В.П.ЛИТВИНЮК

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
РЯДИ

Міністерсво освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.П.Литвинюк

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
РЯДИ

Затверджено Вченою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів напряму підготовки 0708– "Екологія". Протокол № 11 від 25 червня 2003р.

Вінниця ВНТУ 2003

УДК 517.3 (075)
Л 64

Р е ц е н з е н т и :

В.М.Михалевич, доктор технічних наук, професор

В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

В.М.Кичак, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Литвинюк В.П.

Л 64 **Диференціальні рівняння. Ряди.**

Навчальний посібник. –Вінниця: ВНТУ, 2003 – 81 с.

В посібнику розглянуті теоретичні положення про диференціальні рівняння, числові та функціональні ряди. Методика викладання максимально пристосована для самостійної роботи студентів, детально розв'язано достатню кількість прикладів. Розроблені завдання для контрольних робіт. Посібник розроблено у відповідності з планом кафедри вищої математики і програми з дисципліни “Вища математика”.

УДК 517.3 (075)

ЗМІСТ

1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1.1 Основні поняття

Часто доводиться мати справу з такими задачами, в яких треба шукати невідому функцію однієї змінної, що входить в рівняння, що містить її похідні або диференціали. Такі рівняння називаються диференціальними.

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, що зв'язує невідому шукану функцію, її похідні і незалежну змінну.

В загальному вигляді його записують так : $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, де x – незалежна зміна, y – шукана функція змінної x.

Зауваження. Диференціальне рівняння може і не містити незалежну змінну або шукану функцію, але обов'язково містить її похідні або диференціали як функції так і незалежної змінної.

Означення. *Порядком* диференціального рівняння називається *найвищий* порядок похідної, що входить в рівняння.

Приведене вище рівняння є рівнянням n–го порядку; рівняння $y' + xy - x^2 = 0$ – рівняння 1–го порядку; рівняння $xy'' - 2(y')^3 - 3xy = 0$ – рівняння 2–го порядку.

Означення. *Розв'язком* диференціального рівняння називається всяка *функція*, що при підстановці в рівняння перетворить його в правильну рівність.

Наприклад, диференціальне рівняння $y'' + y = 0$ має розв'язками функції $y = 0$, $y = sin x$, $y = cos x$, $y = 2cos x - 5 sin x$, $y = C_1 cos x + C_2 sin x$, де C_1, C_2–довільні сталі, і інші. Дійсно, функція $y = sin x$ є розв'язком цього рівняння, бо $y' = cos x, y'' = sin x$, тоді, підставивши вирази $y = sin x$, $y'' = -sin x$, дістанемо $-sin x + sin x = 0$ або $0 = 0$.

Зауважимо, що диференціальне рівняння має безліч розв'язків.

Розв'язання диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння*, бо часто розв'язки можна отримати за допомогою інтегрування деяких виразів. Перейдемо до вивчення методів розв'язування диференціальних рівнянь, починаючи, звичайно, з диференціальних рівнянь 1–го порядку.

1.2 Диференціальні рівняння першого порядку

Загальний вигляд диференціального рівняння 1–го порядку такий:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ або } y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

де $F(x, y, y')$ і $f(x, y)$ – задані функції відповідних аргументів.

Уже найпростіші приклади свідчать про те, що диференціальне рівняння першого порядку має безліч розв'язків. Наприклад, розв'язками рівняння

$y' = x^2$ є функції $y = \frac{x^3}{3}$; $y = \frac{x^3}{3} + 7$; $y = \frac{x^3}{3} - 4$ і взагалі $y = \frac{x^3}{3} + C$, де C – довільна стала, яка є по суті невизначеним інтегралом функції x^2. І в загальному випадку розв'язок рівняння (1.1) містить, крім незалежної змінної, ще *одну довільну* сталу, тобто розв'язок має вигляд

$$y = \varphi(x, C). \tag{1.2}$$

Якщо замість C брати конкретні числові значення, то ми дістанемо деякий *частинний* розв'язок, тоді функцію $y = \varphi(x, C)$ слід називати загальним розв'язком рівняння (1.1). Напевне, для того щоб знайти певний *єдиний* розв'язок, треба задати ще одну *додаткову* умову, щоб визначити конкретне значення сталої C. Цю умову накладають на шукану функцію, а саме: знайти такий розв'язок $y(x)$ рівняння (1.1), щоб $y(x_0) = y_0$, де x_0 і y_0 – деякі задані числа. Умови $y(x_0) = y_0$, де x_0 і y_0 – задані числа, називаються *початковими умовами.* Які ж обмеження щодо вибору чисел x_0 і y_0 та на функцію $f(x, y)$?

Справедлива теорема, яку називають *теоремою існування* і *єдиності розв'язку* диференціального рівняння 1–го порядку.

Теорема Коші. Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ *неперервна* в деякій *замкненій* області (D), що містить деяку точку (x_0, y_0), а її частинна похідна $f'_y(x, y)$ обмежена в цій області, то *існує єдиний розв'язок* $y(x)$ цього рівняння такий, що $y(x_0) = y_0$.

Зауваження. Задача знаходження *розв'язку* диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє *початкові умови* $y(x_0) = y_0$, де x_0 і y_0 – задані числа, так звані початкові дані, називається *задачею Коші.*

Криві, що є розв'язками диференціального рівняння (1.1), називаються *інтегральними кривими.* Тоді загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ диференціального рівняння є деяке однопараметричне сімейство інтегральних кривих, а теорема Коші стверджує, що в області (D) існує *єдина* інтегральна крива цього сімейства, що проходить через задану точку (x_0, y_0) області (D).

Уточнимо ще поняття загального розв'язку диференціального рівняння першого порядку.

Означення. Функція $y = \varphi(x, C)$ називається загальним розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, якщо вона задовольняє такі умови.

1. При будь-якому значені C функція $y = \varphi(x, C)$ є конкретним частинним розв'язком цього рівняння.

2. При будь-яких *початкових умовах* $y(x_0) = y_0$ таких, що в околі точки (x_0, y_0) виконуються умови теореми Коші, знайдеться значення константи $C = C_0$ таке, що $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Наприклад, загальним розв'язком рівняння $y' - y = x$ є функція $y = Ce^x - x - 1$.

1. При будь-якому C ця функція є розв'язком цього рівняння, що легко встановити перевіркою (перевірте).

2. Задамо якісь початкові умови, наприклад $y(0) = 5$. Покажемо, що відповідне значення C_0 можна визначити однозначно. Дійсно, за цими початковими умовами будемо мати $Ce^0 - 0 - 1 = 5$, $C = 6$. Отже, функція $y = 6e^x - x - 1$ є розв'язком, що задовольняє і рівняння і початкові умови.

1.3 Методи розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку

Перш за все зробимо зауваження про дві рівносильні форми запису диференціального рівняння, а саме: форма рівняння, що містить похідну, тобто (1.1), та диференціальна форма $f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = 0$. Справедлива теорема.

Теорема. Всяке диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ можна записати в диференціальній формі і навпаки.

Дійсно, нехай рівняння записано у вигляді $y' = f(x,y)$. Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то матимемо $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, звідси $dy = f(x,y)dx$, а це вже є диференціальна форма запису.

Нехай рівняння має вигляд $f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = 0$. Поділимо рівняння на dx; одержимо $f_1(x,y) + f_2(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ або $f_1(x,y) + f_2(x,y)y' = 0$, звідки $y' = f(x,y)$, де $f(x,y) = -\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$.

Зауваження. Загального методу розв'язування диференціальних рівнянь не має. *Історично* склалось так, що диференціальні рівняння стали класифікувати за типами, саме тип рівняння визначає спосіб його розв'язування.

Одним із найпростіших типів диференціальних рівнянь є диференцдиференціальне рівняння з *відокремленими змінними*. Так називається рівняння

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0, \tag{1.3}$$

де $f_1(x)$ і $f_2(y)$ – задані функції. Розв'язується це рівняння досить просто. Оскільки $f_1(x)dx = -f_2(y)dy$, то це означає, що рівні між собою диференціали деяких функцій, одна з яких залежить від x, а друга від y. Тоді будуть рівними і їх невизначені інтеграли, тобто $\int f_1(x)dx = -\int f_2(y)dy$. Знайшовши ці інтеграли, ми одержимо фактично загальний інтеграл диференціального рівняння (1.3).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $(x-1)dx - y^2dy = 0$. Це є диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Проінтегрувавши його, дістанемо $\int(x-1)dx - \int y^2dy = 0$; $\frac{x^2}{2} - x - \frac{y^3}{3} = C$, де C – довільна стала. Це є загальний інтеграл рівняння.

1.3.1 Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

Це найбільш важливий тип диференціальних рівнянь, бо інші типи відповідними підстановками зводяться до них.

Означення. Диференціальним рівнянням з *відокремлюваними змінними* називається рівняння

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \tag{1.4}$$

де $f_1(x)$ і $f_2(y)$ – задані функції.

Розв'язується це рівняння таким способом. Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то рівняння (1.4) запишеться в диференціальйній формі $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Помноживши на dx і поділивши на $f_2(x)$, матимемо $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Отже, змінні відокремились. Тоді $\int\frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$. Це і є загальний інтеграл диференціального рівняння (1.4).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' = -\frac{y}{x}$. Це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Замінивши похідну відношенням диференціалів, одержимо $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ або $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Проінтегруємо це рівняння $\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$; $ln|y| = -ln|x| + lnC$; $ln|y| = ln\frac{C}{|x|}$. За монотонністю логарифмічної функції матимемо $|y| = \frac{C}{|x|}$; звідки $y = \frac{C}{x}$, де C – довільна стала. Знайдено загальний розв'язок рівняння.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'\sqrt{1-x^2} = y^2 + 1$.

Розв'язування. Розв'яжемо це рівняння відносно похідної $y' = \frac{y^2+1}{\sqrt{1-x^2}}$. Оскільки чисельник залежить тільки від y, а знаменник лише від x, то це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Замінимо y' відношенням диференціалів, дістанемо $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+1}{\sqrt{1-x^2}}$, звідки $\frac{dy}{y^2+1}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Проінтегруємо це рівняння $\int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

$arctgy = arcsin\,x + C$ – це загальний інтеграл диференціального рівняння, звідки $y = tg(arcsin\,x + C)$ – загальний розв'язок рівняння.

Зауваження. Рівняння $f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$ (1.5)
називається диференціальним рівнянням з *відокремлюваними змінними* в диференціальній формі.

Це рівняння легко звести до рівняння з відокремленими змінними. Поділивши на добуток $g_1(x)f_2(y)$, дістанемо $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx+\frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy=0$, звідки $\int\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy=0$ – це є загальний інтеграл диференціального рівняння (1.5).

***Приклад* 4.** Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $x(1+y^2)dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

Розв'язування. Оскільки перед диференціалами стоять множники, кожен з яких залежить лише від однієї змінної, то це рівняння з відокремленими змінними. Відокремимо змінні, поділивши на $\sqrt{1-x^2}(1+y^2)$, дістанемо $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0$. Проінтегруємо рівняння

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=0; \qquad -\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}=0;$$

$-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}ln(1+y^2)=\frac{1}{2}C$; $ln(1+y^2)=C+2\sqrt{1-x^2}$ – це загальний інтеграл рівняння.

1.3.2 Однорідне диференціальне рівняння

Означення. Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається *однорідним*, якщо для функції $f(x,y)$ при будь-якому дійсному t виконується тотожність
$$f(tx,ty)=f(x,y). \tag{1.6}$$

Наприклад, рівняння $y'=\frac{xy}{x^2-y^2}$ є однорідним, бо для функції $f(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2}$ будемо мати

$$f(tx,ty)=\frac{tx\cdot ty}{t^2x^2-t^2y^2}=\frac{t^2xy}{t^2\left(x^2-y^2\right)}=\frac{xy}{x^2-y^2}=f(x,y).$$

Справедлива така теорема.

Теорема 1. Всяке *однорідне* рівняння $y'=f(x,y)$ можна звести до вигляду $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. (1.7)

Дійсно, оскільки для функції $f(x,y)$ виконується тотожність (1.6) при будь-якому t ,то при $t=\frac{1}{x}$, де $x\neq 0$, будемо мати

$f(x,y)=f\left(\frac{1}{x}x,\frac{1}{x}y\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Теорему доведено.

Як же розв'язувати однорідне рівняння? Має місце теорема.

Теорема 2. Всяке *однорідне* рівняння підстановкою $\frac{y}{x}=u$ зводиться до диференціального рівняння з *відокремленими змінними.*

Доведення. Звівши однорідне диференціальне рівняння до вигляду $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, зробимо заміну $\frac{y}{x}=u$, де u – деяка функція від x, яку треба знайти. Тоді $y=xu$. Оскільки y – це шуканий розв'язок рівняння (1.7), то підставимо функцію $y=xu$ в це рівняння. Враховуючи, що $y'=u+xu'$, будемо мати: $u+xu'=\varphi(u)$, звідси $u'=\frac{\varphi(u)-u}{x}$, а це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Враховуючи те, що $u'=\frac{du}{dx}$, дістанемо $\frac{du}{dx}=\frac{\varphi(u)-u}{x}$, звідси $\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$. Тоді матимемо $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$ або $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=ln|x|+C$. Знайшовши цей невизначений інтеграл і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (1.7).

***Приклад* 5.** Розв'язати рівняння $y'=e^{-5\frac{y}{x}}+\frac{x}{y}$.

Розв'язування. Це рівняння є однорідним, бо має вигляд (1.7). Зведемо його до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою $\frac{y}{x}=u$, $y=xu$, $y'=u+xu'$. Тоді дане рівняння прийме вигляд $u+xu'=e^{-5u}+u$;

$xu' = e^{-5u}$, $u' = \frac{e^{-5u}}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{e^{-5u}}{x}$, $\frac{du}{e^{-5u}} = \frac{dx}{x}$; $\int \frac{du}{e^{-5u}} = \int \frac{dx}{x}$; $\int e^{5u} du = \int \frac{dx}{x}$,

$\frac{1}{5} e^{5u} = ln|x| + C \Rightarrow \frac{1}{5} e^{\frac{5y}{x}} = ln|x| + C$ – це є загальний інтеграл даного рівняння.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y-x}{y+x}$.

Розв'язування. Поділимо почленно чисельник і знаменник дробу на x, дістанемо $y' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$. Це є однорідне рівняння, бо має вигляд (1.7). Зробимо заміну $\frac{y}{x} = u$, звідки $y = xu$, $y' = u + xu'$, тоді дістанемо

$u + xu' = \frac{u-1}{u+1}$; $xu' = \frac{u-1}{u+1} - u$; $xu' = -\frac{u^2+1}{u+1}$; $u' = -\frac{u^2+1}{u+1} \cdot \frac{1}{x}$ — це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Скориставшись тим, що $u' = \frac{du}{dx}$, дістанемо $\frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{u+1} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{u+1}{u^2+1} du = -\frac{dx}{x}$;

$\int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dx}{x}$; $\int \left(\frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1} \right) du = -\int \frac{dx}{x}$;

$\int \frac{udu}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} = -\int \frac{dx}{x}$; $\frac{1}{2} ln(u^2+1) + arctgu = -ln|x| + C.$

Підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, дістанемо

$\frac{1}{2} ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right) + arctg\frac{y}{x} = -ln|x| + C$. Це є загальний інтеграл цього рівняння.

1.3.3 Лінійне диференціальне рівняння

Це найважливіше рівняння, в якому функція і її похідна входять лінійно.

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням* називається рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1.8}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – задані неперервні функції.

Одним із методів розв'язування лінійного рівняння є *метод Бернуллі*, суть якого викладена нижче.

Шукану функцію $y = y(x)$ будемо знаходити у вигляді добутку двох інших допоміжних функцій $u(x)$ і $v(x)$, тобто

$$y(x)=u(x)\cdot v(x). \qquad (1.9)$$

Зауважимо, що рівність (1.9) зв'язує три величини, одна з яких є певний шуканий розв'язок, тому одну із функцій $u(x)$ або $v(x)$ можна вибирати *довільно*. Вибиратимемо *довільно* функцію $v(x)$, чим скористаємось в подальших викладках.

Оскільки функція $y=uv$ є шуканий розв'язок рівняння (1.8), то вона повинна задовольнити це рівняння. Знайшовши похідну $y'=u'v+uv'$, підставимо ці вирази в рівняння (1.8):

$$u'v+uv'+P(x)uv\equiv Q(x) \text{ або } u'v+u(v'+P(x)v)\equiv Q(x). \qquad (1.10)$$

Саме рівняння (1.10) дасть можливість знайти *обидві* функції $u(x)$ і $v(x)$. Оскільки функція $v(x)$ вибирається *довільно*, то виберемо її так, щоб

$$v'+P(x)\cdot v=0. \qquad (1.11)$$

Це рівняння з *відокремлюваними* змінними, бо $v'=-P(x)v$; тоді $\frac{dv}{dx}=-P(x)v$, звідки $\frac{dv}{v}=-P(x)dx$, тоді

$$\int\frac{dv}{v}=-\int P(x)dx; \quad ln|v|=-\int P(x)dx. \text{ Отже, } \quad v=e^{-\int P(x)dx}, \qquad (1.12)$$

при цьому довільну сталу у виразі (1.12) опускають, користуючись тим, що функція $v(x)$ вибирається довільно.

Знайдену функцію v підставимо в рівняння (3.10), матимемо $u'\cdot e^{-\int P(x)dx}\equiv Q(x)$, звідки $u'=Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$, тоді $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$, де C – довільна стала. Отже, $y=u\cdot v=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}$. Це і є загальний інтеграл рівняння (1.8).

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y'-y=x$.

Розв'язування. Це є лінійне диференціальне рівняння. Підстановкою $y=u\cdot v$, $y'=u'v+v'u$, дістанемо $u'v+v'u-uv=x$ або $u'v+u(v'-v)=x$. Виберемо функцію v так, що $v'-v=0$; $v'=v$; $\frac{dv}{dx}=v$; $\frac{dv}{v}=dx$; $\int\frac{dv}{v}=\int dx$; $ln|v|=x$; $v=e^x$. Знайдену функцію $v=e^x$ підставимо в рівняння, дістанемо $u'e^x=x$; $u'=xe^{-x}\Rightarrow u=\int xe^{-x}dx=[u=x,$ $dv=e^{-x}dx;\ du=dx;\ v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\ ]=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C;$ $u=-xe^{-x}-e^{-x}+C$. Отже, $y=uv=\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C\right)\cdot e^x=Ce^x-x-1$.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'=\frac{y}{x+y^3}$.

Розв'язування. Права частина цього рівняння не розкладається на множники, не зводиться до вигляду $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ і не має вигляду (1.8). Але якщо поміняти ролями y і x, розглядаючи x як функцію змінної y і враховуючи рівність $y'_x=\frac{1}{x'_y}$, дістанемо рівняння $\frac{1}{x'_y}=\frac{y}{x+y^3}\Rightarrow x'_y=\frac{x+y^3}{y}$; $x'_y=\frac{1}{y}x+y^2$, а це лінійне рівняння відносно функції x. Скористаємось підстановкою $x=uv$, де обидві функції u і v залежать від y, і тим, що $x'_y=u'_yv+uv'_y$, підставивши ці вирази в отримане рівняння, матимемо: $u'v+uv'-\frac{uv}{y}=y^2$ або $u'v+u\left(v'-\frac{v}{y}\right)=y^2$. Виберемо функцію v так, щоб $v'-\frac{v}{y}=0$, звідки $v'=\frac{v}{y}$; $\frac{dv}{dy}=\frac{v}{y}$; $\frac{dv}{v}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dy}{y}$; $ln|v|=ln|y|\Rightarrow v=y$. Підставимо цю функцію $v=y$ в попереднє рівняння, дістанемо $u'y=y^2$; $u'=y\Rightarrow u=\int ydy$; $u=\frac{y^2}{2}+C$. Тоді

$$x=\left(\frac{y^2}{2}+C\right)y=\frac{y^3}{2}+Cy.$$

Зведемо ці стандартні типи диференціальних рівнянь і методи їх розв'язування в таблицю.

