

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**В. М. Кичак, Ю. В. Крушевський, Д. В. Гаврілов**

# **ОСНОВИ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ**

Навчальний посібник

Вінниця  
ВНТУ  
2010

**В. М. Кичак, Ю. В. Крушевський, Д. В. Гаврілов**

## **ОСНОВИ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ**

УДК 621.3.01

ББК 32

К46

Рецензенти:

**М. М. Климаш**, доктор технічних наук, професор

**О. А. Серков**, доктор технічних наук, професор

**В. П. Манойлов**, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки "Радіоелектронні апарати". Лист № 1/11-8814 від 22.09.2010.

**Кичак, В. М.**

К46 Основи радіоелектроніки : навчальний посібник / В. М. Кичак, Ю. В. Крушевський, Д. В. Гаврілов. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 368 с.  
ISBN

В навчальному посібнику розглянуті фундаментальні основи теорії кіл та сигналів, такі як: вивчення властивостей і параметрів електричних кіл постійного і гармонічного струмів, що складаються з основних пасивних елементів, утворюючи вузли і пристрої, де протікають фізичні процеси; аналіз детермінованих радіотехнічних сигналів; кодування повідомлень і елементарні відомості з теорії інформації; проходження радіотехнічних сигналів через лінійні кола; нелінійні перетворення сигналів і принципи реалізації процесів: випрямлення, детектування, множення частоти, модулювання перетворення частоти.

УДК 621.3.01

ББК 32

ISBN

© В. Кичак, Ю. Крушевський, Д. Гаврілов, 2010

## ЗМІСТ

Вступ .....	9
1 Кола постійного струму .....	13
1.1 Електричне коло .....	13
1.2 Вибір напрямку протікання струму та напрямку напруги .....	14
1.3 Резистор і опір. Закон Ома.....	16
1.4 Енергія і потужність електричного струму.....	18
1.5 Генератор напруги (е. р. с.) та генератор струму .....	19
1.6 Основні поняття електричної схеми .....	22
1.7 Лінійні, нелінійні та параметричні кола.....	24
1.8 Розподіл потенціалів вздовж електричного кола .....	26
1.9 Закони Кірхгофа .....	27
1.10 Еквівалентні перетворення електричних схем методом згортання .....	29
1.11 Взаємне перетворення трикутника і зірки опорів .....	33
Запитання та задачі для закріплення .....	35
2 Гармонічний струм .....	37
2.1 Генерування гармонічних е. р. с. та струму .....	37
2.2 Математична і графічні моделі та параметри гармонічного струму .....	39
2.3 Середнє та діюче значення гармонічного струму .....	44
2.4 Резистор і активний опір.....	46
2.5 Котушка індуктивності та індуктивність .....	50
2.6 Конденсатор і електрична ємність .....	54
Запитання та задачі для закріплення .....	58
3 Кола гармонічного струму і символічний метод їх розрахунку.....	59
3.1 Комплексні числа та прості математичні операції над ними .....	59
3.2 Подання обертового вектора комплексною функцією .....	62
3.3 Закони Ома та Кірхгофа у комплексній формі .....	63
3.4 Застосування законів Ома і Кірхгофа для комплексних амплітуд при розрахунку електричних кіл .....	66
3.5 Комплексна потужність та її складові .....	74
3.6 Баланс потужностей .....	75
3.7 Комплексно-спряжене узгодження генератора і приймача енергії.....	77
Запитання та задачі для закріплення .....	79

4	Перетворення схем електричних кіл гармонічного струму .....	81
4.1	Послідовне, паралельне та змішане з'єднання.....	81
4.2	Еквівалентні схеми реальних котушки індуктивності і конденсатора .....	85
4.3	Взаємне перетворення трикутника та зірки комплексних опорів .....	88
4.4	Еквівалентні генератор струму та генератор напруги .....	89
4.5	Перетворення схем з паралельно увімкненими генераторами.....	91
4.6	Перетворення схем з електричною симетрією .....	92
	Запитання та задачі для закріплення .....	94
5	Одиничний коливальний контур.....	95
5.1	Вільні коливання в ідеальному контурі .....	95
5.1.1	Рівняння коливань і його розв'язування .....	95
5.1.2	Процес коливань та його механічна модель .....	97
5.1.3	Параметри ідеального контуру .....	99
5.2	Вільні коливання в реальному контурі.....	102
5.2.1	Рівняння коливань та його розв'язування.....	102
5.2.2	Параметри реального контуру .....	104
5.3	Вимушені коливання у послідовному коливальному контурі .....	108
5.3.1	Вхідний опір та його складові.....	108
5.3.2	Векторні діаграми. Резонанс напруг.....	110
5.3.3	Вплив опору навантаження на параметри контуру.....	112
5.3.4	Вхідний опір контуру при невеликих розстроюваннях .....	113
5.3.5	Амплітудно-частотні характеристики за напругою.....	116
5.3.6	Фазочастотні характеристики за напругою .....	117
5.3.7	Настроювальні криві.....	118
5.3.8	Рівняння вибірності та смуга пропускання при невеликих розстроюваннях .....	120
5.4	Вимушені коливання у паралельному контурі .....	124
5.4.1	Паралельний контур загального виду .....	124
5.4.2	Паралельний контур I виду .....	126
5.4.2.1	Вхідний опір .....	127
5.4.2.2	Частотні характеристики вхідного опору .....	128
5.4.2.3	Векторні діаграми і еквівалентні схеми контуру при розстроюванні.....	130
5.4.2.4	Резонанс струмів .....	132
5.4.2.5	Енергетичне пояснення характеру вхідного опору паралельного контуру.....	133

	5.4.2.6	Вплив внутрішнього опору генератора та навантаження на параметри контуру .....	134
	5.4.2.7	Амплітудно-частотна характеристика за напругою .....	136
	5.4.2.8	Вибірність і смуга пропускання.....	137
	5.4.2.9	Порівняння послідовного і паралельного контурів .....	138
	5.4.3	Паралельний контур II виду .....	139
	5.4.4	Паралельний контур III виду .....	142
		Запитання та задачі для закріплення .....	144
6		Симетричні кола трифазного струму.....	146
	6.1	Трифазні електричні кола .....	146
	6.2	З'єднання зіркою .....	148
	6.3	З'єднання трикутником .....	150
		Запитання та задачі для закріплення .....	152
7		Деякі методи аналізу складних електричних кіл.....	153
	7.1	Застосування законів Кірхгофа .....	153
	7.2	Метод накладання.....	154
	7.3	Коефіцієнт передачі напруги і струму.....	157
	7.4	Метод еквівалентного генератора.....	158
		Запитання та задачі для закріплення .....	160
8		Кола зі взаємною індуктивністю.....	161
	8.1	Взаємна індуктивність .....	161
	8.2	Полярність індуктивно зв'язаних котушок. Е. р. с. взаємної індукції.....	162
	8.3	Взаємоіндуктивність при послідовному і паралельному ввімкненні індуктивно зв'язаних котушок.....	164
	8.4	Рівняння та схема заміщення трансформатора без феромагнітного осердя.....	167
	8.5	Автотрансформатор.....	171
		Запитання та задачі для закріплення .....	172
9		Вимушені коливання у системі зв'язаних контурів.....	173
	9.1	Основні схеми систем зв'язаних контурів.....	173
	9.2	Коефіцієнт зв'язку.....	175
	9.3	Вхідний опір системи двох контурів з трансформаторним зв'язком .....	177
	9.4	Внесені опори та їх фізичний зміст .....	178
	9.5	Настроювання системи двох зв'язаних контурів.....	182
	9.5.1	Перший частинний резонанс .....	183
	9.5.2	Другий частинний резонанс .....	184
	9.5.3	Повний резонанс.....	185
	9.5.4	Амплітудно-частотні характеристики двох трансформаторно зв'язаних контурів .....	190

9.5.5	Вибірність зв'язаних контурів .....	195
	Запитання та задачі для закріплення .....	196

10	Електричні фільтри.....	198
10.1	Призначення та класифікація фільтрів.....	198
10.2	Реактивні фільтри типу k.....	202
10.2.1	Фільтри нижніх частот.....	202
10.2.2	Фільтри верхніх частот.....	205
10.2.3	Смугові та загороджувальні фільтри.....	207
10.3	Реактивні фільтри типу m.....	209
10.4	Резистивно-ємнісні фільтри.....	211
10.4.1	RC-фільтри верхніх частот.....	212
10.4.2	RC-фільтри нижніх частот.....	214
10.4.3	Смугові та загороджувальні RC -фільтри.....	215
10.5	Фільтри зосередженої селекції.....	216
	Запитання та задачі для закріплення.....	219
11	Радіотехнічні процеси та задачі радіоелектроніки.....	220
11.1	Поняття інформації, повідомлення, сигналу.....	220
11.2	Телефонія.....	221
11.3	Основні радіотехнічні процеси.....	222
11.4	Радіотелефонія і радіотелеграфія.....	225
11.5	Радіолокація.....	227
	Запитання та задачі для закріплення.....	229
12	Сигнали.....	230
12.1	Класифікація сигналів.....	230
12.2	Амплітудно– і фазочастотний спектри.....	236
12.3	Спектральний аналіз сигналів.....	238
12.3.1	Спектральний аналіз періодичної послідовності прямокутних імпульсів.....	238
12.3.2	Спектральний аналіз неперіодичних сигналів.....	243
12.4	Кореляційний аналіз сигналів і їх енергія.....	247
12.4.1	Енергія сигналу.....	247
12.4.2	Кореляційна функція сигналу.....	248
12.4.2.1	Кореляційні функції скінченних сигналів.....	248
12.4.2.2	Кореляційна функція періодичного сигналу.....	252
12.4.2.3	Кореляційна функція дискретного сигналу.....	253
12.4.3	Зв'язок між кореляційною функцією і спектраль- ною характеристикою сигналу.....	256
	Запитання та задачі для закріплення.....	257
13	Радіосигнали.....	258
13.1	Загальні визначення.....	258
13.2	Амплітудно-модульовані сигнали.....	259



13.3	Частотний спектр однотоноально амплітудно-модульованого сигналу .....	261
13.4	Частотний спектр АМ сигналу при модуляції складним сигналом .....	264
13.5	Потужність АМ сигналу .....	267
13.6	Сигнал з кутовою модуляцією .....	269
13.7	Частотний спектр однотоноального ЧМ сигналу при $M \ll 1$ .....	271
13.8	Частотний спектр однотоноального ЧМ сигналу при довільному значенні індексу модуляції .....	272
13.9	Потужність сигналів з кутовою модуляцією .....	274
13.10	Спектр коливання при змішаній амплітудно-частотній модуляції .....	275
	Запитання та задачі для закріплення .....	276
14	Перехідні процеси .....	277
14.1	Поняття про перехідні процеси.....	277
14.2	Неперервність енергії. Закони комутації .....	278
14.3	Увімкнення котушки індуктивності на постійну напругу.....	279
14.4	Увімкнення RC-кола на постійну напругу.....	284
14.5	Перехідні процеси у колах з R, L та C.....	289
14.6	Перехідні процеси в RLC-колі при дії на нього прямокутних відеоімпульсів.....	291
14.7	Перехідні процеси в RLC-колі при дії на нього прямокутних радіоімпульсів .....	293
14.8	Одинична функція та перехідна характеристика кола.....	296
14.9	Імпульсна функція та імпульсна характеристика кола.....	297
	Запитання та задачі для закріплення .....	298
15	Проходження сигналів через лінійні кола.....	299
15.1	Диференціальні кола .....	299
15.2	Інтегровальні кола .....	303
15.3	Проходження амплітудно-модульованих сигналів через коливальні кола.....	305
15.4	Проходження частотно-модульованих сигналів через коливальні кола.....	310
	Запитання та задачі для закріплення .....	311
16	Нелінійні процеси в радіотехніці .....	312
16.1	Зовнішні характеристики нелінійних елементів і способи їх описування .....	312
16.2	Спектральний склад струму у нелінійному елементі при гармонічній зовнішній дії .....	316
16.3	Нелінійні перетворення суми двох гармонічних сигналів.....	323
	Запитання та задачі для закріплення .....	329

17	Елементи теорії інформації і кодування.....	330
17.1	Загальні зауваження .....	330
17.2	Дискретизація та квантування сигналів .....	331
17.2.1	Рівномірна дискретизація за частотним критерієм Котельникова .....	331
17.2.2	Равномірне квантування за рівнем .....	333
17.3	Кодування сигналів .....	334
17.3.1	Коди, види кодів та їх параметри.....	334
17.3.2	Системи числення і прості цифрові коди.....	335
17.3.3	Складені коди .....	337
17.3.4	Кодування дискретних та неперервних повідомлень .....	338
17.4	Кількість інформації і ентропія.....	342
17.4.1	Кількісна оцінка інформації .....	342
17.4.2	Ентропія як міра невизначеності .....	346
17.4.3	Надмірність повідомлень.....	348
17.5	Швидкість передачі інформації.....	351
17.5.1	Об'єм сигналу і ємність інформаційного каналу .....	351
17.5.1	Швидкість передачі сигналу та пропускна здатність каналу .....	353
17.6	Методи підвищення надійності передачі інформації.....	354
17.6.1	Коди з виявленням помилок.....	354
17.6.2	Коди з виправленням помилок.....	357
	Запитання та задачі для закріплення .....	360
	Глосарій .....	361
	Словник найбільш уживаних термінів .....	363
	Література.....	366

## ВСТУП

Життя сучасного суспільства практично неможливе без радіоелектронних засобів. Радіомовлення (broadcasting), телебачення (television), телефон (telephone), телеграф (telegraph), телетайп, радіолокація, промислова, медична та аграрна електроніка – далеко не повний перелік електронних засобів, які широко використовуються у нашому житті.

Але будь-яка система забезпечується сукупністю електричних і електронних пристроїв різної складності, які складаються з елементів, до яких прикладені електричні напруги (voltages) або протікають електричні струми (currents). Будь-які складні радіоелектронні пристрої складаються з різноманітних електричних кіл (circuits), які мають певні електричні властивості. Таким чином, щоб розробляти, виготовляти, грамотно експлуатувати різноманітну радіоелектронну апаратуру, необхідно, перш за все, знати процеси, які протікають в електричних колах за певних умов, а також закони, за якими ці процеси протікають; основні з таких законів вивчаються в дисципліні "Основи радіоелектроніки".

Вже в кінці 60-х років минулого століття стало зрозумілим, що знання з основ електротехніки, які повинні мати фахівці у галузі передачі інформації, значно відрізняються від відомостей, необхідних фахівцям у галузях електроенергетики, електромеханіки і т. ін. Енергетика базується, перш за все, на постійному або періодичному струмі промислової частоти і займається виробленням, передаванням та використанням електричної енергії для нагрівання, освітлення, роботи електричних моторів тощо. Для радіоспеціалістів основними задачами є отримання та використання електричних сигналів з певним спектром частот з метою передавання та обробки інформації, забезпечуючи при цьому мінімальне її спотворення.

Посібник "Основи радіоелектроніки" включає розділи, які розглядалися в різних дисциплінах, у тому числі – в електротехніці, радіотехніці, теорії зв'язку і в деяких інших. Ця теорія не мала б сучасного вигляду, якби численні дослідники не внесли свій вклад в науку про властивості електромагнітних полів, електричних кіл та їх технічного застосування. Згадаємо лише деяких з них. Серед багатьох виділимо відкриття англійським фізиком-самоучкою Майклом Фарадеєм у 1831 році явища електромагнітної індукції (electromagnetic induction). Його співвітчизник, блискучий теоретик Джеймс Клерк Максвелл, розробив теорію електромагнітних явищ, передбачивши існування електромагнітних хвиль (1883 рік), а німецький вчений Генріх Герц у 1888 році експериментально довів їх існування. Петербурзький професор О. С. Попов у 1895 році винайшов радіо, побудував перший радіоприймач, у 1897 році встановив можливість радіолокації, а в 1900 році організував перший радіозв'язок острова Гогланд з материком. Подальші численні роботи з теорії і практики радіоприймальних, радіопередавальних пристроїв на базі

досягнень електроніки, радіотехнічних систем і т. ін, породили цілий світ, який ми сьогодні називаємо радіоелектронікою.

Радіоелектроніка продовжує інтенсивно розвиватися та вдосконалюватися і сучасному спеціалісту у цій галузі прийдеться займатися пристроями, які сьогодні знаходяться ще у стадії розробки або проектування, а до цього потрібно бути готовим.

### ***Місце радіотехніки у галузях сучасної науки і техніки***

Важливе місце у галузях сучасної науки і техніки, досягнення яких безпосередньо сприяють зростанню економічного і культурного рівня суспільства, належить радіотехніці.

***Радіотехніка*** – це науково-технічна галузь, задачами якої є:

1) вивчення принципів генерування (generation), підсилення (amplification), випромінювання і приймання електромагнітних коливань, які відносяться до радіодіапазону;

2) практичне використання цих коливань з метою передавання, зберігання і перетворення інформації.

На початковому етапі свого розвитку слідом за винаходом радіо (О. С. Попов, 1895 р.) радіотехніка розв'язувала переважно проблеми електрозв'язку, використовуючи електромагнітні коливання з довжинами хвиль у декілька сотень чи тисяч метрів. На теперішній час царина застосування радіотехніки незрівнянно зросла. Радіозв'язок, телебачення, радіолокація, радіоуправління, радіонавігація, радіотехнічні методи в біології, медицині, сільському господарстві – такий неповний перелік галузей радіотехніки.

Проникнення радіотехніки у суміжні наукові і технічні галузі (електроніку, обчислювальну техніку) зумовило виникнення широкої науково-технічної галузі, яка отримала узагальнену назву радіоелектроніка.

Як відомо із загального курсу фізики, передавання інформації від її джерела до споживача за допомогою радіотехнічних засобів здійснюється по радіоканалу. Основні елементи радіоканалу – передавальний пристрій, приймальний пристрій та фізичне середовище, яке їх розділяє і у якому відбувається поширення радіохвиль. Середовищем поширення може бути як вільний простір, так і спеціальні технічні пристрої: хвилеводи, кабелі та інші лінії передавання.

Сигнал, який надходить від первинного джерела повідомлення, на передавальному боці радіоканалу за допомогою мікрофону, передавальної телевізійної камери чи інших подібних пристроїв перетворюється в електричні коливання. Ці коливання не можуть бути безпосередньо використаними для збудження електромагнітних хвиль через їх відносно низькочастотність. Тому у радіотехніці застосовують способи передавання сигналів, за якими низькочастотні коливання (low-frequency oscillations), що містять вихідне повідомлення, за допомогою спеціальних пристроїв керують параметрами достатньо потужного несучого коливання, частота

якого лежить у радіодіапазоні. Процес подібного перетворення сигналів називають модуляцією (modulation) несучого коливання.

Модульований сигнал випромінюється антеною передавального пристрою. Збуджені при цьому електромагнітні хвилі досягають приймальної антени і збуджують в ній радіосигнал, рівень якого дуже малий. Після частотної фільтрації (filtration) і підсилення прийнятий сигнал підлягає демодуляції (demodulation) (детектуванню) – операції, протилежній відносно модуляції. У результаті на виході приймального пристрою виникають коливання, які є копією переданого вихідного повідомлення.

Наведений опис принципу функціонування найпростішого радіоканалу підкреслює, що передавання повідомлень по радіоканалу супроводжується різноманітними перетвореннями сигналів. Ці перетворення здійснюються у відповідних радіотехнічних пристроях: підсилювальних, фільтрувальних, частотно-вибірних, частотоперетворювальних, модуляторів, детекторів і багатьох інших.

У будь-якому реальному радіоканалі окрім корисного сигналу обов'язково присутні завади, які виникають з багатьох причин, – через хаотичність руху електронів в елементах кіл, вплив сусідніх радіоканалів, промислових завод, сонячного і іншого космічного випромінювання і т.ін. Здатність радіотехнічних засобів передавання інформації протидіяти шкідливому впливу завод і забезпечувати високу правильність передавання називають заводостійкістю.

У наш час радіотехніка є науково-прикладною галуззю, яка дуже швидко розвивається. Говорячи про найближчі перспективи її розвитку, слід зазначити тенденцію переходу до усе більш високочастотних діапазонів електромагнітних коливань. Так, коливання надвисокочастотного діапазону (НВЧ) (super high frequency), який раніше застосовувався в основному у радіолокації, став широко використовуватись в телевізійних системах, наприклад, супутникове побутове телебачення. Практика професійного радіозв'язку широко використовує лазерні джерела несучих частот і оптично-волоконні лінії зв'язку, які працюють у світловому і інфрачервоному діапазонах.

Швидкими темпами розвивається елементна база радіоелектроніки шляхом наукового дослідження та запровадження у практику функціональних пристроїв, які виконують обробку сигналів за рахунок специфічних хвильових і коливальних явищ у твердих тілах – напівпровідниках, діелектриках і магнітних матеріалах. Величезну роль у сучасній радіотехніці відіграють виробники мікроелектронної технології. Доступні, недорогі, надійні і швидкодіючі інтегральні мікросхеми рішуче змінили вигляд технічних засобів багатьох галузей радіоелектроніки. Мікроелектроніка зумовила широкий перехід до принципово нових цифрових способів обробки і перетворення радіотехнічних сигналів.

Маємо усі підстави сподіватись, що галузі радіотехніки будуть і у подальшому розширюватись і розвиватись на базі прогресу у багатьох суміжних галузях науки і техніки.

### *Задачі курсу*

Основною задачею курсу є вивчення властивостей і параметрів електричних кіл постійного (direct) і гармонічного (harmonious) струмів, що складаються з основних пасивних елементів (R, L, і C), утворюючи вузли і пристрої, де протікають фізичні процеси, характерні в радіоелектроніці.

Відповідно до такої постановки задачі курс включає в себе:

- 1) аналіз детермінованих (регулярних) коливань – детермінованих радіотехнічних сигналів;
- 2) кодування повідомлень і елементарні відомості з теорії інформації;
- 3) проходження радіотехнічних сигналів через лінійні кола;
- 4) нелінійні перетворення (transformation) сигналів і принципи реалізації процесів: випрямлення, детектування, множення частоти, модулювання перетворення частоти.

### *Царина застосування радіоелектроніки*

Окрім уже згаданих радіотелефонного і радіотелеграфного зв'язку, радіомовлення і радіолокації до радіоелектроніки відносяться: **радіонавігація** – водіння кораблів, літальних апаратів, сухопутного транспорту за допомогою радіозасобів; **телебачення** – передача світлових зображень; **радіокерування** – керування об'єктами за допомогою радіотехнічних засобів; **радіотелеметрія** – передавання з віддаленого об'єкта даних вимірювань, які там виконуються автоматично; **радіометеорологія** – отримання даних про погоду за допомогою радіотехнічних засобів; **радіоастрономія** – дослідження небесних тіл радіотехнічними методами та засобами; **промислова радіоелектроніка** – електронні пристрої, які застосовуються у промисловості і на транспорті; **радіоелектроніка** в науці, медицині, сільському господарстві і т. ін.

### *Класифікація радіозасобів за їх складністю*

З радіоелементів (резисторів, котушок індуктивності, конденсаторів, діодів, транзисторів і т. ін.) складаються каскади, з каскадів – вузли, далі слідуєть блоки (високочастотний, низькочастотний, блок живлення і т. ін.), радіоапарати або радіопристрої (власне антена, передавач, приймач і т. ін.), радіосистеми і, нарешті, радіотехнічні комплекси.

Радіозв'язок, радіомовлення, телебачення здійснюються системами передачі інформації, а радіолокація по відбитих від цілі хвилях здійснюється системами добування інформації про параметри об'єкта.

Радіотехнічний комплекс (велика радіосистема), розв'язує у повному обсязі задачу дуже складну за допомогою групи радіосистем. Так, комплекс протиракетної (ПРО) та протиповітряної (ППО) оборони складається з систем добування, передачі, обробки (з допомогою ЕОМ, як правило) і руйнування інформації, а також системи радіокерування бойовими засобами ПРО та ППО.



# 1 КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

## 1.1 Електричне коло

**Електричне коло** – це сукупність пристроїв, призначених для передачі електричної енергії від її джерела (transmitter) до споживача (receiver). Функціонально усі пристрої, що складають електричне коло, можна поділити на три групи: перша група – це **джерела** електричної енергії, друга – проміжні пристрої, третя – **споживачі** електричної енергії.

Прикладами джерел електричної енергії є гальванічні елементи, акумулятори, термоелементи, електричні генератори, тобто будь-які пристрої, в яких відбувається перетворення хімічної, теплової, механічної чи будь-якого іншого виду енергії в електричну. Джерелом енергії є і приймальна антена лінії радіозв'язку, але в ній не відбувається перетворення одного виду енергії в інший.

Прикладами споживачів (приймачів) електричної енергії є електричні лампи, електронагрівні прилади (електроплити, електропраски), електричні двигуни, радіоприймачі та будь-які інші пристрої, де електрична енергія перетворюється у будь-який інший вид енергії. До приймачів електричної енергії можна віднести і передавальні антени, де електрична енергія випромінюється у вільний простір без її перетворення в інший вид.

Проміжні пристрої є безпосередніми приймачами енергії від її джерела і призначені для передавання цієї енергії у потрібній кількості кінцевому споживачеві. Прикладами проміжних пристроїв є електродроти, трансформаторні підстанції тощо.

Усі електричні кола можна розділити за видом струму, який у них протікає: кола постійного струму та кола змінного струму. У даному розділі будемо розглядати лише кола постійного струму.

Окремі прості пристрої, які входять до складу електричного кола і виконують у ньому певні функції, називаються елементами цього електричного кола. Усі елементи електричних кіл розділяються на **активні** (active) і **пасивні** (passive) елементи.

Активними елементами вважаються джерела електричної енергії: генератори напруги (e. p. c.) або генератори струму. Пасивними елементами електричного кола є резистори, котушки індуктивності (inductor), конденсатори (capacitor) тощо. Відповідно розрізняють **активні і пасивні кола**. Активні кола – це електричні кола, які містять джерела енергії, а пасивні електричні кола складаються лише з пасивних елементів.

Зрозуміло також, що в електричному колі джерело енергії можна назвати генератором (напруги або струму), а споживача – навантаженням цього генератора.

Слід зауважити, що поняття "джерело" ("генератор") і "споживач" ("навантаження") не є строго прив'язаним до певних елементів електричного кола. Для прикладу розглянемо просте електричне коло (рис. 1.1), яке складається з джерела електричної енергії 1, проміжного пристрою 2 (дроти лінії електропередачі) та кінцевого споживача електричної енергії 3.



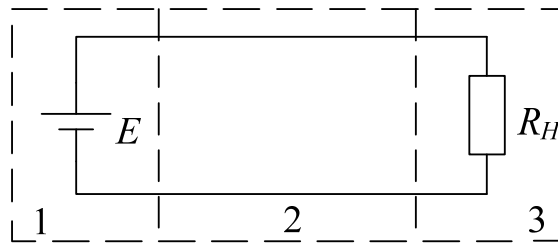


Рисунок 1.1 – Схема простого електричного кола

На границі між джерелом і лінією електропередачі, лінія 2 є навантаженням (споживачем) джерела (генератора) 1, але, у свою чергу, на границі лінії електропередачі 2 та кінцевого споживача 3 лінія електропередачі виступає у ролі джерела (генератора) для споживача (навантаження). Тобто складне електричне коло можна розділити на пари: генератор – навантаження, де навантаження у попередній парі буде генератором у наступній. Такий підхід дозволяє швидше розібратися і з'ясувати принцип дії досить складних вузлів радіотехнічних пристроїв.

## 1.2 Вибір напрямку протікання струму та напрямку напруги

Відомо, що електричний струм провідності у металах є спрямованим рухом негативних зарядів (електронів), а струм провідності в електролітах та газах – спрямованим рухом позитивних зарядів (позитивних іонів) і негативних зарядів (негативних іонів). При цьому позитивні та негативні іони рухаються у протилежних напрямках. За позитивний напрямок протікання електричного струму було прийнято напрямок руху позитивних іонів. Отже, у металах напрямок протікання електричного струму є протилежним напрямку руху електронів, негативних зарядів, напрямлений рух яких власне і є електричним струмом. Подібна ситуація спостерігається, наприклад, в електровакуумному приладі, де електричний струм вважається напрямленим від анода до катода, хоча фактично потік електронів (electrons) спрямований від катода (cathode) до анода (anode).

Кількісно постійний електричний струм визначається як відношення кількості електричного заряду, що проходить через провідник деякого поперечного перерізу за певний проміжок часу, до величини цього часового проміжку. Якщо йдеться про провідник (conductor) з чисто електронною провідністю (conductivity) (носіями струму є тільки електрони), то ця кількість заряду  $q$  визначається відповідно кількістю електронів. Коли ж йдеться про провідник з іонною провідністю (носіями струму є позитивні і негативні заряди, що рухаються у протилежних напрямках), то ця кількість заряду  $q = q^+ + q^-$  дорівнюватиме сумарній кількості заряду, що пройшов через переріз за визначений відрізок часу  $t$ . Тоді струм (сила струму)  $I$  через цей переріз дорівнюватиме:

$$I = q / t. \quad (1.1)$$

Нагадаємо, що кількість заряду (charge)  $q$  визначається у кулонах (Кл), час – в секундах (с), а сила струму (струм) – в амперах (А).

Напрямок струму характеризується знаком струму. Поняття позитивний струм чи негативний струм мають смисл тільки тоді, коли порівнюється напрямок струму у провіднику з деяким заздалегідь вибраним напрямком, який назовемо позитивним напрямком.

Умовний позитивний напрямок струму вибирається довільно і позначається стрілкою. Якщо після розрахунків виявиться, що струм має знак плюс ( $I > 0$ ), то це означає, що його напрямок збігається з вибраним позитивним напрямком. У протилежному випадку, коли струм матиме знак мінус ( $I < 0$ ), він напрямлений у протилежному напрямку.

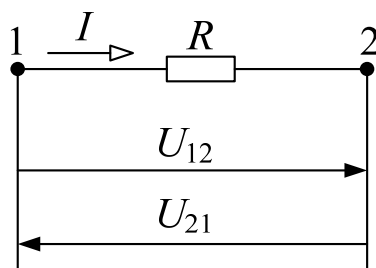


Рисунок 1.2 – Ділянка електричного кола 1-2 з елементом  $R$

Розглянемо деяку ділянку кола (рис. 1.2), через яку протікає електричний струм  $I$ . Різниця електричних потенціалів між кінцями цієї ділянки 1 і 2 є напругою (спадом напруги) на цій ділянці. Вона є скалярною величиною і дорівнює роботі електричних сил із перенесення одиничного позитивного заряду з точки 1 в точку 2. Якщо точка 1 має потенціал вищий за потенціал точки 2, то ця робота є позитивною і дорівнює напрузі  $U_{12}$ . Очевидно, робота виконана у протилежному напрямку буде негативною, тобто  $U_{21} = -U_{12}$ .

Різниця потенціалів вважається позитивною, коли на ділянці кола напрямок вищий – нижчий потенціал збігається з позитивним напрямком струму, тобто, на будь-якій ділянці кола електричний струм буде протікати у напрямку від точки з більшим потенціалом до точки з меншим потенціалом. Це виправдовує і термін спад напруги на ділянці 1-2 від більш високого потенціалу точки 1 до меншого потенціалу точки 2.

У подальшому вираз "позитивний напрямок протікання електричного струму" будемо для скорочення замінювати виразом "напрямок струму".

На закінчення зауважимо, що напруга (різниця потенціалів) вимірюється у вольтах (В).

При силі струму 1 ампер через поперечний переріз провідника за 1 секунду переноситься 1 кулон заряду.

$$q = I \cdot t.$$

Спад напруги на ділянці кола дорівнює роботі електричних сил джерела енергії із перенесення 1 кулона позитивного електричного заряду через цю ділянку і вимірюється у вольтах.

### 1.3 Резистор і опір. Закон Ома

Електричний опір – це властивість провідного матеріалу чинити опір електричному струму, який через нього протікає. За законом Ома, експериментально установленим у 1826 р. фізиком Георгом Омом, сила електричного струму  $I$  прямо пропорційна напрузі  $U$ , що діє на ділянці кола, і обернено пропорційна опорю  $R$  цієї ділянки:

$$I = U / R.$$

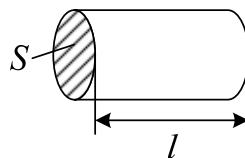
Тобто, при незмінному значенні напруги  $U$  струм буде тим менший, чим більший буде опір  $R$  цієї ділянки протіканню струму.

Виходячи із закону Ома опір  $R$  дорівнюватиме:

$$R = U / I. \quad (1.2)$$

Одиницею вимірювання опорю є ом (Ом). Ділянка кола матиме опір 1 Ом, коли при напрузі на цій ділянці 1 вольт (В) через неї протікатиме електричний струм із силою 1 ампер (А). Отже:

$$\text{Вольт (В) / ампер (А) = ом (Ом).}$$



Якщо взяти відрізок провідника довжиною  $l$ , наприклад циліндричної форми з поперечним перерізом  $S$ , виготовленого з матеріалу з питомим опором  $r$ , то, як відомо з курсу фізики, опір  $R$  такого відрізка буде дорівнювати:

$$R = r \frac{l}{S}. \quad (1.3)$$

де  $r$  має розмірність у системі СІ – 1 Ом · м.

На практиці прийнято виражати довжину провідника (металевого дроту, наприклад), у метрах, поперечний переріз в  $\text{мм}^2$ , тому у довідниках питомий опір дається – в Ом·мм<sup>2</sup>/м.

Величина обернена опорю  $R$  провідника електричного струму називається його провідністю  $G$ :

$$G = \frac{1}{R} = S \frac{1}{l}. \quad (1.4)$$

$S$  – питома провідність провідника, яка вимірюється в системі СІ у сіменсах (См)/метр (м), а у довідниках, для зручності практичного використання, у м/Ом·мм<sup>2</sup>.

Резистор (resistor) – елемент електричного кола, радіодеталь, основною функцією якого є зменшити силу струму, що протікає в ділянці кола з певною різницею потенціалів. Опір (resistance) же цього резистора є його основним параметром, який оцінюється в омах.

При збільшенні температури провідника збільшується хаотичний (тепловий) рух, що збільшує кількість зіткнень і утруднює упорядкований рух електронів. Цим пояснюється збільшення питомого електричного опору металів зі зростанням температури.

В металах при робочих температурах питомий опір зі зростанням температури зростає за законом:

$$r(t) = r_0[1 + a(t - t_0)]. \quad (1.5)$$

де  $r(t)$  – питомий опір при заданій температурі  $t$ ,

$r_0$  – питомий опір при початковій температурі  $t_0$ ,

$a$  – температурний коефіцієнт опору (ТКР), величина стала для даного металу.

Для резисторів будь-яких номіналів за аналогією до формули (1.5) можна записати:

$$R(t) = R_0[1 + a(t - t_0)]. \quad (1.6)$$

Залежність між струмом і напругою  $I = GU$  називається вольт-амперною характеристикою резистора.

Якщо провідність (опір) резистора не залежить від прикладеної напруги та струму, що протікає через нього, то залежність  $I = GU$ ,  $I = U/R$  є лінійним рівнянням, графік якого подано на рис. 1.3 для двох значень провідностей  $G_1$ ,  $G_2$ . При одному і тому ж значенні напруги  $U$  у резисторі з більшою провідністю  $G_1$  (меншим опором  $R_1$ ) протікатиме струм  $I_1$  більший від струму  $I_2$ , який протікає у резисторі з меншою провідністю  $G_2$  (більшим опором  $R_2$ ).

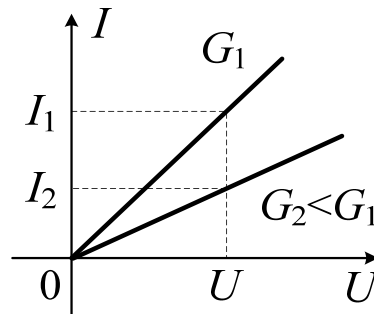


Рисунок 1.3 – Вольт-амперна характеристика лінійних резисторів

Струм у провіднику дорівнює добутку напруги на ділянці провідника і електричної провідності цієї ділянки.

$$I = U \cdot G.$$

На практиці крім вольт, ампера та ома зручно користуватися кратними їх значеннями:

$10^3 \text{ В} = 1 \text{ кіловольт (кВ)}$ ,  $10^{-3} \text{ В} = 1 \text{ мілівольт (мВ)}$ ,  $10^{-6} \text{ В} = 1 \text{ мікровольт (мкВ)}$ ;

$10^3 \text{ A} = 1 \text{ кілоампер (кА)},$        $10^{-3} \text{ A} = 1 \text{ міліампер (мА)},$        $10^{-6} \text{ A} =$   
 $= 1 \text{ мікроампер (мкА)};$   
 $10^3 \text{ Ом} = 1 \text{ кілоом (кОм)},$        $10^6 \text{ Ом} = 1 \text{ мегаом (МОм)},$        $10^9 \text{ Ом} =$   
 $= 1 \text{ гігоом (ГОм)}.$

#### 1.4 Енергія і потужність електричного струму

При проходженні електричного струму через коло можуть відбуватися різні дії: нагрівання провідника, хімічні зміни в електролітах, механічне переміщення магнітної стрілки або провідника, по якому тече струм, виконуючи при цьому певну механічну роботу.

У дослідах Джеймса Джоуля та Емілія Ленца (1842 р.) струм проходив через нерухомі металеві провідники. Тому єдиним результатом роботи струму було нагрівання цих провідників, а за законом збереження енергії уся робота, виконана електричним струмом, перетворилася на тепло.

Якщо на ділянці кола зі струмом  $I$  діє різниця потенціалів  $U$ , то за час  $t$ , згідно із законом Джоуля-Ленца, на цій ділянці кола буде виконана **робота**:

$$A = U \cdot I \cdot t \text{ джоулів (Дж)}. \quad (1.7)$$

Скориставшись законом Ома для цієї ділянки кола вираз (1.7) можна переписати:

$$A = I^2 \cdot R \cdot t \text{ або } A = \frac{U^2}{R} \cdot t.$$

Підкреслимо, що застосування виразу  $A = U \cdot I \cdot t$ , який дає роботу струму, для оцінки тепла, яке виділяється в провідниках, можливе тільки у тих випадках, коли уся ця робота переходить у тепло  $A = Q = 0.24 U \cdot I \cdot t$  (кал), тобто, коли на цій ділянці кола відбувається нагрівання, але не виконується механічна робота (у моторах, наприклад) і не йдуть інші процеси, які супроводжуються виділенням чи поглинанням енергії (роботи).

Отже, у результаті протікання електричного струму  $I$  через ділянку кола з опором  $R$  за час  $t$  на цій ділянці кола виділиться **енергія** (energy),  $W = I^2 \cdot R \cdot t$ , яка витратиться на нагрівання.

Знаючи роботу, яка виконується електричним струмом за деякий проміжок часу, можна розрахувати і **потужність** (power) струму, під якою розуміють роботу (затрачену енергію) за одиницю часу. Очевидно потужність  $P$  дорівнюватиме:

$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I. \quad (1.8)$$

$$P = I^2 \cdot R \text{ або } P = U^2/R.$$

Таким чином, потужність постійного струму на будь-якій ділянці кола виражається добутком сили струму на напругу між кінцями ділянки кола.

Коли ми говоримо про потужність електричного струму, який споживається в електромережі, то розуміємо, що саме цим струмом виконується робота електромоторами, світять електролампи, нагріваються електроплити і т. ін.

На ділянці кола виділиться потужність в один ват (Вт), коли в ній протікатиме електричний струм із силою 1 ампер (А) при різниці потенціалів на кінцях ділянки один вольт (В), тобто

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А} = 1 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ В} \cdot \text{А} \cdot \text{с} = 1 \text{ Вт} \cdot \text{с}.$$

Енергія електричного струму є та робота, яку виконає електричний струм  $I$ , який протікатиме через ділянку кола протягом часу  $t$ , при різниці потенціалів на її кінцях  $U$ .

$$W = U \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t.$$

Потужність електричного струму – це є робота (енергія) виконана (затрачена) цим струмом за одиницю часу.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}.$$

На практиці часто зручно користуватися одиницями енергії або потужності, кратними 1 джоулю або вату:

$$10^3 \text{ Дж} = 1 \text{ кілоджоуль} = 1 \text{ кДж}, \quad 10^6 \text{ Дж} = 1 \text{ мегаджоуль (МДж)}$$

$$10^{-6} \text{ Вт} = 1 \text{ мікроват (мкВт)}, \quad 10^{-3} \text{ Вт} = 1 \text{ міліват (мВт)},$$

$$10^3 \text{ Вт} = 1 \text{ кіловат (кВт)}, \quad 10^6 \text{ Вт} = 1 \text{ мегават (МВт)}.$$

### 1.5 Генератор напруги (е. р. с.) та генератор струму

Розглянемо електричне коло, яке складається з джерела електричної енергії з е. р. с.  $E$ , внутрішнім опором  $R_i$ , навантаженого резистором з опором  $R_H$  (рис. 1.4).

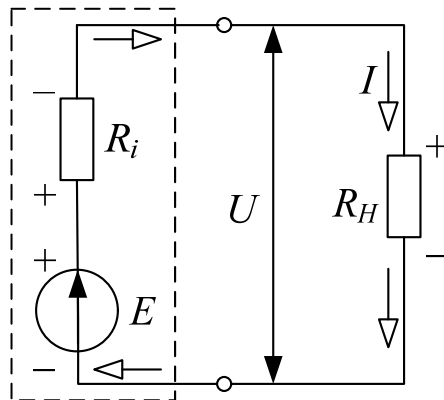


Рисунок 1.4 – Схема джерела енергії з підімкненим до нього навантаженням

Відповідно до закону Ома для повного кола, струм  $I$  у цьому колі прямо пропорційний е. р. с.  $E$  та обернено пропорційний сумі внутрішнього  $R_i$  та зовнішнього  $R_H$  опорів кола, тобто:

$$I = \frac{E}{R_i + R_H}. \quad (1.9)$$

Або  $E = I \cdot R_i + I \cdot R_H$  – е. р. с. дорівнює сумі спаду напруг на внутрішньому ( $I \cdot R_i$ ) і зовнішньому опорах. Іншими словами, е. р. с. дорівнює сумі спаду напруги на внутрішній та зовнішній ділянках кола, відповідно.

Тоді напруга на виході джерела енергії у точках підмикання опору навантаження буде напругою на зовнішній ділянці кола і дорівнюватиме:

$$U = I \cdot R_H = E - I \cdot R_i. \quad (1.10)$$

Тобто, напруга на виході джерела енергії буде меншою від е. р. с.  $E$ , бо частина останньої спала на внутрішньому опорі  $R_i$ .

Припустимо тепер, що ми працюємо з навантаженнями, опори  $R_H$  яких набагато (у десять і більше разів) більші за внутрішній опір  $R_i$ . Тоді у виразі (1.9) у знаменнику ( $R_i + R_H$ ) можна знехтувати малим  $R_i$  у порівнянні з великим  $R_H$  і отримати:

$$I \approx E / R_H, \quad (1.11)$$

звідки напруга на виході джерел енергії:

$$U = I \cdot R_H \approx E, \quad (1.12)$$

дорівнюватиме наближено е. р. с. Це сталося через те, що спад напруги на внутрішній ділянці кола  $I \cdot R_i$  буде набагато (у десять і більше разів) меншим від спаду напруги на зовнішній ділянці  $R_H$ , знехтувавши у виразі (1.10) дуже малим  $I \cdot R_i$  у порівнянні з дуже великим  $I \cdot R_H$ , отримаємо, що  $U \approx E$ .

Отже, за обставини, що  $R_i \ll R_H$  джерело енергії генеруватиме напругу  $U \approx E$ , яка майже не залежатиме від опору навантаження, тобто від параметра зовнішньої ділянки кола. У такому разі кажуть, що мова іде про генератор напруги (майже генератор е. р. с.).

Ідеальним генератором е. р. с., тобто пристроєм напруга на виході якого дорівнює точно  $E$ , є джерело енергії, внутрішній опір у якому дорівнює нулю ( $R_i = 0$ ). Коли за такої умови зменшувати опір  $R_H$  до нуля, то струм у колі (теоретично) збільшиться до нескінченності, але напруга на виході залишатиметься незмінною і рівною е. р. с.  $E$ .

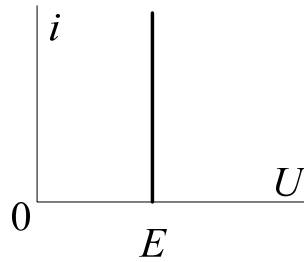


Рисунок 1.5 – Вольт-амперна характеристика ідеального генератора е. р. с.

На рис. 1.6. зображено вольт-амперну характеристику реального генератора напруги (е. р. с.). при зменшенні  $R_H$ , коли він залишається набагато більшим за  $R_i$ , струм буде зростати та напруга на виході залишатиметься практично рівною  $E$ . Коли ж  $R_H$  стане одного порядку з  $R_i$ , зростання струму у колі призведе до появи помітного спаду напруги на внутрішньому опорі джерела і призведе до зменшення напруги на виході.

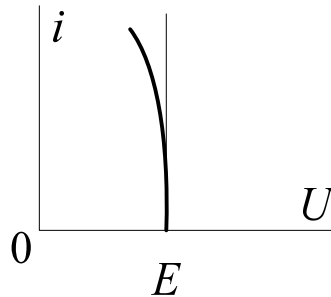


Рисунок 1.6 – Вольт-амперна характеристика реального джерела напруги (е. р. с.)

Тепер розглянемо протилежний випадок, коли  $R_i \gg R_H$  (набагато більше). У виразі (1.9) у знаменнику знехтуємо малим  $R_H$  у порівнянні з великим  $R_i$  і отримаємо:

$$I \approx E / R_i.$$

Тобто, струм у колі обмежується великим внутрішнім опором джерела  $R_i$  і не залежить від значення опору навантаження  $R_H$ . У цьому випадку говорять про джерело енергії, яке працює як генератор струму (реальний). Отже, при  $R_i \rightarrow \infty$  (нескінченно (infinity) великий внутрішній опір) струм у зовнішньому колі не залежав би від опору навантаження і ми мали б справу з ідеальним генератором струму.

Коли зростатиме  $R_H$ , залишаючись набагато меншим за  $R_i$ , струм у колі буде дорівнювати  $I \cong E/R_i$  і не залежатиме від навантаження.

Коли ж  $R_H$ , зростаючи, стане одного порядку з  $R_i$ , струм у колі буде зменшуватись відповідно до виразу (1.9).



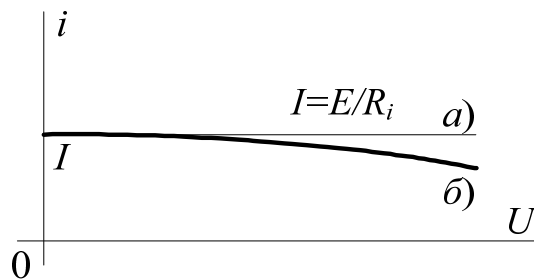


Рисунок 1.7 – Вольт-амперна характеристика генераторів струму:  
 а) ідеального, б) реального

Генератор напруги (е. р. с.) є джерело енергії з дуже малим (нульовим) внутрішнім, у порівнянні з навантаженням  $R_H$ , опором, напруга на виході якого практично не залежить (дорівнює е. р. с.  $E$ ) від опору навантаження.

Генератор струму є джерело енергії з дуже великим внутрішнім, у порівнянні з навантаженням, опором, струм, створений яким у колі (на виході джерела) не залежить від опору навантаження.

На практиці в радіотехніці генератором напруги е. р. с. має бути, наприклад, джерело сигналу, яке працює у послідовному контурі, а паралельний коливальний контур успішно працюватиме лише від генератора сигналу з великим внутрішнім опором (генератора струму).

Генератором напруги можна вважати підсилювальний транзисторний каскад, який живиться від акумулятора, а от підсилювальний каскад на пентоді буде мати величезний внутрішній опір і працюватиме як генератор струму.

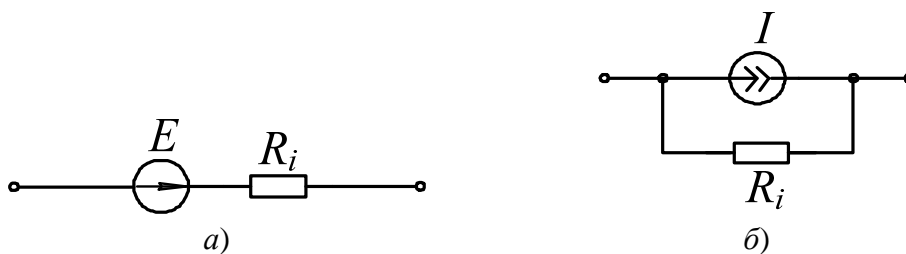


Рисунок 1.8 – Умовні зображення генераторів:  
 а) напруги (е. р. с.); б) струму

### 1.6 Основні поняття електричної схеми

**Електрична схема** являє собою графічне зображення елементів кола та зв'язків між ними. Електрична схема складається з "фізичних" і "геометричних" частин або елементів. "Фізичні" елементи це: активні і пасивні елементи кола (джерела електричної енергії, резистори, котушки індуктивності, конденсатори тощо). "Геометричні" елементи: вітки, вузли та контури схеми.

**Вітка** – це частина схеми, яка утворюється одним або декількома "фізичними" елементами, з'єднаними між собою послідовно. При послідовному з'єднанні елементів через них протікає один і той самий електричний струм.

Домовимося, що коли склад вітки невідомий, то така вітка зображається з елементом у вигляді прямокутника.

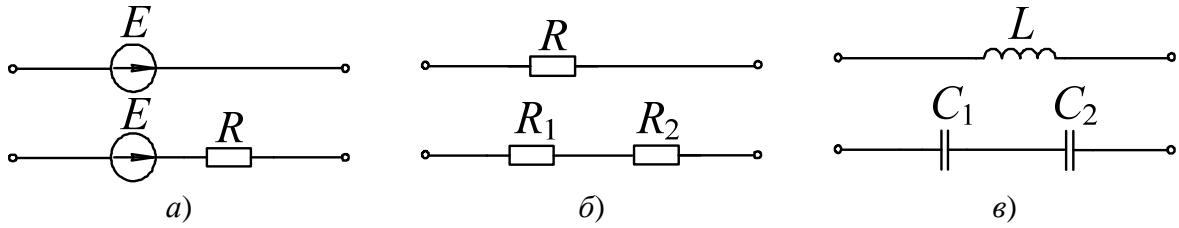


Рисунок 1.9 – Зображення віток електричної схеми

На рис. 1.9, *a* показані: вітка з ідеальним генератором е. р. с. та вітка з послідовним з'єднанням е. р. с. з резистором  $R$ . На рис. 1.9, *б* – вітка з резистором  $R$  та вітка з послідовним з'єднанням резисторів з опором  $R_1$  та опором  $R_2$ . На рис. 1.9, *в* – вітка з котушкою індуктивності  $L$  та вітка з послідовно з'єднаними конденсаторами з ємностями  $C_1$  і  $C_2$ .

**Вузол** називається місце на схемі, де з'єднується між собою три і більше віток. На рис. 1.10, *в* зображено вузол, де сходяться три вітки, на рис. 1.10, *a*, *б* – чотири вітки. А на рис. 10, *г* у точці  $A$  є вузол, де з'єднуються три вітки з резисторами  $R_3$ ,  $R_4$  та  $R_5$ , в точці ж  $B$  вузла немає, бо там перехрещуються провідники (дроти), ізольовані один від одного (нема жирної точки – символу електричного контакту).

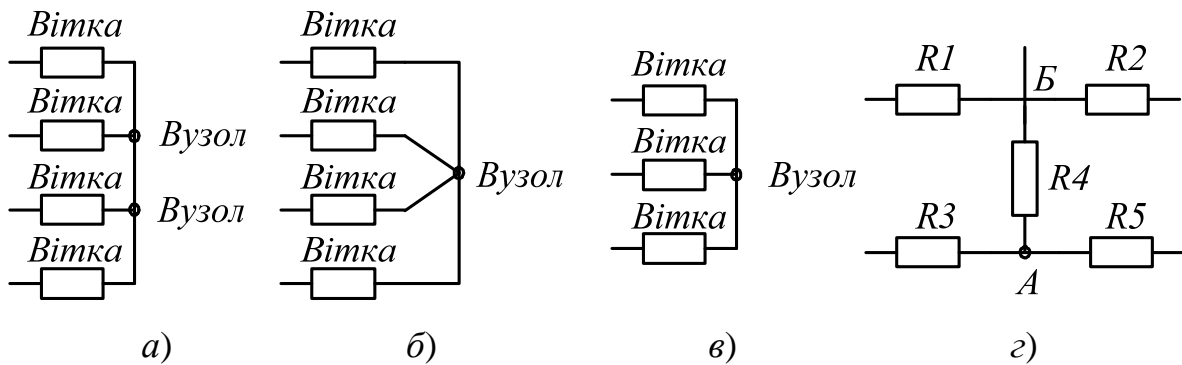


Рисунок 1.10 – Зображення вузлів на електричних схемах

На рис. 1.11 наведено приклад схеми складного електричного кола, яке має три вузли і п'ять віток (три з них складаються з одного елементу, перша – з двох елементів, а п'ята – з трьох елементів).

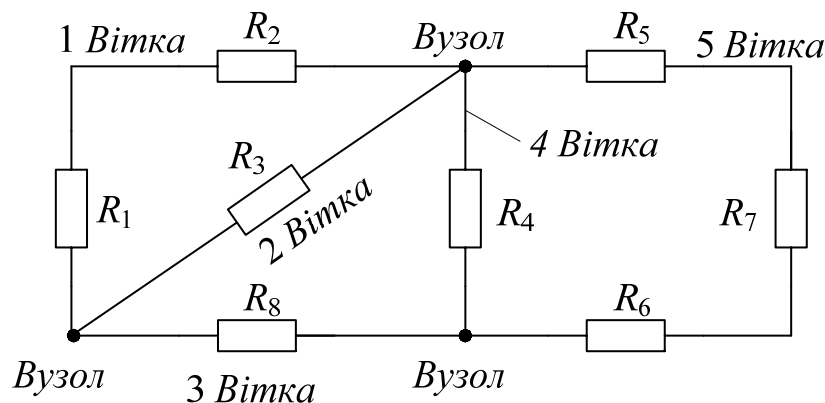


Рисунок 1.11 – Схема складного електричного кола

**Контуром** називається замкнутий шлях, який проходить одноразово по декількох вітках. В залежності від кількості контурів, що є у схемі, будемо розрізняти одноконтурні та багатоконтурні схеми.

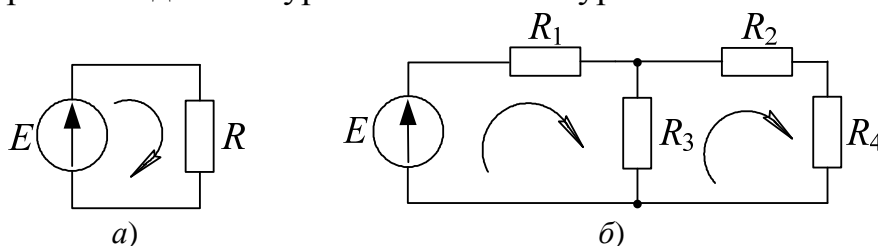


Рисунок 1.12 – Одноконтурна а) та двоконтурна б) схеми

На рис. 1.12 подані приклади одноконтурної а) та двоконтурної б), а на рис. 1.11 – багатоконтурної схем.

**Електрична схема** – графічне зображення елементів кола та зв'язків між ними.  
**Вітка** – частина схеми, утворена одним або кількома послідовно з'єднаними між собою елементами.  
**Вузол** – місце з'єднання на схемі трьох і більше віток.  
**Контур** – замкнутий шлях, що одноразово проходить по декількох вітках схеми.

### 1.7 Лінійні, нелінійні та параметричні кола

Усі електричні кола за характером процесів розділяються на лінійні, нелінійні та параметричні. Лінійні кола складаються тільки з лінійних елементів. Якщо коло містить нелінійний елемент, то воно стає нелінійним, а наявність у колі параметричного елемента робить це коло параметричним.

Лінійні елементи – це елементи кола, які мають лінійну вольт-амперну характеристику. Прикладом таких елементів є резистори, котушки індуктивності без осердь та конденсатори. Вольт-амперна характеристика лінійного резистора виражається законом Ома для ділянки кола.

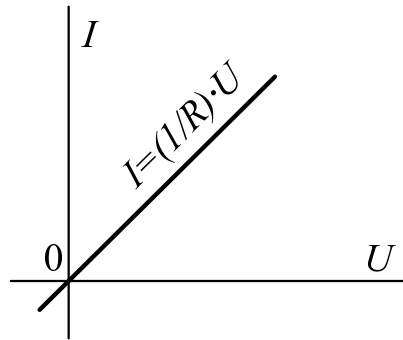


Рисунок 1.13 – Вольт-амперна характеристика лінійного резистора

Лінійною функція залежності струму  $I$  від напруги  $U$  буде тоді, коли опір  $R$  буде величиною сталою, незалежною від напруги, струму чи температури. Графік цієї функції є прямою лінією, а функція є рівнянням першого степеня. Кажуть у такому випадку про лінійний характер процесів у цьому лінійному колі при змінненні напруги від  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Типовими нелінійними елементами є діоди, тріоди, тетроди, пентоди та інші електровакуумні та напівпровідникові електронні прилади, які широко використовуються у радіоелектроніці. Це так звані елементи з односторонньою провідністю. На рис. 1.14 подано графік вольт-амперної характеристики нелінійного елемента, провідність якого при позитивних значеннях напруги на ньому ( $U > 0$ ) дорівнює:

$$G_1 = \frac{I_1}{U_1}.$$

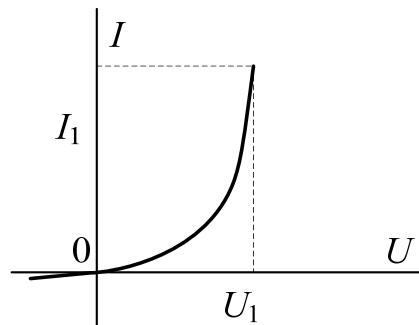


Рисунок 1.14 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента

При зміні полярності напруги на протилежну ( $U < 0$ ) його провідність дорівнює нулю. Як бачимо, вольт-амперна характеристика такого елемента не є прямою лінією, а ламаною при  $U = 0$ , і, отже лінійність характеристики порушується, закон Ома не спрацьовує. Кажуть у такому випадку про нелінійний характер процесів у колі, яке містить цей елемент.

Прикладом нелінійного елемента є дросель низької частоти (катушки індуктивності з феромагнітним осердям). Графік намагнічування його показано на рис. 1.15. На ділянці значень напруженості магнітного поля  $H < H_1$  залежність

$$B = \mu_a \cdot H$$

є лінійною функцією, де коефіцієнт пропорційності  $\mu_a$  (абсолютна магнітна проникність матеріалу осердя) є величина стала і дорівнює  $B_1 / H_1$ .

При подальшому намагнічуванні  $\mu_a$  зменшується зі зростанням  $H$  (залежність параметра елемента від сили електричного струму намагнічування, що протікає через котушку). Це призводить до зменшення крутості графіка намагнічування, який є кривою (непрямою) лінією, що свідчить про нелінійність функції  $B = \mu_a H$ , а отже і нелінійність елемента.

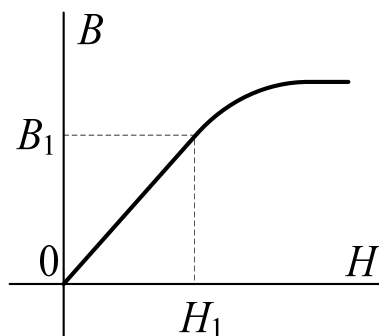


Рисунок 1.15 – Графік намагнічування осердя дроселя низької частоти

Параметричні елементи (терморезистори, варикапи тощо) широко використовуються, наприклад, при побудові радіовимірвальних пристроїв, чутливими елементами яких вони і є.

У параметричному елементі основний його параметр (у терморезисторі це – опір, у варикапі – ємність) є функцією напруги, струму, температури і таке інше.

Якщо ділянка кола містить такий елемент, то закон Ома для цієї ділянки виражатиме нелінійно-параметричну залежність струму від напруги, і, отже, ця функція не є лінійною, а саме електричне коло з таким елементом називатиметься параметричним.

Для будь-якої ділянки лінійного кола є справедливим закон Ома, який виражає пряму пропорційність струму у цій ділянці напрузі на її кінцях.

Електричне коло, яке містить хоч один нелінійний елемент, є колом нелінійним.

Для лінійних елементів кола є справедливим закон Ома, а до нелінійних і параметричних його застосувати не можна.

### 1.8 Розподіл потенціалів вздовж електричного кола

Розглянемо ділянку кола (рис. 1.16), яка складається з генератора е. р. с.  $E$  та резистора  $R$ . Напруга на ділянці  $U = E - I \cdot R$ .

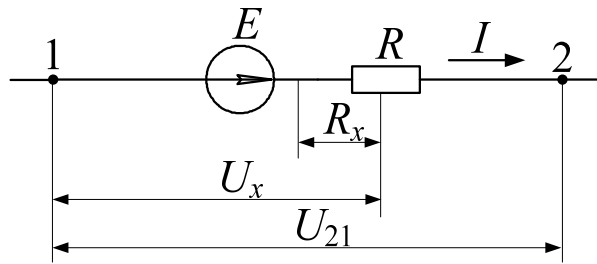


Рисунок 1.16 – Ділянка кола постійного струму з е. р. с.  $E$  та резистором  $R$

Побудуємо розподіл потенціалів вздовж ділянки у напрямку 1-2. Цей розподіл подано на рис. 1.17. Нахил цієї лінії відносно осі абсцис визначається як

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E - U_{21}}{R},$$

тобто, відношенням спаду напруги на резисторі  $R$  до опору цього резистора. Інакше кажучи,  $\operatorname{tg} \alpha$  буде дорівнювати струму  $I$ , що протікає через досліджувану ділянку кола.

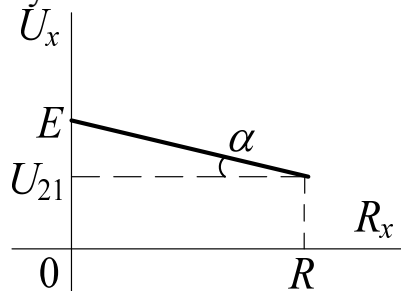


Рисунок 1.17 – Розподіл потенціалів вздовж ділянки 1-2 (рис. 1.16)

Розглянемо тепер ділянку кола, яка складається з трьох генераторів е. р. с. та трьох резисторів (рис. 1.18, а). На рис. 1.18, б показано розподіл потенціалів у напрямку протікання струму  $I$ .

Зауважимо, що при  $R_1 = R_2 = R_3$  нахил усіх ділянок графіка  $U(R)$  однаковий, а тангенс кута цього нахилу дорівнює струмові  $I$ , який є однаковим в усіх точках ділянки 1-2.

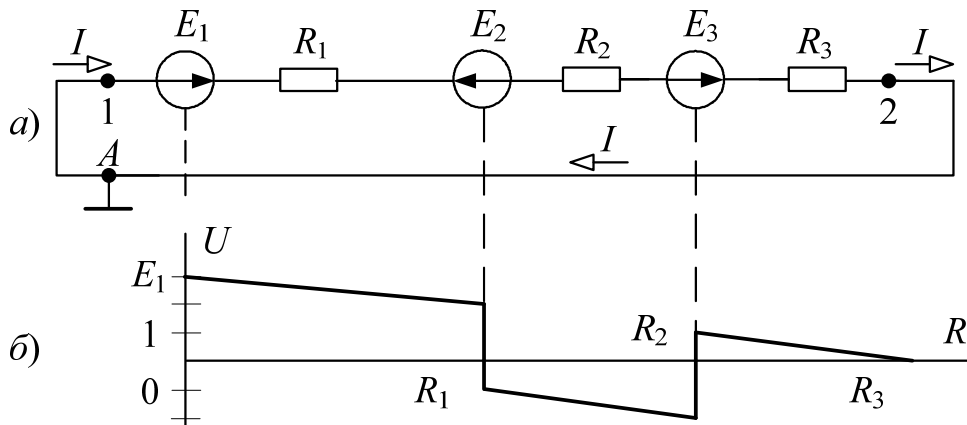


Рисунок 1.18 – Ділянка електричного кола а) та розподіл потенціалів у напрямку 1-2 б)

Потенціал же точки 1 прийнято нульовим і оскільки точка 2 під'єднується до точки 1 у вузлі  $A$ , то і її потенціал також буде дорівнювати нулю. В точках увімкнення генераторів е. р. с. потенціал змінюється стрибком, висота і полярність якого визначається модулем е. р. с. та напрямком дії кожного з генераторів.

### 1.9 Закони Кірхгофа

Поряд з законом Ома ці закони є основними в електро- та радіотехніці. Перший закон Кірхгофа являє собою закон балансу струмів у вузлах, а другий – закон балансу напруг у замкнутих ділянках кола (у контурах).

Закони Кірхгофа, сформульовані у 1847 р. Густавом Кірхгофом, математично описують розподіл струмів та напруг в електричних колах, а тому знання цих законів та уміння їх застосовувати у конкретній задачі суттєво допоможуть зрозуміти усі наступні розділи цього курсу.

#### *Перший закон Кірхгофа*

Алгебраїчна сума струмів у вузлі електричної схеми дорівнює нулю:

$$\sum I = 0. \quad (1.13)$$

У цій сумі маємо на увазі струми лише тих віток схеми, які утворюють вузол. Знаки перед струмами, що втікають у вузол, і струмами, що витікають з вузла, беруться протилежними. Домовимося, наприклад, у сумі (1.13) струми, що втікають у вузол, писати зі знаком плюс (+), а струми, що витікають з вузла – зі знаком мінус (-). Іншими словами, будь-який струм, що втікає у вузол, має розглядатися як струм, що витікає з цього вузла, але взятий з протилежним знаком.

Для прикладу розглянемо вузол  $A$  фрагмента електричної схеми, зображеного на рис. 1.19.

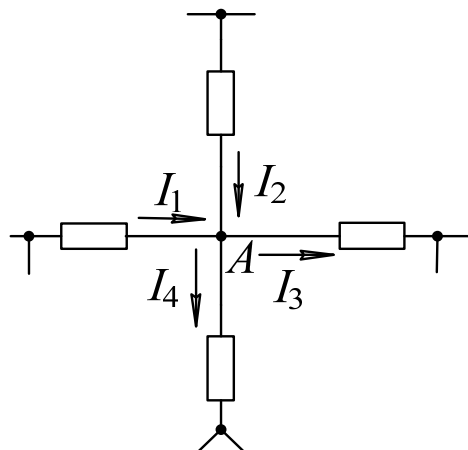


Рисунок 1.19 – Ілюстрація до першого закону Кірхгофа

У даному випадку рівняння (1.13) слід записати так:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

або

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4.$$

Останнє рівняння дозволяє стверджувати, що сумарний струм, який втікає у вузол, дорівнює сумарному струмові, що витікає з нього. Власне кажучи, таке твердження говорить про те, що скільки зарядів приноситься до вузла за певний час, стільки ж зарядів за цей же час виноситься з цього вузла. Тобто, перший закон Кірхгофа дійсно є умовою балансу струмів або балансу зарядів у вузлі. Тобто, у вузлах електричної схеми заряди не накопичуються і не витрачаються, а потенціал цього вузла залишається незмінним.

### *Другий закон Кірхгофа*

Алгебраїчна сума е. р. с. у будь-якому контурі електричної схеми дорівнює алгебраїчній сумі спаду напруг на елементах цього контуру

$$\sum E = \sum U, \quad (1.14)$$

і при цьому напрямок обходу контуру береться довільним. Для прикладу розглянемо фрагмент електричної схеми – контур, який містить два генератори е. р. с. та чотири резистори (рис. 1.20)

У даному випадку рівняння (1.14.) слід записати так:

$$E_1 - E_2 = U_2 + U_3 - U_4 - U_1,$$

де  $U_2 = I_2 R_2$ ,  $U_3 = I_3 R_3$ ,  $U_4 = I_4 R_4$ ,  $U_1 = I_1 R_1$

Рівняння 1.14 можна переписати так:

$$\sum (E - U) = 0. \quad (1.15)$$

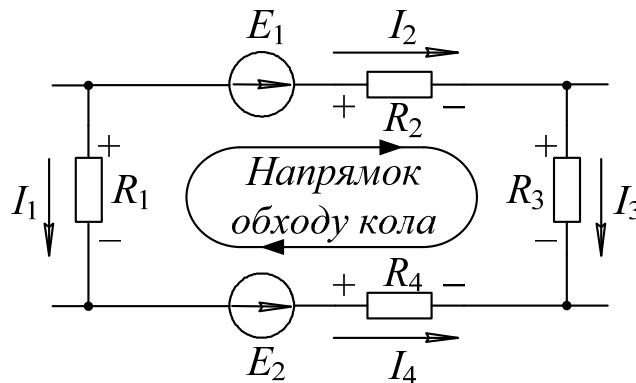


Рисунок 1.20 – Ілюстрація до другого закону Кірхгофа

Тут під різницею  $(E - U)$  слід розуміти напругу на вітці. Таким чином, алгебраїчна сума напруг на вітках у будь-якому замкненому колі (контурі) дорівнює нулю.

До речі, графік розподілу потенціалів, розглянутий у попередньому підрозділі (рис. 1.18), є прямою ілюстрацією другого закону Кірхгофа.



Дійсно, алгебраїчна сума напруг ділянок замкненого кола дорівнює нулю (потенціал у вузлі А дорівнює нулю).

Сума струмів, що втікають у будь-який вузол електричної схеми, дорівнює сумі струмів, що витікають з нього.

Алгебраїчна сума спаду напруги на усіх пасивних елементах контуру дорівнює алгебраїчній сумі е. р. с., увімкнених у цей контур.

### 1.10 Еквівалентні перетворення електричних схем методом згортання

Розрахунок складних електричних схем значно полегшується, коли виконати еквівалентне (рівнозначне) перетворення їх у більш прості і зручні для розрахунку. Перетворити, наприклад, у одноконтурну схему.

Серед усіх методів такого перетворення найбільш поширеним є метод згортання схеми зі змішаним з'єднанням елементів. Змішане ж з'єднання елементів являє собою комбінацію послідовного і паралельного з'єднань. Тому і розпочнемо згортання з цих двох простих випадків.

#### Послідовне з'єднання

Розглянемо рис. 1.21, на якому зображено послідовне з'єднання резисторів з опорами  $R_1, R_2, R_3 \dots R_n$ .

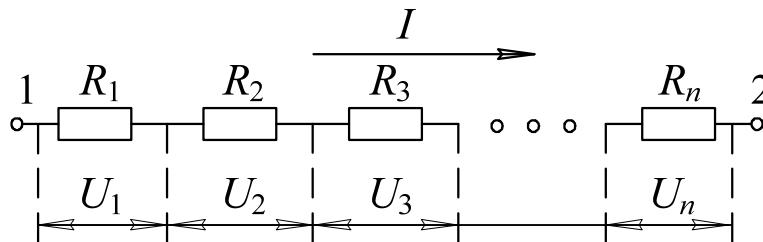


Рисунок 1.21 – Послідовне з'єднання резисторів

Через усі ділянки (резистори) цього кола протікає один і той самий струм  $I$ .  $U_1, U_2, U_3 \dots U_n$  – напруги (спад напруг), які будуть утворені цим струмом на відповідних ділянках кола.

Згідно з другим законом Кірхгофа:

$$U_{12} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n;$$

$$U_{12} = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \dots + IR_n,$$

$$U_{12} = I(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n);$$

$$U_{12} = I \sum_{k=1}^n R_k = IR,$$

де  $R = \sum_{k=1}^n R_k$  називається еквівалентним опором ділянки кола, бо струм у колі залишається незмінним і дорівнюватиме:  $I = U_{12}/R$ , а схема на рис. 1.22 є еквівалентною схемі рис. 1.21.

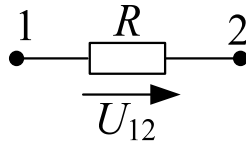


Рисунок 1.22 – Еквівалентна схема

Напруги на ділянках схеми 1.21, з'єднані послідовно, відносяться як опори цих ділянок: напруга на  $k$ -ій ділянці кола дорівнює добутку сумарної напруги  $U_{12}$  на відношення опору цієї ділянки  $R_k$  до еквівалентного опору  $R$ :

$$U_k = \frac{R_k}{R} \cdot U_{12}.$$

### Паралельне з'єднання

На рис. 1.23 подана схема електричного кола з паралельним з'єднанням резисторів  $R_1, R_2, R_3 \dots R_n$ . Напруга на усіх резисторах однакова і дорівнює  $U$ . У вітках цієї схеми будуть протікати електричні струми  $I_1, I_2, I_3 \dots I_n$ . Ця схема має два вузли: в одному з них з'єднані верхні кінці резисторів, в іншому – нижні кінці резисторів, а різниця потенціалів між цими вузлами дорівнює  $U$ .

Згідно з першим законом Кірхгофа струм  $I$  (втікає у верхній вузол схеми) дорівнює сумі струмів через резистори (витікають з цього вузла):

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots I_n,$$

або

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} \text{ (див. рис. 1.23, а),}$$

$$I = U \cdot G_1 + U \cdot G_2 + U \cdot G_3 + \dots + U \cdot G_n \text{ (див. рис. 1.23, б),}$$

де  $G_1 = \frac{1}{R_1}, G_2 = \frac{1}{R_2}, G_3 = \frac{1}{R_3}, \dots, G_n = \frac{1}{R_n}$  – провідності відповідних віток схеми.

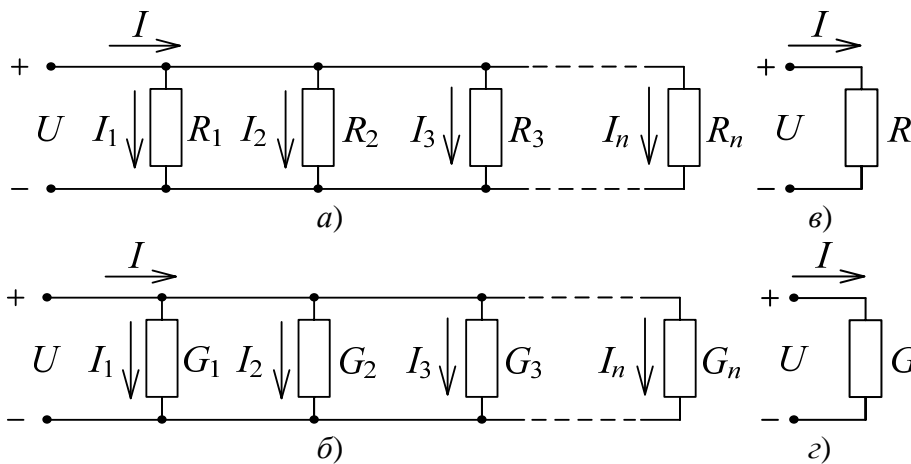


Рисунок 1.23 – Паралельне з'єднання резисторів

На рис. 1.23, з  $G = \sum_{k=1}^n G_k$  – це еквівалентна провідність електричної схеми. Зваживши, що величина  $R$  (рис. 1.23, в) є оберненою  $G$  ( $R = 1/G$ ), першу доцільно назвати еквівалентним опором.

Наприклад, у випадку двох паралельно з'єднаних опорів  $R_1$  і  $R_2$ , еквівалентний опір  $R$  дорівнюватиме:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2},$$

у випадку трьох опорів:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}.$$

Сила струму  $I_k$  у  $k$ -ій вітці схеми дорівнює добутку сумарного струму на відношення еквівалентного опору схеми до опору цієї вітки:

$$I_k = \frac{R}{R_k} \cdot I.$$

### Змішане з'єднання

Розглянемо рис. 1.24, де зображено схему зі змішаним з'єднанням резисторів. Резистори  $R_2$  та  $R_5$  між собою з'єднані послідовно, бо струм  $I_2$  послідовно протікає через ці резистори.

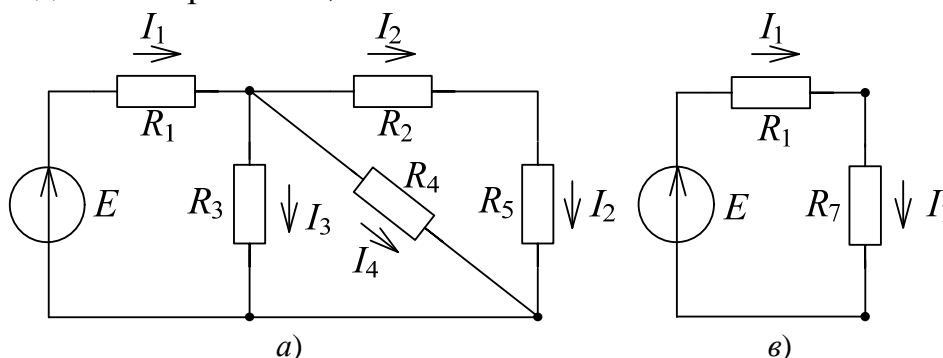
Еквівалентний (equivalent) їм резистор матиме опір:

$$R_6 = R_2 + R_5,$$

а вихідна схема (рис. 1.24, а) замінюється їй еквівалентною (1.24, б). Резистори  $R_3$ ,  $R_4$  та  $R_6$  з'єднані між собою паралельно, бо мають два спільних вузли: верхній, де струм  $I$  розгалужується по трьох вітках, та нижній, де ці струми додаються. Очевидно, що цю трійку резисторів можна замінити еквівалентним їм резистором з опором:

$$R_7 = \frac{R_3 \cdot R_4 \cdot R_6}{R_3 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_6 + R_4 \cdot R_6}$$

і перейти до схеми рис. 1.24, в.



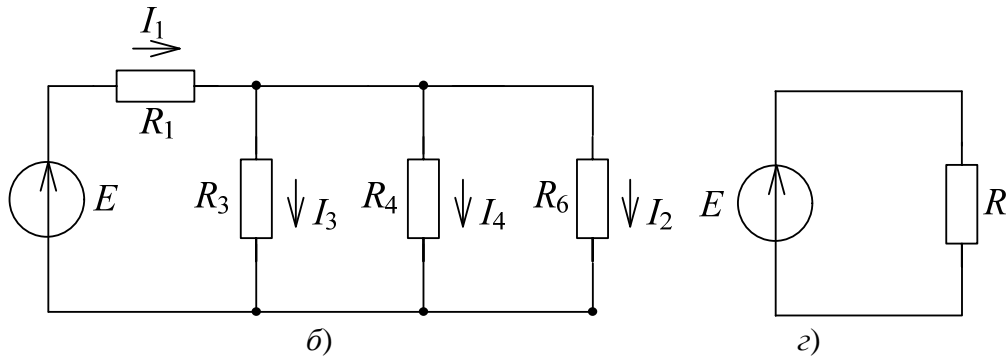


Рисунок 1.24 – Змішане з'єднання резисторів

І останній крок: послідовно з'єднані резистори  $R_1$  та  $R_7$  замінити резистором з опором  $R = R_1 + R_7$ . Таким чином, резистор з опором  $R$  є еквівалентним усім резисторам схеми 1.24, а.

Струм генератора е. р. с.

$$I_1 = \frac{E}{R},$$

добуток  $I_1 \cdot R_7 = U_1$  дорівнює напрузі між вузлами паралельно з'єднаних резисторів  $R_3$ ,  $R_4$  та  $R_6$ , а струми через ці резистори, відповідно, будуть дорівнювати:

$$I_3 = \frac{U_1}{R_3}, I_4 = \frac{U_1}{R_4}, I_2 = \frac{U_1}{R_6}.$$

У колі з послідовно з'єднаними резисторами через усі ділянки кола протікає один і той самий струм, напруги на ділянках кола прямо пропорційні опорів цих ділянок, сума цих напруг дорівнює напрузі на кінцях кола, а його еквівалентний опір дорівнює сумі опорів ділянок

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

В електричному колі з паралельним з'єднанням резисторів на усіх резисторах буде спільна напруга, струми через резистори – прямо пропорційні провідностям віток, струм у спільному провіднику буде дорівнювати сумі струмів віток, а еквівалентна провідність кола дорівнює сумі провідностей віток

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n.$$

### 1.11 Взаємне перетворення трикутника і зірки опорів

Під перетворенням трикутника (рис. 1.25, б) в еквівалентну йому зірку (рис. 1.25, а) розуміється така заміна з'єднань елементів за схемою **трикутник** в з'єднання елементів за схемою **зірка** (рис. 1.25, в), при якій між однойменними вузлами залишаються незмінними напруга і струми, які

входять в однойменні вузли. Це означає, що потужності у цих колах є однаковими.

Аналогічне визначення, очевидно, можна дати і перетворенню зірки в еквівалентний їй трикутник.

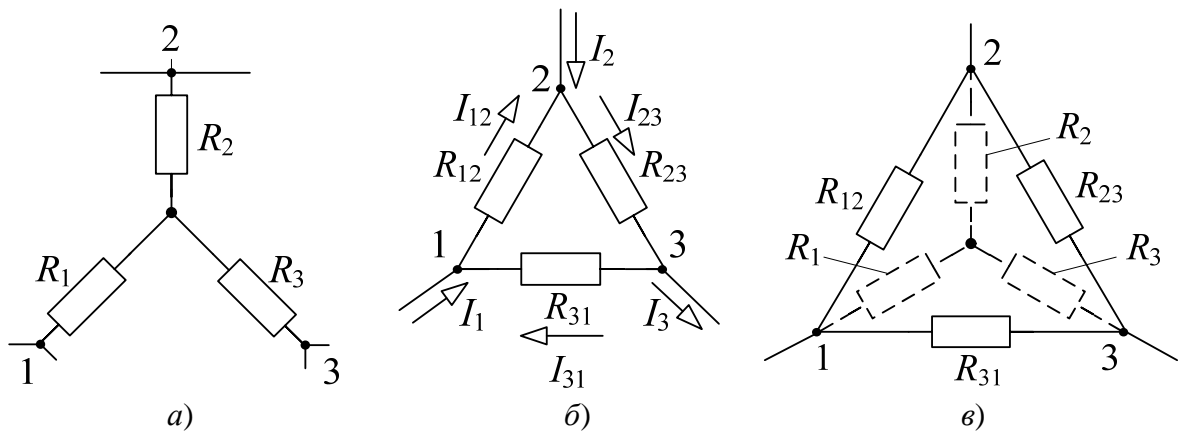


Рисунок 1.25 – Схема зірки опорів *a*), трикутника опорів *б*), та схеми, що пояснює перетворення трикутника в зірку *в*)

Слід зазначити, що саме перехід трикутник – зірка має у радіотехніці велике практичне значення, бо у випрямлячах змінної напруги у постійну, у вимірювальних та керуючих пристроях часто використовуються так звані мостові схеми.

Отже, у переході трикутник – зірка вихідними даними є опори:  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$ , необхідно визначити опори  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , променів еквівалентної зірки.

За другим законом Кірхгофа, записаного для трикутного контуру (рис. 1.25, *б*) можна записати:

$$R_{12} \cdot I_{12} + R_{23} \cdot I_{23} + R_{31} \cdot I_{31} = 0, \quad (1.16)$$

струм між вузлами 2 і 3, за першим законом Кірхгофа, дорівнюватиме (рис. 1.25, *в*):

$$I_{23} = I_{12} + I_2,$$

а між вузлами 3 і 1

$$I_{31} = I_{12} - I_1.$$

Підставивши ці значення струмів  $I_{23}$  та  $I_{31}$  у рівняння (1.16) і розв'язавши його відносно струму  $I_{12}$ , отримаємо:

$$I_{12} = \frac{I_1 \cdot R_{31} - I_2 \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напруга між вузлами 1 і 2 (рис. 1.25, *б*) дорівнюватиме:

$$U_{12} = I_{12} \cdot R_{12} = \frac{I_1 \cdot R_{31} \cdot R_{12} - I_2 \cdot R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

З іншого боку, на схемі рис. 1.25, *a* напруга між цими ж самими вузлами дорівнює:

$$U_{12} = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2.$$

прирівняємо їх:  $U_{12} = U_{12}$ .

$$I_1 \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} - I_2 \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2.$$

Звідки, прирівнявши коефіцієнти при струмах  $I_1$  та  $I_2$ , отримаємо:

$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (1.17)$$

$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.18)$$

Визначивши аналогічно напругу між двома будь-якими іншими вузлами, знайдемо вираз для  $R_3$ :

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.19)$$

До речі, перехід від виразу (1.17) через (1.18) до (1.19) легко запам'ятати, бо знаменники скрізь є незмінними, а в чисельниках робиться циклічна заміна індексів за алгоритмом 1-2-3-1.

Інколи виникає необхідність виконати перетворення типу зірка – трикутник.

При такому переході заданими є опори резисторів  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , а невідомими – опори резисторів  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$ . Для знаходження їх значень розділимо (1.19) на (1.17) та (1.19) на (1.18) і отримаємо рівняння:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{31} \cdot R_{12}} = \frac{R_{23}}{R_{12}}; \quad R_{23} = \frac{R_3}{R_1} R_{12}, \quad (1.20)$$

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} \cdot R_{23}} = \frac{R_{31}}{R_{12}}; \quad R_{31} = \frac{R_3}{R_2} R_{12}. \quad (1.21)$$

Отримані значення  $R_{23}$  та  $R_{31}$  підставимо у рівняння (1.17) та розв'яжемо його відносно  $R_{12}$ :

$$R_1 = \frac{\frac{R_3}{R_2} \cdot R_{12}^2}{R_{12} + \frac{R_3}{R_1} \cdot R_{12} + \frac{R_3}{R_2} \cdot R_{12}} = \frac{R_3 \cdot R_{12} \cdot R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1},$$

$$1 = \frac{R_3 \cdot R_{12}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1},$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3},$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}. \quad (1.22)$$

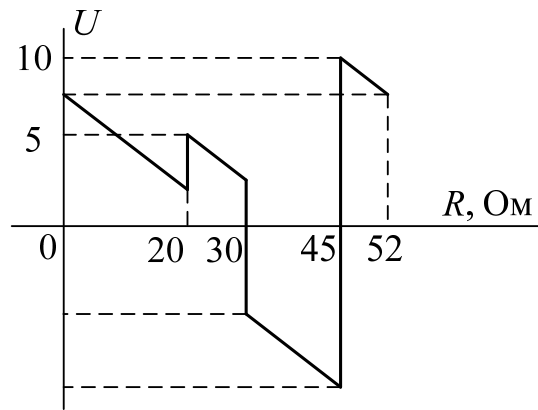
Вирази для  $R_{23}$  та  $R_{31}$  легко знайти підставивши (1.22) в (1.20) та (1.21), або виконавши циклічну заміну індексів:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}, \quad (1.23)$$

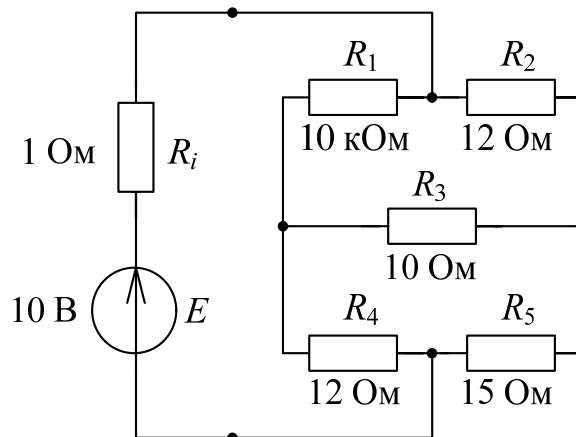
$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}. \quad (1.24)$$

### Запитання та задачі для закріплення

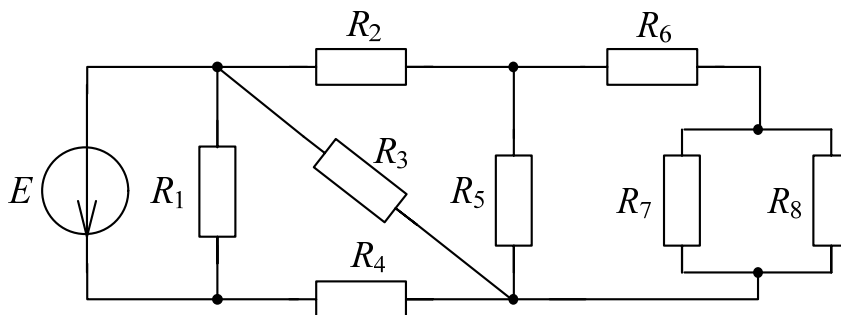
1. Що таке електричне коло, електрична схема, вітка, вузол та контур?
2. Дати означення понять: один ампер, вольт, ом, ват, джоуль.
3. Що таке генератор напруги (е. р. с.) та генератор струму?
4. Сформулювати закон Ома для ділянки і повного кола, перший та другий закони Кірхгофа.
5. Що таке лінійний і нелінійний елементи? Навести приклади.
6. На ділянці кола поглинається 100 Вт потужності, коли через ділянку протікає електричний струм 5 А. Визначити опір ділянки, напругу на ній та енергію за 1 годину.
7. Визначити опір та провідність мідного дроту довжиною 25 м та поперечним перерізом 0,5 мм<sup>2</sup>. На скільки зміниться цей опір, якщо температура його зросте від 20 до 80 °С.
8. Зобразити електричний контур з таким розподілом потенціалів у ньому:



9. Визначити струм, який споживає міст Уїнстона від джерела живлення з е.р.с. 10 В та внутрішнім опором 1 Ом, а резистори:  $R_1 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_4 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 15 \text{ Ом}$ .



10. Спростити до одноконтурної схему та визначити еквівалентний опір, коли всі резистори мають опір по 10 Ом.





## 2 ГАРМОНІЧНИЙ СТРУМ

### 2.1 Генерування гармонічних е. р. с. і струму

З курсу фізики відомо, що на кінцях провідника, який рухається, перетинаючи силові лінії магнітного поля під кутом  $\alpha$ , виникає електрорушійна сила індукції  $e$ :

$$e = B \cdot l \cdot V \cdot \sin \alpha, \quad (2.1)$$

де  $B$  – величина індукції магнітного поля;

$l$  – довжина прямолінійного провідника;

$V$  – швидкість руху провідника.

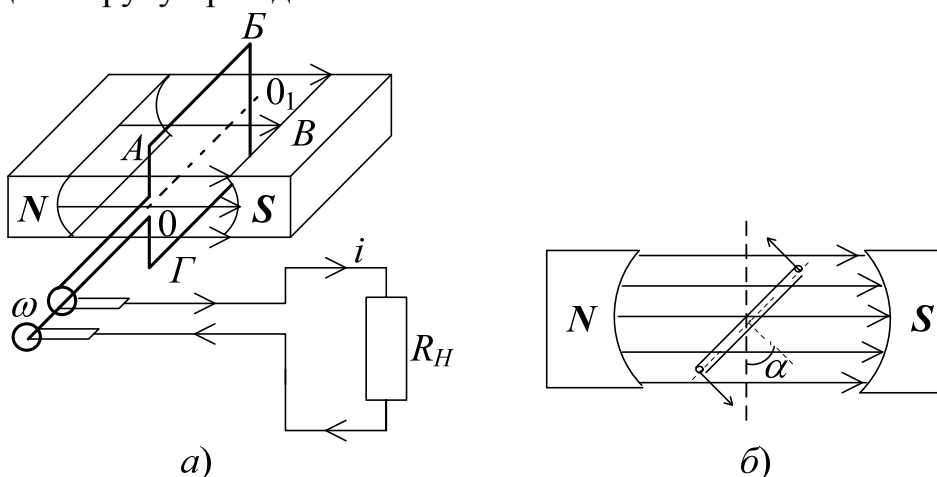


Рисунок 2.1 – Схема конструкції електрогенератора *a*) та проекція вздовж осі обертання рамки *б*)

На рис. 2.1, *a* подана схема конструкції електрогенератора гармонічних е. р. с. та струму, де в однорідному магнітному полі проти годинникової стрілки навколо осі  $OO_1$  з кутовою швидкістю  $\omega$  обертається рамка. Кінці рамки обертаються з прикріпленими до них кільцями, які ковзають на контактах, з яких знімається наведена е. р. с. індукції, яка викликає струм  $i$ , що протікає через навантаження генератора  $R_H$ .

Рис. 2.1, *б* пояснює справедливість виразу (2.1) для даного випадку. Дійсно, коли  $\alpha = 0^\circ$  (рамка вертикальна) провідники  $AB$  і  $\Gamma B$  рамки ковзають вздовж силових ліній поля, не перетинаючи його і тому е. р. с. ( $\sin \alpha = 0$ ) дорівнює нулю. Коли ж рамка, обертаючись, займе горизонтальне положення ( $\alpha = 90^\circ$ ,  $\sin \alpha = 1$ ), то вона буде перетинати за одиницю часу максимальну кількість силових ліній поля і тому е. р. с. дорівнюватиме максимальному значенню ( $e = E_m$ ).

Лінійну швидкість обертання  $V$  точки  $A$  можна виразити через кутову швидкість  $\omega$  та радіус обертання  $OA$ :

$$V = \omega \cdot OA.$$

Якщо за довільний відрізок часу  $t$  рамка повернеться на кут  $\alpha$ , то справедливим буде вираз:

$$a = \omega \cdot t .$$

Підставивши ці вирази для  $V$  та  $a$  у формулу (2.1), отримаємо:

$$e = B \cdot l \cdot \omega \cdot OA \cdot \sin \omega t .$$

Позначивши  $B \cdot l \cdot \omega \cdot OA$  через  $E_m$ , матимемо:

$$e = E_m \cdot \sin \omega t . \quad (2.2)$$

Збуджена на вихідних контактах (щітках) електрогенератора е. р. с. викличе струм, що протікатиме через навантаження з опором  $R_H$ . Струм через резистор згідно із законом Ома для повного кола, дорівнює:

$$i = \frac{e}{R_i + R_H} .$$

Нехтуючи внутрішнім опором  $R_i$  (опором дроту рамки) у порівнянні з  $R_H$ , останній вираз можна переписати:

$$i = \frac{e}{R_H} = \frac{E_m}{R_H} \cdot \sin \omega t . \quad (2.3)$$

Отже, електрогенератор виступає як джерело гармонічної (синусної і косинусної) е. р. с. При умові  $R_i \gg R_H$  електрогенератор є джерелом гармонічного струму.

Синусний струм (е. р. с.) є гармонічною (синусною) функцією кута  $a = \omega \cdot t$ . Так при  $t = 0$ ,  $i = 0$ , при  $a = 90^\circ$ ,  $i = I_m$ , при  $a = 180^\circ$ ,  $i = 0$ , при  $a = 270^\circ$ ,  $i = -I_m$  (струм протікає у протилежному напрямку), при  $a = 360^\circ$ ,  $i = 0$  (початкове положення рамки).

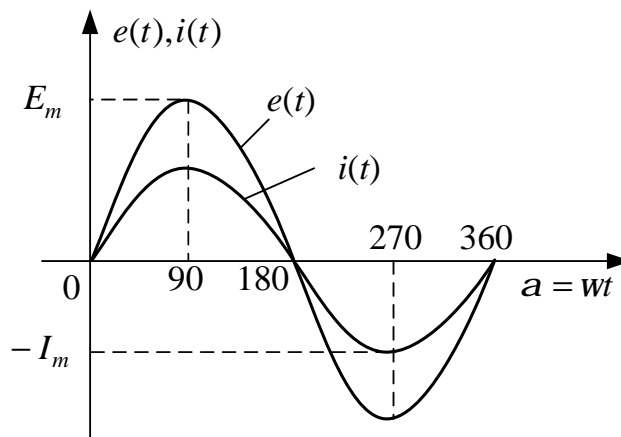


Рисунок 2.2 – Графік гармонічної е. р. с. та гармонічного струму

У такий спосіб будуються електрогенератори джерела електричної енергії, наприклад, 220 В з частотою 50 Гц. Високочастотні ж генератори гармонічних коливань, які широко використовуються в радіопередавальних та радіоприймальних пристроях, наприклад, є радіоелектронними пристроями.

При увімкненні джерела живлення у вихідному контурі (рис. 2.3) виникають гармонічні коливання на високій частоті цього контуру, частина енергії яких через конденсатор  $C_2$  зворотного зв'язку подається у вхідний контур генератора, підсилюється транзистором, збільшуючи розмах коливань у вихідному контурі і так цикл за циклом аж поки у схемі не встановиться стаціонарний режим автогенерації. Детально робота подібних пристроїв вивчається в спеціальних дисциплінах підготовки радіоспеціалістів.

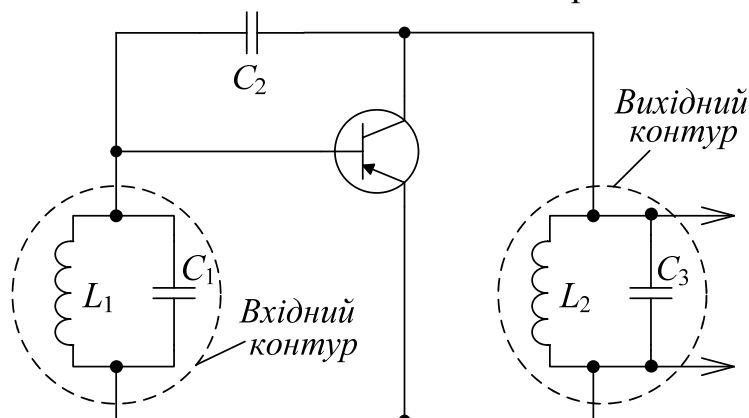


Рисунок 2.3 – Спрощена схема високочастотного генератора гармонічних коливань

## 2.2 Математична і графічні моделі та параметри гармонічного струму

Як бачимо, гармонічний струм є синусною функцією часу  $i = i(t) = I_m \sin \omega t$ . Цей математичний вираз описує характер фізичного процесу, який є процесом протікання у колі струму, значення якого у будь-який момент часу можна визначити за наведеною формулою. Тому саме формула:

$$i = I_m \sin \omega t \quad (2.4)$$

називається математичною моделлю цього гармонічного процесу (гармонічного струму). Максимальне значення струму називається його амплітудним значенням або амплітудою, а  $\omega$  – круговою (коловою) частотою струму, яка вимірюється у радіанах за секунду. Амплітуда  $I_m$  та частота  $\omega$  називаються параметрами гармонічного процесу. Кругова частота, як відомо, може бути вираженою через кількість обертів за секунду  $f$ , які вимірюються у герцах (Гц):

$$\omega = 2\pi f .$$

Період гармонічних коливань визначається відрізком часу, за який рамка зробить повний оберт, і позначається через  $T$ . Відомо, що період і частота є величинами взаємно оберненими:

$$T = \frac{1}{f}; f = \frac{1}{T} .$$

Якщо гармонічний процес почати описувати з положення рамки, коли вона уже повернулася на кут  $a_0$ , тобто від вертикального положення поворот тривав  $t_0$  секунд, то

$$a_0 = w \cdot t_0.$$

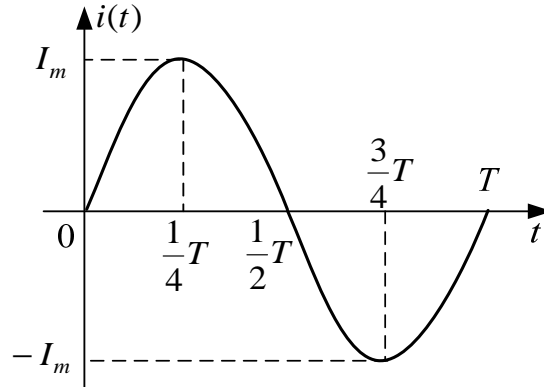


Рисунок 2.4 – Періодичність гармонічного процесу у часі

І тоді математична модель електричного струму буде такою:

$$i = I_m \sin(\omega t + a_0), \quad (2.5)$$

а кут  $a_0$  називається початковою фазою (phase) цього гармонічного процесу. Вираз  $(\omega t + a_0)$  називається поточним значенням фази, а  $\omega t$  – змінна частина фази, яка неперервно зростає прямо пропорційно часу  $t$ . Для такого випадку графік залежності  $i(t)$  зображено на рис. 2.5 (суцільна лінія).

Початком синусоїди є момент часу, де її графік, проходячи через  $i = 0$ , зростає. Такі моменти зустрічатимуться на графіку через кожен період коливання  $T$ .

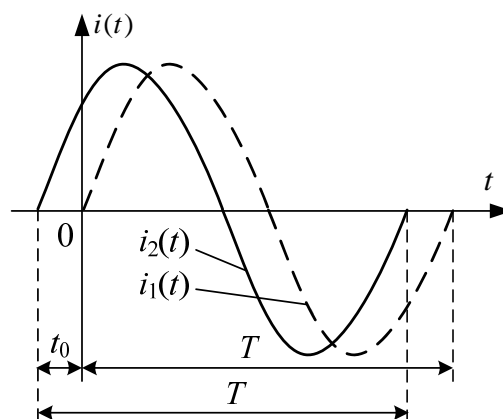


Рисунок 2.5 – Пояснення до поняття різниці фаз

З графіків рис. 2.5 (і з виразів 2.4 та 2.5) бачимо, що процес  $i_2(t)$  почався на  $t_0$  секунд раніше чим  $i_1(t)$ . Тому і кажуть, що струм  $i_2$  випереджає струм  $i_1$  на  $a_0$  радіанів, або  $i_1$  на стільки ж відстає за фазою від  $i_2$ .

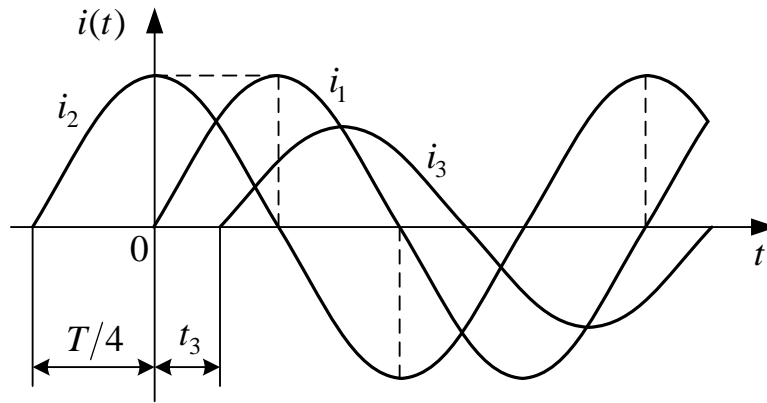


Рисунок 2.6 – Косинусний процес  $i_2$  випереджає синусний –  $i_1$  на чверть періоду ( $90^\circ$ )

На рис. 2.6 маємо:

$$i_2 = I_m \sin (wt + 90^\circ) = I_m (\sin wt \cdot \cos 90^\circ + \cos wt \cdot \sin 90^\circ) = I_m \cos wt.$$

Іншими словами, і синусний, і косинусний процеси є гармонічними, але зсунутими між собою у часі за фазою на  $p/2$  радіан.

Процес  $i_3$  починається з запізненням за фазою на кут  $wt_3$ , а процес  $i_2$  – з випередженням за фазою на кут  $wt = p/2$  у порівнянні з процесом  $i_1$ . Тому, наприклад, математична модель процесу  $i_3$  запишеться так:

$$i_3 = I_{m3} \sin (wt - wt_3) = I_{m3} \sin w(t - t_3),$$

або

$$\begin{aligned} i_3 &= I_{m3} \cos [wt - (wt_3 + 90^\circ)] = I_{m3} \cos [w(t - t_3) - 90^\circ] = \\ &= I_{m3} \cos w(t - t_3) \cos 90^\circ + I_{m3} \sin w(t - t_3) \sin 90^\circ = I_{m3} \sin w(t - t_3). \end{aligned}$$

Зауважимо ще, що графіки (рис. 2.4, 2.5, та 2.6) називаються часовими діаграмами гармонічних процесів (струмів, е. р. с., напруг).

А тепер розглянемо рис. 2.7, де подані залежності довжин проекцій радіуса  $I_m$  кола від кута, на який цей радіус повернеться за час  $t$ , обертаючись проти годинникової стрілки з положення  $a_0 = 0$  з круговою (коловою) швидкістю  $\omega$ .

Подання гармонічного процесу синусною чи косинусною функцією часу є рівноправними, бо перехід від одного подання до іншого не змінює суті процесу, а лише пов'язане з урахуванням  $90^\circ$  зсуву фаз між ними.

Очевидно, якби радіус  $I_m$  почав обертатися не з положення  $a_0 = 0$ , а з  $a_0 = w \cdot t_0$ , то це означало б, що процес обертання почався із запізненням на цей кут

$$i_3 = I_m \sin (wt - a_0) \text{ або } i_4 = I_m \cos (wt - a_0),$$

тобто, ці гармоніки за фазою відставали б від попередніх на кут  $a_0$ .

Якби радіус  $I_m$  почав обертатися до моменту  $t = 0$  ( $a_0 = -wt_0$ ), ми б говорили про гармоніки:

$$i_5 = I_m \sin(\omega t + a_0) \text{ або } i_6 = I_m \cos(\omega t + a_0),$$

які за фазою випереджали б  $i_1$  та  $i_2$  на кут  $a_0$ .

Розглянемо рис. 2.8, на якому зображено взаємне розташування двох векторів  $I_{m1}$  та  $I_{m2}$ , довжини яких дорівнюють амплітудам двох одночастотних гармонік, а кут між ними – куту зсуву фаз між ними. Обидва вектори обертаються проти напрямку годинникової стрілки з однаковою кутовою швидкістю  $\omega$  і кут між ними ( $a_1 - a_2$ ) буде зберігати своє значення у будь-який момент часу.

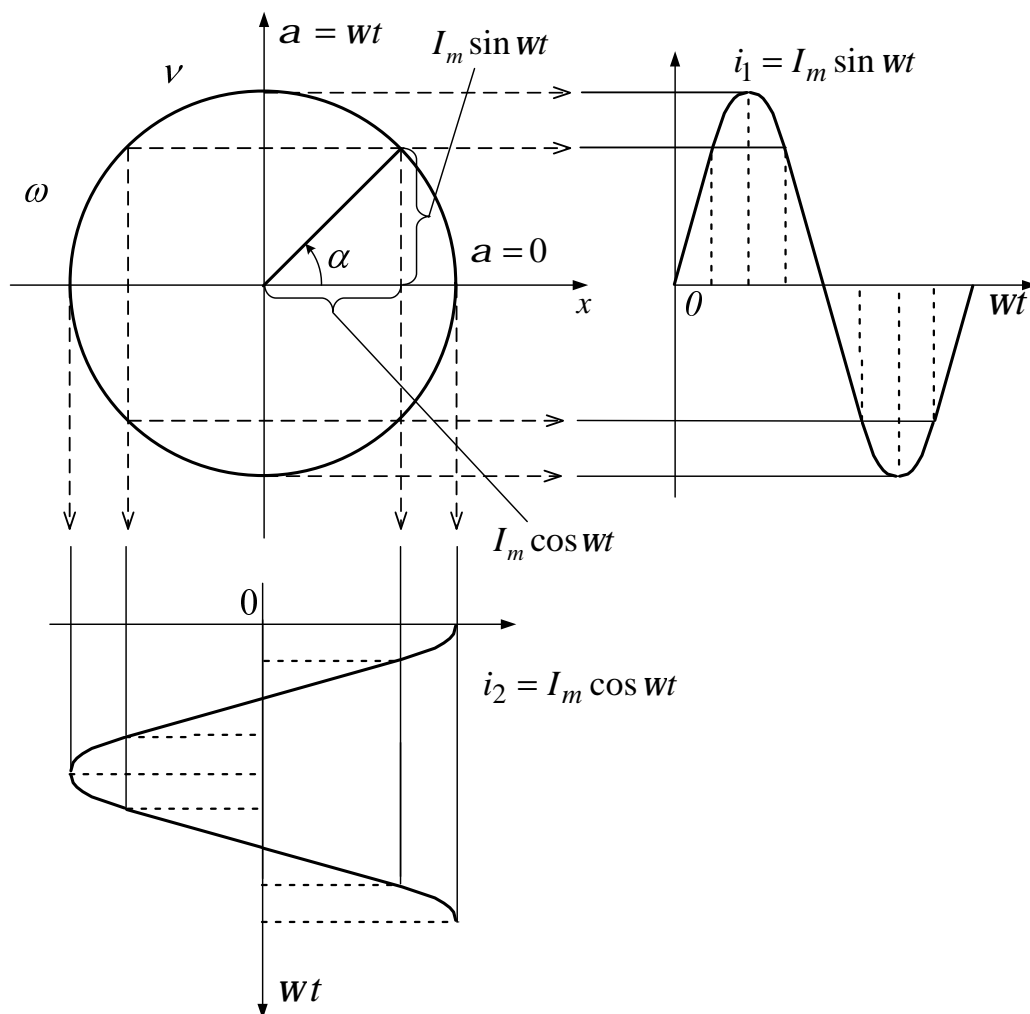


Рисунок 2.7 – Ілюстрація кругової (колової) діаграми – графічної моделі гармонічного процесу

Початком відліку фазових кутів, так само як і в колових діаграмах, є позитивний напрямок осі  $Ox$  прямокутної системи координат  $ХОУ$ .

Математичні моделі цих гармонік запишуться:

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + a_1), i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + a_2).$$

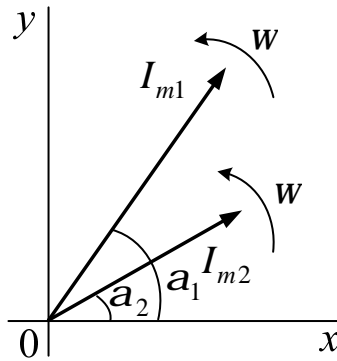


Рисунок 2.8 – Пояснення до поняття векторної діаграми

Тепер, припустимо, треба знайти гармоніку, яка була б сумою заданих гармонік. Амплітуда цієї гармоніки, очевидно, є векторною сумою векторів  $I_{m1}$  та  $I_{m2}$ :

$$\overline{I_m} = \overline{I_{m1}} + \overline{I_{m2}}.$$

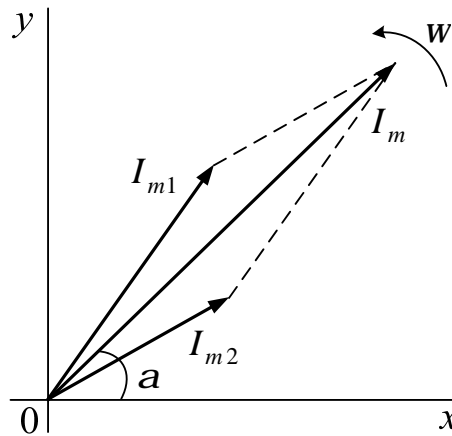


Рисунок 2.9 – Векторна сума двох векторів

Її початкова фаза дорівнює куту  $a$  і вектор  $I_m$  обертатиметься з тією ж самою частотою  $\omega$ , тобто:

$$i = i_1 + i_2 = I_m \sin(\omega t + a).$$

Знайдемо амплітуду та початкову фазу струму аналітично:

$$i = I_{m1} \sin(\omega t + a_1) + I_{m2} \sin(\omega t + a_2) = I_m \sin(\omega t + a),$$

де  $I_m \sin(\omega t + a) = I_{m1} \cos a_1 \sin \omega t + I_{m1} \sin a_1 \cos \omega t + I_{m2} \cos a_2 \sin \omega t + I_{m2} \sin a_2 \cos \omega t$ , (тут:  $I_m = \sqrt{(I_{m1} \cos a_1 + I_{m2} \cos a_2)^2 + (I_{m1} \sin a_1 + I_{m2} \sin a_2)^2}$ ,  $a = \arctg \frac{I_{m1} \sin a_1 + I_{m2} \sin a_2}{I_{m1} \cos a_1 + I_{m2} \cos a_2}$ ).

Пересвідчуємося, що аналітичний шлях у порівнянні з графічним значно довший і складніший. Особливо ж це стане очевидним, коли потрібно додавати три і більше гармонік.

Параметри, які повністю характеризують гармонічний процес (струм, е. р. с., напругу) називаються амплітудою, частотою та початковою фазою цього процесу.

Електричний гармонічний процес можна подати за допомогою математичної моделі або однієї з графічних моделей: часової, кругової (колової) діаграм або векторної діаграми.

Початком гармоніки є момент, коли вона, зростаючи, проходить через нуль.

Різниця початкових фаз двох гармонік (одночастотних) називається фазовим зсувом між ними.

### 2.3 Середнє та діюче значення гармонічного струму

Середнє значення  $F_{сер}$  будь-якої періодичної функції  $f(t)$ , як відомо з курсу математики, дорівнює:

$$F_{сер} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (2.6)$$

де  $T$  – період функції.

У досліджуваному випадку  $f(t) = i(t) = I_m \sin \omega t$ , де кругова частота  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ , матимемо:

$$\begin{aligned} I_{сер} &= \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{\omega T} \int_0^T \sin \omega t d\omega t = \\ &= \frac{I_m}{2\pi T} (-\cos \frac{2\pi}{T} t) \Big|_0^T = \frac{-I_m}{2\pi T} (\cos 2\pi - 1) = 0. \end{aligned}$$

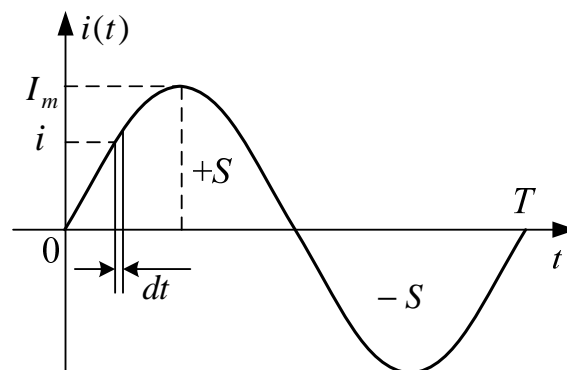


Рисунок 2.10 – Ілюстрація до інтегрування гармоніки

Цей результат демонструється на рис. 2.10, виходячи з геометричного смислу інтеграла, він дорівнює площі, обмеженій графіком синусоїди та



відрізком ОТ осі абсцис. За перший півперіод (від 0 до  $T/2$ ) інтегрування дасть площу  $+S$ , а за другий (від  $T/2$  до  $T$ ) – площу  $-S$ , що після додавання дасть нуль.

Введемо поняття діючого (середньоквадратичного) значення гармонічного струму  $I$  таким чином:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2.7)$$

Визначимо аналітичний зв'язок діючого і амплітудного значень гармонічного струму  $i(t) = I_m \sin \omega t$ .

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt} = \\ &= \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2p} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) d2\omega t} = \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2p} \int_0^T d2\omega t - \frac{1}{2p} \int_0^T \cos 2\omega t d2\omega t}. \end{aligned}$$

А оскільки середнє за період значення гармоніки дорівнює нулю, то

$$\frac{1}{2p} \int_0^T \cos 2\omega t d2\omega t = 0,$$

і тоді:

$$I = \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2p} \int_0^T d2\omega t} = \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2p} (2\omega T - 0)} = \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2p} \cdot 2 \frac{2p}{T} T} = \frac{I_m \sqrt{2}}{2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Отже, діюче (середньоквадратичне (root mean square, RMS) значення  $I$  гармонічного струму (за один період) дорівнює:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.8)$$

Який же фізичний зміст поняття діючого значення гармонічного струму? Для цього визначимо кількість тепла, яке виділиться на резисторі  $R$  при протіканні через нього струму протягом одного періоду  $T$ . Струм, який протікає через  $R$  (рис. 2.10) на нескінченно малому відрізку часу  $dt$ , можна вважати постійним та рівним миттєвому значенню  $i$ . Тоді, згідно із законом Джоуля-Ленца, за цей час на опорі  $R$  виділиться  $0,24 \cdot i^2 \cdot R \cdot dt$  калорій тепла, а за весь період  $T$  виділиться:  $Q = 0,24 \cdot 1/2 \cdot I_m^2 \cdot R \cdot T$  калорій.

З іншого боку, припустимо, що ми підібрали постійний струм  $I_0$ , який на такому ж резисторі  $R$  за час  $t = T$  виділить таку ж саму кількість тепла  $Q$ .

За законом Джоуля-Ленца ця кількість тепла дорівнює:  $Q = 0,24 \cdot I_0^2 \cdot R \cdot T$  калорій.

Прирівнявши праві частини двох останніх виразів, отримаємо, що  $I = I_0$ , а, отже, під діючим значенням гармонічного струму слід розуміти такий постійний струм, який, протікаючи через один і той самий резистор, виділить на ньому за один і той самий відрізок часу таку ж кількість тепла, що і гармонічний струм.

За час  $t$ , кратний періоду  $T$  гармонічного процесу, його середнє значення дорівнює нулю:  $t = nT$ , де  $n$  – натуральне число.

Діюче (середньоквадратичне) значення гармонічного струму є таке значення постійного струму, який на однаковий відрізок часу віддасть одному і тому ж резистору таку ж кількість енергії, що і гармонічний струм.

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707I_m.$$

## 2.4 Резистор і активний опір

Розглянемо ділянку кола з резистором  $R_1$  (рис. 2.11) на кінцях якої діє напруга з миттєвим значенням:

$$u(t) = U_m \cos \omega t. \quad (2.9)$$

Резистор, як відомо, є пасивним елементом схеми, у якому енергія електричного струму перетворюється в тепло. Тобто, він – типовий споживач (приймач) електричної енергії.

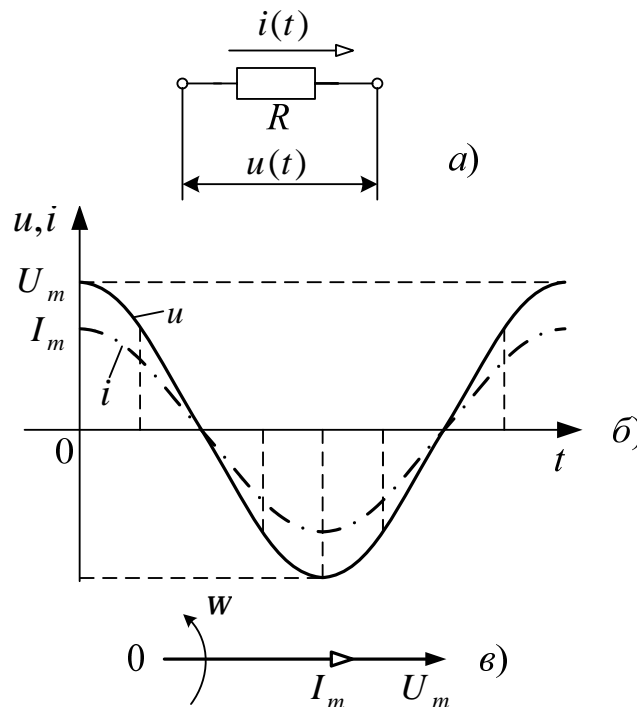


Рисунок 2.11 – Ілюстрації до кола із резистором

За законом Ома, який є справедливим для миттєвих значень напруги і струму, через резистор протікатиме струм:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t, \quad (2.10)$$

де  $I_m = U_m/R$  – амплітуда цього струму.

Порівнюючи (2.9) і (2.10), робимо висновок, що початкова фаза струму, який протікає через резистор, дорівнює початковій фазі напруги на ньому. Тобто, на досліджуваній ділянці кола струм і напруга збігаються за фазою. Це ілюструється часовою (рис. 2.11, б) та векторною (рис. 2.11, в) діаграмами.

Відношення амплітуд напруги і струму на резисторі:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{I_m / \sqrt{2}} = \frac{U}{I} = R,$$

дорівнюють відношенню їх діючих значень, що доводить справедливість закону Ома для діючих значень гармонічного струму:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Введемо поняття миттєвої потужності  $p(t)$  електричного струму на ділянці кола (рис. 2.11, а) як добуток миттєвих значень напруги і струму:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t).$$

Підставивши сюди вирази для напруги і струму з (2.9) і (2.10), отримаємо:

$$p(t) = U_m \cdot I_m \cos^2 \omega t$$

і проаналізуємо цей результат. Скориставшись відомою з тригонометрії тотожністю, матимемо:

$$\begin{aligned} p(t) &= U_m \cdot I_m \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t), \\ p(t) &= \frac{U_m \cdot I_m}{2} + \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos 2\omega t. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Побудуємо часову діаграму за формулою (2.11). Це буде косинусоїда з амплітудою  $\frac{U_m \cdot I_m}{2}$  і частотою  $2\omega$  – вдвічі більшою, ніж частота  $u(t)$  і  $i(t)$ ,

піднята над віссю абсцис на величину  $\frac{U_m \cdot I_m}{2}$  – стала складова

потужності, а  $\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos 2\omega t$  – змінна складова потужності (рис. 2.12).

Скрізь миттєве (instantaneous, ІМ) значення потужності є позитивною величиною, бо струм і напруга завжди мають однакові знаки. Позитивне

значення потужності вказує на те, що енергія від джерела (генератора) повністю передається споживачу (приймачу), де і витрачається на нагрівання резистора.

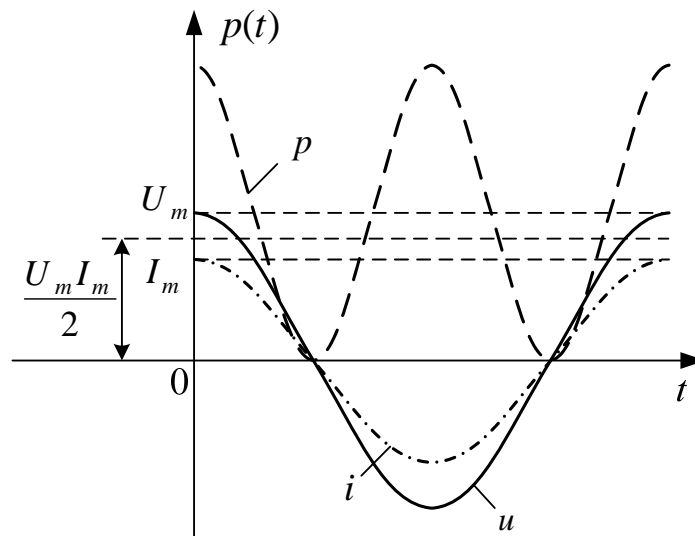


Рисунок 2.12 – Часова діаграма миттєвої потужності  $p(t)$

Середнє за період значення  $p(t)$ :

$$P_{\text{сер}} = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{U_m \cdot I_m}{2} + \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos 2\omega t \right) dt = \frac{U_m \cdot I_m}{2}.$$

Саме ця потужність і є та потужність, яка розвивається на резисторі, а кількість енергії, що перетворюється на тепло за період  $T$ , буде:

$$W = P_{\text{сер}} \cdot T = \frac{U_m \cdot I_m}{2} T.$$

Середнє значення потужності (миттєвого значення потужності) називається активною потужністю  $P$  і вимірюється у ватах (Вт):

$$P = \frac{U_m \cdot I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U \cdot I \text{ або } P = \frac{U^2}{R}.$$

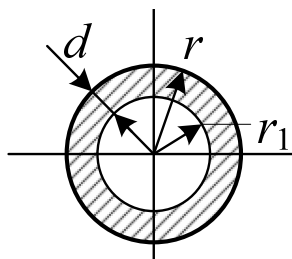


Рисунок 2.13 – Пояснення до поверхневого ефекту

Опір  $R$ , на якому виділяється (у вигляді тепла) активна потужність  $P$ , називається активним опором резистора.

Слід зауважити, що активний опір є опором змінному струму, більшим за опір постійному струму. Справа у тому, що при змінному струмі проявляє себе так званий поверхневий ефект (рис. 2.13).

Суть цього ефекту полягає в тому, що електромагнітне поле, яке оточує провідник зі струмом, проникає в тіло провідника на глибину  $d$ :

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu s}},$$

згасаючи у  $e = 2,73$  раза. Тобто, на цій глибині поле буде ослабленим більше ніж у 2,5 раза. Для мідного дроту, наприклад, на частоті 1 МГц  $d = 65$  мікрон. На глибині ж 200 мкм, очевидно, його практично немає. Отже, електрони, які знаходяться у провіднику глибше 0,20 мм, участі у електропровідності не беруть. Виходячи з формули для  $d$ , видно, що зі збільшенням частоти струму  $\omega$ , абсолютної магнітної проникності  $\mu$  та питомої провідності  $s$  провідника участь в електропровідності братимуть лише електрони, які знаходяться у тонкому поверхневому шарі провідника.

Повертаючись до поняття активного опору, наголосимо, що він має підраховуватись за однією з формул:

$$R = \frac{U}{I}; \quad R = \frac{P}{I^2}; \quad R = \frac{U^2}{P},$$

підкреслюючи цим, що йдеться про саме активний опір (який фактично діє при заданих умовах: частоті струму, матеріалі провідника та його діаметрі), а не за (1.3), де визначається опір постійному струму. Можна скористатися і цією формулою, але замість  $S$  підставити значення активної частини площі поперечного перерізу провідника  $S_a$ , яка дорівнює (рис. 2.13):

$$S_a = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi (2r - d)d,$$

де  $2r$  – діаметр циліндричного провідника.

Наприклад, якщо мідний провідник певної довжини і діаметром 1 мм на постійному струмі має опір  $R_0$ , то на частоті 10 кГц,  $d = 2$  мм і опір його буде таким самим, а на частоті 100 кГц,  $d = 0,63$  мм і опір зросте до значення  $1,2R_0$ , а на частоті 1 МГц – до  $2,8R_0$ .

Закон Ома залишається справедливим і для діючих значень напруги і струму.

$$I = U / R.$$

Миттєве значення потужності на резисторі є величиною позитивною (енергія споживається приймачем у кількості, яка називається активною потужністю):

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = U^2 / R.$$

Напруга на резисторі та струм у ньому мають однакові початкові фази (збігаються за фазою).

## 2.5 Котушка індуктивності та індуктивність

Котушка індуктивності – це промисловий виріб, радіодеталь, фізично існуючий об'єкт, основним параметром якого є індуктивність  $L$ . На рис. 2.14 показано умовні позначення котушки індуктивності на електричній схемі.

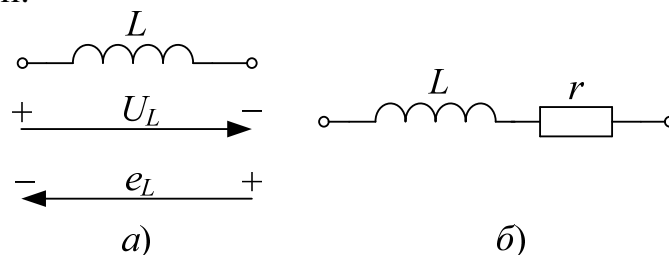


Рисунок 2.14 – Умовні позначення котушки індуктивності

Реальні котушки індуктивності мають, так званий опір втрат  $r$  (рис. 2.14, б), який є також параметром цього елемента кола. Цей параметр характеризує усі енергетичні втрати в котушці: втрати на нагрівання дроту через його активний опір, втрати на випромінювання та втрати в осерді, яке нагрівається вихровими струмами.

В радіотехніці використовуються котушки індуктивності з настільки малими втратами, що ними, у абсолютній більшості випадків, можна знехтувати і користуватися поняттям ідеальної котушки (рис. 2.14, а). У тих випадках, коли втратами знехтувати неможливо, розрахунки ведуться з урахуванням параметра  $r$ , який враховує найбільш суттєві з можливих втрат енергії.

Усі втрати у котушці є невідновними, тому мова йде про активну потужність втрат, яка пов'язана з перетворенням енергії електричного струму в інший вид енергії (теплову та випроміненого електромагнітного поля) і тому параметр  $r$  є активним опором.

Основний параметр котушки – це її індуктивність  $L$ , яка кількісно оцінює ступінь її здатності накопичувати енергію магнітного поля. Індуктивність визначається за формулою:

$$L = \psi / i, \quad (2.12)$$

де  $\psi$  – потокозчеплення, викликане струмом  $i$  у котушці.

Нагадаємо, що потокозчеплення котушки індуктивності є сума добутків магнітних потоків, обумовлених струмом у витках котушки, на число витків, з якими ці потоки зчеплені. Наприклад, у тороїдальній

катушці усі витки пронизуються одним і тим же магнітним потоком і потокозчеплення дорівнює добутку магнітного потоку на число витків. Потокозчеплення, як і магнітний потік, вимірюється у веберах (Вб), а індуктивність – у генрі (Гн). Оскільки завжди потокозчеплення (магнітний потік прямо пропорційний струмові) і струм мають однакові знаки, індуктивність  $L$  є величина позитивна.

Строго кажучи, потокозчеплення є нелінійною функцією струму, але у більшості радіотехнічних задач маємо справу з невеликими струмами і намагніченість котушки зі зростанням струму (рис. 1.15) зростає лінійно:

$$y = L \cdot i, \quad (2.13)$$

а значить  $L$  є величиною сталою. Катушка ж індуктивності, у такому разі, є лінійним елементом.

Згідно із законом електромагнітної індукції Фарадея-Максвела, експериментально встановленим Майклом Фарадеєм і описаним математично Дж. К. Максвелом, зміна потокозчеплення (магнітного потоку) викликає електрорушійну силу (е. р. с.) самоіндукції, яка визначається за формулою:

$$e_L = -\frac{dy}{dt}. \quad (2.14)$$

Знак мінус означає, що е. р. с. самоіндукції протилежна потокозчепленню (а значить – струму), коли магнітний потік ( $i$  струм) збільшується, оскільки  $dy > 0$ ; і збігається за напрямком з потокозчепленням ( $i$  струмом), коли магнітний потік ( $i$  струм) зменшується, оскільки  $dy < 0$ .

Іншими словами, електрорушійна сила самоіндукції має таку полярність, щоб чинити опір зростанню струму, і підтримувати струм при його зменшенні, тобто чинити опір усякому змінненні струму через катушку.

Напряга ж на катушці  $u_L$  за напрямком завжди збігається зі струмом і тому буде протилежною е. р. с. самоіндукції при зростанні струму (рис. 2.15). При зменшенні ж струму е. р. с.  $e_L$  змінить свій знак на протилежний і збігатиметься з напругою  $u_L$  за напрямком. При змінненні напрямку струму на протилежний полярність  $u_L$  теж зміниться (другий півперіод синусоїди гармонічного струму), але е. р. с.  $e_L$  буде знову протиполярною напрузі  $u_L$  при зростанні (за абсолютною величиною) струму і однієї полярності при зменшенні (за абсолютною величиною) струму через катушку.

