

Лежнюк П.Д.
Рубаненко О.Є.
Лук'яненко Ю.В.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

П.Д. Лежнюк, О.Є. Рубаненко, Ю.В. Лук'яненко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як лабораторний практикум для студентів напрямів підготовки - "Електротехніка" спеціальностей "Електричні станції" та "Електричні системи і мережі". Протокол № 5 від 30 грудня 2004 р.

Вінниця ВНТУ 2006

УДК 621.316
Л 49

Рецензенти:

А.В. Журахівський, доктор технічних наук, професор
В.П. Кожем'яко, доктор технічних наук, професор
В.І. Нагул, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Лежнюк П.Д., Рубаненко О.Є., **Лук'яненко Ю. В.**

Л 49 **Основи теорії планування експерименту. Лабораторний практикум.**
- Вінниця: ВНТУ, 2006. - 167 с.

В практикумі розглянуто приклади використання методів математичної статистики при вирішенні задач енергетичного виробництва. А саме: метод контрольних меж, методи однофакторного та двофакторного аналізу, метод еволюційного планування експерименту. Посібник розроблений відповідно до плану кафедри і програмою до дисциплін "Основи науково-дослідної роботи" і призначений для студентів спеціальностей "Електричні станції" та "Електричні системи і мережі", також може бути корисний для студентів інших енергетичних спеціальностей.

УДК 621.316

ЗМІСТ

	Вступ.....	6
1	Метод контрольних меж.....	7
1.1	Теоретичні відомості.....	7
1.1.1	Загальні відомості.....	7
1.1.2	Коротка історична довідка	7
1.1.3	Невизначеність вимірів.....	8
1.1.4	Стандартна невизначеність.....	11
1.1.5	Аналіз результатів повторних спостережень.....	13
1.1.6	Перевірка гіпотези про вид закону розподілу результатів спостережень.....	19
1.1.7	Методи перевірки гіпотез про вид закону розподілу.....	20
1.1.7.1	Критерій χ^2 Пірсона.....	20
1.1.7.2	Складений критерій.....	22
1.1.7.3	Обробка результатів кількох серій вимірювань.....	24
1.1.8	Вимірювання невинуваткових величин та їх реалізацій. Призначення контрольних меж. Рівноточні вимірювання постійної величини.....	26
1.1.9	Статистична характеристика якості продукції.....	29
1.1.10	Статистичний контроль якості продукції.....	32
1.1.11	Техніка контрольних карт.....	34
1.1.12	Форма контрольної карти типу "середнє-розмах".....	38
2	Однофакторний дисперсійний аналіз.....	39
2.1	Теоретичний опис роботи.....	39
2.1.1	Постановка задачі.....	39
2.1.2	Постановка задачі в загальному вигляді.....	40
2.1.3	Припущення, на яких базується дисперсійний аналіз.....	40
2.1.4	Ідея дисперсійного аналізу.....	41
2.1.5	Однофакторний аналіз.....	43
2.1.6	Розкладання сум квадратів.....	44
2.1.7	Оцінка дисперсій.....	45
2.1.8	Оцінка впливу фактора.....	47
2.1.9	Випадок нерівнокількісних спостережень.....	49
2.1.10	Розрахункові формули для суми.....	49
3	Багатофакторний дисперсійний аналіз.....	51
3.1	Теоретичний опис роботи.....	51
3.1.1	Постановка задачі.....	51
3.1.2	Розкладання сум квадратів.....	53
3.1.3	Оцінка дисперсій.....	55
3.1.4.	Оцінка впливу факторів.....	56
3.1.5	Розрахункові формули для сум.....	58

3.1.6.	Опорна стрижнева порцелянова ізоляція.....	59
4	D-оптимальні експериментальні плани.....	63
4.1	Теоретичні відомості.....	63
4.2	Багатофакторний експеримент.....	70
4.2.1	Вибір моделі.....	71
4.2.2	Повний факторний експеримент.....	72
4.2.3	Дробовий факторний експеримент.....	75
4.2.4	Проведення експерименту і обробка його результатів.....	80
4.2.5	Прийняття рішень	83
4.2.6	Випробовування при підвищених і граничних навантаженнях.....	86
5	Лабораторна робота № 1. Метод контрольних меж.....	99
5.1	Мета роботи.....	99
5.2	Хід роботи.....	99
5.3	Приклад виконання завдання.....	101
5.3.1	Завдання.....	101
5.3.2	Рішення задачі.....	102
5.4	Варіанти завдань.....	112
5.5	Контрольні питання.....	115
6	Лабораторна робота № 2. Однофакторний дисперсійний аналіз.....	116
6.1	Мета роботи.....	116
6.2	Хід роботи.....	116
6.3	Приклад виконання завдання.....	116
6.3.1	Завдання.....	116
6.3.2	Рішення задачі.....	117
6.4	Варіанти завдань.....	122
6.5	Контрольні питання.....	123
7	Лабораторна робота № 3. Багатофакторний дисперсійний аналіз.....	127
7.1	Мета роботи.....	127
7.2	Хід роботи.....	127
7.3	Приклад виконання завдання.....	127
7.3.1	Завдання.....	127
7.3.2	Рішення задачі.....	128
7.4	Варіанти завдань.....	135
7.5	Контрольні питання.....	135
8	Лабораторна робота № 4. D-оптимальні експериментальні плани.....	139
8.1	Мета роботи.....	139
8.2	Теоретичні відомості.....	139
8.3	Хід роботи.....	147

8.4	Контрольний приклад.....	148
8.4.1	Домашня підготовка.....	148
8.4.2	Робота в лабораторії.....	151
8.5	Формули для розрахунку.....	154
8.6	Варіанти завдань.....	155
8.7	Контрольні питання.....	159
	Література.....	160
	Додаток А.....	161

Вступ

Краса без сили - безглузда.
Корисність без краси - безсильна.
У. Соєр «Прелюдія до математики»

Чи можна відшукати в літературі більш почесний епітет, ніж *творчий*? І хоча це слово означає всього лише певний і не завжди найкращий спосіб мислення, в ряді областей діяльності йому апріорно наданий атрибут високої інтелектуальності. Так, добре відоме висловлювання про те, що обряди встановлені для тих, хто не здатний вірити, мода створена для тих, хто не уміє вдягатися, а **для тих, хто не здатний творити, існує ремесло.**

Таким чином творчості протиставляється чітко встановлений канон. А творчість - це процес, у якому відсутні (чи майже відсутні) правила. **Творчість - це вільний пошук, інтуїція, образи, "політ думки", точніше, почуттів.**

Однак тут виникають два законних питання. Дійсно, духовно-матеріальна діяльність створює й *образи, і поняття*. Образи породжені почуттями й уявою, поняття - логічною роботою розуму. Тому чи правда, що перший спосіб дослідження природи повніше і точніше відображає дійсність? Чому творчість цінніше логічного мислення?

На це питання відповідають так. Це мистецтво. Воно якщо не цінніше, то вище. Йому не можна навчитися. "Поетами не стають, поетами народжуються". Дуже зручна, але бездоказова точка зору. Люди змушені були погоджуватись з такою точкою зору тому, що для більшості з них думки, виражені точними поняттями, були не зрозумілі.

На сьогодні та в найближчому майбутньому не тільки мистецтво, але і науки не можуть обійтися без творчості, тому що на багатьох етапах цих процесів майже нічого не можна сказати чітко (без обмежень).

Однак тут і виникає друге питання. Хто довів, що творчості, зокрема науковій, не можна навчитися? В.В. Маяковський написав прекрасну роботу про те, як складати вірші. Він демонстративно назвав її "Як робити вірші". Автор хотів сказати, що несуттєво що робити, головне - треба мати гарний алгоритм.

Для тих, хто думає, що це твердження не вірне, доречно нагадати мудру думку В. Солоухіна: "Фраза "цього не може бути" є найвищий ступінь відображення людського неучтва".

Є відоме твердження про те, що "людину нічому не можна навчити, тому що вона всьому повинна навчитися сама". Навчити дійсно не можна, але полегшити самостійне навчання можна.

Виробнича діяльність сучасного інженера - це безперервний творчий процес.

Хибна думка проте, що інженер-електрик не повинен діяти творчо,

що вся його діяльність - це лише виконання пунктів "Правил...", "Інструкцій...", "Галузових стандартів ..." і т. ін., які не дозволяють будь-яких відхилень. Це лише пояснення відсутності творчих здібностей. І, як наслідок цього, ознакою сьогодення є широке впровадження в енергетиці мікропроцесорних автоматичних і автоматизованих комплексів, наділених штучним інтелектом, призначених замінити людей при виконанні багатьох тривіальних задач. Але аналіз аварій на електричних станціях і в електроенергетичних системах свідчить, що навіть найсучасніші комп'ютерні системи не замінюють людину.

Мета інженера розвинути, вдосконалити свої творчі здібності, оволодіти методами творчого мислення.

Часто виникають виробничі ситуації, коли потрібно приймати рішення в умовах нечіткої початкової інформації; коли потрібно інтерпретувати результати вимірів; спланувати заходи з безпечної, економічної, безаварійної експлуатації обладнання; організувати швидке проведення вимірів при обмеженій кількості людських та матеріальних ресурсів.

1 МЕТОД КОНТРОЛЬНИХ МЕЖ

1.1 Теоретичні відомості

1.1.1 Загальні відомості

В останні роки в метрологічній практиці ряду розвинених країн дедалі більшої популярності набуває концепція "невизначеності", яка приходить на зміну концепції похибки. В Україні на сьогодні перспективи цієї концепції не зрозумілі, оскільки точиться дискусія стосовно доцільності заміни концепції похибки концепцією "невизначеності" [6,7]. Концепція "невизначеності" подана з навчальною метою.

1.1.2 Коротка історична довідка

В 1978 р., визнаючи відсутність міжнародної єдності щодо питання невизначеності вимірювання, найвищий світовий авторитет в області метрології - Міжнародний комітет мір та ваг (МКМВ) звернувся до Міжнародного бюро мір та ваг (МБМВ) з проханням розглянути цю проблему спільно з національними лабораторіями стандартів і розробити рекомендацію.

МБМВ розробило та розіслало в тридцять дві національні лабораторії детальну анкету з питаннями. На початок 1979 р. були отримані відповіді із двадцяти однієї лабораторії. Майже всі погоджувалися, що важливо прийти до загальноприйнятого використання в міжнародному масштабі виразу "невизначеність". Однак не було досягнуто згоди відносно методу, яким потрібно користуватися. МБМВ організувало зустріч з метою прийняття єдиної і

загальноприйнятої методики для визначення "невизначеності": в її роботі прийняли участь експерти з одинадцяти національних метрологічних лабораторій. Робоча група зі складання звіту про "невизначеність" розробила Рекомендацію INC-1 (1980) "Вираження експериментальних невизначеностей". Рекомендація була прийнята МКМВ в 1981 р. і знову затверджена в 1986 р. Однак Рекомендація була лише коротким описом [6].

Завдання розробки детального Керівництва, яке б базувалось на рекомендації робочої групи, МКМВ передав Міжнародній організації зі стандартизації (ISO). Відповідальність була покладена на Технічну консультативну групу ТКГ з метрології ISO-I. Оскільки одним із її завдань є координація розвитку нових напрямів в галузі вимірювань, як становлять інтерес для ISO та шести організацій, які брали участь (разом з ISO) в роботі МЕК, МКМВ, Міжнародної організації законодавчої метрології (МОЗМ), Міжнародного Союзу чистої прикладної хімії (МСЧПХ), Міжнародного союзу чистої та прикладної фізики (МСЧПФ) та Міжнародної федерації клінічної хімії (МФКХ).

ТКГ, в свою чергу, створив Робочу групу, до складу якої ввійшли експерти, запропоновані МБМВ, МЕК, МОЗМ і призначені головою ТКГ. Перед нею було поставлено завдання: прийняти керівний документ, який, опираючись на рекомендацію Робочої групи МБМВ зі складання звіту про визначеність, давав би правила запису невизначеностей вимірювань і використовувався б службами стандартизації, випробовування, акредитації лабораторій і метрології [7]. Мета Керівництва:

- забезпечити повну інформацію про те, як складати звіти про невизначеність вимірювань;
- надати основу для міжнародного порівняння результатів вимірювань.

При цьому малося на увазі, що ідеальний метод для оцінки і запису невизначеностей вимірювань при проведенні експерименту повинен бути реальним, тобто придатним для всіх видів вимірювань і всіх вхідних даних, які використовуються у вимірюваннях.

1.1.3 Невизначеність при проведенні експерименту

Фізична величина - характеристика, загальна в якісному відношенні багатьом фізичним об'єктам (фізичним системам, їх станам чи процесам, які в них проходять), але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного із них.

Формалізованим відображенням якісних відмінностей фізичних величин є їх розмірність, а кількісним - розмір. Розмір фізичної величини характеризує кількісний вміст фізичної величини в даному об'єкті. Відображення розміру фізичної величини у вигляді числа, що дорівнює відношенню фізичної величини, що вимірюється, до розміру одиниці цієї величини, з її (одиниці) позначенням є значенням фізичної величини.

Вимірювання - це визначення значення конкретної величини, що підлягає вимірюванню, є метою певної сукупності операцій. Значення, отримане шляхом вимірювання та віднесене до вимірюваної величини, називають результатом вимірювання.

Основним шляхом при проведенні вимірювання є визначення фізичної величини, що можна зробити лише описовим шляхом. Вимірювану величину потрібно визначати з достатньою точністю, щоб для тих цілей, для яких вона призначена, її значення було єдиним. Як правило, визначення фізичної величини уточнює деякі фізичні умови та стани.

Вимірювана величина може бути повністю описана лише при обмеженій кількості інформації. Таким чином, визначення фізичної величини на практиці майже завжди неповне і вносить внесок в **невизначеність**, яка може бути, а може і не бути значною в порівнянні з необхідною точністю вимірювання. В ідеальному випадку величина, реалізована при вимірюванні, повинна бути повністю узгоджена з визначеною. Часто це **неможливо** зробити, і тоді проводиться вимірювання величини, яка є апроксимацією вимірюваної. Неідеальна і сама процедура. Внаслідок всіх цих факторів результат є лише апроксимацією (**оцінкою**) значення вимірюваної величини і буде повним, якщо буде встановлена невизначеність цієї оцінки.

Для прикладу розглянемо пластинку із деякого матеріалу. Вимірювана величина - товщина пластинки при заданій температурі, яка вимірюється за допомогою мікрометра. Товщина пластинки в місці вимірювання при даній температурі і тиску, який робить мікрометр - вимірювана величина. Однак, оскільки не показано в якому саме місці пластинки проводити вимірювання, то вимірювана величина із-за неповноти визначення характеризується невизначеністю, яка може бути оцінена за вимірюваннями, виконаними в різних місцях пластинки. На будь-якому рівні визначення вимірювана величина має таку "власну" невизначеність, яка, в принципі, може бути визначена тим чи іншим методом. Це мінімальна невизначеність, з якою може бути визначена вимірювана величина. Для отримання значення розглядуваної величини з меншою невизначеністю необхідно її більш повно визначити. Так, в нашому випадку визначення вимірюваної величини залишає без уваги ряд факторів, які можуть вплинути на товщину: атмосферний тиск, вологість, положення пластинки в гравітаційному полі тощо.

Поняття "невизначеності" як кількісного атрибуту є відносно новим, в той час як термін "похибка" давно вже використовується в метрології.

Вимірювання характеризуються рядом недоліків, які викликають похибку вимірювання, внаслідок чого результат вимірювання відрізняється від вимірюваної величини. Похибку розглядають як випадкову величину, що складається із двох складових - випадкової та систематичної.

Випадкова похибка виникає завдяки дії непередбачуваних чи стохастичних часових і просторових змін впливових факторів. Хоча випадкову похибку результату не можна повністю компенсувати, її можна змен-

шити, збільшивши кількість спостережень - її математичне очікування дорівнює нулю.

Систематична похибка виникає в результаті впливу на результат вимірювання закономірно діючих, тобто систематичних, ефектів. Якщо ефект відомий, то можна визначити значення цього ефекту і внести в результат поправку для його компенсації. Однак, як правило, точне значення поправки невідоме, тому повна компенсація неможлива. Внаслідок неповної компенсації систематичної похибки результат є зміщеним, і це зміщення часто називають невиключеним залишком систематичної складової похибки.

Результат вимірювання після внесення поправок на відомі систематичні ефекти все ще є лише оцінкою значення вимірюваної величини внаслідок невизначеності, яка виникає через випадкові ефекти і неточні поправки на систематичні ефекти. Таким чином, в широкому розумінні термін "невизначеність" означає сумнів щодо достовірності результату вимірювання, відсутність точного знання значення вимірюваної величини. Як кількісна міра цього поняття невизначеність (вимірювання) - це параметр, що пов'язаний з результатом вимірювання і характеризує розсіювання значень, які могли б бути обгрунтовано приписані вимірюваній величині.

Невизначеність вимірювання свідчить про те, що для даної вимірюваної величини і для даного результату її вимірювання не існує єдиного значення, а є нескінченна кількість значень, розсіяних навколо результату, котрі узгоджуються з усіма спостереженнями і даними, а також зі знанням фізичного світу, і котрі з різним ступенем впевненості можуть бути приписані вимірюваній величині.

На практиці є багато можливих джерел невизначеності при вимірюванні, серед яких:

- а) неповне визначення вимірюваної величини;
- б) недосконала реалізація визначення вимірюваної величини;
- в) неадекватне знання ефектів від впливових величин чи недосконале їх вимірювання;
- г) суб'єктивна похибка оператора при зчитуванні показів аналогових приладів;
- д) скінченна розподільна здатність вимірювальних приладів чи поріг чутливості;
- е) неточне значення, приписане еталонам чи мірам фізичних величин;
- є) неточне значення констант та інших параметрів, отриманих із зовнішніх джерел, які використовуються в алгоритмі обробки даних;

ж) апроксимація та припущення, які використовуються в методі вимірювань і в вимірювальній процедурі;

з) випадкові зміни зовнішніх впливових величин при повторних спостереженнях.

Розрізняють два типи розрахунку невизначеності:

- розрахунок за типом А - метод оцінювання невизначеності шляхом статистичного аналізу рядів повторних спостережень;

- розрахунок за типом В - метод оцінювання невизначеності іншим способом, ніж статистичний аналіз рядів спостережень.

Відповідні невизначеності іноді називають невизначеностями типу А і типу В.

В загальному випадку не існує однозначної відповідності між випадковими похибками і невизначеностями типу А чи систематичними похибками і невизначеностями типу В. Поділ на систематичні і випадкові похибки обумовлений природою їх виникнення і прояву в ході експерименту, а поділ невизначеностей на типи А і В - методами їх розрахунку. Ці категорії невизначеностей не є заміниками слів "випадкова" чи "систематична". Невизначеність за рахунок дії деякого ефекту в одних випадках може бути отримана як оцінка за типом А, в інших - як оцінка за типом В.

Результат вимірювання може бути випадковим чи близьким до значення вимірюваної величини (правда, цей факт для дослідника залишиться непоміченим), тобто мати невелику похибку і в той же час велику невизначеність як міру сумніву щодо його достовірності. З цього видно, що невизначеність результату вимірювання не слід ототожнювати з його похибкою.

1.1.4 Стандартна невизначеність при проведенні експерименту

Стандартна невизначеність - це невизначеність результату вимірювання виражена як стандартне відхилення. Невизначеність, в тому числі стандартна, може бути розрахована за типом А чи за типом В. Розглянемо спочатку розрахунок невизначеності за типом А.

В більшості випадків найкращою доступною оцінкою математичного очікування чи очікуваного значення m величини y , для якої при спостереженнях (при однакових умовах вимірювання) отримані n незалежних значень y_i , є середнє значення

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (1.1)$$

Експериментальну дисперсію спостережень, яка є статистичною оцінкою дисперсії $S^2(y_i)$ розподілу імовірностей величини y_i , отримують як

$$S^2(y_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (1.2)$$

Додатний квадратний корінь із дисперсії називають експериментальним стандартним відхиленням.

Відповідне стандартне відхилення середнього значення

$$S(\bar{y}) = \frac{S(y_i)}{\sqrt{n}}. \quad (1.3)$$

Таким чином, стандартною невизначеністю, оціненою за типом А, для результату вимірювання, за який приймається середнє значення, є

$$u_A(\bar{y}) = S(\bar{y}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}}. \quad (1.4)$$

Слід звернути увагу, що хибним є уявлення про оцінювання невизначеності за типом А як просте використання наведених статистичних формул. По-перше, якщо окремі результати спостережень y_i корельовано, то середнє значення і стандартне відхилення середнього можуть бути невдалими оцінками відповідних статистик. В таких випадках результат спостережень потрібно аналізувати статистичними методами, спеціально призначеними для обробки рядів корельованих випадкових величин. По-друге, необхідно з'ясувати, чи дійсно всі впливи, які вважаються випадковими, є такими насправді - чи, можливо, існує дрейф впливової величини. Такий аналіз можна провести методом послідовних різниць чи, хоча б, графічно. Якщо величина дрейфу значна, то це потрібно враховувати.

Якби вимірювальні електротехнічні лабораторії або служби діагностики енергетичних підприємств не були обмежені в часі і мали необмежені ресурси, то вони могли б провести вичерпні дослідження кожного можливого джерела невизначеності. Тоді б невизначеності, пов'язані з кожним із них, могли б бути оцінені за допомогою статистичного аналізу рядів спостережень. Тобто, всі складові невизначеності були б отримані шляхом розрахунку за типом А. Оскільки такі дослідження зі зрозумілих причин провести практично неможливо, частина складових невизначеності вимірювання повинна оцінюватися іншими методами, тобто шляхом розрахунку за типом В.

Розрахунок невизначеності за типом В базується на науковому судженні про можливу змінюваність величини y з використанням всієї доступної інформації і полягає, як правило, у використанні апріорного знання розподілу ймовірностей. Джерелом інформації можуть бути:

дані попередніх вимірювань;

дані, отримані в результаті досліду чи загальні знання про поведінку і властивості відповідних речовин та приладів;

специфікації виробника;

дані, що наводяться у свідоцтвах про калібрування, про перевірку та в інших сертифікатах;

невизначеності, що приписуються довідковим даним, які взято із довідників тощо.

Коли невизначеність величини y неможливо оцінити за допомогою аналізу результатів повторних спостережень, необхідно використати апріорний розподіл ймовірностей, який ґрунтується на ступені впевненості в тому, що певна подія відбудеться (так звана суб'єктивна ймовірність) і спирається на знання, які завжди обмежені. Однак, це не робить розподіл непридатним чи нереальним. Як і всі розподіли, він є відображенням того знання, яке існує на даний момент часу.

Часто зустрічається ситуація, коли для величини y існує оцінка границь y^+ та y^- (верхня та нижня границі) інтервалу, в межах якого знаходяться можливі її значення. Якщо конкретних даних про можливі значення величини y всередині інтервалу немає, то можна лише припустити, що з однаковою ймовірністю величина y може набути будь-якого значення в його межах (рівномірний розподіл). В цьому випадку очікуване значення буде середньою точкою інтервалу з відповідною дисперсією

$$s^2(y) = \frac{(y^+ - y^-)^2}{2}. \quad (1.5)$$

Потрібно зауважити, що якщо складова невизначеності, отримана таким чином, дає значний внесок у невизначеність результату вимірювання, то бажано отримати додаткові дані для її більш повного оцінювання.

Рівномірний розподіл не варто припускати, якщо відомо, що значення, які близькі до границь інтервалу, менш імовірні, ніж ті, які лежать ближче до центру інтервалу.

У випадку нормального розподілу інтервал ймовірностей покриває приблизно 99.73% відсотка розподілу. Тоді можна вважати [10], що

$$s^2(y) = \frac{(y^+ - y^-)^2}{36}. \quad (1.6)$$

Однак, якщо впевненості в нормальності розподілу немає, доцільно прийняти компроміс між рівномірним та нормальним розподілом, допускаючи, наприклад, трикутний розподіл Сімпсона. Тоді $s^2(y) = (a^+ - a^-)/24$.

Якщо метод вимірювання достатньо вивчений, то для нього може бути застосована відома комбінована оцінка дисперсії S_p . У тому випадку, коли за результат вимірювання приймають середнє із результатів спостережень, стандартна невизначеність знаходиться так:

$$u = \frac{S_p}{\sqrt{n}}. \quad (1.7)$$

1.1.5 Аналіз результатів повторних спостережень

Як уже зазначалося, при проведенні повторних спостережень зміню-

ваність їх значень викликана не лише випадковими причинами, але й дрейфом впливових величин. Звичайно, оцінка невизначеності за типом А враховуватиме вплив як випадкових факторів, так і вплив дрейфу, однак якщо величина дрейфу за час спостережень, значна, це може призвести до того, що середнє значення із результатів спостережень буде поганою оцінкою очікуваного значення. В таких випадках бажано вплив дрейфу виявити і, за можливості, або внести поправки в результати повторних спостережень, або повторити вимірювання, усунувши дрейф.

Аналіз впливу результатів повторних спостережень на наявність дрейфу впливових величин можна провести методами статистичної перевірки статистичних гіпотез. До таких методів відноситься, зокрема, метод послідовних різниць та метод порівняння середніх.

Суть методу послідовних різниць наступна. Якщо в процесі вимірювання внаслідок дрейфу відбувалося зміщення центру групування результатів спостережень, то оцінка дисперсії згідно формули (1.2) дасть завищене значення в порівнянні зі значенням, яке б отримали в тому випадку, коли дрейф відсутній. В той самий час на величину

$$\tilde{Q}^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)^2}{2(n-1)} \quad (1.8)$$

зміщення центру групування результатів спостережень це впливає мало, оскільки за час між двома послідовними спостереженнями дрейф впливового фактора незначний, тобто відмінність результатів двох послідовних спостережень буде обумовлена, в основному, випадковими причинами. Тоді результат ділення

$$A = \frac{Q^2(y)}{S^2(y)} \quad (1.9)$$

буде тим меншим, чим більший дрейф впливових величин, тобто його можна взяти за критерій зміщення центру групування результатів повторних спостережень.

Критична область для цього критерію (критерію Аббе) визначається як

$$P\{A < A_{\epsilon\delta}\} = \alpha \quad (1.10)$$

Значення $A_{кр}$ для різних рівнів значимості наведені в таблиці 1.1.
Таблиця 1.1 - Критичні точки критерію Аббе

n	$A_{кр}$ при різних α		
	α_1	α_2	α_3
	0.001	0.01	0.05
1	2	3	4
1	0.30	0.31	0.39
2	0.21	0.27	0.41
3	0.18	0.28	0.44
4	0.19	0.31	0.47

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4
5	0.20	0.33	0.49
6	0.22	0.35	0.51
7	0.24	0.38	0.53
8	0.26	0.40	0.55
9	0.28	0.41	0.56
10	0.30	0.43	0.58
11	0.31	0.45	0.59
12	0.33	0.46	0.60
13	0.34	0.48	0.61
14	0.36	0.49	0.62
15	0.37	0.50	0.63
16	0.38	0.51	0.64
17	0.39	0.52	0.65

Якщо розраховане значення критерію Аббе при заданих α та n менше від $A_{кр}$, то нульова гіпотеза про постійність центра групування результатів відкидається, тобто спостерігається зміщення результатів спостережень внаслідок дрейфу впливових величин.

Для того, щоб виявити дрейф впливових факторів методом порівняння середніх, всю сукупність результатів спостережень $y_i (i=1, n)$ розбивають на дві сукупності $y_{1i} (i=1, n-s)$ та $y_{2i} (i=n-s, n)$, для кожної з яких розраховують се-

$$\text{редні значення } \bar{y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} y_i}{n-s}, \bar{y}_2 = \frac{\sum_{i=n-s+1}^n y_i}{s}.$$

Нехай в результаті прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями, проведених в однакових умовах, отримано ряд результатів спостережень $y_1, \dots, y_b, \dots, y_n$.

Необхідно оцінити результат та похибку вимірювання - обробити результати повторних спостережень. Обробка результатів повторних спостережень містить в собі ряд операцій. Перш за все, необхідно вилучити з результатів повторних спостережень відомі систематичні похибки, тобто отримати виправлені результати спостережень. Це робиться шляхом внесення в результати поправки, яка є величиною, що дорівнює за модулем відомій систематичній похибці і протилежна їй за знаком. Якщо всі результати спостережень містять постійну систематичну похибку, дозволяється вилучати її після розрахунку середнього значення з результатів спостережень. Після вилучення відомих систематичних похибок знаходять середнє арифметичне виправлених результатів спостережень y_i , яке приймають за результат вимірювання

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}. \quad (1.11)$$

При цьому необхідно пересвідчитись, що серед результатів спостережень немає аномальних, тобто таких, що містять надмірну похибку. Як правило, підозра падає на результати, які різко відрізняються від інших. Однак відкидати такі результати без попередньої перевірки можна лише в тому випадку, коли відома причина виникнення надмірної похибки, так як в іншому разі можуть бути відкинуті результати, які не містять надмірної похибки, а є проявом закономірностей розсіювання.

Найнадійнішим методом виключення аномальних результатів є відкидання підозрілих результатів, коли для цього існують достатні підстави в процесі експерименту. Однак іноді цей момент не враховують і помилки доводиться виявляти після проведення експерименту. В тому випадку, коли відомо що закон розподілу результатів спостережень – нормальний, можна скористатись правилом 3σ , згідно з яким результат спостереження з імовірністю 0.9973 не повинен відрізнятись від середнього на величину, яка перевищує 3σ , де σ - середнє квадратичне відхилення результатів спостережень або його оцінка.

Перевірку нормальності розподілу слід проводити для виправлених результатів вимірювань, оскільки наявність в результатах спостережень змінної систематичної похибки призводить до того, що малі похибки спостерігаються рідше, а великі частіше ніж в дійсності, тобто розподіл видозмінюється.

При кількості спостережень:

$n > 50$ для перевірки рекомендується скористатись критерієм χ^2 Пірсона чи ω^2 Мізеса – Смирнова;

$50 > n > 15$ - складеним критерієм, який наведений в додатку ГОСТ 8.207-76 - критерієм Фішера;

$n < 15$ перевірку не проводять, тому що надійність отриманого результату є низькою. В цьому випадку інформація про вид розподілу результатів спостережень повинна бути відома попередньо.

Якщо гіпотеза про нормальність розподілу не буде відкинута, то подальшу обробку проводять, як правило, згідно з ГОСТ 8.207-76.

Подальшим етапом обробки результатів спостережень є розрахунок оцінки середнього квадратичного відхилення випадкової похибки середнього арифметичного та довірчих границь випадкової похибки (якщо обробка проводиться за ГОСТ 8.207-76). Статистична оцінка середнього квадратичного відхилення середнього арифметичного визначається як

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}}. \quad (1.12)$$

Якщо результати спостережень розподілені нормально, можна знайти довірчі границі ε випадкової похибки результату вимірювання за формулою [10]

$$\varepsilon = t_s \cdot S_x, \quad (1.13)$$

де t_s - відповідний коефіцієнт Стюдента для кількості ступенів свободи $n-1$ і вибраної довірчої імовірності P .

Далі оцінюють середнє квадратичне відхилення невиключеної систематичної похибки σ_c результату вимірювання. Невиключена систематична похибка результату вимірювання може містити складові, серед яких можуть бути невиключені систематичні похибки методу, засобу вимірювальної техніки та оператора або похибки, викликані іншими джерелами. Їх, як і похибки поправок, розглядають як випадкові величини. Якщо при цьому складові невиключеної систематичної похибки можна вважати незалежними, то

$$\sigma_c = \sqrt{\sum \sigma_i^2}, \quad (1.14)$$

де σ_i - оцінка середнього квадратичного відхилення i -ої складової невиключеної систематичної похибки. У випадку, коли дані про вид розподілу випадкових величин відсутні, їх розподіл приймають за рівномірний. Наприклад, якщо одна з невиключених складових систематичної похибки – похибка вимірювального приладу, то в якості її меж приймають межі допустимих основних та додаткових похибок за умови, що випадковою складовою похибки засобу можна знехтувати.

Оцінку середнього квадратичного відхилення сумарної похибки результату вимірювання знаходять за формулою

$$S_\Sigma = \sqrt{S_y^2 + \sigma_c^2}. \quad (1.15)$$

В разі необхідності розраховують довірчі границі похибки результату вимірювання:

$$\Delta = k(P) \cdot S_\Sigma, \quad (1.16)$$

де $k(P)$ - коефіцієнт, значення якого залежить від вибраної довірчої імовірності та виду закону розподілу сумарної похибки.

Вид розподілу сумарної похибки може бути встановлений шляхом побудови композиції розподілів випадкової і невиключених систематичних похибок, які розглядаються як випадкові величини. Побудова композиції полягає в послідовному згортанні розподілів складових похибки. Спочатку знаходять композицію двох законів, потім композицію знайденої композиції з третім і так далі. Якщо відомі щільність розподілу $f_1(\Delta_1)$ і $f_2(\Delta_2)$ складових Δ_1 і Δ_2 похибки, то композицію їх законів розподілу $f(\Delta)$, тобто щільність розподілу суми $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, знаходять за формулою

$$f(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\Delta_1) f_2(\Delta - \Delta_1) d\Delta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\Delta_1 - \Delta_2) f_2(\Delta_2) d\Delta_2. \quad (1.17)$$

Знаходження композиції законів розподілу часто є достатньо складною математичною задачею, тому використовують інші аналітичні чи чис-

лові методи. Зокрема, в багатьох випадках можна використати наближення центральної граничної теореми теорії ймовірності, згідно з якою похибка, якщо вона є сумою достатньо великої кількості складових і внесок кожної складової невеликий в порівнянні з сумою, то сумарний розподіл буде нормальним. У цьому випадку, коли відоме середнє квадратичне відхилення сумарної похибки σ_{Σ} , довірчі границі похибки можна розрахувати за формулою

$$\Delta = t \cdot \sigma_{\Sigma} , \quad (1.18)$$

де t - квантиль нормального розподілу.

Якщо похибка вимірювання визначається випадковою похибкою, то як довірчі границі похибки можна прийняти довірчі границі випадкової похибки результату вимірювання.

В тому випадку, коли результати спостережень розподілені нормально, а не виключені систематичні похибки - рівномірно, то згідно з ГОСТ 8.207 коефіцієнт $k(P)$ може бути знайдений за емпіричною формулою

$$k(P) = \frac{\varepsilon(P) + \Theta(P)}{S(\bar{y}) + \sigma_c} . \quad (1.19)$$

Тут $\Theta(P)$ - довірчі межі невилученої систематичної похибки результату вимірювання, які розраховуються за формулою

$$\Theta(P) = K \sqrt{\sum_{i=1}^m \Theta_i^2} , \quad (1.20)$$

де Θ_i - границя i -ої невилученої систематичної похибки;

K - коефіцієнт, значення якого залежить від прийнятої довірчої ймовірності (так $K=1,1$ при $P=0,95$). При $P=0,99$ значення K знаходять за графіком, наведеним в ГОСТ 8.207.

Як правило, оцінка середнього квадратичного відхилення і довірчих меж похибки із-за браку інформації є оцінкою зверху. Це може призвести до того, що довірчий інтервал похибки виявиться більш широким, ніж отриманий арифметичним додаванням модулів граничних значень всіх складових похибки вимірювання. Тому після розрахунку довірчого інтервалу похибки, доцільно отриманий результат порівняти з арифметичною сумою модулів довірчих границь цих же складових і за кінцеву оцінку прийняти більш вузький інтервал.

Зазначимо, що за вищеописаною процедурою довірчий інтервал похибки розраховується з імовірністю $P < 1$. Якщо потрібно знати довірчий інтервал з $P=1$, то потрібно користуватися іншим методом. Такий метод може полягати, зокрема, в арифметичному додаванні модулів максимально можливих значень складових похибки. Часто такий розрахунок дає завищене значення, ос-

кільки малоймовірно, що на практиці всі складові приймуть максимально можливі значення, до того ж з однаковим знаком. Однак, якщо вимірювання особливо відповідальні, тобто мають винятково важливе значення для здоров'я чи життя людей, і ні в якому разі не можна допустити, щоб розраховане значення похибки було менше від дійсного при вимірюванні, такий підхід є цілком виправданим.

1.1.6 Перевірка гіпотези про вид закону розподілу результатів спостережень

Якщо закон розподілу результатів спостережень невідомий, то часто на основі певних міркувань висувають гіпотезу: результати спостережень розподілені за законом A , наприклад, за нормальним.

Перевірка гіпотези про вид закону розподілу проводиться методами статистичної перевірки статистичних гіпотез. Статистичною називають гіпотезу про вид невідомого розподілу чи про параметри відомих розподілів. Висунуту гіпотезу називають **нульовою (основною)** гіпотезою. Якщо висунута гіпотеза буде відкинута, то має місце протилежна гіпотеза. Протилежна гіпотеза називається конкуруючою (**альтернативною**).

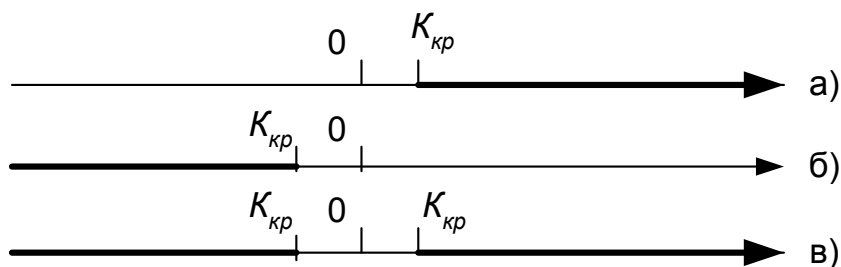


Рисунок 1.1 - Критичні області - області неприйняття нульової гіпотези:

- а) правостороння критична область $K > k_{\epsilon\delta}$,
- б) лівостороння критична область $K < k_{\epsilon\delta}$,
- в) двостороння критична область $|K| > k_{\epsilon\delta}$.

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально підібрану випадкову величину, позначимо її через K , розподіл якої відомий. Величину K називають статистичним критерієм або просто критерієм. Після вибору певного критерію множину всіх його можливих значень розбивають на дві підмножини (області):

- одна з них містить значення критерію, при яких нульова гіпотеза приймається,
- друга містить значення критерію, при яких ця гіпотеза відкидається.

Першу область називають областю прийняття гіпотези, другу – критичною областю.

Критерій K - одновимірний випадковий величина. Таким чином, критична область та області прийняття гіпотези є інтервалами і відділені одна від одної межами, які називають критичними точками $k_{кр}$.

Для знаходження критичної області задаються достатньо **малою** ймовірністю - рівнем значимості α . Малою ймовірністю тому, що при якісних вимірюваннях в цю область потрапляє дуже мало результатів вимірювань. Потім знаходять критичні (якщо критична область двостороння) чи критичну точку, виходячи з вимоги, щоб за умови справедливості нульової гіпотези ймовірність того, що критерій K прийме значення, яке належатиме критичній області, яка дорівнювала б прийнятому рівню значимості. Для кожного критерію побудовані відповідні таблиці, за якими на практиці і знаходять критичні точки, що відповідають цим вимогам. Коли критичні точки знайдені, тоді далі розраховують (за результатами вибірки) значення критерію. Якщо виявиться, що розраховане значення критерію потрапляє в критичну область, то нульову гіпотезу відкидають. Якщо розраховане значення потрапляє в область прийняття гіпотези, то відкидати нульову гіпотезу не має підстав. Однак, якщо нульова гіпотеза не відкинута, це не значить, що вона доведена. Правильніше буде сказати, що дані спостережень узгоджуються з нульовою гіпотезою, тобто немає підстав її відкидати.

1.1.7 Методи перевірки гіпотез про вид закону розподілу

Перевірка гіпотези про закон розподілу проводиться таким самим чином, як і перевірка гіпотези про параметри розподілу, тобто на основі критерію перевірки виду невідомого розподілу, який називають критерієм згоди.

Є кілька критеріїв: χ^2 Пірсона чи ω^2 Мізеса - Смирнова та інші. Розглянемо спочатку критерій Пірсона, який може бути використаний не лише для перевірки нормальності розподілу, але й для перевірки гіпотез про інші види розподілів.

1.1.7.1 Критерій χ^2 Пірсона

З метою перевірки розглядатимемо емпіричні (виміряні) n_i та теоретичні (розраховані) частоти n'_i - попадання величини X в часткові інтервали (x_i, x_{i+1}) однакової довжини, на які ділять весь інтервал спостережуваних значень величини [10]. При рівні значимості α необхідно перевірити нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за законом A .

В якості критерію перевірки нульової гіпотези приймають випадкову величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} \quad , \quad (1.21)$$

де s - кількість часткових інтервалів. Якщо під час вимірювань результати спостерігаються менше ніж очікувану кількість раз $n_i < n'_i$, то значення χ^2 зростає, а, значить, нульова гіпотеза не підтверджується.

Чим менше відрізняються емпіричні (виміряні) та теоретичні (розраховані) частоти, тим менша величина критерію, тобто він характеризує відмінність емпіричного та теоретичного розподілів.

Доведено, що при $n \rightarrow \infty$ закон розподілу величини, незалежно від того, за яким законом розподілена генеральна сукупність, наближається до закону розподілу χ^2 з $k=s-r-i$ ступенями свободи, де r - кількість параметрів закону розподілу, які наведені в результатах вимірювань. Критичні точки розподілу χ^2 наведені в таблиці 1.2. Правостороння критична область для критерію Пірсона $\chi^2 > \chi_{\varepsilon\delta}^2(\alpha, k)$ - це область неприйняття нульової гіпотези, а $\chi^2 < \chi_{\varepsilon\delta}^2(\alpha, k)$ - область прийняття нульової гіпотези.

Таким чином, якщо необхідно перевірити чи розподілена генеральна сукупність нормально, можна скористатися критерієм Пірсона. Один із способів вирішення цього завдання полягає в такому:

1. Весь інтервал значень величини X , одержаних при спостереженнях, розбивають на s часткових інтервалів (x_i, x_{i+1}) . За частоту n_i i -го інтервалу вибирають кількість значень, які потрапили в i -ий інтервал. При цьому кількість спостережень n повинна бути достатньо великою, не менше п'ятдесяти. Кожен частковий інтервал повинен містити не менше п'яти значень, а інтервали з меншою кількістю значень об'єднують;

2. Розраховують середнє значення $\bar{x}$ та статистичну оцінку середнього квадратичного відхилення S_x ряду результатів спостережень; $Z = \frac{\bar{X} - \bar{x}}{S_x}$

3. Нормують величину X , тобто переходять до величини z_i і розраховують межі нових інтервалів (z_i, z_{i+1})

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x}, \quad (1.22)$$

причому за z_1 приймають $-I_\infty$, а за z_{s+1} (права границя останнього часткового інтервалу) - $+I_\infty$;

Таблиця 1.2 - Критичні точки розподілу χ^2

Кількість ступенів свободи k	Рівень значимості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	2	3	4	5	6	7
1	6,6	5,0	3,5	0,0039	0,0009	0,0001
2	9,2	7,4	6,0	0,1030	0,0510	0,0200
3	11,3	9,4	7,8	0,3520	0,2160	0,1150
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,150	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,640	1,240	0,572

Продовження таблиці 1.2

1	2	3	4	5	6	7
7	18,5	16,0	14,1	2,170	1,690	1,240
8	20,1	17,5	15,5	2,730	2,180	1,650
9	21,7	19,0	36,9	3,330	2,700	2,090
10	23,2	20,5	18,3	3,940	3,250	2,560
11	24,7	21,9	19,7	4,570	3,820	3,050
12	26,2	23,3	21,0	5,230	4,400	3,570
13	27,7	24,7	22,4	5,890	5,010	4,110
14	29,1	26,1	23,7	6,570	5,630	4,660
15	30,6	27,5	25,0	7,260	6,260	5,230
16	32,0	28,8	26,3	7,960	6,910	5,810
17	33,4	30,2	27,6	8,670	7,560	6,410
18	34,8	31,5	28,9	9,390	8,230	7,010
19	36,2	32,9	30,1	10,10	8,910	7,630
20	37,6	34,2	31,4	10,90	9,590	8,260
21	38,9	35,5	32,7	11,60	10,30	8,900
22	40,3	36,8	33,9	12,30	11,00	9,540
23	41,6	38,1	35,2	13,10	11,70	10,20
24	43,0	39,4	36,4	13,80	12,40	10,90
25	44,3	40,6	37,7	14,60	13,10	11,50
26	45,6	41,9	38,9	15,40	13,80	12,20
27	47,0	43,2	40,1	16,20	14,60	12,90
28	48,3	44,5	41,3	16,90	15,30	13,60
29	49,6	45,7	42,6	17,70	16,00	14,30
30	50,9	47,0	43,8	18,50	16,80	15,00

4. Розраховують теоретичні ймовірності p_i попадання X в інтервал (x_i, x_{i+1}) з рівняння

$$p_i = \frac{1}{2}(\Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)), \quad (1.23)$$

де $\Phi(z)$ - нормована функція Лапласа, і знаходять теоретичні частоти

$$n'_i = n_i p_i.$$

Подальша процедура цілком зрозуміла.

1.1.7.2 Складений критерій

Складений критерій при перевірці нормальності розподілу результатів спостережень використовують, якщо кількість спостережень $15 < n < 50$.

При перевірці нормальності розподілу за допомогою складеного критерію спочатку знаходять відношення $\tilde{d}$

$$\tilde{d} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{nS^*}}, \quad (1.24)$$

де S^* - зміщена оцінка середнього квадратичного відхилення, яка розраховується за формулою

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (1.25)$$

Вважають, що гіпотеза про нормальність розподілу не суперечить експериментальним даним, якщо

$$d_{1-\frac{\alpha_1}{2}} < \tilde{d} \leq d_{\frac{\alpha_1}{2}}, \quad (1.26)$$

де $d_{1-\frac{\alpha_1}{2}}$ та $d_{\frac{\alpha_1}{2}}$ - квантілі розподілу, які знаходять з таблиць [10], причому

α_1 - заданий рівень значимості.

Таблиця 1.3 - Статистика d

N	$(\alpha_1/2)100\%$		$(1-\alpha_1/2)100\%$	
	1%	5%	95%	99%
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

Таблиця 1.4 - Значення P для знаходження $t(p)$

n	α		
	1%	2%	5%
10	0.98	0.98	0.96
11-14	0.99	0.98	0.97
15-20	0.99	0.99	0.98
21-22	0.98	0.97	0.96
23	0.95	0.98	0.96
24-27	0.98	0.98	0.97
8-32	0.99	0.98	0.97
3-35	0.99	0.98	0.98
36-49	0.99	0.99	0.98

Якщо гіпотеза про нормальність розподілу по d -критерію не відкинута, то додатково перевіряють різниці $|y_i - \bar{y}|$. Вважають, що результати спостережень належать нормальному розподілу, якщо не більше m різниць $|y_i - \bar{y}|$ перевищують значення $t(P) \cdot S_x$. Тут $t(P)$ - квантиль нормального розподілу. Він дорівнює $m-1$ при $10 < n < 20$ та $m-2$ при $21 < n < 49$.

Значення ймовірності P , залежно від вибраного рівня значимості α та кількості спостережень n , знаходять з таблиці 1.4.

Якщо рівень значимості відрізняється від табличного, тоді значення P знаходять шляхом інтерполяції.

Оскільки для d -критерію вибраний рівень значимості α_1 , а для перевірки різниць - α_2 , то рівень значимості складеного критерію

$$\alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2. \quad (1.27)$$

1.1.7.3 Обробка результатів кількох серій вимірювань

Раніше ми розглянули порядок обробки результатів прямих спостережень, коли результати отримані в однакових умовах за відносно короткий проміжок часу. Однак доволі часто вимірювання однієї і тієї самої величини проводиться за кілька етапів, тобто є кілька серій спостережень, і для підвищення точності необхідно враховувати результати спостережень всіх серій.

