В. М. Михалевич, А. Ф. Дода

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА
НОВІТНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ (MAPLE)
Ч. 2

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. М. Михалевич, А. Ф. Дода

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА
НОВІТНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ (MAPLE)
Ч. 2

Практикум

Вінниця
ВНТУ
2010

УДК [512+004.4](075)
ББК [22.14+32.973–018.2]я.73
М73

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 10 від 27.05.2010 р.)

Рецензенти:
В. І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
А. М. Коломієць, доктор педагогічних наук, професор
В. Б. Рудницький, доктор технічних наук, професор

Михалевич, В. М.
М73 Елементарна математика. Алгебра. Новітні інформаційні технології навчання (Maple). Ч.2 : практикум. / В. М. Михалевич, А. Ф. Дода. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 160 с.

В практикумі розглянуто способи розв'язування прикладів і задач з алгебри як звичайним «ручним» способом, так і прийоми застосування системи Maple для покращення наочності та підвищення ефективності пізнавальної діяльності.

Подано теоретичний мінімум, способи розв'язування типових завдань з наведених тем, завдання підвищеної складності, достатня кількість тренувальних вправ за рівнями, а також орієнтовні контрольні роботи до кожної з розглянутих тем. Ряд завдань було взято з типових тестових завдань, які відповідають програмі ЗНО з математики.

Розрахований на слухачів 1-го курсу ЗФМШ, слухачів довузівської підготовки іноземних студентів та для абітурієнтів.

УДК [512+004.4](075)
ББК [22.14+32.973–018.2]я.73

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета даного практикуму – підготувати слухачів ЗФМШ до ЗНО та вступу до ВНЗ, а також слухачів підготовчого відділення для іноземних студентів до вступу у ВНЗ. Дати їм повну інформацію про способи розв’язування прикладів і задач, що охоплюють деякі розділи алгебри, а також полегшити підготовку слухачам за допомогою додатка символьної комп’ютерної алгебри Maple – претендента на лідерство серед систем символьної математики.

В даному практикумі наведено результати багаторічних досліджень авторів з застосування системи Maple для підвищення ефективності засвоєння учнями методів розв’язання задач елементарної математики.

Практикум складений згідно з програмою з алгебри для слухачів 1-го курсу ЗФМШ, а також відповідає програмі для довузівської підготовки іноземних студентів.

Автори включили у даний практикум теоретичний мінімум, який має знати абітурієнт, способи розв’язування типових завдань з поданих тем, завдання підвищеної складності, тренувальні вправи за рівнями, а також орієнтовні контрольні роботи до кожної з розглянутих тем, оскільки у ЗФМШ контрольні роботи проводяться після кожної пройденої теми. Варто звернути увагу, що ряд завдань, які потрапили в практикум, було взято з типових тестових завдань, які відповідають програмі ЗНО з математики.

Практикум побудований таким чином, що спочатку подається розв’язання типових прикладів звичайним «ручним» способом, а потім методика застосування системи Maple для кращого висвітлення та засвоєння розглянутих питань, а також для організації самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Вся інформація, що стосується безпосередньо математичної програми Maple, відділена зліва для зручності вертикальною подвійною прямою.

Матеріали даного практикуму можуть бути використані і для дистанційної форми навчання.

Використовувані в Maple позначення:

СКМ – курсор миші у формі стрілки;

ЛКМ (ПКМ) – ліва (права) кнопка миші;

> – використовується для задання команд меню в Maple.

6. ФУНКЦІЇ ТА НАЙПРОСТІШІ ГРАФІКИ

6.1. Область визначення і множина значень функції

Залежність змінної y від змінної x називається **функцією**, якщо кожному значення x відповідає єдине значення y. Змінну x називають **незалежною змінною** або **аргументом**, а змінну y – **залежною змінною.** Значення y, що відповідає заданому значенню x, називають **значенням функції**.

Записують: $y = f(x)$. Буквою f позначається дана функція, тобто функціональна залежність між змінними x і y; $f(x)$ є значенням функції, що відповідає значенню аргументу x.

Всі значення, що їх набуває незалежна змінна, утворюють **область визначення функції**, її позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Всі значення, що їх набуває функція $f(x)$, утворюють **область значень функції**, яку позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Функція в системі Maple визначається за допомогою оператора присвоювання (запам'ятовування) <:=>. Найпростіший спосіб задання функції f:=<аналітичний вираз>, наприклад від змінної x. Він незручний тим, що при такому заданні Maple ігнорує запис f(a) і значення f(a) потрібно обчислювати вбудованою функцією **subs(x=a,f)** – підставити $x = a$ в f:

```
> restart;
> f:=x^3;
```

$$f := x^3$$

```
> subs(x=4,f);
```

$$64$$

Існує спосіб задання функції в Maple за допомогою «стрілки», який не має того недоліку, що попередній спосіб. Він задається в такий спосіб: $f := x->$ <вираз від x>, де стрілка вводиться як тире і знак більше. Наприклад,

```
> f:=x->x^3;
```

$$f := x \to x^3$$

```
> f(4);
```

$$64$$

Коли потрібно ввести функцію, яка задана декількома аналітичними виразами, можна використати оператор умовного переходу **if,** який застосовується в таких випадках:

1) if <умова> then <наслідок> fi;

Якщо виконується умова, то виконується наслідок. В іншому випадку нічого не виконується.

2) if <умова> then <наслідок 1> else < наслідок 2> fi;

Якщо виконано умову, то виконується наслідок 1, в іншому випадку виконується наслідок 2, що задається також компактним виглядом:

3) if (<умова>, <наслідок 1>, < наслідок 2>).

Нехай потрібно задати функцію $y=\begin{cases} x, x<-1 \\ x^3, -1\le x\le 1 \\ 5, x>1. \end{cases}$

Конструкція 3, застосована двічі, дозволяє задати її в такому вигляді:

```
> restart;
> f:=`if`(x<-1,x,`if`(x<=1,x^3,5));
```

$$f := \mathrm{if}(x<-1, x, \mathrm{if}(x\le 1, x^3, 5))$$

Обчислимо значення функції при $x=-3$:

```
> subs(x=-3,f);
```

$$\mathrm{if}(-3<-1, -3, \mathrm{if}(-3\le 1, -27, 5))$$

```
> evalf(%);
```

$$-3.$$

Цей принцип використовується у вбудованій функції **piecewise**. За її допомогою дана функція вводиться так:

```
> f:=piecewise(x<-1,x,x<=1,x^3,x>1,5);
```

$$f := \begin{cases} \tilde{o} & \tilde{o}<-1 \\ \tilde{o}^3 & \tilde{o}\le 1 \\ 5 & 1<x \end{cases}$$

Приклад 1. Знайти область визначення і множину значень функцій:

а) $f(x)=5x-6$; б) $y=\dfrac{5}{x+2}$.

Розв'язання

а) $f(x)=5x-6$. Оскільки область зміни x не вказано, природно областю визначення функції вважати множину всіх значень змінної x, при яких ця відповідність має сенс. Отже, у даному випадку $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$.

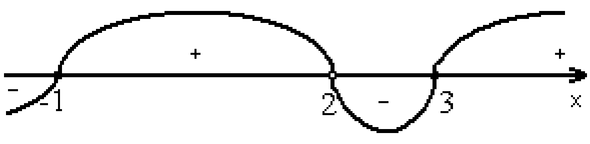
Легко збагнути, що $E(f)=(-\infty;\ +\infty)$. Знайдемо значення функції при декількох значеннях аргументу: $f(1)=5\cdot 1-6=-1$, $f(0)=5\cdot 0-6=-6$, $f(-2)=5\cdot(-2)-6=-16$.

б) $y=\dfrac{5}{x+2}$. Тут $D(f)=(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ +\infty)$. Для знаходження області значень $E(f)$ виразимо x через y: $x=\dfrac{5}{y}-2$. Звідси видно, що $E(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. Знайдемо значення функції при деяких значеннях x: $y(3)=\dfrac{5}{3+2}=1$; $y(0)=\dfrac{5}{0+2}=2{,}5$; $y(a-2)=\dfrac{5}{a-2+2}=\dfrac{5}{a}$.

Приклад 2. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\dfrac{3+2x-x^2}{x-2}}$.

Розв'язання

Для того, щоб знайти область визначення функції $y=\sqrt{\dfrac{3+2x-x^2}{x-2}}$, розв'яжемо нерівність $\dfrac{3+2x-x^2}{x-2}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-3}{x-2}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-2}\le 0$;



Тоді $D(f)=(-\infty;\ -1]\cup(2;\ 3]$.

Відповідь: $D(f)=(-\infty;\ -1]\cup(2;\ 3]$.

6.2. Основні способи задання функції

Щоб задати функцію, потрібно вказати спосіб, за допомогою якого для кожного значення аргументу можна було б знайти відповідне значення функції. Існує чотири основні способи задання функції:

1) **Аналітичний спосіб.** При даному способі задання функція задається за допомогою формули $y=f(x)$, де $f(x)$ – деякий вираз із змінною x.
2) При **графічному способі задання** зображають графік функції $y=f(x)$ в системі координат x0y. **Графіком функції** називається

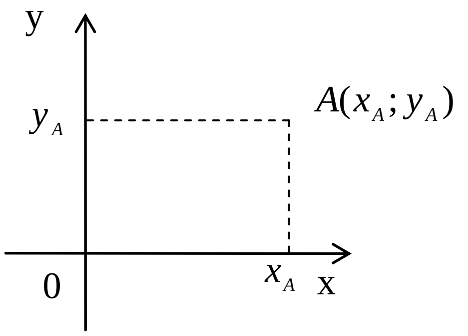


Рис. 1

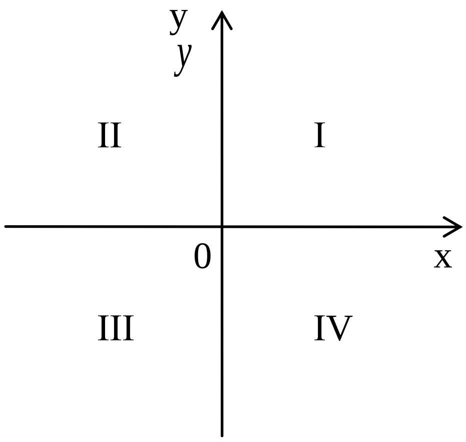


Рис. 2

зображення на координатній площині множини упорядкованих пар $\{(x;y)|e=f(x), x\in D(f)\}$. Кожній упорядкованій парі дійсних чисел $(x;y)$ можна поставити у відповідність точку на площині. Для цього на площині зображають прямокутну (декартову) систему координат x0y (рис. 1). Прямі 0x і 0y взаємно перпендикулярні, 0 – точка перетину цих прямих. 0x – вісь абсцис, 0y – вісь ординат, 0 – початок координат. На кожній з осей 0x і 0y вибирають позитивний напрям відліку (на осі 0x – зліва направо, на осі 0y – знизу угору). Вибирають також одиницю виміру (масштаб). Кожна точка $A(x_A;y_A)$ на координатній площині має дві координати: x_A – абсцису, y_A – ординату (рис. 1). Таким чином, **графік функції** $y=f(x)$ – множина точок координатної площини x0y, абсциси яких є значеннями аргументу x, а ординати – відповідні значення функції y.

Зауваження 1: Осі координат розбивають площину на чотири частини – I, II, III, IV – чверті або координатні кути (рис. 2).

3) **Табличний спосіб задання функції** полягає в тому, що відповідність між елементами множин $D(f)$ і $E(f)$ задається у формі таблиці. При цьому способі наводиться таблиця, що вказує значення функції $y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n$ для наявних в таблиці значень аргументу $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ (табл. 1).

Таблиця 1

x	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_{n-1}	y_n

4) При **словесному способі задання функції** закон, за яким значення функції відповідають значенням аргументу, формулюється словесно. Так, наприклад, розмір прибуткового податку є функцією заробітної плати платника податків.

Для побудови графіка функції в Maple існує багатофункціональна двовимірна команда **plot().** Вона розміщена в системній бібліотеці Maple, тому доступна в будь-який час. За її допомогою можна побудувати графік однієї або декількох функцій дійсної змінної, яка задана в явному або параметричному вигляді. Синтаксис команди plot() такий: **plot(f, h, v, опції)**. Тут **f – функція**, графік якої потрібно відобразити; **h** і **v** вказують, відповідно, діапазон зміни незалежної змінної по горизонтальній осі графіка і діапазон зміни значення функції вздовж вертикальної осі графіка. **Діапазон зміни незалежної зміни h** задається у вигляді $x = a..b$, де a і b – найменше і найбільше значення зміни змінної, а x – ім’я незалежної змінної. Якщо діапазон не заданий, тобто другий параметр являє собою просто ім’я незалежної змінної в функції, то за замовчуванням приймається інтервал її зміни -10..10. Цей параметр (з діапазоном чи ні) обов’язково має бути присутнім при заданні графіка командою plot().

Вертикальний діапазон v, який задається третім параметром, обмежує виведення графіка областю зміни функції. Він необов’язковий, як і опції, які задаються у вигляді рівнянь *ім’я опції=значення*. При відсутності явного задання опцій їх значення приймаються за замовчуванням.

Опції визначають вид графіка, який відображається: товщину, колір і тип лінії графіка, тип осей координат, розміщення написів і т.д., та задаються у формі рівняння *ім’я опції=значення*. Набір можливих опцій у всіх командах двовимірного графічного виведення, за деяким винятком, однаковий. В табл. 2 наведено деякі опції двовимірної графіки і відповідні їм значення.

Таблиця 2 – **Деякі опції двовимірної графіки**

Опція	Опис
color	Задає колір ліній, які відображаються на графік. Як значення цієї опції може бути одне з зарезервованих значень кольору в Maple: aquamarine, black, blue, navy, coral, cyan, brown, gold, green, grey, khaki, magenta, maroon, orange, pink, plum, red, sienna, tan, turquoise, violet, wheat, white і yellow.

font	Задає шрифт для виведення тексту на рисунку. Значення опції задається у вигляді списку [сімейство, стиль, розмір]. Параметр **сімейство** задає гарнітуру шрифту: TIMES, COURIER, HELVETIKA або SYMBOL. Параметр **стиль** визначає стиль шрифту: для гарнітури TIMES можливі значення ROMAN, BOLD, ITALIC або BOLDITALIC; для гарнітур COURIER та HELVETIKA стилем можна знехтувати; для шрифту SYMBOL стиль не задається. Останній параметр **розмір** задає розмір шрифту в пунктах (points) (один пункт приблизно рівний 1/72 дюйма).
labelfont	Задає параметри шрифту, яким відображаються назви осей координат. Значення цієї опції аналогічне значенню опції font.
linestyle	Визначає тип лінії графіка. Значенням цієї опції є число *n*. При *n=0* тип лінії відповідає типу за замовчуванням для використання пристрою відображення (зазвичай, суцільна лінія), значення 1 відповідає суцільній лінії, значення 2 – відображенню лінії крапками, 3 – пунктиром і 4 – штрих пунктиром.
style	Задає відображення графіка функції лініями (значення опції дорівнює LINE) або точками (значення опції дорівнює POINT).
thickness	Задає товщину лінії графіка. Значення є цілим числом і змінюється від 0 до 3, відповідаючи зміні товщини лінії від найтоншої до найгрубшої.
title	Визначає рядок, який виводиться як заголовок до рисунка. За замовчуванням заголовок не виводиться. В рядку можна використовувати спеціальні комбінації символів. Наприклад, /n здійснює перехід на новий рядок, формуючи тим самим багаторядковий заголовок.
titlefont	Визначає шрифт для заголовка рисунка. Значення цієї опції аналогічне значенню опції font.

Робота з командою plot() не є надто складною. Далі, на прикладах, розглянемо її застосування.

6.3. Парні і непарні функції, періодичність функції

Функція $y = f(x)$ називається **парною**, якщо для будь-якого x з області визначення функції виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається **непарною**, якщо для будь-якого x з області визначення функції виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Якщо $f(-x) \neq \left[\begin{array}{l} -f(x), \\ f(x), \end{array}\right.$ то функція $f(x)$ не є ні парною, ні непарною, або кажуть, що це функція загального виду.

Графіки парної та непарної функцій мають такі **властивості**:

- якщо функція є парною, то її графік симетричний відносно осі ординат;
- якщо функція є непарною, то її графік симетричний відносно початку координат.

Приклад 3. З'ясувати, чи дана функція парна, непарна, загального виду: а) $f(x) = 3x^5 - 8x^3$; б) $f(x) = 4x^6 - 3x^4 + 5$; в) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + x^2}$.

Розв'язання

а) $f(-x) = 3(-x)^5 - 8(-x)^3 = -3x^5 + 8x^3 = -\left(3x^5 - 8x^3\right) = -f(x)$, тобто функція $f(x) = 3x^5 - 8x^3$ – непарна.

б) $f(-x) = 4(-x)^6 - 3(-x)^4 + 5 = 4x^6 - 3x^4 + 5 = f(x) \Rightarrow$
$f(x) = 4x^6 - 3x^4 + 5$ – парна функція.

в) $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x) + (-x)^2} = \dfrac{-\sin x}{\cos x + x^2} = -\dfrac{\sin x}{\cos x + x^2} = -f(x) \Rightarrow$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + x^2}$ – непарна функція.

Дослідити функцію на парність (непарність) у системі Maple поки що неможливо, але легко можна знайти $f(-x)$ для певної функції. До того ж можна побудувати графіки функцій $f(x)$ та $f(-x)$. Покажемо це на прикладі 3:

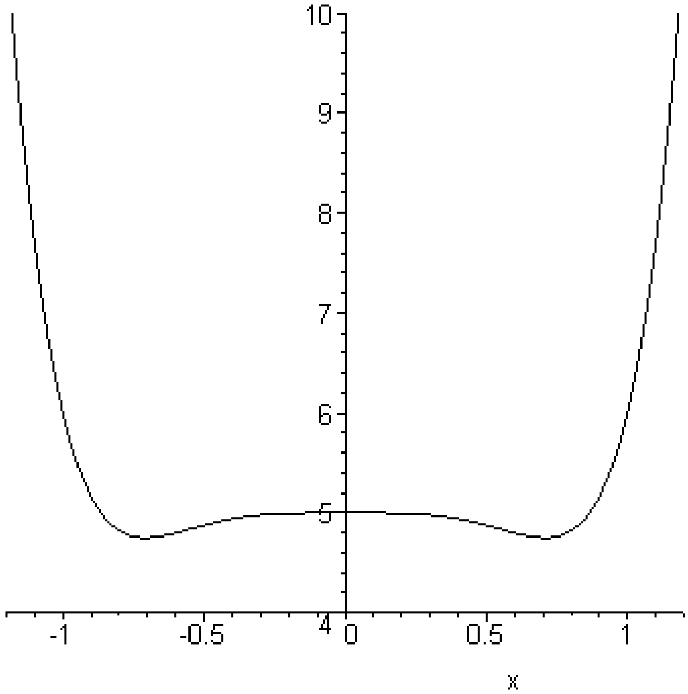
```
> restart;
> f:=x->4*x^6-3*x^4+5;
```

$$f := x \to 4x^6 - 3x^4 + 5$$

```
> f(-x);
```

$$4x^6 - 3x^4 + 5$$

```
> plot([f(x),f(-x)],x=-1.2..1.2,4..10,linestyle=[SOLID, DASH],color=black);
```

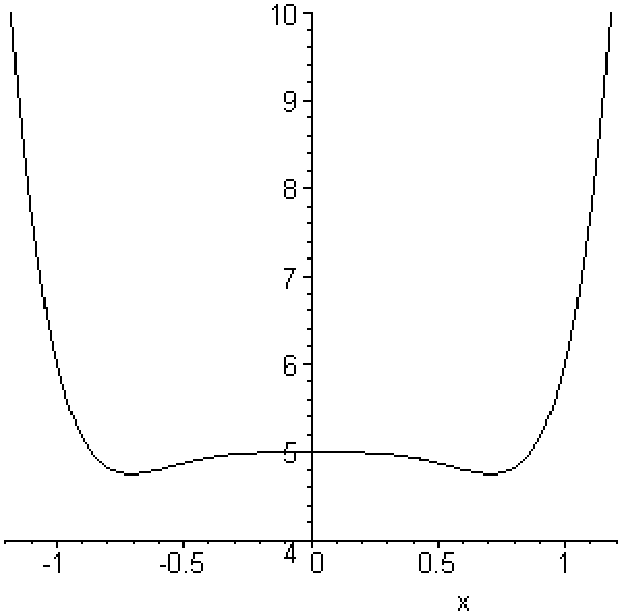


На побудованому графіку функцій $f(x)$ та $f(-x)$ бачимо тільки одну лінію. До того ж графік функції здається симетричним відносно осі ординат. На основі чого можна припустити, що $f(x)=f(-x)$, адже ми знаємо, що графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Ми говоримо "здається симетричним" тому, що на основі візуального спостереження можна робити тільки попередні припущення, які потрібно перевіряти аналітично.

Дійсно, графік функції $f1(x)$ теж здається симетричним відносно осі ординат, але насправді таким не є:

```
> f1:=x->4*x^6-3*x^4+5+0.0001*x;
plot([f1(x),f1(-x)],x=-
1.2..1.2,4..10,linestyle=[SOLID,
DASH],thickness=[1,1],color=black);
```

$$f1 := x \to 4\,x^6 - 3\,x^4 + 5 + 0.0001\,x$$



Пересвідчитись у парності функції легко за допомогою такої конструкції

```
> f(x)-f(-x);
```

$$0$$

тобто $f(x) = f(-x)$,

```
> f1(x)-f1(-x);
```

$$0.0002x$$

тобто $f1(x) \neq f1(-x)$. Розглянемо ще одну функцію

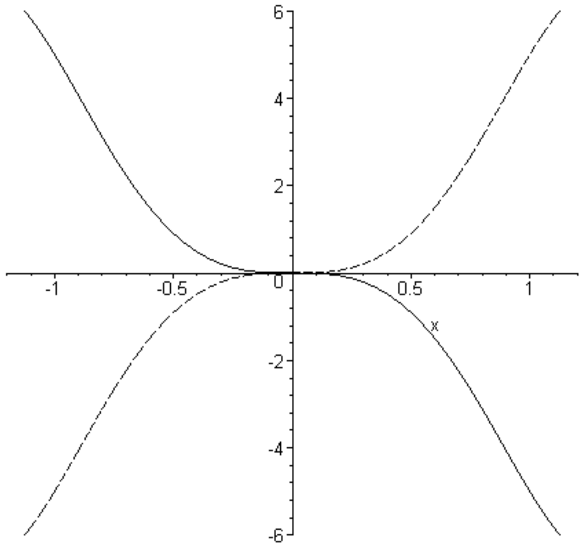
```
> f2:=x->3*x^5-8*x^3;
```

$$f2 := x \to 3\,x^5 - 8\,x^3$$

```
> f2(-x);
```

$$-3\,x^5 + 8\,x^3$$

```
> plot([f2(x),f2(-x)],x=-1.2..1.2,-6..6,
linestyle=[SOLID, DASH],thickness=[1,1],color=black);
```



На побудованому графіку функцій $f2(x)$ та $f2(-x)$ бачимо тільки дві лінії, які здаються симетричним відносно початку координат. Пересвідчимось у цьому:

```
> f(x)+f(-x);
```

$$0$$

тобто $f(x) = -f(-x)$.

Функція $y = f(x)$ називається **періодичною**, якщо існує таке число $\grave{O} \neq 0$, що при будь-якому x з області визначення функції числа $(\tilde{o} - \grave{O})$ і $(\tilde{o} + \grave{O})$ також належать цій області і виконується рівність $f(\tilde{o} + \grave{O}) = f(x - T) = f(x)$. Число Т в цьому випадку називається **періодом функції** $f(x)$.

Будь-яка періодична функція має нескінченну множину періодів, тому що якщо T – період функції $y = f(x)$, то і число виду kT – період функції $k \in Z$, $k \neq 0$. На практиці, кажучи про період, нерідко мають на увазі найменший додатний період (якщо такий існує). Найменший додатний період називається **основним періодом**.

Прикладами періодичних функцій є тригонометричні.

6.4. Монотонність функції

Функція $y = f(x)$ називається **зростаючою** на даному числовому проміжку *X*, якщо більшому значенню аргументу $x \in X$ відповідає більше значення функції $f(x)$, тобто для будь-яких x_1, $x_2 \in X$ з $x_2 > x_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Функція $y = f(x)$ називається **спадною** на даному числовому проміжку *X*, якщо більшому значенню аргументу $x \in X$ відповідає менше значення функції $f(x)$, тобто для будь-яких x_1, $x_2 \in X$ з $x_2 > x_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Функція, тільки зростаюча або тільки спадна на даному числовому проміжку, називається **монотонною** на цьому проміжку.

Прикладами монотонно зростаючих функцій є: $y = x$, $y = x^3$, $y = 3^x$.

Прикладами монотонно спадних – $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = -3x$, $y = \frac{2}{x}$. А, наприклад, функція $y = x^2$ не є монотонною на всій області визначення, оскільки при

$x \in (-\infty;\ 0)$ вона є спадною, а при $x \in (0;\ +\infty)$ – зростаючою.

Приклад 4. Дослідити на монотонність функцію:

а) $f(x) = 4x + 1$;

б) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$, $x \in (2;\ +\infty)$.

Розв'язання

а) Функція $f(x) = 4x + 1$ зростає на всій області визначення. Дійсно, $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$. Нехай $x_1 < x_2$, тоді $f(x_2) - f(x_1) = 4(x_2 - x_1) > 0$, отже $f(x_2) > f(x_1)$.

б) Функція $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$, $x \in (2;\ +\infty)$ спадає. Дійсно, нехай $2 < x_1 < x_2$. Маємо

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2+3}{x_2-2} - \frac{x_1+3}{x_1-2} = \frac{x_1x_2 + 3x_1 - 2x_2 - 6 - x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 + 6}{(x_1-2)(x_2-2)} =$$

$$= \frac{5(x_1 - x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)} < 0\text{, отже, } f(x_2) < f(x_1).$$

6.5. Проміжки знакосталості і нулі функції

Числові проміжки, на яких функція зберігає свій знак (тобто залишається додатною або від'ємною), називаються **проміжками знакосталості функції**. Наприклад, для функції $y = x$, $y > 0$ при $x > 0$ і $y < 0$ при $x < 0$.

Значення аргументу $x \in D(f)$, при яких функція $f(x) = 0$, називаються **нулями** (або **коренями) функції**. Зрозуміло, що значення аргументу, при яких функція перетворюється в нуль, – це абсциси точок перетину графіка функції з віссю 0х.

6.6. Обернена функція

Кожному значенню $x \in D(f)$ рівність $y = f(x)$ ставить у відповідність цілком певне значення $y \in E(f)$. У деяких випадках рівність $y = f(x)$ можна розглядати як таку, що кожному значенню $y \in E(f)$ ставить у відповідність цілком певне значення $x \in D(f)$.

Приклад 5. Рівність $y = 2x - 5$ кожному значенню y ставить у відповідність $x = (y+5)/2$. Можна сказати, що рівність $y = 2x - 5$ визначає

x як деяку функцію змінної y, тобто $x=(y+5)/2$. Оскільки, звичайно, x позначає аргумент, а y – функцію, то перепишемо залежність $x=(y+5)/2$ у вигляді $y=(x+5)/2$. Функція $y=(x+5)/2$ є **оберненою до функції** $y=2x-5$.

Для того, щоб для функції $y=f(x)$ при $x\in[a;\ b]$ існувала обернена до неї функція, необхідно і достатньо, щоб функція $y=f(x)$ була монотонною при $x\in[a;\ b]$ (тобто або тільки зростаючою, або тільки спадною).

Так, для функції $y=x^3$ оберненою є $y=\sqrt[3]{x}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Для функції $y=x^2$ при $x\in(-\infty;\ +\infty)$ оберненої не існує, однак при $x\in(0;\ +\infty)$ оберненою для $y=x^2$ є $y=\sqrt{x}$, а при $x\in(-\infty;\ 0)$ оберненою для $y=x^2$ є функція $y=-\sqrt{x}$.

Якщо точка $(x;\ y)$ належить графіку функції $y=f(x)$, то точка $(y;\ x)$ належить графіку оберненої функції. Тому графіки прямої і оберненої функцій симетричні один одному відносно прямої $y=x$. Так, наприклад, графік функції $y=x^3$ симетричний графіку функції $y=\sqrt[3]{x}$ відносно прямої $y=x$ (рис. 3). Узагалі для функції $y=x^n$ $(x\geq 0,\ n\in N,\ n\geq 2)$ оберненою є $y=\sqrt[n]{x}$.

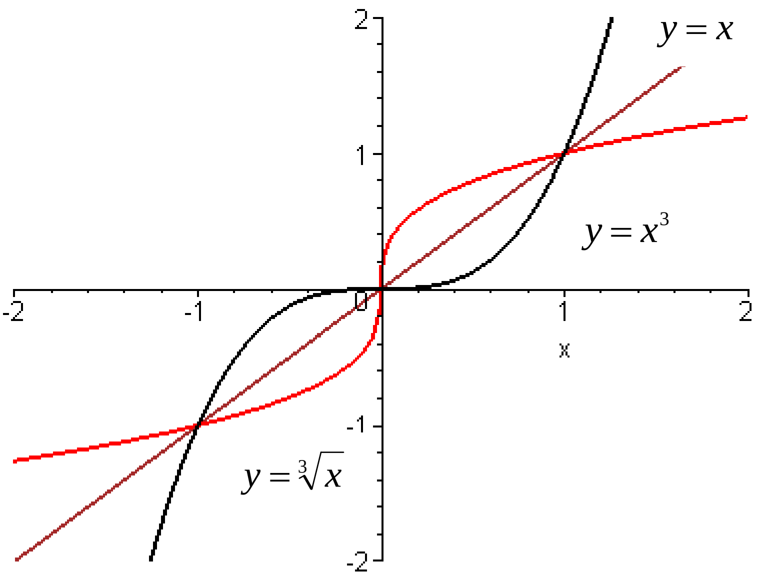


Рис. 3

Зауваження: Область визначення оберненої функції збігається з множиною значень прямої функції, а множина значень оберненої функції збігається з областю визначення прямої функції.

