

Ю. В. Крушевський, Ю. І. Кравцов, В. М. Мізерний

**ЕЛЕКТРОДИНАМІКА
ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ**

ч. 2. Хвилеводи та об'ємні резонатори

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Ю. В. Крушевський, Ю. І. Кравцов, В. М. Мізерний

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ

ч. 2. Хвилеводи та об'ємні резонатори

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2009

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 26.02.2008 р.)

Рецензенти:

В. М. Кичак, доктор технічних наук, професор

С. М. Злепко, доктор технічних наук, професор

В. О. Грабчак, кандидат технічних наук, доцент

Крушевський, Ю. В.

К 84 Електродинаміка та поширення радіохвиль. ч. 2. Хвилеводи та об'ємні резонатори : навчальний посібник / Ю. В. Крушевський, Ю. І. Кравцов, В. М. Мізерний. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 125 с.

В навчальному посібнику розглянуті властивості електромагнітних хвиль в ідеальних хвилеводах та об'ємних резонаторах, а також згасання поля електромагнітних хвиль при розповсюдженні в реальних хвилеводах та добротність реальних об'ємних резонаторів. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри та програмою дисципліни „Електродинаміка та поширення радіохвиль”

УДК 538.3

Вступ.....	5
1. Хвильоводи.....	6
1.1. Спрямовуючі системи та спрямовані хвилі.....	6
1.2. Двоплощинний хвильовід.....	7
1.3. Однорідні рівняння Гельмгольца для спрямованих хвиль. Критична частота.....	11
1.4. Порядок визначення складових поля спрямованих хвиль.....	14
1.5. Дисперсія в хвильоводах.....	16
1.6. Хвильовий опір хвильоводу.....	19
1.7. Прямокутний хвильовід.....	22
1.7.1. Хвилі електричного типу.....	22
1.7.2. Хвилі магнітного типу.....	26
1.7.3. Умови існування хвиль різних типів у прямокутному хвильоводі.....	28
1.8. Аналітичний метод побудови картини поля хвилі H_{10} у прямокутному хвильоводі.....	30
1.9. Нестрога методика побудови картини поля E_{mn} та H_{mn} у прямокутному хвильоводі.....	34
1.10. Круглий хвильовід.....	36
1.10.1. Хвилі електричного типу.....	36
1.10.2. Хвилі магнітного типу.....	41
1.11. Побудова картини поля хвиль E_{mn} та H_{mn} у циліндричному хвильоводі.....	43
1.12. Коаксіальний хвильовід.....	46
1.12.1. Хвилі Т-типу.....	46
1.13. Діелектричний хвильовід.....	51
1.14. Світловоди.....	56
1.15. Смужкові хвильоводи.....	58
1.15.1. Симетрична смужкова лінія.....	58
1.15.2. Мікросмужкова лінія.....	59
1.15.3. Симетрична щілинна лінія.....	61
1.15.4. Несиметрична щілинна лінія.....	63
1.15.5. Компланарна лінія.....	63
2. Об'ємні резонатори.....	66
2.1. Загальні зауваження.....	66
2.2. Прямокутний об'ємний резонатор.....	67
2.2.1. Коливання Е-типу.....	67
2.2.2. Коливання Н-типу.....	72
2.3. Циліндричний об'ємний резонатор.....	75
2.3.1. Коливання Е-типу.....	76
2.3.2. Коливання Н-типу.....	80
2.4. Коаксіальний об'ємний резонатор.....	83

2.5. Умова існування в об'ємних резонаторах коливань заданого типу.....	85
2.6. Картина полів у об'ємних резонаторах.....	87
2.7. Резонатори НВЧ інтегральних схем.....	91
3. Згасання поля в реальних хвильоводах.....	96
3.1. Загальні зауваження.....	96
3.2. Визначення коефіцієнтів згасання електромагнітних хвиль у прямокутних хвильоводах.....	97
3.2.1. Розрахунок коефіцієнтів згасання поля в прямокутних хвильоводах з хвилями магнітного типу.....	102
3.2.2. Розрахунок коефіцієнтів згасання поля в прямокутних хвильоводах з хвилями електричного типу.....	104
3.2.3. Розрахунок коефіцієнтів згасання у циліндричних хвильоводах з хвилями магнітного типу.....	105
3.2.4. Розрахунок коефіцієнтів згасання у циліндричних хвильоводах з хвилями електричного типу.....	108
3.3. Визначення коефіцієнтів згасання у коаксіальних хвильоводах з хвилями Т-типу.....	109
4. Добротність об'ємних резонаторів.....	111
4.1. Загальні зауваження.....	111
4.2. Визначення добротності прямокутних об'ємних резонаторів з коливаннями магнітного типу.....	113
4.3. Визначення добротності прямокутних об'ємних резонаторів з коливаннями електричного типу.....	115
4.4. Визначення добротності циліндричних об'ємних резонаторів з коливаннями магнітного типу.....	116
4.5. Визначення добротності циліндричних об'ємних резонаторів з коливаннями електричного типу.....	118
4.6. Визначення добротності коаксіальних об'ємних резонаторів з коливаннями Т-типу.....	120
Глосарій.....	122
Література.....	124

Навчальний посібник є другою частиною навчального посібника “Електродинаміка та поширення радіохвиль”, у якому викладено теорію хвильоводів та об’ємних резонаторів.

В навчальному посібнику розглядаються конструкції таких направляючих систем для електромагнітних хвиль, як прямокутний хвильовід, круглий хвильовід, коаксіальний хвильовід, діелектричний хвильовід, смужкові хвильоводи, а також їх властивості та характеристики. Пояснюється принцип збудження та розповсюдження електромагнітних хвиль в цих направляючих системах.

Вивчення цих надвисокочастотних пристроїв передбачає два етапи: на першому – усі процеси розглядаються у хвильоводах та об’ємних резонаторах без втрат, коли їх стінки є ідеальними провідниками, а середовище в якому розповсюджуються електромагнітні хвилі є ідеальним діелектриком. Такий підхід дозволяє студентам ознайомитися зі структурами електромагнітних полів та струмами, що протікають в стінках хвильоводів та об’ємних резонаторів при збудженні в них електромагнітних хвиль.

Це допустимо, бо структури полів і струмів в реальних хвильоводах та об’ємних резонаторах практично не відрізняються від цих структур в ідеальних хвильоводах та об’ємних резонаторах.

У другій половині посібника розглядаються втрати потужності електромагнітної хвилі при її розповсюдженню в реальних хвильоводах та об’ємних резонаторах. Даються формули для інженерного розрахунку коефіцієнтів згасання електромагнітної хвилі у різних типах хвильоводів та визначення ненавантаженої добротності у об’ємних резонаторах.

Для кращого засвоювання матеріалу навчального посібника наприкінці кожного розділу даються питання для самоперевірки.

1 ХВИЛЕВОДИ

1.1 Спрямовуючі системи та спрямовані хвилі

Для спрямування електромагнітних хвиль від джерела до споживача використовуються спрямовуючі системи, які через цю функцію називаються хвильоводами. Наприклад, потрібно передати електромагнітну енергію від передавача до передавальної антени, чи від приймальної антени до приймача. Хвильоводи бувають різними і за конструкцією, і за принципом передачі (каналізації) електромагнітної енергії. На рис.1.1 зображені конструкції найбільш поширених в радіотехніці хвильоводів.

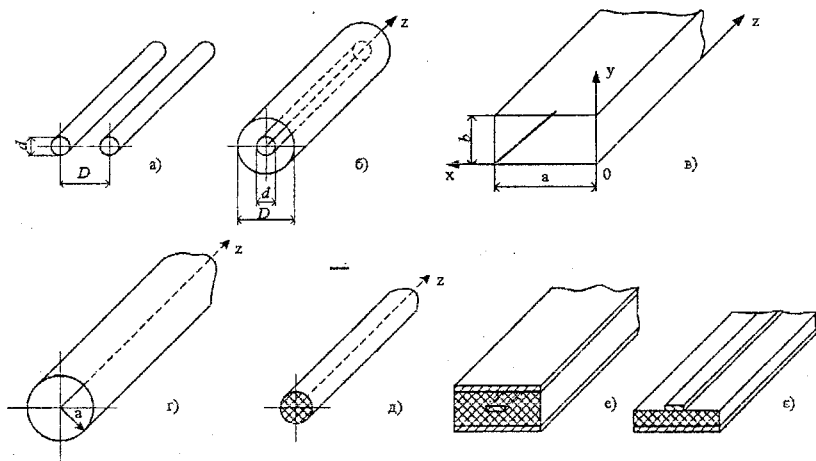


Рисунок 1.1

На рис. 1.1,а зображено двопровідний хвильовід (двопровідна лінія передачі електромагнітної енергії), на рис. 1.1,б – коаксіальний хвильовід (коаксіальна лінія передачі енергії), рис. 1.1,в – прямокутний хвильовід, рис. 1.1,г – циліндричний хвильовід, рис. 1.1,д – діелектричний хвильовід, рис. 1.1,е – смужковий хвильовід (симетрична смужкова лінія передачі), рис. 1.1,є – несиметричний смужковий хвильовід (несиметрична смужкова лінія передачі енергії).

Спрямовані хвилі, що поширюються вздовж хвильоводів, розділяються на поперечні, електричні, магнітні, гібридні та квазі-поперечні.

Поперечні хвилі або Т-хвилі характеризуються тим, що їх поля не мають повздовжніх складових, а мають лише поперечні. Такі хвилі можуть поширюватись у двопровідному та коаксіальному хвильоводах.

Електричні хвилі або Е-хвилі не повинні мати повздовжньої складової вектора $\vec{H}$ і обов'язково мати повздовжню складову вектора $\vec{E}$.

Магнітні хвилі або Н-хвилі не мають повздовжню складову вектора $\vec{E}$ і обов'язково мають повздовжню складову вектора $\vec{H}$.

Хвилі Е та Н типів можуть поширюватись у прямокутному, круглому та коаксіальному хвилеводах.

Гібридними хвилями або ЕН-хвилями називають хвилі, у яких є повздовжні складові і вектора $\vec{E}$, і вектора $\vec{H}$. Такі хвилі можуть поширюватись, наприклад, у діелектричному хвилеводі.

Квазі - поперечні хвилі за своєю структурою дуже близькі до хвиль Т-типу, але мають невеликі повздовжні складові векторів поля. Такі хвилі поширюються в смужкових хвилеводах.

1.2 Двоплощинний хвилевід

Розпочнемо з більш простих задач. Побудуємо картини полів, які виникають біля ідеально-провідної площини при падінні на неї у вакуумі плоскої електромагнітної хвилі. Вектори поля у хвилі, що падає на цю площину, орієнтуються довільно у просторі. Але для спрощення задачі розглянемо два випадки: коли вектор $\vec{E}$ хвилі, що падає, знаходиться у площині падіння і коли цей вектор є перпендикулярним до площини падіння. Очевидно, будь – яке інше положення цього вектора можна подати як суперпозицію цих двох випадків.

Випадок перший. Вектор $\vec{E}$ лежить у площині падіння (рис. 1.2.1)

Плоска хвиля падає на ідеально-провідну площину у напрямку вектора Пойнтінга $\vec{P}$. Фазові фронти цієї хвилі (площини рівних фаз) будуть перпендикулярними до вектора $\vec{P}$. На рисунку показані сліди цих фазових фронтів (суцільні лінії), які за фазами відрізняються від сусідніх на 180° , тобто найкоротша відстань між ними дорівнює половині довжини хвилі $d = \lambda/2$. Тому у сусідніх фазових фронтах хвилі, що падає, вектори $\vec{E}$ та вектори $\vec{H}$ будуть мати протилежні напрямки. Причому, скрізь, вектори $\vec{E}$ знаходяться у площинах фазових фронтів (у площині рисунка) і позначаються стрілочками відповідних напрямків, а вектори $\vec{H}$ - перпендикулярними до площини рисунка, позначеними значком $\odot$ (спрямовані до нас) та $\oplus$ (спрямовані від нас). Взаємне розташування векторів $\vec{P}$, $\vec{E}$ та $\vec{H}$ у кожній точці рисунка відповідає формулі $\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$.

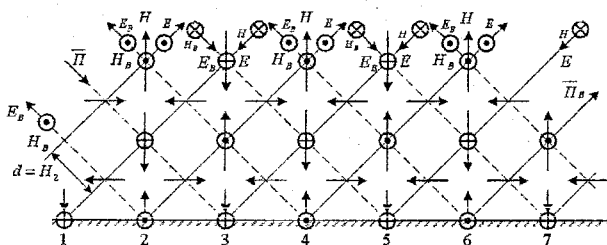


Рисунок 1.2.1

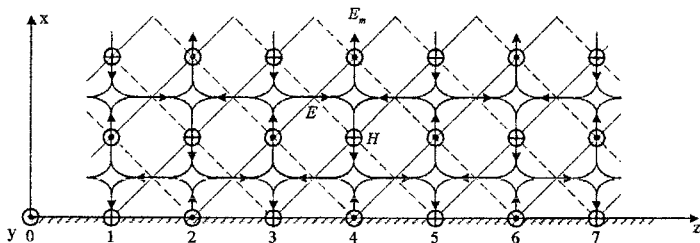


Рисунок 1.2.2

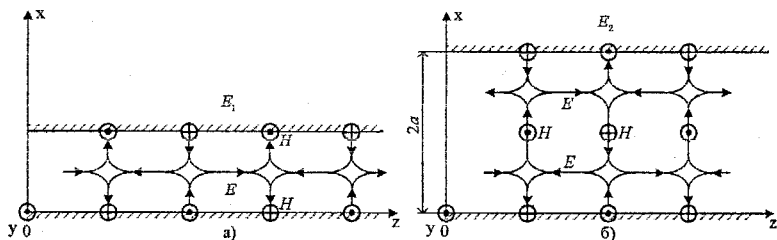


Рисунок 1.2.3

Штриховими лініями позначені сліди фронтів відбитої хвилі, яка спрямована у напрямку вектора Пойнтинга $\overline{\Pi}_B$ відбитої хвилі. На цих лініях (відстань між якими теж дорівнює $\lambda/2$) показане розташування векторів $\overline{E}_B$ та $\overline{H}_B$ відбитої хвилі, де також є відповідність формулі $\overline{\Pi}_B = [\overline{E}_B \cdot \overline{H}_B]$. Враховуючи останню формулу і той факт, що вектор $\overline{H}_B$ має бути скрізь перпендикулярним до площини рисунка, покажемо його напрямок, наприклад, у точці 3. Для цього згадаємо граничні умови для тангенціальної складової вектора $\overline{H}_\tau$ на ідеально провідній поверхні: $\overline{H}_\tau = j_s$ у нашому випадку складова вектора $\overline{H}_\tau$ складається з двох

векторів: $(\vec{H}_\tau = \vec{H}_{e\tau})$ - тангенціальної складової падаючої хвилі та тангенціальної складової відбитої хвилі. Оскільки коефіцієнт відбиття дорівнює одиниці, то $\vec{H}_{e\tau} = \vec{H}_\tau$. Тобто, у цій точці обидва вектори будуть спрямовані в один бік (у даному випадку від нас). Очевидно в усьому фронті відбитої хвилі, якому належить т. 3, вектор $\vec{H}_e$ буде спрямованим так само. Напрямок вектора $\vec{E}_e$ у цьому фронті легко знайти з умови $\vec{P}_e = [\vec{E}_e \cdot \vec{H}_e]$. В будь-яких сусідніх фронтах відбитої хвилі вектори $\vec{E}_e$ та $\vec{H}_e$ будуть мати протилежні напрямки, причому вектори $\vec{E}_e$ скрізь лежатимуть у площині рисунка.

Напрямки результуючих векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ в усіх перехрестях фронтів визначаються як векторні суми $\vec{E} + \vec{E}_e$ та $\vec{H} + \vec{H}_e$, бо це результуюче поле над ідеально провідною поверхнею є результатом інтерференції падаючої хвилі та відбитої хвилі.

Якщо ж у досліджуваному процесі визначити ці векторні суми за умови $d \rightarrow 0$, то картина поля над ідеально провідною площиною буде такою, якою вона зображена на рис. 1.2.2.

У своєму русі плоска електромагнітна хвиля зміщується у правий бік (вздовж осі OZ). Цю вісь будемо називати повздовжньою, тоді, очевидно, осі OX та OY слід називати поперечними. Відповідно і складові (проекції) векторів поля результуючої хвилі будемо називати: E_x, E_y, H_x, H_y - поперечними, а E_z і H_z - повздовжніми.

В побудованій картині поля є такі складові E_x, E_z, H_y , а H_x, E_y та $H_z = 0$. Отже, ця хвиля має повздовжню складову вектора E ($E_z \neq 0$) і не має повздовжньої складової H поля ($H_z = 0$), а тому цю хвилю слід віднести до хвиль E типу (електричних хвиль).

У напрямку осі OX спостерігається певна періодичність. Щоб у ній розібратися, давайте спробуємо «заставити» електромагнітну хвилю рухатися вздовж осі OZ. Для цього на певній відстані від ідеально провідної площини розмістимо другу таку ж саму площину зверху. Таким чином, хвиля, відбиваючись від «підлоги» та «стелі», буде поширюватись у потрібному нам напрямку (вздовж осі OZ).

Відстань між цими площинами має бути такою, щоб не порушилися граничні умови для векторів поля, що збереже структуру поля не порушеною. Найменшою відстанню є відстань a (рис.1.2.3,а), далі відстань $2a$ (рис.1.2.3,б) і т.д. На відстані a вектори поля змінюють свій напрямок на протилежний один раз (одна півхвиля), а тому така хвиля називається хвилею типу E_1 . На рис. 1.2.3,б, очевидно, зображено картину поля хвилі типу E_2 . Через невизначеність поперечного розміру у випадку рис. 1.2.2, кажуть, що йдеться про поля хвилі E_m - типу, де m може приймати значення 1,2,3,...

Спрямовуючі системи, зображені на рис.1.2.3, називаються двоплощинними хвильоводами.

Випадок другий. Вектор E перпендикулярний до площини падіння (рис.1.2.4)

Міркуючи аналогічно першому випадку, легко побудувати картини поля H -хвилі (магнітної хвилі). Відмінність буде полягати у визначенні напрямів векторів поля E_z та H_z у слідах фронтів відбитої хвилі.

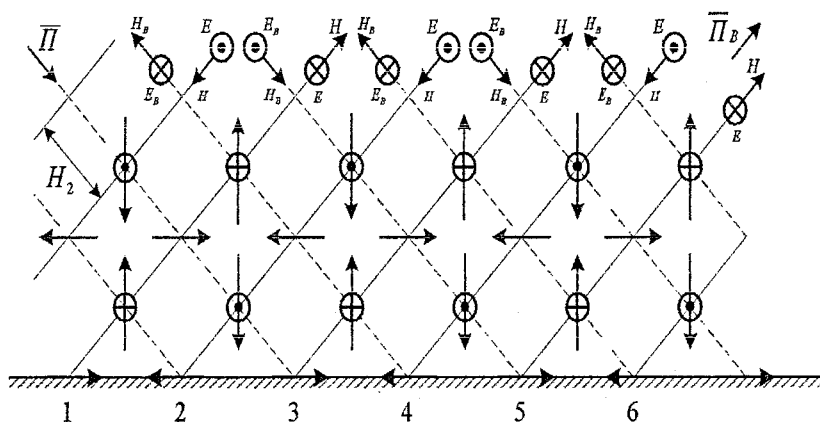


Рисунок 1.2.4

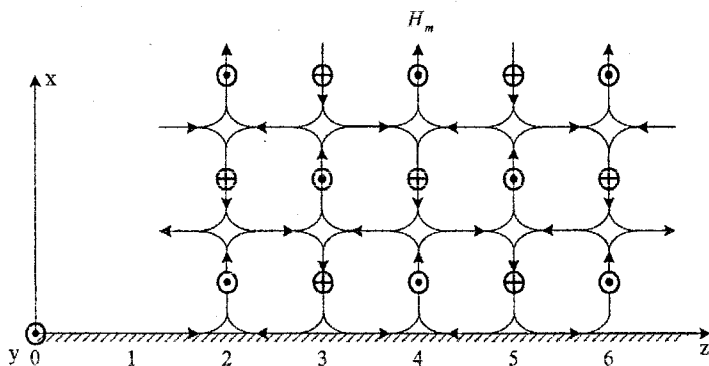


Рисунок 1.2.5

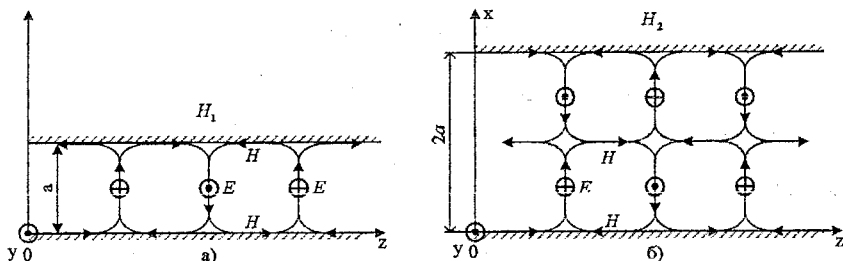


Рисунок 1.2.6

Справа у тому, що хвиля H має лише одну складову E_y , яка при падінні є тангенціальною до ідеально провідної площини. Відомо з граничних умов, що ця складова дорівнює нулю, тобто $\bar{E}_\tau + \bar{E}_{\tau B} = 0$. Звідки $\bar{E}_{\tau B} = -\bar{E}_\tau$. На рис.1.2.5 показана структура поля електромагнітної хвилі типу H_m , на рис.1.2.6 – хвилі типу H_1 і H_2 .

Як бачимо, магнітні складові лінії полів у обох випадках є замкнутими, тобто магнітне поле може бути лише вихровим. Електричне поле (випадок 1-й) проявляє дуалізм, коли воно має і вихровий і потенціальний характер в одній і тій же хвилі (рис.1.2.3,б). в структурі ж хвилі E_1 електричні складові лінії не є замкнутими, тобто електричне поле тут носить чисто потенціальний характер.

1.3 Однорідні рівняння Гельмгольца для спрямованих хвиль. Критична частота

Розглянемо довільну спрямовуючу систему, яка буде відповідати таким вимогам:

- нескінченна довжина, що гарантує поширення в ній лише прямої хвилі (відбиття від кінця системи немає);
- прямолінійна (хвильовод немає згинів);
- стінки є ідеально-провідними (немає втрат в провідниках);
- заповнення є вакуум (немає втрат в діелектрику);
- форма та розміри поперечного перерізу є однаковими на усій довжині системи.

Така ідеалізація спрямовуючої системи (хвильоводу) допоможе нам краще розібратися в задачах, поставлених у цьому підрозділі посібника.

Запишемо однорідні рівняння Гельмгольца для необмеженого вільного простору:

$$\nabla^2 \vec{E}_m + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}_m = 0,$$

$$\nabla^2 \ddot{H}_m + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{H}_m = 0.$$

Оскільки ці рівняння, при відсутності сторонніх джерел, задовольняють вектори напруженості монохроматичних електричного і магнітного полів, будемо шукати частинні розв'язки цих рівнянь для випадку монохроматичних полів, які поширюються вздовж ідеальної спрямовуючої системи. При цьому, очевидно, залежність векторів $\ddot{E}_m$ та $\ddot{H}_m$ від повздовжньої координати Z має описуватись множником $e^{-j\beta_z z}$, де β_z - повздовжнє хвильове число, яке вказує на швидкість зростання фази хвилі у напрямі осі OZ . Отже, розв'язки цих рівнянь можна показати виразами:

$$\ddot{E}_m = \ddot{E}_m(\xi, \eta) \cdot e^{-j\beta_z z}, \quad (1.3.1)$$

$$\ddot{H}_m = \ddot{H}_m(\xi, \eta) \cdot e^{-j\beta_z z}, \quad (1.3.2)$$

де ξ, η - поперечні координати відповідної ортогональної системи координат.

Нагадаємо, що оператор Лапласа ∇^2 (набла квадрат):

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Підставивши (1.3.1) та (1.3.2) у рівняння Гельмгольца, отримаємо рівняння:

$$\nabla_{\perp}^2 \ddot{E}_m + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \beta_z^2) \ddot{E}_m = 0, \quad (1.3.3)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \ddot{H}_m + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \beta_z^2) \ddot{H}_m = 0, \quad (1.3.4)$$

або, позначивши $\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \beta_z^2 = g^2$, матимемо рівняння:

$$\nabla_{\perp}^2 \ddot{E}_m + g^2 \ddot{E}_m = 0, \quad (1.3.5)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \ddot{H}_m + g^2 \ddot{H}_m = 0, \quad (1.3.6)$$

які, як і (1.3.3) - (1.3.6), називаються рівняннями Гельмгольца для спрямованих хвиль, а g - поперечним хвильовим числом.

Повздовжнє хвильове число β_z буде дорівнювати:

$$\beta_z^2 = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - g^2}. \quad (1.3.7)$$

У виразах (1.3.1) та (1.3.2) множник $e^{-j\beta_z z}$ вказує не на те, що хвиля поширюється вздовж хвильоводу. При цьому β_z - повинне бути дійсним числом.

Розглянемо такі можливі випадки:

1. $\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 > g^2$, β_z - дійсне число і хвиля буде поширюватися вздовж осі OZ хвильоводу.

2. $\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = g^2$, $\beta_z = 0$, поширення хвилі неможливе.

3. $\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 < g^2$, β_z - уявне число. Припустимо $\beta_z = -jp$, де p - дійсне число. Тоді множник $e^{-j\beta_z z} = e^{-pz}$ з фазового перетворюється на амплітудний, тобто хвиля швидко згасає вздовж осі OZ і поширюватися не може.

Отже, другий випадок є критичним, тобто умовою припинення поширення хвилі вздовж хвильоводу. Оскільки $\mu_0 \varepsilon_0$ є константами, другий випадок можливий на якійсь певній частоті роботи генератора. Назвемо цю частоту **критичною** і тоді:

$$\omega_{кр}^2 \mu_0 \varepsilon_0 = g^2 \text{ або } \omega_{кр} = \frac{g}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{g \cdot c}, \quad (1.3.8)$$

де $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с - швидкість світла у вакуумі.

Таким чином, умовою поширення хвилі вздовж спрямовуючої системи (хвильоводу) є вираз:

$$\omega_z > \omega_{кр}, \quad (1.3.9)$$

де ω_z - кругова (циклічна) частота генератора хвилі. При $\omega_z = \omega_{кр}$ поширення хвилі у хвильоводі припиняється і при подальшому зменшенні частоти генератора поширення залишається неможливим. Режим роботи хвильоводу при $\omega_z \leq \omega_{кр}$ називається **позакритичним**.

Критичній частоті відповідає **критична довжина хвилі** $\lambda_{кр}$, яку визначаємо, зваживши, що

$$\omega_{кр} = 2\pi f_{кр}: \lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g} \text{ або } g = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}, \quad (1.3.10)$$

а умовою поширення хвилі є:

$$\lambda_z < \lambda_{кр}. \quad (1.3.11)$$

1.4 Порядок визначення складових поля спрямованих хвиль

Для визначення виразів для складових поля спрямованих хвиль потрібно розв'язати векторні рівняння (1.3.5) та (1.3.6), а оскільки кожному з них відповідають три скалярних рівняння, то необхідно розв'язати шість рівнянь. Такий шлях є дуже громіздким. Виберемо інший шлях: розв'яжемо два скалярних рівняння Гельмгольца відносно повздовжніх складових E_z та H_z , а чотири поперечних складових, скориставшись виразами для них, визначимо через знайдені повздовжні складові.

