В.П.ЛИТВИНЮК

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.П.Литвинюк

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Затверджено Вченою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів напряму підготовки 0708- "Екологія". Протокол № 11 від 25 червня 2003р.

Вінниця ВНТУ 2004

УДК 517.3 (075)
Л 64

Рецензенти:
В.М.Михалевич, доктор технічних наук, професор
В.С.Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор
В.М.Кичак, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Литвинюк В.П.
Л 64 **Інтегральне числення.**
Навчальний посібник. –Вінниця: ВНТУ, 2004 – 89 с.

В посібнику детально розглянуті теоретичні положення про методи інтегрування функцій та поняття визначеного інтеграла, його властивості і методи обчислення та застосування. Методика викладання матеріалу розрахована на самостійну роботу. Розроблені завдання для контрольної роботи і типового розрахунку. Посібник розроблено у відповідності з планом кафедри вищої математики і програми до дисципліни “Вища математика”.

УДК 517.3 (075)

ЗМІСТ

1 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1 Поняття первісної і її властивості

В багатьох питаннях науки і техніки доводиться відновлювати функцію за її відомою похідною. Це задача, обернена до знаходження похідної функції.

Припустимо, що задана функція $f(x)$ на деякому проміжку, яка є похідною деякої функції $F(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Треба визначити цю вихідну функцію $F(x)$, яку називають *первісною* для $f(x)$.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для заданої функції $f(x)$, що визначена на деякому проміжку, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Знаходження для даної функції всіх її первісних називається її *інтегруванням*. Це основна задача інтегрального числення.

Наприклад, функція $f(x)=x^2$ має своїми первісними функції $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-4$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+5$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$, де C – довільна стала. З цього прикладу видно, що в даної функції є багато первісних, що відрізняються одна від одної на сталий доданок.

Зауваження. Якщо $F(x)$ є деякою первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$, де C – довільна стала, є теж її первісною.

Дійсно, оскільки $F'(x) = f(x)$, то $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$.

Чим же відрізняються дві довільні первісні даної функції в загальному випадку? Можливо, на цей *довільний сталий* доданок? Справедлива така теорема.

Теорема (*про загальний вигляд первісної*). Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – дві *довільні* первісні для функції $f(x)$, то їх різниця є *сталою*.

Доведення. Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – *довільні* первісні для функції $f(x)$, визначеної на деякому проміжку (a, b), тобто $F_1'(x) = f(x)$ і $F_2'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a,b)$. Розглянемо функцію $r(x) = F_1(x) - F_2(x)$ і покажемо, що $r(x) = C$ для всіх $x \in (a,b)$. Дійсно, знайдемо похідну функції $r(x)$, матимемо $r'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Отже, $r'(x) = 0$ для всіх $x \in (a,b)$.

Візьмемо тепер два довільні значення аргументу x_1 і x_2 із проміжку (a,b) такі, що $x_1 < x_2$. Для функції $r(x)$ на проміжку $[x_1, x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа $r(x_2) - r(x_1) = r'(c)(x_2 - x_1)$, де $x_1 < c < x_2$. Але $r'(c) = 0$, бо

$c \in (a,b)$, тоді $r(x_2) - r(x_1) = 0$ або $r(x_2) = r(x_1)$. Оскільки x_1 і x_2 – довільні дві точки із (a,b), то ця рівність означає, що функція $r(x)$ є довільною сталою, тобто $r(x) = C$ або $F_1(x) - F_2(x) = C$, де C – довільна стала. Теорему доведено.

Отже, з цієї теореми та зробленого зауваження випливає, що, якщо деяка функція $F(x)$ *є первісною* для функції $f(x)$ на проміжку (a,b), то *будь-яка* інша *пгрвісна* міститься у виразі $F(x) + C$, де C – *довільна* стала, тобто вираз $F(x) + C$ являє собою *загальний вигляд* всіх первісних для функції $f(x)$.

1.2 Поняття невизначеного інтеграла

Означення. Множина *всіх первісних* для даної функції $f(x)$, тобто вираз $F(x) + C$, де C – *довільна* стала, називається *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$.

$$\text{Отже,}\quad \int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1.2}$$

де $F'(x) = f(x)$, а C – довільна стала.

Зауважимо, що в символі невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ неявно міститься *довільна* стала, саме вона дає назву *невизначеного* інтеграла. Вираз $f(x)dx$, що стоїть під знаком інтеграла, називається *підінтегральним виразом*, функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, а x– змінною інтегрування. Скориставшись формулою диференціала функції $dy = y'dx$, будемо мати, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ дорівнює диференціалу первісної $F(x)$, бо $F'(x) = f(x)$, тобто

$$f(x)dx=dF(x), \tag{1.3}$$

тоді формулу (1.2) можна записати так:

$$\int dF(x) = F(x) + C, \tag{1.4}$$

де C – довільна стала. Отже, символи $\int$ і d, що стоять поруч в указаному порядку, знищують один одного і залишається сама первісна. Звернемо увагу на те, що під знаком інтеграла стоїть диференціал первісної, а не похідна первісної. Цей запис склався історично, до того ж, цей запис дає ряд переваг.

На завершення приведемо кілька прикладів:

1) $\int dx = x + C$; 2) $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C$; 3) $\int sinx dx = -\,cosx + C$;

4) $\int d(e^{3x}) = e^{3x} + C$; 5) $\int d(tgx) = tgx + C$.

Зауваження. Щоб встановити, чи правильно знайдено невизначений інтеграл, треба переконатись в тому, що похідна або диференціал від одержаного результату дорівнює підінтегральній функції або підінтегральному виразу.

1.3 Таблиця інтегралів

Кожна формула таблиці похідних для основних елементарних функцій, записана в зворотному порядку, дає відповідну формулу невизначеного інтеграла. Перебравши всі формули таблиці похідних та доповнивши ще кількома важливими формулами, дістанемо таблицю невизначних інтегралів, а саме:

1) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ $(m \neq -1)$, 2) $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$, 3) $\int e^x dx = e^x + C$,

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$, 5) $\int sinx dx = -cosx + C$, 6) $\int cosx dx = sinx + C$,

7) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$ 8) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$, 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$,

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$, 11) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$,

12) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$, 13) $\int \frac{dx}{sinx} = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$,

14) $\int \frac{dx}{cosx} = ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$, 15) $\int shx dx = chx + C$,

16) $\int chx dx = shx + C$, 17) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$,

$$18)\ \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$$

Формули 9) – 14) перевіряються безпосередньо, переконавшись, що похідні правих частин дорівнюють підінтегральним функціям. Приведемо приклади використання таблиці інтегралів:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = arcsin\frac{x}{2} + C$; 2) $\int \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + C$;

3) $\int \frac{dx}{x^2 - 7} = \frac{1}{2\sqrt{7}} ln\left|\frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}}\right| + C$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 + 5}\right| + C$.

1.4 Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Дійсно, $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$.

2. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Дійсно, $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$.

3. Сталий множник можна винести за знак невизначеного інтеграла, тобто $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, де $k - const$.

Дійсно, $\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x)$.

4. Невизначений інтеграл суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів цих функцій, тобто $\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Дійсно, $\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x)+f_2(x)$.

Наслідок. З властивостей 3) і 4) випливає формула

$$\int (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))dx = C_1 \int f_1(x)dx + C_2 \int f_2(x)dx, \qquad (1.5)$$

де C_1 і C_2 – задані числа. Ця властивість називається *властивістю лінійності.*

Наприклад, $\int (6x^2 - 4x + 5)dx = 6\int x^2 dx - 4\int x dx + 5\int dx = 2x^3 - 2x^2 + 5x + C$.

5. Властивість *інваріантності* невизначеного інтеграла.

Теорема. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F'(x) = f(x)$, то виконується рівність $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = u(x)$ – довільна *диференційовна* функція.

Доведення. Покажемо, що диференціал правої частини доводжуваної рівності дорівнює підінтегральному виразу. За властивістю *інваріантності* диференціала $df(u) = f'(u)du$ матимемо $d(F(u)+C) = dF(u)+dC = F'(u)du + 0 = f(u)du$, бо $F'(u) = f(u)$. Теорема доведена.

Отже, невизначений інтеграл *не залежить* від того, чи інтегрування ведеться за *незалежною* змінною, чи за деякою *функцією* цієї незалежної. А як частинний випадок звідси випливає, що невизначений інтеграл *не залежить* від того, *якою буквою* позначено змінну інтегрування.

Ця властивість значно розширює можливості таблиці інтегралів, а метод *підведення під знак диференціала* деякої функції $u(x)$ є найбільш важливим і розповсюдженим. Приведемо ряд прикладів на використання цієї властивості.

1) $\int cos5x dx = \frac{1}{5}\int cos5x d(5x) = \frac{1}{5} sin5x + C,$ де $u = 5x,$

2) $\int sin^4 x cosx dx = \int sin^4 x d(sinx) = \frac{1}{5} sin^5 x + C,$ де $u = sinx,$

3) $\int x^2 e^{-2x^3} dx = -\frac{1}{6}\int e^{-2x^3} d(-2x^3) = -\frac{1}{6} e^{-2x^3} + C, \ \ u = -2x^3,$

4) $\int \sqrt[4]{3x+4}\, dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[4]{3x+4}\, d(3x+4) = \frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/4} d(3x+4) =$

$= \frac{4}{15}(3x+4)^{5/4} + C = \frac{4}{15}\sqrt[4]{(3x+4)^5} + C, \ \ u = 3x+4,$

5) $\int \frac{ln^3 x dx}{x} = \int ln^3 x d(lnx) = \frac{1}{4} ln^4 x + C, \ \ u = lnx,$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+5}} = \frac{1}{4}\int (2x^2+5)^{-1/2} d(2x^2+5) = \frac{1}{4} 2(2x^2+5)^{1/2} + C = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+5} + C,$

7) $\int \frac{xdx}{x^4-16} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2-4^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 4} ln\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right| + C = \frac{1}{16} ln\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right| + C.$

На завершення вкажемо умови існування невизначеного інтеграла. Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ *неперервна* на деякому проміжку, то на ньому існує її невизначений інтеграл.

Зауваження. Якщо похідна всякої елементарної функції є знову елементарною функцією, то цього не можна сказати в загальному випадку про її невизначений інтеграл. Існує багато елементарних функцій, невизначені інтеграли яких існують, але самі інтеграли не виражаються елементарними функціями. До них належать і досить важливі, що мають спеціальні назви, так звані *спеціальні функції.* Наведемо деякі із них. До них відносяться такі: $\int e^{-x^2}dx$ (функція Лапласа), $\int \frac{sinx}{x}dx$ (інтегральний синус), $\int \frac{cosx}{x}dx$, $\int \frac{dx}{lnx}$ (інтегральний логарифм), $\int sinx^2dx$ і $\int cosx^2dx$ (інтеграли Френеля), $\int \frac{e^{ax}}{x^k}dx$, $\int \frac{sinax}{x^k}dx$, $\int \frac{cosax}{x^k}dx$, тощо, де k – натуральне число, a – дійсне число, та багато інших.

Про це треба знати, коли ми приступаємо до вивчення *методів* інтегрування функцій. Найважливішими із методів інтегрування є *заміна змінної* інтегрування та метод інтегрування *частинами.*

1.5 Метод інтегрування частинами

Розглянемо дві функції $u(x)$ і $v(x)$, які неперервні разом із своїми похідними $u'(x)$ і $v'(x)$ на деякому проміжку. Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними на деякому проміжку, то справедлива рівність $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$.

Доведення. Скористаємось відомою властивістю диференціала $d(uv)=udv+vdu$. Про інтегрувавши цю рівність, дістанемо $\int d(u(x)v(x)) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x)$. Оскільки $\int d(u(x)v(x))=u(x)v(x)$, то матимемо $u(x)v(x) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x)$, звідки маємо, що $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$. Теорема доведена.

Зауваження. Запишемо цю формулу без аргументів

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{1.6}$$

Цю рівність називають *формулою інтегрування частинами.* Застосовують цю формулу тоді, коли інтеграл правої частини простіший, ніж інтеграл лівої частини. Цим методом знаходять такі інтеграли: $\int x^m e^{ax}dx$, $\int x^m sinaxdx$, $\int x^m sinaxdx$, $\int x^m cosaxdx$, $\int x^m lnxdx$, $\int e^{ax} sinbxdx$, $\int e^{ax} cosbxdx$, деякі ірраціональності та обернені тригонометричні функції. Замість степеневої функції x^m можуть бути цілі многочлени. Приведемо приклади на застосування цієї формули.

$$1. \int xcosxdx = \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = cosxdx & v = \int cosxdx = sinx \end{array}\right] = xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + C.$$

$$2. \int (x^2+5x)e^{-2x}dx = \left[\begin{array}{c|c} u = x^2+5x & du = (2x+5)dx \\ dv = e^{-2x}dx & v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+5x)e^{-2x} + \frac{1}{2}\int (2x+5)e^{-2x}dx = \left[\begin{array}{c|c} u = 2x+5 & du = 2dx \\ dv = e^{-2x}dx & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+5x)e^{-2x} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}(2x+5)e^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot 2\int e^{-2x}dx) = -\frac{1}{2}(x^2+5x)e^{-2x} -$$

$$-\frac{1}{4}(2x+5)e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}(x^2+5x)e^{-2x} - \frac{1}{4}(2x+5)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

$$3. \int x^3 lnxdx = \left[\begin{array}{c|c} u = lnx & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3dx & v = \int x^3dx = \frac{1}{4}x^4 \end{array}\right] = \frac{1}{4}x^4 lnx - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4 lnx -$$

$$-\frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4 lnx - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

$$4. \int \sqrt{x^2-1}\,dx = \left[\begin{array}{c|c} u = \sqrt{x^2-1} & du = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2xdx = \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{array}\right] = x\sqrt{x^2-1} -$$

$$-\int x\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\sqrt{x^2-1} -$$

$$-\int\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Тоді $\int \sqrt{x^2-1}\,dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}dx - ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$.

Розв'язавши це рівняння відносно інтеграла, дістанемо

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right) + C.$$

$$5. \int e^{3x}\cos 2x dx = \left[\begin{array}{c|c} u = e^{3x} & du = 3e^{3x}dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right] = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 3\int e^{3x}\sin 2x dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x dx = \left[\begin{array}{c|c} u = e^{3x} & du = 3e^{3x}dx \\ dv = \sin 2x dx & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x dx \right).$$

Отже, $I = \int e^{3x}\cos 2x dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}I$. Розв'язавши це рівняння відносно I (перенісши в ліву частину $\frac{9}{4}I$ і розділивши на $\frac{13}{4}$), дістанемо:

$$I = \int e^{3x}\cos 2x dx = \frac{4}{13}e^{3x}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x\right) + C = \frac{1}{13}e^{3x}(2\sin 2x + 3\cos 2x) + C$$

1.6 Заміна змінної інтегрування

Це самий важливий метод інтегрування функції, бо багато функцій, а то і цілі класи функцій інтегруються саме цим методом. Викладемо його суть.

Нехай треба знайти $\int f(x)dx$, який не є табличним, не зводиться до табличного методом підведення деякої функції під знак диференціала і не знаходиться методом інтегрування частинами.

Часто заміна змінної інтегрування x за формулою $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – деяка диференційовна функція, враховуючи те, що $dx = \varphi'(t)dt$, може привести наш інтеграл до $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, який є простішим, ніж даний інтеграл. При яких умовах ці інтеграли рівні між собою? Відповідь на це запитання дає така теорема.

Теорема. Якщо існує $\int f(x)dx$, а функція $x = \varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ і має обернену функцію, то справедлива рівність

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1.7)$$

Доведення. За умовами теореми інтеграл, що стоїть в правій частині рівності, існуватиме. Щоб переконатись в справедливості цієї рівності, покажемо, що диференціал правої частини рівності дорівнює підінтегральному виразу $f(x)dx$. Дійсно, за властивістю невизначеного інтеграла маємо $d(\int(\varphi(t))\varphi'(t)dt) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = f(x)dx$, бо $\varphi(t) = x$, а $\varphi'(t)dt = dx$. Отже, справедливість рівності (1.7) доведена.

Зауваження. Часто на практиці більш зручною є підстановка $g(x) = t$, а не $x = \varphi(t)$.

***Приклад* 1.** Знайти інтеграл $\int\sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Розв'язування. Зробимо заміну за формулою $x = a\,sint$, $dx = a\,cost\,dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sin^2t} = a\sqrt{1 - sin^2t} = acost$ і $t = arcsin\frac{x}{a}$. Тоді

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \int acost \cdot acostdt = a^2\int cos^2tdt = \frac{1}{2}a^2\int(1 + cos\,2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\int dt + \int cos2tdt\right) = \frac{1}{2}a^2\left(t + \frac{1}{2}sin2t\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + sintcost) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + \left(arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + C = \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a} +$$

$$+ \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

***Приклад* 2.** Знайти $\int\frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

Розв'язування:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}} = \left[\frac{1}{x} = t,\ x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{1}{x^2}dt\right] = -\int\frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}} = -\int\frac{dx}{\sqrt{t^2 - 1}} =$$

$$= -ln\left|t + \sqrt{t^2 - 1}\right| + C = -ln\left|\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right| + C = -ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right|.$$

***Приклад* 3.** Знайти $\int\frac{xdx}{\sqrt{x + 1}}$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x + 1}} = \left[\begin{array}{l}\sqrt{x + 1} = t,\quad x = t^2 - 1\\ dx = 2tdt\end{array}\right] = 2\int\frac{t^2 - 1}{t}tdt = 2\int(t^2 - 1)dt =$$

$$= 2\left(\int t^2dt - \int dt\right) = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x + 1)^3} - 2\sqrt{x + 1} + C.$$

***Приклад* 4.** Знайти $\int tg^3xdx$.

$$\int tg^3xdx = \left[tgx = t,\ x = arctgt,\ dx = \frac{1}{1 + t^2}dt\right] = \int t^3\frac{dt}{1 + t^2} = \int\frac{t^3}{t^2 + 1}dt.$$

Виділимо цілу і дробову частини, поділивши чисельник на знаменник.

Тоді $\int\frac{t^3}{t^2 + 1}dt =$

$$= \int\left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) = \int t dt - \int\frac{t dt}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}ln(t^2+1) + C =$$

$$= \frac{1}{2}tg^2x - \frac{1}{2}ln(tg^2x+1) + C = \frac{1}{2}tg^2x - \frac{1}{2}ln\frac{1}{cos^2 x} + C = \frac{1}{2}tg^2x + ln|cos\, x| +$$

$+ C.$

1.7 Інтегрування раціональних функцій

Перейдемо до вивчення методів інтегрування класів функцій, серед яких найважливішим є клас раціональних функцій.

Означення. *Цілим многочленом* або *поліномом* n-го степення називається функція $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, де a_0, a_1, ..., a_n – задані числа, що називаються *коефіцієнтами* многочлена.

Означення. Відношення двох цілих многочленів називається *дробово–раціональною* або *раціональною функцією* або *раціональним дробом.*

Позначають раціональну функцію символом $R(x)$.

Отже,
$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \tag{1.8}$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – задані многочлени n – го і m – го степенів.

Розрізняють два випадки раціональних дробів: правильні та неправильні. Якщо $m < n$, тобто степінь многочлена, що стоїть в чисельнику, менший степеня многочлена, що стоїть в знаменнику, то раціональний дріб називється *правильним,* в противному випадку, тобто при $m \geq n$, раціональний дріб називається *неправильним.*

Справедлива така теорема.

Теорема. Всякий *неправильний* раціональний дріб можна подати у вигляді *суми* деякого *цілого многочлена і правильного* раціонального дробу.

Зауважимо, що *цілою частиною* цієї суми є *частка* від ділення многочлена $Q_m(x)$, що стоїть в чисельнику, на многочлен $P_n(x)$, що стоїть в знаменнику, якщо скористуватись дією ділення многочленів за відомим правилом кута, чисельником правильного дробу є остача від ділення, а знаменником – $P_n(x)$.

Приклад. Віділити цілу частину в неправильному дробі $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2}$.

Розв'язування. Поділивши упорядкований многочлен $x^4 + x^2 + 1$ на упорядкований многочлен $x^3 + x^2$ за правилом кута, дістанемо, що $\dfrac{x^4+x+1}{x^3+x^2} = = x - 1 + \dfrac{2x^2+1}{x^3+x^2}$ (переконайтесь в правильності цієї рівності).

1.7.1 Найпростіші дроби та їх інтегрування

Означення. *Найпростішими* раціональними дробами називаються дроби таких чотирьох типів:

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \tag{1.9}$$

де k– натуральне число, a, A, B, p, q – дійсні числа, причому дискримінант $D=p^2-4q$ від'ємний.

Ці дроби лежать в основі інтегрування правильних дробів.

Перейдемо тепер до їх інтегрування.

1. $\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{dx}{x-a} = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C$.

2. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int(x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C =$

$= \frac{A}{(1-k)\cdot(x-a)^{k-1}}+C$.

3. $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$. Тут можливі два випадки :

а) $Ax+B=2x+p$, тобто в чисельнику дробу стоїть похідна його знаменника $Ax+B=(2x+px+q)'$, тоді $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} =$

$= \ln(x^2+px+q)+C$, де $x^2+px+q>0$.

б) $Ax+B\neq(x^2+px+q)'$. Спочатку виділимо в квадратному тричлені повний квадрат: $x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 +$

$+\frac{4q-p^2}{4}$. Оскільки $D=p^2-4q<0$, то число $\frac{4q-p^2}{4}=a^2$ (для скорочення записів), тоді $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$. Зробимо заміну

змінної інтегрування за формулою $x+\frac{p}{2}=t$, звідки $x=t-\frac{p}{2}$ і $dx=dt$,

тоді матимемо:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{Ax+b}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx = \int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt = \int\frac{At+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{t^2+a^2}dt =$$

$$=\int\left(\frac{At}{t^2+a^2}+\frac{B-\frac{Ap}{2}}{t^2+a^2}\right)dt=A\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}dt+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}=\frac{A}{2}ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot arctg\frac{t}{a}+$$

$$+C=\frac{A}{2}ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

Отже, $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}ln(x^2+px+q)+\frac{1}{a}(B-\frac{Ap}{2})\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C$,

де $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{2}}$.

Зауваження. Правильний дріб 4-го типу аналогічним способом зводиться до наступного $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\kappa}dx=A\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^\kappa}+(B-\frac{Ap}{2})\cdot\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^\kappa}$, перший із цих інтегралів знаходиться методом підведення під знак диференціала виразу t^2+a^2, а другий – підстановкою $t = a\ tgz$.

Приклад. Знайти $\int\frac{4x-5}{x^2-2x+10}dx$.