Припустимо, що гармонічний струм

$$i = I_m \sin wt.$$

Підставивши (2.13) в (2.14), отримаємо:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L\omega I_m \cos \omega t ,$$

$$e_L = -L\omega I_m \cos \omega t = -\omega L I_m \sin(90^\circ - \omega t) = E_m \sin(\omega t - 90^\circ) ,$$

де  $E_m = \omega L I_m$  – амплітуда гармонічної е. р. с. самоіндукції  $e_L$ .

За фазою остання відстане від струму на  $90^\circ$  (на чверть періоду  $T$ ), що і показано на рис. 2.15.

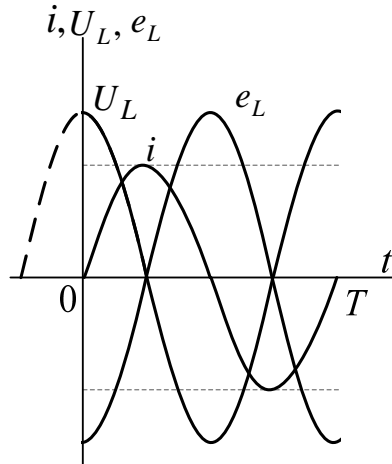


Рисунок 2.15 – Струм, напруга та е. р. с. самоіндукції у котушці

Величину  $u_L$ , рівну е. р. с. індукції за модулем і протилежну їй за фазою, називають напругою на котушці:

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = U_{mL} \cos \omega t ,$$

де  $U_{mL}$  – амплітуда цієї напруги.

Останній вираз, як відомо з тригонометрії, можна переписати так:

$$u_L = U_{mL} \sin(\omega t + 90^\circ) ,$$

що свідчить про те, що струм через котушку відстає від напруги на ній на  $90^\circ$  (на чверть періоду  $T$ ). Тобто е. р. с. самоіндукції та напруга на котушці за фазою зсунуті на  $180^\circ$ , і вони є протифазні.

З виразу  $|e_L| = L \frac{di}{dt}$  бачимо, що модуль е. р. с.  $e_L$  досягає максимального значення  $E_m$  у моменти часу, коли струм  $i$  через котушку, проходить через  $i=0$ , маючи у ці моменти максимальну швидкість змінення за величиною ( $|di/dt|$  є максимальною), а у моменти, коли струм є максимальним і дорівнює  $|I_m|$ , е. р. с. дорівнює нулю, бо у ці моменти швидкість змінення струму дорівнює нулю  $di/dt = 0$ .

Виходячи з того, що  $E_m = \omega L I_m$ , пояснимо фізичну суть добутку  $\omega L$ , який дорівнює:



$$wL = \frac{E_m}{I_m} = \frac{U_{mL}}{I_m} \text{ або } wL = \frac{E}{I} = \frac{U_L}{I}.$$

Розмірність  $wL$  є В/А, що дозволяє цей добуток, позначивши через  $X_L$ , назвати індуктивним опором:

$$X_L = wL. \quad (2.15)$$

Але за своєю сутністю цей опір, на відміну від активного, не пов'язаний із затратою енергії на нагрівання дроту, з якого намотана котушка, а кількісно оцінює ступінь опору, який створює е. р. с. самоіндукції, будь-якому зміненню струму через котушку. Тому цей опір називається реактивним опором котушки. Природно, що зі збільшенням частоти змінення струму, пропорційно їй збільшиться і реактивний індуктивний опір  $X_L$  (2.15).

Звернемося тепер до потужності електричного струму, який протікає через ідеальну котушку індуктивності.

Миттєве значення потужності знаходиться як добуток миттєвих значень напруги  $u_L$  та струму  $i$ :

$$\begin{aligned} p &= u_L i = U_{mL} \cos wt \cdot I_m \sin wt = \\ &= \frac{1}{2} U_{mL} I_m 2 \sin wt \cos wt = \frac{U_{mL} I_m}{2} \sin 2wt = U_L I \sin 2wt. \end{aligned}$$

На рис. 2.16. подано часову діаграму потужності  $p$  на фоні напруги  $u_L$  та струму  $i$ .

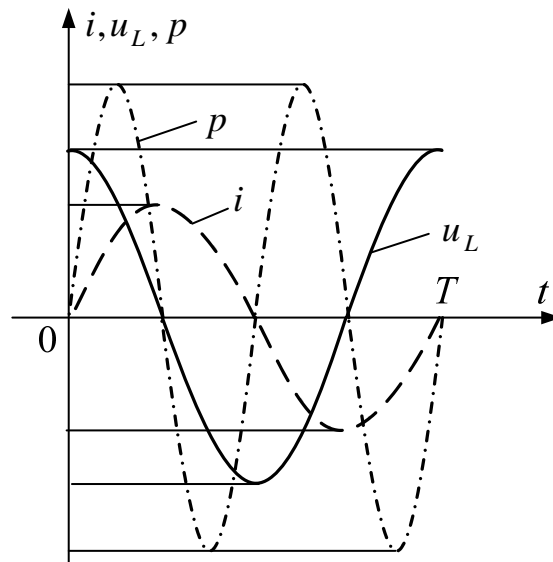


Рисунок 2.16 – Часова діаграма потужності на ідеальній котушці

З виразу для  $p$  та рис. 2.16. бачимо, що потужність змінюється гармонічно з подвійною частотою. У першу чверть періоду (від 0 до  $T/4$ ) струм, зростаючи, зарядить котушку, яка накопичить максимум енергії магнітного поля. На цьому відрізку періоду  $T$  енергія передавалась від джерела (генератора) до споживача (котушки) і ця потужність є

позитивною величиною, а е. р. с. самоіндукції  $e_L$  була протилежна струму  $i$  (рис. 2.15).

У другій чверті періоду (від  $T/4$  до  $T/2$ ) е. р. с.  $e_L$  за напрямком збігається зі струмом  $i$ . Тепер заряджена котушка є джерелом енергії, яку вона повертає генератору, і потужність є негативною. Далі, очевидно, усе буде повторюватись, і за один період дії струму котушка двічі споживатиме і двічі у такій же кількості повертатиме енергію генератору. Тобто, середнє за період  $T$  значення потужності на котушці дорівнюватиме нулю. Цей же результат можна отримати формально, якщо проінтегрувати:

$$P_{сер} = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0,$$

а отже, перетворення енергії в теплову (або інший вид енергії) не відбуватиметься, тобто активна потужність відсутня ( $P = 0$ ).

Добуток діючих значень  $U_L I$  позначається через  $Q$ , є амплітудою гармоніки  $p(t)$  і називається реактивною потужністю, яка вимірюється у вольт-амперах реактивних – у варах. Тим самим підкреслюється відмінність  $Q$  від  $P$ .

**Індуктивність** – це параметр котушки, який слугує кількісною оцінкою здатності котушки накопичувати енергію магнітного поля, позначається літерою  $L$  і вимірюється у Генрі (Гн).

Індуктивний опір котушки  $X_L$  обумовлюється електрорушійною е. р. с. самоіндукції, не пов'язаний з втратами енергії і визначається на заданій частоті  $\omega$  струму за формулою:

$$X_L = \omega L.$$

Котушка індуктивності за один період двічі обмінюється з генератором енергією, середнє значення якої дорівнює нулю.

Реактивна максимальна потужність магнітного поля котушки  $Q$ , вимірюється у варах і визначається за формулою:

$$Q = UI.$$

## 2.6 Конденсатор і електрична ємність

Конденсатор – промисловий виріб, радіодеталь, фізично існуючий об'єкт, основним параметром якого є електрична ємність (далі "ємність"), яка позначається літерою  $C$  латинської абетки.

Конденсатор можна зобразити двома паралельними і однаковими металевими пластинами, розділеними діелектриком. Конденсатори, які випускаються промисловістю і використовуються в радіотехніці, характеризуються втратами, якими на практиці можна знехтувати у порівнянні з втратами у реальних конденсаторах. За своєю суттю – це

втрати в діелектрику, який при протіканні електричного струму через конденсатор, нагрівається за рахунок перетворення частини енергії струму у тепло.

Конденсатор, як відомо, заряджається. При цьому на одній пластині буде накопичуватись позитивний заряд, а на другій – негативний. Між пластинами виникне різниця потенціалів (напруга  $U_C$ ), напрямлена так само, як струм  $I$  заряду конденсатора (рис. 2.17). Конденсатор накопичує енергію електричного поля і цю його здатність кількісно оцінюють ємністю  $C$ , яку визначають відношенням електричного заряду  $q$ , який накопичиться на пластинах конденсатора до напруги  $U_C$  між пластинами, яка виникне у зарядженому конденсаторі:

$$C = \frac{q}{u_C}. \quad (2.16)$$

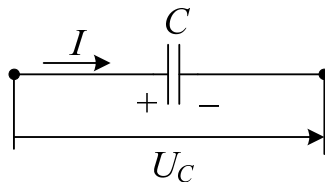


Рисунок 2.17 – Зображення конденсатора на електричній схемі

Ємність вимірюється у фарадах, а 1 фарад (Ф) = 1 Кл/1 В.

Надалі будемо вважати ємність  $C$  сталою величиною, а залежність  $q = CU_C$  – лінійним рівнянням, розуміючи при цьому, що коли у конденсаторі накопичиться  $q_1, q_2, \dots, q_n$  заряду, то напруга при цьому між його пластинами буде дорівнювати, відповідно,  $U_{C1}, U_{C2}, \dots, U_{Cn}$ . Але відношення:

$$\frac{q_1}{U_{C1}} = \frac{q_2}{U_{C2}} = \dots = \frac{q_n}{U_{Cn}},$$

залишається незмінним.

Незалежність ємності конденсатора від напруги на ньому дає підставу вважати конденсатор лінійним елементом кола.

Коли конденсатор заряджається і у ньому накопичується електричний заряд зі швидкістю  $dq/dt$ , то для підтримки цієї швидкості знадобиться електричний струм  $i$ , обумовлений джерелом енергії, тобто:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (2.17)$$

Аналогічно, конденсатор, що розряджається, втрачаючи накопичений заряд зі швидкістю  $dq/dt$ , обумовить протікання струму його розряду  $i$ .

Підставивши в (2.17) значення для  $q$  з (2.16), отримаємо:

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (2.18)$$

З цього співвідношення витікає, що напруга на конденсаторі може бути виражена через струм  $i$ :

$$du_C = \frac{1}{C} i \cdot dt. \quad (2.19)$$

При використанні цієї формули слід пам'ятати, що до моменту  $t = 0$  конденсатор був незарядженим. Якщо ж до того на конденсаторі була напруга  $U(0)$ , то після дозарядження:

$$u_C = U(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt.$$

Нехай через конденсатор протікає гармонічний струм:

$$i = I_m \cos \omega t.$$

Тоді напруга на конденсаторі ємністю  $C$  буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{1}{C} \int_0^t I_m \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin \omega t, \\ u_C &= U_{mC} \sin \omega t = U_{mC} \cos(\omega t - 90^\circ), \end{aligned} \quad (2.20)$$

де  $U_{mC} = I_m \frac{1}{\omega C}$  – амплітуда гармонічної напруги на конденсаторі.

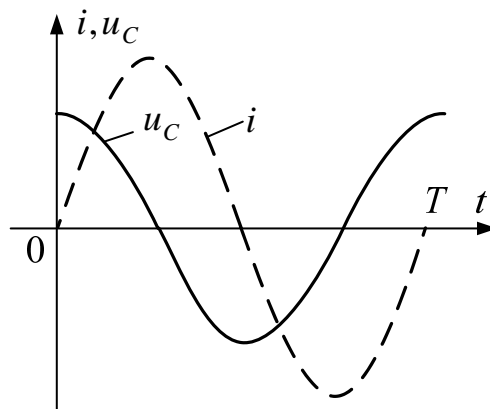


Рисунок 2.18 – Напруга та струм конденсатора

З останніх виразів для струму  $i$  та напруги  $u_C$  бачимо, що напруга на конденсаторі відстає від струму на  $90^\circ$ , що показано на рис. 2.18. Відношення:

$$\frac{U_{mC}}{I_m} = \frac{u_C}{i} = \frac{1}{\omega C}, \quad (2.21)$$

має розмірність Ом. Тому вираз  $X_C = 1/\omega C$  називається ємнісним опором. Цей опір теж не пов'язаний з втратами, перетворенням електричної енергії в інші види. Він обумовлюється інерцією конденсатора при його зарядженні. Чим більша ємність, тим більший час потрібен для зарядження, тим більша інерція до змінення напруги на конденсаторі. Заряджений конденсатор розряджатиметься тим довше, чим більша його ємність.

Іншими словами, ємнісний опір конденсатора  $X_C$  також є реактивним опором.

Миттєва потужність електричного поля, зосередженого між пластинами конденсатора, дорівнює:

$$\begin{aligned} p &= u_C i = U_{mC} I_m \cos(\omega t - 90^\circ) \cos \omega t = \\ &= \frac{U_{mC} I_m}{2} \sin 2\omega t = U_C I \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Як бачимо, потужність на конденсаторі змінюється за гармонічним законом з подвійною частотою (рис. 2.19).

За першу чверть періоду електричного струму енергія передається від джерела (генератора) конденсатору, у другу чверть періоду у такій же кількості вона повертається джерелу і так чотири рази за період  $T$ .

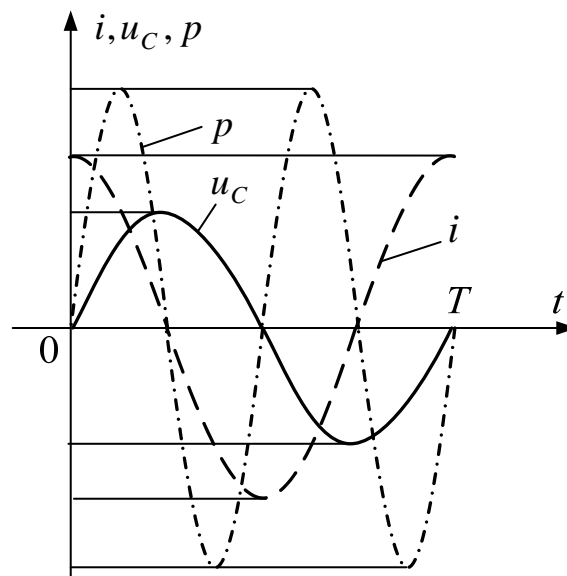


Рисунок 2.19 – Часова діаграма потужності конденсатора

Середнє значення потужності за період дорівнює нулю. Тобто, потужність конденсатора має реактивний характер, максимальне (амплітудне) значення якої  $Q$  дорівнює:

$$Q = U_C I. \quad (2.23)$$

Ця потужність теж вимірюється у варах.

**Ємність** – це параметр, який є кількісною оцінкою здатності конденсатора накопичувати енергію електричного поля, позначається через  $C$  і вимірюється у фарадах.

Ємнісний опір конденсатора обумовлюється інерцією процесу зарядження та розрядження конденсатора, не пов'язаний з втратами енергії і на заданій частоті визначається за формулою:  $X_C = 1/\omega C$ .

Конденсатор двічі за період обмінюється енергією з генератором і тому її середнє значення за цей час дорівнює нулю.

Максимальне значення реактивної потужності електричного поля, зосередженого в конденсаторі  $Q$ , вимірюється у варах і визначається за формулою:  $Q = U_C I$ .

### Запитання та задачі для закріплення

1. Що таке миттєве, амплітудне, середнє та діюче значення гармонічного струму? Який зв'язок між  $\omega$ ,  $f$  та  $T$ ?

2. Що таке активний опір резистора, активна потужність, за якою формулою вона визначається та яка одиниця її вимірювання?

3. Задано струми:  $I_1 = 10 \sin(\omega t + 30^\circ)$  А та  $I_2 = 15 \sin(\omega t + 60^\circ)$  А. За допомогою векторних діаграм визначити  $I = I_1 + I_2$ .

4. Визначити, яка енергія електричного струму  $i = 5 \sin \omega t$  А буде затрачена на нагрівання резистора  $R = 1$  кОм протягом однієї хвилини. Написати математичну модель напруги на резисторі.

5. Що таке ідеальна і реальна котушки індуктивності, як вони зображаються на електричних схемах?

6. Який фізичний зміст індуктивного опору, за якою формулою він визначається?

7. У чому проявляється відмінність активної і реактивної потужностей? За якою формулою визначається реактивна потужність?

8. Який фізичний зміст ємнісного опору, за якою формулою він визначається?

9. Які фазові співвідношення між струмами та напругами конденсатора та котушки індуктивності? Показати це за допомогою векторних діаграм.

10. Струм через котушку індуктивності з  $L = 5$  мГн,  $i = 10 \sin(\omega t + 30^\circ)$  А, яким буде миттєве значення напруги на ній?

11. Якою буде напруга на конденсаторі з  $C = 50$  мкФ, якщо його увімкнути замість котушки в умовах попередньої задачі?

12. Що слід розуміти під поняттям котушка індуктивності і індуктивність, конденсатор і ємність?

13. У яких одиницях визначаються: електричний заряд, електрична ємність та індуктивність?

14. Показати, що  $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Ом} \cdot \text{с}$ . Який зв'язок між кулоном, вольтом і фарадом?

### 3 КОЛА ГАРМОНІЧНОГО СТРУМУ І СИМВОЛЬНИЙ МЕТОД ЇХ РОЗРАХУНКУ

Символьний або метод комплексних амплітуд, розроблений у 1893-1894 рр. А. Кеннелі та П. Штейнметцем, дає можливість строго аналітично розраховувати кола гармонічного струму, використовуючи математичні співвідношення, справедливі при розрахунках кіл постійного струму. У цьому випадку фізичні величини: напруга, струм, і т. ін. замінюються, так званими комплексними (complex) величинами, які є зображеннями (символами) фізичних величин на комплексній площині.

Метод комплексних амплітуд ґрунтується на теорії комплексних чисел та комплексних функцій, тому розпочнемо зі спогадів про комплексні числа.

Слід зауважити, що цей метод не є універсальним. Він працює лише тоді, коли одночасно виконуються дві обов'язкові умови:

- електричне коло є лінійним;
- генератор працює при  $w = const$  (монохроматичні коливання).

#### 3.1 Комплексні числа та прості математичні операції над ними

Комплексним числом  $\mathfrak{A}$  в математиці ми називали алгебраїчну суму (algebraic sum) дійсного (real) числа  $a$  та уявного (imaginary)  $ib$ :

$$\mathfrak{A} = a \pm ib .$$

В радіотехніці уявну одиницю  $i = \sqrt{-1}$  позначають через  $j$  тому, що  $i$  – електричний струм і, отже, алгебраїчна форма запису комплексного числа є такою:

$$\mathfrak{A} = a \pm jb . \quad (3.1)$$

На рис. 3.1 показано, що комплексне число, яке зображається на комплексній площині, є вектором. Дійсна його частина  $a$  є довжиною проекції (projection)  $c$  на вісь дійсних чисел (дійсну вісь) ОХ і дорівнює:

$$a = |\mathfrak{A}| \cos a ,$$

уявна ж його частина  $b$  – довжиною проекції на уявну вісь ОУ і дорівнює:

$$b = |\mathfrak{A}| \sin a .$$

Підставивши ці значення частин комплексного числа  $\mathfrak{A}$  у (3.1), отримаємо тригонометричну форму його запису:

$$\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| \cos a \pm j |\mathfrak{A}| \sin a . \quad (3.2)$$

Використавши співвідношення, відомі у математиці як формули Ейлера, отримаємо показникову форму запису цього ж комплексного числа:

$$\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| e^{\pm ja} , \quad (3.3)$$

де у останніх виразах  $|\mathcal{Z}|$  – модуль, а  $\alpha$  – аргумент комплексного числа  $\mathcal{Z}$ , які визначаються за відомими формулами:

$$|\mathcal{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \alpha = \arctg \frac{b}{a}.$$

Два комплексних числа є рівними, коли рівні між собою їхні дійсні і уявні частини. Підсума двох комплексно-спряжених чисел дорівнює дійсній частині одного з них, а піврізниця – уявній частині:

$$\frac{(a + jb) + (a - jb)}{2} = a = \operatorname{Re}(\mathcal{Z}),$$

$$\frac{(a + jb) - (a - jb)}{2} = jb = j\operatorname{Im}(\mathcal{Z}).$$

Алгебраїчною сумою двох комплексних чисел є третє комплексне число, дійсна частина якого є алгебраїчною сумою дійсних частин, а уявна – уявних частин доданків:

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a + c) \pm j(b + d).$$

Добутком цих двох комплексних чисел є третє комплексне число, дійсна частина якого дорівнює  $(ac - bd)$ , а уявна дорівнює  $j(ad + bc)$ :

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc).$$

Якщо комплексні числа подати у показниковій формі, то модуль добутку дорівнює добутку їх модулів, а аргумент – сумі аргументів

$$(a + jb)(c + jd) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot e^{j(j_1 + j_2)},$$

де  $j_1 = \arctg \frac{b}{a}$  – аргумент першого;

$j_2 = \arctg \frac{d}{c}$  – аргумент другого співмножника.

Часткою від ділення комплексного числа  $(a + jb)$  на  $(c + jd)$  є комплексне число, яке дорівнює:

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Якщо комплексні числа подані у показниковій формі, то модуль частки є відношенням модуля чисельника до модуля знаменника, аргумент – дорівнює різниці між аргументами чисельника (numerator) і знаменника (denominator)

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} e^{j j_1}}{\sqrt{c^2 + d^2} e^{j j_2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \cdot e^{j(j_1 - j_2)},$$



$$\text{де } j_1 = \operatorname{arctg} \frac{b}{a};$$

$$j_2 = \operatorname{arctg} \frac{d}{c}.$$

При добуванні кореня  $n$ -го степеня від комплексного числа, отримуємо комплексне число, модуль якого дорівнює кореню  $n$ -го степеня з модуля цього числа, а аргумент – в  $n$  разів менший:

$$\sqrt[n]{\mathfrak{z}} = \sqrt[n]{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt[n]{|\mathfrak{z}| e^{ja}} = \sqrt[n]{|\mathfrak{z}|} e^{j\frac{a}{n}},$$

де  $|\mathfrak{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$  – модуль;

$a = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$  – аргумент заданого комплексного числа  $\mathfrak{z}$ .

Використовуючи те, що  $e^{ja} = \cos a + j \sin a$ , отримуємо рівності, які будуть корисними при застосуванні символічного методу при розрахунках електричних кіл гармонічного струму:

$$e^{j0} = \cos 0 + j \sin 0 = 1; \quad e^{j\frac{p}{2}} = \cos \frac{p}{2} + j \sin \frac{p}{2} = j;$$

$$e^{-j\frac{p}{2}} = \cos(-\frac{p}{2}) + j \sin(-\frac{p}{2}) = -j; \quad e^{\pm jp} = \cos(p) + j \sin(p) = -1.$$

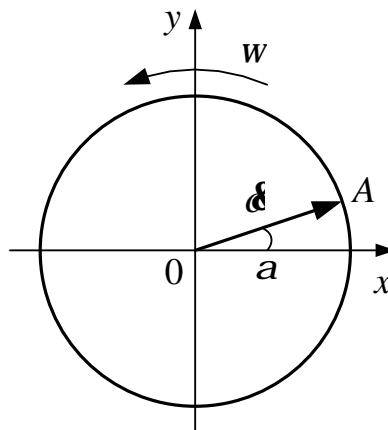


Рисунок 3.1 – Обертання вектора  $OA$

Наприклад, коли комплексне число  $\mathfrak{z}$  (рис. 3.1) помножити на  $j$ , то це означає поворот вектора  $(\overline{OA})$  навколо початку координат на  $90^\circ$  проти годинникової стрілки, бо  $\mathfrak{z} \cdot j = |\mathfrak{z}| e^{ja} \cdot e^{j\frac{p}{2}} = |\mathfrak{z}| e^{j(a+\frac{p}{2})}$ . А добуток  $\mathfrak{z}(-1)$ , означає перехід до вектора  $-\mathfrak{z}$ , що еквівалентно оберту на  $180^\circ$  проти годинникової стрілки:  $|\mathfrak{z}| e^{j(a+p)}$  або за нею:

$$|\mathfrak{z}| e^{j(a-p)}.$$

Домноження вектора  $\mathbf{a}$ , наприклад, на множник  $e^{jb}$  еквівалентне його повороту на кут  $b$ , тому цей множник називається множителем оберту.

Якщо кут дорівнює  $a + wt$ , отримаємо  $|\mathbf{a}|e^{ja} \cdot e^{jwt} = |\mathbf{a}|e^{j(wt+a)}$ , що означає обертання вектора  $\mathbf{a}(OA)$  проти ходу годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $w$  рад/с, починаючи з положення, зображеного на рис. 3.1. Множник же  $e^{jwt}$  називається оператором обертання.

### 3.2 Подання обертового вектора комплексною функцією часу

Повернемося до рис. 2.7. Там показано, що миттєве значення гармонічного струму можна подати як залежність довжини проекції амплітуди  $I_m$ , яка обертається проти ходу годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $w$ , або на вісь  $OX$ :

$$i = I_m \cos(wt + a),$$

або на вісь  $OY$ :

$$i = I_m \sin(wt + a).$$

Тепер цей рисунок розглянемо розташованим на комплексній площині (рис. 3.1), де вектор  $I_m$  обертається проти ходу годинникової стрілки зі сталою частотою  $w$ , починаючи з положення, зображеного на цьому рисунку.

Тоді, вважаючи  $a = j_0$ , ми можемо говорити про вектор  $\mathbf{I} = I_m e^{j_0 + jwt} = I_m e^{j_0} \cdot e^{jwt}$  як такий, що обертається у визначених щойно умовах. Такий вектор називається комплексом електричного струму.

Добуток  $I_m e^{j_0}$  називається комплексною амплітудою цього струму:

$$\mathbf{I}_m = I_m e^{j_0}.$$

Таким чином, ми можемо говорити про обертання зі сталою частотою  $w$  вектора  $\mathbf{I}_m$  – комплексної амплітуди гармонічного струму  $i$ .

Миттєве ж значення цього струму як довжини проекцій комплексу  $\mathbf{I}$  на дійсну вісь, дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{Re}[\mathbf{I}] = \operatorname{Re}[\mathbf{I}_m e^{jwt}] = \operatorname{Re}[I_m e^{j_0} e^{jwt}] = \operatorname{Re}[I_m e^{j(wt+j_0)}] = \\ &= \operatorname{Re}[I_m \cos(wt + j_0) + j I_m \sin(wt + j_0)] = I_m \cos(wt + j_0), \end{aligned}$$

або на уявну вісь:

$$i = I_m \sin(wt + j_0).$$

Вираз  $\mathbf{I} = I_m e^{j(wt+j_0)}$  можна вважати математичною моделлю гармонічного струму, яка враховує значення усіх трьох параметрів:

амплітуди  $I_m$ , частоти  $\omega$  та початкової фази  $j_0$ , які повністю характеризують гармонічний процес.

Комплексну амплітуду  $\underline{I}_m = I_m \cdot e^{jj_0}$  теж можна назвати математичною моделлю, але неповною, бо враховує вона лише два параметри гармоніки: амплітуду  $I_m$  та початкову фазу  $j_0$ .

Очевидно, коли мова йде про гармонічну напругу, наприклад, на резисторі  $R$ , створену електричним струмом з частотою  $\omega$  і задана комплексна амплітуда цього струму, то добуток:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m R = I_m \operatorname{Re} e^{jj_0} = U_m e^{jj_0},$$

можна назвати комплексною амплітудою напруги. Комплекс напруги знайдемо, домноживши  $\underline{U}_m$  на оператор обертання  $e^{j\omega t}$ , а миттєве значення напруги дорівнюватиме:

$$u = \operatorname{Re}[U_m e^{j(\omega t + j_0)}] = U_m \cos(\omega t + j_0),$$

або

$$u = \operatorname{Im}[U_m e^{j(\omega t + j_0)}] = U_m \sin(\omega t + j_0).$$

З виразу  $\underline{I} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$  та змісту оператора обертання можна стверджувати, що вектор  $\underline{I}_m$  – комплексна амплітуда струму, обертається зі сталою швидкістю  $\omega$  проти годинникової стрілки.

Зауважимо, що  $\operatorname{Re}$  (від real – дійсне) означає символічну операцію виділення дійсної частини, а  $\operatorname{Im}$  (від imaginary – уявне) – виділення уявної частини комплексного числа.

Комплексна амплітуда гармонічної функції дорівнює добутку її амплітуди на оператор повороту  $\exp(jj_0)$ , де  $j_0$  – початкова фаза гармоніки.  $\underline{I}_m = I_m e^{jj_0}$ ;  $\underline{U}_m = U_m e^{jj_0}$ .

Миттєве значення гармонічної функції часу дорівнює дійсній (косинусоїді) або уявній (синусоїді) частині комплексу, який отримаємо домноженням комплексної амплітуди гармоніки на оператор обертання:  $\exp(j\omega t) \quad i = \operatorname{Re}[\underline{I}_m e^{j\omega t}], \quad i = \operatorname{Im}[\underline{I}_m e^{j\omega t}]$ .

### 3.3 Закони Ома та Кірхгофа у комплексній формі

Іншими словами, знайдемо математичні записи законів Ома та Кірхгофа для комплексних амплітуд.

#### Закон Ома

Для ділянки кола рис. 3.2,  $a$  є справедливим закон Ома  $i = U/r$ .

Перепишемо його у такому вигляді:  $\operatorname{Re}[\underline{I}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{r} \operatorname{Re}[\underline{U}_m e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}\left[\frac{\underline{U}_m}{r} e^{j\omega t}\right]$ .

Це рівняння є справедливим для будь-якого значення часу  $t$ , а тому можна прирівняти і вирази у дужках:  $\mathbf{I}_m \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{r} \mathbf{U}_m \cdot e^{j\omega t}$ .

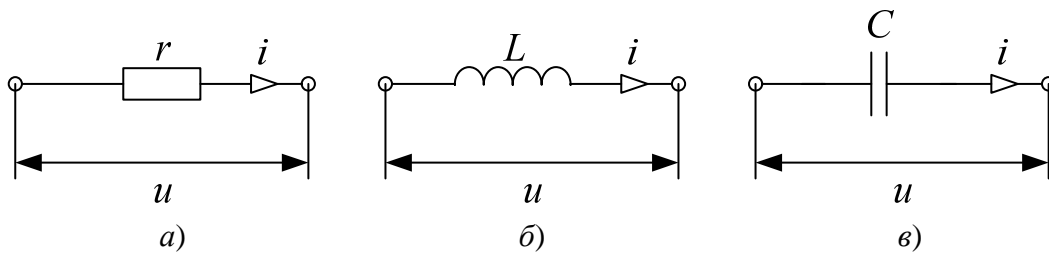


Рисунок 3.2 – Ділянки кола

Розділивши обидві частини цього рівняння на  $e^{j\omega t}$ , отримаємо: закон Ома для комплексних амплітуд струму та напруги, що діють на ділянці з опором  $r$ :

$$\mathbf{I}_m = \frac{1}{r} \mathbf{U}_m. \quad (3.4)$$

Перевіримо результат, перейшовши до миттєвих значень струму та напруги:

$$i = \text{Re}[\mathbf{I}_m e^{j\omega t}] = I_m \cdot \cos(\omega t + a) = \frac{1}{r} U_m \cdot \cos(\omega t + a),$$

або:

$$i = \frac{u}{r}.$$

Запишемо тепер закон Ома для ділянки рис. 3.2, б, на якій діє гармонічний струм  $i = I_m \sin \omega t$ . Як нам відомо з підрозділу 2.5, миттєве значення напруги на котушці індуктивності дорівнює

$$u_L = U_{mL} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Напруга на котушці визначалась з рівняння:

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad \text{Re}[\mathbf{U}_{mL} e^{j\omega t}] = L \frac{d}{dt} \text{Re}[\mathbf{I}_m e^{j\omega t}].$$

Змінюючи порядок застосування операторів  $d/dt$ , та  $\text{Re}[\mathbf{U}_{mL} e^{j\omega t}] = L \text{Re}\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_m e^{j\omega t})\right]$  і, зваживши, що співмножник  $\mathbf{I}_m$  не залежить від часу  $t$ , отримаємо:

$$\text{Re}[\mathbf{U}_{mL} e^{j\omega t}] = L \text{Re}[j\omega \mathbf{I}_m e^{j\omega t}].$$

Прирівнюючи вирази у дужках, отримаємо:  $U_{mL} = j\omega L I_m = \omega L I_m e^{j\frac{p}{2}}$ .

Формула  $I_m = \frac{U_{mL}}{j\omega L} = \frac{U_{mL}}{jX_L}$  і є записом закону Ома для комплексних амплітуд гармонічного струму на ділянці кола, що містить котушку індуктивності.

$$\text{Im}[U_{mL} e^{j\omega t}] = \omega L \text{Im}\left[ I_m e^{j\frac{p}{2}} e^{j\omega t} \right],$$

$$U_{mL} \sin \omega t = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{p}{2}\right); \quad u_L = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{p}{2}\right)$$

Цей результат збігається з результатом, отриманим у підрозділі 2.5. Нарешті, розглянемо ділянку кола рис. 3.2, в. Напряга на конденсаторі:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{p}{2}\right)$$

Або

$$\text{Re}[U_{mC} e^{j\omega t}] = \frac{1}{C} \int_0^t \text{Re}[I_m e^{j\omega t} dt],$$

$$\text{Re}[U_{mC} e^{j\omega t}] = \frac{1}{C} \text{Re}\left[ \int_0^t I_m e^{j\omega t} dt \right]; \quad \text{Re}[U_{mC} e^{j\omega t}] = \frac{1}{C} \text{Re}\left[ \frac{1}{j\omega} I_m e^{j\omega t} \right],$$

$$U_{mC} e^{j\omega t} = \frac{I_m}{j\omega C} e^{j\omega t}, \quad U_{mC} = \frac{I_m}{j\omega C},$$

$$I_m = \frac{U_{mC}}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C U_{mC} = jX_C U_{mC}. \quad (3.5)$$

Остання формула є записом закону Ома для комплексних амплітуд гармонічного струму на ділянці кола, яка містить конденсатор.

$$\text{Im}[U_{mC} e^{j\omega t}] = \text{Im}\left[ -j \frac{I_m}{\omega C} e^{j\omega t} \right] = \text{Im}\left[ \frac{I_m}{\omega C} e^{j\left(\omega t - \frac{p}{2}\right)} \right],$$

$$U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{p}{2}\right)$$

Цей результат збігається з отриманим для  $U_{mC}$  виразом (2.20) у підрозділі 2.5.

**Перший закон Кірхгофа** для довільного вузла електричної схеми, де виконується, наприклад, умова:  $i_1 + i_2 = i_3 + i_4 + i_5$ , перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\mathbf{I}_{m1}e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\mathbf{I}_{m2}e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re}[\mathbf{I}_{m3}e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\mathbf{I}_{m4}e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\mathbf{I}_{m5}e^{j\omega t}], \\ \operatorname{Re}[\mathbf{I}_{m1}e^{j\omega t} + \mathbf{I}_{m2}e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re}[\mathbf{I}_{m3}e^{j\omega t} + \mathbf{I}_{m4}e^{j\omega t} + \mathbf{I}_{m5}e^{j\omega t}]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Прирівнюючи вирази у дужках після скорочення на  $e^{j\omega t}$ , отримаємо вираз для 1-го закону Кірхгофа у формі комплексних амплітуд:

$$\mathbf{I}_{m1} + \mathbf{I}_{m2} = \mathbf{I}_{m3} + \mathbf{I}_{m4} + \mathbf{I}_{m5}. \quad (3.7)$$

**Другий закон Кірхгофа** для довільного контуру, де:  $e_1 + e_2 = u_3 + u_4 + u_5$  перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\mathbf{E}_{m1}e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\mathbf{E}_{m2}e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re}[\mathbf{U}_{m1}e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\mathbf{U}_{m2}e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\mathbf{U}_{m3}e^{j\omega t}], \\ \operatorname{Re}[\mathbf{E}_{m1}e^{j\omega t} + \mathbf{E}_{m2}e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re}[\mathbf{U}_{m1}e^{j\omega t} + \mathbf{U}_{m2}e^{j\omega t} + \mathbf{U}_{m3}e^{j\omega t}]. \end{aligned}$$

І, отже, вираз:

$$\mathbf{E}_{m1} + \mathbf{E}_{m2} = \mathbf{U}_{m1} + \mathbf{U}_{m2} + \mathbf{U}_{m3}$$

є виразом для 2-го закону Кірхгофа для комплексних амплітуд у контурі, який містить дві е. р. с. та три вітки.

### 3.4 Застосування законів Ома і Кірхгофа для комплексних амплітуд при розрахунку електричних кіл

#### Послідовне з'єднання $rL$ та $rC$

Нехай ділянка кола складається з котушки індуктивності послідовно увімкненої з резистором (рис. 3.3, а) під напругу  $u$ .

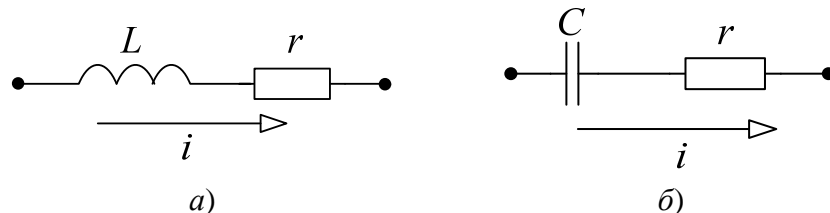


Рисунок 3.3 – Ділянки з активно-реактивними опорами

Другий закон Кірхгофа у формі комплексних амплітуд запишеться:

$$\mathbf{U}_m = j\omega L\mathbf{I}_m + r\mathbf{I}_m, \quad (3.8)$$

$$U_{mL} = j\omega L I_m = \omega L I_m e^{j\pi/2},$$

$$U_{mr} = I_m r.$$

Розділимо рівняння (3.8) на  $I_m$  і отримаємо

$$\frac{U_m}{I_m} = r + j\omega L.$$

Відношення  $\frac{U_m}{I_m}$  називається комплексним опором і позначається  $Z$ :

$$Z = r + j\omega L = r + jX_L. \quad (3.9)$$

Побудуємо векторну діаграму комплексних напруг для кола (рис. 3.3, а).

Будувати векторну діаграму потрібно, починаючи з вектора  $I_m$  розташованого довільно, бо струм на цій ділянці є спільним для обох елементів (рис. 3.4, а).

З ним за напрямком збігатиметься напруга на резисторі  $U_{mr}$ , а вектор  $U_{mL}$  випереджає його на  $\pi/2$ . Сумарний вектор  $U_m$  випереджатиме струм на кут  $j < 90^\circ$ . Тобто, на ділянці  $L, r$  електричний струм відставатиме від напруги за фазою на кут  $j < 90^\circ$ .

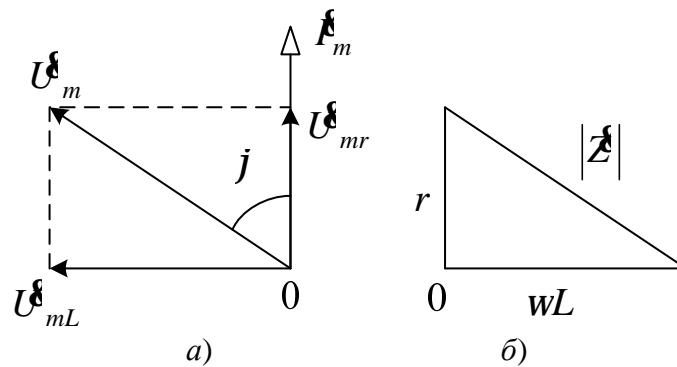


Рисунок 3.4 – Векторна діаграма а) і трикутник опорів б)

Якщо у векторній діаграмі напруг усі сторони розділити на спільний струм  $I_m$ , то отримаємо трикутник опорів (рис. 3.4, б). З цього прямокутного трикутника знаходимо модуль комплексного опору  $|Z|$ :

$$|Z| = Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}, \quad (3.10)$$

який називається комплексним опором.

Аргумент комплексного опору  $j = \text{arctg} \frac{\omega L}{r}$ .

Дійсна частина комплексного опору  $Z$  є активним опором, а уявна – реактивним (індуктивним) опором ділянки з послідовним з'єднанням  $r, L$ . Модуль комплексного опору визначається за формулою (3.10) і називається повним опором ділянки.

### Послідовне з'єднання $r, C$

Нехай тепер ділянка складається з послідовно з'єднаних конденсатора  $C$  та резистора  $r$  (рис. 3.3, б).

За другим законом Кірхгофа для комплексних амплітуд:

$$U_m = U_{mC} + U_{mr} = \frac{I_m}{j\omega C} + I_m r,$$

$$U_{mC} = -j \frac{I_m}{\omega C} = I_m \frac{e^{-j\frac{p}{2}}}{\omega C},$$

$$U_{mr} = I_m r.$$

$$Z = r - \frac{j}{\omega C} = r + jX_C. \quad (3.11)$$

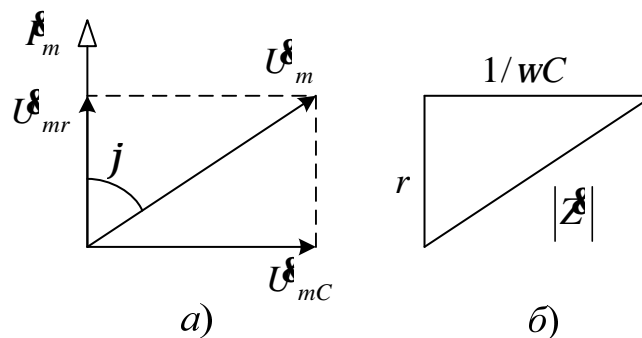


Рисунок 3.5 – Векторна діаграма а) і трикутник опорів б)

Побудуємо векторну діаграму для цієї ділянки, починаючи з вектора  $I_m$ . Вектор  $U_{mr}$  збігається за напрямком з  $I_m$ , а  $U_{mC}$  відставатиме від нього на  $P/2$ . З трикутника опорів:

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + X_C^2},$$

$$j = \arctg\left(-\frac{1}{r\omega C}\right) = -\arctg\left(\frac{1}{r\omega C}\right). \quad (3.12)$$

Дійсна частина комплексного опору є активний опір, а уявна – реактивний (ємнісний) опір ділянки з послідовно з'єднаними  $r, C$ .

Якщо у задачі задано струм через ділянку з послідовним з'єднанням  $r, L$ , то напруга на ділянці:



$$U_m = I_m Z,$$

$$Z = \sqrt{r^2 + (wL)^2} e^{j \arctg\left(\frac{wL}{r}\right)}.$$

Якщо у цьому колі необхідно визначити струм при заданій напрузі в ньому, то:

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (wL)^2}} e^{-j \arctg\left(\frac{wL}{r}\right)}.$$

Аналогічно для кола з послідовним з'єднанням  $r, C$ :

$$U_m = I_m Z,$$

де

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{wC}\right)^2} e^{-j \arctg\left(\frac{1}{rwC}\right)},$$

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{wC}\right)^2}} e^{j \arctg\left(\frac{1}{rwC}\right)}.$$

### Послідовне з'єднання $r, L, C$

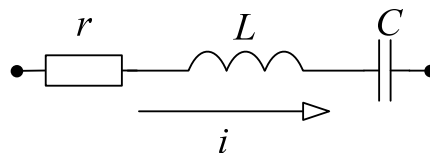


Рисунок 3.6 – Послідовне з'єднання  $r, L, C$

Якщо на кінцях цієї ділянки кола діє напруга  $u$ , то

$$U_m = I_m \left( r + jwL + \frac{1}{jwC} \right) = I_m \left[ r + j \left( wL - \frac{1}{wC} \right) \right] = I_m Z.$$

Комплексний опір

$$Z = r + jwL + \frac{1}{jwC} = r + jX,$$

де  $r$  – активний;

$X = wL - \frac{1}{wC}$  – реактивний опір ділянки.

Комплексні амплітуди напруг на елементах кола:

$$U_{mr} = I_m r,$$

$$U_{mL} = \omega L I_m e^{jP/2},$$

$$U_{mC} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cdot e^{-jP/2}.$$

Розглянемо випадок, коли на певній частоті  $\omega = \omega_0$  (цьому випадку відповідає рис. 3.7, а) реактивні опори рівні між собою:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

звідки

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

де:  $|U_{mL}| = |I_m| \omega_0 L = \frac{|I_m|}{\omega_0 C} = |U_{mC}|$  напруги на конденсаторі і котушці рівні за амплітудами та протилежні за фазами, а напруга на кінцях ділянки дорівнюватиме напрузі на резисторі  $r$ .

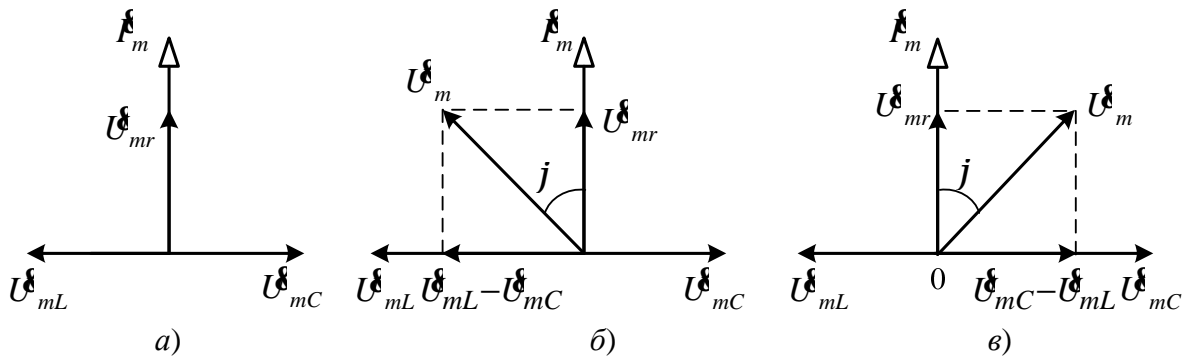


Рисунок 3.7 – Векторні діаграми для кола з послідовним з'єднанням  $r, L, C$

Опір ділянки є  $Z = r + j(\omega_0 L - 1/\omega_0 C) = r$  є чисто активним і найменшим з можливих. Струм на ділянці при цьому буде максимальним:  $I_m = U_m / r$ .

Коли  $\omega > \omega_0, \omega L > 1/\omega C$ , то  $|U_{mL}| > |U_{mC}|$ , залишаючись протифазними (рис. 3.7, б). Векторна сума  $U_{mL}, U_{mC}$  та  $U_{mr}$  дасть вектор  $U_m$ , який випереджатиме струм  $I_m$  на кут  $j$ , що свідчить про те, що опір цієї ділянки буде мати індуктивний характер.

При  $\omega < \omega_0, \omega L < 1/\omega C$ , а  $|U_{mL}| < |U_{mC}|$  та протилежні за фазами (рис. 3.7, в), сумарний вектор  $U_m$  відставатиме від вектора струму  $I_m$ , що свідчить про ємнісний характер опору ділянки.

### Паралельне з'єднання $r, C$ та $r, L$

Нехай ділянка кола складається з паралельно з'єднаних резистора  $r$  і конденсатора  $C$  (рис. 3.8, а).

На елементах  $C$  і  $r$  буде діяти однакова напруга, а комплексні амплітуди струмів будуть дорівнювати:

$$\mathbf{I}_{mC} = j\omega C \mathbf{U}_m = \omega C \mathbf{U}_m e^{j\frac{P}{2}}, \quad \mathbf{I}_{mr} = \frac{\mathbf{U}_m}{r}.$$

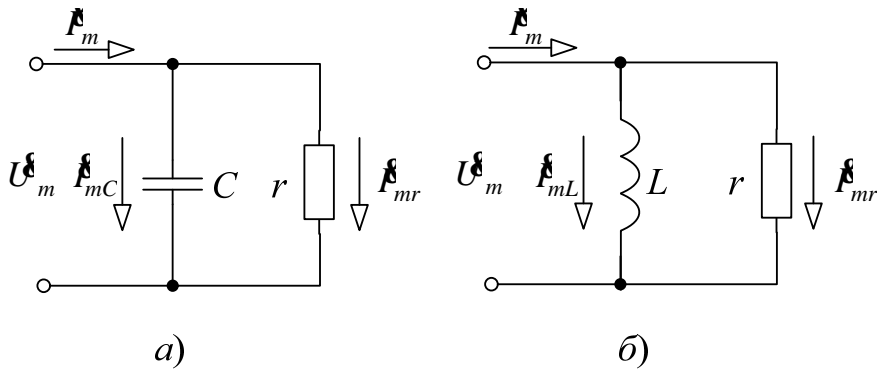


Рисунок 3.8 – Паралельне з'єднання  $r, C$  а) та  $r, L$  б)

За першим законом Кірхгофа:

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{I}_{mr} + \mathbf{I}_{mC}, \quad \mathbf{I}_m = \mathbf{U}_m / \mathbf{Z} = \mathbf{Y} \mathbf{U}_m = \left( \frac{1}{r} + j\omega C \right) \mathbf{U}_m, \quad (3.13)$$

де комплексна (повна) провідність ділянки  $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z} = 1/r + j\omega C = g + jb_C$ , тобто  $g = 1/r$  – дійсна частина  $\mathbf{Y}$  і називається активною провідністю,  $b_C = \omega C$  – уявна частина  $\mathbf{Y}$  і називається реактивною (ємнісною) провідністю. Векторну діаграму цього кола зображено на рис. 3.9, а.

Струми у вітках дорівнюватимуть:

$$\mathbf{I}_{mr} = g \mathbf{U}_m, \quad \mathbf{I}_{mC} = jb_C \mathbf{U}_m.$$

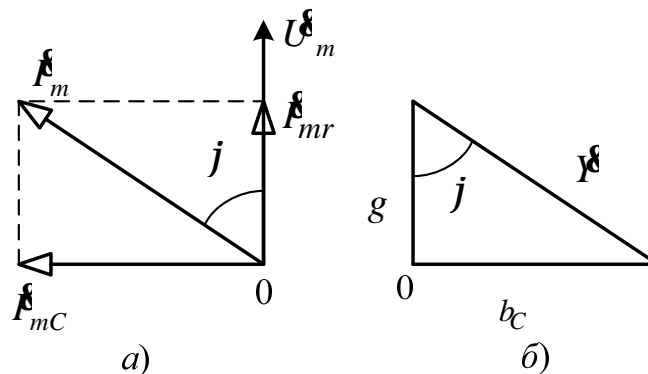


Рисунок 3.9 – Векторна діаграма а) і трикутник провідностей б) при паралельному з'єднанні  $r, C$

З трикутника провідностей (рис. 3.9, б) маємо:

$$|Y| = y = \sqrt{g^2 + b_C^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + (wC)^2}. \quad (3.14)$$

Струм генератора  $I_m$  випереджає його напругу  $U_m$  на кут  $\varphi < 90^\circ$ , а вхідна провідність має ємнісний характер  $g = |Y| \cos j$ ,  $b_C = |Y| \sin j$ , де  $j = \arctg b_C / g = \arctg(rwC)$  – кут, на який за фазою струм генератора  $I_m$  випереджає його напругу  $U_m$ , а коло має ємнісний характер опору.

При паралельному з'єднанні  $r, L$  (рис. 3.8, б):

$$I_{mr} = gU_m, \quad g = \frac{1}{r}, \quad I_{mL} = \frac{U_m}{jwL} = jb_L U_m, \quad b_L = -\frac{1}{wL}, \quad Y = g + jb_L, \quad (3.15)$$

$$Y = \sqrt{g^2 + b_L^2}. \quad (3.16)$$

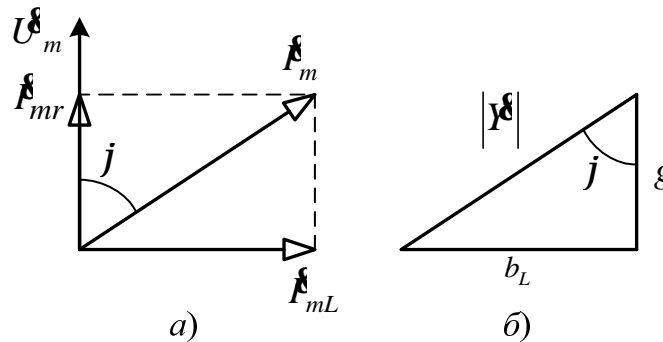


Рисунок 3.10 – Векторна діаграма та трикутник провідностей при паралельному з'єднанні  $r, L$

З векторної діаграми маємо, що струм генератора  $I_m$  відстає від напруги на кут:  $j = \arctg\left(\frac{b_L}{g}\right)$ , а тому це коло має індуктивний характер опору.

### Паралельне з'єднання $r, L, C$

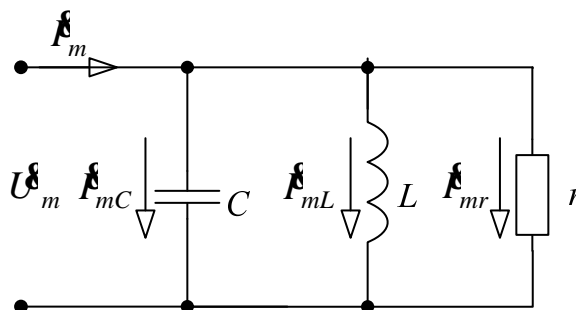


Рисунок 3.11 – Схема паралельного з'єднання  $r, L, C$

Струм генератора  $I_m$  дорівнює (за першим законом Кірхгофа):

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{I}_{mr} + \mathbf{I}_{mL} + \mathbf{I}_{mC}, \text{ або } \mathbf{I}_m = \mathbf{Y}\mathbf{U}_m = g\mathbf{U}_m + jb_L\mathbf{U}_m + jb_C\mathbf{U}_m.$$

Звідки:

$$\mathbf{Y} = g + jb_L + jb_C, \mathbf{Y} = g + j(b_L + b_C), \mathbf{Y} = g + jb,$$

де  $b = \omega C - \frac{1}{\omega L}$  – реактивна складова вхідної провідності кола;

$g$  – активна складова.

На рис. 3.12, а показано, що струми  $\mathbf{I}_{mL}$  і  $\mathbf{I}_{mC}$  при  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  однакові за модулем і протифазні. Сумарна провідність  $b = 0$  і струм  $\mathbf{I}_{mL} + \mathbf{I}_{mC} = 0$ . Тобто, струм генератора замикатиметься через вітку з  $r$  ( $\mathbf{I}_m = \mathbf{I}_{mr}$ ). Вхідний опір має чисто активний характер.

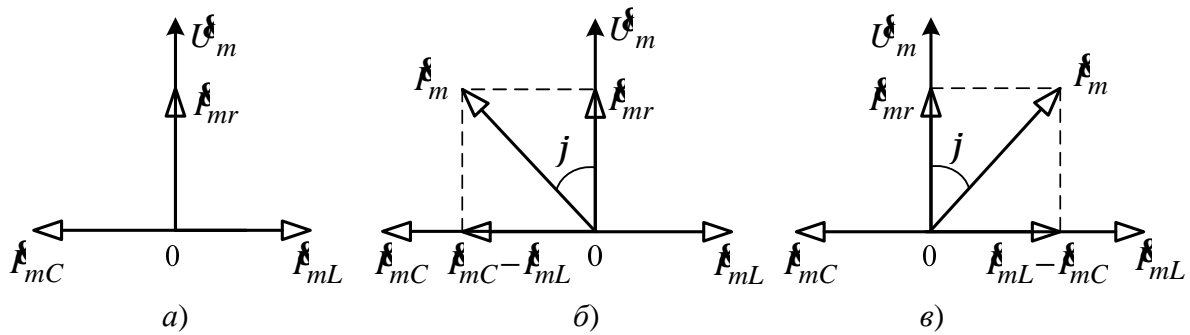


Рисунок 3.12 – Векторні діаграми кола з паралельним з'єднанням  $R, L, C$

При  $\omega > \omega_0$ ,  $b_L < b_C$ ,  $|\mathbf{I}_{mL}| < |\mathbf{I}_{mC}|$ , струм генератора випереджає напругу на кут  $j$ , тому вхідний опір кола носить ємнісний характер (рис. 3.12, б).

При  $\omega < \omega_0$ ,  $b_L > b_C$ ,  $|\mathbf{I}_{mL}| > |\mathbf{I}_{mC}|$  (рис. 3.12, в) струм генератора відстає від напруги і тому вхідний опір кола носить індуктивний характер.

Закони Ома і Кірхгофа для комплексних амплітуд записуються так само, як і для постійного струму. Струм  $I$  замінюється на комплексну амплітуду струму  $\mathbf{I}_m$ , напруга  $U$  – на комплексну амплітуду напруги  $\mathbf{U}_m$ .

Комплексний опір  $Z$  складається з активного  $r$  та реактивного опору  $X$ :  $\mathbf{Z} = r + jX$ ,  $z = \sqrt{r^2 + X^2}$ .

Комплексна провідність  $\mathbf{Y}$  складається з активної  $g$  та реактивної провідності  $b$ :  $\mathbf{Y} = g + jb$ ,  $Y = \sqrt{g^2 + b^2}$ .

### 3.5 Комплексна потужність та її складові

Припустимо в ділянці електричного кола з комплексним опором  $Z$  протікає електричний струм з комплексною амплітудою  $I_m = I_m e^{j\omega t}$ , створюючи на ділянці напругу з комплексною амплітудою  $U_m = U_m e^{j\omega t}$ . Половина добутку комплексної амплітуди напруги  $U_m$  на величину  $\tilde{I}_m = I_m e^{-j\omega t}$ , комплексно спряжену з  $I_m$ , називається комплексною потужністю  $S$ :

$$S = \frac{1}{2} U_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j(\omega_1 - \omega_2)} = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j\omega}.$$

Звідки маємо:

$$S = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + j \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi = P + jQ,$$

де  $\varphi = \omega_1 - \omega_2$  – різниця фаз між напругою і струмом на цій ділянці.

Тут:  $P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$  є дійсною складовою комплексної потужності  $S$  і називається активною потужністю;  $Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi$  є уявною складовою комплексної потужності  $S$  і називається реактивною потужністю.

Очевидно, вирази для активної і реактивної складових комплексної потужності можна виразити через дійсні значення напруги і струму:  $P = UI \cos \varphi$ ,  $Q = UI \sin \varphi$ .

Згадавши, що  $\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = 1$ , запишемо  $\sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I$ ,  $S = UI$ , де  $S$  є модулем комплексної потужності  $S$  і називається повною потужністю.

Для ділянки з комплексним опором  $Z$  вираз для  $S$  буде:

$$S = \frac{1}{2} U_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} Z I_m \tilde{I}_m = \frac{Z I_m^2}{2} = Z I^2,$$

де  $I_m$  – амплітуда струму у ділянці кола;

$I$  – дійсне значення цього струму.

Або інакше,

$$S = \frac{1}{2} U_m I_m = \frac{1}{2} U_m \frac{U_m}{Z} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{Z} = \frac{U^2}{Z},$$

де  $U_m$  – амплітуда, напруги на ділянці кола;

$U$  – дійсне значення напруги.

У випадку, коли ділянка кола подана комплексною провідністю  $Y$ , то:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} U_m I_m \angle \varphi = \frac{1}{2} \frac{I_m \angle \varphi}{Y} I_m \angle \varphi = \frac{1}{2} \frac{I_m^2}{Y} = \frac{I^2}{Y},$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} U_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} U_m \tilde{U}_m Y = \frac{1}{2} U_m^2 Y = Y U^2.$$

Зауважимо, що ці формули справедливі для будь-якої схеми з'єднання резистора, котушки індуктивності та конденсатора.

Наприклад, для ділянки з послідовним з'єднанням резистора і котушки індуктивності (рис. 3.3, а) матимемо:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} U_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} I_m^2 Z = I^2 Z = I^2 (r + j\omega L) = I^2 r + jI^2 \omega L,$$

$$P = I^2 r, \quad Q = I^2 \omega L, \quad S = I^2 \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}.$$

Для ділянки з паралельним з'єднанням резистора і конденсатора, наприклад, (рис. 3.8, а):

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} U_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} U_m^2 Y = U^2 Y = U^2 \left( \frac{1}{r} + j\omega C \right) = U^2 \frac{1}{r} + jU^2 \omega C,$$

$$P = \frac{U^2}{r}, \quad Q = U^2 \omega C, \quad S = U^2 \sqrt{\left( \frac{1}{r} \right)^2 + (\omega C)^2}.$$

Аналогічно, легко отримати вирази для комплексної потужності, її активної і реактивної складової та повної потужності у більш складних випадках: (рис. 3.6 і 3.11).

Комплексна потужність  $\mathcal{S} = \frac{1}{2} U_m \tilde{I}_m = P + jQ$  складається з активної потужності  $P$ , яка споживається колом, і реактивної потужності  $Q$ , яка повертається генератору.

Повна потужність  $S$  на ділянці кола є модулем комплексної потужності  $\mathcal{S}$  і дорівнює:  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

### 3.6 Баланс потужностей

Виходячи з добре відомого у фізиці закону збереження енергії, маємо право стверджувати, що у будь-якій електричній схемі повинна виконуватись умова балансу середнього значення (за період гармонічного струму) потужностей в усіх елементах схеми. Середнє за період значення потужностей усіх генераторів дорівнює активній потужності, яка споживається усіма приймачами електричної енергії з перетворенням її в теплову, механічну та інші види енергій.

Середні за період витрати реактивної енергії усіма генераторами дорівнюють нулю, бо уся вона повертається до генераторів без усяких втрат, тобто між генераторами і приймачами відбувається процес обміну реактивними енергіями двічі за період.

Схема кола (рис. 3.13) має  $(n + 1)$  вузлів, а тому можемо скласти  $n$  незалежних рівнянь, за першим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{12} + \dot{I}_{13} + \dots + \dot{I}_{1k} + \dots + \dot{I}_{1n} &= 0, \\ \dot{I}_{21} + \dot{I}_{23} + \dots + \dot{I}_{2k} + \dots + \dot{I}_{2n} &= 0, \\ &\dots \\ \dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2} + \dots + \dot{I}_{k,k+1} + \dots + \dot{I}_{k,n} &= 0, \\ &\dots \\ \dot{I}_{n1} + \dot{I}_{n2} + \dots + \dot{I}_{nK} + \dots + \dot{I}_{n-1,n} &= 0. \end{aligned}$$

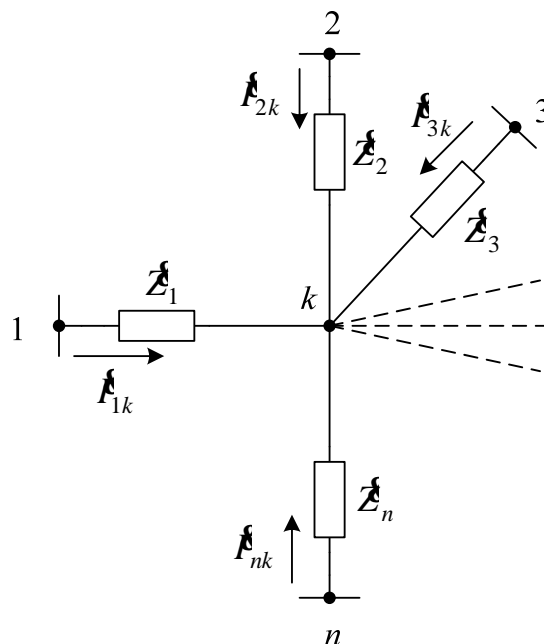


Рисунок 3.13 – Схема, що має  $n + 1$  вузол

Помножимо перше рівняння на  $\frac{1}{2}\tilde{U}_{1n}$ , друге – на  $\frac{1}{2}\tilde{U}_{2n}$ , ... останнє – на  $\frac{1}{2}\tilde{U}_{n-1,n}$  і додамо добутки. Тоді:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{1n}(\dot{I}_{12} + \dot{I}_{13} + \dots + \dot{I}_{1k} + \dots + \dot{I}_{1n}) + \tilde{U}_{2n}(\dot{I}_{21} + \dot{I}_{23} + \dots + \dot{I}_{2k} + \dots + \dot{I}_{2n}) + \dots + \\ + \tilde{U}_{n-1,n}(\dot{I}_{n1} + \dot{I}_{n2} + \dots + \dot{I}_{nk} + \dots + \dot{I}_{n-1,n}) = 0. \end{aligned}$$



Враховуючи, що:  $U_{1n} = U_{1k} - U_{nk}$ ,  $U_{2n} = U_{2k} - U_{nk}$ ..., та те, що  $I_{12} = -I_{21}$ ..., останнє рівняння перепишеться:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\tilde{U}_{12} \cdot I_{12} + \tilde{U}_{13} \cdot I_{13} + \dots + \tilde{U}_{1K} \cdot I_{1K} + \dots + \tilde{U}_{1n} \cdot I_{1n}) + \\ & + \frac{1}{2}(\tilde{U}_{21} \cdot I_{21} + \tilde{U}_{23} \cdot I_{23} + \dots + \tilde{U}_{2k} \cdot I_{2k} + \dots + \tilde{U}_{2n} \cdot I_{2n}) + \dots + \\ & + \frac{1}{2}(\tilde{U}_{k1} \cdot I_{k1} + \tilde{U}_{k2} \cdot I_{k2} + \dots + \tilde{U}_{kn} \cdot I_{kn}) + \dots + \\ & + \frac{1}{2}(\tilde{U}_{n1} \cdot I_{n1} + \tilde{U}_{n2} \cdot I_{n2} + \dots + \tilde{U}_{n,n-1} \cdot I_{n,n-1}) = 0. \end{aligned}$$

З цього виразу видно, що сума комплексних потужностей в усіх ділянках (елементах) схеми дорівнює нулю:

$$\sum \mathcal{S} = \sum (P + jQ) = 0.$$

Комплексне число дорівнює нулю тоді, коли нулю дорівнюють його дійсна і уявна частини, тобто:

$$\sum P = 0 \text{ і } \sum Q = 0.$$

Алгебраїчна сума  $\sum P = 0$ , а це означає, що середня за період гармонічного струму потужність усіх джерел енергії дорівнює активній потужності, споживаній приймачами енергії.

Алгебраїчна сума  $\sum Q = 0$ , а це означає, що кількість енергії спрямованої від генераторів до приймачів за період гармонічного струму, дорівнює кількості енергії, поверненій приймачами генераторам.

### 3.7 Комплексно-спряжене узгодження генератора і приймача енергії

Метою комплексно-спряженого узгодження генератора і приймача (навантаження) є створення умов, за яких максимальна потужність енергії буде віддаватись приймачеві.

Такі задачі в радіотехніці зустрічаються дуже часто при узгодженні, наприклад, передавальної антени з передавачем, коли генератором слугує передавач, антена – навантаженням або приймальної антени (генератора) з радіоприймачем (навантаженням). У побуті з цією проблемою зустрічався кожен, хто мав справу з підімкненням антени до телевізора, особливо при прийманні сигналів дециметрових каналів.

Нехай при відомому комплексному вихідному опорі генератора:

$$\underline{Z}_\Gamma = r_\Gamma + jX_\Gamma,$$

потрібно підібрати вхідний опір приймача (навантаження):

$$\underline{Z}_H = r_H + jX_H,$$

такий, щоб забезпечити максимум передачі потужності від генератора до приймача.

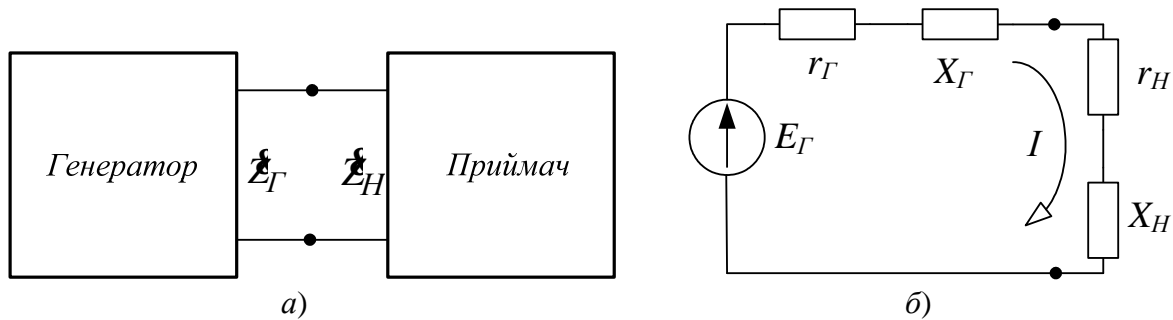


Рисунок 3.14 – Ілюстрація до принципу узгодження а), еквівалентна схема б)

Розглянемо схему (рис. 3.14, б), еквівалентну схемі рис. 3.14, а. Комплексна амплітуда струму у колі:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_\Gamma + \underline{Z}_H} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}},$$

де  $\underline{Z} = \underline{Z}_\Gamma + \underline{Z}_H = r_\Gamma + jX_\Gamma + r_H + jX_H = (r_\Gamma + r_H) + j(X_\Gamma + X_H)$ .

Діюче значення струму:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(r_\Gamma + r_H)^2 + (X_\Gamma + X_H)^2}}.$$

Від генератора до навантаження у середньому за період буде передана активна потужність  $P$ :

$$P = I^2 \cdot r_H.$$

Підставивши сюди значення для струму  $I$ , матимемо:

$$P = \frac{E^2 r_H}{(r_\Gamma + r_H)^2 + (X_\Gamma + X_H)^2}.$$

Підбравши  $X_H$  так, щоб  $P$  досягло проміжного максимального значення  $P'_m$ , а саме  $X_H = -X_\Gamma$  і тоді:

$$P'_m = \frac{E^2 r_H}{(r_\Gamma + r_H)^2}.$$

Тепер визначимо, при якому  $r_H$  ця функція досягатиме максимуму. Для цього знайдемо  $dP'_m/dr_H$  і прирівнюємо його до нуля:

$$\frac{dP'_m}{dr_H} = \frac{E^2(r_G + r_H)^2 - 2(r_G + r_H)E^2r_H}{(r_G + r_H)^4} = 0;$$

$$(r_G + r_H)^2 - 2(r_G + r_H) \cdot r_H = 0; (r_G + r_H)(r_G - r_H) = 0.$$

Це рівняння має два розв'язки:

- 1)  $r_G + r_H = 0; \quad r_H = -r_G.$
- 2)  $r_G - r_H = 0; \quad r_H = r_G.$

Перший розв'язок відкидаємо, бо  $r_H = -r_G$ , тобто активний опір є негативним, що суперечить фізичному змісту активного опору.

Залишається  $r_H = r_G$ . Підставимо це значення у вираз для  $P'_m$  і отримаємо максимальну потужність:

$$P_m = \frac{E^2}{4r_G} = \frac{E^2}{4r_H},$$

яка буде передана приймачеві при виконанні двох умов:

$$\begin{cases} r_H = r_G; \\ x_H = -x_G, \end{cases}$$

а комплексна спряженість вихідного опору генератора  $\underline{Z}_G = Z_G + jX_G$  і вхідного опору навантаження  $\underline{Z}_H = Z_H - jX_H$  гарантує умови, найбільш сприятливі для передачі енергії від джерела до споживача.

### Запитання та задачі для закріплення

1. Чому дорівнює кут між комплексами  $Ae^{j(\omega t + 30^\circ)}$  і  $Be^{j(\omega t - 20^\circ)}$ , між кожним з них та  $B$ ? Показати це на векторній діаграмі. Чи завжди припустимо розраховувати кола змінного струму символьним методом? Чому?

2. Задана гармонічна напруга  $u(t) = 10\cos(\omega t + 60^\circ)$ . Визначити її комплексну амплітуду.

3. Задана комплексна амплітуда гармонічного струму  $8e^{j45^\circ}$ . Якою буде функція  $i(t)$  при частоті  $f$ ?

4. Яка буде різниця фаз між струмом і напругою у колі з послідовним з'єднанням резистора і котушки, резистора і конденсатора?

5. Визначити комплексний опір (провідність) та його (її) складові для кола з послідовним з'єднанням  $r, L$  або  $r, C$ .

6. Визначити амплітуду гармонічного струму у колах задачі 5, коли  $U_m = 10$  В,  $r = 5$  Ом,  $L = 100$  мГн,  $C = 0,1$  мкФ, частота струму  $f = 50$  кГц.

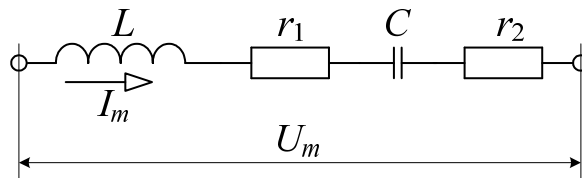
7. За умови попередньої задачі визначити комплексну, повну, активну та реактивні потужності.

8. Чому струм у колі рис. 3.6 буде максимальним при  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ .

9. Чому у колі рис. 3.11 струм генератора дорівнює струму через резистор при  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ ?

10. Вихідний опір передавача  $Z = (100 + j50)$  Ом, визначити ємність узгоджувального конденсатора, щоб забезпечити узгодження з передавальною антеною  $R_{ex} = 100$  Ом, коли передавач працює на частоті 500 кГц.

11. Побудувати векторну діаграму електричного кола, коли  $r_1 = r_2$ ,  $x_L > x_C$ .



## 4 ПЕРЕТВОРЕННЯ СХЕМ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ГАРМОНІЧНОГО СТРУМУ

### 4.1 Послідовне, паралельне та змішане з'єднання

При вивченні законів кіл постійного струму з такою задачею ми зустрічалися, розв'язуючи її шляхом "згортання" схем до найпростіших. Аналогічно вчинимо і зі схемою кіл гармонічного струму, пам'ятаючи, що закони постійного струму є справедливими для комплексних амплітуд гармонічного струму.

#### Послідовне з'єднання

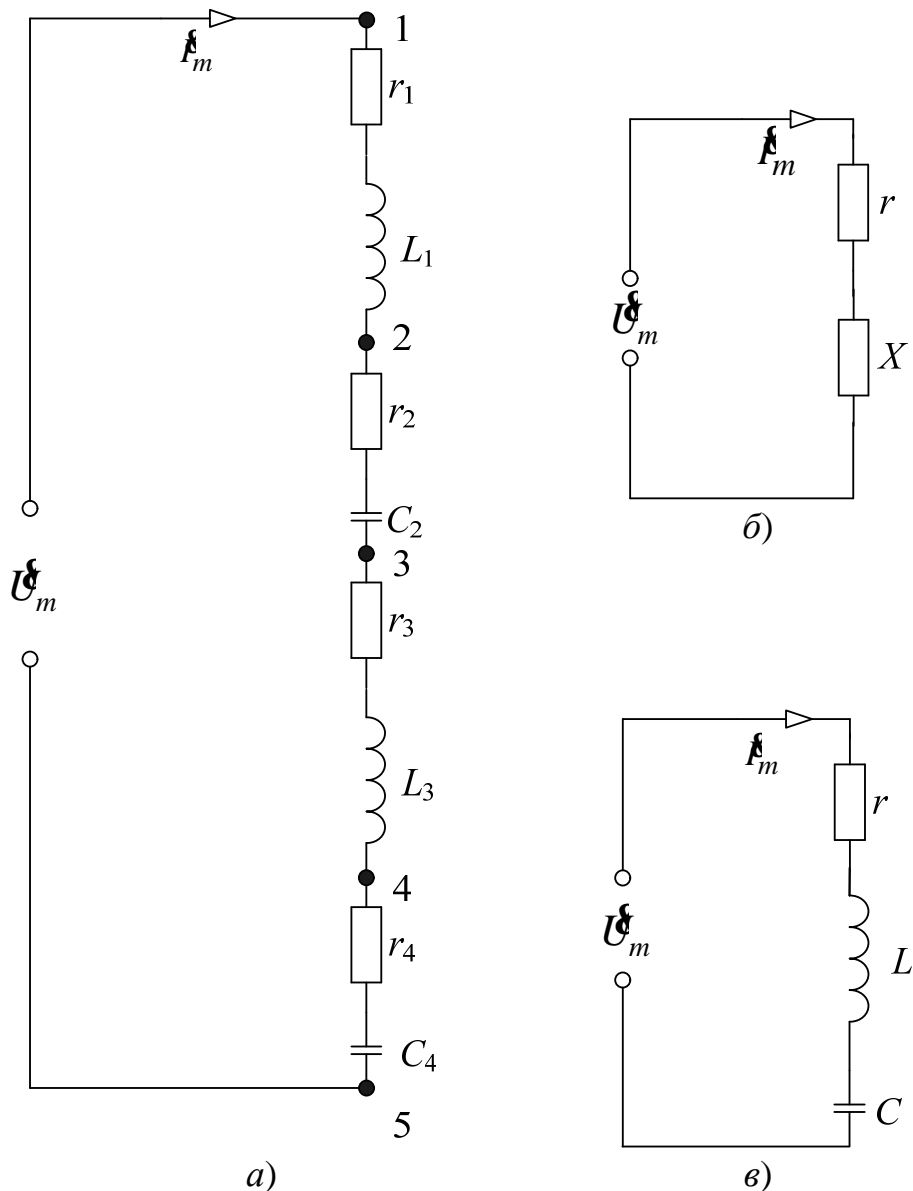


Рисунок 4.1 – Послідовне з'єднання

Розглянемо коло послідовно з'єднаних чотирьох двополусників з комплексними опорами  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Z_4$  (рис. 4.1, а):

$$\begin{aligned} Z_1 &= r_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = r_2 - j\frac{1}{\omega C_2}; \\ Z_3 &= r_3 + j\omega L_3; \quad Z_4 = r_4 - j\frac{1}{\omega C_4}. \end{aligned}$$

За другим законом Кірхгофа:

$$U_m = I_m (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) = I_m \cdot Z, \quad (4.1)$$

де  $Z = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)$ ,  $I_m = U_m / Z$ .

Комплексна амплітуда напруги:

$$\begin{aligned} U_{m12} &= I_m Z_1 = \frac{Z_1}{Z} U_m; & U_{m23} &= I_m Z_2 = \frac{Z_2}{Z} U_m; \\ U_{m34} &= I_m Z_3 = \frac{Z_3}{Z} U_m; & U_{m45} &= I_m Z_4 = \frac{Z_4}{Z} U_m. \end{aligned}$$

Тобто, на ділянках кола напруги прямо пропорційні відповідним комплексним опорам. Комплексний еквівалентний опір кола:

$$Z = r_1 + j\omega L_1 + r_2 - j\frac{1}{\omega C_2} + r_3 + j\omega L_3 + r_4 - j\frac{1}{\omega C_4} = r + jX,$$

де  $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$  – активна складова;  $X = \omega(L_1 + L_3) - \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$  – реактивна складова комплексного еквівалентного опору  $Z$  (рис. 4.1, б):

$$Z = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

де  $L = L_1 + L_3$ ,  $C = \frac{C_2 \cdot C_4}{C_2 + C_4}$  (рис. 4.1, в) – еквівалентні параметри кола.

### Паралельне з'єднання

На рис. 4.2 зображено коло, що складається з чотирьох паралельно з'єднаних комплексних опорів.

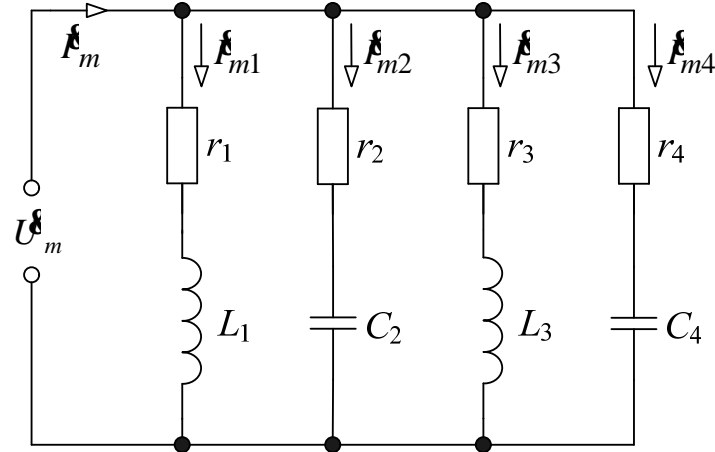
$$\begin{aligned} Z_1 &= r_1 + j\omega L_1, \quad Z_2 = r_2 - j\frac{1}{\omega C_2}, \\ Z_3 &= r_3 - j\omega L_3, \quad Z_4 = r_4 - j\frac{1}{\omega C_4}. \end{aligned}$$

Відповідно до першого закону Кірхгофа для комплексних амплітуд струмів у вітках схеми 4.2, а:

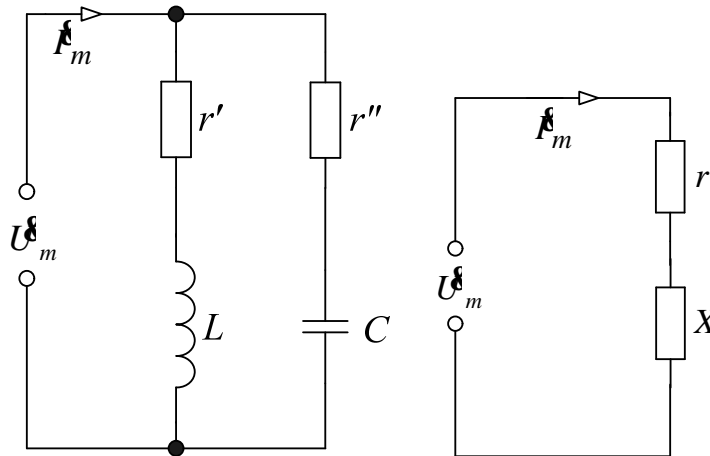
$$I_m = I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} + I_{m4},$$

$$I_m = U_m \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) = Y_m U_m, \quad (4.2)$$

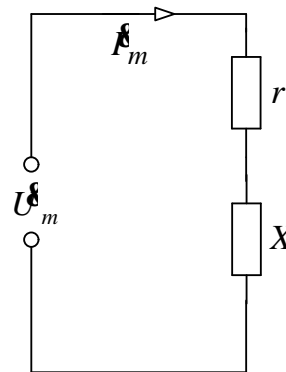
де  $Y_m = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} = \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3} \right) + \left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4} \right) = Y' + Y''$ .



a)



б)



в)

Рисунок 4.2 – Паралельне з'єднання

В даному виразі  $Y' = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3} = \frac{Z_2 + Z_4}{Z_1 \cdot Z_2}$  та  $Y'' = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4} = \frac{Z_2 + Z_4}{Z_2 \cdot Z_4}$  – провідності, що еквівалентні сумарним провідностям першої і третьої віток та другої і четвертої віток, відповідно.

Цим провідностям будуть відповідати еквівалентні опори:

$$Z' = \frac{1}{Y'}, \quad Z'' = \frac{1}{Y''},$$

$$Z' = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{(r_1 + j\omega L_1)(r_3 + j\omega L_2)}{r_1 + r_3 + j\omega(L_1 + L_3)} = r' + j\omega L,$$

де  $r'$  – дійсна частина  $Z'$  (активний еквівалентний опір);  
 $\omega L$  – уявна частина  $Z'$  (реактивний еквівалентний опір) (рис. 4.2, б)

$$Z'' = \frac{Z_2 \cdot Z_4}{Z_2 + Z_4} = \frac{\left(r_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) \left(r_4 + \frac{1}{j\omega C_4}\right)}{r_2 + r_4 + j \frac{C_2 + C_4}{\omega C_2 \cdot C_4}} = r'' - j \frac{1}{\omega C},$$

де  $r''$  – дійсна частина  $Z''$  (активний еквівалентний опір);  
 $\frac{1}{\omega C}$  – уявна частина  $Z''$  (реактивний еквівалентний опір) (рис. 4.2, б)

Еквівалентна провідність усіх віток схеми рис. 4.2, а буде:

$$Y_{\Sigma} = Y_{\Sigma'} + Y_{\Sigma''} = \frac{1}{r' + j\omega L} + \frac{1}{r'' - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{r' + r'' + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{(r' + j\omega L) \left( r'' - j \frac{1}{\omega C} \right)}$$

Відповідно еквівалентний опір усіх віток схеми рис. 4.2,а буде:

$$Z_{\Sigma} = \frac{1}{Y_{\Sigma}} = \frac{(r' + j\omega L) \left( r'' - j \frac{1}{\omega C} \right)}{r' + r'' + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = r + jX,$$

де  $r$  – активна;

$X$  – реактивна складові еквівалентного комплексного опору (рис. 4.2, в).

### Змішане з'єднання

Електричні схеми зі змішаним з'єднанням двополісників можна “спрощувати”, використовуючи еквівалентні “згортання” схем із послідовним чи паралельним з'єднанням.

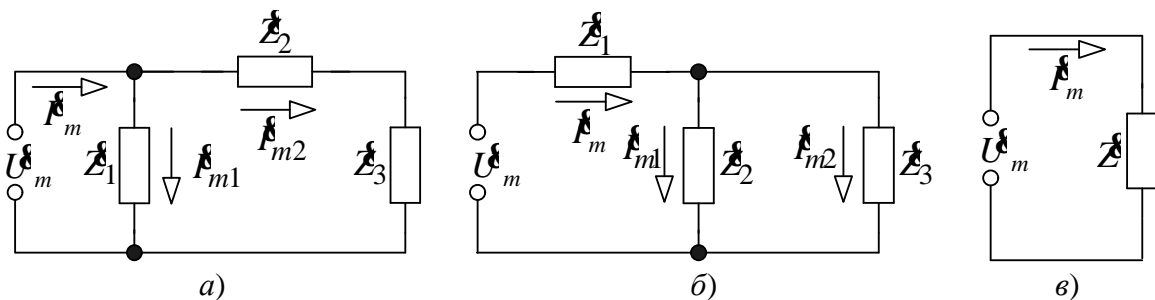


Рисунок 4.3 – Схеми зі змішаним з'єднанням елементів



Розглянемо, для прикладу, схему рис. 4.3, а, де  $Z_2$  і  $Z_3$  – послідовно з'єднані, отже їх спільний комплексний опір:

$$Z' = Z_2 + Z_3,$$

їх спільна провідність

$$Y' = \frac{1}{Z_2 + Z_3},$$

еквівалентна комплексна провідність кола:

$$Y = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1(Z_2 + Z_3)}.$$

Тоді еквівалентний опір  $Z$  буде дорівнювати (рис. 4.3, в):

$$Z = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3},$$

Для кола рис. 4.2, б:

$$Y' = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 \cdot Z_3}; \quad Z' = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Опори  $Z'$  і  $Z_1$  з'єднані послідовно, а отже (рис. 4.3, в) еквівалентний комплексний опір:

$$Z = Z' + Z_1 = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

При послідовному з'єднанні елементів кола його схему можна “згорнути” до одноконтурної з еквівалентними елементами, опори яких додаються.

При паралельному з'єднанні кола його схему можна “згорнути” до одноконтурної, шляхом додавання провідностей відповідних віток схеми.

При змішаному з'єднанні використовуються прийоми “згортання” схем з послідовним і паралельним з'єднаннями елементів.

## 4.2 Еквівалентні схеми реальних котушки індуктивності та конденсатора

При розв'язанні багатьох задач радіоелектроніки знехтувати втратами енергії в котушці індуктивності або конденсаторі недопустимо. Це у першу чергу має місце в радіовимірюваннях. При контролі, наприклад, вологості матеріалів активні втрати відіграють вирішальну роль, тому що несуть інформацію про параметр, що оцінюється. Осердя котушок індуктивності,

трансформаторів, діелектричні матеріали, які широко застосовуються в радіотехніці, мають втрати і особливо значні на підвищених частотах.

Тому при розрахунку реальних радіотехнічних пристроїв зручно користуватись еквівалентними схемами реальних котушок індуктивності та конденсаторів, де втрати подані активними опорами підімкненими послідовно чи паралельно до ідеальних реактивних елементів.

Припустимо, ми маємо послідовно з'єднані резистор з активним опором  $r$  та ідеальний реактивний елемент з реактивним опором  $X$ . Тобто, така ділянка кола буде мати комплексний опір:

$$\underline{Z} = r + jX,$$

якому відповідатиме комплексна провідність:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jX},$$

$$\underline{Y} = \frac{r_1 - jX_1}{r^2 + X^2} = \frac{r_1}{r^2 + X^2} - j \frac{X_1}{r^2 + X_1^2} = g - jb, \quad (4.3)$$

де

$$g = \frac{r}{r^2 + X^2}, \quad b = \frac{X}{r^2 + X^2}. \quad (4.4)$$

З іншого боку:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g - jb} = \frac{g + jb}{g^2 + b^2} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2}$$

або

$$X = \frac{b}{g^2 + b^2}, \quad r = \frac{g}{g^2 + b^2}. \quad (4.5)$$

Вирази 4.4 та 4.5 дуже зручні для здійснення переходу від опорів до провідностей і навпаки при послідовному з'єднанні активного і реактивного елементів.

Легко показати, що при паралельному з'єднанні  $g$  та  $b$  матимемо:

$$r = \frac{g}{g^2 + b^2}, \quad X = -\frac{b}{g^2 + b^2}, \quad (4.6)$$

$$g = \frac{r}{r^2 + X^2}, \quad b = \frac{X}{r^2 + X^2}. \quad (4.7)$$

Вирази 4.6 та 4.7 є зручними при переході від провідностей до опорів і навпаки, коли  $r$  і  $X$  з'єднані паралельно.

На рис. 4.4 показано два варіанти схеми заміщення (еквівалентної схеми) реального реактивного елемента: з послідовним (а) та паралельним (б) опорами втрат.

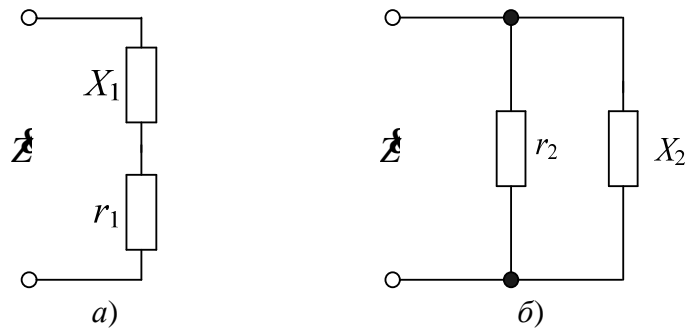


Рисунок 4.4 – Схеми заміщення котушки індуктивності

У обох випадках комплексний опір має бути однаковим. Для послідовного з'єднання  $r_1 X_1$ :

$$\underline{Z} = r_1 + jX_1.$$

Активна та реактивна провідності для цієї схеми будуть:

$$g = \frac{r_1}{r_1^2 + X_1^2}, \quad b = \frac{X_1}{r_1^2 + X_1^2}.$$

Тоді опори віток схеми рис.4.4, б мають бути такими:

$$r_2 = \frac{1}{g} = \frac{r_1^2 + X_1^2}{r_1}, \quad X_2 = \frac{1}{b} = \frac{r_1^2 + X_1^2}{X_1}.$$

Так, для реальної котушки індуктивності при переході від еквівалентної схеми вигляду 4.4, а до схеми вигляду 4.4, б будемо мати:

$$\underline{Z} = r_1 + j\omega L,$$

$$g = \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2}, \quad b = \frac{\omega L_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2},$$

$$r_2 = \frac{r_1^2 + (\omega L_1)^2}{r_1} = r_1 + \frac{(\omega L_1)^2}{r_1},$$

$$X_2 = \omega L_2 = \frac{1}{b} = \frac{r_1^2 + (\omega L_1)^2}{\omega L_1} = \omega L_1 + \frac{r_1^2}{\omega L_1},$$

$$r_2 = r_1 \left[ 1 + \left( \frac{\omega L_1}{r_1} \right)^2 \right], \quad L_2 = L_1 \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{\omega L_1} \right)^2 \right]. \quad (4.8)$$

Для реального конденсатора:

$$\begin{aligned} Z &= r_1 - j \frac{1}{\omega C_1}, \\ g &= \frac{r_1}{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)^2}, \quad b = \frac{-\frac{1}{\omega C_1}}{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)^2}, \\ r_2 &= r_1 + \frac{1}{r_1(\omega C_1)^2}, \quad x_2 = -r_1^2 \omega C_1 - \frac{1}{\omega C_1}, \\ \frac{1}{\omega C_2} &= r_1^2 \omega C_1 + \frac{1}{\omega C_1}, \quad \frac{1}{C_2} = r_1^2 \omega^2 C_1 + \frac{1}{C_1} = \frac{1 + r_1^2 \omega^2 C_1^2}{C_1}. \\ r_2 &= r_1 \left[ 1 + \frac{1}{(\omega r_1 C_1)^2} \right], \quad C_2 = \frac{C_1}{1 + (\omega r_1 C_1)^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При переході від схеми 4.4, б до схеми 4.4, а будемо мати, відповідно:

$$r_1 = \frac{r_2}{1 + \left(\frac{r_2}{\omega L_2}\right)^2}, \quad L_1 = \frac{L_2}{1 + \left(\frac{\omega L_2}{r_2}\right)^2}, \quad (4.10)$$

$$r_1 = \frac{r_2}{1 + (\omega r_2 C_2)^2}, \quad C_1 = C_2 \left[ 1 + \frac{1}{(\omega r_2 C_2)^2} \right]. \quad (4.11)$$

На радіочастотах у котушках з малими втратами:

$$\omega L_1 \gg r_1, \quad r_2 \approx \frac{(\omega L_1)^2}{r_1}, \quad L_2 \approx L_1.$$

На низьких частотах, таких що  $\omega C_2 \gg \frac{1}{r_2}$ , матимемо

$$r_1 \approx \frac{1}{r_2 (\omega C_2)^2}, \quad C_1 \approx C_2.$$

Значення перерахованих параметрів реальних котушок індуктивності та конденсаторів залежать від частоти гармонічного коливання у колі.

### 4.3 Взаємне перетворення трикутника і зірки комплексних опорів

Такі перетворення були зроблені для опорів у колах постійного струму у першому розділі. Але ми пересвідчилися, що усі основні закони постійного струму є справедливими для комплексних амплітуд

гармонічного струму. Ми також з'ясували, що еквівалентні комплексні опори при послідовному, паралельному та змішаному з'єднанні знаходяться за тими ж правилами, що і для постійного струму.

Таким чином, повторивши дії переходу від трикутника (рис. 1.25, б) до еквівалентної йому зірки та замінивши опори  $R$  відповідними комплексними опорами  $\dot{Z}$ , в виразах 1.17, 1.18, 1.19, отримаємо:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{31} \cdot \dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad (4.12)$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad (4.13)$$

$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{23} \cdot \dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}. \quad (4.14)$$

При переході від зірки до еквівалентного їй трикутника, аналогічно, отримаємо з (1.22), (1.23), (1.24):

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}, \quad (4.15)$$

$$\dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}, \quad (4.16)$$

$$\dot{Z}_{31} = \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_3 \cdot \dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}. \quad (4.17)$$

#### 4.4 Еквівалентні генератор напруги і генератор струму

Генератор напруги та генератор струму будемо називати еквівалентними, якщо при заміні одного генератора на інший напруги і струму у зовнішньому електричному колі, з яким ці генератори з'єднані, залишаться незмінними (рис. 4.5).

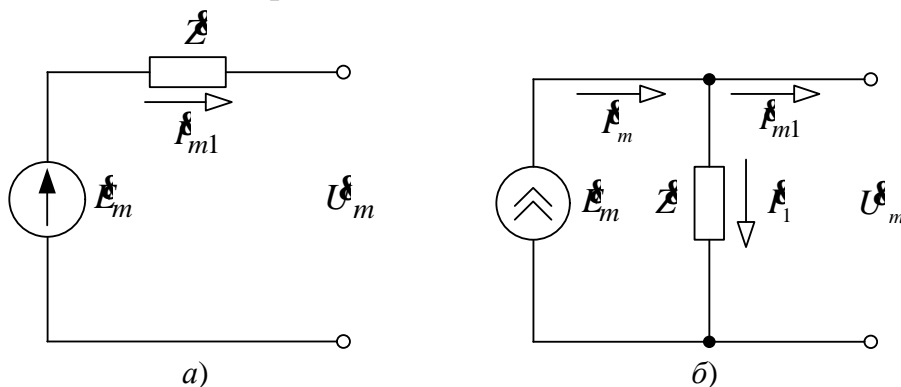


Рисунок 4.5 – Схеми еквівалентних генераторів напруги а) та струму б)

Відповідно до цього означення, напруги між полюсами  $U_m$  та струми  $I_{m1}$ , що мають надходити у зовнішню ділянку кола, в обох випадках повинні бути однаковими.

Умову еквівалентності генератора напруги з електрорушійною силою  $E_m$  та генератора струму  $I_m$  запишемо так:

$$E_m = I_m \cdot Z, \quad (4.18)$$

де  $Z$  – внутрішній комплексний опір генератора напруги і генератора струму. Напруга  $U_m$  на вихідних полюсах генератора напруги дорівнює різниці між е. р. с.  $E_m$  та спадом напруги на внутрішньому комплексному опорі  $Z$ , створеним струмом  $I_m$ . Напруга  $U_m$  на полюсах генератора струму при тому ж значенні струму  $I_{m1}$ , що надходить у зовнішнє коло, дорівнює спаду напруги на комплексному опорі  $Z$ , створеному  $I_1$ , який дорівнює різниці струмів  $I_m - I_{m1}$ .

Ця напруга  $U_m$  у обох випадках має бути однаковою:

$$U_m = E_m - I_{m1} \cdot Z = (I_m - I_{m1}) \cdot Z = I_m \cdot Z - I_{m1} \cdot Z,$$

звідки видно, що  $E_m = I_m Z$ , а це і є ознакою еквівалентності генераторів напруги та струму (4.18), зображених схемами рис. 4.5.

Якщо навантаження цих генераторів від'єднати, то струм  $I_{m1} = 0$  і напруга на полюсах обох генераторів дорівнюватиме е. р. с.  $E_m$ . Важливо те, що в генераторі напруги потужність у внутрішньому опорі не витрачається ( $I_{m1} = 0$ ), а в генераторі струму потужність у внутрішньому опорі витрачається, тому що струм  $I_1 \neq 0$ .

А тому, еквівалентність генераторів напруги і струму буде справедлива при незмінності струму, що надходить у зовнішнє коло, та напруги на полюсах, при взаємній заміні одного з них на інший.

Зауважимо, що коли  $Z = 0$  (генератор е. р. с.), то безпосереднє застосування формули (4.18) для знаходження еквівалентного генератора за заданим значенням е. р. с.  $E_m$  не є можливим. У такому випадку роль внутрішнього опору генератора напруги має відіграти опір зовнішньої ділянки кола, увімкнений послідовно з е. р. с.

Іншими словами, вмикається послідовно з генератором е. р. с. додатковий резистор. З таким випадком ми зустрінемося при вивченні паралельних коливальних контурів, де виникає необхідність "розв'язати" генератор з низькоомним виходом та паралельний контур з великим вхідним резонансним опором.

Еквівалентність генератора напруги і генератора струму обумовлюється тим, що при заміні одного з них іншим, напруга і струм в зовнішній ділянці кола (на навантаженні) залишаються незмінними.

#### 4.5 Перетворення схем з паралельно увімкненими генераторами

Розглянемо рис. 4.6, де показані етапи перетворення схеми трьох паралельно з'єднаних генераторів напруги (а) у схему трьох еквівалентних паралельно з'єднаних генераторів струму (б), яка потім "згорнута" до схеми еквівалентного їм генератора струму (в), після чого трансформується у згорнуту схему еквівалентного генератора напруги. Отже, вихідною є схема рис. 4.6, а – три паралельно з'єднаних генератори напруги з е. р. с.  $\mathcal{E}_{m1}, \mathcal{E}_{m2}, \mathcal{E}_{m3}$  та внутрішніми опорами  $r_1, r_2, r_3$ , відповідно. Вони працюють на навантаження  $R_H$ , забезпечуючи у ньому струм  $I_{mH}$  при напрузі  $U_m$ .

Перейдемо до схеми рис. 4.6, б, де замість генераторів напруги увімкнені еквівалентні їм генератори струму  $I_{m1}, I_{m2}, I_{m3}$  з внутрішніми опорами  $r_1, r_2, r_3$ , відповідно, які на опорі  $R_H$  повинні забезпечити струм  $I_{mH}$  при напрузі  $U_m$ .

Ці три генератори струму можна замінити одним (рис. 4.6, в) генератором струму  $I_m$  таким, що:

$$I_m = I_{m1} + I_{m2} + I_{m3},$$

де  $I_{m1} = \mathcal{E}_{m1}/r_1, I_{m2} = \mathcal{E}_{m2}/r_2, I_{m3} = \mathcal{E}_{m3}/r_3$ , з урахуванням чого струм:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_{m1}}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_{m2}}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_{m3}}{r_3} = \frac{\mathcal{E}_m}{r} = g \mathcal{E}_m,$$

де:  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = g_1 + g_2 + g_3 = g, \left( g_1 = \frac{1}{r_1}, g_2 = \frac{1}{r_2}, g_3 = \frac{1}{r_3} \right)$ .

Скориставшись отриманим для схеми 4.6, в результатом можна перейти до схеми рис. 4.6, з, якщо виконати умову (4.18):

$$I_m = r \cdot I_m = \frac{g_1 \mathcal{E}_{m1} + g_2 \mathcal{E}_{m2} + g_3 \mathcal{E}_{m3}}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Таким чином, наприклад, три паралельні вітки з джерелами напруги можуть бути замінені одним генератором напруги або генератором струму.

Струм у зовнішній ділянці  $R_H$  буде дорівнювати:

$$I_{mH} = I_m \frac{r}{r + R_H} = \frac{\mathcal{E}_m}{r + R_H}.$$

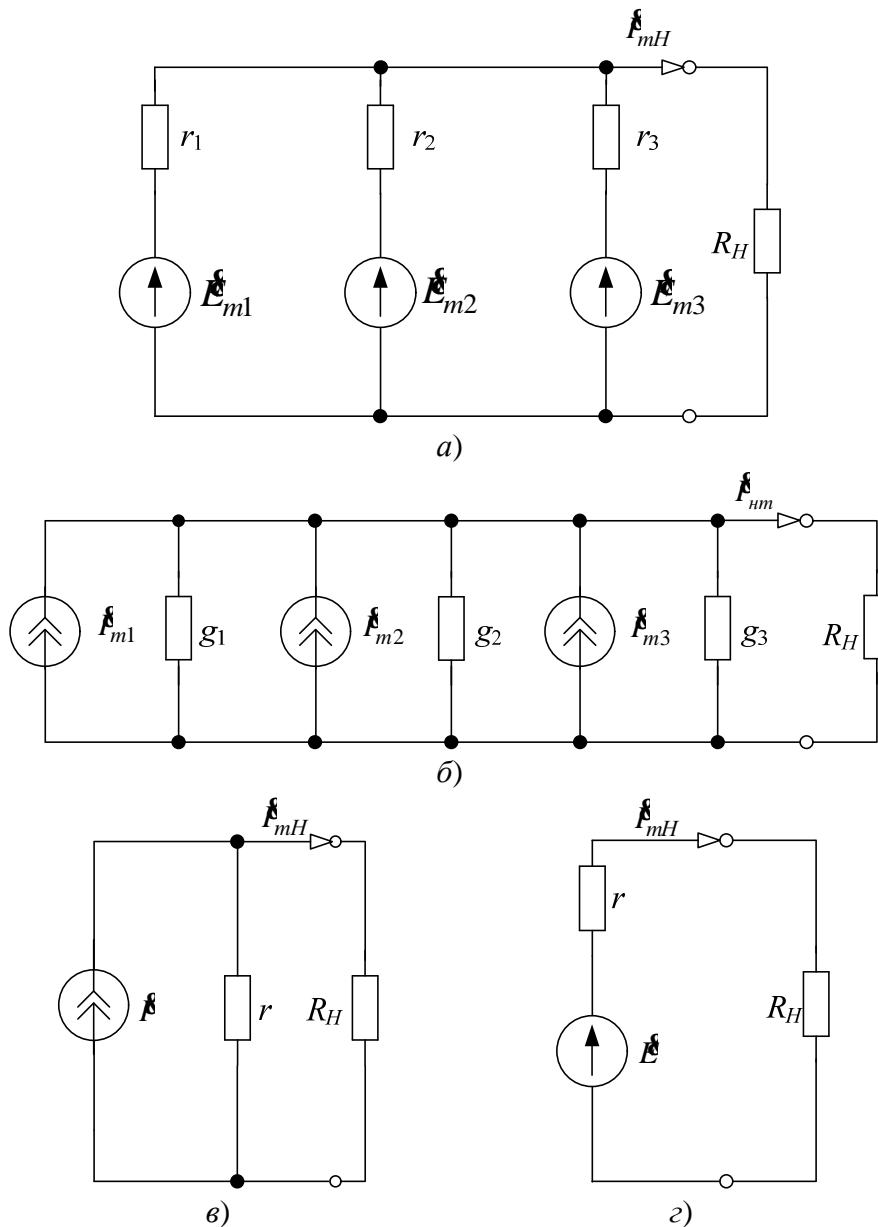


Рисунок 4.6 – Послідовність «згортання»

Напруга між полюсами генераторів:

$$U_m = I_m \frac{r \cdot R_H}{r + R_H} = \frac{g_1 E_{m1} + g_2 E_{m2} + g_3 E_{m3}}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

#### 4.6 Перетворення схем з електричною симетрією

Розглянемо, для прикладу, схему рис. 4.7, а, яка є і геометрично і електрично симетрична, що видно з рис. 4.7, б. У таких схемах, очевидно, є точки чи вузли з однаковими потенціалами. Між такими точками (вузлами) струми дорівнюють нулю. Тому такі вітки можна "розрізати", не порушуючи розподіл струмів і напруги в схемі, а точки, що мають



однаковий потенціал, можуть з'єднуватись між собою. Таке "розрізування" віток, по яких не протікає струм, та з'єднання точок з однаковими потенціалами суттєво спрощує схему та полегшує розрахунок.

У симетричній схемі рис. 4.7, б струми у вітках, які перетинають вісь симетрії, відсутні. Коли розрізати цю схему на дві симетричні половинки, то отримаємо дві одноконтурні схеми вигляду рис. 4.7, в.

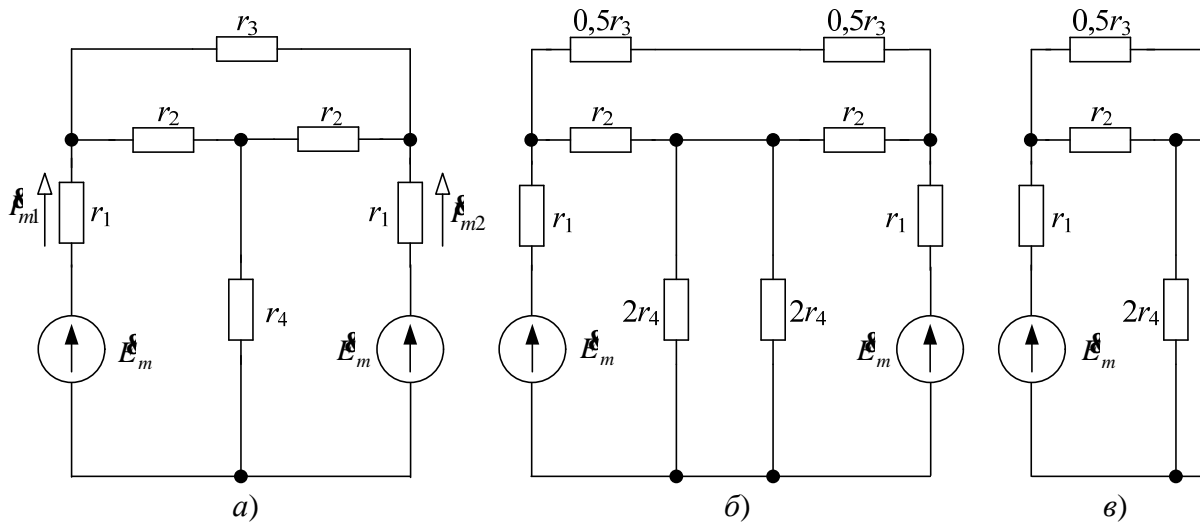


Рисунок 4.7 – Електрично-симетрична схема а), б), та її половина в)

Тепер розглянемо випадок, коли у схемі рис. 4.7, а полярність е. р. с. не однакова (рис. 4.8).

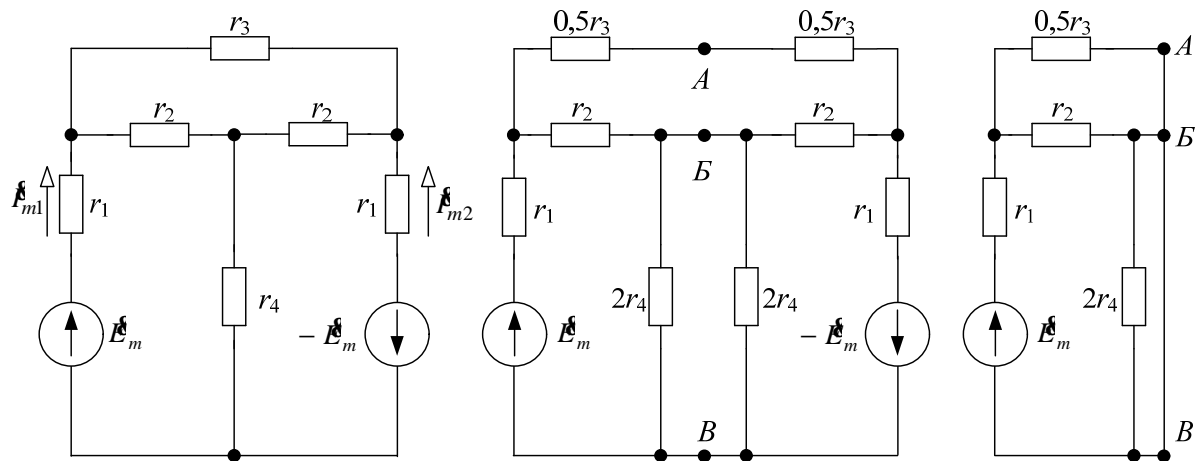


Рисунок 4.8 – Симетрична схема з різнополярними е. р. с.

У цьому випадку струми в симетричних вітках (наприклад  $I_{m1}$  і  $I_{m2}$ ) і напруги між відповідними парами вузлів, симетрично розташованих, рівні за величиною потенціалу у точці А, значить усі ці точки можна з'єднати між собою одним провідником (точки А, Б, В).

Нагадаємо, що такі перетворення допустимі лише у випадку, коли електрична схема має вісь симетрії. В інших випадках, наприклад, коли електрорушійні сили будуть неоднаковими, таке перетворення неможливе.

### **Запитання та задачі для закріплення**

1. Визначити струм на ділянці кола з послідовно з'єднаними  $r = 1$  Ом та  $X = 1$  Ом, коли напруга на ділянці дорівнює  $U = 14,1$  В.

2. Задано послідовно з'єднані комплексні опори  $Z_1 = (10 + j5)$  Ом і  $Z_2 = (5 - j10)$  Ом, через які протікає струм  $0,5$  А. Визначити напруги на цих опорах, спільну напругу на ділянці.

3. За даними попередньої задачі визначити активну, реактивну і повну потужність на ділянці.

4. Зобразити схему еквівалентну схемі задачі 2 та визначити її еквівалентні параметри.

5. Визначити струми у вітках з паралельно з'єднаних комплексних опорів  $Z_1 = (10 + j5)$  Ом і  $Z_2 = (5 - j10)$  Ом, коли напруга дорівнює  $U = 10$  В.

6. За даними задачі 5 визначити активні, реактивні та повні потужності у вітках схеми.

7. За яких умов можна вважати еквівалентними генератор напруги та генератор струму.

8. Написати формули для розрахунку зірки опорів, еквівалентної заданому трикутнику опорів.

9. Написати формули для розрахунку трикутника опорів, еквівалентного зірці опорів.

10. Зобразити еквівалентні схеми реальної котушки індуктивності та реального конденсатора.

## 5 ОДИНИЧНИЙ КОЛИВАЛЬНИЙ КОНТУР

Коливальним контуром (LC circuit) називається замкнене електричне коло, яке складається з котушки індуктивності та конденсатора. У такому колі заряджений конденсатор накопичену енергію електричного поля, розряджаючись, віддає котушці індуктивності, "заряджаючи" її, а та, у свою чергу, накопичену енергію магнітного поля, "розряджаючись", повертає конденсатору. Тобто, котушка індуктивності і конденсатор періодично обмінюються енергіями. Цей процес обміну називається **коливаннями у контурі**, а контур називається **коливальним контуром**.

**Ідеальним коливальним контуром** називається контур, який складається з ідеальної (без втрат) котушки індуктивності та ідеального (без втрат) конденсатора.

**Реальний коливальний контур**, очевидно, складається з реальних котушки індуктивності і конденсатора.

### 5.1 Вільні коливання в ідеальному коливальному контурі

#### 5.1.1 Рівняння коливань і його розв'язування

На рис. 5.1 зображена схема ідеального коливального контуру, котушка індуктивності якого має індуктивність  $L$  і конденсатор – ємність  $C$ .

За другим законом Кірхгофа:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0.$$

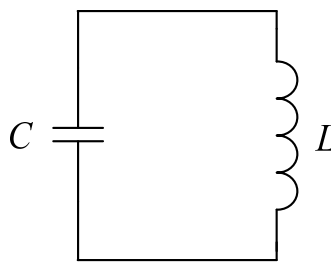


Рисунок 5.1 – Схема контуру

Після диференціювання та ділення цього рівняння на  $L$ , матимемо:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0.$$

Отримане рівняння називається рівнянням вільних коливань в ідеальному контурі і є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку, однорідним лінійним, зі сталими коефіцієнтами.

З курсу математики відомо, що загальним розв'язком такого рівняння є функція:

$$i = I_m \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot t\right) \quad (5.1)$$

Вираз  $\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot t$  має розмірність – радіан,  $t$  – секунда, а значить  $\sqrt{1/LC}$  повинен мати розмірність радіан на секунду (рад/с). Ця величина позначається через  $\omega_0$  і називається власною круговою частотою контуру:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (5.2)$$

Вираз для миттєвого значення струму у контурі буде:

$$i = I_m \sin \omega_0 t. \quad (5.3)$$

Рівняння (5.2) можна отримати, підставивши (5.3) в (5.1), яке має задовольнятися при будь-якому значенні  $t$ , бо (5.3) є його розв'язком. Дійсно:

$$\frac{di}{dt} = \omega_0 I_m \cos \omega_0 t, \quad \frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega_0^2 I_m \sin \omega_0 t,$$

$$-\omega_0^2 I_m \sin \omega_0 t + \frac{1}{LC} I_m \sin \omega_0 t = 0,$$

$$\left(\omega_0^2 - \frac{1}{LC}\right) \cdot I_m \cdot \sin \omega_0 t = 0.$$

Функція  $\sin \omega_0 t$  може дорівнювати нулю лише за певних значень часу  $t$ . Останній же вираз має бути справедливим при будь-якому значенні  $t$ , а отже, нулю дорівнює вираз у дужках, звідки:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

З виразу (5.3) бачимо, що у контурі протікає гармонічний струм зі сталою амплітудою  $I_m$  і циклічною частотою  $\omega_0$ . Цей струм обумовлюється розрядом конденсатора, який віддає накопичену енергію котушці індуктивності або "розрядом" котушки, яка повертає таку ж саму кількість енергії конденсатору. Тобто, це струм, який і переносить цю енергію від конденсатора до котушки і назад з частотою  $\omega_0$ . Рівноцінний обмін енергіями забезпечується відсутністю втрат.

### 5.1.2 Процес коливань та його механічна модель

Припустимо конденсатор  $C$  був заряджений від батареї  $E$  до напруги  $U_m$  (рис. 5.2) у момент часу  $t = 0$  (рис. 5.3) перемикач  $S$  переводимо з положення 1 у положення 2.

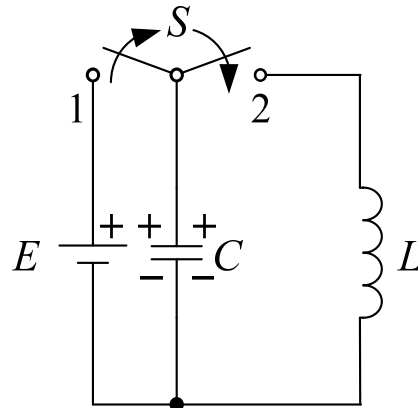


Рисунок 5.2 – Схема контуру

У контурі виникає електричний струм конденсатора, що розряджається через котушку індуктивності  $L$ . Цей струм напрямлений від позитивно зарядженої пластини (верхньої) через котушку до негативно зарядженої пластини (нижньої), тобто за ходом годинникової стрілки.

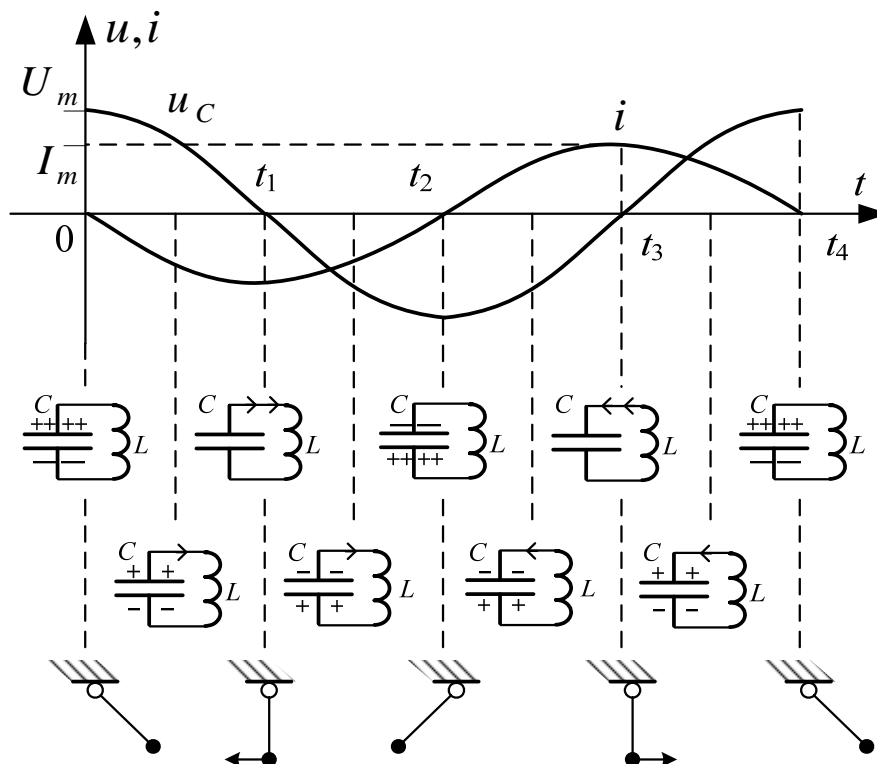


Рисунок 5.3 – Ілюстрації до пояснення процесу вільних коливань в ідеальному коливальному контурі

На момент часу  $t_1$  конденсатор повністю розряджений і напруга у контурі спадає від  $U_m$  до нуля, а струм зростає від нуля до максимального значення  $I_m$ . У котушці при цьому виникає е. р. с. самоіндукції. Ця е. р. с. чинить опір необмеженому зростанню струму. На цьому інтервалі часу конденсатор  $C$  виконує роль джерела енергії, яку він повністю передає котушці, яка є приймачем енергії і на момент  $t_1$  "заряджається" до максимуму. Е. р. с. самоіндукції (self-inductance) у цей момент дорівнює нулю, бо електричний струм при  $t = t_1$  не змінюється.

На інтервалі від  $t_1$  до  $t_2$  джерелом енергії виступає "заряджена" котушка, яка на момент  $t_1$  накопичила максимум енергії магнітного поля, а розряджений конденсатор є споживачем енергії. Не зважаючи на те, що конденсатор повністю розряджений, струм у контурі миттєво зрости не може, бо з'являється е. р. с. самоіндукції, яка буде стримувати зростання цього струму. Конденсатор заряджається так, що на нижній обкладинці накопичуватиметься позитивний, а на верхній – негативний заряди за рахунок струму, який протікає за ходом годинникової стрілки. У момент  $t_1 = t_2$  конденсатор відбере усю енергію від котушки, зарядившись до напруги  $U = -U_m$ . Струм при цьому, змінюючись з максимальною швидкістю, досягає значення  $i = 0$ . Е. р. с. самоіндукції досягає максимального значення.

З моменту  $t = t_2$  конденсатор починає розряджатися, але, не зважаючи на повністю "розряджену" котушку, струм різко зрости не може, бо е. р. с. самоіндукції, маючи максимальне значення, чинитиме опір його зростанню. На інтервалі від  $t_2$  до  $t_3$  конденсатор буде розряджатися, стаючи знову генератором, на котушку, яка буде "заряджатися" струмом, що протікатиме у напрямку проти ходу годинникової стрілки. На момент часу  $t = t_3$  конденсатор повністю розрядиться, передавши усю енергію свого електричного поля котушці, через яку протікатиме максимальний струм, обумовлюючи максимум енергії магнітного поля, накопиченої котушкою. Струм змінитись миттєво не може через зростаючу е. р. с. самоіндукції. Конденсатор заряджатиметься струмом, що протікатиме проти ходу годинникової стрілки, накопичуючи при цьому на верхній обкладинці позитивні, а на нижній – негативні заряди. На момент  $t = t_4$  конденсатор повністю зарядиться, а струм у контурі дорівнюватиме нулю.

Таким чином, схема повернеться до стану, у якому вона перебувала на момент  $t = 0$ , пройшовши повний цикл коливальних процесів у контурі. Далі усе буде повторюватись.

Зауважимо, що у контурі коливання обумовлюються накопиченням енергії електричного поля конденсатором та енергії магнітного поля котушкою індуктивності. Котушка індуктивності та конденсатор по черзі ставали джерелами енергії, яку вони передавали одне одному. А цей процес рівноцінного обміну енергіями якраз і є тим явищем, яке називається коливанням у контурі.

Механічним аналогом (моделлю) може слугувати маятник без втрат (рис. 5.3). Відхилення вправо від положення рівноваги кулька матиме запас потенціальної енергії, що відповідатиме зарядженому конденсаторові. Рухаючись за ходом годинникової стрілки, у момент проходження нею положення рівноваги, її потенціальна енергія перейде повністю у кінетичну енергію, бо у цей момент лінійна швидкість кульки буде максимальною. Рухаючись далі за інерцією, кулька відхилиться вліво, накопичивши таку ж саму потенціальну енергію, яку вона мала у момент  $t = 0$ . Це обумовлюється відсутністю втрат, а значить повним перетворенням кінетичної енергії в потенціальну. Досягнувши максимуму відхилення, кулька рухатиметься проти годинникової стрілки і у момент проходження положення рівноваги знову набере максимум кінетичної енергії, за рахунок якої, за інерцією, "проскочить" положення рівноваги і відхилиться вправо, досягнувши точно того ж самого положення, у якому вона перебувала при  $t = 0$ . Ці коливання, при повній відсутності втрат, існуватимуть нескінченно довго.

### 5.1.3 Параметри ідеального контуру

Виходячи з формули (5.3), у контурі протікатиме гармонічний електричний струм, часова діаграма якого зображена на рис. 5.4.

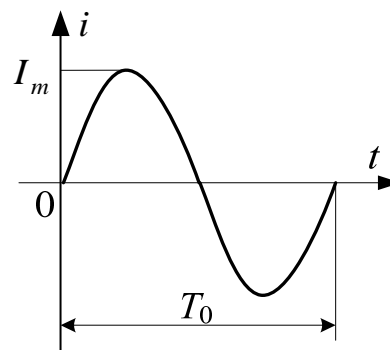


Рисунок 5.4 – Часова діаграма гармонічного струму

Частота вільних коливань у контурі позначається через  $f_0$  і пов'язана з круговою частотою співвідношенням:

$$\omega_0 = 2\pi f_0, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Одиницею вимірювання частоти є один герц (Гц).

В радіотехніці часто користуються більшими одиницями:

1 кГц (кілогерц) =  $10^3$  Гц,

1 МГц (мегагерц) =  $10^6$  Гц,

1 ГГц (гігагерц) =  $10^9$  Гц.

Величина, обернена частоті, називається періодом коливання (рис. 5.4), який позначається через  $T_0 = 1/f_0$ . Очевидно період  $T_0$  дорівнює тривалості одного повного циклу коливань у контурі (рис. 5.3) від  $t = 0$  до  $t = T_0$ .

Період вимірюється у одиницях часу – секундах (с). В радіотехніці користуються часто меншими одиницями:

$$1 \text{ мс (мілісекунда)} = 10^{-3} \text{ с,}$$

$$1 \text{ мкс (мікросекунда)} = 10^{-6} \text{ с,}$$

$$1 \text{ нс (наносекунда)} = 10^{-9} \text{ с.}$$

Якби контур випромінював коливання, які поширювались би у вільному просторі у вигляді електромагнітних хвиль, то зручно було б користуватись поняттям довжини хвилі  $\lambda$  (лямбда), що дорівнює:

$$\lambda = \frac{c}{f_0},$$

де  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість поширення електромагнітних хвиль (у тому числі і світла) у вільному просторі.

Оскільки  $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$ , а швидкість – м/с, то довжина хвилі вимірюється у метрах (м).

Енергія, накопичена в електричному полі конденсатора, дорівнює  $C U_m^2 / 2$  і цю енергію він віддає котушці індуктивності, яка накопичує її у магнітному колі у кількості  $L I_m^2 / 2$ .

Порівнявши їх між собою матимемо:

$$C U_m^2 = L I_m^2.$$

Звідки відношення  $U_m / I_m$ , яке називається характеристичним або хвильовим опором коливального контуру, позначається через  $r$  (ро) (літера грецької абетки), дорівнює:

$$r = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.4)$$

Якщо з виразу (5.2) визначити:

$$\sqrt{C} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{L}},$$

і підставити в (5.4), то отримаємо:

$$r = \omega_0 L. \quad (5.5)$$

Якщо з виразу (5.2) визначити:

$$\sqrt{L} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{C}},$$

і підставити (5.4), то отримаємо:

$$r = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (5.6)$$



Отже, характеристичний опір контуру дорівнює ємнісному опору конденсатора або індуктивному опору котушки індуктивності на частоті вільних коливань у контурі. Важливим є той факт, що реактивні опори котушки індуктивності і конденсатора є однаковими:

$$w_0 L = \frac{1}{w_0 C}. \quad (5.7)$$

В ідеальному коливальному контурі відбувається рівноцінний обмін енергіями між конденсатором  $C$  і котушкою індуктивності  $L$  з частотою вільних коливань:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Справді, через конденсатор і котушку індуктивності у контурі у будь-який момент часу протікає один і той самий струм. При рівних же опорях максимальна потужність конденсатора, як джерела енергії, дорівнює максимальній потужності котушки індуктивності, коли та, у свою чергу, стає джерелом енергії. Тобто:

$$P_{\text{кот}} = \frac{I_m^2}{2} \cdot w_0 L = P_{\text{конд}} = \frac{I_m^2}{2} \cdot \frac{1}{w_0 C}, \quad (5.8)$$

що і має місце у контурі без втрат.

Характеристичний опір  $r$  є особливим параметром коливального контуру, який має розмірність опору, але не пов'язаний ні з якими втратами, хоча за характером є активним, бо за формулою (5.4), яка є його визначенням,  $r$  – дійсне число.

Строго кажучи, характеристичний опір не має фізичного змісту і введений формально, як відношення амплітуди напруги  $U_m$  до амплітуди струму  $I_m$  у контурі. Оскільки це відношення має розмірність омів, то цей формальний (визначений через формулу) параметр має назву опору.

Але, виходячи з формули (5.8), можна приписати цьому параметрові властивості елемента, на якому відбуваються взаємні перетворення електричної енергії зарядженого конденсатора і магнітної енергії "зарядженої" котушки індуктивності.

Отже, характеристичний опір контуру дорівнює ємнісному опору конденсатора або індуктивному опору котушки індуктивності на частоті вільних коливань у контурі. Важливим є той факт, що при цьому реактивні опори котушки індуктивності і конденсатора є однаковими:

$$w_0 L = \frac{1}{w_0 C}. \quad (5.6)$$

В ідеальному коливальному контурі відбувається рівноцінний обмін енергіями між конденсатором  $C$  і котушкою індуктивності  $L$  з частотою вільних коливань:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (5.7)$$

Одним з важливих параметрів ідеального коливального контуру є його характеристичний (або хвильовий) опір, який можна визначити за формулами:

$$r = \sqrt{L/C}, \quad r = w_0 L, \quad r = \frac{1}{w_0 C}.$$

## 5.2 Вільні коливання у реальному контурі

### 5.2.1 Рівняння коливань та його розв'язування

На рис. 5.5 подана еквівалентна схема реального коливального контуру, що складається з ідеальної котушки індуктивності  $L$ , ідеального конденсатора  $C$  та опору  $r$ , який символізує собою усі можливі втрати у контурі.

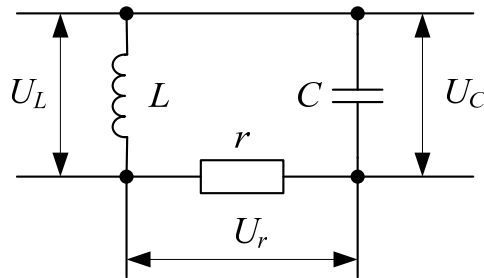


Рисунок 5.5 – Еквівалентна схема реального коливального контуру

За другим законом Кірхгофа для даного контуру запишемо:

$$L \frac{di}{dt} + i \cdot r + \frac{1}{C} \int i dt = 0.$$

Продиференціювавши та розділивши цей вираз на  $L$ , матимемо:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (5.8)$$

Отримане звичайне диференціальне рівняння є лінійним, однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Як відомо з курсу вищої математики, загальний розв'язок такого рівняння слід шукати у такому вигляді:

$$i = I_{m0} e^{-t/t_K} \sin w_0 t, \quad (5.9)$$

де  $t_K$  – стала часу контуру;

$w_0$  – частота вільних коливань у реальному контурі.