Для отримання таких виразів скористаємося проєкціями 1-го та 2-го векторних рівнянь Максвелла, записаних у диференціальній формі для монохроматичних коливань:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m &= j\omega\epsilon_0 \dot{\vec{E}}_m, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m &= -j\omega\mu_0 \dot{\vec{H}}_m. \end{aligned}$$

Декартова система координат

Проекції на вісь OX :

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial z} = j\omega\epsilon_0 \dot{E}_{mx} \frac{\delta y}{\delta x}, \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_{mx}. \quad (1.4.2)$$

Проекції на вісь OY :

$$\frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = j\omega\epsilon_0 \dot{E}_{my}, \quad (1.4.3)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_{my}. \quad (1.4.4)$$

Оскільки у спрямовуючій системі $\dot{H}_{my} = H_{my}(x, y)e^{-j\beta_z z}$,
 $\dot{H}_{mx} = H_{mx}(x, y)e^{-j\beta_z z}$, $\dot{E}_{my} = E_{my}(x, y)e^{-j\beta_z z}$, $\dot{E}_{mx} = E_{mx}(x, y)e^{-j\beta_z z}$,

складові з похідними за Z можна переписати так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial z} &= -j\beta_z \dot{H}_{my}; & \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial z} &= -j\beta_z \dot{H}_{mx}; \\ \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} &= -j\beta_z \dot{E}_{my}; & \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} &= -j\beta_z \dot{E}_{mx};\end{aligned}$$

тоді вирази (1.4.1) – (1.4.4) матимуть вигляд:

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} + j\beta_z \dot{H}_{my} = j\omega\epsilon_0 \dot{E}_{mx}, \quad j\beta_z \dot{E}_{mx} + \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} = j\omega\mu_0 \dot{H}_{my}; \quad (1.4.5)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} + j\beta_z \dot{E}_{my} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_{mx}, \quad j\beta_z \dot{H}_{mx} + \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = -j\omega\epsilon_0 \dot{E}_{my}. \quad (1.4.6)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1.4.5) відносно $\dot{E}_{mx}$, $\dot{H}_{my}$ та систему (1.4.6) відносно $\dot{E}_{my}$, $\dot{H}_{mx}$, отримаємо:

$$g^2 \dot{E}_{mx} = -j\beta_z \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} - j\omega\mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}, \quad (1.4.7)$$

$$g^2 \dot{H}_{my} = -j\beta_z \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} - j\omega\epsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x}, \quad (1.4.8)$$

$$g^2 \dot{E}_{my} = -j\beta_z \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} + j\omega\mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}, \quad (1.4.9)$$

$$g^2 \dot{H}_{mx} = -j\beta_z \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} + j\omega\epsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y}. \quad (1.4.10)$$

Циліндрична система координат.

Діючи аналогічно, будемо мати:

$$g^2 \dot{E}_{mr} = -j\beta_z \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial r} - j\omega\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \varphi}, \quad (1.4.11)$$

$$g^2 \dot{H}_{m\varphi} = -j\beta_z \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \varphi} - j\omega\epsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial r}, \quad (1.4.12)$$

$$g^2 \dot{E}_{m\varphi} = -j\beta_z \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial \varphi} + j\omega\mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r}, \quad (1.4.13)$$

$$g^2 \dot{H}_{mr} = -j\beta_z \frac{\partial H_{mz}}{\partial r} + j\omega\epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial E_{mz}}{\partial \varphi}. \quad (1.4.14)$$

Оскільки у Е-хвилі складова $H_z = 0$, а у Н-хвилі складова $E_z = 0$, то фактично праві частини виразів для поперечних складових через повздовжні (1.4.7) - (1.4.14) будуть удвічі коротшими для хвиль конкретних типів.

1.5 Дисперсія в хвильоводах

Фазова швидкість, під якою будемо розуміти швидкість руху фазового фронту спрямованої хвилі вздовж осі OZ, визначається за формулою $V_\phi = \frac{\omega}{\beta_z}$, враховуючи (1.3.7) цю формулу перепишемо так:

$$V_\phi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - g^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{g^2 c^2}{(2\pi f)^2}}}.$$

Враховуючи (1.3.10) отримаємо:

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (1.5.1)$$

Якщо хвильвід заповнений діелектриком з параметрами μ, ϵ , то останній вираз слід переписати так:

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (1.5.2)$$

Хвиля, що поширюється вздовж хвильоводу являє собою гармонічне коливання, періодичність якого буде визначатися довжиною хвилі у хвильоводі (фазовою довжиною хвилі): $\lambda_{xe} = V_\phi \cdot T$, де T - період

монохроматичної хвилі $\left(T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}\right)$. Добуток $c \cdot T = \lambda_z$ - довжина хвилі генератора. З урахуванням сказаного вираз (1.5.2) матиме вигляд:

$$\lambda_{xs} = \frac{\lambda_z}{\sqrt{\mu\epsilon - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{kp}}\right)^2}}. \quad (1.5.3)$$

Зваживши те, що групова швидкість $V_{zp} = \frac{1}{\left(\frac{d\beta_z}{d\omega}\right)}$, нескладно отримати формулу для визначення групової швидкості спрямованої хвилі:

$$V_{zp} = c \cdot \sqrt{\mu\epsilon - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{kp}}\right)^2}. \quad (1.5.4)$$

Залежності фазової та групової швидкості від довжини хвилі генератора називається *дисперсними характеристиками* спрямованої хвилі, а саме явище - *дисперсією*. Зауважимо, що у спрямовуючій системі на відміну від необмеженого простору дисперсія має місце і при відсутності втрат, про що свідчить вираз (1.5.1).

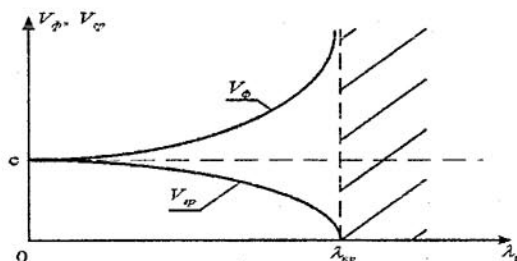


Рисунок 1.5.1

Як впливає з виразу (1.5.1) та рис. 1.5.1 фазова швидкість спрямованої хвилі завжди перевищує швидкість світла і при $\lambda_z = \lambda_{kp}$ вона стає нескінченно великою. Групова ж швидкість при наближенні λ_z до λ_{kp} зменшується до нуля.

Пояснимо це, скориставшись концепцією парціальних хвиль. У двоплощинному хвилеводі, наприклад, парціальна плоска хвиля

поширюється вздовж хвильоводу, відбиваючись від нижньої та верхньої ідеально провідних площин. Нехай парціальна плоска хвиля, збуджена у точці O (рис.1.5.2), зі швидкістю c прямує до верхньої площини хвильоводу і падає на неї у точці A під кутом φ . За одну секунду фронт Φ цієї хвилі, залишаючись перпендикулярним до вектора її швидкості c , переміститься на відстань OK . Отже, довжина відрізка OK дорівнює довжині вектора фазової швидкості хвилі (швидкості переміщення фронту хвилі вздовж хвильоводу, яку будемо називати швидкістю хвилі у хвильоводі) V_Φ .

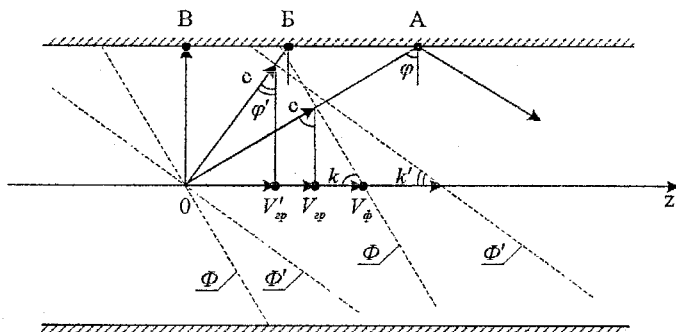


Рисунок 1.5.2

Енергія хвилі за цей час вздовж хвильоводу зі швидкістю V_Φ (групова швидкість), пройде відстань, яка дорівнюватиме довжині проекції вектора c на вісь OZ .

Розглянувши прямокутні трикутники, можемо записати:

$$V_\Phi = \frac{c}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}; \quad V_{ep} = c \cdot \sin \varphi = c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}. \quad (1.5.5)$$

Порівнявши вирази (1.5.1) з (1.5.5) для V_Φ та (1.5.4) з (1.5.5) для V_{ep} при $\mu\epsilon = 1$:

$$V_\Phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}; \quad V_{ep} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{кр}}\right)^2} = c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi};$$

маємо право записати: $\cos \varphi = \frac{\lambda_z}{\lambda_{кр}}$.

Якщо довжина хвилі генератора λ'_2 буде більшою за λ_2 , то відношення $\frac{\lambda'_2}{\lambda_{кр}}$ стане більшим, значить кут падіння ϕ' має бути меншим від ϕ (хвиля падатиме крутіше). На рис.1.5.2 хвиля падає у точку B , фазовий фронт ϕ' за одну секунду пройде шлях OK' , і фазова швидкість хвилі зросте до значення $V_{\phi}' > V_{\phi}$. Групова ж швидкість зменшиться до значення $\lambda'_{2p} < \lambda_{2p}$.

Коли ж довжина хвилі генератора досягне значення $\lambda_2 = \lambda_{кр}$, кут падіння на верхню площину хвилеводу дорівнюватиме нулю, тобто хвиля падатиме перпендикулярно до стінки у точку B . Фазовий фронт цієї хвилі буде паралельним осі OZ і їх перетин відбудеться на нескінченно великій відстані від точки $O(V_{\phi} = \infty)$.

Групова швидкість дорівнюватиме нулю ($\lambda_{2p} = 0$). Тобто, хвиля буде відбиватися від стінок хвилеводу, рухаючись лише у поперечному напрямку без переміщення вздовж хвилеводу. Таким чином критичну довжину хвилі у хвилеводі можна визначити як таку, *при якій припиняється поширення хвилі у хвилеводі*. Умовою ж можливості поширення цієї хвилі є нерівність:

$$\lambda_2 < \lambda_{кр} \text{ або } \omega_2 > \omega_{кр}. \quad (1.5.6)$$

1.6 Хвильовий опір хвилеводу

Для електромагнітних хвиль E типу ($E_z \neq 0; H_z = 0$) у спрямовуючій системі, наприклад, у двошлосинному хвилеводі, вирази (1.4.7) - (1.4.10) переписуться так:

$$g^2 \dot{E}_{mx} = -j\beta_z \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x}, \quad (1.6.1)$$

$$g^2 \dot{H}_{my} = -j\omega\varepsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x}, \quad (1.6.2)$$

$$g^2 \dot{E}_{my} = -j\beta_z \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y}, \quad (1.6.3)$$

$$g^2 \dot{H}_{mx} = j\omega\varepsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y}. \quad (1.6.4)$$

Введемо вектор $\dot{\vec{E}}_{\perp} = \bar{x}_0 \dot{\vec{E}}_{mx} + \bar{y}_0 \dot{\vec{E}}_{my}$, тоді з урахуванням виразів (1.6.1) - (1.6.4) маємо:

$$g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = -j\beta_z \left(\bar{x}_0 \frac{\partial \dot{\vec{E}}_{mz}}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial \dot{\vec{E}}_{mz}}{\partial y} \right) = -j\beta_z \text{grad}_{\perp} \dot{\vec{E}}_{mz}, \quad (1.6.5)$$

$$g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = -j\omega\varepsilon_0 \left(-\bar{x}_0 \frac{\partial \dot{\vec{E}}_{mz}}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial \dot{\vec{E}}_{mz}}{\partial y} \right) = -j\omega\varepsilon_0 \left[\bar{z}_0 \text{grad}_{\perp} \dot{\vec{E}}_{mz} \right]. \quad (1.6.6)$$

Визначивши $\text{grad}_{\perp} \dot{\vec{E}}_{mz}$ з виразу (1.6.5) і підставивши його у вираз (1.6.6), отримаємо:

$$\dot{\vec{H}}_{\perp} = \frac{\omega\varepsilon_0}{\beta_z} \left[\bar{Z}_0 \dot{\vec{E}}_{\perp} \right]. \quad (1.6.7)$$

Тобто, вектори $\dot{\vec{E}}_{\perp}$ і $\dot{\vec{H}}_{\perp}$ у хвиль типу E є взаємно перпендикулярними. Тоді вираз (1.6.7) можна переписати у скалярному вигляді:

$$\dot{H}_{\perp} = \frac{\omega\varepsilon_0}{\beta_z} \dot{E}_{\perp},$$

$$\text{або } \frac{\dot{E}_{\perp}}{\dot{H}_{\perp}} = \frac{\beta_z}{\omega\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 \mu_0 \varepsilon_0 - g^2}}{\omega\varepsilon_0} = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\omega\varepsilon_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{cp}} \right)^2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{cp}} \right)^2} = \bar{Z}_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{cp}} \right)^2},$$

де $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ - хвильовий опір вакууму, який заповнює хвилевід ($Z_0 = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}$).

Відношення поперечної складової електричного поля $\dot{\vec{E}}_{\perp}$ до поперечної складової магнітного поля $\dot{\vec{H}}_{\perp}$ називається *хвильовим опором хвилеводу* Z_{hx} . Отже, хвильовий опір хвилеводу з хвилею Е-типу Z_{ex}^E буде дорівнювати:

$$Z_{ex}^E = \bar{Z}_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{cp}} \right)^2}. \quad (1.6.8)$$

У випадку, коли хвилевід заповнений діелектриком з параметрами μ, ϵ , то

$$Z_{ax}^E = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{kp}} \right)^2}, \quad (1.6.9)$$

де

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}.$$

Для електромагнітних хвиль Н-типу ($E_z = 0$; $H_z \neq 0$) з рівнянь (1.6.7) – (1.6.9) матимемо:

$$g^2 \dot{E}_{mx} = -j\omega\mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}, \quad (1.6.10)$$

$$g^2 \dot{H}_{my} = -j\beta_z \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}, \quad (1.6.11)$$

$$g^2 \dot{E}_{my} = j\omega\mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}, \quad (1.6.12)$$

$$g^2 \dot{H}_{mx} = -j\beta_z \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}. \quad (1.6.13)$$

Діючи аналогічно попередньому випадку (випадку для хвиль Е-типу), з урахуванням виразів (1.6.10) - (1.6.13) матимемо:

$$Z_{ax}^H = \frac{\omega\mu_0}{\beta_z} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{kp}} \right)^2}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{kp}} \right)^2}}, \quad (1.6.14)$$

або

$$Z_{ax}^H = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{kp}} \right)^2}}, \quad (1.6.15)$$

коли хвилевід заповнений діелектриком з хвильовим опором Z_c .

1.7 Прямокутний хвилевід

Прямокутний хвилевід, який є представником спрямовуючих систем, являє собою металеву трубу прямокутного перерізу. У такому хвилеводі можуть поширюватися хвилі E та H типів.

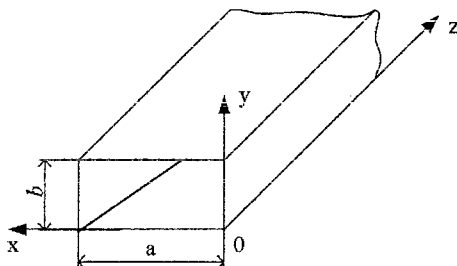


Рисунок 1.7.1

Розмістимо хвилевід у декартові системі координат, як це показано на рис. 1.7.1.

1.7.1 Хвилі електричного типу

Складові поля E хвиль будемо визначати за порядком, викладеним у підрозділі 1.4. Запишемо рівняння Гельмгольца для спрямованих хвиль (1.3.5), яке у даному випадку буде таким:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial y^2} + g^2 \dot{E}_{mz} = 0. \quad (1.7.1)$$

Розв'яжемо це рівняння, розділивши змінні за методом Фур'є. Для цього його розв'язок подамо у вигляді добутку:

$$\dot{E}_{mz} = X(x) \cdot Y(y) \cdot e^{-j\beta_z z}, \quad (1.7.2)$$

де $X = X(x)$ - є функція лише координат x ,

$Y = Y(y)$ - функція лише координат y .

Підставивши (1.7.2) в (1.7.1) і розділивши отриманий результат на $X \cdot Y \cdot e^{-j\beta_z z}$, матимемо:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = -g^2, \quad (1.7.3)$$

де x та y – незалежні змінні, що і дало право нам замінити частинні похідні на повні.

У лівій частині рівняння (1.7.3) маємо суму двох функцій, які є незалежними одна від одної. Сума цих функцій дорівнює сталій величині g^2 . Це можливо, коли кожна з них буде дорівнювати своїй сталій величині, тобто:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -g_x^2, \text{ та } \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = -g_y^2, \quad (1.7.4)$$

$$\text{де } g_x^2 + g_y^2 = g^2.$$

Перепишемо рівняння (1.7.4) у такому вигляді:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + g_x^2 X = 0 \text{ та } \frac{d^2 Y}{dy^2} + g_y^2 Y = 0. \quad (1.7.5)$$

Як відомо з курсу вищої математики, такі лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами мають загальні розв'язки вигляду:

$$\begin{aligned} X &= A \cdot \cos g_x x + B \cdot \sin g_x x, \\ Y &= C \cdot \cos g_y y + D \cdot \sin g_y y. \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Після підстановки (1.7.6) в (1.7.2) для повздовжньої складової $\dot{E}_{mz}$ хвилі матимемо:

$$\dot{E}_{mz} = (A \cdot \cos g_x x + B \cdot \sin g_x x) \cdot (C \cdot \cos g_y y + D \cdot \sin g_y y) e^{-j\beta_z z}. \quad (1.7.7)$$

Виходячи з граничних умов для $\dot{E}_{mz}$ на стінках хвильоводу (ця складова є тангенціальною до них) запишемо:

$$1) \text{ при } x=0: \quad \dot{E}_{mz} = A \cdot (C \cdot \cos g_y y + D \cdot \sin g_y y) e^{-j\beta_z z} = 0.$$

У цьому виразі один зі співмножників має дорівнювати нулю при будь-яких значеннях y та z . Це можливо лише коли $A=0$, а отже:

$$\dot{E}_{mz} = B \cdot \sin g_x x \cdot (C \cdot \cos g_y y + D \cdot \sin g_y y) e^{-j\beta_z z}.$$

$$2) \text{ при } x=a: \dot{E}_{mz} = B \cdot \sin g_x a \cdot (C \cdot \cos g_y y + D \cdot \sin g_y y) e^{-j\beta_z z} = 0.$$

Що можливо при $\sin g_x a = 0$. Звідки $g_x a = m\pi$ ($m=0, 1, 2, \dots$) і

$$g_x = \frac{m\pi}{a}, \quad (1.7.8)$$

$$\text{а отже} \quad \dot{E}_{mz} = B \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot (C \cdot \cos g_y y + D \cdot \sin g_y y) e^{-j\beta_z z}.$$

$$3) \text{ при } y=0: \dot{E}_{mz} = B \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot C \cdot e^{-j\beta_z z} = 0, \quad \text{звідки } C=0 \quad \text{і}$$

$$\dot{E}_{mz} = B \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot D \cdot \sin g_y y \cdot e^{-j\beta_z z} = 0.$$

$$4) \text{ при } y=b: \dot{E}_{mz} = B \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot D \cdot \sin g_y b \cdot e^{-j\beta_z z} = 0, \quad \text{звідки } \sin g_y b = 0, \\ g_y b = n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \text{і}$$

$$g_y = \frac{n\pi}{b}, \quad (1.7.9)$$

$$\text{а отже} \quad \dot{E}_{mz} = B \cdot D \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z}.$$

Оскільки розмірність добутку довільних коефіцієнтів інтегрування, як бачимо з останнього виразу, збігається з розмірністю $\dot{E}_{mz}$, введемо позначення $B \cdot D = E_{oz}$ і тоді:

$$\dot{E}_{mz} = E_{oz} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} = 0 \quad (1.7.10)$$

Поперечні складові знайдемо, скориставшись формулами (1.6.1) – (1.6.4):

$$\dot{E}_{mx} = -j \frac{\beta_z}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} = -j E_{oz} \cdot \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_z z},$$

$$\begin{aligned}\dot{E}_{my} &= -j \frac{\beta_z}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} = -j E_{oz} \cdot \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{\epsilon} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) e^{-j\beta_z z}, \\ \dot{H}_{mx} &= j \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} = j E_{oz} \cdot \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{\epsilon} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) e^{-j\beta_z z}, \\ \dot{H}_{my} &= -j \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} = -j E_{oz} \cdot \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) e^{-j\beta_z z}.\end{aligned}$$

Таким чином, вирази для комплексних амплітуд складових поля Е-хвилі у прямокутному хвилеводі мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned}\dot{E}_{mx} &= -j E_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{my} &= -j E_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{\epsilon} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{mz} &= E_{oz} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{mx} &= j E_{oz} \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{\epsilon} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{my} &= -j E_{oz} \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{mz} &= 0\end{aligned}\right\} \quad (1.7.11)$$

Як відомо з виразу (1.3.10) $\lambda_{xp} = \frac{2\pi}{g}$. Зваживши, що $g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$, $g_x = \frac{m\pi}{a}$, $g_y = \frac{n\pi}{\epsilon}$ вираз для критичної довжини хвилі Е типу у прямокутному хвилеводі матиме вигляд:

$$\lambda_{xp} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{\epsilon}\right)^2}}. \quad (1.7.12)$$

З виразів (1.7.11) випливає, що структура поля Е хвиль у площині поперечного перерізу прямокутного хвилеводу відповідає структурі

стоячих хвиль. Число m дорівнює кількості півхвиль, які розміщуються вздовж стінки a , n – числу півхвиль, що розміщуються вздовж стінки b . Кожній парі чисел m і n відповідає певна структура електромагнітного поля, яке позначається через E_{mn} . Якщо, наприклад $m=1$ і $n=1$, то мова йде про поле типу E_{11} .

1.7.2 Хвилі магнітного типу

Для такого типу хвиль необхідно повздовжню складову поля визначити, розв'язавши рівняння (1.3.6), після проектування його на вісь OZ :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial y^2} + g^2 \dot{H}_{mz} = 0. \quad (1.7.13)$$

Діючи аналогічно до попереднього випадку (знаходження $\dot{E}_{mz}$), знаходимо вираз для $\dot{H}_{mz}$:

$$\dot{H}_{mz} = (A \cdot \cos g_x x + B \cdot \sin g_x x) \cdot (C \cdot \cos g_y y + D \cdot \sin g_y y) e^{-j\beta_z z}. \quad (1.7.14)$$

Для знаходження коефіцієнтів інтегрування A, B, g_x, g_y скористуємось виразами (1.4.7) та (1.4.9) для магнітних хвиль $\left(\dot{E}_{mz} = 0, \dot{H}_{mz} \neq 0 \right)$ і запишемо пропорції:

$$\dot{E}_{mx} \sim \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} \quad \text{та} \quad \dot{E}_{my} \sim \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}.$$

1) при $y=0$ (нижня стінка хвилеводу):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{mx} \sim \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} \bigg|_{y=0} &= (A \cos g_x x + B \sin g_x x) \cdot (-g_y C \sin g_y y + g_y D \cos g_y y) e^{-j\beta_z z} \bigg|_{y=0} = \\ &= (A \cos g_x x + B \sin g_x x) g_y \cdot D \cdot e^{-j\beta_z z} = 0, \end{aligned}$$

звідки $D=0$.

2) при $y = b$ (верхня частина хвилеводу):

$$\dot{E}_{mx} \sim \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} \bigg|_{y=b} = (A \cos g_x x + B \sin g_x x) \cdot (-g_y) C \sin g_y b \cdot e^{-j\beta_z z} = 0,$$

звідки $\sin g_y b = 0$; $g_y b = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); $g_y = \frac{n\pi}{b}$.

3) при $x = 0$ (права стінка хвилеводу):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{mx} \sim \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} \bigg|_{x=0} &= \left(-g_x A \sin g_x x + B \cos g_x x \right) \cdot \left(C \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cdot e^{-j\beta_z z} \right) \bigg|_{x=0} = \\ &= g_x \cdot B \cdot C \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cdot e^{-j\beta_z z} = 0, \end{aligned}$$

звідки $B = 0$.

4) при $x = a$ (ліва стінка хвилеводу):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{my} \sim \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} \bigg|_{x=a} &= (-g_x) A \sin g_x x C \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cdot e^{-j\beta_z z} \bigg|_{x=a} = \\ &= -(-g_x) \cdot A \sin g_x a \cdot C \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cdot e^{-j\beta_z z} = 0, \end{aligned}$$

звідки $\sin g_x a = 0$, $g_x a = m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), $g_x = \frac{m\pi}{a}$.

Як бачимо, вирази для поперечних чисел g_x та g_y збігаються з попереднім випадком, а отже, критична довжина хвилі у випадку магнітних хвиль має визначитися також за формулою (1.7.12). Зміст індексів m і n теж збігається тому, що у випадку хвиль E_{mn} наприклад, у випадку хвилі H_{11} , вздовж розмірів a і b розміщується по одній півхвилі.

Вираз для повздовжньої складової $\dot{H}_{mz}$ буде таким:

$$\dot{H}_{mz} = H_{oz} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta_z z}.$$

Аналогічно до попереднього випадку електричної хвилі, поперечні складові знайдемо, підставивши у вирази (1.4.7) - (1.4.10) $\dot{E}_{mx} = 0$ та $\dot{H}_{mz}$ з (1.7.4):

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mx} &= jH_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{my} &= jH_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{mz} &= H_{oz} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{mx} &= +jH_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{my} &= -jH_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{mz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7.16)$$

1.7.3 Умови існування хвиль різних типів у прямокутному хвилеводі

Щоб хвиля заданого типу могла поширюватись у заданому хвилеводі, необхідно виконати умову (1.3.11), яку, з урахуванням (1.7.12), можна переписати так:

$$\lambda_z < \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (1.7.17)$$

Судячи з виразу (1.7.11) для хвиль електричного типу, індекси m або n не можуть дорівнювати нулю. Тобто, у прямокутному хвилеводі не можливе існування хвиль типу E_{on} або E_{mo} .

Для хвиль:

$$H_{10} \rightarrow \lambda_{кр} = 2a,$$

$$H_{20} \rightarrow \lambda_{кр} = a,$$

$$H_{01} \rightarrow \lambda_{кр} = 2b,$$

$$H_{11} \text{ та } E_{11} \rightarrow \lambda_{кр} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ і т.д.}$$

На практиці найпоширенішими є прямокутні хвильоводи, у яких $a \approx 2b$. Наприклад, $a \times b = 23 \times 10 \text{ мм}$, або $72 \times 34 \text{ мм}$.

Найбільшу критичну довжину хвилі має хвиля H_{10} , далі H_{20} , H_{01} , H_{11} з E_{11} .

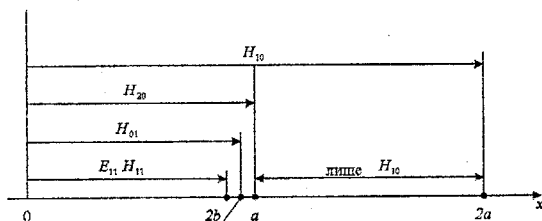


Рисунок 1.7.2

На рис.1.7.2 показані межі довжин хвиль генератора, при яких можуть існувати декілька типів хвиль або мод (від англ. mode – тип хвилі). Та мода, яка має найбільшу критичну довжину хвилі називається основною модою (основним типом хвиль, основною хвильою). Серед хвиль електричного типу основною є хвиля E_{11} , серед магнітних хвиль – H_{10} , остання є основною і в прямокутному хвильоводі.

Якщо у хвильоводі існують одночасно дві і більше мод, то такий хвильовід, кажуть, працює у багатомодовому режимі (є багатомодовим хвильоводом). Покажемо, за яких умов прямокутний хвильовід буде в одномодовому режимі, тобто у ньому зможе поширюватися лише основна хвиля H_{10} .

Умовою її існування є $\lambda_c < 2a$, умовою відсутності найближчої до неї моди $H_{20} \rightarrow \lambda_c \geq a$, тобто:

$$2a > \lambda_2 \geq a. \quad (1.7.18)$$

Відсутність моди H_{01} гарантується умовою: $\lambda_2 \geq 2b$. Можна сформулювати і зворотню задачу: якими мають бути поперечні розміри прямокутного хвильоводу, щоб при заданому діапазоні довжин хвиль генератора у хвильоводі забезпечувався одномодовий режим роботи.

Припустимо $\lambda_z = \lambda_{\min} \dots \lambda_{\max}$. Тоді умова існування хвилі H_{10} буде такою:

$$2a > \lambda_{\max}, \quad a > \frac{\lambda_{\max}}{2}.$$

Відсутність хвилі H_{20} вимагає, щоб $a < \lambda_{\min}$, а відсутність $H_{01} \rightarrow b \leq \frac{\lambda_{\min}}{2}$. Отже: $\frac{\lambda_{\max}}{2} < a \leq \lambda_{\min}; \quad b \leq \frac{\lambda_{\min}}{2}$.

1.8 Аналітичний метод побудови картини поля хвилі H_{10} у прямокутному хвильоводі

Для визначення виразів складових поля хвилі H_{10} в (1.7.16) покладемо $m=1; n=0$ і отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mx} &= jH_{oz} \frac{\beta_z \pi}{g^2 a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{my} &= 0 \\ \dot{H}_{mz} &= H_{oz} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{mx} &= 0 \\ \dot{E}_{my} &= -jH_{oz} \frac{\omega \mu_a \pi}{g^2 a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{mz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.8.1)$$

Отже, хвиля H_{10} у прямокутному хвильоводі має лише три складових поля: E_y, H_x, H_z . Знайдемо вирази для миттєвих значень цих векторів поля.