Назва рівняння	Вигляд рівняння	Метод розв'язування
Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними	$y'=f_1(x)f_2(y)$	$y'=\frac{dy}{dx}$
Однорідне рівняння	$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$	$\frac{y}{x}=u$
Лінійне рівняння	$y'+P(x)y=Q(x)$	$y=uv$

1.4 Рівняння, що допускають зниження порядку

Почнемо з диференціального рівняння другого порядку загального вигляду $F(x,y,y',y'')=0$ або $y''=f(x,y,y')$. (1.13)

Зауважимо, що в рівняння обов'язково повинна входити старша похідна 2-го порядку. Що собою представляє його загальний розв'язок?

Розглянемо рівняння $y''=sin2x$. Оскільки $y''=(y')'$, то y' є первісною для y'', тобто первісною для $sin2x$, тоді

$y' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$, де C_1 – довільна стала, звідки $y = \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right)dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$. Отже, $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Це є загальний розв'язок даного рівняння, який містить *дві довільні* сталі. Виявляється, ця особливість загального розв'язку диференціального рівняння 2-го порядку є загальною, і взагалі, *кількість довільних сталих*, що входять в загальний розв'язок диференціального рівняння *збігається з порядком* диференціального рівняння. Для знаходження значень цих довільних сталих C_1 і C_2 треба ще задатись двома *початковими умовами*, які записуються так: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, де x_0, y_0, y'_0 – задані числа.

Що стосується загальних методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків, то їх не має. Одним із ефективних прийомів розв'язування таких рівнянь є зниження порядку рівняння. Чим нижчий порядок, тим легше розв'язувати рівняння, якщо не точним, то наближеним методом. Знизити порядок диференціального рівняння можливо не завжди, а лише в деяких випадках. До них відносять такі:

1. Диференціальне рівняння має вигляд: $F(x, y'') = 0$. (1.14)

Зниження здійснюється *заміною* $y' = z(x)$, де $z(x)$ – нова шукана функція. Оскільки $y'' = z'$, то рівняння прийме вигляд $F(x, z') = 0$. Якщо рівняння має вигляд $y'' = f(x)$, то розв'язки його знаходять *послідовним інтегруванням* правої частини $f(x)$, як це ми бачили на прикладі.

2. Диференціальне рівняння має вигляд

$$F(x, y', y'') = 0 \text{ або } y'' = f(x, y'). \quad (1.15)$$

Це рівняння в записі явно не містить y. Зниження порядку здійснюється підстановкою $y' = p(x)$, де $p(x)$ – деяка функція від x, яку треба знайти. Дійсно, оскільки $y'' = p'$, то рівняння (1.15) запишеться так $F(x, p, p') = 0$, тобто дістали рівняння 1-го порядку.

3. Диференціальне рівняння має вигляд

$$F(y, y', y'') = 0 \text{ або } y'' = f(y_0, y'). \quad (1.16)$$

Це рівняння в записі явно не містить незалежної змінної. Тоді *підстановкою* $y' = p$, де $p = p(y)$ – деяка функція, що залежить від y, рівняння (1.16) зводиться до рівняння 1-го порядку. Дійсно, оскільки $p = p(y)$ є *складеною* функцією змінної x, то $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ або $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, бо $\frac{dy}{dx} = p$. Підставивши вирази $y' = p$ і $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ в рівняння

(1.16), дістанемо $F\left(y, p, p \cdot \dfrac{dp}{dy}\right) = 0$, а це рівняння вже є рівнянням 1-го порядку.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' = y'$.

Розв'язування. В рівняння явно не входить y, тому зробимо заміну $y' = p$, де $p = p(x)$. Оскільки $y'' = p'$, то рівняння зведеться до такого: $xp' = p$. Розв'яжемо це рівняння з відокремлюваними змінними $p' = \dfrac{p}{x} \Rightarrow \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p}{x}$; $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \int \dfrac{dp}{p} = \int \dfrac{dx}{x}$; $ln|p| = ln|x| + ln C_1 \Rightarrow p = C_1 x$, де C_1 – довільна стала. Оскільки $p = y'$, то звідси маємо $y' = C_1 x \Rightarrow$

$y = \int C_1 x dx = \int C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2$ або $y = C_1 x^2 + C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі, це є загальний розв'язок рівняння.

Приклад 10. Знайти розв'язок диференціального рівняння $1 + (y')^2 = 2yy''$, що задовольняє початкові умови $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 2$.

Розв'язування. Знайдемо спочатку загальний розв'язок цього рівняння. Це рівняння допускає зниження порядку, оскільки в його записі відсутня незалежна змінна x. Зробимо заміну $y' = p$, де $p = p(y)$, то

$y'' = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$, тоді дане рівняння запишеться так: $1 + p^2 = 2yp\dfrac{dp}{dy}$,

звідси $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{1 + p^2}{2yp}$; $\dfrac{2pdp}{1 + p^2} = \dfrac{dy}{y} \Rightarrow \int \dfrac{2pdp}{1 + p^2} = \int \dfrac{dy}{y}$;

$$ln\left(1 + p^2\right) = ln|y| + ln C_1 \Rightarrow ln\left(1 + p^2\right) = ln\left(C_1|y|\right) \Rightarrow 1 + p^2 = C_1 y \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$$

Враховуючи те, що $p = y'$ і використовуючи арифметичний корінь, дістанемо $y' = \sqrt{C_1 y - 1}$ або $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 y - 1} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx$, тоді

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx; \quad \frac{1}{C_1}\int (C_1 y - 1)^{-\frac{1}{2}} d(C_1 y - 1) = \int dx; \quad \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі; це є загальний інтеграл рівняння. Скористаємось заданими початковими умовами. Оскільки $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 1$, то

при $x = -1$ випливає $\begin{cases} \dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1 - 1} = -1 + C_2, \\ \sqrt{C_1 - 1} = 2. \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} C_2 = \dfrac{4}{5} + 1 = \dfrac{9}{5}, \\ C_1 = 5. \end{cases}$ Отже, $C_1 = 5$; $C_2 = \dfrac{9}{5}$, тоді шуканий частинний розв'язок буде таким: $\frac{2}{5}\sqrt{5y-1}=x+\frac{9}{5}$ або $2\sqrt{5y-1}=5x+9$, звідки $y=\frac{1}{5}\left(\frac{(5x+9)^2}{4}-1\right)=\frac{1}{20}(25x+90y+77)$. Це є шуканий частинний розв'язок.

1.5 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Багато задач фізики, механіки, радіотехніки, автоматики, електротехніки описуються диференціальними рівняннями, що містять невідому функцію та її похідні лінійно. Теорія таких рівнянь найбільш розвинута та вивчена.

Означення. *Лінійним* диференціальним рівнянням *другого порядку* називається рівняння $$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x), \tag{1.17}$$
де $y(x)$ – шукана функція, $a_1(x)$, $a_2(x)$ – задані неперервні функції або задані числа, $f(x)$ – задана неперервна функція, яка називається *правою частиною* рівняння. Рівняння (1.17) називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням* або скорочено ЛНДР.

Якщо права частина $f(x)\equiv 0$, то з (1.17) дістанемо
$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0. \tag{1.18}$$
Це рівняння називається відповідним *лінійним однорідним диференціальним рівнянням* або скорочено ЛОДР. Рівняння (1.17) і (1.18) часто будуть розглядатися поруч.

Зауваження. Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння
$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \tag{1.19}$$
де $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ – задані неперервні функції або задані числа, $f(x)$ – задана функція, так звана права частина рівняння.

Ліву частину цих рівнянь позначають через $L(y)$ і називають *лінійним диференціальним оператором* функції y. Користуючись оператором $L(y)$, рівняння (1.17) і (1.18) коротко записують так: $L(y)=f(x)$ і $L(y)=0$. Лінійний диференціальний оператор має такі дві важливі властивості $L(Cy)=CL(y)$, $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$.

1.5.1 Властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь

Ці властивості будемо доводити для лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку (для простоти викладок) і оформимо їх у вигляді теорем.

Теорема 1. Якщо функція $y(x)$ є частинним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння, то функція $Cy(x)$, де C – довільна стала, є також розв'язком цього рівняння.

Дійсно, якщо y є розв'язком рівняння (1.18), тобто $L(y) \equiv 0$, то $L(Cy) = CL(y) \equiv 0$.

Теорема 2. Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є частинними розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння, то їх сума $y_1(x) + y_2(x)$ є також розв'язком цього рівняння.

Дійсно, якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язки ЛОДР (1.18), тобто $L(y_1) \equiv 0$, $L(y_2) \equiv 0$, то матимемо $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv 0$.

Наслідок. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння, то їх довільна лінійна комбінація $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де C_1 і C_2 — довільні сталі, є також розв'язком цього рівняння.

Теорема 3. Якщо функція $y_1(x)$ є розв'язком ЛНДР $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, а функція $y_2(x)$ є розв'язком відповідного ЛОДР, то функція $y_1(x) + y_2(x)$ є розв'язком цього ЛНДР.

Дійсно, оскільки $L(y_1) \equiv f(x)$, $L(y_2) \equiv 0$, то $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f(x) + 0 = f(x)$. Отже функція $y_1(x) + y_2(x)$ є розв'язком цього ЛНДР.

Теорема 4. (теорема накладання). Якщо $y_1(x)$ — частинний розв'язок рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x)$, а $y_2(x)$ — частинний розв'язок рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$, то функція $y_1(x) + y_2(x)$ буде частинним розв'язком рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)$.

Дійсно, оскільки $L(y_1) \equiv f_1(x)$, $L(y_2) \equiv f_2(x)$, то $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv f_1(x) + f_2(y)$. Теорему доведено.

Теорема 5. Якщо комплекснозначна функція $y(x) = u(x) + iv(x)$ є частинним розв'язком ЛОДР $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то її дійсна і уявна частини є розв'язком цього рівняння.

Дійсно, оскільки $L(y) = 0$ і $L(u + iv) = L(u) + iL(v)$, то матимемо, що $L(u) + iL(v) \equiv 0$. Але за означенням комплексне число дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли окремо його дійсна і уявна частини дорівнюють нулю. Отже, $L(u) = 0$ і $L(v) = 0$. Теорему доведено.

1.5.2 Лінійні однорідні рівняння

Введемо поняття лінійно незалежних функцій.

Означення. Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними* на деякому проміжку, якщо їх відношення не є сталим, тобто

$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C$, де C — *const*.

Система n функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називається *лінійно незалежною* на деякому проміжку, якщо рівність

$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n = 0$ виконується за умови, що всі коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ дорівнюють нулю.

Для вияснення питання про лінійну незалежність розв'язків лінійного однорідного рівняння зручно користуватися визначником Вронського:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(x).$$

Доведена властивість, що визначник Вронського розв'язків ЛОДР або не дорівнює нулю ні в жодній точці проміжку, або тотожньо дорівнює нулеві в усіх точках проміжку, причому *не дорівнює нулю* тоді і тільки тоді, коли частинні розв'язки *лінійно незалежні.*

Введемо тепер важливе поняття фундаментальної системи частинних розв'язків.

Означення. Фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння другого порядку називається будь-яка система *двох лінійно незалежних* частинних розв'язків цього рівняння.

Справедлива така теорема.

Теорема. Всяке лінійне однорідне рівняння має фундаментальну систему розв'язків і цих систем як завгодно багато.

Доведення. Доведемо цю теорему для рівняння $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, де $a_1(x)$ і $a_2(x)$ неперервні функції на проміжку $[a,b]$. Тоді за теоремою Коші існує єдиний розв'язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови. Задамося двома різними початковими умовами: при $y(x_0) = y_0$ і $y'(x_0) = y_0'$ та $y(x_0) = \overline{y}_0$ і $y'(x_0) = \overline{y}_0'$, де $y_0, y_0', \overline{y}_0, \overline{y}_0'$ — довільні числа, на які накладається лише одне обмеження $\begin{vmatrix} y_0 & \overline{y}_0 \\ y_0' & \overline{y}_0' \end{vmatrix} \neq 0$. Нехай першим початковим умовам відповідає розв'язок $y_1(x)$, а другим — розв'язок $y_2(x)$. Складемо їх визначник Вронського при $x = x_0$:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_0 & \overline{y}_0 \\ y_0' & \overline{y}_0' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отже, частинні розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння.

Перейдемо тепер до встановлення структури загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (1.18).

Теорема *(про структуру загального розв'язку ЛОДР).* Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння другого порядку, то його загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (1.20)$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Доведення. Згідно з наслідком теореми про частинні розв'язки рівняння (1.18) випливає, що *довільна* лінійна комбінація частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ теж є розв'язком рівняння (1.18).

Доведемо ще, що серед розв'язків (1.20) є ті, що задовольняють задані початкові умови. Задамося довільними початковими умовами $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, де y_0 і y'_0 — задані числа. Для функції $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ вони запишуться так:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

Ця система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно C_1 і C_2 має єдиний розв'язок, бо її визначником є визначник Вронського $W(x_0) \neq 0$, оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні розв'язки. Теорему доведено.

Для лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.17) справедлива така теорема.

***Теорема** (про структуру загального розв'язку ЛНДР).* Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння є сума деякого його частинного розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \bar{y}(x), \tag{1.21}$$

де $\bar{y}(x)$ — частинний розв'язок рівняння (1.17), $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (1.18), C_1 і C_2 — довільні сталі або коротко $y = \bar{Y}(x) + \bar{y}(x)$, де $Y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню попередньої теореми. Ці дві теореми є основними теоремами в теорії лінійних диференціальних рівнянь, бо визначають структуру загального розв'язку лінійних рівнянь. Залишилось ще навчитися будувати фундаментальні системи лінійних однорідних рівнянь, до чого ми і переходимо.

1.6 Лінійні однорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

Найбільш важливим для багатьох практичних задач є випадок лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами, саме такі рівняння завжди можна проінтегрувати в елементарних функціях.

Для спрощення викладок розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{1.22}$$

де a_1 і a_2 – задані числа.

Леонардом Ейлером було запропоновано шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді показникової функції $y = e^{kx}$, де k – деяке число, яке треба визначити. Знайшовши першу і другу похідні цієї функції $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, підставимо ці вирази в рівняння (1.22), дістанемо

$k^2e^{kx}+a_1ke^{kx}+a_2e^{kx}\equiv 0$ або $e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)\equiv 0$. Оскільки $e^{kx}\neq 0$, при всіх $x\in R$, то звідси випливає, що $k^2+a_1k+a_2=0$. (1.23)

Це рівняння називається *характеристичним рівнянням* даного ЛОДР (1.22). Рівняння (1.23) можна формально скласти за рівнянням (1.22), замінивши похідну відповідного порядку відповідним степенем k (якщо вважати, що y – це похідна нульового порядку, то y треба замінити на $k^0=1$).

Отже, доведена така теорема.

Теорема. Якщо число k_0 є коренем характеристичного рівняння (1.23), то функція $y=e^{k_0x}$ є частинним розв'язком однорідного диференціального рівняння (1.22). Справедлива і обернена теорема, а саме: якщо функція $y=e^{kx}$ є розв'язком рівняння (1.22), то число k_0 є коренем його характеристичного рівняння.

Перейдемо тепер до побудови фундаментальної системи розв'язків рівняння (1.22) і побудови його загального розв'язку за допомогою коренів характеристичного рівняння. Можливі такі три випадки:

1. *Випадок дійсних різних коренів характеристичного рівняння.* Нехай k_1 і k_2 — дійсні різні корені характеристичного рівняння. Тоді за попередньою теоремою функції $y_1=e^{k_1x}$ і $y_2=e^{k_2x}$ є частинними розв'язками рівняння (1.22). Оскільки $k_1\neq k_2$, то $\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}}==e^{(k-k)x}\neq const$, то ці функції є лінійно незалежними, а значить, функції $y_1=e^{k_1x}$ та $y_2=e^{k_2x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння, а загальний розв'язок цього рівняння матиме вигляд

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}, \tag{1.24}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+y'-12y=0$.

Розв'язування. Складемо його характеристичне рівняння $k^2+k-12=0$, його коренями є $k_1=-4$ і $k_2=3$. Тоді функції $y_1=e^{-4x}$ та $y_2=e^{3x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння, а його загальним розв'язком буде функція $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{3x}$.

2. *Випадок дійсних рівних коренів характеристичного рівняння.* Нехай корені характеристичного рівняння дійсні і рівні, тобто $k_1=k_2$. Їх спільне значення позначимо через k, тобто k є двократний корінь рівняння (1.23), тоді функція $y_1=e^{kx}$ — один із частинних розв'язків рівняння (1.22). Як же знайти другий частинний розв'язок, лінійно незалежний з функцією e^{kx}? Ним буде функція $y_2=xe^{kx}$, в чому не важко переконатись безпосередньо, підставивши цю функцію в (1.22), враховуючи рівність $2k=-a_1$, що випливає із відомої властивості коренів квадратного рівняння:

$k_1 + k_2 = -a_1$ (теорема Вієта). Очевидно, що функції $y_1 = e^{kx}$ і $y_2 = xe^{kx}$ є лінійно незалежні, тому вони утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (1.22). Тоді загальний розв'язок рівняння (1.22) згідно з теоремою про структуру загального розв'язку ЛОДР матиме вигляд:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \quad (1.25)$$

Приклад 12. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$, що задовольняє початкові умови $y(0) = -1,\ y'(0) = 3$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$ має рівні корені $k_1 = k_2 = 2$. Тоді функції $y_1 = e^{2x}$ і $y_2 = xe^{2x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, загальним розв'язком цього рівняння є $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$, де C_1 і C_2 — довільні сталі. Знайдемо тепер частинний розв'язок, що задовольняє задані початкові умови. Знайдемо похідну знайденої функції: $y' = 2e^{2x}(C_1 + C_2 x) + e^{2x} C_2$. Тоді при $x = 0$ матимемо $\begin{cases} C_1 = -1, \\ 2C_1 + C_2 = 3, \end{cases}$ звідки $C_1 = -1, C_2 = 5$. Тоді шуканим розв'язком є функція $y = e^{2x}(-1 + 5x)$.

3. *Випадок комплексних коренів характеристичного рівняння.* Нехай корені характеристичного рівняння є комплексні, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, де $i^2 = -1$ — уявна одиниця. Зауважимо, що вони є спряжені. Тоді фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$ і $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$, які є комплексно значними, що незручно в користуванні. Перейдемо до іншої фундаментальної системи розв'язків, яка була б дійснозначною. Перетворимо частинний розв'язок $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$, виділивши в ньому дійсну і уявну частину. Скористаємося відомою формулою Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, матимемо

$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x$. Згідно з теоремою 5 дійсна та уявна частини розв'язку рівняння (1.22) є також розв'язками цього рівняння. Отже, функції $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ є розв'язками рівняння (1.22). Оскільки ці функції є лінійно незалежними (їх відношення не дорівнює сталій), то вони утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (1.22). Отже, *фундаментальною системою розв'язків* рівняння (1.22) є функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, тоді загальний розв'язок цього рівняння матиме вигляд:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ або } y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \quad (1.26)$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = 0$.