Таблиця 1.5 - Критичні точки $w_{n,kr}(\alpha, n_1, n_2)$ критерію Вілкоксона.

Кількість спостережень		α				Кількість спостережень		α			
n_1	n_2	0,01	0,02	0,05	0,1	n_1	n_2	0,01	0,02	0,05	0,1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	6	23	24	26	29	7	7	32	34	36	39
	7	24	25	27	30		8	34	35	38	41
	8	25	27	29	31		9	35	37	40	43
	9	26	28	31	33		10	37	39	42	45
	10	27	29	32	35		11	38	40	44	47
	11	28	30	34	37		12	40	42	46	49
	12	30	32	35	39		13	42	44	48	52
	13	31	33	37	41		14	43	45	50	54
	14	32	34	38	42		15	44	47	52	56
	15	33	36	40	44		16	46	49	54	58
	16	34	37	42	46		17	47	50	56	61
	17	35	39	44	47		18	49	52	58	63
	18	37	40	45	49		19	50	54	60	65
	19	38	41	46	51		20	52	56	62	67
	20	39	43	48	53		21	53	58	64	69
	21	40	44	50	55		22	55	59	66	72
	22	42	45	51	57						

Продовження таблиці 1.5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	23	43	47	53	58	7	23	57	61	68	74
	24	44	48	54	60		24	58	63	70	76
	25	45	50	56	62		25	60	64	72	78
8	8	43	45	49	51	9	9	56	59	62	66
	9	45	47	51	54		10	58	61	66	69
	10	47	49	53	56		11	61	63	68	72
	11	49	51	55	61		12	63	66	71	75
	12	51	53	57	63		13	65	68	73	78
	13	53	55	59	65		14	68	71	76	81
	14	55	57	61	67		15	72	73	79	84
	15	57	59	63	69		16	73	76	82	87

Нехай для простоти проведено дві серії спостережень. Кожна серія характеризується своїми середніми значеннями $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ та статистичними оцінками дисперсій S_{1v}^2, S_{2v}^2 . Якщо серії однорідні, тобто розходження між їх середніми та дисперсіями носять випадковий характер, обумовлений скінченною кількістю спостережень в кожній серії, то такі серії дозволяється об'єднувати в одну для подальшої обробки.

Розглянемо спочатку випадок, коли результати спостережень в кожній серії розподілені нормально. Для перевірки однорідності спочатку необхідно перевіряти, чи значне розходження між серійними дисперсіями. Таку перевірку можна провести за критерієм F Фішера - Снедекора. Якщо дисперсії відрізняються незначно, то серії називаються рівно розсіяними, в іншому разі - нерівно розсіяними.

Якщо серії рівно розсіяні, то необхідно перевірити, чи значимо розходження між середніми (наприклад, за критерієм F у випадку, коли кількість спостережень в кожній серії не менше 30, чи Стьюдента, коли кількість спостережень хоча б в одній серії менше 30). Якщо виявиться, що і середні відрізняються неособливо, то серії вважають однорідними.

В тому випадку, коли закон розподілу результатів спостережень відмінний від нормального, або ж він невідомий, для перевірки однорідності серій можна скористатися критерієм Вілкоксона.

Нехай кількість спостережень в першій серії n_1 , в другій - n_2 , причому $n_1 \leq n_2$. Якщо це не так, то вибірки перенумеровують (міняють місцями). Для того, щоб при заданому рівні значимості α перевірити гіпотезу про однорідність серій спостережень, якщо кількість спостережень в кожній серії не перевищує 25, необхідно:

- 1) розмістити результати спостережень обох серій в варіаційний, тобто в зростаючий ряд;
- 2) знайти для цього варіаційного ряду суму порядкових номерів результатів спостережень першої серії - W ;
- 3) знайти за даними таблиці 1.5 нижню критичну точку $w_{нкp}(\alpha, n_1, n_2)$ критерію Вілкоксона;
- 4) знайти верхню критичну точку за формулою

$$w_{a,\varepsilon\delta} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_{i,\varepsilon\delta}(\alpha, n_1, n_2). \quad (1.28)$$

Якщо $w_{н.кр}(\alpha, n_1, n_2) < W < w_{в.кр}(\alpha, n_1, n_2)$, то вважають, що серії однорідні.

Необхідно зауважити, що при побудові варіаційного ряду може виявитись, що деякі результати спостережень збігаються. Якщо збігаються результати спостережень лише в одній серії, то в варіаційному ряді їх нумерують так, наче вони різні числа; якщо ж збігаються результати спостережень різних серій, то їм присвоюють один і той самий порядковий номер, який дорівнює середньому арифметичному порядкових номерів, котрі мали б ці результати, якби вони були різними.

Якщо серії будуть визнані однорідними, то їх можна об'єднати і розглядати як єдину сукупність спостережень.

1.1.8 Вимірювання не випадкових величин та їх реалізацій Призначення контрольних меж. Рівноточні виміри постійної величини

Під час експериментів виникає задача здійснювати вимірювання очікуваної постійної величини. Наприклад, підприємство виготовляє одноступові деталі. Очікується, що результати вимірів повинні бути однаковими, якщо відсутня систематична та випадкова похибки. Наприклад, мікропроцесорний пристрій постійно контролює параметр силового енергетичного обладнання, яке знаходиться в роботі. Очікується, що результати вимірювань (коли обладнання без пошкоджень) повинні бути однаковими, якщо відсутня систематична та випадкова похибки [7,8,10].

При опрацюванні результатів вимірювань постійної величини точність її оцінки і довірчі межі знаходять за такими формулами.

Точкова оцінка постійної величини

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad (1.29)$$

де y_i - результат вимірювань; n - кількість вимірювань.

Середньоквадратичне відхилення точкової оцінки постійної величини

$$\sigma(\bar{y}) = \sigma_{\Delta} / \sqrt{n}, \quad (1.30)$$

де σ_{Δ} - середньоквадратична похибка вимірів.

Довірчі межі (задача полягає в знаходженні меж, які утворюють інтервал, що перекриває невідому постійну величину y з довірчою ймовірністю p):

одна нижня одностороння межа

$$y'_i = \bar{y} - \frac{t_p \cdot \sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}}, \quad (1.31)$$

одна верхня одностороння межа

$$y'_i = \bar{y} + \frac{t_p \cdot \sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}}, \quad (1.32)$$

дві (верхня і нижня) рівновіддалені двосторонні межі

$$y''_{\hat{a},i} = \bar{y} \pm \frac{t_{(1+p)/2} \cdot \sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}}, \quad (1.33)$$

де p - довірна ймовірність; $t_p, t_{(1+p)/2}$ - квантилі нормованого нормального закону розподілу, які визначаються по таблиці 1.6.

Довірчий інтервал при односторонній межі напіввідкритий, тобто одна межа кінцева, інша - нескінченна. Зокрема, при визначенні нижньої односторонньої межі довірчий інтервал очікуваних правильних результатів вимірювань знаходиться в межах $y_n \div +\infty$. При визначенні двосторонніх меж його розмір скінченний і складає

$$y''_e - y''_n = \frac{2 \cdot t_{(1+p)/2} \cdot \sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \varepsilon. \quad (1.34)$$

Таким чином, величина інтервалу в обох випадках є невипадковою. Випадковим є лише положення кінцевих меж інтервалу на осі. Це положення однозначно пов'язане з випадковим положенням точкової оцінки. Часто межі призначають так, щоб інтервал містив у собі постійну контрольовану величину з досить великою ймовірністю p .

Зокрема, при двосторонньому інтервалі часто вибирають $p = 0,9973$. Тоді з таблиці 1.6 вибираємо для $(1+0,9973)/2$ $t_{(1+p)/2} = 3$ і формула (1.33) приймає вид

$$y''_{\hat{a},i} = \bar{y} \pm \frac{3 \cdot \sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} = \bar{y} \pm \frac{\Delta_{i\hat{a}\hat{e}\hat{n}}}{\sqrt{n}}. \quad (1.35)$$

Абсолютна точність оцінки

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_{\hat{a}} = \varepsilon_i = \frac{t_{(1+p)/2} \cdot \sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} = \frac{\Delta_{i\hat{a}\hat{e}\hat{n}}}{\sqrt{n}}. \quad (1.36)$$

Приклад. Визначити кількість незалежних вимірів для оцінювання постійного розміру з заданою абсолютною точністю.

Вихідні дані. $\dot{\varepsilon}$ - необхідна абсолютна точність вимірів; p - необхідна ймовірність висновків.

Рішення. Необхідний об'єм вимірів розраховуємо за формулою

$$n = \left(\frac{t_{(1+p)/2} \cdot \sigma_{\Delta}}{\dot{\varepsilon}} \right)^2, \quad (1.37)$$

де $t_{(1+p)/2}$ - квантиль нормованого нормального розподілу (визначається по таблицею 1.6) Залежність об'єму випробовувань n від відношення $\sigma_{\Delta} / \dot{\varepsilon}$ і рівня ймовірності p наведена на рисунку 1.2.

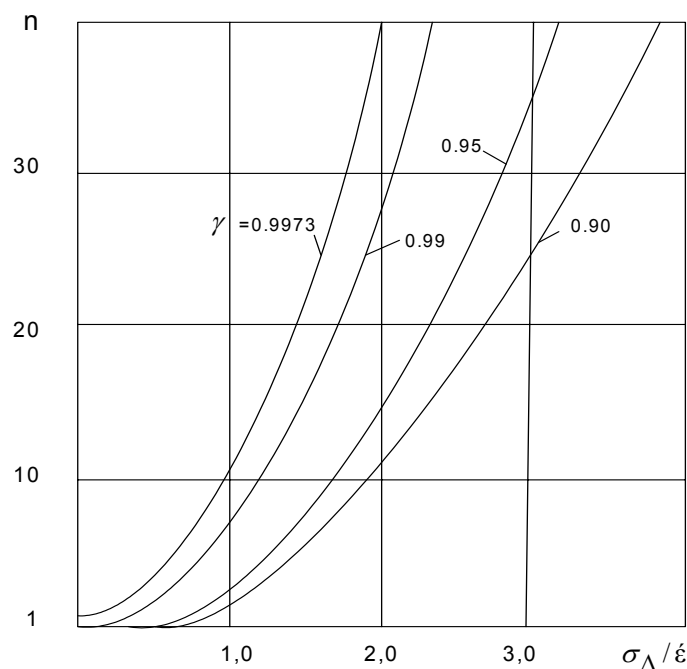


Рисунок 1.2 - Залежність об'єму вимірів n , необхідного для оцінки постійної вимірюваної величини з заданою точністю, від відношення $\sigma_{\Delta} / \dot{\epsilon}$.

Часто при вимірюваннях постійної величини імовірність $p = 0,9973$, коли квантиль $t_{(1+p)/2} = 3$, і формула набуває вигляду:

$$n = \left(\frac{\Delta_{\text{макс}}}{\dot{\epsilon}} \right)^2. \quad (1.38)$$

Ця формула залишається справедливою і для тих випадків, коли імовірність p відрізняється від **0,9973**. В цьому випадку під $\Delta_{\text{макс}}$ треба розуміти граничну похибку вимірів, визначену на тому самому рівні p , що й абсолютна точність вимірів $\dot{\epsilon}$.

Кількість вимірів n округляється в більшу сторону до найближчого цілого числа.

Таблиця 1.6 - Квантилі t_p нормованого нормального розподілу для різних p

p	t_p	p	t_p	p	t_p	p	t_p
1	2	3	4	5	6	7	8
0,50	0,000000	0,70	0,524401	0,90	1,281552	0,983	2,120072
0,51	0,025069	0,71	0,553385	0,91	1,340755	0,984	2,144411
0,52	0,050154	0,72	0,582842	0,92	1,405072	0,985	2,170090
0,53	0,075270	0,73	0,612813	0,93	1,475791	0,986	2,197286
0,54	0,100434	0,74	0,643345	0,94	1,554774	0,987	2,226212
0,55	0,125661	0,75	0,674490	0,95	1,644854	0,988	2,257129
0,56	0,160969	0,76	0,706303	0,96	1,750686	0,989	2,290368
0,57	0,176374	0,77	0,738847	0,97	1,880794	0,990	2,326348

Продовження таблиці 1.6

1	2	3	4	5	6	7	8
0,58	0,201893	0,78	0,772193	0,971	1,895698	0,991	2,365618
0,59	0,227545	0,79	0,806421	0,972	1,911036	0,992	2,408916
0,60	0,253347	0,80	0,841621	0,973	1,926837	0,993	2,457263
0,61	0,279319	0,81	0,877896	0,974	1,943134	0,994	2,512114
0,62	0,305481	0,82	0,915365	0,975	1,959964	0,995	2,575829
0,63	0,331853	0,83	0,954165	0,976	1,977368	0,996	2,652070
0,64	0,358459	0,84	0,994458	0,977	1,995393	0,997	2,747781
0,65	0,385320	0,85	1,036433	0,978	2,014091	0,998	2,878162
0,66	0,412463	0,86	1,080319	0,979	2,033520	0,99865	3,002445
0,67	0,439913	0,87	1,126391	0,980	2,053749	0,999	3,090232
0,68	0,467699	0,88	1,174987	0,981	2,074855	-	-
0,69	0,495850	0,89	1,226528	0,982	2,096927	-	-

1.1.9 Статистична характеристика якості продукції

Нехай деяка технологічна система здійснює безперервний випуск продукції, наприклад, цех гумових виробів для високовольтних повітряних вимикачів виготовляє гумові ущільнення. Якість продукції, що випускається, оцінюється значенням вимірюваного показника якості (наприклад, розмір зовнішнього діаметра ущільнення під ізолятор опори камери повітряного вимикача - $202 \pm 0,5$ мм). Позначимо його y . Нехай номінальне, тобто необхідне значення показника якості, є y_0 (наприклад, 202 мм). Працююча технологічна система має природну похибку виготовлення продукції. Під похибкою виготовлення Δy розуміємо відхилення фактичного значення показника якості y від номіналу y_0 :

$$\Delta y = y - y_0. \quad (1.39)$$

Технічні вимоги до якості продукції визначаються полем допуску

$$\delta = T_{\text{в}} + T_{\text{н}} \quad (1.40)$$

де δ - поле допуску;

$T_{\text{в}}$ - верхнє припустиме відхилення показника якості y від необхідного номіналу y_0 (в нашому випадку це $+ 0,5$ мм);

$T_{\text{н}}$ - нижнє допустиме відхилення показника $T_{\text{н}}$ якості y від необхідного номіналу y_0 (в нашому випадку це $0,5$ мм).

У загальному випадку може бути, що

$$T_{\text{в}} \neq T_{\text{н}}. \quad (1.41)$$

Продукція, що випускається, вважається придатною, якщо вимірюване значення показника якості y лежить в межах $(y_0 + T_{\text{в}}; y_0 - T_{\text{н}})$. Якщо значення показника якості виходить за межі технологічного допуску, про-

дукція вважається непридатною (брак). Брак є наслідком похибок роботи технологічної системи.

Похибка технологічної системи має дві складові: випадкову і систематичну.

Випадкова похибка обумовлена впливом на технологічний процес випадкових явищ (наприклад, неоднорідність сировини, зміни навколишнього середовища, механічні вібрації і т.д.).

Оскільки факторів, що породжують випадкову похибку, часто буває багато і серед них важко виділити домінуючий, то на підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей можна вважати, що розподіл випадкової похибки відповідає нормальному закону з нульовим математичним очікуванням і деякою дисперсією σ^2 . Величина σ^2 характеризує точність роботи технологічної системи.

Систематична похибка пов'язана з виникненням у технологічному процесі стійких і, як правило, зростаючих відхилень, які зростають внаслідок дії таких факторів, як поступове зношування обладнання, старіння каталізатора, забруднення технологічного обладнання і т.п. Величина систематичної похибки визначає положення центра групування (математичного очікування) випадкової похибки на осі значень показника якості y .

Зростання будь-якої складової похибки технологічної системи призводить до зростання частки браку [1, 7, 8]. Пояснимо це графічно.

На рисунку 1.3 зображена вісь значень показника якості y , на якій показані значення номіналу y_0 і межі допуску (припустимо, що $T_e = T_n$). Якщо технологічна система налаштована на необхідний номінал y_0 і буде відсутня систематична похибка, то математичне очікування випадкової похибки збігається з номіналом y_0 і крива густини розподілу випадкової похибки розміщена так, як показано пунктиром. Затіновані частини площі під кривою відповідають ймовірності P_0 того, що фактичне значення показника якості y опиниться за межами допуску.

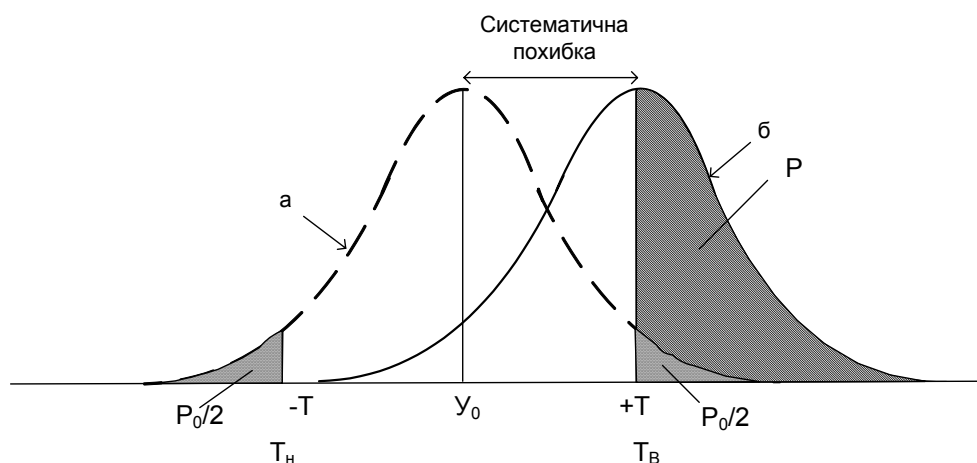


Рисунок 1.3 - Криві густини розподілу випадкової похибки: а - за відсутності систематичної похибки, б - за наявності систематичної похибки

Тоді за даної точності технологічної системи σ^2 і відсутності систематичної похибки, відсоток браку в продукції, яка випускається, дорівнює $\rho_0 \cdot 100\%$. З появою систематичної похибки математичне очікування випадкової похибки зсувається відносно номінального значення y_0 .

У цьому випадку імовірність ρ' виходу значень показника якості y за межі допуску визначається заштрихованою частиною площі під суцільною кривою. Ясно, що $\rho' > \rho_0$. Тому частка браку зростає з появою статистичної похибки. Хоча точність роботи σ^2 технологічної системи може бути незмінною. Рисунок 1.4 показує зростання частини браку при погіршенні точності роботи технологічної системи (зростання σ^2).

Технологічний процес "йде" стабільно, якщо не виникає систематичної похибки і не змінюється величина випадкової похибки σ^2 . Визначимо частину браку, який випускає стабільно працююча технологічна система при даному співвідношенні між полем допуску δ і величиною σ^2 . Нехай $T_{\text{в}} = T_{\text{н}} = T$; тоді при існуючій точності роботи технологічної системи σ^2 ймовірність появи браку дорівнює

$$\begin{aligned} q &= P\{\text{брак}\} = P\{y > y_0 + T\} + P\{y < y_0 - T\} = \\ &= P\left\{\frac{y - y_0}{\sigma} > \frac{T}{\sigma}\right\} + P\left\{\frac{y - y_0}{\sigma} < -\frac{T}{\sigma}\right\}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

При стабільному процесі випадкова величина $\frac{y - y_0}{\sigma} = \frac{\Delta y}{\sigma}$ має нормальний розподіл з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією.

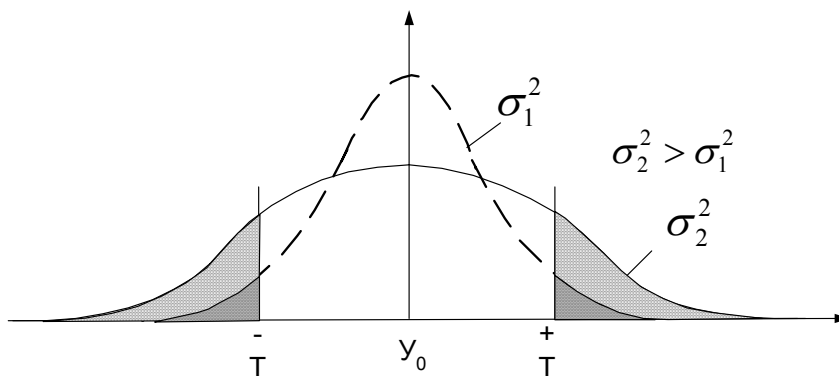


Рисунок 1.4 - Зростання частини браку при погіршенні точності роботи технологічної системи

Тоді ймовірність появи браку:

- при перевищенні максимального допустимого значення контрольованого параметра

$$P_{\text{в}}\left\{\frac{y - y_0}{\sigma_{\text{в}}} > \frac{T_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}\right\} = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{T_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}\right),$$

- при величині контрольованого параметра, яка менше мінімально до-

пустимої

$$P_H \left\{ \frac{y - y_0}{\sigma_H} < \frac{T_H}{\sigma_H} \right\} = \Phi_0 \left(-\frac{T_H}{\sigma_H} \right) = 0,5 - \Phi_0 \left(\frac{T_H}{\sigma_H} \right), \quad (1.43)$$

де $\Phi_0 \left(\frac{T_H}{\sigma_H} \right)$ - табличне значення функції розподілу нормованої нормальної випадкової величини при $\frac{T_H}{\sigma_H}$.

Отже,

$q = P_{\epsilon} + P_H$, а при $P = P_{\epsilon} = P_H, T = T_{\epsilon} = T_H, \sigma = \sigma_{\epsilon} = \sigma_H$ отримуємо

$$q = 2 \left[0,5 - \Phi \left(\frac{T}{\sigma} \right) \right], \quad (1.44)$$

де $\Phi_0(z) = \Phi \left(\frac{T}{\sigma} \right)$ - нормована функція Лапласа (значення наведені в таблиці А6 додатку А). Табличне значення функції розподілу визначається за формулою

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (1.45)$$

де $z = \frac{T}{\sigma}$.

$\Phi_0(z)$ може змінюватись від 0 до 0,5 у відносних одиницях (в.о.). Тому q може змінюватись від 0 до 1 (в.о.), або від 0% до 100%.

Величина $q \cdot 100\%$ є дуже важливою характеристикою статистичного контролю якості, тому що вона характеризує відсоток браку, який з'являється в ході стабільного технологічного процесу.

1.1.10 Статистичний контроль якості продукції

В умовах сучасних високопродуктивних технологічних систем практично неможливо здійснювати суцільний, стовідсотковий контроль якості продукції, що випускається, за всіма параметрами, які можна виміряти. Іншими словами, неможливо безпосередньо визначити вплив похибок виготовлення на якість усієї продукції. Тому для оцінки якості продукції використовують статистичні методи контролю. При цьому в ролі генеральної сукупності виступає вся продукція, виготовлена за контрольний термін, наприклад, за зміну, за добу, за місяць і т.п., а в ролі вибірки — ті проби, докладний аналіз яких дасть можливість зробити висновок про частку браку в усій сукупності.

Можна виділити дві основних задачі статистичного контролю:

1. Статистичне регулювання якості продукції;
2. Статистичний приймальний контроль.

Статистичне регулювання дозволяє, використовуючи дрібні регулярні відбори, попереджати збільшення браку, стежити за якістю продук-

ції, яка випускається, під час виробничого процесу. Або, наприклад, безперервно відслідковуючи тангенс кута діелектричних втрат, рівень часткових розрядів, вологість, ємність, опір, вміст газів в трансформаторному маслі можна визначити тенденції зміни якості ізоляції в процесі експлуатації високовольтного обладнання та попередити аварії. Статистичний приймальний контроль призначений для визначення частки браку в уже виготовленій і приведеній до здачі партії продукції або у високовольтному обладнанні, наприклад, перед введенням його в експлуатацію після ремонту і монтажу. Як відзначалася вище, випадкова похибка має нормальний розподіл. Тоді показник якості y також є випадковою величиною з розподілом, що характеризується математичним очікуванням m_y і дисперсією $\hat{\sigma}_y$.

Нехай на початку роботи технологічна система налаштована на номінальне значення показника якості y_0 . Згодом, за якийсь час Δt ми можемо зробити n послідовних вимірів показника якості $y_1, \dots, y_n$ і на їхній підставі перевірити нульову гіпотезу $H'_0 : m_y = y_0$ проти альтернативної $H'_0 : m_y \neq y_0$. Відповідно до техніки перевірки статистичних гіпотез дані наших вимірів з імовірністю $\rho_1 = 1 - \alpha_1$ не суперечать висунутій гіпотезі H'_0 , якщо виконується співвідношення [1,2,3]

$$\left| \frac{\bar{y} - y_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \leq t_{\left(\frac{1+(1-\alpha_1)}{2} \right)} \quad (1.46)$$

де α_1 - вибраний рівень значимості; $t_{\left(\frac{1+(1-\alpha_1)}{2} \right)}$ - квантиль розподілу нормованої нормальної випадкової величини для $P = \frac{1+(1-\alpha_1)}{2}$; $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ - середнє значення наших вимірів, що називаються пробами.

При виконанні співвідношення (1.46) з імовірністю $\rho_1 = 1 - \alpha_1$ можна стверджувати, що за інтервал часу Δt , що розділяє початок роботи системи і момент взяття проби, у системі не виникло систематичної похибки і вона витримує заданий номінал показника якості y_0 . Якщо при цьому дані проби $y_1, \dots, y_n$ з імовірністю $\rho_2 = 1 - \alpha_2$ не суперечать і другій гіпотезі $H''_0 : \sigma_y^2 = \sigma^2$ (проти альтернативної $H''_0 : \sigma_y^2 \neq \sigma^2$), то вважається, що за інтервал часу Δt процес залишався стабільним, тобто відсоток браку не перевищував $q \cdot 100\%$.

Всю процедуру статистичної перевірки стабільності технологічного

процесу можна регулярно повторювати з інтервалом часу Δt і в такий спосіб контролювати хід технологічного процесу. Якщо після обробки даних проби $y_1^{(i)}, \dots, y_n^{(i)}$, взятої в момент $t_i = i \cdot \Delta t$ виявиться, що одна з гіпотез H'_0 або H''_0 відкидається, то це означає, що на інтервалі часу $(t_i - t_{i-1})$ у технологічній системі відбулося розлагодження, і частина браку зросла. У цьому випадку процес зупиняється. Вся продукція, що випущена за інтервал $(t_i - t_{i-1})$, підлягає суцільній перевірці. З'ясовуються й усуваються причини розлагодження. Процес налагоджується знову і запускається.

1.1.11 Техніка контрольних карт

Для полегшення процедури статистичного регулювання якості продукції в умовах виробництва використовується техніка контрольних карт. Є декілька типів контрольних карт:

- карта середніх значень ("карта $\bar{y}$ "),
- карта медіан ("карта $\tilde{y}$ "),
- карта середньоквадратичних відхилень ("карта $\hat{\sigma}_y$ "),
- карта розмахів ("карта $\hat{R}$ ") і ряд комбінованих карт, наприклад, "карта $\bar{y}/\hat{R}$ ", "карта $\tilde{y}/\hat{R}$ " і т.п. [5].

На контрольній карті середніх значень ("карта $\bar{y}$ ") по осі ординат показують верхню $K_{B\bar{y}}$ і нижню $K_{H\bar{y}}$ межі. По середині між $K_{B\bar{y}}$ і $K_{H\bar{y}}$ проводиться вісь абсцис, на якій через однакові проміжки позначають моменти відбору проб $i = 1, 2, \dots$. Значення $\bar{y}_i$ для кожної проби наносяться на карту. Межі $K_{B\bar{y}}$ і $K_{H\bar{y}}$ розраховані так, що область значень $\bar{y}_i$ між межами відповідає області прийняття гіпотези H'_0 .

Якщо ж $\bar{y}_i > K_{B\bar{y}}$ або $\bar{y}_i < K_{H\bar{y}}$, то гіпотеза H'_0 відкидається, і, тому, потрібне зупинення виробничого процесу.

Аналогічно будується карта середньоквадратичних відхилень ("карта $\hat{\sigma}_y$ "). Вихід розрахункового значення ($\hat{\sigma}_y$ за верхню межу $K_{B\hat{\sigma}_y}$ означає, що гіпотеза H''_0 відкидається, і виходить, що точність технологічної системи погіршилася. Потрібна зупинка процесу та аналіз причин розлагодження. За нижню межу $K_{H\hat{\sigma}_y}$ на "карті $\hat{\sigma}_y$ " беруть нульове значення.

Оскільки підрахунок середньоквадратичного $\hat{\sigma}_y$ відхилення за формулою $\hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ для виробничих умов досить складний, за-

мість "карти $\hat{\sigma}_y$ " зазвичай використовують карту розмахів ("карта $\hat{R}$ "), для якої як вибіркового розмах R_i використовують різницю між найбільшим і найменшим значеннями показника якості в пробі:

$$R_i = y_{i \max} - y_{i \min}. \quad (1.47)$$

Гіпотеза H_0'' відкидається, якщо $R_i > K_{\hat{R}}$.

Розглянемо техніку побудови і ведення карти, яка найбільше застосовується: комбінованої карти "середнє — розмах". Зі співвідношення (1.46) легко одержати формули для розрахунку верхніх і нижніх границь карти середніх:

$$K_{\sigma, n \bar{y}} = y_0 \pm t_{\left[\frac{1+(1-\alpha_I)}{2} \right]} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (1.48)$$

де $t_{\left[\frac{1+(1-\alpha_I)}{2} \right]}$ - квантиль нормованого нормального закону розподілу (зна-

ходиться за таблицею для різних $P = \frac{1+(1-\alpha_I)}{2}$, n - загальна кількість ви-

мірів). У випадку, якщо невідомі значення номіналу y_0 і величини σ^2 , то використовують їхні оцінки $\hat{y}_0$ і $\hat{\sigma}^2$, які були отримані в результаті спеціально організованих досліджень. Тоді формула (1.48) приймає вигляд

$$K_{\sigma, n \bar{y}} = \hat{y}_0 \pm t_{\left[\frac{1+(1-\alpha_I)}{2} \right]} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (1.49)$$

Виведення формули для розрахунку границі $K_{\hat{R}}$ яка визначає область прийняття гіпотези $H_0'' : \sigma_y^2 = \sigma^2$, базується на законі розподілу вибіркової функції $\hat{R}$ [8] і на відомому в статистиці співвідношенні $M\{\hat{R}\} = d_0 \sigma$, де d - деяка постійна, яка залежить від об'єму вибірки n . Пропускаючи виведення формули для $K_{\hat{R}}$ наведемо її кінцевий вигляд:

$$K_{\hat{R}} = d_0 \hat{R}, \quad (1.50)$$

де d_0 - табличне значення коефіцієнта, що залежить від об'єму проби n і обраного рівня значимості α . З формул (1.38), (1.39) і (1.40) випливає, що для розрахунку границь $K_{\bar{y}}, K_{\hat{y}}, K_{\hat{R}}$ комбінованої "карти $\bar{y}/\hat{R}$ " необхідно знати такі параметри:

- y_0 - номінальне значення показника якості або його оцінку $\hat{y}_0$;
- σ^2 - характеристику точності роботи технологічної системи або її оцінку $\hat{\sigma}^2 I$, знайдену через оцінку розмаху $\hat{R}$;

- $\hat{R}$ - оцінку розмаху;
- n - кількість вимірів показника якості, що містяться в пробі;
- α_1 - рівень значимості для перевірки гіпотези $H_0^{//} : m_y = y_0$;
- α_2 - рівень значимості для перевірки гіпотези $H_0^{//} : \sigma_y^2 = \sigma^2$;
- d_0 - табличне значення для коефіцієнта.

Значення перших трьох параметрів або задаються, або визначаються на підставі даних спеціальних попередніх досліджень технологічного процесу. Останні чотири параметри вибираються відповідно до рекомендацій ГОСТ 15894-70 "Статистичне регулювання технологічних процесів" [8]. Згідно з ГОСТ $\alpha_1 = 0,0027$, що відповідає 3σ -м довірчим межах; $\alpha_2 = 0,012$, що відповідає довірчій межі, рівній $2,5\sigma$. Значення n береться в межах 3-10 в залежності від продуктивності, стабільності та від інших технологічних факторів. У процесі статистичного контролю вибране значення n залишається незмінним. Значення коефіцієнта d_0 при $\alpha_2 = 0,012$ і вибраному значенні n визначається по таблиці 1.7 [8].

Інтервал часу Δt між відборами проб також залежить від продуктивності технологічного процесу, від тривалості циклу між двома розлагодженнями процесу і т.д. Практично Δt беруть в межах 1-2 години. На практиці справжні значення y_0 і σ^2 , як правило, невідомі, і необхідно одержати їх оцінки. Для цього в технологічному процесі проводять так назване "попереднє дослідження". В результаті такого дослідження одержують вибірку, що містить $n_0 = 100-150$ значень показника якості (а іншими словами - вимірюваного параметра) y . Вибірку n_0 набирають у вигляді сукупностей проб, наприклад, якщо вибрано $n = 5$, то кількість проб $m = \frac{n_0}{n} = 20 \div 30$. Для отримання оцінки $\hat{y}_0$ (для будь-якої g -ї проби) обчислюється середнє значення.

Таблиця 1.7 - Значення коефіцієнта d_0 при $\alpha_2 = 0,012$

n	3	4	5	6	7	8	9	10
d_0	2,35	2,10	1,86	1,79	1,74	1,74	1,70	1,67

$$\bar{y}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{gi}; \quad g = 1, \dots, m. \quad (1.51)$$

Оцінку y_0 отримуємо як середнє арифметичне m середніх значень по окремих пробах

$$y_0 = \bar{\bar{y}} = \frac{1}{m} \sum_{g=1}^m \bar{y}_g; \quad (1.52)$$

Для знаходження оцінки $\hat{\sigma}$ в кожній g -й пробі визначається розмах

$$R_g = y_{gmax} - y_{gmin}, \quad g = 1, \dots, m, \quad (1.53)$$

після цього обчислюється оцінка $\hat{R}$ розмаху для генеральної сукупності,

як усереднене значення розмахів по окремих пробах

$$\hat{R} = \bar{R} \frac{1}{m} \sum_{g=1}^m R_g \quad (1.54)$$

Оскільки відомо [8], що $M\{\bar{R}\} = d\sigma$, то незміщена оцінка для $\hat{\sigma}$ має вигляд

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{R}}{d}, \quad (1.55)$$

де значення коефіцієнта d залежить від об'єму n проби і визначається по таблиці 1.8 [8].

Таблиця 1.8 - Значення коефіцієнта d

n	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1,70	2,06	2,33	3,53	2,70	2,85	2,97	3,08

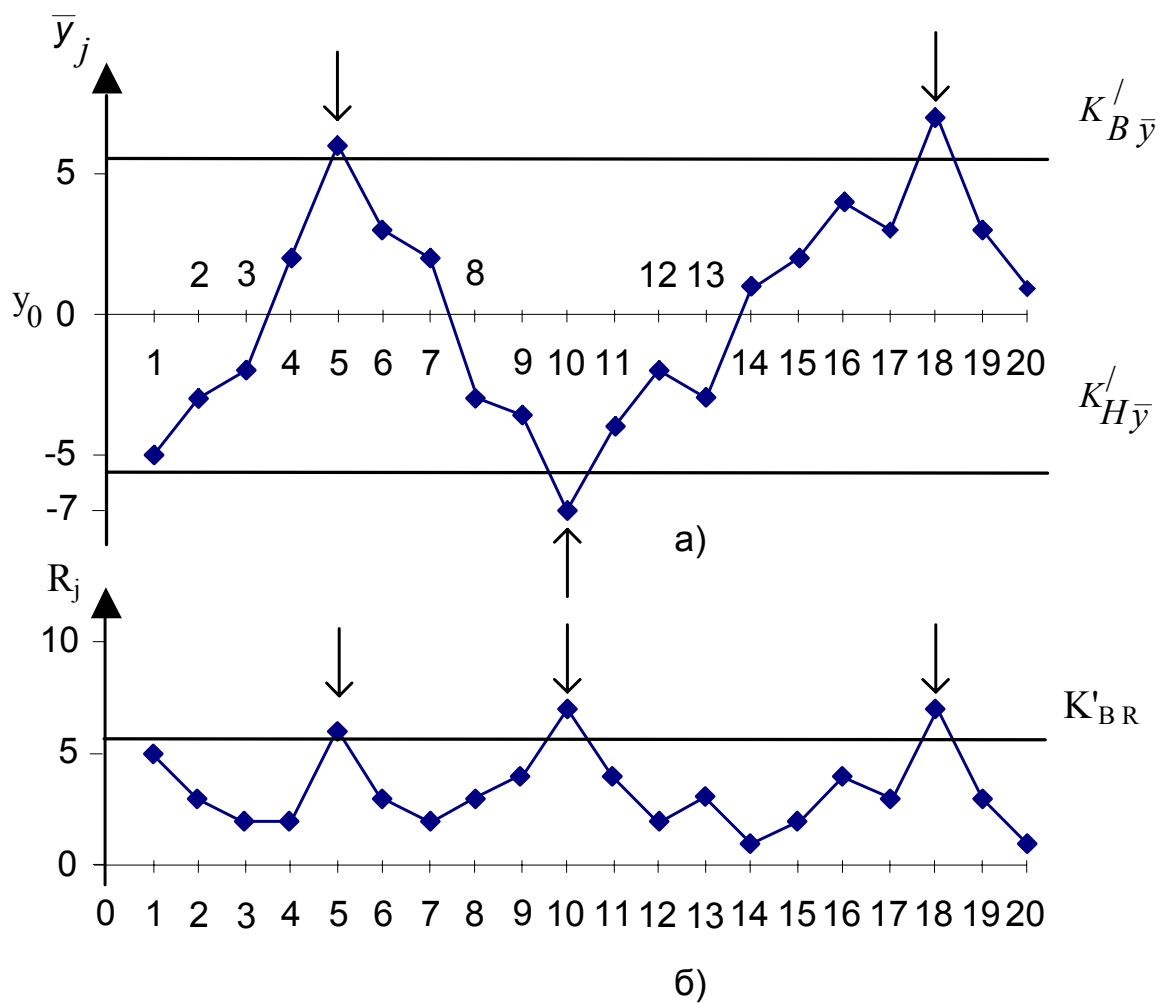


Рисунок 1.5 - Діаграма з контрольними межами:
а) - середніх значень; б) - розмахів.

Використовуючи дані попередніх досліджень (1.43), (1.44) і (1.45), за формулами (1.51) і (1.52) розраховують попередні контрольні межі $K'_{B\bar{y}}$, $K'_{H\bar{y}}$, K'_{BR} , які наносяться на діаграму (див. рис.1.5). На вісі абсцис через рівні проміжки позначаються порядкові номери проб, відібраних у попередніх дослідженнях. Далі на діаграму наносяться значення всіх $\bar{y}_g$ і R_g . Якщо деякі значення $\bar{y}_g$ або R_g виходять за розраховані контрольні межі, то відповідні їм проби виключаються з даних попередніх досліджень (наприклад, на рис. 1.5 проби 5, 10 і 18), після чого перераховуються оцінки $\bar{y}_g$ і R_g відповідно виправляються контрольні границі. Це пояснюється тим, що оцінки $\hat{y}_0$, $\hat{R}$, $\hat{\sigma}$ і контрольні границі $K_{B\bar{y}}$, $K_{H\bar{y}}$, K_{BR} повинні відповідати нормальному, стабільному ходові технологічного процесу.

1.1.12 Форма контрольної карти типу "середнє-розмах"

ГОСТом 15894-70 передбачена така форма ведення і використання контрольної карти "середнє-розмах" - $\bar{y}/R$. Контрольна карта $\bar{y}/R$ складається з двох діаграм: діаграми середніх $\bar{y}_g$ і діаграми R_g для поточних g -тих значень. Діаграми нанесені на формуляр із сіткою з тонких вертикальних і горизонтальних ліній. По вертикалі вказуються значення показника якості (тобто вимірюваного параметра), а по горизонталі записуються відомості про дату, зміну, порядкові номери проб і час.

Діаграма $\bar{y}_g$ розташовується над діаграмою R_g .

На діаграму $\bar{y}_g$ наносяться:

- горизонтальні суцільні лінії меж допуску T_H і T_B ;
- горизонтальні штрихові лінії контрольних меж $K_{B\bar{y}}$ і $K_{H\bar{y}}$.

На діаграму R_g наносяться:

- нижня горизонтальна суцільна лінія, яка відповідає нижній границі розмахів R_g , і часто дорівнює нулеві;
- верхня штрихова горизонтальна лінія, яка відповідає K_{BR} .

Між діаграмою $\bar{y}_g$ і діаграмою R_g залишається місце для записів щодо будь-якої g пробі:

- усіх значень показника якості $\bar{y}_g$;
- суми значень $\sum_{i=1}^n y_{gi}$;
- середніх значень $\bar{y}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{gi}$;

- найбільшого $y_{g \max}$ і найменшого $y_{g \min}$ значень показника якості;
- розмаху R_g .

Технологічний процес протікає задовільно, якщо значення $\bar{y}_g$ та R_g у черговий g -й пробі не виходять за відповідні межі регулювання $K_{B\bar{y}} \div K_{H\bar{y}}$ і K_{BR} . Лінія, що з'єднує послідовні значення y_g , відтворює динаміку зміни рівня налагодження процесу, а лінія, що з'єднує послідовні значення R_g , відображає динаміку зміни точності процесу для даного показника якості. Вихід середніх значень $\bar{y}_g$ (або розмахів R_g за границі регулювання сигналізує про порушення нормального ходу процесу. У цьому випадку необхідно зупинити процес і усунути причину, що викликає порушення. На контрольній карті робиться позначка у вигляді стрілки ($\downarrow$), яка вказує на розлад процесу, а сукупність продукції, виготовленої між даною і попередньою пробами, підлягає цілковитому контролю силами виробничого персоналу. На рисунку 1.5 наведений фрагмент реальної виробничої контрольної карти [7,8].

2 ОДНОФАКТОРНИЙ ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

2.1 Теоретичні відомості

2.1.1 Постановка задачі

У багатьох галузях практичної діяльності зустрічаються об'єкти дослідження, стан яких визначається вхідними змінними або факторами, що не мають кількісного опису. Такими факторами можуть бути некеровані і керовані зміни, що з будь-якої причини не дозволяють здійснювати їхнє вимірювання у даному експерименті; а також ті неконтрольовані змінні, випадкові рівні варіювання яких можна довільно вибирати і фіксувати в часі.

Для вивчення впливу факторів подібного роду на вихідний параметр об'єкта, для загальної оцінки впливу факторів, для ранжування і виділення серед них важливих, мабуть, не придатні усі викладені вище методи відсіювання керованих змінних і метод регресійного аналізу некерованих змінних, оскільки ці засоби передбачають вимір рівнів факторів, які досліджуються.

Приклади:

1. Розглянемо процес вимірювання будь-якої фізичної величини різними операторами паралельно декількома приладами (декількома засобами), причому кожен оператор за допомогою кожного приладу виконує якусь кількість вимірів, які дублюються. Усереднення спостережень, які відносяться до кожного з усіх можливих поєднань прилад-оператор, дає

безліч середніх арифметичних. Їхнє розсіювання може бути пов'язане з випадковою похибкою, систематичною приладною (методичною) помилкою і впливом оператора. Потрібно визначити, наскільки суттєвий вплив на результат виміру двох факторів: приладу (засобу) і оператора.

2. Аналогічна задача виникає при обробці деталей паралельно на декількох верстатах автоматичної лінії. Потрібно з'ясувати чи однотипові середні розміри деталей, що виготовляються на різних верстатах, тобто оцінити чи значно впливає фактор індивідуальності верстата на процес обробки.

3. При використанні радіодеталей з декількох партій треба визначити чи суттєво відрізняються параметри деталей різноманітних партій.

4. При нестабільності величини вихідного параметра в часі необхідно з'ясувати значущість вплив змінного тимчасового дрейфу на фоні випадкових похибок спостережень.

5. При налаштуванні радіо-, теле- і радіолокаційної апаратури візуальним і акустичним засобами декількома операторами треба оцінити вплив на результат налаштування трьох факторів: апаратури, засобів й оператора.

2.1.2 Постановка задачі в загальному вигляді

Дано:

а) вихідний параметр y може залежати (з фізичних міркувань) від n незалежних факторів $x_1, x_2, \dots, x_b, \dots, x_n$, що не мають кількісного опису, і їхніх парних взаємодій (використовуємо єдине позначення для змінних керованих x , некерованих z , неконтрольованих w);

б) кожен фактор x може варіюватися на u_1 рівнях;

в) повний факторний експеримент складається з $N = u_1 u_2 \dots u_i \dots u_n$ серій незалежних спостережень по числу всіх можливих сполучень (які не повторюються) рівнів n факторів;

г) будь-яка j -а серія містить m_j спостережень $y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jb}, \dots, y_{jmj}$ дослідів, які дублюються.

Потрібно: визначити, наскільки суттєвим на фоні випадкових похибок є вплив того чи іншого фактора x_i або комбінації (взаємодії) таких факторів на вихідний параметр y , провести порівняння з іншими факторами і виділити найбільш важливі.

2.1.3 Припущення, на яких базується дисперсійний аналіз

Припущення 1. Величина y - нормально розподілена випадкова величина з центром розподілу $M[y] = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = \text{const}$ і з диспер-

цією $\sigma^2[y] = \text{const}$.

Це вимоги стаціонарності зміни випадкової величини y . Таким чином, фактори визначають усереднену величину y , залишаючи простір для випадкових помилок спостережень, які підпорядковуються нормальному закону.

Припущення 2. Дисперсія одиничного спостереження σ^2 , обумовлена випадковими помилками, постійна в усіх дослідженнях і не залежить від $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, тобто дисперсії $\sigma_j^2[y]$ будуть дорівнювати одна одній при $j = 1, 2, \dots, N$, а їх вибіркові оцінки $S_i^2[y]$ будуть однорідні - це умова відтворення дослідів.

Кожне із цих припущень необхідно перевіряти за результатами дослідницького експерименту.

З даних задачі та зазначених припущень зрозуміло, що чим більший вплив деякого фактора x на вихідний параметр y , тим більше розходження між собою середніх арифметичних $\bar{y}_j$ серій паралельних спостережень, проведених при різних сполученнях рівнів варіювання досліджуваних факторів. Статистичний аналог такого розходження вказує на суттєвий вплив факторів.

При двох серіях спостережень порівняння середніх і перевірка нуль-гіпотези здійснюються за допомогою t -критерію методом Ст'юдента. В сформульованій задачі вимагається одночасно довільно порівняти велику кількість середніх і на основі цього зробити висновок про значимість впливу того чи іншого фактора.

2.1.4 Ідея дисперсійного аналізу

Щоб мати можливість оцінити вплив кожного фактора на вихідний параметр і порівняти вплив різних факторів, визначимо деякий показник цього впливу.

Нехай за відсутності помилок досліду ($\sigma^2 = 0$) при варіюванні фактора x на різних рівнях отримані фактичні значення $y_1, \dots, y_j, \dots, y_u$ вихідного параметра y . Тоді показник впливу фактора x приймаємо величину, яку називають, по аналогії зі звичайною, дисперсією фактора x , тобто

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{u} \sum_{j=1}^u (y_j - \bar{y})^2, \quad (2.1)$$

$$\text{де} \quad \bar{y} = \frac{1}{u} \sum_{j=1}^u y_j.$$

При цьому треба мати на увазі, що числа y_i не є випадковими і тому

дисперсія σ_x^2 не пов'язана ні з якою випадковою величиною, так як ми припускаємо, що $\sigma^2 = 0$.

