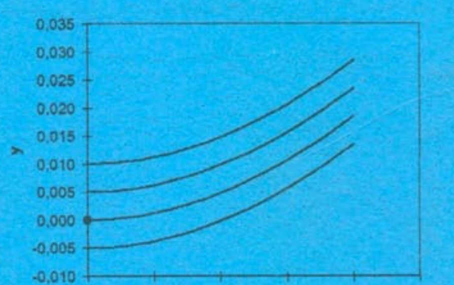
В.В. Мотигін, А.В. Дудатьєв

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Частина 2 Чисельні методи в електронних таблицях

	C	D	E	F	G	H
1						
2	u(x)	u(x)	u(x)			
3	=B3+0,005	=C3+0,005	=B3-0,005			
4	=B4+0,005	=C4+0,005	=B4-0,005			
5	=B5+0,005	=C5+0,005	=B5-0,005			
6	=B6+0,005	=C6+0,005	=B6-0,005			
7	=B7+0,005	=C7+0,005	=B7-0,005			
8	=B8+0,005	=C8+0,005	=B8-0,005			
9	=B9+0,005	=C9+0,005	=B9-0,005			
10	=B10+0,005	=C10+0,005	=B10-0,005			
11	=B11+0,005	=C11+0,005	=B11-0,005			
12	=B12+0,005	=C12+0,005	=B12-0,005			
13	=B13+0,005	=C13+0,005	=B13-0,005			
14	=B14+0,005	=C14+0,005	=B14-0,005			
15	=B15+0,005	=C15+0,005	=B15-0,005			
16	=B16+0,005	=C16+0,005	=B16-0,005			
17	=B17+0,005	=C17+0,005	=B17-0,005			



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.В. Мотигін, А.В. Дудатьєв

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Частина 2 Чисельні методи в електронних таблицях

Затверджено Вченою рад[illegible] національного технічного університету як лабораторний практикум для студентів спеціальностей “Виробництво електронних засобів”, “Технології та засоби телекомунікацій”, “Захист інформації в комп’ютерних мережах”. Протокол № 3 від 29 вересня 2005р.

Вінниця ВНТУ 2007

УДК 519.95
М 85

Рецензенти:
О.М. Роїк, доктор технічних наук, професор
Р.Н. Квєтний, доктор технічних наук, професор
В.М. Лисогор, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

Мотигін В.В., Дудатьєв А.В.
М 85 **Чисельні методи в інженерних дослідженнях**. Частина 2. Чисельні методи в електронних таблицях. Лабораторний практикум – Вінниця: ВНТУ, 2007. – 95с.

Лабораторний практикум присвячений використанню обчислювальних можливостей електронних таблиць для реалізації чисельних методів з необхідною точністю та складається з методичних вказівок для виконання сімнадцяти лабораторних робіт. Також містить завдання до контрольних робіт студентів заочної форми навчання.

Лабораторний практикум призначений для студентів технічних спеціальностей.

УДК 519.95

ЗМІСТ

ВСТУП

Електронні таблиці – зручний засіб, за допомогою якого можна виконувати найрізноманітніші інженерні обчислення. Вони незамінні для розв'язання тих завдань, де фігурують набори даних (наприклад, результати вимірювань).

Електронні таблиці прості у використанні, з їх допомогою можна вирішити широкий круг завдань, для яких раніше складалися комп'ютерні програми. Очевидно, що суперкомп'ютер швидше оперує з числами, ніж персональний комп'ютер, і програма на ньому працюватиме значно швидше. Проте потрібен час для написання програми і складання звіту на підставі отриманих результатів. У свою чергу, зручності, що надаються електронними таблицями, при виведенні на друк результатів сприяють значному скороченню часу, потрібного для розв'язання завдання за допомогою електронних таблиць в порівнянні із загальноприйнятими методами програмування.

Електронні таблиці зручні в таких випадках:

- багатократне виконання однотипних обчислень (наприклад, аналіз даних, одержаних в декількох циклах одного і того ж експерименту);
- використання табличних даних (наприклад, якщо з довідкової таблиці необхідно використовувати будь-які дані);
- створення графіків різних типів;
- аналіз залежності від параметра.

Був час, коли електронні таблиці були не кращим засобом для виконання громіздких обчислень. Проте значне зростання продуктивності персональних комп'ютерів, а також поліпшення методів розв'язання сприяли подоланню багатьох обмежень. Тепер електронні таблиці справляються з такими громіздкими завданнями, які кілька років тому ніхто не намагався вирішувати за допомогою електронних таблиць.

У даному навчальному посібнику приводиться лабораторний практикум з навчальної дисципліни «Чисельні методи» для студентів спеціальностей «Виробництво електронних засобів», «Технології та засоби телекомунікацій» і «Захист інформації». Також приведені завдання для контрольних робіт студентам заочної форми навчання.

Лабораторні роботи №1–13 підготовлені Мотигіним В.В., лабораторні роботи №14–17 – Дудатьєвим А.В., завдання до контрольних робіт для студентів заочної формі навчання – обома авторами.

1 РОЗВ'ЯЗАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи – вивчення ітераційних методів і надбання навичок розв'язання нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь методом простої ітерації із застосуванням Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи вибрати рівняння з таблиці 1.
2. Розв'язати рівняння методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.
3. Зробити висновки.

Таблиця 1

Варіант	Рівняння	Відрізок, що містить корінь
1	$\cos 2x - \frac{1}{x} + 5{,}06 = 0$	[0,1; 0,3]
2	$0{,}6 * 1{,}5^x - 2{,}25x = 0$	[0,2; 0,4]
3	$\arccos 2x - x^2 - 0{,}35 = 0$	[0,3; 0,5]
4	$x^3 - \sqrt{x} - 9{,}5 = 0$	[2; 2,5]
5	$e^x - x - 20 = 0$	[3; 4]
6	$x - \sin x + 0{,}25 = 0$	[–2; –1]
7	$x^2 - \ln\left(1 + x^2\right) - 9{,}75 = 0$	[3; 4]
8	$\sin x - 3x + 3{,}2 = 0$	[1; 2]
9	$4x^{2,1} - 5x - 6 = 0$	[1,5; 2,5]
10	$2e^{-0,5x} - x^2 = 0$	[0,5; 1,5]

Хід роботи

Розглянемо таке найпростіше нелінійне трансцендентне рівняння

$$\cos(x) - x = 0.$$

Його можна відразу переписати в потрібному для методу послідовних наближень вигляді $x = \cos(x)$.

Розв'яжемо це рівняння з використанням ітераційного апарату електронних таблиць. В ітераційному режимі спочатку перераховуються тільки ті комірки листа, які не мають циклічних посилань. Потім комірки, які мають циклічні посилання, які ітеруються один або декілька разів, в залежності від значення виставленого на вкладці **Вычисления** діалогового вікна **Параметры (Сервис=>Параметры)**. Комірки, які мають циклічні посилання, обчислюються з поточними значеннями аргументів без їх попереднього розрахунку. Перерахування припиняється після виконання вказаної у вікні **Вычисления** кількості ітерацій. Щоб заново перерахувати всі комірки, натисніть кнопку **Вычислить** (або натисніть клавішу <F9> або <Ctrl+=>). Цей спосіб використовується для послідовного обчислення значення за заданою формулою та підстановкою його в ту ж формулу.

В нашому прикладі встановимо кількість ітерацій рівною 1, щоб спостерігати за зміною значень при перерахуванні листа. На практиці для більш швидкого знаходження розв'язання краще вибрати більшу кількість ітерацій.

1. Відкрийте новий робочий лист і назвіть його **ЛР№1**.
2. Виберіть команду **Сервис=>Параметры.** Відкрийте вкладку **Вычисления,** включіть режим **Вручную,** зробіть значення поля **Предельное число итераций** рівним 1 та заберіть відмітку з перемикача **Пересчет перед сохранением.** Натисніть кнопку **ОК** (Рис. 1).

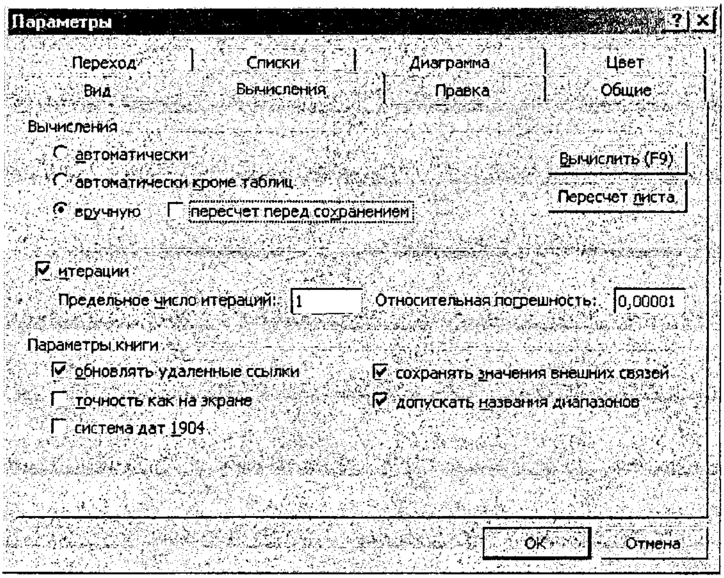


Рисунок 1

3. Введіть в комірку **А1** текст **x=cos(x); метод ітерацій.**

Тепер необхідно створити таблицю з початковим значенням та прапорцем ініціалізації. Прапорець ініціалізації переводить лист в заданий початковий стан.

4. В комірки **А3:В4** введіть наведені нижче значення. Вирівняйте вправо вміст комірок **А3:А4**.

Комірка	Значення	Комірка	Значення
A3	**Поч. значення**	B3	**0**
A4	**Поч. прапорець**	B4	**ИСТИНА**

В комірці **B6** буде виконуватись перевірка чи рівна **ИСТИНА** значенню комірки **B4**. Якщо це так, x буде встановлено рівним початковому значенню, а в іншому випадку – рівним комірці **B7**, тобто cos(x). В комірці **B7** обчислюється косинус комірки **B6**, і тим самим організовується циклічне посилання.

5. Введіть вказані нижче значення в комірки **A6:B7**. Вирівняйте вправо їх вміст.

Комірка	Значення	Комірка	Значення
A6	**x**	B6	**=ЕСЛИ(B4;B3;B7)**
A4	**cos(x)**	B7	**=COS(B6)**

6. В комірку **A9** введіть текст **Похибка** та вирівняйте її по правому краю.
7. В комірку **B9** введіть **=B7-B6**
8. Перетворіть комірку **B9** в експоненціальний формат з двома цифрами після коми.

Тепер організуємо друге циклічне посилання – для підрахунку кількості ітерацій.

9. В комірку **A11** введіть **Ітерації** та вирівняйте її по правому краю.
10. В комірку **B11** введіть =**ЕСЛИ (B4;0;B12+1).**
11. В комірку **B12** введіть =**B11**
12. Відключіть лінії сітки.
13. Для виконання розрахунку встановіть значення початкового прапорця в комірці **B4** рівним **ИСТИНА** та натисніть клавішу **<F9> (Вычислить)** для запуску процесу розв'язання задачі.
14. Змініть значення початкового прапорця на **ЛОЖЬ** та знову натисніть клавішу **<F9>.**

При кожному натиску клавіші **<F9>** виконується одна ітерація та обчислюється наступне приблизне значення x.

15. Натискайте клавішу **<F9>** до тих пір поки значення x не досягне необхідної точності.

Точність отриманого приблизного значення x перевіряється шляхом його порівняння із значенням $f(x)$; різниця між ними відображається в комірці **B9**. До цього моменту робочий лист повинен виглядати так, як на рис. 2. Значення x, яке є коренем рівняння, наведене в комірках **B6** та **B7**.

	A	B	C	D
1	$x = \cos(x)$; метод ітерацій			
2				
3	Поч. значення	0		
4	Поч. прапорець	ЛОЖЬ		
5				
6	x	0,739085		
7	$\cos(x)$	0,739086		
8				
9	Похибка	9,77E-07		
10				
11	Ітерації	34		
12		34		

Рисунок 2

Контрольні питання

1. У чому сутність методу простої ітерації?
2. Яка умова збіжності ітераційного процесу?
3. Як виглядає ітераційний процес при $0<\varphi'(x)<1$, якщо $x_0<\xi$?
4. Як виглядає ітераційний процес при $0<\varphi'(x)<1$, якщо $x_0>\xi$?
5. Як виглядає ітераційний процес при $-1<\varphi'(x)<0$?
6. Як виглядає ітераційний процес при $\varphi'(x)>1$?
7. Як виглядає ітераційний процес при $\varphi'(x)<-1$?

2 РОЗВ'ЯЗАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Мета роботи – вивчення ітераційних методів і набуття навичок розв'язання нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь методом Ньютона із застосуванням Microsoft Excel'2000.

План проведення роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи виписати рівняння з таблиці 2.
2. Розв'язати рівняння методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.
3. Зробити висновки.

Таблиця 2

Варіант	Рівняння	Відрізок, що містить корінь
1	$\sin x - x^{*}\cos x = 0$	[4; 5]
2	$12 * \ln x * x^2 - 0{,}6 = 0$	[0,8; 1,6]
3	$e^x + 2x - 25 = 0$	[2,5; 4,0]
4	$\sqrt{x} - \cos\sqrt{x} - 0{,}85 = 0$	[0,5; 2,0]
5	$x^{\ln x} - 2 = 0$	[1,5; 3,0]
6	$e^{x-2} - \ln(x+2) = 0$	[2; 3]
7	$e^x - \frac{1}{x} - 1 = 0$	[0,5; 1]
8	$\cos 2x - \frac{1}{1+x} = 0$	[0,2; 1,0]
9	$e^x - \ln x - 20 = 0$	[2,8; 3,2]
10	$\sqrt{x} - \cos(1-x) = 0$	[0,5; 2]

Хід роботи

Для застосування методу Ньютона перепишемо рівняння в неявній формі

$$F(x) = \cos(x) - x = 0.$$

Потім розрахуємо похідну функції, яка стоїть в лівій частині рівняння.

$$F'(x) = -\sin(x) - 1.$$

Для розв'язання рівняння необхідно:

1. Відкрити новий робочий лист та назвати його **ЛР№2.**
2. Вибрати команду **Сервис=>Параметры.** Відкрити вкладку **Вычисления** включити режим **Вручную** зробити значення поля **Предельное число итераций** рівним 1 та забрати відмітку з перемикача **Пересчет перед сохранением.** Натиснути кнопку **ОК** (Рис. 3).
3. Зробити ширину стовпця **А** рівною **38.**
4. Ввести в комірку **A1** текст **cos(x) – x = 0; метод Ньютона.**
5. В комірки **A3:B4** ввести наведені нижче значення. Вирівняти вправо вміст комірок **A3:A4.**

Комірка	Значення	Комірка	Значення
A3	**Поч. значення**	**B3**	**0**
A4	**Поч. прапорець**	**B4**	**ИСТИНА**

В комірці **B6** буде виконуватись перевірка чи рівна **ИСТИНА** значенню комірки **B4**. Якщо це так, x буде встановлено рівним початковому значенню, а в іншому випадку – рівним комірці **B9**, тобто $x_0 – F(x_0)/F'(x_0)$.

6. Введіть вказані нижче значення та формули в комірки **A6:B9**. Вирівняйте вправо їх зміст.

Комірка	Значення	Комірка	Формула
A6	$x0 =$	**B6**	**= ЕСЛИ(B4;B3;B9)**
A7	$F(x0) =$	**B7**	**= COS(B6)-B6**
A8	$F'(x0) =$	**B8**	**= –SIN(B6) – 1**
A9	$x1 =$	**B9**	**= B6–B7 / B8**

7. В комірку **A11** введіть текст **Похибка** та вирівняйте її по правому краю.
8. В комірку **B11** введіть формулу = **B9-B6.**

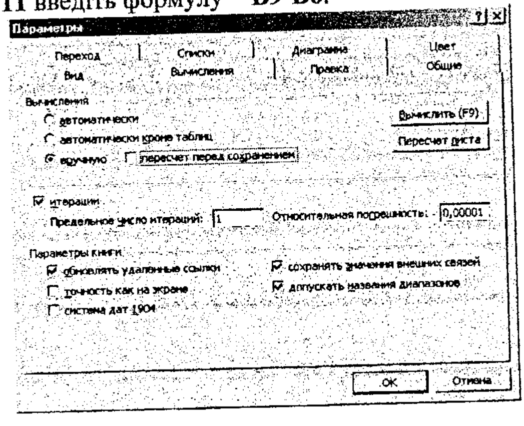


Рисунок 3

9. Перетворіть комірку **B9** в експоненціальний формат з двома цифрами після коми.

Тепер організуємо друге циклічне посилання – для підрахунку кількості ітерацій.

10.В комірку **А13** введіть **Ітерації** та вирівняйте її по правому краю.

11.В комірку **В13** введіть **=ЕСЛИ (В4;0;В14+1).**

12.В комірку **В14** введіть **=В13**

13.Відключіть лінії сітки.

14.Для виконання обчислювання встановіть значення початкового прапорця в комірці В4 рівним **ИСТИНА** та натисніть клавішу **<F9> (Вычислить)** для запуску процесу розв'язання задачі.

15.Змініть значення початкового прапорця на **ЛОЖЬ** та знову натисніть клавішу **<F9>.**

При кожному натисканні клавіші **<F9>** виконується одна ітерація та обчислюється наступне приблизне значення x.

16.Натискайте клавішу **<F9>** до тих пір, поки значення x не досягне необхідної точності.

Точність отриманого приблизного значення x_0 перевіряється шляхом його порівняння із значенням x_1; різниця між ними відображається в комірці **В11**. До цього моменту робочий лист повинен виглядати так, як на рис. 4. Значення x яке є коренем рівняння, наведене в комірках **В6** та **В9**.

	A	B	C
1	cos(x)–x=0; метод Ньютона		
2			
3	Поч. значення	0	
4	Поч. прапорець	ЛОЖЬ	
5			
6	x0=	0,739085133	
7	F(x0)=	0	
8	F'(x0)=	–1,673612029	
9	x1=	0,739085133	
10			
11	Похибка	1,48E-09	
12			
13	Ітерації	5	
14		5	

Рисунок 4

Контрольні питання

1. Які правила вибору точки початкового наближення?
2. Що значить відокремити корені нелінійного рівняння?
3. З яких етапів складається процес розв'язання нелінійного рівняння?
4. Які умови повинні бути виконані для уточнення кореня, що знаходиться на відрізку $[x_A, x_B]$?
5. Поясніть геометричний зміст методу дотичних.

3 РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи – вивчення матричних методів і набуття навичок розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із застосуванням Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Виписати з таблиці 3 систему лінійних алгебраїчних рівнянь відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи.
2. Розв'язати систему рівнянь матричним методом з точністю $\varepsilon = 0{,}00001$.

Таблиця 3

Варіант	a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}	a_{13} a_{23} a_{33}	b_1 b_2 b_3
1	2	3	4	5
1	1,17 0,64 0,32	0,53 –0,72 0,43	–0,84 –0,43 -0,93	1,15 0,15 –0,48
2	1,6 0,38 0,28	0,12 0,25 0,46	0,57 –0,54 –1,12	0,18 0,64 0,88
3	1,16 0,83 2	1,3 –0,48 –0,16	–1,14 –2, 44 1,3	0,43 –0,15 1,5
4	0,3 –0,1 –1,5	1,2 –0, 2 –0,3	–0,2 –0,3 0,1	–0,6 0,3 40
5	6,36 7,42 5,77	11,75 19,03 7,42	10 11,75 6,36	–41,7 –49,49 –27,67
6	0,18 0,42 1,14	0,26 –0,35 0,12	–0,44 1,12 –0,03	1,15 0,86 0,68
7	0,64 0,56 0,63	–0,43 0,12 –0,83	0,67 –0,27 0,43	0,43 0,88 -0,12
8	0,75 1,12 0,32	–0,84 –0,14 0,23	1,11 0,45 –0,48	0,66 0,133 0,14

Продовження таблиці 3

1	2	3	4	5
9	1,06 0,43 0,37	–0,28 0,62 –0,76	0,84 –0,35 –0,64	0,57 0,66 –0,38
10	1,6 0,43 0,34	2,18 –0,16 0,57	–0,72 0, 53 –0,83	1,15 0, 83 –0,42

Хід роботи

Як приклад розглянемо таку систему лінійних рівнянь

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1{,}75;$$
$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2{,}5;$$
$$2x_1 + x_2 - 8x_3 = -0{,}25.$$

В матричній формі ці рівняння записуються таким чином

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1{,}75 \\ 2{,}5 \\ -0{,}25 \end{vmatrix}.$$

Таку систему можна розв'язати за допомогою електронної таблиці. Для цього необхідно:

1. Створити новий лист та дати йому ім'я **ЛР№3**.
2. В комірці **А1** ввести текст **Розв'язання систем рівнянь; обернення матриці.**
3. В комірці **В3** ввести текст **Ах=b**.

Тепер введіть матрицю коефіцієнтів А та вектор правої частини b.

4. В комірці **А5** ввести текст **Вхідна матриця(А)**.
5. В комірках **А6:С8** ввести елементи матриці А:

Комірка	Значення	Комірка	Значення	Комірка	Значення
А6	4	**В6**	–1	**С6**	2
А7	1	**В7**	–5	**С7**	3
А8	2	**В8**	1	**С8**	–8

6. В комірці **Е5** ввести текст **Права частина (b)**.
7. В комірках **Е6:Е8** ввести компоненти вектора правої частини:

Комірка	Значення	Комірка	Значення	Комірка	Значення
Е6	1,75	**Е7**	2,5	**Е8**	–0,25

Далі необхідно обернути матрицю **А** та помножити вектор **b** на матрицю, яка є оберненою до матриці **А.** Функція **МОБР()**, що застосовується для цього, повертає масив значень, що вставляється зразу в цілий діапазон комірок:

8. В комірці **А10** ввести текст **Обернена матриця (1/А).**

9. Виділити комірки **A11:C13**, ввести таку формулу **=МОБР(A6:C8)** і натиснути клавіші <Ctrl+Shift+Enter> для вставки цієї формули у всі вибрані комірки.
10. В комірці **E10** ввести текст **Розв'язок x=(1/A)b.**
11. Виділити комірки **E11:E13** та ввести таку формулу **=МУМНОЖ(A11:C13;E6:E8),** а потім натиснути клавіші <Ctrl+Shift+Enter> для вставки формули у всі вибрані комірки.
12. Відключити відображені лінії сітки та обвести комірки контуром.

Робочий лист до цього моменту повинен виглядіти так, як на рис. 5. В комірках **E11–E13** повинні стояти значення компонентів вектора розв'язку x_1, x_2, x_3.

	A	B	C	D	E	F
1	Розв'язання систем рівнянь; обернення матриці					
2						
3		Ax=b				
4						
5	Вхідна матриця (A)				Права частина (b)	
6	4	–1	2		1,75	
7	1	–5	3		2,5	
8	2	1	-8		–0,25	
9						
10	Обернена матриця (1/A)				Розв'язок (x)	
11	0,237	–0,04	0,045		0,307692	
12	0,09	–0,23	-0,06		-0,40385	
13	0,071	–0,04	-0,12		0,057692	
14						

Рисунок 5

Контрольні питання

1. Як класифікуються наближені методи розв'язання СЛАР?
2. У яких випадках рекомендується використовувати прямі методи розв'язання СЛАР?
3. У яких випадках рекомендується використовувати ітераційні методи розв'язання СЛАР?
4. Що розуміється під коефіцієнтом щільності матриці?

4 РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи – вивчення ітераційних методів і набуття навичок розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із застосуванням Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Виписати з таблиці 4 систему лінійних алгебраїчних рівнянь відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи.
2. Підготувати вихідні дані, перевірити на збіжність та розв'язати систему рівнянь методом Зейделя з точністю ε = 0,00001.

