називають вебер-амперною характеристикою?
13. Сформулюйте, запишіть та поясніть перший і другий закони Кірхгофа для магнітних кіл? Наведіть приклади.
14. Проведіть аналогію між магнітним і електричним колами.
15. Яким чином складають еквівалентну до магнітного кола електричну схему. Наведіть приклад.
16. Сформулюйте дві задачі, що постають під час розрахунку магнітних кіл постійного струму.
17. Поясніть методику розрахунку розгалужених магнітних кіл постійного струму. Розкрийте суть методу двох вузлів.

Розділ 10

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НЕЛІНІЙНИХ КІЛ ЗМІННОГО СТРУМУ

10.1 Особливості аналізу нелінійних кіл змінного струму

В попередніх розділах було розглянуто деякі методи розрахунку нелінійних електричних та магнітних кіл постійного струму, що зводяться до розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Процеси ж в нелінійних колах змінного струму як в усталеному, так і перехідному режимах описуються нелінійними диференціальними рівняннями.

В лінійних електричних колах більшість методів аналізу ґрунтується на застосуванні принципу накладання (суперпозиції). Це стосується і розв'язування лінійних диференціальних рівнянь.

Однак в теорії нелінійних кіл принцип накладання є хибним.

Покажемо це на простому прикладі.

Нехай до нелінійного резистора з характеристикою $i = au^3$ прикладено напругу, що складається з двох гармонік

$$u = u_1 + u_2 = U_{m_1} \sin \omega t + U_{m_2} \sin 2\omega t. \quad (10.1)$$

Струм в резисторі

$$i = a(u_1 + u_2)^3 = a(u_1^3 + 3u_1^2u_2 + 3u_1u_2^2 + u_2^3). \quad (10.2)$$

Якщо застосовувати принцип накладання, то струм слід визначати як алгебраїчну суму струмів від дії кожної гармоніки окремо, тобто

$$i' = au_1^3 + au_2^3.$$

Порівнюючи з (10.2), видно, що струм i' не дорівнює струму i , що і доводить хибність принципу накладання для нелінійних кіл.

Недотримання принципу накладання є найважливішою математичною особливістю в теорії нелінійних кіл і створює значні труднощі при їх аналізі, оскільки не існує загальних методів аналітичного розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь. Існуючі ж методи є або аналітичними, однак придатними лише для обмеженого класу нелінійних кіл, або різного роду числовими, тобто наближеними.

Ще однією важливою особливістю нелінійних кіл є та обставина, що в усталених режимах в нелінійних колах частотні спектри струмів і напруг у вітках можуть суттєво відрізнятись від частотного спектра вхідної напруги, чого в лінійних колах принципово бути не може.

Розглянемо це докладніше на прикладі. Нехай до складу простого електричного кола входить тільки один нелінійний резистор (рис. 10.1), його вольт-амперна характеристика задана аналітично

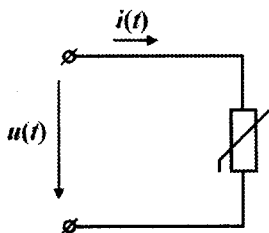


Рисунок 10.1

$$i = au^3. \quad (10.3)$$

До нелінійного резистора прикладено напругу, яка змінюється за синусоїдним законом

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (10.4)$$

Підставимо (10.4) в (10.3) задля

визначення миттєвого струму i

$$i = a(U_m \sin \omega t)^3 = aU_m^3 \sin^3 \omega t.$$

Оскільки

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t,$$

то

$$i = \frac{3}{4} aU_m^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} aU_m^3 \sin 3\omega t. \quad (10.5)$$

Як бачимо з (10.5), струм не є синусоїдним: окрім першої гармоніки він містить ще й третю.

Властивість нелінійних кіл змінювати частотний спектр мо-

жна довести і графічно. Для цього зобразимо суміщено по осі напруг два графіки. На першому покажемо половину хвилі прикладеної синусоїдної напруги (рис. 10.2, а), на другому – вольт-амперну характеристику нелінійного резистора (рис. 10.2, б).

Отримаємо графічну залежність електричного струму від часу. З цією метою півперіод напруги розіб'ємо на n рівних часових інтервалів. Далі в момент часу t_1 визначимо значення напруги u_1 (точка 1 на рис. 10.2, а).

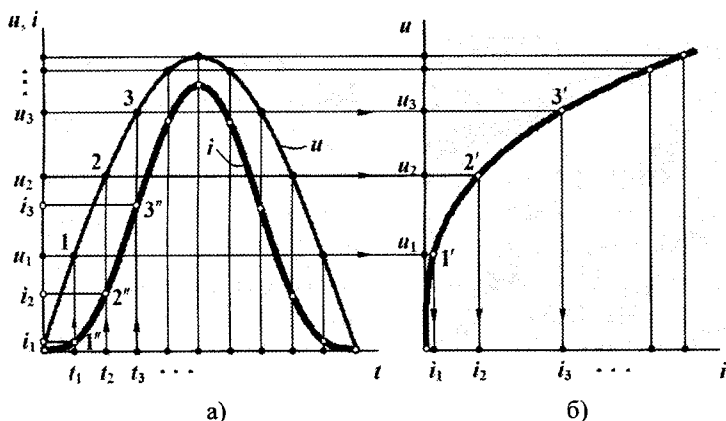


Рисунок 10.2

Оскільки масштаб напруги на обох рисунках є однаковим, за одержаним значенням u_1 безпосередньо на вольт-амперній характеристиці нелінійного резистора побудуємо відповідну точку (точка 1' на рис. 10.2, б) і відшукаємо значення електричного струму i_1 в колі в даний момент часу.

На рис. 10.2, а для моменту t_1 відкладемо визначену величину струму i_1 в окремо заданому для струму масштабі (точка 1'').

Аналогічно визначаються і всі інші точки для кривої струму.

За необхідності подібним чином можна побудувати криву струму на другому півперіоді напруги.

Отже, як видно з рисунка (рис. 10.2, а), залежність електричного струму i від часу є періодичною несинусоїдною функцією.

Необхідно зауважити, якщо коло містить тільки резистивні елементи, то вхідний електричний струм завжди можна відшукати графічно у спосіб, як це і було показано вище, попередньо визначивши тільки результуючу вольт-амперну характеристику для всього електричного кола.

Однак струми в інших вітках нелінійного кола хоча і можна визначити графічно, але це пов'язано з громіздкими побудовами і тому переважно застосовують інші наближені методи.

10.2 Метод еквівалентних синусоїд

Метод еквівалентних синусоїд є наближеним методом і його використовують тоді, коли присутність нелінійних елементів в електричному колі не викликає істотних відмінностей струмів і напруг від синусоїдних функцій. Це є підставою здійснити їх наближену заміну на *еквівалентні синусоїди*.

За такої заміни характеристики нелінійних елементів задають не для миттєвих, а для діючих значень величин, що суттєво спрощує аналіз нелінійних електричних кіл.

Так, наприклад, для кіл з нелійними резисторами за наведених припущень придатними є методи, які зазвичай використовують для розрахунку кіл постійного струму.

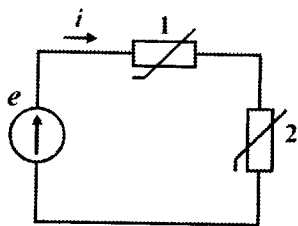


Рисунок 10.3

1. Розглянемо електричне коло, показане на рис. 10.3.

Як видно з рисунка, це коло містить джерело синусоїдної е.р.с

$$e = E_m \sin(\omega t + \beta)$$

та два нелінійних резистивних елементи, вольт-амперні характеристики яких для діючих напруг і струмів показано на рис. 10.4.

Насамперед побудуємо вольт-амперну характеристику всього електричного кола (рис. 10.4), скориставшись методикою отримання результуючих характеристик для електричних кіл, резистивні елементи в яких з'єднані послідовно (див. п. 8.1).

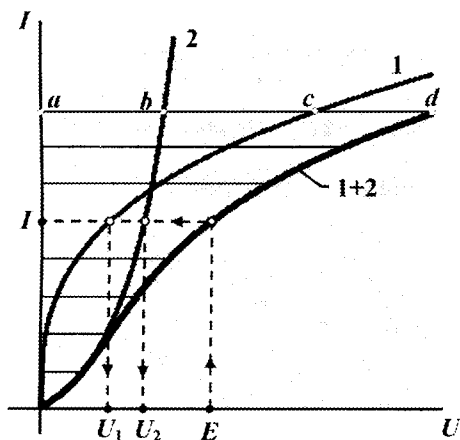


Рисунок 10.4

Тоді, штучно вважаючи електричний струм i синусоїдним, визначимо його діюче значення I за відомим діючим значенням е.р.с. $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ безпосередньо за побудованою результуючою вольт-амперною характеристикою (див. рис. 10.4).

На рисунку напруги U_1 та U_2 є діючими значеннями напруг на окремих нелінійних елементах цього кола.

Оскільки до складу нелінійного кола не входять реактивні елементи і воно є суто резистивним, початкова фаза миттєвого струму i має збігатися з початковою фазою вхідної е.р.с. e .

Тоді для еквівалентної синусоїди миттєвого струму остаточно маємо

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta),$$

де $I_m = I\sqrt{2}$.

Необхідно зазначити, що метод еквівалентних синусоїд буде спроможним і для проведення аналізу в більш складних резистивних колах зі змішаним з'єднанням нелінійних елементів. Методика розрахунку залишиться тією ж.

2. Наведемо методику розрахунку нелінійних електричних кіл за наявності в них реактивних елементів.

Для прикладу розглянемо електричне коло, до складу якого

входять два нелінійних елемента: резистор 1 та індуктивність 2 (рис. 10.5).

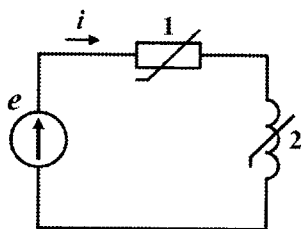


Рисунок 10.5

Нехай е.р.с. $e(t)$ є синусоїдною

$$e = E_m \sin(\omega t + \beta).$$

Будемо також вважати струм в колі синусоїдним.

Спочатку побудуємо результуючу вольт-амперну характеристику всього кола. Необхідно наголосити, що за наявності реактивних елементів побудова таких характеристик має свої особливості.

Як і раніше за послідовного з'єднання елементів скористаємося методикою, подібною до наведеної в п. 8.1.

Однак різниця буде полягати в тому, що вектори напруги на резисторі і індуктивності є перпендикулярними один до одного, тому за тих самих діючих значень струму I діючі значення напруг U_r і U_L на обох елементах кола будемо додавати не алгебраїчно, а *геометрично* за формулою

$$U = \sqrt{U_r^2 + U_L^2},$$

де U – діюче значення прикладеної до кола електричної напруги.

Отже, щоб отримати деяку поточну точку (наприклад, точка d) шуканої результуючої характеристики, необхідно розрахувати довжину відрізка ad (рис. 10.6) через відрізки ab і ac таким чином

$$|ad| = \sqrt{|ab|^2 + |ac|^2}.$$

Аналогічно будуються і всі інші точки даної вольт-амперної характеристики, які потім об'єднуються в криву лінію. На рис. 10.6 це є дещо потовщена лінія, умовно позначена 1+2.

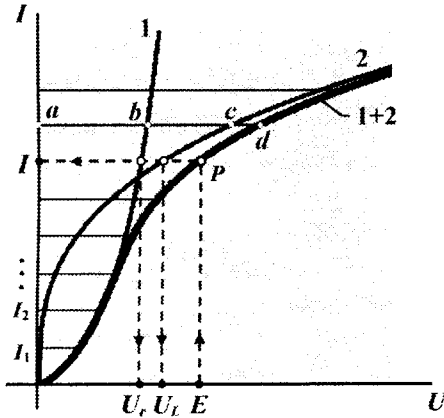


Рисунок 10.6

Тепер за відомою величиною діючого значення е.р.с. $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ безпосередньо на результуючій вольт-амперній характеристиці кола знаходимо діюче значення струму I (робоча точка P), а на вольт-амперних характеристиках окремих елементів — напруги U_r і U_L (див. рис. 10.6).

Для визначення початкової фази еквівалентної синусоїди миттєвого струму i , попередньо відшукаємо в робочій точці відповідних характеристик активний опір резистора $r_p = \frac{U_r}{I}$ та реактивний опір індуктивності $X_p = \frac{U_L}{I}$.

Тоді зсув фаз φ між прикладеною синусоїдною е.р.с. e та еквівалентною синусоїдою струму i дорівнюватиме

$$\varphi = \arctg \frac{X_p}{r_p},$$

а миттєве значення струму

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta - \varphi).$$

Аналогічно можна проводити аналіз і більш складних кіл.

10.3 Котушка з феромагнітним осердям

Як зазначалося вище, феромагнітні тіла мають малий магнітний опір. Це забезпечує суттєве зростання магнітного потоку та відповідно збільшення значення індуктивності порівняно з такою ж котушкою без осердя.

На рис. 10.7 показано котушку індуктивності, до складу якої входять феромагнітне осердя і обмотка зі струмом i , що нараховує w витків.

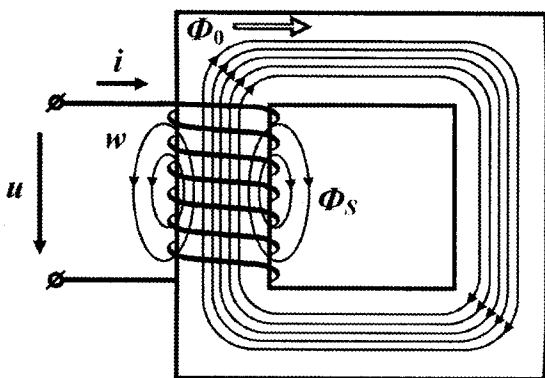


Рисунок 10.7

Φ_0 – це основний магнітний потік, який цілком і повністю замикається через осердя, а Φ_S – потік розсіювання. Останній частково проходить і осердям, але в основному замикається через повітря.

Зв'язок між основним потокозчепленням

$$\psi_0 = w\Phi_0$$

та струмом i є нелінійним.

Що ж стосується потокозчеплення розсіювання ψ_S , то внаслідок проходження магнітних силових ліній через повітряне середовище для нього функціональну залежність від струму можна вважати лінійною

$$\psi_S = L_S i, \quad (10.6)$$

де L_S – індуктивність, яка і характеризує потік розсіювання Φ_S .

Запишемо для миттєвих значень рівняння за другим законом Кірхгофа

$$u = ri + L_S \frac{di}{dt} + w \frac{d\Phi_0}{dt}, \quad (10.7)$$

де r – активний опір обмотки.

Остання складова в рівнянні (10.7) є напругою, яка компенсує е.р.с. самоіндукції під час зміни основного магнітного потоку

$$u_0 = w \frac{d\Phi_0}{dt}. \quad (10.8)$$

Надалі аналіз розіб'ємо на дві частини: наближений і уточнений.

1. Для спрощення аналізу знехтуємо активним опором обмотки r і потоком розсіювання Φ_S .

Тоді рівняння (10.7) з урахуванням (10.8) набуде вигляду

$$u = u_0 = w \frac{d\Phi_0}{dt}. \quad (10.9)$$

Якщо основний магнітний потік змінюється за синусоїдним законом

$$\Phi_0 = \Phi_{m_0} \sin \omega t,$$

то напруга u на котушці відповідно до (10.9) має змінюватися за законом косинуса

$$u = u_0 = w\omega\Phi_{m_0} \cos \omega t. \quad (10.10)$$

Звідки амплітуда цієї напруги

$$U_m = U_{m_0} = w\omega\Phi_{m_0}.$$

Якщо площа S поперечного перерізу осердя однакова по всій довжині, то амплітуда основного магнітного потоку

$$\Phi_{m_0} = B_m S, \quad (10.11)$$

де B_m – амплітуда магнітної індукції осердя.

Врахувавши, що $\omega = 2\pi f$ та співвідношення (10.11) для електричної напруги U_{m_0} , одержуємо

$$U_{m_0} = 2\pi f \omega S B_m.$$

Тоді діюче значення напруги

$$U_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \omega S f B_m = 4,44 \omega S f B_m. \quad (10.12)$$

Окрім того, зауважимо: як впливає із співвідношення (10.10) напруга u_0 випереджає за фазою магнітний потік на 90° .

Визначимо форму кривої струму i графічно (рис. 10.8, а) відповідно до п. 10.1, враховуючи, що за змінного магнітного потоку Φ характеристикою феромагнітного матеріалу має бути петля гістерезису (рис. 10.8, б).

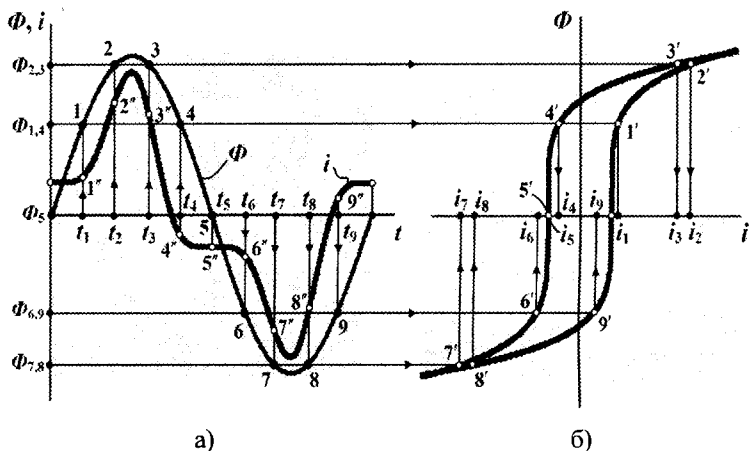


Рисунок 10.8

Як і слід було очікувати, за синусоїдної зміни електричної напруги u та відповідно до (10.9) основного магнітного потоку

Φ_0 миттєвий струм i в котушці буде несинусоїдним. Крім того, цей струм має випереджати основний магнітний потік на деякий час, тривалість якого залежить від ширини петлі гістерезису.

Зауважимо, що внаслідок симетрії петлі гістерезису відносно початку координат, крива миттєвого струму є симетричною відносно осі абсцис. Це означає, що при розкладанні в ряд Фур'є в частотному спектрі цієї кривої присутні тільки непарні гармоніки.

Використаємо для аналізу процесу в котушці метод еквівалентних синусоїд. Для цього криву струму i замінимо еквівалентною синусоїдою. За такої заміни з'являється можливість побудувати векторну діаграму (рис. 10.9) і використати комплексний метод розрахунку.

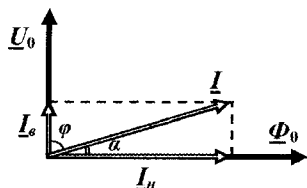


Рисунок 10.9

Із векторної діаграми видно, що напруга на котушці випереджає струм на кут менший, ніж 90° , тобто

$$\varphi = 90^\circ - \alpha,$$

де φ – зсув фаз між вхідною напругою і струмом.

Як відомо, це відповідає активно-індуктивному навантаженню. Тобто, не зважаючи на те, що активним опором обмотки ми знехтували

$$r = 0,$$

в котушці, як виявляється, спостерігаються втрати енергії, які обумовлені втратами в феромагнітному осерді під час його перемагнічування.

Зокрема до цих втрат відносять *втрати на гістерезис*, які пов'язані з незворотними процесами розсіювання енергії, що відбуваються в осерді (наприклад, електротехнічній сталі) за зміни орієнтації областей намагнічування. Втрати на гістерезис пропорційні частоті f

$$P_c = kf$$

та площі петлі гістерезису.

Крім втрат на гістерезис в осердді існують ще й *втрати на вихрові струми*, які виникають у зв'язку з тим, що внаслідок зміни магнітного потоку в часі наводиться е.р.с., під дією якої в провідному середовищі осердя з'являються електричні струми. Ці струми називають *вихровими* або *струмами Фуко*.

Втрати від дії вихрових струмів пропорційні квадрату частоти

$$P_e = k_e f^2.$$

Для зменшення втрат на вихрові струми зазвичай проводять шихтування осердя, тобто набирають його з електрично ізольованих між собою тонких листів феромагнітного матеріалу.

Таким чином, загальні втрати енергії в осердді котушки визначаються як

$$P_{oc} = P_r + P_e$$

і зазвичай їх називають *втратами в сталі*.

Розкладемо комплекс діючого значення струму \underline{I} на векторній діаграмі на дві складові (рис. 10.9):

- струм I_e , що збігається за початковою фазою з прикладеною напругою U_0 . Цю складову назвемо *струмом втрат*;
- *струм намагнічування* I_m , який має збігатися за фазою з основним магнітним потоком Φ_0 .

На основі побудованої векторної діаграми складемо схему заміщення котушки (рис. 10.10)

за вказаних вище припущень $r = 0$ і $\Phi_S = 0$.

На рисунку нелінійна активна провідність g_0 характеризує втрати в сталі, а нелінійна реактивна провідність b_0 – основний магнітний потік.

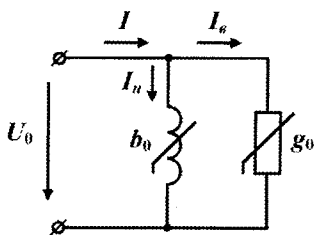


Рисунок 10.10

2. Для побудови векторної діаграми та схеми заміщення котушки з врахуванням втрат в обмотці і потоку розсіювання спів-

віднесемо диференціальному рівнянню (10.7) рівняння в комплексній формі, вважаючи, що часові функції магнітного потоку Φ , прикладеної напруги u та струму в котушці i являють собою еквівалентні синусоїди.

Тоді

$$\underline{U} = r\underline{I} + j\omega L_S \underline{I} + \underline{U}_0. \quad (10.13)$$

З цього виразу випливає, що вектор комплексної вхідної напруги \underline{U} складається із суми трьох складових (рис. 10.11):

- напруги \underline{U}_0 ;
- напруги на активному опорі обмотки, вектор $r\underline{I}$ якої збігається за напрямом з вектором струму \underline{I} ;
- напруги на індуктивності $j\omega L_S \underline{I}$, яка характеризує потік розсіювання і випереджає струм за фазою на 90° .

Повну векторну діаграму напруг і струмів котушки з феромагнітним осердям наведено на рис. 10.11.

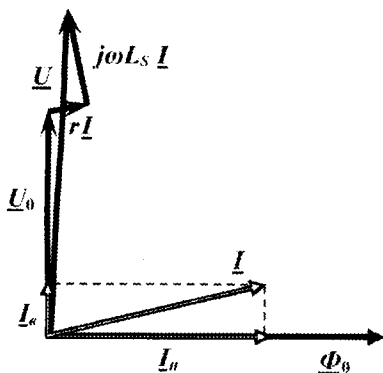


Рисунок 10.11

Дана векторна діаграма дозволяє сформулювати електричну схему заміщення котушки індуктивності з врахуванням водночас і втрат в обмотці $r \neq 0$, і наявності потоку розсіювання $\Phi_S \neq 0$ (рис. 10.12).

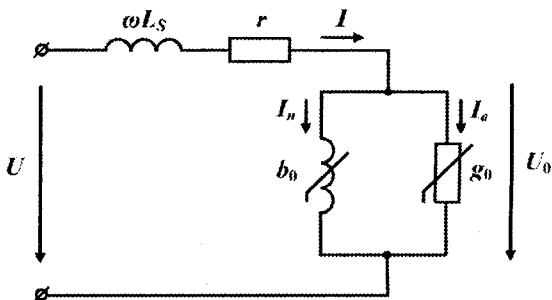


Рисунок 10.12

10.4 Ферорезонанси

1. Розглянемо контур, що утворений двома *попередньо* з'єднаними реактивними елементами: нелінійною індуктивністю і лінійною ємністю (рис. 10.13).

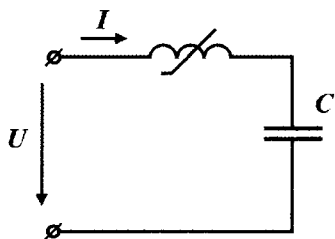


Рисунок 10.13

Припустимо втрати в осерді котушки і в її обмотці відсутні, а миттєві напруги u_L , u_C на елементах та струм i в колі є еквівалентними синусоїдами.

Вольт-амперні характеристики для діючих значень нелінійної індуктивності та лінійної

ємності зображено на рис. 10.14.

Побудуємо результуючу вольт-амперну характеристику всього кола.

За другим законом Кірхгофа в комплексній формі для електричного кола маємо

$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C.$$

Миттєві напруги на індуктивності u_L і на ємності u_C зсунуті за фазою одна відносно одної на 180° і їх вектори \underline{U}_L та \underline{U}_C спрямовані протилежно, тому діюче значення вхідної напруги (модуль вектора) визначаємо як різницю

$$U = |U_L - U_C|. \quad (10.14)$$

Формула (10.14) дозволяє побудувати результуючу вольт-амперну характеристику для всього кола (дещо потовщена лінія на рис. 10.14). Задля цього необхідно послідовно задатися кількома значеннями I_i вхідного струму і за допомогою співвідношення (10.14) отримати значення U_i вхідної напруги, попередньо визначивши напруги U_{L_i} , U_{C_i} на окремих елементах, що відповідають заданим значенням струму.

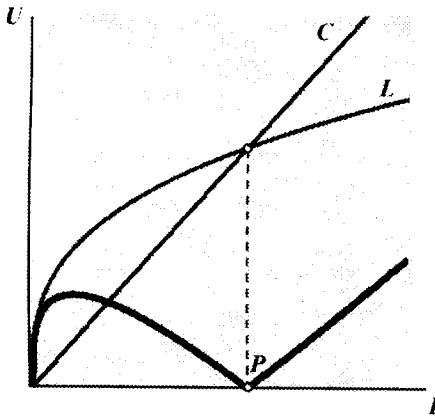


Рисунок 10.14

Точка P на характеристиці є точкою резонансу.

В цій точці діючі напруги на реактивних елементах кола набувають однакових значень, тобто

$$U_L = U_C.$$

Як видно з рисунка, результуюча вольт-амперна характеристика всього кола має спадну ділянку, що дозволяє за певних умов створювати в цьому електричному колі такі ефекти, які спостерігати в лінійних колах принципово неможливо.

Так, наприклад, на відміну від резонансу в лінійному послідовному коливальному контурі резонансу напруг досягають змінюю частоти, індуктивності або ємності. В нелінійному послідов-

ному контурі резонанс напруг може настати ще й і за зміни діючого значення вхідної напруги U . Це пояснюється тим, що індуктивність котушки змінюється за зміни рівня вхідної напруги.

Резонанс в нелінійному послідовному контурі називають *ферорезонансом напруг*.

Необхідно зауважити, що реальному коливальному контуру завжди притаманні втрати, які переважно локалізовані в осерді котушки та її обмотці. Ці втрати можуть бути врахованими за допомогою активного опору r_e . Тому за резонансу діюче значення вхідної напруги на контурі не буде спадати до нуля, а загальна вольт-амперна характеристика всього кола відповідно до формули

$$U = \sqrt{U_{r_e}^2 + (U_L - U_C)^2}$$

матиме вигляд, показаний на рис. 10.15 (потовщена лінія).

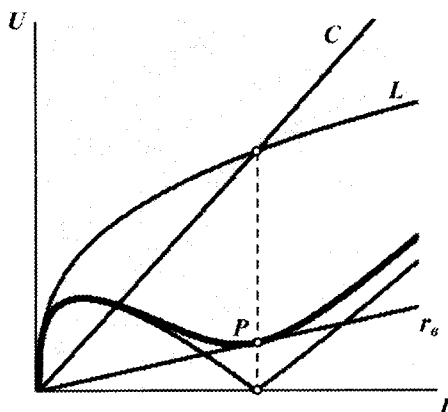


Рисунок 10.15

Відзначимо, що ферорезонанс можливий лише за умови перетину вольт-амперних характеристик індуктивності та ємності.

Якщо до послідовного контура прикласти електричну напругу, що дорівнює значенню U_0 (див. рис. 10.16), то, як це видно з рисунка, за цієї напруги пряма перетинає результуючу характе-

ристку кола в трьох точках a , b і c , що відповідає трьом можливим усталеним режимам роботи електричного кола. Який саме з них набуває сили за цих умов, залежать ще й від попереднього стану електричного кола. Розглянемо це докладніше в такому досліді.

Якщо на вході контура встановити пристрій, який регулює величину вхідної напруги (наприклад, автотрансформатор), то зі збільшенням, починаючи з нуля, діючого значення цієї напруги робоча точка буде плавно переміщуватися від точки початку координат по ділянці результуючої вольт-амперної характеристики в напрямку точки 1 (рис. 10.16).

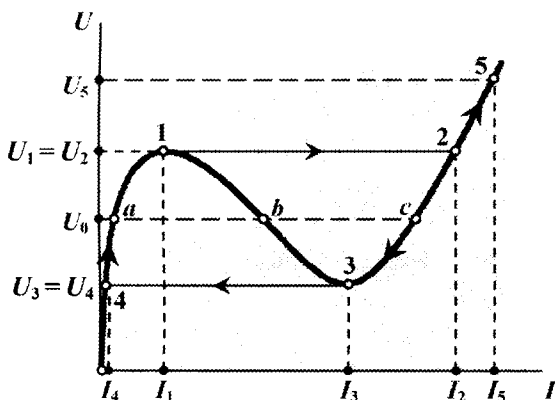


Рисунок 10.16

Після точки 1 вольт-амперна характеристика кола має спадну ділянку, тобто при збільшенні струму вхідна напруги повинна зменшуватися, тому в положенні точки 1 намагання подальшого поступового збільшення вхідної напруги приведе до стрибкоподібного переходу робочої точки із точки 1 до точки 2 (рис. 10.16). Практично це означатиме стрибкоподібну зміну діючого струму від значення I_1 до значення I_2 .

Після стрибка струму зі збільшенням вхідної напруги робоча точка буде поступово рухатися по ділянці 2–5 вздовж вольт-амперної характеристики.

Якщо ж тепер зменшувати напругу U , то робоча точка, набуваючи нових значень, перейде до точки 3 з напругою U_3 включно.

Спроба подальшого зменшення вхідної напруги нижче значення U_3 знову приведе до стрибка робочої точки: з точки 3 на вольт-амперній характеристиці до точки 4, що відповідає миттєвій зміні струму від значення I_3 до значення I_4 .

На ділянці характеристики 0–1 опір індуктивності перевищує ємнісний опір, через що струм відстає за фазою від вхідної напруги. На ділянці 5–3 струм вже має випереджати за фазою напругу, тому водночас зі стрибком струму стрибкоподібної зміни зазнає і кут зсуву фаз між вхідними напругою та струмом.

Таку стрибкоподібну зміну діючого значення струму за малих відхилень напруги називають *тригерним ефектом*.

Наступне зменшення прикладеної напруги U плавно перемістить робочу точку по ділянці вольт-амперної характеристики до точки початку координат включно.

Таким чином, точки a і c є точками *стійкого* стану кола.

Як бачимо з аналізу, зміною діючого значення вхідної напруги U спадну ділянку результуючої вольт-амперної характеристики 1– b –3 експериментально визначити неможливо.

Однак така можливість з'являється зі зміною діючого значення струму I керованим джерелом струму на вході.

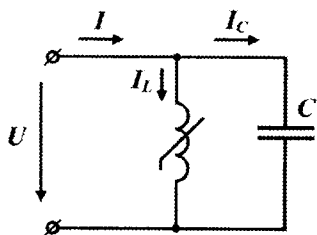


Рисунок 10.17

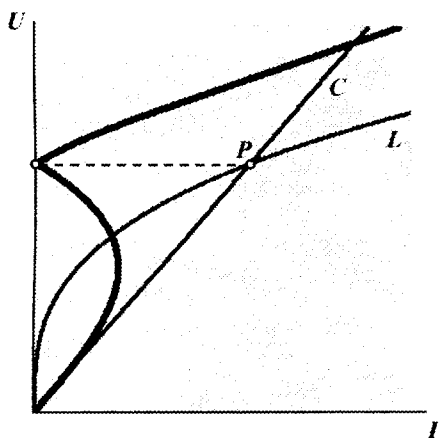
2. За *паралельного* з'єднання нелінійної індуктивності та лінійної ємності (рис. 10.17) струм результуючої вольт-амперної характеристики можна визначити як різницю діючих значень струмів

I_L та I_C за модулем $I = |I_L - I_C|$.

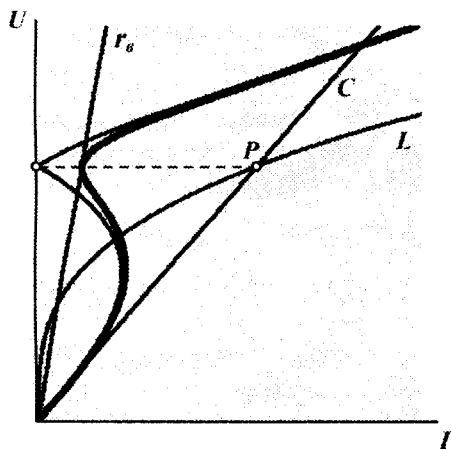
Зауважимо, що дана формула є дійсною тільки за допущень, що були сформульовані вище: нехтуємо втратами енергії в кату-

щі і замінюємо миттєві струми й напруги еквівалентними синусоїдами.

Точка P на результуючій характеристиці (потовщена лінія на рис. 10.18, а) є точкою резонансу, який називають *ферорезонансом струмів*.



а)



б)

Рисунок 10.18

Втрати в контурі приводять до зміни самої вольт-амперної характеристики (дещо потовщена лінія на рис. 10.18, б), у зв'язку з чим діюче значення вхідного струму

$$I = \sqrt{I_{r_0}^2 + (I_L - I_C)^2},$$

Подібно до випадку з напругою U_0 для послідовного коливального контура, в паралельному контурі деякому значенню вхідного струму $I = I_0$ відповідають три діючих значення вхідної напруги U_a , U_b і U_c (рис. 10.19). Яка з цих напруг буде на контурі, залежить від попереднього стану електричного кола.

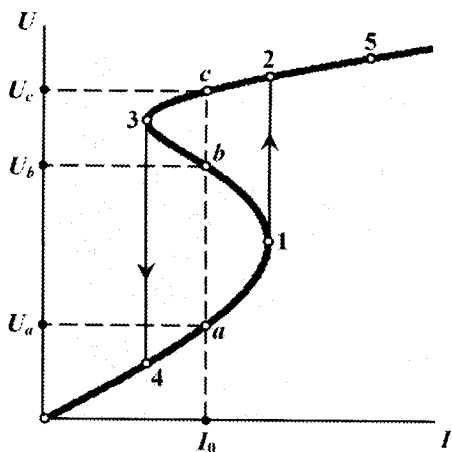


Рисунок 10.19

Так, в паралельному коливальному контурі зі зміною діючого значення вхідної напруги U , що здійснюється за допомогою регулятора напруги, робоча точка плавно пройде всі ділянки характеристики, враховуючи і ділянку спаду.

Якщо ж на вході кола ввімкнути регулятор струму, то в паралельному контурі будуть спостерігатися стрибки напруги (рис. 10.19) та кута зсуву фаз – такі, що є аналогічними до стрибків струму в послідовному коливальному контурі.

3. Явища ферорезонансу напруг та струмів знаходять своє застосування на практиці.

Так, наприклад, ферорезонанс напруг використовують для стабілізації діючого значення змінної (синусоїдної) напруги.

Розглянемо роботу найпростішого такого стабілізатора, схема якого показана на рис. 10.20.

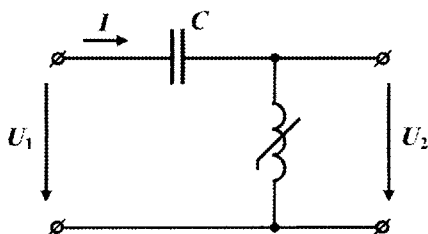


Рисунок 10.20

Роботу стабілізатора напруги пояснює рис. 10.21, на якому наведені дві вольт-амперні характеристики: вхідна (результуюча) характеристика стабілізатора та характеристика нелінійної індуктивності, напруга на якій водночас є вихідною напругою пристрою.