Розв'язування. Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має коренями комплексно-спряжені числа $k_{1,2} = \pm i$. Як бачимо, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, тоді фундаментальну систему розв'язків складатимуть функції $y_1 = \cos x$ і $y_2 = \sin x$, а загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y' + 29y = 0$.

Розв'язування. Характеристичним рівнянням є рівняння $k^2 + 4k + 29 = 0$, дискримінант якого $D = 16 - 4 \cdot 29 = -100$, тоді $k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \dfrac{-4 \pm 10i}{2} = -2 \pm 5i$, звідки $\alpha = -2$, $\beta = 5$. Фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1 = e^{-2x} \cos 5x$ і $y_2 = e^{-2x} \sin 5x$, тоді його загальним розв'язком буде функція: $y = e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

1.7 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{1.27}$$

де a_1, a_2 — задані числа, а $f(x)$ — задана функція, що називається правою частиною рівняння.

За теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння його загальний розв'язок має вигляд $y = Y + \bar{y}$, де $Y(x)$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $\bar{y}(x)$ — деякий частинний розв'язок рівняння (1.27). У випадку лінійного рівняння із сталими коефіцієнтами функцію $Y(x)$ ми вже вміємо знаходити. Необхідно ще навчитись визначати функцію $\bar{y}(x)$. Зрозуміло, що ця функція повинна визначатись за допомогою функції $f(x)$. Є два методи знаходження частинного розв'язку $\bar{y}(x)$: метод підбору частинного розв'язку та метод варіації довільних сталих. Методом *підбору* або *методом невизначених коефіцієнтів* можна знайти частинний розв'язок рівняння (1.27), якщо права частина рівняння має *спеціальний вигляд*, а саме:

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}, \tag{1.28}$$

де α — задане число, $P_n(x)$ — заданий цілий многочлен n-го степеня.

Частинний розв'язок рівняння (1.27) будемо шукати у вигляді, що подібний до його правої частини, а саме:

$$\bar{y}(x) = Q_n(x) e^{\alpha x}, \tag{1.29}$$

де $Q_n(x)$ — многочлен теж n-го степеня, але з *буквеними* коефіцієнтами, поки що невідомими. Покажемо прийом знаходження цих коефіцієнтів, який обходиться лише елементарними операціями (диференціюванням та розв'язуванням систем лінійних алгебраїчних рівнянь). Тут можливі такі три випадки:

1. *Число α не є коренем* характеристичного рівняння. Оскільки функція $\bar{y}(x)=Q_n(x)e^{\alpha x}$ є розв'язком рівняння (1.27), то ця функція повинна задовольнити це рівняння. Знайдемо її першу і другу похідні: $y'=Q_n'(x)e^{\alpha x}+\alpha Q_n(x)e^{\alpha x}$; $y''=Q_n''(x)e^{\alpha x}+\alpha Q_n'(x)e^{\alpha x}+$ $+\alpha Q_n'(x)e^{\alpha x}+\alpha^2\cdot Q_n(x)e^{\alpha x}=Q_n'(x)e^{\alpha x}+2\alpha Q_n'(x)e^{\alpha x}+\alpha^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$.

Підставимо ці два вирази в рівняння (1.27), скоротивши на $e^{\alpha x}$, дістанемо: $Q_n''(x)+(2\alpha+a_1)Q_n'(x)+(\alpha^2+a_1\alpha+a_2)Q_n(x)\equiv P_n(x)$. (1.30)

Звернемо увагу на те, що $Q_n'(x)$ є многочленом $(n-1)$-го степеня, а $Q_n''(x)$ — многочлен $(n-2)$-го порядку. Отже, в лівій частині тотожності (1.30) стоїть многочлен n-го степеня, якщо α не являється коренем характеристичного рівняння. Тоді за відомим методом невизначених коефіцієнтів ми однозначно знайдемо всі $n+1$ коефіцієнти многочлена $Q_n(x)$.

2. *Число α є коренем* характеристичного рівняння $\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$. Тоді рівність (1.30) прийме вигляд $Q_n''(x)+(2\alpha+a_1)Q_n'(x)=P_n(x)$ і ні при яких значеннях буквених коефіцієнтів не буде виконуватися, бо зліва знаходиться многочлен $(n-1)$-го степеня, а справа — заданий многочлен n-го степеня. Ця рівність виконувалась б, якби у формулі (1.29) брати многочлен степеня на одиницю вищого, ніж $P_n(x)$, тобто многочлен $(n+1)$-го степеня, але без вільного члена, бо при диференціюванні він зникає, а це означає, що $\bar{y}(x)$ треба шукати у вигляді

$$\bar{y}=xQ_n(x)e^{\alpha x}. \tag{1.31}$$

3. *Число α є двократним коренем* характеристичного рівняння, тобто $\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$ і $2\alpha+a_1=0$ (за теоремою Вієта). Тоді рівність (1.30) прийме вигляд $Q_n'(x)\equiv P_n(x)$ і неможлива ні при яких значеннях x, бо зліва стоїть многочлен $(n-2)$-го степеня. Щоб в лівій частині з'явився многочлен n-го степеня, треба у формулі (1.29) брати многочлен $(n+2)$-го степеня, але без вільного члена і члена з першим степенем x.

Отже, частинний розв'язок треба записувати у вигляді

$$\bar{y}=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}. \tag{1.32}$$

Зауваження 1. *Число α*, що є коефіцієнтом в показниковій функції $e^{\alpha x}$, що входить в склад правої частини $P_n(x)e^{\alpha x}$, називається *характеристичним числом.* В залежності від того, чи є число α коренем характуристичного рівняння чи не являється таким, частинний розв'язок

$\bar{y}(x)$ приймає один із трьох встановлених виразів. Формули (1.29), (1.31) і (1.32) можна об'єднати в одну, а саме:

$$\bar{y}(x) = x^r Q_n(x) e^{\alpha x}, \tag{1.33}$$

де $Q_n(x)$— цілий многочлен n-го степеня з буквеними коефіцієнтами, а r – – *кратність* корення α характеристичного рівняння, причому вважатимемо $r = 0$, якщо α не є коренем характеристичного рівняння.

Зауваження 2. Якщо права частина рівняння (1.27) має вигляд $f(x) = P_n(x)$, то $\alpha = 0$, тобто *характеристичним числом* вважають число нуль. Це частинний випадок для формули (1.29) при $\alpha = 0$.

Зауваження 3. Якщо права частина рівняння (1.27) має більш загальний вигляд (важливий для багатьох задач) , а саме:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \tag{1.34}$$

де α і β — задані числа, $P_n(x)$ і $Q_m(x)$— задані цілі многочлени відповідно n-го і m-го степенів, то частинний розв'язок $\bar{y}(x)$ шукають за формулою: $\bar{y}(x) = x^r e^{\alpha x}(S_k(x)\cos\beta x + T_k(x)\sin\beta x)$, (1.35)

де r — *кратність* кореня $\alpha + \beta i$ характеристичного рівняння, $S_k(x)$ і $T_k(x)$ — цілі многочлени k-го степеня з буквеними коефіцієнтами, де $k = \max\{n, m\}$. *Характеристичним числом* є комплексне число $\alpha + \beta i$, за цим числом проводиться контроль частинного розв'язку $\bar{y}(x)$. На завершення вкажемо вигляди многочленів з буквеними коефіцієнтам деяких степенів, а саме : $Q_0(x) = A$; $Q_1(x) = Ax + B$;

$$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C \;; \quad Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D. \tag{1.36}$$

Приведемо тепер зразки розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь із спеціальною правою частиною.

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y = (8x - 6)e^{-x}$.

Розв'язування. Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $y = Y + \bar{y}$.

1. Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' - y = 0$, його характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має корені $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. Тоді фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{-x}$ і загальний розв'язок цього рівняння $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

2. Для знаходження частинного розв'язку $\bar{y}(x)$ встановимо параметри правої частини $f(x) = (8x - 6)e^{-x}$; $n = 1$, $\alpha = -1$. Оскільки $\alpha = k_2$, тобто є простим коренем характеристичного рівняння, то $r = 1$, а $Q_n(x) = Ax + B$, тоді $\bar{y}$ будемо шукати у вигляді $\bar{y} = x(Ax + B)e^{-x}$ або

$\bar{y}=(Ax^2+Bx)e^{-x}$. Знайдемо похідні цієї функції $y'=(2Ax+B)e^{-x}-$ $-(Ax^2+Bx)e^{-x}$; $y''=2Ae^{-x}-(2Ax+B)e^{-x}-(2Ax+B)e^{-x}+$ $+(Ax^2+Bx)e^{-x}=2Ae^{-x}-2(2Ax+B)e^{-x}+(Ax^2+Bx)e^{-x}$. Підставимо ці вирази в дане рівняння: $2Ae^{-x}-2(2Ax+B)e^{-x}+(Ax^2+Bx)e^{-x}-$ $-(Ax^2+Bx)e^{-x}=(8x-6)e^{-x}$. Скоротивши рівняння на e^{-x}, дістанемо: $2A-2(2A+B)\equiv 8x-6$ або $-4Ax+2A-2B\equiv 8x-6$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях лівої і правої частини, дістанемо $\begin{cases}-4A=8,\\ 2A-2B=-6,\end{cases}$ звідки $A=-2$; $B=1$. Отже, $\bar{y}=(-2x^2+x)e^{-x}$. Тоді $y=Y+\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}+(-2x^2+x)e^{-x}$ — загальний розв'язок рівняння.

Приклад 16. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''-3y'=$ $=9x^2-8$, що задовольняє початкові умови $y(0)=1, y'(0)=-4$.

Розв'язування. Знайдемо спочатку загальний розв'язок даного рівняння, користуючись формулою $y=Y+\bar{y}$. Відповідне однорідне рівняння $y''-3y'=0$ має характеристичне рівняння $k^2-3k=0$, коренями якого є $k_1=0$ і $k_2=3$. Фундаментальну систему розв'язків складають функції $y_1=1$ і $y_2=e^{3x}$, тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння буде $Y=C_1+C_2e^{3x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Характеристичне число $\alpha=0$ і збігається з k_1, тобто $\alpha=k_1$, отже, число $\alpha=0$ є простим коренем характеристичного рівняння, тоді кратність кореня $r=1$ і $\bar{y}$ треба шукати у вигляді $\bar{y}=x(Ax^2+Bx+C)$ або $\bar{y}=Ax^3+$ $+Bx^2+Cx$. Знайдемо похідні $\bar{y}'=3Ax^2+2Bx+C$, $\bar{y}''=6Ax+2B$ і підставимо ці вирази в дане рівняння, дістанемо $6Ax+2B-$ $-3(3Ax^2+2Bx+C)=9x^2-8$; $6Ax+2B-9Ax^2-3C=9x^2-8$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної в лівій і правій частинах, дістанемо систему $\begin{cases}-9A=9,\\ 6A-6B=0,\\ 2B-3C=-8,\end{cases}$ звідки маємо $A=-1$, $B=-1$ і $C=2$. Отже, $\bar{y}=-x^3-x^2+2x$. Тоді $y=C_1+C_2e^{3x}-x^3-x^2+2x$ — загальний розв'язок даного рівняння. Знайдемо тепер частинний розв'язок цього рівняння, що задовольняє задані початкові умови. Оскільки $y'=3C_2e^{3x}-3x^2-2x+2$, то при $x=0$, дістанемо $\begin{cases}C_1+C_2=1,\\ 3C_2+2=-4,\end{cases}$ звідки

$C_2=-2,\ C_1=3$. Отже, шуканим частинним розв'язком буде $y=3-2e^{3x}-x^3-x^2-2x$.

Приклад 17. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-2y'= =6\cos 2x$.

Розв'язування. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-2y'=0$. Його характеристичне рівняння $k^2-2k=0$, коренями якого є числа $k_1=0$ і $k_2=2$. Фундаментальну систему розв'язків складають функції $y_1=1$ і $y_2=e^{2x}$. Тоді $Y=C_1+C_2e^{2x}$. За правою частиною $f(x)=6\cos 2x$ визначаємо характеристичне число $\alpha+\beta i=0+2i=2i\neq k_{1,2}\Rightarrow r=0$; $P_n(x)=6$; $Q_m(x)=0$, тоді $\bar{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$. Знайдемо похідні $\bar{y}'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$, $\bar{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$. Підставимо ці вирази в дане рівняння $-4A\cos 2x-4B\sin 2x+4A\sin 2x-4B\cos 2x\equiv 6\cos 2x$. Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x$ і при $\sin 2x$, дістанемо $\begin{cases}-4A-4B=6,\\ 4A-4B=0.\end{cases}$ Розв'язавши цю систему, дістанемо $A=B=-\dfrac{3}{4}$. Отже, шуканий розв'язок

$y=Y+\bar{y}=C_1+C_2e^{2x}-\dfrac{3}{4}\cos 2x-\dfrac{3}{4}\sin 2x$.

Приклад 18. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-2y'+y= =e^x+2x-3$.

Розв'язування. Відповідне однорідне рівняння $y''-2y'+y=0$ має своїм характеристичним рівнянням $k^2-2k+1=0$; $(k-1)^2=0\Rightarrow$ $\Rightarrow k_1=k_2=1$. Тоді фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1=e^x$ і $y_2=xe^x$, а загальним розв'язком однорідного рівняння є функція $Y=C_1e^x+C_2xe^x$.

Праву частину $f(x)=e^x+2x-3$ подамо у вигляді суми двох доданків $f_1(x)=e^x$ і $f_2(x)=2x-3$ і скористаємось теоремою накладання. Для функції $f_1(x)=e^x$ характеристичне число $\alpha=1$ і $\alpha=k_1=k_2$. Отже, число $\alpha=1$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тоді кратність кореня $r=2$ і частинний розв'язок $\bar{y}_1$ має вигляд $\bar{y}=x^2Ae^x$ або $\bar{y}_1=Ax^2e^x$. Знайдемо похідні $\bar{y}_1'=2Axe^x+Ax^2e^x$; $\bar{y}_1''=2Ae^x+2Axe^x+2Axe^x+Ax^2e^x$ і підставимо в рівняння з правою частиною $f_1(x)=e^x$, дістанемо $2Ae^x+4Ax^e+Ax^2e^x-4Axe^x-$ $-2Ax^2e^x+Ax^2e^x\equiv e^x$. Скоротивши рівняння на e^x і звівши подібні, дістанемо $2A=1$, звідки $A=\frac{1}{2}$. Отже, $\bar{y}_1=\frac{1}{2}x^2e^x$. Для функції $f_2(x)=2x-3$ характеристичним числом є число $\alpha=0\neq k_{1,2}$, тоді $r=0$ і $\bar{y}_2$ матиме вигляд $\bar{y}_2=Ax+B$. Знайдемо похідні $\bar{y}_2'=A$, $\bar{y}_2''=0$ і тоді підставимо в рівняння з правою частиною $f_2(x)=2x-3$, дістанемо $-2A+Ax+B=2x-3$; звідки $A=2,\ B=1$. Отже, $\bar{y}_2=2x+1$. За теоремою накладання $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2=\frac{1}{2}x^2e^x+2x+1$. Тоді шуканий розв'язок $y=Y+\bar{y}=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x+2x+1$.

1.8 Метод варіації довільних сталих

Це є загальний метод розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь, в яких права частина має, як спеціальний вигляд, так і не має цього вигляду; як із сталими коефіцієнтами, так і зі змінними коефіцієнтами. Викладемо його суть для лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x), \tag{1.37}$$

де a_1, a_2 — задані числа. Розглянемо відповідне однорідне рівняння $y''+a_1y'+a_2y=0$. Нехай відома його фундаментальна система розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$. Тоді його загальний розв'язок

$$Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{1.38}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Загальний розв'язок рівняння (1.37) будемо шукати в такому ж вигляді (1.38), але будемо вважати C_1 і C_2 деякими функціями змінної x, поки що невідомими, тобто

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x), \tag{1.39}$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ — деякі функції.

Оскільки рівність (1.39) зв'язує три невідомі функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ і шуканий розв'язок $y(x)$, то функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ будемо підбирати так, щоб виконувалась рівність $C'_1(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$ (використовується *довільність* їх вибору). Ця умова спрощує вираз похідної функції (1.39). Знайшовши ще другу її похідну і враховуючи цю рівність, підставимо ці вирази в рівняння (1.37) і дістанемо, що $C_1'(x)y_1'(x)+$ $+C_2'(x)y_2'(x)\equiv f(x)$. Отже, відносно похідних $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases}C_1'y_1+C_2'y_2=0,\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x).\end{cases} \tag{1.40}$$

Відносно C_1' і C_2' це є система лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши її, а вона має єдиний розв'язок, бо її визначником є визначник Вронського для фундаментальної системи розв'язків, який не дорівнює нулю, знайдемо $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$, де функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ є знайдені розв'язки системи. Тоді за відомими похідними функцій знайдемо самі шукані функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ інтегруванням функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, а саме: $C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_1$ і $C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + C_2$, де C_1 і C_2 — довільні сталі. Отже, функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ будуть знайдені, а значить, буде знайдено загальний розв'язок (1.39) рівняння (1.37).

Приклад 19. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = tgx$.

Розв'язування. Це є лінійне неоднорідне рівняння, права частина якого не має спеціального вигляду. Розв'язуватимемо його методом варіації довільних сталих. Відповідне однорідне рівняння $y'' + y = 0$ має своїм характеристичним рівнянням $k^2 + 1 = 0$, коренями якого є комплексні числа $k_{1,2} = \pm i$. Тоді фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1 = \cos x$ і $y_2 = \sin x$. Загальний розв'язок однорідного рівняння матиме вигляд $Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Варіюючи ці довільні сталі, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Відносно похідних шуканих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему (1.40). Оскільки $y_1' = (\cos x)' = -\sin x$, $y_2' = (\sin x)' = \cos x$, то дістанемо систему $\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = tgx. \end{cases}$. З першого рівняння $C_1' = -C_2' \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Підставимо в друге рівняння $C_2' \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + C_2' \cos x = tgx$, звідси $C_2' = \sin x$, $C_1' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. Тоді $C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_2$, де C_2 — довільна стала, $C_1(x) = -\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx =$

$$= -\int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) dx = -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx = -ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x + C_1,$$ де C_1 — довільна стала. Отже, $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 =$

$$= \left(C_1 + \sin x - ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \cos x + (C_2 - \cos x)\sin x = C_1 \cos x + C_2 \sin x -$$

$$- \cos x\, ln\left| tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \right|.$$

1.9 Системи диференціальних рівнянь

Система двох диференціальних рівнянь першого порядку відносно двох функцій $x(t)$ і $y(t)$ в загальному вигляді записується так:

$$F_1(t,x,y,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})=0, \quad F_2(t,x,y,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})=0, \qquad (1.41)$$

де t — незалежна змінна, $x(t)$ і $y(t)$ — шукані функції.

Розв'язком системи (1.41) називається будь-яка пара функцій $x(t)$ і $y(t)$, що при підстановці кожне із рівнянь перетворюють в тотожність.