Вивчати вплив факторів за величинами їх дисперсій зручно, оскільки це простіша міра розсіювання і, до того ж, аналогічна мірі впливу фактора випадкових причин, тобто аналогічна дисперсії одиничного спостереження (відтворення) σ^2 . Завдяки цьому є можливість порівнювати вплив будь-якого досліджуваного і випадкового факторів. Таке дослідження факторів за їх дисперсіями називається дисперсійним аналізом. Цей аналіз був введений в 20-х роках нашого сторіччя Р.А. Фішером і розвинений Йейтсом.

Розглянемо ідею дисперсійного аналізу на прикладі вивчення впливу одного фактора на фоні випадкових похибок, коли дисперсія відтворення σ^2 відома. При варіюванні фактора x на u рівнях в результаті спостережень отримаємо значення $y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_u$, розсіювання яких можна характеризувати вибірковою дисперсією:

$$s^2 = \frac{1}{u-1} \sum_{i=1}^u (y_i - \bar{y})^2 \quad (2.2)$$

з числом мір свободи $\nu = u - 1$.

Якщо різниця між s^2 і σ^2 незначна, то з цього випливає, що розкид спостережень, який зумовлений цією різницею, пов'язаний лише з випадковими причинами. Тому вплив фактора x незначний, якщо різниця між s^2 і σ^2 значна, підвищений розкид спостережень викликаний не лише випадковими причинами. Цей розкид спостережень також викликаний впливом фактора x , який тепер необхідно визнати суттєвим.

Оскільки в останньому випадку додаються впливи двох незалежних факторів - випадкових причин (з дисперсією σ^2) і фактора x (з дисперсією σ_x^2), що призводить до загального розсіювання спостережень, то загальна дисперсія буде сумою $(\sigma^2 + \sigma_x^2)$ двох вище вказаних, а її оцінка буде

$$s^2 \approx \sigma^2 + \sigma_x^2. \quad (2.3)$$

Тому дисперсія фактора визначається за виразом

$$\sigma_x^2 \approx s^2 - \sigma^2. \quad (2.4)$$

У загальному випадку, коли дисперсія відтворення σ^2 невідома, схема дисперсійного аналізу повинна дозволити знайти її оцінку поряд з оцінками дисперсій досліджуваних факторів. З цією метою планується проведення серій дублюючих дослідів але кожного з усіх можливих сполучень рівнів досліджуваних факторів.

Таким чином, основна ідея дисперсійного аналізу полягає в розкладенні загальної дисперсії s^2 на складові, які залежать від випадкових

причин, від кожного з розглянутих факторів і від їх взаємодії, а також в оцінці статистичної значимості дисперсій останніх з урахуванням похибки відтворення досліду.

Розглянемо лише найпростіші способи застосування дисперсійного аналізу, техніка проведення якого доволі різноманітна.

2.1.5 Однофакторний аналіз

Розглянемо вплив лише одного фактора x .

Таблиця 2.1 - Результати експерименту

№ l дублюючого досліду номер j рівня фактора x	1 2 ... l ... m	$\bar{y}_j = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m y_{jl}$
1	2	3
1	$y_{11} \quad y_{12} \quad \dots \quad y_{1l} \quad \dots \quad y_{1m}$	$\bar{y}_1$
2	$y_{21} \quad y_{22} \quad \dots \quad y_{2l} \quad \dots \quad y_{2m}$	$\bar{y}_2$
...	...	...
J	$y_{j1} \quad y_{j2} \quad \dots \quad y_{jl} \quad \dots \quad y_{jm}$	$\bar{y}_j$
...	...	...
u	$y_{u1} \quad y_{u2} \quad \dots \quad y_{ul} \quad \dots \quad y_{um}$	$\bar{y}_u$
		$\bar{y} = \frac{1}{um} \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m y_{jl} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^u \bar{y}_j$

В таблиці 2.1 записані результати експерименту $(u \times m)$ спостережень y_{jl} . Індекс j - порядковий номер рівня варіювання фактора, l - порядковий номер дублюючого досліду в серії на кожному j -му рівні, $l = l \div m$ (для спрощення розрахунків, не порушуючи загальності висновків, розглянемо спочатку випадок рівно кількісних спостережень на всіх рівнях, тобто $m_1 = m_2 = \dots = m_j = \dots = m_u = m$).

За такого розташування спостережень розсіювання між стовпцями буде визначатися помилкою відтворення, а розсіювання між рядками – додатковою дією досліджуваного фактора.

Розрахуємо середнє арифметичне $\bar{y}_j$ серій із m повторних спостережень для кожного j -го рівня фактора

$$\bar{y}_j = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m y_{jl} \quad (2.5)$$

і загальне середнє арифметичне у всіх $u \cdot m$ спостережень за всіма u рівнями

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{um} \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m y_{jl} = \frac{1}{u} \sum_{j=1}^u \bar{y}_j. \quad (2.6)$$

Розсіювання окремих спостережень відносно загального середнього обумовлено дією випадкових причин і впливом факторів. Дія фактора випадковості проявляється (з дисперсією σ^2) в розсіюванні спостережень серій дублюючих дослідів на кожному рівні x навколо середнього арифметичного своєї серії.

Вплив фактора x (з дисперсією σ_x^2) викликає підвищене розсіювання середніх серій відносно загального середнього. Кожне з цих трьох розсіювань можна охарактеризувати відповідною сумою квадратів відхилень.

2.1.6 Розкладання сум квадратів

Відповідно до основної ідеї дисперсійного аналізу розкладемо суму квадратів відхилень спостережень від загального середнього на дві складові суми, одна з яких буде характеризувати вплив фактора випадковості, а друга - фактора мінливості x .

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{\bar{y}})^2 = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j + \bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 = \\ &= \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j)^2 + 2 \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j)(\bar{y}_j - \bar{\bar{y}}) + \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 = \\ &= \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j)^2 + m \sum_{j=1}^u (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 = S_0 + S_x, \end{aligned} \quad (2.7)$$

оскільки

$$\sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j) \cdot (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}}) = \sum_{j=1}^u (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}}) \cdot \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j) = 0, \quad (2.8)$$

а

$$\sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j) = 0,$$

як сума відхилень спостережень j -ї серії від середнього цієї самої серії, де

$$S = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{\bar{y}}_j)^2 \quad (2.9)$$

- “загальна” сума квадратів відхилень окремих спостережень y_{jl} від загального середнього $\bar{\bar{y}}$. Ця сума характеризує розсіювання спостережень в результаті дії обох факторів як випадковості (з дисперсією σ^2), так і досліджуваного x (з дисперсією σ_x^2).

$$S_0 = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j)^2 \quad (2.10)$$

- сума квадратів відхилень "в середині серій", тобто сума квадратів розходжень між окремими спостереженнями y_{jl} і середнім $\bar{y}_j$ відповідної серії. Ця сума характеризує залишкове розсіювання випадкових похибок досвіду, тобто їхнє відтворення (з дисперсією σ^2).

$$S_x = m \sum_{j=1}^u (y_j - \bar{\bar{y}})^2 \quad (2.11)$$

- сума квадратів відхилень "між серіями" або розсіювання за рівнями, тобто зважена (з урахуванням кількості спостережень в кожній серії) сума квадратів різниць між середнім $\bar{y}_j$ окремих серій і загальним середнім $\bar{\bar{y}}$ всієї сукупності спостережень. Сума $\frac{S_x}{m}$ характеризує розсіювання середніх $\bar{y}_j$ серій за рахунок випадкових причин (з дисперсією $\frac{\sigma^2}{m}$ для середніх серій) і досліджуваного фактора (з дисперсією σ_x^2).

2.1.7 Оцінка дисперсій

Припустимо, що вплив фактора x на вихідний параметр буде відсутній, тобто нуль-гіпотеза про однорідність $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_j, \dots, \bar{y}_u$ вірна. Тоді всі серії паралельних спостережень можна розглядати як випадкові вибірки з однієї і тієї самої нормальної сукупності і, отже:

1) не зміщена загальна оцінка дисперсій відновлення σ^2 за всіма $u \cdot m$ спостереженнями визначається з виразу

$$s^2 = \frac{1}{um-1} \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{\bar{y}})^2 = \frac{S}{um-1} \approx \sigma^2 \quad (2.12)$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu = um - 1;$$

2) вибіркова дисперсія розсіювання "в середині серій" або залишкова оцінка дисперсії відновлення σ^2 знаходиться як середнє з вибірових дисперсій за кожною серією окремо

$$s_o^2 = \frac{1}{u} \sum_{j=1}^u \left[\frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j)^2 \right] = \frac{S}{u(m-1)} \approx \sigma^2 \quad (2.13)$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_o = u(m-1);$$

3) вибіркова дисперсія розсіювання між середніми серій є незміщен-

ною оцінкою дисперсії $\frac{\sigma^2}{m}$, а нормально розподілені (незалежні одна від іншої) середні серій:

$$s^2[\bar{y}] = \frac{I}{u-I} \sum_{j=1}^u (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 = \frac{S_x}{m(u-I)} \approx \frac{\sigma^2}{m} \quad (2.14)$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_x = u - I.$$

Звідси легко отримуємо третю оцінку дисперсії відновлення, вибірккову дисперсію розсіювання "між серіями":

$$s_x^2 = \frac{S_x}{m(u-I)} \approx \sigma^2 \quad (2.15)$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_x = u - I.$$

Кількість ступенів свободи перевіряється зі співвідношення

$$\nu = \nu_0 + \nu_x.$$

4) В результаті більш глибокого аналізу можна довести, що S_0 і S_x незалежні один від одного. Зі сказаного видно, що через відсутність впливу фактора x вибірккові оцінки s^2 , s_0^2 і s_x однорідні, оскільки є оцінками однієї і тієї самої генеральної дисперсії σ^2 .

Припустимо тепер, що вплив фактора x на вихідний параметр істотний, тобто нуль-гіпотеза про однорідність $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_j, \dots, \bar{y}_u$ вірна. Тоді серії паралельних спостережень можна розглядати як випадкові вибірки u незалежних нормально розподілених випадкових величин з однією і тією ж дисперсією σ^2 та різними центрами розподілу $C_1, \dots, C_j, \dots, C_u$. Отже:

1) вибірккова дисперсія s^2 характеризує вплив як фактора випадковості, так і фактора x , тобто

$$s^2 \approx \sigma^2 + \sigma_x^2; \quad (2.16)$$

2) оскільки сума S_0 не змінюється при заміні y_{jl} на $y_{jl} - C_j$, то вибірккова дисперсія s_0^2 також не змінюється і так само є не зміщеною оцінкою для σ^2 , тобто

$$s_0^2 \approx \sigma^2; \quad (2.17)$$

3) оскільки сума S_x враховує не тільки випадкові, але й систематичні розходження між середніми серій і збільшується за рахунок впливу фактора x , то дисперсія $s^2[\bar{y}_j]$ при цьому також збільшується і перестає бути оцінкою тільки для $\frac{\sigma^2}{m}$, тобто

кою тільки для $\frac{\sigma^2}{m}$, тобто

$$s^2[\bar{y}_j] \approx \frac{\sigma^2}{m} + \sigma_x^2.$$

Тому легко отримуємо

$$s_0^2 \approx \sigma^2 + m\sigma_x^2; \quad (2.18)$$

4) незалежність S_0 і S_x один від іншого зберігається.

Таким чином, для дисперсії фактора x тепер можна дати дві наближені оцінки

$$\sigma_x^2 \approx s^2 - \sigma^2 \approx s^2 - s_0^2, \quad (2.19)$$

$$\sigma_x^2 \approx \frac{1}{m}(s_x^2 - \sigma^2) \approx \frac{1}{m}(s_x^2 - s_0^2) \quad (2.20)$$

Перша оцінка менш точна через похибки величин s^2 і s_0^2 . Точність другої вище, оскільки дисперсії, які входять в неї, поділені на m .

Виходячи з другого припущення зрозуміло, що за умови впливу фактора x вибіркові оцінки s^2 , s_0^2 , s_x^2 неоднорідні. Отже, зіставляючи ці вибіркові дисперсії, можна прийняти рішення про справедливість першого або другого припущення щодо значимості впливу фактора x (з дисперсією σ_x^2) на вихідний параметр. З огляду на точність виразів (2.19), (2.20), для оцінки σ_x^2 будемо порівнювати дисперсії s_x^2 і s_0^2 .

2.1.8 Оцінка впливу фактора

Для того щоб вплив фактора x був значним ($\sigma_x^2 > 0$) необхідно і досить, щоб дисперсія s_x^2 значно відрізнялася від s_0^2 . Перевірку нуль-гіпотези щодо однорідності цих вибіркових оцінок можна здійснити за допомогою критерію

$$F = \frac{s_x^2}{s_0^2}. \quad (2.21)$$

Якщо обчислене за результатами спостережень дисперсійне відношення F більше табличного $F_q(\nu_x, \nu_0)$ за розподілом Фішера для обраного рівня значимості q при відповідних ступенях свободи ν_x і ν_0 , то вплив фактора x визнається значним ($\sigma_x^2 > 0$) і, навпаки, - незначним ($\sigma_x^2 = 0$), якщо $F \leq F_q(\nu_x, \nu_0)$.

У дисперсійному аналізі перевіряють нуль-гіпотезу $M[x] = M[x_0^2] = \sigma^2$ за альтернативи $M[x_x^2] > \sigma^2$, тому користуються одностороннім F -критерієм. При цьому зазвичай вибирають рівень значимості $q=0,05$. Варто мати на увазі, що дисперсійний аналіз спостережень експерименту дозволяє визначати вплив фактора лише в цілому, не даючи кількісних оцінок цього впливу. Також варто пам'ятати, що висновки, отрима-

ні з його допомогою, відносяться лише до даного звітнього матеріалу, за даної його систематизації. Так, наприклад, за зміни діапазону варіювання досліджуваного фактора x , оцінка впливу x буде змінюватися.

Якщо вплив фактора x вважається незначним, то дисперсію відновлення σ^2 можна оцінити вибірковою загальною дисперсією s^2 , що має на $u-1$ ступінь свободи більше, ніж s_0^2 . Якщо ж вплив фактора x вважається значним, то за результатами спостережень можна оцінити:

1) дисперсію відновлення σ^2 вибіркової залишкової дисперсії

$$s_0^2 = \frac{S_0}{u(m-1)} \approx \sigma^2, \text{ тобто } M[s_0^2] = \sigma^2, \quad (2.22)$$

і визначити довірчий інтервал для σ^2 за χ -розподілом з $u \cdot (m-1)$ ступенями свободи,

2) дисперсію фактора x за формулою

$$\sigma_x^2 \approx \frac{I}{m} (s_x^2 - s_0^2), \quad (2.23)$$

3) розбіжність δ_c^2 центрів серій, обумовлену впливом фактора x . Оскільки

$$s_x^2 = \frac{S_x}{u-1}, \quad (2.24)$$

то можна показати, що

$$M[s_x^2] = \sigma^2 + \frac{m}{u-1} \sum_{j=1}^u (C_j - \bar{C})^2, \quad (2.25)$$

де

$$\bar{C} = \frac{I}{u} \sum_{j=1}^u C_j,$$

і тоді

$$M\left[\frac{u-1}{um} (s_x^2 - s_0^2)\right] = \frac{I}{u} \sum_{j=1}^u (C_j - \bar{C})^2 = \delta_c^2. \quad (2.26)$$

Оцінкою величини δ_c^2 буде вибіркова характеристика

$$d_c^2 = \frac{u-1}{um} (s_x^2 - s_0^2). \quad (2.27)$$

4) розбіжність $(C_j - C_g)$ між центрами будь-яких двох серій. Оскільки параметр

$$t = \sqrt{\frac{m}{u}} \cdot \frac{(\bar{y}_j - \bar{y}_g) - (C_j - C_g)}{S_0} \quad (2.28)$$

відповідає розподілу Стюдента з кількістю ступенів свободи

$$\nu_0 = u(m-1),$$

то інтервал

$$\left[(\bar{y}_j - \bar{y}_g) \pm t_{q,u(m-1)} \frac{s_0}{\sqrt{\frac{m}{2}}} \right] \quad (2.29)$$

буде довірчим $(1-q)\%$ інтервалом для $(C_j - C_g)$.

2.1.9 Випадок нерівнокількісних спостережень

Вище ми розглянули випадок тільки рівно кількісних серій спостережень на всіх рівнях фактора x . Ця обставина несуттєва для теорії дисперсійного аналізу, а тому (за різної кількості m_j паралельних спостережень на різноманітних j -х рівнях) схема проведення та основні прийоми аналізу залишаються такими самими. Змінюється лише вигляд виразів:

1) загальна кількість спостережень

$$M = \sum_{j=1}^u m_j, \quad (2.30)$$

2) результати спостережень за серіями

$$Y_j = \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl}, \quad (2.31)$$

3) середнє серії

$$\bar{y}_j = \frac{1}{m_j} \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl} = \frac{Y_j}{m_j}, \quad (2.32)$$

4) загальне середнє

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^u Y_j, \quad (2.33)$$

5) співвідношення для сум

$$S = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} (y_{jl} - \bar{\bar{y}})^2 = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} (y_{jl} - \bar{y}_j)^2 + \sum_{j=1}^u m_j (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 = S_0 + S_x, \quad (2.34)$$

6) співвідношення для кількості ступенів свободи

$$\nu = M - 1 = (M - u) + (u - 1) = \nu_0 - \nu_x, \quad (2.35)$$

7) дисперсія фактора x обчислюється за значного впливу фактора за формулою

$$\sigma_x^2 \approx \frac{M(u-1)}{M^2 - \sum_{j=1}^u m_j^2} (S_x^2 - S_0^2). \quad (2.36)$$

2.1.10 Розрахункові формули для суми

Обчислювальний алгоритм однофакторного дисперсійного аналізу

спрощується, якщо для розрахунку сум квадратів відхилень використовувати перетворення

$$\sum_{r=1}^M (y_r - \bar{y})^2 = \sum_{r=1}^M y_r^2 - \frac{1}{M} \left(\sum_{r=1}^M y_r \right)^2. \quad (2.37)$$

Тоді для сум отримуємо зручні розрахункові формули:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} (y_{jl} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl}^2 - \frac{1}{M} \left(\sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl} \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl}^2 - \frac{1}{M} \left(\sum_{j=1}^u Y_j \right)^2 = Q_1 - Q_3, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} (y_{jl} - \bar{y}_j)^2 = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl}^2 - \left(\sum_{j=1}^u \frac{1}{m_j} \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl} \right)^2 - \frac{1}{M} \left(\sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl} \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl}^2 - \sum_{j=1}^u \frac{Y_j^2}{m_j} = Q_1 - Q_2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} (\bar{y}_{jl} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^u \frac{1}{m_j} \left(\sum_{l=1}^{m_j} y_{jl} \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^u \frac{Y_j^2}{m_j} - \frac{1}{M} \left(\sum_{j=1}^u Y_j \right)^2 = Q_2 - Q_3. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Таким чином, для проведення дисперсійного аналізу достатньо зробити такі попередні обчислення:

1) підсумки спостережень за серіями

$$Y_j = \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl}, \quad (2.41)$$

2) сума квадратів усіх спостережень

$$Q_1 = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl}^2, \quad (2.42)$$

3) сума квадратів підсумків за серіями, поділена на кількість спостережень в серії

$$Q_2 = \sum_{j=1}^u \frac{Y_j^2}{m_j}, \quad (2.43)$$

4) квадрат загального підсумку, поділений на кількість всіх спостережень

$$Q_3 = \frac{1}{M} \left(\sum_{j=1}^u Y_j \right)^2. \quad (2.44)$$

3 БАГАТОФАКТОРНИЙ ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

3.1 Теоретичні відомості

3.1.1 Постановка задачі

Розглянемо вплив двох одночасно діючих факторів x_1 і x_2 на результат спостережень y_{jgl} (лабораторна робота 3).

Результати експерименту наведені в таблиці 3.1 і містять $(u_1 \times u_2 \times m)$ спостережень параметра y_{jgl} ,

де j - порядковий номер рівня варіювання фактора x_1 , $j = 1 \pm u_1$;

g - порядковий номер рівня варіювання фактора x_2 , $g = 1 \pm u_2$;

l - порядковий номер досліду, який дублюється в серії при кожному yg сполученні рівнів двох факторів,

$l = 1 \div m_{jg}$ (для спрощення розрахунків розглянемо спочатку випадок рівно кількісних спостережень для всіх можливих сполучень рівнів, тобто $m_{11} = m_{12} = \dots = m_{lg} = \dots = m_{u_1 u_2} = m$).

Обчислимо середні арифметичні y_{jg} , серій з m повторних спостережень для кожного сполучення рівнів j і g факторів x_1 і x_2

$$\bar{y}_{jg} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m y_{jgl}; \quad (3.1)$$

середні арифметичні $\bar{y}_j$ по рядках з $u_2 m$ паралельних спостережень для будь-якого j -го рівня фактора x_1

$$\bar{y}_j = \frac{1}{u_2 m} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m y_{jgl} = \frac{1}{u_2} \sum_{g=1}^{u_2} \bar{y}_{jg}; \quad (3.2)$$

середні арифметичні $\bar{y}'_g$ по рядках з $u_1 m$ паралельних спостережень для будь-якого g -го рівня фактора x_2

$$\bar{y}'_g = \frac{1}{u_1 m} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{l=1}^m y_{jgl} = \frac{1}{u_1} \sum_{j=1}^{u_1} \bar{y}_{jg}; \quad (3.3)$$

загальне середнє арифметичне $\bar{\bar{y}}$ всіх $u_1 u_2 m$ спостережень за всіма $u_1 u_2$ сполученнями рівнів

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{u_1 u_2 m} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m y_{jgl} = \frac{1}{u_1 u_2} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \bar{y}_{jg} = \frac{1}{u_1} \sum_{j=1}^{u_1} \bar{y}_j = \frac{1}{u_2} \sum_{g=1}^{u_2} \bar{y}'_g. \quad (3.4)$$

При вказаному розташуванні спостережень їхнє розсіювання в кожній серії щодо середнього тієї ж серії, обумовлене дією тільки випадкових причин (з дисперсією σ). Розсіювання ж самих середніх серій за всіма можливими сполученнями рівнів x_1 і x_2 навколо загального середнього крім фактора випадковості викликано впливом фактора взаємодії $x_1 x_2$ (з

дисперсією σ_{12}^2). Крім цих факторів на розсіювання середніх по рядках впливає тільки один фактор x_1 (з дисперсією σ_1^2), а на розсіювання середніх по стовпцях - тільки один фактор x_2 (з дисперсією σ_2^2), тому що всі рівні іншого фактора в кожному з цих випадків усереднені.

Таблиця 3.1 - Результати експерименту

№ g рівня фактора x_2 № j рівня фактора x_1	1	2	...	g	...	u_2	$\bar{y}_j$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	y_{111}	Y_{121}	...	y_{1g1}	...	y_{1u_21}	$\bar{y}_1$
	y_{112}	Y_{122}	...	y_{1g2}	...	y_{1u_22}	
	...	...	...	...	...	...	
	y_{11l}	Y_{12l}	...	y_{1gl}	...	y_{1u_2l}	
	...	...	...	...	...	...	
	y_{11m}	y_{12m}	...	y_{1gm}	...	y_{1u_2m}	
2	y_{211}	Y_{221}	...	y_{2g1}	...	y_{2u_21}	$\bar{y}_2$
	y_{212}	Y_{222}	...	y_{2g2}	...	y_{2u_22}	
	...	...	...	...	...	...	
	y_{21l}	Y_{22l}	...	y_{2gl}	...	y_{2u_2l}	
	...	...	...	...	...	...	
	y_{21m}	y_{22m}	...	y_{2gm}	...	y_{2u_2m}	
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
j	y_{j11}	y_{j21}	...	y_{jg1}	...	y_{ju_21}	$\bar{y}_j$
	y_{j12}	y_{j22}	...	y_{jg2}	...	y_{ju_22}	
	...	...	...	...	...	...	

Продовження таблиці 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8
	y_{j1l}	y_{j2l}	...	y_{jgm}	...	y_{ju_2l}	
	...	...	...	...	...	...	
	y_{j1m}	y_{j2m}	...	y_{jgm}	...	y_{ju_2m}	
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
u_1	y_{u_11l}	y_{u_12l}	...	y_{u_1gl}	...	$y_{u_1u_2l}$	$\bar{y}_{u_1}$
	y_{u_112}	y_{u_122}	...	y_{u_1g2}	...	$y_{u_1u_22}$	
	...	...	...	...	...	...	
	y_{u_11l}	y_{u_12l}	...	y_{u_1gl}	...	$y_{u_1u_2l}$	
	...	...	...	...	...	...	
	y_{u_11m}	y_{u_12m}	...	y_{u_1gm}	...	$y_{u_1u_2m}$	
$\bar{y}'_g = \frac{1}{u_1 \cdot m} \cdot \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{l=1}^m y_{jgl}$	$\bar{y}'_1$	$\bar{y}'_2$	...	$\bar{y}'_g$	...	$\bar{y}'_{u_2}$	$\bar{\bar{y}}$

3.1.2 Розкладання сум квадратів

Відповідно до основної ідеї дисперсійного аналізу розкладемо суму S квадратів відхилень спостережень від загального середнього на компоненти, що відповідають перерахованим факторам.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{\bar{y}})^2 = \\
 &= \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{y}_{jg} + \bar{y}_j - \bar{\bar{y}} + \bar{y}'_g - \bar{\bar{y}} + \bar{y}_{lg} - \bar{y}_j - \bar{y}'_g + \bar{\bar{y}})^2 = \\
 &= \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{y}_{jg})^2 + u_2 m \sum_{j=1}^{u_1} (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 + u_1 m \sum_{j=1}^{u_1} (\bar{y}'_g - \bar{\bar{y}})^2 + \\
 &+ m \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}_{jg} - \bar{y}_j - \bar{y}'_g + \bar{\bar{y}})^2 = S_0 + S_1 + S_2 + S_{12},
 \end{aligned}$$

де

$$S = \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{\bar{y}})^2 \quad (3.5)$$

- загальна сума квадратів, характеризує розсіювання окремих спостережень y_{jgl} у загальній сукупності за рахунок впливу усіх факторів,

$$S_0 = \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{y}_{jg})^2 \quad (3.6)$$

- сума квадратів відхилень "усередині серій". Сума характеризує розсіювання окремих спостережень за рахунок впливу фактора випадковості.

$$S_1 = u_2 m \sum_{j=1}^{u_1} (y_j - \bar{\bar{y}})^2 \quad (3.7)$$

- сума квадратів відхилень "між рядками". Сума $\frac{\sigma^2}{u_2 m}$ характеризує розсіювання середніх $\bar{y}_j$ за рядками в результаті дії фактора випадковості (з дисперсією середнього рядка $\frac{\sigma^2}{u_2 m}$), фактора x_1 (з дисперсією σ_1^2) і фактора взаємодії (з дисперсією середнього для кожного рядка $\frac{\sigma_{12}^2}{u_2}$).

$$S_2 = u_1 m \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}'_g - \bar{\bar{y}})^2 \quad (3.8)$$

- сума квадратів відхилень "між стовпцями". Сума $\frac{S_2}{u_1 m}$ характеризує розсіювання середніх $\bar{y}'_g$ по стовпцях в результаті дії фактора випадковості (з дисперсією середнього стовпця $\frac{\sigma^2}{u_1 m}$), фактора x_2 (з дисперсією σ_2^2) і фактора взаємодії (з дисперсією стовпця $\frac{\sigma_{12}^2}{u_1}$),

$$S_{12} = m \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}_{jg} - \bar{y}_j - \bar{y}'_g + \bar{\bar{y}})^2 \quad (3.9)$$

- сума квадратів відхилень "між серіями". Сума $\frac{S_{12}}{m}$ характеризує розсіювання середніх $\bar{y}_{jg}$ серій в результаті дії фактора випадковості (з дисперсією середнього серії $\frac{\sigma^2}{m}$) і фактора взаємодії (з дисперсією σ_{12}^2).

3.1.3 Оцінка дисперсій

Суми квадратів S, S_0, S_1, S_2, S_{12} , розділені кожна на відповідну їй кількість ступенів свободи $\nu, \nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_{12}$, дають незміщені оцінки дисперсії відтворення σ^2 .

1) вибірка загальна дисперсія за всіма $u_1 u_2 m$ спостереженнями

$$s^2 = \frac{I}{u_1 u_2 m - I} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{\bar{y}})^2 = \frac{S}{u_1 u_2 m - I} \approx \sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_{12}^2 \quad (3.10)$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu = u_1 u_2 m - I,$$

2) вибірка дисперсія розсіювання "усередині серій" або залишкова оцінка є середньозваженою дисперсією за всіма серіями спостережень

$$s_0^2 = \frac{I}{u_1 u_2} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \frac{I}{m-1} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{y}_{jg})^2 = \frac{S_0}{u_1 u_2 m - I} \approx \sigma^2 \quad (3.11)$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_0 = u_1 u_2 (m - I),$$

3) вибірка дисперсія розсіювання "між рядками"

$$s_1^2 = \frac{u_2 m}{u_1 - I} \sum_{j=1}^{u_1} (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 = \frac{S_1}{u_1 - I} \approx \sigma^2 + u_1^2 + m \sigma_{12}^2 \quad (3.12)$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_1 = u_1 - I,$$

4) вибірка дисперсія розсіювання "між стовпцями"

$$s_2^2 = \frac{u_1 m}{u_2 - I} \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}'_g - \bar{\bar{y}})^2 = \frac{S_2}{u_2 - I} \approx \sigma^2 + u_1 m \sigma_2^2 + m \sigma_{12}^2 \quad (3.13)$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_2 = u_2 - I,$$

5) вибіркова дисперсія розсіювання "між серіями"

$$\begin{aligned} s_{I2}^2 &= \frac{m}{u_1 u_2 - u_2 - u_2 + I} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}_{jg} - \bar{y}_j - \bar{y}'_g + \bar{\bar{y}})^2 = \\ &= \frac{S_{I2}}{u_1 u_2 - u_1 - u_2 + I} \approx \sigma^2 + m\sigma_{I2}^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_{I2} = (u_1 - I)(u_2 - I).$$

Кількість ступенів свободи перевіряється за співвідношенням

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_{I2}. \quad (3.15)$$

3.1.4. Оцінка впливу факторів

Аналіз значимості впливу факторів x_1 , x_2 та їхньої взаємодії x_1, x_2 проводиться за критерієм Фішера при обраному рівні значимості q у такому порядку:

1) вплив факторів x_1 і x_2 відповідно з дисперсіями

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &\approx \frac{I}{u_2 m} (s_1^2 - \sigma^2 - m\sigma_{I2}^2) \approx \frac{I}{u_2 m} (s_1^2 - s_{I2}^2), \\ \sigma_2^2 &\approx \frac{I}{u_1 m} (s_2^2 - \sigma^2 - m\sigma_{I2}^2) \approx \frac{I}{u_1 m} (s_2^2 - s_{I2}^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

визнається значним $(\sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0)$, якщо виявиться значною відповідно, відмінність s_1^2 від s_{I2}^2 і s_2^2 від s_{I2}^2 , тобто якщо відповідний критерій

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{s_1^2}{s_{I2}^2} > F_q(\nu_1, \nu_{I2}), \\ F_2 &= \frac{s_2^2}{s_{I2}^2} > F_q(\nu_2, \nu_{I2}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Якщо одне з цих дисперсійних відношень незначне, тобто вплив відповідного фактора, незначне $(\sigma_1^2 = 0$ або $\sigma_2^2 = 0)$, то для дисперсії $(\sigma^2 + m\sigma_{I2}^2)$ ми одержимо дві оцінки s_1^2 і s_{I2}^2 або s_2^2 і s_{I2}^2 , відповідно, які можна об'єднати в зведену оцінку

$$\bar{s}_{12}^{/2} = \frac{(u_1 - 1)s_1^2 + (u_1 - 1)(u_2 - 1)s_{12}^2}{(u_1 - 1) + (u_1 - 1)(u_2 - 1)} \approx \sigma^2 + m\sigma_{12}^2 \quad (3.18)$$

або

$$\bar{s}_{12}^{/2} = \frac{(u_2 - 1)s_2^2 + (u_1 - 1)(u_2 - 1)s_{12}^2}{(u_2 - 1) + (u_1 - 1)(u_2 - 1)} \approx \sigma^2 + m\sigma_{12}^2 \quad (3.19)$$

з великою кількістю ступенів свободи

$$\bar{v}'_{12} = u_2(u_1 - 1),$$

$$\bar{v}''_{12} = u_1(u_2 - 1).$$

Якщо два дисперсійних відношення, тобто впливи обох факторів, незначні ($\sigma_1^2 = 0$ і $\sigma_2^2 = 0$), то оцінки s_1^2 , s_2^2 і s_{12}^2 для дисперсії ($\sigma^2 + m\sigma_{12}^2$) можна об'єднати в зведену

$$\bar{s}_{12}^{///2} = \frac{(u_1 - 1)s_1^2 + (u_1 - 1)s_2^2 + (u_1 - 1)(u_2 - 1)s_{12}^2}{(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + (u_1 - 1)(u_2 - 1)} \approx \sigma^2 + m\sigma_{12}^2 \quad (3.20)$$

з великою кількістю ступенів свободи

$$\bar{v}'''_{12} = u_1 u_2 - 1.$$

2) вплив взаємодії $x_1 x_2$ з дисперсією

$$\sigma_{12}^2 \approx \frac{1}{m}(s_{12}^2 - \sigma^2) \approx \frac{1}{m}(s_{12}^2 - s_0^2) \quad (3.21)$$

визнається значним ($\sigma_{12}^2 > 0$), якщо відмінність s_{12}^2 і s_0^2 виявиться значною, тобто, якщо критерій

$$F = \frac{s_{12}^2}{s_0^2} > F_q(v_{12}, v_0). \quad (3.22)$$

У протилежному випадку вплив взаємодії вважається незначним ($\sigma_{12}^2 = 0$) і обидві оцінки s_{12}^2 і s_0^2 для σ^2 можна об'єднати в одну

$$\bar{s}_0^2 = \frac{(u_1 - 1)(u_1 - 1)s_{12}^2 + u_1 u_2 (m - 1)s_0^2}{(u_1 - 1)(u_2 - 1) + u_1 u_2 (m - 1)} \approx \sigma^2 \quad (3.23)$$

з великою кількістю ступенів свободи $\bar{v}_0 = u_1 u_2 m - u_1 - u_2 + 1$.

Якщо вплив факторів x_1, x_2 і їхньої взаємодії x_1x_2 незначні, то дисперсію відновлення можна оцінити вибірковою загальною дисперсією s^2 .

3.1.5 Розрахункові формули для сум

Для практичних обчислень сум зручно користуватися їх перетвореними виразами з такими позначеннями:

1) підсумки спостережень за рядками Y_j і стовпцями

$$Y_j = \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m y_{jgl}, \quad Y'_g = \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{l=1}^m y_{jgl}, \quad (3.24)$$

2) сума квадратів усіх спостережень

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m y_{jgl}^2, \quad (3.25)$$

3) сума квадратів по рядках, розділена на кількість спостережень у рядку

$$Q_2 = \frac{1}{u_2 m} \sum_{j=1}^{u_1} Y_j^2, \quad (3.26)$$

4) сума квадратів підсумків по стовпцях, розділена на кількість спостережень у стовпці,

$$Q_3 = \frac{1}{u_1 m} \sum_{g=1}^{u_2} Y_g'^2, \quad (3.27)$$

5) сума квадратів підсумків по клітинках, поділена на кількість спостережень в клітинці,

$$Q_4 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \left(\sum_{l=1}^m y_{jgl} \right)^2, \quad (3.28)$$

6) квадрат загального підсумку, розділений на кількість всіх спостережень

$$Q_5 = \frac{1}{u_1 u_2 m} \left(\sum_{j=1}^{u_1} Y_j \right)^2 = \frac{1}{u_1 u_2 m} \left(\sum_{g=1}^{u_2} Y'_g \right)^2. \quad (3.29)$$

При цьому ці суми квадратів відхилень визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
S &= Q_1 - Q_5, & S_2 &= Q_3 - Q_6, \\
S_0 &= Q_1 - Q_4, & S_{12} &= Q_4 + Q_5 - Q_2 - Q_3. \\
S_1 &= Q_2 - Q_5,
\end{aligned}
\tag{3.30}$$

Ми описали процедуру двофакторного дисперсійного аналізу. Під час багатфакторного аналізу послідовність операцій аналогічна, але значно ускладнюються таблиці спостережень і розрахункові формули.

3.1.6. Опорна стрижнева порцелянова ізоляція

Опорні стрижневі ізолятори - наймасовіший елемент відкритих розподільних пристроїв (ВРП).

В електроустановках 35- 750 кВ експлуатується декілька мільйонів опорних стрижневих ізоляторів. Раніше траплялися численні аварії через перекриття забруднених і зволжених ізоляторів, а також через механічні ушкодження. Останні десятиліття перекриттів практично не спостерігається, більш 80% відмов роз'єднувачів 110-220 кВ відбувається з вини механічних відмов ізоляторів. Відповідно до статистики більш п'ятидесяти відсотків ізоляторів, що зруйнувались, мали термін служби менше 25 років.

Найчастіше ізолятори руйнуються:

- у нижньому небезпечному перетині (ННП) - між нижнім ребром і мета-лофланцем двадцять вісім відсотків;
- верхньому небезпечному перетині (ВНП) - між верхнім ребром і фланцем дванадцять відсотків;
- через тріщини у тілі ізолятора, що починають "зростати" з області небезпечних перетинів двадцять сім відсотків;
- щодо тридцяти двох відсотків ізоляторів відомостей немає.

Про актуальність проблеми наголошується в циркулярах Міненерго СРСР і РАО ЄЕС Росії 1981 р., 1985 р. (2шт), 1992 р., 1994р., 1995 р., 1997 р., 2001 р. "Про попередження пошкоджень опорних стрижневих ізоляторів".

Для зменшення кількості пошкоджень пропонується вживати такі заходи:

- застосовувати глиноземисту порцеляну;
- застосовувати стійкий чавун;
- впроваджувати *ультразвуковий неруйнівний контроль (УЗНК)*.

Аналіз пошкоджуваності фарфорової опорної ізоляції у Південно-Західній електроенергетичній системі свідчить про такі пошкодження обладнання:

20.05.96 ПС - 330 кВ "Чернівці" шр-110кВ 2СШ. шр-110кВ 1СШ. Пошкодження ізоляторів ОНС-110-400, УСТ-110-400 під час проведення оперативних перемикань;

- 07.06.96 ПС -330 кВ “Хмельницька” вв-110кВ “Дунаївці-1”. Падіння гасильної камери внаслідок розриву порцеляни. Тривалий термін експлуатації, наявність мікротріщин;
- 10.07.96 ПС-330 кВ “Шепетівка” вв-110 кВ “Ведмидівка”. Розрив порцеляни гасильної камери;

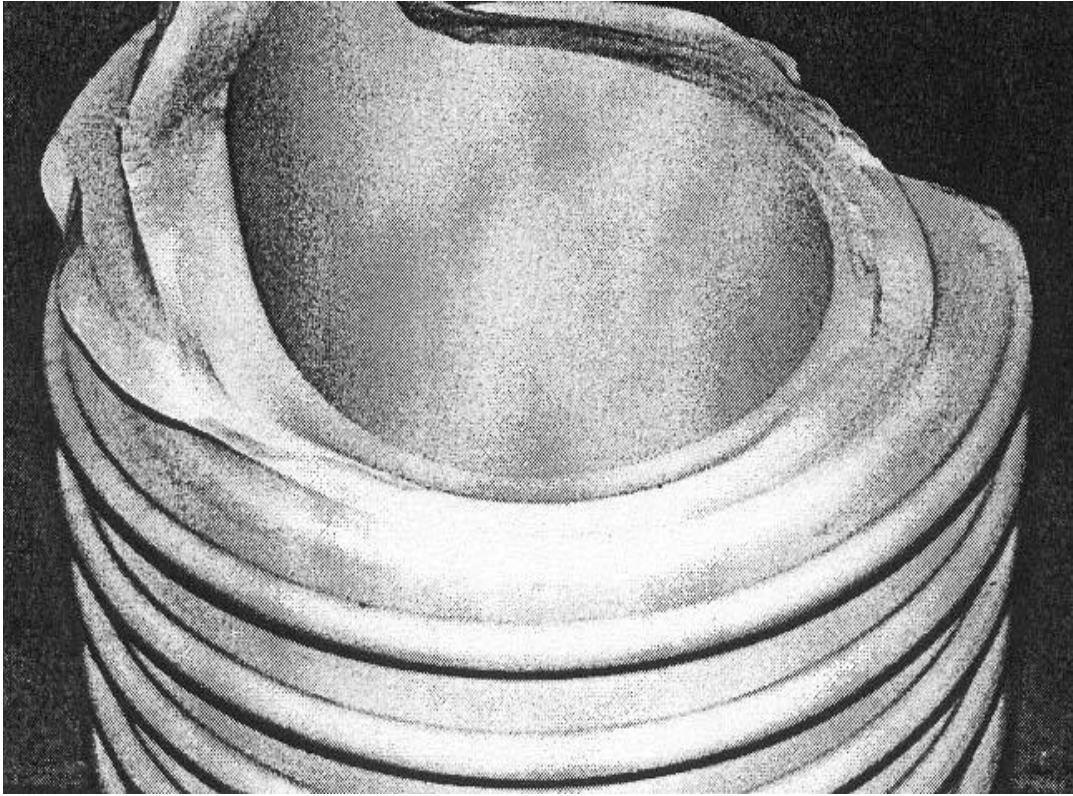


Рисунок 3.1 - Кільцева тріщина в покритті ЛФЗ 1985 пов'язана з фоновим засміченням маси

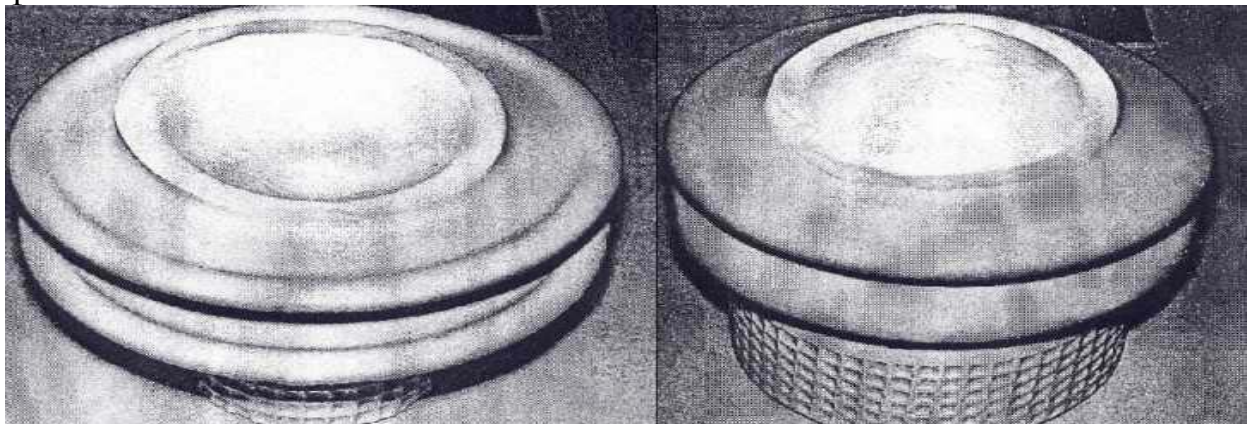


Рисунок 3.2 - Обмежено-об'ємний дефект. Виникає під час порушення режиму витяжки заготовки ізолятора з вакуум-преса. ОСІ ОНС-20-500. ЛФЗ. Виявлений УЗНК

31.07.96 ПС - 330 кВ “Тернопільська” вв-110 кВ. Руйнація опорного ізолятора гасильної камери Фаза “С” внаслідок тривалої експлуатації;
 03.06.97 ПС-330 кВ “Чернівці” вв-110 кВ “Арсенал-1”. Фаза “В”. Руйнація опорного ізолятора гасильної камери;
 05.11.97 ПС-330 кВ “Тернопільська” вв-110кВ ШЗВ. Руйнація опорного ізолятора гасильної камери Фаза ”С”;
 ...
 31.07.00 ПС-750 кВ “Вінницька” Р-3 750 кВ. Під час виконання оперативних перемикань зламався нижній ізолятор поворотної колонки.

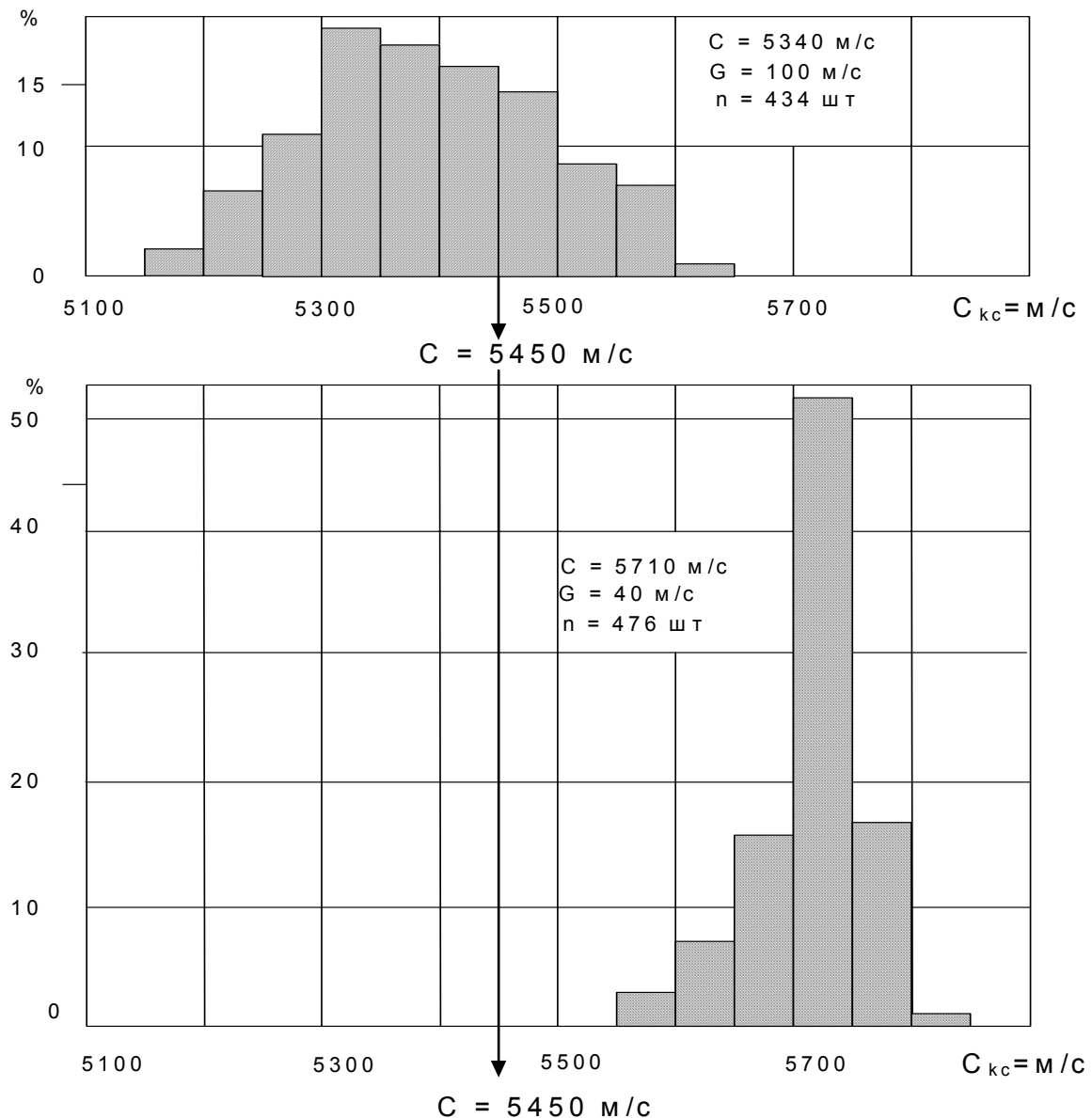


Рисунок 3.3 - Діаграма розбракування партії ОСІ

Тому виникла гостра необхідність контролю опорних стрижневих ізоляторів для запобігання аварій на роз'єднувачах та іншому устаткуван-

ні. Їх пошкодження можуть призвести до тяжких наслідків і порушень у постачанні електроенергії споживачам.

