

Ю.О. Карпов, Т.С. Магас, В.Г. Мадьяров

Т ЕОРЕТИЧНИ  
О СНОВИ  
Е ЛЕКТРОТЕХНИКИ

---

---

Частина II

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**Ю.О. Карпов, Т.Є. Магас, В.Г. Мадьяров**

# **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

## **Частина II**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

*Рецензенти:*

**В. І. Сенько**, доктор технічних наук, професор

**П. Д. Лежнюк**, доктор технічних наук, професор

**Ю. О. Скрипник**, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Міністерством освіти і науки України  
лист № 14/18.2-696 від 7.04.04.

**Ю. О. Карпов, Т. Є. Магас, В. Г. Мадьяров.**

**К 26 Теоретичні основи електротехніки. Ч. II.** Навчальний посібник. --  
Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. -- 191 с.

**ISBN 966-641-096-6**

В посібнику розглянуті питання перехідних процесів в лінійних колах та методи їх розрахунку, синтезу лінійних кіл, усталених та перехідних процесів в нелінійних колах, а також питання усталених та перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами. В кінці кожного розділу наведені задачі та питання для кращого засвоєння матеріалу та самоперевірки.

Розрахований для студентів електротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 621.3

**ISBN 966-641-096-6**

## ЗМІСТ

<b>Передмова</b> .....	5
<b>Перехідні процеси в лінійних електричних колах</b> .....	6
1. Класичний метод розрахунку перехідних процесів.....	7
1.1. Вмикання кола R, L на постійну напругу.....	7
1.2. Вмикання кола R, C на постійну напругу.....	10
1.3. Відключення котушки R, L від джерела постійної напруги.....	12
1.4. Вмикання кола R, L на синусоїдну напругу.....	14
1.5. Перехідні процеси в розгалужених колах, які мають один реактивний елемент.....	16
1.6. Незалежні і залежні початкові умови.....	19
1.7. Вмикання послідовно з'єднаних елементів R, L, C, до джерела постійної напруги.....	21
1.8. Розрахунок перехідних процесів класичним методом в складних розгалужених колах.....	27
1.9. Складання характеристичних рівнянь.....	33
<b>2. Операторний метод розрахунку перехідних процесів</b> .....	39
2.1. Деякі властивості перетворення Лапласа і зображення найпростіших функцій.....	39
2.2. Використання перетворення Лапласа для розрахунку перехідних процесів.....	42
2.3. Закон Ома і Кірхгофа в операторній формі.....	45
2.4. Операторні схеми.....	49
2.5. Перехід від зображення до оригіналу.....	51
<b>3. Частотний метод розрахунку перехідних процесів</b> .....	54
3.1. Спектри аперіодичних функцій.....	54
3.2. Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів.....	57
3.3. Наближені способи при розрахунку перехідних процесів частотним методом.....	57
<b>4. Перехідні процеси при довільних діях</b> .....	64
4.1. Перехідна і імпульсна характеристики.....	64
4.2. Використання перехідних і імпульсних характеристик для розрахунку перехідних процесів.....	68
4.3. Врахування ненульових початкових умов.....	73
<b>5. Основи синтезу лінійних електричних кіл</b> .....	77
5.1. Основні етапи синтезу електричних кіл.....	77
5.2. Властивості вхідних функцій двополюсників.....	77
5.3. Перевірка вхідної функції на умови реалізації.....	83
5.4. Найпростіші вхідні функції і їх реалізація.....	88
5.5. Синтез двополюсників за допомогою розкладання вхідної функції на прості дроби.....	90
5.6. Синтез двополюсників з допомогою зображення	

вхідної функції в вигляді безперервних дробів.....	96
<b>6. Нелінійні електричні кола.....</b>	<b>103</b>
6.1. Загальна характеристика нелінійних елементів і нелінійних електричних кіл.....	103
6.2. Розрахунок електричних кіл постійного струму з нелійними резисторами.....	108
6.3. Деякі використання нелінійних кіл постійного струму.....	116
6.4. Загальна характеристика магнітних кіл.....	119
6.5. Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму.....	120
6.6. Розгалужене магнітне коло постійного струму.....	125
6.7. Електричні кола змінного струму з нелійними резисторами.....	127
6.8. Метод еквівалентних синусоїд.....	128
6.9. Котушка з феромагнітним осердям.....	130
6.10. Ферорезонанси.....	134
6.11. Трансформатор з феромагнітним осердям.....	136
6.12. Метод гармонічного балансу.....	140
6.13. Електричні кола з діодами.....	143
<b>7. Перехідні процеси в нелінійних електричних колах.....</b>	<b>148</b>
7.1. Метод умовної лінеаризації.....	148
7.2. Метод кусково-лінійної апроксимації.....	149
7.3. Метод графічного інтегрування.....	151
7.4. Числові методи розрахунку перехідних процесів.....	152
7.5. Поняття про стійкість станів рівноваги в нелінійних колах.....	153
7.6. Виникнення автоколивань.....	158
<b>8. Електричні кола з розподіленими параметрами.....</b>	<b>161</b>
8.1. Диференціальні рівняння однорідної лінії.....	161
8.2. Розв'язок телеграфних рівнянь в усталеному режимі при синусоїдній напрузі.....	162
8.3. Падаючі і відбиті хвилі.....	165
8.4. Відбивання в довгих лініях.....	169
8.5. Рівняння довгої лінії через гіперболічні функції.....	170
8.6. Лінія без спотворень.....	171
8.7. Лінія без втрат на холостому ходу.....	173
8.8. Лінія без втрат при короткому замиканні.....	176
8.9. Перехідні процеси в довгих лініях.....	179
8.10. Вмикання довгої лінії на постійну напругу.....	180
8.11. Вмикання лінії на постійну напругу при холостому ходу.....	182
8.12. Вмикання лінії на постійну напругу при індуктивному навантаженні.....	185
8.13. Заломлення хвиль в місці спряження двох ліній.....	186
<b>Література.....</b>	<b>190</b>

## ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник написаний у відповідності з матеріалом другого семестру вивчення курсу теоретичних основ електротехніки студентами електротехнічного профілю і є продовженням посібника "Теоретичні основи електротехніки" ч. I цих же авторів, що вийшов в світ в 1992 р.

Посібник складається з восьми розділів, в яких розглянуті перехідні процеси в лінійних та нелінійних колах, методи розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму, електричні кола з розподіленими параметрами. Значна увага приділена питанням синтезу, які, на наш погляд, недостатньо висвітлені в навчальній літературі.

При викладенні окремих питань особлива увага зверталася на застосування їх до аналізу прикладних задач. В кінці розділів наводяться приклади та контрольні питання, які допомагають закріпленню матеріалу, що вивчається.

## ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Електричне коло, до складу якого входять ємності і індуктивності, в усталеному режимі має деяку енергію, яка накопичена в електричному і магнітному полях. Величина цієї енергії в будь-який момент часу визначається за допомогою виразів:

$$\text{в електричному полі ємності } W_e = \frac{Cu^2}{2}, \quad (1.1)$$

$$\text{в магнітному полі індуктивності } W_M = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.2)$$

При зміні усталеного режиму, який відбувається під впливом яких-небудь перемикачів, що приводять до зміни параметрів кола або зовнішніх дій, змінюється кількість енергії в полях. Оскільки енергія не може змінитися за одну мить, то і зміна одного усталеного режиму іншим проходить також протягом деякого часу. Процес переходу від одного усталеного стану кола до іншого називається *перехідним процесом*. Таким чином, основною причиною виникнення перехідного процесу є зміна енергетичного стану кола.

Введемо деякі поняття, які характеризують перехідні процеси. Будь-яку зміну параметрів кола або зовнішніх дій звичайно називають *комутацією*, в розрахунках приймають, що усяка комутація відбувається миттєво.

Установлені два закони комутації.

Оскільки енергія магнітного поля в індуктивності не може змінитися за мить, то при постійному значенні  $L$  не може змінитися за мить і струм через індуктивність.

*Перший закон комутації*: струм через індуктивність в перший момент після комутації залишається таким же, яким він був безпосередньо перед комутацією.

Якщо перший момент часу після комутації будемо позначати  $t=0+$ , а час безпосередньо перед комутацією через  $t=0-$ , то перший закон комутації записується

$$i_{L(0+)} = i_{L(0-)}. \quad (1.3)$$

Аналогічно виводиться *другий закон комутації*.

Напруга на ємності в перший момент після комутації дорівнює напрузі на ємності безпосередньо перед комутацією.

$$u_{C(0+)} = u_{C(0-)}. \quad (1.4)$$

Практична тривалість перехідних процесів залежить від параметрів кола і в багатьох випадках складає частки секунди. Проте під час перехідних процесів на окремих елементах кола можуть виникати великі напруги або протікати великі струми.

# 1 КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

## 1.1 Вмикання кола $R, L$ на постійну напругу

Розглянемо методику розрахунку перехідного процесу на простому прикладі (рис.1.1).

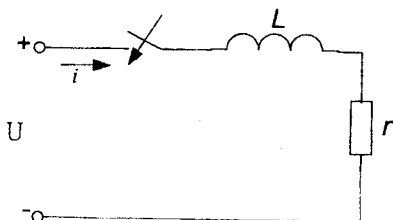


Рисунок 1.1

При замиканні ключа в колі виникає перехідний процес, оскільки коло переходить із одного усталеного режиму в інший. Під час перехідного процесу струми  $i$  та напруги в колі змінюються в залежності від часу, тому складаючи рівняння, яке описує процес в колі, використаємо другий закон Кірхгофа з урахуванням компонентних співвідношень.

$$L \frac{di}{dt} + ri = U. \quad (1.5)$$

Одержано неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. Його розв'язок складається з двох складових - загального і часткового розв'язків. Загальний розв'язок одержуємо з розв'язання однорідного диференціального рівняння, коли права частина дорівнює нулю. В електротехніці цю складову прийнято називати *вільною* ( $i_{\partial}$ ), оскільки вона не залежить від зовнішнього впливу. Частковий розв'язок, який називається *примусовою* складовою ( $i_{np}$ ), залежить від виду правої частини.

Таким чином

$$i = i_{np} + i_{\partial}. \quad (1.6)$$

Для визначення  $i_{\partial}$  рівняння (1.5) має вигляд:



$$L \frac{di_B}{dt} + ri_B = 0.$$

Його розв'язок

$$i_B = Ae^{pt}, \quad (1.7)$$

де  $p$  - корінь характеристичного рівняння

$$Lp + r = 0, \quad p = -\frac{r}{L}, \quad (1.8)$$

$A$  - постійна інтегрування.

Оскільки права частина рівняння (1.5) є постійна величина, то примусова складова теж постійна.

$$i_{np} = I. \quad (1.9)$$

Підставляючи (1.9) в (1.5), одержуємо

$$L \frac{di}{dt} + rI = U$$

або  $rI = U$ , тому що в новому усталеному режимі  $\frac{di}{dt} = 0$ .

Звідси

$$i_{np} = I = \frac{U}{r}. \quad (1.10)$$

Неважко бачити, що примусова складова є струм в новому усталеному режимі. Тому звичайно числові значення цієї складової і визначаються з розрахунку нового усталеного режиму.

Повний розв'язок рівняння (1.5) має вигляд

$$i = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (1.11)$$

Для визначення постійної інтегрування використаємо початкові умови. Знайдемо значення струму в момент часу  $t=0+$ , використавши перший закон комутації. Оскільки до комутації струму в колі не було  $i_{L(0-)}=0$  (ключ розімкнутий), а згідно з першим законом комутації

$$i_{L(0-)} = i_{L(0+)}, \text{ то } i_{L(0+)} = 0. \quad (1.12)$$

Треба підкреслити, що знайдені початкові умови використовуються у повному розв'язку (1.11), записаному для моменту часу  $t=0+$ .

Підставляючи (1.12) в (1.11), одержуємо:

$$0 = \frac{U}{r} + A \Rightarrow A = -\frac{U}{r}. \quad (1.13)$$

Таким чином

$$i = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U}{r} (1 - e^{-\frac{r}{L}t}). \quad (1.14)$$

Графіки зміни струму через індуктивність показані на рис. 1.2.

Примусова складова на графіку має вигляд прямої лінії, а вільна складова – експоненти. Повний розв'язок теж являє собою експоненту, яка починається з нуля і асимптотично наближається до усталеного значення.

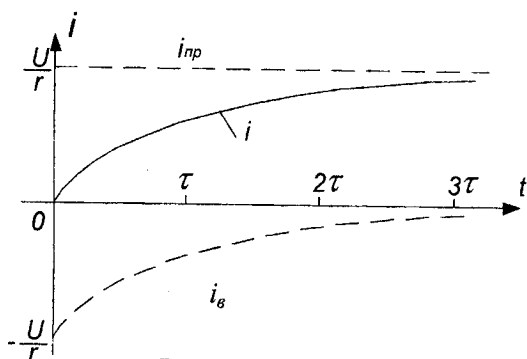


Рисунок 1.2

Коефіцієнт при  $t$  в показнику експоненти має розмірність  $1/c$ , тому обернена величина має розмірність часу, позначається буквою  $\tau$  і називається *постійною часу*.

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{r}, \quad (1.15)$$

Постійна часу залежить від параметрів кола і характеризує тривалість протікання перехідного процесу.

Не дивлячись на те, що теоретично перехідний процес триває нескінченно довго (тільки при  $t \rightarrow \infty$  вільна складова наближається до нуля), можна вважати, що перехідний процес практично закінчується, коли вільна

складова стає меншою 1% від усталеного значення. Тому практично тривалість перехідного процесу

$$t_{n.np.} = (4 \div 5)\tau. \quad (1.16)$$

Якщо  $L = 0,5 \text{ Гн}$ ,  $r = 10 \text{ Ом}$ , то  $\tau = \frac{0,5}{10} = 0,05 \text{ с}$  і  $t_{n.np.} = 0,2 \div 0,25 \text{ с}$ .

## 1.2 Вмикання кола $R, C$ на постійну напругу

Складемо рівняння для кола з послідовно з'єднаними  $r$  і  $C$  при вмиканні на постійну напругу (рис.1.3).

$$ri + u_c = U. \quad (1.17)$$

Тому що

$$i = C \frac{du_c}{dt}, \quad (1.18)$$

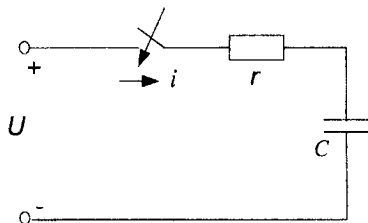


Рисунок 1.3

то (1.17) запишемо в вигляді

$$rC \frac{du_c}{dt} + u_c = U, \quad (1.19)$$

Повний розв'язок рівняння (1.19)

$$u_c = u_{c.np.} + u_{c\beta}$$

Із розрахунку нового усталеного режиму визначасмо

$$u_{c.np.} = U.$$

Вільна складова розв'язку диференціального рівняння першого порядку

$$u_{c\beta} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$rCp + 1 = 0. \quad (1.20)$$

Звідси

$$p = -\frac{1}{rC}, \quad \tau = \frac{1}{|p|} = rC. \quad (1.21)$$

Повний розв'язок

$$u_c = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.22)$$

Постійну інтегрування  $A$  знаходимо, використовуючи початкові умови. Відповідно до закону комутації

$$u_{c(0-)} = u_{c(0+)},$$

тому

$$u_{c(0-)} = U + A$$

і

$$A = u_{c(0-)} - U. \quad (1.23)$$

Якщо до комутації конденсатор не був заряджений, то

$$u_{c(0-)} = 0.$$

і

$$A = -U. \quad (1.24)$$

Остаточний повний розв'язок

$$u_c = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (1.25)$$

Для визначення закону зміни струму використаємо співвідношення (1.18)

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C \left[ -U \left( -\frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right],$$

або

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.26)$$

Графіки зміни струму  $i$  та напруги на ємності мають вигляд, показаний на рис.1.4.

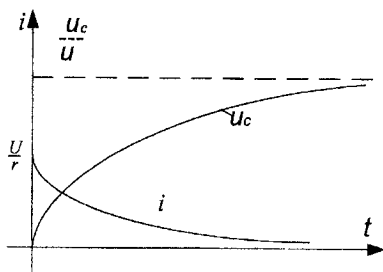


Рисунок 1.4

Із графіків видно, що  $u_c$  в момент комутації нерозривна лінія, а  $i$  змінюється стрибком від нуля до величини  $\frac{U}{r}$ .

В приведених прикладах початкові значення  $i_L$  і  $u_c$  дорівнювали нулю. Такі початкові значення називають нульовими. Розглянемо випадок, коли початкові умови не нульові.

### 1.3 Відключення котушки $R, L$ від джерела постійної напруги

В приведеному колі (рис.1.5) до комутації струм через вольтметр протікав від точки  $a$  до точки  $b$  і дорівнював  $i_0 = \frac{U}{r_0}$ .

Напруга на вольтметрі дорівнювала прикладеній напрузі

$$U_{\theta}(0_-) = U. \quad (1.27)$$

Струм в вітці з котушкою до комутації протікав також від точки  $a$  до точки  $b$  і визначався з виразу

$$i_{(0-)} = \frac{U}{r}. \quad (1.28)$$

Після комутації струм протікає через контур, який складається із послідовно з'єднаних  $r$ ,  $L$ ,  $r_0$  а рівняння, яке описує процеси в цьому контурі, має вигляд

$$L \frac{di}{dt} + (r + r_0) \cdot i = 0. \quad (1.29)$$

Повний розв'язок цього рівняння складається тільки із вільної складової, тому що диференціальне рівняння є однорідним (права частина дорівнює нулю) і струм в новому усталеному режимі відсутній. Тому

$$i_{np} = 0, \quad i = i_{\varrho} = Ae^{pt}. \quad (1.30)$$

Характеристичне рівняння

$$Lp + r + r_0 = 0$$

звідси 
$$p = -\frac{r + r_0}{L}; \quad \tau = \frac{L}{r + r_0}. \quad (1.31)$$

Постійна інтегрування визначається за допомогою початкових умов

$$i_{L(0-)} = i_{L(0+)} = \frac{U}{r}.$$

Звідси 
$$A = \frac{U}{r}$$

і повний розв'язок

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.32)$$

Знайдемо як змінюється напруга на вольтметрі. Оскільки після комутації струм через вольтметр направлений від точки  $b$  до точки  $a$ , то

$$u_e = -ir_0 = -U \frac{r_0}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.33)$$

Якщо  $r_0$  більше  $r$ , то в перший момент після комутації напруга на вольтметрі може значно перевищувати прикладену напругу і до того ж направлена в протилежну сторону, що може привести до пошкодження приладу.

Графік зміни напруги на вольтметрі показаний на рис.1.6.

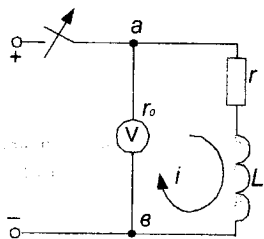


Рисунок 1.5

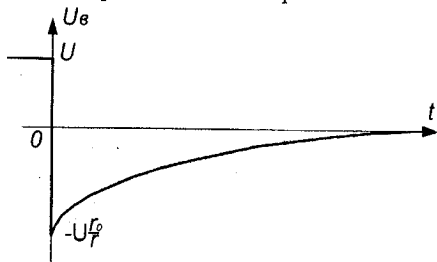


Рисунок 1.6

#### 1.4 Вмикання кола $R, L$ на синусоїдну напругу

Розглянемо послідовне з'єднання елементів  $r, L$  (рис.1.1) при вмиканні кола на синусоїдну напругу

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (1.34)$$

В рівнянні (1.5) ліва частина залишається без змін, а права частина буде синусоїдною функцією

$$L \frac{di}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (1.35)$$

Повний розв'язок - сума примусової і вільної складових

$$i = i_{np} + i_{\theta}.$$

Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму. В усталеному режимі струм також синусоїдний

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \beta + \varphi), \quad (1.36)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}.$$

Вільна складова, як розв'язок однорідного рівняння має такий же вигляд, як і (1.7)

$$i_{\theta} = Ae^{pt},$$

де  $p = -\frac{r}{L}$ .

Повний розв'язок

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.37)$$

Тому що початкові умови нульові (струму до комутації в колі не було)

$$i_{L(0-)} = i_{L(0+)} = 0,$$

то

$$i = I_m \sin(\beta - \varphi) + A$$

$$A = -I_m \sin(\beta - \varphi).$$

і

Остаточно

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) - I_m \sin(\beta - \varphi) Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.38)$$

Розглянемо графік зміни струму в колі (рис. 1.7) з великою постійною часу  $\tau \gg T$ .

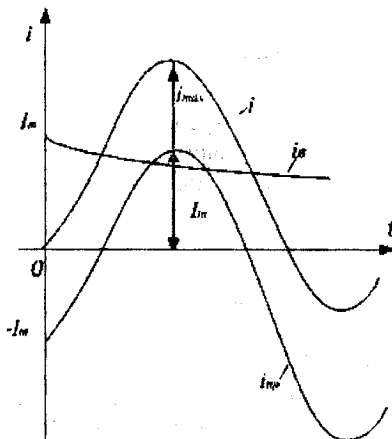


Рисунок 1.7



Якщо коло вмикається в момент, коли примусова складова  $i_{np} = -I_m$  (як показано на рис.1.7), то максимальне значення струму в перехідному режимі  $i_{max}$  може бути більше амплітуди струму в усталеному режимі майже в 2 рази.

Таким чином, якщо при вмиканні кола  $r, L$  на постійну напругу перехідний струм не перебільшує усталеного значення (рис.1.2), то при вмиканні того ж кола на синусоїдну напругу перехідний струм може бути більшим усталеного значення.

Розглянемо вплив моменту вмикання на характер перехідного процесу при синусоїдному впливі. Нехай комутація відбувається в момент, показаний на рис.1.8., коли  $i_{np}$  близький до нуля. В цьому випадку вільна складова в момент  $t=0$ :  $i_{n(0+)} = -i_{np(0+)}$ , також близька до нуля і перехідний струм мало відрізняється від усталеного.

Якщо ключ замикається в момент, коли примусова складова струму проходить через нуль, то вільна складова також дорівнює нулю, тому що  $i_{n(0+)} = -i_{np(0+)} = 0$  і в колі зразу ж настає новий усталений режим.

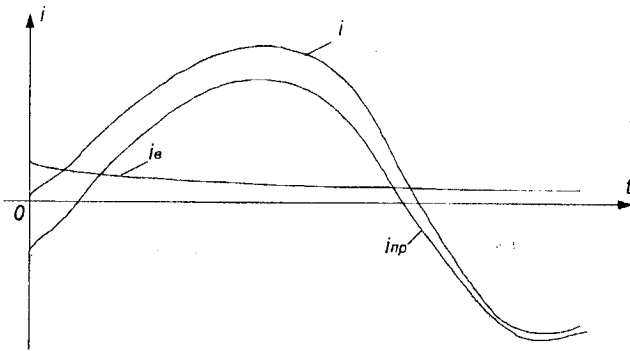


Рисунок 1.8

Отже при вмиканні кола на синусоїдну напругу характер перехідного процесу залежить від моменту вмикання кола. Найбільш сприятливий момент вмикання, коли примусова складова проходить через нуль, найбільш несприятливий момент вмикання, коли примусовий струм приймає максимальне значення.

### 1.5 Перехідні процеси в розгалужених колах, які мають один реактивний елемент

Наведені вище приклади дозволяють сформулювати суть класичного методу розрахунку - складання диференціального рівняння відносно шука-

ної величини і його розв'язок з урахуванням початкових умов. Якщо коло розгалужене (рис.1.9), то спочатку складається за законами Кірхгофа система диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + u_c &= U, \\ u_c - r_2 i_2 &= 0, \\ i_1 &= i_2 + i_3, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

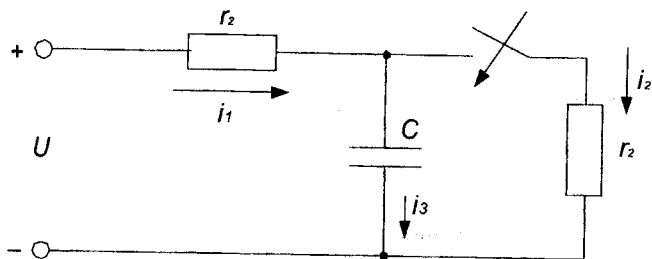


Рисунок 1.9

Із цієї системи будемо складати одне диференціальне рівняння відносно невідомої напруги  $u_c$ , оскільки для неї існує другий закон комутації. Для цього виразимо інші невідомі через  $u_c$  відповідно із першого, другого і четвертого рівнянь системи

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{U - u_c}{r_1}, \\ i_2 &= \frac{u_c}{r_2}, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Підставимо одержані значення  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ , в третє рівняння системи (1.39)

$$\frac{U - u_c}{r_1} = \frac{u_c}{r_2} + C \frac{du_c}{dt}.$$

Після нескладних перетворень одержимо

$$Cr_1r_2 \frac{du_c}{dt} + u_c(r_1 + r_2) = Ur_2. \quad (1.41)$$

Розв'язок рівняння (1.40) складається із сукупності примусової і вільної складових

$$u_c = u_{cпр} + u_{cв}.$$

Із розрахунку нового усталеного режиму визначаємо примусову складову

$$u_{cпр} = \frac{U}{r_1 + r_2} \cdot r_2. \quad (1.42)$$

Оскільки одержане диференціальне рівняння є рівнянням першого порядку, то

$$u_{cв} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$p \cdot Cr_1r_2 + (r_1 + r_2) = 0.$$

і його корінь

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2C}.$$

Повний розв'язок рівняння

$$u_c = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2} + A \cdot e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2C}t}. \quad (1.43)$$

Постійну інтегрування визначають за допомогою початкових умов. До замикання ключа струму в колі не було ( $i_{(0-)}=0$ ), тому що до кола прикладена постійна напруга і коло складається із послідовно з'єднаних елементів  $r_1$  і  $C$ .

За другим законом Кірхгофа

$$r_1 i_{(0-)} + u_{c(0-)} = U \quad (1.44)$$

і

$$u_{c(0-)} = U.$$

У відповідності з другим законом комутації

$$u_{c(0+)} = u_{c(0-)} = U.$$

Підставляючи (1.44) в (1.43), одержуємо

$$U = \frac{U r_2}{r_1 + r_2} + A.$$

Звідси

$$A = \frac{U}{r_1 + r_2} \cdot r_1$$

і остаточно

$$u_c = \frac{U}{r_1 + r_2} r_2 + \frac{U}{r_1 + r_2} r_1 \cdot e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}. \quad (1.45)$$

Співвідношення (1.40) дозволяють знайти будь-який струм.

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{U - u_c}{r_1} = \frac{U}{r_1 + r_2} - \frac{U}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}, \\ i_2 &= \frac{u_c}{r_2} = \frac{U}{r_1 + r_2} + \frac{U}{r_1 + r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt} = -\frac{U}{r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

## 1.6 Незалежні і залежні початкові умови

В попередньому параграфі перед тим, як визначити струми, був знайдений закон зміни напруги на ємності. Проте часто необхідно знати тільки один який-небудь струм. В цьому випадку визначення напруги на ємності стає зайвим, тому потрібно спробувати визначити зразу шуканий струм.

Нехай потрібно знайти струм  $i_1$ , не визначаючи напругу  $u_c$ . Виразимо з системи (1.39) всі невідомі через  $i_1$ . Із першого рівняння системи

$$u_c = U - r_1 i_1.$$

Із другого рівняння

$$i_2 = \frac{U}{r_2} - i_1 \frac{r_1}{r_2};$$

Із четвертого рівняння

$$i_3 = -Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Підставимо одержані значення в третє рівняння

$$i_1 = \frac{U}{r_2} - i_1 \frac{r_1}{r_2} - Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Після перетворень

$$Cr_1 r_2 \frac{di_1}{dt} + (r_1 + r_2) i_1 = U. \quad (1.47)$$

Повний розв'язок

$$i_1 = i_{1np} + i_1 \beta.$$

Із розрахунку нового усталеного режиму

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Вільна складова

$$i_\beta = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$Cr_1 r_2 p + (r_1 + r_2) = 0,$$

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}$$

i

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} + Ae^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t} \quad (1.48)$$

Для визначення постійної інтегрування необхідно знайти початкові умови. Струм через резистор не підпорядковується законам комутації. Тому безпосередньо із законів комутації  $i_{1(0^+)}$  визначити не можна.

Розрізняють в зв'язку з цим *незалежні* і *залежні* початкові умови. *Незалежними* початковими умовами називають такі умови, які безпосередньо визначаються з законів комутації.

До них відносяться струм через індуктивність і напруга на ємності в момент комутації. Для всіх інших невідомих початкові умови є залежними. Для їх визначення використовується початкова система рівнянь (1.39), яка записується для моменту  $t=0^+$  і доповнена законами комутації.

Система рівнянь (1.39) для моменту часу  $t=0+$  має вигляд:

$$\begin{aligned} r_1 i_{1(0+)} + u_{c(0+)} &= U, \\ u_{c(0+)} - r_2 i_{2(0+)} &= 0, \\ i_{1(0+)} &= i_{2(0+)} + i_{3(0+)}, \\ i_{3(0+)} &= C \frac{du_c}{dt}(0+) \end{aligned} \quad (1.39.a)$$

Другий закон комутації

$$u_{c(0+)} = u_{c(0-)} = U.$$

Із першого рівняння системи (1.39,a)

$$i_{1(0+)} = \frac{U - u_{c(0+)}}{r_1} = \frac{U - U}{r_1} = 0.$$

Підставляючи одержане початкове значення  $i_{1(0+)}$  в (1.48), одержуємо

$$0 = \frac{U}{r_1 + r_2} + A.$$

Звідси

$$A = -\frac{U}{r_1 + r_2}$$

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} - \frac{U}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}.$$

## 1.7 Вмикання послідовно з'єднаних елементів $r$ , $L$ , $C$ , до джерела постійної напруги

Складемо за другим законом Кірхгофа рівняння, що описують процеси в колі, яке зображене на рис. 1.10.

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_c = U. \quad (1.49)$$

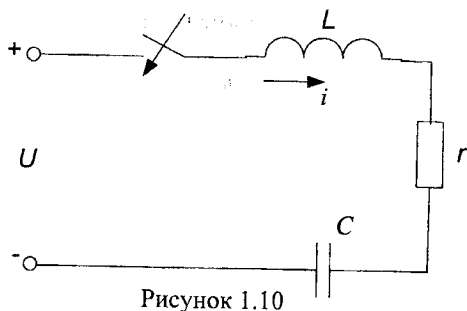


Рисунок 1.10

Оскільки  $i = C \frac{du_c}{dt}$ , то рівняння (1.49) прийматиме вигляд

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + rC \frac{du_c}{dt} + u_c = U. \quad (1.50)$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Повний розв'язок  $i$  в цьому випадку складається із примусової і вільної складових.

$$u_c = u_{cnp} + u_{cв}.$$

Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму, тому

$$u_{cnp} = U.$$

Вільна складова записується в залежності від коренів характеристичного рівняння, тому запишемо спочатку характеристичне рівняння

$$LCp^2 + rCp + 1 = 0. \quad (1.51)$$

Звідси одержуємо два кореня цього рівняння

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (1.52)$$

В залежності від параметрів можуть бути три види коренів характеристичного рівняння.

1. Якщо  $\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$ , то корені будуть комплексні спряжені, які звичайно записують у вигляді

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0. \quad (1.53)$$

Вільна складова в цьому випадку має вигляд

$$u_{cb} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (1.54)$$

2. Якщо  $\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$ , то корені дійсні різні і вільна складова має вигляд

$$u_{cb} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.55)$$

3. Якщо  $\frac{r^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ , то корені рівні ( $p_1 = p_2 = p$ ) і вільна складова має вигляд

$$u_{cb} = (A_1 + A_2 t) e^{p t}. \quad (1.56)$$

Припустимо, що має місце перший випадок (випадок комплексних спряжених коренів), тоді повне розв'язок

$$u_c = U + e^{-\delta t} (A_2 \cos \omega_0 t + A_1 \sin \omega_0 t) \quad (1.57)$$

має дві постійні інтегрування і для їх визначення необхідно мати дві початкові умови. Першу початкову умову визначимо з другого закону комутації. Вважаючи що до замикання ключа конденсатор не був зарядженим, одержимо

$$u_{c(0+)} = u_{c(0-)} = 0. \quad (1.58)$$

Підставляючи (1.58) в (1.57) для  $t=0$  маємо

$$A_2 = -U. \quad (1.59)$$

Друга початкова умова визначається із першого закону комутації

$$i_{(0+)} = i_{(0-)} = 0, \quad (1.60)$$



тому що до комутації струму в колі не було. Щоб скористатися другою початковою умовою, треба визначити струм  $i$  через постійні інтегрування

$A_1$  і  $A_2$ . Оскільки  $i = C \frac{du_c}{dt}$  то

$$i = C \left[ (-\delta) e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) + e^{-\delta t} (\omega_0 A_1 \cos \omega_0 t - \omega_0 A_2 \sin \omega_0 t) \right] \quad (1.61)$$

Підставляючи значення  $i_{(0)}$  при  $t=0$ , одержуємо

$$0 = C [(-\delta) A_2 + \omega_0 A_1],$$

звідси

$$A_1 = \frac{\delta}{\omega_0} A_2 = -\frac{\delta}{\omega_0} U. \quad (1.62)$$

Таким чином, повний розв'язок

$$u_c = U - e^{-\delta t} \left( \frac{\delta}{\omega_0} U \sin \omega_0 t + U \cos \omega_0 t \right),$$

або

$$u_c = U - A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \gamma), \quad (1.63)$$

де

$$A = \sqrt{\frac{\delta^2}{\omega_0^2} U^2 + U^2}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{U}{U \frac{\delta}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0}{\delta}.$$

Розглянемо докладно характер зміни вільної складової

$$u_{cb} = -A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \gamma). \quad (1.64)$$

Із цього виразу видно, що вільна складова є синусоїдою, що згасає, з частотою коливань  $\omega_0$  і змінною амплітудою  $A e^{-\delta t}$ .

Постійна часу кола

$$\tau = \frac{1}{\delta},$$

а період коливань

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Графік зміни вільної складової показаний на рис. 1.11.

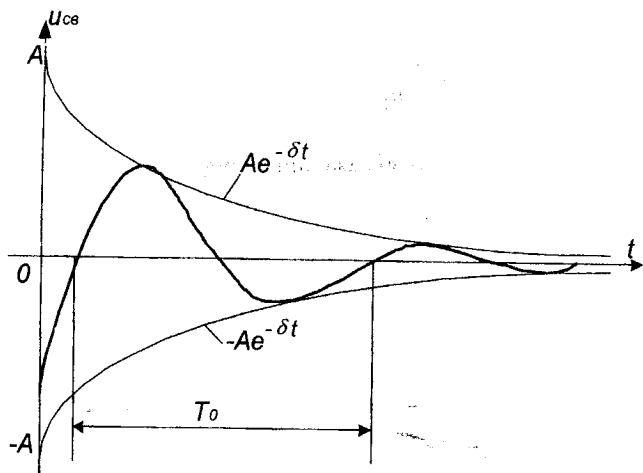


Рисунок 1.11

Оскільки вільна складова наближається до нуля, коливаючись біля нульового значення, то такий режим перехідного процесу називається *коливальним*.

В другому випадку, якщо корені характеристичного рівняння дійсні різні, повний розв'язок записується у вигляді

$$u_c = U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (1.65)$$

Використовуючи першу початкову умову (1.58), одержуємо

$$0 = U + A_1 + A_2.$$

Виражаючи струм  $i$  через  $u_c$ , одержуємо

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C [A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}] \quad (1.66)$$

і, використовуючи другу початкову умову (1.60), маємо

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \quad (1.67)$$

Розв'язуючи разом рівняння (1.66) і (1.67), одержимо

$$A_1 = \frac{Up_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = -\frac{Up_1}{p_1 - p_2} \quad (1.68)$$

і повний розв'язок буде

$$u_c = U + \frac{Up_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{Up_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (1.69)$$

Графік зміни вільної складової для  $|p_1| > |p_2|$  зображений на рис. 1.12.

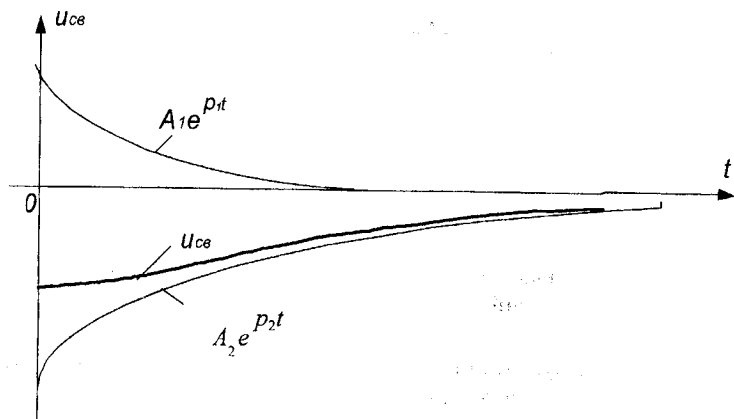


Рисунок 1.12

В цьому випадку вільна складова наближається до нуля асимптотично, не коливаючись, тому такий режим перехідного процесу називається *апериодичним*. Практична тривалість перехідного процесу в цьому випадку визначається за більшим значенням  $\tau$ .

Якщо  $|p_1| > |p_2|$ ,  $\frac{1}{|p_1|} < \frac{1}{|p_2|}$ , то  $\tau_2 > \tau_1$  і  $t_{нпр} = (4 \div 5)\tau_2$ .

В третьому випадку, тобто коли корені характеристичного рівняння дійсні рівні (корені кратні), повний розв'язок рівняння (1.50) має вигляд

$$u_c = U + (A_1 + A_2 t)e^{pt}. \quad (1.70)$$

Підставляючи першу початкову умову, одержуємо

$$0 = U + A_1; \quad A_1 = -U. \quad (1.71)$$

Виразимо струм через постійні інтегрування

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C [p(A_1 + A_2 t)e^{pt} + A_2 e^{pt}]$$

і підставимо другу початкову умову (1.60)

$$0 = C [pA_1 + A_2]; \quad A_2 = -pA_1 = pU. \quad (1.72)$$

Остаточно

$$u_c = U + (-U + pUt)e^{pt}. \quad (1.73)$$

Графік зміни вільної складової показаний на рис. 1.13.

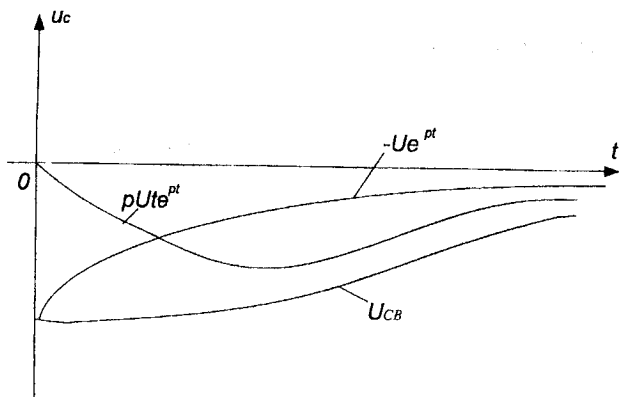


Рисунок 1.13

## 1.8 Розрахунок перехідних процесів класичним методом в складних розгалужених колах

Для розрахунку перехідних процесів в складних розгалужених колах складається за законами Кірхгофа для миттєвих значень система диференціальних рівнянь для післякомутаційного стану.

Після того із одержаної системи складають одне диференціальне рівняння відносно однієї невідомої. Повний розв'язок цього диференціального рівняння складається із двох частин: примусової і вільної складових. Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму. Якщо дія (прикладена напруга) постійна, то і примусова складова постійна, якщо дія синусоїдна, то примусова складова також синусоїдна і визначається комплексним методом.

Вид вільної складової записується в залежності від виду коренів характеристичного рівняння. Число коренів дорівнює порядку диференціального рівняння.

Нехай, наприклад, диференціальне рівняння має вигляд

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t), \quad (1.74)$$

де  $x$  - шукана величина,

$n$  - порядок диференціального рівняння,

$f(t)$  - зовнішня дія.

Характеристичне рівняння

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1.75)$$

Якщо всі корені дійсні різні, то вільна складова записується як сума експонент.

$$x_0 = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} = \sum_{K=1}^n A_K e^{p_K t}. \quad (1.76)$$

Повний розв'язок

$$x = x_{np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}.$$

Постійні інтегрування визначаються за допомогою початкових умов. Часто як початкові умови використовують  $n$  залежних початкових умов:

$$x_{(0+)}, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0+}, \left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{t=0+}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right|_{t=0+},$$

які визначаються, як відмічалось раніше, із системи рівнянь, записаної для  $t = 0+$  і доповненої законами комутації.

Якщо частина коренів комплексно-спряжена, наприклад,

$$p_{2,3} = -\delta_1 \pm j\omega_{01}, \quad p_{4,5} = -\delta_2 \pm j\omega_{02},$$

то вільна складова має вигляд:

$$x_0 = A_1 e^{p_1 t} + e^{-\delta_1 t} (A_2 \sin \omega_{01} t + A_3 \cos \omega_{01} t) + e^{-\delta_2 t} (A_4 \sin \omega_{02} t + A_5 \cos \omega_{02} t) + A_6 e^{p_6 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.77)$$

Якщо є корені кратні (наприклад,  $p_2 = p_3 = p'$ ,  $p_4 = p_5 = p''$ ), то

$$x_{\theta} = A_1 e^{p_1 t} + (A_2 + A_3 t) e^{p' t} + (A_4 + A_5 t) e^{p'' t} + A_6 e^{p_6 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.78)$$

Необхідно відмітити, що в лінійних електричних колах з постійними параметрами без зворотних зв'язків дійсні частини коренів характеристичного рівняння від'ємні, тому з часом вільна складова прямує до нуля.

#### Приклад 1.1

Визначити закони зміни вхідного струму ( $i_1$ ) при розмиканні ключа (рис.1.14).