Серед систем рівнянь виділяються *нормальні системи*.

Означення. *Нормальною системою* двох диференціальних рівнянь першого порядку називається система

$$\frac{dx}{dt}=f_1(t,x,y), \quad \frac{dy}{dt}=f_2(t,x,y). \qquad (1.42)$$

Важливими є *нормальні* системи *лінійних* диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y$, $\frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y$. Для систем (1.41) і (1.42) задача Коші ставиться так: знайти частинні розв'язки системи, що задовольнять початкові умови $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, де t_0, x_0, y_0 — задані числа. Загальний розв'язок такої системи містить *дві довільні* сталі.

Для розв'язування нормальних систем може бути використаний звичайний *метод виключення невідомих*, за яким дана система двох рівнянь зводиться до *одного* диференціального рівняння *другого* порядку. Якщо розглядається нормальна система трьох рівнянь, то вона зведеться до *одного* рівняння *третього порядку.*

Покажемо його застосування на прикладах.

Приклад 20. Знайти загальний розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt}=2x+2y, \quad \frac{dy}{dt}=x+3y.$$

Розв'язування. Це є нормальна система рівнянь із сталими коефіцієнтами. З другого рівняння виразмо функцію x через функцію y і її похідну $x=\frac{dy}{dt}-3y$. Знайдемо похідну $\frac{dx}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}$ і підставимо ці вирази в перше рівняння $\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=2(\frac{dy}{dt}-3y)+2y$. Функція $x(t)$ виключена. Зведемо це рівняння до стандартного вигляду $\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+4y=0$. Складемо характеристичне рівняння цього лінійного однорідного рівняння $k^2-5k+4=0$, його коренями є $k_1=1$, $k_2=4$. Оскільки $k_1 \neq k_2$, то функції $y_1=e^t$ і $y_2=e^{4t}$ утворюють його фундаментальнульну систему розв'язків. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде $y(t)=C_1e^t+C_2e^{4t}$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Знайдемо тепер функцію $x(t)$; враховуючи, що $x(t)=\frac{dy}{dt}-3y$, дістанемо $x(t)=C_1e^t+4C_2e^{4t}-3(C_1e^t+C_2e^{4t})$ або $x(t)=-2C_1e^t+C_2e^{4t}$. Отже, $x(t)=-2C_1e^t+C_2e^{4t}$; $y(t)=C_1e^t+C_2e^{4t}$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Це є загальний розв'язок системи, який містить дві довільні сталі.

Приклад 21. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-7x+y,\\ \frac{dy}{dt}=-2x-5y+2e^{2t}.\end{cases}$

Розв'язування. З першого рівняння $y=\frac{dx}{dt}+7x$, звідси $\frac{dy}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}+7\frac{dx}{dt}$. Підставимо ці вирази в друге рівняння, дістанемо $\frac{d^2x}{dt^2}+7\frac{dx}{dt}=-2x-5\frac{dx}{dt}-35x+2e^{2t}$. Зведемо це рівняння до стандартного вигляду $\frac{d^2x}{dt^2}+12\frac{dx}{dt}+37x=2e^{2t}$. Дістали лінійне неоднорідне рівняння.

Складемо відповідне лінійне однорідне рівняння $\frac{d^2x}{dt^2}+12\frac{dx}{dt}+37x=0$, його характеристичне рівняння $k^2+12k+37=0$ має комплексні корені $k_{1,2}=-6\pm i$. Фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $x_1=e^{-6t}\cos t$ і $x_2=e^{-6t}\sin t$, тоді загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є функція $X(t)=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$. Знайдемо ще частинний розв'язок $\bar{x}(t)$ за правою частиною $f(t)=2e^{2t}$. Оскільки характеристичне число $\alpha=2$ не є коренем характеристичного рівняння, то $\bar{x}$ матиме вигляд $\bar{x}=Ae^{2t}$. Знайдемо похідні $\bar{x}'(t)=2Ae^{2t}$, $\bar{x}''(t)=4Ae^{2t}$ і підставимо ці вирази в одержане неоднорідне рівняння, дістанемо $4Ae^{2t}+12\cdot 2Ae^{2t}+37Ae^{2t}=2e^{2t}$, звідси $53A=2$; $A=\frac{2}{53}$. Тоді $\bar{x}=\frac{2}{53}e^{2t}$ і $x(t)=X(t)+\bar{x}(t)=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+\frac{2}{53}e^{2t}$. Знайдемо тепер $y(t)=\frac{dx}{dt}+7x=-6e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+e^{-6t}(-C_1\sin t+C_2\cos t)+$ $+\frac{4}{53}e^{2t}+7e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)=e^{-6t}((C_2+C_1)\cos t+(C_2-C_1)\sin t)+$ $+\frac{4}{53}e^{2t}$. Отже, функції $x(t)=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$ і

$y(t)=e^{-6t}((C_2+C_1)\cos t+(C_2-C_1)\sin t)+\frac{4}{53}e^{2t}$ є загальним розв'язком даної системи.

1.10 Нормальна система лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Розглянемо нормальну систему n лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами відносно n функцій $x_1(t),\ x_2(t),...,\ x_n(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{1.43}$$

Ця система завжди має розв'язки, хоч би *тривіальний*, тобто такий, що всі $x_i(t)\equiv 0$, де $i=1,2,...,n$.

Будемо шукати *ненульові розв'язки* цієї системи. Запишемо спочатку цю систему в матричному вигляді. Для цього введемо такі матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad X'=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Тоді система (1.43) запишеться одним матричним рівнянням

$$X'=AX \quad \text{або} \quad \vec{X}'=A\vec{X}, \tag{1.44}$$

де $\vec{X}=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, координати цього вектора є розв'язком цієї системи.

Розв'язки $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ будемо шукати у вигляді

$$x_1(t)=r_1e^{\lambda t},\ x_2(t)=r_2e^{\lambda t},...,\ x_n(t)=r_ne^{\lambda t}, \tag{1.45}$$

де $\lambda, r_1, r_2,...,r_n$ — деякі числа, які треба визначити, при цьому *не всі* числа r_i дорівнюють *нулю*. Як же ці числа встановити ? Підставимо ці функції в систему (1.44). Оскільки

$$X=\begin{pmatrix} r_1 e^{\lambda t} \\ r_2 e^{\lambda t} \\ \dots\dots \\ r_n e^{\lambda t} \end{pmatrix}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad X'=\begin{pmatrix} r_1 \lambda e^{\lambda t} \\ r_2 \lambda e^{\lambda t} \\ \dots\dots\dots \\ r_n \lambda e^{\lambda t} \end{pmatrix}=\lambda\, e^{\lambda t}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix},$$ то матимемо

$$\lambda e^{\lambda t}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}=Ae^{\lambda t}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}.$$ Скоротимо рівняння на $e^{\lambda t}$ і введемо позначення

$$R=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix},$$ тоді ця рівність запишеться так: $AR=\lambda R$ або $A\vec{R}=\lambda\vec{R}$, (1.46)

де λ — деяке число, а $\vec{R}$ — деякий *ненульовий* вектор.

В термінах векторної алгебри вектор $\vec{R}$ називається *власним вектором* матриці A, а число λ називається *власним значенням* матриці A.

Отже, шуканий розв'язок $\vec{X}$ системи (1.43) виражається через власний вектор $\vec{R}$ і власне значення λ матриці A за допомогою формули

$$\vec{X}=\vec{R}\,e^{\lambda t}. \tag{1.47}$$

Отже, задача про знаходження чисел $r_1, r_2, ..., r_n$ і λ звелась до задачі знаходження власного значення λ і власного вектора $\vec{R}$ матриці системи A, які знаходяться таким чином. Запишемо рівність (1.46) в розгорнутій формі через елементи матриці A і координати вектора $\vec{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix},$$ звідки $$\begin{cases} a_{11}r_1+a_{12}r_2+\ldots+a_{1n}r_n=\lambda\, r_1, \\ a_{21}r_1+a_{22}r_2+\ldots+a_{2n}r_n=\lambda\, r_2, \\ \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots \\ a_{n1}r_1+a_{n2}r_2+\ldots+a_{nn}r_n=\lambda\, r_n. \end{cases}$$

Звідси дістанемо таку однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)r_1+a_{12}\,r_2+\ldots+a_{1n}\,r_n=0, \\ a_{21}r_1+(a_{22}-\lambda)r_2+\ldots+a_{2n}\,r_n=0, \\ \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots \\ a_{n1}r_1+a_{n2}\,r_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)r_n=0, \end{cases} \tag{1.48}$$

яка матиме *ненульові розв'язки* тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.49)$$

Це рівняння називається *характеристичним рівнянням* системи (1.43). Це є алгебраїчне рівняння n-го степеня. Корені цього рівняння є власними значеннями матриці A. За знайденими власними значеннями матриці A, користуючись системою (1.48), знаходимо $r_1, r_2, ..., r_n$ такі, щоб хоч одне із них було відмінне від нуля. Ці числа — координати відповідного власного вектора $\vec{R}$.

У випадку, коли всі власні значення *дійсні і різні* можна знайти загальний розв'язок системи (1.43), користуючись такою теоремою.

Теорема. Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *різні* власні значення матриці A, а $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_n$ — їх відповідні власні вектори матриці A, то загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку має вигляд

$$\vec{X} = C_1\vec{R}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{R}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n\vec{R}_n e^{\lambda_n t}, \qquad (1.50)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ — довільні сталі.

Приклад 22. Знайти загальний розв'язок системи $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$

Розв'язування. Випишемо матрицю системи $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ і знайдемо всі її власні вектори, щоб виконувалась рівність $AR = \lambda \cdot R$, де $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

Записавши цю рівність в розгорнутому вигляді $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, будемо мати $\begin{cases} 2r_1 + 2r_2 = \lambda r_1, \\ r_1 + 3r_2 = \lambda r_2 \end{cases}$ або $\begin{cases} (2-\lambda)r_1 + 2r_2 = 0, \\ r_1 + (3-\lambda)r_2 = 0 \end{cases}$. Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$; $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$. Коренями цього рівняння є числа $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = 4$. Це є власні значення даної матриці. Для кожного із них знайдемо відповідний власний вектор, підставивши ці значення в систему алгебраїчних рівнянь. При $\lambda=1$ дістанемо $\begin{cases} r_1+2r_2=0, \\ r_1+2r_2=0. \end{cases}$ Ця система звелась до одного рівняння $r_1+2r_2=0$, яке має безліч розв'язків. Знайдемо один із них: при $r_2=1$ маємо $r_1=-2$. Отже, $\vec{R}_1=(-2;1)$ — це власний вектор, що відповідає $\lambda=1$. При $\lambda=4$ дістанемо $\begin{cases} -2r_1+2r_2=0, \\ r_1-r_2=0, \end{cases} \Leftrightarrow r_1-r_2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow r_1=r_2$. Нехай $r_1=1$, тоді $r_2=1$. Отже, $\vec{R}_2=(1;1)$— власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda=4$. Тоді загальний розв'язок даної системи рівнянь матиме вигляд $\vec{X}=C_1\vec{R}_1e^t+C_2\vec{R}_2e^{4t}$ або в координатній формі $x_1(t)=-2C_1e^t+C_2e^{4t}$, $x_2(t)=C_1e^t+C_2e^{4t}$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Цей результат збігся із загальним розв'язком, що знаходився за методом виключення.

2 РЯДИ

2.1 Поняття збіжності і суми числового ряду

Розглянемо числову послідовність $a_1,\ a_2, \dots ,\ a_n, \dots$, загальний член якої a_n є відомою функцією натурального аргументу. Складемо із членів цієї послідовності безмежну суму $a_1 + a_2 + \dots + a_n \dots$

Означення. *Числовим рядом* називається вираз

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \dots \qquad (2.1)$$

Числа $a_1,\ a_2, \dots ,\ a_n, \dots$ називаються *членами ряду*, a_n називається *загальним членом* ряду. Задати ряд означає задати його загальний член формулою. Скорочено числовий ряд (2.1) записують символічно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Введемо позначення: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Числа $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ називаються *частинними сумами* ряду, S_n називається n-ою частинною сумою ряду (2.1) . Отже,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \qquad (2.2)$$

Це сума перших n членів ряду. Звернемо увагу на те, що частинні суми ряду $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ в свою чергу утворюють числові послідовності, але значно складнішої конструкції. Розглянемо границю послідовності S_n при $n \to \infty$, при цьому сума скінченного числа членів перейде в суму нескінченного числа членів, тобто перейде у вираз (2.1).

Означення. Якщо послідовність S_n частинних сум ряду має скінченну границю при $n \to \infty$, то числовий ряд *називається збіжним*. Сама ця *границя називається сумою ряду* і позначається через S.

Отже, $$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \qquad (2.3)$$

Якщо ж послідовність частинних сум ряду *не має* скінченної границі, то *ряд називається розбіжним*.

Наприклад, ряд $1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ є розбіжний, $S_1=1$, $S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=0$, $S_5=1, \dots$, тобто частинні суми по черзі приймають лише два значення 1 і 0, і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує.

Розглянемо важливий числовий ряд, членами якого є члени нескінченної *геометричної прогресії* з першим членом a і знаменником q, а саме: $$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \qquad (2.4)$$

Випишемо його n-у частинну суму, скориставшись відомою формулою перших n членів геометричної прогресії $S_n = \dfrac{a(q^n - 1)}{q-1}$, яку запишемо так:

$S_n = \dfrac{aq^n}{q-1} - \dfrac{a}{q-1}$, і знайдемо границю S_n. Тут можливі такі випадки:

1. При $q = 1$ маємо $S_n = a + a + \ldots + a = na$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$, тобто ряд (2.4) розбіжний.
2. При $q = -1$ матимемо $S_n = a - a + a - \ldots + (-1)^{n+1}a$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, отже ряд (2.4) теж розбіжний.
3. При $|q|>1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, бо $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, тому ряд (2.4) розбіжний.
4. При $|q|<1$, то оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, будемо мати, що

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}\right) = 0 - \frac{a}{q-1} = \frac{a}{1-q}$. Отже, ряд (2.4) збіжний і його сума $S = \frac{a}{1-q}$. Отже, ряд – геометрична прогресія збіжний лише за умови, що $|q| < 1$.

2.2 Необхідна ознака збіжності ряду

Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо ряд збігається, то його загальний член при необмеженому зростанні його номера прямує до нуля.

Доведення. Нехай числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Це означає за означенням, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Оскільки $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$, то $a_n = S_n - S_{n-1}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Зауваження. Ця ознака є лише необхідною ознакою збіжності ряду, бо обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне. Це видно із прикладу гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним, що неважко довести, хоч $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

Отже, невиконання необхідної ознаки збіжності ряду є достатньою ознакою його розбіжності.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+3}$.

Розв'язування. Загальний член ряду $a_n = \dfrac{3n^2+1}{2n^2+3}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{2n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)\Big/\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right) = \dfrac{3}{2} \neq 0$, то цей ряд розбіжний.

Сформулюємо ще дві важливі властивості числових рядів.

Теорема 1. Збіжність ряду не порушиться, якщо від нього відкинути або до нього додати скінченне число членів.

Теорема 2. Якщо всі члени ряду, сума якого дорівнює S, помножити на деяке число $C \neq 0$, то новий ряд буде збіжним, причому його сума дорівнюватиме $C \cdot S$.

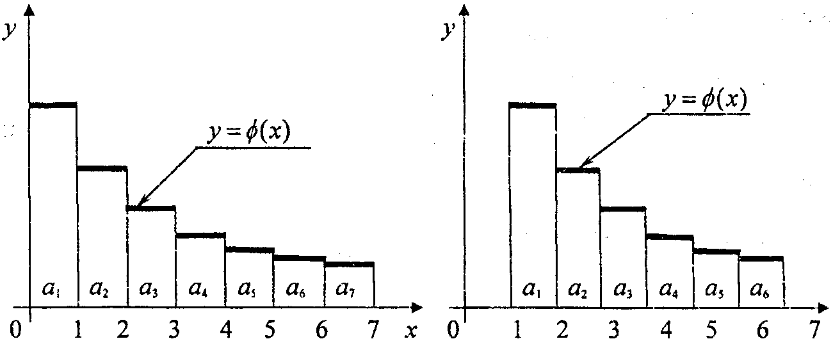
2.3 Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Означення. Якщо члени ряду є додатними числами, то такий ряд називається *знакододатним*.

Особливістю знакододатних рядів є те, що із зростанням n його частинні суми S_n монотонно зростають. Якщо ж до того послідовність S_n обмежена зверху, то ряд є збіжний, бо існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. І навпаки, якщо в ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ всі $a_n \geq 0$ і $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то всі частинні суми $S_n < S$, тобто обмежені зверху.

Отже, *знакододатний* ряд *збігається* тоді і тільки тоді, коли послідовність його *частинних сум обмежена зверху.*

Дамо ще геометричне тлумачення членів знакододатного ряду та сум ряду. *Члени* ряду можна тлумачити як площі *прямокутників*, основи яких дорівнюють *одиниці* і один із кінців основи проходить через точки $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$,... Можливі дві ситуації.



Тоді сума ряду S чисельно буде тлумачитися як площа *безмежної ступінчастої фігурки*, що зверху обмежена ступінчастою лінією $y=\phi(x)$, що має скінченні розриви в точках 1, 2, 3, ..., при цьому можна вважати, що сума ряду $S=\int\limits_0^{\infty}\phi(x)dx$ або $S=\int\limits_1^{\infty}\phi(x)dx$.

Очевидно, що при зростанні членів знакододатного ряду при $n\to\infty$ частинні суми ряду необмежено зростатимуть, тому такий ряд розбіжний. Інтерес становлять лише такі ряди, члени яких монотонно *спадають*. Тут можливі декілька достатніх ознак збіжності знакододатного ряду.

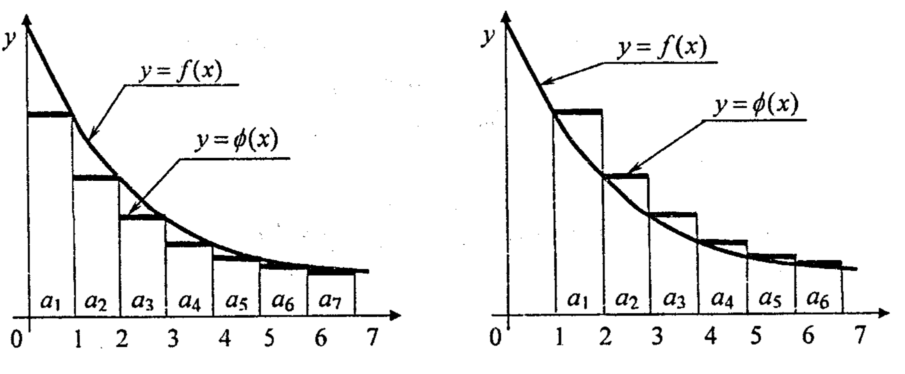
2.3.1 *Інтегральна ознака збіжності ряду*

Теорема 1. Якщо неперервна знакододатна функція $f(x)$ монотонно спадає на проміжку $[0;\infty)$, причому $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, $f(3)=a_3$, ..., $f(n)=a_n$, де a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... є членами знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, то

а) якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ збіжний, то і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *збіжний*,

б) якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ *розбіжний*, то і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *розбіжний*.