Комплекси відповідних векторів поля знайдемо, помноживши комплексні амплітуди (1.8.1) на $e^{j\omega t}$:

$$\dot{H}_x = jH_{oz} \frac{\beta_z \pi}{g^2 a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - \beta_z z)},$$

$$\dot{H}_z = H_{oz} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - \beta_z z)},$$

$$\dot{E}_y = -jH_{oz} \frac{\omega \mu_a \pi}{g^2 a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - \beta_z z)}.$$

Застосувавши до останніх виразів символічну операцію виділення дійсної частини, отримаємо:

$$\dot{H}_x = -H_{oz} \frac{\beta_z \pi}{g^2 a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - \beta_z z),$$

$$\dot{H}_z = H_{oz} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - \beta_z z),$$

$$\dot{E}_y = H_{oz} \frac{\omega \mu_a \pi}{g^2 a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - \beta_z z).$$

Для моменту часу $t=0$, отримані вирази переписуться так:

$$\dot{H}_x = -H_{oz} \frac{\beta_z \pi}{g^2 a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\beta_z z), \quad (1.8.2)$$

$$\dot{H}_z = H_{oz} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\beta_z z), \quad (1.8.3)$$

$$\dot{E}_y = H_{oz} \frac{\omega \mu_a \pi}{g^2 a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\beta_z z). \quad (1.8.4)$$

Як бачимо з (1.8.2) - (1.8.4), складові поля є гармонічними функціями координат x та z і від координати y не залежать. Множники, які передують гармонічним функціям, мають розмірності відповідних складових поля і відображають їх амплітудне значення. Ввівши позначення:

$$H_{oz} \frac{\beta_z \pi}{g^2 a} = H_m; \quad H_{oz} = H_m; \quad H_{oz} \frac{\omega \mu_a \pi}{g^2 a} = E_m,$$

вирази для миттєвих значень складових поля хвилі H_{10} перепишемо у такому вигляді:

$$H_X(x, z) = H_m \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\beta_z z), \quad (1.8.5)$$

$$H_Z(x, z) = H_m \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\beta_z z), \quad (1.8.6)$$

$$E_Y(x, z) = -E_m \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\beta_z z). \quad (1.8.7)$$

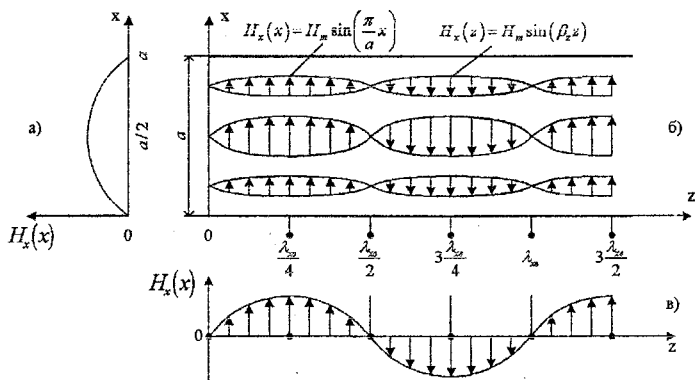


Рисунок 1.8.1

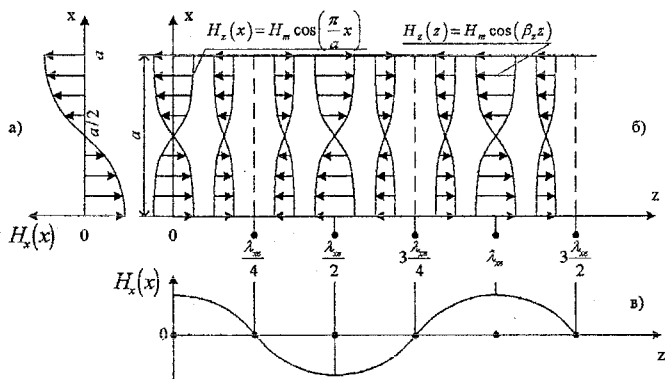


Рисунок 1.8.2

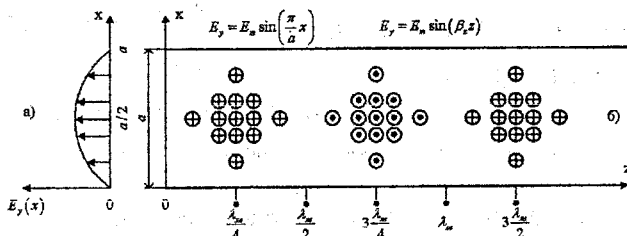


Рисунок 1.8.3

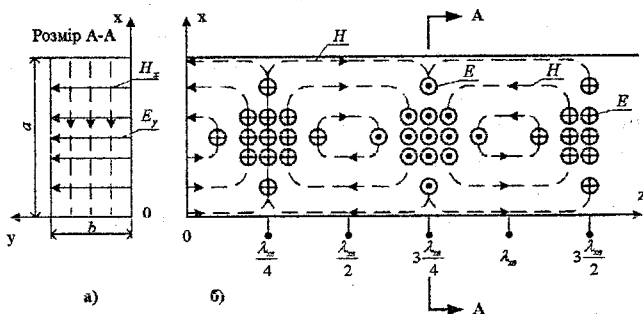


Рисунок 1.8.4

На рис.1.8.1,а зображено епюру залежності складової H_x від координати x . На рис.1.8.1,б – розташування H_x та характер її залежності від координати x та z . На рис.1.8.1,в – епюру залежності складової H_x від координати z .

На рис.1.8.2 зображені епюри залежності H_z від координати x (а), координати z (в) та розташування H_z у хвильоводі.

На рис.1.8.3 показано розташування складової E_y у хвильоводі (б) та епюру залежності її від координати x .

На рис.1.8.4 показана структура поля (картина поля) хвилі H_{10} у поперечному (а) та повздовжньому перерізах прямокутного хвильоводу.

Оскільки повздовжнє хвильове число:

$$\beta_z = \frac{2\pi}{\lambda_{xs}}; H_x(z=0)=0; H_x\left(z=\frac{\lambda_{xs}}{4}\right)=H_m; H_x\left(z=\frac{\lambda_{xs}}{2}\right)=0$$

і т.д., що і видно з рис.1.8.1,б і в.

Відповідно: $H_z(z=0)=H_m$; $H_z\left(z=\frac{\lambda_{xs}}{4}\right)=0$; $H_z\left(z=\frac{\lambda_{xs}}{2}\right)=H_m$ і

т.д., (див. рис.1.8.2,б і в).

Максимумів E_m і нулів поперечна складова E_y досягає при таких самих значеннях, що і поперечна складова H_x .

Аналогічно можуть бути визначені аналітичні вирази для строгої побудови картин поля будь-яких типів хвиль, які можуть існувати у прямокутному хвилеводі.

1.9 Нестрога методика побудови картин поля E_{mn} та H_{mn} у прямокутному хвилеводі

Ця методика побудови картин поля носить нестрогий, а скоріше мнемонічний характер і будується на таких відомих положеннях:

- 1) у хвиль електричного типу магнітне поле розташоване тільки у поперечній площині; ці хвилі мають повздовжню складову E_z , орієнтовану вздовж хвилеводу;
- 2) у хвиль магнітного типу електричне поле розташоване тільки у поперечній площині; ці хвилі мають повздовжню складову H_z , орієнтовану вздовж хвилеводу;
- 3) біля поверхні ідеального металу не існує тангенціальна складова електричного поля; електричні силові лінії є перпендикулярними (нормальними) до поверхні металу;
- 4) магнітні силові лінії є замкнутими і підходять тангенціально до металу;
- 5) магнітні та електричні силові лінії у будь-якій точці поля є взаємно перпендикулярними;
- 6) індекс m у типі хвилі показує кількість півхвиль, що розміщуються між стінками хвилеводу у напрямку осі OX ;
- 7) індекс n у типі хвилі показує кількість півхвиль, що розміщуються між стінками хвилеводу у напрямку осі OY .

Користуючись цими положеннями, побудуємо картину поля хвилі H_{10} у прямокутному хвилеводі. Оскільки магнітні хвилі мають лише поперечні складові електричного поля, тобто вони у поперечному перерізі хвилеводу зображаються у натуральну величину, слід починати побудову саме з цієї проекції.

У хвилі H_{10} є лише одна електрична складова E_y , яка вздовж сторони a утворює одну півхвилю, залишаючись перпендикулярною до верхньої і нижньої стінок хвилеводу. Згідно з граничними умовами, вектор E_y має дорівнювати нулю при $x=0$ та $x=a$, а, отже, буде мати максимальне значення посередині при $x=\frac{a}{2}$ (рис.1.9.1).

Вздовж напрямку OY (вздовж сторони b) вектор E_y залишається незмінним. У цьому ж перерізі хвилеводу будемо бачити і горизонтальну складову магнітного поля H_x , яка має бути перпендикулярною до E_y . Магнітні складові поля будемо зображати штриховими лініями. Оскільки досліджувальна хвиля є магнітною, вона має ще й повздовжню складову H_z , у яку плавно має перейти поперечна складова H_x і утворити разом замкнуту лінію. Цей перехід з утворенням замкнутої лінії магнітного поля зображено на рис. 1.8.4,б та рис. 1.9.1,б.

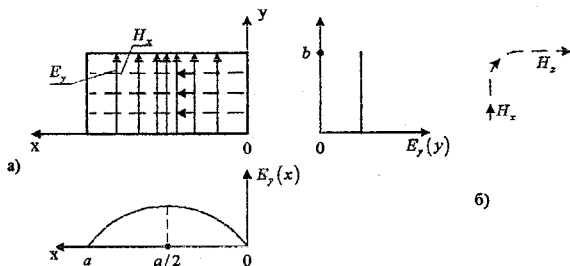


Рисунок 1.9.1

На рис. 1.9.2 показані картини полів декількох хвиль з малими значеннями індексів m та n : H_{20} , H_{11} та E_{11} . Нагадаємо, що починаючи побудову картини поля будь-якої хвилі слід з поперечного перерізу і для силових ліній тих складових, які є лише поперечними. Тобто, для Е-хвиль починають з вектора $\vec{E}$, для Н-хвиль - з вектора $\vec{H}$.

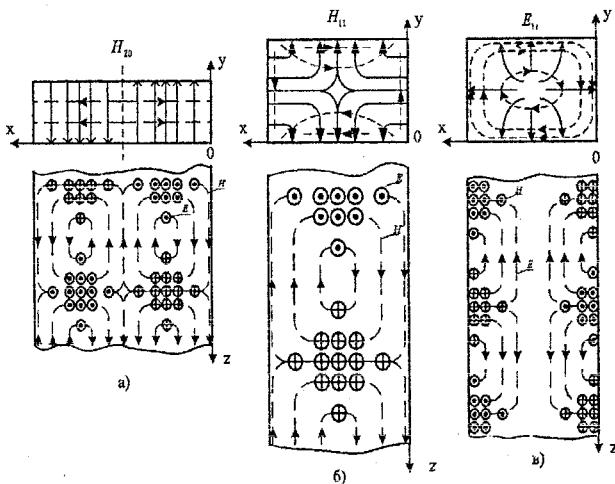


Рисунок 1.9.2

При переході, наприклад, від хвилі H_{10} до хвилі H_{20} картина поля у напрямку x подвоюється (порівняйте рис 1.9.1,а та 1.9.2,а). аналогічне подвоєння у напрямку x (подвоївся перший індекс) бачимо з порівняння рис 1.9.2,б з 1.9.3,а, рис. 1.9.2,в з 1.9.3,б.

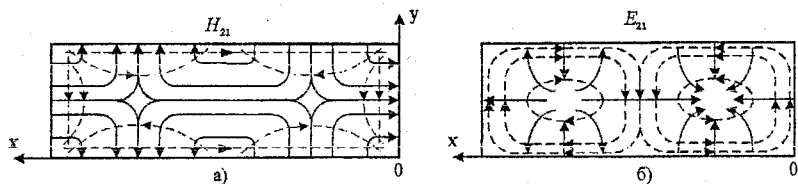


Рисунок 1.9.3

При зростанні удвічі других індексів (перехід до хвиль E_{22} та H_{22}) подвоїлись би картинки у напрямку y , зображені на рис. 1.9.3.

1.10 Круглий хвилевід

Круглий (циліндричний) хвилевід, у якому можуть поширюватись хвилі E та H типів, являє собою металеву круглу трубу (циліндр). При аналізі круглих циліндричних хвилеводів доцільно використовувати циліндричну систему координат, розташувавши їх так, як показано на рис. 1.10.1.

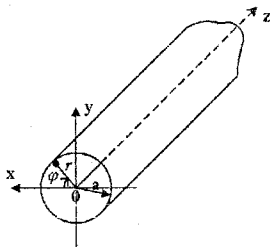


Рисунок 1.10.1

1.10.1 Хвилі електричного типу

Запишемо рівняння Гельмгольца для хвиль електричного типу циліндричної системи координат:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{E}_{mz} = 0. \quad (1.10.1)$$

Розв'яжемо рівняння (1.10.1) методом розділення змінних за Фур'є. Покладемо, що

$$\dot{E}_{mz} = R \cdot \Phi \cdot e^{-j\beta_z z}, \quad (1.10.2)$$

де $R = R(r)$, $\Phi = \Phi(\varphi)$.

Помножимо (1.10.1) на r^2 , підставимо у нього (1.10.2) і розділимо отриманий результат на $e^{-j\beta_z z}$. Тоді отримаємо:

$$\Phi r^2 \frac{\partial R}{\partial r^2} + \Phi r \frac{\partial R}{\partial r} + R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + g^2 r^2 R \Phi = 0.$$

Розділимо останнє рівняння на $R \cdot \Phi$ і отримаємо:

$$\left(\frac{r^2}{R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + g^2 r^2 \right) + \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1.10.3)$$

Три перших доданки у виразі (1.10.3) є функціями лише координати r (у дужках), а четвертий – функцією координати φ . Оскільки r і φ є незалежними змінними, то у останньому виразі маємо суму двох взаємно незалежних функцій, яка дорівнює нулю. Це можливо, коли кожна з цих функцій буде дорівнювати одному і тому ж постійному числу, але взятим з протилежними знаками:

$$\frac{r^2}{R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + g^2 r^2 = m^2, \quad \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2.$$

Якщо перше з цих рівнянь помножити на $\frac{R}{r^2}$, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + \left(g^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (1.10.4)$$

Помноживши друге на Φ , матимемо:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (1.10.5)$$

Розв'язком рівняння (1.10.5), як відомо з математики, є функція:

$$\Phi = A_1 \cos(m\varphi) + B_1 \sin(m\varphi) = A \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

де $A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, $\varphi_0 = \arctg \frac{B_1}{A_1}$.

Оскільки при дослідженні поширення хвиль в круглому хвилеводі вибір початку відліку φ є довільним, покладемо $\varphi_0 = 0$ і тоді:

$$\Phi = A \cos(m\varphi). \quad (1.10.6)$$

Число m може приймати значення 0, 1, 2, 3,...

Рівняння (1.10.4) досліджувалось німецьким математиком Бесселем. Показано, що його розв'язком є функція:

$$R = C_1 I_m(gr) + D_1 N_m(gr), \quad (1.10.7)$$

де $I_m(gr)$ - функція Бесселя 1-го роду m -го порядку,

$N_m(gr)$ - функція Бесселя 2-го роду m -го порядку (її ще називають функцією Неймана m -го порядку).

Порядок цих функцій визначає той же коефіцієнт m , який входить у вираз (1.10.6). Число m визначає кількість варіацій поля вздовж координатної лінії φ циліндричної системи координат, у якій розглядається спрямовуюча система (хвилевід).

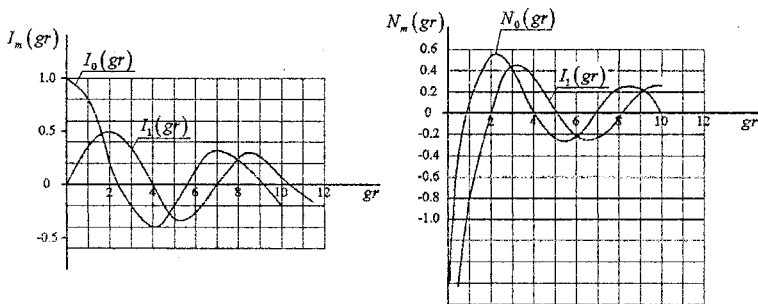


Рисунок 1.10.2

На рис 1.10.2 показані графіки функцій $I_m(gr)$ та $N_m(gr)$ при $m=0$ та $m=1$. Координати точок перетину цих кривих з віссю абсцис є коренями відповідних функцій.

Як бачимо, при $r=0$, $(gr=0)$, в усіх точках хвилеводу, які лежать на осі OZ , $N_m(0) \rightarrow -\infty$. Тобто, функція R , а отже і E_{mz} є нескінченно великими, що суперечить здоровому глузду, бо з точки зору фізики поле може мати лише скінченні значення його складових. Таким чином, при дослідженні процесів у круглих хвилеводах у розв'язку (1.10.7) маємо покласти $D_1=0$. Тоді його вигляд буде таким:

$$R = C_1 I_m(gr). \quad (1.10.8)$$

Підставивши (1.10.6) та (1.10.8) у вираз (1.10.2), отримаємо:

$$\dot{E}_{mz} = AC_1 I_m(gr) \cdot \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z} = E_{oz} I_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z}, \quad (1.10.9)$$

де E_{mz} є дотичною (тангенціальною) до стінок хвилеводу і при $r=a$ дорівнює нулю, тобто при $r=a$ $\dot{E}_{mz} = E_{oz} I_m(ga) \cos(m\varphi) = 0$, звідки

$$I_m(ga) = 0 \quad (1.10.10)$$

та

$$ga = v_{mn}, \quad (1.10.11)$$

де v_{mn} - корінь функції Бесселя першого роду m - го порядку за номером n . З виразу (1.10.11) маємо:

$$g = \frac{v_{mn}}{a}. \quad (1.10.12)$$

Значення кореня можна визначити з графіків для функцій $I_m(gr)$ або з таблиці (див. довідник з вищої математики), фрагмент якої показано таблицею 1.10.1.

Таблиця 1.10.1

n	m		
	0	1	2
1	2,405	3,832	5,135
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,174	11,620
...	...	...	...

З урахуванням (1.10.12), вираз (1.10.9) переписеться так:

$$\dot{E}_{mr} = E_{oz} I_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \quad (1.10.13)$$

Підставивши (1.10.13) у вирази (1.10.11) (1.10.14) при $\dot{H}_{mz} = 0$ (поле електричного типу), отримаємо вирази для складових полів хвиль типів E_{mn} у циліндричному (круглому) хвилеводі:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mr} &= -j \frac{\beta_z}{g} \cdot E_{oz} \cdot I_m' \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{m\varphi} &= j \frac{\beta_z}{g^2 r} \cdot E_{oz} \cdot m \cdot I_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{mz} &= E_{oz} \cdot I_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{mr} &= -j \frac{\omega \varepsilon_a m}{g^2 r} \cdot E_{oz} \cdot I_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{m\varphi} &= -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} \cdot E_{oz} \cdot I_m' \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{mz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.10.14)$$

Повздовжнє хвильове число β_z визначається за формулою (1.3.7):

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{v_{mn}}{a} \right)^2} \quad (1.10.15)$$

Згідно з (1.3.10) для хвиль типу E_{mn} у циліндричному хвилеводі:

$$\lambda_{кр}^E = \frac{2\pi a}{v_{mn}} \quad (1.10.16)$$

їх фазова швидкість, виходячи з (1.5.2), дорівнюватиме:

$$V_{\phi}^R = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{кр}^E}\right)^2}}, \quad (1.10.17)$$

а хвильовий опір, з урахуванням (1.6.9):

$$Z_{x\phi}^E = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{кр}^E}\right)^2}.$$

1.10.2 Хвилі магнітного типу

У таких хвилях тангенціальними до стінок хвильоводу будуть складові $\dot{E}_{m\phi}$, які через $\dot{H}_{mz} \left(\dot{E}_{mz} = 0 \right)$ можна виразити формулою (1.4.13):

$$\dot{E}_{m\phi} = j \frac{\omega \mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r}.$$

Вираз для $\dot{H}_{mz}$ знайдемо, розв'язавши рівняння Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \phi^2} + g^2 \dot{H}_{mz} = 0. \quad (1.10.18)$$

Оскільки це рівняння за конструкцією збігається з рівнянням (1.10.1), то і розв'язок рівняння (1.10.18) за конструкцією збігається з виразом (1.10.13):

$$\dot{H}_{mz} = H_{oz} I_m(g r) \cos(m\phi) e^{-j\beta_z z}. \quad (1.10.19)$$

Скориставшись тим, що складова $\dot{E}_{m\phi}$ є тангенціальною до циліндричної стінки хвильоводу, то при $r=a$ вона дорівнюватиме нулю і

$$\dot{E}_{m\phi}(r=a) = j \frac{\omega \mu_a}{g} H_{oz} I_m'(ga) \cos(m\phi) e^{-j\beta_z z} = 0,$$

$$I'_m(ga) = 0, \quad ga = \mu_{mn}, \quad g = \frac{\mu_{mn}}{a}, \quad (1.10.20)$$

де μ_{mn} – n -й корінь першої похідної функції Бесселя $I'_m(gr)$ першого роду m -го порядку.

Графіки $I'_m(gr)$ схожі на графіки $I_m(gr)$, розглянуті вище. В таблиці 1.10.2 наведені значення коренів декількох перших похідних функцій Бесселя $I'_m(gr)$.

Таблиця 1.10.2

n	m		
	0	1	2
1	3,832	1,840	3,054
2	7,016	5,335	6,705
3	10,174	8,536	9,965
..	...	...	...

З урахуванням (1.10.20) вираз для $\dot{E}_{mz}$ можна переписати так:

$$\dot{H}_{mz} = j \frac{\omega \mu_a}{g} H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z}. \quad (1.10.21)$$

Підставивши (1.10.21) в рівняння (1.4.11) – (1.4.14) при $\dot{E}_{mz} = 0$ матимемо вирази для складових хвиль типу H_{mn} у круглому циліндричному хвилеводі:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mr} &= -j \frac{\beta_z}{g} \cdot H_{oz} \cdot I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{m\varphi} &= j \frac{\beta_z m}{gr} \cdot H_{oz} \cdot I_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{H}_{mz} &= H_{oz} I_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{mr} &= j \frac{\omega \mu_a m}{g^2 r} \cdot H_{oz} \cdot I_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{m\varphi} &= j \frac{\omega \mu_a}{g} \cdot H_{oz} \cdot I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \\ \dot{E}_{mz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 1.10.22$$

Повздовжнє хвильове число β_z визначається за формулою (1.3.7):

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2}. \quad (1.10.23)$$

Відповідно до (1.3.10) для хвиль типу H_{mn} у циліндричному хвилеводі:

$$\lambda_{kp}^H = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}. \quad (1.10.24)$$

Їх фазова швидкість, виходячи з (1.5.2), дорівнюватиме:

$$V_\Phi^H = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{kp}^H}\right)^2}}, \quad (1.10.25)$$

а хвильовий опір, з урахуванням (1.6.15):

$$Z_{xs}^H = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{kp}^H}\right)^2}}. \quad (1.10.26)$$

1.11 Побудова картин поля хвиль E_{mn} та H_{mn} у циліндричному хвилеводі

Побудову будемо здійснювати за наближеною методикою, наведеною у підрозділі 1.9. Нагадаємо попередньо, що перший індекс m вказує на кількість варіацій поля вздовж координатної лінії φ , яка у використаній системі координат є колом. Другий індекс n , очевидно, визначає кількість варіацій поля вздовж координати r (вздовж радіусу поперечного перерізу хвилеводу). Зазначимо, що в прямокутному хвилеводі кількість варіацій поля завжди збігається з кількістю півхвиль. У

циліндричному хвильоводі варіація поля може збігатися як з півхвилею, так і з чвертьхвилею. Все залежить від структури поля конкретної хвилі.

Розпочнемо побудову з хвиль E_{01} та H_{01} , у яких відповідно немає варіацій (змін поля) H_φ складової та E_φ складової. Судячи по рівняннях (1.10.14) та (1.10.22) в циліндричному хвильоводі жодна з хвиль не можуть мати нульовим другий індекс, тобто хвилі E_{m0} та H_{m0} існувати не можуть.

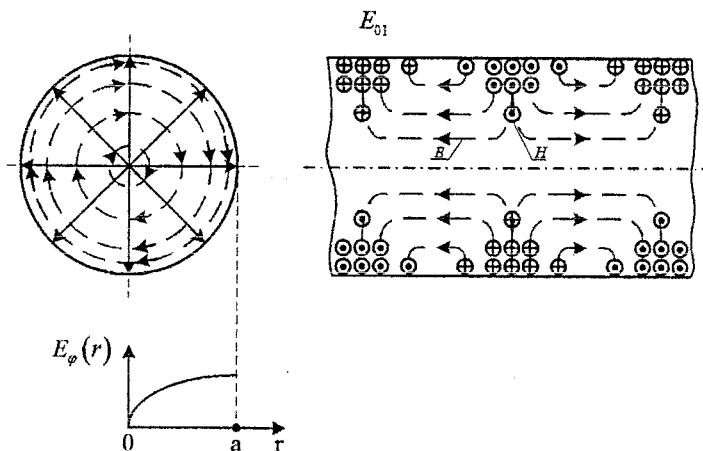


Рисунок 1.11.1

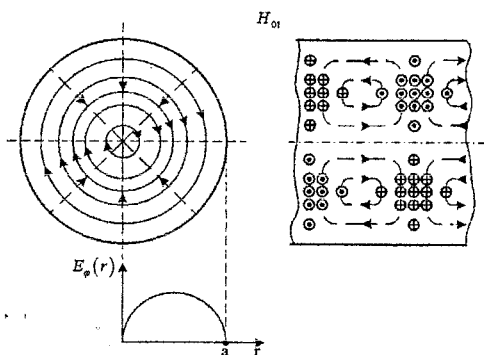


Рисунок 1.11.2

Хвиля E_{01} ($m=0$) не має варіацій вздовж координати φ (рис.1.11.1), тобто в поперечному перерізі силові лінії магнітного поля є концентричними колами. Вздовж радіуса є одна варіація ($n=1$), яка (рис.1.11.3) збігається з чвертьхвилею залежності $H\varphi(r)$. Хвиля H_{01} також не має варіацій вздовж координати φ , силові лінії електричного поля теж утворюють концентричні кола. Але вздовж радіуса вкладається півхвиля залежності $E\varphi(r)$, як видно з рис.1.11.2, хвиля H_{11} має по одній варіації вздовж координати φ та r .

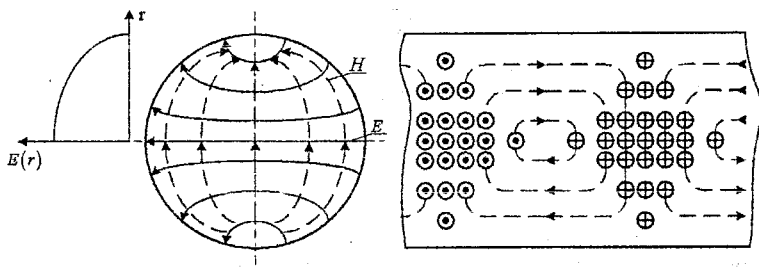


Рисунок 1.11.3

Як бачимо, вздовж радіуса вектор E має максимум при $r=0$ і дорівнює нулю при $r=a$, варіація збігається з чвертьхвилею. Вздовж координатної лінії φ цей самий вектор (при зміні φ від 0 до π) має максимум при $r=a/2$ і мінімум на обох кінцях цього інтервалу, варіація збігається з півхвилею.

Судячи по формулах (1.10.16), (1.10.24) та таблицях 1.10.1, 1.10.2, найдовшу критичну довжину хвилі має хвиля типу H_{11} :

$$\lambda_{kp}^{H_{11}} = \frac{2\pi a}{1.840} = 3.41a,$$

вона і є основною модою у круглому циліндричному хвилеводі.

Серед хвиль електричного типу найбільшу довжину хвилі має хвиля E_{01} :

$$\lambda_{kp}^{E_{01}} = \frac{2\pi a}{2.405} = 2.61a.$$

1.12 Коаксіальний хвилевід

Круглий коаксіальний хвилевід (або просто коаксіальний хвилевід) будемо розглядати у циліндричній системі координат (рис.1.12.1).

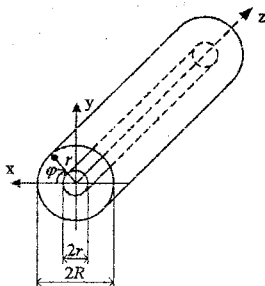


Рисунок 1.12.1

Такий хвилевід є двопровідною лінією передачі електромагнітної енергії. Два циліндричних провідники, зовнішній радіусом R і внутрішній - r мають спільну вісь OZ .