Один з видів дефектів порцелянових ізоляторів - це відкрита мікропористість (ВМП). ВМП - обмежено-об'ємний дефект мікроструктурного типу являє собою розподілені в макроскопічному об'ємі витягнуті мікроструктурні порушення "відкритого типу" розміром 5-7 мкм, тобто зв'язані між собою. При видаленні вологи на межу зони ВМП волога за рахунок капілярних сил просувається всередину зони, що за негативних температур призводить до появи зони розтріскування (ЗР). Особливу небезпеку становлять випадки виходу ВМП на поверхню опорної стержневої ізоляції (ОСІ) - причина восьмидесяти відсотків відмов.

Види ВМП: глибинна; приповерхнева.

Виявляють ВМП:

- за швидкістю поширення ультразвуку;
- методом фуксинової проби.

Причини виникнення ВМП:

- порушення температурно-часового режиму випалу;
- невідповідність обраного режиму випалу складу маси. Ультразвукова імпульсна структурометрія - **вимір швидкості ультразвуку**, наскрізне прозвучування, прозвучування методом відлуння.

Ультразвукова імпульсна дефектометрія:

- прямими перетворювачами;
- похилими перетворювачами.

Види дефектів, що виявляються УЗНК:

- відкрита мікроскопічна пористість виявляється за допомогою ультразвукової імпульсної структурометрії;
- випалювана макроскопічна пористість - ультразвуковою дефектометриєю;
- забруднена пористість - ультразвуковою дефектометриєю.

Під час УЗНК вимірюються:

- амплітуда донних імпульсів (метод відлуння);
- швидкість поширення УЗ;
- характеристики компактної групи імпульсів (КГІ);
- характеристики шумів структурної реверберації.

Існує поріг швидкості ультразвуку якого який ВМП зникає - C_0 . Для реальної партії ізоляторів нормального випалу не тільки середня, але й мінімальна швидкість УЗНК в партії ОСІ значно вища C_0 . Тому виникла необхідність з'ясувати швидкість C_0 , яка була б оптимальною для заводів, що виготовляють ОСІ. Наприклад, рекомендована для використання швидкість 5450 м/с вимагає визнати стан 90% ізоляторів Слав'янського заводу

незадовільним. В той самий час багаторічний досвід експлуатації свідчить, що лише $\leq 20\%$ з них пошкоджуються в діючих електроустановках.

4 D-ОПТИМАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ПЛАНИ

4.1 Теоретичні відомості

Експериментальні плани, що визначають програму досліджень для знаходження математичного опису об'єкта, будуються виходячи з різних критеріїв оптимальності. Широке поширення одержали ортогональні плани. Вони оптимальні з погляду простоти обробки отриманої інформації. А також ротатбельні плани. Вони забезпечують однакову інформацію на рівних відстанях від центра плану.

Однак ці критерії не висували ніяких вимог до характеристик, пов'язаних з точністю отриманого математичного опису. Тому з'явилися нові критерії оптимальності планування, такі як величина визначника коваріаційної матриці оцінок коефіцієнтів (тобто узагальнена дисперсія оцінок коефіцієнтів), максимальне значення дисперсії прогнозування рівняння регресії, середня дисперсія оцінок коефіцієнтів тощо.

Припустимо, що функціональний вид рівняння регресії відомий

$$j(\bar{x}) = \eta = M\{y\} = \sum_{k=0}^d \beta_k \bar{f}_k(\bar{X}), \quad (4.1)$$

де $\bar{f}_k$ - відомі функції вхідних змінних $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Вектор $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ є вектором вхідних змінних. Результати спостережень $y_1, y_2, \dots, y_N$ - незалежні, нормально розподілені випадкові величини. Дисперсії $\sigma^2\{y_g\}$, $g = 1, 2, \dots, N$ дорівнюють одна одній $\sigma^2\{y_g\} = \sigma^2$.

Задача експериментатора полягає в знаходженні оцінок b_k коефіцієнтів β_k у рівнянні (4.1).

Введемо такі позначення:

$\bar{f}_g^T = (f_{g1} f_{g2} \dots f_{gl})$ - вектор, який визначає набір функцій f_{gk} в g -му спостереженні, T - знак транспонування;

$\bar{B}^T = (b_0 b_1 \dots b_d)$ - d - вимірний вектор шуканих оцінок.

$$F = \begin{pmatrix} f_{10} & f_{11} & \dots & f_{1d} \\ f_{20} & f_{21} & \dots & f_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{N1} & f_{N2} & \dots & f_{Nd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1^T \\ \bar{f}_2^T \\ \dots \\ \bar{f}_N^T \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Оцінки компонент вектора $\vec{B}$ можуть бути знайдені методом найменших квадратів, тобто з умови мінімуму суми квадратів відхилень спостережуваної величини y_i від величини, передбаченої рівнянням (4.1)

$$\sum_{g=l}^n (y_g - \sum_{k=0}^d b_k \cdot f_{gk} \cdot (\vec{X}))^2 \rightarrow \min. \quad (4.3)$$

Диференціюючи (4.3) по параметрах b_k і прирівнюючи похідні до нуля, одержимо систему нормальних рівнянь, що записується [1] так:

$$\begin{aligned} C_{0,0}b_0 + C_{0,1}b_1 + \dots + C_{0,d}b_d &= \alpha_0 \\ C_{1,0}b_0 + C_{1,1}b_1 + \dots + C_{1,d}b_d &= \alpha_1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

де

$$C = \{C_{k,f}\} = \begin{bmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & \dots & C_{0,d} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & \dots & C_{1,d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{d,0} & C_{d,1} & \dots & C_{d,d} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

матриця коефіцієнтів системи (4.4), елементи якої знаходять з виразу (4.6)

$$C_{k,f} = \sum_{g=l}^N f_{gk} f_{gf} \cdot \quad (4.6)$$

Вільні члени α_k визначаються за виразом

$$C_{k,f} = \sum_{g=l}^N f_{gk} Y_g \cdot \quad (4.7)$$

У матричній формі система нормальних рівнянь запишеться так:

$$\vec{B} F^T F = F^T \vec{Y}. \quad (4.8)$$

Рішенням системи (4.8) є вектор оцінок коефіцієнтів

$$\vec{B} = (F^T F)^{-1} F^T \vec{Y}. \quad (4.9)$$

Запишемо вирази для коваріаційної матриці оцінок b_k . Нагадаємо, що ця матриця складається з елементів, що є дисперсіями та коваріаціями оцінок коефіцієнтів, тобто

$$r_{kf} = M((b_k - \beta_k) \cdot (b_f - \beta_f)), \quad (4.10)$$

де β_k, β_f - справжні значення коефіцієнтів.

Коваріаційна матриця з врахуванням (4.9) і

$$\vec{\beta} = (F^T F)^{-1} F^T \vec{\eta} \quad (4.11)$$

запишеться так:

$$\begin{aligned} M((\vec{B} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{B} - \vec{\beta})^T) &= \\ = M\left\{ \left((F^T F)^{-1} F^T (\vec{Y} - \vec{\eta}) \right) \cdot \left[(\vec{Y} - \vec{\eta})^T F (F^T F)^{-1} \right] \right\} &= \end{aligned}$$

$$=(F^T F)^{-1} F^T (\sigma^2 E) F (F^T F)^{-1} = \sigma^2 (F^T F)^{-1}. \quad (4.12)$$

$(M\{(\bar{Y} - \bar{\eta}) \cdot (\bar{Y} - \bar{\eta})^T\} = \sigma^2 E$ в силу того, що помилки некеровані; тут E – одинична матриця розміру $N \times N$).

План X , який мінімізує визначник коваріаційної матриці оцінок (4.12) на безлічі всіх планів в області G , називається ***D-оптимальним***.

$$D(X) = \min \det(F^T F)^{-1}, \quad (4.13)$$

де $X \in G$.

Пояснимо, як треба розуміти критерій D -оптимальності. Виявилось, що ***D-оптимальний*** план мінімізує об'єм довірчого еліпсоїда на безлічі всіх планів в області G . Довірчий еліпсоїд - це такий еліпсоїд, що накриває справжні значення коефіцієнтів з даним рівнем імовірності. Оскільки об'єм цього еліпсоїда V пропорційний $\det(F^T F)^{-1}$, то мінімізація цього визначника по безлічі всіх планів в області G забезпечить мінімальний об'єм.

Наведемо ще кілька критеріїв оптимальності:

1. ***A-оптимальність***. План називається A -оптимальним, якщо його коваріаційна матриця має мінімальний слід (тобто суму діагональних елементів). Це відповідає мінімумові середньої дисперсії оцінок параметрів.

2. ***E-оптимальність***. План називається E -оптимальним, якщо він мінімізує максимальне власне число коваріаційної матриці оцінок $\bar{B}$.

3. ***G-оптимальність***. План називається G -оптимальним, якщо він забезпечує найменшу за всіма планами величину максимальної дисперсії передбачуваних значень рівняння регресії.

4. **План, що мінімізує** максимальний діагональний елемент коваріаційної матриці (тобто максимальну дисперсію оцінок параметрів).

Усі наведені критерії були сформульовані для точних планів, тобто для планів з фіксованою кількістю спостережень N .

Розглянемо тепер методи побудови D -оптимальних планів.

При побудові D -оптимальних планів можливі дві постановки задачі. За першою з них задається кінцева кількість N спостережень і відшуковується таке розташування експериментальних точок, за якого буде виконуватися умова (4.13). Отримані в такий спосіб D -оптимальні плани називаються точковими. Якщо ці плани концентруються в $h \leq N$ точках, в кожній з яких кількість вимірювань дорівнює N/L , то частота повторень спостережень у l -ній точці буде $W_l = \frac{N_l}{N}$. Тому $\sum_{l=1}^h W_l = 1$. Основна властивість, яка характеризує точні плани, - це те, що N_l - ціле число.

Можлива й інша постановка задачі. Вона пов'язана з поняттям узагальненого плану. Узагальненим (або безперервним) планом називається сукупність $2h$ чисел:

$$\begin{aligned} \vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_h, \\ W_1, W_2, \dots, W_h, \end{aligned} \quad (4.15)$$

де $\vec{X}_l$, ($l = 1, 2, 3, \dots, h$) - точки, в яких проводяться спостереження, а W_l - частка спостережень в даній точці при загальній кількості спостережень, прийнятій за одиницю.

В даному випадку

$$\sum_{l=1}^h W_l = 1,$$

де W_l , ($l = 1, 2, 3, \dots, h$) - це будь-які дійсні числа, в тому числі й ірраціональні. Отже, такі плани не зв'язані з якоюсь конкретною кількістю спостережень.

Безперервні плани - це математична абстракція, яка необхідна для спрощення задачі побудови D -оптимальних планів. Виявилось, що безперервні D -оптимальні плани можуть бути побудовані аналітично для деяких видів рівняння регресії.

Для безперервних D -оптимальних планів була сформульована і доведена теорема еквівалентності, відповідно до якої безперервний D -оптимальний план є одночасно і G -оптимальним, тобто мінімізує $\max d(\vec{X})$, причому

$$\max d(\vec{X}) = \max_{\vec{X} \in G} \vec{f}^T(\vec{X})(F^T F)^{-1} \vec{f}(\vec{X}) = \frac{k}{N}, \quad (4.16)$$

де k - кількість коефіцієнтів регресії;

N - кількість точок експериментального плану.

Рівняння (4.16) дозволяє оцінювати відхилення даного плану від D -оптимального. Відносне відхилення можна оцінити за формулою

$$\delta = \frac{N \cdot \max_{\vec{X} \in G} \vec{f}^T(\vec{X})(F^T F)^{-1} \vec{f}(\vec{X}) - k}{k}. \quad (4.17)$$

На основі теореми еквівалентності була створена розрахункова процедура, яка дозволяє будувати безперервні D -оптимальні плани для довільного виду рівняння регресії і довільної форми області планування G .

Надалі будемо розглядати лише безперервні D -оптимальні плани. При реалізації безперервних D -оптимальних планів на практиці застосовується послідовна стратегія експериментування, за якої точка постановки нового експерименту визначається, виходячи з результатів попередніх експериментів.

При цьому виникають дві основні проблеми:

- доцільність продовження експерименту для уточнення оцінок параметрів;
- вибір наступної експериментальної точки з точок D -оптимального плану, якщо прийнято рішення про продовження експерименту.

Послідовний D-оптимальний експеримент організується так:

- вибирається початковий план, який є підмножиною точок D –оптимального плану;
- перевіряється виконання умови припинення експериментування (як буде показано нижче, момент припинення не залежить від результатів експерименту y_g);
- якщо не прийняте рішення про припинення спостережень, то вибирається найкраща точка постановки наступного експерименту.

Розглянемо реалізацію правила припинення. Будемо вважати, що нам дана допустима точність визначення оцінок $\vec{B}_N$ ($\vec{B}_N$ - вектор оцінок $b_{0N}, b_{2N}, b_{3N}, \dots, b_{dN}$ після N спостережень, які повинні бути забезпечені з деякою заданою імовірністю). Тоді отримуємо наступну умову:

$$\sum_{k=0}^d (\beta_k - b_{kN})^2 \leq \rho^2. \quad (4.18)$$

Умова (4.18) означає, що точка дійсних значень коефіцієнтів з імовірністю P знаходиться в середині сфери радіуса ρ з центром у точці $\vec{B}_N$. Область у просторі параметрів, обмежену сферою (4.18), позначимо через Ω_N і назовемо її допустимою. Спостереження припиняються, коли N досягне такого значення, за якого

$$P\{\vec{\beta} \in \Omega_N\} \geq \alpha. \quad (4.19)$$

Скористаємося поняттям довірчого еліпсоїда. Довірчий еліпсоїд визначає область у просторі β_N , яка накриває вектор дійсних значень параметрів β_N з імовірністю P . Рівняння довірчого еліпсоїда записується так:

$$(\vec{\beta} - \vec{B}_N)^T F_N^T F_N (\vec{\beta} - \vec{B}_N) = \delta^2 = \sigma^2 \chi_{kp}^2, \quad (4.20)$$

де $\chi_{kp}^2 - 100 \cdot P$ - відсоткова точка розподілу s^2 для кількості ступенів свободи k .

Таблиця 4.1 - $\lambda_{N,min}$ і δ після кожного спостереження

№	X_1	X_2	λ_{min}	δ
1	2	3	4	5
1	0	0	-	-
2	1	0	-	-
3	-1	0	-	-
4	0	1	-	-
5	1	1	-	-
6	-1	1	-	-
7	0	-1	-	-
8	1	-1	-	-
9	-1	-1	1,000	0,667
10	1	-1	1,031	0,833
11	1	1	1,067	0,590

Продовження таблиці 4.1

1	2	3	4	5
12	-1	-1	1,100	0,720
13	-1	1	1,138	0,234
14	0	0	1,717	0,115
15	0	-1	1,744	0,168
16	1	1	1,762	0,241
17	-1	1	1,781	0,278
18	1	-1	1,803	0,346
19	-1	-1	1,827	0,32
20	1	0	1,985	0,225
21	-1	0	2,047	0,254
22	0	1	2,174	0,0925
23	1	-1	2,199	0,14
24	1	1	2,225	0,183
25	-1	-1	2,250	0,231
26	-1	1	2,277	0,1925
27	0	0	2,860	0,0733
28	1	0	2,919	0,0923
29	0	-1	3,024	0,095
30	-1	1	3,041	0,116
31	-1	-1	3,067	0,152
32	1	1	3,092	0,166
33	1	-1	3,130	0,145
34	-1	0	3,206	0,167
35	0	1	3,321	0,068
36	0	0	3,892	0,0668
37	1	-1	3,918	0,0957
38	1	1	3,945	0,1245
39	-1	-1	3,972	0,153
40	-1	1	4,000	0,066
41	0	-1	4,071	0,078
42	1	0	4,174	0,0557
43	0	1	4,249	0,0707
44	-1	0	4,349	0,0725
45	1	-1	4,377	0,0933
46	1	1	4,406	0,1147
47	-1	-1	4,434	0,1384
48	-1	1	4,464	0,0886
49	0	0	5,039	0,0367
50	1	-1	5,063	0,0574
51	-1	-1	5,078	0,0764
52	1	1	5,089	0,0971
53	-1	1	5,105	0,0575

Продовження таблиці 4.1

1	2	3	4	5
54	1	0	5,216	0,0689
55	0	1	5,295	0,0509
56	0	-1	5,378	0,0631
57	-1	0	5,498	0,043
58	1	-1	5,524	0,06
59	-1	-1	5,551	0,077
60	1	1	5,557	0,095
61	-1	1	5,604	0,1005
62	0	0	6,182	0,0196
63	1	-1	6,206	0,0375
64	1	1	6,230	0,051
65	-1	-1	6,254	0,067
66	-1	1	6,278	0,0687
67	0	0	6,860	0,0517

Умова припинення (4.19) буде виконана, якщо довірчий еліпсоїд знаходиться в середині сфери (4.18), яка визначає допустиму область.

Це буде мати місце, коли

$$\lambda_{Nmin} \cdot \rho^2 \geq \delta^2, \quad (4.21)$$

де $\lambda_{N, min}$ - мінімальне власне число матриці $F_N^T F_N$.

Отже, спостереження припиняються, як тільки виконується нерівність (4.21). Очевидно, що виконання умови (4.21) не залежить від результатів експерименту. Якщо умова припинення (4.21) не виконана, необхідно продовжити експеримент. Для вибору наступної експериментальної точки необхідно знайти максимальне значення дисперсії пророкування (4.14) по точках плану. Точка $\vec{X}_{N+1}$ максимуму $d(\vec{X})$ і є точкою постановки нового експерименту. Алгоритм вибору наступної експериментальної точки, заснований на процедурі послідовного планування експериментів Соколова [18]. Вибір точки $\vec{X}_{N+1}$ також не пов'язаний з результатами попередніх експериментів (так як $d(\vec{X})$ не залежить від y_g), тому і порядок проходження точок, і мінімальні власні числа матриці $F_N^T F_N$ можуть бути визначені до початку експерименту. Спочатку визначається порядок проходження точок D -оптимального плану, а потім обчислюється $\lambda_{N,min}$ після кожного нового спостереження.

Маючи таку таблицю, яка містить точки плану і $\lambda_{N,min}$ можна визначити за (4.17) границю припинення експерименту і визначити заздалегідь кількість спостережень, які потрібно буде зробити.

Для визначення ρ^2 зазвичай проводиться попередній експеримент, який містить невелику кількість точок D -оптимального плану (N_0 спостережень) і визначаються оцінки коефіцієнтів регресії $\vec{B}_{N_0}$. Після цього експерименту ρ^2 береться, як деякий відсоток величини $\sum_{k=1}^d b_{k N_0}^2$.

Відзначимо, що ортогональні плани типу 2^n є D -оптимальними. Таким чином, у випадку рівняння регресії виду

$$\eta = b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_n X_n + b_{12} X_1 X_2 + \dots + b_{ik} X_i X_k + \dots + b_{ikl} X_i X_k X_l + \dots + b_{ik\dots q} X_i X_k \dots X_q, \quad i \neq k \neq l \neq q \quad (4.22)$$

можна використовувати блоки експериментів, кожний з яких є повним факторним експериментом або дробовим факторним експериментом. Можна показати, що після кожного такого блоку

$$\lambda_{N,min} = N = v \times n, \quad (4.23)$$

де v - кількість блоків,

n - кількість спостережень у блоці.

Відзначимо, що після визначення кількості спостережень порядок їхнього проведення не має значення.

У таблиці 4.1 наведено D - оптимальний план для рівняння

$$\eta = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{11} X_1^2 + b_{12} X_1 X_2 + b_{22} X_2^2. \quad (4.24)$$

Цей план складається з дев'яти дослідів (перші дев'яти точок таблиці). Послідовність проведення експериментів після перших дев'яти дослідів визначалася за допомогою обчислення максимального значення (4.14) на кожному крокові і додавання точки, у якій досягається цей максимум.

В таблиці наведено також $\lambda_{N,min}$ і δ після кожного спостереження.

4.2 Багатофакторний експеримент

В багатьох задачах проектування і дослідження характеристик технічних пристроїв необхідно знайти оптимальний розв'язок, тобто знайти найкраще поєднання внутрішніх параметрів і зовнішніх факторів, які б давали найвищі узагальнювальні показники ефективності пристрою.

Наприклад, узагальнювальним показником ефективності деяких пристроїв технологічної автоматики електричних станцій може бути коефіцієнт підсилення сигналу, надійність, точність або відсоток виходу продукції при хімічних реакціях. На цей показник, який називається параметром оп-

тимізації, впливає низка внутрішніх і зовнішніх факторів. Зовнішніми факторами є механічні, кліматичні, електричні навантаження, співвідношення компонентів взаємодіючих речовин, час дії тощо. Внутрішніми факторами є номінальні значення і розкид параметрів елементів, варіантів схемно-конструктивних рішень, маса, режим роботи тощо.

Задача полягає в тому, щоб виявити, які зовнішні і внутрішні фактори мають суттєвий вплив на параметр оптимізації, який кількісний ступінь цього впливу. Іншими словами, необхідно знайти залежність цього параметра оптимізації від усіх суттєвих факторів (знайти модель). Далі досліджується ця модель з метою пошуку такого поєднання факторів і таких числових значень їх рівнів, які давали б найбільше (або найменше) значення узагальнювального параметра оптимізації. Таким чином, потрібно планувати і обробляти експеримент не тільки для пошуку на початку моделі, але і для знаходження оптимальної схеми, конструкції, технологічного процесу. При цьому характерною особливістю є спільна, а не роздільна дія факторів.

Факторний експеримент - це доволі складний і розгалужений метод. Тут він поданий в спрощеному вигляді, при необхідності потрібно звертатися до спеціальної літератури. В наш час факторному експерименту в технічній літературі і в практиці надається дуже багато уваги.

4.2.1 Вибір моделі

Вибір моделі полягає у виборі виду функції

$$Y = f(X_1, X_2, X_3), \quad (4.25)$$

де Y – узагальнювальний показник (параметр оптимізації), який характеризує ефективність пристрою (системи) і дозволяє проводити оптимізацію; екстремум Y відповідає оптимальній системі;

$X_1, X_2, \dots, X_k$ - чинники (зовнішні і внутрішні), які впливають на значення функції Y , набувають оптимальних значень при екстремумі Y .

Задача експерименту полягає в тому, щоб визначити кількісні значення констант (коефіцієнтів) цього рівняння. Звичайно функцію $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ вибирають у вигляді відрізків ступеневих рядів – алгебраїчних поліномів. Зокрема, для двох факторів поліноми мають вигляд:

$$\text{нульового ступеня } Y = B_0; \quad (4.26)$$

$$\text{першого ступеня } Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2; \quad (4.27)$$

$$\text{другого ступеня } Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_{12} X_1 X_2 + B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2; \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \text{третього ступеня } Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_{12} X_1 X_2 + B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2 + \\ + B_{112} X_1^2 X_2 + B_{112} X_2^2 X_1 + B_{111} X_1^3 + B_{222} X_2^3. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Модель повинна бути достатньо точною, тобто бути близькою до

фактичної залежності. Тоді говорять, що вона адекватна. В кожній конкретній задачі дослідник вибирає модель, проводить експеримент, а потім за його результатами перевіряють адекватність моделі. Дуже часто гарною моделлю є поліном першого ступеня (лінійна модель).

4.2.2 Повний факторний експеримент

На підставі апріорної інформації (результати попередніх однофакторних дослідів, розрахунки) оцінюють межі зміни факторів. При цьому враховують принципові обмеження (наприклад, для температури нижньою межею буде абсолютний нуль), техніко-економічні обмеження – вартість, дефіцитність, час дослідів, а також можливості апаратури, технології тощо.

В цих межах для кожного фактора потрібно вибрати основний рівень і інтервал варіювання, які і будуть безпосередньо використані при плануванні експерименту. Інтервали факторів повинні дозволяти знайти оптимальний стан, основні рівні повинні бути приблизно в центрі інтервалів.

Часто вводять так називане кодування значення фактора X_j , яке визначають за формулою:

$$X_j = \frac{\tilde{X}_i - \tilde{X}_{j0}}{J_j}, \quad (4.30)$$

де $\tilde{X}_i$ - фактичне значення фактора;

$\tilde{X}_{j0}$ - фактичне значення основного рівня;

J_j - інтервал варіювання;

j - номер фактора.

Для якісних факторів, що мають два рівня, верхній рівень позначають $+I$, а нижній $-I$, порядок їх не має значення. Верхній рівень фактора знаходять як суму основного рівня і інтервалу варіювання, нижній – як їх різницю.

Як приклад в таблиці 4.2 наведені фактичні і кодовані значення факторів для умов досліду з чотирма факторами.

В повному факторному експерименті (ПФЕ) реалізуються всі можливі сполучення рівнів факторів. Якщо кількість рівнів кожного фактора дорівнює двом (верхній і нижній), то маємо повний факторний експеримент типу 2^k . Загальна кількість дослідів дорівнює $n = 2^k$, де k - кількість факторів. Якщо в досліді використовують тільки верхній і нижній рівні факторів, то кодовані значення факторів будуть, відповідно, $+I$ і $-I$; для простоти запису одиниці можна не писати.

Умови експерименту записують у вигляді матриць планування експерименту, де рядки відповідають різним дослідом, а стовпці – значенням факторів.

Таблиця 4.2 - Фактичні і кодовані значення факторів для умов дослід з чотирма факторами.

Значення факторів	$\tilde{X}_1$	$\tilde{X}_2$	$\tilde{X}_3$	$\tilde{X}_4$
Основний рівень	3	30	1,5	15
Інтервал варіювання	2	10	1	10
Верхній рівень	5	40	2,5	25
Нижній рівень	1	20	0,5	5
Натуральні значення факторів в конкретному досліді	2	20	1,25	15
Кодовані значення	-0,5	-1	-0,25	0

Таблиця 4.3 - Приклад таблиці планування для двох факторів 2^2 .

Номер дослід	x_1	x_2	y
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

За результатами експерименту знаходять значення коефіцієнтів за формулою:

$$B_j = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ji} Y_i}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, k \dots \quad (4.31)$$

Зокрема, для моделі $Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2$ і двох факторів:

$$B_1 = \frac{(-1)Y_1 + (+1)Y_2 + (-1)Y_3 + (+1)Y_4}{4}; \quad (4.32)$$

$$B_2 = \frac{(-1)Y_1 + (-1)Y_2 + (+1)Y_3 + (+1)Y_4}{4}; \quad (4.33)$$

$$B_0 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4}. \quad (4.34)$$

Значення коефіцієнта для кожного фактора відповідає внеску даного чинника в параметр оптимізації при переході фактора з нульового рівня на верхній або нижній. Внесок, визначений при переході від нижнього рівня до верхнього, називається ефектом фактора (іноді його називають основ-

ним або головним ефектом). Він чисельно дорівнює подвоєному коефіцієнту.

Якщо є підстава вважати що модель нелінійна, то потрібно її ускладнити. Один з видів нелінійності, які часто зустрічаються, пов'язаний з тим, що ефект одного фактора залежить від рівня, на якому знаходиться інший фактор. В цьому випадку говорять, що має місце ефект взаємодії двох факторів. ПФЕ дозволяє кількісно оцінювати ефекти взаємодії. Для цього потрібно, користуючись правилом перемноження стовпців, отримати стовпець добутку двох факторів. Для ПФЕ 2^2 матриця планування з урахуванням ефекту взаємодії наведена в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4 - Матриця планування з урахуванням ефекту взаємодії

Номер досліджу	x_0	x_1	x_2	x_1, x_2	y
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	-1	-1	y_4

Тут x_0 (фіктивний фактор) вводиться для зручності обчислень. Тепер модель має вигляд:

$$Y = B_0X_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_{12}X_1X_2. \quad (4.35)$$

Коефіцієнт B_{12} обчислюється за формулою:

$$B_{12} = \frac{(-1)Y_1 + (-1)Y_2 + (+1)Y_3 + (+1)Y_4}{4}. \quad (4.36)$$

Інший спосіб обчислення (метод Йейтса) дає наступні формули для повного факторного експерименту 2^2 :

$$B_0 = \left(\frac{1}{4}\right)(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4); \quad (4.37)$$

$$B_1 = \left(\frac{1}{4}\right)(Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4); \quad (4.38)$$

$$B_2 = \left(\frac{1}{4}\right)(Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4); \quad (4.39)$$

$$B_{12} = \left(\frac{1}{4}\right)(Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4). \quad (4.40)$$

Зі збільшенням кількості факторів матриця планування ускладнюється. Загальні правила складання таких матриць: а) частота зміни знаків в кожному наступному стовпці зменшується в два рази; б) додавання кожного нового фактора збільшує кількість дослідів удвічі (спочатку для “+” нового фактора, потім стільки ж дослідів для “-“).

Для трьох факторів ПФЕ має більше взаємодій. Матриця наведена в таблиці 4.5.

ПФЕ має чотири важливі властивості:

1. Симетричність відносно центра експерименту – алгебраїчна сума елементів векторстовпців кожного фактора дорівнює 0, тобто

$$\sum_{i=1}^n X_{i,j} = 0, \quad (4.41)$$

де j – номер фактора ($j = 1, 2, \dots, k$);

i – номер досліду;

n – кількість дослідів.

2. Умова нормування: сума квадратів елементів кожного стовпця дорівнює кількості дослідів:

$$\sum_{i=1}^n X_{j,i}^2 = n. \quad (4.42)$$

Це є наслідком того, що значення факторів в матриці задаються такими, що дорівнюють $+1$ і -1 .

3. Ортогональність матриці планування: сума добутків складових будь-яких факторів - стовпців матриці дорівнює 0:

$$\sum_{i=1}^n X_{j,i} X_{u,i} = 0 \quad \text{і } j \neq u, u = 0, 1, 2, 3, \dots, k. \quad (4.43)$$

4. Ротатабельність матриці планування: точки в матриці планування підбираються так, що точність передбачення значень параметра оптимізації однакова на рівних відстанях від центра дослідів і не залежить від напрямку.

Таблиця 4.5 - Матриця для трьох факторів ПФЕ.

Номер дослідів	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$	Y
1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	Y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	Y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_4
5	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	Y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_7
8	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	Y_8

4.2.3 Дробовий факторний експеримент

ПФЕ потребує великої кількості дослідів, причому частина з них має мало інформації. Дробовий факторний експеримент (ДФЕ) дозволяє скоро-

тити кількість дослідів і в той самий час отримати основний об'єм необхідної інформації.

Експеримент, який складається за об'ємом тільки з частини ПФЕ, називається *дробовою реплікою*. Є піврепліка (1/2 репліки), 1/4 репліки, 1/8 репліки тощо. Умовні позначення дробових реплік і кількість дослідів наведені нижче.

Таблиця 4.6 - Умовні позначення дробових реплік і кількість дослідів

Кількість факторів	Дробова репліка	Умовне позначення	Кількість дослідів	
			для дробової репліки	для ПФЕ
1	2	3	4	5
3	1/2 репліки від 2^3	2^{3-1}	4	8
4	1/2 репліки від 2^4	2^{4-1}	8	16
5	1/4 репліки від 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/8 репліки від 2^6	2^{6-3}	8	64
7	1/16 репліки від 2^7	2^{7-4}	8	128
5	1/2 репліки від 2^5	2^{5-1}	16	32
6	1/4 репліки від 2^6	2^{6-2}	16	64
7	1/8 репліки від 2^7	2^{7-3}	16	128
8	1/16 репліки від 2^8	2^{8-4}	16	256

Процес утворення реплік для постановки двофакторного експерименту видно з прикладу.

Приклад. Задано матрицю для повного факторного експерименту 2^2 .
Таблиця 4.7 - Початкові дані для прикладу

№ дослідів	X_0	X_1	X_2	$(X_2) X_1 X_2$	Y
1	+	-	-	+	Y_1
2	+	+	-	-	Y_2
3	+	-	+	-	Y_3
4	+	+	+	+	Y_4

Параметром оптимізації є рівняння:

$$Y = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_{12}X_1X_2. \quad (4.44)$$

Якщо є підстави вважати, що у вибраних інтервалах варіювання Y може бути поданий як лінійна модель (тобто $B_{12} \rightarrow 0$), то досить визначити тільки три коефіцієнти: B_0, B_1 і B_2 . Тоді кількість дослідів буде більше кі-

лькості шуканих коефіцієнтів, тому стовпець X_1X_2 можна використати для нового фактора X_3 . Таким чином, маємо, що замість восьми дослідів в ПФЕ для трьох факторів можна провести тільки чотири досліди.

При цьому оцінки B_1, B_2, B_3 фактичних коефіцієнтів β_1, β_2 і β_3 є вже змішаними: $B_1 = \beta_1 + \beta_{23}$; $B_2 = \beta_2 + \beta_{13}$; $B_3 = \beta_3 + \beta_{23}$. Ефект цього змішування знижує точність оцінок. Однак, оскільки ми вважаємо модель лінійною і взаємодії досить малими, то точність оцінок буде достатньою.

Складена матриця буде півреплікою від ПФЕ 2^3 , яка позначається 2^{3-1} . При виборі більш складних реплік застосовуються спеціальні правила. Ефективність застосування дробових реплік залежить від вдалого вибору системи змішування лінійних ефектів з ефектами взаємодій. Репліки, в яких ефекти змішані зі взаємодіями найвищого порядку, є найефективнішими. Вони мають найбільшу дозволяючу спроможність.

В реальних умовах розробник може не мати твердої впевненості в відсутності тієї чи іншої взаємодії факторів. В цьому випадку потрібно знати, коли і які ефекти визначаються спільно, тобто визначити розподільну здатність дробових реплік. Для цього зручно використовувати поняття “визначальні контрасти” і “генерувальні співвідношення”.

Розглянемо ці поняття спочатку на прикладі піврепліки 2^{3-1} .

При побудові піврепліки 2^{3-1} лише дві можливості: $X_3 = X_1X_2$ і $X_3 = -X_1X_2$. Ці дві піврепліки наведені в таблиці 4.8.

Таблиця 4.8 - Піврепліки 2^{3-1}

№ досліду	матриця I $X_3=X_1X_2$			
	X_1	X_2	X_3	$X_3 X_3 X_3$
1	+	+	+	+
2	-	-	+	+
3	+	-	-	+
4	-	+	-	+
	матриця II $X_3=-X_1X_2$			
	X_1	X_2	X_3	$X_3 X_3 X_3$
1	+	+	-	-
2	-	-	-	-
3	+	-	+	-
4	-	+	+	-

Для добутку трьох стовпців матриці I маємо:

$$+I = X_1X_2X_3,$$

а для матриці II:

$$-I = X_1X_2X_3.$$

Добутки стовпців матриць, що дорівнюють $+I$ або $-I$, називаються *визначальними контрастами*. Контраст допомагає знайти змішані ефекти.

Для визначення, який ефект змішаний з даними, потрібно помножити обидві частини визначального контраста на стовпець, що відповідає даному ефекту. Так, для I матриці, де визначальний контраст $+I = X_1X_2X_3$, маємо:

$$X_1 = X_1^2X_2X_3 = X_2X_3; \quad (4.45)$$

$$X_2 = X_1X_2^2X_3 = X_1X_3; \quad (4.46)$$

$$X_3 = X_1X_2X_3^2 = X_1X_2. \quad (4.47)$$

Це означає, що коефіцієнти лінійного рівняння будуть оцінками лінійних ефектів:

$$B_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; B_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; B_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}. \quad (4.48)$$

Співвідношення, що показує, з яким з ефектів змішаний даний ефект, називається, *генерувальним співвідношенням*.

Піврепліки, в яких основні ефекти змішані з двофакторними взаємодіями, називаються *планами з розподільною здатністю III* (з найбільшою кількістю факторів у визначальному контрасті). Вони позначаються 2_{III}^{3-1} . При виборі піврепліки 2^{4-1} можливі вісім рішень (таблиця 4.9).

Репліки 1-7 мають по три фактори в визначальному контрасті, а 7 і 8 – по чотири. Тому репліки 7 і 8 мають максимальну розподільну здатність. Їх називають *головними*. Це пов'язано з тим, що часто потрібні взаємодії не такі важливі, як парні.

Репліки, в яких немає ні одного головного ефекта, змішаного з іншим головним ефектом або парною взаємодією, називаються *планами з розподільною здатністю IV* (за найбільшою кількістю факторів в визначальному контрасті) і позначаються 2_{IV}^{4-1} .

Таблиця 4.9 - Можливі вісім рішень при виборі піврепліки 2^{4-1}

Номер рішення	Варіант рішення	Номер рішення	Варіант рішення
1	$X_4 = X_1X_2$	5	$X_4 = X_1X_3$
2	$X_4 = -X_1X_2$	6	$X_4 = -X_1X_3$
3	$X_4 = X_2X_3$	7	$X_4 = X_1X_2X_3$
4	$X_4 = -X_2X_3$	8	$X_4 = -X_1X_2X_3$

Приклад. Необхідно спланувати експеримент з метою вибору оптимальних параметрів пристрою для отримання максимального значення ви-

хідної характеристики Y . Вихідні значення факторів і інтервали варіювання задані в таблиці 4.10.

Для матриці планування вибираємо піврепліку 2^4 , задану генерувальним співвідношенням $X_4 = X_1X_2X_3$. Визначальним контрастом є $I = X_1X_2X_3X_4$.

Множачи визначальний контраст X_1, X_2, X_3 і X_4 , визначимо спільно оцінки лінійних ефектів і взаємодій

$$B_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234}, B_{23} \rightarrow \beta_{23} + \beta_{14}; \quad (4.49)$$

$$B_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134}, B_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124}; \quad (4.50)$$

$$B_3 \rightarrow \beta_{12} + \beta_{34}, B_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123}; \quad (4.51)$$

$$B_4 \rightarrow \beta_{13} + \beta_{24}. \quad (4.52)$$

Таблиця 4.10 - Вихідні значення факторів і інтервали варіювання

Фактор	Рівні факторів			Інтервал варіювання
	-1	0	+1	
X_1	200	220	240	20
X_2	3	6	9	3
X_3	40	100	160	60
X_4	1	2	3	1

Матриця планування і результати експерименту наведені в таблиці 4.11.

Таблиця 4.11 - Матриця планування і результати експерименту

№ досліду	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	$x_1x_2 =$ x_3x_4	$x_1x_3 =$ x_2x_4	$x_2x_3 =$ x_1x_4	Y
1	+	+	+	-	-	+	-	-	10
2	+	-	-	-	-	+	+	+	9
3	+	+	-	-	+	-	-	+	15
4	+	-	+	-	+	-	+	-	25
5	+	+	+	+	+	+	+	+	26
6	+	-	-	+	+	+	-	-	14
7	+	+	-	+	-	-	+	-	5
8	+	-	+	+	-	-	-	+	20
B_i	15	-1,5	4,75	0,75	4,5	-0,75	0,75	2	

Коефіцієнти B_i обчислюються за формулами, наведеними вище. Вони дорівнюють:

$$B_0 = \frac{1}{8}(+10 + 9 + 15 + 25 + 26 + 14 + 5 + 20) = 15, \quad (4.53)$$

$$B_1 = \frac{1}{8}(+10 - 9 + 15 - 25 + 26 - 14 + 5 - 20) = -1,5 \quad (4.54)$$

тощо. Таким чином, аналітичний вираз для Y набуде вигляду

$$Y = 15 - 1,5X_1 + 4,75X_2 + 0,75X_3 + 4,5X_4 - 0,75X_1X_2 + 0,75X_1X_3 + 2X_2X_3. \quad (4.55)$$

Подальший аналіз подібних виразів, їх зміна і проведення нових експериментів ведуться відповідно до порядку, викладеного нижче.

4.2.4 Проведення експерименту і обробка його результатів

Після планування проводять безпосередньо сам експеримент. Для кожного прийнятого поєднання факторів вимірюють значення параметрів оптимізації. За цими значеннями вже відразу приблизно видно, комбінація яких значень факторів є найкращою (близькою до оптимальної), а яка найгіршою. Однак перед тим, як перейти до оптимізації, необхідно виконати низку операцій з аналізування отриманих даних [7].

Насамперед, потрібно враховувати, що результати кожного дослідження мають статистичну невизначеність. Вона існує за рахунок похибки вимірювання значень факторів і самого параметра Y , впливу неврахованих факторів і т.п. Тому якщо відтворити декілька разів дослід при одних і тих самих значеннях факторів, то кожний раз значення параметра оптимізації Y будуть різними. Звичайно, що дослідники намагаються при кожному сполученні значень факторів (“в кожній точці”) проводити по декілька повторних дослідів (n). Спочатку проводять обробку дослідів за звичайними формулами:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{q=1}^n y_q}{n}, s = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^n (y_q - \bar{y})^2}{n-1}}. \quad (4.56)$$

де q – поточний номер повторного дослідів (із загальної кількості n) при визначеному поєднанні значень факторів.

Потім можна порівнювати дві будь-які серії по n дослідів: щоб оцінити їх значимість, тобто зрозуміти суттєво чи ні відрізняються значення y при двох комбінаціях значень факторів (“в двох точках”); щоб визначити, чи дійсно ця відмінність мала порівняно з розкидом при відтворенні n дослідів при одних і тих самих значеннях факторів. Якщо в кожній точці похибки дослідів практично однакові, то використовується t -критерій (критерій Стюдента):

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad (4.57)$$

$\bar{y}_1$ - середнє значення n_1 дослідів при визначеному поєднанні значень факторів;

$\bar{y}_2$ - середнє значення n_2 дослідів при іншому поєднанні значень факторів
 s - розкид значень y (однаковий в n_1 і n_2) дослідів.

Обчислене значення t порівнюють з табличним, яке знаходять для кількості ступенів свободи $f = n_1 + n_2 - 2$ і рівня значимості α (часто приймають $\alpha = 0,05$). Якщо розрахункове значення t менше табличного, то з вірогідністю $P = 1 - \alpha$ можна вважати, що різниці між серіями дослідів n_1 і n_2 немає, тобто їх відмінність незначна.

Обробка експериментальних результатів, врахування при необхідності декількох складових похибок, виключення грубих помилок і т.п. виконується за методом теорії похибок.

Крім дисперсії s^2 в серії з n дослідів обчислюється також загальна дисперсія параметра оптимізації s_y^2 , яка інакше називається дисперсією відтворюваності експерименту $s_{відтвор}^2$. Цю дисперсію визначають за формулою:

$$s_{відтвор}^2 = s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{n(n-1)}, \quad (4.58)$$

де $i=1, 2, 3, \dots, N$;

$q=1, 2, 3, \dots$,

n - кількість повторних дослідів, однакова по всій матриці.

При різній кількості дослідів n доводиться користуватися середнім зваженим значенням дисперсій, взятим з урахуванням кількості ступенів свободи:

$$s_y^2 = \frac{s_1^2 f_1 + s_2^2 f_2 + s_3^2 f_3 + \dots + s_n^2 f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i s_i^2}{\sum_{i=1}^N f_i}, \quad (4.59)$$

де f_i - кількість ступенів свободи в кожній серії дослідів ($f_i = n-1$).

Остання формула справедлива тільки в тому випадку, коли дисперсії s_i однорідні, тобто, серед них немає таких, які значно перевищують всі інші. Перевірку однорідності часто проводять за різними критеріями. Для двох дисперсій застосовують критерій *Фішера* (*F*-критерій), який є відношенням більшої дисперсії до меншої. Якщо отримані значення відношення

більше наведеного в таблиці для відповідних ступенів свободи і, відповідно, до вибраного рівня значимості, то дисперсії суттєво відрізняються одна від одної, тобто вони неоднорідні.

Приклад. Нехай

$$s_1^2 = 5,14; n_1 = 7; f_1 = n - 1 = 6;$$

$$s_2^2 = 0,324; n_2 = 6; f_2 = 5.$$

Розв'язок. Критерій Фішера $F = \frac{5,14}{0,324} = 15,9$.

Для ступенів свободи $f_1=6, f_2=5$ і рівня значимості 0,05 з таблиці А1 знаходимо значення **4,95**. Значить, дисперсії неоднорідні.

Якщо порівнювана кількість дисперсій більша двох і одна дисперсія значно перевищує решту, можна скористатися критерієм *Кохрена*. Цей критерій використовується у випадках, коли кількість дослідів у всіх точках однакова. При цьому обчислюється дисперсія в кожному горизонтальному рядку матриці s^2 . Потім з усіх дисперсій вибирають найбільшу $s_{i\hat{a}e\hat{n}}^2$, яку ділять на суму всіх дисперсій. Критерій *Кохрена* G знаходять за формулою

$$G = \frac{s_{i\hat{a}e\hat{n}}^2}{\sum_{i=1}^N s_i^2} \quad (4.60)$$

і порівнюють з табличним значенням. Якщо табличне значення більше, ніж розраховане за цією формулою, то дисперсії однорідні (табл. А.2).

Приклад. Для результатів експерименту

$$G = \frac{1,62}{5,214} = 0,31. \quad (4.61)$$

Таблиця 4.12 - Результати експерименту

№ досліду	1	2	3	4	5	6	7	8
s_i^2	1,444	1,444	0,062	1,62	0,046	0,246	0,246	0,106

Табличне значення $G = 0,68$, тобто більше розрахункового. Отже, дисперсії однорідні:

$$s_y^2 = \frac{2 \sum_{i=1}^8 (y_{iq} - \bar{y}_i)}{8} = 0,652. \quad (4.62)$$

Якщо ж виникає припущення про наявність неоднорідності дисперсій, то цю неоднорідність потрібно перевірити. Для цього можна скористатися критерієм *Бартлета* (для розподілу, близького до нормального). Він доволі складний, тому іноді використовують (для кількості дисперсій більше двох) критерій *Фішера*. Тоді порівнюють з усієї низки дисперсій най-

більшу і найменшу дисперсії. Якщо вони дещо відрізняються, то це означає, що всі дисперсії однорідні.

Щоб уникнути впливу систематичних похибок, викликаних зовнішніми умовами (фактори, що стають на заваді), необхідно досліди, які заплановані матрицею, проводити у випадковій послідовності. Цей прийом називається *рандомізацією*. Найпростіший спосіб полягає у використанні таблиці випадкових чисел, за якою вибирається послідовність проведення всіх дослідів, включаючи і n_i дослідів в кожній точці.

Інший підхід полягає в розбиванні матриці на блоки. Якщо експериментатор знає про зміну зовнішніх умов, він може планувати експеримент так, щоб ефект впливу цих умов був пов'язаний з визначеним впливом, яким можна знехтувати. Наприклад, матрицю 2^3 можна розбити на два блоки таким чином, щоб ефект впливу умов позначився на величині трифакторної взаємодії, а усі лінійні коефіцієнти і парні взаємодії були вільні від цього впливу.