Доведення. Нехай виконуються всі умови теореми, зокрема $f(n)=a_n$ при всіх n, і $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ збіжний. Скористаємось першою інтерпретацією суми ряду, при цьому графік функції $y=f(x)$ пройде через *верхні праві* вершини прямокутників і графік ступінчатої лінії $y=\phi(x)$ виявиться нижче графіка функції $y=f(x)$.



Оскільки при всіх $x\in[0;\infty)$ виконується нерівність $0\le\varphi(x)\le f(x)$ і $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний за умовою, то за ознакою збіжності невласного інтеграла випливає, що $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ теж збіжний, а це означає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

Якщо ж $\int_1^{\infty} f(x)dx$ розбіжний, то, провівши графік функції $y=f(x)$ через *верхні ліві* вершини прямокутників, при всіх $x\ge 1$ випливає, що $\varphi(x)>f(x)$. Оскільки невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ розбіжний, то за ознакою збіжності невласних інтегралів, випливає, що $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ розбіжний, а це означає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ теж розбіжний. Теорему доведено.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Розв'язування. Оскільки за умовою теореми $f(n)=a_n$ і $a_n=\frac{1}{n^2}$, то $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Тоді $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}+1\right)=1$, тобто невласний інтеграл збіжний. Отже, даний ряд збіжний.

Приклад 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, де p – задане число, називається *узагальненим гармонічним* рядом або *рядом Діріхле*. Оскільки невласний інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ збіжний при $p>1$ і розбіжний при $p\le 1$, тоді ряд Діріхле збіжний при $p>1$ та розбіжний при $p\le 1$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)ln(n+1)}$.

Розв'язування. Оскільки $a_n=\frac{1}{(n+1)ln(n+1)}$, то $f(x)=\frac{1}{(x+1)ln(x+1)}$.

Розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)ln(x+1)}=\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{(x+1)ln(x+1)}=$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{d(ln(x+1))}{ln(x+1)} = \lim_{b\to+\infty} ln\,|\,ln(x+1)|\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(ln\,|\,ln(b+1)\,| - ln(ln2) = \infty$$

Отже, даний ряд розбіжний.

2.3.2 *Ознаки порівняння рядів*

Розглянемо два знакододатні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, де a_n>0 і b_n>0. Має місце така теорема.***Теорема*** 1. Якщо для всіх членів знакододатних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ виконуються нерівності $a_n \leq b_n$, то а) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *збіжний*, то і *збіж-ним* є ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; б) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *розбіжний*, то і *розбіжним* є ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доведення. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний. Це означає, що існує скінченна границя послідовності його частинних сум $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, де $B_n=b_1+$ $+b_2+\ldots+b_n$, при цьому $B_n \leq B$ при всіх n. Оскільки за умовою теореми $a_n \leq b_n$ при всіх n, то частинна сума першого ряду $A_n=a_1+a_2+\ldots+ +a_n \leq$ $b_1+b_2+\ldots+b_n=B_n \leq B$. Отже, $A_n \leq B$ при всіх n, тобто послідовність A_n зростаюча, оскільки $a_n>0$. А всяка зростаюча обмежена зверху послідовність має границю при $n\to\infty$, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, а це означає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

Друга частина теореми доводиться методом від супротивного (доведіть самостійно).

Зауваження. Ця теорема залишається справедливою і тоді, коли нерівності $a_n \leq b_n$ виконуються, починаючи з деякого номера n_0, тобто при $n>n_0$ (оскільки відкидання скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність).

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3+4}$.

Розв'язування. Оскільки $a_n = \dfrac{n}{n^3+4}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тобто необхідна ознака збіжності ряду виконується. Порівняємо a_n з $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, очевидно, що

$\frac{n}{n^3+4} < \frac{n}{n^3}$ при всіх n, тобто $a_n < b_n$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний (це ряд Діріхле), то і даний ряд збіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)}$.

Розв'язування. Загальний член цього ряду $a_n = \frac{1}{ln(n+1)} \to 0$ при $n\to\infty$. Оскільки $\frac{1}{ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ при всіх n, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots$ розбіжний (це гармонічний ряд, в якому відкинуто перший член), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)}$ теж розбіжний.

На практиці досить зручною є так звана *гранична* форма ознаки порівняння.

Теорема 2. Якщо існує *скінченна границя відношення* загальних членів знакододатних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, відмінна від нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$, то *обидва* ряди одночасно або збіжні, або розбіжні.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^2+3}$.

Розв'язування. Загальний член цього ряду $a_n = \frac{n+1}{2n^2+3} \to 0$ при $n\to\infty$ (тобто, необхідна ознака збіжності ряду виконана). Порівняємо цей ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, де $b_n = \frac{1}{n}$, знайшовши границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+3} : \frac{1}{n}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \neq 0$ (скористались еквівалентними нескінченно великими).

Оскільки гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжний, то даний ряд теж розбіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{4n^6+7n-1}}$.

Розв'язування. Загальний член ряду $a_n = \frac{3n+2}{\sqrt{4n^6+7n-1}} \to 0$ при $n\to\infty$.

Порівняємо цей ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, де $b_n = \frac{1}{n^2}$. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{\sqrt{4n^6+7n-1}}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(3n+2)n^2}{\sqrt{4n^6+7n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{2n^3}=\frac{3}{2}\neq 0$$

(скориставшись тим, що $3n^3+2n^2\sim 3n^3$, $4n^6+2n-1\sim 4n^6$). Оскільки ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є збіжний, то і даний ряд збіжний.

Зауважимо, що узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ і ряд, члени якого утворюють геометричну прогресію, часто беруть для порівняння при дослідженні збіжності знакододатних рядів.

2.3.3 *Ознаки Д'Аламбера і Коші*

Сформулюємо зручні для практики ознаки Д'Аламбера і Коші.

Ознака Д'Аламбера. Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, де $a_n>0$, існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, то при $l<1$ ряд збіжний і при $l>1$ ряд розбіжний.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, де $a_n>0$, існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$, то при $L<1$ ряд збіжний і при $L>1$ ряд розбіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$.

Розв'язування. Загальний член ряду $a_n=\frac{n^3}{3^n}$, тоді $a_n=\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$.

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}:\frac{n^3}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n^3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{3}<1.$$

За ознакою Д'Аламбера цей ряд є збіжний.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{2^n}$.

Розв'язування. Застосуємо ознаку Д'Аламбера: $a_n=\frac{(n+3)!}{2^n}$, $a_{n+1}=$

$$=\frac{(n+4)!}{2^{n+1}};\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+4)!}{2^{n+1}}:\frac{2^n}{(n+3)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n+3)(n+4)}{2\cdot1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n+3)}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{2}=\infty$. Отже, $l>1$, тому ряд розбіжний.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^n$.

Розв'язування. Застосуємо радикальну ознаку Коші: $a_n=\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^n$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{4n+3}=\frac{3}{4}<1$. Отже, даний ряд збіжний.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)ln^4(n+2)}$.

Розв'язування. Застосуємо порівняльну ознаку. Оскільки $a_n=\frac{1}{(n+5)ln^4(n+2)}<\frac{1}{(n+2)ln^4(n+2)}=b_n$, то нерівність $a_n<b_n$ виконується при всіх n. До ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)ln^4(n+2)}$ застосуємо інтегральну ознаку: $f(x)=\frac{1}{(x+2)ln^4(x+2)}$, знайдемо невласний інтеграл

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(x+2)ln^4(x+2)}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{(x+2)ln^4(x+2)}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{d(ln(x+2))}{ln^4(x+2)}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3ln^3(x+2)}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3ln^3(b+2)}+\frac{1}{3ln^3 3}\right)=\frac{1}{3ln^3 3}<+\infty,$$

тоді випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)ln^4(n+2)}$ збіжний. За порівняльною ознакою випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)ln^4(n+2)}$ є теж збіжний.

2.4 Знакопочережні ряди

Означення. *Знакопочережним рядом* називається ряд

$$a_1-a_2+a_3-\ \dots\ +(-1)^{n+1}a_n+\dots, \qquad (2.5)$$

де $a_n\geq 0$ при всіх n.

При дослідженні таких рядів на збіжність використовують ознаку Лейбніца.

Теорема Лейбніца. Якщо члени знакопочережного ряду за абсолютною величиною монотонно спадають і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то даний ряд збіжний.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми Лейбніца, тобто $a_1 > a_2 > a_3 > \ ... > a_n > ...$і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Доведемо, що ряд (2.5) збігається, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Утворимо спочатку частинну суму парного числа перших членів ряду $S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n}$.

Перетворимо цю суму так: $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n})$. Ця частинна сума *монотонно зростає*. Запишемо тепер S_{2n} в іншому вигляді, а саме $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Оскільки кожна із різниць є додатне число, то $S_{2n} < a_1$, тобто послідовність частинних сум S_{2n} ще й *обмежена зверху*, тому вона *має скінченну границю*. Позначимо її через S, тобто $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$.

Доведемо тепер, що це число S і буде сумою ряду (2.5). Для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$ для частинних сум непарного числа членів ряду. Дійсно, оскільки $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + {}$ $+ \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ існує, а це означає, що ряд (2.5) збіжний. Теорему доведено.

Зауваження. Із нерівності $S_{2n} < a_1$ випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} < a_1$, тобто $S_{2n} < a_1$. Отже, сума збіжного ряду (2.5) не перевищує абсолютної величини першого члену ряду. Звідси випливає важлива теорема про оцінку залишку знакопочережного ряду.

Теорема. Якщо знакопочережний ряд (2.5) збіжний, то залишок R_n цього ряду за абсолютною величиною не перевищує абсолютної величини a_{n+1}, тобто $|R_n| < a_{n+1}$.

А це означає, що абсолютна похибка наближеної рівності $S \approx S_n$ не перевищує абсолютної величини першого із членів, що відкидається.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$.

Розв'язування. Цей ряд називається рядом Лейбніца. Застосуємо ознаку Лейбніца: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; 2) $1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > ... > \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} > ...$ при всіх n. Отже, цей знакопочережний ряд є збіжним.

2.5 Знакозмінні ряди

Це ряди з довільними членами, в яких є нескінченне число членів як додатних, так і від'ємних, причому знак члена змінюється не по черзі. Для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ вводиться поняття *абсолютної збіжності.* Складемо ряд, членами якого є модулі членів знакозмінного ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Це знакододатний ряд.

Означення. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ є збіжним, то знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *абсолютно збіжним.* Якщо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний, то знакозмінний ряд називається *умовно збіжним* або неабсолютно збіжним.

Для дослідження на абсолютну збіжність можна використовувати достатні ознаки збіжності знакододатних рядів. Справедлива терема, яка називається *ознакою абсолютної збіжності.*

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ збіжний, то знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збіжний.

Приклад 10. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Розв'язування. Складемо ряд із модулів членів даного ряду, це буде ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, який є розбіжним, оскільки це є узагальнений ряд при $p = \frac{1}{2}$. Даний ряд знакопочережний і збігається, бо умови ознаки Лейбніца виконуються ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ і $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$ при всіх n).

Отже, даний ряд умовно збіжний.

Приклад 11. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$.

Розв'язування. Складемо ряд із модулів членів ряду, це буде $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

Застосуємо ознаку Д'Аламбера: $a_n = \frac{n^3}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ і $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 2^n}{2^{n+1} n^3} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2} < 1$. Оскільки $l < 1$, то знакододатний ряд збіжний за ознакою Д'Аламбера. Тоді за ознакою абсолютної збіжності даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$ теж збіжний і є абсолютно збіжним.

Приклад 12. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3}$, де α — задане число.

Розв'язування. Цей ряд є знакозмінним, бо $\cos n\alpha$ при зміні n довільно змінює знак. Складемо ряд із модулів членів цього ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^3}$.

Оскільки $|\cos n\alpha| \le 1$, то $a_n = \frac{|\cos n\alpha|}{n^3} \le \frac{1}{n^3} = b_n$. Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ збіжний, а за ознакою абсолютної збіжності знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3}$ теж збіжний і є абсолютно збіжним.

2.6 Функціональні ряди

Нехай задана послідовність функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, визначених на деякій множині D. Складемо з них ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \text{ або } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{2.6}$$

Цей ряд називається *функціональним* рядом. Для функціональних рядів вводиться поняття області збіжності ряду.

Означення. Множина всіх значень аргументу x, при яких функціональний ряд збіжний, називається *областю збіжності функціонального ряду.*

Позначати область збіжності будемо через X. *Основною задачею* для функціональних рядів є *знаходження їх області збіжності.* Звернемо увагу на те, що при будь-якому $x \in X$ ми одержимо деякий збіжний числовий ряд. Тому таку збіжність числового ряду називають *точковою,* тобто ряд збігається в кожній точці множини X. В цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Це означає , що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $N(\varepsilon)$ такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|R_n(x)| < \varepsilon$, при цьому це число N *для кожного* $x \in X$, залежить від x, тобто кожному x відповідає певний номер N. Особливий випадок збіжності будемо мати, коли цей номер N залежить лише від ε, а від x не залежить, тобто цей номер однаковий для всіх $x \in X$. Це є *рівномірна* збіжність ряду.

Означення. Функціональний ряд називається *рівномірно збіжним* на множині X, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $N(\varepsilon)$ такий, що при всіх $n > N$ і всіх $x \in X$ виконується нерівність $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Справедлива важлива ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.

Теорема (ознака Вейєрштрасса). Якщо для всіх $x \in X$ виконується нерівність $|f_n(x)| \le a_n$ при всіх n, де a_n — загальний член збіжного *знакододатного ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$, то функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *рівномірно збіжний* на множині X.

Рівномірно збіжні ряди мають ряд важливих властивостей, що зв'язані з почленним інтегруванням, почленним диференціюванням цих рядів.

2.7 Степеневі ряди

Частинним випадком функціональних рядів є *степеневі ряди* , які грають важливу роль в прикладних питаннях математики.

Означення. *Степеневим* рядом називається ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{2.7}$$

де x — незалежна змінна, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — задані члени числової послідовності, які називаються *коефіцієнтами* степеневого ряду.

Більш загального вигляду є такий ряд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{2.8}$$

де x_0 — задане число. Скорочено ряди (2.7) і (2.8) записують так: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Основним результатом теорії степеневих рядів є теорема Абеля, суть якої наведена нижче.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збіжний* при деякому $x_0 \ne 0$, то він *абсолютно* збіжний і при всіх x таких, що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$, а при $|x| \le \rho < |x_0|$ є *рівномірно* збіжним. Якщо степеневий ряд розбіжний при деякому $x_0 \ne 0$, то він розбіжний і при всіх x, для яких $|x| > |x_0|$.

Зауважимо, що нерівність $|x| > |x_0|$ рівносильна подвійній нерівності $-|x_0| < x < |x_0|$ за геометричним змістом модуля.

Доведення. Нехай ряд (2.7) збігається при деякому $x = x_0$, тобто числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^{\,n}$ збіжний. Тоді за *необхідною ознакою* збіжності ряду випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, а звідси маємо, що послідовність $a_n x_0^n$ є обмеженою. А це означає, що існує додатне число М таке, що $\left|a_n x_0^n\right| < M$ при всіх n. Запишемо ряд (2.7) у вигляді $a_0 + a_1 x_0 \dfrac{x}{x_0} + a_2 x_0^2 \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n + \ldots$ Доведемо, що цей ряд абсолютно збіжний при всіх x таких, що $|x| > |x_0|$. Для цього складемо ряд, членами якого є модулі членів останнього ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n x_0^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n\right|$. Оцінимо його загальний член $\left|a_n x_0^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$. Складемо ряд, загальний член якого дорівнює $M\left|\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n\right|$, а саме: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left|\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n\right|$. Це ряд, членами якого є члени спадної геометричної прогресії із знаменником $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right|$. Для всіх x, для яких $|x| < |x_0|$, матимемо $q < 1$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ збіжний. Тоді за порівняльною ознакою випливає, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n\right|$ теж збіжний, а на підставі ознаки абсолютної збіжності випливає, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n$ є абсолютно збіжним, тобто ряд (2.7) є абсолютно збіжним для всіх x, для яких $|x| < |x_0|$.

Другу частину теореми легко довести методом від супротивного.

Зауваження. З теореми Абеля випливає, що всяка точка збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ лежить ближче від точки $x = 0$, ніж будь-яка його точка розбіжності. А оскільки в будь-якій проміжній точці степеневий ряд або збіжний, або розбіжний, то повинна існувати точка, що *відокремлює* область збіжності ряду від його області розбіжності. Ця точка має зображати деяке додатне число R.

Означення. Якщо існує додатне число R таке, що при всіх x, для яких $|x|<R$, степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний, а при всіх x, для яких $|x|>R$, цей ряд розбіжний, то це число R називається *радіусом збіжності* степеневого ряду. Інтервал $(-R;R)$ називається *інтервалом збіжності* степеневого ряду.

Отже, область збіжності степеневого ряду (2.7) є деякий інтервал, симетричний відносно точки $x=0$.

Зауваження. Збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності встановлюється *безпосередньо* шляхом підстановки значень $x=R$ і $x=-R$ в даний ряд з наступним дослідженням на збіжність одержаних числових рядів.

Як же знаходити інтервал збіжності степеневого ряду?

Оскільки загальний член степеневого ряду містить множник x^n, то зручно користуватися ознакою Д'Аламбера. Тоді поступають таким чином. Вибирають довільне $x \in X$, фіксують його і розглядають ряд, складений із модулів членів даного ряду, тобто ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, знаходять границю $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=l$, де $u_n(x)=a_n x^n$, яка буде залежати від $|x|$. Оскільки ми шукаємо ті значення x, при яких степеневий ряд збігається, а це згідно з ознакою Д'Аламбера буде тоді, коли $l<1$, то відносно $|x|$ дістанемо нерівність, розв'язавши яку, знайдемо інтервал збіжності.

Приклад 13. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Розв'язування. Застосуємо ознаку Д'Аламбера для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Оскільки $u_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$, то $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot x^n}\right|=$ $=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=|x|$. Оскільки ряд збіжний при $l<1$, то матимемо нерівність $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$.

Отже, інтервалом збіжності цього степеневого ряду є $(-1;1)$. Дослідимо тепер збіжність ряду на кінцях цього інтервалу. При $x=1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, який розбіжний, оскільки ряд Діріхле розбіжний при $p=\frac{1}{2}<1$.

При $x=-1$ маємо знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$, який є збіжним за ознакою Лейбніца, бо $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ і $a_n>a_{n+1}$ при всіх n. Отже, областю збіжності даного ряду є проміжок $[-1;1)$, радіус збіжності $R=1$.

Приклад 14. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(x+3)^n}{2^{n+1}}$.

Розв'язування. Це є степеневий ряд загального вигляду. Виберемо довільне значення x і зафіксуємо його, цим самим ряд стане числовим.

Застосуємо ознаку Д'Аламбера до ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n(x)|$, $u_n(x)=\frac{n^2(x+3)^n}{2^{n+1}}$,

$u_{n+1}(x)=\frac{(n+1)^2(x+3)^{n+1}}{2^{n+2}}$, тоді $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2(x+3)^{n+1}2^{n+1}}{2^{n+2}(x+3)^n n^2}\right|=$

$$=\frac{|x+3|}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|=\frac{|x+3|}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{|x+3|}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{|x+3|}{2}.$$

Ряд збігається, якщо $l<1$, тоді матимемо, що $\frac{|x+3|}{2}<1$; $|x+3|<2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2<x+3<2,\ -5<x<-1$.