Якщо до кола прикладено електричну напругу U'_1 , то за допомогою вхідної характеристики кола (потовщена лінія на рис. 10.21) можна безпосередньо визначити діюче значення струму I' , а за власною вольт-амперною характеристикою котушки індуктивності – її напругу U'_2 , яка відповідає цьому струму. Остання ж водночас є вихідною, тобто стабілізованою напругою.

Як видно з рис. 10.21, значна зміна вхідної напруги ΔU_1 , наприклад, від U'_1 до U''_1

$$\Delta U_1 = U''_1 - U'_1$$

викликає незначну зміну вихідної напруги від значення U'_2 до U''_2 , відповідно

$$\Delta U_2 = U''_2 - U'_2$$

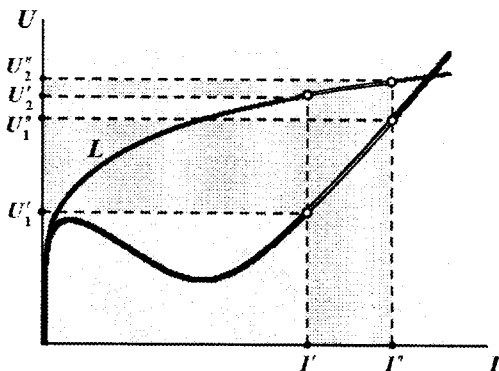


Рисунок 10.21

Звісно, в розрахунках потрібно враховувати наявність втрат в реальних реактивних елементах (конденсаторах, котушках), присутність вищих гармонік та вплив опору навантаження. Все це погіршує технічні властивості пристрою, зокрема його коефі-

цієнт стабілізації $K_{cm} = \frac{U_1'' - U_1'}{U_1'} \cdot \frac{U_2'' - U_2'}{U_2'}$ або

$$K_{cm} = \frac{\Delta U_1}{U_1'} \cdot \frac{\Delta U_2}{U_2'}$$

Однак, вплив цих недоліків можна частково зменшити удосконаленням самої схеми стабілізатора напруги.

10.5 Трансформатор з феромагнітним осердям

Якщо на одному феромагнітному осерді розмістити дві обмотки, отримаємо найпростіший трансформатор (рис. 10.22), який може виконувати різні функції і насамперед – перетворення рівня змінної електричної напруги (або струму).

Трансформатор відрізняється від котушки з осердям наявністю другої обмотки, тому за аналогією із котушкою можна в осерді трансформатора виділити три магнітних потоки:

- основний магнітний потік Φ_0 , який проходить виключно

- осердям і пронизує обидві обмотки;
- потік розсіювання первинної обмотки Φ_{S_1} , який охоплює всі w_1 витки первинної обмотки;
- потік розсіювання вторинної обмотки Φ_{S_2} . Цей потік охоплює w_2 витків вторинної обмотки.

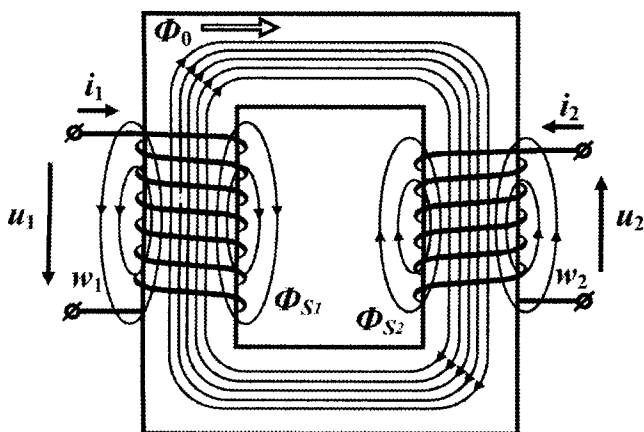


Рисунок 10.22

Обидва магнітних потоки розсіювання в основному замкнені через повітря, тільки частково проходячи осердям.

Тому, якщо основний магнітний потік Φ_0 нелінійно пов'язаний зі струмами i_1 та i_2 первинної й вторинної обмоток, то потоки розсіювання Φ_{S_1} і Φ_{S_2} перебувають в прямо пропорційній залежності до цих струмів.

Для магнітних потокозчеплень першої і другої обмоток можна записати

$$\psi_1 = \psi_{S_1} + \psi_{0_1} = L_{S_1} i_1 + w_1 \Phi_0,$$

$$\psi_2 = \psi_{S_2} + \psi_{0_2} = L_{S_2} i_2 + w_2 \Phi_0,$$

де L_{S_1} і L_{S_2} – індуктивності розсіювання відповідних обмоток, які характеризують потоки розсіювання Φ_{S_1} і Φ_{S_2} .

Основний магнітний потік Φ_0 наводить е.р.с. водночас в обох обмотках.

Відповідно до закону електромагнітної індукції е.р.с. в первинній обмотці, на яку подається напруга u_1 від джерела, дорівнює

$$e_1 = -w_1 \frac{d\Phi_0}{dt}, \quad (10.15)$$

а на вторинній, до якої приєднане навантаження,

$$e_2 = -w_2 \frac{d\Phi_0}{dt}. \quad (10.16)$$

На підставі другого закону Кірхгофа можна записати рівняння для первинного контура

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = r_1 i_1 + L_{S_1} \frac{di_1}{dt} + w_1 \frac{d\Phi_0}{dt} \quad (10.17)$$

і для вторинного

$$0 = r_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} + u_2 = r_2 i_2 + L_{S_2} \frac{di_2}{dt} + w_2 \frac{d\Phi_0}{dt} + u_2, \quad (10.18)$$

де r_1 та r_2 – відповідно активні опори первинної і вторинної обмоток, а напруга u_2 є напругою на навантаженні.

Якщо вважати несинусоїдні миттєві струми та напруги в трансформаторі еквівалентними синусоїдами, рівняння (10.17) і (10.18), врахувавши (10.15) та (10.16), можна переписати в комплексній формі

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= r_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{S_1} \underline{I}_1 + \underline{U}_0, \\ \underline{E}_2 &= r_2 \underline{I}_2 + j\omega L_{S_2} \underline{I}_2 + \underline{U}_2, \end{aligned} \quad (10.19)$$

де

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= j\omega w_1 \Phi_0 = -\underline{E}_1, \\ \underline{E}_2 &= -j\omega w_2 \Phi_0. \end{aligned}$$

Якщо кількість витків w_1 та w_2 значно відрізняться один від одного, то відповідно відрізняться і е.р.с. \underline{E}_1 та \underline{E}_2 ,

тому для складання схеми заміщення трансформатора і побудови його векторної діаграми зазвичай виконують так зване зведення всіх параметрів вторинної обмотки до кількості витків первинної.

Для цього замінюють реальний трансформатор з числом витків w_2 в вторинній обмотці еквівалентним трансформатором, для якого кількість витків вторинної обмотки

$$w'_2 = w_1.$$

Таким чином, замість заданого трансформатора з коефіцієнтом трансформації

$$n = \frac{w_1}{w_2}$$

розглядаємо еквівалентний трансформатор з коефіцієнтом трансформації, рівним одиниці

$$n' = \frac{w_1}{w'_2} = 1.$$

Для того, щоб режим роботи трансформатора не змінився і умови еквівалентності виконувались, необхідно магніторушійну силу вторинної обмотки залишати незмінною

$$i_2 w_2 = i'_2 w'_2 = i'_2 w_1.$$

Звідси отримуємо зведене значення струму вторинної обмотки

$$i'_2 = \frac{w_2 i_2}{w_1} = \frac{i_2}{n}. \quad (10.20)$$

Аналогічним чином можна записати і для е.р.с.

$$e'_2 = -w'_2 \frac{d\Phi_0}{dt} = -w_1 \frac{d\Phi_0}{dt} = \frac{w_1}{w_2} \left(-w_2 \frac{d\Phi_0}{dt} \right) = n e_2 = e_1. \quad (10.21)$$

Перепишемо друге рівняння (10.19) для зведених значень струму та напруги, врахувавши співвідношення (10.20) і (10.21).

Тоді $\frac{E'_2}{n} = r_2 n I'_2 + j\omega L_{S_2} n I'_2 + \underline{U}_2$ або

$$E'_2 = r_2 n^2 I'_2 + j\omega L_{S_2} n^2 I'_2 + n \underline{U}_2.$$

Введемо позначення

$$\underline{U}'_2 = n\underline{U}_2, \quad r'_2 = n^2 r_2, \quad L'_{S_2} = n^2 L_{S_2}. \quad (10.22)$$

Отримані значення напруги \underline{U}'_2 , активного опору r'_2 і індуктивності розсіювання L'_{S_2} вторинної обмотки називають *зведеними*.

Тоді друге рівняння (10.19) набуде вигляду

$$\underline{E}'_2 = r'_2 \underline{I}'_2 + j\omega L'_{S_2} \underline{I}'_2 + \underline{U}'_2. \quad (10.23)$$

Магніторушійна сила, яка визначає основний магнітний потік, складається з двох складових

$$F = w_1 i_1 + w_2 i_2. \quad (10.24)$$

З огляду на співвідношення (10.20) можна записати

$$F = w_1 i_1 + w_1 i'_2 = w_1 (i_1 + i'_2).$$

Конструкція трансформаторів зазвичай є такою, що зміна навантаження навіть у широких межах практично не змінює магнітного потоку в феромагнітному осердді, внаслідок чого магніторушійна сила залишається незмінною і за роботи трансформатора в режимі холостого ходу ($i_2 = 0$), тобто

$$w_1 (i_1 + i'_2) = w_1 i_0, \quad (10.25)$$

де i_0 – струм холостого ходу.

З формули (10.25) маємо

$$i_0 = i_1 + i'_2$$

або в комплексній формі

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2. \quad (10.26)$$

Струм \underline{I}_0 часто називають *намагнічувальним* струмом.

На основі виразів (10.19), (10.23) і (10.26) можна побудувати векторну діаграму (рис. 10.23) та скласти схему заміщення трансформатора.

Побудову векторної діаграми розпочнемо з вектора струму \underline{I}'_2 .

Нехай навантаження має *активно-індуктивний* характер.

За цієї умови вектор напруги \underline{U}'_2 випереджатиме за фазою струм \underline{I}'_2 на деякий кут φ_n , що і врахуємо під час побудови цього вектора напруги.

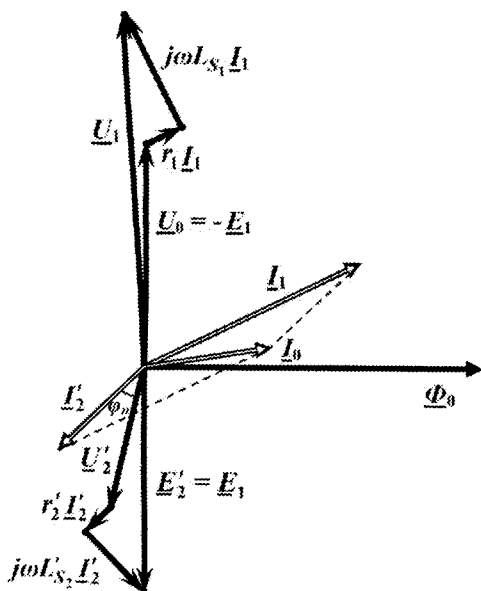


Рисунок 10.23

Відповідно до (10.23) відкладемо такі два вектори: вектор напруги на опорі r'_2 , напрям якого збігається з вектором струму \underline{I}'_2 , та вектор напруги на індуктивності L'_{S_2} , що випереджає струм \underline{I}'_2 на кут 90° .

Геометрично складемо три побудованих вектори напруги між собою і отримаємо вектор е.р.с. \underline{E}'_2 .

Оскільки $\underline{E}'_2 = \underline{E}_1$, а, в свою чергу, $\underline{E}_1 = -\underline{U}_0$, то маємо можливість побудувати вектор напруги \underline{U}_0 , спрямувавши цей вектор протилежно вектору \underline{E}'_2 .

Вектор основного магнітного потоку Φ_0 відкладемо в напрямку, перпендикулярному до вектора E'_1 , оскільки цей потік випереджає згадану е.р.с. на кут 90° .

В свою чергу, за наявності втрат в сталі намагнічувальний струм I_0 має на деякий кут випереджати магнітний потік Φ_0 (див. рис. 10.23).

Тоді вектор струму I_1 можемо побудувати на підставі співвідношення (10.26)

$$I_1 = I_0 - I'_2.$$

З першого рівняння системи (10.19)

$$\underline{U}_1 = r_1 I_1 + j\omega L_{S1} I_1 + \underline{U}_0$$

отримаємо вектор вхідної напруги \underline{U}_1 , послідовно додавши до вектора \underline{U}_0 два вектора напруги: напругу на опорі r_1 , який збігається за напрямом зі струмом I_1 , і напругу на індуктивності L_{S1} , що має випереджати згаданий струм на кут 90° .

Схема заміщення трансформатора (рис. 10.24) складена відповідно до системи рівнянь (10.19).

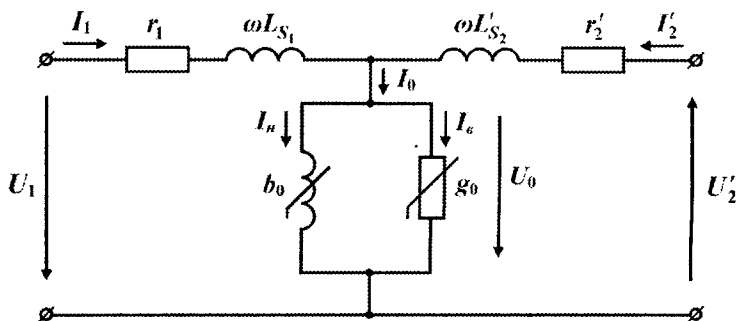


Рисунок 10.24

На схемі:

- r_1 і $r'_2 = n^2 r_2$ – опори відповідно первинної і вторинної обмоток, що характеризують теплові втрати в них;

- L_{S_1} і $L'_{S_2} = n^2 L_{S_2}$ – індуктивності розсіювання, які характеризують потоки розсіювання відповідно в первинній та вторинній обмотках;
- g_0 – нелінійна активна провідність, яка характеризує втрати в феромагнітному осерді;
- b_0 – нелінійна індуктивна провідність. Вона характеризує основний магнітний потік Φ_0 .

Параметри схеми заміщення зазвичай визначають з двох дослідів – холостого ходу і короткого замикання.

Дослід *холостого ходу* проводять за номінальної входної напруги $U_{1н}$, під час якого вимірюють:

- вхідний струм холостого ходу I_{1xx} , для якого $I_{1xx} = I_0$;
- потужність втрат в трансформаторі P_{1xx} .

В режимі холостого ходу напругами на опорах r_1 і X_{S_1} можна знехтувати. За такого припущення $U_0 \cong U_1$ і тоді для активної провідності g_0 схеми заміщення маємо

$$g_0 = \frac{P_{1xx}}{U_{1н}^2},$$

а для індуктивної провідності b_0

$$b_0 = y_0 \sin \varphi_{1xx},$$

де $y_0 = \frac{I_{1xx}}{U_{1н}}$,

$$\varphi_{1xx} = \arccos \frac{P_{1xx}}{U_{1н} I_{1xx}}.$$

Дослід *короткого замикання* проводять за номінального струму в вторинній обмотці $I'_{2н}$. Вхідна напруга $U_{1кз}$ за такої умови має бути низькою.

В цьому режимі вимірюють:

- вхідний струм короткого замикання $I_{1кз}$;
- потужність втрат в трансформаторі $P_{1кз}$.

Оскільки в режимі короткого замикання діюче значення вхідного струму $I_{1кз}$ значно перевищує діюче значення намагнічувального струму I_0

$$I_{1кз} \gg I_0,$$

то для зведеного вихідного струму можна записати

$$I'_{2н} = I_{1кз}.$$

Крім того, для більшості типів трансформаторів виконуються співвідношення

$$r'_2 = r_1, \quad X'_{S_2} = X_{S_1}.$$

Тоді за даними досліду короткого замикання можна визначити:

- опори обмоток схеми заміщення трансформатора

$$(r_1 + r'_2) = \frac{P_{1кз}}{I_{1кз}^2}$$

або

$$r_1 = r'_2 = \frac{1}{2} \frac{P_{1кз}}{I_{1кз}^2};$$

- індуктивності розсіювання

$$(X_{S_1} + X'_{S_2}) = (r_1 + r'_2) \operatorname{tg} \varphi_{1кз},$$

звідки

$$X_{S_1} = X'_{S_2} = \frac{1}{2} (r_1 + r'_2) \operatorname{tg} \varphi_{1кз},$$

де $\varphi_{1кз} = \arccos \frac{P_{1кз}}{U_{1кз} I_{1кз}}.$

Приклад 10.1

Номинальна потужність трансформатора $S = 11000$ кВт, вхідна номінальна напруга $U_{1н} = 110$ кВ, вторинна номінальна напруга $U_{2н} = 10$ кВ.

В режимі холостого ходу струм складає 5% від номінального струму, а потужність втрат – 1% від номінальної потужності.

В режимі короткого замикання вхідна напруга складає 5 % від номінальної напруги, потужність же втрат – 0,5 % від номінальної потужності.

Визначити параметри схеми заміщення.

Насамперед обчислимо номінальний вхідний струм

$$I_{1n} = \frac{S}{U_{1n}} = \frac{11000000}{110000} = 100 \text{ А.}$$

Тоді струм холостого ходу $I_0 = 0,05 I_{1n} = 5 \text{ А.}$

Вважаючи, що

$$U_0 = U_{1n} = 110 \text{ кВ,}$$

знайдемо в номінальному режимі значення нелінійних активної провідності

$$g_0 = \frac{P_{1xx}}{U_0^2} = \frac{0,01 \cdot 11000000}{110000^2} = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ См,}$$

а також повної y_0 та індуктивної b_0 провідностей

$$y_0 = \frac{I_0}{U_{1n}} = \frac{5}{110000} = 4,54 \cdot 10^{-5} \text{ См,}$$

$$\varphi_{1xx} = \arccos \frac{P_{1xx}}{U_{1n} I_0} = \arccos \frac{110000}{110000 \cdot 5} = \arccos 0,2 = 78^\circ 30'.$$

$$b_0 = y_0 \sin \varphi_{1xx} =$$

$$= 4,54 \cdot 10^{-5} \cdot \sin 78^\circ 30' = 4,54 \cdot 10^{-5} \cdot 0,98 = 4,45 \cdot 10^{-5} \text{ См.}$$

З досліду ж короткого замикання відшукаємо опори обмоток схеми заміщення трансформатора

$$(r_1 + r_2') = \frac{P_{1кз}}{I_{1n}^2} = \frac{0,005 \cdot 11000000}{100^2} = 5,5 \text{ Ом,}$$

звідки $r_1 = r_2' = 2,75 \text{ Ом,}$

та індуктивності розсіювання обох обмоток

$$\varphi_{1кз} = \arccos \frac{P_{1кз}}{U_{1кз} I_{1n}} = \arccos \frac{55000}{0,05 \cdot 110000 \cdot 100} = \arccos 0,1 = 84,3^\circ,$$

$$X_{S_1} = X'_{S_2} = \frac{1}{2} (r_1 + r_2') \operatorname{tg} \varphi_{1кз} = \frac{5,5 \cdot \operatorname{tg} 84,3^\circ}{2} = \frac{5,5 \cdot 10}{2} = 27,5 \text{ Ом.}$$

Знайдемо реальні параметри вторинної обмотки.

Оскільки коефіцієнт трансформації трансформатора

$$n = \frac{U_{1n}}{U_{2n}} = \frac{110000}{10000} = 11,$$

то реальний опір вторинної обмотки складає

$$r_2 = \frac{r_2'}{n^2} = \frac{2,75}{11^2} = 0,0227 \text{ Ом},$$

а її реальна індуктивність розсіювання буде

$$X_{S_2} = \frac{X'_{S_2}}{n^2} = \frac{27,5}{11^2} = 0,227 \text{ Ом}.$$

Задачу розв'язано.

10.6 Метод гармонічної лінеаризації

Метод гармонічної лінеаризації був запропонований вченими М. М. Криловим та М. М. Боголюбовим. Його суть полягає в тому, що за заданою для миттєвих значень характеристикою нелінійного елемента попередньо визначається залежність нелінійного параметра (r, L, C) від амплітуди ($I_m^{(1)}, \Psi_m^{(1)}, Q_m^{(1)}$) першої гармоніки відповідної шуканої змінної (i, ψ, q), а потім за допомогою комплексного методу складається нелінійне алгебраїчне рівняння, розв'язування якого і дозволяє провести розрахунок кола. Характеристика нелінійного елемента повинна бути задана аналітично.

Метод гармонічної лінеаризації застосовують для наближеного розрахунку усталених режимів і тільки в тих нелінійних електричних колах, де домінуючою є перша гармоніка, а вищі гармоніки через малу нелінійність істотно не впливають на режим роботи електричного кола.

Розглянемо приклад, розв'язування якого проведемо методом гармонічної лінеаризації.

Приклад 10.2

До електричного кола, показаного на рис. 10.25, прикладено синусоїдну напругу $u = U_m \sin \omega t$.

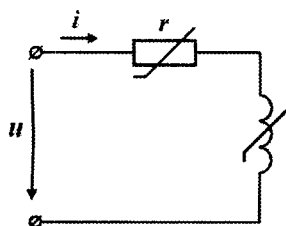


Рисунок 10.25

Характеристику нелінійної індуктивності задано аналітично

$$i = \alpha\psi + \varepsilon\psi^3. \quad (10.27)$$

Нехай миттєве потокозчеплення містить тільки одну першу гармоніку

$$\psi = \Psi_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}). \quad (10.28)$$

Тоді миттєва напруга на коштуці індуктивності буде дорівнювати

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = \omega \Psi_m^{(1)} \cos(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}),$$

а її амплітуда відповідно

$$U_{m_L}^{(1)} = \omega \Psi_m^{(1)}. \quad (10.29)$$

Підставимо (10.28) в (10.27), тоді для миттєвого струму можна записати

$$\begin{aligned} i = & \alpha \Psi_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}) + \\ & + \varepsilon \left[\Psi_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}) \right]^3 = \alpha \Psi_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}) + \\ & + \frac{3}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3 \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}) - \frac{1}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3 \sin(3\omega t + 3\varphi_\psi^{(1)}) \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} i = & \left(\alpha \Psi_m^{(1)} + \frac{3}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3 \right) \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}) - \\ & - \frac{1}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3 \sin(3\omega t + 3\varphi_\psi^{(1)}). \end{aligned} \quad (10.30)$$

Амплітуда першої гармоніки струму, як впливає з формули (10.30),

$$I_m^{(1)} = \alpha \Psi_m^{(1)} + \frac{3}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3. \quad (10.31)$$

Отже, знаючи амплітуди перших гармонік напруги $U_{m_L}^{(1)}$ на індуктивності (10.29) та струму $I_m^{(1)}$ в ній (10.31), знаходимо ін-

дуктивний опір нелінійної індуктивності для першої гармоніки

$$X_L^{(1)} = \frac{U_{mL}^{(1)}}{I_m^{(1)}} = \frac{\omega \Psi_m^{(1)}}{\alpha \Psi_m^{(1)} + \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^3} = \frac{\omega}{a + \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^2},$$

а через нього і значення самої індуктивності

$$L = \frac{X_L^{(1)}}{\omega} = \frac{4}{4a + 3\varepsilon (\Psi_m^{(1)})^2}. \quad (10.32)$$

Ця індуктивність є нелінійною, оскільки її значення залежить від величини амплітуди першої гармоніки потокозчеплення.

Запишемо комплексну амплітуду першої гармоніки струму, скориставшись законом Ома в комплексній формі

$$\underline{I}_m^{(1)} = \frac{\underline{U}_m^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{\underline{U}_m^{(1)}}{r + jX_L^{(1)}} = \frac{\underline{U}_m^{(1)}}{r + j \frac{\omega}{a + \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^2}}. \quad (10.33)$$

Із співвідношення (10.33) випливає, що модуль комплексної амплітуди струму першої гармоніки дорівнює

$$I_m^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{\omega}{a + \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^2} \right)^2}}. \quad (10.34)$$

Прирівняємо праві частини виразів (10.31) й (10.34) і отримаємо нелінійне алгебраїчне рівняння

$$\alpha \Psi_m^{(1)} + \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^3 = \frac{U_m^{(1)}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{\omega}{a + \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^2} \right)^2}} \quad (10.35)$$

з однією невідомою $\Psi_m^{(1)}$, шукане значення якої і можна визначити, розв'язавши це рівняння.

Початкову ж фазу $\varphi_{\psi}^{(1)}$ першої гармоніки поточкозчеплення, а вона відповідно до формули (10.30) збігається з початковою фазою $\varphi_i^{(1)}$ першої гармоніки струму, визначаємо із співвідношення (10.33)

$$\varphi_{\psi}^{(1)} = \varphi_i^{(1)} = -\arctg \frac{\omega}{r \left(a + \frac{3}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^2 \right)}.$$

Таким чином, розрахувавши значення $\Psi_m^{(1)}$ та $\varphi_{\psi}^{(1)}$, можемо визначити функціональні залежності першої $i^{(1)}$ і третьої гармонік $i^{(3)}$ миттєвого струму i , скориставшись для цього співвідношенням (10.30). Відповідно до нього

$$i^{(1)} = \left(a \Psi_m^{(1)} + \frac{3}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3 \right) \sin \left(\omega t + \varphi_{\psi}^{(1)} \right),$$

$$i^{(3)} = -\frac{1}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3 \sin \left(3\omega t + 3\varphi_{\psi}^{(1)} \right).$$

Наприклад, якщо вихідними величинами для заданого нелінійного електричного кола є значення: $U_m^{(1)} = 1000$ В, $r = 100$ Ом, $f = 50$ Гц, $a = 4$ Гн⁻¹, $\varepsilon = 0,2$ Гн⁻³А⁻², то за вищенаведеною методикою отримаємо: $\Psi_m^{(1)} = 1,823$ Вб, $\varphi_{\psi}^{(1)} = -34,9^\circ$, тобто

$$\psi^{(1)} = \Psi_m^{(1)} \sin \left(\omega t + \varphi_{\psi}^{(1)} \right) = 1,823 \sin \left(314t - 34,9^\circ \right) \text{ Вб},$$

що дозволяє визначити миттєві значення першої й третьої гармонік струму в електричному колі

$$i^{(1)} = \left(a \Psi_m^{(1)} + \frac{3}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3 \right) \sin \left(\omega t + \varphi_{\psi}^{(1)} \right) =$$

$$= \left(4 \cdot 1,823 + 0,75 \cdot 0,2 \cdot 1,823^3 \right) \sin \left(2\pi \cdot 50t - 34,9^\circ \right) =$$

$$= 8,2 \sin \left(314t - 34,9^\circ \right) \text{ А},$$

$$i^{(3)} = -\frac{1}{4} \varepsilon \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3 \sin \left(3\omega t + 3\varphi_{\psi}^{(1)} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -0,25 \cdot 0,2 \cdot 1,823^3 \sin(3 \cdot 2\pi \cdot 50t - 3 \cdot 34,9^\circ) = \\
 &= 0,303 \sin(942t + 75,2^\circ) \text{ А,}
 \end{aligned}$$

та загального струму

$$\begin{aligned}
 i &= i^{(1)} + i^{(3)} = \\
 &= 8,2 \sin(314t - 34,9^\circ) + 0,303 \sin(942t + 75,2^\circ) \text{ А.}
 \end{aligned} \tag{10.36}$$

10.7 Метод гармонічного балансу

Для більш точного аналізу нелінійних електричних кіл використовують *метод гармонічного балансу*, який дозволяє проводити розрахунок не тільки основної гармоніки шуканої величини струму чи напруги, але і їх вищих гармонік.

Для даного методу характеристика нелінійного елемента повинна бути подана аналітично.

Розглянемо цей метод. Нехай для деякого нелінійного електричного кола складено нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + f(x, t) = F(t), \tag{10.37}$$

де $x = x(t)$ – шукана функція (струму, напруги тощо);

$f(x, t)$ – нелінійна складова: функція, яка задана аналітично;

$F(t)$ – періодична зовнішня дія, яку розкладено в ряд Фур'є.

Шуканий розв'язок $x(t)$ диференціального рівняння (10.37) є періодичною функцією, яку потрібно також подати рядом Фур'є

$$x(t) \approx \sum_{k=1}^n \left(A^{(k)} \cos k\omega t + B^{(k)} \sin k\omega t \right) \tag{10.38}$$

з невідомими коефіцієнтами $A^{(k)}$ та $B^{(k)}$.

Підставимо співвідношення (10.38) в диференціальне рівняння (10.37), додамо між собою всі коефіцієнти Фур'є, що мають спільними множниками тригонометричні функції $\cos k\omega t$ чи $\sin k\omega t$, та прирівняємо їх за однакових k .

Такі математичні перетворення дозволяють одержати систему, що складається із $2n$ нелінійних алгебраїчних рівнянь, невідомими якої будуть коефіцієнти Фур'є $A^{(k)}$ й $B^{(k)}$.

Тому задача аналізу нелінійного електричного кола за методом гармонічного балансу зводиться до розв'язання означеної системи нелінійних рівнянь.

Необхідно зауважити, що для розрахунку існуючих нелінійних електричних кіл число гармонік n зазвичай обмежують. І хоча внаслідок цього розв'язок отримують наближено, але в залежності від n – з цілком достатньою точністю. Для більшості випадків кількість досліджуваних гармонік не перевищує п'яти $n \leq 5$.

Приклад 10.3

Розглянемо застосування методу гармонічного балансу на конкретному прикладі.

Нехай маємо нелінійне електричне коло (рис. 10.25), яке було розглянуто в прикладі 10.2.

Якщо до електричного кола прикладено синусоїдну напругу

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta),$$

то на підставі другого закону Кірхгофа маємо

$$\frac{d\psi}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \beta).$$

За умовою задачі характеристику нелінійної індуктивності задано аналітично (10.27)

$$i = a\psi + \varepsilon\psi^3.$$

Тоді другий закон Кірхгофа можна переписати

$$\frac{d\psi}{dt} + r(a\psi + \varepsilon\psi^3) = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (10.39)$$

Подамо періодичну функцію поточковзчеплення $\psi(t)$ рядом Фур'є, обмежившись тільки першою та третьою складовими гармоніками

$$\psi = \Psi_m^{(1)} \sin \omega t + \Psi_m^{(3)} \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}). \quad (10.40)$$

Це пояснюється тим, що характеристика котушки $i = f(\psi)$ є симетричною відносно початку координат, тому парні гармоніки в формулі (10.40) мають бути відсутніми.

Окрім того, для спрощення розрахунків початкову фазу $\varphi_\psi^{(1)}$ першої гармоніки потокозчеплення прирівняємо до нуля $\varphi_\psi^{(1)} = 0$, а це означає, що невідомою величиною буде початкова фаза напруги β .

Таким чином, за невідомі маємо чотири величини:

- амплітудні значення першої $\Psi_m^{(1)}$ і третьої $\Psi_m^{(3)}$ гармонік потокозчеплення;
- початкову фазу напруги β ;
- початкову фазу третьої гармоніки потокозчеплення $\varphi_\psi^{(3)}$.

Для розв'язання задачі підставимо співвідношення (10.40) в рівняння (10.39).

Для цього насамперед проведемо попередні математичні перетворення.

Так, для похідної $\frac{d\psi}{dt}$ миттєвого потокозчеплення маємо

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega \Psi_m^{(1)} \cos \omega t + 3\omega \Psi_m^{(3)} \cos(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}),$$

а для функції його третього степеня –

$$\begin{aligned} \psi^3 &= \left[\Psi_m^{(1)} \sin \omega t + \Psi_m^{(3)} \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) \right]^3 = \\ &= \left(\Psi_m^{(1)} \right)^3 \sin^3 \omega t + 3 \left(\Psi_m^{(1)} \right)^2 \Psi_m^{(3)} \sin^2 \omega t \cdot \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) + \\ &+ 3 \Psi_m^{(1)} \left(\Psi_m^{(3)} \right)^2 \sin \omega t \cdot \sin^2(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) + \left(\Psi_m^{(3)} \right)^3 \sin^3(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}). \end{aligned}$$

Для останнього виразу врахуємо, що

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha,$$

$$\sin^2 \alpha \cdot \sin \delta = \frac{1}{2} \sin \delta - \frac{1}{4} \sin(\delta + 2\alpha) - \frac{1}{4} \sin(\delta - 2\alpha).$$

Тоді після деяких математичних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \psi^3 = & \frac{3}{4}(\Psi_m^{(1)})^3 \sin \omega t - \frac{1}{4}(\Psi_m^{(1)})^3 \sin 3\omega t + \\ & + \frac{3}{2}(\Psi_m^{(1)})^2 \Psi_m^{(3)} \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) - \frac{3}{4}(\Psi_m^{(1)})^2 \Psi_m^{(3)} \sin(5\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) - \\ & - \frac{3}{4}(\Psi_m^{(1)})^2 \Psi_m^{(3)} \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) + \frac{3}{2}\Psi_m^{(1)}(\Psi_m^{(3)})^2 \sin \omega t - \\ & - \frac{3}{4}\Psi_m^{(1)}(\Psi_m^{(3)})^2 \sin(7\omega t + 2\varphi_\psi^{(3)}) + \frac{3}{4}\Psi_m^{(1)}(\Psi_m^{(3)})^2 \sin(5\omega t + 2\varphi_\psi^{(3)}) + \\ & + \frac{3}{4}(\Psi_m^{(3)})^3 \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) - \frac{1}{4}(\Psi_m^{(3)})^3 \sin(9\omega t + 3\varphi_\psi^{(3)}). \end{aligned}$$

Оскільки розв'язок шукаємо у вигляді двох гармонік, то гармоніками вище третьої знехтуємо через їх малість.

Таким чином, остаточно після підстановки та проведення математичних перетворень рівняння (10.39) набуде такого вигляду

$$\begin{aligned} & \omega \Psi_m^{(1)} \cos \omega t + 3\omega \Psi_m^{(3)} \cos(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) + \alpha r \left[\Psi_m^{(1)} \sin \omega t + \right. \\ & \left. + \Psi_m^{(3)} \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) \right] + \varepsilon r \left[\frac{3}{4}(\Psi_m^{(1)})^3 \sin \omega t - \frac{1}{4}(\Psi_m^{(1)})^3 \sin 3\omega t + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2}(\Psi_m^{(1)})^2 \Psi_m^{(3)} \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) - \frac{3}{4}(\Psi_m^{(1)})^2 \Psi_m^{(3)} \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2}\Psi_m^{(1)}(\Psi_m^{(3)})^2 \sin \omega t + \frac{3}{4}(\Psi_m^{(3)})^3 \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) \right] = \\ & = U_m \sin(\omega t + \beta). \end{aligned}$$

Використаємо тригонометричні співвідношення

$$\sin(\alpha + \delta) = \sin \alpha \cdot \cos \delta + \cos \alpha \cdot \sin \delta,$$

$$\cos(\alpha + \delta) = \cos \alpha \cdot \cos \delta - \sin \alpha \cdot \sin \delta$$

і додамо коефіцієнти однакових гармонік синусної та косинусної складових, а після порівняємо ці суми.

В результаті отримаємо систему з чотирьох нелінійних алгебраїчних рівнянь, складених відносно $\Psi_m^{(1)}$, $\Psi_m^{(3)}$, β та $\varphi_\psi^{(3)}$:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \alpha \Psi_m^{(1)} + \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^3 - \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^2 \Psi_m^{(3)} \cos \varphi_\psi^{(3)} + \\
 & + \frac{3}{2} \varepsilon \Psi_m^{(1)} (\Psi_m^{(3)})^2 = \frac{U_m}{r} \cos \beta, \\
 & \frac{\omega \Psi_m^{(1)}}{r} - \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^2 \Psi_m^{(3)} \sin \varphi_\psi^{(3)} = \frac{U_m}{r} \sin \beta, \\
 & -3 \frac{\omega \Psi_m^{(3)}}{r} \sin \varphi_\psi^{(3)} + \alpha \Psi_m^{(3)} \cos \varphi_\psi^{(3)} - \frac{1}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^3 + \\
 & + \frac{3}{2} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^2 \Psi_m^{(3)} \cos \varphi_\psi^{(3)} + \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(3)})^3 \cos \varphi_\psi^{(3)} = 0, \\
 & 3 \frac{\omega \Psi_m^{(3)}}{r} \cos \varphi_\psi^{(3)} + \alpha \Psi_m^{(3)} \sin \varphi_\psi^{(3)} + \frac{3}{2} \varepsilon (\Psi_m^{(1)})^2 \Psi_m^{(3)} \sin \varphi_\psi^{(3)} + \\
 & + \frac{3}{4} \varepsilon (\Psi_m^{(3)})^3 \sin \varphi_\psi^{(3)} = 0.
 \end{aligned} \right.$$

Звичайно, аналітично розв'язати цю чи подібну систему нелінійних рівнянь або вкрай важко, або неможливо взагалі. Однак на сьогодні існують потужні математичні прикладні програмні продукти комп'ютерної математики, такі як Mathcad, Maple, MatLab, Mathematica тощо, які здатні такі задачі розв'язувати наближено в числовий спосіб, але з достатньою і наперед заданою точністю.