Після проведення експерименту проводять аналіз адекватності (відповідності) вибраної моделі (виду полінома) дослідним даним. Потім перевіряють значимість коефіцієнта за t -критерієм Стюдента або побудовою довірчих інтервалів.

4.2.5 Прийняття рішень

Після проведення експерименту і обробки результатів подальші дії повинні будуватися на тому, щоб знайти оптимальне поєднання факторів і наблизити дослідну систему (процес) до оптимальної. При цьому, зазвичай, виділяють три етапи:

- 1) прийняття рішень після побудови моделі;
- 2) високе сходження по поверхні відгуку;
- 3) прийняття рішень після крутого сходження.

За адекватну модель приймають поліном, коефіцієнти якого є похідними параметрами оптимізації за відповідними змінними. Отриману математичну модель для попереднього аналізу перекладають на мову експериментатора (це називається інтерпретацією моделі). На першому етапі за коефіцієнтами роблять висновок про те, як і з яким знаком впливає фактор на параметр оптимізації. Якщо шукаємо максимум функції Y , то при цьому мають зростати додатні коефіцієнти. Якщо шукаємо мінімум Y , то при цьому мають зростати від'ємні коефіцієнти. Далі фактори розташовують в ряд за силою їх впливу на Y . Коефіцієнти, значення яких не впливають на результат, можна не враховувати.

Зміна інтервалів варіювання призводить до зміни коефіцієнтів регресії. Абсолютні значення коефіцієнтів регресії зростають зі збільшенням інтервалів. Знаки лінійних коефіцієнтів до екстремальної точки не змінюються, але вони можуть змінюватися, якщо ми “проскочимо” екстремум

функції Y . Далі аналізуються ефекти взаємодії. Якщо ефект взаємодії двох факторів має додатний знак, то для збільшення Y потрібно одночасне збільшення або зменшення факторів, а для зменшення Y значення факторів повинні одночасно змінюватись в різних напрямках. Якщо ефект взаємодії має від'ємний знак, то для збільшення Y значення факторів повинні одночасно змінюватися в різних напрямках, а для зменшення Y потрібно одночасне збільшення або зменшення значень факторів.

Варіантів розв'язків є дуже багато, в залежності від поєднання можливих дій і ситуацій щодо адекватності, значимості коефіцієнтів і положення оптимуму. Серед “типових” рішень виділяють: рух по градієнту, план другого порядку, зміну інтервалів варіювання, відсівання незначних факторів, паралельні досліди, добудовування плану і інші [17]. Складові градієнта (найкоротший шлях до оптимуму) є похідними, оцінками яких є коефіцієнти регресії. Змінюючи незалежні змінні пропорційно величинам цих коефіцієнтів, будемо рухатися в напрямку градієнта найкоротшим шляхом. Така процедура називається *високим сходженням*. При цьому незначні фактори залишаються на вихідному рівні ($+1$ або -1), тоді як значимі змінюються з визначеним кроком. Щоб отримати значення Y , що лежить на градієнті, при зміні одного значимого фактора потрібно відповідний коефіцієнт помножити на крок варіювання. Значення кроку вибирається кожний раз конкретно з урахуванням необхідної точності знаходження оптимуму і можливої області зміни фактора. Приклад розрахунку високого сходження з використанням матриці планування результатів серії дослідів наведений нижче.

Приклад. Проведена серія експериментів. Отримані результати наведені в таблиці 4.13.

В результаті першої серії дослідів отримано адекватне рівняння регресії: $Y = 88,0 - 2,0 X_1 - 4,5 X_2$, тобто $B_0 = 88; B_1 = -2; B_2 = -4,5$.

Всі коефіцієнти регресії значимі. Потрібно знайти значення Y , яке може досягти 99-100, тобто досягти таких значень, при яких область мінімуму була близькою. Необхідно здійснити високе сходження, тобто провести нову серію дослідів з такою варіацією X_1 і X_2 , яка б дозволила знайти такі значення X_1 і X_2 , при яких Y буде максимальним.

Розглянемо етапи розрахунку високого сходження. Спочатку обчислимо складові градієнта, помножуючи відповідні коефіцієнти регресії на крок варіювання: $B_1 J_1 = -2 \cdot 0,5 = -1; B_2 J_2 = -4,5 \cdot 1 = -4,5$.

Тепер додамо складові градієнта до основного рівня факторів. Тоді для дослідів 5 отримаємо: $X_1 = 1,5 - 1 = 0,5; X_2 = 7 - 4,5 = 2,5$.

Для дослідів 6 вже будемо мати нереальні, недопустимі значення X_1 і X_2 : $X_1 = 0,5 - 1 = -0,5; X_2 = 2,5 - 4,5 = -2$.

Таблиця 4.13 - Результати експерименту

Досліджуваній Фактор	x_1	x_2	Y (середній з двох паралельних дослідів)	Досліджуваній Фактор	x_1	x_2	Y (середній з двох паралельних дослідів)
Основний рівень	1,5	7,0	-	b_j	-2,0	-4,5	-
Інтервал варіюван- ня J_j	0,5	1,0	-	b_{jx} (інтервал варіювання)	-1,0	-4,5	-
Верхній рівень	2,0	8,0	-	Крок при зміні x_2 на 0,5	-0,11	-0,5	-
Нижній рівень	1	6,0	-	Округлення	-0,1	-0,5	-
Кодування значень змінних	x_1	x_2	-	Досліди:			
Досліди:				5	1,4	6,5	-
1	-1	-1	95,0	6	1,3	6,0	-
2	+1	-1	90,0	7	1,2	5,5	-
3	-1	+1	85,0	8	1,1	5,0	-
4	+1	+1	82,0	9	1,0	4,5	-

Отже, крок руху дуже великий, його потрібно зменшити в декілька разів. Відомо, що множення (ділення) складових градієнта на будь-яке додатне число дає точки, які також знаходяться на градієнті. Вибір кроку суворо не формалізований і визначається на підставі практичних міркувань. В даній задачі для X_2 зручно вибрати крок 0,5, тобто зменшити складову градієнта в дев'ять разів порівняно з вибраною спочатку. В стільки ж разів потрібно зменшити і складову градієнта за X_1 , тобто взяти її такою, яка дорівнює 0,11, а з урахуванням округлення – 0,1.

Далі необхідно планувати досліді шляхом послідовного додавання складових градієнта до основного рівня. В результаті отримаємо серію дослідів високого сходження (в таблиці досліді 5-9). Ці досліді називаються "уявними" тому, що вони обчислюються, але не завжди проводяться. Іноді виконують розрахунок в якому-то уявному досліді параметра оптимізації. В даному прикладі це можна зробити, використовуючи рів-

няння регресії $Y = 88 - 2X_1 - 4,5X_2$, підставивши замість X_1 і X_2 кодовані значення

$$X_j = \frac{\tilde{X}_j - \tilde{X}_{j10}}{J_j}.$$

Наприклад, для дослідів 7 маємо: $X_1 = -0,6$; $X_2 = -1,5$; $X_7 = 95,95$.

Для дослідів 8: $X_1 = -0,8$; $X_2 = -2$; $X_8 = 98,6$.

Експериментальні значення можуть і не співпадати з розрахунковими.

Реалізацію дослідів часто здійснюють послідовно. Для адекватної моделі починають з дослідів, умови якого виходять за область експерименту хоча б за одним з факторів. Для неадекватної моделі дослідів 1 і 2 виконуються в області експерименту. Після проведення перших дослідів проводять оцінку результатів і приймають рішення про припинення або подальше проведення експериментів (послідовний пошук).

Після високого сходження приймають рішення про подальші дії. Залежно від ситуації, що склалася, вони можуть бути різними.

Якщо високе сходження ефективно (тобто значення Y суттєво наближається до екстремуму) і область оптимуму близька, можливі два рішення: закінчення дослідження або побудова лінійного плану до плану другого порядку з метою більш точного опису області оптимуму. Якщо область оптимуму далека, рішення одне: побудова лінійного плану нового циклу. При незрозумілій ступені близькості потрібно переходити до нового лінійного плану. Якщо високе сходження виявилось неефективним, то при лінійній неадекватній моделі потрібно для грубої оцінки членів рівняння регресії проводити дослідів для значень аргументів, які знаходяться в середині області їх зміни. При значимій величині квадратичних членів це свідчить про близькість до майже стаціонарної області. В такому випадку потрібно приступати до побудови плану другого порядку або закінчувати дослідження. При незначній сумі квадратичних членів рішення вибрати важко, тому переходять до побудови лінійного плану нового циклу.

4.2.6 Випробування при підвищених і граничних навантаженнях

Дослідження при підвищених і граничних навантаженнях мають цілу низку переваг:

- вони більш інформативні порівняно з випробуваннями в нормальному режимі, тобто для рішення одних і тих самих задач потребують меншої кількості зразків або вимірювань (номінальними називають рівні навантажень, задані в технічних завданнях (ТЗ) або в технічних умовах);

- є засобом *забезпечення* надійності на етапі проектування, тому що дозволяють визначити слабкі місця конструкції, а тому їх найдоцільніше проводити на етапі відпрацювання;

- дозволяють якісно оцінити запаси роботоздатності обладнання при різних видах впливів.

Дослідні дані про характеристики стану обладнання можна використовувати, поряд з іншими статистичними матеріалами, при рішенні низки технічних питань:

а) визначення коефіцієнтів запасу за даним фактором (впливом). Як кількісну міру запасу приймають вираз $f = m_Z / z_{TY}$, де m_Z - математичне очікування значення параметра, який характеризує стан об'єкту дослідження за фактором Z (міцність виробу – ізолятора, гумового ущільнення, лампи розжарення і т.ін. ; коефіцієнт роботоздатності - вимикача, трансформаторного вводу, реактора і т.ін.); z_{TY} - кількісний рівень фактора, вказаний в технічних умовах (ТУ). Розподіл випадкової величини міцності виробу при впливі даного фактора називають міцнісною характеристикою, а коефіцієнта роботоздатності – надійнісною характеристикою;

б) визначення частини приладів, перебування в робочому стані яких гарантується для номінального рівня фактора або для будь-якого іншого рівня;

в) визначення допустимого рівня навантаження, при якому залишається роботоздатність не менше заданої частки приладів;

г) визначення залежності вхідних параметрів від рівня фактора;

д) визначення допусків на вихідні параметри при дії заданого рівня фактора.

Кожному виду характеристики притаманна низка параметрів. Наприклад, вібрація трансформатора (генератора, електричного двигуна, трансформатора і т.ін.) визначається частотою, амплітудою, прискоренням, тривалістю і напрямком дії. Фактор є вимірним кількісно і змінюваним в експерименті параметром навантаження, а під міцністю приладу Z_i розуміють кількісне значення виміряного параметра при дії фактора Z , при якому відбувається відмова зразка. Якщо таких значень декілька (наприклад, при різних напрямках дії вібрації), то для випробувань потрібно вибирати найнебезпечніший з точки зору відмови обладнання. Що стосується решти параметрів, то їх значення повинні відповідати рівням, заданим в технічній документації.

Відрізняють декілька способів проведення випробувань. В усіх випадках прийнято, що міцнісна характеристика розподілена за нормальним законом. Якщо є підстави прийняти інший, відмінний від нормального, закон розподілу міцності приладів за фактором Z , то методи випробувань залишаються тими самими, а змінюються тільки формули обробки і планування залежно від виду закону. Зокрема, для логарифмічно-

нормального закону можна використати формули, наведені тут, приймаючи як змінну Z_i значення логарифму результату вимірювання міцності.

Розрізняють такі методи випробувань:

1. Граничні випробування, в яких постійним (ступеневим або плавним) змінюванням впливового фактора дослідні зразки доводять до відмови. Цей спосіб застосовується для приладів багатократної дії і він потребує, як мінімум, п'ять зразків;

2. Випробування при двох рівнях навантаження, де (виходячи з досвіду) спеціаліст, який виконує випробовування, називає два випробуваних рівня таким чином, щоб можливі ймовірності відмов виробів (гумових ущільнень, ізоляторів і т.ін.) суттєво відрізнялись між собою і були достатньо великими (наприклад, приблизно дорівнювали $q_1=0,3, \dots, 0,4$ і $q_2=0,6, \dots, 0,8$). Випробовують одну вибірку виробів ($n_1 \approx 5, \dots, 10$ штук) при першому рівні навантаження і другу вибірку ($n_2 \approx 5, \dots, 10$ штук, при цьому може бути $n_1 \neq n_2$) при другому рівні навантаження. Експериментальні дані зводять до оцінок ймовірностей відмови в двох точках.

Цей і наступні способи можна раціонально використовувати для виробів однократної дії (плавка вставка запобіжника), а також для виробів багатократної дії з чітким наслідком (повітряний вимикач).

3. Метод *Брюстона* або метод “вгору-вниз”.

4. Випробування при підвищеному навантаженні. Випробовують три-чотири вироби при навантаженні $z_{вип}$. Рекомендовано $z_{ТУ} < z_{вип} < 2z_{ТУ}$. Тут при двопараметричному законі розподілу міцності, яким і є нормальний закон, неможливо отримати оцінки параметрів міцнісної характеристики приладів тільки за дослідними даними. Необхідно залучати додаткову, апіорну інформацію.

Одна з форм задання апіорної інформації полягає в такому: за конструктивними розрахунками, за результатами дослідів з аналогічними виробами чи видами обладнання, особа, яка виконує випробовування виробів може орієнтовно назвати навантаження, яке практично не витримає жоден виріб. Це навантаження приймають за $(+3\sigma)$ -ву межу міцності за фактором Z . Такий метод випробувань отримав назву метода *Босса*.

Апіорна інформація може бути відома і в іншій формі. Наприклад, у вигляді практично можливих коефіцієнтів варіації $\nu = \frac{\sigma_z}{m_z}$, де ν - коефіцієнт

варіації (згідно [7] для розподіленої міцності характерні значення $\nu = 0,17, \dots, 0,33$); m_z, σ_z - відповідно математичне очікування і середньоквадратичне відхилення міцнісної характеристики за фактором Z . В подальших розрахунках прийнято $\nu = 0,35$, що відповідає найбільш песимістичним прогнозам.

До методу Босса, який використовує апіорну інформацію, можна удаватися лише для орієнтовних, прикидочних, попередніх оцінок міцнісних якостей приладів, що, утім, цілком достатньо на етапі опрацювання конструкції.

На рис. 4.1 показана класифікація методів опрацювання результатів досліджень при підвищених і граничних навантаженнях. В основу класифікації покладено методи досліджень, можливі варіанти результатів випробувань і типи статистичних задач, що розв'язуються при опрацюванні результатів [7]. Розглянемо деякі з них.

Варіант 111 і 112 (опрацювання).

1. Вихідні дані: $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n$ - значення величини впливового фактора, при яких виявлені відмови відповідно $1, 2, \dots, i, \dots, n$ -го виробів; n - об'єм вибірки; d - крок зміни навантаження.

2. Визначити $\hat{z}$ і s за формулами

$$\hat{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N z_i - \frac{d}{2}, \quad (4.63)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N \left(z_i - \frac{d}{2} - \hat{z} \right)^2}. \quad (4.64)$$

Наведемо варіанти опрацювання результатів випробувань при підвищених і граничних навантаженнях.

Варіант 111 (планування). Формулювання задачі: спланувати випробування для визначення математичного очікування міцності з заданою точністю.

Варіант 112 (планування). Формулювання задачі: спланувати випробування для підтвердження того, що середньоквадратичне відхилення міцності не більше заданого.

Варіант 113 (опрацювання).

1. Вихідні дані: $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n$ - значення величини впливового фактора, при яких виявлені відмови відповідно $1, 2, \dots, i, \dots, n$ -го приладів; n - об'єм вибірки; d - крок зміни навантаження; $\hat{z}$ - рівень навантаження, відносно якого потрібно визначити гарантоване значення P_γ ; γ - задана достовірність.

2. Визначити $\hat{z}$ і s за формулами (4.63) і (4.64).

3. Визначити $\underline{P}_\gamma$ за формулою

$$\underline{P}_\gamma = \Phi(u_{\underline{P}_\gamma}), \quad (4.65)$$

де $\hat{O} = \int_{-\infty}^{u_p} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ - інтегральна функція нормованого нормального розподілу, а

$$u_{\underline{P}_\gamma} = \frac{\hat{z} - z}{s} - u_\gamma \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{\hat{z} - z}{s}\right)^2}{2(n-1)}} \quad (4.66)$$

Варіант 113 (планування). Формулювання задачі: визначити об'єм вибірки, необхідний для підтвердження з достовірністю γ безвідмовної роботи не менше $\underline{P}_\gamma$ частки виробів під дією заданого навантаження $\hat{z}$ при ризику виробника, який дорівнює α .

Варіант 114 (опрацювання).

1. Вихідні дані: $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n$ - значення величин впливового фактора, при яких виявлені відмови відповідно $1, 2, \dots, i, \dots, n$ -го приладів; n - об'єм вибірки; d - крок зміни навантаження; $\hat{P}$ - частка виробів, безвідмовна робота яких гарантується в межах потрібної межі значень навантаження; γ - задана достовірність.

2. Визначити $\hat{z}$ і s за формулами (4.63) і (4.64).

3. Визначити $\underline{Z}_\gamma$ за формулою

$$\underline{Z}_\gamma = z - k_{\hat{P}, \gamma} s, \quad (4.67)$$

де

$$k_{\hat{P}, \gamma} = \frac{u_{\hat{P}} + u_\gamma \sqrt{\frac{1}{n} \left[1 - \frac{u_\gamma^2}{2(n-1)} \right]^2 + \frac{u_{\hat{P}}^2}{2(n-1)}}}{1 - \frac{u_{\hat{P}}^2}{2(n-1)}}; \quad (4.68)$$

квантилі нормального закону $u_{\hat{P}}$, u_γ визначаються за табличними даними для відомих $\hat{P}$ і γ .

Варіант 121 (опрацювання).

1. Вихідні дані: n - об'єм вибірки; $z_{(l)}$ - значення впливового фактора, при якому виявлено відмови m приладів ($m < n$); $x_{1ji}, x_{2ji}, \dots, x_{lji}$ - значення j -го вихідного параметра i -го приладу при $1, 2, \dots, l$ -му ступенях навантаження; n_l - кількість приладів, в яких замірялося значення j -го параметра при дії l -го ступеня навантаження ($n_l \geq 2$).

2. Визначити $\hat{z}$ і s .

а). Знайти оцінки математичного очікування $\hat{x}_{lj}$ і середньоквадратичне відхилення s_{lj} розподілу вихідних параметрів приладів на l -му ступені навантаження за формулами:

$$\hat{x}_{lj} = \frac{1}{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} x_{lji}, \quad (4.69)$$

$$s_{lj} = \frac{1}{n_l - 1} \sum_{i=1}^{n_l} (x_{lji} - \hat{x}_{lj})^2. \quad (4.70)$$

б). Знайдені експериментальні точки апроксимувати лінійною функцією за методом найменших квадратів; визначити значення $\hat{z}_j$ впливаючого фактора, яке відповідає точці перетину теоретичної кривої з допустимим за ТУ значенням j -го параметра x_{jTU} . За оцінку $\hat{z}$ математичного очікування міцності за фактором Z приймається мінімальне з розрахованих значень $\hat{z}_j$:

$$\hat{z} = \min\{\hat{z}_j\}. \quad (4.71)$$

Можна проводити розрахунки тільки за параметрами, які найбільше змінюються під дією фактора.

в). Для навантаження $\hat{z}$, яке визначається за формулою

$$\hat{z} = z_{(1)} - \frac{d}{2}, \quad (4.72)$$

за табличними даними (таблиця А2) знайти значення u_{q1} квантиля нормального закону розподілу, яке відповідає статистичній вірогідності відмови $q1$:

$$q1 = \frac{m}{n}. \quad (4.73)$$

г). Визначити s за формулою

$$s = \frac{z' - \hat{z}}{u_{q1}}. \quad (4.74)$$

Якщо чисельник і знаменник протилежні за знаком або $q1 = 0,5$, то такий розрахунок не можна проводити за формулою (4.74). В цьому випадку необхідно використовувати методику варіантів 41,42 [7] (рис.4.1), підставляючи z' замість z_m і u_{q1} замість u_{z_m} .

Варіант 122 (опрацювання).

1. Вихідні дані: n – об'єм вибірки; $z_{(1)}$ - значення впливового фактора, при якому виявлені відмови m приладів; $z_{(2)}$ - значення впливового фактора, при якому виявлені відмови m_2 приладів ($m_1 + m_2 < n$).

2. Визначити $\hat{z}$ і s за формулами:

$$s = \frac{|z_{(2)} - z_{(1)}|}{u_{q_2} - u_{q_1}}, \quad (4.75)$$

$$z = z_{(1)} \frac{d}{2} - u_{q_1} s, \quad (4.76)$$

де u_{q_1} - статистичний квантиль нормального закону розподілу, який відповідає накопиченій в точці $z_{(1)}$ вірогідності відмови

$$q_{(1)} = \frac{m_1}{n}; \quad (4.77)$$

u_{q_2} - статистичний квантиль нормального закону розподілу, який відповідає накопиченій в точці $z_{(2)}$ вірогідності відмови

$$q_{(2)} = \frac{(m_1 + m_2)}{n}. \quad (4.78)$$

Варіант 132 (опрацювання).

1. Вихідні дані: n – об'єм вибірки; z_m - максимальне випробувальне навантаження.
2. Визначити $\hat{z}$ і s за методикою варіантів 41 та 42 (рис. 4.1).

Варіант 21 (опрацювання).

1. Вихідні дані: n_1, m_1 – об'єм вибірки і кількість виробів, що відмовили, випробуваних під навантаженням z_1 ; n_2, m_2 – об'єм вибірки і кількість виробів, що відмовили, випробуваних під навантаженням z_2 .

2. Визначити $\hat{z}$ і s за формулами

$$s = \frac{|z_2 - z_1|}{u_{q_2} - u_{q_1}}, \quad (4.85)$$

$$z = z_1 - u_{q_1} s, \quad (4.86)$$

де u_{q_1} - статистичний квантиль нормального закону розподілу, що відповідає (отриманій в точці z_1) вірогідності відмови,

$$q_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad (4.87)$$

u_{q_2} - статистичний квантиль нормального закону розподілу, що відповідає отриманій в точці z_2 вірогідності відмови,

$$q_2 = \frac{m_2}{n_2}. \quad (4.88)$$

Варіант 411 (опрацювання).

1. Вихідні дані: n – об’єм вибірки; z_m - випробувальне навантаження; m – кількість виробів, які відмовили під навантаженням z_m ; $\nu=0,35$ – прийнятий коефіцієнт варіації $\nu = \frac{\sigma_z}{m_z}$.

2. Визначити $\hat{z}$ і s .

а). Визначити значення статистичного квантиля u_{z_m} при навантаженні z_m . Якщо $m=0$, то

$$u_{z_m}=u_l^n, \quad (4.89)$$

де u_l^n знайти за табличними даними (таблиця А4) для відомого n і $\gamma = 0,5$; якщо $0 < m < n$, то $u_{z_m} = u_{q_m}$,

$$(4.90)$$

де u_{q_m} - знайти за табличними даними (таблиця А2) для відомого

$$q_m = \frac{m}{n}, \quad (4.91)$$

якщо $m=n$, то

$$u_{z_m} = -u_l^n. \quad (4.92)$$

б). Визначити $\hat{z}$ і s за формулами.

$$\hat{z} = \frac{z_m}{1 + 0,35 u_{z_m}}, \quad (4.93)$$

$$s = 0,35 \hat{z}. \quad (4.94)$$

Варіант 412 (опрацювання).

1. Вихідні дані: n – об’єм вибірки; z_m - випробувальне навантаження; m – кількість виробів, що відмовили під навантаженням z_m ; $\nu = 0,35$ - прийнятий коефіцієнт варіації; $\hat{z}$ - рівень навантаження, відносно якого потрібно визначити гарантії; ν - потрібна достовірність висновків.

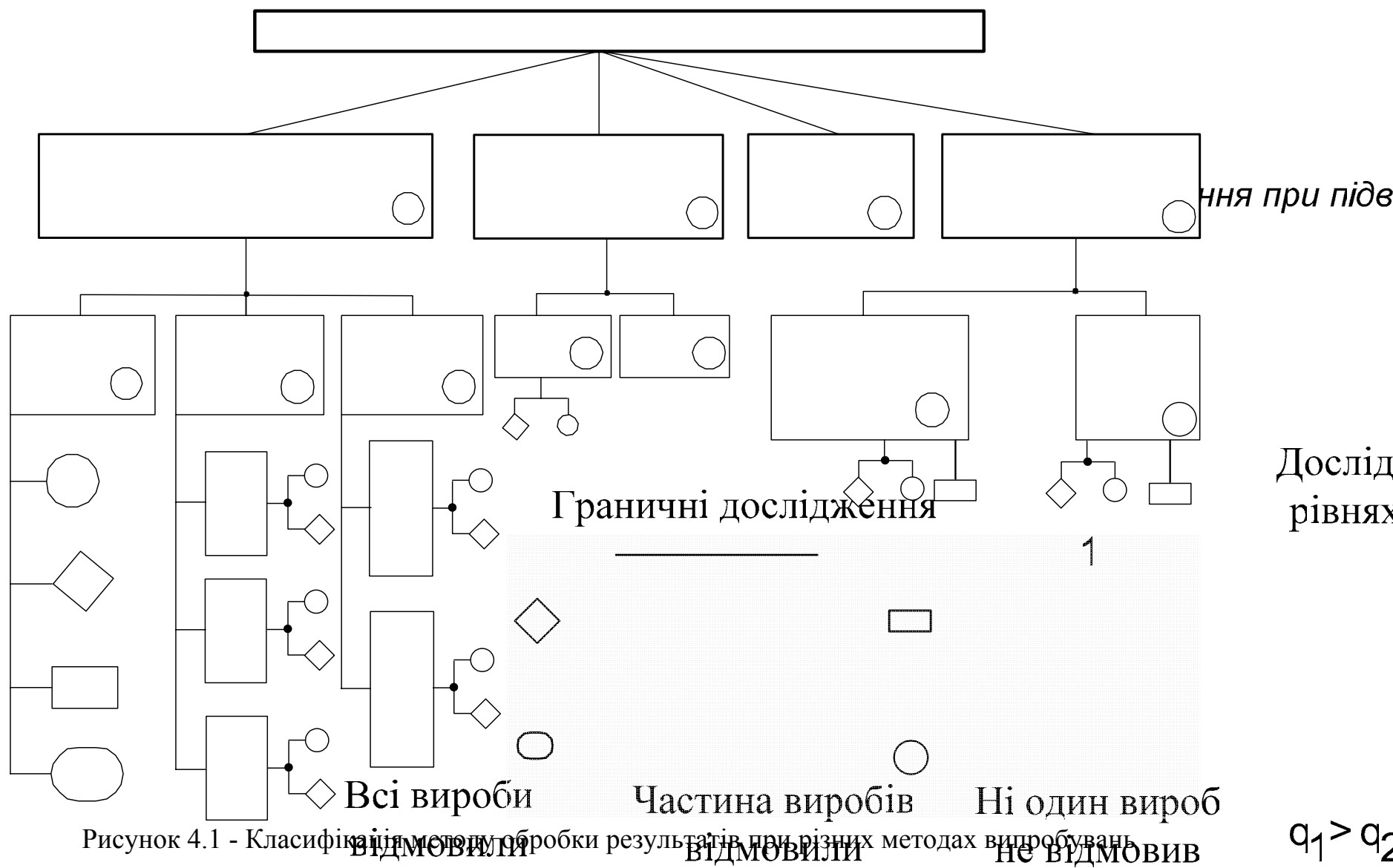
2. Визначити верхню межу границю статистичного квантиля при навантаженні z_m , якщо $m=0$, то

$$\bar{u}_{z_{m\gamma}} = u_{l\gamma}^n, \quad (4.95)$$

де $u_{l\gamma}^n$ - знайти за табличними даними (таблиця А4) для відомих n і γ ; якщо $0 < m < n$, то

$$\bar{u}_{z_{m\gamma}} = \bar{u}_{q_{m\gamma}}, \quad (4.96)$$

де $\bar{u}_{q_{m\gamma}}$ потрібно визначити за табличними даними (таблиця А2) для



94

11

12

13

121

131

$q_1 > q_2$

$$\bar{q}_{m\gamma} = \frac{m}{n} R_2, \quad (4.97)$$

при цьому R_2 знайти за табличними даними (таблиця А5); якщо $m=n$, то

$$\bar{u}_{z_{m\gamma}} = -u_{l\gamma}^n. \quad (4.98)$$

1. Визначити $\underline{P}_\gamma$ за формулою

$$\underline{P}_\gamma = \Phi\left(u_{\underline{P}_\gamma}\right), \quad (4.99)$$

де

$$u_{\underline{P}} = \frac{I}{0,35} \left[I - \frac{\overset{o}{z}}{z_m} (I + 0,35 \cdot \bar{u}) \right]; \quad (4.100)$$

$\hat{O}(u_p) = \int_{-\infty}^{u_p} \exp(-t^2/2) dt$ - інтегральна функція нормованого нормального розподілу, значення її наведені в таблиці А3.

Варіант 421 (опрацювання).

1. Вихідні дані: n – об'єм вибірки; z_m - випробувальне навантаження;

m – кількість виробів, що відмовили під навантаженням z_m ; $\overset{*}{z}$ - передбачуваний (на рівні 3σ) рівень міцності за фактором Z .

2. Визначити $\hat{z}$ і s .

а). Визначити u_{z_m} за методикою варіанта 411 (опрацювання).

б). Визначити $\hat{z}$ і s за формулами

$$s = \frac{\overset{*}{z} - z_m}{3 - u_{z_m}}, \quad (4.101)$$

$$\hat{z} = z_m - u_{z_m} s. \quad (4.102)$$

Варіант 422 (опрацювання).

1. Вихідні дані ті ж, що і до варіанта 421 (опрацювання).

2. Визначити $\underline{P}_\gamma$.

а). Знайти верхню межу статистичного квантиля при навантаженні z_m за методикою варіанту 412 (обрацювання).

б). Визначити $\underline{P}_\gamma$ за формулою

$$\underline{P}_\gamma = \hat{O}\left(u_{\underline{P}_\gamma}\right), \quad (4.103)$$

де

$$u_{\underline{P}_\gamma} = \frac{\left(3 - \bar{u}_{z_{m\gamma}}\right) \left(z_m - \overset{\circ}{z} - \bar{u}_{z_{m\gamma}} s\right)}{z_m - \overset{*}{z}}. \quad (4.104)$$

Варіант 422 (планування).

Формулювання задачі: визначити об'єм і рівень випробувального навантаження z_m для підтвердження частки $\overset{\circ}{P}$ з заданою достовірністю γ , забезпечуючи потрібний ризик виробника α . Приймальна кількість відмов $m = 0$.

1. Вихідні дані: $\overset{\circ}{P}$ - частка виробів, роботоздатність яких під дією заданого навантаження $\overset{\circ}{z}$ необхідно підтвердити; $\overset{*}{P}$ - очікуваний рівень $\left[\overset{*}{P} = 1 - 0,1 \left(1 - \overset{\circ}{P}\right)\right]$; α - ризик виробника; β - ризик замовника (часто приймають $\alpha = \beta$); $\overset{\circ}{z}$ - рівень навантаження, відносно якого потрібно підтвердити потрібні гарантії ($\overset{\circ}{P}$ з достовірністю $\gamma = 1 - \beta$); $\overset{*}{z}$ - передбачуваний (на рівні 3σ) рівень міцності за фактором Z .

2. Визначити необхідний об'єм вибірки (рис. 5.2) для заданих $\overset{\circ}{P}$ і β .

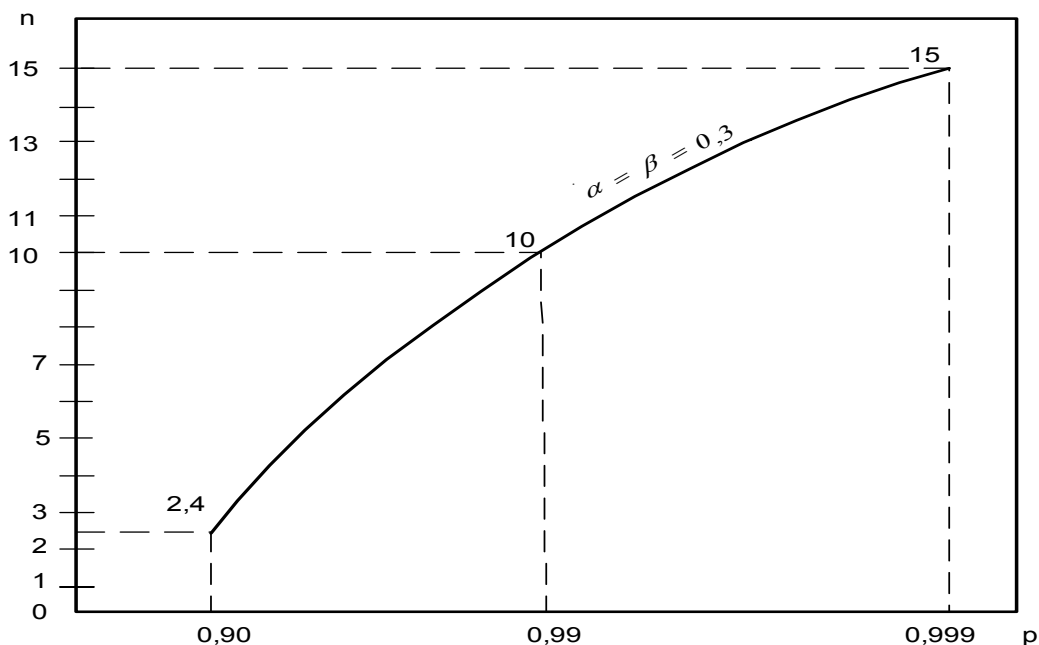


Рисунок 4.2 – Планування випробувань за методом Босса

3. Знайти значення випробувального навантаження z_m за формулою

$$z_m = z + \left(u_{\frac{o}{p}} + u_{1-\frac{q}{\beta}} \right) \frac{x - z}{3 + u_{\frac{o}{p}}}. \quad (4.105)$$

Наведемо декілька прикладів до розглянутих варіантів.

Приклад до варіантів 111, 112 (опрацювання).

По дослідях приладу на вплив ударного навантаження по граничній схемі отримані такі результати.

1. Вихідні дані:

$$z_1 = 600; z_2 = z_3 = z_4 = 900; z_{11} = z_5 = z_6 = z_7 = z_8 = z_9 = z_{10} = 1200;$$

$$z_{12} = z = z_{14} = 1500; n = 14; d = 300.$$

2. Визначити $\hat{z}$ і s за формулами (4.63) і (4.64):

$$\hat{z} = \frac{800 + 3 \times 900 + 7 \times 200 + 4 \times 1500}{14} - 150,0 = 878,5;$$

$$s = \sqrt{\frac{2}{13} (450 - 878,5)^2 + (750 - 878,5)^2 + 7(1050 - 878,5)^2 + 4(1350 - 878,5)^2} = 290,2.$$

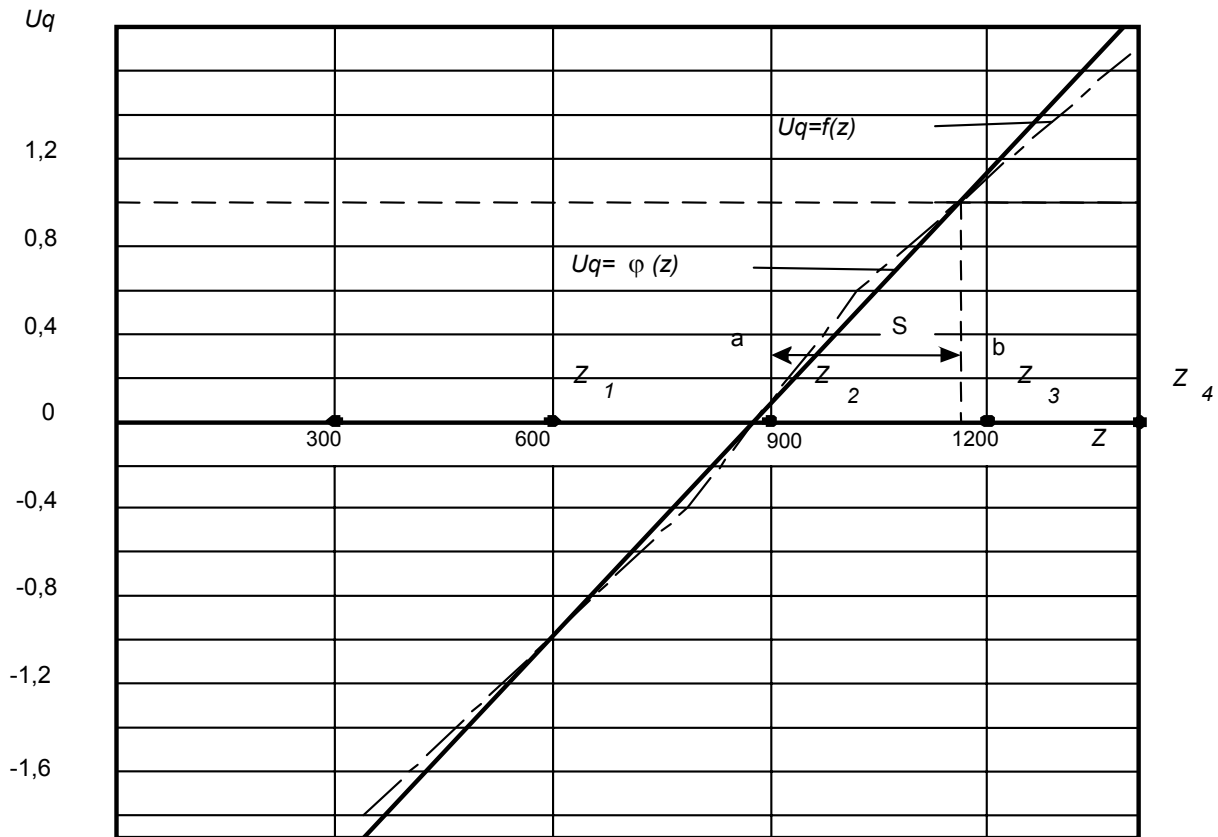


Рисунок 4.3 – Випробування методом “квантилів”

Приклад до варіанту 123 (опрацювання). Опрацювати дані попереднього прикладу за методикою варіанта 123.

1. Вихідні дані:

$$n=14; z_1=600; m_1=1; z_2=900; m_2=3; z_3=1200; m_3=7; z_4=1500; m_4=3.$$

2. Визначити значення вірогідності відмови в точках $z_1; z_2; z_3; z_4$:

$$q_{(1)}^* = 1/15 = 0,0677; \quad q_{(3)}^* = 11/15 = 0,7333;$$

$$q_{(2)}^* = 4/15 = 0,2677; \quad q_{(4)}^* = 14/15 = 0,9333.$$

3. Знайти у табл. А2 значення квантилів $u_{q_{(1)}}^*, u_{q_{(2)}}^*, u_{q_{(3)}}^*, u_{q_{(4)}}^*$ нормального закону розподілу, які відповідають знайденим вище вірогідностям відмови

$$\begin{aligned} u_{q_{(1)}}^* &= -1,5; \quad u_{q_{(3)}}^* = +0,65; \\ u_{q_{(2)}}^* &= -0,62; \quad u_{q_{(4)}}^* = +1,5. \end{aligned} \quad (4.106)$$

4. Побудувати графік $u_{q_{(1)}}^* = f(z)$ (рис. 4.3) по точкам з координатами $\left[z_i - \frac{d}{2}, u_{q_i}^* \right]$.

5. Визначити оцінки $\hat{z}$ і s по кривій (див. рис. 4.2.) Оцінка $\hat{z}$ є значенням абсциси точки перетину прямої $u_{q_{(1)}}^* = f(z)$ з віссю Z (точка a): $\hat{z}=900$. Оцінка s дорівнює різниці абсцис в точках b і a : $s=280$.

Приклад до варіанту 412 (опрацювання).

Було випробувано 14 виробів під навантаженням $z_m = 1500$, відмовили усі.

Визначити $\underline{P}_\gamma$ з достовірністю $\gamma = 0,7$ для навантаження $\hat{z} = 1000$.

1. Вихідні дані:

$$\hat{z} = 1000; n = 14; v = 0,35; z_m = 1500; \gamma = 0,7; m = 14.$$

2. Оскільки $m = n$, то для визначення $\bar{u}_{z_{m\gamma}}$ необхідно скористатися табличними даними (таблиця А4) для $n = 14$ і $\gamma = 0,7$. Шукане $\bar{u}_{z_{m\gamma}}$ дорівнює табличному значенню з протилежним знаком $\bar{u}_{z_{m\gamma}} = +1,392$.

3. Визначити $\underline{P}_\gamma$ за формулою (4.100):

$$u_{P_\gamma} = \frac{1}{0,35} \left[1 - \frac{1000}{1500} (1 + 0,35 \cdot 1,392) \right] = 0,024.$$

4. Визначити $\underline{P}_\gamma$ за табличними даними [7] для знайденого значення $u = 0,024$: $\underline{P}_\gamma = 0,51$.

Приклад до варіанта 422 (планування). Визначити об'єм вибірки і рівень випробувального навантаження для підтвердження надійності $P = 0,999$ з достовірністю $\gamma = 0,9$ при заданому навантаженні $\overset{\circ}{z} = 1000$, забезпечуючи при цьому ризик виробника $\alpha = 0,1$ для рівня $\overset{*}{P} = 0,9999$. Приймаємо кількість відмов $m = 0$. Відомо також, що трисигмову межу міцності виробів за фактором Z можна прийняти такою, що дорівнює 2500.

1. Вихідні дані:

$$\overset{\circ}{P} = 0,999; \overset{*}{P} = 0,9999; \alpha = \beta = 0,3; \overset{\circ}{z} = 1000; \overset{*}{z} = 2500.$$

2. Визначити необхідний об'єм вибірки (див. рис. 4.2) для заданого $\overset{\circ}{P}$: $n = 15$.

3. Визначити значення випробувального навантаження z_m за формулою (4.106)

$$z_m = 1000 + (3,09 + u_{1-15\sqrt{0,3}}) \frac{2500 - 1000}{3 + 3,09} = 1410.$$

5 Лабораторна робота № 1 МЕТОД КОНТРОЛЬНИХ МЕЖ

5.1 Мета роботи. Робота ставить за мету ознайомити з методом статистичної обробки даних - методом контрольних меж. В роботі розглядається метод статистичного регулювання якості. В основі статистичного регулювання лежить метод перевірки статистичних гіпотез.

5.2 Хід роботи

1. Ознайомтеся з описом комп'ютерної моделі генератора результатів вимірювань.

2. За допомогою комп'ютерної моделі побудуйте модель вимірювання показника якості продукції у.

Кожне вимірюване значення y_{li} імітує значення показника якості у для i -го елемента продукції в умовах відсутності систематичної похибки.

3. Проведіть "попередні дослідження":

а) прийміть обсяг спроби $n = 4$;

б) прийміть кількість спроб $m = 16$;

в) запишіть послідовно $n_0 = n \cdot m$ значень y_l ;

г) для кожної проби підрахуйте $\bar{y}_g$ і $R_g = Y_{lgmax} - Y_{lgmin}$

4. За даними "попередніх досліджень" визначте оцінки $\hat{y}_0, \hat{R}, \hat{\sigma}$.
5. Розрахуйте попередні контрольні границі $K'_{\hat{A}\bar{y}}, K'_{H\bar{y}}, K'_{\hat{A}R}$ за умови $\alpha_1 = 0,0027$ і $\alpha_2 = 0,012$.
6. Побудуйте діаграму для даних "попередніх досліджень":
 - а) нанесіть на гістограму попередні границі $K'_{\hat{A}\bar{y}}, K'_{H\bar{y}}, K'_{\hat{A}R}$;
 - б) нанесіть на діаграму значення $\bar{y}_g$ і R_g , що розраховані для кожної спроби;
 - в) знайдіть і відкиньте проби, що не відповідають стабільному ходу процесу;
 - г) уточніть з урахуванням відкинутих проб оцінки $\hat{y}_0, \hat{R}, \hat{\sigma}$ і розрахуйте остаточні контрольні межі $K_{\hat{A}\bar{y}}, K_{H\bar{y}}, K_{\hat{A}R}$.

7. За умови $T_n = T_g = T$ для даного поля допуску $\delta = 2T$ (значення T задається відповідно до номеру варіанта) і знайденою оцінкою $\hat{\sigma}^2$ визначте очікувану частину браку y .

8. Використовуючи дані "попередніх досліджень", що відповідають стабільному ходу процесу, підрахуйте фактичну відносну величину браку і порівняйте її з розрахунковим значенням q . Для підрахунку q використовуйте співвідношення $\hat{q} = \frac{l_{00}}{n_{00}}$, де n_{00} - загальна кількість даних "попередніх досліджень", які отримали після виключення з n_0 проб, що не відповідають стабільному ходу процесу (дивись пункт 6 в); l_{00} - кількість вимірювань y_1 у сукупності n_{00} , для яких величина за модулем $(y_1 - \hat{y}_0)$ переважає значення допуску T (тобто l_{00} - кількість бракованих елементів продукції в сукупності n_{00}).

9. Побудуйте контрольну карту $\bar{y} / R$:
 - а) нанесіть контрольні межі і поле допуску T_g, T_n на діаграму середніх значень $\bar{y}_g$;
 - б) нанесіть контрольні границі K_{BR} і $K_{BR} = 0$ на діаграму розмахів

Між діаграмою $\bar{y}_g$ і діаграмою R_g передбачте місце для запису по будь-якої g -й пробі:

- всіх значень показника якості y_{lig} ;
- суми значень $\sum_{i=1}^4 y_{lig}$;
- середніх значень $\bar{y}_{ig} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_{ig}$;
- найбільшого Y_{lgmax} ;

- найменшого Y_{lmin} із значення показника якості;
- розмаху R_g .

5.3 Приклад виконання завдання

5.3.1 Завдання

Цех гумових виробів служби ремонтів електроенергетичної системи виготовляє гумові ущільнювачі для повітряних вимикачів. Показником якості є розмір зовнішнього діаметра ущільнення під ізолятор опори камери повітряного вимикача - $202 \pm 0,5$ мм. Тому $T_e = T_n = 0,5$ мм.

Скористайтесь комп'ютерною моделлю генератора результатів вимірювань і отримайте результати вимірювань, які проводились один раз на годину на чотирьох деталях - гумових ущільнювачах протягом двох змін, тобто за 16 годин. Загальна кількість перевірених деталей - $16 \cdot 4 = 64$.

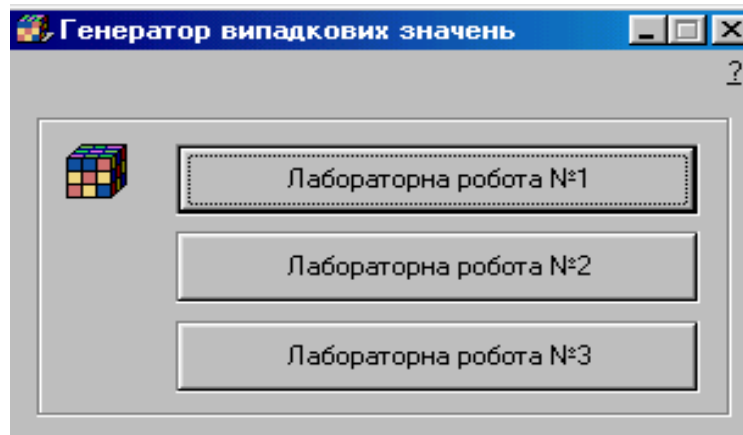


Рисунок 5.1 – Початкова екранна заставка комп'ютерної моделі генератора результатів вимірювань.