Отже, інтервалом збіжності даного степеневого ряду є інтервал $(-5;-1)$, серединою якого є точка $x_0=-3$, тому радіус збіжності його $R=2$. Дослідимо на збіжність ряд на кінцях цього інтервалу. При $x=-1$ дістанемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2}$, який є розбіжним, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2}=\infty$.

При $x=5$ дістанемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(-2)^n}{2^n}$ або $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2}$, цей знакозмінний ряд є розбіжним. Отже, ряд збігається на проміжку $(-5;-1)$.

Зауваження. Для степеневого ряду загального вигляду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ інтервалом збіжності є інтервал $(x_0-R;x_0+R)$, число R — радіус збіжності. Використовуючи ознаку Д'Аламбера, можна вивести формулу радіуса збіжності, а саме:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{m+1}}\right|. \qquad (2.9)$$

Доведено, що на будь-якому замкненому відрізку, що повністю лежить всередині інтервала збіжності, степеневий ряд збігається абсолютно і рівномірно, його можна почленно диференціювати і інтегрувати, при цьому інтервал збіжності не змінюється, а звідси випливає, що степеневий ряд можна довільне число раз почленно диференціювати і інтегрувати в будь-якій точці x, що лежить всередині інтервала збіжності.

2.8 Ряд Тейлора

Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, інтервалом збіжності якого є проміжок (x_0-R, x_0+R), а сумою його є деяка функція $f(x)$, тоді

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \qquad (2.10)$$

Дійсно, нехай $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...$(2.11)

При $x=x_0$ з цієї рівності дістанемо $f(x_0)=a_0$. Продиференціювавши почленно цю рівність, дістанемо

$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+...+na_n(x-x_0)^{n-1}+...$ При $x=x_0$ матимемо $f'(x_0)=a_1$. Продиференціювавши ряд (2.11) повторно, дістанемо

$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+...+n\cdot(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+...,$ звідси $f''(x_0)=2a_2; f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0)...+n\cdot(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}+...,$ звідси $f'''(x_0)=3!a_3$, і т. д.

$f^{(n)}(x)=n(n-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1\cdot a_n+(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot...\cdot 2\cdot a_{n+1}(x-x_0)+...,$

звідси $f^{(n)}(x_0)=n!a_n$. Отже, $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, де $n=0,1,2,...$ Зауважимо, що за формулами (2.10) ряд (2.11) запишемо так:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+... \qquad (2.12)$$

Цей ряд називається *рядом Тейлора функції* $f(x)$. Це по суті степеневий ряд за степенями різниці $x-x_0$, в якому коефіцієнти визначаються за формулою (2.10), де $f(x)$ — сума цього степеневого ряду.

Частинним випадком ряду Тейлора є ряд Маклорена, який дістаємо із ряду Тейлора при $x_0=0$. Отже, ряд Маклорена має вигляд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \qquad (2.13)$$

При розкладанні функцій в ряди Тейлора та Маклорена важливу роль грають розкладання функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, а саме:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,\ x \in (-1; 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\quad x \in (-1; 1).$$

Приклад 15. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Розв'язування. Скористаємося розкладанням $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, підставивши замість x вираз $-\frac{x^2}{2}$, дістанемо $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} + \ldots$ Помножимо цю рівність на x, дістанемо $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x - \frac{x^3}{2 \cdot 1!} + \frac{x^5}{2^2 2!} - \frac{x^7}{2^3 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} + \ldots,$

це розкладання справедливе при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 16. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \sqrt{1 + \frac{x}{4}}$.

Розв'язування. Скористаємося *біноміальним* рядом $(1+t)^m = 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}t^n + \ldots$, де $|t| < 1$, при $m = \frac{1}{2}$ і $t = \frac{x}{4}$, будемо мати

$$\sqrt{1+\frac{x}{4}} = \left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{4} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \ldots + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{x}{4}\right)^n + \ldots = 1 + \frac{1}{8}x -$$

$$- \frac{1}{2^2 4^2 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 4^3 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 4^4 4!}x^4 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n 4^n n!}x^n + \ldots,$$ де

$\left|\frac{x}{4}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 4$. Дістали розкладання даної функції, яке справедливе на проміжку $(-4;4)$.

Приклад 17. Розкласти функцію $\frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x=2$.

Розв'язування. Скористаємось формулою (2.12) ряду Тейлора при $x_0=2$. Знайдемо значення функції та її похідних при $x_0=2$:

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2}{x^3}$, $f'''(x)=-\frac{2\cdot 3}{x^4},\ldots,$ $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$, тоді $f'(x_0)=$ $=-\frac{1}{2^2}$; $f''(x_0)=\frac{2}{2^3}$; $f'''(x_0)=-\frac{3!}{2^4},\ldots,$ $f^{(n)}(x_0)=(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}$. Тоді матимемо таке розкладання $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-2)+\frac{1}{2^3}(x-2)-\frac{1}{2^4}(x-2)^3+\ldots+$ $+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\cdot(x-2)^n+\ldots$

2.9 Застосування степеневих рядів

Степеневі ряди широко використовуються при наближених обчисленнях значень функцій, при знаходженні інтегралів, що не є елементарними функціями, при розв'язуванні диференціальних рівнянь.

2.9.1 *Наближене обчислення значень функції*

Припустимо, що для деякої заданої функції $f(x)$ нам відоме розкладання її в ряд Тейлора в деякому околі точки $x=x_0$. Візьмемо певне значення $x=x_1$ із цього околу, тоді $f(x)$ дорівнює сумі відповідного числового ряду, який одержимо із степеневого ряду, якщо замість x підставити x_1. Точного значення цієї суми ми не знайдемо, але наближено воно дорівнює деякій частинній сумі цього ряду, тобто $f(x_1)\approx S_n(x_1)$, при цьому важливо встановити абсолютну похибку цієї наближеної рівності.

Приклад 18. Обчислити $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 0,001.

Розв'язування. Зробимо такі тотожні перетворення: $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=$ $=\sqrt[3]{8\left(1+\frac{1}{8}\right)}=2\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$. Фактично нам треба знайти наближено значення функції $f(x)=2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ при $x=\frac{1}{8}$. Скористаємося біноміальним рядом при $m=\frac{1}{3}$, дістанемо:

$$(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3+\ldots$$

Тоді $f(x)=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot x-\frac{1\cdot 2}{3^2 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 8^3 3!}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4 8^4 4!}x^4+...\right)$

При $x=\frac{1}{8}$ матимемо $\sqrt[3]{9}=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1\cdot 2}{3^2 8^2 2!}+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 8^3 3!}-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4 8^4 4!}+...\right)$. Цей ряд є знакопочережним і за теоремою Лейбніца він збігається. Нам треба знайти суму цього ряду з точністю до 0,001, а за наслідком з цієї теореми маємо, що абсолютна похибка наближеної рівності $S\approx S_n$ не перевищує абсолютної величини першого члена ряду, що відкидається. Обчислюючи члени цього ряду, маємо $2>0{,}001$, $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}>0{,}001$, $2\cdot\frac{1\cdot 2}{2!3^2 8^2}>0{,}001$, $2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 8^3 3!}>0{,}001$ і $2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^{34} 8^4 4!}<0{,}001$. Тому при обчисленні суми ряду всі члени його, починаючи з $2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4 8^4 4!}$, треба відкинути.

Тоді $\sqrt[3]{9}\approx 2\left(1+\frac{1}{24}-\frac{1}{576}+\frac{10}{82944}\right)\approx 2+0.0835-0.0034-0.00002\approx$

$\approx 2.0803\approx 2.080$. Отже, $\sqrt[3]{9}\approx 2.080$.

2.9.2 Знаходження інтегралів за допомогою рядів

Багато з тих інтегралів, що не виражаються елементарними функціями, знаходяться за допомогою степеневих рядів, коли підінтегральну функцію вдається розкласти в ряд Маклорена , а потім почленно інтегрують одержаний ряд на вказаному проміжку, що лежить всередині інтервалу збіжності степеневого ряду. Покажемо це на прикладах.

Приклад 19. Знайти інтеграл $\int\limits_0^x \frac{sint}{t}dt$.

Розв'язування. Цей інтеграл називається *інтегральним синусом* і не виражається через елементарні функції. Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена, скориставшись відомою формулою $sint=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$, де $t\in(-\infty;+\infty)$, дістанемо $\frac{sint}{t}=1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!}+...$ Оскільки цей степеневий ряд збігається до функції $\frac{sint}{t}$ на всій числовій прямій, то його можна почленно інтегрувати на проміжку $[0;x]$, де $x\in R$, дістанемо $\int\limits_0^x \frac{sint}{t}dt=$

$$=\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dt=t-\frac{t^3}{3\cdot 3!}+\frac{t^5}{5\cdot 5!}-\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots\Bigg)\Bigg|_0^x.$$

Отже, $\int_0^x \frac{sint}{t}dt=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$

Приклад 20. Обчислити $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язування. Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена, скористувавшись формулою $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ Підставивши замість x вираз $-\frac{x^2}{2}$, дістанемо $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{1!2}+\frac{x^4}{2!2^2}-\frac{x^6}{3!2^3}+\ldots+(-1)^n\cdot$ $\cdot\frac{x^{2n}}{n!2^n}+\ldots$, цей ряд збігається на всій числовій прямій. Тоді $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 1!}+\frac{x^4}{2^2 2!}-\frac{x^6}{2^3 3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n n!}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2^2 2!}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^7}{7\cdot 2^3 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 2^4 4!}-\ldots\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1!}+\frac{1}{5\cdot 2^2 2!}-\frac{1}{7\cdot 2^3 3!}+\frac{1}{9\cdot 2^4 4!}-\ldots$$ Оскільки

$\frac{1}{9\cdot 2^4 3!}<0.001$, то на цьому членові обірвемо суму ряду, взявши чотири перші члени цього ряду. Тоді $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx\approx 1-\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1!}+\frac{1}{5\cdot 2^2 2!}-\frac{1}{7\cdot 2^3 3!}=$

$$=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}\approx 0.855.$$

2.9.3 Розв'язування диференціальних рівнянь

Якщо диференціальне рівняння не можна розв'язати точним методом, то використовують наближені методи. Одним із них є представлення шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду, частинна сума якого і буде його наближеним розв'язком.

Нехай треба розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку $y''=f(x,y,y')$, якщо $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$. Припустимо, що шуканий розв'язок $y(x)$ має похідні будь-якого порядку в околі $x=x_0$. Розкладемо її в ряд Тейлора за степенями різниці $x-x_0$, де x_0 береться з початкових умов,

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (2.14)$$

Як же знайти коефіцієнти цього ряду? Перші два із них визначаються за початковими умовами. Використовуючи саме диференціальне рівняння, за відомими значеннями y і y' при $x=x_0$ знайдемо $y''(x_0)$, а саме $y''(x_0)=$ $=f(x_0,y_0,y_0')$. Значення наступних похідних при $x=x_0$ знайдемо, якщо дане рівняння послідовно диференціювати за x, вважаючи y функцією змінної x. Покажемо це на прикладах.

Приклад 21. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''=2x+cosy$, якщо $y(0)=0,\ y'(0)=-1$.

Розв'язування. Шуканий розв'язок $y(x)$ будемо знаходити у вигляді степеневого ряду за степенями x, оскільки $x_0=0$, а саме: $y(x)=y(0)+$ $+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ Треба знайти коефіцієнти цього ряду. За початковими умовами маємо $y(0)=0,\ y'(0)=-1$. З диференціального рівняння при $x=0$ маємо: $y''(0)=2\cdot 0+\cos 0=1$. Продиференціюємо рівняння за x, вважаючи y функцією x: $y'''=2-siny\cdot y'$, звідки $y'''(0)=2-sin0\cdot(-1)=2$. Знову продиференціюємо одержану рівність за x: $y^{IV}(x)=-cos\,y(y')^2-sin\,y\cdot y''$, звідки $y^{IV}(0)=-cos0(-1)^2-sin0\cdot 1=-1$.

Оскільки $y^{V}(x)=\sin y\cdot(y')^3-\cos y\,2y'\cdot y''-\cos y\cdot y'\cdot y''-\sin y\cdot y'''$, то $y^{V}(0)=\sin 0\cdot(-1)^3-2\cos 0\cdot(-1)\cdot 1-\cos\cdot(-1)\cdot 1-\sin 0(-1)=2+1=3$.

Тоді $y(x)=x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3-\frac{1}{4!}x^4+\frac{3}{5!}x^5+\ldots$

Отже, $y(x)\approx x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{24}x^4++\frac{1}{40}x^5$.

Приклад 22. Знайти перші чотири, відмінні від нуля, члени розкладання в ряд розв'язку диференціального рівняння $y'=x^2+xy+2$, якщо $y(0)=1$.

Розв'язування. Розв'язок шукаємо у вигляді ряду Маклорена $y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ За початковими умовами $y(0)=1$, із диференціального рівняння, маємо $y'(0)=0+0\cdot 1+2=2$. Продиференціюємо рівняння за x, матимемо: $y''=2x+y+xy'$, звідки $y''(0)=2\cdot 0+1+0\cdot 2=1$. Продиференціюємо це рівняння за x:

$y''' = 2 + y' + xy''$, звідки $y'''(0) = 2 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1 = 4$. Підставивши знайдені значення похідних в розкладання, матимемо: $y(x) \approx 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^n$.

2.10 Тригонометричні ряди Фур'є

2.10.1 Періодичні функції та їх властивості

Означення. Функція $f(t)$ називається *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що виконується рівність

$$f(t+T) = f(t) \tag{2.15}$$

для всіх t із її області визначення. Число T називається *періодом* функції.

Отже, періодичну функцію з періодом T достатньо вивчати на проміжку довжиною T, а саме $[0,T]$ або $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$. Зауважимо, що, якщо число T є періодом функції, то числа kT, де $k \in Z$, є також періодом цієї функції. Саме найменший за модулем період будемо позначати через T. Наприклад, функція $sin t$ має періодом $T = 2\pi$, функція $tg\, t$ має періодом $T = \pi$.

Відзначимо деякі важливі властивості періодичних функцій.

Теорема 1. Якщо функція $f(t)$ періодична з періодом T, то функція $f(\omega t)$ теж періодична з періодом $\frac{T}{\omega}$, де $\omega \neq 0$.

Доведення. Нехай періодом функції $f(t)$ є число T, тобто $f(t+T) = f(t)$ для всіх t із області визначення функції. Розглянемо функцію $f(\omega t)$, яку позначимо через $\varphi(t)$, тобто $f(\omega t) = \varphi(t)$ і доведемо, що число $\frac{T}{\omega}$ є періодом функції $\varphi(t)$. Дійсно, $\varphi\left(t + \frac{T}{\omega}\right) = f\left(\omega\left(t + \frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega t + T) = f(\omega t) = \varphi(t)$. Отже $\varphi\left(t + \frac{T}{\omega}\right) = \varphi(t)$, а ця рівність означає, що функція $\varphi(t)$ має періодом число $\frac{T}{\omega}$. Теорему доведено.

Наприклад, функція $cos\, 5t$ має періодом число $\frac{2\pi}{5}$, бо $cos\, t$ періодична функція з періодом 2π; функція $sin\frac{t}{3}$ має періодом число 6π.

Теорема 2. Якщо T_1 є періодом функції $f_1(t)$, а T_2 є періодом функції $f_2(t)$ і числа T_1 та T_2 *сумірні*, то їх лінійна комбінація є теж періодичною функцією.

Очевидно, що якщо $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$, де p і q–натуральні числа, то число $T = qT_1 = pT_2$ буде періодом цієї лінійної комбінації.

Теорема 3. Якщо функція $f(t)$ має періодом число T і інтегровна, то справедлива рівність $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$, (2.16)

де a — *довільне* задане число із області визначення функції.

Доведення. Розглянемо $\int_0^T f(t)dt$. Оскільки $f(t)=f(t+T)$, то $\int_0^a f(t)dt =$

$= \int_0^a f(t+T)dt =$ [зробимо заміну $t+T=x$, то $t=x-T$, $dt=dx$; при $t=0 \Rightarrow x=T$, а при $t=a \Rightarrow x=a+T$] $= \int_a^{a+T} f(x)dx$. Отже, $\int_0^a f(t)dt = \int_T^{T+a} f(t)dt$.

Тоді за властивістю адитивності визначеного інтеграла матимемо
$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_T^{T+a} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(t)dt + \int_a^T f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Теорему доведено.

Отже, інтеграл періодичної функції на проміжку, довжина якого дорівнює періоду, не залежить від початкової точки проміжку інтегрування. Зокрема, при $a=-\frac{T}{2}$ ця рівність запишеться так:

$$\int_0^T f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt. \qquad (2.17)$$

2.10.2 *Спектри періодичних функцій*

Найпростішою функцією, що описує коливні процеси, є гармоніка.

Означення. *Гармонікою* називається функція $f(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, де A, ω і φ — задані числа.

Параметр А називається амплітудою, ω — кутовою частотою, φ — початковою фазою. Гармоніка є періодичною функцією з періодом $T=\frac{2\pi}{\omega}$, оскільки функція $\cos t$ має періодом число 2π.

Всі коливні процеси пов'язані з періодичними функціями, які представлені у вигляді суми гармонік. Важливим є випадок, коли коливання описується функцією з періодом T, яка представлена у вигляді суми скінченного числа гармонік з *кратними* частотами, а саме:

$$f(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(2\omega t+\varphi_2)+\ldots+A_n\cos(n\omega t+\varphi_n). \qquad (2.18)$$

де $\omega=\frac{2\pi}{T}$. Сукупність чисел $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ називається *амплітудним спектром* функції $f(t)$, а сукупність чисел $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ називається *фазовим спектром*. Самі спектри дають важливу інформацію про коливний процес. Їх зображають геометрично у вигляді відповідних діаграм.

Означення. Вираз $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k cos(k\omega t+\varphi_k)$ називається *тригонометричним многочленом n-го порядку*, якщо $A_n \neq 0$.

Очевидно, що тригонометричний многочлен є періодичною функцією з періодом $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

2.10.3 *Поняття тригонометричного ряду*

Якщо в тригонометричному многочлені n необмежно зростає, то він перетворюється в ряд.

Означення. *Тригонометричним рядом* називається вираз

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k cos(k\omega t+\varphi_k). \tag{2.19}$$

Цей функціональний ряд може збігатися точково, може розбігатися, може збігатися рівномірно на проміжку, що залежить від коефіцієнтів A_k. Це є *амплітудно-фазова* форма запису тригонометричного ряду. Виведемо ще дві важливі формули запису тригонометричного ряду, а саме: дійсну та комплексну.

Загальний член ряду (2.19) перетворимо, користуючись формулою $\cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\, cos\,\beta - sin\,\alpha\, sin\,\beta$, матимемо

$A_k cos(k\omega t+\varphi_k)=A_k cos\,\varphi_k\, cos\,k\omega t - A_k sin\,\varphi_k\, sin\,k\omega t$. Введемо позначення: $\frac{a_0}{2}=A_0 cos\varphi_0$, $a_k=A_k cos\,\varphi_k$, $b_k=-A_k sin\varphi_k$. Тоді ряд (2.19) прийме таку форму :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cosk\omega t+b_k sink\omega t\right), \tag{2.20}$$

при цьому $a_k^2+b_k^2=A_k^2$, звідки $|A_k|=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$. Це є *дійсна форма* запису тригонометричного ряду.