Амплітуда цього струму (що протікає у контурі) залежить від часу  $t$ , зменшуючись за законом експоненти:

$$I_m(t) = I_{m0} \cdot e^{-t/t_K}.$$

Амплітуда  $I_m(t)$  з часом згасає і тим швидше, чим менше значення  $t_K$  ( $t_K'' < t_K'$ ), що показано на рис. 5.6, а.

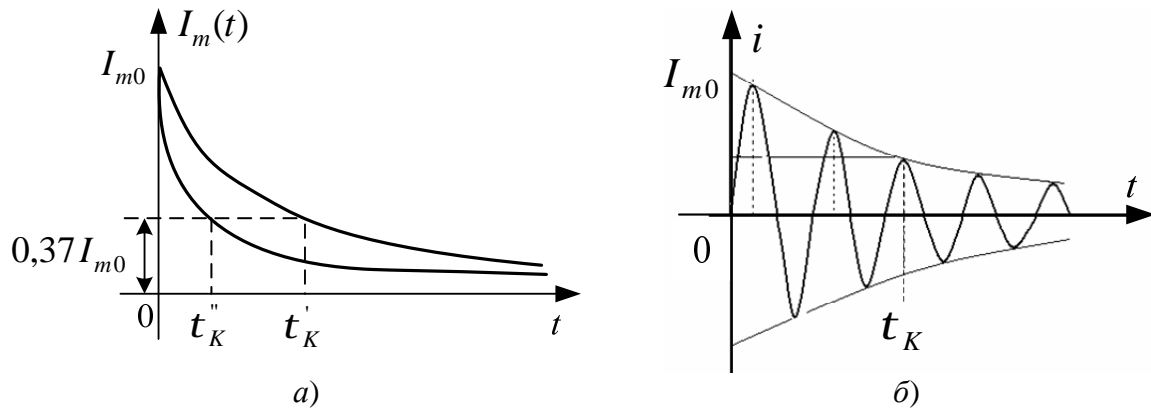


Рисунок 5.6: а)  $I_{m0}$  – значення амплітуди при  $t = 0$  (початкове значення); б) характер вільних коливань у реальному контурі

Припустимо, що від початку коливань у контурі ( $t = 0$ ) пройшов час, який дорівнює сталій часу  $t_K$ . Тобто, при  $t = t_K$ :

$$I_m(t_K) = I_{m0} \cdot e^{-1} = \frac{I_{m0}}{e} \approx 0,37 I_{m0}.$$

Отже, стала часу контуру  $t = t_K$  є відрізок часу, протягом якого амплітуда коливань у контурі зменшиться в  $e$  разів, досягнувши рівня  $0,37$  від початкового її значення  $I_{m0}$ .

Строго кажучи, струм у реальному контурі не є гармонічною функцією часу, не має періодичності, бо амплітуда цього коливання змінюється.

Згасаючий характер коливань у такому контурі легко пояснити, якщо звернутися до фізичних процесів обміну енергіями між котушкою індуктивності і конденсатором.

Напруга на конденсаторі  $u_C$  дорівнюватиме:

$$u_C = -I_{m0} \cdot \frac{1}{w_0 C} \sin(w_0 t - p/2).$$

Напруга на котушці індуктивності  $u_L$  дорівнюватиме:

$$u_L = I_{m0} \cdot w_0 L \sin(w_0 t - p/2).$$

При  $t = 0$  амплітуда напруги зарядженого конденсатора дорівнює:

$$U_{mC} = I_{m0} \cdot \frac{1}{w_0 C}.$$

Енергія електричного поля між його обкладинками:

$$W_{mC} = \frac{CU_{mC}^2}{2}.$$

При передачі цієї енергії котушці протягом чверті періоду коливань її частина буде втрачена на  $r$  – на перетворення електричної енергії в інші види. Тому котушка індуктивності візьме від конденсатора енергію  $W_{mL} < W_{mC}$  не "дозарядившись".

Протягом наступної чверті періоду "недозаряджена" котушка частину своєї енергії витратить на  $r$  і зможе повернути конденсаторові енергію  $W_{mL}^1 < W_{mL}$ , не дозарядивши конденсатор. Таким чином, напруга на конденсаторі і напруга на котушці з часом будуть зменшуватись, що призведе до згасання розмаху коливань струму у контурі. Це і обумовлює згасання коливань у реальному контурі.

### 5.2.2 Параметри реального контуру

Функція вигляду (5.9) має задовольняти рівняння (5.8), перетворюючи його на тотожність. Підставимо (5.9) у (5.8):

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= w_0 I_{m0} e^{-\frac{t}{t_K}} \cos w_0 t - \frac{1}{t_K} I_{m0} e^{-\frac{t}{t_K}} \sin w_0 t, \\ \frac{d^2 i}{dt^2} &= -w_0^2 I_{m0} e^{-\frac{t}{t_K}} \sin w_0 t - \frac{1}{t_K} w_0 I_{m0} e^{-\frac{t}{t_K}} \cos w_0 t + \\ &+ \frac{1}{t_K^2} I_{m0} e^{-\frac{t}{t_K}} \sin w_0 t - \frac{1}{t_K} w_0 I_{m0} e^{-\frac{t}{t_K}} \cos w_0 t. \\ I_{m0} e^{-\frac{t}{t_K}} &\left[ -w_0^2 \cdot \sin w_0 t - \frac{w_0}{t_K} \cos w_0 t + \frac{1}{t_K^2} \sin w_0 t - \frac{w_0}{t_K} \cos w_0 t + \right. \\ &\left. + w_0 \frac{r}{L} \cos w_0 t - \frac{r}{L t_K} \sin w_0 t + \frac{1}{LC} \sin w_0 t \right] = \\ &= I_{m0} e^{-\frac{t}{t_K}} \left[ -w_0^2 \cdot \sin w_0 t - \frac{2w_0}{t_K} \cos w_0 t + \frac{1}{t_K^2} \sin w_0 t + \right. \\ &\left. + w_0 \frac{r}{L} \cos w_0 t - \frac{r}{L t_K} \sin w_0 t + \frac{1}{LC} \sin w_0 t \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

При  $t = 0$ :

$$I_{m0} \left( -\frac{2w_0}{t_K} + \frac{w_0 r}{L} \right) = 0, \quad w_0 I_{m0} \left( \frac{r}{L} - \frac{2}{t_K} \right) = 0.$$

$I_{m0}$  та  $w_0$  нулю не дорівнюють, а значить:

$$\frac{r}{L} - \frac{2}{t_K} = 0,$$

звідки:

$$t_K = \frac{2L}{r}. \quad (5.11)$$

Підставивши замість  $t_K$  його значення з (5.11) в (5.10), матимемо при  $I_{m0} e^{-\frac{t}{t_K}} \neq 0$

$$\begin{aligned} & -w_0^2 \sin w_0 t - w_0 \frac{r}{L} \cos w_0 t + \frac{r^2}{4L^2} \sin w_0 t + \\ & + w_0 \frac{r}{L} \cos w_0 t - \frac{r^2}{2L^2} \sin w_0 t + \frac{1}{LC} \sin w_0 t = 0, \\ & \left( -w_0^2 - \frac{r^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} \right) \sin w_0 t = 0, \quad w_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}, \\ & w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{r^2 C}{4L}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{4r^2}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Введемо поняття добротності коливального контуру  $Q$  таким чином:

$$Q = 2p \frac{W_{зан}}{P_{втр} \cdot T_0},$$

де  $W_{зан}$  – енергія, яка запасється у контурі (в конденсаторі чи у котушці)

$$W_{зан} = \frac{CU_{mC}^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2},$$

$P_{втр} = \frac{I_m^2}{2} r$  – потужність втрат;

$T_0$  – період колювання;

добуток  $P_{втр} \cdot T_0$  – енергія втрат за один період.

$$Q = 2p \frac{LI_m^2 \cdot 2}{2I_m^2 r \cdot T_0} = 2p f_0 \frac{L}{r} = \frac{w_0 L}{r} = \frac{r}{r}$$

або

$$\begin{aligned} Q &= 2p \frac{CU_m^2 \cdot 2}{2I_m^2 r \cdot T_0} = 2p f_0 \frac{CU_m^2}{I_m^2 \cdot r} = w_0 \frac{C \cdot \left( I_m \cdot \frac{1}{w_0 \cdot C} \right)^2}{I_m^2 \cdot r} = \\ &= \frac{w_0 \cdot C}{w_0^2 C^2 \cdot r} = \frac{1}{w_0 C \cdot r} = \frac{r}{r}. \end{aligned}$$

Добротність контуру є енергетичною характеристикою і дорівнює  $2p$  помножене на відношення енергії, яка запасється у контурі до енергії втрат за один період колювань.

З отриманих формул бачимо, що обчислити значення добротності контуру зручно за формулою:

$$Q = \frac{r}{r}. \quad (5.13)$$

Тобто, чисельно добротність коливального контуру показує у скільки разів його характеристичний опір є більшим за опір втрат.

Але фізичний зміст добротності, яка є енергетичною характеристикою будь-якої системи: механізму, машини, коливального контуру, антени, радіотехнічної системи, біологічної системи, живого організму, полягає у визначенні співвідношення між енергією, що запасується системою і енергією втрат у ній.

Повернувшись до питання про частоту вільних коливань у реальному контурі, підставимо з (5.13) вираз  $r/r = Q$  у (5.12) і отримаємо:

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (5.14)$$

Якби втрат у контурі не було, то  $Q = \infty$ , а частота вільних коливань дорівнювала б її значенню для ідеального контуру з тими ж значеннями  $L$  та  $C$ , отриманому з виразу (5.2).

Зі збільшенням втрат (зменшенням добротності) підкореневий вираз формули (5.14) зменшуватиметься, що призведе до зменшення і частоти вільних коливань у контурі.

Так, при добротності  $Q = \frac{1}{2}$ , частота коливань  $w_0 = 0$ , тобто, період коливань  $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2p}{w_0} = \infty$  стає нескінченно великим, а процес розряду конденсатора з моменту  $t = 0$  стає аперіодичним. Коливання у контурі не відбуваються, бо при розрядженні конденсатора уся його енергія пішла на величезні втрати і до котушки нічого "не дійшло".

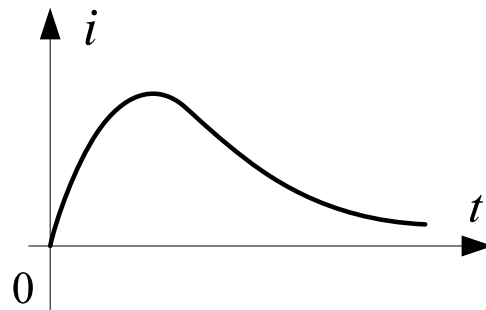


Рисунок 5.7 – Струм у контурі при аперіодичному розрядженні конденсатора

В радіотехніці використовуються контури з достатньо високою добротністю  $Q = 50 \dots 300$ , а тому при розрахунку користуються формулою (5.2):

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

яка називається **формулою Томсона** і, строго кажучи, є справедливою для ідеального контуру.

Розрахуємо похибку при заміні формули (5.14) на (5.2) при добротності  $Q = 50$ .

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot 2500}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - 0,0001} \approx \sqrt{\frac{1}{LC}} (1 - 5 \cdot 10^{-5}).$$

Отже, відносна похибка складає  $5 \cdot 10^{-5}$  або 0,005%.

При більш високих добротностях ця похибка, очевидно, буде ще меншою, а тому на практиці частіше за все для розрахунку частоти коливаний у контурі використовують формулу Томсона.

Інколи в розрахунках зручно користуватися величиною оберненою добротності:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{r}{r}, \quad (5.15)$$

яка називається **згасанням контуру**.

В кінці зауважимо, що у радіотехніці використовуються пристрої, які мають добротності в тисячі і десятки тисяч одиниць (наприклад, кварцові резонатори), або й сотні тисяч – надвисокочастотні резонатори.

Добротність реального коливального контуру є енергетичною характеристикою, яка для контуру кількісно визначається за формулою:

$$Q = r/r.$$

У реальному контурі вільні коливання носять згасаючий характер, обумовлений активними втратами у ньому.

Швидкість згасання коливаний у контурі можна оцінити його сталою часу  $t_K$ , яка дорівнює інтервалу часу, протягом якого амплітуда коливаний зменшиться у  $e$  разів:

$$I_m(t + t_K) = 0,37 \cdot I_m(t).$$

Частота вільних коливаний зменшується при зростанні втрат:

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}},$$

але для добротних контурів доцільно користуватися формулою Томсона:

$$w_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

### 5.3 Вимушені коливання у послідовному коливальному контурі

Вільні коливання у реальному контурі з часом згасають через активні втрати енергії. Значить щоб ці коливання не згасали потрібно ці втрати компенсувати. Якщо у контур від генератора вчасно інjektувати стільки енергії, скільки втрачається, то коливання у контурі відбуватимуться зі сталою амплітудою. Іншими словами, генератор повинен дозаряджати конденсатор і котушку, а це еквівалентно тому, що відбувається компенсація втрат у реальному контурі, яка обумовлює незгасаючий характер коливань у ньому.

Але при цьому коливання у контурі відбуватимуться під дією примусової сили генератора із частотою генератора. Тому ми повинні говорити, що ці коливання в контурі є вимушеними на відміну від вільних коливань, розглянутих вище.

Одним із варіантів реалізації такої задачі є послідовний коливальний контур, яким називається замкнене електричне коло послідовно з'єднаних між собою трьох елементів: генератора е. р. с., котушки індуктивності та конденсатора (рис. 5.8).

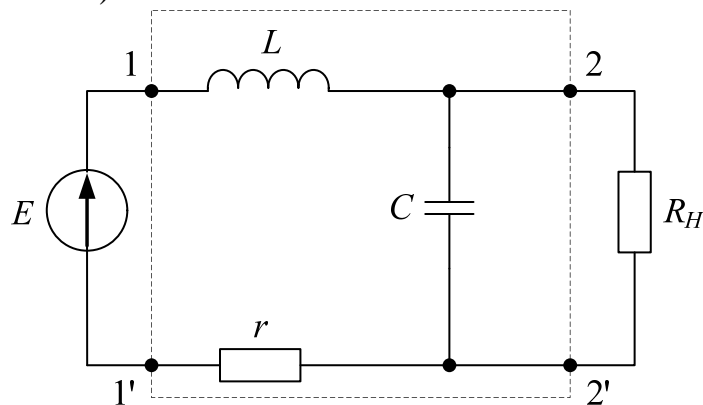


Рисунок 5.8 – Еквівалентна схема послідовного контуру

#### 5.3.1 Вхідний опір та його складові

Будемо вважати, що усі втрати у контурі, включаючи і внутрішній опір генератора, зосереджені в опорі  $r$ .

Генератор віддає у зовнішню частину кола (власне у контур) струм  $i$ , комплексна амплітуда якого  $\underline{I}_m$ , створюючи на вхідних полюсах 1-1' чотириполюсника напругу з комплексною амплітудою  $\underline{U}_{1m} = \underline{E}_{1m}$ . Відношення  $\underline{U}_{1m} / \underline{I}_m$  називається комплексним вхідним опором цього контуру  $\underline{Z}_{ex}$ , який дорівнює:

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{I}_m} = R_{ex} + jX_{ex}, \quad (5.16)$$

де  $R_{ex}$  – активна складова;

$X_{ex}$  – реактивна складова вхідного опору послідовного коливального контуру.



Зі схеми контуру видно, що

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx, \quad (5.17)$$

де  $x = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  – реактивний опір контуру;

$\omega$  – частота генератора (частота вимушених коливань у контурі).

Прирівнюючи (5.16) і (5.17), запишемо:

$$R_{\text{ex}} = r, \quad X_{\text{ex}} = x = \omega L - 1/\omega C.$$

Запишемо комплексне число  $\underline{Z}_{\text{ex}}$  у показниковій формі:

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = Z_{\text{ex}} e^{j\varphi_{\text{ex}}},$$

$$Z_{\text{ex}} = \sqrt{R_{\text{ex}}^2 + X_{\text{ex}}^2} = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2},$$

$$\varphi_{\text{ex}} = \arctg \frac{X_{\text{ex}}}{R_{\text{ex}}} = \arctg \frac{x}{r} = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{r},$$

де  $Z_{\text{ex}}$  – модуль комплексного вхідного опору;

$\varphi_{\text{ex}}$  – аргумент комплексного вхідного опору контуру.

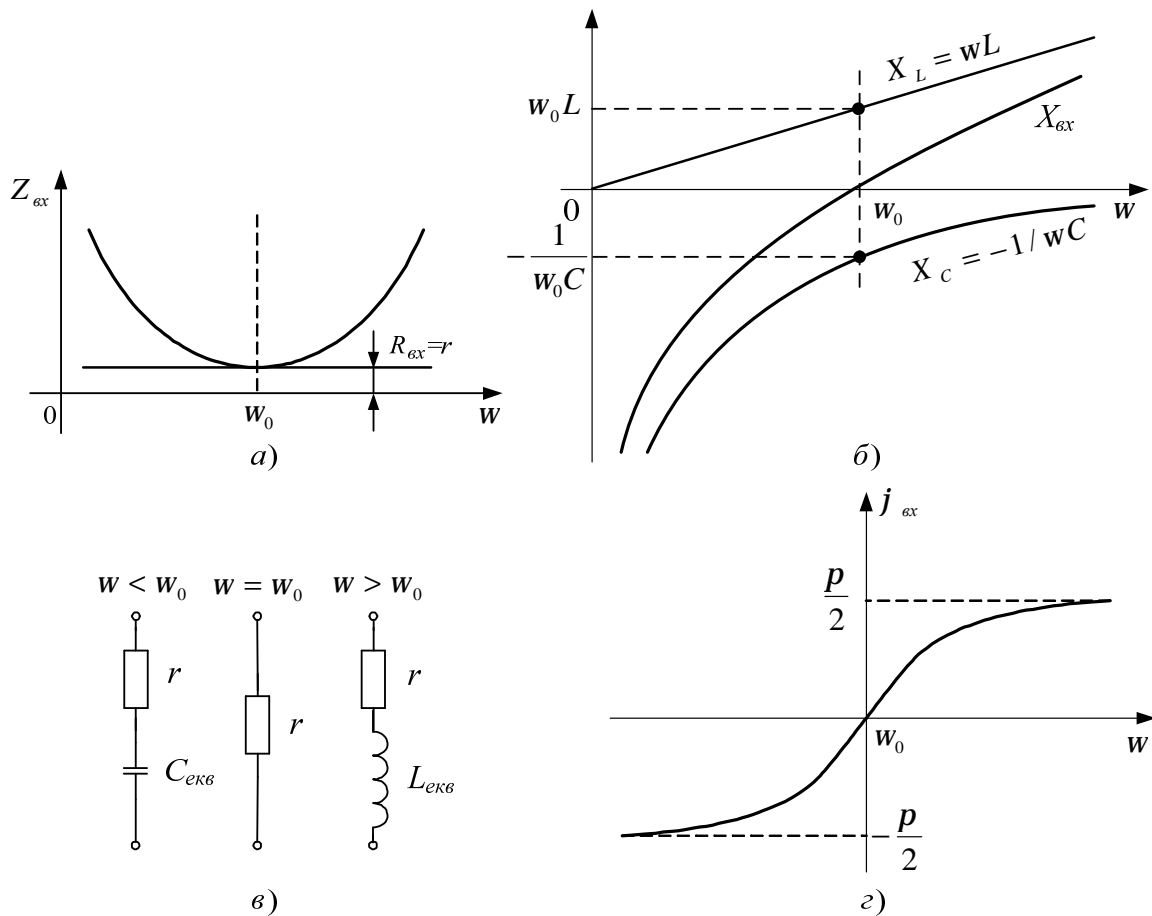


Рисунок 5.9 – Частотні характеристики вхідного опору послідовного контуру

Побудуємо і проаналізуємо частотні характеристики вхідного опору:

$$Z_{ex}(w), j_{ex}(w), R_{ex}(w), X_{ex}(w).$$

Ці характеристики подані на рис. 5.9.

При змінній частоті генератора змінюватимуться: індуктивний опір котушки  $X_L = wL$ , ємнісний опір конденсатора  $X_C = -1/wC$  (див. рис. 5.9, б) та реактивний опір контуру  $X_{ex} = wL - 1/wC$ .

Очевидно, на якійсь частоті  $w_0$ , опори  $w_0L = \frac{1}{w_0C}$ , а  $X_{ex} = x = 0$ .

При цьому  $Z_{ex}$  зменшиться до значення  $r$  (рис. 5.9, а), а значить  $Z_{ex} = R_{ex} = r$  – вхідний опір контуру стане чисто активним за характером (рис. 5.9, в) і мінімальним за величиною.

Комплексна амплітуда струму у контурі

$$I_m = \frac{E_m}{Z_{ex}} = \frac{E_m}{Z_{ex}} e^{-j\varphi_{ex}},$$

де  $\varphi_{ex} = \arctg \frac{x}{r}$  – різниця фаз між напругою на вході контуру та струмом у ньому.

При  $w = w_0$ ,  $X_{ex} = 0$  (рис. 5.9, б) і  $\varphi_{ex} = 0$  (рис. 5.9, з), що є цілком зрозумілим, бо вхідний опір  $Z_{ex} = r$  – чисто активний (рис. 5.10, а).

При  $w < w_0$ ,  $wL < \frac{1}{wC}$ ,  $X_{ex} = wL - 1/wC < 0$  реактивна частина вхідного опору є негативною (рис. 5.9, б), що свідчить про активно-ємнісний (рис. 5.9, в) характер вхідного опору контуру. При цьому  $\varphi_{ex} < 0$  і струм у контурі випереджає напругу за фазою (рис. 5.10, б).

При  $w > w_0$ ,  $wL > \frac{1}{wC}$ ,  $X_{ex} = wL - 1/wC > 0$ , реактивна складова вхідного опору є позитивною (рис. 5.9, б), що свідчить про активно-індуктивний (рис. 5.9, в) характер вхідного опору контуру. При цьому  $\varphi_{ex} > 0$  і струм у контурі відстає від напруги за фазою (рис. 5.10, в).

### 5.3.2 Векторні діаграми. Резонанс напруг

Раніше ми зауважили, що на деякій частоті генератора  $w = w_0$ :

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

вхідний опір послідовного контуру стає мінімальним, що призводить до зростання струму у контурі до максимальної величини.

$$I_{m\max} = \frac{E_m}{r}.$$

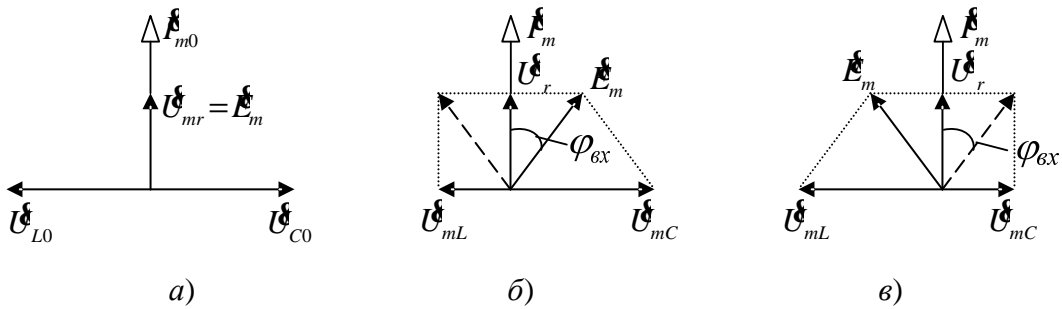


Рисунок 5.10 – Векторні діаграми послідовного контуру

Тоді на ділянках кола будуть такі напруги (рис. 5.10, а): на опорі втрат  $U_{mr} = I_m \cdot r$ , яка збігається за фазою зі струмом у контурі; на котушці індуктивності  $U_{mL} = I_m \cdot j\omega_0 L = \omega_0 L I_m e^{jP/2}$ , яка випереджатиме струм у контурі на  $90^\circ$ ; на конденсаторі  $U_{mC} = I_m \cdot \frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{I_m}{\omega_0 C} e^{-jP/2}$ , яка за амплітудою дорівнюватиме  $U_{mL}$ , але відставатиме від струму на  $90^\circ$ .

Напруги на котушці індуктивності і конденсаторі будуть однаковими за величиною, протилежними за фазами і тому, взаємнокомпенсуючи одна одну, призводять до того, що реактивний опір у контурі дорівнює нулю. Максимальний струм у контурі, протікаючи через котушку і конденсатор, створить на кожній з них ( $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ ) максимальні і рівні за величиною напруги:

$$U_{mL} = U_{mC} = I_m \cdot r,$$

де, нагадаємо,  $r = \omega_0 L = 1/\omega_0 C$  – характеристичний опір контуру.

Відношення:

$$\frac{U_{mL}}{E_m} = \frac{U_{mC}}{E_m} = \frac{I_m \cdot r}{I_m \cdot r} = \frac{r}{r} = Q,$$

показує, що напруги на кожному з реактивних елементів досягають максимального значення, яке у  $Q$  разів більше від напруги (е. р. с.) генератора. Це явище називається **резонансом напруг**, а частота  $\omega = \omega_0$  – **резонансною частотою**.

Явище резонансу напруг використовується в радіотехніці, зокрема, при побудові вимірювальних приладів для вимірювання параметрів котушок індуктивності, конденсаторів резонансним методом.

На рис. 5.10, б і в показані векторні діаграми послідовного контуру при  $\omega < \omega_0$  і  $\omega > \omega_0$ , відповідно.

### 5.3.3 Вплив опору навантаження на параметри контуру

Підімкнемо до вихідних полюсів послідовного контуру резистор  $R_H$  (рис. 5.8). Якими ж стануть параметри навантаженого контуру?

Так, якщо на резонансній частоті, що на практиці і має найбільше значення,  $\frac{1}{\omega_0 C} \ll R_H$ , то паралельне з'єднання  $C$  і  $R_H$  можна замінити еквівалентним йому (рис. 5.11) послідовним з'єднанням  $C$  і  $r_{вн}$ , де внесений опір  $r_{вн}$  дорівнює:

$$r_{вн} = \frac{1}{(\omega_0 C)^2 R_H} = \frac{r^2}{R_H}.$$

Таким чином, у схемі рис. 5.11 містяться ті ж самі реактивності, що і у схемі рис. 5.8. Тільки активний опір збільшився на  $r_{вн}$ .

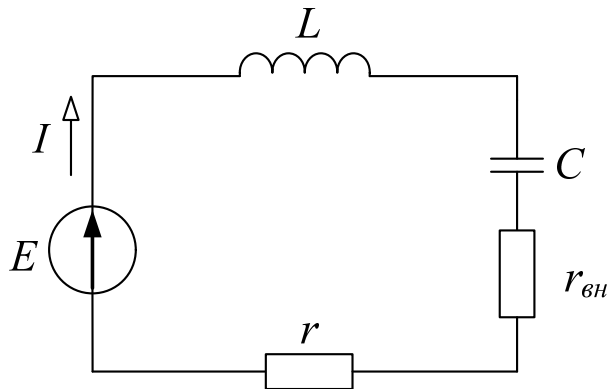


Рисунок 5.11 – Схема, еквівалентна схемі рис. 5.8

Навантажена добротність такого контуру  $Q_H$  дорівнюватиме

$$Q_H = \frac{r}{r + r_{вн}} = \frac{r}{r + r^2/R_H} < Q.$$

Добротність навантаженого контуру менша, а згасання в контурі:

$$d_H = \frac{1}{Q_H} = \frac{r}{r} + \frac{r}{R_H} = d + d_{вн}$$

більше, що свідчить про зростання втрат у контурі.

Якщо внесений опір  $r_{вн} \gg r$ , то:

$$Q_H \approx \frac{r}{r_{вн}}, \quad d_{вн} \approx \frac{R_H}{r}.$$

Вхідний опір навантаженого контуру дорівнюватиме:

$$\underline{Z}_{H_{вх}} = r + \frac{r^2}{R_H} + jX,$$

$$Z_{H_{ex}} = \sqrt{\left(r + \frac{r^2}{R_H}\right)^2 + X^2}, \quad R_{H_{ex}} = r + \frac{r^2}{R_H},$$

$$j_{H_{ex}} = \operatorname{arctg} \frac{X}{r + r^2/R_H}.$$

Власна частота коливань в контурі:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_H^2}}. \quad (5.18)$$

Наведені формули свідчать про те, що навантаження суттєво погіршує параметри контуру, що дуже важливо знати, бо в радіотехнічних пристроях контур працює ланкою передачі сигналу, тобто працює на навантаження, вхідний опір якого і є  $R_H$ .

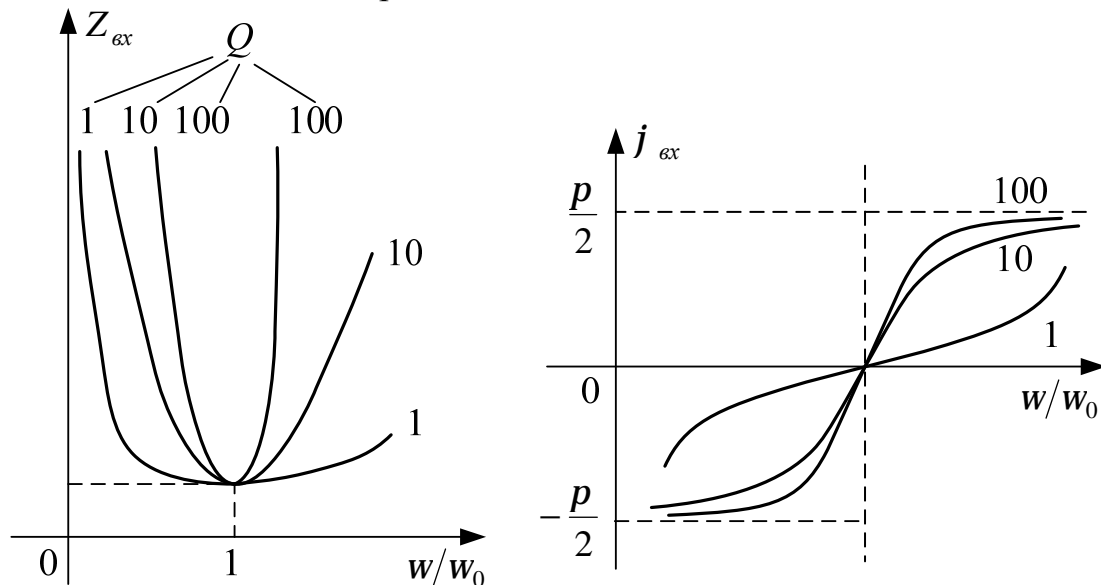


Рисунок 5.12 – Залежність частотних характеристик опору від добротності

Це зниження добротності призводить до суттєвих змін у формі частотних характеристик вхідного опору.

На рис. 5.12 показані сімейства кривих залежностей  $Z_{ex}$  та  $j_{ex}$  від значення відносної частоти  $w/w_0$  при трьох значеннях добротності контуру  $Q = 100, 10$  та  $1$ .

### 5.3.4 Вхідний опір контуру при невеликих розстроюваннях

Будемо розглядати вхідний опір послідовного коливального контуру в діапазоні частот близьких до резонансної, а саме: коли  $\Delta w = w - w_0$  – різниця частот генератора і резонансної, яку назвемо абсолютним розстроюванням контуру, є такою, що  $\Delta w/w_0$  – відносне розстроювання контуру – не перевищує величини  $0,05$ . Іншими словами, коли частота

генератора змінюється не більше ніж на 5% від частоти резонансної, то будемо говорити про мале розстроювання.

Повернемося до виразу (5.17), у якому після винесення за дужки  $w_0L$  отримаємо:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ex} &= r + jw_0L \left( \frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right) = r \left[ 1 + jQ \left( \frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right) \right] = r \left( 1 + jQ \frac{w^2 - w_0^2}{w \cdot w_0} \right) = \\ &= r \left( 1 + jQ \frac{(w + w_0)(w - w_0)}{w \cdot w_0} \right) = r(1 + jx), \end{aligned} \quad (5.19)$$

де  $x = Q \frac{(w + w_0)(w - w_0)}{w \cdot w_0}$  і називається узагальненим розстроюванням контуру.

У діапазоні малих розстроювань контуру, можна вважати, що:

$$w \approx w_0; \quad w + w_0 \approx 2w; \quad w - w_0 = \Delta w.$$

З урахуванням цих зауважень

$$x \approx 2Q \frac{\Delta w}{w_0}.$$

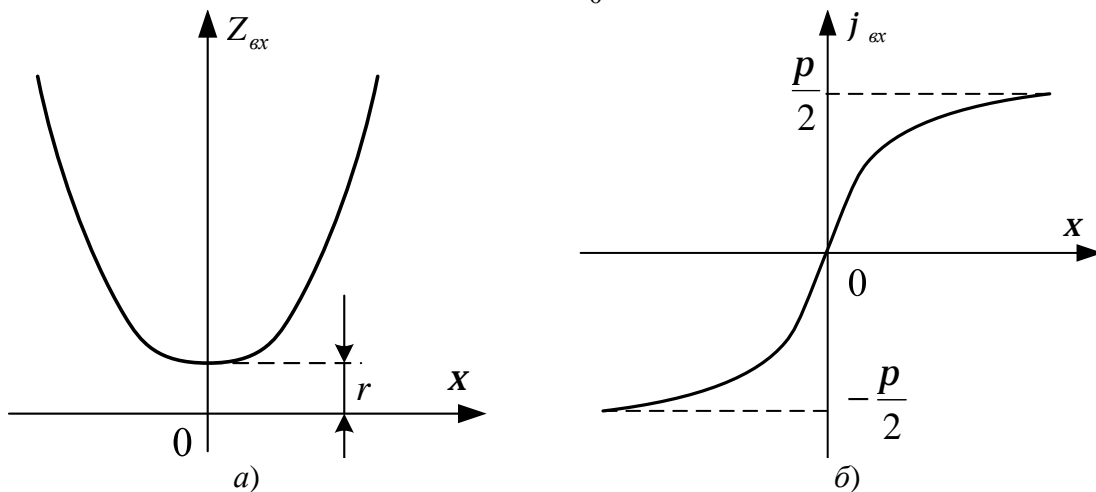


Рисунок 5.13 – Частотні характеристики вхідного опору контуру при  $Q \geq 50$

На рис. 5.13, *a* зображено залежність модуля комплексного вхідного опору, а на рис. 5.13, *б* – залежність аргументу комплексного вхідного опору послідовного контуру від узагальненого розстроювання для достатньо добротних контурів, де

$$x \approx 2Q \frac{\Delta w}{w_0} = 2Q \frac{\Delta f}{f_0}. \quad (5.20)$$

У зв'язку з цим вираз для комплексного вхідного опору  $\underline{Z}_{ex}$  переписеться:

$$\underline{Z}_{ex} = r(1 + jx) = r \left[ 1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right], \quad (5.21)$$

або при малих розстроюваннях:

$$\underline{Z}_{ex} = r(1 + jx) \approx r \left( 1 + 2Q \frac{\Delta f}{f_0} \right), \quad (5.22)$$

відповідно:

$$j_{ex} = \arctg x = \arctg Q \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right), \quad (5.23)$$

$$j_{ex} = \arctg x \approx \arctg \left( 2Q \frac{\Delta f}{f_0} \right). \quad (5.24)$$

Зауважимо, що вираз (5.20) є справедливим лише для добротних контурів, які мають вузьку смугу пропускання.

При  $f = f_0$  ( $\Delta f = 0$  і  $x = 0$ ) модуль вхідного опору є мінімальним і дорівнює опору втрат  $r$ . Аргумент  $j_{ex} = 0$ , що свідчить про те, що зсув фаз між напругою  $E$  і струмом у контурі дорівнює нулю, а вхідний опір контуру носить активний характер. Напруги  $U_{mC}^{\delta} = -U_{mL}^{\delta}$  компенсують дії одна одної.

Оскільки вираз для модуля вхідного опору, як функції узагальненого розстроювання

$$Z_{ex} = r\sqrt{1 + x^2} \approx r\sqrt{1 + \left( 2Q \frac{\Delta f}{f_0} \right)^2} \quad (5.25)$$

містить  $x^2$ , то при  $f < f_0$  ( $\Delta f < 0$  і  $x < 0$ ) значення  $Z_{ex}$  буде більшим за  $r$  і зростатиме при подальшому розстроюванні. Аргумент  $j_{ex}$  стає негативним і зменшуватиметься зі зростанням розстроювання, прямуючи до  $-90^\circ$ . Ємнісний опір  $X_C$  стає більшим за індуктивний опір  $X_L$ , що говорить про ємнісний характер вхідного опору, а напруга  $E$  відставатиме від струму у контурі на кут  $j_{ex} = -\arctg \left( 2Q \frac{\Delta f}{f_0} \right)$ .

При  $f > f_0$  ( $\Delta f > 0$  і  $x > 0$ ) з'являється права гілка графіка функції  $Z_{ex}(x)$ , яка при високодобротних контурах буде симетричною лівій відносно осі ординат. Аргумент  $j_{ex}$  стає позитивним і зростатиме при подальшому розстроюванні, прямуючи до  $+90^\circ$ . Індуктивний опір стає більшим за ємнісний і струм у контурі відстає від напруги  $E$  на кут  $j_{ex} = \arctg \left( 2Q \frac{\Delta f}{f_0} \right)$ , що говорить про індуктивний характер вхідного опору.

### 5.3.5 Амплітудно-частотні характеристики за напругою

Відношення комплексу напруги на виході контуру  $U_2$ , яку можна знімати з конденсатора (рис. 5.8) або з котушки індуктивності, до комплексу вхідної напруги  $E$  називається комплексним коефіцієнтом передачі контуру за напругою.

$$K = U_2 / E. \quad (5.26)$$

Залежність модуля  $K$  комплексного коефіцієнта передачі за напругою від частоти генератора називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) контуру:

$$|K(f)| = K(f).$$

Оскільки струм через усі елементи послідовного контуру буде однаковим, можемо записати, що:

$$K_C = \frac{U_2}{E} = \frac{1/j\omega C}{r \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}, \quad (5.27)$$

$$K_L = \frac{j\omega L}{r \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}, \quad (5.28)$$

де  $K_C$  і  $K_L$  – комплексні коефіцієнти передачі послідовного контуру, коли вихідна напруга знімається з конденсатора і котушки індуктивності, відповідно.

Помноживши і розділивши вирази (5.27) на  $\omega/\omega_0$  і (5.28) на  $\omega_0/\omega$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} K_C &= \frac{-jQ}{\frac{\omega}{\omega_0} \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} = \\ &= -\frac{jQ}{\frac{f}{f_0} \left[ 1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]} = K_C(f) \cdot e^{-j\varphi_C(f)}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} K_L &= \frac{jQ}{\frac{\omega_0}{\omega} \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} = \\ &= \frac{jQ}{\frac{f_0}{f} \left[ 1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]} = K_L(f) \cdot e^{-j\varphi_L(f)}. \end{aligned} \quad (5.30)$$



Амплітудно-частотні характеристики за напругою, очевидно, визначатимуться за формулами:

$$K_C = \frac{Q}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + Q^2 \left[\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 - 1\right]^2}}, \quad (5.31)$$

$$K_L = \frac{Q}{\sqrt{\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 + Q^2 \left[1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2\right]^2}}. \quad (5.32)$$

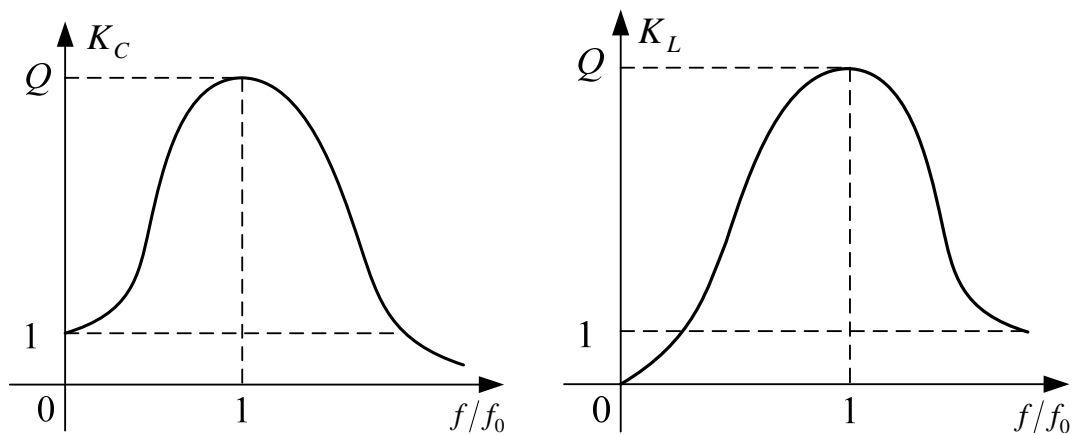


Рисунок 5.14 – АЧХ послідовного контуру

Крива  $K_C(f)$  починається з одиниці, бо на частоті  $f = 0$  вся напруга спаде на конденсаторі ( $X_C = \infty$ ). Далі графік зростатиме, досягнувши значення  $Q$  при  $f = f_0$  (резонанс напруг), потім спадатиме, прямуючи до нуля.

Крива ж  $K_L(f)$  починається з нуля, бо напруга  $U_2 = IX_L = 0$  при  $f = 0$  ( $X_L = 2pfL = 0$ ), а уся напруга  $E$  спадатиме на конденсаторі. При  $f = f_0$  крива досягає максимального значення  $Q$  і далі спадатиме прямуючи при необмеженому зростанні  $f$  до одиниці ( $f \rightarrow \infty, X_L = 2pfL \rightarrow \infty; U_2 = IX_L \rightarrow E$ ).

### 5.3.6 Фазочастотні характеристики за напругою

Звернемося до виразів (5.27) та (5.28) і визначимо аргументи цих комплексів:

$$j_c(f) = -\frac{p}{2} - \operatorname{arctg} Q \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right), \quad (5.33)$$

$$j_L(f) = \frac{p}{2} - \operatorname{arctg} Q \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right), \quad (5.34)$$

де:  $j_c(f)$  і  $j_L(f)$  – фазочастотні характеристики контуру за напругою, коли напруга знімається з конденсатора і котушки індуктивності, відповідно.

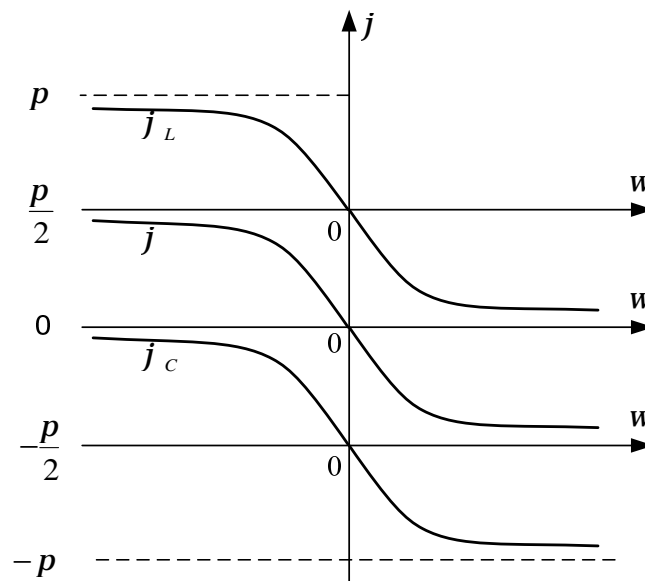


Рисунок 5.15 – ФЧХ послідовного контуру

На рис. 5.15 подані графіки функцій (5.33), (5.34) і  $j = j_c + j_L$ . На резонансній частоті  $f/f_0 = 1$ ,  $j_c = -p/2$  – струм у контурі випереджає напругу на конденсаторі на  $90^\circ$ ,  $j_L = p/2$  – струм у контурі відстає від напруги на котушці індуктивності на  $90^\circ$ ,  $j = 0$  – струм у контурі збігається за фазою з напругою на вході контуру. Напруги на конденсаторі і котушці індуктивності однакові за величиною (оскільки їх опори однакові) і протилежні за фазами, вхідний опір носить активний характер.

На частотах  $f < f_0$ ,  $j < 0$  – напруга  $E$  відстає від струму у контурі, вхідний опір носить ємнісний характер.

На частотах  $f > f_0$ ,  $j > 0$  – напруга  $E$  випереджає струм у контурі, вхідний опір носить індуктивний характер.

### 5.3.7 Настроювальні криві

Комплексна амплітуда струму у послідовному контурі  $I_m$  дорівнює:

$$I_m = \frac{E_m}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Модуль цього виразу:

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

На резонансній частоті  $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$  ( $X = 0$ ) і амплітуда струму досягає максимального значення.

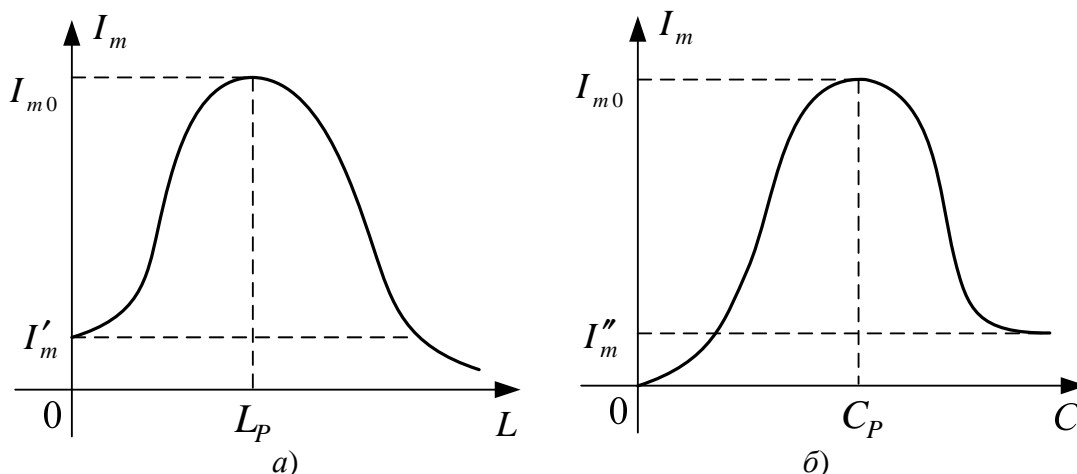


Рисунок 5.16 – Настроювальні криві: а) зміною індуктивності  $L$ , б) зміною ємності  $C$

Але настроїти контур у резонанс (досягти  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ ) можна змінням індуктивності  $L$ , котушки або змінням ємності  $C$  конденсатора, тобто настроювати контур, регулюючи ємність конденсатора (рис. 5.16, б) або – індуктивність котушки (рис. 5.16, а).

При  $L = 0$  струм у контурі:

$$I'_m = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

При  $L = L_p$  у контурі настає резонанс  $\left( \omega L_p - \frac{1}{\omega C} = 0 \right)$  і струм зростає до максимального значення  $I_{0m}$ . При необмеженому зростанні  $L$  ( $L \rightarrow \infty$ ) струм прямуватиме до нуля.

При  $C = 0$  ( $X_C = 1/\omega C = \infty$ ) і струм у контурі дорівнюватиме нулю. При  $C = C_p$  у контурі настає резонанс  $\left( \omega L - \frac{1}{\omega C_p} = 0 \right)$  і струм зростає до максимального значення  $I_{0m}$ . При необмеженому збільшенні  $C$   $\left( \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0 \right)$  струм у контурі прямуватиме до значення

$$I_m'' = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}.$$

На практиці у більшості випадків настроювання контуру на потрібну частоту (радіостанцію) є доцільнішим за допомогою конденсатора змінної ємності, який є радіокомпонентом конструктивно більш простим, дешевшим і надійнішим ніж варіометр – система двох котушок індуктивності – який є пристроєм змінної індуктивності.

### 5.3.8 Рівняння вибірності та смуга пропускання при невеликих розстроюваннях

Звернемося знову до схеми послідовного коливального контуру (рис. 5.8), де вхідна напруга знімається з конденсатора  $U_2 = U_C$ .

Коефіцієнт передачі за напругою  $K = K_C$  і дорівнюватиме згідно з виразами (5.19) та (5.27):

$$|K| = K = \frac{1/\omega C}{r\sqrt{1+x^2}}.$$

Зваживши, що при невеликих розстроюваннях  $\omega \approx \omega_0$

$$K = \frac{1/\omega_0 C}{r\sqrt{1+x^2}} = \frac{r}{r\sqrt{1+x^2}} = \frac{Q}{\sqrt{1+x^2}},$$

де:  $x = 2Q\Delta f / f_0$ .

На резонансній частоті  $x = 0$  і коефіцієнт передачі досягає максимального значення:  $K_0 = Q$ .

Відносний коефіцієнт передачі за напругою

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (5.35)$$

На рис. 5.17 зображено графік рівняння вибірності (5.35) або АЧХ у відносних координатах, де по осі абсцис відкладаються значення узагальненого розстроювання  $x$ , а по осі ординат – відносний (нормований) коефіцієнт передачі за напругою.

Максимум цієї функції дорівнює одиниці при резонансі, коли  $x = 0$ . Важливим є те, що такою вона буде для будь-якого контуру, бо рівняння вибірності визначається лише значеннями узагальненого розстроювання  $x$ .

Зрозуміло, що рівняння (5.35) є справедливим при будь-яких розстроюваннях, коли

$$x = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

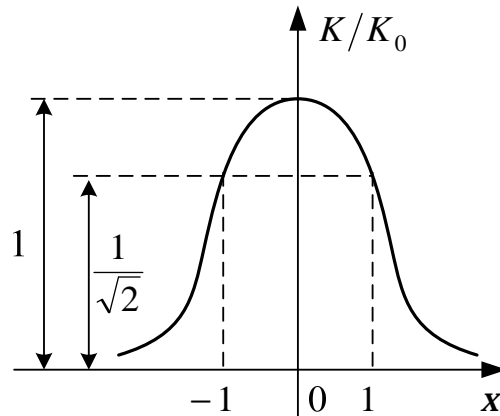


Рисунок 5.17 – Крива вибірності за напругою

В радіотехніці використовуються контури з добротностями порядку сотні одиниць, а тому такі контури будуть працювати при невеликих (малих) розстроюваннях, коли можна вважати, що

$$x = 2Q\Delta f / f_0 = Q \frac{2\Delta f}{f_0}. \quad (5.36)$$

Розглянемо випадок, коли  $x = \pm 1$  ( $|x| = 1$ ). Підставивши ці значення в (5.35), отримаємо, що

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

З виразу (5.36) матимемо:

$$2\Delta f = x \frac{f_0}{Q}; \left( \Delta f = \pm \frac{f_0}{2Q} \right).$$

Введемо поняття смуги пропускання контуру, як діапазону частот  $\Delta f_{np}$  (рис. 5.18), у межах якого коефіцієнт передачі за напругою зменшується до значень 0,707 від його максимального значення  $K_0$ .

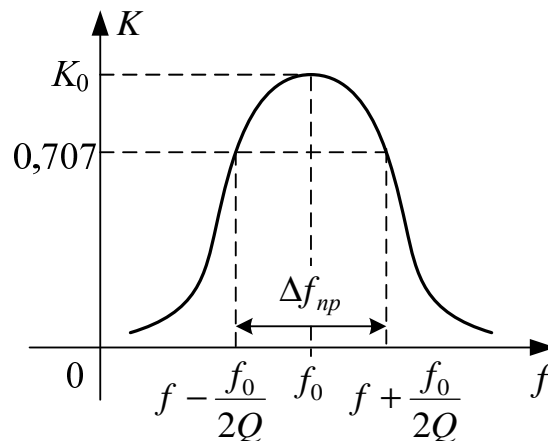


Рисунок 5.18 – Ілюстрація до поняття смуги пропускання контуру

У відносних координатах (рис. 5.17) на краях смуги пропускання будь-якого контуру узагальнене розстроювання  $x = \pm 1$ , а відносний коефіцієнт передачі за напругою – 0,707. Отже, для добротних контурів смуга пропускання визначається за формулою:

$$\Delta f_{np} = f_0 / Q.$$

Як бачимо, смуга пропускання контуру буде збільшуватись при зменшенні його добротності, а більшій добротності відповідає менша смуга пропускання.

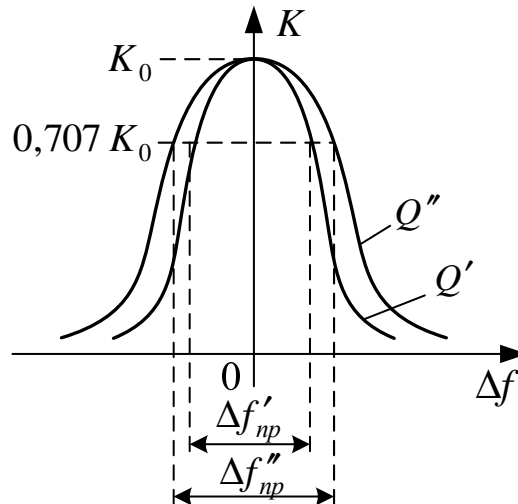


Рисунок 5.19 – До вибірності двох контурів

На рис. 5.19 подано АЧХ за напругою двох контурів, які мають однакові резонансні частоти та однакові значення резонансних коефіцієнтів передачі  $K_0$ , але різні добротності ( $Q' > Q''$ ). У них будуть різними смуги пропускання ( $\Delta f'_{np} < \Delta f''_{np}$ ).

Кажуть, що контур з більшою добротністю  $Q'$  має кращі селективні (вибірні) властивості ніж другий контур.

Його АЧХ (резонансна крива) буде більш вузькою і смуга пропускання буде вужчою. Другий же контур матиме слабкішу вибірність (здатність виділяти коливання за частотами близькими до  $f_0$ ), але при цьому матиме ширшу смугу пропускання.

Такі властивості коливальних контурів, як вибірних систем, реалізуються, наприклад, в радіоприймальних пристроях при виділенні з усіх сигналів, що наводять е. р. с. у приймальній антені, лише сигнал тієї радіостанції, на яку приймач настроєний.

На рис. 5.20 наводиться спрощена схема застосування послідовного контуру як входного кола радіоприймача. Контур  $LC$  працює від антени  $A$ , яка на його вході збуджує напругу  $E$  від різних радіостанцій, що працюють в ефірі. Але, будучи настроєним на частоту певної станції ( $f_c = f_0$ ), напруга на його виході  $U_2 = K_0 U_1 = Q U_1$  тільки для сигналу цієї станції.

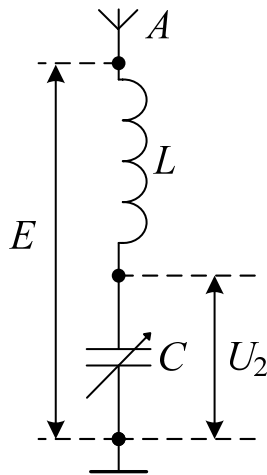


Рисунок 5.20 – Приклад застосування послідовного контуру

При добротності  $Q = 100$  сигнал  $U_2$  від станції, на яку настроїли радіоприймач, буде у 100 разів більшим чим сигнали від решти станцій. Його контур і вибрав (виділив) серед усіх сигналів, що діяли в антені. Чим вище добротність контуру, тим, очевидно, і кращим буде цей вибір, а значить кращою буде і вибірність контуру.

Коли частота генератора стає рівною власній частоті послідовного контуру, настає резонанс напруг при якому:

- вхідний опір контуру стає мінімальним і дорівнює опору втрат;
- контурний струм стає максимальним;
- напруги на реактивних елементах досягають максимуму, стають однаковими за величиною і у  $Q$  разів більшими за напругу генератора.

На резонансній частоті вхідний опір послідовного контуру носить активний характер, бо  $X = \omega_0 L - 1/\omega_0 C = 0$  і напруга генератора за фазою збігається з контурним струмом.

На частоті  $\omega < \omega_0$  вхідний опір має ємнісний характер, бо  $X = \omega L - 1/\omega C < 0$  і напруга генератора відстає від контурного струму за фазою на кут:  $j = \arctg X/r$ .

На частоті  $\omega > \omega_0$  вхідний опір має індуктивний характер, бо  $X = \omega L - 1/\omega C > 0$  і напруга генератора випереджає контурний струм за фазою на кут:  $j = \arctg X/r$ .

При малих розстроюваннях ( $\Delta f/f \leq 0,05$ ) узагальнене розстроювання контуру

$$x = 2Q \cdot \Delta f / f_0 .$$

Смуга пропускання контуру є діапазон частот, у межах якого коефіцієнт передачі за напругою має значення не менше ніж 0,707 від максимального, і може бути виражене формулою:

$$\Delta f_{np} = f_0 / Q .$$

## 5.4 Вимушені коливання у паралельному контурі

### 5.4.1 Паралельний контур загального виду

Паралельний контур загального виду (рис. 5.21) складається з трьох паралельних віток: генератора струму (е. р. с. з внутрішнім опором  $R_i$ ); котушки  $L_1$ , конденсатора  $C_1$  та опору втрат у вітці  $r_1$ ; котушки  $L_2$ , конденсатора  $C_2$  та опору втрат  $r_2$ .

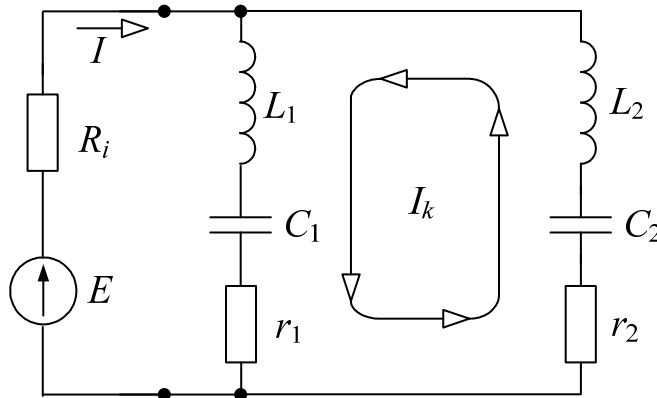


Рисунок 5.21 – Еквівалентна схема паралельного контуру загального виду

Комплексні опори у вітках є такими:

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = r_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right),$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2 = r_2 + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right).$$

Вхідна провідність контуру дорівнює:

$$\underline{Y}_{ex} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2},$$

$$\underline{Y}_{ex} = \frac{1}{r_1 + jx_1} + \frac{1}{r_2 + jx_2} = \frac{r_1 - jx_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2 - jx_2}{r_2^2 + x_2^2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} - j \left( \frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} \right) = g - jb, \quad (5.37)$$

де активна складова комплексної вхідної провідності дорівнює:

$$g = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2}$$

реактивна складова дорівнює:



$$b = \frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2}.$$

При резонансі реактивна провідність має дорівнювати нулю ( $b_0 = 0$ ), а значить:

$$x_1(r_2^2 + x_2^2) + x_2(r_1^2 + x_1^2) = 0, \quad (5.38)$$

і вхідна провідність носить чисто активний характер:

$$Y_{\text{вх}} = Y_0 = g_0 = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2},$$

яку у подальшому будемо називати резонансною вхідною провідністю, а обернену їй величину  $R_0 = 1/g_0$  – резонансним вхідним опором контуру.

Згідно з (5.38):

$$x_1(r_2^2 + x_2^2) = -x_2(r_1^2 + x_1^2),$$

$$\frac{1}{r_2^2 + x_2^2} = -\frac{x_1}{x_2(r_1^2 + x_1^2)},$$

а отже

$$g_0 = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} - \frac{r_2 \cdot x_1}{x_2(r_1^2 + x_1^2)} = \frac{r_1 - r_2 \frac{x_1}{x_2}}{r_1^2 + x_1^2}, \quad (5.39)$$

$$R_0 = \frac{r_1^2 + x_1^2}{r_1 - r_2 \frac{x_1}{x_2}}. \quad (5.40)$$

На практиці на частотах, близьких до резонансної, виконуються сильні нерівності:

$$r_1 \ll |x_1|, \quad r_2 \ll |x_2|,$$

а тому умова резонансу (5.38) може бути переписана так:

$$x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2 = 0; \quad x_2 = -x_1. \quad (5.41)$$

Зауважимо, що у паралельному коливальному контурі загального виду (рис. 5.21) з дуже малими втратами резонанс настає тоді, коли реактивні опори віток контуру рівні між собою за величиною та протилежні за знаком. Іншими словами, якщо, наприклад, ліва вітка має індуктивний характер опору, то права – обов'язково матиме ємнісний характер. Тоді вхідний резонансний опір  $R_0$  дорівнюватиме:

$$R_0 = \frac{x_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{x_2^2}{r_1 + r_2}. \quad (5.42)$$

Цей резонанс будемо називати паралельним резонансом на відміну від двох резонансів, які можливі у лівій та правій вітках контуру загального виду, як у послідовних контурах. У лівій вітці це станеться на частоті  $\omega_{01}$ , яка дорівнюватиме:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

а у правій вітці на частоті:

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Звернемося до виразу  $x_2 = -x_1$ . Він означає, що відносно спільної напруги для обох паралельних віток, в одній з них струм буде відставати від напруги на контурі на  $90^\circ$ , а в іншій – на  $90^\circ$  випереджати цю напругу. Тобто, струми у вітках будуть зсунуті за фазою на  $180^\circ$  і якщо, наприклад, в лівій вітці струм напрямлений знизу вгору, то у правій – зверху вниз, а оскільки ці струми за величиною однакові (бо  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $|x_1| = |x_2|$ ), можна вважати, що у контурі існує контурний струм  $I_k$  (рис. 5.21), для якого  $x_1 + x_2 = 0$ , а у контурі і виникає паралельний резонанс, який називається резонансом струмів.

А тепер перейдемо до аналізу паралельних контурів I, II і III видів, як окремих випадків контуру загального виду. А це означає, що все досліджене щодо контуру загального виду повною мірою справедливе і для конкретних контурів.

#### 5.4.2 Паралельний контур I виду

Контур I виду у одній вітці, наприклад, в лівій має  $L_1 = L$ ,  $r_1 = r$ ,  $C_1 = \infty$ , а в правій  $C_2 = C$ ,  $L_2 = 0$ ,  $r_2 = 0$  (рис. 5.22). Таким чином ми зважили на те, що сучасні конденсатори мають втрати значно менші ніж котушки індуктивності і ними можна знехтувати.

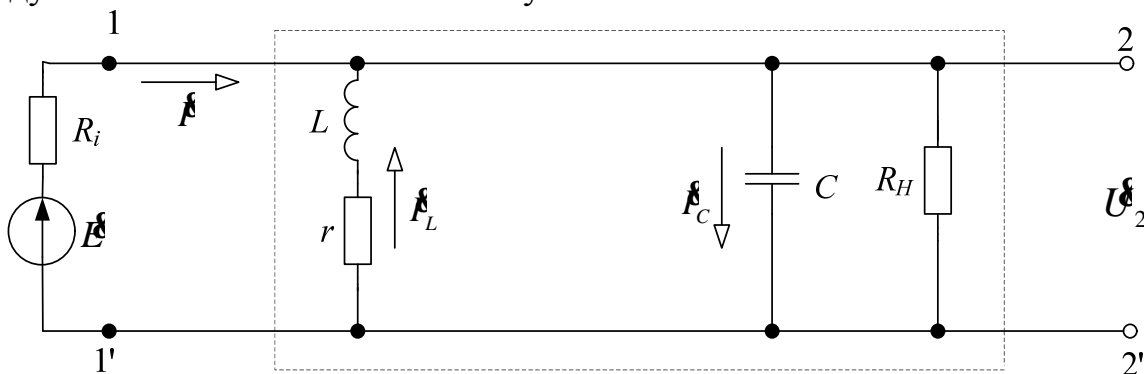


Рисунок 5.22 – Еквівалентна схема паралельного контуру I виду

Паралельним коливальним контуром I виду називається електричне коло, яке складається з паралельного з'єднання генератора струму ( $E, R_i$ ), котушки індуктивності  $L$  та конденсатора  $C$ .

В реальних схемах контур працює на навантаження, яким є та частина пристрою, для якої контур виконує роль джерела сигналу. Вплив навантаження на параметри контуру символізує шунт – резистор  $R_H$ .

#### 5.4.2.1 Вхідний опір

Припустимо спочатку, що цього резистора нема і  $R_H = \infty$ . Вихідна напруга  $U_2$  знімається з контуру (однакова при резонансі на конденсаторі  $C$  і на котушці індуктивності  $L$ ). Вона значно менша від е. р. с. генератора через спад напруги на великому внутрішньому опорі  $R_i(I \cdot R_i)$ :

$$U_2 = E_1 - IR_1.$$

Вхідний опір контуру – це відношення напруги на контурі  $U_2$  до струму генератора  $I$ . Цей же опір, будучи комплексним, може бути визначеним через власні параметри контуру:

$$Z_1 = r = j\omega L; \quad Z_2 = 1/j\omega C.$$

$$Z_{ex} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(r + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

При наближенні до резонансу виправдовується сильна нерівність  $r \ll \omega L$  і в чисельнику в дужках  $r$  нехтуємо. У знаменнику цього зробити ми не можемо, бо на частотах смуги пропускання різниця  $\omega L - 1/\omega C$  є величиною малою, а на резонансній частоті дорівнює нулю. З урахуванням цих зауважень, вираз для вхідного опору буде:

$$Z_{ex} = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{r \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} = \frac{L/C}{r(1 + j\xi)} = \frac{\rho Q}{1 + j\xi}. \quad (5.43)$$

Комплексний вхідний опір складається з активної  $R_{ex}$  і реактивної  $X_{ex}$  частин:

$$Z_{ex} = R_{ex} + jX_{ex}.$$

Для знаходження цих складових домножимо і розділимо (5.43) на число, комплексно спряжене зі знаменником, і тоді:

$$Z_{\text{ex}} = \frac{rQ}{1+jx} \cdot \frac{1-jx}{1-jx} = \frac{rQ(1-jx)}{1+x^2} = \frac{rQ}{1+x^2} - jx \frac{rQ}{1+x^2}.$$

Отже, активна та реактивна складові комплексного вхідного опору будуть дорівнювати:

$$R_{\text{ex}} = \frac{rQ}{1+x^2}, \quad (5.44)$$

$$X_{\text{ex}} = -x \frac{rQ}{1+x^2}, \quad (5.45)$$

Модуль комплексного вхідного опору та його аргумент  $j_{\text{ex}}$ :

$$Z_{\text{ex}} = \frac{rQ}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (5.46)$$

$$j_{\text{ex}} = \text{arctg}(-x).$$

#### 5.4.2.2 Частотні характеристики вхідного опору

При резонансі  $\Delta f = 0, x = 0$  і тоді будемо мати:

$$Z_{\text{ex}} = R_{\text{ex}} = R_0 = rQ; \quad X_{\text{ex}} = 0; \quad j_{\text{ex}} = 0.$$

У виразах (5.44) та (5.46) узагальнене розстроювання  $x$  знаходиться в знаменнику у другому степені. Значить графіки цих функцій будуть симетричними відносно осі ординат, а значення  $Z_{\text{ex}}$  та  $R_{\text{ex}} > 0$  (рис. 5.23, а).

При  $x = 0$  вони досягатимуть однакового максимального значення резонансного вхідного опору паралельного контуру  $R_0 = rQ$ .

При  $x = \pm 1$  графік  $R_{\text{ex}}$  пройде через точки з координатами  $\left(1, \frac{1}{2} rQ\right)$  та  $\left(-1, \frac{1}{2} rQ\right)$ , а графік  $Z_{\text{ex}}$  – через точки з координатами  $\left(1, \frac{rQ}{\sqrt{2}}\right)$  та  $\left(-1, \frac{rQ}{\sqrt{2}}\right)$ .

При зростанні  $x$  за модулем графіки їх будуть прямувати монотонно до нуля, але графік  $Z_{\text{ex}}$  буде проходити в усіх точках вище ніж графік  $R_{\text{ex}}$  через те, що  $Z_{\text{ex}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , а  $R_{\text{ex}} \approx \frac{1}{1+x^2}$ , тобто зі зростанням  $x$  у другому випадку знаменник зростатиме швидше ніж у першому.

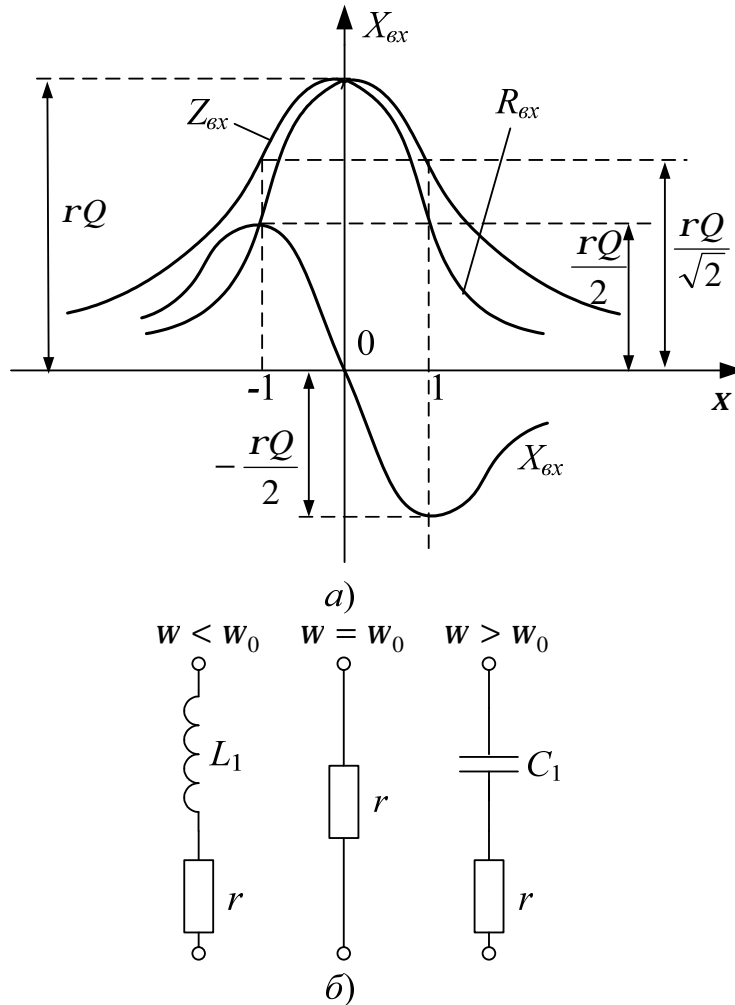


Рисунок 5.23 – Частотні характеристики вхідного опору

При  $x = 0$ ,  $X_{ex} = 0$ , а графік функції (5.45) буде симетричним відносно точки початку координат. При позитивних значеннях узагальненого розстроювання  $X_{ex} < 0$ , а при негативних  $-X_{ex} > 0$ , функція має два екстремуми. Знайдемо їх, для чого продиференціюємо її за  $x$  і прирівняємо похідну до нуля:

$$\frac{dX_{ex}}{dx} = -rQ \cdot \frac{1+x^2 - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Функція дорівнює нулю, коли дорівнює нулю її чисельник:

$$(1-x^2)rQ = 0,$$

звідки при  $1-x^2 = 0$ , маємо:  $x^2 = 1$ ,  $x = \pm 1$ . Знайдемо відповідні екстремальні значення функції  $X_{ex}$ :

$$\text{при } x = 1, X_{ex} = -rQ/2,$$

$$\text{при } x = -1, X_{ex} = rQ/2.$$

При  $x = 0$  вхідний опір є чисто активним, максимальним і дорівнює резонансному значенню  $R_0 = rQ$  (рис. 5.23, б).

При  $x > 0$ ,  $X_{ex} < 0$ , а значить вхідний опір носить активно-ємнісний характер

$$\underline{Z}_{ex} = R_{ex} - j \frac{1}{\omega C_1},$$

де  $C_1$  – еквівалентна ємність контуру.

При  $x < 0$ ,  $X_{ex} > 0$ , а отже вхідний опір носить активно-індуктивний характер

$$\underline{Z}_{ex} = R_{ex} + j\omega L_1,$$

де  $L_1$  – еквівалентна індуктивність контуру.

На рис. 5.24 зображена частотна характеристика аргументу комплексного вхідного опору. Графік її проходить через початок координат і при  $x > 0$  має гілку де  $j_{ex} < 0$ , а при  $x < 0$  – гілку  $j_{ex} > 0$ .

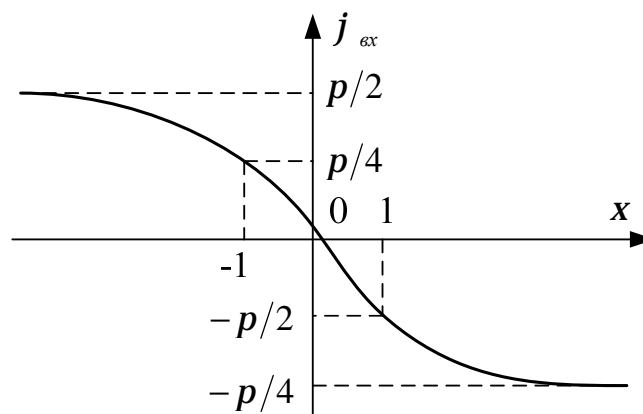


Рисунок 5.24 – Частотна характеристика аргументу вхідного опору

Це означає, що при резонансі  $j_{ex} = 0$  струм генератора  $I$  та напруга на контурі збігаються за фазою (**вхідний опір – активний**).

При  $x < 0$ ,  $j_{ex} > 0$  і струм генератора відстає від напруги на контурі (**вхідний опір має індуктивний характер**).

При  $x > 0$ ,  $j_{ex} < 0$  і струм генератора випереджає напругу на контурі (**вхідний опір має ємнісний характер**).

### 5.4.2.3 Векторні діаграми і еквівалентні схеми контуру при розстроюванні

Звернемося до рис. 5.22. У контурі існують три струми:  $\underline{I}$  – струм генератора,  $\underline{I}_L$  – струм у лівій вітці та  $\underline{I}_C$  – струм у правій вітці контуру. Напруги ж на котушці та конденсаторі однакові  $\underline{U}_2$ .

На резонансній частоті струм  $I_C$  випереджатиме напругу  $U_2$  на  $90^\circ$ , а струм  $I_L$  – відставатиме від неї на кут трошки менший за  $90^\circ$ , за амплітудою будучи практично рівним струму через конденсатор. Струм  $I = I_C + I_L$  збігатиметься з напругою  $U_2$  і кут  $j_{ex} = 0$  (рис. 5.25, а). Вхідний опір носитиме чисто активний характер, а схемі контура (рис. 5.22) відповідатиме схема еквівалентна їй (рис. 5.26, а).

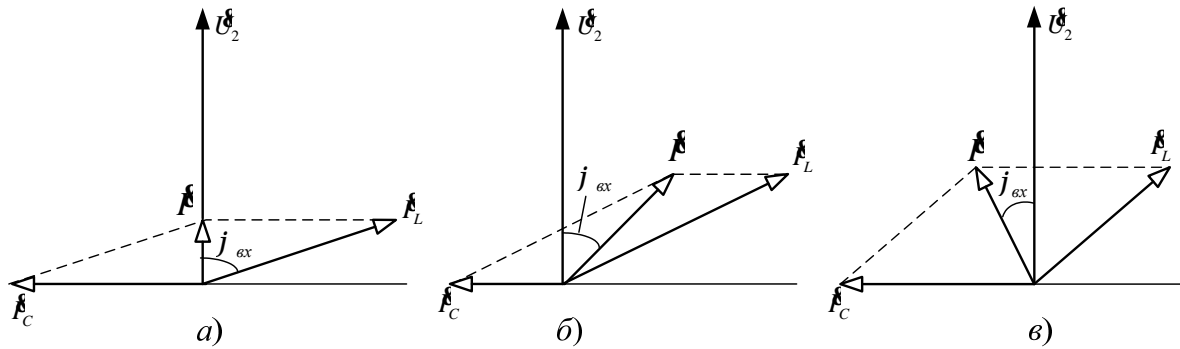


Рисунок 5.25 – Векторні діаграми паралельного контуру

На частотах менших за резонансну ( $w < w_0$ ) опір конденсатора  $X_C$  за модулем стає більшим за опір котушки  $X_L$ , струм через конденсатор  $I_C$  стає меншим за  $I_L$ , а їх сумарний вектор  $I = I_C + I_L$  відставатиме від напруги  $U_2$  на кут  $j_{ex}$  (рис. 5.25, б). Вхідний опір носить активно-індуктивний характер  $Z_{ex} = R_{ex} + jwL_1$  (рис. 5.26, б).

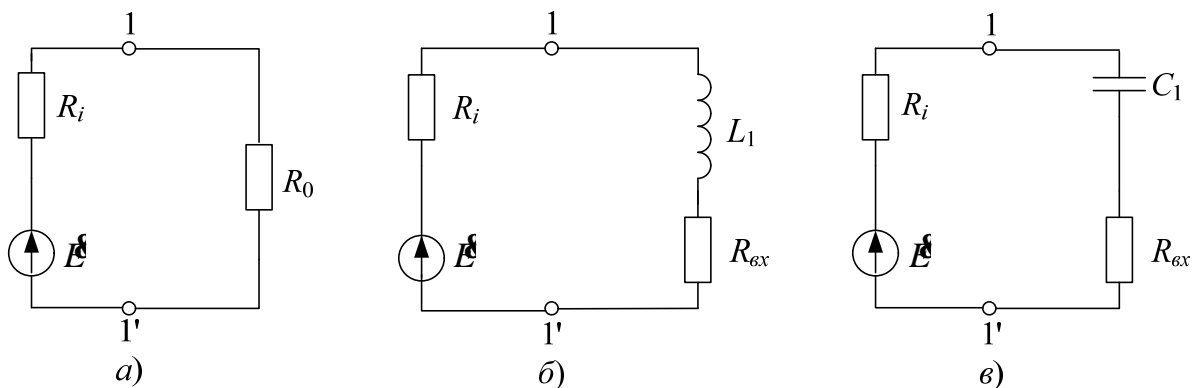


Рисунок 5.26 – Еквівалентні схеми паралельного контуру

На частотах більших за резонансну ( $w > w_0$ ) опір конденсатора  $X_C$  буде меншим за опір котушки  $X_L$ , струм через конденсатор – більшим за струм через котушку, сумарний струм  $I$  випереджатиме напругу на кут  $j_{ex} < 0$  (рис. 5.25, в). Вхідний опір носитиме активно-ємнісний характер  $Z_{ex} = R_{ex} - j1/wC_1$ , (рис. 5.26, в).

#### 5.4.2.4 Резонанс струмів

Вираз (5.38) є умовою паралельного резонансу. Для схеми контуру I виду (рис. 5.22) її маємо записати у вигляді:

$$w_0 L \left( \frac{1}{w_0^2 C^2} \right) - \frac{1}{w_0 C} (r^2 + w^2 L^2) = 0, \quad (5.47)$$

звідки значення резонансної частоти  $w_0$  буде таким:

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L}{C} - r^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{r^2 - r^2}{r^2}}. \quad (5.48)$$

Або для контурів з достатньою добротністю ( $r \gg r$ ) резонансна частота дорівнюватиме:

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.49)$$

Якби  $r = 0$  (на практиці біля резонансу  $r \ll wL$ ), то струми у вітках паралельного контуру були однаковими і дорівнювали б:

$$I_L = I_C = U_2 / r,$$

але взаємно зсунутими на  $180^\circ$  за фазою, утворюючи єдиний контурний струм:

$$I_K = I_L = I_C.$$

У такому випадку можна було б стверджувати, що наш контур є контуром без втрат (ідеальний контур), де відбуваються процеси рівноцінного обміну енергіями між котушкою індуктивності  $L$  та конденсатором  $C$ .

При цьому резонансний вхідний опір контуру дорівнюватиме нескінченності ( $r = 0$ )  $R_0 = rQ = r^2 / r = \infty$ , і струм генератора  $I = 0$ .

Реально втрати в контурі є і тому струми у вітках будуть, хоч незначно, відрізнятися за амплітудою, а різниця фаз буде трошки меншою від  $180^\circ$ . На резонансній частоті струм генератора  $I$  дорівнюватиме:

$$I = U_2 / R_0 = U_2 / rQ,$$

а струм у контурі  $I_K$  буде:

$$I_K = U_2 / r.$$

Розділивши  $I_K$  на  $I$  отримаємо:

$$\frac{I_K}{I} = \frac{U_2 / r}{U_2 / rQ} = Q, \quad I_K = I \cdot Q,$$

тобто, струм у контурі в  $Q$  разів більший ніж струм від генератора.



Нічого дивного у цьому немає. Адже, при відсутності втрат струм генератора взагалі дорівнював би нулю, а коливання у контурі відбувались би з частотою  $\omega_0$ . Справа полягає в тому, що за певний відрізок часу котушка індуктивності та конденсатор накопичують електричну енергію, якою вони і обмінюватимуться, але без підтримки генератора через втрати у контурі ці коливання були б згасаючими. Інакше кажучи, генератор інjektує в контур таку кількість енергії, яка втрачається у контурі, дозаряджаючи конденсатор і котушку, в результаті чого коливання у контурі мають незгасаючий характер. Для цього підживлення і потрібна невеличка кількість енергії, яка поставляється у контур невеличким струмом  $I$ . Очевидно, чим менші втрати (більша добротність) у контурі, тим меншим потрібен буде і струм дозарядження реактивних елементів. Конденсатор і котушка можуть накопичувати достатньо велику енергію і обмін нею викличе у контурі достатньо великий контурний струм, який, як бачимо, у  $Q$  разів більший за струм генератора, через що це явище і отримало назву резонансу струмів.

#### 5.4.2.5 Енергетичне пояснення характеру вхідного опору паралельного контуру

На резонансній частоті при  $r \ll \omega_0 L$  опори обох віток контуру практично (рис. 5.22) однакові  $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ , в них протікають однакові за величиною струми  $i$ , отже, конденсатор і котушка здатні запасати однакові за кількістю енергії протягом часу  $t$ :

$$W_L = I_L^2 \omega_0 L \cdot t = W_C = I_C^2 \cdot \frac{1}{\omega_0 C} \cdot t.$$

Реактивні елементи здатні накопичити однакову кількість енергії, але за рахунок втрат конденсатор, наприклад, виявився б недозарядженим, якби його не дозарядив генератор, скомпенсувавши втрати у контурі (рис. 5.22).

При  $\omega < \omega_0$  потенціальні можливості котушки до накопичення енергії більші ніж конденсатора. Для однозначності вважатимемо, що реактивний опір котушки удвічі менший від ємнісного опору конденсатора ( $X_L = 0,5 X_C$ ), тоді струм через котушку буде удвічі більшим ніж через конденсатор ( $I_L = 2 I_C$ ). Така котушка здатна накопичити кількість енергії:

$$W_L = I_L^2 X_L \cdot t = (2I_C)^2 0,5 X_C \cdot t = 2I_C^2 X_C \cdot t = 2W_C,$$

удвічі більшу ніж конденсатор. Тоді "розряджаючись", котушка половину накопиченої енергії віддасть конденсаторові (і більше він не візьме), а решту – генератору. У свою чергу, недозаряджений конденсатор віддасть усю енергію котушці, потенціальні можливості якої будуть задовільнені лише наполовину, але її "дозарядить" генератор. Потім усе повторюється і спостерігається обмін енергіями між котушкою і генератором. Образно

кажучи, генератор "бачить" тільки котушку, яка з ним обмінюється енергією. А тому і характер вхідного опору контуру є індуктивним (рис. 5.26, б).

При  $w > w_0$ , нехай для прикладу  $X_L = 2X_C$ ,  $I_L = 0,5I_C$ , а значить:

$$W_L = I_L^2 \cdot X_L \cdot t = (0,5I_C)^2 \cdot 2X_C \cdot t = 0,5W_C,$$

потенціальні можливості накопичувати енергію у конденсатора вдвічі більшу ніж у котушки індуктивності. Отже, заряджений конденсатор половину енергії віддасть котушці (бо більше та не візьме), а решту – генератору. У свою чергу котушка не задовольнить половину енергетичних можливостей конденсатора, але його дозарядить генератор, тобто, відбувається обмін енергіями між конденсатором і генератором. Генератор, "працюючи" з конденсатором, буде "сприймати" вхідний опір контуру як ємнісний, (рис. 5.26, в).

#### 5.4.2.6 Вплив внутрішнього опору генератора та навантаження на параметри контуру

Повернемося ще раз до схеми паралельного контуру (рис. 5.22). Джерелом тут є генератор струму, який складається з генератора е. р. с.  $E$ , внутрішній опір якого умовно винесено у вигляді опору  $R_i$ , а значить внутрішній опір власне  $E$  дорівнюватиме нулю. Це означає, що опір  $R_i$  верхнім кінцем безпосередньо під'єднано до контуру у точці входження струму генератора  $I$  в контур, а другим кінцем через нульовий опір  $E$  – до контуру знизу. Тобто, опір  $R_i$  під'єднується до контуру паралельно, що призводить до зменшення вхідного опору контуру та змінення значень решти параметрів контуру. З іншого боку, опір навантаження контуру  $R_H$ , під'єднаний до конденсатора, є шунтуючим опором, який будучи паралельним контуру, вплине на параметри контуру аналогічно до опору  $R_i$ . Позначивши вхідний еквівалентний опір контуру через  $Z_{екв}$  отримаємо:

$$\frac{1}{Z_{екв}} = \frac{1}{Z_{ex}} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_H},$$

$$Z_{екв} = \frac{R_i \cdot R_H \cdot Z_{ex}}{R_i \cdot R_H + R_i \cdot Z_{ex} + R_H \cdot Z_{ex}}$$

або, розділивши чисельник і знаменник на  $R_i \cdot R_H$ , матимемо:

$$Z_{екв} = \frac{Z_{ex}}{1 + \frac{Z_{ex}}{R_i} + \frac{Z_{ex}}{R_H}}. \quad (5.50)$$

На резонансній частоті  $Z_{ex} = R_0 = rQ$ , якому буде відповідати і еквівалентний резонансний опір  $R_{0екв}$ :

$$R_{0_{екв}} = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H}}. \quad (5.51)$$

Відповідно, еквівалентна добротність контуру  $Q_{екв}$ :

$$Q_{екв} = \frac{R_{0_{екв}}}{r} = \frac{R_0/r}{1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H}} = \frac{Q}{1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H}}, \quad (5.52)$$

еквівалентна смуга пропускання контуру  $\Delta f_{екв}$ :

$$\Delta f_{екв} = \frac{f_0}{Q_{екв}} = \frac{f_0}{Q} \left( 1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H} \right) = \Delta f_{np} \left( 1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H} \right), \quad (5.53)$$

еквівалентний опір втрат у контурі  $r_{екв}$ :

$$r_{екв} = \frac{r}{Q_{екв}} = r \left( 1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H} \right), \quad (5.54)$$

еквівалентне узагальнене розстроювання  $x_{екв}$ :

$$x_{екв} = 2Q_{екв} \frac{\Delta f}{f_0} = x / \left( 1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H} \right). \quad (5.55)$$

Відповідно до (5.48) резонансна частота дорівнюватиме:

$$f_0 = \frac{1}{2p\sqrt{LC}} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - r_{екв}^2}}{r}. \quad (5.56)$$

Оскільки характер впливу  $R_i$  та  $R_H$  на параметри контуру однаковий, проаналізуємо на прикладах при  $R_H = \infty$  вирази (5.51), (5.56).

Припустимо, що вимога до внутрішнього опору генератора струму ( $R_i \gg R_0$ ) не виконується і  $R_i = 5 R_0$ . Тоді:

$$R_{екв} = \frac{R_0}{1 + 0,2} = \frac{R_0}{1,2} \approx 0,8R_0,$$

тобто, зменшиться приблизно на 20%. Очевидно так само зміниться і добротність  $Q_{екв} \approx 0,8Q$ . Смуга пропускання зросте:  $\Delta f_{екв} = 1,2\Delta f_{np}$ , настільки ж зросте опір втрат  $r_{екв} = 1,2r$ .

Остання обставина свідчить, що  $R_i$  може вплинути і на значення резонансної частоти, яка, згідно з виразом (5.56), дорівнюватиме:

$$f_0' = \frac{1}{2p\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{r_{екв}}{r}\right)^2} = \frac{1}{2p\sqrt{LC}} \sqrt{1 - 1,56\left(\frac{r}{r}\right)^2}.$$

При невеликих висхідних значеннях добротності контуру, коли, наприклад,  $Q = 10$ ;  $r/r = 0,1$ ;  $(r/r)^2 \cdot 1,44 = 0,0144$  частота зменшиться приблизно на 0,8% від значення  $f_0$ .

Неправильний вибір генератора струму за внутрішнім опором ( $R_i \leq R_0$ ) призведе до різкого зниження еквівалентного вхідного опору, добротності, помітного зменшення резонансної частоти і, можливо, до аперіодичного процесу коливань у контурі.

Тому на практиці при роботі з паралельним коливальним контуром необхідно правильно підібрати внутрішній опір генератора. Якщо такого нема, то в схему вмикають резистор з достатньо високим опором між генератором і контуром, який слугує опором "розв'язки" між низькоомним джерелом (генератором) та високоомним навантаженням (контуром).

Аналогічно треба чинити і при виборі навантаження паралельного контуру. Бажано, щоб його опір  $R_H$  був набагато (на порядок і більше) більшим за  $R_0$ , бо саме у такому випадку:

$$R_{0екв} = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0}{R_H}} \approx R_0,$$

і його впливом можна знехтувати.

#### 5.4.2.7 Амплітудно-частотна характеристика за напругою

Синусна е. р. с. з комплексною амплітудою  $\underline{E}_m$  збудить у колі електричний струм з комплексною амплітудою  $\underline{I}_m$ , яка дорівнюватиме (при  $R_H = \infty$ ):

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_{ex} + R_i}.$$

Тоді вихідна напруга  $\underline{U}_2$  контуру:

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_m \underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{Z}_{ex}}{\underline{Z}_{ex} + R_i} \cdot \underline{E}_m,$$

а комплексний коефіцієнт передачі за напругою:

$$\underline{K} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{E}_m} = \frac{\underline{Z}_{ex}}{\underline{Z}_{ex} + R_i}. \quad (5.57)$$

Коли  $R_i \ll Z_{ex}$  коефіцієнт  $K = 1$ , вихідна напруга  $U_2 = E$  від частоти не залежить і власне резонансні властивості проявитись не можуть, бо схема знаходиться в аперіодичному режимі роботи контуру.

Коли  $R_i \gg Z_{ex}$ , залежність  $K(f)$  буде у масштабі  $(1:R_i)$  такою ж самою як і залежність  $Z_{ex}(f)$ .

Враховуючи вираз (5.43), перепишемо (5.57):

$$K = \frac{rQ / (1 + jx)}{\frac{rQ}{1 + jx} + R_i} = \frac{rQ}{rQ + R_i(1 + jx)}, \quad (5.58)$$

$$K = \frac{r}{R_i} \frac{Q}{\left(1 + \frac{rQ}{R_i}\right) + jx}.$$

Коли винести у знаменнику цього дробу за дужки  $(1 + rQ/R_i)$  і врахувати (5.52) і (5.55), отримаємо:

$$K = \frac{r}{R_i} \cdot \frac{Q_{екв}}{1 + jx_{екв}}. \quad (5.59)$$

На резонансній частоті  $x = 0$ ;  $K = K_0$  ( $rQ = R_0$ ), тоді:

$$K_0 = \frac{rQ}{R_i \left(1 + \frac{R_0}{R_i}\right)} = \frac{rQ_{екв}}{R_i}. \quad (5.60)$$

Залежність модуля  $K$  від частоти називається амплітудно-частотною характеристикою контуру:

$$K = \frac{r}{R_i} \cdot \frac{Q}{1 + \frac{R_0}{R_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2_{екв}}} = \frac{rQ_{екв}}{R_i \sqrt{1 + x^2_{екв}}}, \quad (5.61)$$

де у загальному випадку  $x = Q \left( \frac{f}{f_0} + \frac{f_0}{f} \right)$

або при невеликих розстроюваннях контуру  $x = 2Q \frac{\Delta f}{f_0}$ .

Графік АЧХ за напругою показано на рис. 5.27, б.

#### 5.4.2.8 Вибірність і смуга пропускання

Розділивши (5.61) на (5.60), отримаємо вираз:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{1+x_{екв}^2}}, \quad (5.62)$$

який називається рівнянням вибірності або АЧХ паралельного контуру у відносних координатах.

Еквівалентна смуга пропускання, очевидно, визначатиметься як діапазон частот (розстроювань), у межах якого відносний коефіцієнт передачі за напругою зменшується до значень  $1/\sqrt{2} = 0,707$ . На краях цього діапазону (рис. 5.27, а) еквівалентне розстроювання досягатиме значень  $\pm 1$ .

Рис. 5.27, б ілюструє шунтувальний вплив  $R_i$  (аналогічно і  $R_H$ ) на вибірність та смугу пропускання паралельного контуру.

При  $R_i' \gg R_0$  існує достатня "розв'язка" між генератором і контуром. Параметри контуру практично зберігаються такими самими, якими вони були при  $R_i = \infty$ , тобто впливом генератора на параметри контуру можна знехтувати.

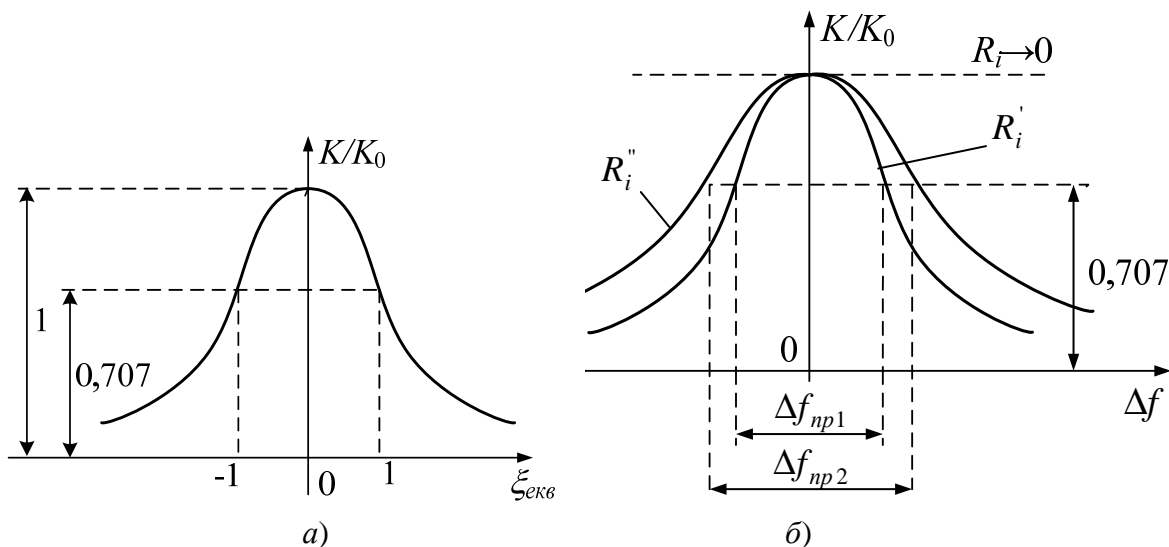


Рисунок 5.27 – АЧХ паралельного контуру за напругою б), крива вибірності а)

При  $R_i'' < R_0$  добротність зменшується, смуга пропускання зростає. При дуже малих  $R_i$  ( $R_i \rightarrow 0$ ) смуга пропускання стає нескінченно великою,  $K = 1$  та не залежить від  $f$  і коливань у такому контурі нема, а енергія генератора витрачається на нагрівання елементів кола.

#### 5.4.2.9 Порівняння послідовного і паралельного контурів

1. При резонансі у послідовному контурі спостерігається зростання напруг на реактивних елементах, які у  $Q$  разів перевищують напругу генератора – резонанс напруг.

У паралельному контурі при резонансі зменшується струм генератора і контурний струм його перевищує у  $Q$  разів – резонанс струмів.

2. При резонансі вхідний опір послідовного контуру носить активний характер і стає мінімальним, який дорівнює опору втрат. Вхідний же опір паралельного контуру при цьому також носить активний характер, але досягає максимального значення. Тоді:

$$\frac{R_{ex.пар}}{R_{ex.посл}} = \frac{R_0}{r} = \frac{rQ}{r/Q} = Q^2,$$

якщо маємо паралельний і послідовний контури з однаковими параметрами  $r, L, C$ .

3. При розстроюваннях модуль вхідного опору паралельного контуру зменшується, а послідовного збільшується, незалежно від знака абсолютного розстроювання.

4. На частотах нижчих за резонансну вхідні опори обох контурів носять активно-реактивний характер. Але ці опори є комплексно-спряженими: в послідовному контурі активно-ємнісний, а в паралельному – активно-індуктивний.

5. На частотах вищих за резонансну: вхідний опір послідовного контуру є активно-індуктивним, а паралельного – активно-ємнісним.

Останні дві обставини легко пояснюються і з тієї точки зору, що характер опору визначає той елемент контуру (послідовного чи паралельного), який суттєвіше впливає на значення струму генератора. Так, у послідовному контурі, де з'єднуються елементи контуру послідовно і струм, що їх обтікає, один і той самий, значення цього струму визначатиме елемент з більшим значенням опору, а у паралельному контурі струм генератора  $I$  визначатиметься віткою з меншим опором, а тому саме цей елемент і визначає характер його вхідного опору.

### 5.4.3 Паралельний контур II виду

Еквівалентна схема паралельного контуру II виду подана на рис. 5.28. Очевидно, цей контур є також окремим випадком контуру загального виду (рис. 5.21), де:  $1/wC_1 = 0, C_1 = \infty$ . Індуктивний опір розподілено між вітками контуру:  $wL_1$  – у лівій,  $wL_2$  – у правій вітках.

Цей розподіл кількісно характеризується коефіцієнтом увімкнення:

$$p_L = L_1/L,$$

де:  $L=L_1+L_2$ , маючи на увазі, що котушки  $L_1$  та  $L_2$  за контурним струмом з'єднані послідовно.

У такому контурі можливі два резонанси : паралельний та послідовний. Послідовний резонанс можливий у правій вітці, яка фактично є послідовним контуром, утвореним котушкою  $L_2$  і конденсатором  $C$ . Паралельний резонанс – за рахунок обтікання контурним струмом  $I_k$  послідовно усіх елементів паралельного контуру. Нехтуючи малими

втратами у контурах, у послідовному контурі спостерігатиметься резонанс напруг на частоті

$$f_{noc} = \frac{1}{2p\sqrt{L_2C}}. \quad (5.63)$$

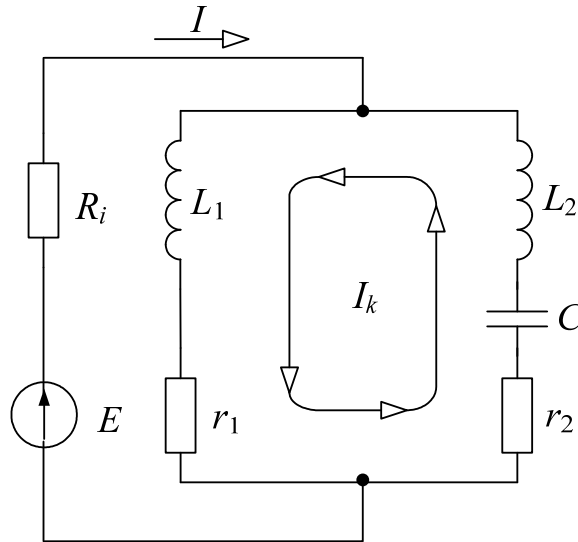


Рисунок 5.28 – Еквівалентна схема паралельного контуру II виду

При цьому опір правої вітки буде дуже малим і весь струм генератора  $I$  замкнеться через праву вітку, а ліва вітка, практично, участі у роботі не братиме. Вхідний опір схеми буде чисто активним і дорівнюватиме  $r_2$ . При зменшенні частоти генератора ( $\omega < \omega_{noc}$ ) буде зростати реактивний опір правої вітки ( $\omega L_2 - 1/\omega C$ ), який матиме ємнісний характер. Опір лівої вітки ( $\omega L_1$ ) з індуктивним характером опору буде зменшуватись, аж поки на якійсь частоті ці реактивні опори не зрівняються за модулем і їх сума стане рівною нулю:

$$\omega_{nap} L_1 + (\omega_{nap} L_2 - 1/\omega_{nap} C) = 0,$$

звідки частота:

$$\omega_{nap} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_{nap} = \frac{1}{2p\sqrt{LC}}. \quad (5.64)$$

Те, що  $f_{nap} < f_{noc}$  підтверджується формулами (5.63) і (5.64), бо  $L_2 < L = L_1 + L_2$ , а при однакових чисельниках дріб з меншим знаменником є більшим. Такий резонанс називається паралельним (резонансом струмів), а його частота  $f_{nap}$  визначається за формулою (5.64), бо струми у вітках паралельного контуру будуть однаковими за амплітудами, але протилежними за фазами, утворюючи єдиний контурний струм  $I_k$ .

Звичайно, що так буде при  $r_1 = r_2 = 0$ , коли ж втратами у вітках знехтувати не можна, то резонанси спостерігатимуться на частотах менших ніж на отриманих за формулами (5.63) і (5.64). Резонансний



вхідний опір паралельного контуру II виду  $R_0^{II}$  на частоті резонансу струмів дорівнюватиме згідно з формулою (5.42):

$$R_0^{II} = \frac{x_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{(w_{nap} L_1)^2}{r},$$

де втрати у контурі  $r = r_1 + r_2$ . Підставивши у цю формулу значення  $L_1 = p_L L$ , отримане з визначення коефіцієнта вмикання, матимемо:

$$R_0^{II} = \frac{(w_{nap} p_L L)^2}{r} = p_L^2 \frac{(w_{nap} L)^2}{r} = p_L^2 \cdot \frac{r^2}{r} = p_L^2 \cdot R_0^I, \quad (5.65)$$

де  $R_0^I$  – резонансний опір відповідного паралельного контуру I виду, бо контур II виду отримано розділенням  $L$  на частини  $L_1$  і  $L_2$  ( $L_1 + L_2 = L$ ). Іншими словами, контур I виду перетворено на контур II виду без зміни частоти резонансу струмів. Неповне увімкнення котушки (контур II виду) з коефіцієнтом  $p_L = (0 \dots 1)$  дає можливість стверджувати, що відбулася трансформація опору з коефіцієнтом  $K = p_L^2$ . На прикладі розглянемо, що дає нам така схема. Нехай  $p_L = 0,315$  ( $p_L^2 \approx 0,1$ ) тоді при під'єднанні шунтувального опору  $R_{ш} = 2R_0$ , для контуру I виду матимемо:

$$R_{екв}^I = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0}{R_{ш}}} = \frac{R_0}{1 + 0,5} = \frac{R_0}{1,5} \approx 0,67 R_0,$$

а для контуру II виду;

$$R_{екв}^{II} = \frac{R_0^{II}}{1 + \frac{R_0^{II}}{R_{ш}}} = \frac{R_0^{II}}{1 + p_L^2 \frac{R_0^I}{R_{ш}}} = \frac{R_0}{1 + 0,05} \approx 0,95 R_0^{II}.$$

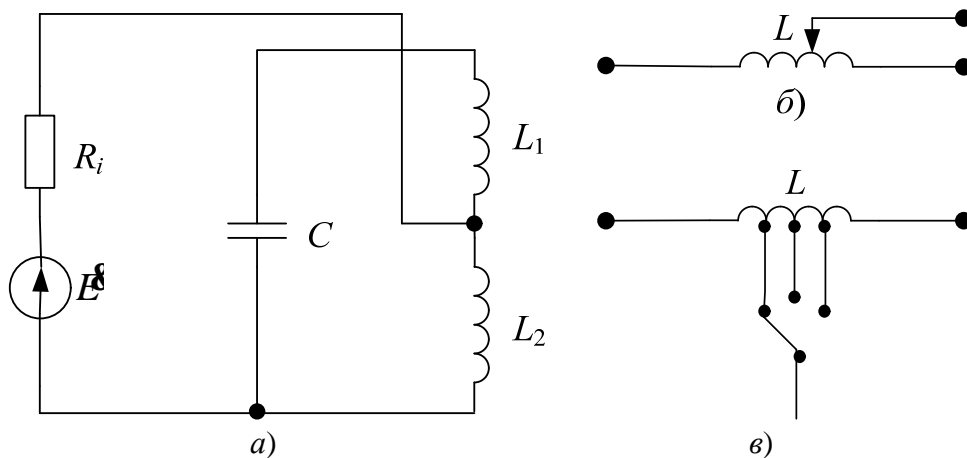


Рисунок 5.29 – Схема контуру II виду а), плавного б) та дискретного в) регулювання коефіцієнта увімкнення

З наведеного прикладу видно, що резонансний опір контуру I виду зменшився у 1,5 раза, а контуру II виду – лише на 5% (на 1/20). Ця обставина і обумовлює широке використання на практиці контурів з неповним (частковим) увімкненням індуктивності. На рис. 5.29, а зображена практична схема паралельного контуру II виду. Регулювання коефіцієнта увімкнення індуктивності дискретно (б) здійснюється перемиканням контактів відгалужень від котушки індуктивності. За допомогою повзункового механізму (б) можна здійснювати плавне регулювання.

#### 5.4.4 Паралельний контур III виду

Еквівалентна схема паралельного контуру III виду зображена на рис. 5.30. І цей контур є окремим випадком контуру загального виду (рис. 5.21), де:

$$L_1 = 0; r_1 = 0; L_2 = L; r_2 = r.$$

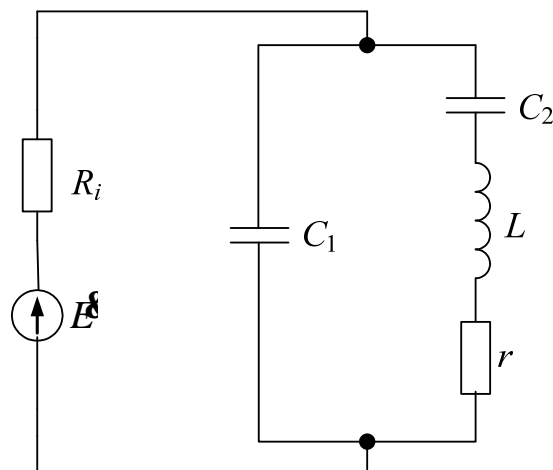


Рисунок 5.30 – Еквівалентна схема паралельного контуру III виду

Ліва гілка складається лише з конденсатора  $C_1$ , права – з послідовно з'єднаними котушки  $L$  з втратами  $r$  та конденсатора  $C_2$ .

У цій схемі обидві вітки містять ємнісні опори  $(1/\omega C_1)$  та  $(1/\omega C_2)$ . Якщо вважати, що цей контур утворено з контуру I виду (рис. 5.22) без зміни частоти паралельного резонансу, то спільна ємність схеми (рис. 5.30) має дорівнювати ємності  $C$  схеми (рис. 5.22). А оскільки за контурним струмом конденсатори  $C_1$  та  $C_2$  з'єднані послідовно, то:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} < C_1.$$

Відношення  $C$  до  $C_1$  називається коефіцієнтом увімкнення ємності, позначається через  $r_C$ :

$$r_c = \frac{C}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

У правій вітці на частоті  $f_{noc} = 1/2p\sqrt{LC_2}$  буде спостерігатися послідовний резонанс (резонанс напруг), опір її буде дуже малим ( $r$  – малий), увесь струм генератора протікатиме через цю вітку, а ліва вітка участі у роботі схеми не братиме. Вхідний опір схеми буде дуже малим і фактично дорівнюватиме  $r$ .

При зростанні частоти генератора ( $w > w_{noc}$ ) опір правої вітки зростатиме, а лівої – зменшуватиметься. При цьому опір правої вітки носитиме індуктивний характер, у лівій вітці він є завжди ємнісним. На певній частоті  $f_{nap}$  опори цих віток стануть однаковими і протилежними за знаками і отже їх сума дорівнюватиме нулю:

$$\begin{aligned} -1/w_{nap} C_1 + w_{nap} L - 1/w_{nap} C_2 &= 0, \\ w_{nap} L - 1/w_{nap} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) &= 0; \\ w_{nap} L - \frac{C_1 + C_2}{w_{nap} C_1 \cdot C_2} &= 0, \quad w_{nap} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \\ f_{nap} &= \frac{1}{2p\sqrt{LC}}. \end{aligned}$$

Очевидно,  $f_{nap} > f_{noc}$ , бо спільна ємність  $C < C_2$ . Резонансний вхідний опір контуру III виду, виходячи з (5.42):

$$R_0''' = \frac{x_1^2}{r} = \frac{(1/w_{nap} C_1)^2}{r} = \frac{\left( \frac{1 \cdot p_C}{w_{nap} C} \right)^2}{r} = p_C^2 \frac{\left( \frac{1}{w_{nap} C} \right)^2}{r} = p_C^2 \frac{r^2}{r} = p_C^2 \cdot R_0'.$$

Подібно до попереднього випадку при  $r_c = 0,315$  і  $R_i = 2 R_0$  вхідний резонансний опір контуру III виду також зменшиться лише на 5%.

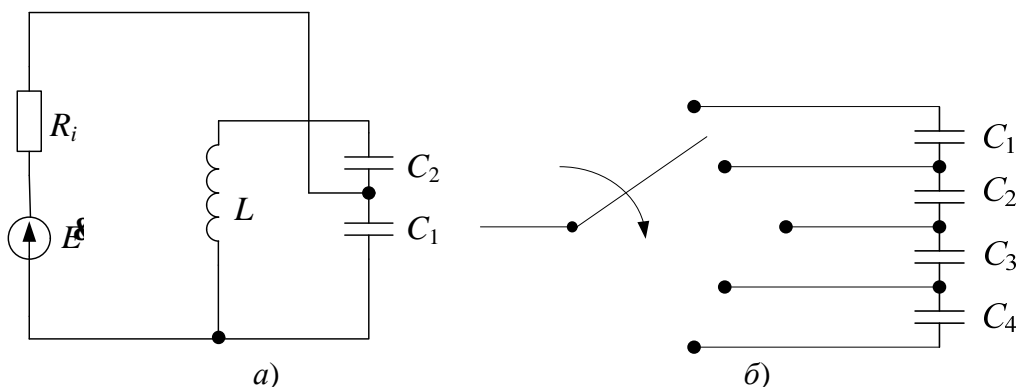


Рисунок 5.31 – Схема паралельного контуру III виду а) та дискретного б) регулювання коефіцієнта увімкнення

Таким чином, неповне увімкнення паралельного контуру (контур II або III видів) працює як узгодження (трансформація) опору шунта ( $R_i$  чи  $R_H$ ) і вхідного резонансного опору паралельного контуру I виду.

Ця обставина обумовлює широке використання контурів III виду в радіотехнічних і, зокрема, радіоприймальних пристроях.

На відміну від попереднього випадку плавне регулювання  $r_C$  зробити неможливо, а тому на практиці використовується лише ступеневе (дискретне) регулювання за допомогою перемикача (рис. 5.31, б).

При резонансі вхідний опір паралельного контуру досягає максимуму, а струм генератора – мінімуму і контурний струм перевищує струм генератора у  $Q$  разів – резонанс струмів.

Вхідний опір при резонансі – чисто активний; при  $w < w_0$  він індуктивний, бо  $X_L < X_C$  і струм генератора визначається опором індуктивної вітки; при  $w > w_0$  він ємнісний, бо  $X_C < X_L$  і струм генератора визначається опором ємнісної вітки.

Паралельні контури бувають трьох видів:

I – котушка індуктивності і конденсатор увімкнені в різних вітках контуру;

II – котушка індуктивності розподілена по двох вітках контуру, а конденсатор є тільки в одній з них;

III – у обох вітках є конденсатори, а котушка – тільки в одній з них.

Паралельний контур має працювати лише від генератора струму, внутрішній опір якого набагато більший за резонансний опір контуру.

### Запитання та задачі для закріплення

1. Що таке паралельний контур та його види? Зобразити принципову та еквівалентну схему кожного з них.

2. Написати вирази для комплексного вхідного опору паралельного контуру та його складових.

3. Побудувати частотні характеристики вхідного опору паралельного контуру I виду.

4. Пояснити характер вхідного опору паралельного контуру при розстроюваннях за допомогою векторних діаграм.

5. Навести енергетичне пояснення резонансу струмів.

6. Написати вирази для розрахунку власних параметрів контуру:  $R_0$ ,  $Q$ ,  $\Delta f_{np}$ ,  $K$ .

7. Написати вирази для розрахунку еквівалентних параметрів контуру (з урахуванням шунтувальної дії  $R_i$  та  $R_H$ ).

8. Назвати переваги та недоліки контурів II та III видів у порівнянні з I видом.

9. Розрахувати значення  $R_0$ ,  $Q$ ,  $\Delta f_{np}$ ,  $K$  паралельного контуру I виду з параметрами  $L = 100$  мГн,  $C = 10^5$  пФ,  $r = 10$  Ом.

10. За даними попередньої задачі розрахувати  $Q_{екв}$ ,  $R_{екв}$ ,  $Df_{екв}$ ,  $\Gamma_{екв}$ , коли  $R_i = R_H = 500$  кОм.

11. За даними задачі 10 розрахувати параметри генератора ( $E_m$ ,  $R_i$ ), аби  $R_{екв} = 0,9 R_0$  і амплітуда напруги на контурі (задача 10) дорівнювала 100 мВ.

12. Контур II виду має  $p = 0,707$ . Визначити у скільки разів зміняться у ньому:  $\Delta f_{np}^{II}$ ,  $R_0^{II}$ ,  $Q^{II}$  ?

13. Контур I виду (задача 10) без змінення резонансної частоти перетворено на контур II виду. Визначити параметри останнього, коли у ньому  $f_{носл} = 2f_{нар}$ .

14. Контур I виду (задача 10) без змінення резонансної частоти перетворено на контур III виду. Визначити параметри останнього, коли у ньому  $f_{нар} = 2f_{носл}$ .

## 6 СИМЕТРИЧНІ КОЛА ТРИФАЗНОГО СТРУМУ

### 6.1 Трифазні електричні кола

Трифазне (three-phase) електричне коло може бути подано як сукупність трьох однофазних кіл (кіл однофазного струму), в яких діють е. р. с. однієї і тієї ж частоти, зсунуті одна відносно одної на одну третину періоду (на кут  $2\pi/3$ ).

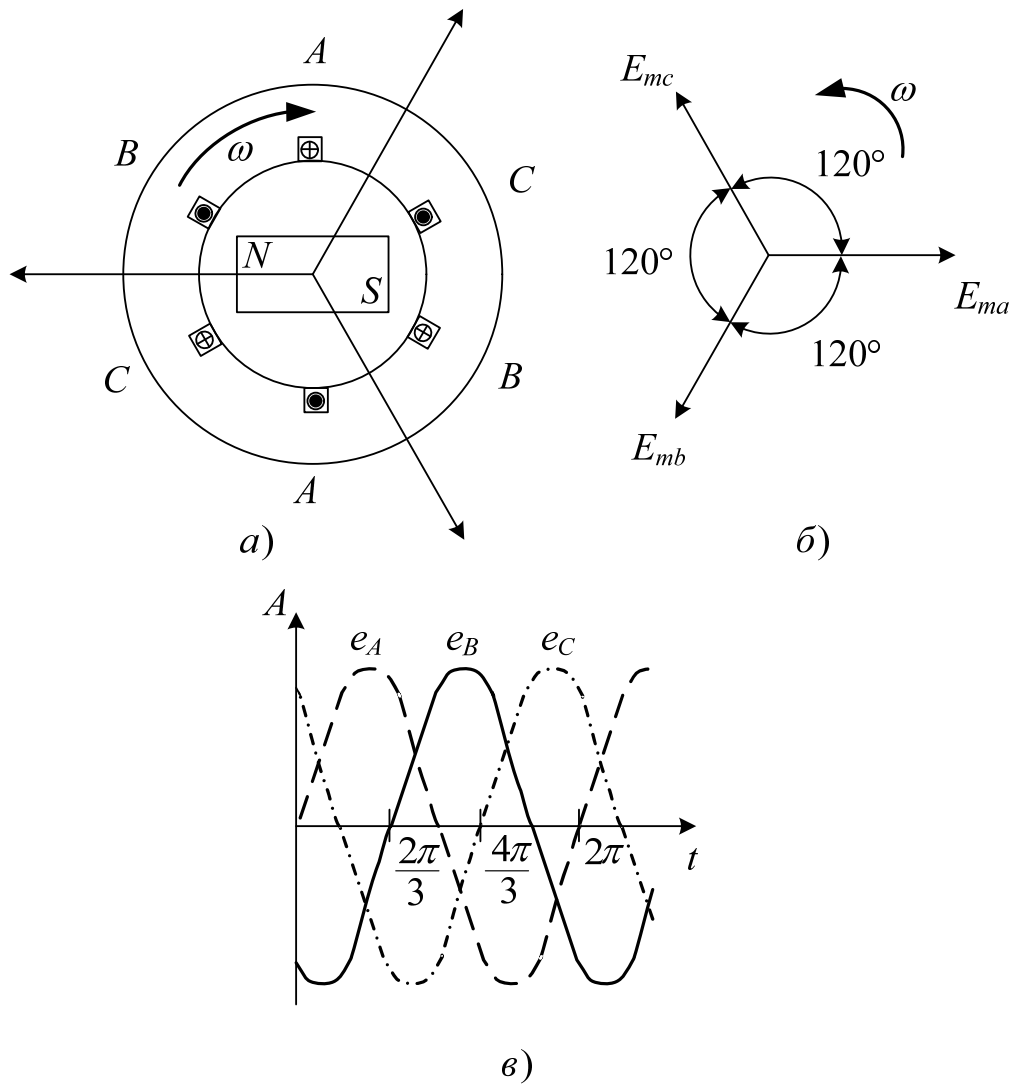


Рисунок 6.1 – Схема трифазного генератора а), векторна діаграма е. р. с. б), часові діаграми е. р. с. в)

Ці три складові частини трифазного кола називаються фазами, які надалі будемо позначати літерами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Схематично це показано на рис. 6.1.

Для отримання трифазного струму використовують трифазний генератор, схема конструкції якого подана на рис. 6.1, а. Обмотки, в яких наводяться е. р. с., розміщуються у пазах статора. Обмотки фаз зсунуті відносно одна одної на кут  $120^\circ$ . При обертанні ротора (магніту) через

ідентичність трьох обмоток генератора в них наводяться е. р. с., які мають однакову амплітуду і частоту, причому ці е. р. с. зсунуті за фазою відносно одна одної на одну третину періоду. Вектори, що зображають ці е. р. с., рівні за довжиною і складають між собою кут  $120^\circ$  (рис. 6.1, б).

Миттєве значення е. р. с. трифазного генератора (рис. 6.1, в) виражаються аналітично таким чином:

$$e_A = E_m \sin \omega t;$$

$$e_B = E_m \sin (\omega t - 2p/3);$$

$$e_C = E_m \sin (\omega t - 4p/3) = E_m \sin (\omega t + 2p/3).$$

Миттєве значення е. р. с. дорівнює відповідним проєкціям трьох векторів  $E_{mA}$ ,  $E_{mB}$ ,  $E_{mC}$  (рис. 6.1, б), які обертаються у позитивному напрямку з кутовою швидкістю  $\omega$ , на вісь  $ou$ . На рис. 6.1, а положення ротора (магніту) відповідає моменту  $t = 0$ .

На схемах заміщення обмотки трифазного генератора позначають як показано на рис. 6.2 і умовно приймають напрямок е. р. с. від кінця до початку обмотки позитивним.

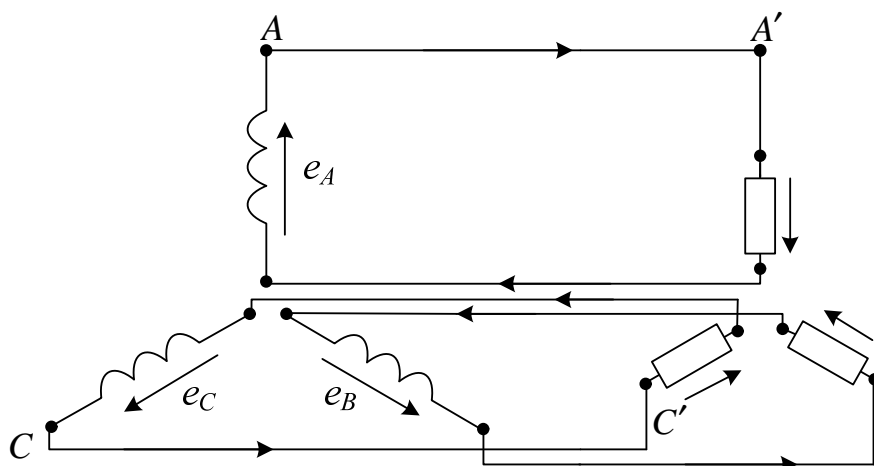


Рисунок 6.2 – Незв'язане трифазне коло

Якщо кожен обмотку трифазного генератора з'єднати зі своїм приймачем, утворяться три незалежних кола, кожне зі своїм струмом.

В незв'язаній трифазній системі генератор з приймачем енергії з'єднуються шістьма проводами. Велика кількість з'єднувальних проводів – основний недолік незв'язаних систем, які тому сьогодні і не застосовуються. Скорочення числа з'єднувальних проводів досягається в з'єднаній системі, вперше запропонованій М. Н. Даліво-Добровольським у 1889 році. Він запропонував дві схеми з'єднання: зіркою і трикутником, які застосовуються і сьогодні.

## 6.2 З'єднання зіркою

На рис. 6.3 показана зв'язана система при з'єднанні фаз джерела енергії і споживача зіркою. Таку систему легко отримати з незв'язаної системи.

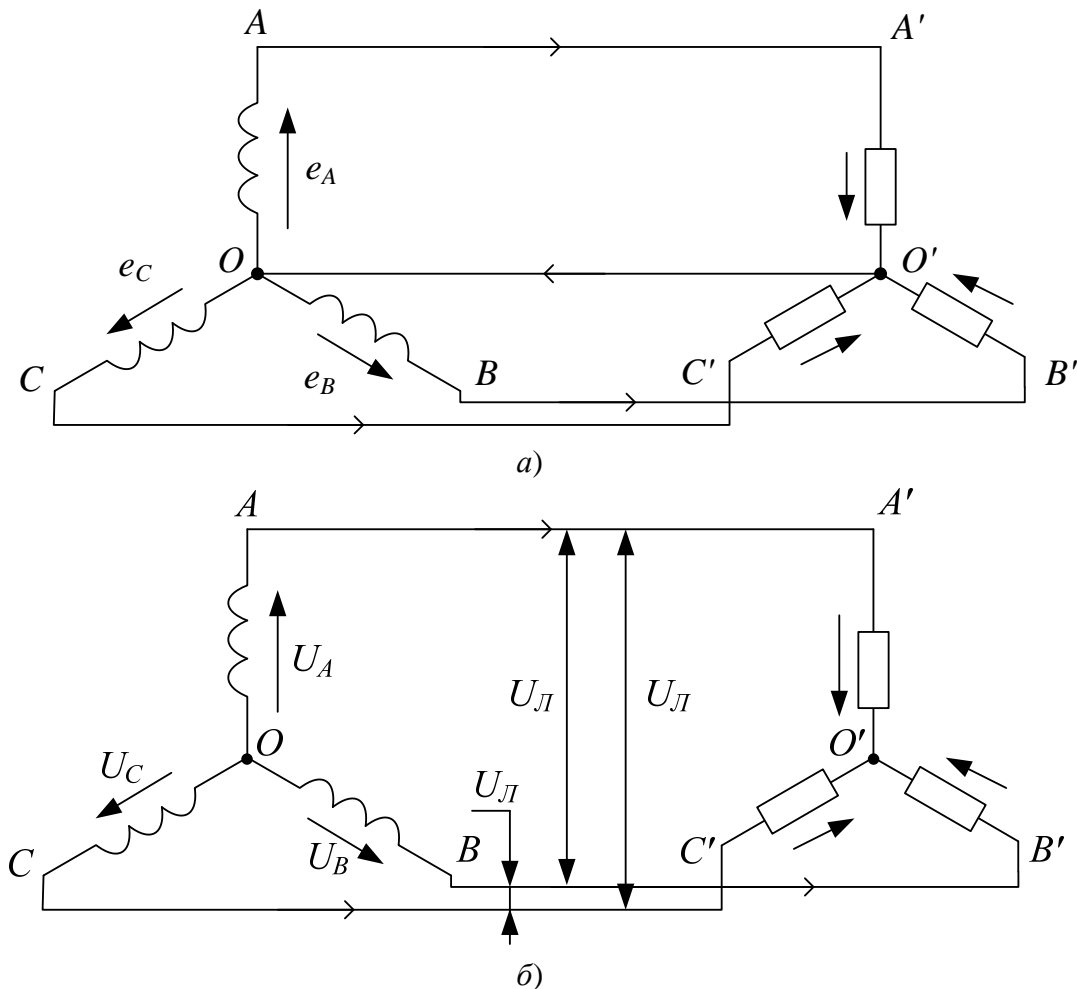


Рисунок 6.3 – Зв'язані трифазні кола при з'єднанні зіркою

Початком обмотки генератора (рис. 6.3, а) вважається полюс, до якого спрямована позитивна е. р. с. (полюси  $A, B, C$ ). З'єднання зіркою передбачає, що усі кінці фазних обмоток з'єднуються в одну спільну точку  $O$ , яку називають нульовою точкою, або нейтраллю. Проводи  $AA', BB', CC'$  зберігаються, а три проводи, що з'єднують точки  $OO'$ , замінюються одним проводом, який називається нульовим, або нейтральним. В симетричних трифазних колах загальний струм нейтралі  $I_H = I_A + I_B + I_C = 0$ , що дозволяє відмовитись від загального проводу  $OO'$ . У такому разі зв'язок між джерелом і споживачем, з'єднаними зіркою, можна здійснювати за трипровідною схемою (рис. 6.3, б).

**Фазні та лінійні напруги.** Різниці потенціалів між точками  $AO(U_A)$ ,  $BO(U_B)$ ,  $CO(U_C)$  називаються фазними напругами. Фазні напруги джерела – напруги між початками і кінцями фаз, які відрізняються від е. р. с. на величину спаду напруги в обмотках. В симетричній системі вони



зображаються також трьома рівними за величиною векторами, зсунутими за фазою на  $120^\circ$  (рис. 6.4).

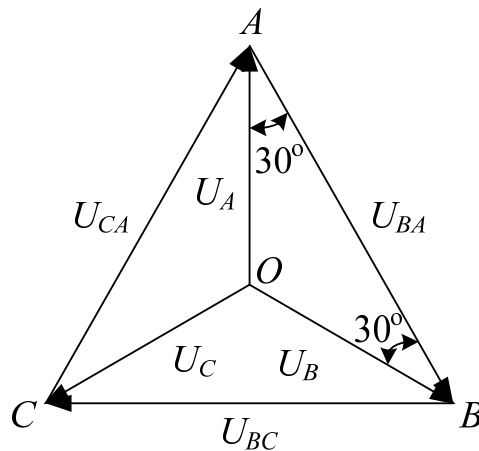


Рисунок 6.4 – Векторна діаграма напруг при з'єднанні обмоток джерела зіркою

Різниця потенціалів між кожною парою лінійних проводів називається лінійною напругою ( $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{AC}$ ).

Якщо прийняти потенціал нульової точки  $O$  за нуль, то потенціали лінійних полюсів  $V_A=U_A$ ,  $V_B=U_B$ ,  $V_C=U_C$ .

Лінійні напруги:

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = V_A - V_B = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \\ \dot{U}_{AC} = V_B - V_C = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \\ \dot{U}_{CA} = V_C - V_A = \dot{U}_C - \dot{U}_A; \end{cases} \quad (6.1)$$

Потенціали лінійних полюсів кожної миті відрізняються один від одного через наявність зсуву фаз між фазними напругами, а значить лінійні напруги не дорівнюють нулю. Їх можна визначити аналітично з рівнянь (6.1) або графічно з векторної діаграми рис. 6.4. Наприклад, значення лінійної напруги  $U_{AB}$  знайдемо з трикутника  $AOB$ :

$$U_{AB} = 2 \cdot U_A \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot U_A,$$

тобто:

$$U_{AB} = \sqrt{3} \cdot U_\phi. \quad (6.2)$$

**Фазні і лінійні струми.** Кожна фаза трифазної системи являє собою замкнуте коло. Відповідно до позитивних напрямків е. р. с. в обмотках джерела позитивні напрямки струмів в лінійних проводах є від джерела до споживача, а в нульовому проводі – від споживача до джерела.

Струми у фазах джерела і споживача називають фазними ( $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  або взагалі  $I_\phi$ ). Струми в лінійних проводах називають лінійними  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  або взагалі  $I_L$ ).

При з'єднанні зіркою в точках переходу від джерела в лінію і з лінії в приймач немає розгалужень, а тому фазні та лінійні струми однакові між собою у кожній фазі:

$$I_L = I_\phi. \quad (6.3)$$

### 6.3 З'єднання трикутником

При з'єднанні обмоток трифазного генератора трикутником (рис. 6.5) початок однієї фазної обмотки з'єднується з кінцем наступної за порядком фазної обмотки так, що усі три обмотки утворюють замкнутий трикутник, причому напрямки е. р. с. у контурі трикутника збігаються і сума е. р. с. дорівнює нулю (рис. 6.5, б). Загальні точки з'єднаних обмоток генератора виводяться на затискачі, до яких приєднується через лінійні проводи трикутник навантаження.