Розв'язування. Виділимо повний квадрат в квадратному тричлені, дістанемо, $x^2-2x+10=(x-1)^2+9$. Зробимо заміну змінної за формулою $x-1=t$, звідки $x=t+1$ і $dx=dt$. Тоді

$$\int\frac{4x-5}{x^2-2x+10}dx=\int\frac{4(t+1)-5}{t^2+9}dt=\int\frac{4t-1}{t^2+9}dt=\int(\frac{4t}{t^2+9}-\frac{1}{t^2+9})dt=2\int\frac{2tdt}{t^2+9}-$$

$$-\int\frac{dt}{t^2+9}=2\int\frac{d(t^2+9)}{t^2+9}-\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}=2ln(t^2+9)-\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=2ln(x^2-2x+10)-\frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3}+C.$$

1.7.2 Деякі відомості з вищої алгебри

Розглянемо цілий многочлен n-го степеня $P_n(x)$ в загальному вигляді. *Коренем* многочлена називається таке значення аргументу x, при якому многочлен дорівнює нулю. Отже, якщо $x = x_0$– корінь многочлена $P_n(x)$, то це означає, що $P_n(x_0)=0$.

Справедлива така важлива теорема.

Теорема (*теорема Безу*). При діленні цілого многочлена $P_n(x)$ на різницю $x-a$ *остача* дорівнює значенню цього многочлена при $x=a$.

Доведення. При діленні многочлена $P_n(x)$ на різницю $x-a$ часткою буде деякий многочлен $S(x)$ $(n-1)$– го степеня, а остачею буде деяке число r. Тоді можна записати, що $P_n(x)=(x-a)S(x)+r$. Ця рівність виконується при всіх $x\neq a$. Перейдемо в ній до границі при $x\to a$, дістанемо $\lim\limits_{x\to a} P_n(x)=\lim\limits_{x\to a}(x-a)S(x)+r$ або $\lim\limits_{x\to a} P_n(x)=r$, бо $x-a\to 0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to a} P_n(x)=P_n(a)$ за неперервністю многочлена, то матемимо, що $P_n(a)=r$, що і треба було довести.

Наслідок. Якщо x_0 є корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(x_0)=0$, то многочлен $P_n(x)$ *без остачі* ділиться на різницю $x-x_0$, тобто справедлива рівність $P_n(x)=(x-x_0)S(x)$, де $S(x)$ – многочлен, степінь якого на одиницю менший. Сформулюємо ще так звану *основну теорему алгебри.*

***Теорема* 2.** Всякий цілий многочлен з дійсними коефіцієнтами має принаймні один корінь, дійсний чи комплексний.

Користуючись цією основною теоремою алгебри та наслідком теореми Безу неважко довести таку теорему.

***Теорема* 3.** Всякий многочлен n – го степеня можна розкласти на n лінійних множників вигляду $x-a$ і множника, що є коефіцієнтом при x^n, тобто

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n).$$

Доведення. Нехай функція $f(x)=P_n(x)$ є многочленом n –го степеня. Тоді на підставі основної теореми алгебри він має принаймні один корінь, який позначимо через x_1. За наслідком теореми Безу можна записати $f(x)=(x-x_1)f_1(x)$, де $f_1(x)$ – многочлен $(n-1)$ – го степеня. Він теж має принаймні один корінь x_2, тоді матимемо, що $f_1(x)=(x-x_2)f_2(x)$, де $f_2(x)$ – многочлен $(n-2)$-го степеня. Аналогічно $f_2(x)=(x-x_3)f_3(x)$, де $f_3(x)$ – многочлен $(n-3)$-го степеня. Продовжуючи цей процес виділення лінійних множників, прийдемо нарешті до рівності $f_{n-1}(x)=(x-x_n)f_n$, де f_n – многочлен нульового степеня, тобто деяке число. На основі отриманих рівностей можна записати, що

$P_n(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)f_n$. Очевидно, що $f_n=a_0$, бо тільки в цьому випадку в правій частині рівності коефіцієнтом при x^n буде a_0. Отже, $P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$. Теорему доведено.

Зауважимо, що з цього розкладання випливає, що числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є коренями даного многочлена $P_n(x)$.

Якщо в цій рівності серед лінійних множників є однакові, то, об'єднавши їх, дістанемо формулу

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}, \tag{1.9}$$

де $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. В цьому випадку корінь x_1 називається коренем кратності k_1, корінь x_2 – коренем кратності k_2 і т. д.

Як наслідок з теореми 3 випливає така теорема.

***Теорема* 4.** Всякий цілий многочлен n-го степеня має рівно n коренів, дійсних чи комплексних.

Зауважимо, що якщо многочлен $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $a+bi$, то він має і комплексно-спряжений корінь $a-bi$, де i уявна одиниця. Якщо об'єднати два лінійних множники, що відповідають парі комплексно-спряжених коренів, то їх добуток дорівнює квадратному тричлену з дійсними коефіцієнтами (перевірте).

Якщо об'єднати лінійні множники, що відповідають однаковим дійсним та комплексним кореням, то розкладання цілого многочлена $P_n(x)$ матиме такий вигляд: $P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot$

$$\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \tag{1.10}$$

де $k_1+k_2+\ldots+k_r+2(l_1+l_2+\ldots+l_s)=n.$

1.7.3 Інтегрування правильних раціональних функцій

В основі інтегрування правильних раціональних дробів лежить теорема вищої алгебри про розкладання правильного дробу на суму найпростіших дробів. Припустимо, що раціональна функція $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ – правильна раціональна функція і многочлен $P_n(x)$, що стоїть в знаменнику, розкладений на лінійні і квадратичні множники, тоді справедлива така теорема.

Теорема (про розкладання правильних раціональних дробів). Всяку *правильну* раціональну функцію $R(x)$ *єдиним* способом можна розкласти на *скінченну суму* найпростіших дробів, при цьому:

а) кожному множнику знаменника вигляду $(x-a)^k$ відповідає група, що складається рівно із k доданків $\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$,

де $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – деякі числа;

б) кожному множнику знаменника вигляду $(x^2+px+q)^m$ відповідає група m доданків вигляду

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{A_mx+B_m}{(x^2+px+q)^m},$$

де A_i і B_i – деякі числа ($i = 1,2,\dots,m$).

Коефіцієнти цього розкладання знаходяться за *методом невизначених коефіцієнтів*, суть якого викладена нижче.

1. Розклавши знаменник правильного дробу на лінійні та квадратичні множники, за сформульованою теоремою даний раціональний дріб розкладають на суму найпростіших дробів з буквеними коефіцієнтами, кількість яких збігається із степенем многочлена, що стоїть в знаменнику.

2. Праву частину отриманої рівності зводять до найменшого спільного знаменника, яким буде знаменник $P_n(x)$ даного дробу.

3. Оскільки спільні знаменники дробів в обох частинах тотожності рівні між собою, то зведений чисельник правої частини з буквеними коефіцієнтами дорівнює тотожно чисельнику даного дробу, яким є заданий многочлен $Q_m(x)$.

4. Тотожність між многочленами можлива тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях змінної в правій і лівій частинах тотожності. Тоді відносно буквених коефіцієнтів складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, число яких збігається із кількістю буквених коефіцієнтів. Складена система має єдиний розв'язок, що випливає із сформульованої теореми про розкладання раціонального дробу.

Зауваження. Для знаходження буквених коефіцієнтів зручно використовувати *метод частинних значень,* коли в отриману тотожність підставляти конкретні значення змінної, особливо зручно підставляти значення змінної, що дорівнюють значенням дійсних коренів знаменника даного дробу, якщо такі є. На практиці комбінують метод частинних значень та метод невизначених коефіцієнтів. Приведемо приклади.

***Приклад* 1.** Знайти $\int \frac{2x+3}{x^3-x}dx.$

Розв'язування. Підінтегральна функція – правильний дріб, розкладемо його на суму найпростіших дробів, розклавши знаменник дробу на лінійні множники:

$$\frac{2x+3}{x^3-x} = \frac{2x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1};$$

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)},$$

звідки $A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1) \equiv 2x+3$. Застосуємо метод частинних значень, підставивши сюди значення коренів знаменника $x=0$, $x=1$ і $x=-1$. При $x = 0$ маємо: $-A=3$, $A=-3$; при $x=1$ маємо: $2B=5$, $B=\frac{5}{2}$; при $x=-1$ маємо: $2C=1$, $C=\frac{1}{2}$.

Тоді:

$$\int\frac{2x+3}{x^3-x}dx=\int\left(-\frac{3}{x}+\frac{5}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}\right)dx=-3\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=$$
$$=-3\ln|x|+\frac{5}{2}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{x+1}=-3\ln|x|+\frac{5}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

Приклад 2. Знайти $\int\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx.$

Розв'язування. Підінтегральна функція - правильний дріб, коренями знаменника якого є числа $x=1$ – двократний корінь і $x_2=-2$ – простий корінь. Розкладемо підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2};$$

$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}.$ Звідси випливає $A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2\equiv x+1.$ З цієї тотожності при $x=1$ маємо $3B=2, B=\frac{2}{3}$, а при $x=-2$ випливає $9C=-1$, тоді $C=-\frac{1}{9}$. Для визначення коефіцієнта A скористаємось методом невизначених коефіцієнтів; прирівнявши коефіцієнти при x^2 лівої і правої частин,будемо мати: $A+C=0$, тоді $A=-C$. Отже, $A=\frac{1}{9}$.

Тоді:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{9(x-1)}+\frac{2}{3(x-1)^2}-\frac{1}{9(x+2)},\quad \int\frac{(x+1)dx}{(x-1)^2(x+2)}=$$
$$=\int\left(\frac{1}{9(x-1)}+\frac{2}{3(x-1)^2}-\frac{1}{9(x+2)}\right)dx=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+2}=$$
$$=\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{2}{3(x-1)}-\frac{1}{9}\ln|x+2|+C.$$

Приклад 3. Знайти $\int\frac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2}dx.$

Розв'язування. Підінтегральна функція – неправильний дріб. Виділивши цілу частину і скориставшись властивістю лінійності, матимемо

$$\int\frac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2}dx=\int\left(x-1+\frac{2x^2+1}{x^3+x^2}\right)dx=\int xdx-\int dx+\int\frac{2x^2+1}{x^3+x^2}dx=\frac{x^2}{2}-x+$$

$+\int\frac{2x^2+1}{x^3+x^2}dx$. Розкладемо останній правильний дріб на суму найпростіших дробів: $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2}=\frac{2x^2+1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$; $\frac{2x^2+1}{x^2(x+1)}=$

$=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$, звідси маємо: $Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2\equiv 2x^2+1$.

Застосувавши метод частинних значень, при $x=0$ матимемо $B=1$, а при $x=-1$ випливає, що C=3. За методом невизначених коефіцієнтів, прирівнявши коефіцієнти при x^2 в обох частинах рівності, матимемо $A+C=2$, звідси $A=2-C\Rightarrow A=-1$. Тоді

$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+3\int\frac{dx}{x+1}=-ln|x|-\frac{1}{x}+$

$+3ln|x+1|+C$. Отже, $\int\frac{x^4+x^2+1}{x^3+x^2}dx=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{x}-ln|x|+3ln|x+1|+C$.

***Приклад* 4.** Знайти $\int\frac{x^2-4x+7}{(x-2)^3}dx$.

Розв'язування.

$$\int\frac{x^2-4x+7}{(x-2)^3}dx=\int\frac{(x^2-4x+4)+3}{(x-2)^3}dx=\int\frac{(x-2)^2+3}{(x-2)^3}dx=$$

$$=\int\left(\frac{(x-2)^2}{(x-2)^3}+\frac{3}{(x-2)^3}\right)dx=\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{(x-2)^3}=\int\frac{d(x-2)}{x-2}+3\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^3}=$$

$$=ln|x-2|-\frac{3}{2(x-2)^2}+C.$$

***Приклад* 5.** Знайти $\int\frac{x^2+2x-4}{x^3+4x}dx$.

Розв'язування.. Розкладемо правильний раціональний дріб на найпростіші дроби $\frac{x^2+2x-4}{x^3+4x}=\frac{x^2+2x-4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$;

$A(x^2+4)+(Bx+C)x=x^2+2x-4$; при $x=0\Rightarrow 4A=-4$; $A=-1$.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=1, \quad \Rightarrow B=1-A=1+1=2; B=2; \\ x & C=2, \quad \Rightarrow C=2; \\ x^0 & 4A=-4 \quad \Rightarrow A=-1; \end{array}$$

Тоді

$$\int\frac{x^2+2x-4}{x^3+4x}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2x+2}{x^2+4}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}+2\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=ln|x|+ln\left(x^2+4\right)+arctg\frac{x}{2}+C.$$

1.8 Інтегрування тригонометричних виразів

Будемо розглядати інтеграли виразів, що раціонально залежить від тригонометричних функцій, зокрема інтеграли вигляду $\int R(sin\,x,\,cos\,x)dx$, де R – символ раціональної функції. Справедлива така теорема .

Теорема. Інтеграл $\int R(sinx,\,cosx)dx$ підстановкою $t=tg(x/2)$ зводиться до інтеграла раціональної функції відносно t.

Доведення. Виразимо спочатку тригонометричні функції $sin\,x$ і $cos\,x$ через $tg(x/2)$, користуючись формулами подвійного аргументу:

$$sinx=2sin(x/2)cos(x/2)=\left((2sin(x/2)cos(x/2)/cos^2(x/2)\right)/(1/cos^2(x/2))=$$

$$=\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$ Аналогічним прийомом доводиться, що $cosx=\dfrac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$.

Тоді, якщо $tg(x/2)=t$, то $sinx=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $cosx=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Виразимо через t ще диференціал dx. Із рівності $tg(x/2)=t$ маємо, що $x/2=arctgt$, $x=2arctgt$, звідки $dx=2\dfrac{1}{1+t^2}dt$. Тоді матимемо, що $\int R(sinx,\,cosx)dx=$

$=\int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\dfrac{2}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt$, де через $R_1(t)$ позначена підінтегральна функція, яка є раціональною відносно t. Теорему доведено.

Зауваження. Підстановка $t=tg(x/2)$ називається *універсальною підстановкою.*

Приклад **1.** Знайти $\int\dfrac{dx}{2+cosx}$.

Розв'язування. Зробимо заміну $tg(x/2)=t$, тоді $cosx=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$x=2arctgt$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$, тоді матимемо:

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}=2\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt3}arctg\frac{t}{\sqrt3}+C=\frac{2}{\sqrt3}arctg(\frac{1}{\sqrt3}tg\frac{x}{2})+C.$$

Універсальну підстановку не завжди вигідно використовувати. Можливі частинні випадки цього загального випадку.

1. Якщо функція $R(sinx,\ cos\ x)$ непарна відносно $sinx$, тобто $R(-sinx,cosx)=$ $=-R(sin\ x,\ cos\ x)$, то зручно використовувати підстановку $cosx=t$.

2. Якщо функція $R(sin\ x,\ cos\ x)$ непарна відносно $cos\ x$, тобто $R(sin\ x,\ -cos\ x)=-R(sin\ x,\ cos\ x)$, то зручно використовувати підстановку $sinx=t$.

3. Якщо функція $R(sin\ x,\ cos\ x)$ парна відносно $sin\ x$ і $cos\ x$ одночасно, тобто $R(sin\ x,\ -cos\ x)=R(sin\ x,\ cos\ x)$, то використовують підстановку $tg\ x=t$.

Покажемо це на прикладах.

***Приклад* 2.** $\int\frac{sin^3x}{1+cosx}dx.$

Розв'язування. $\int\frac{sin^3x}{1+cosx}dx=\int\frac{sin^2x\cdot sinx}{1+cosx}dx=-\int\frac{1-cos^2x}{1+cosx}d(cosx)=$

$$=\int(1-cosx)dcosx=-\int dcosx+\int cosxd(cosx)=-cosx+\frac{1}{2}cos^2x+C.$$

По суті, оскільки підінтегральна функція непарна відносно $sin\ x$, то використана підстановка $cos\ x=t$.

***Приклад* 3.** Знайти $\int\frac{dx}{3+2cos^2x+sin^2x}.$

Розв'язування. Підінтегральна функція парна відносно $sin\ x$ і $cos\ x$, тоді застосуємо підстановку $tg\ x=t$. Спочатку в підінтегральній функції перейдемо до $cos\ x$

$\int\frac{dx}{3+2cos^2x+sin^2x}=\int\frac{dx}{3+2cos^2x+1-cos^2x}=\int\frac{dx}{4+cos^2x}$. Зробимо заміну $tg\ x=t$, дістанемо $cos^2x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2}$, $x=arctgt$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, тоді

$$\int\frac{dx}{4+cos^2x}=\int\frac{dt}{(1+t^2)(4+\frac{1}{1+t^2})}=\int\frac{dt}{4+4t^2+1}=\int\frac{dt}{4t^2+5}=\int\frac{d(2t)}{(2t)^2+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{2t}{\sqrt5}+C=\frac{1}{2\sqrt5}arctg(\frac{2}{\sqrt5}tgx)+C.$$

Зупинимося ще на таких важливих інтегралах вигляду $\int R(sin^2x)dx$ і $\int R(cos^2x)dx$. Ці функції інколи інтегруються за допомогою відомих формул пониження степеня

$$sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - cos2\alpha), \quad cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + cos2\alpha).$$

Приклад 4. *Знайти* $\int sin^4 xdx$

Розв'язування..

$$\int sin^4 xdx = \int (sin^2 x)^2 dx = \int (\frac{1}{2}(1 - cos 2x))^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2cos 2x + cos^2 x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}(\int dx - 2\int cos2xdx + \frac{1}{2}\int (1 + cos4x)dx = \frac{1}{4}(x - sin2x + \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int cos4xdx) =$$

$$= \frac{1}{4}(x - sin2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}sin4x) + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin4x + C.$$

1.9 Інтегрування деяких ірраціональностей

Більшість із них відповідною підстановкою зводяться до інтегралів раціональної функції відносно нової змінної інтегрування. Вкажемо на найважливіші з них.

1. Інтеграли $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}})dx$, де R· символ раціональної функції, n_1 і n_2—натуральні числа, m_1 і m_2– цілі числа, підстановкою $\sqrt[k]{x} = t$, де k —найменше спільне кратне чисел n_1 і n_2, зводяться до інтеграла раціональної функції змінної t.

Дійсно, із рівності $\sqrt[k]{x} = t$ випливає $x = t^k, dx = k \cdot t^{k-1}dt$,

$\sqrt[n_1]{x^{m_1}} = x^{m_1/n_2} = t^{km_1/n_2}$, $\sqrt[n_2]{x^{m_2}} = x^{m_2/n_2} = t^{km_2/n_2}$ причому показники степенів є цілі числа.

Тоді $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}})dx = \int R(t^k, t^{km_1/n_2}, t^{km_2/n_2})k \cdot t^{k-1}dt = \int \widetilde{R}(t)dt,$

де через $R(t)$- позначено підінтегральну функцію, яка є раціональною відносно t.

2. Інтеграли $\int R(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{(ax+b)^{m_2}})dx$ знаходяться за допомогою підстановки $\sqrt[k]{ax+b} = t$, де k —найменше спільне кратне чисел n_1 і n_2.

3. Інтеграли $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ знаходяться за допомогою підстановки

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

4. Інтеграли вигляду $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$, $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ знаходяться за допомогою тригонометричних підстановок, які дають можливість звільнитись від квадратичної ірраціональності. Вибір відповідної підстановки визначається із врахуванням відповідних формул тригонометрії $sin^2x+cos^2x=1$, $1+tg^2x=1/cos^2x$ та формули $ch^2x-sh^2x=1$, а саме :

а) інтеграл $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ знаходиться підстановкою $x=asint$; $x=a\cos t$,

б) інтеграл $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$ знаходиться підстановкою $x=atgt$,

в) інтеграл $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ знаходиться підстановкою $x=\dfrac{a}{sint}$ або $x=acht$.

Зауваження. Інтеграли $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ зводяться до одного з цих трьох інтегралів, якщо виділити повний квадрат в квадратному тричлені і основу його позначити через нову змінну інтегрування.

Приклад 1. Знайти $\int\dfrac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$

Розв'язування. Оскільки $\sqrt{x}=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2$, то ввівши заміну $\sqrt[4]{x}=t$, дістанемо $x=t^4$, $dx{=}4t^3dt$ і $\sqrt{x}=t^2$. Тоді матимемо:

$$\int\frac{\sqrt[4]{x}dx}{1+\sqrt{x}}=4\int\frac{t^4dt}{1+t^2}=4\int\frac{(t^4-1)+1}{t^2+1}dt=4\int\left(\frac{t^4-1}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=4\int\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=4\left(\int t^2dt-\int dt+\int\frac{dt}{t_2+1}\right)==4\left(\frac{1}{3}t^3-t+arctgt\right)+C=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[4]{x}+4arctg\sqrt[4]{x}+C.$$

Приклад 2. Знайти $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Розв'язування. Звівши обидва корені до кореня 6-го степеня, введемо заміну $\sqrt[6]{x-1}=t$, звідки $x-1=t^6$, $x=t^6+1$, $dx=6t^5\,dt$. Враховуючи те, що $\sqrt{x-1}=t^3$, $\sqrt[3]{(x-1)^2}=t^4$, дістанемо $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}=6\int\dfrac{t^5dt}{t^3+t^4}=$

$$=6\int\frac{t^5dt}{t^3(1+t)}=6\int\frac{t^2}{t+1}dt=6\int\frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt=6\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^2}{2}-t+ln|t+1|\right)+C=3\sqrt[3]{x-1}-6\sqrt[6]{x-1}+6ln\left|\sqrt{x-1}+1\right|+C$$

Приклад 3. Знайти $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язування. Виконавши заміну $x=2sin\ t$, будемо мати, що $dx=2cost\ dt$, $t=arcsin(x/2)$ і $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4sin^2t}=2\sqrt{1-sin^2t}=2cost$. Тоді $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=$

$$=\int\frac{4sin^2t\cdot 2costdt}{2cost}=4\int sin^2tdt=2\int(1-cos2t)dt=2t-sin2t+C=$$

$$=2t-2sintcost+C=2arcsin(x/2)-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C.$$

Приклад 4. Знайти $\int\sqrt{3+2x-x^2}dx.$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат в квадратному тричлені $\int\sqrt{3+2x-x^2}dx=\int\sqrt{-(x^2-2x-3)}dx=\int\sqrt{-((x^2-2x+1)-4)}dx=$ $=\int\sqrt{4-(x-1)^2}dx$. Зробимо заміну $x-1=2sint \Rightarrow x=2sint+1$; $dx=2costdt$; $\sqrt{4-(x-1)^2}dx=2cost$. Тоді матимемо: $\int\sqrt{3+2x-x^2}dx=4\int cos^2t\ dt=$

$$=2\int(1+cos2t)dt=2t+sin2t+C=2t+2sintcost+C=2\arcsin\frac{x-1}{2}+$$

$$+(x-1)\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}+C=2\arcsin\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}+C.$$

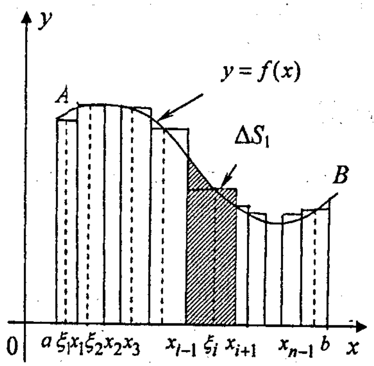
2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1 Приклади задач, що приводять до визначеного інтеграла

***Задача* 1** (задача про площу *криволінійної трапеції*). Знайти площу фігури, обмеженої зверху неперервною лінією, що є графіком функції $y=f(x)$, причому $f(x)\geq 0$, двома прямими $x=a$ і $x=b$ та відрізком $[a,b]$ числової осі Ox.