Таблиця 4

Варіант	a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}	a_{13} a_{23} a_{33}	b_1 b_2 b_3
1	2	3	4	5
1	1,18 0,12 –0,07	–0,08 –0,43 0,34	–0,25 0,14 –0,72	1,12 –0,17 0,62
2	1,2 0,2 –0,3	–0,2 16 0,1	0,3 –0,1 –1,5	–0,6 0,3 0,4
3	0,63 0,05 0,15	0,05 0,34 0,10	0,15 0,10 0,71	0,34 0,32 0,42
4	1,21 –0,27 –0,34	–0,27 1,69 0,18	0,30 –0,14 –1,52	–0,61 0,33 0,44
5	0,31 –0,10 –1,51	1,27 –0,24 –0,37	–0,22 1,62 0,15	–0,67 0,37 0,45
6	8,24 1,15 2,11	2,02 10,60 –1,24	–1,46 5,55 –4,49	2,35 1,40 1,75
7	3,11 –1,65 0,60	–1,66 3,51 0,78	–0,60 –0,78 –1,87	–0,92 2,57 1,65
8	6,61 0,99 2,90	0,97 –4,52 –0,59	–0,94 –2,35 –5,33	4,96 1,81 –6,79

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5
9	5,43 –1,30 2,33	1,93 8,31 –0,49	3,24 5,44 4,28	48,50 50,23 30,78
10	7,6 2,2 –1,3	0,5 9,1 0,2	2,4 4,4 5,8	1,9 9,7 –1,4

Хід роботи

Як приклад розглянемо таку систему лінійних рівнянь

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1{,}75;$$
$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2{,}5;$$
$$2x_1 + x_2 - 8x_3 = -0{,}25.$$

Для використання методу Зейделя перепишемо систему рівнянь у другому вигляді, розв'язавши кожне рівняння відносно однієї із змінних:

$$x_1 = 0{,}25\,x_2 - 0{,}5\,x_3 + 0{,}4375;$$
$$x_2 = 0{,}2\,x_1 - 0{,}6\,x_3 - 0{,}5;$$
$$x_3 = 0{,}25\,x_1 + 0{,}125\,x_2 + 0{,}03125.$$

Розв'яжемо ці рівняння з використанням методу Зейделя в електронній таблиці Excel.

1. Відкрийте новий лист та назвіть його **ЛР№4.**
2. Виберіть команду **Сервис => Параметры**, відкрийте вкладку **Вычисления** та включіть режим **Вручную**. Поставте помітку на перемикач **Итерации**, введіть в поле **Предельное число итераций** значення 1, відключіть режим **Пересчет перед сохранением** та клацніть на кнопці **ОК.**
3. В комірці **А1** введіть текст **Розв'язання систем рівнянь; метод Зейделя.**

В таблицю необхідно добавити прапорець ініціалізації, який би переводив обчислювальний процес в певний початковий стан. Введення значення **ИСТИНА** в комірці **В3** повинно заставити функцію **ЕСЛИ** в комірках **С6:С8** повертати початкові значення в комірках **А6:А8.**

4. В комірці **А3** введіть текст **Поч. прапорець.**
5. В комірці **В3** введіть текст **ИСТИНА.**

Тепер ініціалізуємо ітераційний процес початковими значеннями.

6. В комірці **А5** введіть текст **Поч. знач.**
7. В комірці **А6:А8** введіть значення **0,4375; –0,5; 0,03125**, відповідно.

Введемо в таблицю три рівняння системи.

8. В комірці **В5** введіть текст **Рівняння.**
9. В комірці **В6** введіть формулу **=0,25*С7-0,5*С8+0,4375.**
10. В комірці **В7** введіть формулу **=0,2*С6-0,6*С8-0,5.**
11. В комірці **В8** введіть формулу **=0,25*С6+0,125*С7+0,03125.**

Залишилось ввести в рівняння рекурсивні посилання та проробити тест ініціалізації.

12.В комірці **C5** введіть текст **Розв'язок.**

13.В комірці **C6** введіть формулу **=ЕСЛИ(B3;A6;B6)** та скопіюйте її в комірки **C7:C8.**

14.Зробіть формат комірок **B6:C8** числовим з п'ятьма десятковими цифрами.

15.Відключіть відображення лінії сітки та обведіть комірки контуром, як показано на рис 6.

Для виконання розрахунку за цим листом встановіть прапорець ініціалізації рівним **ИСТИНА** та натисніть клавішу <F9>. Після ініціалізації листа змініть значення прапорця ініціалізації на **ЛОЖЬ** та знову натисніть клавішу <F9> для виконання чергової ітерації. Продовжуйте ітерування листа шляхом натискання клавіші <F9> до тих пір, поки не буде досягнута задовільна схожість із розв'язком. До цього моменту робочий лист повинен виглядати так, як показано на рис. 6.

	A	B	C	D
1	Розв'язання систем рівнянь; метод Зейделя			
2				
3	Поч. прапорець	ЛОЖЬ		
4				
5	Поч. знач.	Рівняння	Розв'язок	
6	0	0,7504	0,7504	
7	0	–0,4004	–0,4004	
8	0	1,3077	1,3077	
9				

Рисунок 6

Контрольні питання

1. Які умови збіжності ітераційного процесу?
2. Як перетворити систему рівнянь до вигляду, придатного для використання ітераційного процесу?
3. У чому полягає особливість методу Зейделя?
4. Напишіть формулу для 4-го наближення при розв'язанні СЛАУ з трьох рівнянь методом простої ітерації?
5. Напишіть формулу для 5-го наближення при розв'язанні СЛАУ з чотирьох рівнянь методом Зейделя?

5 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

Мета роботи – набуття навичок побудови інтерполяційних багаточленів Лагранжа і Ньютона та використання їх для обчислення наближених значень функцій за допомогою Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи виписати з таблиці 5 значення аргументу і відповідні їм значення функції.
2. Обчислити значення функції для значень аргументу, які знаходяться в 14, 15, та 16-му стовпцях таблиці завдань.
3. Зробити висновки.

Короткі теоретичні відомості

Часто дані неможливо описати ніякою простою чи відносно складною функцією. В такому випадку краще за все використовувати функції перегляду таблиць. Ці функції знаходять та інтерполюють значення з таблиць для заданого значення *x*. Фактично відбувається апроксимація простої кривої невеликою кількістю точок в околі тієї точки, що нас цікавить, замість використання складної кривої для апроксимації усієї множини даних.

Перегляд таблиць виконується за допомогою функції ГПР, ВПР та ПОИСКПОЗ. Функції ГПР та ВПР виконують пошук в одному стовпці таблиці та повертають значення з другого стовпця в тому ж рядку. Функція пошуку ПОИСКПОЗ також виконує пошук в таблиці, але повертає положення комірки, що містить задане значення.

Процес інтерполяції може бути заданий у вигляді процедури чи за допомогою функції робочого листа. Різниця у методах інтерполяції є в рівняннях, що використовуються для оцінювання значення між заданими точками. Методом, який найбільш часто застосовується, є лінійна інтерполяція. Ще простіше використовувати функції перегляду таблиць та прийняти інтерполяційні значення, що повернені ними. В багатьох випадках такий підхід є достатнім. Часто використовуються квадратична та кубічна інтерполяції.

Лінійна інтерполяція полягає в простому з'єднанні двох точок, що розташовані по обидві сторони інтерпольовного інтервалу, прямою лінією. Якщо точки розташовані достатньо близько, лінійна інтерполяція дає достатньо добре наближення. Окрім того, такий метод набагато простіше реалізувати у порівнянні з другими, які використовують більш високі порядки.

Таблиця 5

Варіант	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	x_1*	x_2*	x_3*
1	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,04	1,06	1,09	1,12	1,16	1,21	1,26	1,47	1,02
2	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	1,96	2,11	2,27	2,44	2,63	2,84	1,93	2,25	1,82
3	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0	0,74	0,79	0,84	0,88	0,92	0,97	0,87	0,97	0,77
4	1,7	1,75	1,3	1,85	1,9	1,95	1,23	1,21	1,18	1,14	1,09	1,03	1,82	1,93	1,71
5	2,7	2,75	2,8	2,85	2,9	2,95	1,58	1,49	1,37	1,24	1,08	0,91	2,83	2,93	2,72
6	10	15	20	25	30	35	0,99	0,97	0,94	0,91	0,87	0,82	22	33	11
7	1,1	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	1,03	1,39	1,65	1,8	1,85	1,82	2,4	3,5	1,14
8	0,13	0,18	0,23	0,28	0,33	0,36	0,129	0,179	0,228	0,276	0,324	0,371	0,25	0,37	0,15
9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	0,119	0,0891	0,066	0,047	0,033	0,023	1,34	1,56	1,15
10	50	55	60	65	70	75	0,28	0,31	0,22	0,04	–0,14	–0,27	62	73	52
11	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,05	0,16	0,27	0,37	0,47	0,56	0,27	0,53	0,07
12	1,5	1,55	1,6	1,65	1,7	1,75	–1,1	–0,9	–0,7	–0,4	–0,2	0,1	1,63	1,73	1,51
13	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	1,44	1,55	1,67	1,82	1,99	2,19	2,05	2,25	1,83
14	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	0,86	0,91	0,93	10,95	0,96	0,97	1,34	1,54	1,13
15	0,75	0,3	0,85	0,9	0,95	1,0	0,280	0,319	0,359	0,402	0,447	0,495	0,87	0,97	0,76
16	2,5	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,928	4,410	4,938	5,517	6,152	6,848	3,07	3,23	2,82
17	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,008	11,113	1,221	11,331	1,445	1,563	1,24	1,43	1,06
18	1,9	1,91	11,92	1,93	1,94	1,95	6,69	6,75	6,82	16,89	6,96	7,03	1,92	1,945	1,905
19	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	2,74	2,75	2,80	2,86	2,98	3,09	0,27	0,46	0,05
20	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	3,44	3,55	3,66	3,76	3,85	3,92	1,06	1,24	0,83

Формула лінійної інтерполяції в формі Лагранжа має вигляд

$$y = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_2,$$

де x_1, x_2, y_1 *і* y_2 - задані точки, а інтерпольовне значення x розміщено між x_1 та x_2.

Хід роботи

Створимо робочий лист, який буде розраховувати тиск насиченої пари при заданій температурі. При цьому будуть використовуватись функції перегляду таблиць та метод лінійної інтерполяції. Дані для розрахунку наведені в табл. 6.

1. Створіть новий робочий лист та назвіть його **ЛР № 5.**
2. В комірку **А1** введіть текст **Насичена пара; лінійна інтерполяція.**
3. Встановіть ширину стовпця **В** рівною **10.**
4. Введіть такі мітки в комірці **А3** та **В3:**

А3 – Темп.(F); В3 – Тиск (psi)

Таблиця 6 – Температура та тиск насиченої пари

Температура (F)	Тиск (psi)
300	67
320	90
340	118
360	153
380	196
400	247
420	309
440	382
460	467
480	566
500	681
520	812
540	963
560	1133
580	1326
600	1543
620	1787
640	2060
660	2366
680	2709
700	3094

Тепер введіть дані температури та тиску.

5. В комірки **A4:A24** введіть значення від **300** до **700** з кроком **20**.
6. В комірки **B4:B22** введіть значення тиску з табл. 6.
7. Присвойте діапазону **A4:A24** ім'я **Temperature**, а діапазону **B4:B24** – **Pressure**.

Потім складіть таблицю для обчислення лінійної інтерполяції.

8. Введіть такі мітки у вказані комірки

D4	Температура	F4	Тиск	E3	Лінійна інтерполяція
D5	Введення	F5	Розрахунок	E5	Індекс

Введіть декілька значень температури в стовпець **D** для обчислення лінійної інтерполяції.

9. Введіть такі величини в комірки **D6:D11**:

D6 – 510; D9 – 622; D7 – 520; D10 – 538; D8 – 302; D11 – 456.

Функція перегляду таблиць та рівняння інтерполяції надмірно великі, щоб їх можна було розмістити в одній комірці, тому розташуйте функцію перегляду таблиці в одну комірку, а функцію інтерполяції в іншу. Для кожного значення температури, функція **ПОИСКПОЗ( )** повертає номер рядка, що містить температуру, меншу чи рівну вказаній. Для правильної роботи функції, значення температури повинно бути відсортованим. Перший аргумент функції **ПОИСКПОЗ( )** можна встановити рівним 0, в такому випадку функція буде шукати точну відповідність, і табличні дані можуть бути невпорядкованими. Однак при використанні методу інтерполяції дані обов'язково повинні бути відсортовані. Повернутий номер рядка використовується у функції **ИНДЕКС( )** для доступу до значень тиску та температури, що використовується при обчисленні інтерполяційних значень в стовпці **F**.

10. В комірку **E6** введіть формулу **=ПОИСКПОЗ(D6;Temperature)** скопіюйте її з комірки **E7:E11**.
11. В комірку **F6** введіть формулу
=(D6-ИНДЕКС(Temperature;E6+1))*ИНДЕКС(Pressure;E6)/ (ИНДЕКС(Temperature;E6)-ИНДЕКС(Temperature;E6+1)) +(D6-ИНДЕКС(Temperature;E6))*ИНДЕКС(Pressure; E6+1)/(ИНДЕКС(Temperature;E6+1)-ИНДЕКС(Temperature;E6))
та скопіюйте її в комірки **F7:F11**.

Робочий лист повинен виглядати так, як показано на рис. 7.

	A	B	C	D	E	F	H
1	Насичена пара; лінійна інтерполяція						
2							
3	Темп. (F)	Тиск (psi)		Лінійна інтерполяція			
4	300	67		Температура		Тиск	
5	320	90		Введення	Індекс	Розрахунок	
6	340	118		510	11	746,5	
7	360	153		520	12	812	
8	380	196		302	1	69,3	
9	400	247		622	17	1814,3	
10	420	309		538	12	947,9	
11	440	382		456	8	450	
12	460	467					
13	480	566					
14	500	681					
15	520	812					
16	540	963					
17	560	1133					
18	580	1326					
19	600	1543					
20	620	1787					
21	640	2060					
22	660	2366					
23	680	2709					
24	700	3094					
25							
26							
27							

Рисунок 7

Контрольні питання

1. Коли виникає необхідність побудови інтерполяційних функцій?
2. Що таке вузол інтерполяції?
3. Поясніть поняття «інтерполяційна функція».
4. Як будується інтерполяційний багаточлен Лагранжа?
5. Яка сутність поняття «скінченна різниця»?
6. Як обчислюються скінченні різниці першого, другого і n-го порядків?
7. Що таке перша інтерполяційна формула Ньютона?
8. Чим відрізняється й у яких випадках використовується друга інтерполяційна формула Ньютона?
9. У чому полягає перевага інтерполяційних багаточленів Ньютона перед інтерполяційним багаточленом Лагранжа?
10. Як визначити похибку інтерполяційних формул Ньютона?

6 ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Мета роботи – вивчення методів чисельного диференціювання функції, яка задана таблицею, і одержання практичних навичок чисельного диференціювання за допомогою різницевих формул із використанням Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи виписати з таблиці 7 значення аргументу і відповідні їм значення функції.
2. Обчислити першу та другу похідні функції в точках таблиці.
3. Зробити висновки.

Короткі теоретичні відомості

Чисельне диференціювання виконується за допомогою різницевих формул. Центральні різницеві формули є найбільш точними і найчастіше застосовуються. Ліві і праві різниці використовуються в спеціальних випадках. Ліва різницева формула використовує ті точки, що знаходяться ліворуч досліджуваної, права різницева формула використовує ті точки, що знаходяться праворуч, а центральна різницева формула ґрунтується на рівному числі точок з обох боків від досліджуваної точки.

Ліві і праві різниці використовуються на межах інтервалу диференціювання, де неможливо застосування центральної формули, що потребує рівної кількості точок із кожного боку. На межах же точки знаходяться тільки з одного боку. Ліві і праві різницеві формули часто дають більш точні результати в тих випадках, коли крива має різкі зломи, оскільки зменшують вплив на похідну точок з іншого боку. У таких випадках, при наближенні до точки злому, використовується ліва різниця, а при віддаленні від неї – права.

Нижче наведені різницеві формули для похідних декількох перших порядків і пов'язаний із ними порядок похибки ($O(h^n)$). Всі формули обчислюють похідну в точці x_0. Похибка формули пропорційна n-ому степеню відстані між точками h. У такий спосіб можна оцінити точність обчислень. Чим більший степінь n, тим точніша формула.

Похідна в точці x_0	Похибка	Тип різниці
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_1-y_0}{h}$	$O(h)$	права
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_0-y_{-1}}{h}$	$O(h)$	ліва
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_1-y_{-1}}{2h}$	$O(h^2)$	центральна
$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}$	$O(h^2)$	права

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y_0-2y_{-1}+y_{-2}}{h^2}$	$O(h^2)$	ліва
$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y_1-2y_0+y_{-1}}{h^2}$	$O(h^2)$	центральна
$\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{h^3}$	$O(h^3)$	права
$\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{y_0-3y_{-1}+3y_{-2}-y_{-3}}{h^3}$	$O(h^3)$	ліва
$\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{y_2-2y_1+2y_{-1}-y_{-2}}{2h^3}$	$O(h^3)$	центральна

Різницеві формули, що наведені вище, є достатньо простими, тому найкращим способом їхнього використання є реалізація безпосередньо в робочому листі, а не написання функції Visual Basic. Таким способом можна контролювати значення різниць, щоб визначити ріст похибки округлення.

Хід роботи

Для функції, що задана таблично, розрахуємо перші і другі похідні в точках.

1. Створіть новий робочий лист і назвіть його **ЛР № 6.**
2. У комірку **A1** введіть назву робочого листа **Чисельне диференціювання.**
3. У комірки **A4:D4** введіть мітки ***x*, *y*, *dy*/*dx*, *d*^2y/*dx*^2** і вирівняйте їх по правому краю.
4. Введіть значення *x* у діапазон комірок **A5: A25** від **0** до **10,0** із кроком **0,5**.
5. У комірки **B5:B25** введіть значення ***y*** з таблиці.

У стовпці **C** розрахуйте першу похідну за допомогою центральної різницевої формули для середини інтервалів між точками. У стовпці **D** розрахуйте другу похідну за допомогою центральної різницевої формули для кожної точки. У початковій точці використовуйте праву формулу, а в кінцевій точці використовуйте ліву формулу.

6. У комірку **C5** введіть формулу **=(B6-B5)/(A6-A5)**, в комірку **C6** введіть формулу **=(B7-B5)/(A7-A5)** і скопіюйте її в діапазон **C7:C24**, в комірку **C25** введіть формулу **=(B25-B24)/(A25-A24).**
7. У комірку **D5** введіть формулу **=(B7-2*B6+B5)/(A6-A5)^2**, в комірку **D6** введіть формулу **=(B7-2*B6+B5)/(A7-A6)*(A6-A5)** і скопіюйте її в діапазон **D7:D24**, в комірку **D25** введіть формулу **=(B25-2*B24+B23)/(A25-A24)^2.**

Таблиця 7

Варіант	x_0 / y_0	x_1 / y_1	x_2 / y_2	x_3 / y_3	x_4 / y_4	x_5 / y_5	x_6 / y_6	x_7 / y_7	x_8 / y_8	x_9 / y_9
1	0,0167	0,0334	0,0501	0,0668	0,0835	0,1002	0,1169	0,1336	0,1503	0,167
	1,55	3,25	5,30	7,55	10,20	13,05	16,15	19,50	23,15	27,05
2	0,0175	0,0525	0,0875	0,1225	0,1575	0,1925	0,2275	0,2625	0,2975	0,3325
	0,9998	0,9986	0,9962	0,9925	0,9876	0,9815	0,9742	0,9657	0,9561	0,9452
3	0,2094	0,2269	0,2444	0,2619	0,2794	0,2969	0,3144	0,3319	0,3494	0,3669
	0,2079	0,2250	0,2420	0,2589	0,2758	0,2926	0,3092	0,3258	0,3423	0,3587
4	0,4363	0,4538	0,4713	0,4888	0,5063	0,5238	0,5413	0,5588	0,5763	0,5938
	0,9063	0,8988	0,8910	0,8829	0,8745	0,8659	0,8570	0,8479	0,8385	0,8288
5	0,6458	0,6633	0,6808	0,6983	0,7158	0,7333	0,7508	0,7683	0,7858	0,8033
	0,7986	0,7880	0,7771	0,7659	0,7546	0,7430	0,7311	0,7191	0,7068	0,6943
6	0,0166	0,0332	0,0498	0,0664	0,083	0,0996	0,1162	0,1328	0,1494	0,166
	0,023	0,093	0,203	0,37	0,578	0,833	1,134	1,481	1,887	2,314
7	0,8727	0,8902	0,9077	0,9252	0,9427	0,9602	0,9777	0,9952	1,0127	1,0302
	0,7661	0,7772	0,7881	0,7987	0,8091	0,8193	0,8292	0,8389	0,8483	0,8574
8	1,0821	1,0996	1,1171	1,1346	1,1521	1,1696	1,1871	1,2046	1,2221	1,2396
	0,4695	0,4540	0,4383	0,4225	0,4066	0,3905	0,3744	0,3581	0,3417	0,3252
9	1,309	1,3265	1,344	1,3615	1,379	1,3965	1,414	1,4315	1,449	1,4665
	0,9659	0,9703	0,9744	0,9782	0,9817	0,9848	0,9877	0,9903	0,9926	0,9946
10	0,0873	0,1048	0,1223	0,1398	0,1573	0,1748	0,1923	0,2098	0,2273	0,2448
	0,9962	0,9945	0,9925	0,9902	0,9877	0,9848	0,9816	0,9781	0,9743	0,9702
11	0,2618	0,2793	0,2968	0,3143	0,3318	0,3493	0,3668	0,3843	0,4018	0,4193
	0,2588	0,2757	0,2925	0,3092	0,3257	0,3422	0,3586	0,3749	0,3911	0,4071
12	0,4363	0,4538	0,4713	0,4888	0,5063	0,5238	0,5413	0,5588	0,5763	0,5938
	0,9063	0,8988	0,8910	0,8829	0,8745	0,8659	0,8570	0,8479	0,8385	0,8288
13	0,6109	0,6284	0,6459	0,6634	0,6809	0,6984	0,7159	0,7334	0,7509	0,7684
	0,5736	0,5879	0,6019	0,6158	0,6295	0,6430	0,6563	0,6694	0,6823	0,6950
14	0,7854	0,8029	0,8204	0,8379	0,8554	0,8729	0,8904	0,9079	0,9254	0,9429
	0,7071	0,6946	0,6819	0,6690	0,6559	0,6426	0,6291	0,6154	0,6015	0,5874
15	0,9599	0,9774	0,9949	1,0124	1,0299	1,0474	1,0649	1,0824	1,0999	1,1174
	0,8191	0,8290	0,8387	0,8481	0,8572	0,8661	0,8747	0,8831	0,8912	0,8990

8. Змініть формат комірок **B5:B25** на числовий із двома десятковими знаками і формат комірок **C5:D25** на числовий з одним десятковим знаком.
9. Відключіть відображення ліній сітки.

Тепер робочий лист повинен виглядати, як показано на рис. 8.

	A	B	C	D	E
1	Чисельне диференціювання				
2					
3					
4	x	y	dy/dx	d^2y/dx^2	
5	0,0	2,00	2,5	18,0	
6	0,5	3,25	7,0	18,0	
7	1,0	9,00	19,0	30,0	
8	1,5	22,25	37,0	42,0	
9	2,0	46,00	61,0	54,0	
10	2,5	83,25	91,0	66,0	
11	3,0	137,00	127,0	78,0	
12	3,5	210,25	169,0	90,0	
13	4,0	306,00	217,0	102,0	
14	4,5	427,25	271,0	114,0	
15	5,0	577,00	331,0	126,0	
16	5,5	758,25	397,0	138,0	
17	6,0	974,00	469,0	150,0	
18	6,5	1227,25	547,0	162,0	
19	7,0	1521,00	631,0	174,0	
20	7,5	1858,25	721,0	186,0	
21	8,0	2242,00	817,0	198,0	
22	8,5	2675,25	919,0	210,0	
23	9,0	3161,00	1027,0	222,0	
24	9,5	3702,25	1141,0	234,0	
25	10,0	4302,00	1199,5	234,0	
26					

Рисунок 8

Контрольні питання

1. В чому полягає задача чисельного диференціювання?
2. Як знайти помилку чисельного диференціювання?
3. Як використовуються для чисельного диференціювання скінченні різниці?
4. Яку похибку має ліва різницева формула?
5. Яку похибку має права різницева формула?
6. Яку похибку має центральна різницева формула?

7 ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Мета роботи – вивчити чисельні методи обчислення визначених інтегралів та набути навичок обчислення визначених інтегралів із застосуванням Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи виписати підінтегральну функцію з таблиці 8.
2. Обчислити визначений інтеграл за формулами прямокутників, трапецій, Ромберга і Симпсона.
3. Зробити висновки.