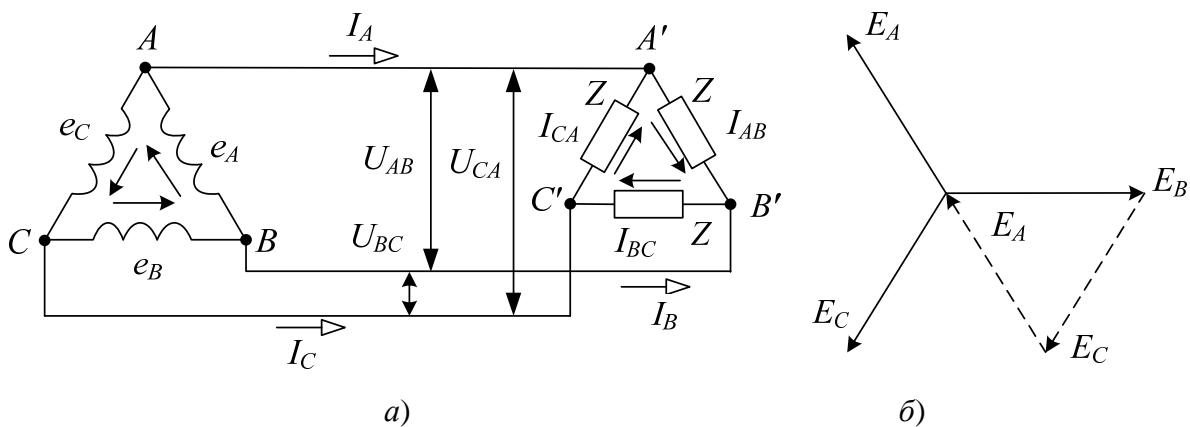


Рисунок 6.5 – Схема трифазної системи при з'єднанні трикутником а), векторна діаграма е. р. с. б)

**Фазні та лінійні напруги.** Зі схеми рис. 6.5, а видно, що фазні та лінійні напруги збігаються, бо кінець однієї фази з'єднаний з початком другої, кінець другої – з початком третьої:

$$U_L = U_\phi. \quad (6.4)$$

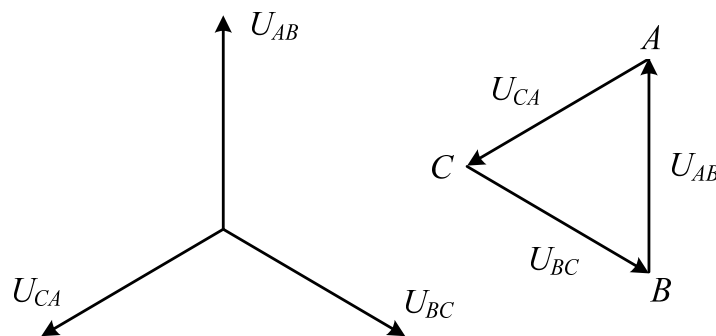


Рисунок 6.6 – Векторні діаграми напруг при з'єднанні обмоток джерела трикутником

Векторну діаграму напруг можна побудувати у вигляді зірки або трикутника векторів (рис. 6.6).

В симетричній трифазній системі е. р. с., що діють в контурі, мають суму, рівну нулю (рис. 6.5,б):  $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$ .

При відсутності навантаження ( $Z=\infty$ ) струм в обмотках джерела відсутній. Але так буває лише при наявності симетрії в системі, а в протилежному випадку сума е. р. с. не дорівнює нулю і в обмотках джерела утворюється струм, який може бути значним навіть при малій асиметрії, бо опір самих обмоток незначний.

**Фазні та лінійні струми.** При з'єднанні трикутником кожна фаза навантаження знаходиться під лінійною напругою. Цим обумовлено наявність в навантаженні фазних струмів  $I_{AB}, I_{BC}, I_{CA}$ , позитивний напрямок яких на схемі рис. 6.5 вибрано відповідно до позитивного напрямку е. р. с. у фазах джерела.

Точки  $A, B, C, A', B', C'$  є електричними вузлами, а тому фазні струми відрізняються від лінійних  $I_A, I_B, I_C$ . За першим законом Кірхгофа для вузлових точок  $A, B, C$  можна написати:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; \underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}. \quad (6.5)$$

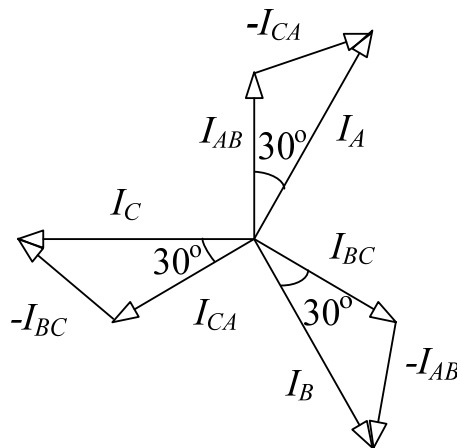


Рисунок 6.7 – Векторні діаграми струмів при з'єднанні трикутником

При симетричному навантаженні струми в усіх фазах однакові. На рис. 6.7 подана векторна діаграма струмів. З верхнього, наприклад, трикутника маємо:

$$I_A = 2I_{AB} \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot I_{AB}.$$

Позначивши усі лінійні струми  $I_A = I_B = I_C$  через  $I_L$ , усі фазні  $I_{AB} = I_{BC} = I_{CA}$  – через  $I_\phi$ , отримаємо загальне співвідношення між лінійними і фазними струмами у симетричній системі:

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_\phi. \quad (6.6)$$

**Визначення потужності.** Потужність у кожній фазі трифазного кола визначається за формулами, які застосовувались для однофазних кіл.

При симетричному навантаженні фазні напруги однакові, а тому при визначенні потужності будуть справедливі такі загальні рівняння:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{\phi} I_{\phi} \cos j, \quad Q = \sqrt{3} \cdot U_{\phi} I_{\phi} \sin j, \quad S = \sqrt{3} \cdot U_{\phi} I_{\phi}. \quad (6.7)$$

Оскільки при з'єднанні зіркою

$$U_{\phi} = \frac{U_{Л}}{\sqrt{3}}; \quad I_{\phi} = I_{Л},$$

а при з'єднанні трикутником

$$I_{\phi} = \frac{I_{Л}}{\sqrt{3}}, \quad U_{\phi} = U_{Л}$$

потужності можна визначати через лінійні величини напруг та струмів:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{Л} I_{Л} \cos j, \quad Q = \sqrt{3} \cdot U_{Л} I_{Л} \sin j, \quad S = \sqrt{3} \cdot U_{Л} I_{Л}. \quad (6.8)$$

При розв'язуванні задач символьним методом потужність визначається так само, як і в однофазних колах, добутком відповідного комплексу напруги і спряженого комплексу струму.

Е. р. с., що наводиться в обмотках трифазного генератора, однакові за амплітудою і зсунуті одна відносно одної на фазовий кут  $120^{\circ}$ .

При з'єднанні зіркою лінійні напруги у  $\sqrt{3}$  рази більші за фазні, а струми однакові:

$$U_{\phi} = \frac{U_{Л}}{\sqrt{3}}, \quad I_{\phi} = I_{Л}.$$

При з'єднанні трикутником лінійні струми у  $\sqrt{3}$  рази більші за фазні, а напруги однакові:

$$I_{\phi} = \frac{I_{Л}}{\sqrt{3}}, \quad U_{\phi} = U_{Л}.$$

### Запитання та задачі для закріплення

1. Побудувати векторну діаграму е. р. с. трифазної системи при з'єднанні обмоток зіркою і трикутником.

2. Побудувати векторну діаграму напруг на навантаженні при з'єднанні зіркою.

3. Побудувати векторну діаграму струмів у системі при з'єднанні трикутником.

4. В симетричному трифазному колі навантаження  $Z = 10 + j5$  Ом (на фазу) з'єднане зіркою, лінійні напруги на навантаженні дорівнюють 230 В. Обчислити струм.

5. В симетричному трифазному колі навантаження  $R_{AB} = R_{BC} = R_{CA} = 10$  Ом з'єднано трикутником, лінійні напруги на навантаженні дорівнюють по 100 В. Визначити потужність навантаження.

## 7 ДЕЯКІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Аналізом електричного кола називають визначення струмів та напруг на усіх його ділянках. Раніше ми розглядали розрахунок простих електричних кіл або кіл, які "згортались" до простих. Але часто такий підхід є неможливим або недоцільним. Наприклад, коли маємо коло складної конфігурації з декількома джерелами енергії.

### 7.1 Застосування законів Кірхгофа

Розглядаючи схему будь-якого розгалуженого електричного кола, можна виділити в ній електричні вузли та контури. Наприклад, схема, яка зображена на рис. 7.1, має чотири вузли (1, 2, 3, 4) та декілька контурів (I, II, III, IV).

Для кожної вузлової точки можна скласти рівняння струмів за першим законом Кірхгофа (вузлові рівняння). Наприклад, для вузла 4:  $I_5 + I_7 = I_3 + I_6$ . Для кожного контуру, обхід яких проводитимемо за напрямком руху годинникової стрілки, – рівняння напруг за другим законом Кірхгофа (контурні рівняння), наприклад, для контуру III:

$$I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_7 R_7 = -E_2.$$

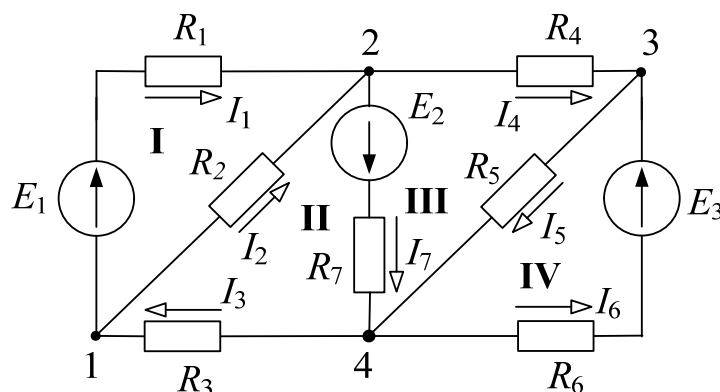


Рисунок 7.1 – Схема складного електричного кола

У ці рівняння входять струми у вітках, визначення яких і є метою розрахунку. Сумарна кількість вузлових та контурних рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих струмів, тоді сумісне розв'язування системи цих рівнянь дозволить визначити значення струмів.

Перед тим, як приступити до складання рівнянь за законами Кірхгофа, необхідно вибрати умовно-позитивні напрямки струмів у кожній вітці (очевидно, кількість струмів дорівнює кількості віток).

Указані напрямки струмів вибирають довільно. Дійсні напрямки струмів можуть з ними і не збігатися. Помилка у виборі напрямку струму в результаті розв'язування виявиться: струм з неправильно вибраним напрямком буде негативним.

**Вузлові рівняння.** Запишемо вузлові рівняння для усіх чотирьох вузлів заданої схеми:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для вузла 1: } I_3 = I_1 + I_2; \\ \text{для вузла 2: } I_1 + I_2 = I_4 + I_7; \\ \text{для вузла 3: } I_4 + I_6 = I_5; \\ \text{для вузла 4: } I_5 + I_7 = I_3 + I_6. \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

У цій системі рівнянь будь-які три рівняння є незалежними, бо до кожного з них входить хоча б один новий струм у порівнянні з іншими. Якщо незалежними вважати перші три рівняння, то четверте рівняння не містить нового струму, тому його можна отримати з перших трьох шляхом нескладних підстановок. Узагальнюючи можемо сказати, що при наявності у схемі  $n$  вузлів, можна отримати  $(n - 1)$  незалежних вузлових рівнянь.

Але цих рівнянь, у даному прикладі, недостатньо для визначення семи невідомих струмів. Решту чотири рівняння отримаємо, скориставшись другим законом Кірхгофа.

### **Контурні рівняння**

З усіх контурів схеми вибирають ті, для яких можна скласти найбільш прості незалежні рівняння, пам'ятаючи, що кожне наступне рівняння буде незалежним від попередніх, якщо у даний контур входить хоча б одна вітка, яка не входила в уже використані контури.

Відомо, що кількість незалежних контурних рівнянь у схемі, що має  $m$  віток і  $n$  вузлів, дорівнює  $(m - n + 1)$ .

Для десяти можливих контурів при  $m = 7$  у даному випадку незалежних контурних рівнянь буде лише  $(7 - 4 + 1 = 4)$  чотири, тобто стільки, скільки необхідно для визначення усіх струмів:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для контуру I: } I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1; \\ \text{для контуру II: } I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_7 R_7 = E_2; \\ \text{для контуру III: } I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_7 R_7 = -E_2; \\ \text{для контуру IV: } -I_5 R_5 - I_6 R_6 = -E_3. \end{array} \right\} \quad (7.2)$$

Отже, розв'язавши систему незалежних рівнянь, узятих з (7.1) і (7.2), визначимо усі невідомі струми в усіх вітках заданої схеми.

### **7.2 Метод накладання**

В лінійному електричному колі, яке містить джерела напруги, контурні струми у вітках являють собою лінійні функції е. р. с. Це означає, що струм у будь-якому контурі лінійного електричного кола може бути отриманий як алгебраїчна сума струмів, що спричиняються у цьому контурі кожною е. р. с. окремо.

Для прикладу розглянемо схему рис. 7.2 і складемо для неї систему рівнянь за другим законом Кірхгофа:

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_3 R_3 &= E_1; \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 &= E_2; \\ I_1 + I_2 &= I_3 \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

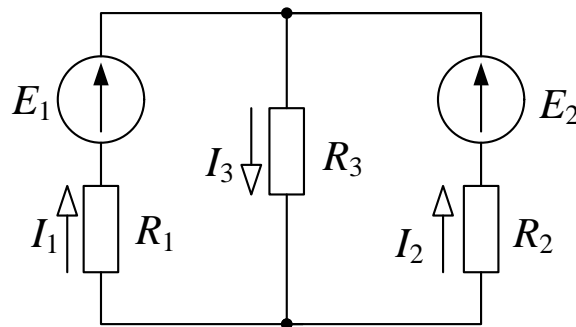


Рисунок 7.2 – До методу накладання

Розв'язування системи (7.3) дає вирази для струмів у вітках:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1 - \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2; \\ I_2 &= \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2 - \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1; \\ I_3 &= \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1 + \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

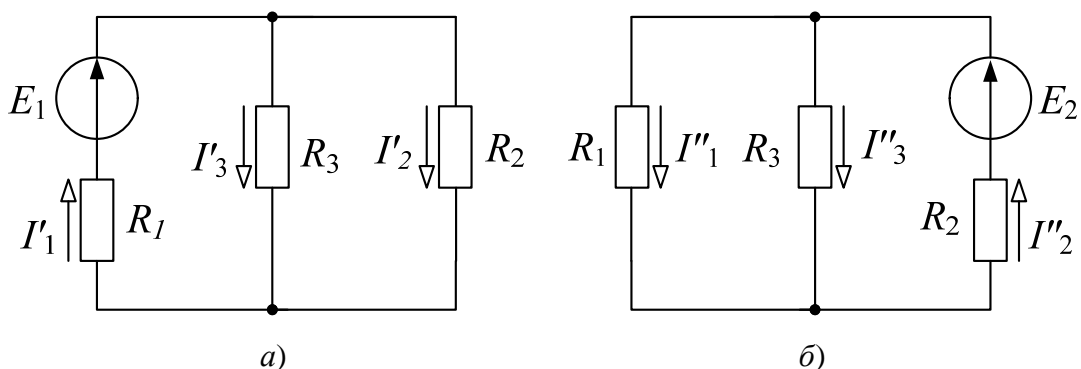


Рисунок 7.3 – До методу накладання

Тепер звернемося до рис. 7.3, а звідки отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_3 R_3 &= E_1; \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 &= 0; \\ I_2 + I_3 &= I_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

розв'язування якої дасть такі значення часткових струмів, збуджених в усіх вітках е. р. с.  $E_1$ :

$$\left. \begin{aligned} I'_1 &= \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1; \\ I'_2 &= \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1; \\ I'_3 &= \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1. \end{aligned} \right\}$$

Вважаючи  $E_1 = 0$  і зберігши у лівій вітці її внутрішній опір  $R_1$ , отримаємо випадок (рис. 7.3, б) і систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} -I''_1 R_1 + I''_3 R_3 &= 0; \\ -I''_2 R_2 - I''_3 R_3 &= -E_2; \\ I''_1 + I''_3 &= I''_2 \end{aligned} \right\}$$

розв'язування якої дасть такі значення часткових струмів, збуджених у всіх вітках е. р. с.  $E_2$ :

$$\left. \begin{aligned} I''_1 &= \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2; \\ I''_2 &= \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2; \\ I''_3 &= \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

З розгляду систем рівнянь (7.4), (7.5) та (7.6) маємо, що:

$$I_1 = I'_1 - I''_1, \quad I_2 = I''_2 - I'_2, \quad I_3 = I'_3 + I''_3. \quad (7.7)$$

Подібні міркування можна провести для будь-якої схеми з лінійними елементами, з яких впливає метод розрахунку електричних кіл: визначаються часткові струми у вітках від дії кожної е. р. с., а істинний струм кожної вітки дорівнює алгебраїчній сумі часткових струмів цієї вітки.

Звідси, рекомендований порядок розрахунку.

1. На основі вихідної схеми (у нашому випадку рис. 7.2) складають часткові розрахункові схеми (у нашому випадку рис. 7.3, а, б), у кожній з



яких діє тільки одна е. р. с. Усі інші е. р. с. виключаються і від кожної з них залишаються тільки їх внутрішні опори.

2. Будь-яким підходящим методом визначаються струми в часткових схемах.

3. Алгебраїчним складанням (накладанням) часткових струмів визначаються струми у вихідній схемі.

При визначенні дійсних струмів необхідно правильно врахувати напрямки часткових струмів: у вихідній схемі намічають умовно позитивні напрямки струмів у вітках. Частковий струм вважають позитивним, якщо він напрямлений однаково з позитивним струмом у тій самій вітці вихідної схеми, частковий струм протилежного напрямку вважають негативним.

При такому підході загальні струми у вітках можуть бути позитивними або негативними. У останньому випадку потрібно змінити напрямок струму і вважати його позитивним у подальших розрахунках.

### 7.3 Коефіцієнти передачі напруги і струму

У деяких випадках режим роботи електричного кола зручно охарактеризувати коефіцієнтами передачі напруги і струму. Найчастіше вони застосовуються до кіл, які мають одне джерело е. р. с. (рис. 7.4, а) або одне джерело струму (рис. 7.4, б).

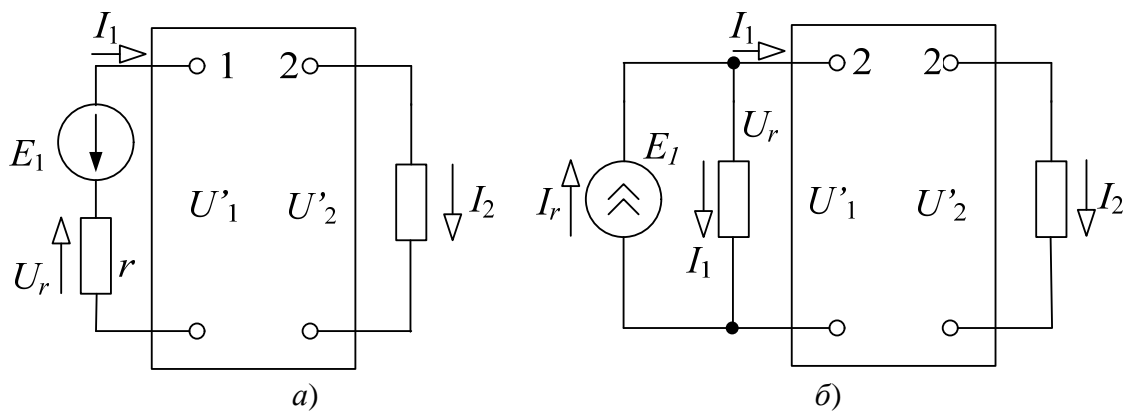


Рисунок 7.4 – До питання про коефіцієнти передачі напруги і струму: а) варіант з джерелом е. р. с. та б) струму

Коефіцієнт передачі напруги дорівнює відношенню напруги на затискачах навантаження (приймача) до напруги джерела е. р. с., що діє у колі:

$$K_u = U'_2 / U'_1. \quad (7.8)$$

Коефіцієнт передачі струму дорівнює відношенню струму в навантаженні (приймачі) до струму джерела, що діє у колі:

$$K_i = I_2 / I_1. \quad (7.9)$$

## 7.4 Метод еквівалентного генератора

В практиці розрахунків часто стоїть завдання – дослідити режим роботи однієї конкретної вітки при змінненні, наприклад, її опору, коли знати режими роботи решти елементів складного електричного кола немає потреби.

При розрахунках складного електричного кола приходиться виконувати значну обчислювальну роботу навіть у тому випадку, коли потрібно визначити струм в одній вітці. Об'єм цієї роботи зростає у декілька разів, якщо необхідно установити змінення струму, наприклад, при змінненні опору даної вітки, бо обчислення потрібно проводити декілька разів при різних значеннях опору.

Розв'язування такої задачі значно спрощується при використанні методу еквівалентного генератора.

### Обґрунтування методу

Досліджувана вітка з опором  $R_{ab}$  (рис. 7.5, а) приєднується до схеми всередині прямокутника  $A$  в точках  $a$  і  $b$ . Цю частину схеми можна розглядати відносно досліджуваної вітки як джерело з деякою еквівалентною е. р. с.  $E_{екв}$  і деяким еквівалентним внутрішнім опором  $r_{екв}$  (рис. 7.5, б). Таке умовне джерело енергії називається **еквівалентним генератором** або активним двополюсником (А). Якщо у частини схеми, що відноситься до двополюсника, немає джерел енергії, то двополюсник називається пасивним (П).

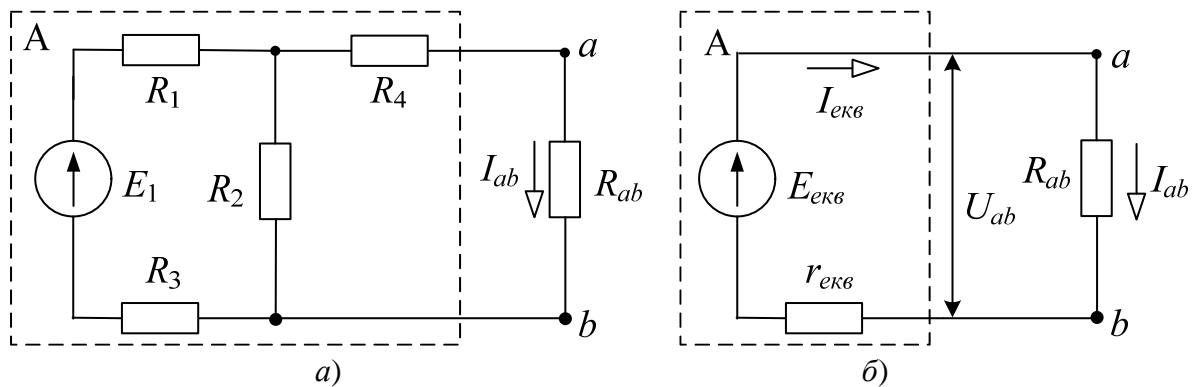


Рисунок 7.5 – До методу еквівалентного генератора

Струм у досліджуваній вітці можна знайти з еквівалентної схеми (рис. 7.5, б) за законом Ома для повного кола:

$$I_{ab} = E_{екв} / (R_{ab} + r_{екв}). \quad (7.10)$$

Таким чином, розв'язування задачі для визначення струму  $I_{ab}$  зводиться до визначення е. р. с.  $E_{екв}$  еквівалентного генератора і його внутрішнього опору  $r_{екв}$  який називається вихідним опором активного двополюсника.

Після визначення  $E_{екв}$  і  $r_{екв}$  подальше дослідження режиму роботи вітки  $ab$  при змінненні опору  $R_{ab}$  не потребує громіздких обчислень, бо е. р. с.  $E_{екв}$  і внутрішній опір  $r_{екв}$  еквівалентного генератора не змінюються.

### **Визначення параметрів еквівалентного генератора**

Для визначення цих величин розглянемо два крайні режими роботи еквівалентного генератора: режим холостого ходу та режим короткого замикання.

Від'єднаємо досліджувану гілку в точках  $a$  і  $b$  ( $R_{ab} = \infty$ ), тоді еквівалентний генератор буде знаходитись у режимі холостого ходу. Напругу між точками  $a$  і  $b$ , при цьому, позначимо через  $U_x$ , і вона буде дорівнювати еквівалентній е. р. с.:

$$U_x = E_{екв},$$

оскільки через відсутність струму ( $I_{екв} = 0$ ), спад напруги на внутрішньому опорі генератора  $r_{екв}$  дорівнює нулю.

Напругу холостого ходу можна визначити за допомогою формули (рис. 7.5, а);

$$U_x = I R_2 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} R_2.$$

Опір  $R_4$  не враховано, бо при відімкненому  $R_{ab}$  струм в резисторі  $R_4$  і спад напруги на ньому дорівнюватимуть нулю.

Отже, е. р. с. еквівалентного генератора дорівнює:

$$E_{екв} = \frac{E R_2}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (7.11)$$

Внутрішній опір еквівалентного генератора  $r_{екв}$  визначимо, використавши режим короткого замикання. У режимі короткого замикання  $R_{ab} = 0$  (рис. 7.5, б) і струм короткого замикання  $I_{к}$  дорівнюватиме:

$$I_{к} = \frac{E_{екв}}{r_{екв}},$$

звідси

$$r_{екв} = \frac{E_{екв}}{I_{к}}.$$

Струм короткого замикання  $I_{к}$  знайдемо, розглянувши схему (рис. 7.5, а) при  $R_{ab} = 0$ :

$$r_{к} = \frac{E}{R_1 + R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}. \quad (7.12)$$

Розділивши вираз (7.11) на (7.12), отримаємо значення внутрішнього опору  $r_{екв}$  еквівалентного генератора. Однак таке визначення виявляється громіздким, а тому у складних схемах його знаходять як вихідний опір

пасивного двополюсника між точками  $a$  і  $b$ . Для цього в схемі (7.5, б) беруть  $E_{екв} = 0$  і тоді  $r_{екв}$  є вихідним тепер уже пасивного двополюсника (вхідним опором  $R_{вх}$  з боку затискачів  $a$  і  $b$ ).

Рівність  $E_{екв}=0$  відповідає тому, що усі е. р. с. активного двополюсника рівні нулю і тому розрахункова схема для визначення  $r_{екв}$  ( $R_{вх}$  з боку затискачів  $a$  і  $b$ ) має вигляд схеми (рис. 7.5, а). Для такої схеми:

$$r_{екв} = R_4 + \frac{(R_1 + R_3)R_2}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (7.13)$$

Кількість незалежних вузлових рівнянь складної схеми, що має  $n$  вузлів, дорівнює  $n - 1$ .

Кількість незалежних контурних рівнянь складної схеми, що має  $m$  віток і  $n$  вузлів, дорівнює  $m - n + 1$ .

Струм у будь-якому контурі складного лінійного кола дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що викликаються у цьому контурі кожною е. р. с. окремо.

Метод еквівалентного генератора для визначення струму у досліджуваній вітці  $ab$  дає таке його значення:

$$I_{ab} = \frac{E_{екв}}{R_{ab} + r_{екв}}.$$

Еквівалентна е. р. с.,  $E_{екв}$  і її внутрішній опір  $r_{екв}$  визначаються з режиму холостого ходу і короткого замикання в точках  $a$ ,  $b$ .

### Запитання та задачі для закріплення

1. Методом застосування рівнянь Кірхгофа визначити струми в колі, схема якого зображена на рис. 7.2, коли відомо:  $E_1 = 100$  В,  $E_2 = 75$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 15$  Ом,  $R_3 = 25$  Ом.

2. Методом накладання визначити струми у вітках схеми (рис. 7.1), коли відомо:  $E_1 = 100$  В,  $E_2 = 75$  В,  $E_3 = 125$  В,  $R_1 = R_3 = 20$  Ом,  $R_2 = R_7 = 40$  Ом,  $R_4 = R_6 = 30$  Ом.

3. Розрахувати струм між точками  $a$  і  $b$  схеми (рис. 7.5, а), коли  $E = 100$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 25$  Ом,  $R_4 = 30$  Ом.

4. Що означає проведення аналізу електричного кола?

5. Які вузлові чи контурні рівняння називаються незалежними?

6. Який порядок розрахунку електричного кола за методом накладання?

7. У чому полягає метод еквівалентного генератора?

## 8 КОЛА ЗІ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ

Змінне магнітне поле, пов'язане з довільним витком, наводить у ньому е. р. с., яка, за законом електромагнітної індукції, визначається швидкістю змінення магнітного потоку через площу витка незалежно від того, чим викликана зміна потоку. У котушці, яка складається з великої кількості витків, наводиться е. р. с., пропорційна швидкості змінення потокозчеплення, тобто швидкості змінення суми магнітних потоків, зчеплених з окремими витками котушки.

Якщо усі витки котушки пронизуються одним і тим самим потоком, то потокозчеплення дорівнює добутку магнітного потоку на кількість витків.

Вивчаючи кола гармонічного струму, ми зустрічалися з явищем самоіндукції, тобто наведенням е. р. с. в електричному колі при зміненні потокозчеплення самоіндукції, обумовленого струмом у цьому колі. Відношення ж потокозчеплення самоіндукції до струму ми назвали індуктивністю  $L$ .

### 8.1 Взаємна індуктивність

Розглянемо тепер явище взаємної індукції, тобто наведення е. р. с. в електричному колі при зміненні потокозчеплення взаємоіндукції, обумовленого струмом у іншому електричному колі. Кола, в яких наводяться е. р. с. взаємної індукції, називаються індуктивно зв'язаними колами.

Зв'язок потокозчеплення взаємної індукції одного електричного кола зі струмом у другому колі, яка дорівнює відношенню потокозчеплення взаємної індукції в одному колі до струму в другому колі, характеризується взаємною індуктивністю  $M$ , яка, так само як і індуктивність  $L$ , вимірюється в генрі (Гн).

Якщо потокозчеплення  $W_1 \Phi_2$  першої котушки ( $W_1$  – кількість її витків,  $\Phi_2$  – магнітний потік, створений другою котушкою) обумовлено струмом  $i_2$  другої котушки, то взаємна індуктивність цих котушок дорівнюватиме:

$$M_{12} = \frac{W_1 \cdot \Phi_2}{i_2}. \quad (8.1)$$

Відповідно, якщо потокозчеплення  $W_2 \Phi_1$  другої котушки ( $W_2$  – кількість її витків,  $\Phi_1$  – магнітний потік, створений першою котушкою) обумовлено струмом  $i_1$  першої котушки, то взаємна індуктивність цих котушок дорівнюватиме:

$$M_{21} = \frac{W_2 \cdot \Phi_1}{i_1}. \quad (8.2)$$

Для лінійних електричних кіл є справедливим принцип взаємності, а тому завжди має місце рівність:

$$M_{12} = M_{21} = M,$$

і тому індекси біля параметра  $M$  не пишуться.

На підставі сказаного сформулюємо властивість взаємності індуктивно зв'язаних кіл: якщо струм, що протікає у першому колі, обумовлює у другому колі потітокзчеплення взаємної індукції ( $W_2\Phi_1$ ), то такий самий струм, що протікає у другому колі, обумовить у першому колі потітокзчеплення взаємної індукції ( $W_1\Phi_2$ ) такої ж самої величини:

$$W_2\Phi_1 = \Phi_2W_1.$$

## 8.2 Полярність індуктивно зв'язаних котушок. Е. р. с. взаємної індукції

З курсу фізики ми знаємо, що напрямки протікання струму через провідник і створений ним магнітний потік узгоджуються між собою за правилом правоходового гвинта.

Домовимось напрямки струмів у двох індуктивно зв'язаних котушках вважати узгодженими, якщо напрямки створюваних ними магнітних потоків самоіндукції та взаємоіндукції збігатимуться.

На рис. 8.1 показані індуктивно зв'язані котушки, намотані на спільне осердя. На рисунку 8.1, *а* витки обох котушок намотані у одному напрямку. При узгодженому напрямку струмів  $i_1$  та  $i_2$  в двох індуктивно зв'язаних котушках затискачі (полюси) цих котушок, відносно яких ці струми спрямовані однаково, називаються **однойменними** або **однополярними** (unipolar). Ці затискачі позначені точками.

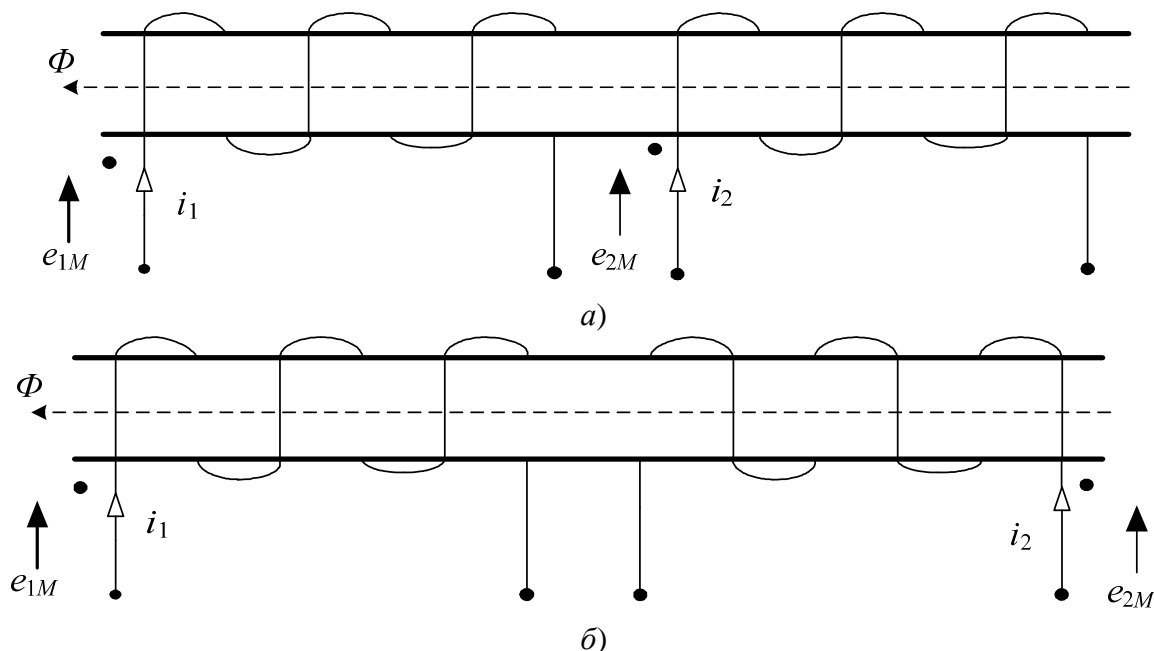


Рисунок 8.1 – Узгоджений напрямок струмів в індуктивно зв'язаних колах

На рисунку 8.1, *б* витки котушок намотані у протилежних напрямках, однойменні затискачі теж позначені точками.

На рис. 8.2 показано схематичне зображення двох індуктивно зв'язаних котушок з витками, намотаними у одному напрямку (а), та у протилежних напрямках – (б), де точками позначені однойменні затискачі (полюси) котушок.

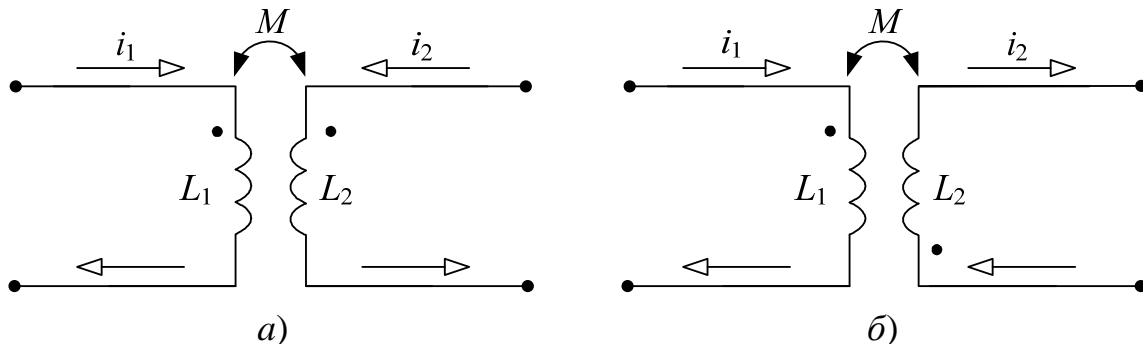


Рисунок 8.2 – Схематичне зображення індуктивно зв'язаних котушок з позначенням однойменних затискачів: а) витки, намотані у одному напрямку; б) – у протилежних напрямках

У підрозділі 2.5 посібника зауважено, що позитивний напрямок е. р. с. самоіндукції вибирається таким, що збігається з позитивним напрямком струму. Тому позитивний напрямок магнітного потоку і наведеної ним е. р. с. самоіндукції пов'язані правилом правоходового гвинта. Так само і позитивний напрямок е. р. с. взаємної індукції  $e_{1M}$ , що наводиться в котушці 1 струмом  $i_2$ , (рис. 8.1) приймається таким, що збігається з позитивним напрямком струму  $i_1$ . Аналогічно, позитивний напрямок е. р. с. взаємної індукції  $e_{2M}$  (рис. 8.1), що наводиться в котушці 2 струмом  $i_1$ , збігається з позитивним напрямком  $i_2$ .

За таких умов при узгодженому напрямку двох струмів  $i_1$  та  $i_2$  у формулі е. р. с. взаємної індукції є знак "мінус", так само як і у формулі для е. р. с. самоіндукції:

$$\begin{cases} e_{1M} = -W_1 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt} = -M \cdot \frac{di_2}{dt}, \\ e_{2M} = -W_2 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = -M \cdot \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (8.3)$$

Нехай через котушку 1 протікає струм  $i_1$ , причому він зростає  $di_1/dt > 0$ . На основі (8.3) в котушці 2 наведеться е. р. с. взаємної індукції:

$$e_{2M} = -M \cdot \frac{di_1}{dt} < 0.$$

У цьому випадку потенціал полюса котушки 2 однойменний з тим, в який втікає струм  $i_1$ , і виявляється вищим потенціалу другого полюса котушки 2.

Звідси є справедливим твердження: однойменні полюси двох індуктивно зв'язаних котушок мають ту особливість, що підведення до однієї з них струму, який зростає за величиною, викликає підвищення потенціалу на однойменному полюсі другої котушки.

Це твердження дозволяє експериментально знайти однойменні полюси індуктивно зв'язаних котушок. Одна з них вмикається в коло джерела постійної напруги  $E$ , а до другої приєднується вольтметр постійного струму  $V$  (рис. 8.3).

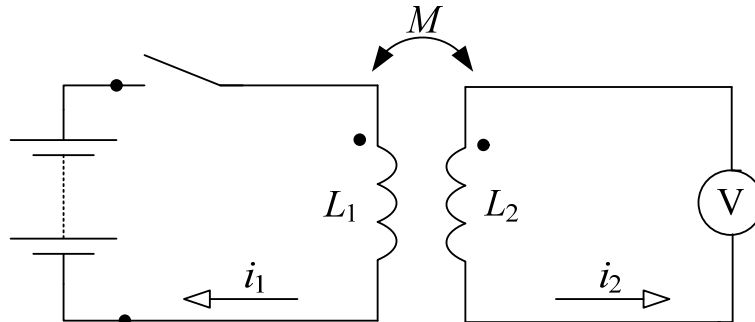


Рисунок 8.3 – До експериментального знаходження однойменних полюсів

Якщо у момент замикання кола джерела стрілка вольтметра відхиляється у бік позитивних показань, то полюси індуктивно зв'язаних котушок, підімкнених до позитивного полюса джерела електричної енергії і до позитивного полюса вольтметра, є однойменними.

Тепер розглянемо випадок зустрічного напрямку струмів  $i_1$  та  $i_2$  (рис. 8.2, б), де струми  $i_1$  та  $i_2$  спрямовані протилежно відносно однойменних полюсів.

Оскільки напрямки магнітних потоків самоіндукції та взаємоіндукції протилежні, е. р. с. взаємної індукції при зустрічному напрямку струмів обчислюються за формулами, що містять знак "плюс":

$$\begin{cases} e_{1M} = W_1 \cdot \frac{d\Phi_{M2}}{dt} = M \cdot \frac{di_2}{dt}, \\ e_{2M} = -W_2 \cdot \frac{d\Phi_{M1}}{dt} = M \cdot \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (8.4)$$

### 8.3 Взаємоіндуктивність при послідовному і паралельному ввімкненні індуктивно зв'язаних котушок

#### *Взаємоіндуктивний опір*

Розглядаючи дві індуктивно зв'язані котушки, запишемо вирази для е. р. с. самоіндукції та взаємоіндукції, які виникають при синусоїдних струмах у обох котушках, напрямлених однаково відносно однойменних полюсів:

у першій котушці

$$e_{1L} = -W_1 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} = -U_{1L},$$

$$e_{1M} = -W_1 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt} = -M \cdot \frac{di_2}{dt} = -U_{1M},$$

у другій котушці



$$e_{2L} = -W_2 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} = -U_{2L};$$

$$e_{2M} = -W_2 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = -M \cdot \frac{di_1}{dt} = -U_{2M}.$$

Е. р. с. і напруги самоіндукції та взаємоіндукції мають однакові знаки, бо при узгодженому увімкненні (рис. 8.3, а) потоки самоіндукції та взаємоіндукції спрямовані однаково. Створюваний ними ефект протидії струму враховується введенням в розрахунок індуктивних опорів  $\omega L_1$ ,  $\omega L_2$ , взаємоіндуктивного опору  $\omega M$ .

При зустрічному (рис. 8.3, б) увімкненні котушок е. р. с. і напруги самоіндукції та взаємоіндукції матимуть різні знаки:

$$\mathcal{U}_{m1L} = j\omega L_1 \mathcal{I}_{m1}, \quad \mathcal{U}_{m1M} = j\omega M \mathcal{I}_{m2},$$

$$\mathcal{U}_{m2L} = j\omega L_2 \mathcal{I}_{m2}, \quad \mathcal{U}_{m2M} = j\omega M \mathcal{I}_{m1};$$

де  $\mathcal{Z}_L = jX_L = j\omega L$  – як відомо, комплексний індуктивний опір;

$\mathcal{Z}_M = jX_M = j\omega M$  – комплексний взаємоіндуктивний опір.

### Послідовне з'єднання

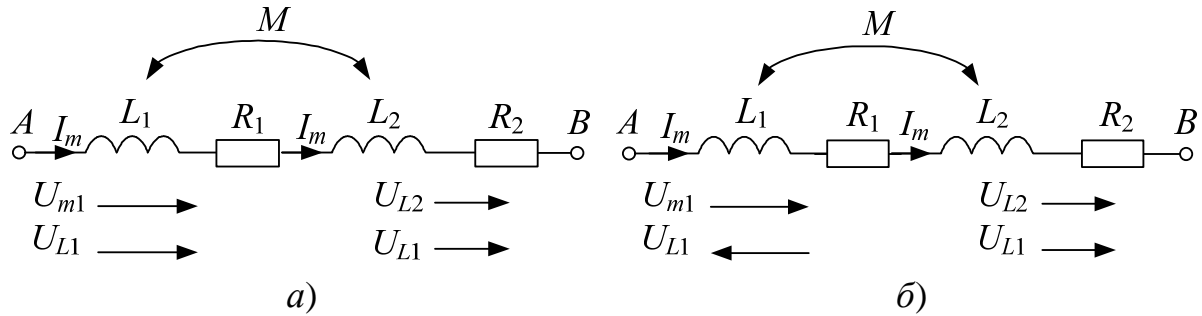


Рисунок 8.4 – Узгоджений а) і зустрічний б) напрямки струмів в індуктивно зв'язаних котушках, з'єднаних послідовно

Для розрахунку нерозгалуженого кола, де діє між точками А і В гармонічна напруга  $U = U_m \cos \omega t$ , напишемо другий закон Кірхгофа у символічній формі:

При узгодженому увімкненні (рис. 8.4, а):

$$\mathcal{U}_m = j\omega L_1 \mathcal{I}_m + r_1 \mathcal{I}_m + j\omega M \mathcal{I}_m + j\omega L_2 \mathcal{I}_m + r_2 \mathcal{I}_m + j\omega M \mathcal{I}_m,$$

$$\mathcal{U}_m = (r_1 + r_2) \mathcal{I}_m + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) \mathcal{I}_m. \quad (8.5)$$

Отриманий вираз показує, що дві індуктивно зв'язані котушки з'єднані послідовно при узгодженому напрямку струмів, еквівалентні котушці, що має активний опір  $r_1 + r_2$  і індуктивність  $L_1 + L_2 + 2M$ .

Таким чином, як і очікувалось, наявність взаємної індукції при узгодженому послідовному увімкненні, збільшує індуктивність кола.

При зустрічному увімкненні (рис. 8.4, б)

$$\mathcal{U}_m = j\omega L_1 \mathcal{I}_m + r_1 \mathcal{I}_m - j\omega M \mathcal{I}_m + j\omega L_2 \mathcal{I}_m + r_2 \mathcal{I}_m - j\omega M \mathcal{I}_m,$$

$$U_m = (r_1 + r_2)I_m + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)I_m. \quad (8.6)$$

Даний вираз показує, що дві індуктивно зв'язані котушки з'єднані послідовно і зустрічно, еквівалентні котушці, що має активний опір  $r_1 + r_2$  і індуктивність  $L_1 + L_2 - 2M$ .

Отже, наявність взаємної індукції при зустрічному увімкненні котушок, з'єднаних послідовно, зменшує індуктивність кола.

На основі сказаного можемо зробити висновок, що при узгодженому напрямку струмів (узгодженому увімкненні) спад напруги від взаємної індукції має знак "плюс", а при зустрічному напрямку струмів (зустрічному увімкненні) – знак "мінус". При цьому, обхід кола у обох випадках здійснюється у позитивному напрямку струму.

Відповідні векторні діаграми кіл з послідовним з'єднанням котушок (рис. 8.4) подані на рис. 8.5.

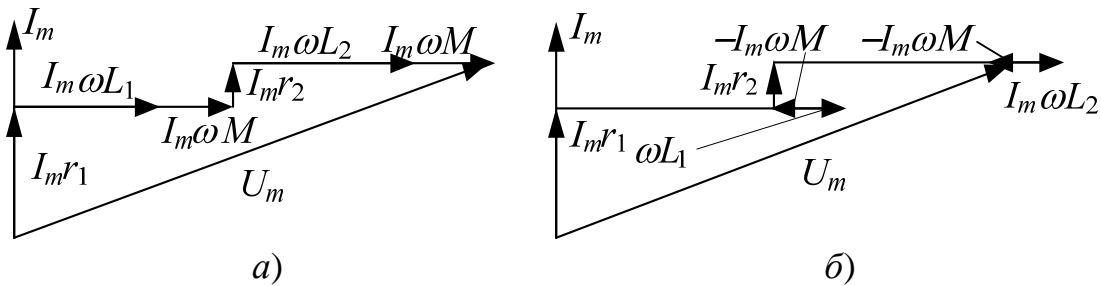


Рисунок 8.5 – Векторні діаграми при узгодженому а) і зустрічному б) увімкненні послідовно з'єднаних котушок індуктивності

### Паралельне з'єднання

Зі схеми рис. 8.6, а видно, що відносно однойменних полюсів струми в обох котушках спрямовані однаково, а тому спади напруг обумовлені взаємоіндуктивністю, в рівняннях Кірхгофа матимуть знак "плюс" і тоді:

$$\begin{cases} U_m = j\omega L_1 I_{m1} + r_1 I_{m1} + j\omega M I_{m2}, \\ U_m = j\omega L_2 I_{m2} + r_2 I_{m2} + j\omega M I_{m1}, \\ I_m = I_{m1} + I_{m2}. \end{cases} \quad (8.7)$$

Розв'язавши систему рівнянь (8.7) відносно струмів, отримаємо:

$$I_{m1} = \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} U_m, \quad I_{m2} = \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} U_m,$$

$$I_m = \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} U_m. \quad (8.8)$$

З останньої рівності знайдемо вхідний комплексний опір кола рис. 8.6, а:

$$\frac{U_m}{I_m} = Z_{ex} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M} \quad (8.9)$$

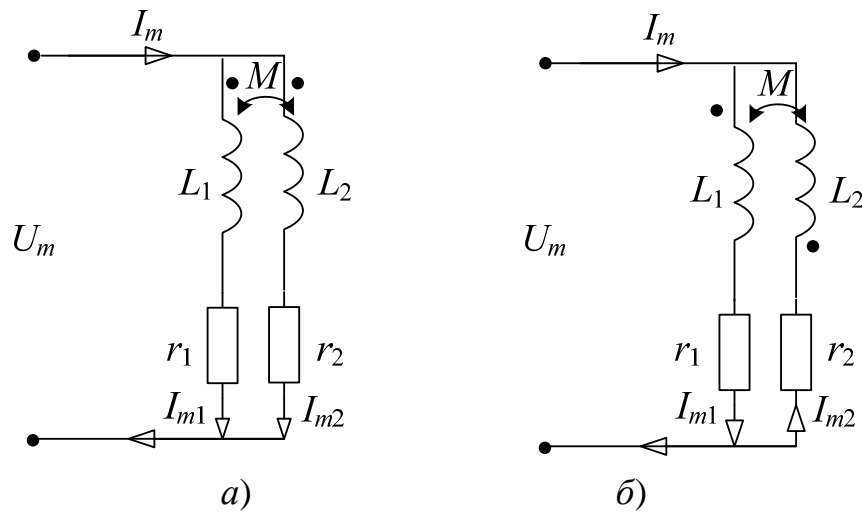


Рисунок 8.6 – Узгоджений *а)* і зустрічний *б)* напрямки струмів в індуктивно зв'язаних котушках, з'єднаних паралельно

У випадку зустрічно увімкнених котушок, з'єднаних паралельно (рис. 8.6, *б)*), складові, що обумовлюють спад напруги взаємної індукції, увійдуть в рівняння (8.7), (8.8) та (8.9) з протилежними знаками.

#### 8.4 Рівняння та схема заміщення трансформатора без феромагнітного осердя

Трансформатор (transformer) (тобто перетворювач) – це пристрій, що передає енергію з одного кола в інше за допомогою електромагнітної індукції. Він застосовується найчастіше для перетворення величин змінних струмів та напруг. Трансформатор складається з двох або декількох індуктивно зв'язаних обмоток (котушок), насаджених на спільне осердя. Зокрема, двообмотковий трансформатор з повітряним осердям (тобто без осердя) часто застосовується у пристроях радіозв'язку, радіовимірювальної техніки, радіоавтоматики тощо. До первинної обмотки трансформатора (рис. 8.7), яка є котушкою з індуктивністю  $L_1$  та опором  $R_1$ , підводиться гармонічна напруга  $U_1 = U_1(t)$  від деякого джерела енергії (генератора е. р. с.), а до вторинної – з індуктивністю  $L_2$  та опором втрат  $R_2$  підмикається навантаження з опором  $Z_H$ . Між обмотками існує індуктивний зв'язок зі взаємоіндуктивністю  $M$ . На рисунку зображено випадок, коли обмотки увімкнені зустрічно.

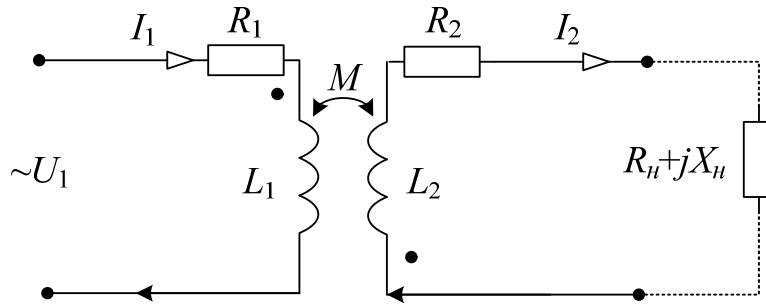


Рисунок 8.7 – Трансформатор без ферромагнітного осердя (з повітряним осердям)

**Схема заміщення (еквівалентна схема) трансформатора без осердя**

Для контурів первинної і вторинної обмоток запишемо рівняння, виходячи з другого закону Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m1}(j\omega L_1 + R_1) - j\omega M \dot{I}_{m2} &= \dot{U}_{1m}; \\ j\omega M \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2}(R_n + R_2 + j\omega L_2 + jX_n) &= 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

З другого рівняння визначимо комплексну амплітуду струму вторинної обмотки  $\dot{I}_{m2}$ :

$$\dot{I}_{m2} = \frac{j\omega M \dot{I}_{m1}}{R_n + R_2 + j(\omega L_2 + X_n)}$$

і підставимо її значення у перше рівняння:

$$\dot{I}_{m1}(j\omega L_1 + R_1) - j\omega M \frac{j\omega M \dot{I}_{m1}}{R_n + R_2 + j(\omega L_2 + X_n)} = \dot{U}_{1m},$$

звідки знайдемо вираз для комплексної амплітуди струму первинної обмотки  $\dot{I}_{m1}$  (позначивши  $j\omega L_1 + R_1 = Z_1$ ,  $\omega M = X_M$ ,  $j\omega L_2 + R_2 = Z_2$ ,  $R_n + jX_n = Z_n$ ):

$$\dot{I}_{m1} Z_1 - \frac{X_M^2 \dot{I}_{m1}}{Z_2 + Z_n} = \dot{U}_{1m}, \quad \left( Z_1 - \frac{X_M^2}{Z_2 + Z_n} \right) \dot{I}_{m1} = \dot{U}_{1m},$$

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{1m}}{Z_1 - \frac{X_M^2}{Z_2 + Z_n}}.$$

Виходячи зі схеми рис. 8.7,  $\dot{U}_{1m} / \dot{I}_{m1}$  є комплексним опором, який буде спричинятися усією схемою струмові первинної обмотки, створюваному генератором  $U_1$ . Цей опір доцільно назвати вхідним опором трансформатора, навантаженого на  $Z_n$ . Згідно із законом Ома маємо:

$$\dot{I}_{m1} = \dot{U}_{1m} / Z_{ex},$$

де  $Z_{ex} = Z_1 - \frac{X_M^2}{Z_2 + Z_H} = R_1 + jX_1 + \frac{(wM)^2}{R_H + R_2 + j(X_2 + X_H)}$  (тут  $X_1 = wL_1$  – реактивний опір первинної котушки;  $X_2 = wL_2$  – реактивний опір вторинної котушки).

Вираз для  $Z_{ex}$  перепишемо таким чином:

$$Z_{ex} = R_1 + \frac{(wM)^2(R_H + R_2)}{(R_H + R_2)^2 + (X_2 + X_H)^2} + j \left( X_1 - \frac{(wM)^2(X_2 + X_H)}{(R_H + R_2)^2 + (X_2 + X_H)^2} \right) \quad (8.11)$$

Наявність вторинної обмотки призводить до зростання активного опору первинної котушки на

$$R_{ен} = \frac{(wM)^2(R_H + R_2)}{(R_H + R_2)^2 + (X_2 + X_H)^2},$$

який називається внесеним активним опором колом вторинної обмотки у коло первинної і позначається  $R_{ен}$ , а також до зростання реактивного опору первинної котушки на

$$X_{ен} = -\frac{(wM)^2(X_2 + X_H)}{(R_H + R_2)^2 + (X_2 + X_H)^2},$$

який називається внесеним реактивним опором колом вторинної обмотки у коло первинної і позначається  $X_{ен}$ , отже:

$$Z_{ex} = R_1 + R_{ен} + j(X_1 + X_{ен}) = R_1 + \frac{(wM)^2(R_H + R_2)}{(R_H + R_2)^2 + (X_2 + X_H)^2} + j \left( X_1 - \frac{(wM)^2(X_2 + X_H)}{(R_H + R_2)^2 + (X_2 + X_H)^2} \right). \quad (8.12)$$

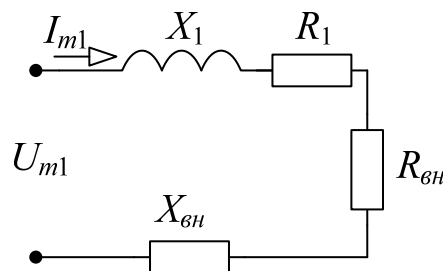


Рисунок 8.8 – Еквівалентна схема трансформатора без феромагнітного осердя

Звертаємо увагу на те, що у первинну обмотку вноситься реактивний опір, протилежний за знаком власному реактивному опору  $X_2 + X_H$  вторинної обмотки. Виходячи з рівнянь (8.11) та (8.12) матимемо схему заміщення трансформатора без феромагнітного осердя.

Тут розглядається випадок, коли осердя трансформатора виготовлене з неферромагнітного, а з діамагнітного чи парамагнітного матеріалу, відносна магнітна проникність яких  $\mu$  практично дорівнює одиниці, що не впливає на значення індуктивності котушки, яке буде дорівнювати його значенню у цій котушці без осердя.

### **Коефіцієнт трансформації**

Будемо виходити з того, що обидві котушки намотані на одне і те саме осердя. Це означає, що потокозчеплення у первинній котушці дорівнюватиме  $W_1 \cdot \Phi$ , у вторинній –  $W_2 \cdot \Phi$ , де  $\Phi$  – магнітний потік, що зчеплюється з витками обох котушок. Тоді у вторинній котушці наводитиметься е. р. с. взаємодукації  $e_2 = -W_2 d\Phi/dt$ , а у первинній –  $e_1 = -W_1 d\Phi/dt$ . Звідси:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{e_2}{W_2} = \frac{e_1}{W_1}; \quad \text{або} \quad \frac{e_2}{e_1} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{U_{2M}}{U_{1M}} = n.$$

Отже, якщо на первинній обмотці такого трансформатора створена напруга  $U_1$ , то напруга на вторинній обмотці дорівнюватиме:

$$U_2 = \frac{W_2}{W_1} U_1 = n U_1,$$

де  $n$  – коефіцієнт трансформації за напругою.

Якщо знехтувати втратами у трансформаторі, потужність на його вході буде дорівнювати потужності на виході, тобто:

$$P_1 = U_1 I_1 = P_2 = U_2 I_2,$$

звідки

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2} = n.$$

Отже, якщо  $W_2 > W_1$ , то  $n > 1$  – трансформатор є підвищувальним за напругою ( $U_2 = n U_1$ ) у  $n$  разів, але оскільки  $I_2 = I_1/n$ , цей трансформатор є знижувальним за струмом. Якщо у вторинну обмотку увімкнути опір навантаження  $R_n$  (рис. 8.7), то оскільки

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2/n}{I_2 \cdot n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{U_2}{I_2} = \frac{R_n}{n^2},$$

можна сказати, що цей трансформатор в  $n^2$  разів є знижувальним за опором. Тобто, опір  $R_2$  буде трансформуватися і сприйматися у колі первинної обмотки, як  $R'_n = R_n/n^2$ . Знижувальний за напругою трансформатор ( $n < 1$ ) буде одночасно підвищувальним (у  $n$  разів) за

струмом, та у  $n^2$  разів за опором, що використовується, наприклад, при узгодженні малого опору потужного динамічного гучномовця і високого вихідного опору каскаду звукового підсилювача.

Дві котушки вважаються увімкненими узгоджено, якщо створювані ними магнітні потоки самоіндукції та взаємоіндукції збігатимуться за напрямком. Полюси, відносно яких струми у котушках спрямовані однаково при узгодженому увімкненні котушок, називаються однойменними.

Коло вторинної обмотки трансформатора без феромагнітного осердя суттєво змінює параметри кола первинної обмотки, "вносячи" туди активний і реактивний опори, причому останній за знаком є протилежним власному індуктивному опору первинної котушки.

Напруга у колах обмоток трансформується прямопропорційно відношенню кількості витків в обмотках. Струм трансформується обернено пропорційно відношенню кількості витків в обмотках. Опір навантаження трансформується прямо пропорційно квадрату відношення витків в обмотках.

### 8.5 Автотрансформатор

Автотрансформатор відрізняється від трансформатора тим, що його обмотка більш низької напруги є частиною обмотки більш високої напруги.

Позначимо загальне число витків через  $W$ , а число витків обмотки нижчої напруги (рис. 8.9, *a*) через  $W_2$ .

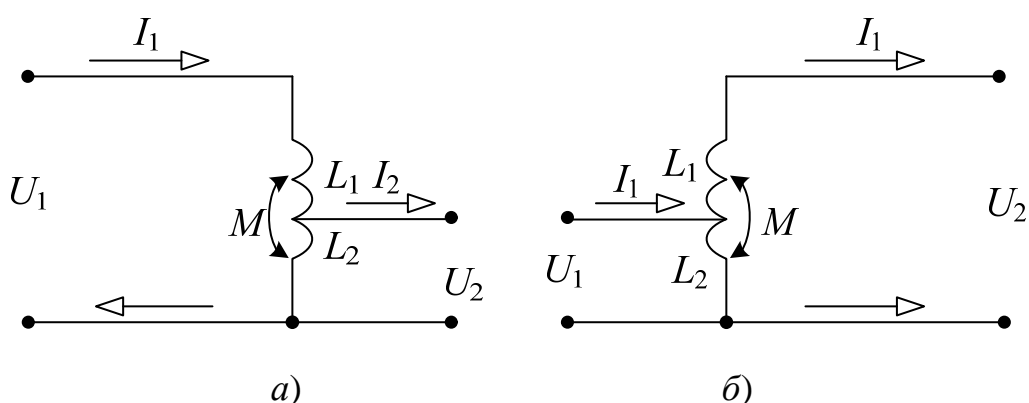


Рисунок 8.9 – Знижувальний *a*) та підвищувальний *б*) автотрансформатори

У режимі холостого ходу автотрансформатора (тобто, при розімкнутих вихідних затискачах), коли не враховується розсіювання, відношення первинної напруги  $U_{m1}$  до вторинної  $U_{m2}$  дорівнює

відношенню сумарної кількості витків загальної обмотки  $W$  до числа витків обмотки нижчої напруги  $W_2$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{W}{W_2} = n, (n < 1),$$

де  $n$  – коефіцієнт трансформації автотрансформатора.

Для схеми рис. 8.9, б, очевидно, буде справедливим співвідношення

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{W_2}{W} = n, (n > 1).$$

При навантаженні вторинної обмотки підведена до трансформатора потужність передається на вторинну сторону електромагнітною індукцією (через спільне магнітне поле) та безпосередньо через електричний зв'язок.

Застосування автотрансформатора замість звичайного трансформатора тієї ж потужності і з тим самим коефіцієнтом трансформації дає економію у міді, що йде на обмотку. Це досягається зменшенням загального числа витків і зменшенням товщини дроту вторинної обмотки, через яку проходить струм, рівний різниці первинного і вторинного струмів.

Ця економія буде тим більшою, чим ближче до одиниці коефіцієнт трансформації, бо при цьому різниця ( $I_1 - I_2$ ) стає мінімальною.

### Запитання та задачі для закріплення

1. Як застосувати трансформатор як узгоджувальний пристрій?
2. Що таке взаємодуктивний опір, від чого залежить його значення?
3. Принцип дії автотрансформатора.
4. Що таке схема заміщення трансформатора без осердя?
5. Побудувати векторну діаграму струмів та напруг для кола, показаного на рис. 8.7.

6. У вітку першої котушки схеми рис. 8.6,а послідовно увімкнено конденсатор з  $C = 5,0$  мкФ. У схемі  $r_1 = 2,0$  Ом,  $r_2 = 1,0$  Ом,  $L_1 = 0,02$  Гн,  $L_2 = 0,01$  Гн,  $M = 0,005$  Гн. Визначити напругу на конденсаторі, коли напруга  $U_m = 100$  В,  $f = 10$  кГц.

7. Трансформатор, який має дві обмотки на спільному осерді, має  $r_1 = 10$  Ом,  $L_2 = 0,1$  Гн, загальний опір вторинної обмотки  $Z$  навантаження  $10$  кОм,  $W_1/W_2 = 10$ ; коефіцієнт зв'язку  $K = 0,5$ . Визначити решту параметрів трансформатора.



## 9 ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ У СИСТЕМІ ЗВ'ЯЗАНИХ КОНТУРІВ

Системою зв'язаних контурів будемо називати сукупність двох і більше контурів, увімкнених таким чином, щоб електромагнітні коливання, збуджені в одному з них, передавалися в інші і в результаті цього відбувався обмін енергіями між ними.

У цьому розділі будемо розглядати систему, яка складається з двох контурів. У такій системі контур, що живиться від генератора е. р. с., будемо називати первинним, а другий контур – вторинним, який отримуватиме енергію від первинного. Загальний для обох контурів елемент будемо називати елементом зв'язку, який характеризуватиметься опором зв'язку.

### 9.1 Основні схеми систем зв'язаних контурів

В залежності від характеру опору зв'язку розрізняють схеми: з індуктивним (трансформаторним або автотрансформаторним) зв'язком, з ємнісним (внутрішньоємнісним або зовнішньоємнісним) зв'язком та з індуктивно-ємнісним зв'язком.

У схемі з трансформаторним зв'язком (рис. 9.1, а) струм первинного контуру  $I_1$  збуджується генератором е. р. с.  $E_1$ , проходить через котушку індуктивності  $L_1$  з втратами  $r_1$  і збуджує магнітне поле, під дією якого у котушці  $L_2$  наводиться е. р. с. індукції (взаємоіндукції), яка, у свою чергу, збуджує (викликає) струм  $I_2$  у вторинному контурі. Далі цей струм, проходячи через котушку індуктивності  $L_2$ , збуджує своє магнітне поле, під дією якого у котушці  $L_1$  наводиться е. р. с. індукції. Тобто, між контурами буде відбуватися обмін енергіями. Отже, у даній схемі опір зв'язку  $Z_{зв} = j\omega M$ , де  $M$  – взаємоіндуктивність між котушками  $L_1$  та  $L_2$ .

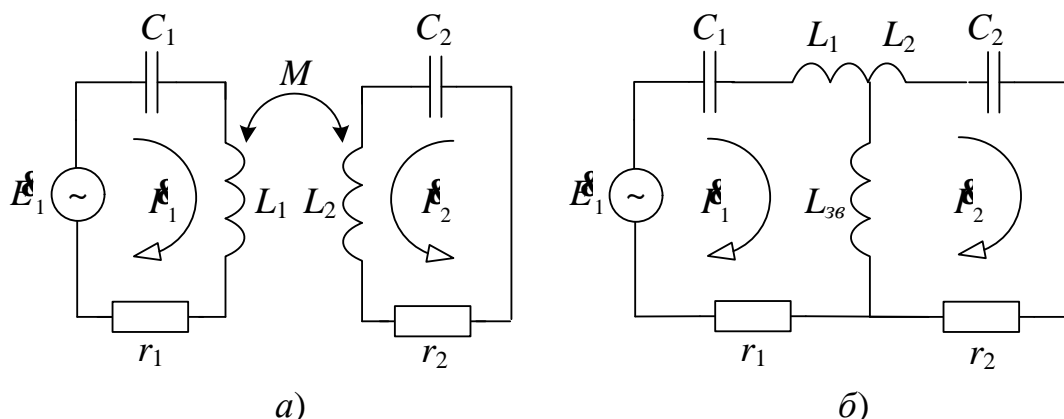


Рисунок 9.1 – Системи двох контурів: а) з трансформаторним та б) автотрансформаторним зв'язками

У схемі з автотрансформаторним зв'язком (рис. 9.1, б) у первинному контурі генератор е. р. с.  $E_1$  створить струм  $I_1$ , що збудить у котушці зв'язку  $L_{зв}$  е. р. с. самоіндукції, яка одночасно належить і

вторинному контуру і у ньому створить струм  $I_2$ . Цей струм, протікаючи через котушку зв'язку, збудить у ній свою е.р.с. самоіндукції, що призводить до змінення струму  $I_1$ , тобто до обміну енергіями між контурами. Очевидно, опором зв'язку у даній схемі буде  $Z_{36} = j\omega L_{36}$ .

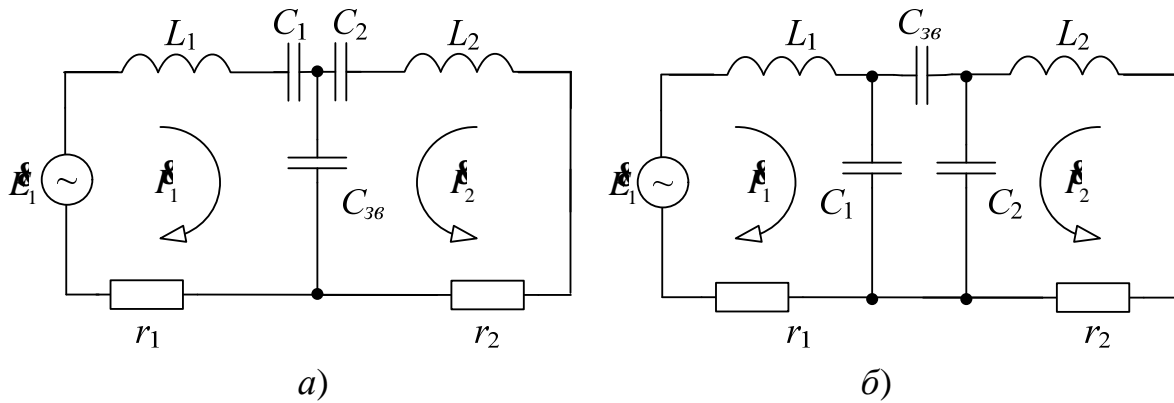


Рисунок 9.2 – Системи двох контурів: а) з внутрішньоємнісним та б) зовнішньоємнісним зв'язками

У схемі з внутрішньоємнісним зв'язком (рис. 9.2, а) елементом зв'язку слугує конденсатор  $C_{36}$ , на якому струм первинного контуру  $I_1$  утворює напругу (цей конденсатор заряджається), яка викликає струм вторинного контуру  $I_2$ . Останній, у свою чергу, створить на конденсаторі свою напругу, яка буде впливати на струм у первинному контурі, що призводить до обміну енергіями між контурами. Опір зв'язку, очевидно,  $Z_{36} = 1/j\omega C_{36}$ .

У схемі із зовнішньоємнісним зв'язком (рис. 9.2, б) елементом зв'язку є конденсатор  $C_{36}$  у який відійде частина струму первинного контуру  $I_1$ . На цьому конденсаторі утвориться напруга, яка викличе струм у вторинному контурі  $I_2$ . Частина цього струму відійде у конденсатор зв'язку, напруга на якому вплине на струм у первинному контурі, тобто, матимемо процес обміну енергіями між контурами. Опір зв'язку  $Z_{36} = 1/j\omega C_{36}$ .

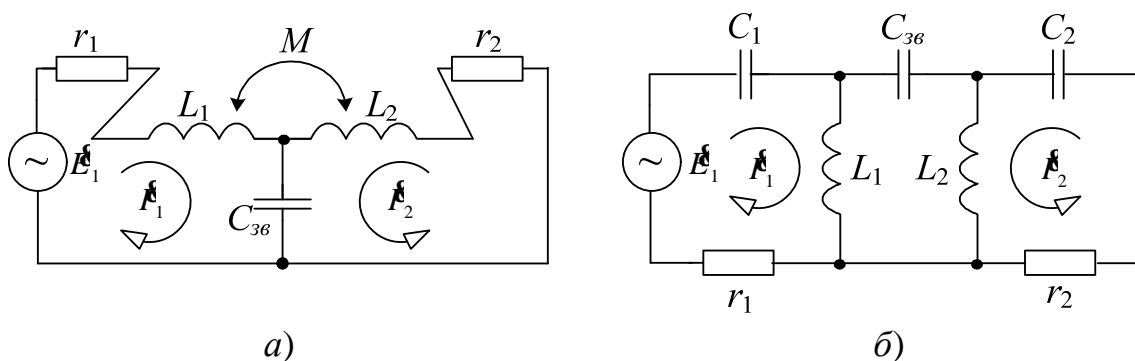


Рисунок 9.3 – Системи двох контурів з індуктивно-ємнісними зв'язками

У схемах з індуктивно ємнісними (комбінованими) (рис. 9.3) зв'язками струм у первинному контурі, протікаючи через котушку  $L_1$  і конденсатор  $C_{36}$ , наведе у котушці  $L_2$  е. р. с. взаємоіндукції і створить напругу на конденсаторі  $C_{36}$ , які і збудять струм  $I_2$  у вторинному контурі. Струм  $I_2$ , протікаючи через котушку  $L_2$  і конденсатор  $C_{36}$ , наведе у котушці  $L_1$  е. р. с. взаємоіндукції і створить, у свою чергу, напругу на конденсаторі  $C_{36}$ , вплинувши таким чином на струм первинного контуру  $I_1$ . Отже, існуватиме обмін енергіями між контурами. Опір зв'язку  $Z_{36} = j\omega M - 1/j\omega C_{36}$ .

## 9.2 Коефіцієнт зв'язку

Коефіцієнт зв'язку є кількісною оцінкою "сили" зв'язку між контурами. При великих значеннях цього коефіцієнта говорять про сильний зв'язок, при малих – про слабкий зв'язок між контурами.

Значення коефіцієнта зв'язку  $K_{36}$  отримаємо, виходячи з коефіцієнта передачі напруги від одного контуру до іншого.

Наприклад, розіркнемо вторинний контур системи з трансформаторним зв'язком і визначимо, яку частину напруги від усієї котушки індуктивності первинного контуру  $L_1$  (рис. 9.1,а) складає напруга, що знімається з опору зв'язку  $\omega M$ . Очевидно, це і є коефіцієнт передачі напруги від первинного контуру до вторинного:

$$K_{12} = \frac{U_{36}}{U_{L1}} = \frac{I_1 \omega M}{I_1 \omega L_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{M}{L_I},$$

де через  $L_I$  позначена уся індуктивність первинного контуру, яка у даному прикладі дорівнює індуктивності котушки  $L_1$ .

Аналогічно, коефіцієнт передачі напруги з вторинного контуру у первинний є відношення напруги, що передається ( $U_{36} = I_2 \omega M$ ), до напруги на котушці  $L_{II}$ : де  $L_{II}$  – вся індуктивність вторинного контуру, яка у даному прикладі дорівнює індуктивності  $L_2$

$$K_{21} = \frac{U_{36}}{U_{L2}} = \frac{I_2 \omega M}{I_2 \omega L_2} = \frac{M}{L_2} = \frac{M}{L_{II}}.$$

Загальний коефіцієнт зв'язку  $K_{36}$  розраховується як середнє геометричне від коефіцієнтів  $K_{12}$  і  $K_{21}$ .

$$K_{36} = \sqrt{K_{12} \cdot K_{21}} = \frac{M}{\sqrt{L_I \cdot L_{II}}}. \quad (9.1)$$

Помноживши чисельник і знаменник виразу (9.1) на  $\omega$ , отримаємо:

$$K_{36} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_I \cdot \omega L_{II}}} = \frac{X_{36}}{\sqrt{X_I \cdot X_{II}}}, \quad (9.2)$$

де  $X_{3\phi}$ ,  $X_I$  та  $X_{II}$  – реактивні опори елемента зв'язку, первинного та вторинного контурів, які мають (усі три) однаковий характер реактивності (індуктивний, як у цьому прикладі).

Виходячи з цих позицій, отримуємо вирази для  $K_{3\phi}$  для схем з автотрансформаторним, внутрішньоємнісним та зовнішньоємнісним зв'язками.

Для схеми з автотрансформаторним зв'язком (рис. 9.1,б), де струм первинного контуру  $I_1$  послідовно протікає через котушки  $L_1$  та  $L_{3\phi}$  індуктивність  $L_I = L_1 + L_{3\phi}$ ; струм  $I_2$  послідовно протікає через котушку  $L_2$  та  $L_{3\phi}$ , тому  $L_{II} = L_2 + L_{3\phi}$  і формула (9.2) запишеться так:

$$K_{3\phi} = \frac{wL_{3\phi}}{\sqrt{w(L_1 + L_{3\phi}) \cdot w(L_2 + L_{3\phi})}} = \frac{L_{3\phi}}{\sqrt{(L_1 + L_{3\phi}) \cdot (L_2 + L_{3\phi})}}.$$

Для схеми з внутрішньоємнісним зв'язком (рис. 9.2,а), де струм  $I_1$  послідовно протікає через конденсатори  $C_1$  та  $C_{3\phi}$ , а струм  $I_2$  – через конденсатори  $C_2$  та  $C_{3\phi}$ , формула (9.2) запишеться так:

$$K_{3\phi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{wC_1} \cdot \frac{1}{wC_{3\phi}}}} = \frac{\sqrt{C_I \cdot C_{II}}}{C_{3\phi}}. \quad (9.3)$$

де  $C_I = \frac{C_1 \cdot C_{3\phi}}{C_1 + C_{3\phi}}$  – вся ємність первинного контуру;

$C_{II} = \frac{C_2 \cdot C_{3\phi}}{C_2 + C_{3\phi}}$  – вся ємність вторинного контуру.

Таким чином:

$$K_{3\phi} = \sqrt{\frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_{3\phi})(C_2 + C_{3\phi})}}. \quad (9.4)$$

На практиці найчастіше  $C_{3\phi} \ll C_1$ ,  $C_{3\phi} \ll C_2$  і тоді:  $K_{3\phi} \approx 1$ .

Для схеми із зовнішньоємнісним зв'язком (рис. 9.2, б):

$$K_{3\phi} = \frac{C_{3\phi}}{\sqrt{(C_1 + C_{3\phi})(C_2 + C_{3\phi})}}. \quad (9.5)$$

Коли  $C_{3\phi} \ll C_1$ ,  $C_{3\phi} \ll C_2$ ,  $K_{3\phi} \approx C_{3\phi} / \sqrt{C_1 \cdot C_2}$ .

З викладеного бачимо, що коефіцієнт зв'язку у будь-якій з розглянутих схем можна збільшити, змінюючи опір зв'язку, шляхом збільшення взаємоіндуктивності  $M$  у трансформаторній схемі; збільшення

індуктивності котушки зв'язку  $L_{36}$  в автотрансформаторній схемі; зменшення ємності конденсатора зв'язку у внутрішньоємнісній схемі; збільшення ємності конденсатора зв'язку у зовнішньоємнісній схемі.

### 9.3 Вхідний опір системи двох контурів з трансформаторним зв'язком

Розмова буде йти про схему системи двох контурів з трансформаторним зв'язком, зображену на рис. 9.1, а. Оскільки опір зв'язку  $X_{36} = \omega M$ , то його можна уявити як опір елемента схеми через який протікають струми  $I_1$  (первинний контур) і  $I_2$  (вторинний контур), бо сам елемент зв'язку, очевидно, є спільним для обох контурів. Отже, схему системи двох трансформаторно зв'язаних контурів можна зобразити рис. 9.4 і назвати її узагальненою схемою заміщення.

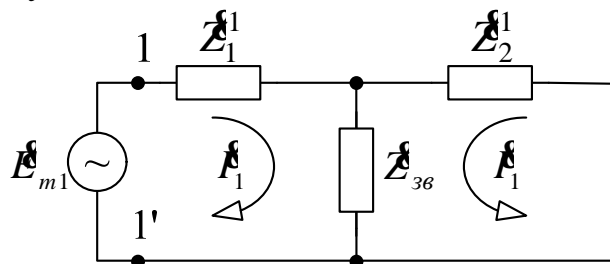


Рисунок 9.4 – Узагальнена схема заміщення системи двох зв'язаних контурів

Очевидно у такий спосіб можна подати функціональні відношення між елементами будь-якої системи двох зв'язаних контурів, що і дозволяє у назву схеми рис. 9.4 вводити слово "узагальнена".

Оскільки початкову фазу генератора гармонічної е. р. с. можемо прийняти рівною нулю, то  $E_{m1} = E_{m1}$ .  $Z_{36}$  – опір зв'язку між контурами,  $Z_1^1 + Z_{36} = Z_1$  – повний опір первинного,  $Z_2^1 + Z_{36} = Z_2$  – повний опір вторинного контурів.

Запишемо другий закон Кірхгофа для цих контурів:

$$E_{m1} = (Z_1^1 + Z_{36}) I_{m1} + Z_{36} I_{m2} = Z_1 I_{m1} + Z_{36} I_{m2},$$

$$0 = (Z_2^1 + Z_{36}) I_{m2} + Z_{36} I_{m1} = Z_2 I_{m2} + Z_{36} I_{m1}.$$

З другого рівняння знайдемо  $I_{m2} = -I_{m1} Z_{36} / Z_2$  і підставимо його у перше рівняння:

$$E_{m1} = \left( Z_1 I_{m1} + \frac{Z_{36}^2}{Z_2} \right), \quad I_{m1} = I_{m1} \left( Z_1 - \frac{Z_{36}^2}{Z_2} \right)$$

В останньому виразі, у дужках, маємо опір, який буде сприймати генератор  $E_{m1}$  у точках 1-1', віддаючи струм  $I_{m1}$  у систему двох контурів (рис. 9.4), тобто:  $E_{m1} = I_{m1} Z_{ex}$ . Звідки вхідний опір системи буде комплексним і дорівнюватиме:

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{36}^2}{\underline{Z}_2}. \quad (9.6)$$

Для схеми рис. 9.1, а:  $r_1$  – активний опір,  $X_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1$  – реактивний опір первинного контуру;  $r_2$  – активний опір,  $X_2 = \omega L_2 - 1/\omega C_2$  – реактивний опір вторинного контуру,  $\underline{Z}_{36} = j\omega L$  – опір зв'язку.

Тоді рівняння (9.6) можна переписати у вигляді:

$$\underline{Z}_{ex} = r_1 + jX_1 - \frac{(jX_{36})^2}{r_2 + jX_2},$$

де  $\underline{Z}_{ex}$  є комплексним числом, яке можна записати в алгебраїчній формі як  $R_{ex} + jX_{ex}$ , тобто

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ex} = R_{ex} + jX_{ex} &= r_1 + jX_1 - \frac{(jX_{36})^2}{r_2 + jX_2} \cdot \frac{r_2 - jX_2}{r_2 - jX_2} = \\ &= r_1 + jX_1 + \frac{X_{36}^2 r_2}{r_2^2 + X_2^2} - j \frac{X_{36} X_2}{r_2^2 + X_2^2} = \\ &= r_1 + \frac{X_{36}^2 r_2}{r_2^2 + X_2^2} + j \left( X_1 - \frac{X_{36} X_2}{r_2^2 + X_2^2} \right) \end{aligned}$$

де  $Z_2 = \sqrt{r_2^2 + X_2^2}$  – модуль комплексного опору вторинного контуру.

З отриманого виразу маємо, що вхідний опір системи є комплексним, який складається з активної частини:

$$R_{ex} = r_1 + \frac{X_{36}^2 r_2}{r_2^2 + X_2^2} \quad (9.7)$$

та реактивної частини

$$X_{ex} = X_1 - \frac{X_{36} X_2}{r_2^2 + X_2^2}. \quad (9.8)$$

Комплексність вхідного опору говорить про те, що е. р. с. генератора  $\underline{E}_1$  і струм генератора  $\underline{I}_1$  зсунуті за фазою на кут

$$j_{ex} = \arctg(X_{ex}/R_{ex}). \quad (9.9)$$

#### 9.4 Внесені опори та їх фізичний зміст

При відсутності (або від'єднанні) вторинного контуру  $R_{ex} = r_1$  та  $X_{ex} = X_1$  ( $M = 0$ ,  $X_{36} = 0$ ). Звідси випливає, що другі доданки у формулах (9.7) і (9.8) обумовлені вторинним контуром і називаються активною  $r_{en}$  і

реактивною  $X_{\text{вн}}$  складовими внесеного комплексного опору із вторинного контуру у первинний, тобто

$$r_{\text{вн}} = \frac{X_{\text{зв}}^2 r_2}{r_2^2 + X_2^2}, \quad (9.10)$$

$$X_{\text{вн}} = -\frac{X_{\text{зв}}^2 X_2}{r_2^2 + X_2^2}, \quad (9.11)$$

$$R_{\text{ex}} = r_1 + r_{\text{вн}}, \quad X_{\text{ex}} = X_1 + X_{\text{вн}}. \quad (9.12)$$

Знак "мінус" у виразі (9.11) говорить про те, що реактивний опір  $X_{\text{вн}}$ , який вноситься у первинний контур із вторинного, за знаком завжди є протилежним власному реактивному опору вторинного контуру  $X_2$ .

Отже, при розрахунку струму генератора  $I_{m1}$  систему двох зв'язаних контурів можна замінити одним послідовним контуром, який складатиметься із послідовно з'єднаних елементів з параметрами  $R_{\text{ex}} = r_1 + r_{\text{вн}}$ ,  $X_{\text{ex}} = X_1 + X_{\text{вн}}$  (рис. 9.5).

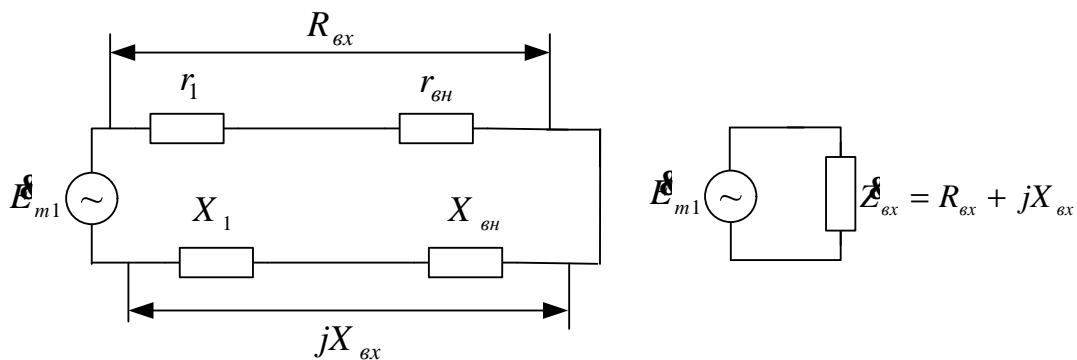


Рисунок 9.5 – Схеми заміщення системи двох зв'язаних контурів

Побудуємо векторну діаграму системи двох контурів з трансформаторним зв'язком (рис. 9.1, а), коли кожен з цих контурів порізно настроєний у резонанс на частоту генератора  $\omega_0$ , тобто  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$  (рис. 9.6, а).

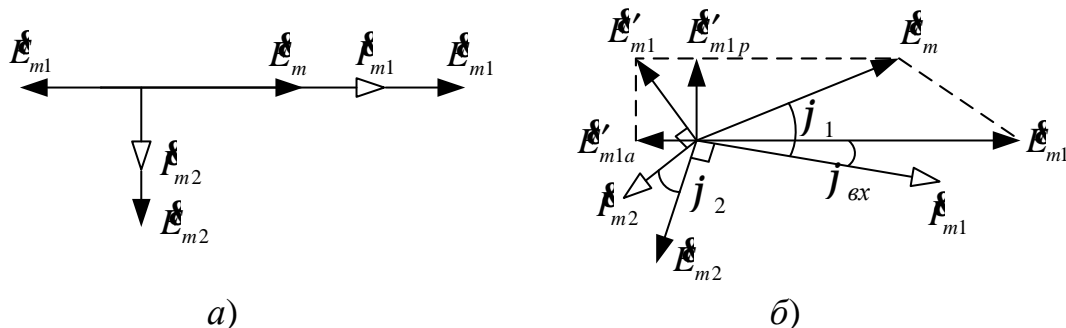


Рисунок 9.6 – Векторні діаграми струмів та е. р. с. у контурах з трансформаторним зв'язком

Вихідним (рис. 9.6, а) вважатимемо довільно зорієнтований вектор е. р. с. генератора  $E_{m1}$ . У зазначеному випадку  $X_1 = 0$ , а тому струм

первинного контуру  $\dot{I}_{m1}$  збігатиметься за фазою з е. р. с. генератора. Струм  $\dot{I}_{m1}$  наводить у витках котушки  $L_2$  е. р. с. взаємоіндукції  $\dot{E}_{m2} = -I_{m1}(j\omega_0 M) = -j\omega_0 M I_{m1} = E_{m2} e^{-jp/2}$  (де  $E_{m2} = \omega_0 M I_{m1}$ ), яка за фазою відставатиме від струму  $I_{m1}$  на  $90^\circ$ . Оскільки вторинний контур настроєний у резонанс, то  $X_2 = 0$ , струм у вторинному контурі збігатиметься з  $\dot{E}_{m2}$  за фазою і дорівнюватиме

$$I_{m2} = \frac{E_{m2}}{r_2} = \frac{I_{m1} \omega_0 M}{r_2}.$$

У свою чергу, струм  $I_{m2}$  наведе у котушці  $L_1$  е. р. с. індукції  $\dot{E}_{m1}^1 = -I_{m2}(j\omega_0 M) = E_{m1}^1 e^{-jp/2}$  (де  $E_{m1}^1 = \omega_0 M I_{m2}$ ), яка за фазою відставатиме від струму  $I_{m2}$  на  $90^\circ$ , амплітуда якої дорівнюватиме

$$E_{m1}^1 = \frac{I_{m1} (\omega_0 M)^2}{r_2}.$$

З векторної діаграми видно, що е. р. с.  $E_{m1}$  генератора знаходиться у протилежній фазі з наведеною (внесеною у первинний контур) е. р. с.  $E_{m1}^1$ . Це означає, що струм генератора  $I_{m1}$  дорівнює відношенню результуючої е. р. с. у первинному контурі  $E_m = E_{m1} - E_{m1}^1$  до опору  $r_1$ , бо  $X_1 = 0$ :

$$I_{m1} = \frac{E_{m1} - E_{m1}^1}{r_1} = \frac{E_{m1}}{r_1} - \frac{I_{m1} (\omega_0 M)^2}{r_1 \cdot r_2}.$$

Звідси:

$$E_{m1} = I_{m1} \cdot r_1 + I_{m1} \frac{(\omega_0 M)^2}{r_2} = I_{m1} \left( r_1 + \frac{(\omega_0 M)^2}{r_2} \right),$$

$$\frac{E_{m1}}{I_{m1}} = R_{\text{ex}} = r_1 + \frac{(\omega_0 M)^2}{r_2} = r_1 + r_{\text{ен}}. \quad (9.13)$$

Цей же результат легко отримати з виразів (9.10), (9.11) та (9.12), поклавши в них  $x_1 = x_2 = 0$ .

З викладеного випливає, що один і той самий струм генератора можна отримати за двома формулами:

$$I_{m1} = \frac{E_{m1} - E_{m1}^1}{r_1}, \quad I_{m1} = \frac{E_{m1}}{r_1 + r_{\text{ен}}}. \quad (9.14)$$

Висновок такий: друга формула (9.14) дозволяє за заданими параметрами елементів системи зв'язаних контурів розрахувати значення струму генератора, який працює на цю систему, а перша – відображає



фізичну суть ефекту зменшення струму  $I_{1m}$  при підмиканні вторинного контуру. Опір  $r_{\text{вн}}$  являє собою для генератора таке ж навантаження, як весь вторинний контур.

Іншими словами, ніякий опір  $r_{\text{вн}}$  у первинний контур не вноситься, а фізика явища полягає в індукуванні у первинному контурі протиелектрорушійної сили, що і призводить до зменшення струму у цьому контурі.

Потужність  $P_2$ , яка передається у вторинний контур, чисельно дорівнює потужності, що витрачається у еквівалентній схемі у внесеному на первинний контур опорі  $r_{\text{вн}}$ . Доведемо це. Потужність

$$P_2 = 0,5 I_{m2}^2 \cdot r_2 = 0,5 \left( I_{m1} \frac{w_0 M}{r_2} \right)^2 r_2 = 0,5 I_{m1}^2 \frac{(w_0 M)^2}{r_2} = 0,5 I_{m1}^2 r_{\text{вн}},$$

що і мали довести.

Тепер розглянемо **загальний випадок**, коли зв'язані контури настроєні, наприклад, так, що  $\omega > \omega_{01}$ ,  $\omega > \omega_{02}$  і  $\omega_{01} \neq \omega_{02}$  (рис. 9.6, б). Первинний та вторинний контури є послідовними контурами, а тому за вибраних умов характери їх вхідних опорів будуть індуктивними. Побудуємо векторну діаграму, довільно вибравши напрямок е. р. с.  $E_{m1}$ . Оскільки вхідний опір первинного контуру – індуктивний, то струм цього контуру  $I_{m1}$  відставатиме від е. р. с. на кут  $j_{\text{ex}} = \arctg(X_{\text{ex}}/R_{\text{ex}})$ . Струм  $I_{m1}$ , протікаючи через котушку  $L_1$ , наведе у котушці  $L_2$  е. р. с. індукції  $E_{m2} = -I_{m1} j \omega M$ , яка відстане від цього струму на  $90^\circ$ . Е. р. с.  $E_{m2}$  збудить у вторинному контурі струм  $I_{m2}$ , який через індуктивний характер опору цього контуру, відстане від е. р. с.  $E_{m2}$  на кут  $j_2$ . Струм  $I_{m2}$ , протікаючи через котушку  $L_2$ , наведе у котушці  $L_1$  е. р. с. індукції  $E_{1m}^1 = -I_{m2} w M$ , яка відстане від цього струму на  $90^\circ$ . Додавши, нарешті, вектори  $E_{1m}^1$  та  $E_{m1}^1$ , отримаємо результуючу е. р. с.  $E_m$ , що діятиме у первинному контурі і призведе до змінення його струму. Між векторами  $E_m$  та  $E_{m1}^1$  буде кут  $j_1 = \arctg(X_1/r_1)$ . Іншими словами, струм вторинного контуру  $I_{m2}$  наводить е. р. с.  $E_{m1}^1$  і, таким чином, змінює струм первинного контуру  $I_{m1}$  не тільки за величиною, але і за фазою. Це підтверджується наявністю двох складових вектора  $E_{m1}^1$ : активної  $E_{m1a}^1$  та реактивної  $E_{m1p}^1$ . Напрямок активної складової протилежний напрямку вектора  $E_{m1}^1$ , що виражається у внесенні у первинний контур активного опору  $r_{\text{вн}}$ . Внесений реактивний опір  $X_{\text{вн}} = -\frac{X_2 (wM)^2}{r_2^2 + X_2^2}$  буде мати знак, протилежний власному реактивному опору (нагадуємо, індуктивному) вторинного контуру, тобто буде мати ємнісний характер. Це і підтверджується векторною діаграмою,

бо відставання, за рахунок  $\dot{E}'_{m1}$ , струму  $I_{m1}$  за фазою від е. р. с. генератора зменшилось від  $\varphi_1$ , до  $\varphi_{ex}$  (на кут  $(\varphi_1 - \varphi_{ex})$ ).

Під впливом е. р. с.  $\dot{E}'_{m1}$  струм первинного контуру змінюється до:

$$\dot{I}_{m1} = \frac{E_m}{Z_1} = \frac{\dot{E}_{m1} + \dot{E}'_{m1}}{Z_1} = \frac{\dot{E}_{m1} + \dot{E}'_{m1}}{r + jX_1};$$

а за рахунок внесених опорів змінюється до

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{E}_{m1}}{Z_{ex}} = \frac{\dot{E}_{m1}}{R_{ex} + jX_{ex}} = \frac{\dot{E}_{m1}}{(r_1 + r_{en}) + j(X_1 + X_{en})}.$$

Таким чином, за будь-яких умов внесені опори є умовними (формальними) поняттями, за допомогою яких зручно розраховувати змінення струму  $I_{m1}$  під впливом вторинного контуру, який зводиться до наведення у первинному контурі е. р. с.  $\dot{E}'_{m1}$ .

Інакше кажучи, внесений опір є формальним зручним поняттям і ніякого фізичного змісту не має.

### 9.5 Настроювання системи двох зв'язаних контурів

Розглянемо систему двох трансформаторно зв'язаних контурів як чотириполюсник (рис. 9.7).

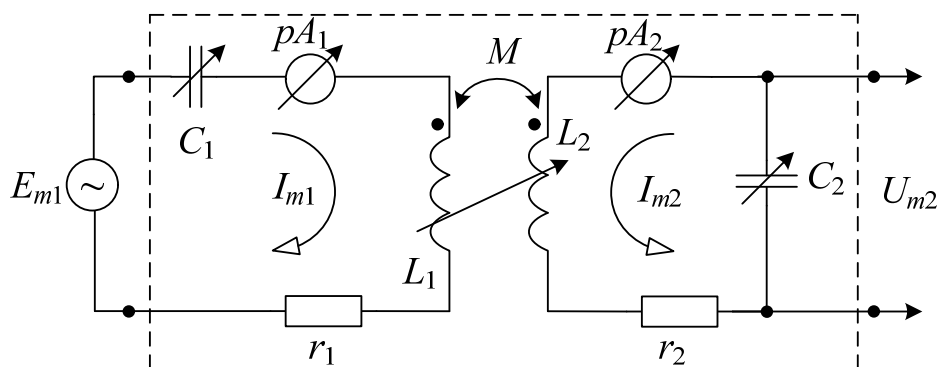


Рисунок 9.7 – Зв'язані контури як чотириполюсник

На вхідних полюсах такого чотириполюсника діє гармонічна е. р. с.  $e_1 = E_{m1} \cos(\omega t)$ , комплексна амплітуда якої дорівнює  $\dot{E}_{m1} = E_{m1}$ . Реакцією системи на цю дію будемо вважати струм у вторинному контурі  $I_{m2}$  або пропорційну йому вихідну напругу  $U_{m2}$ , яка знімається з конденсатора  $C_2$ .

Коливальна потужність  $P_K$ , що підводиться від генератора, витрачається у первинному ( $P_1$ ) та вторинному ( $P_2$ ) колах. Якщо система контурів використовується у потужному пристрої (у передавачеві, наприклад), то головною метою є – отримання більшої потужності  $P_2$  при можливо великому к. к. д. первинного контуру як передавальної ланки від генератора до вторинного контуру.

Тобто, к. к. д. цієї ланки:

$$h = \frac{P_2}{P_k} = \frac{P_2}{P_1 + P_2}. \quad (9.15)$$

Коли ж система контурів використовується у малопотужному пристрої, наприклад, у приймачеві, найважливішим є отримання максимального значення коефіцієнта передачі за напругою:

$$K = \frac{U_{m2}}{E_{m1}}.$$

Звичайно, досягти однієї будь-якої мети із зазначених вище не можливо через тісний зв'язок між ними. Наприклад, струм  $I_1$  визначатиме і значення напруги на виході контуру  $U_2$  і значення потужності  $P_2$  (корисної частини потужності генератора  $P_k$ ) одночасно. Тому в інженерній практиці треба шукати оптимальне рішення, яке одночасно задовольнило б обидві ці вимоги, сформульовані у технічному завданні на розробку певного радіотехнічного пристрою.

Відомі чотири способи настроювання системи двох трансформаторно зв'язаних контурів (рис. 9.7) і при цьому у нас є три елементи настроювання: конденсатори змінної ємності  $C_1$  і  $C_2$  та змінення ступеня ("сили") індуктивного зв'язку між контурами  $K_{зв}$ . У будь-якому випадку метою будемо вважати отримання максимального значення струму  $I_2$ .

**Перший частинний резонанс** досягається настроюванням тільки первинного контуру (змінюванням ємності  $C_1$ ), **другий частинний резонанс** – настроюванням лише вторинного контуру (змінюванням ємності  $C_2$ ), **повний резонанс** – настроюванням первинного потім вторинного контурів з наступним підбором ступеня зв'язку між ними (змінюванням опору зв'язку  $\omega M$ ), **складний резонанс** передбачає по чергове застосування одного з частинних резонансів і підбору ступеня зв'язку між контурами.

### 9.5.1 Перший частинний резонанс

Запишемо вирази для струмів первинного та вторинного контурів до настроювання.

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{(r_1 + r_{вн})^2 + (X_1 + X_{вн})^2}}, \quad (9.16)$$

$$I_2 = \frac{E_1 \cdot \omega M}{\sqrt{(r_1 + r_{вн})^2 + (X_1 + X_{вн})^2} \cdot Z_2}. \quad (9.17)$$

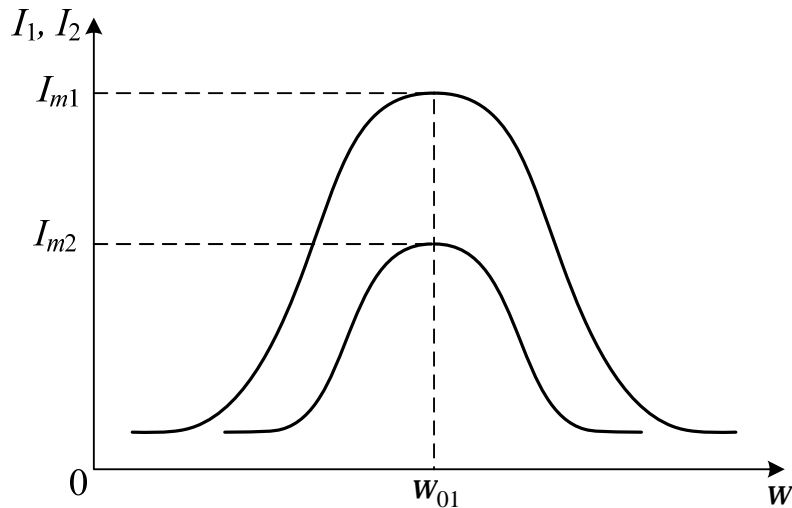


Рисунок 9.8 – Залежність струмів у контурах при настроюванні системи на 1-й частинний резонанс

Підтримуючи незмінною частоту генератора  $\omega$  та діюче значення е. р. с.  $E_1$ , змінюванням  $C_1$  будемо змінювати  $X_1$  і, коли воно дорівнюватиме  $X_{\text{вн}}$  з протилежним знаком ( $X + X_{\text{вн}}=0$ ), струми у обох контурах (рис. 9.8) зростуть до максимальних значень:

$$I_{2m} = \frac{E_1}{r_1 + r_{\text{вн}}}, \quad I_{1m} = \frac{E_1 \cdot \omega M}{(r_1 + r_{\text{вн}}) \cdot Z_2}.$$

Максимум струмів спостерігається на частоті генератора  $\omega = \omega_{01}$ , яка є частотою власних коливань первинного контуру.

Значення цієї частоти легко визначити з умови ( $X_1 + X_{\text{вн}} = 0$ ):

$$\omega_{01} L_{01} - \frac{1}{\omega_{01} C_1} = \frac{-(\omega_{01} M)^2 \left( \omega_{01} L_2 - \frac{1}{\omega_{01} C_2} \right)}{r_2^2 + \left( \omega_{01} L_2 - \frac{1}{\omega_{01} C_2} \right)^2},$$

яка гарантує повну компенсацію власним реактивним опором первинного контуру  $x_1$ , внесеного реактивного опору  $X_{\text{вн}}$  у первинний контур з вторинного. Внесений активний опір  $r_{\text{вн}}$  у сумі з власним опором  $r_1$  обмежують зростання струму  $I_1$  при настроюванні. Пропорційно струму  $I_1$  зростатиме струм  $I_2$ , значення якого завжди залишається меншим від першого.

### 9.5.2 Другий частинний резонанс

Тепер залишатимуться незмінними частота генератора  $\omega$ , реактивний опір первинного контуру  $X_1$  та діюче значення е. р. с. генератора  $E_1$ . Максимум струму  $I_{m2}$  досягнемо зміненням ємності конденсатора  $C_2$  вторинного контуру. Це станеться через зменшення опору цього контуру за рахунок повної компенсації власним реактивним опором реактивного опору, внесеного з первинного контуру. Тобто, опір вторинного контуру стає чисто активним і мінімальним.

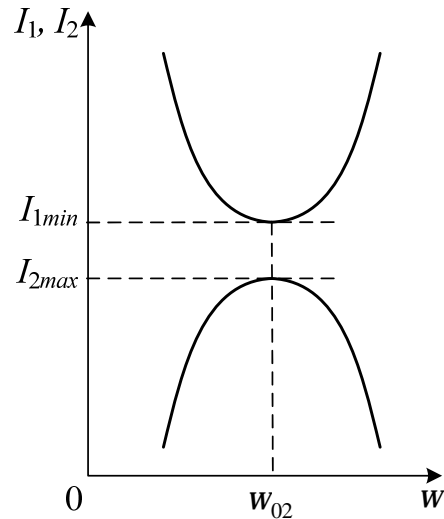


Рисунок 9.9 – Залежність струмів у контурах при настроюванні системи на 2-й частинний резонанс

Зростання струму  $I_2$  призведе до зростання е. р. с. індукції  $E_1'$  у первинному контурі (зростання активного  $r_{\text{вн}}$  та реактивного  $X_{\text{вн}}$  опорів). У результаті цього зменшуватиметься струм у первинному контурі  $I_1$ :

$$I_{m1} = \frac{E_{m1}}{\sqrt{(r_1 + r_{\text{вн}})^2 + (X_1 + X_{\text{вн}})^2}}.$$

На деякій частоті  $\omega_{02}$  (власній частоті вторинного контуру), яка при резонансі у вторинному контурі дорівнюватиме частоті генератора е. р. с.  $E_1$ , струм  $I_2$  досягне максимального, а струм  $I_1$  – мінімального значення. Маємо пам'ятати, що струм  $I_1$  завжди залишатиметься більшим за струм  $I_2$ , бо:

$$I_{m2} = \frac{E_{m1} \cdot wM}{\sqrt{(r_1 + r_{\text{вн}})^2 + (X_1 + X_{\text{вн}})^2} \cdot (r_2 + r_{2\text{вн}})},$$

де  $r_{2\text{вн}}$  – активний опір, внесений у вторинний контур з первинного.

### 9.5.3 Повний резонанс

Згадаємо, що до настроювання системи двох зв'язаних контурів, амплітуди струмів у контурах дорівнювали:

$$I_{m1} = \frac{E_{m1}}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{X_{3\phi}^2 \cdot r_2}{r_2^2 + X_2^2}\right)^2 + \left(X_1 - \frac{X_{3\phi}^2 \cdot X_2}{r_2^2 + X_2^2}\right)^2}},$$

$$I_{m2} = \frac{E_{m1} \cdot X_{3\phi}}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{X_{3\phi}^2 \cdot r_2}{r_2^2 + X_2^2}\right)^2 + \left(X_1 - \frac{X_{3\phi}^2 \cdot X_2}{r_2^2 + X_2^2}\right)^2} \cdot \sqrt{r_2^2 + X_2^2}}.$$

Настроювання у повний резонанс складається з трьох етапів.

1. При відімкненому вторинному контурі наструюється первинний контур і отримується у ньому значення найбільшого струму  $I'_{m1}$ . Оскільки йдеться про одиничний послідовний контур, то це буде на частоті власних коливань  $\omega_0$ , яка дорівнюватиме частоті, на якій працює генератор е. р. с.  $E_1$  і при цьому  $x_1=0$ , а струм  $I_1$ :

$$I'_{1\max} = \frac{E_1}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{X_{36}^2 \cdot r_2}{r_2^2 + X_2^2}\right)^2 + \left(\frac{X_{36}^2 \cdot X_2}{r_2^2 + X_2^2}\right)^2}}.$$

2. Між контурами встановлюємо слабкий зв'язок. Слабкий настільки, що внесеними з першого у другий контури опорами можна знехтувати і вважати, що струм  $I_2$  досягне максимального значення  $I_{m2}$  при  $X_2=0$ , як у одиничному контурі, коли його власна частота дорівнюватиме  $\omega_0$ . Отже, після цих двох етапів настроювання  $X_1 = 0$  та  $X_2 = 0$ , а значить:

$$X_{\text{вн}} = -\frac{X_{36}^2 \cdot X_2}{r_2^2 + X_2^2} = 0, \quad r_{\text{вн}} = \frac{X_{36}^2}{r_2}, \quad R_{\text{вх}} = r_1 + \frac{X_{36}^2}{r_2}, ;$$

$$I'_{m1} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{X_{36}^2}{r_2}} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{(w_0 M)^2}{r_2}},$$

$$I'_{m2} = \frac{E_1 \cdot X_{36}}{\left(r_1 + \frac{X_{36}^2}{r_2}\right) \cdot r_2} = \frac{E_1 \cdot w_0 M}{\left(r_1 + \frac{(w_0 M)^2}{r_2}\right) \cdot r_2}. \quad (9.18)$$

3. Підсилюємо зв'язок між контурами до критичного (оптимального), при якому струм у вторинному контурі досягне граничного максимального значення.

$$I_{m2m} = \frac{E_1 \cdot X_{kp}}{r_1 \cdot r_2 + X_{kp}^2} = \frac{E_1 \cdot w_0 M_{kp}}{r_1 \cdot r_2 + (w_0 M_{kp})^2}. \quad (9.19)$$

### **Залежність струмів у контурах від зв'язку між ними**

Виходячи з (9.18) бачимо, що  $I_1$  досягає максимального значення (рис. 9.10) при  $M = 0$  ( $I_{m1} = E_1/r_1$ ) і  $I_{kp1}$  при  $M = M_{kp}$ :

$$I_{kp1} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{(w_0 M_{kp})^2}{r_2}}.$$

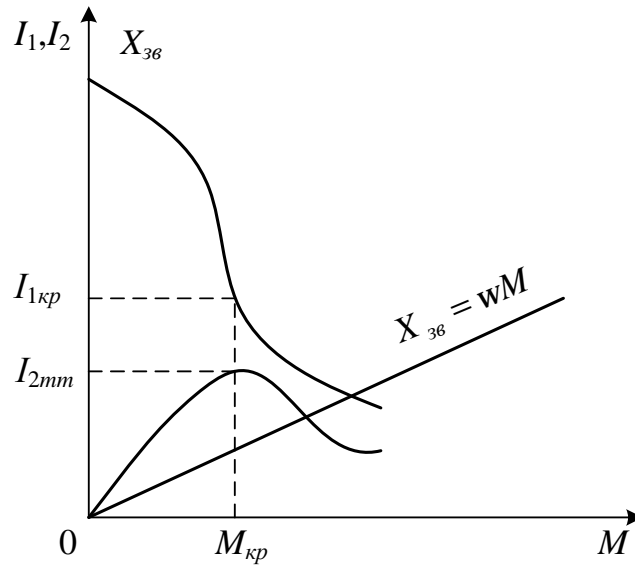


Рисунок 9.10 – Залежність струмів у контурах від взаємодуктивності між ними

При  $M = M_{кр}$  струм  $I_2$  досягає екстремального (максимального) значення. Знайдемо значення опору зв'язку  $X_{кр}$ , при якому, перша похідна від функції  $I'_{2max}(X_{зв})$  дорівнює нулю. Отже:

$$I'_{2max}(X_{зв}) = \frac{E_1 X_{зв}}{r_1 \cdot r_2 + X_{зв}^2},$$

$$\left. \frac{dI'_{2max}(X_{зв})}{dX_{зв}} \right|_{X_{зв}=X_{кр}} = \frac{r_1 \cdot r_2 + X_{кр}^2 - 2X_{кр} X_{кр}}{(r_1 \cdot r_2 + X_{кр}^2)^2} = 0,$$

звідки:

$$X_{зв} = X_{кр} = \sqrt{r_1 \cdot r_2}. \quad (9.20)$$

Підставивши (9.20) в (9.18) та (9.19), отримаємо значення струмів у контурах при повному резонансі:

$$I_{1кр} = \frac{E_1}{2r_1}. \quad (9.21)$$

$$I_{m2m} = \frac{E_1}{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}. \quad (9.22)$$

**Вихідна напруга** при повному резонансі  $U_{m2m}$ , яка знімається з конденсатора  $C_2$  (рис. 9.7) з опором  $\frac{1}{w_0 C}$  при однакових втратах ( $r_1 = r_2 = r$ )

та характеристичних опорів ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ) контурів, дорівнює:

$$U_{m2m} = \frac{E_1 r_2}{2\sqrt{r_2 r_1}} = \frac{E_1 r_2}{2r} = \frac{Q}{2} E_1,$$

а коефіцієнт передачі напруги:

$$K_{mm} = \frac{U_{m2m}}{E_1} = \frac{Q}{2} \quad (9.23)$$

виявився удвічі меншим, ніж резонансний коефіцієнт передачі напруги послідовного контуру.

### **Енергетичні співвідношення при повному резонансі**

Раніше ми пересвідчилися, що  $P_2$ , яка передається у вторинний контур, дорівнює потужності, що витрачається у внесеному опорі  $r_{вн}$ , тобто:

$$P_{m2m} = \frac{1}{2} I_{m2m}^2 \cdot r_2 = \frac{1}{2} I_{1кр}^2 \cdot r_{вн}.$$

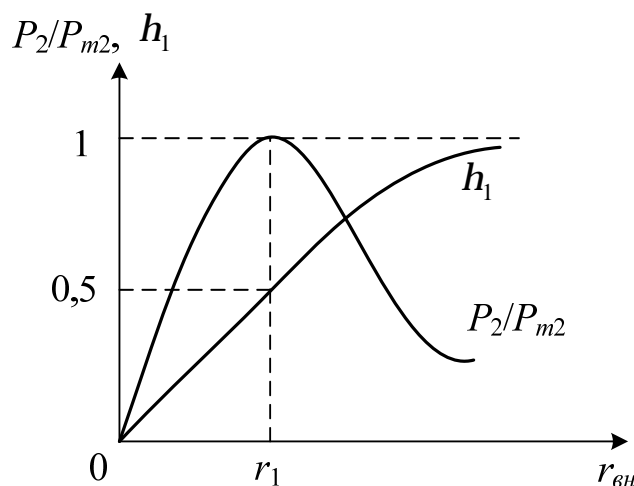


Рисунок 9.11 – Залежність енергетичних показників від активного внесеного опору

Пам'ятаючи, що  $P_K = P_1 + P_2 = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 = I_1^2 r_1 + I_1^2 r_{вн}$ ; коефіцієнт корисної дії первинного (передатної ланки) контуру:

$$h_1 = \frac{I_1^2 \cdot r_{вн}}{I_1^2 \cdot r_1 + I_1^2 \cdot r_{вн}} = \frac{r_{вн}}{r_1 + r_{вн}}.$$

З останнього виразу випливає, що з підсиленням зв'язку між контурами (зростанням  $r_{вн}$ ) к. к. д. неперервно зростає до 100%, приймаючи при повному резонансі значення 50% ( $r_1 = r_{вн\ кр}$ , а  $P_2 = P_1$ ), що видно на рис. 9.11.

У передавальних (потужних) пристроях особливо важливо мати високий к. к. д., а тому зв'язок між контурами вибирається закритичним ( $M > M_{кр}$ ,  $X_{зв} > X_{кр}$ ), хоч це і призводить до деякого зменшення корисної потужності  $P_2$ .

### **Третя умова повного резонансу**

Запишемо вираз (9.1) для схеми з трансформаторним зв'язком, настроєної у повний резонанс:



$$K_{кр} = \frac{M_{кр}}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{w_0 M_{кр}}{\sqrt{w_0 L_1 \cdot w_0 L_2}}.$$

Оскільки  $w_0 M_{кр} = X_{кр} = \sqrt{r_1 r_2}$  (9.29), то, підставивши його у останній вираз, отримаємо:

$$K_{кр} = \sqrt{\frac{(w_0 M_{кр})^2}{w_0 L_1 \cdot w_0 L_2}} = \sqrt{\frac{r_1 \cdot r_2}{w_0 L_1 \cdot w_0 L_2}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_2}} = \sqrt{d_1 d_2}. \quad (9.24)$$

Таким чином, до перших двох умов повного резонансу ( $x_1 = 0, x_2 = 0$ ) додається третя:  $K_{кр} = \sqrt{d_1 d_2}$ . У випадку двох однакових зв'язаних контурів ( $d_1 = d_2 = d$ ),  $K_{кр} = d$  – повний резонанс наступає, коли коефіцієнт зв'язку чисельно дорівнюватиме згасанню одного з цих контурів.

#### **Умова комплексно-спряженого узгодження**

Ще раз згадаємо, що у системі зв'язаних контурів генератор е. р. с.  $E_1$  працює на вторинний контур, який є навантаженням для нього, а первинний контур виконує роль передатної (проміжної) ланки. З підрозділу 3.7 ми знаємо, що для виділення максимальної потужності у навантаженні його опір має бути комплексно спряженим з опором генератора. У даному випадку первинний контур має комплексний опір  $r_1 + jx_1$  при е. р. с.  $E_1$  і є генератором відносно внесеного комплексного опору  $r_{вн} + jX_{вн}$ . Отже, для отримання максимальної потужності у вторинному контурі має бути:  $r_1 = r_{вн}, X_1 + X_{вн} = 0$ . ( $X_1 = -X_{вн}$ ).

#### **Частоти зв'язку**

Одна з умов максимальної передачі потужності з первинного у вторинний контур ( $x_1 = -x_{вн}$ ) у застосуванні до однакових зв'язаних контурів без втрат ( $r_1 = r_2 = 0$ ) має вигляд:

$$wL_1 - \frac{1}{wC_1} = \frac{w^2 M^2}{wL_2 - \frac{1}{wC_2}},$$

або при  $L_1 = L_2 = L; C_1 = C_2 = C$ :

$$wL - \frac{1}{wC} = \frac{w^2 M^2}{wL - \frac{1}{wC}}; \quad w^2 M^2 = \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2.$$

Якщо отриманий вираз розділити на  $wL$ , то, враховуючи що  $\frac{1}{LC} = w_0^2$ ,

$\frac{M}{L} = K_{зб}$ , отримаємо:

$$\frac{w_0^2}{w^2} = 1 \pm K_{зв}$$

Звідси, розв'язавши це рівняння, отримаємо два значення частоти генератора:

$$w_1 = \frac{w_0}{\sqrt{1+K_{зв}}}; \quad w_2 = \frac{w_0}{\sqrt{1-K_{зв}}} \quad (9.25)$$

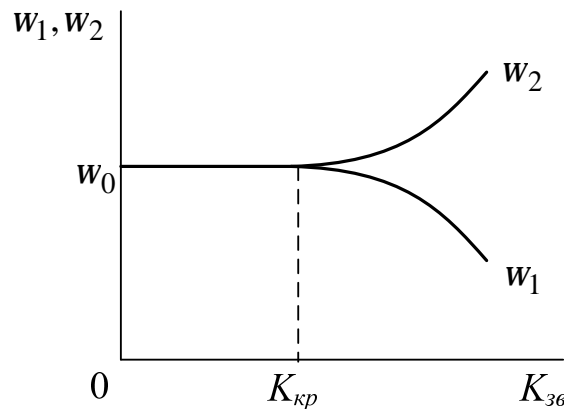


Рисунок 9.12 – Залежність частот зв'язку від  $K_{зв}$

Оскільки значення цих частот залежить від коефіцієнта зв'язку між контурами, то вони називаються частотами зв'язку. Це пояснюється таким чином: кожен зі зв'язаних контурів є послідовним; у такому разі при  $w < w_0$  опори  $X_1 < 0$ ,  $X_2 < 0$  та  $X_{вн} > 0$ . Коли ж  $w > w_0$  та  $x_1 > 0$ ,  $X_2 > 0$  та  $X_{вн} < 0$ . Тобто, кожному коефіцієнту зв'язку  $K_{зв}$  відповідають дві частоти зв'язку ( $w_1 < w_0$ ,  $w_2 > w_0$ ), при яких  $X_1 = -X_{вн}$ . Крім того, чим більший  $K_{зв}$ , тим більший  $|X_{вн}|$  і тим більше знадобиться розстроювання, щоб повернутися до рівності  $X_1 = -X_{вн}$ . Через це при зростанні  $K_{зв}$  частоти  $\omega_1$  та  $\omega_2$  більше будуть відхилятися у різні боки від  $\omega_0$  (рис. 9.12).

В реальних контурах, які мають згасання  $d$ , розходження частот зв'язку відносно  $\omega_0$  починається не при  $K_{зв} = 0$  (як витікає з формули 9.25), а при переході від  $K_{кр}$ , (повного резонансу) до більших значень коефіцієнта зв'язку.

#### 9.5.4 Амплітудно-частотні характеристики двох трансформаторно зв'язаних контурів

##### Виведення рівняння АЧХ

Для системи двох однакових контурів, кожний з яких послідовний ( $r_1 = r_2 = r$ ,  $X_1 = X_2 = X$ ,  $Z_1 = Z_2 = Z = r(1 + jX)$  та  $Z_{зв} = j\omega M$ ), маємо:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{E_1}{Z_{ex}} = \frac{E_1}{Z_1 - \frac{(Z_{зв})^2}{Z_2}} = \frac{E_1}{Z_1 + \frac{(wM)^2}{Z_2}}$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{I}_1 \cdot \dot{X}_{36}}{\dot{Z}} = \frac{-E_1 \cdot j\omega M}{Z \left( Z + \frac{(wM)^2}{Z} \right)} = \frac{-E_1 \cdot j\omega M}{Z^2 + (wM)^2}.$$

Вихідна напруга  $U_2$  знімається з конденсатора  $C_2$ , який при малих розстроюваннях має опір  $-\frac{1}{j\omega C} \approx -\frac{1}{j\omega_0 C} = -jr$ .

Тому:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= -jr \dot{I}_2 = \frac{-E_1 \cdot wMr}{Z^2 + (wM)^2} = -\frac{E_1 \cdot wMr}{r^2(1+jx)^2 + w^2M^2} = \\ &= -\frac{E_1 \cdot wMr}{r^2 \left[ (1+jx)^2 + \frac{w^2M^2}{r^2} \right]} = -\frac{E_1 \cdot wMQ}{r \left[ (1+jx)^2 + \frac{w^2M^2}{r^2} \right]}. \end{aligned}$$

Відношення  $K_{36} / K_{кр} = h$  назовемо параметром зв'язку. Тоді:

$$h = \frac{K_{36}}{K_{кр}} = \frac{X_{36}}{X_{кр}} = \frac{wM}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}} = \frac{wM}{r},$$

а напруга на виході системи дорівнюватиме:

$$\dot{U}_2 = -\frac{E_1 \cdot Qh}{(1+jx)^2 + h^2} = -\frac{E_1 \cdot Qh}{1+2jx-x^2+h^2} = -\frac{E_1 \cdot Qh}{1+h^2-x^2+j2x}.$$

Модуль цього комплексу дорівнює:

$$U_2 = \frac{E_1 \cdot Qh}{\sqrt{(1+h^2-x^2)^2 + j4x^2}}. \quad (9.26)$$

Розглянемо 3 випадки: між контурами зв'язок слабкий, критичний та закритичний.

**Дуже слабкий зв'язок** ( $K_{36} = K_1$ )  $\ll K_{кр}$ ,  $h \ll 1$ .

У такому разі вираз (9.26), при нехтуванні  $h^2$  у знаменнику, переписеться так:

$$U_2 = \frac{E_1 \cdot Qh}{\sqrt{1-2x^2+x^4+j4x^2}} = \frac{E_1 \cdot Qh}{\sqrt{1+2x^2+x^4}} = \frac{E_1 Qh}{1+x^2},$$

де  $x = 2Q \frac{\Delta f}{f_0} = Q \frac{2\Delta f}{f_0}$ .

Ширина смуги пропускання визначається з умови (рис. 9.13):

$$U_2 = 0,707U_{m2},$$

$$U_{m2} = U_2(x=0) = EQh,$$

$$\frac{U_2}{U_{m2}} = \frac{1}{1 + \left(Q \frac{\Delta f}{f_0}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Звідси:

$$1 + Q^2 \frac{(\Delta f)^2}{f_0^2} = \sqrt{2},$$

$$\Delta f_{np}^2 = \left(\frac{f_0}{Q}\right)^2 \cdot (\sqrt{2} - 1),$$

$$\Delta f_{np}^2 = 0,41 \left(\frac{f_0}{Q}\right)^2 = 0,41 \Delta f_{np1}^2,$$

$$\Delta f_{np} = 0,64 \Delta f_{np1}.$$

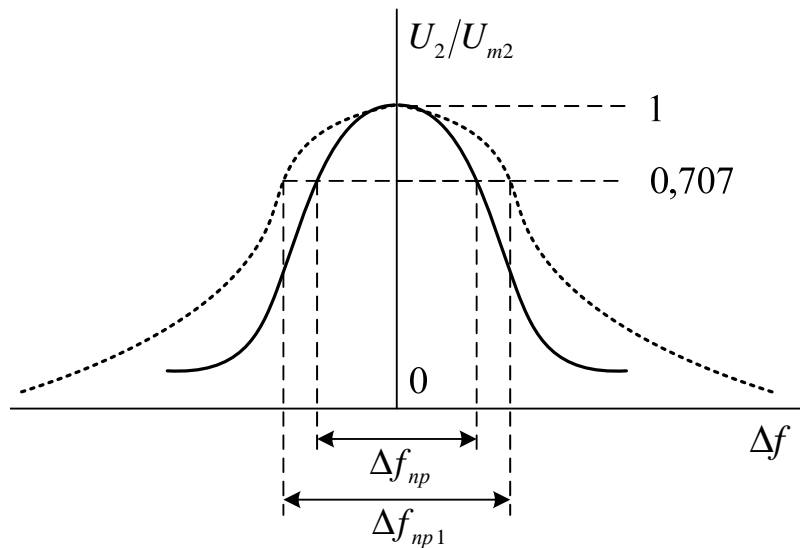


Рисунок 9.13 – Залежність вихідної напруги системи двох зв'язаних контурів (суцільна крива) та одиничного контуру (пунктир)

Останній результат говорить, що смуга пропускання  $\Delta f_{np}$  двох трансформаторно зв'язаних контурів (суцільна крива) вужча за смугу пропускання  $\Delta f_{np1}$  кожного з однакових контурів (пунктирна крива), як одиничних послідовних. Через мале значення параметра зв'язку ( $h \ll 1$ ) вихідна напруга буде теж малою навіть при резонансі ( $x = 0$ ). Отже, висока вибірність досягається ціною зменшення коефіцієнта передачі за напругою.

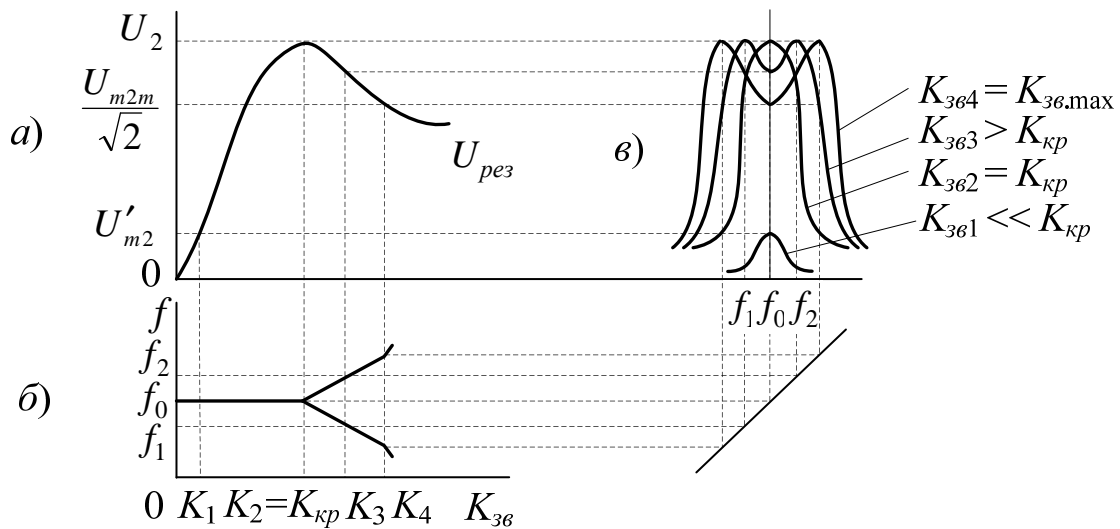


Рисунок 9.14 – Змінювання форми АЧХ двох зв'язаних контурів при збільшенні коефіцієнта зв'язку

**Критичний зв'язок** ( $K = K_{кр}$ ,  $h = 1$ ).

Для такого випадку вираз (9.26) маємо переписати так:

$$U_2 = \frac{E_1 \cdot Q}{\sqrt{(2-x^2)^2 + 4x^2}} = \frac{E_1 \cdot Q}{\sqrt{x^2 + 4}},$$

$$U_{2max} = \frac{E_1 \cdot Q}{2}.$$

Зростання коефіцієнта зв'язку до критичного  $K_2 = K_{кр}$  супроводжується зростанням струму  $I_2$  вторинного контуру (рис. 9.14), резонансна частота  $f_0$  залишається незмінною, графік АЧХ залишається одновершинною кривою.

Ширину смуги пропускання визначимо за умови, що на її краях вихідна напруга зменшиться у  $\sqrt{2}$  раза у порівнянні з резонансною  $U_{m2m}$ :

$$\frac{E_1 \cdot Q}{\sqrt{\left(Q \frac{\Delta f_{np\ кр}}{f_0}\right)^4 + 4}} = \frac{E_1 \cdot Q}{2\sqrt{2}}, \quad \left(Q \frac{\Delta f_{np\ кр}}{f_0}\right)^4 + 4 = 8,$$

$$\Delta f_{np\ кр}^4 \cdot \left(\frac{Q}{f_0}\right)^4 = 4, \quad \Delta f_{np\ кр} = \sqrt{2} \cdot \frac{f_0}{Q} = 1,41 \Delta f_{np1}.$$

Отже, при критичному зв'язку смуга пропускання системи двох трансформаторно зв'язаних однакових контурів стає у 1,41 раза ширшою за її значення для одного з одиничних контурів цієї системи. При збільшенні зв'язку до критичного смуга пропускання зростає через те, що зростає внесений активний опір.

**Зв'язок закритичний** ( $K_3 > K_{кр}$ ,  $h > 1$ ).

Зростання коефіцієнта зв'язку понад  $K_{кр}$  супроводжується появою частот зв'язку (рис. 9.14, б). Із зростанням  $K_{зв}$  частоти зв'язку  $f_1$  і  $f_2$  все більше віддаляються від резонансної частоти  $f_0$  (рис. 9.14, в), але амплітуда напруги  $U_2$  на цих частотах зберігається незмінною і дорівнює найбільшому значенню  $E_1 Q/2$  (рис. 9.14, а). Це пояснюється різким зростанням активної складової внесеного опору на резонансній частоті при збільшенні  $K_{зв}$  над значенням  $K_{кр}$ . У результаті АЧХ набуває вигляду двовершинної кривої з провалом на резонансній частоті. При подальшому зростанні  $K_{зв}$  провал у центральній частині поглиблюється, а максимуми кривої розсовуються.

Зростання  $K_{зв}$  призводить до розширення смуги пропускання. Можливості розширення смуги пропускання обмежуються тим, що при  $K_{зв} > K_{кр}$  одночасно збільшується провал у центральній частині резонансної кривої. При досить сильному зв'язку зі смуги пропускання випадає область частот, яка прилягає до резонансної частоти, що є недопустимим. А тому можемо говорити про  $K_{зв} = K_{зв \max}$ , при якому дно впадини центральної частини кривої досягає рівня  $0,707 U_{m2m}$ .

Для отримання значення параметрів зв'язку  $h_{\max} = K_{зв \max} / K_{кр}$ , прирівняємо (9.26) до  $U_{m2m} / \sqrt{2}$

$$\frac{E_1 Q h_{\max}}{1 + h_{\max}^2} = \frac{E_1 Q}{2\sqrt{2}},$$

$$1 + h_{\max}^2 = 2\sqrt{2} h_{\max}; \quad h_{\max}^2 - 2\sqrt{2} h_{\max} + 1 = 0.$$

Розв'язавши останнє квадратне рівняння відносно  $h_{\max}$ , отримаємо:  
 $h_{\max} = 2,41$ .