Так, наприклад, якщо обрати вихідними даними нашої задачі числові дані з прикладу 10.2 (див. п. 10.6), тобто:

$$\begin{aligned}
 U_m^{(1)} &= 1000 \text{ В}, & r &= 100 \text{ Ом}, & f &= 50 \text{ Гц}, \\
 a &= 4 \text{ Гн}^{-1}, & \varepsilon &= 0,2 \text{ Гн}^{-3} \text{А}^{-2},
 \end{aligned}$$

то розв'язками вищенаведеної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будуть такі значення:

$$\begin{aligned}
 \Psi_m^{(1)} &= 1,823 \text{ Вб}, & \Psi_m^{(3)} &= 0,0284 \text{ Вб}, \\
 \varphi_u &= 35^\circ, & \varphi_\psi^{(3)} &= -62^\circ.
 \end{aligned}$$

На рис. 10.26 наведено програмний код розв'язування даної нелінійної системи в математичному середовищі Mathcad.

1. Задаємо вихідні параметри кола:

$$U_m := 1000 \quad f := 50 \quad r := 100 \quad \alpha := 4 \quad \epsilon := 0.2 \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f$$

2. Розв'язуємо нелінійну систему рівнянь:

а) задаємо початкові (наближені) значення

$$\Psi_{m1} := 1 \quad \Psi_{m3} := 0 \quad \beta := 0 \quad \gamma_3 := 0$$

б) складаємо нелінійну систему рівнянь

Given

$$\alpha \cdot \Psi_{m1} + \frac{3 \cdot \epsilon \cdot \Psi_{m1}^3}{4} - \frac{3 \cdot \epsilon \cdot \Psi_{m1}^2 \cdot \Psi_{m3}}{4} \cdot \cos(\gamma_3) + \frac{3 \cdot \epsilon \cdot \Psi_{m1} \cdot \Psi_{m3}^2}{2} = \frac{U_m}{r} \cdot \cos(\beta)$$

$$\frac{\omega \cdot \Psi_{m1}}{r} - \frac{3 \cdot \epsilon \cdot \Psi_{m1}^2 \cdot \Psi_{m3}}{4} \cdot \sin(\gamma_3) = \frac{U_m}{r} \cdot \sin(\beta)$$

$$\frac{-3 \cdot \omega \cdot \Psi_{m3}}{r} \cdot \sin(\gamma_3) + \left(\alpha \cdot \Psi_{m3} + \frac{3 \cdot \epsilon \cdot \Psi_{m1}^2 \cdot \Psi_{m3}}{2} - \frac{3 \cdot \epsilon \cdot \Psi_{m3}^3}{4} \right) \cos(\gamma_3) - \frac{\epsilon \cdot \Psi_{m1}^3}{4} = 0$$

$$\frac{3 \cdot \omega \cdot \Psi_{m3}}{r} \cdot \cos(\gamma_3) + \left(\alpha \cdot \Psi_{m3} + \frac{3 \cdot \epsilon \cdot \Psi_{m1}^2 \cdot \Psi_{m3}}{2} - \frac{3 \cdot \epsilon \cdot \Psi_{m3}^3}{4} \right) \sin(\gamma_3) = 0$$

в) розв'язуємо систему відносно $\Psi_{m1}, \Psi_{m3}, \beta, \gamma_3$:

$$\text{Find} \left(\Psi_{m1}, \Psi_{m3}, \frac{\beta}{\text{deg}}, \frac{\gamma_3}{\text{deg}} \right) = \begin{pmatrix} 1.8223 \\ 0.0284 \\ 35.0104 \\ -62.0709 \end{pmatrix}$$

Рисунок 10.26

Таким чином, за дії вхідної напруги

$$u = 1000 \sin(\omega t + 35^\circ) \text{ В}$$

миттєве потокозчеплення буде дорівнювати

$$\psi = 1,823 \sin \omega t + 0,0284 \sin(3\omega t - 62^\circ) \text{ Вб.}$$

Якщо ж початкова фаза φ_u вхідної напруги u дорівнюватиме нулю $\varphi_u = 0$, то функція магнітного потокозчеплення котушки набуде вигляду

$$\psi = 1,823 \sin(\omega t - 35^\circ) + 0,0284 \sin(3\omega t - 167^\circ) \text{ Вб. (10.41)}$$

Електричний струм i в колі знайдемо із характеристики нелінійного елемента (10.27). Тоді

$$i = 8,19 \sin(\omega t - 34,9^\circ) + 0,267 \sin(3\omega t + 103^\circ) \text{ А.} \quad (10.42)$$

Порівняння співвідношень (10.36) та (10.42) показує, що розрахунок електричного струму в нелінійному колі методом гармонічного балансу, з одного боку, і методом гармонічної лінеаризації – з іншого, приводить до майже однакових результатів.

10.8 Метод малого параметра

Метод малого параметра (метод А. Пуанкаре) використовують задля розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь електричного кола з незначним ступенем нелінійності його елементів, якщо тільки властивості останніх описано аналітично.

За означених умов нелінійна складова диференціального рівняння буде мати досить малий параметр, внаслідок чого розв'язок рівняння шукатиметься у вигляді ряду за степенями цього параметра.

Наприклад, нехай маємо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x + \varepsilon x^3 = f(t), \quad (10.43)$$

де ε – порівняно з α незначний за впливом параметр;

$f(t) = f(t \pm kT)$ – періодична функція зовнішньої дії.

Розв'язок рівняння (10.43) буде у вигляді ряду

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots, \quad (10.44)$$

де $x_0(t)$ є початковим наближенням розв'язком цього нелінійного рівняння, тобто розв'язком лінійного диференціального рівняння

$$\frac{dx_0}{dt} + \alpha x_0 = f(t), \quad (10.45)$$

яке отримане з (10.43) за значення $\varepsilon = 0$. Функції $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... в співвідношенні (10.44) – це поправки до початкового розв'язку, які викликані впливом нелінійної складової.

Чим більшою буде ε , тим більшу кількість поправок $x_k(t)$ потрібно буде врахувати в розв'язку (10.44).

Обмежимося першими двома складовими даного виразу

$$x = x_0 + \varepsilon x_1.$$

Підставимо цей розв'язок в рівняння (10.43). Тоді

$$\frac{d(x_0 + \varepsilon x_1)}{dt} + \alpha(x_0 + \varepsilon x_1) + \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1)^3 = f(t)$$

або

$$\frac{dx_0}{dt} + \varepsilon \frac{dx_1}{dt} + \alpha x_0 + \varepsilon \alpha x_1 + \varepsilon x_0^3 + \varepsilon^2 3x_0^2 x_1 + \varepsilon^3 3x_0 x_1^2 + \varepsilon^4 x_1^3 = f(t).$$

Знехтуємо складовими, що містять ε з вищими степенями, і проведемо перегрупування

$$\frac{dx_0}{dt} + \alpha x_0 + \varepsilon \left(\frac{dx_1}{dt} + \alpha x_1 + x_0^3 \right) = f(t). \quad (10.46)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε та отримаємо систему з двох лінійних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $x_0(t)$ і $x_1(t)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} + \alpha x_0 &= f(t) \\ \frac{dx_1}{dt} + \alpha x_1 + x_0^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.47)$$

Оскільки розглядаємо періодичний режим, то водночас мають виконуватися умови

$$x_0(t) = x_0(t \pm kT), \quad x_1(t) = x_1(t \pm kT). \quad (10.48)$$

Алгоритм розв'язування рівнянь (10.47) такий. Спочатку розв'язують перше рівняння системи, а потім, визначивши функцію $x_0(t)$, з другого рівняння цієї системи знаходять $x_1(t)$.

Розглянемо використання метода малого параметра.

Приклад 10.4

Нехай умовою задачі є умова, яку сформульовано в прикладі 10.2. Як показує розрахунок, лінійна складова a_{μ} в характеристиці котушки (10.27)

$$i = \alpha\psi + \varepsilon\psi^3$$

суттєво домінує над нелінійною $\varepsilon\psi^3$, перевищуючи її.

Перепишемо диференціальне рівняння (10.39), що складене за другим законом Кірхгофа для заданого нелінійного електричного кола (рис. 10.19), у вигляді

$$\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dt} + \alpha\psi + \varepsilon\psi^3 = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \beta). \quad (10.49)$$

Якщо вважати ε малим параметром, то розв'язок диференціального рівняння (10.49) будемо шукати, враховуючи тільки одну поправку до початкового наближення ψ_0 , у вигляді

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon x_1, \quad (10.50)$$

де x_1 – деяка допоміжна змінна, обрана таким чином, що εx_1 являє собою першу поправку ψ_1 до початкового розв'язку. Введення цієї змінної зумовлено необхідністю збереження в (10.50) балансу розмірностей.

Підставимо співвідношення (10.50) в диференціальне рівняння (10.49)

$$\frac{1}{r} \frac{d(\psi_0 + \varepsilon x_1)}{dt} + \alpha(\psi_0 + \varepsilon x_1) + \varepsilon(\psi_0 + \varepsilon x_1)^3 = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \beta).$$

Знехтуємо складовими, що містять ε з вищими степенями, і проведемо перегрупування. Тоді диференціальне рівняння набуде вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dt} + \alpha\psi_0 + \varepsilon \left(\frac{1}{r} \frac{dx_1}{dt} + \alpha x_1 + \psi_0^3 \right) = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \beta).$$

Відповідно до методу малого параметра подамо це рівняння як систему диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dt} + \alpha\psi_0 &= \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \beta) \\ \frac{1}{r} \frac{dx_1}{dt} + \alpha x_1 + \psi_0^3 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (10.51)$$

кожне з яких є лінійним відносно відповідних шуканих функцій $\psi_0(t)$ та $x_1(t)$.

Розв'яжемо перше рівняння системи (10.51).

Оскільки розглядається усталений режим, то визначимо тільки примусову складову ψ_0 . Внаслідок того, що права частина рівняння є синусоїдною функцією, примусова складова також буде синусоїдною. Якщо вважати початкову фазу β вхідної напруги невідомою, то

$$\psi_0 = \Psi_{m_0} \sin \omega t, \quad (10.52)$$

де Ψ_{m_0} – невідома амплітуда потокозчеплення.

Підставимо вираз (10.52) в перше рівняння системи (10.51)

$$\frac{\omega \Psi_{m_0}}{r} \cos \omega t + \alpha \Psi_{m_0} \sin \omega t = \frac{U_m}{r} \cos \beta \sin \omega t + \frac{U_m}{r} \sin \beta \cos \omega t.$$

Прирівняємо коефіцієнти біля відповідних функцій $\cos \omega t$ та $\sin \omega t$ і подамо дане рівняння як систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega \Psi_{m_0}}{r} &= \frac{U_m}{r} \sin \beta \\ \alpha \Psi_{m_0} &= \frac{U_m}{r} \cos \beta \end{aligned} \right\}, \quad (10.53)$$

з якої випливає, що для початкової фази β вхідної напруги

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega}{\alpha r}, \quad (10.54)$$

а для амплітуди потокозчеплення

$$\Psi_{m_0} = \frac{U_m}{\alpha r} \cos \beta. \quad (10.55)$$

Таким чином, початковий розв'язок ψ_0 дорівнює

$$\psi_0 = \frac{U_m}{\alpha r} \cos \beta \sin \omega t. \quad (10.56)$$

Друге рівняння системи (10.51) розв'яжемо із врахуванням (10.52) та (10.55)

$$\frac{1}{r} \frac{dx_1}{dt} + \alpha x_1 = -\psi_0^3 = -(\Psi_{m_0} \sin \omega t)^3$$

або

$$\frac{1}{r} \frac{dx_1}{dt} + \alpha x_1 = -\frac{3}{4} \Psi_{m_0}^3 \sin \omega t + \frac{1}{4} \Psi_{m_0}^3 \sin 3\omega t. \quad (10.57)$$

З диференціального рівняння (10.57) випливає, що вимушена складова функції x_1 складається з першої та третьої гармонік, тобто

$$x_1 = \Psi_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}) + \Psi_m^{(3)} \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}), \quad (10.58)$$

де величини $\Psi_m^{(1)}$, $\Psi_m^{(3)}$, $\varphi_\psi^{(1)}$ та $\varphi_\psi^{(3)}$ є невідомими.

Для їх знаходження підставимо (10.58) в диференціальне рівняння (10.57)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[\omega \Psi_m^{(1)} \cos(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}) + 3\omega \Psi_m^{(3)} \cos(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) \right] + \\ & + \alpha \left[\Psi_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_\psi^{(1)}) + \Psi_m^{(3)} \sin(3\omega t + \varphi_\psi^{(3)}) \right] = \\ & = -\frac{3}{4} \Psi_{m_0}^3 \sin \omega t + \frac{1}{4} \Psi_{m_0}^3 \sin 3\omega t. \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти біля відповідних синусоїдних та косинусоїдних гармонік і після нескладних перетворень перейдемо до еквівалентної системи з чотирьох рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\omega \Psi_m^{(1)}}{r} \cos \varphi_\psi^{(1)} + \alpha \Psi_m^{(1)} \sin \varphi_\psi^{(1)} = 0 \\ & -\frac{\omega \Psi_m^{(1)}}{r} \sin \varphi_\psi^{(1)} + \alpha \Psi_m^{(1)} \cos \varphi_\psi^{(1)} = -\frac{3}{4} \Psi_{m_0}^3 \\ & \frac{3\omega \Psi_m^{(3)}}{r} \cos \varphi_\psi^{(3)} + \alpha \Psi_m^{(3)} \sin \varphi_\psi^{(3)} = 0 \\ & -\frac{3\omega \Psi_m^{(3)}}{r} \sin \varphi_\psi^{(3)} + \alpha \Psi_m^{(3)} \cos \varphi_\psi^{(3)} = \frac{1}{4} \Psi_{m_0}^3 \end{aligned} \right\}. \quad (10.59)$$

З першого рівняння системи (10.59) маємо

$$\operatorname{tg} \varphi_\psi^{(1)} = -\frac{\omega}{\alpha r} \quad (10.60)$$

або з врахуванням співвідношення (10.54)

$$\varphi_\psi^{(1)} = -\beta.$$

Друге рівняння системи (10.59) дещо перетворимо і подамо як

$$\alpha \Psi_m^{(1)} \left(\cos \varphi_\psi^{(1)} - \frac{\omega}{\alpha r} \sin \varphi_\psi^{(1)} \right) = -\frac{3}{4} \Psi_{m_0}^3.$$

Враховуючи (10.61), можна записати

$$\alpha \Psi_m^{(1)} \left(\cos \varphi_\psi^{(1)} - \operatorname{tg} \varphi_\psi^{(1)} \cdot \sin \varphi_\psi^{(1)} \right) = -\frac{3}{4} \Psi_{m_0}^3$$

або після нескладних перетворень

$$\frac{\alpha \Psi_m^{(1)}}{\cos \varphi_\psi^{(1)}} = -\frac{3}{4} \Psi_{m_0}^3.$$

З цього рівняння і одержуємо

$$\Psi_m^{(1)} = -\frac{3}{4} \frac{\Psi_{m_0}^3 \cos \varphi_\psi^{(1)}}{\alpha}. \quad (10.61)$$

Аналогічним чином розв'яжемо два останніх рівняння системи (10.59) відносно шуканих $\varphi_\psi^{(3)}$ та $\Psi_m^{(3)}$ і одержимо

$$\operatorname{tg} \varphi_\psi^{(3)} = -\frac{3\omega}{\alpha r}, \quad (10.62)$$

а

$$\Psi_m^{(3)} = -\frac{1}{4} \frac{\Psi_{m_0}^3 \cos \varphi_\psi^{(3)}}{\alpha}. \quad (10.63)$$

Отже, користуючись отриманими розрахунковими співвідношеннями (10.60) - (10.63), можна визначити в аналітичній формі на основі формули (10.58) першу поправку x_1 до наближеного розв'язку ψ_0 .

Розв'яжемо задачу для параметрів кола, що були наведені в прикладах 10.2 та 10.3.

Підставимо числові дані, внаслідок чого одержимо

$$\Psi_{m_0} = 1,966 \text{ Вб}, \quad \varphi_u = 38,1^\circ,$$

$$\Psi_m^{(1)} = -1,122 \text{ Вб}, \quad \varphi_\psi^{(1)} = -38,1^\circ,$$

$$\Psi_m^{(3)} = 0,186 \text{ Вб}, \quad \varphi_\psi^{(3)} = -67^\circ.$$

Отже, функція наближеного розв'язку нелінійного диференціального рівняння (10.49) відповідно до співвідношення (10.52) дорівнює

$$\psi_0 = 1,966 \sin \omega t \text{ Вб.}$$

а функція першої поправки –

$$x_1 = -1,122 \sin(\omega t - 38,1^\circ) + 0,186 \sin(3\omega t - 67^\circ) \text{ Вб}$$

або

$$x_1 = 1,122 \sin(\omega t + 141,9^\circ) + 0,186 \sin(3\omega t - 67^\circ) \text{ Вб.}$$

Загальна формула для миттєвого потокозчеплення котушки буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \varepsilon x_1 = \\ &= 1,966 \sin \omega t + 0,224 \sin(\omega t + 141,9^\circ) + 0,0372 \sin(3\omega t - 67^\circ) \text{ Вб.} \end{aligned}$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$\psi = 1,795 \sin(\omega t + 4,4^\circ) + 0,0372 \sin(3\omega t - 67^\circ) \text{ Вб.}$$

Якщо ж початкову фазу β прикладеної напруги u вважати такою, що дорівнює нулю, то для шуканого потокозчеплення остаточно запишемо

$$\psi = 1,795 \sin(\omega t - 33,7^\circ) + 0,0372 \sin(3\omega t - 181,4^\circ) \text{ Вб. (10.64)}$$

Електричний струм i в нелінійному колі визначимо, скориставшись характеристикою нелінійного елемента (10.27)

$$\begin{aligned} i &= a\psi + \varepsilon\psi^3 = \\ &= 8,045 \sin(\omega t - 33,6^\circ) + 0,315 \sin(3\omega t + 114^\circ) \text{ А.} \end{aligned} \quad (10.65)$$

Результат (10.65), як про це вже зазначалось, є наближенням. Для визначення більш точних значень струму потрібно не обмежуватися тільки першою поправкою, а враховувати і вищі.

І останнє. Як бачимо з формули (10.65), результат розрахунку миттєвого струму в колі за методом малого параметра є доволі близьким до тих значень, що були отримані за допомогою методів гармонічного балансу та гармонічної лінеаризації дещо раніше (див. приклади 10.2 і 10.3).

10.9 Метод кусково-лінійної апроксимації (метод припасовування)

Під час розв'язування багатьох практичних задач характеристики нелінійних елементів можна подавати послідовністю прямолінійних відрізків, які спираються на вузлові точки, що належать цим характеристикам (див. п. 7.2).

На інтервалах часу, коли робоча точка знаходиться на прямолінійній ділянці нелінійної характеристики, процес в електричному колі описується лінійним диференціальним рівнянням. Його коефіцієнти визначаються параметрами електричного кола на відповідних лінійних ділянках характеристики.

Під час переходу процесу через точку зламу характеристики (наприклад, точка 1 або 2 на рис. 10.27) миттєво змінюються параметри електричного кола, а отже, і коефіцієнти диференціального рівняння, тому цей момент можна вважати моментом комутації.

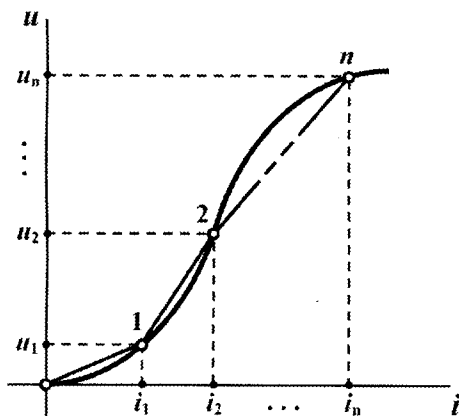


Рисунок 10.27

До розв'язку лінійного диференціального рівняння мають входити сталі інтегрування, які можна визначити за законами ко-

мутації для моментів часу проходження робочої точки через точку зламу характеристики, тобто в момент комутації.

Під час періодичних процесів достатньо провести розрахунок нелінійного електричного кола протягом тільки одного періоду, вважаючи, що струми в індуктивностях та напруги на ємностях, тобто на тих елементах електричного кола, що здатні накопичувати електромагнітну енергію, будуть однаковими і на початку, і наприкінці періоду.

Метод кусково-лінійної апроксимації знайшов широке застосування для розрахунку електричних кіл, до складу яких входять напівпровідникові діоди (див. приклад 10.5 в пп. 10.10.4) або феромагнітні елементи з прямокутною петлею намагнічування.

10.10 Випрямлення змінного струму

Нелінійним електричним колам порівняно з лінійними притаманні такі електричні властивості, які дають змогу створювати ряд принципово нових фізичних ефектів і явищ. Одним з таких явищ є випрямлення змінного струму.

10.10.1 Напівпровідникові діоди

Схеми *випрямлення* змінного струму здійснюють перетворення змінного двостороннього струму в пульсуючий односторонній, через що до їх складу мають входити нелінійні елементи з вкрай несиметричною характеристикою, які добре пропускають електричний струм в одному напрямку і практично не проводять його в зворотному.

До таких резистивних нелінійних елементів відносять *напівпровідникові діоди*, характеристику яких і умовне графічне позначення на схемах наведено на рис. 10.28. На цьому ж рисунку вказано і додатні напрямки напруги u та струму i .

Якщо напруга на діоді є додатною ($u > 0$), його опір стає

надзвичайно малим і через нього майже вільно проходить електричний струм. В цьому випадку говорять, що діод перебуває у відкритому стані.

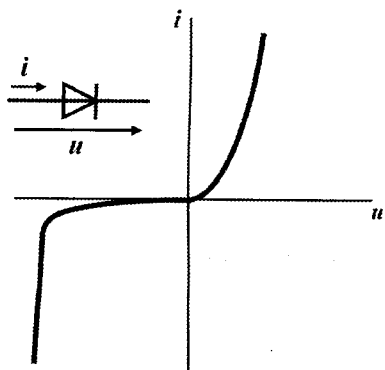


Рисунок 10.28

Коли ж на діоді напруга від'ємна ($u < 0$), той закривається, тобто практично не пропускає електричного струму. Причиною цьому є опір діода, який за від'ємної напруги зростає і стає надзвичайно великим.

Суттєва асиметрія вольт-амперної характеристики діода дозволяє досить просто (тільки лише двома відрізками прямих) і точно здійснити кусково-лінійну апроксимацію його характеристики, як показано на рис. 10.29, а.

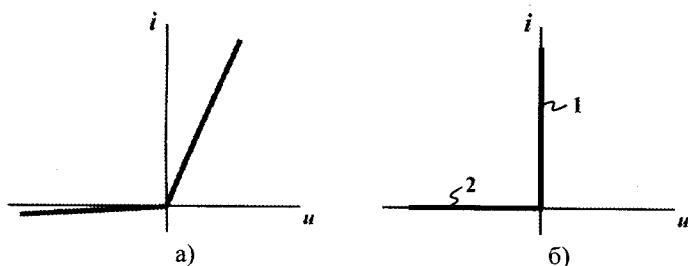


Рисунок 10.29

З рисунка видно, що в цьому випадку діод буде характеризуватися двома постійними опорам:

- $r_{пр}$ – опір діода в прямому напрямку, тобто за прямої напруги на ньому ($u > 0$);
- $r_{зв}$ – опір діода в зворотному напрямку, за зворотної напруги ($u < 0$), прикладеної до діода.

При цьому $r_{np} \ll r_{зв}$.

Якщо характеристику діода апроксимувати так, як показано на рис. 10.29, б, то діод називають *ідеальним*, тому що його опори за такої апроксимації $r_{np} = 0$ і $r_{зв} \rightarrow \infty$.

Подання характеристик діодів тільки двома прямолінійними відрізками помітно спрощує аналіз електричних кіл з діодами.

10.10.2 Однопівперіодний випрямляч змінного струму

Найпростішою схемою випрямляча змінного струму є *однопівперіодний випрямляч*, до складу якого входять послідовно з'єднані джерело змінної напруги, ідеальний діод та активний опір навантаження r_n (рис. 10.30).

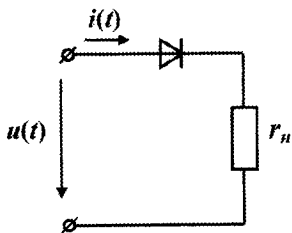


Рисунок 10.30

Якщо напруга джерела є синусоїдною

$$u = U_m \sin \omega t$$

(рис. 10.31), то за додатних її півперіодів до діода буде прикладено також додатну напругу і через нього

та опір навантаження r_n проходитьиме струм

$$i = I_m \sin \omega t$$

з амплітудою

$$I_m = \frac{U_m}{r_n},$$

оскільки опір ідеального діода у відкритому стані дорівнює нулю.

На від'ємних півперіодах напруга на діоді буде від'ємною і дорівнюватиме входній, оскільки діод перебуває в закритому стані і струму в колі немає.

Таким чином, крива миттєвого струму i в колі являє собою додатні півсинусоїдні імпульси (рис. 10.31), а струм на одному періоді можна записати

$$i = \begin{cases} I_m \sin \omega t, & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \frac{T}{2} \leq t < T. \end{cases} \quad (10.66)$$

Таку ж пульсуючу форму буде мати і електрична напруга на опорі навантаження.

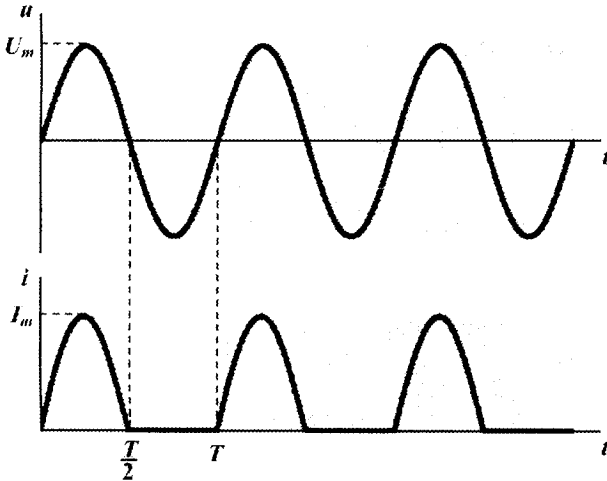


Рисунок 10.31

Стала складова струму навантаження

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{\pi}. \quad (10.67)$$

Діюче ж значення цього струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{1}{2} I_m. \quad (10.68)$$

Ефективність випрямлення змінного струму характеризують *коефіцієнтом ефективності*, який дорівнює відношенню потужності сталої складової струму навантаження

$$P_0 = r_n I_0^2$$

до всієї потужності, яку віддає джерело

$$P = r_n I^2,$$

тобто

$$K_e = \frac{P_0}{P}.$$

Для ідеального випрямляча коефіцієнт ефективності $K_e = 1$, а для однопівперіодного

$$K_e = \frac{P_0}{P} = \frac{r_n I_0^2}{r_n I^2} = \frac{I_m^2 / \pi^2}{I_m^2 / 2^2} = \frac{4}{\pi^2} = 0,406.$$

Розглянутий випрямляч окрім низької ефективності має ще один суттєвий недолік – напруга навантаження поряд з корисною сталою складовою містить вищі гармоніки.

Частково позбутися названих недоліків можна, якщо застосовувати для цього інші схемні рішення або ж використовувати низькочастотні фільтри.

10.10.3 Мостовий випрямляч

1. Електрична схема *мостового випрямляча* змінного струму показана на рис. 10.32.

Як видно з рисунка, основу цього випрямляча складають чотири напівпровідникових діоди, з'єднаних за мостовою схемою, де на одну діагональ моста подають змінну напругу, а до другої під'єднують опір навантаження r_n .

Мостовий випрямляч працює так.

В додатний півперіод прикладеної синусоїдної напруги відкритими перебувають перший (1) та третій (3) діоди. На другому (2) і четвертому (4) діодах напруга є від'ємною, через що ці діоди перебувають в закритому стані.

Тому електричний струм протягом першої половини періоду послідовно проходить через джерело синусоїдної напруги u , на-

півпровідниковий діод 1, навантаження r_n та діод 3 (на рис. 10.32 суцільна стрілка).

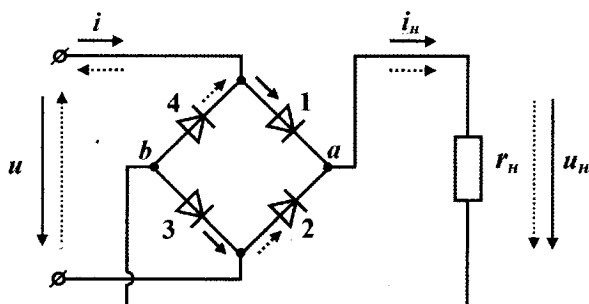


Рисунок 10.32

За від'ємного півперіоду входньої напруги діоди 1 і 3, навпаки, закриваються, оскільки прикладена до них напруга за полярністю вже буде від'ємною, а діоди 2 та 4 відкриваються і тоді шлях електричного струму від джерела напруги послідовно проляже через діод 2, опір навантаження r_n та діод 4 (пунктирна стрілка на рис. 10.32).

Отже, електричний струм протягом всього періоду проходить через опір навантаження виключно тільки в одну сторону: від вузла a до вузла b (рис. 10.32). І це попри те, що в джерелі напруги напрям струму зазнає зміни. Іншими словами, в зовнішній (вхідній) частині кола електричний струм є синусоїдним, а в навантаженні (виході) – пульсуючим.

Графік струму в навантаженні i_n має вигляд, який показано на рис. 10.33.

Аналітично цей струм для одного періоду можна записати так

$$i = \begin{cases} I_m \sin \omega t, & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ -I_m \sin \omega t, & \frac{T}{2} \leq t < T, \end{cases} \quad (10.69)$$

де $I_m = \frac{U_m}{r_H}$ – амплітуда струму, якщо тільки діоди будуть ідеальними.

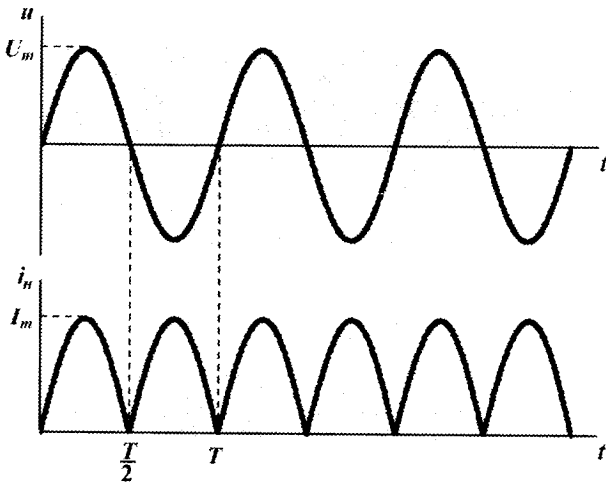


Рисунок 10.33

Вхідний струм має бути синусоїдним

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Визначимо сталу складову струму навантаження

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T I_m \sin \omega t dt \right).$$

і після нескладних перетворень

$$I_0 = \frac{2}{\pi} I_m. \quad (10.70)$$

Діюче ж значення цього струму запишемо як

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} I_m^2 \sin^2 \omega t dt + \int_{\frac{T}{2}}^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt \right)} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m^2 \sin^2 \omega t dt}$$

або

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m. \quad (10.71)$$

Коефіцієнт ефективності мостового випрямляча дорівнює

$$K_e = \frac{P_0}{P} = \frac{r_n I_0^2}{r_n I^2} = \frac{4I_m^2 / \pi^2}{I_m^2 / 2} = \frac{8}{\pi^2} = 0,812,$$

що удвічі більше, аніж у однопівперіодного випрямляча.

2. Якщо замість звичайних діодів в схему випрямляча ввести керовані діоди – *тиристри*, з'являється можливість регулювати як значення сталої складової напруги на опорі навантаження, так і активної потужності на ньому.

Тиристор відрізняється від діода тим, що він і за додатної напруги може бути закритим і не пропускати електричного струму. Умовами ж вмикання тиристора є або поява імпульсу струму в його керуючому електроді, або таке значення прямої напруги на ньому, яке перевищуватиме певний рівень, що називають напругою вмикання. За виконання хоча б однієї з цих умов стан тиристора зазнає змін, його опір суттєво зменшується і через цей прилад вільно проходить електричний струм. Значення електричної напруги на тиристорі при цьому спадає майже до нуля.

Тому в промисловій електроніці тиристри зазвичай використовують як електронні ключі.

На рис. 10.34 показано діаграму миттєвого струму i_n в опорі навантаження r_n мостового керованого випрямляча.

Момент часу t_0 відповідає моменту подачі керуючого імпульсу та вмиканню тиристора, внаслідок чого стала складова струму в опорі навантаження набуває залежності від часу t_0

$$I_0 = I_n^{(0)} = \frac{1}{T} \int_0^T i_n dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{\pi} (1 + \cos \omega t_0),$$

що поширює цю залежність на напругу на цьому опорі

$$U_0 = r_n I_0 = \frac{r_n I_m}{\pi} (1 + \cos \omega t_0)$$

і дозволяє регулювати її величину.

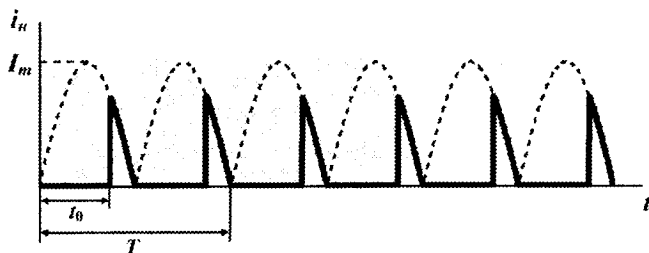


Рисунок 10.34

10.10.4 Однопівперіодний випрямляч з ємнісним фільтром

Як було показано вище, за ефективністю роботи мостовий випрямляч має суттєво кращий показник, ніж однопівперіодний. Однак існує можливість покращити ефективність випрямлення останнього, розмістивши між діодним випрямлячем і навантаженням *електричний фільтр нижніх частот*.

Розглянемо це на прикладі.

Приклад 10.5

Отже, нехай задано схему *однопівперіодного випрямляча з ємнісним фільтром* (рис. 10.35).

Для аналізу роботи даного кола скористаємося методом кусково-лінійної апроксимації (див. п. 10.9) і подамо його вольтамперну характеристику як характеристику ідеального діода (рис. 10.29, б).

Нехай до кола прикладено синусоїдну напругу $u = U_m \sin \omega t$ і потрібно визначити закон зміни струму i та напруг на ємності u_C та на діоді u_D від часу.

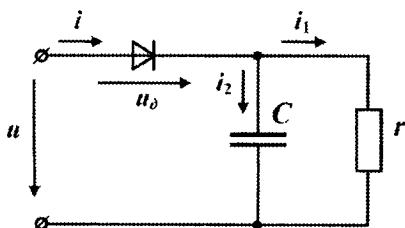


Рисунок 10.35

На інтервалі часу $t_1 \leq t < t_2$ (рис. 10.36) робоча точка характеристики знаходиться на ділянці 1 (рис. 10.29, б), діод відкритий і процеси в колі описуються рівняннями

$$\left. \begin{aligned} u_C &= u = U_m \sin \omega t \\ i_1 &= \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t \\ i_2 &= C \frac{du_C}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t \\ i &= i_1 + i_2 = \frac{U_m}{r} \sin \omega t + \omega C U_m \cos \omega t \\ u_D &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (10.72)$$

котрі і визначають шукані змінні.