Таблиця 8

Варіант	Підінтегральна функція	Межі	
		нижня	верхня
1	$\dfrac{1{,}5x^2+x}{x^5+1}$	0	1,2
2	$\dfrac{x-x^3}{x^4+2}$	2	4,4
3	$\dfrac{2{,}2x+1{,}7}{3{,}1x^3+9{,}3x^2}$	1	2,2
4	$\dfrac{x^2-4{,}1}{x^4-+1}$	0	1,2
5	$\dfrac{3{,}5x^2+x}{x^5+2}$	0	1,2
6	$\dfrac{1-3{,}7x}{x^3+x}$	2	4,4
7	$\dfrac{x^3+4{,}5}{x^5+5{,}4}$	1	2,8
8	$\dfrac{2{,}4-x^2}{x^3+8{,}1x}$	1	3,4
9	$\dfrac{5{,}2x+4{,}8}{4{,}5x^3+4{,}1}$	1	2,2
10	$\dfrac{x^2-37}{x^5+1}$	0	1,8

Короткі теоретичні відомості

Інтегрування дискретних даних включає в себе апроксимацію цих даних відомою функцією із наступним її інтегруванням. В більшості випадків не вдається підібрати одну функцію для апроксимації на всьому інтервалі, причому область інтегрування розділяється на велику кількість підінтервалів, на кожному з яких використовується проста функція типу лінійної, квадратичної або кубічної. Після чого результати для окремих підінтервалів додаються разом для отримання повного інтеграла.

Найбільш часто при чисельному інтегруванні використовують формули прямокутників, трапецій, Ромберга, Сімпсона та Гауса. Кожен із цих методів є більш точним, ніж попередній, оскільки проводить апроксимацію даних більш складною кривою.

Формула прямокутників. Згідно з формулою прямокутників, область між точками заповнюється прямокутниками, висота яких відповідає координаті y одній із точок, а ширина дорівнює відстані між точками. Значення інтеграла визначається за такою формулою

$$I=\sum_{i=1}^{n-1} y_i\left(x_{i+1}-x_i\right).$$

Таке наближення може здаватися дуже грубим, однак при малій ширині інтервалу та гладкій функції результат отримується досить точним. Крім того, такий метод дуже просто реалізовувати, оскільки достатньо просто перемножити дані в кожній точці на ширину інтервалу та підрахувати результати.

Формула трапецій. Згідно з цією формулою, кожна пара сусідніх точок з'єднується прямою лінією, яка утворює послідовність трапецій. Площа трапеції дорівнює півсумі основи помноженої на висоту – відстань між точками в даному випадку. Загальний інтеграл дорівнює сумі площ всіх трапецій

$$I=\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(y_i+y_{i+1}\right)\left(x_{i+1}-x_i\right).$$

Формула Ромберга. Інтегрування за формулою трапецій можна покращити за допомогою формули Ромберга, використовуючи дві різні оцінки для екстраполяції значення інтеграла. При обчисленні першої оцінки використовують формулу трапецій для кожної точки, а при обчисленні другої оцінки використовують формулу трапеції для кожної другої точки.

$$I_1=\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(y_i+y_{i+1}\right)\left(x_{i+1}-x_i\right), \quad I_2=\sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-2} \frac{1}{2}\left(y_i+y_{i+2}\right)\left(x_{i+2}-x_i\right).$$

Отримані оцінки відповідають різним інтервалам між точками. Згідно з методом Ромберга, похибка при обчисленні інтеграла пропорційна квадрату відстані між точками,

$$I=I_1+Ch^2, \; I=I_2+C(2h^2)^2,$$

де C – постійна. Розв'язання цих двох рівнянь приводить до такого виразу для інтеграла

$$I=I_1+(I_1-I_2)/3.$$

Формула Сімпсона. Згідно з формулою Сімпсона, для апроксимації даних використовують рівняння параболи за трьома точками (правило 1/3) чи за чотирьома точками (правило 3/8)

$$I=\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-2}\frac{1}{3}\left(y_i+4y_{i+1}+y_{i+2}\right)\cdot h,\quad I=\sum_{i=1,4,7,\ldots}^{n-3}\frac{3}{8}\left(y_i+3y_{i+1}+3y_{i+2}+y_{i+3}\right)\cdot h.$$

Хід роботи

Для прикладу розглянемо задачу. Закон Ампера використовується для обчислення струму в провіднику, інтегруванням магнітного поля по замкнутому контурі, що охоплює провідник. Потрібно визначити струм у провіднику за формулами прямокутників, трапецій, Ромберга і Симпсона. Закон Ампера має такий вигляд

$$I=\frac{8}{\mu_0}\int_0^5 B(y)dy,\quad \mu_0=1{,}26\times10^{-6}\,Гн/м.$$

1. Створіть новий робочий лист та назвіть його **ЛР № 7.**
2. В комірку **A1** введіть текст **Закон Ампера, чисельне інтегрування.**
3. Введіть такі значення у вказані комірки.

Комірка	Зміст	Примітка
C2	**muo=**	по правому краю
D2	**1,26E-06**	по правому краю
E2	**Гн/м dy=**	по лівому краю
F2	**0,5**	по правому краю
G2	**м**	по лівому краю
A5	**Струм (A)**	по лівому краю
A7	**y**	по правому краю
B7	**B(y)**	по правому краю
A8	**(м)**	по правому краю
B8	**(Вб/м^2)**	по правому краю

4. Присвойте комірці **D2** ім'я **MUO**, а комірці **F2 – DY.**
5. В комірку **C4:G4** введіть мітку **Прямокут., Трапецій, Трапецій2, Ромберга, Симпсона1/3** та вирівняйте їх по центру.

Напишіть формули підсумовування змісту всіх комірок для отримання повного інтеграла кожним методом. В комірці **F4** знаходиться формула Ромберга, яка об'єднує дві формули трапецій.

6. Введіть такі значення у вказані комірки:

C5 **=8*СУММ(C9:C18)/MUO** (копіювати в **D5:E5**);

F5 **=D5+(D5-E5)/3;**

G5 **=8*СУММ(G9:G18)/MUO.**

Тепер введіть формули прямокутників.

7. В комірку **A9** введіть значення **0**, в комірку **A10** введіть формулу **=A9+DY** і скопіюйте її в діапазон **A11:A19**, а в діапазон комірок **B9:B19** введіть експериментальні значення магнітної індукції.
8. В комірку **C9** введіть формулу **=B9*DY** та скопіюйте її в комірки **C10:C18**.

Два рази проведіть обчислення за формулою трапецій, перший раз з використанням одинарного кроку, а другий раз з використанням подвійного кроку інтегрування. Друге обчислення необхідне для розрахунку за формулою Ромберга в комірці **F5**. Зверніть увагу, що при другому обчисленні за формулою трапецій використовується кожна друга точка, тому в стовпці **E** проходить заповнення нулями деяких формул, щоб не враховувати їх два рази.

9. В комірку **D9** введіть формулу **=DY*(B9+B10)/2** та скопіюйте її в комірки **D10:D18.**
10. В комірку **E9** введіть формулу **=DY*(B9+B11)** та скопіюйте її в комірки **E10:E18.**
11. Замініть формулу в кожній другій комірці стовпця **E (E10,E12,...,E18)** на 0.

Введіть формули для обчислення за формулою Сімпсона. Як і раніше заповніть нулями кожну другу формулу в стовпці **G**.

12. В комірку **G9** введіть формулу **=DY*(B9+4*B10+B11)/3** та скопіюйте її в комірки **G10:G18.**
13. Замініть формулу в кожній другій комірці стовпця **G (G10,G12,...,G18)** на **0**.
14. Відключіть відображення ліній сітки.

Робочий лист повинен виглядати, як показано на рис. 9.

Контрольні питання

1. Чому виникає необхідність використання чисельних методів інтегрування?
2. В чому полягає сутність чисельних методів інтегрування?
3. Поясніть, на чому ґрунтується формула прямокутників?
4. Які відомі способи обчислення ординати прямокутних ділянок?
5. Поясніть, на чому ґрунтується формула трапецій?
6. Поясніть, на чому ґрунтується формула Сімпсона?
7. Яким співвідношенням пов'язана точність інтегрування та крок інтегрування для формул прямокутників, трапецій та Сімпсона?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Закон Ампера, чисельне інтегрування							
2			mu_0 =	1,26E-06 Гн/м	dy =	0,5 м		
3								
4			Прямокут.	Трапецій	Трапецій2	Ромберга	Симпсона1/3	
5	Струм (А)		309,3650794	299,8730159	299,6825397	299,9365079	299,9365079	
6								
7	y	B(y)						
8	(м)	(Вб/м^2)						
9	0,0	1,20E-05	6,00E-06	5,98E-06	1,18E-05		1,19E-05	
10	0,5	1,19E-05	5,95E-06	5,88E-06	0,00E+00		0,00E+00	
11	1,0	1,16E-05	5,80E-06	5,65E-06	1,10E-05		1,10E-05	
12	1,5	1,10E-05	5,50E-06	5,35E-06	0,00E+00		0,00E+00	
13	2,0	1,04E-05	5,20E-06	5,01E-06	9,63E-06		9,63E-06	
14	2,5	9,63E-06	4,82E-06	4,62E-06	0,00E+00		0,00E+00	
15	3,0	8,85E-06	4,43E-06	4,23E-06	8,10E-06		8,09E-06	
16	3,5	8,08E-06	4,04E-06	3,86E-06	0,00E+00		0,00E+00	
17	4,0	7,34E-06	3,67E-06	3,50E-06	6,68E-06		6,66E-06	
18	4,5	6,65E-06	3,33E-06	3,17E-06	0,00E+00		0,00E+00	
19	5,0	6,02E-06						
20								
21								

Рисунок 9

8 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДАМИ ЕЙЛЕРА

Мета роботи – вивчити наближені методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь методами Ейлера та набути навичок їх розв'язання із застосуванням Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Виписати з таблиці завдань диференціальне рівняння, початкове та кінцеве значення незалежної змінної, значення функції $y_0(x_0)$ при відомому значенні аргументу x_0 згідно з номером бригади студентів в журналі академгрупи.
2. За правилом Рунне визначити крок інтегрування, який задовольняє задану точність ε.
3. Розв'язати рівняння методом Ейлера та модифікованим методом Ейлера.
4. Проаналізувати отримані результати рішення та оцінити їх похибку.

Таблиця 9

Варіант	Диференціальне рівняння	Інтервал		$y_0(x_0)$	Точність ε
1	$y'=1+0,2y\sin x-y^2$	0	1	0,12	0,0002
2	$y'=\cos(x+y)+2,5(x-y)$	0	1,2	0	0,00005
3	$y'=(1-y^2)\cos x+2,6y$	0	0,7	0	0,0005
4	$y'=\cos(1,5x+y)+x-y$	2	4	2	0,002
5	$y'=1-\sin(2x-y)+1,5(2x-y)$	0	0,8	5,6	0,0002
6	$y'=0,6\sin x-1,2y^2$	1	2	3,54	0,02
7	$y'=\cos(2x+y)+1,5(x-y)$	2	3,5	0,12	0,002
8	$y'=1+0,8y\sin x-2y^2$	0	2	0,8	0,001
9	$y'=\cos(x+3y)+x-y$	3	4	2,15	0,0008
10	$y'=\sqrt{x}+0,7y^2$	0,5	2	0	0,0005

Хід роботи

Розглянемо таке звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\sqrt{(1+x^2)}\frac{du(x)}{dx}+u(x)=x, x>0,$$

з початковою умовою $u(0)=0$.

Метод Ейлера дозволяє усунути необхідність в обчисленні похідних завдяки урізанню ряду Тейлора до члена з першою похідною. Для того щоб це спрацювало необхідно вибирати малі значення h та після кожного кроку перераховувати значення першої похідної на початку нового малого інтервалу

$$u(x+h)=u(x)+hu'(x)$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння методом Ейлера на листі електронної таблиці.

1. Створіть новий робочий лист та назвіть його **ЛР№ 8.**
2. Введіть в комірку **A1** текст **Звичайні диференціальні рівняння; методи Ейлера.**
3. В комірки **A3** введіть текст **x**, а в комірку **B3** – **u(x).**
4. В комірку **A5** введіть значення **0**, а в комірку **A6** введіть **0,01**, виділіть комірки **A5:A6** та перетягніть маркер заповнення в комірку **A25.**

Знайдемо чисельне розв'язання рівняння методом Ейлера.

5. В комірці **B4** введіть **За Ейлером.**
6. В комірці **B5** введіть **0.**
7. В комірці **B6** введіть таку формулу **=B5+(A6-A5)*(A5-B5) /КОРЕНЬ(1+A5^2)** та скопіюйте її в комірки **B7:B25.**

Оскільки на початку кожного кроку для визначення значення шуканої функції на другому кінці інтервалу береться приблизне значення похідної, яке до того ж підставляється в грубе наближення для ряду Тейлора, за ходом інтегрування неперервно зростає та накопичується похибка. Більш прийнятним способом є отримання значення функції з використанням середнього на кроці значення похідної

$$u(x+h)=u(x)+h\frac{(u'(x)+u'(x+h))}{2}.$$

Складність застосування цієї модифікації методу полягає в тому, що похідна на дальньому кінці інтеграла невідома. В модифікованому методі Ейлера (методі «предиктор-коректор» або «передбачення-уточнення») для початкового значення функції використовують звичайний метод Ейлера. З використанням цього положення обчислюється похідна на дальньому кінці інтервалу. Маючи значення похідної на початку та оцінку її значення в кінці інтервалу, можна точніше оцінити значення шуканої функції. Для уточнення отриманого значення можна застосувати даний метод ще раз, але при великій кількості ітерацій похибка методу перекриває будь-які поправки в точності.

Перерахуємо лист таблиці модифікованим методом Ейлера. Спочатку обчислимо перше наближення до розв'язання, використовуючи звичайний метод Ейлера.

8. Введіть в комірку **C3** текст **Модиф. метод Ейлера.**
9. Виділіть комірки **E3:D3** та клацніть на кнопці **Объединить и поместить в центре** на панелі інструментів EXCEL.

10.В комірку **С4** введіть **ПРЕДИКТОР** та вирівняйте надпис по центру комірки.

11.В комірці **С5** введіть таку формулу **=D5+(A6-A5)*(A5-D5)/ КОРЕНЬ(1+A5^2)** та скопіюйте її в комірки **С6:С24**.

Отримане початкове наближення (предиктор) буде використовуватися для обчислення похідної в проміжній точці та обчислення скоректованого значення (коректора) шуканої функції.

12. В комірку **D4** введіть **КОРЕКТОР** та вирівняйте надпис по центру комірки.

13. В комірці **D5** введіть 0.

14. В комірці **D6** введіть таку формулу **=D5+((A6-A5)/2)*((A5-D5)/ КОРЕНЬ(1+A5^2)+(A6-C5)/КОРЕНЬ(1+A6^2))** та скопіюйте її в комірки **D7:D25**

15. Зробіть формат комірок **C5:D25** експоненціальним з двома значущими десятковими цифрами.

В результаті виконаних дій електронна таблиця повинна мати такий вигляд, як на рис. 10.

	A	B	C	D	E	F
1	Звичайні диференціальні рівняння, методи Ейлера					
2						
3	x	u(x)	Модиф. метод Ейлера			
4		За Ейлером	Предиктор	Коректор		
5	0,00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00		
6	0,01	1,00E-04	1,49E-04	5,00E-05		
7	0,02	2,99E-04	3,97E-04	1,99E-04		
8	0,03	5,96E-04	7,42E-04	4,47E-04		
9	0,04	9,90E-04	1,18E-03	7,91E-04		
10	0,05	1,48E-03	1,72E-03	1,23E-03		
11	0,06	2,06E-03	2,35E-03	1,77E-03		
12	0,07	2,74E-03	3,07E-03	2,40E-03		
13	0,08	3,51E-03	3,89E-03	3,12E-03		
14	0,09	4,37E-03	4,79E-03	3,93E-03		
15	0,10	5,33E-03	5,78E-03	4,84E-03		
16	0,11	6,37E-03	6,87E-03	5,83E-03		
17	0,12	7,50E-03	8,04E-03	6,91E-03		
18	0,13	8,71E-03	9,29E-03	8,08E-03		
19	0,14	1,00E-02	1,06E-02	9,34E-03		
20	0,15	1,14E-02	1,21E-02	1,07E-02		
21	0,16	1,29E-02	1,36E-02	1,21E-02		
22	0,17	1,44E-02	1,51E-02	1,36E-02		
23	0,18	1,61E-02	1,68E-02	1,52E-02		
24	0,19	1,78E-02	1,86E-02	1,69E-02		
25	0,20	1,96E-02		1,86E-02		
26						
27						

Рисунок 10

Контрольні питання

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку?
2. Що є розв'язком диференціального рівняння?
3. Що таке частинний розв'язок диференціального рівняння? Поясніть на графіку.
4. Чому виникає необхідність застосовувати наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь? Як розділяються наближені методи?
5. В чому відмінність методів розв'язання диференціальних рівнянь?
6. В чому ідея методу Ейлера? Поясніть на графіку
7. В чому сутність модифікованого методу Ейлера? Поясніть на графіку.
8. В чому сутність методу Ейлера-Коші? Поясніть на графіку.

9 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА

Мета роботи – вивчити наближені методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта та набути навичок їх розв'язання із застосуванням Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Виписати з таблиці 10 диференціальне рівняння, початкове та кінцеве значення незалежної змінної, значення функції $y_0(x_0)$ при відомому значенні аргументу x_0 і точність ε згідно з номером бригади студентів в журналі академгрупи.
2. За правилом Рунге визначити шаг інтегрування для забезпечення заданої точності ε.
3. Розв'язати рівняння методом Рунге-Кутта.
4. Проаналізувати отримані результати розв'язання.

Таблиця 10

Варіант	Диференціальне рівняння	Інтервал		$y_0(x_0)$	Точність ε
1	$y' = \sqrt{x^3} + y$	4	5	0	0,0005
2	$y' = x^2 - xy$	0	2	1	0,00005
3	$y' = \sqrt{x^4 + y^2} + 7$	1	3	1	0,0004
4	$y' = x - 0{,}52y^2$	2	5	2	0,0002
5	$y' = \sqrt{xy^2 + 0{,}71x}$	3	5	2,3	0,0004
6	$y' = 0{,}3e^x - y^2$	1	2	3,54	0,001
7	$y' = x\ln y + y$	2	3	1,12	0,0002
8	$y' = 2y - x + \cos x$	0,5	2	0	0,00004
9	$y' = 2x^3 + \cos^2 y + y$	3	4	3,12	0,001
10	$y' = \cos x \sin y + xy$	0	2	1,5	0,00008

Хід роботи

Розглянемо таке звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\sqrt{(1+x^2)}\frac{du(x)}{dx} + u(x) = x, x > 0,$$

з початковою умовою $u(0) = 0$.

В наш час найбільш розповсюдженим та часто використовуваним на практиці методом розв'язання задач Коші є метод Рунге–Кутта четвертого порядку. Для отримання точного значення наближеного обчислення в цьому методі використовують чотири проміжні значення.

Наступний крок інтегрування в методі Рунге–Кутта виконується за формулою

$$u(x+h)=u(x)+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4).$$

Тут введені такі позначення:

$$k_1=hu'(x,u(x));$$

$$k_2=hu'\left(x+\frac{h}{2},u(x)+\frac{k_1}{2}\right);$$

$$k_3=hu'\left(x+\frac{h}{2},u(x)+\frac{k_2}{2}\right);$$

$$k_4=hu'(x+h,u(x)+k_3).$$

В наведених формулах $u'(x,u(x))$ означає похідну за x, яка формально зображається функцією двох аргументів x та $u(x)$.

Розв'яжемо наш приклад на листі електронної таблиці з використанням методу Рунге–Кутта. Всі умови задачі залишаються такими ж, змінюється тільки структура таблиці.

1. Створіть новий робочий лист та назвіть його **ЛР№ 9.**
2. Введіть в комірці **А1** текст **Звичайне диференціальне рівняння; метод Рунге-Кутта.**

Тепер обчислимо чотири проміжні значення. Вони необхідні для отримання значення шуканої функції в наступній точці та переходу на наступний крок інтегрування.

3. В комірках **A3:F3** введіть заголовки **x, k1, k2, k3, k4, u(x)** та вирівняйте їх по центру відповідних комірок.
4. В комірку **А5** введіть значення **0**, а в комірку **А6** введіть **0,01**, виділіть комірки **А5:А6** та перетягніть маркер заповнення в комірку **А25**.
5. В комірці **В6** введіть таку формулу **=(A6-A5)*(A5-F5)/КОРЕНЬ(1+A5^2)** та скопіюйте її в комірки **В7:В25**.
6. В комірці **С6** введіть таку формулу **=(A6-A5)*((A5+(A6-A5)/2)-(F5+B6))/КОРЕНЬ(1+A5+(A6-A5)/2)^2)** та скопіюйте її в комірки **С7:С25**.
7. В комірці **D6** введіть таку формулу **=(A6-A5)*((A5+(A6-A5)/2)-(F5+C6))/КОРЕНЬ(1+A5+(A6-A5)/2)^2)** та скопіюйте її в комірки **D7:D25**.
8. В комірці **Е6** введіть таку формулу **=(A6-A5)*(A6-(F5+D6))/КОРЕНЬ(1+A6^2)** та скопіюйте її в комірки **Е7:Е25.**

Тепер обчислимо значення функції, комбінуючи проміжні значення.

9. В комірці **F5** введіть **0.**

10. В комірці **F6** введіть таку формулу **=F5+(1/6)*(B6+2*C6+2*D6 +E6)** та скопіюйте її в комірки **F7:F25**.
11. Зробіть формат комірок **B5:F25** експоненціальним з двома значущими десятковими цифрами.

Зовнішній вигляд робочого листа показаний на рис. 11.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Звичайне диференціальне рівняння; метод Рунге–Кутта						
2							
3	x	k1	k2	k3	k4	u(x)	
4							
5	0,00					0,00E+00	
6	0,01	0,00E+00	5,00E-05	4,97E-05	9,95E-05	4,98E-05	
7	0,02	9,95E-05	1,49E-04	1,49E-04	1,98E-04	1,99E-04	
8	0,03	1,98E-04	2,47E-04	2,47E-04	2,95E-04	4,45E-04	
9	0,04	2,95E-04	3,44E-04	3,44E-04	3,92E-04	7,89E-04	
10	0,05	3,92E-04	4,40E-04	4,39E-04	4,87E-04	1,23E-03	
11	0,06	4,87E-04	5,34E-04	5,34E-04	5,81E-04	1,76E-03	
12	0,07	5,81E-04	6,28E-04	6,28E-04	6,74E-04	2,39E-03	
13	0,08	6,74E-04	7,21E-04	7,20E-04	7,66E-04	3,11E-03	
14	0,09	7,66E-04	8,12E-04	8,12E-04	8,57E-04	3,92E-03	
15	0,10	8,57E-04	9,02E-04	9,02E-04	9,47E-04	4,83E-03	
16	0,11	9,47E-04	9,92E-04	9,91E-04	1,04E-03	5,82E-03	
17	0,12	1,04E-03	1,08E-03	1,08E-03	1,12E-03	6,90E-03	
18	0,13	1,12E-03	1,17E-03	1,17E-03	1,21E-03	8,06E-03	
19	0,14	1,21E-03	1,25E-03	1,25E-03	1,29E-03	9,31E-03	
20	0,15	1,29E-03	1,34E-03	1,34E-03	1,38E-03	1,07E-02	
21	0,16	1,38E-03	1,42E-03	1,42E-03	1,46E-03	1,21E-02	
22	0,17	1,46E-03	1,50E-03	1,50E-03	1,54E-03	1,36E-02	
23	0,18	1,54E-03	1,58E-03	1,58E-03	1,62E-03	1,52E-02	
24	0,19	1,62E-03	1,66E-03	1,66E-03	1,70E-03	1,68E-02	
25	0,20	1,70E-03	1,74E-03	1,74E-03	1,78E-03	1,86E-02	
26							
27							

Рисунок 11

Контрольні запитання

1. В чому сутність методу Рунге-Кутта? Поясніть на графіку.
2. Як оцінюється похибка чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь?
3. В чому ідея розв'язання системи диференціальних рівнянь 1-го порядку?
4. В чому ідея розв'язання системи диференціальних рівнянь *n*-го порядку?
5. Поясніть, як використовується правило Рунге для вибору кроку інтегрування?