На краях смуги пропускання:

$$\frac{E_1 Q \cdot 2,41}{\sqrt{(1 + 2,41^2 - x^2)^2 + 4x^2}} = \frac{E_1 Q}{2\sqrt{2}}.$$

Звідси:

$$(1 + 2,41^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 = 2,41^2 \cdot 8.$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $x$  та підставивши його у формулу  $x = Q \frac{\Delta f_{np \max}}{f_0}$ , отримаємо:

$$\Delta f_{np \max} \approx 3,1 \Delta f_{np1}.$$

Отже, зв'язані контури порізно настроєні на частоту  $f_0$ , маючи однакові параметри, можуть мати, в залежності від величини коефіцієнта зв'язку  $K_{зв}$ , смуги пропускання шириною від  $0,64 \Delta f_{np1}$  до  $3,1 \Delta f_{np1}$ , де  $\Delta f_{np1}$  – смуга пропускання одного з контурів системи як одиничного контуру.

### 9.5.5 Вибірність зв'язаних контурів

Щоб зробити більш очевидним вплив зв'язку (параметра  $h$ ) на форму АЧХ знайдемо вираз для модуля коефіцієнта передачі за напругою, розділивши (9.26) на  $E_1$ :

$$K = \frac{Qh}{\sqrt{(1+h^2-x^2)^2 + 4x^2}}. \quad (9.27)$$

Максимально можливе його значення  $K = \frac{Q}{1+h^2}$  (при  $h = 1, x = 0$ ).

На резонансній частоті  $K = K_0 = \frac{Qh}{1+h^2}$ , тому нормований коефіцієнт передачі  $\frac{K}{K_0}$  дорівнює:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1+h^2}{\sqrt{(1+h^2-x^2)^2 + 4x^2}}.$$

Система зв'язаних контурів при певних значеннях коефіцієнта зв'язку має резонансні характеристики більш близькі до ідеальної П-подібної, ніж характеристики одного контуру.

На (рис. 9.15) зіставлені резонансні характеристики одного із зв'язаних контурів при фіксованій смузі пропускання  $\Delta f_{np}$ .

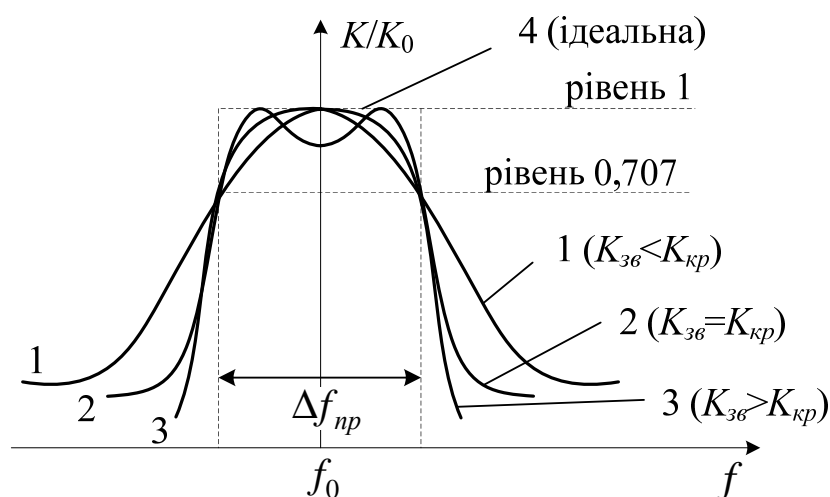


Рисунок 9.15 – Криві вибірності коливальних контурів

Резонансна характеристика одиничного контуру дуже відрізняється від ідеальної П-подібної як у межах смуги пропускання, так і поза нею, де вона є дуже пологою. Використовуючи систему двох зв'язаних контурів з рівними (але більшими, ніж у одиничного контуру) добротностями, можна, шляхом підбирання величини коефіцієнта зв'язку, отримати ту ж

смугу пропускання при більш-менш рівномірному її ході у межах смуги пропускання і більш крутих спадах поза цією смугою. Зазначені особливості резонансних характеристик зв'язаних контурів сприяють їх застосуванню, наприклад, у підсилювачах коливань радіочастот.

Є чотири основних схеми системи зв'язаних контурів: з трансформаторним, автотрансформаторним, внутрішньоємнісним та зовнішньоємнісним зв'язками.
При обміні енергіями вносяться у контури з трансформаторним зв'язком е. р. с. індукції, які проявляють себе як внесені туди активний та реактивний опори.
Є чотири способи настроїти систему двох контурів з трансформаторним зв'язком: 1-й частинний, 2-й частинний, повний та складний резонанси.
При повному і складному резонансі на резонансній частоті $\omega_0$ струм у вторинному контурі досягає максимально можливого значення і дорівнює: $I_{m2m} = \frac{E_1}{2\sqrt{r_1 r_2}}.$
Ширина смуги пропускання системи двох однакових контурів може змінюватись від $0,64 \Delta f_{np1}$ при дуже слабкому зв'язку, через $1,41 \Delta f_{np1}$ при критичному зв'язку, до $3,1 \Delta f_{np1}$ при максимально допустимому зв'язку між контурами де: $\Delta f_{np1}$ – смуга пропускання одного з контурів системи як одиничного контуру.

### Запитання та задачі для закріплення

1. Що називається системою зв'язаних контурів, опором зв'язку?
2. Зобразити схеми двох зв'язаних контурів. Написати вирази для визначення коефіцієнтів зв'язку.
3. Написати вирази для  $r_{вн}$ ,  $X_{вн}$ ,  $R_{вх}$ ,  $X_{вх}$ ,  $Z_{вх}$ . Пояснити фізичний зміст внесених опорів.
4. У чому полягають способи настроювання системи двох контурів у 1-й та 2-й частинний резонанс? Співвідношення між струмами у контурах?
5. У чому полягає спосіб настроювання у повний та складний резонанси?
6. Енергетичні співвідношення при повному резонансі, к. к. д.
7. Ширина смуги пропускання системи при  $K_{зв} \ll K_{кр}$ ,  $K_{зв} = K_{кр}$ ,  $K_{зв} > K_{кр}$ . У чому причина зростання ширини смуги при зростанні  $K_{зв}$ ?
8. Причина появи провалу у центрі АЧХ при  $K_{зв} > K_{кр}$ .



9. Дати якісне (фізичне) пояснення виконання умов комплексно-спряженого узгодження на частотах зв'язку та при  $K_{зв} = K_{кр}$ .

10. Струми у трансформаторно з'єднаних контурах, що живляться е. р. с.  $e = E_m \cos \omega t$ , вимірюються амперметрами (рис. 9.7). Визначити активний і реактивний внесені опори у первинний контур, коефіцієнт зв'язку  $K_{зв}$ , коли відомо:

$$\begin{aligned}L_1 = L_2 = L &= 300 \text{ мкГн}, \\C_1 = C_2 = C &= 500 \text{ пФ}, \\r_1 = 8 \text{ Ом}, r_2 &= 10 \text{ Ом}, \\I_{A1} = 100 \text{ мА}, I_{A2} &= 40 \text{ мА}.\end{aligned}$$

11. При змінюванні в широких межах частоти  $\omega$  генератора е. р. с.  $e = E_m \cos \omega t$  (рис. 9.7), в системі контурів, настроєних порізно на одну і ту ж саму частоту, амперметр  $A_2$  дає максимальне показання на єдиній частоті  $\omega_1$  ( $I_{A2} = 70 \text{ мА}$ ).

1) визначити  $K_{зв}$ , коли відомо:

$$\begin{aligned}E &= \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 1.5 \text{ В}, \\d_1 = d_2 = d &= 0.015, \\r_1 = 10 \text{ Ом}, r_2 &= 5 \text{ Ом}, \\\omega_1 &= 10^6 \text{ рад/с}.\end{aligned}$$

2) як зміниться показання  $A_2$ , коли  $K_{зв}$  збільшити у чотири рази?

12. Визначити коефіцієнт передачі напруги на резонансній частоті зв'язаних контурів (рис. 9.7) при максимальній смузі пропускання, коли:

$$\begin{aligned}L_1 = L_2 = L &= 300 \text{ мкГн}; \\C_1 = C_2 = C &= 1000 \text{ пФ}; \\r_1 = r_2 = r_2 &= 6 \text{ Ом}.\end{aligned}$$

## 10 ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ

### 10.1 Призначення та класифікація фільтрів

#### Основні означення

Електричним фільтром (filter) називається один чи ряд чотирьох полюсників, які призначені для передачі коливань з максимальним коефіцієнтом передачі ( $K = 1$ ) у заданій частині спектра і мінімальним коефіцієнтом передачі ( $K = 0$ ) на решті частот спектра. Перша область частот називається смугою (bandwidth) прозорості (пропускання) інша – смугою непрозорості (затримання). Частоти  $\omega_{зр} = 2\pi f_{зр}$ , які розділяють ці області, називаються частотами зрізу або частотами фільтра.

Фільтр оцінюють, перш за все, за його АЧХ, яка виражає залежність коефіцієнта передачі від частоти  $\omega$  вхідної напруги (рис. 10.1).

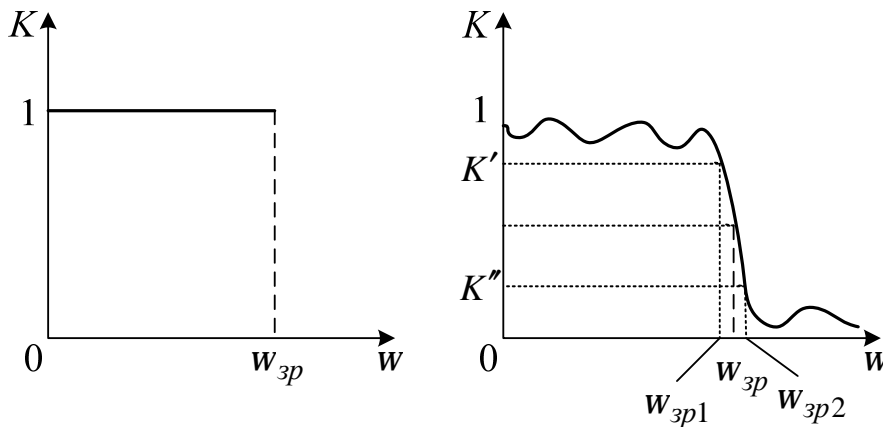


Рисунок 10.1 – АЧХ фільтрів нижніх частот: а) ідеального, б) реального

Ідеальним буде фільтр, у смузі прозорості якого (рис. 10.2)  $U_{m2} = U_{m1}$  та у смузі непрозорості  $U_{m2} = 0$  при  $U_{m1} \neq 0$ , а перехід від однієї смуги до іншої здійснюється стрибком на частоті зрізу (рис. 10.1, а).

Велике наближення до показників рис. 10.1, а забезпечують фільтри, побудовані за ланцюговою (каскадною) схемою.

Принцип дії фільтра можна подати так, що електромагнітні коливання, виникнувши у будь-якій ланці, поширюються від неї у протилежних напрямках: до навантаження, утворюючи прохідну хвилю напруги, і до джерела, утворюючи відбиту хвилю. В ідеальному фільтрі хвилі, відбиті в усіх ланках фільтра, досягають входу фільтра з однаковими фазами у смузі непрозорості і повністю компенсуються у смузі прозорості.

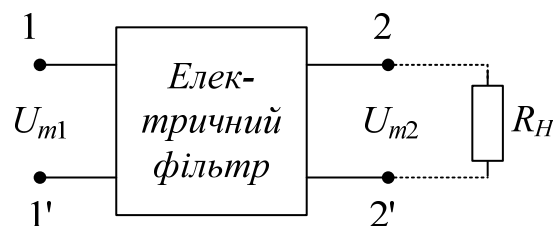


Рисунок 10.2 – Фільтр як чотирьохполюсник

Прохідні ж хвилі, досягнувши навантаження, збігаються за фазами у смузї прозорості і повністю компенсуються у смузї непрозорості.

Це рівносильно тому, що там, де фільтр прозорий, вхідний опір усіх його ланок однаковий, активний і рівний опору навантаження  $R_H$ , а там, де фільтр непрозорий, його вхідний опір чисто реактивний.

Фільтр, усі ланки якого мають у смузї пропускання однаковий вхідний опір, рівний опору навантаження, називається узгодженим, а вхідний опір такого узгодженого фільтра називається характеристичним або хвильовим опором  $Z_0$ .

Важливо пам'ятати, що незважаючи на рівність опорів  $Z_0$  і  $R_H$  природа їхня різна. Характеристичний опір активний у тому розумінні цього слова, що в утвореній ланці реактивних елементів  $L$  і  $C$  зосереджена однакова кількість енергії електричного і магнітного полів, завдяки чому і забезпечується повна передача електромагнітної енергії від однієї ланки до наступної у смузї прозорості. Опір же  $R_H$  активний, оскільки це параметр навантаження, яке є резистором або еквівалентне йому і тому поглинає енергію хвилі, яка пройшла через фільтр до навантаження.

### ***Класифікація електричних фільтрів***

Електричні фільтри за різними ознаками поділяються на:

1. Активні і пасивні – за ознакою наявності чи відсутності активних елементів (наприклад, транзисторів). Подалі будемо розглядати лише пасивні фільтри.

2. Фільтри нижніх частот (ФНЧ) (low-pass filter, LPF) зі смугою прозорості від 0 до  $f_{зр}$ , фільтри верхніх частот (ФВЧ) (high-pass filter, HPF) зі смугою прозорості від  $f_{зр}$  до  $\infty$ , смугові фільтри (СФ) (band-pass filter, BPF) зі смугою прозорості від  $f_{зр1}$  до  $f_{зр2}$ , загороджувальні або режекторні фільтри (ЗФ або РФ) (band-stop filter, BSF) зі смугою непрозорості від  $f_{зр1}$  до  $f_{зр2}$  (рис. 10.3) – за взаємним розташуванням смуг прозорості і непрозорості.

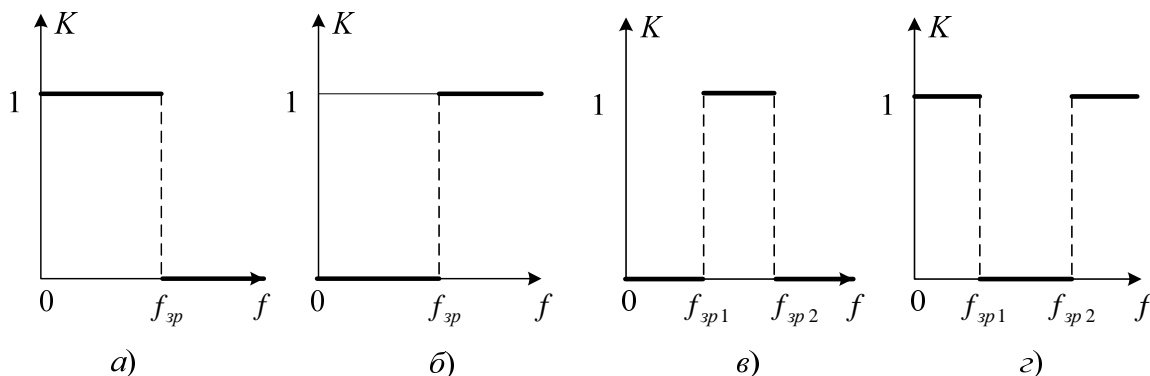


Рисунок 10.3 – АЧХ: а) ФНЧ, б) ФВЧ, в) СФ, г) ЗФ (РФ)

3. Г-подібні, Т-подібні, П-подібні (рис. 10.4) – за взаємним розташуванням двополюсників. Г-подібна ланка містить найменшу

кількість елементів (два), а Т-подібна чи П-подібна ланки еквівалентні двом Г-подібним, що досить зрозуміло з рисунка.

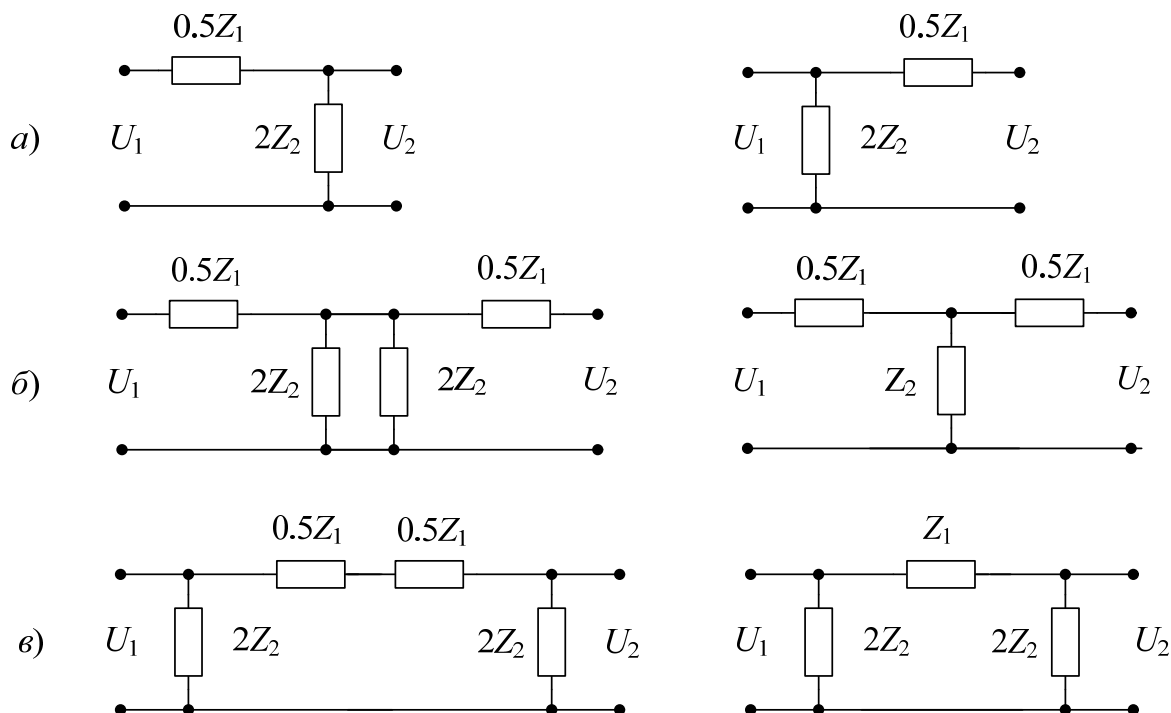


Рисунок 10.4 – а) Г-подібні ланки, б) утворення Т-подібної ланки з двох Г-подібних, в) утворення П-подібної ланки з двох Г-подібних

4. Реактивні, що складаються з елементів  $L$  і  $C$ , та резистивно-ємнісні, що складаються з елементів  $R$  і  $C$ , п'єзоелектричні (кварцові пластини), магнітострикційні (стрижні з феромагнітного матеріалу) – за параметрами елементів фільтрів.

5. Фільтри типу  $k$ , у яких добуток  $Z_1Z_2$  є величиною незалежною від частоти (звідси і назва) та фільтри  $m$  типу – за додатковими ознаками.

### **АЧХ реальних фільтрів**

В реальних фільтрах у смузі прозорості коефіцієнт передачі за напругою не дорівнює точно одиниці, а в смузі непрозорості - точно нулю. Це викликається такими причинами:

- не існують чисто реактивні опори, бо реальні котушки індуктивності і конденсатори мають (хоч і незначні практично) втрати, а опори цих елементів є активно-реактивними;

- повне узгодження фільтра з генератором, з одного боку, та навантаженням, з другого, можливе лише на деяких частотах;

- перехід від смуги прозорості до смуги непрозорості і навпаки є поступовим і границя між ними стає "розмитою", у межах якої коефіцієнт передачі за напругою змінюється приблизно від одиниці до нуля.

### **Вхідний узгоджений опір фільтра**

Характеристичний (хвильовий) опір фільтра, який дорівнює  $\sqrt{L/C}$ , позначимо через  $Z_0$ .

Відповідно вхідний узгоджений опір Т-подібного фільтра (рис. 10.5, а) позначимо через  $Z_{0T}$ , а П-подібного фільтра (рис. 10.5, б) – через  $Z_{0П}$ . Позначення на цих рисунках введені з урахуванням того, що вхідний опір кожної ланки фільтра  $Z_{ex}$ , навантаженого на свій характеристичний опір  $Z_{0T}$  або  $Z_{0П}$ , дорівнює  $Z_0 = \sqrt{L/C}$ .

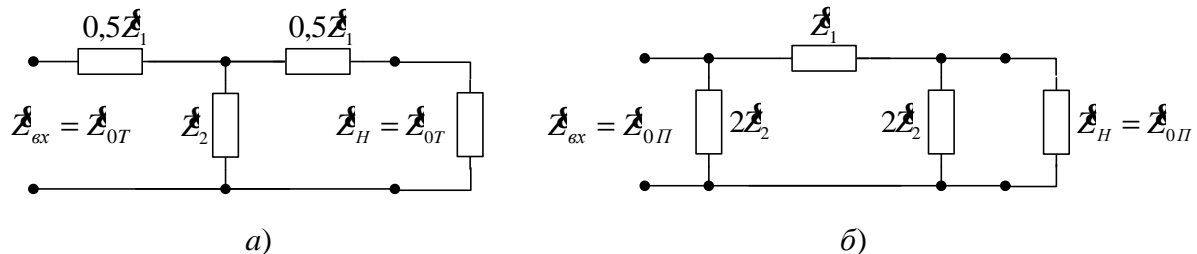


Рисунок 10.5 – Узагальнені схеми: а) Т-ланки, б) П-ланки, узгоджених з навантаженням і генератором напруги

Для Т-подібного фільтра узгоджений вхідний опір дорівнює:

$$Z_{0T} = 0.5Z_1 + (0.5Z_1 + Z_{0T}) \cdot Z_2 / (0.5Z_1 + Z_{0T} + Z_2)$$

або

$$\begin{aligned} & 0.5Z_1 \cdot Z_{0T} + Z_{0T}^2 + Z_{0T} Z_2 = \\ & = 0.25Z_1^2 + 0.5Z_1 \cdot Z_{0T} + 0.5Z_1 \cdot Z_2 + 0.5Z_1 Z_2 + Z_{0T} Z_2 \end{aligned}$$

звідки:

$$Z_{0T} = \sqrt{0.25Z_1^2 + Z_1 \cdot Z_2} \quad (10.1)$$

Для П-подібного фільтра, аналогічно, маємо:

$$Z_{0П} = \frac{\left[ 0.5Z_1 + \frac{Z_{0П} \cdot 2Z_2}{Z_{0П} + 2Z_2} \right] \cdot 2Z_2}{0.5Z_1 + \frac{Z_{0П} \cdot 2Z_2}{Z_{0П} + 2Z_2} + 2Z_2}; \quad Z_{0П} = \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} \quad (10.2)$$

У праву частину (10.1) та (10.2) входять опори  $Z_1$  та  $Z_2$ , які залежать від частоти, тоді як характеристичний опір фільтра  $Z_{0П}$  та  $Z_{0T}$  повинен в усій смузі прозорості дорівнювати активному опору  $R_n$ , який від частоти не залежить. Значить точна рівність  $Z_{0П} = R_n$  або  $Z_{0T} = R_n$  досягається тільки на одній частоті смуги прозорості. В реальних фільтрах існує частотний інтервал  $\omega_{зр1} \dots \omega_{зр2}$ , на якому перехід від смуги прозорості до смуги непрозорості (і навпаки) відбувається поступово, коефіцієнт передачі напруги змінюється від  $K'$  до  $K''$ , що видно на рис. 10.1, б.

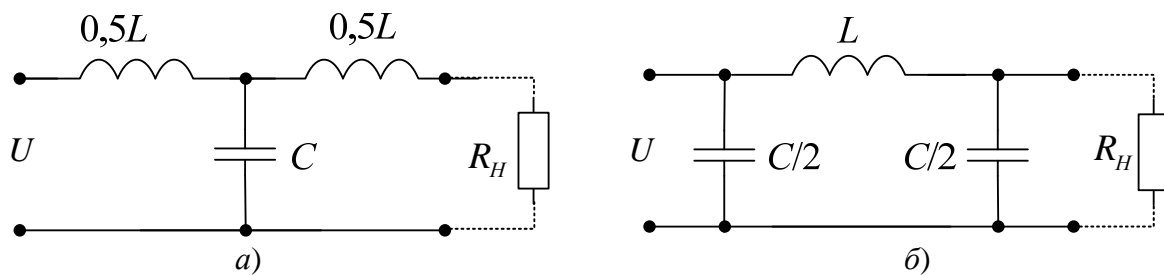
## 10.2 Реактивні фільтри типу $k$

Ці фільтри так називаються, бо добуток опору послідовного плеча  $Z_1$  та опору паралельного плеча  $Z_2$  є величиною, яка не залежить від частоти, дорівнює  $\sqrt{L/C}$  і позначається через  $k$  (константа) завдяки тому, що опори  $Z_1$  та  $Z_2$  в реактивних фільтрах протилежно залежать від частоти. Коли  $Z_1 = j\omega L_1$ , то  $Z_2 = 1/j\omega C_2$  і навпаки.

### 10.2.1 Фільтри нижніх частот

#### Схеми і частотні характеристики

На рис. 10.6 показані ланки фільтрів нижніх частот типу  $k$ . Елементи фільтрів позначені з урахуванням того, що загальна індуктивність ланки дорівнює  $L$ , а загальна ємність -  $C$ : Т-подібна ланка містить дві ділянки по  $0,5L$  кожна і ємність  $C$ , а П-подібна – одну ділянку з індуктивністю  $L$  і дві ділянки з ємностями по  $0,5C$ .



Опори ланок відповідно дорівнюють  $Z_1 = j\omega L$ ,  $Z_2 = 1/j\omega C$ , а вхідний узгоджений опір Т-подібного фільтра відповідно до (10.1):

$$Z_{0T} = \sqrt{0,25Z_1^2 + Z_1Z_2} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C} - 0,25\omega^2 L^2} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}. \quad (10.3)$$

Залежність узгодженого вхідного опору  $Z_{0T}$  від частоти показана на рис. 10.7, яка розрахована за формулою 10.3. При  $\omega = 0$ ,  $Z_{0T} = \sqrt{L/C}$ . Зі зростанням частоти  $Z_{0T}$  спочатку зменшується до нуля (на частоті зрізу  $\omega_{зр}$ ), а потім  $\omega^2 L^2 / 4$  стає більшим за одиницю, тоді:

$$Z_{0T} = j\sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}},$$

що говорить про індуктивний характер опору ланки фільтра.

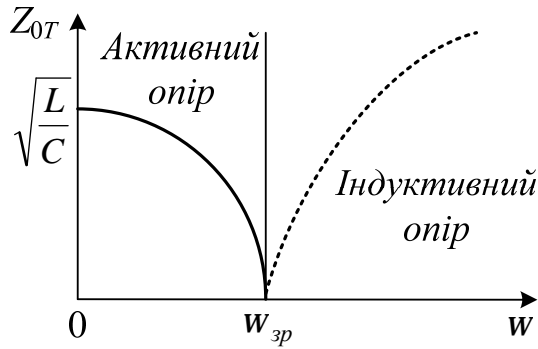


Рисунок 10.7 – Частотна залежність  $Z_{0T}$  Т-ланки ФНЧ

Значення частоти зрізу знайдемо, виходячи з умови  $Z_{0T}=0$ :

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{\omega_{zp}^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}} = 0,$$

звідки:

$$\omega_{zp} = \sqrt{\frac{4L^2}{LC}} = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (10.4)$$

Для П-подібної ланки використаємо формулу 10.2:

$$Z_{0\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{j\omega L}{j\omega C}}{1 + \frac{j\omega L \cdot j\omega C}{4}}} = \sqrt{\frac{\frac{L}{C}}{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}}. \quad (10.5)$$

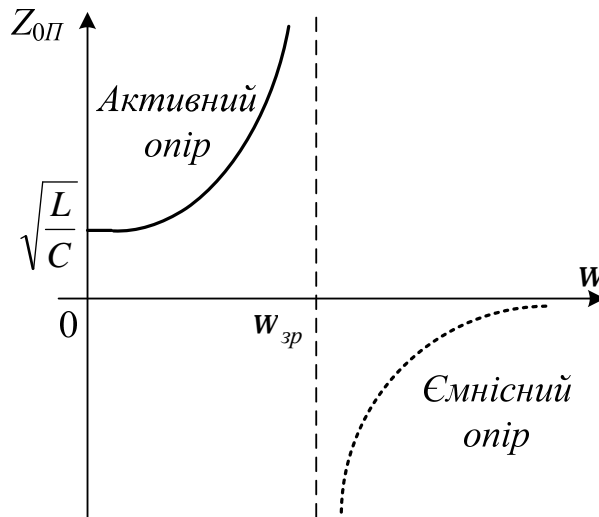


Рисунок 10.8 – Частотна залежність  $Z_{0\Pi}$  П-ланки ФНЧ

При  $\omega = 0$ ,  $Z_{0\Pi} = \sqrt{L/C}$ . Зі зростанням частоти  $Z_{0\Pi}$  зростає і при  $\omega \rightarrow \omega_{zp}$ ,  $Z_{0\Pi} \rightarrow \infty$ , а при подальшому збільшенні частоти опір:

$$\underline{Z}_{0П} = -j \sqrt{\frac{\frac{L}{C}}{\frac{\omega^2 LC}{4} - 1}}$$

і стає ємнісним. Значення частоти зрізу знаходимо з умови:

$$\omega_{зр}^2 LC / 4 - 1 = 0,$$

звідки

$$\omega_{зр} = 2 / \sqrt{LC}. \quad (10.6)$$

### **Розрахунок параметрів ФНЧ**

На практиці розрахунок фільтра полягає у визначенні його параметрів  $L$  і  $C$  за заданими значеннями частоти зрізу  $f_{зр}$  та опору навантаження  $R_H$ . Для знаходження двох невідомих  $L$  і  $C$  складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2p f_{зр} = \frac{2}{\sqrt{LC}}, \\ R_H = \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

розв'язок якої буде таким

$$L = \frac{R_H}{p f_{зр}}. \quad (10.7)$$

$$C = \frac{1}{R_H p f_{зр}}. \quad (10.8)$$

На рис. 10.9 подано АЧХ реального фільтра нижніх частот, де видно, що повне узгодження має місце лише на частоті  $f = 0$  ( $K = 1$ ,  $\underline{Z}_{0Т} = \underline{Z}_{0П} = \sqrt{L/C}$ ). Зі збільшенням частоти узгодженість порушується, зростає спад напруги на послідовно увімкнених котушках індуктивності (зростає опір  $\omega L$ ) і зменшується спад напруги на паралельно увімкнених конденсаторах (зменшується опір  $1/\omega C$ ), що призводить до того, що  $K$  стає меншим одиниці, починаючи з частоти  $f = 0$ .

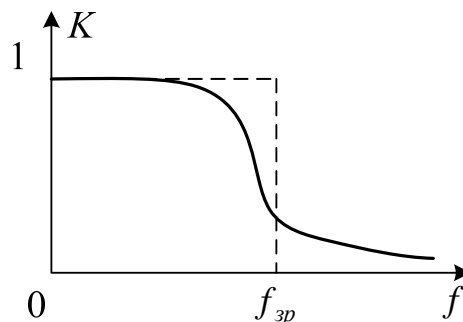


Рисунок 10.9 – АЧХ реального ФНЧ



## 10.2.2 Фільтри верхніх частот

### Схеми і частотні характеристики

На рис. 10.10 подані ланки фільтрів високих частот  $k$  типу. У цих фільтрах послідовно увімкнені елементи з ємнісним характером опору, а паралельно увімкнені – з індуктивним. Виходячи з того, що у даному випадку  $Z_1 = 1/j\omega C$ ,  $Z_2 = j\omega L$ , Т-подібна ланка складається з двох конденсаторів по  $2C$  ємністю кожний і однієї котушки індуктивності  $L$ , а П-подібна ланка — з одного конденсатора ємністю  $C$  і двох котушок з індуктивностями по  $2L$  кожна.

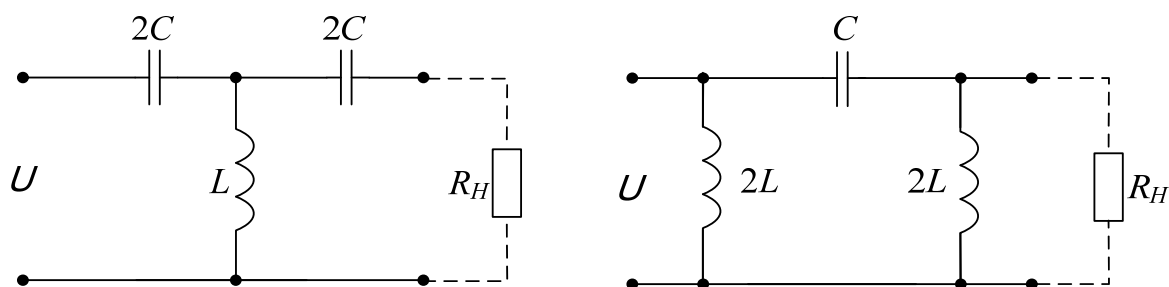


Рисунок 10.10 – Схеми ланок ФВЧ

Підставивши  $Z_1 = 1/j\omega C$ ,  $Z_2 = j\omega L$  у формулу (10.1), знайдемо узгоджений вхідний опір Т-подібної ланки ФВЧ:

$$\begin{aligned} Z_{0T} &= \sqrt{0.25Z_1^2 + Z_1 \cdot Z_2} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}} = \sqrt{\frac{L}{C} \left[ 1 - \frac{1}{4\omega^2 LC} \right]}, \end{aligned} \quad (10.9)$$

залежність якого від частоти показана на рис. 10.11.

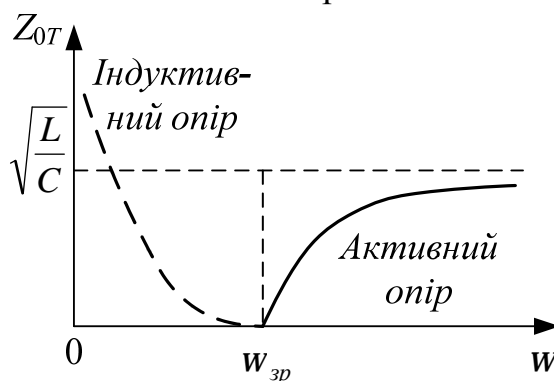


Рисунок 10.11 – Частотна залежність  $Z_{0T}$  Т-подібної ланки ФВЧ

На частоті  $\omega_{zp} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ , опір  $Z_{0T} = 0$ . При зростанні частоти цей опір зростає і асимптотично наближається до значення  $\sqrt{L/C}$ , залишаючись активним за характером. При  $\omega < \omega_{zp}$ , опір  $Z_{0T}$  стає індуктивним, прямуючи до нескінченності при наближенні частоти  $\omega$  до нуля.

Підставивши  $Z_1 = 1/j\omega C$ ,  $Z_2 = j\omega L$  у формулу (10.2), знайдемо узгоджений вхідний опір П-подібної ланки ФВЧ:

$$Z_{0\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{j\omega L}{j\omega C}}{1 + \frac{1}{4j\omega C \cdot j\omega L}}} = \sqrt{\frac{\frac{L}{C}}{1 - \frac{1}{4\omega^2 CL}}} \quad (10.10)$$

залежність якого від частоти показана на рис. 10.12. На частоті зрізу  $\omega_{зр} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ , опір  $Z_{0\Pi} = \infty$ . При зростанні частоти він зменшуватиметься, наближаючись асимптотично до значення  $\sqrt{L/C}$ , залишаючись активним за характером. При  $\omega < \omega_{зр}$ , опір  $Z_{0\Pi}$  стає ємнісним, прямуючи до нуля при зменшенні частоти до нуля.

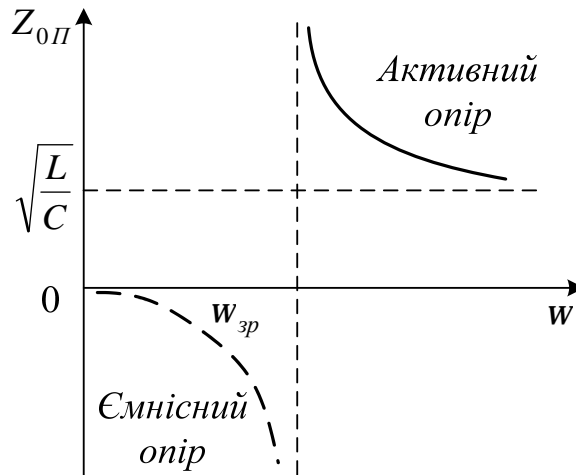


Рисунок 10.12 – Частотна залежність  $Z_{0\Pi}$  П-подібної ланки ФВЧ

### Розрахунок параметрів ФВЧ

Задача полягає у визначенні параметрів  $L$  і  $C$  фільтра за заданими  $f_{зр}$  і  $R_H$ . Для цього скористаємося такими рівняннями:

$$\begin{cases} 2p f_{зр} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}, \\ R_H = \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

звідки:

$$L = \frac{R_H}{4pf_{зр}}, \quad C = \frac{1}{4R_H pf_{зр}}. \quad (10.11)$$

Амплітудно-частотна характеристика таких ФВЧ зображена на рис. 10.13. При зменшенні частоти послідовно увімкнені конденсатори

збільшують свій опір, а паралельно увімкнені котушки – зменшують. На конденсаторах спад напруги зростає, а на котушках – зменшується, і вихідна напруга спадає. Особливо різко цей спад відбувається на частотах близьких до частоти зрізу  $f_{зр}$ .

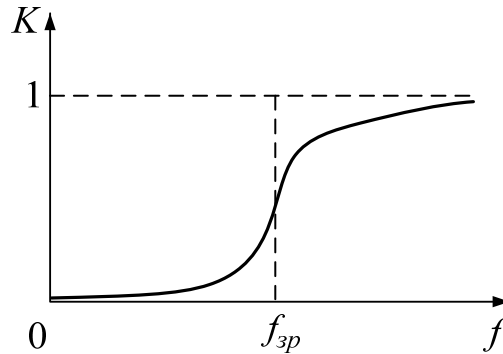


Рисунок 10.13 – АЧХ реального ФВЧ

### 10.2.3 Смугові та загороджувальні фільтри

**Смуговими фільтрами** називаються фільтри, смуга прозорості яких обмежена двома частотами зрізу  $\omega_{зр1}$  та  $\omega_{зр2}$ .

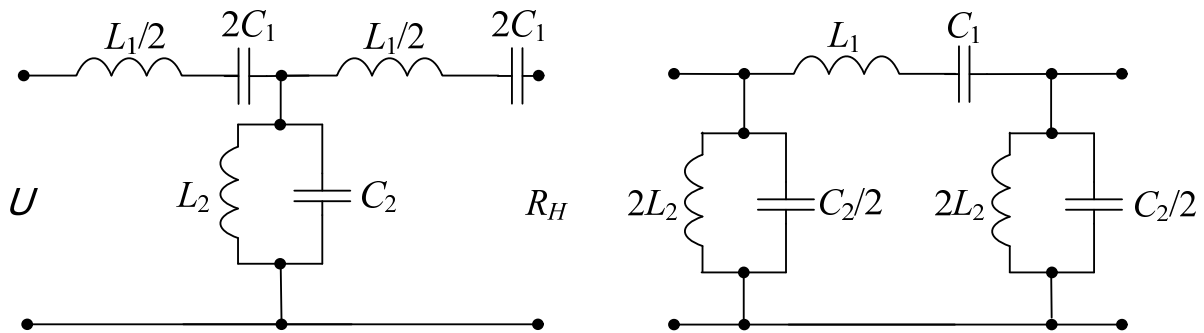


Рисунок 10.14 – Схеми Т-подібної та П-подібної ланок СФ

Ланки смугового фільтра (СФ) складаються з послідовного контуру  $L_1C_1$ , який має опір  $Z_1$  і паралельного контуру  $L_2C_2$ , з опором  $Z_2$  (рис. 10.14). Обидва контури, найчастіше, мають однакові резонансні частоти:

$$\omega_{зр} = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}. \quad (10.12)$$

Смуговий фільтр можна подати як сукупність двох фільтрів: ФНЧ з параметрами  $L_2C_1$  та частотою зрізу  $\omega_{зр1} = \frac{1}{2\sqrt{L_2C_1}}$ , ФНЧ з параметрами

$L_1C_2$  та частотою зрізу  $\omega_{зр2} = \frac{2}{\sqrt{L_1C_2}}$  (рис. 10.15).

Причому параметри фільтра  $L_2, C_1, L_1, C_2$  підбираються таким чином, щоб частота  $\omega_{зр2}$  була більшою, ніж  $\omega_{зр1}$ . Різниця ж між ними  $\omega_{зр2} - \omega_{зр1}$  і є потрібною смугою прозорості (пропускання) фільтра.

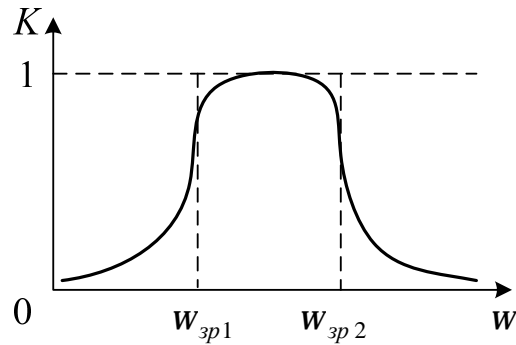


Рисунок 10.15 – АЧХ реальних СФ

На АЧХ (рис. 10.15) смугового фільтра ліва вітка відповідає елементам, які утворюють фільтр верхніх частот з частотою зрізу  $\omega_{zp1}$ , а права – елементам фільтра нижніх частот з частотою зрізу  $\omega_{zp2}$ . Між частотами зрізу коефіцієнт передачі напруги максимальний ( $K = 1$ ). Чим більше частота  $\omega$  відрізняється від  $\omega_{zp1}$  (у бік менших частот) і від  $\omega_{zp2}$  (у бік верхніх частот), тим більший вхідний опір послідовних контурів і менший – паралельних, у зв'язку з чим вихідна напруга зменшується.

Розрахунок параметрів  $L_1, C_2$  ведеться за заданою частотою зрізу  $\omega_{zp2}$  та  $R_n$  за формулами (10.7) і (10.8), а параметрів  $L_2, C_1$  за заданою частотою зрізу  $\omega_{zp1}$  та  $R_n$  за формулами (10.11).

**Загороджувальні фільтри** на відміну від смугових мають мінімальний коефіцієнт передачі напруги ( $K \approx 0$ ) у смузі між частотами  $\omega_{zp1}$  та  $\omega_{zp2}$ , максимальний ( $K \approx 1$ ) – за межами цієї смуги. Для цього фільтр складають з паралельних контурів  $L_1 C_1$ , увімкнених послідовно з навантаженням і послідовних контурів  $L_2 C_2$ , увімкнених паралельно з навантаженням (рис. 10.16).

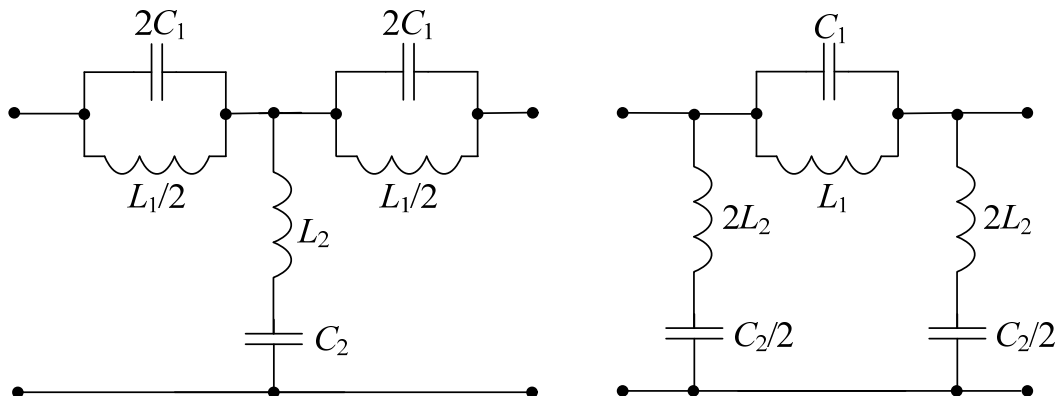


Рисунок 10.16 – Схеми Т-подібної та П-подібної ланок 3Ф

Загороджувальний фільтр (рис. 10.16, 10.17), як і смуговий, можна подати таким, що складається з двох фільтрів: фільтра нижніх частот  $L_1 C_2$  з частотою зрізу  $\omega_{zp1}$  (ліва вітка АЧХ) та фільтра верхніх частот  $L_2 C_1$  з частотою зрізу  $\omega_{zp2}$  (права вітка АЧХ).

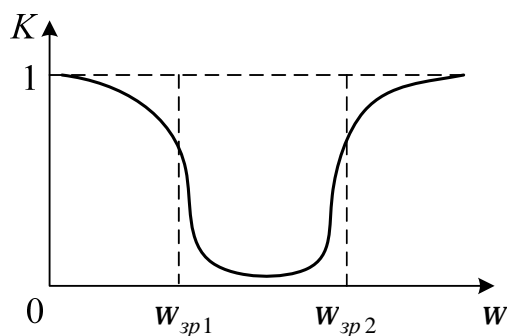


Рисунок 10.17 – АЧХ реального ЗФ

Розрахувати параметри  $L_1C_2$  можна за заданими частотами зрізу  $\omega_{зр1}$  та  $R_H$  за формулами (10.7) та (10.8), а параметри  $L_2C_1$  – за заданою частотою  $\omega_{зр2}$  та  $R_H$  за формулою (10.11).

Усі контури настроєні у резонанс з частотою  $\omega_0 = \sqrt{\omega_{зр1} \cdot \omega_{зр2}}$ , на якій послідовно увімкнені елементи (паралельні контури) мають максимальний вхідний, а паралельно увімкнені елементи (послідовні контури) – мінімальний вхідний опір, а тому напруга на виході фільтрів буде мінімальною. Такий фільтр стає прозорим на частотах  $\omega < \omega_{зр1}$  та  $\omega > \omega_{зр2}$ .

### 10.3 Реактивні фільтри типу $m$

#### Перехід від фільтра типу $k$ (прототипу) до фільтра типу $m$

Розглянемо цей перехід на прикладі П-ланки ФНЧ  $k$  типу (рис. 10.18, а) до послідовно-похідної (рис. 10.18, б) і паралельно-похідної (рис. 10.18, в) ланок ФНЧ  $m$  типу.

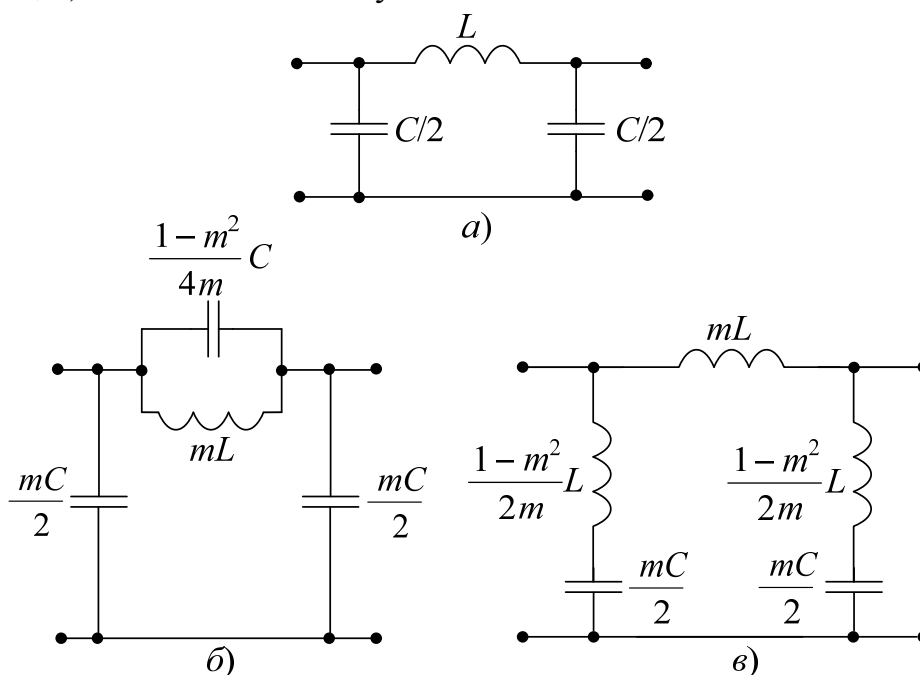


Рисунок 10.18 – Перехід від фільтра типу  $k$  до фільтра типу  $m$ : а) схема П-ланки ФНЧ типу  $k$ , б) паралельно-похідної, в) послідовно-похідної ланок ФНЧ типу  $m$

У послідовно-похідній ланці (рис. 10.18, в) котушка з індуктивністю  $L$  замінена на котушку з індуктивністю  $mL$ , а у кожен віток замість конденсатора ємністю  $C/2$  увімкнені між собою послідовно котушка з індуктивністю  $(1-m^2)L/2m$  і конденсатор ємністю  $mC/2$ , у результаті чого утворюється послідовний контур з власною частотою

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-m^2)L}{2m} \cdot \frac{mC}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{LC}\sqrt{1-m^2}} = \frac{\omega_{зр}}{\sqrt{1-m^2}} \quad (10.13)$$

де  $\omega_{зр} = 2 / \sqrt{LC}$  – частота зрізу ФНЧ типу  $k$  (прототипу);

$m = 0 \dots 1$  – параметр переходу до фільтра  $m$  типу. При  $m = 1$ , до речі, з  $m$  фільтра отримуємо прототип.

Паралельно-похідна ланка (рис. 10.18, б) утворюється заміною котушки  $L$  паралельним контуром з елементами  $mL$  та  $(1-m^2)C/4m$  і збільшенням ємності віток у  $m$  разів. Очевидно, резонансна частота паралельного контуру також буде дорівнювати  $\omega_0 = \omega_{зр} / \sqrt{1-m^2}$  і мати таку ж частоту зрізу  $\omega_{зр}$ , а узгоджений вхідний опір  $Z_{0П}$  такий, як і у прототипу.

### Частотні характеристики ФНЧ $m$ типу

З рис. 10.19 бачимо, що вибором параметра переходу  $m$  можна досягти того, що  $Z_{0П}$  буде мало відрізнятися від  $\sqrt{L/C}$  майже в усій смузі прозорості фільтра. Це значення параметра дорівнює 0,6 і називається оптимальним.

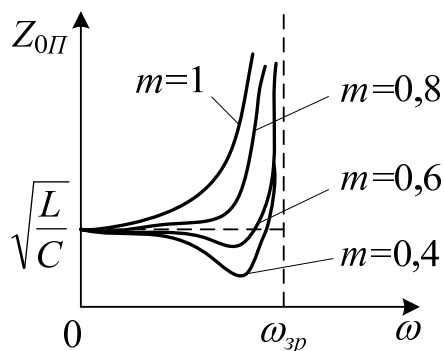


Рисунок 10.19 – Залежність узгодженого вхідного опору П-ланки ФНЧ типу  $m$  від частоти у смузі прозорості

На рис. 10.20 показано, що у межах смуги прозорості коефіцієнт передачі напруги однаковий і дорівнює одиниці. Коли ж частота  $\omega$  зростає від  $\omega_{зр}$  до  $\omega_0$ , коефіцієнт передачі різко зменшується, прямуючи до нуля з наближенням до резонансу контурів фільтра. Вхідний опір послідовно-похідної ланки прямує до нуля, а паралельно-похідної ланки – до нескінченності. Тому  $\omega_0$  називають частотою нескінченного згасання ( $K = 0$ ). Різкий спад АЧХ біля  $\omega_{зр}$  – друга перевага фільтрів  $m$  типу.

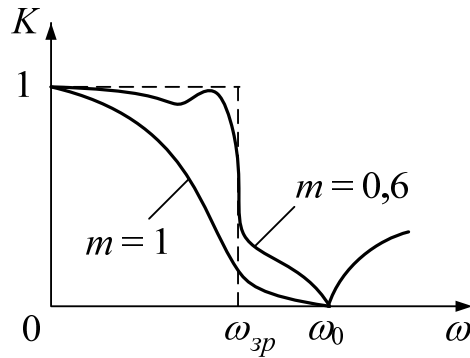


Рисунок 10.20 – АЧХ ланки ФНЧ типу  $m$

Але ці фільтри мають і недоліки: а) схеми фільтрів  $m$  типу складніші (самі фільтри дорожчі та менш надійні); б) при зростанні частоти більше  $\omega_0$  (смуга непрозорості) коефіцієнт передачі напруги зростає.

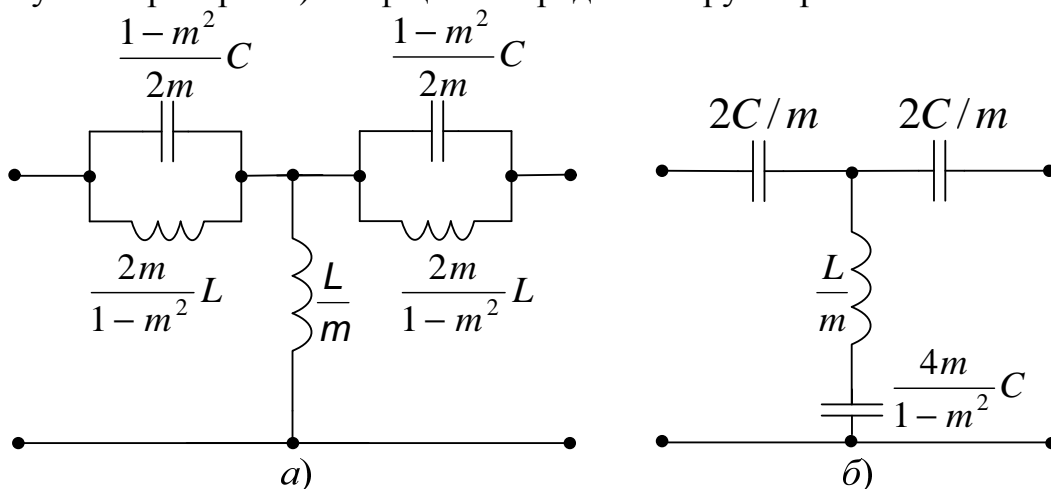


Рисунок 10.21 – Схеми Т-ланок ФВЧ типу  $m$ : а) паралельно-похідна, б) послідовно-похідна ланка

Такі недоліки усуваються застосуванням комбінованих ( $k - m$ ) фільтрів, де об'єднуються кращі сторони фільтрів обох типів.

#### 10.4 Резистивно-ємнісні фільтри

Виготовлення котушок індуктивності для фільтрів, які працюють в діапазонах інфранизьких (менше 3 кГц) і дуже низьких (10...30 кГц) частот, пов'язане з труднощами, особливо коли котушки повинні мати велику індуктивність при високому значенні їх добротності. Збільшення поперечного перерізу дроту обмотки збільшує масу, розміри та вартість котушки. Застосування ж феромагнітних осердь призводить до залежності індуктивності від величини струму, що протікає в обмотці.

Щоб позбутися громіздких фільтрів з низькою добротністю котушок, застосовуються резистивно-ємнісні фільтри (РС-фільтри) які складаються з резисторів і конденсаторів. Усі РС-фільтри розділяються на фільтри верхніх частот (ФВЧ), фільтри нижніх частот (ФНЧ), смугові фільтри (СФ) та загороджувальні фільтри (ЗФ).

### 10.4.1 RC-фільтри верхніх частот

На рис. 10.22 зображена схема Г-подібної ланки RC-фільтра верхніх частот. На вході ланки діє гармонічна напруга  $u_1(t)$  з комплексною амплітудою  $\mathcal{U}_{m1}$ . Ця напруга прикладена до послідовно з'єднаних конденсатора  $C$  та резистора  $R$ , розподіляється між конденсатором і резистором й частина  $u_2(t)$  з комплексною амплітудою ( $\mathcal{U}_{m2}$  знімається з резистора  $R$  і є вихідною напругою фільтра.

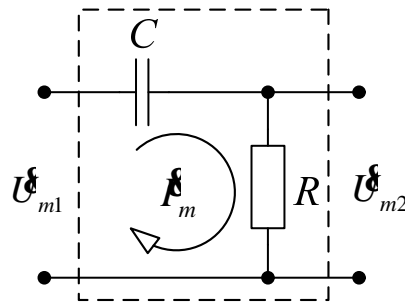


Рисунок 10.22 – Схема RC-фільтра верхніх частот

Комплексний коефіцієнт  $\mathcal{K}$  передачі напруги фільтра дорівнює відношенню комплексної амплітуди вихідної напруги до комплексної амплітуди вхідної.

Оскільки через конденсатор і резистор (з'єднані послідовно) протікає один і той самий струм, то:

$$\mathcal{K} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}. \quad (10.14)$$

Комплексна величина може бути записана у показниковій формі:

$$\mathcal{K} = K e^{j\varphi},$$

де  $K$  – модуль цієї комплексної величини;

$\varphi$  – її аргумент.

Модуль дробу виразу (10.14) дорівнює модулю чисельника 1 поділеному на модуль знаменника  $\sqrt{1 + (1/\omega RC)^2}$ :

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}}. \quad (10.15)$$

Аргумент дробової комплексної величини дорівнює аргументу чисельника (у даному випадку  $\varphi_{чис} = 0$ ) мінус аргумент знаменника (у даному випадку  $\varphi_{зн} = \arctg(1/\omega RC)$ ):

$$\varphi = \varphi_{чис} - \varphi_{зн} = \arctg(1/\omega RC) \quad (10.16)$$



Залежність модуля коефіцієнта передачі  $K$  від частоти  $\omega$  називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ), а залежність аргументу  $j$  від частоти  $\omega$  – фазочастотною характеристикою (ФЧХ) фільтра (рис. 10.23).

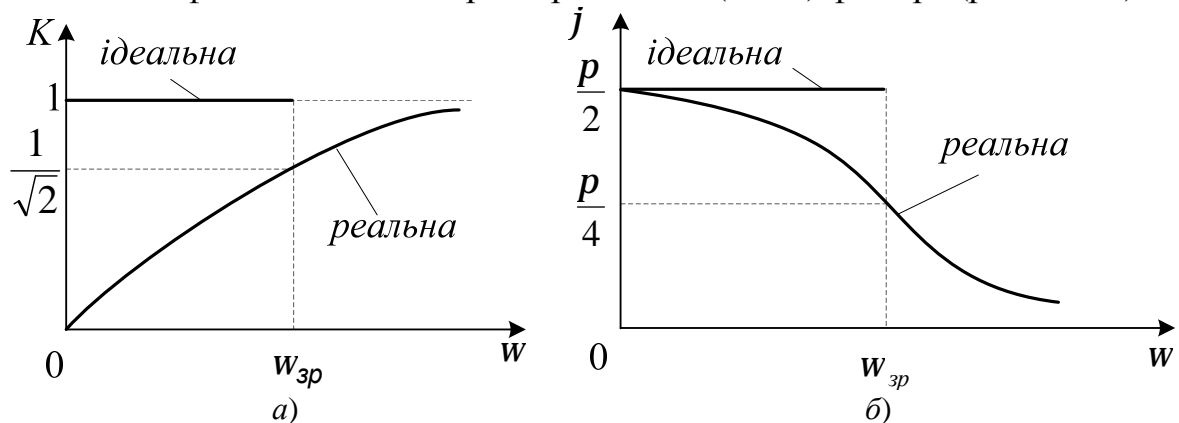


Рисунок 10.23 – а) АЧХ і б) ФЧХ RC-фільтра ВЧ

Змінюючи частоту  $\omega$  від  $0$  до  $\infty$ , отримуємо з виразів (10.15), (10.16), що модуль  $K$  зростає від  $0$  до  $1$  і аргумент  $j$  зменшиться від  $\pi/2$  до  $0$ . Дійсно, при частоті  $\omega = 0$  опір конденсатора  $C$  нескінченно великий у порівнянні з опором резистора  $R$ , і тому модуль  $K = 0$ , бо уся напруга спаде на конденсаторі і  $U_2 = 0$ , а аргумент  $j = \arctg \infty = \pi/2$ .

На усіх частотах, коли  $\omega RC \ll 1$  вхідний опір кола матиме ємнісний характер, вихідна напруга  $U_2 = i\mathcal{R}$  випереджатиме за фазою вхідну напругу  $U_1$  на  $90^\circ$ . Зі зростанням частоти ємнісний опір зменшується і все більша частина вхідної напруги припадатиме на елемент  $R$ . Це, відповідно, призведе до зростання модуля  $K$  і зменшення аргументу  $j$  комплексного коефіцієнта передачі напруги. При  $\omega \rightarrow \infty$ , опір конденсатора падає до нуля і уся вхідна напруга передається на вихід ( $K = 1$ ), струм у колі носить чисто активний характер і спад напруги  $U_2 = i\mathcal{R}$  збігається за фазою з вхідною напругою  $U_1$  ( $j = 0$ ). Вид АЧХ (рис. 10.23, а) показує, що розглянутий фільтр є фільтром верхніх частот.

Недоліком цього фільтра є відсутність різкого переходу від смуги непрозорості до смуги прозорості. Частоту зрізу прийнято визначати такою, при якій модуль  $K$  дорівнює  $1/\sqrt{2} = 0,707$ . Підставивши  $\omega = \omega_{zp}$  і  $K = 1/\sqrt{2}$  у вираз (10.15), отримуємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_{zp} RC}\right)^2}}, \quad \omega_{zp} = 1/RC = 1/t_\phi. \quad (10.17)$$

Таким чином, частота зрізу фільтра  $\omega_{zp}$  має величину, обернену його сталій часу  $t_\phi = RC$ . Коли  $\omega = \omega_{zp} = 1/RC$ , опір конденсатора

$$X_c = 1/\omega_{zp} C = RC / C = R$$

і тоді:

$$j = \arctg(1/w_{зр}RC) = \arctg(R/R) = \arctg 1 = 45^\circ,$$

тобто, вихідна напруга випереджає вхідну за фазою на  $45^\circ$ .

### 10.4.2 RC-фільтри нижніх частот

На рис. 10.24 зображена схема Г-подібної ланки RC-фільтра нижніх частот. Тут вхідна напруга  $u_1(t)$  підводиться теж до послідовно увімкнених резистора  $R$  і конденсатора  $C$ , але вихідна напруга знімається з конденсатора з опором  $1/j\omega C$ . Тому комплексний коефіцієнт передачі напруги фільтра:

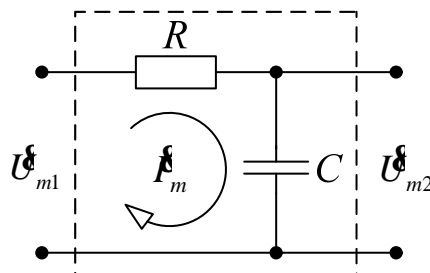


Рисунок 10.24 – Схема RC-фільтра нижніх частот

$$K = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + jt_\phi}, \quad (10.18)$$

де  $t_\phi = RC$  – стала часу кола.

Визначимо модуль  $K$  та аргумент  $j$  коефіцієнта передачі напруги у той же спосіб, що і в п. 10.4.1:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + (wCR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (wt_\phi)^2}}, \quad (10.19)$$

$$j = \arctg(-wRC) = -\arctg(wt_\phi). \quad (10.20)$$

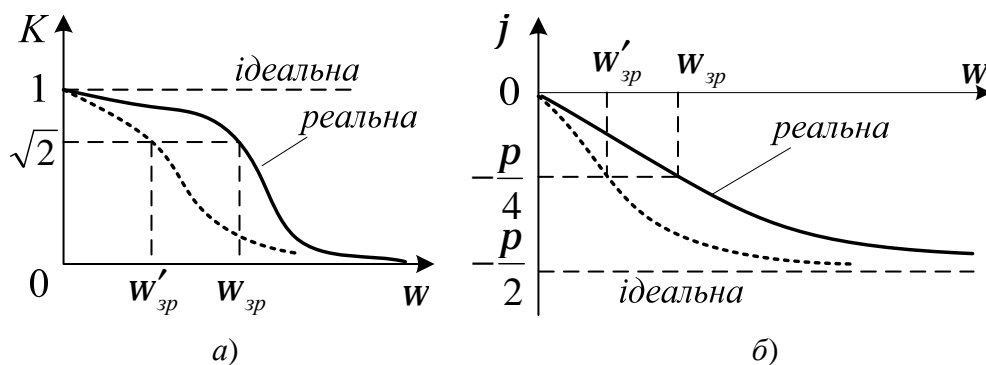


Рисунок 10.25 – а) АЧХ та б) ФЧХ RC-фільтра НЧ

Частотні характеристики фільтра подані на рис. 10.25. Зі зростанням частоти від 0 до  $\infty$  модуль  $K$ , як випливає із формули (10.19), зменшується від 1 до нуля, а аргумент  $j$  (10.20) – від нуля до мінус  $90^\circ$ . Дійсно, при  $\omega = 0$  ємнісний опір набагато більший за опір  $R$ , через що вихідна напруга фільтра практично дорівнює вхідній ( $K = 1$ ) і збігається з нею за фазою ( $j = 0$ ). Зі зростанням частоти до нескінченності ємнісний опір конденсатора зменшується до нуля ( $U_2 \rightarrow 0$ ), а з ним і модуль  $K \rightarrow 0$ , струм обмежується величезним (відносно  $X_C$ ) активним опором  $R$  і збігається із вхідною напругою за фазою. Вихідна ж напруга, яка знімається з конденсатора, стає нескінченно малою за амплітудою та відставатиме від вхідної на  $90^\circ$  ( $j = -90^\circ$ ).

Частота зрізу фільтра  $\omega_{zp}$ , при якій  $K = 1/\sqrt{2}$ , визначається за співвідношенням:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega t_\phi)^2}},$$

з якого витікає, що

$$\omega_{zp} = 1/RC = 1/t_\phi, \quad (10.21)$$

тобто, частота зрізу фільтра нижніх частот є величиною оберненою його сталій часу.

На частоті зрізу опір  $R = 1/\omega_{zp}C$ , а тому аргумент  $j = \arctg(-\omega_{zp}t_\phi) = \arctg(-t_\phi/t_\phi) = \arctg(-1) = -45^\circ$ , тобто вихідна напруга відстає за фазою від вхідної на кут  $45^\circ$ .

### 10.4.3 Смугові та загороджувальні RC-фільтри

Смуговий фільтр (рис. 10.26) – це касадно з'єднані ФВЧ ( $C_1R_1$ ) та ФНЧ ( $R_2C_2$ ).

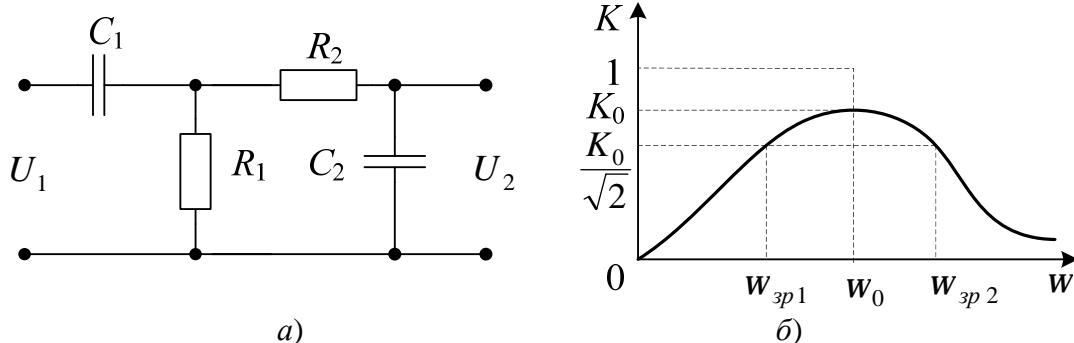


Рисунок 10.26 – Реальний смуговий фільтр: а) схема, б) АЧХ

Максимальний коефіцієнт передачі напруги  $K_0 \leq 1$  досягається на частоті генератора  $\omega = \omega_0 = \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$ . На частоті  $\omega = 0$  уся вхідна напруга фактично зосереджена на конденсаторі  $C_1$  і тому  $U_2 = 0$  ( $K = 0$ ). При дуже високих частотах  $\omega \rightarrow \infty$  ємнісний опір конденсатора  $C_2$  буде нескінченно малим, що і призводить до спаду модуля  $K$  ( $K \rightarrow 0$ ). Крутість гілок АЧХ такого фільтра невелика.

Прикладом загороджувального (режекторного) фільтра є схема RC-фільтра, яка має назву "подвійний Т-подібний міст" (рис. 10.27, а). Він складається з двох паралельно увімкнених чотириполусників, один з яких є фільтром нижніх частот  $R_1C_2$ , а другий – фільтром верхніх частот  $C_1R_2$ . Відповідно до властивостей мостових схем на певній частоті  $\omega_0 = 1/RC$  струми  $i'_2$  та  $i''_2$  виявляються чисельно рівними, протифазними і у сумі дадуть  $i_2 = i'_2 + i''_2 = 0$ . Ця частота  $\omega_0$  називається частотою балансу мосту. При відхиленні  $\omega$  від  $\omega_0$  у будь-який бік коефіцієнт передачі зростає, що і забезпечує смугу непрозорості у діапазоні частот  $\omega_{зр2} \dots \omega_{зр1}$ .

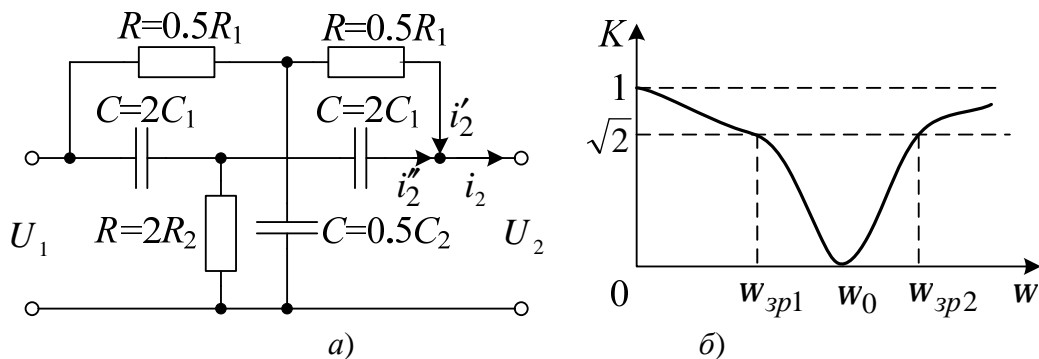


Рисунок 10.27 – Загороджувальний фільтр: а) схема та б) АЧХ

### 10.5 Фільтри зосередженої селекції

Фільтри зосередженої селекції (ФЗС) застосовуються у таких каскадах радіопередавачів, радіоприймачів або радіовимірювальних пристроїв, де необхідно забезпечити вузьку смугу пропускання при високій стабільності цієї смуги і високій вибірності фільтра (прямокутній частотній характеристиці).

Основними схемами ФЗС є:

- ланка каскадно з'єднаних високодобротних контурів;
- п'єзоелектричні (кварцові) фільтри.

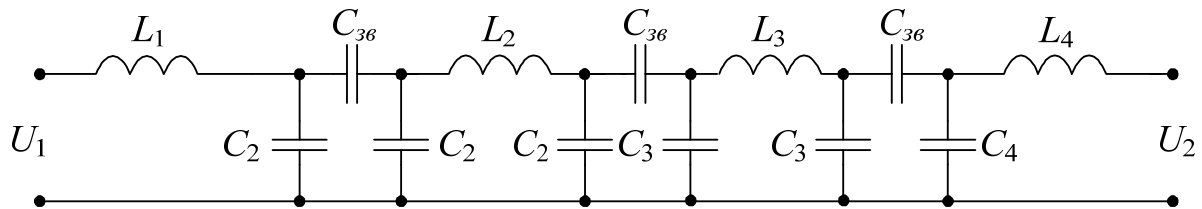


Рисунок 10.28 – Схема багатоконтурного ФЗС

На рис. 10.28 подана схема чотириконтурного ФЗС, що являє собою систему каскадно з'єднаних коливальних контурів із зовнішньоємнісним зв'язком. Крайні контури є Г-подібними, а середні - П-подібними ланками. Контури цього фільтра мають високу добротність і настроєні на частоти  $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}, \omega_{04}$ , що забезпечує у смузі частот  $\omega_{01} \dots \omega_{04}$  високу прямокутність АЧХ (рис. 10.29), тобто високу вибірність.

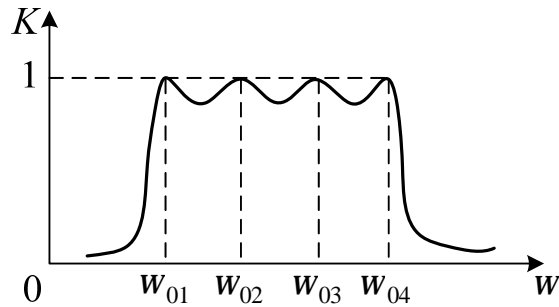


Рисунок 10.29 – АЧХ чотириконтурного ФЗС

Але найвужчу смугу пропускання (менше 1 кГц) можна отримати за допомогою кварцових резонаторів, дія яких основана на прямому та оберненому п'єзоелектричних ефектах.

### **Принцип дії кварцового резонатора**

Прямий п'єзоелектричний ефект – поява електричних зарядів на обкладинках кварцотримача при механічних деформаціях кварцової пластини. Зворотний п'єзо ефект – механічна деформація пластини, коли до неї прикладено напругу. Якщо ця напруга змінна, то кварцова пластинка здійснює механічні коливання, які, у свою чергу, викликають змінні заряди.

Кварцова пластинка є пружним тілом і має яскраво виражену резонансну частоту  $f_0$ , яка залежить від товщини пластини  $d$  і визначається за формулою:

$$f_0(\text{МГц}) = (1,6 \dots 3,6)/d (\text{мм}). \quad (10.22)$$

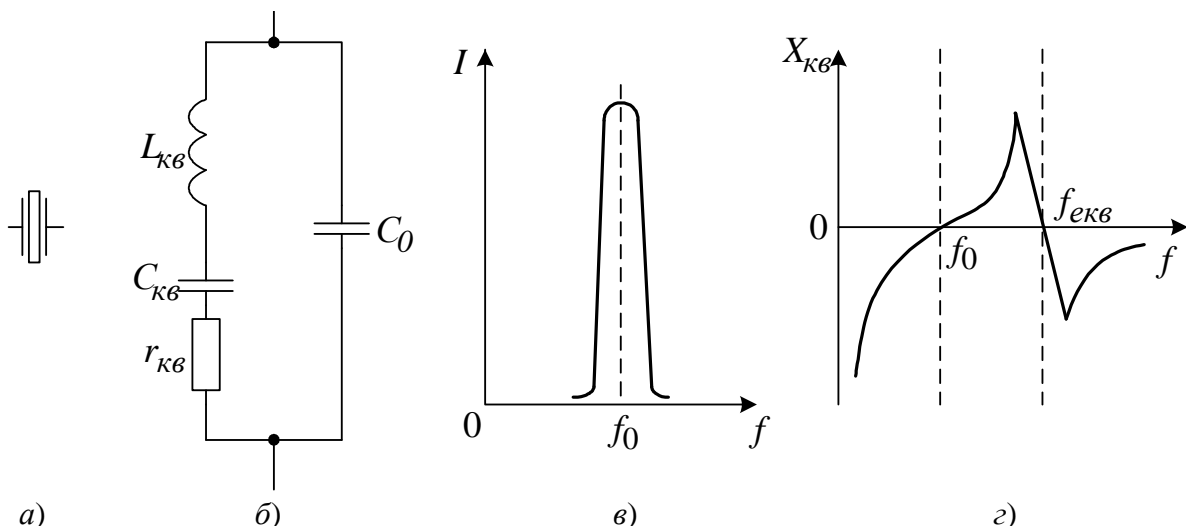


Рисунок 10.30 – Кварцовий резонатор: а) умовне позначення; б) еквівалентна схема резонатора; в) залежність струму через кварц від частоти прикладеної напруги; г) залежність реактивної складової вхідного опору резонатора від частоти прикладеної напруги

Значення числового коефіцієнта в (10.22) визначається типом зрізу кварцової пластини.

Коли частота прикладеної напруги  $f = f_0$ , то механічні коливання пластини особливо інтенсивні. Струм через кварцову пластину (рис. 10.30, в) стає максимальним і збігається за фазою з прикладеною напругою. При відхиленні частоти  $f$  від резонансної електричний струм різко зменшується. В області  $f < f_0$  струм випереджає за фазою напругу, а при  $f > f_0$  – відстає від напруги.

Такими властивостями характеризується, як відомо, послідовний коливальний контур. Параметри цього контуру називаються динамічними і мають величини:  $L_{кв}$  досягає декількох тисяч генрі, ємність  $C_{кв}$  не перевищує сотих часток пікофарада, активний опір  $r_{кв}$  може бути від десятка до тисяч омів. Тому добротність контуру, еквівалентного кварцовому резонатору, велика  $Q = 10^4 \dots 10^6$ .

Крім динамічних параметрів  $L_{кв}$ ,  $C_{кв}$ ,  $r_{кв}$  еквівалентна схема кварцового фільтра містить ємність кварцотримача  $C_0$ , яка вимірюється одиницями або десятками пікофарад. У зв'язку з цим розрізняють частоту резонансу послідовного контуру  $L_{кв}$ ,  $C_{кв}$ ,  $r_{кв}$ , яка дорівнює:

$$f_0 = 1/2\pi \sqrt{L_{кв} C_{кв}}$$

та частоту резонансу паралельного контуру III виду, рівну:

$$f_{0екв} = 1/2\pi \sqrt{L_{кв} C_{екв}},$$

де  $C_{екв} = C_{кв} C_0 / C_{кв} + C_0$  – загальна ємність паралельного контуру.

Оскільки  $C_{кв} \ll C_0$ , то  $C_{екв} \approx C_{кв}$  і резонансні частоти  $f_0$  і  $f_{0екв}$  дуже мало відрізняються між собою.

При частотах, близьких і особливо менших  $f_0$ , струм вітки  $C_0$  настільки малий, що властивості схеми практично визначаються послідовним контуром  $L_{кв}$ ,  $C_{кв}$ ,  $r_{кв}$ . Це проявляється у тому що, коли частота напруги  $f$  збільшується і проходить через  $f_0$ , реактивна складова вхідного опору усієї схеми  $X_{екв}$  проходить через нуль, змінюючи свій характер з ємнісного на індуктивний. В області більш високих частот уже відчувається струм через  $C_0$  і на частоті паралельного резонансу  $f_{0екв}$ , опір  $X_{кв}$  знову стає рівним нулю, але характер цього опору змінюється з індуктивного на ємнісний, як у будь-якому паралельному контурі.

Ширина смуги пропускання кварцового фільтра  $f_{0екв} - f_0$ , і, оскільки ці частоти відрізняються дуже мало, то смуга прозорості кварцового фільтра дуже вузька, а висока добротність кварцового резонатора забезпечує високу стабільність цієї смуги навіть при перепадах температури навколишнього середовища.

У смузі прозорості (пропускання) коефіцієнт передачі напруги приблизно дорівнює одиниці, а у смузі непрозорості – нулю.

У смузі пропускання вхідний узгоджений опір фільтра є активним, а у смузі непрозорості - реактивним.

Строго узгодженим цей опір є лише на одній частоті вхідного сигналу і дорівнює характеристичному опорю фільтра –  $\sqrt{L/C}$ .

### **Запитання та задачі для закріплення**

1. Що називається електричним фільтром?
2. Як трактуються фізичні процеси в фільтрах у смугах прозорості та непрозорості?
3. Що таке АЧХ та ФЧХ фільтра?
4. Фізичний зміст модуля і аргументу комплексного коефіцієнта передачі напруги.
5. Переваги та недоліки реактивних та RC-фільтрів.
6. Переваги та недоліки реактивних фільтрів  $k$  та  $m$  типів.
7. Принцип дії та еквівалентні параметри кварцового резонатора.
8. Розрахувати параметри реактивного фільтра НЧ типу  $k$ , коли частота зрізу  $f_{зр} = 30$  кГц,  $R_n = 100$  Ом.
9. Розрахувати параметри реактивного фільтра ВЧ типу  $k$  за умовою попередньої задачі.
10. Розрахувати параметри смугового фільтра  $k$  типу, коли  $f_{зр1} = 50$  кГц,  $f_{зр2} = 100$  кГц,  $R_n = 75$  Ом.
11. Розрахувати значення добротності кварцового резонатора, використавши значення його еквівалентних параметрів.

## 11 РАДІОТЕХНІЧНІ ПРОЦЕСИ ТА ЗАДАЧІ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

### 11.1 Поняття інформації, повідомлення, сигналу

Термін “сигнал” часто зустрічається не тільки у науково-технічних питаннях, а і у повсякденному житті. Інколи, не думаючи про строгість термінології, ми ототожнюємо такі поняття як **сигнал**, **повідомлення**, **інформація**. Зазвичай це не призводить до непорозумінь, оскільки слово “сигнал”, яке походить від латинського терміну “signum” – “знак”, має широкий змістовий діапазон. Але, приступаючи до систематизованого вивчення радіотехніки, слід чітко уявляти внутрішній зміст цих трьох понять.

Під **інформацією** розуміється сукупність відомостей про предмети, події, процеси і факти, які мають місце навколо нас. Ці відомості подаються у формі **повідомлень**: мови, тексту телеграми, оптичного зображення, цифрових даних і т. ін. Повідомлення надходять за призначенням, тобто до споживача за двох умов:

- є хвильовий процес (акустичні чи електромагнітні хвилі), який здатний поширюватись від джерела інформації до її споживача;
- принаймні один з параметрів цього процесу буде змінюватись відповідно до повідомлення, яке передається.

Таким чином отримується **сигнал** – коливання, у якому відображено повідомлення шляхом відповідного змінювання одного з параметрів цього коливання. Основною особливістю радіотехніки є те, що носієм інформації при її передаванні, прийманні і добуванні є радіохвилі, які вільно поширюються у вільному просторі або спрямовуються по лініях (хвилеводах) передачі.

Радіочастоти, при яких уже можливий безпроводний зв'язок за рахунок радіохвиль згідно з рекомендаціями Сектора радіозв'язку, що входить у структуру Міжнародного союзу електрозв'язку (МСЕ) (International Telecommunication Union, ITU), поділяються на діапазони (див. табл. 11.1)

Таблиця 11.1

Найменування діапазону хвиль	Діапазон хвиль	Діапазон частот	Найменування діапазону частот
Міріаметрові	100...10 км	3...30 кГц	Дуже низькі
Кілометрові	10...1 км	3...30 0 кГц	Низькі
Гектометрові	1000...100 м	300...3000 кГц	Середні
Декаметрові	100...10 м	3...30 МГц	Високі
Метрові	10...1 м	30...300 МГц	Дуже високі
Дециметрові	100...10 см	300...3000 МГц	Ультрависокі
Сантиметрові	10...1 см	3...30 ГГц	Надвисокі
Міліметрові	10...1 мм	30...300 ГГц	Крайні високі
Оптичні	1000...0,01 мкм	300...3·10 <sup>7</sup> ГГц	Гіпервисокі



Узагальнена структурна схема передавання інформації (рис. 11.1) складається: з джерела повідомлень, передавального пристрою, проміжного середовища, приймального пристрою і отримувача інформації.

Передавальний пристрій перетворює повідомлення в сигнал, який, поширюючись у фізичному середовищі, досягає приймального пристрою, а він з прийнятого сигналу відновлює повідомлення.

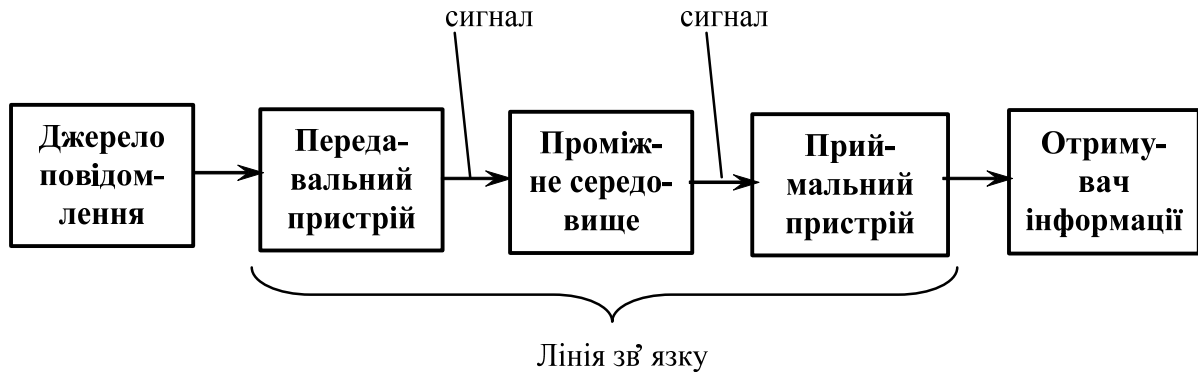


Рисунок 11.1 – Узагальнена структурна схема передавання інформації

Використані при цьому технічні засоби і середовище утворюють **стовбур лінії зв'язку**. Якщо ця лінія розрахована на одночасне передавання декількох повідомлень, то вона називається **багатоканальною**, а її частина, по якій проходить одне повідомлення – **каналом зв'язку**.

## 11.2 Телефонія

Найпростіший канал телефонного провідного зв'язку (рис. 11.2) складається з мікрофону  $M$ , джерела постійної напруги  $U_0$ , двопровідної лінії  $Ln$  і телефону  $T$ .

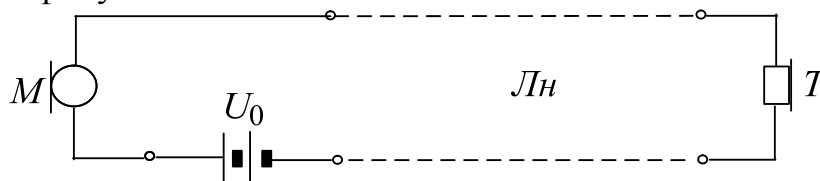


Рисунок 11.2 – Схема телефонного зв'язку

До появи від джерела повідомлення (наприклад, людини, що говорить) звука перед мікрофоном ( $t < t_0$ ) звуковий тиск  $p_m$  на мембрану мікрофону буде постійним, а тому електричний опір кола, підімкненого до джерела  $U_0$ , не буде змінюватись, в колі протікатиме постійний струм  $i = I_0$  і мембрана телефону буде нерухомою (рис. 11.3, *a*). Починаючи з моменту  $t = t_0$ , коливання повітря, якими супроводжуються звукові хвилі, передаються мембрані мікрофону, вугільний порошок мікрофону то ущільнюється, то розрихлюється, опір порошку змінюється у такт зі звуковими коливаннями і відповідно змінюватиметься струм  $i$

(рис. 11.3, б). Оскільки цей струм протікає по обмотці електромагніту телефону, то мембрана останнього робитиме механічні коливання з миттєвим значенням тиску  $p_m$  на повітря (рис. 11.3, в), що відтворить переданий звук.

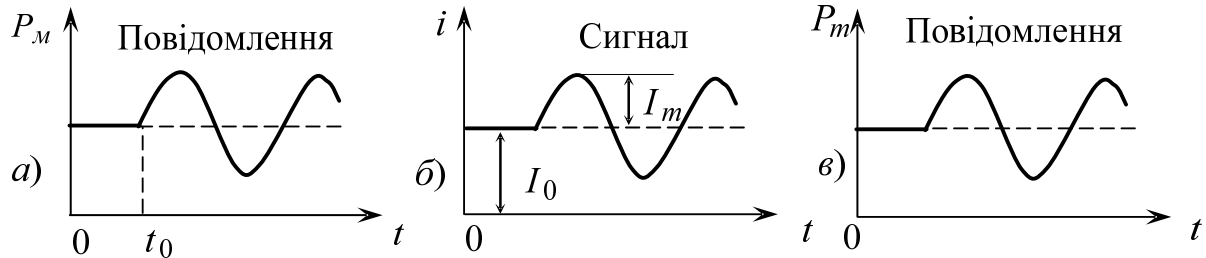


Рисунок 11.3 – Ілюстрації до пояснення дії лінії зв'язку

Струм  $i = i(t)$  відображає повідомлення і є **електричним сигналом**. Якщо це повідомлення є звуком чистого тону, то сигнал при  $t > t_0$  має змінюватись за гармонічним законом

$$i = I_0 + I_m \sin \Omega (t - t_0) = I_0 + I_m \sin 2\pi F (t - t_0),$$

де  $i$  – миттєве значення струму;

$I_0$  – струм при відсутності звукового повідомлення;

$I_m$  – амплітуда змінної складової струму;

$F$  – частота звукового повідомлення;

$\Omega = 2\pi F$  – кругова (циклічна) частота цього повідомлення;

$t_0$  – час початку звукового повідомлення.

Чим голосніше звукове повідомлення, тим більше змінюватиметься тиск на вугільний порошок мікрофону і тим більшим буде амплітуда струму у колі. Чим вищий тон звуку, тим частіші коливання повітря і мембрани мікрофону і тим більша частота сигналу  $F$ . Людське вухо реагує на звукові коливання у частотному діапазоні приблизно від 16 до 16 тисяч герців ( $F_{min}=16$  Гц,  $F_{max}=16$  кГц).

### 11.3 Основні радіотехнічні процеси

Сигнал у процесі його передавання по каналу зв'язку зазнає різноманітних перетворень. Деякі з цих процесів є обов'язковими для більшості радіотехнічних систем незалежно від їх призначення, а також від характеру повідомлень, які передаються. Назвемо ці фундаментальні процеси і водночас зазначимо їх основні властивості, наприклад, що стосується узагальненої схеми радіотехнічного каналу, поданої на рис. 11.2.

#### *Перетворення вихідного повідомлення в електричний сигнал і кодування*

При передаванні мови і музики таке перетворення здійснюється за допомогою мікрофону, при передаванні телевізійних зображень за

допомогою передавальних трубок. При передаванні письмового повідомлення (радіотелеграфія) спочатку здійснюється кодування, яке полягає у тому, що кожна літера абетки замінюється комбінацією стандартних символів (наприклад, точок, тире і пауз у коді Морзе), які потім перетворюють у стандартні електричні сигнали (наприклад, точці відповідатиме короткий імпульс, тире – імпульс втричі довший і т. п.).

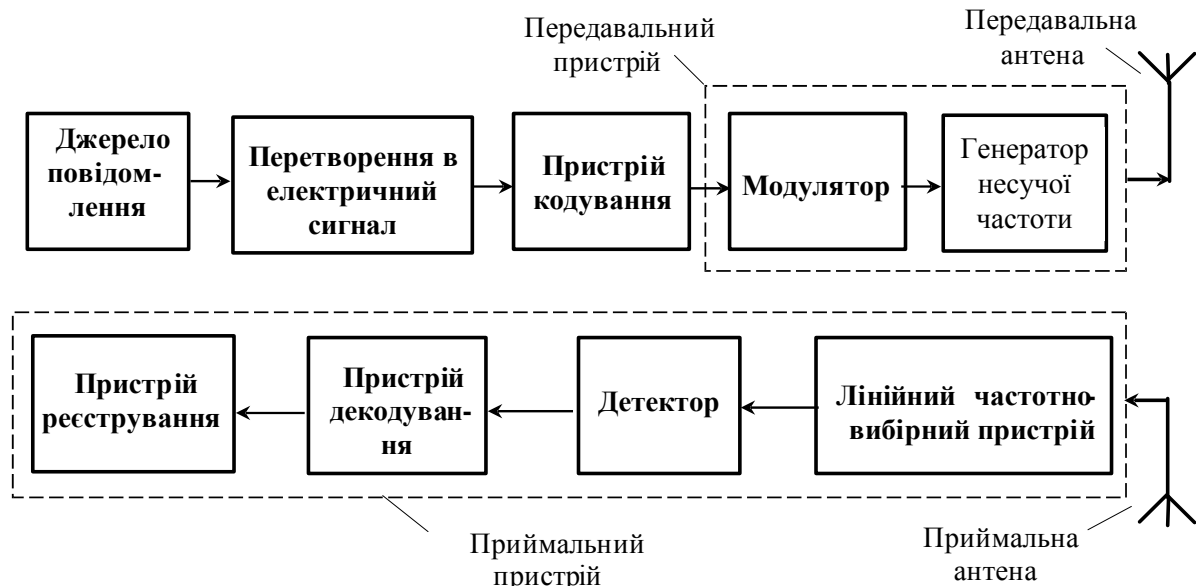


Рисунок 11.2 – Узагальнена структурна схема радіотехнічного каналу зв'язку

### ***Генерування високочастотних коливань***

Високочастотний генератор є джерелом коливань несучої частоти. В залежності від призначення каналу радіозв'язку потужність коливань змінюється від тисячних часток вата до мільйонів ват. Значення несучої частоти визначається радіочастотним діапазоном, у якому працює радіопередавальний пристрій (див. табл. 11.1).

### ***Керування коливаннями (модуляція)***

Процес модуляції полягає у змінненні одного чи декількох параметрів високочастотного коливання за законом повідомлення, що передається. Частота сигналу модулювання значно менша (у десять і більше разів) від несучої частоти генератора. Для здійснення модуляції використовують різні способи, зазвичай основані на змінюванні потенціалів електродів електронних ламп чи транзисторів, які входять до схеми радіопередавального пристрою. Основна характеристика процесу модуляції – ступінь відповідності між змінням параметра високочастотного коливання і модулюючим сигналом.

### ***Підсилення слабких сигналів у приймальному пристрої***

Приймальна антена уловлює незначну частку енергії, яку випромінює передавальна антена. В сучасних радіоприймальних пристроях реєстрація сигналів забезпечується при напругах на вході порядку мікрвольт. На виході ж (вході у реєструвальний пристрій) має бути сигнал з напругою

порядку вольт або десятки вольт. Таким чином потребується підсилення до величини порядку  $10^6 \dots 10^7$  разів за напругою.

### ***Перетворення частоти***

У передавальному пристрої сигнал високочастотної несучої частоти повинен характеризуватись високою стабільністю, наприклад, відхилення її від номінального (заданого) значення не повинно перевищувати  $\pm 0,001\%$ .

Забезпечити ж такі вимоги при потребі роботи на високих несучих частотах дуже важко. Тому застосовують відносно низькочастотні генератори (так звані задавальні генератори), де таку вимогу до стабільності легко виконати, а потім цю частоту збільшують у декілька разів, використовуючи процес множення частоти.

У сучасних радіоприймальних пристроях для отримання високостабільного підсилення радіосигналів у широкому частотному діапазоні, використовується перетворення частоти з утворенням певного значення так званої проміжної частоти, незалежної від частоти прийнятого сигналу. І, таким чином, основне підсилення радіосигналу відбувається у підсилювачі проміжної частоти (ППЧ).

### ***Виділення повідомлення з високочастотного коливання (детектування і декодування)***

Детектування є процесом, зворотним відносно модуляції. У результаті детектування має бути отримана напруга (струм), яка змінювалась би у часі так само, як змінюється один з параметрів (амплітуда, частота, початкова фаза) модульованого коливання. Іншими словами, є відновлення повідомлення, яке передавалось. Детектор, як правило, вмикається на виході приймального пристрою, а отже, до нього підводиться модульоване коливання, наприклад, уже попередньо підсилене ППЧ. Основна вимога до детектора – точне відтворення форми модулюючого (керуючого) сигналу.

Після детектування здійснюється декодування сигналу, тобто процес зворотний кодуванню. У багатьох радіотехнічних каналах кодування і декодування не використовується.

Окрім згаданих процесів, у такий чи інший спосіб пов'язаних з перетворенням частотних спектрів сигналів, у радіотехнічних пристроях широке застосування знаходить підсилення коливань без трансформації частоти, яке здійснюється у різних підсилювачах:

- низькочастотних підсилювачах керуючих сигналів, які використовуються перед модулятором у передавальному пристрої або після детектора – у радіоприймальному пристрої;

- високочастотні підсилювачі потужності у радіопередавальних пристроях;

- високочастотні та низькочастотні підсилювачі, які застосовуються у різноманітних вимірювальних пристроях.

## 11.4 Радіотелефонія і радіотелеграфія

### Радіотелефонія

До моменту часу  $t = t_0$  у передавальний пристрій ще не надходило повідомлення від джерела інформації (рис. 11.3).

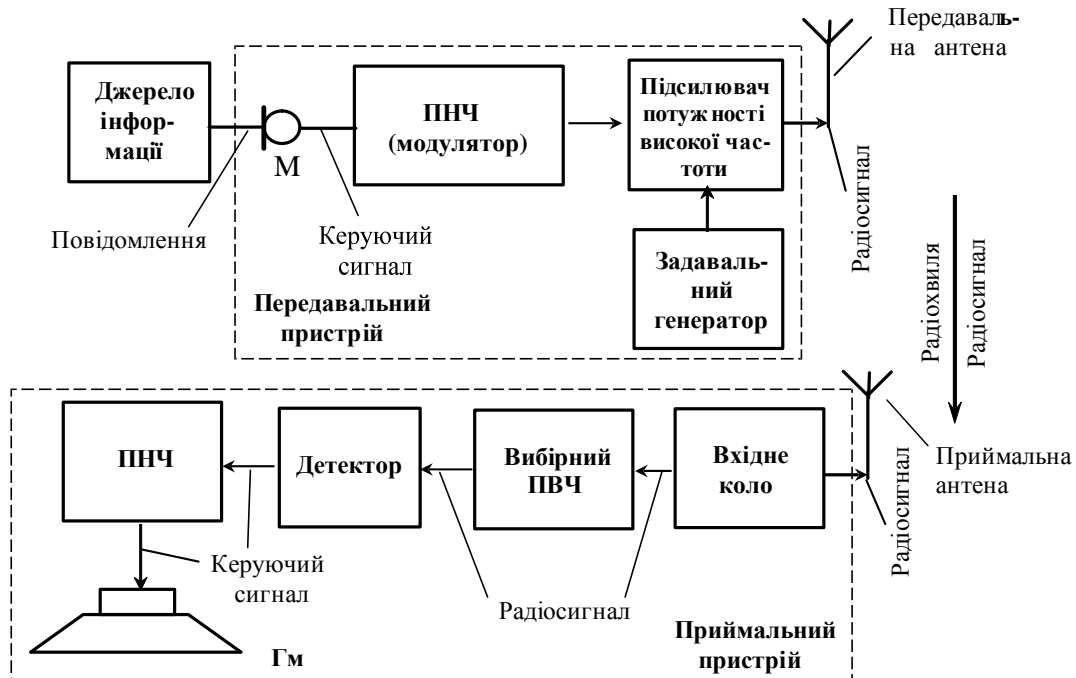


Рисунок 11.3 – Структурна схема каналу радіотелефонного зв'язку

Тому напруга, яка знімається з мікрофону  $M$ , залишається постійною  $u_k = U_0$  (рис. 11.4, *a*). Відповідно напруга радіосигналу  $u$  (рис. 11.4, *б*), яку генератор високої (несучої) частоти створює на вході передавальної антени, має постійну амплітуду  $U_{om}$  і частоту  $\omega_0 = 2\pi f_0$ .

З моменту надходження звукового повідомлення ( $t = t_0$ ) воно перетворюється мікрофоном на керуючий сигнал низької частоти (НЧ)  $u_k = u_k(t)$ . Цей сигнал підсилюється підсилювачем низької частоти (ПНЧ) і модулює високочастотні коливання за амплітудою (рис. 11.4, *б*). Обвідна модульованого сигналу (пунктирна лінія) обмежує розмах високочастотних коливань за амплітудою. Частота цих коливань  $\omega_0$  залишається незмінною. Отриманий радіосигнал підсилюється за потужністю, подається в передавальну антену, випромінюється нею і поширюється у вигляді радіохвилі у вільному просторі.

Досягнувши приймальної антени, радіохвилі збуджують на її затискачах напругу – маленький за розмахом амплітуди модульований сигнал, подібний до зображеного на рис. 11.4, *б*. З багатьох радіосигналів, які вловлює антена, вхідне коло приймального пристрою виділить потрібний (з частотою  $f_0$ ) і подасть на вибірний підсилювач, настроєний на сигнал саме цієї частоти. Підсилений радіосигнал після детектора перетворюється на низькочастотний сигнал, який є відтвореним керуючим сигналом. Після підсилення в підсилювачі низької частоти (ПНЧ) він подається у гучномовець  $G_m$  і ми чуємо (сприймаємо) звукове повідомлення.

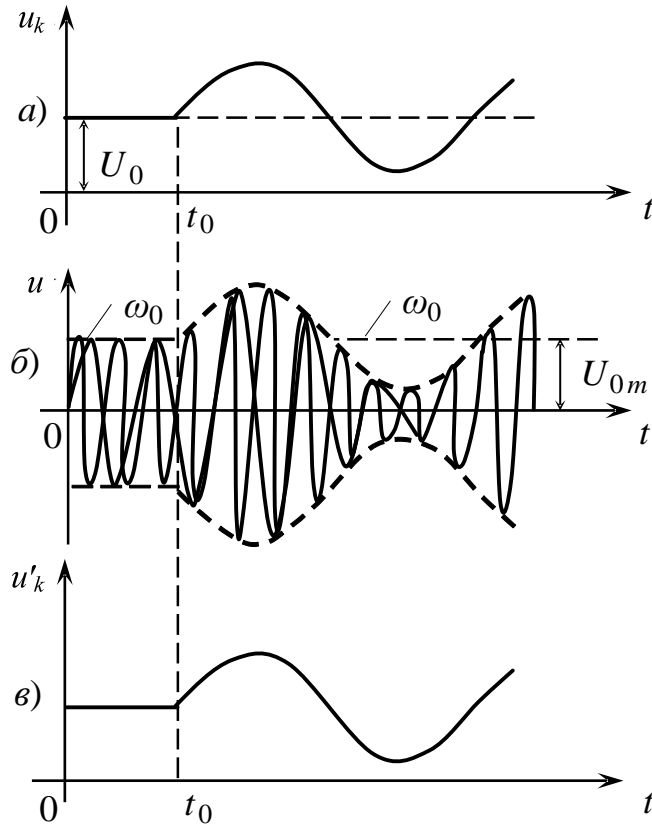


Рисунок 11.4 – Ілюстрація до пояснення принципу дії радіоканалу

### Радіотелеграфія

Кожній літері радіограми відповідає певна послідовність електричних імпульсів, яка називається *кодовою комбінацією*. Сукупність цих послідовностей називається *кодом*. У телеграфії найпоширенішими є коди Бодо і Морзе. За Морзе, наприклад, точці відповідає короткий імпульс, тире – втричі довший, коротка пауза відділяє імпульси у межах однієї літери, а довга – пауза між літерами. За Бодо кожній літері ставиться у відповідність комбінація імпульсів і пауз однакової тривалості, а кожна кодова комбінація складається з п'яти таких знаків (імпульсів + пауз).

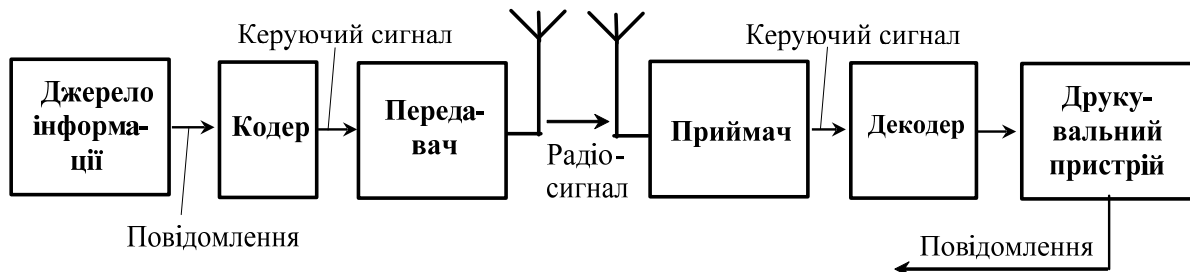


Рисунок 11.5 – Структурна схема радіотелеграфного каналу зв'язку

Щоб з'ясувати принцип організації радіотелеграфного зв'язку, розглянемо структурну схему (рис. 11.5). У радіотелеграфному каналі за джерелом повідомлення знаходиться пристрій кодування (*кодер*), призначений для отримання керуючих імпульсів, якими кодується

повідомлення. У передавачі ці імпульси модулюють, наприклад, амплітуду високочастотного сигналу несучої частоти.

На рисунку 11.6, *a* зображено кодову комбінацію (точка і тире) керуючих імпульсів  $U_k$ , яка відповідає літері А за азбукою Морзе. На рис. 11.6, *б* – радіоімпульси, утворені модуляцією високочастотного гармонічного коливання несучої частоти за амплітудою керуючими імпульсами.

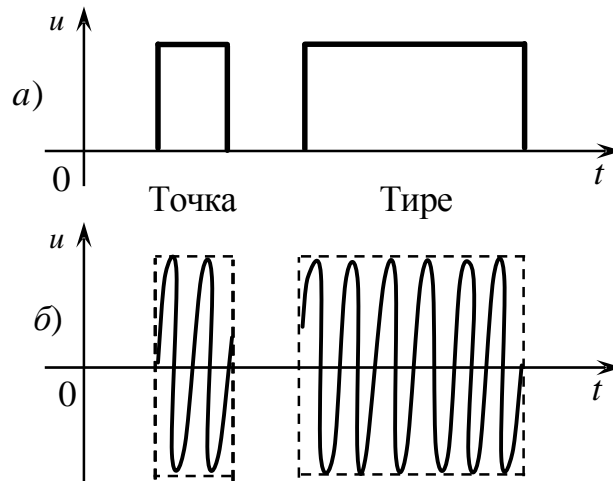


Рисунок 11.6 – Ілюстрація до пояснення принципу дії радіотелеграфного каналу зв'язку

Після детектування виділяться (відтворюються) імпульси, які збігаються за формою з керуючими. Декодувальний пристрій перетворить кодові комбінації на відповідні літери, а друкувальний пристрій телеграфного апарата надрукує текст повідомлення (телеграми).

### 11.5 Радіолокація

*Радіолокація* – це процес виявлення і вимірювання координат і параметрів руху об'єктів за допомогою радіотехнічних засобів. Найпростіша імпульсна радіолокаційна станція (РЛС) (рис. 11.7) має одну антену, яка використовується і для випромінювання, і для приймання радіохвиль, відбитих від об'єкта.

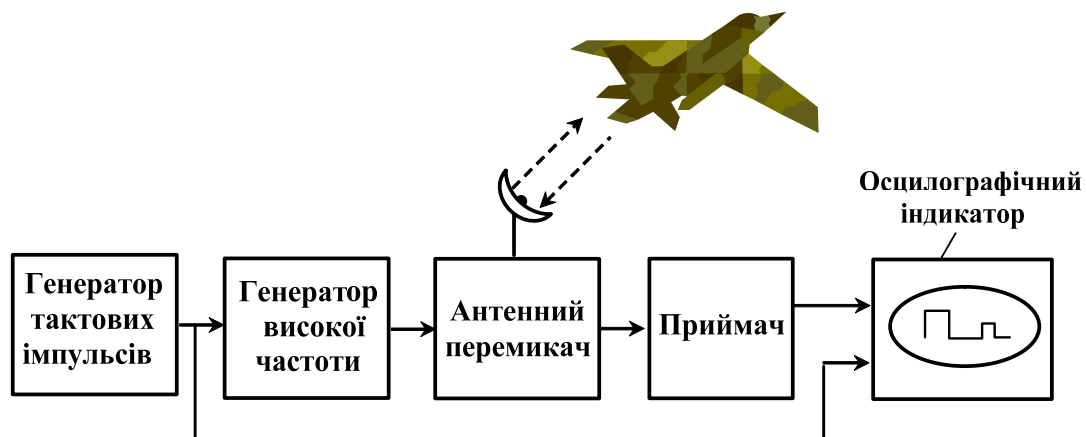


Рисунок 11.7 – Спрощена структурна схема імпульсної РЛС

Генератор тактових (зондувальних) відеоімпульсів виробляє періодичну послідовність імпульсів з періодом  $T$  та дуже малою тривалістю  $t_i$  (рис. 11.8, а).

Ці імпульси модулюють сигнал генератора високої частоти, після якого потужні зондувальні радіоімпульси через антенний перемикач надходять до антени і випромінюються у формі електромагнітної хвилі у напрямку об'єкта.

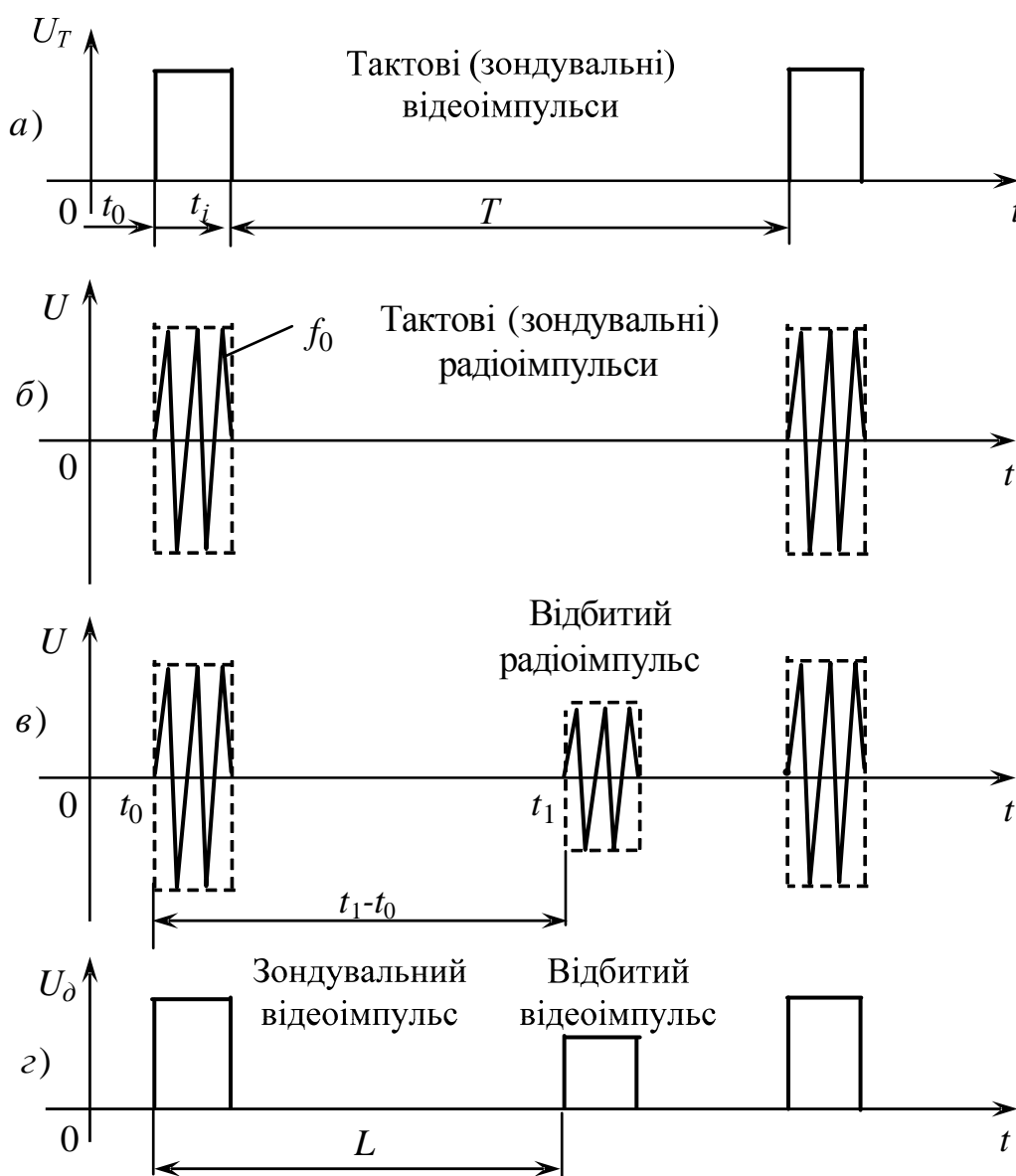


Рисунок 11.8 – Ілюстрація до пояснення принципу дії імпульсної РЛС

Паралельно з цим тактовий (зондувальний) імпульс надходить у блок осцилографічного індикатора і запускає розгортку променя електронно-променевої трубки у той самий момент, коли відповідний радіоімпульс покидає антену і починає рухатися до об'єкта (момент  $t_0$  на рис. 11.8). На



екрані індикатора на початку лінії розгортки з'явиться після детектора зображення зондувального імпульсу  $U_3$ .

В інтервалах між зондувальними радіоімпульсами антенний перемикач автоматично підмикає антену до входу приймача. Зондувальні радіоімпульси досягають об'єкта, відбиваються від нього у різні боки (розсіюються), відбитий сигнал у бік РЛС повернеться і буде уловлений її антенною. Прийнятий радіоімпульс, який називається відбитим (рис. 11.8, в), і зондувальний будуть розділеними у часі, який дорівнює інтервалу часу, витраченому радіоімпульсом на проходження відстані від антени до цілі  $l$  двічі (до цілі і назад), а значить:

$$t_1 - t_0 = \frac{2L}{c},$$

де  $L$  – відстань до цілі (об'єкта);

$c$  – швидкість радіохвилі (радіоімпульсу);

$t_1 - t_0$  – час, затрачений на подолання відстані  $L$  двічі (до цілі і назад).

З отриманого результату відстань до цілі дорівнюватиме

$$L = \frac{c}{2}(t_1 - t_0).$$

Таким чином, відстань до об'єкта прямо пропорційна (бо  $c/2 = \text{const}$ ) відрізка часу ( $t_1 - t_0$ ), який дорівнює часовій дистанції між зондувальним і відбитим відеоімпульсами, зображеними на екрані індикатора. Отже, проградувавши лінію розгортки у одиницях  $L$  (метрах, кілометрах), отримуємо можливість безпосередньо зчитувати значення відстані до об'єкта з екрана індикатора (рис. 11.8, з).

Інформація про кутове положення об'єкта локації отримується, наприклад, завдяки просторовій напрямленості випромінювання антени. При цьому електромагнітна енергія, що випромінюється, концентрується у вузькому просторовому промені. Коли антену повертати і максимум променя збігається з ціллю, відбитий промінь матиме найбільшу амплітуду і мітка на індикаторі буде максимальною. За кутовим положенням антени визначають кутове положення об'єкта.

### **Запитання та задачі для закріплення**

1. Пояснити принцип дії найпростішої провідної телефонної лінії.
2. Назвати основні радіотехнічні процеси.
3. На прикладі спрощеної структурної схеми пояснити принцип дії систем радіотелефонії.
4. На прикладі спрощеної структурної схеми пояснити принцип дії імпульсної РЛС.
5. З якою метою здійснюється модуляція сигналів, їх детектування, перетворення частоти?

## 12 СИГНАЛИ

### 12.1 Класифікація сигналів

Приступаючи до вивчення будь-яких нових об'єктів чи явищ, у науці прагнуть провести їх попередню класифікацію. Попробуємо це зробити з електричними сигналами (у подальшому просто сигнали). Основна мета – вироблення ознак класифікації, а також, що дуже важливо для подальшого, установлення певної термінології.

#### Математичні моделі сигналів

Сигнали, як фізичні процеси, можна вивчати за допомогою різних приладів і пристроїв – електронних осцилографів, вольтметрів, вимірювальних приймачів. Такий емпіричний (експериментальний) метод має суттєвий недолік. Явища, які спостерігаються експериментатором, завжди виступають як часткові, одиничні прояви, позбавлені узагальненості, яка дозволила б міркувати про їх фундаментальні властивості, передбачати результати у змінених умовах.

Для того, щоб зробити сигнали об'єктами теоретичного вивчення і розрахунків, потрібно визначити спосіб їх математичного опису або, говорячи мовою сучасної науки, створити **математичну модель** досліджуваного сигналу.

Математичною моделлю сигналу може бути, наприклад, функціональна залежність, аргументом якої є час. Як правило, у подальшому такі математичні моделі сигналів будуть позначатися символами латинської абетки:  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $f(t)$  і т. ін.

Так, запис:

$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t$$

є формула як модель гармонічної напруги з миттєвим значенням  $u(t)$ , амплітудою  $U_m$  та круговою частотою  $\omega_0$ .

Суттєва сторона методу дослідження сигналів, який базується на понятті математичної моделі, полягає у тому, що ми отримуємо можливість описувати саме ті властивості сигналів, які об'єктивно виступають як визначально важливі. При цьому ігноруються більшість другорядних ознак. Наприклад, у переважній більшості випадків вкрай важко підібрати точні функціональні залежності, які б відповідали електричним коливанням, що спостерігаються експериментально (скажімо, на екрані осцилографа). Тому дослідник, керуючись усією сукупністю даних, вибирає з наявного арсеналу математичних моделей сигналу ту, яка у конкретній ситуації найкращим і найпростішим чином описує фізичний процес. Отже, вибір моделі – процес значною мірою творчий.

Знаючи математичні моделі, можна порівнювати сигнали між собою, знаходити їх тотожність і відмінність, проводити класифікацію.

### *Детерміновані і випадкові сигнали*

У розподіленні сигналів на детерміновані (регулярні) і випадкові (нерегулярні) лежить принцип можливості чи неможливості точного передбачення їх миттєвих значень у будь-які моменти часу.

Якщо математична модель сигналу дозволяє здійснити таке передбачення, то сигнал називається **детермінованим** у інших випадках – **випадковим**.

Раніше ми визначили сигнал як електричне коливання, яке несе повідомлення (інформацію). Детерміновані сигнали ніякої інформації не несуть, окрім факту наявності самого коливання, бо відому функцію часу (математичну модель) можна створити і не приймаючи випромінювання. Отже, передавати по лінії зв'язку можна лише ті повідомлення, які заздалегідь на приймальному кінці лінії не можливо передбачити. Для отримувача повідомлень вони є випадковими і це дозволяє стверджувати, що тільки **випадкові коливання несуть інформацію**.

Випадкові коливання описуються за допомогою теорії ймовірностей. Іноді для спрощення розрахунків рівняння випадкових коливань записують дещо наближено – як суму множини детермінованих коливань. Маючи це на увазі, будемо називати сигналом не тільки випадкові коливання, а й детерміновані, хоча це не є точним.

Детерміновані сигнали описуються певними функціями часу. Тому сигнали, математичні моделі яких є періодичними функціями часу:

$$f(t) = f(t \pm nT),$$

де  $T$  – період функцій;

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; називаються **періодичними сигналами**. У протилежному випадку – **неперіодичними сигналами**.

Сигнали, які описуються парними функціями:

$$f(t) = f(-t)$$

називаються **парними сигналами**, а сигнали, які описуються непарними функціями:

$$f(t) = -f(-t)$$

називаються **непарними сигналами**.

### *Аналогові, дискретні і цифрові сигнали*

Часто фізичний процес, який породжує сигнал, розвивається у часі таким чином, що значення сигналу можна вимірювати у будь-які моменти часу. Сигнали такого класу прийнято називати **аналоговими** (континуальними).

Термін “аналоговий сигнал” підкреслює, що такий сигнал “аналогічний”, повністю подібний до фізичного процесу, який його породив. Аналоговий сигнал наочно подається своїм графіком (рис. 12.1, *a*), який може бути як неперервним, так і з точками розриву.

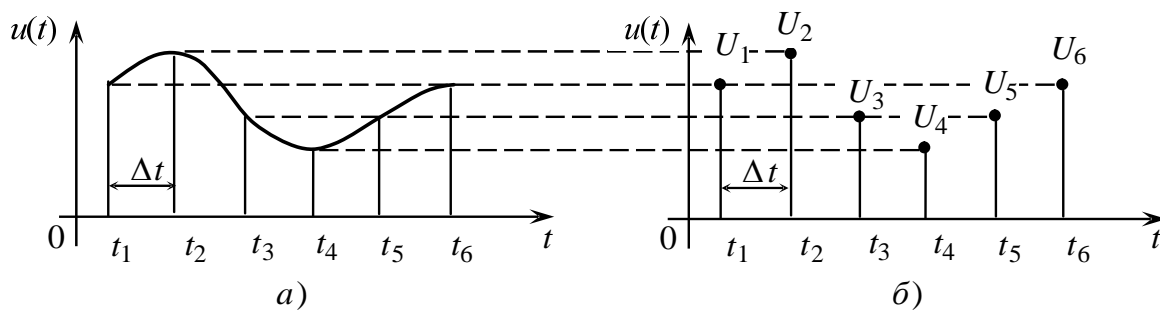


Рисунок 12.1 – Моделі сигналів: а) аналогового, б) дискретного

Спочатку у радіотехніці використовувались сигнали виключно аналогового типу. Такі сигнали дозволяли успішно розв'язувати відносно нескладні технічні задачі (радіозв'язок, телебачення). Аналогові сигнали було просто генерувати, приймати і обробляти за допомогою доступних на ті роки засобів.

На зміну аналоговим у ряді випадків прийшли імпульсні системи, робота яких ґрунтується на використанні **дискретних сигналів**. Найпростіша математична модель дискретного сигналу – це множина точок  $t_1, t_2, t_3, \dots$  на осі часу, у кожній з яких визначено певне значення сигналу  $U_1, U_2, U_3, \dots$  (рис. 12.1, б). Як правило, **крок дискретизації**  $\Delta t$  для кожного сигналу постійний.

Однією з переваг дискретних сигналів у порівнянні з аналоговими є відсутність необхідності відтворення сигналу неперервно в усі моменти часу. За рахунок цього з'являється можливість по одній і тій самій радіолінії передавати повідомлення від різних джерел, організувавши багатоканальний зв'язок з розділенням каналів у часі.

Слід зауважити, що, виходячи із визначення аналогового сигналу, який є подібним до фізичного процесу, який його породив, такий сигнал може бути неперервним (рис. 12.1, а; рис. 12.2) та перервним (рис. 12.2, б).

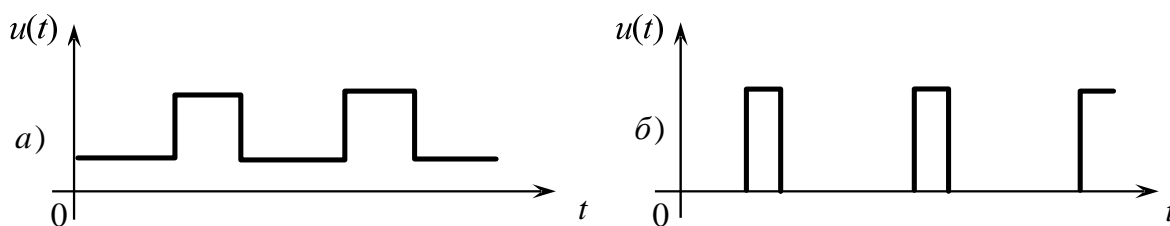


Рисунок 12.2 – Моделі аналогових імпульсних сигналів:  
а) неперервного, б) перервного

Сигнали, зображені на рисунку 12.2, є характерними для більшості імпульсних пристроїв радіотехніки, автоматики і т. ін.

Особливим різновидом дискретних сигналів є *цифрові сигнали*. Порівняємо дискретні сигнали, моделі яких зображені на рис. 12.3. На рис. 12.3, а поданий сигнал, заданий при дискретних значеннях часу ( $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ ), величина ж сигналу у цих точках може набувати будь-яких

значень. Таким чином, термін “дискретний” характеризує не сигнал, а спосіб його задання на осі часу.

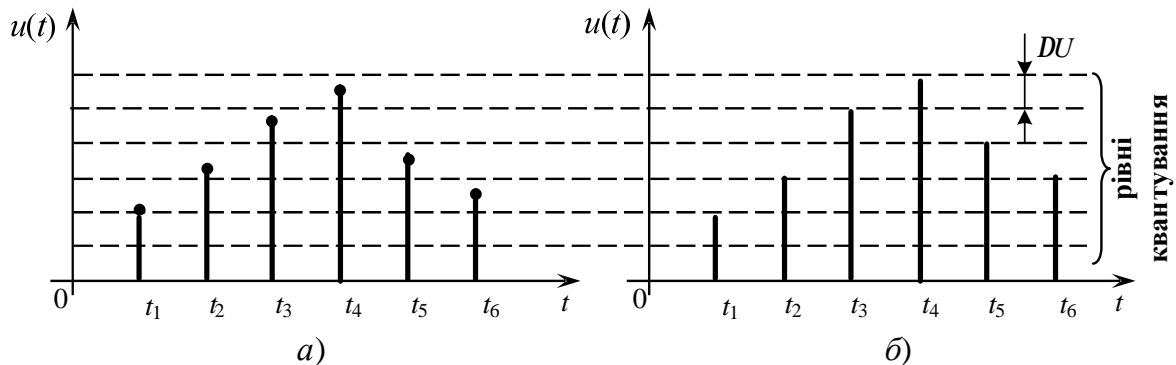


Рисунок 12.3 – Приклади моделей сигналів: а) дискретного, б) цифрового

На рис. 12.3, б поданий сигнал може набувати лише дискретних значень, “прив’язаних” до рівнів квантування. У таких випадках говорять про сигнал, *квантований за рівнем з кроком квантування  $\Delta U$* .

У подальшому термін “дискретний” будемо застосовувати тільки стосовно дискретизації у часі (з інтервалом дискретизації  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ ), а дискретність за рівнем будемо позначати терміном “квантування” (з кроком  $\Delta U$ ).

Квантування, як це ми з’ясуємо пізніше, використовують при поданні сигналів у цифровій формі за допомогою цифрового кодування і тому дискретний у часі та квантований за рівнем *сигнал* (рис. 12.3, б) у подальшому будемо називати *цифровим*.

Слід мати на увазі, що по суті будь-який дискретний чи цифровий сигнал (мова йде про сигнал – фізичний процес, а не про математичну модель) є сигналом аналоговим. Наприклад, повільно змінному у часі аналоговому сигналу можна поставити у відповідність його дискретний образ, який має вигляд послідовності прямокутних імпульсів однакової тривалості (рис. 12.4, а), висота яких пропорційна значенням  $u(t)$  у точках відліку. Однак можна зробити по-іншому, зберігаючи висоту імпульсів постійною, але змінюючи їх тривалість відповідно до поточного відлікового значення (рис. 12.4, б).

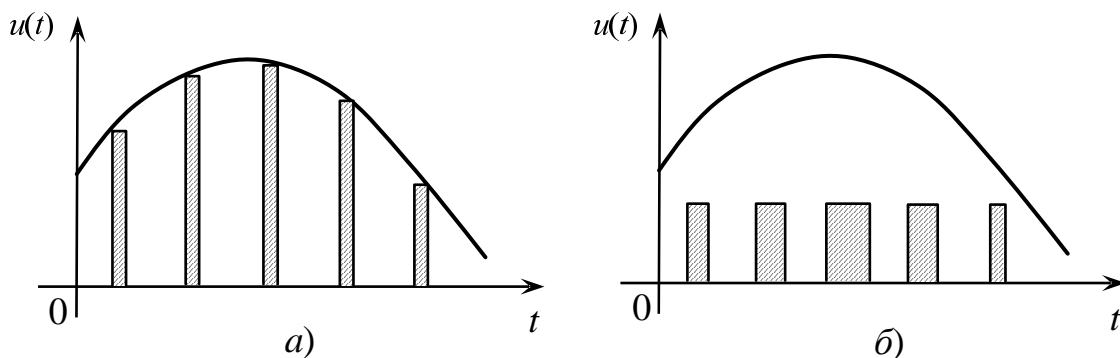


Рисунок 12.4 – Дискретизація аналогового сигналу: а) при змінній амплітуді; б) при змінній тривалості імпульсів відліку

Обидва подані тут способи дискретизації аналогового сигналу у точках дискретизації **пропорційні площі** окремих відеоімпульсів.

### **Імпульсно-модульовані сигнали**

У результаті дискретизації сигналу у часі він перетворюється у послідовність імпульсів. Вихідною для такого перетворення є періодична послідовність імпульсів, які називаються *тактовими*. Модуляція таких імпульсів здійснюється пристроєм, узагальнена схема якого зображена на рис. 12.5.

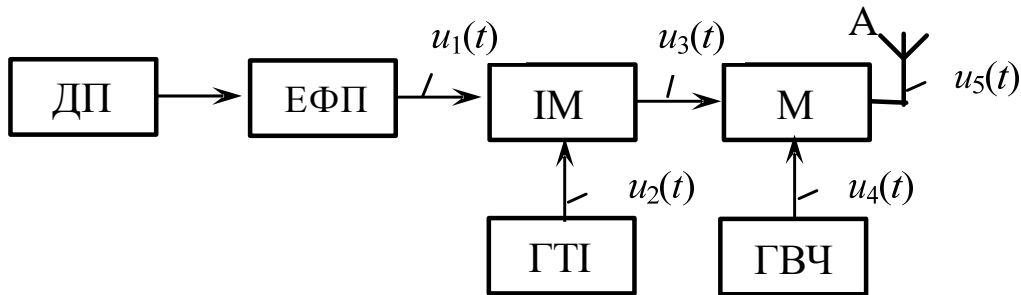


Рисунок 12.5 – Структурна схема передавального пристрою з імпульсною модуляцією

Повідомлення від його джерела (ДП) за допомогою електро-фізичного перетворювача (ЕФП) набуває форми керуючої напруги  $u_1(t)$ , яка в імпульсному модуляторі (ІМ) керує тактовими імпульсами  $u_2(t)$ , які створюються генератором тактових імпульсів (ГТІ). З виходу імпульсного модулятора знімаються модульовані відеоімпульси  $u_3(t)$ , які у каскаді модуляції (М) самі модулюють неперервні гармонічні коливання  $u_4(t)$  несучої частоти  $f_0$ , які генеруються генератором високої частоти (ГВЧ). Отримані радіоімпульси  $u_5(t)$  випромінюються антеною А у простір.