Момент часу t_1 відповідає моменту відкривання діода, тобто переходу робочої точки характеристики з ділянки 2 вольт-амперної характеристики на ділянку 1 (рис. 10.29, б).

Коли струм діода стає рівним нулю (момент t_2), діод закривається, оскільки робоча точка характеристики переходить на ділянку 2, і четверте рівняння системи (10.72) за цієї умови набуває вигляду

$$0 = \frac{U_m}{r} \sin \omega t_2 + \omega C U_m \cos \omega t_2,$$

звідки можна визначити t_2

$$t_2 = \frac{\pi - \arctg \omega Cr}{\omega}. \quad (10.73)$$

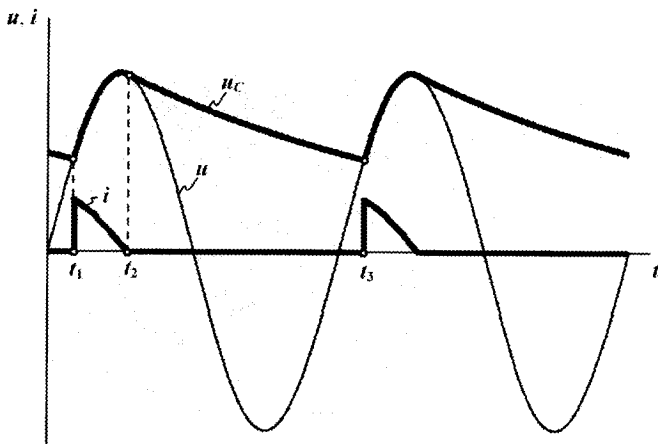


Рисунок 10.36

На інтервалі $t_2 \leq t < t_3$ процеси в колі описуються рівняннями

$$\left. \begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = 0 \\ u_C &= i_1 r \\ i_2 &= C \frac{du_C}{dt} \\ u_0 &= u - u_C \end{aligned} \right\}, \quad (10.74)$$

звідки отримуємо лінійне диференціальне рівняння, складене відносно змінної u_C

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (10.75)$$

Розв'язком цього рівняння є функція

$$u_C = Ae^{-\frac{t-t_2}{rC}}. \quad (10.76)$$

Стала інтегрування A і момент часу t_1 визначаються з умов

неперервності напруги на ємності (закону комутації) та періодичності усталеного режиму.

Напруга на ємності на початку другого інтервалу ($t_2 \leq t < t_3$) має залишатися такою ж, якою вона була наприкінці першого інтервалу часу ($t_1 \leq t < t_2$), тобто $A = U_m \sin \omega t_2$.

Умова періодичності усталеного режиму зв'язує моменти часу t_3 та t_1 співвідношенням

$$t_3 = t_1 + T, \quad (10.77)$$

тому, застосовуючи закон комутації для напруги на ємності в точці зламу характеристики, отримуємо

$$U_m \sin \omega t_2 e^{-\frac{t_3 - t_2}{RC}} = U_m \sin \omega t_3,$$

а з врахуванням (10.77) –

$$e^{\frac{t_1}{RC}} \cdot \sin \omega t_1 = e^{\frac{t_2 - T}{RC}} \cdot \sin \omega t_2, \quad (10.78)$$

тобто трансцендентне рівняння для визначення моменту часу t_1 .

Зазвичай на сьогодні таку задачу виконують числовими методами за допомогою математичних програмних пакетів Mathcad, Maple, Matlab тощо. Для прикладу проведемо розрахунок режиму роботи випрямляча змінного струму з ємнісним фільтром в математичному середовищі Mathcad.

Насамперед задамо вихідні параметри цього пристрою, наприклад, як це показано на рис. 10.37.

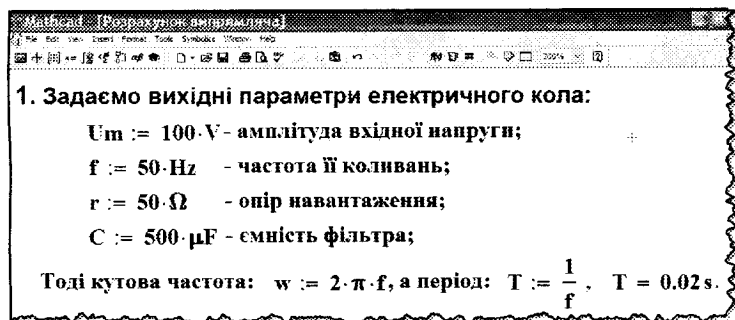


Рисунок 10.37

За формулою (10.73) визначимо момент часу t_2 , який, як видно із виразу, залежить виключно від сталої часу перехідного процесу (тобто параметрів електричного кола)

$$\tau = Cr \quad (10.79)$$

та частоти коливань f вхідної напруги.

Для визначення моменту часу t_1 розв'яжемо трансцендентне рівняння (10.78) за допомогою вбудованої в Mathcad функції root (вираз, невідома) з точністю системної змінної TOL (рис. 10.38).

Наразі необхідно зауважити, що в більш складних колах доводиться розв'язувати математичну систему, що складається з кількох трансцендентних рівнянь. В цьому і полягає основна складність методу кусково-лінійної апроксимації.

2. Визначасмо момент часу t_2 (момент закривання діода):

$$t_2 := \frac{\pi - \text{atan}(w \cdot C \cdot r)}{w} \quad t_2 = 5.403 \times 10^{-3} \text{ s}$$

3. Розраховуємо момент часу t_1 (момент відкривання діода):

Для цього розв'яжемо трансцендентне рівняння:

$$t_1 := \text{root}\left(e^{\frac{t_1}{r \cdot C}} \cdot \sin(w \cdot t_1) - e^{\frac{t_2 - t_1}{r \cdot C}} \cdot \sin(w \cdot t_2), t_1\right) \quad t_1 = 1.727 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Рисунок 10.38

Тепер побудуємо графік зміни миттєвої напруги на опорі навантаження. Для цього спочатку задамо функцію миттєвого струму i_1 (рис. 10.39), скориставшись для часового інтервалу $t_1 \leq t < t_2$ другим рівнянням системи (10.72)

$$i_1 = \frac{u_r}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t,$$

а для проміжку $t_2 \leq t < t_3$ – першим рівнянням системи (10.74) з врахуванням співвідношення (10.76)

$$i_1 = \frac{u_r}{r} = \frac{u_c}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t_2 \cdot e^{-\frac{t-t_2}{rC}}.$$

Миттєву напругу u_r на навантаженні задаємо, враховуючи суто активний характер його опору.

4. Задаємо функцію i_1 та u_r на періоді:

$$i_1(t) := \begin{cases} \left(\frac{U_m}{r} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right) & \text{if } t_1 \leq t < t_2 \\ \left(\frac{U_m}{r} \cdot \sin(\omega \cdot t_2) \cdot e^{-\frac{t-t_2}{rC}} \right) & \text{if } t_2 \leq t < t_1 + T \end{cases}$$

$$u_r(t) := r \cdot i_1(t)$$

Рисунок 10.39

На рис. 10.40 і рис. 10.41 показано суміщені графіки напруги u_r на опорі навантаження (суцільна лінія) та вхідної напруги u (пунктирна лінія) для двох випадків, в одному з яких (рис. 10.41) ємність C утричі більша від заданої (рис. 10.40) за інших рівних умов.

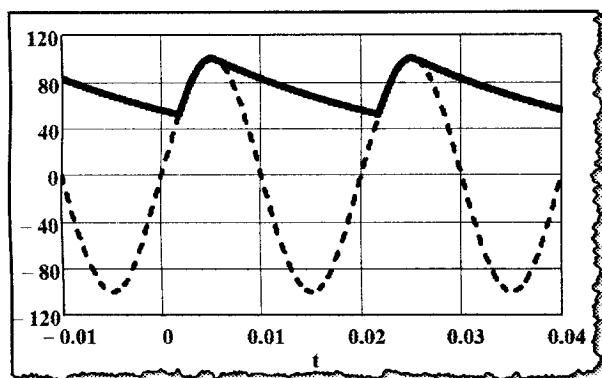


Рисунок 10.40

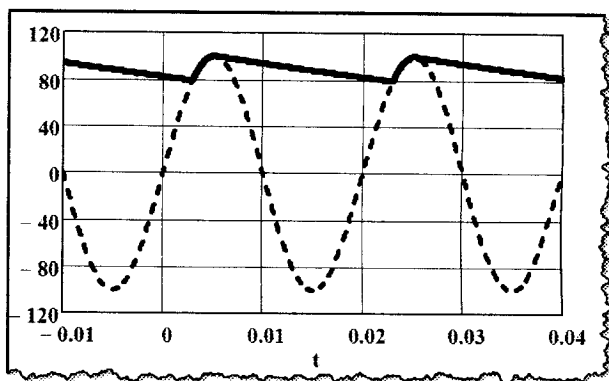


Рисунок 10.41

Проведемо аналіз ефективності роботи однопівперіодного випрямляча з ємнісним фільтром, відшукавши його коефіцієнт ефективності K_e за заданих на початку задачі параметрів електричного кола (рис. 10.37).

Для цього насамперед розрахуємо сталу складову I_0

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_1 dt \quad (10.80)$$

та діюче значення I струму в навантаженні

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_1^2 dt}. \quad (10.81)$$

Оскільки миттєвий струм i_1 дорівнює

$$i_1 = \begin{cases} \frac{U_m}{r} \sin \omega t, & t_1 \leq t < t_2, \\ \frac{U_m}{r} \sin \omega t_2 \cdot e^{-\frac{t-t_2}{\kappa}}, & t_2 \leq t < t_3, \end{cases} \quad (10.82)$$

то для знаходження струмів I_0 й I в аналітичній формі необхідно підставити співвідношення (10.82) в (10.80) та (10.81) і розрахувати визначені інтеграли

$$I_0 = \frac{1}{T} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{U_m}{r} \sin \omega t \, dt + \int_{t_2}^{t_3} \frac{U_m}{r} \sin \omega t_2 \cdot e^{-\frac{t-t_2}{\tau C}} \, dt \right)$$

та

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{U_m}{r} \sin \omega t \right)^2 \, dt + \int_{t_2}^{t_3} \left(\frac{U_m}{r} \sin \omega t_2 \cdot e^{-\frac{t-t_2}{\tau C}} \right)^2 \, dt \right]}$$

Математичне середовище Mathcad дозволяє уникати громіздких обчислень.

Тому для визначення струмів I_0 й I скористаємося формулами (10.80) і (10.81), як це показано на рис. 10.42.

5. Обчислюємо постійну складову струму навантаження I_0 :

$$I_0 := \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) \, dt \quad I_0 = 1.502 \text{ A}$$

6. Розраховуємо діюче значення струму навантаження I :

$$I := \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} (i(t))^2 \, dt} \quad I = 1.53 \text{ A}$$

Рисунок 10.42

Тоді коефіцієнт ефективності буде дорівнювати (рис. 10.43)

$$K_e = \frac{P_0}{P} = \frac{r_n I_0^2}{r_n I^2} = 0,963.$$

Як бачимо, коефіцієнт ефективності однопівперіодного випрямляча з ємнісним фільтром значно перевищує не тільки відповідний коефіцієнт такого ж випрямляча, тільки без фільтруючої системи, $K_e = 0,406$, але і навіть мостового випрямляча $K_e = 0,812$.

Однак на відміну від останніх двох різновидів випрямлячів,

коефіцієнти ефективності яких є сталими величинами, для випрямляча з фільтром K_e залежить від параметрів електричного кола $\tau = Cr$ та від частоти вхідної напруги f .

7. Визначаємо коефіцієнт ефективності випрямлення K_e :

а) потужність постійної складової струму навантаження:

$$P_0 := r \cdot I^2 \quad P_0 = 112.796 \text{ W}$$

б) потужність джерела (активна потужність навантаження):

$$P := r \cdot I^2 \quad P = 117.093 \text{ W}$$

в) коефіцієнт ефективності:

$$K_e := \frac{P_0}{P} \quad K_e = 0.963$$

Рисунок 10.43

На рис. 10.40 і на рис. 10.41 були показані суміщені графіки вхідної напруги та напруги на опорі навантаження для двох випадків, в одному з яких значення ємності C утричі перевищувало задане. Як показує розрахунок, збільшення ємності з $C = 500 \text{ мкФ}$ до $C = 1500 \text{ мкФ}$ приводить до зростання коефіцієнта ефективності від $K_e = 0,963$ до $K_e = 0,995$ одиниць, що майже відповідає ідеальному значенню, тобто $K_e = 1$.

Запитання для самоперевірки

1. Чим відрізняється з математичної точки зору розрахунок нелінійних кіл постійного струму від розрахунку нелінійних кіл змінного струму?

2. Чи є дійсним принцип накладання в теорії нелінійних кіл? Чому? Наведіть приклад.

3. Назвіть методи розрахунку нелінійних кіл змінного струму. Розкрийте їх переваги та недоліки.

4. Поясніть суть методу еквівалентних синусоїд і наведіть алгоритм розрахунку за цим методом.

5. Запишіть за другим законом Кірхгофа диференціальне рівняння, що описує процеси в котушці індуктивності із феромагнітним осердям.

6. Як пов'язане діюче значення напруги в котушці з феромагнітним осердям, яке зумовлене зміною основного магнітного потоку, з амплітудою магнітної індукції в осерді котушки. Обґрунтуйте це співвідношення.

7. Як впливає петля гістерезису на форму миттєвого струму в котушці індуктивності? Нарисуйте графік.

8. Поясніть, чим зумовлені втрати енергії в котушці індуктивності із феромагнітним осердям?

9. Побудуйте векторну діаграму котушки з феромагнітним осердям та наведіть схему заміщення, що їй відповідає.

10. Які явища називають ферорезонансами? В яких контурах вони спостерігаються і чим зумовлені?

11. Чим ферорезонанс напруг і ферорезонанс струмів відрізняються від відповідних резонансів в лінійних колах.

12. Наведіть приклади з практики, де використовують явище ферорезонансу.

13. Який пристрій називають трансформатором? Вкажіть на особливості трансформатора із феромагнітним осердям.

14. Поясніть суть закону електромагнітної індукції. Як це фізичне явище пов'язане із роботою трансформатора.

15. Запишіть систему рівнянь трансформатора із феромагнітним осердям в диференціальній та комплексній формах.

16. Нарисуйте векторну діаграму трансформатора і його схему заміщення. Як визначають параметри цієї схеми?

17. Опишіть електричні властивості напівпровідникових діодів.

18. Нарисуйте схеми найпростіших випрямлячів змінного струму і поясніть принцип їх роботи. Вкажіть на переваги та недоліки.

Розділ 11

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Перехідні процеси в нелінійних електричних колах носять доволі складний характер і їх математично описують нелінійними диференціальними рівняннями. Для розв'язування таких рівнянь не можна застосовувати принцип суперпозиції. Через це втрачається сама можливість використання тих регулярних методів лінійної електротехніки, котрі базуються на принципі накладання.

Так, під час розрахунку перехідного процесу в нелінійному колі (на відміну від лінійного) вже не можна функцію миттєвого струму (або напруги) розкласти на примусову й вільну складові, хоча така можливість суттєво спрощує обчислення і полегшує аналіз перехідного процесу в електричному колі.

З тієї ж причини втрачає дієздатність і інтеграл Дюамеля.

Отже, оскільки нелінійні диференціальні рівняння практично не мають загальних точних методів їх аналітичного розв'язування, доводиться використовувати різні числові та інші наближені методи розрахунку, які і лягають в основу методів аналізу перехідних процесів в нелінійних електричних колах.

Розглянемо основні з цих методів.

11.1 Метод умовної лінеаризації

Суть *методу умовної лінеаризації* полягає в тому, що задану характеристику нелінійного елемента $y = f(x)$ на робочій ділянці наближено подають як *лінійну* $y = ax$. Внаслідок цього отримують і розв'язують *лінійне* диференціальне рівняння та знаходять або величину y , або x . Яку саме з двох шуканих – залежить від конкретних умов роботи електричного кола. Іншу ж електричну величину, що залишилася (x чи y), вже визначають безпосе-

редньо за допомогою заданої *нелінійної* характеристики елемента. Розглянемо застосування методу умовної лінеаризації на прикладі.

Приклад 11.1

Нехай задано нелінійне електричне коло (рис. 11.1), яке вмикають до джерела постійної напруги U .

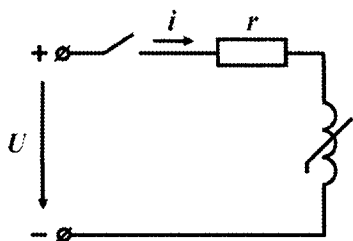


Рисунок 11.1

Характеристикою нелінійної індуктивності є показана на рис. 11.2 крива $\psi = f(i)$.

Диференціальне рівняння, що описує перехідний процес в заданому електричному колі, складемо на підставі другого закону Кірхгофа

на підставі другого закону Кірхгофа

$$\frac{d\psi}{dt} + ri = U. \quad (11.1)$$

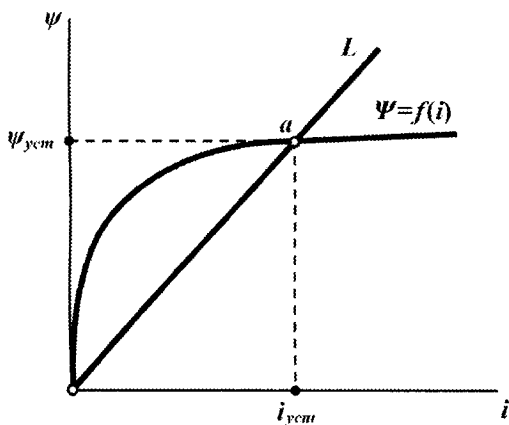


Рисунок 11.2

Подамо задану характеристику нелінійного елемента як лінійну, як це показано на рис. 11.2

$$\psi = Li \quad (11.2)$$

і проведемо пряму лінію через дві точки, перша з яких є точкою початку координат (з неї розпочинається перехідний процес $i(0)=0$), а друга – точка a на рис. 11.2, якій відповідає новий усталений режим роботи електричного кола. Значення струму в цьому режимі дорівнює

$$i = I_{уст} = \frac{U}{r}$$

і йому відповідає деяке усталене значення магнітного потокозчеплення $\psi_{уст}$.

Тоді для лінійної індуктивності L маємо

$$L = \frac{\psi_{уст}}{I_{уст}} = \frac{\psi_{уст} r}{U}. \quad (11.3)$$

Диференціальне рівняння (11.1) можна розв'язувати як відносно функції потокозчеплення ψ , так і відносно миттєвого струму i .

На початку перехідного процесу за дії постійної напруги та нульових початкових умов в рівнянні (11.1) переважає перша складова $\frac{d\psi}{dt}$, оскільки $i(0)=0$, а $\left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t=0} = U$. В усталеному ж режимі внаслідок того, що $\left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t \rightarrow \infty} = 0$, а $ri = U$, домінуючою вже буде друга складова ri .

Таким чином, якщо в рівняння (11.1) підставити (11.2) і записати його відносно потокозчеплення ψ

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{r}{L}\psi = U, \quad (11.4)$$

то заміна нелінійної індуктивності лінійною дає більш точний розв'язок на початку перехідного процесу.

Якщо рівняння (11.1) складене відносно струму у вигляді

$$L \frac{di}{dt} + ri = U, \quad (11.5)$$

то воно більш точно описує кінцеву фазу перехідного процесу.

Розв'язком лінійного диференціального рівняння (11.4) за нульових початкових умов є функція

$$\psi = \psi_{\text{уст}} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right). \quad (11.6)$$

Визначивши миттєве значення потокозчеплення $\psi(t)$, можна віднайти за допомогою заданої нелінійної характеристики $\psi = f(i)$ індуктивного елемента миттєве значення струму $i(t)$.

Що ж стосується диференціального рівняння (11.5), то його розв'язком за нульових початкових умов буде функція струму

$$i(t) = I_{\text{уст}} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right). \quad (11.7)$$

Тоді функцію миттєвого потокозчеплення $\psi(t)$ можна визначити безпосередньо за нелінійною характеристикою $\psi = f(i)$.

Приклад 11.2

Розглянемо вмикання того ж електричного кола, що і в прикладі 11.1 до джерела синусоїдної напруги

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta).$$

Тоді для цього електричного кола лінійне диференціальне рівняння (11.4) набуде вигляду

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{r}{L}\psi = U_m \sin(\omega t + \beta)$$

і розв'язком буде функція

$$\psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t + \beta - \alpha) - \Psi_m \sin(\beta - \alpha) e^{-\frac{r}{L}t},$$

де

$$\Psi_m = \frac{U_m L}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{\omega L}{r}.$$

Якщо $\beta - \alpha = -\frac{\pi}{2}$, то для потокозчеплення можна записати

$$\psi(t) = -\Psi_m \cos \omega t + \Psi_m e^{-\frac{r}{L}t},$$

де $\psi_{np} = -\Psi_m \cos \omega t$ – примусова складова;

$\psi_e = \Psi_m e^{-\frac{r}{L}t}$ – вільна складова цієї функції.

Графік миттєвого потокозчеплення $\psi(t) = \psi_{np} + \psi_e$ зображено на рис.11.3, а.

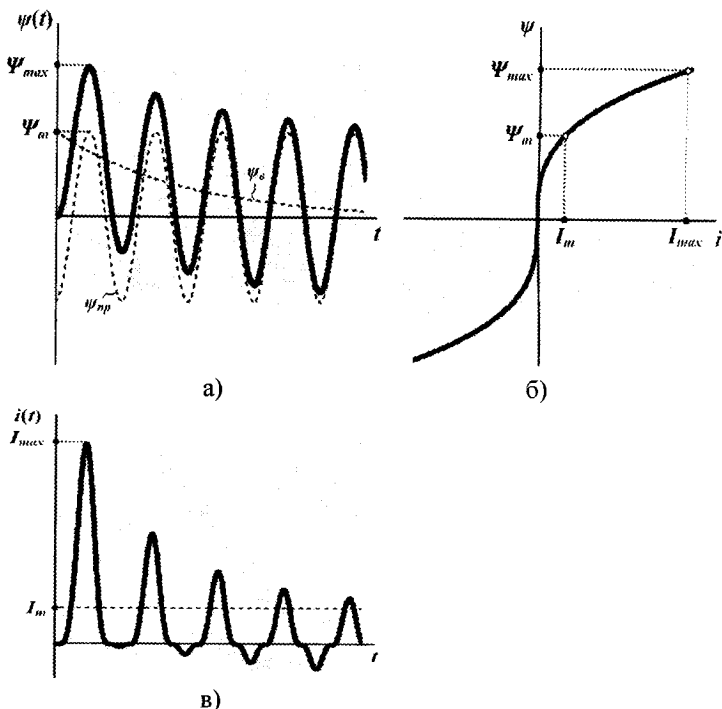


Рисунок 11.3

З рисунка видно, що при $\tau = \frac{L}{r} > T$ потокозчеплення ψ

через чверть періоду досягає майже подвійного значення від власної амплітуди за усталеного режиму Ψ_m .

На рис. 11.3, б наведено нелінійну характеристику $\psi(i)$ індуктивного елемента.

За допомогою цієї характеристики можна за відомою функцією потокозчеплення $\psi(t)$ визначити функцію електричного струму $i(t)$. На рис. 11.3, в показано зміну цього струму під час перехідного процесу в електричному колі.

Як видно з рис. 11.3, за усталеного режиму роботи з амплітудою потокозчеплення Ψ_m амплітудне значення струму I_m є незначним. Однак, зі збільшенням потокозчеплення до рівня $2\Psi_m$ струм I_{max} внаслідок нелінійності характеристики осердя може багаторазово перевищувати I_m .

За дії синусоїдної напруги в рівнянні (11.6) для визначення індуктивності L зазвичай задаються її середнім значенням

$$L = \frac{1}{2}(L_{min} + L_{max}),$$

де L_{min} – найменше значення індуктивності (струм $i = I_{max}$), а L_{max} – її найбільше значення (при $i = 0$).

Приклад 11.3

Розглянемо перехідний процес в електричному колі, показаному на рис. 11.4. Нехай індуктивність $L = 0,1$ Гн, опір $r_1 = 40$ Ом, значення прикладеної постійної напруги $U = 20$ В.

Вольт-амперну характеристику нелінійного резистора задамо аналітично

$$u_n = \alpha i + \beta i^2 + \gamma i^3, \quad (11.8)$$

де $\alpha = 10$ Ом, $\beta = -6$ Ом/А,

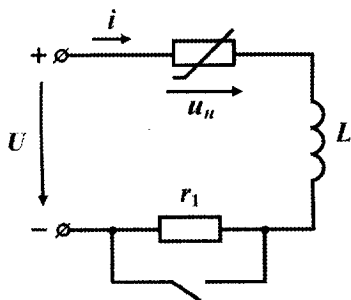


Рисунок 11.4

$\gamma = 1,5 \text{ Ом} / \text{А}^2$. На рис. 11.5 побудовано графік цієї характеристики (крива 1).

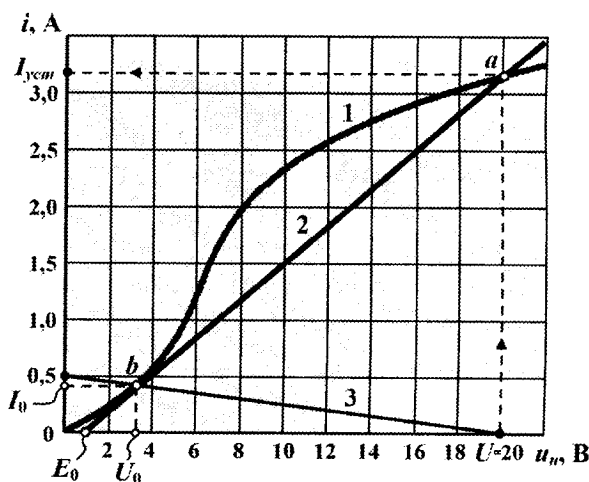


Рисунок 11.5

Диференціальне рівняння, що описує перехідний процес в електричному колі, складають для післякомутаційного стану кола. Тоді

$$L \frac{di}{dt} + u_n = U. \quad (11.9)$$

Для визначення робочої ділянки характеристики знайдемо точки, які відповідають початковому I_0 та усталеному $I_{уст}$ значенням струмів.

В усталеному режимі, коли ключ замкнено, струм постійний, на індуктивності напруги немає, до нелінійного резистора прикладено всю вхідну напругу U і тоді усталений струм можна визначити, безпосередньо скориставшись вольт-амперною характеристикою.

Так, за вхідної напруги $U = 20$ В, усталене значення струму складатиме $I_{уст} = 3,2$ А (точка a на вольт-амперній характеристиці).

Оскільки електричний струм підпорядковується закону комутації, то початкове значення I_0 визначимо за умови розімкненого ключа і для кола до комутації запишемо другий закон Кірхгофа

$$U = u_n + r_1 I_0$$

або

$$u_n = U - r_1 I_0. \quad (11.10)$$

Розв'язуючи рівняння (11.8) та (11.10) графічно (п. 8.1.1, д), одержимо точку (точка b на рис. 11.5) з координатами

$$U_0 = 3,25 \text{ В} \quad \text{і} \quad I_0 = 0,41 \text{ А}.$$

Проведемо лінеаризацію нелінійної вольт-амперної характеристики, з'єднавши точки a і b прямою лінією (лінія 2 на рис. 11.5).

Лінійний опір r_0 визначимо за формулою

$$r_0 = \frac{U - U_0}{I_{уст} - I_0} = \frac{20 - 3,25}{3,2 - 0,4} = 6 \text{ Ом}.$$

Як видно з рис. 11.5, лінійна характеристика не проходить через початок координат, а відсікає на осі абсцис відрізок

$$E_0 = 0,8 \text{ В}.$$

Це означає, що під час лінеаризації нелінійний резистор необхідно замінити лінійним опором r_0 та е.р.с. E_0 , що має бути спрямована назустріч струму (див. п. 8.2).

Лінійну схему замі-

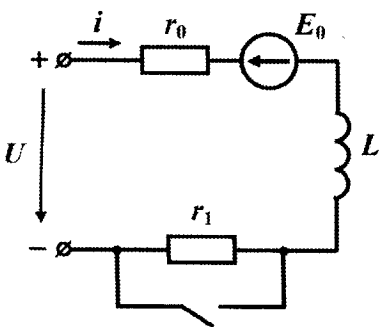


Рисунок 11.6

щення показано на рис. 11.6.

Перехідний процес в цьому лінійному колі описується лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку

$$L \frac{di}{dt} + r_0 i = U - E_0. \quad (11.11)$$

Розв'язок рівняння (11.11) складається з примусової

$$i_{np} = I_{yct} = 3,2 \text{ А}$$

та вільної складових $i_g = Ae^{pt}$, тобто

$$i = I_{yct} + Ae^{pt},$$

де $p = -\frac{r_0}{L} = -60 \text{ с}^{-1}$.

Сталу інтегрування A визначимо за допомогою початкової умови: при $t = 0$ $I_0 = 0,41 \text{ А}$, тому $0,41 = 3,2 + A$, звідки

$$A = -2,79 \text{ А}.$$

Тоді

$$i = 3,2 - 2,79e^{-60t} \text{ А}. \quad (11.12)$$

Залежність напруги на нелінійному опорі від часу знайдемо, підставивши формулу (11.12) в рівняння вольт-амперної характеристики нелінійного резистора (11.8)

$$u_n = 10(3,2 - 2,79e^{-60t}) - 6(3,2 - 2,79e^{-60t})^2 + 1,5(3,2 - 2,79e^{-60t})^3 \text{ В}.$$

Графіки струму $i(t)$ зображено на рис. 11.10, а напруги $u_n(t)$ – на рис. 11.11 (в обох випадках – крива 1).

11.2 Метод кусково-лінійної апроксимації

Основна ідея *методу кусково-лінійної апроксимації* викладена в розділі 10 (див. п. 10.9), тому розглянемо застосування цього методу для розрахунку перехідних процесів в нелінійних колах на конкретному прикладі.

Приклад 11.4

Розрахуємо перехідний процес в електричному колі, що зображене на рис. 11.4 за тих же параметрів.

Штучно подамо робочу ділянку ab нелінійної характеристики такою, що складається з трьох прямолінійних відрізків: bc , cd і da (рис. 11.7).

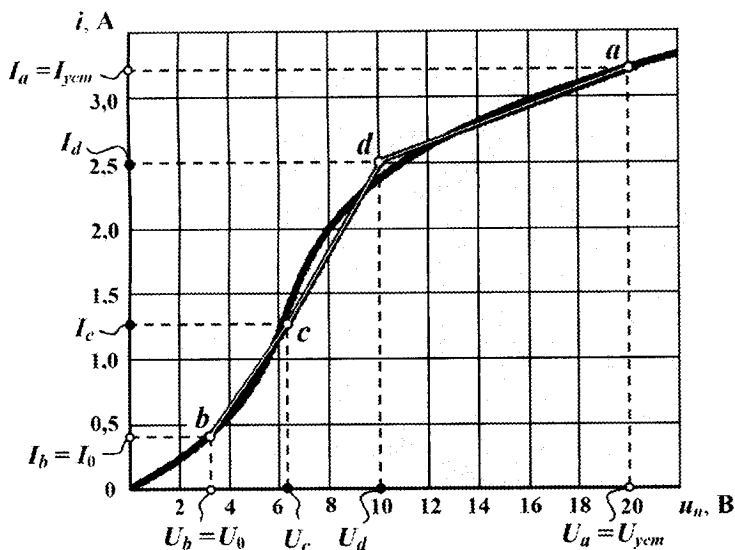


Рисунок 11.7

З графіка визначимо координати точок c та d . Цими координатами будуть значення струмів і напруг

$$I_c = 1,25 \text{ A}, \quad U_c = 6,3 \text{ В}$$

та

$$I_d = 2,5 \text{ A}, \quad U_d = 10 \text{ В},$$

відповідно.

Струми ж і напруги для точок a і b були нами визначені дещо раніше:

$$I_a = I_{уст} = 3,2 \text{ A}, \quad U_a = U_{уст} = 20 \text{ В},$$

$$I_b = I_0 = 0,41 \text{ A}, \quad U_b = U_0 = 3,25 \text{ В}.$$

Проведемо розрахунок електричного кола для кожного з прямолінійних відрізків вольт-амперної характеристики окремо.

1. Перша ділянка (відрізок bc).

Визначимо параметри схеми заміщення нелінійного резистора.

Рівняння відрізка прямої розрахуємо за формулою (7.18), а саме

$$u_H = \frac{U_c - U_0}{I_c - I_0} i + \frac{U_0 I_c - U_c I_0}{I_c - I_0}$$

або, підставляючи числові значення,

$$u_H = 3,63i + 1,76 \text{ В.}$$

Як вже зазначалося, лінійною схемою заміщення нелінійного резистора будуть два послідовно з'єднаних елемента: лінійний опір r_0 та е.р.с. E_0 (див. рис. 11.6) зі значеннями, що залежать від коефіцієнтів лінійної функції даного відрізка прямої.

Тоді для першого відрізка маємо

$$r_0^{(1)} = 3,63 \text{ Ом, } E_0^{(1)} = 1,76 \text{ В,}$$

а лінійне диференціальне рівняння відповідно до другого закону Кірхгофа набуде вигляду

$$L \frac{di}{dt} + r_0^{(1)} i = U - E_0^{(1)}.$$

Примусову складову визначимо із розрахунку нового установившого режиму

$$i_{np}^{(1)} = \frac{U - E_0^{(1)}}{r_0^{(1)}} = \frac{20 - 1,76}{3,63} = 5,02 \text{ А.}$$

Вільна складова

$$i_g^{(1)} = A_1 e^{p_1 t},$$

$$\text{де } p_1 = -\frac{r_0^{(1)}}{L} = -36,3 \frac{1}{\text{с}}.$$

Таким чином,

$$i^{(1)} = i_{np}^{(1)} + i_g^{(1)} = 5,02 + A_1 e^{-36,3t}.$$

Знайдемо сталу інтегрування A_1 .

Для цього скористаємося незалежною початковою умовою:

$$i(0) = I_0 = 0,41 \text{ А.}$$

Тоді

$$5,02 + A_1 = 0,41,$$

звідки

$$A_1 = -4,61 \text{ А.}$$

Отже, повний розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$i^{(1)} = 5,02 - 4,61e^{-36,3t} \text{ А.} \quad (11.13)$$

Розв'язок (11.13) є дійсним лише в межах першої ділянки, тобто відрізка bc . В межах цієї ділянки на часовому інтервалі $0 \leq t \leq t_1$ електричний струм $i^{(1)}$ змінюється від значення I_0 до I_c .

Визначимо момент часу t_1 .

Оскільки в цей момент струм набуває значення

$$i^{(1)}(t_1) = I_c = 1,25 \text{ А,}$$

то, як випливає з формули (11.13), маємо

$$1,25 = 5,02 - 4,61e^{-36,3t_1}$$

або

$$e^{-36,3t_1} = \frac{1,25 - 5,02}{-4,61} = 0,818.$$

Розв'яжемо рівняння відносно t_1 , звідки отримаємо

$$t_1 = -\frac{\ln 0,818}{36,3} = 5,54 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

2. Друга ділянка (відрізок cd).