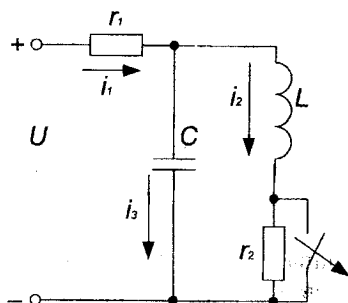


Рисунок 1.14

Складасмо за законами Кірхгофа систему диференціальних рівнянь для післякомутаційного стану кола (ключ розімкнутий)

$$\begin{aligned} r_1 i_1 + u_c &= U, \\ L \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 - u_c &= 0, \\ i_1 &= i_2 + i_3, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Приведемо систему (1.79) до одного диференціального рівняння відносно невідомого струму  $i_1$ , виражаючи всі інші невідомі через  $i_1$ .

Із першого рівняння системи

$$u_c = U - r_1 i_1,$$

із четвертого рівняння

$$i_3 = -Cr_1 \frac{di_1}{dt},$$

Із третього рівняння

$$i_2 = i_1 - i_3 = i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Підставляючи одержані значення в друге рівняння одержимо

$$L \frac{d\left(i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}\right)}{dt} + r_2 \left(i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}\right) - U + i_1 r_1 = 0,$$

або

$$LCr_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (L + Cr_1 r_2) \frac{di_1}{dt} + (r_1 + r_2) i_1 = U. \quad (1.80)$$

Одержане диференціальне рівняння є неоднорідним рівнянням другого порядку. Повний розв'язок цього рівняння

$$i_1 = i_{1np} + i_{1\theta}. \quad (1.81)$$

Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму. В новому усталеному режимі ключ розімкнутий, при прикладеній постійній напрузі в усталеному режимі струм через конденсатор не протікає, тому

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + r_2}. \quad (1.82)$$

Характеристичне рівняння

$$LCr_1 p^2 + (L + Cr_1 r_2) p + r_1 + r_2 = 0.$$

Нехай його корені будуть комплексні спряжені  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ , тоді

$$i_{1\theta} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (1.83)$$

Повний розв'язок

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_1} + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (1.84)$$

Для визначення постійних інтегрування знайдемо початкові умови  $i_{1(0+)}$ ,  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+}$ . Оскільки ці початкові умови залежні, то запишемо систему рівнянь (1.79) для  $t=0+$  і доповнимо її законами комутації

$$\begin{aligned} r_1 i_{1(0+)} + u_{c(0+)} &= U, \\ L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0+} + r_2 i_{2(0+)} - u_{c(0+)} &= 0, \\ i_{1(0+)} &= i_{2(0+)} + i_{3(0+)}, \\ i_{3(0+)} &= C \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+}. \end{aligned} \quad (1.79.a)$$

Законали комутації

$$\begin{aligned} i_{2(0+)} &= i_{2(0-)}, \\ u_{c(0+)} &= u_{c(0-)}. \end{aligned}$$

Значення  $i_{2(0-)}$  і  $u_{c(0-)}$  визначаються із розрахунку усталеного режиму до комутації, тому

$$\begin{aligned} i_{2(0+)} = i_{2(0-)} &= \frac{U}{r_1}, \\ u_{c(0+)} = u_{c(0-)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Із першого рівняння системи (1.79.a) визначаємо  $i_{1(0+)}$ .

$$i_{1(0+)} = \frac{U - u_{c(0+)}}{r_1} = \frac{U}{r_1}. \quad (1.86)$$

Із третього рівняння системи (1.79.a)

$$i_{3(0+)} = i_{1(0+)} - i_{2(0+)} = \frac{U}{r_1} - \frac{U}{r_1} = 0. \quad (1.87)$$

Із четвертого рівняння системи (1.79)

$$\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{i_{3(0+)}}{C} = 0. \quad (1.88)$$

Проінтегруємо перше рівняння системи (1.79)



$$r_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{du_c}{dt} = 0.$$

і запишемо його для  $t=0+$

$$r_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+} + \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+} = 0$$

або

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+} = -\frac{1}{r_1} \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+}$$

Враховуючи (1.88), одержуємо

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+} = 0. \quad (1.89)$$

Таким чином необхідні початкові умови визначаються виразами (1.86) і (1.89). Підставляючи (1.86) в (1.84), одержуємо

$$\frac{U}{r_1} = \frac{U}{r_1 + r_2} + A_2; \quad A_2 = \frac{Ur_2}{r_1(r_1 + r_2)}. \quad (1.90)$$

Продиференціюємо (1.84) і підставимо туди (1.89)

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= (-\delta)e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) + \\ &+ e^{-\delta t} (\omega_0 A_1 \cos \omega_0 t - \omega_0 A_2 \sin \omega_0 t), \\ 0 &= (-\delta)A_2 + \omega_0 A_1. \end{aligned}$$

Звідси

$$A_1 = A_2 \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{Ur_2 \delta}{\omega_0 r_1 (r_1 + r_2)}. \quad (1.91)$$

Остаточний розв'язок

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} + \frac{Ur_2}{r_1(r_1 + r_2)} e^{-\delta t} \left( \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right). \quad (1.92)$$

## 1.9 Складання характеристикних рівнянь

Диференціальне рівняння відносно однієї невідомої необхідне для того, щоб одержати характеристикне рівняння. В багатьох випадках характеристикне рівняння можна одержати більш простим шляхом.

Розглянемо два способи складання характеристикних рівнянь.

1. *Метод алгебризації диференціальних рівнянь.*

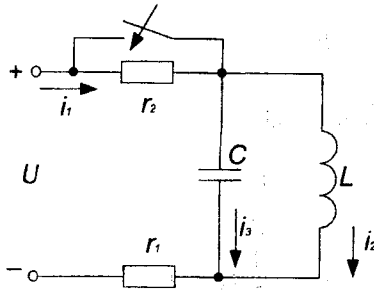


Рисунок 1.15

Розглянемо цей метод на прикладі конкретного кола (рис.1.15). Складемо за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану систему диференціальних рівнянь.

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt &= U, \\ L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C} \int i_3 dt &= 0, \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.93)$$

Повний розв'язок для будь-якої змінної, як відомо, складається із примусової і вільної складових. Вільна складова залежить від параметрів кола і не залежить від зовнішньої дії. Тому, якщо вважати зовнішню дію відсутньою, то система (1.93) буде справедлива тільки для вільних складових, тобто

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{1e} + \frac{1}{C} \int i_{3e} dt &= 0, \\ L \frac{di_{2e}}{dt} - \frac{1}{C} \int i_{3e} dt &= 0, \\ i_{1e} - i_{2e} - i_{3e} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.93.a)$$

Вільна складова складається із суми членів виду  $Ae^{pt}$ . Неважко бачити, що

$$\frac{di_{\theta}}{dt} = Ape^{pt} = p \cdot i_{\theta},$$

а

$$\int i_{\theta} dt = \frac{1}{p} Ae^{pt} = \frac{i_{\theta}}{p}.$$

Враховуючи одержані співвідношення, система (1.93.а) запишеться в вигляді

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{1\theta} + \frac{1}{Cp} i_{3\theta} &= 0, \\ Lp i_{2\theta} - \frac{1}{Cp} i_{3\theta} &= 0, \\ i_{1\theta} - i_{2\theta} - i_{3\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.93.6)$$

Одержали однорідну лінійну алгебраїчну систему рівнянь. Відомо, що однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок, якщо визначник системи дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{Cp} \\ 0 & Lp & -\frac{1}{Cp} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$-r_1 Lp - \frac{L}{C} - \frac{r_1}{Cp} = 0$$

і

$$r_1 CLp^2 + Lp + r_1 = 0. \quad (1.94)$$

Одержаний вираз (1.94) і є характеристичним рівнянням.

## 2. Метод вхідного опору.

Припустимо, що до схеми (рис.1.15) після комутації прикладена синусоїдна напруга (рис.1.16) і відповідно в вітках кола протікають синусоїдні струми.

Запишемо в комплексній формі рівняння за законами Кірхгофа.

$$\left. \begin{aligned} r_1 I_1 + \frac{1}{j\omega C} I_3 &= U, \\ j\omega L I_2 - \frac{1}{j\omega C} I_3 &= 0, \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.95)$$

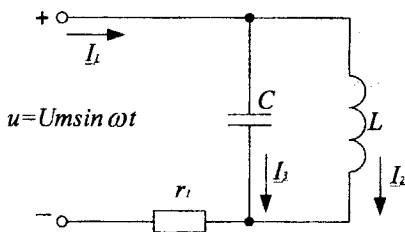


Рисунок 1.16

Знайдемо вхідний опір кола при синусоїдній дії

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U}{I_1}. \quad (1.96)$$

Струм  $I_1$  знайдемо із системи (1.95) за правилом Крамера, тобто

$$I_1 = \frac{\Delta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)}, \quad (1.97)$$

де

$$\Delta(j\omega) = \begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ +1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad (1.98)$$

$$\Delta_1(j\omega) = \begin{vmatrix} \underline{U} & 0 & 1 \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{U}\Delta_{11}(j\omega), \quad (1.99)$$

де

$$\Delta_{11}(j\omega) = \begin{vmatrix} j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Підставимо одержане значення  $\Delta(j\omega)$ ,  $\Delta_{11}(j\omega)$  в (1.97), а після в (1.96), тоді

$$Z_{\theta x}(j\omega) = \frac{\Delta(j\omega)}{\Delta_{11}(j\omega)}. \quad (1.100)$$

Позначимо  $j\omega = p$  і підставимо його в (1.100)

$$Z_{\theta x}(p) = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & 0 & 1 \\ 0 & pL & -\frac{1}{pC} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pL & -\frac{1}{pC} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} \quad (1.101)$$

Із (1.101) видно, що визначник в чисельнику  $Z_{\theta x}(p)$  є визначником алгебривованої системи (1.93.6), прирівнюючи який до нуля, одержують характеристичне рівняння. Таким чином, умова  $Z_{\theta x}(p) = 0$  дає можливість одержати характеристичне рівняння.

### Приклад 1.2

Визначити характеристичне рівняння за допомогою методу вхідного опору для кола, яке зображене на рис.1.14.

Запишемо вхідний опір цього кола при синусоїдній напрузі для післякомутаційного стану.

$$Z_{\theta x}(j\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{r_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Замінімо  $j\omega$  на  $p$ , тоді

$$Z_{\theta x}(p) = r_1 + \frac{(r_2 + pL) \frac{1}{pC}}{r_2 + pL + \frac{1}{pC}}$$

Після перетворень

$$Z_{\theta x}(p) = r_1 + \frac{r_2 + pL}{Lcp^2 + r_2Cp + 1} = \frac{LCr_1p^2 + (r_1r_2C + L)p + (r_1 + r_2)}{Lcp^2 + r_2Cp + 1}$$

Прирівнюючи  $Z_{\theta x}(p)$  до нуля, одержуємо характеристичне рівняння

$$LCr_1p^2 + (r_1r_2C + L)p + r_1 + r_2 = 0 \quad (1.102)$$

### Контрольні питання та вправи

1. Які причини виникнення перехідних процесів?
2. Як формулюються і записуються закони комутації?
3. Як визначається примусова складова?
4. Який вигляд має вираз для вільної складової в залежності від кількості і виду коренів характеристичного рівняння?
5. Чим відрізняється розрахунок перехідних процесів в колах з джерелом постійної напруги від розрахунку процесів в колах з джерелом гармонічної напруги?
6. Що розуміють під залежними початковими умовами і яка методика їх визначення?
7. Визначити значення напруги  $u_{L(0)}$  кола (рис.1.17) в момент комутації, якщо  $U = 160\text{В}$ ,  $R_1 = 80\text{Ом}$ ,  $R_2 = 30\text{Ом}$ ,  $R_3 = 60\text{Ом}$ .

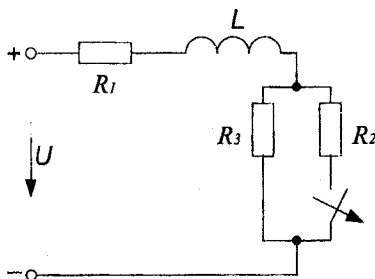


Рисунок 1.17

Відповідь:  $u_{L(0)} = -64\text{В}$ .

8. Визначити значення струму  $i_{2(0)}$  в колі (рис.1.18) в момент комутації, якщо  $U = 80\text{В}$ ,  $R_1 = 20\text{Ом}$ ,  $R_2 = 80\text{Ом}$ ,  $R_3 = 60\text{Ом}$ .

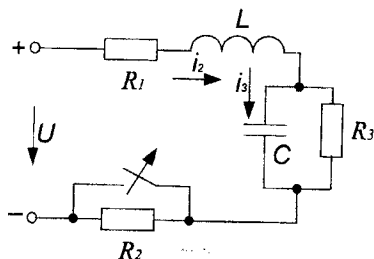


Рисунок 1.18

Відповідь:  $i_{2(0)} = -8\text{А}$ .

9. Визначити перехідну напругу  $u_c$  в колі (рис.1.19).

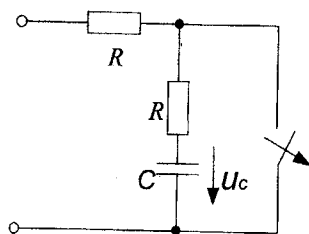


Рисунок 1.19

Відповідь:  $u_c = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right)$ .

10. Опір  $R = 100\text{ Ом}$  і заряджена ємність  $C = 100\text{ мкФ}$ , які з'єднані послідовно, підключаються до джерела ЕРС  $e = 141 \sin \left( 377t + \frac{\pi}{6} \right)\text{ В}$  при  $t = 0$ . Визначити  $i(t)$ , якщо початкова напруга на ємності дорівнює  $50\text{В}$ .

Відповідь:  $i = 1,37 \sin(377t + 44,8^\circ) + 0,241e^{-100t}\text{ А}$ .

## 2 ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

### 2.1 Деякі властивості перетворення Лапласа і зображення характерних функцій

Інтегральне перетворення Лапласа

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

переводить функцію дійсної змінної  $t - f(t)$ , яку називають *оригіналом*, в функцію комплексної змінної  $s = \sigma + j\omega - F(s)$  яку називають *зображенням*.

Відповідність між функціями часу (оригіналами) і функціями комплексної змінної (зображеннями) звичайно записують у вигляді

$$f(t) \rightarrow F(s) \quad (2.2)$$

або

$$F(s) = L[f(t)]. \quad (2.3)$$

Для того, щоб функція часу мала зображення, необхідно, щоб вона задовільняла умовам Діріхле і була функцією обмеженого зростання, тобто, щоб виконувалась умова

$$f(t) < Ae^{at}, \quad (2.4)$$

де  $A$  і  $a$  - константи.

Перетворення Лапласа є лінійними перетворенням. Дійсно, нехай

$$f_k(t) \rightarrow F_k(s), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Знайдемо зображення функції

$$\begin{aligned} f(t) &= C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + \\ &+ C_k f_k(t) + \dots + C_n f_n(t) = \sum_{k=1}^n C_k f_k(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тому що

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

то, підставляючи сюди значення (2.5), одержуємо



$$F(s) = \int_0^{\infty} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_K f_K(t) + \dots + C_n f_n(t)] e^{-st} dt,$$

або

$$F(s) = C_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \dots + C_K \int_0^{\infty} f_K(t) e^{-st} dt + \dots + C_n \int_0^{\infty} f_n(t) e^{-st} dt$$

і

$$F(s) = C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) + \dots + C_n F_n(s) = \sum_{K=1}^n C_K F_K(s). \quad (2.6)$$

Таким чином, зображення суми функцій дорівнює сумі зображень окремих функцій; зображення функції, яка помножена на константу, дорівнює константі, помноженій на зображення цієї функції.

Знайдемо зображення характерних функцій. Нехай  $f(t) = A$ , тоді

$$F(s) = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = A \left( -\frac{1}{s} \right) e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{s}. \quad (2.7)$$

Якщо  $f(t) = e^{\alpha t}$ , то

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{-(s-\alpha)} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha}. \quad (2.8)$$

Якщо  $f(t) = e^{-\alpha t}$ , то зображення даної функції відрізняється від попередньої знаком біля  $\alpha$ , тобто

$$F(s) = \frac{1}{s+\alpha}. \quad (2.9)$$

Нехай  $f(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ .

Тоді в відповідності з (2.8)

$$F(s) = \frac{1}{s-j\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

тобто

$$\begin{aligned}\cos \omega t &\rightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \\ \sin \omega t &\rightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Знайдемо зображення похідної функції  $f(t)$ . Нехай  $f(t)$  має своїм зображенням  $F(s)$ , тоді

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt.$$

Візьмемо інтеграл по частинах.

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Позначимо  $u = e^{-st}$ ,  $v = f(t)$ ,  $du = (-s)e^{-st} dt$ , тоді

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[ f(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Оскільки функція  $f(t)$  росте не швидше показникової функції (2.4), то при підстановці верхньої границі перша складова дає нуль, а нижньої границі -  $f(0)$ , тобто значення функції в момент  $t = 0$ . Друга складова (інтеграл) у відповідності з (2.1) є  $F(s)$ , тому

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0).\tag{2.11}$$

Визначимо зображення невизначеного інтеграла функції  $f(t)$ , зображення якої є  $F(s)$ . Відомо, що

$$\varphi(t) = \int f(t) dt = \int_0^t f(t) dt + \varphi(0),$$

де

$\varphi(0)$  - значення функції  $\varphi(t)$  для  $t = 0$ ,

тому

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = L\left[\int_0^t f(t)dt + \varphi(0)\right].$$

У відповідності з (2.7)

$$L[\varphi(0)] = \frac{\varphi(0)}{s},$$

а

$$\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = f(t).$$

Зображення останньої рівності

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = L[f(t)] = F(s).$$

Згідно з (2.11)

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = sL\left[\int_0^t f(t)dt\right] - \int_0^0 f(t)dt.$$

Оскільки останній інтеграл дорівнює нулю, то

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

і остаточно

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\varphi(0)}{s}. \quad (2.12)$$

Вирази (2.11) і (2.12) показують, що операціям диференціювання функцій дійсної змінної  $t$  відповідають алгебраїчні операції для зображень. Це значить, що диференціальним рівнянням оригіналів відповідають алгебраїчні рівняння зображень.

## 2.2 Використання перетворення Лапласа для розрахунку перехідних процесів

Розглянемо перехідний процес в колі (рис.2.1). Диференціальне рівняння, яке описує процеси в цьому колі,

$$L\frac{di}{dt} + ri = u(t).$$

Застосуємо перетворення Лапласа до даного рівняння, позначивши зображення струму  $i(t)$  як  $I(s)$ , а зображення напруги  $u(t)$  як  $U(s)$ . Тоді рівняння прийме вигляд

$$L \cdot [sI(s) - i(0)] + rI(s) = U(s).$$

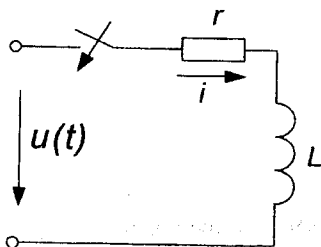


Рисунок 2.1

Звідси

$$I(s)(Ls + r) = U(s) + Li(0)$$

$$I(s) = \frac{U(s) + Li(0)}{Ls + r}$$

Для даного кола  $i_{(0+)} = i_{(0-)} = 0$ , тому

$$I(s) = \frac{U(s)}{Ls + r}$$

Якщо, прикладена напруга постійна, то

$$U(s) = \frac{U}{s}$$

$$I(s) = \frac{U}{s(Ls + r)}$$

Перетворимо останній вираз

$$I(s) = \frac{U/r}{s} - \frac{U/r}{s + \frac{r}{L}}$$

У відповідності з (2.7) і (2.9) одержуємо

$$i(t) = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Визначимо перехідний процес в розгалуженому колі (рисунок 2.2).

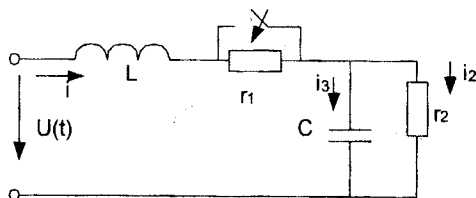


Рисунок 2.2

Запишемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ L \frac{di_1}{dt} + u_c = u(t), \\ r_2 i_2 - u_c = 0, \\ i_3 = C \frac{du_c}{dt}. \end{cases}$$

Використовуючи перетворення Лапласа, запишемо систему рівнянь для зображень

$$\begin{cases} I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) = 0, \\ LsI_1(s) - Li_1(0) + U_c(s) = U(s), \\ r_2 I_2(s) - U_c(s) = 0, \\ I_3(s) = C[sU_c(s) - u_c(0)] \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, можна одержати зображення будь-якої величини. Зворотний перехід, тобто визначення оригіналу за відомим зображенням, розглянемо в параграфі 2.5.

В наведених прикладах рівняння для зображень (інакше їх називають операторними рівняннями) одержали із рівнянь для оригіналів. Важливо навчитися записувати їх зразу в операторній формі.

### 2.3 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

Записати систему рівнянь в операторній формі можна тоді, коли сформульовані основні закони, тобто закони Ома і Кірхгофа, в операторній формі.

Розглянемо окремий контур (рисунок 2.3), який містить всі елементи, і складемо рівняння для миттєвих значень за законами Кірхгофа

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_c = e(t). \quad (2.13)$$

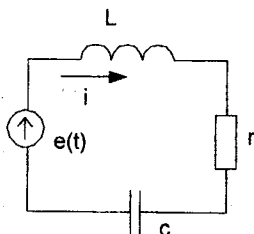


Рисунок 2.3

Напруга на конденсаторі

$$u_c = \frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_c(0).$$

В операторній формі ця напруга

$$U_c(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_c(0)}{s}. \quad (2.14)$$

Тому рівняння (2.13) в операторній формі прийме вигляд

$$LsI(s) - Li(0) + rI(s) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_c(0)}{s} = E(s)$$

або

$$I(s)(Ls + r + \frac{1}{sC}) = E(s) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{s}. \quad (2.15)$$

Позначимо

$$Ls + r + \frac{1}{sC} = Z(s) \quad (2.16)$$

Тоді назовемо цю величину операторним опором, тоді

$$I(s) \cdot Z(s) = E(s) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{s} \quad (2.17)$$

Для нульових початкових умов

$$I(s) \cdot Z(s) = E(s) \quad (2.18)$$

Таким чином, в колі для нульових початкових умов закон Ома справедливий і для зображень. Якщо початкові умови не нульові, то до зовнішньої е.р.с. додаються ще дві е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в електричному полі конденсатора  $(-\frac{u_c(0)}{s})$  і магнітному полі котушки  $Li(0)$ . Отже, якщо врахувати додаткові е.р.с. в колі  $Li(0)$  і  $(-\frac{u_c(0)}{s})$ , то і в цьому випадку закон Ома справедливий для зображень.

Нехай, наприклад, у вузлі *a* деякого електричного кола (рис.2.4) з'єднуються 4 вітки з відповідними струмами.

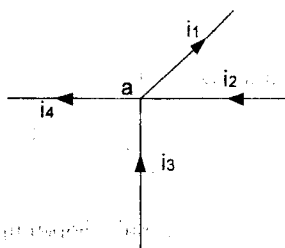


Рисунок 2.4

Для миттєвих значень за першим законом Кірхгофа

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0 \quad (2.19)$$

В операторній формі

$$I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) + I_4(s) = 0 \quad (2.20)$$

В загальному вигляді

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k(s) = 0.$$

Таким чином, перший закон Кірхгофа в операторній формі повністю справедливий .

Для того, щоб розглянути другий закон Кірхгофа, виділимо контур, який містить  $n$  віток, в кожній з яких знаходиться джерело е.р.с.,  $L_k$ ,  $C_k$ ,  $r_k$  (рис.2.5).

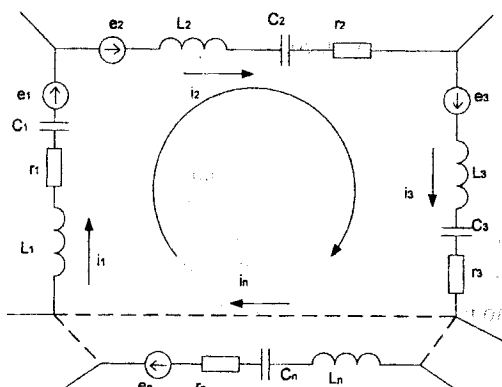


Рисунок 2.5

При вибраних напрямках обходу контуру і струмів у вітках для миттєвих значень запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа.

$$\sum_{k=1}^n \left( L \frac{di_k}{dt} + r_k i_k + u_{ck} \right) = \sum_{k=1}^n e_k \quad (2.21)$$

Переходячи до зображень з урахуванням (2.14), одержуємо

$$\sum_{k=1}^n \left[ sL_k I_k(s) - L_k i_k(0) + r_k I_k(s) + \frac{1}{C_k s} I_k(s) + \frac{u_{ck}(0)}{s} \right] = \sum_{k=1}^n E_k(s)$$

або

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) \left( sL_k + r_k + \frac{1}{sC_k} \right) = \sum_{k=1}^n \left[ E_k(s) + L_k i_k(0) - \frac{u_{ck}(0)}{s} \right].$$

З урахуванням (2.16)

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) Z_k(s) = \sum_{k=1}^n \left[ E_k(s) + L_k i_k(0) - \frac{u_{ck}(0)}{s} \right]. \quad (2.22)$$



Для нульових початкових умов другий закон Кірхгофа в операторному вигляді

$$\sum_{k=1}^n I_k(s)Z_k(s) = \sum_{k=1}^n E_k(s) \quad (2.23)$$

також є правильним, тобто алгебраїчна сума зображень напруг на ділянках кола дорівнює алгебраїчній сумі зображень е.р.с. в будь-якому замкненому контурі.

Якщо початкові умови не є нульовими, то треба враховувати не тільки зовнішні е.р.с., але і додаткові, які характеризують початкові запаси енергії. При цьому треба враховувати, що додаткові е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в магнітному полі  $Li_L(0)$  направлені за струмом, а додаткові е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в електричному полі  $\frac{u_c(0)}{s}$  направлені назустріч струмові.

Маючи сформульовані закони Ома і Кірхгофа в операторному вигляді, можна зразу записувати систему рівнянь в операторному вигляді для післякомутаційного стану кола.

### Приклад 2.1

За першим законом Кірхгофа для кола (рис. 2.6)

$$I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) = 0 \quad (2.24)$$

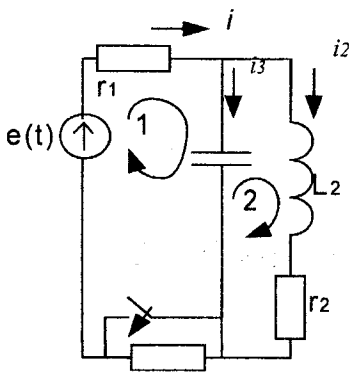


Рисунок 2.6

Перший контур містить дві вітки, тому ліва частина рівняння, яке складене за другим законом Кірхгофа, містить дві складові.

В правій частині рівняння крім зображення зовнішньої е.р.с. треба врахувати додаткову е.р.с.,  $\frac{u_c(0)}{s}$  із знаком мінус, оскільки напрям обходу контуру і напрям початкової напруги протилежно направлені, тому

$$I_1(s)r_1 + I_3(s)\frac{1}{sC} = E(s) - \frac{u_c(0)}{s} \quad (2.25)$$

Для другого контуру

$$I_2(s)(sL + r_2) - I_3(s)\frac{1}{sC} = Li_2(0) + \frac{u_c(0)}{s} \quad (2.26)$$

В цьому рівнянні в правій частині немає зовнішніх е.р.с., тому записані тільки додаткові е.р.с.,

В розглянутому прикладі операторні рівняння складені на основі законів Кірхгофа, проте при складанні рівнянь не зовсім зручно враховувати додаткові е.р.с. і враховувати їх знаки. Щоб ліквідувати цю незручність, вводять операторні схеми.

## 2.4 Операторні схеми

Операторні схеми - це такі схеми, в вітках яких діють зображення джерел енергії, знаходяться операторні елементи і протікають зображення струмів. З'ясуємо, якими повинні бути операторні елементи.

Для кола, яке містить один резистор (рисунок 2.7,а), напруга між точками а і в буде:  $u=ri$ .

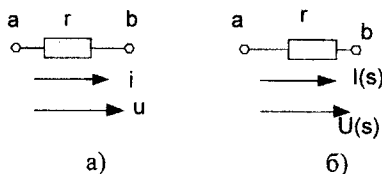


Рисунок 2.7

В операторній формі  $U(s)=rI(s)$ , тому резистор замінюється в операторній схемі елементом, величина якого дорівнює  $r$  (рисунок 2.7,б).

Для індуктивності (рисунок 2.8,а)  $u = L \frac{di}{dt}$ .

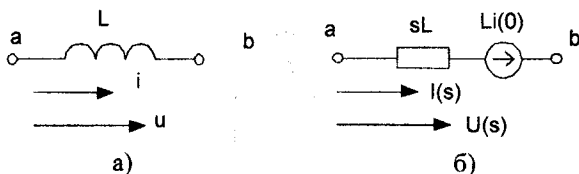


Рисунок 2.8

В операторному вигляді

$$U(s) = LsI(s) - Li(0).$$

Напруга на ділянці *ав* складається із двох складових і, відповідно, операторна схема (рисунок 2.8,б) складається також із двох ділянок: опору  $sL$  і е.р.с.  $Li(0)$ , яка збігається за напрямом із струмом.

Для ділянки, яка містить ємність (рисунок 2.9,а)

$$u = \frac{1}{C} \int i dt.$$

В операторному вигляді

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_c(0)}{s}$$

напруга також складається із двох складових, що відповідає двом ділянкам операторної схеми (рисунок 2.9,б): операторного опору  $\frac{1}{sC}$  і додаткової

е.р.с.  $\frac{U_c(0)}{s}$ , яка направлена назустріч струмові.

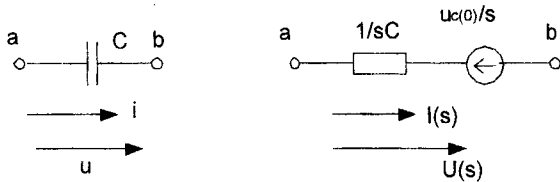


Рисунок 2.9

Одержані операторні схеми ділянок дозволяють зображати вихідні схеми у вигляді операторних.

На рисунку 2.10 зображена операторна схема кола, яке показано на рисунку 2.6.

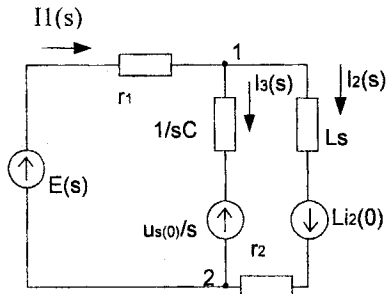


Рисунок 2.10

При складанні операторної схеми треба враховувати, що операторна схема складається для післякомутаційного стану, тому в операторній схемі не показується ключ і вилучається опір  $r_3$ .

Маючи операторну схему з операторними струмами, можна використовувати для її розрахунку будь-які відомі методи аналізу лінійних кіл.

Наприклад, для схеми рисунок 2.10 запишемо рівняння для вузла I за методом вузлових потенціалів. ( $\varphi_2 = 0$ )

$$\varphi_1(s) \left[ \frac{1}{r} + sC + \frac{1}{sL + r_2} \right] = E(s) \frac{1}{r_1} + \frac{u_c(0)}{s} \frac{1}{sC} - \frac{Li_2(0)}{r_2 + sL}$$

Знаючи зображення потенціалу вузла I, можна визначити зображення будь-якого струму.

Наприклад,

$$I_2(s) = \frac{\varphi_1(s) + Li_2(0)}{sL + r_2}$$

## 2.5 Перехід від зображення до оригіналу

Одержані операторні значення шуканих величин треба записати у вигляді функцій часу, тобто знайти оригінал одержаних зображень. Існують різні шляхи знаходження оригіналів. В теорії кіл звичайно, використовують теорему розкладання.

Теорема розкладання використовується в тих випадках, коли зображення деякої функції  $F(s)$  записано у вигляді відношення двох поліномів

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (2.27)$$

причому  $m < n$ .

Як правило, зображення величин, які визначаються при розрахунку перехідних процесів в лінійних колах, задовольняють цю умову.

Якщо всі корені знаменника прості, то вираз (2.27) можна записати в вигляді суми простих дробів

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_k}{s - s_k} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n} \quad (2.28)$$

де  $s_k$  - корінь знаменника,

$A_k$  - деякі невідомі постійні.

Для визначення постійної  $A_k$  помножимо ліву і праву частину (2.28) на  $(s - s_k)$

$$\frac{P(s)}{Q(s)}(s - s_k) = A_1 \frac{s - s_k}{s - s_1} + A_2 \frac{s - s_k}{s - s_2} + \dots + A_k + \dots + A_n \frac{s - s_k}{s - s_n}$$

і спрямуємо  $s$  до  $s_k$ .

В правій частині рівняння всі складові крім  $A_k$  перетворюються в нуль, а в лівій частині одержуємо невизначеність, тому що при  $s \rightarrow s_k$   $(s - s_k) \rightarrow 0$  і  $Q(s_k) \rightarrow 0$  тому що  $s_k$  корінь знаменника. Таким чином,

$$A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{s - s_k}{Q(s)} \cdot P(s). \quad (2.29)$$

Розкриваючи невизначеність в (2.29) за правилом Лопіталя, тобто диференціюючи чисельник і знаменник (2.29) і підставляючи  $s = s_k$ , одержуємо

$$A_k = \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}. \quad (2.30)$$

В цьому випадку

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} \cdot \frac{1}{s - s_k}. \quad (2.31)$$

Згідно з (2.8)

$$\frac{1}{s - s_k} \rightarrow e^{s_k t},$$

тому оригіналом функції  $F(s)$  є функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}, \quad (2.32)$$

де  $s_k$  - корінь знаменника

$P(s_k)$  - значення чисельника функції  $F(s)$  при  $s = s_k$

$Q'(s_k)$  - значення похідної знаменника функції  $F(s)$  при  $s = s_k$

$n$  - число коренів знаменника.

### Приклад 2.2

Зображення деякої функції має вигляд

$$F(s) = \frac{s^2 + 4s + 8}{s(s^2 + 6s + 8)} = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Знайти оригінал цієї функції. Знаходимо корені знаменника

$$s(s^2 + 6s + 8) = 0; \Rightarrow s_1 = 0, s_2 = -2, s_3 = -4.$$

Визначасмо значення чисельника для  $s=s_k$

$$P(s_1) = 8; P(s_2) = 4 - 8 + 8 = 4; P(s_3) = 16 - 16 + 8 = 8.$$

Знаходимо похідну знаменника

$$Q'(s) = (s^2 + 6s + 8) + s(2s + 6)$$

і її значення для  $s=s_k$

$$Q'(s_1) = 8; Q'(s_2) = -4; Q'(s_3) = 8;$$

Підставляємо одержані значення в (2.32)

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^3 \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t} = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{P(s_2)}{Q'(s_2)} e^{s_2 t} + \frac{P(s_3)}{Q'(s_3)} e^{s_3 t} = \\ &= \frac{8}{8} e^{0t} + \frac{4}{4} e^{-2t} + \frac{8}{8} e^{-4t} = 1 - e^{-2t} + e^{-4t}. \end{aligned}$$

### Контрольні питання та вправи

1. Який вигляд має інтегральне перетворення Лапласа?
2. Які умови повинна задовольняти функція, щоб вона мала зображення за Лапласом?
3. Як знайти зображення гармонічної функції з початковою фазою?
4. Чому дорівнює зображення похідної й інтеграла?
5. Який вигляд мають операторні схеми елементів електричного кола?
6. Як записати теорему розкладання?
7. Знайти оригінали за зображеннями

$$\text{а) } \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)}; \quad \text{б) } \frac{s+1}{s^2+2s} \quad \text{в) } \frac{1}{s(s^2+2s+5)}.$$

Відповіді:

$$\text{а) } \cos t - \cos 2t; \quad \text{б) } \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}); \quad \text{в) } \frac{1}{5}[1 + \frac{1}{2}e^{-t}(-2 \cos 2t - \sin 2t)].$$

8. Розв'язати задачі 9 і 10 попереднього розділу операторним методом.

### 3 ЧАСТОТНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

#### 3.1 Спектри аперіодичних функцій

Як показано раніше (розділ 1.6) періодична функція, яка записана рядом Фур'є

$$f(t) = B_0 + C_1 \sin(\omega t + \psi_1) + C_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + C_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + C_k \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots \quad (3.1)$$

повністю характеризується амплітудно-частотним і фазочастотним дискретним спектром.

Якщо ряд Фур'є записати в вигляді

$$f(t) = \frac{B_0}{2} + A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_2 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots + A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t + \dots \quad (3.2)$$

де

$$B_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt, \quad A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt, \quad (3.3)$$

то ряд Фур'є можна записати в комплексному вигляді

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (3.4)$$

де

$$C_k = \frac{B_k - jA_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt, \quad (3.5)$$

$\omega_1$  - частота основної гармоніки.

Як відомо, спектр періодичних функцій є дискретним. Перейдемо до аперіодичних функцій. З цієї метою будемо збільшувати період періодичної функції  $T$ , спрямовуючи його до нескінченності. Із зростанням періоду  $T$  інтервал на шкалі між складовими ряду Фур'є зменшується і лінійчастий спектр згущується, переходячи в граничному випадку в суцільний спектр (рисунок 3.1). В цьому випадку частота основної гармоніки

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  стає нескінченно малою  $d\omega$  і інтервал між сусідніми гармоніками

також стає нескінченно малою величиною, яка дорівнює  $d\omega$ . Частота  $k$ -тої гармонічної складової  $k\omega_1$  може бути позначена в цьому випадку  $\omega$ .

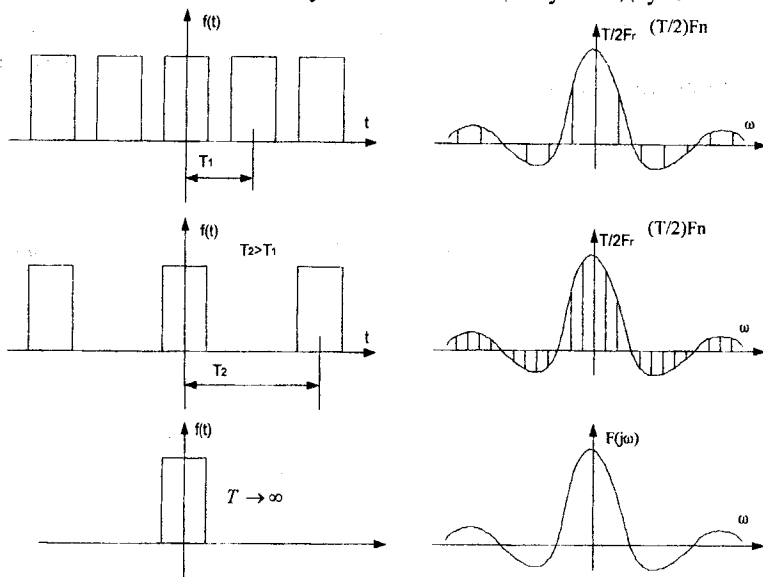


Рисунок 3.1

Комплексна амплітуда  $k$ -тої гармоніки стає також нескінченно малою і може бути позначена

$$dC(j\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.6)$$

Ряд Фур'є (3.4) в цьому випадку може бути записаний в вигляді

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dC(j\omega) e^{j\omega t}$$

або з урахуванням (3.6)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (3.7)$$



Якщо позначити

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.8)$$

і назвати цю величину *спектральною характеристикою* або просто спектральною функцією  $f(t)$ , то вихідна функція визначається через спектральну характеристику за виразом

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.9)$$

Інтегральні перетворення (3.8) і (3.9) називають *прямим і зворотним перетворенням Фур'є*.

Таким чином неперіодична функція уявляється нескінченно великим числом гармонічних складових нескінченно малої амплітуди  $dC(j\omega)$ , які відрізняються одна від однієї на нескінченно малу частоту  $d\omega$ .

Спектр такої функції буде неперервним.

Якщо функція  $f(t) = 0$  для  $t < 0$ , що, звичайно, має місце при розгляданні перехідних процесів, то (3.8) можна записати в вигляді

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.10)$$

Неважко бачити, що перетворення Фур'є одержують безпосередньо із перетворення Лапласа (2.1) формальною заміною  $s$  на  $j\omega$ .

Треба мати на увазі, що функція  $f(t)$  може бути перетворена за Фур'є, якщо вона абсолютно інтегровна, тобто

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt = M, \quad (3.11)$$

де  $M$  - скінченне число.

Зображення неперіодичної функції в вигляді сукупності незгасаючих гармонічних коливань дає можливість досліджувати перехідний процес в лінійному електричному колі, використовуючи загальні методи розрахунку усталених синусоїдних процесів.

### 3.2 Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів

Допустимо, що деяке лінійне коло (рисунок 3.2), яке має комплексний опір  $Z(j\omega)$  підключається в момент  $t=0$  при нульових початкових умовах до джерела. е.р.с.  $e(t)$ .

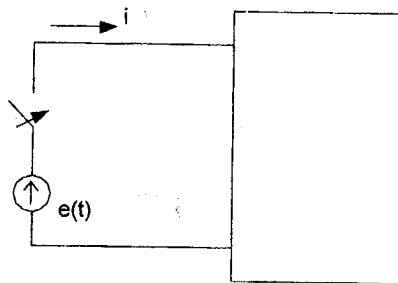


Рисунок 3.2

Визначивши спектральну характеристику дії згідно з (3.8) і позначивши її через  $E(j\omega)$ , можна визначити спектральну характеристику вхідного струму за формулою

$$I(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{Z(j\omega)} = E(j\omega)Y(j\omega), \quad (3.12)$$

де  $Y(j\omega)$ - комплексна провідність двополосника.

Оригінал струму  $i(t)$  можна знайти за допомогою виразу

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.13)$$

### 3.3 Наближені способи при розрахунку перехідних процесів частотним методом

Спроба точного аналізу перехідних процесів частотним методом зустрічає значні труднощі через складність зворотного перетворення Фур'є (3.9) і тому в таких випадках зручніше використовувати зворотне перетворення Лапласа, тому що визначення оригіналу за допомогою теореми розкладання звичайно не викликає ускладнень.