10 ЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ ДАНИХ

Мета роботи – набути навичок побудови лінійних апроксимувальних функцій (аналітичних залежностей) за сукупністю дискретних експериментальних даних про зміну значень функції при змінах значень аргументу, за допомогою Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи виписати з таблиці 11 значення аргументу і відповідні їм значення функції.
2. Обчислити коефіцієнти лінійного полінома для апроксимації експериментальних даних.
3. Розрахувати значення функції в точках апроксимації відповідно до отриманого полінома.
4. Зробити висновки.

Таблиця 11

Варіант	Значення пар аргументу та функції $\left(\frac{x_i}{y_i}\right)$						
1	$\frac{0}{0,2}$	$\frac{1}{0,6}$	$\frac{2}{1,0}$	$\frac{3}{1,2}$	$\frac{4}{1,4}$	$\frac{5}{1,6}$	$\frac{6}{1,7}$
2	$\frac{-2}{3,1}$	$\frac{-1}{2,8}$	$\frac{0}{2,5}$	$\frac{1}{2,0}$	$\frac{2}{1,7}$	$\frac{3}{2,2}$	$\frac{4}{2,9}$
3	$\frac{-6}{2,5}$	$\frac{-4}{1,2}$	$\frac{-3}{0,4}$	$\frac{-1}{-0,5}$	$\frac{0}{-1,3}$	$\frac{1}{-1,2}$	$\frac{3}{1,1}$
4	$\frac{0}{0,5}$	$\frac{1}{0,8}$	$\frac{2}{1,3}$	$\frac{3}{1,7}$	$\frac{4}{1,9}$	$\frac{5}{2,5}$	$\frac{6}{2,2}$
5	$\frac{-3}{1,7}$	$\frac{-2}{1,2}$	$\frac{1}{1,0}$	$\frac{0}{0,5}$	$\frac{1}{-0,2}$	$\frac{2}{0,5}$	$\frac{3}{0,8}$
6	$\frac{-1}{3,1}$	$\frac{0}{2,8}$	$\frac{1}{2,4}$	$\frac{2}{2,1}$	$\frac{3}{1,9}$	$\frac{4}{2,2}$	$\frac{5}{2,6}$
7	$\frac{1}{1,0}$	$\frac{2}{1,7}$	$\frac{3}{3,3}$	$\frac{4}{5,1}$	$\frac{5}{4,6}$	$\frac{6}{3,0}$	$\frac{7}{1,9}$
8	$\frac{-2}{1,8}$	$\frac{-1}{1,2}$	$\frac{0}{0,2}$	$\frac{1}{-0,9}$	$\frac{2}{-1,9}$	$\frac{3}{0,4}$	$\frac{4}{2,4}$
9	$\frac{0}{1,7}$	$\frac{1}{1,9}$	$\frac{2}{2,4}$	$\frac{3}{2,7}$	$\frac{4}{3,1}$	$\frac{5}{3,1}$	$\frac{6}{2,5}$
10	$\frac{-1}{2,1}$	$\frac{0}{2,2}$	$\frac{1}{2,3}$	$\frac{2}{2,4}$	$\frac{3}{2,5}$	$\frac{4}{2,5}$	$\frac{5}{2,4}$

Короткі теоретичні відомості

Однією з розповсюджених задач в науці та техніці є апроксимація експериментальних даних аналітичними виразами. Існують три способи використання Excel для апроксимації даних: використання вбудованих функцій регресії, перетворення нелінійних рівнянь в лінійні з наступним використанням вбудованих функцій регресії, використання надбудови **Поиск решения** чи програми Visual Basic для точного підбору параметрів нелінійного рівняння. Частіше за все дані можуть бути описані вбудованими функціями лінійної та поліноміальної регресії. Наявність лінійної залежності на обстежуваному інтервалі дозволяє успішно використовувати формулу лінійного наближення.

У випадку нелінійних рівнянь, що допускають лінеаризацію за допомогою заміни змінних, функції лінійної регресії можна використовувати до перетворених рівнянь. Якщо ж рівняння не можуть бути лінеаризовані, можна скористатися надбудовою **Поиск решения** чи програмою мовою Visual Basic та підібрати коефіцієнти таким чином, щоб досягти мінімальної залишкової похибки (суми квадратів різниць між фактичними та прогнозованими значеннями) чи максимального коефіцієнта кореляції. Excel має вбудовані можливості регресійного аналізу, що дозволяє апроксимувати дані як прямою лінією, так і складними поліномами. Більша частина задач опису даних може бути вирішена засобами лінійної регресії.

При використанні функцій регресії для апроксимації даних відбувається мінімізація залишкової квадратичної різниці між фактичними та прогнозованими значеннями (метод найменших квадратів). Залишкова похибка обчислюється за такою формулою

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left(y(x_i)-y_i\right)^2,$$

де $y(x_i)$ – прогнозовані значення,

n – число точок,

x_i і y_i – фактичні значення.

В Excel використовується модель багатовимірної лінійної регресії. Це значить, що прогнозовані значення $y(x_i)$ мають вигляд

$$y(x_{1,i},x_{2,i},\ldots)=A+Bx_{1,i}+Cx_{2,i}+\ldots,$$

де A, B, C – шукані коефіцієнти, які визначаються підстановкою функції $y(x_{1,i};\ x_{2,i};\ \ldots)$ у вираз для залишкової різниці та прирівнянням до нуля частинних похідних для всіх коефіцієнтів. Це призводить до системи лінійних рівнянь для коефіцієнтів. Всі обчислення виконуються Excel автоматично.

Окрім коефіцієнтів рівняння регресії, Excel також обчислює додаткову регресійну статистику:

- стандартна похибка для оцінки y;
- коефіцієнт детермінованості (r^2);
- стандартні похибки для коефіцієнтів;
- F-статистика;
- число ступенів свободи;
- регресійна сума квадратів та остаточна сума квадратів.

Стандартна похибка при оцінюванні y

Стандартна похибка при оцінюванні y є оцінкою похибки для одиничного значення y, обчисленого на основі рівняння регресії. Ця оцінка використовується разом з критерієм Стьюдента для визначення довірчого інтервалу для обчислення кривої. Довірчий інтервал – це область навколо прогнозованої кривої, в якій з певною вірогідністю (наприклад, 95 процентів) міститься істина крива. Стандартна похибка для оцінки y обчислюється за такою формулою

$$S_{y,x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y(x_i)\right)^2}{p}},$$

де p – число ступенів вільності ($p = n - 2$ для прямої лінії).

Коефіцієнт детермінованості

Коефіцієнт детермінованості є квадратом коефіцієнта кореляції (r^2). Він показує, наскільки точно рівняння, що отримане за допомогою регресійного аналізу, описує фактичні дані. Коефіцієнт детермінованості може приймати значення від 0 до 1, причому 1 відповідає повному збіганню прогнозованих та фактичних даних. Гарним наближенням вважається таке, при якому значення коефіцієнта детермінованості більше 0,9. Коефіцієнт обчислюється за формулою

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \langle y_i\rangle\right)^2},$$ де через y позначено середнє значення $$\langle y_i\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

Стандартне значення похибки для коефіцієнтів

Стандартні значення похибок для коефіцієнтів є мірами точності кожного з коефіцієнтів регресії (A, B, ...). Стандартне значення помилки першого коефіцієнта S_A обчислюється за допомогою стандартної похибки для оцінки y:

$$S_A = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\langle x\rangle^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x\rangle\right)^2}}, \qquad \text{де} \quad x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Основне використання стандартних значень похибок для коефіцієнтів знаходять при перевірці статистичної значущості коефіцієнтів (статистичної рівності нулю). Оскільки усі коефіцієнти входять в рівняння регресії лінійно, то рівність нулю будь-якого коефіцієнта означає відсутність кореляції між відповідним членом x та даними y. Для перевірки статистичної значимості коефіцієнта необхідно взяти значення t-розподілення

Стьюдента для потрібного довірчого інтервалу $(1-\alpha)$ та числа ступенів свободи p і перевірити виконання нерівності

$$|B| > t_{\frac{\alpha}{2}p} S_B.$$

Якщо нерівність виконується, то коефіцієнт є значущим та значення y залежать від значень x, що пов'язані з даним коефіцієнтом. Якщо нерівність не виконується, значення y не залежать від вказаних значень x, то коефіцієнт вважається рівним нулю. Інші коефіцієнти перевіряються таким же способом. Таблиці значень t-розподілення функції **СТЬЮДРАСПОБР( )**, яка повертає значення t-розподілення за заданим значенням α та числа степіней свободи.

Якщо абсолютне значення коефіцієнта за порядком величини більше ніж стандартне значення помилки, то коефіцієнт є значимим. У випадку, якнайменше, чотирьох ступенів свободи (наприклад, при побудові прямої лінії за шістьма точками), значення t-розподілення Стьюдента для 95-процентного довірчого інтервалу складає лише 2,1 та зменшується із збільшенням числа ступенів свободи. Тому можна вважати, що коефіцієнт є значущим, якщо його абсолютне значення перевищує стандартну похибку більше ніж в 2,5 раза. У протилежному випадку необхідно підставляти в вищенаведену формулу точне значення t-розподілення та перевіряти виконання нерівності.

F-статистика використовується разом з F-значеннями для визначення вірогідності того, що дані дійсно описуються вказаним виразом чи збіг визвано випадковими флуктуаціями. Як і у випадку t-теста Стьюдента, для використання F-статистики необхідно використовувати значення F, взяте з таблиць чи обчислене за допомогою функції **FРАСПОБР( )**. Табличне чи повернене функцією значення F більше ніж табличне, збіг обумовлений реальною кореляцією, а не випадковими флуктуаціями.

Для визначення значень F необхідні два числа ступенів свободи. Перше – n_f – рівне числу коефіцієнтів в рівнянні регресії мінус один. Друге – p – стандартне число ступенів свободи, рівне різниці числа точок та числа коефіцієнтів в рівнянні регресії. Значення числа ступенів свободи p повертається функцією **ЛИНЕЙН( )** та використовується в t-тесті Стьюдента.

Число ступенів свободи

Число ступенів свободи p дорівнює різниці числа точок та числа коефіцієнтів в рівнянні регресії. Наприклад, рівняння прямої лінії має два коефіцієнти, що відповідають куту нахилу та зсуву по осі y. Якщо є десять точок, число ступенів свободи дорівнює $10-2=8$. Це число використовується в багатьох статистичних таблицях при визначенні довірчих інтервалів.

Регресійна сума квадратів та остаточна сума квадратів

Для оцінювання похибки апроксимації використовуються дві суми квадратів. Регресійна сума дорівнює сумі квадратів різниць між значеннями y та середнім значенням y

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \langle y\rangle\right)^2.$$

Таким чином, ця величина є мірою розкиду даних відносно середнього значення.

Залишкова сума квадратів рівна сумі квадратів різниць між реальними та прогнозованими значеннями y

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y(x_i)\right)^2.$$

Таким чином, ця величина є мірою розкиду даних відносно лінії регресії. Розділивши вказані величини на число ступенів свободи, отримаємо дисперсію даних відносно середнього значення та відносно лінії регресії. Обчисливши квадратний корінь дисперсії, отримаємо середньоквадратичне відхилення. Отримані значення показують, чи дійсно дані описуються рівнянням регресії чи є постійними.

Обчислення лінійної регресії

Лінійний регресійний аналіз в Excel виконується або ж за допомогою вбудованої функції **ЛИНЕЙН( )**, **ЛГРФПРИБЛ( )**, **ТЕНДЕНЦИЯ( )** і **РОСТ()**, або ж за допомогою інструмента **Регрессия** пакета **Анализ данных**. Лінійна регресія виконується обома способами практично однаково. Основна відмінність є в тому, що значення функцій автоматично обновлюються при кожній зміні даних, в той час як інструмент аналізу необхідно запускати вручну. Окрім того, в пакет аналізу входить набагато більше число різних статистик.

Обчислення регресії за допомогою функції

Функції **ЛИНЕЙН( )**, **ЛГРФПРИБЛ( )**, **ТЕНДЕНЦИЯ( )** і **РОСТ( )** обчислюють регресію даних робочого аркуша. Всі вони повертають масив, що містить чи регресивну криву, чи коефіцієнти рівняння регресії. Функція **ЛИНЕЙН( )** виконує безпосередню лінійну регресію та повертає коефіцієнти, що відповідають тангенсу кута нахилу та зсуву по осі y. Функція **ЛГРФПРИБЛ( )** є варіацією лінійної регресії

$$y = A\left(B^{x_1}\right)\left(C^{x_2}\right)\ldots$$

та повертає коефіцієнти (A, B, C, ...). Функції **ТЕНДЕНЦИЯ( )** та **РОСТ( )** використовують ті ж формули для обчислення регресії, що і функції **ЛИНЕЙН( )** та **ЛГРФПРИБЛ( )**, але повертають множину точок апроксимувальної кривої. Оскільки усі чотири функції повертають масиви, їх необхідно використовувати з діапазонами комірок або ж визначати окремі елементи масиву за допомогою функції **ИНДЕКС( )**.

Функції **ЛИНЕЙН( )** та **ЛГРФПРИБЛ( )** мають такий синтаксис:

ЛИНЕЙН(*y*-масив; *x*-масив; конст.; статистика)

ЛГРФПРИБЛ(*y*-масив; *x*-масив; конст.; статистика),

де ***y*-масив** є посиланням на масив даних *y*, ***x*-масив** є посиланням на один чи декілька масивів даних *x*, **конст.** – це логічне значення, що визначає константу зсуву, **статистика** – це логічне значення, що вказує, чи потрібно повернути додаткову статистику з регресії.

Якщо член ***x*-масив** пропущений, то замість нього використовують множину натуральних чисел {1, 2, 3, ...}. Якщо член **конст.** пропущений чи **ИСТИНА**, константа зсуву (*A*) обчислюється звичайним способом. Якщо член **конст.** дорівнює **ЛОЖЬ**, константа зсуву вважається рівною 1 для функції **ЛГРФПРИБЛ( )**. Якщо член **статистика** дорівнює **ИСТИНА**, разом з коефіцієнтами рівняння регресії повертається таблиця з вісьма чи більше статистичними значеннями.

Хід роботи

В таблиці 12 наведені експериментальні дані залежності теплопровідності сильнолегованого арсеніду галію *p*-типу від температури. Давайте розпочнемо з простої лінійної апроксимації.

1. Відкрийте новий робочий лист та присвойте йому ім'я **ЛР№ 10**
2. Встановіть ширину стовпця **B** рівну **10**, стовпця **D** – **2** та стовпця **H** – **18**.

Таблиця 12 – Теплопровідність легованого арсеніду галію (GaAs)

T(K)	K(Вт/см·K)	T(K)	K(Вт/см·K)
250	0,445	600	0,158
300	0,362	650	0,144
350	0,302	700	0,132
400	0,256	750	0,121
450	0,223	800	0,112
500	0,197	850	0,103
550	0,176		

3. В комірку **A1** введіть **Теплопровідність арсеніду галію; Лінійна апроксимація.**
4. В комірки **A3:B3** введіть та вирівняйте по центру такі мітки: **A3 – T(K); B3 – (K(Вт/см·K).**
5. В комірку **A4** введіть **250**; в комірку **A5** введіть значення **300**; виділіть обидві комірки та перетягніть маркер заповнення вниз до комірки **A16**.
6. В комірки **B4:B16** введіть значення теплопровідності, які наведені в таблиці 12.

Створіть формулу для обчислення лінійного наближення *y*.

7. В комірку **C3** введіть **K очікуване** та вирівняйте по центру. Встановіть ширину стовпця **C** рівну **12.**
8. Присвойте коміркам **F7** та **G7** імена **B** та **A**, відповідно.
9. В комірку **C4** введіть **=B*A4+A** і скопіюйте в комірки **C4:C16** та змініть формат на числовий з трьома десятковими знаками.

Визначте місце для таблиці коефіцієнтів регресії та статистики. Повна регресійна таблиця повинна містити п'ять рядків та по одному стовпці на кожен коефіцієнт. У випадку лінійного наближення ширина таблиці дорівнює двом.

10. Введіть такі величини в стовпці **E,F,G** та **H.**

E5	**Таблиця регресії**	**G6**	**A**
E9	**r^2**	**G12**	**Остаточн.**
E10	**F**	**H7**	**Коефіцієнт**
E11	**Сума кв.**	**H8**	**Ст. похибка коеф.**
F6	**B**	**H9**	**Ст. похибка оцінки Y**
F12	**Рег.**	**H10**	**Ступені свободи**

11. Встановіть контури, як показано на рис. 12.

Перейдемо до обчислення коефіцієнтів.

12. Виділіть комірки **F7:G11** та введіть формулу **=ЛИНЕЙН(B4:B16; A4: A16;ИСТИНА;ИСТИНА)** натисніть комбінацію клавіш **<Ctrl+Shift+ Enter>** для вставки у всі комірки функції масиву.
13. Відключіть відображення сітки.

Робочий лист повинен виглядати як на рис. 12.

Контрольні питання

1. Яка загальна постановка задачі апроксимації?
2. Що таке емпірична функція чи формула?
3. У чому відмінність задачі апроксимації від задач інтерполювання?
4. З яких етапів складається визначення емпіричної формули?
5. В чому сутність методу найменших квадратів?
6. Як обчислюється відхилення апроксимувальної функції від експериментальних значень?
7. Що є умовою мінімуму критерію квадратного відхилення?
8. Як отримати систему рівнянь для визначення коефіцієнтів при лінійному наближенні за методом найменших квадратів?
9. Назвіть приклади апроксимувальних функцій та їх лінійні аналоги.
10. Як використовувати скінченні різниці для вибору степеня апроксимувального полінома?
11. Як перевірити відповідність емпіричної формули експериментальним даним?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Теплопровідність арсеніду галію; лінійна апроксимація								
2									
3	T (K)	K (Вт/(см*K)	K очікуване						
4	250	0,445	0,362						
5	300	0,362	0,336		Таблиця регресії				
6	350	0,302	0,311			B	A		
7	400	0,256	0,286			-0,0005049	0,4877967	Коефіцієнт	
8	450	0,223	0,261			5,743E-05	0,0333661	Ст. похибка коеф.	
9	500	0,197	0,235		r^2	0,8754174	0,0387413	Ст. похибка оцінки Y.	
10	550	0,176	0,210		F	77,294858	11	Ступені свободи	
11	600	0,158	0,185		Сума кв.	0,1160111	0,0165098		
12	650	0,144	0,160			Рег.	Остаточн.		
13	700	0,132	0,134						
14	750	0,121	0,109						
15	800	0,112	0,084						
16	850	0,103	0,059						
17									

Рисунок 12

11 ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ДАНИХ

Мета роботи – набути навичок побудови поліноміальних апроксимувальних функцій (аналітичних залежностей) за сукупністю дискретних експериментальних даних про зміну значень функції при змінах значень аргументу за допомогою Microsoft Excel'2000.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи виписати з таблиці 13 значення аргументу і відповідні їм значення функції.
2. Обчислити коефіцієнти полінома третього ступеня для апроксимації експериментальних даних.
3. Розрахувати значення функції в точках апроксимації відповідно до отриманого полінома третього степеня.
4. Зробити висновки.

Таблиця 13

Варіант	Значення пар аргументу та функції $\left(\frac{x_i}{y_i}\right)$						
1	$\frac{-3}{4,8}$	$\frac{-2}{4,2}$	$\frac{-1}{3,7}$	$\frac{0}{3,6}$	$\frac{1}{3,3}$	$\frac{2}{3,1}$	$\frac{3}{2,8}$
2	$\frac{0}{3,5}$	$\frac{1}{3,2}$	$\frac{2}{2,9}$	$\frac{3}{2,1}$	$\frac{4}{3,0}$	$\frac{5}{3,2}$	$\frac{6}{3,5}$
3	$\frac{-1}{-6,1}$	$\frac{0}{-5,8}$	$\frac{1}{-5,2}$	$\frac{2}{-4,8}$	$\frac{3}{-4,5}$	$\frac{4}{-5,0}$	$\frac{5}{-5,2}$
4	$\frac{-2}{1,1}$	$\frac{-1}{0,2}$	$\frac{0}{-0,4}$	$\frac{1}{-1,0}$	$\frac{2}{-1,1}$	$\frac{3}{-1,0}$	$\frac{4}{-0.2}$
5	$\frac{0}{1,2}$	$\frac{1}{-0,5}$	$\frac{2}{-0,2}$	$\frac{3}{0,3}$	$\frac{4}{0,7}$	$\frac{5}{1,1}$	$\frac{6}{1,4}$
6	$\frac{-3}{1,7}$	$\frac{-1}{3,3}$	$\frac{0}{5,1}$	$\frac{1}{6,6}$	$\frac{3}{5,6}$	$\frac{4}{4,0}$	$\frac{6}{3,5}$
7	$\frac{0}{1,7}$	$\frac{1}{1,9}$	$\frac{2}{2,5}$	$\frac{3}{2,9}$	$\frac{4}{3,1}$	$\frac{5}{2,8}$	$\frac{6}{2,4}$
8	$\frac{-3}{-0,8}$	$\frac{-2}{-0,5}$	$\frac{-1}{-0,2}$	$\frac{0}{0,5}$	$\frac{1}{1,0}$	$\frac{2}{1,2}$	$\frac{3}{1,7}$
9	$\frac{-1}{3,1}$	$\frac{0}{4,5}$	$\frac{1}{4,9}$	$\frac{2}{5,1}$	$\frac{3}{5,5}$	$\frac{4}{5,2}$	$\frac{5}{5,0}$
10	$\frac{-2}{-0,3}$	$\frac{-1}{0,5}$	$\frac{0}{1,5}$	$\frac{1}{0,5}$	$\frac{2}{0,3}$	$\frac{3}{-0,2}$	$\frac{4}{-1,2}$

Хід роботи

Хоча функції Excel не розраховані на виконання поліноміальної апроксимації, її можна легко виконати. При поліноміальній апроксимації відбувається апроксимація даних таким виразом

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots .$$

Апроксимуємо теплопровідність арсеніду галію(див. лаб. раб. № 10) ще раз, але з використанням поліноміальної апроксимації третього порядку (до x^3).

1. Відкрийте новий робочий лист та присвойте йому ім'я **ЛР№ 11.**
2. В комірку А1 введіть текст **Теплопровідність арсеніду галію; поліноміальна апроксимація.**
3. В комірки **A14:E14** введіть та вирівняйте по центру такі мітки:
   A14 – T(K); B14 – T^2; C14 – T^3; D14 – K(W/cm·K);
   E14 – K очікуване.
4. В комірку **A15** введіть **250**, в комірку **A16** введіть значення **300**, виділіть обидві комірки та перетягніть маркер заповнення вниз до комірки **A27.**
5. В комірки **B15:B27** введіть значення теплопровідності.
6. В комірку **B15** введіть формулу **=A15^2** і скопіюйте її в комірки **B16:B27.**
7. В комірку **C15** введіть формулу **=A4^3** і скопіюйте її в комірки **C16:C27.**
8. Змініть формат комірок **B15:C27** на експоненціальний із двома десятковими знаками.

Введіть формулу для оцінювання теплопровідності. Зверніть увагу, що для коефіцієнта **C** використовується позначення C̲ (**C** з підкресленням), оскільки символ **C** є зарезервованим. Оскільки імена для коефіцієнтів ще не визначені, всі комірки будуть показувати помилку **#ИМЯ.**

9. В комірку **E15** введіть формулу **=A+B*A4+C̲ *B4+D*C4** і скопіюйте її в комірки **E16:E27.**
10. Встановіть ширини стовпців у такий спосіб: **A – 7; B:F – 10; G – 20.**
11. Встановіть контури, як показано на рис. 1.
12. Виділіть комірки **C5:F6** і присвойте їм ім'я за допомогою команди **Вставка⇒ Имя⇒Создать** (Зверніть увагу, що комірка **D6** має ім'я C̲ , а не **C**).

Тепер виконайте обчислення коефіцієнтів регресії. Визначте місце для таблиці коефіцієнтів регресії та статистики. Повна регресійна таблиця повинна містити п'ять рядків та по одному стовпці на кожен коефіцієнт.

13. Введіть такі величини в стовпці **B, C, D, E, F, G**:

B4 –	**Таблиця регресії**	**D11 –**	**Остаточн.**
B8 –	**r^2**	**E5 –**	**B**
B9 –	**F**	**F5 –**	**A**

B10 –	**Сума кв.**	**G6 –**	**Коефіцієнт**
C5 –	**D**	**G7 –**	**Ст. похибка коеф.**
C11 –	**Рег.**	**G8 –**	**Ст. похибка оцінки Y**
D5 –	**C**	**G9 –**	**Ступені свободи**

14. Виділіть комірки **C6:F10** і введіть формулу

=ЛИНЕЙН(D15:D27;A15:C27;ИСТИНА;ИСТИНА).