Рівняння відрізка прямої для цієї ділянки

$$u_n = \frac{U_d - U_c}{I_d - I_c} i + \frac{U_c I_d - U_d I_c}{I_d - I_c} = 2,96i + 2,6 \text{ В.}$$

Тоді

$$r_0^{(2)} = 2,96 \text{ Ом,} \quad E_0^{(2)} = 2,6 \text{ В.}$$

Лінійне диференціальне рівняння для другої ділянки

$$L \frac{di}{dt} + r_0^{(2)} i = U - E_0^{(2)},$$

примусова складова якого

$$i_{np}^{(2)} = \frac{U - E_0^{(2)}}{r_0^{(2)}} = \frac{20 - 2,6}{2,96} = 5,878 \text{ А},$$

а вільна складова, оскільки перехідний процес на другій ділянці розпочинається в момент часу $t = t_1$,

$$i_s^{(2)} = A_2 e^{p_2(t-t_1)},$$

де $p_2 = -\frac{r_0^{(2)}}{L} = -29,6 \frac{1}{\text{с}}$.

Тому повний розв'язок диференціального рівняння

$$i^{(2)} = i_{np}^{(2)} + i_s^{(2)} = 5,878 + A_2 e^{-29,6(t-t_2)} \text{ А}.$$

Оскільки, відповідно до першого закону комутації, струм в індуктивності не може змінитися стрибком, то на початку другої ділянки струм залишається таким же, яким він був і наприкінці першої ділянки, тобто в момент t_1

$$i^{(2)}(t_1) = i^{(1)}(t_1) = I_c = 1,25 \text{ А}.$$

Отже,

$$5,878 + A_2 = 1,25,$$

звідки

$$A_2 = -4,628 \text{ А}.$$

Тоді

$$i^{(2)} = 5,878 - 4,628 e^{-29,6(t-t_1)} \text{ А}. \quad (11.14)$$

Розв'язок (11.14) дійсний тільки в межах другої ділянки, тобто відрізка cd . На цій ділянці електричний струм $i^{(2)}$ змінюється на часовому інтервалі $t_1 \leq t \leq t_2$ від значення I_c до значення I_d .

В момент часу t_2 струм $i^{(2)}(t_2)$ набуває значення I_d , тобто

$$i^{(2)}(t_2) = I_d = 2,5 \text{ А},$$

тому

$$2,5 = 5,878 - 4,628 e^{-29,6(t_2-t_1)}$$

або

$$e^{-29,6(t_2-t_1)} = \frac{2,5 - 5,878}{-4,628} = 0,73.$$

Звідки

$$t_2 = t_1 - \frac{\ln 0,73}{29,6} = 16,7 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

3. Третя ділянка (відрізок da).

Рівняння відрізка прямої

$$u_{II} = \frac{U_{ycm} - U_d}{I_{ycm} - I_d} i + \frac{U_d I_{ycm} - U_{ycm} I_d}{I_{ycm} - I_d} = 14,28i - 25,7 \text{ В.}$$

Звідси

$$r_0^{(3)} = 14,28 \text{ Ом, } E_0^{(3)} = -25,7 \text{ В.}$$

Примусова складова лінійного диференціального рівняння

$$L \frac{di}{dt} + r_0^{(3)} i = U - E_0^{(3)}$$

буде

$$i_{np}^{(3)} = \frac{U - E_0^{(3)}}{r_0^{(3)}} = \frac{20 + 25,7}{14,28} = 3,2 \text{ А,}$$

а вільна складова

$$i_g^{(3)} = A_3 e^{p_3(t-t_2)},$$

$$\text{де } p_3 = -\frac{r_0^{(3)}}{L} = -142,8 \frac{1}{\text{с}}.$$

Оскільки за першим законом комутації

$$i^{(3)}(t_2) = i^{(2)}(t_2) = I_d = 2,5 \text{ А,}$$

то

$$3,2 + A_3 = 2,5,$$

звідки $A_3 = -0,7 \text{ А}$ і тоді повний розв'язок для часового інтервалу $t_2 \leq t < \infty$

$$i^{(3)} = 3,2 - 0,7 e^{-142,8(t-t_2)} \text{ А.} \quad (11.15)$$

Таким чином, загальним розв'язком даної задачі є струм

$$i(t) = \begin{cases} i^{(1)}, & 0 \leq t < t_1, \\ i^{(2)}, & t_1 \leq t < t_2, \\ i^{(3)}, & t_2 \leq t < \infty \end{cases} \quad (11.16)$$

або

$$i(t) = \begin{cases} 5,02 - 4,61e^{-36,3t} \text{ А}, & 0 \leq t < 5,54 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \\ 5,878 - 4,628e^{-29,6(t - 5,54 \cdot 10^{-3})} \text{ А}, & 5,54 \cdot 10^{-3} \text{ с} \leq t < 16,7 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \\ 3,2 - 0,7e^{-142,8(t - 16,7 \cdot 10^{-3})} \text{ А}, & 16,7 \cdot 10^{-3} \text{ с} \leq t < \infty. \end{cases}$$

Графік функції струму $i(t)$ в електричному колі під час перехідного процесу зображено на рис.11.10, а функції напруги $u_n(t)$ – на рис. 11.11 (в обох випадках – крива 2).

11.3 Метод графічного інтегрування

Під час аналізу нелінійних електричних кіл *методом графічного інтегрування* зазвичай використовують *реальну* характеристику нелінійного елемента.

Однак і цей метод є наближеним, оскільки потребує наближеного обчислення інтеграла.

Розглянемо застосування цього методу на прикладі.

Приклад 11.5

Нехай задано нелінійне електричне коло, яке було наведено на рис. 11.4 (див. приклад 11.3).

Для цього кола диференціальне рівняння (11.9), складене за другим законом Кірхгофа, перепишемо у вигляді

$$\frac{di}{dt} = \frac{U - u_n(t)}{L}.$$

З рівняння маємо

$$dt = \frac{L di}{U - u_n(t)}.$$

Підставимо замість $u_n(t)$ її значення з (11.8), внаслідок чого отримаємо

$$dt = \frac{L di}{U - (\alpha i + \beta i^2 + \gamma i^3)}.$$

Позначимо

$$\frac{L}{U - (\alpha i + \beta i^2 + \gamma i^3)} = f(i) \quad (11.17)$$

і зробимо заміну, внаслідок якої отримаємо

$$dt = f(i) di.$$

Звідси можна визначити час t як функцію від електричного струму i

$$t = \int_{I_0}^{i(t)} f(i) di.$$

Отриманий інтеграл обчислимо графічним методом, для чого попередньо побудуємо графік функції $f(i)$ (рис. 11.8).

Тоді будь-який поточний момент часу t_k можна розрахувати як

$$t_k = \int_{I_0}^{I_k} f(i) di. \quad (11.18)$$

Сам інтеграл від функції $f(i)$ в (11.18) знайдемо через площу фігури, яка обмежена, з одного боку, початковим струмом I_0 та поточним значенням струму $i(t_k) = I_k$ перехідного процесу, а з іншого, – кривою функції $f(i)$ та віссю абсцис (рис. 11.8).

Фігуру, яка утворюється за вказаних обмежень, наближено можна уявити як трапецію і тоді її площа, а отже, і поточний момент часу t_k , буде дорівнювати

$$t_k \approx t_{k-1} + \frac{f(I_k) + f(I_{k-1})}{2} (I_k - I_{k-1}). \quad (11.19)$$

Вибирати послідовність значень I_k необхідно таким чином, щоб зазначена нелінійна фігура не набагато відрізнялась від трапеції.

Підставимо числові значення.

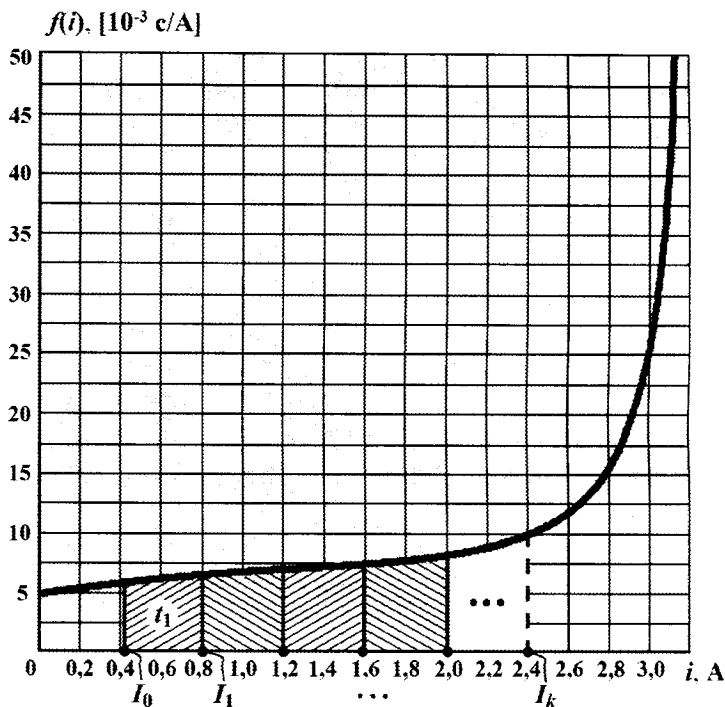


Рисунок 11.8

З рис. 11.8 видно, що для поточного значення струму перехідного процесу

$$i(t_1) = I_1 = 0,8 \text{ А.}$$

Тоді, як впливає із формули (11.19), момент часу t_1 наближено дорівнюватиме

$$t_1 \approx t_0 + \frac{f(I_1) + f(I_0)}{2} (I_1 - I_0) = 2,45 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Для наступного моменту часу t_2

$$t_2 \approx t_1 + \frac{f(I_2) + f(I_1)}{2} (I_2 - I_1) = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Продовжуючи розрахунок, одержимо числові значення для всього часового проміжку, протягом якого і триває перехідний процес в нелінійному електричному колі.

Результати розрахунку зведемо до таблиці 11.1.

Таблиця 11.1

t	мс	0	2,45	5,2	8,14	11,32	15,02
i	А	0,41	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4

Продовження таблиці 11.1

t	мс	17,26	18,56	20,08	21,32	24,37	28,33
i	А	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1

На підставі отриманих числових даних побудуємо графіки функцій струму $i = f(t)$ (рис. 11.10) та напруги на нелінійному опорі $u_n = f(t)$ (рис. 11.11, в обох випадках – крива 3), яку визначимо за допомогою вольт-амперної характеристики за формулою (11.8).

Як показує побудова, ці графіки практично збіглися із графіками, отриманими на основі розрахунків методом кусково-лінійної апроксимації (крива 2).

І наостанок зауважимо, що розрахунки доцільно проводити із застосуванням систем комп'ютерної математики, наприклад, такими як Mathcad, Matlab, Maple тощо. Це дозволить суттєво підвищити точність обчислень і покращити якість аналізу перехідного процесу в нелінійному електричному колі. Так, на рис. 11.9 наведено програмний код розрахунку задачі за даним методом в програмному математичному середовищі Mathcad.



Рисунок 11.9

11.4 Метод малого параметра

Для розрахунку перехідних процесів в нелінійних колах можна використовувати *метод малого параметра*, який був розглянутий в попередньому розділі для аналізу усталених процесів в нелінійних електричних колах (див. п. 4.8).

Нагадаємо, що метод малого параметра використовують задля розв'язання нелінійних рівнянь електричного кола за умови незначної нелінійності його елементів.

Розглянемо застосування цього методу на прикладі.

Приклад 11.6

Візьмемо нелінійне електричне коло, яке було показано на рис. 11.4 в прикладі 11.3 за тих же вихідних даних.

Диференціальне рівняння (11.9), що складене для кола за другим законом Кірхгофа,

$$L \frac{di}{dt} + u_n = U$$

запишемо з врахуванням аналітично заданої вольт-амперної характеристики нелінійного опору (11.8), тоді

$$L \frac{di}{dt} + \alpha i + \beta i^2 + \gamma i^3 = U.$$

Введемо нові позначення. Нехай

$$\frac{L}{\alpha} = a, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon, \quad \frac{\gamma}{\beta} = \delta \quad \text{і} \quad \frac{U}{\alpha} = b.$$

За такої заміни диференціальне рівняння електричного кола набуде вигляду

$$a \frac{di}{dt} + i + \varepsilon (i^2 + \delta i^3) = b. \quad (11.20)$$

Нелінійна складова $\varepsilon (i^2 + \delta i^3)$ рівняння (11.20) є незначною порівняно з іншими (лінійними) складовими.

Тоді відповідно до методу малого параметра розв'язок рівняння подамо у вигляді

$$i = i_0 + \varepsilon x_1, \quad (11.21)$$

де i_0 – початковий (наближений) розв'язок нелінійного рівняння (11.20), який водночас є точним розв'язком лінійного диференціального рівняння

$$a \frac{di_0}{dt} + i_0 = b,$$

отриманого з (11.20) при $\varepsilon = 0$, а x_1 – допоміжна змінна, за якої εx_1 є першою поправкою до початкового розв'язку i_0 , введена з тих же міркувань, що і в прикладі 10.4.

Підставимо співвідношення (11.21) в формулу (11.20), внаслідок чого отримаємо

$$a \frac{d(i_0 + \varepsilon x_1)}{dt} + (i_0 + \varepsilon x_1) + \varepsilon \left[(i_0 + \varepsilon x_1)^2 + \delta (i_0 + \varepsilon x_1)^3 \right] = b.$$

Розкриємо дужки, знехтуємо через малість складовими, що містять ε з вищими степенями, і проведемо перегрупування

$$\left(a \frac{di_0}{dt} + i_0 \right) + \varepsilon \left(a \frac{dx_1}{dt} + x_1 + i_0^2 + \delta i_0^3 \right) = b.$$

Прирівняємо коефіцієнти лівої та правої частин даного рівняння за однакових степенів ε , внаслідок чого отримаємо два лінійних диференціальних рівняння

$$\left. \begin{aligned} a \frac{di_0}{dt} + i_0 &= b \\ a \frac{dx_1}{dt} + x_1 + i_0^2 + \delta i_0^3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11.22)$$

Повний розв'язок першого рівняння (11.22) $i_0 = i_{0np} + i_{0e}$.

Оскільки прикладена напруга U постійна, то і примусова складова i_{0np} буде сталою величиною і дорівнюватиме $i_{0np} = b$.

Вільна складова $i_{0e} = A e^{pt}$, де $p = -a^{-1}$.

Таким чином,

$$i_0 = b + A e^{-\frac{1}{a}t}.$$

Як це було визначено раніше, в момент часу $t = 0$ $i_0(0) = I_0$, тому $I_0 = b + A$, звідки

$$A = I_0 - b.$$

Отже, наближений розв'язок нелінійного диференціального рівняння (11.20)

$$i_0 = b + (I_0 - b)e^{-\frac{1}{a}t}.$$

Якщо ввести позначення

$$C_0 = b \text{ і } C_1 = I_0 - b,$$

то дана формула набуде вигляду

$$i_0 = C_0 + C_1 e^{-\frac{1}{a}t}. \quad (11.23)$$

Підставимо отриману функцію початкового наближення (11.23) в друге рівняння системи (11.22)

$$a \frac{dx_1}{dt} + x_1 = - \left(C_0 + C_1 e^{-\frac{1}{a}t} \right)^2 - \delta \left(C_0 + C_1 e^{-\frac{1}{a}t} \right)^3.$$

Після перетворення отримаємо

$$\begin{aligned} a \frac{dx_1}{dt} + x_1 = & - \left(C_0 + \delta C_0^3 \right) - \left(2C_0 C_1 + 3\delta C_0^2 C_1 \right) e^{-\frac{1}{a}t} - \\ & - \left(C_1^2 + 3\delta C_0 C_1^2 \right) e^{-\frac{2}{a}t} - \delta C_1^3 e^{-\frac{3}{a}t}. \end{aligned}$$

Введемо нові позначення

$$\begin{aligned} D_0 = & - \left(C_0 + \delta C_0^3 \right), \quad D_1 = - \left(2C_0 C_1 + 3\delta C_0^2 C_1 \right), \\ D_2 = & - \left(C_1^2 + 3\delta C_0 C_1^2 \right), \quad D_3 = - \delta C_1^3 \end{aligned}$$

і проведемо заміну.

Тоді друге рівняння системи (11.22) набуде вигляду

$$a \frac{dx_1}{dt} + x_1 = D_0 + D_1 e^{-\frac{1}{a}t} + D_2 e^{-\frac{2}{a}t} + D_3 e^{-\frac{3}{a}t}. \quad (11.24)$$

Диференціальне рівняння (11.24) є лінійним і його зручно розв'язувати операторним методом.

Оскільки початкове значення струму I_0 вже було враховане під час розв'язування першого рівняння, то струм поправки x_1 в момент часу $t = 0$ дорівнює $x_1(0) = 0$.

Тоді диференціальне рівняння (11.24) в операторній формі має вигляд

$$(ap+1)X_1(p) = \frac{D_0}{p} + \frac{D_1}{p+\frac{1}{a}} + \frac{D_2}{p+\frac{2}{a}} + \frac{D_3}{p+\frac{3}{a}}.$$

Звідси

$$X_1(p) = \frac{\frac{D_0/a}{p\left(p+\frac{1}{a}\right)} + \frac{\frac{D_1/a}{\left(p+\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{\frac{D_2/a}{\left(p+\frac{1}{a}\right)\left(p+\frac{2}{a}\right)} + \frac{\frac{D_3/a}{\left(p+\frac{1}{a}\right)\left(p+\frac{3}{a}\right)}.$$

Використаємо теорему розкладання для кожної складової правої частини. Це дозволить одержати функцію струму першої поправки

$$x_1(t) = D_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{a}t}\right) + \frac{D_1}{a} t e^{-\frac{1}{a}t} + D_2 \left(1 - e^{-\frac{1}{a}t}\right) e^{-\frac{1}{a}t} + \frac{D_3}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{a}t}\right) e^{-\frac{1}{a}t}.$$

Отже, з огляду на (11.21) і (11.23) для загального розв'язку нелінійного диференціального рівняння (11.20) можна записати

$$i(t) = C_0 + C_1 e^{-\frac{1}{a}t} + \varepsilon \left[D_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{a}t}\right) + \frac{D_1}{a} t e^{-\frac{1}{a}t} + D_2 \left(1 - e^{-\frac{1}{a}t}\right) e^{-\frac{1}{a}t} + \frac{D_3}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{a}t}\right) e^{-\frac{1}{a}t} \right]. \quad (11.25)$$

Підставимо до формули (11.25) числові значення і остаточно для струму в нелінійному електричному колі одержимо функцію

$$i(t) = 2 - 1,59 e^{-100t} - 0,6 \left[-2 \left(1 - e^{-100t}\right) + 159 t e^{-100t} - 1,264 \left(1 - e^{-100t}\right) e^{-100t} - 0,5025 \left(1 - e^{-200t}\right) e^{-100t} \right] \text{ А}.$$

Графік залежності зміни електричного струму $i(t)$ в часі побудовано на рис. 11.10 (крива 3).

Функцію від часу миттєвої напруги на нелінійному опорі $u_n(t)$ знайдемо за виразом його вольт-амперної характеристики (11.8), а графік побудуємо на рис. 11.11 (крива 3).

11.5 Числові методи розрахунку перехідних процесів

В основу *числових методів* розрахунку перехідних процесів в нелінійних колах покладено методи наближеного (числового) інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, які ці процеси описують. За такого інтегрування час, в межах якого необхідно одержати розв'язок, розкладають на малі проміжки $h = \Delta t$, сталі або змінні. Їх називають *кроком інтегрування*.

Саме ж інтегрування здійснюється послідовно на кожному проміжку і розрахунок проводять крок за кроком, починаючи з моменту часу $t = 0$.

Отже, нехай маємо нелінійне рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (11.26)$$

розв'язок якого мусить задовольняти деяку початкову умову $x(0) = x_0$.

Як впливає з (11.26), якщо відомо значення шуканої функції $x(t)$ на початку кожного n -го часового проміжку $x_n = x(t_n)$, то наприкінці проміжку (або на початку наступного проміжку) значення цієї функції $x(t_{n+1}) = x_{n+1}$ буде дорівнювати

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, t) dt, \quad (11.27)$$

де $t_n = \sum_{i=1}^n h_i$ – початок n -го елементарного часового проміжку;

$t_{n+1} = t_n + h_{n+1}$ – початок наступного $n+1$ проміжку.

Значення інтеграла (11.27) потрібно визначати на кожному часовому проміжку, а його розрахунок проводити за допомогою наближених числових методів, які в змозі забезпечити достатню точність за мінімальної кількості математичних операцій. На основі наближеного обчислення інтеграла (11.27) існує чимало різних формул числового інтегрування рівнянь вигляду (11.26). Роз-

глянемо один з них – *прямий метод Ейлера*.

Суть методу полягає в тому, що підінтегральна функція $f(x, t)$ на незмінному часовому проміжку інтегрування h замінюється сталою величиною, що дорівнює значенню функції на початку цього проміжку $f(x_n, t_n)$.

За таких припущень рівняння (11.27) набуває вигляду

$$x_{n+1} \approx x_n + hf(x_n, t_n), \quad (11.28)$$

Співвідношення (11.28) називають *прямою формулою Ейлера*.

Порядок точності обчислень за формулою (11.28) лежить в межах h^2 , тому похибка обчислень буде тим меншою, чим меншим буде крок інтегрування h .

Під час використання числових методів основною проблемою є вибір кроку інтегрування. За повільного перебігу перехідного процесу зазвичай спочатку наближено визначають сталу частоту кола τ , замінюючи нелінійний елемент лінійним (див. п. 11.1), а потім вже задаються постійним кроком інтегрування

$$h = \Delta t \approx (0,05 \div 0,1)\tau. \quad (11.29)$$

Якщо характеристика нелінійного елемента задана аналітично, то задачу розв'язують за допомогою математичних програм із застосуванням комп'ютерної техніки.

Приклад 11.7

Розглянемо використання числового методу і зокрема прямої формули Ейлера на прикладі розрахунку нелінійного електричного кола, зображеного на рис. 11.4 (див. приклад 11.3).

1. Нехай вольт-амперна характеристика нелінійного опору задана аналітично (11.8). Тоді запишемо нелінійне диференціальне рівняння (11.9) із врахуванням цієї характеристики у вигляді

$$L \frac{di}{dt} = U - \alpha i - \beta i^2 - \gamma i^3.$$

Як було визначено раніше (див. п. 11.1), початкова умова

$$i(0) = I_0 = 0,41 \text{ А.}$$

Оскільки стала часу кола $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{60} = 0,0166$ с, то на підс-

таві умови (11.29) за крок інтегрування виберемо значення

$$h = \Delta t = 0,001 \text{ с.}$$

Відповідно до прямої формули Ейлера (11.28) запишемо

$$i_{n+1} = i_n + \frac{h}{L} \left[U - (\alpha i_n + \beta i_n^2 + \gamma i_n^3) \right]. \quad (11.30)$$

Тоді миттєве значення струму i в момент часу $t_1 = h$

$$\begin{aligned} i_1 &= I_0 + \frac{h}{L} \left[U - (\alpha I_0 + \beta I_0^2 + \gamma I_0^3) \right] = \\ &= 0,41 + \frac{0,001}{0,1} \left[20 - (10 \cdot 0,41 + 6 \cdot 0,41^2 + 1,5 \cdot 0,41^3) \right] = 0,578 \text{ А,} \end{aligned}$$

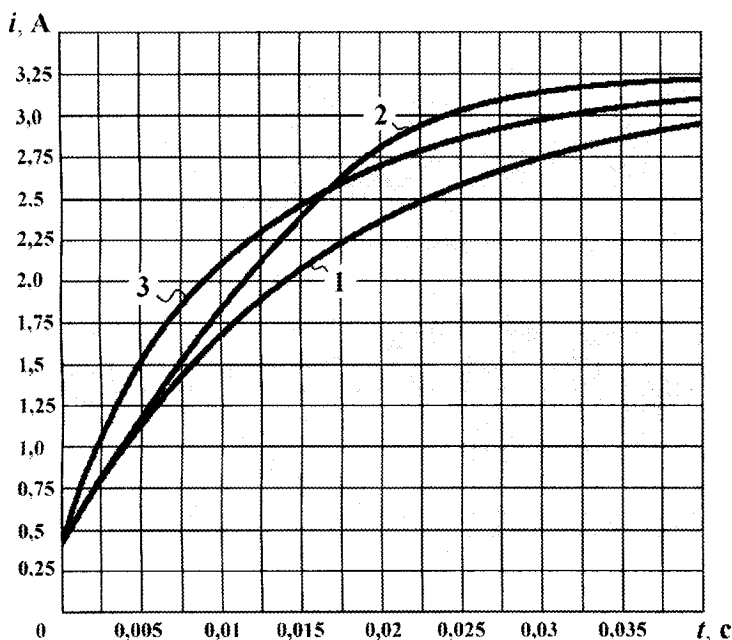


Рисунок 11.10

а в момент $t_2 = 2h$

$$i_2 = I_1 + \frac{h}{L} \left[U - (\alpha I_1 + \beta I_1^2 + \gamma I_1^3) \right] =$$

$$= 0,578 + \frac{0,001}{0,1} \left[20 - (10 \cdot 0,578 + 6 \cdot 0,578^2 + 1,5 \cdot 0,578^3) \right] = 0,737 \text{ А.}$$

Аналогічно, опираючись на формулу (11.30), розрахунок необхідно продовжувати і далі, формуючи функцію $i(t)$ миттєвого струму в табличній формі.

За результатами обчислень побудуємо графік зміни цього струму в часі (рис. 11.10), який, як впливає із побудови, практично збігається із кривою 2.

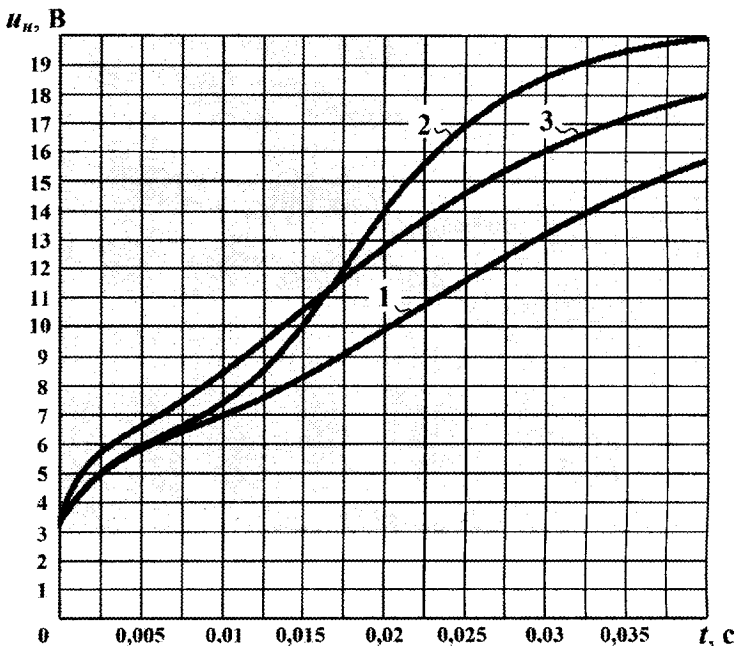


Рисунок 11.11

Отже, як бачимо з рисунків 11.10 і 11.11, всі п'ять графіків для струму $i = f(t)$ і для напруги $u_n = f(t)$, що були отримані п'ятьма різними методами розрахунку перехідного процесу:

- методом умовної лінеаризації (крива 1);
 - методом кусково-лінійної апроксимації (крива 2);
 - методом графічного інтегрування (крива 2);
 - методом малого параметра (крива 3);
 - числовим методом за пряму формулою Ейлера (крива 2)
- за інших рівних умов, практично збігаються.

2. Якщо вольт-амперна характеристика нелінійного опору задана графічно, то диференціальне рівняння (11.9) необхідно записати у вигляді

$$L \frac{di}{dt} = U - u_n,$$

тоді пряма формула Ейлера (11.28) набуває вигляду

$$i_{n+1} = i_n + \frac{h}{L}(U - u_{n_n}). \quad (11.31)$$

Миттєве значення струму i в момент часу $t_1 = h$ можна розрахувати за його початковим значенням I_0 та початковою напругою U_{n_0} . Останню визначають, скориставшись характеристикою нелінійного опору $u_n = f(i)$ (рис. 11.12).

Тоді для струму $i(t_1) = i_1$ маємо

$$i_1 = I_0 + \frac{h}{L}(U - U_0).$$

Значення напруги u_{n_1} для цього струму отримуємо також за допомогою характеристики, що, в свою чергу, дозволяє розрахувати значення електричного струму на початок наступного елементарного часового проміжку, тобто в момент часу $t_2 = 2h$, за співвідношенням (11.31)

$$i_2 = i_1 + \frac{h}{L}(U - u_{n_1}).$$

Власне розрахунковий процес необхідно продовжувати до визначення усталеного значення струму $I_{уст}$ (рис. 11.12).

Природно, що результати таких обчислення зручно подавати у вигляді таблиці (наприклад, табл. 11.2).

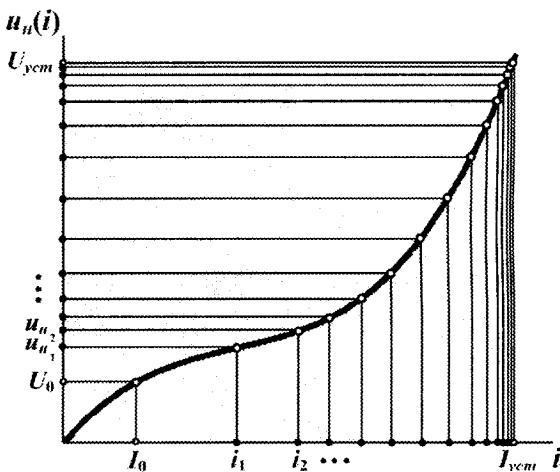


Рисунок 11.12

Таблиця 11.2

n		0	1	2	...
t_n	мс	0	h	$2h$...
i_n	A	I_0	$i_1 = I_0 + \frac{h}{L}(U - U_{n0})$	$i_2 = i_1 + \frac{h}{L}(U - u_{n1})$...
u_{n_n}	B	$U_{n0} = f(I_0)$	$u_{n1} = f(i_1)$	$u_{n2} = f(i_2)$...
i_{n+1}	A	$i_1 = I_0 + \frac{h}{L}(U - U_{n0})$	$i_2 = i_1 + \frac{h}{L}(U - u_{n1})$	$i_3 = i_2 + \frac{h}{L}(U - u_{n2})$...

3. Як було сказано дещо вище, для розрахунку перехідних процесів в нелінійних колах у спосіб числового інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, які ці процеси описують, доцільно, а в багатьох випадках і необхідно, застосовувати програми і алгоритми комп'ютерної математики. Тому наведемо приклад розрахунку даної задачі в математичному середовищі Mathcad (рис. 11.13), в основу якого покладемо числове інтегрування за методом Ейлера. Як видно з рисунка, розв'язок $i(t)$

отримано у табличний спосіб. За необхідності цю функцію можна подати і графічно.

1. Вводимо вихідні дані:

$U := 20 \cdot V$ - напруга джерела;

$L := 0.1 \cdot H$ - значення індуктивності;

$\alpha := 10 \cdot \Omega$ $\beta := -6 \cdot \frac{\Omega}{A}$ $\gamma := 1.5 \cdot \frac{\Omega}{A^2}$

$u_n(i) := \alpha \cdot i + \beta \cdot i^2 + \gamma \cdot i^3$ - ВАХ нелінійного опора;

$I_0 := 0.41 \cdot A$ - початкове значення струму;

$\tau := 0.0166 \cdot s$ - постійна часу кола;

2. Задаємо функцію $f(i)$:

$$f(i) := \frac{U - u_n(i)}{L}$$

3. Обираємо кількість кроків інтегрування n :

$n := 10000$

4. Визначаємо тривалість кроку інтегрування:

$$h := \frac{3 \cdot \tau}{n} = 4.98 \times 10^{-6} s$$

5. Задаємо початкове значення струму $i(0)$:

$I_0 := I_0 = 0.41 A$

6. Розв'язуємо диференціальне рівняння за допомогою прямої формули Ейлера:

$$k := 0 \dots n \quad I_{k+1} := I_k + h \cdot f(I_k) \quad t_k := h \cdot k$$

	0
0	0.41
1	0.411
2	0.412
3	0.413
4	0.413
5	0.414
6	...

I = A

	0
0	0
1	$4.98 \cdot 10^{-6}$
2	$9.96 \cdot 10^{-6}$
3	$1.494 \cdot 10^{-5}$
4	$1.992 \cdot 10^{-5}$
5	$2.49 \cdot 10^{-5}$
6	...

t = s

Рисунок 11.13

11.6 Метод рівнянь стану

Методом рівнянь стану називають метод аналізу перехідних процесів як в лінійних, так і нелінійних колах, що ґрунтується на складанні та розв'язуванні системи диференціальних рівнянь першого порядку. Цю систему отримують таким чином:

- кожне рівняння має містити тільки першу похідну відповідної змінної, яка записується в лівій частині;

- інші члени рівняння записуються в правій частині рівняння, вони не містять похідних і в загальному випадку є функціями всіх змінних

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\dots \\ \frac{dx_m}{dt} &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

Система (11.32) називається *нормальною формою* системи рівнянь, а змінні в ній x_1, x_2, \dots, x_m – *змінними стану*.

Змінними стану можуть бути будь-які величини, що характеризують процеси в системі, однак для електричних кіл за змінні стану зручніше вибирати або заряди $q(t)$ чи напруги $u_C(t)$ на ємностях, або потокозчеплення $\psi(t)$ чи струми $i_L(t)$ в індуктивностях, тобто ті величини, що підпорядковуються законам комутації.

Число рівнянь стану m дорівнює числу незалежних реактивних елементів в колі.

Для однозначного розв'язування системи (11.32) початкові значення всіх змінних стану $x_1(0), x_2(0), \dots, x_m(0)$ мають бути наперед відомими.

Якщо вже визначено всі змінні стану за необхідності можна розрахувати струми і напруги у всіх інших вітках електричного

кола. Для цього використовують закони Кірхгофа і компонентні співвідношення.

Задля розв'язування нелінійної системи рівнянь (11.32) зручно застосовувати різні числові методи, одним із яких є *прямий метод Ейлера*.

У випадку розрахунку за прямим методом Ейлера обчислення проводять за рекурентними формулами, які формують на основі співвідношення (11.28),

$$\left. \begin{aligned} x_{1_{n+1}} &\approx x_{1_n} + hf_1(x_{1_n}, x_{2_n}, \dots, x_{m_n}) \\ x_{2_{n+1}} &\approx x_{2_n} + hf_2(x_{1_n}, x_{2_n}, \dots, x_{m_n}) \\ &\dots \\ x_{m_{n+1}} &\approx x_{m_n} + hf_m(x_{1_n}, x_{2_n}, \dots, x_{m_n}) \end{aligned} \right\}, \quad (11.33)$$

В співвідношеннях (11.33) крок інтегрування h має бути наперед заданим.

Розглянемо даний метод більш докладно в наступному прикладі.

Приклад 11.8

Потрібно розрахувати перехідний процес в нелінійному колі, яке зображене на рис. 11.14.

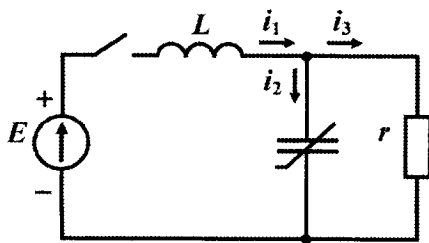


Рисунок 11.14

Як видно з рисунка, дане електричне коло містить нелінійну ємність з кулон-вольтною характеристикою $u_C = f(q)$, графік якої побудовано на рис. 11.15.

Насамперед складемо для заданого кола за законами Кірхгофа систему диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} + u_C(q) &= E \\ u_C(q) &= ri_3 \\ i_1 &= i_2 + i_3 \\ i_2 &= \frac{dq}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

За змінні стану виберемо струм в індуктивності i_1 і електричний заряд ємності q .