***Задача* 2** (задача *про роботу змінної сили*). Знайти роботу, що виконується *змінною* силою $\vec{F}$, яка має *постійний* напрям, що збігається з віссю Ox, а точка прикладання переміщується з положення $x=a$ в положення $x=b$, якщо величина сили змінюється за формулою $F=f(x)$, де $f(x)$ – задана функція, визначена на $[a,b]$.

Покажемо спосіб розв'язування першої задачі. Зробимо схематичний рисунок фігури.



Фігура $aABb$ називається *криволінійною трапецією*. Площу цієї фігури не можна знайти засобами елементарної геометрії, бо в склад границі цієї фігури входить лінія AB загального вигляду, що є графіком заданої неперервної функції. Зробимо так:

1. Розіб'ємо основу цієї фігури $[a,b]$ *довільним* способом на n частин точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, причому $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$, тобто в зростаючому порядку. Через x_0 і x_n позначимо кінці відрізка, тобто $x_0=a$, $x_n=b$. Отже, даний відрізок розбито на n малих відрізків $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$. *Довжини* цих відрізків позначимо відповідно через $\Delta x_1, \Delta x_2,\ldots, \Delta x_n$, тобто $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, де $i = 1, 2,\ldots, n$. Далі через точки поділу x_i проведемо прямі паралельно осі Oy до перетину з кривою AB. Тоді криволінійна трапеція буде розбита на n малих елементарних трапецій, що не накладаються одна на одну. Тоді площа S криволінійної трапеції дорів-нюватиме сумі площ цих малих трапецій, тобто $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 +\ldots+ \Delta S_n$. Отже, $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i$, де через ΔS_i позначено площу i-тої малої трапеції (ΔS_i), де $i = 1, 2,\ldots, n$.

2. Виділимо i-ту малу трапецію і будемо визначати її площу *наближено*, замінивши цю малу трапецію прямокутником з тією ж основою $[x_{i-1},x_i]$ і висотою, що дорівнює значенню ординати кривої AB в

якійсь точці відрізка $[x_{i-1}, x_i]$. Для цього на кожному з відрізків розбиття $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо *довільно* точку $x = \xi_i$, тобто $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, де $i = 1,2,...,n$. Проведемо в кожній точці ξ_i паралельно осі Oy прямі до перетину з кривою AB і визначимо ординати цих точок перетину, тобто $y_i = f(\xi_i)$, де $i = 1,2,...,n$.

3. Кожну елементарну трапецію замінимо прямокутником, висота якого дорівнює саме цій ординаті, тобто $h_i = f(\xi_i)$, і визначимо площу кожного з цих прямокутників, яка дорівнюватиме $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, де $i = 1,2,...,n$. Отже, площі елементарних трапецій наближено дорівнюватимуть цим величинам, тобто $\Delta S_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, де $i = 1, 2,..., n$.

4. Об'єднавши всі ці прямокутники, дістанемо так звану *ступінчасту фігуру*, яка покриває дану криволінійну трапецію. Площа цієї ступінчастої фігури дорівнюватиме сумі площ всіх цих прямокутників, тобто $S_{ст.ф.} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$ або

$$S_{ст.ф.} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (*)$$

Це число визначає наближене значення площі криволінійної трапеції, тобто $S_{ст.ф.} \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

5. Точне значення площі криволінійної трапеції дістанемо, якщо згладити сходинки фігури, що можна зробити за умови, коли всі довжини проміжків $[x_{i-1}, x_i]$ прямують до нуля, а самі ці проміжки стягуватимуться в точки. За означенням будемо вважати, що площа криволінійної трапеції дорівнює границі суми $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ за умови, що всі $\Delta x_i \to 0$, тобто

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (2.1)$$

2.2. Поняття визначеного інтеграла

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену і неперервну на відрізку $[a,b]$ і для неї утворимо суми (*), виконавши вказані кроки.

1. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ *довільним* способом на n малих частин точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, де $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$, ввівши позначення $x_0 = a$ і $x_n = b$. Довжини цих малих відрізків $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,..., $[x_{n-1}, x_n]$ позначимо через $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, тобто $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, де $i = 1,2,...,n$.

2. В кожному з цих малих відрізків розбиття $[x_{i-1}, x_i]$, де $i = 1,2,...,n$, виберемо *довільно* точку ξ_i, тобто $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, і визначимо значення функції $f(x)$ в цих точках, тобто знайдемо $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$,..., $f(\xi_n)$.

3. Утворимо добутки $f(\xi_1)\Delta x_1$, $f(\xi_2)\Delta x_2$,..., $f(\xi_n)\Delta x_n$.

4. Складемо суму цих добутків $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$ або в скороченому записі

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (2.2)$$

Цю суму називають *інтегральною сумою* $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

В сумі (2.2) перейдемо до границі за умови, що $\Delta x_i \to 0$, а це викликає те, що $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Означення. Якщо існує *скінченна границя* інтегральних сум за умови, що всі $\Delta x_i \to 0$, яка не залежить від *способу розбиття* відрізку $[a,b]$ на частини , *ні* від *вибору точок* ξ_i в кожній частині розбиття, то цю границю називають *визначеним інтегралом функції* $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ і позначають символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i , \qquad (2.3)$$

де λ – найбільша із довжин Δx_i , тобто $\lambda = \max \Delta x_i$.

Числа a і b називають *нижньою* і *верхньою межами інтегрування.*

Якщо існує ця границя, то функція $f(x)$ називається *інтегровною функцією* на *проміжку* $[a,b]$.

Виникає питання: А коли ж існує ця границя? Відповідь на нього дає така теорема.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ *неперервна* на проміжку або має на ньому *скінченне число точок розриву першого роду*, то на цьому проміжку функція *інтегровна* або визначений інтеграл існує.

Зауваження. Користуючись поняттям визначеного інтеграла, приведені дві задачі мають такі розв'язки:

$$S_{кр.тр.} = \int_a^b f(x)dx , \qquad (2.4)$$

де $f(x)$ – функція, графік якої обмежує криволінійну трапецію зверху, і

$A = \int\limits_a^b f(x)dx$, де $f(x) = |\vec{F}(x)|$.

Отже, *геометрично визначений* інтеграл чисельно дорівнює *площі криволінійної трапеції.*

2.3 Обчислення визначеного інтеграла

Оскільки визначений інтеграл – це границя, а границя – це число, то як обчислити його. Безпосередньо, користуючись означенням, це зробити в загальному неможливо. Справедлива теорема.

Теорема. Якщо неперервна функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ має первісну $F(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2.5}$$

Ця формула називається *основною формулою інтегрального числення* або *формулою Ньютона – Лейбніца* і встановлює зв'язок визначеного інтеграла із невизначеним інтегралом.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a,b]$, то її визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує, при цьому границя інтегральної суми не залежить ні від способу розбиття відрізку $[a,b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i на них. Нехай $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тобто $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a,b]$, при цьому $F(x)$ має неперервну похідну.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ довільним способом на n частин точками x_1, $x_2,\ldots,$ x_{n-1}, причому $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$, $x_0 = a$ і $x_n = b$. Застосуємо формулу Лагранжа для функції $F(x)$ на кожному із відрізків розбиття (умови теореми Лагранжа виконані, бо $F(x)$ не тільки диференційовна на них, а має ще неперервну похідну). Матимемо такі рівності (з врахуванням того, що $F'(x) = f(x)$):

$$F(x_1) - F(x_0) = F'(c_1)\cdot(x_1 - x_0) = f(c_1)\Delta x_1, \text{ де } x_0 < c_1 < x_1,$$
$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c_2)\cdot(x_2 - x_1) = f(c_2)\Delta x_2, \text{ де } x_1 < c_2 < x_2,$$
$$F(x_3) - F(x_2) = F'(c_3)\cdot(x_3 - x_2) = f(c_3)\Delta x_3, \text{ де } x_2 < c_3 < x_3,\ldots,$$
$$F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(c_n)\cdot(x_n - x_{n-1}) = f(c_n)\Delta x_n, \text{ де } x_{n-1} < c_n < x_n.$$

Складемо суму лівих і правих частин цих рівностей, враховуючи те, що в лівій частині після знищення відповідних пар дістанемо $F(x_n) - F(x_0)$, матимемо $F(x_n) - F(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)$ або $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$, бо $x_n = b$, $x_0 = a$. В лівій частині записаної рівності стоїть інтегральна сума функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, де замість точок ξ_i взято точки c_i, які визначаються формулою Лагранжа (c_i належить відрізкам розбиття). В правій частині рівності стоїть стала величина. Перейдемо в останній рівності до границі за умови, що всі $\Delta x_i \to 0$, матимемо $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = F(b)-F(a)$ або $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, оскільки ця границя не залежить від вибору точок на кожному відрізку розбиття, і за означенням є визначеним інтегралом функції $f(x)$. Теорему доведено.

Зауваження. Формулу Ньютона – Лейбніца записують символічно так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{2.6}$$

Приведемо приклади на обчислення визначеного інтеграла.

1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

2) $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1=2.$

2.4 Властивості визначеного інтеграла

Ці властивості сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. *Сталий множник* можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx.$

Дійсно, $\int\limits_a^b Cf(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} Cf(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{\lambda\to 0}(C\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i) =$

$=C\cdot\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = C\int\limits_a^b f(x)dx.$

Теорема 2. Визначений інтеграл суми інтегровних на відрізку $[a,b]$ функцій дорівнює сумі визначених інтегралів цих функцій, тобто

$$\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

Дійсно, за означенням

$$\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

З цих двох властивостей випливає наслідок.

Наслідок. Справедлива рівність

$$\int_a^b (C_1 f_1(x) C_2 f_2(x))dx = C_1 \int_a^b f_1(x)dx + C_2 \int_a^b f_2(x)dx, \tag{2.7}$$

де C_1 і C_2 – задані числа.

Ця властивість називається *властивістю лінійності* визначеного інтеграла.

Теорема 3. Для будь-якої точки $x=c$ має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{2.8}$$

за умови, що функція $f(x)$ інтегровна на найбільшому із цих трьох відрізків.

Цю властивість називають *властивістю адитивності* визначеного інтеграла.

Дійсно, нехай функція $f(x)$ має первісну $F(x)$ на найбільшому із цих двох відрізків. Тоді за формулою Ньютона – Лейбніца матимемо, що $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Знайдемо тепер праву частину цієї рівності $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$. Отже, обидві частини рівності однакові.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{2.10}$$

Отже, при зміні меж інтегрування змінюється лише знак у визначеного інтеграла. Це очевидно, бо всі Δx_i поміняють знак.

Теорема 5. Справедлива рівність

$$\int_a^b dx = b - a. \tag{2.11}$$

Дійсно, оскільки функція $f(x) \equiv 1$ при всіх $x \in [a,b]$, то всі значення $f(\xi_i) = 1$, тоді

$\int_a^b dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^n \Delta x_i = \lim\limits_{\lambda \to 0} (b-a) = b - a$, бо сума довжин Δx_i відрізків розбиття дорівнює довжині всього відрізка $[a,b]$, тобто числу $b-a$.

Теорема 6. Якщо інтегровна функція $f(x)$ при всіх значеннях $x \in [a,b]$ приймає невід'ємні значення, тобто $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Дійсно, нехай $f(x) \geq 0$ при всіх $x \in [a,b]$, то всі $f(\xi_i) \geq 0$. Оскільки $b>a$, то всі $\Delta x_i > 0$, тоді всі доданки $f(\xi_i)\Delta x_i$ інтегральної суми теж невід'ємні і принаймні один із них є додатним, тоді інтегральна сума $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > 0$, звідки випливає, що $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) > 0$, тобто $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Теорема 7. Якщо для інтегровних на відрізку $[a,b]$ функцій $f(x)$ і $g(x)$ в усіх його точках виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$. Довести самостійно.

В багатьох питаннях теорії і практики доводиться користуватися такими двома важливими теоремами.

Теорема 8 (теорема про оцінку визначеного інтеграла).

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, а m і M відповідно її найменше і найбільше значення, то справедливі нерівності

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{2.12}$$

Доведення. За визначенням найменшого і найбільшого значень функції для всіх $x \in [a,b]$ виконується подвійна нерівність $m \leq f(x) \leq M$.

Тоді за теоремою 7 і формулою (2.11) матимемо $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$,

$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, що треба було довести.

Теорема 9 (теорема про середнє). Якщо функція $f(x)$ *неперервна* на відрізку $[a,b]$, то існує принаймні одна точка $c \in [a,b]$ така, що виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Число $f(c)$ називається *середнім значенням функції* на відрізку $[a,b]$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона має первісну $F(x)$, де $F'(x) = f(x)$. Тоді за формулою Ньютона – Лейбніца маємо, що $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. За формулою Лагранжа $F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$, де $a < c < b$. (умови теореми Лагранжа виконані). Отже, $\int_a^b f(x)dx = F'(c)\cdot(b-a) = f(c)\cdot(b-a)$, де $a<c<b$. Теорему доведено.

2.5 Інтеграл із змінною верхньою межею

Нехай на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ є інтегровною, тобто $\int_a^b f(x)dx$ існує. Виберемо тепер *довільну* точку $x\in[a;b]$ і розглянемо відрізок $[a;x]$, тоді існує $\int_a^x f(t)dt$. Оскільки кожному значенню $x\in[a;b]$ відповідає певне значення інтеграла $\int_a^x f(t)dt$, то ця величина є функцією змінною x (за значенням функції). Отже, із змінною верхньою межею є функція цієї верхньої межі, тобто $\int_a^x f(t)dt = I(x)$.

Справедлива така теорема.

Теорема. Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по цій верхній межі дорівнює підінтегральній функції в її верхній межі, тобто

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x). \tag{2.13}$$

Дійсно, нехай $F(x)$ є деяка первісна інтегровної функції $f(x)$, то за формулою Ньютона – Лейбніца матимемо, що $I(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, звідки маємо що $I'(x) = (F(x)-F(a))' = F'(x) - 0 = F'(x) = f(x)$. Отже, $I'(x) = \left(\int_a^b f(t)dt\right)' = f(x)$, що треба було довести.

Приклад. Знайти похідну функцію $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$.

Розв'язування. Ця функція називається функцією Лапласа або інтегралом ймовірностей. Користуючись формулою (2.13), матимемо $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2.6 Метод заміни змінної інтегрування

Розглянемо питання, як метод підстановки використовується у визначеному інтегралі, в чому особливість цього методу. Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ *неперервна* на відрізку $[a,b]$, а функція $x=\varphi(t)$ задовольняє такі умови:

1) функція $\varphi(x)$ і її похідна $\varphi'(x)$ *неперервні* на деякому проміжку $[\alpha;\beta]$;
2) при зміні t від α до β всі її значення *однозначно* попадають на відрізок $[a,b]$, причому кожне значення x із відрізку $[a,b]$ є значенням функції $\varphi(t)$ лише для одного із значень t на проміжку $[\alpha;\beta]$;
3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2.14)$$

Доведення. Доведемо, що обидві частини рівні. З умов теореми випливає, що обидва ці інтеграли існують. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ для всіх $x\in[a;b]$. Тоді за формулою Ньютона – Лейбніца маємо $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. З другого боку функція $F(\varphi(t))$ буде первісною для функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на проміжку $[\alpha;\beta]$, бо $(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Тоді знов за формулою Ньютона–Лейбніца будемо мати, що

$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)$. Отож, значення лівої і правої частин рівняння збіглися.

Зауваження. Важливою *особливістю* метода підстановки є те, що не має необхідності повертатися до старої змінної інтегрування. Замість цього треба визначити *межі* інтегрування нової змінної.

Приклад. Знайти інтеграл $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$, де $a>0$.

Розв'язування. Використаємо підстановку $x=a\sin t$, звідки $dx=a\cos tdt$, при цьому підінтегральна функція $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sin t$. Знайдемо межі інтегрування нової змінної t: при $x=0\Rightarrow a\sin t=0$; $\sin t=0$, звідки $t=\pi n; n\in Z$; при $x=a\Rightarrow a\sin t=a$; $\sin t=1$; $t=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. При зміні t в межах від

$\alpha = 0$ до $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ функція $x = a\sin t$ один раз приймає значення, що належать проміжку $[0,a]$. Це і є межі інтегрування нової змінної t. Тоді за формулою (2.14) матимемо

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t\,dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi a^2}{4}$.

2.7 Метод інтегрування частинами

Вияснимо особливості цього методу для визначеного інтеграла. Має місце теорема.

Теорема. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають *неперервні* похідні на відрізку $[a,b]$, то справедлива рівність

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{2.15}$$

Доведення. Скористаємось тим, що
$d(uv) = u\,dv + v\,du = u \cdot v'\,dx + v \cdot u'\,dx$,

звідки $u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))'\,dx - v(x)\cdot u'(x)dx$. Проінтегруємо цю рівність на відрізку $[a,b]$, користуючись властивістю лінійності (всі інтеграли існують за вказаними умовами), будемо мати

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (u(x)v(x))'\,dx - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx.$$

Отже, маємо $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$, що треба було довести.

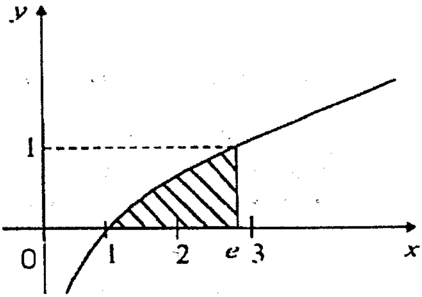
Зауваження. Хоч формула (2.15) має такий же вигляд, як і для невизначеного інтеграла, але є принципово простішою, бо це рівність між числами, а не функціями.

***Приклад* 1.** Обчислити $\int_1^e \ln x\,dx$.

Розв'язування. Приймемо $u=\ln x$, $dv=dx$, то $du=\frac{1}{x}dx$, $v=x$, тоді

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx = e\ln e - \int_1^e dx = e-(e-1)=1.$$

Зробимо схематичний рисунок.



Геометрично це означає, що площа криволінійної трапеції, що обмежена графіком функції $y=\ln x$, віссю Ox та прямою $x=e$, чисельно дорівнює одній умовній одиниці площі.

Приклад 2. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-3)\cos 3x dx.$

Розв'язування. Приймемо за u і dv відповідно $u=2x-3$, $dv=\cos 3x dx$, то $du=2dx$, $v=\int\cos 3x dx=\frac{1}{3}\int\cos 3x d(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x$, тоді $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-3)\cos 3x dx=$

$$=\frac{1}{3}(2x-3)\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x dx=\frac{1}{3}(\pi-3)\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{4}{9}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{3}(\pi-3)+$$

$$+\frac{4}{9}\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{4}{9}\cos 0=-\frac{1}{3}(\pi-3)+0-\frac{4}{9}=-\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{9}.$$

2.8 Невласні інтеграли

Поняття визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ вводиться за умови, що проміжок інтегрування скінченний, а функція на ньому обмежена. Узагальнимо це поняття на випадки, коли: а) проміжок інтегрування нескінченний, а функція на ньому неперервна або обмежена; б) проміжок інтегрування скінченний, а функція лише в одній із його точок має необмежений розрив, тобто в деякому околі однієї із його точок є нескінченно великою.

2.8.1 Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування

1. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a,+\infty]$ Введемо довільну точку $x=b$ на цьому проміжку і розглянемо відрізок $[a,b]$, на якому функція $f(x)$ неперервна, тоді існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Якщо верхню межу змінювати, то цей інтеграл буде функцією своєї верхньої межі b, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx = I(b)$.

Відрізок $[a,b]$ розтягнеться в проміжок $[a,\ +\infty)$ за умови, що $b\to+\infty$. Може статися, що за цієї умови функція $I(b)$ має скінченну границю.

Означення. Якщо існує скінченна границя визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ за умови, що $b\to+\infty$, то цю границю називають *невласним інтегралом* функції $f(x)$ на проміжку $[a,\ +\infty)$ і позначають символом $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. Отже,

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (2.16)$$

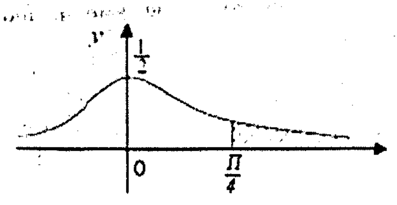
В цьому випадку говорять, що невласний інтеграл *існує* і називається *збіжним,* якщо ж $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b\to+\infty$ *не має* границі, то невласний інтеграл називається *розбіжним.*

Приведемо ряд прикладів. Обчислити або встановити розбіжність невласних інтегралів.

***Приклад* 1.** $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язування. За означенням $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \dfrac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(arctgx\Big|_1^b\right) =$

$= \lim\limits_{b\to+\alpha}(arctgb - arctg1) = \lim\limits_{b\to+\infty} arctgb - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$. Цей невласний інтеграл є збіжним.



Зробимо ще схематичний рисунок. Геометрично цей інтеграл означає, що площа безмежної заштрихованої фігури дорівнює $\frac{\pi}{4}$ умовних одиниць.

Приклад **2.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}$.

Розв'язування. За означенням $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^b\right)=$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$. Отже, цей невласний інтеграл розбіжний.

Приклад **3.** $\int\limits_0^{\infty}xe^{-4x^2}dx$.

Розв'язування. За означенням $\int\limits_0^{\infty}xe^{-4x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}xe^{-4x^2}=$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{8}\int\limits_0^b e^{-4x^2}d(-4x^2)\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{8}e^{-4x^2}\Big|_0^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{8}e^{-4b^2}+\frac{1}{8}\right)=$$

$=0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$.