Приклад 6. Для функції $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ знайти обернену.

Розв'язання

Виразимо x через y: $x+3=y(x-1)\ \Leftrightarrow\ yx-x=3+y\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x(y-1)=3+y \ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{y+3}{y-1}$. Замінивши x на y та y на x, маємо: $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. Отже, функція $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ є оберненою до себе.

6.7. Лінійна функція та її графік

Функція, задана формулою $y=kx+b$, де k і b – дійсні числа, називається **лінійною**.

Основні властивості функції $y=kx+b$

1. $D(y)=R$, тобто вираз $kx+b$ має зміст при будь-якому значенні x.
2. $E(y)=R$.
3. Функція $y=kx+b$ є функцією загального виду, тобто не є ні парною, ні непарною. Замінимо x на $-x$: $y(-x)=k(-x)+b$, тобто $y(-x)=-kx+b$. Як видно, $y(-x)\neq y(x)$ та $y(-x)\neq -y(x)$.
4. При $b=0$ функція $y=kx+b$ приймає вигляд $y=kx$ і називається **прямою пропорційністю**. Число k називається коефіцієнтом пропорційності. Пряма пропорційність характеризується властивістю: «із збільшенням (зменшенням) значення x в декілька разів відповідне значення y збільшується (зменшується) у стільки ж разів», тобто $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$.

Функція $y=kx$ є непарною. Її графік проходить через точку $(0,0)$ і являє собою пряму лінію.

5. Графік лінійної функції $y=kx+b$ може бути отриманий з графіка функції $y=kx$ паралельним перенесенням останнього на b одиниць вздовж осі 0y. І оскільки графіком $y=kx$ є пряма, то і графік функції $y=kx+b$ є пряма лінія. Вона перетинає вісь 0y в точці $M=(0;b)$, і нахилена до осі 0x під кутом α, тангенс якого дорівнює k, тобто $k=tg\alpha$. Якщо $k>0$, то α – гострий кут, якщо $k<0$, то α – тупий кут (рис. 4).

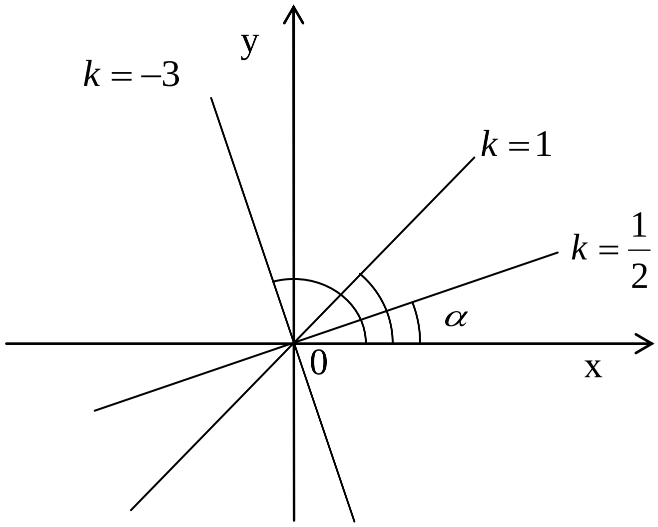
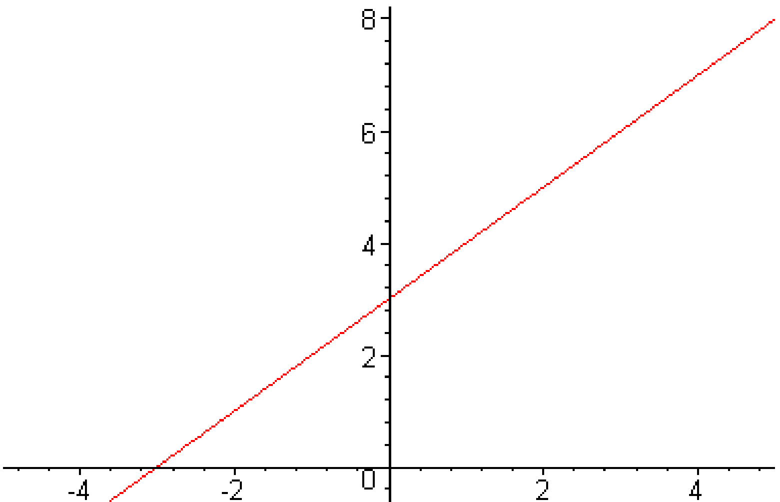


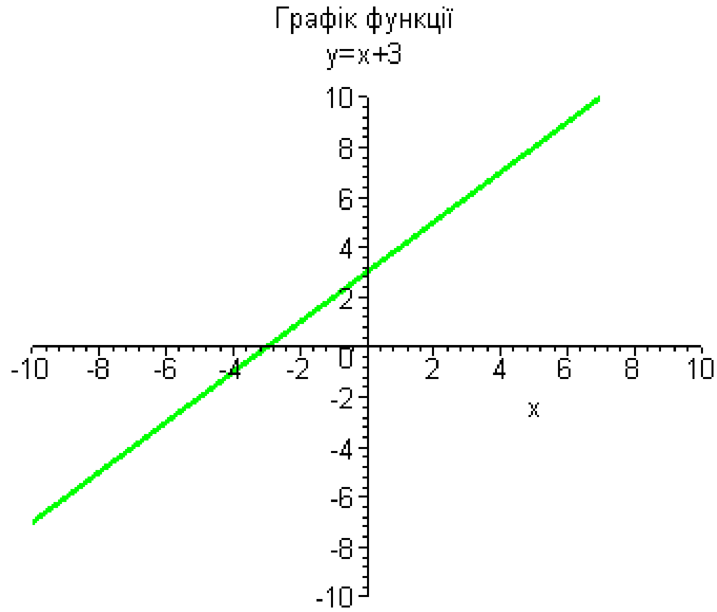
Рис. 4

Побудуємо в системі Maple графік лінійної функції $y = x + 3$ в першому випадку без вертикального діапазону та задання опцій, а в другому – із вказанням вертикального діапазону та деяких опцій:

```
> plot(x+3,x=-5..5);
```




```
>plot(x+3,x=-10..10,-10..10,color=green,
thickness=3,title=`Графік функції\ny=x+3`);
```



Відмінність очевидна.

6.8. Функція $y=\frac{k}{x}$ та її графік

Функція виду $y=\frac{k}{x}$, де $k\neq 0$ – дійсне число, називається **оберненою пропорційністю.**

Основні властивості функції $y=\frac{k}{x}$

1. $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$, тому що на нуль ділити не можна.
2. $E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$,

3. Функція $y=\frac{k}{x}$ непарна. Замінивши x на $-x$, отримаємо $y(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-y(x)$, тобто $y(-x)=-y(x)$. Відмітимо, що графік непарної функції симетричний відносно точки $O(0;0)$ – початку координат.

4. Функція $y=\frac{k}{x}$ не має нулів, оскільки рівняння $\frac{k}{x}=0$ не має коренів, графік функції $y=\frac{k}{x}$ не перетинає вісь Ox.

5. Графік функції $y=\frac{k}{x}$ називається **гіперболою,** яка складається з двох віток. Якщо $k>0$, то вітки гіперболи розташовані в I і III координатних кутах, і функція є спадною (рис. 5); якщо $k<0$, то вітки

гіперболи розташовані в II і IV координатних кутах, і функція є зростаючою. Для прикладу оберненої пропорційності, коли $k<0$, в системі Maple побудуємо графік функції $y=-\dfrac{4}{x}$:

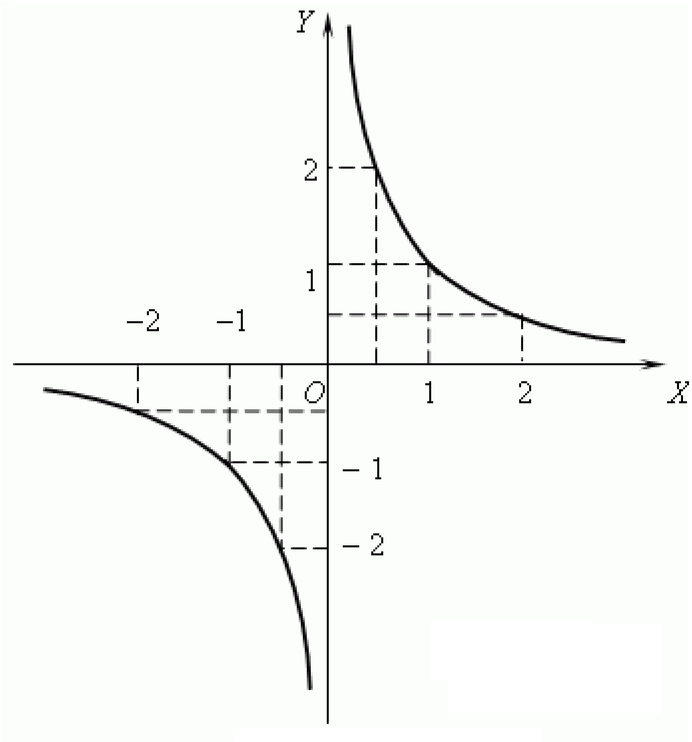
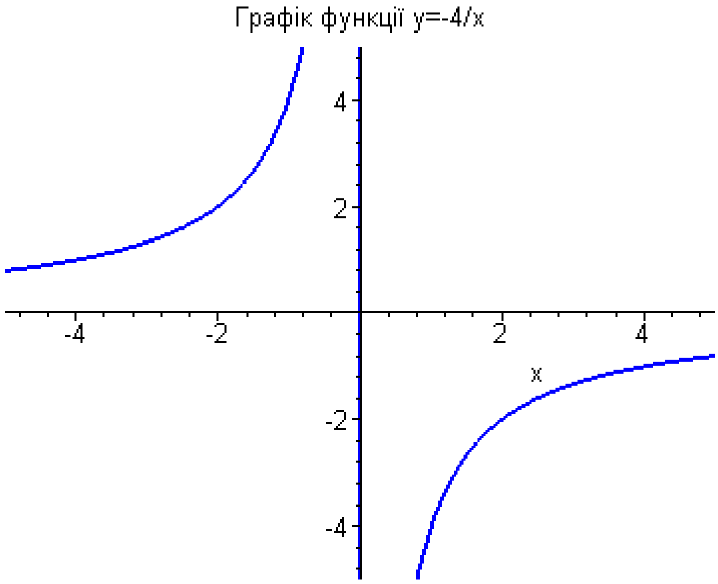


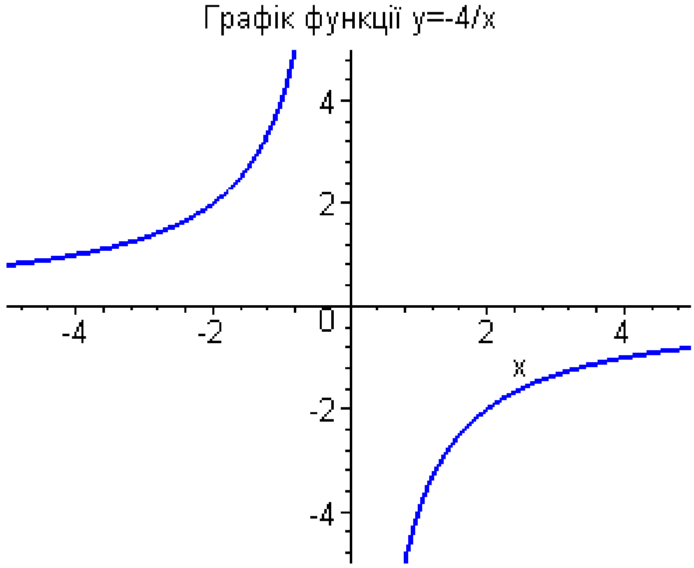
Рис. 5

```
> plot(-4/x,x=-5..5,-5..5,color=blue,thickness=2,
title=`Графік функції y=-4/x`);
```



На графіку зображена деяка лінія на осі $0y$, яка не відповідає графіку гіперболи. Для того, щоб уникнути "вертикальних ліній" в точках, де функція змінює знак, додайте параметр "discont=true" до задання команди:

```
> plot(-4/x,x=-5..5,-5..5,color=blue,thickness=2,
discont=true,title=`Графік функції y=-4/x`);
```



6.9. Квадратична функція та її графік

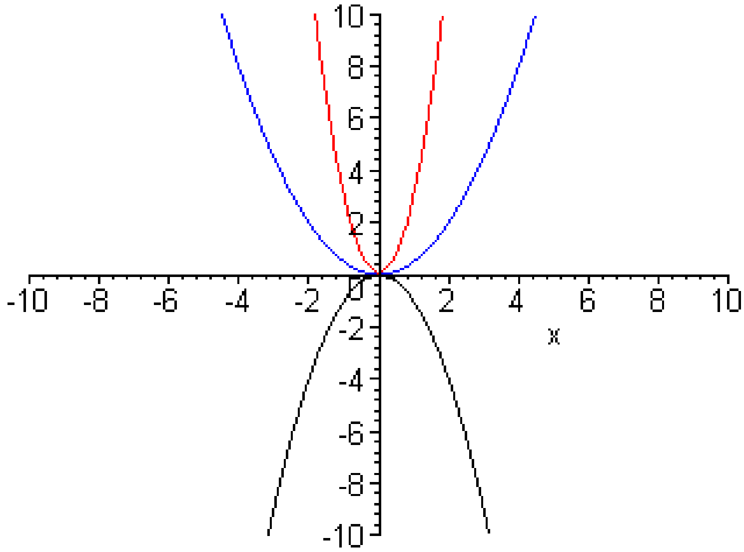
Функція, задана формулою $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, b, c – дійсні числа, називається **квадратичною.**

Основні властивості функції $y = ax^2 + bx + c$

1. $D(y) = R$, оскільки $ax^2 + bx + c$ має зміст при будь-яких значеннях x.
2. $E(y) = R$.
3. Функція $y = ax^2 + bx + c$ є функцією загального виду. Якщо $b = 0$, то $y = ax^2 + c$ – парна функція.
4. При $b = 0$ і $c = 0$ квадратична функція приймає вигляд $y = ax^2$. Графік цієї функції називається параболою. Графік проходить через точку $O(0;0)$, він симетричний відносно осі Oy. Вітки параболи направлені вгору, якщо $a > 0$; вниз, якщо $a < 0$.

Щоб показати на одному графіку декілька функцій, потрібно в команді **plot()** задавати функції у вигляді списку, а значення опції **color** у вигляді списку дозволяють задати колір для виведення графіків функцій. Якщо опція **color** не задана, то Maple відображає функції у відповідності зі списком кольорів за замовчуванням. Покажемо на графіку декілька квадратичних функцій виду $y = ax^2$ і прослідкуємо, як вони змінюються в залежності від параметра a:

```
> plot([3*x^2,-x^2,1/2*x^2],x=-10..10,-10..10,color=[red,black,blue]);
```



5. Графік функції $y = ax^2 + bx + c$ також є параболою; він може бути отриманий з графіка функції $y = ax^2$ шляхом паралельного перенесення (розглянемо пізніше на прикладі, як це робиться).

6.10. Степенева функція з натуральним показником

Властивості степеневої функції з натуральним показником $\left(y = x^n, n \in N, n \geq 2\right)$

1. $D(y) = R$.
2. $E(y) = R$, якщо $n = 2k + 1$ (непарне); $E(y) = [0;\ \infty)$, якщо $n = 2k$ (парне).
3. При $x = 0$ маємо $y = 0$. Значить, графік функції проходить через точку $O(0;0)$.
4. Функція $y = x^n$ парна при $n = 2k$; непарна при $n = 2k + 1$.

5. Функція $y = x^{2n}$ набуває додатних значень при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$; функція $y = x^{2n+1}$ набуває від'ємних значень при $x \in (-\infty;\ 0)$ та додатних значень при $x \in (0;\ \infty)$.

6. Функція $y = x^{2n}$ зростає при $x \in (0;\ \infty)$, спадає при $x \in (-\infty;\ 0)$ (рис. 6); функція $y = x^{2n+1}$ зростає на всій області визначення (рис. 7).

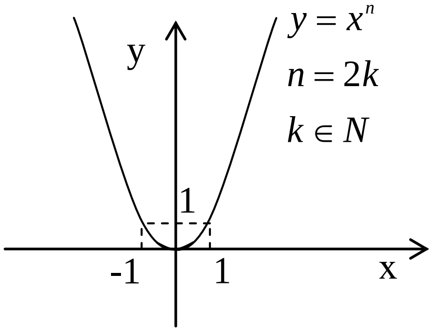


Рис. 6

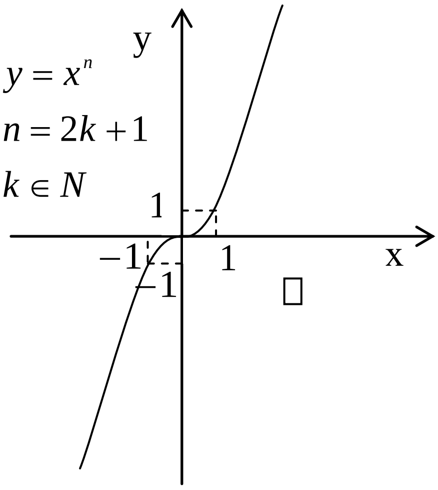
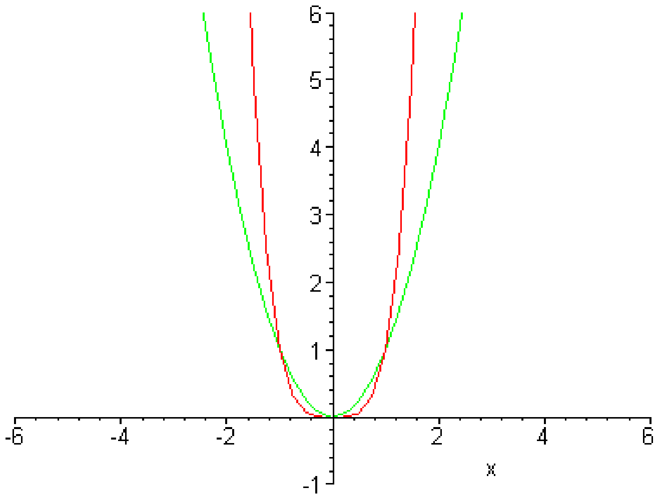


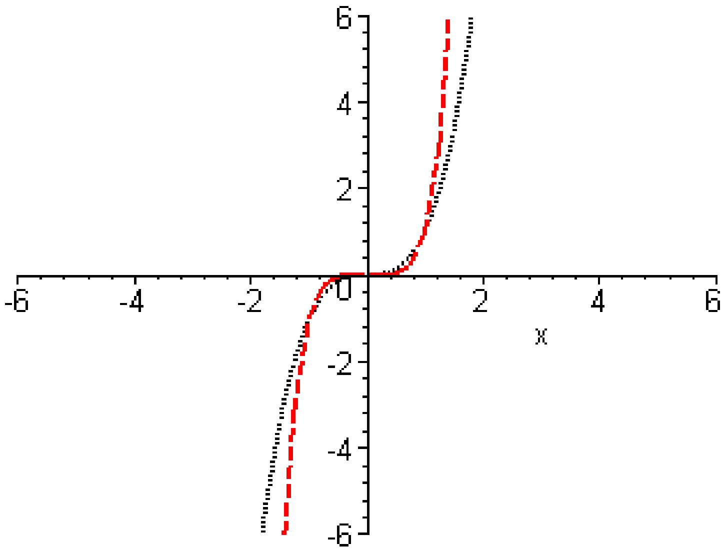
Рис. 7

Побудуємо в Maple графіки степеневих функцій з парними та непарними натуральними показниками:

```
> plot([x^4,x^2],x=-6..6,-1..6);
```



```
> plot([x^5,x^3],x=-6..6,-6..6,color=[red,black],thickness=2,linestyle=[3,2]);
```



6.11. Степенева функція з цілим від'ємним показником

Властивості степеневої функції з цілим від'ємним показником $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in N$

1. $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$.
2. $E(y) = (0;\ \infty)$ при $n = 2k$; $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$ при $n = 2k+1$.
3. Нулів функція не має, $y \neq 0$.
4. Функція $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ парна при $n = 2k$; непарна при $n = 2k+1$.
5. Функція $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ набуває лише додатних значень при $n = 2k$; функція $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ набуває від'ємних значень при $x \in (-\infty;\ 0)$ та додатних значень при $x \in (0;\ \infty)$.

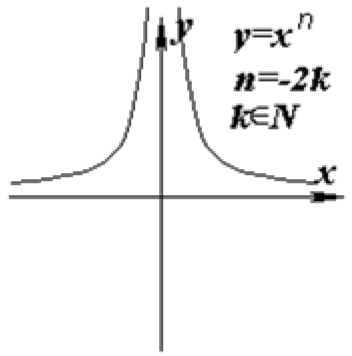


Рис. 8

6. Функція $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, де $n = 2k$, зростає при $x \in (-\infty;\ 0)$, спадає при $x \in (0;\ \infty)$ (рис. 8); функція $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ спадає на всій області визначення при $n = 2k+1$.

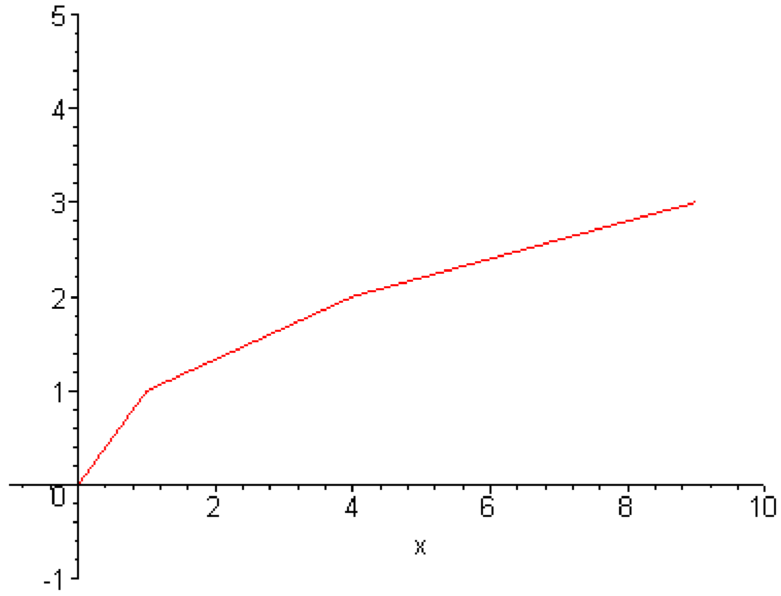
6.12. Властивості функції $y = \sqrt{x}$ та її графік

1. $D(y) = [0;\ \infty)$.
2. $E(y) = [0;\ \infty)$.
3. Функція $y = \sqrt{x}$ має один нуль: $y = 0$ при $x = 0$.
4. Функція ні парна, ні непарна, тобто загального виду.
5. Функція набуває додатних значень при $x \in (0;\ \infty)$.
6. Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на всій області визначення, тобто на проміжку $[0;\ \infty)$.
7. Для побудови графіка складемо таблицю значень функції:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

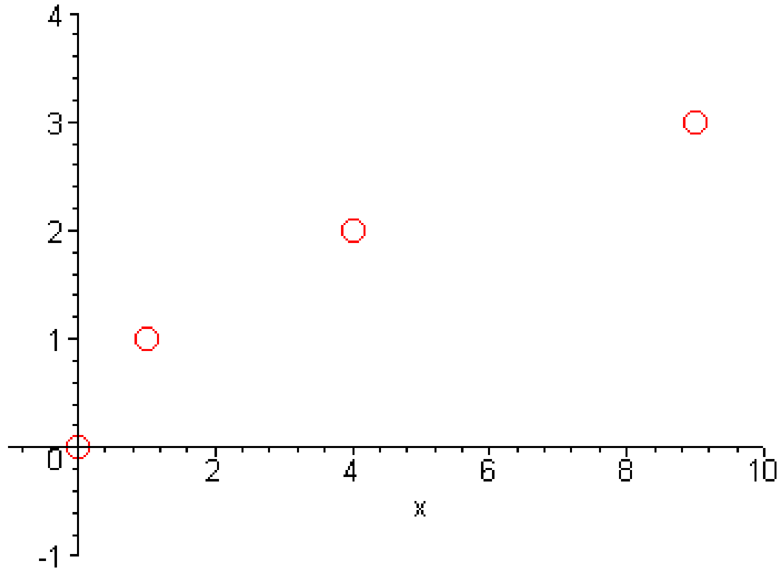
Команда **plot()** дає змогу побудувати графік за заданими точками. Побудуємо в Maple графік функції $y=\sqrt{x}$ за складеною таблицею:

```
> plot([[0,0],[1,1],[4,2],[9,3]], x=-1..10,-1..5);
```



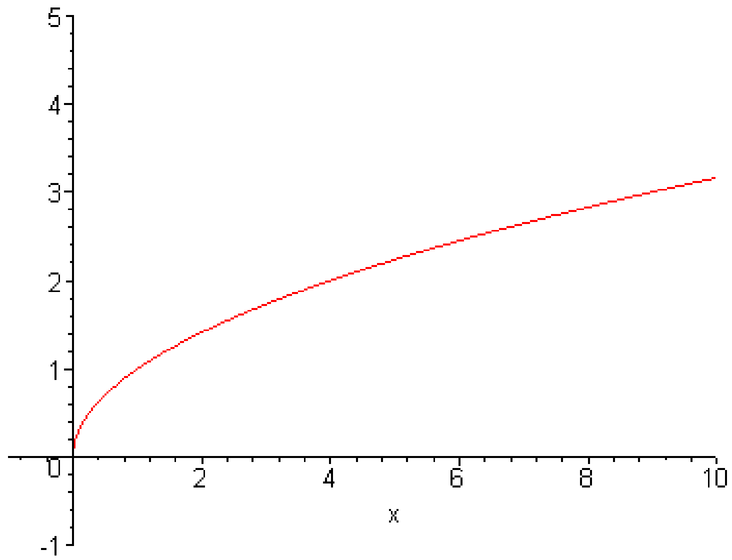
або за точками

```
> plot([[0,0],[1,1],[4,2],[9,3]], x=-1..10,-
1..4,style=point,symbol=circle,symbolsize=20);
```



А тепер побудуємо в Maple графік функції $y=\sqrt{x}$, безпосередньо задаючи саму функцію:

```
> plot(sqrt(x),x=-1..10,-1..5);
```



6.13. Властивості функції $y=\sqrt[3]{x}$ і її графік

1. $D(y)=R$.
2. $E(y)=R$.
3. Функція має один нуль: $y=0$ при $x=0$.
4. Функція $y=\sqrt[3]{x}$ непарна, оскільки $y(-x)=\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}=-y(x)$, тобто $y(-x)=-y(x)$ і її графік симетричний відносно початку координат.
5. Функція набуває додатних значень при $x\in(0;\ \infty)$; функція набуває від'ємних значень при $x\in(-\infty;\ 0)$.
6. Функція $y=\sqrt[3]{x}$ зростає при $x\in(-\infty;\ \infty)$.
7. Складемо таблицю значень функції:

x	0	1	8	-1	-8
y	0	1	2	-1	-2

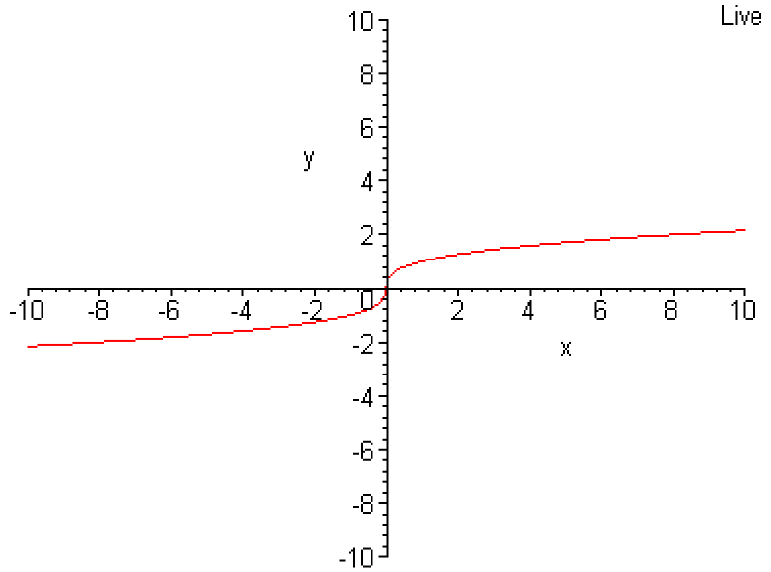
Крім зазначеного раніше способу побудови графіка функції в системі Maple існує так званий **smart-спосіб**, через контекстне меню.