Частотний метод зручно використовувати тоді, коли можна обмежитися наближеними виразами і особливо в тих випадках, коли аналітичні вирази функції кола в операторній або спектральній формах неможливі, але може бути знайдена спектральна характеристика дослідним шляхом.

Розглянемо на конкретному прикладі наближений спосіб розрахунку перехідних процесів, коли до кола (рисунок 3.3, а) прикладений сигнал прямокутної форми (рисунок 3.3, б).

Спектральна характеристика функції кола

$$K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{U_1(j\omega)R}{U_1(j\omega)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{jR\omega C}{1 + j\omega CR}$$

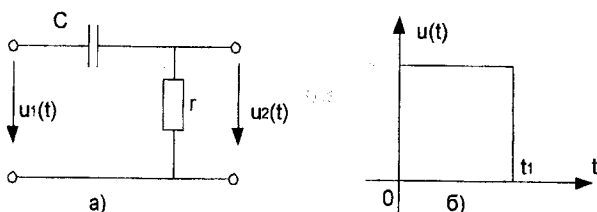


Рисунок 3.3

Будемо вважати, що на вхід схеми подається періодична напруга в вигляді прямокутних імпульсів з періодом  $T$  (рис. 3.4),

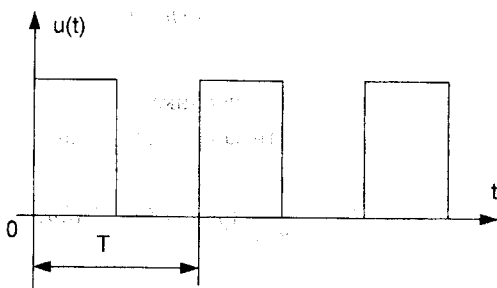


Рисунок 3.4

Період  $T$  вибираємо таким чином, щоб до початку наступного імпульсу перехідний процес в колі практично закінчився, тобто

$$T \geq 5\tau,$$

де  $\tau$  - стала часу кола.

Оскільки тепер на вхід схеми подається періодична напруга, то розрахунок схеми можна провести для усталеного режиму при не синусоїдній дії, розклавши завчасно вхідну дію в ряд Фур'є.

Вихідна напруга для  $k$ -тої гармоніки визначається за формулою

$$U_{2k} = U_{1k} K(j\omega k) = \frac{U_{1k} jRk\omega C}{1 + jk\omega CR}$$

Якщо обмежитися трьома гармоніками, то вихідна напруга зображається графіком, який показаний пунктиром на рисунку 3.5. Суцільною лінією показаний точний розв'язок.

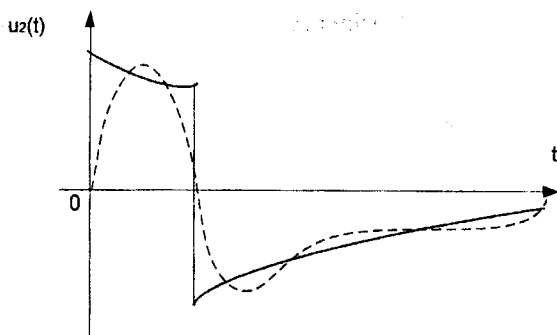


Рисунок 3.5

Якщо частотна характеристика знята дослідним шляхом, то для визначення реакції кола використовують метод трапецій. Запишемо спектральну характеристику  $F(j\omega)$  в вигляді

$$F(j\omega) = F_1(\omega) - jF_2(\omega), \quad (3.13)$$

де в відповідності з (3.8)

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \\ F_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Якщо  $f(t)=0$  для  $t<0$ , то

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \\ F_2(\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Неважко бачити, що функція  $F_1(\omega)$  парна, тому що  $F_1(\omega)=F_1(-\omega)$  а функція  $F_2(\omega)$  непарна, оскільки  $F_2(\omega)=-F_2(-\omega)$ .

Згідно з (3.9)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) - jF_2(\omega)] \times [\cos\omega t + j\sin\omega t] d\omega = \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \cos\omega t + F_2(\omega) \sin\omega t] d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \sin\omega t - F_2(\omega) \cos\omega t] d\omega \right\}.$$

Другий інтеграл в середині фігурних дужок повинен дорівнювати нулю, оскільки  $f(t)$  не може мати уявної складової, тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (3.21)$$

В виразі (3.21) функція в квадратних дужках відносно змінної  $\omega$  є парною, оскільки добуток двох парних функцій  $F_1(\omega)$  і  $\cos \omega t$  - функція парна, і добуток двох непарних функцій  $F_2(\omega)$  і  $\sin \omega t$  - теж парна функція. В цьому випадку границі інтегрування можна взяти від 0 до  $\infty$  і подвоїти результати, тобто

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (3.22)$$

Оскільки для  $t < 0$   $f(t) = 0$ , то

$$f(-t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_1(\omega) \cos(-\omega t) + F_2(\omega) \sin(-\omega t)] d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t - F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega = 0.$$

Тому

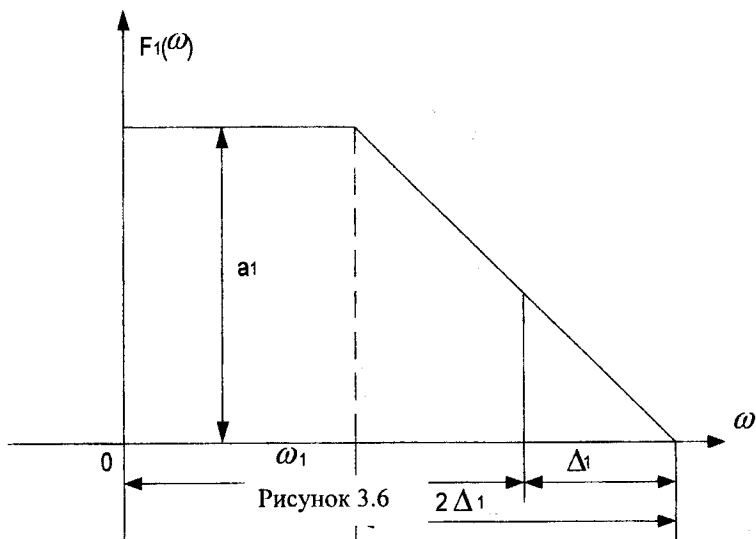
$$\int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega = \int_0^{\infty} F_2(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (3.23)$$

З урахуванням (3.23) вираз (3.22) приймає вигляд

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (3.24)$$

Таким чином, функцію часу можна визначити, знаючи тільки дійсну складову спектральної характеристики.

Припустимо, що дійсна частина спектральної характеристики має вигляд трапеції (рисунок 3.6).



Застосуємо до (3.24) формулу інтегрування по частинах, позначивши

$$u = F_1(\omega), \quad dv = \frac{1}{t} d(\sin \omega t).$$

Тоді

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \frac{1}{t} d(\sin \omega t) = \frac{2}{\pi t} [F_1(\omega) \sin \omega t]_0^{\infty} - \frac{2}{\pi t} \int_0^{\infty} \sin \omega t \frac{dF_1(\omega)}{d\omega} d\omega.$$

При  $\omega = 0$  і  $\omega = \infty$  перша складова перетворюється в нуль. Похідна  $\frac{dF_1(\omega)}{d\omega}$  відрізняється від нуля тільки на інтервалі

$\omega_1 - \Delta_1 < \omega < \omega_1 + \Delta_1$ , де вона має значення  $-\frac{a_1}{2\Delta_1}$ , тому

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{2}{\pi} \int_{\omega_1 - \Delta_1}^{\omega_1 + \Delta_1} \left(-\frac{a_1}{2\Delta_1}\right) \sin \omega t d\omega = \frac{a_1}{\pi \Delta_1^2} [\cos(\omega_1 - \Delta_1)t - \cos(\omega_1 + \Delta_1)t] = \\ &= 2 \frac{a_1 \omega_1}{\pi} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \cdot \frac{\sin \Delta_1 t}{\Delta_1 t}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Якщо функція  $F_1(\omega)$  має більш складний вигляд, наприклад, як показано на рис. 3.7,а,

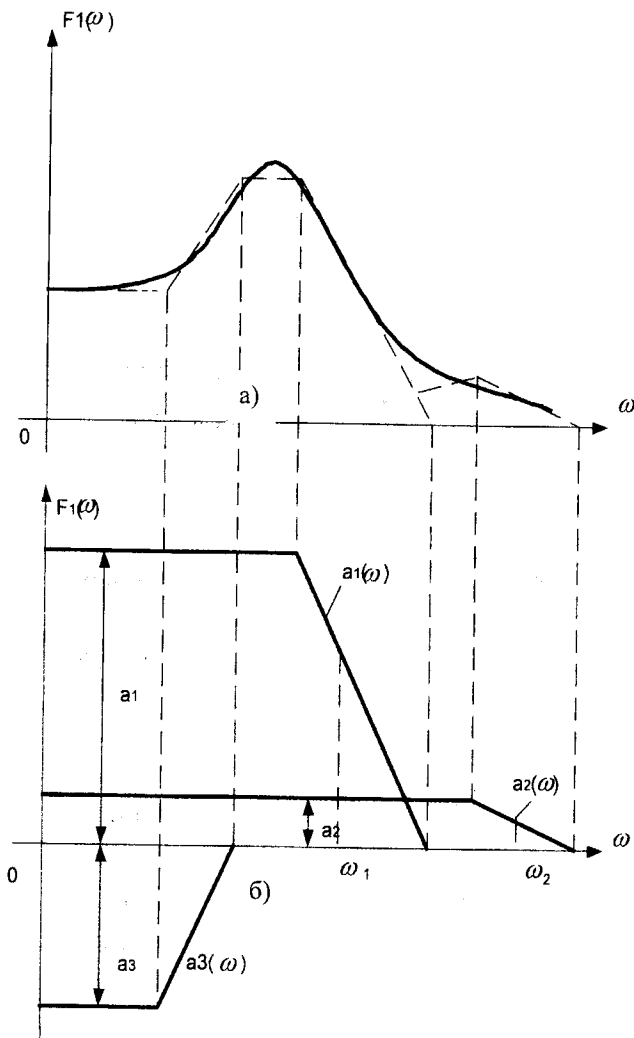


Рисунок 3.7

то її можна приблизно зобразити в вигляді суми декількох трапецій (рисунки 3.7, б). Тоді  $F_1(\omega) = \sum a_i(\omega)$  і

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i t} \cdot \frac{\sin \Delta_i t}{\Delta_i t} \quad (3.26)$$

### Контрольні питання та вправи

1. У чому полягає подібність перетворень Фур'є і Лапласа?
2. В яких випадках більш доцільно застосовувати для розрахунку перехідних процесів перетворення Фур'є, а для яких перетворення Лапласа?
3. Знайти спектральну характеристику напруги у вигляді прямокутного імпульсу (рисунок 3.3,б)

Відповідь:  $E(j\omega) = \frac{2}{\omega} e^{-j \frac{\omega t_1}{2}} \sin \frac{\omega t_1}{2}$ .

4. Які умови повинна задовольняти функція  $f(t)$ , щоб її можна було перетворити за Фур'є?
5. Чому розрахунок перехідних процесів частотним методом проводиться, як правило, наближеними методами?



## 4 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ ПРИ ДОВІЛЬНИХ ДІЯХ

### 4.1 Перехідна і імпульсна характеристики

При розрахунку перехідних процесів при складних діях широко використовуються перехідні і імпульсні характеристики (рис. 4.1). Для одержання поняття про ці характеристики розглянемо спочатку одиничну східчасту функцію  $f(t)$  (рис. 4.1.).

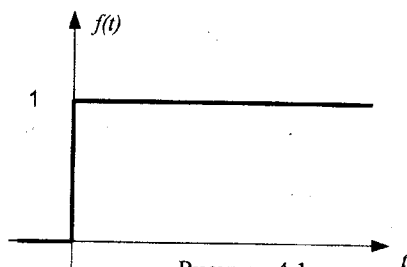


Рисунок 4.1

$$l(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

За допомогою цієї функції може бути описано вмикання джерела довільної е.р.с. в момент  $t = 0$

$$e_{ам}(t) = l(t)e(t) \quad (4.2)$$

Якщо одинична східчаста функція діє не в момент  $t=0$ , а зміщена на час  $\tau$  (рис. 4.2.), то вона записується

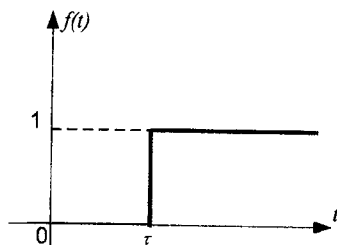


Рисунок 4.2

$$l(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau, \\ 1 & t \geq \tau. \end{cases} \quad (4.3)$$

У відповідності з (2.1) можна знайти зображення одиничної східчасної функції

$$L[l(t)] = \int_0^{\infty} l(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s}. \quad (4.4)$$

Реакцію кола на одиничну східчасту дію називають *перехідною характеристикою* і позначають  $h(t)$ .

Так, наприклад, при вмиканні кола, зображеного на рис. 1.1, струм визначається за допомогою виразу

$$i = \frac{U}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

Якщо прийняти  $U = 1$ , то перехідна характеристика для цього кола буде

$$h(t) = \frac{1}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right). \quad (4.5)$$

В загальному випадку перехідна характеристика визначається в операторній формі. Якщо зобразити коло в вигляді чотириполюсника (рисунок 4.3, а), де на вході кола є деяка дія  $f(t)$ , а реакція кола на цю дію є  $x(t)$ , то зв'язок між ними в операторній формі записується в вигляді

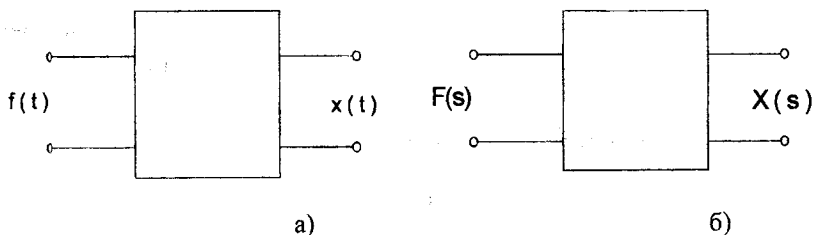


Рисунок 4.3

$$X(s) = K(s) \cdot F(s), \quad (4.6)$$

де  $K(s)$  - передавальна функція кола.

Якщо дія на коло є одиничною східчастою функцією, тобто

$$F(s) = \frac{1}{s},$$

то в цьому випадку одержуємо операторне зображення перехідної характеристики

$$H(s) = \frac{K(s)}{s}. \quad (4.7)$$

Необхідно відмітити, що перехідна характеристика завжди визначається для нульових початкових умов.

#### Приклад 4.1

Знайти перехідну характеристику для напруги на ємності (рисунок 4.4,а).

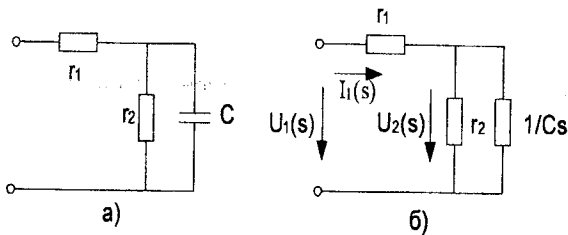


Рисунок 4.4

Зобразимо вихідну схему в операторному вигляді для нульових початкових умов (рисунок 4.4,б) і виразимо шукану напругу  $U_2(s)$  через вхідну напругу  $U_1(s)$ .

Знаходимо спочатку вхідний струм

$$I_1(s) = \frac{U_1(s)}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{sC}}} = \frac{U_1(s)(r_2Cs + 1)}{r_1r_2Cs + r_1 + r_2}.$$

Шукана напруга

$$U_2(s) = I_1(s) \frac{r_2 \frac{1}{sC}}{r_2 + \frac{1}{sC}} = I_1(s) \frac{r_2}{r_2 sC + 1} = \frac{U_1(s)r_2}{r_1 r_2 Cs + r_1 + r_2}.$$

Передавальна функція кола

$$K(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = K(s) = \frac{r_2}{r_1 r_2 Cs + r_1 + r_2}.$$

Зображення перехідної характеристики у відповідності з (4.7)

$$H(s) = \frac{r_2}{s(r_1 r_2 Cs + r_1 + r_2)}.$$

Використовуючи теорему розкладання, знаходимо оригінал перехідної характеристики

$$h(t) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} - \frac{r_2}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}.$$

Для характеристики кола вводять також поняття *імпульсної характеристики*. Імпульсною характеристикою називають реакцію кола на одиничну імпульсну функцію.

Одинична імпульсна функція, її називають функцією Дірака або  $\delta$ -функцією, характеризується тим, що вона безмежно зростає, коли її аргумент перетворюється в нуль, і дорівнює нулю при всіх інших значеннях аргументу, а її інтеграл дорівнює одиниці, якщо тільки нульове значення аргументу лежить в середині границь інтегрування, тобто

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1, \text{ якщо } t_1 < 0, \text{ а } t_2 > 0.$$

Неважно побачити, що

$$\int_0^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ 1 & \text{для } t \geq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Порівнюючи (4.8) з (4.1), бачимо, що

$$\int_0^t \delta(t) dt = 1(t), \quad (4.9)$$

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (4.10)$$

Операторне зображення  $\delta$ -функції

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1. \quad (4.11)$$

Враховуючи одержані співвідношення і визначення імпульсної характеристики, можна записати, що операторне зображення імпульсної характеристики дорівнює зображенню передавальної функції кола.

Якщо позначити імпульсну характеристику  $g(t)$ , то

$$g(t) \rightarrow K(s). \quad (4.12)$$

#### Приклад 4.2

Визначити імпульсну характеристику для напруги на ємності для кола, яке зображене на рисунку 4.4.

Оскільки

$$g(t) \rightarrow K(s) = \frac{r_2}{r_1 r_2 C s + r_2 + r_1},$$

то, використовуючи теорему розкладання, одержуємо

$$g(t) = \frac{1}{r_1 C} e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2 C} t}.$$

## 4.2 Використання перехідних і імпульсних характеристик для розрахунку перехідних процесів

Перехідні характеристики зручно використовувати для розрахунку перехідних процесів при східчастих діях і діях складної форми.

Нехай до деякого кола, перехідна характеристика якого  $h(t)$  відома, прикладена східчаста напруга (рис. 4.5.).

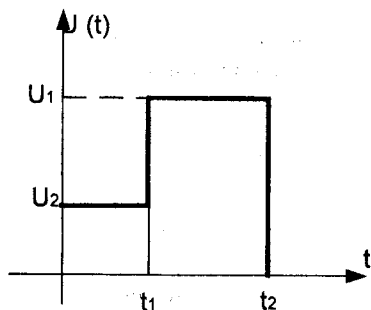


Рисунок 4.5

Підкреслимо ще раз, що всі подальші міркування відносяться до кіл з нульовими початковими умовами. При східчастих діях реакцію кола, звичайно, знаходять на окремих проміжках часу.

На проміжку  $0 < t < t_1$  до кола прикладена постійно напруга  $U_1$ , тому реакція кола

$$x(t) = U_1 h(t) \quad 0 < t < t_1. \quad (4.13)$$

На проміжку  $t_1 < t < t_2$  на вході кола продовжує діяти напруга  $U_1$  і є складова реакції  $U_1 h(t)$ . Крім того, в момент  $t = t_1$  додатково вмикається постійна напруга  $(U_2 - U_1)$  і з'являється складова реакції від цієї напруги, яка зміщена на час  $t_1$ , тобто

$$(U_2 - U_1) \cdot h(t - t_1).$$

Таким чином, загальна реакція для  $t_1 < t < t_2$

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1). \quad (4.14)$$

На ділянці  $t > t_2$  зберігаються попередні дві складові  $x(t)$  і враховується черговий стрибок напруги в момент  $t_2$

$$(0 - U_2) h(t - t_2).$$

Загальна реакція для  $t > t_2$

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1) - U_2 h(t - t_2). \quad (4.15)$$

Такий підхід до визначення реакції кола при східчастій дії дозволяє розрахувати перехідний процес при будь-яких складних впливах.

Нехай до деякого кола з відомою перехідною характеристикою  $h(t)$  підключається джерело з довільною формою напруги  $u(t)$  (рис. 4. 6).

Якщо зобразити вихідну напругу як східчасту, то реакцію кола, згідно з принципом накладання, можна знайти як суму реакцій від кожної східчастої дії. Реакція кола від окремої сходинки

$$\Delta_k x(t) = \Delta U_k h(t - k\Delta\tau).$$

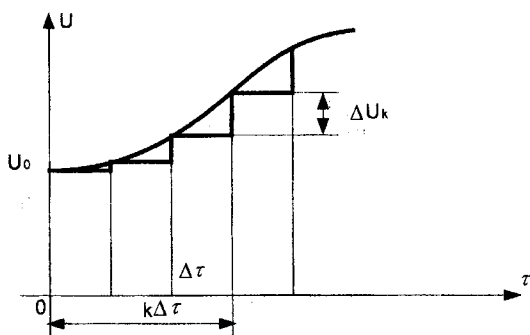


Рисунок 4.6

Загальна реакція

$$x(t) \approx U_0 h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta U_k h(t - k\Delta\tau). \quad (4.16)$$

Величину  $\Delta U_k$  при малих інтервалах  $\Delta\tau$  можна записати як

$$\Delta U_k = \frac{\Delta U_k}{\Delta\tau} \Delta\tau = \frac{du_k}{d\tau} \Delta\tau = u'_k(\tau) \Delta\tau. \quad (4.17)$$

При наближенні  $\Delta\tau$  до нескінченно малої величини  $d\tau$  сума в (4.16) перетворюється на інтеграл,  $k\Delta\tau = \tau$  і тому

$$x(t) = U_0 h(t) + \int_0^t u'(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (4.18)$$

Вираз (4.18) називають інтегралом накладання або інтеграл Дюамеля.

#### Приклад 4.3

Визначити закон зміни напруги на ємності (рисунок 4.7) при дії на коло експоненційної напруги  $u(t) = Ue^{-\beta t}$ .

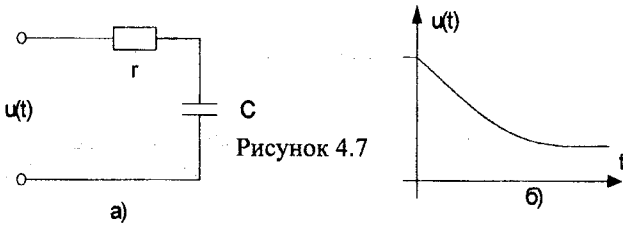


Рисунок 4.7

Перехідна характеристика для напруги на ємності

$$h(t) = 1 - e^{-\alpha t},$$

де

$$\alpha = \frac{1}{rC},$$

Визначаємо всі величини, які входять в інтеграл (4.18):

$$U_0 = U, \quad u'(t) = -\beta U e^{-\beta t}, \quad h(t) = 1 - e^{-\alpha t}, \quad h(t - \tau) = 1 - e^{-\alpha(t - \tau)}.$$

Підставляючи в (4.18), одержуємо

$$\begin{aligned} u_c(t) &= U(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t (-\beta U e^{-\beta \tau})(1 - e^{-\alpha(t - \tau)}) d\tau = U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left( \int_0^t e^{-\beta \tau} d\tau - \right. \\ &- \int_0^t e^{-\alpha t} e^{(\alpha - \beta)\tau} d\tau \left. \right) = U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left( \frac{1}{-\beta} e^{-\beta \tau} \Big|_0^t - e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)\tau} \Big|_0^t \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left\{ \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} (e^{(\alpha - \beta)t} - 1) \right\} = U(1 - e^{-\alpha t}) - U(1 - e^{-\beta t}) + \\ &+ \frac{\beta U}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}) = U - Ue^{-\alpha t} - U + Ue^{-\beta t} + \frac{\beta U}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} - \frac{\beta U}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t} = \\ &= \frac{\alpha U}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$



Точно за таким же міркуванням можна одержати інтеграл накладання і через імпульсну характеристику. Дійсно, якщо довільну дію (рисунок 4.8) розбити на ряд імпульсів площею  $U_k \Delta \tau$ , то реакцію кола можна одержати як суму реакцій від дії кожного імпульсу окремо. Така реакція від окремого імпульсу  $\Delta x(t) = U_k \Delta \tau g(t - k \Delta \tau)$ , а реакція від всього сигналу (рисунок 4.8)

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^n U_k g(t - k \Delta \tau) \Delta \tau. \quad (4.19)$$

Якщо спрямувати  $\Delta \tau$  до нескінченно малої величини  $d\tau$  сума в (4.19) переходить на інтеграл, а дискретні значення  $U_k$  на безперервні значення  $U(\tau)$ . Відповідно

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (4.20)$$

де  $g(t)$  - імпульсна характеристика кола.

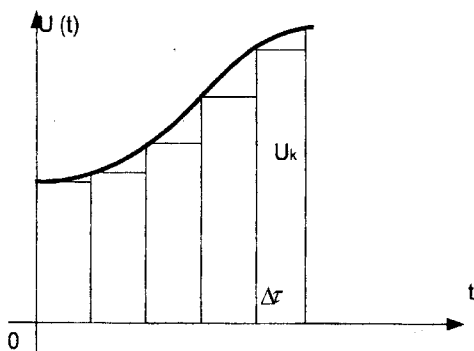


Рисунок 4.8

#### Приклад 4.4

Визначити напругу на ємності в колі, зображеному на рисунку 4.7.

Оскільки одинична східчаста функція і  $\delta$ -функція пов'язані співвідношенням

$$\delta(t) = 1'(t), \quad (4.21)$$

то імпульсна і перехідна характеристики пов'язані подібним співвідношенням

$$g(t) = [1(t)h(t)]'. \quad (4.22)$$

Розкриваючи дужки в правій частині, одержуємо

$$g(t) = l'(t)h(t) + l(t)h'(t) = \delta(t)h(t) + h'(t).$$

Тому що завжди виконується рівність

$$\delta(t) \cdot f(t) = \delta(t) \cdot f(0) \quad (4.23)$$

вираз для імпульсної характеристики має вигляд

$$g(t) = \delta(t)h(0) + h'(t). \quad (4.24)$$

В наведеному прикладі  $h(0) = 0$ , тому

$$g(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \text{ де } \alpha = \frac{1}{rC}.$$

Підставляючи всі дані в (4.20), одержуємо

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \int_0^t U e^{-\beta t} \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \alpha U e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau = \alpha U e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)\tau} \Big|_0^t = \\ &= \frac{\alpha U}{\alpha-\beta} e^{-\alpha t} (e^{(\alpha-\beta)t} - 1) = \frac{\alpha U}{\alpha-\beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

### 4.3 Врахування ненульових початкових умов

Використання частотного методу, перехідних і імпульсних характеристик супроводжувалося обов'язковою умовою - нульовими початковими умовами.

Врахування ненульових початкових умов можна проводити різними способами.

Покажемо один із таких методів на конкретному прикладі.

Нехай в колі (рисунк 4.9,а) потрібно розрахувати перехідний процес при дії е.р.с.  $e(t)$  складної форми. В розглядуваному колі початкові умови не нульові, оскільки до замикання ключа через індуктивність протікав струм.

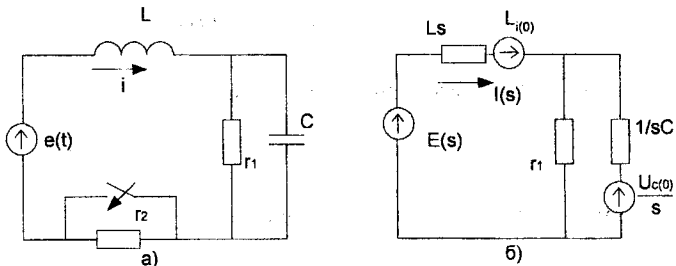


Рисунок 4.9

Зобразимо розглядувану схему в операторному вигляді і відмітимо (рисунок 4.9,б), що в цій схемі діє три е.р.с. (зовнішня  $E(s)$  і дві додаткові

$$Li(0) \text{ та } \frac{u_{c(0)}}{s}.$$

Використовуючи теорему накладання, схему, зображену на рисунку 4.9,б, можна подати у вигляді трьох схем, в кожній із яких діє одна е.р.с. (рисунок 4.10).

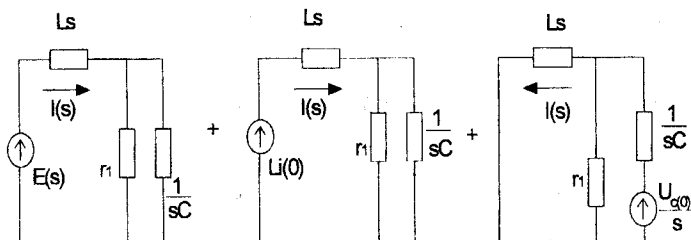


Рисунок 4.10

Якщо перейти знову до звичайних схем (рисунок 4.11), то одержимо три схеми з нульовими початковими умовами, в яких діють відповідні е.р.с.: в першій схемі вихідна дія  $e(t)$ , в другій схемі імпульсна е.р.с.  $Li(0)\delta(t)$  в третій схемі постійна е.р.с.  $u_{c(0)}$ , де  $i(0)$  і  $u_{c(0)}$  знаходяться згідно з законами комутації.

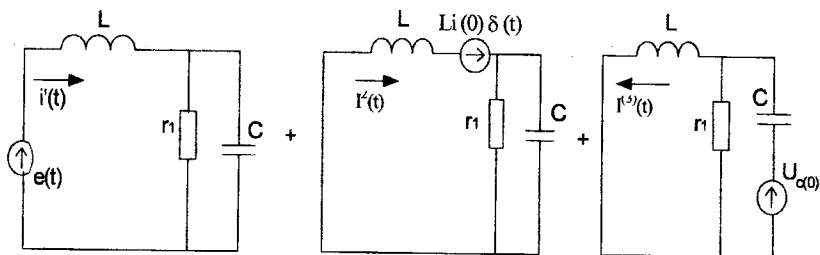


Рисунок 4.11

Використовуючи теорему накладання і імпульсні характеристики для розрахунку вхідного струму, одержуємо

$$i(t) = i^{(1)}(t) + i^{(2)}(t) + i^{(3)}(t), \quad (4.25)$$

де

$$i^{(1)}(t) = \int_0^t e(\tau) g_1(t - \tau) d\tau,$$

$$i^{(2)}(t) = \int_0^t Li(0)\delta(\tau) g_2(t - \tau) d\tau = Li(0) g_2(t),$$

$$i^{(3)}(t) = \int_0^t u_{c(0)} g_3(t - \tau) d\tau.$$

Імпульсні характеристики визначаються у відповідності з (4.12) або (4.22). Оскільки е.р.с.  $e(t)$  і  $Li(0)\delta(t)$  знаходяться в одній вітці, то  $g_1(t) = g_2(t)$ .

### Контрольні питання та вправи

1. Що являють собою перехідні й імпульсні характеристики?
2. Як пов'язані між собою імпульсна й одинична східчаста функції?
3. Як визначити перехідну і східчасту характеристики за відомим зображенням передавальної функції кола  $K(s)$ ?
4. Яким чином можна знайти імпульсну характеристику, якщо відомо перехідну характеристику?
5. У яких випадках при розрахунках перехідних процесів зручно застосовувати перехідні й імпульсні характеристики?

6. Знайти перехідну характеристику для струму в опорі  $r_2$  (рисунок 4.12)

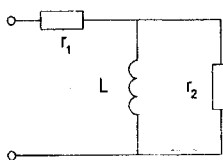
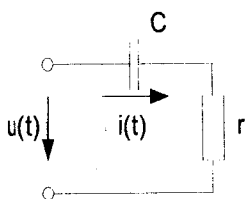


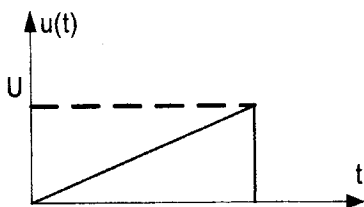
Рисунок 4.12

Відповідь: 
$$h(t) = \frac{1}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} t}$$

7. Знайти струм в колі (рисунок 4.13, а) за допомогою інтеграла Дюамеля, якщо до кола прикладена напруга у вигляді трикутного імпульсу (рис.4.13,б).



а)



б)

Рисунок 4.13

Відповідь: перехідна характеристика для струму 
$$h(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{1}{rC} t}$$

Для  $0 < t < t_1$ , 
$$i(t) = \frac{UC}{t_1} \left( 1 - e^{-\frac{1}{rC} t} \right)$$

Для  $t > t_1$ , 
$$i(t) = \frac{U}{r} \left( \frac{rC}{t_1} - 1 \right) e^{-\frac{1}{rC} (t-t_1)} - \frac{UC}{t_1} e^{-\frac{1}{rC} t}$$

## 5 ОСНОВИ СИНТЕЗУ ЛІНІЙНИХ КІЛ

### 5.1 Основні етапи синтезу електричних кіл

При проектуванні різного роду електричних пристроїв виникає необхідність підбору схем і параметрів електричних кіл, які відповідають певним вимогам. Рішення цієї проблеми здійснюють за допомогою синтезу електричних кіл.

Вимоги, які заздалегідь пред'являють до лінійних електричних кіл, практично завжди враховуються частотними характеристиками електричних кіл, тобто в випадку двополюсників це залежність опору  $Z(j\omega)$  або провідності  $Y(j\omega)$  від частоти, в випадку чотириполюсників - залежність передаточної функції  $K(j\omega)$  від частоти.

Частотна характеристика електричного кола найчастіше задається в вигляді графіків або таблиць, а для побудови схеми, яка має задану частотну характеристику, потрібно мати аналітичний вираз цієї частотної характеристики. Тому першим етапом розв'язання задачі синтезу є задача апроксимації частотної характеристики, тобто подання графічно або таблично заданої залежності в вигляді аналітичного виразу.

Проте не всякому аналітичному виразу відповідає схема, яку можна фізично реалізувати. Тому частотну характеристику необхідно апроксимувати таким виразом, щоб можна було фізично здійснити побудову схеми, а для цього треба знати властивості функцій кола.

Другим етапом розв'язання задачі синтезу є реалізація заданої функції кола в вигляді конкретної схеми. На відміну від задачі аналізу, в якій шукана величина, тобто струм або напруга, при заданих топології, параметрах і діях одержується однозначно, задача синтезу може мати декілька розв'язків, тобто одну і ту ж функцію кола можуть давати декілька різних схем.

Ця обставина приводить до третього етапу розв'язання задачі синтезу - вибору оптимальної схеми з яким-небудь змістом. Вибір оптимальної схеми залежить від ряду факторів, які мають в конкретному випадку різну вагу. Це може бути мінімальне число елементів, мінімальна вартість елементів і т.д.

### 5.2 Властивості вхідних функцій двополюсників

Розглянемо деякий лінійний пасивний двополюсник (рис.5.1), який складається із  $n$  контурів.

Знайдемо вхідний операторний опір двополюсника, використовуючи метод контурних струмів. Незалежні контури виберемо таким чином, щоб вітка, яка містить джерело, входила тільки в один перший контур.



$$Z(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}, \quad (5.5)$$

де коефіцієнти  $a_k$  і  $b_k$  є дійсними числами, тому що елементи  $R, L, C$  з комбінацій яких вони складаються, є дійсними.

Вираз (5.5) можна записати у вигляді

$$Z(s) = H \frac{(s-s'_1)(s-s'_2)\dots(s-s'_n)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\dots(s-s_m)}, \quad (5.6)$$

де

$s'_1, s'_2, \dots, s'_n$  - корені чисельника  $P(s)$ , які називаються нулями функції  $Z(s)$ ,

$s_1, s_2, \dots, s_m$  - корені знаменника  $Q(s)$ , які називаються полюсами функції  $Z(s)$ ,

$H = \frac{a_n}{b_m}$  - постійна величина.

В загальному випадку полюси і нулі можуть бути як дійсними, так і комплексними. Для кожного нуля чисельник функції для  $s=s'_k$  перетворюється на нуль і функція  $Z(s)$  також стає рівною нулю. Для кожного полюса для  $s=s_k$  знаменник дорівнює нулю і функція  $Z(s)$  стає нескінченною.

Якщо в виразі (5.5) підставити  $s = j\omega$  то

$$Z(j\omega) = \text{Re}[Z(j\omega)] + j \text{Im}[Z(j\omega)],$$

де  $\text{Re}[Z(j\omega)]$  - дійсна частина,

$\text{Im}[Z(j\omega)]$  - комплексна частина  $Z(j\omega)$ .

Активна потужність, яка споживається двополюсником визначається як

$$P = I^2 \text{Re}[Z(s)] \quad \text{для } s = j\omega.$$

Оскільки активна потужність завжди додатня або дорівнює нулю, то виконується умова

$$\text{Re}[Z(s)] \geq 0 \quad \text{для } s = j\omega. \quad (5.7)$$

Якщо  $s = \sigma + j\omega$  для  $\sigma > 0$ , то опори всіх індуктивностей і ємностей відповідно приймають вигляд



$$L(\sigma + j\omega) = L\sigma + Lj\omega, \quad \frac{1}{C(\sigma + j\omega)} = \frac{1}{C\sigma + j\omega C},$$

тобто в коло вводиться додатковий активний опір і нерівність (5.7) ще більше підсилюється. Тому вираз (5.7) може бути узагальнений таким чином:

для вхідного опору або провідності

$$\operatorname{Re}[F(s)] > 0 \quad \text{якщо} \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.8)$$

Функції, які задовольняють умови:

- функція  $F(s)$  дійсна для дійсних значень  $s$ ;
- дійсна частина функції  $F(s)$  додатна для додатних значень дійсної частини  $s$ ;

називаються *додатними дійсними функціями* (д.д.ф.).

При розгляді перехідного процесу вхідний струм в операторній формі записується в вигляді

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{U(s)Q(s)}{P(s)} \quad (5.9)$$

Корені знаменника  $P(s)$  визначають, як це було показано раніше, вид вільної складової. Якщо всі корені дійсні і від'ємні, то вільна складова

$$i_{\theta}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \quad (5.10)$$

для  $t \rightarrow \infty$  прямує до нуля.

Якщо хоч би один корінь додатний, то для  $t \rightarrow \infty$   $i_{\theta}$  прямує до нескінченності.

Якщо є пара кратних коренів, наприклад  $p_k = p_{k+1} = p$  то вільна складова для цієї пари має вигляд

$$i_{kb} = e^{pt} (A_k + A_{k+1}t) \quad (5.11)$$

і для від'ємних значеннях  $p$  також прямує до нуля для  $t \rightarrow \infty$ .

Коли є пара комплексно спряжених коренів, у яких дійсна частина від'ємна, тобто якщо  $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_k$ , вільна складова

$$i_{kb} = e^{-\delta_k t} (A_k \sin \omega_k t + A_{k+1} \cos \omega_k t) \quad (5.12)$$

і являє собою загасаюче синусоїдне коливання.

Всі розглянуті випадки приводять до стійкого стану системи, тому що з часом вільна складова прямує до нуля.

Розглянемо випадок, коли є пара спряжених уявних коренів, тобто

$$p_{k,k+1} = \pm j\omega_k.$$

В цьому випадку (5.12) приймає вигляд

$$i_{kb} = A_k \sin \omega_k t + A_{k+1} \cos \omega_k t \quad (5.13)$$

і вільна складова являє собою незагасаючу коливальну функцію і система також стійка.

Якщо ж є кратні уявні корені, то вільна складова

$$i_{kb} = (A_1 \sin \omega_k t + A_2 \cos \omega_k t) + t(A_3 \sin \omega_k t + A_4 \cos \omega_k t) \quad (5.14)$$

з часом нескінченно зростає і система стає нестійкою.

Оскільки лінійне електричне коло завжди стійке, то дійсна частина нулів функції  $Z(s)$  повинна бути не додатною.

Розглядаючи розміщення нулів на комплексній площині (рисунк 5.2), можна стверджувати, що нулі функції  $Z(s)$  розміщуються в лівій напівплощині, включаючи уявну вісь. Нулі на уявній осі повинні бути простими. Якщо до двополюсника (рисунк 5.1) підключається джерело струму, то напруга двополюсника визначається з виразу

$$U(s) = I(s)Z(s) = \frac{I(s)}{Y(s)} = \frac{I(s)P(s)}{Q(s)} \quad (5.15)$$

Всі попередні міркування рівною мірою відносяться до коренів полінома  $Q(s)$ , тобто до полюсів функції  $Z(s)$ . Тому для вхідних функцій справедливі такі твердження:

- нулі і полюси вхідної функції повинні знаходитися в лівій напівплощині, включаючи уявну вісь; на уявній осі нулі і полюси повинні бути простими.

За цих умов коефіцієнти поліномів  $P(s)$  і  $Q(s)$ , тобто всі коефіцієнти  $a_k, b_k$ , повинні бути додатні.

Одержані результати дозволяють виявити ще одну важливу властивість вхідних функцій.

Нехай функція  $Z(s)$  записана в ви-

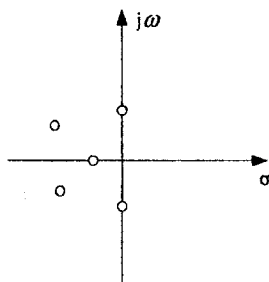


Рисунок 5.2

гляді

$$Z(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (5.16)$$

Припустимо, що  $n > m$ , тоді простим діленням полінома  $P(s)$  на  $Q(s)$  можна одержати вираз

$$Z(s) = C_r s^r + C_{r-1} s^{r-1} + \dots + C_1 s + C_0 + \frac{P_1(s)}{Q(s)}, \quad (5.17)$$

де  $r = (n - m)$  - різниця порядків чисельника і знаменника;

$P_1(s)$  - правильний раціональний дріб, тобто степінь  $P_1(s)$  на одиницю менший степеня полінома  $Q(s)$ .

Вираз (5.16) показує, що при  $s \rightarrow \infty$  функція  $Z(s)$  перетворюється в нескінченність, тому значення  $s = \infty$  є полюсом функції  $Z(s)$ . Точка в нескінченності може розглядатися як точка, яка знаходиться на уявній осі  $j\omega$ ; як виявлено раніше, полюси на уявній осі в лінійному електричному колі повинні бути простими, тому  $r$  не може бути більшою одиниці.