Приклад **4.** Встановити, за яких умов невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$, де p – задане, буде збіжним, а за яких – розбіжним.

Розв'язування. За означенням $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b\right)=$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{b^{-p+1}}{1-p}-\frac{1}{-p+1}$. 1) Якщо $p>1$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}b^{-p+1}=0$, тому $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$, тобто невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ – збіжний. 2) Якщо $p\le 1$, то при $b\to+\infty$ функція b^{-p+1} є нескінченно великою величиною, тому вказана границя дорівнює нескінченності, а невласний інтеграл є розбіжним.

Отже, невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ при $p>1$ збіжний, а при $p\le 1$ розбіжний. Це важливий невласний інтеграл.

Зауваження **1.** Аналогічно визначається невласний інтеграл з безмежною нижньою межею інтегрування, а саме:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{2.17}$$

***Зауваження* 2.** Можна ввести невласний інтеграл для функції $f(x)$, визначеної і неперервної на всій числовій прямій, а саме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \tag{2.18}$$

де c – довільно вибране число, часто беруть $c = 0$.

Якщо один із цих двох невласних інтегралів правої частини рівності *розбіжний,* то вважається, що невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *розбіжний.* Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ називається збіжним, якщо *обидва* невласні інтеграли правої частини є *збіжні.*

2.8.2 Ознаки збіжності невласних інтегралів

Для розв'язування багатьох задач достатньо лише оцінити збіжність невласного інтеграла, тобто достатньо встановити збіжність або розбіжність невласного інтеграла, не обчислюючи сам невласний інтеграл. Встановимо достатні ознаки збіжності невласних інтегралів.

Справедливі такі теореми.

***Теорема* 1.** Якщо функція $f(x) \geq 0$ при всіх $x \in [a, +\infty)$ і при $b \to \infty$ виконується нерівність $\int_{a}^{b} f(x)dx \leq$ M, де M – деяке додатне число, то невласний інтеграл існує; і обернено, якщо невласний інтеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ від невід'ємної функції $f(x)$ є збіжним, то існує додатне число M таке, що виконується нерівність $\int_{a}^{b} f(x)dx \leq$ M за умови, що $b \to +\infty$.

***Теорема* 2.** Якщо для двох невід'ємних функцій $f(x)$ і $g(x)$ при всіх $x \in [a, +\infty)$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, то із збіжності невласного інтеграла $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ випливає збіжність $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$; із розбіжності невласного інтеграла $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$.

Доведення. Доведемо спочатку першу частину теореми.

Нехай $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ збіжний, тоді за теоремою 1 знайдеться додатне число M таке, що $\int\limits_a^{b} g(x)dx \leq$ M за умови, що $b \to +\infty$. Оскільки при всіх $x \in [a,+\infty)$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, то за властивістю визначеного інтеграла випливає, що $\int\limits_a^{b} f(x)dx \leq \int\limits_a^{b} g(x)dx$. Тоді при $b \to +\infty$ матимемо, що $\int\limits_a^{b} f(x)dx \leq$ M, а тоді за другою частиною теореми 1 випливає, що $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним.

Друга частина теореми доводиться методом від супротивного.

Зауваження. *На практиці* зручною є така форма цієї теореми:

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ невід'ємні на $[a,+\infty)$ і існує границя $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то обидва невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ *одночасно* збіжні або розбіжні.

Приклад 1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Розв'язування. Розглянемо функцію $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2+1}} = 1 \neq 0$, і невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ – розбіжний $\left(p = \frac{2}{3} < 1\right)$, то і даний невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ розбіжний.

Приклад 2. Оцінити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Розв'язування. Оскільки $e^{-x^2} < e^{-x}$ для всіх $x \in [1,+\infty)$ і $\int\limits_1^{\infty} e^{-x} dx$ збіжний, бо $\int\limits_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} e^{-x} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(-e^{-x} \Big|_1^b \right) = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(-e^{-b} + e^{-1} \right) = \frac{1}{e}$, то $\int\limits_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx$ теж збіжний.

Теорема 3. Якщо збігається невласний інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$, то збігається інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Це є ознака *абсолютної* збіжності невласного інтеграла.

2.8.3 Невласні інтеграли необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ на деякому скінченному проміжку в одній його точці має безмежний розрив. Можливі такі випадки: функція має безмежний розрив на правому кінці, на лівому кінці, всередині проміжку.

1. Припустимо, що функція $f(x)$ задана на проміжку $[a,b]$ і точка $x=b$ є її точкою розриву другого роду, тобто $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$. Відпустимо від точки $x=b$ всередину проміжку на деяку величину $\varepsilon > 0$. Оскільки на відрізку $[a, b-\varepsilon]$ функція $f(x)$ неперервна, то існує визначений інтеграл $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Якщо $\varepsilon \to 0$, то відрізок $[a, b-\varepsilon]$ розтягується у відрізок $[a,b]$, при цьому інтеграл $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ буде функцією своєї верхньої межі $I(\varepsilon)$. Може статися, що за умови $\varepsilon \to 0$, ця функція має скінченну границю.

Означення. Якщо існує *скінченна* границя інтеграла $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ за умови, що $\varepsilon \to 0$, то цю границю називають *невласним інтегралом функції* $f(x)$ на проміжку $[a,b)$. Позначають його символом $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, в цьому випадку невласний інтеграл називається *збіжним*.

Отже,
$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2.19)$$

Якщо ж $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon)$ не існує, то невласний інтеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ називається *розбіжним*.

Приклад 1. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язування. Це є невласний інтеграл, бо функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в точці $x=1$ має безмежний розрив, оскільки $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty$. За означенням

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0} arcsin\, x\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(arcsin(1-\varepsilon)-arcsin\,0\right)=$$

$=arcsin 1-0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$. Отже, цей інтеграл збіжний.

2. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a,b]$ і в точці $x=a$ має безмежний розрив, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. Відступивши вправо на деяку величину $\varepsilon>0$, розглянемо відрізок $[a+\varepsilon,b]$, на якому функція неперервна, тому існуватиме визначений інтеграл $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, який при зміні ε стає функцією нижньої межі.

Означення. Якщо при $\varepsilon\to 0$ існує *скінченна* границя $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ за умови, що $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то її називають *невласним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначають символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже,
$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (2.20)$$

Приклад 2. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x-1}$.

Розв'язування. Оскільки функція $f(x)=\frac{1}{x-1}$ має безмежний розрив в точці $x=1$, бо $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$, то це є невласний інтеграл. За означенням

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln|x-1|\Big|_{1+\varepsilon}^2\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}(ln1 - ln\,\varepsilon) = +\infty.$$ Отже, цей невласний інтеграл розбіжний.

3. Якщо функція має безмежний розрив в деякій внутрішній точці $x=c$ проміжку $[a,b]$, то за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad (2.21)$$

де $a<c<b$ і $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$.

Якщо хоч би один із невласних інтегралів правої частини цієї рівності *розбіжний*, то невласний інтеграл лівої частини вважається *розбіжним*.

Приклад 3. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла $\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{dx}{x\,ln\,x}$.

Розв'язування. Підінтегральна функція має безмежний розрив в точці $x=1$, тому $\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{dx}{x\,ln\,x} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\,ln\,x} + \int_{1}^{3} \frac{dx}{x\,ln\,x}$. Розглянемо перший із цих невласних інтегралів

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\,ln\,x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x\,ln\,x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{d(ln\,x)}{ln\,x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln|ln\,x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln|ln(1-\varepsilon)| - ln\left|ln\,\frac{1}{2}\right|\right) = -\infty$$. Отже, даний інтеграл розбіжний.

Зауваження. Неважко переконати, що $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ збіжний при $p<1$ і розбіжний при $p\ge 1$.

Нехай функція $f(x)$ має безмежний розрив в точці b, тобто $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$.

Тоді справедлива така теорема.

Теорема. Якщо $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^p}} dx = K \ne 0$, то при $p<1$ невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збіжний, а при $p\ge 1$ $\int_a^b f(x)dx$ розбіжний.

Цю теорему використовують як ознаку при оцінці збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій.

Приклад 4. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

Розв'язування. Функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ має безмежний розрив в точці $x=1$, тому це невласний інтеграл від необмеженої функції. При дослідженні на збіжність застосуємо приведену ознаку, взявши для порівняння функцію $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Знайдемо границю відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to 1-0$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^4}}=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\neq 0$. Оскільки $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ збіжний, бо $p=\frac{1}{3}$, то і даний невласний інтеграл збіжний.

2.9 Застосування визначеного інтеграла

2.9.1 *Обчислення площ в декартових координатах*

Припустимо, що плоска фігура обмежена графіком деякої неперервної функції $y=f(x)$, прямими $x=a$ і $x=b$ та віссю Ox. Якщо $f(x)\geq 0$ при всіх $x\in[a,b]$, то ця фігура є криволінійною трапецією і її площа, як відомо, визначається за формулою $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

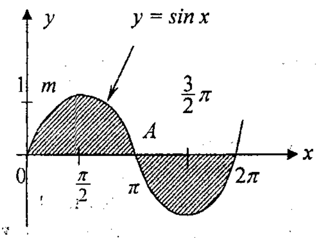
Якщо неперервна функція $f(x)\leq 0$ при всіх $x\in[a,b]$, то

$$S=\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|.$$

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ змінює знак в кількох точках, то треба цими точками розбити відрізок $[a,b]$ на частини, на кожній із яких функція $f(x)$ зберігає знак, скористувавшись властивістю адитивності визначеного інтеграла відносно цих частин розбиття, і в тих доданках, що відповідають проміжкам, на яких $f(x)\leq 0$, змінити знак на протилежний.

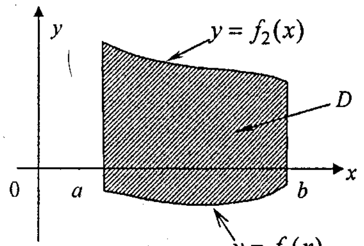
***Приклад* 1.** Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=0$, $y=\sin x$, якщо $0\leq x\leq 2\pi$.

Розв'язування. Зробимо схематичний рисунок.



Оскільки фігура симетрична відносно точки $x=\pi$, то $S=2S_{0mA}=2\int\limits_0^{\pi}\sin dx=$
$=-2\cos x\Big|_0^{\pi}=-2(\cos\pi-\cos 0)=-2(-1-1)=4$ (умовних одиниць площі).

Зауваження. Якщо фігура не є криволінійною трапецією, то її розбивають на мінімальну кількість криволінійних трапецій, які входять як складові в дану фігуру або доповнюють фігуру до криволінійної трапеції.

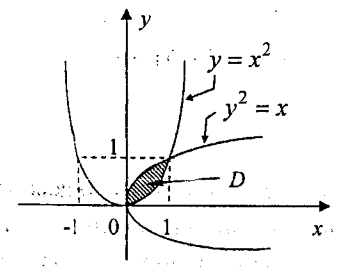


Зокрема, якщо фігура обмежена лініями $x=a$, $x=b$, $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, причому $f_1(x)\le f_2(x)$ при всіх $x\in[a,b]$, то її площа знаходиться за формулою

$$S=\int\limits_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx. \qquad (2.22)$$

***Приклад* 2.** Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$ і $y^2=x$.

Розв'язування. Зробимо рисунок.

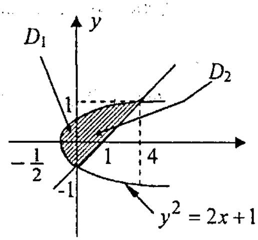


Знизу фігура обмежена параболою $y=x^2$, а зверху параболою $y^2=x$, звідси $y=\sqrt{x}$, параболи перетинаються в точках (0; 0) і (1; 1). Тоді її площа може бути знайдена за формулою (2.22), а саме:

$$S=\int\limits_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\int\limits_0^1\sqrt{x}dx-\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1-$$
$$-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$ (умовних одиниць площі).

***Приклад* 3.** Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2=2x+1$ і $x-y-1=0$.

Розв'язування. Зробимо рисунок.
Дана фігура не є криволінійною трапецією і не має вигляду попередньої фігури.



Представимо її як об'єднання двох фігур D_1 і D_2, тоді $S = S_{D_1} + S_{D_2}$.

$$S_{D_1} = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{2x+1}dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}\, d(2x+1) = \frac{2}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{2}{3}.$$

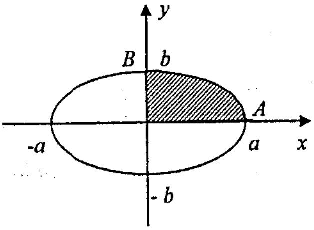
$$S_{D_2} = \int_{0}^{4}(\sqrt{2x+1}-(x-1))dx = (\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(2x+1)^3} - \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{14}{3}.$$ Тоді $S = \frac{14}{3} + \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$ (умовних одиниць площі).

Зауваження. Якщо крива AB, що обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де параметр t змінюється в межах від α до β, то з формули $S_{кр.тр.} = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$, враховуючи , що $dx = x'(t)dx$, а $y = y = (t)$, матимемо

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot x'(t)dt. \qquad (2.23)$$

Приклад 4. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом, заданим параметричними рівняннями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, де $0 \le t \le 2\pi$.



Зробимо рисунок.

Розв'язування. Оскільки $x(t) = a\cos t$, то $x'(t) = -a\sin t$. Скориставшись симетрією фігури відносно обох координатних осей (центр еліпса знаходиться в початку координат), знайдемо площу чверті фігури, що лежить в першій чверті координатної площини, яка є криволінійною трапецією, причому точці A відповідає значення параметра $t = 0$, а точці $B - t = \frac{\pi}{2}$. Отже, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$. Тоді матимемо

$$\frac{1}{4}S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos 2t)dt = -\frac{1}{2}ab(\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos 2t dt) = \frac{1}{2}ab(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}) =$$

$$= \frac{1}{2}ab(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\sin 0) = -\frac{1}{2}ab\,(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}\pi ab.$$ Отже, $S = \pi ab$.

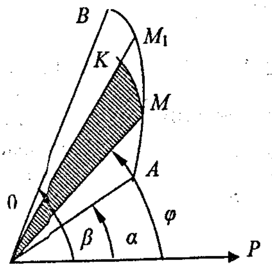
Виведена формула для площі фігури, що обмежена еліпсом з півосями a і b, а саме:

$$S = \pi a b. \tag{2.24}$$

2.9.2 *Обчислення площ в полярних координатах*

При знаходженні площ фігур в полярних координатах за базову фігуру беруть криволінійний сектор.

Означення. Криволінійним сектором називається фігура, обмежена двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, що виходять з полюсу O, та кривою AB, яку будь-який промінь, що виходить з полюсу, перетинає в одній точці. Визначимо площу криволінійного сектора OAB, якщо крива AB задана в полярних координатах рівнянням $r = r(\varphi)$, при чому $\varphi_a = \alpha$ і $\varphi_b = \beta$. Виділимо елемент площі, яким буде елементарний криволінійний сектор OMM_1, що відповідає куту $\Delta\varphi$ між полярними радіусами OM і MO_1, якщо точці M відповідає значення φ полярного кута.



З точністю до нескінченно малих більш високого порядку, ніж $\Delta\varphi$, площа сектора OMM_1 дорівнює наближено площі *кругового* сектора OMK з радіусом кола $r(\varphi)$, якому відповідає *центральний* кут величиною $\Delta\varphi$.

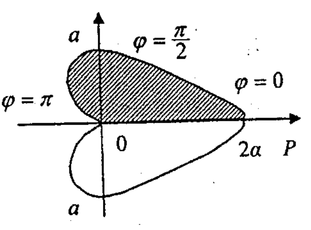
Оскільки $S_{сектора} = \dfrac{1}{2} R \cdot l$ де R – радіус, а l – довжина дуги сектора, де l визначається за формулою $l = R \cdot \Delta\varphi$, де центральний кут $\Delta\varphi$ вимірюється в радіанах, то площа елементарного криволінійного сектора ΔS при $R = r(\varphi)$ дорівнюватиме $\Delta S \approx \dfrac{1}{2} r^2(\varphi)\Delta\varphi$. Тоді для площі криволінійного сектора OAB матимемо формулу

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \tag{2.25}$$

Приклад 5. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Розв'язування. Зробимо рисунок.

Застосуємо формулу (2.25) при $\alpha = 0$ і $\beta = \pi$, і знайдемо площу верхньої половини фігури, матимемо $\dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} r^2 d\varphi$,



$$S = \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2(\int_0^{\pi} d\varphi + 2\int_0^{\pi} cos\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+cos2\varphi)d\varphi) = a^2(\frac{\pi}{2}+2sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}sin2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}) =$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2.$$

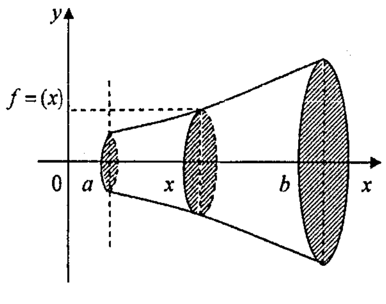
2.9.3 *Обчислення об'ємів тіл та тіл обертання*

Розглянемо деяке тіло, об'єм якого ми хочемо знайти. Припустимо, що це тіло витягнуте вздовж деякої осі Ox і нам відомі площі *перерізів* цього тіла площинами, що перпендикулярні осі Ox. Такі перерізи називаються *поперечними перерізами.* Положення поперечних перерізів визначається абсцисою x точки перетину з віссю Ox. Від точки до точки поперечні перерізи змінюються і їх площі теж змінюються, тобто площа поперечних перерізів є функцією x, тобто $S = S(x)$. Припустимо, що ця функція $S(x)$ нам відома, крайні точки тіла відносно осі Ox проектуються на неї в точки $x = a$ і $x = b$. Тоді неважко для об'єму тіла вивести формулу

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (2.26)$$

Зауваження. Розглянемо важливий частинний випадок , коли тіло утворене *обертанням* навколо осі Ox *криволінійної трапеції*, обмеженої лініями $y=0$, $y=f(x)$, $x=a$ і $x=b$, тобто криволінійна трапеція обертається навколо своєї основи.

Будь-який поперечний переріз тіла буде кругом, центр якого знаходиться в точці з абсцисою x, з радіусом R, що дорівнює модулю ординати y кривої $y = f(x)$, тобто $R = f(x)$, тоді площа $S(x)$ поперечного перерізу $S(x) = \pi\cdot f^2(x)$.



За формулою (2.26) дістанемо об'єм тіла обертання

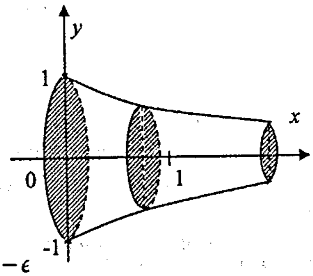
$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \quad \text{або} \quad V_x = \int_a^b y^2 dx. \qquad (2.27)$$

Зауваження. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лінією $x = \varphi(y)$, відрізком осі ординат $[c;d]$ і двома прямими $y = c$ і $y = d$, обчислюється за формулою

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy \quad \text{або} \quad V_y = \pi \int_c^d x^2 dy. \qquad (2.28)$$

***Приклад* 6.** Знайти об'єм тіла, що утворюється обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = e^{-x}$, $y = 0, x = 0$ і $x = 2$.

Розв'язування. Зробимо рисунок.



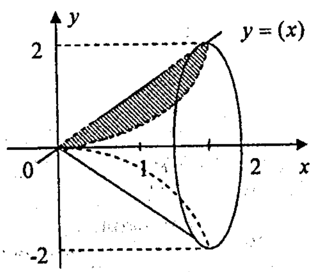
Скористаємось формулою $V_x = \pi \int_b^a y^2 dx.$

При $a = 0$ і $b = 2$ будемо мати

$$V_x = \pi \int_0^2 (e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^2 e^{-2} dx = -\frac{1}{2}\pi e^{-2x}\Big|_0^{-2} = \frac{1}{2}\pi(1-e$$

***Приклад* 7.** Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{2}x^2$ і $y = x$.

Розв'язування. Зробимо рисунок. Об'єм тіла дорівнює різниці об'ємів двох тіл обертання $V = V_1 - V_2$, де



$$V_1 = \pi \int_0^2 x^2 dx = \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}\pi.$$

$$V_2 = \pi \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2)^2 dx = \frac{1}{4}\pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{20}\pi x^5\Big|_0^2 = \frac{8}{5}\pi.$$

Тоді $V = \frac{8}{3}\pi - \frac{8}{5}\pi = \frac{16}{15}\pi.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Задача 1. Знайти невизначені інтеграли, користуючись методом підведення під знак диференціала та властивістю лінійності.

1.1	$\int\sqrt[3]{10+7x}\,dx$,	$\int x\,sin(3x^2-5)dx$,	$\int\frac{2x^3-x}{x^4+9}dx$.
1.2	$\int\frac{dx}{2+5x}$,	$\int\frac{dx}{x(ln^2 x+4)}$,	$\int\frac{tg^3 4x-3}{cos^2 4x}$.
1.3	$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1-3x}}$,	$\int x^2 cos(2x^3+7)dx$,	$\int\frac{3x+2}{x^2-9}dx$.
1.4	$\int\sqrt{2x-7}dx$,	$\int x^4 e^{-3x^5+2}dx$,	$\int\frac{dx}{x^2-2x+3}$.
1.5	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2+5x}}$,	$\int(2e^x+1)^3 dx$,	$\int\frac{2x-5}{x^2+8}dx$.
1.6	$\int\sqrt[4]{3-2x}dx$,	$\int cos^6 x\,sin\,xdx$,	$\int\frac{e^{2x}-4}{e^x}dx$.
1.7	$\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+16}$,	$\int sin^4 2x\,cos\,2xdx$,	$\int\frac{dx}{x(ln\,x^2+5)}$.
1.8	$\int x\sqrt[4]{4-5x^2}dx$,	$\int\frac{dx}{x(4-3\,ln\,x)}$,	$\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2-4}}dx$.
1.9	$\int x^2\sqrt[3]{(2-3x)^5}dx$,	$\int\frac{x^3 dx}{x^8-25}$,	$\int\frac{4x-3}{x^2+4}dx$.
1.10	$\int x^2(5-2x^3)^4 dx$,	$\int\frac{dx}{cos^2 x(2-3\,tg\,x)}$,	$\int\frac{4-5x}{x^2-16}dx$.
1.11	$\int e^{2x}(5-2e^{2x})^3 dx$,	$\int\frac{tg^4\,xdx}{cos^2 x}$,	$\int\frac{5-3x}{\sqrt{x^2-3}}dx$.
1.12	$\int\frac{2^x}{4^x-9}dx$,	$\int x\,sin(4x^2-3)dx$,	$\int\frac{2x^2+3\,ln\,x}{x}dx$.
1.13	$\int x^3 cos(3x^4-2)dx$,	$\int\frac{e^{3x}}{e^{6x}+9}dx$,	$\int\frac{3x+4\,ln\,x}{x}dx$.
1.14	$\int 3^x(4-3^x)^4 dx$,	$\int\frac{sin\,xdx}{4+cos^2 x}$,	$\int\frac{2-3x}{\sqrt{4-x^2}}dx$.
1.15	$\int\frac{sin\,xdx}{\sqrt{4+cos^2 x}}$,	$\int\frac{x^2 dx}{4+x^6}$,	$\int\frac{4-5x}{x^2+9}dx$.
1.16	$\int sin\,x\sqrt{3-4\,cos\,x}dx$,	$\int\frac{xdx}{\sqrt{3x^2+4}}$,	$\int\frac{3x-5\,ln\,x}{x}dx$.