1) В командному рядку вводимо аналітичний вираз, який визначає функцію.
2) Виводимо його в стандартній математичній символіці.
3) Виділяємо і відкриваємо (клацаємо ЛКМ на виділеному виразі) контекстне меню.
4) Знаходимо в меню рядок Plot, переходимо по ньому на 2-D Plot і клацаємо ЛКМ – в наступній обчислювальній секції з'являється графік:

```
> y=surd(x,3);
```

$$y = \mathrm{surd}(x, 3)$$

```
> smartplot[x,y](y = surd(x,3));
```

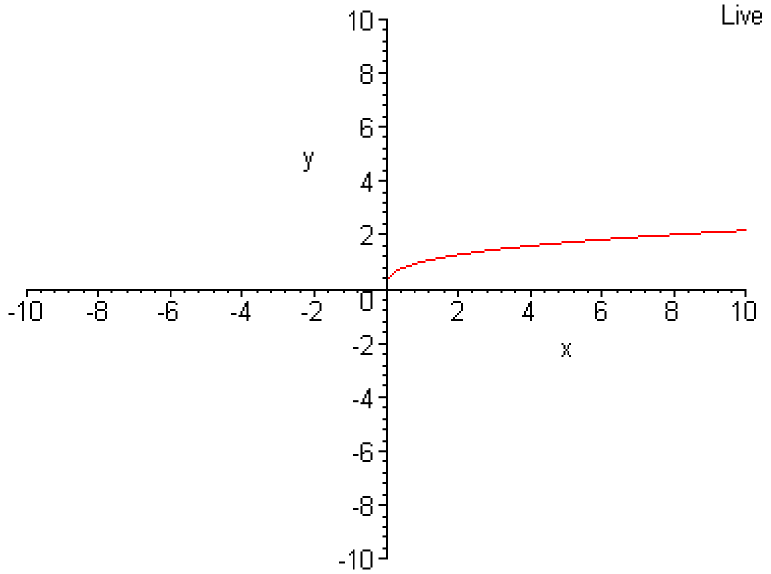


Звернемо увагу на те, що функція $y = \sqrt[3]{x}$ задана за допомогою функції **surd.** Хоча у системі Maple радикали задаються як результат піднесення до дробового степеня, в даному випадку це різні речі, оскільки функції $y = \sqrt[3]{x}$ та $y = x^{\frac{1}{3}}$ дещо відрізняються своїми властивостями.

```
> y=x^(1/3);
```

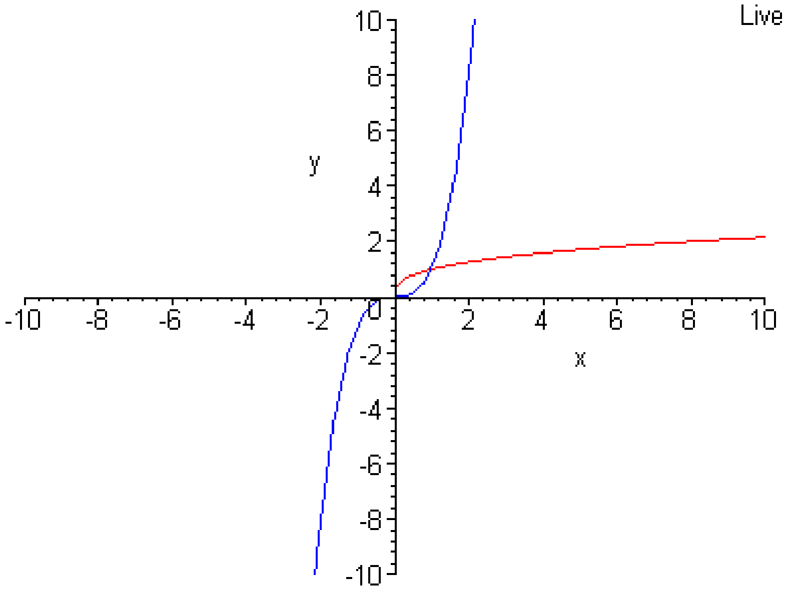
$$y = x^{(1/3)}$$

```
> smartplot[x,y](y = x^(1/3));
```



Даний графік називається **smart-графіком.**

Напис Live в області побудови графіка вказує на те, що область діюча, тобто можна продовжити роботу в ній. Наприклад, можна побудувати графік ще однієї функції. Тоді в наступний командний рядок вводиться функція, яку потрібно побудувати, і виводиться стандартний математичний вид. Отриманий вираз виділяється, «береться» «мишкою» і переміщується в область побудови графіка – область побудови доповнюється потрібним графіком.




```
> y=x^3;
```

$$y = x^3$$

Переміщення краще проводити з натиснутою клавішею <Ctrl>, як при копіюванні. В іншому випадку вираз, що переміщується, буде видалений з останньої секції. Якщо потрібно видалити графік функції, то область виділяється, стрілкою курсора миші вказується будь-яка точка графіка і клацанням ЛКМ, не відпускаючи кнопки, робиться переміщення за межі області. Після того, як ЛКМ відпускається, з'являється вираз, який визначає функцію, а графік зникає.

6.14. Функція $y = \sqrt[n]{x}$

При парному n функція $y = \sqrt[n]{x}$ має такі ж властивості, що й функція $y = \sqrt{x}$, графік її нагадує графік функції $y = \sqrt{x}$. При непарному n функція $y = \sqrt[n]{x}$ має такі самі властивості, що й функція $y = \sqrt[3]{x}$, і графік її нагадує графік функції $y = \sqrt[3]{x}$.

6.15. Геометричні перетворення графіків функцій

Якщо відомий графік функції $y = f(x)$, то за допомогою геометричних перетворень можна побудувати графіки більш складних функцій.

Таблиця 3. – **Геометричні перетворення графіків функцій**

Щоб побудувати графік функції	Потрібно
$y=f(x-b)$	Зсунути $y=f(x)$ на b одиниць вздовж осі Ox праворуч при $b>0$, або ліворуч при $b<0$.
$y=f(x)+c$	Зсунути $y=f(x)$ на с одиниць вздовж осі Oy вгору при $c>0$, або вниз при $c<0$.
$y=f(mx),\ m>0$	Стиснути $y=f(x)$ у m разів у напрямку осі Ox до осі Oy, якщо $m>1$, або розтягти у $\frac{1}{m}$ разів, якщо $0<m<1$.
$y=kf(x),\ k>0$	Розтягти $y=f(x)$ у k разів у напрямку осі Oy від осі Ox, якщо $k>1$, або стиснути до осі Ox, якщо $0<k<1$.
$y=f(-x)$	Перевернути $y=f(x)$ відносно осі Oy.
$y=-f(x)$	Перевернути $y=f(x)$ відносно осі Ox.
$y=\vert f(x)\vert$	Залишити без змін ту частину $y=f(x)$, яка вище осі Ox, а ту, що нижче, відобразити симетрично на верхню півплощину.
$y=f(\vert x\vert)$	Відкинути ту частину $y=f(x)$, яка знаходиться у лівій півплощині відносно осі Oy, а ту, що в правій, залишити та відобразити симетрично на ліву півплощину.

Приклад 7. Побудувати графік функції $y=(x-1)^2+3$.

Розв'язання

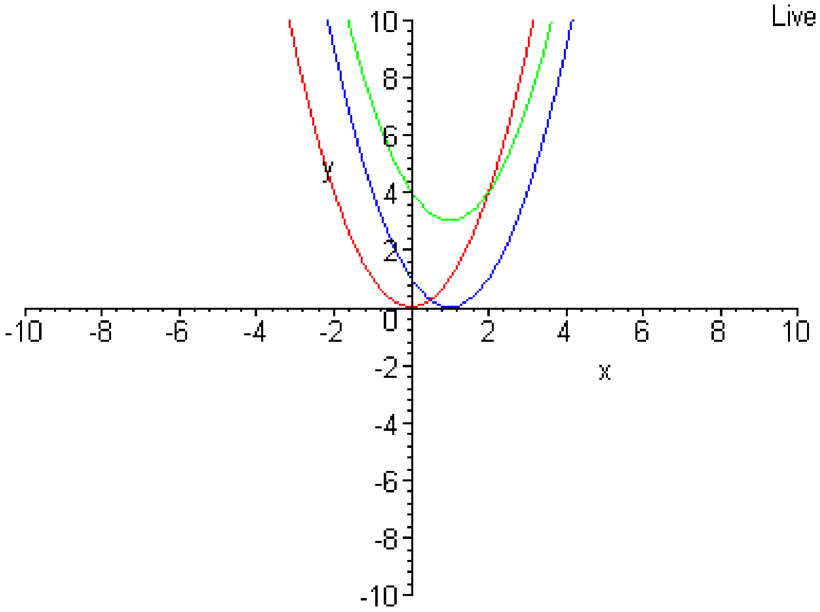
Основним графіком для даного є графік $y=x^2$. Потім будуємо графік функції $y=(x-1)^2$, для цього зсуваємо графік $y=x^2$ на 1 одиницю праворуч вздовж осі Ox. Далі будуємо $y=(x-1)^2+3$, зсуваючи графік $y=(x-1)^2$ на 3 одиниці вгору вздовж осі Oy.

Побудуємо графік функції $y=(x-1)^2+3$ smart-способом в Maple:

```
> y=x^2;
```

$$y=x^2$$

```
> smartplot[x,y](y = x^2);
```




```
> y=(x-1)^2;
```

$$y=(x-1)^2$$

```
> y=(x-1)^2+3;
```

$$y=(x-1)^2+3$$

Приклад 8. Побудувати графік функції $y=-\frac{1}{2}x^2+2$.

Розв'язання

Послідовно виконуємо такі побудови:

1) $y=x^2$.

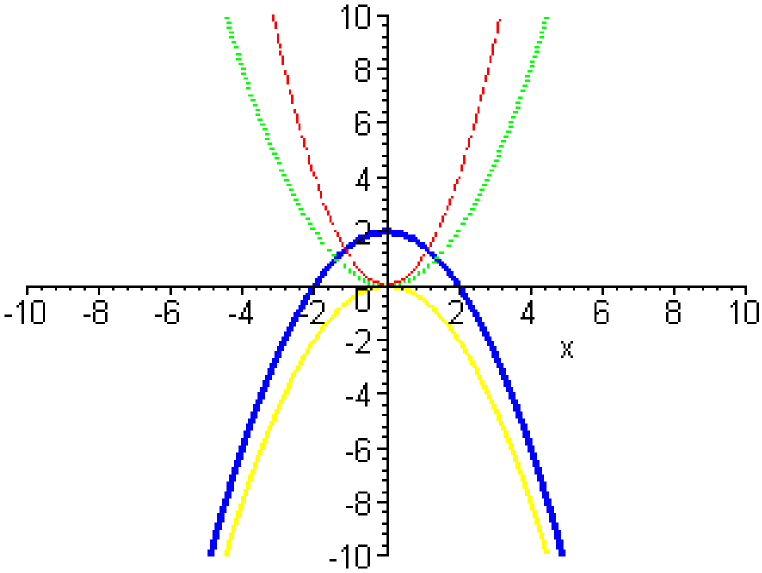
2) $y=\frac{1}{2}x^2$ (стискаємо вдвічі до осі Ox графік функції $y=x^2$).

3) $y=-\frac{1}{2}x^2$ (перевертаємо графік функції $y=\frac{1}{2}x^2$ відносно осі Ox).

4) $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ (зсуваємо графік $y=-\frac{1}{2}x^2$ вздовж осі Oy на 2 одиниці вгору).

Побудуємо даний графік в системі Maple:

```
> plot([x^2,1/2*x^2,-1/2*x^2,-1/2*x^2+2],x=-10..10,-
10..10,thickness=[1,2,2,3],linestyle=[3,2,1,0]);
```



Тут можна прослідкувати, як перетворюється графік. Крім того, за допомогою вказання типу лінії та її товщини ми встановлюємо відповідність між функціями та їх графіками.

6.16. Способи побудови графіка квадратичної функції

1-й спосіб. Знаходження координат вершини параболи за формулами: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ та знаходження точок перетину параболи з осями координат.

Приклад 9. Побудувати графік функції $y = -3x^2 + 8x + 3$.

Розв'язання

Тут $a = -3$, $b = 8$, $c = 3$, тоді $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\cdot(-3)} = 1\frac{1}{3}$,

$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-3)\cdot 3 - 8^2}{4\cdot(-3)} = 8\frac{1}{3}$. Отже, точка $\left(1\frac{1}{3};\ 8\frac{1}{3}\right)$ – вершина параболи. Знаходимо точки перетину параболи $y = -3x^2 + 8x + 3$ з осями координат:

з віссю 0x: $y = 0$, тобто $-3x^2 + 8x + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$. Отже точка $(3;\ 0)$ і точка $\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$ – точки перетину параболи з віссю 0x;

з віссю 0y: $x = 0$, тобто $y = -3\cdot 0^2 + 8\cdot 0 + 3 = 3$. Це точка $(0;\ 3)$.

Крім того, відмітимо, що коефіцієнт a – від'ємний, отже, парабола $y = -3x^2 + 8x + 3$ нахилена вітками донизу.

Відмічаємо на координатній площині знайдені точки і будуємо по них параболу (при потребі знаходимо додаткові точки).

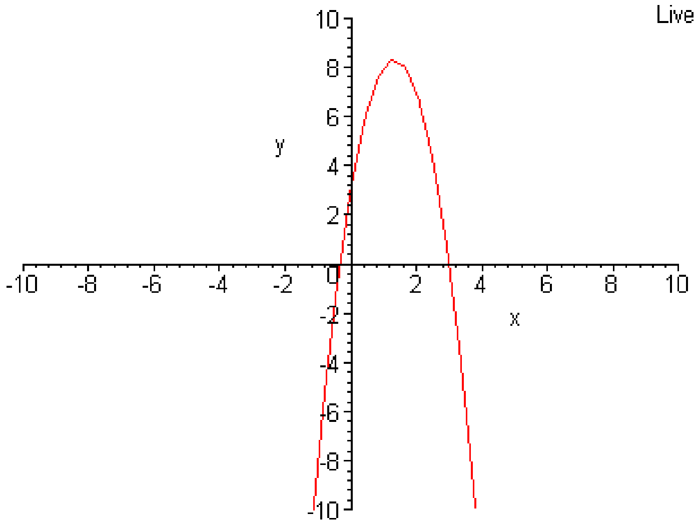
2-й спосіб. Виділення повного квадрата квадратного тричлена.

В системі Maple будуємо графік функції $y = -3x^2 + 8x + 3$:

```
> y=-3*x^2+8*x+3;
```

$$y = -3x^2 + 8x + 3$$

```
> smartplot[x,y](y = -3*x^2+8*x+3);
```



Приклад 10. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 20$.

Розв'язання

Для побудови даного графіка функції виконаємо такі перетворення квадратного тричлена:

$$\frac{1}{3}x^2 + 6x + 20 = \frac{1}{3}\left(x^2 + 18x\right) + 20 = \frac{1}{3}\left(\left(x^2 + 18x + 81\right) - 81\right) + 20 = \frac{1}{3}(x+9)^2 -$$

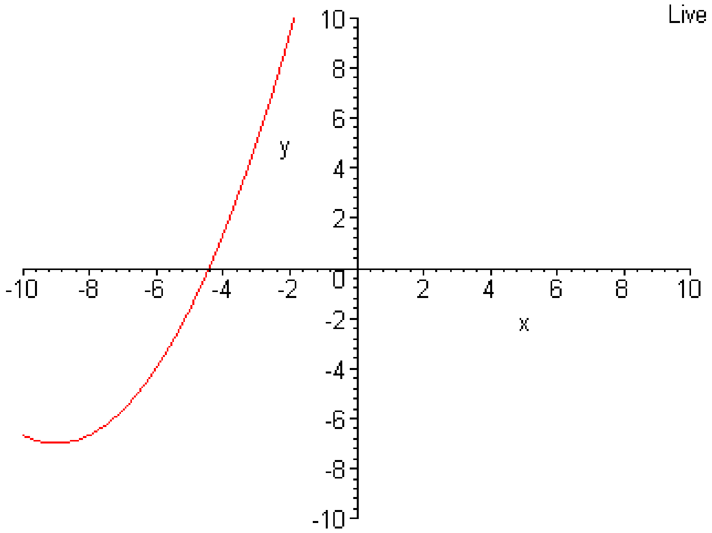
$-27 + 20 = \frac{1}{3}(x+9)^2 - 7$. Тобто, потрібно побудувати графік функції $y = \frac{1}{3}(x+9)^2 - 7$. Для цього шляхом елементарних перетворень графік функції $y = \frac{1}{3}x^2$ зсуваємо вздовж осі 0х ліворуч на 9 одиниць і вниз на 7 одиниць вздовж осі 0у.

Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 20$ smart-способом в Maple:

```
> y=1/3*x^2+6*x+20;
```

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 6\,x + 20$$

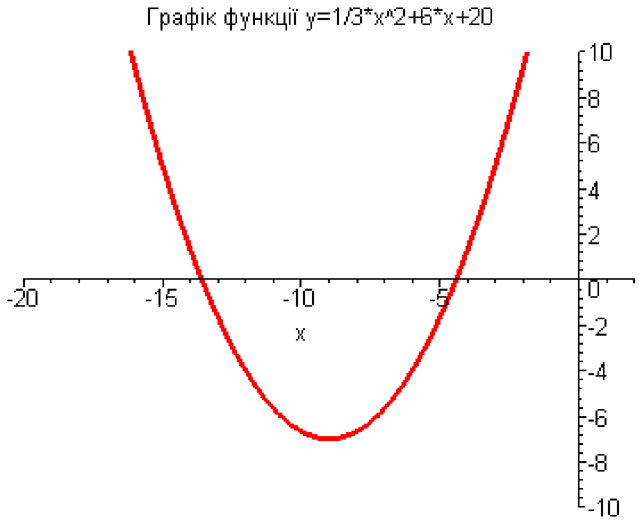
```
> smartplot[x,y](y = 1/3*x^2+6*x+20);
```



Недоліки smart-способу очевидні. Тут ми не можемо задати ні діапазон осей, ні колір, ні товщину лінії, тобто не вистачає опцій, які характеризують графік. Тому і графік у нас зображено частково.

Тоді побудуємо даний графік із заданням діапазону і опцій:

```
> plot(1/3*x^2+6*x+20,x=-20..2,-10..10,
thickness=3,title=`Графік функції y=1/3*x^2+6*x+20`);
```



Приклад 11. Побудувати графік функції $y = \dfrac{3x-1}{x-1}$.

Розв'язання

1) Знайдемо область визначення функції $y = \dfrac{3x-1}{x-1}$: $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$, тобто $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2) Перетворимо дану функцію до вигляду функції оберненої пропорційності: $y=\frac{3x-1}{x-1}=\frac{3x-3+2}{x-1}=\frac{3x-3}{x-1}+\frac{2}{x-1}=3+\frac{2}{x-1}$.

3) Побудуємо графік функції $y=3+\frac{2}{x-1}$ за допомогою елементарних перетворень:

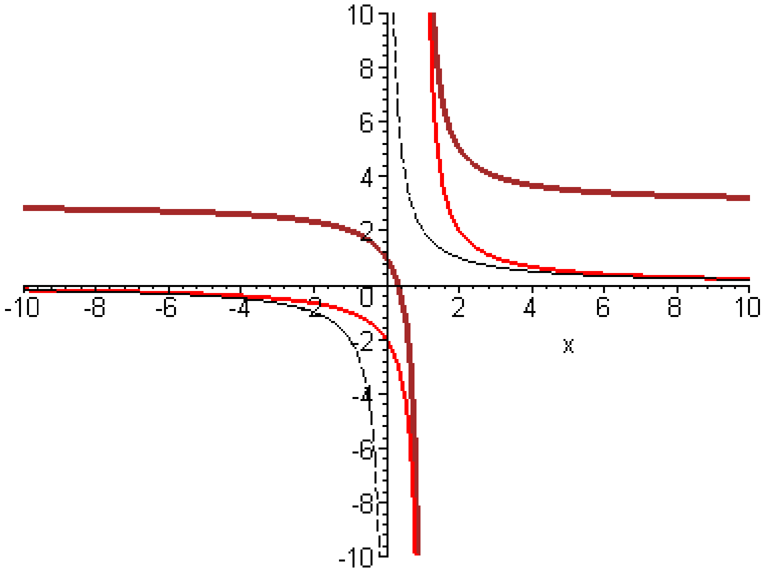
1. Складаємо таблицю основних значень для функції $y=\frac{2}{x}$ і отримуємо дві вітки гіперболи, наносячи дані значення на координатну площину.

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	2	1	1/2	-2	-1	$-1/2$

2. Будуємо графік функції $y=\frac{2}{x-1}$, для цього зсуваємо графік $y=\frac{2}{x}$ вздовж осі 0x вправо на 1 одиницю.

3. Піднімаючи графік функції $y=\frac{2}{x-1}$ на 3 одиниці вгору вздовж осі 0y, отримуємо графік функції $y=\frac{2}{x-1}+3$.

```
> plot([2/x,2/(x-1),2/(x-1)+3],x=-10..10,-10..10,color=[black,red,brown],discont=true,linestyle=[3,1,0],thickness=[1,2,3]);
```



Звернемо увагу, що в даному прикладі ми додали ще одну опцію **linestyle,** яка визначає тип лінії графіка. Зміна типу лінії графіка досить зручна, наприклад, коли потрібно прослідкувати побудову графіка функції шляхом елементарних перетворень.

6.17. Приклади на побудову графіків функцій, які знаходяться під знаком модуля

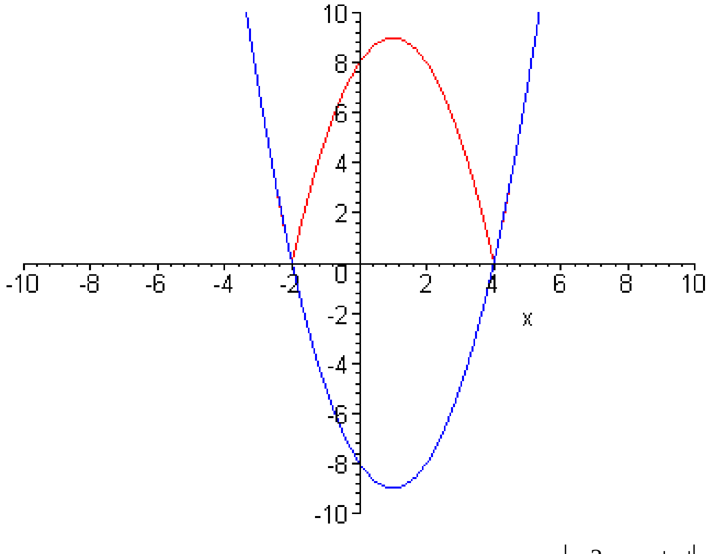
Приклад 12. Побудувати графік функції $y = \left| x^2 - 2x - 8 \right|$.

Розв'язання

Будуємо спочатку графік функції $y = x^2 - 2x - 8$. Для цього використовуємо спосіб виділення повного квадрата квадратного тричлена: $y = x^2 - 2x - 8 = \left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 - 8 = (x-1)^2 - 9$. Далі шляхом елементарних перетворень будуємо спочатку графік функції $y = x^2$, потім $y = (x-1)^2$, а потім $y = (x-1)^2 - 9$.

Для того, щоб побудувати графік функції $y = \left| x^2 - 2x - 8 \right|$, потрібно залишити без змін ту частину графіка $y = (x-1)^2 - 9$, яка знаходиться над віссю 0x, а ту, що нижче, симетрично відобразити на верхню півплощину.

```
> plot([x^2-2*x-8,abs(x^2-2*x-8)],x=-10..10,-10..10,
color=[blue,red]);
```



Приклад 13. Побудувати графік функції $y = \left| x^2 - 4|x| \right|$.

Розв'язання

Шляхом елементарних перетворень будуємо графік функції $y = \left| x^2 - 4|x| \right|$:

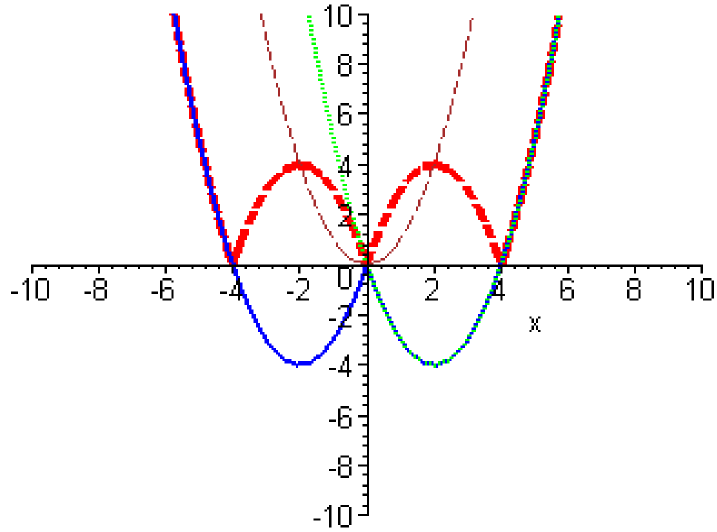
1. $y = x^2$ (даний графік будуємо по основних точках).

2. $y = x^2 - 4x$ ($y = x^2 - 4x = \left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 = (x-2)^2 - 4$).

3. $y = x^2 - 4|x|$ (відкидаємо ту частину графіка $y = (x-2)^2 - 4$, яка у лівій півплощині відносно осі 0y, а ту, що у правій, залишаємо і симетрично відображаємо на ліву півплощину).

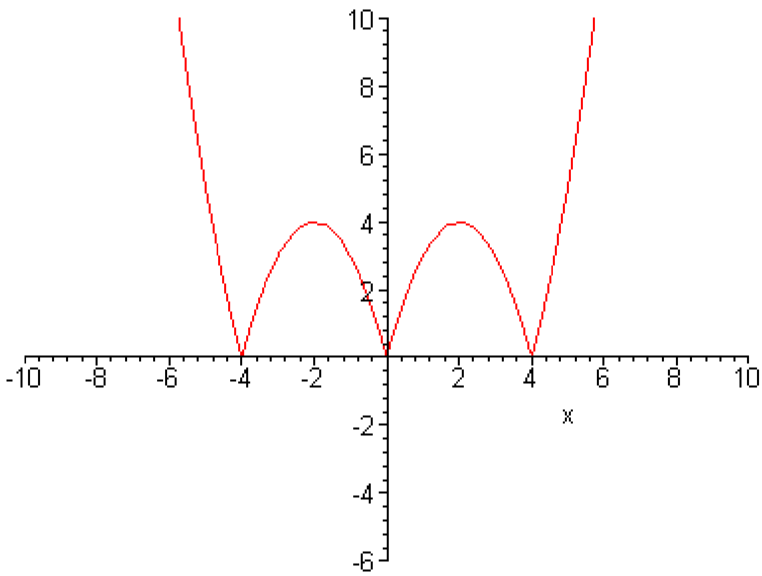
4. $y = \left|x^2 - 4|x|\right|$ (ту частину графіка $y = x^2 - 4|x|$, яка вище осі 0x, залишаємо без змін, а ту, що нижче, симетрично відображаємо на верхню півплощину).

```
> plot([x^2,x^2-4*x,x^2-4*abs(x),abs(x^2-
4*abs(x))],x=-10..10,-10..10,linestyle=[3,2,0],
color=[brown,green,blue,red],thickness=[1,2,2,4]);
```



Побудуємо той же графік без допоміжних графіків функцій:

```
> plot(abs(x^2-4*abs(x)),x=-10..10,-6..10);
```



Відмітимо, що графіки функцій, які містять модуль, можна будувати також, використовуючи означення модуля, як ми це робили у рівняннях та нерівностях з модулями.

Приклад 14. Побудувати графік функції $y=|x-2|+|2x+3|$.

Розв'язання

Прирівнюємо до нуля вирази, що знаходяться під знаком модуля: $x-2=0 \;\Leftrightarrow\; x=2$; $2x+3=0 \;\Leftrightarrow\; x=-1{,}5$. Використовуючи означення модуля, маємо:

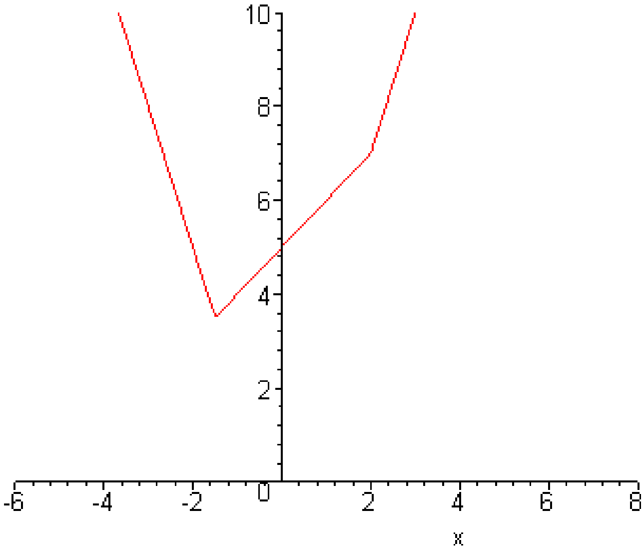
при $x\in(-\infty;-1{,}5)$ $y=-(x-2)-(2x+3)=-3x-1$;

при $x\in[-1{,}5;2)$ $y=-(x-2)+2x+3=x+5$;

при $x\in[2;+\infty)$ $y=x-2+2x+3=3x+1$.

Будуємо графік функції $y=|x-2|+|2x+3|$ в системі Maple:

```
> plot(abs(x-2)+abs(2*x+3),x=-6..8,0..10);
```



Приклад 15. Побудувати графік функції $y=\dfrac{2x+|x|}{|x|}$.

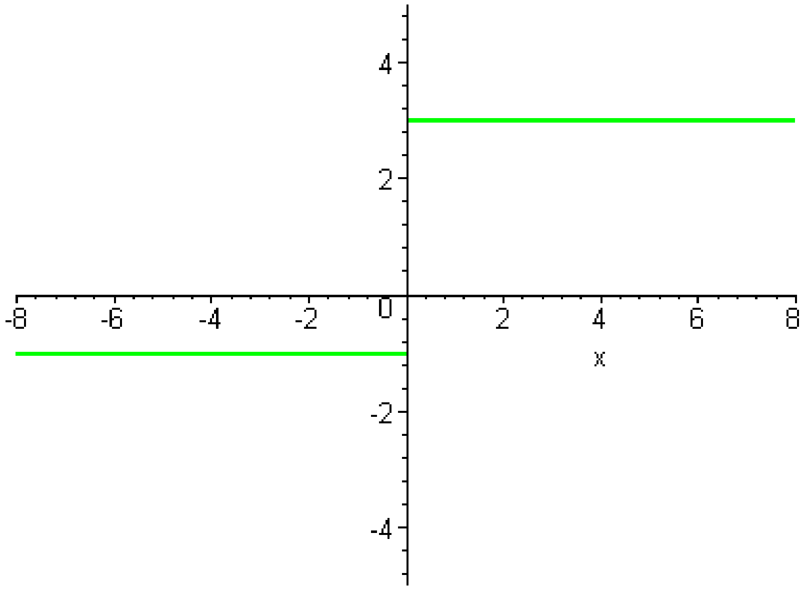
Розв'язання

$D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. Оскільки дана функція містить два модулі з однаковими підмодулевими виразами *x*, то розглянемо випадки, коли підмодулевий вираз додатний та від'ємний (випадок, коли підмодулевий вираз дорівнює нулю, не розглядаємо згідно з областю визначення функції).