Якщо степінь полінома  $Q(s)$  більший степеня полінома  $P(s)$ , тобто  $m > n$  то, розглядаючи вхідну функцію  $Y(s)$ , можна аналогічними міркуваннями встановити, що і в цьому випадку різниця  $m - n$  не повинна бути більшою одиниці.

Таким чином, для вхідної функції лінійного електричного кола степені чисельника і знаменника в виразі (5.16) не повинні відрізнятися більше, ніж на одиницю.

Таким чином, щоб вхідна функція двополюсника могла бути реалізована в вигляді фізично здійснюваного кола, вона повинна задовольняти такі необхідні і достатні умови (умови реалізації):

1. Всі коефіцієнти  $a_k$  і  $b_k$  поліномів  $P(s)$  і  $Q(s)$  в (5.16) повинні бути дійсними і додатними;
2. Найбільші степені  $s$  поліномів  $P(s)$  і  $Q(s)$  не можуть відрізнятися більше ніж на одиницю;
3. Всі нулі і полюси вхідної функції лежать в лівій напівплощині.
4. Якщо вхідна функція має нулі або полюси на уявній осі, то вони можуть бути тільки простими (не кратними).
5. Дійсна частина вхідної функції для чисто уявних значень  $s$  невід'ємна, тобто

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] \geq 0 \text{ для } s = j\omega.$$

### 5.3 Перевірка вхідної функції на умови реалізації

Перевірка перших двох умов труднощів не викликає і виконується безпосередньо з виразу вхідної функції.

Якщо вхідна функція задовольняє умови п.3 і п.4, то поліноми  $P(s)$  і  $Q(s)$  є поліномами Гурвіца.

Розглянемо один із способів перевірки, чи будуть поліноми  $P(s)$  і  $Q(s)$  поліномами Гурвіца.

Позначимо парну частину полінома  $P(s)$  через  $M_1(s)$ , а непарну -  $N_1(s)$ , а для  $Q(s)$  відповідно через  $M_2(s)$  і  $N_2(s)$ . Поліноми  $P(s)$  і  $Q(s)$  є поліномами Гурвіца, якщо при поданні відношень  $M_1(s)/N_1(s)$  і  $M_2(s)/N_2(s)$  (або обернених їм) в вигляді ланцюгового дробу всі коефіцієнти цього дробу будуть додатні.

*Приклад 5.1*

Перевірити чи є поліном  $P(s) = 18s^5 + 6s^4 + 24s^3 + 7s^2 + 5s + 1$  поліномом Гурвіца.

Виділимо парну і непарну частину полінома  $P(s)$

$$M(s) = 6s^4 + 7s^2 + 1, \quad N(s) = 18s^5 + 24s^3 + 5s$$

і виконаємо послідовне ділення одержаних поліномів.

$$\begin{array}{r}
 18s^5 + 24s^3 + 5s \mid 6s^4 + 7s^2 + 1 \\
 \underline{18s^5 + 21s^3 + 3s} \phantom{+ 1} \\
 6s^4 + 7s^2 + 1 \phantom{+ 1} \mid 3s^3 + 2s \\
 \underline{6s^4 + 4s^2} \phantom{+ 1} \\
 3s^3 + 2s \phantom{+ 1} \mid 3s^2 + 1 \\
 \underline{3s^3 + s} \phantom{+ 1} \\
 3s^2 + 1 \phantom{+ 1} \mid s \\
 \underline{3s^2} \phantom{+ 1} \\
 s \phantom{+ 1} \mid 1 \\
 \underline{s} \\
 0
 \end{array}$$

Відношення поліномів  $N(s)$  і  $M(s)$  в вигляді ланцюгового дробу має вигляд:

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \frac{18s^5 + 24s^3 + 5s}{6s^4 + 7s^2 + 1} = 3s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s + \frac{1}{3s + \frac{1}{s}}}}$$

Всі коефіцієнти цього дробу додатні, тому поліном  $P(s)$  є поліномом Гурвіца.

Приклад 5.2

Перевірити чи є поліном  $P(s) = 2s^3 + s^2 + s + 1$  поліномом Гурвіца.

Непарна частина полінома

$$N(s) = 2s^3 + s,$$

парна частина полінома

$$M(s) = s^2 + 1.$$

Знайдемо коефіцієнти ланцюгового дробу

$$\begin{array}{r} 2s^3 + s \quad \left| \begin{array}{l} s^2 + 1 \\ 2s \end{array} \right. \\ \underline{2s^3 + 2s} \phantom{\left| \begin{array}{l} s^2 + 1 \\ 2s \end{array} \right.} \\ s^2 + 1 \quad \left| \begin{array}{l} -s \\ -s \end{array} \right. \\ \underline{s^2} \phantom{\left| \begin{array}{l} -s \\ -s \end{array} \right.} \\ -s \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ -s \end{array} \right. \\ \underline{-s} \\ 0 \end{array}$$

Ланцюговий дріб має вигляд:

$$\frac{N(s)}{M(s)} = 2s + \frac{1}{-s + \frac{1}{-s}}$$

Даний ланцюговий дріб має від'ємні коефіцієнти, тому поліном  $P(s)$  не буде поліномом Гурвіца.

Перевірка п'ятої умови виконується з допомогою *функцій Штурма*. Функція  $F(s)$  зображується в вигляді дробу, чисельник і знаменник якого записуються в вигляді суми членів з парними і непарними степенями  $s$ .

$$F(s) = \frac{M_1(s) + N_1(s)}{M_2(s) + N_2(s)}$$

Перемноживши чисельник і знаменник на  $M_2(s) - N_2(s)$  одержимо

$$F(s) = \frac{M_1(s)M_2(s) - N_1(s)N_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} + \frac{N_1(s)M_2(s) - M_1(s)N_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad (5.18)$$

Для  $s = j\omega$  перша складова дійсна, а друга уявна, тому

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = \frac{M_1(s)M_2(s) - N_1(s)N_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad (5.19)$$

Оскільки знаменник (5.19) додатний для всіх значень  $\omega$ , відповідно повинна виконуватись умова

$$M_1(s)M_2(s) - N_1(s)N_2(s) \geq 0.$$

Введемо функції Штурма. Першою функцією Штурма називають функцію

$$f_0(x) = M_1M_2 - N_1N_2,$$

якщо позначити  $x = \omega^2$ .

Її похідну  $f_1(x) = f_0'(x)$  називають другою функцією Штурма. Третю функцію Штурма  $f_2(x)$  визначають як залишок від ділення першої функції Штурма  $f_0(x)$  на другу  $f_1(x)$ , взятий з протилежним знаком. Ділення виконуються до тих пір, поки найвищий степінь залишку буде на одиницю менший найвищого степеня другої функції  $f_1(x)$ . Четверта функція Штурма  $f_3(x)$  являє собою залишок від ділення другої функції Штурма на третю функцію, взятий з протилежним знаком.

Процес визначення функцій Штурма закінчується, коли залишок стає постійною величиною.

Потім визначають алгебраїчні (тобто додатні "+" або від'ємні "-") значення функцій Штурма на границі діапазону  $x = \omega^2$ , тобто звичайно для  $x_1 = 0$  і  $x_2 = \infty$  і визначають для всіх функцій Штурма число змін знаків  $W(x_1)$  і  $W(x_2)$ , які визначаються із зіставлення знаків для кожних двох функцій, які стоять поряд. Якщо знаки однакові, то зміна знаку дорівнює нулю, якщо знаки різні, то зміна знаку дорівнює одиниці. Якщо деякі із функцій Штурма дорівнюють нулю, то вони не розглядаються,

Таблиця 5.1

$f(x)$	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Число змін знаку
$x = x_1$	+	-	-	+	-	3
$x = x_2$	+	-	0	+	+	2

Наприклад, для функцій Штурма, приведених в табл. 1, зміна знаків для  $x = x_1$  відбувається 3 рази  $W(x_1) = 3$ , а для  $x = x_2$  - два рази  $W(x_2) = 2$ .

Визначається різниця змін знаків, тобто

$$W(x_1) - W(x_2) = 3 - 2 = 1.$$

Поліном  $f(x)$  буде додатним для всіх значень  $x$ , якщо різниця змін знаків дорівнює нулю і функція  $f_0(x)$  для  $x = 0$  додатна.

*Приклад 5.3*

Перевірити виконання п'ятої умови для функції

$$F(s) = \frac{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 3s + 2}{s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 7s + 2}.$$

Визначимо парну і непарну частину поліномів  $P(s)$  і  $Q(s)$  функції

$F(s)$

$$M_1(s) = s^4 + 4s^2 + 2,$$

$$N_1(s) = 2s^3 + 3s,$$

$$M_2(s) = s^4 + 9s^2 + 2,$$

$$N_2(s) = 5s^3 + 7s$$

і складемо функцію

$$f(0) = M_1(s)M_1(s) - N_1(s)N_2(s) = (s^4 + 4s^2 + 2)(s^4 + 9s^2 + 2) - (2s^3 + 3s)(5s^3 + 7s) = s^8 + 3s^6 + 11s^4 + 5s^2 + 4.$$

Замінімо  $s = j\omega$ , при цьому  $s^2 = -\omega^2$ ,  $s^4 = \omega^4$ ,  $s^6 = -\omega^6$ ,  $s^8 = \omega^8$  і

$$f_0(\omega^2) = \omega^8 - 3\omega^6 + 11\omega^4 - 5\omega^2 + 4.$$

Введемо змінну  $x = \omega^2$ ,  $f_0(x) = x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 5x + 4$ .

Одержали першу функцію Штурма.

Друга функція Штурма визначається як похідна від першої.

$$f_1(x) = f_0'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 22x - 5$$

Розділимо  $f_0(x)$  на  $f_1(x)$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 5x + 4 & 4x^3 - 9x^2 + 22x - 5 \\
 \hline
 x^4 - 2,25x^3 + 5,5x^2 - 1,25x & 0,25x - 0,1875 \\
 \hline
 -0,75x^3 + 5,5x^2 - 3,75x + 4 & \\
 \hline
 -0,75x^3 + 1,688x^2 - 4,125x + 0,9375 & \\
 \hline
 & 3,812x^2 + 0,375x + 3,0625
 \end{array}$$

Третя функція Штурма дорівнює залишку, взятому з від'ємним знаком.

$$f_2(x) = -3,812x^2 - 0,375x - 3,0625.$$

Розділимо другу функцію  $f_1(x)$  на третю  $f_2(x)$

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 - 9x^2 + 22x - 5 & -3,812x^2 - 0,375x - 3,0625 \\
 \hline
 4x^3 + 0,394x^2 + 3,216x & -1,05x + 2,464 \\
 \hline
 -9,394x^2 + 18,784x - 5 & \\
 \hline
 -9,394x^2 - 0,924x - 7,546 & \\
 \hline
 & 19,708x + 2,546
 \end{array}$$

Четверта функція Штурма

$$f_3(x) = -19,708x - 2,546.$$

Проводимо чергове ділення  $f_2(x)$  на  $f_3(x)$

$$\begin{array}{r|l}
 -3,812x^2 - 0,375x - 3,0625 & -19,708x - 2,546 \\
 \hline
 -3,812x^2 - 0,492x & 0,1934x - 0,006 \\
 \hline
 & 0,117x - 3,0625 \\
 & \underline{0,117x + 0,0152} \\
 & -3,0777
 \end{array}$$

П'ята і остання функція Штурма

$$f_4(x) = 3,0777.$$

Складемо таблицю 5.2, в якій записуємо знаки функцій Штурма для  $x = x_1 = 0$  і  $x = x_2 = \infty$ .



Таблиця 5.2

$f(x)$	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$W(x)$
$x_1=0$	+	-	-	-	+	2
$x_2=\infty$	+	+	-	-	+	2

Різниця змін знаків  $W(x_1) - W(x_2) = 2 - 2 = 0$ .

Оскільки функція  $f_0(x)$  для  $x = 0$  додатна, то розглянута вхідна функція  $F(s)$  задовольняє п'яту умову.

#### 5.4 Найпростіші вхідні функції та їх реалізація

Перед тим як приступити до розгляду методів синтезу двополюсників, розглянемо найпростіші з'єднання елементів і визначимо їх вхідні функції.

Окремі елементи  $r$ ,  $L$ ,  $C$  мають відповідно опори

$$Z(s) = r, Z(s) = Ls, Z(s) = \frac{1}{Cs} \quad (5.21)$$

і вхідні провідності

$$Y(s) = \frac{1}{r}, Y(s) = \frac{1}{Ls}, Y(s) = Cs. \quad (5.22)$$

Послідовні з'єднання елементів

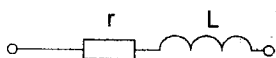


Рисунок 5.1

$$\left. \begin{aligned} Z(s) &= Ls + r = a_1s + a_0, \\ Y(s) &= \frac{1}{Ls + r} = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{r}{L}} = \frac{a_0}{s + b_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$



Рисунок 5.2

$$\left. \begin{aligned} Z(s) &= r + \frac{1}{Cs} = \frac{s + \frac{1}{rC}}{\frac{1}{r} \cdot s} = \frac{s + a_0}{b_1s}, \\ Y(s) &= \frac{Cs}{rCs + 1} = \frac{\frac{1}{r} \cdot s}{s + \frac{1}{rC}} = \frac{a_1s}{s + b_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

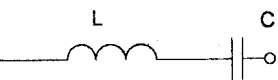


Рисунок 5.3

$$\left. \begin{aligned} Z(s) &= Ls + \frac{1}{Cs} = \frac{LCs^2 + 1}{Cs} = \frac{s^2 \frac{1}{LC} + s^2 + a_0}{\frac{1}{L}s} = \frac{s^2 + a_0}{b_1 s}, \\ Y(s) &= \frac{Cs}{LCs^2 + 1} = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{a_1 s}{s^2 + b_0}. \end{aligned} \right\} (5.25)$$

Паралельні з'єднання елементів.

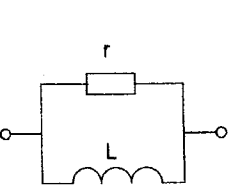


Рисунок 5.4

$$\left. \begin{aligned} Z(s) &= \frac{rLs}{Ls + r} = \frac{rs}{s + \frac{r}{L}} = \frac{a_1 s}{s + b_0}, \\ Y(s) &= \frac{s + \frac{r}{L}}{rs} = \frac{a_0 + s}{sb_1}. \end{aligned} \right\}$$

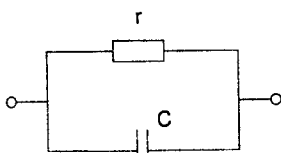


Рисунок 5.5

$$\left. \begin{aligned} Z(s) &= \frac{r \frac{1}{Cs}}{r + \frac{1}{Cs}} = \frac{r}{rCs + 1} = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{1}{rC}} = \frac{a_0}{s + b_0}, \\ Y(s) &= \frac{rCs + 1}{r} = \frac{s + \frac{1}{Cr}}{\frac{1}{C}} = \frac{s + a_0}{b_0}. \end{aligned} \right\} (5.27)$$

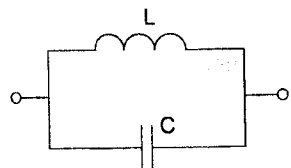


Рисунок 5.6

$$\left. \begin{aligned} Z(s) &= \frac{Ls \cdot \frac{1}{sC}}{Ls + \frac{1}{sC}} = \frac{Ls}{LCs^2 + 1} = \frac{s \cdot \frac{1}{C}}{s^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{a_1 s}{s^2 + b_0}, \\ Y(s) &= \frac{LCs^2 + 1}{Ls} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{\frac{1}{C} \cdot s} = \frac{s^2 + a_0}{b_1 s}. \end{aligned} \right\} (5.28)$$

## 5.5 Синтез двополюсників за допомогою розкладання вхідної функції на прості дроби

Нехай вхідна функція подана у вигляді раціонального дроби

$$Z(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (5.29)$$

і  $m - n = 1$

Виділимо простим діленням  $P(s)$  на  $Q(s)$  дві складові  $A_\infty s$  і  $A_0$  і запишемо

$$Z(s) = A_\infty s + A_0 + \frac{P_1(s)}{Q(s)}, \quad (5.30)$$

де  $P_1(s)$  має степінь на одиницю менший знаменника.

Якщо всі корені знаменника від'ємні, дійсні і прості  $s_k = -a_k$ , то (5.30) можна записати у вигляді

$$Z(s) = A_\infty s + A_0 + \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_m}{s - s_m}, \quad (5.31)$$

де коефіцієнти  $A_k$  визначаються з виразу (2.30)

$$A_k = \frac{P_1(s_k)}{Q'(s_k)}.$$

Кожній складовій, яка має вигляд  $\frac{A_k}{s - s_k} = \frac{A_k}{s + a_k}$ , відповідає паралельне з'єднання резистора  $r_k$  і ємності  $C_k$  (рисунок 5.5), причому

$$C_k = \frac{1}{A_k}, \quad r_k = \frac{A_k}{a_k}.$$

Перші дві складові в (5.31) реалізуються у вигляді індуктивності  $L = A_\infty$  і резистора  $r = A_0$ .

Таким чином, вхідна функція (5.31) реалізується у вигляді схеми, яка показана на рисунку 5.7.

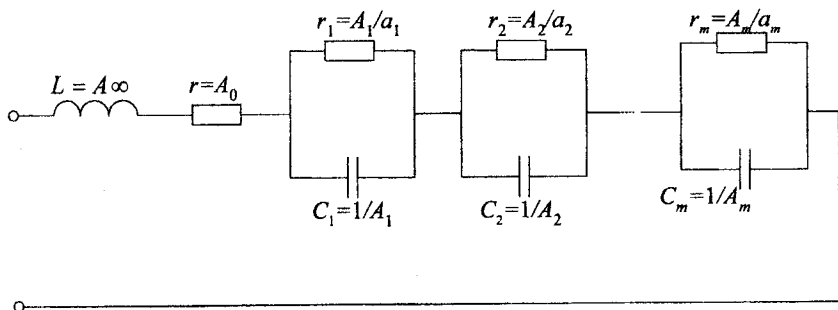


Рисунок 5.7

Якщо на прості дроби розкладена вхідна провідність

$$Y(s) = A_{\infty}s + A_0 + \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_m}{s - s_m}, \quad (5.32)$$

то реалізована схема має вигляд паралельно з'єднаних двополіусників. Перша в вигляді ємності  $C = A_{\infty}$ , друга складова реалізується в вигляді резистора з провідністю  $g = A_0$  або  $r = \frac{1}{A_0}$ . Складові, які мають вигляд

$\frac{A_k}{s - s_k} = \frac{A_k}{s + a_k}$  реалізуються послідовним з'єднанням індуктивностей

$L_k = \frac{1}{A_k}$  і резистора  $r_k = \frac{a_k}{A_k}$ . Загальна схема має вигляд, показаний на рисунку 5.8.

Якщо в (5.30) найвищі степені  $s$  поліномів  $P_1(s)$  і  $Q(s)$  однакові, але  $P_1(s)$  не містить постійної складової, яка не залежить від  $s$ , то дріб  $\frac{P_1(s)}{Q(s)}$  можна подати у вигляді

$$\frac{P_1(s)}{Q(s)} = s \frac{P_2(s)}{Q(s)},$$

де найвищий степінь полінома  $P_2(s)$  на одиницю менший степеня  $Q(s)$ .

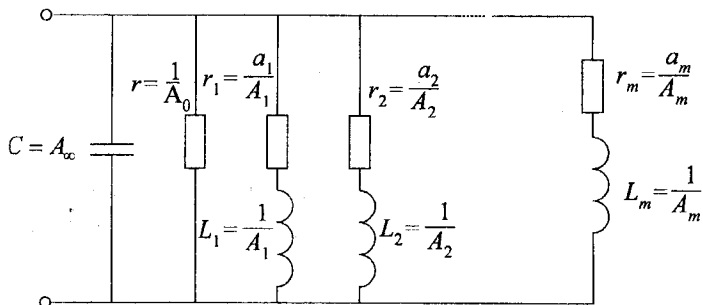


Рисунок 5.8

Розкладання  $\frac{P_1(s)}{Q(s)}$  на прості дробі можна записати так:

$$\frac{P_1(s)}{Q(s)} = s \left( \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_m}{s-s_m} \right). \quad (5.34)$$

Якщо  $s_k = -b_k$ , то вхідна функція має вигляд

$$Z(s) = A_\infty s + A_0 + \frac{A_1 s}{s+b_1} + \frac{A_2 s}{s+b_2} + \dots + \frac{A_k s}{s+b_k} + \dots + \frac{A_m s}{s+b_m}, \quad (5.35)$$

Складова  $\frac{A_k s}{s+b_k}$  реалізується паралельним з'єднанням резистора і індуктивності (рисунок 5.4), де  $r_k = A_k$  і  $L_k = A_k/b_k$ .

Схема, яка відповідає вхідному опоріві  $Z(s)$ , зображена на рисунку 5.9.

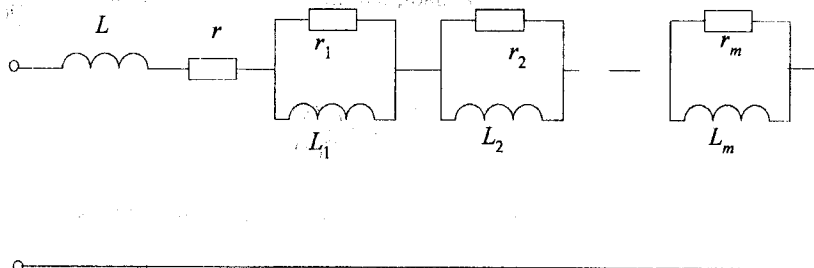


Рисунок 5.9

Якщо вхідною функцією є вхідна провідність

$$Y(s) = A_\infty s + A_0 + \frac{A_1 s}{s + b_1} + \frac{A_2 s}{s + b_2} + \dots + \frac{A_k s}{s + b_k} + \dots + \frac{A_m s}{s + b_m}, \quad (5.36)$$

то відповідна схема показана на рисунку 5.10, де  $r_k = \frac{1}{A_k}$ ,  $C_k = \frac{A_k}{b_k}$ .

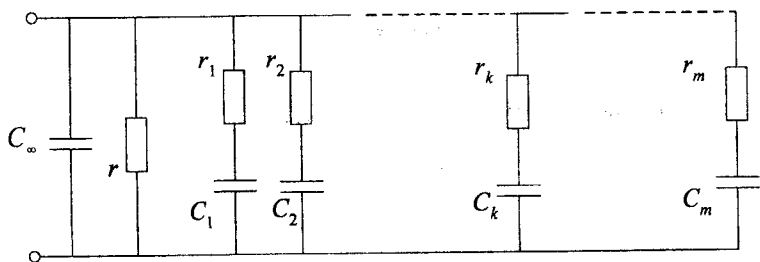


Рисунок 5.10

#### Приклад 5.4

Реалізувати функцію

$$Y(s) = \frac{4s^3 + 8s^2 + 11s + 5}{4s^2 + 6s + 2}.$$

Простим діленням виділимо складову з  $s$  і постійну величину.

$$Y(s) = s + \frac{1}{2} + \frac{6s + 4}{4s^2 + 6s + 2}.$$

Корені знаменника  $s_1 = -\frac{1}{2}$ ;  $s_2 = -1$ .

Перепишемо вхідну провідність у вигляді

$$Y(s) = s + \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}s + 1}{(s + \frac{1}{2})(s + 1)} = s + \frac{1}{2} + \frac{A_1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{s + 1}.$$

Знаходимо  $A_1$  і  $A_2$

$$A_1 = \frac{\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{\frac{3}{2}(-1) + 1}{2(-1) + \frac{3}{2}} = 1.$$

Тоді

$$Y(s) = s + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}} + \frac{1}{s + 1}.$$

Реалізована схема має вигляд, показаний на рисунку 5.11.

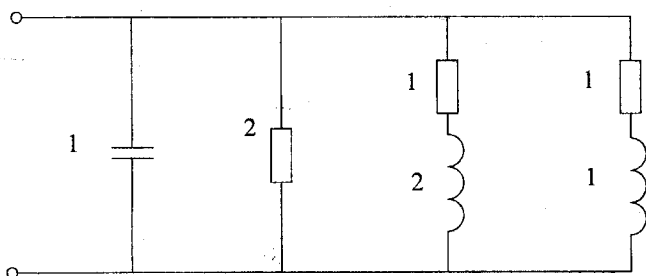


Рисунок 5.11

#### Приклад 5.5

Реалізувати функцію

$$Z(s) = \frac{2s^3 + 15s^2 + 18s + 4}{2s^2 + 5s + 2}.$$

Поділивши чисельник на знаменник одержимо

$$Z(s) = s + \frac{10s^2 + 16s + 4}{2s^2 + 5s + 2}.$$

Подальше ділення чисельника на знаменник, починаючи з вищих степенів, приводить до появи від'ємних коефіцієнтів. Тому ділення проводимо з нульових степенів  $s$ .

$$\frac{4 + 16s + 10s^2}{4 + 10s + 4s^2} \Big| \frac{2 + 5s + 2s^2}{2}$$

$$\frac{6s + 6s^2}{6s + 6s^2}$$

Вхідна функція має вигляд

$$Z(s) = s + 2 + \frac{6s^2 + 6s}{2s^2 + 5s + 2}$$

Оскільки в одержаного дробу немає постійної складової, то на прості дробу розкладаємо функцію  $\frac{6s + 6}{2s^2 + 5s + 2}$ .

Корені знаменника  $s = -\frac{1}{2}$ ;  $s = -2$ , тому

$$\frac{6s + 6}{2\left(s^2 + \frac{5}{2}s + 1\right)} = \frac{A_1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{s + 2}$$

Знаходимо  $A_1$  і  $A_2$ .

$$A_1 = \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) + 3}{2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}} = 1, \quad A_2 = \frac{3(-2) + 3}{2(-2) - \frac{5}{2}} = 2.$$

Вхідна функція

$$Z(s) = s + 2 + \frac{s}{s + \frac{1}{2}} + \frac{2s}{s + 2}$$

Схема, яка відповідає даній вхідній функції, показана на рисунку 5.12.



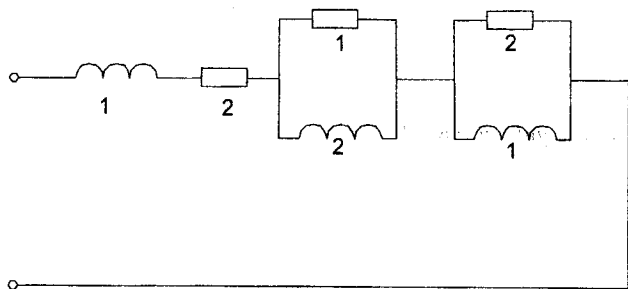


Рисунок 5.12

### 5.6 Синтез двополюсників за допомогою подання вхідної функції у вигляді безперервних дробів

Нехай вхідний опір заданий у вигляді відношення двох поліномів

$$Z(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

причому найвищий степінь  $s$  чисельника ( $n$ ) більший найвищого степеня  $s$  знаменника ( $m$ ) на одиницю. Розділимо чисельник на знаменник таким чином, щоб найвищий степінь залишку від ділення був на одиницю менший найвищого степеня чисельника, тобто

$$Z(s) = A_1 s + B_1 + \frac{P_1(s)}{Q(s)} = A_1 s + B_1 + Z_1(s). \quad (5.38)$$

Схемна реалізація (5.38) являє собою послідовне з'єднання трьох опорів: індуктивності  $L_1 = A_1$ , резистора  $r_1 = B_1$  і деякого поки що невідомого опору  $Z_1$  (рисунок 5.13).

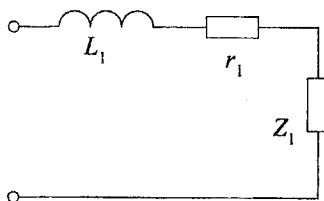


Рисунок 5.13

Запишемо (5.38) у вигляді

$$Z(s) = A_1s + B_1 + \frac{1}{Y_1(s)}, \quad (5.39)$$

де

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = \frac{Q(s)}{P_1(s)},$$

причому у  $Y_1(s)$  найвищий степінь чисельника на одиницю більший найвищого степеня знаменника. Виконуємо аналогічно ділення  $Q(s)$  на  $P_1(s)$  і одержуємо

$$Y_1(s) = A_2s + B_2 + \frac{Q_1(s)}{P_1(s)} = A_2s + B_2 + Y_2(s). \quad (5.40)$$

Найвищий степінь  $Q_1(s)$  на одиницю менший найвищого степеня  $P_1(s)$ . Схемна реалізація (5.40) являє собою паралельне з'єднання смності  $C_2 = A_2$ , резистора  $r_2 = \frac{1}{B_2}$  і невідомої провідності  $Y_2(s)$  (рисунок 5.14,а), а реалізація даної вхідної функції

$$Z(s) = A_1s + B_1 + \frac{1}{A_2s + B_2 + Y_2(s)}$$

показана на рисунку 5.14,б.

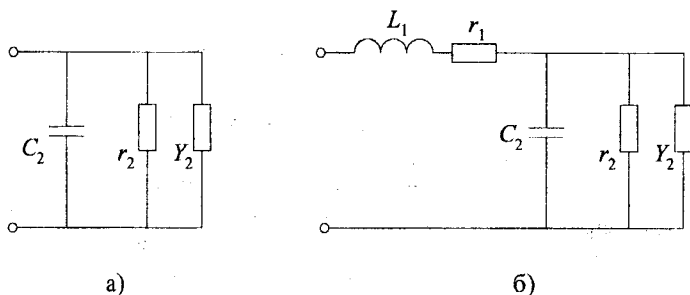


Рисунок 5.14

Продовжуючи процес ділення, вхідний опір можна записати у вигляді:

$$Z(s) = A_1s + B_1 + \frac{1}{A_2s + B_2 + \frac{1}{A_3s + B_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{A_ns + B_n}}}} \quad (5.42)$$

Треба врахувати, що схема може бути реалізована, якщо всі коефіцієнти  $A_i$  і  $B_k$  ланцюгового дробу (5.42) додатні.

Якщо  $n$  число непарне, то вхідний опір реалізується в вигляді схеми, яка показана на рисунку 5.15, а, якщо  $n$  - парне, то в вигляді схеми, яка показана на рисунку 5.15,б.

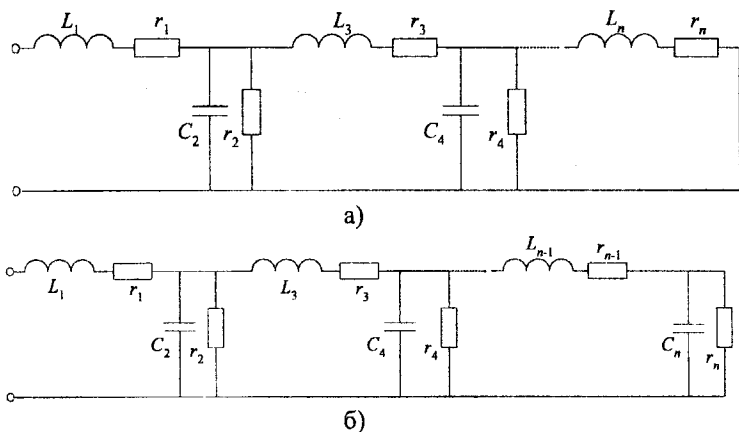


Рисунок 5.15

В деяких випадках члени в поліномах  $P(s)$  і  $Q(s)$  перед діленням можуть розміщуватися за спадними степенями  $s$ .

Якщо в якості вхідної функції задана вхідна провідність, то всі попередні міркування зберігають свою силу, але в цьому випадку непарним коефіцієнтам відповідає паралельне з'єднання ємності і резистора, а парним – послідовне з'єднання індуктивності і резистора.

**Приклад 5.6**

Реалізувати вхідний опір

$$Z(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + 5s + 2}{s^2 + s + 1}$$

Проводимо послідовне ділення чисельника на знаменник.

$$\begin{array}{r}
 2s^3 + 3s^2 + 5s + 2 \mid s^2 + s + 1 \\
 \underline{2s^3 + 2s^2 + 2s} \phantom{+ 2} \\
 s^2 + 3s + 2 \\
 \underline{s^2 + s + 1} \\
 2s + 1 \mid 2s + 1 \\
 \underline{2s + 1} \\
 0,5s + 1 \\
 \underline{0,5s + 0,25} \\
 2s + 1 \mid 3/4 \\
 \underline{2s} \phantom{+ 1} \\
 1 \\
 \underline{1} \\
 0
 \end{array}$$

Таким чином ,

$$Z(s) = 2s + 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{8}{3}s + \frac{4}{3}}}$$

Реалізована схема має вигляд (рисунок 5.16)

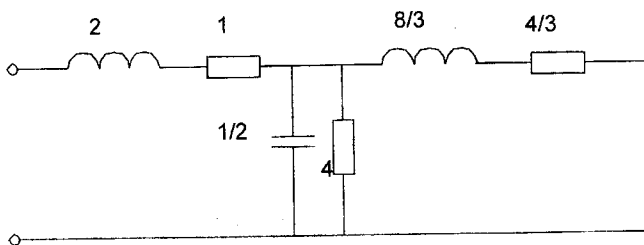


Рисунок 5.16

### Приклад 5.7

Реалізувати вхідну провідність.

$$Y(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Спроба провести ділення, розмістивши члени поліномів за спаданими степенями  $s$  не приводить до успіху, так як з'являються від'ємні коефіцієнти. Тому ділення проводимо, розмістивши члени поліномів за степенями  $s$ , що зростають.

$$\begin{array}{r}
 1 + 2s + 3s^2 + 2s^3 \quad | \quad 1 + s + 2s^2 + s^3 \\
 \hline
 1 + s + 2s^2 + s^3 \quad | \quad s + 2s^2 + s^3 \\
 \hline
 1 + s + s^2 \quad | \quad s + s^2 + s^3 \\
 \hline
 s + s^2 + s^3 \quad | \quad s^2 + s^3 \\
 \hline
 s + s^2 \quad | \quad 1/s \\
 \hline
 s^2 + s^3 \quad | \quad s^3 \\
 \hline
 s^2 \quad | \quad 1/s + 1 \\
 \hline
 s^3 \\
 \hline
 s^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Таким чином,

$$Y(s) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{1}{s} + 1}}$$

Реалізована схема має вигляд (рисунок 5.17).

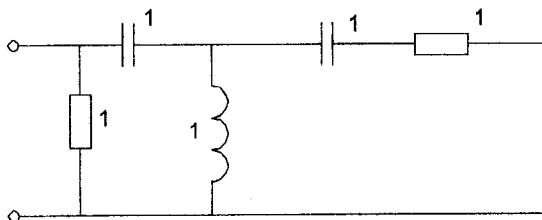


Рисунок 5.17

Якщо вхідна функція не реалізується розглянутими вище методами, то використовують інші методи, які описані в іншій літературі, присвяченій синтезу лінійних електричних кіл.

Для того, щоб коефіцієнти вхідних функцій мали однаковий порядок, що спрощує розрахунки, використовують нормування параметрів за частотою.

Для послідовно з'єднаних резистора, індуктивності і ємності вхідний опір

$$Z(s) = r + Ls + \frac{1}{Cs} = \frac{LCs^2 + rCs + 1}{Cs} \quad (5.43)$$

Якщо  $L = 1 \text{ мГн} = 10^{-3} \text{ Гн}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ} = 10^{-4} \text{ Ф}$ ,  $r = 2 \text{ Ом}$ , то

$$Z(s) = \frac{10^{-7}s^2 + 2 \cdot 10^{-4}s + 1}{10^{-4}s}$$

Виберемо частоту нормування  $\omega_0 = 10^3 \text{ с}^{-1}$  і перепишемо (5.43) у вигляді

$$Z(s) = \frac{L\omega_0 C\omega_0 \frac{s^2}{\omega_0^2} + rC\omega_0 \frac{s}{\omega_0} + 1}{C\omega_0 \frac{s}{\omega_0}}$$

Позначимо  $L\omega_0 = L_n$ ,  $C\omega_0 = C_n$ ,  $\frac{s}{\omega_0} = s_n$  і назвемо ці величини нормованими, тоді

$$Z(s) = \frac{L_n C_n s_n^2 + r C_n s_n + 1}{C_n s_n} \quad (5.44)$$

Підставивши значення нормованих величин в (5.44), одержимо

$$Z(s) = \frac{0,1s^2 + 0,2s + 1}{0,1s} = \frac{s^2 + 2s + 10}{s} \quad (5.45)$$

Перехід від нормованих величин до реальних виконується за допомогою виразів

$$L = \frac{L_n}{\omega_0}, \quad C = \frac{C_n}{\omega_0}$$

Всі параметри в наведених вище прикладах одержані в нормованих значеннях.

### Контрольні питання та вправи

1. Вказати основні етапи синтезу електричних кіл.
2. Навести умови фізичної реалізації двухполосника.
3. Які поліноми називаються поліномами Гурвіца?
4. Яка функція називається додатною дійсною фінкцією?
5. Визначити, чи є функції

$$F_1(s) = \frac{s^2 + s + 4}{s^2 + s + 1}, \quad F_2(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 2}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1},$$

$$F_3(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 2}$$

додатними дійсними функціями.

Відповідь: Функції  $F_1(s)$  і  $F_2(s)$  – так,  $F_3(s)$  – ні

6. Реалізувати схему двополюсника по заданій функції

$$Z(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s(s+2)}$$

методом розкладання на прості дроби.

Відповідь:  $Z(s) = 1 + \frac{3/2}{s} + \frac{1/2}{s+2}$ .

Схема показана на рис.5.18

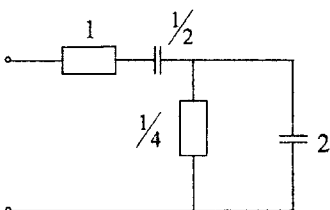


Рисунок 5.18

7. Реалізувати схему двополюсника за даною функцією

$$Z(s) = \frac{s^2 + 4 \cdot s + 3}{s \cdot (s + 2)}$$

методом розкладання на неперервні дроби

Відповідь:

$$Z(s) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot s + \frac{1}{4 + \frac{1}{6} \cdot s}}$$

Схема показана на рис.5.19

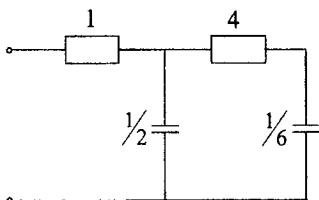


Рисунок 5.19

## 6 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

### 6.1 Загальна характеристика нелінійних елементів і нелінійних електричних кіл

При розгляді лінійних електричних кіл допускалося, що параметри всіх елементів - резистивних, ємнісних і індуктивних є постійними величинами і характеризуються відповідними значеннями цих параметрів - опору  $r$ , ємності  $C$  і індуктивності  $L$ .

Існує широкий клас елементів, параметри яких значно залежать від струмів що, протікають в них, або прикладених до них напруг. Такі елементи називаються *нелінійними*. Для кількісного описування властивостей нелінійних елементів потрібно задавати залежності, які називають характеристиками. Звичайно, ці залежності знаходять за результатами досліду і подають у вигляді графіків (рисунок 6.1,а).

Нелінійні резистори, ємності та індуктивності позначаються так, як показано на рисунку 6.1,б.

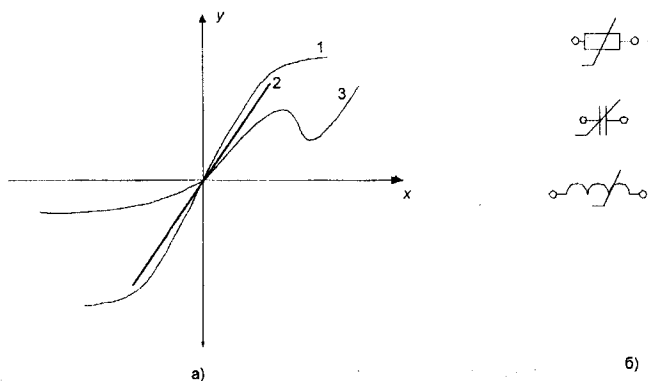


Рисунок 6.1

Для резистора  $y=U$ ,  $x=i$  і характеристика називається *вольтамперною* (в.а.х.), для ємності  $y=q$ ,  $x=U$  характеристика *кулонвольтна*, для індуктивності  $y=\psi$ ,  $x=i$  - характеристика *веберамперна*.

На рисунку 6.1, а - криві 1,3 є характеристиками нелінійних елементів, а пряма 2 - характеристикою лінійного елемента.

Для кожної точки нелінійної характеристики можна ввести поняття статичного і динамічного параметрів (рисунок 6.2).



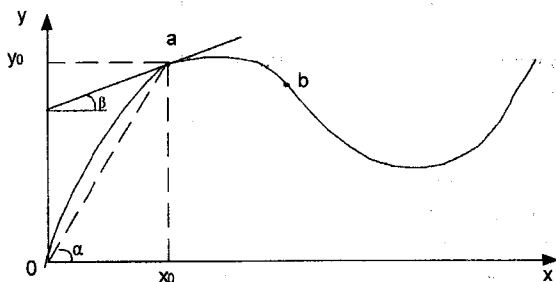


Рисунок 6.2

Під статичним опором в точці  $a$  розуміють відношення постійної напруги нелінійного елемента в цій точці до постійного струму, який відповідає цій точці, тобто

$$r_{cm} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Відповідно для ємності

$$C_{cm} = \frac{q_0}{U_0},$$

для індуктивності

$$L_{cm} = \frac{\psi_0}{I_0}.$$

Статичні параметри пропорційні тангенсу кута  $\alpha$  і завжди додатні.

Під динамічним опором розуміють відношення малого приросту напруги в точці  $a$  до відповідного приросту струму

$$R_d = \frac{du}{di}.$$

Аналогічно

$$C_d = \frac{dq}{du}, \quad L_d = \frac{d\psi}{di}.$$

Динамічні параметри пропорційні тангенсу кута  $\beta$  (кута між дотичною в даній точці і горизонтальною лінією) і можуть бути як додатні (точка  $a$ ), так і від'ємні (точка  $b$ ) на ділянках характеристик, що спадають.