1.17 $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx$, $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{5}{x}dx$, $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-6}}dx$.

1.18 $\int \frac{xdx}{(1-2x^2)^2}$, $\int \frac{\sin 3xdx}{4+\cos^2 3x}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+7}}$.

1.19 $\int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{4-e^{-2x}}}$, $\int \frac{x^2dx}{2-4x^3}$, $\int \frac{3x^2-4cox}{x}dx$.

1.20 $\int x\sqrt{2-7x^2}dx$, $\int \frac{4+3\cos 2x}{\cos^2 2x}dx$, $\int \frac{4x-7}{x^2+8}dx$.

1.21 $\int e^{2x}\sqrt{5-4e^{2x}}dx$, $\int \frac{dx}{x^2\cos^2\frac{5}{x}}$, $\int \frac{4-3x}{\sqrt{6-x^2}}dx$.

1.22 $\int \frac{\cos 4xdx}{\sin^3 4x}$, $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$, $\int \frac{6x-5\ln x}{x}dx$.

1.23 $\int \frac{x^2dx}{\cos(2x^3-5)}$, $\int \frac{dx}{(1+x^2)\,arctg\,x}$, $\int \frac{3x^3-4\ln^2 x}{x}dx$.

1.24 $\int \sqrt[4]{7-3x}dx$, $\int e^{-3x^3+4}x^2dx$, $\int \frac{2x-5}{x^2+8}dx$.

1.25 $\int \sqrt[5]{(7x-4)^3}dx$, $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, $\int \frac{3-2x}{\sqrt{5-x^2}}dx$.

1.26 $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$, $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$, $\int \frac{3-2\cos x-\sin x}{\cos^2 x}dx$.

1.27 $\int \frac{x^3dx}{4-5x^4}$, $\int \frac{e^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}}dx$, $\int \frac{3\cos x-4ctg^3 x}{\sin^3 x}dx$.

1.28 $\int \frac{2x^2dx}{8+5x^3}$, $\int x\sin(3-5x^2)dx$, $\int \frac{3x-7}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

1.29 $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$, $\int \frac{4+3\sqrt{x^2-9}}{x^2-9}dx$, $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+8}dx$.

1.30 $\int x\sqrt[3]{x^2-4}dx$, $\int \frac{e^{3x}dx}{4+2e^{3x}}$, $\int \frac{2tg3x-5}{\cos^2 3x}dx$.

Задача 2. Знайти невизначені інтеграли.

2.1 $\int (2x^2-7)e^{-4x}dx$, $\int \frac{(x^2-3x+3)dx}{(x+1)(x^2-2x+10)}$,

$\int\frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$, $\quad\int\frac{\sqrt[4]{x}}{4\sqrt{x}-\sqrt[4]{x^3}}dx$.

2.2 $\int(x-4x^2)\cos 3x dx$, $\quad\int\frac{(x^2-x+7)dx}{(x-1)(x^2-2x+10)}$,

$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+1}$, $\quad\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$.

2.3 $\int(3x-4)\cos 7x dx$, $\quad\int\frac{(3x^2-5)dx}{(x+1)(x^2-1)}$,

$\int\frac{dx}{4-3\sin x+\cos x}$, $\quad\int\frac{\sqrt[4]{x}dx}{x+4\sqrt{x}}$.

2.4 $\int(x^2-3x)e^{3x}dx$, $\quad\int\frac{(3x^2+24)dx}{(x-1)(x^2-4x+5)}$,

$\int\frac{dx}{4-3\sin x+\cos x}$, $\quad\int\frac{\sqrt[4]{x+1}-2}{x+1-\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$.

2.5 $\int arctg\sqrt{x}dx$, $\quad\int\frac{x^{2+2x+2}}{(x-1)(x^2+4)}dx$,

$\int\frac{dx}{3\cos x+4\sin x-2}$, $\quad\int\frac{\sqrt[3]{x+3}dx}{3-\sqrt[3]{x+3}}$.

2.6 $\int(x^2+2x)e^{-2x}dx$, $\quad\int\frac{(2x^2-3x)dx}{(x-3)(x^2+4x-8)}$,

$\int\frac{dx}{1-5\sin^2 x+3\cos^2 x}$, $\quad\int\frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

2.7 $\int(4-3x)\sin 8x dx$, $\quad\int\frac{(3x+20)dx}{(x+1)(x^2+10x+26)}$,

$\int\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx$, $\quad\int\frac{\sqrt{x+2dx}}{x-\sqrt{x+2}}$.

2.8 $\int(4x^2-1)e^{-3x}dx$, $\quad\int\frac{(4-5x)dx}{(x+1)(x^2-10x+26)}$,

$\int\frac{dx}{2-\sin x+3\cos x}$, $\quad\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x}^2+4\sqrt{x}}$.

2.9 $\int(4x-3x^2)\sin 3x dx$, $\quad\int\frac{(8x+42)dx}{(x-5)(x^2+8x+17)}$,

$\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$,

2.10 $\int (4x-7)\sin 6x dx$,

$\int \frac{dx}{2-5\sin x}$,

2.11 $\int (3x-2x^2)\cos 3x dx$,

$\int \frac{dx}{4\sin^2 x-3\cos^2 x}$,

2.12 $\int (x^2-5x+1)e^{-2x} dx$,

$\int \frac{dx}{3\sin x-4}$,

2.13 $\int (2x^2-5)\sin 4x dx$,

$\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^6 x}$,

2.14 $\int (3x^2-4x)e^{3x} dx$,

$\int \frac{dx}{2\sin^2 x-3\cos^2 x}$,

2.15 $\int (4-x^2)\cos 2x$,

$\int \frac{dx}{3-2\sin x}$,

2.16 $\int (3x-8)e^{-4x} dx$,

$\int \frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}$,

2.17 $\int x\ln^2 x dx$,

$\int \frac{dx}{3\cos x-2}$,

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

$\int \frac{(2x^2-3)dx}{(x-4)(x^2-2x-12)}$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}-2\sqrt[3]{x+3}}$.

$\int \frac{(6x-5)dx}{(x+1)(x^2-2x+17)}$,

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}+2\sqrt{x-5}}$.

$\int \frac{(6x+32)dx}{(x-3)(x^2-8x+17)}$,

$\int \frac{\sqrt[3]{x-3}-4}{3-\sqrt[3]{x-3}} dx$.

$\int \frac{(4x+14)dx}{(x-3)(x^2+4x+13)}$,

$\int \frac{\sqrt[4]{x+4}-5}{2+\sqrt{x+4}} dx$.

$\int \frac{(4s-6)dx}{(x+4)(x^2-2x+2)}$,

$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}dx}{3-\sqrt[3]{x+1}}$.

$\int \frac{(-2x+2)dx}{(x+2)(x^2-2x+2)}$,

$\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{x-\sqrt{x+2}}$.

$\int \frac{(34-8x)dx}{(x+2)(x^2+10+26)}$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{x-4}+\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

$\int \frac{(7x+27)dx}{(x-4)(x^2+8x+17)}$,

$\int \frac{\sqrt[3]{x+2}dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}$.

2.18 $\int (x^2-4)2^x\,dx$, $\int \frac{(8x+34)dx}{(x+2)(x^2+6x+10)}$,

$\int \frac{dx}{3-5\sin x+\cos x}$, $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-7)^2}-\sqrt{x-7}}$.

2.19 $\int (2x^2-3x)\cos 5x\,dx$, $\int \frac{(-2x+2)dx}{(x+2)(x^2+2x+2)}$,

$\int \frac{dx}{3\sin^2 x+2}$, $\int \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}}dx$.

2.20 $\int x^2 4^x\,dx$, $\int \frac{(3x+20)dx}{(x+1)(x^2+10x+26)}$,

$\int \frac{\cos^7 x}{\sin^3 x}dx$, $\int \frac{\sqrt[4]{x+3}}{4-\sqrt{x+3}}dx$.

2.21 $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$, $\int \frac{(2x-5)dx}{(x+2)(x^2+6x+10)}$,

$\int \frac{dx}{5-2\sin x}$, $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

2.22 $\int (x^2-7)3^x\,dx$, $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3+x}dx$,

$\int \frac{dx}{3\cos^2 x-\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

2.23 $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$, $\int \frac{(2x-5)dx}{(x-3)(x^2+2)}$,

$\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$, $\int \frac{\sqrt[4]{x}-3}{(2+\sqrt{x})\sqrt[4]{x}}dx$.

2.24 $\int (x+4)\ln x\,dx$, $\int \frac{1-3x+x^2}{(x-2)^2(x^2+1)}dx$,

$\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2}$, $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$.

2.25 $\int (2x^2-5x)\sin\frac{x}{2}dx$, $\int \frac{2x^2-3x+4}{(x-2)^2(x^2+1)}dx$,

$\int \frac{\sin^5 3x}{\cos^2 3x}dx$, $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-4\sqrt{x-1}}$.

2.26 $\int (x-2)\ln x\,dx$, $\int \frac{(2x^2-3)dx}{(x-4)(x^2-x-12)}$,

$\int \frac{dx}{3\sin^2 x - \cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1}}$.

2.27 $\int (4x^2 - x)e^{-x}dx$, $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 81}$,

$\int \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x}$, $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt{x}}dx$.

2.28 $\int x\ln(x^2+1)dx$, $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$,

$\int \frac{\cos^5 3x}{\sin^4 3x}dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3}}$.

2.29 $\int x^2 5^x dx$, $\int \frac{(x^2+5x)^2 dx}{(x-1)(x^2-1)}$,

$\int \frac{dx}{5 - \sin x}$, $\int \frac{\sqrt[4]{x-5}}{x-5+\sqrt{x-5}}dx$.

2.30 $\int x^2 \ln^2 x dx$, $\int \frac{(x^2-x+1)}{x^3+2x^2-3x}dx$,

$\int \frac{dx}{4 - \sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x-6} + \sqrt{x-6}}$.

Задача 3. Обчислити визначені інтеграли.

3.1 $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx$, $\int_1^6 \frac{x+1}{\sqrt{3x-2}}dx$. 3.2 $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+4}}$, $\int_{-1}^3 (x+1)\sqrt{2x+3}dx$.

3.3 $\int_2^6 \sqrt{x-2}dx$, $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx$. 3.4 $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx$, $\int_0^3 \frac{4-x}{\sqrt{1+x}}dx$.

3.5 $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$, $\int_{-3}^1 (x+2)\sqrt{3-2x}dx$. 3.6 $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$, $\int_{-2}^1 x\sqrt{2-x}dx$.

3.7 $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$, $\int_1^5 (x-1)\sqrt{3x+1}dx$. 3.8 $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$, $\int_{-1}^3 (x-1)\sqrt{1+x}dx$.

3.9 $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$, $\int_0^4 x\sqrt{2x+1}dx$. 3.10 $\int_1^e \frac{\sin\ln x}{x}dx$, $\int_0^4 (2x+1)\sqrt{4+3x}dx$.

3.11 $\int_{-1}^1 \frac{x^3 dx}{x+2}$, $\int_4^9 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}dx$. 3.12 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$, $\int_1^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

3.13 $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} ctg^4 x dx$, $\int\limits_{-3}^{2} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x+7}-1}$. 3.14 $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{x^8+1}$, $\int\limits_{2}^{9} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

3.15 $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$, $\int\limits_{3}^{6} x\sqrt{x-1}dx$. 3.16 $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 2x}$, $\int\limits_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$.

3.17 $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} tgx dx$, $\int\limits_{3}^{6} x\sqrt{x-1}\mathrm{dx}$. 3.18 $\int\limits_{1}^{3} \frac{5dx}{x+1}$, $\int\limits_{0}^{1} x\sqrt{1+3x}dx$.

3.19 $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x dx$, $\int\limits_{0}^{3} \frac{2-3x}{\sqrt{1+x}} dx$. 3.20 $\int\limits_{1}^{e} x\ln x dx$, $\int\limits_{0}^{3} (x-2)\sqrt{x+1}dx$.

3.21 $\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cos x dx$, $\int\limits_{0}^{3} x\sqrt{1+5x}dx$. 3.22 $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x} dx$, $\int\limits_{0}^{3} (1+x)\sqrt{3-2x}dx$.

3.23 $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$, $\int\limits_{0}^{4} (x-1)\sqrt{1+2x}dx$. 3.24 $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin^2 2x dx$, $\int\limits_{-3}^{1} (x+1)\sqrt{3-2x}dx$.

3.25 $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$, $\int\limits_{1}^{6} (x-2)\sqrt{3x-2}dx$. 3.26 $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$, $\int\limits_{0}^{3} (x+3)\sqrt{1+4x}dx$.

3.27 $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x^2} dx$, $\int\limits_{0}^{4} x\sqrt{4+3x}dx$. 3.28 $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^4+1}$, $\int\limits_{0}^{2} (x+3)\sqrt{1+4x}\mathrm{dx}$.

3.29 $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$, $\int\limits_{0}^{3} (x-3)\sqrt{x+1}dx$. 3.30 $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{x^3+1}$, $\int\limits_{0}^{5} (2x-1)\sqrt{1+3x}dx$.

Задача 4. Знайти середнє значення функції *f(x)* на заданому відрізку $[a,b]$, скориставшись теоремою про середнє.

4.1 $f(x)=\cos^3 3x$; $[0;\pi/2]$. 4.2 $f(x)=\sqrt[3]{-x}+7x$; $[0;4]$.

4.3 $f(x)=6\cos 2x$; $[0;\pi/4]$. 4.4 $f(x)=\sin^2 3x$; $[0;\pi/6]$.

4.5 $f(x)=1/(1+4x^2)$; $[-1/2;-1/2]$. 4.6 $f(x)=x/(1+3x^2)^2$; $[0;1]$.

4.7 $f(x)=1+2\cos^2 4x$; $[0;\pi/8]$. 4.8 $f(x)=\sqrt{x+2}$; $[-2;7]$.

4.9 $f(x)=2-\cos^2 4x$; $[0;\pi/8]$. 4.10 $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$; $[0;7]$.

4.11 $f(x)=1/(1+\sqrt[3]{x})$; $[0;3]$. 4.12 $f(x)=1/\sqrt{4-x^2}$; $[0;1]$.

4.13 $f(x)=1/(1+\sqrt[3]{x})$; $[0;8]$. 4.14 $f(x)=1/\cos^2 3x$; $[\pi/4;\pi/3]$.

4.15 $f(x)=\sqrt{tgx}/\cos^2$; $[0;\pi/4]$. 4.16 $f(x)=\sqrt{2-x}$; $[-2;2]$.

4.17 $f(x)=1/\sqrt{25+3x}$; $[-3;0]$. 4.18 $f(x)=4+2\cos^2 2x$; $[0;\pi/4]$.

4.19 $f(x)=1-3\cos^2 3x$; $[0;\pi/6]$. 4.20 $f(x)=2artg/(1+x^2)$; $[0;1]$.

4.21 $f(x)=2\sqrt{x}+4/\sqrt{x}$; $[1;4]$. 4.22 $f(x)=x^2/(1+x^6)$; $[0;6]$.

4.23 $f(x)=x/\cos^2 x^2$; $[0;\sqrt{\pi/2}]$. 4.24 $f(x)=\sqrt{1+2x}$; $[0;4]$.

4.25 $f(x)=\sqrt{x}/(\sqrt{x}-1)$; $[4;9]$. 4.26 $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; $[2;9]$.

4.27 $f(x)=1/(2x-1)^2$; $[1;3]$. 4.28 $f(x)=10+2\sin x$; $[0;2\pi]$.

4.29 $f(x)=x^3+x$; $[-1;2]$. 4.30 $f(x)=3-sin2x$; $[0;\pi/2]$.

Задача 5. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

5.1 $\int_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}$.

5.2 $\int_{0}^{\pi/4} ctg2xdx,\ \int_{2}^{\infty}\frac{3x-1}{x^3}dx$.

5.3 $\int_{1}^{9}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}},\ \int_{3}^{\infty}\frac{dx}{xln^3x}$.

5.4 $\int_{0}^{\pi/6} tg3xdx,\ \int_{-\infty}^{0} xe^{5x^2+1}dx$.

5.5 $\int_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^2dx},\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-8x+17}$.

5.6 $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[5]{x-2}},\ \int_{1}^{\infty}\frac{2x-1}{3x^2+4}dx$.

5.7 $\int_{0}^{2}\frac{xdx}{4-x^2},\ \int_{3}^{\infty}\frac{dx}{xln^3x}$.

5.8 $\int_{-1}^{2}\frac{2x+1}{x^2}dx,\ \int_{1}^{\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$.

5.9 $\int_{-5}^{0}\frac{dx}{(x+2)^3},\ \int_{0}^{\infty} xe^{-3x^2}dx$.

5.10 $\int_{1}^{10}\frac{dx}{\sqrt{x-1}},\ \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+9}$.

5.11 $\int_{0}^{2}\frac{xdx}{4-x^2},\ \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^5}}$.

5.12 $\int_{2}^{5}\frac{dx}{(x-3)^3},\ \int_{1}^{\infty}\frac{xdx}{x^4+3}$.

5.13 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}, \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}.$

5.14 $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}, \int\limits_3^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

5.15 $\int\limits_2^\infty \frac{\ln^3 x}{x}dx, \int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

5.16 $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}, \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-2x+2}.$

5.17 $\int\limits_{-3}^0 \frac{dx}{(x+2)^2}, \int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2-4x+5}.$

5.18 $\int\limits_{-5}^0 \frac{dx}{(x+2)^4}, \int\limits_1^\infty \frac{xdx}{x^4+1}.$

5.19 $\int\limits_0^1 \frac{e^{2/x}}{x^2}dx, \int\limits_5^\infty \frac{dx}{x^2-8x+17}.$

5.20 $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}, \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{3x^2+5}.$

5.21 $\int\limits_3^2 \frac{dx}{(1+x)^3}, \int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

5.22 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(2-x)^2}, \int\limits_1^\infty \frac{xdx}{x^4+1}.$

5.23 $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}, \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+2x+1}.$

5.24 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2-x}, \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+3}.$

5.25 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}, \int\limits_1^\infty \frac{xdx}{4+3x^2}.$

5.26 $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{(1-x)^2}, \int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

5.27 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}, \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}.$

5.28 $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-2)^3}}, \int\limits_2^\infty \frac{dx}{4x+1}.$

5.29 $\int\limits_2^5 \frac{dx}{(x+3)^2}, \int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2-2x+4}.$

5.30 $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}, \int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{xdx}{(x^2+1)}.$

***Задача* 6.** Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями, та об'єм тіла обертання навколо осі Ox цієї фігури. Зробити схематичний рисунок.

6.1 $y=(x-2)^3, \quad y=4x-8.$

6.2 $y=3x^2+1, \quad y=3x+7.$

6.3 $y=\frac{1}{1+x^2}, \quad y=\frac{x^2}{2}.$

6.4 $y=1/4x^2, \quad y=3x-1/2x^2.$

6.5 $y=\sin x, y=\cos x, x=0.$

6.6 $y=4x^3, \quad y=2x^2.$

6.7 $y=2-x^2, \quad y^3=x^2.$

6.8 $y=-x^2, \quad x+y+2=0.$

6.9 $y=x^2+2x, \quad x-y=0.$

6.10 $y=x(x-1)^2, \quad y=0.$

6.11 $y=(x-1)^2, \quad y^2=x-1.$

6.12 $y=x^3, \quad y=2x^2.$

6.13 $y=x+4, \quad y=\sqrt{x+4}.$

6.14 $y=\dfrac{2}{1+x^2}, \quad y=x^2.$

6.15 $y=(x+1)^2, \quad y=x+1.$

6.16 $y=2x-x^2, \quad x+y=2.$

6.17 $y=x^2, \quad y=3x.$

6.18 $y=\sqrt{x-1}, \quad y=x-1.$

6.19 $y^2=9x^3, \quad y=3x^2.$

6.20 $y=x^2+3x, \quad x-y=0.$

6.21 $y=x(x-2), \quad x+y=0.$

6.22 $y=(x+2)^3, \quad y^2=x+2.$

6.23 $y=x^2-2x, \quad y=x-2.$

6.24 $y^2=x(x-1)^2, \quad y=0.$

6.25 $y=(x+2)^2, \quad y=\sqrt{x+2}.$

6.26 $y=6x-x^2-9, \quad y=x-3.$

6.27 $y=(x-1)^3, \quad y=4x-4.$

6.28 $y=\sin^2 x, y=0, \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right).$

6.29 $y=2-\dfrac{1}{2}x^2, \quad y=4x-8.$

6.30 $y=(x-2)^2, \quad y=\sqrt{x-2}.$

4 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

Задача 1. Користуючись методом підведення під знак диференціала та властивістю лінійності, знайти інтеграли.

1.1 $\int x^3\sqrt{1+2x^2}\,dx$, $\int\frac{xdx}{7-x^2}$, $\int\frac{dx}{\ln^4 x}$, $\int\frac{dx}{x^2+4x+7}$, $\int xe^{-x^2}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$,

$\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$, $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$, $\int e^x\sqrt{4-3e^x}\,dx$, $\int\frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{3-tg^2 x}}$.

1.2 $\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$, $\int ctg3xdx$, $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+2}}$, $\int\frac{7-3x}{\sqrt{9-2x^2}}dx$, $\int\frac{2x-1}{1-x+x^2}dx$.

$\int\frac{arcctg2x}{1+4x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$, $\int\frac{dx}{3x^2-2x+3}$, $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, $\int x^2\sqrt[3]{1-x^3}\,dx$.