При $x<0$ $y=\dfrac{2x-x}{-x}=-\dfrac{x}{x}=-1$;

при $x > 0$ $y = \dfrac{2x + x}{x} = \dfrac{3x}{x} = 3$. Отже, графіком функції $y = \dfrac{2x + |x|}{|x|}$ є два промені:

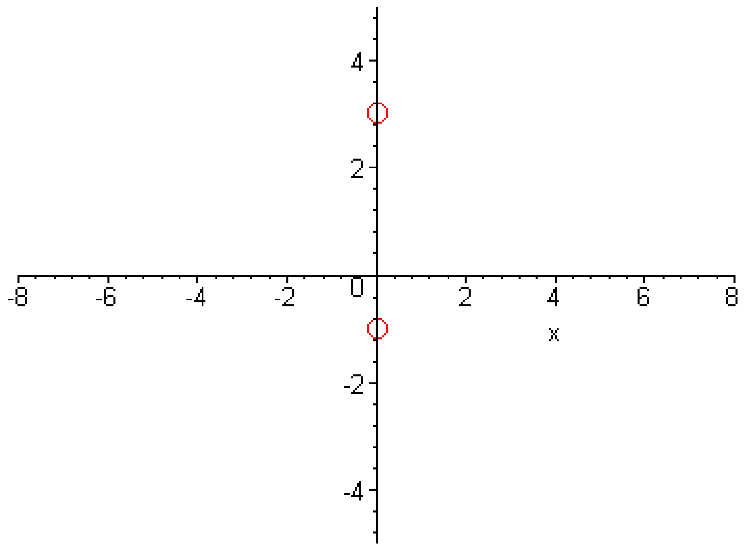
```
> plot([(2*x+abs(x))/abs(x)],x=-8..8,-5..5,discont=true,color=[green],thickness=[2]);
```




```
g10:=%:
```

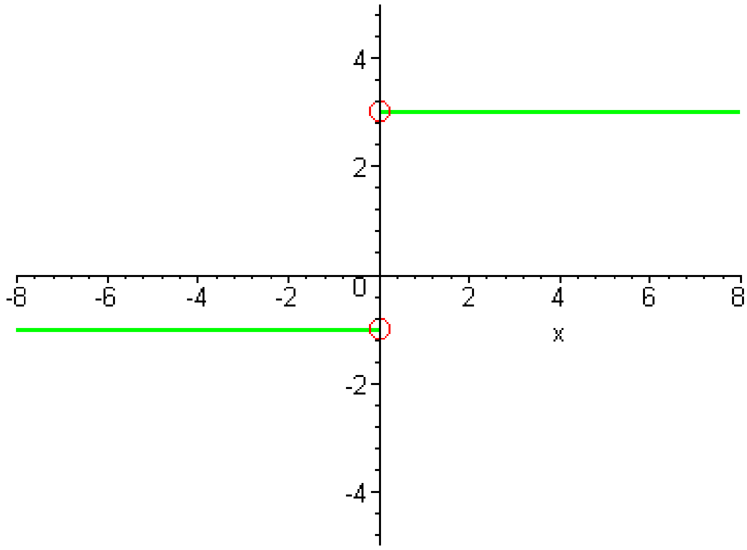
Щоб зобразити «виколоті» точки, потрібно у команді plot замість функції задати координати потрібних точок, а за допомогою опції **style=[point]** відобразити графік функції точками.

```
> plot([[[0,-1],[0,3]]],x=-8..8,-5..5,color=[red],style=[point],symbolsize=20,symbol=circle,thickness=[2]);g20:=%:
```



Для того, щоб сумістити два попередні графіки на одному, застосовуємо команду **display** пакета **plots**. Структура даної команди має вигляд: **plots[display]()**. В дужках через кому записуємо ті графіки, які потрібно сумістити на одному.

```
> plots[display]([g10,g20]);
```



6.18. Тренувальні вправи

Завдання 1. Знайти область визначення та множину значень функції.

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{8-x}{x}}$. Знайти $f(1),\ f(4),\ f(7)$.

2. $f(x)=x^2-x+1$. Знайти $f(-x),\ f(\sqrt{x}),\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Знайти $f(-1),\ f(0),\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

4. $f(x)=\begin{cases} x, x<0, \\ x^2+2, x\geq 0. \end{cases}$ Знайти $f(-2),\ f(0),\ f(1)$.

5. $y=\dfrac{4}{2x-1}$. Знайти $f(-1),\ f(0),\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

Завдання 2. Знайти область визначення функції.

1. $f(x)=\dfrac{4}{x-5}$.

2. $y=\dfrac{3}{x^2+x}$.

3. $y=\sqrt{-4x-12}$.

4. $y=\sqrt{(x-1)(x+2)}$.

5. $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{x+1}}$.

6. $y=\sqrt{x}+\sqrt{9-x^2}$.

7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$.

8. $y=x\sqrt{x-5}$.

9. $y=\sqrt{x^2(x-3)^2(x-5)}$.

10. $f(x)=3\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)^{-1}$.

Завдання 3. Дослідити функції на парність (непарність).

1. $y=6x^6+3x^2+7$.

2. $y=x^{13}-x^5-x$.

3. $y=\dfrac{3-x}{x-4}$.

4. $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{2x}$.

5. $y=\sqrt{1-x^3}$.

6. $y=\sin 2x\cdot\cos 5x$.

7. $y=\sqrt[5]{3x^3-2x}-9x^{11}$.

8. $y=|x|+\sin\dfrac{1}{x}$.

9. $y=|x-2|+|x+2|$.

Завдання 4. Для заданої функції y знайти обернену.

1. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

2. $y=\dfrac{5}{x-5}$.

3. $y=x^2+4$: 1) $x\ge 0$; 2) $x\le 0$.

4. $y=x^2+6x$: 1) $x\ge -3$; 2) $x\le -3$.

5. $y=\sqrt{1-x^2}$: 1) $-1\le x\le 0$; 2) $0\le x\le 1$.

6. $y=\begin{cases} x^3, x<0, \\ x^2, x\ge 0. \end{cases}$

7. $y=\begin{cases} x, x<1, \\ x^2, 1\le x\le 4, \\ x+4, x>4. \end{cases}$

Завдання 5. Побудувати графік функції.

1. $y=-2x+2$.
2. $y=\dfrac{x-1}{2}$.
3. $y=-(x+2)^2$.
4. $y=2(x-1)^2+1$.
5. $y=-(x-3)^2-4$.
6. $y=-2x^2+4x$.
7. $y=1-2x-3x^2$.
8. $y=x^2-8x+15$.
9. $y=2x^3$.
10. $y=(x-1)^3$.
11. $y=2(x+1)^3+2$.
12. $y=2\sqrt{x}$.
13. $y=-\sqrt{x}+3$.
14. $y=\sqrt{-1-x}$.
15. $y=-2\sqrt[3]{x}$.
16. $y=-\sqrt[3]{x+2}-2$.
17. $y=\sqrt[4]{x}-1$.
18. $y=\dfrac{1}{x+2}$.
19. $y=-\dfrac{1}{x}-2$.
20. $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.
21. $y=\dfrac{1}{2x+3}+5$.

22. $y = \dfrac{5-2x}{2+x}$.

23. $y = |1-2x|$.

24. $y = -|4x-2|$.

25. $y = x + |x+2|$.

26. $y = 3|x-1| - 2x$.

27. $y = |x+1| - |x-1|$.

28. $y = |2x+5| + |2x-5|$.

29. $y = |x| + \dfrac{|x+2|}{x+2}$.

30. $y = |x+1| + |x-2| + |x-3|$.

31. $y = \dfrac{x^2-5x+4}{|x-1|}$.

32. $y = -x \cdot |x| + 4x$.

33. $y = \left|4-x^2\right|$.

34. $y = 2 - |x| - x^2$.

35. $y = \left|-x^2 - x + 2\right|$.

36. $y = \dfrac{2}{|x-1|-1}$.

37. $y = \dfrac{|x-1| + |x+2|}{x-3}$.

6.19. Орієнтовна контрольна робота № 6

1. Дано функцію $y = \dfrac{5}{3x+2}$. Знайти $D(y)$ та $E(y)$, а також $y(0)$, $y(-1)$, $y\left(a^{-2}\right)$.
2. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-18}$.
3. Дослідити функцію $y = \sqrt[5]{3x^3-2x} - 9x^{11}$ на парність (непарність).
4. Побудувати графік функції $y = \left|x^2-4\right|$.

7. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

7.1. Основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь

Ірраціональними називаються рівняння, у яких змінна міститься під знаком кореня (радикала) або під знаком піднесення до дробового степеня.

В окремих випадках, не розв'язуючи дане ірраціональне рівняння, можна встановити, що воно не має коренів. Наприклад, рівняння $\sqrt{x-4}=-3$ не має коренів, бо арифметичний корінь не може бути від'ємним.

Рівняння $\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=0$ не має розв'язків, бо обидва доданки є арифметичними коренями, а тому не можуть бути від'ємними. А сума двох невід'ємних чисел дорівнює нулю лише тоді, коли кожен доданок дорівнює нулю. Одночасно ж вирази $x+7$ і x нулю дорівнювати не можуть.

Основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь є метод піднесення обох частин рівняння до одного і того самого степеня та метод введення нових змінних.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин до парного степеня можуть з'явитися побічні корені. Це відбувається за рахунок того, що при піднесенні обох частин початкового рівняння $f(x)=\varphi(x)$ до парного степеня дістаємо рівняння, що є результатом не тільки рівняння $f(x)=\varphi(x)$, але і рівняння $f(x)=-\varphi(x)$, оскільки і $(f(x))^2=(\varphi(x))^2$, і $(f(x))^2=(-\varphi(x))^2$. Так, наприклад, візьмемо рівняння $\sqrt{x+5}=x-1$. Піднісши обидві частини цього рівняння до квадрата, дістанемо $\left(\sqrt{x+5}\right)^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow x+5=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0.$ Коренями цього рівняння є числа $x_1=-1,\ x_2=4.$ Однак після перевірки переконуємось, що $x_2=4$ є коренем рівняння $\sqrt{x+5}=x-1$, а $x_1=-1$ є побічним коренем.

Приступаючи до розв'язання ірраціонального рівняння, що містить парні степені радикалів, буває корисним знаходження області допустимих значень (ОДЗ), це, як правило, полегшує розв'язування рівняння. Якщо робити лише еквівалентні перетворення, то перевірку робити не потрібно.

Розглянемо рівняння виду $\sqrt[2n]{f(x)}=\varphi(x)$. Очевидно, що ліва частина рівняння, яка містить радикал парного степеня, не може бути від'ємна, а отже невід’ємна і права частина даного рівняння. Враховуючи область допустимих значень, підкореневий вираз також не може бути від’ємним. Отже, рівняння виду $\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x)$ рівносильне такій системі:

$$\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi^{2n}(x) \\ \varphi(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}.$$

У системі Maple ірраціональні рівняння, як і раціональні, розв’язуються за допомогою функції **solve()**. Для позначення кореня використовуємо функцію **sqrt ()**.

Приклад 1. Розв’язати рівняння $3x + \sqrt{7x-5} = 9$.

Розв’язання

Дане рівняння можна звести до вигляду $\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$, тобто

$$3x + \sqrt{7x-5} = 9 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{7x-5} = 9 - 3x \;\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5 = (9-3x)^2 \\ 9 - 3x \ge 0 \\ 7x - 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5 = 81 - 54x + 9x^2 \\ -3x \ge -9 \\ 7x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 61x + 86 = 0 \\ x \le 3 \\ x \ge \dfrac{5}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, x_2 = \dfrac{43}{9} \\ \dfrac{5}{7} \le x \le 3 \end{cases}.$$

З даної системи випливає, що лише $x = 2$ є коренем початкового рівняння.

Відповідь: $\{2\}$.

```
> solve({3*x+sqrt(7*x-5)=9},{x});
                              {x = 2}
```

Розв’язання рівняння виду $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = p$, де $a,b,c,d,p \in R$, здійснюється піднесенням обох частин рівняння до квадрату, «ізолюванням» радикала, який при цьому отримується, і повторним піднесенням обох частин рівняння до квадрата. В результаті таких перетворень рівняння даного виду зводиться до раціонального.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$.

Розв’язання

Область визначення даного рівняння визначається в результаті розв’-

язання системи нерівностей $\begin{cases} 3x+7\ge 0, \\ x+1\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{7}{3}, \\ x\ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;\ +\infty)$.

Перетворимо дане рівняння:

$$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{3x+7}=2+\sqrt{x+1} \Rightarrow 3x+7=4+4\sqrt{x+1}+x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ \sqrt{x+1}-2=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x+1=4; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Обидва знайдені корені належать ОДЗ.

Відповідь: $\{-1;\ 3\}$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x}=7$.

Розв’язання

Знайдемо для початку область допустимих значень: $\begin{cases} x-5\ge 0, \\ 3-x\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5, \\ x\le 3 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$.

Оскільки область допустимих значень виявилась пустою множиною, то і розв’язків дане рівняння не має.

Відповідь: $\varnothing$.

Таким чином, в даному прикладі попереднє знаходження ОДЗ виявилось надзвичайно корисним.

```
> solve(sqrt(x-5)+sqrt(3-x)=7);
```

$$4-\frac{7}{2}I\sqrt{53},\ 4+\frac{7}{2}I\sqrt{53}$$

Далі ми покажемо, як давати вказівку системі шукати корені тільки у множині дійсних чисел. За замовчуванням система шукає корені в комплексній області, тому система і видала комплексні корені.

Приклад 4. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=4$.

Розв’язання

Обидва підкореневі вирази є повними квадратами, тому

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=4 \Leftrightarrow |x+1|+|x-2|=4.$$

Тобто дане ірраціональне рівняння звелося до раціонального рівняння з двома модулями.

Приклад розв'язання рівняння такого типу наводився раніше.

Відповідь: $\left\{\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right\}$.

Рівняння виду $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ можна розписати за допомогою змішаних систем:

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0; \end{cases} (I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0; \end{cases} (II) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0; \end{cases} (III)$$

З наведених вище трьох систем вибирають звичайно ту, де простіше розв'язати нерівність ($f(x)\ge 0$ або $g(x)\ge 0$). Якщо ж обидві нерівності $f(x)\ge 0$ і $g(x)\ge 0$ розв'язати нескладно, то можна вибрати першу систему, яка хоча і містить одну зайву нерівність, є більш наочною, ніж II і III.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^3-2x^2-x+3}=\sqrt{4x-3}$.

Розв'язання

Для розв'язання даного рівняння обираємо III систему:

$$\sqrt{x^3-2x^2-x+3}=\sqrt{4x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2-x+3=4x-3, \\ 4x-3\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2-5x+6=0, \\ x\ge \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Окремо розв'яжемо рівняння $x^3-2x^2-5x+6=0$ нашої системи. Методом підбору знаходимо цілий корінь даного рівняння. Для цього виписуємо дільники вільного члена: ±1; ±2; ±3. При підборі знаходимо, що коренями є –2; 1; 3. Тоді $\begin{cases} x_1=-2, x_2=1, x_3=3, \\ x\ge \frac{3}{4}; \end{cases} \Rightarrow x_1=1,\ \ x_2=3.$

Відповідь: $\{1;\ 3\}$.

Покажемо інший спосіб запису ірраціональних рівнянь у системі Maple, при якому корінь записуємо у вигляді степеня:

```
> solve((x^3-2*x^2-x+3)^(1/2)=(4*x-3)^(1/2));
```

1, -2, 3

```
> restart;
> assume(4*x-3>=0);
```

```
> solve(sqrt(x^3-2*x^2-x+3)=sqrt(4*x-3));
```

$$-2,\ 1,\ 3$$

```
> restart;eval(sqrt(x^3-2*x^2-x+3)=sqrt(4*x-3),x=-2);
```

$$\sqrt{-11}=\sqrt{-11}$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt[5]{2x-4}=2$.

Розв'язання

Піднесемо обидві частини початкового рівняння до п'ятого степеня, дістанемо: $2x-4=2^5$, звідки $2x=32+4 \Leftrightarrow x=18$.

Перевірка: Підставивши $x=18$ в початкове рівняння, дістанемо $\sqrt[5]{36-4}=\sqrt[5]{32}=2$, тобто $2=2$ – правильна рівність $\Rightarrow x=18$ є коренем.

Відповідь: $\{18\}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

Розв'язання

ОДЗ початкового рівняння – всі дійсні числа. Піднесемо обидві частини рівняння до кубу:

$$\left(\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}\right)^3=1^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x+7-(5x-12)-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}\left(\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}\right)=1.$$

Замінимо різницю $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}$ правою частиною первинного рівняння, тобто 1: $5x+7-5x+12-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}=1$.

Ізолюємо кубічний корінь, що залишився, і піднесемо обидві частини рівняння до кубу: $-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}=-18 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}=6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (5x+7)(5x-12)=216 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Виконавши перевірку, знайдемо, що множиною розв'язків даного рівняння є $\{-3;\ 4\}$.

Відповідь: $\{-3;\ 4\}$.

Ще простіше у системі Maple розв'язуються рівняння smart-способом – через контекстне меню:

1) в командний рядок вводиться рівняння і знаходиться його стандартний математичний вигляд (як при перевірці правильності введення);

2) клацанням ПКМ по виділеному стандартному математичному вигляду відкривається контекстне меню;

3) після клацання ЛКМ на рядок Solve (або, якщо змінних декілька, на потрібну змінну рядка Solve Equation for a Variable) у командному рядку наступної секції з'являються корені.

Покажемо розв'язання ірраціонального рівняння smart-способом на прикладі 7:

```
> (5*x+7)^(1/3)-(5*x-12)^(1/3)=1;
```

$$(5\,x+7)^{(1/3)}-(5\,x-12)^{(1/3)}=1$$

```
> {x = 4};
```

Як бачимо, при знаходженні коренів рівняння система один дійсний корінь $x=-3$ «загубила». Більш того, навіть підстановка «загубленого» значення в рівняння не перетворює його на тотожність (!).

```
> subs(x=-3,(5*x+7)^(1/3)-(5*x-12)^(1/3))=1;evalf(%);
```

$$(-8)^{(1/3)}-(-27)^{(1/3)}=1$$

$$-.500000000-.866025404 I=1.$$

На думку авторів [1] проблема полягає в тому, що «Maple испытывает затруднения при вычислениях уже целого ряда простых радикалов с рациональными степенями от отрицательных значений, если знаменатель экспоненты – нечетное число. В этом случае даже стандартная функция evalf оказывается бессильной» [1, С. 46]. Насправді ж уникнути подібних ситуацій можна за допомогою додаткового пакета **RealDomain**. Справа в тому, що система Maple, як уже зазначалось, за замовчуванням основною системою обчислень вважає область комплексних чисел. Підключення зазначеного пакета переключає основну систему на область дійсних чисел.

```
> with(RealDomain):
eq:=(5*x+7)^(1/3)-(5*x-12)^(1/3)=1;
solve(eq,x);
Warning, these protected names have been redefined and unprotected: Im, Re, ^, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech, signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan, tanh
```

$$eq := \mathrm{signum}\left(x+\frac{7}{5}\right)|5x+7|^{(1/3)} - \mathrm{signum}\left(x-\frac{12}{5}\right)|5x-12|^{(1/3)} = 1$$

$$4, -3$$

Як видно, після підключення пакета **RealDomain** вигляд раціонального виразу в лівій частині рівняння автоматично був змінений, що не завжди зручно. Але при цьому ми отримали всі корені рівняння (У версії Maple 7 все ж таки знаходиться тільки один корінь $x=4$ (!)). А підстановка будь-якого кореня рівняння перетворює його на тотожність:

```
> eval(eq2,x=-3);simplify(%);
```

$$-8^{(1/3)} + 27^{(1/3)} = 1$$

$$1 = 1$$

На жаль, і в цьому випадку зустрічаємось з деякими прикростями. Як видно, підстановка за допомогою команди eval (як і команди subs) не приводить до автоматичного здобуття наочної тотожності. Потрібно застосувати ще й команду спрощення simplify. В той же час наступна конструкція зразу приводить до отримання тотожності в бажаній формі:

```
> eval((5*x+7)^(1/3)-(5*x-12)^(1/3)=1,x=-3);
```

$$1 = 1$$

Особливості на цьому не закінчуються. Продовжимо цитату [1, С. 46]. «В этом случае даже стандартная функция evalf оказывается бессильной совместно с использованием пакетного модуля RealDomain, что очень хорошо иллюстрируют довольно простые примеры, а именно:

```
> restart:
R:=(58 + (-243)^(1/5) + (-8)^(2/3))*(10 + (-1331)^(2/3) + (-8)^(2/3))/((63 +(-32)^(4/5) - (-27)^(2/3))* (17 + (343)^(2/3) + (-32)^(3/5)));
with(RealDomain):
```

$$R := \frac{(58+(\text{-}243)^{(1/5)}+(\text{-}8)^{(2/3)})\,(10+(\text{-}1331)^{(2/3)}+(\text{-}8)^{(2/3)})}{(63+(\text{-}32)^{(4/5)}-(\text{-}27)^{(2/3)})\,(17+343^{(2/3)}+(\text{-}32)^{(3/5)})}$$

```
Warning, these protected names have been redefined and unprotected: Im, Re, ^, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech, signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan, tanh
```

```
> evalf(R);
```

$$-.7722517003+1.867646862I$$ »

Наведений приклад автори [1] використовують як обґрунтування необхідності доопрацювання стандартної команди evalf і пропонують власноруч розроблену команду Evalf. Але наступна конструкція показує, що необхідність розробки процедури Evalf насправді відсутня.

```
> restart:
with(RealDomain):
R:=(58 + (-243)^(1/5) + (-8)^(2/3))*(10 + (-
1331)^(2/3) + (-8)^(2/3))/((63 +(-32)^(4/5) - (-27)^
 (2/3))* (17 + (343)^(2/3) + (-32)^(3/5)));
evalf(R);
Warning, these protected names have been redefined
and unprotected: Im, Re, ^, arccos, arccosh, arccot,
arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin,
arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc,
csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech,
signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan,
tanh
```

$$R := \frac{1593}{812}$$

$$1.961822660$$

Потрібно, всього-на-всього, переставити місцями послідовність виконання команд системи, або ж після підключення пакета RealDomain повторно виконати команду присвоєння відповідного виразу.

Приклад 8. Розв’язати рівняння $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

Розв’язання

Знайдемо ОДЗ даного рівняння:

$$\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 4x+13\ge 0, \\ 3x+12\ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -1, \\ x\ge -\dfrac{13}{4}, \\ x\ge -4 \end{cases} \Rightarrow x\ge -1.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$x+1+2\sqrt{(x+1)(4x+13)}+4x+13=3x+12 \Rightarrow \sqrt{(x+1)(4x+13)}=-(x+1). \quad (1)$$

Останнє рівняння мало б місце при $-(x+1)\geq 0,$ тобто при $x+1\leq 0$, але, враховуючи ОДЗ, $x\geq -1$, маємо, що $\begin{cases} x+1\leq 0, \\ x\geq -1 \end{cases} \Rightarrow x=-1.$

При перевірці дізнаємось, що $x=-1$ є розв'язком рівняння (1). Оскільки рівняння (1) не має інших розв'язків, то і наше початкове рівняння має лише один розв'язок $x=-1$.

Відповідь: $\{-1\}$.

7.2. Метод введення нових змінних

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$.

Розв'язання

Зробимо заміну змінної, поклавши $t=\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}$. Тоді $\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=\sqrt[7]{\left(\dfrac{5-x}{x+3}\right)^{-1}}=\left(\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}\right)^{-1}=t^{-1}=\dfrac{1}{t}$. Звідси дістаємо $\dfrac{t^2+1}{t}=2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1.$ Оскільки робилися лише еквівалентні перетворення, то початкове рівняння рівносильне такому: $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}=1\Leftrightarrow \dfrac{5-x}{x+3}=1\Leftrightarrow 5-x=x+3\Leftrightarrow 2=2x\Leftrightarrow x=1.$

При перевірці переконуємось, що $x=1$ – корінь вихідного рівняння.

Відповідь: $\{1\}$.

Оскільки попереднє рівняння досить громістке і потрібно перевірити правильність його задання в системі Maple, то для розв'язання даного рівняння використовуємо smart-спосіб:

```
> ((5-x)/(x+3))^(1/7)+((x+3)/(5-x))^(1/7)=2;
```

$$\left(\frac{5-x}{x+3}\right)^{(1/7)}+\left(\frac{x+3}{5-x}\right)^{(1/7)}=2$$

```
> {x = 1};
```

Приклад 10. Знайти добуток коренів рівняння

$\sqrt{2x^2-3}+4x^4-12x^2+9=0.$

Розв'язання

Перетворимо дане рівняння $\sqrt{2x^2-3}+4x^4-12x^2+9=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3}+\left(2x^2-3\right)^2=0$. Зробимо заміну $\sqrt{2x^2-3}=t$, причому $t\geq 0$.

Звідси, $2x^2-3=t^2 \Leftrightarrow \left(2x^2-3\right)^2=t^4$. Тоді отримаємо: $t+t^4=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t\left(1+t^3\right)=0 \Rightarrow t(1+t)\left(1-t+t^2\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ 1+t=0, \\ 1-t+t^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=-1, \\ t\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Отже $t_1=-1,\ t_2=0$, але умову $t\geq 0$ задовольняє лише $t_2=0$.

Повернемось до нашої заміни:

$$\sqrt{2x^2-3}=0 \Leftrightarrow 2x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\frac{3}{2}}, \\ x=-\sqrt{\frac{3}{2}}. \end{array}\right.$$

Отже, коренями вихідного рівняння є $\sqrt{\frac{3}{2}}$ і $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, а їх добутком $\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=-\frac{3}{2}$.

Відповідь: $-\frac{3}{2}$.

Приклад 11. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Розв’язання

Зробимо заміну $\sqrt{x-1}$ через z, тоді $x-1=z^2 \Leftrightarrow x=1+z^2$.

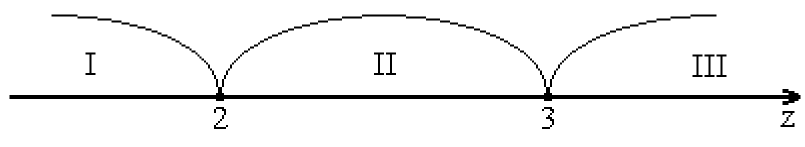
Запишемо дане рівняння з новою змінною:

$$\sqrt{z^2+1+3-4z}+\sqrt{z^2+1+8-6z}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(z-2)^2}+\sqrt{(z-3)^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z-2|+|z-3|=1 \qquad (*)$$

Останнє рівняння розв’язуємо методом інтервалів.

$z-2=0 \Leftrightarrow z=2,\ z-3=0 \Leftrightarrow z=3$. Маємо три інтервали:



I: $z\in(-\infty;\ 2]$;

II: $z\in(2;\ 3]$;

III: $z \in (3;\ \infty)$.

Для I інтервалу $-z+2-z+3=1 \Leftrightarrow -2z=-4 \Leftrightarrow z=2$. Оскільки 2 входить в проміжок $(-\infty;\ 2]$, то $z=2$ є розв'язком рівняння $(*)$.

У II інтервалі $z-2-z+3=1 \Leftrightarrow 1=1$. Маємо правильну рівність, тобто весь інтервал $(2;\ 3]$є розв'язком рівняння $(*)$.

Для III інтервалу маємо $z-2+z-3=1 \Leftrightarrow z=3$. Однак значення $z=3 \notin (3;\ \infty)$.

Враховуючи, що $z=2$ і $z \in (2;\ 3]$, маємо $z \in [2\ \ 3]$, або $2 \le z \le 3$.

Оскільки $z=\sqrt{x-1}$, то $2 \le \sqrt{x-1} \le 3 \Rightarrow 4 \le x-1 \le 9 \Leftrightarrow 5 \le x \le 10$. Остання подвійна нерівність є розв'язком рівняння $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Відповідь: $5 \le x \le 10$.

Спробуємо знайти розв'язок даного рівняння за допомогою Maple:

```
> eq:=sqrt(x+3-4*sqrt(x-1))+sqrt(x+8-6*sqrt(x-1))=1;
solve(eq,x);
```

$$eq := \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

$$x$$

Як бачимо, надзвичайно потужна команда solve виявилась безсильною. В подібних випадках потрібно застосовувати так звану технологію «штовхай та їдь». Суть технології полягає в тому, щоб допомогти системі подолати деякі складні для неї ланки на шляху розв'язання задачі, а далі система знову допомагатиме нам самим. Продемонструємо технологію на прикладі. Зробимо заміну:

```
> eq1:=subs(x=z^2+1,eq);
```

$$eq1 := \sqrt{z^2+4-4\sqrt{z^2}}+\sqrt{z^2+9-6\sqrt{z^2}}=1$$

Наступним кроком повинне бути спрощення отриманого виразу. І тут потрібно бути уважним. Застосування команди спрощення виразу simplify без додаткових опцій приводить до надто складного рівняння

```
> eq2:=simplify(eq1);
```

$$eq2 := \sqrt{z^2+4-4\,\mathrm{csgn}(z)\,z}+\sqrt{z^2+9-6\,\mathrm{csgn}(z)\,z}=1$$

розв'язок якого система знайти не в змозі:

```
> solve(eq2,z);
```

Застосування команди спрощення виразу simplify з опцією **symbolic** приводить до отримання неправильного результату, оскільки в такому випадку система перетворює корені за правилом $\sqrt{(z-a)^2}=z-a$ замість $\sqrt{(z-a)^2}=|z-a|$:

```
> eq3:=simplify(eq1,'symbolic');
```

$$eq3 := -5+2\,z=1$$

Правильним застосуванням команди simplify в даному випадку є таке:

```
> eq4:=simplify(eq1,assume=positive);
```

$$eq4 := -2\,\mathrm{signum}\,(-2+z)+\mathrm{signum}\,(-2+z)\,z-3\,\mathrm{signum}\,(-3+z)+\mathrm{signum}\,(-3+z)\,z=1$$

Зведемо подібні

```
> eq5:=collect(lhs(eq4),[signum(-2+z),signum(-3+z)])=
rhs(eq4);
```

$$eq5 := (-2+z)\,\mathrm{signum}\,(-2+z)+(-3+z)\,\mathrm{signum}\,(-3+z)=1$$

У цьому випадку ми отримали правильну відповідь, на жаль, у формі, що відрізняється від традиційної

```
> abs(z-2)+abs(z-3)=1;
```

$$|-2+z|+|-3+z|=1$$

Далі ми можемо піти двома шляхами: 1) спочатку розв'язати отримане рівняння відносно z, а потім знайти розв'язки для x; 2) спочатку підставити в рівняння замість z його значення через x, а потім розв'язати отримане рівняння через z. Підемо другим шляхом:

```
> subs(z=sqrt(x-1),eq5);
solve(%,x);
```

$$(-2+\sqrt{x-1})\,\mathrm{signum}\,(-2+\sqrt{x-1})+(-3+\sqrt{x-1})\,\mathrm{signum}\,(-3+\sqrt{x-1})=1$$

$$\mathrm{RealRange}\,(5,\,10)$$

Відомо, в Maple RealRange(5,10) означає замкнений інтервал.