Ці два провідники розділені діелектриком без втрат з параметрами μ , ϵ . У такому хвилеводі можуть поширюватись як Т-хвилі (поперечні), так і Е та Н-хвилі.

Поширення Е та Н хвиль відбувається шляхом багатократного відбиття поля від внутрішньої поверхні зовнішнього провідника (труби) й зовнішньої поверхні внутрішнього провідника (стрижня), аналогічно тому, як це відбувається у прямокутному чи круглому циліндричному хвилеводах.

Оскільки коаксіальний хвилевід має цілий ряд корисних особливостей саме при поширенні у ньому хвилі Т-типу, у подальшому зупинимося саме на цьому випадку.

1.12.1 Т-хвилі

Через те, що у хвилях типу Т відсутні повздовжні складові поля ($E_z = H_z = 0$), вирази (1.4.11) – (1.4.14) перепишуться таким чином:

$$g^2 \dot{E}_{mr} = 0; \quad g^2 \dot{H}_{m\phi} = 0; \quad g^2 \dot{E}_{m\phi} = 0; \quad g^2 H_{mr} = 0.$$

Оскільки усі ці чотири складові не можуть дорівнювати нулю, витікає, що поперечне хвильове число $g=0$, а критична довжина хвилі

такого поля $\lambda_{\text{кр}}^T = \infty$. Це означає, що по коаксіальному хвилеводу може поширюватися хвиля будь-якої низької частоти, включаючи постійний струм. В усіх цих випадках структура поля буде однією і тією ж самою у поперечному перерізі.

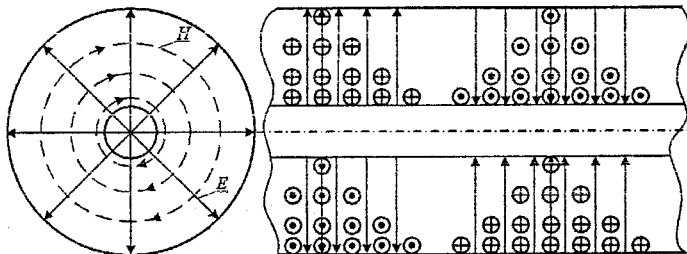


Рисунок 1.12.1

Отже, хвилі Т-типу у круглому коаксіальному хвилеводі мають дві складових поля: E_r та H_φ .

Оскільки $\lambda_{\text{кр}}^T = \infty$, то дисперсія у такому хвилеводі буде відсутня, згідно з формулою (1.5.2)

$$\lambda_{\text{хв}} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\mu\epsilon - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\mu\epsilon}},$$

де λ_2 - довжина хвилі генератора, виміряна у вільному просторі (вакуумі). Сухе повітря Земної атмосфери має $\mu \approx 1$ і $\epsilon \approx 1$, а тому у коаксіальному хвилеводі, заповненому таким повітрям, $\lambda_{\text{хв}} = \lambda_2$.

Повернувшись до (1.4.11) – (1.4.14), бачимо, що для хвилі Т-типу цими виразами скористатися не можливо. А тому для визначення складових поля Т-хвилі у коаксіальному хвилеводі звернемося до 1-го рівняння Максвелла, записаного для комплексних амплітуд в інтегральній формі:

$$\oint_L \vec{H}_m d\vec{l} = \dot{I}_m. \quad (1.12.2)$$

Під струмом I_m у даному випадку слід розуміти електричний струм, який протікає по центральному провіднику хвилеводу. Електромагнітна Т

хвиля поширюється вздовж осі OZ хвилеводу зі швидкістю світла у середовищі, що заповнює хвилевід. З такою самою швидкістю має поширюватись і електричний струм вздовж хвилеводу. Вважаючи втрати у хвилеводі відсутніми, стала поширення k дорівнює коефіцієнту фази β . Змінення фази вздовж осі OZ підпорядковане закону $e^{-j\beta z}$. Отже, струм, який протікає вздовж хвилеводу:

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{mz} = \dot{I}_m e^{-j\beta z}. \quad (1.12.3)$$

Цей струм збуджує вихрове магнітне поле навколо центрального провідника з напруженістю $\dot{H}_{m\varphi}$. Підставивши (1.12.3) у вираз (1.12.2) отримаємо:

$$\oint_L \dot{H}_{m\varphi} \overline{dl} = \dot{I}_{m0} e^{-j\beta z}. \quad (1.12.4)$$

Або, оскільки $\overline{dl}$ і $\dot{H}_m$ є векторами спрямованими в один бік, $\dot{H}_{m\varphi} \overline{dl} = \dot{H}_{m\varphi} dl$. Довжина елементарної дуги dl контуру L дорівнює $dl = r \cdot d\varphi$.

З урахуванням цих міркувань вираз (1.12.4) можна переписати таким чином:

$$\int_0^{2\pi} \dot{H}_{m\varphi} r \cdot d\varphi = \dot{I}_{m0} e^{-j\beta z}.$$

Як бачимо з рис.1.12.1, магнітне поле не має варіацій (не змінюється) вздовж координати φ , то $\dot{H}_{m\varphi}$ можна винести за знак інтегрування, і тоді:

$$\dot{H}_{m\varphi} \cdot r \cdot 2\pi = \dot{I}_{m0} e^{-j\beta z}, \text{ звідки } \dot{H}_{m\varphi} = \frac{\dot{I}_{m0}}{2\pi r} e^{-j\beta z}. \quad (1.12.5)$$

Вираз (1.12.5) визначає магнітну складову електромагнітного поля у коаксіальному хвилеводі Т-хвилі.

Електричну складову поля визначимо, скориставшись першим рівнянням Максвелла при відсутності втрат, записаним у диференціальній формі:

$$\text{rot } \dot{\vec{H}}_m = j\omega\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m, \text{ звідки } \dot{\vec{E}}_m = \frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \text{rot } \dot{\vec{H}}_m. \quad (1.12.6)$$

Скориставшись виразом для $\text{rot } \dot{\vec{H}}_m$ у циліндричній системі координат, запишемо:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m = & \frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \left\{ \bar{r}_0 \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\dot{H}_{m\varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot \dot{H}_{m\varphi} \right) \right] + \right. \\ & + \bar{\varphi}_0 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\dot{H}_{mr} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{H}_{mz} \right) \right] + \\ & \left. + \bar{z}_0 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \dot{H}_{m\varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\dot{H}_{mr} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки $\dot{\vec{H}}_m = \bar{\varphi}_0 \dot{H}_{m\varphi} \left(\dot{H}_{mr} = \dot{H}_{mz} = 0 \right)$, останній вираз

перепишеться так:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m = & \frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \left\{ \bar{r}_0 \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot \dot{H}_{m\varphi} \right) \right] + \bar{z}_0 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \dot{H}_{m\varphi} \right) \right] \right\} = \\ = & \frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \left\{ \bar{r}_0 \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{I}_{om}}{2\pi} e^{-j\beta z} \right) \right] + \bar{z}_0 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{I}_{om}}{2\pi} e^{-j\beta z} \right) \right] \right\} = \quad (1.12.7) \\ = & \bar{r}_0 \frac{\beta}{\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{\dot{I}_{om}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z}. \end{aligned}$$

Відношення $\frac{\beta}{\omega\varepsilon_a}$, пам'ятаючи що при відсутності втрат $\beta = k = \omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}$, дорівнюватиме:

$$\frac{\beta}{\omega\varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = Z_c,$$

де, нагадаємо, Z_c - хвильовий опір середовища, яке заповнює хвилевід.

З виразу (1.12.7) випливає, що у поля Т-хвилі у коаксіальному хвильоводі є лише одна радіальна складова електричного поля:

$$\vec{\dot{E}}_m = r_0 \vec{\dot{E}}_{mr}, \text{ де } \vec{\dot{E}}_{mr} = Z_c \frac{\dot{I}_{om}}{2\pi r} e^{-j\beta z}. \quad (1.12.8)$$

Для практики має велике значення хвильовий опір круглого коаксіального хвильоводу з хвилею Т. Під цим опором будемо розуміти відношення комплексної амплітуди напруги $\dot{U}_m$ до комплексної амплітуди струму $\dot{I}_m$ у довільному перерізі коаксіальної лінії передачі.

Оскільки $\dot{U}_m$ є напругою між зовнішнім провідником (радіусом R) та внутрішнім провідником (радіусом r), знаходимо її як інтеграл у межах $r < \rho < R$ від $\vec{\dot{E}}_{mr}$:

$$\dot{U}_m = \int_r^R \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_{om}}{2\pi r} e^{-j\beta z} d\rho = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_{om}}{2\pi r} \cdot \ln \frac{R}{r} e^{-j\beta z}.$$

Тоді хвильовий опір:

$$Z_{xs}^T = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}, \text{ або } Z_{xs}^T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{R}{r}. \quad (1.12.9)$$

Якщо заповненням хвильоводу є сухе атмосферне повітря ($\mu_a \approx \mu_0$, $\epsilon_a = \epsilon_0$), то вираз (1.12.9) перепишеться так:

$$Z_{xs}^T = 60 \ln \frac{R}{r}.$$

На практиці широко використовуються гнучкі круглі коаксіальні хвильоводи, які називаються *коаксіальними кабелями*. Ці кабелі випускаються промисловістю і мають хвильові опори: 50, 75, 100, 150... Ом. У побуті ми користуємося кабелями марки РК75 (75 Ом), наприклад, при з'єднанні приймальної антени з телевізором.

Вони являють собою одно, або багатожильний внутрішній провідник і циліндричний, плетений з тонкого мідного дроту, зовнішній провідник, або екран, які розділені високочастотним діелектриком, який дозволяє кабель перегинати, що створює зручності при його використанні. Розрахувати його хвильовий опір можна за формулою (1.12.9), поклавши $\mu_a = \mu_0$ (немагнітний діелектрик) та $\epsilon_a = \epsilon \cdot \epsilon_0$:

$$Z_{x\theta}^T = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{R}{r},$$

де ϵ - відносна діелектрична проникність діелектрика.

1.13 Діелектричний хвилевід

За приклад такого хвилеводу візьмемо нескінченно довгий, круглий циліндричний стрижень радіусом R , виготовлений з діелектрика з параметрами $\mu_{a1} = -\mu_0$; ϵ_{a1} , і, який знаходиться у необмеженому середовищі з параметрами μ_0 , ϵ_0 (на практиці це сухе повітря). Аналіз будемо проводити у циліндричній системі координат (рис. 1.13.1).

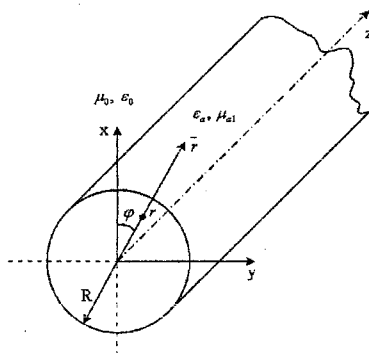


Рисунок 1.13.1

Вирази для повздовжніх складових $\dot{E}_{mz}$ та $\dot{H}_{mz}$ повинні задовольняти рівняння Гельмгольца для полів як всередині стрижня, так і у навколишньому середовищі. Для поля всередині стрижня такими рівняннями є:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{mz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}^{(1)}}{\partial \varphi^2} + g_1^2 \dot{E}_{mz}^{(1)} = 0, \quad (1.13.1)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}^{(1)}}{\partial \varphi^2} + g_1^2 \dot{H}_{mz} = 0. \quad (1.13.2)$$

де поперечне хвильове число

$$g_1 = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_{a1} - \beta_z^2}. \quad (1.13.3)$$

Для поля у насколишньому середовищі:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{mz}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}^{(0)}}{\partial \varphi^2} + g_0^2 \dot{E}_{mz} = 0, \quad (1.13.4)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}^{(0)}}{\partial \varphi^2} + g_0^2 \dot{H}_{mz} = 0. \quad (1.13.5)$$

Де поперечне хвильове число

$$g_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \beta_z^2}. \quad (1.13.6)$$

Загальними розв'язками рівнянь (1.13.1) та (1.13.2) є функції, які збігаються за конструкціями з функціями (1.10.9) та (1.10.19) а саме:

$$\dot{E}_{mz}^{(1)} = E_{oz}^{(1)} I_m(g_1 r) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z} \quad (1.13.7)$$

та

$$\dot{H}_{mz}^{(1)} = H_{oz}^{(1)} I_m(g_1 r) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z}. \quad (1.13.8)$$

Поза циліндром, де структура поля відповідає структурі поверхневої хвилі, амплітуди полів мають зменшуватись експоненціально у напрямку від бічної поверхні стрижня. Цю вимогу задовольняють функції Ханкеля другого роду від чисто уявного аргументу:

$$E_m^{(0)}(g_0 r) = E_m^{(0)}(-jp_0 r), \quad H_m^{(0)}(g_0 r) = H_m^{(0)}(-jp_0 r).$$

Тому розв'язки рівнянь (1.13.3) та (1.13.4) слід записати у такому вигляді:

$$\overset{\bullet}{E}_{mz}^{(0)} = E_{oz}^{(0)} H_m^{(0)}(g_0 r) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z}, \quad (1.13.9)$$

$$\overset{\bullet}{H}_{mz}^{(0)} = H_{oz}^{(0)} H_m^{(0)}(g_0 r) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z}. \quad (1.13.10)$$

Поперечні складові електричного і магнітного полів визначимо підстановкою (1.13.5) - (1.13.8) в співвідношення (1.4.11) - (1.4.14); У тілі діелектричного стрижня:

$$\overset{\bullet}{E}_{mr}^{(1)} = \left[-j \frac{\beta_z}{g_1} \cdot E_{oz}^{(1)} I'_m(g_1 r) + j \frac{\omega \mu_a}{g_1^2 r} m I_m(g_1 r) \sin(m\varphi) \right] e^{-j\beta_z z}, \quad (1.13.11)$$

$$\overset{\bullet}{H}_{m\varphi}^{(1)} = \left[j \frac{\beta_z m}{g_1^2 r} \cdot H_{oz}^{(1)} I_m(g_1 r) \sin(m\varphi) - \right. \\ \left. - j \frac{\omega \varepsilon_a}{g_1} E_{oz}^{(1)} I'_m(g_1 r) \cos(m\varphi) \right] e^{-j\beta_z z}, \quad (1.13.12)$$

$$\overset{\bullet}{E}_{m\varphi}^{(1)} = \left[j \frac{\beta_z m}{g_1^2 r} \cdot E_{oz}^{(1)} I_m(g_1 r) \sin(m\varphi) + \right. \\ \left. + j \frac{\omega \mu_a}{g_1} H_{oz}^{(1)} I'_m(g_1 r) \cos(m\varphi) \right] e^{-j\beta_z z}, \quad (1.13.13)$$

$$\overset{\bullet}{H}_{mr}^{(1)} = \left[-j \frac{\beta_z}{g_1} \cdot H_{oz}^{(1)} I'_m(g_1 r) - \right. \\ \left. - j \frac{\omega \varepsilon_a}{g_1^2 r} m E_{oz}^{(1)} I_m(g_1 r) \sin(m\varphi) \right] e^{-j\beta_z z}. \quad (1.13.14)$$

Поза діелектриком:

$$\overset{\bullet}{E}_{nr}^{(0)} = \left[-j \frac{\beta_z}{g_0} \cdot E_{oz}^{(0)} H'_m(g_0 r) \cos(m\varphi) + \right. \\ \left. + j \frac{\omega \mu_a}{g_0^2 r} m H_{oz}^{(0)}(g_0 r) \sin(m\varphi) \right] e^{-j\beta_z z}, \quad (1.13.15)$$

$$\dot{H}_{m\varphi}^{(0)} = \left[j \frac{\beta_z m}{g_0^2 r} \cdot H_{oz}^{(0)} H_m(g_0 r) \sin(m\varphi) - \right. \\ \left. - j \frac{\omega \varepsilon_a}{g_0} E_{oz}^{(0)} H'_m(g_0 r) \cos(m\varphi) \right] e^{-j\beta_z z}, \quad (1.13.16)$$

$$\dot{E}_{m\varphi}^{(0)} = \left[j \frac{\beta_z m}{g_0^2 r} \cdot E_{oz}^{(0)} H_m(g_0 r) \sin(m\varphi) + \right. \\ \left. + j \frac{\omega \mu_a}{g_0} H_{oz}^{(0)} H'_m(g_0 r) \cos(m\varphi) \right] e^{-j\beta_z z}, \quad (1.13.17)$$

$$\dot{H}_{mr}^{(0)} = \left[-j \frac{\beta_z}{g_0} \cdot H_{oz}^{(0)} H'_m(g_0 r) \cos(m\varphi) - \right. \\ \left. - j \frac{\omega \varepsilon_a m}{g_0^2 r} E_{oz}^{(0)} H_m(g_0 r) \sin(m\varphi) \right] e^{-j\beta_z z}. \quad (1.13.18)$$

На межі розділення двох середовищ ($r=R$) тангенціальні складові електричного і магнітного полів мають бути неперервними, чому відповідатиме запис:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m\varphi}^{(1)}(R) &= \dot{E}_{m\varphi}^{(0)}(R), & \dot{E}_{mz}^{(1)}(R) &= \dot{E}_{mz}^{(0)}(R) \\ \dot{H}_{m\varphi}^{(1)}(R) &= \dot{H}_{m\varphi}^{(0)}(R), & \dot{H}_{mz}^{(1)}(R) &= \dot{H}_{mz}^{(0)}(R) \end{aligned} \right\}. \quad (1.13.19)$$

Якщо підставити вирази (1.13.7) – (1.13.10) та (1.13.12), (1.13.13), (1.13.16), (1.13.17) в систему (1.13.19), замість g_1 та g_0 , вирази (1.13.3) та (1.13.6), відповідно, отримаємо трансцендентне рівняння відносно поперечного хвильового числа β_z . Розв'язавши його числовим чи графічним способом знайдемо β_z і вираз для фазової швидкості у діелектричному хвилеводі.

Наведемо кінцеві результати цього аналізу :

- у діелектричному хвилеводі може існувати нескінченно велика кількість типів хвиль, які матимуть різний характер змінення поля по координатах r та φ ;

- у діелектричному хвилеводі не можуть окремо існувати E та H хвилі за винятком хвиль типу E_{on} та H_{on} , які можуть існувати окремо одні без одних;

- в діелектричному хвилеводі має місце дисперсія;

- основною модою у діелектричному хвилеводі є хвиля типу EH_{11} , критична довжина хвилі якої нескінченно велика, а отже, може поширюватися у хвилеводі на будь-якій частоті генератора;

- в діелектричному хвилеводі фазова швидкість хвиль є більшою за фазову швидкість хвиль у необмеженому середовищі, яке має такі самі параметри, як і діелектрик хвилеводу, але меншою за фазову швидкість у середовищі, яке оточує хвилевід;

- енергія хвиль поширюється всередині і поза діелектриком (друга є поверхневою хвилею, амплітуда якої за експонентою згасає у напрямку від бічної поверхні циліндричного діелектрика),

- чим сильніша нерівність $\epsilon_1 > 1$, тим більша частина енергії існує всередині стрижня;

- для усіх хвиль, окрім основної (EH_{11}), при наближенні довжини хвилі до критичної, енергія хвилі, яка поширюється в діелектрику, зменшується;

- для основної моди енергія хвилі, яка поширюється у діелектрику, різко зменшується до нуля за умови, що відношення $\frac{R}{\lambda} \rightarrow 0$.

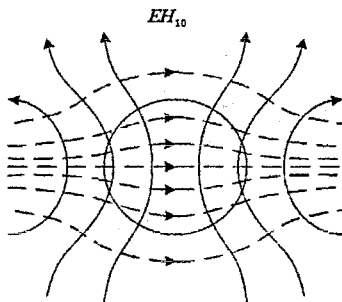


Рисунок 1.13.2

На рис.1.13.2 показана картина поля хвилі типу EH_{10} у круглому діелектричному стрижні.

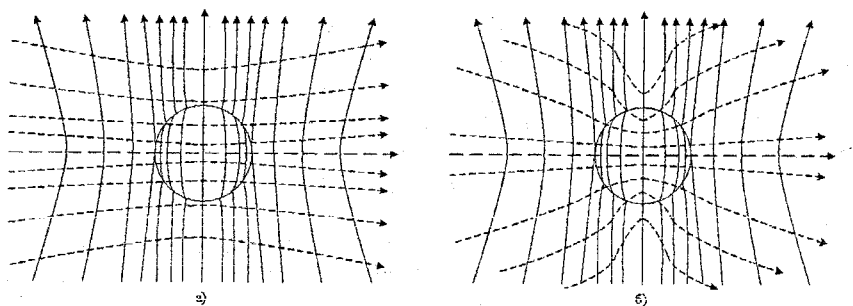


Рисунок 1.13.3

На рис.1.13.3 показані картини полів хвилі EH_{11} для випадків, коли відносна діелектрична проникність циліндричного стрижня: $\epsilon_1 = 2.25$ (а) та $\epsilon_1 = 10$ (б).

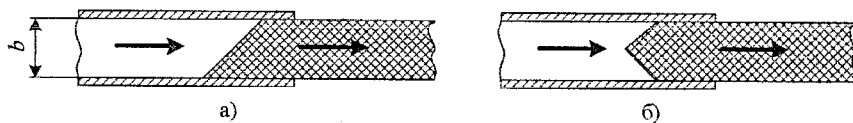


Рисунок 1.13.4

Збудити хвилю у діелектричному хвилеводі можна плавно «передавши» її від прямокутного хвилеводу до діелектричного стрижня прямокутного перерізу (рис.1.13.4,а), або від круглого хвилеводу до циліндричного діелектричного стрижня (рис.1.13.4,б).

1.14 Світловоди

Аналіз діелектричних хвилеводів показує, що при близьких за значенням показників заломлення середовищ, які утворюють хвилевід, його радіус може бути набагато більшим довжини хвилі у вільному просторі при збереженні одномодового чи близького до нього режиму роботи хвилеводу. Ця обставина використовується при створенні діелектричних хвилеводів оптичного діапазону – *світловодів*.

Найбільше поширення набули плівкові та волоконні світловоди.

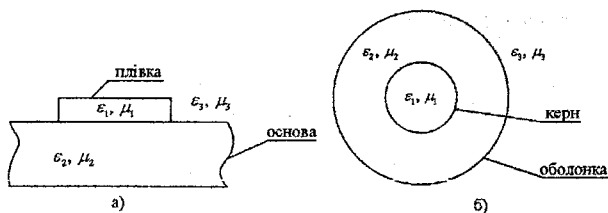


Рисунок 1.14.1

Основу плівкового світловоду складає плівка, вирощена на діелектричній основі або сформована в ній методами інтегральної технології (рис.1.14.1,а), показник заломлення основи має бути меншим ніж плівки $\epsilon_1\mu_1 > \epsilon_2\mu_2$. Такі хвилеводи використовуються для передавання світла на невеликі відстані – у межах інтегральної схеми оптичного діапазону.

Волоконний оптичний діелектричний хвилевід (світловід) складається з серцевини (керна) і оболонки круглого перерізу (рис.1.14.1,б). Керн і оболонка виконані із спеціального скла. Вони відрізняються коефіцієнтами заломлення і є звареними між собою. На зовнішню поверхню оболонки наноситься покриття, яке поглинає світло. Жгути таких волокон (оптичні кабелі) застосовуються для передавання зображень, а також інформації на великі відстані.

При передачі зображення діаметр керна складає 10...20 (мкм), діаметр оболонки – 50 (мкм), $\epsilon = 1.05...1.1$. При довжині хвилі випромінювання $\lambda = 600$ (нм) у такому хвилеводі може поширюватися декілька тисяч типів хвиль, які мають різні значення фазових та групових швидкостей. Але це не має значення у даному випадку, бо при передаванні зображень, які навіть швидко рухаються на невеликі відстані, яскравість на вході кожного світловоду змінюється дуже повільно у порівнянні з часом пробігу сигналу у світловоді.

При передаванні великих об'ємів інформації на значні відстані бажано забезпечити одномодовий режим роботи світловоду. З цієї метою діаметр керна (серцевини) зменшують до 3...5 мкм, а ϵ до 1,005...1,01. Застосування спеціального, особливо чистого скла і сучасної технології виготовлення світловодів для далекого зв'язку дозволило знизити згасання в них до 0,2 дБ/км на довжині хвилі $\lambda = 1,55$ мкм, що у десятки разів менше згасання при поширенні цього ж випромінювання у атмосфері Землі.

Найбільше значення згасання і дисперсії отримують в градієнтних світловодах, показник заломлення яких плавно змінюється вздовж радіуса, наприклад, за параболічним законом. Застосування нових матеріалів дозволяє знизити згасання у світловодах ще на порядок.

1.15 Смужкові хвиеводи

Смужкові хвиеводи (смужкові лінії передачі електромагнітної енергії) знайшли широке застосування при мікромініатюризації НВЧ-пристроїв і виробництві інтегральних НВЧ схем через такі важливі переваги:

- ширококутовість;
- малі габарити та маса;
- можливість застосування друкованого монтажу;
- легко здійснюється автоматизація процесу виробництва.

На практиці найпоширенішими є такі конструкції смужкових хвиеводів (ліній передачі): симетрична смужкова, несиметрична смужкова, симетрична щілинна, несиметрична щілинна та компланарні.

Серед основних параметрів смужкових ліній насамперед згадаємо *хвиевий опір* та *критичну частоту*.

1.15.1 Симетрична смужкова лінія

Симетрична смужкова лінія мало поширена на практиці у порівнянні з іншими конструкціями через її низьку технологічність. Такий хвиевід являє собою діелектричний стрижень прямокутної форми поперечного перерізу з розмірами a та b . (рис.1.15.1,а).

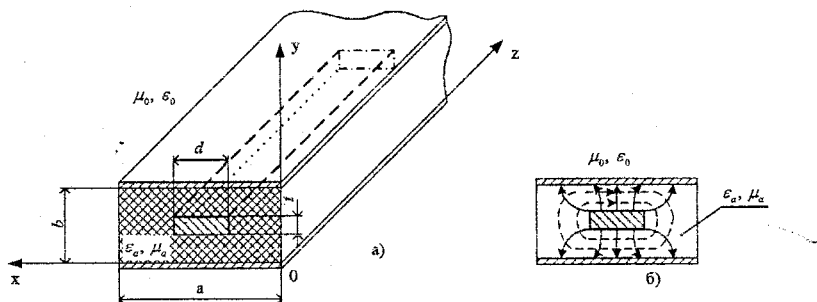


Рисунок 1.15.1

Зверху та знизу він має шари металізації, а посередині вздовж стрижня проходить металева тонка смушка шириною d . На рис.1.15.1б показана структура поля хвилі, яка поширюється у такому хвиеводі (суцільні лінії – вектор $\vec{E}$, штрихові – $\vec{H}$). Якби не було центрального провідника (смушки), то мав би місце двоплощинний хвиевід,

розглянутий у підрозділі 1.2, у якому могли б поширюватися хвилі E - та H -типів. Наявність смужки суттєво змінює структуру поля за рахунок появи T -хвиль, які концентрують енергію навколо центрального провідника.

Критична частота найближчої моди (типу коливань), яка є одночасно і граничною частотою для даної смужкової лінії, визначається за наближеною формулою:

$$f_{кр} \approx \frac{300}{\sqrt{\varepsilon} \left(2d + \frac{\pi b}{2} \right)}, \quad (1.15.1)$$

де d та b виражені у мм, $f_{кр}$ - у ГГц.

Хвильовий опір симетричної смужкової лінії з малою товщиною ($t \ll b$) та при $\frac{d}{b} < 0.5$ достатньо точно для багатьох інженерних розрахунків може бути знайдений зі співвідношення:

$$Z_{xs} = \frac{200}{\sqrt{\varepsilon} \left(1 + \frac{d}{b} \right)}, \quad (1.15.2)$$

де ε - відносна діелектрична проникність діелектричного стрижня.

Крім того, слід зауважити, що для підтримки одномодового режиму з хвилею T -типу розміри b та d повинні бути меншими за $\frac{\lambda_{xs}}{2}$. Ширина ж основи вибирається з умови $a \geq d + 2b$, при якій електричне поле на її краях буде незначним.

1.15.2 Мікросмужкова лінія

Мікросмужкова (несиметрична смужкова) лінія серед решти найбільш технологічна щодо її виготовлення друкованим методом (рис.1.15.2). Характеристики такої лінії розраховуються за умови, що у ній поширюється квазі T -хвиля, яка за структурою на низьких частотах збігається з T -хвилею, але при достатньо високих частотах з'являються скінченні значення складових E_z та H_z , а за ними дисперсія (залежність V_{ϕ} , Z_{xs} від частоти), яка практично в мікросмужкових лініях відсутня до частоти 3 ГГц.