15. Натисніть комбінацію клавіш **<Ctri+Shift+Enter>** для вставки формули у всі комірки у вигляді масиву.

Робочий лист повинен тепер виглядати, як показано на рис. 13. Знову зверніть увагу на значення r^2, що свідчить про гарний ступінь наближення регресійної кривої до експериментальних даних.

Перевірка статистики

Перевірте статистичні характеристики отриманої кривої. Спочатку варто переконатися, що коефіцієнти регресії **A, B, C і D** потрапляють у 95-процентний довірчий інтервал.

$\alpha = (1-0{,}95) = 0{,}05$;

$\alpha/2 = 0{,}025$;

$p = 9$ (із робочого листа);

$t_{\alpha/2,p} = t_{0,025;9} =$ **СТЬЮДРАСПОБР(0,05;9)** $= 2{,}262$;

$S_A = 0{,}0303$ (із робочого листа);

$t_{0,025;9} S_A = 2{,}262 * 0{,}0303 = 0{,}0685$.

Це число набагато менше значення **A**, тому коефіцієнт **A** є значимим. Аналогічний аналіз застосовується і до інших коефіцієнтів. Потім необхідно перевірити, що кореляція даних з отриманої кривої не обумовлена випадковими флуктуаціями. Значення F-статистики для $n_f = 3$, $p = 9$ і довірчого інтервалу 0,95 складає **FРАСПОБР(0,05;3;9)**=3,86, що набагато менше обчисленого значення F-статистики 2911, тому кореляція між кривою й експериментальними даними не випадкова. Залишкова сума квадратів набагато менша регресійної суми квадратів. Таким чином, дані виявляються згрупованими уздовж апроксимувальної кривої, а не розкиданими хаотично в околі деякого середнього значення.

Контрольні питання

1. У чому відмінність задачі апроксимації від задач інтерполювання?
2. З яких етапів складається визначення емпіричної формули?
3. Що є умовою мінімуму критерію квадратного відхилення?
4. Як отримати систему рівнянь для визначення коефіцієнтів при квадратичному наближенні за методом найменших квадратів?
5. Назвіть приклади апроксимувальних функцій та їх лінійні аналоги.
6. Як використовувати скінченні різниці для вибору степеня апроксимувального полінома?
7. Як перевірити відповідність емпіричної формули експериментальним даним?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Теплопровідність арсенідугалію GaAs; поліноміальна апроксимація							
2								
3								
4		Таблиця регресії						
5			D	C	B	A		
6			-2,27273E-09	4,83432E-06	-0,003618147	1,077851149	Коефіцієнт	
7			2,17043E-10	3,59808E-07	0,000187443	0,030310467	Ст. похибка коеф.	
8		r^2	0,998970639	0,003893183	#Н/Д	#Н/Д	Ст. похибка оцінки Y.	
9		F	2911,430115	9	#Н/Д	#Н/Д	Ступені свободи	
10		Сума кв.	0,132384511	0,000136412	#Н/Д	#Н/Д		
11			Рег.	Остаточн.				
12								
13								
14	T (K)	T^2	T^3	K (Вт/(см*K))	K очікуване			
15	250	6,25E+04	1,56E+07	0,445	0,440			
16	300	9,00E+04	2,70E+07	0,362	0,366			
17	350	1,23E+05	4,29E+07	0,302	0,306			
18	400	1,60E+05	6,40E+07	0,256	0,259			
19	450	2,03E+05	9,11E+07	0,223	0,222			
20	500	2,50E+05	1,25E+08	0,197	0,193			
21	550	3,03E+05	1,66E+08	0,176	0,172			
22	600	3,60E+05	2,16E+08	0,158	0,156			
23	650	4,23E+05	2,75E+08	0,144	0,144			
24	700	4,90E+05	3,43E+08	0,132	0,134			
25	750	5,63E+05	4,22E+08	0,121	0,125			
26	800	6,40E+05	5,12E+08	0,112	0,114			
27	850	7,23E+05	6,14E+08	0,103	0,099			

Рисунок 13

12 РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПРИСТРІЛКИ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Мета роботи – вивчити метод пристрілки для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку та набути навичок їх розв'язування з застосуванням Microsoft Excel 2000.

План роботи

1. Виписати з таблиці 14 диференціальне рівняння, початкове та кінцеве значення незалежної змінної, крайові умови та задану точність ε згідно з номером бригади студентів в журналі академ. групи .
2. Розв'язати диференціальне рівняння методом пристрілки з точністю $\varepsilon=10^{-5}$.
3. Проаналізувати отримані результати .

Таблиця 14

Варіант	Диференціальне рівняння	Інтервал		Крайові умови	
		a	b	$y(a)$	$y(b)$
1	$y''+3y'+4x^3y=0$	0	1	2	1,818
2	$y''+y'-6y=0$	0	1	3	7,49
3	$y''+2y'-18y=0$	0	1	0,703	16,5
4	$y''-3y'+2y=e^x$	0	1	5	–5,57
5	$y''+y'=1$	0	1,5	1,2	6,0
6	$y''-4y'=0$	0	1	3,4	16,2
7	$y''-xy'+y=1$	0	1	0	0
8	$y''-y'-2x=0$	0	1	0,5	3,34
9	$y''+(1+x^2)y'+1=0$	0	1	0	0
10	$\frac{1}{x^2}y''+y'=e^x$	1	2,4	0,12	5,67

Хід роботи

При методі пристрілки крайова задача розв'язується із застосуванням тих же методів, що і задача Коші. Для цього невідомі граничні умови на одному краї заміняються їхніми передбачуваними значеннями, що перетворює крайову задачу в задачу Коші. Після цього рівняння інтегрується від краю 1 до кінця інтервалу визначення із застосуванням, наприклад, методу Ейлера. Після завершення інтегрування граничні умови на краю 2, отримані із розв'язку, порівнюються із заданими. Якщо вони збігаються, задача розв'язана; у протилежному випадку необхідно змінити початкові припущення про невідомі умови на краю 1, щоб підігнати розв'язок під умови на краю 2, і знову виконати інтегрування. Таким чином, виконується свого роду "пристрілювання" по граничних умовах на краю 2 шляхом підбору невідомих граничних умов на краю 1.

Наприклад, для розв'язання диференціального рівняння другого порядку необхідно мати дві граничні умови. Якби ставилася задача Коші, це були б значення функції і її похідної в одній точці, тоді як у типовій крайовій задачі звичайно задаються значення функції на двох кінцях деякого інтервалу. Для інтегрування цього рівняння від одного кінця інтервалу до іншого з використанням методів розв'язання задачі Коші знадобилося б також значення похідної на одному з кінців інтервалу. При наявності цього значення рівняння можна проінтегрувати до іншого кінця і порівняти отриманий розв'язок з граничною умовою на ньому. При їхньому збіганні задача розв'язана, тоді як у протилежному випадку необхідно повернутися до початкової точки і змінити передбачуване значення похідної. Цей процес необхідно продовжувати доти, поки не буде знайдений розв'язок, що задовольняє обидві граничні умови.

Вигин рівномірно навантаженої балки

Якщо шарнірно оперти балку на двох її кінцях, вона злегка прогнеться під власною вагою, як показано на рис. 14. Величина цього прогину описується таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{m}{EI}$$

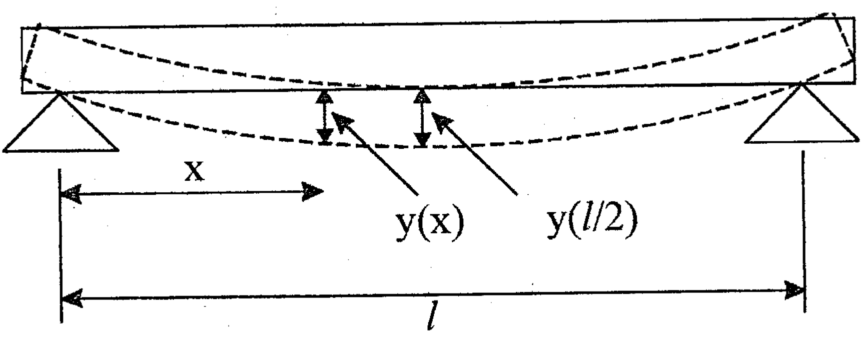


Рисунок 14 – Шарнірно оперта балка, що прогинається під власною вагою

У цьому рівнянні $y(x)$ – переміщення (прогин) у точці x,

I – момент інерції поперечного перерізу балки,

E – модуль пружності (для сталі 3×10^7 фнс/кв.д.),

m – згинальний момент.

Для балки з постійним поперечним перерізом згинальний момент m виражається такою формулою

$$m = \frac{w}{2}x(l - x),$$

де w – питома лінійна вага балки,

l – її довжина.

Розрахуємо прогин 50-футової сталевої балки широкополичного прокатного профілю 8-WF-67 (широкий двотавр), що важить 67 фунтів на фут. Для випадку горизонтальної орієнтації полиць момент інерції перерізу I складає 271,8 дюйм^4. Для малих переміщень аналітичний розв'язок даної диференціальної задачі виглядає так

$$y(x) = \frac{wx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3).$$

Максимальний прогин досягається в центрі і виражається такою формулою

$$y(l/2) = \frac{5wl^4}{384EI}.$$

До цього диференціального рівняння варто приєднати дві граничних умови обпирання, по одній на кожному кінці:

$$y(0)=0;$$

$$x(l)=0.$$

Для розв'язання цієї задачі тими методами, що застосовувалися для задач Коші, необхідно знати на одному кінці ще і похідну. Потрібно припустити її значення на кінці $x = 0$, проінтегрувати рівняння від одного кінця балки до іншого і перевірити, чи рівний прогин $y(x)$ в точці $x = l$ нулю. Якщо це не так, варто прийняти для похідної в точці $x = 0$ інше значення. Зверніть увагу, що з тим же успіхом можна інтегрувати рівняння від точки $x = l$ до точки $x = 0$.

Розв'яжемо цю задачу модифікованим методом Ейлера. Спочатку зведемо рівняння другого порядку до двох рівнянь першого порядку, замінивши першу похідну новою невідомою функцією u:

$$y`(x) = u(x);$$

$$u`(x) = -\frac{m}{EI}.$$

При використанні методу Ейлера значення в наступній точці обчислюється за такими формулами:

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x);$$

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x).$$

Розв'яжемо дане рівняння на листі електронної таблиці, прийнявши початкове припущення щодо значення $u(0)$.

1. Відкрийте новий робочий лист і назвіть його **ЛР №12.**
2. В комірку **А1** введіть заголовок **Вигин балки; крайова задача; метод пристрілки.**

Заповнимо таблицю, що містить геометричні і фізико-механічні параметри балки. Лінійна вага балки, що буде вводитися в комірку **B5**, дорівнює 67 фунтів на фут; щоб перевести його у фунти на дюйм, варто розділити його на 12. В комірці **B8** буде знаходитися довжина балки, перетворена в дюйми множенням на 12.

3. В комірку **A4** введіть заголовок **Параметри балки 8-WF-67.**

4. Введіть у таблицю такі значення:

Комірка	Значення	Комірка	Значення	Комірка	Значення
A5	**W**	**B5**	**=67/12**	**C5**	**фунт/дюйм**
A6	**I**	**B6**	**271,8**	**C6**	**дюйм^4**
A7	**E**	**B7**	**3,0E7**	**C7**	**фунтс/кв.д.**
A8	**I**	**B8**	**=50*12**	**C8**	**дюйм**

5. Вирівняйте вміст комірок **A5:A8** по правому краї. Виділіть комірки **A5:B8** і виберіть команду **Вставка > Имя > Создать.** Включіть перемикач **в столбце слева** і клацніть на кнопці **ОК.**

Оскільки аналітичний розв'язок задачі відомий, заповнимо другу таблицю, що містить прогин з аналітичного розв'язку для деякого значення *x* (припустимо 72 дюйми) і максимальне значення прогину у центрі ($x = l/2$).

6. Введіть у зазначені комірки таблиці такі значення:

Комірка	Значення	Комірка	Значення
E3	**Аналітичний розв'язок**	**F4**	**72**
E4	**x**	**G4**	**дюйм**
E5	**y(x)**	**G5**	**дюйм**
E6	**y(l/2)**	**G6**	**дюйм**

7. Присвойте комірці **F4** ім'я **X.**

8. В комірку **F5** введіть таку формулу **=(W*X/(24*E*I))*(L^3-2*L*X^2 +X^3).**

9. В комірку **F6** введіть таку формулу **=5*W*L^4/(384*E*I).**

10. Зробіть формат комірок **F5** і **F6** числовим з п'ятьма цифрами після коми.

Розіб'ємо інтервал визначення розв'язку від 0 до 600 дюймів, сіткою з кроком 12 дюймів і обчислимо похідну шуканої функції прогину для усіх вузлових значень.

11. Введіть у зазначених комірках наведені нижче значення і вирівняйте їх по центрі комірок

Комірка	Значення	Комірка	Значення	Комірка	Значення	Комірка	Значення
A10	**x**	**B10**	**u'(x)**	**C10**	**u(x)**	**D10**	**y(x)**
A11	**(дюйм)**	**B11**	**(1/дюйм)**	**C11**	**(д/д)**	**D11**	**(дюйм)**

12. В комірку **A12** введіть **0**, а в комірку **A13** – **12;** виділіть комірки **A12:A13** і перетягніть маркер заповнення вниз до комірки **A62.**

13. Введіть в комірку **B13** таку формулу **=B12+(A13-A12)*(-W*A12*(L-A12))/(2*E*I)** і скопіюйте її в комірки **B14:B62**.
14. Зробіть формат комірок **B12:B62** експонентним з однією цифрою після коми.

Тепер нам необхідно обчислити значення $u(x)$ для кожного кроку сітки. Перше значення $u(x)$ – це відсутня на одному з кінців гранична умова; її варто замінити початковим припущенням. Йому відповідає комірка **F9**.

15. В комірку **C12** введіть **=F9.**
16. В комірку **C13** введіть таку формулу **=C12+(A13-A12)*B12** і скопіюйте її в комірки **C14:C62.**

Обчислимо значення $y(x)$ для кожного кроку, використовуючи значення $u(x)$. Початкове значення $y(x)$ дорівнює нулю – це задано граничною умовою на початку інтервалу визначення розв'язку.

Нам залишилося заповнити таблицю, що підсумовує отримані числові результати і містить значення $y(x)$ в точках $x = l$ і $x = l/2$. У цю таблицю також вводиться початкове припущення про значення $u(0)$.

17. В комірку **E8** введіть **Числовий розв'язок.**
18. Введіть такі значення в зазначених комірках:

Комірка	Значення	Комірка	Значення	Комірка	Значення
E9	**u(0)**	**F9**	**0,01**	**G9**	**дюйм/дюйм**
E10	**y(l/2)**	**F10**	**=D37**	**G10**	**дюйм**
E11	**y(l)**	**F11**	**=D62**	**G11**	**дюйм**

Вирівняйте вміст комірок **E9:E11** по їхньому правому краю. Зробіть формат комірок **F10** і **F11** числовим з п'ятьма десятковими цифрами.

Для виконання розрахунку за побудованою таблицею введіть в комірку **F9** початкове припущення для $u(0)$. Після перерахування листа перевірте, чи дорівнює нулю значення $y(l)$ в комірці **F11.** Якщо це не так, введіть інше початкове припущення для $u(0)$. Продовжуйте зміну початкового припущення доти, поки $y(l)$ не стане рівним нулю з точністю до необхідної кількості десяткових знаків.

Описану операцію легко виконати вручну, і на пошук розв'язку при цьому піде усього біля п'яти хвилин. Однак даний алгоритм розв'язку крайових задач – це відмінне поле діяльності для застосування модуля **Поиск решения**. Оскільки у побудованій таблиці є всього одна комірка вихідних варійованих даних і одна комірка, що містить критерій оптимальності, модуль **Поиск решения** повинен легко справитися із задачею.

19. Виберіть команду **Сервис > Поиск решения**. Як цільову комірку вкажіть **F11**, як її цільове значення задайте 0, а в полі **Изменяя ячейки** вкажіть комірку **F9**, як показано на рис. 15.
20. Для пошуку розв'язку клацніть на кнопці **Выполнить.**

Після завершення роботи модуля пошуку розв'язку таблиця повинна виглядати так, як показано на рис. 16.

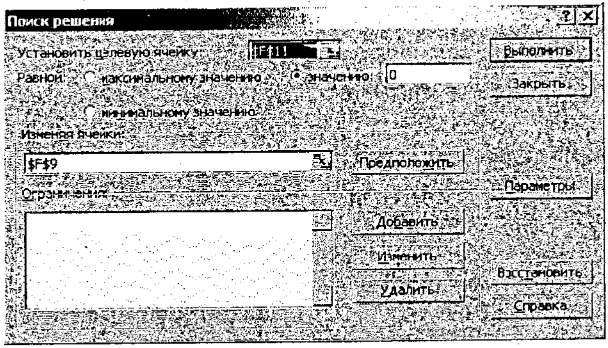


Рисунок 15

Порівняйте дані аналітичного розв'язку в комірках **F5** і **F6** з аналогічними результатами числового розрахунку в комірках **D18** і **F10**. Зверніть увагу, що хоча граничні умови задовольняються з точністю до чотирьох знаків після коми, у внутрішніх точках області точними є тільки три цифри після коми. Така втрата точності притаманна самому методу і пропорційна величині кроку сітки, нанесеної на інтервал визначення розв'язку. Зменшення кроку підвищує точність розв'язку доти, поки не стає істотною похибка округлення.

Контрольні питання

1. Що розуміємо під крайовою задачею?
2. Що означає «розв'язати крайову задачу»?
3. Яка крайова задача називається лінійною?
4. Сформулюйте однорідну крайову задачу.
5. Як звести крайову задачу до задачі Коші?

	A	B	C	D	E	F	G
1	Вигин балки; крайова задача; метод пристрілки						
2							
3					Аналітичний розв'язок		
4	Параметри балки				x	72	дюйм
5	W	5,583333	фунт/дюйм		y	0,4317	дюйм
6	I	271,8	дюйм^4		y(l/2)	1,15549	дюйм
7	E	3,00E+07	фунтс/кв. д				
8	L	600	дюйм		Числовий розв'язок		
9					u(0)	0,005913748	дюйм/дюйм
10	x	u(x)	y(x)		y(l/2)	1,153642315	дюйм
11	(дюйм)	(дюйм/дюйм)	(дюйм)		y(l)	0	дюйм
12	0	5,9E-03	0				
13	12	5,9E-03	0,07096498				
14	24	5,9E-03	0,14192995				
15	36	5,8E-03	0,21254706				
16	48	5,7E-03	0,28248263				
17	60	5,6E-03	0,3514172				
18	72	5,5E-03	0,41904548				
19	84	5,3E-03	0,48507642				
20	96	5,2E-03	0,54923313				
51	468	-4,8E-03	0,7563279				
52	480	-5,0E-03	0,69928473				
53	492	-5,2E-03	0,63919594				
54	504	-5,5E-03	0,57626741				
55	516	-5,7E-03	0,51071923				
56	528	-5,8E-03	0,44278567				
57	540	-6,0E-03	0,37271521				
58	552	-6,1E-03	0,30077053				
59	564	-6,2E-03	0,22722849				
60	576	-6,3E-03	0,15238018				
61	588	-6,4E-03	0,07653086				
62	600	-6,4E-03	0				
63							

Рисунок 16

13 РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Мета роботи – вивчити метод скінченних різниць для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку та набути навичок їх розв'язування із застосуванням Microsoft Excel 2000.

План роботи

1. Виписати з таблиці 15 диференціальне рівняння, початкове та кінцеве значення незалежної змінної, крайові умови та задану точність ε згідно з номером бригади студентів в журналі академ. групи.
2. Розв'язати диференціальне рівняння методом скінченних різниць з точністю $\varepsilon=10^{-5}$.
3. Проаналізувати отримані результати.

Таблиця 15

Варіант	Диференціальне рівняння	Інтервал		Крайові умови	
		a	b	$y(a)$	$y(b)$
1	$y''=y'\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{2}{1+x^2}y+1$	0	4	1,25	–0,81
2	$y''=\dfrac{-2}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y+\dfrac{10\cos(\ln(x))}{x^2}$	1	3	1	–1
3	$y''=-2y'-2y+e^{-x}+\sin(2x)$	0	4	0,6	–0,1
4	$y''=-4y'-4y+5\cos(4x)+\sin(2x)$	0	2	0,75	0,41
5	$y''+\dfrac{1}{x}y'+\left(1-\dfrac{1}{4x^2}\right)y=0$	1	6	1	0
6	$y''-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{1}{x^2}y=1$	0,5	4,5	1	2,33
7	$y''=2y'-3y+x^2-1$	0	1	5	0
8	$y''=-5y'-6y+xe^{-2x}+3{,}9\cos(3x)$	0	3	0,95	0,16
9	$y''=\dfrac{-2}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y+\dfrac{\sin(x)}{x^2}$	1	4	–2,5	–0,73
10	$y''+\dfrac{1}{x}y'+\left(1-\dfrac{1}{4x^2}\right)y=\sqrt{x}\cos(x)$	1	6	1	0

Хід роботи

Іншим методом розв'язання задачі про вигин балки (див. лабораторну роботу №12) є заміна похідних, що входять у рівняння, центральними різницями. Шляхом центрування різниць по вузлах сітки можна одержати систему рівнянь із рядковою структурою, що повинна зважуватися методами, розвитими для таких систем. Замінимо першу і другу похідну такими виразами для центральних різниць:

$$\frac{du}{dx}=\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h};$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}.$$

Якщо замінити центральною різницею другу похідну в рівнянні вигину балки, одержимо таке рівняння

$$\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}=-\frac{m}{EI}.$$

Таке рівняння можна записати для усіх вузлів сітки, крім двох крайніх, у яких значення y задаються граничними умовами.

Для розв'язання задачі, записаної в такій формі, на листі електронної таблиці можна ефективно реалізувати три методи: ітераційний, ітераційний із прискоренням збіжності і матричний.

Ітераційний метод скінченних різниць

Ітераційний метод скінченних різниць є специфічним різновидом методу послідовних наближень. Розв'яжемо цим методом різницевий аналог диференціального рівняння відносно $y(x)$

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[y(x+h)+y(x-h)+h^2\frac{m}{EI}\right].$$

Це рівняння буде використовуватися у всіх внутрішніх точках інтервалу, а на його краях будуть також використовуватися граничні умови:

$$y(0)=0,\ y(l)=0.$$

Розв'яжемо поставлену задачу ітераційним методом скінченних різниць на листі таблиці Excel.

1. Відкрийте новий робочий лист і назвіть його **ЛР №13.**
2. Зробіть ширину стовпця **F**, рівною **13.**
3. В комірку **A1** введіть заголовок **Вигин балки; крайова задача; метод скінченних різниць.**

Заповнимо таблицю, що містить геометричні і фізико-механічні параметри балки. Лінійна вага балки, що буде вводитися в комірку **B5**, дорівнює 67 фунтів на фут; щоб перевести його у фунти на дюйм, варто розділити його на 12. В комірці **B8** буде знаходитися довжина балки, перетворена в дюйми множенням на 12.

4. В комірку **A4** введіть заголовок **Параметри балки 8-WF-67.**
5. Введіть у таблицю такі значення:

Комірка	Значення	Комірка	Значення	Комірка	Значення
A5	**W**	**B5**	**=67/12**	**C5**	**фунт/дюйм**
A6	**I**	**B6**	**271,8**	**C6**	**дюйм4**

A7	**E**	**B7**	**3,0E7**	**C7**	**фунтс/кв.д.**
A8	**I**	**B8**	**=50*12**	**C8**	**дюйм**

6. Вирівняйте вміст комірок **A5:A8** по правому краю. Виділите комірку **A5:B8** і виберіть команду **Вставка > Имя > Создать.** Включіть перемикач **в столбце слева** і клацніть на кнопці **ОК**.

Оскільки аналітичний розв'язок задачі відомий, заповнимо другу таблицю, що містить прогин з аналітичного розв'язку для деякого значення x (припустимо 72 дюйми) і максимальне значення прогину у центрі ($x = l/2$).