Як бачимо, в даному випадку команда solve виконала поставлене завдання.

```
> fsolve(h,x);
```

$$5.000052838$$

```
> subs(x=10,h);
```

$$\sqrt{13-4\sqrt{9}}+\sqrt{18-6\sqrt{9}}=1$$

7.3. Системи ірраціональних рівнянь

Приклад 12. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$

Розв'язання

ОДЗ: $x\in R$.

Розв’яжемо дану систему способом підстановки, для цього із другого рівняння системи виразимо y через x і підставимо у перше рівняння системи: $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{28-x}=4, & (I) \\ y=28-x. & (II) \end{cases}$. Окремо перетворимо перше рівняння системи, для цього піднесемо обидві його частини до кубу:

$\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{28-x}\right)^3=4^3 \Rightarrow x+28-x+3\sqrt[3]{28-x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{28-x}\right)=64$. Вираз $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{28-x}$ замінимо на 4 (це випливає із властивості рівностей), тобто $28+3\sqrt[3]{x(28-x)}\cdot 4=64 \Rightarrow \sqrt[3]{x(28-x)}=3$. Піднесемо обидві частини останнього рівняння до кубу і отримаємо $x(28-x)=27 \Rightarrow x^2-28x+27=0$. Розв'язавши останнє квадратне рівняння, отримаємо корені $x_1=1,\ x_2=27$, тоді $y_1=27,\ y_2=1$.

Відповідь: $\{(1;\ 27),\ (27;\ 1)\}$.

Приклад 13. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$

Розв’язання

ОДЗ: $\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, & (I) \\ x^2y+y^2x=20. & (II) \end{cases}$ Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння (I) системи: $\begin{cases} x^2y+y^2x+2xy\sqrt{xy}=36, & (I) \\ x^2y+y^2x=20. & (II) \end{cases}$ Віднімемо від рівняння (I) рівняння (II) системи і отримаємо $xy\sqrt{xy}=8$, або $(xy)^{\frac{3}{2}}=8 \Rightarrow (xy)^3=64 \Rightarrow xy=4$. Тоді $\begin{cases} xy=4, \\ x^2y+y^2x=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=4, \\ xy(x+y)=20 \end{cases}$ або

$\begin{cases} xy=4, \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow\ x_1=4,\ x_2=1,\ y_1=1,\ y_2=4.$

Відповідь: $\{(4;\ 1),\ (1;\ 4)\}$.

```
> solve({x*sqrt(y)+y*sqrt(x)=6,x^2*y+y^2*x=20},{x,y});
```

$\{x=1, y=4\}, \{x=4, y=1\}$

7.4. Ірраціональні нерівності

Нерівності виду $f(x) > 0$ $\left(f(x) < 0\right)$, де $f(x)$ – будь-яка ірраціональна функція, називаються **ірраціональними нерівностями.**

При розв’язуванні ірраціональних нерівностей використовуються ті ж прийоми, що і при розв’язуванні ірраціональних рівнянь: зведення обох частин нерівності до того самого натурального степеня, введення нових змінних, відокремлення радикала і т. д.

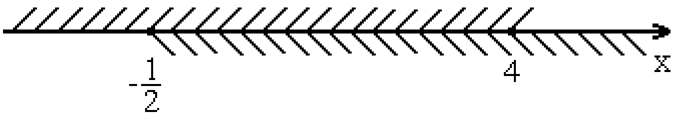
Розглянемо найпростіші ірраціональні нерівності.

Приклад 14. Розв’язати нерівність $\sqrt{2x+1} \le 3$.

Розв’язання

Область допустимих значень лівої частини нерівності $2x+1 \ge 0$, тобто $x \ge -\frac{1}{2}$. Звідси дістаємо, що початкова нерівність еквівалентна такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 0, \\ \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \le 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2}, \\ 2x+1 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2}, \\ x \le 4 \end{cases}$$ Тобто



$-\frac{1}{2} \le x \le 4$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{1}{2};\ 4\right]$.

Для розв’язування ірраціональних нерівностей та систем нерівностей, як і раціональних нерівностей та їх систем, використовуємо команду solve(). Відповідь виражається або у вигляді множини нерівностей, або через функцію RealRaange() і Open(). Перша визначає замкнений відрізок дійсних чисел, а друга використовується, щоб вказати, що гранична точка не входить в побудований розв’язок. Для того, щоб задати розв’язок у вигляді множини, потрібно задати у вигляді множини або саму нерівність, або невідому, відносно якої вона розв’язується. Якщо цього не зробити, то відповідь буде отримана з використанням вказаних функцій визначення дійсних відрізків. Розглянемо це на попередньому прикладі:

```
> solve(sqrt(2*x+1)<=3,x);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(\frac{-1}{2}, 4\right)$$

```
> solve(sqrt(2*x+1)<=3,{x});
```

$$\{\frac{-1}{2} \le x, x \le 4\}$$

Приклад 15. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-5} \ge -3$.

Розв'язання

Оскільки $\sqrt{x-5} \ge 0$, то початкова нерівність виконується для всіх x з області визначення функції $f(x) = \sqrt{x-5}$.

$D(f): x-5 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 5$.

Відповідь: $x \in [5;\ \infty)$.

```
> solve(sqrt(x-5)>=-3,{x});
```

$$\{5 \le x\}$$

Приклад 16. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+6} < -3$.

Розв'язання

Оскільки $\sqrt{x+6} \ge 0$, то початкова нерівність не виконується при жодних значеннях x.

Відповідь: $\varnothing$.

Розглянемо більш складні нерівності.

Ірраціональні нерівності виду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ розписують у вигляді системи нерівностей: $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$

Ірраціональні нерівності виду $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ розписують у вигляді сукупності двох систем раціональних нерівностей $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Іншими словами, розглядаються випадки, коли права частина нерівності від'ємна, і коли вона невід'ємна.

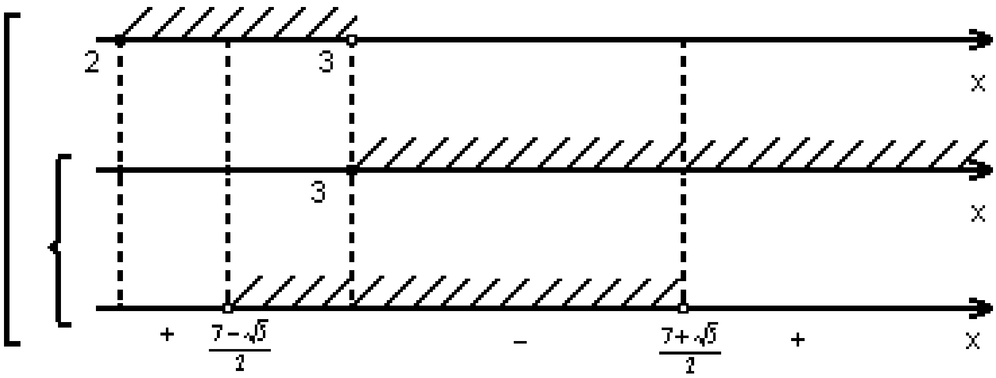
Приклад 17. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-2} > x-3$.

Розв'язання

Якщо $x-3<0$, то $x-2 \ge 0$ або, якщо $x-3 \ge 0$, то $x-2 > (x-3)^2$ і $x-2 \ge 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3<0,\\x-2\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\ge 0,\\x-2>(x-3)^2,\\x-2\ge 0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<3,\\x\ge 2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\x^2-7x+11<0,\\x\ge 2.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[2;3);\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ \left(x-\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$



Відповідь: $\left[2;\ \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Приклад 18. Розв’язати нерівність $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$.

Розв’язання

Позначимо $\sqrt{2-\tilde{o}}$ через t, $t>0$. Тоді одержимо рівняння*:* $\dfrac{4}{t}-t-2<0$, $\dfrac{4-t^2-2t}{t}<0$.

Оскільки $t>0$, то $4-t^2-2t<0$ або $t^2+2t-4>0.$ Розкладемо на множники ліву частину отриманої нерівності:

$\left(t-(-1-\sqrt{5})\right)\left(t-\left(\sqrt{5}-1\right)\right)>0$; тобто $\left[\begin{array}{l}t>\sqrt{5}-1,\\t<-\sqrt{5}-1.\end{array}\right.$

Повернувшись до заміни, маємо: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2-x}>\sqrt{5}-1,\\\sqrt{2-x}<-\sqrt{5}-1.\end{array}\right.$ Оскільки друга нерівність сукупності не має сенсу, то розв’яжемо першу нерівність сукупності. $\sqrt{2-x} > \sqrt{5}-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x \ge 0, \\ 2-x > \left(\sqrt{5}-1\right)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 2, \\ x < 2\sqrt{5}-4 \end{array}\right. \Rightarrow x < 2\sqrt{5}-4.$

Відповідь: $x \in \left(-\infty;\ 2\sqrt{5}-4\right).$

```
> solve(4/sqrt(2-x)-sqrt(2-x)<2,{x});
```

$$\{x < -4+2\sqrt{5}\}$$

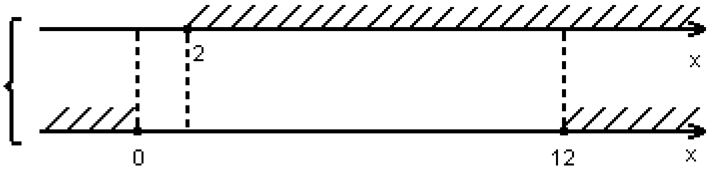
Приклад 19. Розв'язати нерівність $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1} \ge 1.$

Розв'язання

Перенесемо один з радикалів в праву частину для того, щоб полегшити перетворення: $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x} \ge 1+\sqrt{2x+1}$.
Піднесемо обидві частини нерівності до квадрата і отримаємо:

$$3x \ge 1+2\sqrt{2x+1}+2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x-2 \ge 2\sqrt{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ 2x+1 \ge 0, \\ (x-2)^2 \ge 4(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ x^2-12x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{o} \ge 2, \\ \tilde{o}(\tilde{o}-12) \ge 0 \end{cases}$$



Відповідь: $x \in [12;\ \infty).$

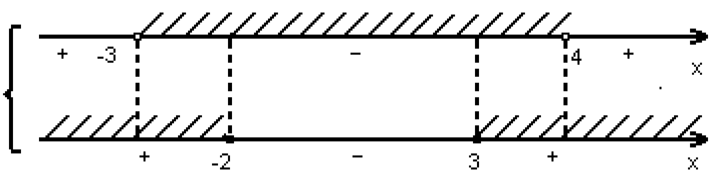
Приклад 20. Знайти цілі числа, які є розв'язками нерівності

$$\frac{\tilde{o}^2-\tilde{o}-6}{\sqrt{12+\tilde{o}-\tilde{o}^2}} \ge 0.$$

Розв'язання

Оскільки знаменник дробу, що стоїть у лівій частині нерівності, завжди додатний, то чисельник цього ж дробу буде невід'ємний. Тому дану нерівність розпишемо системою двох нерівностей:

$$\begin{cases} 12+x-x^2 > 0, \\ x^2-x-6 \ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-12 < 0, \\ x^2-x-6 \ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-4) < 0, \\ (x+2)(x-3) \ge 0. \end{cases}$$



$x \in (-3;\ -2] \cup [3;\ 4).$

Правильність розв'язку перевіримо у системі Maple за допомогою функції solve:

```
> solve((x^2-x-6)/sqrt(12+x-x^2)>=0,{x});
```

$$\{-3 < x, x \le -2\}, \{3 \le x, x < 4\};$$

а цілі значення, які входять у розв'язок, знайдемо за допомогою функції **isolve**:

```
> isolve((x^2-x-6)/sqrt(12+x-x^2)>=0,{x});
```

$$\{x = -2\}, \{x = 3\}.$$

Відповідь: $\{-2;\ 3\}$.

7.5. Тренувальні вправи

Розв'язати ірраціональні рівняння:

Рівень А

1. $\sqrt{7-x} = 0$.
2. $\sqrt{x-1} = 2$.
3. $\sqrt{x+7} = -1$.
4. $5 + \sqrt{x} = 0$.
5. $\sqrt{-x} = 4$.
6. $5 \cdot \sqrt{x-4} = 0$.
7. $\sqrt{3x+5} = 4$.
8. $9 - 2\sqrt{x+3} = 1$.
9. $\sqrt{1 - \dfrac{5x}{6}} = \dfrac{2}{3}$.
10. $\sqrt[4]{-2x} = 4$.
11. $\sqrt[3]{-2x-5} = -3$.

Рівень Б

1. $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[5]{x^5} = 10$.
2. $\sqrt{x} = \sqrt{2-x}$.
3. $\sqrt{x^2 - 6x} = \sqrt{10 - 3x}$.
4. $\sqrt{3 - x^2} = \sqrt{-5x - 3}$.
5. $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3$.
6. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$.

7. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

8. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

9. $\sqrt[3]{12-x}-\sqrt[3]{14+x}=2$.

10. $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{3x+7}=\sqrt[3]{x+1}$.

11. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+5}=0$.

12. $\sqrt{2x-8}+\sqrt{16-x^2}=\sqrt{12-3x}$.

13. $\sqrt{x-1}=3-x$.

14. $\sqrt{6-x}=-x$.

15. $x-4=\sqrt{x+26}$.

16. $\sqrt{15x^2-14}=2-3x$.

17. $x+5=\sqrt{8-9x-x^2}$.

18. $2\sqrt{x+31}=4-x$.

19. $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$.

20. $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$.

21. $(x-1)\sqrt{x-9}=0$.

22. $2x^2+\sqrt{2x^2-4x+12}=4x+8$.

23. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$.

24. $(x+2)\sqrt{x^2+2x+5}=2x+4$.

25. $\left(\sqrt{x+9}\right)^2+2\sqrt{(x+11)(x+9)}+\left(\sqrt{x+11}\right)^2=10$.

Рівень В

1. $\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}=4$.

2. $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3$.

3. $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3$.

4. $\sqrt[5]{x^4}-\dfrac{7}{\sqrt[5]{x^2}}+\dfrac{6}{x}=0$.

5. $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$.

6. $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$.

7. $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}+3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=8$.

8. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=3.$

9. $\sqrt[3]{(9+x)^2}+2\cdot\sqrt[3]{(9-x)^2}-3\cdot\sqrt[3]{9^2-x^2}=0.$

10. $\sqrt{2x^2+12x+67}+\sqrt{3x^2+18x+52}=3-6x-x^2.$

Розв'язати системи ірраціональних рівнянь:

1. $\begin{cases}2\sqrt{x-y}+\sqrt[4]{x+2y}=4,\\ \sqrt[8]{(x-y)^4(x+2y)^2}=2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y+\sqrt{xy}=14,\\ x^2+y^2+xy=84.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{y-9}=2,\\ \sqrt{y+7}-\sqrt{x-9}=2.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y,\\ x^4-y^4=81.\end{cases}$

5. $\begin{cases}\sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=3,\\ \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4.\end{cases}$

Розв'язати ірраціональні нерівності:

Рівень А

1. $\sqrt{x}\ge 0.$
2. $\sqrt{x}>-1.$
3. $\sqrt{x}\le 4.$
4. $\sqrt{-3x}\le 0.$
5. $\sqrt{x+3}\ge 0.$
6. $\sqrt{1-4x}<0.$
7. $\sqrt{4-2x}\le 0.$
8. $\sqrt[3]{-4x}\ge 0.$
9. $\sqrt{2+x}\ge 4.$
10. $\sqrt{3-2x}>5.$
11. $\sqrt[4]{-x}>2.$
12. $\sqrt{2x-4}\le -2.$

13. $\sqrt{3-x} > -6.$

14. $\sqrt{x-1} < 3.$

15. $\sqrt{x+4} \geq 5.$

16. $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x-3} \geq -3.$

17. $\sqrt{4x+7} + \sqrt{3x-8} < 0.$

18. $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \geq 0.$

19. $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} \leq -1.$

20. $\sqrt{1-3x} < \sqrt{8-3x}.$

Рівень Б

1. $\sqrt{3x} < x.$

2. $\sqrt{x} > -x.$

3. $\sqrt{-7x} < x.$

4. $(x-6)\sqrt{x} \geq 0.$

5. $(x-3)\sqrt{x} > 0.$

6. $(x-5)\sqrt{x-2} \geq 0.$

7. $(x+1)\sqrt{x-3} \leq 0.$

8. $(x-8)\sqrt{4-x} \geq 0.$

9. $\sqrt{x} < x-6.$

10. $\sqrt{x} < 2x-1.$

11. $\sqrt{x-1} < 3-x.$

12. $\sqrt{x^2-9} < x.$

13. $\sqrt{3-x} \leq x+3.$

14. $2\sqrt{x-1} < x.$

15. $2\sqrt{4-x^2} < x+4.$

16. $3\sqrt{1-x^2} < 3-x.$

17. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x.$

18. $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1.$

19. $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1.$

20. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$

21. $\sqrt{-x^2-3x+4} > x+1.$

22. $\sqrt{-x^2-6x-5} > x+2.$

23. $(x+4)\sqrt{x^2+x-6} \geq 0.$

24. $\sqrt{x^2+6x+5} < 1+\sqrt{x^2+2x+4}.$

25. $\dfrac{(1-x)^7}{\sqrt{2x-x^2+3}} < 0.$

Рівень В

1. $\sqrt{x^4-8x^2+16} > 2-x.$
2. $x^2 \geq x\left(4+\sqrt{24-2x-x^2}\right).$
3. $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{2x^2-x-5} \geq 2.$
4. $\sqrt{x^2-12x+36}-x\sqrt{5} < x\sqrt{41-12\sqrt{5}}.$
5. $\dfrac{\sqrt{x}(x-5)^3(x-2)^2}{(x^2+2)(x+10)^5} < 0.$
6. $\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} > 0.$
7. $\sqrt{25-10x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{5}.$
8. $\sqrt[4]{13+x}-\sqrt[4]{4-x} > 1.$
9. $\dfrac{\sqrt{x+9}}{2-x} < 1.$
10. $\dfrac{\sqrt{x^2-3x}-3}{x} > 1.$
11. $\dfrac{11-\sqrt{25-x^2}}{x} \leq 2.$
12. $\dfrac{\sqrt{4x-x^2-3}-1}{x-2} > -1{,}5.$
13. $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \leq 3x+2.$
14. $\sqrt{25-x^2} \leq \dfrac{12}{x}.$
15. $\sqrt{5-x^2} < \dfrac{2}{|x|}.$
16. $x\sqrt{10-x^2} < x^2-6.$
17. $x\sqrt{17-x^2} \geq x^2-12.$

18. $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}\leq\frac{2}{x}$.

19. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\leq\frac{x-1}{x}$.

20. $4x^2+\sqrt{3x}>\sqrt{x+1}+1$.

7.6. Орієнтовна контрольна робота № 7

1. Розв’язати рівняння: $\sqrt{\tilde{o}}-\sqrt{\tilde{o}+3}=1$.
2. Розв’язати рівняння: $\sqrt{3\tilde{o}^2+5\tilde{o}+8}-\sqrt{3\tilde{o}^2+5\tilde{o}+1}=1$.
3. Розв’язати нерівність: $\sqrt{3-\tilde{o}}>\tilde{o}-2$.
4. Розв’язати нерівність: $(\tilde{o}-1)\sqrt{\tilde{o}^2-\tilde{o}-2}\geq 0$.

8. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

8.1. Радіанна система вимірювання кутів і дуг

Кут – це геометрична фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки, названої вершиною кута (рис. 9). Слово “кут” заміняють символом $\angle$: $\angle AOB = \angle BOA = \angle\alpha$.

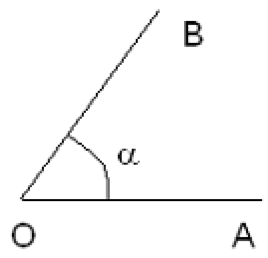


Рис. 9

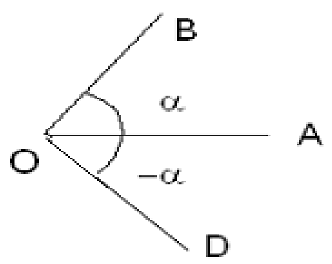


Рис. 10

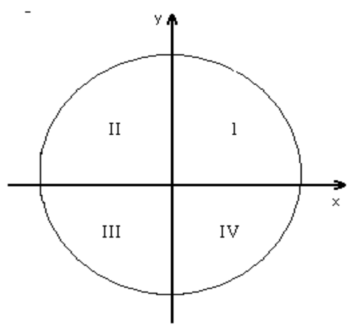


Рис. 11

Кут можна розглядати як фігуру, утворену обертанням променя навколо своєї початкової точки O. Промінь можна обертати навколо своєї початкової точки у двох напрямках: за годинниковою стрілкою і проти годинникової стрілки. Напрям обертання проти годинникової стрілки умовно називають додатним, а за годинниковою стрілкою – від’ємним. Відповідно до цього кути і дуги, отримані обертанням променя проти годинникової стрілки, вважаються додатними, а кути і дуги, отримані обертанням променя за годинниковою стрілкою, вважаються від’ємними (рис. 10).

Якщо сторони кута утворюють пряму, то такий кут називається **розгорнутим**. Якщо промінь робить повний оберт навколо своєї початкової точки, то отриманий кут називається **повним**.

Осі **абсцис** (Ox) і **ординат** (Oy) ділять повний кут (коло) на чотири чверті (I - IV), або чотири квадранта (рис. 11).

Кути вимірюються в градусах і радіанах. Кут в 1 **градус** – це кут, що його опише промінь, зробивши 1/360 частину повного оберту навколо своєї початкової точки проти годинникової стрілки (позначка 1^o). 1/60 частина градуса називається **хвилиною** (позначка $1'$). 1/60 частина хвилини називається **секундою** (позначка $1''$).

Градусна міра в Maple **degrees**. Переведення радіанної міри кута (radians) в градусну і навпаки здійснюється вбудованою функцією convert.

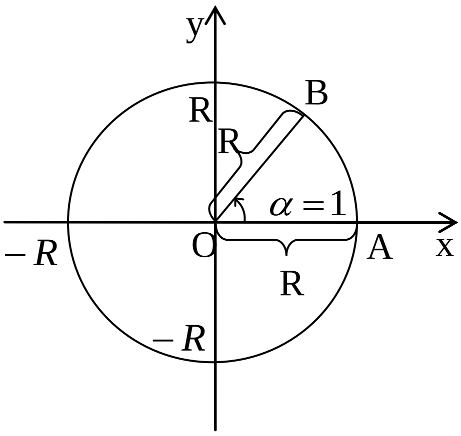


Рис. 12

Центральним кутом у колі називається кут, вершина якого знаходиться в його центрі.

Кут в 1 радіан – це центральний кут, який спирається на таку дугу кола, довжина якої дорівнює радіусу цього кола. Слово "радіан" звичайно не пишуть. Таким чином, якщо |AB|=R, |OA|=|OB|=R, то ∠AOB=∠α=1, тобто кут α дорівнює одному радіану (рис. 12).

Оскільки довжина всього кола дорівнює 2πR, то повний кут складає 2π радіан, тому що $\frac{2\pi R}{R}=2\pi$. Оскільки повний кут дорівнює 360°, то $2\pi=360°$. Звідси 1 радіан = $\frac{360^\circ}{2\pi}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ 17' 45''$ (57 градусів, 17 хвилин, 45 секунд).

Таким чином, користуючись співвідношеннями $\pi=180^\circ$, $1=\frac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}$, можна переходити від градусів до радіанів і навпаки.

Приклад 1. а) Виразити в радіанах кут у 45°;

б) Виразити в градусах кут у 3 радіана.

Розв'язання

а) $1^0=\frac{\pi}{180}\Rightarrow 45^0=45\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$;

б) $1=\frac{180^0}{\pi}\Rightarrow 3=3\cdot\frac{180^0}{\pi}=\frac{540^0}{\pi}\approx\frac{540^0}{3{,}14}\approx 172^0$.

У системі Maple перехід від градусної міри кута до радіанної здійснюється майже так само, як і звичайним способом:

```
> 30*Pi/180;
```

$$\frac{1}{6}\pi$$

```
> 45*Pi/180;
```

$$\frac{1}{4}\pi$$

8.2. Визначення тригонометричних функцій

Розглянемо спочатку тригонометричні функції гострого кута, які можна ввести за допомогою прямокутного трикутника (рис. 13).

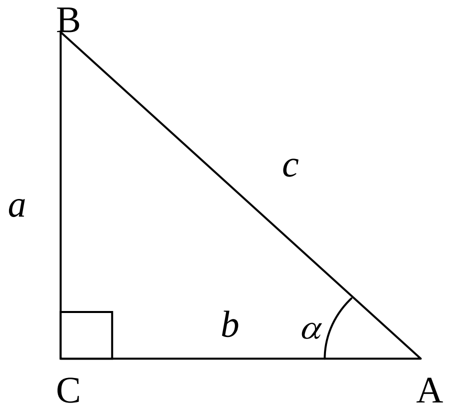


Рис. 13

Нехай у прямокутному трикутнику ACB <ACB=90^0, <BAC=α, |BC|=a, |AC|=b, |AB|=c.

$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c}$ (відношення протилежного катета до гіпотенузи).

$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}$ (відношення прилеглого катета до гіпотенузи).

$tg\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}$ (відношення протилежного катета до прилеглого).

$ctg\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}$ (відношення прилеглого катета до протилежного).

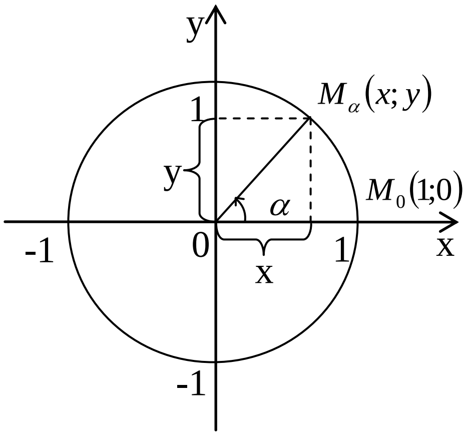


Рис. 14

Розглянемо тригонометричні функції довільних значень аргументу.

Маємо прямокутну систему координат x0y на площині і коло одиничного радіуса, що має центр у початку координат (рис. 14). Таке коло називається **одиничним колом** чи **тригонометричним колом.** Відзначимо на осі 0x справа від початку координат точку M_0, яка лежить на тригонометричному колі: $M_0(1;\ 0)$. Радіус $0M_0$ називається **початковим радіусом.** При повороті початкового радіуса $0M_0$ навколо центра 0 на кут α точка $M_0(1;\ 0)$ переходить в деяку точку $M_\alpha(x;\ y)$.

Синусом кута α називається відношення ординати точки M_α до радіуса.

Косинусом кута α називається відношення абсциси точки M_α до радіуса.

Таким чином, $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$, $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$. Оскільки $R=1$, то $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$. x і y можна розглядати як проекції на осі координат одиничного вектора $0M_\alpha(x;y)$. Таким чином, можна стверджувати, що синус кута α дорівнює ординаті, а косинус – абсцисі вектора одиничної довжини, що виходить з початку координат і утворює з додатним напрямом осі $0x$ кут α. Оскільки координати будь-якої точки $M_\alpha(x;\ y)$ одиничного кола задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Співвідношення $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (1)
називається **основною тригонометричною тотожністю.**

Тангенсом кута α називається відношення ординати точки M_α до її абсциси: $tg\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. (2)

Котангенсом кута α називається відношення абсциси точки M_α до її ординати: $ctg\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (3)

Секансом кута α (позначення $\sec\alpha$) називається величина, обернена $\cos\alpha$, тобто $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$. (4)

Косекансом кута α (позначається $\mathrm{cosec}\,\alpha$) називається величина, обернена $\sin\alpha$, тобто $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha \neq 0$. (5)

Позначення тригонометричних функцій в системі Maple:

sin, cos, tan, cot, sec, csc.

Обернені тригонометричні функції відповідно позначаються:

arcsin, arccos, arctan, arccot, arcsec, arccsc.

З повним списком математичних функцій, які входять у Maple, і їх позначеннями рекомендується ознайомитись самостійно. Наберіть inifen, виділіть і натисніть <F1>.

Знаки тригонометричних функцій наведені на рис. 15.

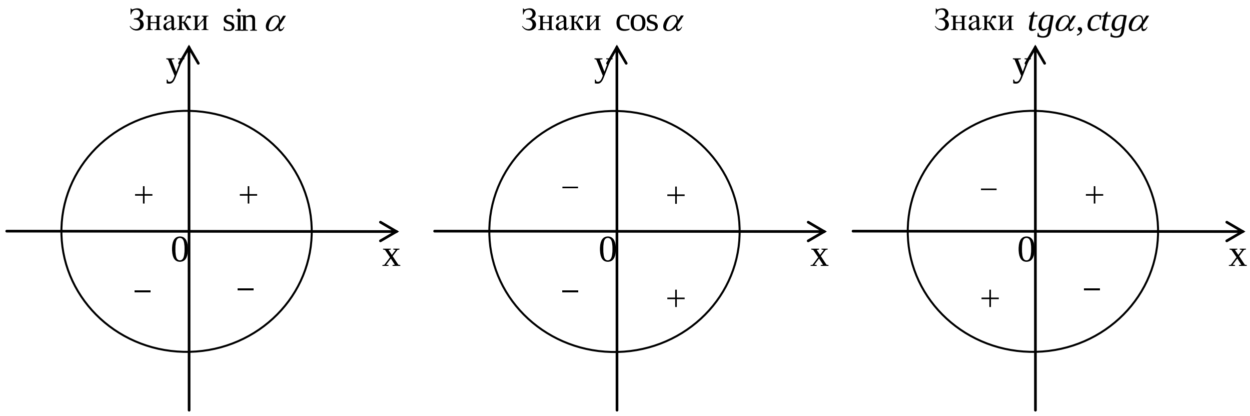


Рис. 15

Зобразимо таблицю значень тригонометричних функцій деяких кутів, які найбільш часто використовуються на практиці (табл. 4).

Таблиця 4 – **Значення тригонометричних функцій для деяких значень аргументу**

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞

Символ ∞ (нескінченність) означає, що $tg\alpha$ або $ctg\alpha$ при відповідних значеннях аргументу не визначені і набувають великих значень за модулем.

Основні співвідношення між тригонометричними функціями того самого аргументу

З означення тангенса та котангенса кута, ми отримали тригонометричні тотожності $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Перемноживши їх між собою, отримаємо:

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1, \text{ тобто } tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1. \qquad (6)$$

Розділивши почленно основну тригонометричну тотожність (1) на $\cos^2\alpha \neq 0$, отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \;\Rightarrow\; tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

Розділимо почленно $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ на $\sin^2\alpha \neq 0$ і отримаємо

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (8)$$

8.3. Вираз одних тригонометричних функцій через інші

З основної тригонометричної тотожності випливає, що

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, тоді $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, (9)

а отже $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. (10)

У формулах (9) і (10) знаки «+» або «–» вибираються в залежності від того, у якій чверті закінчується кут α. Так, якщо α закінчується в I або II чверті, то беремо знак «+», якщо в III або IV чверті, то знак «–» у формулі (9). У формулі (10) для кутів, що закінчуються в I або IV чвертях, потрібно взяти знак «+», а якщо кути закінчуються в II або III чвертях, то знак «–».

Виразимо $\sin\alpha$ через $ctg\alpha$ з формули (8):

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha} \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}. \qquad (11)$$

З формули (6) випливає, що $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, тоді формулу (11) можна записати через $tg\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\alpha}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{tg^2\alpha+1}{tg^2\alpha}}} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}. \qquad (12)$$

З формули (7) слідує, що $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$, (13)

або $\cos\alpha$ через $ctg\alpha$ буде мати вигляд $\cos\alpha = \pm\frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$. (14)

Приклад 2. Визначити знаки виразів: а) $\sin 3$; б) $\cos 6$.

Розв'язання

Зазначимо, що $\pi = 180^\circ$, але, з іншого боку, $\pi \approx 3{,}14$ радіан. Тому $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < 6 < \pi$. Звідси кут $\alpha = 3$ закінчується в ІІ чверті, а кут $\alpha = 6$ закінчується в IV чверті. Тоді за таблицею знаків тригонометричних функцій, $\sin 3 > 0$, $\cos 6 > 0$.

Відповідь: а) $\sin 3 > 0$; б) $\cos 6 > 0$.

Якщо задати в Maple обчислити, наприклад, $\cos 6$, то одержимо результат в десяткових дробах:

```
> evalf(cos(6));
```

$$.9601702867$$

З отриманого результату видно, що знак виразу $\cos 6$ додатний.

Приклад 3. Обчислити $\frac{1}{2}\sin 180^\circ - \sqrt{3}\cos 180^\circ + \sec 180^\circ + tg\,60^\circ$.

Розв'язання

За таблицею значень тригонометричних функцій, знаходимо:

$$\frac{1}{2}\sin 180^\circ - \sqrt{3}\cos 180^\circ + \sec 180^\circ + tg\,60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 0 - \sqrt{3}\cdot(-1) + \frac{1}{(-1)} + \sqrt{3} =$$

$$= \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 1.$$

Відповідь: $2\sqrt{3} - 1$.

Приклад 4. Обчислити значення усіх тригонометричних функцій кута α, якщо $ctg\,\alpha = -\frac{5}{12}$,. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

Розв'язання

Застосовуючи формули (8), (12), (10), (6), (4), (5), маємо $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144}$, звідки $\sin\alpha = \pm\frac{12}{13}$, а оскільки у другій чверті синус додатний, то знаходимо $\sin\alpha = \frac{12}{13}$. Далі $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{5}{13}$ (оскільки косинус від'ємний у другій чверті),

$$tg\,\alpha = \frac{1}{ctg\,\alpha} = -\frac{12}{5},\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{13}{5},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{13}{12}.$$

Відповідь: $\sin\alpha=\frac{12}{13}$; $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$; $tg\alpha=-\frac{12}{5}$; $\sec\alpha=-\frac{13}{5}$; $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{13}{12}$.

Приклад 5. Спростити вираз $A=2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)-3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)$.

Розв'язання

Розкладемо суму кубів і, застосовуючи формулу (1), дістаємо $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\right.$ $\left.+\cos^4\alpha\right)=\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

Далі маємо $2(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=$
$=-\left(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)=-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2=-1$.

Відповідь: $A=-1$.

Приклад 6. Спростити вираз $B=\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, якщо $3\pi<\alpha<4\pi$.

Розв'язання

З основної тригонометричної тотожності випливає, що $B=\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|+\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$.

Оскільки $3\pi<\alpha<4\pi$, то $\frac{3\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{4\pi}{2}$, отже кут $\frac{\alpha}{2}$ закінчується в IV чверті, тоді $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\cos\frac{\alpha}{2}$, $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=-\sin\frac{\alpha}{2}$. Звідси $B=\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$.

Відповідь: $B=\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$.

```
> restart:
simplify(sqrt(1-(sin(x/2))^2)+sqrt(1-(cos(x/2))^2));
```

$$\operatorname{csgn}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\operatorname{csgn}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

```
> simplify(sqrt(1-(sin(x/2))^2)+sqrt(1-(cos(x/2))^2),
assume=[x>3*Pi,x<4*Pi]);
```

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

На даному прикладі, розглянутому в Maple, можна прослідкувати відмінність спрощення тригонометричного виразу без накладання умов і з накладанням умов. Зазначимо, що команда assume задана дещо в іншому вигляді, як ми раніше її задавали. Ця структура assume задається у поєднанні з командою simplify.

Також звернемо увагу на те, що результат $\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ми отримали у версії Maple 9.5, у версії Maple 7 так не виходить, але це частковий прояв загальновідомої проблеми Maple – відсутність сумісності. «Отсутствует совместимость релизов пакета Maple «снизу-вверх»».

Приклад 7. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$. Знайти: а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

б) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

Розв'язання

а) Піднесемо обидві частини початкового виразу до квадрата: $\sin\alpha+\cos\alpha=k \Rightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=k^2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=k^2$

$\Leftrightarrow 1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=k^2 \Leftrightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=k^2-1 \Leftrightarrow \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{k^2-1}{2}$;

б) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)=$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=k\left(1-\dfrac{k^2-1}{2}\right)=k\left(\dfrac{2-k^2+1}{2}\right)=\dfrac{k(3-k^2)}{2}$.

В даному прикладі ми врахували, що якщо $\sin\alpha+\cos\alpha=k$, то $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{k^2-1}{2}$ відповідно до висновку пункту а).

Відповідь: а) $\dfrac{k^2-1}{2}$; б) $\dfrac{k(3-k^2)}{2}$.

8.4. Формули додавання і віднімання аргументів

Для будь-яких дійсних чисел α і β справедливі формули:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \tag{15}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \tag{16}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \tag{17}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \tag{18}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}; \tag{19}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}. \tag{20}$$

Формула (19) справедлива при α, β, $\alpha+\beta$ відмінних від $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$. Формула (20) справедлива при α, β, $\alpha-\beta$ відмінних від $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$.

Приклад 8. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання

Для початку $\cos 15^\circ$ можна розписати, як $\cos\left(45^\circ-30^\circ\right)$. Скориставшись формулою (16), при $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$ отримаємо $\cos\left(45^\circ-30^\circ\right)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$. Користуючись таблицею значень тригонометричних функцій, маємо

$$\cos\left(45^\circ-30^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}.$$

Отже, $\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.

Приклад 9. Знайти $tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)$, якщо $tg\alpha=\frac{3}{4}$.

Розв'язання

Скористаємося формулою (20) і врахуємо, що $tg\frac{\pi}{4}=1$. Маємо

$$tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\alpha}{1+tg\frac{\pi}{4}tg\alpha}=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}.$$

Відповідь: $\frac{1}{7}$.

Розглянемо приклад 9 в системі Maple двома способами:

```
> restart:
`1-й спосіб`;
tan(Pi/4-alpha);
expand(%);
eval(%,cot(alpha)=4/3);
```

1-é ñïîñ³á

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

$$\frac{-1+\cot(\alpha)}{1+\cot(\alpha)}$$

$$\frac{1}{7}$$

Звернемо увагу на те, що коли ми задаємо вираз $tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, то він виводиться на екран як $ctg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, тобто система автоматично застосовує формули зведення. Потім, за допомогою команди expand(%), розкриваємо дужки. Вираз, отриманий в результаті, містить тригонометричну функцію $ctg(\alpha)$, тому і значення потрібно підставляти для котангенса.

```
> `2-й спосіб`;
tan(beta-alpha);
expand(%);
eval(%,[tan(alpha)=3/4,beta=Pi/4]);
```

2-é ñïîñ³á

$$\tan(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\tan(\beta)-\tan(\alpha)}{1+\tan(\beta)\tan(\alpha)}$$

У другому способі $\frac{\pi}{4}$ ми замінили через β, і система розкладає формулу $tg(\beta-\alpha)$, а потім за допомогою команди eval підставили значення $tg(\alpha)=\frac{3}{4}$ і $\beta=\frac{\pi}{4}$.

Якщо у першому способі ми підставляємо значення $tg(\alpha)$, а не $ctg(\alpha)$, то система, звичайно, не видає потрібного результату:

```
> expand(tan(Pi/4-alpha));
```

$$\frac{\cot(\alpha)-1}{1+\cot(\alpha)}$$

```
> eval(%,tan(alpha)=3/4);
```

$$\frac{\cot(\alpha)-1}{1+\cot(\alpha)}$$

Як бачимо, звичний нам символ «α» у Maple замінюється на «alpha», а символ «β» – на «beta».

8.5. Основні формули тригонометрії

Крім тригонометричних формул, з якими ми познайомилися раніше, існує ряд формул, що їх відносять до основних формул тригонометрії, а саме:

- **Формули подвійного і потрійного аргументів**:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad (21)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha; \qquad (22)$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ n,\ k \in Z; \qquad (23)$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad (24)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \qquad (25)$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}. \qquad (26)$$

- **Формули пониження степеня:**

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \qquad (27)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \qquad (28)$$

- **Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:**

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right); \qquad (29)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right); \qquad (30)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right). \qquad (31)$$

- **Формули перетворення суми і різниці однойменних тригонометричних функцій:**

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}; \qquad (32)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (33)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (34)$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \left(\alpha,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z; \qquad (35)$$

$$ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta} \quad (\alpha,\ \beta \neq \pi n),\ n \in Z. \tag{36}$$

- **Формули, які дають раціональний вираз тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу:**

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \tag{37}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha \neq \pi + \pi n),\ n \in Z; \tag{38}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \alpha \neq \pi + 2\pi k\right),\ n,\ k \in Z. \tag{39}$$

- **Формули тригонометричних функцій половинного аргументу:**

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n),\ n \in Z; \tag{40}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad (\alpha \neq \pi + 2\pi n),\ n \in Z; \tag{41}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \quad (\alpha \neq 2\pi n),\ n \in Z; \tag{42}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \tag{43}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \tag{44}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \tag{45}$$

Знак перед радикалом в останніх трьох формулах залежить від того, в якій координатній чверті знаходиться кут $\frac{\alpha}{2}$.

В системі Maple, звичайно, закладені основні тригонометричні формули. Виводяться вони за допомогою вбудованих функцій для спрощення виразів, розкладання на множники, розкриття дужок і т.д., які описані в темі 1 даного практикуму.

```
> simplify(cos(x)^2+sin(x)^2);
```

$$1$$

```
> expand(sin(2*x));
```

$$2\sin(x)\cos(x)$$

```
> expand(cos(2*x));
```

$$2\cos(x)^2-1$$

```
> expand(tan(2*x));
```

$$2\,\frac{\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$$

```
> expand(cot(2*x));
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\cot(x)^2-1}{\cot(x)}$$

```
> combine(cos(x)^2);
```

$$\frac{1}{2}\cos(2\,x)+\frac{1}{2}$$

```
> combine(sin(x)^2);
```

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\,x)$$

```
> expand(sin(3*x));
```

$$4\sin(x)\cos(x)^2-\sin(x)$$

```
> expand(cos(3*x));
```

$$4\cos(x)^3-3\cos(x)$$

```
> expand(cos(x+y));
```

$$\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

```
> expand(sin(x+y));
```

$$\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$$

```
> expand(tan(x+y));
```

$$\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

```
> expand(cot(x+y));
```

$$\frac{\cot(x)\cot(y)-1}{\cot(x)+\cot(y)}$$

```
> combine(sin(x)*cos(y));
```

$$\frac{1}{2}\sin(x+y)+\frac{1}{2}\sin(x-y)$$

```
> combine(cos(x)*cos(y));
```

$$\frac{1}{2}\cos(x-y)+\frac{1}{2}\cos(x+y)$$

```
> combine(sin(x)*sin(y));
```

$$\frac{1}{2}\cos(x-y)-\frac{1}{2}\cos(x+y)$$

Як бачимо, досить зручно використовувати Maple, якщо ви, наприклад, забули ту чи іншу тригонометричну формулу. Можливий випадок, коли вибрана користувачем команда не в змозі виконати ніяких перетворень, тоді система повертає вихідний тригонометричний вираз. Наприклад,

```
> simplify(tan(2*x));
```

$$\tan(2\,x)$$

Що стосується формул перетворення суми і різниці однойменних тригонометричних функцій у добуток, то О. Сдвижков [14] зазначає: «Удивительно, но ни одна из встроенных функций не преобразует сумму тригонометрических функций в произведение, какие бы дополнительные параметры ни устанавливались. В частности

```
> simplify(cos(x)+cos(y));
```

$$\cos(x)+\cos(ó)$$ »

Але це не відповідає дійсності, оскільки перетворення суми тригонометричних функцій в добуток можна здійснити за допомогою вбудованої функції **trigsubs**:

```
> trigsubs(cos(a*x)+cos(b*y));
trigsubs(cos(a*x)-cos(b*y));
trigsubs(-cos(a*x)+cos(b*y));
```

$$\left[2\cos\left(\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}b\,y\right)\cos\left(\frac{1}{2}a\,x-\frac{1}{2}b\,y\right)\right]$$
$$\left[-2\sin\left(\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}b\,y\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\,x-\frac{1}{2}b\,y\right)\right]$$
$$\left[-2\sin\left(\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}b\,y\right)\sin\left(\frac{1}{2}b\,y-\frac{1}{2}a\,x\right)\right]$$

```
> trigsubs(sin(a*x)+sin(b*y));
trigsubs(sin(a*x)-sin(b*y));
trigsubs(-sin(a*x)+sin(b*y));
```

$$\left[2\sin\left(\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}b\,y\right)\cos\left(\frac{1}{2}a\,x-\frac{1}{2}b\,y\right)\right]$$
$$\left[2\cos\left(\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}b\,y\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\,x-\frac{1}{2}b\,y\right)\right]$$
$$\left[2\cos\left(\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}b\,y\right)\sin\left(\frac{1}{2}b\,y-\frac{1}{2}a\,x\right)\right]$$

В той же час в наведених нижче простих випадках ця команда вже не спрацьовує

```
> trigsubs(-cos(a*x)-cos(b*y));
trigsubs(-sin(x)-sin(y));
Error, (in trigsubs) expecting a sum or difference of two functions but got -cos(a*x)-cos(b*y)

Error, (in trigsubs) expecting a sum or difference of two functions but got -sin(x)-sin(y)
```

Система Maple має тисячі команд. На жаль, авторам не відомо видання, в якому було б наведено систематичне ґрунтовне описання всіх команд цієї системи. В певній мірі саме з цим пов'язані подібні прикрі непорозуміння. Слід зауважити, що про існування команди trigsubs автори дізнались випадково на восьмому році «тісного» знайомства з цією системою. В жодному з джерел серед найпоширеніших публікацій з системи Maple [див. окремий файл «Список літератури з Maple.doc»] автори не знайшли посилання на команду trigsubs. Що ж стосується довідкової системи Maple, то при всіх її перевагах вона не усуває проблему відсутності зазначеного ґрунтовного описання всіх команд цієї системи. Звісно ж англомовність довідкової системи створює додаткові, хоча й не принципові, ускладнення. На щастя, Maple має власну вбудовану мову програмування, за допомогою якої можна відносно просто реалізувати широке коло потрібних перетворень. Як приклад, наведемо авторську процедуру, що перетворює суму (різницю) синусів або косинусів:

```
> scpm:=(f)->
 if hasfun(f,{sin,cos}) then
 L1:=[op(f)];L2:=map(zz->op(0,zz),L1);
if hasfun(f,cos) then
 if L2[1]=cos and L2[2]=cos then

otv:=2*cos((op(1,L1[1])+op(1,L1[2]))/2)*cos((op(1,L1[
1])-op(1,L1[2]))/2)
 elif L2[1]=cos and op([2,2,0],L1)=cos then
 otv:=-
2*sin((op(1,L1[1])+op([2,2,1],L1))/2)*sin((op(1,L1[1]
)-op([2,2,1],L1))/2)
```

```
 elif op([1,2,0],L1)=cos and L2[2]=cos then
 otv:=-2*sin((op([1,2,1],L1)+op(1,L1[2]))/2)*sin((-
op([1,2,1],L1)+op(1,L1[2]))/2)
 else `Результат відсутній`;
 fi;
 elif hasfun(f,sin) then
 if L2[1]=sin and L2[2]=sin then

otv:=2*sin((op(1,L1[1])+op(1,L1[2]))/2)*cos((op(1,L1[
1])-op(1,L1[2]))/2)
 elif L2[1]=sin and op([2,nops(L1[2]),0],L1)=sin then

otv:=2*cos((op(1,L1[1])+op([2,2,1],L1))/2)*sin((op(1,
L1[1])-op([2,2,1],L1))/2)
 elif op([1,nops(L1[1]),0],L1)=sin and L2[2]=sin then
 otv:=2*cos((op([1,2,1],L1)+op(1,L1[2]))/2)*sin((-
op([1,2,1],L1)+op(1,L1[2]))/2)
 else `Результат відсутній`;
 fi;
fi;
 else `Результат відсутній`;
 otv
fi;
Warning, `L1` is implicitly declared local to
procedure `scpm`

Warning, `L2` is implicitly declared local to
procedure `scpm`

Warning, `otv` is implicitly declared local to
procedure `scpm`

> scpm(sin(a*x)+sin(b*y));
```

$$2\sin\left(\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}b\,y\right)\cos\left(\frac{1}{2}b\,y-\frac{1}{2}a\,x\right)$$

```
> scpm(cos(a*x)-cos(b*y));
```

$$2\sin\left(\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}b\,y\right)\sin\left(\frac{1}{2}b\,y-\frac{1}{2}a\,x\right)$$

```
> scpm(-sin(6*x)+sin(10*y));
```

$$2\cos(3x+5y)\sin(-3x+5y)$$

```
> scpm(-cos(a*x)-cos(b*y));
```

Ðåçóëüòàò â³äñóòí³é

Очевидно, що наведеною процедурою користуватися незрівнянно зручніше, аніж чотирма процедурами, що наведені в [14]. І справа не тільки в тому, що однією й тією ж самою процедурою користуватися легше, аніж чотирма процедурами. Головна перевага в тому, що процедури, які наведені в [14], потрібно вибирати в залежності від перетворюваного виразу. В процедурі **scpm** вираз, який потрібно перетворити, розпізнається автоматично! Якщо вираз, що переданий процедурі scpm як аргумент, не є сумою (різницею) синусів або косинусів, процедура повертає повідомлення «*Результат відсутній*». Важливо, що наведена процедура scpm працює і в DEMO Maple V R4 (!), в середовищі якої заблокована побудова процедур за допомогою стандартної конструкції proc…end proc.

В [14] також зауважується «Имеет смысл добавить также формулы, выражающие $\sin x$ и $\cos x$ через тангенс половинного аргумента:

```
> st:=proc(x)
2*tan(x/2)/(1+tan(x/2)^2)
end proc;
sin(x)=st(x);
```

$$\sin(x)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2}\text{»}$$

Насправді останню тотожність можна отримати стандартними засобами Maple, а саме за допомогою команди convert:

```
> sin(x)=convert(sin(x),tan);
```

$$\sin(x)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

8.6. Формули зведення

Формулами зведення називаються співвідношення, за допомогою яких значення тригонометричних функцій аргументів $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ виражаються через значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$.

Для полегшення запам'ятовування формул зведення можна користуватися такими правилами:

1) якщо у формулах містяться кути π і 2π, то найменування функції не змінюється; якщо ж у формулах містяться кути $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$, то найменування функції змінюється на подібне (синус – на косинус, тангенс – на котангенс і навпаки);
2) щоб визначити знак у правій частині формули («+» або « –»), досить, вважаючи кут α гострим, визначити знак виразу, який стоїть у лівій частині формули; при цьому перед функцією кута α ставлять такий знак, який має зведена функція кутів $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$.

Наприклад, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$; $tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$.

Приклад 10. Звести до тригонометричної функції гострого кута:

а) $\cos 2009^\circ$; б) $\sin\frac{389\pi}{18}$.

Розв'язання

Врахуємо, що період для $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ дорівнює 2π або 360°.

а) $\cos 2009^\circ=\cos(360^\circ\cdot 5+209^\circ)=\cos 209^\circ=\cos(180^\circ+29^\circ)=-\cos 29^\circ$;

б) $\sin\frac{389\pi}{18}=\sin(21\pi+\frac{11\pi}{18})=\sin(2\pi\cdot 10+\pi+\frac{11\pi}{18})=\sin(\pi+\frac{11\pi}{18})=$

$=\sin(\pi+\pi-\frac{7\pi}{18})=\sin(2\pi-\frac{7\pi}{18})=-\sin\frac{7\pi}{18}$.

Відповідь: а) $-\cos 29^\circ$; б) $-\sin\frac{7\pi}{18}$.

```
> evalf(cos(2009(degrees)));
                              -.04848295657
> evalf(sin(389*Pi/18));
                              -.9396926210
```

Знову одержали результат в десяткових дробах. Не важко перевірити, що він буде достовірним.

Приклад 11. Обчислити $A = \sin 780^\circ + tg\,210^\circ + \sin(-135^\circ)$.

Розв'язання

Виконаємо перетворення, враховуючи періодичність:

$$\sin 780^\circ = \sin\left(2\cdot 360^\circ + 60^\circ\right) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\,210^\circ = tg\left(180^\circ + 30^\circ\right) = tg\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin(-135^\circ) = -\sin(180^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}.$$

Відповідь: $\dfrac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}$.

8.7. Приклади на доведення тригонометричних тотожностей

При доведенні тотожностей звичайно використовують такі способи:

1) Вираз, який стоїть в одній частині тотожності, за допомогою тотожних перетворень приводять до виразу, який стоїть в іншій частині тотожності;

2) вираз, який стоїть у лівій і правій частинах тотожності, приводять до одного і того ж виду;

3) доводять, що різниця між лівою і правою частинами тотожності дорівнює нулю.

Для доведення тригонометричних тотожностей в системі Maple вбудовано функцію **testeq**. На прикладах розглянемо, як дана функція застосовується.

Приклади 12 – 14. Довести тотожності:

12) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$.

Розв'язання

Перетворимо ліву частину даної тотожності:

І спосіб: Застосуємо тотожність $a^4 - b^4 = \left(a^2\right)^2 - \left(b^2\right)^2 = \left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2\right)$.

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$$
$$= \left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\cdot 1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0.$$

II спосіб:

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^4\alpha-\sin^2\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha=$$
$$=\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right)+\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)=\sin^2\alpha\left(-\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha\sin^2\alpha=$$
$$=-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0.$$

```
> (sin(alpha))^4-(cos(alpha))^4-
(sin(alpha))^2+(cos(alpha)^2)=0;
```

$$\sin(\alpha)^4-\cos(\alpha)^4-\sin(\alpha)^2+\cos(\alpha)^2=0$$

```
> testeq((sin(alpha))^4-(cos(alpha))^4-
(sin(alpha))^2+(cos(alpha)^2)=0);
```

true

У прикладі 12 ми спочатку ввели даний вираз, щоб переконатися, що ми це зробили правильно, а потім вже доводили дану тотожність. Варто звернути увагу, яким чином потрібно тригонометричну функцію підносити до степеня.

Система нам видала «true», тому дана тотожність справедлива.

13) $\dfrac{tg2\alpha+ctg3\beta}{ctg2\alpha+tg3\beta}=\dfrac{tg2\alpha}{tg3\beta}$.

Розв'язання

Позначимо ліву частину рівності A, а праву – B:

$$A-B=\frac{\left(tg2\alpha+ctg3\beta\right)tg3\beta-tg2\alpha\left(ctg2\alpha+tg3\beta\right)}{\left(ctg2\alpha+tg3\beta\right)tg3\beta}=$$
$$=\frac{tg2\alpha tg3\beta+ctg3\beta tg3\beta-tg2\alpha ctg2\alpha-tg2\alpha tg3\beta}{\left(ctg2\alpha+tg3\beta\right)tg3\beta}=\frac{1-1}{\left(ctg2\alpha+tg3\beta\right)tg3\beta}=0,$$

тобто $A=B$. Тотожність доведено.

```
>testeq((tan(2*(x))+cot(3*(y)))/(cot(2*(x))+tan(3*(y))
)=tan(2*(x))/tan(3*(y)));
```

true

14) $\dfrac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)}=tg\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)$.

Розв'язання

Спростимо ліву частину тотожності, яку потрібно довести:

$$\frac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)}=\frac{\cos(\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)}=\frac{-\cos2\alpha}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{-\cos2\alpha}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=-\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Тепер спростимо праву частину даної тотожності:

$$tg\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)=-tg\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}=$$

$$=-\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)}=-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Як бачимо, ліва і права частини однакові. Тотожність доведено.

8.8. Розв'язування прикладів на спрощення тригонометричних виразів

Приклад 15. Спростити вираз $\cos^3\alpha\cos 3\alpha+\sin^3\alpha\sin 3\alpha$.

Розв'язання

Використовуючи формули (22), (24), (25), маємо

$$\cos^3\alpha\cos 3\alpha+\sin^3\alpha\sin 3\alpha=\cos^3\alpha\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+\sin^3\alpha\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)=$$

$$=4\left(\cos^6\alpha-\sin^6\alpha\right)-3\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)=4\left(\left(\cos^2\alpha\right)^3-\left(\sin^2\alpha\right)^3\right)-$$

$$-3\left(\left(\cos^2\alpha\right)^2-\left(\sin^2\alpha\right)^2\right)=4\cos 2\alpha\left(\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)-3\cos 2\alpha=$$

$$=4\cos 2\alpha\left(\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right)-3\cos 2\alpha=4\cos 2\alpha\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)-$$

$$-3\cos 2\alpha=\cos 2\alpha\left(1-\sin^2 2\alpha\right)=\cos^3 2\alpha.$$

Відповідь: $\cos^3 2\alpha$.

Приклад 16. Спростити та обчислити

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot(\sin\alpha+\sin 5\alpha)-2,\text{ якщо } \alpha=15^\circ.$$

Розв'язання

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot(\sin\alpha+\sin 5\alpha)-2=\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha}\cdot 2\sin 3\alpha\cdot\cos 2\alpha-2=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot 2\sin 3\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha}-2=4\cos^2 2\alpha-2.$$ Якщо $\alpha=15^\circ$, тоді

$$4\cos^2\left(2\cdot 15^\circ\right)-2=4\cos^2 30^\circ-2=4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2=4\cdot\frac{3}{4}-2=1.$$

Відповідь: 1.

```
> (1/sin(alpha)-
1/sin(3*alpha))*(sin(alpha)+sin(5*alpha))-2;
```

$$\left(\frac{1}{\sin(\alpha)} - \frac{1}{\sin(3\,\alpha)}\right)(\sin(\alpha) + \sin(5\,\alpha)) - 2$$

```
> 16*cos(alpha)^4-16*cos(alpha)^2+2;
> p:=simplify((1/sin(alpha)-
1/sin(3*alpha))*(sin(alpha)+sin(5*alpha))-2);
```

$$p := 16\cos(\alpha)^4 - 16\cos(\alpha)^2 + 2$$

```
> o:=subs(alpha=15(degrees),p);
```

$$o := 16\cos(15)^4 - 16\cos(15)^2 + 2$$

```
> evalf(o);
```

$$-1.904825960$$

Приклад 17. Спростити та обчислити

$$\frac{\left(\cos^2\alpha - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(\sin\alpha + \sin 3\alpha)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1},\ \text{якщо}\ \alpha = \frac{\pi}{24}.$$

Розв'язання

$$\frac{\left(\cos^2\alpha - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(\sin\alpha + \sin 3\alpha)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1} =$$

$$= \frac{\left(\cos^2\alpha - \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)\cdot 2\sin 2\alpha\cos(-\alpha)}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\alpha = \sin 4\alpha = \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{24}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Приклад 18. Перетворити у добуток вираз $3 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Розв'язання

$$3 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 3 - 4\cos^2\alpha = 3 - 4\cdot\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) = 1 - 2\cos 2\alpha =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \cos 2\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha\right) = -2\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) =$$

$$=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Відповідь: $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$

Якщо у системі Maple завданням буде перетворення виразу у добуток, то використовуємо функцію factor:

```
> factor(3-4*(sin(Pi/2-x))^2);
```

$$3-4\cos(x)^2$$

Як бачимо, система видала не той результат, що ми очікували, адже при спрощенні виразу аналітичним способом ми користувалися способом введення допоміжного кута, який Maple не розуміє.