Побудуйте контрольну карту типу "середнє-розмах".

Проаналізуйте, чи потрібна зупинка виробництва?

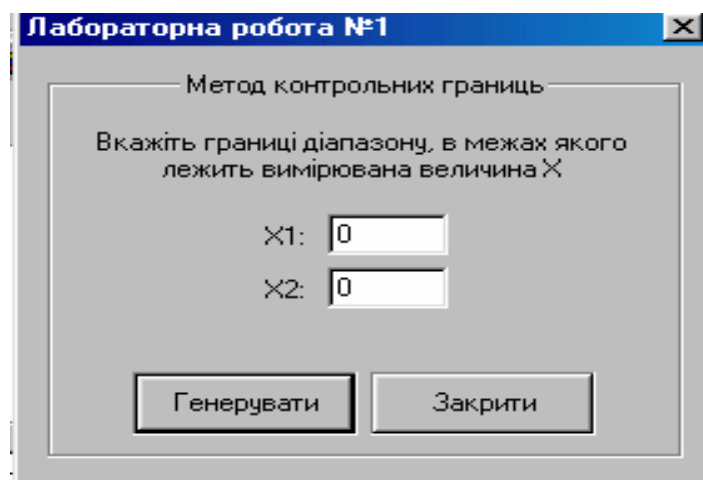


Рисунок 5.2 - Вигляд "вікна" на екрані для введення меж зміни вимірюваної величини

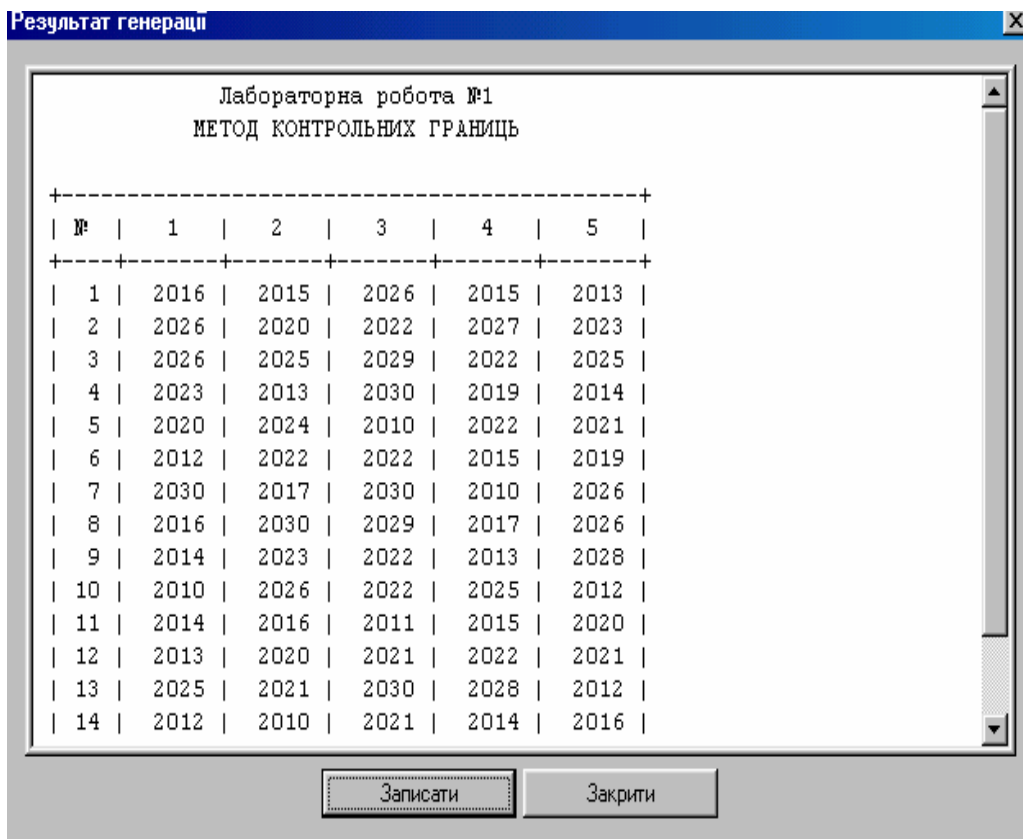


Рисунок 5.3 - Запис результатів вимірювань в файл

Порахуйте та порівняйте допустиму та реальну частку браку в готових виробах та зробіть висновок щодо якості продукції та технологічного процесу.

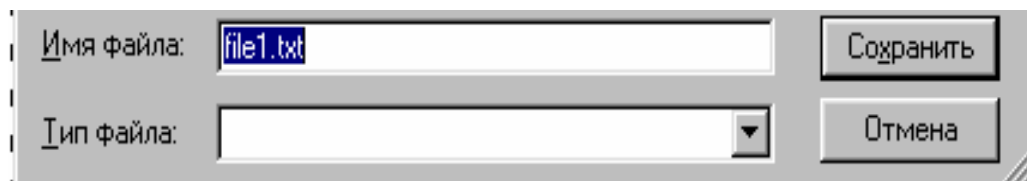


Рисунок 5.4 - Запис імені файлу для збереження результатів вимірювань

5.3.2 Рішення задачі

1. В середовищі операційної системи "Windows" запускаємо виконуваний файл **Randomer.exe**.
2. Вибираємо кнопку "Лабораторна робота №1" (рисунок 5.1).
3. По завданню викладача вводимо початкове (203,0) і кінцеве значення діаметрів (201,0) та натискаємо кнопку "Генерувати" (рисунок 5.2).
4. На наступній екранній вкладці натискаємо на кнопку "Записати" (рисунок 5.3). Далі вводимо ім'я, тип файлу і натискаємо кнопку "Сохранить" (рисунок 5.4).

5. Отримані результати із файлу переписуємо в контрольну карту в комірці Y_i так, як це показано на рисунках 5.5 та 5.6. Дані записують в стовпці по п'ять результатів вимірювань в спробі (одна спроба за годину, вісім проб за зміну, шістнадцять проб за дві зміни).

6. Знаходимо суму результатів вимірювань в кожній спробі, наприклад в першій

$$\text{сума} = \sum_{i=1}^5 y_i = 201,6 + 201,5 + 202,6 + 201,5 + 201,3 = 1008,5 \text{ мм.}$$

7. Знаходимо середнє значення результатів вимірювань в першій спробі

$$Y_{\text{середнє}} = \bar{y}_I = \frac{1}{5} \cdot 1008,5 = 201,7 \text{ мм.}$$

Y_i	201,6	202,6	202,6	202,3	202
	201,5	202	202,5	201,3	202,4
	202,6	202,2	202,9	203	201
	201,5	202,7	202,2	201,9	202,2
	201,3	202,3	202,5	201,4	202,1
сума	1008,5	1011,8	1012,7	1009,9	1009,7
$Y_{\text{середнє}}$	201,7	202,36	202,54	201,98	201,94
$Y_{i \text{ макс.}}$	202,6	202,7	202,9	203	202,4
$Y_{i \text{ мін.}}$	201,3	202	202,2	201,3	201
R	1,3	0,7	0,7	1,7	1,4

Рисунок 5.5 - Приклад занесення даних в контрольну карту

8. З результатів вимірювань в першій спробі вибираємо максимальний $Y_{I \text{ макс.}}$ та мінімальний результати $Y_{i \text{ мін.}}$

$$Y_{I \text{ макс.}} = 202,6 \text{ мм;}$$

$$Y_{I \text{ мін.}} = 201,3 \text{ мм.}$$

9. Знаходимо максимальний розмах результатів вимірювань в першій спробі

$$R_I = Y_{I \text{ макс.}} - Y_{I \text{ мін.}} = 202,6 - 201,3 = 1,3 \text{ мм.}$$

10. Побудуємо гістограми отриманих середніх значень для кожної спроби та відповідно максимальних розмахів (рисунок 5.4).

11. Порахуємо оцінки (для кількості проб $m = n_0/n = 16 \cdot 5/5 = 80/5 = 16$ проб, для загальної кількості перевірених деталей $n_0 = 16 \cdot 5 = 80$ штук; для кількості вимірювань в одній спробі $n = 5$ штук)

$$\hat{y}_0 = \bar{y} = \frac{1}{16} \cdot \sum_{g=1}^{16} \bar{y}_g = (201,7 + 202,36 + 202,54 + 201,98 + 201,94 + 201,8 + 202,26 + 202,36 + 202 + 201,9 + 201,52 + 201,94 + 202,32 + 201,46 + 202,48 + 202)/16 = 202,04 \text{ мм;}$$

$$\hat{R} = \bar{R} = \frac{1}{16} \sum_{g=1}^{16} R_g = (1,3+0,7+0,7+1,7+1,39999+1+2+1,39999+1,5+1,60001+0,89999+0,89999+1,8+1,10001+0,89999+1,8)/16 = 1,294 \text{ мм};$$

$$\sigma = \frac{\frac{\Lambda}{R}}{d} = \frac{1,294}{2,33} = 0,55526 \text{ мм},$$

де $d = 2,33$ знаходимо з таблиці 1.8 (для об'єму деталей у спробі $n=5$).



Рисунок 5.7 - Цех гумо-технічних виробів служби ремонтів
Південно-Західної електроенергетичної системи



Рисунок 5.8 - Прес для виробництва гумових ущільнювачів вимикачів

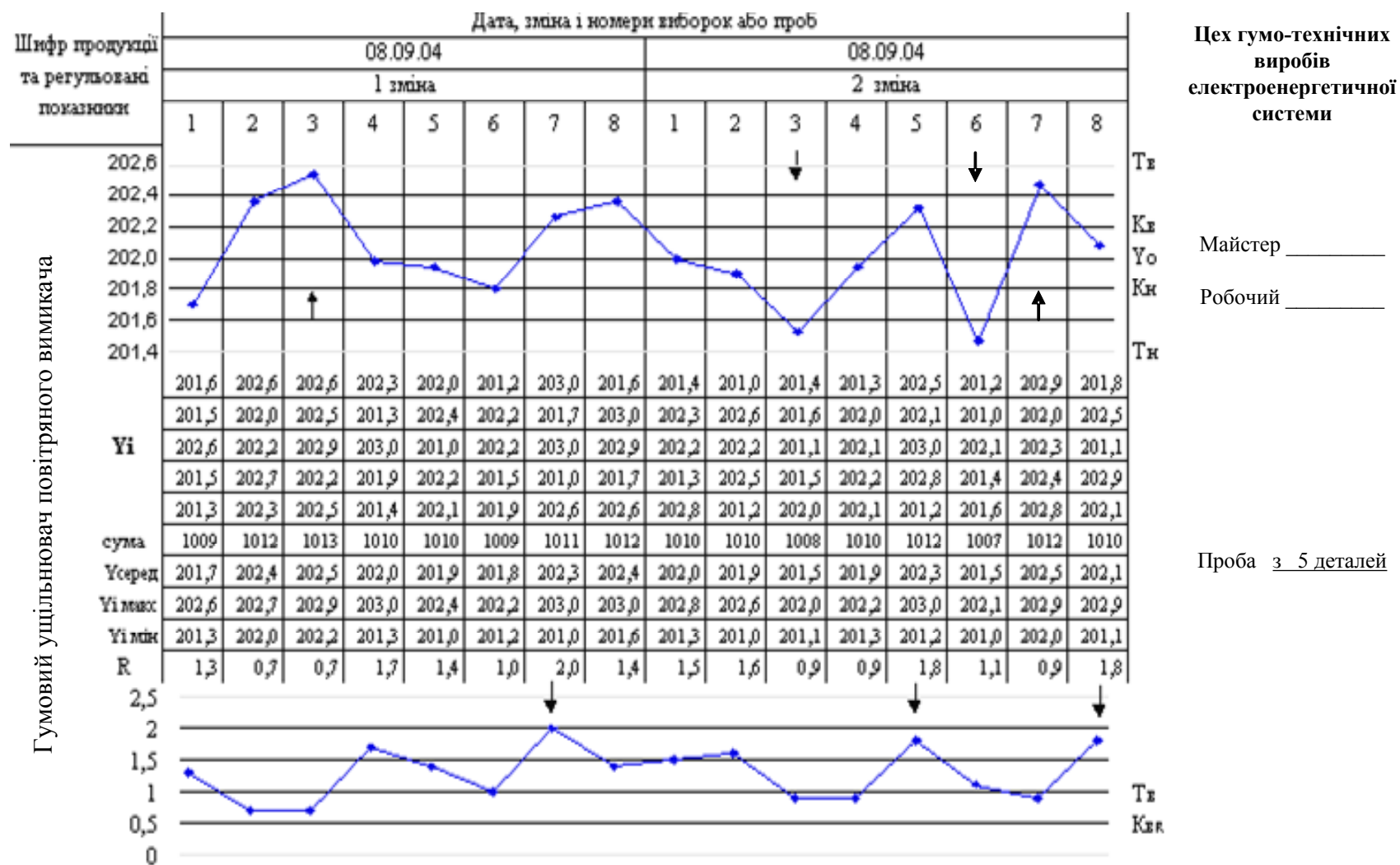


Рисунок 5.6 - Загальний вигляд контрольної карти типу "середнє – розмах"

Перевіримо $\hat{\sigma}$ більш точним методом

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{80 - 1} \cdot 28,452} = \sqrt{0,36015} = 0,60013 \approx 0,6 \text{ мм},$$

де $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = [(201,6 - 202,04)^2 + (203 - 202,04)^2 + (202,9 - 202,04)^2 + (201,704 - 202,04)^2 + (202,6 - 202,04)^2] + [(201,4 - 202,04)^2 + (202,3 - 202,04)^2 + (202,2 - 202,04)^2 + (201,3 - 202,04)^2 + (202,8 - 202,04)^2] + [\dots + (202,1 - 202,04)^2] = 1,63800 + 0,84400 + 50200 + 1,96600 + 1,24200 + 1,06800 + 3,35400 + 2,28400 + 1,62800 + 2,33800 + 1,78000 + 0,58200 + 2,42000 + 2,39400 + 1,51600 + 1,89600 = 28,45200 \text{ мм}^2.$

Похибка при спрощеному визначенні $\hat{\sigma}$ не перевищує

$$\frac{0,60013 - 0,55526}{0,60013} \cdot 100\% = 7,5\%.$$

12. Вважаємо виробництво стабільним. Тому результати вимірювань повинні бути постійною величиною. Порахуємо попередню верхню контрольну межу (за умови двосторонніх меж) для середніх значень за умови, що рівень значимості $\alpha_1 = 0,0027$, а довірна імовірність

$$p_1 = 1 - \alpha_1 = 1 - 0,0027 = 0,9973$$

$$K_{\hat{a} \bar{y}} = \hat{y}_0 + U_{\left(\frac{1+p_1}{2}\right)} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n_0}} = 202,04 + U_{\left(\frac{1+0,9973}{2}\right)} \cdot \frac{0,60013}{\sqrt{80}} = 202,04 + 3 \cdot 0,067097 = 202,04 + 0,20129 = 202,2413 \text{ мм};$$

квантиль нормального нормованого закону розподілу $U_{\left(\frac{1+p_1}{2}\right)} = U_{\left(\frac{1+0,9973}{2}\right)} \approx 3$

13. Порахуємо попередню нижню контрольну межу за умови $\alpha_1 = 0,0027$:



Рисунок 5.9 - Обладнання цеху гумо-технічних виробів



Рисунок – 5.10 – Продукція цеху гумо-технічних виробів

$$K_{i \bar{y}} = \hat{y}_0 - U_{\left(\frac{1+pI}{2}\right)} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n_0}} = 202,04 - 3 \cdot \frac{0,60013}{\sqrt{80}} = 202,04 - 3 \cdot 0,067097 = 202,04 - 0,20129 = 201,8387 \text{ мм.}$$

14. Порахуємо попередню верхню контрольну межу розмахів при $\alpha_2 = 0,012$:

$$K_{\hat{a}\hat{R}} = d_0 \hat{R} = 1,96 \cdot 1,294 = 3,54575 \text{ мм.}$$

Значення коефіцієнта $d_0 = 1,96$ знаходимо при $\alpha_2 = 0,012$ з таблиці 1.6.

15. Стрілками позначимо на контрольній карті аномальні точки:

- для середніх значень – це точки 202,5 мм; 202,5 мм; 201,5 мм; 201,5 мм;
- для значень розмахів – це точки 2,0 мм; 1,8 мм; 1,8 мм.

Ці спроби потрібно відкинути тому, що вони не відповідають стабільному ходу технологічного процесу, вони можуть бути випадковими, помилковими результатами вимірювань. Якщо загальна кількість спроб була – 16, а кількість спроб з нестабільними результатами – 7, то до уваги по-

трібно взяти лише 9 спроб зі стабільними (може статися, що і поганими – "брак") результатами. Тому:

$$\begin{aligned}\hat{y}_0 = \bar{y} &= \frac{1}{9} \cdot \sum_{g=1}^9 \bar{y}_g = \\ &= 201,7 + 202,4 + 202,0 + 201,9 + 201,8 + 202,4 + 202,0 + 201,9 = 1818,0 / 9 = 201,998 \text{ мм}; \\ \hat{R} = \bar{R} &= \frac{1}{9} \sum_{g=1}^9 R_g = (1,3 + 0,7 + 1,7 + 1,4 + 1,0 + 1,4 + 1,5 + 1,6 + 0,9) / 9 = 1,3 \text{ мм}; \\ \hat{\sigma} &= \frac{\hat{R}}{d} = \frac{1,3}{2,33} = 0,5484 \approx 0,55 \text{ мм};\end{aligned}$$

або більш точний розрахунок

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{n'_0 - 1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{45 - 1} \cdot 15,019} = \sqrt{0,34134} = 0,58424 \approx 0,58 \text{ мм}; \\ K_{\hat{a} \bar{y}} &= \hat{y}_0 + U_{\left(\frac{1+pI}{2}\right)} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n'_0}} = 201,998 + U_{\left(\frac{1+1-0,0027}{2}\right)} \cdot \frac{0,58424}{\sqrt{45}} = 201,998 + \\ &+ 3 \cdot 0,087093357 = 201,998 + 0,261280071 = 202,2592801 \approx 202,3 \text{ мм}; \\ K_{\hat{i} \bar{y}} &= \hat{y}_0 - U_{\left(\frac{1+pI}{2}\right)} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n'_0}} = 201,998 - U_{\left(\frac{1+1-0,0027}{2}\right)} \cdot \frac{0,58424}{\sqrt{45}} = \\ &= 201,998 - 3 \cdot 0,087093357 = 201,998 - 0,261280071 = 201,7367199 \approx 201,7 \text{ мм}; \\ K_{BR}^{\wedge} &= d_0 \hat{R} = 1,96 \cdot 1,3 = 2,548 \text{ мм при } \alpha_2 = 0,012.\end{aligned}$$

Як бачимо, велика різниця між результатами вимірювань призвела до того, що максимально допустиме коливання між результатами вимірювань для контрольованого ущільнювача $\delta = T_{\sigma} + T_{\pi} = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ мм}$, а отримана за розрахунками (за результатами вимірювань) межа $K_{BR}^{\wedge} = 2,548 \text{ мм}$.

Якщо $K_{\hat{a} \hat{R}} \leq \delta$, то це означає, що **потрібно обов'язкове налагодження обладнання**.

16. Згідно з завданням та технічними умовами на контрольоване ущільнення $\varnothing = 202 \pm 0,5 \text{ мм}$, $T_{\pi} = T_B = T = 0,5 \text{ мм}$. Для заданого поля допуску $\delta = 2T$ та враховуючи знайдену оцінку $\hat{\sigma} = 0,548 \text{ мм}$ визначаємо очікувану частку браку q

$$\begin{aligned}q, \% &= 2 \left(0,5 - \Phi_{\left(\frac{T}{\sigma}\right)} \right) \cdot 100 = \left(0,5 - \Phi_{\left(\frac{0,5}{0,58}\right)} \right) \cdot 100 = (0,5 - 0,3057) \times \\ &\times 100 = 0,389 \cdot 100 = 38,9 \%\end{aligned}$$

де $\Phi\left(\frac{T}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0,5}{0,58}\right) = \Phi_{(0,862)} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{0,862} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,305675$ з таблиці 5.1;

або

$$q, \% = \left(1 - \Phi'\left(\frac{T}{\sigma}\right)\right) \cdot 100 = \left(1 - \Phi'\left(\frac{0,5}{0,58}\right)\right) \cdot 100 = (1 - 0,611) \cdot 100 = 0,389 \cdot 100 = 38,9\%,$$

де $\Phi'\left(\frac{T}{\sigma}\right) = \Phi'\left(\frac{0,5}{0,58}\right) = \Phi'_{(0,862)} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-0,862}^{0,862} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,611.$

Як бачимо обидва результати розрахунку очікуваної частки браку збігаються.

17. Використовуючи дані попередніх вимірювань, які відповідають стабільному ходу технологічного процесу, підрахуємо фактичну величину браку $\hat{q}$ і порівняємо її з розрахованим очікуваним значенням браку q

$$\hat{q} = \frac{l_{00}}{n_{00}} \cdot 100\% = \frac{11}{45} \cdot 100\% = 24,44\%,$$

де $n_{00} = 45$ – загальна кількість попередніх вимірювань, яка була отримана після виключення з n_0 тих проб, які не відповідали стабільному ходу технологічного процесу;

$l_{00} = 11$ – кількість вимірювань y_1 у сукупності n_{00} , для яких величина $(y_1 - \hat{y}_0)$ за модулем переважає значення допуску T (тобто l_{00} – число бракованих елементів продукції в сукупності n_{00}).

Це результати: 201,2; 203,0; 202,9; 202,6; 201,4; 201,3; 202,8; 201,0; 202,6; 201,2; 201,3 мм.

Фактичне значення браку менше за очікуване тому, що 24,44% менше 38,9%. Тому згідно з вимогами статистичного регулювання якістю продукції виробництво за цим параметром дозволяється не припиняти.

Але 24,44% свідчать про недосконалість виробництва, технології та обладнання. Про це ж свідчить і карта розмахів. На ній $K_{BR}^{\wedge} < \delta$.

Висновок. Технологічний процес бажано зупинити для налагодження обладнання з метою отримання стабільнішого виробництва.

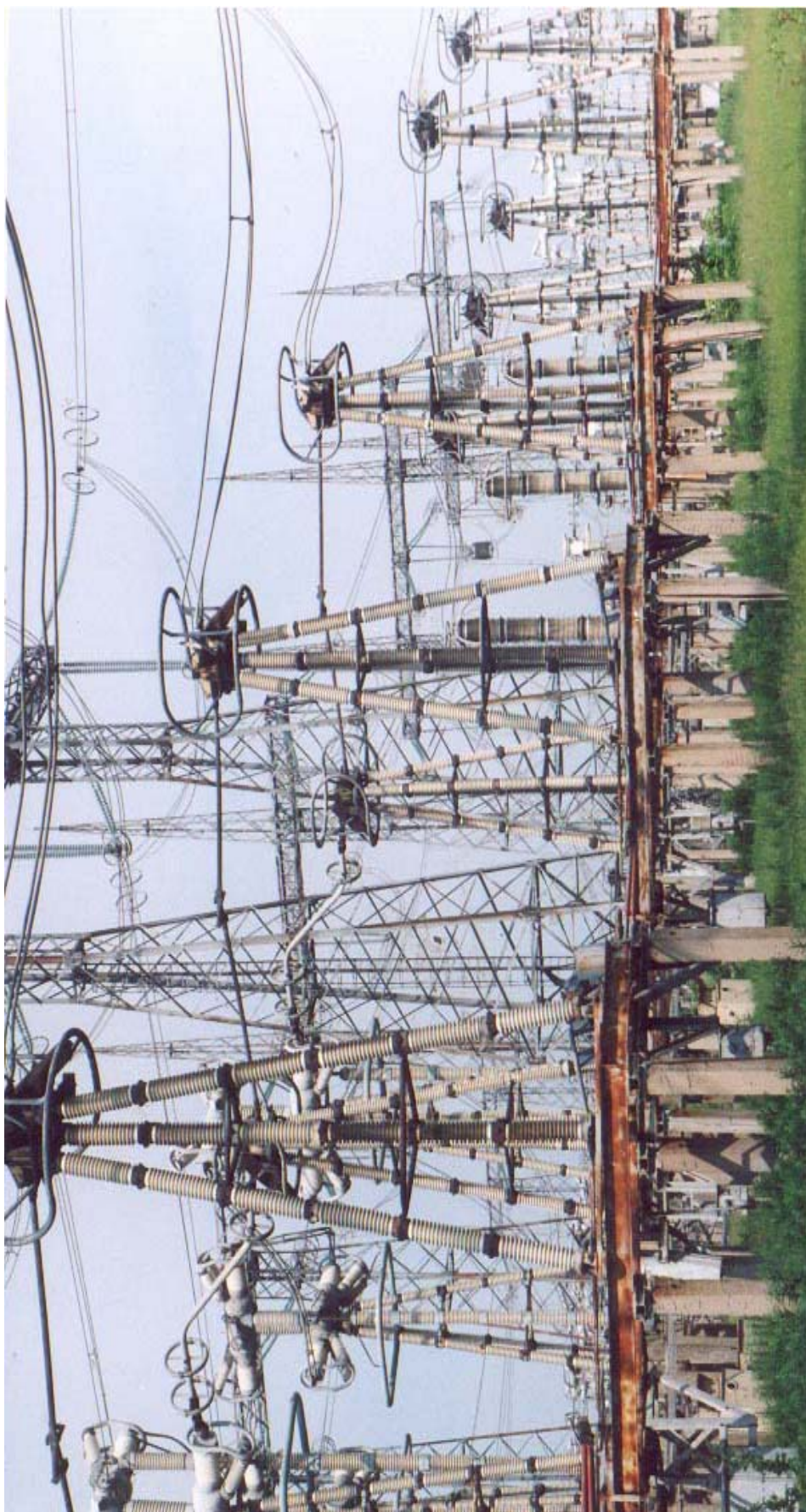


Рисунок 5.11 – Високовольтні повітряні вимикачі та роз'єднувачі підстанції «Вінницька 750 кВ»

Таблиця 5.1 – Нормована функція Лапласа $\phi = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

t	Соті частки від t									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>l</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>
0,0	0,0000	0,004	0,0080	0,012	0,016	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2511	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2861	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3415	0,3437	0,3461	0,3435	0,3508	0,3583	0,3554	0,3577	0,3599	0,3623
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	207	227	236	251	265	279	29,2	306	319
1,5	0,4232	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	0,4452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	0,4554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	0,4641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	0,4713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	0,4772	778	783	788	793	798	803	808	812	817
2,1	0,4821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2	0,480	864	867	871	874	877	880	883	886	889
	966	474	906	263	545	755	894	962	962	893
2,3	0,4893	895	898	900	903	906	908	911	913	915
	753	659	296	969	581	533	625	060	437	758
2,4	0,4918	920	922	924	926	928	930	932	934	936
	025	237	397	506	564	572	531	493	308	128

Продовження таблиці 5.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2,5	0,4937 903	939 634	941 323	942 969	944 574	946 139	947 664	949 151	950 600	952 012
2,6	0,4953 388	954 729	956 035	957 308	958 547	959 754	960 930	962 074	963 089	964 274
2,7	0,4965 330	966 358	967 359	968 333	969 280	970 202	971 099	971 972	972 821	973 646
2,8	0,4974 449	975 229	975 988	976 726	977 443	978 140	978 818	979 476	980 116	980 738
2,9	0,4981 342	981 929	982 498	983 052	983 689	984 111	984 618	985 110	985 588	986 051
3,0	0,4986 501	986 938	987 361	987 772	988 171	988 558	988 933	989 297	989 650	989 992
3,1	0,4990 324	990 646	990 957	991 260	991 553	991 836	992 112	992 378	992 636	992 886
3,2	0,4993 129	993 363	993 590	993 810	994 024	994 230	994 429	994 623	994 810	994 991
3,3	0,4995 166	0,4995 335	0,4995 499	0,4995 658	0,4995 811	0,4995 959	0,4996 103	0,4996 242	0,4996 376	0,4996 505
3,4	0,4996 631	0,4996 752	0,4996 689	0,4996 982	0,4997 091	0,4997 197	0,4997 299	0,4997 398	0,4997 493	0,4997 585
3,5	0,4997 674	0,4997 759	0,4997 842	0,4997 922	0,4997 999	0,4998 074	0,4998 146	0,4998 215	0,4998 282	0,4998 347
3,6	0,4998 409	0,4998 469	0,4998 527	0,4998 583	0,4998 637	0,4998 689	0,4998 739	0,4998 787	0,4998 834	0,4998 879
3,7	0,4998 922	0,4998 964	0,4999 004	0,4999 043	0,4999 080	0,4999 116	0,4999 150	0,4999 184	0,4999 216	0,4999 247
3,8	0,4999 274	0,4999 305	0,4999 333	0,4999 359	0,4999 385	0,4999 409	0,4999 433	0,4999 456	0,4999 478	0,4999 499
3,9	0,4999 519	0,4999 539	0,4999 557	0,4999 575	0,4999 593	0,4999 609	0,4999 625	0,4999 641	0,4999 655	0,4999 670
4,0	0,4999 683	0,4999 696	0,4999 709	0,4999 721	0,4999 733	0,4999 744	0,4999 755	0,4999 765	0,4999 775	0,4999 784
4,1	0,4999 793	0,4999 802	0,4999 811	0,4999 819	0,4999 826	0,4999 834	0,4999 841	0,4999 848	0,4999 854	0,4999 861
4,2	0,4999 867	0,4999 872	0,4999 878	0,4999 883	0,4999 888	0,4999 893	0,4999 898	0,4999 902	0,4999 907	0,4999 911
4,3	0,4999 915	0,4999 918	0,4999 922	0,4999 925	0,4999 929	0,4999 932	0,4999 935	0,4999 938	0,4999 941	0,4999 943
4,4	0,4999 946	0,4999 948	0,4999 951	0,4999 953	0,4999 955	0,4999 957	0,4999 959	0,4999 961	0,4999 963	0,4999 964
4,5	0,4999 966	0,4999 966	0,4999 969	0,4999 971	0,4999 972	0,4999 973	0,4999 974	0,4999 976	0,4999 977	0,4999 978
4,6	0,4999 997									

5.4 Варіанти завдань

Група №1

У трубчатих розрядників початкова довжина внутрішнього іскрового проміжку повинна знаходитись в межах, що відповідають вимогам [8]. Початкові дані до розрахунку наведені в таблиці 5.2. З'ясуйте стан розрядника та якість вимірювань.

Таблиця 5.2 – Варіанти завдань першої групи

№ студента у списку групи	Тип розрядника	Результати вимірювань, мм		Допустиме відхилення параметра, мм	Нормоване значення параметра, мм
		Мінімальний результат	Максимальний результат		
1	РТФ-6	147,5	152	±2	150
2	РТФ-6	148,5	152	±2	150
3	РТФ-6	149,5	152	±2	150
4	РТФ-6	150,0	152	±2	150
5	РТФ-6	147,5	149	±2	150
6	РТФ-6	147,5	150	±2	150
7	РТФ-6	147,5	151	±2	150
8	РТФ-6	147,5	153	±2	150
9	РТФ-6	148,0	152	±2	150
10	РТФ-6	148,5	151	±2	150
11	РТФ-6	149	151	±2	150
12	РТФ-10	223,5	227	±2	225
13	РТФ-10	224,0	227	±2	225
14	РТФ-10	224,5	227	±2	225
15	РТФ-10	225,0	227	±2	225
16	РТФ-10	225,5	227	±2	225
17	РТФ-10	225,0	226,5	±2	225
18	РТФ-10	224,5	226,5	±2	225
19	РТФ-10	224,5	226,5	±2	225
20	РТФ-10	224,0	226,5	±2	225
21	РТФ-35	248	252,5	±2	250
22	РТФ-35	248,5	252,5	±2	250
23	РТФ-35	249	252,5	±2	250
24	РТФ-35	249,5	252,5	±2	250
25	РТВ-110	450	452	±2	450
26	РТВ-110	448	451,5	±2	450
27	РТВ-110	448	451,0	±2	450
28	РТВ-110	447,5	452	±2	450
29	РТВ-110	447,5	452,5	±2	450
30	РТВ-110	448	451,0	±2	450

Група №2.

Вимірювання опору постійного струму подільників напруги та шунтувальних резисторів виконується при введенні високовольних повітряних вимикачів в експлуатацію після капітального ремонту та при середньому ремонті[8]. З'ясуйте стан подільників напруги та шунтувальних резисторів повітряних вимикачів та якість вимірювань.

Таблиця 5.3 - Варіанти завдань другої групи

№ студента у списку групи	Тип вимикача	Результати вимірювань, Ом		Допустиме відхилення параметра, Ом	Нормоване значення па- раметра, Ом
		мінімальний результат	максимальний результат		
1	ВВН-110-6	145	155	± 5	150
2	ВВН-110-6	146	151	± 5	150
3	ВВН-110-6	147	153	± 5	150
4	ВВН-110-6	148	156	± 5	150
5	ВВН-154-8	14850	15150	± 150	15000
6	ВВН-154-8	14870	15120	± 150	15000
7	ВВН-154-8	14830	15100	± 150	15000
8	ВВН-154-8	14950	15170	± 150	15000
9	ВВН-154-8	14950	15000	± 150	15000
10	ВВ-330	14100	14300	± 140	14140
11	ВВ-330	14200	14280	± 140	14140
12	ВВ-330	14100	14140	± 140	14140
13	ВВ-330	14050	14150	± 140	14140
14	ВВ-330	14080	14200	± 140	14140
15	ВВУ-110	4,97	5,3	$\pm 0,3$	5
16	ВВУ-110	4,98	5,2	$\pm 0,3$	5
17	ВВУ-110	4,97	5,1	$\pm 0,3$	5
18	ВВУ-110	4,99	5,4	$\pm 0,3$	5
19	ВВУ-110	4,99	5,6	$\pm 0,3$	5
20	ВВБМ-110Б	49,5	51	± 1	50
21	ВВБМ-110Б	49,8	51	± 1	50
22	ВВД-220Б	49,1	50,2	± 1	50
23	ВВБМ-110Б	49	50,3	± 1	50
24	ВВБМ-110Б	49	50,8	± 1	50
25	ВВБ-110	98	102	± 2	100
26	ВВБ-110	98	101	± 2	100
27	ВВБ-110	98,5	100,5	± 2	100
28	ВВБ-110	99	101	± 2	100
29	ВВБ-110	97	103	± 2	100
30	ВВН-330-15	14955	15090	± 150	15000

Група №3.

При поопераційних випробовуваннях при ремонті обмотки статора турбогенераторів витрати води на стержень (або напівстержень в стержнях, які складаються з двох половинок) були [8]:

Таблиця 5.4 - Варіанти завдань третьої групи

№ студента у списку групи	Тип генератора	Результати вимірювань, л/с		Допустиме відхилення параметра, л/с	Нормоване значення параметра, л/с
		мінімальний результат	максимальний результат		
1	TBB-160-2E	0,187	0,25	$\pm 0,04$	0,21
2	TBB-160-2E	0,188	0,25	$\pm 0,04$	0,21
3	TBB-160-2E	0,189	0,25	$\pm 0,04$	0,21
4	TBB-165-2	0,238	0,318	$\pm 0,04$	0,278
5	TBB-165-2	0,239	0,317	$\pm 0,04$	0,278
6	TBB-165-2	0,238	0,316	$\pm 0,04$	0,278
7	TBB-165-2	0,238	0,315	$\pm 0,04$	0,278
8	TBB-165-2	0,239	0,314	$\pm 0,04$	0,278
9	TBB-165-2	0,239	0,313	$\pm 0,04$	0,278
10	TBB-200-2	0,162	0,166	$\pm 0,02$	0,164
11	TBB-200-2	0,163	0,165	$\pm 0,02$	0,164
12	TBB-500-2E	0,162	0,164	$\pm 0,04$	0,28
13	TBB-500-2E	0,162	0,163	$\pm 0,04$	0,28
14	TBB-500-2E	0,160	0,162	$\pm 0,04$	0,28
15	TBB-500-2E	0,168	0,168	$\pm 0,04$	0,28
16	TBB-800-2E	0,321	0,333	$\pm 0,06$	0,327
17	TBB-800-2E	0,325	0,333	$\pm 0,06$	0,327
18	TBB-800-2E	0,321	0,335	$\pm 0,06$	0,327
19	TBB-800-2E	0,321	0,331	$\pm 0,06$	0,327
20	TBB-800-2E	0,327	0,335	$\pm 0,06$	0,327
21	TBB-800-2E	0,321	0,330	$\pm 0,06$	0,327
22	TBB-800-2E	0,327	0,331	$\pm 0,06$	0,327
23	TBB-800-2E	0,328	0,329	$\pm 0,06$	0,327
24	TBB-800-2E	0,329	0,330	$\pm 0,06$	0,327
25	TBB-1000-4	0,286	0,426	$\pm 0,071$	0,354
26	TBB-1000-4	0,287	0,427	$\pm 0,071$	0,354
27	TBB-1000-4	0,288	0,424	$\pm 0,071$	0,354
28	TBB-1000-4	0,289	0,423	$\pm 0,071$	0,354
29	TBB-1000-4	0,278	0,422	$\pm 0,071$	0,354
30	TBB-1000-4	0,277	0,421	$\pm 0,071$	0,354

З'ясуйте якість проведення випробувань та вимірювань.

5.5 Контрольні питання

1. Які види похибок виготовлення продукції визначають появу браку?
2. При виконанні яких умов технологічний процес вважається стабільним?
3. Від чого залежить частина браку, що випускається стабільно працюючою технологічною системою?
4. Що називається статистичним регулюванням якості продукції?

5. Які статистичні гіпотези перевіряються при статистичному регулюванні якості?
6. Яка частина значень критерію перевірки гіпотези знаходиться між контрольними межами?
7. Для чого призначені контрольні карти?
8. Як будуються контрольні межі?
9. У яких випадках потрібно проведення "попередніх досліджень"?

6 Лабораторна робота № 2

ОДНОФАКТОРНИЙ ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

6.1 Мета роботи. Мета даної роботи полягає в ознайомленні з призначенням і передумовами застосування методу однофакторного дисперсійного аналізу, з його ідеєю й обчислювальним алгоритмом для обробки експериментальної інформації.

6.2 Хід роботи

1. Ознайомтеся з описом комп'ютерної моделі генератора результатів вимірювань.
2. Перепишіть початкові дані відповідно до номера вашого варіанта.
3. За допомогою комп'ютерної моделі побудуйте модель вимірювання параметра y .
4. Кожне вимірне значення y_{jl} імітує значення вимірюваного параметра y для l -го елемента (наприклад, зразка продукції) в j -ій серії вимірювань (або в відібраній j -ій серії виробів) в умовах відсутності систематичної похибки.
5. Запишіть результати вимірювань, отримані за допомогою комп'ютерної моделі.
6. На основі розрахунків перевірте значимість впливу досліджуваного фактора x .
7. Зробіть висновки.

6.3 Приклад виконання завдання

6.3.1 Завдання

Дослідіть, чи залежить довговічність y (вимірюється у годинах) електричних ламп від технології і матеріалу виготовлення (фактор x). Припустимо, що виконуються допущення дисперсійного аналізу, тобто довговічність має нормальний розподіл і вплив роду матеріалу і технології виготовлення електричних ламп не має впливу на дисперсію σ^2 величини y , але викликає розбіжність середніх значень. Були відібрані нерівно кількісні серії зразків з чотирьох партій (номер партії деталей j змінюється від 1 до u) продукції ($u = 4$).

Номер лампи в кожній партії l змінюється від 1 до m . Результати спостережень наведені в таблиці 6.1, причому для спрощення обчислень усі дані зменшені на одну і ту саму величину (1500 годин), тому що на зна-

чення дисперсій це не впливає. Підрахунки, що виконані в тій самій таблиці, зрозумілі без пояснень і необхідні для знаходження суми квадратів відхилень і вибірових дисперсій.

6.3.2 Рішення задачі

1. В середовищі операційної системи "Windows" запускаємо виконуваний файл Randomer.exe.
2. Вибираємо кнопку "Лабораторна робота №2" (рисунок 6.1).

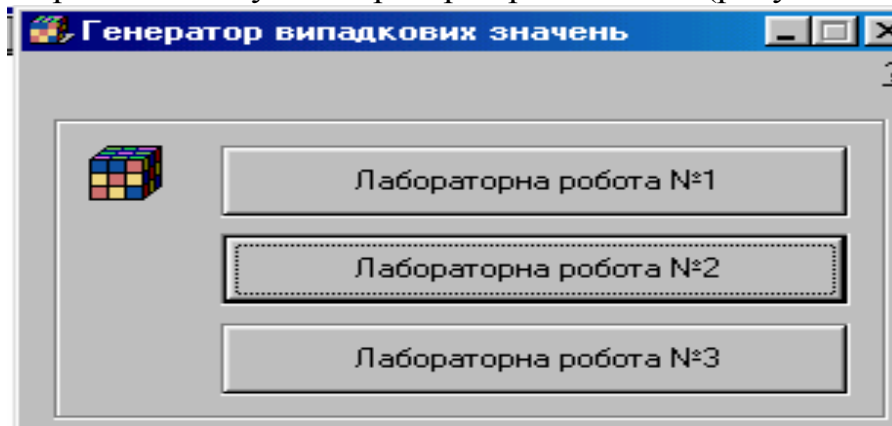


Рисунок 6.1 - Початкова екранна заставка комп'ютерної моделі генератора результатів вимірювань

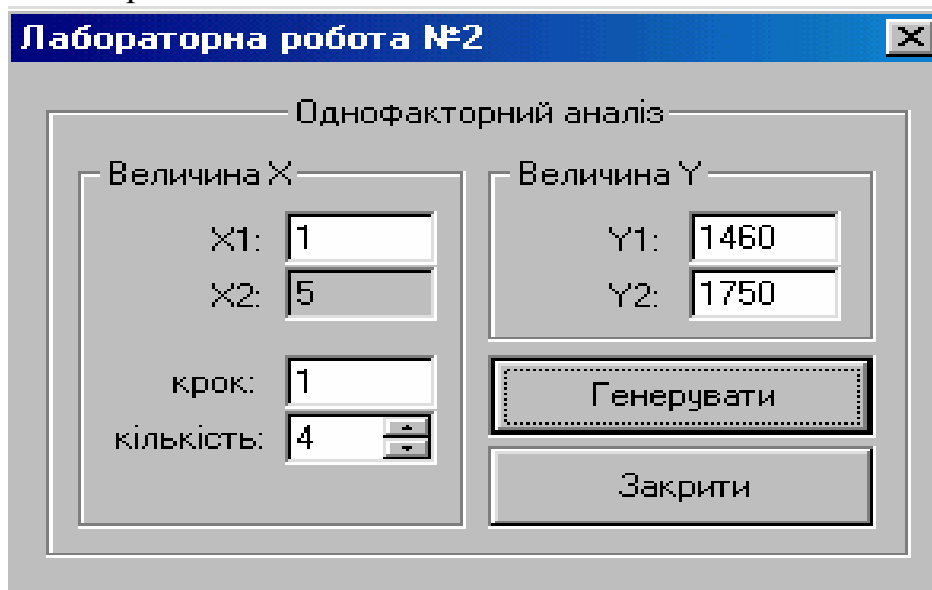


Рисунок 6.2 – Вигляд на екрані "вікна" для введення меж зміни вимірюваної величини

3. Відповідно до завдання викладача вводимо максимальне значення довговічності $Y1$ (наприклад, 1750 годин) і кінцеве значення довговічності $Y2$ (1460 годин), номер першої партії ламп $X1$ (наприклад, 1), крок зміни номера партії ламп (наприклад, 1), кількість кроків зміни номера досліджуваної партії ламп (наприклад, 4) та натискаємо кнопку "Генерувати". На наступній екранній вкладці натискаємо на кнопку "Записати" (рисунок 6.2).

4. Отримані результати із файлу (рис. 6.3, 6.4) переписуємо в розрахункову таблицю 6.1.

5. Зменшуємо всі результати вимірювань, наведені в таблиці (рисунок 6.4) на 1500 годин

$$y_{1,1}=1600-1500=100 \text{ год}; y_{1,2}=1600-1500=100 \text{ год}; y_{1,3}=1600-1500=100 \text{ год}; \dots \\ y_{4,6}=1600-1500=100 \text{ год}; y_{4,7}=1600-1500=100 \text{ год}; y_{4,8}=1600-1500=100 \text{ год}.$$

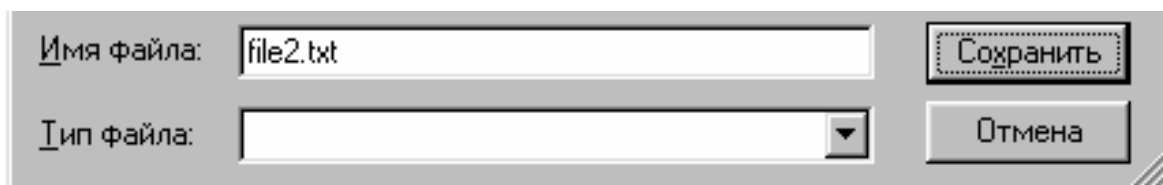


Рисунок 6.3 - Запис імені файлу для збереження результатів вимірювань.

6. Підносимо отримані результати до квадрата

$$y_{1,1}^2=100^2=10000 \text{ год}; y_{1,2}^2=110^2=12100 \text{ год}; \dots y_{4,8}^2=100^2=10000 \text{ год}.$$

7. З кожної партії ламп беремо перший результат вимірювань і знаходимо спочатку суму перших результатів, потім других і т.д.