Нелінійні елементи, як уже відмічалось, можуть бути резистивними, ємнісними, індуктивними. Крім того, розрізняють нелінійні елементи за типом характеристик:

- з симетричною відносно початку координат (крива 1 на рисунку 6.3) і несиметричною (крива 2 на рисунку 6.3) характеристиками;

- з монотонною (крива 1 на рисунку 6.1,а), коли нахил кривої (похідна  $di/du$ ) не змінює свого знаку і немонотонною (крива 3 на рисунку 6.1,а) характеристиками;

- з однозначною (крива 1 на рисунку 6.1,а), коли кожному значенню змінної  $x$  відповідає єдине значення функції  $y$ , і неоднозначною (рисунком 6.3) характеристиками.

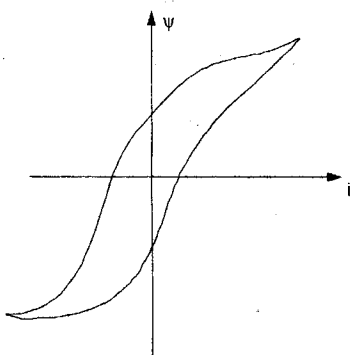


Рисунок 6.3

Приведемо деякі конкретні нелінійні елементи і їх характеристики.

На рисунку 6.4,а показаний напівпровідниковий діод і його характеристика.

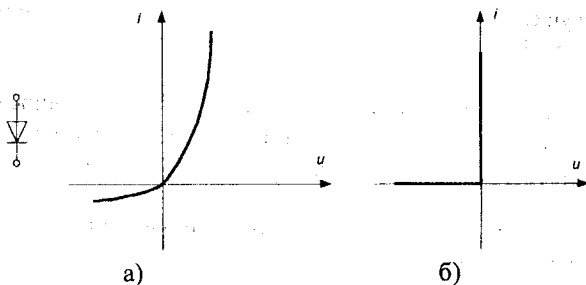


Рисунок 6.4

При додатній напрузі опір діода малий, а при від'ємній напрузі - великий. Часто опір діода в прямому напрямі приймають рівним нулю, а у зворотному напрямі - нескінченності. Характеристика такого діода показана на рисунку 6.4.б, а діод називають ідеальним.

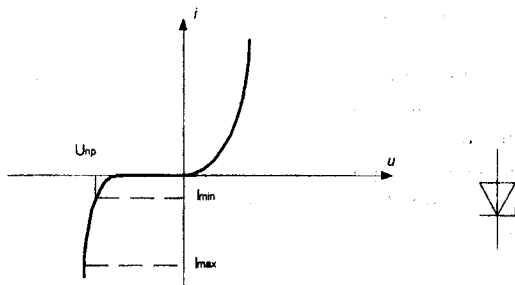


Рисунок 6.5

На рисунку 6.5 показаний напівпровідниковий стабілітрон і його характеристика. При напрузі  $u = U_{np}$  характеристика має круту лінійну ділянку, на якій значна зміна струму не приводить до зміни напруги.

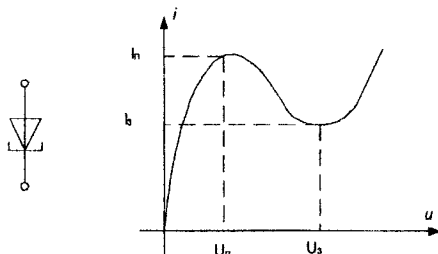


Рисунок 6.6

На рисунку 6.6 показана характеристика тунельного діода, на якій відмічено піковий струм  $I_n$  і пікова напруга  $U_n$ , струм  $I_s$  і напруга  $U_s$  западини.

Сім'я характеристик, яка показана на рисунку 6.7, відноситься до біполярного транзистора, який є нелінійним керованим елементом, характеристика якого може змінюватися в залежності від керуючої дії, в даному випадку струму бази.

Електричне коло, яке містить хоч би один нелінійний елемент, називається *нелінійним* електричним колом.

Процеси в нелінійних електричних колах відрізняються складністю і багатосторонністю. Перерахуємо деякі із найбільш відомих явищ, які властиві тільки нелінійним колам і принципово неможливі в лінійних колах.

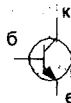
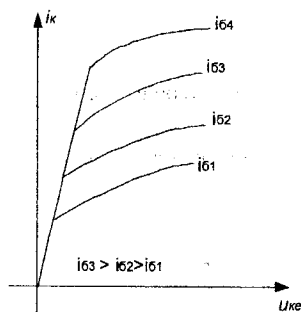


Рисунок 6.7

1. При прикладеній на вході синусоїдній дії на виході з'являється сигнал несинусоїдної форми, що дозволяє здійснювати перетворення частоти або випрямлення змінного струму.

2. При зміні рівня вхідного сигналу або величини навантаження в широкому діапазоні напруги або струми навантаження можуть залишатися практично постійними, тобто можна здійснювати стабілізацію напруги або струму.

3. В лінійному колі з заданими параметрами і зовнішньою дією усталений режим встановлюється завжди один і той же незалежно від початкових умов. В нелінійних колах можливе існування декількох усталених станів рівноваги, стійких чи нестійких. Тому в нелінійних колах в залежності від початкових умов усталений режим може бути не єдиним.

4. В нелінійних колах за наявності джерела постійної напруги можливе існування автоколивань, тобто виникнення періодичних коливань, що дозволяє створювати генератори періодичних напруг різної форми.

5. При плавній зміні напруги вхідного сигналу або частоти в нелінійних колах можуть мати місце стрибкоподібні зміни напруг і струмів або фаз і частоти в випадку періодичного режиму.

Такі можливості нелінійних кіл обумовили їх широке використання в електротехніці, радіоелектроніці і автоматичці. Нелінійність характеристик елементів в нелінійних електричних колах приводить до того, що процеси в таких колах описуються нелінійними диференціальними рівняннями, в яких невідома змінна напруга або струм і їх похідні входять нелінійно, тобто не в першому степені, як у лінійних рівняннях, а довільно.

Одна із головних особливостей нелінійних кіл, з точки зору аналізу, полягає в тому, що до них не можна застосувати принцип накладання. Наслідком цього є те, що не існує скільки-небудь загальних засобів аналітич-

ного розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, навіть першого порядку. Тому аналіз процесів в нелінійних колах проводиться, як правило, наближеними методами.

## 6.2 Розрахунок електричних кіл постійного струму з нелінійними резисторами

### а) Графічний метод

Якщо коло містить всього одне джерело і один нелінійний елемент з відомою вольтамперною характеристикою (рисунок 6.8,а), то при відомій е.р.с. джерела  $E$  легко графічно з допомогою характеристики знайти струм  $I$  в колі (рисунок 6.8,б).

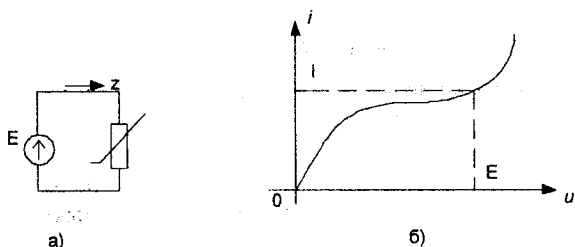


Рисунок 6.8

Таким чином, суть графічного методу полягає в тому, що шляхом графічних побудов визначається вольтамперна характеристика всього кола, що приводить складне коло з декількома резисторами до кола з одним нелінійним резистором.

Якщо в колі присутні два послідовно з'єднаних елементи (рисунок 6.9,а) з вольтамперними характеристиками, які показані на рисунку 6.9,б, то будується графічно вольтамперна характеристика всього кола.

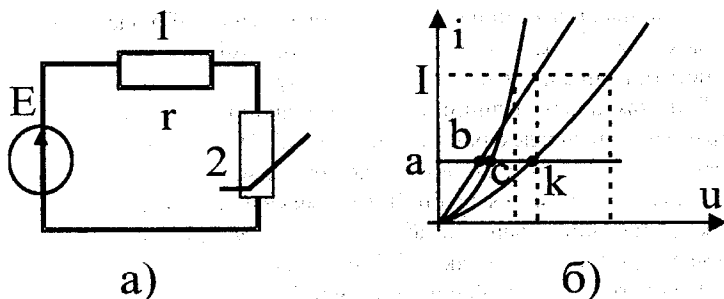


Рисунок 6.9

Оскільки при послідовному з'єднанні струм через елементи протікає один і той же, то точки загальної в.а.х. визначаються складанням напруг елементів 1 і 2 для різних значень струмів. Так, наприклад, точка  $k$  загальної характеристики одержана складанням відрізків  $ab$  і  $ac$ , тобто

$$ak = ab + ac.$$

При більшому числі послідовно з'єднаних елементів додається відповідне число відрізків. Ця ж задача може бути розв'язана також графічно, але іншим методом - графічним розв'язанням рівнянь. Задану вольтамперну характеристику (рисунок 6. 10)

$$i = f(u_n) \quad (6.1)$$

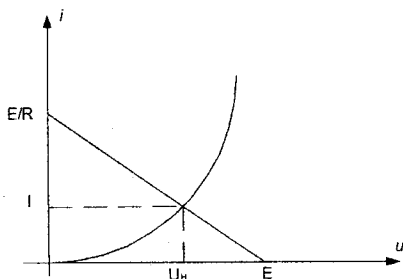


Рисунок 6.10

вважаємо одним рівнянням з двома невідомими: струмом  $I$  і напругою нелінійного елемента  $U_n$ . Друге рівняння для визначення невідомих одержуємо із другого закону Кірхгофа

$$ir = u_{ne} - E$$

або

$$i = \frac{E}{r} - \frac{u_{ne}}{r}. \quad (6.2)$$

Рівняння (6.2) - рівняння прямої лінії - легко будується на тому ж рисунку (рисунок 6.10). Точка перетину графіків рівнянь (6.1) і (6.2) дає розв'язок.

Якщо елементи в колі з'єднані паралельно (рисунок 6.11,а), то точки загальної характеристики знаходяться додаванням ординат окремих в.а.х., тобто при одних і тих же напругах на елементах (рисунок 6.11,б).

Загальний струм  $I$  знаходиться при заданій е.р.с.  $E$  за допомогою загальної в.а.х., а струми в вітках за відповідними в.а.х. елементів (рисунок 6.11,б). При змішаному з'єднанні елементів (рисунок 6.12,а) спочатку будується характеристика паралельно з'єднаних елементів (пунктир на рисунку 6.12,б), а потім в.а.х. всього кола (товста лінія на рисунку 6.12,б).

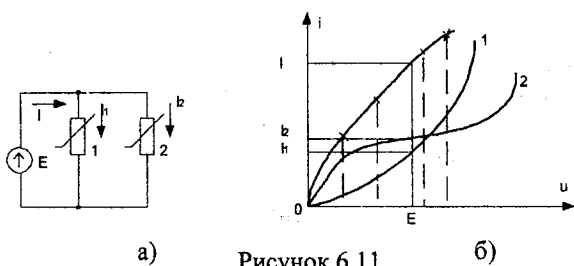


Рисунок 6.11

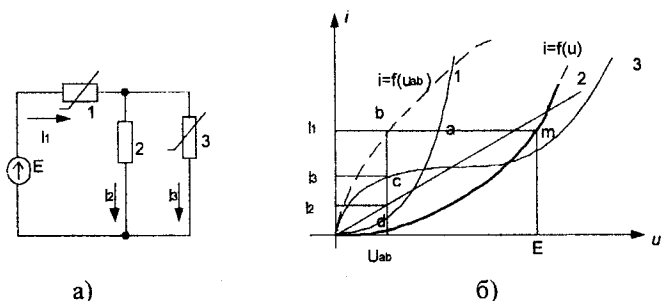


Рисунок 6.12

Вхідний струм  $I_1$  визначається за в.а.х. всього кола за заданою е.р.с.  $E$  (точка  $m$ ). Точки перетину лінії струму  $I_1$  з характеристикою елемента 1 (точка  $a$ ) і характеристикою  $i = f(U_{ab})$  (точка  $b$ ) визначають відповідно напругу на елементі 1 –  $U_1$  і напругу  $u_{ab}$ . Точки перетину лінії напруги  $U_{ab}$  з характеристиками елемента 2 (точка  $d$ ) і 3 (точка  $c$ ) визначають струми  $I_2$  і  $I_3$ .

Цей метод дещо аналогічний методу перетворень для лінійних кіл.

Якщо в складному колі є тільки один нелінійний елемент, то задача значно спрощується, якщо вся лінійна частина замінюється еквівалентним джерелом з е.р.с.  $E_0$  і внутрішнім опором  $r_0$  (рисунок 6.13).

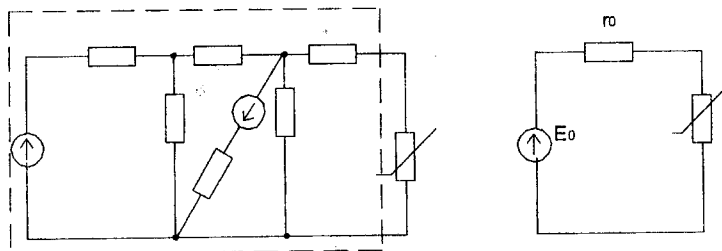


Рисунок 6.13

В тих випадках, коли в вітках з нелінійним елементом є е.р.с., зручно будувати за відповідною в.а.х. елемента в.а.х. вітки.

Нехай в вітці  $ab$  (рисунок 6.14,а) послідовно з нелінійним елементом, в.а.х. якого зображена на рисунку 6.14,б суцільною лінією, присутня е.р.с.  $E_0$ , яка направлена назустріч струмові.

Потрібно побудувати в.а.х. вітки, тобто залежність  $i=f(u_{ab})$ . Оскільки має місце співвідношення

$$u_{ab} = u_n + E_0,$$

то неважко бачити, що кожна точка в.а.х. елемента при переході до напруги  $u_{ab}$  зміщується вправо на величину  $E_0$  (пунктир на рисунку 6.14,б).

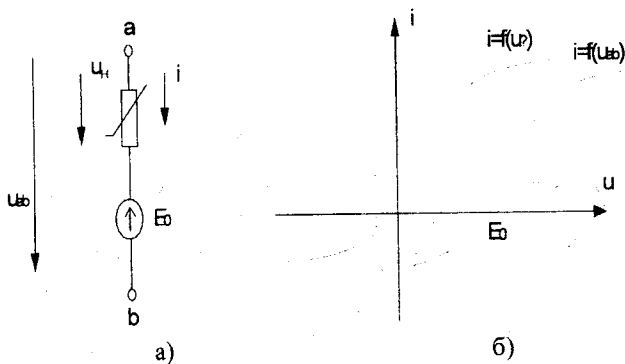


Рисунок 6.14

Якщо е.р.с. направлена як і струм, то в (6.3) змінюється знак біля  $E_0$  і в цьому випадку в.а.х. вітки зміщується вліво на величину  $E_0$ .

#### б) Метод двох вузлів

Можливість побудови в.а.х. віток дозволяє використовувати для нелінійних кіл метод двох вузлів при графічному розв'язанні нелінійних рівнянь.

Розглянемо цей метод на конкретному прикладі (рисунок 6.15).



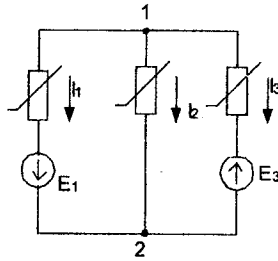


Рисунок 6.15

Всі струми направимо від точки 1 до точки 2. Характеристики елементів задані (рисунок 6.16,а).

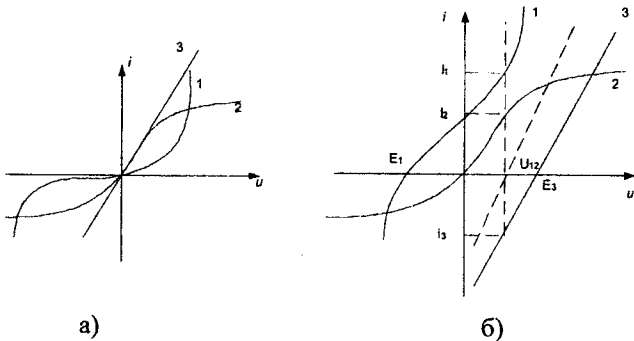


Рисунок 6.16

Побудуємо в.а.х. віток, тобто залежності струмів в вітках від напруги  $u_{12}$ . Оскільки в вітці 1 е.р.с. направлена за струмом, то в.а.х. першої вітки зміщена вліво на величину е.р.с.  $E_1$  порівняно з в.а.х. елемента 1, в.а.х. другої вітки збігається з в.а.х. елемента 2, а в.а.х. третьої вітки зміщена вправо на величину е.р.с.  $E_3$  (рисунок 6.16, б).

Побудуємо нову функцію (пунктир на рисунок 6.16,б)

$$i_1 + i_2 + i_3 = f(u_{12}). \quad (6.4)$$

У відповідності з першим законом Кірхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (6.5)$$

тому точка перетину створеної функції (6.4) з віссю абсцис визначає напругу  $u_{12}$  і отже за відповідними характеристиками струми в вітках.

Графічні методи не потребують обчислень, досить прості для засвоєння, можуть використовуватися для широкого класу кіл, але громіздкі при використанні, а їх точність визначається точністю графічних побудов.

### в) Графоаналітичний метод

В колі, яке містить джерело, лінійний і нелінійний елементи (рисунок 6.17,а) визначимо струм графоаналітичним методом.

Припустимо, що заздалегідь із яких-небудь міркувань приблизне положення робочої точки на в.а.х. нелінійного елемента відоме. Нехай вона знаходиться на ділянці  $av$  (рисунок 6. 17, б). Замінімо криволінійну ділянку  $av$  прямою лінією, яка перетинає вісь абсцис в точці  $E_0$ , представляючи тим самим нелінійний елемент віткою, яка містить лінійний опір  $r_0$  і е.р.с.  $E_0$ . Оскільки одержана лінійна характеристика зміщена відносно початку координат вправо, то е.р.с.  $E_0$  в вітці направлена назустріч струмові.

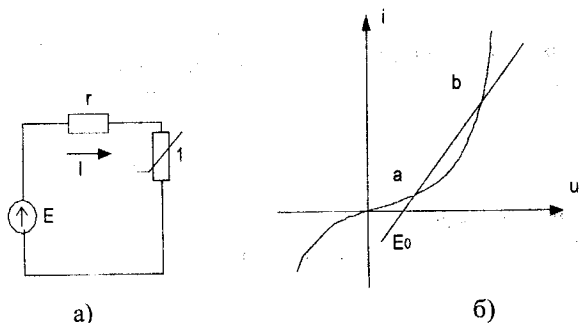


Рисунок 6.17

Таким чином, одержуємо лінійну схему заміщення (рисунок 6. 18), із якої легко визначаємо струм

$$I = \frac{E - E_0}{r + r_0} \quad (6.6)$$

Необхідно тепер перевірити, чи знаходиться знайдене значення струму  $I$  на ділянці  $av$ . Якщо ця умова виконується, то розрахунок закінчений. Якщо одержане значення струму не потрапляє на цю ділянку, то необхідно вибрати нову ділянку випрямлення і розрахунок повторити.

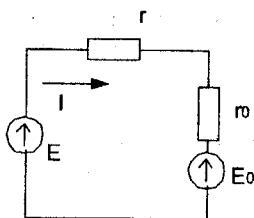


Рисунок 6.18

Якщо в електричному колі декілька нелінійних елементів, кожен із них замінюється лінійним опором з е.р.с., складається лінійна схема заміщення, робиться її розрахунок, а всі знайдені значення струмів нелінійних елементів перевіряються на відповідність їх спрямленим ділянкам характеристики.

### г) Аналітичний метод

При аналітичному методі в.а.х. нелінійного елемента повинна бути задана у вигляді аналітичного виразу. Нехай, наприклад, характеристика нелінійного елемента в колі (рис. 6.17, а) задана виразом

$$i = a_1 u_n + a_2 u_n^2 + a_3 u_n^3, \quad (6.7)$$

де  $a_1, a_2, a_3$  - відомі коефіцієнти.

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для цього кола

$$ir + u_n = E$$

або з врахуванням (6.7)

$$ra_3 u_n^3 + ra_2 u_n^2 + (ra_1 + 1)u_n - E = 0. \quad (6.8)$$

Розв'язуючи це нелінійне алгебраїчне рівняння, знаходимо  $u_n$  і за допомогою (6.7) шуканий струм.

Розв'язок задачі і в цьому випадку наближений, тому що нелінійне алгебраїчне рівняння майже ніколи точно не розв'язується.

Одним із досить простих і ефективних методів наближеного розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь є метод Ньютона-Рафсона. Нехай маємо нелінійне алгебраїчне рівняння

$$f(x) = 0. \quad (6.9)$$

Припустимо, що  $x_0$  нульовий наближений розв'язок цього рівняння. Позначимо наступний наближений розв'язок

$$x_1 = x_0 + h, \quad (6.10)$$

де  $h$  - поправка до нульового наближення.

Підставимо (6.10) в (6.9) і розкладемо функцію в ряд Тейлора, обмежившись двома членами.

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0. \quad (6.11)$$

Із (6.11) знаходиться значення поправки

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

де  $f'(x_0)$  - значення похідної функції  $f(x)$  для  $x=x_0$ .

У відповідності з (6.10)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (6.13)$$

#### Приклад 6.1.

Нехай в рівнянні (6.8) коефіцієнти мають значення:

$$a_1 = 0,5 \text{ A/B}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0,25 \text{ A/B}^3, \quad r = 1 \text{ ом}, \quad E = 5 \text{ В}.$$

Тоді (6.8) запишеться в вигляді

$$0,25u_n^3 + 1,5u_n - 5 = 0$$

або, позначивши  $u_n = x$

$$f(x) = 0,25x^3 + 1,5x - 5 = 0.$$

Використаємо нульові наближення  $x_0 = 1$ .

Перше наближення

$$x_1 = 1 - \frac{0,25 \cdot 1^3 + 1,5 \cdot 1 - 5}{0,75 \cdot 1^2 + 1,5} = 1 - (-1,444) = 2,444.$$

Друге наближення

$$x_2 = 2,444 - \frac{0,25 \cdot 2,444^3 + 1,5 \cdot 2,444 - 5}{0,75 \cdot 2,444^2 + 1,5} = 2,444 - 0,388 = 2,056.$$

Третє наближення

$$x_3 = 2,056 - \frac{0,25 \cdot 2,056^3 + 1,5 \cdot 2,056 - 5}{0,75 \cdot 2,056^2 + 1,5} = 2,056 - 0,055 = 2,001.$$

Наступного наближення можна не знаходити, оскільки  $x_2$  і  $x_3$  мало відрізняються одне від одного. Точний розв'язання рівняння  $x_0=2$ .

Таким чином  $U_n = 2B$ ,  $i = 0,5 \cdot 2 + 0,25 \cdot 2^3 = 3A$ .

Якщо в.а.х. представити не степеневим поліномом, а іншими функціями (показниковими, логарифмічними і т.д.), процедура розв'язання залишається незмінною.

### 6.3 Деякі використання нелінійних кіл постійного струму

*а) Стабілізація напруги на навантаженні.*

Для стабілізації напруги на навантаженні при зміні величини постійної вхідної напруги або зміні опору навантаження використовуються стабілітрони (рисунок 6.19).

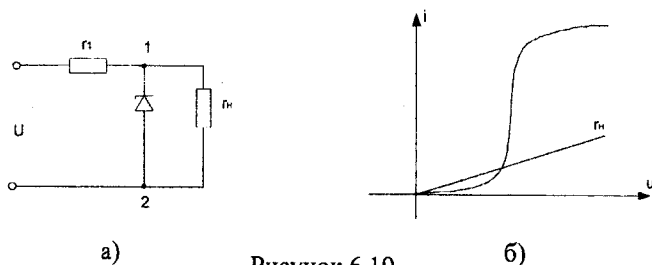


Рисунок 6.19

На рисунку 6.19,б показані в.а.х. стабілітрона і опору навантаження. Одержимо в.а.х. паралельно з'єднаних стабілітрона і опору навантаження, додавши ординати окремих в.а.х. (крива 2, рисунок 6.20).

Визначення напруги навантаження проведемо шляхом графічного розв'язання двох рівнянь (рисунок 6.3).

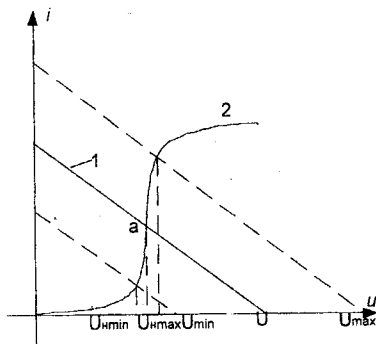


Рисунок 6.20

Проведемо пряму лінію (пряма 1), яка відповідає рівнянню

$$i = \frac{E}{r_1} - \frac{u_n}{r_1}$$

Січна характеристик 1 і 2 дає робочу точку  $a$ , яка визначає режим роботи кола.

При зміні напруги джерела його характеристика (пряма 1) переміщується паралельно собі. З графіків (рисунок 6.20) і переміщення робочої точки видно, що напруга на навантаженні змінюється мало. Граничні положення прямих, які нанесені пунктиром, відповідають мінімально і максимально допустимим значенням напруги джерела  $U_{\min}$  і  $U_{\max}$ , при яких ще відбувається стабілізація. Перше із них визначається величиною струму навантаження, а друге - максимально допустимим струмом стабілітрона.

Стабілізатори напруги, звичайно, характеризуються коефіцієнтом стабілізації, під яким розуміють відношення відносної зміни напруги на вході до відносної зміни напруги на виході

$$K_{ст} = \frac{\Delta U_{ex} / U_{ex}}{\Delta U_{вих} / U_{вих}}$$

Цей коефіцієнт можна виразити через параметри конкретного стабілізатора.

#### б) Логічні схеми на діодах.

На рисунку 6.21 показана логічна схема "І" на ідеальних діодах. На схемі показані лише два входи  $x_1$  і  $x_2$  але їх може бути і більше. За відсутності сигналів на входах діоди знаходяться в відкритому стані, потенціал точки  $a$  дорівнює нулю, на виході у сигнал відсутній.

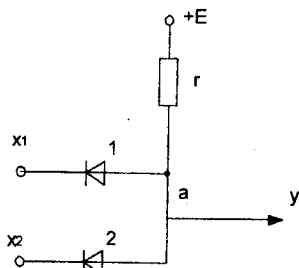


Рисунок 6.21

При появі сигналу на одному із входів, наприклад  $x_1$ , діод 1 закривається, діод 2 залишається відкритим і потенціал точки  $a$  залишається рівним нулю - сигналу на виході немає. Якщо сигнали з'являються одночасно на всіх входах, всі діоди закриваються, струм в колі відсутній і точка  $a$  одержує потенціал  $+E$ , на виході з'являється сигнал.

Таким чином на виході з'являється сигнал тільки коли на всіх входах є одночасно сигнали.

В таблиці 1 записані перетворення, які здійснює логічна схема "Г".

Таблиця 6.1

$x_1$	0	1	0	1
$x_2$	0	0	1	1
$y$	0	0	0	1

На рисунку 6.22 показана логічна схема "АБО" на ідеальних діодах. За відсутності сигналів на входах діоди відкриті, потенціал точки  $a$  дорівнює нулю і сигнал на виході відсутній.

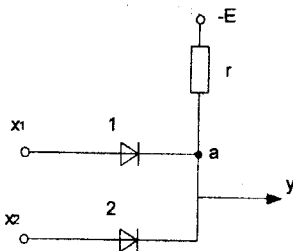


Рисунок 6.22

Поява сигналу на одному із входів, наприклад  $x_1$ , діод 1 залишається відкритим, потенціал точки  $a$  стає рівним потенціалу входу  $x_1$ , всі інші діоди закриваються і на виході з'являється сигнал. Таким чином, поява сигналу хоч би на одному вході викликає появу сигналу на виході.

Перетворення, які здійснюються логічною схемою "АБО", записані в табл.6.2.

Таблиця 6.2

$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

## 6.4 Загальна характеристика магнітних кіл

*Магнітним колом* називається сукупність пристроїв, переважно із феромагнітних матеріалів, призначених для створення і концентрації в певному місці магнітного потоку. Магнітні кола є невід'ємною частиною електромагнітних реле, електромагнітів, трансформаторів, двигунів, електромашинних генераторів і т.п. Феромагнітні осердя використовуються тому, що вони мають малий опір і полегшують проходження магнітного потоку.

Як відомо із курсу фізики залежність між магнітною індукцією  $B$  і магнітною напруженістю  $H$  в феромагнітних тілах є нелінійною і являє собою петлю гістерезису (рисунок 6.23).

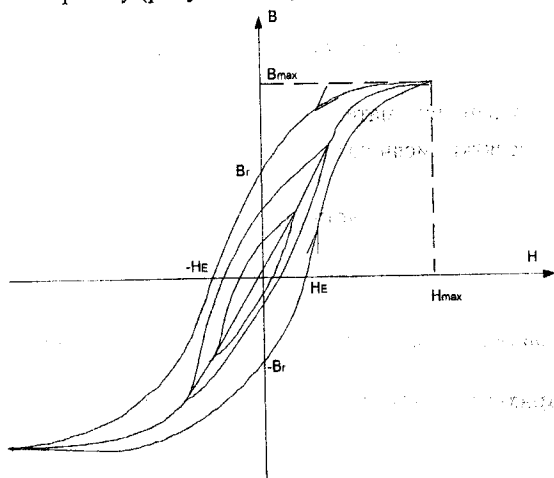


Рисунок 6.23

Значення магнітної індукції  $B_r$  при  $H=0$  називається залишковою індукцією, а значення  $H_e$  при  $B=0$  коерцитивною силою.



Геометричне місце вершин петель гістерезису, знятих при різних значеннях  $H_{max}$ , називається основною кривою намагнічування.

Потік магнітної індукції, який називається магнітним потоком  $\Phi$ , через деяку поверхню  $S$  визначається з виразу

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (6.14)$$

Якщо магнітна індукція у всіх точках поверхні однакова, тобто магнітне поле однорідне, то

$$\Phi = B \cdot S. \quad (6.15)$$

Магнітний потік через замкнену поверхню завжди дорівнює нулю.

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (6.16)$$

Зв'язок між магнітною індукцією  $B$  і магнітною напруженістю  $H$  визначається співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (6.17)$$

де  $\mu_a$  - магнітна проникність речовини. Для повітря

$$\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г / м.}$$

Для феромагнітних матеріалів  $\mu_a$  величина змінна і може перевищувати  $\mu_0$  в десятки тисяч разів.

В магнітному полі виконується закон повного струму

$$\oint_l \vec{H} dl = i,$$

де  $i$  - повний струм, який пронизує контур інтегрування.

## 6.5 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму

Розглянемо нерозгалужене магнітне коло постійного струму, яке містить в собі осердя з феромагнітного матеріалу з поперечним перерізом  $S$ , повітряним проміжком величиною  $\delta$ , обмотку з числом витків  $W$ , через яку протікає постійний струм  $I$  (рисунок 6.24).

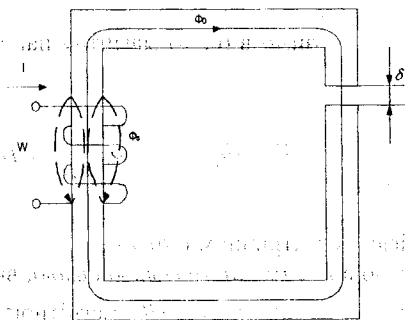


Рисунок 6.24

Струм, який протікає через обмотку, створює магнітний потік, більша частина якого замикається через осердя, а менша через повітря навколо обмотки. Частина магнітного потоку, який замикається через осердя, називається *основним магнітним потоком*  $\Phi_0$ , а магнітний потік, який замикається через повітря, називається *потокот розсіювання*  $\Phi_s$ .

При всіх подальших міркуваннях будемо припускати:

- відсутність потоку розсіювання,
- постійність величини магнітної індукції у всіх точках поперечного перерізу,
- що шлях магнітного потоку визначається за довжиною середньої лінії  $l$ .

Застосуємо до заданого магнітного кола основні співвідношення, які розглянуті в попередньому параграфі. Оскільки магнітний потік через всю довжину осердя однаковий (припущення 1), магнітне поле в осерді однорідне (припущення 2), то

$$\Phi_0 = B \cdot S$$

по всій довжині осердя. Якщо переріз осердя всюди однаковий, то магнітна індукція в осерді  $B_c$  і магнітна індукція в проміжку  $B_0$  однакові.

Напруженість магнітного поля в осерді  $H_c = B_c / \mu_a$  і в повітрі  $H_0 = B_0 / \mu_0$  значно відрізняються одна від одної.

Використаємо закон повного струму. Інтегрування проведемо вздовж середньої лінії осердя. Оскільки вздовж шляху інтегрування напруженість поля має два значення, то вираз складається з двох частин

$$H_c l + H_0 \cdot \delta = I \cdot W, \quad (6.19)$$

а в правій частині записується  $I \cdot W$  оскільки струм  $I$  пронизує контур інтегрування  $W$  разів. Виразимо в (6.19) магнітну напруженість через магнітний потік

$$\frac{B_c}{\mu_0} l + \frac{B_0}{\mu_0} \delta = IW, \quad \Phi_0 \frac{l}{s\mu_a} + \Phi_0 \frac{\delta}{s\mu_0} = IW. \quad (6.20)$$

За аналогією з електричними колами добуток  $IW$  називають *магніторушійною силою* або *намагнічувальною силою*, вираз (6.19) - другим законом Кірхгофа для магнітних кіл,  $Hl$  - магнітною напругою,  $\frac{l}{s\mu_0} = R_m$  - магнітним опором, вираз (6.16) - першим законом Кірхгофа для магнітних кіл.

Розрахунок магнітних кіл зводиться звичайно до двох типів задач:

1. Пряма задача - при заданих геометрії магнітного кола, матеріалі осердя, магнітній індукції в деякому місці магнітного кола визначити намагнічувальну силу  $IW$ .

2. Обернена задача - при заданих геометрії, матеріалі осердя і намагнічувальних силах визначити величину магнітної індукції в деякому місці магнітного кола.

Розглянемо розв'язок більш простої прямої задачі. Нехай задані: довжина середньої лінії осердя  $l$ , переріз осердя  $S$ , величина проміжку  $\delta$ , значення магнітної індукції в проміжку  $B_0$ . Необхідно визначити намагнічувальну силу  $IW$ .

Оскільки магнітний потік по всій довжині осердя однаковий, переріз незмінний, то магнітна індукція в проміжку, як це було встановлено раніше, дорівнює магнітній індукції в осерді.

Для знаходження намагнічувальної сили скористаємося другим законом Кірхгофа для магнітного кола (6.19), попередньо визначивши магнітні напруженості ділянок. Магнітна напруженість проміжку визначається з виразу

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0},$$

а магнітна напруженість осердя визначається за допомогою основної кривої намагнічування матеріалу осердя (рисунок 6. 25).

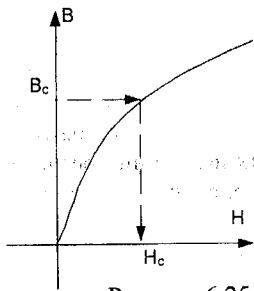


Рисунок 6.25

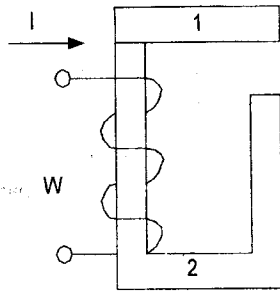


Рисунок 6.26

Якщо частина осердя (рисунок 6.26) (наприклад 1) з другого матеріалу, то ліва частина виразу (6.19) буде складатися із трьох складових

$$H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_0 \cdot \delta = IW \quad (6.21)$$

і напруженості  $H_1$  і  $H_2$  будуть визначатися із основних кривих намагнічування відповідних матеріалів.

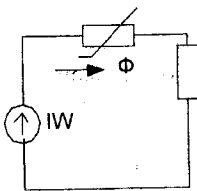
Якщо ділянка 1 осердя із того ж матеріалу, що і ділянка 2, але має інший переріз, то будуть різні магнітні індукції, тобто

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$$

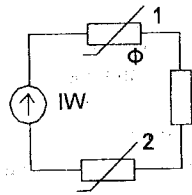
і магнітні напруженості цих ділянок хоч і будуть визначатися по одній і тій же кривій намагнічування (матеріал один і той же), але будуть різними і для визначення намагнічувальної сили треба користуватися виразом (6.21).

Обернена задача розв'язується за аналогією з нелінійними електричними колами постійного струму, наприклад, графічно.

Представимо магнітне коло (рисунок 6.24) в вигляді нелінійного електричного кола постійного струму (рисунок 6.27, а).



а)



б)

Рисунок 6.27

Роль е.р.с. в ньому виконує м.р.с.  $IW$ , струму - магнітний потік  $\Phi$ , напруги - магнітна напруга  $Hl$ . Нелінійний резистор відповідає магнітному опорі осердя, а лінійний резистор - магнітному опорі повітряного проміжку. Замість вольтамперних характеристик нелінійних резисторів необхідно використовувати веберамперні характеристики ділянок  $\Phi = f(Hl)$ .

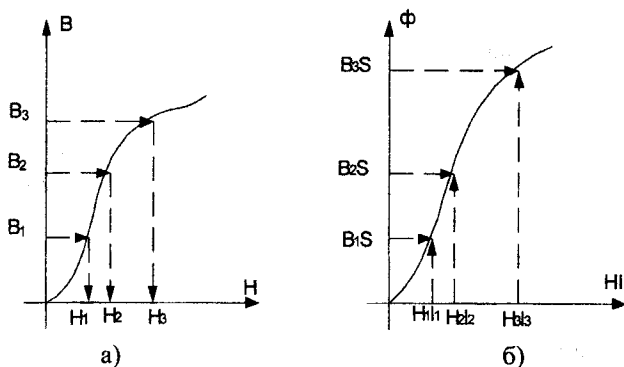


Рисунок 6.28

Для визначення веберамперної характеристики ділянки використовується характеристика магнітного матеріалу (основна крива намагнічення, рисунок 6.28,а) і складається таблиця.

Таблиця 6.3

$I$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$H$	$H_1$	$H_2$	$H_3$
$\Phi = BS$	$B_1S$	$B_2S$	$B_3S$
$Hl$	$H_1l$	$H_2l$	$H_3l$

Задавшись  $8 \div 10$  значеннями  $B_i$ , за кривою намагнічування визначають значення  $H_i$ ; значення їх записують в перший і другий рядок таблиці. За одержаними значеннями  $B_iS$  і  $H_i l$  будується веберамперна характеристика ділянки (рисунок 6.28,б).

Подальший розрахунок аналогічний розрахунку нелінійних кіл постійного струму. Будується характеристика лінійної ділянки, потім додаються абсциси характеристик, тому що з'єднання послідовне, і визначається характеристика всього кола (товста лінія на рисунку 6.29).

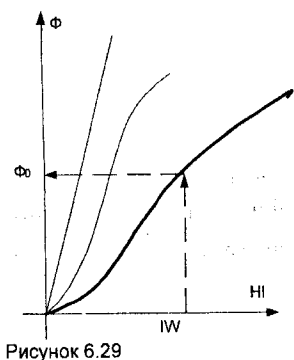


Рисунок 6.29

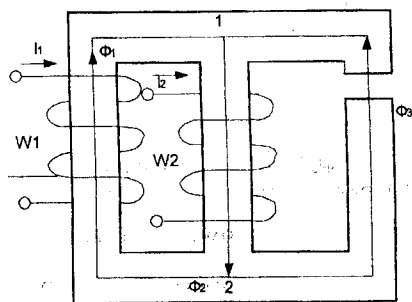


Рисунок 6.30

За заданою намагнічувальною силою  $IW$  визначається магнітний потік  $\Phi_0$ , і при відомому перерізі магнітна індукція

$$B = \frac{\Phi_0}{S}.$$

Аналогом магнітного кола, яке зображене на рисунку 6.26, буде електричне коло, показане на рисунку 6.27,б.

### 6.6 Розгалужене магнітне коло постійного струму

Для розгалуженого магнітного кола також існують два типи задач - пряма і обернена.

Розглянемо розв'язання прямої задачі на прикладі розгалуженого магнітного кола, яке зображене на рисунку 6.30.

У вказаному магнітному колі три стержні, через які протікають відповідні потоки. Потоки  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  направлені у відповідності з намоткою обмоток і напрямками струмів  $I_1$  і  $I_2$ .

Напрямок потоку  $\Phi_3$  вибрано довільно. Позначимо переріз і довжину стержнів через  $S_i$  і  $l_i$ . Задані: геометрія і матеріал магнітного кола, намагнічувальна сила  $I_1W_1$  і магнітна індукція в проміжку  $B_0$ . Визначити намагнічувальну силу  $I_2W_2$ .

Приймаючи ті ж припущення, що і раніше, встановлюємо, що  $B_3=B_0$  і магнітний потік третього стержня

$$\Phi_3 = B_3S_3.$$

Складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, який складається із першого і третього стержнів. Обхід контуру виконаємо за годинниковою стрілкою

$$H_1 l_1 - H_3 l_3 - H_0 \cdot \delta = I_1 W_1. \quad (6.22)$$

Друга і третя складові від'ємні, оскільки напрям обходу контуру і напрям магнітного потоку  $\Phi_3$  направлені назустріч один одному. Магнітна напруженість проміжку визначається з виразу  $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$ , а  $H_3$  із кривої намагнічення за відомими значенням  $B_3$ .

Із (6.22) одержуємо

$$H_1 = \frac{I_1 W_1 + H_0 \delta + I_3 W_3}{l_1}$$

Знаючи  $H_1$  із кривої намагнічення визначається  $B_1$  і магнітний потік першого стержня

$$\Phi_1 = B_1 S_1.$$

За першим законом Кірхгофа для магнітного кола

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3, \quad B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2},$$

а  $H_2$  визначається з кривої намагнічування.

Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, до складу якого входять перший і другий стержні, одержуємо

$$H_1 L_1 + H_2 L_2 = I_1 W_1 + I_2 W_2$$

і

$$I_2 W_2 = H_1 L_1 + H_2 L_2 - I_1 W_1.$$

Для розв'язання оберненої задачі, коли відомі намагнічувальні сили і необхідно визначити магнітні потоки в стержнях, звернемося до аналізу електричного кола (рисунок 6. 31).