Якщо скористаємось функцією combine, результат буде вже іншим:

```
> combine(3-4*(sin(Pi/2-x))^2);
```

$$1-2\cos(2x).$$

Приклад 19. Обчислити

$$tg1^\circ\cdot tg2^\circ\cdot tg3^\circ\cdot\ldots\cdot tg45^\circ\cdot\ldots\cdot tg87^\circ\cdot tg88^\circ\cdot tg89^\circ=1.$$

Розв'язання

За формулами зведення маємо $tg89^\circ=tg(90^\circ-1^\circ)=ctg1^\circ$; $tg88^\circ=tg(90^\circ-2^\circ)=ctg2^\circ$; $tg87^\circ=tg(90^\circ-3^\circ)=ctg3^\circ;\ldots;$

$tg46^\circ=tg(90^\circ-44^\circ)=ctg44^\circ$.

Тоді вираз можна записати в такий спосіб:

$$tg1^\circ\cdot tg2^\circ\cdot tg3^\circ\cdot\ldots\cdot tg44^\circ\cdot tg45^\circ\cdot ctg44^\circ\ldots\cdot ctg3^\circ\cdot ctg2^\circ\cdot ctg1^\circ=$$

$$=tg1^\circ\cdot ctg1^\circ\cdot tg2^\circ\cdot ctg2^\circ\cdot tg3^\circ\cdot ctg3^\circ\cdot\ldots\cdot tg44^\circ\cdot ctg44^\circ\cdot tg45^\circ=$$

$$=1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\cdot1=1.$$

Відповідь: 1.

8.9. Властивості тригонометричних функцій

8.9.1. Парність і непарність тригонометричних функцій

Якщо при повороті навколо точки O на кут α початковий радіус OA переходить у радіус OB, то при повороті на кут $-\alpha$ початковий радіус OA перейде у радіус OB', симетричний OB відносно осі абсцис (рис. 16).

Абсциси точок B і B' рівні, а ординати рівні за модулем, але протилежні за знаком. Це означає, що $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$,

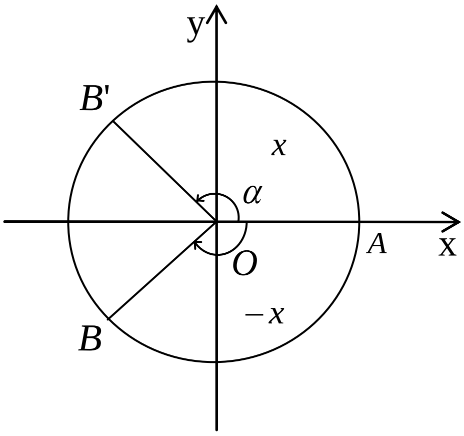


Рис. 16

$tg(-x) = -tgx$, $ctg(-x) = -ctgx$. Таким чином, функції $y = \sin x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ непарні, а функція $y = \cos x$ парна.

Приклад 20. Дослідити на парність функції: а) $y = \sin^3(2x) - tg^5(4x)$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2 \cos x}{ctg^2 x}$; в) $y = \sin 2x \cdot \cos 5x$.

Розв'язання

а) $y = \sin^3(2x) - tg^5(4x) \quad \Rightarrow$

$y(-x) = \sin^3(-2x) - tg^5(-4x) = (-\sin 2x)^3 -$

$-(-tg 4x)^5 = -\sin^3(2x) + tg^5(4x) = -(\sin^3(2x) - tg^5(4x)) = -y(x) \quad \Rightarrow$

функція $y = \sin^3(2x) - tg^5(4x)$ є непарною.

б) $f(x) = \dfrac{x^2 \cos x}{ctg^2 x} \Rightarrow f(-x) = \dfrac{(-x)^2 \cos(-x)}{ctg^2(-x)} = \dfrac{x^2 \cos x}{(-ctgx)^2} = \dfrac{x^2 \cos x}{ctg^2 x} = f(x)$

$\Rightarrow$ функція $f(x) = \dfrac{x^2 \cos x}{ctg^2 x}$ є парною.

При дослідженні функції на парність можна скористатися системою Maple, замінивши незалежну змінну x на $-x$ у прикладі в):

```
> f:=x->sin(2*x)*cos(5*x);
```

$$f := x \to \sin(2\,x)\cos(5\,x)$$

```
> f(-x);
```

$$-\sin(2\,x)\cos(5\,x)$$

Очевидно, що функція $y = \sin 2x \cdot \cos 5x$ є непарною.

8.9.2. Періодичність тригонометричних функцій

Для періодичної функції $y = f(x)$ виконується рівність $f(x+T) = f(x)$, де T – відмінне від нуля число, назване періодом функції. Кожна періодична функція має велику кількість періодів, тобто якщо T – період, то nT – період, де $n \in Z$, $n \neq 0$. Звичайно, говорячи про період, мають на увазі найменший додатний період, який називається основним. **Основними періодами** для тригонометричних функцій є: $T = 360^\circ$ для функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$; $T = 180^\circ$ для функцій $y = tgx$, $y = ctgx$. У більш загальному вигляді можемо записати: $\sin(x \pm 360^\circ n) = \sin x$, $\cos(x \pm 360^\circ n) = \cos x$, $tg(x \pm 180^\circ n) = tgx$, $ctg(x \pm 180^\circ n) = ctgx$, $n \in Z$.

Якщо кути виражаються в радіанах, то $T = 2\pi$ – основний період функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$; $T = \pi$ – основний період функцій $y = tgx$, $y = ctgx$.

Відомо, що періоди функцій $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ і $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ обчислюються за формулою $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, а періоди функцій $y = Atg(\omega x + \varphi)$ і $y = Actg(\omega x + \varphi)$ – за формулою $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

Якщо період функції $y = f(x)$ дорівнює T_1, а період функції $\varphi(x)$ дорівнює T_2, то період функції $y = f(x) + \varphi(x)$ і $y = f(x) - \varphi(x)$ дорівнює найменшому числу, при діленні якого на T_1 і T_2 дістаємо цілі числа.

Приклад 21. Знайти період функції: а) $y = \dfrac{1}{3}tg(2\pi x)$; б) $y = \sin^2 2x$;

в) $y = 9\sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 4\cos(7x + 2)$.

Розв'язання

а) Період функції $y = \dfrac{1}{3}tg(2\pi x)$ дорівнює $T = \dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{\pi}{2\pi} = \dfrac{1}{2}$.

б) Для того, щоб знайти період функції $y = \sin^2 2x$, потрібно застосувати формули пониження степеня: $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, тобто $y = \sin^2 2x = \dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 4x$. Період функції $y = -\dfrac{1}{2}\cos 4x$, а отже і даної функції $y = \sin^2 2x$ є число $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

в) Знаходимо періоди доданків. Період функції $y = 9\sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ дорівнює $T_1 = \dfrac{2\pi}{5}$, а період функції $y = 4\cos(7x + 2)$ дорівнює $T_2 = \dfrac{2\pi}{7}$. Очевидно, що період заданої функції дорівнює $T = 2\pi$.

8.10. Властивості функцій $y=\sin x$ і $y=\cos x$ та їх графіки

Таблиця 5 – **Властивості функцій** $y=\sin x$ **і** $y=\cos x$

Властивості	Функція	
	$\sin x$	$\cos x$
$D(y)$	$R=(-\infty;\ \infty)$	R
$E(y)$	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$
Парність	непарна	парна
Основний період	2π	2π
Нулі функції	$\pi n,\ n\in Z$	$\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$
$f(x)>0$	$(2\pi n;\ \pi+2\pi n),\ n\in Z$	$\left(2\pi n-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z$
$f(x)<0$	$(2\pi n+\pi;\ 2\pi n),\ n\in Z$	$\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z$
Інтервали: зростання	$\left(2\pi n-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right),$	$(2\pi n-\pi;\ 2\pi n),\ n\in Z$
спадання	$\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right).$	$(2\pi n;\ \pi+2\pi n), n\in Z$

Графік функції $y=\sin x$ називається синусоїдою (рис. 17), а графік функції $y=\cos x$ – косинусоїдою (рис. 18).

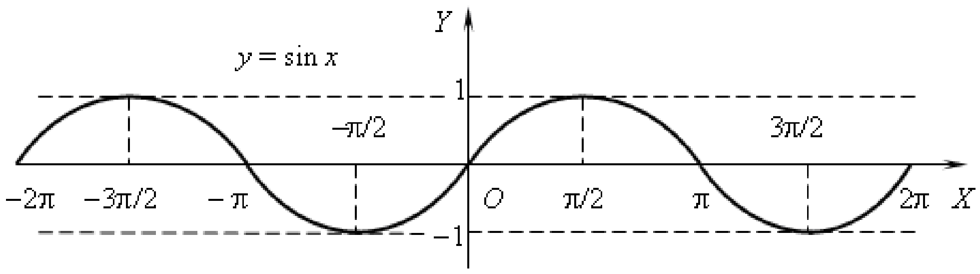


Рис. 17

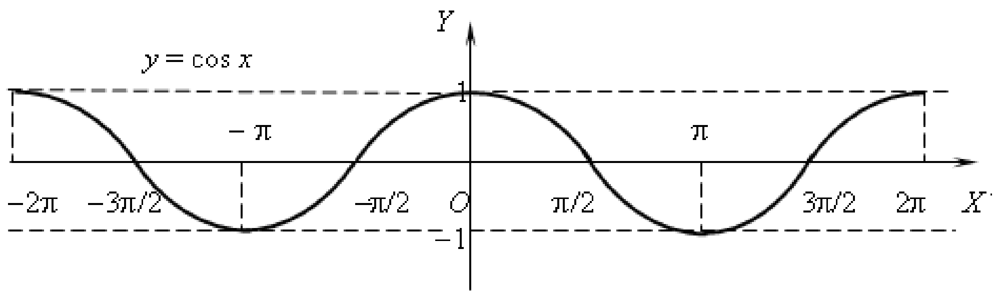


Рис. 18

8.11. Властивості функцій $y = tgx$ і $y = ctgx$ та їх графіки

Таблиця 6 – **Властивості функцій** $y = tgx$ **і** $y = ctgx$

Властивості	Функція	
	tgx	$ctgx$
$D(y)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
$E(y)$	R	R
Парність	непарна	непарна
Основний період	π	π
Нулі функції	$\pi n,\ n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
$f(x) > 0$ $f(x) < 0$	$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$ $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right),\ n \in Z$	$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$ $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right),\ n \in Z$
Інтервали: зростання спадання	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$	$(\pi n;\ \pi + \pi n),\ n \in Z$

Графік функції $y = tgx$ називається тангенсоїдою (рис. 19), а графік функції $y = ctgx$ – котангенсоїдою (рис. 20).

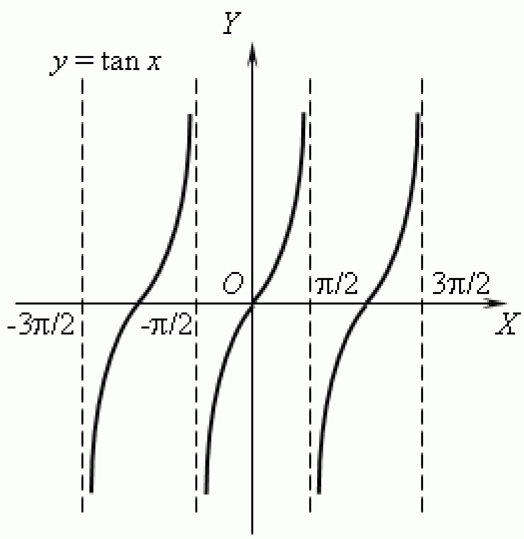


Рис. 19

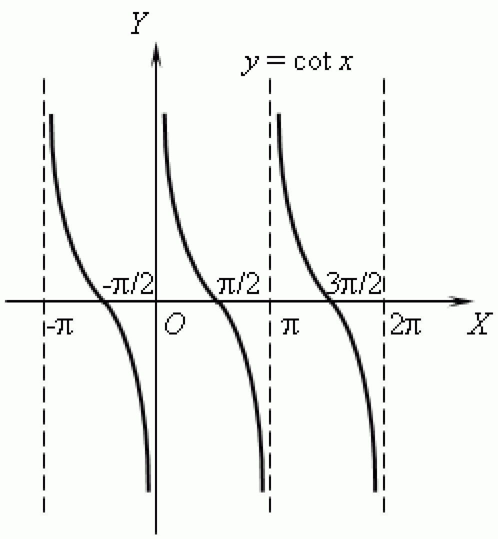


Рис. 20

8.12. Поняття оборотної та оберненої функцій

Функція, яка приймає кожне своє значення в єдиній точці області визначення, є **оборотною**.

У такої функції за значенням залежної змінної можна однозначно визначити, якому значенню аргументу воно відповідає.

Інакше кажучи, якщо функція $y=f(x)$ є оборотною й число a належить до її області значень $E(f)$, то рівняння $f(x)=a$ має розв’язок, причому єдиний.

Оберненою до даної оборотної функції $y=f(x)$ називається така функція $x=g(y)$, яка кожному із множини значень функції $y=f(x)$ ставить у відповідність єдине число x з області визначення.

Функції, обернені функціям $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ на відповідних інтервалах, називаються **оберненими тригонометричними.** Вони позначаються $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$.

Тригонометричні функції $y=\sin x$, $y=\cos x$ не є монотонними у всій області їх визначення. Тому для утворення обернених функцій виділяють інтервали монотонності.

8.12.1. Функція $y=\arcsin x$ та її графік

Функція $y=\sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ зростає і набуває всіх значень з відрізка $[-1;\ 1]$. Тому функція $y=\sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ оборотна, тобто має обернену функцію, що називається арксинусом і позначається $y=\arcsin x$. Таким чином, арксинусом числа x називається число y з відрізка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ таке, що його синус дорівнює x. Математично це можна записати так: $y=\arcsin x \Leftrightarrow \sin(\arcsin x)=x$, $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$, $-1\le x\le 1$.

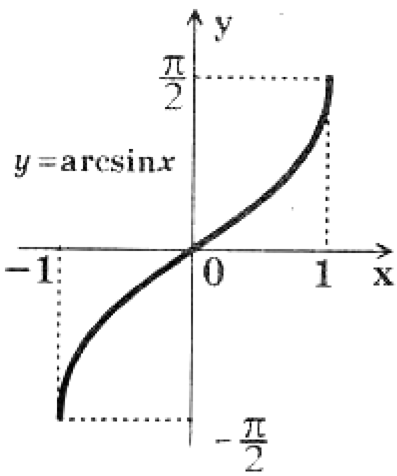


Рис. 21

Наприклад, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ (оскільки $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}$), $\arcsin 0=0$, $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

Графік функції $y=\arcsin x$, який зображений на рисунку 21, симетричний графіку функції $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ відносно прямої $y=x$.

Основні властивості функції $y=\arcsin x$

1) $D(y)=[-1;\ 1]$.
2) $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3) $\arcsin(-x)=-\arcsin x$, тобто $y=\arcsin x$ – непарна функція.
4) Функція зростаюча.
5) $\sin(\arcsin x)=x$ при $x\in[-1;1]$.

8.12.2. Функція $y=\arccos x$ та її графік

Функція $y=\cos x$ на відрізку $[0;\ \pi]$ спадає і набуває всіх значень з відрізка $[-1;\ 1]$. Тому функція $y=\cos x$ на відрізку $[0;\ \pi]$ оборотна, тобто має обернену функцію, що називається **арккосинусом** і позначається $y=\arccos x$. Таким чином, **арккосинусом числа *x*** називається число y з відрізка $[0;\ \pi]$ таке, що його косинус дорівнює *x*. Математично це можна записати так: $y=\arccos x \Leftrightarrow \cos(\arccos x)=x$, $0\le y\le\pi$, $-1\le x\le 1$.

Наприклад, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ (оскільки $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $0\le\frac{\pi}{3}\le\pi$), $\arccos 1=0$, $\arccos(-1)=\pi$ і т.д.

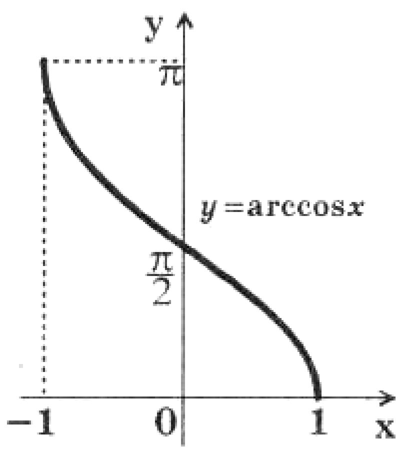


Рис. 22

Графік функції $y=\arccos x$ зображено на рисунку 22. Цей графік симетричний графіку функції $y=\cos x$ відносно прямої $y=x$.

Основні властивості функції $y=\arccos x$

1) $D(y)=[-1;\ 1]$.
2) $E(y)\in[0;\ \pi]$.

3) $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$, тобто функція $y=\arccos x$ є функцією загального виду.
4) Функція є спадною.
5) $\cos(\arccos x)=x$ при $x\in[-1;\ 1]$.

8.12.3. Функція $y=arctgx$ та її графік

Функція $y=tgx$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ зростає і набуває всіх числових значень, оскільки $E(tgx)=R$. Тому функція $y=tgx$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ оборотна, тобто має обернену функцію, що називається **арктангенсом** і позначається $y=arctgx$. Таким чином, **арктангенсом числа *x*** називається число y з інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ таке, що його тангенс дорівнює *x*. Математично це можна записати так: $y=arctgx$ $\Leftrightarrow$ $tg(arctgx)=x$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, $-\infty<x<\infty$.

Наприклад, $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ (оскільки $tg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$), $arctg1=\frac{\pi}{4}$, $arctg0=0$, $arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$ і т.д.

Графік функції $y=arctgx$ зображений на рисунку 23. Цей графік симетричний графіку функції $y=tgx$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, відносно прямої $y=x$.

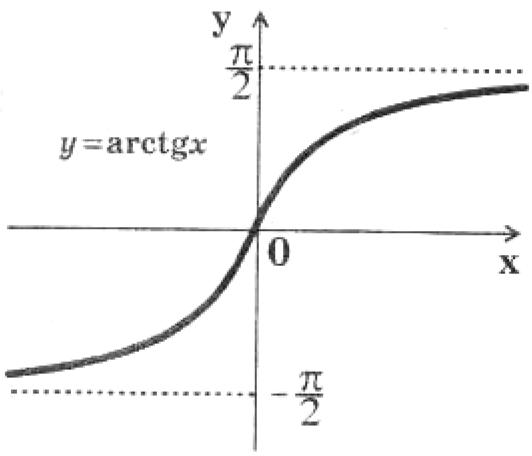


Рис. 23

Основні властивості функції $y=arctgx$

1) $D(y)=(-\infty;\ \infty)$.
2) $E(y)=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.
3) $arctg(-x)=-arctgx$, тобто дана функція є непарною.
4) Функція $y=arctgx$ є зростаючою.
5) $tg(arctgx)=x$ при $x\in(-\infty;\ \infty)$.

8.12.4. Функція $y = arcctgx$ та її графік

Функція $y = ctgx$ на інтервалі $(0;\ \pi)$ спадає і набуває усіх числових значень, оскільки $E(ctgx) = R$. Тому функція $y = ctgx$ на інтервалі $(0;\ \pi)$ оборотна, тобто має обернену функцію, що називається **арккотангенсом** і позначається $y = arcctgx$. Таким чином, **арккотангенсом числа *x*** називається число y з інтервалу $(0;\ \pi)$ таке, що його котангенс дорівнює *x*. Математично це можна записати так: $y = arcctgx \iff ctg(arcctgx) = x$, $0 < y < \pi$, $-\infty < x < \infty$.

Наприклад, $arcctg\,0 = \frac{\pi}{2}$ (оскільки $ctg\frac{\pi}{2} = 0$, $0 < \frac{\pi}{2} < \pi$), $arcctg1 = \frac{\pi}{4}$, $arcctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, $arcctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{5\pi}{6}$ і т.д.

Графік функції $y = arcctgx$ зображено на рисунку 24. Цей графік симетричний графіку функції $y = ctgx$ відносно прямої $y = x$.

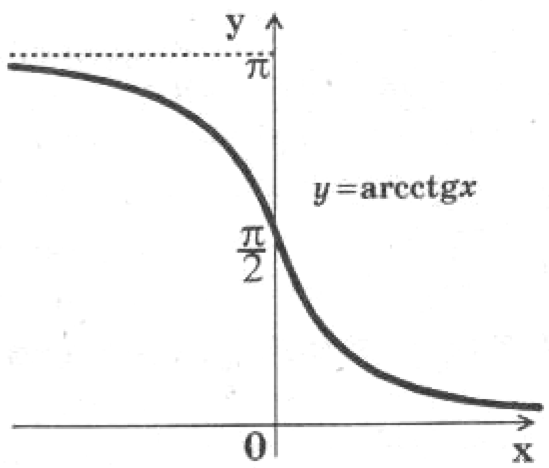


Рис. 24

Основні властивості функції $y = arcctgx$

1) $D(y) = (-\infty;\ \infty)$.
2) $E(y) = (0;\ \pi)$.
3) $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$, тобто дана функція є функцією загального виду.
4) Функція $y = arcctgx$ спадна.
5) $ctg(arcctgx) = x$ при $x \in (-\infty;\ \infty)$.

Виходячи з означення тригонометричних функцій, запишемо декілька співвідношень між цими функціями:

при $x \in [-1;\ 1]$ $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$,

для кутів $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$,

для кутів $\alpha \in [0;\ \pi]$ $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$.

Аналогічні співвідношення зв’язують tgx і $arctgx$; $ctgx$ і $arcctgx$:

для всіх $x \in R$ $tg(arctgx) = x$, $ctg(arcctgx) = x$, для всіх $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ $arctg(tg\alpha) = \alpha$,

для всіх $\alpha \in (0;\ \pi)$ $arcctg(ctg\alpha) = \alpha$.

Приклад 22. Обчислити:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-1) - arctg\,0 + arcctg\sqrt{3}$;

б) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)$; в) $ctg\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\cos(arcctg(-1))$.

Розв'язання

а) Оскільки $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos(-1) = \pi$, $arctg\,0 = 0$, $arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$,

то $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-1) - arctg\,0 + arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \pi - 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$;

б) Позначимо $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{12}$. Оскільки з визначення $\arcsin x$ випливає, що $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$.

Звідси остаточно $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$.

в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow ctg\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

г) $arcctg(-1) = \pi - arcctg1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(arcctg(-1)) = \cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.13. Приклад перетворень виразів, що містять обернені тригонометричні функції

Приклад 23. Спростити вираз $\sin(\arccos x)$, де $-1 \le x \le 1$.

Розв'язання

Припустимо, $\arccos x = \alpha$. Тоді $\cos\alpha = x$, $0 \le \alpha \le \pi$. Треба знайти $\sin x$. Відомо, що $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha = 1 - x^2$, а на відрізку $[0;\ \pi]$ синус набуває лише невід'ємного значення. Тому $\sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$, тобто $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

```
> simplify(sin(arccos(x)));
```

$$\sqrt{1-x^2}$$

Приклад 24. Обчислити $tg\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Розв'язання

Припустимо $\alpha=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. Тоді $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Треба обчислити $tg\frac{\alpha}{2}$.

Маємо $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$, значить $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{2}=\frac{1}{5}$. Оскільки далі $1+tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, то $1+tg^2\frac{\alpha}{2}=5$, звідки $tg^2\frac{\alpha}{2}=4$, тобто $tg\frac{\alpha}{2}=2$ або $tg\frac{\alpha}{2}=-2$.

За умовою $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ означає $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, а в інтервалі $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$ маємо $tg\frac{\alpha}{2}>0$. Отже $tg\frac{\alpha}{2}=2$, тобто $tg\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=2$.

Відповідь: 2.

Спробуємо спростити вираз $tg\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$:

```
> simplify(tan(1/2*(arccos(-3/5))));
```

$$\cot\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

Очікуваного результату не дістали. Спробуємо обчислити даний вираз:

```
> evalf(tan(1/2*(arccos(-3/5))));
```

$$2.000000000$$

Приклад 25. Обчислити $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{5}\right)$.

Розв'язання

Припустимо, $\alpha=\arcsin\frac{2}{5}$. Тоді $\sin\alpha=\frac{2}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Потрібно обчислити $\cos 2\alpha$. Виразимо формулу косинуса подвійного кута через синус кута: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$. Тоді, підставляючи значення $\sin\alpha$, будемо мати $\cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25}$. Отже, $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{5}\right) = \frac{17}{25}$.

Відповідь: $\frac{17}{25}$.

Приклад 26. Обчислити $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.

Розв'язання

Позначимо $\arcsin\frac{3}{5} = \alpha$, а $\arccos\frac{3}{5} = \beta$, тоді $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Потрібно обчислити $\sin(2\alpha - \beta)$. Для цього скористаємося формулою (18), отже

$$\sin(2\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \cos\beta - \cos 2\alpha \sin\beta. \qquad (*)$$

Згідно з формулою (21) маємо $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Знайдемо $\cos\alpha$: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, тобто $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$, то $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ або $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. За умовою $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ маємо, що $\cos\alpha > 0$. Тобто $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, а отже $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

$\cos 2\alpha$ будемо шукати як у попередньому прикладі, тобто $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$. Значить, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$.

Знайдемо $\sin\beta$ з формули $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$, підставляючи $\cos\beta = \frac{3}{5}$: $\sin^2\beta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$ або $\sin\beta = -\frac{4}{5}$. За умовою $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ маємо, що $\sin\beta > 0$, тобто $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

Знайдені значення підставимо у рівність (*):

$$\sin(2\alpha-\beta)=\frac{24}{25}\cdot\frac{3}{5}-\frac{7}{25}\cdot\frac{4}{5}=\frac{72-28}{125}=\frac{44}{125}.$$

Відповідь: $\frac{44}{125}$.

Задамо даний приклад у Maple, а потім smart-способом обчислимо його:

```
> sin(2*arcsin(3/5)-arccos(3/5));
```

$$\sin\left(2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)-\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

```
> .35199.
```

Результат система видала наближено у вигляді числа з плаваючою точкою $\frac{44}{125}=0{,}352$.

8.14. Побудова графіків тригонометричних функцій

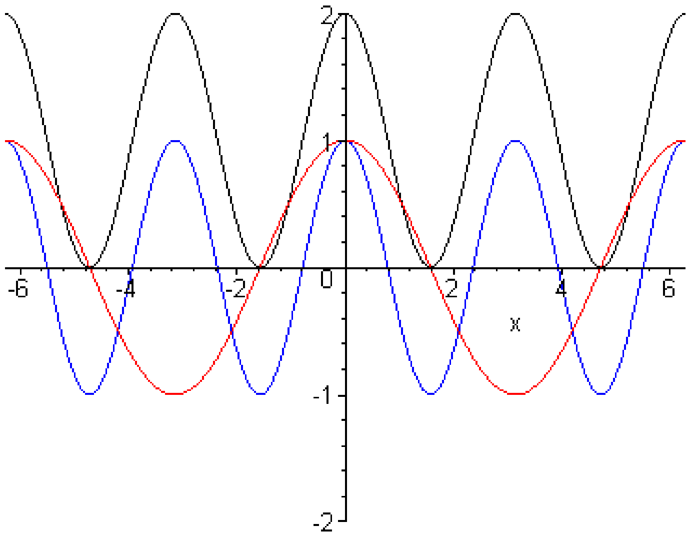
Приклад 27. Побудувати графік функції $y=\cos 2x+1$.

Розв'язання

Шляхом елементарних перетворень будуємо графіки таких функцій:

1) $y=\cos x$;
2) $y=\cos 2x$ (стиснути графік $y=\cos x$ вздовж осі OX до осі OY у 2 рази);
3) $y=\cos 2x+1$ (зсунути графік $y=\cos 2x$ вздовж осі OY на 1 одиницю вгору).

```
> plot([cos(x),cos(2*x),cos(2*x)+1],x=-2*Pi..2*Pi,-
2..2,color=[red,blue,black]);
```



Приклад 28. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

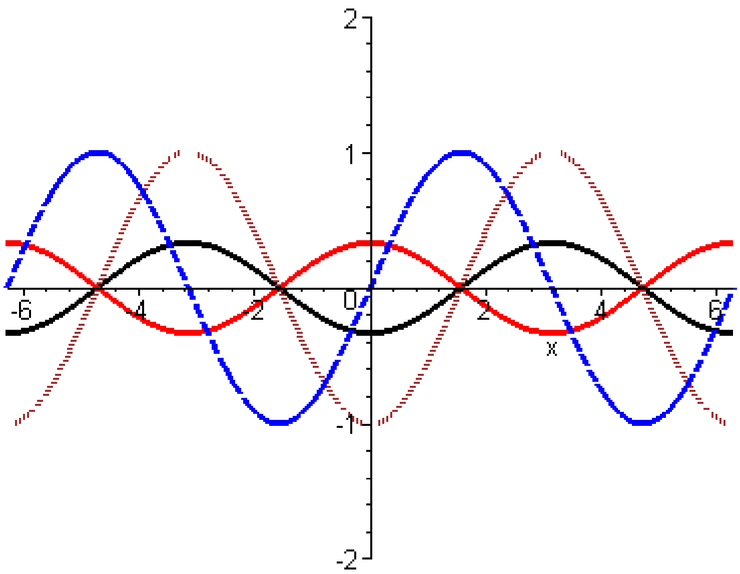
Розв'язання

І спосіб: Перетворимо $y = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Шляхом елементарних перетворень будуємо графіки таких функцій:

1) $y = \sin x$;
2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (зсуваємо графік $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{2}$ вправо вздовж осі OX);
3) $y = \frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (стискаємо графік $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ до осі OX у 3 рази);
4) $y = -\frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (перевертаємо графік $y = \frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ відносно осі OX).