1.3 $\int\sqrt[3]{1-2x}\,dx$, $\int\frac{x^3dx}{8+x^4}$, $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$, $\int\frac{ctgx-\cos x}{\sin^2 x}dx$, $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$,

$\int\frac{2^x dx}{\sqrt{9-4^x}}$, $\int\frac{\sin 3xdx}{1+\cos^2 3x}$, $\int\frac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}dx$, $\int\frac{xdx}{\left(1-2x^2\right)^2}$, $\int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$.

1.4 $\int\frac{x^3dx}{1-x^4}$, $\int\frac{4+\sin 2x}{\cos^2 2x}dx$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{3-x^4}}$, $\int\frac{xdx}{\sin\left(x^2+1\right)}$, $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-2}}$,

$\int\frac{dx}{2-3x-2x^2}$, $\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$, $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$, $\int\sin^4 x\cos xdx$, $\int x^2e^{-2x^3}dx$.

1.5 $\int\sqrt[3]{2-5x}\,dx$, $\int\frac{\arcsin x}{3\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4-2}}$, $\int\frac{dx}{3x^2+3x-1}$, $\int\frac{\sin 3xdx}{\cos^2 3x}$,

$\int\frac{2\text{ч}-5}{\sqrt{x^2-4}}dx$, $\int\frac{3dx}{x\ln^3 x}$, $\int x\sqrt{2-5x^2}\,dx$, $\int xe^{-2x^2}dx$, $\int\frac{e^{3x}dx}{4-e^{6x}}$.

1.6 $\int\frac{dx}{\sqrt{1-3x}}$, $\int\frac{x^2dx}{2-3x^3}$, $\int\frac{dx}{2x^2-3x+4}$, $\int\frac{\arccos^3 x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int\frac{xdx}{\cos^2\left(1-2x^2\right)}$,

$\int\frac{1+\sin x}{x-\cos x}dx$, $\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, $\int tg4xdx$, $\int e^x\sqrt{1-3e^x}\,dx$.

1.7 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int\frac{\cos 3xdx}{\sin^3 3x}$, $\int\frac{2dx}{\sqrt{4x+7}}$, $\int(\sin x+\cos x)^2dx$, $\int\frac{dx}{3x^2+x-4}$,

$\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}$, $\int e^{2x}\sqrt{1-2e^{2x}}dx$, $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$, $\int\frac{dx}{x^2\sin\frac{1}{x}}$, $\int\frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

1.8 $\int\sqrt[4]{3-7x}dx$, $\int\frac{x^2dx}{3-2x^3}$, $\int\frac{1-x^2}{3x-x^3}dx$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+3}}$, $\int\frac{dx}{2x^2-3x-4}$,

$\int\frac{xdx}{\cos^2(2-3x^2)}$, $\int\frac{e^xdx}{4+e^{2x}}$, $\int\frac{tg3x+ctg3x}{\cos 3x}dx$, $\int x^2e^{2x^3}dx$, $\int\frac{\ln^3 xdx}{x}$.

1.9 $\int\frac{tgxdx}{\cos^2 x}$, $\int\frac{e^xdx}{5+3e^x}$, $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2+5x}}$, $\int\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx$, $\int\frac{dx}{4x^2-x+2}$,

$\int\cos 3xe^{\sin 3x}dx$, $\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}$, $\int x^2e^{-2x^3}dx$, $\int\frac{xdx}{\sin(1-x^2)}$, $\int x\sqrt[4]{1-2x^2}dx$.

1.10 $\int\sqrt[4]{4-3x}dx$, $\int 3e^{-3x}dx$, $\int\frac{\sin 4xdx}{\cos 4x}$, $\int\frac{dx}{x(\ln^2 x+1)}$, $\int\frac{3x+\ln^2 x}{x}dx$,

$\int\cos 2xe^{\sin 2x}dx$, $\int\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$, $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$, $\int\frac{xdx}{\sin^2(1+x^2)}$, $\int x\sqrt[4]{1+2x^2}dx$.

1.11 $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+3}}$, $\int\frac{e^xdx}{3+e^{3x}}$, $\int\frac{\sin 2xdx}{\cos^3 2x}$, $\int\frac{dx}{(4+x^2)arctg^2 2x}$, $\int\frac{dx}{3x^2-2x-6}$,

$\int\frac{x^3-\ln x^3}{x}dx$, $\int\frac{\sin\ln x}{x}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+3}}$, $\int x^3e^{-3x^4+1}dx$, $\int\frac{dx}{shx}$.

1.12 $\int\frac{4dx}{x\ln^2 x}$, $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{2x}-3}}$, $\int\frac{(1+\sin 3x)^2}{\sin 3x}dx$, $\int\frac{dx}{(1+4x^2)arctg 2x}$, $\int\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$,

$\int\frac{\cos 2x}{3-\sin 2x}dx$, $\int x\sqrt[3]{3-2x^3}dx$, $\int\frac{dx}{2x^2+x-7}$, $\int\frac{2x^3+x}{x^4-1}dx$, $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

1.13 $\int\sqrt[3]{3-4x}dx$, $\int e^{3x}\sqrt{1+e^{3x}}dx$, $\int\sin^4 x\cos xdx$, $\int\frac{dx}{chx}$, $\int\frac{dx}{x(3+2\ln x)}$,

$\int\frac{dx}{2x^2-x+3}$, $\int\frac{3^xdx}{\sqrt{4-9^x}}$, $\int\frac{x+x^3}{\sqrt{x^4-1}}dx$, $\int\frac{xdx}{\sin^2(1+2x^2)}$, $\int\frac{dx}{(1+9x^2)arctg^2 3x}$.

1.14 $\int\frac{dx}{\sqrt{5+3x}}$, $\int\frac{arctg^3x}{1+x^2}dx$, $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+4}$, $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}-4}$, $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$,

$\int\frac{3xdx}{2+x^2}$, $\int\frac{tg(\ln x)dx}{x}$, $\int x\sin(2-3x^2)dx$, $\int\frac{xdx}{\cos^2x^2}$, $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^8}}$.

1.15 $\int\frac{15dx}{\sqrt{5x-2}}$, $\int x^3\sqrt{3-x^4}dx$, $\int\frac{xdx}{\cos(2x^2-5)}$, $\int\frac{e^xdx}{7-e^x}$, $\int\frac{dx}{3x^2-6x+2}$,

$\int\frac{7-\cos 4x}{\sin^2 4x}dx$, $\int\frac{arctg^4x}{1+x^2}dx$, $\int\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$, $\int\frac{6dx}{3-4x}$.

1.16 $\int x\sin(2-3x^2)dx$, $\int\frac{3-\sin 4x+5\cos 4x}{\cos^2 4x}dx$, $\int\frac{dx}{3x^2+6x+5}$, $\int\frac{12dx}{\sqrt[3]{7-6x}}$,

$\int\frac{dx}{(x-2)\ln^2(x-2)}$, $\int\frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int\frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{x^2dx}{3-4x^3}$, $\int\frac{x^3dx}{5+2x^4}$.

1.17 $\int 6x\sqrt[3]{3-2x^2}dx$, $\int\frac{3x^2dx}{4-2x^3}$, $\int\frac{4}{x^2}\cos\frac{2}{x}dx$, $\int\frac{dx}{x(3-\ln^2x)}$, $\int\frac{3x^3-4\ln^2x}{x}dx$,

$\int 3xe^{-3x^2}dx$, $\int\frac{dx}{(4+x^2)arctg^2\frac{x}{2}}$, $\int\frac{dx}{2x^2-4x+1}$, $\int\frac{2x-\cos x}{x^2-\sin x}dx$, $\int\frac{2^xdx}{3+4^x}$.

1.18 $\int\frac{8xdx}{\sqrt[3]{4-3x^2}}$, $\int\frac{xdx}{x^4-9}$, $\int\frac{dx}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$, $\int\frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$, $\int\frac{5dx}{\sqrt[4]{2x-9}}$, $\int\frac{dx}{2x^2-6x+3}$,

$\int\frac{4-3\sin 2x+5\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$, $\int\frac{dx}{x^2+4x+9}$, $\int\frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{arctg2x}}$, $\int e^{3x}(2-e^{3x})^4dx$.

1.19 $\int 4x^2e^{-2x^3}dx$, $\int\frac{5dx}{\sqrt[4]{2x-9}}$, $\int\frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$, $\int\frac{dx}{x^2+4x+9}$, $\int\frac{dx}{x^2\sin^2\frac{3}{x}}$,

$\int\frac{2-3x+4\ln^2x}{x}dx$, $\int\frac{e^{3x}dx}{4+e^{6x}}$, $\int\frac{\sin(\ln 3x)}{x}dx$, $\int\frac{dx}{\sin^2(4x-3)}$, $\int 4x\sqrt{3-4x^2}dx$.

1.20 $\int\sqrt[3]{3-7x}dx$, $\int\frac{\sin\sqrt{3-2x}}{\sqrt{3-2x}}dx$, $\int\frac{dx}{x^2+x+2}$, $\int x^2\cos\left(x^3-1\right)dx$, $\int\frac{12xdx}{\sqrt{x^4-6}}$,

$\int\frac{dx}{x^2+2x-9}$, $\int\frac{arctg^2 5x}{1+25x^2}dx$, $\int x^2\left(1-x^3\right)dx$, $\int\frac{\cos 2xdx}{3-\sin^2 2x}$, $\int\frac{4-\sin x}{4x+\cos x}dx$.

1.21 $\int\frac{x-2}{x^2-4x}dx$, $\int\cos 4xe^{-\sin 4x}dx$, $\int\sqrt[5]{2-3x}dx$, $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{3+e^{4x}}}$,

$\int(\sin 2x+\cos 2x)dx$, $\int\frac{3-4\sin 3x+2\cos 3x}{\cos^2 3x}dx$, $\int e^x\sqrt{4-21e^x}dx$,

$\int\frac{e^{\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}dx$, $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$, $\int\frac{dx}{x^2\cos\frac{4}{x}}$.

1.22 $\int\sqrt[4]{5-4x}dx$, $\int\sqrt{x}e^{4x\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{dx}{x^2\cos^2\frac{5}{x}}$, $\int\frac{e^{2x}dx}{4+e^{4x}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x-3)}$, $\int\frac{dx}{x^2-x+4}$,

$\int(2x+1)\sin\left(x^2+x\right)dx$, $\int\frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}$, $\int\frac{tg 2x-3ctg 2x}{\cos 2x}dx$, $\int\frac{3x^2-4}{x^3-4x}dx$.

1.23 $\int\frac{3xdx}{\sqrt{x^2-3}}$, $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$, $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+4}$, $\int\frac{dx}{3x^2-6x+2}$, $\int\frac{4-\sin x+\cos x}{\sin^2 x}dx$,

$\int\frac{5-3x}{\sqrt{4-x^2}}dx$, $\int\frac{\sqrt{tgx-3}}{\cos^2 x}dx$, $\int x\cos\left(3-2x^2\right)dx$, $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin^3 x}}$.

1.24 $\int\frac{\ln^3 x}{x}dx$, $\int\frac{e^{-x}dx}{3+e^{-2x}}$, $\int\frac{dx}{4x^2-7}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$, $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-7}}$, $\int 4^{2x-1}dx$,

$\int\frac{2x+3}{x^2-3}dx$, $\int x\cos(2-3x^2)dx$, $\int\frac{5-3\sin 2x+4\cos 2x}{\sin 2x}dx$.

1.25 $\int\frac{\sqrt{1-\ln x}}{x}dx$, $\int x\sqrt[3]{1-4x^2}dx$, $\int\frac{dx}{3x^2-x+6}$, $\int\frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^3}$, $\int\frac{1+x}{x^2+1}dx$,

$\int\frac{4-3x^2+2\ln x}{x}dx$, $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{4x}}}$, $\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int\frac{arctg^3 2x}{1+4x^2}dx$, $\int\frac{dx}{x^2\cos^2\frac{5}{x}}$.

1.26 $\int e^{-x}\sqrt{1+2e^{-x}}\,dx$, $\int\frac{dx}{2x^2-4x-15}$, $\int\frac{3+xe^{-2x}-x^3}{x}dx$, $\int\frac{dx}{3x^2-4}$, $\int ctg2xdx$,

$\int\frac{4dx}{\sqrt{3-4x}}$, $\int\frac{e^x dx}{3+e^{2x}}$, $\int\frac{xdx}{(3x^2-4)^5}$, $\int\frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int\frac{(tg3x-4)dx}{\cos^2 3x}$.

1.27 $\int\frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$, $\int\frac{dx}{(1+4x^2)arctg2x}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$, $\int\sqrt{\cos 2x}\sin 2xdx$,

$\int\frac{dx}{2x^2-2x+11}$, $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+9}}$, $\int\frac{3x+2}{x^2-2}dx$, $\int\frac{\ln^4 x}{x}dx$.

1.28 $\int\frac{\arcsin 6xdx}{\sqrt{1-36x^2}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+4}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-4}}$, $\int\frac{dx}{x^2-5x+7}$, $\int\sin^4 x\cos xdx$,

$\int x(x^2-4)^3 dx$, $\int\frac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{4-3x^2-5\ln x}{x}dx$, $\int\frac{e^x dx}{3-e^{2x}}$.

1.29 $\int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$, $\int\cos 2x\sqrt{1-\sin 2x}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$, $\int\frac{dx}{x^2-3x+8}$, $\int\frac{\sin 3x+3}{\cos^2 3x}dx$,

$\int xe^{-5x^2+2}dx$, $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{6-e^{2x}}}$, $\int\frac{3x-2}{\sqrt{x^2-5}}dx$, $\int\frac{\sqrt[3]{\ln(x-1)}}{x-1}dx$, $\int\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

1.30 $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$, $\int\frac{x^3-2x}{16+x^4}dx$, $\int\frac{xdx}{\cos^2 4x^2}$, $\int\frac{dx}{2x^2-3x+12}$, $\int\frac{\sqrt{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx$,

$\int\frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$, $\int\frac{xdx}{6-5x^2}$, $\int\frac{2-3\cos 3x+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$, $\int\frac{dx}{5-4x^2}$, $\int 3^{-2x+1}dx$.

1.31 $\int\frac{5x^3dx}{1-x^4}$, $\int\frac{e^x dx}{8+e^{2x}}$, $\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-11}}$, $\int\frac{5x^3dx}{x^8-4}$, $\int\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$,

$\int\frac{x\cos x-3\ln x+2}{x}dx$, $\int\cos^4 x\sin xdx$, $\int\frac{1-3x}{\sqrt{x^2+3}}dx$, $\int\frac{dx}{(x-1)\ln^2(x-1)}$.

1.32 $\int\frac{\sin xdx}{4+\cos x}$, $\int\frac{5xdx}{\sqrt{3-2x^2}}$, $\int\frac{e^x dx}{10-e^{2x}}$, $\int\frac{dx}{1-2x^2}$, $\int\frac{dx}{2x^2-4x+17}$,

$\int\frac{\sqrt{arctgx+3}}{1+x^2}dx$, $\int\sqrt{1-x}dx$, $\int\frac{xe^{-3x}-4}{x}dx$, $\int\frac{3-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

1.33 $\int\frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$, $\int x\left(2-3x^2\right)^3dx$, $\int\frac{\arccos 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, $\int\frac{dx}{3-2x^2}$, $\int\frac{3-4x}{4+x^2}dx$, $\int\frac{e^{\frac{3}{x}}dx}{x^2}$,

$\int\frac{\sqrt{tg2x+4}}{\cos^2 2x}dx$, $\int\frac{xe^{-4x}-4x^2+2\ln x}{x}dx$, $\int\frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^{3x}-5}}$.

1.34 $\int\frac{6dx}{\sqrt[3]{4-3x}}$, $\int x^2\sqrt{4-x^3}dx$, $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$, $\int\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{4-e^{-2x}}}$, $\int\frac{xdx}{\cos\left(1-3x^2\right)}$,

$\int\frac{dx}{7-2x^2}$, $\int\frac{2x-5}{x^2+9}dx$, $\int\frac{3-\cos x+4\sin x}{\sin^2 x}dx$, $\int\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx$, $\int\frac{dx}{\cos^2 x(tgx-1)}$.

1.35 $\int\frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sin^2 x(4+ctgx)}$, $\int\frac{e^x dx}{1-e^{2x}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, $\int\frac{dx}{2x^2+4x+15}$,

$\int\frac{3\sin^3 x-2\sin x+4}{\sin^2 x}dx$, $\int\frac{x^3dx}{8-3x^4}$, $\int\frac{dx}{x\left(\ln^2 x+8\right)}$, $\int\frac{2-5x}{x^2+9}dx$, $\int\frac{\cos\frac{4}{x}}{x^2}dx$.

1.36 $\int\sqrt[3]{4-7x}dx$, $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$, $\int\frac{dx}{5-4x^2}$, $\int\frac{ctgx-7}{\sin^2 x}dx$, $\int\frac{xe^{-3x}+3x^2-\ln x}{x}dx$,

$\int\frac{4+5x}{\sqrt{7-2x^2}}dx$, $\int\frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$, $\int\frac{xdx}{\cos^2 4x^2}$, $\int\frac{dx}{x^2-3x+15}$, $\int x^2e^{-5x^3+1}dx$.

1.37 $\int\frac{dx}{3x^2-3x+2}$, $\int\frac{3-2\cos 2x+3\sin 2x}{\sin^2 2x}dx$, $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1-arctgx\right)}$, $\int\frac{e^{-\frac{2}{x}}dx}{x^2}$,

$\int\frac{5dx}{2+3x}$, $\int\frac{dx}{2+3x^2}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{7+x^4}}$, $\int\frac{3xdx}{\sqrt{7-x^4}}$, $\int x\cos\left(5-2x^2\right)dx$, $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2-3}}dx$.

1.38 $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-3}}$, $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$, $\int\frac{3+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{6-e^{2x}}}$, $\int\frac{dx}{x^2-x+9}$,

$\int x^2\sqrt{x^3-4}dx$, $\int\frac{12x-5}{\sqrt{x^2-9}}dx$, $\int\frac{xdx}{\sin^2\left(2-3x^2\right)}$, $\int\frac{xe^{4x}-5}{x}dx$, $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{3\sqrt{x}}$.

1.39 $\int\frac{dx}{\sqrt{7-8x}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$, $\int x5^{-x^2}dx$, $\int\frac{dx}{x^2-5x+8}$, $\int\frac{e^x dx}{e^x-9}$, $\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{5}}$,

$\int\frac{3x+1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$, $\int\frac{1-4\cos 3x+2\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$, $\int x\sqrt{2-x^2}\,dx$, $\int\frac{xdx}{\sin^2 x^2}$.

1.40 $\int\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, $\int\frac{dx}{5-4x^2}$, $\int\frac{dx}{2x^2-x+6}$, $\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx$,

$\int\frac{dx}{x\cos^2(1-\ln x)}$, $\int\frac{3xdx}{4x^2-1}$, $\int\frac{2-x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$, $\int\frac{dx}{\cos 3x}$, $\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2}$.

1.41 $\int\frac{dx}{x(3-\ln x)}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$, $\int\frac{dx}{4-3x^2}$, $\int x(x^3-4)dx$, $\int ctg^2 4x dx$, $\int\frac{dx}{x^2-x-14}$,

$\int\frac{4-3\sin x+2\cos x}{\sin^2 x}dx$, $\int\frac{2-x}{\sqrt{5+2x^2}}dx$, $\int\frac{dx}{tg 3x}$, $\int\frac{dx}{(3x-4)^5}$.

1.42 $\int\frac{\cos 3xdx}{1-\sin 3x}$, $\int\frac{dx}{4-3x^2}$, $\int\frac{dx}{2x^2-3x+4}$, $\int\frac{dx}{(3x-1)^4}$, $\int\frac{3x-8}{\sqrt{x^2-4}}dx$,

$\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$, $\int\frac{4-\sin x+5\cos x}{\cos^2 x}dx$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$, $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$, $\int\cos^2\frac{x}{4}dx$.

1.43 $\int\sqrt[3]{4-7x}\,dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, $\int\frac{\cos xdx}{\sin^4 x}$, $\int\frac{dx}{x^2-6x+1}$, $\int\frac{xe^{3x}-4}{x}dx$,

$\int\frac{(3+tg2x)dx}{\cos^2 2x}$, $\int\frac{dx}{x(\ln x-2)}$, $\int\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{4-e^{-2x}}}$, $\int\frac{2-7x}{5-x^2}dx$, $\int\frac{e^{2\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

1.44 $\int x\sqrt[3]{4-3x^2}\,dx$, $\int\frac{4xdx}{\sin^2(1-2x^2)}$, $\int\frac{\sin 3xdx}{4+\cos 3x}$, $\int\frac{dx}{x^2-2x-13}$, $\int\frac{xdx}{9+x^4}$,

$\int\frac{\cos xdx}{\sin^5 x}$, $\int\frac{3x-7}{\sqrt{4-x^2}}dx$, $\int\frac{4-3\sqrt{x^2-7}}{x^2-7}dx$, $\int\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{e^{-3x}dx}{e^{-6x}+4}$.

1.45 $\int x\sqrt{4-5x^2}\,dx$, $\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int\frac{4dx}{2x^2-x+12}$, $\int\frac{\sqrt[3]{\ln x-4}}{x}dx$, $\int\sqrt{x}e^{x\sqrt{x}}dx$,

$\int\frac{4-7x}{x^2-16}dx$, $\int\frac{\sin^3 2x-4\cos 2x+5}{\sin^2 2x}dx$, $\int\frac{dx}{(3x-4)^4}$, $\int\frac{x^2dx}{5+x^6}$, $\int\frac{xdx}{\cos^2 x^2}$.

1.46 $\int x(1-4x^2)^3dx$, $\int\frac{9xdx}{7-3x^2}$, $\int\frac{4-3tgx}{\cos^2 x}dx$, $\int\frac{dx}{3x^2-2x+15}$, $\int\frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$,

$\int \frac{4x-3}{\sqrt{5-x^2}}dx$, $\int \frac{e^{-5x}dx}{4+e^{-5x}}$, $\int \frac{7-\cos x}{7x-\sin x}dx$, $\int \frac{(5-4\sin x)dx}{\cos^2 x}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$.

1.47 $\int \frac{xdx}{(4-x^2)^3}$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-7}}$, $\int \frac{e^{3x}dx}{4+e^{6x}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$, $\int \frac{9-2x}{\sqrt{3-x^2}}dx$, $\int \frac{e^{\frac{3}{x}}dx}{x^2}$,

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x}$, $\int \frac{3^x dx}{2-3^x}$, $\int \frac{(\sin 2x+\cos 2x)^2}{\cos^2 x}dx$.