7. Введіть у зазначені комірки таблиці такі значення:

Комірка	Значення	Комірка	Значення
E3	**Аналітичний розв'язок**	**F4**	**72**
E4	**x**	**G4**	**дюйм**
E5	**y(x)**	**G5**	**дюйм**
E6	**y(l/2)**	**G6**	**дюйм**

8. Привласніть комірці **F4** ім'я **X**.
9. В комірку **F5** введіть таку формулу **=(W*X/(24*E*I))*(L^3-2*L*X^2 +X^3)**.
10. В комірку **F6** введіть таку формулу **=5*W*L^4/(384*E*I)**.
11. Зробіть формат комірок **F5 і F6** числовим з п'ятьма цифрами після коми.

Розіб'ємо інтервал визначення розв'язку від 0 до 600 дюймів, сіткою з кроком 12 дюймів і обчислимо похідну шуканої функції прогину для усіх вузлових значень .

12. Введіть у зазначених комірках наведені нижче значення і вирівняйте їх по центру комірок:

Комірка	Значення	Комірка	Значення	Комірка	Значення
A10	**x**	**B10**	**y(x)**	**E10**	**y(l/2)**
A11	**(дюйм)**	**B11**	**(дюйм)**	**G10**	**(дюйм)**

13. В комірку **A12** введіть **0**, а в комірку **A13 – 12;** виділіть комірки **A12:A13** і перетягніть маркер заповнення вниз до комірки **A62**.
14. Включіть режим **Вычисления вручную і итерации** на вкладці **Вычисления** діалогового вікна **Сервис > Параметры**. Введіть у поле **Предельное число итераций** значення **1000,** а в поле **Относительная погрешность** – значення **1E-6,** як на рис. 17.

Уведемо прапорець ініціалізації, який би переводив таблицю у певний початковий стан.

15. В комірку **A3** введіть **Поч. прапорець.**
16. В комірку **B3** введіть **ИСТИНА,** а в комірку **C3** введіть **0.**
17. Дайте коміркам **B3** і **C3** імена **Поч і Поч_Зн.**

Внесемо в таблицю різницеве рівняння, а також граничні умови в першу й останню комірки діапазону **B12:B62**. Протестуємо прапорець ініціалізації для перевірки необхідності переходу задачі в початковий стан.

18. В комірку **B12** введіть **0**.
19. В комірку **B13** введіть таку формулу **=ЕСЛИ(Поч;Поч_Зн;0,5*(B14 +B12+((A14-A12)/2)^2*w*A13*(l-A13)/(2*E*I)))** скопіюйте її в комірки **B14:B61**.

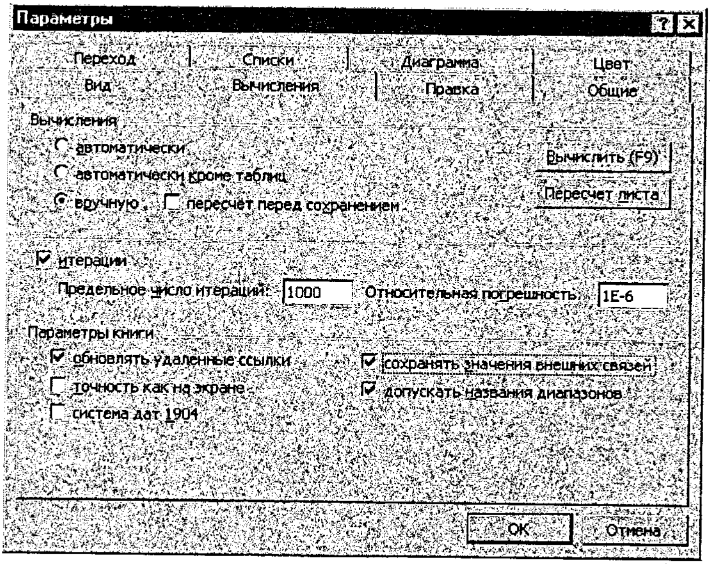


Рисунок 17

20. В комірку **B62** введіть **0**.
21. Зробіть формат комірок **B12:B62** числовим з п'ятьма знаками після коми.
22. В комірку F10 введіть формулу **=B37**.

Для виконання розрахунку за побудованою таблицею встановіть прапорець ініціалізації (в комірку **B3**) рівним **ИСТИНА** і натисніть клавішу <F9>. Після переведення листа в початковий стан зробіть цей прапорець рівним **ЛОЖЬ** і знову натисніть <F9> для запуску ітераційного процесу.

Процес перерахування таблиці буде тривати доти, поки зміна всіх значень на кожному кроці не стане менше 10^{-6}; після його завершення в таблиці буде відображено отриманий розв’язок. Якщо за першу послідовність ітерацій розв’язку потрібної точності не отримано, знову натисніть клавішу <F9>. Після збіжності процесу лист повинен виглядати так, як показано на рис. 18.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Вигин балки; крайова задача; метод скінченних різниць						
2							
3	Поч. прапорець	ЛОЖЬ	0		Аналітичний розв'язок		
4	Параметри балки				x	72	дюйм
5	W	5,583333	фунт/дюйм		y	0,4317	дюйм
6	I	271,8	дюйм^4		y(l/2)	1,15549	дюйм
7	E	3,00E+07	фунтс/кв. д				
8	L	600	дюйм		Числовий розв'язок		
9							
10	x	y(x)			y(l/2)	1,15561	дюйм
11	(дюйм)	(дюйм)					
12	0	0,00000					
13	12	0,07391					
14	24	0,14746					
15	36	0,22034					
16	48	0,29221					
17	60	0,36178					
18	72	0,43176					
19	84	0,49886					
20	96	0,56382					
53	492	0,62640					
54	504	0,56383					
55	516	0,49886					
56	528	0,43176					
57	540	0,36279					
58	552	0,29222					
59	564	0,22034					
60	576	0,14747					
61	588	0,07391					
62	600	0,00000					

Рисунок 18

Контрольні питання

1. Що розуміємо під крайовою задачею?
2. Що означає «розв'язати крайову задачу»?
3. Яка крайова задача називається лінійною?
4. Сформулюйте однорідну крайову задачу?
5. В чому полягає сутність методу скінченних різниць.
6. Скільки рівнянь і скільки невідомих буде мати алгебраїчна система?
7. Як записати алгебраїчну систему у матричному вигляді?

14 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Мета роботи – надбання практичних навичок розв'язання еліптичних рівнянь у частинних похідних скінченнорізницевим методом із застосуванням Microsoft Excel.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи вибрати рівняння з таблиці 16.
2. Розв'язати на сітці з 10 вузлів по x і 10 вузлів по y задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x\in[0;1],\ y\in[0;1]$ з крайовими умовами $u(0;y)=f_1(y),\ u(1;y)=f_2(y),\ u(x;0)=f_3(x),\ u(x;1)=f_4(x)$ з точністю $\varepsilon=10^{-5}$.
3. Зробити висновки.

Таблиця 16

Варіант	$f_1(y)$	$f_2(y)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	$-y^3$	$1-y^3$	x^2	x^2-1
2	$5y-y^3$	$4-y^2+5y$	x^2+3x	x^2+3x+4
3	$3-7y$	$7-6y$	$4x+3$	$5x-4$
4	$5-8y$	$11-7y$	$6x+5$	$7x-3$
5	y^2+4y	y^2+4y+4	x^2+3x	x^2+3x+5
6	y^2	$(1-y)^2$	x^2	$(x-1)^2$
7	y^2	y^2+2y	x^2-x	x^2+x+1
8	y	$y+e$	e^x	e^x+1
9	1	e^y	1	e^x
10	e^y-ey^2	y	$-x^3+1$	x^2

Короткі теоретичні відомості

Рівняння в частинних похідних еліптичного типу звичайно виникають в задачах про рівновагу тіл або баланс фізичних величин. Розв'язок еліптичного рівняння звичайно описує стаціонарний стан деякого фізичного поля, наприклад, концентрації, щільності або потенціалу. Добре відомими прикладами еліптичних рівнянь є рівняння Лапласа і Пуассона. Обидва ці рівняння виникають в різних розділах фізики; особливо велика їх роль в електростатиці і теорії теплопровідності. У обох рівняннях коефіцієнт при змішаній похідній (B) рівний нулю, що робить дискримінант (B^2-4AC) строго від'ємним (за умови, що A і C одночасно додатні або від'ємні).

Еліптичні рівняння розв'язуються скінченнорізницевими методами, близькими до ітераційних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, з тією лише різницею, що доводиться мати справу з двовимірним полем фізичної величини.

Рівняння Лапласа і Пуассона

Ці рівняння звичайно використовуються для розрахунку скалярних полів. Так, стаціонарний електричний потенціал описується таким рівнянням Пуассона

$$\nabla^2\Phi = -q\frac{\rho}{\varepsilon},$$

де q – заряд електрона,

ρ – щільність розподілених зарядів,

ε – провідність.

Зверніть увагу на застосування диференціального оператора Гамільтона

$$\nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

де $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, та $\mathbf{k}$ – одиничні вектори в напрямках координатних осей Ox, Oy і Oz. Таке визначення цього оператора в тривимірних декартових координатах. В інших системах координат даний оператор має інший вигляд. Квадрат оператора Гамільтона є символічним скалярним добутком оператора на самого себе

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Якщо розподілений у просторі заряд відсутній, рівняння Пуассона зводиться до рівняння Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

Потенціал між двома концентричними циліндрами

Розглянемо два довгих концентричних провідники циліндричної форми з радіусами a і b, що знаходяться у вакуумі, як показано на рис. 19. Якщо на провідники подати напруга, потенціал між ними буде описуватися двовимірним рівнянням Лапласа.

Зовнішній провідник заземлений (знаходиться під напругою 0 В), тоді як на внутрішній подається напруга 20 В. Внутрішній радіус a = 5 см, а зовнішній радіус b =15 см. Для розрахунку потенціалу між провідниками скористаємося двовимірним рівнянням Лапласа. Двовимірна розрахункова область припустима внаслідок нескінченної довжини циліндрів, через яку зміна потенціалу уздовж їхньої загальної осі мала

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

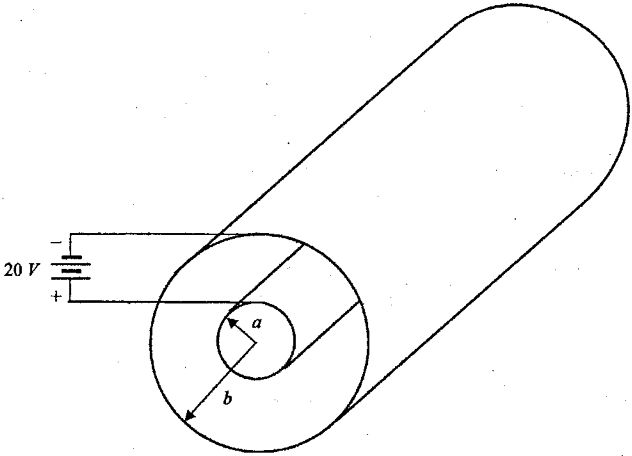


Рисунок 19 – Концентричні електропровідні циліндри у вакуумі

Ця задача допускає аналітичний розв'язок, що знадобиться нам для перевірки результатів числового розрахунку. У термінах відстані r від осі циліндра аналітичний вираз для потенціалу має такий вигляд

$$\Phi(r)=\frac{\Phi_b \ln\left(\frac{r}{a}\right)-\Phi_a \ln\left(\frac{r}{b}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

Для розв'язання цієї задачі в електронній таблиці варто спочатку замінити в рівнянні похідні на центральні різниці, центровані щодо точки сітки з індексами (i, j). Крок сітки h передбачається однаковим в обох координатних напрямках

$$\frac{\Phi_{i+1,j}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\Phi_{i,j+1}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i,j-1}}{h^2}=0.$$

Розв'яжемо це рівняння щодо потенціалу Φ_{ij} у вузлі (i, j)

$$\Phi_{i,j}=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\Phi_{i+1.j}+\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i,j-1}\right).$$

Цей вираз означає, що потенціал у довільній точці є середнім арифметичним значень потенціалів у чотирьох навколишніх точках.

Хід роботи

При розв'язуванні задачі на листі електронної таблиці граничні значення шуканої функції будуть визначатися з граничних умов, а внутрішні – з отриманого різницевого рівняння.

По суті, у даній задачі досить виконати розрахунок тільки поперечного перерізу циліндрів, оскільки розв'язок симетричний відносно осі і не змінюється уздовж осі. Тому як робочу область виберемо сектор поперечного перерізу циліндра з кутом 90°; для будь-яких інших областей важче задати геометрію і граничні умови. На зовнішньому циліндрі потенціал дорівнює нулю, на внутрішньому – 20 В. На радіусах сектора задамо граничні умови у вигляді рівності нулю нормальної похідної потенціалу.

1. Створіть новий лист і назвіть його **ЛР№ 14**
2. Зробіть ширину стовпців **A:R** рівною **2,43**, а стовпців **S:T** – рівною **9**.
3. Зробіть висоту рядків **3:20** рівною **11,25**.
4. Виділить комірку **A1:T20** і зробіть висоту шрифту рівною **8** пунктам на вкладці **Шрифт**, вибравши команду **Формат > Ячейки**.
5. Виберіть команду **Сервис > Параметры** і відкрийте вкладку **Вычисления**; включіть режим перерахування **Вручну**, поставте відмітку на перемикач **Итерации** і введіть у поле **Предельное число итераций** значення **100**, як на рис. 20. Клацніть на кнопці **ОК**.
6. В комірці **A1** введіть заголовок **Задача для рівняння Лапласа в області між циліндрами, еліптичні ДУЧП.**

Введемо мітки для позначення координатних осей, а також стовпців і рядків граничних умов.

7. Введіть у зазначені комірки наведені нижче заголовки; вирівняйте вміст комірок **A6, A7** і **B6** по центру.

Комірка	Вміст	Комірка	Вміст
A6	**Гр.**	**B3**	**Аналіт.**
A7	**Усл.**	**C4**	**Гр.у**
B6	**У**	**C5**	**x**

Побудуємо таблицю, що містить значення потенціалу на зовнішньому і внутрішньому циліндрах.

8. В комірці **S9** введіть заголовок **Прикладені потенціали.**
9. Виділить комірку **S9** і **T9**, а потім клацніть на кнопці “**Объединить и поместить в центре**”.
10. У зазначених комірках введіть наведені нижче значення і вирівняйте вміст по центрі комірок.

Комірка	Вміст	Комірка	Вміст
S10	**Внутрішній**	**T10**	**20**
S11	**Зовнішній**	**T11**	**0**

11. Присвойте коміркам **T10 і T11** імена **Внутр і Зовн**.

Введемо в таблицю внутрішні і зовнішні граничні умови, тобто умови уздовж поверхонь внутрішнього і зовнішнього провідників. Для визначення комірок, що потрапляють на границю, можна накреслити два концентричні кола, що зображують циліндри, на міліметрівці або розграфленому папері. Передбачається, що будь-яка комірка, яка стосується границі, є граничною коміркою

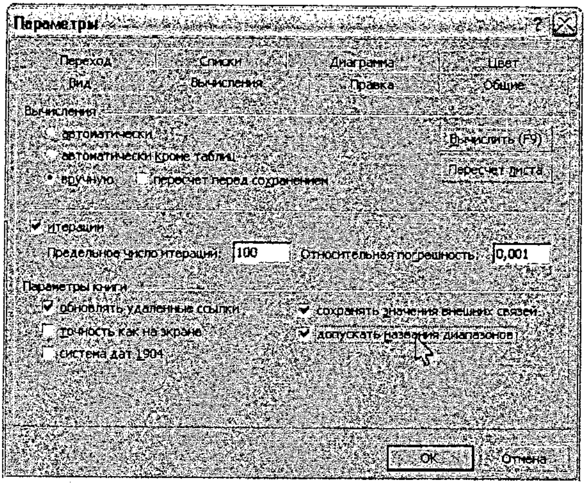


Рисунок 20

12. Введіть або скопіюйте формулу **=Зовн** у такі комірки **P9:P12,O13, N14:1415, M16, L17, J18:K18, G19:M9** і **A2Q.F2Q, Q4:Q8**.
13. Введіть або скопіюйте формулу **=Внутр** у такі комірки **G4:G7, F8, F9** і **A10:D10**.

Гранична умова уздовж радіусів сектора полягає в рівності нулю нормальної похідної. Для внесення цієї умови в таблицю необхідно додати додатковий ряд комірок поза границею й установити їхні значення рівними найближчому внутрішньому ряду комірок. У результаті на самій границі (в комірках **H5:P5** і **B11:B19**) похідна, точніше центральна різниця, виявиться рівна нулю.

14. В комірці **H4** введіть формулу **=H6** і скопіюйте її в комірку **I4:P4**.
15. В комірку **A11** введіть формулу **=C11** і скопіюйте її в комірку **A12:A19**.

Заповнимо внутрішню область між двома циліндрами скінченнорізницевими аналогами вихідного диференціального рівняння. Для цього введемо рівняння в комірку **H5** і скопіюємо його в усі комірки **H5:P5**. Потім скопіюємо рядок з комірок **H5:P5** в комірки **H6:P7**. Послідовно копіюючи комірки цілими блоками, заповнимо всю область між комірками граничних умов.

16. В комірці **H5** введіть формулу **=0,25*(C5+H4+I5+H6)**. Скопіюйте вміст комірки **H5** у такі діапазони комірок

H5:P5	**E10: O10**	**B15:M15**
H6:P6	**B11:O10**	**B16:L16**

H7:H7	**B12:O10**	**B17:K17**
G8:P8	**B13:N13**	**B13:I18**
F9:O9	**B14:M14**	**B9:F19**

Для порівняння розташуємо уздовж верхньої границі значення аналітичного розв'язку. Оскільки для їхнього обчислення необхідні значення радіуса, введемо їх в окремому рядку відразу під таблицею.

18. В комірках **G22** і **H22** введіть значення **5** і **6**, відповідно; виділіть комірки **C22 H22** і перетягніть маркер заповнення в комірку **Q22**.
19. В комірку **G3** введіть таку формулу: **=(Зовн*LN(G22/5) Внутр*LN (G22/15))/LN(15/5)** і скопіюйте її в комірки **H3:Q3**.
20. Активізуйте панель інструментів рисування, клацнувши на кнопці **Рисування** стандартної панелі інструментів. З використанням кнопки **Вигляд стрілки** нарисуйте стрілки, як показано на рис. 21.
21. Виділить всі стрілки за допомогою миші і клавіші **<Shift>**, а потім виберіть команду **Формат > Автофигура** і відкрийте вкладку **Цвета и линии**; зменшіть наконечники стрілок шляхом одночасного зменшення довжини і товщини.

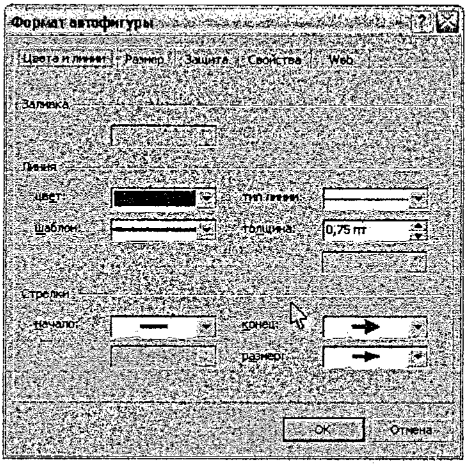


Рисунок 21

22. Виконаєте перерахунок листа натисканням клавіш **<F9>** або **<Ctrf+=>**.

Після декількох хвилин роботи Excel припинить обчислення, і на листі з'явиться таблиця значень шуканої функції (рис. 22). Для одержання задовільної збіжності може знадобитися кілька натискань клавіші **<F9>**.

Після побудови таблиці для розв'язання даної задачі її можна швидко модифікувати для вирахування інших заданих потенціалів. Для цього досить змінити значення комірок **T10:T11**. Можна також додати у вихідну конфігурацію нові провідники. Так, якщо необхідно розташувати посередині між циліндрами провідник під напругою 25 В, просто замініть різницеве рівняння в комірці **L5** на число 25 і перерахуйте лист. Результат показаний у таблиці на рис. 24 і графічно на рис. 25. На графіку для порівняння показаний аналітичний розв'язок без врахування додаткового провідника і числовий розв'язок з провідником.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Задача для рівняння Лапласа; еліптичне ДРЧП																			
2																				
3		Аналіт.					20	17	14	11	9	7	6	4	3	1	0			
4			Гр.у.				20	17	14	12	10	8	6	4	3	1	0			
5			x				20	17	14	12	10	8	6	4	3	1	0			
6	Гр.	y					20	17	14	12	10	8	6	4	3	1	0			
7	усл.						20	16	14	11	9	7	6	4	2	1	0			
8						20	18	15	13	11	9	7	5	4	2	1	0			
9					20	18	16	14	12	10	8	6	5	3	2	0			Прикладені потенціали	
10	20	20	20	20	18	16	14	12	11	9	7	6	4	3	1	0			Внутрішній	20
11	17	17	17	16	15	14	12	11	9	8	6	5	4	2	1	0			Зовнішній	0
12	14	14	14	14	13	12	11	9	8	7	5	4	3	2	1	0				
13	12	12	12	11	11	10	9	8	7	6	4	3	2	1	0					
14	10	10	10	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
15	8	8	8	7	7	6	6	5	4	3	2	2	1	0						
16	6	6	6	6	5	5	4	4	3	2	2	1	0							
17	4	4	4	4	4	3	3	2	2	1	1	0								
18	3	3	3	3	2	2	2	1	1	0	0									
19	1	1	1	1	1	1	0	0	0											
20	0	0	0	0	0	0														
21																				
22							5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
23																				

Рисунок 22 – Потенціал між двома концентричними циліндрами: розв'язок двовимірного еліптичного рівняння в частинних похідних

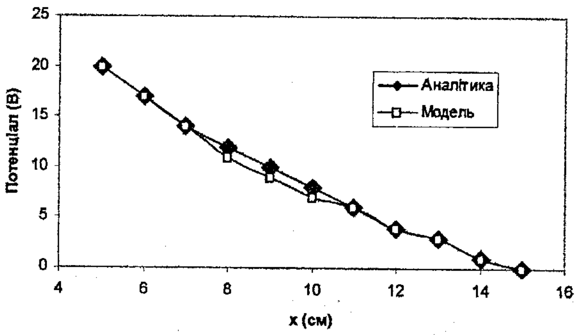


Рисунок 23 – Порівняння аналітичного і скінченнорізницевого розв'язків задачі про два концентричні циліндри

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Задача для рівняння Лапласа; еліптичне ДРЧП																			
2																				
3		Аналіт.	→				20	17	14	11	9	7	6	4	3	1	0			
4			Гр.у. →				20	18	17	17	17	17	13	9	6	3	0			
5			x →				20	19	18	18	19	25	15	10	6	3	0			
6	Гр.	y					20	18	17	17	17	17	13	9	6	3	0			
7	усл.	↓					20	18	16	15	15	13	11	8	5	2	0			
8	↓					20	18	17	15	14	13	11	9	6	4	2	0			
9					20	18	17	15	14	12	11	9	7	5	3	0			Прикладені потенціали	
10	20	20	20	20	18	16	15	13	12	11	9	8	6	4	2	0			Внутрішній	20
11	17	17	17	17	15	14	13	12	10	9	8	6	5	3	2	0			Зовнішній	0
12	14	14	14	14	13	12	11	10	9	8	6	5	4	2	1	0				
13	12	12	12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	1	0					
14	10	10	10	10	9	8	8	7	6	5	4	3	2	0						
15	8	8	8	8	7	7	6	5	5	4	3	2	1	0						
16	6	6	6	6	6	5	5	4	3	2	2	1	0							
17	4	4	4	4	4	4	3	3	2	1	1	0								
18	3	3	3	3	2	2	2	1	1	0	0									
19	1	1	1	1	1	1	0	0	0											
20	0	0	0	0	0	0														
21																				
22							5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			

Рисунок 24 – Потенціал між двома концентричними циліндрами з врахуванням провідника, внесеного між ними під напругою 25 В

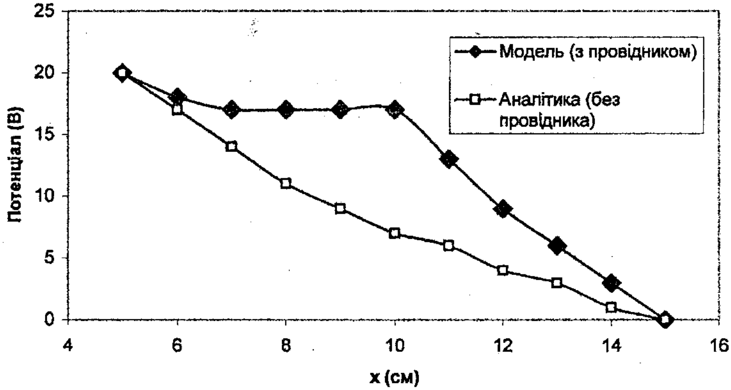


Рисунок 25 – Графік результату задачі про потенціал між концентричними циліндрами з додатковим провідником під напругою 25 В (наведений аналітичний розв’язок без провідника)

Контрольні питання

1. Класифікація методів розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
2. Постановка задачі розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
3. Сутність скінченнорізницевого методу розв'язання рівнянь еліптичного типу.
4. Постановка задачі Діріхле для рівняння Пуасона.
5. Оцінювання похибки розв'язання рівнянь еліптичного типу.