Визначивши веберамперні характеристики ділянок магнітного кола, для знаходження потоків  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  можна використати уже відомі методи розрахунку нелінійних кіл постійного струму.

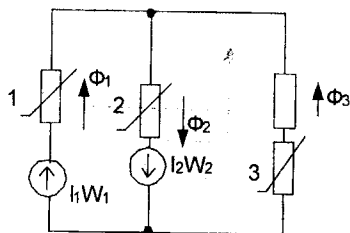


Рисунок 6.31

### 6.7 Електричні кола змінного струму з нелінійними резисторами

В лінійних електричних колах при синусоїдній входній напрузі струми і напруги у всіх вітках також синусоїдні. В нелінійних електричних колах ця умова не виконується.

Розглянемо коло (рисунок 6.32), до складу якого входять джерело синусоїдної е.р.с.  $e = E_m \sin \omega t$  і нелінійний резистор з вольт-амперною характеристикою  $i = au^3$ .

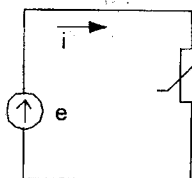


Рисунок 6.32

В даному колі напруга на нелінійному елементі дорівнює е.р.с, тому

$$i = aE_m^3 \sin^3 \omega t = aE_m^3 \cdot \frac{3}{4} \sin \omega t - aE_m^3 \cdot \frac{1}{4} \sin 3\omega t, \quad (6.23)$$

тобто при входній синусоїдній дії струм крім першої гармоніки має ще і третю гармоніку.

Це твердження можна довести і графічним шляхом. Зобразимо половину хвилі напруги на нелінійному резисторі (рис.6.33.а), а біля нього вольт-амперну характеристику резистора, відклавши по осі ординат  $u$ , а по осі абсцис  $-i$  (масштаб напруг для хвилі напруги і для вольт-амперної характеристики однакові).



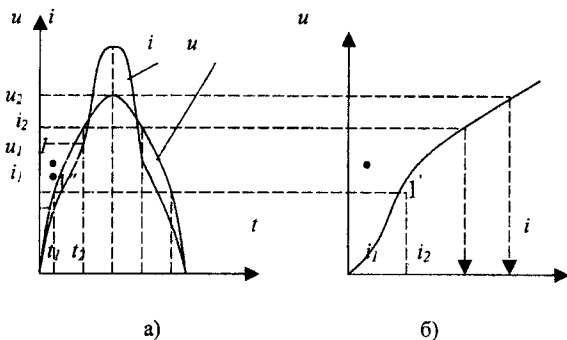


Рисунок 6.33

Побудова графіка струму  $i(t)$  проводиться таким чином.

Півперіод напруги на нелінійному елементі ділиться на  $n$  рівних проміжків. В момент часу  $t_1$  – кінець першого інтервалу – визначається значення напруги  $u_1$  (точка 1 на рис.6.33.а). За одержаним значенням напруги  $u_1$  визначається точка 1' на в.а.х. (рис.6.33.б) і відповідне їй значення струму  $i_1$ . Величина цього струму у відповідному масштабі відкладається в момент  $t_1$  на першому графіку і отримуємо точку 1'' графіка струму. Аналогічно отримуємо всі інші точки кривої струму. При необхідності будуватиметься крива струму і на другому півперіоді. Із побудови чітко видно, що крива струму не синусоїдальна.

Якщо коло містить тільки резистори, лінійні і нелінійні, то вхідний струм можна знайти графічно, як це показано вище, попередньо знайшовши в.а.х. всього кола. Визначення струму в інших вітках з нелійними резисторами пов'язано з громіздкими побудовами і в цих випадках перевагу віддають іншим наближеним методам.

## 6.8 Метод еквівалентних синусоїд

Коли наявність нелінійних елементів не викликає значних спотворень синусоїдної величини, зручно вважати струми і напруги в вітках еквівалентними синусоїдами, характеристики нелінійних елементів зображати не для миттєвих, а для діючих значень і тоді для кіл з нелійними резисторами придатні методи, які використовують для кіл постійного струму.

Розглянемо коло (рис.6.34.а), яке містить джерело синусоїдної е.р.с. і два нелінійних резистори, характеристики яких для діючих значень зображені на рис.6.34.б.

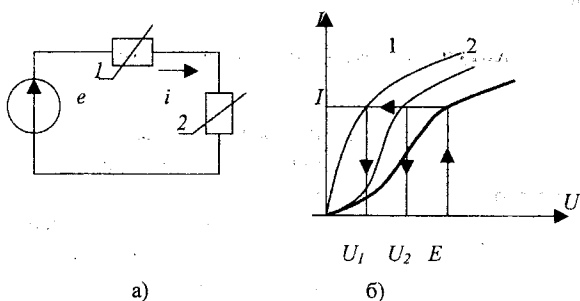


Рисунок 6.34

Вважаючи струм синусоїдним, знаходимо в.а.х. всього кола при послідовному з'єднанні елементів і за відомим діючим значенням  $e$  р. с.  $E$  визначаємо діюче значення струму в колі.

Аналогічно проводиться розрахунок і в випадку більш складних нелінійних кіл змінного струму.

Побудова в.а.х. всього кола за наявності реактивних елементів має свої особливості. Розглянемо коло (рис 6.35.а), яке містить нелінійний резистор і нелінійну індуктивність при синусоїдній входній дії. Не дивлячись на те, що струм в колі буде не синусоїдним, як і раніше використовуємо еквівалентні синусоїди і в.а.х. для діючих значень (рис.6.35.б).

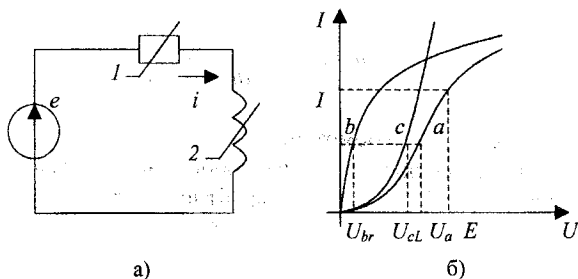


Рисунок 6.35

Для одержання в.а.х. всього кола при послідовному з'єднанні потрібно додавати діючі значення напруг елементів при одному і тому ж струмові, але за наявності реактивних елементів таке додавання повинно бути геометричним. Наприклад, для одержання точки  $a$  в.а.х. всього кола

$$U_a = \sqrt{U_{br}^2 + U_{ca}^2}$$

тому що вектор напруги на резисторі і індуктивності перпендикулярні між собою. Інші точки характеристики знаходяться подібним чином.

### 6.9 Котушка з феромагнітним осердям

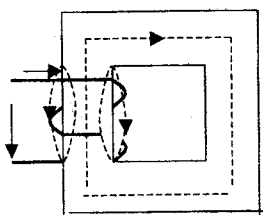


Рисунок 6.36

Як уже відмічалось, феромагнітні тіла мають малий магнітний опір, що забезпечує великий магнітний потік і велику індуктивність порівняно з такою котушкою без осердя.

Як і в п. 6.5 на рис.6.36 потік  $\Phi_0$  – основний магнітний потік, який замикається через осердя,  $\Phi_s$  – потік розсіювання, який замикається в основному через повітря.

Зв'язок між основним потокозчепленням  $\psi_0 = W\Phi_0$  і струмом нелінійний, зв'язок між потокозчепленням розсіювання  $\psi_s$  і струмом можна вважати лінійним

$$\psi_s = L_s i, \quad (6.24)$$

де  $L_s$  – індуктивність розсіювання, яка характеризує потік розсіювання.

Запишемо для контуру рівняння за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень

$$u = ri + L_s \frac{di}{dt} + W \frac{d\Phi_0}{dt}, \quad (6.25)$$

де  $r$  – опір обмотки.

Остання складова являє собою напругу, яка компенсує е.р.с. самоіндукції при зміні основного магнітного потоку

$$W \frac{d\Phi_0}{dt} = u_0. \quad (6.26)$$

Прийmemo для спрощення, що можна знехтувати активним опором обмотки і потоком розсіювання, тоді

$$u = u_0 = W \frac{d\Phi_0}{dt}. \quad (6.27)$$

Якщо основний магнітний потік змінюється за синусоїдним законом

$$\Phi_0 = \Phi_m \sin \omega t,$$

то напруга  $u_o$  і при зроблених допущеннях вхідна напруга змінюється за синусоїдним законом

$$u = u_o = W\Phi_{m0}\omega\cos\omega t. \quad (6.28)$$

Амплітуда напруги

$$U_{m0} = W\Phi_{m0}2\pi f.$$

Якщо переріз осердя однаковий по всій довжині, то

$$\Phi_{m0} = B_m S, \quad (6.29)$$

де  $S$  – переріз осердя,

$B_m$  – амплітуда магнітної індукції в осерді і

$$U_{m0} = 2\pi W S f B_m.$$

Діюче значення напруги

$$U_o = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} W S f B_m = 4,44 \cdot W S f B_m. \quad (6.30)$$

Визначимо форму кривої струму графічно у відповідності з п.6.7, враховуючи, що при змінному магнітному потоці характеристикою феромагнітного матеріалу є петля гістерезису (рис.6.37).

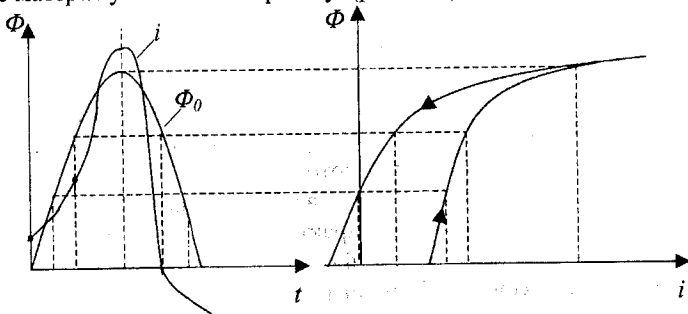


Рисунок 6.37

Як і слід було чекати, крива струму не синусоїдна і випереджає основний магнітний потік за фазою. Величина кута випередження залежить від ширини петлі гістерезису. Використаємо для аналізу метод еквівалентних синусоїд. Замінімо криву струму еквівалентною синусоїдою і побудуємо векторну діаграму (рис.6.38.а).

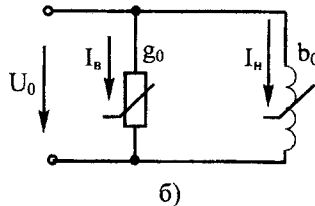
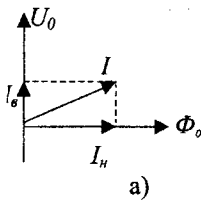


Рисунок 6.38

Із векторної діаграми видно, що напруга на котушці випереджує струм на кут менший, ніж  $90^\circ$ , що відповідає активно-індуктивному навантаженню. Не дивлячись на те, що активний опір обмотки прийнятий рівним нулю, в котушці є втрати, пов'язані з втратами в осерді на гістерезис  $P_r$  і вихрові струми  $P_B$ . Ці втрати звичайно називають втратами в сталі.

$$P_{ст} = P_r + P_B. \quad (6.31)$$

Втрати від гістерезису викликаються необоротними процесами в сталі при зміні орієнтації областей самодовільного намагнічування і пропорційні частоті

$$P_r = k_1 f.$$

Під дією змінного магнітного потоку в осерді наводиться е.р.с., яка викликає струми в осерді, які називають вихровими. Втрати від дії цих струмів пропорційні квадратові частоти

$$P_B = k_2 f^2.$$

Струм на векторній діаграмі можна розкласти на дві складові – струм втрат  $I_\sigma$ , який збігається за фазою з напругою, і намагнічуваний струм  $I_H$ , який збігається за фазою з магнітним потоком.

Схема заміщення, яка відповідає векторній діаграмі, показана на рис. 6.38.б. Нелінійна провідність  $g_0$  характеризує втрати в сталі, а нелінійна індуктивність – основний магнітний потік.

Для побудови векторної діаграми котушку з осердям з урахуванням втрат в обмотці і індуктивності розсіювання запишемо рівняння (6.25) в комплексній формі

$$\underline{U} = r\underline{I} + j\omega L_s \underline{I} + \underline{U}_o \quad (6.32)$$

Звідси видно, що вектор вхідної напруги  $\underline{U}$  складається із суми трьох складових – напруги  $\underline{U}_o$ , напруги на активному опорі обмотки  $r\underline{I}$ , яка збігається за напрямом з струмом, і напруги індуктивності розсіювання  $jx_s \underline{I}$ , яка

випереджає струм на кут  $90^\circ$ . Векторна діаграма котушки показана на рис.6.39.а, а схема заміщення на рис.6.39.б.

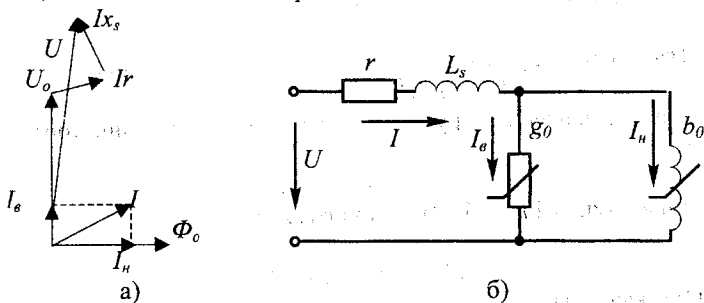


Рисунок 6.39

Для розрахунку котушок з феромагнітними матеріалами характеристики матеріалів звичайно задаються у вигляді нелінійних залежностей  $P_o = f_1(B_m)$ ,  $Q_o = f_2(B_m)$  (рис.6.40),

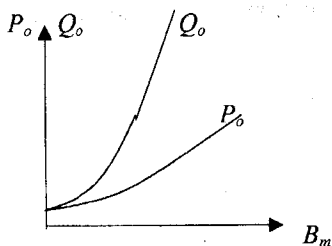


Рисунок 6.40

де  $P_o$  і  $Q_o$  відповідно, питома потужність втрат і питома намагнічена потужність, тобто потужність, яка відноситься до одиниці ваги осердя.

$$P_o = P_{cm} / G, \quad Q_o = Q / G. \quad (6.35)$$

Приведемо приклад розрахунку катушки з феромагнітним осердям при відомих матеріалі, геометрії осердя і вхідній напрузі. Розрахунок проводиться за умовами заміни всіх несинусоїдних величин еквівалентними синусоїдами. Спочатку задаються першим наближенням діючого значення напруги  $U_o^{(1)}$ .

Звичайно беруть

$$U_o^{(1)} \approx (0,85 \div 0,9) U, \quad (6.35)$$

де  $U$  - вхідна напруга.

Знаючи  $U_o^{(1)}$ , знаходиться перше наближення амплітуди магнітної індукції із (6.30).

$$B_m^{(1)} = U_o^{(1)} / 4,44wsf.$$

Використовуючи характеристики матеріалу (рис.6.40), визначаємо спочатку питому потужність втрат  $P_o^{(1)}$  і питому намагнічувальну потужність  $Q_o^{(1)}$  а після цього і повні значення  $P_{cm}^{(1)}$  та  $Q^{(1)}$

$$P_{cm}^{(1)} = P_o^{(1)} G, \quad Q^{(1)} = Q_o^{(1)} G.$$

Визначаємо струми в паралельних вітках схеми заміщення

$$I_e^{(1)} = P_{cm}^{(1)} / U_o^{(1)}, \quad I_n^{(1)} = Q^{(1)} / U_o^{(1)},$$

і комплексне значення струму в нерозгалуженій частині, тобто вхідний струм

$$\underline{I} = I_e - jI_n.$$

При відомих  $r$  і  $L_s$  з (6.32) знаходиться вхідна напруга

$$\underline{U}^{(1)} = r\underline{I}^{(1)} + j\omega L_s \underline{I}^{(1)} + \underline{U}_o^{(1)}.$$

Одержане значення  $U^{(1)}$ , як правило, буде відрізнятись від заданого, тому необхідно взяти нове значення  $U^{(2)}$  - друге наближення і повторити розрахунок. Графік, побудований за одержаними значеннями  $U_o^{(k)}$  і  $U^{(k)}$ , дозволяє знайти значення  $U_o$  і  $U$  (рис.6.41), а також вхідний струм  $I$  і значення  $g_o$  і  $b_o$  для заданого режиму  $g_o = I_e / U_o$ ,  $b_o = I_n / U_o$ .

Вбагатьох випадках для спрощення розрахунків нехтують втратами в сталі і в обмотці котушки з осердям і користуються нелінійною в.а.х. для діючих значень.

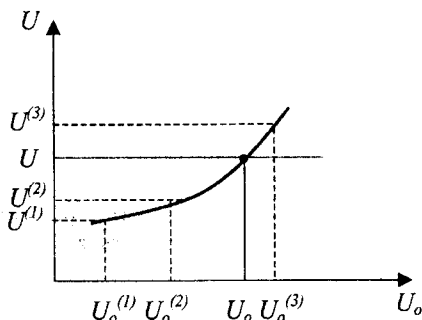


Рисунок 6.41

### 6.10 Ферорезонанс

Розглянемо контур, який містить послідовне з'єднання нелінійної індуктивності і лінійної ємності (рис.6.42). Знехтуємо втратами в котушці, струми і напруги будемо вважати еквівалентними синусоїдами і знайдемо в.а.х. усього кола (рис 6.43).

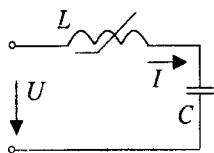


Рисунок 6.42

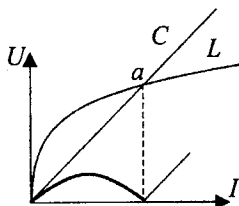


Рисунок 6.43

За другим законом Кірхгофа

$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C,$$

але оскільки напруги на індуктивності і ємності направлені назустріч одна одній, то модуль вхідної напруги

$$U = |U_L - U_C| \quad (6.35)$$

і для побудови в.а.х. всього кола напруги  $U_L$  і  $U_C$  віднімаються одна від одної. Точка  $a$  на характеристиці, де  $U_L = U_C$ , є точкою резонансу. На відміну від резонансу в послідовному лінійному контурі, де резонансу можна досягти, змінюючи величину ємності, індуктивності або частоти, в нелінійному послідовному контурі резонансу можна досягти ще і зміною напруги, тому даний резонанс називають *ферорезонансом* напруги. По суті це теж зміна індуктивності, тому що характеристика нелінійна.

Наявність спадної ділянки на в.а.х. всього кола викликає появу деяких ефектів, які принципово неможливі в лінійному колі.

Розглянемо в.а.х. з урахуванням втрат. Наявність активного опору і напруги на ньому піднімає характеристику і вона буде мати вигляд, показаний на рис.6.44.

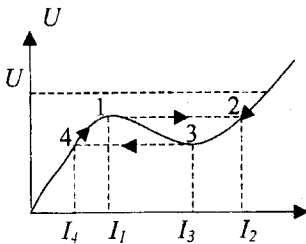


Рисунок 6.44

Якщо на вході схеми (рис 6.43) встановити пристрій, який регулює величину вхідної напруги (наприклад, автотрансформатор), то при збільшенні напруги від нуля до  $U$  і при зменшенні її до нуля струм в колі два рази зміниться стрибком. При збільшенні напруги робоча точка із точки 1 стрибком переміщується в точку 2, а при зменшенні напруги із точки 3 в точку 4. Така стрибкоподібна зміна струму при малих відхиленнях напруги називається *тригерним ефектом*.

Явище ферорезонансу напруг можна використовувати для стабілізації вихідної напруги при зміні діючого значення вхідної напруги.

На рис.6.45.а, показана принципова схема ферорезонансного стабілізатора напруги, а на рис.6.45.б, - вольт-амперна характеристика.



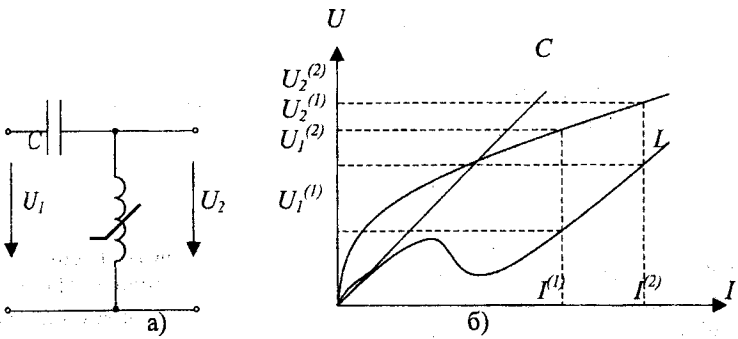


Рисунок 6.45

При зміні вхідної напруги від  $U_1^{(1)}$  до  $U_1^{(2)}$  з в.а.х. всього кола визначають вхідні струми  $I^{(1)}$  і  $I^{(2)}$ , а з характеристики індуктивності вихідні напруги  $U_2^{(1)}$  і  $U_2^{(2)}$ , які відповідають струмам  $I^{(1)}$  і  $I^{(2)}$ . Із графіків видно, що значним змінам напруги відповідають незначні зміни вихідної напруги.

При паралельному з'єднанні нелінійної індуктивності і лінійної ємності (рис.6.46.а) має місце *ферорезонанс струмів*.

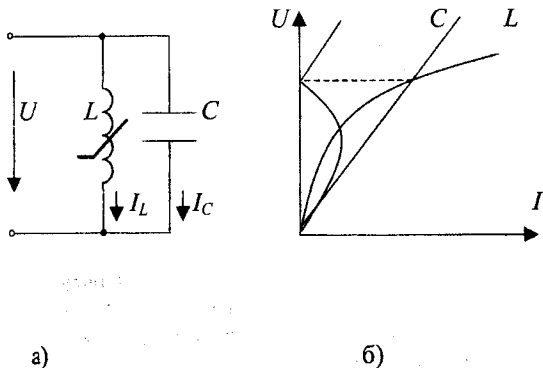


Рисунок 6.46

### 6.11 Трансформатор з феромагнітним осердям

Якщо на осердя катушки, яка розглянута в попередньому параграфі, помістити ще одну обмотку, то одержимо простий трансформатор, який зображений на рис.6.47.

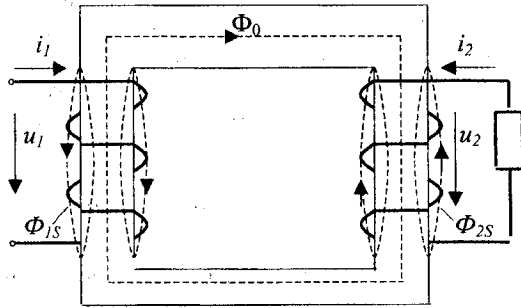


Рисунок 6.47

Основний магнітний потік  $\Phi_0$ , який проходить через осердя, наводить е.р.с. в обмотках. В первинній обмотці, яка приєднана до джерела живлення з напругою  $u_1$ , е.р.с.

$$e_1 = -W_1 \frac{d\Phi_0}{dt},$$

а у вторинній обмотці, до якої приєднується навантаження,

$$e_2 = -W_2 \frac{d\Phi_0}{dt},$$

де  $W_1, W_2$  – число витків відповідно первинної і вторинної обмоток. Якщо вважати всі струми і напруги синусоїдними, то

$$E_1 = -j4.44W_1f\Phi_0, \quad E_2 = -j4.44W_2f\Phi_0.$$

Звідси одержуємо співвідношення

$$n = E_1 / E_2 = W_1 / W_2, \quad (6.36)$$

яке характеризує основні властивості трансформатора перетворювати напругу і називається коефіцієнтом трансформації.

Складемо для еквівалентних синусоїд рівняння за другим законом Кірхгофа.

Для першого контуру

$$\underline{U}_1 = r_1 I_1 + j\omega L_{s1} I_1 + \underline{U}_0, \quad (6.37)$$

де  $\underline{U}_0 = -E_1$ .

Для другого контуру

$$\underline{E}_2 = r_2 I_2 + j\omega L_{s2} I_2 + \underline{U}_0, \quad (6.38)$$

де  $L_{s1}$ ,  $L_{s2}$  – індуктивність розсіювання первинної і вторинної обмоток.

Для побудови схеми заміщення і векторної діаграми трансформатора звичайно користуються приведеними параметрами вторинної обмотки. Вторинну обмотку замінюють еквівалентною обмоткою з числом витків, рівним числу витків первинної обмотки. Для того, щоб режим роботи трансформатора не змінився, необхідно виконати рівність магніторушійних сил

$$i_2 W_2 = i'_2 W'_2 = i'_2 W_1.$$

Враховуючи (6.36), одержуємо, що приведені значення струму вторинної обмотки

$$i'_2 = i_2 (W_2 / W_1) = i_2 / n. \quad (6.39)$$

Аналогічно

$$e'_2 = -W_2 \frac{d\Phi_o}{dt} = \frac{W_1}{W_2} \left( -W_2 \frac{d\Phi_o}{dt} \right) = ne_2 = e_1. \quad (6.40)$$

Запишемо рівняння (6.38) для приведених значень

$$\underline{E}'_2 / n = r_2 \underline{I}'_2 n + j\omega L_{s2} \underline{I}'_2 n + \underline{U}_2$$

або

$$\underline{E}'_2 = r_2 \underline{I}'_2 n^2 + j\omega L_{s2} \underline{I}'_2 n^2 + n \underline{U}_2.$$

Позначимо

$$\underline{U}'_2 = n \underline{U}_2, \quad r'_2 = n^2 r_2, \quad L'_{s2} = n^2 L_{s2},$$

Тоді

$$\underline{E}'_2 = r'_2 \underline{I}'_2 + j\omega L'_{s2} \underline{I}'_2 + \underline{U}'_2. \quad (6.41)$$

Магніторушійна сила, яка визначає основний магнітний потік, складається в двох складових

$$i_1 W_1 + i_2 W_2.$$

Конструкція трансформаторів звичайно така, що при зміні навантаження в деяких границях магнітний потік в осерді практично не змінюється, тому магніторушійна сила залишається незмінною. Якщо трансформатор працює в режимі холостого ходу ( $i_2 = 0$ ), то

$$i_1 W_1 + i_2 W_2 = i_o W_1, \quad (6.42)$$

де  $i_o$  – струм холостого ходу.

Рівність (6.42) запишемо у вигляді

$$i_1 W_1 + i_2' W_1 = (i_1 + i_2') W_1 = i_o W_1.$$

Звідси

$$i_o = i_1 + i_2'$$

або

$$I_o = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2. \quad (6.43)$$

Струм  $I_o$  називається струмом намагнічування.

На підставі рівнянь (6.37), (6.41) і (6.43) можна побудувати векторну діаграму (рис. 6.48.а) і схему заміщення трансформатора (рис. 6.48.б).

Параметри схеми заміщення звичайно визначають із дослідів холостого ходу і короткого замикання.

В режимі холостого ходу можна знехтувати падіння напруги на опорах  $r_1$  і  $x_{S1}$  і вважати  $\underline{U}_1 = \underline{U}_o$ . В цьому випадку, знаючи активну потужність  $P_{1xx}$ , вхідну напругу  $U_{1xx}$  і вхідний струм  $I_{1xx}$ , визначають параметри  $b_o$  і  $g_o$ .

$$g_o = \frac{P_{1xx}}{U_{1xx}^2}; \quad y_o = \frac{I_{1xx}}{U_{1xx}};$$

$$\cos \varphi_{1xx} = \frac{P_{1xx}}{U_{1xx} I_{1xx}}; \quad b_o = y_o \sin \varphi_{1xx}.$$

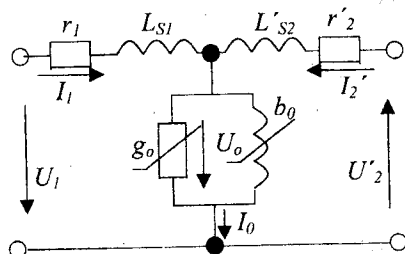
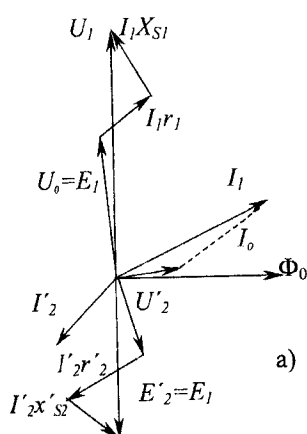


Рисунок 6.48

Режим короткого замикання проводиться при номінальному струмі вторинної обмотки, тобто при зниженій вхідній напрузі. Струм  $I_o$  при цьому значно менший струмів  $I_1$  і  $I_2$  і ним можна знехтувати. Вважаючи, що

$$r_1 = r'_2, \quad L_{S1} = L'_{S2}$$

визначають інші параметри схеми заміщення трансформатора.

$$(r_1 + r'_2) = \frac{P_{1\kappa}}{I_{1\kappa}^2}; \quad \cos \varphi_{1\kappa} = \frac{P_{1\kappa}}{U_{1\kappa} I_{1\kappa}};$$

$$(x_{s1} + x'_{s2}) = (r_1 + r'_2) \operatorname{tg} \varphi_{1\kappa}$$

**Приклад 6.2** Досліди холостого ходу і короткого замикання трансформатора дали такі результати:

$$U_{1x} = 220 \text{ В}, \quad I_{1x} = 0,565 \text{ А}, \quad P_{1x} = 30,2 \text{ Вт},$$

$$U_{1\kappa} = 12 \text{ В}, \quad I_{1\kappa} = 0,25 \text{ А}, \quad P_{1\kappa} = 2,5 \text{ Вт}.$$

Коефіцієнт трансформації  $n = 5$ .

Визначити параметри схеми заміщення.

Розв'язання.

За результатами холостого ходу визначаємо

$$g_o = \frac{P_{1x}}{U_{1x}^2} = \frac{30,2}{220^2} = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ См},$$

$$\cos \varphi_{1x} = \frac{P_{1x}}{U_{1x} I_{1x}} = \frac{30,2}{220 \cdot 0,565} = 0,243; \quad \varphi_{1x} = 76^\circ,$$

$$b_o = g_o \operatorname{tg} \varphi_{1x} = 6,25 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ См}.$$

За результатами дослідження короткого замикання

$$(r_1 + r'_2) = \frac{P_{1\kappa}}{I_{1\kappa}^2} = \frac{2,5}{0,25^2} = 40 \text{ Ом},$$

$$\cos \varphi_{1\kappa} = \frac{P_{1\kappa}}{U_{1\kappa} I_{1\kappa}} = \frac{2,5}{12 \cdot 0,25} = 0,833; \quad \varphi_{1\kappa} = 33,5^\circ,$$

$$(x_{s1} + x'_{s2}) = (r_1 + r'_2) \operatorname{tg} \varphi_{1\kappa} = 40 \cdot 0,662 = 26,5 \text{ Ом}.$$

$$r_1 = 20 \text{ Ом}; \quad r_2 = \frac{r'_2}{n^2} = \frac{20}{5^2} = 0,8 \text{ Ом},$$

$$x_{s1} = 13,25 \text{ Ом}, \quad x_{s2} = \frac{x'_{s2}}{n^2} = \frac{13,5}{25} = 0,54 \text{ Ом}.$$

## 6.12 Метод гармонічного балансу

Метод еквівалентних синусоїд не дозволяє визначити навіть приблизно параметри вищих гармонік, що в багатьох випадках робить його не придатним для аналізу. Розглянемо метод гармонічного балансу. Нехай задане нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + f(x, t) = F(t), \quad (6.45)$$

де  $x$  – шукана змінна,

$f(x, t)$  – нелінійна складова,

$F(t)$  – періодична зовнішня дія, яка представлена рядом Фур'є.

Шуканий розв'язок записується також у вигляді ряду Фур'є з невідомими коефіцієнтами

$$x(t) = \sum a_k \cos k\omega t + \sum b_k \sin k\omega t,$$

який підставляється в початкове рівняння. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях, одержуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь, яка дозволяє знайти невідомі коефіцієнти  $a_k$  і  $b_k$ .

Розглянемо на конкретному прикладі використання цього методу. В колі (рис.6.42) характеристика нелінійної індуктивності задана виразом

$$i = a\psi + b\psi^3. \quad (6.46)$$

Якщо до кола прикладена синусоїдна напруга  $u = U_m \sin \omega t$ , то рівняння, яке описує стан кола, має вигляд

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U_m \sin \omega t. \quad (6.47)$$

Продиференціювавши рівняння (6.47), одержимо

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{C} i = \omega U_m \cos \omega t$$

або з урахуванням (6.46)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{a}{C} \psi + \frac{b}{C} \psi^3 = \omega U_m \cos \omega t.$$

Позначимо

$$\frac{a}{C} = \omega_0^2, \quad \frac{b}{C} = h$$

тоді одержимо рівняння

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega_0^2 \psi + h\psi^3 = \omega U_m \cos \omega t, \quad (6.48)$$

яке називається рівнянням Дуффінга.

Невідоме потокозчеплення  $\psi$  шукаємо в вигляді ряду Фур'є

$$\psi = \psi_{m1} \sin(\omega t + \gamma_1) + \psi_{m3} \sin(3\omega t + \gamma_3) + \dots + \psi_{mk} \sin(k\omega t + \gamma_k) + \dots, \quad (6.49)$$

де  $\psi_{mk}$ ,  $\gamma_k$  - невідомі величини.

Для спрощення обчислень обмежимося в (6.49) першою гармонікою і підставимо цей вираз в (6.48), приймаючи до уваги, що

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \omega \psi_{m1} \cos(\omega t + \gamma_1), \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= -\omega^2 \psi_{m1} \sin(\omega t + \gamma_1), \\ \sin^3 \alpha &= \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha. \end{aligned}$$

Після підстановки одержуємо

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \psi_{m1} \sin(\omega t + \gamma_1) + \omega_0^2 \psi_{m1} \sin(\omega t + \gamma_1) + \\ & + \frac{3}{4} h \psi_{m1}^3 \sin(\omega t + \gamma_1) - \frac{1}{4} h \psi_{m1}^3 \sin 3(\omega t + \gamma_1) = \omega U_m \cos \omega t. \end{aligned}$$

Перетворюємо останнє рівняння, відкинувши складові з потрібною частотою

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega^2) \psi_{m1} \cos \gamma_1 \sin \omega t + (\omega_0^2 - \omega^2) \psi_{m1} \sin \gamma_1 \cos \omega t + \\ & + \frac{3}{4} h \psi_{m1}^3 \cos \gamma_1 \sin \omega t + \frac{3}{4} h \psi_{m1}^3 \sin \gamma_1 \cos \omega t = \omega U_m \cos \omega t. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях, одержуємо систему двох нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega^2) \psi_{m1} \cos \gamma_1 + \frac{3}{4} h \psi_{m1}^3 \cos \gamma_1 = 0, \\ & (\omega_0^2 - \omega^2) \psi_{m1} \sin \gamma_1 + \frac{3}{4} h \psi_{m1}^3 \sin \gamma_1 = \omega U_m. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Із другого рівняння системи

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \psi_{m1} + \frac{3}{4} h \psi_{m1}^3 = \frac{\omega U_m}{\sin \gamma_1}.$$

Підставимо цей вираз в перше рівняння (6.50)

$$\omega U_m \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma_1} = \omega U_m \operatorname{ctg} \gamma_1 = 0.$$

Звідси

$$\gamma_1 = \pi/2$$

$$i \quad \frac{3}{4} h \psi_{m1}^3 + (\omega_0^2 - \omega^2) \psi_{m1} = \omega U_m. \quad (6.51)$$

Одержане кубічне відносно  $\psi_{m1}$  рівняння дозволяє знайти необхідні величини.

### 6.13 Електричні кола з діодами

#### а) Однопівперіодний випрямляч

Випрямлячем називається пристрій, який перетворює змінний струм в постійний. Найпростіший складається із послідовного з'єднання діода і опору навантаження (рис.6.49.а).

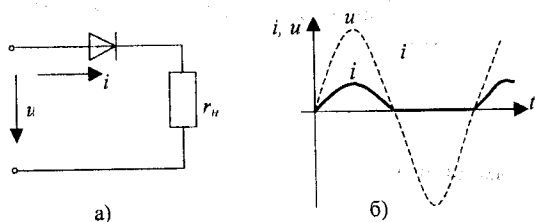


Рисунок 6.49

Прийmemo характеристику діода ідеальною. В першому і наступних непарних півперіодах діод відкритий і струм через навантаження визначається з виразу

$$i = u / r_n.$$

Якщо напруга синусоїдна  $u = U_m \sin \omega t$ , то і струм на цих проміжках синусоїдний

$$I = I_m \sin \omega t, \quad I_m = U_m / r_n.$$

В від'ємний півперіод діод закритий, його опір нескінченний, струму в колі немає (рис.6.42.б).

Таким чином

$$i = \begin{cases} I_m \sin \omega t & kT < t < \frac{2k+1}{2} T. \\ 0, & \frac{2k+1}{2} T < t < (k+1)T. \end{cases} \quad (6.52)$$

Визначимо величину постійної складової струму, який протікає через навантаження



$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{\pi}. \quad (6.53)$$

Діюче значення струму навантаження

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{2}. \quad (6.54)$$

Ефективність випрямлення звичайно характеризується коефіцієнтом ефективності випрямлення, який дорівнює відношенню потужності постійної складової струму навантаження

$$P_o = I_o^2 r_n$$

до всієї потужності, яка витрачається джерелом  $P = I^2 r_n$ ,

$$K_e = P_o / P.$$

В випрямлячі з ідеальним діодом

$$K_e = \frac{P_o}{P} = \frac{\frac{I_m^2}{\pi^2} r_n}{\frac{I_m^2}{4} r_n} = \frac{4}{\pi^2} = 0,406.$$

Якщо діод не ідеальний, а має в прямому напрямі опір  $r_{np}$ , а в зворотному  $r_{зв}$ , то вираз для струму в навантаженні має вигляд

$$i = \begin{cases} I_{m1} \sin \omega t, & kT < t < \frac{2k+1}{2} T. \\ I_{m2} \sin \omega t, & \frac{2k+1}{2} T < t < (k+1)T. \end{cases} \quad (6.55)$$

$$\text{де} \quad I_{m1} = \frac{U_m}{r_n + r_{np}}, \quad I_{m2} = \frac{U_m}{r_n + r_{зв}}.$$

#### б) Мостовий випрямляч

Кращий коефіцієнт ефективності має мостовий випрямляч, який показаний на рис.6.50.а.

В додатний півперіод прикладеної напруги струм проходить через діод 1, навантаження, діод 3, в від'ємний півперіод – через діод 2, навантаження, діод 4. Струм в навантаженні в обидва півперіоди направлений в одну і ту ж сторону, від точки *a* до точки *b* (рис.6.50.б) і тому

$$i = \begin{cases} I_m \sin \omega t & kT < t < \frac{2k+1}{2}T. \\ -I_m \sin \omega t & \frac{2k+1}{2}T < t < (k+1)T. \end{cases} \quad (6.56)$$

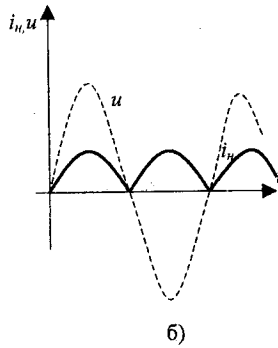
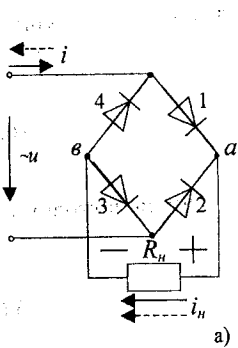


Рисунок 6.50

Вхідний струм  $i = I_m \sin \omega t$

Постійна складова струму навантаження

$$I_o = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{2I_m}{\pi}. \quad (6.57)$$

Діюче значення струму навантаження

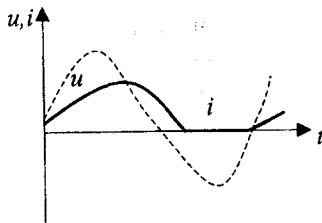
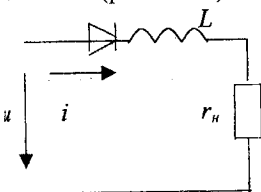
$$I_n = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (6.58)$$

Ефективність випрямлення

$$K_e = \frac{P_o}{P} = \frac{\frac{4I_m^2}{\pi^2} r_n}{\frac{I_m^2}{2} r_n} = \frac{8}{\pi^2} = 0,812.$$

Покращити ефективність випрямлення можна не тільки зміною схеми випрямляча, але і включенням між діодами і навантаженням фільтра нижніх частот. Наявність реактивних елементів в схемі значно ускладнює розрахунок.

Розглянемо однопівперіодний випрямляч з активно-індуктивним навантаженням (рис.6.51.а).



а)

б)

Рисунок 6.51

Відкривання діода при появі на ньому напруги додатної полярності рівнозначно замиканню ключа в колі, тому для проміжку  $0 < t < t_1$  справедливе диференціальне рівняння

$$L \frac{di}{dt} + r_n i = U_m \sin \omega t. \quad (6.59)$$

Його розв'язок був знайдений раніше. При нульових початкових умовах

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) + I_m \sin \varphi e^{-(r/L)t}, \quad (6.60)$$

$$\text{де} \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}, \quad \text{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}.$$

В виразі (6.60) струм після моменту часу  $t_1$  приймає від'ємне значення, але тому що діод в зворотньому напрямі струм не пропускає, то вираз (6.60) правильний лише до моменту  $t_1$ . Через час  $t_1$  струм дорівнює нулю. Таким чином

$$i = \begin{cases} I_m \sin(\omega t - \varphi) + I_m \sin \varphi e^{-\frac{r}{L}t}, & 0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 < t < T \end{cases} \quad (6.61)$$

Момент часу  $t_1$  визначається з умови:  
при  $t = t_1$ ,  $i = 0$ ,

$$I_m \sin(\omega t_1 - \varphi) - I_m \sin \varphi e^{-(r/L)t_1} = 0. \quad (6.62)$$

Аналогічно з (6.57) і (6.55) можна визначити постійну складову  $I_0$  і діюче значення  $I_n$  струму навантаження.

#### в) Керовані випрямлячі

Якщо замість діода в схемі однопівперіодного або мостового випрямлячів поставити керовані діоди – *тиристри*, то можна регулювати величину постійної напруги на навантаження.

Тиристор відрізняється від діода тим, що тиристор починає пропускати струм, при додатній полярності лише після появи на його додатковому електроді імпульсу керування.