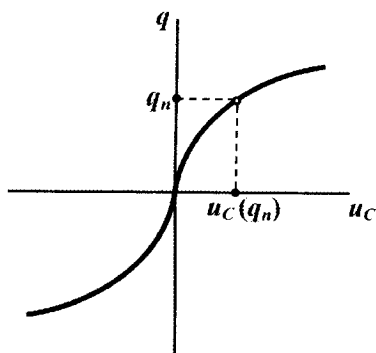


Рисунок 11.15

Перше рівняння системи (11.34) запишемо у вигляді

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{u_C(q)}{L}. \quad (11.35)$$

Враховуючи, що $i_2 = \frac{dq}{dt}$, а $i_3 = \frac{u_C(q)}{r}$, третє рівняння системи подамо так

$$\frac{dq}{dt} = i_1 - \frac{u_C(q)}{r}. \quad (11.36)$$

Отже, в сукупності рівняння (11.35) та (11.36) утворюють систему рівнянь даного кола, подану нормальною формою

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{E}{L} - \frac{u_C(q)}{L} \\ \frac{dq}{dt} &= i_1 - \frac{u_C(q)}{r} \end{aligned} \right\}.$$

Для розв'язання цієї системи скористаємося прямими формулами Ейлера (11.33), які для даного кола матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} i_{n+1} &\approx i_n + h \left[\frac{E}{L} - \frac{u_C(q_n)}{L} \right] \\ q_{n+1} &\approx q_n + h \left[i_n - \frac{u_C(q_n)}{r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (11.37)$$

де h – заздалегідь вибраний шаг інтегрування.

Незалежні початкові умови в колі є нульовими, тобто

$$i_1(0) = i_0 = 0, \quad q(0) = q_0 = 0,$$

і, як впливає з характеристики $u_C = f(q)$ (рис. 11.15), нульову початкову умову буде мати і напруга на ємності $u_C(0) = q_{C0} = 0$.

Визначимо за формулами (11.37) значення струму і заряду після першого кроку інтегрування h , тобто в момент часу $t = h$

$$i_1 = h \frac{E}{L}, \quad q_1 = 0.$$

При підрахунку значень змінних стану для наступних моментів часу (t_2, t_3, \dots) значення $u_C(q_n)$ визначають із характеристики $u_C = f(q)$ за умови $q = q_n$ (рис. 11.15), тому $u_C(q_1) = 0$.

Тоді в момент часу $t = t_2 = 2h$

$$i_2 = i_1 + h \frac{E}{L}, \quad q_2 = h i_1,$$

а в момент часу $t = t_3 = 3h$

$$i_3 = i_2 + h \left[\frac{E}{L} - \frac{u_C(q_2)}{L} \right], \quad q_3 = q_2 + h \left[i_2 - \frac{u_C(q_2)}{r} \right].$$

Розрахунок необхідно проводити і далі до набуття змінними стану своїх усталених значень

$$i_k = i_{ycm} = \frac{E}{r}, \quad q_k = q_{ycm} = f^{-1}(u_{C_{ycm}}), \quad u_{C_k} = u_{C_{ycm}} = E.$$

Природно, що аналіз методом рівнянь стану вимагає активного залучення засобів комп'ютерної математики.

Наведемо програмний код розрахунку перехідного процесу в заданому колі (рис. 11.14) прямим методом Ейлера в середовищі Mathcad (рис. 11.16 – рис. 11.21).

```

1. Вводимо вихідні дані:
а)  $E := 20 \cdot V$      $L := 10 \cdot mH$      $r := 100 \cdot \Omega$ 

б) кулон-вольтна характеристика  $q = f(u_C)$  (табличне подання)
 $Um := (0 \ 5 \ 10 \ 15 \ 20 \ 25 \ 30 \ 35 \ 40 \ 45 \ 50) \cdot V$ 
 $Qm := (0 \ 560 \ 749 \ 866 \ 951 \ 1018 \ 1073 \ 1120 \ 1160 \ 1196 \ 1229) \cdot \mu C$ 

 $i := 0..20$      $U_{C_i} := \text{if} \left[ i < 10, (-Um^T)_{10-i}, (Um^T)_{i-10} \right]$ 
 $Q_i := \text{if} \left[ i < 10, (-Qm^T)_{10-i}, (Qm^T)_{i-10} \right]$ 

2. Проводимо інтерполяцію кулон-вольтної характеристики
і отримуємо функцію  $u_C = f^{-1}(q)$ :
 $u_C(q) := \text{linterp}(Q, U_C, q)$ 

3. Задаємо тривалість кроків інтегрування  $h$ 
та їх кількість  $n$ :
 $h := 10^{-6} \cdot s$      $n := 2 \cdot 10^4$ 

4. Вводимо початкові значення часу  $t_0$ , струму  $i_1(0)$ 
та заряду  $q(0)$  (векторне подання):

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ i_{10} \\ q_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


```

Рисунок 11.16

На рис. 11.17 наведено основну частину програми, яка власне і здійснює обчислення за системою рекурентних рівнянь (11.35), складених на підставі законів Кірхгофа (11.34) і записаних в нормальній формі (11.32).

Mathcad [Ведіння Ю. Г.]
 File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

5. Розв'язуємо систему диференціальних рівнянь за допомогою прямих формул Ейлера:

$k := 0..n$

$$\begin{pmatrix} t_{k+1} \\ i_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_k + h \\ i_k + h \cdot \left(\frac{E}{L} - \frac{uc(q_k)}{L} \right) \\ q_k + h \cdot \left(i_k - \frac{uc(q_k)}{r} \right) \end{bmatrix}$$

	0
0	0
1	$1 \cdot 10^{-6}$
2	$2 \cdot 10^{-6}$
3	$3 \cdot 10^{-6}$
4	$4 \cdot 10^{-6}$
5	$5 \cdot 10^{-6}$
6	$6 \cdot 10^{-6}$
7	$7 \cdot 10^{-6}$
8	...

$t =$

	0
0	0
1	$2 \cdot 10^{-3}$
2	$4 \cdot 10^{-3}$
3	$6 \cdot 10^{-3}$
4	$8 \cdot 10^{-3}$
5	$10 \cdot 10^{-3}$
6	0.012
7	0.014
8	...

$i =$

	0
0	0
1	0
2	$2 \cdot 10^{-9}$
3	$6 \cdot 10^{-9}$
4	$1.2 \cdot 10^{-8}$
5	$2 \cdot 10^{-8}$
6	$3 \cdot 10^{-8}$
7	$4.199 \cdot 10^{-8}$
8	...

$q =$

	0
0	0
1	0
2	$2 \cdot 10^{-9}$
3	$6 \cdot 10^{-9}$
4	$1.2 \cdot 10^{-8}$
5	$2 \cdot 10^{-8}$
6	$3 \cdot 10^{-8}$
7	$4.199 \cdot 10^{-8}$
8	...

C

Рисунок 11.17

Як видно з рисунка, функціональні залежності миттєвого струму $i_1(t)$ та електричного заряду $q(t)$ за результатами розрахунку отримано в табличній формі.

За необхідності ці залежності можна подати графічно. В цьому випадку вони набудуть вигляду, показаного на рис. 11.18, а для струму $i_1(t)$ і рис. 11.18, б для заряду на ємності $q(t)$.

Як доводити рисунки, перехідний процес в заданому електричному колі буде носити коливальний характер.

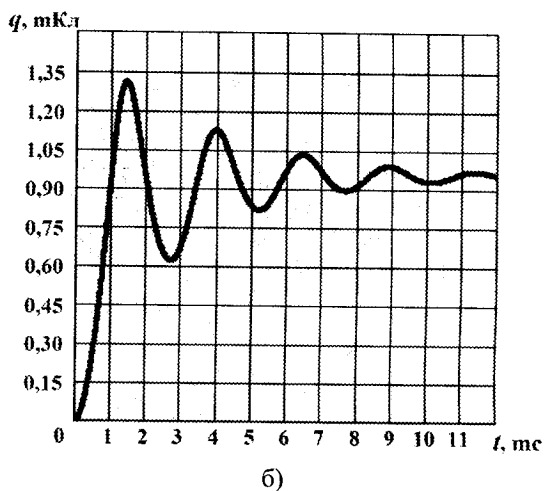
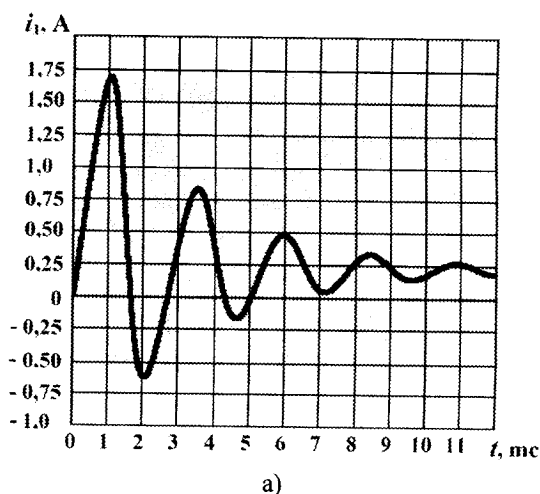


Рисунок 11.18

На рис. 11.19 наведено розрахунок усталених значень шуканих фізичних величин.

```

6. Визначаємо усталені значення струму  $i$  та заряду  $q$ :
iуст :=  $\frac{E}{r} = 0.2 \text{ A}$       qc(uc) := linterp(Uc, Q, uc)
qуст := qc(E) =  $9.51 \times 10^{-4} \text{ C}$ 

```

Рисунок 11.19

Необхідно зауважити, що опираючись на отримані функціональні залежності миттєвого струму $i_1(t)$ та заряду $q(t)$ після їх попередньої апроксимації можна, скориставшись законами Кірхгофа або компонентними співвідношеннями, здійснювати подальший аналіз і розрахунок перехідного процесу в електричному колі. Так, наприклад, зміну миттєвої напруги на лінійній індуктивності L в часі визначимо за формулою

$$u_L = L \frac{di_1}{dt},$$

а графік цієї напруги наведемо на рис. 11.20.

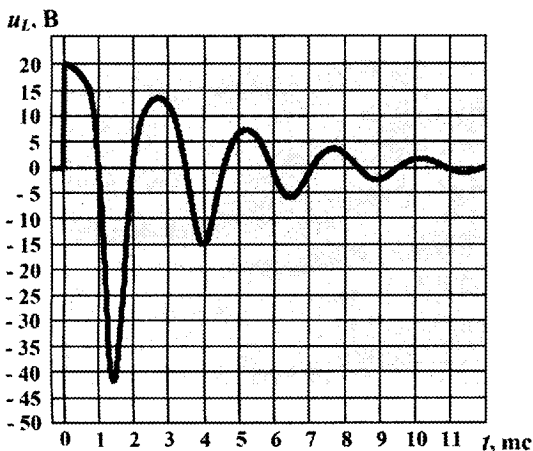


Рисунок 11.20

Побудова графіка зміни миттєвої напруги на індуктивності, наведеного на рис. 11.20, стала можливою після попередньої лі-

нійної інтерполяції (рис. 11.21) по вузлових точках розрахованих вище (див. рис. 11.17) векторів струму i_1 та часу t .

7. Проводимо розрахунок напруги на індуктивності $u_L(t)$:

$$u(\tau) := \text{if} \left[\tau < 0, 0, L \cdot \frac{d}{d\tau} (\text{interp}(t, i_1, \tau)) \right]$$

Рисунок 11.21

11.7 Стійкість станів рівноваги в нелінійних колах

Нелінійним електричним колам внаслідок нелінійності їх диференціальних рівнянь притаманні такі властивості, які якісно змінюють режими роботи цих кіл. Подібне принципово неможливе в електричних колах з лінійними властивостями.

Так, наприклад, нелінійні кола, що мають однакову структуру і ті самі електричні параметри, здатні перебувати не в *єдино* можливому, а в *одному з кількох* можливих усталених режимів роботи, і ці режими можуть суттєво відрізнитися один від одного.

Подібні усталені режими роботи називають *станами рівноваги* електричного кола.

Розглянемо їх докладніше.

На рис. 11.22 показано просте нелінійне електричне коло, до складу якого входять джерело постійної е.р.с. E та нелінійний резистивний елемент.

Вольт-амперна характеристика цього елемента наведена на рис. 11.23. Як бачимо з рисунка, її характерною ознакою є наявність спадної ділянки з від'ємним динамічним опором.

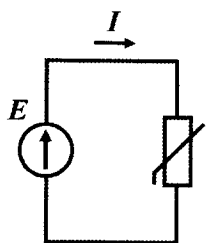


Рисунок 11.22

Для такого електричного кола за деякого заданого значення е.р.с. E існує *три* можливих усталених режими.

Це видно з рис. 11.23, на якому пряма, що відповідає даній е.р.с., тричі перетинає вольт-амперну характеристику: в точці 1, в точці 2 і в точці 3.

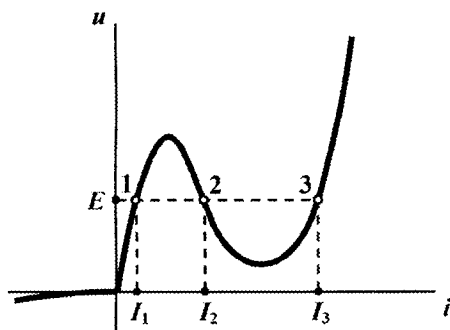


Рисунок 11.23

В якому з трьох можливих режимів роботи буде перебувати електричне коло, залежить не тільки від миттєвого значення вхідної е.р.с., але і від *попереднього стану* цього кола.

Особливістю наведеного прикладу є те, що другий усталений режим роботи якісно відрізняється від першого й третього з точки зору стійкості стану, в якому перебуває чи може перебувати дане нелінійне електричне коло.

Зазвичай надійна і функціонально передбачувана робота електричного кола можлива тільки тоді, коли його усталений режим буде *стійким*.

Розрізняють два різновиди стійкості: *стійкість в малому* та *стійкість у великому*.

Якщо за малих відхилень системи від стану рівноваги вона з перебігом часу повертається до вихідного положення, то такий стан її рівноваги називають *стійким в малому*.

Наразі обмежимося розглядом тільки даного різновиду стійкості стану рівноваги і визначимо умови його існування.

Для цього скористаємося теоретичним підходом, запропонованим А. М. Ляпуновим, відповідно до якого визначити стійкість стану рівноваги в малому для нелінійного електричного кола можна за спрощеними лінеаризованими в околі досліджуваної робочої точки рівняннями.

Нехай процеси, що відбуваються в нелінійному електричному колі, описуються нелінійним диференціальним рівнянням першого порядку

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = 0, \quad (11.38)$$

де $f(x)$ – деяка нелінійна складова.

Припустимо, що в стані рівноваги $x = x_0 = \text{const}$, змінна x отримала деяке мале відхилення ε від стану рівноваги

$$x = x_0 + \varepsilon. \quad (11.39)$$

Підставимо (11.39) в (11.38)

$$\frac{d(x_0 + \varepsilon)}{dt} + f(x_0 + \varepsilon) = 0$$

і нелінійну функцію $f(x_0 + \varepsilon)$ розкладемо в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Тоді

$$\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt} + f(x_0) + \varepsilon f'(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x_0) + \frac{\varepsilon^3}{3!} f'''(x_0) + \dots = 0, \quad (11.40)$$

де $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, ... – значення першої і вищих похідних функції $f(x)$ в точці $x = x_0$.

Оскільки за стану рівноваги

$$x_0 = \text{const}$$

похідна $\frac{dx_0}{dt} = 0$, то з рівняння (11.38) для $x = x_0$ отримаємо

$$f(x_0) = 0.$$

Враховуючи, що відхилення ε за умовою задачі має бути малим, обмежимося тільки двома першими членами розкладу, оскільки іншими через їх малість можна знехтувати.

Тоді з рівняння (11.40) отримаємо однорідне лінійне диференціальне рівняння, що складене відносно малого відхилення ε

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon f'(x_0) = 0. \quad (11.41)$$

Розв'язком цього рівняння буде функція

$$\varepsilon = Ae^{pt}, \quad (11.42)$$

де p є коренем характеристичного рівняння і дорівнює

$$p = -f'(x_0).$$

Вираз (11.42) показує, що з перебігом часу за умови $p < 0$ відхилення ε прямує до нуля.

Це означає, що система повертається у вихідне для себе положення рівноваги, і тому за означенням цей стан x_0 її рівноваги є стійким у малому.

Якщо ж корінь характеристичного рівняння p буде додатним $p > 0$, то, як випливає з (11.42), на початку мале відхилення ε з перебігом часу необмежено зростатиме, що засвідчує нестійкість стану рівноваги цієї системи в точці x_0 .

Проведемо узагальнення, навівши без доведення основні положення *теорема А. М. Ляпунова*, сформульованої для системи, процеси в якій описуються нелінійним диференціальним рівнянням n -го порядку.

1. *Якщо всі корені характеристичного рівняння, складеного для лінеаризованого диференціального рівняння системи, матимуть від'ємні дійсні частини, то стан рівноваги такої системи буде стійким в малому.*

2. *Якщо тільки серед коренів характеристичного рівняння знайдеться хоча б один корінь з додатною дійсною частиною, то стан рівноваги системи буде нестійким.*

3. *Якщо хоча б один із коренів характеристичного рівняння не матиме дійсної частини, а у всіх інших коренів вона буде від'ємною, то за лінеаризованою системою рівнянь скласти висновок щодо стійкості такої системи неможливо.*

Як видно із теорема А. М. Ляпунова, оцінити стійкість стану

рівноваги нелінійного електричного кола можна, насамперед визначивши всі корені характеристичного рівняння.

Однак для системи високого порядку це є досить складною задачею і тому на сьогодні розроблено різні *критерії стійкості* електричних систем. За допомогою цих критеріїв можна дослідити стійкість стану рівноваги електричних кіл, уникнувши необхідності розв'язання кубічних та більш високого порядку характеристичних рівнянь і визначення їх коренів.

До таких основних критеріїв стійкості системи відносять:

- критерій Рауса;
- критерій Гурвіца;
- критерії Найквіста;
- критерій А. М. Михайлова.

Перші два критерії за природою є алгебраїчними, а останні – частотними.

Більш докладну інформацію щодо означених критеріїв стійкості системи можна отримати в спеціальній літературі.

Наразі розглянемо приклади визначення стійкості стану рівноваги деяких заданих нелінійних електричних кіл.

Приклад 11.9

Нехай до складу нелінійного електричного кола, що показане

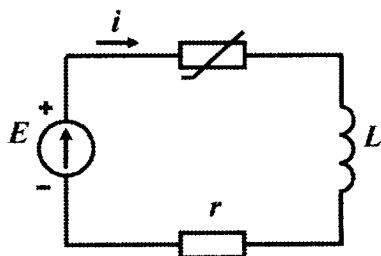


Рисунок 11.24

на рис. 11.24 входить нелінійний резистивний елемент, вольт-амперна характеристика якого має спадну ділянку з від'ємним диференціальним опором (рис. 11.25).

В усталеному режимі за дії постійної е.р.с. джерела зв'язок між напругою

на нелінійному резисторі та струмом, що проходить через нього, визначається, з одного боку, його вольт-амперною характеристикою,

$$u_n = f(i),$$

а з іншого – за другим законом Кірхгофа

$$u_n = E - ri. \quad (11.43)$$

Тоді точка або точки перетину прямої навантаження (11.43) з власне вольт-амперною характеристикою нелінійного елемента будуть станами рівноваги електричного кола, наприклад, точки 1, 2, 3 на рис. 11.25.

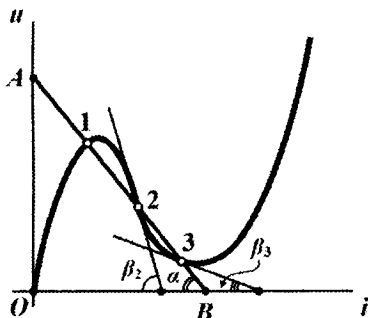


Рисунок 11.25

Позначимо усталене значення струму в цих точках як I_n , а напруги на нелінійному опорі як U_{n_n} , де $n=1, 2, 3$.

Визначимо стійкість станів рівноваги в означених точках.

Диференціальне рівняння кола за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_n = E. \quad (11.44)$$

Складемо диференціальне рівняння відносно величини ε , що є деяким малим відхиленням усталеного електричного струму I_n від стану рівноваги

$$i = I_n + \varepsilon. \quad (11.45)$$

Тоді і миттєва напруга на нелінійному елементі також змінить своє усталене значення

$$u_n = U_{n_n} + v$$

та набуде відхилення v

$$v = \varepsilon r_{\partial n}, \quad (11.46)$$

де $r_{\partial n}$ – динамічний опір нелінійного елемента в точках рівноваги.

Підставимо співвідношення (11.45) і (11.46) в формулу (11.44)

$$L \frac{d(I_n + \varepsilon)}{dt} + r(I_n + \varepsilon) + U_{n_n} + \varepsilon r_{\partial n} = E. \quad (11.47)$$

Оскільки в точках рівноваги:

- електричний струм I_n в колі є постійним, внаслідок чого його похідна

$$\frac{dI_n}{dt} = 0;$$

- напруга на нелінійному опорі дорівнює

$$U_{n_n} = E - rI_n,$$

то з рівняння (11.47) неважко отримати лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку, складене відносно відхилення ε

$$L \frac{d\varepsilon}{dt} + (r + r_{\partial n})\varepsilon = 0. \quad (11.48)$$

Розв'язком цього рівняння є функція

$$\varepsilon = Ae^{pt},$$

де $p = -\frac{r + r_{\partial n}}{L}$.

Оскільки стійкість стану рівноваги, як це було доведено де-що вище, залежить від знака кореня характеристичного рівняння p , то наразі визначимо характер цього знаку для трьох можливих станів рівноваги даного електричного кола $n=1, 2, 3$, врахувавши, що фізично ані опір r , ані індуктивність L не можуть бути від'ємними.

Тоді в точці 1 стану рівноваги, котра знаходиться на зростаючій ділянці вольт-амперної характеристики (рис. 11.25), динамічний опір нелінійного елемента додатний

$$r_{\partial_1} > 0,$$

тому додатною буде і сума

$$r + r_{\partial_1} > 0.$$

Внаслідок цього сам корінь характеристичного рівняння в даній точці набуде від'ємного значення

$$p = -\frac{r + r_{\partial_1}}{L} < 0,$$

а стан рівноваги характеризуватиметься як стійкий в малому.

Для точок 2 і 3, оскільки ті знаходяться на ділянці спаду вольт-амперної характеристики, обидва динамічні опори нелінійного резистора є від'ємними:

$$r_{\partial_2} < 0 \quad \text{та} \quad r_{\partial_3} < 0,$$

але мають різні значення. Тому для визначення знака кореня p необхідно провести порівняння модулів цих опорів з опором r .

І якщо тільки модуль якогось з цих динамічних опорів виявиться більшим, аніж опір r , то це означатиме, що в відповідній точці корінь характеристичного рівняння набудатиме додатного знаку $p > 0$ і стан рівноваги системи, відповідно до теореми А. М. Ляпунова, буде нестійким.

Зазвичай проводити порівняння опорів зручніше за допомогою графічних побудов.

Розглянемо це докладніше.

Графік рівняння (11.43) являє собою пряму (рис. 11.25), яка перетинає осі координат в двох точках: A та B , де координатами першої точки є $u_n = 0$ та $i = \frac{E}{r}$, а другої $u_n = E$ й $i = 0$.

$$\text{Як видно з рисунка, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{OA}{OB}.$$

Оскільки OA в масштабі напруги m_u відповідає E , а OB в масштабі струму m_i – значенню $\frac{E}{r}$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_u E}{m_i \frac{E}{r}} = \frac{m_u}{m_i} r = k r.$$

Таким чином, тангенс кута α пропорційний значенню опора r з коефіцієнтом пропорційності $k = \frac{m_u}{m_i}$.

З цим же коефіцієнтом знаходяться в лінійній пропорції тангенс кута β_n , який лежить між віссю абсцис і дотичною, проведеною в даній точці до графіка характеристики (рис. 11.25), та модуль динамічного опору нелінійного елемента в цій точці

$$|r_{\partial_n}| = \frac{\operatorname{tg} \beta_n}{k}.$$

Так, в точці 2 характеристики $|r_{\partial_2}| = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{k}$, а в точці 3 $|r_{\partial_3}| = \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{k}$.

Як видно з рис. 11.25 кути α , β_2 і β_3 знаходяться у відношенні

$$\beta_2 > \alpha > \beta_3,$$

тому внаслідок пропорційності в такому ж відношенні мають перебувати між собою модулі динамічних опорів в точках 2 і 3 та опір r

$$|r_{\partial_2}| > r > |r_{\partial_3}|.$$

Отже, як впливає з нерівності, в точці 3 через те, що

$$r + r_{\partial_3} > 0,$$

корінь характеристичного рівняння, як і в точці 1, буде від'ємним

$$p = -\frac{r + r_{\partial_3}}{L} < 0$$

і стан рівноваги характеризуватиметься як стійкий в малому.

А ось в точці 2 через суму

$$r + r_{\partial_2} < 0$$

корінь характеристичного рівняння набуде додатного знаку

$$p = -\frac{r + r_{\partial_2}}{L} > 0.$$

Тому, відповідно до положень теореми А. М. Ляпунова, в цій точці стан рівноваги електричного кола буде однозначно нестійким.

Приклад 11.10

Визначимо точки стану рівноваги та стійкість нелінійного електричного кола (рис. 11.26) під час його перехідного процесу.

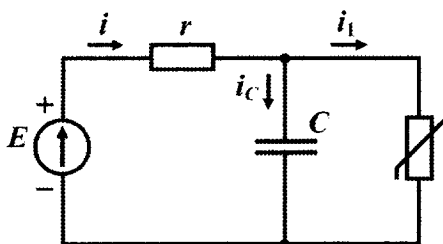


Рисунок 11.26

Вольт-амперна характеристика нелінійного резистивного елемента є заданою і являє собою криву, показану на рис. 11.27.

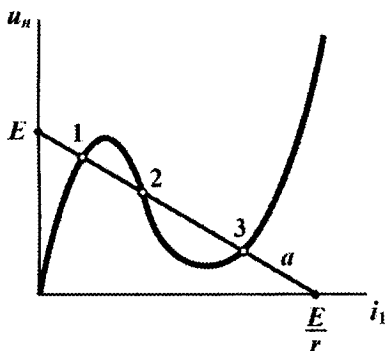


Рисунок 11.27

Для нового усталеного режиму електричного кола маємо

$$u_n = E - ri.$$

Точки перетину (точки 1, 2, 3 на рис. 11.27) побудованої за цим рівнянням прямої a з вольт-амперною характеристикою неліній-

ного елемента визначають стани рівноваги заданого електричного кола.

Для заданої схеми складемо на підставі законів Кірхгофа систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} ri + u_C &= E \\ i &= i_C + i_1 \\ u_C &= u_n \\ i_C &= C \frac{du_C}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (11.49)$$

Отримаємо з цієї системи одне диференціальне рівняння, складене стосовно тих електричних величин (u_n та i_1), які характеризують нелінійний елемент.

З третього і четвертого рівнянь системи (11.49) випливає

$$i_C = C \frac{du_n}{dt}.$$

Тоді друге рівняння можна переписати

$$i = C \frac{du_n}{dt} + i_1.$$

Якщо підставити це співвідношення в перше рівняння системи і врахувати третє

$$r \left(C \frac{du_n}{dt} + i_1 \right) + u_n = E,$$

то отримаємо шукане диференціальне рівняння, складене відносно функції напруги на нелінійному опорі u_n

$$rC \frac{du_n}{dt} + ri_1 + u_n = E. \quad (11.50)$$

Позначимо значення струмів і напруг на нелінійному опорі в точках рівноваги як I_{1n} та U_{nn} , де $n=1, 2, 3$.

За малого відхилення v від стану рівноваги для миттєвої напруги на опорі запишемо

$$u_n = U_{nn} + v.$$

Тоді і електричний струм через цей елемент також набуде відхилення ε

$$i_1 = I_{1n} + \varepsilon = I_{1n} + \frac{v}{r_{\partial n}},$$

де $r_{\partial n}$ – динамічний опір нелінійного резистора в даній точці рівноваги.

Підставимо ці співвідношення в формулу (11.50) і складемо диференціальне рівняння відносно відхилення v

$$rC \frac{d(U_{n_n} + v)}{dt} + r \left(I_{1n} + \frac{v}{r_{\partial n}} \right) + U_{n_n} + v = E. \quad (11.51)$$

Оскільки в точках рівноваги усталене значення напруги на нелінійному опорі складає

$$U_{n_n} = E - rI_{1n},$$

а її похідної

$$\frac{dU_{n_n}}{dt} = 0,$$

то на підставі диференціального рівняння (11.51) можна записати

$$rC \frac{dv}{dt} + \left(\frac{r}{r_{\partial n}} + 1 \right) v = 0. \quad (11.52)$$

Розв'язком цього лінійного однорідного диференціального рівняння 1-го порядку буде функція відхилення $v(t)$

$$v = Ae^{pt}, \quad (11.53)$$

де $p = -\frac{\frac{r}{r_{\partial n}} + 1}{rC} = -\frac{r + r_{\partial n}}{r r_{\partial n} C}$ є коренем характеристичного рівняння.

В точках 1 і 3 (рис. 11.27), які розташовані на зростаючих ділянках вольт-амперної характеристики, обидва значення динамічного опору є додатними

$$r_{\partial 1} > 0 \quad \text{і} \quad r_{\partial 3} > 0,$$

внаслідок чого корені характеристичного рівняння набудуть від'ємних значень і, відповідно до теореми А. М. Ляпунова, стан рівноваги в цих точках є стійким в малому.

Динамічний опір нелінійного елемента в точці 2, яка розташована на ділянці спаду вольт-амперної характеристики, буде від'ємним $r_{\partial_2} < 0$ і його модуль перевищуватиме опір r , тому

$$r + r_{\partial_2} < 0.$$

Але ж, з іншого боку, від'ємний динамічний опір знаходиться і в знаменнику виразу кореня характеристичного рівняння.

Це означає, що в точці 2 знак кореня не зміниться, залишившись від'ємним $p < 0$, і тому в цій точці коло перебуватиме в стійкому стані рівноваги.

Таким чином, як це видно із розглянутих вище прикладів, існування нестійких станів рівноваги в електричному колі першого порядку можливе тільки за наявності хоча б одного нелінійного елемента із *спадною* ділянкою його характеристики. Це є необхідною умовою. Однак водночас наведені приклади демонструють і недостатній характер даної умови, оскільки окрім неї мають бути реалізованими і певні співвідношення між параметрами лінійних і нелінійних елементів.

11.8 Визначення стійкості станів рівноваги методом фазових траєкторій

Метод фазових траєкторій належить до якісних методів аналізу нелінійних електричних кіл.

Він дозволяє:

- визначити стани рівноваги електричної системи та її стійкість, не розв'язуючи систему диференціальні рівнянь в явній формі;
- оцінити максимальні значення струмів та напруг на окремих елементах;
- дослідити ступінь впливу тих чи інших елементів електричного кола на перебіг перехідного процесу та його характер;
- проаналізувати вплив початкових умов на режими роботи кола тощо.

Використаємо даний метод стосовно нелінійних електричних кіл першого порядку.

Нехай в деякому електричному колі процес описується нелінійним диференціальним рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (11.54)$$

де змінна $x = x(t)$ може позначати струм чи напругу в колі, а $f(x)$ – заздалегідь відома нелінійна функція, яка залежить від параметрів цього кола.

Оскільки функція $f(x)$ задана, то існує можливість побудувати криву лінію в декартовій системі координат, де по осі абсцис відкладають значення змінної x , а по осі ординат – значення її похідної $f(x) = \frac{dx}{dt}$.

Отримана залежність називається *фазовою траєкторією*, а система координат, де вона побудована – *фазовим простором*.

Одну із можливих фазових траєкторій електричного кола наведено на рис. 11.28.

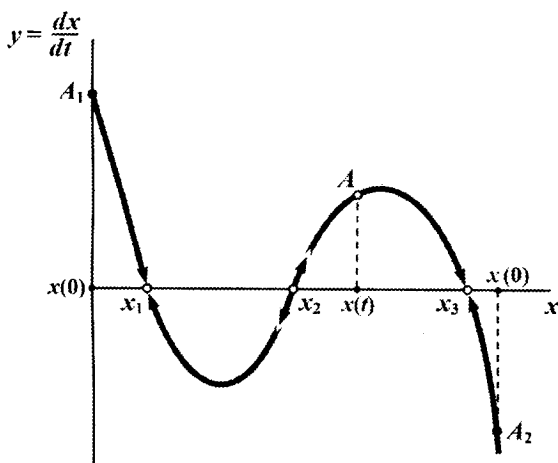


Рисунок 11.28

Зміна значення функції $x(t)$ з перебігом часу відповідає руху вздовж фазової траєкторії робочої точки A , яку називають *зображувальною точкою* (або *образотворчою*). Швидкість руху цієї точки по фазовій траєкторії $\frac{dx}{dt}$ є *фазовою швидкістю*.

На ділянках фазової траєкторії, що знаходяться в верхній півплощині, фазова швидкість додатна $\left(\frac{dx}{dt} > 0\right)$, тому змінна x зростає, а зображувальна точка рухається вздовж фазової траєкторії в напрямку *зліва направо*.

В нижній півплощині для точок фазової траєкторії похідна $\frac{dx}{dt}$ є від'ємною, тому зображувальна точка в цій частині фазового простору переміщується по фазовій траєкторії *справа наліво*.

На рис. 11.28 показані напрямки переміщення зображувальної точки на різних ділянках фазової траєкторії.

Якщо до складу деякого електричного кола входять джерела тільки постійної напруги, то і усталені значення змінної x також будуть постійними, тобто $x_{уст} = const$, тому для такого усталеного режиму похідна $\frac{dx}{dt} = 0$. Це означає, що точки стану рівноваги, тобто можливі усталені значення, знаходяться в місцях перетину фазової траєкторії з віссю абсцис (x_1 , x_2 та x_3 на рис. 11.28).

Отже, за фазовою траєкторією можна прослідкувати увесь шлях руху зображувальної точки від початку перехідного процесу ($x = x(0)$) до нового усталеного режиму ($x = x(\infty) = x_{уст}$).

Так, наприклад, якщо початкове значення змінної x дорівнює $x(0) = 0$ (що відповідає точці A_1 на рис. 11.28), то зображувальна точка, перебуваючи в верхній півплощині, буде здійснювати рух вправо і за умови $t \rightarrow \infty$ досягне точки рівноваги x_1 . Якщо ж початкове значення $x(0) > x_3$ (точка A_2), то, як видно з рисунка, при $t \rightarrow \infty$ зображувальна точка буде прямувати до точ-

ки рівноваги x_3 . Обидві точки відповідають стійким станам рівноваги, оскільки в них за малих відхилень зображувальна точка з часом знову повертається назад до цих станів рівноваги.

Однак стан рівноваги x_2 є нестійким, тому що в ньому за малих відхилень від цього стану зображувальна точка буде рухатися або до точки x_1 , або до точки x_3 .

Відтак фазова траєкторія дозволяє:

- визначити точки рівноваги системи;
- дослідити напрям руху зображувальної точки на різних ділянках фазової траєкторії;
- оцінити стійкість чи нестійкість станів рівноваги;
- проаналізувати вплив початкових умов на режими роботи кола і зокрема на його усталені значення $x_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$;
- вивчити зміну перебігу перехідного процесу в залежності від зміни параметрів елементів електричного кола тощо.

Приклад 11.11

Побудуємо фазову траєкторію для нелінійного електричного кола, яке зображене на рис. 11.24 і проведемо її аналіз.

Диференціальне рівняння (11.44)

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_n = E$$

перепишемо у вигляді

$$L \frac{di}{dt} = (E - ri) - u_n. \quad (11.55)$$

Як бачимо, права частина виразу (11.55) являє собою різницю $F(i)$ між рівнянням навантажувальної прямої

$$u_n = E - ri$$

та нелінійною вольт-амперною характеристикою $u_n = f(i)$ (див. рис. 11.25), тобто

$$F(i) = (E - ri) - u_n(i).$$

Тоді (11.55) перепишемо

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} F(i).$$

З останнього рівняння випливає, що для якісного дослідження фазової траєкторії достатньо побудувати графік функції $F(i)$. Це можна зробити, наприклад, безпосередньо за допомогою графіків навантажувальної прямої та вольт-амперної характеристики в одній системі координат. Однак для підвищення точності аналізу доцільно використовувати засоби і алгоритм комп'ютерної математики.

Так, на рис. 11.29 наведено фазову траєкторію нелінійного електричного кола (див. рис. 11.24), побудовану за результатами моделювання в програмному середовищі Mathcad.