1.48 $\int \frac{\cos x}{5-2\sin x}dx$, $\int \frac{dx}{x^2\cos\frac{4}{x}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-7}}$, $\int 3x^2e^{-2x^3}dx$, $\int \frac{4\cos^3 x-3\sin x+2}{\cos^2 x}dx$,

$\int \frac{3-7x}{\sqrt{7-x^2}}dx$, $\int \sqrt{4x-1}dx$, $\int \frac{arctg^2 3x}{1+9x^2}dx$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$, $\int x\sqrt[3]{1-3x^2}dx$.

1.49 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x-4)}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-17}}$, $\int \frac{x^3-4x}{8-x^4}dx$.

$\int \frac{2-3\sin 2x+\cos 2x}{\cos^2 2x}dx$, $\int \frac{e^x dx}{5+e^{2x}}$, $\int \frac{4arctgx-3}{1+x^2}dx$, $\int \cos^2 4xdx$.

1.50 $\int 3x\sqrt{4-5x^2}dx$, $\int \frac{xdx}{5-x^4}$, $\int \frac{e^{4x}dx}{3-2e^{4x}}$, $\int \frac{4x-3x\cos 5x+2\ln x}{x}dx$,

$\int \frac{2-7x}{9+4x^2}dx$, $\int \frac{2tg3x-5}{\cos^2 3x}dx$, $\int \sqrt[3]{4-7x}dx$, $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$, $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$, $\int \frac{xdx}{\sin x^2}$.

Задача 2. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, знайти інтеграли.

2.1 $\int (3x-1)e^{-2x}dx$, $\int x^3\ln xdx$, $\int e^{2x}\sin xdx$, $\int \arccos 3xdx$.

2.2 $\int (x+3)\sin\frac{x}{2}dx$, $\int (1-x^3)\ln xdx$, $\int e^{-x}\sin 3xdx$, $\int arctg 2xdx$.

2.3 $\int (2-3x)e^{2x}dx$, $\int \ln^2 xdx$, $\int \sin x ch 2xdx$, $\int \arcsin\frac{x}{2}dx$.

2.4 $\int (x^2-5x)\cos 2xdx$, $\int \sin\ln xdx$, $\int \sqrt{x^2+4}dx$, $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

2.5 $\int (x-4)e^{5x}dx,$ $\int \sqrt{x^2-16}dx,$ $\int \cos\ln x dx,$ $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx.$

2.6 $\int (x^2-3)e^{-x}dx,$ $\int x arctg x dx,$ $\int 2^x \cos x dx,$ $\int \sqrt{x^2-1}dx.$

2.7 $\int (1-3x)e^{\frac{x}{2}}dx,$ $\int \arccos\frac{x}{2}dx,$ $\int \sqrt{x^2+12}dx,$ $\int e^{-x}\sin 3x dx.$

2.8 $\int \ln(x^2+3)dx,$ $\int (2-3x^2)\cos\frac{x}{4}dx,$ $\int arctg\frac{x}{3}dx,$ $\int \sin\ln 5x dx.$

2.9 $\int (2-x^2)e^{-\frac{x}{2}}dx,$ $\int \arcsin\frac{x}{2}dx,$ $\int \cos\ln 2x dx,$ $\int \sqrt{x^2+3}dx.$

2.10 $\int (x^2-3x)\sin\frac{x}{2}dx,$ $\int arctg 3x dx,$ $\int e^{\frac{x}{2}}\cos 5x dx,$ $\int \ln(2x^2+3)dx.$

2.11 $\int (3-x^2)\sin 2x dx,$ $\int e^{3x}\cos\frac{x}{2}dx,$ $\int \sin\ln 4x dx,$ $\int \sqrt{x^2-7}dx.$

2.12 $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx,$ $\int (2x^2-1)\cos\frac{x}{2}dx,$ $\int \arccos\frac{x}{5}dx,$ $\int e^{-x}\cos\frac{x}{3}dx.$

2.13 $\int (4-x^2)e^{-2x}dx,$ $\int \cos\ln 3x dx,$ $\int arctg\frac{x}{3}dx,$ $\int \sqrt{x^2-11}dx.$

2.14 $\int (3x-x^2)e^{\frac{x}{2}}dx,$ $\int x arctg 3x dx,$ $\int e^{-2x}\cos\frac{x}{4}dx,$ $\int \sqrt{2x^2-1}dx.$

2.15 $\int (5x-3x^2)\cos\frac{x}{2}dx,$ $\int e^{2x}\sin\frac{x}{7}dx,$ $\int \sqrt{3x^2+5}dx,$ $\int x^3\ln\frac{x}{2}dx.$

2.16 $\int x^3 e^{-x^2}dx,$ $\int \sin\ln 4x dx,$ $\int x^3 arctg x dx,$ $\int \sqrt{2x^2+3}dx.$

2.17 $\int x^4\ln(x+1)dx,$ $\int (x^2+1)\sin 3x dx,$ $\int e^{-\frac{x}{3}}\cos 4x dx,$ $\int \arcsin 7x dx.$

2.18 $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx,$ $\int (x^2+5)e^{\frac{x}{4}}dx,$ $\int \sqrt{3x^2+1}dx,$ $\int e^{-\frac{x}{2}}\cos 5x dx.$

2.19 $\int (x^2-2)\sin\frac{x}{4}dx,$ $\int x arctg x dx,$ $\int x^3 e^{-4x^2}dx,$ $\int e^{3x}\sin\frac{x}{8}dx.$

2.20 $\int \ln^3 x dx;$ $\int (x^2+3x)e^{-\frac{x}{5}}dx,$ $\int \cos\ln 6x dx,$ $\int \sqrt{4x^2-5}dx.$

2.21 $\int \arccos 4xdx$, $\int(2x^2+3x-2)\cos\frac{x}{2}dx$, $\int e^{-x}\sin 3xdx$, $\int\sqrt{7+3x^2}dx$.

2.22 $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$, $\int(3-2x^2)e^{5x}dx$, $\int\sqrt{x^2+10}dx$, $\int x\,arctg 4xdx$.

2.23 $\int(2x^2-7)\cos\frac{x}{2}dx$, $\int\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$, $\int e^{\frac{x}{5}}\sin xdx$, $\int arctg 5xdx$.

2.24 $\int(1-3x^2)e^{-4x}dx$, $\int\arccos 2xdx$, $\int\sqrt{2x^2+9}dx$, $\int\cos\ln 3xdx$.

2.25 $\int(2x^2-x)\sin\frac{x}{3}dx$, $\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$, $\int x\,arctg\frac{x}{2}dx$, $\int\sin x\,ch2xdx$.

2.26 $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$, $\int(1-3x^2)e^{-\frac{x}{4}}dx$, $\int x^2\ln(x+2)dx$, $\int\sin\ln 2xdx$.

2.27 $\int(3x^2-5)e^{-\frac{x}{3}}dx$, $\int arctg\sqrt{x}dx$, $\int e^{-3x}\cos\frac{x}{4}dx$, $\int(x-1)\ln xdx$.

2.28 $\int(x^2-7x)\sin 4xdx$, $\int\sqrt{4x^2-1}dx$, $\int\cos x\,shxdx$, $\int x\,arctg 4xdx$.

2.29 $\int\arccos\frac{x}{4}dx$, $\int(x^2+6x)\sin 5xdx$, $\int\cos\ln xdx$, $\int x^2\ln(x-1)dx$.

2.30 $\int(x^2-2)e^{-2x+1}dx$, $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}dx$, $\int\cos x\,shxdx$, $\int\sqrt{3x^2+8}dx$.

2.31 $\int(x^2+5)\sin\frac{x}{3}dx$, $\int x^3e^{2x^2-3}dx$, $\int\sqrt{x^2-8}dx$, $\int\cos sh3xdx$.

2.32 $\int(2x^2-7)e^{-4x}dx$, $\int x\,arctg 4xdx$, $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$, $\int e^{-7x}\cos\frac{x}{2}dx$.

2.33 $\int x^3e^{-3x^2}dx$, $\int x^2 arctg 2xdx$, $\int\sqrt{6x^2-5}dx$, $\int\sin 2x\,shxdx$.

2.34 $\int(x^2-6x)\sin 2xdx$, $\int\arccos 5xdx$, $\int e^{-4x}\cos 7xdx$, $\int\sqrt{5x^2+4}dx$.

2.35 $\int(x^2-5)e^{-6x}dx$, $\int x^2\ln(x-2)dx$, $\int ch2x\sin xdx$, $\int x^2 arctg xdx$.

2.36 $\int(1-4x^2)\cos\frac{x}{4}dx$, $\int\arcsin 4xdx$, $\int\sqrt{5x^2+2}dx$, $\int e^{-\frac{x}{3}}\cos\frac{x}{2}dx$.

2.37 $\int(x^2-2x)\cos 7x dx$, $\int x\,arctg\frac{x}{4}dx$, $\int\sqrt{x^2+9}dx$, $\int\cos\ln 4x dx$.

2.38 $\int(2x-x^2)e^{-3x+4}dx$, $\int\arcsin 7x dx$, $\int\cos 2x\,sh x dx$, $\int\sqrt{3x^2-7}dx$.

2.39 $\int(3-5x^2)\sin\frac{x}{6}dx$, $\int\sqrt{x^2+14}dx$, $\int\arccos 6x dx$, $\int e^x\sin\frac{x}{9}dx$.

2.40 $\int(5-3x^2)e^{-3x+1}dx$, $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}dx$, $\int\sin 3x\,ch x dx$, $\int x^2\ln(x-4)dx$.

2.41 $\int(7-x^2)e^{\frac{x}{3}}dx$, $\int x^2\ln(x+3)dx$, $\int\cos\ln 6x dx$, $\int x^2 arctg 6x dx$.

2.42 $\int(3x-2x^2)e^{-4x}dx$, $\int e^{3x}\cos 8x dx$, $\int\arcsin 7x dx$, $\int\sqrt{5x^2+2}dx$.

2.43 $\int(3x-4x^2)\sin\frac{x}{7}dx$, $\int\sqrt[3]{x}\ln x dx$ $\int x^2 arctg\frac{x}{3}dx$, $\int\sin\ln\frac{x}{2}dx$.

2.44 $\int(6x^2-1)\cos 8x dx$, $\int x^3\ln(x-2)dx$, $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$, $\int e^{-3x}\sin 8x dx$.

2.45 $\int(x^2+2x)e^{-3x}dx$, $\int ch x\cos 3x dx$, $\int arctg 9x dx$, $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$.

2.46 $\int(x^2-3)\sin(3x-1)dx$, $\int e^{-3x}\cos\frac{x}{6}dx$, $\int\sqrt{3x^2+5}dx$, $\int x^3\ln(x+7)dx$.

2.47 $\int(x^2-5x)\sin\frac{x}{4}dx$, $\int e^{-x}\cos 5x dx$; $\int x^2\ln(2x-1)dx$, $\int\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1+2x}}dx$.

2.48 $\int(x-4x^2)e^{-\frac{x}{5}}dx$, $\int\sin 3x\,sh x dx$, $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}dx$, $\int\sqrt{x^2+20}dx$.

2.49 $\int(x^2-4)\cos(3x-2)dx$, $\int e^{-4x}\cos x dx$, $\int\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-2x}}dx$, $\int x^2\ln(x-3)dx$.

2.50 $\int(3x^2-x)e^{-x}dx$, $\int\sin 2x\,sh 3x dx$, $\int\sqrt{x^2+15}dx$, $\int\frac{\arccos 3x}{\sqrt{1+3x}}dx$.

Задача 3. Знайти невизначені інтеграли.

3.1 $\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$, $\int\frac{1-2x+4x^4}{x^3-5x^2+4x}dx$,

$\int \frac{x^2-5x+1}{x^3+2x^2-4x-8}dx,$ $\int \frac{3x+20}{(x+1)(x^2+10x+26)}dx.$

3.2 $\int \frac{1-4x}{x^2+4x+5}dx,$ $\int \frac{x^4-3x+2}{x^3-4x^2+4x}dx,$

$\int \frac{2x+5}{x^3+2x^2-16x+32}dx,$ $\int \frac{(2x-7)\,dx}{(x-1)(x^2-4x+8)}.$

3.3 $\int \frac{2x-3}{1-2x-x^2}dx,$ $\int \frac{3x^3-4x+1}{x^3-3x^2+2x}dx,$

$\int \frac{x+5}{(x-1)(x^2+2x-3)}dx,$ $\int \frac{8x+34}{(x+2)(x^2+6x+10)}dx.$

3.4 $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+7}dx,$ $\int \frac{x^4+3x-1}{x^3-5x^2+6x}dx,$

$\int \frac{x^2+5}{(x-1)(x^2-1)}dx,$ $\int \frac{7x+37}{(x-4)(x^2+8x+17)}dx.$

3.5 $\int \frac{x-3}{x^2-2x+9}dx,$ $\int \frac{2x^3+4x-1}{x^3-4x^2+3x}dx,$

$\int \frac{(2x^2-3)}{(x-4)(x^2-x-12)}dx$ $\int \frac{34+8x}{(x+2)(x^2+10x+26)}dx.$

3.6 $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-11}dx,$ $\int \frac{1-2x+3x^3}{x^3-3x^2-4x}dx,$

$\int \frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+4x+3)}dx,$ $\int \frac{7x-7}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx.$

3.7 $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+10}dx,$ $\int \frac{3x^2+x^3+1}{x^3-x}dx,$

$\int \frac{3x-1}{x^3-2x^2}dx,$ $\int \frac{-2x+2}{(x+2)(x^2-2x+2)}dx.$

3.8 $\int \frac{2x-1}{x^2+4x+18}dx,$ $\int \frac{1-2x+4x^3}{4x-x^3}dx,$

$\int\frac{2x-1}{x^3-x^2}dx,$

$\int\frac{2x-5}{(x+2)(x^2+6x+10)}dx.$

3.9 $\int\frac{3x+4}{x^2-4x+10}dx,$

$\int\frac{x^3-x+6}{x^3-9x}dx,$

$\int\frac{3x^2+x+1}{(x^2-1)^2}dx,$

$\int\frac{2x+11}{(x+1)(x^2+8x+17)}dx.$

3.10 $\int\frac{x-2}{x^2-4x+1}dx,$

$\int\frac{3x^3-1}{x^3-4x}dx,$

$\int\frac{x^2+2x-2}{(x+1)(x^2+x)}dx,$

$\int\frac{4x-6}{(x+4)(x^2-2x+2)}dx.$

3.11 $\int\frac{2x-3}{x^2-6x+10}dx,$

$\int\frac{x^4-3x}{(x^2-4)(x+1)}dx,$

$\int\frac{x^2-3}{(x-1)^3(x+2)}dx,$

$\int\frac{-5x+8}{(x+5)(x^2+2x+2)}dx.$

3.12 $\int\frac{x-1}{x^2+2x-7}dx,$

$\int\frac{x^3-x+1}{(x^2-1)(x+3)}dx,$

$\int\frac{xdx}{(x-1)(x+2)^2},$

$\int\frac{4x+14}{(x-3)(x^2+4x+13)}dx.$

3.13 $\int\frac{x+3}{x^2-4x+5}dx,$

$\int\frac{x^3-1}{(x^2-9)(x+2)}dx.$

$\int\frac{2x+3}{x^4+2x^3}dx,$

$\int\frac{6x+32}{(x-3)(x^2-8x+17)}dx.$

3.14 $\int\frac{2x-5}{x^2-2x+10}dx,$

$\int\frac{2x^3-3}{(x^2-1)(x+3)}dx,$

$\int\frac{x^2+1}{x^4-2x^3}dx,$

$\int\frac{6x-5}{(x+1)(x^2-2x+17)}dx.$

3.15 $\int \frac{2x}{x^2+4x+13}dx,$ $\int \frac{x^3-3x+5}{x^3-5x^2-6x}dx,$

$\int \frac{6x^2-4x+3}{(x-2)(x^2-7x+10)}dx,$ $\int \frac{8-3x}{(x+1)(x^2-4x+5)}dx.$

3.16 $\int \frac{x+2}{x^2-8x+14}dx,$ $\int \frac{1+2x^3}{x^3-3x^2+2x}dx,$

$\int \frac{2x-7}{(x-2)(x^2+x-6)}dx,$ $\int \frac{8x+42}{(x-5)(x^2+8x+17)}dx.$

3.17 $\int \frac{2x+1}{x^2-8x+17}dx,$ $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x},$

$\int \frac{3x^4+2x}{(x^2-1)^2}dx,$ $\int \frac{4-5x}{(x+1)(x^2-10x+26)}dx.$

3.18 $\int \frac{2x-5}{x^2-4x+15}dx,$ $\int \frac{x^3+6}{x^3-x}dx,$

$\int \frac{3-x^2}{(x+2)^2(x-4)}dx,$ $\int \frac{9x+56}{(x-5)(x^2-10x+26)}dx.$

3.19 $\int \frac{3x+8}{x^2-4x+5}dx,$ $\int \frac{2x^3-4x+3}{x^3+x^2-6x}dx.$

$\int \frac{x^2+x-3}{x^3-4x^2}dx,$ $\int \frac{2x^2-3x}{(x-3)(x^2+4x+8)}dx.$

3.20 $\int \frac{5x-2}{x^2-2x+26}dx,$ $\int \frac{2x^3-3}{x^3+2x^2-2x}dx,$

$\int \frac{2x^2+3x+4}{x^3+4x^2}dx,$ $\int \frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+4)}dx.$

3.21 $\int \frac{3x-4}{x^2+2x+2}dx,$ $\int \frac{3x^3-1}{x^3+3x^2+2x}dx,$

$\int \frac{x^2+3}{(x+1)(x^2+x)}dx,$ $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-3)(x^2+2x+10)}dx.$

3.22 $\int\frac{x+5}{x^2-4x+8}dx,$ $\int\frac{2x^3+3}{x^3-x^2-2x}dx,$

$\int\frac{2x+4}{(x-1)(x^2-x)}dx,$ $\int\frac{3x^2+24}{(x-1)(x^2-4x+5)}dx.$

3.23 $\int\frac{x-4}{x^2-2x+26}dx,$ $\int\frac{2x^3-5}{x^3-3x^2+2x}dx,$

$\int\frac{x^2+5}{(x+1)^3(x-1)}dx,$ $\int\frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x^2+2x+2)}dx.$

3.24 $\int\frac{3x+4}{x^2+2x+17}dx,$ $\int\frac{2x^3-1}{x^3-x^2-2x}dx,$

$\int\frac{x^2+1}{x^3+x^2}dx,$ $\int\frac{x^2+3}{(x+2)(x^2+4x+5)}dx.$

3.25 $\int\frac{x+6}{x^2-6x+25}dx,$ $\int\frac{x^3+4}{x^3-3x^2+2x}dx,$

$\int\frac{2x-3}{(x-1)^2(x-4)}dx,$ $\int\frac{x^2-3x+7}{(x-1)(x^2-2x+26)}dx.$

3.26 $\int\frac{2x-7}{x^2-4x+20}dx,$ $\int\frac{x^3-5x+2}{x^3+3x^2+2x}dx,$

$\int\frac{2x^2-3x}{(x-1)^3(x-2)}dx,$ $\int\frac{x^2-3x+3}{(x+1)(x^2-2x+10)}dx.$

3.27 $\int\frac{3x-8}{x^2-10x+26}dx,$ $\int\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}dx,$

$\int\frac{dx}{x^4-1},$ $\int\frac{5x^3+2}{x^3-4x^2+5x}dx.$

3.28 $\int\frac{x+2}{x^2-6x+25}dx,$ $\int\frac{3x^2-x^3+1}{x^3-4x^2+3x}dx,$

$\int\frac{x^2-3x}{(x^2-4)(x+3)^2}dx,$ $\int\frac{2x+7}{x^4+2x^2}dx.$

3.29 $\int\frac{3x+8}{x^2-2x+3}dx,$ $\int\frac{x^4-7x}{x^4-4}dx,$

$\int\frac{dx}{x^3-1},$ $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x+2)}dx.$

3.30 $\int\frac{x+7}{x^2+4x+10}dx,$ $\int\frac{x^3-2x}{(x+3)(x^2-3x+2)}dx,$

$\int\frac{4x^2-3x+1}{(x-1)^2(x+3)}dx,$ $\int\frac{3x^2-4x+5}{(x+1)^2(x^2+4)}dx.$

3.31 $\int\frac{3+x}{x^2-6x-10}dx,$ $\int\frac{4x^3+1}{x^3-x}dx,$

$\int\frac{3x^2+x-1}{(x^2-1)^2}dx,$ $\int\frac{x^2-1}{(x+2)^2(x^2+1)}dx.$

3.32 $\int\frac{2-x}{x^2-8x+8}dx,$ $\int\frac{2x^3-3}{x^3+4x}dx,$

$\int\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x+2)^2}dx,$ $\int\frac{3x-4}{x^3-6x^2+10x}dx.$

3.33 $\int\frac{3x-7}{x^2-6x+10}dx,$ $\int\frac{x^3-5x+1}{x^3-4x}dx,$

$\int\frac{x^2-1}{(x-3)(x+2)}dx,$ $\int\frac{3x^2-x+4}{x^3-2x^2+2x}dx.$

3.34 $\int\frac{2x+7}{x^2-2x+5}dx,$ $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx,$

$\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x+2)}dx,$ $\int\frac{2x-5}{x^2-2x^2+10x}dx.$

3.35 $\int\frac{4-x}{x^2+2x+6}dx,$ $\int\frac{3x^3-4}{x^3-4x^2+3x}dx,$

$\int\frac{x^2-3}{x^4+3x^2}dx,$ $\int\frac{x-1}{x^2(x+1)^2}dx.$

3.36 $\int\frac{4-3x}{x^2+8x+1}dx,$ $\int\frac{7x^2-4x+1}{(x^2+3)(x^2-2x+1)}dx,$

$\int\frac{2x^3-4}{x^3-9x}dx,$ $\int\frac{3x^2+x+1}{x^3-2x^2+2x-4}dx.$

3.37 $\int\frac{5-2x}{x^2-4x+7}dx,$ $\int\frac{3x^4-1}{x^4-2x^3}dx,$

$\int\frac{x^2-3x}{(x^2-4)(x^2+2x+1)}dx,$ $\int\frac{x^2-3x+1}{x^4+3x^2-4}dx.$

3.38 $\int\frac{4-2x}{x^2+6x+10}dx,$ $\int\frac{x^3-3x^2+1}{x^3-x^2-2x}dx,$

$\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x+2)^2},$ $\int\frac{2x^2-1}{x^3-x^2+4x-4}dx.$

3.39 $\int\frac{1-4x}{x^2-2x+4}dx,$ $\int\frac{x^3-4x+1}{(x+2)(x-2)^3}dx,$

$\int\frac{4x^3+x-2}{x^3-4x}dx.$ $\int\frac{3x-4}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx.$

3.40 $\int\frac{1-3x}{x^2+2x+8}dx,$ $\int\frac{3x^3-1}{x^3+4x}dx,$

$\int\frac{x+3}{x^4-8x^2+16}dx,$ $\int\frac{2x-11}{(x^4-1)x}dx.$

3.41 $\int\frac{2-3x}{x^2+8x-2}dx,$ $\int\frac{x^3-2x}{(x^2-4)(x+1)}dx,$

$\int\frac{x+1}{x^4+2x^2}dx,$ $\int\frac{3-x^2}{x^3+2x^2+5x}dx.$

3.42 $\int\frac{3-4x}{x^2+2x-7}dx,$ $\int\frac{x^3+4}{4x^3-4x}dx,$

$\int \frac{x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx,$ $\int \frac{(3-x^2)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$

3.43 $\int \frac{2x-1}{3-4x-x^2}dx,$ $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-1)(x-4)}dx,$

$\int \frac{x^3-x+2}{(x+2)x^3}dx,$ $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx.$

3.44 $\int \frac{1-5x}{x^2-4x+5}dx,$ $\int \frac{x^4-3x^2-4}{x^3+x^2-2x}dx,$

$\int \frac{2x^2+6x-5}{(x+2)(x+1)^2}dx,$ $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)(x^2+3)}dx,$

3.45 $\int \frac{3-5x}{x^2-2x+10}dx,$ $\int \frac{x^5-2x^2+4}{x^3-4x}dx,$

$\int \frac{2x^3+2x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}dx,$ $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx.$

3.46 $\int \frac{2+5x}{x^2-2x-6}dx,$ $\int \frac{x^4+2x^2+6}{x^3-3x^2+2x}dx,$

$\int \frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}dx,$ $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

3.47 $\int \frac{7x-3}{x^2+4x-9}dx,$ $\int \frac{3x^4-2}{x^3-x}dx,$

$\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}dx,$ $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx.$

3.48 $\int \frac{7x+2}{x^2-2x+17}dx,$ $\int \frac{5x^3+2x^2+4}{x(x^2-4)}dx,$

$\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^2}dx,$ $\int \frac{4x^2-3x}{(x-1)(x^2-4x+20)}dx.$

3.49 $\int \frac{x-7}{x^2-4x+17}dx,$ $\int \frac{x^3+2x-2}{(x^2-1)(x+3)}dx,$

$\int \frac{2x^3+x+1}{x^4+x^3}dx,$ $\int \frac{2x^2-11}{(x+1)(x^2+4x+20)}dx.$

3.50 $\int \frac{4x+1}{x^2-6x+34}dx,$ $\int \frac{x^5-1}{(x^2-4)x}dx,$

$\int \frac{x^2-3x+4}{(x-1)(9x+1)^3}dx,$ $\int \frac{2x-5}{x^3-6x^2+10x}dx.$

Задача 4. Знайти інтеграли.