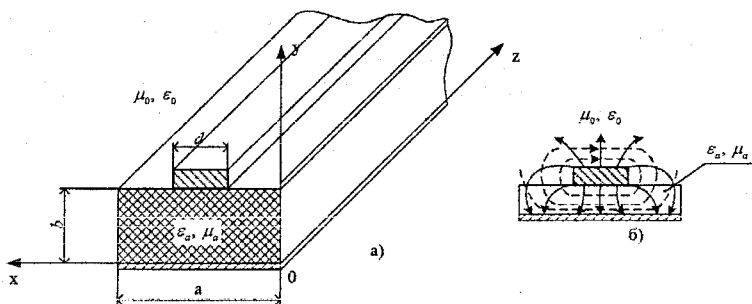


Рисунок 1.15.2

На рис.1.15.3 подаються графіки розподілу електричного поля у поперечному перетині лінії. Напруженість електричного поля досягає максимального значення поблизу краю смужки (1,2 на рис.1.15.3,б), що обумовлено підвищеною концентрацією електричних зарядів у цих місцях. При віддаленні від країв смужки напруженість електричного поля зменшується і прямує до нуля. У центрі шару металізації та нижньої поверхні смужки (1,2 на рис.1.12.3,б) вона досягає напруженості поля плоского конденсатора $E = \frac{U}{b}$. На зовнішній поверхні смужки (2 на рис.1.15.3,б), у центрі E практично дорівнює нулю.

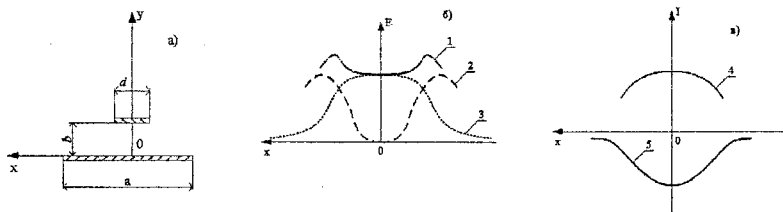


Рисунок 1.15.3

Струм на нижній стороні смужки (4 на рис.1.15.3,в), маючи повздовжню складову, буде максимальним посередині і плавно зменшуватимуся до її країв. Струм на верхній поверхні шару екранізації буде протилежним струму смужки, максимальним посередині і спадати практично до нуля на краях (5 на рис.1.15.3,в).

Верхня межа робочого діапазону частот мікросмужкової лінії визначається умовою відсутності збудження паразитних поверхневих

хвиль. Частота збудження таких хвиль, є верхньою граничною частотою використання лінії і знаходиться за співвідношенням:

$$f_{кр} \frac{75}{b\sqrt{\varepsilon-1}}, \quad (1.15.3)$$

де b виражено у мм, $f_{кр}$ - у ГГц.

З похибкою не більшою за 0.6% хвильовий опір мікросмужкової лінії Z_{xs} можна визначити за формулами:

при $\frac{d}{b} < 2$

$$Z_{xs} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} 60 \left(\ln \frac{8b}{d} + 32 \frac{d}{b^2} \right), \quad (1.15.4)$$

при $\frac{d}{b} > 2$

$$Z_{xs} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \left\{ \frac{b}{d} + \frac{2}{\pi} \ln \left[17.08 \left(\frac{d}{2b} + 0.92 \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (1.15.5)$$

де ефективна діелектрична проникність діелектрика лінії визначається за формулою:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon+1}{2} + \frac{\varepsilon-1}{2\sqrt{1+\frac{10b}{d}}}. \quad (1.15.6)$$

Слід зауважити, що остання формула справедлива для відносно малих частот, на яких дисперсія виражена слабо. Виникнення дисперсії на високих частотах у мікросмужковій лінії пояснюється зростанням ε_{ef} зі зростанням частоти через збільшення концентрації поля електромагнітного поля у діелектрику.

1.15.3 Симетрична щілинна лінія

Симетрична щілинна лінія являє собою вузьку щілину, прорізану у тонкому провідному шарі, виконану на одному боці діелектричної основи з великим значенням ($\varepsilon > 5$) діелектричної проникності (рис.1.15.4).

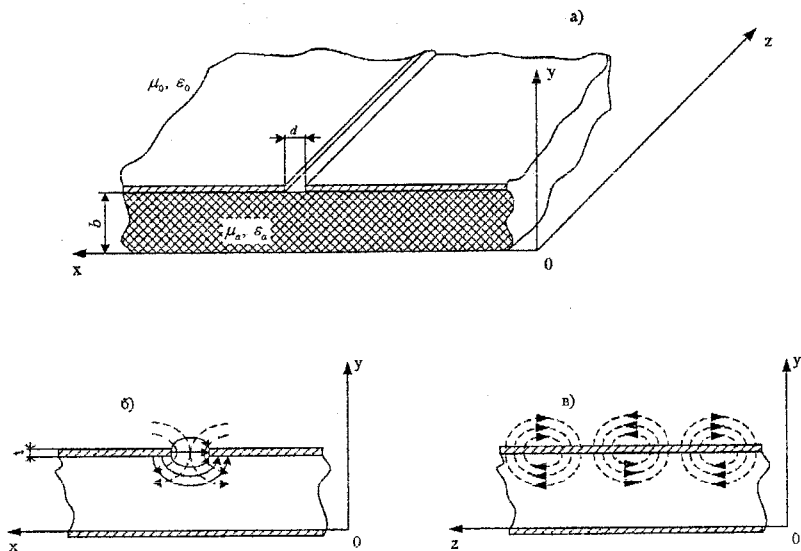


Рисунок 1.15.4

Оскільки в її структурі поля є велика повздовжня складова магнітного поля (рис.1.15.4,в) H_z , то вважається, що основним типом хвилі у симетричній щілинній лінії є Н-хвиля. Через те, що H_x і H_z зсунуті за фазою на 90° , магнітне поле є еліптично поляризованим, що використовується при створенні невзаємних феритових пристроїв.

Якщо порівняти цю лінію з мікросмужковою, то в симетричній щілинній лінії:

- краще проявляється дисперсія (залежність V_ϕ , Z_{xs} від частоти);
- більше Z_{xs} при однакових відношеннях $\frac{d}{b}$;
- більш зручний монтаж навісних елементів;
- значно нижчі втрати, бо струм в симетричній щілинній лінії розподілений по більшій поверхні;
- максимум струму знаходиться на краях щілини і за експонентою зменшується при віддаленні від її країв.

1.15.4 Несиметрична щілинна лінія

Несиметрична щілинна лінія утворюється півплощинами, нанесеними на протилежних поверхнях діелектричної основи або у різних шарах плоско-паралельних діелектричних основ (рис. 1.15.5).

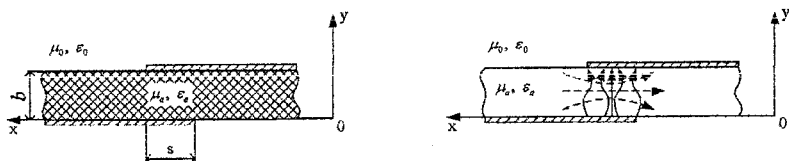


Рисунок 1.15.5

В залежності від взаємного розташування півплощин одна відносно одної можливі різні модифікації несиметричних щілинних ліній: лінії з перекриттям (рис.1.15.5), лінії з нульовим перекриттям та лінії з недоперекриттям півплощин. Обмеження на хвильовий опір накладаються наявністю випромінювання при великих хвильових опорах (велика відстань між напівпровідниками), а при малих – можливістю виникнення поверхневих хвиль.

1.15.5 Компланарна лінія

Компланарна лінія утворюється смужкою та двома напівнескінченими шарами металу, розташованими на одному боці діелектричної основи (рис.1.15.6).

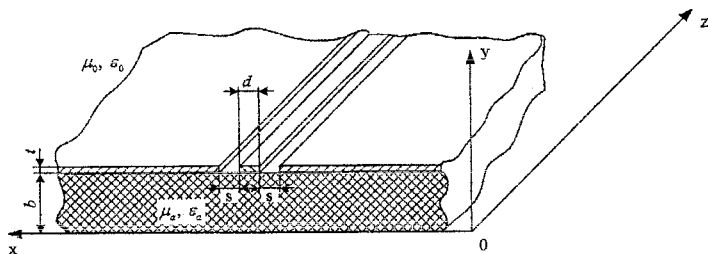


Рисунок 1.15.6

Структура електричних і магнітних силових ліній компланарної лінії передачі електромагнітної енергії з основним типом хвилі квазі T -хвилі показано на (рис. 1.15.7).

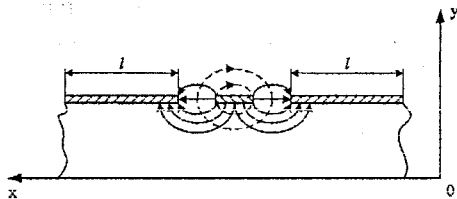


Рисунок 1.15.7

У цій лінії можливі також хвилі вищих типів, наприклад, H -хвилі. Для зменшення інтенсивності збудження вищих типів хвиль в компланарній лінії металізовані шари по обидва боки смужки з'єднуються провідниками.

Зменшення ширини металізованих шарів призводить до невеликого збільшення хвильового опору Z_{xs} .

При $\frac{t}{b} \rightarrow 0$, $l \rightarrow \infty$, а Z_{xs} визначається за формулою:

$$Z_{xs} = \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon + 1}} \right) \cdot 132 K_1(k),$$

де K_1 - еліптична функція, значення якої можна обчислити за формулою:

$$K_1(k) = \frac{\ln \left[\frac{2(1 + \sqrt{k})}{(1 - \sqrt{k})} \right]}{\pi}. \quad (1.15.7)$$

При

$$K_1(k) = \frac{\pi}{\ln \left[\frac{2(1 + \sqrt{k'})}{(1 - \sqrt{k'})} \right]}, \quad (1.15.8)$$

$$\text{де } k = \left(1 + \frac{2S}{d} \right)^{-1}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}.$$

Ефективна діелектрична проникність може бути знайдена за наближеною формулою:

$$\varepsilon_{\text{ef}} \approx \frac{(\varepsilon + 1)}{2}.$$

Питання для самоперевірки

1. Чим відрізняються хвилі Е, Н, Т-типів?
2. В яких межах змінюється фазова швидкість спрямованих хвиль залежно від частоти?
3. Що таке поперечні та повздовжні хвильові числа?
4. Що таке критична довжина хвилі?
5. Що таке швидкі та повільні хвилі?
6. Що означає індекси m , n у випадку прямокутного та циліндричного хвильоводів?
7. Пояснити правила побудови типів хвиль /мод/ в хвильоводах?
8. Як визначити довжину хвилі в хвильоводі?
9. Навести картини полів мод в прямокутному, циліндричному та коаксіальному хвильоводах?
10. Пояснити картини струмів на стінках різних хвильоводів?
11. Що таке хвильоводи повільних хвиль?
12. Структура полів у хвильоводах повільних хвиль?
13. Структура смужкових ліній?
14. Картини полів у смужкових лініях?
15. Як визначається довжина хвилі в смужкових лініях?

2 ОБ'ЄМНІ РЕЗОНАТОРИ

2.1 Загальні зауваження

У радіотехніці на відносно низьких частотах, які не перевищують 50 МГц, коливальні контури (резонатори) складаються з конденсаторів та котушок індуктивності. Коливальний процес у таких резонаторах за змістом є процес обміну енергіями між електричним полем зарядженого конденсатора і магнітним полем “зарядженої” котушки.

На більш високих частотах котушки і конденсатори мають такі великі втрати, що коливальний контур стає дуже низько добротним і не може виконувати своєї основної функції – бути вибіркою системою. Таку задачу у діапазоні до 300 МГц можуть успішно виконувати резонатори, які являють собою відрізки двопровідної лінії передачі електромагнітної енергії. Так, наприклад, відомо, що короткозамкнутий відрізок такої лінії еквівалентний паралельному коливальному контуру, розімкнутий на кінці відрізок – послідовному контуру.

Двopовідні лінії передачі і побудовані на їх основі резонатори є ефективними тоді, коли відстань між провідниками лінії є набагато меншою за довжину хвилі. Тому на частотах близьких до 300 МГц і більших (практично до 3 ГГц) ефективними є резонатори, побудовані на базі коаксіальних круглих хвильоводів з хвилями Т-типу. На більших частотах втрати у коаксіальних хвильоводах (та і резонаторах) зростають, що обмежує діапазон їх використання. В діапазоні НВЧ (3...30 ГГц) та у діапазоні міліметрових хвиль (30...300 ГГц) широко використовуються резонатори на базі прямокутних та круглих циліндричних хвильоводів. Але такі системи втрачають свою ефективність на субміліметрових і більш коротких хвилях через дуже малі розміри хвильоводів. Через це основою для побудови такого резонатора може слугувати, наприклад, відрізок діелектричного хвильоводу циліндричної форми, металізованого на обох його торцях. При подальшому скороченні робочої довжини хвилі переходять до резонаторів **відкритого** типу, подібних до пристроїв оптичного діапазону.

У кожному зі згаданих випадків поле зосереджене у об'ємі без втрат. Через це такі системи отримали назву **об'ємних резонаторів**.

Зауважимо, що у даній частині навчального посібника будуть розглядатися об'ємні резонатори, побудовані на базі регулярних без втрат хвильоводів. Таке спрощення задачі дозволить зосередити увагу читачів на визначенні складових полів коливань в резонаторах, побудові структур полів коливань різних типів, визначенні резонансних частот (довжин хвиль).

Такі питання як втрати та добротності об'ємних резонаторів доцільно розглядати на курсі “Пристрої НВЧ та антени”.

2.2 Прямокутний об'ємний резонатор

Прямокутний об'ємний резонатор є відрізок прямокутного хвилеводу, який має ще дві поперечні металеві стінки (рис.2.2.1). Тобто мова йде про прямокутний паралелепіпед з поперечними розмірами a , b та довжиною l , розміщений у прямокутній системі координат.

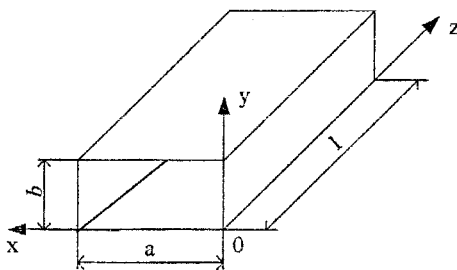


Рисунок 2.2.1

2.2.1 Коливання Е-типу

Насамперед поставимо задачу визначення складових поля коливань Е-типу у прямокутному резонаторі. Міркуватимемо так: у прямокутному хвилеводі вздовж осі OZ поширюється хвиля типу E_{mn} (падаюча хвиля), складові поля якої подані виразами (1.7.11). Для зручності подальшого аналізу перепишемо їх; і, отже, для падаючої (прямой) хвилі:

$$\dot{E}_{mx} = -jE_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} c_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z},$$

$$\dot{E}_{my} = -jE_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} c_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z},$$

$$\dot{E}_{mz} = E_{oz} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot c_1 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z},$$

$$\dot{H}_{mx} = jE_{oz} \frac{\omega\epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} c_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z},$$

$$\dot{H}_{my} = -jE_{oz} \frac{\omega\epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} c_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta_z z},$$

$$\dot{H}_{mz} = 0,$$

де c_1 - амплітудний множник прямої (падаючої) хвилі типу E_{mn} .

Досягнувши задньої поперечної стінки, ця хвиля відіб'ється і буде рухатися у напрямку осі - OZ (відбита хвиля). Приріст її фази на одиниці довжини шляху у додатному напрямку осі OZ буде від'ємним, тобто для відбитої хвилі повздовжнє хвильове число слід брати зі знаком мінус ($-\beta_z$).

Отже, вирази для складових поля у відбитій хвилі легко отримати з виразів для падаючої хвилі, замінивши скрізь β_z на $-\beta_z$:

$$\dot{E}_{mx\theta} = jE_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} c_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{j\beta_z z},$$

$$\dot{E}_{my\theta} = jE_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} c_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{j\beta_z z},$$

$$\dot{E}_{mz\theta} = E_{oz} c_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{j\beta_z z},$$

$$\dot{H}_{mx\theta} = jE_{oz} \frac{\omega\epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} c_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{j\beta_z z},$$

$$\dot{H}_{my\theta} = -jE_{oz} \frac{\omega\epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} c_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{j\beta_z z},$$

$$\dot{H}_{mz\theta} = 0,$$

де c_2 - амплітудний множник відбитої хвилі типу E_{mn} .

У результаті інтерференції цих двох хвиль утвориться результуюче коливання у закритому об'ємі прямокутного резонатора.

Щоб знайти складові поля цього коливання, достатньо скласти між собою відповідні складові падаючої та відбитої хвиль.

Виконавши додавання, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{E}_{mxp} &= jE_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot (c_2 e^{j\beta_z z} - c_1 e^{-j\beta_z z}) \\
 \dot{E}_{myp} &= jE_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot (c_2 e^{j\beta_z z} - c_1 e^{-j\beta_z z}) \\
 \dot{E}_{mzp} &= E_{oz} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot (c_2 e^{j\beta_z z} + c_1 e^{-j\beta_z z}) \\
 \dot{H}_{mxp} &= jE_{oz} \frac{\omega \varepsilon_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot (c_2 e^{j\beta_z z} + c_1 e^{-j\beta_z z}) \\
 \dot{H}_{myp} &= -jE_{oz} \frac{\omega \varepsilon_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot (c_2 e^{j\beta_z z} + c_1 e^{-j\beta_z z}) \\
 \dot{H}_{mzp} &= 0
 \end{aligned} \right\} (2.2.1)$$

Визначимося з амплітудними коефіцієнтами c_1 та c_2 , для чого скористаємося граничними умовами для тангенціальних складових електричного поля на ідеальному провіднику: $\dot{E}_{m1\tau} = 0$.

У резонаторі такими складовими (дотичними до поперечних стінок резонатора при $z=0$ та $z=l$) є $\dot{E}_{mxp}$ та $\dot{E}_{myp}$.

Прирівнявши, наприклад, $\dot{E}_{mxp}$ до нуля при $z=0$, матимемо:

$$E_{OZ} \cdot \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (c_2 - c_1) = 0.$$

Оскільки ця рівність має бути справедливою при усіх значеннях поперечних координат X та Y на передній стінці резонатора, то висновок може бути лише такий: $(c_2 - c_1) = 0$ або $c_2 = c_1 = c$. Покладемо $c=1$ (повне відбиття).

З урахуванням сказаного, множники в круглих дужках виразів (2.2.1) за формулами Ейлера перепишуться так:

$$e^{j\beta_z z} - e^{-j\beta_z z} = j2\sin(\beta_z z), \quad e^{j\beta_z z} + e^{-j\beta_z z} = 2\cos(\beta_z z).$$

Таким чином вирази (2.2.1) матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{E}_{mxp} &= -2E_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \sin(\beta_z z) \\
 \dot{E}_{myp} &= -2E_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \sin(\beta_z z) \\
 \dot{E}_{mzp} &= 2E_{oz} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \cos(\beta_z z) \\
 \dot{H}_{mxp} &= j2E_{oz} \frac{\omega \varepsilon_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \cos(\beta_z z) \\
 \dot{H}_{myp} &= -j2E_{oz} \frac{\omega \varepsilon_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \cos(\beta_z z) \\
 \dot{H}_{mzp} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

Визначимося з повздовжнім хвильовим числом β_z , а для цього скористаємось тим, що, наприклад, $\dot{E}_{myp} = 0$ при $z=l$ (задня поперечна стінка резонатора), тобто:

$$2E_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\beta_z l) = 0.$$

Ця рівність має бути справедливою для усіх координат x та y на вибраній стінці резонатора. Звідки:

$$\sin \beta_z l = 0, \quad \beta_z l = p\pi, \quad \beta_z = \frac{p\pi}{l}, \quad (2.2.3)$$

де $p=0,1,2,3\dots$

Підставивши (2.2.3) в (2.2.2), отримаємо остаточні вирази для комплексних амплітуд складових векторів поля коливання типу $\dot{E}_{mxp}$ у прямокутному резонаторі:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{E}_{mxp} &= -2E_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\
 \dot{E}_{myp} &= -2E_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\
 \dot{E}_{mzp} &= 2E_{oz} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\
 \dot{H}_{mxp} &= j2E_{oz} \frac{\omega\epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\
 \dot{H}_{myp} &= -j2E_{oz} \frac{\omega\epsilon_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\
 \dot{H}_{mzp} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

Третій індекс p , аналогічно до індексів m та n , вказує на кількість півхвиль, які розміщуються на довжині резонатора l .

З виразів (2.2.4) видно, що вздовж резонатора, так само як і у поперечних напрямках, установлюється стояча хвиля. Третій індекс p може дорівнювати нулю, і при цьому у резонаторі будуть коливання типу E_{mn0} зі складовими E_{mzp} , H_{mxp} , H_{myp} . Так само як і у прямокутному хвилеводі, індекси m та n дорівнювати нулю не можуть, тобто коливання типу E_{0np} та E_{m0p} - неможливі.

Знайдемо вирази для резонансної частоти (довжини хвилі) об'ємного резонатора з коливаннями E_{mnp} типу.

Згадаємо, що вираз для сталої поширення $K = \omega\sqrt{\mu_\alpha\epsilon_\alpha}$, на резонансній частоті буде таким: $\omega_p\sqrt{\mu_\alpha\epsilon_\alpha} = \sqrt{g_{mn}^2 + \beta_z^2} \frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}$.

Звідки:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_\alpha\epsilon_\alpha}} \sqrt{g_{mn}^2 + \beta_z^2}.$$

З урахуванням того, що $g_{mn}^2 = g_x^2 + g_y^2$, виразів (1.7.8), (1.7.9) та (2.2.3) формула для ω_p переписується так:

$$\omega_p = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

$$f_p = \frac{c}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \quad (2.2.5)$$

де μ, ε - параметри середовища, якими заповнений резонатор, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі.

При заповненні об'ємного резонатора сухим повітрям:

$$f_p = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}. \quad (2.2.6)$$

Відповідно, резонансна довжина хвилі у об'ємному резонаторі дорівнюватиме:

$$\lambda_p = \frac{2\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (2.2.7)$$

Або при заповненні сухим повітрям:

$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (2.2.8)$$

2.2.2 Коливання Н-типу

Складові поля падаючої хвилі типу H_{mn} подані виразом (1.7.16). Для зручності подальшого аналізу перепишемо його :

$$\dot{H}_{mx} = jH_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot C_3 \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_z z},$$

$$\dot{H}_{my} = jH_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot C_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_z z},$$

$$\begin{aligned}
\dot{H}_{mz} &= H_{oz} \cdot C_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_z z}, \\
\dot{E}_{mx} &= jH_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot C_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_z z}, \\
\dot{E}_{my} &= -jH_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot C_3 \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_z z}, \\
\dot{E}_{mz} &= 0.
\end{aligned}$$

Для відбитої хвилі, замінивши скрізь β_z на $-\beta_z$, будемо мати:

$$\begin{aligned}
\dot{H}_{mxs} &= -jH_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot C_4 \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j\beta_z z}, \\
\dot{H}_{mys} &= -jH_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j\beta_z z}, \\
\dot{H}_{mzs} &= H_{oz} \cdot C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j\beta_z z}, \\
\dot{E}_{mxs} &= jH_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j\beta_z z}, \\
\dot{E}_{mys} &= -jH_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot C_4 \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j\beta_z z}, \\
\dot{E}_{mzs} &= 0.
\end{aligned}$$

У результаті інтерференції утвориться коливання у резонаторі, складові поля якого будуть дорівнювати:

$$\left. \begin{aligned}
\dot{H}_{mxp} &= -jH_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (C_4 e^{j\beta_z z} - C_3 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{H}_{myp} &= -jH_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (C_4 e^{j\beta_z z} - C_3 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{H}_{mzp} &= H_{oz} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (c_4 e^{j\beta_z z} + c_3 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{E}_{mxp} &= jH_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (c_4 e^{j\beta_z z} + c_3 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{E}_{myp} &= -jH_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (c_4 e^{j\beta_z z} + c_3 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{E}_{mzp} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.9)$$

звідки $c_4 = -c_3$.

Поклавши $c_3 = 1$ вирази для складових поля у резонаторі, з урахуванням формул Ейлера, перепишуться таким чином:

$$\left. \begin{aligned}
\dot{H}_{mxp} &= -j2H_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos(\beta_z z) \\
\dot{H}_{myp} &= -j2H_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos(\beta_z z) \\
\dot{H}_{mzp} &= -j2H_{oz} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin(\beta_z z) \\
\dot{E}_{mxp} &= 2H_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin(\beta_z z) \\
\dot{E}_{myp} &= -2H_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin(\beta_z z) \\
\dot{E}_{mzp} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.10)$$

Ця сама складова поля $\dot{E}_{mxp}$ у резонаторі, будучи тангенціальною (дотичною) до задньої поперечної стінки ($(z=l)$, дорівнює нулю:

$$\dot{E}_{mxp}(z=l) = 2H_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin(\beta_z l) = 0,$$

звідки $\sin(\beta_z l) = 0$, $\beta_z l = p\pi$ ($p=1,2,3,\dots$)
або

$$\beta_z = \frac{p\pi}{l}. \quad (2.2.11)$$

З урахуванням (2.2.11) вираз (2.2.10) перепишемо так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mxp} &= j2H_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ \dot{H}_{myp} &= j2H_{oz} \frac{\beta_z}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ \dot{H}_{mzp} &= -j2H_{oz} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ \dot{E}_{mxp} &= 2H_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ \dot{E}_{myp} &= -2H_{oz} \frac{\omega\mu_a}{g^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ \dot{E}_{mzp} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.2.12)$$

З виразів (2.2.12) видно, що третій індекс у коливаннях типу $\dot{H}_{mnp}$ не може дорівнювати нулю (коливання типу $\dot{H}_{mno}$ неможливе), бо зникають усі ще й поперечні складові електричного поля.

Резонансна частота f_p , та резонансна довжина хвилі можуть бути визначеними за формулами (2.2.5) та (2.2.8), відповідно, оскільки вирази для g_x, g_y , та β_z залишаються такими самими як і у випадку коливань типу

E_{mnp} .

2.3 Циліндричний об'ємний резонатор

Циліндричний об'ємний резонатор являє собою відрізок круглого хвилеводу, закритого з обох торців провідними стінками (рис.2.3.1).

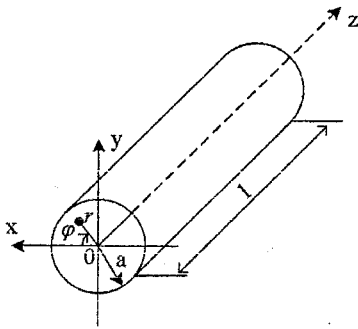


Рисунок 2.3.1

Тобто, мова йде про закритий об'єм, обмежений повною поверхнею круглого циліндра з радіусом основи a та довжиною l , розміщений у циліндричній системі координат r, φ, z .

2.3.1 Коливання Е-типу

Будемо вважати основною задачею цього підрозділу визначення виразів для складових поля коливань типу E_{mnp} . За аналогією з попередніми випадками вважатимемо, що вздовж осі OZ поширюється падаюча хвиля типу- E_{mn} зі складовими поля (див. випадок хвилі Е-типу у циліндричному хвилеводі):

$$\begin{aligned}\dot{E}_{mr} &= -j \frac{\beta_z}{g^2} E_{oz} \cdot C_5 J'_1 \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z}, \\ \dot{E}_{m\varphi} &= j \frac{\beta_z}{g^2 r} m E_{oz} \cdot C_5 J \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta_z z}, \\ \dot{E}_{mz} &= E_{oz} \cdot C_5 J_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z}, \\ \dot{H}_{mr} &= -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g^2 r} E_{oz} \cdot C_5 m J_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta_z z}, \\ \dot{H}_{m\varphi} &= -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g^2} E_{oz} \cdot C_5 J'_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z z}, \\ \dot{H}_{mz} &= 0.\end{aligned}$$

Вирази для відповідних складових відбитої хвилі будуть такими:

$$\dot{E}_{mre} = j \frac{\beta_z}{g} E_{oz} C_6 J'_1 \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{j\beta_z z},$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{m\varphi s} &= -j \frac{\beta_z m}{g^2 r} E_{oz} C_6 J_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{j\beta_z Z}, \\
\dot{E}_{mzs} &= E_{oz} C_6 J_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{j\beta_z Z}, \\
\dot{H}_{mrs} &= -j \frac{\omega \varepsilon_a m}{g^2 r} E_{oz} C_6 J_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{j\beta_z Z}, \\
\dot{H}_{m\varphi s} &= -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} E_{oz} C_6 J_m' \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{j\beta_z Z}, \\
\dot{H}_{mzs} &= 0.
\end{aligned}$$

В об'ємному резонаторі:

$$\left. \begin{aligned}
\dot{E}_{mrp} &= j \frac{\beta_z}{g} E_{oz} J' \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) (c_6 e^{j\beta_z Z} - c_5 e^{-j\beta_z Z}) \\
\dot{E}_{m\varphi p} &= -j \frac{\beta_z m}{g^2 r} E_{oz} J \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) (c_6 e^{j\beta_z Z} - c_5 e^{-j\beta_z Z}) \\
\dot{E}_{mzp} &= E_{oz} J_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) (c_6 e^{j\beta_z Z} + c_5 e^{-j\beta_z Z}) \\
\dot{H}_{mrp} &= -j \frac{\omega \varepsilon_a m}{g^2 r} E_{oz} J_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) (c_6 e^{j\beta_z Z} + c_5 e^{-j\beta_z Z}) \\
\dot{H}_{m\varphi p} &= -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} E_{oz} J_m' \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) (c_6 e^{j\beta_z Z} + c_5 e^{-j\beta_z Z}) \\
\dot{H}_{mzp} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

При $z=0$ складова $\dot{E}_{mrp}=0$, а отже: $c_5=c_6=1$.