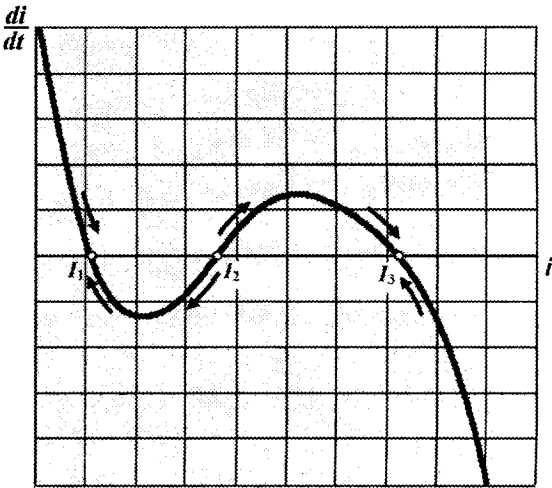


Рисунок 11.29

Графік показує, що коло має три стани рівноваги: в точках I_1 , I_2 та I_3 . Оскільки зображувальна точка в верхній фазовій півплощині здійснює рух вправо, а в нижній – навпаки, то, вказавши напрям руху цієї точки на фазовій траєкторії (рис. 11.29), неважко дати оцінку станам рівноваги I_1 , I_2 та I_3 заданого кола.

Як видно з рисунка, стани з усталеними струмами I_1 та I_3 є стійкими, а I_2 – нестійким.

Що ж стосується впливу початкових умов на усталений режим роботи даного електричного кола, то з рис. 11.29 добре видно, що за умови $i(0) < I_2$ усталеним значенням струму буде струм I_1 , а за зворотної умови $i(0) > I_2$ – струм I_3 .

Приклад 11.12

Побудуємо і дослідимо фазову траєкторію для нелінійного електричного кола, яке показано на рис. 11.26.

Рівняння фазової траєкторії отримуємо із нелінійного диференціального рівняння (11.50)

$$rC \frac{du_n}{dt} + ri_1 + u_n = E.$$

Перепишемо це рівняння відносно похідної. Тоді

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{1}{rC} [(E - ri_1) - u_n] \quad (11.56)$$

або

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{1}{rC} F(u_n),$$

де $F(u_n) = (E - ri_1) - u_n$, а $i_1 = f^{-1}(u_n)$.

Наразі потрібно зауважити, що функція $F(u_n)$ не обов'язково має бути однозначною, оскільки одному значенню незалежної змінної u_n може бути співвіднесено кілька значень цієї функції та її похідних $\frac{du_n}{dt}$. Практично це означає, що перебуваючи в тих самих станах, коло може зазнавати змін цих станів із різною швидкістю.

Отже, для якісного дослідження фазової траєкторії достатньо побудувати графік функції $F(u_n)$, скориставшись для цього двома іншими графіками (рис. 11.30): нелінійною вольт-амперною характеристикою опору

$$u_n = f(i_1)$$

і побудованою в тій же системі координат прямою

$$u_n = E - ri_1.$$

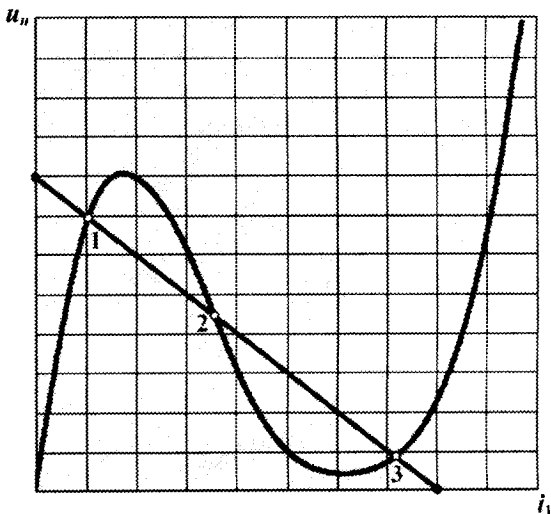


Рисунок 11.30

Різниця між графіками цих залежностей за зміни струму i_1 і являтиме собою наведену в графічній формі функцію $F(u_n)$.

Фазова траєкторія даного нелінійного електричного кола, побудована відносно напруги u_n , матиме вигляд кривої, яка показана на рис. 11.31.

Як видно з рисунка, ця крива перетинає вісь абсцис в трьох точках, тобто рівняння

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{1}{rC} F(u_n) = 0$$

має три корені.

Ці три точки U_{n1} , U_{n2} і U_{n3} фазового простору будуть точками рівноваги нелінійного кола за заданих вихідних умов (рис. 11.31).

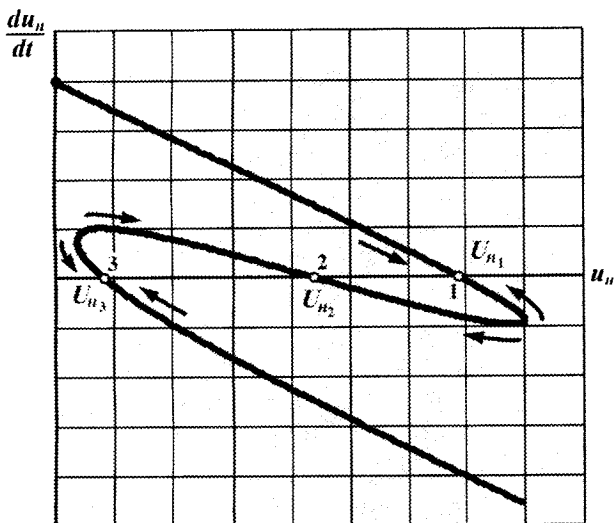


Рисунок 11.31

Проаналізувавши напрям руху зображувальної точки вздовж фазової траєкторії (див. рис. 11.31), переконуємося в тому, що всі три стани рівноваги електричного кола є стійкими, як це і було доведено раніше, тільки аналітичним шляхом за допомогою теореми А. М. Ляпунова (див. приклад 11.10).

В обох вищерозглянутих прикладах методом фазових траєкторій були визначені та вивчені стани рівноваги нелінійних електричних кіл *першого порядку*, тобто з одним реактивним елементом (див. приклади 11.11 та 11.12).

Однак метод фазових траєкторій дозволяє графічно досліджувати й якісно аналізувати процеси в електричних колах *другого* і більш високих порядків.

І хоча в цьому випадку складання рівнянь і побудова фазових траєкторій буде значно складнішою, переваги які притаманні означеному методу із підвищенням порядку кола будуть тільки набирати вагу, оскільки метод фазових траєкторій є графічною

інтерпретацією нелінійних диференціальних рівнянь, що описують процеси в електричному колі, і не потребує необхідності їх інтегрування.

Більш докладний розгляд складання рівнянь і побудови фазових траєкторій в нелінійних колах другого і вищих порядків можна знайти в спеціальній літературі.

11.9 Автоколивання

Як було показано вище (див. пп. 11.7 і 11.8), якщо тільки до складу електричного кола першого порядку входить нелінійний елемент зі спадною ділянкою його характеристики, то в такому колі поряд зі стійкими станами рівноваги можуть існувати і нестійкі стани.

Найбільшу зацікавленість викликають випадки, коли в електричному колі існує тільки *один нестійкий стан рівноваги*.

Розгляне це докладніше.

Приклад 11.13

За приклад візьмемо нелінійне електричне коло, яке зображене на рис. 11.26. Змінимо електричні параметри цього кола і задамо їх такими, щоб два стійких стани його рівноваги взагалі зникли, а залишився б тільки один стан рівноваги, який був би нестійким. Для цієї мети зовнішню характеристику, яка описується рівнянням

$$u_n = E - r i_1$$

і наведена для даного кола на рис. 11.27, необхідно повернути і розташувати таким чином, щоб вона перетинала вольт-амперну характеристику тільки в одній точці, як це показано на рис. 11.32. Практично цього можна досягти, якщо водночас збільшити величини е.р.с. E і лінійного опору r . В цьому випадку динамічний опір r_0 нелінійного елемента в робочій точці буде від'ємним, а його модуль – меншим, аніж опір r , через що корінь характеристичного рівняння (приклад 11.10)

$$p = -\frac{r+r_0}{r r_0 C}$$

стає додатним, а єдиний стан рівноваги цього кола – нестійким.

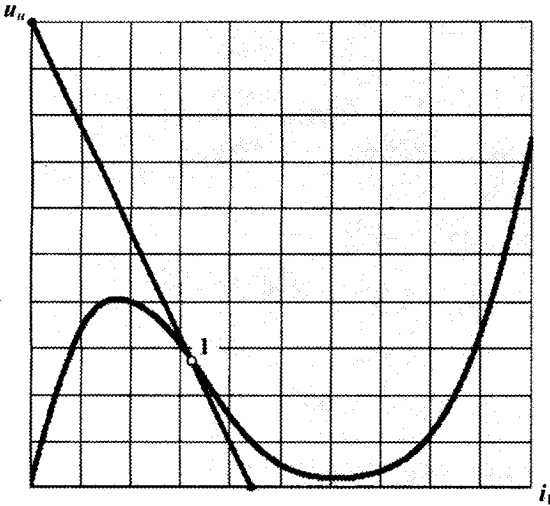


Рисунок 11.32

Щоб визначити, який саме режим буде встановлено в електричному колі, зручно скористатися методом фазових траєкторій і на основі рівняння (11.56)

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{1}{rC} [(E - r i_1) - u_n]$$

відносно u_n сформуванати фазову траєкторію. Для цього можна застосувати методуку, наведену в прикладі 11.12, побудувавши за

виразом $\frac{du_n}{dt} = \frac{F(u_n)}{rC}$ графік функції

$$F(u_n) = (E - r i_1) - u_n.$$

Фазову траєкторію і напрями руху зображувальної точки показано на рис. 11.33.

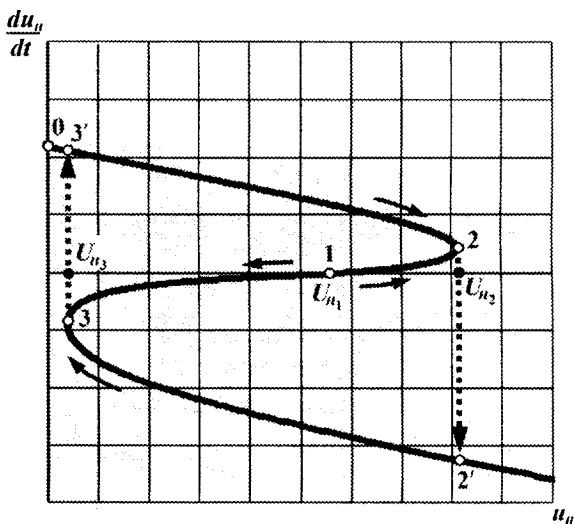


Рисунок 11.33

Нехай перехідний процес в цьому колі виникає за нульових початкових умов, коли напруга на ємності $u_C(0)$, а отже, і на нелінійному елементі $u_n(0)$, дорівнює нулю $u_C(0) = u_n(0) = 0$.

На фазовій траєкторії це буде точка 0 (рис. 11.33).

Внаслідок того, що похідна напруги u_n є додатною $\frac{du_n}{dt} > 0$,

з часом зображувальна точка буде рухатися в напрямку зростання цієї напруги, тобто зліва направо вздовж ділянки фазової траєкторії 0–2.

Однак, досягнувши точки 2 (див. рис. 11.33), з цієї ж причини зображувальна точка принципово не зможе рухатися далі ділянкою 2–1 в напрямку до точки 1, оскільки такий рух означав би зменшення напруги u_n , тобто похідна $\frac{du_n}{dt}$ мала б бути від'ємною. Але ж на цій ділянці, як видно з рисунка, знак похідної $\frac{du_n}{dt}$ додатний, тому для того, щоб рух системи до єдиного

стану своєї рівноваги, себто до точки 1, продовжував зберігатися і надалі, необхідна зміна знаку похідної $\frac{du_n}{dt}$, що і відбувається з переходом зображувальної точки стрибком (миттєво) з точки 2 до точки 2', в якій за тієї ж напруги u_n її похідна буде вже від'ємною. Через такий знак похідної напруга на нелінійному опорі u_n зменшуватиметься, а зображувальна точка здійснюватиме свій рух вліво вздовж ділянки фазової траєкторії 2' – 3.

В точці 3 з вищеописаних причин знову з'являється необхідність в зміні знаку похідної $\frac{du_n}{dt}$, що приведе до її стрибкоподібної зміни, а саме з точки 3 в точку 3' на фазовій траєкторії.

Надалі процес зазнає повторень.

Отже, в електричному колі попри те, що прикладена напруга є постійною, встановлюється періодичний коливальний режим.

Очевидно, що такий рух системи в околі стану своєї рівноваги, якому, як видно з рис. 11.33, властива *періодичність*, також можна вважати *динамічним* станом рівноваги, тобто *усталеним режимом роботи* електричного кола.

11.10 Аналіз перехідних процесів в нелінійних електричних колах засобами математичної системи Mathcad

Як неодноразово наголошувалось вище, розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь, що описують процеси в нелінійних електричних колах здійснюють зазвичай наближено, а тому аналіз складних електричних кіл з багатьма нелійними елементами можна проводити тільки за допомогою засобів обчислювальної техніки і сучасних програм комп'ютерної математики, таких як Mathcad, Maple, Matlab, Mathematica тощо.

Зазвичай в алгоритмах останніх домінують числові методи інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, що і робить

отримані розв'язки наближеними.

Однак потужний характер сучасної обчислювальної техніки і програм комп'ютерної математики дозволяють настільки зменшувати крок інтегрування, наскільки цього потребує поставлена задача аналізу перехідного процесу, що зрештою нівелює наближеність отриманих розв'язків і цілком забезпечує необхідну точність.

Розв'яжемо кілька прикладів аналізу динаміки нелінійних електричних кіл в програмному середовищі Mathcad.

Приклад 11.14

В цій задачі проведемо розрахунок та аналіз перехідного процесу в нелінійному електричному колі, що виникає внаслідок його під'єднання до джерела постійної е.р.с. E (рис. 11.34). Електричне коло візьмемо з прикладу 11.10.

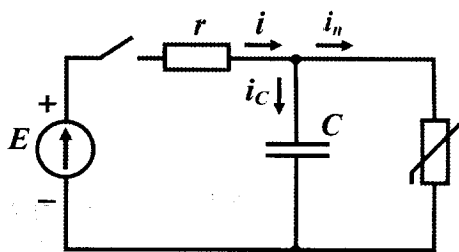


Рисунок 11.34

До складу кола входить опір з нелінійною вольт-амперною характеристикою $u_n = f(i_n)$, яку подано таблицею 11.3.

Таблиця 11.3

Вольт-амперна характеристика $u_n = f(i_n)$ резистивного елемента												
I_n	mA	0	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600
U_n	V	0	8	10	8,5	4	1,5	0,6	1	3	9	25

Отже, насамперед на підставі вихідних даних табл. 11.3

формуємо в програмі системи Mathcad функцію заданої характеристики нелінійного опору, для чого, вважаючи наведені в таблиці точки вузловими, проведемо апроксимацію характеристики у спосіб сплайн-інтерполяції кубічними поліномами (рис. 11.35).

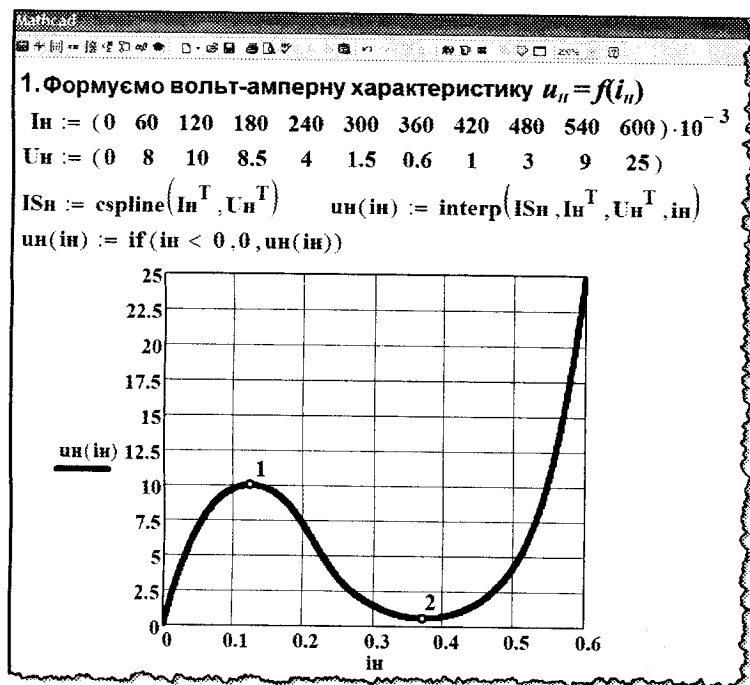


Рисунок 11.35

З рисунка видно, що ця характеристика є немонотонною і неоднозначною. Однак, як буде показано далі, складність полягає в тому, що для розв'язування даної задачі потрібна зворотна до заданої залежності функція $i_n = f^{-1}(u_n)$, якій притаманна неоднозначність. Тому зворотну функцію вольт-амперної характеристики подамо трьома монотонними залежностями (рис. 11.36, а):

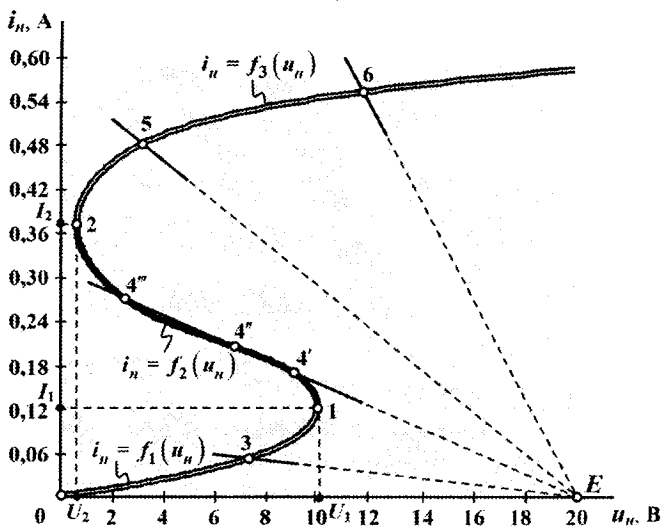
- $i_n = f_1(u_n)$, яка визначена на ділянці $0 \leq i_n \leq I_1$, де I_1 відповідає напрузі U_1 , що є напругою локального максимуму ха-

- ктеристики $i_n = f(i_n)$ (точка 1 на рис. 11.35 або на рис. 11.36, б);
- $i_n = f_2(u_n)$ для ділянки $I_1 \leq i_n \leq I_2$, де струм I_2 відповідає напрузі U_2 локального мінімуму характеристики $i_n = f(i_n)$ (точка 2);
 - $i_n = f_3(u_n)$ на ділянці $I_2 \leq i_n$.

```

2. Формуємо вольт-амперну характеристику  $i_n = f^{-1}(u_n)$ :
in := 0      I1 := Maximize(ун, in) = 0.124      U1 := ун(I1) = 10.005
in := 0.3    I2 := Minimize(ун, in) = 0.372      U2 := ун(I2) = 0.574
n := 100     k := 0..n
I1nk := k * I1 / n      U1nk := ун(I1nk)      in1(ун1) := linterp(U1н, I1н, ун1)
I2nk := I2 - k * (I2 - I1) / n      U2nk := ун(I2nk)      in2(ун2) := linterp(U2н, I2н, ун2)
I3nk := I2 + k * (0.6 - I2) / n      U3nk := ун(I3nk)      in3(ун3) := linterp(U3н, I3н, ун3)
  
```

а)



б)

Рисунок 11.36

На рис. 11.36, б побудовано в одній системі координат зворотну функцію $i_n = f^{-1}(u_n)$ характеристики нелінійного елемента, а також за різних значень опору r чотири прямих

$$u_n = E - ri$$

за умов $i = i_n$ та $i_C = 0$, тобто які визначають якісно різні можливі усталені режими даного кола, а отже і різновиди його перехідного процесу.

Так, для прямої, яка перетинає характеристику в точці 3, $r = 250$ Ом, для точок 4', 4'' і 4''' $r = 65$ Ом, для точки 5 $r = 35$ Ом і для точки 6 $r = 15$ Ом.

Як видно з рисунка, для всіх випадків значення е.р.с. залишається сталим і складає $E = 20$ В.

Отже, проведемо розрахунок і дослідимо всі чотири якісно відмінні типи різновиди перехідного процесу. Для цього засобами внутрішньої мови програмування середовища Mathcad сформуємо програмний модуль

$$F(E, r, C) = \begin{pmatrix} t \\ u_C \\ T \end{pmatrix}$$

(по суті функцію), який за заданих довільних параметрів кола E , r та C повертатиме у табличний спосіб функціональну залежність напруги на ємності від часу $u_C = f(t)$, а також значення періоду коливаний T , якщо режим буде періодичним. У випадку аперіодичного перехідного процесу T не набуватиме числових значень, а повертатиметься повідомлення про характер перехідного процесу.

На рис. 11.37 наведено програму формування залежності $F(E, r, C)$, побудовану з таких міркувань.

Динамічний режим роботи заданого електричного кола описується диференціальним рівнянням (11.50) (див. приклад 11.10)

$$rC \frac{du_C}{dt} + ri_n + u_C = E, \quad (11.57)$$

яке складене відносно напруги на ємності u_C .

```

Mathcad [Величчини 10 Г.]
File Edit View Help Format Tools Symbolics Window Help
3. Формуємо на основі прямої формули Ейлера
   програмний модуль F(E, r, C):
h := 10-6
F(E, r, C) := (i ← 0), (ti ← 0), (uci ← 0), (m ← 0)
   for j ∈ 1..3
     T ← i if j = 3
     while uci ≤ U1
       (i ← i + 1), (ti ← ti-1 + h)
       uci ← uci-1 + h ·  $\frac{1}{C} \cdot \left( \frac{E - uc_{i-1}}{r} - \ln_1(uc_{i-1}) \right)$ 
       if |uci - uci-1| ≤ 10-6
         m ← m + 1
         return  $\begin{pmatrix} t \\ uc \end{pmatrix}$  if m ≥ 10
         "Аперіодичний процес"
     while uci ≥ U2
       (i ← i + 1), (ti ← ti-1 + h)
       uci ← uci-1 + h ·  $\frac{1}{C} \cdot \left( \frac{E - uc_{i-1}}{r} - \ln_3(uc_{i-1}) \right)$ 
       if |uci - uci-1| ≤ 10-6
         m ← m + 1
         return  $\begin{pmatrix} t \\ uc \end{pmatrix}$  if m ≥ 10
         "Аперіодичний процес"
     T ← (i - T) · h if j = 3
    $\begin{pmatrix} t \\ uc \\ T \end{pmatrix}$ 

```

Рисунок 11.37

Подамо рівняння (11.57) нормальною формою (див. п. 11.6),

врахувавши, що $u_n = u_C$.

Тоді

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \left[\frac{E - u_C}{r} - f^{-1}(u_C) \right] \quad (11.58)$$

де функція $i_n = f^{-1}(u_C)$ в залежності від поточного положення робочої точки на вольт-амперній характеристиці являє собою або функцію $i_n = f_1(u_C)$, якщо $0 \leq i_n \leq I_1$ (ділянка 0–1 на рис. 11.36, б), або $i_n = f_3(u_C)$ за умови $i_n \geq I_2$ (ділянка 2–6). Як було показано вище, особливістю роботи даного кола є те, що за жодних умов робоча точка не перебуватиме на спадній ділянці 1–2 характеристики ані під час перехідного процесу, ані в усталеному режимі.

Розв'язування даного нелінійного диференціального рівняння проведемо за допомогою методу Ейлера (див. п. 11.5). Тоді пряму формулу Ейлера запишемо на підставі рівняння (11.58).

Так, коли робоча точка буде знаходитися на ділянці 0–1 характеристики, а на початок перехідного процесу (за нульових початкових умов) вона буде знаходитись саме там, то кожне наступне дискретне значення напруги на ємності $u_{C_{n+1}}$ визначатимемо через попереднє u_{C_n} за формулою

$$u_{C_{n+1}} = u_{C_n} + h \frac{1}{C} \left[\frac{E - u_{C_n}}{r} - f_1(u_{C_n}) \right]. \quad (11.59)$$

Якщо ж робоча точка перебуватиме на ділянці 2–6 характеристики, то розрахунковою буде інша формула Ейлера

$$u_{C_{n+1}} = u_{C_n} + h \frac{1}{C} \left[\frac{E - u_{C_n}}{r} - f_3(u_{C_n}) \right], \quad (11.60)$$

яка відрізняється від (11.58) функцією $f^{-1}(u_C)$.

В формулах (11.59) та (11.60) величина h є заздалегідь заданим кроком інтегрування. Для розв'язування нашої задачі виберемо $h = 1 \text{ мкс}$.

Співвідношення (11.59) та (11.60) покладені в основу програмного блоку, наведеного на рис. 11.37.

Тепер для розрахунку в даному нелінійному колі того чи іншого перехідного процесу достатньо попередньо задати значення його параметрів E , r та C , наприклад, так, як це показано на рис. 11.38 для режиму, що відповідає точці 3 на рис. 11.36, б ($E = 20\text{В}$, $r = 250\text{ Ом}$, $C = 10\text{ мкФ}$).

4. Розв'язуємо диференціальне рівняння за допомогою формули Ейлера:

$E := 20 \quad r := 250 \quad C := 10 \cdot 10^{-6}$

$t(E, r, C) := F(E, r, C)_0$

$uc(E, r, C) := F(E, r, C)_1$

$T(E, r, C) := F(E, r, C)_2$

$T(E, r, C) = \text{"Аперіодичний процес"}$

	0
0	0
1	$1 \cdot 10^{-6}$
2	$2 \cdot 10^{-6}$
3	$3 \cdot 10^{-6}$
4	$4 \cdot 10^{-6}$
5	$5 \cdot 10^{-6}$
6	$6 \cdot 10^{-6}$
7	...

$t(E, r, C) =$

	0
0	0
1	$8 \cdot 10^{-3}$
2	0.016
3	0.024
4	0.032
5	0.04
6	0.048
7	...

$uc(E, r, C) =$

Рисунок 11.38

Як видно з рисунка, за вказаних параметрів, в колі спостерігатиметься аперіодичний перехідний процес, в чому легко пересвідчитися, побудувавши за результатами обчислення графік зміни напруги на ємності у часі $u_C(t)$ (рис. 11.39, а).

Аналогічно, послідовно змінюючи параметри заданого кола, зокрема його опір r , можна дослідити і інші заявлені вище різновиди перехідного процесу (рис. 11.39).

Так, на рис. 11.39, б за результатами обчислень побудовано

графік зміни напруги на ємності $u_C(t)$, розпочинаючи відразу після комутації, коли опір $r = 65$ Ом, що відповідає точці 4 на рис. 11.36, б; на рис. 11.39, в – коли $r = 35$ Ом (точка 5); на рис. 11.39, г – коли $r = 35$ Ом (точка 6).

Значення е.р.с. та ємності під час розрахунків залишалися сталими і складали $E = 20$ В, $C = 10$ мкФ (див. рис. 11.38).

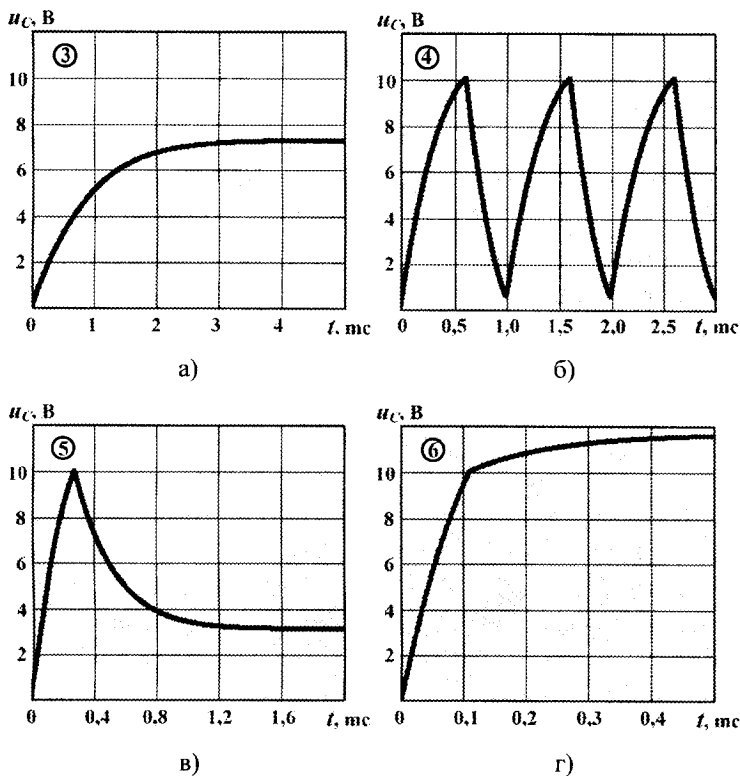


Рисунок 11.39

Аналіз отриманих графіків (рис. 11.39) показує, що для точок 3, 5 і 6 має місце аперіодичний перехідний процес, який в кожному випадку по-своєму прямує до нового усталеного режи-

му, що визначається положенням цих точок на вольт-амперній характеристиці нелінійного елемента (див. рис. 11.36, б).

Що ж стосується випадку, коли пряма

$$u_n = E - ri$$

перетинає характеристику на ділянці від'ємного диференціального опору (точки 4', 4'' і 4''' на рис. 11.36, б), то, як видно з рис. 11.39, б, в колі спостерігаються автоколивання (див. п. 11.9), під час яких напруга $u_C(t)$ після короткого перехідного процесу надалі зазнає періодичних у часі змін. При цьому амплітуда коливань дорівнює

$$U_{max} = U_1 = 10,005 \text{ В},$$

а їхнє найменше значення в усталеному режимі

$$U_{min} = U_2 = 0,574 \text{ В}.$$

Неважко визначити і період T автоколивань, оскільки він повертається програмним модулем $F(E, r, C)$. Так, за заданих параметрів кола період коливань напруги складає

$$T = 0,994 \text{ мс},$$

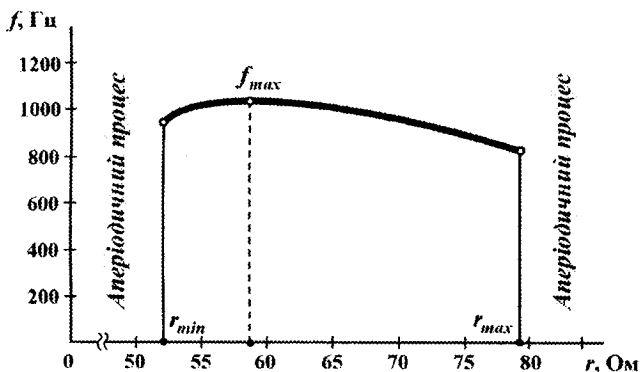
а їх частота – відповідно

$$f = \frac{1}{T} = 1006 \text{ кГц}.$$

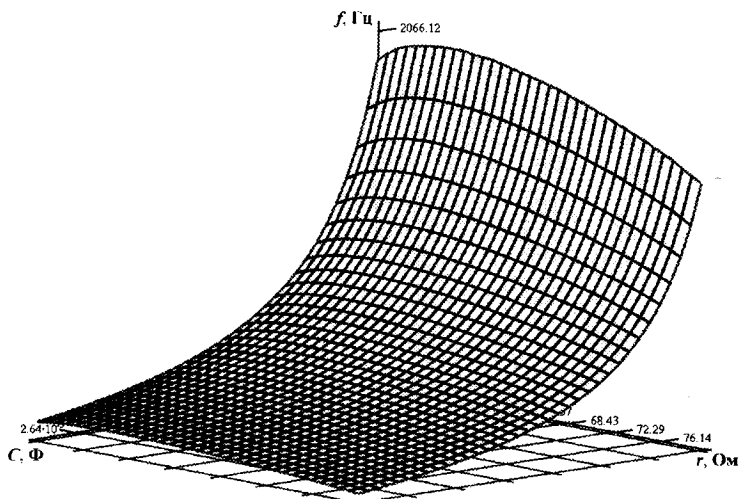
Однак необхідно зауважити, що частота коливань функціонально залежить від параметрів електричного кола E , r та C і будь-яка зміна хоча б одного із них приводить до зміни частоти. Складена програма дозволяє засобами Mathcad провести поглиблене дослідження цієї залежності, оскільки період, а, отже, і частота, являють собою функцію трьох змінних

$$f(E, r, C) = \frac{1}{T(E, r, C)}.$$

Ми ж наведемо тільки два графіки – залежності $f = \varphi(r)$ зміни частоти f автоколивань у колі від зміни опору r , поклавши інші два параметри сталими і такими, що дорівнюють $E = 20 \text{ В}$, $C = 10 \text{ мкФ}$ (рис. 11.40, а) та залежність $f = \psi(r, C)$, де $E = 20 \text{ В}$ (рис. 11.40, б).



а)



б)

Рисунок 11.40

Розрахунки в програмному середовищі Mathcad показують, що за заданої е.р.с. $E = 20$ В автоколивання вже розпочинаються з опору $r_{min} = 52$ Ом, а перериваються, коли $r_{max} = 79$ Ом.

В першому випадку (за сталих е.р.с. E і ємності C) функція

$f = \varphi(r)$ набуває максимального значення ($f_{max} = 1032$ Гц), якщо опір $r = 58$ Ом (рис. 11.40, а), але зі зміною ємності C , як це було зроблено в другому випадку (від 5 мкФ до 30 мкФ), частота знає більш помітних змін (рис. 11.40, б). При цьому зміна ємності не приводить до зриву коливальних та зміни значень опорів r_{min} і r_{max} .

І наостанок на рис. 11.41 наведемо фазову траєкторію для автоколивального режиму (рис. 11.39, б) за наведених вище параметрів.

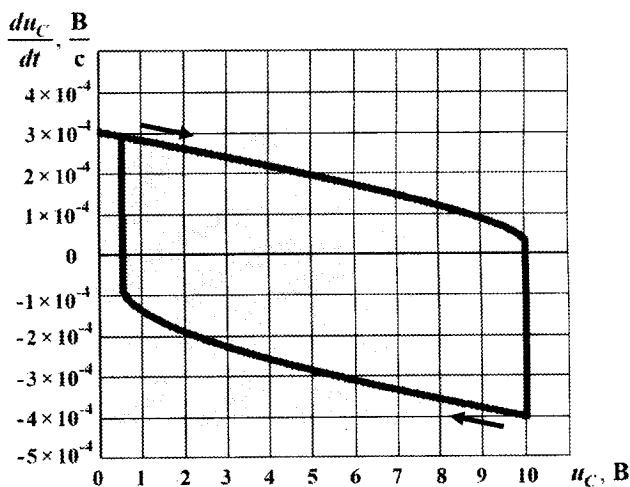


Рисунок 11.41

Приклад 11.15

Необхідно провести аналіз перехідного процесу, який виникає в нелінійному електричному колі *другого порядку* внаслідок увімкнення даного кола до джерела постійної напруги E . Коло наведено на рис. 11.42.

Електричні характеристики всіх нелінійних елементів заданого кола подано у табличний спосіб і наведено в табл. 11.4 – табл. 11.6.

Таблиця 11.4

<i>Вольт-амперна характеристика $i_1 = f_1(u_1)$ резистивного елемента</i>												
U_1	В	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15
I_1	мА	0	223	267	207	103	33	13	23	77	223	500

Таблиця 11.5

<i>Вебер-амперна характеристика $\psi_2 = f_2(i_2)$ індуктивного елемента</i>												
I_2	мА	0	8	17	33	50	67	100	133	167	333	500
Ψ_2	мВб	0	1	2	4	8	14	20	22	23	24,5	25

Таблиця 11.6

<i>Кулон-вольтна характеристика $q_3 = f_3(u_3)$ ємнісного елемента</i>												
U_3	В	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Q_3	мкКл	0	560	750	865	950	1020	1075	1120	1160	1195	1230

Опір втрат індуктивності складає $r = 2$ Ом.