4.1 $\int \sin 2x \cdot \cos 10x dx,$ $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx,$ $\int \cos^6 \frac{x}{4}dx,$

$\int \frac{dx}{3-\sin x+5\cos x},$ $\int \frac{dx}{\cos^6 2x}.$

4.2 $\int \cos 3x \cdot \cos 8x dx,$ $\int \frac{\cos^3 2x dx}{\sin^4 2x},$ $\int \sin^6 \frac{x}{2}dx,$

$\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x+\cos^2 x},$ $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

4.3 $\int \sin x \cdot \cos 9x dx,$ $\int \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\cos^4 \frac{x}{2}}dx,$ $\int \sin^4 \frac{x}{3}dx,$

$\int \frac{dx}{4-\sin x+5\cos x},$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$

4.4 $\int \sin 4x \cdot \sin 7x dx,$ $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^8 x},$ $\int \sin^4 \frac{x}{2}dx,$

$\int \frac{dx}{3-2\cos x},$ $\int \frac{dx}{\cos^4 3x}.$

4.5 $\int \sin\frac{x}{2}x\cdot\sin\frac{7x}{2}dx,$ $\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos^5 x},$ $\int\sin^4 3xdx,$

$\int\frac{dx}{1-5\sin^2 x+3\cos^2 x},$ $\int\frac{dx}{\cos^6 2x}.$

4.6 $\int\cos\pi x\cdot\cos 2\pi xdx,$ $\int\frac{\cos^3 3xdx}{\sin^4 3x},$ $\int\cos^4\frac{x}{3}dx,$

$\int\frac{dx}{1-4\cos^2 x},$ $\int\frac{\sin^2 dx}{\cos^4 x}.$

4.7 $\int\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{9x}{2}dx,$ $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx,$ $\int\sin^6 2xdx,$

$\int\frac{dx}{\sin x-3\cos x},$ $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}.$

4.8 $\int\cos x\cdot\cos 6xdx,$ $\int\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}dx,$ $\int\cos^4\frac{x}{4}dx,$

$\int\frac{dx}{1-3\cos x},$ $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx.$

4.9 $\int\sin 4x\cdot\cos 8xdx,$ $\int\sin^3 4x\cdot\cos^2 4xdx,$ $\int\cos^6 2xdx,$

$\int\frac{dx}{2+\sin x,}$ $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx.$

4.10 $\int\cos 3x\cdot\sin 2xdx,$ $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx,$ $\int\cos^4 3xdx,$

$\int\frac{dx}{2-\sin x+3\cos x},$ $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx.$

4.11 $\int\sin x\cdot\cos 7xdx,$ $\int\cos^3 x\cdot\sin^6 xdx,$ $\int\sin^6 2xdx,$

$\int\frac{dx}{2-\sin^2 x},$ $\int\frac{\cos^2 2x}{\sin^4 2x}dx.$

4.12 $\int\sin 2x\cdot\cos 8xdx,$ $\int\sin^3 4xdx,$ $\int\cos^4 4xdx,$

$\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$, $\int \frac{\sin^2 2x}{\cos^6 2x}dx$.

4.13 $\int \sin 3x \cdot \cos 7x dx$, $\int \sin^3 3x \cdot \cos^2 3x dx$, $\int \sin^6 x dx$,

$\int \frac{dx}{4-\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^4 2x}$.

4.14 $\int \sin 2x \cdot \sin 6x dx$, $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin^4 2x}dx$, $\int \cos^4 2x dx$,

$\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x}$, $\int \frac{dx}{\sin^4 \frac{x}{2}}$.

4.15 $\int \cos x \cdot \sin 7x dx$, $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 2x dx$, $\int \sin^4 \frac{x}{5} dx$,

$\int \frac{dx}{3+4\cos x}$, $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$.

4.16 $\int \cos x \cdot \cos 5x dx$, $\int \frac{\sin^3 3x}{\cos^4 3x}dx$, $\int \cos^4 \frac{x}{5} dx$,

$\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x}$, $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$.

4.17 $\int \cos 2x \cdot \sin 7x dx$, $\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx$, $\int \sin^4 5x dx$,

$\int \frac{dx}{3-4\sin x+2\cos x}$, $\int \frac{dx}{\cos^4 \frac{x}{3}}$.

4.18 $\int \sin \pi x \cdot \cos 2\pi x dx$, $\int \cos^3 \pi x dx$, $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} dx$,

$\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{\sin^4 6x}$.

4.19 $\int \sin 2x \cdot \sin 8x dx$, $\int \sin^5 \pi x dx$, $\int \cos^4 7x dx$,

$\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^4 \pi x}$.

4.20 $\int \sin \pi x \cdot \sin 5\pi x dx$, $\int \frac{\cos^3 \frac{x}{2}}{1-\cos x} dx$, $\int \sin^4 8x dx$,

$\int \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x}$, $\int \frac{dx}{\sin^4 \frac{x}{3}}$.

4.21 $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5}{2} x dx$, $\int \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\cos^4 \frac{x}{2}} dx$, $\int \cos^4 \frac{\pi}{2} x dx$,

$\int \frac{dx}{3-8\cos x}$, $\int \frac{dx}{\sin^6 3x}$.

4.22 $\int \cos x \cdot \sin 5x dx$, $\int \frac{\cos^3 \pi x}{\sin^2 \pi x} dx$, $\int \cos^6 4x dx$,

$\int \frac{dx}{3\cos x - 2}$, $\int \frac{\sin^2 3x dx}{\cos^6 3x}$.

4.23 $\int \cos 2x \cdot \cos 8x dx$, $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin 2x} dx$, $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$,

$\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$, $\int \frac{dx}{\cos^4 7x}$.

4.24 $\int \sin 3x \cdot \sin 15x dx$, $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos 2x} dx$, $\int \sin^6 6x dx$,

$\int \frac{dx}{3-\sin x - 4\cos x}$, $\int \frac{dx}{\sin^4 5x}$.

4.25 $\int \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \cos \frac{9\pi x}{2} dx$, $\int \cos^5 \frac{x}{2} dx$, $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$,

$\int \frac{dx}{3-\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^6 \pi x}$.

4.26 $\int \cos 2x \cdot \cos 14x dx$, $\int \sin^3 \frac{\pi}{2} dx$, $\int \sin^6 5x dx$,

$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\sin^8 x}$.

4.27 $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\sin 2x dx$, $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x dx$, $\int \sin^4\frac{\pi x}{3}dx$,

$\int \frac{dx}{4-\cos^2 x+\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$.

4.28 $\int \sin 12x\cdot\cos 7x dx$, $\int \sin^2 x\cdot\cos^3 x dx$, $\int \cos^2 2x\cdot\sin^2 2x dx$,

$\int \frac{dx}{3-\sin x}$, $\int \frac{dx}{\sin^6 3x}$.

4.29 $\int \cos 3x\cdot\cos 15x dx$, $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$, $\int \cos^4 10x dx$,

$\int \frac{dx}{5-4\sin x+\cos x}$, $\int \frac{dx}{\sin^8 x}$.

4.30 $\int \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx$, $\int \cos^3 4x dx$, $\int \sin^2 3x\cdot\cos^2 3x dx$,

$\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^8 3x}$.

4.31 $\int \cos 3x\cdot\cos 12x dx$, $\int \sin^5\frac{x}{2}dx$, $\int \sin^6 3x dx$,

$\int \frac{dx}{3\cos^2 x-\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{\sin^6 4x}$.

4.32 $\int \cos x\cdot\sin 16x dx$, $\int ctg^3 x dx$, $\int \sin^4\frac{x}{5}dx$,

$\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$, $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$.

4.33 $\int \sin 5x\cdot\cos 7x dx$, $\int \sin^5 7x dx$ $\int x\cdot\cos^4 x^2 dx$,

$\int \frac{dx}{3-2\cos^2 x-\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{\sin^8 3x}$.

4.34 $\int \cos 7x\cdot\cos 3x dx$, $\int \sin^3 x\cdot\cos^6 x dx$, $\int \sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{4}dx$,

$\int \frac{dx}{4-\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^8 2x}$.

4.35 $\int \sin 3x\cdot\sin 12x dx$, $\int \cos^3 x\cdot\sin^5 x dx$, $\int x^2\sin^4 x^3 dx$,

$\int \frac{dx}{3\sin^2 x - \cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^4 \frac{x}{3}}$.

4.36 $\int \sin 3x \cdot \cos 11x dx$, $\int \sin^3 x \cdot \cos^6 x dx$, $\int \sin^4 6x dx$,

$\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$, $\int \frac{dx}{\cos^6 \frac{x}{4}}$.

4.37 $\int \sin 3x \cdot \sin 13x dx$, $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x dx$, $\int \cos^6 \frac{x}{2} x dx$,

$\int \frac{dx}{4 - 3\sin 2x}$, $\int \frac{dx}{\sin^4 3x}$.

4.38 $\int \sin 4x \cdot \cos 6x dx$, $\int \cos^5 x \cdot \sin^4 x dx$, $\int \sin^4 \frac{x}{4} dx$,

$\int \frac{dx}{3 - 5\cos x} dx$, $\int \frac{dx}{\sin^8 4x}$.

4.39 $\int \sin 10x \cdot \sin 2x dx$, $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$, $\int \sin^2 4x \cdot \cos^2 4x dx$,

$\int \frac{dx}{1 + tgx}$, $\int \frac{dx}{\cos^6 \frac{x}{2}}$.

4.40 $\int \sin 7x \cdot \cos 9x dx$, $\int \cos^7 x dx$, $\int tg^4 x dx$,

$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\sin^4 9x}$.

4.41 $\int \sin 6x \cdot \cos 2x dx$, $\int \sin^5 3x dx$, $\int \cos^6 4x dx$,

$\int \frac{dx}{6 - 5\cos x}$, $\int \frac{tg^2 x dx}{\cos^4 x}$.

4.42 $\int \sin 2x \cdot \sin 3x dx$, $\int \sin^7 x dx$, $\int ctg^4 x dx$,

$\int \frac{dx}{3\sin x - 5\cos x + 4}$, $\int \frac{tg^2 x dx}{\cos^6 x}$.

4.43 $\int \sin x \cdot \cos 9x dx$, $\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx$, $\int x \cdot \cos^4 \left(x^2 - 1\right) dx$,

$\int \frac{dx}{5-3\cos^2 x}$, $\int \frac{ctg^2 x dx}{\sin^4 x}$.

4.44 $\int \cos 2x \cdot \cos 3x dx$, $\int \cos^3 x \cdot \sin^8 x dx$, $\int x \cdot \sin^4 \left(x^2+1\right) dx$,

$\int \frac{dx}{7-2\cos x}$, $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}$.

4.45 $\int \sin 5x \cdot \sin x dx$, $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx$, $\int x^2 \cdot \cos^4 \left(3x^3-1\right) dx$,

$\int \frac{dx}{5-3\sin x}$, $\int \frac{tg^4 x dx}{\cos^4 x}$.

4.46 $\int \sin 5x \cdot \cos 11x dx$, $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} dx$, $\int tg^4 2x dx$,

$\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \cos^2 x}$, $\int \frac{tg^4 x dx}{\cos^6 x}$.

4.47 $\int \cos 5x \cdot \cos 14x dx$, $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x} dx$, $\int \cos^6 7x dx$,

$\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 1}$, $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^8 x}$.

4.48 $\int \cos 6x \cdot \sin 2x dx$, $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$, $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx$,

$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 1}$, $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^8 x}$.

4.49 $\int \cos 7x \cdot \cos 11x dx$, $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$, $\int \cos^6 \frac{x}{2} dx$,

$\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$, $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^6 x}$.

4.50 $\int \sin 8x \cdot \cos 6x dx$, $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx$, $\int \sin^6 5x dx$,

$\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$, $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x}$.

Задача 5. Знайти невизначені інтеграли.

5.1 $\int\frac{x-3}{\sqrt{x+3}}dx$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

5.2 $\int\frac{3x-2}{\sqrt{2x+1}}dx$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x}}$, $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{4x+\sqrt{x}}dx$.

5.3 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+10}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$, $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx$.

5.4 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+4}-1}$, $\int\frac{x+2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$, $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

5.5 $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x-6}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$, $\int\sqrt{16-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}dx}{6+\sqrt{x}}$.

5.6 $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$, $\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$, $\int\frac{\sqrt{x+1}dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

5.7 $\int\frac{x+4}{\sqrt{x-1}}dx$, $\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x-1}}$, $\int\sqrt{4x+x^2-3}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$.

5.8 $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-1}}$, $\int\frac{3x+2}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{5-x^2}}$, $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

5.9 $\int\frac{x-1}{x\sqrt{x+1}}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

5.10 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x-8}}$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}$, $\int\sqrt{5-x^2-4x}dx$, $\int\frac{\sqrt{x+2}}{4+\sqrt[3]{x+2}}dx$.

5.11 $\int\frac{dx}{1-\sqrt{x+2}}$, $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x-2x-x^2}}dx$, $\int\sqrt{10x-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$.

5.12 $\int\frac{(x-3)dx}{\sqrt{x-4}}$, $\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x}}dx$, $\int\sqrt{6x-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{4+\sqrt{x}}dx$.

5.13 $\int x\sqrt{x+4}dx$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{4-2x+x^2}}$, $\int\sqrt{x^2+6x+10}dx$, $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{4+\sqrt[4]{x+1}}dx$.

5.14 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+4x^2+3}}$, $\int\sqrt{6x-x^2-5}dx$, $\int\frac{\sqrt{x+1}}{8+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

5.15 $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$, $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin^2 x-2\sin x+2}}$, $\int\sqrt{4x-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt{x}-1}{4+\sqrt[3]{x}}dx$.

5.16 $\int\frac{1+x}{2+\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4e^x+5}}$, $\int\sqrt{2x-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt{x+3}}{4+\sqrt[3]{x+3}}dx$.

5.17 $\int\frac{2x-3}{\sqrt{x-2}}dx$, $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx$, $\int\sqrt{8-2x-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}+3}{1-\sqrt{x}}dx$.

5.18 $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-2}}$, $\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, $\int\sqrt{x-x^2}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$,

5.19 $\int\frac{x-4}{x\sqrt{x+2}}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x-x^2}}$, $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt{x}dx}{4\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

5.20 $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x-3}}dx$, $\int\frac{2x-5}{\sqrt{x^2+2x+7}}dx$, $\int\sqrt{2x-x^2+4}dx$, $\int\frac{\sqrt{x}-2}{4-\sqrt[3]{x}}dx$.

5.21 $\int\frac{2x+5}{x\sqrt{x+2}}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-3}}$, $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

5.22 $\int\frac{x-3}{\sqrt[3]{x+2}}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{6x-8-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}dx$.

5.23 $\int\frac{dx}{4-\sqrt{x}}$, $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+5}}$, $\int\sqrt{8+2x-x^2}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$.

5.24 $\int\frac{x-3}{x\sqrt{x+5}}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{3+4x-x^2}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$, $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-x}$.

5.25 $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

5.26 $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$, $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$, $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$.

5.27 $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$, $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$, $\int\sqrt{4x-x^2}dx$.

5.28 $\int\frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$, $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$.

5.29 $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-2x+1}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$, $\int\frac{\sqrt{x}+1}{4+\sqrt[3]{x}}dx$.

5.30 $\int\sqrt[3]{x-1}dx$, $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}}$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}-2}{1+\sqrt{x}}dx$.

5.31 $\int(2-x)\sqrt{x-3}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$, $\int\frac{\sqrt{x-2}}{9+\sqrt[3]{x-2}}dx$.

5.32 $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x-5}}$, $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$, $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt{x+4}-3}{2+\sqrt[4]{x+4}}dx$.

5.33 $\int\frac{(1-x)dx}{\sqrt{x+4}}$, $\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x+6}}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}-2}{3+\sqrt[2]{x}}dx$.

5.34 $\int\frac{dx}{4+\sqrt{x}}$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-4x-1}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-9}}$, $\int\frac{\sqrt{x}dx}{4-\sqrt[3]{x}}$.

5.35 $\int\frac{dx}{1-\sqrt{x-3}}$, $\int\frac{(2-x)dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}dx}{1-\sqrt{x}}$.

5.36 $\int\frac{(1-x)dx}{\sqrt{x-4}}$, $\int\frac{(2-x)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, $\int\sqrt{1-2x-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x-1}+5}{4+\sqrt{x-1}}dx$.

5.37 $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-2}}$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x+1}}$, $\int\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x+4}}{1+\sqrt{x+4}}dx$.

5.38 $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x+2}}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x}}$, $\int\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$, $\int\frac{\sqrt{x-3}}{4-\sqrt[3]{x-3}}dx$.

5.39 $\int x\sqrt{x-1}dx$, $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin^2x-4\sin x+8}}$, $\int\sqrt{10-2x-x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

5.40 $\int\frac{3x+1}{\sqrt{x+2}}dx$, $\int\frac{3x-2}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$, $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}$, $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-4}dx$.

5.41 $\int\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx$, $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x}}$, $\int\sqrt{(4-x^2)^3}\,dx$, $\int\frac{\sqrt{x+1}}{4-\sqrt[3]{x+1}}dx$.

5.42 $\int\frac{3x-4}{\sqrt{x-2}}dx$, $\int\frac{(2-x)dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+16)^3}}$, $\int\frac{\sqrt[4]{x-1}}{4+\sqrt{x-1}}dx$.

5.43 $\int\frac{x-2}{\sqrt{x+3}}dx$, $\int\frac{(4-3x)dx}{\sqrt{8-4x-x^2}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-16}}$. $\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$.

5.44 $\int\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{7x^2-2x-1}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+25)^3}}$, $\int\frac{\sqrt{x-2}}{4-\sqrt[3]{x-2}}dx$.

5.45 $\int\frac{2-3x}{\sqrt{x-1}}dx$, $\int\frac{3-x}{\sqrt{x^2-2x+8}}dx$, $\int\sqrt{(9-x^2)^3}\,dx$, $\int\frac{\sqrt{x+1}}{4+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

5.46 $\int\frac{4-x}{\sqrt{x+2}}dx$, $\int\frac{2-5x}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx$, $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{16-x^2}}$, $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{9+\sqrt{x}}dx$.

5.47 $\int\frac{4-3x}{\sqrt{x+3}}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+2x+1}}$, $\int\sqrt{7-6x-x^2}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x-2}}$.

5.48 $\int\frac{1-2x}{\sqrt{4-x}}dx$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$, $\int\sqrt{(16-x^2)^3}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}$.

5.49 $\int\frac{3x-2}{\sqrt{1-2x}}dx$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{3x+4x^2-1}}$, $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx$, $\int\frac{\sqrt[4]{x+2}}{4-\sqrt{x+2}}dx$.

5.50 $\int\frac{4-x}{\sqrt{x+3}}dx$, $\int\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-6x+25}}dx$, $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{25-x^2}}$, $\int\frac{\sqrt{x-3}}{4+\sqrt[3]{x-3}}dx$.

Література

1. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1,2. – М.: Высшая школа, 1978.
2. Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики. Ч.1,2. – М.: Высшая школа 1973.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Ч. 1,2. – М.: Наука, 1985.
4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
5. Сборник задач по курсу высшей математики. Под редакцией Кручковича Г.И. – М.: Высшая школа, 1973.
6. Кудрін Б.Г., Ребедайло В.М., Педорченко Л.І. Конспект лекцій з математичного аналізу. – Вінниця: ВПІ, 1991.
7. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996.
8. Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В.М. Высшая математика, – К.: Вища школа, 1987.
9. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 – х ч. М.: Высшая школа, 1986.

Навчальне видання

Василь Парфенович Литвинюк

Інтегральне числення

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором
Редактор О.Д.Скалоцька

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 25.05.04 р.
Формат 29,7x42 1/4
Друк різографічний
Тираж 75 прим
Зам. № 2004-94

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 4.91

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95