Тоді вирази (2.3.1), з урахуванням формул Ейлера, можна переписати таким чином:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{E}_{mnp} &= -2E_{oz} \frac{\beta_z}{g} J'_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \sin(\beta_z z) \\
 \dot{E}_{m\varphi p} &= 2E_{oz} \frac{\beta_z m}{g^2 r} J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \sin(m\varphi) \sin(\beta_z z) \\
 \dot{E}_{mzp} &= 2E_{oz} J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \cos(\beta_z z) \\
 \dot{H}_{mnp} &= -j2E_{oz} \frac{\omega \varepsilon_a m}{g^2 r} J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \sin(m\varphi) \cos(\beta_z z) \\
 \dot{H}_{m\varphi p} &= -j2E_{oz} \frac{\omega \varepsilon_a}{g} J'_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \cos(\beta_z z) \\
 \dot{H}_{mzp} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

При $z=l$ складова $\dot{E}_{mnp}=0$, а отже $\sin(\beta_z l)=0$,

$$\beta_z l = p\pi, \quad (p=0,1,2,3,\dots) \quad \beta_z = \frac{p\pi}{l}. \quad (2.3.3)$$

Підставивши в (2.3.2) вираз для β_z (2.3.3), матимемо остаточні вирази для комплексних амплітуд складових поля коливань E_{mnp} -типу у циліндричному резонаторі:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{E}_{mnp} &= -2E_{oz} \frac{\beta_z}{g} J'_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{E}_{m\varphi p} &= 2E_{oz} \frac{\beta_z m}{g^2 r} J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{E}_{mzp} &= 2E_{oz} J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{H}_{mnp} &= -j2E_{oz} \frac{\omega \varepsilon_a m}{g^2 r} J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{H}_{m\varphi p} &= -j2E_{oz} \frac{\omega \varepsilon_a}{g} J'_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{H}_{mzp} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

Формулу для визначення резонансної частоти коливань E_{mnp} -типу у циліндричному резонаторі знайдемо з виразу:

$$\omega_p \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} = \sqrt{(g_{mn}^E)^2 + \beta_z^2}.$$

Оскільки поперечне хвильове число для хвиль E -типу $g_{mn}^E = \frac{v_{mn}}{a}$, резонансна частота ω_p дорівнюватиме:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{(g_{mn}^E)^2 + \beta_z^2},$$

$$\omega_p = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

або

$$f_p = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \quad (2.3.5)$$

При заповненні резонатора сухим атмосферним повітрям:

$$f_p = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \quad (2.3.6)$$

Резонансна довжина хвилі дорівнюватиме:

$$\lambda_p = \frac{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}}, \quad (2.3.7)$$

або (при повітряному заповненні):

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}}. \quad (2.3.8)$$

2.3.2 Коливання Н-типу

Діючи за аналогією до попереднього випадку, запишемо складові поля хвилі H_{mn} -типу, яка поширюється вздовж осі OZ круглого циліндричного хвильоводу (падаючої хвилі):

$$\begin{aligned}\dot{H}_{mr} &= -j \frac{\beta_z}{g} H_{oz} C_7 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z Z}, \\ \dot{H}_{m\varphi} &= j \frac{\beta_z m}{g^2 r} H_{oz} C_5 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta_z Z}, \\ \dot{H}_{mz} &= H_{oz} C_7 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z Z}, \\ \dot{E}_{mr} &= j \frac{\omega \mu_a m}{g^2 r} H_{oz} C_7 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta_z Z}, \\ \dot{E}_{m\varphi} &= j \frac{\omega \mu_a}{g} H_{oz} C_7 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta_z Z}, \\ \dot{E}_{mz} &= 0.\end{aligned}$$

Складові поля відбитої хвилі будуть такими:

$$\begin{aligned}\dot{H}_{mrs} &= j \frac{\beta_z}{g} H_{oz} C_8 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{j\beta_z Z}, \\ \dot{H}_{m\varphi s} &= -j \frac{\beta_z m}{g^2 r} H_{oz} C_8 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{j\beta_z Z}, \\ \dot{H}_{mzs} &= H_{oz} C_8 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{j\beta_z Z}, \\ \dot{E}_{mrs} &= j \frac{\omega \mu_a m}{g^2 r} H_{oz} C_8 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{j\beta_z Z}, \\ \dot{E}_{m\varphi s} &= j \frac{\omega \mu_a}{g} H_{oz} C_8 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{j\beta_z Z}, \\ \dot{E}_{mzs} &= 0.\end{aligned}$$

Складові поля коливання H_{mnp} -типу у круглому циліндричному резонаторі дорівнюватимуть:

$$\left. \begin{aligned}
\dot{H}_{mrp} &= j \frac{\beta_z}{g} H_{oz} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) (c_8 e^{j\beta_z z} - c_7 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{H}_{m\varphi p} &= -j \frac{\beta_z m}{g^2 r} H_{oz} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) (c_8 e^{j\beta_z z} - c_7 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{H}_{mzp} &= H_{oz} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) (c_8 e^{j\beta_z z} + c_7 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{E}_{mrp} &= j \frac{\omega \mu_a m}{g^2 r} H_{oz} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) (c_8 e^{j\beta_z z} + c_7 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{E}_{m\varphi p} &= j \frac{\omega \mu_a}{g} H_{oz} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) (c_8 e^{j\beta_z z} + c_7 e^{-j\beta_z z}) \\
\dot{E}_{mzp} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.9)$$

При $z=0$ $\dot{E}_{mrp}=0$, і тому $c_8+c_7=0$, $c_7=-c_8=1$.

З урахуванням формул Ейлера:

$$\left. \begin{aligned}
\dot{H}_{mrp} &= j 2 \frac{\beta_z}{g} H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) \cos(\beta_z z) \\
\dot{H}_{m\varphi p} &= -j 2 \frac{\beta_z m}{g^2 r} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) \cos(\beta_z z) \\
\dot{H}_{mzp} &= j 2 H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) \sin(\beta_z z) \\
\dot{E}_{mrp} &= -2 \frac{\omega \mu_a m}{g^2 r} H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) \sin(\beta_z z) \\
\dot{E}_{m\varphi p} &= -2 \frac{\omega \mu_a}{g} H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) \sin(\beta_z z) \\
\dot{E}_{mzp} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.10)$$

При $z=l$ $\dot{E}_{mrp}=0$, звідки $\sin(\beta_z l)=0$.

$$\beta_z l = p\pi \quad (p=0,1,2,3,\dots) \quad \beta_z = \frac{p\pi}{l}. \quad (2.3.11)$$

З урахуванням (3.2.1) вираз (3.2.10) переписеться так:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{H}_{mrp} &= j2 \frac{\beta_z}{g} H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{H}_{m\varphi p} &= -j2 \frac{\beta_z m}{g^2 r} H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{H}_{m\varphi p} &= j2 \frac{\beta_z m}{g^2 r} H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{E}_{mrp} &= -2 \frac{\omega \mu_a m}{g^2 r} H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{E}_{m\varphi p} &= -2 \frac{\omega \mu_a}{g} H_{oz} I'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\
 \dot{E}_{mzp} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.12)$$

Резонансна частота ω_p дорівнюватиме:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{(g_{mn}^H)^2 + \beta_z^2},$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

або

$$f_p = \frac{c}{2\pi \sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \quad (2.3.13)$$

при заповненні резонатора сухим атмосферним повітрям:

$$f_p = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \quad (2.3.14)$$

Резонансна довжина хвилі:

$$\lambda_p = \frac{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}}, \quad (2.3.15)$$

або (при повітряному заповненні)

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}}. \quad (2.3.16)$$

2.4 Коаксіальний об'ємний резонатор

Під коаксіальним об'ємним резонатором будемо розуміти відрізок коаксіального хвильоводу довжиною l , закритого з обох сторін поперечними провідними стінками. Будемо також вважати, що у коаксіальному хвильоводі існує хвиля Т-типу. Щоб визначити складові поля коливання Т_p-типу у коаксіальному об'ємному резонаторі (рис.2.4.1), скористуємося складовими поля хвилі Т-типу, яка поширюється у напрямку осі OZ (падаюча хвиля):

$$\vec{E}_{mr} = z_c \frac{I_{om}}{2\pi r} e^{-j\beta_z z},$$

$$\vec{H}_{m\lambda} = \frac{I_{om}}{2\pi r} e^{-j\beta_z z}.$$

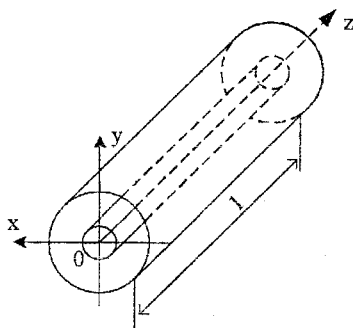


Рисунок 2.4.1

При визначенні складових полів у відбитій хвилі потрібно поміняти на протилежний знак перед β_z та враховувати граничні умови на торцях резонатора для тангенціальних складових векторів поля. Наприклад, при $z=0$:

$$\dot{E}_{mr} = \dot{E}_{mr} + \dot{E}_{mr0} = 0; \quad \dot{E}_{mr0} = -\dot{E}_{mr};$$

звідки

$$\dot{E}_{mr0} = -z_c \frac{\dot{I}_{om}}{2\pi r} e^{j\beta_z z}.$$

Оскільки тангенціальна складова магнітного поля $\dot{H}_{mr}$ на торцевій стінці резонатора не дорівнює нулю, то:

$$\dot{H}_{mr0} = \frac{\dot{I}_{om}}{2\pi r} e^{j\beta_z z}.$$

Додавши відповідні складові, отримаємо:

$$\dot{E}_{mrp} = -z_c \frac{\dot{I}_{om}}{2\pi r} (e^{j\beta_z z} - e^{-j\beta_z z}),$$

$$\dot{H}_{mrp} = \frac{\dot{I}_{om}}{2\pi r} (e^{j\beta_z z} + e^{-j\beta_z z}).$$

З урахуванням формул Ейлера:

$$\dot{E}_{mrp} = -jz_c \frac{\dot{I}_{om}}{\pi r} \sin(\beta_z z),$$

$$\dot{H}_{mrp} = \frac{\dot{I}_{om}}{\pi r} \cos(\beta_z z).$$

Як відомо, при $z=l$ складова $\dot{E}_{mrp}$ має дорівнювати нулю. Звідки $\sin(\beta_z l) = 0$, $\beta_z l = p\pi$ ($p=0,1,2,3,\dots$) $\beta_z = p\pi/l$. Тоді вирази для складових поля коливання T_p -типу у коаксіальному резонаторі перепишуться так:

$$\dot{E}_{mrp} = -jz_c \frac{\dot{I}_{om}}{\pi r} \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right),$$

$$H_{mnp} = \frac{I_{om}}{\pi r} \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (2.4.1)$$

де, нагадаємо, p - показує, яка кількість півхвиль міститься на довжині резонатора l .

Тобто, при резонансі на довжині l вкладається p штук півхвиль.

Через це такі резонатори називаються півхвильовими.

Як відомо, у коаксіальному хвилеводі з хвилею T дисперсія відсутня, а отже резонансна довжина хвилі

$$\lambda_p^T = l\sqrt{\epsilon\mu}/2. \quad (2.4.2)$$

Резонансна частота:

$$f_p^T = 2c/l\sqrt{\mu\epsilon}. \quad (2.4.3)$$

При повітряному заповненні резонатора:

$$\lambda_p^T = l/2, \quad (2.4.4)$$

$$f_p^T = 2c/l. \quad (2.4.5)$$

При заданій довжині хвилі або частоті коливання, резонанс наступить при довжині резонатора l_p :

$$l_p = 2\lambda/\sqrt{\mu\epsilon}, \quad (2.4.6)$$

$$l_p = 2c/f\sqrt{\mu\epsilon}. \quad (2.4.7)$$

Або при повітряному заповненні:

$$l_p = 2\lambda, \quad (2.4.8)$$

$$l_p = 2c/f. \quad (2.4.9)$$

2.5 Умови існування в об'ємних резонаторах коливань заданого типу

Раніше наголошувалось, що об'ємний резонатор являє собою відрізок хвилеводу довжиною l , замкнутого з обох торців металевими

площинами. Отже, умова існування коливання заданого типу перш за все визначається можливістю поширення відповідної хвилі у хвилеводі, на базі якого виготовлений резонатор. Нагадаємо, що оскільки у резонаторі $\lambda = \lambda_p$, то у прямокутному резонаторі умова існування коливань E_{mnp} - і H_{mnp} -типу має бути такою :

$$\lambda_p < \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (2.5.1)$$

Знайдемо умову, яка визначає довжину прямокутного резонатора l , при якій можливе існування коливань E_{mnp} -типу, чи H_{mnp} -типу. У випадках, коли $p \neq 0$, при заданих розмірах a і b та резонансної довжини хвилі λ_p , довжину резонатора визначимо за формулою:

$$l = \frac{p}{\sqrt{\left(2/\lambda_p\right)^2 - \left(m/a\right)^2 - \left(n/b\right)^2}}. \quad (2.5.2)$$

У випадку, коли $p = 0$ (коливання E_{mnp} -типу) така умова не існує, бо резонансна довжина хвилі не залежить від довжини резонатора l , і залишається лише умова:

$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (2.5.3)$$

Щодо круглого циліндричного резонатора, то при $p \neq 0$ умовами існування коливань будуть такі:

для коливань електричного E_{mnp} -типу

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} < \lambda_{np}^E, \quad (2.5.4)$$

для коливань магнітного H_{mnp} -типу

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} \langle \lambda_{kp}^H \rangle. \quad (2.5.5)$$

При $p=0$ у випадку коливань електричного E_{mno} -типу, нерівності (2.5.4) і (2.5.5) переходять у рівності.

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}, \quad (2.5.6)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}. \quad (2.5.7)$$

2.6 Картини полів у об'ємних резонаторах

Як видно з виразів для складових полів хвиль у хвильоводах та коливань відповідних типів у відповідних резонаторах, у поперечних перерізах ці картини повністю збігаються. У повздовжніх перерізах є суттєві відмінності. Якщо у хвильоводах поперечні складові векторів E та H збігаються за фазами як гармонічні функції повздовжньої координати Z , то у резонаторах вони взаємно зміщені у просторі вздовж осі OZ на $\lambda_{zs}/4$. У хвильоводі поперечна складова E , як функція координати OZ досягає максимуму у тих самих точках, що і поперечна складова H_z .

У об'ємному резонаторі ці максимуми вздовж хвильоводу зсунуті на $\lambda_{zs}/4$. Тобто, вздовж хвильоводу устанавлюється стояча хвиля довжиною λ_{zs} (дві півхвилі).

Приклад 1. Картини полів хвилі H_{10} у прямокутному хвильоводі (рис. 2.6.1,а) та коливань H_{102} у прямокутному резонаторі будуть такими (рис. 2.6.1,б).

Приклад 2. Картини полів хвилі E_{01} -типу у круглому циліндричному хвильоводі (рис. 2.6.2,а) та коливання E_{012} -типу у відповідному резонаторі будуть такими (рис. 2.6.2,б).

Приклад 3. Серед коливань E_{mnp} -типу у прямокутному та циліндричному резонаторах можливі коливання E_{mno} -типу (третій індекс

$p=0$), коли довжина резонатора l буде меншою за половину довжини хвилі у відповідному хвильоводі. На рисунку 2.6.3 зображено картину поля коливання типу E_{010} у циліндричному об'ємному резонаторі.

Практичний інтерес має коаксіальний об'ємний резонатор, створений на базі коаксіального хвильоводу з хвилею T -типу. Такі резонатори поширені у діапазоні дециметрових хвиль та короткій частині метрових хвиль.

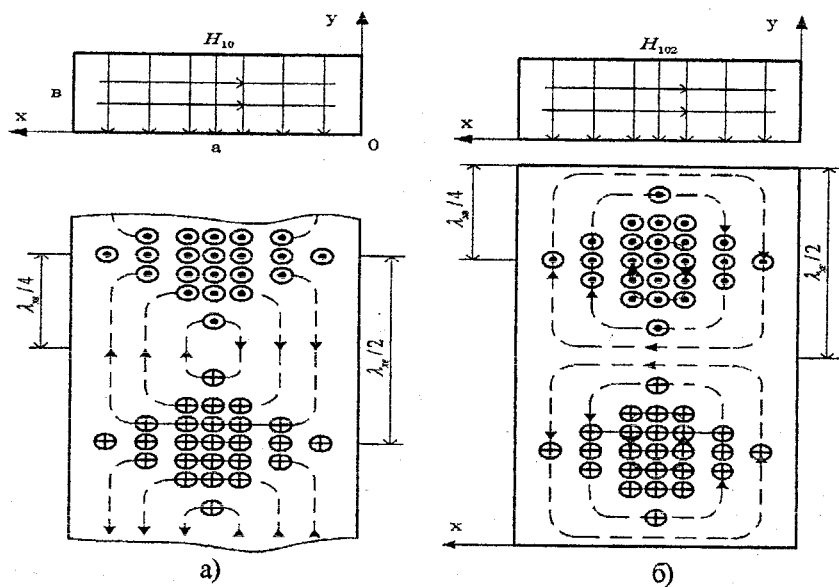


Рисунок 2.6.1

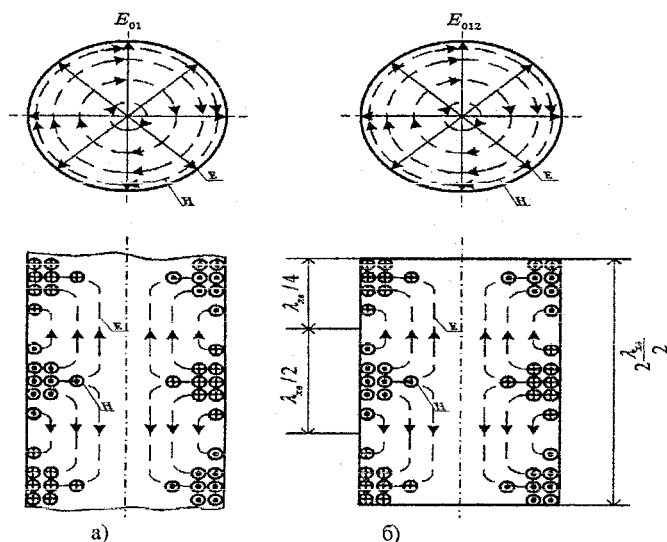


Рисунок 2.6.2

Аналогічна картина поля має місце і у прямокутному резонаторі.

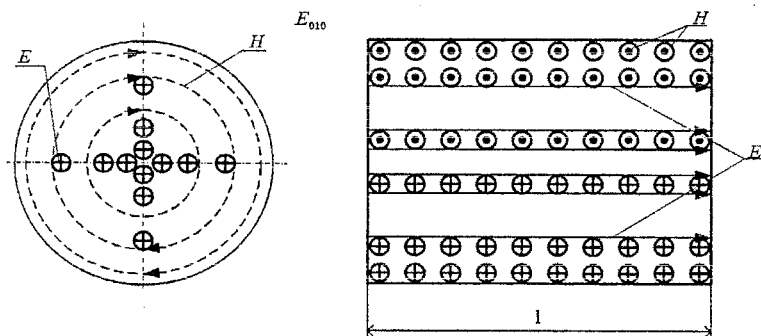


Рисунок 2.6.3

Розглянемо варіант схеми конструкції півхвильового об'ємного коаксialного резонатора, зображеного на рис.2.4.1. У такому резонаторі можливі коливання T_p -типу. Як приклад, наведемо картину поля у півхвильовому коаксialному резонаторі з коливанням T_2 -типу (рис.2.6.4).

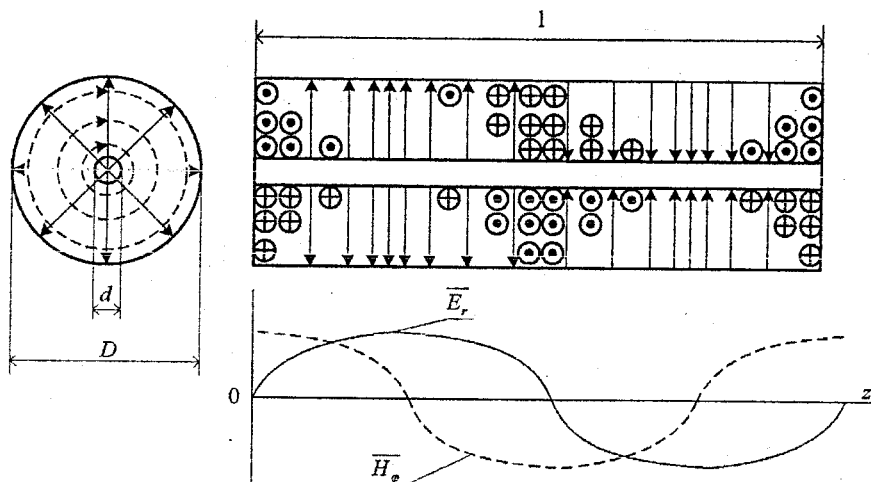


Рисунок 2.6.4

На практиці використовується також коаксіальний об'ємний резонатор зі зосередженою ємністю (рис.2.6.5). Така система може розглядатися як паралельний коливальний контур, де коаксіальний резонатор довжиною l виконує роль індуктивності, яка разом з конденсатором C утворює коливальний контур.

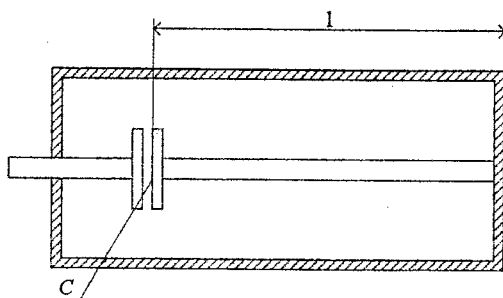


Рисунок 2.6.5

Частоту власних коливань такого контуру визначають за допомогою відомого співвідношення :

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}.$$

Якщо потрібно визначити ємність C , яка необхідна для отримання заданої резонансної частоти ω_p , то слід скористатися формулою

$$C = \frac{1}{\omega_p \sqrt{\frac{\mu a}{\varepsilon a} \ln \frac{D}{d} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{tg} \beta l}}$$

У випадку, коли резонатор заповнений сухим повітрям, то

$$C = \frac{1}{\omega_p 60 \ln \frac{D}{d} \operatorname{tg} \beta l},$$

де $\beta = 2\pi / \lambda_p$, $\lambda_p = 2\pi c / \omega_p$.

Картина поля у такому резонаторі подана на рис.2.6.6.

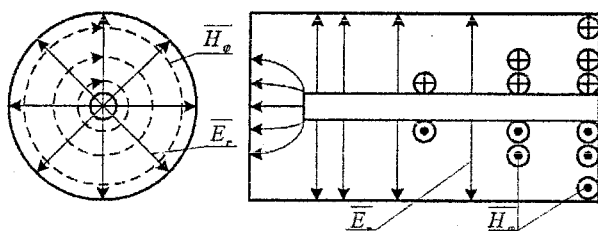


Рисунок 2.6.6

Резонансна довжина такого резонатора, як бачимо на рис.2.6.6, дорівнює приблизно чверті довжини хвилі генератора. Тому такі резонатори (довжина їх кратна $\lambda/4$) називаються чвертьхвильовими.

2.7 Резонатори НВЧ інтегральних схем

В інтегральних схемах НВЧ генераторів, підсилювачів, фільтрів використовуються друковані та об'ємні резонатори.

Друковані резонатори

Найчастіше друковані резонатори виконують у вигляді відрізків смужкової лінії передачі довжиною $\lambda_{\text{хв}}/4$, $\lambda_{\text{хв}}/2$ чи $\lambda_{\text{хв}}$, розімкнутих (рис.2.7.1,б) або коротко замкнутих на одному кінці

(рис.2.7.1,а). У першому з цих випадків еквівалентною схемою резонатора є паралельний коливальний контур, у другому – послідовний контур.

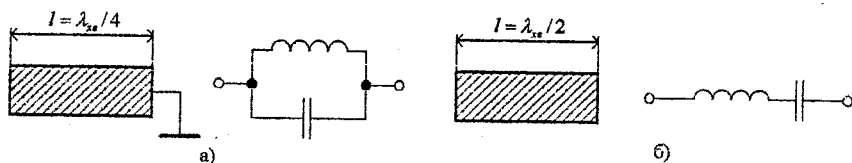


Рисунок 2.7.1

Коротко замкнутий резонатор має більшу добротність і значно менше кінцеве випромінювання у порівнянні з розімкнутим резонатором. Наприклад, п'ятидесятиомний розімкнутий на кінці мікросмужковий резонатор на підкладці з полікору завтовшки 1 мм у 10-сантиметровому діапазоні хвиль має добротність 185, а аналогічний короткозамкнутий резонатор – добротність 480. Найбільшим недоліком короткозамкнутих резонаторів є необхідність замикання провідника на основу за допомогою спеціальних короткозамикачів, що значно ускладнює технологічний процес їх виготовлення.

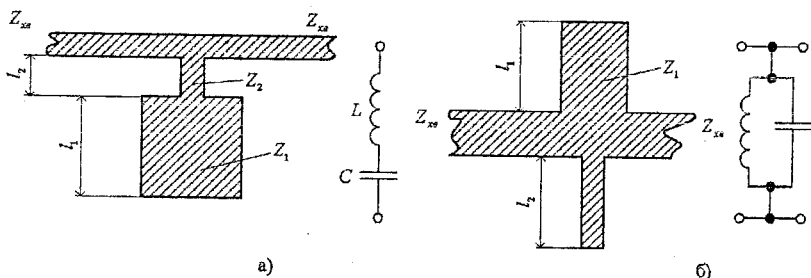


Рисунок 2.7.2

В смужкових фільтрах НВЧ часто використовують резонатори з послідовно (рис.2.7.2,а) або паралельно (рис.2.7.2,б) з'єднаних між собою індуктивних і ємнісних елементів, які до лінії передачі під'єднуються паралельно.

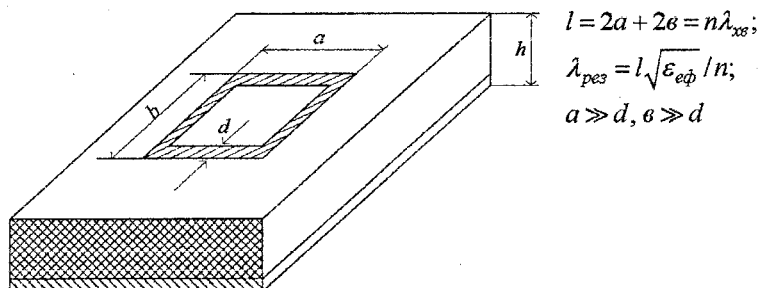
При розрахунках резонаторів, зображених на рис. 2.7.2, користуються такими співвідношеннями:

$$z_2 \gg z_1; \quad z_2 > z_{xв}; \quad c = \frac{33,3}{z_1} l_1 \sqrt{\epsilon}; \quad L = \frac{z_2}{30} l_2 \sqrt{\epsilon},$$

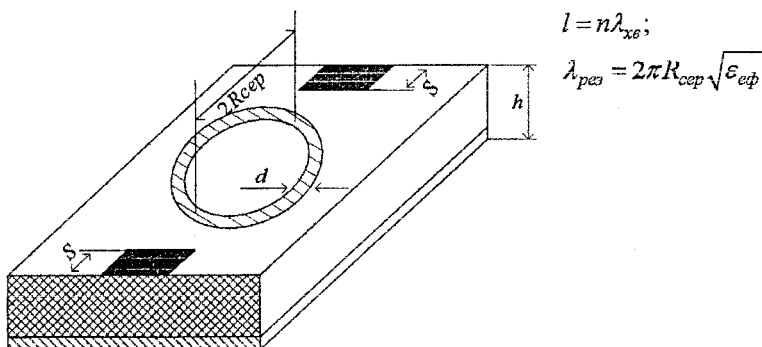
де l_1, l_2 - слід взяти у сантиметрах; $z_1, z_2, z_{xв} \sqrt{2}$ - в омах.