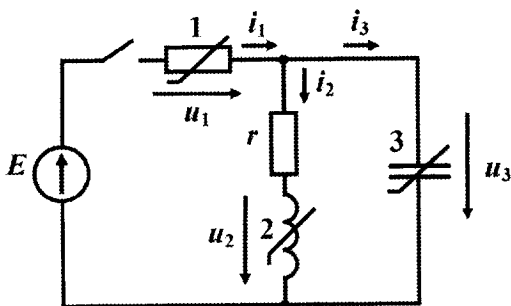


Рисунок 11.42

Введемо ці дані до комп'ютерної математичної системи Mathcad, наприклад, так, як це показано на рис. 11.43.

Водночас, і це показано на рис. 11.43, проведемо за заданими в табл. 11.4 – 11.6 вузловими точками нелінійних характеристик

кубічну сплайн-інтерполяцію і сформуємо неперервні нелінійні функції $i_1 = f_1(u_1)$, $i_2 = f_2(\psi_2)$, $u_3 = f_3(q_3)$, які і зумовляють нелінійність системи диференціальних рівнянь, складеної для даного кола за законами Кірхгофа.

```

1. Вводимо вихідні дані:
а)  $r := 2 \cdot \Omega$ 
б) вольт-амперна характеристика  $I_1 = f_1(U_1)$ 
Um1 := (0 1.5 3 4.5 6 7.5 9 10.5 12 13.5 15) · V
Im1 := (0 223 267 207 103 33 13 23 77 223 500) · mA
IS1 := cspline(Um1T, Im1T) i1(u1) := interp(IS1, Um1T, Im1T, u1)
i1(u1) := if(u1 < 0, 0, i1(u1))
в) вебер-амперна характеристика  $\Psi_2 = f_2(I_2)$ 
Im2 := (0 8 17 33 50 67 100 133 167 333 500) · mA
Psi2 := (0 1 2 4 8 14 20 22 23 24.5 25) · mWb
i := 0..20 I2i := if[i < 10, (-Im2T)10-i, (Im2T)i-10]
Psi2i := if[i < 10, (-Psi2T)10-i, (Psi2T)i-10]
IS2 := cspline(Psi2, I2) i2(phi2) := interp(IS2, Psi2, I2, phi2)
г) кулон-вольтна характеристика  $Q_3 = f_3(U_3)$ 
Um3 := (0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50) · V
Qm3 := (0 560 750 865 950 1020 1075 1120 1160 1195 1230) · μC
U3i := if[i < 10, (-Um3T)10-i, (Um3T)i-10]
Q3i := if[i < 10, (-Qm3T)10-i, (Qm3T)i-10]
IS3 := cspline(Q3, U3) u3(q3) := interp(IS3, Q3, U3, q3)

```

Рисунок 11.43

На рис. 11.44 та рис. 11.45 наведено графіки двох з цих функцій – $i_2 = f_2(\psi_2)$, $u_3 = f_3(q_3)$, які визначають нелінійні властивості

вості реактивних елементів і побудовані за результатами вищеозначеної інтерполяції.

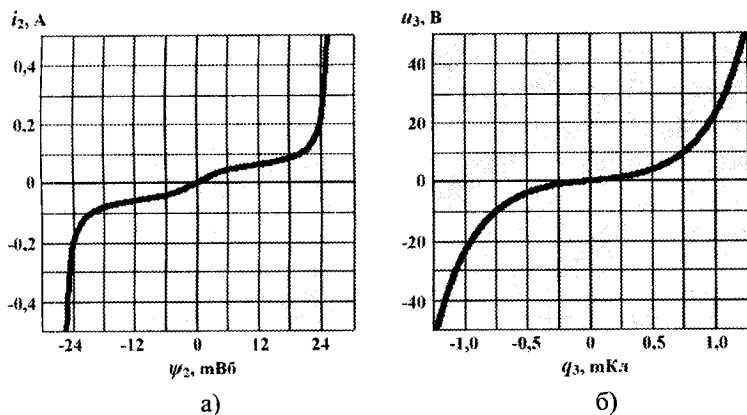


Рисунок 11.44

Як видно з рисунків, характеристики реактивних нелінійних елементів симетричні (рис. 11.44 а і б), а вольт-амперній характеристиці резистивного елемента, яка є несиметричною, властива ще й спадна ділянка з від'ємним диференціальним опором (див. рис. 11.45).

Остання обставина, і це було показано в попередніх підрозділах, відіграє надзвичайно важливу роль щодо характеру перехідного процесу, який зазнає суттєвих якісних змін за зміни параметрів електричного кола або його початкових умов.

Окрім того, враховуючи другий порядок нелінійного кола, на характер перехідного процесу буде ще й впливати співвідношення між диференціальними параметрами нелінійних реактивних елементів та опором втраг r .

Нагадаймо, що в лінійних електричних колах другого порядку це приводило до появи трьох можливих режимів перехідного процесу: періодичного, критичного і аперіодичного.

У випадку нелінійного електричного кола картина буде значно складнішою.

Тому, враховуючи сказане, проаналізуємо тільки окремі якісні риси перехідного процесу в даному електричному колі, але такі, які можуть викликати найбільшу зацікавленість.

Це означає таке. По-перше, робоча точка в стані рівноваги за всіх варіацій буде перебувати виключно на спадній ділянці характеристики нелінійного опору. По-друге, добротність паралельного контура задамо досить високою, зменшивши втрати в котушці індуктивності (опір r).

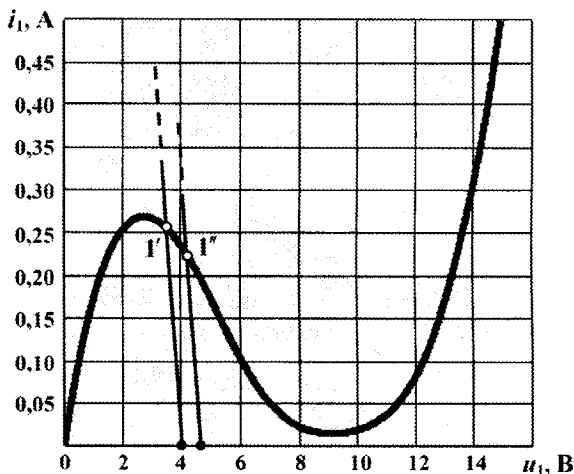


Рисунок 11.45

Отже, наразі з усіх параметрів для створення двох якісно різних перебігів перехідного процесу в даному колі змінювати будемо напругу джерела E , послідовно надаючи їй спочатку значення 4 В, а потім 4,6 В.

Навантажувальні прямі за таких напруг джерела е.р.с. показано на рис. 11.45.

На цьому ж рисунку вказано і стани рівноваги кола за різних значень E (точки I' , I'').

Розрахунок перехідного процесу розпочнемо із складання системи диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа для піс-

лякомутаційного стану кола (рис. 11.42) з врахуванням компонентних співвідношень та електричних властивостей нелінійних елементів

$$\left. \begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ u_1 + ri_2 + u_2 &= E \\ ri_2 + u_2 - u_3 &= 0 \\ u_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} \\ i_3 &= \frac{dq_3}{dt} \\ i_1 &= f_1(u_1) \\ i_2 &= f_2(\psi_2) \\ u_3 &= f_3(q_3) \end{aligned} \right\}. \quad (11.61)$$

Незалежними змінними, що характеризують стан електричного кола в цій системі є функції потокозчеплення $\psi_2(t)$ котушки індуктивності та заряду $q_3(t)$ на ємності. Тому усунемо із системи (11.61) всі інші змінні і перепишемо її відносно змінних стану як

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= u_2 = u_3 - ri_2 = f_3(q_3) - r \cdot f_2(\psi_2), \\ \frac{dq_3}{dt} &= i_3 = i_1 - i_2 = f_1(u_1) - f_2(\psi_2) = f_1(E - u_3) - f_2(\psi_2) = \\ &= f_1[E - f_3(q_3)] - f_2(\psi_2). \end{aligned}$$

Отже, остаточно маємо

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= f_3(q_3) - r \cdot f_2(\psi_2) \\ \frac{dq_3}{dt} &= f_1[E - f_3(q_3)] - f_2(\psi_2) \end{aligned} \right\}. \quad (11.62)$$

Отримані рівняння системи (11.62) і будуть рівняннями стану заданого електричного кола (див. п. 11.6).

Для числового розрахунку перехідного процесу скористаємося прямими формулами Ейлера, які на підставі системи (11.62)

подамо у вигляді рекурентних співвідношень

$$\left. \begin{aligned} \psi_{2_{k+1}} &= \psi_{2_k} + h \cdot \left[f_3(q_{3_k}) - r \cdot f_2(\psi_{2_k}) \right] \\ q_{3_{k+1}} &= q_{3_k} + h \cdot \left\{ f_1 \left[E - f_3(q_{3_k}) \right] - f_2(\psi_{2_k}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11.63)$$

із задалегідь вибраним кроком інтегрування h . За необхідності крок інтегрування можна зменшувати.

В нашому випадку нехай $h = 10$ мкс, оскільки це значення на кілька порядків буде менше, аніж практична тривалість перехідного процесу в колі за заданих параметрів та умов.

Тоді з огляду на нульові початкові умови $\psi_2(0) = 0$, $q_3(0) = 0$, а також на задану напругу джерела е.р.с $E = 4$ В, розрахунок перехідного процесу, іншими словами – числове розв’язання нелінійної системи диференціальних рівнянь (11.62), проведемо методом Ейлера в математичному середовищі Mathcad за алгоритмом, програмний код якого наведено на рис. 11.46.

2. Обираємо тривалість кроків інтегрування h та їх кількість n :

$$h := 10^{-5} \cdot s \quad n := 6 \cdot 10^4 \quad t_n := n \cdot h = 0.6 \text{ s}$$

3. Задаємо початкові значення часу t_0 , потокозчеплення $\psi_2(0)$ і заряду $q_3(0)$, а також значення е.р.с E :

$$t_0 := 0 \cdot s \quad \Psi_0 := 0 \cdot \text{Wb} \quad q_0 := 0 \cdot \text{C} \quad E := 4 \cdot \text{V}$$

4. Розв'язуємо систему диференціальних рівнянь за допомогою прямих формул Ейлера:

$$k := 0 .. n$$

$$\begin{pmatrix} t_{k+1} \\ \Psi_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_k + h \\ \Psi_k + h \cdot (u_3(q_k) - r \cdot i_2(\Psi_k)) \\ q_k + h \cdot (i_1(E - u_3(q_k)) - i_2(\Psi_k)) \end{bmatrix}$$

Рисунок 11.46

На рис. 11.47 наведено результати розрахунку значень магнітного потокозчеплення $\psi_2(t)$ і електричного заряду $q_3(t)$ в окремі (дискретні) моменти часу.

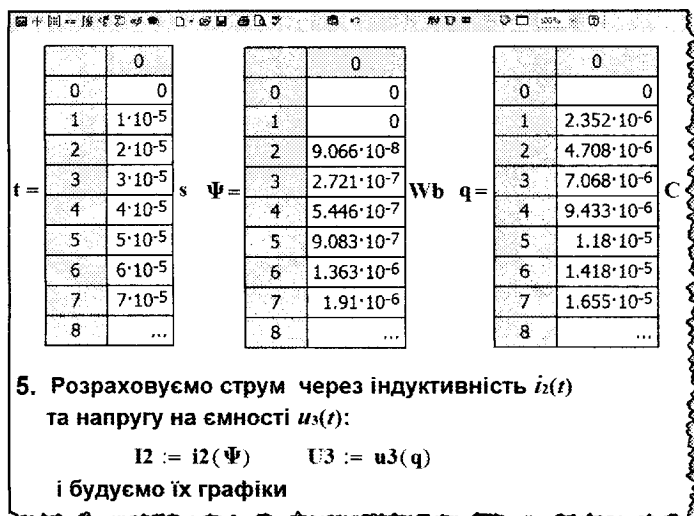
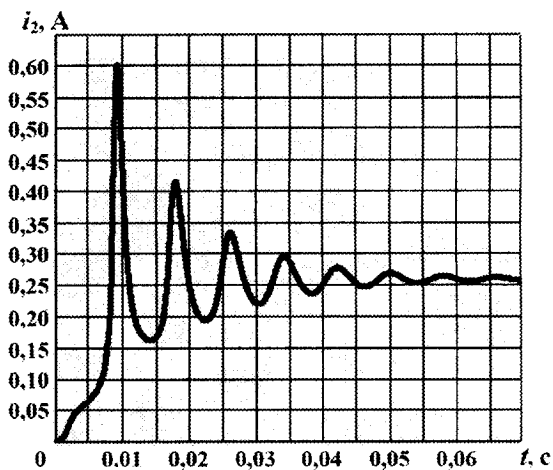


Рисунок 11.47

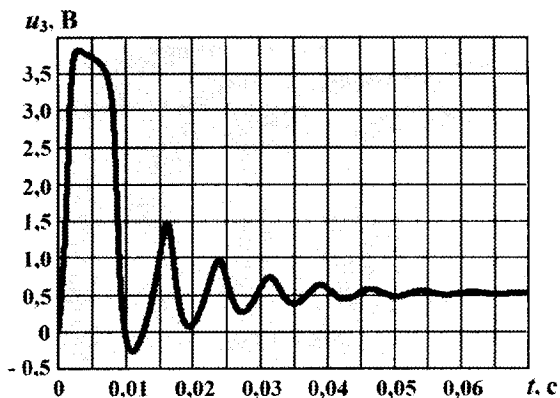
Миттєві струми у вітках заданого кола і напруги на його ділянках за необхідності можуть бути визначеними через змінні стану $\psi_2(t)$ і $q_3(t)$ на підставі співвідношень системи (11.61).

Так, на рис.11.47 показано розрахунок значень струму $i_2(t)$, що проходить через нелінійну індуктивність, та напруги $u_3(t)$ на ємності у визначені кроком інтегрування h дискретні моменти часу. Їх отримано, як видно з рисунка, безпосередньо за допомогою характеристик нелінійних елементів, а саме: вебер-амперної характеристики $i_2 = f_2(\psi_2)$ – для індуктивності та кулон-вольтової характеристики $u_3 = f_3(q_3)$ – для ємності.

За результатами обчислень побудуємо графіки цих електричних величин (рис. 11.48).



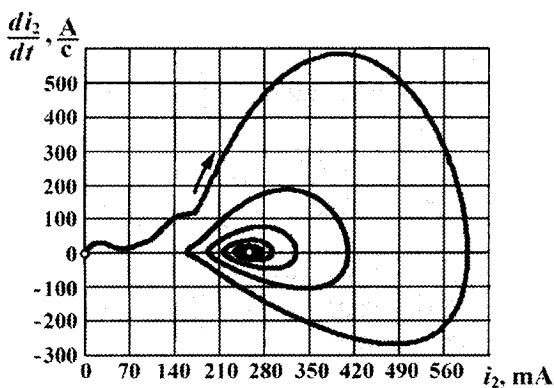
a)



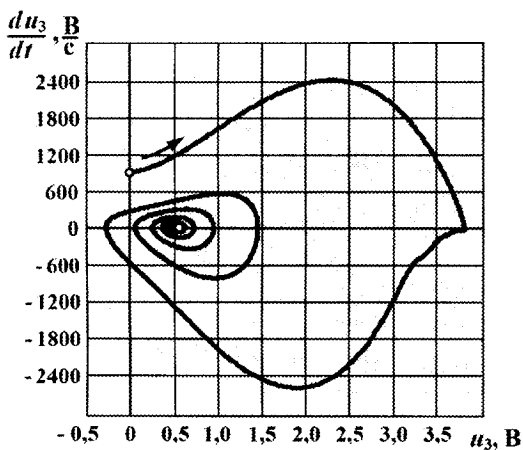
б)

Рисунок 11.48

Додатково наведемо фазові траєкторії електричного кола, побудовані відносно струму $i_2(t)$ та напруги $u_3(t)$ за умови $E=4$ В. Графіки цих траєкторій показано відповідно на рис. 11.49, а і рис. 11.49, б.



a)



б)

Рисунок 11.49

Отже, як бачимо, перехідний процес в даному колі за вхідної напруги $E=4$ В являє собою згасаючі коливання, що з часом прямують до своїх нових усталених значень:

$$I_{2\text{уст}} = 0,256 \text{ А}, \quad U_{3\text{уст}} = 0,512 \text{ В},$$

утворюючи на кожному з фазових портретів рис. 11.49 стійку нерухому точку, тобто такий стан рівноваги, за якого i_2 та u_3 не змінюються ($i_2 = I_{2_{уст}} = const$, $u_3 = U_{3_{уст}} = const$) і їх похідні дорівнюють нулю.

Необхідно зазначити, що в залежності від характеру перехідного процесу, а це в свою чергу залежить від параметрів електричного кола, існує кілька різновидів станів рівноваги і поведінка фазових траєкторій в околі положення рівноваги на фазовій площині можуть якісно відрізнитися одна від одної – так, як це показано на рис. 11.50. Як видно із рисунка, кожний із таких станів рівноваги називають або *фокусом*, або *вузлом*, або *сідлом*.

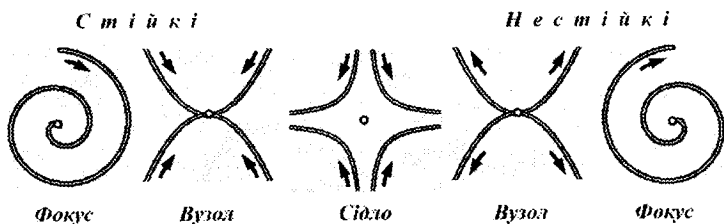


Рисунок 11.50

В нашому випадку нерухома точка є стійким фокусом, оскільки зображувальна точка з часом наближається до стану рівноваги, здійснюючи згасаючі коливальні рухи (рис. 11.49).

Однак перебіг перехідного процесу в заданому колі докорінно змислює якісних змін, якщо тільки буде збільшена напруга джерела E за інших рівних умов. Так, на рис. 11.51 показано фазову траєкторію, побудовану відносно напруги на ємності $u_3(t)$ за умови $E = 4,6\text{В}$. Як бачимо, на фазовому портреті стійка нерухома точка (наприклад, для напруги на ємності $U_{3_{уст}}$) усталеного режиму електричного кола, до якої схилювався перехідний процес в попередньому випадку (див. рис. 11.49, б), взагалі зникла.

Натомість з'явився принципово новий різновид стійкої граничної множини фазових траєкторій – *граничний цикл*, тобто

замкнута асимптотична фазова траєкторія, яка утворилася внаслідок *періодичного* руху зображувальної точки, що призвело до появи якісно нового усталеного режиму – *динамічної рівноваги*.

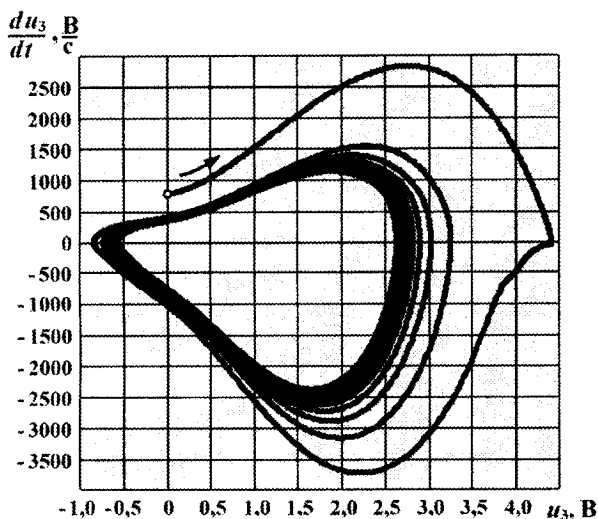


Рисунок 11.51

Отже, граничний цикл є більш складною асимптотичною формою руху електричного кола як динамічної системи, аніж нерухома точка, оскільки являє собою *періодичні незгасаючі коливання*, що наразі і спостерігаються в нашому колі (рис. 11.51 та рис. 11.52).

Подібне стає можливим внаслідок повної і строгої компенсації тієї частини енергії, що розсіюється в колі протягом періоду, енергією, яка надходить в коло від зовнішнього джерела напруги.

З іншого боку, і це частково видно з рис. 11.49 та рис. 11.51, нерухома точка і граничний цикл мають надзвичайно важливу загальну спільну ознаку. Їх об'єднує те, що вони являють собою особливі області фазового простору, які притягують до себе фазову траєкторію.

Таку асимптотичну область притягання, до якої з часом $t \rightarrow \infty$ спрямований рух зображувальної точки, називають *атрактором*.

Отже, *перехідним процесом в електричному колі можна назвати рух зображувальної точки вздовж фазової траєкторії до одного із своїх атракторів, а усталеним режимом роботи – її рух вздовж цього атрактора.*

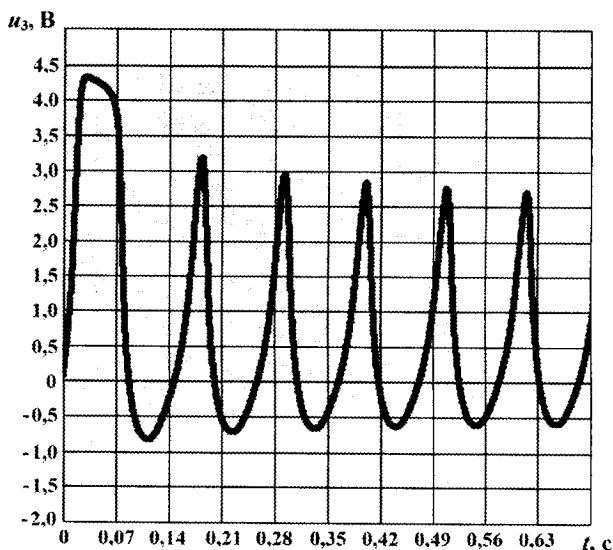


Рисунок 11.52

Необхідно зауважити, що і нерухома точка (стаціонарний стан рівноваги), і граничний цикл (коливальний рух або динамічний стан рівноваги) не вичерпують всіх різновидів асимптотичної поведінки нелінійних електричних кіл взагалі. Існують і більш складні її форми – такі як *квазіперіодичні коливання* та *детермінований хаос*.

В першому випадку електрична система здійснює деякий складний квазіперіодичний рух з двома та більше незалежними частотами, відношення яких є іраціональним числом, тому її фа-

зова траєкторія являє собою лінію, яка регулярно заповнює поверхню розташованого в фазовому просторі n -вимірному тору, залежно від розмірності цієї системи.

За детермінованого хаосу перехідний процес електричної системи (виключно нелінійної!) є складним, неперіодичним і в послідовному (неперервному) дослідженні хаотичним, тому фазова траєкторія являє собою надзвичайно складну за формою нерегулярну незамкнену лінію, об'ємно розташовану залежно від розмірності системи в n -вимірному просторі. Водночас попри означену хаотичність це є детермінований процес, оскільки йому характерна властивість *відтворюваності*. І якщо привести систему знову до того ж самого початкового стану, то за детермінованого хаосу рух зображувальної точки в фазовому просторі проляже тією ж траєкторією.

Режими квазіперіодичних коливань і детермінованого хаосу можливі тільки за певних умов і тільки, якщо розмірність фазового простору буде не меншою *трьох*.

Запитання для самоперевірки

1. Яким чином математично описують перехідний процес в нелінійному колі?

2. Чому регулярні методи лінійної електротехніки втрачають дієдатність під час розрахунку перехідних процесів в нелінійних колах?

3. Розкрийте суть методів:

- умовної лінеаризації;
- кусково-лінійної апроксимації;
- графічного інтегрування;
- малого параметра,

а також числового методу за прямою формулою Ейлера. Опишіть алгоритми цих методів. Вкажіть їх переваги та недоліки.

4. На чому ґрунтується метод рівнянь стану?

5. Запишіть нормальну форму системи диференціальних рівнянь нелінійного кола. Як вона складається?

6. Які стани називають станами рівноваги кола?
7. Від яких чинників залежить, в якому з можливих станів рівноваги перебуватиме нелінійне електричне коло?
8. Розкрийте суть понять «стійкість в малому» та «стійкість у великому».
9. Сформулюйте теореми А. М. Ляпунова.
10. Назвіть основні критерії стійкості електричних кіл.
11. Який метод називають методом фазових траєкторій і які задачі він дозволяє розв'язувати?
12. Що є фазовою траєкторією електричного кола?
13. Які закономірності проявляються під час руху зображувальної точки по тих чи інших ділянках фазової траєкторії? На які питання це дозволяє дати відповідь?
14. Поясніть, що називають автоколиваннями електричного кола і за яких умов вони можуть виникнути.
15. Розкрийте різницю між стаціонарним і динамічним станами рівноваги електричного кола.
16. Що таке аттрактор і як за допомогою цього поняття можна дати означення перехідного процесу та усталеного режиму роботи електричного кола?
17. Назвіть всі можливі різновиди асимптотичної поведінки нелінійних електричних кіл.

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підруч. [для студентів вищих навч. закл.] / Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 407 с.
2. Карпов Ю. О. Конспект лекцій з курсу “Теоретичні основи електротехніки”. Ч. 1 / Карпов Ю. О., Магас Т. Є., Мадьяров В. Г. – Вінниця : ВПІ, 1992. – 176 с.
3. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Ч. 2 : [навч. посіб.] / Карпов Ю. О., Магас Т. Є., Мадьяров В. Г. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 191 с.
4. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних електричних колах : [навч. посіб.] / Карпов Ю. О., Магас Т. Є., Ведміцький Ю. Г. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 159 с.
5. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Розділ “Нелінійні електричні і магнітні кола” : [навчальн. посіб.] / Карпов Ю. О., Магас Т. Є. – Вінниця : ВДТУ, 2001. – 134 с.
6. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Розділ “Електричні кола з розподіленими параметрами” : [навч. посіб.] / Карпов Ю. О., Мадьяров В. Г. – Вінниця : ВНТУ, 2006. – 102 с.
7. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Практикум : [навч. посіб.] / Карпов Ю. О., Говор І. К., Ведміцький Ю. Г., Логіненко В. А. – Вінниця : ВДТУ, 2001. – 73 с.
8. Кацив С. Ш. Комп’ютерне моделювання електричних кіл : [лаб. практи.] / Кацив С. Ш., Мадьяров В. Г., Говор І. К. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 89 с.
9. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Електричне поле : [навч. посіб.] / Карпов Ю. О., Кухарчук В. В. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 143 с.
10. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Магнітне та електромагнітне поля : [навч. посіб.] / Карпов Ю. О.,

Рекомендована

1. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола : підруч. / Перхач В. С. – К. : Вища школа, 1992. – 439 с.
2. Теоретичні основи електротехніки. [у 3-х т.] : підруч. [для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти]. Т.1. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами / Бойко В. С. [та ін.] ; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко – К. : Політехніка, 2004. – 272 с.
3. Теоретичні основи електротехніки. [у 3-х т.] : підруч. [для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти]. Т. 2. Перехідні процеси у лінійних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / Бойко В. С. [та ін.] ; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко – К. : НТУУ “КПІ”, 2008. – 224 с.
4. Теоретические основы электротехники. [в 3-х т.] Т. 1 : [учеб. для вузов] / Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровин Н. В., Чечурин В. Л. – СПб : Питер, 2003. – 463 с.
5. Теоретические основы электротехники. [в 3-х т.] Т. 2: [учеб. для вузов] / Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровин Н. В., Чечурин В. Л. – СПб : Питер, 2003. – 576 с.
6. Основы теории цепей : [учеб. для вузов] / Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 528с.
7. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники / Атабеков Г. И. – М. : Энергия, 1978. – 280 с.
8. Теоретические основы электротехники / под ред. проф. П. А. Ионкина. – М. : Высшая школа, 1978. – 543 с.
9. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники / Бессонов Л. А. – М. : Высшая школа, 1973. – 750 с.
10. Теоретичні основи електротехніки : [підруч.] / Г. П. Балан, П. О. Кравченко, Ю. Ф. Свергун, О. Є. Щербаков – К. : Інтас, 2007. – 325 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- А**
автоколювання, 494
аналогія, 339
апроксимація
 характеристик, 294
 кусково-лінійна, 301
атрактор, 520
- Б**
баланс потужностей, 326
- В**
випрямляч, 418
 мостовий, 422
 однопівперіодний, 420
 з ємнісним фільтром, 426
відбиття хвилі, 209
 багаторазове, 230
втрати
 в сталі, 380
 на вихрові струми, 380
 на гістерезис, 379
вузол, 518
- Г**
гістерезис, 334
- Д**
двополюсник, 258
декремент коливань, 39
діаграма
 векторна
 котушки, 379, 381
 трансформатора, 394
 руху, 234
діод напівпровідниковий, 418
 ідеальний, 420
- дріб
 простий, 272
 неперервний, 278
- Е**
елементи електричного кола
 нелінійні, 289
 керовані, 290
енергія
 електричного поля, 13, 199
 магнітного поля, 13, 199
ефект тригерний, 386
- Є**
ємність
 динамічна, 292
 статична, 291
- З**
задача Коші, 68, 190
закон(и)
 електромагнітної індукції, 392
Кірхгофа
 в операторній формі, 84
 для магнітних кіл
 другий, 339
 перший, 340
комутації, 13
 загальні, 64, 67
Ома в операторній формі, 84
 повного струму, 336
заломлення хвилі, 220
з'єднання елементів
 змішане, 308

- паралельне, 307, 386
- послідовне, 305, 382
- змінні стану, 466
- значення діюче, 421, 432
- зображення функції, 78
- I**
- індуктивність
 - динамічна, 292
 - статична, 291
- індукція
 - залишкова, 335
 - магнітна, 334
- інтеграл
 - Дюамеля, 121, 127
 - накладання, 121, 127
- K**
- коефіцієнт(и)
 - відбиття, 211
 - ефективності, 421
 - заломлення, 223
 - ряду Фур'є, 151
 - трансформації, 393
- коливання
 - вільні, 39
 - згасаючі, 517
 - квазіперіодичні, 520
 - незгасаючі, 519
- коло(а)
 - електричні
 - лінійні, 288
 - нелінійні, 288
 - магнітне, 334
 - нерозгалужене, 340
 - розгалужене, 348
 - початкове, 304
- комутація, 12
- катушка індуктивності
 - з феромагнітним осердям, 376
- крива намагнічування основна, 335
- критерій стійкості, 478
- крок інтегрування, 459
- L**
- лінія
 - без втрат, 191
 - довга, 190
- M**
- метод(и)
 - алгебризації диференціальних рівнянь, 56
 - аналітичний, 316
 - вхідного опору, 58
 - гармонічного балансу, 404
 - гармонічної лінеаризації, 400
 - графічні, 304
 - графічного інтегрування, 450
 - графоаналітичний, 314
 - двох вузлів, 311, 350, 353
 - Ейлера прямий, 460, 467
 - еквівалентних синусоїд, 372
 - еквівалентного генератора, 309
 - інтерполяції, 294
 - класичний, 44
 - кусково-лінійної апроксимації, 301, 417, 444

лінеаризації, 314
малого параметра, 410, 455
найменших квадратів, 299
нелінійного еквівалентного генератора, 327
Ньютона - Рафсона, 316
операторний, 77
періодизації неперіодичного збудження, 179
припасовування, 417
Пуанкаре, 410
рівнянь стану, 466
умовної лінеаризації, 436
фазових траєкторій, 486
частотний, 147, 182
числові, 459
якісні, 486

Н

напруга

магнітна, 339

східчаста, 115, 118, 120

напруженість магнітного поля, 334

нулі функції, 260

О

область притягання, 519

опір

двополюсника, 260

динамічний, 292

діода, 419

операторний, 85

статичний, 291

хвильовий, 195

оригінал функції, 77

П

параметри

динамічні, 292

первинні, 190

статичні, 291

перетворення

Лапласа, 77

Фур'є, 156

петля гістерезису, 334

гранична, 334

часткова, 334

поліном Гурвіца, 264

полюси функції, 260

потік магнітний, 336

основний, 336, 376, 390

розсіювання, 336, 376, 391

потокозчеплення, 289

правило

правого гвинта, 336, 339

принцип

накладання, 113, 147, 293,
369

неперервності, 336

проникність магнітна

абсолютна, 335

відносна, 335

простір фазовий, 487

процес

перехідний, 12

практична тривалість,
18, 189, 514

Р

режим

аперіодичний, 43

граничний, 43

коливальний, 40

- короткого замикання, 213, 244, 397
- критичний, 44
- періодичний, 40
- усталений, 12, 520
 - стійкий, 475
- холостого ходу, 212, 397
- рівняння
 - характеристичне, 15, 36
 - хвильове, 191, 192
- рівняння
 - довгої лінії, 190
 - стану, 466
 - телеграфні, 190
 - трансформатора, 392
- ряд Фур'є, 149
- С**
- сила
 - коерцитивна, 335
 - магніторушійна, 339
 - намагнічувальна, 339
- синтез, 258
- синусоїда еквівалентна, 372
- сідло, 518
- складова
 - вільна, 14
 - примусова, 14
- спектр, 156
 - амплітудно-частотний, 153
 - дискретний, 154
 - лінійний, 154
 - неперервний, 155
 - фазовий, 154
- стан рівноваги, 474, 477, 518
 - динамічний, 497, 519
 - нестійкий, 477, 494, 518
 - стаціонарний, 520
 - стійкий, 475, 477, 518
- стала(i)
 - інтегрування, 15, 37, 46
 - магнітна, 335
 - часу, 16
- стійкість
 - в малому, 475
 - у великому, 475
- струм(и)
 - вихрові, 380
 - втрат, 380
 - намагнічування, 380
 - Фуко, 380
- схема
 - еквівалентна, 204, 214, 343
 - заміщення
 - котушки, 380
 - трансформатора, 396
 - операторна, 92
- Т**
- теорема
 - зсуву, 81
 - Ляпунова, 477
 - про запізнення, 81
 - розкладання, 97
- тиристор, 425
- точка
 - зображувальна, 488
 - нерухома, 518
 - образотворча, 488
 - робоча, 304
- траєкторія фазова, 487, 489
- трансформатор, 390

У

умови

- початкові, 16
- залежні, 31
- незалежні, 31
- нульові, 114
- реалізації, 264

Ф

ферорезонанс

- напруг, 384
- струмів, 387

фізична величина

- керуюча, 290

фільтр

- ємнісний, 426
- нижніх частот, 426

фокус, 518

форма нормальна, 466

формування хвилі

- звотної, 196
- прямої, 196

формула

- Ейлера пряма, 460
- розкладання, 97

фронт хвилі, 197

функція(ї)

- вхідна, 258
- Дірака, 124
- додатна дійсна, 261
- одинична імпульсна, 124
- одинична східчаста, 113
- Хевісайда, 113
- Штурма, 266

Х

хаос детермінований, 520

характеристика(и)

- вебер-амперна, 289, 344
- вольт-амперна, 289
- імпульсна, 124
- кулон-вольтна, 289
- монотонна, 289
- нелінійних елементів, 288
- немонотонна, 289
- неоднозначна, 289
- несиметрична, 289
- однозначна, 289
- перехідна, 114
- симетрична, 289
- спектральна, 156

хвиля

- заломлена, 222
- зворотна, 194, 196
- напруги, 194
- пряма, 194, 196
- струму, 196

Ц

цикл граничний, 518

Ч

частота кутова, 39

Ш

швидкість

- фазова, 488
- хвилі, 191, 194

шихтування осердя, 380

Я

явища

- нелінійні, 292
- ферорезонансні, 382

Навчальне видання

Карпов Юхим Овдійович
Ведміцький Юрій Григорович
Кухарчук Василь Васильович
Кацев Самоїл Шулімович

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ
ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ
СИНТЕЗ ЛІНІЙНИХ КІЛ
ЕЛЕКТРИЧНІ ТА МАГНІТНІ НЕЛІНІЙНІ КОЛА

Підручник

Редактор О. Скалоцька

Оригінал-макет підготовлено Ю. Ведміцьким

Підписано до друку 13.12.2011 р.

Формат 29,7 × 42 ¼. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman.

Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 30,61

Наклад 500 (1-й запуск 1-150) прим. Зам. № 2011-194

Вінницький національний технічний університет,
комп'ютерний інформаційно-видавничий центр.

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Тел. (0432) 59-85-32.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті

В комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Тел. (0432) 59-87-38.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.