На рис.6.52.а показана схема однопівперіодного керованого випрямляча, а на рис.6.52.б діаграми струму і напруги.

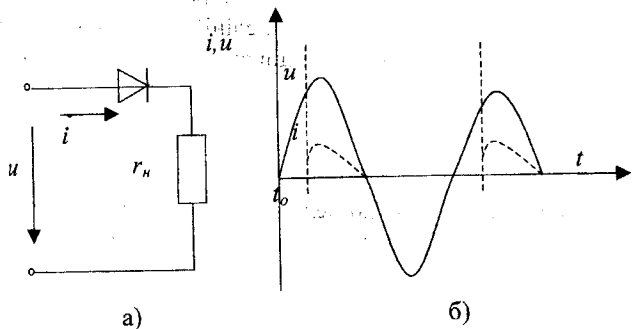


Рисунок 6.52

Момент  $t_o$  відповідає моменту подання імпульсу керування і відкриття тиристора.

Постійна складова напруги навантаження

$$U_o = \frac{1}{T} \int_0^T i r_n dt = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{T/2} I_m r_n \sin \omega t dt = \frac{I_m r_n}{\pi} [1 + \cos \omega t_o] \quad (6.63)$$

залежить від моменту  $t_o$ , що дозволяє регулювати величину постійної напруги навантаження.

## 7 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Як уже відзначалося раніше, основна складність розрахунку перехідних процесів полягає в необхідності розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, для яких не існує регулярних методів розрахунку і доводиться використовувати різні наближені способи.

### 7.1 Метод умовної лінеаризації

Цей метод полягає в тому, що, якщо нелінійний елемент заданий характеристикою  $y = f(x)$ , то на першому етапі нелінійна характеристика змінюється на лінійну  $y = ax$ , визначається одна із змінних  $y$  або  $x$  із розв'язку лінійного диференціального рівняння, а друга змінна  $x$  або  $y$  знаходиться із нелінійної характеристики.

Розглянемо використання цього методу на прикладі вмикання нелінійної котушки з активним опором  $r$  на постійну напругу (рис. 7.1).

Нелінійне диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{d\psi}{dt} + ri = U. \quad (7.1)$$

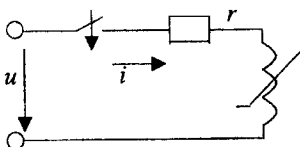


Рисунок 7.1

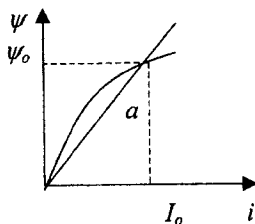


Рисунок 7.2

Характеристика індуктивності нелінійна (рис.7.2), але на першому етапі вважаємо її лінійною, де точка  $a$  – точка усталеного стану, при якому струм

$$I_0 = U / r. \quad (7.2)$$

Така зміна дозволяє записати

$$\psi = Li \quad ; \quad L = \psi_0 / I_0 \quad (7.3)$$

$$i \quad \frac{d\psi}{dt} + \frac{r}{L}\psi = U. \quad (7.4)$$

Розв'язуючи це рівняння для нульових початкових умов, одержуємо

$$\psi = \psi_0(1 - e^{-(r/L)t}). \quad (7.5)$$

Для знаходження струму як функції часу за відомими значеннями  $\psi$  використовується нелінійна характеристика, а не співвідношення (7.3). В даному прикладі змінна  $\psi$  знаходиться за лінеаризованою характеристикою, а змінна  $i$  з урахуванням нелінійності.

## 7.2 Метод кусково-лінійної апроксимації

При розв'язуванні задачі даним методом нелінійна характеристика представляється декількома відрізками прямих (рис.7.3).

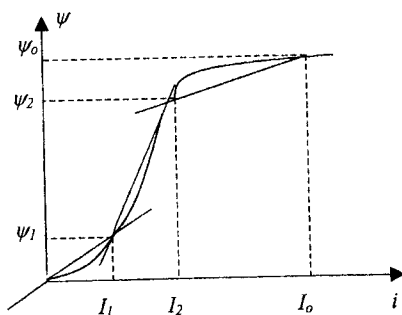


Рисунок 7.3

Кількість відрізків визначається видом характеристики і бажаною точністю розрахунків. В розглянутому прикладі таких відрізків три. Відповідно для кожного відрізка диференціальне рівняння буде лінійним, при цьому кінцеві значення неперервних змінних (струму через індуктивність або напругу на ємності) однієї ділянки повинні бути початковими значеннями наступної ділянки.

Розглянемо використання методу кусково-лінійної апроксимації на прикладі (рис.7.1).

Для першої ділянки

$$L_1 \frac{di}{dt} + ri = U, \quad (7.6)$$

де

$$L_1 = \psi_1 / I_1.$$

Розв'язок цього лінійного рівняння, як відомо, має вигляд

$$i = i_{np} + i_s = I_0 + A_1 e^{p_1 t},$$

де  $I_0 = U/r$  - усталене значення струму,

$A_1$  - постійна інтегрування,

$p_1 = -(r/L_1)$  - корінь характеристичного рівняння.

Для нульових початкових умов

$$i = I_0 (1 - e^{p_1 t}), \quad 0 < t < t_1 \quad (7.7)$$

Це рівняння правельне лише для проміжку часу  $0 < t < t_1$ .

В момент часу  $t_1$  струм приймає значення  $I_1$ , тому

$$I_1 = I_0 (1 - e^{-\frac{r}{L_1} t_1})$$

$$i \quad t_1 = \frac{L_1}{r} \ln \frac{I_0}{I_0 - I_1}. \quad (7.8)$$

Для другої ділянки

$$L_2 \frac{di}{dt} + ri = U, \quad (7.9)$$

де

$$L_2 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{I_2 - I_1}.$$

Розв'язок цього рівняння

$$i = i_{np} + i_s = I_0 + A_2 e^{p_1(t-t_1)},$$

де  $I_0$  - усталене значення струму,

$$p_2 = -(r/L_2).$$

В показнику експоненти записано не  $t$ , а  $t - t_1$ , тому що перехідний процес для другої ділянки починається не з нуля часу, а в момент  $t_1$ .

Постійна інтегрування  $A_2$  визначаються із початкових умов для другої ділянки, тобто

$$\text{для } t = t_1, \quad i = I_1.$$

В цьому випадку

$$I_1 = I_0 + A_2 ; \quad A_2 = I_1 - I_0$$

і

$$i = I_0 + (I_1 - I_0) e^{-\frac{r}{L}(t-t_1)} \quad t_1 < t < t_2 \quad (7.10)$$

Вираз (7.10) правильний і для  $t=t_2$ , коли струм приймає значення  $I_2$ . Із цієї умови визначається момент  $t_2$  з допомогою рівняння

$$i_2 = I_0 + (I_1 - I_0) e^{-\frac{r}{L}(t_2-t_1)}$$

звідки

$$t_2 = \frac{L_2}{r} \cdot \ln \frac{I_1 - I_0}{I_2 - I_0} + \frac{L_1}{r} \cdot \ln \frac{I_0}{I_0 - I_1} \quad (7.11)$$

Аналогічно ведеться розрахунок і для третьої частини ділянки

$$L_3 \frac{di}{dt} + ri = U, \quad L_3 = \frac{\psi_0 - \psi_2}{I_0 - I_2},$$

$$i = I_0 + A_3 e^{p_3(t-t_2)}, \quad p_3 = -\frac{r}{L_3}$$

Початкові умови для третьої ділянки:

для  $t=t_2$   $i = I_2$  тому  $A_3 = I_2 - I_0$  та

$$i = I_0 + (I_2 - I_0) e^{p_3(t-t_2)}, \quad t > t_2. \quad (7.12)$$

### 7.3 Метод графічного інтегрування

В розглянутому в п.7.1 прикладі перепишемо рівняння (7.1) в вигляді

$$d\psi = (U - ri) dt$$

$$i \quad dt = \frac{d\psi}{U - ri} \quad (7.13)$$

Позначивши

$$f(\psi) = \frac{1}{U - ri}, \quad (7.14)$$

де  $i = \varphi(\psi)$  – задана графічно (рис.7.2) або аналітично, одержимо

$$dt = f(\psi) d\psi$$

$$i \quad t = \int_0^{\psi} f(\psi) d\psi. \quad (7.15)$$



Якщо функція  $f(\psi)$  виражена аналітично і інтеграл в (7.15) можна взяти, то задача розв'язана.

Якщо ж функція  $i = \varphi(\psi)$  задана графічно, то легко одержати графічне зображення функції  $f(\psi)$  (рис.7.4). Інтеграл в (7.15) можна визначити також графічно.

Деякому значенню  $\psi_1$  (рис.7.4) відповідає значення  $t_1$ , яке чисельно дорівнює заштрихованій площі, величину якої можна приблизно визначити як площу трапеції. Вибравши значення  $\psi_2, \psi_3, \dots$  можна таким же чином визначити відповідні їм значення  $t_2, t_3, \dots$

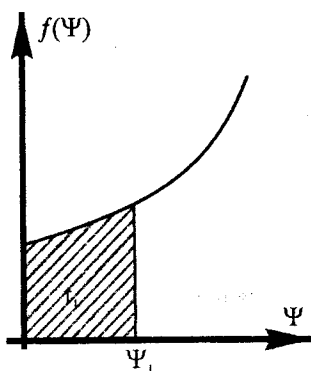


Рисунок 7.4

#### 7.4 Числові методи розрахунку перехідних процесів

Для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь можна використовувати будь-які числові методи відомі з математики. Розглянемо докладно один із них – прямий метод Ейлера.

Нехай процес в деякому нелінійному колі описується нелінійним рівнянням першого порядку

$$\frac{d\psi}{dt} = f(x, t). \quad (7.16)$$

де  $f(x, t)$  – нелінійна функція.

Розв'язком цього рівняння є інтеграл

$$x = x_0 + \int_0^t f(x, t) dt, \quad (7.17)$$

де  $x_0$  – початкове значення змінної  $x$  для  $t = 0$ .

Для розв'язання (7.17) вибираємо крок інтегрування

$$h = \Delta t = t_{n+1} - t_n,$$

на якому значення функції  $f(x, t)$  приймається постійним.

В цьому випадку в момент часу  $t_l = h$  змінна  $x$  приймає значення

$$x_1 = x_0 + \int_0^{t_1} f(x_0, 0) dt = x_0 + f(x_0, 0)h,$$

а значення змінної моменту часу  $t_{n+1}$  визначається рекурентним співвідношенням

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x_n, t_n) dt = x_n + f(x_n, t_n)h. \quad (7.18)$$

Для кола, яке зображено на рис. 7.1., нелінійне рівняння має вигляд

$$\frac{d\psi}{dt} + ri = U \quad \text{або} \quad \frac{d\psi}{dt} = U - ri.$$

Нелінійна функція

$$f(x, t) = U - ri.$$

Співвідношення (7.18) прийме вигляд

$$\psi_{n+1} = \psi_n + (U - ri_n)h. \quad (7.19)$$

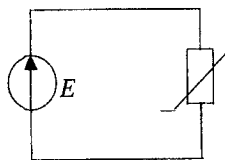
Послідовні значення  $\psi_n$  заносимо в таблицю 7.1., враховуючи, що  $i_n$  за знайденими значеннями  $\psi_n$  визначається із характеристики.

Таблиця 7.1

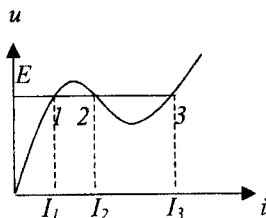
$n$	$t$	$\psi_n$	$i_n$	$\psi_{n+1}$
0	0	0	0	$Uh$
1	$h$	$Uh$	$i_1$	$(2U - ri)h$
2	$2h$	$(2U - ri)h$	$i_2$	$[3U - r(i_1 + i_2)]h$
3	$3h$	$[3U - r(i_1 + i_2)]h$	$i_3$	$[4U - r(i_1 + i_2 + i_3)]h$

## 7.5 Поняття про стійкість станів рівноваги в нелінійних колах

Як уже говорилось раніше, в нелінійних колах можуть існувати різні усталені режими, які називають *станами рівноваги*, і які можуть бути стійкими або нестійкими.



а)



б)

Рисунок 7.5

На рис.7.5.а, зображене нелінійне коло з нелінійним елементом, характеристика якого показана на рис.7.5.б. При заданому значенні е.р.с.  $E$  в колі можуть бути три усталені режими, які відповідають трьом точкам характеристики (1, 2 і 3), і відповідно трьом значенням струму  $I_1, I_2$  і  $I_3$ .

Яке конкретне значення струму встановлюється в колі, залежить від попереднього стану кола.

*Стійкість стану системи* визначається такими положеннями: якщо при малих відхиленнях від стану рівноваги система через деякий час повертається в цей стан, то такий стан рівноваги називається стійкий в малому або стійкий за Ляпуновим.

З'ясуємо умови стійкості по відношенню до кіл, процеси в яких описуються нелінійними диференціальними рівняннями першого порядку

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = 0, \quad (7.20)$$

де  $f(x)$  - нелінійна функція.

Припустимо, що в стані рівноваги  $x = x_0 = const$ , і змінна  $x$  одержала деяке мале відхилення від стану рівноваги  $\xi$ , тобто

$$x = x_0 + \xi. \quad (7.21)$$

Підставимо (7.21) в (7.20)

$$\frac{d(x_0 + \xi)}{dt} + f(x_0 + \xi) = 0$$

і функцію  $f(x_0 + \xi)$  розкладемо в ряд Тейлора.

Враховуючи, що  $\frac{dx_0}{dt} = 0$  і  $f(x_0) = 0$  одержуємо

$$\frac{d\xi}{dt} + f(x_0) + \xi f'(x_0) + \frac{\xi^2}{2!} f''(x_0) + \frac{\xi^3}{3!} f'''(x_0) + \dots = 0, \quad (7.22)$$

де  $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \dots$  - значення похідних функцій  $f(x)$  для  $x=x_0$

Оскільки відхилення малі, обмежимося двома першими членами розвинення, тоді (7.22) запишеться в вигляді

$$\frac{d\xi}{dt} + a_1 \xi = 0, \quad (7.23)$$

де

$$a_1 = f'(x_0).$$

Розв'язком рівняння (7.23) є

$$\xi = Ae^{a_1 t},$$

де  $p = -a_1$  - корінь характеристичного рівняння.

Неважко бачити, що з часом  $\xi$  перетворюється в нуль, тобто система повертається в стан рівноваги, коли  $p < 0$  і відповідно в цьому випадку рівновага стійка. Якщо  $p > 0$ ,  $\xi$  з часом зростає і стан рівноваги нестійкий.

Можна довести, що якщо система описується диференціальними рівняннями більш високого порядку, то стан рівноваги стійкий, якщо дійсні частини коренів характеристичного рівняння для відхилення від'ємні. Якщо хоча б у одного кореня дійсна частина додатна, стан рівноваги не стійкий.

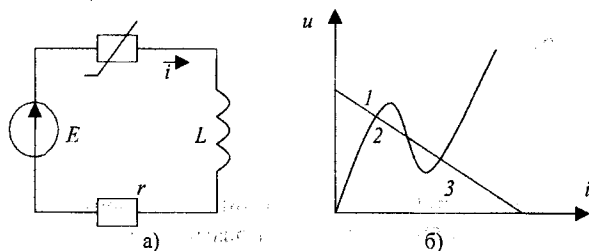


Рисунок 7.6

На рис.7.6.а, зображене нелінійне коло, характеристика нелінійного елемента на рис.7.6.б. В усталеному режимі при постійній напрузі джерела

$$E = rI_o + U_{нo}. \quad (7.25)$$

Точки перетину нелінійної характеристики і прямої визначають стани рівноваги (точки 1, 2, 3).

Треба визначити характер станів рівноваги.

Складемо за другим законом Кірхгофа диференціальне рівняння

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_n = E. \quad (7.26)$$

Складемо рівняння для відхилень, прийнявши

$$i = I_o + \xi. \quad (7.27)$$

При відхиленні струму від стану рівноваги напруга на нелінійному елементі теж одержить відхилення, тобто

$$u_n = U_{нo} + v,$$

при цьому

$$v = \xi r_n, \quad (7.28)$$

де  $r_n$  - динамічний опір нелінійного елемента.

Підставимо (7.27) і (7.28) в (7.26)

$$L \frac{d(I_o + \xi)}{dt} + r(I_o + \xi) + U_{no} + r_{л} \xi = E.$$

Тому що  $\frac{dI_o}{dt} = 0$ , одержимо

$$L \frac{d\xi}{dt} + rI_o + r\xi + U_{no} + r_{л} \xi = E.$$

Враховуючи (7.25), рівняння для відхилень має вигляд

$$L \frac{d\xi}{dt} + (r + r_{л})\xi = 0. \quad (7.29)$$

Розв'язок для рівняння (7.29)

$$\xi = Ae^{pt},$$

де

$$p = -(r + r_{л})/L.$$

В точках 1 і 3 стани рівноваги динамічний опір нелінійного елемента додатний ( $r_{л1} > 0$ ,  $r_{л3} > 0$ ), тому корінь від'ємний і стан рівноваги в цих точках стійкий.

В точці 2  $r_{л2} < 0$ , причому  $|r_{л2}| > r$ , тому  $r + r_{л2} < 0$  і корінь характеристичного рівняння додатний. Стан рівноваги в точці 2 нестійкий.

Визначимо характер станів рівноваги в схемі, яка зображена на рис. 7.7.а.

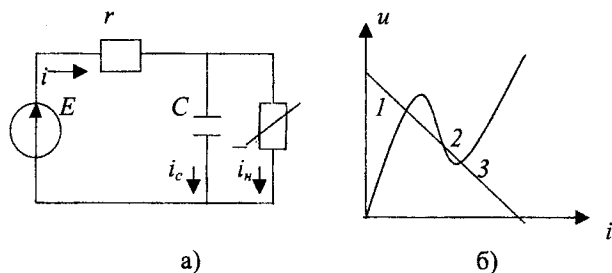


Рисунок 7.7

В усталеному режимі

$$E = I_{но}r + U_{но}. \quad (7.30)$$

і стани рівноваги визначаються точками 1, 2, 3, на характеристиці (рис. 7.7.б).

Складемо систему рівнянь для схеми

$$\begin{aligned} ri + u_n &= E, \\ i &= i_c + i_n, \\ u_c &= u_n, \\ i_c &= C \frac{du_c}{dt}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Із системи (7.31) складемо одне диференціальне рівняння відносно величин, які характеризують нелінійні елементи ( $i_n$ ,  $u_n$ ).

$$i_c = C \frac{du_n}{dt}, \quad i = C \frac{du_n}{dt} + i_n,$$

$$r \left( C \frac{du_n}{dt} + i_n \right) + u_n = E.$$

Остаточно

$$rC \frac{du_n}{dt} + u_n + r i_n = E. \quad (7.32)$$

При малому відхиленні від стану рівноваги

$$U_n = U_{n0} + v, \quad i = I_{n0} + \xi = I_{n0} + v/r_D. \quad (7.33)$$

Підставимо (7.33) в (7.32)

$$rC \frac{d(U_{n0} + v)}{dt} + U_{n0} + v + r \left( I_{n0} + \frac{v}{r_D} \right) = E$$

$$\text{або } rC \frac{dv}{dt} + U_{n0} + v + r I_{n0} + \frac{r}{r_D} v = E.$$

З урахуванням (7.30) отримуємо

$$rC \frac{dv}{dt} + \left( \frac{r}{r_D} + 1 \right) v = 0. \quad (7.34)$$

Розв'язок рівняння

$$v = A e^{pt} \quad (7.35)$$

$$\text{де } p = -(r/r_D + 1)/rC = -(r + r_D)/r r_D C. \quad (7.36)$$

В точках 1 і 3  $r_D > 0$ , тому  $p < 0$  і стан рівноваги стійкий.

В точці 2  $r_D < 0$ , при чому  $|r_D| > r$ , звідси  $r + r_D < 0$ , але оскільки в знаменнику кореня маємо  $r_D < 0$ , то  $p$  залишається від'ємним, тому і в точці 2 стан рівноваги стійкий.

Наведені приклади показують, що нестійкі стани рівноваги можливі в тих випадках, коли характеристики нелінійних елементів або кіл в цілому мають спадні ділянки.

## 7.6 Виникнення автоколивань

В колі, яке зображене на рис.7.7.а, збільшимо опір таким чином, щоб пряма перетинала нелінійну характеристику тільки один раз на спадній ділянці (рис.7.8.а).

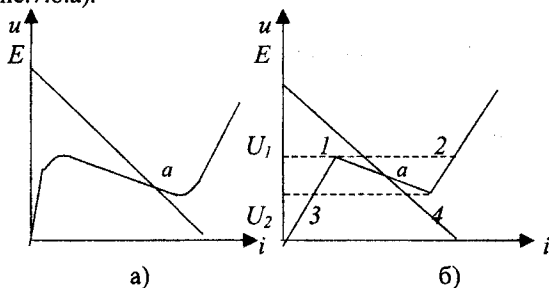


Рисунок 7.8

В цьому випадку є тільки один стан рівноваги – точка  $a$ , причому  $|r_d| < r$  і, відповідно, корінь характеристичного рівняння додатний, тому що чисельник (7,36)  $r + r_d > 0$ , і стан рівноваги нестійкий. Для того, щоб з'ясувати, яким буде усталений режим в даному колі, апроксимуємо характеристику нелінійного елемента відрізками прямих ліній (рис.7.8.б) і розглянемо фізичну суть процесів в колі.

Нехай коло вмикається на постійну напругу за нульових початкових умов. Після вмикання кола конденсатор починає заряджатися за експоненціальним законом. Робоча точка рухається по лінійній ділянці характеристики  $0 - 1$ , відповідно, опір нелінійного елемента на цій ділянці постійний  $r_1$  і досить великий за величиною. Коли робоча точка доходить до точки 1 характеристики ( $u_C = U_1$ ), вона стрибком перекидається в точку 3 лінійної ділянки характеристики  $2 - 3$ , опір якої також постійний  $r_2$ , але значно менший  $r_1$  і  $r$ , тому конденсатор починає розряджатися на опір  $r_2$  і його напруга зменшується за експоненціальним законом. Доходячи до точки 2 характеристики ( $u_C = U_2$ ), робоча точка стрибком переміщується в точку 4 лінійної ділянки  $1 - 0$ , конденсатор знов починає заряджатись і процес повторюється (рис.7.9).

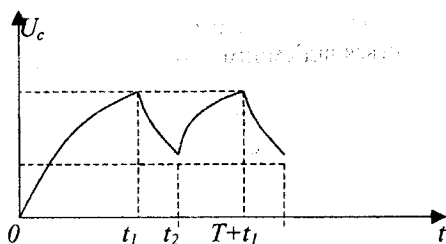


Рисунок 7.9

Таким чином, за наявності джерела постійної напруги в колі виникають періодичні коливання, амплітуда і частота яких залежить від параметрів кола і характеристики нелінійного елемента. Нелінійний елемент в такому колі виконує роль ключа, який періодично змінює опір, що підключений паралельно конденсаторові, і тим самим створює умову для періодичного зарядження і розрядження конденсатора.

Визначимо період і амплітуду отриманих коливань.

Рівняння для визначення напруги на ємності при зарядженні конденсатора має вигляд

$$rC \frac{du_c}{dt} + u_c \left(1 + \frac{r}{r_1}\right) = U, \quad (7.37)$$

де  $r_1$  - опір лінійної ділянки характеристики 1 - 0.

Розв'язок рівняння на проміжку  $t_2 < t < T + t_1$

$$u_c = \frac{Ur_1}{r+r_1} + Ae^{p_1(t-t_2)}$$

де

$$p_1 = -\frac{r+r_1}{rr_1C}.$$

Постійна інтегрування визначається із початкової умови: для  $t = t_2$ ,  $u_c = U_2$ ,

$$U_2 = \frac{Ur_1}{r+r_1} + A_1 \quad ; \quad A_1 = U_2 - \frac{Ur_1}{r+r_1}.$$

Тоді

$$u_{c1} = \frac{Ur_1}{r+r_1} + \left( U_2 - \frac{Ur_1}{r+r_1} \right) e^{-\frac{r+r_1}{rr_1C}(t-t_2)}. \quad (7.38)$$

На проміжку  $t_1 < t < t_2$  диференціальне рівняння має такий же вигляд як і (7.37), де замість  $r_1$  записано  $r_2$  - опір лінійної ділянки 2 - 3.

$$rC \frac{du_c}{dt} + u_c \left(1 + \frac{r}{r_2}\right) = U, \quad (7.39)$$

Його розв'язок

$$u_c = \frac{Ur_2}{r+r_2} + A_2 e^{p_2(t-t_1)},$$

де

$$p_2 = -\frac{r+r_2}{rr_2C}.$$

Постійна інтегрування визначається із початкової умови: якщо  $t = t_1$ ,  $u_c = U_1$ ,

$$U_1 = \frac{Ur_2}{r+r_2} + A_2 \quad \text{і} \quad A_2 = U_1 - \frac{Ur_2}{r+r_2}$$



$$u_{C_2} = \frac{Ur_2}{r+r_2} + \left( U_1 - \frac{Ur_2}{r+r_2} \right) e^{-\frac{r+r_2}{mC}(t-t_1)}. \quad (7.40)$$

Для визначення моменту часу  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $T$  використаємо умови безперервності напруги на ємності

$$u_{C_2}(t_1) = u_{C_1}(T+t_1), \quad u_{C_2}(t_2) = u_{C_1}(t_2).$$

Тоді

$$\frac{Ur_2}{r+r_2} + \left( U_1 - \frac{Ur_2}{r+r_2} \right) = \frac{Ur_1}{r+r_1} + \left( U_2 - \frac{Ur_1}{r+r_1} \right) e^{-\frac{r+r_1}{mC}(T+t_1-t_2)}$$

$$\frac{Ur_2}{r+r_2} + \left( U_1 - \frac{Ur_2}{r+r_2} \right) e^{-\frac{r+r_2}{mC}(t_2-t_1)} = \frac{Ur_1}{r+r_1} + \left( U_2 - \frac{Ur_1}{r+r_1} \right).$$

Позначивши  $t_2 - t_1 = \Delta t$ , одержимо два рівняння для визначення  $\Delta t$  і  $T$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{Ur_1}{r+r_1} + \left( U_2 - \frac{Ur_1}{r+r_1} \right) e^{-\frac{r+r_1}{mC}(T-\Delta t)}, \\ U_2 &= \frac{Ur_2}{r+r_2} + \left( U_1 - \frac{Ur_2}{r+r_2} \right) e^{-\frac{r+r_2}{mC}\Delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

### Контрольні питання та вправи

1. Які фізичні явища можуть спостерігатись в нелінійних електричних колах і не можуть в лінійних?
2. Чому при аналізі процесів в нелінійних електричних колах використовують, як правило, наближені методи?
3. Чим відрізняються статичні і динамічні параметри нелінійних елементів?
4. Що характеризують параметри схеми заміщення котушки з феромагнітним осердям?
5. Яким чином можливо визначити параметри схеми заміщення трансформатора?
6. Побудуйте векторну діаграму трансформатора при активно-ємнісному навантаженні.
7. В чому полягає суть методу гармонічного балансу розрахунку нелінійних кіл в усталеному режимі?
8. За яких умов стан рівноваги в нелінійних колах є стійким, і за яких нестійким?
9. На яких ділянках вольтамперних характеристик можливий нестійкий режим роботи нелінійного кола?
10. В чому полягає суть методу кусково-лінійної апроксимації при розрахунках перехідних процесів в нелінійних колах?

## 8 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 8.1 Диференціальні рівняння однорідної лінії

В попередніх розділах розглядалися електричні кола з зосередженими параметрами, тобто припускалось, що електричне поле, магнітне поле і перетворення енергії в інші види зосередженні на окремих, локальних ділянках кола і завжди можна виділити ці ділянки і характеризувати їх ємністю, індуктивністю і активним опором. При такому припущенні струм в усіх точках однієї і тієї ж вітки має одне і те ж значення.

В багатьох випадках доводиться зустрічатися з такими електричними колами, в яких не можна виділити ділянки зосереджених електричних та магнітних полів або незворотних перетворень електричної енергії. Такі кола називають колами з розподіленими параметрами, оскільки електричне поле, магнітне поле і втрати енергії розподілені вздовж всіх ділянок кола.

В колах з розподіленими параметрами напруга і струм змінюються не тільки в залежності від часу, але і від віддалі. До кіл з розподіленими параметрами відносять довгі лінії електропередач, лінії телеграфного зв'язку, лінії телекерування і телевимірювання, антени радіопередавачів і радіоприймачів і т.д.

Для дослідження процесів в лінії приймаємо умову, що параметри лінії – індуктивність, активний опір проводів, ємність і активна провідність між проводами – розподілені вздовж лінії рівномірно. Таку лінію будемо називати однорідною і характеризувати *первинними параметрами*, тобто параметрами на одиницю довжини –  $L_0$  [Г/м],  $C_0$  [Ф/м],  $r_0$  [Ом/м],  $g_0$  [См/м].

Для складання диференціальних рівнянь виділимо на віддалі  $x$  від початку лінії ділянку лінії довжиною  $dx$  і уявимо її у вигляді ділянки кола з зосередженими параметрами (рис.8.1.б).

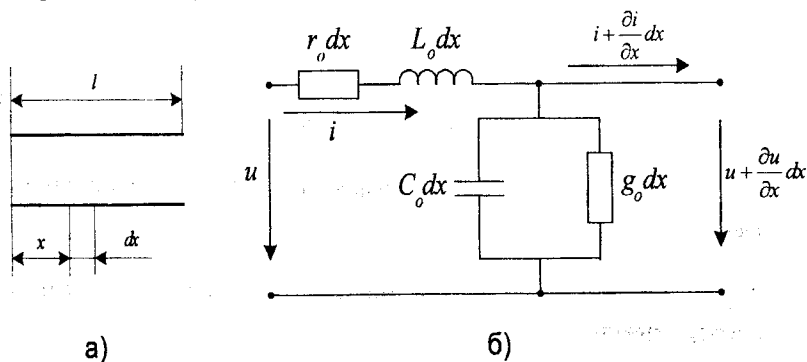


Рисунок 8.1

На виділеній ділянці його параметри визначаються як добуток первинних параметрів на довжину ділянки. Через те, що струм і напруга змінюються рівномірно вздовж лінії із швидкістю  $\frac{\partial i}{\partial x}$  і  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , то струм і напруга в кінці ділянки будуть  $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ ,  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ .

За другим законом Кірхгофа різниця вхідної і вихідної напруги дорівнює сумі падінь напруг на активному опорі і індуктивності, тобто

$$u - (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = r_o dx i + L_o dx \frac{\partial i}{\partial t},$$

або

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r_o i + L_o \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (8.1)$$

За першим законом Кірхгофа

$$i - (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) = g_o dx (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) + C_o dx \frac{\partial (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)}{\partial t}.$$

Нехтуючи складовими другого порядку меншості, одержуємо

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g_o u + C_o \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Рівняння (8.1) і (8.2) запишемо у вигляді системи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_o i + L_o \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_o u + C_o \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Ця система диференціальних рівнянь в частинних похідних називається *телеграфними рівняннями*.

## 8.2 Розв'язок телеграфних рівнянь в усталеному режимі при синусоїдній напрузі

Якщо на початку лінії підключене джерело синусоїдної напруги з частотою  $f$ , то струм і напруга в будь-якій точці лінії також буде змінюватися за синусоїдним законом.

Використаємо символічний метод, замінивши синусоїдну функцію часу комплексними величинами

$$u \rightarrow \underline{U} \quad i \rightarrow \underline{I}$$

Підставимо комплексні значення струму і напруги в (8.3), враховуючи, що операція диференціювання при цьому замінюється множенням на

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= r_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I}, \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= g_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U}. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

В цих рівняннях комплекси  $\underline{U}$  і  $\underline{I}$  не є функціями часу, тому частинні похідні в (8.4) замінені повними.

Із (8.4) одержимо одне диференціальне рівняння. Продиференціюємо перше рівняння системи

$$-\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = (r_0 + j\omega L_0) \frac{d\underline{I}}{dx}$$

і підставимо замість  $\frac{d\underline{I}}{dx}$  його значення із другого рівняння системи.

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = (r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0) \underline{U}.$$

Позначивши

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)}, \quad (8.5)$$

одержимо

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{U} = 0. \quad (8.6)$$

Одержане диференціальне рівняння другого порядку має розв'язок

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{p_1 x} + \underline{A}_2 e^{p_2 x},$$

де  $p_1 = -\gamma$ ;  $p_2 = \gamma$  – корені характеристичного рівняння, а  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$  – комплексні постійні інтегрування.

Таким чином

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma \cdot x} + \underline{A}_2 e^{\gamma \cdot x}. \quad (8.7)$$

Із першого рівняння системи (8.4)

$$\underline{I} = -\frac{I}{r_0 + j\omega L_0} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\gamma}{(r_0 + j\omega L_0)} \cdot (\underline{A}_1 e^{-\gamma \cdot x} - \underline{A}_2 e^{\gamma \cdot x}).$$

Підставляючи значення  $\gamma$  із (8.5) одержимо

$$\underline{I} = \sqrt{\frac{g_0 + j\omega C_0}{r_0 + j\omega L_0}} \cdot (\underline{A}_1 e^{-\gamma \cdot x} - \underline{A}_2 e^{\gamma \cdot x}).$$

Позначимо

$$\underline{Z}_{xs} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}. \quad (8.8)$$

і назвемо його *хвильовим або характеристичним опором лінії*, тоді

$$\underline{I} = \frac{I}{Z_{xs}} \cdot (\underline{A}_1 e^{-\gamma \cdot x} - \underline{A}_2 e^{\gamma \cdot x}). \quad (8.9)$$

Постійну інтегрування можна знайти із граничних умов. Якщо, наприклад, відомі вхідний струм  $\underline{I}_1$  і напруга  $\underline{U}_1$  (для  $x = 0$ ), то

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{xs} &= \underline{A}_1 - \underline{A}_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Звідси

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{xs}}{2}, \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{xs}}{2}. \quad (8.11)$$

### 8.3 Падаючі і відбиті хвилі

Для того, щоб з'ясувати фізичну суть складових в рівнянні (8.7) розглянемо миттєві значення першої складової, позначивши її  $U_n$ .

Через те, що  $\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\Psi_1}$  і коефіцієнт  $\gamma$  також комплексне число  $\gamma = \alpha + j\beta$ , то комплексне значення  $\underline{U}_n$  можна записати в вигляді

$$\underline{U}_n = A_1 e^{j\Psi_1} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j\beta \cdot x} = A_1 \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{j(\Psi_1 - \beta \cdot x)}$$

Миттєве значення

$$u_n = A_{1m} e^{-\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot x). \quad (8.12)$$

В кожній точці лінії при  $x = x_i$  напруга  $u_n$  в залежності від часу змінюється за синусоїдним законом з амплітудою  $A_{1m} e^{-\alpha \cdot x_i}$ . В фіксований момент часу  $t = t_1$  напруга  $u_n$  вздовж лінії змінюється за згасаючою синусоїдою (рис.8.2).

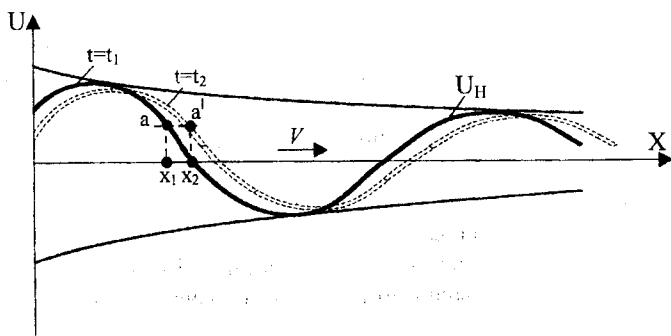


Рисунок 8.2

Фаза коливань в точці  $a$  визначається виразом  $\omega \cdot t_1 + \Psi_1 - \beta \cdot x_1$ . Визначимо положення цієї ж точки хвилі в момент  $t_2 > t_1$ . Оскільки фаза коливань цієї точки залишається без змін, повинна виконуватись рівність

$$\omega \cdot t_1 + \Psi_1 - \beta \cdot x_1 = \omega \cdot t_2 + \Psi_1 - \beta \cdot x_2.$$

Оскільки  $t_2 > t_1$ , то  $x_2 > x_1$ . Це означає, що всі точки хвилі напруги  $U_n$  за час  $t_2 - t_1$  зміщуються на величину  $x_2 - x_1$  (рис. 8.2, пунктирна лінія).

Іншими словами, хвиля напруги переміщується з часом від початку лінії до кінця із швидкістю  $v$ , яку називають фазовою швидкістю. Тому цю хвилю напруг називають *прямою* або *падаючою*.

Визначимо фазову швидкість. При русі фаза будь-якої точки хвилі залишається незмінною, тобто

$$\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot x = \text{Const} . \quad (8.13)$$

Продиференціювавши (8.13) за часом, одержимо

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 .$$

Звідси

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} . \quad (8.14)$$

Фазова швидкість звичайно близька до швидкості світла  $v \approx c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Із виразу (8.12) ясна і фізична суть коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$ . Величина  $\alpha$  характеризує ступінь зміни амплітуди хвилі при русі її вздовж лінії і називається *коефіцієнтом згасання*. Величина  $\beta$  показує відмінність фаз напруги хвилі в різних точках лінії і називається *фазовим коефіцієнтом*, а величина  $\gamma$  називається коефіцієнтом або *постійною поширення*.

Коефіцієнт  $\alpha$  вимірюють в  $\text{Нп/м}$ , а  $\beta$  - в  $\text{рад/м}$ .

Для характеристики хвильових процесів в лінії вводять поняття *довжини хвилі*  $\lambda$ . Довжиною хвилі називають відстань між двома точками лінії, в яких фази хвилі в будь-який момент часу відрізняється одна від одної на  $2\pi$ , тобто:

$$(\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot x) - [\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot (x + \lambda)] = 2 \cdot \pi .$$

Звідси

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad (8.15)$$

або з врахуванням (8.14)

$$\lambda = \frac{v}{f} . \quad (8.16)$$

Якщо прийняти  $V = 3 \cdot 10^8$  м/с, то для  $f = 50$  Гц довжина хвилі  $\lambda = 6000$  км, для  $f = 30$  МГц  $\lambda = 10$  м.

Якщо довжина лінії і довжина хвилі сумірні, то вздовж лінії помітні зміни напруги, якщо ж  $\lambda \ll L$ , то зміна напруги практично не помітна і лінію можна розглядати як коло з зосередженими параметрами.

Друга складова в (8.7) відрізняється від першої знаком при  $x$ , тому друга складова

$$u_{\text{в}} = A_{2m} e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot t + \Psi_2 + \beta \cdot x) \quad (8.17)$$

являє собою хвилю напруги, яка переміщується від кінця лінії до початку з тією ж швидкістю  $v$  (рис.8.3) і називається *зворотною* або *відбитою*.

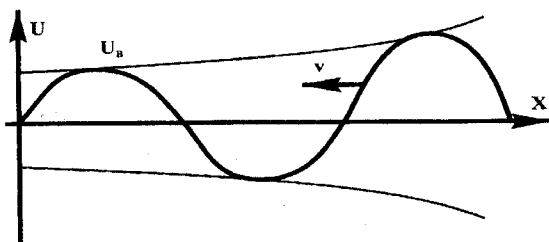


Рисунок 8.3

Поділ хвилі на падаючу і відбиту умовний. Насправді в лінії існує одна напруга, як результат додавання падаючої і відбитої хвиль.

Точно так само умовно можна розділити на падаючу і відбиту хвилі струму, а результуючий струм визначити як різницю цих хвиль.

$$i = i_n - i_{\text{в}} \quad \text{або} \quad \underline{I} = \underline{I}_n - \underline{I}_{\text{в}}. \quad (8.18)$$

При цьому для синусоїдних величин виконується співвідношення

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{U}_n}{\underline{Z}_{\text{хв}}}, \quad \underline{I}_{\text{в}} = \frac{\underline{U}_{\text{в}}}{\underline{Z}_{\text{хв}}}. \quad (8.19)$$

Таким чином, хвильовий опір  $\underline{Z}_{\text{хв}}$  являє собою опір лінії струмові падаючої і відбитої хвиль.

Величини  $\gamma$  - коефіцієнт поширення і  $\underline{Z}_{\text{хв}}$  - хвильовий опір називають *вторинними* або *хвильовими* параметрами.



### Приклад 7.1

Визначити хвильові параметри для повітряної лінії з первинними параметрами  $r_0 = 2,84 \text{ Ом / км}$ ,  $L_0 = 1,94 \frac{\text{мГ}}{\text{км}}$ ,  $g_0 = 0,7 \text{ мкСм/км}$ ,

$C_0 = 6,25 \text{ нФ/км}$  на частоті  $f = 800 \text{ Гц}$ .

Хвильовий опір

$$\underline{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{2,84 + j2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3}}{0,7 \cdot 10^{-6} + j2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9}}} = 5,68 \cdot e^{-j7^\circ 30'} \text{ Ом.}$$

Коефіцієнт поширення

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{10,15 \cdot e^{j73^\circ 45'} \cdot 31,4 \cdot e^{j88^\circ 45'} \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 2,74 \cdot 10^{-3} + j \cdot 17,8 \cdot 10^{-3}.$$

Коефіцієнт затухання  $\alpha = 2,74 \cdot 10^{-3} \text{ Нп / км}$ .

Фазовий коефіцієнт  $\beta = 17,8 \cdot 10^{-3} \text{ рад / км}$ .

Фазова швидкість  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{17,8 \cdot 10^{-3}} = 2,84 \cdot 10^5 \text{ км / с}$ .