Тоді C буде виражено в пФ, L - нГн.

В конструкціях друкованих резонаторів, виконаних у вигляді квадрата чи прямокутника (рис.2.7.3,а) або кільця (рис.2.7.3,б) довжиною $n\lambda_{xв}$, крайовий ефект усувається.



а)

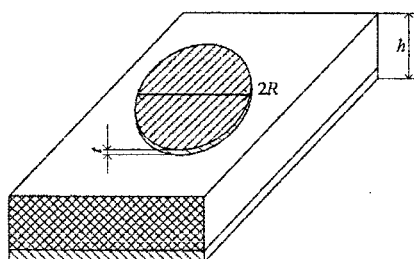


б)

Рисунок 2.7.3

Якщо товщина діелектричної підкладки мала ($h \leq 0,2 \text{ см}; h/R \leq 0,1$), то у кільцевому резонаторі можливе існування коливань типу квазі-Е (E_{m10}),

при яких практично відсутня залежність полів від координати Z , перпендикулярної до площини підкладки. Чим ширше кільце, тим більш високі типи коливань можуть збудитися і підтримуватися у даних структурах. При ширині кільця більші за $\lambda_{\text{хв}}/2$ у резонаторі виникнуть вищі типи коливань $E_{mno}(n)1$. При збільшенні ширини d кільцевий резонатор буде прямувати до дискового (рис.2.7.4,а). Чим більший радіус диска, тим більш високі типи коливань збуджуються у резонаторі. При малій товщині підкладки розподіл векторів електричного поля вздовж осі Z є близьким до рівномірного; при цьому мають місце коливання квазі- E_{mno} .

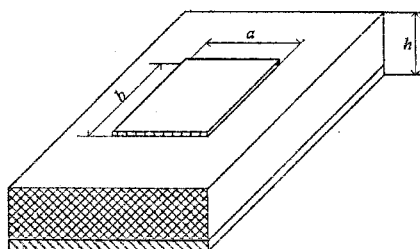


а)

$$\lambda_{\text{рез}} = \frac{2\pi r_{\text{эф}} \sqrt{\epsilon_{\text{эф}}}}{I_m};$$

$$r_{\text{эф}} = f(R, h);$$

I_m — функція Бесселя m -го порядку



б)

$$\lambda_{\text{рез}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{\text{эф}}}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a_{\text{эф}}}\right)^2 + \left(\frac{n}{b_{\text{эф}}}\right)^2}};$$

$$a_{\text{эф}} = \left[\frac{120\pi a^3 h}{Z_{\text{xs}}(a, h, \epsilon) \sqrt{\epsilon_{\text{эф}}}} \right]^{\frac{1}{4}};$$

$$b = \left[\frac{120\pi b^3 h}{Z_{\text{xs}}(b, h, \epsilon) \sqrt{\epsilon_{\text{эф}}}} \right]^{\frac{1}{4}};$$

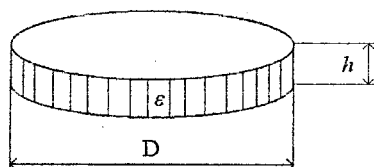
Рисунок 2.7.4

Зв'язок резонаторів зі смужковою лінією може бути реалізований, наприклад, за рахунок регулярних смужкових ліній (рис.2.7.3,б), діаметрально підімкнених до кільцевого резонатора через елементи

зв'язку. Розмір елемента зв'язку S вибирається таким, щоб, з одного боку, не спотворювалось поле резонатора, а з іншого – забезпечувався необхідний рівень зв'язку.

Об'ємні резонатори

Об'ємні резонатори мають форму диска (рис.2.7.5), паралелепіпеда, стрижня або сфери з діелектрика або фериту з високими значеннями $\mu\epsilon$.



$$f_{рез} = A(e + \beta) / h\sqrt{\epsilon},$$

де A і β – постійні коефіцієнти, які визначаються експериментально;
 $e = h/D$.

Рисунок 2.7.5

Принцип дії діелектричного резонатора ґрунтується на явищі повного внутрішнього відбиття від границі розділення діелектрик – повітря. При цьому електромагнітне поле концентрується у об'ємі резонатора і втрати на випромінювання виявляються невеликими.

Перевагою діелектричного резонатора є малі габарити і втрати, що забезпечується застосуванням діелектрика з високим ϵ ($\epsilon \geq 30$) і малим $tg\delta \leq 10^{-3}$. Добротність їх досягає десятків тисяч одиниць, що стає сумірним з добротністю порожнинних хвильоводних резонаторів. У порівнянні з хвильоводними діелектричні резонатори мають значно менші розміри. Наприклад, фільтр на діелектричних резонаторах з TiO_2 ($\epsilon \approx 85$) в екранувальному корпусі у 3...5 разів менший по об'єму у порівнянні з аналогічним хвильоводним фільтром.

До недоліків діелектричних резонаторів слід віднести необхідність їх екранування, що погіршує малогабаритні показники, а також наявність чутливості до коливань температури навколишнього середовища. Останній недолік значною частиною усувається за рахунок комбінованого застосування матеріалів з домішками, які мають різні коефіцієнти температурного розширення.

Широке застосування мають об'ємні резонатори з монокристалів заліза – ітрієвого фериту – гранату (ЗІГ), найчастіше сферичної форми. Вони мають вузьку резонансну криву, високу добротність (десятки тисяч) при малих геометричних розмірах. Власна частота коливань у фериті пов'язана лінійною залежністю з напруженістю поля підмагнічування, що дозволяє здійснити електричне перестроювання частоти резонатора.

1. Показати структури полів основних мод у прямокутному об'ємному резонаторі.
2. Показати структури полів основних мод у циліндричному об'ємному резонаторі.
3. Показати структури полів основних мод у коаксіальному об'ємному резонаторі.
4. Їх відміна від структури полів у хвилеводах.
5. Пояснити умови існування в об'ємних резонаторах коливань заданого типу.
6. Які особливості коаксіальних об'ємних резонаторів?
7. Пояснити принцип побудови НВЧ резонаторів інтегральних схем.
8. Пояснити принцип дії діелектричного резонатора.
9. Яка область застосування об'ємних резонаторів?

3 ЗГАСАННЯ ПОЛЯ В РЕАЛЬНИХ ХВИЛЕВОДАХ

3.1 Загальні зауваження

Реальні хвилеводи виготовляються із кольорових металів чи їх сплавів, які мають велику але скінченну питому електричну провідність. У свою чергу хвилевід заповнений реальним діелектриком, у якому мають місце діелектричні втрати. Через це поле, що поширюється вздовж хвилеводу, буде згасати.

Для оцінювання якості хвилеводу як лінії передачі електромагнітної енергії від джерела до споживача, потрібно визначити швидкість згасання поля за рахунок втрат енергії у стінках хвилеводу та у діелектрику, який заповнює хвилевід.

Окремо слід зауважити, що у реальних хвилеводах структура поля хвиль, що поширюються у ньому, буде відрізнятися від картини поля, розглянутої в ідеальному хвилеводі (хвилеводі без втрат). Зокрема, електрична складова поля буде мати дотичну до стінки хвилеводу складову через те, що стінки хвилеводу не є ідеальними провідниками. Проте, оскільки стінки реальних хвилеводів мають високу електричну провідність, бо, як правило, покриваються тонким шаром срібла (найкращим з відомих провідників), то практично малим значенням дотичної складової електричного поля нехтують і вважають, що структура полів у реальних хвилеводах буде такою ж самою як і в ідеальних

хвильоводах. Це ж саме слід вважати справедливим щодо картин струмів, які протікають у стінках хвильоводів.

3.2 Визначення коефіцієнтів згасання електромагнітних хвиль у прямокутних хвильоводах

У хвильоводах без втрат (ідеальних хвильоводах) коефіцієнт згасання дорівнював нулю і тому стала поширення K у хвильоводі була дійсною величиною і дорівнювала $K = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$.

При наявності втрат стала поширення стає комплексною величиною:

$$K = \beta_z - j\alpha_m - j\alpha_d \quad (3.1)$$

де β_z - повздовжнє хвильове число (коефіцієнт фази);

α_m і α_d - коефіцієнти згасання відповідно у металі (стінках хвильоводу) і в діелектрику, який заповнює хвильовід.

Як відомо, середнє значення вектора Пойнтінга для хвилі, яка поширюється вздовж осі хвильоводу OZ, дорівнює:

$$\bar{P}_{сер} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{E}_{m1} \cdot \dot{H}_{m1}^*], \quad (3.2)$$

де $\dot{E}_{m1}$ - комплексна амплітуда поперечної електричної складової, яка дорівнює:

$$\dot{E}_{m1} = \dot{E}_{mx} + \dot{E}_{my};$$

$\dot{H}_{m1}^*$ - комплексно-спряжена величина комплексної амплітуди поперечної магнітної складової $\dot{H}_{m1}$, яка дорівнює:

$$\dot{H}_{m1} = \dot{H}_{mx} + \dot{H}_{my}.$$

У свою чергу: $\dot{E}_{m1} = \dot{E}_{om} e^{-jkz}$ і $\dot{H}_{m1} = \dot{H}_{om} e^{-jkz}$. Або, з урахуванням (3.1) буде:

$$\dot{E}_{m1} = \dot{E}_{om} e^{-(\alpha_m + \alpha_d)z} \cdot e^{-j\beta_z z}, \quad (3.3)$$

$$\dot{H}_{m1} = \dot{H}_{om} e^{-(\alpha_m + \alpha_d)z} \cdot e^{-j\beta_z z}, \quad (3.4)$$

$$\dot{H}_{m1}^* = \dot{H}_{om}^* e^{-(\alpha_m + \alpha_d)z} \cdot e^{-j\beta_z z}. \quad (3.5)$$

Підставивши вирази (3.3) і (3.5) у формулу (3.2), отримаємо:

$$\bar{P}_{сер} = \frac{1}{2} e^{-2(\alpha_m + \alpha_d)Z} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}}_{om} \cdot \vec{H}_{om}^*]. \quad (3.6)$$

Тоді потужність P , яка передаватиметься по хвилеводу з площею поперечного перерізу $S_{x\theta}$, дорівнюватиме:

$$P = \int_{x\theta} \bar{P}_{сер} \cdot \overline{dS} = \frac{1}{2} e^{-2(\alpha_m + \alpha_d)Z} \int_{x\theta} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \cdot \vec{H}^*] \overline{dS}.$$

Зауважимо, що множник $e^{-2(\alpha_m + \alpha_d)Z}$ був винесений за знак інтегралу, оскільки інтегрування здійснюється за площею поперечного перерізу хвилеводу, тобто за координатами x і y .

Змінювання потужності вздовж хвилеводу через втрати можна визначити величиною похідної:

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = -(\alpha_m + \alpha_d) e^{-2(\alpha_m + \alpha_d)Z} \int_{x\theta} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \cdot \vec{H}^*] \overline{\partial S}.$$

Потужність $\partial P_{втр}$, втрачена на нескінченно малому відрізьку ∂Z за модулем буде дорівнювати:

$$\partial P_{втр} = \{(\alpha_m + \alpha_d) e^{-2(\alpha_m + \alpha_d)Z} \int_{S_{x\theta}} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \cdot \vec{H}^*] \overline{\partial S}\} \cdot \partial Z.$$

Тоді потужність втрачена на кінцевому відрізьку l довжини хвилеводу, знаходиться інтегруванням:

$$\begin{aligned} P_{втр} &= \int_0^l \{(\alpha_m + \alpha_d) e^{-2(\alpha_m + \alpha_d)Z} \int_{S_{x\theta}} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \cdot \vec{H}^*] \overline{\partial S}\} \partial Z = \\ &= (\alpha_m + \alpha_d) \int_{S_{x\theta}} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \cdot \vec{H}^*] \overline{\partial S} \cdot \int_0^l e^{-2(\alpha_m + \alpha_d)Z} \partial Z = \\ &= -\frac{\alpha_m + \alpha_d}{2(\alpha_m + \alpha_d)} \int_{S_{x\theta}} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \cdot \vec{H}^*] \cdot e^{-2(\alpha_m + \alpha_d)Z} I_0^l = \\ &= \frac{1}{2} [1 - e^{-2(\alpha_m + \alpha_d)l}] \int_{S_{x\theta}} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \cdot \vec{H}^*] \overline{\partial S}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

На поверхні реального провідника (металу) існують тангенціальні складові електричного поля з комплексною амплітудою $\dot{\vec{E}}_{m\tau}$ та магнітного – з комплексною амплітудою $\dot{\vec{H}}_{m\tau}^*$. Вони утворюють потік потужності, спрямований в глибину металу перпендикулярно до стінки хвилеводу. Таким чином виникає потік потужності, яка витрачається на нагрівання металу – втрати у металі. Середнє значення вектора Пойнтінга у цьому випадку дорівнює:

$$\bar{P}_{мсер} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{\vec{E}}_{m\tau} \cdot \dot{\vec{H}}_{m\tau}^*] = \bar{n}_o \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{\vec{E}}_{m\tau} \cdot \dot{\vec{H}}_{m\tau}^*],$$

де $\bar{n}_o$ - орт нормалі до стінки хвилеводу, спрямований у глибину металу. Відповідно до наближених граничних умов Леонтовича – Щукіна:

$$\dot{\vec{E}}_{m\tau} = \dot{Z}_m \dot{\vec{H}}_{m\tau},$$

де $\dot{Z}_m$ - комплексний характеристичний опір металу:

$$\dot{Z}_m = \sqrt{\frac{\omega \mu_{ам}}{2\sigma_m}} (1 + j),$$

$$\text{Re}(\dot{Z}_m) = \sqrt{\frac{\omega \mu_{ам}}{2\sigma_m}}.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{мсер} &= \bar{n}_o \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{Z}_m \cdot \dot{\vec{H}}_{m\tau} \cdot \dot{\vec{H}}_{m\tau}^*) = \bar{n}_o \frac{1}{2} H_{m\tau}^2 \text{Re}(\dot{Z}_m) = \\ &= \bar{n}_o \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_{ам}}{2\sigma_m}} \cdot H_{m\tau}^2. \end{aligned}$$

Потужність, яка втрачена у реальному металі площею S_m при падінні на неї електромагнітної хвилі з середнім значенням густини потоку потужності $\bar{P}_{мсер}$, можна визначити інтегруванням:

$$\begin{aligned} P_m &= \int_{S_m} \bar{P}_{мсер} \overline{\partial S}, \\ P_m &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_{ам}}{2\sigma_m}} \cdot \int_{S_m} H_{m\tau}^2 \partial S. \end{aligned} \quad (3.8)$$

У випадку, що розглядається, інтегрування належить проводити по площині металу стінок хвильоводу. Тангенціальні складові магнітного поля $H_{m\tau}$ до металевих стінок є частинами загального поля у хвильоводі і їх залежність від повздовжньої координати Z аналогічна залежностям (3.3) і (3.4):

$$\dot{H}_{m\tau} = \dot{H}_{0\tau} e^{-(\alpha_m + \alpha_\delta)Z} \cdot e^{-j\beta_z z}. \quad (3.9)$$

Тоді :

$$\begin{aligned} \int_{S_m} H_{m\tau}^2 \partial S &= \left(\int_x H_{m\tau}^2 \partial x + \int_y H_{m\tau}^2 \partial y \right) \int_0^l e^{-2(\alpha_m + \alpha_\delta)Z} \cdot \partial Z = \\ &= -\frac{1}{2(\alpha_m + \alpha_\delta)} e^{-(\alpha_m + \alpha_\delta)Z} \Big|_0^l \left(\int_x H_{m\tau}^2 \partial x + \int_y H_{m\tau}^2 \partial y \right) = \\ &= -\frac{1}{2(\alpha_m + \alpha_\delta)} (1 - e^{-(\alpha_m + \alpha_\delta)Z}) \cdot \left(\int_x H_{m\tau}^2 \partial x + \int_y H_{m\tau}^2 \partial y \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тут інтеграли $\int_x H_{m\tau}^2 \partial x$ та $\int_y H_{m\tau}^2 \partial y$ є поверхневими інтегралами, узятимі відповідно по координатах x і y . Підставивши (3.10) у формулу (3.8), отримаємо вираз для потужності, яка втрачається у стінках хвильоводу з урахуванням втрат у діелектрику, що заповнює хвильвід:

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma_m}} \cdot \frac{1}{2(\alpha_m + \alpha_\delta)} \cdot (1 - e^{-2(\alpha_m + \alpha_\delta)Z}) \times \\ &\times \left(\int_x H_{m\tau}^2 \partial x + \int_y H_{m\tau}^2 \partial y \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Якби у хвильоводі втрати у провіднику були відсутні, то взявши у формулі (3.11) $\alpha_m = 0$, отримаємо вираз для потужності втрат у діелектрику P_δ . Для цього звернемося до теореми Пойнтінга для комплексних амплітуд векторів поля. Інтеграл являє собою усереднену за період потужність, яка витрачається на нагрівання діелектрика у об'ємі V хвильоводу, обумовлену електричною провідністю середовища.

$$P_\delta = \frac{1}{2} \int_V \sigma_\delta E_m^2 \partial V. \quad (3.12)$$

Враховуючи вираз (3.3) і поклавши $\alpha_m = 0$, перепишемо останній інтеграл у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 P_\partial &= \frac{1}{2} \int \int_{x,y} \sigma_\partial E_{om}^2 \partial y \partial x \int_0^l e^{-2\alpha_\partial Z} dZ = \\
 &= \frac{1}{4\alpha_\partial} \int \int_{x,y} \sigma_\partial E_{om}^2 \partial y \partial x \cdot e^{-2\alpha_\partial Z} \Big|_0^l = \\
 &= \frac{1}{4\alpha_\partial} (1 - e^{-2\alpha_\partial l}) \int \int_{x,y} \sigma_\partial E_{om}^2 \partial y \partial x.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Прирівнявши вираз (3.11) до виразу (3.7) при $\alpha_\partial = 0$, матимемо:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{4\alpha_m} \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma_m}} (1 - e^{-2\alpha_m l}) \left(\int_x H_{m\tau}^2 \partial x + \int_y H_{my}^2 \partial y \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (1 - e^{-2\alpha_m l}) \cdot \int_{S_m} \operatorname{Re} [\dot{\vec{E}}_{mo}^* \vec{H}_{mo}] \partial \vec{S}.
 \end{aligned}$$

Звідки, розділивши обидві частини цього рівняння на $\frac{1}{2} (1 - e^{-2\alpha_m l})$, отримаємо, що коефіцієнт згасання в хвилеводі через втрати у металі буде дорівнювати:

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma_m}} \left(\int_x H_{m\tau}^2 \partial x + \int_y H_{m\tau}^2 \partial y \right)}{2 \int_{S_m} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}_{mo}^* \vec{H} \right] \partial \vec{S}}. \tag{3.14}$$

Прирівнявши вираз (3.13) до виразу (3.7) при $\alpha_m = 0$, матимемо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\alpha_{\partial}} \cdot (1 - e^{-2\alpha_{\partial}l}) \iint_{xy} \sigma_{\partial} E_{om}^2 \partial y \partial x = \\ & = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\alpha_{\partial}l}) \int_{S_{xs}} \operatorname{Re} [\vec{E}_{om} \cdot \vec{H}_{om}^*] \partial S. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Звідси, розділивши обидві частини останнього рівняння на $\frac{1}{2} e^{j(\omega t + \beta z)}$, отримаємо, що коефіцієнт згасання у хвилеводі через втрати у діелектрику буде дорівнювати:

$$\alpha_{\partial} = \frac{\iint_{xy} \sigma_{\partial} E_{mo}^2 \partial x \partial y}{2 \int_{S_{xs}} \operatorname{Re} [\vec{E} \cdot \vec{H}] \partial S}. \quad (3.16)$$

3.2.1 Розрахунок коефіцієнтів згасання поля в прямокутних хвилеводах з хвилями магнітного типу

Розрахунок α_m проведемо на основі виразу (3.14). Напруженість магнітного поля біля нижньої стінки ($y=0$) та верхньої стінки ($y=b$) є однаковими. Через це можемо зразу визначити сумарний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_x H_{mr}^2 \partial x &= 2 \int_0^a H_{mr}^2 \partial x = 2 \int_0^a \left\{ |\dot{H}_{mx}|^2 + |\dot{H}_{mz}|^2 \right\} \partial x = \\ &= 2 \int_0^a \left\{ \frac{\beta_z}{q_{mn}^4} H_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) + H_{oz}^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \right\} \partial x = \\ &= 2 H_{oz}^2 \frac{a}{2} \left[\frac{\beta_z^2}{q_{mn}^4} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Інтеграл в знаменнику виразу (3.14) є подвоєною проекцією вектора Пойнтінга на вісь OZ хвилеводу, яка утворюється двома парами поперечних складових поля $\dot{E}_{mx}^* H_{my}$ та $\dot{E}_{my}^* H_{mx}$. Отже,

$$\begin{aligned}
\int_{S_{za}} \operatorname{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}] \partial \bar{S} &= \iint_{00}^{ae} \operatorname{Re} \left(\dot{E}_{mx}, H_{my} - \dot{E}_{my} H_{mx} \right) \partial y \partial x = \\
&= \iint_{00}^{ae} \left[\frac{\omega \mu_{aM} \beta_z}{q_{mn}^4} H_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} y \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega \mu_{aM} \beta_z}{q_{mn}^4} H_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{n\pi}{a} y \right) \right] = \\
&= \frac{\omega \mu_{aM} \beta_z}{q_{mn}^4} \cdot \frac{ae}{4} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] = \frac{\omega \mu_{aM} \beta_z}{q_{mn}^4} \cdot \frac{ae}{4}.
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Підставивши вирази (3.17) і (3.18) у формулу (3.14); після громіздких обчислень отримаємо:

$$\alpha_M = \sqrt{\frac{\omega \mu_{aM}}{2\sigma_M}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{e}{a}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2 \frac{e}{a} \left(\frac{e}{a} m^2 + n^2\right)}{\frac{e^2}{a^2} m^2 + n^2} \cdot \frac{1}{\frac{e}{4} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2}}, \quad (3.19)$$

де, нагадаємо, μ_M , σ_M - відповідна абсолютна магнітна проникність та питома провідність металу стінок хвилеводу;

μ_a , ε_a - абсолютна магнітна та діелектрична проникності середовища, яке заповнює хвилевід.

Для хвилеводів, наприклад, з хвилею типу H_{10} - основної моди у стандартних прямокутних хвилеводах, заповнених сухим повітрям ($\mu_a \approx \mu_0$, $\varepsilon_a \approx \varepsilon_0$), вираз (3.19) перепишеться таким чином:

$$\alpha_M = \sqrt{\frac{\omega \mu_{aM}}{2\sigma_M}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{e}{a}\right) \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]}{30\pi e \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}. \quad (3.20)$$

3.2.2 Розрахунок коефіцієнтів згасання поля у прямокутних хвильоводах з хвилями електричного типу

Розрахунок α_m проведено аналогічно до випадку з магнітними хвилями, пам'ятаючи, що використовувати слід вирази для складових полів електричного типу у прямокутному хвильоводі. На основі виразу (3.14) інтеграл біля верхньої та нижньої стінок хвильоводу:

$$\begin{aligned} \int_x H_{mx}^2 \partial x &= 2 \int_0^a H_{mx}^2 \partial x = 2 \int_0^a \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \partial x = \\ &= \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cdot a. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Інтеграл біля правої та лівої стінок хвильоводу:

$$\begin{aligned} \int_y H_{my}^2 \partial y &= 2 \int_0^b H_{my}^2 \partial y = 2 \int_0^b \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \times \\ &\times \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \partial y = \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot b. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Інтеграл у знаменнику виразу (3.14) буде таким:

$$\begin{aligned} \int_{S_{ze}} \operatorname{Re} [\dot{\vec{E}}_{om} \cdot \dot{\vec{H}}_{om}^*] \partial S &= \int_0^a \int_0^b \left(\dot{\vec{E}}_{mx} \dot{\vec{H}}_{my}^* - \dot{\vec{E}}_{my} \dot{\vec{H}}_{mx}^* \right) = \\ &= \int_0^a \int_0^b \frac{\omega \varepsilon_a \beta_z}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right] \partial y \partial x = \\ &= \frac{\omega \varepsilon_a \beta_z}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] = \frac{\omega \varepsilon_a \beta_z}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \frac{ab}{4}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Підставивши вирази (3.21), (3.22), та (3.23) у формулу (3.14) отримаємо:

$$\alpha_M = \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma_M} \cdot \frac{\frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot a + \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot b}{\frac{\omega \varepsilon_a \beta_z}{q_{mn}^2} E_{oz}^2 \frac{ab}{4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma_M} \cdot \frac{\frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{q_{mn}^4} \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot a + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot b \right]}{a \cdot b \cdot \beta_z}}. \quad (3.24)$$

Оскільки : $g_{mn}^4 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, а $\beta_z = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2}$, вираз (3.24) перепишеться таким чином:

$$\alpha_M = \frac{4 \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma_M}} \cdot \left[m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^2 \right]}{b \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \frac{1}{\mu \varepsilon} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2} \cdot \left[m^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + n \right]}. \quad (3.25)$$

Нагадаємо, що тут μ_{am}, σ_M - параметри металу стінок хвелеводу, $\mu, \varepsilon, \mu_a, \varepsilon_a$ - параметри діелектрика, який заповнює хвелевід.