Виведемо ще комплексну форму запису ряду. Скориставшись відомою формулою Ейлера $e^{it}=\cos t+i\sin t$ та $e^{-it}=\cos t-i\sin t$, де $i^2=-1$, дістанемо, що $cos\,t=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$, $sin\,t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$. Тоді, оскільки

$cosk\omega t=\frac{1}{2}\left(e^{ik\omega t}+e^{-ik\omega t}\right)$, $sink\omega t=\frac{1}{2i}\left(e^{ik\omega t}-e^{-ik\omega t}\right)=i\frac{e^{-ik\omega t}-e^{ik\omega t}}{2}$,

матимемо: $a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t=a_k\frac{e^{ik\omega t}+e^{-ik\omega t}}{2}+ib_k\frac{e^{-ik\omega t}-e^{ik\omega t}}{2}=$

$=\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ik\omega t}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ik\omega t}$. Введемо позначення $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$,

$c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}$, $c_0=\frac{a_0}{2}$. Тоді ряд (2.20) прийме вигляд $c_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k e^{ik\omega t}+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}e^{-ik\omega t}=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{ik\omega t}+\sum_{k=-1}^{-\infty}c_k e^{ik\omega t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ik\omega t}.$$

Отже, ряд (2.20) прийме таку форму запису: $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ik\omega t}. \qquad (2.21)$$

Це і є *комплексна форма* запису тригонометричного ряду.

2.10.4 Теорема Фур'є. Ряд Фур'є

Теорема Фур'є. Якщо тригонометричний ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ik\omega t}$ рівномірно збігається на відрізку довжини T до деякої функції з періодом T, то коефіцієнти цього ряду визначаються за формулами

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt, \qquad (2.22)$$

де $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Доведення. Нехай ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ik\omega t}$ рівномірно збігається до деякої функції $f(t)$, тобто $f(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ik\omega t}$. Виберемо довільне число n і зафіксуємо його. Помножимо цю рівність на $\frac{1}{T}e^{-in\omega t}$, дістанемо $\frac{1}{T}f(t)e^{-in\omega t}=\frac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{i(k-n)\omega t}$, при цьому рівномірна збіжність ряду не порушиться, тому цей ряд можна почленно інтегрувати на проміжку $[0,T]$, дістанемо $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^T e^{i(k-n)\omega t}dt$. Обчислимо інтеграли, що входять в склад членів цього ряду. Якщо $k=n$, то $\int_0^T e^{i(k-n)\omega t}dt =$ $= \int_0^T e^0 dt = T$. Якщо $k \neq n$, то при всіх таких k матимемо, що $\int_0^T e^{i(k-n)\omega t}dt = 0$, бо $\int_0^T e^{i(k-n)\omega t}dt = \frac{1}{i(k-n)\omega} e^{i(k-n)\omega t}\Big|_0^T =$

$$= \frac{1}{i(k-n)\omega}\left(e^{i(k-n)\omega T} - 1\right) = \frac{1}{i(k-n)\omega}\cdot(\cos(k-n)\omega T + i\sin(k-n)\omega T - 1) =$$

$$= \frac{1}{i(k-n)\omega}(\cos(k-n)2\pi + i\sin(k-n)2\pi - 1) \quad = \frac{1}{i(k-n)\omega}(1 + i\cdot 0 - 1) = 0,$$ бо

$\omega T = 2\pi$. Тоді, з врахуванням цих рівностей, всі члени ряду в правій частині дорівнюють нулю, крім n-го члена, який дорівнює T, отже, матимемо $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt = \frac{1}{T}c_n T$, звідки $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Означення. Якщо коефіцієнти ряду (2.21) обчислюються за формулою (2.22), то тригонометричний ряд *називається рядом Фур'є* періодичної функції $f(t)$.

З формул (2.22) легко одержати формули коефіцієнтів ряду Фур'є в дійсній формі. Оскільки $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, то $a_k - ib_k = 2c_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt =$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)(cosk\omega t - isink\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cosk\omega t dt - i\frac{2}{T}\int_0^T f(t)sink\omega t dt.$$

Звідси, на основі рівності комплексних чисел, враховуючи, що $c_0 = \frac{a_0}{2}$, маємо

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt,\ a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t dt,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t dt, \tag{2.23}$$

де $k = 1,2,3,...$ Формули (2.23) називаються *формулами Ейлера-Фур'є.* Враховуючи інтегральну властивість періодичних функцій, формули (2.23) можна записати ще так:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt,\ a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega\, tdt, b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega\, tdt\ . \qquad (2.24)$$

Зауваження. Якщо функція періодична з періодом $T = 2\pi$, то ряд Фур'є і коефіцієнти будуть мати вигляд

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \qquad (2.25)$$

де $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) sin ntdt$, (2.26)

де $n = 1,2,3,...$

Це найбільш проста форма ряду Фур'є в дійсній формі.

Припустимо тепер, що задана довільна періодична функція $f(t)$ з періодом T інтегровна на проміжку $[0;T]$. Обчислимо її коефіцієнти Фур'є за формулами (2.22) і складемо формально її ряд Фур'є. Виникає питання за яких умов сума цього ряду буде збігатися з функцією $f(t)$, що породила цей ряд? Відповідь на нього дає теорема Діріхле.

Теорема Діріхле. Якщо періодична з періодом T функція $f(t)$ на відрізку $[0;T]$ задовольняє такі умови:

– неперервна або кусково-неперервна на відрізку $[0;T]$

– монотонна на $[0;T]$ або має скінченне число точок екстремуму, то її ряд Фур'є збігається в усіх точках цього проміжку, при цьому:

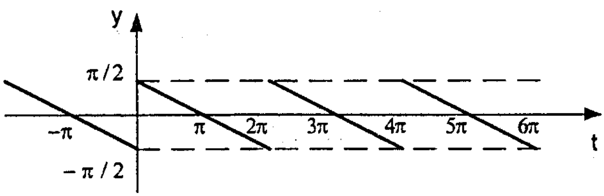
– його сума в кожній точці неперервності функції дорівнює значенню цієї функції в цій точці, тобто $S(t) = f(t)$;

– в точках розриву функції $f(t)$ сума ряду визначається за формулою

$S(t)=\dfrac{f(t-0)+f(+0)}{2}$, де $f(t-0)$ і $f(t+0)$ означають лівосторонню та правосторонню границі функції в цій точці.

Приклад 23. Розкласти в ряд Фур'є періодичну з періодом $T=2\pi$ функцію $f(t)=\dfrac{\pi-t}{2}$, задану на проміжку $[0;2\pi]$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції $y=\dfrac{\pi-t}{2}$ на відрізку $[0;2\pi]$ і продовжимо її за періодичністю на всю числову пряму з періодом $T=2\pi$.



З графіка видно, що на відрізку $[0;2\pi]$ функція $f(t)$ неперервна і монотонно спадна. Отже, умови тереми Діріхле виконані. Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є, користуючись формулами (2.22) при $\omega=1$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-t}{2}dt=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi-t}{2}\right)^2\Bigg|_0^{2\pi}=0,\ a_0=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-t}{2}\cos ntdt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)\cos ntdt=$$

$$=\left[\begin{array}{l|l} u=\pi-t & du=-dt \\ dv=\cos ntdt & v=\int\cos ntdt=\frac{1}{n}\sin nt\end{array}\right]=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n}(\pi-t)\sin nt\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin ntdt\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\sin 2n\pi-\frac{\pi}{n}\sin 0+\frac{1}{n^2}\cos nt\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n^2}(\cos 2\pi n-\cos 0)\right)=0;$$

Отже, $a_n=0$ при $n=1,2,3...$;

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin ntdt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)\sin ntdt=\left[\begin{array}{l|l} u=\pi-t & du=-dt \\ dv=\sin ntdt & v=-\frac{1}{n}\cos nt\end{array}\right]=$$

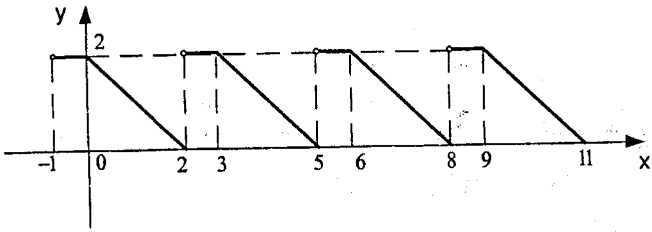
$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n}(\pi-t)\cos nt\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nt dt\right)=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos 2n\pi-\frac{\pi}{n}\cos 0+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n}-\frac{1}{n^2}(\sin 2\pi n-\sin 0)\right)=\frac{1}{n}.$$ Отже, $b_n=\frac{1}{n}$ при $n=1,2,3...$

Тоді матимемо $\frac{\pi-t}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nt$ або $\frac{\pi-t}{2}=\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t+...+\frac{1}{n}\sin nt+...$

Приклад 24. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(t)=\begin{cases}2 & при\ t\in(-1;0)\\ 2-t & при\ t\in[0;2]\end{cases}$.

Розв'язування. Будемо вважати функцію періодичною з періодом $T=3$, тоді $\omega=\frac{2\pi}{3}$. Побудуємо її графік.



На проміжку $(-1;2)$ функція неперервна і кусково-монотонна. Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0=\frac{2}{3}\int_{-1}^{2}f(t)dt=\frac{2}{3}\left(\int_{-1}^{0}2dt+\int_0^2(2-t)dt\right)-\frac{2}{3}\left(2-\frac{(2-t)^2}{2}\Big|_0^2\right)=\frac{8}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_{-1}^{2}f(t)\cos\frac{2\pi n}{3}t\,dt=\frac{2}{3}\left(\int_{-1}^{0}2\cos\frac{2\pi n}{3}t\,dt+\int_0^2(2-t)\cos\frac{2\pi n}{3}t\,dt\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}t\Big|_{-1}^{0}+\frac{3}{2\pi n}(2-t)\sin\frac{2\pi n}{3}t\Big|_0^2+\frac{3}{2\pi n}\int_0^2\sin\frac{2\pi n}{3}tdt\right)=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}-$$

$$-\frac{3}{2\pi^2n^2}\left(\cos\frac{4\pi n}{3}-1\right);$$

$$b_n=\frac{2}{3}\int_{-1}^{2}f(t)sin\frac{2\pi n}{3}t\ dt=\frac{2}{3}\left(\int_{-1}^{0}2sin\frac{2\pi n}{3}t\ dt+\int_{0}^{2}(2-t)sin\frac{2\pi n}{3}t\ dt\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{2\pi n}{3}t\Big|_{-1}^{0}-\frac{3}{2\pi n}(2-t)\cos\frac{2\pi n}{3}t\Big|_{0}^{2}+\frac{3}{2\pi n}\int_{0}^{2}\cos\frac{2\pi n}{3}tdt\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(1-\cos\frac{2\pi n}{3}\right)+\frac{2}{\pi n}-\frac{3}{2\pi^2n^2}sin\frac{4\pi n}{3}\Big|_{0}^{2}=\frac{2}{\pi n}cos\frac{2\pi n}{3}-\frac{3}{2\pi^2n^2}sin\frac{4\pi n}{3}.$$

Розкладання функції в ряд Фур'є матиме вигляд $f(t)=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n}sin\frac{2\pi n}{3}-\right.$

$$\left.-\frac{3}{2\pi^2n^2}\left(cos\frac{4\pi n}{3}-1\right)\right)cos\frac{2\pi n}{3}t+\left(\frac{2}{\pi n}cos\frac{2\pi n}{3}-\frac{3}{2\pi^2n^2}sin\frac{4\pi n}{3}\right)sin\frac{2\pi n}{3}t$$

Зауваження. У випадку парної і непарної функції ряд Фур'є спрощується. Це випливає із відомої властивості визначеного інтеграла в симетричних межах інтегрування, а саме: якщо функція $f(t)$ парна, то $\int_{-a}^{a}f(t)dt==2\int_{0}^{a}f(t)dt$; якщо функція $f(t)$ непарна, то $\int_{-a}^{a}f(t)dt=0$.

Якщо функція $f(t)$ парна то всі коефіцієнти $b_n=0$, а коефіцієнти a_0 і a_n можуть бути обчисленими за формулами:

$$a_0=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2}f(t)dt,\ a_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2}f(t)cos\pi n\omega t\,dt.$$

Якщо функція $f(t)$ непарна, то $a_0=0$ і всі коефіцієнти $a_n=0$, а коефіцієнти обчислюються за формулою: $b_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2}f(t)sin\pi n\omega t\,dt$.

Отже, розкладання в ряд Фур'є парної функції містить лише косинуси, а непарної лише синуси.

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

***Задача* 1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1.1 $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$.

1.2 $y'(1+x^2) - xy = \sqrt{1+x^2}$.

1.3 $y' = \frac{x-y}{x-2y}$.

1.4 $y' - y = xe^{3x}$.

1.5 $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.

1.6 $(xy' - y)arctg\frac{y}{x} = x$.

1.7 $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.8 $(x^2 - y^2)y' = 2xy$.

1.9 $y' + \frac{y}{1+x} = -x^2$.

1.10 $xy' + y = 3x$.

1.11 $y'\cos x = (y+1)\sin x$.

1.12 $x^2y' - 2xy = 3$.

1.13 $x^2y' + y^2 - 2xy = 0$.

1.14 $xy' + y = x + 1$.

1.15 $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$.

1.16 $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.

1.17 $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$.

1.18 $y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 2x$.

1.19 $xy' = 2x\ln x - y$.

1.20 $y - xy = x + yy'$.

1.21 $x\ln xy' - y = 3\ln x - 1$.

1.22 $xdy = ydx + ydy$.

1.23 $xy' - \frac{y}{x-1} = x$.

1.24 $e^x + e^y(1+e^x)y' = 0$.

1.25 $y' - \frac{y}{x} = yctg2x$.

1.26 $xy' = 2y - x$.

1.27 $x^2y' = y^2 + xy$.

1.28 $xy' + 2y = x^2$.

1.29 $2xydy = (x^2 + y^2)dx$.

1.30 $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$.

***Задача* 2.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

2.1 $xy''-y'=x^2\cos x.$

2.2 $y''(x^2+1)=2xy'.$

2.3 $y''ctgy=2(y')^2.$

2.4 $y'-xy''+(y')^2=0.$

2.5 $y''+y'tgx=\sin 2x.$

2.6 $(4+x^2)y''-2xy'=0.$

2.7 $2xy'y''=(y')^2+1.$

2.8 $(y')^2+2yy''=0.$

2.9 $y''-2ctgxy'=\sin^3 x.$

2.10 $(1-x^2)y''=xy'.$

2.11 $y''+y'tgx=\cos x.$

2.12 $y''+(1/x)y'=x^2.$

2.13 $xy''+2y'=x^3.$

2.14 $1+(y')^2+yy''=0.$

2.15 $(1+y)y''-5(y')^2=0.$

2.16 $y''tgy=2(y')^2.$

2.17 $y''-2y'tgx=\sin x.$

2.18 $3yy''+(y')^2=0.$

2.19 $(2+y)y''-4(y')^2=0.$

2.20 $y''(x^2+4)=2xy'.$

2.21 $x^2y''-(y')^2=0.$

2.22 $xy''+(y')^2-y'=0.$

2.23 $(1+\sin x)y''=y'\cos x.$

2.24 $(x^2+9)y''=xy'.$

2.25 $tgxy''=2y'.$

2.26 $x^4y''+x^3y'=1.$

2.27 $y''+y'=2x^2e^x.$

2.28 $y''\sin x=(3+y')\cos x.$

2.29 $y''ctgx+2y'=0.$

2.30 $xy''+2y'=x^2.$

***Задача* 3.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

3.1 $y''-4y'+4y=(2x-7)e^{-2x};$ $\quad y(0)=3,\quad y'(0)=-2.$

3.2 $y''-5y'+4y=(3x-1)e^{4x}$; $y(0)=2, \quad y'(0)=-4.$

3.3 $y''-6y'+9y=x^2-x+3$; $y(0)=7, \quad y'(0)=3.$

3.4 $y''+4y'-12y=8\sin 2x$; $y(0)=-3, \quad y'(0)=4.$

3.5 $y''-3y'+2y=(3-4x)e^{2x}$; $y(0)=2, \quad y'(0)=-1.$

3.6 $y''-5y'=-5x^2+4x$; $y(0)=-2, \quad y'(0)=5.$

3.7 $y''+3y'+2y=(x^2-2x)e^{2x}$; $y(0)=-3, \quad y'(0)=2.$

3.8 $y''-2y'+5y=(x-3)e^{-2x}$; $y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

3.9 $y''+6y'+9y=10e^{-3x}$; $y(0)=3, \quad y'(0)=2.$

3.10 $y''-2y'=(2x-5)e^{-2x}$; $y(0)=-2, \quad y'(0)=4.$

3.11 $y''+2y'+y=x^{-x}$; $y(0)=-3, \quad y'(0)=-1.$

3.12 $y''-4y'=3x-7$; $y(0)=2, \quad y'(0)=-2.$

3.13 $y''+4y'-5y=3xe^{3x}$; $y(0)=4, \quad y'(0)=-1.$

3.14 $y''-6y'=2(1-x)e^{-4x}$; $y(0)=-3, \quad y'(0)=-2.$

3.15 $y''+2y'+y=2xe^{-x}$; $y(0)=2, \quad y'(0)=-4.$

3.16 $y''-3y'=3xe^{-3x}$; $y(0)=-1, \quad y'(0)=3.$

3.17 $y''+y=(2-3x)e^{-x}$; $y(0)=3, \quad y'(0)=4.$

3.18 $y''-y=(2-x)e^{x}$; $y(0)=2, \quad y'(0)=0.$

3.19 $y''+4y=(3x-4)e^{-x}$; $y(0)=-1, \quad y'(0)=4.$

3.20 $y''+2y'=(3x^2-4)^{2x}$; $y(0)=2, \quad y'(0)=0.$

3.21 $y''+4y=(8x-1)e^{-2x}$; $y(0)=-1, \quad y'(0)=1.$

3.22 $y''+9y=3x^2-5x+4$; $y(0)=-2, \quad y'(0)=0.$

3.23 $y''-4y'+5y=(1-2x)e^{-2x}$; $y(0)=1, \quad y'(0)=-3.$

3.24 $y''-y'-2y=(x-3)e^{2x}$; $y(0)=-4, \quad y'(0)=2.$

3.25 $y''-2y'+5y=xe^{-x}$; $y(0)=-1, \quad y'(0)=-3.$

3.26 $y''-8y'+16=(12x+7)e^{-3x}$; $y(0)=0, \quad y'(0)=-2.$

3.27 $y''-5y'+6y=(1-2x^2)e^{-2x}$; $y(0)=-1, \quad y'(0)=-4.$

3.28 $y''-4y'+13y=2x^2-3x-5$; $y(0)=-2, \quad y'(0)=1.$

3.29 $y''-2y'+y=(16x-5)e^{x}$; $y(0)=1, \quad y'(0)=3.$

3.30 $y''-4y'=6x^2+3x-1$; $y(0)=2, \quad y'(0)=-3.$

***Задача* 4.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

4.1 $y''-4y'=2\cos 2x.$

4.2 $y''+y=2\cos 4x-3\sin 4x.$

4.3 $y''-2y+5y=10\cos x.$

4.4 $y''-4y'+4y=-5\cos 3.$

4.5 $y''+4y=-8\sin 2x.$

4.6 $y''-5y'-6y=-2\cos x.$

4.7 $y''-4y=4\sin 3x.$

4.8 $y''-2y'+10y=-3\sin x.$

4.9 $2y''+5y'=4\cos x.$

4.10 $y''-4y'+8y=3\sin 2x.$

4.11 $y''-3y'+2y=5\sin 2x.$

4.12 $y''+9y=12\sin x.$

4.13 $y''+y'-6y=8\sin 2.$

4.14 $y''+6y'+8y'=-2\sin 3x.$

4.15 $y''+5y'+6y=12\cos 2x.$

4.16 $y''-4y'-12y=8\sin 2x.$

4.17 $y''-y'=4\cos 3x-3\sin 3x.$

4.18 $y''-y=2\sin 3-3\cos 3x.$

4.19 $y''-4y'+8y=3\sin 2x.$

4.20 $y''-4y=3\sin 2x.$

4.21 $y''+9y'=2\cos x-\sin x.$

4.22 $y''-5y'+4y=\cos 4x.$

4.23 $y''-4y'-5y=4\sin 3x.$

4.24 $y''-2y'+17y=-2\sin x.$

4.25 $y''+2y'=\cos x-3\sin x.$

4.26 $y''+5y'+4y=-2\sin 2x.$

4.27 $y''+3y'=2\cos 3x.$

4.28 $y''+2y'+y=-\sin x.$

4.29 $y''+2y'+y=5\cos x-\sin x.$

4.30 $y''-3y'=\sin x+3\cos x.$

***Задача* 5.** Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь методом виключення.

5.1 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-7x,\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-5y.\end{cases}$

5.2 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y.\end{cases}$

5.3 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y.\end{cases}$

5.4 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y.\end{cases}$

5.5 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-3x+2y.\end{cases}$

5.6 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+6y,\\ \dfrac{dy}{dt}=4x+2y.\end{cases}$

5.7 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-5x-4y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-3y.\end{cases}$

5.8 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=8x+y.\end{cases}$

5.9 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

5.10 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

5.11 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

5.12 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$

5.13 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$

5.14 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$

5.15 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$

5.16 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

5.17 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

5.18 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

5.19 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

5.20 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y. \end{cases}$

5.21 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y. \end{cases}$

5.22 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y. \end{cases}$

5.23 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y. \end{cases}$

5.24 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y. \end{cases}$

5.25 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

5.26 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 3y. \end{cases}$

5.27 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

5.28 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$

5.29 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

5.30 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

Задача **6.** Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ за допомогою ознак порівняння, Д'Аламбера, інтегральної і радикальної ознак Коші.