На часових діаграмах (рис. 12.6) показані: напруга  $u_1(t)$ , що відповідає повідомленню, яке передається; тактові відеоімпульси  $u_2(t)$ , з постійними параметрами  $t_i$ ,  $T_T$ ,  $U_m$  та відеоімпульси  $u_3(t)$ , які відрізняються від тактових тим, що промодульовані пропорційно напрузі  $u_1(t)$ , за амплітудою у випадку амплітудно-імпульсної модуляції (АІМ) (pulse amplitude modulation, PAM), за тривалістю (шириною) імпульсів при широтно-імпульсній модуляції (ШІМ) (pulse width modulation, PWM), за частотою прямування імпульсів при частотно-імпульсній модуляції (ЧІМ) (pulse frequency modulation, PFM), за фазою, точніше за часом ( $\Delta t_{\phi im}$ ) відставання імпульсів при фазово-імпульсній модуляції (ФІМ), за кодом після квантування, за рівнем при кодово-імпульсній модуляції (КІМ) (pulse code modulation, PCM).

Імпульсна модуляція відкриває великі можливості для багатоканального зв'язку, коли по одній лінії передачі одночасно передаються багато повідомлень (каналів). У таких системах широко використовується часове розділення каналів. При цьому період тактових імпульсів  $T_T$  має бути достатньо великим, щоб за час  $T_T$  можна було почергово передавати окремі імпульси чи кодові комбінації усіх каналів.

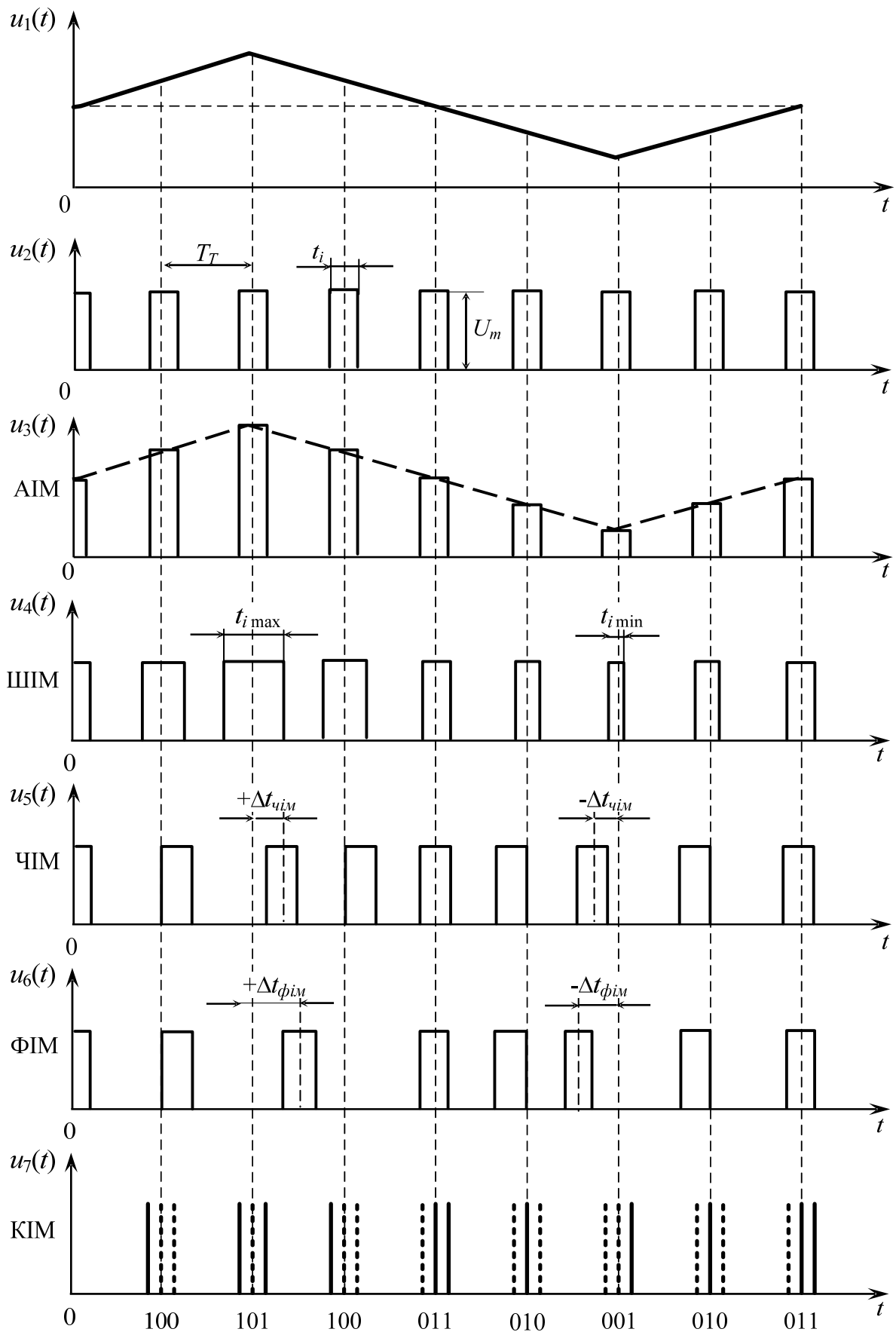


Рисунок 12.6 – Часові діаграми модуляції імпульсних коливань

Для позначення виду імпульсної модуляції у радіосистемі використовують запис у вигляді дроби, чисельник якого показує, яка модуляція застосовується на тактовій частоті  $F_T = 1/T_T$ , а знаменник – яка на несучій частоті  $f_0$ : АІМ/ЧМ, КІМ/АМ, ШІМ/ФМ і т. ін.

## 12.2 Амплітудно– і фазочастотний спектри

### Поняття про спектри періодичних сигналів

Розглянемо напругу періодичного сигналу, математичною моделлю якого є періодична функція часу  $u(t)$  така, що

$$u(t) = u(t \pm nT),$$

де  $T$  – період цього процесу,

$n = 0, 1, 2, 3 \dots n$  – будь-яке дійсне ціле число.

З курсу вищої математики відомо, що така функція розкладається у ряд Фур'є, тобто на нескінченно велике число гармонічних складових:

– постійну складову  $U_0$  (нульову гармоніку), яка дорівнює середньому значенню сигналу за період;

– першу гармоніку  $u_1(t)$ , з амплітудою  $U_{1m}$ , початковою фазою  $\varphi_1$  і частотою  $\omega_1$ , яка дорівнює частоті повторення сигналу  $\omega$ ;

– другу гармоніку  $u_2(t)$  з амплітудою  $U_{2m}$ , початковою фазою  $\varphi_2$  і частотою  $\omega_2 = 2\omega$ ;

– третю гармоніку  $u_3(t)$  з амплітудою  $U_{3m}$ , початковою фазою  $\varphi_3$  і частотою  $\omega_3 = 3\omega$  і т.д.

Таким чином можемо записати:

$$U(t) = U_0 + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + U_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots,$$

або скорочено:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (12.1)$$

де  $n$  – натуральний ряд чисел.

Можна виключити початкові фази з ряду Фур'є (12.1), якщо використати відоме у тригонометрії перетворення:

$$\begin{aligned} U_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) &= U_{nm} \sin n\omega t \cdot \cos \varphi_n + U_{nm} \cos n\omega t \cdot \sin \varphi_n = \\ &= U'_{nm} \sin n\omega t + U''_{nm} \cos n\omega t, \end{aligned}$$

де  $U'_{nm} = U_{nm} \cdot \cos \varphi_n$ ;

$U''_{nm} = U_{nm} \cdot \sin \varphi_n$  – постійні величини, які виражають відповідно амплітуди напруги  $n$ -ої гармоніки для синусних і косинусних складових:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U'_{nm} \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} U''_{nm} \cos n\omega t. \quad (12.2)$$



### Спектри парних і непарних сигналів

Остання форма запису ряду Фур'є є особливо зручною у випадку парних і непарних сигналів.

Нагадаємо, що для парних сигналів виконується умова:

$$u(t) = u(-t),$$

а для непарних:

$$u(t) = -u(-t).$$

Крім цього згадаємо, що для парних сигналів у ряді вигляду (12.2) усі коефіцієнти  $U'_{nm} = 0$ . Тому для парних сигналів ряд Фур'є має вигляд:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U''_{nm} \cos n\omega t, \quad (12.3)$$

а для непарних:

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U'_{nm} \sin n\omega t, \quad (12.4)$$

Інакше кажучи, парні сигнали можна подати рядом Фур'є, який має лише парні гармонічні функції (косинусні), а непарні – рядом Фур'є, який матиме лише непарні (синусні) гармоніки.

### Амплітудно-частотний і фазочастотний спектри

Сигнал  $u$  можна розглядати як функцію часу  $u(t)$  або частоти  $u(\omega)$ . Відповідно розрізняють два методи подання і дослідження сигналів: **часовий і спектральний.**

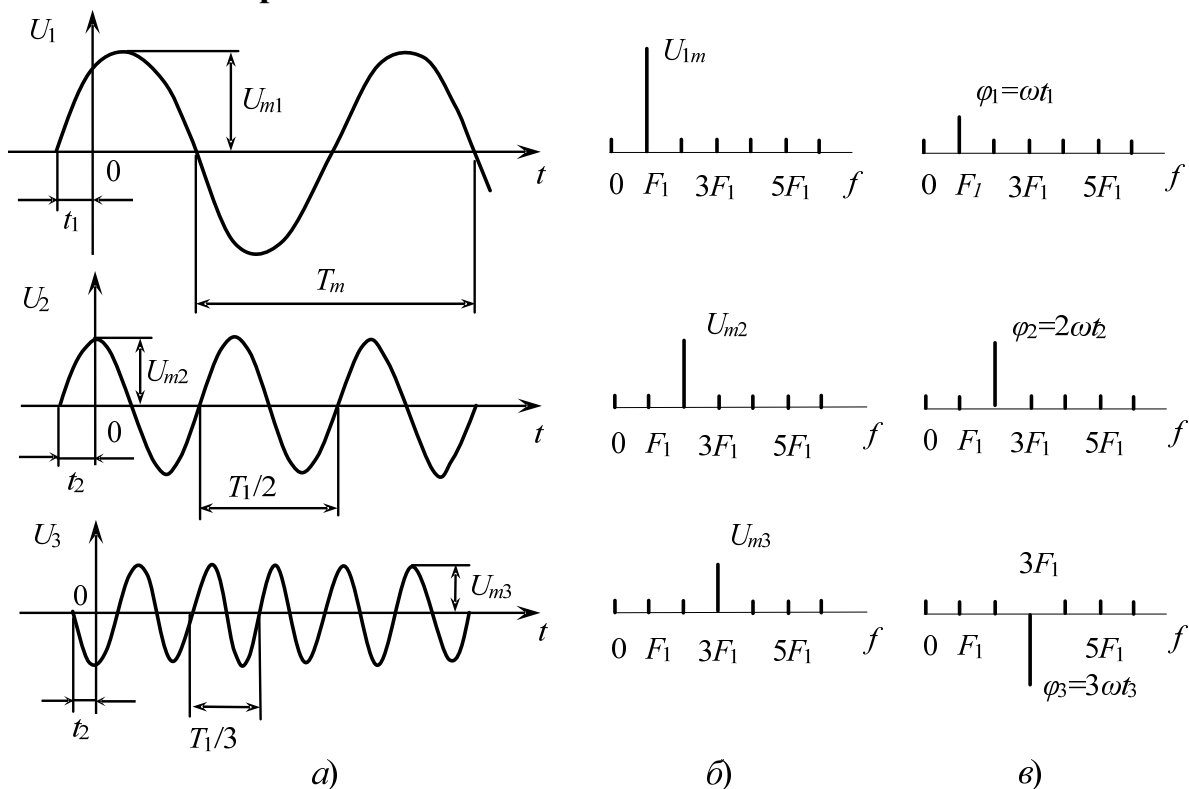


Рисунок 12.7 – Три перших гармоніки несинусоїдального коливання:  
а) часові діаграми; б) амплітудно-частотні спектри; в) фазочастотні спектри

У часовому поданні гармонічний сигнал – це синусне або косинусне коливання (напруги, струму і т. ін.)

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi),$$

де  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

У спектральному поданні такий сигнал задається одним значенням частоти (монохроматичний сигнал). Спектр сигналу зображується двома діаграмами, з яких одна називається **амплітудно-частотним спектром** (АЧС), а друга – **фазочастотним спектром** (ФЧС).

На цих діаграмах вісь абсцис утворює шкалу частот  $f = n \cdot F_1$ , а по осі ординат для кожної з  $n$  гармонік відкладаються відрізки, довжина яких пропорційна їх амплітудам  $U_{mn}$  (для АЧС, рис. 12.7, б) або початковій фазі  $\varphi_n$  (для ФЧС, рис. 12.7, в).

На рис. 12.7 та 12.8 подані **графічні моделі** сигналів: часові діаграми (рис. 12.7, а) амплітудно-частотні характеристики (рис. 12.7, б; 12.8, а) та фазочастотні характеристики (рис. 12.7, в; 12.8, б).

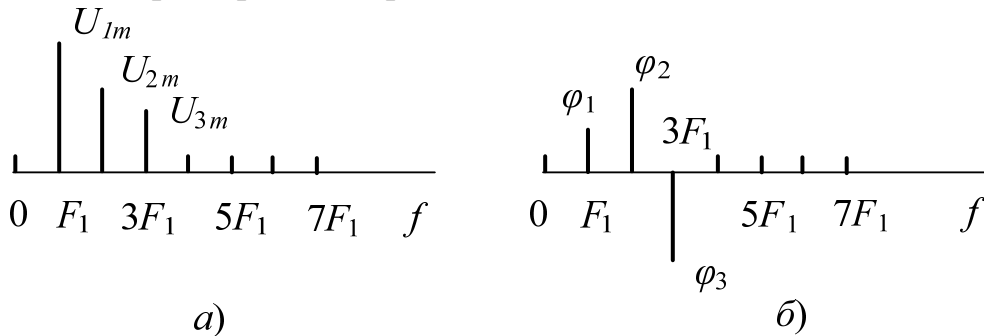


Рисунок 12.8 – Спектри несинусоїдального періодичного сигналу: а) амплітудно-частотний; б) фазочастотний

Очевидно, на рис. 12.8 зображено графічні моделі періодичного несинусоїдального сигналу, який складається з трьох гармонік, графічні моделі яких зображено на рис. 12.7.

## 12.3 Спектральний аналіз сигналів

### 12.3.1 Спектральний аналіз періодичної послідовності прямокутних імпульсів

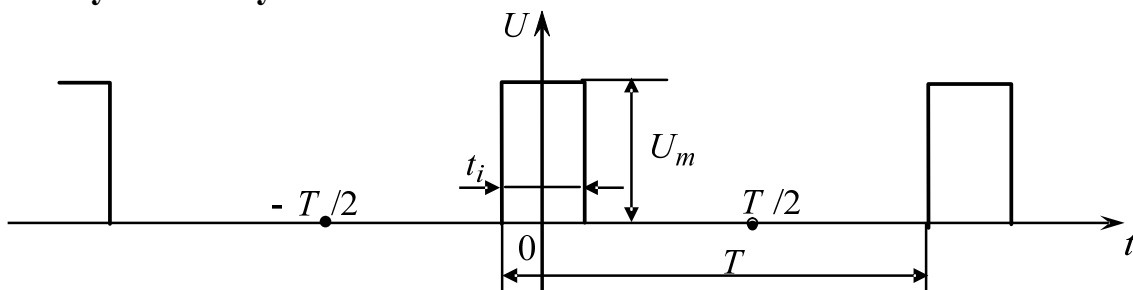


Рисунок 12.9 – Часова діаграма періодичної послідовності прямокутних імпульсів

Поставимо задачу так: задана періодична послідовність прямокутних відеоімпульсів (рис. 12.9), необхідно:

- визначити спектральні складові цього сигналу;

- побудувати амплітудно-частотний спектр;
- прослідкувати зв'язок між формою сигналу та його спектром;
- проаналізувати вплив параметрів сигналу на форму його спектра.

### **Вирази для складових спектра і його побудова**

Заданий сигнал є парним і розкладається у ряд Фур'є вигляду:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \cos n\Omega t, \quad (12.5)$$

де  $\Omega = 2\pi F$ ,  $F = 1/T$  – частота прямування імпульсів у заданій послідовності.

Постійна складова сигналу  $U_0$  дорівнює середньому його значенню за період (на інтервалі  $-T/2, +T/2$ ):

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_m \cdot dt = \frac{1}{T} \left( \frac{t_i}{2} + \frac{t_i}{2} \right) \cdot U_m = \frac{t_i}{T} \cdot U_m = \frac{U_m}{q},$$

де  $q = T/t_i$  – шпаруватість імпульсної послідовності.

Амплітуда  $n$ -ої гармоніки  $U_{nm}$  ряду (12.5), як відомо з курсу вищої математики, дорівнює:

$$U_{nm} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \cos n\Omega t \cdot dt.$$

У конкретному випадку:

$$\begin{aligned} U_{nm} &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos n\Omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_m \cos n\Omega t dt = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{U_m}{n\Omega} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \cos n\Omega t d(n\Omega t) = \frac{2}{T} \cdot \frac{U_m}{n\Omega} \sin n\Omega t \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = \frac{2}{T} \cdot \frac{U_m}{n\Omega} 2 \sin n\Omega \frac{t_i}{2}. \end{aligned}$$

Помноживши і розділивши отриманий результат на  $t_i/2$ , матимемо:

$$U_{nm} = \frac{2U_m}{q} \cdot \frac{\sin \frac{n\Omega t_i}{2}}{\frac{n\Omega t_i}{2}} = \frac{2U_m}{q} \cdot \frac{\sin x}{x}, \quad (12.6)$$

де  $x = \frac{1}{2} n\Omega t_i$ .

### Побудова спектра

Графік функції (рис. 12.10)  $\sin x/x$  зображено пунктирною лінією; функція досягає одиниці (максимального значення) при  $x = 0$  і проходить через нуль при  $x = p, 2p, 3p$ . Екстремальні значення функція має у точках  $\frac{3}{2}p(-0,424), \frac{5}{2}p(0,254), \frac{7}{2}p(-0,182), \dots$

При  $f_n = nqF$  ця функція проходить через нуль, тобто  $\frac{n\Omega t_i}{2} = kp$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), звідси  $\frac{n2pFt_i}{2} = kp$ ;  $n \frac{t_i}{T} = k$ ;  $n = kq$ .

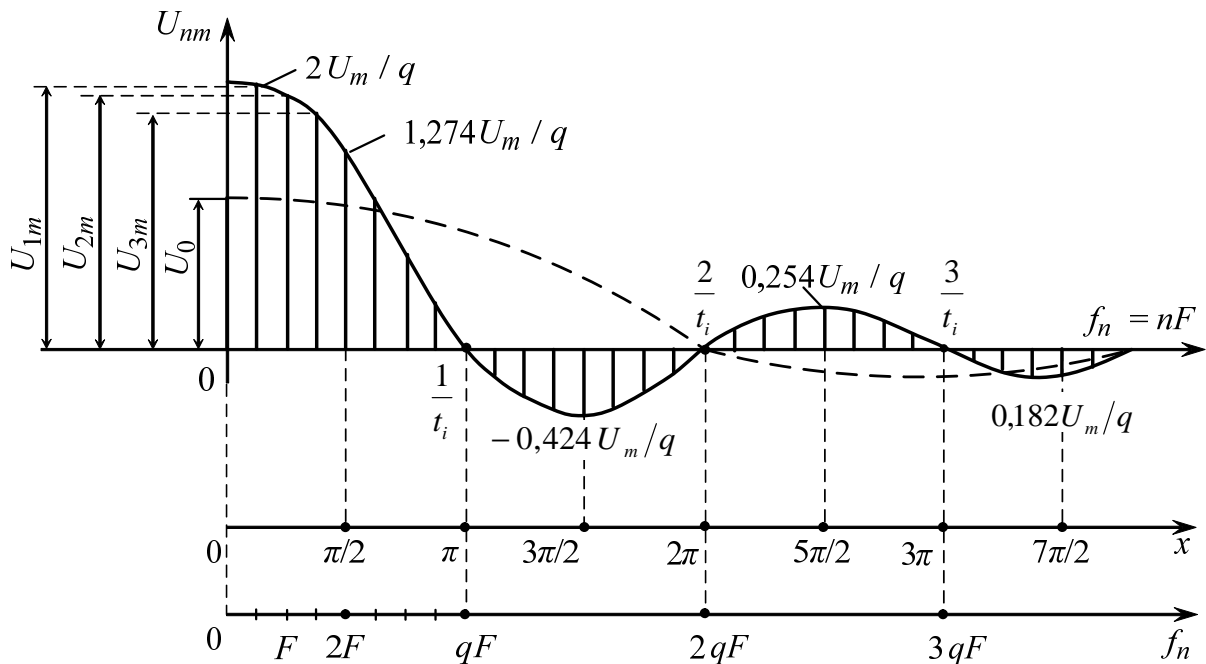


Рисунок 12.10 – Спектральна діаграма послідовності прямокутних імпульсів

Отже, гармоніки з нульовими амплітудами матимуть номери кратні значенню шпаруватості  $q$  імпульсної послідовності.

Частоти цих гармонік можна визначити через значення тривалості імпульсів  $t_i$ : так, для першої з них  $\frac{q\Omega t_i}{2} = \frac{qF \cdot 2pt_i}{2} = p$ ;  $qF = \frac{1}{t_i}$ ; для другої:

$$2qF = \frac{2}{t_i}; \text{ для третьої } 3qF = \frac{3}{t_i}.$$

### Аналіз впливу параметрів сигналу на форму його спектра

Припустимо, що тривалість імпульсів  $t_i$  зменшилась удвоє, а період прямування імпульсів  $T$  залишився незмінним. За таких змін шпаруватість послідовності  $q$  удвічі збільшиться, номери гармонік з нульовими амплітудами удвічі збільшаться і обвідна (пунктирна лінія) перетне вісь абсцис у точці з частотою  $2qF$ , далі –  $4qF, \dots$  Амплітуди всіх гармонік вдвічі зменшаться.

При цьому картинка розтягнеться по горизонталі, а відстань між сусідніми спектральними лініями, яка дорівнює  $F = 1/T$ , залишатиметься незмінною.

Якщо ж тривалість імпульсів залишити незмінною, а збільшити удвоє період  $T$ , то шпаруватість  $q$  зросте удвоє. Перша нульова гармоніка матиме номер (і значення частоти) удвічі більший, але місце знаходження її на осі абсцис залишиться незмінним, бо удвічі зменшиться частота  $F$ , яка визначає відстань між сусідніми спектральними лініями, і їх кількість на цьому інтервалі осі зросте удвоє. Тобто, зовні картинка мало зміниться, але спектр буде удвічі щільнішим, а амплітуди гармонік будуть також вдвічі меншими.

На практиці дуже часто ширину спектра обмежують гармонікою, частота якої дорівнює:

$$F_{\max} = \frac{2}{t_i}, \quad (12.7)$$

де, очевидно,  $F_{\max}$  – максимальна за частотою гармонічна складова ряду Фур'є, яка ще береться до уваги. При цьому сигнал за формою відрізнятиметься від ідеального (рис. 12.9) прямокутного імпульсу.

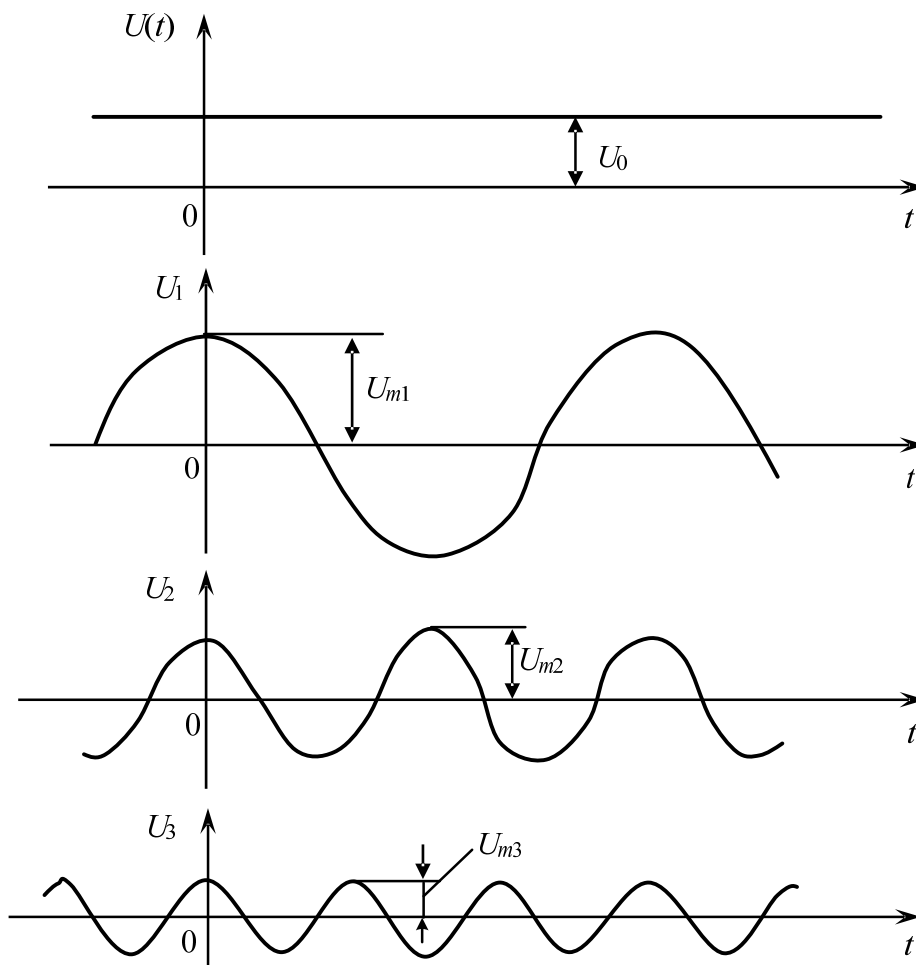


Рисунок 12.11 – Постійна складова і перші три гармоніки

### Зв'язок між формою сигналу і його спектром

Дослідимо характер впливу кількості гармонік, які входять до складу обмеженого ряду Фур'є, на форму сигналу. Для цього до постійної складової напруги  $U_0$  послідовно будемо додавати (графічно) першу гармоніку  $u_1 = U_{m1} \cos \Omega t$ , другу  $u_2(t) = U_{m2} \cos 2\Omega t$ , третю –  $u_3(t) = U_{m3} \cos 3\Omega t$ , ... (рис. 12.11).

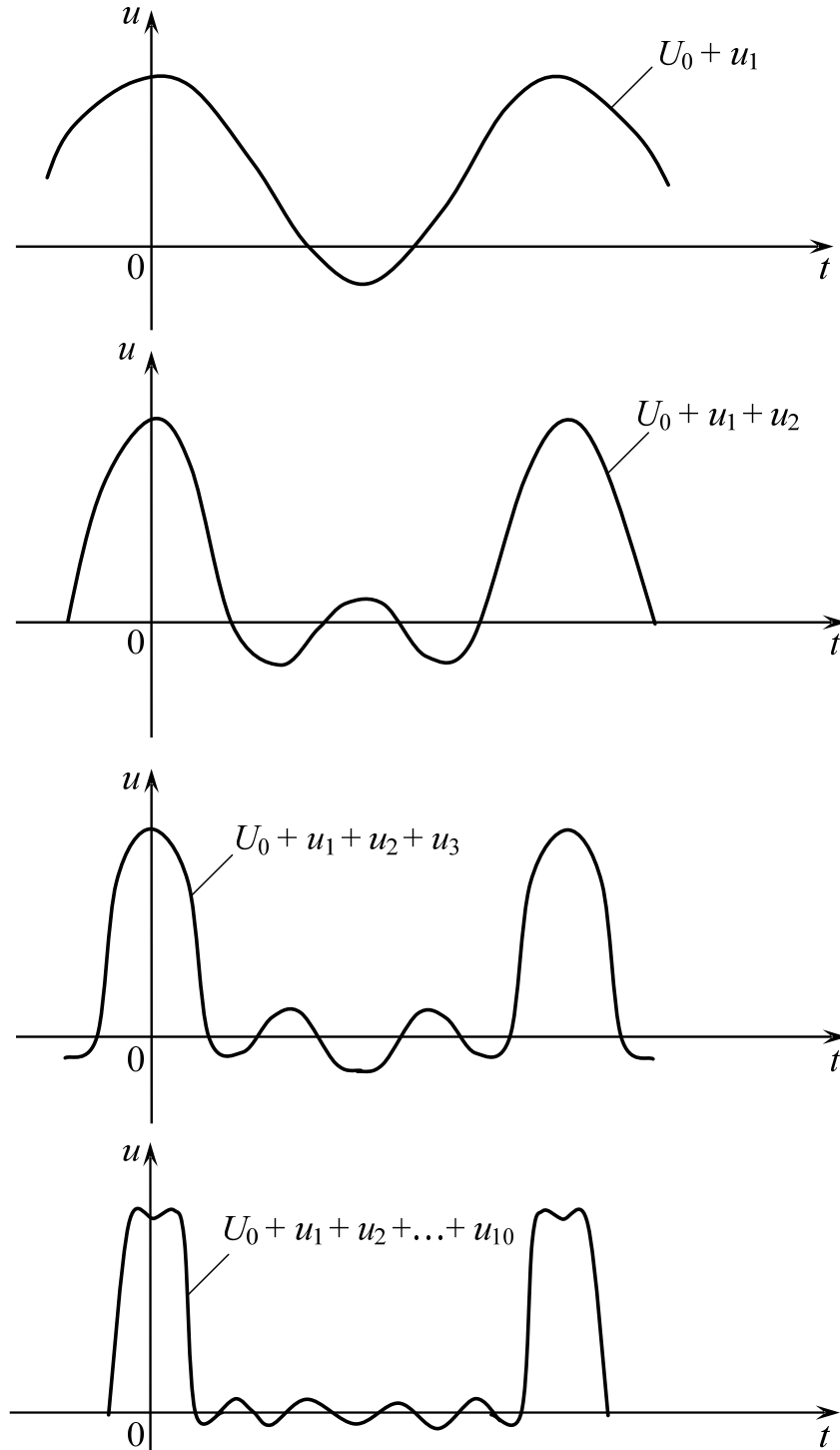


Рисунок 12.12 – Послідовне графічне додавання складових гармонічного ряду

Як бачимо на рис. 12.12, чим більшу кількість високочастотних гармонік додати, тим крутішим стає фронт імпульсу, тим він стає ближчим до прямокутного.

Ще раз зауважимо, що зростання шпаруватості  $q$  (збільшення періоду  $T$  або зменшення тривалості  $t_i$ ) призводить до зменшення амплітуд усіх складових спектра, що видно з виразів для  $U_0$  та  $U_{nm}$ .

Фізично це можна пояснити тим, що зі зростанням шпаруватості зростає кількість гармонік на ширині спектра (від 0 до  $F_{\max}$ ), а тому частка енергії сигналу, яка дістанеться кожній із гармонік, зменшиться.

### 12.3.2 Спектральний аналіз неперіодичних сигналів

#### Спектральна функція амплітуд

Перейдемо від періодичної послідовності прямокутних імпульсів (рис. 12.9) до одиничного імпульсу. Для цього збільшимо період прямування імпульсів до нескінченності ( $T \rightarrow \infty$ ). При цьому, очевидно, частота прямування імпульсів  $F$  зменшиться до нескінченно малої величини ( $F \rightarrow 0$ ).

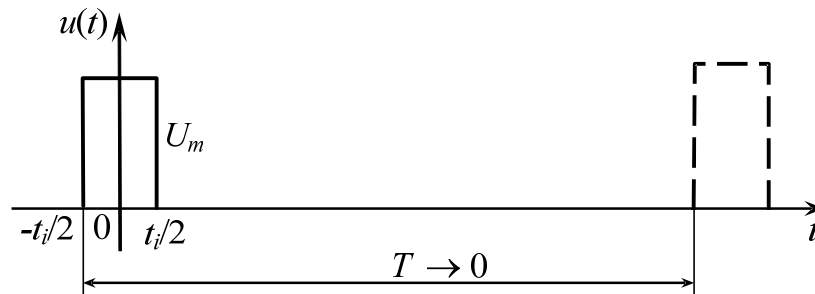


Рисунок 12.13 – Приклад неперіодичного сигналу – одиничного імпульсу

Пропорційно збільшенню шпаруватості імпульсів ( $q \rightarrow \infty$ ) зростає нескінченно число спектральних ліній і нескінченно зменшується їх висота. Зближуючись, спектральні лінії утворюють суцільний спектр амплітуд, який зобразити неможливо, бо при розподілі енергії сигналу між нескінченною множиною гармонік амплітуда кожної з них стає нескінченно малою. У таких випадках використовують більш загальне поняття, чим спектр амплітуд, а саме, *спектральну функцію амплітуд*  $S_n$ , яка дорівнює результату від ділення половини амплітуди гармоніки  $U_{nm}/2$  на інтервал частот між сусідніми спектральними лініями  $F$ :

для парного сигналу  $u(t)$

$$S_{nc} = \frac{U_{nm}}{2F} = \frac{2}{2F \cdot T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos n\Omega t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \cos n\Omega t dt; \quad (12.8)$$

для непарного сигналу  $u(t)$

$$S_{nc} = \frac{U_{nm}}{2F} = \frac{2}{2F \cdot T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \sin n\Omega t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \sin n\Omega t dt. \quad (12.9)$$

### Комплексна спектральна щільність амплітуд

Для суцільного спектра, коли відстань між лініями спектра гранично дорівнює нулю, поняття “число гармонік” втрачає зміст. Тому замінимо добуток  $n\Omega$  ( $n \rightarrow \infty$ ,  $\Omega \rightarrow 0$ ) на поточне значення кругової частоти  $\omega$ , яка тепер може набувати будь-яких цілих і нецілих значень, а не тільки  $n\Omega$  (де  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) дискретних. Замість  $-T/2 \dots + T/2$  установеимо границі інтегрування  $-\infty \dots + \infty$ . Тоді спектральна функція для парної функції  $S_{nc}$  переходить у *спектральну щільність амплітуд*  $S_c(\omega)$ :

$$S_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega t dt, \quad (12.10)$$

для непарної функції часу спектральна функція  $S_{ns}$  використовує синусні складові, але уже зі знаком мінус:

$$S_s(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \sin \omega t dt. \quad (12.11)$$

З виразів (12.8)...(12.11) видно, що ні спектральна функція  $S_n$ , ні спектральна щільність амплітуд  $S(\omega)$  не залежить від періоду прямування імпульсів  $T$ . І це закономірно, бо у скільки разів збільшується період, у стільки ж само разів зменшуються амплітуди гармонік  $U_{nm}$ , а спектральна функція  $S_n = \frac{1}{2} U_{nm} \cdot T$  залишається незмінною.

Суцільний спектр довільної неперіодичної функції часу  $u(t)$  виражається так званою *комплексною спектральною щільністю амплітуд*  $\mathcal{S}(\omega)$ , яка включає в себе обидві складові (12.10) і (12.11):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= S_c(\omega) + jS_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin \omega t dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Як комплексна величина функція  $\mathcal{S}(\omega) = S_c(\omega) + j S_s(\omega)$  характеризується модулем  $S(\omega) = |\mathcal{S}(\omega)|$  і аргументом  $j(\omega)$ . Вони визначаються косинусною  $S_c(\omega)$  і синусною  $S_s(\omega)$  складовими комплексної спектральної щільності амплітуд сигналу:

$$S(\omega) = \sqrt{S_c^2(\omega) + S_s^2(\omega)}; \quad j(\omega) = \arctg(S_s(\omega)/S_c(\omega)).$$

Залежність  $S(\omega)$  називається амплітудно-частотним, а  $j(\omega)$  – фазочастотним спектрами неперіодичної функції  $u(t)$ , які відрізняються від раніше розглянутих АЧС і ФЧС більшою загальністю (універсальністю).



## Пряме і обернене перетворення Фур'є

Вираз

$$\mathfrak{F}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-jw t} dt \quad (12.12)$$

називається *прямим перетворенням Фур'є* і дозволяє за дійсною часовою функцією  $u(t)$ , яка описує форму сигналу, визначити комплексну спектральну густину амплітуд  $\mathfrak{F}(w)$ , яка виражає залежність від частоти відносних амплітуд  $S(w)$  і початкових фаз  $j(w)$  гармонічних складових сигналу.

Якщо ж розв'язати обернену задачу, тобто за відомою спектральною густиною  $\mathfrak{F}(w)$  знайти функцію часу  $u(t)$ , то необхідно виконати *обернене перетворення Фур'є*, яке подається у вигляді:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(w) \cdot e^{jw t} dw. \quad (12.13)$$

Пряме (12.12) і обернене (12.13) перетворення Фур'є служать ще одним доказом єдності часового і частотного (спектрального) методів дослідження сигналів.

За результатами, отриманими у підрозділі 12.3 зауважимо, що періодичний процес  $u(t)$  має лінійчастий спектр (з відстанню між сусідніми лініями  $F = 1/T$ ) і виражається рядом Фур'є, а неперіодичний процес, зокрема одиничний імпульс ( $T \rightarrow \infty, F \rightarrow 0$ ), має суцільний спектр і виражається інтегралом Фур'є (12.12).

### Спектри імпульсів

Для одиничного імпульсу, поданого на рис. 12.13, комплексна спектральна густина амплітуд може бути знайдена за виразом (12.12)

$$\begin{aligned} S(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-jw t} dt = \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_m e^{-jw t} dt = U_m \left( -\frac{1}{jw} \right) e^{-jw t} \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = \\ &= U_m \left( -\frac{1}{jw} \right) \left( e^{-jw \frac{t_i}{2}} - e^{jw \frac{t_i}{2}} \right) = \frac{U_m}{jw} \left( e^{jw \frac{t_i}{2}} - e^{-jw \frac{t_i}{2}} \right) = \frac{2U_m}{w} \sin w \frac{t_i}{2} = \\ &= \frac{U_m t_i}{\frac{w t_i}{2}} \sin w \frac{t_i}{2} = A_i \frac{\sin w \frac{t_i}{2}}{w \frac{t_i}{2}} = A_i \frac{\sin x'}{x'}. \end{aligned} \quad (12.14)$$

У останній формулі  $A_i = U_m \cdot t_i$  називається площею імпульсу, а сам імпульс  $u(t)$  і його спектральна густина амплітуд  $S(w) = \sin x'/x'$  зображається згасаючою кривою, яка подібно до лінійчастого спектра періодичного сигналу, уже з незалежною змінною  $x' = w t_i / 2$  прямо

пропорційною  $\omega$  (нагадаємо, що  $\omega$  може набувати будь-яких значень, тобто змінюватись неперервно).

Порівнюючи (12.6) і (12.14), помічаємо, що обвідна спектра періодичної послідовності імпульсів і одиничного імпульсу цієї послідовності мають однакову форму.

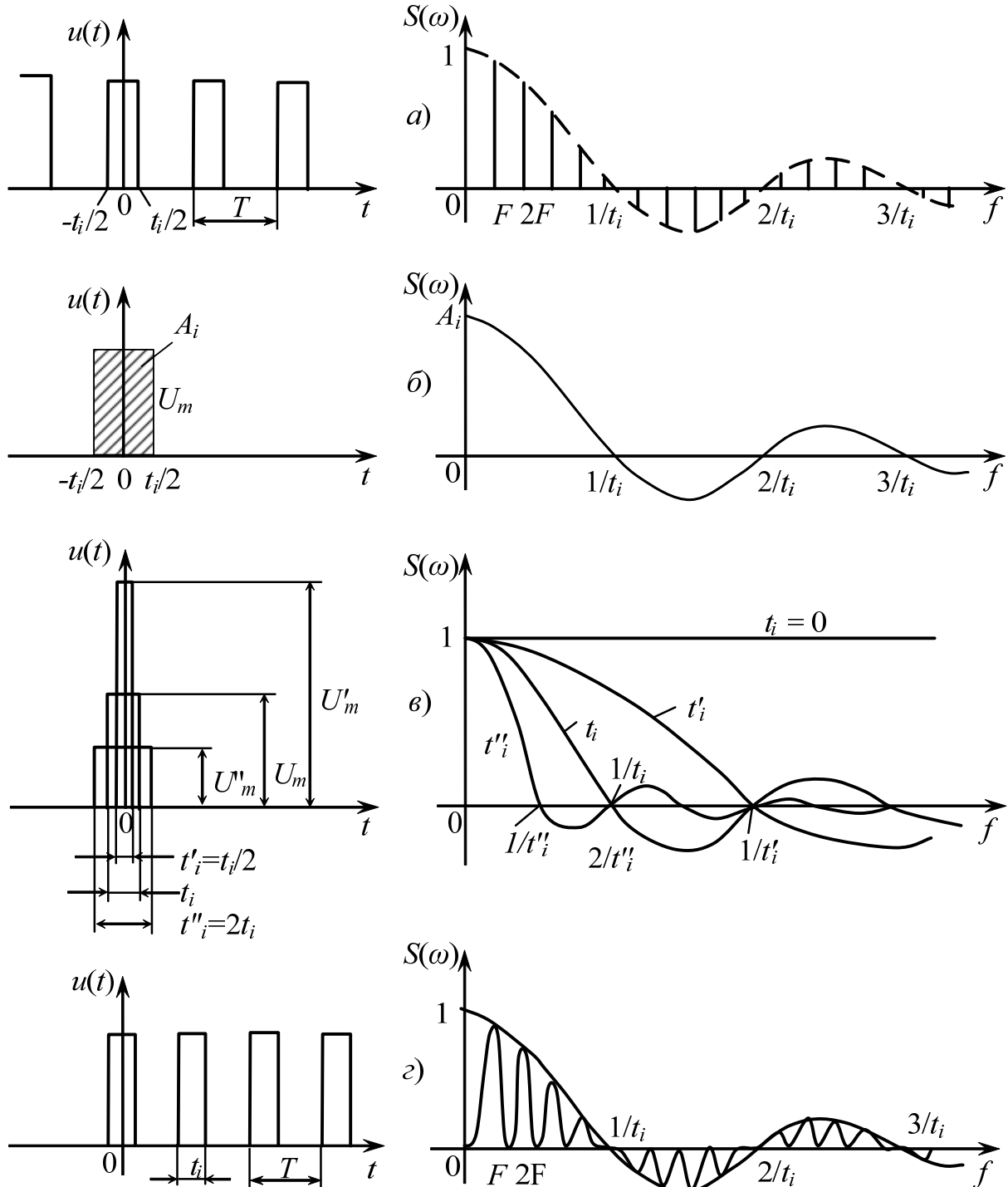


Рисунок 12.14 – Часові і спектральні діаграми прямокутних імпульсів: а) періодичної послідовності; б, в) одиничних; г) пачки з 4-х імпульсів

Розглянемо вплив тривалості імпульсу  $t_i$  (рис. 12.14,в) на спектр  $S(\omega)$ . Нехай площа імпульсу  $A_i = 1$ . Тоді амплітуда імпульсу  $U_m = A_i/t_i = 1/t_i$  і

спектральна густина  $S(\omega) = \sin x' / x'$  зображається згасаючою кривою, яка перетинає вісь частот у точках  $1/t_i, 2/t_i, 3/t_i, \dots, n/t_i$ . Зі зменшенням тривалості імпульсу удвічі до значення  $t'_i$  при збереженні значення площі імпульсу амплітуда імпульсу має зрости удвічі до значення  $U'_m$  і нульові точки спектра змістяться праворуч до значень  $1/t'_i, 2/t'_i, 3/t'_i, \dots, n/t'_i$ , тобто спектр розшириться удвоє. При подальшому скороченні тривалості імпульсу ( $t_i \rightarrow 0$ ) точка перетину спектром  $S(\omega)$  осі частот буде зсуватись праворуч ( $1/t_i \rightarrow \infty$ ), а при  $t_i = 0$  обвідна стане горизонтальною лінією. Тобто, вона стане паралельною осі частот і перетнется з нею на нескінченності. Такий імпульс (площа  $A_i = 1$ ,  $t_i = 0$ ,  $U_m = \infty$ ) називається дельта-імпульсом, його спектральна щільність має однакові значення на усіх частотах від 0 до  $\infty$  ( $\Delta F_{cn} = 2/t_i = \infty$ ). Отже, чим менша тривалість імпульсу – тим ширший він має спектр. Очевидно, при зростанні тривалості імпульсу до значення  $t''_i = 2t_i$ , ширина його спектра зменшиться удвічі, що також показано на рис. 12.14, в.

А тепер розглянемо більш складний випадок, коли маємо “пачку” імпульсів. Визначимо її спектр, наприклад, коли вона складається з чотирьох імпульсів (рис. 12.14, з). Оскільки такий сигнал є неперіодичним (є початок і кінець пачки), спектр його має бути суцільним. Разом з тим імпульси у пачці повторюються через час  $T$ , і тому у спектрі появляються смуги з інтервалами по осі частот, рівними  $F = 1/T$ . При збільшенні числа імпульсів у пачці смуги звужуються і при наближенні послідовності до нескінченності вона перетворюється на періодичну послідовність імпульсів, а її спектр перетворюється у лінійчастий (рис. 12.14, а).

## 12.4 Кореляційний аналіз сигналів і їх енергія

### 12.4.1 Енергія сигналу

Якщо на резисторі  $R$  діє напруга з миттєвим значенням  $u(t)$ , викликаючи у ньому струм з миттєвим значенням  $i(t)$ , то на резисторі виділяється потужність, миттєве значення якої знаходиться за формулою:

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t) \frac{u(t)}{R} = \frac{u^2(t)}{R},$$

яка при  $R = 1$  Ом дорівнюватиме

$$p(t) = u^2(t).$$

Під дією електричного сигналу  $u(t)$  на резисторі з опором 1 Ом виділяється енергія  $E_c$ , що дорівнює

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt, \quad (12.5)$$

яку у подальшому будемо називати *енергією сигналу*.

**Приклад 1.** Сигнал  $u(t)$  є прямокутним позитивним імпульсом з амплітудою  $U_m$  та тривалістю  $t_i$ . Визначити енергію цього сигналу.

Оскільки на інтервалі часу  $(0, t_i)$   $u(t) = U_m$ , а на решті –  $u(t) = 0$ , то

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_0^{t_i} U_m^2 dt = U_m^2 t_i.$$

**Приклад 2.** Сигнал  $u(t)$  є трикутним позитивним імпульсом з амплітудою  $U_m$  та тривалістю  $t_i$  і має таку математичну модель:

Оскільки на інтервалі часу  $(0, t_i)$   $u(t) = U_m$ , а на решті –  $u(t) = 0$ , то

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{коли } t < 0, \\ U_m \frac{t}{t_i}, & \text{коли } 0 \leq t \leq t_i, \\ 0, & \text{коли } t > t_i. \end{cases}$$

Визначити енергію цього сигналу.

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_0^{t_i} U_m^2 \frac{t^2}{t_i^2} dt = \frac{1}{3} U_m^2 t_i.$$

## 12.4.2 Кореляційна функція сигналу

Поряд зі спектральним підходом до опису сигналів часто на практиці використовується характеристика, що давала б уявлення про такі, зокрема, властивості як швидкість їх змінення у часі чи тривалості без розкладання їх на гармонічні складові.

Такою характеристикою слугує і широко застосовується **кореляційна функція** сигналу.

### 12.4.2.1 Кореляційні функції скінченних сигналів

Якщо детермінований сигнал  $u(t)$  має скінченну тривалість, то його кореляційна функція визначається за такою формулою:

$$K_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t+t)dt,$$

де  $t$  – величина часового зсуву сигналу.

З цього виразу видно, що  $K_c(t)$  характеризує ступінь зв'язку (кореляції) сигналу  $u(t)$  зі своєю копією, зсунутою у часі на величину  $t$ . Що ж дає нам нового використання кореляційної функції? Для з'ясування цього питання розглянемо два приклади.

**Приклад 1.** При роботі імпульсної РЛС інформація про об'єкт (відстань до нього) закладена у величині затримки у часі між зондуємим і прийнятим сигналами. Будемо вважати, що обидва ці імпульси: зондуємий  $u(t)$  та прийнятий  $u(t+t)$  мають прямокутну форму. У даному випадку кореляційна функція сигналу  $u(t)$  матиме такий вигляд:

$$K_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u(t-t) dt = E_c. \quad (12.16)$$

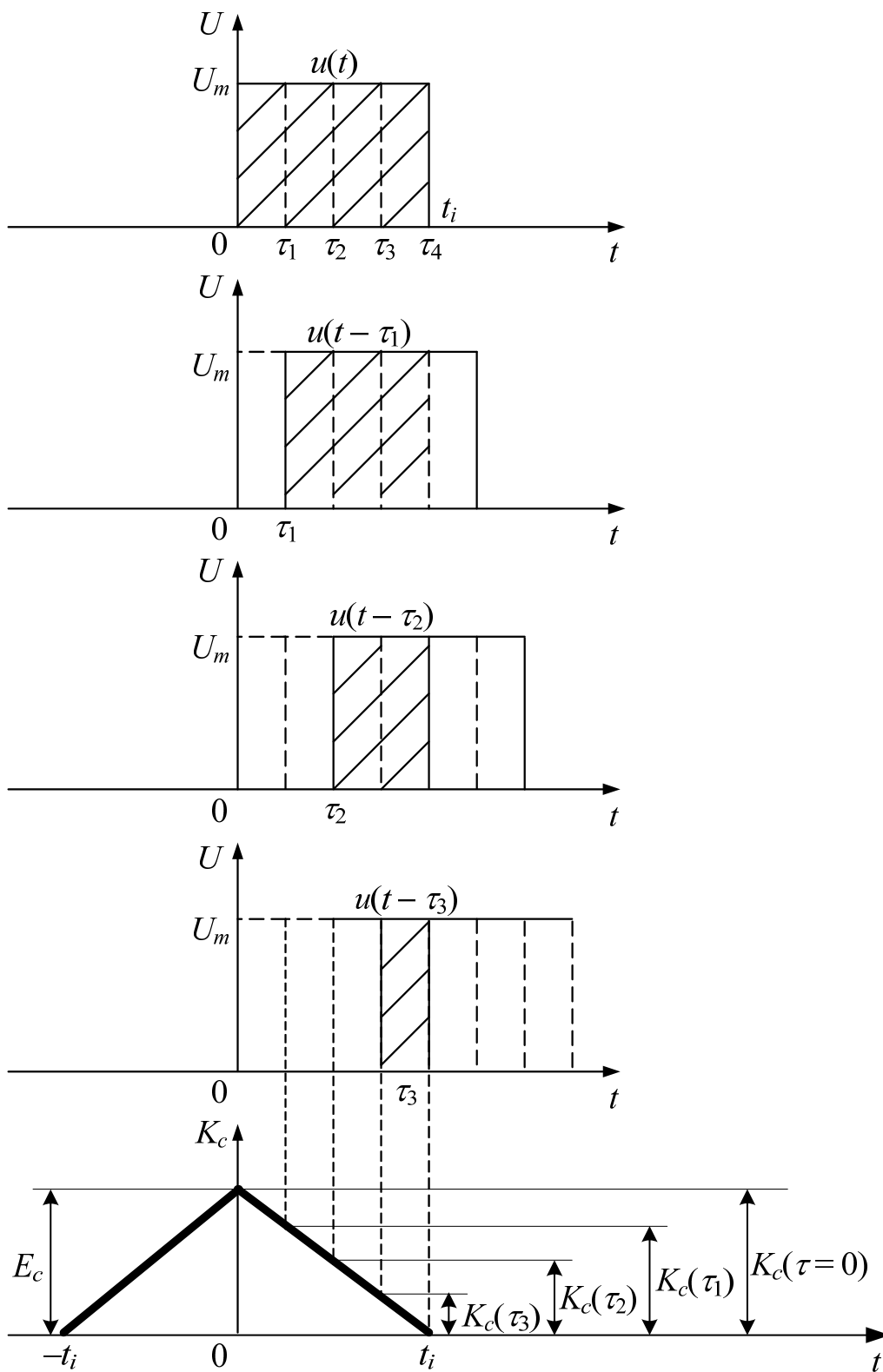


Рисунок 12.15 – Побудова кореляційної функції прямокутного імпульсу

Зрозуміло, що у виразі (12.16) функція  $K_c(t)$  досягає максимального значення при  $t = 0$ , бо будь-який сигнал повністю є корельованим сам із собою і при цьому

$$K_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = E_c, \quad (12.17)$$

тобто, дорівнює енергії сигналу.

Зі зростанням  $t$  функція  $K_c(t)$  для прямокутного імпульсу демонструється на рис. 12.16, де зафіксовані моменти зсуву копії сигналу на  $t_1, t_2, t_3, t_4$  вправо (затримки копій у часі). Під інтегралом у виразі (12.17) маємо добуток двох співмножників. Цей добуток дорівнюватиме нулю, коли хоча б один з них буде нулем, а тому при зсуві  $t = t_4 \geq t_i$  кореляційна функція стає рівною нулю. Очевидним є те, що при зсуві копії вліво графік функції  $K_c(t)$  буде симетричним попередньому. Тобто, кореляційна функція  $K_c(t)$  є функцією парною:

$$K_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u(t-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u(t+t) dt. \quad (12.18)$$

**Приклад 2.** Радіолокаційний сигнал  $u(t)$  являє собою пачку трьох однакових імпульсів прямокутної форми тривалістю  $t_i$ , що знаходяться на однаковій відстані  $T$  один від одного (рис. 12.16).

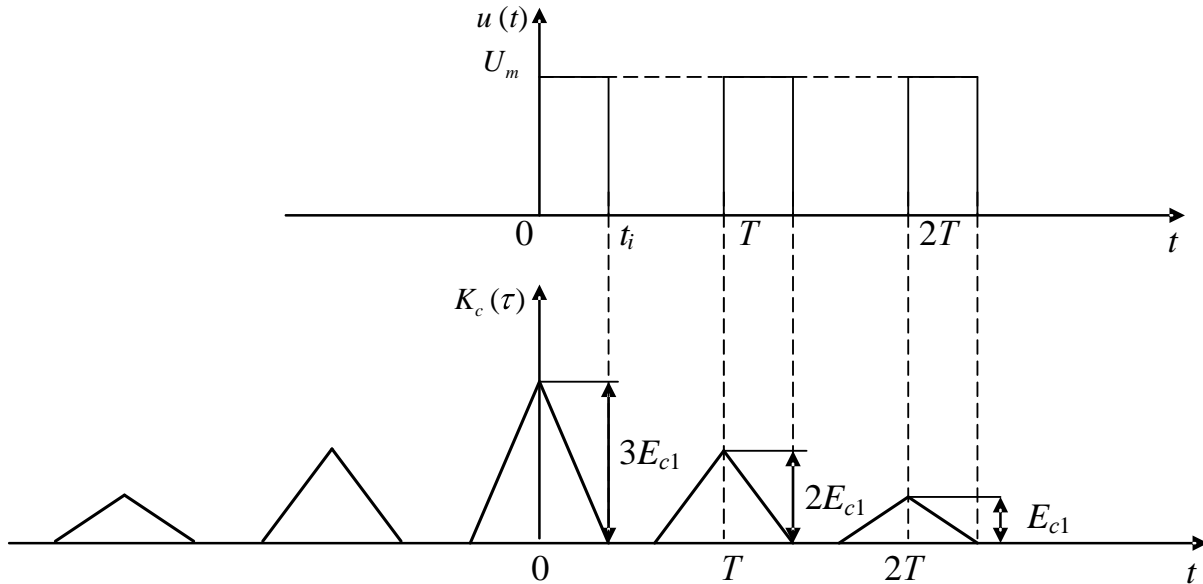


Рисунок 12.16 – Кореляційна функція  $K_c(t)$  пачки трьох однакових прямокутних імпульсів

Тут, так само як і у попередньому прикладі, максимум  $K_c(t)$  досягається при  $t = 0$ . Проте, коли зсув  $t = \pm T, 2T, \dots$  (тобто є кратним періоду послідовності у пачці), виникають побічні максимуми, сумірні з

головним. Максимальне значення кореляційної функції (при  $t = 0$ ) дорівнює потроєній енергії одного імпульсу у пачці.

Спрощена структурна схема пристрою обробки таких радіолокаційних сигналів з метою визначення затримки  $t$  подана на рис. 12.17.

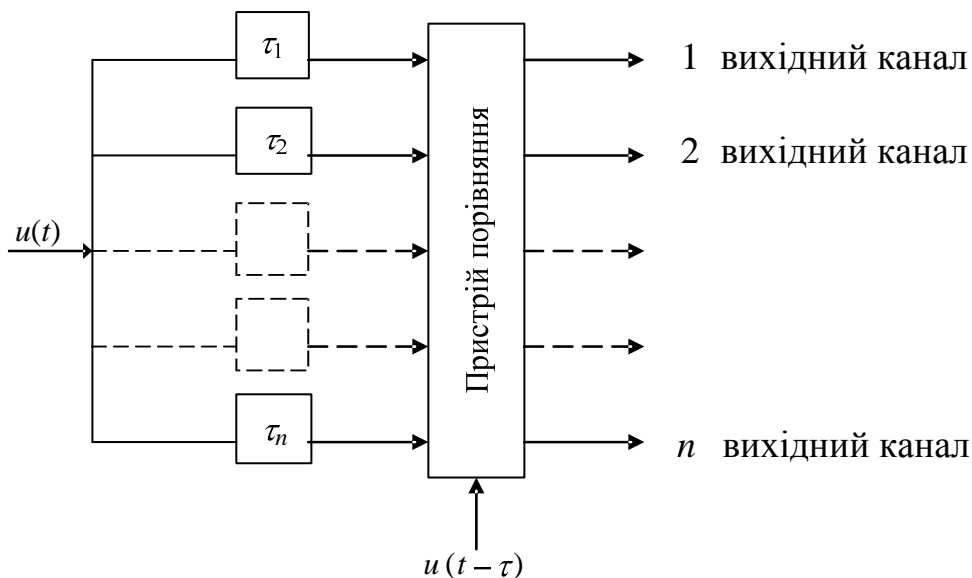


Рисунок 12.17 – Спрощена структурна схема пристрою визначення часу затримки прийнятого РЛС імпульсу

Зонduючий сигнал через лінії його затримки у часі  $t_1, t_2, \dots, t_n$  та прийнятий антеною РЛС сигнал  $u(t-t)$  надходять до пристрою порівняння. Максимальний результат (максимум  $K_c(t)$ ) отримується на тому  $k$ -му вихідному каналі, де  $t=t_k$ . Знаючи зарання величину  $t_k$ , в автоматичному режимі визначається відстань до об'єкта локації. Але на найближчих до  $k$ -го виходах сигнали будуть близькими за величинами до основного, що призведе до похибки вимірювання. Найкращим у такому разі був би зонduючий сигнал  $u(t)$ , що складався б з пачки імпульсів, які б на виході цього пристрою не давали б зовсім побічних максимумів, або ці максимуми були б набагато меншими за основний.

Слід зауважити, що  $K_c(t)$  у виразі (12.18) має більш точну назву **автокореляційної функції**, бо вона встановлює ступінь кореляційного зв'язку між сигналом  $u(t)$  та його ж зсунутою у часі копією  $u(t \pm t)$ .

Якщо ж говорити про кореляцію між двома різними сигналами  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$ , то кореляційна функція називається **взаємнокореляційною** і записується так:

$$K_c(U_1, U_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) u_2(t-t) dt .$$

Очевидно, що значення  $K_c(u_1, u_2)$  не змінюється, якщо замість затримки часу  $u_2(t)$  дати таке ж саме випередження сигналу  $u_1(t)$ :

$$K_c(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t+t) \cdot u_2(t) dt.$$

### 12.4.2.2 Кореляційна функція періодичного сигналу

Періодичний сигнал являє собою періодичну послідовність прямокутних імпульсів, зображену на рис. 12.18, а.

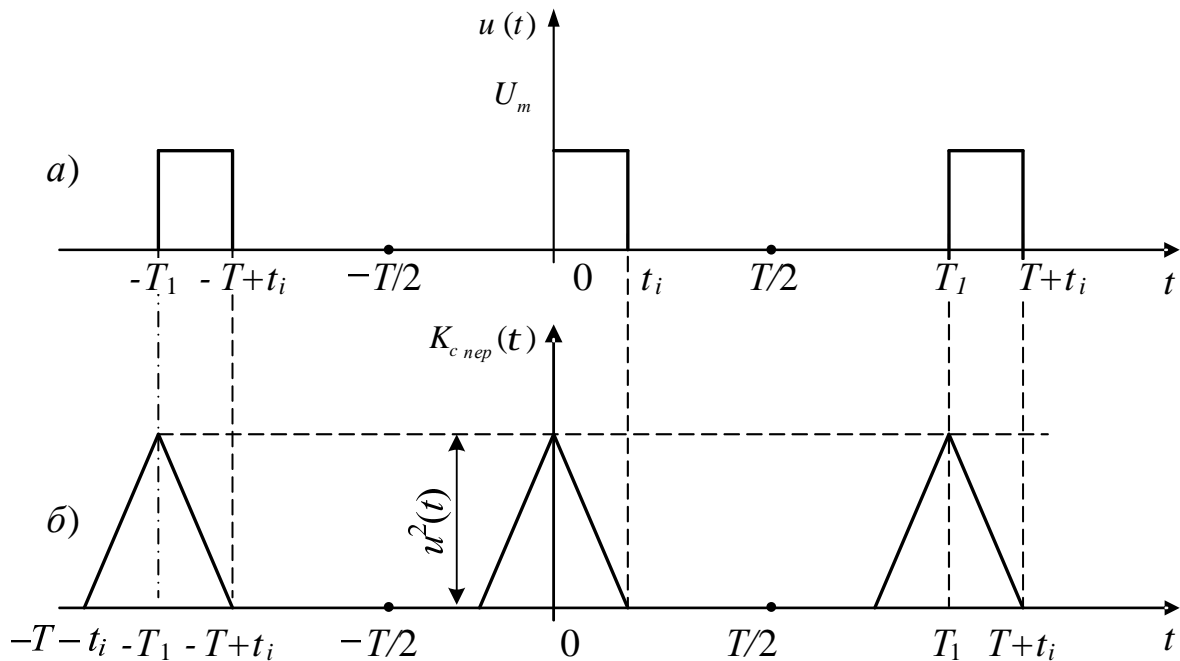


Рисунок 12.18 – Часова діаграма періодичного сигналу а) та графік його кореляційної функції б)

Оскільки сигнал має нескінченно велику енергію, визначення його кореляційної функції за виразом (12.18) є непридатним. Для такого випадку введемо таке визначення:

$$K_{c\text{ nep}}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot u(t+t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t-t) u(t) dt. \quad (12.19)$$

За таким визначенням кореляційна функція набуває розмірності потужності, а

$$K_{c\text{ nep}}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt \quad (12.20)$$

є середньою потужністю періодичного сигналу. Через періодичність сигналу  $u(t)$  усереднення добутку  $u(t) \cdot u(t-t)$  чи  $u(t) \cdot u(t+t)$  на



нескінченно великому відрізку  $T$  має співпадати з усередненням за період  $T_1$ , через що вираз (12.19) можна замінити виразом:

$$K_{c\text{ пер}}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} u(t) \cdot u(t+\tau) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} u(t) \cdot u(t-\tau) dt. \quad (12.21)$$

У цих виразах інтеграли є за сутністю кореляційними функціями сигналу на інтервалі  $T_1$ . Позначивши їх через  $K_{c\text{ пер}T_1}(\tau)$ , отримаємо:

$$K_{c\text{ пер}}(\tau) = \frac{K_{c\text{ пер}T_1}}{T_1}.$$

З виразу (12.21) випливає, що періодичному сигналу  $u(t)$  відповідає періодична кореляційна функція  $K_{c\text{ пер}}(\tau)$ , період якої збігається з періодом  $T_1$  висхідного сигналу. При  $\tau = 0$   $K_{c\text{ пер}}(\tau) = K_{c\text{ пер}}(0) = u^2(t)$  – середня потужність сигналу за період  $T_1$ .

Якщо, наприклад, періодичний сигнал є гармонічним

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

то його кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_{c\text{ пер}}(\tau) &= U_m^2 / T_1 \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \cos[\omega_0(t + \tau) + \varphi_0] dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot U_m^2 \cos \omega_0 \tau, \quad \omega_0 = 2\pi / T_1. \end{aligned}$$

При  $\tau = 0$   $K_{c\text{ пер}}(\tau) = 0,5 u_m^2$  – середнє значення потужності гармонічного сигналу з амплітудою  $U_m$ . Важливо зауважити, що кореляційна функція періодичного сигналу не залежить від його початкової фази  $\varphi_0$ .

### 12.4.2.3 Кореляційна функція дискретного сигналу

Як було показано, кореляційна функція пачки прямокутних імпульсів має крім основного ще й бічні максимуми. На практиці для виявлення і визначення тієї ж відстані до об'єкта локації важливе значення має не форма кореляційної функції, а відносний рівень бічних максимумів у порівнянні з основним (при  $\tau = 0$ ). Ідеальна ситуація була б, якби бічні максимуми дорівнювали б нулю.

Розглянемо сигнал, що являє собою пачку чотирьох прямокутних імпульсів, зображених на рис. 12.19. Тут весь інтервал існування сигналу розділено на чотири рівних проміжки, які будемо називати **позиціями**. На кожному з цих проміжків (позицій) сигнал знаходиться в одному з двох станів: дорівнює  $U_0$ , якому відповідатиме цифра +1, або  $-U_0$ , якому відповідатиме цифра -1. Таке подання сигналу називається амплітудним

кодуванням. Цифровим кодом цього дискретного сигналу буде, очевидно, послідовність чисел (1, -1, 1, -1).

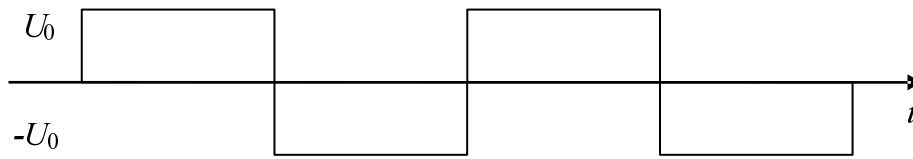


Рисунок 12.19 – Чотирипозиційний складний сигнал з амплітудним кодуванням

Заради зручності домовимось у подальшому доповнювати таку послідовність нулями на „порожніх” позиціях, де цей сигнал невизначений. Тоді розгорнута форма запису зазначеного дискретного сигналу буде мати вигляд

$$\dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots$$

Одною з операцій при обробці сигналу є його зсув, у часі, тобто на деяку кількість позицій відносно висхідного положення без змінення форми. Нижче наведено приклад, коли перший рядок є розгорнутою формою запису коду сигналу висхідного (до зсуву, коли  $\tau = 0$ ), другий рядок – після зсуву на одну позицію, третій рядок – на дві позиції і четвертий – на три позиції.

$$\begin{aligned} &\dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\ &\dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\ &\dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ \dots \\ &\dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ \dots \end{aligned}$$

З метою реалізації формули (2.16) у застосуванні до багатопозиційного дискретного сигналу, операцію інтегрування слід замінити додаванням, а замість змінної  $\tau$  застосувати число  $n$  (позитивне чи негативне), яке показує наскільки позицій зсунута копія відносно висхідного сигналу. Оскільки в „порожніх” позиціях математична модель сигналу має нулі, запишемо дискретну кореляційну функцію у такому вигляді

$$K_c(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_i U_{i-n}. \quad (12.22)$$

Ця дискретна функція цілочислового аргументу  $n$  має багато властивостей звичайної кореляційної функції і, зокрема, вона є парною:

$$K_c(n) = K_c(-n),$$

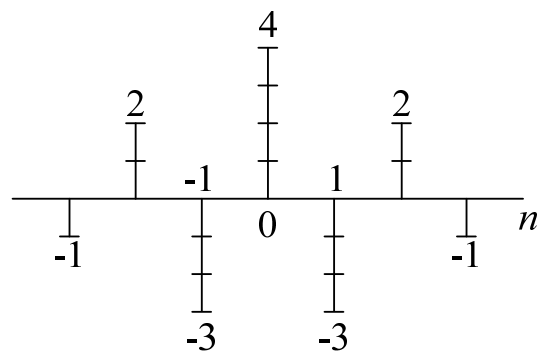
а при нульовому зсуві вона визначає енергію сигналу:

$$K_c(0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_i^2 = E_c.$$

Для прикладу обчислимо дискретну кореляційну функцію зазначеного вище чотирьохпозиційного сигналу. Повернемося до чотирьох рядків запису висхідного сигналу і його трьох копій, зсунутих відповідно на одну, дві і три позиції.

Найпершим помічаємо, що вихідний сигнал (перший рядок) і його третя копія уже при  $n = 4$  накладаються один на одного так, що добутки, які входять у формулу (12.22), стають рівним нулю при  $n \geq 3$ . Обчислюючи суми, отримуємо

$$\begin{aligned} K_c(0) &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \\ K_c(1) &= -1 - 1 - 1 = -3, \\ K_c(2) &= 1 + 1 = 2, \\ K_c(3) &= -1. \end{aligned}$$



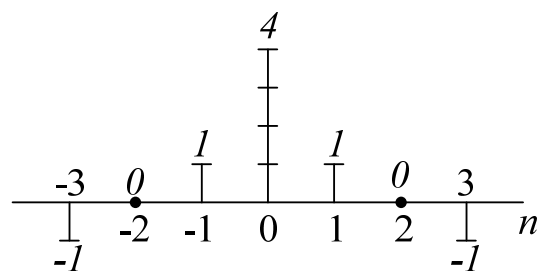
Як бачимо, бічні максимуми за модулем лінійно спадають, залишаючись сумірними з основним максимумом.

Розглянемо приклад чотирьохпозиційного сигналу з амплітудним коливанням такого виду  $(1, 1, 1, -1)$ . Складемо таблицю

$$\begin{array}{cccccccccc} \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & \dots \end{array}$$

Обчислимо суму і побудуємо графічну модель дискретної кореляційної функції цього сигналу

$$\begin{aligned} K_c(0) &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \\ K_c(1) &= 1 + 1 - 1 = 1, \\ K_c(2) &= 1 - 1 = 0, \\ K_c(3) &= -1. \end{aligned}$$



Очевидною перевагою цього дискретного сигналу у порівнянні з попереднім є те, що бічні максимуми за модулем не перевищують чверті основного максимуму його кореляційної функції.

Цей приклад показує, що можна зобразити дискретні сигнали з такими математичними моделями, які б мали в кореляційних функціях бічні максимуми значно меншими за основний. Такими є сигнали Баркера, до числа яких належать і щойно розглянутий чотирипозиційний сигнал. Найчастіше використовується 13 позиційний сигнал Баркера, модель якого є (1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1) з дискретними значеннями його кореляційної функції: 13, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1. Часова діаграма цього сигналу Баркера наведена на рис. 12.20

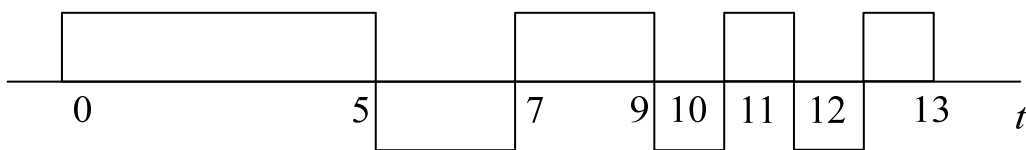


Рисунок 12.20 – Тринадцяти позиційний сигнал Баркера при амплітудному коливанні

### 12.4.3 Зв'язок між кореляційною функцією і спектральною характеристикою сигналу

Будемо вважати, що сигнал  $u(t)$  має спектральну характеристику  $\dot{S}(\omega)$ , тоді його копія  $u(t + \tau)$  матимемо спектральну характеристику  $\dot{S}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau}$ , а отже отримаємо

$$K_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u(t + \tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \cdot \dot{S}^*(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega.$$

Враховуючи, що  $\dot{S}(\omega) \cdot \dot{S}^*(\omega) = S^2(\omega)$ , останній вираз переписеться так:

$$K_c(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (12.23)$$

На підставі відомих властивостей перетворень Фур'є, можна також написати

$$S^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_c(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (12.24)$$

Зауваживши, що через парність функції  $K_c(\tau)$  знак перед  $\omega\tau$  у показниках степені у виразах (12.23) і (12.24) може бути довільним.

Отже, пряме перетворення Фур'є (12.24) кореляційної функції  $K_c(\tau)$  дає спектральну щільність енергії сигналу, тобто енергію, що приходить

на одиницю його смуги частот. А перетворення (12.23) дає кореляційну функцію  $K_c(\tau)$  сигналу.

З виразів (12.23) і (12.24) випливає, що **чим ширший спектр  $S(\omega)$  сигналу, тим меншим є інтервал кореляції, тобто величина зсуву ( $\tau$ ), у межах якого кореляційна функція відрізняється від нуля.** Відповідно чим більший інтервал кореляції заданого сигналу, тим вузьчим є його спектр.

Також з виразів (12.23) і (12.24) видно, що кореляційна функція  $K_c(\tau)$  не залежить від фазової характеристики спектра сигналу. Проте, оскільки при заданому амплітудному спектрі  $S(\omega)$  форма сигналу  $u(t)$  суттєво залежить від фазового спектра, то можна зробити висновок: **різними за формою сигналам  $u(t)$ , що мають однакові амплітудні спектри, відповідають однакові кореляційні функції  $K_c(\tau)$ .**

### **Запитання та задачі для закріплення**

1. Що таке електричний сигнал, повідомлення, інформація?
2. Провести класифікацію сигналів і навести по одному прикладу.
3. Які види АЧС мають гармонічний, бігармонічний та багатогармонічний сигнали?
4. Охарактеризувати АЧС періодичного імпульсного сигналу.
5. Як змінюється АЧС періодичного імпульсного сигналу при зміні його параметрів?
6. Що таке спектральна функція амплітуд, спектральна щільність амплітуд?
7. Записати вирази для прямого і зворотного перетворень Фур'є.
8. Який вигляд має АЧС одиничного прямокутного імпульсу? Який АЧС має імпульсна функція?
9. Що таке енергія сигналу?
10. Що розуміється під кореляційною функцією? Які є її види?

## 13 РАДІОСИГНАЛИ

### 13.1 Загальні визначення

Для передачі інформації на великі відстані застосовують сигнали, що ефективно випромінюються і приймаються за допомогою антенних пристроїв, ці сигнали мають здатність поширюватись у вигляді вільних радіохвиль у середовищі, яке розділяє відправника і отримувача інформації. Таким сигналом є *високочастотне коливання*. Інформація, яка передається, має бути у той чи інший спосіб "закладена" у високочастотне коливання, яке називається *несучим*.

Частота  $\omega_0$  цього коливання вибирається у залежності від відстані, на яку має передаватися інформація, від умов поширення радіохвиль та інших технічних і економічних факторів. Але у будь-якому випадку частота  $\omega_0$  повинна бути великою у порівнянні з найвищою частотою спектра повідомлення, що передається. Це пояснюється тим, що для неспотвореної передачі повідомлення через радіотехнічні кола, а також для усунення спотворень, обумовлених поширенням радіохвиль, необхідно, щоб ширина спектра повідомлення  $\Delta\Omega_{cn}$  була малою у порівнянні з  $\omega_0$ . Чим менше відношення  $\Delta\Omega_{cn}/\omega_0$ , тим менше проявляється недосконалість характеристик системи. Тому чим вищою є необхідна швидкість передачі інформації і, отже, ширшим спектр повідомлення  $\Delta\Omega_{cn}$ , тим вищою має бути несуча частота радіосигналу. Як правило, має виконуватись нерівність  $\Delta\Omega_{cn}/\omega_0 \ll 1$ , а такий сигнал називається "вузькосмуговим" навіть при передачі широкосмугових повідомлень.

Наведемо такі приклади. При передачі мови чи музики спектр повідомлення звичайно обмежується смугою від  $F_{\min} = 30$  Гц до  $F_{\max} = 10000$  Гц. Навіть на найдовшій хвилі мовного діапазону  $\lambda = 2000$  м при несучій частоті  $f_0 = 150$  кГц, відношення  $\Delta F_{cn}/f_0 = 10^4/1,5 \cdot 10^5 \approx 0,067$ . При передаванні цих же повідомлень на коротких хвилях (15...20 МГц) це співвідношення не перевищить сотих часток процента. При передаванні рухомих зображень (телебачення) смуга частот повідомлення досить широка і досягає 5...6 МГц, однак і несуча частота вибирається не меншою 50...60 МГц, так що відношення  $\Delta F_{cn}/f_0$  не перевищує 0,1 (10%).

Радіосигналом є високочастотне коливання, що несе в собі інформацію, яку туди "закладають", модулюючи його за законом повідомлення (керуючого сигналу). Процес модуляції передбачає змінювання одного з параметрів високочастотного (несучого) сигналу під дією керуючого сигналу (повідомлення): амплітуди  $U_m$ , частоти  $w$  чи початкової фази  $j$ , відповідно і мова іде про амплітудну, частотну чи фазову модуляцію, а отже радіосигнали називаються відповідно амплітудно-модульованими (АМ) (amplitude modulation, АМ), частотно-модульованими (ЧМ) (frequency modulation, FM), чи фазомодульованими

(ФМ) (phase modulation, PM). Частотну і фазову модуляції ще об'єднують під спільною назвою – кутова модуляція, а ЧМ і ФМ сигнали – сигнали з кутовою модуляцією.

У загальному вигляді радіосигнал можна подати так:

$$u(t) = U_m(t) \cdot \sin[w(t) \cdot t + j(t)] = U_m(t) \cdot \sin y(t). \quad (13.1)$$

В АМ сигналі  $u(t) = U_m(t) \cdot \sin(\omega_0 t + j)$ ,  $\omega_0$  і  $\varphi$  – константи,  
в ЧМ сигналі  $u(t) = U_m \sin[w(t) \cdot t + j]$ ,  $U_m$  і  $\varphi$  – константи,  
в ФМ сигналі  $u(t) = U_m \sin[\omega_0 t + j(t)]$ ,  $U_m$  і  $\omega_0$  – константи,  
в сигналі з кутовою модуляцією  $u(t) = U_m \sin y(t)$ ,  $U_m$  – константа.

Та обставина, що ширина спектра керуючого сигналу (повідомлення) мала у порівнянні з несучою частотою  $\omega_0$ , дозволяє вважати, що  $U_m(t)$  і  $y(t)$  є *повільними* функціями часу. Це означає, що відносне змінення  $U_m(t)$  і  $y(t)$  за один період несучого коливання є малим у порівнянні з одиницею, наприклад:

$$\left| \frac{\Delta U_m(T_0)}{U_m(t)} \right| = \left| \frac{U_m(t + T_0) - U_m(t)}{U_m} \right| \ll 1. \quad (13.2)$$

Аналогічно міркуючи, можна визначити умови повільності також функції  $y(t)$  у виразі (13.1).

Для більшості радіотехнічних сигналів нерівність (13.2) легко виконується. Це означає, що при будь-якому виді модуляції параметри радіосигналу (амплітуда, частота і фаза) змінюються настільки повільно, що у межах одного періоду  $T_0$  коливання можна вважати гармонічними.

### 13.2 Амплітудно-модульовані сигнали

Амплітудна модуляція є найпростішим і дуже поширеним у радіотехніці способом "закладання" інформації у високочастотне коливання. При амплітудній модуляції обвідна  $U_m(t)$  несучого коливання змінюється за законом, який збігається із законом змінення повідомлення, яке передається, а частота і початкова фаза коливання підтримуються незмінними. Тому для радіосигналу з амплітудною модуляцією загальний вираз (13.1) можна замінити, як зазначалось, таким:

$$u(t) = U_m(t) \cdot \cos(\omega_0 t + j_0), \quad (13.3)$$

де частота високочастотного коливання  $\omega_0$  та його початкова фаза  $\varphi_0$  є константами.

Характер обвідної  $U_m(t)$  визначається видом повідомлення, що передається.

При неперервному повідомленні (рис. 13.1, а) модульоване за амплітудою коливання набуває вигляду, показаного на рис. 13.1, б.

Обвідна  $U_m(t)$  змінюється за законом керуючого сигналу  $U_k(t)$ , який є повідомленням.

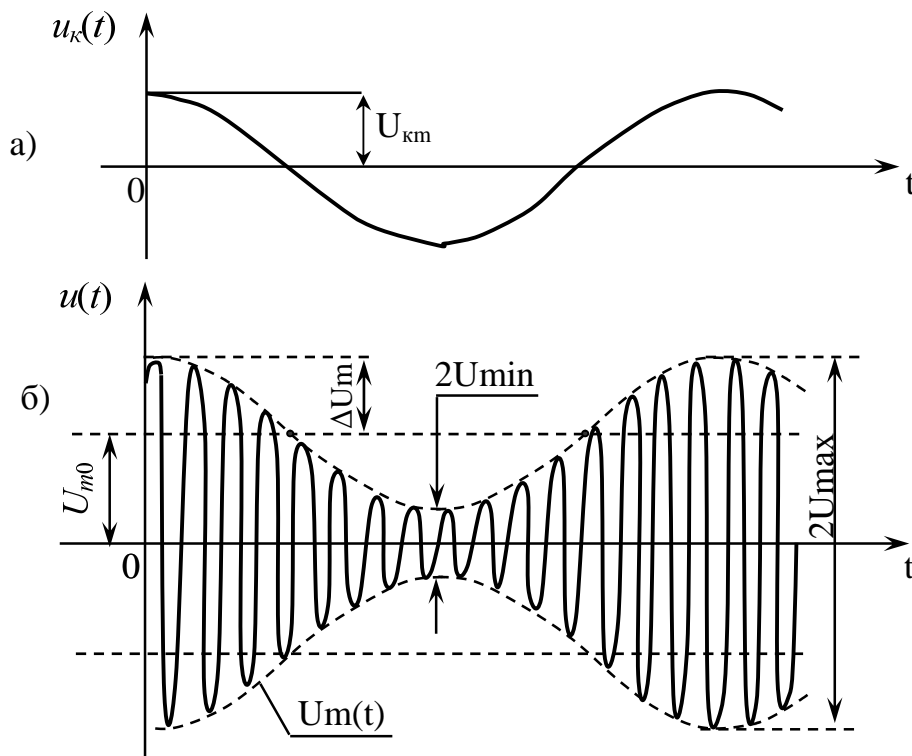


Рисунок 13.1 – Амплітудно-модульований сигнал: а) керуючий гармонічний сигнал, б) коливання, модульовані за амплітудою

При тональній модуляції (коли керуючий сигнал є гармонічним зі сталою частотою, тобто однотональним) математична модель модулюючого сигналу запишеться так:

$$u_k(t) = U_{km} \cdot \cos(\Omega t + \Phi_0),$$

де  $\Omega = 2\pi F$  – його кругова частота;  
 $\Phi_0$  – початкова фаза.

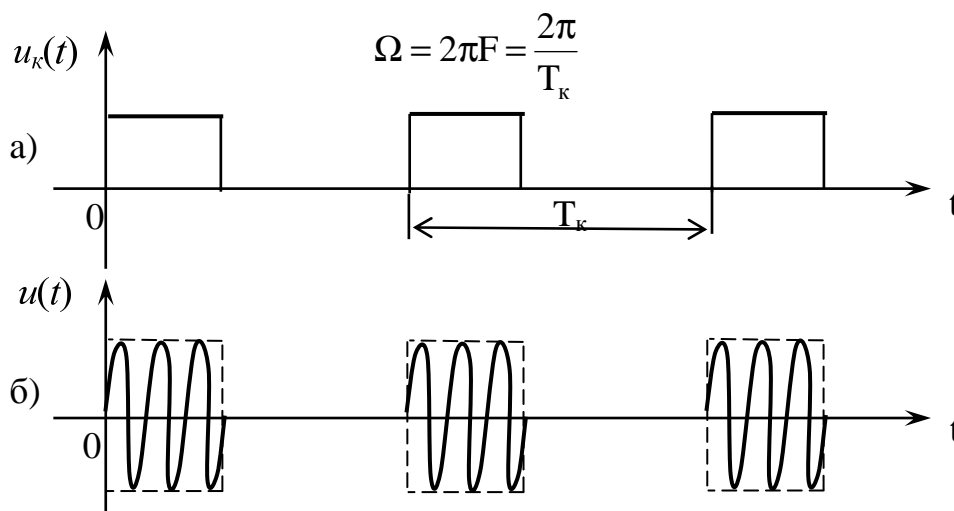


Рисунок 13.2 – а) імпульсна послідовність, б) коливання, модульоване за амплітудою



Розглянемо випадок, коли початкова фаза сигналу дорівнює нулю, тобто  $\varphi_0 = 0$  (13.3) та  $\Phi_0 = 0$ . Обвідну модульованого колювання при цьому можна подати у спрощеному вигляді:

$$U_m(t) = U_{m0} + k_{am} \cdot u_k(t) = U_{m0} + \Delta U_m \cos \Omega t, \quad (13.4)$$

де  $k_{am}$  – коефіцієнт пропорційності;

$\Delta U_m = k_{am} \cdot u_k(t)$  – приріст амплітуди несучої або амплітуда змінення обвідної (рис. 13.1, б).

Відношення  $m = \Delta U_m / U_{m0}$  називається коефіцієнтом глибини амплітудної модуляції або просто коефіцієнтом модуляції.

Підставивши (13.4) у (13.3) отримаємо математичну модель однотонального амплітудно-модульованого (АМ) сигналу:

$$u(t) = (U_{m0} + \Delta U_m \cos \Omega t) \cdot \cos w_0 t = U_{m0} \left( 1 + \frac{\Delta U_m}{U_{m0}} \cos \Omega t \right) \cdot \cos w_0 t$$

або

$$u(t) = U_{m0} (1 + m \cos \Omega t) \cdot \cos w_0 t. \quad (13.5)$$

При неспотвореній модуляції ( $m \leq 1$ ) амплітуда колювання змінюється у межах від мінімальної  $U_{\min} = (1 - m)U_{m0}$  до максимальної  $U_{\max} = (1 + m)U_{m0}$ .

При перервному повідомленні (рис. 13.2), де керуючий сигнал  $\epsilon$ , наприклад, періодичною послідовністю відеоімпульсів (рис. 13.2, а), модульований сигнал набуває вигляду радіоімпульсів (рис. 13.2, б), у якому обвідна теж має форму керуючого сигналу.

### 13.3 Частотний спектр однотонально амплітудно-модульованого сигналу

Нехай задано високочастотне модульоване колювання щодо якого відомо, що частота  $\omega_0$  і початкова фаза  $\varphi_0$  – величини сталі (раніше ми домовилися, що  $\varphi_0=0$ ), а обвідна  $U_m(t)$  містить у собі повідомлення  $U_k(t)$ , яке передається. Аналітично таке колювання можна подати за допомогою виразу (13.3).

Установимо зв'язок між спектром модульованого колювання і спектром модулюючої функції, тобто спектром вихідного повідомлення  $u_k(t)$ . Найпростіше й найнаочніше це можна зробити для тональної (гармонічної) модуляції, коли обвідна

$$U_m(t) = U_{m0} (1 + m \cdot \cos \Omega t),$$

а модульоване колювання визначається виразом (13.5).

Перепишемо вираз (13.5) у формі

$$u(t) = U_{m0} (\cos w_0 t + m \cdot \cos \Omega t \cdot \cos w_0 t).$$

Другий доданок у правій частині цього виразу, який є продуктом модуляції (результатом процедури модуляції), можна привести до вигляду:

$$m \cdot \cos \Omega t \cdot \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} m \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} m \cos(\omega_0 - \Omega)t,$$

після чого розгорнутий вираз для амплітудно-модульованого коливання  $u(t)$  буде таким:

$$u(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{mU_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{mU_{m0}}{2} m \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (13.6)$$

З виразу (13.6) видно, що досліджуваний амплітудно-модульований сигнал складається з трьох високочастотних гармонічних коливань. Перша складова частина являє собою вихідне немодульоване коливання з частотою  $\omega_0$ . Друга і третя складові відповідають новим коливанням (гармонічним), які з'явилися у процесі модуляції амплітуди. Частоти цих коливань  $\omega_0 + \Omega$  та  $\omega_0 - \Omega$  називаються верхньою і нижньою бічними частотами модуляції.

Амплітуди цих двох нових коливань однакові і складають від амплітуди немодульованого коливання частку, рівну  $m/2$ . Початкові ж фази усіх цих трьох складових однакові і, за домовленістю, дорівнюють нулю. Це ілюструється векторною діаграмою, зображеною на рис. 13.3.

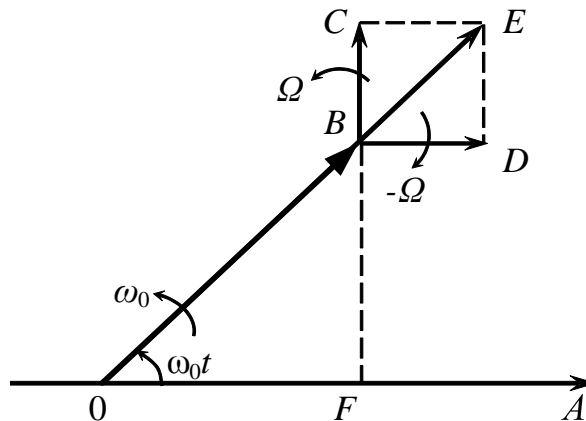


Рисунок 13.3 – Векторне подання тонально амплітудно-модульованого коливання

На цій діаграмі складова несучої частоти  $U_{m0} \cos \omega_0 t$  з амплітудою  $OB = U_{m0}$  зображається у вигляді вектора  $\overline{OB}$ , який обертається у напрямку проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\omega_0$  і через деякий час  $t$  повернеться відносно свого початкового положення (вектора  $\overline{OA}$ ) на кут  $\omega_0 t$ . Очевидно проєкція цього вектора  $OB$  на відрізок  $OA$  (відрізок  $OF$ ) дорівнюватиме миттєвому значенню амплітуди несучої складової у момент часу  $t$ .

Для зображення на цій же діаграмі коливання з частотою  $\omega_0 + \Omega$  (верхньою бічною складовою модульованого коливання), яке перевищує кутову частоту обертання вектора  $OB$  на величину  $\Omega$ , необхідно скористатися вектором, який обертатиметься проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\Omega$  (вектор  $\overline{BC}$ ). Для зображення коливання з частотою  $\omega_0 - \Omega$  (нижньою бічною складовою модульованого коливання),

знадобиться вектор, який буде обертатися за годинниковою стрілкою (вектор  $BD$ ). Тому коливання бічних частот – верхньої і нижньої – зображаються двома векторами довжинами  $BC = BD = mU_{m0}/2$ , які обертаються у взаємно протилежних напрямках. Вони є симетричними відносно напрямку  $OB$ , що і впливає безпосередньо з виразу (13.6).

З цього виразу видно, що при будь-якій початковій фазі обвідної вектори  $\overline{BC}$  і  $\overline{BD}$ , які відповідають коливанням верхньої і нижньої бічних частот, займають симетричне відносно вектора  $OB$  положення, причому вектори коливань бічних частот утворюють з вектором несучого коливання кути, рівні  $\pm \Omega t$ . На рис. 13.3 початки цих векторів перенесені з точки  $O$  у точку  $B$ . Рівнодіючий вектор  $\overline{BE}$ , який є геометричною сумою векторів  $\overline{BC}$  і  $\overline{BD}$ , називається вектором модуляції, завжди розташовується на лінії  $OB$ , через що суму усіх трьох коливань – несучої і двох бічних частот – можна розглядати як коливання зі сталими початковою фазою і частотою, але з модульованою амплітудою.

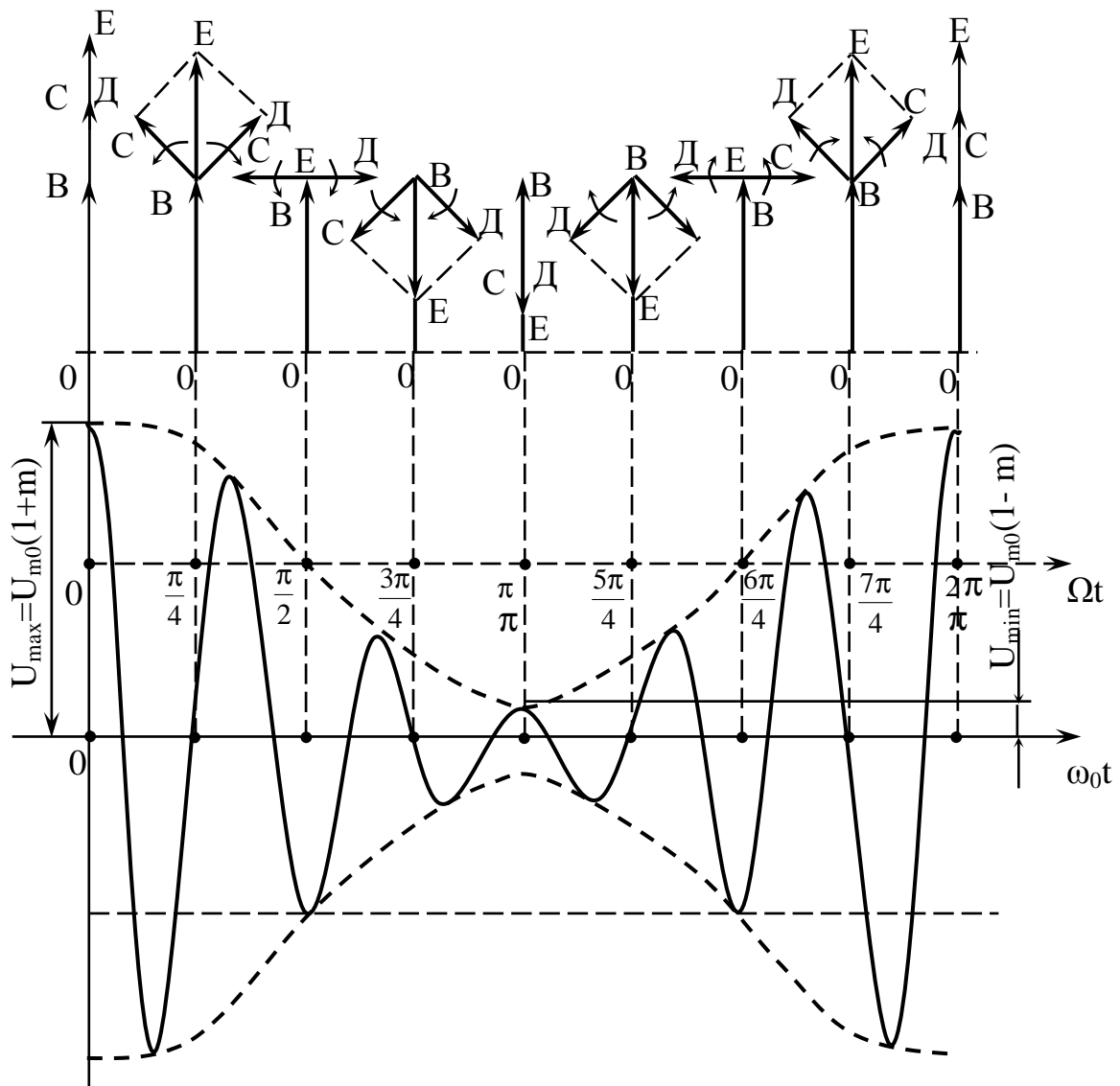


Рисунок 13.4 – Додавання коливань несучої і бічних частот у різні моменти часу

При  $t = 0$   $\Omega t = 0$  (на осі  $\Omega t$  рис. 13.4)  $\cos \Omega t = 1$  і обвідна амплітуд  $OE = OB + \overline{BC + BD}$ , бо у цей момент вектори  $BC$  та  $BD$  спрямовані вздовж напрямку  $OB$  і додаються так, що  $OE = OB + BC + BD$ . Це відповідає  $U_{\max} = U_{m0}(1+m)$ . У момент часу, коли  $\Omega t = \pi/2$   $\cos \Omega t = 0$  і обвідна амплітуд  $OE = OB$ , бо тепер вектор  $BC$  повернувся на кут  $+\pi/2$ , а вектор  $BD$  – на кут  $-\pi/2$ , вони стали протилежними за напрямками, їх сума дорівнює нулю, обвідна амплітуд дорівнює  $U_{m0}$ . Коли  $\Omega t = \pi$   $\cos \Omega t = -1$  і обвідна амплітуд  $OE = OB - \overline{BC + BD}$ , бо у цей момент вектори  $BC$  і  $BD$  спрямовані у протилежному напрямку  $OB$  і їх сума віднімається від  $OB$ , тобто  $OE = OB - (BC + BD)$ . Це відповідає  $U_{\min} = U_{m0}(1 - m)$ . Міркуючи аналогічно, легко отримати результати і для випадків коли  $\Omega t = 3\pi/2$  та  $2\pi$ , що досить зрозуміло, при розгляді рис. 13.4.

Спектральна діаграма коливання при тональній амплітудній модуляції (АМ) показана на рис. 13.5.

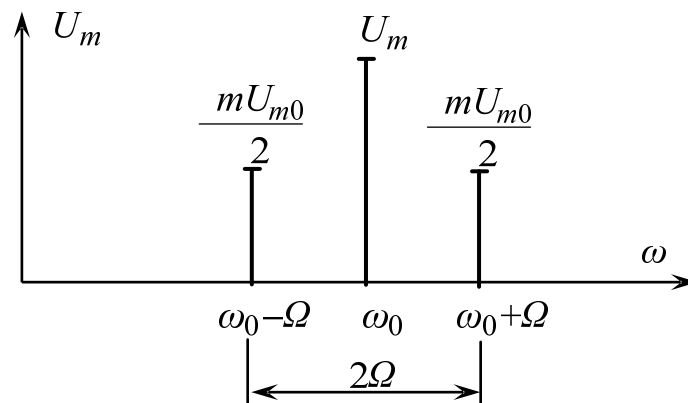


Рисунок 13.5 – Спектр коливання при тональній АМ

Як бачимо з рисунків 13.1 та 13.4 для неспотвореного сигналу при амплітудній модуляції коефіцієнт модуляції повинен бути не більший ( $m \leq 1$ ) за одиницю, а це означає, що максимальне значення амплітуд бічних складових такого сигналу будуть не більшими за половину амплітуди несучої (центральної) складової спектра радіосигналу.

Цю важливу обставину ми згадаємо трохи пізніше, коли будемо розглядати розподіл енергії радіосигналу між його спектральними складовими.

### 13.4 Частотний спектр АМ сигналу при модуляції складним сигналом

Скориставшись попереднім результатом та міркуючи аналогічно, можна побудувати частотний спектр при модуляції будь-яким складним сигналом. Картину утворення АМ сигналу найпростіше пояснити спочатку на прикладі, коли модулююче повідомлення  $u_k(t)$  є сумою коливань двох тонів:

$$U_{km}(t) = U'_{km} \cos \Omega_1 t + U''_{km} \cos \Omega_2 t.$$

За аналогією з виразом (13.4) отримуємо

$$\begin{aligned} U_m(t) &= U_{m0} + \Delta U'_m \cos \Omega_1 t + \Delta U''_m \cos \Omega_2 t = \\ &= U_{m0}(1 + m_1 \cos \Omega_1 t + m_2 \cos \Omega_2 t). \end{aligned}$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (13.3), і використовуючи тригонометричні перетворення, аналогічні тим, які були проведені при отриманні рівняння (13.6), прийдемо до такого результату (початкові фази несучого ( $\varphi_0$ ) і модулюючого ( $\Phi_0$ ) коливань узяті рівними нулю):

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{m_1 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega_1)t + \frac{m_1 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 - \Omega_1)t + \\ &+ \frac{m_2 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega_2)t + \frac{m_2 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 - \Omega_2)t. \end{aligned} \quad (13.7)$$

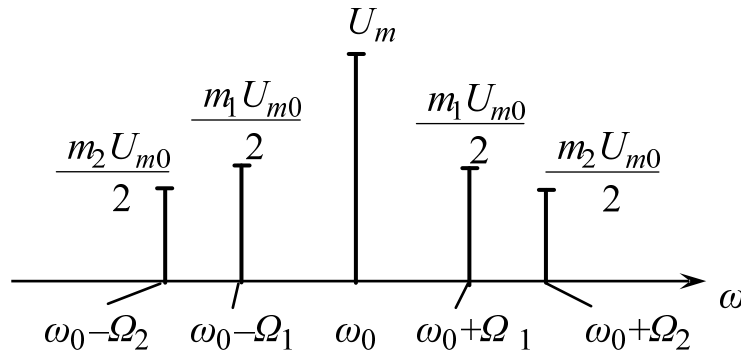


Рисунок 13.6 – Амплітудний спектр АМ сигналу при двотональній модуляції

З отриманого виразу випливає, що при модуляції складним сигналом з частотами  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  утворюється двотональна модуляція, яка супроводжується виникненням двох пар симетричних бічних частот (рис. 13.6), причому цей процес є лінійним у тому сенсі, що амплітуди і фази бічних частот від різних модулюючих напруг взаємно незалежні (остання властивість зберігається за умови, що змінення обвідної не перевищує 100%, тобто  $m_1$  і  $m_2 \leq 1$ ).

З наведеного прикладу неважко вивести правило побудови спектральної діаграми АМ коливання  $u(t)$  за заданим спектром модулюючої функції  $u_k(t)$ . Наприклад, маємо керуючий сигнал у вигляді послідовних прямокутних імпульсів (див. рис. 13.2, а) з частотою повторювання  $\Omega$ , спектральна діаграма якого подана на рис. 13.7,а. Потрібно побудувати спектральну діаграму послідовності прямокутних радіоімпульсів, отриманих у результаті амплітудної модуляції високочастотного гармонічного коливання з частотою  $\omega_0$  (рис. 13.2, б).

Керуючий сигнал може бути поданий обмеженим рядом Фур'є вигляду:

$$u_k(t) = U_{ок} + \sum_{p=1}^n U_{mpk} \cos p\Omega.$$

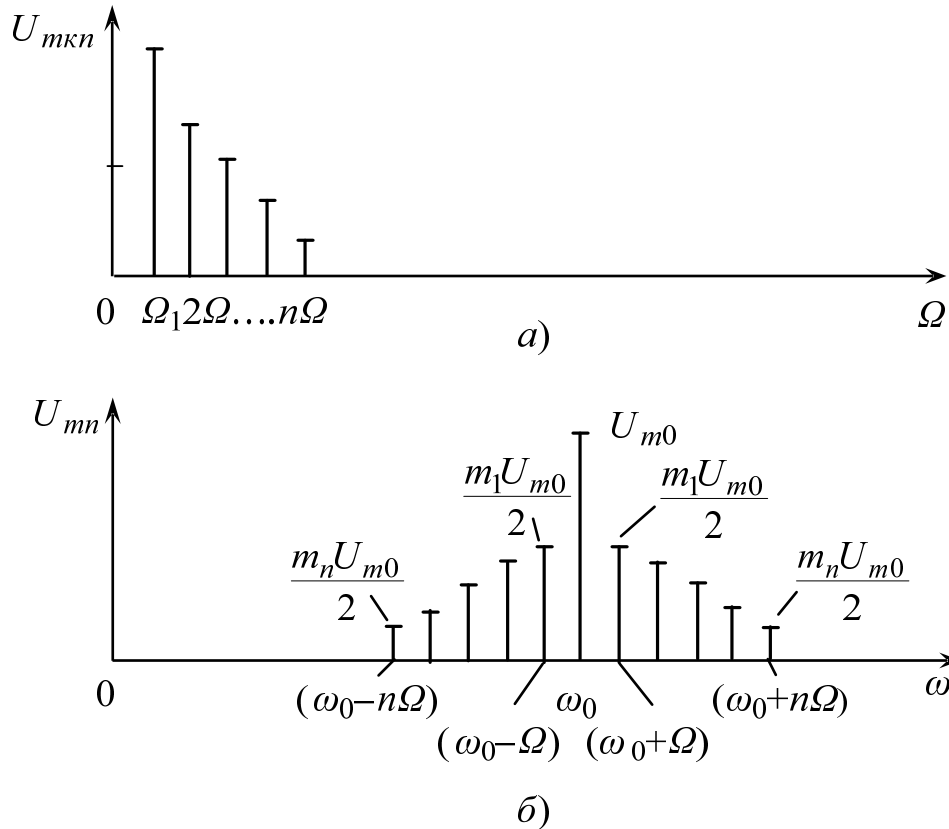


Рисунок 13.7 – Спектральні діаграми сигналів: а) керуючого, б) амплітудно-модульованого

Постійна складова  $U_{ок}$  у спектрі радіоімпульсу у процесі модуляції утворить несучу складову з частотою  $\omega_0$  та амплітудою  $U_{om}$ , а кожна  $p$ -та гармоніка утворить свою пару бічних складових з частотами  $(\omega_0 \pm p\Omega)$  та амплітудами  $m_p U_{m0}/2$ . Усього спектральних складових буде  $(2n + 1)$  штук, які утворюють симетричну картинку відносно несучої складової (рис. 13.7, б). Причому амплітуди спектральних складових послідовності радіоімпульсів будуть прямо пропорційними амплітудам відповідних складових спектра керуючого сигналу (послідовності відеоімпульсів).

Механізм побудови амплітудного спектра радіосигналу за відомим спектром керуючого сигналу можна застосувати за такою схемою:

1) спектр керуючого сигналу по осі частот перенести вправо на величину несучої  $\omega_0$  (ці спектральні лінії мають бути пропорційними за довжиною відповідним лініям початкового, вже відомого спектра);

2) зліва відносно несучої складової побудувати дзеркальне зображення правої частини.

Після першого кроку отримаємо спектральні лінії несучої та верхніх бічних, а після другого – спектральні лінії нижніх бічних складових спектра радіосигналу.

Математична модель, наприклад, послідовності радіоімпульсів, зображених на рис. 13.2, б, буде такою:

$$u(t) = U_{m0} \cos w_0 t + \frac{m_1 U_{m0}}{2} \cos(w_0 + \Omega)t + \frac{m_1 U_{m0}}{2} \cos(w_0 - \Omega)t + \\ + \frac{m_2 U_{m0}}{2} \cos(w_0 + 2\Omega)t + \frac{m_2 U_{m0}}{2} \cos(w_0 - 2\Omega)t + \dots + \\ + \frac{m_n U_{m0}}{2} \cos(w_0 + n\Omega)t + \frac{m_n U_{m0}}{2} \cos(w_0 - n\Omega)t.$$

### 13.5 Потужність АМ сигналу

Звернемося знову до однотонально модульованого за амплітудою сигналу, котрий, як відомо, складається з трьох високочастотних гармонік:

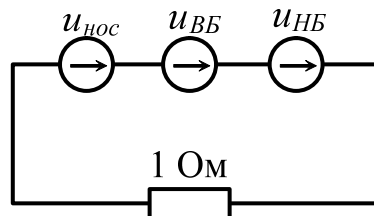
$$u(t) = U_{m0} \cos w_0 t + \frac{mU_{m0}}{2} \cos(w_0 + \Omega)t + \frac{mU_{m0}}{2} \cos(w_0 - \Omega)t.$$

Розглянемо питання про співвідношення потужностей несучого і бічних коливань. Джерело однотонального АМ сигналу еквівалентне трьом послідовно увімкненим джерелам гармонічних коливань:

$$u_{\text{нос}}(t) = U_{m0} \cos w_0 t;$$

$$u_{\text{ББ}}(t) = \frac{mU_{m0}}{2} \cos(w_0 + \Omega)t;$$

$$u_{\text{НБ}}(t) = \frac{mU_{m0}}{2} \cos(w_0 - \Omega)t.$$



Для визначеності припустимо, що ці джерела е. р. с. з'єднані послідовно і навантажені на резистор з опором 1 Ом. Тоді миттєва потужність АМ сигналу буде чисельно дорівнювати квадрату сумарної напруги:

$$P_{AM}(t) = u_{\text{нос}}^2(t) + u_{\text{ББ}}^2(t) + u_{\text{НБ}}^2(t) + 2 \cdot u_{\text{нос}}(t) \cdot u_{\text{ББ}}(t) + \\ + 2u_{\text{нос}}(t) \cdot u_{\text{НБ}}(t) + 2u_{\text{ББ}}(t) \cdot u_{\text{НБ}}(t).$$

Щоб знайти середню потужність сигналу, величину  $p(t)$  необхідно усереднити на достатньо великому відрізку часу  $T$  (періоді обвідної):

$$P_{AM \text{ сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt.$$

Легко упевнитися у тому, що при усередненні усі взаємні потужності дадуть нульовий результат, а тому середня потужність АМ сигналу

виявиться рівною сумі середніх потужностей несучої та двох бічних коливань:

$$P_{AM\text{ сep}} = P_{нос\text{ сep}} + P_{ВБ\text{ сep}} + P_{НБ\text{ сep}} = \\ = \frac{1}{2}U_{m0}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mU_{m0}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mU_{m0}}{2}\right)^2 = \frac{U_{m0}^2}{2} + \frac{m^2U_{m0}^2}{4}.$$

Звідси випливає, що  $(P_{ВБ\text{ сep}} + P_{НБ\text{ сep}}) / P_{нос\text{ сep}} = m^2/2$ .

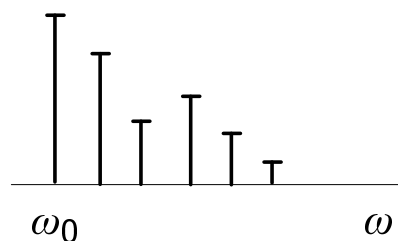
Так, навіть при 100% модуляції ( $m = 1$ ) частка потужності обох бічних коливань складає усього лише 50% від потужності немодульованого несучого коливання. Оскільки інформація (повідомлення) міститься у бічних коливаннях, можемо зауважити суттєву неефективність використання потужності при передаванні АМ сигналу, бо 2/3 потужності витрачається на несучу складову, яка власне не містить інформації.

З цих позицій є більш цікавий спосіб амплітудної модуляції, який полягає у формуванні сигналу із приглушенням верхньої або нижньої бічної смуги частот.

**Сигнал з однією бічною смугою** (ОБС) (Single Sideband Modulation, SSB) за зовнішніми характеристиками нагадує звичайні АМ-сигнали. Наприклад, однотональний ОБС-сигнал із приглушеною нижньою бічною смугою частот записується у вигляді:

$$U_{ОБС}(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{mU_{m0}}{2} (\omega_0 + \Omega)t.$$

Ще цікавішим є сигнал з одною бічною смугою із приглушеною несучою складовою. Такий спосіб модуляції дозволяє, з одного боку, ефективно використати потужність передавального пристрою, бо не буде витрат енергії потужних джерел на формування потужної несучої у радіосигналі. З іншого боку, ширина спектра односмугового сигналу стає удвічі меншою, що дозволить у визначеному для даної лінії радіозв'язку діапазоні частот передати удвічі більше інформації.



Слід зауважити, що обвідна односмугового АМ сигналу відрізняється від обвідної повного АМ сигналу, що призведе до помітних спотворень. Крім того, відсутність несучої у “економнішому” сигналі на приймальному кінці лінії радіозв'язку до детектування потребує відновлення несучої складової. Тому часто використовуються радіосигнали з АМ, у яких несуча складова приглушена лише частково.



### 13.6 Сигнали з кутовою модуляцією

Будемо вивчати модульовані радіосигнали, які отримуються за рахунок того, що у несучому гармонічному коливанні, повідомлення, яке передається, змінює або частоту  $\omega$ , або початкову фазу  $\varphi$ , а амплітуда залишається незмінною. Оскільки аргумент гармонічного коливання  $\psi(t)=\omega t+\varphi$ , який називається *повною фазою*, визначає початкове значення фазового кута, такі сигнали отримали назву *сигналів з кутовою модуляцією*, які, як ми вже знаємо, поділяються на сигнали з частотною і сигнали з фазовою модуляціями.

Припустимо спочатку, що повна фаза  $\psi(t)$  пов'язана з керуючим сигналом  $u_k(t)$  залежністю:

$$\psi(t)=\omega_0 t+k \cdot u_k(t), \quad (13.8)$$

де  $\omega_0$  – значення частоти при відсутності модуляції;  
 $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Модуляцію, яка відповідає співвідношенню (13.8), називають *фазовою модуляцією (ФМ)*:

$$u_{\text{ФМ}}(t)=U_m \cos[\omega_0 t+k \cdot U_k(t)]. \quad (13.9)$$

Якщо  $u_k(t)=0$ , то ФМ коливання є простим гармонічним коливанням. Зі зростанням значень сигналу  $u_k(t)$  повна фаза  $\psi(t)$  зростає у часі швидше, ніж за лінійним законом. При зменшенні значень модулюючого сигналу відбувається спад швидкості зростання  $\psi(t)$  у часі. На рис. 13.8 показана побудова графіка ФМ сигналу.

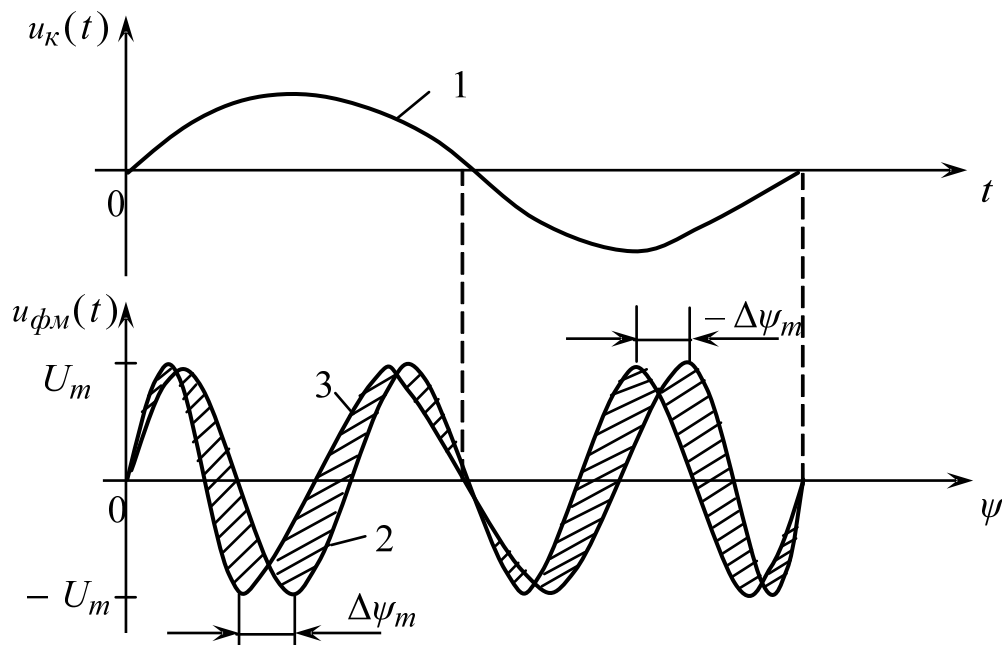


Рисунок 13.8 – Фазова модуляція: 1 – керуючий сигнал; 2 – не модульоване коливання; 3 – сигнал з фазовою модуляцією

У момент часу, коли сигнал  $u_k(t)$  досягає екстремальних значень, абсолютний фазовий зсув між ФМ сигналом і не модульованим гармонічним коливанням виявляється найбільшим. Граничне значення

цього фазового зсуву називають *девіацією фази*  $\Delta\psi_m$ . У загальному випадку, коли діє сигнал  $u_k(t)$ , поточне значення повної фази  $\psi(t) = \omega_0 t + k \cdot u_k(t)$ .

На векторній діаграмі зображуваний вектор сталої довжини буде обертатися з непостійною кутовою швидкістю. Миттєва частота  $\omega(t)$  сигналу з кутовою модуляцією визначається як перша похідна від повної фази за часом:

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}. \quad (13.10)$$

При *частотній модуляції* сигналу (ЧМ) між величинами  $u_k(t)$  та  $\omega(t)$  існує зв'язок вигляду:

$$\omega(t) = \omega_0 + k \cdot u_k(t). \quad (13.11)$$

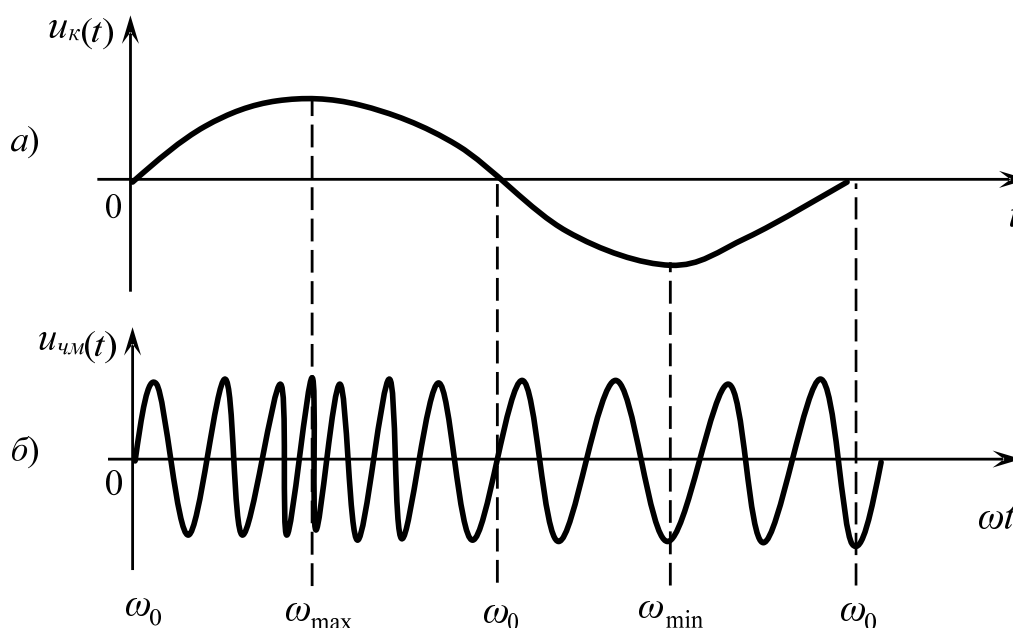


Рисунок 13.9 – Частотна модуляція: а) керуючий сигнал; б) ЧМ сигнал

Максимальне відхилення частоти від  $\omega_0$  називається *девіацією частоти*:

$$\Delta\omega_m = \omega_{\max} - \omega_0 = \omega_0 - \omega_{\min},$$

$$\Delta\omega_m = \frac{W_{\max} - W_{\min}}{2},$$

де  $\omega_0$  – частота немодульованого високочастотного коливання;  
 $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$  – найбільше і найменше значення частоти частотно-модульованого сигналу.

Якщо  $u_k(t)$  – достатньо гладка функція, то зовнішньочасові діаграми ЧМ і ФМ відрізнити неможливо (рис. 13.8 і 13.9). Однак є принципова різниця і про неї – трохи пізніше.

Для *однотонального сигналу з кутовою модуляцією* аналіз з математичної точки зору значно складніший, ніж дослідження АМ сигналу.

У випадку однотонального ЧМ сигналу миттєва частота

$$\omega(t) = \omega_0 t + \Delta\omega_m \cos\Omega t. \quad (13.12)$$

Повна фаза такого коливання

$$\psi(t) = \int_0^t w(t) dt = w_0 t + \frac{\Delta w_m}{\Omega} \sin \Omega t = w_0 t + M \sin \Omega t, \quad (13.13)$$

де  $M = \frac{\Delta w_m}{\Omega}$  – індекс частотної модуляції і являє собою девіацію фази такого сигналу, виражену у радіанах.

Отже, вираз для миттєвого значення ЧМ сигналу буде:

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + M \sin \Omega t). \quad (13.14)$$

Аналітична форма запису однотонального ФМ сигналу аналогічна:

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \Delta \psi_m \sin \Omega t).$$

Однак слід мати на увазі те, що ЧМ і ФМ сигнали поведуть себе по-різному при змінненні частоти модуляції і амплітуди модулюючого сигналу.

При частотній модуляції девіація частоти  $\Delta \omega_m$  пропорційна амплітуді низькочастотного сигналу. У той же час вона не залежить від частоти модулюючого сигналу. У випадку фазової модуляції її індекс модуляції виявляється пропорційним ще й частоті низькочастотного сигналу. Як наслідок цього, девіація частоти при фазовій модуляції відповідно до формули  $M = \frac{\Delta w_m}{\Omega}$  лінійно збільшується зі зростанням частоти.

### 13.7 Частотний спектр однотонального ЧМ сигналу при $M \ll 1$

Задачу про подання ЧМ сигналу сумою гармонічних коливань досить легко розв'язати, а для цього формулу (13.14) зведемо, за правилами тригонометрії, до такого вигляду:

$$u(t) = U_m \cos(M \sin \Omega t) \cdot \cos w_0 t - U_m \sin(M \sin \Omega t) \cdot \sin w_0 t. \quad (13.15)$$

Оскільки індекс частотної модуляції малий ( $M \ll 1$ ), скористаємося наближеними рівностями:

$$\cos(M \sin \Omega t) \approx 1; \quad \sin(M \sin \Omega t) \approx M \sin \Omega t.$$

На основі цього з рівності (13.15) отримуємо:

$$u(t) \approx U_m \cos w_0 t + \frac{MU_m}{2} \cos(w_0 + \Omega)t - \frac{MU_m}{2} \cos(w_0 - \Omega)t. \quad (13.16)$$

Таким чином, при  $M \ll 1$  у спектрі сигналу з ЧМ міститься несуче коливання та дві бічні складові (верхня і нижня) на частотах  $\omega_0 + \Omega$  та  $\omega_0 - \Omega$ . Індекс  $M$  відіграє таку саму роль, як і коефіцієнт амплітудної модуляції  $m$  у формулі (13.6).

Але виявляється і суттєва відмінність спектрів АМ і ЧМ сигналів. Для спектральної діаграми рис. 13.10, побудованої за формулою (13.16), характерне те, що нижнє бічне коливання має додатковий фазовий зсув на  $180^\circ$ .

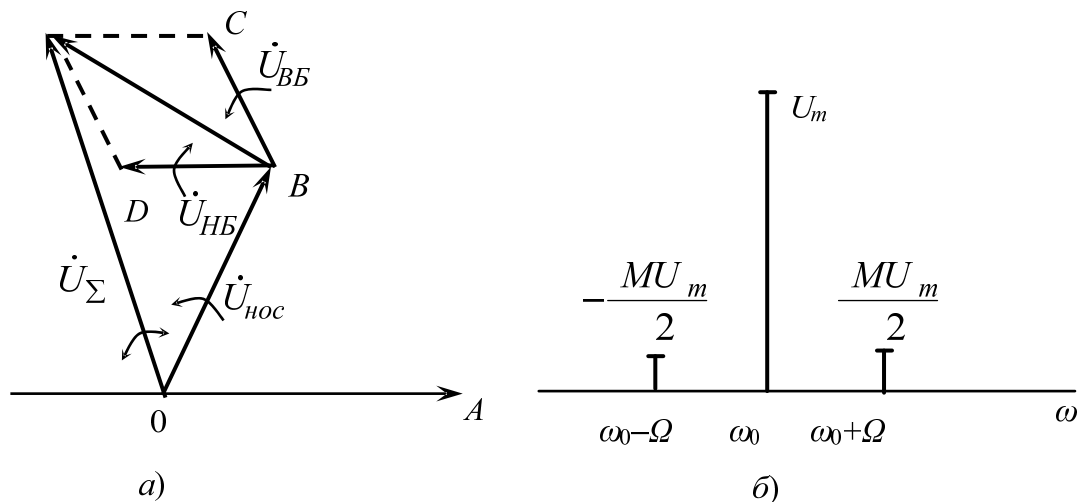


Рисунок 13.10 – Діаграми сигналу з ЧМ при  $M \ll 1$ : а) векторна; б) спектральна

Як наслідок цього, сума векторів, які відображають обидва бічні коливання (рис. 13.10, а), завжди перпендикулярна до вектора  $U_{нос}$ . З часом вектор  $U_{\Sigma}$  буде “коливатися” навколо центрального положення.

### 13.8 Частотний спектр одотонального ЧМ сигналу при довільному значенні індексу модуляції

Скористаємося виразом (13.14), справедливим при будь-якому значенні індексу частотної модуляції. Як бачимо, в даному виразі присутня функція  $\cos(\omega_0 t + M \sin \Omega t)$ , тобто матимемо справу (див. формулу 13.15) з функціями  $\cos(M \sin \Omega t)$  та  $\sin(M \sin \Omega t)$ , які не можна розписати у прийнятому для аналізу вигляді за допомогою лише тригонометрії.

У розділі курсу математики, присвяченому спеціальним функціям, показано, що тут допоможе тригонометричний ряд Бесселя, і тоді математична модель одотонально частотно-модульованого сигналу матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 u(t) = U_m [ & J_0(M) \cos \omega_0 t + J_1(M) \cos(\omega_0 + \Omega)t - J_1(M) \cos(\omega_0 - \Omega)t + \\
 & + J_2(M) \cos(\omega_0 + 2\Omega)t + J_2(M) \cos(\omega_0 - 2\Omega)t + \\
 & + J_3(M) \cos(\omega_0 + 3\Omega)t - J_3(M) \cos(\omega_0 - 3\Omega)t + \\
 & + J_4(M) \cos(\omega_0 + 4\Omega)t + J_4(M) \cos(\omega_0 - 4\Omega)t + \dots ], \quad (13.17)
 \end{aligned}$$

де  $J_0(M)$ ,  $J_1(M)$ ,  $J_2(M)$ , ... – функції Бесселя першого роду, відповідно нульового, першого, другого, ...  $n$ -го порядку від аргументу, яким є індекс ЧМ.

Значення функцій Бесселя подані у довідниках з математики у вигляді графіків (рис. 13.11) або таблиць (табл. 13.1).

Спектр однотонального ЧМ сигналу у загальному випадку містить нескінченне число складових, амплітуди яких пропорційні значенням  $J_k(M)$ , а частоти дорівнюють  $\omega_0 \pm k\Omega$ ; де  $k$  – порядок функції Бесселя.

Фази бічних коливань з частотами  $\omega_0 + k\Omega$  і  $\omega_0 - k\Omega$  збігаються, якщо  $k$  – парне число і відрізняються на  $180^\circ$ , якщо  $k$  – непарне.

Таблиця 13.1 – Значення функцій Бесселя  $J_k(M)$

$k \backslash M$	1	2	3	4	5
0	0,765	0,224	-0,260	-0,397	-0,178
1	0,440	0,577	0,339	-0,066	-0,328
2	0,115	0,353	0,486	0,364	0,047
3	0,020	0,129	0,309	0,430	0,365
4	0,002	0,034	0,132	0,281	0,391
5	$2 \cdot 10^{-4}$	0,007	0,043	0,132	0,261
6	$2 \cdot 10^{-5}$	0,001	0,011	0,049	0,131
7	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0,003	0,015	0,053

Як бачимо з табл. 13.1, чим більше значення порядку функції Бесселя  $k$ , тим більша довжина області аргументів, при яких ця функція дуже мала.

У цій таблиці відділена нижня область значень функції Бесселя, якими практично нехтують.

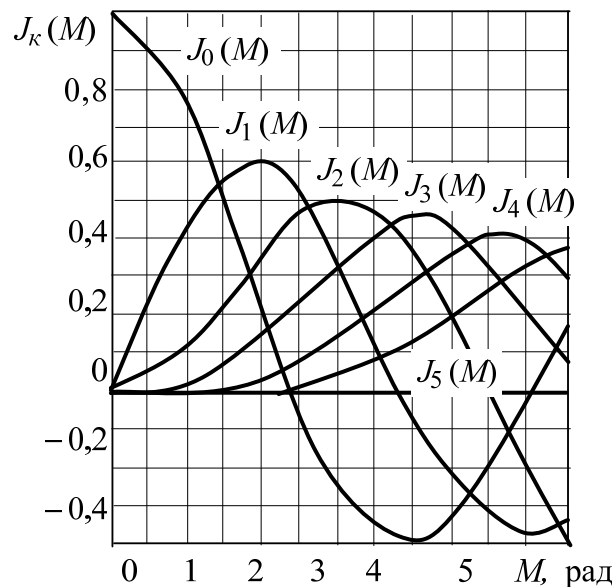


Рисунок 13.11 – Залежність функцій Бесселя від їх аргументу

Важливо зауважити, що зі зростанням індексу модуляції  $M$  розширюється смуга частот, яка займається сигналом. Зазвичай вважається, що допустимо нехтувати усіма спектральними складовими з номерами  $k > M + 1$ . Тобто, до уваги береться  $(M + 1)$  штук пар бічних складових, а практична ширина спектра сигналу:

$$\Delta\omega_{СП} = 2(M + 1) \cdot \Omega. \quad (13.18)$$

Реальні ЧМ і ФМ сигнали характеризуються умовою  $M \gg 1$ . У цьому випадку

$$\Delta\omega_{СП} \approx 2M\Omega = 2 \Delta\omega_m.$$

Таким чином, сигнал з кутовою модуляцією займає смугу частот, яка приблизно удвоє перевищує значення девіації частоти.

Як було показано, для передачі АМ сигналу потрібна смуга частот, рівна  $2\Omega$ , тобто у  $M$  разів менша. Велика широкосмуговість ЧМ і ФМ сигналів обумовлює їх використання для цілей радіозв'язку лише на досить високих частотах, в діапазонах метрових та більш коротких хвиль. Однак саме широкосмуговість призводить до значно більшої завадозахищеності сигналів з кутовою модуляцією у порівнянні з АМ сигналами.

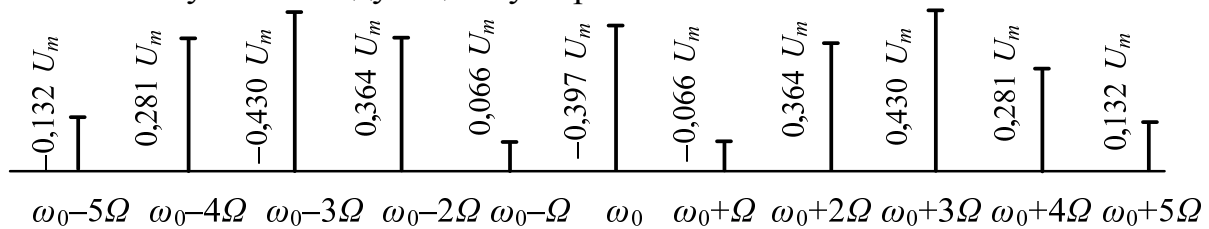


Рисунок 13.12 – Спектральна діаграма ЧМ сигналу з  $M = 4$

На рис. 13.12 подано спектральну діаграму сигналу з кутовою модуляцією при індексі  $M = 4$ . Відповідні дані щодо значень функції Бесселя взяті зі стовпця, де  $M = 4$ . Кількість пар бічних, які потрібно врахувати, дорівнює 5-ти.