3.2.3 Розрахунок коефіцієнтів згасання у циліндричних хвелеводах з хвилями магнітного типу

Аналогічно до попередніх визначимо інтеграл у чисельнику виразу (3.14). Оскільки у циліндричному хвелеводі дотичними магнітними складовими є $H_{m\varphi}$ та H_{mz} , то на стінці хвелеводу ($r = a$):

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi} H_{mr}^2 r \partial \varphi &= \int_0^{2\pi} (H_{m\varphi}^2 + H_{mz}^2) r \partial \varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\beta_z^2 \cdot a^2}{\mu_{mn}^4} H_{oz}^2 m^2 \operatorname{Im}^2(\mu_{mn}) \cdot \sin^2(m\varphi) + \right. \\
&\quad \left. + H_{oz}^2 \operatorname{Im}(\mu_{mn}) \cos^2(m\varphi) \right] a \partial \varphi = \\
&= H_{oz}^2 \operatorname{Im}^2(\mu_{mn}) \pi \left(\frac{\beta_z^2 a^2}{\mu_{mn}^4} m^2 + a \right). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Інтеграл у знаменнику виразу (3.14):

$$\begin{aligned}
\int_{S_{\text{вс}}} \operatorname{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}] \partial \vec{S} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\vec{E}_{mr} \vec{H}_{m\varphi} - \vec{E}_{m\varphi} \vec{H}_{mr} \right) r \partial \varphi \partial r = \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\omega \mu_a \beta_z a^4}{r^2 \mu_{mn}^4} H_{oz}^2 m^2 \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \sin^2(m\varphi) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega \mu_a \beta_z a^4}{r^2 \mu_{mn}^4} H_{oz}^2 \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \right]^2 \cos^2(m\varphi) \right\} r \partial \varphi \partial r = \\
&= \int_0^a \left\{ \frac{\omega \mu_a \beta_z a^4}{r^2 \mu_{mn}^4} H_{oz}^2 m^2 \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \cdot \pi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega \mu_a \beta_z a^2}{\mu_{mn}^2} H_{oz}^2 \cdot \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \right]^2 \cdot \pi \right\} r \partial r = \\
&= \frac{\omega \mu_a \beta_z a^2}{\mu_{mn}^2} H_{oz}^2 \cdot \pi \int_0^a \left\{ \frac{a^2}{r^2 \mu_{mn}^2} m^2 \operatorname{Im}^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \right]^2 \right\} r \partial r = \\
&= \frac{\omega \mu_a \beta_z a^4}{2 \mu_{mn}^2} H_{oz}^2 \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) \operatorname{Im}^2(\mu_{mn}). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Підставивши вирази (3.26) та (3.27) у формулу (3.19), отримаємо:

$$\alpha_M^{H_{mn}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma_M} \frac{\frac{\beta_z^2 a^2}{\mu_{mn}^4} m^2 + a}{\frac{\omega \mu_a \beta_z a^4}{2\mu_{mn}^2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)}}. \quad (3.28)$$

Використавши те, що: $\lambda_{kp} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}$; $\beta_z = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2}$, останній вираз переписеться так:

$$\alpha_M^{H_{mn}} = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma_M} \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2}}{a \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2}}}. \quad (3.29)$$

Для основної моди H_{11} у циліндричних хвелеводах, наприклад:

$m=1$; $\mu_{11}=1.841$; $\lambda_{kp} = \frac{2\pi a}{1.841}$ і вираз для α_m буде:

$$\alpha_M^{H_{11}} = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma_M} \frac{\left(\frac{1.841 \cdot \lambda}{2\pi a}\right)^2}{a \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{1.841 \cdot \lambda}{2\pi a}\right)^2}}}. \quad (3.30)$$

Якщо хвелевід заповнений сухим повітрям, то у останньому виразі:

$$\mu_a = \mu_0, \quad \varepsilon_a = \varepsilon_0, \quad \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = 120\pi.$$

3.2.4 Розрахунок коефіцієнтів згасання у циліндричних хвильоводах з хвилями електричного типу

Діючи аналогічно попередньому випадку визначимо інтеграли у чисельнику, пам'ятаючи, що у хвиль електричного типу є єдина складова $F_{m\varphi}$ дотична до стінки циліндра. Тому:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} H_{m\varphi}^2 r \partial \varphi &= \int_0^{2\pi} H_{m\varphi}^2 r \partial \varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2 a^3}{V_{mn}^2} E_{oz}^2 [\text{Im}'(V_{mn})]^2 \times \\ &\times \cos^2(m\varphi) \partial \varphi = \frac{\pi \omega^2 \varepsilon_a^2 a^3}{V_{mn}^2} E_{oz}^2 [\text{Im}'(V_{mn})]^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Інтеграл у знаменнику виразу (3.14):

$$\begin{aligned} \int_{S_{os}} \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*] \partial S &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\vec{E}_r \vec{H}_\varphi^* - \vec{E}_\varphi \vec{H}_r^* \right) \cdot \vec{r} \cdot \partial \varphi \cdot \partial r = \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\omega \varepsilon_a a^2 \beta_z}{V_{mn}^2} E_{oz}^2 \left[\text{Im}'\left(\frac{V_{mn}}{a} r\right) \cos^2(m\varphi) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega \varepsilon_a a^4 \beta_z m^2}{r^2 V_{mn}^4} \text{Im}^2\left(\frac{V_{mn}}{a} r\right) \sin^2(m\varphi) \right\} = \\ &= \frac{\omega \varepsilon_a \beta_z a^2}{V_{mn}^2} \int_0^a \left\{ \text{Im}'\left(\frac{V_{mn}}{a} r\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 m^2}{r^2 V_{mn}^2} \text{Im}^2\left(\frac{V_{mn}}{a} r\right) \right\} r \cdot \partial r = \\ &= \frac{\pi \omega \varepsilon_a \beta_z a^2}{2 V_{mn}^2} \text{Im}'(V_{mn}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Підставивши вирази (3.31) та (3.32) у формулу (3.14), отримаємо:

$$\alpha_M^{E_{mn}} = \frac{\omega \mu_{qm}}{2\sigma_M} \frac{V_{mn}^2}{\omega^2 a^4 \beta_z} = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_{qm}}{2\sigma_M}} \frac{1}{a \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2}}. \quad (3.33)$$

3.3 Визначення коефіцієнтів згасання у коаксіальних хвильоводах з хвилями Т-типу

Потужність, яка переноситься Т-хвилею по коаксіальному хвильоводу дорівнює:

$$P_{сеп}^T = \frac{1}{2Z_c} \int_r^R \int_0^{2\pi} \left| \dot{E}_{mr} \right|^2 r \cdot \partial\phi \cdot \partial r = \frac{\pi E_m^2 r^2}{Z_c} \ln \frac{R}{r}, \quad (3.34)$$

де Z_e - хвильовий опір середовища, що заповнює хвильовід;

E_m - максимальна напруженість електричного поля, яка має місце біля поверхні внутрішнього провідника.

Втрати у коаксіальному хвильоводі складаються із втрат у діелектрику α_∂ , який заповнює хвильовід, і втрат у металевих провідниках α_m , тобто коефіцієнт згасання $\alpha = \alpha_\partial + \alpha_m$. При суцільному заповненні величина α_∂ знаходиться з виразу:

$$\alpha_\partial = \sqrt{\frac{-\alpha_0^2 + \sqrt{\alpha_0^4 + \omega^4 \varepsilon'' \mu_a}}{2}}, \quad (3.35)$$

де $\alpha_0 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon' \mu_a}$; $\varepsilon' = \varepsilon$; $\varepsilon'' = \sigma / \omega \varepsilon_0$ (σ - питома провідність діелектрика);

ε - діелектрична стала вакууму;

$\mu_a = \mu \cdot \mu_0$ - абсолютна магнітна проникність діелектрика.

Якщо заповнення є частковим, то коефіцієнт згасання α'_∂ наближено можна визначити за формулою:

$$\alpha'_\partial = \frac{V_\partial}{V_{хв}} \cdot \alpha_\partial,$$

де V_∂ - об'єм діелектричного заповнення;

V_∂ - внутрішній об'єм коаксіального хвильоводу.

Визначимо згасання, обумовлене втратами у металевих провідниках.

Амплітуда дотичної складової магнітного поля $\dot{H}_{тф}$ на поверхні внутрішнього провідника дорівнює E_m / Z_c , а на внутрішній поверхні

зовнішнього провідника - $E_m \cdot r / Z_c \cdot R$. Підставивши ці значення для $\dot{H}_{mf}$ у формулу

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma}} \cdot \frac{1}{4P_{сep}} \int_L \left| \dot{H}_{mf} \right|^2 dl \quad (3.36)$$

і врахувавши вираз (3.33), отримаємо:

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma}} \cdot \frac{1 + \frac{R}{r}}{2R \ln \frac{R}{r}} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \quad (3.37)$$

Оскільки у коаксіальних хвильоводах провідники є немагнітними металами, то $\mu_{am} \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

Питання для самоперевірки

1. Що визначає коефіцієнт згасання?
2. Які основні джерела втрат енергії, яка передається по хвильоводах?
3. Який вплив на значення втрат має чистота поверхні стінок хвильоводів?
4. Які основні джерела втрат енергії, яка передається по коаксіальних хвильоводах?
5. Які основні джерела втрат енергії, яка передається по смужкових хвильоводах?
6. З яких матеріалів виготовляються хвильоводи?

4 ДОБРОТНІСТЬ ОБ'ЄМНИХ РЕЗОНАТОРІВ

4.1 Загальні зауваження

Під добротністю Q будь-якої коливальної системи (згадаємо коливальні контури) розуміють помножене на 2π відношення енергії W_{zan} , яка запасасться коливальною системою, до енергії втрат W_{emp} у цій системі протягом одного періоду коливань T_p :

$$Q = 2\pi \frac{W_{zan}}{W_{emp}(T_o)}. \quad (4.1)$$

Енергія W_{zan} одного резонатора є величина стала і, відповідно до теореми Пойнтінга, у об'ємі V резонатора, вона дорівнює:

$$\begin{aligned} W_{zan} &= \int_0^t \left[\int_V \overline{E} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \partial V + \int_V \overline{H} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \partial V \right] \partial t = \\ &= \int_V \epsilon_a \frac{E^2}{2} \partial V + \int_V \mu_a \frac{H^2}{2} \partial V. \end{aligned}$$

Отже, повна енергія W_{zan} є сумою миттєвих значень енергій електричного і магнітного полів. У коливальній системі відбувається неперервне перетворення електричної енергії в магнітну і навпаки. При максимальній енергії електричного поля магнітна енергія буде дорівнювати нулю, а при максимальній енергії магнітного поля електрична енергія буде рівна нулю. Тобто :

$$W_{zan} = \int_V \epsilon_a \frac{E_m^2}{2} \partial V = \int_V \mu_a \frac{H_m^2}{2} \partial V,$$

де E_m, H_m - максимальні значення електричного і магнітного полів.

Для комплексних амплітуд останній вираз переписється так:

$$W_{zan} = \int_V \epsilon_a \frac{|E_m|^2}{2} \partial V = \int_V \mu_a \frac{|H_m|^2}{2} \partial V. \quad (4.2)$$

Коли об'єм резонатора заповнений діелектриком з питомою електричною провідністю σ_q , то середнє за період коливань значення потужності втрат P_q у діелектрику, як відомо, дорівнюватиме:

$$P_g = \int_V \sigma_q \frac{|\dot{E}_m|^2}{2} dV \quad (4.3)$$

Потужність P_m втрат у реальному металі, як було знайдено раніше, дорівнює

$$P_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma}} \oint_{S_m} |H_{mr}|^2 dS. \quad (4.4)$$

Підставивши вирази (4.2), (4.3) та (4.4) у формулу (4.1), отримаємо вираз для добротності об'ємного резонатора:

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a \int_V |H_m|^2 dV}{\sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma}} \oint_{S_m} |H_{mr}|^2 dS + \int_V \sigma_g \frac{|\dot{E}_m|^2}{2} dv}. \quad (4.5)$$

На практиці використовують об'ємні резонатори, заповнені повітрям, діелектричними втратами у якому нехтують і добротність визначають за формулою:

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_p \mu_a} \int_V |H_m|^2 dV}{\sqrt{\frac{\mu_{am}}{2\sigma}} \oint_{S_m} |H_{mr}|^2 dS}. \quad (4.6)$$

Зауважимо, що добротності об'ємних резонаторів у багато разів більші за добротності коливальних контурів і при відповідній технології можуть досягати величини порядку ста тисяч.

4.2 Визначення добротності прямокутних об'ємних резонаторів з коливаннями магнітного типу

$$\begin{aligned}
 \int_V \left| \dot{H}_{mr} \right|^2 dV &= \int_0^l \int_0^a \int_0^b \left(\left| \dot{H}_{mxp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{myp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{mzp} \right|^2 \right) dx dy dz = \\
 &= \int_0^l \int_0^a \int_0^b \left(4 \frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} H_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right) dx dy dz + \\
 &+ \int_0^l \int_0^a \int_0^b \left(+4 \frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} H_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right) dx dy dz + \\
 &+ \int_0^l \int_0^a \int_0^b \left(4 H_{oz}^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sin^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right) dx dy dz = \\
 &= 4 H_{oz}^2 \frac{a \cdot b \cdot l}{8} \left[\frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) + 1 \right] = \\
 &= H_{oz}^2 \frac{a \cdot b \cdot l}{2} \left(\frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} + 1 \right). \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Інтеграл у знаменнику:

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_{\text{об}}} \left| \dot{H}_{mr} \right|^2 dS &= 2 \int_0^l \int_0^a \left| \dot{H}_{mxp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{mzp} \right|^2 dx dz \Big|_{y=0} + \\
 &+ 2 \int_0^l \int_0^b \left| \dot{H}_{myp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{mzp} \right|^2 dx dz \Big|_{x=0} + 2 \int_0^a \int_0^b \left(\left| \dot{H}_{mxp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{myp} \right|^2 \right) dx dy \Big|_{z=0} = \\
 &+ 2 \int_0^a \int_0^b \left(\left| \dot{H}_{mxp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{myp} \right|^2 \right) dx dy \Big|_{z=0} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^l \int_0^a \left[4 \frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} H_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4 H_{oz}^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} z \right) \right] \partial x \partial z + \\
&+ 2 \int_0^l \int_0^b \left[4 \frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} H_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4 H_{oz}^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} z \right) \right] \partial y \partial z + \\
&+ 2 \int_0^b \int_0^a \left[4 \frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4 \frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} H_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right] \partial x \partial y = \\
&= 8 H_{oz}^2 \frac{a \cdot l}{4} \cdot \left[\frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 1 \right] + 8 \frac{b l}{4} H_{oz}^2 \left[\frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + 1 \right] + \\
&+ 8 \frac{b l}{4} H_{oz}^2 \left\{ \frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} = 2 H_{oz}^2 a l \left[\frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 1 \right] + \\
&\quad + 2 H_{oz}^2 b l \left[\frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + 1 \right] + 2 H_{oz}^2 a b \frac{p^2 \pi^2}{q_{mn}^4 \cdot l^2} = \\
&= 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \frac{a \cdot b}{4} \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] = \\
&= 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left[a l \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + b l \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + a b q_{mn}^2 \right]. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Підставивши (4.7) та (4.8) у формулу (4.6), після перетворень отримаємо:

$$Q^H = \frac{\omega_p \mu_a}{4 \sqrt{\frac{\mu_{am}}{2\sigma}}} \cdot \frac{a b l \omega_p^2 q_{mn}^2 \mu_a \varepsilon_a}{a l \left(\frac{p \pi^2 m}{a l} + q_{mn}^2 \right)^2 + b l \left(\frac{p \pi^2 m}{b l} + q_{mn}^2 \right)^2 + a b \left(\frac{\pi q_{mn} l}{l} \right)^2}. \quad (4.9)$$

4.3 Визначення добротності прямокутних об'ємних резонаторів з коливаннями електричного типу

Виведемо вирази для провідності у випадку коливань E_{mnp} . Для цього визначимо інтеграл у чисельнику та знаменнику виразу (4.6) з урахуванням складових поля коливання E_{mnp} у прямокутному контурі.

$$\begin{aligned} \int_V \left| \dot{H}_{m\pi} \right|^2 \partial V &= \int_0^l \int_0^a \int_0^b \left(\left| \dot{H}_{mxp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{myp} \right|^2 \right) \partial x \partial y \partial z = \\ &= \int_0^l \int_0^a \int_0^b \left[4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{a} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right] \partial x \partial y \partial z = \\ &= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \frac{a \cdot b \cdot l}{8} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{2q_{mn}^2} E_{oz}^2 a b l. \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_{\text{вн}}} \left| \dot{H}_{m\pi} \right|^2 \partial S &= 2 \int_0^l \int_0^a \left| \dot{H}_{mxp} \right|^2 \partial x \partial z \Big|_{y=0} + 2 \int_0^l \int_0^a \left| \dot{H}_{myp} \right|^2 \partial x \partial z \Big|_{x=0} + \\ &+ 2 \int_0^b \int_0^a \left(\left| \dot{H}_{mxp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{myp} \right|^2 \right) \partial x \partial y = \\ &= 2 \int_0^l \int_0^a 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \partial x \partial z + \\ &+ 2 \int_0^l \int_0^a 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \partial y \partial z + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^l \int_0^a \left[4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{a} y \right) \partial x \partial z + \right. \\
& \left. + 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} y \right) \right] \partial x \partial y = \\
& = 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \frac{a \cdot l}{4} \cdot \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \frac{a \cdot l}{4} \cdot \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 = \\
& = 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \frac{a \cdot a}{4} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] = \\
& = 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{q_{mn}^4} E_{oz}^2 \left[al \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + al \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + a \varepsilon q_{mn}^2 \right]. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Підставивши (4.10) та (4.11) у формулу (4.6), після перетворення отримаємо:

$$Q^E = \frac{\omega_p \mu_a}{4 \sqrt{\frac{\mu_{am}}{2\sigma}}} \cdot \frac{a \varepsilon l q_{mn}^2}{al \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + al \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + a \varepsilon q_{mn}^2}. \quad (4.12)$$

4.4 Визначення добротності циліндричних об'ємних резонаторів з коливаннями магнітного типу

Виведемо вираз для добротності циліндричного об'ємного резонатора з коливаннями H_{mnp} . Для цього визначимо інтеграли у чисельнику та знаменнику виразу (4.6) з урахуванням складових полів коливаний H_{mnp} у циліндричному резонаторі:

$$\int_V \left| \dot{H}_m \right|^2 \partial V = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\left| \dot{H}_{mnp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{m\varphi p} \right|^2 + \left| \dot{H}_{mz p} \right|^2 \right) r \partial r \partial \varphi \partial z =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^2 l^2} H_{oz}^2 \left[\text{Im}' \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \right]^2 \times \right. \\
&\quad \times \cos^2(m\varphi) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \\
&\quad + 4 \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 r^2 l^2} H_{oz}^2 m^2 \text{Im}^2 \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \times \\
&\quad \times \sin^2(m\varphi) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \\
&\quad \left. + 4 H_{oz}^2 \text{Im} \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos^2(m\varphi) \sin^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right\} r dr d\varphi dz = \\
&= 4 H_{oz}^2 \frac{\pi l}{2} \int_0^a \left\{ \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 l^2} \right\} \left[\text{Im}' \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \right]^2 + \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 r^2 l^2} m^2. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{ss}} \left| \dot{H}_{mr} \right|^2 dS = \int_0^l \int_0^{2\pi} \left(\left| \dot{H}_{m\varphi p} \right|^2 + \left| \dot{H}_{mrp} \right|^2 \right) a d\varphi dz \Big|_{r=a} + \\
&+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\left| \dot{H}_{mrp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{m\varphi p} \right|^2 \right) r dr d\varphi \Big|_{z=0} = \\
&= \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 r^2 l^2} H_{oz}^2 m^2 \text{Im} \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \sin^2(m\varphi) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4 H_{oz}^2 \text{Im}^2 \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \sin^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right\} a d\varphi dz + \\
&+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 r^2 l^2} H_{oz}^2 \left[\text{Im}' \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \right]^2 \cos^2(m\varphi) + \right. \\
&\quad \left. + 4 \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 r^2 l^2} H_{oz}^2 m^2 \text{Im} \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \sin^2(m\varphi) \right\} r dr d\varphi = \\
&= 4 \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 r^2 l^2} H_{oz}^2 m^2 \text{Im}^2 \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cdot \frac{\pi l}{2} + 4 H_{oz}^2 \text{Im}^2 \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) a \frac{\pi l}{2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8\pi \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 r^2 l^2} H_{oz}^2 \int_0^a \left\{ \frac{a^2 m^2}{\mu_{mn}^2 r^2} \operatorname{Im}^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) + \right. \\
& \left. + \left[\operatorname{Im} \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \right]^2 \right\} r \partial r = \\
& = 2H_{oz}^2 a \pi \operatorname{Im}^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \left[l \left(1 + \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 l^2} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 l^2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) \right]. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

підставивши (4.13) і (4.14) у формулу (4.6), після деяких перетворень отримаємо:

$$Q^H = \frac{\omega_p \mu_a}{2 \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{2\sigma}}} \cdot \frac{al \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) \left(1 + \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 l^2} \right)}{l \left(1 + \frac{p^2 \pi^2 m^2 a^4}{\mu_{mn}^4 l^2} \right) + 2 \frac{p^2 \pi^2 a^4}{\mu_{mn}^4 l^2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right)}. \quad (4.15)$$

4.5 Визначення добротності циліндричних об'ємних резонаторів з коливаннями електричного типу

Виведемо вирази для добротності циліндричного об'ємного резонатора з коливаннями E_{mnp} . Для цього визначимо інтеграл в чисельнику і знаменнику виразу (4.6) з урахуванням складових полів коливань типу E_{mnp} у циліндричному резонаторі:

$$\int_V \left| \dot{H}_m \right|^2 \partial V = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\left| \dot{H}_{mnp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{m\varphi p} \right|^2 \right) r \partial r \partial \varphi \partial z =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2 m^2 a^4}{\eta_{mn}^4 l^2} E_{oz}^2 m^2 \operatorname{Im}^2 \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) \times \right. \\
&\quad \times \sin^2(m\varphi) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) r \partial r \partial \varphi \partial z = + \\
&\quad + 4 \frac{p^2 \pi^2 m^2 a^4}{\eta_{mn}^4 l^2} E_{oz}^2 \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) \right]^2 \times \\
&\quad \times \cos^2(m\varphi) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \left. \right\} r \partial r \partial \varphi \partial z = \\
&= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 \frac{\pi l}{2} \cdot \frac{a^2}{2} [\operatorname{Im}'(\eta_{mn})]^2 = \\
&= \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 \pi l [\operatorname{Im}'(\eta_{mn})]^2. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{S_{\text{ex}}} \left| \dot{H}_{m\tau} \right|^2 \partial S &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \left| \dot{H}_{m\varphi\varphi} \right|^2 a \partial \varphi \partial z \Big|_{r=a} + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\left| \dot{H}_{mrp} \right|^2 + \left| \dot{H}_{m\varphi p} \right|^2 \right) r \partial r \partial \varphi \Big|_{z=0} = \\
&= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) \right]^2 \cos^2(m\varphi) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) a \partial \varphi \partial z + \\
&+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 m^2 \operatorname{Im}^2 \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) \sin^2(m\varphi) + \right. \\
&\quad \left. + 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) \right]^2 \cos^2(m\varphi) \right\} r \partial r \partial \varphi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) \frac{\pi l}{2} a + \right. \\
&\quad \left. + 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 \pi a^2 \int_0^a \frac{m^2 a^2}{r^2 \eta_{mn}^2} \operatorname{Im}^2 \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) + \left. \frac{r}{a} \partial r = \right. \\
&\quad \left. + \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) \right]^2 \right] \\
&= 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) \right]^2 \pi l a + \\
&\quad + 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 \frac{\pi a^2}{2} \left[\operatorname{Im}' \left(\frac{\eta_{mn} r}{a} \right) \right]^2 = \\
&= 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 a^4}{\eta_{mn}^4} E_{oz}^2 \pi \left[\operatorname{Im}'(\eta_{mn}) \right]^2 (l + 2a). \quad (4.17)
\end{aligned}$$

4.6 Визначення добротності коаксіальних об'ємних резонаторів з коливаннями Т-типу

Виведемо вираз для добротності коаксіального об'ємного резонатора з коливаннями Т-типу. Для цього визначимо інтеграли у чисельнику і знаменнику формули (4.6), урахувавши вирази для складових полів коливання у коаксіальному резонаторі:

$$\int_V \left| \dot{H}_m \right|^2 \partial V = \int_r^R \int_0^{2\pi} \int_0^l \left| \dot{H}_{m\varphi} \right|^2 \rho \partial \rho \partial \varphi \partial z = \frac{\left| E_{mr} \right|^2 r^2}{Z_c^2} \pi l / \ln \frac{R}{r}. \quad (4.18)$$

$$\oint_{S_{\infty}} \left| \dot{H}_{mr} \right|^2 \partial S = \frac{\left| E_{mr} \right|^2 r^2}{Z_c^2} \times \left\{ 2 \int_r^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma} \partial \varphi \partial \rho + \int_0^{2\pi} \int_0^l \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \cos^2(\beta z) \partial \varphi \partial z \right\} =$$

$$= \frac{|E_{mr}|^2}{Z_c^2} \pi \left[4 \ln \frac{R}{r} + l \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \right]. \quad (4.19)$$

Підставивши (4.18) та (4.19) у формулу (4.6), матимемо:

$$Q^T = \frac{\sqrt{\omega_p \mu_a}}{\sqrt{\frac{\mu_{am}}{2\sigma}}} \cdot \frac{l \cdot R \cdot r \ln R/r}{4R \cdot r \cdot \ln R/r + l(R+r)}. \quad (4.20)$$

Кількісні розрахунки за виразом (4.20) показують, що у коаксіальних резонаторів виготовлених з міді добротність на хвилях, довгих за 10 см, досягає декількох десятків тисяч, але швидко падає при зменшенні довжини хвилі. Основна причина цього є прояв поверхневого ефекту на внутрішньому провіднику об'ємного резонатора при великій концентрації поля на ньому, що призводить до теплових втрат (до нагрівання внутрішнього провідника).

Питання для самоперевірки

1. Що таке добротність об'ємного резонатора?
2. Від чого залежить значення добротності об'ємного резонатора?
3. Як визначається добротність прямокутних об'ємних резонаторів?
4. Як визначається добротність циліндричних об'ємних резонаторів?
5. Яка різниця в добротності об'ємного резонатора для коливань магнітного та електричного типу?
6. Що впливає на добротність коаксіальних об'ємних резонаторів?

ГЛОСАРІЙ

Спрямована система – directional system
Хвилевід - waveguide
Поздовжня складова - longitudinal component
Поперечна складова – crosscut component
Фазовий фронт - phase front
Тангенціальна складова – tangential component
Нормальна складова - normal component
Падаюча хвиля - impinging wave
Коефіцієнт відбиття - reflection coefficient
Відбита хвиля - reflected (reflex) wave
Картина поля - field pattern
Магнітна хвиля – magnetic wave
Монохроматичне поле – monochromatic field
Критична довжина хвилі - boundary wavelength
Монохроматичні коливання – monochromatic oscillations
Декартова система координат - cartesian system of coordinates
Циліндрична система координат – cylindrica system of coordinates
Дисперсія - dispersion
Фазова швидкість - phase velocity
Періодичність - periodicity
Групова швидкість - envelope velocity (group velocity)
Дисперсна характеристика - dispersive characteristic
Дисперсія - dispersion
Хвильовий опір - wave resistance
Діелектрик - dielectric, electric insulator, insulator
Прямокутний хвилевід - rectangular waveguide
Тип хвилі - wave mode
Одномодовий режим - single-mode operation
Комплексна амплітуда – complex amplitude
Вектор - vector
Миттєве значення - instantaneous value, momentary value
Амплітудне значення - magnitude, of an amplitude
Перебір - cutover
Поздовжнє хвильове число - longitudinal propagation number
Сілові лінії - flux
Електричне поле - electric field, electrostatic field
Граничні умови - extreme conditions
Циліндричний хвилевід – cylindrical waveguide
Коаксіальний хвилевід - coaxial waveguide
Діелектрична проникність - dielectric capacitvity
Необмежене середовище – unbounded medium

Діелектричний хвилевід - dielectric waveguide
 Енергія хвиль - waves energy
 Поверхнева хвиля - surface wave
 Згасання - extinction
 Показник заломлення середовища - medium index of refraction
 Діапазон - range
 Коефіцієнт заломлення - refraction coefficient, refraction factor
 Смужкова лінія - striplines
 Широкосмуговість - broadbandness
 Мікромініатюризація - microminiaturization
 Симетрична смужкова лінія - symmetric stripline
 Структура поля - field structure
 Несиметрична смужкова лінія - microstrip
 Мікросмушкова лінія - microstrip
 Напруженість електричного поля - electric (field) intensity
 Струм провідності - conduction current
 Струм зміщення - bias(ing) current, displacement current
 Симетрична щілинна лінія - balanced slotted line
 Поляризація - (електрохімічна) charging, polarization
 Несиметрична щілинна лінія - unbalanced slotted line
 Компланарна лінія - coplanar line
 Еліптична функція - elliptic function
 Хвилевід повільних хвиль - waveguide of slow waves
 Резонатор - resonator
 Коливальний контур - oscillating circuit, oscillation circuit
 Добротність об'ємних резонаторів - quality of solid resonators
 Резонансна частота - resonance frequency
 Прямокутний об'ємний резонатор - orthogonal cavity resonator
 Інтерференція - interferences
 Стояча хвиля - coincident wave, conjuncional wave, stationary wave
 Біжуча хвиля - progressive wave, roll wave, running wave, traveling wave
 Циліндричний об'ємний резонатор - cylindrical cavity resonator
 Коаксіальний об'ємний резонатор - coaxial cavity resonator
 Друковані резонатори - printed resonators
 Коротко замкнутий резонатор - short-circuited resonator
 Розімкнутий резонатор - open resonator
 Підкладка - underlying surface
 Діелектричні втрати - dielectric losses
 Реальний хвилевід - real waveguide
 Ідеальний хвилевід - perfect waveguide
 Коефіцієнт згасання - reduction ratio
 Коефіцієнт фази - phase coefficient

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ.- М.: Высш. шк., 1990.- 335 с.
2. Смирнов Н. А. Техническая электродинамика. - М.: Связь, 1973.- 480 с.
3. Метрикин А. А. Антенны и волноводы РРЛ.- М.: Связь, 1977.- 184 с.
4. Валнэ Г. М., Глаголев Б. С. Перспективные линии передачи КВЧ-диапазона.- М.: ЦНИИ «Электроника», 1986.- 136с. - (Обзоры по электронной технике. Сер. 1: Электроника СВЧ; Вып. 11).
5. Взятых В. Ф. Диэлектрические волноводы.- М.: Сов. радио, 1970. - 216 с.
6. Анализ микрополосковых линий.- Вильнюс: Мокслас, 1985.- 166 с.
7. Микроэлектронные устройства СВЧ / Н. Т. Бова, Ю. Г. Ефремов, В. В. Конин и др.- К.: Техника, 1984.- 184 с.
8. Микроэлектронные устройства СВЧ / Под ред. Г. И. Веселова.- М.: Высш.школа, 1988.- 280 с.
9. Нефедов Е. И., Фиалковский А.Т. Полосковые линии передачи.- М.: Наука, 1980.- 312 с.