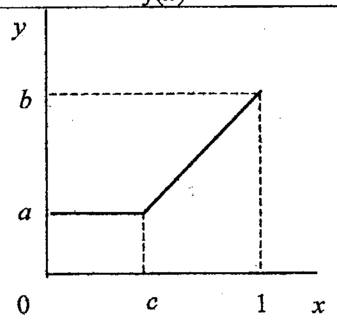
15 РОЗВ'ЯЗАННЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ МЕТОДОМ ПОСЛІДОВНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ТАБЛИЦІ ЗНАЧЕНЬ

Мета роботи – надбання практичних навичок розв'язання параболічних рівнянь у частинних похідних методом послідовного обчислення таблиці значень із застосуванням Microsoft Excel.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи вибрати рівняння з таблиці 17.
2. Розв'язати рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x\in[0;1], t\in[0;0,4]$ з початковою умовою $u(x;0)=f(x)$, $0\le x\le 1$ і крайовими умовами $u(0;\,t)=a$, $u(1;\,t)=b$ з точністю $\varepsilon=10^{-5}$.
3. Зробити висновки.

Таблиця 17

Варіант	$f(x)$	a	b	c
1	 	1,1	3,0	0,05
2		1,2	3,5	0,15
3		1,3	4,0	0,25
4		1,4	4,5	0,35
5		1,5	5,0	0,45
6		1,6	5,5	0,55
7		1,7	6,0	0,65
8		1,8	6,5	0,75
9		1,9	7,0	0,85
10		2,0	8,0	0,95

Короткі теоретичні відомості

Лінійне рівняння в частинних похідних другого порядку називається параболічним, якщо його дискримінант, тобто комбінація коефіцієнтів B^2-4AC, дорівнює нулю. Параболічні рівняння звичайно виникають у задачах, пов'язаних з дифузією і плином рідини. Як правило, такі рівняння містять першу похідну за часом і другу похідну за просторовою координатою від концентрації будь-якої скалярної фізичної величини (щільності заряду, температури, концентрації хімікату і т.п.). Найбільш важливим з цих рівнянь є рівняння нерозривності.

Рівняння нерозривності

Рівняння нерозривності в загальному вигляді – це математичний запис закону збереження маси або твердження про те, що швидкість зміни концентрації фізичної величини у певному об'ємі дорівнює швидкості припливу величини в об'єм мінус швидкість витоку її з об'єму, плюс інтенсивність генерування цієї величини в об'ємі і мінус інтенсивність її поглинання там же. Якщо позначити швидкість потоку цієї величини через v, одержимо таке рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (uV) + G - A.$$

Тут дивергентний член (перший доданок у правій частині) описує приплив і виток величини в нескінченно малому об'ємі, доданок G описує генерування, A – поглинання щільності.

Рівняння нерозривності широко поширене у фізиці і техніці, будучи досить загальним для опису різного роду процесів. Рух усякої речовини або фізичної величини, що може переміщатися у відведеному об'ємі, описується, у числі інших співвідношень, рівнянням нерозривності. Загальний вигляд рівняння залишається, як правило, одним і тим же для всіх фізичних субстанцій.

Нестаціонарна теплопровідність у мідному стержні

Розглянемо потік тепла Q у твердому тілі. Швидкість, з якою тепло тече в будь-якому напрямку, пропорційна від'ємному градієнтові температури (закон Фур'є). Підставляючи в рівняння нерозривності замість швидкості від'ємний градієнт температури і використовуючи формулу диференціювання складної функції за часом, одержимо таке рівняння

$$\frac{\partial Q}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla T) + G - A.$$

Похідна від теплової енергії за температурою дорівнює питомій масовій теплоємності ρC, де ρ – щільність, а C – питома об'ємна теплоємність. Підставляючи цю величину в рівняння, одержимо

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla T) + G - A.$$

Якщо в металевому стержні відсутні теплові витоки і стоки, приведене рівняння зводиться до одновимірного нестаціонарного рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho C} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Для розв'язання цього рівняння перепишемо похідну за просторовою координатою у вигляді центральної різниці, а похідну за часом – у такому вигляді

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{K}{\rho C} \cdot \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

де Δx і Δy – кроки сітки відповідно за простором і за часом. Верхній індекс $(n, n+1)$ означає номер кроку за часом. Розв'яжемо це рівняння щодо температури в майбутній момент часу $\left(T_i^{n+1}\right)$

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{K\Delta t}{\rho C \Delta x^2}\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right).$$

Для забезпечення обчислювальної стійкості даного різницевого рівняння коефіцієнт при сумі температур не повинен перевищувати 1/2

$$\frac{K\Delta t}{\rho C \Delta x^2} \le \frac{1}{2}.$$

Якщо цей коефіцієнт строго дорівнює 1/2, рівняння зведеться до наступного

$$T_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n\right).$$

Для мідного стержня

$$\frac{K}{\rho C} = 1{,}15 cm^2 / c.$$

Таким чином, одержуємо таке співвідношення між кроком сітки за часом (Δt) і за простором (Δx)

$$\Delta x^2 = 2{,}3 \cdot \Delta t.$$

Обґрунтування критерію стійкості

Наведемо спрощене виведення критерію стійкості. Більш строге і докладне доведення можна знайти в посібнику щодо чисельних методів. Отже, критерій стійкості, що полягає у намаганні зробити коефіцієнт при доданках другого порядку меншим 1/2, випливає з таких міркувань.

Нехай T – числовий розв'язок різницевого рівняння, U – точний аналітичний розв'язок рівняння теплопровідності, і $e = U - T$ похибка розв'язку. Різницеве рівняння виглядає таким чином

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{K\Delta t}{\rho C \Delta x^2}\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right).$$

Підставимо в нього $T = U - e$ і розв'яжемо щодо похибок на кроках за часом. Одержимо таке рівняння

$$e_i^{n+1} = e_i^n(1-2r) + \left(e_{i+1}^n + e_{i-1}^n\right)r, \quad \text{де } r = \frac{K\Delta t}{\partial C \Delta x^2}.$$

Для стійкості числового розв'язку похибка повинна рівномірно наближатися до нуля при наближенні до нуля кроків Δx або Δt (нехтуючи похибками округлення). Відповідно, для цього коефіцієнти при кожній з підсумовувальних похибок повинні бути невід'ємними. У протилежному випадку похибка може осцилювати, не наближаючись до нуля і роблячи розв'язок нестійким. Шляхом елементарної перевірки можна переконатися, що обидва коефіцієнти будуть невід'ємні при $0 < r \leq \frac{1}{2}$.

Якщо, наприклад, крок у просторі дорівнює 1 см, то крок за часом повинен складати 0,433 с.

Хід роботи

Розглянемо задачу для мідного стержня довжиною 10 см, на одному кінці якого підтримується температура 0°С, а на іншому 20°С. Розрахуємо зміну температури в стержні з часом в електронній таблиці.

1. Створіть новий лист і назвіть його **ЛР№15**.
2. Якщо автоматичне перерахування сторінки відключене, включіть його, вибравши команду **Сервис>Параметры** і відкривши вкладку **Вычисления**.
3. Виділіть стовпці **A:L** і зробіть їхню ширину рівну **6**.
4. В комірці **A1** введіть заголовок **Теплопровідність у мідному стержні; параболічне рівняння**.
5. В комірці **C3** введіть заголовок **Залежність температури від координати і часу.**

Введемо сітку за часом із кроком 0,433 с.

6. В комірці **A5** введіть заголовок **Час** і вирівняйте його по центру.
7. В комірці **A6** введіть **(с)** і вирівняйте його по центру.
8. В комірці **A7** введіть **0**, а в комірці **A8** – **0,433**; виділіть комірки **A7:A8** і перетягніть маркер заповнення в комірку **A20**.

Заповнимо просторову сітку вузлами, що стоять на 1 см один від одного.

9. В комірці **A5** введіть заголовок **Координата (см)**.
10. В комірці **B6** введіть **0**, а в комірці **C6** – **1**; виділіть комірки **B6:C6** і перетягніть маркер заповнення в комірку **L6**.

Введемо першу граничну умову – фіксовану температуру 20°С. Наявність формули в комірці **B8:B20** дозволяє легко змінювати цю умову.

11. В комірці **B7** введіть **20**.
12. В комірці **B8** введіть формулу **=B7** і скопіюйте її в комірки **B9:B20**.

Введемо другу граничну умову – фіксовану температуру 0°С.

13. В комірці **L7** введіть **0**.
14. В комірці **L8** введіть формулу **=L7** і скопіюйте її в комірки **L9:L20**.

Введемо початкову умову рівності температури нулю в момент часу t=0.

15. В комірці **C7** введіть значення **0** і скопіюйте його в комірки **D7:K7**.

Тепер введемо різницеве рівняння в першу комірку розрахункового діапазону і скопіюємо його в інші комірки.

16. В комірці **C8** введіть формулу **=0,5*(B7+B7)** і скопіюйте її в комірки **C8:K20**.

17. Зробіть формат комірок **A7:L20** числовим із двома цифрами після коми.
18. Обведіть таблицю контуром, як показано на рис. 26.

Сторінка таблиці після пророблених операцій повинна виглядати так, як на рис. 26, у таблиці зазначені температури в різних точках у різні моменти часу. Спостерігаючи за зміною показаних значень, можна простежити поводження теплового потоку в розглянутому мідному стержні.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Теплопровідність в мідному стержні; параболічне ДРЧП											
2												
3			Залежність температури від координати та часу									
4												
5	Час					Координата (см)						
6	(с)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	0,00	20,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,43	20,00	10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	0,87	20,00	10,00	5,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	1,30	20,00	12,50	5,00	2,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11	1,73	20,00	12,50	7,50	2,50	1,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	2,17	20,00	13,75	7,50	4,38	1,25	0,63	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	2,60	20,00	13,75	9,06	4,38	2,50	0,63	0,31	0,00	0,00	0,00	0,00
14	3,03	20,00	14,53	9,06	5,78	2,50	1,41	0,31	0,16	0,00	0,00	0,00
15	3,46	20,00	14,53	10,16	5,78	3,59	1,41	0,78	0,16	0,08	0,00	0,00
16	3,90	20,00	15,08	10,16	6,88	3,59	2,19	0,78	0,43	0,08	0,04	0,00
17	4,33	20,00	15,08	10,98	6,88	4,53	2,19	1,31	0,43	0,23	0,04	0,00
18	4,76	20,00	15,49	10,98	7,75	4,53	2,92	1,31	0,77	0,23	0,12	0,00
19	5,20	20,00	15,49	11,62	7,75	5,34	2,92	1,85	0,77	0,44	0,12	0,00
20	5,63	20,00	15,81	11,62	8,48	5,34	3,59	1,85	1,15	0,44	0,22	0,00
21												

Рисунок 26

Контрольні питання

1. Класифікація методів розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
2. Постановка задачі розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
3. Особливості рівнянь параболічного типу.
4. Що таке різницева схема?
5. Що таке різницева задача?
6. Що таке локальна похибка дискретизації?
7. Що таке умовно стійкі різницеві схеми?

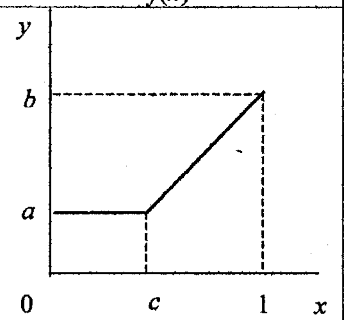
16 РОЗВ'ЯЗАННЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи – надбання практичних навичок розв'язання параболічних рівнянь у частинних похідних ітераційним методом із застосуванням Microsoft Excel.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи вибрати рівняння з таблиці 18.
2. Розв'язати рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x\in[0;1], t\in[0;0,4]$ з початковою умовою $u(x;0)=f(x)$, $0\le x\le 1$ і крайовими умовами $u(0;t)=a$, $u(1;t)=b$ ітераційним методом з точністю $\varepsilon=10^{-5}$.
3. Зробити висновки.

Таблиця 18

Варіант	$f(x)$	a	b	c
1		1,1	3,0	0,05
2		1,2	3,5	0,15
3		1,3	4,0	0,25
4		1,4	4,5	0,35
5		1,5	5,0	0,45
6		1,6	5,5	0,55
7		1,7	6,0	0,65
8		1,8	6,5	0,75
9		1,9	7,0	0,85
10		2,0	8,0	0,95

Хід роботи

Ітерування кроків за часом

Крім послідовного обчислення таблиці зверху вниз, значення шуканої функції на наступному кроці за часом можна виконати ітераційним методом. У цьому методі задіяні всього два рядки комірок, пов'язані циклічним посиланням. В одному рядку зберігаються значення функції з попереднього кроку, а в іншому – обчислюються значення на новому кроці.

Розв'яжемо задачу теплопровідності ітераційним методом.

1. Створіть новий лист і назвіть його **ЛР№16**.
2. Виберіть команду **Сервис>Параметры** і відкрийте вкладку **Вычисления**; включіть режим перерахування **Вручную**, поставте помітку на перемикач **Итерации** і введіть у поле **Предельное число итераций** значення **1.** Клацніть на кнопці **ОК**.

3. Виділіть стовпці **B:L** і зробіть їхню ширину рівну **6**. Зробіть ширину стовпця **A** рівною **7**.
4. В комірці **A1** введіть заголовок **Теплопровідність у мідному стержні; параболічне рівняння.**

Введемо в таблицю прапорець ініціалізації. Для ініціалізації задачі буде використовуватися значення **ИСТИНА** в комірці **B4**.

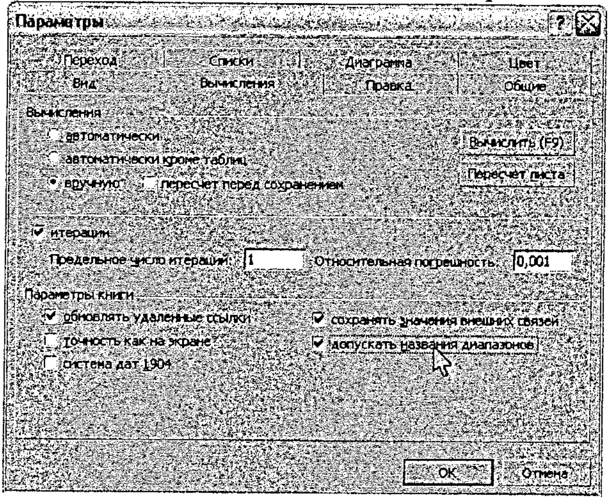


Рисунок 27

5. В комірці **A4** введіть **Поч. прапорець.**
6. В комірці **B4** введіть **ИСТИНА**.
7. Присвойте комірці **B4** ім'я **Поч_Прапорець.**

Організуємо циклічне посилання для обчислення моменту часу поточної ітерації. Формула в комірці **F3** повинна перевіряти параметри ініціалізації і добавляти до поточного моменту крок за часом. В комірці **G3** визначається час для наступного кроку.

8 В комірці **E3** введіть **ИСТИНА**.
9. В комірці **F3** введіть формулу **=ЕСЛИ(Поч_Прапорець,0,G3+0,433)**
10. В комірці **G3** уведіть формулу **=F3**

Введемо у верхній частині таблиці значення координати x.

11. В комірці **E5** введіть **Координата (см).**
12. В комірці **B6** введіть **0**, а в комірці **C6** – значення **1**; виділіть комірки **B6:C6** і перетягніть маркер заповнення в комірку **L6**.

Введемо початкові умови рівності температури нулю, а також граничні умови: температура 20°C при $x = 0$ і 0°C при $x = 10$.

13. В комірці **A7** введіть **Поч. умов.**
14. В комірці **C7** введіть значення **0** і скопіюйте його в комірки **D7:K7**.
15. В комірці **B7** введіть значення **20** і скопіюйте його в комірки **B8:B9**.

16. В комірці **L7** уведіть **0** і скопіюйте його в комірки **L8:L9**.

Уведемо скінченнорізницеве рівняння в рядку **8**. Формула, що вводиться, буде також перевіряти ініціалізацію процесу. Якщо прапорець ініціалізації дорівнює нулю, значення функції встановлюється рівним початковій умові з рядка **7**.

17. В комірці С8 введіть формулу **=ЕСЛИ(Поч_Прапорець; С7;0,5*(В9+ D9))** і скопіюйте її в комірки **D8:К8**.
18. В комірці **С9** введіть формулу **=С8** і скопіюйте її в комірки **D9:К9**.
19. Зробіть формат комірок **В7:L9**, **F3** і **G3** числовим із двома десятковими цифрами після коми.

Для розрахунку за побудованою таблицею встановіть прапорець ініціалізації в комірці **С4** рівним **ИСТИНА** і натисніть клавішу **<F9>** або **<Ctrl+=>**. Змініть значення цього прапорця на **ЛОЖЬ** і знову натисніть **<F9>**.

Після виконаних операцій на сторінці будуть відображені результати розрахунку після першого кроку за часом. При кожному натисканні клавіші **<F9>** момент часу збільшується на 0,433 с. Натисніть **<F9>** ще 10 разів, і сторінка набуде такого вигляду, як на рис. 10.7, що відповідає розрахунковому моментові часу 4,76 с. Наведені результати збігаються з даними рядка **8** (рис. 28).

Однією з переваг описаної ітераційної методики є можливість виконання будь-якої кількості кроків за часом без залучення великих масивів комірок. Наприклад, якщо необхідно обчислити шукану функцію після 1000 кроків за часом, у випадку неітераційного методу (рис. 28) на це пішло б 1000 рядків таблиці, тоді як результати розрахунку ітераційним методом не зайняли б ні рядка більше, ніж при десятьох ітераціях.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Теплопровідність в мідному стержні; параболічне ДРЧП											
2												
3					Час	4,76	4,76					
4	Нач.прапорець	ЛОЖЬ										
5					Координата (см)							
6		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	Поч.умови	20,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8		20,00	15,49	10,98	7,75	4,53	2,92	1,31	0,77	0,23	0,12	0,00
9		20,00	15,49	10,98	7,75	4,53	2,92	1,31	0,77	0,23	0,12	0,00
10												

Рисунок 28

Щоб виконати 1000 ітерацій і при цьому не натискати клавішу **<F9>** тисячу разів, виберіть команду **Сервис>Параметры** і введіть у поле **Предельное число итераций** значення **1000**. Клацніть на кнопці **ОК**, натисніть клавішу **<F9>**, і сторінка буде автоматично перераховуватися 1000 разів або доти, поки не буде досягнутий стаціонарний стан (тобто, значення в таблиці перестануть змінюватися).

Ще одною перевагою ітераційної методики є можливість її узагальнення на випадок рівняння з двома просторовими змінними. Просторові координати легко подати рядками і стовпцями таблиці, ітеруючи значення за часом. Структура таблиці залишиться аналогічною сторінці на рис. 28 з тим винятком, що замість трьох показаних там рядків значень буде потрібно три прямокутних масиви комірок з тим же значенням. У першому масиві будуть зберігатися початкові значення, у другому – двовимірні різницеві рівняння, а в третьому – значення на наступному кроці за часом.

Контрольні питання

1. Класифікація методів розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
2. Постановка задачі розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
3. Особливості рівнянь параболічного типу.
4. Що таке різницева схема?
5. Що таке різницева задача?
6. Що таке локальна похибка дискретизації?
7. Що таке умовно стійкі різницеві схеми?

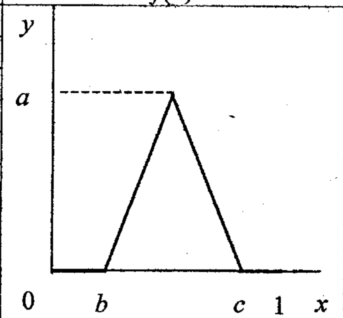
17 РОЗВ'ЯЗАННЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Мета роботи – надбання практичних навичок розв'язання гіперболічних рівнянь у частинних похідних ітераційним методом із застосуванням Microsoft Excel.

План роботи

1. Відповідно до порядкового номера бригади студентів в журналі академгрупи вибрати рівняння з таблиці 19.
2. Розв'язати хвильове рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x\in[0;1], t\in[0;1]$ з початковими умовами $u(x;0)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, $0\le x\le 1$ і нульовими крайовими умовами $u(0;t)=u(1;t)=0$ з точністю $\varepsilon=10^{-5}$.
3. Зробити висновки.

Таблиця 19

Варіант	$f(x)$	a	b	c
1		1,0	0,05	0,45
2		2,0	0,10	0,50
3		3,0	0,15	0,55
4		4,0	0,20	0,60
5		5,0	0,25	0,65
6		6,0	0,30	0,70
7		7,0	0,35	0,75
8		8,0	0,40	0,80
9		9,0	0,45	0,85
10		10,0	0,50	0,90

Короткі теоретичні відомості

У гіперболічних рівняннях дискримінант B^2-4AC, складений з коефіцієнтів при старших похідних, додатний. Таким чином, у рівнянні присутні другі похідні за обома змінними. Гіперболічні рівняння виникають при дослідженні механічних коливань і хвиль, процесів перенесення (наприклад, випромінювання), а також у задачах дифузії і газової динаміки.

Хвильове рівняння

Очевидно, із усіх гіперболічних рівнянь у частинних похідних найбільш важливим для сучасної фізики і техніки є хвильове рівняння. Воно використовується для моделювання усього підряд - від електромагнітних хвиль у вакуумі до електронних властивостей твердих напівпровідників. Це рівняння містить другі похідні за просторовою координатою і часом з коефіцієнтом пропорційності між ними у вигляді квадрата швидкості хвилі

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 y,$$

де c – швидкість біжучої хвилі. Хвильовим рівнянням описується як електромагнітна хвиля в просторі, так і хвиля в коливній струні.

Хвильове рівняння розв'язується точно так само, як і рівняння з попереднього прикладу. Розглянемо одновимірну форму цього рівняння

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Спочатку замінимо похідні центральними різницями

$$\frac{y_i^{n+1}-2y_i^n+y_i^{n-1}}{\Delta t^2}=c^2\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Тепер розв'яжемо це рівняння щодо значення шуканої функції в майбутньому часі

$$y_i^{n+1}=2y_i^n+y_i^{n-1}+\frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i+1}^n\right).$$

Для визначення наступного значення функції необхідно знати її значення на двох попередніх кроках. Це є деякою проблемою тільки на перших двох кроках, коли в нас немає передісторії процесу, що дозволяє визначити значення y_i^{n-1}. Для запуску ітераційного процесу необхідно якимось образом знайти два відсутні значення. Якщо як початкові значення задані значення функції y і її похідної, то для визначення значення функції в момент $-\Delta t$ можна скористатися простою екстраполяційною формулою

$$y_i^{n-1}=y_i^n-\Delta t\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Для визначення відсутнього значення функції можна скористатися й іншими початковими умовами.

Коливання струни

Коливання тонкої пружної струни описуються одновимірним хвильовим рівнянням. Граничні умови полягають у рівності нулю переміщень закріплених кінців струни. Початкові умови визначаються амплітудою і положенням точки, у якій струну відтягнули у нульовий момент часу. Припустимо, струна має довжину 70 см і її відтягнули на 0,1 см у точці, віддаленій на 20 см від одного кінця. У такому випадку початкові умови будуть мати такий вигляд:

$$y = 0{,}1\frac{x}{20}; x < 20;$$

$$y = 0{,}1\frac{70 - x}{50}; x > 20.$$

Для стійкості різницевої схеми коефіцієнт у різницевому рівнянні повинен дорівнювати 1

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} = 1.$$

Заміна цього коефіцієнта одиницею також спрощує саме різницеве рівняння

$$y_i^{n+1} = y_{i+1}^n + y_{i-1}^n - y_i^{n-1}.$$

Сила натягу струни визначає швидкість хвилі, яка біжить у ній, що у свою чергу задає співвідношення між кроками за часом і за просторовою координатою. Наприклад, якщо розтягання струни задає швидкість хвилі, рівну 5×10^4 см/с, кроки за часом і простором будуть співвідноситися так

$$\Delta x = 5 \times 10^4 \Delta t.$$

Оскільки крок по просторовій координаті Δx складає 10см, то крок за часом Δt повинен дорівнювати 2×10^{-4} с.