### Приклад 7.2

Визначити хвильові параметри коаксіального кабелю з параметрами,  $r_0 = 19,7 \text{ Ом/км}$ ,  $L_0 = 0,263 \text{ мГ/км}$ ,  $C_0 = 46,5 \text{ нФ/ км}$ ,  $g_0 = 3,2 \text{ мкСм / км}$  на частоті  $f = 20 \text{ кГц}$ .

$$\underline{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{19,7 + j2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,263 \cdot 10^{-3}}{3,2 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 46,5 \cdot 10^{-9}}} = 81 e^{-j15^\circ} \text{ Ом}$$

$$\gamma = 0,474 e^{j75^\circ} = 0,123 + j0,458; \quad \alpha = 0,123 \text{ Нп / км};$$

$$\beta = 0,458 \text{ рад / км},$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3}{0,458} = 2,74 \cdot 10^3 \text{ км / с}.$$

## 8.4 Відбивання в довгих лініях

Вияснимо фізичну суть появи зворотних або відбитих хвиль напруги або струму і їх величини.

Перенесемо початок відліку координати  $x$  на кінець лінії, тоді в виразах для струму і напруги в будь-який момент (8.7) і (8.9), треба змінити  $x$  на  $l-x$

$$\underline{U} = A_1 e^{-\gamma(l-x)} + A_2 e^{\gamma(l-x)} = \underline{B}_1 e^{x} + \underline{B}_2 e^{-x},$$

$$\underline{I} = \frac{A_1}{Z_{xg}} e^{-\gamma(l-x)} - \frac{A_2}{Z_{xg}} e^{\gamma(l-x)} = \frac{B_1}{Z_{xg}} e^{x} - \frac{B_2}{Z_{xg}} e^{-x}. \quad (8.20)$$

Нові постійні інтегрування  $\underline{B}_1$  і  $\underline{B}_2$  визначимо із граничних умов для кінця лінії при  $x=0$ ,  $\underline{U} = \underline{U}_2$ ,  $\underline{I} = \underline{I}_2$ , де  $\underline{U}_2, \underline{I}_2$  - напруга і струм в кінці лінії.

$$\underline{U}_2 = \underline{B}_1 + \underline{B}_2, \quad \underline{I}_2 \cdot Z_{xg} = \underline{B}_1 - \underline{B}_2. \quad (8.21)$$

Звідси

$$\underline{B}_1 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot Z_{xg}}{2}, \quad \underline{B}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot Z_{xg}}{2}. \quad (8.22)$$

і

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot Z_{xg}}{2} \cdot e^{x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot Z_{xg}}{2} \cdot e^{-x}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot Z_{xg}}{2 \cdot Z_{xg}} \cdot e^{x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot Z_{xg}}{2 \cdot Z_{xg}} \cdot e^{-x}. \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

Відношення комплексного значення напруги зворотної хвилі на кінці лінії  $\underline{U}_{B_2} = \frac{(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot Z_{xg})}{2}$  до комплексного значення падаючої хвилі

на кінці лінії  $\underline{U}_{n_2} = \frac{(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot Z_{xg})}{2}$  називається *коефіцієнтом відбиття*

$$K_B = \frac{\underline{U}_{B_2}}{\underline{U}_{n_2}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot Z_{xg}}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot Z_{xg}} = \frac{Z_H - Z_{xg}}{Z_H + Z_{xg}}. \quad (8.24)$$

Тут враховано, що  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_H$ , де  $\underline{Z}_H$  – опір навантаження.

Із (8.24) видно, що величина відбитої хвилі залежить від співвідношення між опором навантаження і хвильовим опором лінії.

При короткому замиканні лінії ( $\underline{Z}_H = 0$ ) коефіцієнт відбиття  $K_B = -1$ , а при холостому ході ( $\underline{Z}_H = \infty$ )  $K_B = 1$ , тобто в цих режимах падаюча хвиля повністю відбиття від кінця лінії. При  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{x\theta}$  коефіцієнт відбиття дорівнює нулю, потужність, яка передається через лінію, повністю поглинається навантаженням. Такий режим роботи лінії називається *узгодженим*.

Таким чином, відбита хвиля від кінця лінії виникає тому, що при відсутності узгодження навантаження з лінією ( $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_{x\theta}$ ) не вся потужність поглинається навантаженням і частина потужності повертається до джерела.

### 8.5 Рівняння довгої лінії через гіперболічні функції

Систему рівнянь (8.23) запишемо в вигляді

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_2}{2} e^{\gamma x} + \frac{\underline{I}_2 \underline{Z}_{x\theta}}{2} e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2}{2} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{I}_2 \underline{Z}_{x\theta}}{2} e^{-\gamma x} = \underline{U}_2 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \underline{Z}_{x\theta} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2},$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{2 \underline{Z}_{x\theta}} e^{\gamma x} + \frac{\underline{I}_2}{2} e^{\gamma x} - \frac{\underline{U}_2}{2 \underline{Z}_{x\theta}} e^{-\gamma x} + \frac{\underline{I}_2}{2} e^{-\gamma x} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{x\theta}} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$$

;

або

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x\theta} \operatorname{sh} \gamma x, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{x\theta}} \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x. \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

Одержаний вираз дозволяє визначити напругу і струм в будь-якій точці лінії, якщо відомі напруга і струм в кінці лінії і вторинні параметри ( $\gamma, \underline{Z}_{x\theta}$ ) лінії.

Напруга і струм на початку лінії ( $x = l$ )

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cdot \operatorname{ch}\gamma L + I_2 \underline{Z}_{x\theta} \cdot \operatorname{sh}\gamma L, \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{x\theta}} \cdot \operatorname{sh}\gamma L + I_2 \cdot \operatorname{ch}\gamma L. \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

Система рівнянь (8.26) являє собою рівняння симетричного чотириполюсника.

Вузгодженому режимі ( $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{x\theta}$ )

$$\underline{U}_2 = I_2 \cdot \underline{Z}_{x\theta}$$

і система (8.25) приймає вигляд

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma x}, \\ \underline{I} &= I_2 \cdot e^{\gamma x}. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Вхідний опір лінії

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}}{I} = \frac{\underline{U}_2}{I_2} = \underline{Z}_H = \underline{Z}_{x\theta} \quad (8.28)$$

не залежить від довжини лінії і дорівнює хвильовому опорі.

Як уже відмічалось, однорідну лінію можна розглядати як симетричний чотириполюсник з характеристичним опором  $\underline{Z}_{x\theta}$  і постійною передачею  $\gamma L$ . Відповідно, при дослідженні режимів генератора і приймача для однієї заданої частоти, лінію можна представити в вигляді Т- або П- подібної схеми заміщення.

## 8.6 Лінія без спотворень

При передаванні сигналів через лінію необхідно, щоб форма сигналу на початку і кінці лінії була однаковою. Така лінія, в якій при передаванні не виникають спотворення сигналів, називається лінією без спотворення.

Сигнал в загальному випадку являє собою сукупність різних гармонічних складових. Щоб сигнал передавався без спотворення, затухання складових (різних гармонік) повинно бути однаковим. Іншими словами, коефіцієнт затухання  $\alpha$  не повинен залежати від частоти. Фазова швидкість різних гармонік повинна бути також однакою, щоб не виникали фазові ви-

кривлення. Через те, то  $v = \frac{\omega}{\beta}$ , то коефіцієнт фази повинен бути пропорційний частоті.

Такі умови виконуються, якщо виконуються співвідношення

$$\frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0} \quad (8.29)$$

Дійсно, при цьому

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} = \sqrt{L_0 \cdot C_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{L_0} + j \cdot \omega\right) \cdot \left(\frac{g_0}{C_0} + j \cdot \omega\right)} = \\ &= \sqrt{L_0 C_0} \cdot \left(\frac{r_0}{L_0} + j \cdot \omega\right) = r_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0} = \sqrt{r_0 \cdot g_0} + j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\alpha = \sqrt{r_0 \cdot g_0}; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}.$$

Звичайно в лінії

$$\frac{r_0}{L_0} > \frac{g_0}{C_0}.$$

Щоб добитися виконання умови (8.29), можна зменшувати  $r_0$ , для чого необхідно збільшувати діаметр проводів або взяти матеріал з кращою провідністю, що значно збільшує вартість лінії. Можна збільшити  $g_0$ , але тим самим значно збільшиться згасання лінії, що також недоцільно. Зменшення  $C_0$  також може привести до виконання рівності (8.29), але це вимагає збільшення відстані між провідниками, що ускладнює конструкцію і вартість лінії.

Найбільш прийнятним виявляється штучне збільшення індуктивності лінії шляхом вмикання в неї через однакові проміжки спеціально виготовлених котушок індуктивності.

Спотворення сигналу викликаються ще і неузгодженістю опору навантаження і хвильового опору лінії, при якій виникає відбивання хвиль. Для одержання узгодженого режиму роботи лінії часто використовують ідеальні трансформатори з належним вибором коефіцієнта трансформації.

## 8.7 Лінія без втрат на холостому ходу

На високих частотах  $\omega \cdot L_0 \gg r_0$  і  $\omega \cdot C_0 \gg g_0$ , тому при визначенні  $\underline{Z}_{xs}$  та  $\gamma$  можна знехтувати величинами  $r_0$  та  $g_0$ .

Вцьому випадку хвильовий опір лінії

$$\underline{Z}_{xs} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (8.30)$$

дійсне число, а

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\omega \cdot \sqrt{L_0 C_0}, \quad (8.31)$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{L_0 C_0}. \quad (8.32)$$

Затухання в лінії без втрат відсутнє, а фазова швидкість  $v = \frac{\omega}{\beta}$  не залежить від частоти. Таким чином, лінія без втрат одночасно є і лінією без спотворень.

Запишемо рівняння однорідної лінії без втрат через гіперболічні функції, враховуючи, що  $ch j\beta x = \cos \beta x$ ,  $sh j\beta x = j \sin \beta x$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{xs} \sin \beta x, \\ \underline{I} &= j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{xs}} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

На холостому ходу  $\underline{I}_2 = 0$ , тому

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos \beta x, \\ \underline{I} &= \frac{j \underline{U}_2}{\underline{Z}_{xs}} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

Запишемо ці вирази в вигляді миттєвих функцій, приймаючи початкову фазу напруги  $\underline{U}_2$  рівною нулю

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \sin \omega t \cos \beta x, \\ i &= \frac{U_{2m}}{Z_{xs}} \cos \omega t \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (8.35)$$

Виразимо фазовий коефіцієнт через довжину хвилі  $\lambda$  із (8.15)

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{\lambda} x, \\ i &= \frac{U_{2m}}{Z_{xs}} \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

Проаналізуємо одержані рівняння. В будь-якій точці лінії ( $x = \text{Const}$ ) напруга змінюється в залежності від часу за синусоїдним законом з різною амплітудою. Наприклад, в кінці лінії для  $x=0$ ,  $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x=1$  і амплітуда напруги максимальна.

Зі зростанням  $x$  амплітуда напруги зменшується, і для  $x=\frac{\lambda}{4}$ ,  $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x=0$  амплітуда напруги дорівнює нулю в будь-який момент часу. На проміжку  $\frac{\lambda}{4} < x < \frac{3}{4}\lambda$  амплітуда зростає до максимального значення коли  $x=\frac{\lambda}{2}$  і знову стає рівною нулю для  $x=\frac{3}{4}\lambda$ .

Ті точки лінії, в яких напруга завжди дорівнює нулю ( $x=\frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \dots$ ), називаються *вузлами*, а ті точки, в яких напруга може приймати максимальне значення ( $x=0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ ), називаються *пучностями*.

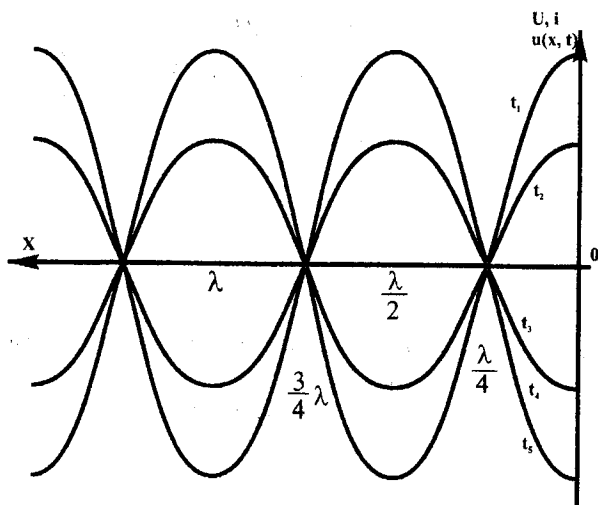


Рисунок 8.4

На рис.8.4 зображені графіки миттєвих значень напруги вздовж лінії для деяких послідовних моментів часу  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$  протягом одного півперіоду коливань.

В лінії виникають хвилі, які пульсують, і не переміщуються вздовж. Такі хвилі називаються *стоячими*.

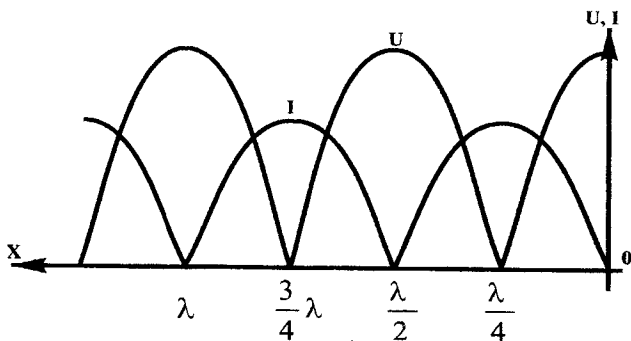


Рисунок 8.5

На рис.8.5 зображений розподіл діючого значення напруги і струму вздовж лінії.

Струм вздовж лінії розподілений за синусоїдний законом (8.36), тому в кінці лінії вузол струму. Із графіка розподілення діючого значення струму вздовж лінії (рис. 8.5) видно, що вузли струму збігаються з пучностями напруги і навпаки.

Пулсивне значення струму і напруги в точках лінії означає відсутність передачі енергії вздовж лінії. В лінії відбувається тільки обмін енергією між електричним і магнітним полями.

В режимі холостого ходу також можна, представляти напругу і струм у вигляді падаючої і відбитої хвиль. Оскільки при холостому ході коефіцієнт відбиття  $K_v = -1$ , то складання падаючої і відбитої хвиль приводить до виникнення стоячої хвилі.

Вхідний опір лінії на холостому ході

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{U}{I} = \frac{U_2 \cos \beta x}{\frac{jU_2}{Z_{ex}} \cdot \sin \beta x} = -jZ_{ex} \cdot \operatorname{ctg} \beta x \quad (8.37)$$

Оскільки  $\underline{Z}_{ex}$  дійсна величина для лінії без втрат, то вхідний опір лінії на холостому ході є реактивним і його величина і характер залежать від довжини лінії.



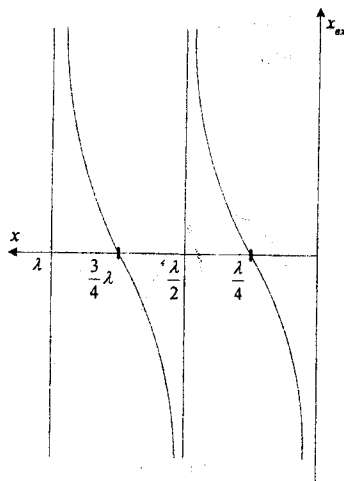


Рисунок 8.6

На рис.8.6 зображений графік зміни вхідного опору лінії в залежності від її довжини. Із графіка видно, що для  $0 < L < \frac{\lambda}{4}$  вхідний опір носить ємнісний характер і зі зростанням довжини лінії зменшується. Для  $\frac{\lambda}{4} < L < \frac{\lambda}{2}$  вхідний опір лінії є індуктивним і зі зростанням довжини збільшується. Для  $L = \frac{\lambda}{4}$  вхідний опір лінії дорівнює нулю, а для  $L = \frac{\lambda}{2}$  - нескінченності.

### 8.8 Лінія без втрат при короткому замиканні

При короткому замиканні  $\underline{U}_2 = 0$  і система (8.33) має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= j \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x0} \sin \beta x, \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 \cdot \cos \beta x \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

Миттєві значення напруги і струму

$$\left. \begin{aligned} u &= I_{2m} \cdot Z_{x0} \cdot \cos \omega t \sin \beta x, \\ i &= I_{2m} \cdot \sin \omega t \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

Міркування, аналогічні зробленим раніше, приводять до висновку, що і в цьому випадку мають місце стоячі хвилі. Розподіл діючих значень напруги і струму вздовж лінії показаний на рис.8.7.

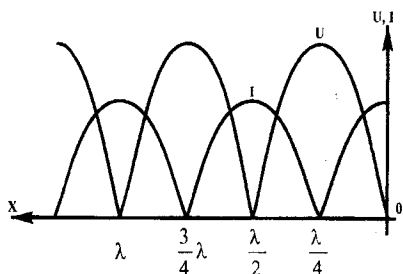


Рисунок 8.7

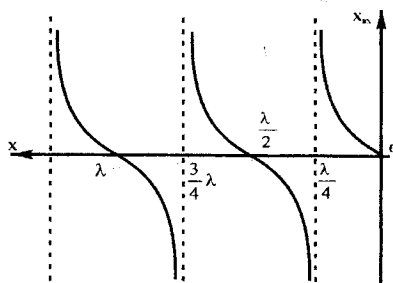


Рисунок 8.8

Вузли і пучності напруги при короткому замиканні збігаються відповідно з вузлами і пучностями струму при холостому ході. Вхідний опір лінії при короткому замиканні

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{U}{I} = \frac{jI_2 \cdot \underline{Z}_{xв} \cdot \sin \beta x}{I_2 \cos \beta x} = j \underline{Z}_{xв} \operatorname{tg} \beta x. \quad (8.40)$$

Вхідний опір лінії і при короткому замиканні реактивний, величина і характер якого залежить від довжини лінії (рис.8.8). Для  $0 < L < \frac{\lambda}{4}$  характер вхідного опору індуктивний і величина опору зростає з ростом довжини.

Розглянуті властивості лінії без втрат широко використовуються для практичних цілей. Наприклад, короткозамкнуті або розімкнуті лінії використовуються в коливальних контурах як добротні індуктивності і ємності.

**Приклад 8.3** Послідовно з активним опором  $r=100\text{ Ом}$  і ємністю  $C=1,2\text{ нФ}$  потрібно підключити короткозамкнуту лінію без втрат з  $L_0=2\text{ мкГ/м}$ ,  $C_0=5,55\text{ нФ/м}$  так, щоб на частоті  $f=200\text{ МГц}$  контур працював в резонансному режимі. Визначити мінімальну довжину короткозамкнutoї лінії.

#### Розв'язання

Визначимо спочатку величину індуктивності, при якій контур працює в резонансному режимі. Відомо, що для послідовного коливального контуру резонансна частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Звідси

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^8)^2 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-12}} = 0,53 \cdot 10^{-6} \text{ Г}$$

Вхідний опір короткозамкнутої лінії без втрат

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = j \cdot \underline{Z}_{\text{хв}} \cdot \text{tg } \beta x$$

або

$$X_{\text{вх}} = Z_{\text{хв}} \cdot \text{tg } \beta x$$

Хвильовий опір лінії

$$Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{5,55 \cdot 10^{-12}}} = 600 \text{ Ом}$$

Індуктивний вхідний опір на частоті  $f_0 = 200 \text{ МГц}$

$$X_{\text{вх}} = 2 \pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0,53 \cdot 10^{-6} = 672 \text{ Ом}$$

Тоді

$$\text{tg } \beta x = \frac{X_{\text{вх}}}{Z_{\text{вх}}} = \frac{672}{600} = 1,12$$

$$\beta = 41,7^\circ = 0,728 \text{ рад.}$$

Оскільки фазовий коефіцієнт

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2 \pi \cdot 2 \cdot 10^8 \sqrt{2 \cdot 10^{-6} \cdot 5,55 \cdot 10^{-12}} = 4,2 \text{ рад / м.}$$

то

$$x = \frac{0,728}{4,2} = 0,173 \text{ м} = 17,3 \text{ см.}$$

Як видно з (8.40), вхідний опір короткозамкнутої довгої лінії без втрат для  $x = \frac{\lambda}{4}$  дорівнює нескінченності, тому така лінія може служити металевим ізолятором для кріплення ліній (рис. 8.9).

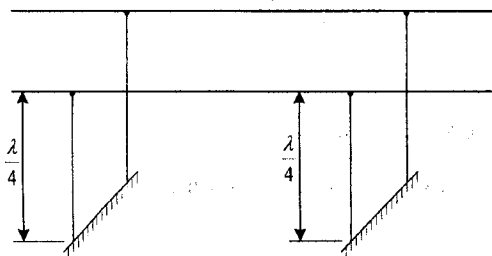


Рисунок 8.9

### 8.9 Перехідні процеси в довгих лініях. Загальний розв'язок

При аналізі перехідних процесів в однорідних довгих лініях слід користуватися телеграфними рівняннями

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

де за початок відліку  $x$  взятий початок лінії.

Задача розрахунку перехідних процесів зводиться до визначення загального розв'язку системи (8.41) для визначених початкових ( $t=0$ ) і граничних ( $x=0$ ,  $x=l$ ) умов. В загальному вигляді розв'язання такої системи досить складне. Тому обмежимося розглядом лінії без втрат ( $r_0=0$ ,  $g_0=0$ ).

В цьому випадку система прийме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (8.42)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

де  $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$  - швидкість хвилі.

Систему рівнянь (8.43) задовольняє розв'язок

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \\ i(x, t) &= \frac{1}{Z_{xe}} f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{Z_{xe}} f_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

де  $Z_{xe} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$  - хвильовий опір лінії (дійсне число).

Конкретні значення функцій  $f_1$  і  $f_2$  визначаються характером зовнішньої дії і початковими і граничними умовами. Перша складова напруги або струму являє собою напругу або струм хвилі, яка рухається від початку лінії до кінця із швидкістю  $v$  і є падаючою або прямою хвилею, а друга складова - зворотна або відбита хвиля, тому можна записати

$$\left. \begin{aligned} u &= u_n + u_{\theta} \\ i &= i_n - i_{\theta} = \frac{u_n}{Z_{xe}} - \frac{u_{\theta}}{Z_{xe}} \end{aligned} \right\} \quad (8.45)$$

Перехідний процес в лінії представляється як сума падаючої і відбитої хвиль, так само як і в усталеному режимі.

### 8.10 Вмикання довгої лінії на постійну напругу

Після вмикання ключа (рис.8.10) напруга на початку лінії зразу досягає постійного значення  $U = E$  і виникає падаюча хвиля прямокутної форми (рис.8.П), яка рухається від початку лінії до кінця із швидкістю  $v$ .

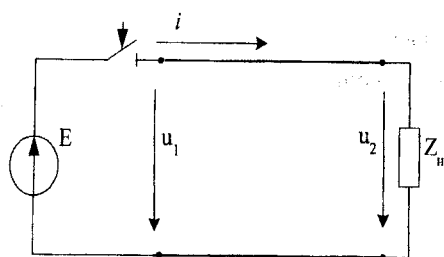


Рисунок 8.10

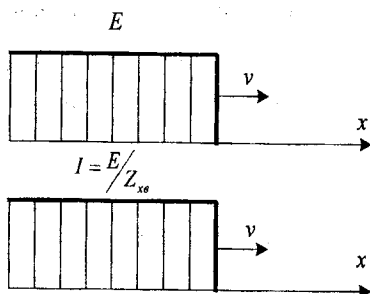


Рисунок 8.11

Струм хвилі  $i_n = I = \frac{E}{Z_{xв}}$ . В будь-який момент часу у всіх точках лінії, до яких хвиля ще не дійшла, напруга і струм дорівнюють нулю. Точка, яка обмежує ділянку лінії, до якої дійшло хвильове збурення, називається *фронтом хвилі*. До кінця лінії хвиля підходить через час  $t_f = \frac{l}{v}$ .

Для кінця лінії правильні співвідношення (8.45), тобто

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= u_n + u_e, \\ i_2 &= \frac{u_n}{Z_{xв}} - \frac{u_e}{Z_{xв}} \end{aligned} \right\}$$

або

$$\begin{aligned} u_2 &= u_n + u_e, \\ i_2 Z_{xв} &= u_n - u_e. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Додаючи рівняння, одержимо

$$2u_n = i_2 Z_{xв} + u_2. \quad (8.47)$$

Одержаному рівнянню відповідає розрахункова схема, яка зображена на рис.8.12. Ця схема дозволяє визначити для кожного конкретного навантаження відбиті хвилі напруги та струму.

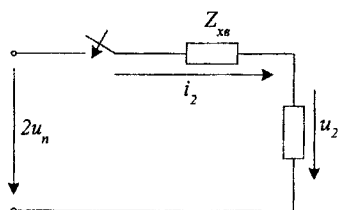


Рисунок 8.12

Початок перехідного процесу в розрахунковій схемі запізнюється в порівнянні з моментом вмикання лінії на  $t_1 = \frac{L}{v}$ , тобто на час, який потрібний хвилі напруги для проходження всієї лінії.

Якщо навантаженням лінії є активний опір  $r_n$ , то

$$u_2 = r_n i_2$$

і (8.47) записується у вигляді

$$2u_n = i_2 (Z_{x0} + r_n).$$

Звідси

$$i_2 = \frac{2u_n}{Z_{x0} + r_n}.$$

Із другого рівняння (8.46)

$$u_g = u_n - i_2 Z_{x0} = u_n - \frac{2u_n Z_{x0}}{Z_{x0} + r_n} = u_n \frac{r_n - Z_{x0}}{r_n + Z_{x0}}.$$

Коефіцієнт відбиття

$$K_0 = \frac{u_g}{u_n} = \frac{r_n - Z_{x0}}{r_n + Z_{x0}} \quad (8.48)$$

є постійною величиною, яка залежить від опору навантаження і хвильового опору.

### 8.11 Вмикання лінії на постійну напругу при холостому ході

При холостому ході  $r_n = \infty$ ,  $\kappa_B = 1$ .

На рис.8.13, а показані графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії, коли хвиля, яка виникла, ще не дійшла до кінця лінії.

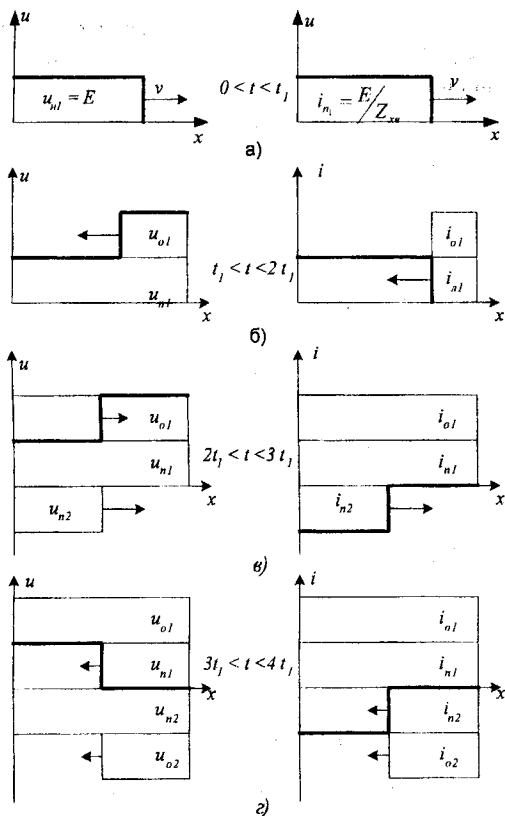


Рисунок 8.13

В кінці лінії хвиля напруги і струму відбивається з тим самим знаком і рухається до початку лінії. Загальна напруга в лінії подвоюється, а струм стає рівним нулю (рис.8.13,б). Для відбитої хвилі початок лінії є навантаженням і для  $Z_{дж} = 0$ ,  $K_v = -1$ , тобто хвиля напруги і струму відбивається з оберненим знаком. На рис.8.13,в показана третя хвиля напруги і струму. Загальна напруга при цьому стає рівною  $E$ , а струм приймає від'ємне значення. Після відбивання третьої хвилі від кінця лінії виникає друга відбита хвиля напруги і струму (рис.8.13,г). Коли вона досягає початку лінії, напруга і струм в лінії будуть рівними нулю, як і було до вмикання джерела напруги. З цього моменту, тобто після  $T = 4t_1 = 4 \frac{L}{v}$ , перехідний процес в лінії повторюється.



В кожній точці лінії напруга і струм змінюються періодично, але криві зміни їх в різних точках будуть неоднакові. На рис. 8.14,а показані графіки зміни в залежності від часу напруги і струму в кінці лінії.

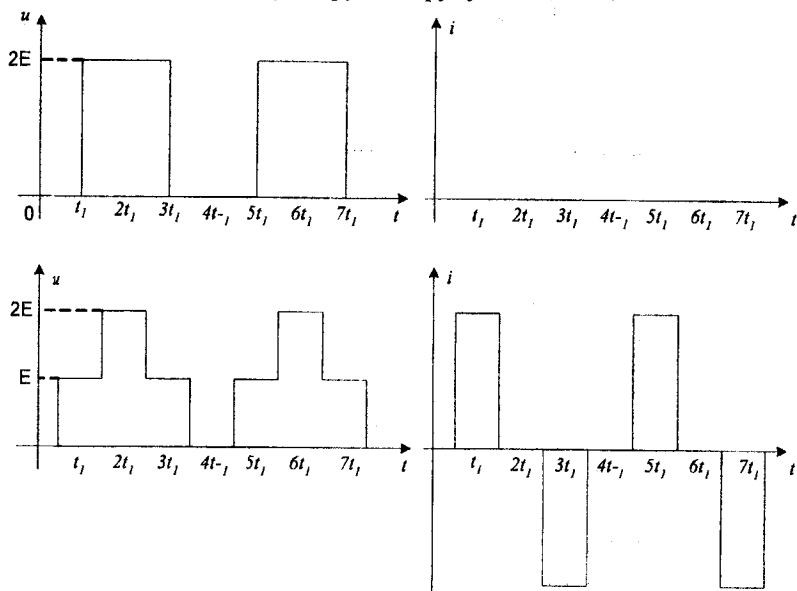


Рисунок 8.14

До моменту часу  $t_1$  в кінці лінії немає ні напруги, ні струму (хвиля ще не дійшла до кінця лінії). В момент  $t_1$  напруга в кінці лінії стрибком змінюється до значення  $u = u_{n1} + u_{o1} = 2E$  і залишається такою до тих пір, поки до кінця лінії не дійде друга падаюча хвиля  $u_{n2}$ , тобто протягом  $2t_1$ . Потім напруга падає до нуля і зберігає своє значення знову протягом  $2t_1$  і т.д., струм же в кінці лінії завжди дорівнює нулю. На рис.8.14,б зображений графік зміни напруги і струму в середині лінії.

В реальних лініях завжди є втрати, тому напруга і струм з часом зменшуються і при кожному новому відбиванні їх значення теж будуть зменшуватися. В результаті цього рівень напруги в лінії поступово наближається до величини напруги джерела живлення.

Аналогічно можна розглядати рух хвиль в короткозамкненій лінії при підключенні її до джерела постійної напруги.

## 8.12 Вмикання лінії на постійну напругу при індуктивному навантаженні

На рис.8.15,а показане вмикання лінії з індуктивним навантаженням, а на рис.8.15,б розрахункова схема для визначення струму в кінці лінії. Від

початку вмикання лінії і до моменту  $t_1$ , коли хвиля дійде до кінця лінії, графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії мають той же вигляд, що і раніше (рис.8.16,а).

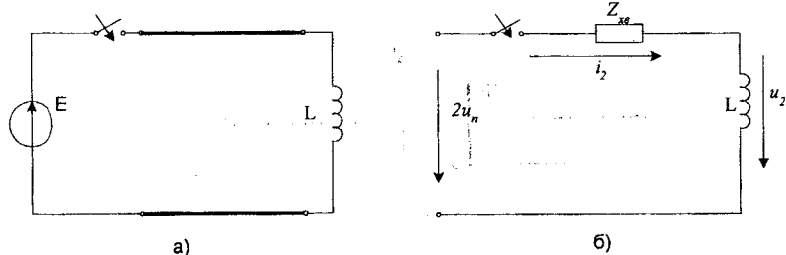


Рисунок 8.15

Визначимо коефіцієнт відбиття при індуктивному навантаженні. Для схеми рис.8.15,б рівняння має вигляд

$$L \frac{di_2}{dt} + Z_{xg} i_2 = 2u_n, \text{ для } t > t_1 \quad (8.49)$$

Розв'язок цього рівняння

$$i_2 = \frac{2u_n}{Z_{xg}} \left[ 1 - e^{-\frac{Z_{xg}}{L}(t-t_1)} \right]$$

або

$$i_2 = 2i_n \left[ 1 - e^{-\frac{Z_{xg}}{L}(t-t_1)} \right]. \quad (8.50)$$

Оскільки в кінці лінії  $i_2 = i_n - i_g$ , то

$$i_g = i_n \left[ 2e^{-\frac{Z_{xg}}{L}(t-t_1)} - 1 \right]$$

і аналогічно

$$u_g = u_n \left[ 2e^{-\frac{Z_{xg}}{L}(t-t_1)} - 1 \right].$$

Коефіцієнт відбиття

$$K_B = \frac{u_g}{u_n} = 2e^{-\frac{Z_{xg}}{L}(t-t_1)} - 1, \quad (8.51)$$

залежить від часу.

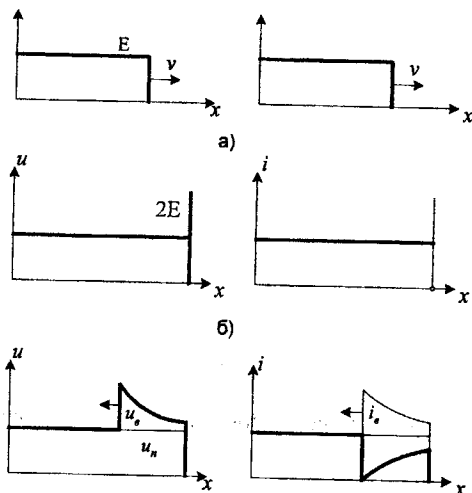


Рисунок 8.16

В момент часу  $t_1$ ,  $K_B = 1$  і загальна напруга в кінці лінії зразу подвоюється (рис.8.16,б). В момент часу  $t_2 > t_1$  фронт хвилі переміщується на відстань  $vt_2$ , а коефіцієнт відбиття стає рівним

$$K_B(t_2) = \left( 2e^{-\frac{Z_{xg}(t_2-t_1)}{L}} - 1 \right) < 1.$$

Графік розподілу напруги і струму для цього моменту часу показаний на рис.8.16,в.

З часом фронт хвилі переміщується до початку лінії. Коефіцієнт відбиття продовжує зменшуватися і для  $t = \infty$  стає рівним  $-1$  ( $K_B = -1$ ).

### 8.13 Заломлення хвиль в місці спрження двох ліній

На рис.8.17 показана лінія, яка складається із відрізків двох ліній.

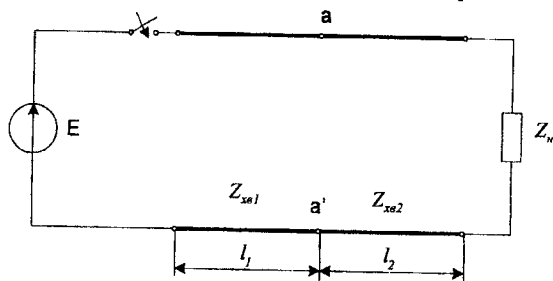


Рисунок 8.17

Перша лінія довжиною  $L_1$  має хвильовий опір  $Z_{x\theta 1}$  і друга лінія довжиною  $L_2$  хвильовий опір  $Z_{x\theta 2}$ . Розглянемо проходження хвиль в місці спряження ліній з різними хвильовими опором.

При замиканні ключа фронт хвилі напруги  $E$  переміщується із швидкістю  $V$  до кінця лінії (8.18,а). В момент часу  $t_1 = \frac{\ell L_1}{V}$  падаюча хвиля підходить до місця спряження і внаслідок різних хвильових опорів лінії падаюча хвиля частково відбивається.

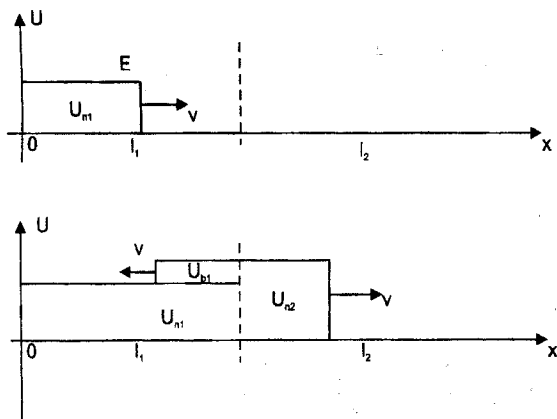


Рисунок 8.18

Загальна напруга на кінці першої лінії являє собою суму падаючої і відбитої хвиль

$$u_l = u_{n1} + u_{o1}.$$

Напруга на початку другої лінії повинна бути рівна напрузі на кінці першої лінії (напруга між одними і тими ж точками  $a$  і  $a'$ ) і вона ж є падаючою хвилею другої лінії, тобто

$$u_{n2} = u_{n1} + u_{o1}. \quad (8.52)$$

Аналогічно для струму

$$i_{n2} = i_{n1} - i_{o1} \quad (8.53)$$

або

$$\frac{u_{n2}}{Z_{x\theta 2}} = \frac{u_{n1}}{Z_{x\theta 1}} - \frac{u_{e1}}{Z_{x\theta 1}} \quad (8.54)$$

Виразимо  $u_{n2}$  із (8.54) і підставимо в (8.52)

$$u_{n1} \frac{Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1}} - u_{e1} \frac{Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1}} = u_{n1} + u_{e1},$$

$$u_{n1} \left( 1 - \frac{Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1}} \right) = -u_{e1} \left( 1 + \frac{Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1}} \right).$$

Звідки

$$u_{e1} = u_{n1} \frac{Z_{x\theta 2} - Z_{x\theta 1}}{Z_{x\theta 2} + Z_{x\theta 1}} \quad (8.55)$$

Таким чином коефіцієнт відбиття для першої лінії

$$K_{B1} = \frac{u_{e1}}{u_{n1}} = \frac{Z_{x\theta 2} - Z_{x\theta 1}}{Z_{x\theta 2} + Z_{x\theta 1}} \quad (8.56)$$

Падаюча хвиля другої лінії, яку називають звичайно *заломленою* хвилею, із (8.52)

$$u_{n2} = u_{n1} + u_{e1} \frac{Z_{x\theta 2} - Z_{x\theta 1}}{Z_{x\theta 2} + Z_{x\theta 1}} = u_{n1} \frac{2Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1} + Z_{x\theta 2}} = u_{n1} (1 + K_{e1}). \quad (8.57)$$

Перехід хвилі з першої лінії на другу характеризують *коефіцієнтом заломлення*, який дорівнює відношенню падаючої хвилі другої лінії до падаючої хвилі першої лінії, тобто

$$K_{31} = \frac{u_{n2}}{u_{n1}} = \frac{2Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1} + Z_{x\theta 2}} = 1 + K_{e1}. \quad (8.58)$$

Якщо  $Z_{x\theta 2} > Z_{x\theta 1}$ , то  $0 < K_{e1} < 1$  і графік розподілу хвилі напруги показаний на рис.8.18,б.

Подальший розподіл хвилі по лінії залежить від навантаження другої лінії і внутрішнього опору джерела.

Відбита від навантаження хвиля другої лінії, підходячи до місця спряження, також відбивається і заломлюється, але в цьому випадку

$$K_{B2} = \frac{Z_{x\theta 1} - Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1} + Z_{x\theta 2}}, \quad K_{32} = 1 + K_{B2}. \quad (8.59)$$

### Контрольні питання та вправи

1. Які величини називають хвильовими параметрами лінії і як вони пов'язані з первинними параметрами?
2. Який опір потрібно ввімкнути в кінці лінії, щоб не було відбитих хвиль?
3. Від яких параметрів залежить коефіцієнт відбиття?
4. Що представляють собою стоячі хвилі і за яких умов вони виникають?
5. Чи можливо розглядати довгу лінію як чотириполосник і які при цьому його А-параметри?
6. Для яких навантажень коефіцієнт відбиття при перехідних процесах в довгих лініях залежить від часу?
7. Визначити для частоти  $f = 1000 \text{ Гц}$  хвильовий опір в однорідній лінії, коефіцієнт затухання, фазовий коефіцієнт, і фазову швидкість за заданими первинними параметрами:  $r_o = 6,5 \text{ Ом/км}$ ,  $l = 2,29 \text{ мГ/км}$ ,  $C_o = 5,22 \text{ мкФ/км}$ ,  $g_o = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$ .

Відповідь:  $Z_{\theta} = 692 e^{-j12} \text{ Ом}$ ,  $\alpha = 4,92 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км}$ ,

$\beta = 22,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}$ ,  $v = 2,83 \cdot 10^5 \text{ км/с}$

8. До лінії, вказаній у попередній задачі, приєднане активне навантаження  $r_o = 200 \text{ Ом}$ . Знайти коефіцієнт відбиття.

Відповідь:  $\kappa_B = 0,558 e^{j173^\circ}$ .

## Література

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Ч.І. Линейные электрические цепи.-М.: Энергия, 1978.
2. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Ч.ІІ,ІІІ. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле. -М.: Энергия, 1979.
3. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники в 2 т.-Л.:Энергоиздат, 1981.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники.-М.: Высш. школа. 1973. -750 с.
5. Перхач В.С. Теоретична електротехніка: Лінійні кола.-К.: Вища школа. 1992. -439 с.
6. Ю.О.Карпов, Т.Є.Магас, В.Г.Мадьяров. Конспект лекцій з курсу "Теоретичні основи електротехніки" ч.І. Вінниця 1992. -174 с.

*Навчальне видання*

**Юхим Овдійович Карнов,  
Тарас Євстахович Магас,  
В'ячеслав Губейович Мадьяров**

## **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. Частина II**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено В. Г. Мадьяровим

Редактор С. А. Малішевська

Видавництво ВНТУ “УНІВЕРСУМ-Вінниця”  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, головний корпус, к. 114  
Тел. (0432) 44-05-32

Підписано до друку 07.07.2004.  
Формат 29,7 x 42  $\frac{1}{4}$  Папір офсетний  
Гарнітура Times New Roman  
Друк різнографічний Ум. друк. арк. 10,74  
Тираж 250 прим. Зам. № 2004-115

Відріковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького національного технічного університету  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, головний корпус, к. 114  
Тел. (0432) 44-01-59