Лабораторна робота №2 ОДНОФАКТОРНИЙ АНАЛІЗ

		Y								
X		1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1600	1610	1650	1680	1700	1700	1800	---		
2	1580	1640	1640	1700	1750	----	----	---		
3	1460	1550	1600	1620	1640	1660	1740	1820		
4	1510	1520	1530	1570	1600	1680	----	---		

Рисунок 6.4 - Приклад вмісту файлу результату

Так при $l=1 \sum_{j=1}^4 y_{j,l} = \sum_{j=1}^4 y_{j,1} = 100 + 80 + (-40) + 10 = 150 \text{ год}.$

8. Знаходимо суму результатів (підсумок) вимірювань в кожній спробі (партії). Так, в першій партії ламп при $j=1$

$$Y_j = Y_1 = 100 + 110 + 150 + 180 + 200 + 200 + 300 = 1240 \text{ год}.$$

9. Підносимо до квадрата отримані підсумки

$$Y_1^2 = 1240^2 = 1537600 \text{ год}^2.$$

10. Ділимо отримані (для кожної партії) результати та кількість ламп в партії. Наприклад, для першої партії

$$\frac{1}{m_j} Y_j^2 = \frac{1}{m_l} Y_l^2 = \frac{1}{7} \cdot 1537600 = 219657 \text{ год}^2.$$

11. Знаходимо суми піднесених до квадрата результатів вимірювань для кожної партії окремо. Для першої партії

$$\sum_{l=1}^{m_j} y_{j,l}^2 = \sum_{l=1}^{m_l} y_{l,l}^2 = \sum_{l=1}^7 y_{l,l}^2 = 10000 + 12100 + 22500 + 32400 + 40000 + 40000 + 90000 = 247000 \text{ год}^2.$$

Таблиця 6.1 - Розрахункова таблиця

№ l	1		2		3		4		5	
№ j	y_{j1}	y_{j1}^2	y_{j2}	y_{j2}^2	y_{j3}	y_{j3}^2	y_{j4}	y_{j4}^2	y_{j5}	y_{j5}^2
1	100	10000	110	12100	150	22500	180	32400	200	40000
2	80	6400	140	19600	140	19600	200	40000	250	62500
3	-40	1600	50	2500	100	10000	120	14400	140	19600
4	10	100	20	400	30	900	70	4900	100	10000
$\sum_{j=1}^{u=4}$	150	18100	320	34600	420	53000	570	91700	690	132100

6		7		8		Y_j	$\frac{l}{m_j} Y_j^2$	$\sum_{l=1}^{m_j} y_{jl}^2$
y_{j6}	y_{j6}^2	y_{j7}	y_{j7}^2	y_{j8}	y_{j8}^2			
200	40000	300	90000	---	---	1240	219657	247000
---	---	---	---	---	---	810	131200	148100
160	25600	240	57800	320	102400	1090	148500	233700
180	32400	---	---	---	---	410	28017	48700
540	98000	540	147600	320	102400	3550	527394	677500

Таблиця 6.2 - Проміжні результати розрахунку

Розсіювання	Сума квадратів відхилень	Кількість ступенів свободи	Вибіркові дисперсії	Компоненти генеральних дисперсій
Загальне	$S = 192788$	$\nu = M - 1 = 25$	$s^2 = 7712$	$\sigma^2 + \sigma_x^2$
У середині серій	$S_0 = 150105$	$\nu_0 = M - u = 22$	$s_0^2 = 2,08$	σ^2
Між серіями	$S_x = 42682$	$\nu_x = u - 1 = 3$	$s_x^2 = 14227$	$\sigma^2 + m\sigma_x^2$

12. Знаходимо суму результатів всіх вимірювань

$$\sum_{j=1}^m Y_j = \sum_{j=1}^4 Y_j = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^m y_{jl} = 1240 + 810 + 1090 + 410 = 3550 \text{ годин.}$$

13. Знаходимо суму квадратів підсумків по серіях, поділених на кількості спостережень в серіях

$$Q_2 = \sum_{j=1}^u \frac{Y_j^2}{m_j} = 219657 + 131220 + 148500 + 28017 = 527394 \text{ год}^2.$$

Таблиця 6.3 – П'ятивідсоткові верхні межі для величини F , в залежності від кількості ступенів свободи v_1 і v_2

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80
13	4,67	3,80	3,41	3,16	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30
25	4,26	3,48	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,95
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88

Продовження таблиці 6.3

<i>l</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	242	244	246	248	249	250	251	253	253	254
2	19,39	19,41	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,78	8,74	8,69	8,66	8,64	8,62	8,60	8,57	8,56	8,53
4	5,96	5,91	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,68	5,66	5,63
5	4,74	4,68	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,42	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,72	3,71	3,67
7	3,63	3,57	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,29	3,28	3,23
8	3,34	3,28	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,00	2,98	2,93
9	3,13	3,07	2,98	2,93	2,90	2,86	2,82	2,77	2,76	2,71
10	2,97	2,91	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,61	2,59	2,54
11	2,86	2,79	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,47	2,45	2,40
12	2,76	2,69	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,36	2,35	2,30
13	2,67	2,60	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,28	2,26	2,21
14	2,6	2,53	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,21	2,19	2,13
15	2,55	2,48	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,15	2,12	2,07
16	2,49	2,42	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,09	2,07	2,01
17	2,45	2,38	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11	2,04	2,02	1,96
18	2,41	2,34	2,25	2,19	2,15	2,11	2,07	2,00	1,98	1,92
19	2,38	2,31	2,21	2,15	2,11	2,07	2,02	1,96	1,94	1,88
20	2,35	2,28	2,18	2,12	2,08	2,04	1,89	1,92	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,15	2,09	2,05	2,00	1,96	1,89	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,87	1,84	1,78
23	2,28	2,20	2,10	2,04	2,00	1,96	1,91	1,84	1,82	1,76
24	2,26	2,18	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,82	1,80	1,73
25	2,24	2,16	2,06	2,00	1,96	1,92	1,87	1,80	1,77	1,71
26	2,22	2,15	2,05	1,99	1,90	1,95	1,85	1,78	1,76	1,69
27	2,20	2,13	2,03	1,97	1,93	1,88	1,84	1,76	1,74	1,67
28	2,19	2,12	2,02	1,96	1,91	1,87	1,81	1,75	1,72	1,65
29	2,18	2,10	2,00	1,94	1,90	1,85	1,80	1,73	1,71	1,64
30	2,16	2,09	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,72	1,69	1,62
40	2,07	2,00	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,61	1,59	1,51
60	1,99	1,92	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,50	1,48	1,39
125	1,90	1,83	1,72	1,65	1,60	1,65	1,55	1,49	1,36	1,25
∞	1,83	1,75	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,28	1,24	1,00

14. Знаходимо суму піднесених до квадрата результатів всіх вимірювань

$$Q_l = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{m_j} y_{j,l}^2 = 247000 + 148 + 233700 + 48700 = 677500 \text{ год}^2.$$

15. Знаходимо загальну кількість вимірювань $M = 7 + 5 + 8 + 6 = 26$.

16. Загальне середнє для всіх вимірів $\bar{y} = 3550/26 = 137 \text{ год}$.

17. Квадрат загального підсумку, поділений на кількість всіх спостережень

$$Q_3 = \frac{1}{M} \cdot \left(\sum_{j=1}^u Y_j \right)^2 = \frac{3550^2}{26} = 484712,5 \text{ год}^2.$$

18. Загальна сума квадратів відхилень

$$S = Q_1 - Q_3 = 677500 - 484712,5 \approx 192788 \text{ год}^2.$$

19. Сума квадратів відхилень по середині серій

$$S_0 = Q_1 - Q_2 = 677500 - 527394 = 150106 \text{ год}^2.$$

20. Сума квадратів відхилень між серіями вимірювань

$$S_x = Q_2 - Q_3 = S - S_0 = 192788 - 150106 = 42682 \text{ год}^2.$$

21. Кількість досліджуваних партій ламп (серій вимірювань) $u=4$.

22. Кількість ступенів свободи по середині серій $v_0 = M - u = 26 - 4 =$

22.

23. Кількість ступенів свободи між серіями $v_x = u - 1 = 4 - 1 = 3$.

22. Загальна кількість ступенів свободи $v = M - 1 = 26 - 1 = 25$.

23. Загальна вибіркова дисперсія $S^2 = S/v = 192788/25 = 7712 \text{ год}^2$.

24. Вибіркова дисперсія по середині серій

$$S_0^2 = S_0/v_0 = 150106/22 = 6823 \text{ год}^2.$$

25. Вибіркова дисперсія між серіями

$$S_x^2 = S_x/v_x = 42682/3 = 14227 \text{ год}^2.$$

26. Виконаємо перевірку значимості впливу фактора x , для чого знайдемо дисперсійне відношення (розрахункове значення критерію Фішера)

$$F = \frac{S_x^2}{S_0^2} = \frac{14227}{6823} = 2,08.$$

З таблиці 4 значення F -критерію для п'ятивідсоткового рівня значимості і кількості ступенів свободи $v_1 = v_x = 3$ і $v_2 = v_0 = 22$ дорівнює

$$F_{0,05}(3; 22) = 3,05.$$

Висновок. Оскільки $F < F_{0,05}(3; 22)$, вплив роду матеріалу і технології виготовлення на тривалість горіння електричних ламп у чотирьох партіях, що розглядалися, можна вважати незначним.

6.4 Варіанти завдань

Задача.

Дослідіть, чи залежить довговічність у електричних ламп від технології і матеріалу виготовлення. Згідно з завданням варіанта використовуйте максимальне значення довговічності $Y1$ (годин) і мінімальне значення довговічності $Y2$ (годин), номер першої партії ламп $X1=1$, крок зміни номера партії ламп ($=1$), кількість кроків зміни номера досліджуваної партії ламп (4 кроки). Варіанти параметрів завдань для різних груп наведені в табли-

цях 6.4,6.5,6.6.

6.5 Контрольні питання

1. Що називається фактором змінності та імовірності?
2. Якого типу практичні задачі, зазвичай, вирішуються методом дисперсійного аналізу?
3. Як математично формулюється задача однофакторного аналізу?
4. Які основні передумови застосування дисперсійного аналізу?

Таблиця 6.4 - Варіанти завдань першої групи

№ студента у списку групи	Максимальне значення довговічності Y_1 (годин)	Мінімальне значення довговічності Y_2 (годин)
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
1	1900	1400
2	1890	1390
3	1880	1380
4	1870	1370
5	1860	1360
6	1850	1350
7	1840	1340
8	1830	1330
9	1820	1320
10	1810	1310
11	1800	1300
12	1790	1290
13	1780	1280
14	1770	1270
15	1760	1260
16	1750	1250
17	1740	1240
18	1730	1230
19	1720	1220
20	1710	1210
21	1700	1200
22	1690	1190
23	1680	1180
24	1670	1170

Продовження таблиці 6.4

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
25	1660	1160
26	1650	1150
27	1640	1140
28	1630	1130
29	1620	1120
30	1610	1110

Таблиця 6.5 – Варіанти завдань другої групи

№ студента у списку групи	Максимальне значення дов- говічності <i>Y1</i> (годин)	Мінімальне значення довго- вічності <i>Y2</i> (годин)
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
1	1895	1100
2	1892	1090
3	1885	1080
4	1875	1070
5	1865	1060
6	1855	1050
7	1845	1040
8	1835	1030
9	1825	1020
10	1815	1010
11	1805	1000
12	1795	990
13	1785	980
14	1775	970
15	1765	960
16	1755	950
17	1745	940
18	1735	930
19	1725	920
20	1715	910
21	1705	900

Продовження таблиці 6.5

1	2	3
22	1695	890
23	1685	880
24	1675	870
25	1665	860
26	1655	850
27	1645	840
28	1635	830
29	1625	820
30	1615	810

Таблиця 6.6 - Варіанти завдань третьої групи

№ студента у списку групи	Максимальне значення довговічності $Y1$ (годин)	Мінімальне значення довговічності $Y2$ (годин)
1	2	3
1	1892	1105
2	1895	1095
3	1882	1085
4	1873	1075
5	1862	1065
6	1853	1055
7	1842	1045
8	1833	1035
9	1822	1025
10	1813	1015
11	1806	1005
12	1797	995
13	1788	985
14	1779	975
15	1761	965
16	1752	955
17	1743	945
18	1734	935

Продовження таблиці 6.6

1	2	3
19	1727	925
20	1718	915
21	1709	905
22	1699	895
23	1683	885
24	1674	875
25	1662	865
26	1652	855
27	1642	845
28	1632	835
29	1622	825
30	1613	815

5. В чому полягає основна ідея методу дисперсійного аналізу?
6. Як формуються оцінки дисперсії: загальна, між серіями і залишкова (по середині серії)?
7. Розкид яких випадкових величин характеризують оцінки дисперсії: загальна, між серіями і залишкова (по середині серії)?
8. Яким чином здійснюється кількісне оцінювання впливу факторів?



Рисунок 6.5 - Продукція електролампового заводу

7 Лабораторна робота № 3

БАГАТОФАКТОРНИЙ ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

7.1 Мета роботи. Мета даної роботи полягає в ознайомленні з призначенням і передумовами застосування методу багатofакторного дисперсійного аналізу, з його ідеєю й обчислювальним алгоритмом для обробки експериментальної інформації.

7.2 Хід роботи

1. Ознайомтеся з описом комп'ютерної моделі генератора результатів вимірювань.

2. Перепишіть початкові дані відповідно до номера вашого варіанта.

3. За допомогою комп'ютерної моделі побудуйте модель вимірювання параметра y .

Кожне вимірне значення y_{jgl} імітує значення виміряного параметра y для l -го елемента (наприклад, зразка продукції) в j -ій серії вимірювань (або в відібраній j -ій серії виробів), яка належить до g -ої сукупності вимірювань в умовах відсутності систематичної похибки.

4. Запишіть результати вимірювань, отримані за допомогою комп'ютерної моделі.

5. На основі розрахунків перевірте значимість впливу досліджуваного фактора x_1 та (окремо) фактора x_2 , а потім факторів x_1 і x_2 (одночасно) на вихідну контрольовану величину y_{jgl} .

6. Зробіть висновки.

7.3 Приклад виконання завдання

7.3.1 Завдання

Дослідіть, чи залежить поріг швидкості ультразвуку через ОСІ y (вимірюється у штуках підприємства - виготовлювача (фактор x_1) та від терміну від часу виготовлення до вимірювань (фактор x_2). Припустимо, що виконуються допущення дисперсійного аналізу, тобто швидкість має нормальний розподіл і не має впливу підприємства x_1 і терміну зберігання x_2 на дисперсію σ^2 величини y , але вони викликають розбіжність середніх значень. Для спрощення вплив умов зберігання враховувати не будемо. Були відібрані рівно кількісні ($l=1 \div 10$ штук) серії ОСІ з чотирьох партій (номер партії ОСІ g змінюється від 1 до 4) продукції ($u_2 = 4$). А саме: через 1 - це 5 років, 2 - це 10 років, 3 - це 15 років, 4 - це 20 років. Умовний номер підприємства j змінюється від 1 до 5, а саме ($u_1 = 5$). А саме: 1- це Великолукський завод електротехнічної порцеляни (ізолятори АКО-110/600, ИОС-110-600); 2- Слов'янський завод високовольтних ізоляторів (ізолятори АКО-110/600, ИОС-110-400), 3 - Пермський завод високовольтних ізоляторів (АКО-110/600, ИОС-110-600); 4 - Ленінградський порцеляновий завод "Пролетарій" (КО-110-1250, АКО-110, ОНС-110-2000); 5 - ізолятори (ИОС-110-600) виробництва СФРЮ (Югославія).

Номер ізолятора в кожній партії l змінюється від 1 до m (до 10 штук). Результати спостережень наведені в таблиці 7.1, причому для спрощення обчислень усі дані зменшені на одну і ту саму величину (5000 м/с), тому що на значення дисперсій це не впливає.

Таблиця 7.1 - Результати вимірювань для прикладу розрахунку

ДВОФАКТОРНИЙ АНАЛІЗ											
X	Y	Z									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Великолуцький завод електротехнічної порцеляни											
1	5	5126	4961	5057	4820	4942	5072	4874	5224	5237	4774
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	10	5109	4971	5016	4808	4959	5115	5114	5053	5077	4811
3	15	5096	5067	5154	4924	5103	4845	5236	4906	5165	4951
4	20	4866	4911	5077	4871	5175	4978	5172	4891	4894	5249
Слав'янський завод високовольтних ізоляторів											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5	5145	5125	4925	4957	4801	5110	4970	4998	5170	5076
2	10	4850	4971	5057	5028	5029	4871	5167	5117	5175	4934
3	15	4799	4787	4918	4834	4821	5261	5199	5063	5033	4897
4	20	4794	5170	4976	4925	5057	4855	4958	4879	4938	4882
Пермський завод високовольтних ізоляторів											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5	5000	4986	5013	5087	5222	5206	4912	4895	5000	5109
2	10	4866	5128	5186	5024	4960	4892	5070	5052	4987	4782
3	15	5235	4915	5203	4884	4788	5128	4785	4895	4877	4835
4	20	4882	4910	5259	5053	5063	4770	4862	4843	4847	5133
Ленінградський порцеляновий завод "Пролетарій"											
1	5	5244	5234	4819	5014	5090	5235	5100	5062	4982	5139
2	10	5154	5129	4835	5118	5120	4773	4790	5145	4865	4888
3	15	4934	5144	5000	5154	4821	5052	4954	4922	4992	5073
4	20	5253	4929	4954	5184	5245	5181	5024	4878	5066	4788
Ізолятори виробництва СФРЮ											
1	5	5083	5167	5257	4942	5165	4872	5135	5146	5083	4948
2	10	5261	4950	4822	5055	4813	4859	5143	4796	4901	4777
3	15	5254	5174	5150	5064	5045	4913	4909	4813	5077	4774
4	20	4895	5149	4868	4849	5114	5102	4833	4847	5162	5023

7.3.2 Рішення задачі

1. В середовищі операційної системи "Windows" запускаємо викону-

ваний файл **Randomer1.exe**.

2. Вибираємо кнопку "Лабораторна робота №3" (рисунок 7.1).

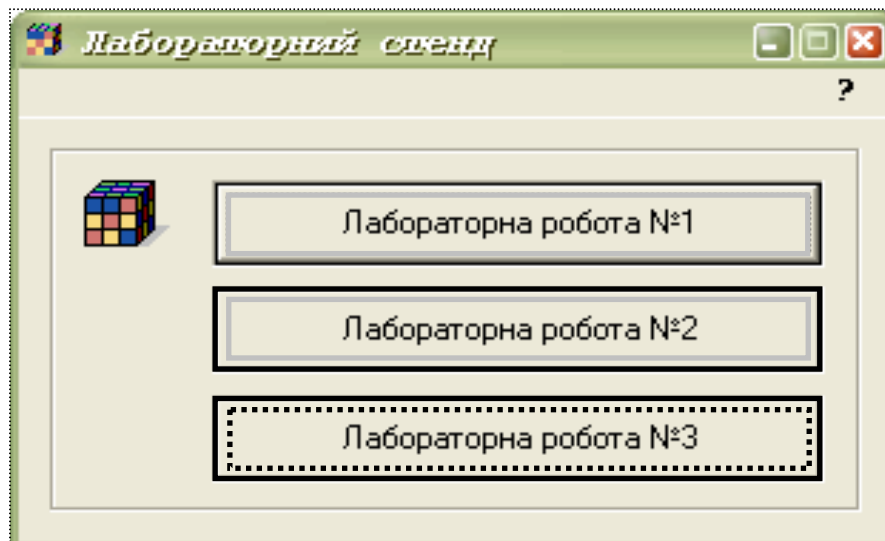


Рисунок 7.1 - Початкова екранна заставка комп'ютерної моделі генератора результатів вимірювань

3. За завданням викладача вводимо термін часу, через який беруться партії ізоляторів $Y1$ (наприклад, 5 років) і кінцеве значення $Y2$ (25 років), номер першого підприємства $X1$ (наприклад, 1) і номер останнього, п'ятого підприємства $X2$ (наприклад, 5), крок зміни номера підприємства (наприклад, 1), кількість кроків зміни років (наприклад, 5), а кількість кроків зміни номера підприємства (наприклад, 4), початкове значення швидкості ультразвуку $Z1$ (наприклад, 5200) та кінцеве значення швидкості ультразвуку $Z2$ (наприклад, 5650) та натискаємо кнопку "Генерувати" (рисунок 7.2). На наступній екранній вкладці натискаємо на кнопку "Зберегти" (рисунок 7.3).

4. Отримані результати із файлу переписуємо в розрахункову таблицю 2.

Рисунок 7.2 – Вигляд на екрані "вікна" для введення меж зміни вимірюваної величини

5. Зменшуємо всі результати вимірювань, наведені в таблиці 7.2 на 4800 м/с

$$y_{1,1} = 5126 - 4900 = 226 \text{ м/с}; y_{1,4,10} = 5249 - 4900 = 349 \text{ м/с}.$$

6. Підносимо отримані результати до квадрата

$$y_{1,1}^2 = 226^2 = 51076 \text{ (м/с)}^2;$$

$$y_{1,4,10}^2 = 349^2 = 121801 \text{ (м/с)}^2.$$

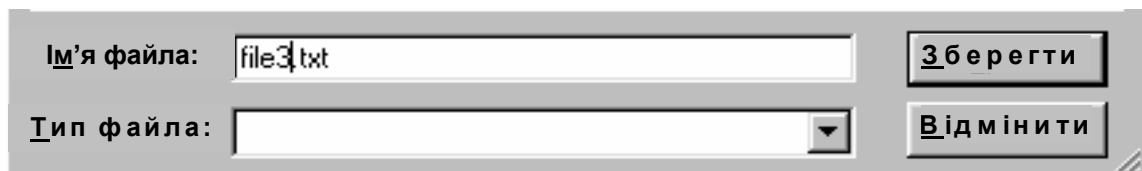


Рисунок 7.3 - Запис імені файлу для збереження результатів вимірювань

ДВОФАКТОРНИЙ АНАЛІЗ												
		Z										
X	Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	5	5126	4961	5057	4820	4922	5072	4874	5224	5237	4774	
1	10	5109	4971	5016	4808	4959	5115	5114	5053	5077	4811	
	15	5098	5067	5154	4924	5103	4845	5236	4906	5165	4951	
	20	4866	4911	5077	4871	5175	4978	5172	4891	4894	5249	
	5	5145	5125	4925	4957	4801	5110	4970	4998	5170	5076	
2	10	4850	4971	5057	5028	5029	4871	5167	5117	5175	4934	
	15	4799	4787	4918	4834	4821	5261	5199	5063	5033	4897	
	20	4794	5170	4976	4925	5057	4855	4958	4876	4938	4882	
	5	5000	4986	5013	5087	5222	5206	4912	4895	5000	5109	
3	10	4866	5128	5186	5024	4960	4892	5070	5052	4987	4782	
	15	5235	4915	5203	4884	4788	5128	4785	4895	4877	4835	
	20	4882	4910	5259	5053	5063	4770	4862	4843	4847	5133	
	5	5244	5234	4819	5014	5090	5235	5100	5062	4982	5139	
4	10	5154	5129	4835	5118	5120	4773	4790	5145	4865	4888	
	15	4934	5144	5000	5154	4821	5052	4954	4922	4992	5073	
	20	5253	4929	4954	5184	5245	5181	5024	4878	5066	4788	
	5	5083	5167	5257	4942	5165	4872	5135	5146	5083	4948	
5	10	5261	4950	4822	5055	4813	4859	5143	4796	4901	4777	
	15	5254	5174	5150	5064	5045	4913	4909	4813	5077	4774	
	20	4895	5149	4868	4849	5114	5102	4833	4847	5162	5023	

Рисунок 7.4 - Приклад вмісту файлу результату

7. Обчислимо середні арифметичні y_{jg} , серій з m повторних спостережень для кожного об'єднання рівнів j і g факторів x_1 і x_2 . Так для $j=1$ та $g=1$ знаходимо середнє значення швидкостей для 10 ізоляторів Великолуцького заводу, які були виготовлені п'ять років назад

$$\bar{y}_{jg} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m y_{jgl} =$$

$$= (226 + 61 + 157 - 80 + 42 + 172 - 26 + 324 + 337 - 126) / 10 = 108,7 \text{ м/с.}$$

8. Середні арифметичні $\bar{y}_j$ по рядках з $u_2 m = 4 \cdot 10 = 40$ паралельних спостережень для будь-якого j -го рівня фактора x_1 . Для всіх досліджуваних ізоляторів Великолуцького заводу

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{4 \cdot 10} \sum_{g=1}^4 \sum_{l=1}^{10} y_{1gl} = \frac{1}{4} \sum_{g=1}^4 \bar{y}_{jg} = (108,7 + 103,3 + 144,7 + 108,4) / 4 = 116,28 \text{ м/с.}$$

9. Середні арифметичні $\bar{y}'_g$ по рядках з $u_1 m = 5 \cdot 10 = 50$ паралельних спостережень для будь-якого g -го рівня фактора x_2 . Для всіх досліджуваних ізоляторів всіх заводів, які були виготовлені п'ять років назад

$$\bar{y}'_g = \frac{1}{5 \cdot 10} \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^{10} y_{jgl} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \bar{y}_{jl} = 150,22 \text{ м/с.}$$

10. Загальне середнє арифметичне $\bar{\bar{y}}$ всіх $u_1 u_2 m = 5 \cdot 4 \cdot 10 = 200$ спостережень для всіх $u_1 u_2 = 5 \cdot 4 = 20$ варіантів рівнів

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 10} \sum_{j=1}^5 \sum_{g=1}^4 \sum_{l=1}^{10} y_{jgl} = \frac{1}{5 \cdot 4} \sum_{j=1}^5 \sum_{g=1}^4 \bar{y}_{jg} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \bar{y}_j = \frac{1}{4} \sum_{g=1}^4 \bar{y}'_g = 106 \text{ м/с.}$$

11. Загальна сума квадратів характеризує розсіювання окремих спостережень y_{jgl} у загальній сукупності за рахунок впливу усіх факторів

$$S = \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{\bar{y}})^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{y}_{jg} + \bar{y}_j - \bar{\bar{y}} + \bar{y}'_g - \bar{\bar{y}} + \bar{y}_{lg} - \bar{y}_j - \bar{y}'_g + \bar{\bar{y}})^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{y}_{jg})^2 + u_2 m \sum_{j=1}^{u_1} (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 + u_1 m \sum_{j=1}^{u_1} (\bar{y}'_g - \bar{\bar{y}})^2 +$$

$$+ m \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}_{jg} - \bar{y}_j - \bar{y}'_g + \bar{\bar{y}})^2 = S_0 + S_1 + S_2 + S_{12},$$

де

$$S = \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{\bar{y}})^2 = 3892505 \text{ (м/с)}^2.$$

12. Сума квадратів відхилень "всередині серій". Сума характеризує розсіювання окремих спостережень за рахунок впливу фактора випадковості

$$S_0 = \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{y}_{jg})^2 = 3544360 \text{ (м/с)}^2.$$

13. Сума квадратів відхилень "між рядками". Сума $\sigma^2 / (U_2 \cdot m)$ характеризує розсіювання середніх $\bar{y}_j$ по рядках в результаті дії фактора випадковості (з дисперсією середнього рядка $\sigma^2 / (U_2 \cdot m)$), фактора x_1 (з дисперсією σ_1^2) і фактора взаємодії (з дисперсією середнього для кожного рядка

$$\frac{\sigma_{12}^2}{u_2}) \quad S_1 = u_2 m \sum_{j=1}^{u_1} (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 = 56532,02 \text{ (м/с)}^2.$$

14. Сума квадратів відхилень "між стовпцями". Сума $\frac{S_2}{u_1 m}$ характеризує розсіювання середніх $\bar{y}'_g$ по стовпцях в результаті дії фактора випадковості (з дисперсією середнього стовпця $\frac{\sigma^2}{u_1 m}$), фактора x_2 (з дисперсією σ_2^2) і фактора взаємодії (з дисперсією стовпця $\frac{\sigma_{12}^2}{u_1}$),

$$S_2 = u_1 m \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}'_g - \bar{\bar{y}})^2 = 132824,3 \text{ (м/с)}^2.$$

15. Сума квадратів відхилень "між серіями". Сума $\frac{S_{12}}{m}$ характеризує розсіювання середніх $\bar{y}_{jg}$ серій в результаті дії фактора випадковості (з дисперсією середнього серії $\frac{\sigma^2}{m}$) і фактора взаємодії (з дисперсією σ_{12}^2)

$$S_{12} = m \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}_{jg} - \bar{y}_j - \bar{y}'_g + \bar{\bar{y}})^2 = 158788 \text{ (м/с)}^2.$$

Суми квадратів S , S_0 , S_1 , S_2 , S_{12} , розділені кожна на відповідну їй кількість ступенів свободи ν , ν_0 , ν_1 , ν_2 , ν_{12} , дають незміщені оцінки дисперсії відновлення σ^2 .

16. Вибіркова загальна дисперсія за всіма $u_1 u_2 m$ спостереженнями

$$s^2 = \frac{1}{u_1 u_2 m - 1} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{\bar{y}})^2 = \frac{S}{u_1 u_2 m - 1} \approx \sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_{12}^2 =$$

$$= 19560 \text{ (м/с)}^2$$

з кількістю ступенів свободи $\nu = u_1 u_2 m - 1 = 5 \cdot 4 \cdot 10 - 1 = 199$.

17. Вибіркова дисперсія розсіювання "всередині серій", або залишкова оцінка, є середньозваженою дисперсією за всіма серіями спостережень

$$s_0^2 = \frac{1}{u_1 u_2} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{l=1}^m (y_{jgl} - \bar{y}_{jg})^2 = \frac{S_0}{u_1 u_2 m - 1} \approx \sigma^2 = 17811 \text{ (м/с)}^2$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_0 = u_1 u_2 (m - 1) = 5 \cdot 4 \cdot (10 - 1) = 180.$$

18. Вибіркова дисперсія розсіювання "між рядками"

$$s_1^2 = \frac{u_2 m}{u_1 - 1} \sum_{j=1}^{u_1} (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 = \frac{S_1}{u_1 - 1} \approx \sigma^2 + u_1^2 + m \sigma_{12}^2 = 14133 \text{ (м/с)}^2$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_1 = u_1 - 1 = 5 - 1 = 4.$$

19. Вибіркова дисперсія розсіювання "між стовпцями"

$$s_2^2 = \frac{u_1 m}{u_2 - 1} \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}'_g - \bar{\bar{y}})^2 = \frac{S_2}{u_2 - 1} \approx \sigma^2 + u_1 m \sigma_2^2 + m \sigma_{12}^2 = 33206 \text{ (м/с)}^2$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_2 = u_2 - 1 = 4 - 1 = 3.$$

20. Вибіркова дисперсія розсіювання "між серіями"

$$s_{12}^2 = \frac{m}{u_1 u_2 - u_2 - u_1 + 1} \sum_{j=1}^{u_1} \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}_{jg} - \bar{y}_j - \bar{y}'_g + \bar{\bar{y}})^2 =$$

$$= \frac{S_{12}}{u_1 u_2 - u_1 - u_2 + 1} \approx \sigma^2 + m \sigma_{12}^2 = 12214 \text{ (м/с)}^2$$

з кількістю ступенів свободи

$$\nu_{12} = (u_1 - 1)(u_2 - 1) = 12.$$

Кількість ступенів свободи перевіряється за співвідношенням

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_{12} = 180 + 4 + 3 + 12 = 199.$$

21. Оцінка впливу факторів

Аналіз значимості впливу факторів x_1 , x_2 і їхньої взаємодії x_1 , x_2 проводиться за критерієм Фішера при обраному рівні значимості $q=5\%$ у такому порядку:

$$F_1 = \frac{s_1^2}{s_{12}^2} > F_q(\nu_1, \nu_{12}),$$

розрахункове значення критерію Фішера при оцінюванні впливу першого фактора - підприємства, яке виготовляє ізолятори

$$F_1 = \frac{s_1^2}{s_{12}^2} = 1,157,$$

табличне значення

$$F_q(\nu_1, \nu_{12}) = F_q(4, 12) = 3,26,$$

як бачимо,

$$F_1 < F_q(4, 12),$$

а тому вплив фактора підприємства на граничну швидкість ультразвуку – **не є суттєвим**.

Розрахункове значення критерію Фішера при оцінюванні впливу другого фактора - терміна, який пройшов з моменту виготовлення ізолятора до його випробовувань

$$F_2 = \frac{s_2^2}{s_{12}^2} > F_q(\nu_2, \nu_{12})$$

$$F_2 = \frac{s_2^2}{s_{12}^2} = 2,719,$$

табличне значення

$$F_q(\nu_2, \nu_{12}) = F_q(3, 12) = 3,46,$$

як бачимо

$$F_2 < F_q(3, 12),$$

а тому вплив фактора терміна на граничну швидкість ультразвуку - **незначний**.

Розрахункове значення критерію Фішера при оцінюванні одночасного впливу першого і другого факторів на граничну швидкість ультразвуку

$$F = \frac{s_{12}^2}{s_0^2} = 0,686,$$

табличне значення

$$F_q(\nu_{12}, \nu_0) = F_q(12, 180) \approx 2,60,$$

як бачимо

$$F < F_q(v_{12}, v_0),$$

тому одночасний вплив обох факторів терміна на граничну швидкість ультразвуку - *не є суттєвим*.

Висновок. Оскільки вплив першого, другого і обох факторів разом - не суттєвий, то одночасний вплив факторів терміна на граничну швидкість ультразвуку - *не є суттєвим*.

7.4 Варіанти завдань

Перша група

Початковий умовний номер підприємства $x_1=1$, крок зміни початкового номера – 1, кількість кроків зміни початкового номера підприємства – 4. Всього підприємств – 5 ($x_2=5$). Початкове значення терміну, з моменту виготовлення ізолятора до початку випробовувань, $Y_1=12$ років.

7.5 Контрольні питання

1. Як визначити середні арифметичні y_{jg} , серій з m повторних спостережень для кожного об'єднання рівнів j і g факторів x_1 і x_2 , а також середні арифметичні $\bar{y}_j$ по рядках з u_2m паралельних спостережень для будь-якого j -го рівня фактора x_1 і середні арифметичні $\bar{y}'_g$ по рядках з паралельних спостережень для будь-якого g -го рівня фактора x_2 ?
2. Як визначити загальне середнє арифметичне $\bar{\bar{y}}$ всіх u_1u_2m спостережень за всіма u_1u_2 варіантами рівнів?
3. Як визначити загальну суму квадратів і що вона характеризує?
4. Як визначити суму квадратів відхилень "всередині серій" і що вона характеризує?
5. Як визначити суму квадратів відхилень "між рядками" і що вона характеризує?

Таблиця 7.2 - Варіанти завдань першої групи

№ студента у списку групи	Крок зміни терміну часу, років	Початкове значення швидкості Z_1 , м/с	Кінцеве значення швидкості Z_2 , м/с
1	2	3	4
1	2	5200	5600
2	2	5239	5650
3	2	5231	5660
4	2	5236	5670
5	2	5237	5400

Продовження таблиці 7.2

1	2	3	4
6	3	5238	5420
7	3	5233	5300
8	3	5232	5350
9	3	5241	5360
10	3	5243	5370
11	4	5245	5380
12	4	5247	5650
13	4	5299	5500
14	4	5250	5550
15	4	5258	5480
16	5	5256	5320
17	5	5254	5390
18	5	5252	5400
19	5	5261	5410
20	5	5263	5510
21	2	5265	5520
22	2	5267	5610
23	2	5269	5580
24	2	5271	5560
25	2	5273	5530
26	3	5275	5520
27	3	5277	5600
28	3	5279	5700
29	3	5272	5800
30	3	5274	5750

Друга група

Початковий умовний номер підприємства $x_1=1$, крок зміни початкового номера – 1, кількість кроків зміни початкового номера підприємства – 4. Всього підприємств – 5 ($x_2=5$). Початкове значення терміну (з моменту виготовлення ізолятора до початку випробовувань) $Y_1=14$ років.

Таблиця 7.3 - Варіанти завдань другої групи

№ студента у списку групи	Крок зміни терміну часу, років	Початкове значення швидкості Z_1 , м/с	Кінцеве значення швидкості Z_2 , м/с
1	2	4700	5000
2	2	4710	5067
3	2	4720	5134
4	2	4730	5201
5	2	4740	5268
6	3	4750	5335
7	3	4760	5402
8	3	4770	5469
9	3	4780	5536
10	3	4790	5603
11	4	4800	5670
12	4	4810	5737
13	4	4820	5804
14	4	4830	5871
15	4	4840	5938
16	5	4850	6005
17	5	4860	6072
18	5	4870	6139
19	5	4880	6206
20	5	4890	6273
21	2	4900	6340
22	2	4910	6407
23	2	4920	6474
24	2	4930	6541
25	2	4940	6608
26	3	4950	6675
27	3	4960	6742
28	3	4970	6809
29	3	4980	6876
30	3	4990	6943

Третя група

Початковий умовний номер підприємства $x_1=1$, крок зміни початкового номера – 1, кількість кроків зміни початкового номера підприємства – 4. Всього підприємств – 5 ($x_2=5$). Початкове значення терміну (з моменту виготовлення ізолятора до початку випробовувань) $Y_1=16$ років.

Таблиця 7.4 - Варіанти завдань третьої групи

№ студента у списку групи	Крок зміни терміну часу, років	Початкове значення швидкості Z_1 , м/с	Кінцеве значення швидкості Z_2 , м/с
1	2	4700	5000
2	2	4723	5087
3	2	4746	5174
4	2	4769	5261
5	2	4792	5348
6	3	4815	5435
7	3	4838	5522
8	3	4861	5609
9	3	4884	5696
10	3	4907	5783
11	4	4930	5870
12	4	4953	5957
13	4	4976	6044
14	4	4999	6131
15	4	5022	6218
16	5	5045	6305
17	5	5068	6392
18	5	5091	6479
19	5	5114	6566
20	5	5137	6653
21	2	5160	6740
22	2	5183	6827
23	2	5206	6914
24	2	5229	7001
25	2	5252	7088
26	3	5275	7175
27	3	5298	7262
28	3	5321	7349
29	3	5344	7436
30	3	5367	7523

6. Як визначити суму квадратів відхилень "між стовпцями" і що вона характеризує ?

7. Як визначити суму квадратів відхилень "між серіями" і що вона характеризує ?

8. Що вам відомо про оцінки дисперсій?
9. Як визначити вибірку загальну дисперсію за всіма u_{1u_2t} спостереженнями, з кількістю ступенів свободи ν , вибірку дисперсію розсіювання "всередині серій", або залишкову оцінку, що є середньозваженою дисперсією за всіма серіями спостережень з кількістю ступенів свободи ν_0 ?
10. Як визначити вибірку дисперсію розсіювання "між рядками" s_1^2 з кількістю ступенів свободи ν_1 та вибірку дисперсію розсіювання "між стовпцями" s_2^2 з кількістю ступенів свободи ν_2 ?
11. Як визначити вибірку дисперсію розсіювання "між серіями" s_{12}^2 з кількістю ступенів свободи ν_{12} ?
12. Як визначити кількість ступенів свободи $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_{12}, \nu$?
13. Як оцінити вплив фактора x_1 ?
14. Як оцінити вплив фактора x_2 ?
15. Як оцінити одночасний вплив двох факторів x_1 і x_2 ?
16. Що можна визначити за допомогою розрахункових формул для сум?
17. Що вам відомо про ультрахвильову діагностику порцелянових ізоляторів?

8 Лабораторна робота № 4

D-ОПТИМАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ПЛАНИ

8.1 Мета роботи. Ознайомитись з **D**-оптимальними експериментальними планами, методикою послідовного проведення експерименту і способом вибору кількості дослідів при реалізації **D**-оптимальних планів.

8.2 Теоретичні відомості

Експериментальні плани, що визначають програму досліджень для знаходження математичного опису об'єкта, будуються виходячи з різних критеріїв оптимальності. Значного поширення набули ортогональні плани. Вони оптимальні з погляду простоти обробки отриманої інформації. А також ротатбельні плани. Вони забезпечують однакову інформацію на рівних відстанях від центра плану.

Однак ці критерії не висували ніяких вимог до характеристик, які пов'язані з точністю отриманого математичного опису. Тому з'явилися нові критерії оптимальності планування, такі як величина визначника коваріаційної матриці оцінок коефіцієнтів (тобто узагальнена дисперсія оцінок коефіцієнтів), максимальне значення дисперсії пророкування рівняння регресії, середня дисперсія оцінок коефіцієнтів і інші.

Припустимо, що функціональний вигляд рівняння регресії відомий

$$\varphi(\vec{x}) = \eta = M(y) = \sum_{k=0}^d \beta_k \vec{f}_k(\vec{X}), \quad (8.1)$$

де $\vec{f}_k$ - відомі функції вхідних змінних $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Вектор $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ є вектором вхідних змінних.

Результати спостережень $y_1, y_2, \dots, y_N$ - незалежні, нормально розподілені випадкові величини.

Дисперсії

$$\sigma^2(y_g), \quad g = 1, 2, \dots, N$$

дорівнюють одна одній

$$\sigma^2(y_g) = \sigma^2.$$

Задача експериментатора полягає в знаходженні оцінок b_k коефіцієнтів β_k рівняння (8.1).

Введемо такі позначення:

$\vec{f}_g^T = (f_{g1} f_{g2} \dots f_{gn})$ - вектор, який визначає набір функцій f_{gk} в g -му спостереженні, T - знак транспонування;

$\vec{B}^T = (b_0 b_1 \dots b_d)$ - d мірний вектор шуканих оцінок.

$$F = \begin{pmatrix} f_{10} & f_{11} & \dots & f_{1d} \\ f_{20} & f_{21} & \dots & f_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{N1} & f_{N2} & \dots & f_{Nd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1^T \\ \vec{f}_2^T \\ \dots \\ \vec{f}_N^T \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Оцінки компонент вектора $\vec{B}$ можуть бути знайдені методом найменших квадратів, тобто з умови мінімуму суми квадратів відхилень спостережуваної величини y_j від величини, передбаченої рівнянням (8.1)

$$\left[y_g - \sum b_k \cdot f_{gk}(\vec{X}) \right]^2 \rightarrow \min. \quad (8.3)$$

Диференціюючи (8.3) по параметрах b_k і прирівнюючи похідні до нуля, одержимо систему нормальних рівнянь, яка записується [8] так:

$$\begin{aligned} C_{0,0}b_0 + C_{0,1}b_1 + \dots + C_{0,d}b_d &= \alpha_0 \\ C_{1,0}b_0 + C_{1,1}b_1 + \dots + C_{1,d}b_d &= \alpha_1 \\ C_{2,0}b_0 + C_{2,1}b_1 + \dots + C_{2,d}b_d &= \alpha_2 \\ C_{3,0}b_0 + C_{3,1}b_1 + \dots + C_{3,d}b_d &= \alpha_3 \\ C_{4,0}b_0 + C_{4,1}b_1 + \dots + C_{4,d}b_d &= \alpha_4 \\ C_{5,0}b_0 + C_{5,1}b_1 + \dots + C_{5,d}b_d &= \alpha_5 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\text{де} \quad C = (C_{k,f}) = \begin{bmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & \dots & C_{0,d} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & \dots & C_{1,d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{d,0} & C_{d,1} & \dots & C_{d,d} \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

матриця коефіцієнтів системи (8.4), елементи якої знаходять з виразу (8.6)

$$C_{kk} = \sum_{g=1}^N f_{gk}^2, C_{k,f} = C_{f,k} = \sum_{g=1}^N f_{gk} f_{gf}. \quad (8.6)$$

Вільні члени α_k визначаються за виразом

$$\alpha_{k,f} = \sum_{g=l}^N f_{gk} Y_g. \quad (8.7)$$

У матричній формі система нормальних рівнянь запишеться так:

$$\vec{B}F^TF = F^T = \vec{Y}. \quad (8.8)$$

Рішенням системи (8) є вектор оцінок коефіцієнтів

$$\vec{B} = (F^T F)^{-1} F^T \vec{Y}. \quad (8.9)$$

Запишемо вирази для коваріаційної матриці оцінок b_k . Нагадаємо, що ця матриця складається з елементів, які є дисперсіями і коваріаціями оцінок коефіцієнтів, тобто

$$r_{kf} = M[(b_k - \beta_k) \cdot (b_f - \beta_f)], \quad (8.10)$$

де β_k, β_f - справжні значення коефіцієнтів.

Коваріаційна матриця з врахуванням (8.9)

$$\vec{\beta}=(F^T F)^{-1} F^T \vec{\eta} \quad (8.11)$$

запишется так:

$$\begin{aligned}
& M[(\vec{B}-\vec{\beta})\cdot(\vec{B}-\vec{\beta})^T] = \\
& = M\left\{\left[(F^T F)^{-1} F^T (\vec{Y}-\vec{\eta})\right]\cdot[(\vec{Y}-\vec{\eta})^T F(F^T F)]\right\} = \\
& = (F^T F)^{-1} F^T (\sigma^2 E) F (F^T F)^{-1} = \sigma^2 (F^T F)^{-1}. \quad (8.12)
\end{aligned}$$

$M[(\vec{Y} - \vec{\eta}) \cdot (\vec{Y} - \vec{\eta})^T] = \sigma^2 E$ в силу того, що помилки некорельовані; тут E – одинична матриця розміру $N \times N$).

План X , який мінімізує визначник коваріаційної матриці оцінок (8.12) на безлічі всіх планів в області G , називається ***D-оптимальним***.

$$D(X) = \min \det(F^T F)^{-1}, \quad (8.13)$$

де $X \in G$.

Пояснимо, як треба розуміти критерій D -оптимальності. Виявилося, що ***D-оптимальний*** план мінімізує об'єм довірчого еліпсоїда на безлічі всіх планів в області G . Довірчий еліпсоїд - це такий еліпсоїд, що накриває справжні значення коефіцієнтів з даним рівнем імовірності. Оскільки об'єм цього еліпсоїда V пропорційний $\det(F^T F)^{-1}$, то мінімізація цього визначника по безлічі планів в області G забезпечить мінімальний об'єм.

Наведемо ще кілька критеріїв оптимальності:

1. ***A-оптимальність***. План називається A -оптимальним, якщо його коваріаційна матриця має мінімальний слід (тобто мінімальну суму діагональних елементів). Це відповідає мінімумові середньої дисперсії оцінок параметрів.

2. ***E-оптимальність***. План називається E -оптимальним, якщо він мінімізує максимальне власне число коваріаційної матриці оцінок $\vec{B}$.

3. ***G-оптимальність***. План називається G -оптимальним, якщо він забезпечує найменшу за всіма планами величину максимальної дисперсії передбачених значень рівняння регресії

$$D(\vec{X}) = \vec{f} \cdot \vec{X} (F^* F)^{-1} \vec{f}(\vec{F}). \quad (8.14)$$

4. ***План, який мінімізує*** максимальний діагональний елемент коваріаційної матриці (тобто максимальну дисперсію оцінок параметрів).

Усі наведені критерії були сформульовані для точних планів, тобто для планів з фіксованою кількістю спостережень N .

Розглянемо тепер методи побудови D -оптимальних планів.

При побудові D -оптимальних планів можливі дві постановки задачі. При першій з них задається кінцева кількість N спостережень і шукається таке розташування експериментальних точок, при якому буде виконана умова (8.13). Отримані в такий спосіб D -оптимальні плани називаються точними. Якщо ці плани концентруються в $h \leq N$ точках, в кожній з яких кількість вимірювань дорівнює N/L то частота повторень спостережень у l -ній точці буде $W_l = \frac{N_l}{N}$. Тому $\sum_{l=1}^h W_l = 1$. Основна властивість, яка характеризує точні плани, це те, що N_l - ціле число.

Можлива й інша постановка задачі. Вона зв'язана з поняттям узагальненого плану. Узагальненим (або безперервним) планом називається сукупність $2h$ чисел

$$\begin{aligned} \vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_h, \\ W_1, W_2, \dots, W_h. \end{aligned} \quad (8.15)$$

де $\vec{X}_l$, $(l=1,2,3,\dots,h)$ - точки, в яких проводяться спостереження, а W_l - частка спостережень в даній точці при загальній кількості спостережень, прийнятій за одиницю.

В даному випадку

$$\sum_{l=1}^h W_l = 1,$$

але W_l , $(l=1,2,3,\dots,h)$ - це будь-які дійсні числа, у тому числі й ірраціональні. Отже, такі плани не зв'язані з якоюсь конкретною кількістю спостережень.

Безперервні плани - це математична абстракція, що необхідна для спрощення задачі побудови D -оптимальних планів. Виявилось, що безперервні D -оптимальні плани можуть бути побудовані аналітично для деяких видів рівняння регресії.

Для безперервних D -оптимальних планів була сформульована і доведена теорема еквівалентності, відповідно до якої безперервний D -оптимальний план є одночасно і G -оптимальним, тобто мінімізує $\max d(\vec{X})$, причому

$$\max_{\vec{X} \in G} d(\vec{X}) = \max_{\vec{X} \in G} \vec{f}^T(\vec{X})(F^T F)^{-1} \vec{f}(\vec{X}) = \frac{k}{N}, \quad (8.16)$$

де k - кількість коефіцієнтів регресії;

N - кількість точок експериментального плану.