З початкових умов відомо, що в нульовий момент часу струну відтягнули на деяку величину, не додаючи початкової швидкості. Тому значення функції на першому кроці Δt повинне дорівнювати її значенню в момент Δt

$$y_i^{n-1} = y_i^{n+1}.$$

Внесемо це значення в різницеве рівняння для першого кроку

$$y_i^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(y_{i+1}^n + y_{i-1}^n\right).$$

Хід роботи

Побудуємо таблицю для розрахунку коливань струни, описуваних приведеними співвідношеннями.

1. Створіть новий лист і назвіть його **ЛР№ 17**.
2. Включіть режим автоматичного перерахування сторінки.
3. Виділіть стовпці **B:M** і зробіть їхню ширину рівною 6. Ширину стовпця **A** зробіть рівною 9.
4. В комірці **A1** введіть заголовок **Коливання струни; гіперболічне рівняння**.
5. В комірці **C2** введіть заголовок **Зміщення відтягнутої струни.**

Введемо в таблицю значення моментів часу з кроком 2×10^{-4}с і просторові координати вузлів сітки з кроком 10 см.

6. В комірці **A3** введіть заголовок **Час** і вирівняйте його по центру.

7. В комірці **А4** введіть напис **(с)** і вирівняйте його по центру.
8. В комірці **А5** введіть **0**, а в комірці **А6** – **0,0002**; виділіть комірки **А5:А6** і перетягніть маркер заповнення в комірку **А35**.
9. Зробіть формат комірок **А5:А35** експонентним з одною цифрою після коми.
10. В комірці **В3** введіть заголовок **Гр. умови** і вирівняйте його по центру.
11. В комірці **Е3** введіть заголовок **Довжина (см)**.
12. В комірці **В3** уведіть заголовок **Гр. умови** і вирівняйте його по центру.
13. Введіть в комірці **В4** значення **0**, в комірці **С4** – значення **10**; виділіть комірки **В4:С4** і перетягніть маркер заповнення в комірку **І4**.

Введемо в таблицю початкові умови для струни, відтягнутої на 0,1см у точці, яка знаходиться на 20 см від кінця. Значення переміщень змінюються від зазначеної точки до кінців струни за лінійним законом.

14. Введіть у зазначених комірках такі значення:

B5 – 0	**C5 – 0,05**	**D5 – 0,1**
E5 – 0,08	**F5 – 0,05**	**G5 – 0,04**
H5 – 0,02	**I5 – 0**	**J5 – Поч. умови**

Введемо в таблицю граничні умови уздовж її бічних стовпців.

15. В комірці **В6** введіть формулу **=В5** і скопіюйте її в комірки **В7:В35**.
16. В комірці **І6** введіть формулу **=І5** і скопіюйте її в комірки **І7:І35**.

Введемо в таблицю спеціальне різницеве рівняння для першого кроку, що містить передбачуване значення шуканої функції на першому кроці.

17. В комірці **С6** введіть формулу **=0,5*(В5+В5)** і скопіюйте її в комірки **D6:H5.**

Завершимо побудову таблиці, вносячи в неї стандартне різницеве рівняння.

18. В комірці **С7** введіть формулу **=В6+В6-С5** і скопіюйте її в комірки **С8:Н35.**
19. Зробіть формат комірок **В5:Н35** числовим із двома значущими цифрами після коми

Побудована таблиця повинна виглядати так, як на рис. 29.

Якщо простежити зміни в положенні струни, можна помітити, що вона коливається з періодом $2{,}8\times10^{-3}$с або частотою 357 Гц. Аналітичний вираз для частоти коливань дає той же результат

$$f = \frac{c}{2l} = \frac{5\times10^{4}\,cm/c}{2\cdot70cm} = 327\,\text{Гц},$$

де f – частота,

l – довжина струни.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Коливання струни; гіперболічне рівняння									
2			Зміщення відтягнутої струни							
3	Час	Гр.умови			Довжина (см)				Гр.умови	
4	(с)	0	10	20	30	40	50	60	70	
5	0,0E+00	0,00	0,05	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0	Поч. умови
6	2,0E-04	0,00	0,05	0,07	0,08	0,06	0,04	0,02	0	
7	4,0E-04	0,00	0,02	0,03	0,05	0,06	0,04	0,02	0	
8	6,0E-04	0,00	-0,02	-0,01	0,01	0,03	0,04	0,02	0	
9	8,0E-04	0,00	-0,02	-0,04	-0,03	-0,01	0,01	0,02	0	
10	1,0E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,05	-0,03	-0,02	0	
11	1,2E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,08	-0,07	-0,05	0	
12	1,4E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,08	-0,10	-0,05	0	
13	1,6E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,08	-0,07	-0,05	0	
14	1,8E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,05	-0,03	-0,02	0	
15	2,0E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,03	-0,01	0,01	0,02	0	
16	2,2E-03	0,00	-0,02	0,00	0,01	0,03	0,04	0,02	0	
17	2,4E-03	0,00	0,02	0,03	0,05	0,06	0,04	0,02	0	
18	2,6E-03	0,00	0,05	0,07	0,08	0,06	0,04	0,02	0	
19	2,8E-03	0,00	0,05	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0	
20	3,0E-03	0,00	0,05	0,07	0,08	0,06	0,04	0,02	0	
21	3,2E-03	0,00	0,02	0,03	0,05	0,06	0,04	0,02	0	
22	3,4E-03	0,00	-0,02	0,00	0,01	0,03	0,04	0,02	0	
23	3,6E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,03	-0,01	0,01	0,02	0	
24	3,8E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,05	-0,03	-0,02	0	
25	4,0E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,08	-0,07	-0,05	0	
26	4,2E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,08	-0,10	-0,05	0	
27	4,4E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,08	-0,07	-0,05	0	
28	4,6E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,06	-0,05	-0,03	-0,02	0	
29	4,8E-03	0,00	-0,02	-0,04	-0,03	-0,01	0,00	0,02	0	
30	5,0E-03	0,00	-0,02	-0,01	0,01	0,03	0,04	0,02	0	
31	5,2E-03	0,00	0,02	0,03	0,05	0,06	0,04	0,02	0	
32	5,4E-03	0,00	0,05	0,07	0,08	0,06	0,04	0,02	0	
33	5,6E-03	0,00	0,05	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0	
34	5,8E-03	0,00	0,05	0,07	0,08	0,06	0,04	0,02	0	
35	6,0E-03	0,00	0,02	0,03	0,05	0,06	0,04	0,02	0	

Рисунок 29

Контрольні питання

1. Класифікація методів розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
2. Постановка задачі розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
3. Особливості рівняння гіперболічного типу.
4. Сутність методу сіток.
5. Оцінювання похибки розв'язання рівнянь гіперболічного типу.

18 ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМІ НАВЧАННЯ

1. Розв'язати нелінійне рівняння з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$:
   - графічно виділити корені рівняння;
   - розв'язати рівняння за зазначеним методом.

Таблиця 20

Варіант	Рівняння	Метод розв'язання	Варіант	Рівняння	Метод розв'язання
1	$2^x + 5x - 3 = 0$	Ньютона	11	$e^{-2x} - 2x + 1 = 0$	Ньютона
2	$x^2 \cdot \cos(2x) = -1$	Ітерацій	12	$2 \cdot \lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$	Ітерацій
3	$\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{3x^3} = 0$	Ньютона	13	$5^x - 6x - 3 = 0$	Ньютона
4	$x \cdot \lg(x+1) = 1$	Ітерацій	14	$5\sin(x) = x - 0{,}5$	Ітерацій
5	$\sin(x + \frac{\pi}{3}) - 0{,}5x = 0$	Ньютона	15	$arctg(x-1) + 2x = 0$	Ньютона
6	$\cos(x + 0{,}5) = x^3$	Ітерацій	16	$x^2 - 2 + 0{,}5^x = 0$	Ітерацій
7	$3^{x-1} - 2 - x = 0$	Ньютона	17	$(x-3)^2 \log_{0,5}(x-2) = 0$	Ньютона
8	$tg^3(x) = x + 1$	Ітерацій	18	$x^2 - 20\sin(x+2) + 1 = 0$	Ітерацій
9	$2 \cdot e^x = 5x + 2$	Ньютона	19	$2x - \lg(x) - 7 = 0$	Ньютона
10	$0{,}5^x - 3 = -(x+1)^2$	Ітерацій	20	$2\sin(x - 0{,}6) = 1{,}5 - x$	Ітерацій

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Зейделя з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

Таблиця 21

Варіант	Матриця коефіцієнтів	Вектор вільних членів	Варіант	Матриця коефіцієнтів	Вектор вільних членів
1	2	3	4	5	6
1	3,1 0,7 0,2 0,2 0,6 5,2 0,5 0,5 1,3 0,3 3,5 0,4 0,3 0,3 0,4 4,8	4,1 5,2 –5,2 5,4	11	9,0 1,1 0,6 0,6 –0,2 15,2 1,5 1,2 0,9 0,9 8,5 0,5 0,9 0,7 1,2 12,0	10,0 15,2 –9,2 9,7

Продовження таблиці 21

1	2	3	4	5	6
2	5,2 0,9 0,3 0,2	7,2	12	11,0 1,5 0,6 0,2	16,2
	0,2 8,1 0,7 0,5	9,0		–1,0 17,7 1,3 0,8	21,8
	1,0 0,3 5,5 0,4	–5,3		0,1 0,3 11,5 0,7	–5,0
	0,2 0,5 0,7 6	6,1		–0,1 1,1 1,6 12,2	9,8
3	4,0 0,7 0,3 0,4	4,0	13	10,0 1,1 0,7 0,8	10,1
	0,6 7,0 0,8 0,7	6,5		–0,2 17,4 –0,6 1,5	18,0
	1,3 0,6 4,2 0,3	–7,2		1,0 1,2 9,4 0,5	–11,9
	0,7 0,3 0,5 6,2	6,3		1,3 0,7 1,3 14,8	10,3
4	14,0 1,5 0,9 0,8	16,2	14	10,2 1,3 0,6 0,4	13,2
	–1,1 23,2 2,2 1,7	24,1		–0,6 16,3 1,4 1,1	18,8
	0,4 1,2 13,0 0,7	–11,0		0,5 0,6 10,2 0,6	–7,5
	1,1 1,1 1,9 18,9	12,3		0,4 0,9 1,4 12,2	9,0
5	9,0 1,3 0,5 0,2	13,1	15	12,1 1,3 0,8 0,8	13,0
	–0,6 14,2 1,1 0,7	17,0		–0,2 20,0 2,3 1,6	20,5
	0,4 0,3 9,5 0,6	–5,2		0,7 1,2 11,4 0,6	–11,5
	0,0 0,9 1,3 10,1	8,4		1,2 0,9 1,6 16,0	11,9
6	6,2 0,7 0,5 0,8	4,1	16	8,2 1,1 0,5 0,4	10,2
	0,6 11,0 3,4 1,3	8,5		–0,2 10,8 1,8 0,9	14,8
	1,5 1,2 5,3 0,3	–11,1		0,8 0,6 8,1 0,5	–7,9
	1,5 0,3 0,7 10,0	8,0		0,5 0,7 1,1 10,8	8,3
7	12,0 1,5 0,7 0,4	16,2	17	13,2 1,5 0,8 0,6	16,0
	–1,0 19,3 1,6 1,1	22,3		–1,1 21,0 1,9 1,4	23,5
	0,2 0,6 12,6 0,7	–7,5		0,3 0,9 12,5 0,7	–9,9
	0,3 1,1 1,7 14,2	10,0		0,7 1,1 1,8 16,0	11,7
8	7,0 1,1 0,4 0,2	10,0	18	8,0 0,9 0,6 0,8	7,0
	–0,2 11,5 0,9 0,6	13,8		0,2 14,4 1,8 1,4	10,2
	0,7 0,3 7,5 0,5	–5,6		1,3 1,2 7,7 0,4	–11,1
	0,1 0,7 1,0 12,2	7,2		1,4 0,5 1,0 16,8	9,8
9	11,0 1,3 0,7 0,6	13,0	19	5,0 0,7 0,4 0,6	4,2
	–0,6 18,2 1,7 1,3	19,8		0,6 9,5 1,1 1,0	7,7
	0,6 0,9 10,5 0,6	–9,9		1,5 0,9 4,5 0,3	–9,0
	0,8 0,9 1,5 14,2	10,0		1,1 0,3 0,6 8,4	7,1

Продовження таблиці 21

1	2	3	4	5	6
10	6,2 0,9 0,4 0,4 0,2 10,2 1,2 0,8 1,1 0,6 6,0 0,4 0,6 0,5 0,8 8,8	7,0 10,2 –7,5 7,4	20	7,1 0,9 0,5 0,6 0,2 12,3 1,3 1,1 1,2 0,9 6,5 0,4 1,0 0,5 0,9 10,0	7,0 11,1 –9,5 8,7

3. Обчислити інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

Таблиця 22

Варіант	$f(x)$	a	b
1	2	3	4
1	$0,37e^{\sin x}$	0	1
2	$0,5x + x\lg x$	1	2
3	$(x+1,9)\sin(x/3)$	1	2
4	$\frac{1}{x}\ln(x+2)$	2	3
5	$\frac{3\cos x}{2x+1,7}$	0	1
6	$(2x+0,6)\cos(x/2)$	1	2
7	$2,6x^2\ln x$	1,2	2,2
8	$(x^2+1)\sin(x-0,5)$	0,5	1,5
9	$x^2\cos(x/4)$	2	3
10	$\frac{\sin(0,2x-3)}{x^2+1}$	3	4
11	$3x+\ln x$	1	2
12	$4xe^{x^2}$	–1	0
13	$3x^2+\mathrm{tg}x$	–0,5	0,5
14	$\frac{3x^2+\sin x}{x^2}$	0	1
15	$3xe^{\cos x}$	0,2	1,2
16	$x^2\mathrm{tg}\frac{x}{2}$	1,5	2,5
17	$\cos(x+x^3)$	0	1

Продовження таблиці 22

1	2	3	4
18	$\dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$	0	3
19	$\dfrac{1{,}5x^2+x}{x^5+1}$	0	1,2
20	$\dfrac{x}{\ln x}$	2	3

4. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння $y'=f(x, y)$ на відрізку $[a, b]$ за початкової умови $y_0=y(a)$ вказаним методом з точністю $\varepsilon=^{-5}$.

Таблиця 23

Варіант	$y'=f(x, y)$	a	b	$y(a)$	Метод розв'язання
1	2	3	4	5	6
1	xy^3-x^2	4	5	0,7	Метод Ейлера–Коші
2	$\sqrt{4x^2+1}-3y^2$	2,6	4,6	1,8	Метод Рунге–Кутта
3	$\cos\left(1{,}5-y^2\right)-1{,}3$	-1	1	0,2	Модифікований метод Ейлера
4	x^2+xy+y^2	2	3	1,2	Метод Ейлера–Коші
5	$e^{-(y^2+1)}+2x$	0	0,5	0,3	Метод Рунге–Кутта
6	$\cos(1{,}5y+x)^2+1{,}4$	1	2	0,9	Модифікований метод Ейлера
7	$4{,}1x-y^2+0{,}6$	0,6	2,6	3,4	Метод Ейлера–Коші
8	$\dfrac{1}{1+x^3y}+2y$	1,5	2	2,1	Метод Рунге–Кутта
9	$x+\cos\dfrac{y}{\sqrt{11}}$	2,1	3,1	2,5	Модифікований метод Ейлера
10	$\dfrac{2xy}{x+4}-0{,}4$	3	5	1,7	Метод Ейлера–Коші
11	$2{,}5x+\cos(y+0{,}6)$	1	3	1,5	Метод Рунге–Кутта

Продовження таблиці 23

1	2	3	4	5	6
12	$x+2{,}5y^2+2$	1	2	0,9	Модифікований метод Ейлера
13	$2-\sin(x+y)^2$	2	3	2,3	Метод Ейлера–Коші
14	$\dfrac{2}{x+2}+x+1$	0,1	0,5	1,25	Метод Рунге–Кутта
15	$x+\cos\dfrac{y}{2}$	-2	-1	3	Модифікований метод Ейлера
16	$\sqrt{x^2+0{,}5y^2+1}$	0	2	2,9	Метод Ейлера–Коші
17	$\sin(x+y)+1{,}5$	1,5	2,5	0,5	Метод Рунге–Кутта
18	$x-\sin\dfrac{y}{3}$	1,4	2,8	2,5	Модифікований метод Ейлера
19	$x^2+1+2\sin y$	0	1,2	0	Метод Ейлера–Коші
20	xy^3-y	0	1,8	1	Метод Рунге–Кутта

5. Для функції $y=f(x)$, що задана таблично, за допомогою інтерполяційного полінома першого степеня обчислити значення функції в заданих точках x^*_1 та x^*_2.

Таблиця 24

Варіант	Значення x_i та y_i						x^*_1	x^*_2	Інтерполяційна формула
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	0	1	2	3	4	1,5	3,7	Ньютона перша
	y	1	4	15	40	85			
2	x	1	2	3	4	5	2,4	4,8	Лагранжа
	y	0,8	3	8	17	31,2			
3	x	0	1	2	3	4	0,8	3,2	Ньютона друга
	y	0,5	2	7,5	20	42,5			
4	x	0	1	2	3	4	0,5	2,7	Лагранжа
	y	1	2	7	22	53			
5	x	1	2	3	4	5	2,8	4,8	Ньютона перша
	y	1	3,5	11	26,5	53			
6	x	0	1	2	3	4	0,2	3,3	Лагранжа
	y	2	4	14	44	106			

Продовження таблиці 24

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	x	0	1	2	3	4	0,3	2,7	Ньютона друга
	y	1	3	7	19	45			
8	x	1	2	3	4	5	1,7	4,8	Лагранжа
	y	1,5	3,5	9,5	22,5	45,5			
9	x	0	1	2	3	4	2,5	3,8	Ньютона перша
	y	2	6	14	38	90			
10	x	0	1	2	3	4	0,3	3,6	Лагранжа
	y	2	12	19	20	70			
11	x	0	1	2	3	4	1,8	2,9	Ньютона друга
	y	1	–1	0	10	35			
12	x	0	1	2	3	4	0,7	2,8	Лагранжа
	y	4	–4	0	40	140			
13	x	0	1	2	3	4	1,6	3,9	Ньютона перша
	y	1	2	7	10	5			
14	x	0	1	2	3	4	2,2	3,8	Лагранжа
	y	2	4	14	20	10			
15	x	0	1	2	3	4	0,1	3,6	Ньютона друга
	y	3	6	21	30	15			
16	x	0	1	2	3	4	1,2	3,6	Лагранжа
	y	2	1	4	23	70			
17	x	0	1	2	3	4	0,8	2,5	Ньютона перша
	y	1	0,5	2	11,5	35			
18	x	0	1	2	3	4	1,7	3,8	Лагранжа
	y	4	2	8	46	140			
19	x	0	1	2	3	4	0,9	2,8	Ньютона друга
	y	3	2	5	6	–1			
20	x	0	1	2	3	4	1,8	3,7	Лагранжа
	y	6	4	10	12	–2			

6. Для функції $y=f(x)$, що задана таблично,:

- визначити найкращий степінь апроксимувальної функції;
- визначити коефіцієнти апроксимувальної функції;
- побудувати графіки табличної та апроксимувальної функцій.

Таблиця 25

Варіант	Значення пар аргументу і функції $\left(\dfrac{x_i}{y_i}\right)$						
	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
1	2	3	4	5	6	7	8
1	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2
	–11,4	–8,6	–6,8	–3,0	–2,2	–1,4	–0,6
2	–4	–2	0	2	4	6	8
	–3,2	–16,6	–26,0	–12,6	17,6	68,6	141,4
3	–1	0	1	2	3	4	5
	3,9	1,8	0,7	–15	–57,9	–132,6	–259,7
4	–3	–2	–1	0	1	2	3
	–12,4	–11,6	–5,8	–2,0	0,8	3,6	5,4
5	–5	–3	–1	1	3	5	7
	72,0	27,4	6,6	7,6	30,4	72,0	131,4
6	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
	–10,8	–9,0	–6,2	–6,4	–1,6	2,2	2,0
7	–2	–1	0	1	2	3	4
	–4,6	–1,8	6,0	8,8	13,6	17,4	17,2
8	–1	0	1	2	3	4	5
	–16,6	4,2	25,0	47,8	67,6	92,4	111,2
9	–3	–2	–1	0	1	2	3
	5,7	9,8	9,9	16,0	16,1	17,2	21,3
10	0	1	2	3	4	5	6
	0,0	5,8	16,6	20,4	28,2	38,0	44,8
11	–3	–1	1	3	5	7	9
	19,1	11,5	0,9	–8,7	–21,3	–26,9	–36,5
12	0	2	4	6	8	10	12
	9,0	–1,6	–8,2	–16,8	–22,4	–29,0	–36,6
13	0	1	2	3	4	5	6
	4,0	–7,8	–16,6	–26,4	–35,2	–44,0	–51,8
14	–2	–1	0	1	2	3	4
	44,6	43,8	42,0	41,2	38,4	34,6	33,8
15	8	9	10	11	12	13	14
	23,4	26,2	31,0	33,8	35,6	40,4	47,2
16	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1
	19,6	15,8	15,0	10,2	4,4	1,6	–0,2

Продовження таблиці 25

1	2	3	4	5	6	7	8
17	–3	–2	–1	0	1	2	3
	–27,4	–16,6	–6,8	2,0	8,8	19,6	27,4
18	0	1	2	3	4	5	6
	0,0	12,8	26,6	41,4	53,2	64,0	79,8
19	–4	–2	0	2	4	6	8
	43,2	19,6	–4,0	–24,6	–48,2	–71,8	–97,4
20	2	4	6	8	10	12	14
	31,6	36,2	39,8	48,4	53,0	58,6	65,2

ЛИТЕРАТУРА

1. Орвис В. Excel для ученых, инженеров и студентов. – К.: Юниор, 1999, – 528 с.
2. Ларсен Р. Инженерные расчеты в Excel. – М.: Вільямс, 2002, – 544 с.
3. Рычков В., Дьяконов В., Новиков Ю. Компьютер для студента. – Спб.: Питер, 2000– 592 с.
4. Куртер Дж., Маркви А. Microsoft Office 2000. – СПб.: Питер, 2000, – 640 с.
5. Мур Дж., Уэдефорд Л. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. – М.: Вильямс, 2004, – 1024 с.
6. Мотигін В.В., Роптанов В.І., Дудатьєв А.А. Чисельні методи в інженерних дослідженнях. Частина І. Теоретичні відомості. – Вінниця: ВНТУ, 2004, – 106 с.
7. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Высшая школа, 1992, – 368с.
8. Метьюз Дж., Финк К. Численные методы. – СПб.: Вильямс, 2001, – 720с.
9. Данилович В.П. Чисельні методи в задачах та вправах. – Київ: НМК ВО, 1991 – 128с.
10. Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995, – 280с.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973, – 315с.
12. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982, – 256с.
13. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970, – 486с.
14. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1990, – 261с.
15. Монахов В.М., Беляева Э.С., Краснер Н.Я. Методы оптимизации. – М.: Просвещение, 1978, – 308с.
16. Форсайт Дж., Малькольм М., Моллер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980, – 418с.
17. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1968, – 400с.

Навчальне видання

Володимир Вячеславович Мотигін
Андрій Веніамінович Дудатьєв

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Частина 2 – Чисельні методи в електронних таблицях

Лабораторний практикум

Оригінал-макет підготовлено Дудатьєвим А.В.
Редактор В.О. Дружиніна
Коректор З.В. Поліщук

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 8.06.2007 р.
Формат $29{,}7 \times 42\ ^1\!/_4$
Друк різографічний
Тираж 75 прим.
Зам. № 2007-092

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 6.3

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