**Задача:** визначити вираз для спектра ЧМ сигналу, коли індекс частотної модуляції = 4, амплітуда несучої  $U_m = 10$  В, її частота  $f_0 = 2$  МГц, а частота керуючого гармонічного сигналу  $F = 100$  кГц.

Оскільки число пар бічних складових дорівнює 5-ти, то, скориставшись табл. 13.1, знаходимо:

$$I_0(4) = -0,397; \quad I_1(4) = -0,066; \quad I_2(4) = 0,364; \\ I_3(4) = 0,430; \quad I_4(4) = 0,281; \quad I_5(4) = 0,132.$$

Скориставшись виразом (13.17) отримаємо:

$$u(t) = -3,97 \cos 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 t - 0,66 \cos 2\pi \cdot 2,1 \cdot 10^6 t + 0,66 \cos 2\pi \cdot 1,9 \cdot 10^6 t + \\ + 3,64 \cos 2\pi \cdot 2,2 \cdot 10^6 t + 3,64 \cos 2\pi \cdot 1,8 \cdot 10^6 t + 4,30 \cos 2\pi \cdot 2,3 \cdot 10^6 t - \\ - 4,30 \cos 2\pi \cdot 1,7 \cdot 10^6 t + 2,81 \cos 2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^6 t + 2,81 \cos 2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^6 t + \\ + 1,32 \cos 2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^6 t - 1,32 \cos 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^6 t.$$

### 13.9 Потужність сигналів з кутовою модуляцією

Як бачимо з таблиці 13.1, із зростанням індексу модуляції відбувається перерозподіл потужності у спектрі модульованого сигналу. Зокрема, якщо значення  $M$  вибране таким, що  $I_0(M) = 0$ , то складова несучої частоти  $\omega_0$  у спектрі буде відсутня, що сприяє ефективнішому використанню енергії для передачі інформації.

Таблиця 13.2 – Значення коренів рівняння  $I_0(M) = 0$

$M$	2,405	5,520	8,654	11,792	14,931	18,071	21,212
-----	-------	-------	-------	--------	--------	--------	--------

**Приклад.** Однотональний ЧМ сигнал має девіацію частоти  $\Delta f_m = 240$  кГц. Знайти частоти модуляції  $F$ , при яких несуче коливання у спектрі сигналу буде відсутнє.

Скористаємося формулою  $F = \Delta f_m / M$ . Взявши значення  $\Delta f_m$  з умови задачі, а  $M$  з таблиці 13.2, отримуємо:

$$F_1 = 240/2,405 = 99,792 \text{ кГц}, \quad F_2 = 240/5,520 = 43,474 \text{ кГц}, \text{ і т. д.}$$

### 13.10 Спектр коливання при змішаній амплітудно-частотній модуляції

У загальному вигляді сигнал зі змішаною амплітудно-частотною модуляцією запишеться таким чином:

$$u(t) = U_m(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = U_m(t) \cdot \cos\varphi(t) \cdot \cos\omega_0 t - U_m(t) \cdot \sin\varphi(t) \sin\omega_0 t = U_c(t) \cdot \cos\omega_0 t - U_s(t) \cdot \sin\omega_0 t, \quad (13.19)$$

де  $U_c(t) = U_m(t) \cdot \cos\varphi(t)$  та  $U_s(t) = U_m(t) \cdot \sin\varphi(t)$ .

Отже, визначення спектра зводиться до знаходження спектрів обвідних коливань.

Для наочності розглянемо випадок, коли обидва види модуляції здійснюються однією і тією ж модулюючою функцією. Для спрощення аналізу задамо цю функцію у вигляді гармонічного коливання  $\cos\Omega t$  для частотної модуляції і у вигляді  $\cos\Omega t$  або  $\sin\Omega t$  для амплітудної і розглянемо два випадки.

1. Обидві функції  $U_m(t)$  і  $\varphi(t)$  є парними відносно  $t$ :

$$U_m(t) = U_{m0}(1 + m\cos\Omega t); \quad \varphi(t) = M \cos\Omega t, \quad m < 1, \quad M \ll 1.$$

Тоді вираз (13.19) прийме вигляд:

$$u(t) = U_{m0}(1 + m\cos\Omega t) \cdot \cos[\omega_0 t + M\cos\Omega t].$$

Оскільки при  $M \ll 1$   $\cos(M\cos\Omega t) \approx 1$ ,  $\sin(M\cos\Omega t) \approx M\cos\Omega t$ , останній вираз можна переписати:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{m0}[(1 + m\cos\Omega t) \cdot \cos\omega_0 t - (1 + m\cos\Omega t) \cdot M\cos\Omega t \cdot \sin\omega_0 t] = \\ &= U_{m0}[(1 + m\cos\Omega t) \cdot \cos\omega_0 t - M\left(\frac{m}{2} + \cos\Omega t + \frac{m}{2}\cos 2\Omega t\right) \cdot \sin\omega_0 t] = \\ &= U_{m0} \left\{ \cos\omega_0 t + \frac{m}{2} [\cos(\omega_0 + \Omega)t + \cos(\omega_0 - \Omega)t] - \right. \\ &\quad \left. - M \left[ \frac{m}{2} \sin\omega_0 t + \frac{1}{2} \sin(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} \sin(\omega_0 - \Omega)t \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{mM}{4} [\sin(\omega_0 t + 2\Omega)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega)t] \right\}. \end{aligned}$$

Додаючи квадратурні складові  $\cos\omega_0 t$  та  $(mM/2) \cdot \sin\omega_0 t$ , отримуємо для амплітуди результуючого коливання на частоті  $\omega_0$  такий вираз:

$\sqrt{1+(mM/2)^2} \cdot U_{m0}$ . Аналогічно знаходимо амплітуду  $\frac{1}{2}\sqrt{M^2+m^2} \cdot U_{m0}$  для коливань з частотами  $\omega_0 \pm \Omega$  та  $(mM/4) U_{m0}$  для частот  $\omega_0 \pm 2\Omega$ . Спектр коливання  $u(t)$  поданий на рисунку 13.13, а. Він є симетричним.

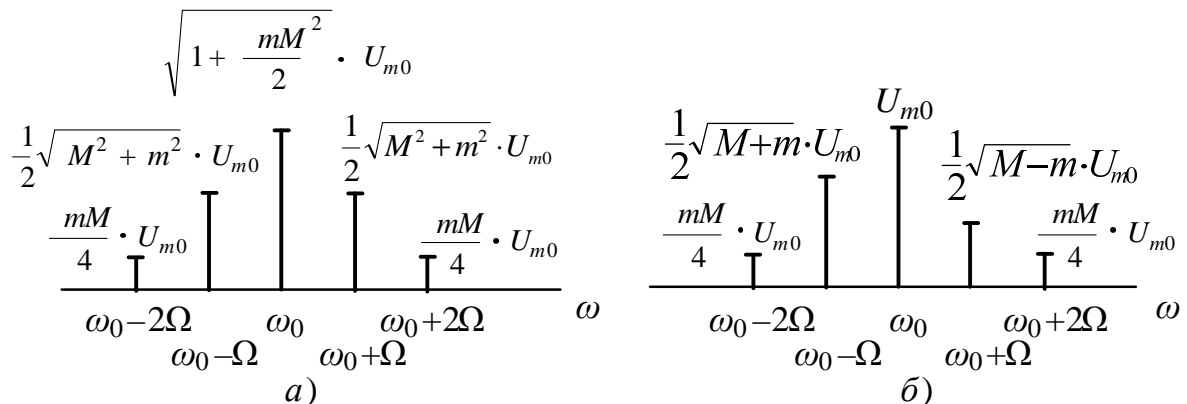


Рисунок 13.13 – Спектр коливання при одночасній модуляції амплітуди і частоти гармонічної функції

2. Функція  $U_m(t)$  є сумою парної і непарної складових, а  $\varphi(t)$  – парна:

$$U_m(t) = U_{m0}(1 + m \sin \Omega t); \quad \varphi(t) = M \cos \Omega t; \quad m \ll 1, \quad M \ll 1.$$

Викладки будуть аналогічними попередньому випадку і приведуть до таких амплітуд:  $U_{m0}$  при частоті  $\omega_0$ ;  $\frac{1}{2}\sqrt{M-m} \cdot U_{m0}$  при частоті  $\omega_0 + \Omega$ ;  $\frac{1}{2}\sqrt{M+m} \cdot U_{m0}$  при частоті  $\omega_0 - \Omega$ ;  $mM/4$  при частотах  $\omega_0 \pm 2\Omega$ .

Спектральна діаграма зображена на рис. 13.13, б.

Симетрія спектра порушується у даному прикладі через неоднаковість амплітуд коливань верхньої  $\omega_0 + \Omega$  та нижньої  $\omega_0 - \Omega$  бічних частот.

Порушення симетрії спектра при змішаній амплітудно-частотній модуляції інколи використовується як показник неправильності роботи пристрою, який здійснює амплітудну модуляцію; перекося спектра вказує на те, що корисна амплітудна модуляція супроводжується паразитною кутовою модуляцією.

### Запитання та задачі для закріплення

1. Що таке радіосигнал? Наведіть три приклади радіосигналів.
2. Які види модуляції існують? Записати узагальнені математичні моделі АМ, ЧМ та ФМ сигналів.
3. Який АЧС має найпростіший амплітудно-модульований сигнал?
4. Пояснити будову АЧС складного АМ сигналу.
5. Записати математичну модель найпростішого ЧМ сигналу при  $M > 1$ . Яка його ширина спектра?
6. Потужності АМ та ЧМ сигналів.
7. Дати порівняльну характеристику АМ і ЧМ сигналу.
8. Імпульсно-модульовані сигнали. Їх спектри та параметри.



## 14 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

### 14.1 Поняття про перехідні процеси

В усіх попередніх розділах розглядалися випадки, у яких виконувались дві умови: 1) джерела були підімкнені до кола теоретично нескінченно довго; 2) ніяких змін у стані кола не відбувалось. Режими роботи за таких умов називаються *усталеними*, *вимушеними* або *примушеними*. При інших режимах, які вивчаються у цьому розділі, закони, яким підлягають струми і напруги, виявляються зовсім іншими, ніж закони усталених режимів. Отже, говорячи про напруги, струми, опори чи будь-які інші параметри кола, необхідно завжди чітко уявляти, про роботу у якому режимі йдеться – у режимі усталеному чи у якомусь іншому.

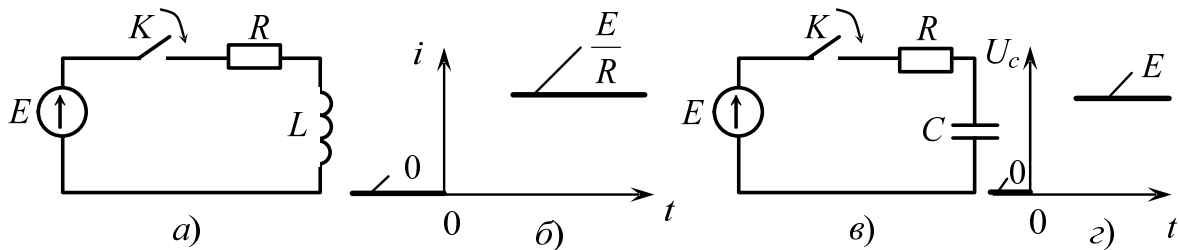


Рисунок 14.1 – Ілюстрація до поняття усталеного і перехідного режимів

Нехай маємо коло рис. 14.1, а, до якого підмикається джерело постійної напруги з е. р. с.  $E$ . До замикання ключа  $K$  струм у колі був рівним нулю, а через деякий достатньо великий час після замикання ключа струм у колі стає  $I = E/R$  (опір котушки постійному струму, як відомо, дорівнює нулю) (рис. 14.1, б). Отже, після замикання ключа струм за деяким законом змінюється від нуля до  $E/R$ , яке є усталеним значенням цього струму. Аналогічно і у колі рис. 14.1, в до замикання ключа напруга на конденсаторі дорівнювала нулю, а через певний час після замикання ключа  $K$ , змінилася за деяким законом до значення  $E$ , яке є усталеним значенням цієї напруги (рис. 14.1, з). Змінення струму через котушку  $L$  та напруги на конденсаторі  $C$  від початкового до кінцевого значень відбувалось протягом певного відрізка часу. Протягом часу, поки струми та напруги на усіх елементах змінюються від початкових значень, які вони мали у попередньому усталеному режимі роботи кола (до замикання ключа  $K$ ), до кінцевих значень, які мають через певний інтервал часу (після замикання ключа  $K$ ) у теперішньому усталеному режимі, кола знаходились у *режимі перехідного процесу* (у *перехідному режимі*).

Введемо поняття: *комутація*. Під *комутацією* розуміється відімкнення, ввімкнення, перемикання джерел, будь-яких елементів кола чи раптове змінення їх параметрів (закритий транзистор відкрився до насичення чи навпаки, електронне реле підімкнуло чи відімкнуло резистор,

раптово пробився конденсатор і т. ін.). Імпульсні схеми, наприклад, працюють лише у перехідних режимах, де вони є природними для таких пристроїв.

Будь-яка комутація веде за собою перерозподіл напруг і струмів у колі, тобто супроводжується перехідними процесами. Після будь-якої комутації режим роботи у колі, на деякий час, стає перехідним. Перехід до нового усталеного режиму (стану) відбувається протягом певного часу – *тривалості перехідного процесу*.

#### 14.2 Неперервність енергії. Закони комутації

У багатьох випадках тіла чи системи здатні накопичувати енергію. Наприклад, рухоме тіло має запас кінетичної енергії  $W_K = mv^2/2$ , заряджений конденсатор має енергію електричного поля  $W_e = CU_m^2/2$ , енергія магнітного поля котушки індуктивності  $W_M = LI_m^2/2$ . Потужність  $P$ , як відомо, визначається як змінення енергії за одиницю часу  $W = \Delta W / \Delta t$ . Очевидно, що будь-яке змінення енергії на скінченну величину  $\Delta W$  за нескінченно малий час ( $\Delta t = 0$ ) потребує джерела нескінченно великої потужності, бо  $\Delta W / 0 = \infty$ . Оскільки джерел нескінченно великої потужності у природі не існує, то ні у якій системі ніяка енергія ніколи не може змінюватись стрибком, тобто на скінченну величину за нульовий відрізок часу. Тому стрибком не може змінюватись енергія електричного поля конденсатора і енергія магнітного поля котушки. Але енергія у конденсаторі визначається напругою  $U_m$  між його обкладинками ( $CU_m^2/2$ ), енергія у котушці – струмом, що протікає через котушку ( $LI_m^2/2$ ). Отже, *напруга на конденсаторі і струм у котушці не можуть змінюватись стрибкоподібно*, тобто за нескінченно малий час, оскільки для цього знову-таки знадобилося б джерело нескінченно великої потужності.

Оскільки носієм енергії у конденсаторі є напруга, а не струм (енергія електричного поля зарядженого конденсатора  $W_e$  залежить від напруги і ємності конденсатора), тому змінення струму у конденсаторі не веде за собою змінення енергії, тобто *струм у конденсаторі може змінюватись стрибкоподібно*. Оскільки носієм енергії у котушці індуктивності є струм, а не напруга (енергія магнітного поля котушки  $W_m$  залежить від струму і індуктивності котушки), тому змінення напруги на котушці не веде за собою змінення енергії, тобто *напруга на котушці може змінюватись стрибкоподібно*.

Виникає питання, чи може у конденсаторі струм, а у котушці напруга змінюватись стрибком, бо ж хіба змінення струму у конденсаторі не веде за собою змінення напруги, а змінення напруги на котушці – змінення струму? Відповімо на ці запитання, нагадавши, що форми напруги і струму (закони їх змінення) повторюють одна одну тільки у єдиному випадку – в

резистивних елементах, оскільки вони не накопичують енергію. Але в елементах, які накопичують енергію, при напрузі однієї форми, у загальному випадку, виявляється струм зовсім іншої форми. Таким чином, змінення струму у конденсаторі може зовсім не змінити напругу, а отже і енергію у конденсаторі, тому стрибкоподібному зміненню струму у конденсаторі ніщо не чинить опору. Аналогічна ситуація має місце і у котушці з напругою.

Введемо поняття  $t = -0$  та  $t = +0$ . Під моментом  $t = -0$  будемо розуміти останній момент перед комутацією, а під моментом  $t = +0$  – перший момент часу після комутації.

Що стосується математики, розрізнити значення “ $-0$ ” та “ $+0$ ” неможливо, але ми їх ввели, щоб відрізнити значення напруг і струмів у ці моменти, пам’ятаючи, що у момент  $t = +0$  у колі починається перехідний процес, коли опори деяких елементів різко змінюються, еквівалентна схема набуває зовсім іншого вигляду, усі закони вимушених режимів стають недійсними, а коло починає підлягати законам перехідних процесів.

Узагальнюючи усе сказане, тепер можемо сформулювати два правила, які називаються законами комутації.

1. У колі з конденсатором напруга на ньому зміниться стрибком не може. Значення цієї напруги у останній момент перед комутацією ( $t = -0$ ) дорівнює її значенню у перший момент після комутації ( $t = +0$ ).

2. У колі з котушкою індуктивності струм через неї зміниться стрибком не може. Значення цього струму у останній момент перед комутацією ( $t = -0$ ) дорівнює його значенню у перший момент після комутації ( $t = +0$ ).

### 14.3 Увімкнення котушки індуктивності на постійну напругу

#### *Рівняння перехідного струму*

Хронологію подій, пов’язаних з перехідним процесом, можна зобразити рисунком:



У момент  $t = -0$  закінчується один усталений режим роботи кола, у момент  $t = +0$  починається перехідний процес і коло знаходиться у перехідному режимі. У момент  $t = t_{\Pi}$  коло перейшло в інший усталений режим роботи. Інтервал часу від  $t = 0$  до  $t = t_{\Pi}$  є тривалістю перехідного процесу.

Під час перехідного процесу, навіть при джерелах постійної напруги, усі струми і напруги у колі змінюються від одних значень до інших і є, таким чином, величинами змінними. Отже, складати будь-які рівняння можна тільки для миттєвих значень напруг і струмів. Поняття діючих значень у перехідних режимах просто втрачає свій зміст і тому використаними не можуть бути.

Звернемося до рис. 14.1, *a* і запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень напруг у колі для стану, у який входить коло у момент  $+0$ , тобто після замикання ключа  $K$  (комутації):

$U_R + U_L = E$ , де  $U_R = R \cdot i$ ,  $U_L = L \frac{di}{dt}$  – миттєві значення напруг на резисторі і котушці індуктивності при протіканні перехідного струму з миттєвим значенням  $i(t) = i$ . Отже:

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} = E$$

і є те рівняння, розв'язавши яке ми отримаємо закон, за яким змінюється струм у колі під час перехідного процесу. Розділивши це рівняння на  $L$ , отримаємо:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}. \quad (14.1)$$

Даний вираз – це лінійне диференціальне рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами і ненульовою правою частиною. З курсу математики відомо, що загальним розв'язком такого (неоднорідного) рівняння є сума двох розв'язків – загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

описує вільний процес (без примусової сили з боку джерела е. р. с.  $E$ ). Розв'язком цього рівняння буде так званий вільний струм у колі  $i_g$ .

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (14.1) – це усталений струм  $i_y$ , який буде протікати у колі після закінчення перехідного процесу. Цей струм буде постійним, а тому у рівнянні (14.1) треба покласти  $di/dt = 0$ , яке перепишеться так:

$$\frac{R}{L} i_y = \frac{E}{L}; \text{ або } i_y = \frac{E}{R}. \quad (14.2)$$

Цей результат підтверджується простими міркуваннями: оскільки індуктивний опір котушки постійному струму дорівнює нулю, то струм у колі буде обмежуватися лише опором резистора  $R$ .

Перепишемо однорідне диференціальне рівняння, як таке, що описує вільний струм у колі, таким чином:

$$\frac{di_g}{dt} + \frac{R}{L}i_g = 0. \quad (14.3)$$

Розділимо змінні у цьому рівнянні:

$$\frac{di_g}{dt} = -\frac{R}{L}i_g; \quad \frac{di_g}{i_g} = -\frac{R}{L} \cdot dt$$

і проінтегруємо його:

$$\int \frac{di_g}{i_g} = -\int \frac{R}{L} dt; \quad \ln i_g = -\frac{R}{L} \cdot t + \ln A,$$

де  $\ln A$  – довільна стала інтегрування, значення якої визначимо трохи пізніше.

Після перенесення  $\ln A$  у ліву частину і потенціювання отримаємо:

$$i_g = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

де  $\tau = \frac{L}{R}$  – називається сталою часу  $RL$  кола.

Таким чином, сума  $i = i_g + i_y$  є перехідним струмом у досліджуваному колі:

$$i = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{R}.$$

Значення постійної інтегрування  $A$  отримуємо, виходячи з 1-го закону комутації, який стверджує, що струм через котушку  $i(-0) = i(+0) = i(0) = 0$ . Підставивши  $i = 0$  та  $t = 0$  у останнє рівняння, отримаємо:

$$A = -\frac{E}{R}.$$

Тоді рівняння перехідного струму остаточно матиме вигляд:

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}). \quad (14.4)$$

### **Графік та тривалість перехідного процесу**

Таким чином, член  $E/R$  – вимушена (усталена) складова струму у колі, а член  $-(E/R)e^{-t/\tau}$  – вільна складова цього струму.

Побудуємо криві струмів  $i_y, i_\epsilon, i$  у колі (рис. 14.2). Визначимо час, через який перехідний процес закінчиться. Очевидно, що струм досягне свого усталеного значення тоді, коли вільна складова стане рівною нулю. Але множник  $e^{-t/\tau}$  стане рівним нулю через час  $t$ , рівний нескінченності. Отже, перехідний процес у колі з накопиченням енергії теоретично протікає необмежено тривалий час.

Пояснимо фізичний зміст сталої часу кола  $\tau$  (грецька літера, читається “тау”): стала часу – це такий відрізок часу, протягом якого вільна складова струму зменшиться у  $e = 2,72$  раза.

З даних таблиці 14.1 видно, що через час  $t = \tau$  значення струму  $i$  у колі досягає 63% від усталеного, через  $t = 3\tau$  – 95%, а через  $5\tau$  відрізняться від усталеного значення менше ніж на 1%. Таким чином, практично через інтервал часу тривалістю  $(3...5)\tau$  вважається, що перехідний процес закінчився.

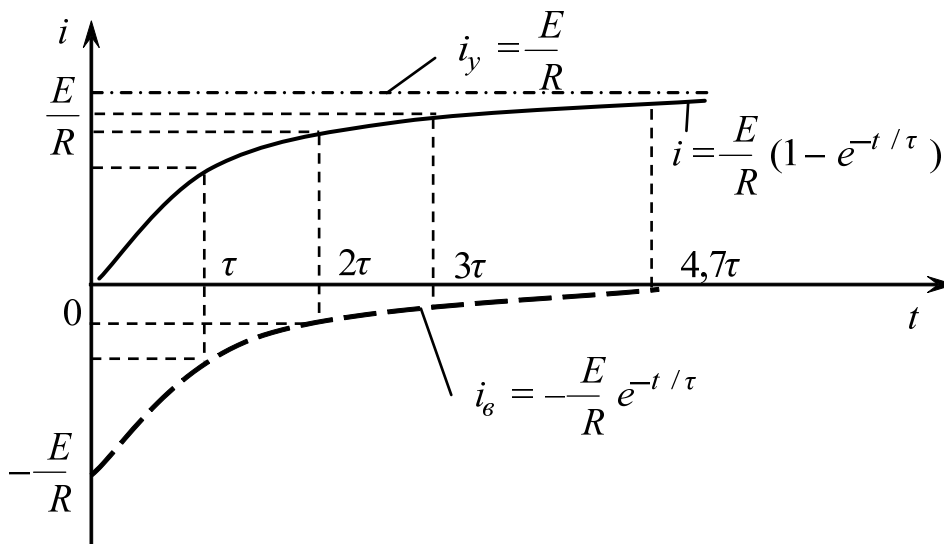


Рисунок 14.2 – Графіки переходного струму  $i$  та його складових  $i_\epsilon, i_y$

Таблиця 14.1 – Дані для побудови графіків рис. 14.2

$t$	$t$	$2t$	$3t$	$4t$	$5t$
$e^{-t/\tau}$	0,37	0,14	0,05	0,02	0,01
$1 - e^{-t/\tau}$	0,63	0,86	0,95	0,98	0,99

Стала часу визначається параметрами усіх елементів, які входять до кола, а не будь-якого одного елемента, тому вона є однією для усього кола, яким би складним це коло не було.

### **Напруги на резисторі і котушці індуктивності**

Визначимо закон змінення миттєвих напруг на резисторі  $R$  схеми рис. 14.1. Оскільки  $u_R = R \cdot i$ , то

$$u_R = R \frac{E}{R} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) = E(1 - e^{-t/\tau}). \quad (14.5)$$

Очевидно, що крива  $u_R = u_R(t)$  повторює криву  $i = i(t)$  у відповідному масштабі.

Визначимо закон змінення миттєвих значень напруги на індуктивному елементі, згадавши, що  $U_L = L di / dt$ ;

$$u_L = L \frac{d}{dt} \left[ \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \right] = L \left( -\frac{E}{R} \right) \left( -\frac{R}{L} \right) e^{-t/\tau} = E \cdot e^{-t/\tau}. \quad (14.6)$$

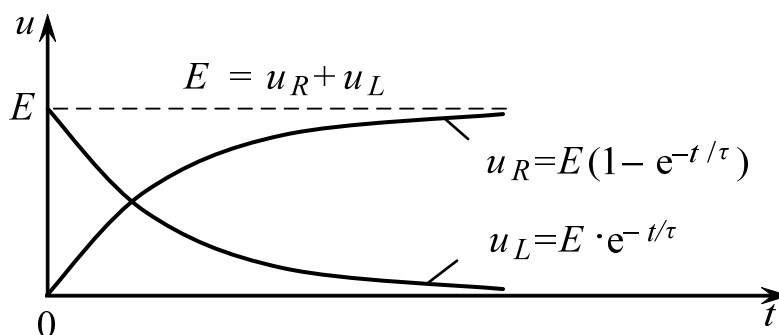


Рисунок 14.3 – Графіки змінення напруг у колі при переходному процесі

До моменту  $t = 0$  (рис. 14.3) ключ був розімкнений і напруги на котушці і на резисторі дорівнювали нулю. Починаючи з моменту  $t = +0$  справедливим стає рівняння (14.6), з якого видно, що при  $t = +0$  напруга  $u_L = E$ . Отже, після комутації (замикання ключа) напруга на котушці стрибком досягає значення  $E$ , а струм залишається без змін ( $i = 0$ ). Із збільшенням часу напруга на котушці зменшується і практично через  $(3...5)t$  стає рівною нулю. Струм у колі згідно з рівнянням (14.4) зростатиме, що викличе зростання і напруги на резисторі  $u_R$  за законом струму.

У будь-який момент часу алгебраїчна сума напруг на елементах кола має дорівнювати  $E$ . Пересвідчимося у цьому:

$$u_R + u_L = E(1 - e^{-t/\tau}) + Ee^{-t/\tau} = E - Ee^{-t/\tau} + E \cdot e^{-t/\tau} = E.$$

### **Опір котушки індуктивності у перехідний період**

Щоб визначити закон, за яким буде змінюватись опір котушки протягом перехідного процесу, застосуємо до цієї ділянки кола закон Ома для миттєвих значень напруги  $u_L$  та струму  $i$ , який протікає у котушці:

$$Z_L(t) = \frac{u_L}{i} = \frac{E \cdot e^{-t/\tau}}{\frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})} = \frac{R}{e^{t/\tau} - 1}. \quad (14.7)$$

При  $t = 0$ ,  $Z_L(0) = \frac{R}{1-1} = \frac{R}{0} = \infty$ ; при  $t = \infty$ ,  $Z_L(\infty) = \frac{R}{\infty} = 0$ .

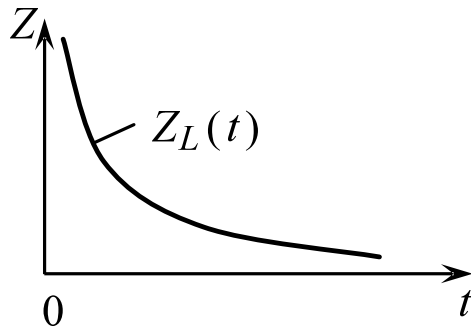


Рисунок 14.4 – Перехідний опір котушки індуктивності

Таким чином, опір котушки індуктивності поводить себе так. До замикання ключа, тобто до моменту  $t = -0$ , у колі маємо усталений режим, при якому індуктивний опір дорівнює нулю. Після замикання ключа у момент  $t = +0$  індуктивний опір зростає стрибком до нескінченності, а потім зменшується практично до нуля через  $(3...5)t$  за експоненціальним законом (рис. 14.4). У момент  $t = +0$  напруга джерела  $E$  розподіляється між  $R$  і  $L$  пропорційно опорам цих послідовно з'єднаних ділянок. Тому на нескінченно великому опорі буде уся напруга  $E$ , а на скінченному опорі резистора – нуль.

Слід ще раз нагадати, що властивості кола в усталеному режимі зовсім інші ніж під час перехідного процесу. Дійсно, опір котушки індуктивності постійному струму (усталений режим) дорівнює нулю, а протягом перехідного режиму змінюється від нескінченності до нуля.

Зауважимо, що електричне коло (рис. 14.1, а), яке містить один накопичувальний елемент  $R$ , котушку індуктивності  $L$ , є так званим  $RL$ -колом, процеси у якому описуються диференціальним рівнянням першого порядку, а тому це коло називається *колом першого порядку*.

#### 14.4 Увімкнення RC-кола на постійну напругу

##### *Рівняння перехідної напруги на конденсаторі*

Підімкнемо RC-коло до джерела постійної напруги (рис. 14.1, в). Після замикання ключа буде справедливим рівняння (другий закон Кірхгофа):

$$E = u_R + u_C = R \cdot i + u_C.$$

Оскільки у колі з конденсатором через резистор  $R$  буде протікати зарядний струм

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \text{ то } E = R \cdot C \frac{du_C}{dt} + u_C$$

або



$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}, \quad (14.8)$$

де  $t = RC$  – стала часу досліджуваного кола, а напруга на конденсаторі буде складатися з напруги вимушеної (усталеної) та вільної напруги, яка існує тільки протягом перехідного процесу. При  $t \rightarrow \infty$  перехідний процес закінчується, напруга на конденсаторі перестає змінюватись  $du_C/dt \rightarrow 0$ , струм заряду конденсатора спадає до нуля, спад напруги на резисторі  $R$  зменшується до нуля, а конденсатор стає зарядженим до постійної напруги джерела  $E$ .

Усталена складова напруги  $u_{Cy}$  буде знайдена з рівняння (14.8), де похідну  $du_C/dt$  слід покласти рівною нулю. Тоді

$$u_{Cy} = E. \quad (14.9)$$

Вільну складову напруги на конденсаторі  $u_{C\epsilon}$  знайдемо з рівняння (14.8), поклавши праву частину рівною нулю:

$$\frac{du_{C\epsilon}}{dt} + \frac{1}{RC}u_{C\epsilon} = 0,$$

з якого, після розділення змінних та інтегрування, отримаємо:

$$\ln u_{C\epsilon} = -\frac{1}{RC}t + \ln B.$$

або  $\ln \frac{u_{C\epsilon}}{B} = -\frac{t}{RC}$  і після потенціювання:

$$u_{C\epsilon} = B \cdot e^{-t/RC}. \quad (14.10)$$

Отже, перехідна напруга на конденсаторі  $u_C$  буде дорівнювати:

$$u_C = u_{Cy} + u_{C\epsilon} = E + Be^{-t/RC}. \quad (14.11)$$

Скориставшись другим законом комутації у момент  $t = +0$  напруга на конденсаторі дорівнює нулю і тоді:

$$0 = E + B, \quad B = -E.$$

Підставивши значення сталої інтегрування  $B$  у рівняння (14.11) остаточно отримаємо:

$$u_C = u_{Cy} + u_{C\epsilon} = E - Ee^{-t/RC},$$

$$u_C = E(1 - e^{-t/RC}). \quad (14.12)$$

### Зарядний струм та перехідний опір конденсатора

Після замкнення кола у момент  $t = +0$  з'явиться струм зарядження конденсатора  $i$ , який буде змінюватись за законом:

$$i = C \frac{du_c}{dt} = CE \frac{d}{dt}(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

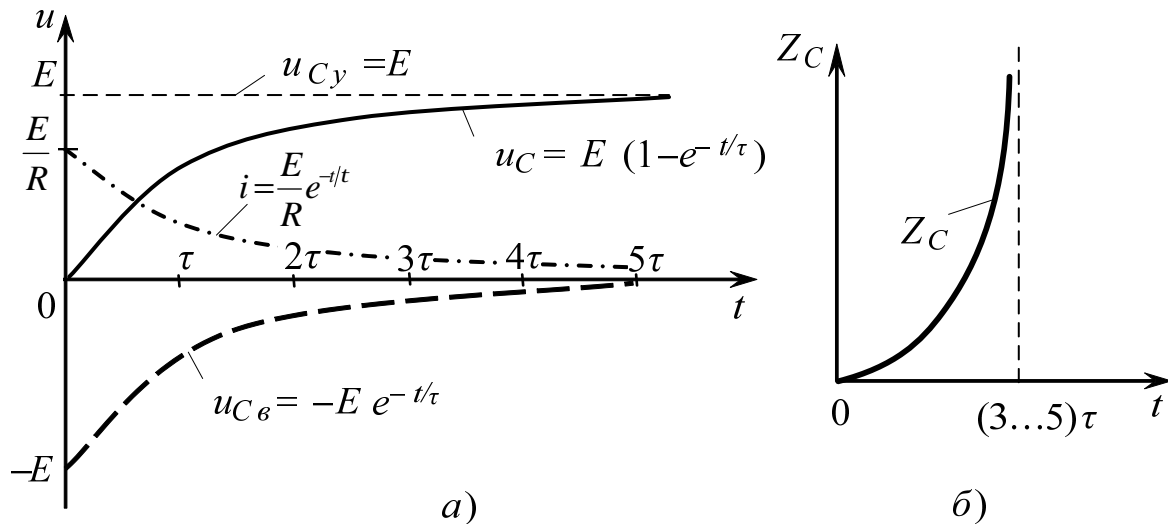


Рисунок 14.5 – Графіки перехідної напруги конденсатора: а) та перехідного опору конденсатора б)

Ємнісний опір конденсатора у перехідному режимі  $Z_C$  дорівнюватиме:

$$Z_C = \frac{u_C}{i} = \frac{E(1 - e^{-t/\tau})}{\frac{E}{R} \cdot e^{-t/\tau}} = R(e^{t/\tau} - 1). \quad (14.13)$$

Проаналізуємо вираз (14.13):

при  $t = 0$ ,  $Z_C(0) = R(e^0 - 1) = R(1 - 1) = 0$ ;

при  $t = \infty$ ,  $Z_C(\infty) = R(e^\infty - 1) = R \cdot \infty = \infty$ .

Таким чином, до замикання ключа ємнісний опір дорівнював нескінченності, у перший момент після комутації ( $t = +0$ ) він спадає до нуля, а потім практично через  $(3...5)t$  зростає до нескінченності. Вираз  $i = (E/R)e^{-t/\tau}$  також підкреслює ту обставину, що опір незарядженого (тільки незарядженого!) конденсатора у перший момент після комутації дорівнював нулю. Дійсно, при  $t = 0$ ,  $i = E/R$ , але струм у колі 14.1, в може бути таким тільки у тому випадку, якщо ніяких інших опорів, крім  $R$ , у колі нема, а, отже, ємнісний опір конденсатора у початковий момент перехідного процесу дорівнював нулю.

З іншого боку, повністю заряджений конденсатор (після закінчення перехідного процесу) як джерело напруги у колі є протилежним за полярністю і рівним за кількістю вольт відносно е. р. с.  $E$ . У результаті вони взаємно врівноважуються, через що струм у колі стає рівним нулю. Але струм у колі може бути відсутнім, коли зовнішня ділянка (відносно джерела  $E$ ) кола матиме нескінченно великий опір, а, оскільки, опір резистора має скінченне значення і залишається весь час незмінним, то нескінченно великий опір є лише на ділянці конденсатора.

Аналогічно,  $RC$ -коло також містить один накопичувальний елемент – конденсатор, процеси у ньому описуються диференціальним рівнянням першого порядку і тому воно теж називається *колом першого порядку*.

Важливим є те, що у колах першого порядку (наприклад, у розглянутих  $RL$ - та  $RC$ -колах) усі процеси: змінення напруг, струмів, опорів відбуваються за експоненціальними законами. Причому усі ці процеси не повторюються, тобто є неперіодичними. На відміну від цього для кіл другого порядку, які містять два накопичувачі енергії  $L$  і  $C$ , характерним є саме періодичність процесів, що потребує для аналізу більш складного математичного апарату.

### ***Розрядження конденсатора на резистор***

Нехай є конденсатор ємністю  $C$ , заряджений до напруги  $U_0$ . У момент  $t = 0$  замкнемо його на резистор з опором  $R$  і визначимо закон змінення миттєвих напруг на конденсаторі та резисторі після комутації (рис. 14.6).

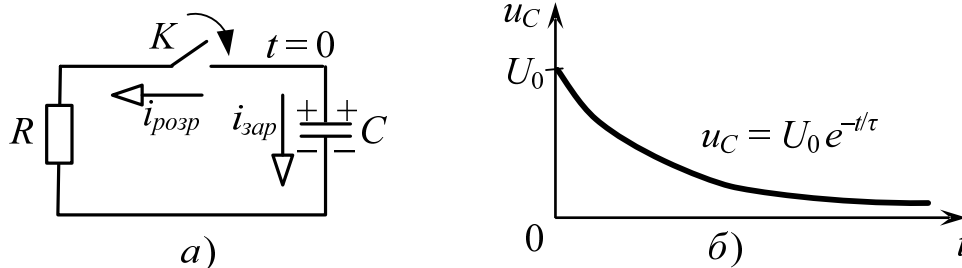


Рисунок 14.6 – Процес розрядження конденсатора: а) схема кола, б) графік розрядження

Позитивним у колі з конденсатором є струм, який збільшує заряд конденсатора. Цей струм спрямований до позитивно зарядженої пластини, записується зі знаком плюс, тобто  $i_{зар} = CdU_C / dt$ . Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа. Оскільки джерел у колі нема,  $u_C + u_R = 0$ , або  $R \cdot i + u_C = 0$ . Підставивши значення  $i_{розр}$  отримаємо:

$$-RC \cdot \frac{du_C}{dt} - u_C = 0$$

або

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0. \quad (14.14)$$

У цьому рівнянні права частина дорівнює нулю. Це говорить про те, що вимушене значення напруги на конденсаторі дорівнює 0, що повністю відповідає фізиці процесу. Дійсно, струм від зарядженого конденсатора зменшується і через час  $(3\dots 5)t$  його значення практично дорівнює нулю.

Розв'язавши рівняння (14.14) відносно  $u_C$ , з урахуванням того, що  $u_C(+0) = u_C(-0) = U_0$ , отримаємо:

$$u_C = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Закон змінення струму у колі рис. 14.6, а:

$$i_{\text{позр}} = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt}(U_0 e^{-t/\tau}) = -\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}. \quad (14.15)$$

Знак мінус показує, що розрядний струм конденсатора є протилежним зарядному і протікає від позитивно зарядженої пластини конденсатора через резистор  $R$  до негативно зарядженої пластини. Після розрядження енергія у конденсаторі дорівнює нулю.

Оскільки струм через опір весь час змінюється, визначимо енергію, яка розсіюється (у вигляді тепла) на резисторі за нескінченно малий час  $dt$ , а потім підсумуємо ці нескінченно малі енергії за весь час перехідного процесу.

Елементарна енергія за час  $dt$  дорівнює:

$$dW = i^2 \cdot R \cdot dt = \left( -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-t/\tau} \right)^2 \cdot R \cdot dt.$$

Енергія за весь час перехідного процесу:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} dW = \int_0^{\infty} \frac{U_0^2}{R^2} R \cdot e^{-2t/\tau} \cdot dt = \\ &= \frac{U_0^2}{R \left( -\frac{2}{RC} \right)} e^{-\frac{2}{RC}t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{CU_0^2}{2} e^{-\frac{2}{RC}t} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{CU_0^2}{2} (0 - 1) = \frac{CU_0^2}{2}, \end{aligned}$$

тобто, енергія, яка виділяється у резисторі з опором  $R$  після комутації, дорівнює енергії, яка була накопичена конденсатором до комутації.

### 14.5 Перехідні процеси у колах з $R$ , $L$ та $C$

Кола з  $R$ ,  $L$  та  $C$  відносяться до класу другого порядку, бо мають два накопичувачі енергії, вільні процеси у яких описуються диференціальними рівняннями другого порядку. Розглянемо спочатку вільні процеси, які протікають у нерозгалуженому колі, яке складається з котушки індуктивності  $L$ , конденсатора  $C$  та резистора  $R$  (рис. 14.7).

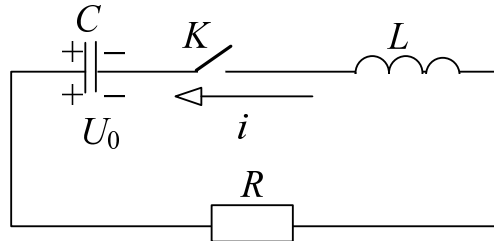


Рисунок 14.7 – Нерозгалужене  $RLC$ -коло

Нехай до комутації конденсатор  $C$  заряджений до напруги  $U_0$ .

Після замикання ключа утворюється коло, для якого справедливе рівняння  $u_L + u_R + u_C = 0$ , а після підстановки:  $u_R = R \cdot i$  та  $u_L = L di/dt$  з урахуванням, що  $i = C du_C / dt$ , це рівняння набуде вигляду:

$$L \frac{d}{dt} \left( C \frac{du_C}{dt} \right) + R \cdot C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

або

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Після ділення на  $LC$  отримаємо:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0. \quad (14.16)$$

Права частина отриманого рівняння дорівнює нулю, отже, процеси у колі відбуваються без зовнішніх впливів, а напруга на конденсаторі складається тільки із вільної складової, яку отримаємо, розв'язавши це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Відповідне йому характеристичне рівняння

$$k^2 + \frac{R}{L} k + \frac{1}{LC} = 0,$$

має такі два корені:

$$k_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}. \quad (14.17)$$

Загальний розв'язок рівняння (14.16) має вигляд:

$$U_C = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}. \quad (14.18)$$

При цьому можуть мати місце три випадки:

1.  $R^2 / 4L^2 < 1/LC$  або  $R < 2/\sqrt{LC}$ ,  $R < 2r$ ;
2.  $R^2 / 4L^2 > 1/LC$  або  $R > 2/\sqrt{LC}$ ,  $R < 2r$ ;
3.  $R^2 / 4L^2 = 1/LC$  або  $R = 2/\sqrt{LC}$ ,  $R = 2r$ ;

де  $R$  – активний опір (втрат);

$r$  – хвильовий (характеристичний) опір кола.

Якщо  $R < 2r$ , то коло називається колом з малим згасанням, якщо  $R > 2r$  – колом з великим згасанням.

Визначимо розмірність члена  $\sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{O_M^2 / \Gamma_H^2 - 1 / \Gamma_H \cdot \Phi} &= \sqrt{O_M^2 / O_M^2 \cdot c^2 - (1 / O_M \cdot c) \cdot (A \cdot c / A O_M)} = \\ &= \sqrt{1 / c^2 - 1 / c^2} = 1 / c. \end{aligned}$$

Розмірність  $1/c$  є розмірністю частоти  $\omega$ . Оскільки рівняння (14.18) описує вільні процеси у контурі, то отримана частота  $\omega$  є кутовою частотою вільних коливань, тобто коливань, які відбуваються у контурі, який не має зовнішнього джерела.

1. Коли  $(1/LC) > (R^2 / 4L^2)$ , підкореневий вираз є негативним і тоді:

$$\begin{aligned} \sqrt{(R^2 / 4L^2) - (1 / LC)} &= \sqrt{(-1)(1 / LC - R^2 / 4L^2)} = \\ &= j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = j \omega_g. \end{aligned}$$

де  $2L/R = t_K$  – є, як відомо, сталою часу контуру.

Тоді вираз (14.17) переписеться у вигляді:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{t_K} \pm j \omega_g. \quad (14.19)$$

Якщо у розв'язок (14.18) замість  $k_1$  і  $k_2$  підставити вираз (14.19), з граничних умов  $U_C(0) = U_C(-0)$  (через неможливість змінення напруги стрибком на конденсаторі) та  $i(0) = i(-0)$  (через неможливість змінення струму стрибком у котушці індуктивності), визначити сталі  $A_1$  та  $A_2$ , то після досить громіздких алгебраїчних перетворень, отримаємо:

$$u_C = U_0 e^{-t/t_K} \sin(\omega_g t + j), \quad (14.20)$$

де  $u_C$  – миттєва напруга на конденсаторі у довільний момент  $t$  після комутації;

$U_0$  – напруга на конденсаторі до комутації;

$\omega_0$  – кутова частота вільних коливань;

$j$  – початкова фаза вільних коливань, яка визначається з виразу

$$j = \omega_0 \cdot t_K.$$

Вираз (14.20) показує, що напруга на конденсаторі є “згасаючою синусоїдою” (рис. 14.8, а).

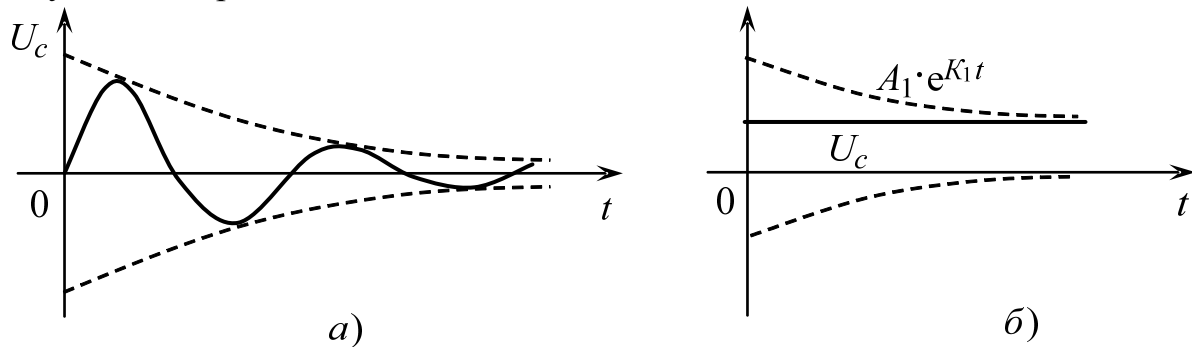


Рисунок 14.8 – Графік перехідних напруг: а) при малих, б) великих згасаннях

2. Коли  $(R^2 / 4L^2) > (1/LC)$  або  $R < 2r$ , то корені характеристичного рівняння виявляються дійсними і різними. Добротність кола при цьому  $Q < 0,5$ , а вільна складова змінюється за законом, близьким до експоненціального (точно:  $u_c = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$ ), де  $k_{12}$  – дійсні корені характеристичного рівняння (рис. 14.8, б).

3. Коли  $(R^2 / 4L^2) = (1/LC)$  або  $R = 2r$ , корені виходять дійсними і однаковими:  $k_1 = k_2 = 1/\tau_K$ . Добротність при цьому дорівнює 0,5; а режим називається критичним, тобто міжперіодичним (коливальним) при  $R < 2r$  і неперіодичним (неколивальним) при  $R > 2r$ .

### 14.6 Перехідні процеси в RLC-колі при дії на нього прямокутних відеоімпульсів

Розглянемо процеси у колі з RLC при дії на нього напруги прямокутної форми (рис. 14.9). Наявність джерела напруги прямокутної форми рівносильна підімкненню джерела постійної напруги без зміння опору кола. Напруга на конденсаторі при цьому складається з вимушеної і вільної напруг, тобто  $u_C = u_{C \text{ вим}} + u_{C \text{ в}}$ .

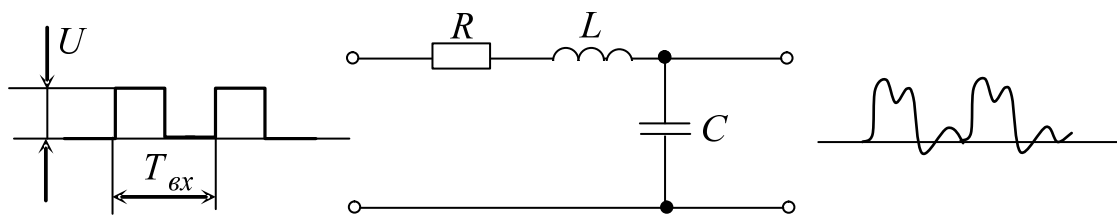


Рисунок 14.9 – Схема досліджуваних процесів

Оскільки у вимушеному режимі  $Z_L = 0$ ,  $Z_C = \infty$ , то  $i_{вим} = 0$ ,  $u_{R_{вим}} = u_{L_{вим}} = 0$ ,  $u_{C_{вим}} = U$ . Отже, вимушена складова напруги на конденсаторі повторює форму напруги діючого джерела і має також прямокутну форму. Але до вимушеної напруги додається вільна складова, яка має, як було показано вище, коливальний характер зі згасаючою амплітудою. Таким чином, якщо напруга на вході має форму, показану на рис. 14.10, а, то при малих згасаннях кола вихідна напруга буде відмінною від форми вхідної (рис. 14.10, б) напруги, тобто у колі з'являться спотворення, причому вони виявляються тим помітнішими, чим більша добротність кола. При збільшенні опору  $R$  добротність зменшиться, число вільних коливань та спотворення теж зменшаться.

Щоб форма вихідної напруги повторювала форму вхідної і спотворень не було (рис. 14.10, в), необхідно виконати умову  $R = 2r$ , режим у цьому випадку стає критичним.

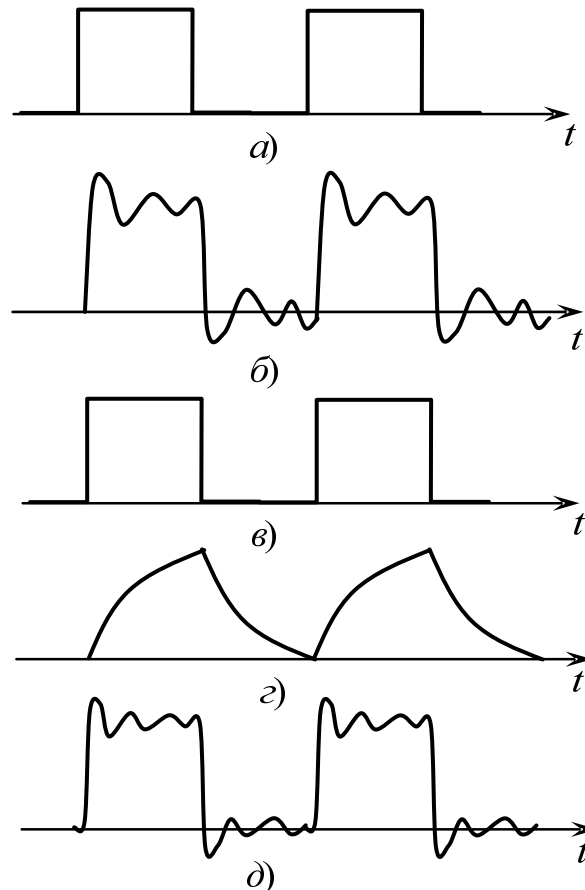


Рисунок 14.10 – Можливі форми вихідної напруги у  $RLC$ -колі (рис. 14.9)

При подальшому збільшенні опору  $R$  режим стає аперіодичним, вихідна напруга набуває форму рис. 14.10, з, спотворення знову збільшуються, але мають інший характер – не коливальний, як при великих добротностях, а форму “розтягнутих” фронтів.

Для забезпечення хорошої вибірності у вимушеному режимі контур повинен мати високу добротність. Але чим вища добротність, тим більші спотворення у перехідному режимі. Оскільки передавання інформації



відбувається переважно у перехідних режимах, то вибирати параметри кола для її якісного передавання, приходиться з міркувань малих спотворень.

Після крутих фронтів у вхідній напрузі у колі можуть виникати коливання, які продовжуються “контуром”, який складається з паразитної ємності та індуктивності з’єднувальних провідників (рис. 14.10, д). Ще можуть виникнути коливання у контурі, який складуть паразитна індуктивність та паразитна (монтажна) ємність. Ці коливання через малі значення паразитних параметрів будуть ще більш високочастотними.

#### 14.7 Перехідні процеси в $RLC$ -колі при дії на нього прямокутних радіоімпульсів

Повернемося до схеми рис. 14.9, на вході якої діятиме послідовність прямокутних радіоімпульсів з частотою заповнення  $\omega$ . Наявність джерела сигналу такої форми рівносильна підмиканню генератора гармонічної напруги з частотою  $\omega$  без зміни опору кола. Напруга на конденсаторі складатиметься з двох складових – вимушеної і вільної  $u_C = u_{C_{вим}} + u_{C_{в}}$ .

Вимушена складова є напругою з постійною амплітудою  $U_{C_m}$  і частотою  $\omega$ :  $u_{C_{вим}} = U_{C_m} \sin \omega t$ , вільна складова є напругою зі згасаючою амплітудою та частотою вільних (власних) коливань  $\omega_{в}$ :

$$u_{C_{в}} = -U_{C_m} e^{-t/\tau} \sin \omega_{в} t.$$

Знак “мінус” у цьому виразі означає, що у момент  $t = 0$ , згідно з другим законом комутації:

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 0,$$

тобто, вільна складова є гармонічною напругою, зсунутою відносно вимушеної складової на  $180^\circ$ , завдяки чому у перший момент перехідного режиму сума:

$$u_{C_{вим}}(0) + u_{C_{в}}(0) = 0.$$

Розглянемо два випадки: перший, коли частота генератора (вимушених коливань)  $\omega$  дорівнює частоті власних коливань контуру; другий, коли ці частоти – не рівні між собою.

1. Частота  $\omega = \omega_{в}$  (випадок настроєного контуру). Тоді напруга на конденсаторі:

$$u_C = U_{C_m} (1 - e^{-t/\tau}) \cdot \sin \omega_{в} t,$$

тобто, амплітуда гармонічних коливань на конденсаторі буде наростати за експоненціальним законом (рис. 14.11, б) до практичного закінчення

перехідного процесу у момент  $t_1$ . Уявна лінія (пунктирна), яка з'єднує амплітудні значення коливань, називається **обвідною**. До моменту  $t_2$  у контурі буде коливальний процес зі сталою амплітудою  $U_{Cm}$  і частотою вільних коливань  $\omega = \omega_0$ . Момент  $t_2$  рівноцінний моменту відмикання джерела від кола. У колі протікатимуть вільні коливання  $u_C = -U_{Cm}e^{-t/\tau} \sin \omega_0 t$ , які через  $(3...5)\tau$  згаснуть до нуля у момент  $t_3$ .

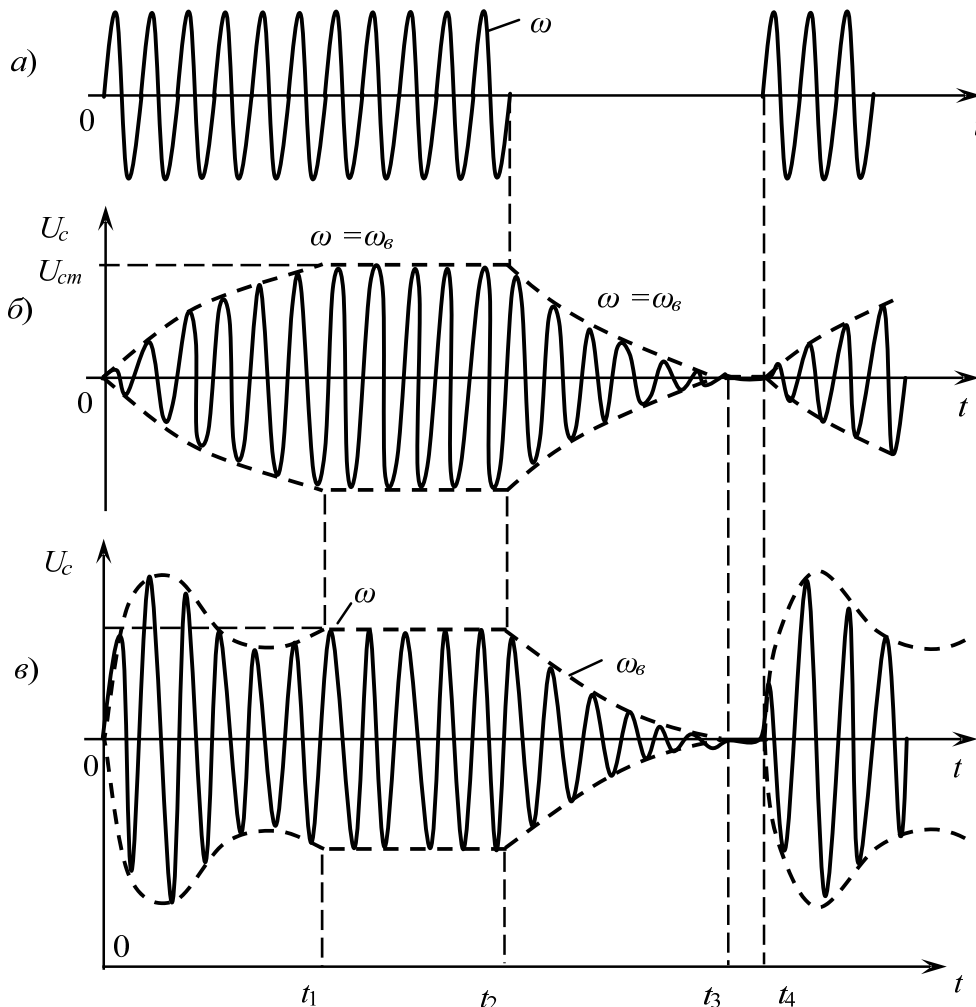


Рисунок 14.11 – Форми вихідної наруги в  $RLC$ -колі при дії на вході радіоімпульсу

2. Частота  $w \neq w_0$  (випадок розстроеного контуру). У цьому випадку результуюча напруга на конденсаторі:

$$u_C = U_{Cm} \sin wt - U_{Cm} e^{-t/\tau} \sin w_0 t.$$

Коли частоти  $w$  і  $w_0$ , будуть близькими, що як раз і зустрічається у радіотехнічній практиці, то у колі виникнуть биття (рис. 14.11,в). Обвідна буде низькочастотною (з частотою  $(w - w_0)/2$ ), згасаючою до нуля гармонікою за час  $t_1 = (3...5)\tau$  і з частотою  $(\omega + \omega_0)/2$ . На інтервалі часу  $t_1...t_2$

у контурі будуть тільки вимушені коливання з частотою  $\omega$  і амплітудою  $U_{cm}$ . У момент  $t_2$  примусова сила зникає і контур переходить у режим вільних згасаючих коливань ( $t_3 - t_2 = (3...5)t$ ) з частотою  $\omega_0$ .

На практиці часто приходиться зустрічатися з випадками, коли радіоімпульс діє послідовно на декілька однакових коливальних контурів. Прикладом такої системи може бути резонансний підсилювач коливань високої частоти. У ньому коливальні контури розділені електронними приладами (наприклад, транзисторами) і практично не мають безпосереднього зв'язку між собою. Тому можна говорити про послідовне проходження радіоімпульсу через перший, потім другий, третій і т. д. коливальні контури. При цьому, якщо на перший контур діє прямокутний імпульс, то на другий – імпульс з обвідною, яка має експоненціальний характер фронтів. Спотворення імпульсу із проходженням через нові контури зростають. Змінення форми обвідної у цьому випадку ілюструється рис. 14.12.

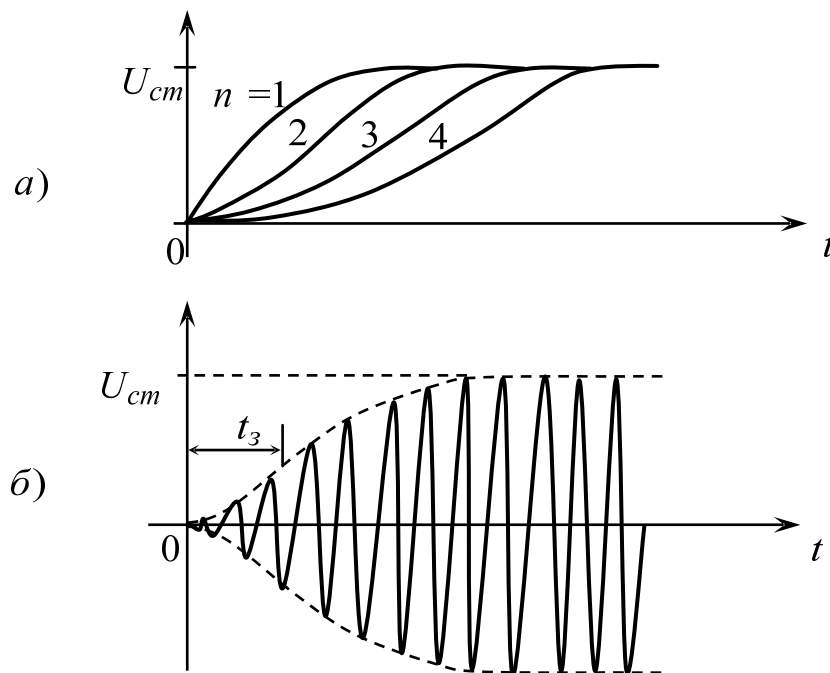


Рисунок 14.12 – Вид обвідної: а) на виході першого, другого і т. д. контурів, б) напруги на виході другого контуру

Як бачимо, спостерігається ніби запізнення обвідної (так зване *групове запізнення*), яке зростає із віддаленням від входу системи. Визначаючи час запізнення  $t_3$  як інтервал між моментом початку дії імпульсу на вході системи і моментом, у який крутість обвідної досягає максимального значення, можна отримати таке співвідношення:

$$t_3 = \frac{n-1}{n \cdot \Delta f_{np}},$$

де  $n$  – порядковий номер контуру, починаючи з другого;

$\Delta f_{np}$  – смуга пропускання кожного контуру;

$t_3$  – час запізнення сигналу на виході  $n$ -го контуру.

Запізнення сигналу визначається величиною фазових зсувів, які набувають гармонічні складові сигналу у кожному з контурів. Ці разові зсуви додаються, що призводить до зростання часу запізнення зі збільшенням числа контурів. Розширення смуги пропускання (зниження добротності) супроводжується зменшенням фазових зсувів у кожному контурі, а, отже, і часу запізнення. Таким чином, ширина смуги пропускання вирішально впливає на змінення форми радіосигналу при проходженні його через коливальну систему і на величину часу групового запізнення. Розширення смуги пропускання сприяє зменшенню спотворень обвідної і часу її запізнення.

#### 14.8 Одична функція та перехідна характеристика кола

Одичною функцією (функцією Хевісайда) (Heaviside function) називається стрибкоподібне змінення напруги від 0 до 1 (рис. 14.13, *a*). Одичну функцію позначають  $s(t)$  або  $1(t)$ . Фізично підімкнення кола до джерела постійної напруги 1 В є дія у вигляді одичної функції. Наприклад, якщо у колах рис. 14.1 чи рис. 14.7 вхідну напругу  $E$  покласти рівною 1 В, то замикання ключа і є підімкненням кола до джерела з одичним значенням, тобто подання одичної функції. Строго кажучи, слід говорити “Підімкнути коло до джерела з дією у вигляді одичної функції”, проте на практиці кажуть коротше: “Подати одичну функцію”, “Підімкнути одичну функцію” і т. ін.

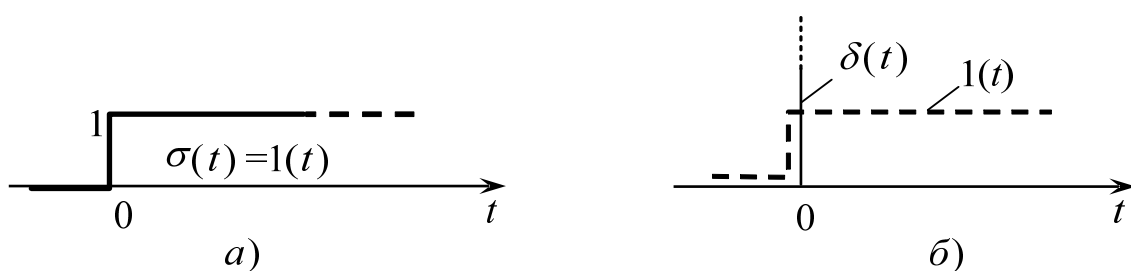


Рисунок 14.13 – Графіки функцій: *a*) одичної, *б*) імпульсної

Усі ці стилістичні спрощення означають підімкнення кола до джерела постійної напруги зі значенням 1 В (чи будь-яким іншим значенням, прийнятим за одиницю). Таким чином одична функція у часовому вигляді записується  $s(t) = 1$ .

Перехідною характеристикою кола за напругою  $h(t)$  називають закон, за яким змінюється вихідна напруга кола при одичній функції на вході. Отже, щоб визначити перехідну характеристику кола, слід будь-

яким чином розрахувати вихідну напругу при підімкненні кола до постійної напруги зі значенням  $U$ , а потім прийняти цю напругу рівною 1.

**Приклад.** Визначити перехідну характеристику кола рис. 14.14, а).

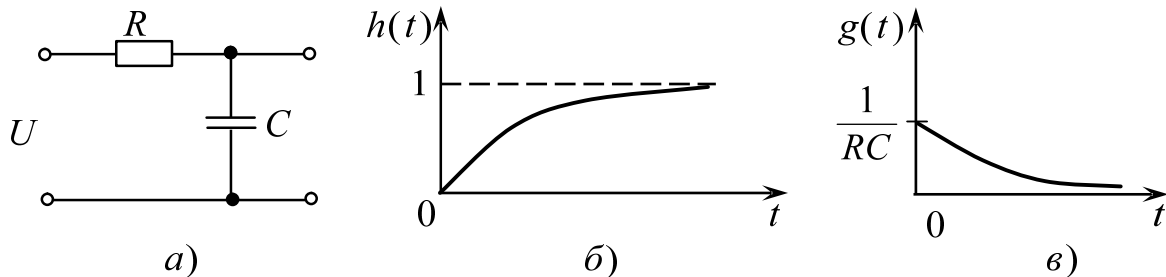


Рисунок 14.14 – Визначення перехідної характеристики кола: а) схема кола, б) перехідна характеристика, в) імпульсна характеристика

При підімкненні даного кола до постійної напруги  $U$  вихідна напруга  $u_C$  визначається, як було з'ясовано раніше, з виразу:

$$u_C = U(1 - e^{-t/RC}).$$

Якщо покласти  $U = 1$ , то вийде перехідна характеристика

$$h(t) = 1 - e^{-t/RC}.$$

### 14.9 Імпульсна функція та імпульсна характеристика кола

Імпульсною функцією (дельта-функцією)  $d(t)$  називається похідна у часі від одиничної функції, тобто

$$d(t) = \frac{dS(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[1(t)].$$

Розберемось у формі дельта-функції. До моменту 0 одинична функція дорівнювала нулю, похідна, а отже і імпульсна функція, також дорівнювала нулю. У момент  $t = 0$  одинична функція стрибком змінює своє значення, при цьому дотична до  $S(t = 0)$  є перпендикулярною до осі абсцис, а тангенс кута її нахилу відповідно дорівнює нескінченності. Дельта-функція набуває нескінченно великого значення. Але через нескінченно малий час тангенс кута нахилу знову зменшується до нуля, отже, через  $\Delta t = 0$  дельта-функція спадає до нуля (рис. 14.13, б).

Підрахуємо площу  $d$ -функції. Оскільки  $d(t) = d[1(t)]/dt$ , то:

$$\int d(t) \cdot dt = 1,$$

що є цілком зрозумілим, виходячи зі зв'язку між  $S(t)$  та  $d(t)$ .

Таким чином, імпульсна функція – імпульсний сигнал з нескінченно великою амплітудою, нескінченно малою тривалістю та площею, рівною 1.

Імпульсна характеристика кола  $g(t)$  зображає закон змінення вихідної напруги, якщо напруга на вході зображає імпульсну функцію  $d(t)$ .

Оскільки імпульсна функція – похідна у часі від одиничної функції, то імпульсна характеристика кола  $g(t)$  – похідна у часі від перехідної характеристики  $h(t)$  тобто

$$g(t) = \frac{d}{dt}[h(t)].$$

**Приклад.** Визначити імпульсну характеристику кола рис. 14.14, *a*. На вході кола діє дельта-функція, вона породжує на виході напругу, закон змінення якої і є імпульсною характеристикою, яка дорівнює:

$$g(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-t/RC}) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}.$$

На рис. 14.14, *б, в* зображені графіки перехідної та імпульсної характеристики для кола рис. 14.14, *a*.

### **Запитання та задачі для закріплення**

1. Що таке перехідний процес?
2. Сформулюйте 1-й та 2-й закони комутації.
3. Зобразіть часову діаграму струму при підмиканні ділянки кола  $R, L$  до джерела  $e$ . р. с. Яка тривалість цього перехідного процесу?
4. Яким при цьому буде перехідний опір котушки індуктивності?
5. Показати часову діаграму напруги на конденсаторі  $C$ , коли ділянка з  $RC$  підмикається до джерела  $e$ . р. с. Яка тривалість цього перехідного процесу?
6. Яким при цьому буде перехідний опір конденсатора?
7. Зобразити спектри перехідних процесів в  $R, L, C$  колі при дії на нього прямокутних радіоімпульсів.

## 15 ПРОХОДЖЕННЯ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ ЛІНІЙНІ КОЛА

### 15.1 Диференціювальні кола

Диференціювальними (differentiation) колами називаються чотириполюсники (two-ports), миттєва напруга на виході  $u_2(t)$  яких пропорційна похідній у часі від миттєвої напруги на вході  $u_1(t)$ . Як пасивні диференціювальні кола на практиці найчастіше використовують  $RC$ -ланки (рис. 15.1, б). Покажемо, що коли у такому колі  $R \ll X_C$ , то воно є практично диференціювальним колом.

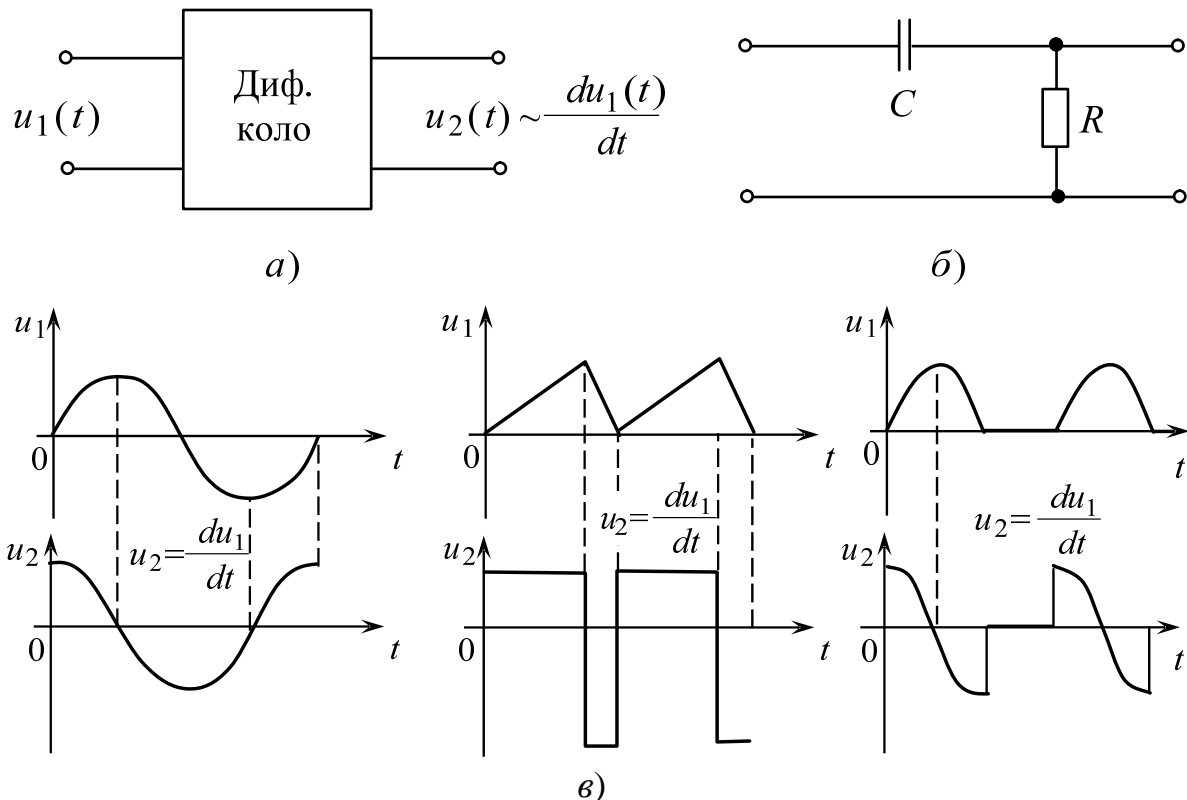


Рисунок 15.1 – Пасивні диференціювальні кола: а) диференціювальний чотириполюсник; б)  $RC$  диференціювальна ланка; в) графіки вхідних  $U_1$  і вихідних  $U_2$  сигналів у диференціювальній  $RC$ -ланці при ідеальному диференціюванні

За другим законом Кірхгофа  $u_1 = u_C + u_R = u_C + R \cdot i$ . У колі з конденсатором  $i = C(du_C / dt)$ . Якщо  $X_C \gg R$ , то  $u_C \gg u_R$ , і тоді  $u_1 \approx u_C$ , а вихідна напруга:

$$u_2 = R \cdot i = RC \frac{du_C}{dt} \approx RC \frac{du_1}{dt} = t \frac{du_1}{dt}. \quad (15.1)$$

Очевидно, що ідеальне диференціювання могло б бути якби  $u_1 = u_C$ , але це можливо лише при  $R = 0$ . Але при цьому вихідна напруга дорівнювала б нулю і коло втратило б усякий зміст. Таким чином, чим

менший опір  $R$  у порівнянні з опором  $X_C$ , тим ближче вихідна напруга до похідної у часі від вхідної напруги, але тим менший коефіцієнт передачі кола і відповідно менше значення вихідної напруги. Оскільки ідеальне диференціювання неможливе, установлюють критерії, що показують, які кола практично можна вважати диференціальними. Таким критерієм є умова, що  $R \leq 0,1X_C$  і тоді

$$R \leq \frac{0,1}{2\pi f C} = \frac{1}{20\pi f C} \quad (15.2)$$

або

$$t \leq \frac{1}{20\pi f}, \quad (15.3)$$

де  $t = RC$  – стала часу диференціального кола.

Оскільки період  $T = 1/f$ , то вираз (15.3) можна подати так

$$t \leq T/20\pi \approx 16 \cdot 10^{-2} T. \quad (15.4)$$

Комплексний коефіцієнт передачі за напругою у колі рис. 15.1, б дорівнює відношенню комплексної амплітуди вихідної напруги

$$U_2 = \frac{R}{R + 1/j\omega C} U_1$$

до комплексної амплітуди вхідної напруги  $U_1$ :

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}. \quad (15.5)$$

Виходячи із співвідношення  $R \leq X_C$ ,  $X_C = 1/\omega C$ , то гранична частота сигналу, при якій забезпечується практично диференціювання, буде дорівнювати:

$$\omega_{cp} RC \leq 0,1; \quad \omega_{cp} = \frac{0,1}{RC} = \frac{0,1}{t}. \quad (15.6)$$

Таким чином, якщо частота вхідного сигналу не перевищуватиме значення  $0,1/t$ , то можна вважати, що для сигналів усіх частот  $\omega \leq \omega_{cp}$ , задане  $RC$ –коло є диференціальним. При цьому модуль коефіцієнта передачі за напругою на підставі виразу (15.5) дорівнюватиме:

$$K_{KP} = \frac{1}{\sqrt{1+10^2}} \approx \frac{1}{10} = 0,1$$

і це його значення є найбільшим.



Усякий реальний сигнал характеризується спектром частот. Очевидно, щоб коло було диференціувальним для сигналу заданої форми, необхідно, щоб умова (15.5) виконувалась для найбільшої високочастотної складової спектра; у цьому випадку для низькочастотних складових умови диференціювання будуть виконуватись тим більше, тобто

$$w_B \leq 0,1/t. \quad (15.7)$$

Якщо на вході кола рис. 15.1, б, наприклад, діє періодична послідовність прямокутних відеоімпульсів, то такий сигнал, як це було показано у підрозділі 5.3, може бути поданий рядом Фур'є обмеженим  $k$ -ою гармонікою (вираз 5.5):

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \cos \Omega t + U_{m2} \cos 2\Omega t + \dots + U_{mk} \cos k\Omega t, \quad (15.8)$$

де  $k = 2q$  ( $q$  – шпаруватість послідовності);

$f_B = 2/t_i$  – частота цієї найвищої гармоніки спектра ( $t_i$  – тривалість імпульсів у послідовності).

Переписавши формулу для  $\omega_B$  у вигляді:

$$w_B = 2\pi f_B = 4\pi / t_i \quad (15.9)$$

і врахувавши (15.6), отримаємо:  $t \leq 0,008t_i$ .

Таким чином, вихідний сигнал практично буде дорівнювати першій похідній у часі від вхідного, коли стала часу диференціувального кола (диференціувальної  $RC$ -ланки) рис. 15.1, б не перевищуватиме 1% від тривалості імпульсу у послідовності, яка діє на вході кола.

Для визначення форми сигналу на виході диференціувального кола необхідно побудувати графік залежності похідної заданого вхідного сигналу від часу. Похідна, як відомо – це величина, пропорційна тангенсу кута нахилу між дотичною, проведеною у даній точці графіка вхідної функції  $u_1$ , і віссю часу. Отже, для побудови кривої  $u_2$ , яка отримається на виході чотиріполюсника, потрібно у декількох точках кривої напруги, підведеної до входу диференціувального кола, провести дотичні і побудувати криві, миттєві значення яких пропорційні тангенсу кута нахилу. Приклади таких кривих показані на рис. 15.1.

Якщо напруга на вході кола зростає стрибком, то струм в  $RC$ -колі, а отже і вихідна напруга  $U_R$ , зростатимуть також стрибком. Але при стрибкоподібному зменшенні напруги конденсатор розряджається за експоненціальним законом, причому чим більша стала часу кола, тим повільніше розряджається конденсатор і тим крива на виході більше відрізняється від похідної у часі.

На рис. 15.2, а показаний вхідний сигнал  $RC$ -диференціувального кола – послідовність прямокутних імпульсів тривалістю  $t_i$ .

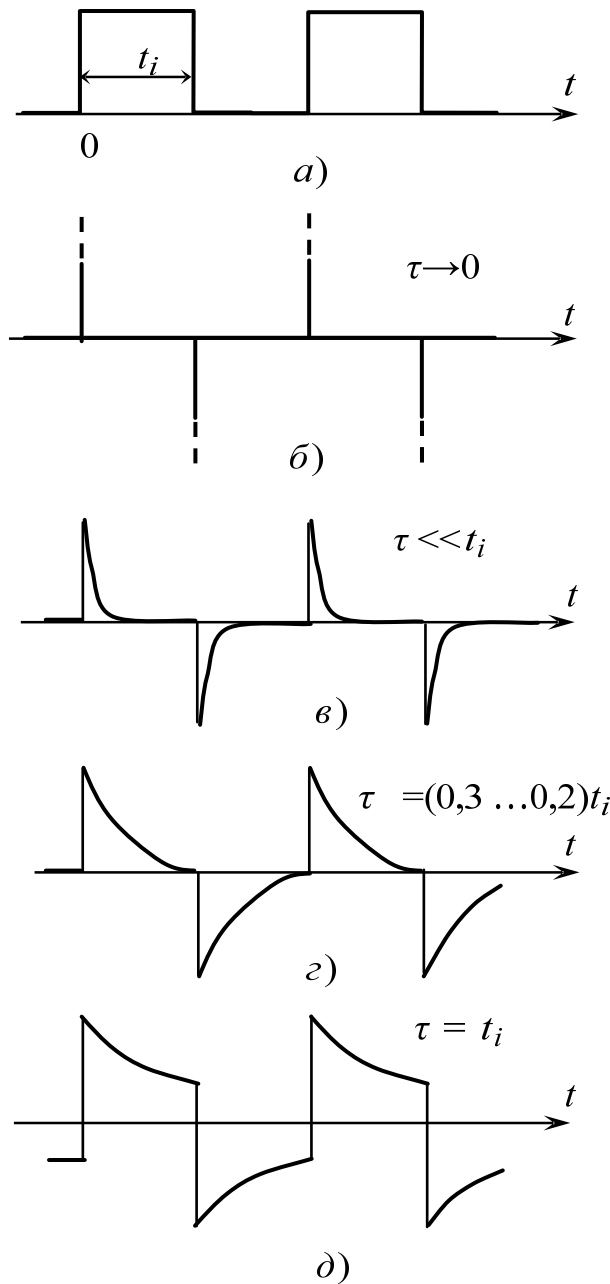


Рисунок 15.2 – Форми вихідних сигналів в диференціювальній *RC*-ланці при дії на вході послідовності прямокутних імпульсів

На рис. 15.2, б зображено графік ідеальної похідної – імпульси тривалістю 0 і з амплітудами нескінченно великими.

На рис. 15.2, в зображено форму вихідної напруги при практичному диференціюванні.

На рис. 15.2, г показано випадок, коли струм у колі протікає практично протягом  $t = (3 \dots 5)t = t_i$  - тривалості вхідного імпульсу.

На рис. 15.2, д за час тривалості імпульсу струм (і вхідна напруга) зменшиться лише до 0,37 свого початкового значення.

Якщо збільшувати опір  $R$  чи ємність  $C$ , то стала часу  $t$  буде зростати, ємнісний опір  $X_C$  у порівнянні з резистивним буде зменшуватись, характер опору кола буде наближатися до резистивного, форма вихідної напруги – наближатиметься до форми вхідної. Таке коло називається *розділювальним*.

Розділювальне коло пропускає сигнал без помітних спотворень і тільки виконує функцію розділення змінної і постійної складових.

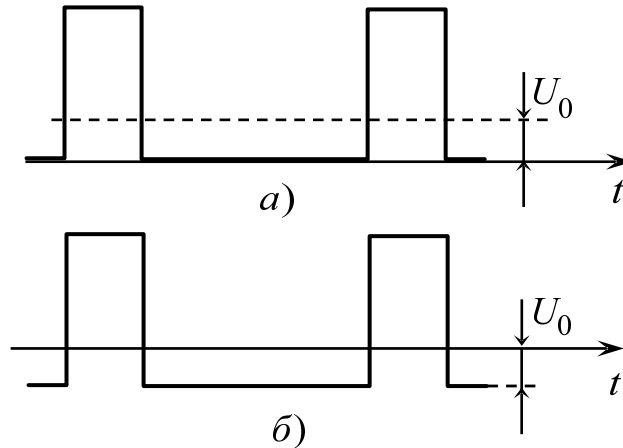


Рисунок 15.3 – Форма напруги у розділювальній  $RC$ -ланці:  
а) вхідної, б) вихідної

На рис. 15.3 показані вхідна та вихідна напруги розділювальної  $RC$ -ланки. Такі ланки використовуються для зв'язку між підсилювальними каскадами змінної напруги і тому ще називаються *перехідними*.

Дійсно, після проходження послідовності імпульсів рис. 15.3, а, спектр якої є, наприклад, ряд Фур'є (15.7), на виході буде відсутньою лише постійна складова  $U_0$ , для якої опір конденсатора є нескінченно великим. Тому діюча на вході постійна напруга  $U_0$  розділиться так на елементах резистивно-ємнісного дільника: на конденсаторі –  $U_0$ , а на резисторі – 0.

Таким чином, коли в  $RC$ -колі стала часу  $t \leq 0,008t_i$  (або  $t \leq 0,016/f_B$ , де  $f_B$  – верхня частота спектра сигналу), то таке коло є практично диференціувальним; коли ж стала часу  $t \geq 1,6t_i$  (або  $t \geq 16/f_H$ , де  $f_H$  – нижня частота спектра сигналу), якою є фактично частота 1-ої гармоніки спектра, тобто частота повторення імпульсів, то таке коло є розділювальним (перехідним) колом.

## 15.2 Інтегрувальні кола

*Інтегрувальними* (integrate) називаються чотиріполюсники, миттєві значення напруг яких на виході пропорційні інтегралу від вхідної напруги (рис. 15.4, а).

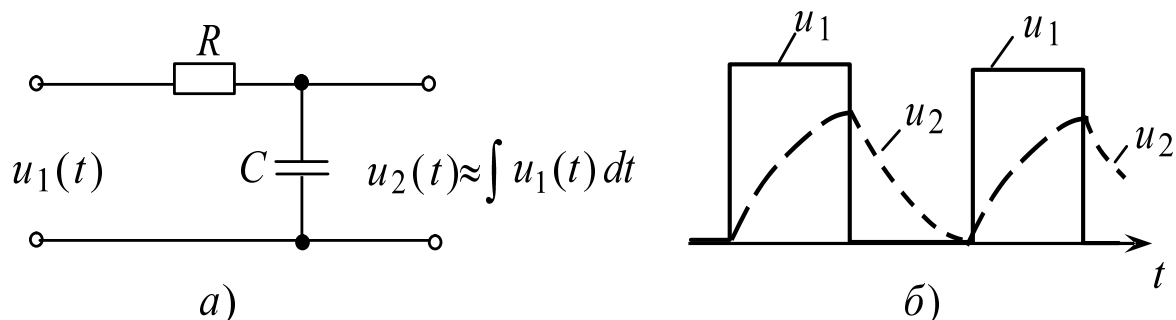


Рисунок 15.4 – Інтегрувальний чотириполюсник: а) схема чотириполюсника, б) форма напруги на його полюсах

Покажемо, що  $RC$ -коло (рис. 15.4, а), у якому  $R \gg X_C$ , є інтегрувальним. За другим законом Кірхгофа  $u_1 = u_R + u_C$  якщо  $R \gg X_C$ , то  $u_2 \ll u_R$ , при цьому  $u_1 \approx u_R$  або  $i \approx u_1 / R$ . Вихідна напруга  $u_2 = u_C$ , але

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt \approx \frac{1}{C} \int \frac{u_1}{R} dt = \frac{1}{RC} \int u_1 dt = \frac{1}{t} \int u_1 dt,$$

отже, в  $RC$ -колі при  $R \gg X_C$ :

$$u_2(t) = \frac{1}{t} \int u_1 dt. \quad (15.9)$$

Ідеальне інтегрування може бути, якщо  $u_R = u_1$ , тобто при коефіцієнті передачі, рівному нулю, що втрачає фізичний зміст. Практично хороше інтегрування виявляється при  $R \geq 10X_C$  або  $R \geq 10/2\pi f_H C$ ,  $RC = t \geq 1,6/f_H = 1,6T$ , де  $f_H$  – частота 1-ої гармоніки спектра вхідного сигналу,  $T$  – період повторення імпульсів (рис. 15.4, б).

Очевидно, що якщо умова інтегрування виконується для першої гармоніки, то вона тим більше буде виконаною для вищих гармонік.

Вихідна напруга в інтегрувальному колі має таку форму, при якій похідна у часі від вихідної напруги повторює вхідну напругу. Наприклад, якщо напруга на вході інтегрувального кола має прямокутну форму, то вихідна напруга буде трикутною. Тривалість сигналів на виході інтегрувального кола більша за тривалість вхідних сигналів, тому інтегрувальні кола інколи називають “подовжувальними”.

Інтегрувальні кола виконують різноманітні функції, наприклад, дозволяють зменшити дію імпульсних завад (pulse interference), через що їх ще називають “згладжувальними”. Крім того, оскільки при дії короткого імпульсу конденсатор не встигне зарядитися, а при дії довгого – зарядиться до більшої напруги, інтегрувальне коло виконує роль перетворювача тривалості імпульсів у пропорційну їй амплітуду, тобто довший імпульс на виході дасть імпульс з більшою амплітудою, а більш короткий – з меншою амплітудою.

### 15.3 Проходження амплітудно-модульованих сигналів через коливальні кола

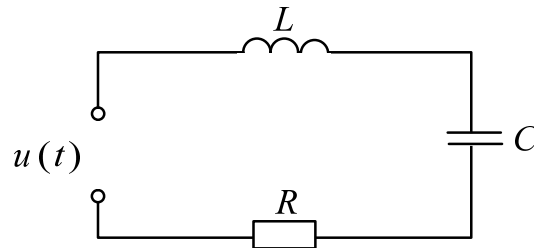


Рисунок 15.5 – Схема послідовного коливального контуру

Розглянемо особливості проходження АМ-сигналів через коливальні кола. Нехай АМ-коливання  $u = U_m(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$  з глибиною модуляції  $m$  прикладене до послідовного коливального контуру (рис. 15.5). Контур вважається настроєним на частоту несучої  $\omega_0$ .

Щоб розрахувати реакцію кола, подамо функцію  $u(t)$  виразом (3.6):

$$u(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m U_{m0} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} m U_{m0} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Спектральна діаграма вхідної напруги, а також частотна залежність модуля вхідної провідності контуру  $y(\omega)$  зображені на рис. 15.6, а і б).

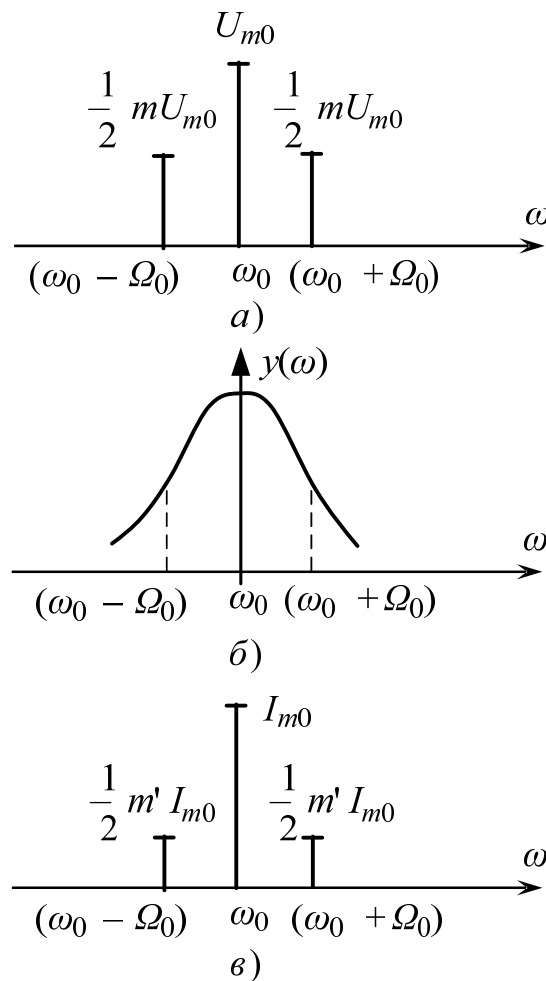


Рисунок 15.6 – Спектральні діаграми: а) вхідної напруги, в) контурного струму та б) частотна залежність провідності контуру від частоти

Оскільки контур є системою лінійною, струм, який виникає у колі, також має три гармонічних складові з частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_0 + \Omega$ ,  $\omega_0 - \Omega$ . Амплітуда струму несучої частоти дорівнює  $I_{m0} = U_{m0} \cdot y(\omega_0)$ , а його миттєве значення  $i_0(t) = U_{m0} \cdot y(\omega_0) \cos \omega_0 t$ .

Оскільки частотна характеристика  $y(\omega)$  симетрична, то для бічних гармонік струму можна написати:

$$I_{m \text{ верх.}} = I_{m \text{ нижн.}} = \frac{1}{2} U_{m0} \cdot y(\omega_{\delta}),$$

де  $y(\omega_{\delta}) = \frac{y(\omega_0)}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\Omega}{\omega_0})^2}}$  – модуль вхідної провідності контуру при розстроюванні  $\Delta \omega = \pm \Omega$ .

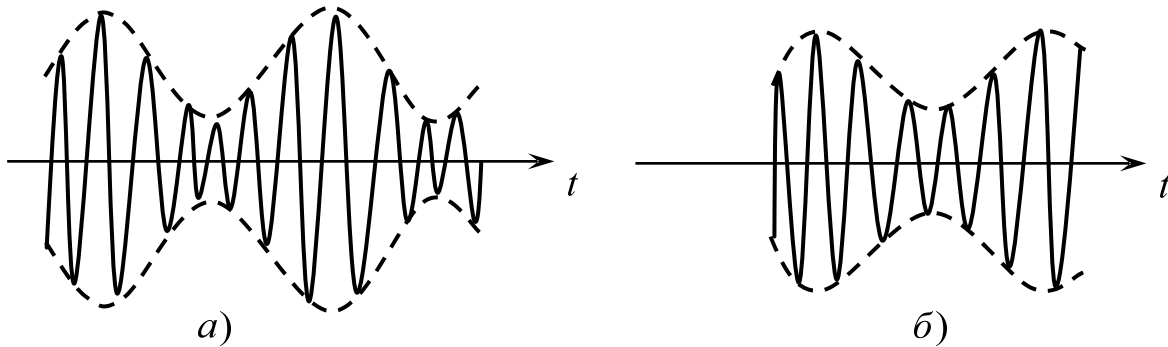


Рисунок 15.7 – а) вхідна АМ-напряга, б) струм у контурі

Таким чином, вираз для струму у контурі буде таким:

$$i = i(t) = I_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m' I_{m0} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} m' I_{m0} \cos(\omega_0 - \Omega)t, \quad (15.10)$$

звідки витікає, що обвідна струму, так само як і обвідна прикладеної до контура напруги, змінюються за гармонічним законом. Коефіцієнт

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\Omega}{\omega_0})^2}} \quad (15.11)$$

у рівності (15.10) є глибиною модуляції струму у контурі. З формули (15.11) видно, що  $m' < m$ , тобто глибина модуляції струму виявляється меншою ніж глибина модуляції прикладеної напруги. Чим вища вибірність контуру, тим менша  $m'$  у порівнянні з  $m$ . Це явище називається демодуляцією.

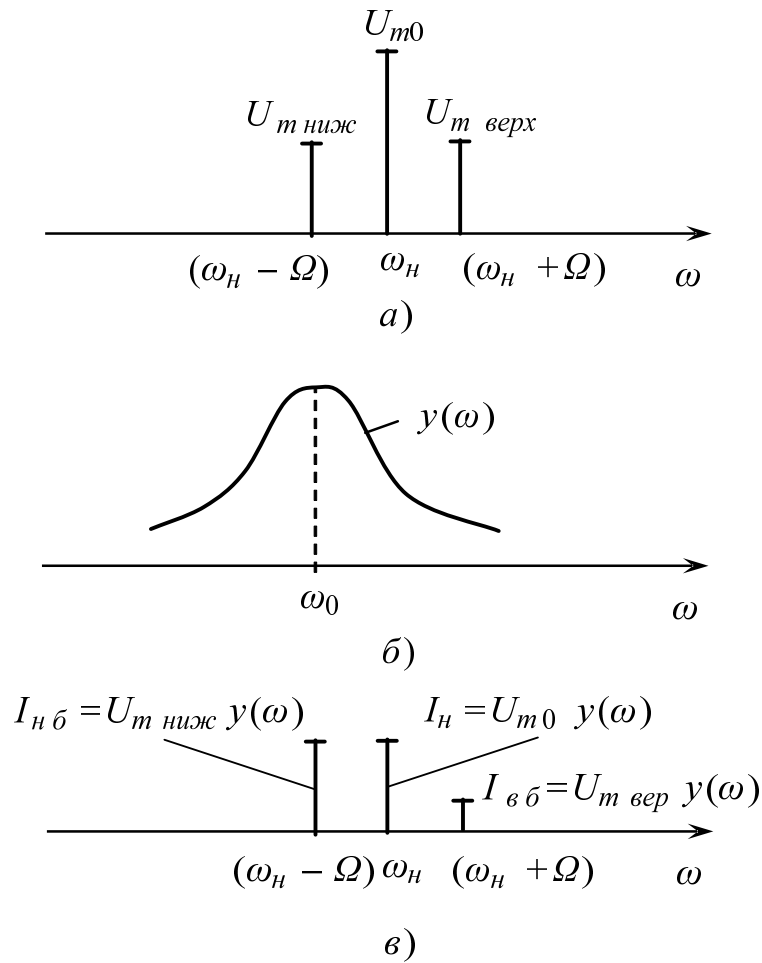


Рисунок 15.8 – Спектральні діаграми: а) вхідної напруги, в) контурного струму і б) частотна залежність модуля вхідної провідності контуру, розстроєного відносно несучої частоти

Графіки миттєвих значень вхідної напруги  $u(t)$  і струму у контурі  $i(t)$  зображені на рис. 15.7.

Якщо резонансна частота контуру не збігається з несучою частотою ( $\omega_0 \neq \omega_H$ ), то характер процесів змінюється (рис. 15.8).

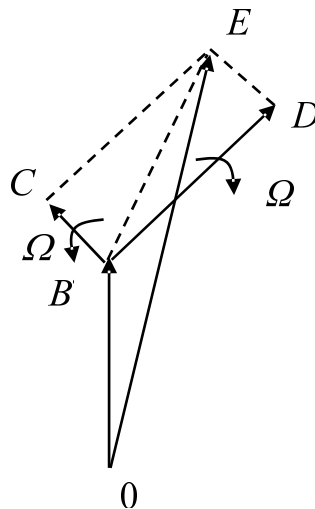


Рисунок 15.9 – Векторна діаграма

Щоб отримати більш повне уявлення про процеси у такому контурі, розглянемо векторну діаграму (рис. 15.9).

Тут  $OB = I_H = U_{m0} \cdot y(\omega)_a$  – несуча складова струму,  $BC = U_{m\text{верх}} \cdot y(\omega)$  – верхня бічна і  $BD = U_{m\text{нижн}} \cdot y(\omega)$  – нижня бічна складові струму у розстроєному контурі,  $OE$  – модуль сумарного струму.

Обертання векторів бічних частот у часі відносно вектора несучого коливання (з кутовою швидкістю  $\Omega$  у протилежних напрямках) призводить до того, що модуль сумарного вектора ( $OE$ ) буде неперервно змінюватись як за величиною, так і за напрямком. У результаті чого обвідна струму у колі спотворюється.

При передачі АМ-коливань з обмеженим спектром, що і має місце на практиці, через настроєний контур ( $\omega = \omega_H$ ) спотворення реакції кола будуть незначними, якщо смуга пропускання контуру перевищуватиме максимальну частоту спектра обвідної напруги, яка діє на контур:

$$\Delta\omega_{np} \geq 2\Omega_{\max} \text{ або } \Delta f_{np} \geq 2F_{\max}.$$

Викладені міркування стосуються спотворень, які матиме струм. На практиці як реакція часто використовується напруга на реактивних елементах контуру.

Спектральні щільності напруги на конденсаторі та на котушці індуктивності з аналогічною характеристикою струму пов'язані співвідношеннями:

$$u_C = \frac{1}{j\omega C} i \text{ та } u_L = j\omega L i.$$

Звідси виходить, що обвідна напруги  $U_C(t)$  і  $U_L(t)$  у принципі будуть відрізнятись від обвідної струму  $i(t)$ . Проте, якщо вхідна дія має вузький спектр (вузькосмуговий сигнал, що найчастіше має місце на практиці), то цими відмінностями можна знехтувати, бо множники  $\omega L$  та  $1/\omega C$  у вузькій смузі частот змінюються незначно і вважається, що

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega_0 C} = \omega L = \omega_0 L = r,$$

де  $r$ , нагадуємо, – характеристичний (хвильовий) опір контуру.

Звернемося тепер до системи двох контурів з трансформаторним зв'язком, властивості якої вивчалися у розділі 8. Будемо вважати, що обидва контури цієї системи є ідентичними (однаковими), а несуча частота амплітудно-модульованого сигналу дорівнює резонансній частоті системи. Можна легко передбачити, що параметри вихідної напруги будуть суттєво залежати від форми кривої залежності коефіцієнта передачі системи від частоти  $K(\omega)$  яка, у свою чергу, залежить від ступеня зв'язку між контурами цієї системи.



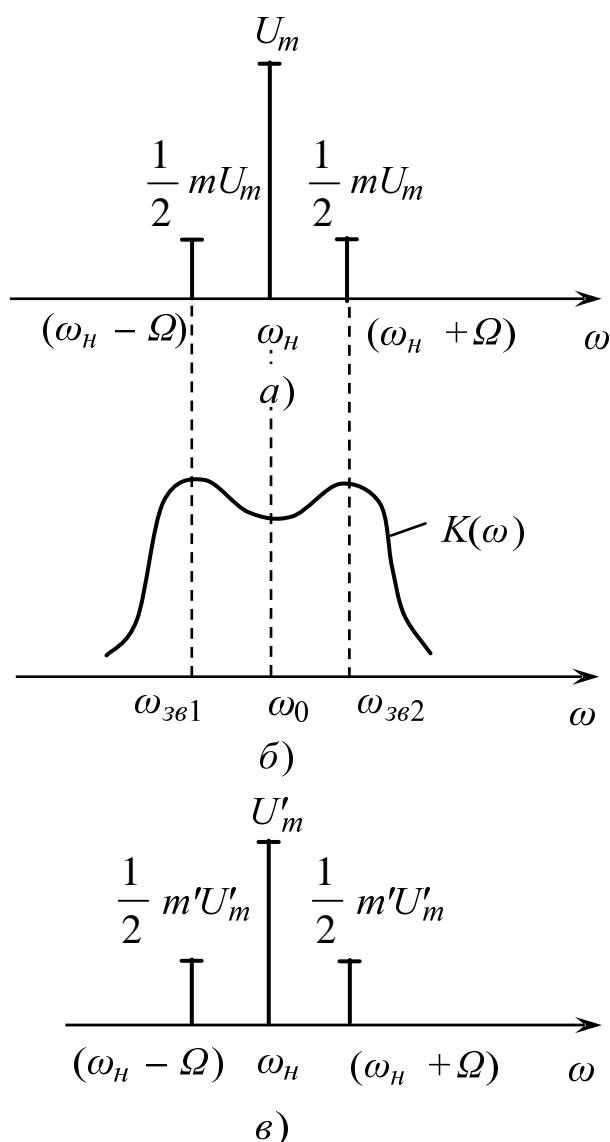


Рисунок 15.10 – Спектр АМ коливань: а) вхідної напруги, в) вихідної напруги і б) залежність коефіцієнта передачі системи за напругою

При слабкому та при критичному зв'язках між контурами крива  $K(\omega)$  буде одновершинною, реакція кола буде спотворюватися, аналогічно, як і в одиничному контурі. У випадку сильного (закритичного) зв'язку крива стає двовершинною, як це показано на рис. 15.10, б, і характер спотворень зміниться. Так, при дії коливання із синусоїдною обвідною, спектр якого зображено на рис. 15.10, а, через "провал" (впадину) на кривій  $K(\omega)$ , що зображено на рис. 15.10, б, амплітуда несучої складової вихідної напруги  $U'_m$  буде ослабленою у порівнянні з амплітудами бічних складових  $m'U'_m/2$ . Коефіцієнт модуляції вихідної напруги  $m'$  буде більшим від коефіцієнта модуляції вхідної напруги  $m$  ( $m' > m$ ), що може призвести до перемодуляції, коли  $m'$  стане більшим за одиницю ( $m' > 1$ ). У результаті цього спотворення форми обвідної уже носитимуть нелінійний характер.

## 15.4 Проходження частотно-модульованих сигналів через коливальні кола

Як нам відомо з підрозділу 13.6, ЧМ-сигнали і їх спектри, як правило, мають більш складну структуру у порівнянні з відповідними АМ-сигналами. Тому при проходженні через коливальну систему вони матимуть більші змінення.

Для розрахунку кола при дії ЧМ-сигналів скористаємось методом гармонічного аналізу, який, строго кажучи, є ефективним лише у випадку, коли вхідний сигнал є вузькосмуговим, тобто виконується умова  $\Delta w_m / \Delta w_{np} \leq 1$ , де, нагадаємо,  $\Delta w_m$  – девіація частоти ЧМ-сигналу,  $\Delta w_{np}$  – смуга пропускання коливального контуру.

ЧМ-сигнал, як відомо, є коливанням зі сталою амплітудою  $U_m$ . Якщо коефіцієнт передачі контуру за напругою  $K(w)$ , де  $w = w_n + \Delta w_m \cos \Omega t$  (див. вираз 13.12), то амплітуда вихідної напруги (напруги реакції кола)  $U'_m$  дорівнюватиме:

$$U'_m = U_m \cdot K(w) = U_m \cdot K(w_0 + \Delta w_m \cos \Omega t). \quad (15.12)$$

Таким чином, ЧМ-сигнал при проходженні через коливальне коло спотворюється: з'являється додаткова амплітудна модуляція, бо згідно з виразом (15.12)  $U'_m$  є функцією часу.

Графік змінення амплітуди коливань на виході настроєного контуру ( $w_n = w_0$ ) показано на рис. 15.11. З рисунка видно, що амплітуда вихідної напруги змінюється у часі з подвійною частотою у порівнянні з  $\Omega = 2\pi / T$ .

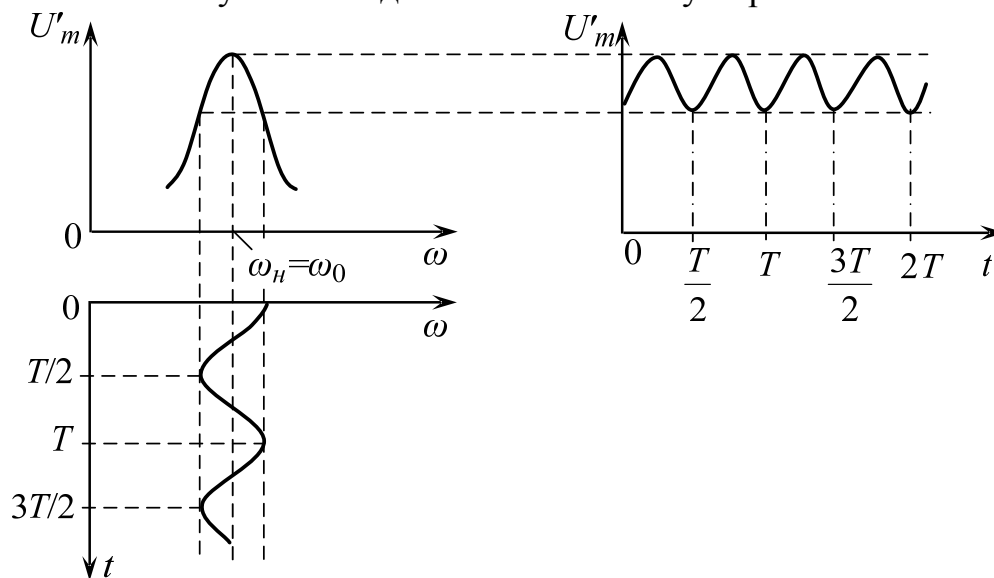


Рисунок 15.11 – Ілюстрація появи додаткової амплітудної модуляції у вихідній напрузі при дії на контур ЧМ-сигналу ( $w_H = w_0$ )

Таким чином, при проходженні ЧМ-сигналу через коливальне коло на виході у напруги з'являється паразитна амплітудна модуляція.

Дослідимо якісно, що буде, коли ЧМ-сигнал буде проходити через розстроєний контур, наприклад, коли  $w_H < w_0$ .

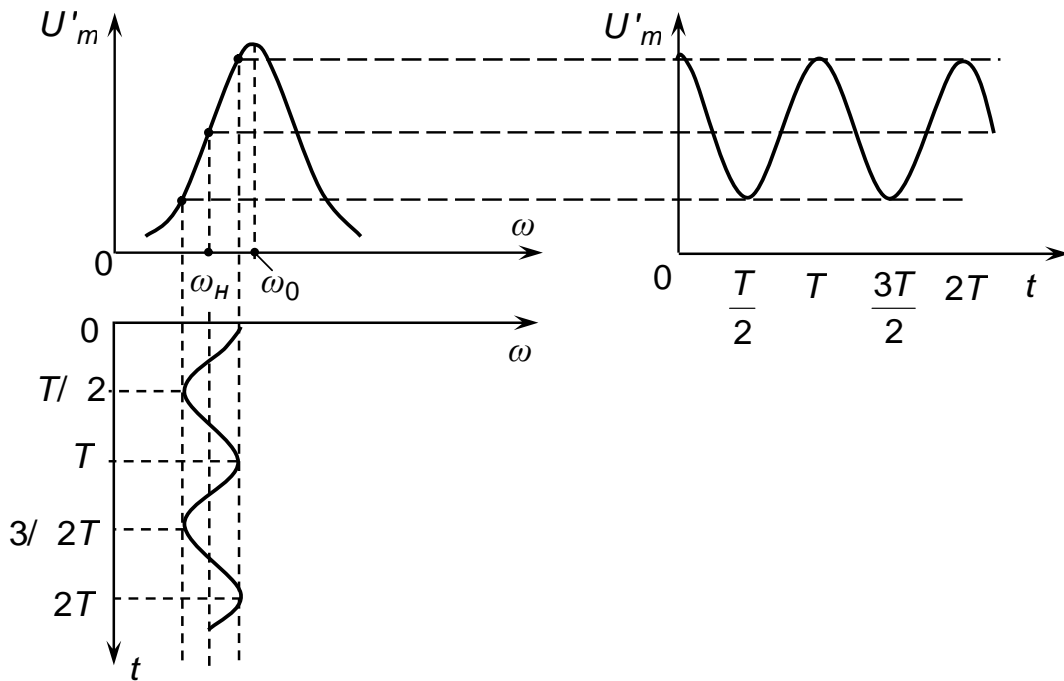


Рисунок 15.12 – Ілюстрація до перетворення ЧМ-сигналу у відповідне йому коливання модульоване за амплітудою

У цьому випадку, як бачимо з рисунка 15.12, спотворення вихідного сигналу набуває іншого вигляду. Так, якщо миттєва частота  $\omega(t)$  вхідного сигналу  $u(t)$  не виходить за межі “лінійної” ділянки резонансної кривої контуру  $U'_m(\omega)$ , амплітуда вихідної напруги  $U'_m(t)$  буде змінюватись у часі за законом, близьким до закону керуючого сигналу згідно з виразом (13.11). Це явище використовується у багатьох випадках, де необхідно чи просто доцільно перетворювати ЧМ-сигнал у відповідне коливання з амплітудною модуляцією. Наприклад, коли доцільно при детектуванні ЧМ-сигналу після такого перетворення використати амплітудний детектор.

### Запитання та задачі для закріплення

1. Зобразити схему простого RC диференціувального кола, інтегрувального кола.
2. Побудувати епюри напруг на елементах простого диференціувального RC кола.
3. За яких умов відбудеться диференціювання прямокутного відеоімпульсу у цьому колі?
4. Побудувати епюри напруг на елементах простого інтегрувального RC кола.
5. За яких умов відбудеться інтегрування прямокутного відеоімпульсу у цьому колі?
6. Пояснити ефект демодуляції АМ сигналів при проходженні їх через коливальний контур?
7. Пояснити принципи перетворення ЧМ в АМ за допомогою коливального контуру.

## 16 НЕЛІНІЙНІ ПРОЦЕСИ В РАДІОТЕХНІЦІ

Усі радіотехнічні кола, які нами розглянуті раніше, відносяться до класу лінійних систем. Чудовою особливістю лінійного кола є справедливість для неї принципу суперпозиції (накладання). З цього принципу та з умови стаціонарності витікає простий і важливий наслідок – гармонічний сигнал, проходячи через лінійну систему, залишається незмінним за формою, набуваючи лише іншу амплітуду і початкову фазу.

Проте саме тому лінійна стаціонарна система нездатна збагачувати спектральний склад коливань, які подаються на її вхід. Ця обставина значною мірою звужує клас корисних перетворень сигналів, які здійснюються лінійними колами зі сталими параметрами.

Значно більші можливості у цьому відношенні мають нелінійні кола, у яких зв'язок між вхідним сигналом  $u_{\text{вх}}(t)$  і вихідною реакцією  $u_{\text{вих}}(t)$  забезпечується нелінійною функціональною залежністю.

У цьому розділі будуть розглянуті загальні закономірності, притаманні найпростішим нелінійним колам, способи їх математичного дослідження, а також деякі найважливіші види перетворень сигналів, які здійснюються за допомогою нелінійних кіл і пристроїв.

### 16.1 Зовнішні характеристики нелінійних елементів і способи їх описування

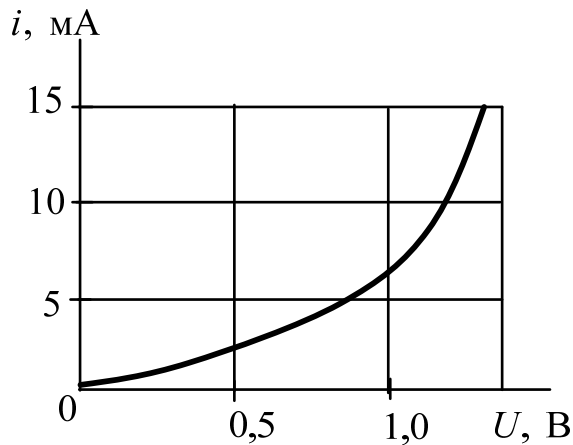
Дослідження нелінійних кіл у загальному вигляді є задачею досить складною з точки зору математичного описування їх функціонування. Тим не менше у ряді випадків дослідження нелінійних процесів вдається довести до кінця.

#### *Зовнішні характеристики нелінійних елементів*

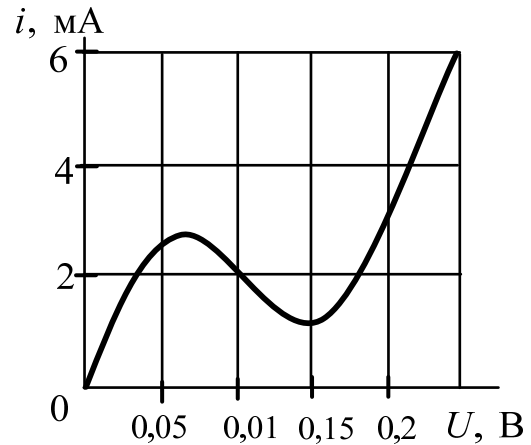
Функціональну залежність  $u_{\text{вих}}(t) = f[u_{\text{вх}}(t)]$  можна розглядати як найпростішу математичну модель нелінійного елемента. Особливість її полягає у тому, що тут не фігурують процеси, які відбуваються всередині елемента. Прийнято говорити, що тут мають справу із зовнішньою характеристикою системи.

Нижче для конкретності ми розглянемо зовнішні характеристики нелінійних двополосників, коли вхідним сигналом є напруга, а вихідним – струм  $i$  через двополосник. Залежність  $i(U)$  прийнято називати *вольт-амперною характеристикою* (ВАХ) (current–voltage characteristic) нелінійного елемента. Усі методи і результати можна перенести на випадок нелінійного чотирьополосника, наприклад, транзистора, який працює у нелінійному режимі, при великих амплітудах вхідного сигналу, коли зв'язок між миттєвими значеннями напруги і струму виявляється суттєво нелінійним.

Нелінійні елементи мають різноманітні зовнішні характеристики. Так, можна виділити клас елементів з однозначними вольт-амперними характеристиками (рис. 16.1, а) і клас елементів, характеристики яких мають ділянки неоднозначності (рис. 16.1, б).



a)



б)

Рисунок 16.1 – Типові ВАХ нелінійних двополюсників: а) однозначна характеристика напівпровідникового діода; б) характеристика тунельного діода

Поняття опору для нелінійного двополюсника визначається по-різному. Прикладши до двополюсника постійну напругу  $U = U_0$ , маємо у колі постійний струм  $I_0 = i(U_0)$ , а відношення

$$R_0 = U_0 / I_0$$

називається *опором елемента постійному струму*. На відміну від опору звичайного лінійного резистора значення  $R_0$  не стало, а залежить від прикладеної напруги.

Відношення приросту напруги до приросту струму у вибраній робочій точці  $(U_0, I_0)$  називають *диференціальним опором* нелінійного двополюсника:

$$R_{\text{диф}} = \frac{du}{di} \approx \frac{\Delta u}{\Delta i}.$$

*Диференціальна крутість ВАХ*

$$S_{\text{диф}} = \frac{1}{R_{\text{диф}}} = \frac{di}{du} \approx \frac{\Delta i}{\Delta u},$$

яка є тангенсом кута нахилу дотичної ВАХ у даній точці.

### **Способи описування характеристик нелінійних елементів**

Як правило, вольт-амперні характеристики нелінійних елементів отримують експериментально. Їх можна подати у різні способи.

Простим і досить точним способом є подання характеристик у вигляді таблиці. Цей спосіб особливо зручний при аналізі процесів у колах за допомогою ЕОМ; аргумент і функція утворюють у запам'ятовувальному пристрої двовимірний масив чисел.

Якщо дослідження має проводитись не чисельними, а аналітичними методами, то потрібно підібрати таку функцію (функцію апроксимації), яка, будучи досить простою, відображала б усі найважливіші особливості експериментально знятої характеристики, тобто описала б цю характеристику з достатнім ступенем точності.

У радіотехніці найчастіше використовують такі способи апроксимації ВАХ нелінійних двополюсників:

- кусково-лінійна апроксимація;
- степенева апроксимація;
- показникова апроксимація.

### ***Кусково-лінійна апроксимація***

Даний спосіб ґрунтується на наближеній заміні реальної характеристики відрізками прямих ліній з різними нахилами. Така апроксимація найчастіше застосовується при розрахунках процесів у нелінійних елементах у випадку великих амплітуд зовнішніх дій, наприклад, у підсилювачах потужності радіопередавальних пристроїв.

Розглянемо, для прикладу, вхідну характеристику реального транзистора, яка замінюється (апроксимується) двома відрізками прямих (рис. 16.2).

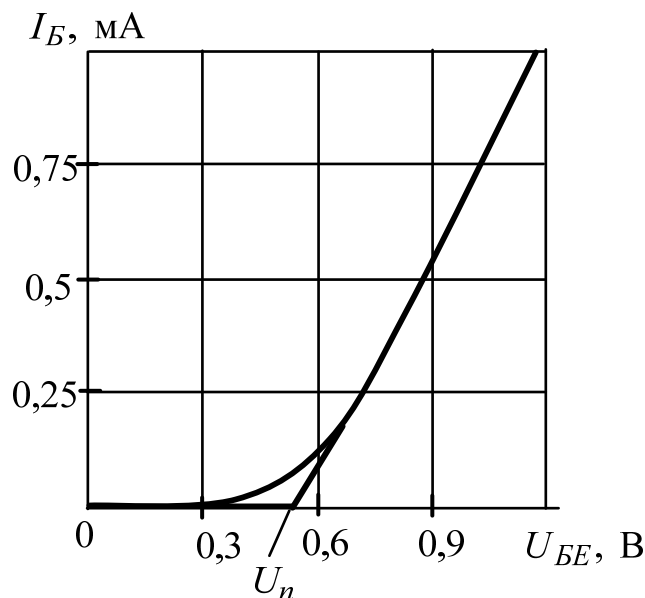


Рисунок 16.2 – Вхідна характеристика транзистора КТ-306 – залежність струму бази від напруги база-емітер

Апроксимація визначається двома параметрами – напругою початку характеристики  $U_{II}$  і крутістю характеристики  $S$ , яка має розмірність провідності. Апроксимована ВАХ складається з двох лінійних відрізків:  $0-U_{II}$ , де струм бази  $i_B = 0$  та правого відрізка, де струм бази  $i_B$  лінійно зростає від нуля до 1мА. Тому математична форма апроксимованої вольт-амперної характеристики буде такою:

$$i_B(U_{BE}) = \begin{cases} 0, & \text{при } U_{BE} < U_{II}, \\ S(U - U_{II}), & \text{при } U_{BE} \geq U_{II}. \end{cases} \quad (16.1)$$

Напруга початку вхідних характеристик біполярних транзисторів дорівнює приблизно 0,2...0,8В; крутість характеристики струму бази  $i_B(U_{BE})$ , як правило, біля 10мА/В.

### Степенева апроксимація

Цей спосіб ґрунтується на розкладанні нелінійної вольт-амперної характеристики  $i(u)$  у ряд Тейлора, який збігається у околі робочої точки  $U_0$ :

$$i(u) = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2 + \dots, \quad (16.2)$$

де коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2, \dots$  - деякі сталі числа.

Кількість членів розкладання залежить від заданої точності розрахунків. Степенева апроксимація широко використовують при аналізі роботи нелінійних пристроїв, на які подаються відносно малі зовнішні дії.

Спосіб надходження коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, \dots$  проілюструємо таким простим прикладом.

**Приклад.** Експериментально знята вхідна характеристика  $i_B = f(U_{BE})$  транзистора КТ-301 (рис. 16.3). Найдти коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2$ , які визначають апроксимацію вигляду  $i_B = a_0 + a_1(U_{BE} - U_0) + a_2(U_{BE} - U_0)^2$  у околі робочої точки  $U_0 = 0,7В$ .

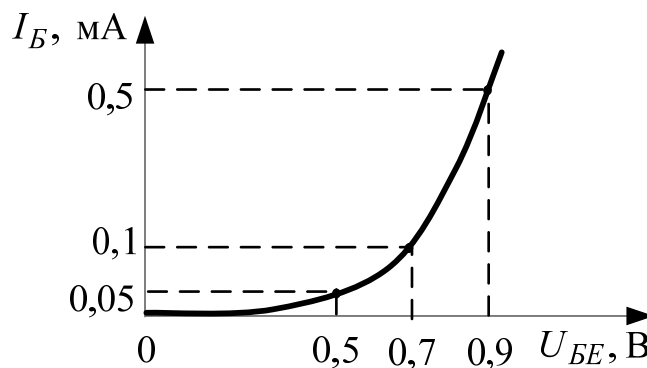


Рисунок 16.3 – Степенева апроксимація вхідної характеристики транзистора КТ-301

Вузлами апроксимації вибираємо точки 0,5; 0,7 і 0,9 В. Як видно на рисунку, для знаходження невідомих коефіцієнтів слід розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 + a_1(0,5 - 0,7) + a_2(0,5 - 0,7)^2 = 0,05; \\ a_0 + a_1(0,7 - 0,7) + a_2(0,7 - 0,7)^2 = 0,15; \\ a_0 + a_1(0,9 - 0,7) + a_2(0,9 - 0,7)^2 = 0,5; \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} a_0 - 0,2a_1 + 0,04a_2 = 0,05; \\ a_0 = 0,15; \\ a_0 + 0,2a_1 + 0,04a_2 = 0,5; \end{cases}$$

звідки  $a_0 = 0,15 \text{ мА}$ ;  $a_1 = 1,125 \text{ мА / В}$ ;  $a_2 = 3,125 \text{ мА/В}^2$ .

Слід пам'ятати, що степенева апроксимація є спосіб локального (на невеликій частині кривої) описування характеристик. Користування нею при значних відхиленнях миттєвих значень вхідного сигналу від робочої точки недоцільне через суттєві погіршення точності.

### Показникова апроксимація

Показникову апроксимацію часто використовують при вивченні нелінійних явищ у радіотехнічних колах, які містять напівпровідникові діоди. У цих випадках вольт-амперна характеристика діода описується експоненціальною функцією (її апроксимують експонентою). Але така апроксимація є достатньо точною лише при значеннях струму, які не перевищують декілька міліампер. При більших струмах експоненціальна характеристика плавно переходить у пряму лінію через вплив об'ємного опору напівпровідникового матеріалу.

## 16.2 Спектральний склад струму у нелінійному елементі при гармонічній зовнішній дії

Розглянемо явища у найпростішому колі, утвореному послідовним з'єднанням джерела гармонічного сигналу  $u_c(t) = U_m \cos \omega t$ , джерела постійної напруги зміщення  $U_0$  і нелінійного елемента (рис. 16.4, а). Знайдемо форму струму у колі, скориставшись нескладними графічними побудовами (рис. 16.4, б і в).

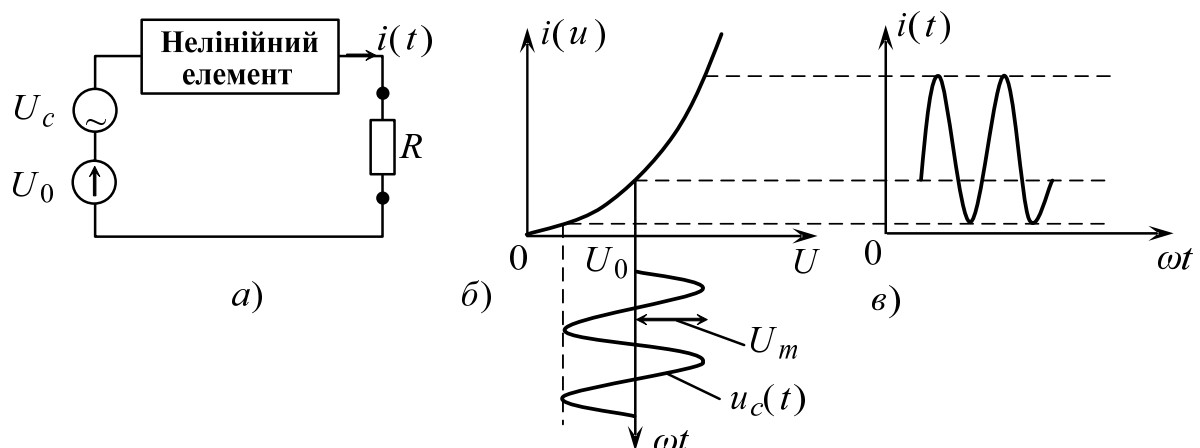


Рисунок 16.4 – Знаходження форми струму у нелінійному колі: а) схема кола, б) графік вольт-амперної характеристики нелінійного елемента і вхідного сигналу, в) форма струму через нелінійний елемент



Легко помітити, що форма струму і напруги є різними. Причина спотворення кривої струму (відхилення від синусоїдної форми) досить прозора: однаковим приростам напруги (у позитивний і негативний півперіоди вхідної гармоніки  $u_c(t)$  відповідають неоднакові прирости струму, оскільки крутість вольт-амперної характеристики нелінійного елемента  $i(u)$  на різних її ділянках є різною. Отже, струм у колі має несинусоїдну форму.

Перейдемо до кількісних оцінок спектрального складу струму через нелінійний елемент.

За способом кусково-лінійної апроксимації, як уже зазначалося, форма струму у колі з нелінійним елементом аналітично описується так:

$$i(u) = \begin{cases} 0, & \text{коли } u < U_{\Pi}, \\ S(u - U_{\Pi}), & \text{коли } u \geq U_{\Pi}. \end{cases}$$

На вхід кола (рис. 16.4, а) подається напруга:

$$u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t.$$

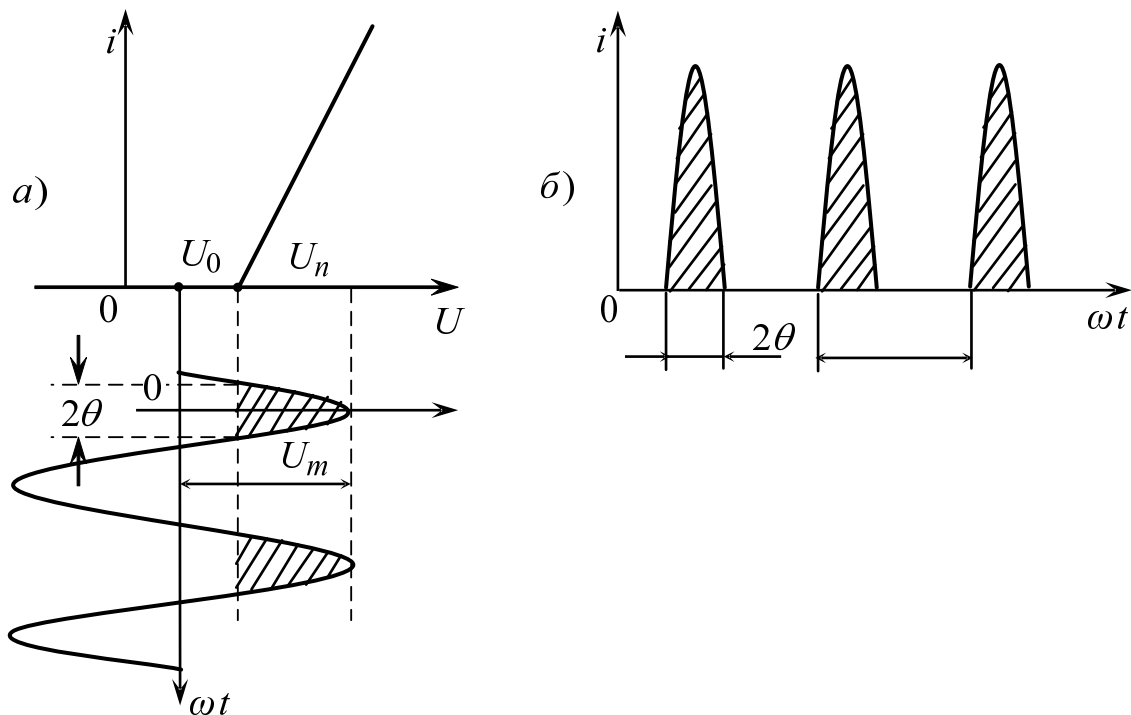


Рисунок 16.5 – Форми: а) ВАХ з кусково-лінійною апроксимацією, б) струму у колі нелінійного елемента

З побудови на рис. 16.5 видно, що графік струму  $i$  має характерний вигляд косинусних імпульсів з відтинанням. Кут  $q$  відтинання імпульсів струму визначається з рівності  $U_0 + U_m \cos q = U_{\Pi}$ , звідки

$$\cos q = \frac{U_{\Pi} - U_0}{U_m}.$$

Сталу складову і амплітуди гармонік струму обчислюють за формулами:

$$I_0 = S U_m \cdot g_0(q),$$

$$I_n = S \cdot U_m \cdot g_n(q), \quad \text{де } n = 1, 2, 3, \dots$$

У ці вирази входять функції Берга  $\gamma_n(\theta)$ , значення яких зазвичай даються у довідникових матеріалах, присвячених проектуванню радіопередавальних пристроїв.