Рівняння (16) дозволяє оцінювати відхилення даного плану від D -оптимального. Відносне відхилення можна оцінити за формулою:

$$\delta = \frac{N \cdot \max_{\vec{X} \in G} \vec{f}^T(\vec{X})(F^T F)^{-1} \vec{f}(\vec{X}) - k}{k}. \quad (8.17)$$

На основі теореми еквівалентності була створена розрахункова процедура, яка дозволяє будувати безперервні D -оптимальні плани для довільного виду рівняння регресії і довільної форми області планування G .

Надалі будемо розглядати лише безперервні D -оптимальні плани. При реалізації безперервних D -оптимальних планів на практиці застосовується послідовна стратегія експериментування, при якій точка постановки нового експерименту визначається, виходячи з результатів попередніх експериментів.

При цьому виникають дві основні проблеми:

- доцільність продовження експерименту для уточнення оцінок параметрів;
- вибір наступної експериментальної точки з точок D -оптимального плану, якщо прийнято рішення про продовження експерименту.

Послідовний D-оптимальний експеримент організується так:

- вибирається початковий план, який є підмножиною точок D -оптимального плану;
- перевіряється виконання умови припинення експериментування (як буде показано нижче, момент припинення не залежить від результатів експерименту y_g);
- якщо не прийняте рішення про припинення спостережень, то вибирається найкраща точка постановки наступного експерименту.

Розглянемо реалізацію правила припинення. Будемо вважати, що нам дана допустима точність визначення оцінок $\vec{B}_N$:

$$\sum_{k=0}^d (\beta_k - b_{kN})^2 \leq \rho^2, \quad (8.18)$$

де $\vec{B}_N$ — оцінка після D -спостережень, яка повинна бути забезпечена з деякою заданою імовірністю. Умова (8.18) означає, що точка дійсних значень коефіцієнтів з імовірністю P знаходиться в середині сфери радіуса ρ з центром у точці $\vec{B}_N$. Область у просторі параметрів, обмежену сферою (8.18), позначимо через Ω_N і назовемо її допустимою. Спостереження припиняються, коли N досягне такого значення, при якому

$$P(\vec{\beta} \in \Omega_N) \geq \alpha. \quad (8.19)$$

Скористаємося поняттям довірчого еліпсоїда. Довірчий еліпсоїд визначає область у просторі β_N , яка накриває вектор дійсних значень параметрів β_N з імовірністю P . Рівняння довірчого еліпсоїда записується так:

$$(\vec{\beta} - \vec{B}_N)^T F_N^T F_N (\vec{\beta} - \vec{B}_N) = \delta^2 = \sigma^2 \chi_{kp}^2, \quad (8.20)$$

де $\chi_{kp}^2 - 100 \cdot P$ - відсоткова точка розподілу s^2 для кількості ступенів свободи k .

Умова припинення (8.19) буде виконана, якщо довірчий еліпсоїд знаходиться в середині сфери (8.18), яка визначає допустиму область.

Це буде матиме, коли

$$\lambda_{N \min} \cdot \rho^2 \geq \delta^2, \quad (8.21)$$

де $\lambda_{N, \min}$ - мінімальне власне число матриці $F_N^T F_N$.

Отже, спостереження припиняються, як тільки виконується нерівність (8.21). Очевидно, що виконання умови (8.21) не залежить від результатів експерименту. Якщо умова припинення (8.21) не виконана, необхідно продовжити експеримент. Для вибору наступної експериментальної точки необхідно знайти максимальне значення дисперсії пророкування (8.14) по точках плану. Точка $\vec{X}_{N+1}$ максимуму $d(\vec{X})$ і є точкою постановки нового експерименту. Алгоритм вибору наступної експериментальної точки, заснований на процедурі послідовного планування експериментів Соколова.

Вибір точки $\bar{X}_{N+1}$ також не пов'язаний з результатами попередніх експериментів (тому що $d(\bar{X})$ не залежить від y_g), тому і порядок проходження точок, і мінімальні власні числа матриці $F_N^T F_N$ можуть бути визначені до початку експерименту. Спочатку визначається порядок проходження точок D -оптимального плану, а потім обчислюється $\lambda_{N, min}$ після кожного нового спостереження.

Маючи таку таблицю, яка містить точки плану і $\lambda_{N, min}$, можна визначити за (8.17) межу припинення і визначити заздалегідь кількість спостережень, які потрібно буде зробити.

Таблиця 8.1 - Значення $\lambda_{N, min}$ і δ після кожного спостереження

№	X_1	X_2	λ_{min}	δ
1	2	3	4	5
1	0	0	-	-
2	1	0	-	-
3	-1	0	-	-
4	0	1	-	-
5	1	1	-	-
6	-1	1	-	-
7	0	-1	-	-
8	1	-1	-	-
9	-1	-1	1,000	0,667
10	1	-1	1,031	0,833
11	1	1	1,067	0,590
12	-1	-1	1,100	0,720
13	-1	1	1,138	0,234
14	0	0	1,717	0,115
15	0	-1	1,744	0,168
16	1	1	1,762	0,241
17	-1	1	1,781	0,278
18	1	-1	1,803	0,346
19	-1	-1	1,827	0,32
20	1	0	1,985	0,225
21	-1	0	2,047	0,254
22	0	1	2,174	0,0925
23	1	-1	2,199	0,14
24	1	1	2,225	0,183
25	-1	-1	2,250	0,231
26	-1	1	2,277	0,1925
27	0	0	2,860	0,0733
28	1	0	2,919	0,0923

Продовження таблиці 8.1

1	2	3	4	5
29	0	-1	3,024	0,095
30	-1	1	3,041	0,116
31	-1	-1	3,067	0,152
32	1	1	3,092	0,166
33	1	-1	3,130	0,145
34	-1	0	3,206	0,167
35	0	1	3,321	0,068
36	0	0	3,892	0,0668
37	1	-1	3,918	0,0957
38	1	1	3,945	0,1245
39	-1	-1	3,972	0,153
40	-1	1	4,000	0,066
41	0	-1	4,071	0,078
42	1	0	4,174	0,0557
43	0	1	4,249	0,0707
44	-1	0	4,349	0,0725
45	1	-1	4,377	0,0933
46	1	1	4,406	0,1147
47	-1	-1	4,434	0,1384
48	-1	1	4,464	0,0886
49	0	0	5,039	0,0367
50	1	-1	5,063	0,0574
51	-1	-1	5,078	0,0764
52	1	1	5,089	0,0971
53	-1	1	5,105	0,0575
54	1	0	5,216	0,0689
55	0	1	5,295	0,0509
56	0	-1	5,378	0,0631
57	-1	0	5,498	0,043
58	1	-1	5,524	0,06
59	-1	-1	5,551	0,077
60	1	1	5,557	0,095
61	-1	1	5,604	0,1005
62	0	0	6,182	0,0196
63	1	-1	6,206	0,0375
64	1	1	6,230	0,051
65	-1	-1	6,254	0,067
66	-1	1	6,278	0,0687
67	0	0	6,860	0,0517

Для визначення ρ^2 звичайно проводиться попередній експеримент, який містить невелику кількість точок D -оптимального плану (N_0 спостережень) і визначаються оцінки коефіцієнтів регресії $\bar{B}_{N_0}$. Після цього

ρ^2 береться як деякий відсоток величини $\sum_{k=1}^d b_{k N_0}^2$.

Відзначимо, що ортогональні плани типу 2^n є D -оптимальними. Таким чином, у випадку рівняння регресії виду

$$\eta = b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_n X_n + b_{12} X_1 X_2 + \dots + b_{ik} X_i X_k + \dots + b_{ikl} X_i X_k X_l + \dots + b_{ik\dots q} X_i X_k \dots X_q, \quad i \neq k \neq l \neq q \quad (8.22)$$

можна використовувати блоки експериментів, кожний з яких представляє повний факторний експеримент або дробовий факторний експеримент. Можна показати, що після кожного такого блоку

$$\lambda_{N_i} = N = \nu \cdot n, \quad (8.23)$$

де ν - кількість блоків, n - кількість спостережень у блоці.

Відзначимо, що після визначення кількості спостережень порядок їхнього проведення не має значення.

У таблиці 8.1 наведений D -оптимальний план для рівняння

$$\eta = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{11} X_1^2 + b_{12} X_1 X_2 + b_{22} X_2^2. \quad (8.24)$$

Цей план складається з 9 дослідів (перші 9 точок таблиці). Послідовність проведення експериментів після перших 9 дослідів визначалася за допомогою обчислення максимального значення (8.14) на кожному крокові і додавання точки, у якій досягається цей максимум.

В таблиці 8.1 наведені також $\lambda_{N, \min}$ і δ після кожного спостереження.

8.3 Хід роботи

1. Згідно з варіантом введіть у відповідні "вікна" на комп'ютерній моделі, наприклад, такі значення коефіцієнтів: $b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{22}$.
2. Задаємо довірчу ймовірність P .
3. Експеримент проводимо в точці факторного простору X_1, X_2 , яка задаватиметься варіантом. Крок варіювання дорівнює $\Delta X_1, \Delta X_2$ (також вибирається згідно з варіантом).
4. Натиснувши на клавішу "далі" знаходимо експериментальні y_e , які розкидані від дійсного значення з дисперсією σ , що задається згідно з варіантом.

5. Знаходимо цю ж σ за формулою Бесселя $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \eta_i)^2}{N - 1}}$.

6. Отриманий результат σ підставляємо у формулу $\delta = \sqrt{\sigma^2 \chi^2}$, де χ^2 - коефіцієнт Пірсона.

8. Якщо виявилось, що проміжків більше ніж один, то знайдені в таблиці δ перевіряються за умовою: $\lambda_{Nmin} \cdot \rho^2 \geq \delta^2$. Експеримент, у якому виконувалася умова, і є шуканим експериментом.

формулою $\rho = \sqrt{0,1 \sum_{k=1}^5 b_k^2}$.

$$\begin{aligned} C_{00}\beta_0 + C_{01}\beta_1 + C_{02}\beta_2 + C_{03}\beta_{11} + C_{04}\beta_{12} + C_{05}\beta_{22} &= \alpha_0, \\ C_{10}\beta_0 + C_{11}\beta_1 + C_{12}\beta_2 + C_{13}\beta_{11} + C_{14}\beta_{12} + C_{15}\beta_{22} &= \alpha_1, \\ \dots\dots\dots, \\ C_{50}\beta_0 + C_{51}\beta_1 + C_{52}\beta_2 + C_{53}\beta_{11} + C_{54}\beta_{12} + C_{55}\beta_{22} &= \alpha_5, \end{aligned} \quad (8.25)$$
$$C_{kf} = C_{fk} = \sum_{g=l}^N f_{gk} f_{gf} ; \quad (8.26)$$

$$C_{kk} = \sum_{g=1}^N f_{gk}^2; \quad (8.27)$$

$$\alpha_k = \sum_{g=l}^N f_{gk} y_g ; \quad (8.28)$$

$$f_0 = I; f_1 = X_1; f_2 = X_2; f_3 = X_1^2; f_4 = X_1 X_2; f_5 = X_2^2. \quad (8.29)$$

$$\Delta b_k = \beta_k - b_k. \quad (8.30)$$

8.4.1 Домашня підготовка

Ця таблиця записується перед виконанням експерименту, тобто результати експерименту для створення таблиці не потрібні.

Заповнюємо матрицю F , в якій кожен рядок – це новий експеримент. Її заповняють по рядках:

$$f_0 = 1; f_1 = X_1; f_2 = X_2; f_3 = X_1^2; f_4 = X_1 X_2; f_5 = X_2^2.$$

Значення іксів беруться у відносних одиницях (вони можуть мати значення -1,0,1). Для дев'яти експериментів матриця F набуде вигляду, наведеного на рисунку 8.1.

Використовуючи пакет прикладних програм **Mathcad** знаходимо добуток $F^T F$ (рисунок 8.2).

$$F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 8.1 - Матриця F для дев'яти експериментів

$$F^T F = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Рисунок 8.2 - Добуток $F^T F$

λ_{min} знаходимо як власне мінімальне число матриці $F^T F$. Це можна зробити за допомогою функції $\lambda_{min} = \text{eigenvals}(F^T F)$. Після виконання функції *eigenvals* буде визначений масив власних значень матриці $F^T F$. Серед цих чисел мінімальним буде 1. Отже $\lambda_{min} = 1$.

$$\begin{vmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 18 \end{vmatrix}$$

Рисунок 8.3 - Масив власних значень матриці $F^T F$ (отриманий в Mathcad)

Матриця F з кожним експериментом змінює свою розмірність $F(6:N)$, де N – номер експерименту, у якому відшуковуємо λ_{min} .

Наступне значення λ_{min} знаходиться як мінімальне власне значення матриці $F^T F$, але розмірністю 6:10.

Добуток матриць буде такий $F^T \cdot F =$

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & -1 & 7 & -1 & 7 \\ 1 & 7 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -1 & 7 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 5 & -1 \\ 7 & 1 & -1 & 5 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Масив власних чисел матриці $F^T F =$

$$\begin{vmatrix} 6 \\ 4.407 \\ 2 \\ 1.031 \\ 7.941 \\ 21.621 \end{vmatrix}.$$

Серед цих чисел мінімальним буде 1,031. Отже $\lambda_{min} = 1,031$.

Знаходження δ здійснюється за формулою

$$\delta = \frac{N \cdot \max_{X \in G} \vec{f}^T(\vec{X})(F^T F)^{-1} f(\vec{X}) - k}{k},$$

де $\max_{X \in G} \vec{f}^T(\vec{X})(F^T F)^{-1} f(\vec{X})$ є найбільшим значенням $d(\vec{X})$, яке знаходиться за формулою

$$\begin{aligned} d(\vec{X}) = \vec{f}^T(\vec{X})(\vec{F}^T F)^{-1} \vec{f}(\vec{X}) = f_0^2 r_{00} + f_0 f_1 r_{01} + \dots + \\ + f_0 f_1 r_{10} + f_1^2 r_{11} + \dots + f_1 f_5 r_{15} + \dots + f_5^2 r_{55}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Щоб перейти до десятого експерименту, за формулою (8.31) знаходимо значення $d(\vec{X})$ для кожного експерименту і серед них вибираємо максимальне. В якому експерименті значення $d(\vec{X})$ буде найбільшим, той експе-

римент вибираємо за наступний. Це ж значення підставляємо у формулу, наведену вище.

8.4.2 Робота в лабораторії

1. Запускаємо програму **D_optimal** і у відповідні вікна вписуємо значення згідно з варіантом, наприклад $X_1 = 50$, $X_2 = 50$, $\Delta X_1 = 30$, $\Delta X_2 = 30$, $b_0 = 1$, $b_1 = -3$, $b_2 = 2$, $b_{11} = 3$, $b_{12} = 4$, $b_{22} = -3$, $\sigma = 5$, (рисунок 8.4) і натискаємо "далі".

Рисунок 8.4 - Вікно програми **D_optimal**

2. Після натискання клавіші "далі" програма висвічує "вікно", в якому є порашовані значення з таблиці 8.1. Знайдені значення у і η виглядають так:

$y_1 = 10846$	$\eta_1 = 9951$
$y_2 = 22508$	$\eta_2 = 27561$
$y_3 = -2439$	$\eta_3 = -2259$
$y_4 = 4569$	$\eta_4 = 4311$
$y_5 = 24500$	$\eta_5 = 25521$
$y_6 = -10464$	$\eta_6 = -11499$
$y_7 = 9681$	$\eta_7 = 10191$
$y_8 = 25169$	$\eta_8 = 24201$
$y_9 = 1422$	$\eta_9 = 1581$

де η_i – теоретичне значення функції,

y_i – експериментальне значення функції.

3. Отримані експериментальні і теоретичні значення функції підставляємо у формулу Бесселя і знаходимо σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left(\frac{10846 - 9951}{9951}\right)^2 + \left(\frac{22508 - 27561}{27561}\right)^2 + \left(\frac{-2439 + 2259}{-2259}\right)^2}{8} + \frac{\left(\frac{4569 - 4311}{4311}\right)^2 + \left(\frac{24500 - 25521}{25521}\right)^2 + \left(\frac{-10464 + 11499}{-11499}\right)^2}{8} + \frac{\left(\frac{9681 - 10161}{10161}\right)^2 + \left(\frac{25169 - 24201}{24201}\right)^2 + \left(\frac{1422 - 1581}{1581}\right)^2}{8}} = 0,079 .$$

При ймовірності $P=0,952$ $\chi^2 = 7,8$.

Знайдені значення підставляємо у формулу $\delta = \sqrt{\sigma^2 \chi^2}$:

$$\delta = \sqrt{0,079^2 \cdot 7,8} = 0,22 .$$

4. Знаходимо це або приблизне значення δ в таблиці 8.1. При цьому пам'ятаємо, що таких значень може бути декілька.

5. Шукане число знаходиться між 13-им і 14-им, 15-им і 16-им, 21-им і 22-им, 25-им і 26-им експериментами. Нам потрібно вибрати відповідно 14-ий, 16-ий, 22-ий, 26-ий експерименти.

6. Оскільки в нас декілька варіантів експериментів то перевіряємо умову

$$\rho = \sqrt{0,1 \cdot \left((1)^2 + (-3)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (-3)^2 \right)} = 2,19$$

Для першого випадку коли $\lambda_{N \min} = 1,717 \rightarrow 1,717 \cdot 0,692^2 \geq 0,048$,

$$\text{коли } \lambda_{N \min} = 1,762 \rightarrow 1,762 \cdot 0,692^2 \geq 0,048 ,$$

$$\text{коли } \lambda_{N \min} = 2,174 \rightarrow 2,174 \cdot 0,692^2 \geq 0,048 ,$$

$$\text{коли } \lambda_{N \min} = 2,277 \rightarrow 2,277 \cdot 0,692^2 \geq 0,048 .$$

Умова виконується у всіх випадках, отже, можна зупинитися на 14-му експерименті.

7. Визначаємо β коефіцієнтів. Для цього треба заповнити елементи матриці C . Вони знаходяться за формулами (8.26), (8.27), де f_{gk} і f_{gf} - елементи матриці F .

Знаходимо реальні значення y за формулою (8.24) підставляючи значення x , який приймає значення 20, 50, 80.

$$y_1 = 1 - 3 \cdot 50 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 50^2 + 4 \cdot 50 \cdot 50 - 3 \cdot 50^2 = 10846,6,$$

$$y_2 = 1 - 3 \cdot 80 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 80^2 + 4 \cdot 80 \cdot 50 - 3 \cdot 50^2 = 25080,5,$$

$$y_3 = 1 - 3 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20 \cdot 50 - 3 \cdot 50^2 = -2439,7, \dots$$

За цією ж формулою знаходимо y . Для цього замість значень аргументів x підставляємо значення -1, 0, 1, які відповідають 20, 50, 80 (це 50 ± 30).

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 1, \\
y_2 &= 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 1, \\
y_3 &= 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 7, \dots
\end{aligned}$$

За допомогою програми знаходимо експериментальні значення y :

$$y_1 = 9951, \quad y_2 = 27561, \quad y_3 = -2259.$$

Після цього знаходимо експериментальні значення u за допомогою пропорції. Емпіричному $y_1=1$ відповідає дійсне $y_1=9951$. Записуємо пропорцію

$$\begin{aligned}
1 &\rightarrow 10846,6 \\
y_1 &\rightarrow 9951.
\end{aligned}$$

Знаходимо:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1 \cdot 9951}{10846,6} = 0,917, \\
y_2 &= \frac{1 \cdot 27561}{25080,5} = 1,098, \\
y_3 &= \frac{7 \cdot (-2259)}{-2439,7} = 6,481.
\end{aligned}$$

Ці значення y підставляємо у формулу (8.28) для знаходження α .

$$\alpha_{11} = 0,917 \cdot 1 + 1,098 \cdot 1 + 6,481 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4,166 \cdot 1 + 2,197 \cdot 1 - 4,21 \cdot 1 - 7,692 \cdot 1 + 6,666 \cdot 1 -$$

$$- 7,692 \cdot 1 + 4,166 \cdot 1 + 6,666 \cdot 1 + 2,197 \cdot 1 + 0,917 \cdot 1 = 15,877;$$

$$\alpha_{21} = 0,917 \cdot 0 + 1,098 \cdot 1 - 6,481 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 4,166 \cdot 1 - 2,197 \cdot 1 - 4,21 \cdot 0 - 7,692 \cdot 1 - 6,666 \cdot 1 - 7,692 \cdot 1 +$$

$$+ 4,166 \cdot 1 - 6,666 \cdot 1 - 2,197 \cdot 1 + 0,917 \cdot 0 = -30,161; \dots$$

$$C_{11} = I^2 + I^2 + I^2 + I^2 + I^2 + I^2 + I^2 + I^2 + I^2 + I^2 + I^2 + I^2 + I^2 = 14;$$

$$C_{12} = C_{21} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0;$$

$$C_{22} = 0^2 + I^2 + (-1)^2 + 0^2 + I^2 + (-1)^2 + 0^2 + I^2 + (-1)^2 + I^2 + I^2 + (-1)^2 + (-1)^2 +$$

$$+ 0^2 = 10; \dots$$

Матриця C матиме вигляд:

$$C = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 8 & 0 & 10 \end{vmatrix}, \alpha = \begin{vmatrix} 15,877 \\ -30,161 \\ 18,988 \\ 18,253 \\ 32,654 \\ 6,464 \end{vmatrix}.$$

З цих матриць складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 14\beta_0 + 10\beta_{11} + 10\beta_{22} = 15,877 \\ 10\beta_0 + 10\beta_{11} + 8\beta_{22} = 18,253 \\ 10\beta_0 + 8\beta_{11} + 10\beta_{22} = 6,464 \\ 10\beta_1 = -30,161 \\ 10\beta_2 = 18,988 \\ 8\beta_{12} = 32,654 \end{cases}.$$

Звідси: $\beta_0 = 0,742$, $\beta_1 = -3,016$, $\beta_2 = 1,899$, $\beta_{11} = 3,221$, $\beta_{12} = 4,082$,
 $\beta_{22} = -2,673$

Як бачимо: $b_0=1$, $b_1=-3$, $b_2=2$, $b_{11}=3$, $b_{12}=4$, $b_{22}=-3$. Тому:

$\Delta b_0 = b_0 - \beta_0 = 1 - 0,742 = 0,258$, $\gamma_0 = (\Delta b_0 / b_0) \cdot 100\% = 0,258/1 \cdot 100\% = 25,8\%$,

$\Delta b_1 = b_1 - \beta_1 = -3 + 3,016 = 0,016$, $\gamma_1 = (\Delta b_1 / b_1) \cdot 100\% = 0,016/(-3) \cdot 100\% = 0,5\%$,

$\Delta b_2 = b_2 - \beta_2 = 2 - 1,899 = 0,101$, $\gamma_2 = (\Delta b_2 / b_2) \cdot 100\% = 0,101/2 \cdot 100\% = 5\%$,

$\Delta b_{11} = b_{11} - \beta_{11} = 3 - 3,221 = -0,221$, $\gamma_{11} = (\Delta b_{11} / b_{11}) \cdot 100\% = -0,221/3 \cdot 100\% = 7,3\%$,

$\Delta b_{12} = b_{12} - \beta_{12} = 4 - 4,082 = -0,082$, $\gamma_{12} = (\Delta b_{12} / b_{12}) \cdot 100\% = -0,082/4 \cdot 100\% = 2\%$,

$\Delta b_{22} = b_{22} - \beta_{22} = -3 + 2,673 = -0,327$, $\gamma_{22} = (\Delta b_{22} / b_{22}) \cdot 100\% = -0,327/(-3) \cdot 100\% = 10\%$.

Найбільша похибка отримана при розрахунку β_0 .

8.5 Формули для розрахунку

1. Радіус області байдужості

$$\rho = \sqrt{0,1 \sum_{k=1}^{\alpha} b_k^2 N_0}.$$

2. Елементи вектора $\vec{f}$:

$$f_0 = 1; f_1 = X_1; f_2 = X_2; f_3 = X_1^2; f_4 = X_1 X_2; f_5 = X_2^2.$$

3. Елементи матриці $G_N = F_N^T F_N$

$$C_{kf} = C_{fk} = \sum_{g=1}^N f_{kg} f_{fg};$$

$$C_{kk} = \sum_{g=1}^N f_{kg}^2.$$

4. Елементи вектора $\vec{\alpha}$:

$$\alpha_k = \sum_{g=1}^N f_{kg} y_g, k=0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

5. Система нормальних рівнянь

$$C_{00}b_0 + C_{01}b_1 + C_{02}b_2 + C_{03}b_{11} + C_{04}b_{12} + C_{05}b_{22} = \alpha_0,$$

$$C_{10}b_0 + C_{11}b_1 + C_{12}b_2 + C_{13}b_{11} + C_{14}b_{12} + C_{15}b_{22} = \alpha_1,$$

$$\begin{aligned}
C_{20}b_0 + C_{21}b_1 + C_{22}b_2 + C_{23}b_{11} + C_{24}b_{12} + C_{25}b_{22} &= \alpha_2, \\
C_{30}b_0 + C_{31}b_1 + C_{32}b_2 + C_{33}b_{11} + C_{34}b_{12} + C_{35}b_{22} &= \alpha_3, \\
C_{40}b_0 + C_{41}b_1 + C_{42}b_2 + C_{43}b_{11} + C_{44}b_{12} + C_{45}b_{22} &= \alpha_4, \\
C_{50}b_0 + C_{51}b_1 + C_{52}b_2 + C_{53}b_{11} + C_{54}b_{12} + C_{55}b_{22} &= \alpha_5.
\end{aligned}$$

6. Дисперсія передбачення функції η :

$$\begin{aligned}
d(\bar{X}) &= \bar{f}^T(\bar{X})(\bar{F}^T F)^{-1} \bar{f}(\bar{X}) = f_0^2 r_{00} + f_0 f_1 r_{01} + \dots + \\
&+ f_0 f_1 r_{10} + f_1^2 r_{11} + \dots + f_1 f_5 r_{15} + \dots + f_5^2 r_{55},
\end{aligned} \quad (8.32)$$

де r_{jk} - елементи оберненої матриці (коваріаційної матриці оцінок) $(F^T F)^{-1}$.

Елементи оберненої матриці r_{jk} знаходяться за формулою

$$r_{jk} = (-1)^{j+k} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta},$$

де Δ_{jk} - алгебраїчне доповнення елемента k -го рядка і j -го стовпця; Δ - детермінант (визначник) матриці.

8.6 Варіанти завдань

Проведені дослідження виявили залежність параметра y від двох інших параметрів x_1 і x_2 у вигляді такої математичної моделі досліджуваного процесу $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2$.

Таблиця 8.2 - Варіанти завдань першої групи

№ студента у списку групи	Коефіцієнти рівняння математичної моделі (розрахункові)						Нормовані значення параметрів		Відхилення вхідних параметрів		Дисперсія
	b_0	b_1	b_2	b_{11}	b_{12}	b_{22}	X_1	X_2	ΔX_1	ΔX_2	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	4	2	5	7	-2	60	60	20	20	5
2	2	5	2	4	6	-1	70	70	10	10	5
3	3	6	2	3	5	1	50	50	30	30	5
4	4	7	2	2	4	2	40	40	20	20	5
5	5	8	2	1	3	3	30	30	20	20	5
6	4	7	-2	-1	2	4	20	20	5	5	5
7	3	6	-2	-2	1	5	35	35	15	15	5

Продовження таблиці 8.2

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>
8	2	5	-2	-3	2	6	25	25	10	10	5
9	1	4	-2	-4	3	7	55	55	15	15	5
10	-1	6	-2	-5	4	8	65	65	30	30	5
11	1	6	2	5	7	-2	60	60	20	20	3
12	2	7	2	4	6	-1	70	70	10	10	3
13	3	8	2	3	5	1	50	50	30	30	3
14	4	9	2	2	4	2	40	40	20	20	3
15	5	10	2	1	3	3	30	30	20	20	3
16	4	9	-2	-1	2	4	20	20	5	5	3
17	3	8	-2	2	-1	5	35	35	15	15	3
18	2	7	-2	3	-2	6	25	25	10	10	3
19	1	5	-2	-4	3	7	55	55	15	15	3
20	-1	5	-12	-5	4	8	65	65	30	30	3
21	11	4	12	5	7	-2	60	60	20	20	8
22	12	5	12	4	6	-1	70	70	10	10	8
23	13	3	14	6	5	1	50	50	30	30	8
24	14	7	12	2	4	2	40	40	20	20	8
25	15	8	12	1	3	1	30	30	20	20	8
26	14	7	-11	-1	2	-2	20	20	5	5	8
27	13	6	-10	-2	1	9	35	35	15	15	8

Продовження таблиці 8.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28	12	5	-12	-3	2	7	25	25	10	10	8
29	-11	4	-9	-4	3	5	55	55	15	15	8
30	8	3	-8	-5	4	3	65	65	30	30	8

Значення коефіцієнтів $b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{22}$, для кожного з варіантів наведені в таблицях 8.2-8.4. Визначте скільки (і яких) експериментів потрібно провести, щоб перевірити правдивість знайденої математичної моделі. Відповідно до варіанта задані: нормовані значення (точки дослідження) вхідних параметрів моделі X_1 і X_2 та кроки ($\Delta X_1, \Delta X_2$) варіювання параметрів X_1 і X_2 . Таким чином, вхідні параметри X_1 і X_2 можуть мати такі значення: $X_{1MIN}=X_1-\Delta X_1, X_1, X_{1MAX}=X_1+\Delta X_1$; $X_{2MIN}=X_2-\Delta X_2, X_2, X_{2MAX}=X_2+\Delta X_2$ та різні варіанти їх сполучень. Дисперсія похибки σ задана відповідно до варіанта. Порахуйте оцінку відхилення експериментальних значень коефіцієнтів $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$ від отриманих в результаті попередніх досліджень $b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{22}$.

Таблиця 8.3 - Варіанти завдань другої групи

№ студента у списку групи	Коефіцієнти рівняння математичної моделі (розрахункові)						Нормовані значення параметрів		Відхилення вхідних параметрів		Дисперсія
	b_0	b_1	b_2	b_{11}	b_{12}	b_{22}	X_1	X_2	ΔX_1	ΔX_2	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5	7	-2	5	7	-2	60	60	20	20	4
2	4	6	-1	4	6	-1	70	70	10	10	4
3	3	5	1	3	5	1	50	50	30	30	4
4	2	4	2	2	4	2	40	40	20	20	4
5	1	3	3	1	3	3	30	30	20	20	4
6	-1	2	4	-1	2	4	20	20	5	5	4
7	-2	1	5	-2	1	5	35	35	15	15	4
8	-3	2	6	-3	2	6	25	25	10	10	4
9	-4	3	7	-4	3	7	55	55	15	15	4

Продовження таблиці 8.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	-5	4	8	-5	4	8	65	65	30	30	4
11	5	7	-2	5	7	-2	60	60	20	20	7
12	4	6	-1	4	6	-1	70	70	10	10	7
13	3	5	1	3	5	1	50	50	30	30	7
14	2	4	2	2	4	2	40	40	20	20	7
15	1	3	3	1	3	3	30	30	20	20	7
16	-1	2	4	-1	2	4	20	20	5	5	7
17	2	-1	5	2	-1	5	35	35	15	15	7
18	1	-2	4	-3	-2	6	25	25	10	10	7
19	-4	3	7	-4	3	7	55	55	15	15	7
20	-5	2	2	-5	4	8	65	65	30	30	7
21	5	7	-2	5	7	-2	60	60	20	20	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
22	4	6	-1	4	6	-1	70	70	10	10	9
23	6	5	7	6	5	1	50	50	30	30	9
24	2	4	2	2	4	2	40	40	20	20	9
25	1	2	4	1	3	1	30	30	20	20	9
26	-1	2	-2	-1	2	-2	20	20	5	5	9
27	-2	6	2	-2	1	9	35	35	15	15	9
28	-3	2	4	-3	2	7	25	25	10	10	9
29	-4	2	7	-4	3	5	55	55	15	15	9
30	-5	4	1	-5	4	3	65	65	30	30	9

Таблиця 8.4 - Варіанти завдань третьої групи

№ студента у списку групи	Коефіцієнти рівняння математичної моделі (розрахункові)						Нормовані значення параметрів		Відхилення вхідних параметрів		Дисперсія
	b_0	b_1	b_2	b_{11}	b_{12}	b_{22}	X_1	X_2	ΔX_1	ΔX_2	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	4	2	1	4	2	60	60	20	20	3
2	2	5	2	2	5	2	70	70	10	10	3
3	3	6	2	3	6	2	50	50	30	30	3
4	4	7	2	4	7	2	40	40	20	20	3
5	5	8	2	5	8	2	30	30	20	20	3

Продовження таблиці 8.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	4	7	-2	4	7	-2	20	20	5	5	3
7	3	6	-2	3	6	-2	35	35	15	15	3
8	2	5	-2	2	5	-2	25	25	10	10	3
9	1	4	-2	1	4	-2	55	55	15	15	3
10	-1	6	-2	-1	6	-2	65	65	30	30	3
11	1	6	2	1	6	2	60	60	20	20	2
12	2	7	2	2	7	2	70	70	10	10	2
13	3	8	2	3	8	2	50	50	30	30	2
14	4	9	2	4	9	2	40	40	20	20	2
15	5	10	2	5	10	2	30	30	20	20	2
16	4	9	-2	4	9	-2	20	20	5	5	2
17	3	8	-2	3	8	-2	35	35	15	15	2
18	2	7	-2	2	7	-2	25	25	10	10	2
19	1	5	-2	1	5	-2	55	55	15	15	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	-1	5	-12	-1	5	-9	65	65	30	30	2
21	11	4	12	11	4	12	60	60	20	20	7
22	12	5	12	12	5	12	70	70	10	10	7
23	13	3	14	13	3	14	50	50	30	30	7
24	14	7	12	14	7	12	40	40	20	20	7
25	15	8	12	15	8	12	30	30	20	20	8
26	14	7	-11	14	7	-8	20	20	5	5	8
27	13	6	-10	13	6	-9	35	35	15	15	8
28	12	5	-12	12	5	-7	25	25	10	10	8
29	-11	4	-9	-11	4	-9	55	55	15	15	8
30	8	3	-8	8	3	-8	65	65	30	30	8

8.7 Контрольні питання

1. Дайте означення D -оптимального плану і перерахуйте його основні властивості.
2. Чим відрізняються точні і неперервні плани?
3. З яких міркувань визначається кількість спостережень, які необхідно буде провести за D -оптимальним планом?
4. Як вибирається точка проведення наступного експерименту?
5. Як визначаються границі припинення послідовної процедури експерименту?

Література

1. Основи наукових досліджень та технічної творчості: Навч. посібник / Журахівський А.В., Варецький Ю.В., Бахор З.М. / За редакцією І.В. Жежеленка. – Маріуполь. Видавництво Приазовського Державного технічного університету, 2000. - 138 с.
2. Проведение научных исследований и педагогический процесс. Филиппов Л.И. - М.: Моск. энерг. ин-т, 1987. - 86 с.
3. Шейко В.О., Кушнарченко М.В. Організація та методика науково-дослідної роботи. - К.: Техніка, 2002. - 362 с.
4. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И.Н. Курс теории вероятностей и математической статистики. - М.: Наука, 1965.
5. Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. - М.: Мир, 1970.
6. ГОСТ 15894-70. Статистическое регулирование технологических процессов. - М., 1972.
7. Зажиганов Л.С., Кишьян А.А., Романиков Ю.И. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента. М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.
8. Круг Г.К. Теоретические основы планирования экспериментальных исследований. - М.: Из-во МЭИ, 1974. – 185 с.
9. Боженко Л.І., Гутта О.Й. Управління якістю, основи стандартизації та сертифікації продукції. Навчальний посібник. - Львів, 2001. - 176 с.
10. Новиков В.М., Коцюба А.М. Основи метрології та метрологічна діяльність. Частина 2. Навчальний посібник. - Київ: Нора-прінт, 2001. - 210 с.
11. Объем и нормы испытаний электрооборудования / Под общ. ред. Б.А. Алексеева. Ф.Л. Когана, Л.Г. Мамакочиянца. - 6-е изд. с изм. и доп. - М.: Изд-во НЦ ЭНАС. 2001. - 256 с.
12. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. - М.: ФМ, 1959.
13. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. - М.: Наука, 1971.
14. Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями. - М., ИЛ, 1956.
15. Налимов Н. В., Чернова Н. Л. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. - М.: Наука, 1965.
16. Голикова Т. И., Микешина Н. Г. Свойство D-оптимальных планов и методы их построения, в кн. "Новые идеи в планировании эксперимента", - М.: Наука, 1969.
17. Вучков И. Н., Круг Г. К., D-оптимальные экспериментальные планы, Проблемы планирования эксперимента, - М.: Наука, 1969.
18. Соколов С. Н. Непрерывное планирование регрессионных экспериментов. Теория вероятностей и ее применения. - М.: Наука, 1963.

Додаток А - Таблиці

Таблиця А1- Значення $F_{0,05; f_1; f_2}$ (верхні значення) і $F_{0,01; f_1; f_2}$ (нижні значення) для різних ступенів свободи f_1 ; і f_2

f_2	f_1														f_2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	∞	
1	161 4067	200 4999	216 5403	225 5675	230 5764	234 5859	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056	243 6209	252 6302	253 6334	254 6366	1
2	18,51 98,50	19,00 99,00	19,10 99,17	19,25 99,25	19,30 99,30	19,33 99,33	19,35 99,36	19,17 99,37	19,38 99,39	19,39 99,40	19,44 99,45	19,48 99,48	19,49 99,49	19,50 99,50	2
3	10,13 34,12	9,55 30,82	9,28 29,46	9,12 28,71	9,01 28,24	8,94 27,91	8,89 27,67	8,85 27,49	8,81 27,34	8,79 27,34	8,66 29,69	8,58 26,35	8,55 26,23	8,53 26,12	3
4	7,71 21,20	6,94 18,00	6,59 16,69	6,39 15,98	6,26 15,52	6,16 15,21	6,09 14,98	6,04 14,80	6,00 14,66	5,96 14,55	5,80 14,02	5,70 13,69	5,66 13,57	5,63 13,46	4
5	6,01 16,26	5,79 13,27	5,41 12,07	5,19 11,39	5,05 10,97	4,95 10,67	4,88 10,46	4,82 10,29	4,77 10,16	4,74 10,05	4,56 9,55	4,44 9,24	4,41 9,13	4,36 9,02	5
7	5,59 12,25	4,74 9,55	4,35 8,45	4,13 7,85	3,97 7,46	3,89 7,19	3,79 7,00	3,67 6,84	3,64 6,72	3,64 6,62	3,44 6,16	3,32 6,07	3,27 5,75	3,23 5,63	7
10	4,96 10,04	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,14 5,20	3,07 5,06	3,02 4,94	2,98 4,85	2,77 4,41	2,64 4,12	2,59 4,01	2,54 3,91	10
20	4,35 8,10	3,49 5,85	3,10 4,94	2,87 4,43	2,71 4,10	2,60 3,87	2,51 3,70	2,45 3,56	2,39 3,46	2,35 3,37	2,12 2,94	1,97 2,64	1,91 2,54	1,84 2,42	20
50	4,03 7,17	3,18 5,06	2,79 4,20	2,56 3,72	2,40 3,41	2,29 3,19	2,20 3,02	2,13 2,89	2,07 2,79	2,03 2,70	1,78 2,26	1,60 1,95	1,52 1,82	1,44 1,68	50
100	3,94 6,90	3,09 4,82	2,70 3,98	2,46 3,51	2,31 3,21	2,19 2,99	2,10 2,82	2,03 2,69	1,97 2,59	1,93 2,50	1,68 2,06	1,48 1,73	1,39 1,60	1,28 1,43	100
∞	3,84 6,63	3,00 4,61	2,60 3,78	2,37 3,32	2,21 3,02	2,10 2,80	2,01 2,64	1,94 2,51	1,88 2,41	1,83 2,32	1,57 1,88	1,35 1,52	1,24 1,35	1,00 1,00	∞

Таблиця А2-Квантілі u_P нормованого нормального розподілу для різних P

P	u_P	P	u_P	P	u_P	P	u_P
0,5	0	0,70	0,524401	0,90	1,281552	0,983	2,120072
0,51	0,025069	0,71	0,553385	0,91	1,340755	0,984	2,144411
0,52	0,050154	0,72	0,582842	0,92	1,405072	0,985	2,170090
0,53	0,075270	0,73	0,612813	0,93	1,475791	0,986	2,197286
0,54	0,100434	0,74	0,643345	0,94	1,554774	0,987	2,226212
0,55	0,125661	0,75	0,674490	0,95	1,644854	0,988	2,257129
0,56	0,160969	0,76	0,706303	0,96	1,750686	0,989	2,290368
0,57	0,176374	0,77	0,738847	0,97	1,880794	0,990	2,326348
0,58	0,201893	0,78	0,772193	0,971	1,895698	0,991	2,365618
0,59	0,227545	0,79	0,806421	0,972	1,911036	0,992	2,408916
0,6	0,253347	0,80	0,841621	0,973	1,926837	0,993	2,457263
0,61	0,279319	0,81	0,877896	0,974	1,943134	0,994	2,512114
0,62	0,305481	0,82	0,915365	0,975	1,959964	0,995	2,575829
0,63	0,331853	0,83	0,954165	0,976	1,977368	0,996	2,652070
0,64	0,358459	0,84	0,994458	0,977	1,995393	0,997	2,747781
0,65	0,385320	0,85	1,036433	0,978	2,014091	0,998	2,878162
0,66	0,412463	0,86	0,80319	0,979	2,033520	0,999	3,090232
0,67	0,439913	0,87	0,126391	0,980	2,053749	--	--
0,68	0,467669	0,88	0,174987	0,981	2,074855	--	--
0,69	0,495850	0,89	0,226528	0,982	2,096927	--	--

Таблиця А3 – Значення інтеграла імовірності для нормального розподілу

x	0	0,02	0,04	0,06	0,08
1	2	3	4	5	6
0,0	0	0,0160	0,0319	0,0478	0,0638
0,1	0,0797	0,0955	0,1133	0,1192	0,1428
0,2	0,1585	0,1741	0,1897	0,2051	0,2205
0,3	0,2358	0,2510	0,2661	0,2812	0,2961
0,4	0,3108	0,3255	0,3401	0,3545	0,3688
0,5	0,3829	0,3969	0,4108	0,4245	0,4381
0,6	0,4515	0,4647	0,4778	0,4907	0,5035
0,7	0,5161	0,5285	0,5404	0,5527	0,5646
0,8	0,5763	0,5878	0,5991	0,6102	0,6211
0,9	0,6319	0,6424	0,6528	0,6629	0,6729
1,0	0,6827	0,6923	0,7017	0,7109	0,7199
1,1	0,7287	0,7373	0,7457	0,7540	0,7620
1,2	0,7699	0,7775	0,7850	0,7923	0,7995
1,3	0,8064	0,8132	0,8197	0,8262	0,8324
1,4	0,8385	0,8444	0,8501	0,8557	0,8611

Продовження таблиці А3

1	2	3	4	5	6
1,5	0,8664	0,8715	0,8764	0,8812	0,8859
1,6	0,8904	0,8948	0,8990	0,9031	0,9070
1,7	0,9109	0,9146	0,9181	0,9216	0,9249
1,8	0,9281	0,9312	0,9342	0,9371	0,9399
1,9	0,9426	0,9451	0,9476	0,9500	0,9523
2,0	0,9545	0,9566	0,9587	0,9606	0,9625
2,1	0,9643	0,9660	0,9676	0,9692	0,9707
2,2	0,9722	0,9732	0,9749	0,9762	0,9774
2,3	0,9786	0,9797	0,9807	0,9817	0,9827
2,4	0,9836	0,9845	0,9853	0,9861	0,9867
2,5	0,9876	0,9883	0,9889	0,9895	0,9901
2,6	0,9907	0,9912	0,9917	0,9922	0,9926
2,7	0,9931	0,9935	0,9939	0,9942	0,9946
2,8	0,9949	0,9952	0,9955	0,9958	0,9960
2,9	0,92626	0,92650	0,92672	0,92692	0,92712
3,0	0,92730	0,92747	0,92763	0,92779	0,92793

Таблиця А4 – Значення квантилів $u_{1\gamma}^N$ рівня γ мінімального значення з N вимірювань

N	γ				N	γ			
	0,5	0,7	0,8	0,9		0,5	0,7	0,8	0,9
1	0	+0,524	+0,842	+1,282	12	-1,586	-1,305	-1,146	-0,935
2	-0,545	-0,206	+0,133	+0,479	14	-1,662	-1,392	-1,237	-1,028
3	-0,820	-0,372	-0,215	+0,090	16	-1,724	-1,454	-1,305	-1,108
4	-0,998	-0,643	-0,437	-0,156	18	-1,778	-1,514	-1,366	-1,175
5	-1,129	-0,793	-0,598	-0,335	20	-1,822	-1,563	-1,426	-1,232
6	-1,231	-0,908	-0,722	-0,470	25	-1,921	-1,675	-1,538	-1,353
7	-1,315	-1,003	-0,820	-0,583	30	-2,000	-1,751	-1,626	-1,447
8	-1,385	-1,080	-0,908	-0,674	35	-2,062	-1,825	-1,695	-1,522
9	-1,447	-1,150	-0,978	-0,752	40	-2,116	-1,881	-1,751	-1,589
10	-1,499	-1,206	-1,041	-0,820	45	-2,162	-1,943	-1,812	-1,645
					50	-2,204	-1,977	-1,852	-1,695

Таблиця А5 – Значення $r_{\text{макс}}$ (або $r_{\text{мін}}$) для різних рівнів значимості α

Кількість ступенів свободи	α				Кількість ступенів свободи	α			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
1	1,406	1,412	1,414	1,414	13	2,326	2,493	2,638	2,800
2	1,645	1,689	1,710	1,723	14	2,354	2,523	2,670	2,837
3	1,791	1,869	1,917	1,955	15	2,380	2,551	2,701	2,871
4	1,894	1,996	2,067	2,130	16	2,404	2,577	2,728	2,903
5	1,974	2,093	2,182	2,265	17	2,426	2,600	2,754	2,932
6	2,041	2,172	2,273	2,374	18	2,447	2,623	2,778	2,959
7	2,097	2,237	2,349	2,464	19	2,467	2,644	2,801	2,984
8	2,146	2,294	2,414	2,540	20	2,486	2,664	2,823	3,008
9	2,190	2,343	2,470	2,606	21	2,504	2,683	2,843	3,030
10	2,229	2,387	2,519	2,663	22	2,520	2,701	2,862	3,051
11	2,264	2,426	2,562	2,714	23	2,537	2,717	2,880	
12	2,297	2,461	2,602	2,759					

Таблиця А6- Нормована функція Лапласа $\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

t	Соті частки для t									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
l	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0.0000	3.9894 е-3	7.9783е-3	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0,1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0,2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0,3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0,4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0,5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0,6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0,7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0,8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0,9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1,1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1,2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1,3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1,4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1,5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1,6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1,7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1,8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1,9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2,1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857

Продовження таблиці А6

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>
2,2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2,3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2,4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2,5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2,6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2,7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2,8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2,9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3,1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3,2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3,3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3,4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3,5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3,6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3,7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3,8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3,9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4,1	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4,2	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4,3	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4,4	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4,5	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4,6	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4,7	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Навчальне видання

П.Д. Лежнюк, О. Є. Рубаненко, Ю.В. Лук'яненко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Лабораторний практикум

Оригінал-макет підготовлено Рубаненком О.Є.

Редактор Т.О. Старічек

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95 , ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7х42 $\frac{1}{4}$
Друк різнографічний
Тираж прим
Зам №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95 , ВНТУ