6.1 $a_n = \dfrac{1}{n^2 + 3n + 1}$, $\quad a_n = \dfrac{5^{n-1}}{(n+2)!}$, $\quad a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

6.2 $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$, $\quad a_n = \dfrac{4^{n+1}}{(2n)!}$, $\quad a_n = \dfrac{e^{-\sqrt{2n+1}}}{\sqrt{2n+1}}$.

6.3 $a_n = \dfrac{n+3}{n^3 + 1}$, $\quad a_n = \dfrac{(n+4)^3}{e^n}$, $\quad a_n = \dfrac{5}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

6.4 $a_n = \dfrac{4}{\sqrt{n^3 + 5n}}$, $\quad a_n = \dfrac{3^n}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 4n}$, $\quad a_n = \dfrac{4}{(2n+1)\ln(2n+1)}$.

6.5 $a_n = arctg\dfrac{3}{\sqrt{n}}$, $\quad a_n = \dfrac{3^{2n-1}}{(n+2)!}$, $\quad a_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

6.6 $a_n = \sqrt[3]{n^2} / (n^4 + 3)$, $\quad a_n = 3^n tg(1/5^n)$, $\quad a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.

6.7 $a_n = (\sqrt{n^3} + 4)/(n^2 + 5n)$, $a_n = 3^n \sin(\pi / 4^n)$, $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n$.

6.8 $a_n = \ln(1 + 1/n^4)$, $a_n = \dfrac{n^5}{(2n+1)!}$, $a_n = \dfrac{e^{-3\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

6.9 $a_n = (5n+2)/(n\sqrt[3]{n})$, $a_n = \sqrt{n^3} \sin(\pi / 5^n)$, $a_n = \dfrac{1}{(n+2)\ln^4(n+2)}$.

6.10 $a_n = \sqrt{n} \sin\dfrac{\pi}{n^2}$, $a_n = \dfrac{n!}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}$, $a_n = \left(\dfrac{n+1}{3n-1}\right)^n$.

6.11 $a_n = (3n+2)/\sqrt{n}(n^2 + 3)$, $a_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{(2n+3)^n}}$, $a_n = \dfrac{(n+1)!2^n}{n^n}$.

6.12 $a_n = (2n+1)/\sqrt[3]{n^4 + 4n}$, $a_n = \dfrac{5}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$, $a_n = \dfrac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$,

6.13 $a_n = \left(\sqrt{n^3 + 4}\right)/\left(n^2 + 5n + 3\right)$, $a_n = \left(\dfrac{n+2}{2n-1}\right)^n$, $a_n = e^{-\sqrt[3]{n^2}}/\sqrt[3]{n}$,

6.14 $a_n = \sqrt{n}/(n^4 - 3n + 7)$, $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $a_n = a_n = \dfrac{\ln^3 n}{n(\ln^4 n + 1)}$.

6.15 $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{3}{n^4}\right)$, $a_n = \sqrt[3]{n} tg(\pi / 2^n)$, $a_n = e^{-2\sqrt{3n}}/\sqrt{3n}$.

6.16 $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)^3}$, $a_n = n^2 \sin(\pi / 3^n)$, $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^n$.

6.17 $a_n = tg\dfrac{\pi}{4n}$, $a_n = \dfrac{(n+2)!}{(3n-2)^5}$, $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{\ln(2n+1)}}$.

6.18 $a_n = (6n+5)/(n^2 - \sqrt[3]{n})$, $a_n = (n^2 + 2)/4^n$, $a_n = \dfrac{\ln n}{n(\ln^2 n + 4)}$.

6.19 $a_n = \dfrac{\sqrt{n}(3n-1)}{n^5+19n^3-2}$, $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{4^n(n+1)!}$, $a_n = \dfrac{1}{(n+5)\ln^3(n+2)}$.

6.20 $a_n = \dfrac{n^3+4n}{2^{n-1}}$, $a_n = \dfrac{3n+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^5-n+3}}$, $a_n = \sin^n \dfrac{\pi n}{n^2+5}$.

6.21 $a_n = \dfrac{6n+1}{\sqrt{n^4+7n}}$, $a_n = \dfrac{n^3+1}{e^n}$, $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+5)}$.

6.22 $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3}}{(n+2)(n^2+7)}$, $a_n = \dfrac{n^2+4}{(n+2)!}$, $a_n = (n-2)e^{-(n+2)^2}$.

6.23 $a_n = \sin\dfrac{\pi}{5n}$, $a_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{4^n}$, $a_n = (n+5)e^{-(n+5)^2}$.

6.24 $a_n = \dfrac{n^2+7n-2}{n^3+4n^2+1}$, $a_n = \dfrac{n^2+4}{(2n+1)!}$, $a_n = arctg^n \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

6.25 $a_n = \dfrac{1}{n}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a_n = \dfrac{n2^n}{(n+3)!}$, $a_n = 3^n\left(\dfrac{n-7}{2n+5}\right)^{3n}$.

6.26 $a_n = n^2\sin\dfrac{\pi}{2n^3}$, $a_n = \dfrac{5^{n+2}(n+1)}{(n+3)!}$, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n+2)}$.

6.27 $a_n = \sqrt{n^3}\ln\left(1+\dfrac{2}{n^4}\right)$, $a_n = \dfrac{n!4^{n+2}}{n^n}$, $a_n = \dfrac{e^{-\sqrt{n+2}}}{\sqrt{n+2}}$.

6.28 $a_n = \dfrac{n^2+4}{(n+1)(n^3+5n)}$, $a_n = \dfrac{n^3 2^{n+3}}{(n+1)!}$, $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n+4)^5}$.

6.29 $a_n = \dfrac{n+1}{2n^3+3n-1}$, $a_n = \dfrac{4^{n+1}}{n^n}$, $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n+5)}$.

6.30 $a_n = \dfrac{5n^2-2n+3}{7n^3+5}$, $a_n = n^2 tg\dfrac{\pi}{3^n}$, $a_n = \dfrac{e^{-\sqrt{n+4}}}{\sqrt{n+4}}$.

Задача 7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди, користуючись теоремою Лейбніца і ознакою абсолютної збіжності.

7.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^n}$.

7.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{3n+2}}$.

7.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

7.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$.

7.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^3+2}$.

7.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{\pi}{n}$.

7.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(3n-1)}$.

7.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

7.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n+1)^2}}$.

7.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

7.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n+1)^2}$.

7.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^n}$.

7.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2-n+1}$.

7.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2-1}{3^n}$.

7.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{n^2+4n}$.

7.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{4n^2+3}}$.

7.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+4}{n^3+2}$.

7.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{2^n}$.

7.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\,arctg\frac{1}{n}$.

7.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+4}$.

7.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$.

7.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

7.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

7.24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

7.25 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^3+4}}$.

7.26 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{n^4+3}$.

7.27 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+4n-1}$.

7.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{4^{n+1}}$.

7.29 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(3+\sqrt{n})}$.

7.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{4}{n^2}$.

***Задача* 8.** Знайти інтеграл збіжності степеневого ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

8.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n(2n+1)}$.

8.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)3^n}$.

8.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)}{(5n-3)5^n}$.

8.4 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{2n+1}$.

8.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(x+2)^n}{3n^2-1}$.

8.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(3n-1)4^n}$.

8.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(x+5)^n}{4^{n+1}}$.

8.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n+1)5^n}$.

8.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)x^n}{(2n^2+1)3^n}$.

8.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+4)^n}{n^2+1}$.

8.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n(n+1)}$.

8.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^n}{n(n^2+1)}$.

8.13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{(n^2+1)2^n}$.

8.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^2(2n-1)}$.

8.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+3)3^n}$.

8.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3n^2(n+3)}$.

8.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 4^n}$.

8.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n(n+2)}$.

8.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{(2n-1)2^n}$.

8.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{(n+1)3^n}$.

8.21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(x+1)^n}{n^2 2^n}$.

8.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n(n+5)}$.

8.23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(n^2+3)4^n}$.

8.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{(n+3)3^n}$.

8.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(2n+1)3^n}$.

8.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{n^2+1}$.

8.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+5)2^n}$.

8.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n(n+4)4^n}$

8.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(x-5)^n}{n4^n}$.

8.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{n(2n-1)}$.

***Задача* 9.** Обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши підінтегральну функцію в степеневий ряд і проінтегрувавши його почленно.

9.1 $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$; $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

9.2 $f(x) = x\ln(1+x^3); a = 0, b = 0{,}25$.

9.3 $f(x) = \cos(x^2/4); a = 0, b = 0{,}5$.

9.4 $f(x) = \sqrt{4+x^3}; a = 0, b = 0{,}5$.

9.5 $f(x) = \sqrt{1+x^3}; a = 0, b = 0{,}25$.

9.6 $f(x) = \sin x^2; a = 0, b = 0{,}5$.

9.7 $f(x)=\sin x^2/x; a=0,\ b=0{,}25.$ 9.8 $f(x)=\sin x^3; a=0, b=0{,}2.$

9.9 $f(x)=e^{-x^2/2}; a=0, b=0{,}6.$ 9.10 $f(x)=\sqrt{1+x^4}; a=0, b=0{,}25.$

9.11 $f(x)=\cos x^2; a=0, b=0{,}3.$ 9.12 $f(x)=e^{-x^2/3}; a=0, b=\frac{1}{3}.$

9.13 $f(x)=\sin x^3/x; a=0, b=\frac{1}{3}.$ 9.14 $f(x)=\cos(x^2/3); a=0, b=0{,}4.$

9.15 $f(x)=x^2\sin x^2; a=0, b=0{,}25.$ 9.16 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}; a=0, b=0{,}5.$

9.17 $f(x)=\sin x^4; a=0, b=\frac{1}{3}.$ 9.18 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}; a=0, b=0{,}5.$

9.19 $f(x)=e^{-x^3}; a=0, b=0{,}5.$ 9.20 $f(x)=x^2\ln(1+x^2); a=0, b=\frac{1}{3}.$

9.21 $f(x)=\frac{\sin x}{x}; a=0, b=0{,}2.$ 9.22 $f(x)=\frac{\sin(x/3)}{x^2}; a=0, b=0{,}4.$

9.23 $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}; a=0, b=\frac{1}{3}.$ 9.24 $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}; a=0, b=0{,}2.$

9.25 $f(x)=\sqrt{1+x^3/2}; a=0, b=0{,}5.$ 9.26 $f(x)=\ln(1+x^2/4); a=0, b=0{,}2.$

9.27 $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}; a=0, b=0{,}3.$ 9.28 $f(x)=\sin(x^2/3); a=0, b=0{,}6.$

9.29 $f(x)=\sqrt{1+x^2/3}; a=0, b=1.$ 9.30 $f(x)=\sqrt{4+x^3}; a=0, b=0{,}5.$

***Задача* 10.** Знайти три перші, відмінні від нуля, члени розкладання в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

10.1 $y' = \cos x + y^2;\ y(0) = 1.$

10.2 $y' = y + y^3;\ y(0) = 2.$

10.3 $y' = \sin x + y^2;\ y(0) = 1.$

10.4 $y' = 2x - e^y;\ y(-1) = 0.$

10.5 $y' = e^{2y} - xy;\ y(0) = 0.$

10.6 $y' = 2\sin x - y^2;\ y(0) = 1.$

10.7 $y' = x + y^2 + 1;\ y(2) = 1.$

10.8 $y' = x^2 y^2 - 1;\ y(2) = 1.$

10.9 $y' = y^2 + 3x;\ y(-1) = -1.$

10.10 $y' = 5x^2 - y^2 - y;\ y(-1) = 0.$

10.11 $y' = 2x - y^3;\ y(2) = 1.$

10.12 $y' = y^3 + 2x;\ y(0) = -1.$

10.13 $y' = y^2 - 3x;\ y(1) = 2.$

10.14 $y' = 2y^2 - ye^x;\ y(0) = -1.$

10.15 $y' = 3x - 2\cos y;\ y(0) = 0.$

10.16 $y' = 2x + \dfrac{1}{y};\ y(0) = 2.$

10.17 $y' = 3y^2 - 2x;\ y(1) = 1.$

10.18 $y' = 3x + y^4;\ y(0) = -2.$

10.19 $y' = x^2 - e^y;\ y(0) = 0.$

10.20 $y' = x^2 - 2\cos y;\ y(1) = 0.$

10.21 $y' = e^y + xy;\ y(0) = 0.$

10.22 $y' = xy^2 - 2;\ y(0) = 3.$

10.23 $y' = x + 3\cos y;\ y(0) = 0.$

10.24 $y' = 4x - e^y;\ y(0) = 0.$

10.25 $y' = x^2 - 2y^2;\ y(1) = -1.$

10.26 $y' = \sin 3x - y^2;\ y(0) = 2.$

10.27 $y' = 4x - \dfrac{2}{y};\ y(0) = -1.$

10.28 $y' = \cos y - 3x;\ y(-1) = 0.$

10.29 $y' = -x^2 + y^3;\ y(1) = 2.$

10.30 $y' = x - 7e^{xy};\ y(0) = 0.$

***Задача* 11.** Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ в заданому інтервалі.

11.1 $f(x) = \begin{cases} -2 \ \text{при} -1 < x < 0, \\ x + 2 \ \text{при}\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

11.2 $f(x) = x + 3;\quad (-3; 3).$

11.3 $f(x) = 2 - x; \quad (-2; 2).$

11.4 $f(x) = \begin{cases} -1, -1 < x < 0, \\ x + 1, 0 \le x \le 2. \end{cases}$

11.5 $f(x) = |1 - x|; \quad (-1; 1).$

11.6 $f(x) = 2 - |x|; \quad (-1; 1).$

11.7 $f(x) = 1 + |x|; \quad (-1; 1).$

11.8 $f(x) = \begin{cases} 1, -1 < x \le 0, \\ 1 - x, 0 < x \le 2. \end{cases}$

11.9 $f(x) = 2x - 1; \quad (-2; 2).$

11.10 $f(x) = |x - 2|; \quad (-1; 1).$

11.11 $f(x) = \begin{cases} -2x, \; -1 < x \le 0, \\ 1, \quad 0 < x \le 2. \end{cases}$

11.12 $f(x) = |x| + 1; \quad (-2; 2).$

11.13 $f(x) = \begin{cases} 2, -2 < x \le 0, \\ 1 + x, 0 < x \le 2. \end{cases}$

11.14 $f(x) = 2 + x; \quad (-1; 2).$

11.15 $f(x) = \begin{cases} 2x, -2 < x \le 0, \\ 3, 0 \le x \le 1. \end{cases}$

11.16 $f(x) = 3 - |x|; \quad (-3; 3).$

11.17 $f(x) = \begin{cases} 0, -3 < x \le 0, \\ 3x, 0 < x \le 3. \end{cases}$

11.18 $f(x) = 1 + 2|x|, \quad (-1; 1).$

11.19 $f(x) = \begin{cases} 2x, -1 < x \le 0, \\ 1, \quad 0 < x \le 2. \end{cases}$

11.20 $f(x) = \begin{cases} 2, -\pi < x \le 0, \\ x, 0 < x < \pi. \end{cases}$

11.21 $f(x) = x - 1; \quad (0; 2).$

11.22 $f(x) = \begin{cases} x + 1, -\pi < x \le 0, \\ -1, 0 < x \le \pi. \end{cases}$

11.23 $f(x) = 2|x| - 1; \quad (-\pi; \pi).$

11.24 $f(x) = \begin{cases} -x, -3 \le x < 0, \\ 2, 0 \le x < 1. \end{cases}$

11.25 $f(x) = |1 - x|; \quad (-3; 3).$

11.26 $f(x) = \begin{cases} -1, -2 \le x < 0, \\ x + 1, 0 \le x < 2. \end{cases}$

11.27 $f(x) = 2 - |x|; \quad (-\pi; \pi).$

11.28 $f(x) = 3 - x; \quad (-2; 2).$

11.29 $f(x) = \begin{cases} 3, -\pi < x \le 0, \\ -x, 0 < x < \pi. \end{cases}$

11.30 $f(x) = \begin{cases} -x, -2 < x \le 0, \\ 1, 0 < x \le 1. \end{cases}$

Література

1. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1,2. – М.: Высшая школа, 1978.
2. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. Ч.1,2. – М.: Высшая школа, 1973.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Ч.1,2. – М.: Наука, 1985.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
5. Сборник задач по курсу высшей математики. Под редакцией Кручковича Г.И. – М.: Высшая школа, 1973.
6. Клочко В.І., Сироватка А.О. Звичайні диференціальні рівняння. – Вінниця: ВДТУ, 2000.
7. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996.
8. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика, - К.: Вища школа, 1987.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. – М.: Высшая школа, 1986.

Навчальне видання

Василь Парфенович Литвинюк

Диференціальні рівняння
Ряди

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором
Редактор О.Д.Скалоцька

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 16.12.03р
Формат 29,7x42 1/4
Друк різографічний
Тираж 75 прим
Зам. № 2003-193

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 4.44

Віддруковано в комп´ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95