**Приклад.** Нелінійний елемент має кусково-лінійну ВАХ з параметрами  $U_{II} = 0,6\text{В}$ ;  $S = 25\text{мА / В}$ . До даного елемента прикладена напруга (у вольтах)  $u = 0,2 + 0,8 \cos \omega t$ . Визначити сталу складову  $I_0$  та першу гармоніку  $I_1$  струму через нелінійний елемент.

Оскільки

$$\cos = \frac{U_{II} - U_0}{U_m} = \frac{0,6 - 0,2}{0,8} = 0,5; \quad \text{то } q = 60^\circ.$$

Значення функції Берга для певних значень кута відтинання називаються коефіцієнтами Берга. У даному випадку:

$$g_0(q) = \frac{1}{p} (\sin q - q \cdot \cos q) = 0,109;$$

$$g_1(q) = \frac{1}{p} (q - \sin q \cos q) = 0,196.$$

Тоді стала складова струму:

$$I_0 = S \cdot U_m \cdot g_0(60^\circ) = 25 \cdot 0,8 \cdot 0,109 = 2,18\text{мА};$$

амплітуда першої гармоніки струму:

$$I_1 = S \cdot U_m \cdot g_1(60^\circ) = 25 \cdot 0,8 \cdot 0,196 = 3,92\text{мА};$$

**За способом степеневі апроксимації** задача розв'язується таким чином. Нехай у околі робочої точки  $U_0$  вольт-амперна характеристика нелінійного елемента подана у вигляді:

$$i = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2 + \dots;$$

прикладена до нелінійного елемента (двополюсника) напруга:

$$u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t$$

Скориставшись відомими з тригонометрії формулами:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x),$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x),$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x).$$

Шляхом підстановки значення  $u(t)$  у вираз для струму та простих математичних дій отримаємо:

$$\begin{aligned} i(t) = & i \left( a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots \right) + \\ & + \left( a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots \right) \cos \omega t + \\ & + \left( \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots \right) \cos 2\omega t + \\ & + \left( \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots \right) \cos 3\omega t + \dots \end{aligned}$$

Звідси випливають такі співвідношення для розрахунку сталої складової струму і амплітуд його гармонік:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots, \\ I_1 &= a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots, \\ I_2 &= \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots, \\ I_3 &= \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

Як бачимо, стала складова і амплітуди парних гармонік визначаються коефіцієнтами степеневого ряду з парними номерами. Амплітуди непарних гармонік залежать лише від непарних коефіцієнтів.

**Приклад.** Нелінійний елемент має степеневу апроксимацію ВАХ  $i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2$  у околі робочої точки  $U_0 = 0,5B$ . На нього діє напруга з параметрами  $u = 0,5 + 0,3 \cos \omega t$ . Визначити сталу складову та амплітуди гармонік струму через цей елемент.

У формулу для ВАХ нелінійного елемента підставимо вираз для діючої напруги:

$$\begin{aligned}
i &= a_0 + a_1 \cdot 0,3 \cos \omega t + a_2 \cdot (0,3 \cos \omega t)^2 = \\
&= a_0 + a_1 \cdot 0,3 a_1 \cos \omega t + \frac{1}{2} \cdot 0,09 \cdot a_2 + \frac{1}{2} 0,09 a_2 \cos 2\omega t = \\
&= a_0 + \frac{1}{2} \cdot 0,09 \cdot a_2 + 0,3 a_1 \cos \omega t + \frac{1}{2} 0,09 a_2 \cos 2\omega t.
\end{aligned}$$

звідки:

$$I_0 = a_0 + 0,045 a_2, I_1 = 0,3 a_1, I_2 = 0,045 a_2.$$

Такий самий результат отримує, скориставшись системою (16.3):

$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 (0,3)^2 = a_0 + 0,045 a_2,$$

$$I_1 = a_1 \cdot 0,3 = 0,3 a_1, I_2 = \frac{1}{2} a_2 (0,3)^2 = 0,045 a_2.$$

### **Резонансне нелінійне підсилення**

Звернемося до схеми рис. 16.4, а, але робочу точку виберемо на середині лінійної ділянки вольт-амперної характеристики  $i_K(U_{BE})$ , а вхідна гармонічна напруга не виходитиме за межі лінійної ділянки. Це є, так званий, режим лінійного підсилення і форма колекторного струму через транзистор теж буде гармонічною (рис. 16.6).

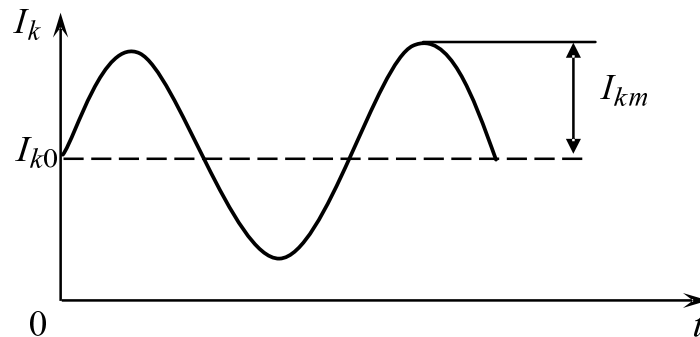


Рисунок 16.6 – Форма колекторного струму при лінійному підсиленні

Коефіцієнт корисної дії підсилювача  $h$  визначається формулою:

$$h = \frac{P}{P_0} = \frac{0,5 \cdot I_{km} \cdot U_{km}}{I_{k_0} \cdot E_k},$$

де  $I_{km}$  – амплітуда гармонічного колекторного струму;

$U_{km}$  – амплітуда гармонічної напруги на колекторі транзистора;

$I_{k_0}$  – постійна складова колекторного струму (струм через транзистор при відсутності вхідного сигналу);

$E_k$  – напруга колекторного живлення підсилювача.

Для дотримання вимоги лінійного підсилення (без спотворення форми колекторного струму), максимальне значення амплітуди колекторного струму може дорівнювати його постійній складовій ( $I_{km} = I_{k_0}$ ). Амплітуда колекторного струму не може перевищувати напругу колекторного живлення ( $U_{km} \leq E_k$ ). Таким чином к. к. д. підсилувача  $h \leq 0,5$ , тобто не перевищує 50%. Це означає, що не менше 50% енергії джерела живлення витрачається на нагрівання транзистора. Такий низький к. к. д. може бути допустимим лише у пристроях з мінімальною потужністю. При більш-менш значній потужності підсилувача така неекономічна робота підсилувача недопустима, і потрібно знайти способи для підвищення коефіцієнта корисної дії пристрою.

Для цього потрібно перейти до нелінійного резонансного підсилення з відтинанням колекторного струму. Ми уже знаємо, що при цьому усе буде залежати від вибору кута відтину  $q$ . Дійсно, у режимі підсилення вихідний сигнал при гармонічній вхідній напрузі має бути також гармонічним коливанням тієї ж частоти.

Це означає, що коливальний контур у колекторному колі резонансного підсилувача (рис. 16.7, а) повинен бути настроєним на першу гармоніку імпульсів колекторного струму. Цей струм матиме постійну складову  $I_{k_0} = g_0(q) \cdot I_{km \max}$  і амплітуду першої гармоніки  $I_{km} = g_1(q) \cdot I_{km \max}$ . Тоді к. к. д. підсилувача  $h$  дорівнюватиме:

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_1(q)}{g_0(q)} \cdot \frac{U_{km}}{E_k}.$$

При кутові відтину  $q = 90^\circ$  маємо  $g_0 = 1/p$ ,  $g_1 = 0,5$ ; вважаючи  $U_{km} \approx E_k$ , отримаємо  $h = p/4 = 0,785$ . Якщо ж  $q = 60^\circ$ , то  $g_0 = 0,218$ ,  $g_1 = 0,391$  ( $U_{km} \approx E_k$ ) і матимемо  $h = 0,9$ .

Взагалі зі зменшенням кута відтину коефіцієнт корисної дії зростає. Це легко пояснюється тим, що при зменшенні  $q$  середнє значення (воно ж є постійною складовою) послідовності косинусних імпульсів колекторного струму зменшується швидше, ніж амплітуда першої гармоніки, тобто при  $q \rightarrow 0$  відношення  $g_1(q)/g_0(q) \rightarrow 2$  при  $U_{km} \approx E_k$ .

### **Резонансне множення частоти**

Якщо у схемі резонансного (resonant) підсилувача на транзисторі (тобто підсилувача, коли, наприклад, роль колекторного навантаження виконує паралельний коливальний контур), який працює з великою амплітудою вхідного сигналу, коливальна система (контур) буде настроєна на деяку частоту  $n\omega$  – частоту однієї з вищих гармонік вхідного сигналу, то даний пристрій може використовуватись як помножувач частоти. На рис. 16.7 наводиться приклад подвоювача частоти.

Потреба у помножувачах виникає, наприклад, при створенні джерел гармонічних коливань високої частоти і з високою її стабільністю. Будують відносно низькочастотний високостабільний автогенератор  $U_C = U_m \sin \omega t$ , а потім множенням частоти на  $n$  отримують високостабільний сигнал з частотою  $n\omega$ .

При кусково-лінійній апроксимації амплітуда вихідного сигналу

$$U_{m \text{ вих}} = S \cdot R_{\text{рез}} U_{m \text{ вх}} \cdot g_n(q).$$

На рис. 16.7, б; в; г показано випадок подвоєння частоти. Тоді у останній формулі  $R_{\text{рез}}$  є резонансний на другій гармоніці імпульсу струму (рис. 16.6, в) вхідний опір колекторного контуру  $LC$ , а кут відтину  $q$  вибирається таким, при якому функція Берга  $g_2(q)$  буде мати максимальне значення. Розрахувати значення оптимального кута відтину можна за формулою:

$$q_{\text{опт}} = 180^\circ / n.$$

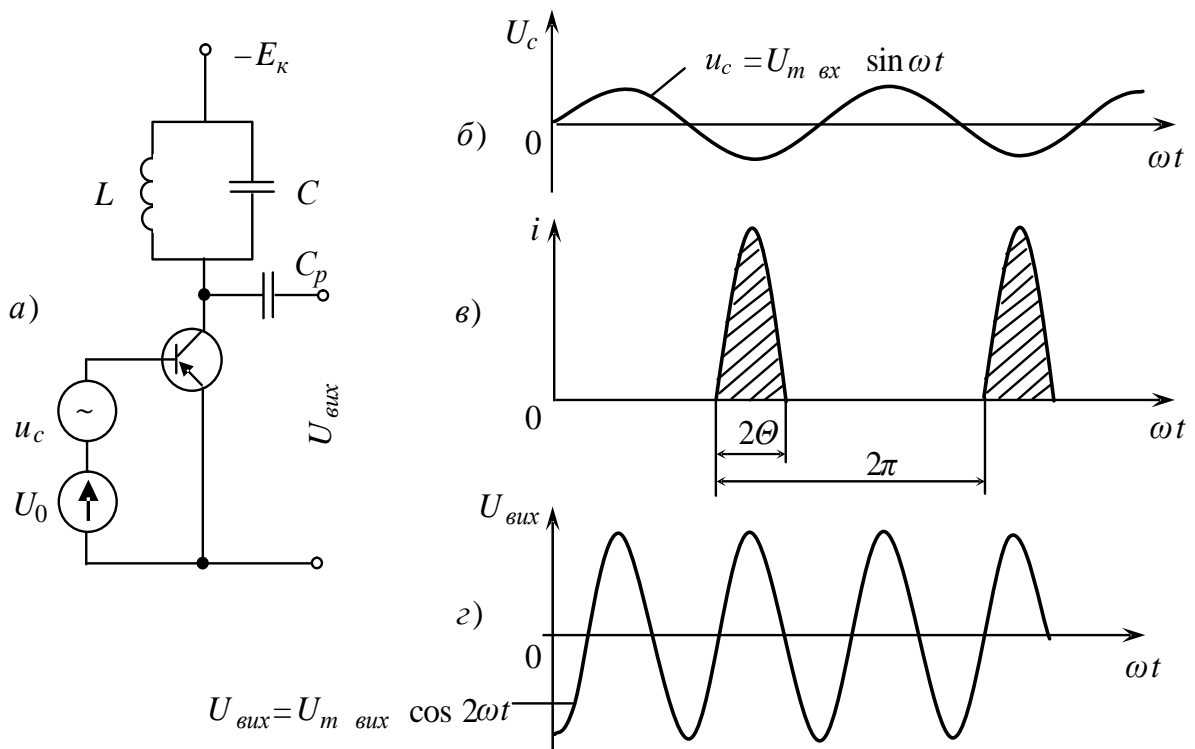


Рисунок 16.7 – Помножувач частоти: а) спрощена принципова схема резонансного підсилювача; б) форма вхідного сигналу; в) форма імпульсу колекторного струму; г) форма вихідної напруги

У запропонованому варіанті подвоєння частоти кут відтину колекторного струму дорівнює  $90^\circ (p/2)$ . При потроєнні частоти  $q_{\text{опт}} = 60^\circ (p/3)$ , при множенні на 10  $q_{\text{опт}} = 18^\circ (p/10)$  і т. д.

Слід зауважити, що зі зростанням  $n$  кут відтину зменшується і при цьому зменшується амплітуда імпульсу колекторного струму, а значить і

амплітуда вихідної напруги. Через це на практиці коефіцієнт множення частоти складає декілька одиниць.

### 16.3 Нелінійні перетворення суми двох гармонічних сигналів

Властивість нелінійного кола збагачувати спектр, створюючи на виході спектральні складові, які відсутні у вхідному сигналі, найяскравіше проявляється, якщо вхідний сигнал є сумою декількох гармонічних коливань з різними частотами. Ефект виникнення великої кількості нових спектральних складових лежить в основі важливих для радіотехніки нелінійних перетворень сигналів.

Розглянемо випадок, коли вольт-амперна характеристика нелінійного двополюсника описується тричленом другого степеня:

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2. \quad (16.4)$$

#### *Бігармонічна дія на нелінійний елемент*

Нехай прикладена напруга має постійну складову  $U_0$  і дві гармоніки з різними частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  та амплітудами, відповідно  $U_{m1}$  і  $U_{m2}$ :

$$u = U_0 + U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t. \quad (16.5)$$

Такий сигнал у радіотехніці прийнято називати *бігармонічною* (двогармонічною) дією. Він дуже зручний для з'ясування принципів особливостей перетворення спектра у нелінійних колах.

Підставимо вираз (16.5) у вираз (16.4):

$$\begin{aligned} i(t) &= a_0 + a_1(U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t) + \\ &+ a_2(U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t)^2 = \\ &= a_0 + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + a_1 U_{m2} \cos \omega_2 t + a_2 U_{m1}^2 \cos^2 \omega_1 t + \\ &+ 2a_2 U_{m1} \cdot U_{m2} \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t + a_2 U_{m2}^2 \cdot \cos^2 \omega_2 t. \end{aligned}$$

Виконавши елементарні тригонометричні перетворення і згрупувавши члени, приходимо до такого спектрального подання струму у нелінійному елементі:

$$\begin{aligned} i(t) &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 (U_{m1}^2 + U_{m2}^2) + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + \\ &+ a_1 U_{m2} \cos \omega_2 t + \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{2} a_2 U_{m2}^2 \cos 2\omega_2 t + \\ &+ a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 + \omega_2)t + a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Бачимо, що у складі струму присутні спектральні складові, які зустрічалися у вхідному сигналі: постійна складова:

$$a_0 + \frac{1}{2}a_2(U_{m1}^2 + U_{m2}^2),$$

а також перші гармоніки обох джерел вхідного сигналу:

$$a_1U_{m1} \cos w_1t \quad \text{та} \quad a_1U_{m2} \cos w_2t.$$

Новими спектральними складовими є другі гармоніки обох джерел вхідного сигналу:

$$\frac{1}{2}a_2U_{m1}^2 \cos 2w_1t \quad \text{і} \quad \frac{1}{2}a_2U_{m2}^2 \cos 2w_2t,$$

хоча зауважимо, друга гармоніка зустрічалася у струмі нелінійного елемента і при дії моногармонічної напруги на вході у попередньому підрозділі.

Принципово новим є поява двох гармонічних складових:

$$a_2U_{m1}U_{m2} \cos(w_1 + w_2)t \quad \text{і} \quad a_2U_{m1}U_{m2} \cos(w_1 - w_2)t$$

з частотами  $(w_1 + w_2)$  та  $(w_1 - w_2)$ . Амплітуди цих коливань, рівні  $a_2U_{m1}U_{m2}$ , однаковою мірою залежать від амплітуд вхідних сигналів і стають рівними нулю, якщо одне з джерел сигналів є відсутнім ( $U_{m1} = 0$  або  $U_{m2} = 0$ ). Це свідчить про те, що через нелінійність даного двополюсника (елемента) у ньому відбувається взаємодія коливань, які відповідають окремим гармонічним складовим вхідного сигналу.

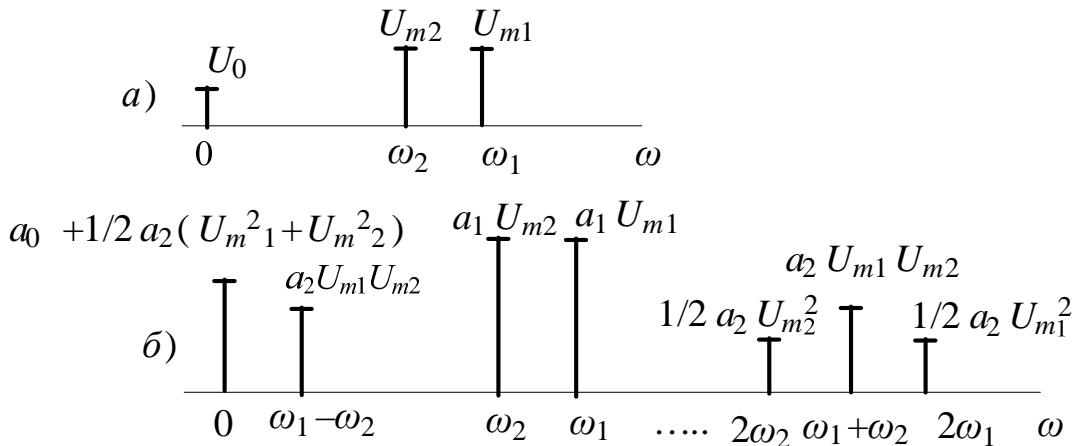


Рисунок 16.8 – Спектри: а) вхідної напруги; б) спектр струму через нелінійний елемент

На рис. 16.8 зображено амплітудно-частотний спектр вхідної напруги та амплітудно-частотний спектр струму через заданий нелінійний елемент.

### **Гетеродинування у нелінійних колах**

Перетворення, результатом якого є зміщення спектра сигналу вздовж осі частот без змін його спектрального складу, називається



гетеродинуванням. На практиці частіше використовують зміщення спектра у бік більш низьких частот, для цього фільтр  $\Phi$  має бути розрахованим на пропускання тільки різницевої частоти (рис. 16.9).

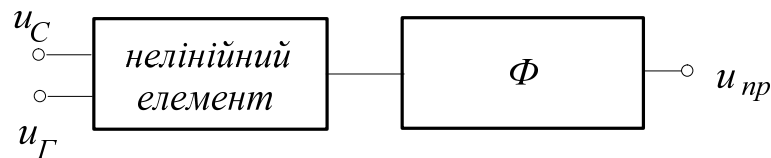


Рисунок 16.9 – Структурна схема перетворювача частоти

Припустимо, що на вході нелінійного елемента діють два гармонічних коливання.

$$u_{\text{вх}} = u_C + u_G,$$

де  $U_c = U_{mc} \cos w_c t$  – високочастотний сигнал;

$u_G = U_{mG} \cos w_G t$  – високочастотне гармонічне коливання, створене допоміжним генератором, який називається гетеродином (heterodyne, local oscillator, LO).

Їх різницева частота  $|w_C - w_G|$  вибрана також відносно високою, вищою, ніж будь-яка зі звукових частот. Тоді, згідно з формулою (16.6), на виході лінійного елемента матимемо:

$$\begin{aligned} u(t) = & a_0 + \frac{1}{2} a_2 (U_{mc}^2 + U_{mG}^2) + a_1 U_{m1} \cos w_c t + a_1 U_{mG} \cos w_G t + \\ & + \frac{1}{2} a_2 U_{mc}^2 \cos 2w_c t + \frac{1}{2} a_2 U_{mG}^2 \cos 2w_G t + \\ & + a_2 U_{mc} \cdot U_{mG} \cos(w_C - w_G)t + a_2 U_{mc} \cdot U_{mG} \cos(w_c + w_G)t. \end{aligned}$$

Після фільтра  $\Phi$  отримуємо:

$$u_{\text{нр}}(t) = U_{\text{нр}} \cos w_{\text{нр}} t,$$

де  $w_{\text{нр}} = w_C - w_G$  називається *проміжною частотою* (intermediate frequency, IF), а пристрій побудований за структурною схемою рис. 16.9 називається *перетворювачем частоти*, нелінійний елемент – *змішувачем*.

Якщо гетеродин перестроювати за частотою так, щоб  $w_{\text{нр}}$  залишалася незмінною, то на виході перетворювача матимемо сигнал, частота якого не буде залежати від частоти на якій працює радіостанція, повідомлення якої ми слухаємо за допомогою радіоприймача. Наприклад, у сучасних радіоприймачах АМ-діапазонів проміжна частота є стандартною і дорівнює 465 кГц.

Слід згадати ще про одне застосування гетеродинування, пов'язане уже не з перетворенням частоти сигналів, а з вимірюванням чи контролем частоти коливань.

Якщо до нелінійного елемента підведені коливання вимірюваної частоти  $f_x$ , а також коливання еталонної частоти  $f_{em}$ , вихідна напруга має частоту  $F = f_x - f_{em}$ .

Знаючи  $F$  і  $f_{em}$  можна визначити значення невідомої частоти  $f_x = f_{em} + F$ . Якщо  $F=0$  (“нульові биття”), то  $f_x = f_{em}$ .

На цьому принципі, наприклад, працюють пристрої, які називаються гетеродинними частотомірами.

### Амплітудне модулювання

Найпростіший амплітудний модулятор може бути побудований за структурною схемою, поданою на рис. 16.10, а.

Таким чином, на вході нелінійного елемента діє сума двох гармонічних напруг високочастотного гармонічного коливання несучої частоти  $u_n(t) = U_{mn} \cos \omega_n t$  і гармонічного керуючого низькочастотного коливання  $u_k(t) = U_{mk} \cos \Omega t$ :

$$u_{вх}(t) = U_0 + U_{mn} \cos \omega_n t + U_{mk} \cos \Omega t.$$

згідно з формулою (16.6) на резонансний контур, настроєний на частоту  $\omega_n$  діятиме напруга:

$$\begin{aligned} u'_{вух}(t) = & a_0 + \frac{1}{2} a_2 (U_{mn}^2 + U_{mk}^2) + a_1 U_{mn} \cos \omega_n t + a_1 U_{mk} \cos \Omega t + \\ & + \frac{1}{2} a_2 U_{mn}^2 \cos 2\omega_n t + \frac{1}{2} a_2 U_{mk}^2 \cos 2\Omega t + \\ & + a_2 U_{mn} U_{mk} \cos(\omega_n + \Omega)t + a_2 U_{mn} U_{mk} \cos(\omega_n - \Omega)t. \end{aligned}$$

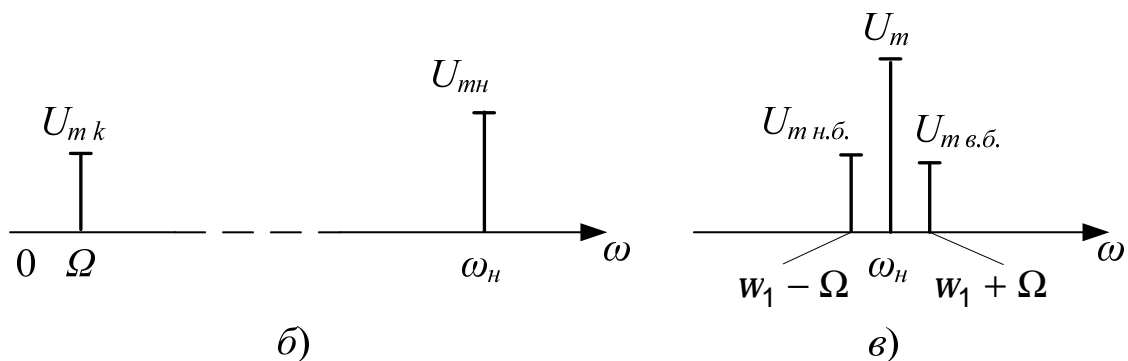
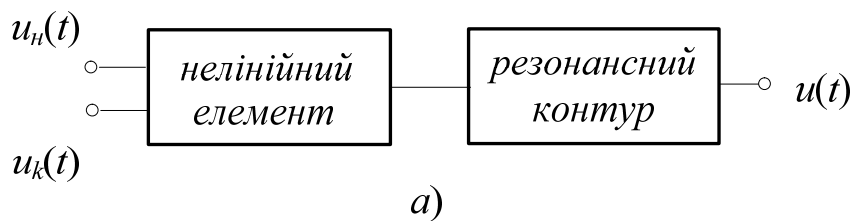


Рисунок 16.10 – Амплітудний модулятор: а) структурна схема; б) амплітудні спектри керуючого і керованого сигналів; в) амплітудний спектр АМ-сигналу

Резонансний контур “відреагує” лише на: гармонічну складову  $a_1 U_{mn} \cos w_n t$  і на виході з’явиться напруга:

$$U_m \cos w_n t,$$

та на гармонічні складові, близькі до неї за частотою,  $a_2 U_{mn} U_{mk} \cos(w_n + \Omega)t$  та  $a_2 U_{mn} U_{mk} \cos(w_n - \Omega)t$  і на виході матимемо ще дві напруги:

$$U_{mv.б.} \cos(w_n + \Omega)t \text{ та } U_{mn.б.} \cos(w_n - \Omega)t.$$

Оскільки резонансний контур є лінійним колом, то, відповідно до принципу суперпозицій (накладання), на виході пристрою, побудованого за структурною схемою рис. 16.10, а, отримаємо напругу, яка являє собою АМ-коливання:

$$u(t) = U_m \cos w_n t + U_{mv.б.} \cos(w_n + \Omega)t + U_{mn.б.} \cos(w_n - \Omega)t, ,$$

де  $U_{mv.б.} = \frac{1}{2} m U_m$  – амплітуда верхньої бічної складової;

$U_{mn.б.} = \frac{1}{2} m U_m$  – амплітуда нижньої бічної складової,

$m$  – коефіцієнт амплітудної модуляції.

### Лінійне детектування

На вході нелінійного елемента діє амплітудно-модульована напруга:

$$u_{ex}(t) = U_0 + U_{mex}(1 + m \cos \Omega t) \cos w_n t.$$

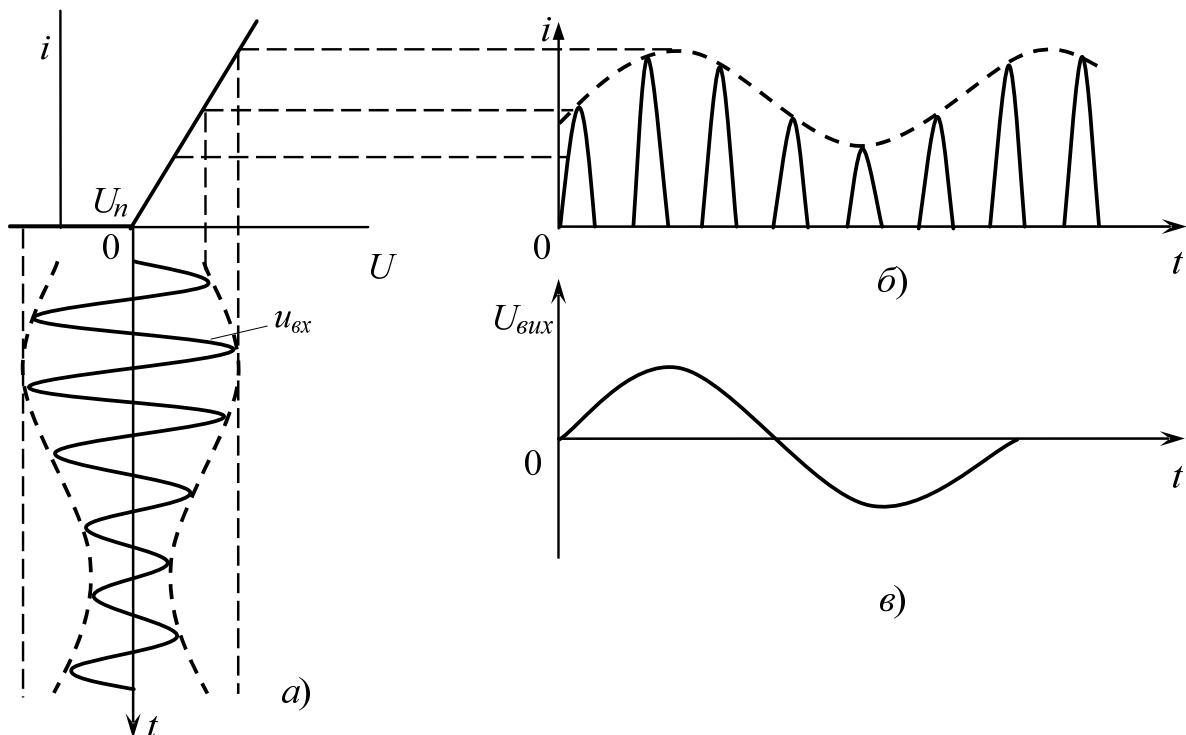


Рисунок 16.11 – Лінійне детектування: а) форма входньої напруги, б) форма струму через нелінійний елемент і в) форма вихідної напруги при лінійному детектуванні

Постійна складова вхідної напруги  $U_0$  нехай дорівнює  $U_{II}$ , а амплітуда  $U_{mex}$  буде достатньо велика для того, щоб можна було скористатися кусково–лінійною апроксимацією ВАХ нелінійного елемента, кут відтину  $q = 90^0$ .

Послідовність імпульсів струму через нелінійний елемент і виявляється промодульованою за амплітудою. Нульова складова (середнє значення такої послідовності імпульсів) змінюється у часі, причому її величина:

$$I_0 = kU_{mex}(1 + M \cos \Omega t) \cdot g_0(90^0) = 0,318I_m(1 + M \cos \Omega t),$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності,  $g_0(90^0) = 0,318$ .

Звідки, після фільтра нижніх частот, вихідна напруга буде дорівнювати:

$$u_{вих} = 0,318I_m R_H (1 + M \cos \Omega t),$$

де  $R_H$  – опір навантаження фільтра.

Суттєвим тут є те, що амплітуда сигналу на виході пропорційна амплітуді сигналу на вході, через що таке детектування називається *лінійним*. Його особливість – відсутність спотворень повідомлення, що передається.

Але нагадаємо, що таке можливе лише тоді, коли на вході амплітудного детектора діє сигнал з достатньо великою амплітудою.

### ***Квадратичне детектування***

Тепер розглянемо дуже поширений у радіотехніці випадок, коли детектуванню підлягає слабкий сигнал і ВАХ нелінійного елемента може бути апроксимована степеневою залежністю вигляду:

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2,$$

тобто, поліномом другого степеня.

Будемо вважати, що на нелінійний елемент подано напругу зміщення  $U_0$ , яка дорівнює постійній складовій АМ-сигналу:

$$u_{ex}(t) = U_0 + U_{mex}(1 + m \cos \Omega t) \cos w_0 t.$$

Підставивши значення  $u_{ex}(t)$  замість  $u$  у виразі для  $i(u)$ , виявимо, серед різноманітних комбінаційних коливань, які присутні у струмі через нелінійний елемент, таку низькочастотну складову:  $a_2 U_{mex}^2 \cdot m \cdot \cos \Omega t$ .

Після фільтра нижніх частот, у якого частота зрізу буде:  $\Omega < \omega_{зр} < 2\Omega$ , отримаємо:

$$u_{вих} = U_{mвих} \cos \Omega t.$$

Оскільки амплітуда вихідного сигналу детектора пропорційна квадрату вхідної напруги, таке детектування називається *квадратичним*.

### **Запитання та задачі для закріплення**

1. Що таке лінійні, нелінійні і параметричні елементи електричного кола?
2. Навести приклади зовнішніх характеристик нелінійних елементів.
3. Яким буде спектральний склад струму через нелінійний елемент з квадратичною ВАХ при дії на нього моногармонічної напруги?
4. Як здійснюється процес нелінійного підсилення та множення частоти?
5. Яким буде спектральний склад струму через нелінійний елемент з квадратичною ВАХ при дії на нього бігармонічної напруги?
6. Як здійснюється процес гетеродинування? Наведіть приклади його використання.
7. Як здійснюються процеси амплітудної модуляції та детектування?

## 17 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ І КОДУВАННЯ

### 17.1 Загальні зауваження

У процесі виробничої, творчої діяльності чи просто спілкування відбувається інтенсивний обмін інформацією між людиною і людиною, між людиною і технічними засобами, між технічними засобами, між людиною і природою, тобто, між окремими частинами єдиної системи, у якій ми знаходимося.

Усі сучасні технічні системи можна поділити на дві частини: енергетичні та інформаційні. Основою існування енергетичних систем є процеси вироблення, передавання та перетворення електричної енергії (електрогенератори, лінії електропередач, електродвигуни, електроосвітлення і т. ін.). Основою ж роботи інформаційних систем є процеси передавання, перетворення та накопичення інформації. Тому в інформаційних системах енергетичні співвідношення відіграють другорядну роль, а енергія електричного колювання є характеристикою сигналу, який використовується лише як транспортний засіб “перенесення” інформації від її джерела до споживача.

Опираючись на знання підрозділу 11.1 додамо, що слово “інформація” є полісемічним, бо існує дуже багато слів, зміст яких часто є тотожним поняттю “інформація”: знання, відомості, дані, показання і т. ін. Тому надалі інформацією будемо називати лише ті відомості, які зменшують невизначеність, яка мала місце до їх надходження. Якщо відомості не несуть нічого нового, то вони є інформаційними шумами.

З часом зростає об’єм інформації, а одночасно підвищуються вимоги до вірогідності передавання, обробки та відтворення інформації, що, у свою чергу, потребує застосування досконалих електронних цифрових обчислювальних засобів, де інформація обробляється у вигляді цифрових кодів. Узагальнена структурна схема інформаційної системи подана на рис. 17.1.

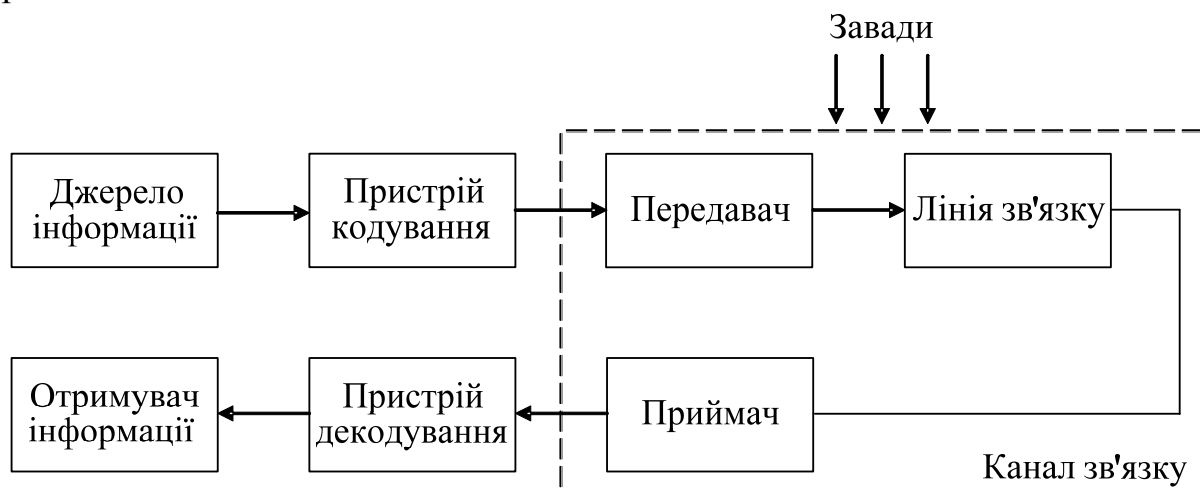


Рисунок 17.1 – Узагальнена структурна схема інформаційної системи

Теорія інформації є розділом кібернетики, яка займається математичним описом та оцінкою методів передавання, зберігання, перетворення і відтворення інформації. Вона є науковою дисципліною, в основі якої лежать: математичне описування сигналів, кількісна оцінка інформації, теорія оцінювання завадостійкості та ефективності інформаційних систем.

Таким чином, основною задачею теорії інформації і кодування є оптимальне використання інформаційних характеристик джерел повідомлень і каналів зв'язку для побудови кодів, які забезпечують задану вірогідність інформації, що передається з максимально можливою швидкістю, і мінімально можливою вартістю передавання повідомлень.

## 17.2 Дискретизація та квантування сигналів

У багатьох випадках первинні сигнали в інформаційних системах є неперервними за множиною і часом. Передавання таких сигналів зустрічає труднощі, пов'язані з появою апаратних похибок, похибок від нестабільності параметрів ліній зв'язку і т. ін. З метою усунення цих похибок здійснюють перетворення неперервних сигналів у дискретні. Дискретна форма подання сигналів, якими є, наприклад, імпульсно-модульовані сигнали, надає суттєві переваги при зберіганні і обробці інформації, дозволяє використовувати одні й ті ж самі пристрої (канали зв'язку) для більшого числа повідомлень.

### 17.2.1 Рівномірна дискретизація за частотним критерієм Котельникова

Рівномірна дискретизація (квантування у часі) полягає у заміні неперервного сигналу  $u(t)$ , зображеного на рис. 17.2, а, дискретним у часі сигналом  $u_\delta(t)$ , зображеним на рис. 17.2, б, значення якого для фіксованих, рівномірно розташованих на інтервалі тривалості неперервного сигналу, моментів часу  $t_0, t_1, t_2, t_3 \dots t_n$  збігаються відповідно з миттєвими значеннями неперервного сигналу. При дискретизації у часі неперервна за аргументом функція  $u(t)$ , яка описує сигнал, замінюється функцією  $u_\delta(t)$  дискретного аргументу. Така заміна може бути виконана шляхом взяття відліків функції  $u(t)$  у визначені дискретні моменти часу  $t_0, t_1, t_2, t_3 \dots t_n$ . У результаті функція  $u(t)$  замінюється сукупністю миттєвих значень  $u_i(t)$ ,  $i=0,1,2,3,\dots,n$ .

Часовий інтервал  $\Delta t$  між двома сусідніми фіксованими моментами часу, у яких задається дискретна функція, називається **інтервалом дискретизації**, а величина обернена до неї – називається **частотою дискретизації**  $f_\delta$ :

$$f_\delta = \frac{1}{\Delta t}. \quad (17.1)$$

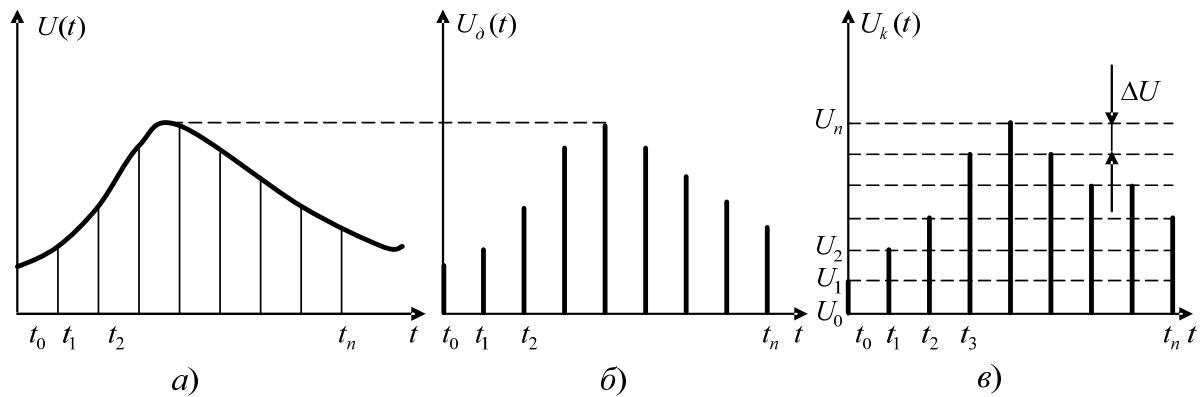


Рисунок 17.2 – До пояснення процесів дискретизації та квантування неперервних сигналів

За миттєвими значеннями  $u(t_i)$  можна відновити висхідну функцію з певною точністю. Функцію, отриману в результаті відновлення по відліках  $u(t_i)$ , називають відновлюваною. Очевидно зі зменшенням інтервалу дискретизації  $\Delta t$ , відновлювана функція буде з більшою точністю відображати висхідну функцію  $u(t)$ , але це призведе до перевантаження каналу зв'язку. Якщо ж збільшити інтервал дискретизації, то це може призвести до недопустимого відхилення відновлювальної функції від висхідної. Як же вибрати інтервал дискретизації  $\Delta t$  таким, щоб за значеннями відліками  $u(t_i)$  можна було б отримати висхідну функцію  $u(t)$  з заданою точністю?

Відповідь на це питання можна дати, звернувшись до частотного критерію, який базується на теорії Котельникова:

Якщо неперервна функція  $u(t)$  є обмеженою кусково-неперервною, має скінченне число екстремумів, а її спектр обмежений деякою частотою  $f_{\max}$  (тобто практична ширина її спектра  $\Delta f_{\text{сп}} = f_{\max}$ ), то вона повністю визначається послідовністю своїх значень у точках, які знаходяться одна від одної на відстані  $\Delta t = \frac{1}{2f_{\max}}$ .

Справедливість цього твердження можна засвідчити, виходячи з таких міркувань. Один період гармонічної функції  $U_m \sin \omega t$  можна встановити за двома інтервалами, тривалістю по  $\frac{T}{2}$ , де  $T$  – період цієї синусоїди.

Тобто, інтервалом дискретизації її є  $\Delta t = \frac{T}{2}$ . Тоді цей самий інтервал дискретизації для гармоніки, наприклад, з частотою удвічі меншою (періодом удвічі більшим) дасть удвічі більшу кількість відліків. Або, іншими словами, для всіх гармонік з частотами меншими за  $\omega$  кількість відліків виявиться більшою чим необхідно.



Таким чином, якщо інтервал дискретизації  $\Delta t = \frac{1}{2} f_{\max}$  є достатнім, то для усієї решти гармонік, які входять до практичної ширини спектра сигналу  $u(t)$ , цей інтервал буде достатнім із запасом.

### 17.2.2 Рівномірне квантування за рівнем

При квантуванні за рівнем в межах дії неперервного сигналу  $u(t)$  вибирається скінченне число дискретних значень цієї функції (дискретних рівнів)  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$  (рис. 17.2, в) і в процесі квантування за рівнем значення дискретної функції  $u_o(t_i)$  у кожний момент часу  $t_0, t_1, t_2, t_3 \dots t_n$  замінюється найближчим значенням рівня. Тобто, відбувається заокруглення значення дискретної функції до найближчого меншого чи більшого значення рівня квантування.

Квантування за рівнем широко використовується в системах передавання інформації, інформаційно-вимірювальних системах і т. ін.

Через квантування дискретного сигналу за рівнем виникає методична похибка, бо дійсне миттєве значення неперервного сигналу замінюється значенням найближчого рівня квантування. Тому цю похибку називають похибкою квантування або шумом квантування.

Причому ця похибка знаходиться у інтервалі  $(-\Delta U/2, +\Delta U/2)$ , отже чим меншим буде крок квантування  $\Delta U$ , тим точнішим буде відновлення неперервного сигналу на приймальному кінці лінії зв'язку.

Такий підхід, з одного боку, є цілком справедливим, але з іншого боку не слід забувати, що чистих сигналів нема. На практиці завжди реальний сигнал супроводжується шумами. Тому крок квантування має бути такої величини, щоб  $\frac{\Delta U}{2}$  був не меншим за рівень шуму  $U_{ш}$ .

Дискретизація неперервного сигналу полягає у заміні цього сигналу дискретним, тобто поданими миттєвими значеннями неперервного сигналу, взятими у точках, які знаходяться одна від одної на відстані  $\Delta t = \frac{1}{2f_{\max}}$ , де  $f_{\max}$  – є найвища частота практичної ширини спектра неперервного сигналу.

Дискретний сигнал квантується за рівнем, тобто він замінюється іншим дискретним сигналом, миттєві значення якого у певних точках дискретизації заокруглюються до найближчого рівня квантування, а відстань між двома сусідніми рівнями квантування  $\Delta U$  називається кроком квантування.

## 17.3 Кодування сигналів

### 17.3.1 Коди, види кодів та їх параметри

Відомо, що передавання інформації від джерела до споживача виконується за допомогою сигналів. Для того, щоб сигнали були однозначно зрозумілі, їх необхідно скласти за правилом, яке є незмінним протягом всього часу передавання повідомлення. Правило (алгоритм), яке ставить у відповідність кожному конкретному повідомленню певну комбінацію різних символів, називається кодом, а процес перетворення повідомлення у комбінацію різних символів називається кодуванням. Процес відновлення змісту повідомлення за даним кодом називається декодуванням. Послідовність символів, яка у процесі кодування присвоюється кожній з множин повідомлень, що передаються, називається кодовим словом.

Серед різних видів кодів назвемо такі:

- прості цифрові коди;
- складені коди;
- рефлексні (відбиті) коди;
- коригуючі коди;
- коди з виправною здатністю.

Кодування полягає в тому, що послідовність символів джерела замінюється послідовністю кодових символів – кодовою комбінацією (ковим словом).

Елементарними сигналами, які подають символи кодової комбінації, у технічних інформаційних системах зазвичай слугують імпульси електричного струму чи напруги. Елементарним сигналом може слугувати пауза між імпульсами (відсутність імпульсу) або комбінація імпульсу і паузи і т. д. Ці сигнали повинні розрізнятися за якимсь одним параметром, який називається часто кодовою ознакою. Як кодові ознаки застосовуються такі параметри, як величина імпульсу (при АІМ), частота імпульсу (ЧІМ), тривалість імпульсу (ШІМ) і т. ін., див. рис. 12.6.

Серед параметрів коду найважливішими є його основа  $m$  – кількість значень кодових ознак, які використовуються у кодових комбінаціях, та його *значність (розрядність, довжина)*  $n$  – загальна кількість символів, які складають кодову комбінацію.

За умовами побудови кодових комбінацій коди поділяються на рівномірні і нерівномірні. У рівномірних кодах усі кодові комбінації (кодові групи) мають однакову кількість елементів  $n = \text{const}$ . Таким є, наприклад, код Бодо ( $n = 5$ ), про який детальніше згадаємо трохи пізніше. Прикладом нерівномірного коду є код Морзе, бо там у кодових комбінаціях використовується різна кількість елементів (точок і тире).

За кількістю різних символів ( $m$ ) у кодових комбінаціях розрізняють коди:

- одиничні,  $m = 1$ ;
- двійкові (бінарні),  $m = 2$ ;
- багатопозиційні,  $m > 2$ .

В одиничному коді використовуються однакові символи. Кодові комбінації відрізняються одна від одної лише кількістю символів, що вказує на нерівномірність цього коду. Такий код ще називають числоімпульсним.

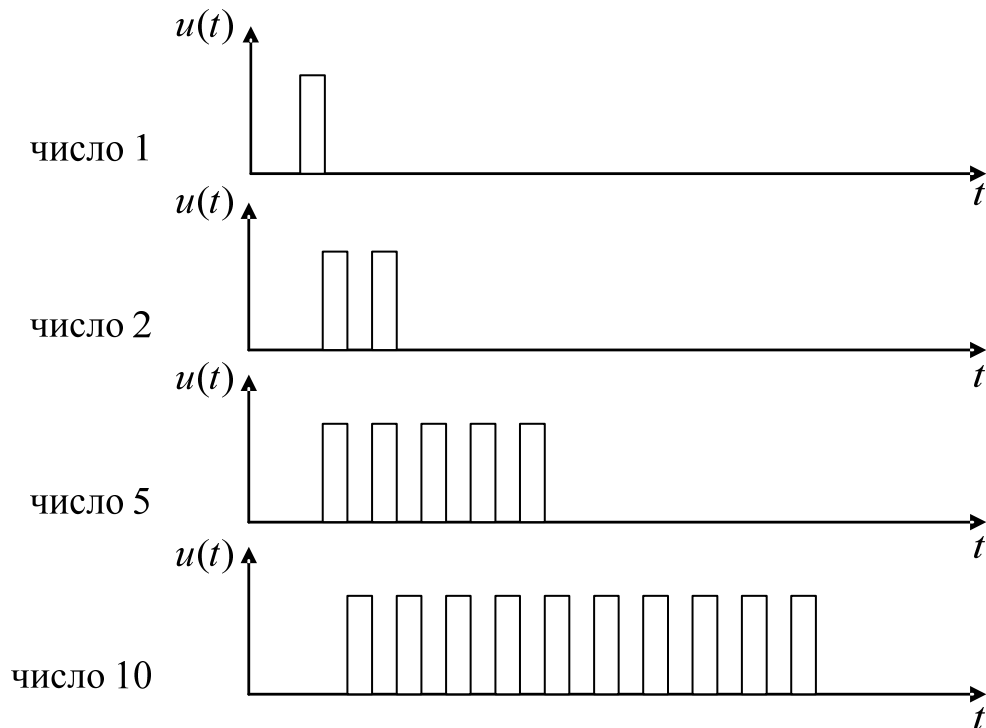


Рисунок 17.3 – Приклади кодових комбінацій одиничного (числоімпульсного) коду

Найпоширенішим на сьогодні є двійковий або бінарний код. Це обумовлено тим, що формування кодових сигналів і дешифрування здійснюється за допомогою релейних пристроїв, які мають лише 2 стійких стани (замкнутий, розімкнутий). Ця кількість станів і обумовлює вибір основи коду.

Багатопозиційні коди поки не знайшли широкого використання в інформаційних системах.

### 17.3.2 Системи числення і прості цифрові коди

Усі системи числення, на основі яких можуть будуватися цифрові коди, поділяються на позиційні і непозиційні. Прикладом останніх є римська система числення, значення символу у якій не залежить від його положення (позиції) у ряду символів, які складають дане число.

Найпоширенішим на сьогодні при кодуванні є позиційний принцип утворення систем числення, якими ми повсякденно користуємось. За цим принципом значення кожного символу залежить від його положення (позиції) у ряду символів, які складають число. Число складається з розрядів. Значення одиниці кожного наступного розряду більше значення

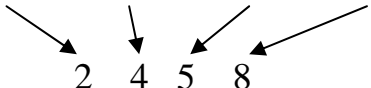
одиниці попереднього розряду в  $m$  разів, де  $m$  основа системи числення. При цьому будь-яке  $n$  – розрядне число  $N$  з основою  $m$  може бути поданим у вигляді суми

$$N = \sum_{p=1}^n a_p m^{p-1}, \quad (17.2)$$

де  $a_p$  – значення розрядного коефіцієнта  $p$ -го розряду.

Кількість можливих розрядних коефіцієнтів дорівнює основі вибраної системи числення.

За прикладом звернемося до звичної нам з дитинства десяткової системи числення, основа якої  $m = 10$ . У цій системі будь-яке число складається з розрядів: одиниць, десятків, сотень, тисяч і т. д. Відповідно кожний розряд має свою одиницю розряду: один, десять, сто, тисяча і т. д. Кількість одиниць у кожному розряді одного заданого числа може дорівнювати одному з десяти ( $m = 10$ ) чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Відповідно до виразу 17.2 значення  $N$  будь-якого десяткового числа є сумою добутків кількості одиниць в усіх розрядах цього числа та значень одиниць відповідних розрядів. Причому ця сума пишеться, починаючи з найвищого розряду (для даного числа), і закінчується найнижчим розрядом одиниць. Для числа  $2458 =$  дві тисячі + чотири сотні (чотириста) + п'ять десятків (п'ятдесят) + вісім одиниць (вісім), або

$$2458 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$


Іншими словами, ми маємо будову, де у основі знаходиться число 10. Значення одиниці розряду залежить від номера розряду  $p$ , знаходиться за формулою  $10^{p-1}$ . В першому розряді (розряді одиниць) його одиниця дорівнює  $10^0 = 1$ , у другому –  $10^1 = 10$ , в третьому –  $10^2 = 100$ , в четвертому –  $10^3 = 1000$ . Число 8 указує на кількість одиниць (одиниць першого розряду), 5 – на кількість десятків (одиниць другого розряду), 4 – на кількість сотень (одиниць третього розряду) і 2 – на кількість тисяч (одиниць найвищого в цьому числі розряду).

Отже, щоб записати число у десятковій системі числення потрібно зліва направо записати лише значення коефіцієнтів  $a_p$  при кількості одиниць відповідних розрядів, починаючи з найвищого розряду.

Таким чином у цьому прикладі ряд чисел 2458 не є самим числом, а лише його кодом, записаним у десятковому коді.

У двійковому (бінарному) коді, який будується на двійковій системі числення, основою є число 2 ( $m = 2$ ). Найнижчий розряд – це розряд одиниць ( $2^0 = 1$ ), далі – розряд двійок ( $2^1 = 2$ ), розряд четвірок ( $2^2 = 4$ ),

розряд вісімок ( $2^3 = 8$ ) і т. д. Коефіцієнт  $a_p$  у виразі 17.2 може мати тільки 2 значення: нуль або один, бо їх кількість має дорівнювати двом. Значення числа, як це було і у попередньому прикладі, дорівнює сумі добутків кількості одиниць (0 або 1) в усіх розрядах заданого числа та значень одиниць відповідних розрядів. Ця сума пишеться починаючи з найстаршого і закінчуючи найнижчим розрядом. Наприклад, число

$$25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$11001$$

і, отже, число "двадцять п'ять" у двійковій системі числення записується як 11001 (читається: один, один, нуль, нуль, один) і є його двійковим (бінарним) кодом.

Такі коди називаються простими цифровими кодами. До них відноситься, наприклад, трійковий (трипарний) код, основою якого є число 3, а кількість одиниць у розрядах ( $3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^{n-1}$ ) визначається трьома числами: 0, 1, 2, а код того ж самого числа 25 був би таким:

$$25 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \rightarrow 221.$$

Такими простими цифрами будуть: четвірковий (де  $m = 4, a_p = 0, 1, 2, 3$ ), вісімковий ( $m = 8, a_p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ) і т. ін.

Важливо зауважити, що максимально можлива кількість кодових комбінацій будь-якого коду визначається за формулою

$$N_{\max} = m^n.$$

Наприклад, для найуживанішого на сьогодні бінарного (двійкового) однорозрядного коду ( $m = 2, n = 1$ ) може бути лише дві кодові комбінації символів: 0 або 1; для дворозрядного коду ( $m = 2, n = 2$ ) зможемо мати чотири кодових комбінації: 00, 01, 10, 11; для трирозрядного коду ( $m = 2, n = 3$ ) – вісім кодових комбінацій: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 і т. д.

### 17.3.3 Складені коди

Складені коди базуються на складених системах числення, які мають дві і більше основ. При такому кодуванні, числа задані у системі з деякою основою  $m_1$ , зображуються за допомогою цифр іншої системи числення з основою  $m_2 < m_1$ .

Серед складених кодів найпоширенішими є двійково-десяткові коди. Такі коди зазвичай використовуються як проміжні при переведенні десяткових кодів у двійкові і навпаки, наприклад, при введенні в

обчислювальну машину даних, які подані у десятковій системі, або при виведенні з машини інформації для реєстрації у десятковому коді.

У двійково-десятковому коді основною системою числення є десяткова. Проте кожна цифра десяткового числа записується у вигляді чотирирозрядного двійкового числа (тетради). Для фіксування цифр десяткового числа найбільше практичне застосування знайшли чотириелементні двійкові вагові коди  $8 - 4 - 2 - 1$ ,  $7 - 4 - 2 - 1$ ,  $5 - 1 - 2 - 1$ , та  $2 - 4 - 2 - 1$ . Цифри у назві коду виражають вагу (кількість) одиниць у відповідних двійкових розрядах.

В табл. 17.1 наведений запис десяткових цифр різними типами чотириелементних двійкових кодів.

Таблиця 17.1

Десяткове число	Код типу 8421	Код типу 7421	Код типу 5121	Код типу 2421
0	0000	0000	0000	0000
1	0001	0001	0001	0001
2	0010	0010	0010	0010
3	0011	0011	0011	0011
4	0100	0100	0111	0100
5	0101	0101	1000	1011
6	0110	0110	1001	1100
7	0111	1000	1010	1101
8	1000	1001	1011	1110
9	1001	1010	1111	1111

Оскільки за допомогою чотирьох двійкових розрядів ( $n = 4$ ) можна утворити 16 ( $N_{\max} = 2^4 = 16$ ) різних комбінацій, а використовуються лише 10, то кажуть, що двійково-десятковий код має певну *надлишковість*.

### 17.3.4 Кодування дискретних та неперервних повідомлень

#### *Кодування дискретних повідомлень*

Таким прикладом дискретного повідомлення є текстове подання інформації, де для її передавання застосовується код Бодо. Цей код є двійковим, п'ятирозрядним і рівномірним. Тобто, максимальна кількість кодових комбінацій дорівнює  $N_{\max} = 2^5 = 32$ . Такої кількості комбінацій достатньо, щоби закодувати усі літери української абетки. В табл. 17.2 подані кодові комбінації міжнародного та українського телеграфних кодів Бодо.

Таблиця 17.2 – Кодові комбінації міжнародного та українського телеграфних кодів Бодо

Кодова комбінація	Значення кодової комбінації		Кодова комбінація	Значення кодової комбінації	
	Латина	Україн.		Латина	Україн.
10000	I	А	11100	О	О
00110	B	Б	11000	P	П
01101	W	В	00111	R	Р
01010	G	Г	00101	S	С
11110	D	Д	10101	T	Т
01000	E	Є	10100	U	У
00010	V	Ж	01100	F	Ф
11001	Z	З	11010	H	Х
01100	I	І	10110	C	Ц
10010	J	Й	10111	Q	Щ
10011	K	К	01001	X	Ь
11011	L	Л	00100	Y	И
01011	M	М	00011		Я
01111	N	Н	00000	Пробіл	Пробіл

Користуючись табл. 17.2, закодуємо слово „АВТО” (рис. 17.3)

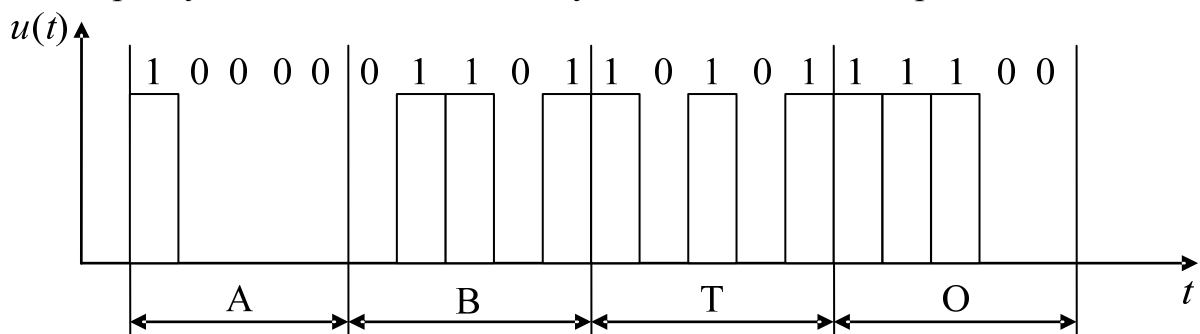


Рисунок 17.4 – Двійковий код слова „АВТО”

На рисунку 17.4 показане слово „авто”, двійковий код якого складається з чотирьох кодових комбінацій (груп, літер), що утворюють це слово.

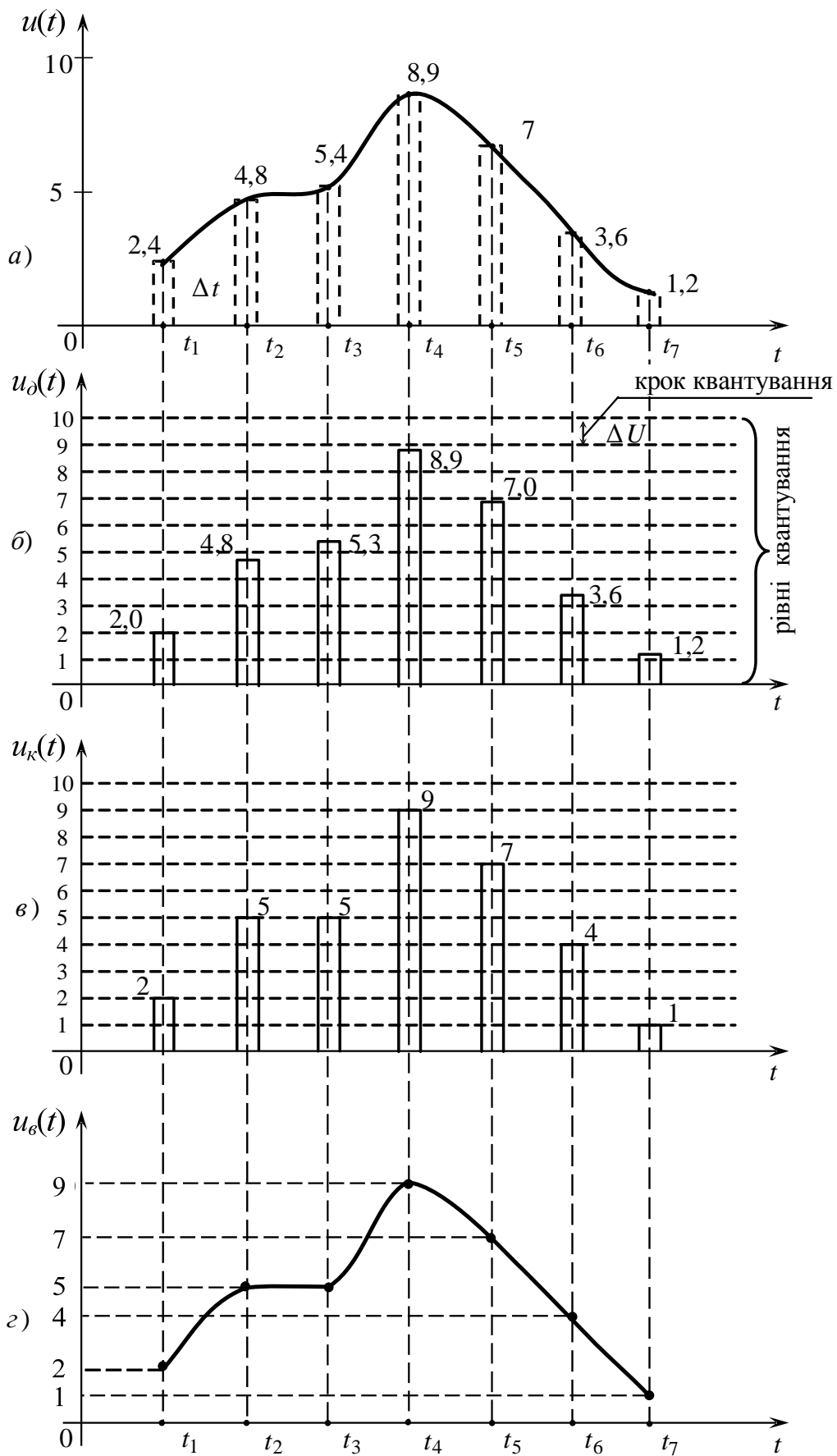


Рисунок 17.5 – Ілюстрація до процесу а), б), в) кодування сигналу  $u(t)$ , г) графік відновлювальної функції  $u_6(t)$



### Кодування неперервних повідомлень

Кодування неперервних повідомлень (музики, мови, змінення температури, параметрів будь-яких технологічних процесів та інших неперервних повідомлень) відбувається у три етапи: дискретизація відповідного повідомлення неперервного сигналу у часі, квантування дискретного сигналу за рівнем і власне кодування.

Припустимо, хід досліджуваного фізичного процесу характеризується неперервним змінюванням температури. За допомогою вимірювального перетворювача терморпари, наприклад, миттєве значення температури перетворюється у пропорційне їй миттєве значення електричної напруги  $u(t)$ , графік якої подано на рис. 17.5, а.

Дискретизація неперервного сигналу  $u(t)$ , як зазначалося раніше, полягає у перетворенні його у дискретний сигнал  $u_d(t)$ , зображений на рис. 17.5, б. Він утворюється у результаті, наприклад, амплітудно-імпульсної модуляції (АІМ) неперервним сигналом  $u(t)$  послідовності прямокутних імпульсів з періодом  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  – інтервалом дискретизації так, що амплітуди цих імпульсів дорівнюють миттєвим значенням неперервного сигналу у визначені моменти часу  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ .

При квантуванні за рівнем з заданим кроком  $\Delta U$  (у нашому прикладі  $\Delta U = 1$  В) відбувається округлення значень імпульсів  $u_d(t)$  до найближчого дозволеного рівня квантування  $u_k(t)$ , із зображених на рис. 17.5, в, крок квантування  $\Delta U$  вибирається так, щоб реально існуючі завади (шуми) не викликали помилкового переходу квантованого сигналу на інший рівень. Тоді похибки  $\pm \Delta U/2$ , що вносять квантуванням (округленням), не будуть перевищувати тих, які виникли б у неперервному сигналі через завади. Отже, квантування по суті є перетворенням дискретного сигналу у цифровий.

При кодуванні слід пам'ятати, що числа кодових груп (кодових комбінацій) мають відповідати вибраним значенням:  $m$ -основі і  $n$ -значності (розрядності) майбутнього коду.

У нашому прикладі є 10 рівнів квантування:  $0, \Delta U, 2\Delta U, 3\Delta U, \dots, 9\Delta U$ , тобто, максимальне число кодових комбінацій  $N_{\max} = 10$ , звідки значність коду  $n \geq \log_2 N_{\max}$  ( $n \geq \log_2 10 > 3$ ), тобто значність коду  $n = 4$ .

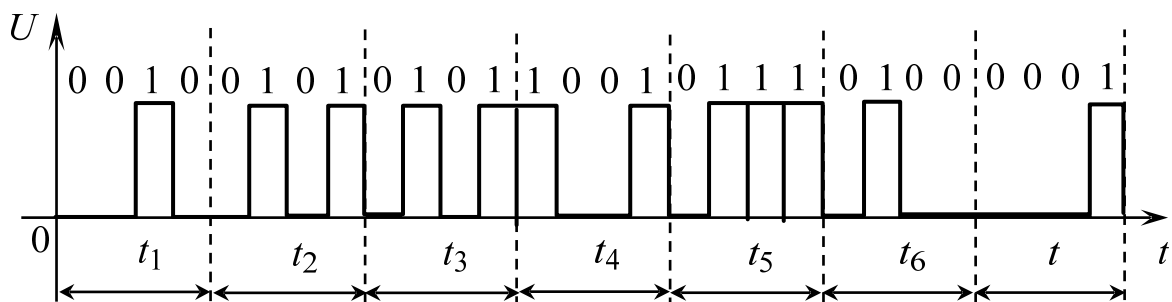


Рисунок 17.6 – Код неперервного сигналу  $u(t)$

Кодова послідовність імпульсів (рис. 17.6) шляхом амплітудної модуляції височастотного гармонічного коливання перетвориться на відповідну кодову послідовність радіоімпульсів, які по лінії зв'язку надходять до приймальної частини інформаційної системи зв'язку. Там, після детектування, послідовність радіоімпульсів перетворюється у послідовність імпульсів (див. рис. 17.6), яка після декодування перетворюється у послідовність імпульсів, зображених на рис. 17.5, в, а після операції відтворення буде отримано неперервний сигнал, який описується відтворювальною функцією  $u_g(t)$ , зображеною на рис. 17.5, г.

Порівнюючи початковий сигнал (рис. 17.5, а) з відтвореним сигналом  $u_g(t)$  на приймальному кінці інформаційної системи зв'язку, бачимо їх відмінності, які обумовлені похибками на етапах дискретизації, квантування та відтворення сигналу. Якщо ці відмінності не перевищують допустимі відхилення (похибки), то задача якісної передачі інформації про фізичний процес вважається виконаною.

Код є правило (алгоритм), яке ставить у відповідність кожному конкретному повідомленню певну комбінацію різних символів.

Декодування є процес відновлення змісту повідомлення заданим кодом.

Будь-який код базується на певній системі числення. Повсякденно ми користуємось десятковою системою числення, яка має десять значень (0, 1, 2, ..., 9) можливої кількості одиниць у розрядах десяткового числа, а основою десяткового коду є число 2.

Максимально можлива кількість кодових комбінацій  $N_{\max}$  визначається за формулою

$$N_{\max} = m^n$$

де  $m$  – основа коду;

$n$  – його значність (розрядність).

Будь-яке число може бути записаним у позиційному коді так

$$N = \sum_{p=1}^n a_p m^{p-1},$$

де  $p$  – номер розряду числа  $N$ , починається з найвишого;

$a_p$  – значення кількості одиниць у  $p$ -му розряді.

## 17.4 Кількість інформації і ентропія

### 17.4.1 Кількісна оцінка інформації

**Код** – універсальний спосіб відображення інформації при її зберіганні, обробці, передачі у вигляді системи відповідностей між елементами повідомлень і сигналами, за допомогою яких ці елементи можна зафіксувати. При цьому кодування можна завжди звести до однозначного перетворення

символів повідомлення – *первинного алфавіту* (наприклад, літери тексту) у символи коду – *вторинного алфавіту* (наприклад, кодові комбінації 0 і 1), код є правилом, законом, алгоритмом за яким здійснюється це перетворення. Кодові комбінації ще називають *кодovими словами*.

Раніше згадувалось, що до задач теорії інформації і кодування входять такі техніко-економічні проблеми: винайдення способів передавання інформації при найменших можливих масових і енергетичних витратах; винайдення засобів захисту інформаційних систем від впливу зовнішніх факторів (завад, апаратурних відмов і т. ін.), визначення рентабельності вибору способу передавання інформації та методу кодування.

Щоб розв'язати ці проблеми, найперше необхідно навчитися оцінювати кількість і швидкість передавання інформації, розглянувши відому задачу передавання інформації про місце знаходження фігури на шаховій дошці. Її можна розв'язати у два способи: 1) закодувати кожен клітинку дошки, або 2) назвати номери вертикалі і горизонталі. У першому випадку необхідно мати код, який би відобразив 64 знаки (у двійковому коді комбінації будуть складатися з шести елементів), а у другому випадку код має відобразити вісім знаків. Його комбінації будуть складатися з трьох елементів, але для передачі місця знаходження фігури знадобиться два повідомлення (по вертикалі і горизонталі). Кількість інформації, яка передається у перший і другий способи, буде однаковою.

Кількість інформації буде збільшуватись при збільшенні числа повідомлень, які несуть інформацію про координати нових клітин, тобто буде задовольняти *умову адитивності*: при передаванні повідомлень одним і тим самим методом, однією і тією самою апаратурою, по одному і тому самому каналу зв'язку, кількість інформації тим більша чим більшу кількість символів ми передаємо. Дійсно, чим більше слів у телеграмі, тим природніше очікувати від неї більшої кількості інформації; чим більшу кількість дискретних (миттєвих) значень неперервної функції передамо, тим точнішою (ближчою до вихідної) буде відтворювальна функція.

Отже, кількість інформації залежить від числа повідомлень. З'ясуємо характер цієї залежності.

Відомо, що кількість повідомлень  $N$  можна отримати, комбінуючи  $m$  символів ( $m$  ознак кодового алфавіту) алфавіту по  $n$  елементів у повідомленні (кодovій комбінації),

$$N = m^n.$$

Наприклад, комбінуючи два символи (0 і 1) можна отримати чотири бінарних повідомлення (кодovі комбінації) при  $n = 2$ , вісім - при  $n = 3$ , шістнадцять – при  $n = 4$  і т.д. Як бачимо, кількість можливих повідомлень  $N$ , а разом з ними і кількість отриманої інформації знаходяться у експоненціальній залежності від кількості елементів у повідомленні.

У 1929 р. американський вчений Р. Хартлі запропонував як міру інформації у повідомленні прийняти логарифм числа можливих кодових комбінацій символів:

$$I = \log_m m^n = n \cdot \log_m m = n. \quad (17.3)$$

Найпростіший вибір полягає у розв'язуванні дилеми "так – ні", результат розв'язування якої можна передати, наприклад, двома якісними ознаками: імпульс і пауза (1 і 0). Кількість інформації, яка передається у такому найпростішому випадку, приймається за одиницю інформації і називається двійковою одиницею або біт (від англійських слів binary digit – двійкова одиниця).

Очевидно, якби нам зустрілось десять рівноімовірних виборів, то за одиницю кількості інформації зручно було б вибрати десяткову одиницю – біт, а основою логарифма у виразі (17.3) мало бути число 10.

Якщо число символів, що передаються, не є одним з чисел роду  $2^n$ , то кількість інформації не дорівнює цілому числу бінарних одиниць. При цьому будемо пам'ятати, що усе вищесказане є справедливим для незалежних рівноімовірних подій.

Дійсно, якщо в урні  $m$  однакових за розміром і масою, але різних за кольором кульок, то можливість витягти кульку певного кольору є подією рівноімовірною, її імовірність  $p = 1/m$ . При цьому

$$I = \log m = \log \frac{1}{p} = -\log p, \quad (17.4)$$

тобто, кількість інформації на кожну рівноімовірну подію дорівнює мінус логарифму імовірності окремої події. Якщо вибрані кульки щоразу повертати до урни, то їх імовірності будуть залишатися рівними, а якщо не повертати до урни вибрані кульки, то імовірність витягти кульку певного кольору з тих, що залишилися в урні, буде зростати зі зменшенням кількості кульок в ній.

У розглянутому випадку кількість предметів (кульок) і кількість якісних ознак (кольорів) збігалися і дорівнювали  $m$ . Звернемося до більш складної ситуації, коли для складання повідомлення є  $k$  предметів, які мають  $m$  якісних ознак. Априорна імовірність появи предмета з  $i$ -ою ознакою  $p_i = 1/m$ . Якщо серед  $k$  предметів є  $k_i$  предметів з  $i$ -ою ознакою, то частота появи такого предмета дорівнює  $k_i/k$ . Якщо тепер позначити через  $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_m$  кількість предметів відповідно з 1-ою, 2-ою, ...,  $i$ -ою, ...,  $m$ -ою якісними ознаками, то загальна кількість елементів повідомлення

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_m = \sum_{i=1}^m k_i.$$

Оскільки імовірність появи у повідомленні одного символу з  $i$ -ою ознакою дорівнює  $p_i$  ( $p_i = k_i/k$ ), то – двох символів з  $i$ -ою ознакою буде дорівнювати  $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_i^{k_i}, \dots, p_m^{k_m}$ , взятих з вторинного алфавіту  $m$ ,

відповідно до відомої з курсу вищої математики теореми про суміщення незалежних подій, визначається як добуток імовірностей типу  $p_i^{k_i}$

$$P = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}. \quad (17.5)$$

Наприклад, якщо в урні є 1000 кульок, пронумерованих цифрами 0, 1, 2, ..., 9 ( $m = 10$ ) у рівній кількості, то при діставанні (повідомленні) однієї кульки, наприклад, цифри 5 може і не бути. Не виключено, коли витягнути підряд 10 кульок, то і у такій кількості повідомлень цього номера також не буде. Якщо ж витягувати по одній кульці з поверненням їх до урни і перемішуванні 10000 разів, то і частота появи зазначеної кульки буде близькою до  $1/m = 1/10$ .

З цього прикладу випливає, що зі збільшенням кількості повідомлень імовірність появи  $i$ -го символу у повідомленні буде зростати і частота появи цього символу  $k_i/k$  буде дорівнювати імовірності  $1/m = p_i$  при нескінченній кількості повідомлень. У теорії імовірності це обґрунтовується відомим законом великих чисел (теоремиою Бернуллі).

Отже,

$$k_i/k \approx p_i, \quad k_i = k p_i. \quad (17.6)$$

Підставивши  $k_i$  у формулу (17.5), отримаємо

$$P = \prod_{i=1}^m p_i^{k p_i}. \quad (17.7)$$

Підставивши тепер це значення  $p$  у формулу (17.2), остаточно матимемо

$$\begin{aligned} I &= -\log p = -\log \prod_{i=1}^m p_i^{k p_i} = \\ &= -(k p_1 \log p_1 + k p_2 \log p_2 + \dots + k p_m \log p_m) = -k \sum_{i=1}^m p_i \log p_i. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Вираз (17.8) відомий як формула К. Шеннона (1948 р.) і визначає середнє значення кількості інформації у повідомленні з довільними імовірностями появи значень символів.

Якщо імовірності повідомлень будуть однаковими (при рівноімовірних символах) вираз (17.8) можна змінити формулою Р. Хартлі, тобто, коли  $p_i = 1/m$ , то

$$I = -k \sum_{i=1}^m p_i \log p_i = -k \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = \frac{m \cdot k}{m} \log m = k \log m. \quad (17.9)$$

А тепер слід розібратися у двох формулах Р. Хартлі – (17.3) і (17.9), адже вони відрізняються одна від одної. Щоб пояснити цю обставину повернемося до понять первинної і вторинної абеток і розглянемо приклад.

**Приклад.** Тексти, які складаються з 32 літер української абетки, передаються кодом Бодо – бінарним, п’ятирозрядним кодом. Чому дорівнює кількість інформації, яка приходить на одну прийняту літеру, на  $k$  прийнятих літер?

Кількість якісних ознак первинної абетки  $m_1 = 32$ , кількість якісних ознак вторинної абетки  $m_2 = 2$ . Для передавання 32 літер за допомогою двох якісних ознак, відповідно до виразу  $m_1 = m_n$ , їх треба комбінувати по п’ять символів у повідомленні, бо  $32 = 2^5$ , звідки розрядність коду у вторинній абетці  $n = 5$ .

Кількість інформацій на одну літеру відносно первинної абетки

$$I = \log_2 m_1 = \log_2 32 = 5 \text{ біт.}$$

Кількість інформації на одну літеру відносно вторинної абетки

$$I = \log_2 m_2^n = \log_2 2^5 = 5 \log_2 2 = 5 \text{ біт.}$$

Кількість інформації на  $k$  літер прийнятого тексту

$$I = k \log_2 m_1 = k_n \log_2 m_2. \quad (17.10)$$

Останній вираз (17.10) підтверджує, що суперечностей між формулами (17.3) і (17.9) не існує.

#### 17.4.2 Ентропія як міра невизначеності

Будь-яка інформація отримується споживачем після прийняття повідомлення, тобто у результаті досліду. Так, отримане повідомлення несе корисну інформацію (власне інформацію) лише тоді, коли є невизначеність відносно стану джерела інформації.

Якщо дослід передбачає лише єдиний результат і не містить ніякої невизначеності, спостерігач зарані буде знати результат цього досліду і у результаті його здійснення ніякої нової інформації отримано не буде.

Поняття "отримання інформації" пов’язане зі зняттям невизначеності, яка існувала до отримання повідомлення. Чим більша невизначеність була до отримання повідомлення, тим більша кількість інформації міститься у прийнятому повідомленні. І навпаки, коли ми зарані знаємо результат досліду, то повідомлення принесе нульову інформацію.

Наприклад, в урні знаходиться 1000 кульок білого кольору. Виймаючи кульку, отримуємо повідомлення з нульовою інформацією. Замінімо одну з кульок на чорну, перемішаємо їх і виймемо якусь кульку, покладемо її назад до урни, перемішаємо кульки і повторимо процедуру багато разів. Імовірність повідомлення про білу кульку  $p_1 = 0,999$ , про чорну  $p_2 = 0,001$ . Кількість переданої інформації у такому повідомленні

$$\begin{aligned} I &= -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 = -0,999 \log_2 0,999 - 0,001 \log_2 0,001 = \\ &= 0,01329 + 0,00144 = 0,01473 \text{ біт.} \end{aligned}$$

Як бачимо, кількість отриманої інформації дуже мала. Накінець, якщо в урні буде білих і чорних кульок рівно по 500 штук, тоді імовірності появи кульок обох кольорів будуть однаковими  $p_1 = p_2 = 0,5$ . Кількість інформації на одне повідомлення максимуму і дорівнює:

$$I = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 = -0,5 \log_2 0,5 - 0,5 \log_2 0,5 = \\ = -\log_2 0,5 = \log_2 2 = 1 \text{ біт,}$$

бо у останньому випадку ми мали найбільшу апіорну невизначеність.

В теорії інформації кількісною мірою невизначеності є **ентропія** – питома кількість інформації, яка приходить на один елемент повідомлення. Для повідомлення з  $k$  елементів ця величина дорівнює

$$H = \frac{I}{k} = -\sum_{i=1}^m p_i \log p_i = \sum_{i=1}^m p_i \log \frac{1}{p_i} \quad (17.11)$$

і називається середньою ентропією цього повідомлення. Величина  $\log 1/p_i$  називається частинною ентропією. З виразу (17.11) бачимо, що саме ентропія є середнім значенням частинних ентропій.

Якщо імовірність появи будь-якого елемента з  $m$  можливих є однаковою, то ентропія

$$H = -\sum_{i=1}^m p_i \log p_i = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = \log m$$

і, як це було показано у прикладі з рівною кількістю білих і чорних кульок (рівновірогідні події), ентропія була максимальною.

Слід розрізняти між собою поняття “кількість інформації” і “об’єм інформації”. Об’єм інформації не залежить від числа повторень (при повторному читанні одно і того ж самого тексту його інформативність швидко падає, а число знаків залишається попереднім). Кількість інформації розраховується відносно первинної абетки, а об’єм інформації – відносно вторинної абетки.

Кількість інформації залежить від імовірнісних характеристик первинної абетки, об’єм не залежить. Об’єм інформації залежить від довжини повідомлення у вторинній абетці  $n$  і дорівнює

$$Q = kn.$$

Інформація має кількісну оцінку. Залежність між її кількістю і кількістю кодових комбінацій для даної абетки – є логарифмічною.

1 біт – бінарна одиниця кількості інформації, яка отримується при виборі одного з двох рівноімовірних символів.

Кількість інформації визначається не кількістю ситуацій, хоч і залежить від неї, а усуненням невизначеності про те, що передається. Вона визначається відносно первинної абетки і не залежить від довжини повідомлення у вторинній абетці.

Об'єм інформації визначається відносно вторинної абетки і дорівнює добутку середньої довжини повідомлення у вторинній абетці на число повідомлень.

Текстове повідомлення має бути точним і лаконічним, тобто мати мінімальну семантичну і статичну надмірність, а кодове повідомлення – мінімальну штучну надмірність.

#### **17.4.3 Надмірність повідомлень**

Нам відомо, що максимальну кількість інформації на символ повідомлення  $H = \log m$  можна отримати тільки у випадку рівноімовірних і незалежних символів, реальні коди рідко повністю задовольняють цю умову, а тому інформаційне навантаження на кожний їх елемент зазвичай менше того, яке вони могли б переносити. Ентропія повідомлень, які подані такими кодами, менша за максимальну.

Оскільки елементи кодів, які подають повідомлення, недовантажені, то саме повідомлення має інформаційну **надмірність**. Поняття надмірності у теорії інформації і кодування введено для кількісного описування інформаційного резерву кода, з якого складено повідомлення.

Розрізняють **надмірність природну і штучну**. Природна надмірність характерна для первинних абеток, а штучна – для вторинних.

Природна надмірність підрозділяється на семантичну та статистичну надмірність.

**Семантична надмірність** полягає у тому, що думка висловлена у повідомленні, може бути вираженою коротше. Якщо повідомлення можна скоротити без змінювання змісту, а потім відновити його зміст, то воно має семантичну надмірність .

Для з'ясування поняття семантична надмірність розглянемо таке повідомлення: "Зазначені вами документи у належний термін переробити не можемо через те, що у районному обчислювальному центрі вийшла з ладу електропідстанція." Очевидно, що без втрати цінності інформації це повідомлення, наприклад, можна було б переробити так: "Переробка зазначених документів затримується через відсутність електрики." Друге повідомлення коротше, у ньому слова несуть більш інформаційне навантаження, чим у першому, тобто перше повідомлення має семантичну надмірність відносно другого.

Семантичну надмірність можна усунути у різні способи, наприклад, стандартні повідомлення, які часто повторюються, замінити умовними позначеннями; повідомлення, які містять різні характеристики одних і тих самих елементів, подавати у вигляді таблиць; застосовувати згортання інформації, абрєвіатури і т. д. Загальним тут є те, що **усі перетворення з усунення семантичної надмірності виконуються у первинній абетці**.



**Статистична надмірність** обумовлюється нерівноімовірнісним розподілом якісних ознак первинної абетки та їх взаємозалежністю.

Наприклад, для англійської абетки, яка складається з 26 літер, максимальне значення ентропії

$$H_{\max} = \log_2 m = \log_2 26 = 4,7 \text{ біт},$$

а для української абетки, яка складається з 32 знаків,  $H_{\max} = \log_2 32 = 5 \text{ біт}$ . Імовірності появи літер в англійських текстах наведені у таблиці 17.3, а українських літер в українських текстах – в таблиці 17.4.

Враховуючи те, що імовірність появи літер, наприклад, англійської абетки (див. таб. 17.3) далеко не рівні, ентропія англійської мови має бути меншою за 4,7 біт. Дослідження показали, що при урахуванні імовірності розподілу восьмилітерних комбінацій, тобто взаємозалежності між символами, ентропія англійської мови зменшується удвічі (до 2,35 біт) і навіть до 1,86 біт. Тобто, надмірність закладена уже у самій природі англійської абетки.

Таблиця 17.3

Літера	Імовірність	Літера	Імовірність	Літера	Імовірність
пробіл	0,200	H	0,047	W	0,012
E	0,105	D	0,035	G	0,011
T	0,072	L	0,029	B	0,011
O	0,065	C	0,023	V	0,008
A	0,063	F	0,023	K	0,003
N	0,059	U	0,023	X	0,001
I	0,055	M	0,021	I	0,001
R	0,054	P	0,018	G	0,001
S	0,052	Y	0,012	Z	0,001

Як уже говорилось, з урахуванням частоти появи літер в текстах, слідування літер у різних комбінаціях і слів у різних повідомленнях, інформацію, яка передається, можна значно скоротити, стиснути. Відношення  $H/H_{\max} = m$  називають **коефіцієнтом стискання** або відносною ентропією, а величину

$$K_H = \frac{H_{\max} - H}{H_{\max}} = 1 - \frac{H}{H_{\max}} = 1 - m \quad (7.12)$$

називають коефіцієнтом надмірності який за сутністю своєю є мірою кількісної оцінки надмірності. З останнього виразу видно, що коефіцієнт надмірності (тобто надмірність) є більшою у тих повідомлень, у яких більша ентропія.

Має певну надмірність і українська мова, оцінка її статистики наведена у таблиці 17.4 за умови не розрізняти між собою літери “Г” та “Ґ”, “Г” та “І”, українська абетка матиме 31 літеру плюс “пробіл”, тобто усього 32 символи первинної абетки.

Таблиця 17.4

Літера	Імовірність	Літера	Імовірність	Літера	Імовірність
пробіл	0,175	К	0,028	Ч	0,012
О	0,090	М	0,026	Й	0,010
Е	0,072	Д	0,025	Х	0,009
А	0,062	П	0,023	Ж	0,007
И	0,062	У	0,021	Ю	0,006
Н	0,053	Я	0,018	Ш	0,006
Т	0,053	І	0,016	Ц	0,004
С	0,045	З	0,016	Щ	0,003
Р	0,040	Ь	0,014	Є	0,003
В	0,038	Б	0,014	Ф	0,002
Л	0,035	Г	0,013		

Якщо враховувати різну імовірність символів, то

$$H_1 = 4,39 \text{ біт.}$$

З урахуванням кореляції між двома символами ентропія зменшується до значення

$$H_2 = 3,5 \text{ біт,}$$

між трьома символами – до значення

$$H_3 = 3,05 \text{ біт,}$$

між вісімкою символів – до значення

$$H_8 = 2 \text{ біт,}$$

а далі залишається незмінною.

Отже, надмірність української мови складає

$$K_H = \frac{H_{\max} - H}{H_{\max}} = \frac{5 - 2}{5} = 0,6.$$

Для будь-якої мови надмірність призводить до збільшення часу передавання повідомлень, до зайвого завантаження каналів зв'язку. Проте

не завжди потрібно прагнути до того, щоб  $K_n = 0$ . Деяка надмірність буває корисною, для забезпечення потрібної надійності системи, підвищення завадостійкості передавання повідомлень. Наприклад, інколи практикується повторне передавання одного і того самого повідомлення з метою підвищення вірогідності передачі в умовах дії завад.

Цікаво те, що в усіх європейських мовах надмірність приблизно однакова. Надмірність же мов сформувалася завдяки дуже тривалій суспільній практиці і дозволяє відновлювати цілі слова і фрази при їх спотвореннях під дією різноманітних факторів, що заважають. Наприклад, проведені експерименти підтвердили, що можливо відновити зміст англійських текстів з 50% абетки.

## 17.5 Швидкість передачі інформації

### 17.5.1 Об'єм сигналу і ємність інформаційного каналу

Звернемось до рисунка 17.6, на якому зображена узагальнена структурна схема каналу передачі інформації. У ній інформаційні процеси, що протікають у пристроях, розглядаються як процеси передавання інформації від її джерела до споживача.

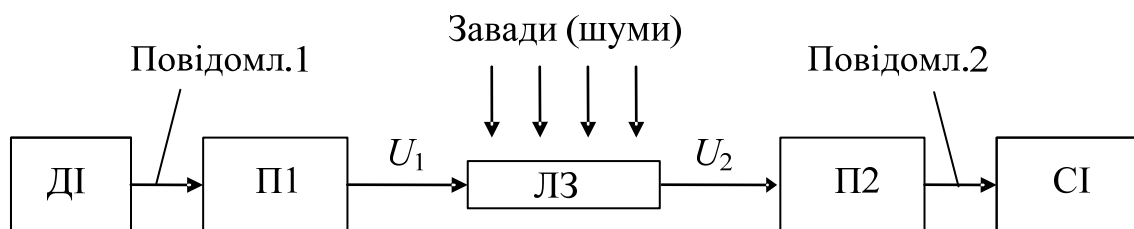


Рисунок 17.6 – Узагальнена структурна схема каналу передачі інформації

Повідомлення (повідомл. 1) джерела інформації ДІ після кодування і модуляції у перетворювачі П1 перетворюється у сигнал  $U_1$ , який надходить у лінію зв'язку ЛЗ. У результаті дії завад (шумів)  $U_{ш}$  на кінці лінії зв'язку уже буде інший сигнал  $U_2$ . У перетворювачі П2 він демодулюється, декодується і перетворюється у повідомлення (повідомл. 2), яке надходить до споживача інформації СІ.

Безпосереднім носієм інформації є сигнал. На практиці при розгляді інформаційних процесів зручно оперувати узагальненими показниками, характерними для множини сигналів певного типу та найсуттєвішими з точки зору передавання інформації, що міститься в них. Кожен сигнал має певне значення часу тривалості, який характеризує тривалість зайнятості інформаційного каналу. Отже, цілком природно як першу узагальнену характеристику взяти час передавання сигналу  $T_c$ .

Кожен сигнал характеризується цілком визначеним спектром. Теоретично ширина спектра сигналу скінченної тривалості необмежена. Проте вивчення спектрів реальних сигналів показало, що їх спектральна щільність зменшується зі зростанням частоти. Це дозволяє розглядати

сигнали як процеси з обмеженими спектрами. Існують різні критерії обмеження спектра сигналу. Одним з таких критеріїв є допустимі спотворення форми сигналу. Наприклад, практика показала, що при передаванні мовного сигналу розбірливість і якість почутого практично зберігається при ширині спектра від 300 до 3400 герц (людське вухо сприймає коливання у діапазоні приблизно від 16 до 1600 герц). Таким чином, другою узагальненою характеристикою сигналу має бути практична ширина його частотного спектра  $F_c$ . Крім того, оскільки при передаванні на сигнали завжди діють завади (шуми), як енергетичну характеристику сигналу доцільно брати відношення середньої потужності сигналу  $P_c$  до середньої потужності шумів  $P_{ш}$ . Це відношення прийнято виражати логарифмічною мірою  $D_c = \log_2 P_c / P_{ш}$ , яку називають динамічною, а добуток

$$V_c = T_c F_c D_c \quad (17.13)$$

прийнято називати **об'ємом сигналу**. У геометричному поданні об'єм сигналу має вигляд прямокутного паралелепіпеда з ребрами  $T_c$ ,  $F_c$  та  $D_c$  (рис. 17.7, а).

Інформаційний канал, аналогічно, можна охарактеризувати також трьома параметрами: часом роботи каналу  $T_k$ , шириною його частотної смуги пропускання  $F_k$  та динамічним діапазоном каналу  $D_k$ . Динамічний діапазон каналу обмежується зверху потужністю  $P_{дон}$ , яку здатний канал передати без ушкоджень (наприклад, без електричного пробоя лінії зв'язку), а знизу – рівнем власних шумів каналу зв'язку  $P_{ш}$ :

$$D_k = \log_2 P_{дон} / P_{ш}.$$

Величина

$$V_k = T_k F_k D_k \quad (17.14)$$

називається **ємністю каналу**.

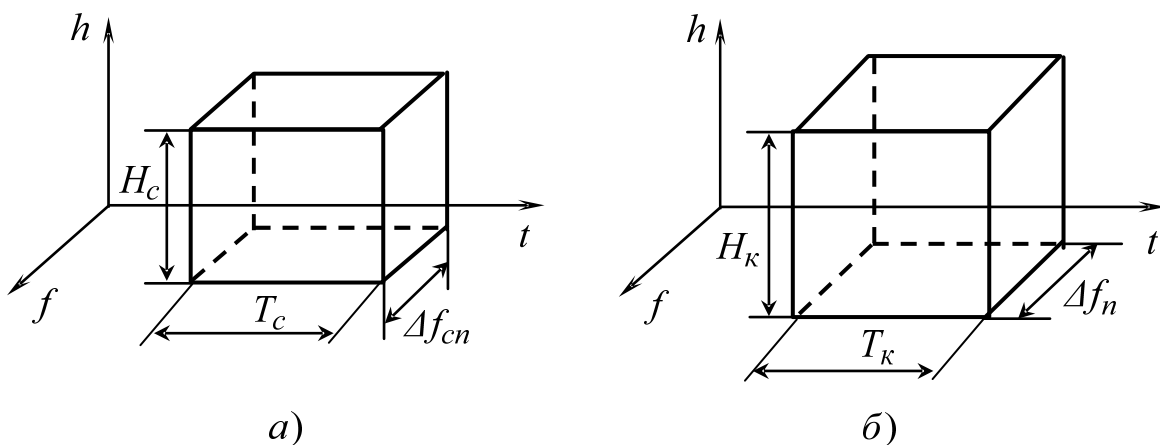


Рисунок 17.7 – Об'єм сигналу а) та ємність каналу б)

Неспотворена передача сигналів можлива лише за умови, що об'єм сигналу “уміщується” в ємність каналу (рис. 17.7, б). тобто загальною умовою узгодження сигналу з каналом передачі інформації визначається співвідношенням;

$$V_c \leq V_k. \quad (17.15)$$

Але, співвідношення (17.15) не є достатньою умовою узгодження сигналу з каналом. Необхідно, очевидно, виконати такі умови;

$$\begin{aligned} T_c &\leq T_r, \\ F_c &\leq F_k; \\ D_c &\leq D_k. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Наприклад, сигнал триватиме 10 секунд, а канал відкритим лише буде 8 секунд. Отже, протягом 2 секунд буде втрачено 20% інформації.

### 17.5.2 Швидкість передачі сигналу та пропускна здатність каналу

Для інформаційного каналу користуються поняттями: швидкість введення інформації, швидкість передачі інформації та пропускна здатність каналу.

Під швидкістю введення інформації (поток інформації) розуміють середню кількість інформації, яка вводиться від джерела повідомлень у інформаційний канал за одиницю часу. Це характеристика джерел повідомлень і визначається тільки властивостями повідомлень.

**Швидкість передачі інформації**  $V_{сер}(U_1, U_2)$  – середня кількість інформації, яка передається по каналу за одиницю часу. Вона залежить від властивостей сигналу, що передається, і від властивості каналу і визначається за формулою:

$$V_{сер}(U_1, U_2) = \frac{I(U_1, U_2)}{T_c}, \quad (17.17)$$

де  $I(U_1, U_2)$  – кількість інформації, яка передається по каналу за період тривалості сигналу.

**Пропускна здатність** – найбільша теоретично для даного каналу можлива швидкість передачі інформації. Вона є характеристикою каналу і не залежить від властивості сигналу.

З метою найефективнішого використання інформаційного каналу необхідно зробити так, щоби швидкість передачі інформації була по можливості близькою до пропускної здатності каналу. Разом з тим швидкість введення інформації не повинна перевищувати пропускну здатність каналу, бо інакше не уся інформація буде переданою по каналу.

Щойно зазначене є основною умовою динамічного узгодження джерела повідомлення та інформаційного каналу.

Об'єм сигналу – узагальнена характеристика сигналу, яка визначається як добуток тривалості сигналу, його практичної ширини спектра та логарифму величини перевищення потужності сигналу над потужністю шуму.

Узгодженість сигналу і каналу зв'язку передбачає, що усі ребра паралелепіпеда каналу відповідно будуть не меншими від ребер паралелепіпеда сигналу.

Швидкість введення інформації у систему зв'язку повністю визначається статистичними характеристиками джерела повідомлень.

Швидкість передачі інформації визначається статистичними параметрами самого сигналу та параметрами каналу зв'язку.

Пропускна здатність каналу визначається характеристиками каналу і залежить від властивостей каналу.

Завжди слід мати швидкість передачі інформації по можливості близьку до пропускної здатності каналу, але не більшу за останню.

## **17.6 Методи підвищення надійності передачі інформації**

### **17.6.1 Коди з виявленням помилок**

Проблеми, які виникають при передаванні інформації по каналах зв'язку із завадами, ставлять додаткові вимоги до методів кодування. Для захисту корисної інформації від завад необхідно у якомусь вигляді вводити надмірність: збільшувати кількість символів і час їх передавання, повторювати цілі повідомлення, підвищувати потужність сигналу – усе це веде до ускладнення і подорожчання апаратури.

У свою чергу, ускладнення апаратури веде до збільшення відмов через ненадійність роботи елементів апаратури, що призведе до зменшення надійності роботи усієї інформаційної системи зв'язку.

Надійність системи зв'язку можна збільшувати, підвищивши надійність приймання окремих символів. Цього можна добитися, наприклад, за рахунок збільшення потужності чи тривалості сигналу, або надійності приймання груп символів і цілих повідомлень, використовуючи спеціальні методи кодування.

Збільшення надійності приймання груп символів у результаті подовження часу їх передавання є дуже цікавим, бо не потребує підвищення потужності передавача. Для виділення подовженого сигналу у приймачі накопичувач, інтегратор і схема порівняння мають бути побудовані так, що якщо у каналі зв'язку за час  $T$  був переданий один з рівномірних сигналів  $u_1(t)$  чи  $u_2(t)$ , прийнятий сигнал  $V(t)$ , то при

$$\int_0^T [u_1(t) - V(t)]^2 dt < \int_0^T [u_2(t) - V(t)]^2 dt, \quad (17.18)$$

слід прийнятим вважати сигнал  $U_1(t)$ . Приймач, який розрізняє такі сигнали, називається ідеальним приймачем Котельникова. Прийнятим вважається сигнал, який матиме більшу тривалість.

Структурна схема ідеального приймача Котельникова показана на рис. 17.8.

У цій схемі: Г1 і Г2 – генератори, СВ – схеми віднімання, Кв – квадратори, Інт. – інтегратори, СП – схеми порівняння.

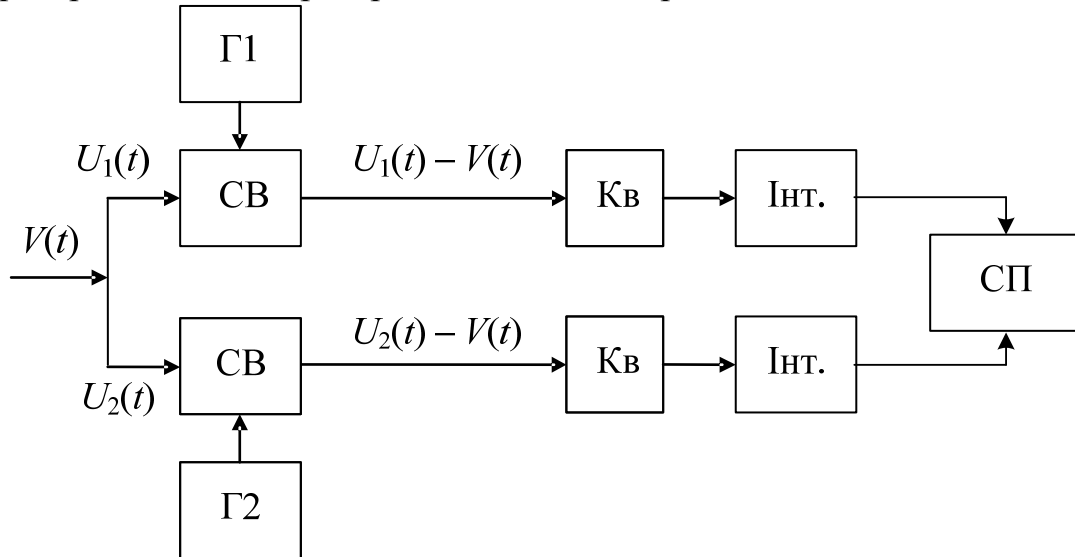


Рисунок 17.8 – Структурна схема ідеального приймача Котельникова

Генератори Г1 і Г2 у точності повторюють сигнали  $U_1(t)$  і  $U_2(t)$ , що передаються. Таким чином, у приймачі відбувається порівняння прийнятого сигналу з переданим. Схема порівняння СП віддає перевагу тому сигналу, який у момент порівняння буде мати більшу величину.

Ідея виділення корисного сигналу з шумів за допомогою приймача Котельникова полягає у тому, що інтегратор додає і сигнал, і шум. Зі збільшенням тривалості сигналу вигравш отримується за рахунок того, що значення завади (шуму) коливається відносно нульового рівня, а значення сигналу має постійний знак відносно нуля. Тому величина сигналу на інтеграторі буде зростати, а складова завади – спадати, тобто чим довший сигнал, тим краще його виділити, тим надійніший прийом. У даному випадку збільшення надійності досягається за рахунок подовження часу передавання окремих посилок.

Іншим способом збільшення надійності за рахунок збільшення часу передавання повідомлення є спосіб Бодо-Вердана. Ідея способу полягає у багатократному повторенні повідомлення. Правильний сигнал виявляється при накопиченні посилок одного виду, наприклад 0 сприйнявся як 1 чи навпаки. Перевага надається тим посилкам, яких більше. Ця ідея лежить в основі **мажоритарного кодування**.

Припустимо, якісна ознака 1 – позитивний імпульс. Система накопичує позитивні імпульси. Передана комбінація 10110. Загублені у результаті дії завад імпульси відновлюються шляхом накопичення:

- 10100 – 1-а прийнята комбінація;
- 10010 – 2-а прийнята комбінація;
- 00110 – 3-я прийнята комбінація;
- 10110 – накопичена комбінація.

Як бачимо, накопичена комбінація відповідає переданій хоча жодна з прийнятих комбінацій не дорівнює висхідній.

Недоліком системи Бодо-Вердана є відсутність захисту від двосторонніх переходів. Іншими словами, такі системи можуть застосовуватись тоді, коли 1 може перетворюватись у 0 (а не навпаки) або 0 тільки в 1 (але не навпаки).

Метод не показує у якій частині кодового слова виникло спотворення. У випадку повного виправлення помилки це не має значення, але якщо помилка не виправляється, то вона і не виявляється.

Перевагою коду Бодо-Вердана є простота його технічної реалізації і можливість виправлення усіх можливих помилок. Метод також дозволяє виправляти кількість помилок, яка буквально дорівнює довжині коду, тільки щоб помилки не повторювались в одних і тих самих розрядах.

Для того, щоб виправити  $n$  кратну помилку в одному і тому самому розряді, необхідно повторити повідомлення  $(2n + 1)$  разів.

Існують ще й інші системи штучного введення надмірності, наприклад, система Сіменс-Хелла, яка використовується у фототелеграфії.

У телемеханіці для підвищення надійності повідомлень, що передаються, широко застосовують **числовий захист**, який є прикладом способу, що найчастіше використовується. У ньому вводиться штучна надлишковість шляхом збільшення числа символів у повідомлення, яке передається. Наприклад, якщо розглянути п'ятизначний код Бодо, то у будь-якій кодовій комбінації виявиться або парна кількість одиниць або парна кількість нулів.

Парна кількість одиниць		Непарна кількість одиниць	
00110	10010	10000	11001
00101	00011	01101	00100
01010	11011	10101	10011
10100	01111	01110	11111
11110	10001	01000	01011
10111	11000	11010	00010
01100	11101	00010	00001
01001	00000	10110	11100



Якщо усі кодові комбінації цього коду розділити за зазначеною ознакою, то отримаємо два коди, наприклад, з парною чи непарною кількістю одиниць.

Якщо, наприклад, у будь-якій кодовій комбінації коду з парною кількістю одиниць буде одинична заміна одного символу на інший (одиницю на нуль чи нуль на одиницю), то умова парності буде порушена і відбудеться захисна відмова. Іншими словами, якщо вибрана група кодових комбінацій є дозволеною, то будь-яка одинична помилка призведе до недозволеної комбінації і буде легко виявленою.

Інший приклад введення штучної надмірності коду – якщо до кожного кодового слова шостий символ (одиницю або нуль), то умова парності у кожній кодовій комбінації тільки кількості одиниць або тільки нулів буде порушеною і помилка теж легко виявляється.

### 17.6.2 Коди з виправленням помилок

Ідея побудови коду з виправленням помилок наочно ілюструється геометричною моделлю (тризначного бінарного коду на усі комбінації), яка подана на рис. 17.9, б).

Таке подання можливе завдяки тому, що кодові комбінації  $n$ -значного коду можуть розглядатись як певні точки  $n$ -вимірного простору. Так, геометрична модель двозначного коду являє собою квадрат – фігуру двовимірного простору (рис. 17.9, а), модель тризначного коду являє собою куб – фігуру тривимірного простору. Геометрична модель чотиризначного коду являє собою фігуру чотиривимірного простору і може бути побудована шляхом зміщення тривимірного куба або його вершин у новому напрямку. У загальному випадку  $n$ -вимірний куб буде мати  $2^n$  вершин.

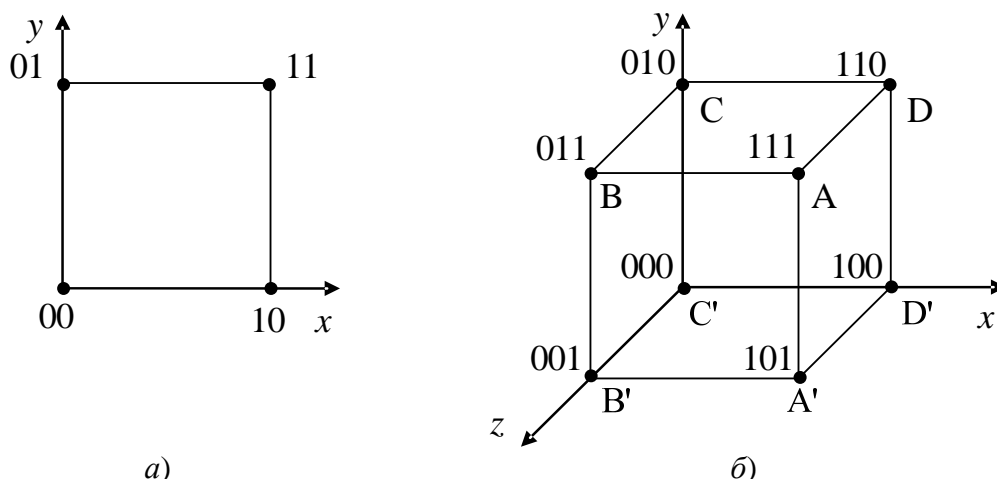


Рисунок 17.9 – Геометричні моделі бінарних кодів: а) двозначного, б) тризначного

Подання кодів у вигляді геометричних моделей є наочним зображенням і поясненням аналізу. Ці моделі використовують навіть при побудові коригуючих кодів. Проте з ростом  $n$  (числа елементів коду)

геометричні моделі стають громіздкими, втрачають наочність, а їх побудова викликає великі труднощі.

Граничне значення  $n$ , при якому ще є доцільним побудувати геометричну модель коду, можна дещо збільшити, застосувавши для її побудови матриці (матриці вибору, сегментні матриці і т. ін).

Повернувшись до рис. 17.9, бачимо, що кожній вершині куба присвоюється кодова комбінація. Кожна кодова комбінація записується у такому порядку: значення координати проекції точки на вісь  $OX$ , значення координати точки на вісь  $OY$  і значення координати проекції точки на вісь  $OZ$ . Наприклад, для точки  $A$  це буде 111, для точки  $B$  - 011,  $C$  - 010,  $D$  - 110 і т. д.

Для кожної вершини куба маємо три вершини, які розташовані від неї на один крок (на відстані довжини одного ребра куба). Так, для вершини  $A$  такими будуть точки  $A', B, D$  для вершини  $B' - A', B, C'$  і т. д. Є також три вершини, які розташовані від певної точки на два кроки (якщо рухатись вздовж ребер куба). Наприклад, точки  $B', C, D'$  від точки  $A$ , точки  $A', C'$  і  $D$  від  $B$  і т. д. Одна вершина - на три кроки. Відстань між найближчими кодовими комбінаціями називається **ковою відстанню**. Кодова відстань - параметр, який характеризує завадостійкість коду і закладену у ньому надмірність. Ковою відстанню визначаються також коригуючі властивості кодів. Якщо кодова відстань  $d = 1$  (надмірність у коді відсутня), то не можуть бути виявленими навіть одиничні спотворення, бо спотворена комбінація буде збігатися з однією з дозволених. Якщо кодова відстань  $d = 2$ , то такий код дозволяє виявити одиничні помилки, бо уже є можливість зробити так, щоб спотворена комбінація не входила в число дозволених.

На рис. 17.9, б легко визначити кодові комбінації, які виявляють помилку, наприклад, у комбінації 101. Вони повинні відрізнятися одна від одної у двох символах, тобто відставати від точки  $A'$  на два кроки. Як бачимо з рис. 17.9, б, ними є 000, 011, 110. Для виправлення одиничної помилки відстань від точки  $A'$  слід збільшити на один крок. Така комбінація буде лише одна - 010. Для трирозрядного коду коригуючі комбінації розташовані на діагональних вершинах куба. Ними є пари: 000 і 111, 001 і 110, 011 і 100, 010 і 101. Такі коди у літературі зустрічаються під назвою коди-супутники.

Ідея виправлення у кодах-супутниках досить проста. Головне, щоб при спотворенні будь-якої комбінації не могла бути утворена сусідня робоча комбінація. Процес виправлення помилки полягає у тому, щоб спотворена комбінація ототожнювалась з найближчою дозволеною комбінацією. Наприклад, якщо передавати літери абетки, яким відповідають такі комбінації бінарного коду: 00000, 00111 і 11100, то при створенні будь-якого знака легко визначити, яка комбінація була переданою, бо кожна з них відрізняється від іншої не менше ніж у трьох символах (кодова відстань  $d \geq 3$ ).

Для того, щоб визначити кодову відстань між двома комбінаціями бінарного коду, достатньо скласти ці комбінації за модулем 2 за алгоритмом, який визначається такими рівностями:  $0 \oplus 0 = 0$ ;  $1 \oplus 1 = 0$ ;  $0 \oplus 1 = 1$ ;  $1 \oplus 0 = 1$ ; і в отриманій сумі підрахувати кількість 1.

**Наприклад:**

$$\begin{array}{r} 1001101110 \\ \oplus \\ 1101011110 \\ \hline 0100110101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001101110 \\ \oplus \\ 1101011101 \\ \hline 0100110011 \end{array}$$

тобто, отримаємо у сумі 5 одиниць, а отже  $d = 5$ .

Кодова відстань може бути збільшена не тільки за рахунок зменшення кількості дозволених кодових комбінацій, але і за рахунок збільшення кількості якісних ознак при передаванні певного набору комбінацій.

Загальний вираз для визначення кодової відстані у випадку одночасного виявлення і виправлення помилок:

$$d = r + s + 1,$$

де  $r$  – кількість виявлених помилок;

$s$  – кількість помилок, які підлягають виправленню.

Кодова відстань  $d$  – мінімальна кількість елементів, у яких одна кодова комбінація відрізняється від інших.

Якщо потрібно визначити кодову відстань, виходячи тільки з кількості помилок, які підлягають виправленню, то застосовують вираз:  $d = 2s + 1$ .

На сьогодні розроблені десятки кодів, які теоретично можуть виявити довільну кількість помилок.

Підвищення надійності передачі інформації може бути здійснене за рахунок збільшення надмірності повідомлень, що передаються, і часу передавання елементарних символів, повторення цілих повідомлень, підвищення потужності передавання сигналу, а також за рахунок паралельного передавання декількох повідомлень по одному і тому самому каналу зв'язку (одночасне посилення повідомлень з різними якісними ознаками), за рахунок розширення смуги частот при передаванні радіосигналів.

Підвищення надійності передачі зазвичай веде до подорожчання апаратури. При видачі технічного завдання на розробку системи передачі інформації необхідно дати техніко-економічне обґрунтування доцільності точності передачі інформації, яка потребується.

При механізації і автоматизації процесів обробки інформації, зокрема при використанні обчислювальних машин, вірогідність переданої і обробленої інформації може бути значно підвищена за рахунок застосування коригуючих кодів. Проте це може бути здійснено за рахунок ускладнення апаратури і збільшення часу передавання інформації, бо коди без надмірності не можуть виявляти чи виправляти помилки у прийнятих повідомленнях.

### Запитання та задачі для закріплення

1. У чому полягає процес дискретизації сигналу за частотним критерієм Котельникова?
2. В чому полягає процес квантування дискретного сигналу за рівнем?
3. Як вибирається крок квантування?
4. Що таке основа коду, його значність (розрядність)?
5. Яку кількість кодових комбінацій можна утворити, користуючись кодом з основою 3 і значністю 3?
6. Написати число 31 бінарним кодом, тринарним кодом.
7. Використовуючи код Бодо, закодуйте слово „РАДІО”.
8. Чому саме бінарні коди на сьогодні є найпоширенішими?
9. Яка кількість інформації міститься у повідомленні, записаному у кодї з основою  $m$  і значністю  $n$ , коли максимальна кількість можливих комбінацій  $N$ ?
10. Яка кількість інформації прийдеться на літеру рівноімовірної абетки, яка складається з 16, 32 чи 64 літер?
11. Чому дорівнює об'єм інформації при отриманні десяти повідомлень, які складаються з кодових слів тризначного трійкового кода?
12. Що таке надмірність повідомлення? Види надмірності повідомлень?
13. Як кількісно оцінюється надмірність повідомлень?
14. Що таке об'єм сигналу та ємність каналу? Їх геометричне подання.
15. Умови узгодження сигналу і каналу.
16. Що таке швидкість передачі інформації?
17. Що таке пропускна здатність каналу передачі інформації?

## ГЛОСАРІЙ

- Активний – active.  
Алгебраїчна сума – algebraic sum.  
Амплітудна модуляція, АМ – amplitude modulation, АМ.  
Амплітудно-імпульсна модуляція, АІМ – pulse amplitude modulation, РАМ.  
Анод – anode.  
Вольт-амперна характеристика, ВАХ – current-voltage characteristic.  
Гармонічний – harmonious.  
Генерування – generation.  
Гетеродин – heterodyne, local oscillator, LO.  
Двійковий розряд – binary digit.  
Демодуляція – demodulation.  
Джерело (передавач) – transmitter.  
Диференціальний – differentiation.  
Дійсний – real, Re.  
Еквівалентний – equivalent.  
Електромагнітна індукція – electromagnetic induction.  
Електромагнітне випромінювання – electromagnetic radiation.  
Електрон – electron.  
Енергія – energy.  
Загороджувальний або режекторний фільтр, ЗФ або РФ – band-stop filter, BSF.  
Заряд – charge.  
Знаменник – denominator.  
Імпульсні завади – pulse interference.  
Інтегрувальний – integrate.  
Катод – cathode.  
Кодово-імпульсна модуляція, КІМ – pulse code modulation, РСМ.  
Коливальний контур – LC circuit.  
Коло – circuit.  
Комплексний – complex.  
Конденсатор – capacitor.  
Котушка індуктивності – inductor.  
Міжнародний союз електрозв'язку (МСЕ) – International Telecommunication Union, ІТУ.  
Миттєве – instantaneous, ІМ.  
Модуляція – modulation.  
Надвисока частота – super high frequency.  
Надвисокочастотний діапазон, НВЧ – super high frequency range.  
Напруга – voltage.  
Нескінченність – infinity.

Низькочастотні коливання – low-frequency oscillations.  
Однополярний – unipolar.  
Опір – resistance.  
Пасивний – passive .  
Перетворення – transformation.  
Підсилення – amplification.  
Постійний – direct.  
Потужність – power.  
Провідник – conductor.  
Провідність – conductivity.  
Проекція – projection.  
Проміжна частота – intermediate frequency, IF.  
Радіомовлення – broadcasting.  
Резистор – resistor.  
Резонансний – resonant.  
Самоіндукція – self-inductance.  
Середньоквадратичне – root mean square, RMS.  
Сигнал з однією бічною смугою, ОБС – Single Sideband Modulation, SSB.  
Смуга (ширина смуги частот) – bandwidth.  
Смуговий фільтр, СФ – band-pass filter, BPF.  
Споживач (радіоприймач) – receiver.  
Струм – current.  
Телебачення – television.  
Телеграф – telegraph.  
Телефон – telephone.  
Трансформатор – transformer.  
Трифазний – three-phase.  
Уявний – imaginary, Im.  
Фаза – phase.  
Фазова модуляція, ФМ – phase modulation, PM.  
Фільтр – filter.  
Фільтр верхніх частот, ФВЧ – high-pass filter, HPF.  
Фільтр нижніх частот, ФНЧ – lowpass filter, LPF.  
Фільтрація – filtration.  
Функція Хевісайда – Heaviside function.  
Частотна модуляція, ЧМ – frequency modulation, FM.  
Частотно-імпульсна модуляція, ЧІМ – pulse frequency modulation, PFM.  
Чисельник дроби – numerator.  
Чотириполюсник – two-port.  
Широтно-імпульсна модуляція, ШІМ – Pulse Width Modulation, PWM.

## СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ УЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ

- ACP** (adjacent-channel power) - потужність по сусідньому каналу.
- ADC** (analog-to-digital converter) - аналого-цифровий перетворювач, АЦП.
- ADPCM** (adaptive differential pulse-code modulation) - адаптивна диференціальна імпульсно-кодова модуляція, ДІКМ.
- AGC** (automatic gain control) - автоматичне регулювання підсилення, АРП.
- AM** (amplitude modulation) - амплітудна модуляція, АМ.
- AWG** (arbitrary waveform generator) - генератор сигналів довільної форми.
- BCH** (broadcast channel) - радіомовний канал.
- BPF** (bandpass filter) - смуго-проникний фільтр, СПФ.
- CDF** (cumulative distribution function) - інтегральна функція розподілу.
- CNR** (carrier-to-noise ratio) - відношення несучої до шуму.
- COHO** (coherent oscillator) - когерентний генератор.
- CSL** (coupled slot antenna) - щілинна антена.
- CW** (continuous wave) - незатухаюча хвиля.
- DAC** (digital-to-analog converter) - цифро-аналоговий перетворювач, ЦАП.
- DBF** (digital beamforming) - цифрове формування діаграми спрямованості.
- DDS** (direct digital synthesis) - прямий цифровий синтез (частоти).
- DFT** (discrete Fourier transform) - дискретне перетворення Фур'є, ДПФ.
- DRF** (dielectric resonator filter) - фільтр на діелектричному резонаторі.
- DS** (direct sequence) - пряма послідовність.
- DSP** (digital signal processor/processing) - цифрова обробка/процесор сигналу.
- DSSS** (direct-sequence spread spectrum) - широкосмуговий сигнал із прямою послідовністю.
- EHF** (extra-high frequency) - вкрай високі частоти, діапазон КВЧ, 30...300 ГГц.
- EMI** (electromagnetic interference) - електромагнітні завади.
- EMR** (electromagnetic radiation) - електромагнітне випромінювання.
- ERP** (effective radiated power) - ефективна потужність випромінювання.
- ESL** (equivalent series inductance) - еквівалентна послідовна індуктивність.
- ESR** (equivalent series resistance) - еквівалентний послідовний опір.
- FBW** (fractional bandwidth) - відносна ширина смуги частот.
- FET** (field-effect transistor) - польовий транзистор.
- FFO** (fixed-frequency oscillator) - генератор з фіксованою частотою.

**FFT** (fast Fourier transform) - швидке перетворення Фур'є, ШПФ.  
**FH** (frequency hopping) - частотний стрибок.  
**FM** (frequency modulation) - частотна модуляція, ЧМ.  
**FSK** (frequency-shift keying) - частотна маніпуляція, ЧМн.  
**GBR** (ground-based radar) - наземна РЛС.  
**G/T** (receive antenna gain divided by noise temperature) - коефіцієнт підсилення приймальної антени, ділений на шумову температуру.  
**IDFT** (inverse discrete Fourier transform) - зворотне дискретне перетворення Фур'є.  
**IF** (intermediate frequency) - проміжна частота.  
**IFM** (instantaneous frequency measurement) - вимірювання миттєвої частоти.  
**IM** (intermodulation) - перехресна модуляція, інтермодуляція.  
**IPBO** (input power backoff) - втрати вхідної потужності.  
**IQ** (inphase/quadrature) - синфазноквадратурний.  
**LC** (inductor/capacitor) - індуктивність/ємність.  
**LO** (local oscillator) - гетеродин.  
**LPE** (lowpass equivalent) - еквівалентний ФНЧ.  
**LPF** (lowpass filter) - фільтр низьких частот, ФНЧ.  
**LSG** (large-signal gain) - коефіцієнт підсилення в режимі великого сигналу.  
**MCPA** (multicarrier power amplifier) - підсилювач потужності з декількома несучими.  
**MIM** (metal-insulator-metal) - метал-діелектрик-метал (конденсатор).  
**MLC** (main lobe clutter) - завада за головною пелюсткою.  
**MLCM** (multilevel coded modulation) - багаторівнева кодова модуляція.  
**MMW** (millimeter wave) - міліметрові хвилі (діапазон КВЧ).  
**MODEM** (modulator/demodulator) - модулятор/демодулятор.  
**MU** (minimum stability factor) - мінімальний запас стійкості.  
**NGA** (noise gain analyzer) - аналізатор рівня шуму.  
**NPR** (noise power ratio) - рівень потужності шуму.  
**OPBO** (output power backoff) - втрати вихідної потужності.  
**PA** (power amplifier) - підсилювач потужності.  
**PAE** (power-added efficiency) - ККД підсумовування потужності.  
**PAM** (pulse-amplitude modulation) - амплітудно-імпульсна модуляція, АІМ.  
**PCM** (pulse code modulation) - імпульсно-кодова модуляція, ІКМ.  
**PCU** (power conditioning unit) - блок регулювання потужності.  
**PDF** (probability distribution function) - функція розподілу ймовірності.  
**PM** (phase modulation) - фазова модуляція, ФМ.  
**PN** (pseudorandom noise) - псевдовипадковий шум.  
**PNF** (planar near field) - планарна близька зона.



**PRF** (pulse repetition frequency) - частота повторення імпульсу.  
**PSK** (phase-shift keying) - фазова маніпуляція, ФМн.  
**RF** (radio frequency) - радіочастота.  
**RFID** (radio frequency identification) - радіочастотне визначення.  
**RMS** (root mean square) - середньоквадратичне значення.  
**RX** (receiver/receive) - приймач/приймання, ПРМ.  
**SBN** (single-sideband phase noise) - односмуговий фазовий шум.  
**SHF** (super high frequency) - надвисока частота, діапазон НВЧ, 3...30 ГГц.  
**SINAD** (signal-to-noise and distortion) - відношення сигналу до шуму із спотворенням.  
**SNR** (signal-to-noise ratio) - відношення сигнал/шум.  
**SSB** (single sideband) - одна бічна смуга, ОБС.  
**SWR** (standing wave ratio) - коефіцієнт стоячої хвилі, КСХ.  
**TE** (transverse electric) - поперечна електрична (наприклад, хвиля).  
**TEM** (transverse electromagnetic mode) - поперечна електромагнітна мода (хвиля).  
**TIA** (transimpedance amplifier) - підсилювач напруги, керований струмом.  
**TM** (transverse magnetic) - поперечна магнітна (наприклад, хвиля).  
**T/R** (transmit/receive) - передавання / приймання  
**TTD** (true time delay) - дійсна часова затримка.  
**TTL** (transistor-transistor logic) - транзисторно-транзисторна логіка, TTL.  
**TX** (transmit/transmitter) - передача/передавач, ПРД.  
**UWB** (ultra-wideband) - надширокопasmуговий.  
**VBW** (video bandwidth) - смуга відеосигналу.  
**VSWR** (voltage standing-wave ratio) - коефіцієнт стоячої хвилі напруги, КСХН.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Атабеков Григорий Иосифович. Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. И. Атабеков. – Изд. 2-е испр. – С-Пб. : Лань, 2006. – 432 с. – ISBN 5-8114-0699-1.
2. Евдокимов Федор Евдокимович. Теоретические основы электротехники : учеб. для студентов образоват. учреждений сред. проф. образования / Ф. Е. Евдокимов. – Изд. 9-е стер. – М. : Академия, 2004. – 560 с. – ISBN 5-7695-1106-0.
3. Белецкий Александр Федорович. Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов / А. Ф. Белецкий. – Изд. 2-е стер. – С-Пб. : Лань, 2009. – 544 с. – ISBN 978-5-8114-0905-1.
4. Игорь Николаевич Добротворский. Теория электрических цепей : учебник для техникумов / И. Н. Добротворский. – М. : Радио и связь, 1989. – 472 с. – ISBN 5-256-00266-X.
5. Зернов Николай Викторович. Теория радиотехнических цепей : учеб. для вузов / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. – Изд. 2-е перераб. и доп. – Л. : Энергия, 1972. – 816 с.
6. Лосев Алексей Константинович. Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов / А. К. Лосев. – М. : Высшая школа, 1987. – 512 с.
7. Матханов Платон Николаевич. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи : учеб. для вузов / П. Н. Матханов. – Изд. 3-е перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1990. – 400 с. – ISBN 5-06-000679-4.
8. Попов Вадим Петрович. Основы теории цепей: учеб. для вузов / В. П. Попов. – Изд. 6-е перераб. и испр. – М. : Высшая школа, 2007. – 575 с. – ISBN 978-5-06-003949-8.
9. Попов Петр Александрович. Теория связи по проводам : учеб. для техникумов связи / П. А. Попов. – М. : Связь, 1978. – 272 с.
10. Шебес Михаил Романович. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособие / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – Изд. 4-е перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1990. – 544 с. – ISBN 5-06-000678-6.
11. Баскаков Святослав Иванович. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / С. И. Баскаков. – Изд. 4-е перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 2003. – 462 с. – ISBN 5-06-003843-2.
12. Белоцерковский Григорий Бенционович. Основы радиотехники и антенны. В 2 ч. Ч. 1. Основы радиотехники : учеб. для радиотехн. сред. спец. учеб. заведений / Г. Б. Белоцерковский. – Изд. 2-е перераб. и доп. – М. : Советское радио, 1979. – 366 с.
13. Власов Виктор Федорович. Курс радиотехники : учеб. для вузов / В. Ф. Власов. – М. : Госэнергоиздат, 1962. – 928 с.

14. Гоноровский Иосиф Семенович. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. пособие для вузов / И. С. Гоноровский, М. П. Демин. – Изд. 5-е перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1994. – 480 с. – ISBN 5-256-01068-9.
15. Калашников Анатолий Михайлович. Основы радиотехники и радиолокации. Колебательные системы : учеб. для курсантов радиотехн. училищ / А. М. Калашников, Я. В. Степук. – М. : Воениздат, 1962. – 366 с.
16. Кузьмин Иван Васильевич. Основы теории информации и кодирования : учеб. для студ. вузов / И. В. Кузьмин, В. А. Кедрус. – Изд. 2-е перераб. и доп. – К. : Вища школа. Головное изд-во, 1986. – 238 с.
17. Темников Федор Евгеньевич. Теоретические основы информационной техники : учеб. пособие для вузов / Федор Евгеньевич Темников, Владимир Александрович Афонин, Владимир Иванович Дмитриев. – Изд. 2-е испр. и доп. – М. : Энергия, 1979. – 512 с.
18. Цымбал Владимир Петрович. Теория информации и кодирования : учебник / В. П. Цымбал. – Изд. 4-е перераб. и доп. – К. : Вища школа, 1992. – 263 с. – ISBN 5-11-001943-6.

*Навчальне видання*

**Василь Мартинович Кичак  
Юрій Володимирович Крушевський  
Дмитро Володимирович Гаврілов**

## **Основи радіоелектроніки**

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна  
Коректор З. Поліщук  
Оригінал-макет підготовлено Д. Гавріловим

Підписано до друку  
Формат 29,7x42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. друк. арк.  
Наклад 300 прим. Зам. №

Вінницький національний технічний університет,  
Науково-методичний відділ ВНТУ.  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-85-32.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті  
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-85-32.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.