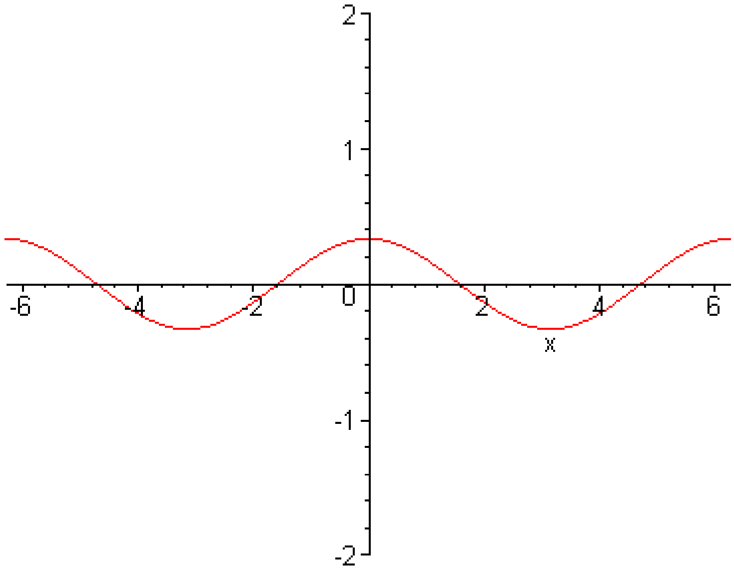
```
> plot([sin(x),sin(x-Pi/2),(1/3)*sin(x-Pi/2),-
(1/3)*sin(x-Pi/2)],x=-2*Pi..2*Pi,-2..2,color=[blue,
brown,black,red],linestyle=[3,2,0,1],thickness=3);
```



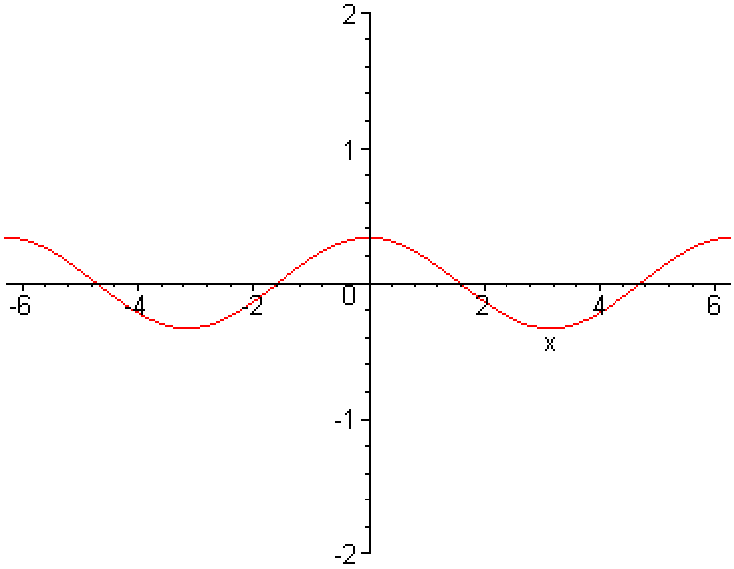
ІІ спосіб: Перетворимо функцію $y = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ за допомогою формул зведення: $y = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{3}\cos(x)$.

Переконаємось в Maple, що графіки початкової функції і функції, отриманої за допомогою формул зведення, – ідентичні:

```
> plot(-(1/3)*sin(x-Pi/2),x=-2*Pi..2*Pi,-2..2);
```




```
> plot((1/3)*cos(x),x=-2*Pi..2*Pi,-2..2);
```

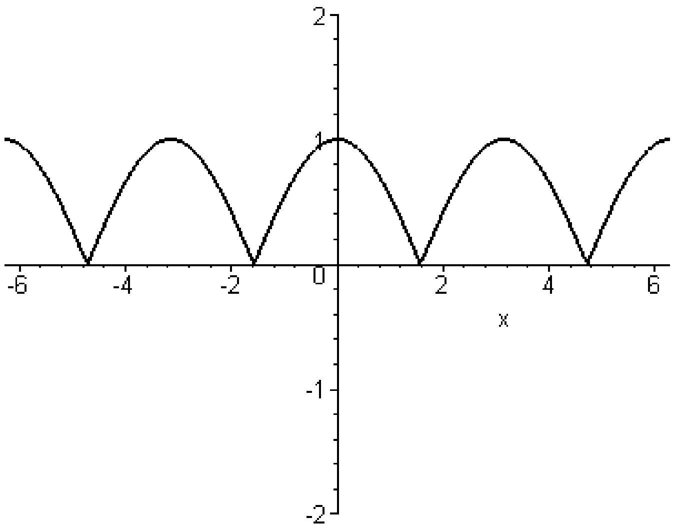


Приклад 29. Побудувати графік функції $y = |\cos x|$.

Розв'язання

Спочатку будуємо графік функції $y = \cos x$. Для того, щоб утворився графік функції $y = |\cos x|$, потрібно ту частину графіка $y = \cos x$, яка вище осі OX, залишити без змін, а ту, що нижче осі OX, симетрично відобразити на верхню півплощину.

```
> plot(abs(cos(x)),x=-2*Pi..2*Pi,-
2..2,color=black,thickness=2);
```

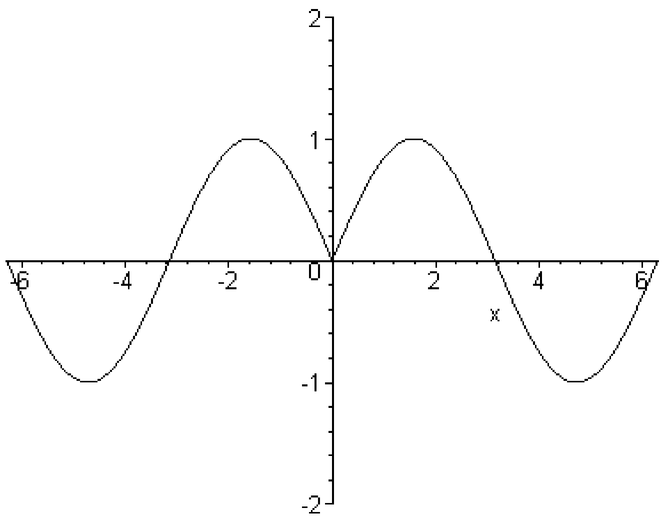


Приклад 30. Побудувати графік функції $y = \sin|x|$.

Розв'язання

Будуємо графік функції $y = \sin x$. Ту частину побудованого графіка, яка в лівій півплощині відносно осі OY, відкидаємо, а ту, що в правій, – залишаємо і симетрично відображаємо на ліву півплощину.

```
> plot(sin(abs(x)),x=-2*Pi..2*Pi,-2..2,color=black);
```



Приклад 31. Побудувати графік функції $y = \frac{|x|}{x} - 2\sin|x| \cdot \sin x$.

Розв'язання

$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

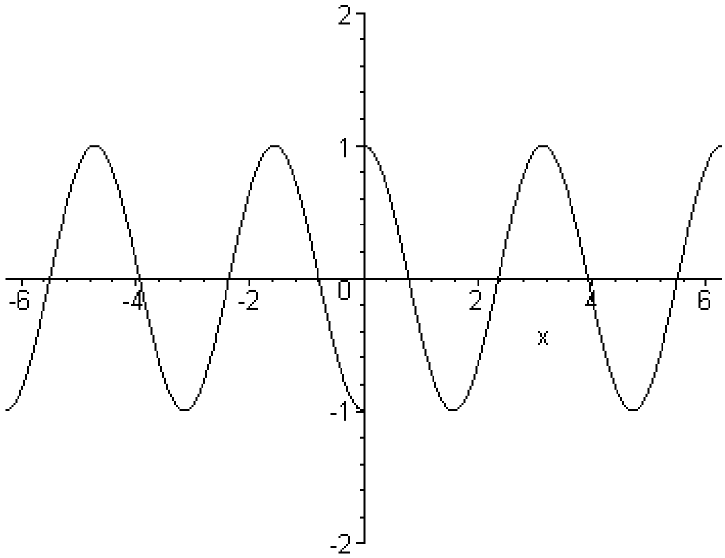
Оскільки підмодулевий вираз це x, то розглянемо два випадки:

Якщо $x > 0$: $y = \frac{x}{x} - 2\sin x \cdot \sin x = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$.

Якщо $x < 0$: $y = \frac{-x}{x} - 2\sin(-x) \cdot \sin x = -1 + 2\sin^2 x = -\cos 2x$.

Шляхом елементарних перетворень будуємо відповідні графіки функцій.

```
> plot(abs(x)/x-2*sin(abs(x))*sin(x),x=-2*Pi..2*Pi,-2..2,color=black,discont=true);
```



8.15. Тренувальні вправи

Завдання 1. У яких координатних чвертях закінчуються кути:

1. 80º і -80º; 3. 300º і -300º; 5. 1000º і -1000º;
2. 170º і -170º; 4. 250º і -250º; 6. 5200º і -5200º.

Завдання 2. Виразити в радіанах дані кути:

1. 20º; 4. 240º; 7. 135º;
2. 50º; 5. 330º; 8. 315º;
3. 150º; 6. 210º; 9. 120º.

Завдання 3. Виразити в градусах дані кути:

1. $\frac{\pi}{18}$; 3. $\frac{\pi}{5}$; 5. $\frac{2\pi}{3}$;
2. 3π; 4. $\frac{\pi}{12}$; 6. $\frac{3\pi}{2}$.

Завдання 4. Визначити знак виразу без використання таблиць і калькулятора.

1. $\sin 2$. 2. $\cos 5$. 3. $ctg10$. 4. $tg7$.

Завдання 5. Обчислити без використання таблиць і калькулятора значення тригонометричних виразів.

1. $\sin 990^\circ$. 3. $\sin\frac{37}{2}\pi$. 5. $\cos 2540^\circ$.

2. $tg\left(-235^\circ\right)$. 4. $ctg\dfrac{2003\pi}{3}$. 6. $\cos\left(-\dfrac{2010}{7}\pi\right)$.

Завдання 6. Знайти значення інших тригонометричних функцій кута α за такими даними:

1. $\sin\alpha = -0{,}5$ при $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; 3. $\cos\alpha = 0{,}8$ при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

2. $tg\alpha = -\sqrt{15}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 4. $ctg\alpha = 3$ при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

Завдання 7. Обчислити значення виразу.

1. $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$.
2. $\cos 36^\circ \cos 72^\circ$.
3. $\sin^2\left(180^\circ - \alpha\right) + \sin^2\left(270^\circ - \alpha\right) + ctg\left(90^\circ + \alpha\right) \cdot ctg\left(360^\circ - \alpha\right)$.
4. $\cos\alpha + \cos\beta$, якщо $\alpha + \beta = 180^\circ$.
5. $\dfrac{1 + ctg2\alpha ctg\alpha}{tg\alpha + ctg\alpha}$, якщо $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.
6. $\sin 2\alpha$, якщо $tg\alpha = -\dfrac{2}{3}$.
7. $\cos 4\alpha$, якщо $ctg = 3$.
8. $tg\dfrac{x}{2}$, якщо $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{5}$.
9. $\dfrac{3\sin\alpha - 4tg\alpha}{5ctg\alpha + 6\cos\alpha}$, якщо $tg\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{4}{3}$, $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.
10. $tg\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.
11. $\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.
12. $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{2} + \arccos\dfrac{1}{2}\right)$.
13. $tg\left(\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg\left(-\sqrt{3}\right)\right)$.
14. $tg\left(arcctg\dfrac{2}{3}\right)$.
15. $\sin\left(arcctg 5\right)$.

16. $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

17. $\sin\left(2arctg\frac{1}{3}\right)+\cos\left(2arctg\sqrt{2}\right)$.

Завдання 8. Довести тотожності.

1. $2-4\sin^2\alpha+9\cos 2\alpha=11\cos 2\alpha$.
2. $\left(1+tg\alpha\cdot tg\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha=tg\alpha$.
3. $ctg^2\alpha-\cos^2\alpha=ctg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.
4. $tg\alpha+ctg\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$.
5. $tg\alpha-tg\frac{\alpha}{2}=tg\frac{\alpha}{2}\sec\alpha$.
6. $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=tg\alpha-ctg\alpha$.
7. $1+2\cos 8\alpha+\cos 16\alpha=4\cos^2 4\alpha\cdot\cos 8\alpha$.
8. $4\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin 3\alpha$.
9. $\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 4\alpha\sin\alpha=\cos 3\alpha\cos 2\alpha$.
10. $tg3x-tg2x-tgx=tgx\cdot tg2x\cdot tg3x$.
11. $\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\cos 2\beta$.
12. $\frac{1}{2}\sin 4\alpha=\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)\sin 2\alpha$.
13. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=1{,}5$.
14. $2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)+1=3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)$.
15. $tg^2\alpha+ctg^2\alpha=(tg\alpha+ctg\alpha)^2-2$.
16. $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}$.
17. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{tg\alpha-tg\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta$.
18. $\frac{\sin^2\alpha-tg^2\alpha}{\cos^2\alpha-ctg^2\alpha}=tg^6\alpha$.

19. $4\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=4\cos^2\alpha-3$.

20. $4\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$.

Завдання 9. Спростити вирази.

1. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+19$.
2. $\cos 19^\circ\cos 41^\circ-\sin 19^\circ\sin 41^\circ$.
3. $\dfrac{tg3^\circ-tg48^\circ}{1+tg3^\circ\cdot tg48^\circ}$.
4. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}$.
5. $\sin^2\alpha+\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)$.
6. $8tg945^\circ+tg(810^\circ+\alpha)-ctg(450^\circ-\alpha)$.
7. $\left(ctg\alpha\cdot ctg\dfrac{\alpha}{2}+1\right)\sin\alpha$.
8. $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}$
9. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}-\dfrac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$.
10. $\dfrac{\sqrt{tg\alpha}+\sqrt{ctg\alpha}}{\sqrt{tg\alpha}-\sqrt{ctg\alpha}}$.
11. $\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha}{ctg^2\alpha-tg^2\alpha}}$, $90^\circ<\alpha<135^\circ$.
12. $\dfrac{tg615^\circ-tg555^\circ}{tg795^\circ+tg735^\circ}$.
13. $\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi)+\sin\left(2x-\dfrac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.
14. $ctg(270^\circ-2\alpha)+ctg(210^\circ-2\alpha)+ctg(150^\circ-2\alpha)$.

Завдання 10. Перетворити у добуток.

1. $tg\alpha+\sin\alpha$.
2. $\sin 3\alpha+\sin 6\alpha+\sin 9\alpha$.
3. $\dfrac{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}$.

4. $1+\cos\beta+\cos2\beta+\cos3\beta$.

5. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)-2$.

Завдання 11. Дослідити функції на парність (непарність).

1. $y=x^3-\sin 5x$.
2. $y=x\sin 4x$.
3. $y=3\cos5x-7$.
4. $y=\cos x+\sin^2 x$.
5. $y=\arcsin x+arctgx$.
6. $y=x^3arctg(2x)$.
7. $y=x-\dfrac{\cos x}{x}$

Завдання 12. Знайти основний період функції.

1. $y=\sin\dfrac{\pi x}{4}$.
2. $y=3\cos\dfrac{x}{2}$.
3. $y=\sin\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. $y=-\dfrac{1}{2}tg\left(\sqrt{3}x\right)$.
5. $y=\cos^2 6x$.
6. $y=\cos5x+\cos10x$.
7. $y=2\cos\dfrac{x}{3}+3tg\dfrac{x}{8}$.
8. $y=5ctg\dfrac{x}{8}+\sin 2\pi x$.
9. $y=\sin x\cdot\sin 6x$.
10. $y=7tg2x+tg3x+4\sin 5x$.

Завдання 13. Побудувати графік функції.

1. $y=|\sin x|$.
2. $y=\cos|x|$.
3. $y=2\cos x+1$.
4. $y=3\sin(x-1)$.

5. $y = \cos^2 x$.

6. $y = |\sin x| \cos x$.

7. $y = \sin|x| + |\sin x|$.

8. $y = \dfrac{|\cos x|}{\cos x}$.

9. $y = |tgx|$.

10. $y = \arcsin|x|$.

11. $y = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \arcsin \sqrt{x^2}$.

12. $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \sqrt{1 + ctg^2 x} \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$.

8.16. Орієнтовна контрольна робота № 8

1. Знайти $\cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha$, якщо $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ та $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

2. Спростити вираз $\dfrac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos 2\alpha}$.

3. Обчислити $\cos(-405^\circ) + \sin \dfrac{21\pi}{2}$.

4. Довести тотожність $\sin\left(30^0 - \alpha\right) + \sin\left(30^0 + \alpha\right) + \sin\left(270^0 - \alpha\right) = 0$.

5. Побудувати графік функції $y = -2\sin(x - \dfrac{\pi}{3})$.

9. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

9.1. Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння називається **тригонометричним,** якщо невідома величина знаходиться під знаком тригонометричних функцій. **Найпростішими тригонометричними рівняннями** називаються рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$. Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння – означає знайти множину всіх кутів, що мають дане значення a тригонометричної функції. Якщо тригонометричне рівняння не є найпростішим, то за допомогою тотожних перетворень його треба звести до одного або кількох найпростіших, розв'язання яких визначається стандартними формулами.

$\sin x = a$, $|a| \le 1$ (оскільки $|\sin x| \le 1$). Корені рівняння $\sin x = a$ можна розглядати як абсциси точок перетину синусоїди $y = \sin x$ з прямою $y = a$.

Всі розв'язки рівняння $\sin x = a$ записуються у вигляді $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$. Однак в трьох таких випадках, коли $\alpha \in \{-1;\ 0;\ 1\}$, розв'язки рівнянь зображуються такими формулами:

при $a = 0$ $x = \pi n$, $n \in Z$;

при $a = -1$ $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

при $a = 1$ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Рівняння $\cos x = a$. Оскільки $|\cos x| \le 1$, то рівняння має розв'язок тільки при $|a| \le 1$. Корені рівняння $\cos x = a$ можна розглядати як абсциси точок перетину косинусоїди $y = \cos x$ з прямою $y = a$.

Всі розв'язки рівняння $\cos x = a$ записуються у вигляді $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.

Для окремих випадків $a = 0$, $a = \pm 1$ маємо:

а) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

в) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Всі корені рівняння $tgx = a$, $a \in R$ задаються формулою $x = arctga + \pi n$, $n \in Z$.

У випадку $a = 0$ розв'язок записується у вигляді $x = \pi n$, $n \in Z$.

Всі корені рівняння $ctgx = a$, $a \in R$ визначаються співвідношенням $x = arcctga + \pi n, n \in Z$. При $a = 0$ розв'язок має вигляд $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

При використанні формул для розв'язування тригонометричних рівнянь враховують, що

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$arctg(-a) = -arctga$; $arcctg(-a) = \pi - arcctga$.

У системі Maple тригонометричні рівняння розв'язуються за допомогою вищезгаданої функції solve. До тих пір, поки не буде набрано _EnvAllSolutions:=true, вбудована функція solve повертає користувачу лише один або декілька коренів з множини розв'язків тригонометричного рівняння. Після даної команди система повертає всю множину коренів для кожного тригонометричного рівняння.

Розглянемо на прикладах найпростіші тригонометричні рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання

Оскільки $a = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, то скористаємось формулою $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$. Отже, $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$, $n \in Z$ $\Leftrightarrow$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Відповідь: $\left\{ (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n \middle| n \in Z \right\}$.

```
> solve(sin(x)=sqrt(3)/2);
```

$$\frac{1}{3}\pi$$

```
> _EnvAllSolutions:=true:solve(sin(x)=sqrt(3)/2);
```

$$\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi\_B2\sim + 2\pi\_Z5\sim$$

Форма відповіді незвичайна, але корені знайдені правильно. Система Maple через _B, незалежно від індексу, позначає змінні, що приймають значення з множини $\{0;\ 1\}$, а через _Z - множину цілих чисел.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin \frac{1}{2} x = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання

$\frac{\pi}{3} > 1$ ($\pi \approx 3{,}14$), отже, рівняння розв'язків не має.

Відповідь: $\{\varnothing\}$.

```
> _EnvAllSolutions:=true:solve(sin((1/2)*x)=Pi/3,x);
```

$$2\arcsin\left(\frac{1}{3}\pi\right) - 4\arcsin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\_B1\sim + 4\pi\_Z1\sim + 2\pi\_B1\sim$$

Оскільки

```
> evalf(arcsin(1/3*Pi));
```

$$1.570796327 - .3060421080I$$

очевидно, що всі розв'язки містять уявну одиницю $i = \sqrt{-1}$, тобто ці корені комплексні і у відповідь не входять.

Спробуємо знайти розв'язок даного рівняння після підключення пакета with(RealDomain):

```
> restart;
> with( RealDomain):
solve(sin((1/2)*x)=Pi/3,x);
```

Warning, these protected names have been redefined and unprotected: Im, Re, ^, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech, signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan, tanh

$$undefined$$

Для функції $y = \arcsin x$ $|x| \le 1$. Тому розв'язок, який знайшла система Maple, – комплексний. А дійсних коренів дане рівняння не має.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь: $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \middle| n \in Z\right\}$.

```
> _EnvAllSolutions:=true:solve(cos(x)=1/2,x);
```

$$\frac{1}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi\_B1\sim + 2\pi\_Z1\sim$$

Отримали ту саму відповідь, записану в іншій формі!

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.

Розв'язання

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k,\ k\in Z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+2\pi k,\ k\in Z \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k,$

$k\in Z \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z, \\ x=\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{11\pi}{12}+2\pi k, k\in Z, \\ x=-\frac{5\pi}{12}+2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$

Відповідь: $\left\{\frac{11\pi}{12}+2\pi k;\ -\frac{5\pi}{12}+2\pi k \middle| k\in Z\right\}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

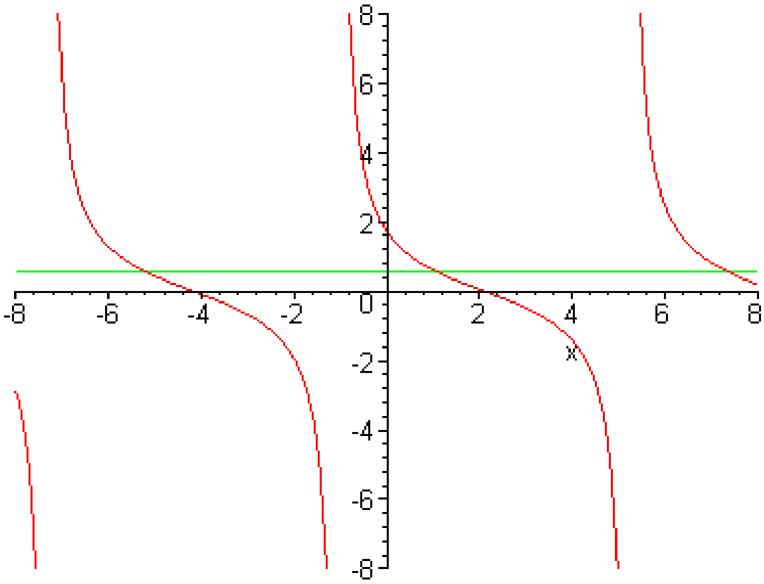
Розв'язання

Запишемо дане рівняння у вигляді $tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, тоді скористаємось формулою $x=arctga+\pi n$, $n\in Z$, тобто $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n, n\in Z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

Розглянемо ліву і праву частину даного рівняння як окремі функції, і побудуємо графіки цих функцій в системі Maple:

```
> plot([tan(Pi/3-x/2),1/(sqrt(3))],x=-8..8,-8..8,discont=true);
```



Абсциси точок перетину цих двох графіків і будуть розв'язками рівняння, що розглядається.

Відповідь: $\left\{\dfrac{\pi}{3}+2\pi n \middle| n\in Z\right\}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\tilde{n}tg3x=2009$.

Розв'язання

Оскільки для рівняння $ctgx=a$, $a\in R$, то $\tilde{n}tg3x=2009 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x=arcctg2009+\pi l,\ l\in Z \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}arcctg2009+\frac{\pi l}{3},\ l\in Z.$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{1}{3}arcctg2009+\dfrac{\pi l}{3}\middle| l\in Z\right\}$.

```
> _EnvAllSolutions:=true:solve(cot(3*x)=2009);
```

$$\frac{1}{3}\operatorname{arccot}(2009)+\frac{1}{3}\pi\_Z1\sim$$

```
> evalf(%);
```

$$.0001659200128+1.047197551\_Z4\sim$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $ctg^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}$.

Розв'язання

$$ctg^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow ctg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\dfrac{\pi}{4}=arctg\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\pi n, n\in Z, \\ 2x-\dfrac{\pi}{4}=arctg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z, \\ 2x=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{7\pi}{12}+\pi n, n\in Z, \\ 2x=-\dfrac{\pi}{12}+\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z, \\ x=-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{2}; -\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2}\middle| n,k\in Z\right\}$.

```
> solve((cot(2*x-Pi/4))^2=1/3);
```

$$-\frac{1}{24}\pi+\frac{1}{2}\pi\_Z2\sim, -\frac{5}{24}\pi+\frac{1}{2}\pi\_Z3\sim$$

Розв’язок, отриманий в Maple, відповідає тому, що ми отримали вручну, записаному в іншому вигляді.

Відзначимо, що при $a=0$, $a=\pm 1$ загальними формулами для тригонометричних рівнянь також можна користуватися, вони дають правильний результат, однак найчастіше ці формули не мають компактного вигляду. Наприклад, якщо використовувати окремі випадки, то $\sin x=1 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. Якщо ж скористатися спільною формулою, то $\sin x=1 \;\Leftrightarrow\; x=(-1)^k \arcsin 1+\pi k$, $k\in Z$. Покажемо, що $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ і $x=(-1)^k\arcsin 1+\pi k$, $k\in Z$ – це та сама множина.

Дійсно, при $k=2n \;\Leftrightarrow\; x=(-1)^{2n}\arcsin 1+2\pi n=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; при $k=2n+1 \;\Leftrightarrow\; x=(-1)^{2n+1}\arcsin 1+(2n+1)\pi=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n+\pi=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

Таким чином, множини розв’язків, отримані двома способами, збігаються.

Зауваження. При розв’язуванні тригонометричних рівнянь з однаковим успіхом можна користуватися і радіанною, і градусною мірами. Так, наприклад, відповідь у прикладі № 5, яка записана за допомогою радіанної міри $\left(\left\{\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\middle| n\in Z\right\}\right)$, можна записати, використовуючи градусну міру, так: $\left\{\frac{180^\circ}{3}+2\cdot 180^\circ n \middle| n\in Z\right\} \Leftrightarrow \left\{60^\circ+360^\circ n \middle| n\in Z\right\}$. При цьому слід знати, що можна використовувати або тільки радіанну, або тільки градусну міру, тобто не можна використовувати в тому самому розв'язку частково радіанну і частково градусну міру.

Приклад 8. Вказати найменший додатний розв'язок рівняння (у градусах): $\frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}=0$.

Розв'язання

Дане рівняння є дробово-раціональним, тому його можна записати у вигляді системи: $\frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 4x=0,\\ 1+\cos 4x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x=\pi n,\ n\in Z,\\ 4x\neq \pi+2\pi k,\ k\in Z\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi n}{4},\ n\in Z,\\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z\end{cases}$. Звідси $\frac{\pi n}{4}\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi n}{4}\neq\frac{\pi+2\pi k}{4} \Rightarrow n\neq 2k+1$,

тобто підходить лише $n=2k$. Таким чином, $x=\frac{\pi\cdot 2k}{4}=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

Найменший додатний розв'язок рівняння при $k=1$ буде $x=\frac{\pi}{2}$ або $x=90^\circ$.

Відповідь: 90°.

При застосуванні Maple до розв'язування тригонометричних рівнянь потрібно бути уважним, оскільки система нерідко видає неправильні відповіді:

```
> restart:
`Рівняння_8`:=sin(4*x)/(1+cos(4*x))=0;
_EnvAllSolutions:=true:
solve(`Рівняння_8`);`Розв_к_8`:=%:
```

$$Ð³âíÿííÿ\_8 := \frac{\sin(4x)}{1+\cos(4x)}=0$$

$$\frac{\pi\_Z1\sim}{4}$$

Для виведення результатів розв'язання рівнянь система генерує сталі. Позначення всіх таких сталих починається знаком «_» – нижнє підкреслення. Знак «~», як відомо, в позначенні змінної вказує, що на її можливі значення накладено певні умови. Для того, щоб взнати більше про конкретну змінну, застосуємо команду:

```
> about(_Z1);
Originally _Z1, renamed _Z1~:
 is assumed to be: integer
```

Із отриманого повідомлення дізнаємось, що _Z1 може приймати тільки цілі значення. Це означає, що система видала неправильний результат, оскільки насправді _Z1 може приймати тільки парні значення. Але далі – більше. Підставимо отриманий розв'язок у вихідне рівняння та спростимо отриманий вираз:

```
> subs(x=`Розв_к_8`,`Рівняння_8`);
simplify(%);
```

$$\frac{\sin(\pi\_Z1\sim)}{1+\cos(\pi\_Z1\sim)}=0$$

$$0=0$$

І на цьому етапі система не змогла виявити своєї помилки, адже для всіх непарних значень знаменник лівої частини рівняння дорівнює нулю. Але система цього «не побачила» і «вирішила», що знайдений розв'язок задовольняє рівняння. І тільки при спробі підставити замість _Z1 конкретне непарне значення, система нарешті реагує адекватно, повідомляючи про неможливість здійснення операції ділення на нуль:

```
> simplify(%%) assuming _Z1=1;
Error, (in assuming) when calling `one of {simplify, sin, cos}`. Received: 'numeric exception: division by zero'
```

В подібних ситуаціях можна спробувати перетворити вихідне рівняння. Наприклад

```
> convert(lhs(`Рівняння_8`),sincos);
expand(lhs(`Рівняння_8`));normal(%);
solve(%);
```

$$\frac{\sin(4x)}{1+\cos(4x)}$$

$$\frac{8\sin(x)\cos(x)^3}{2+8\cos(x)^4-8\cos(x)^2}-\frac{4\sin(x)\cos(x)}{2+8\cos(x)^4-8\cos(x)^2}$$

$$\frac{2\sin(x)\cos(x)}{2\cos(x)^2-1}$$

$$\frac{1}{2}\pi+\pi\_Z2\sim,\ \pi\_Z3\sim$$

```
> about(_Z2);about(_Z3);
Originally _Z2, renamed _Z2~:
 is assumed to be: integer

Originally _Z3, renamed _Z3~:
 is assumed to be: integer
```

Ми отримали правильну відповідь, але в незручному вигляді. Головною перепоною на шляху здійснення подібних перетворень є складність формулювання загальних правил з рекомендаціями які саме перетворення вихідних рівнянь потрібно робити у різних випадках.

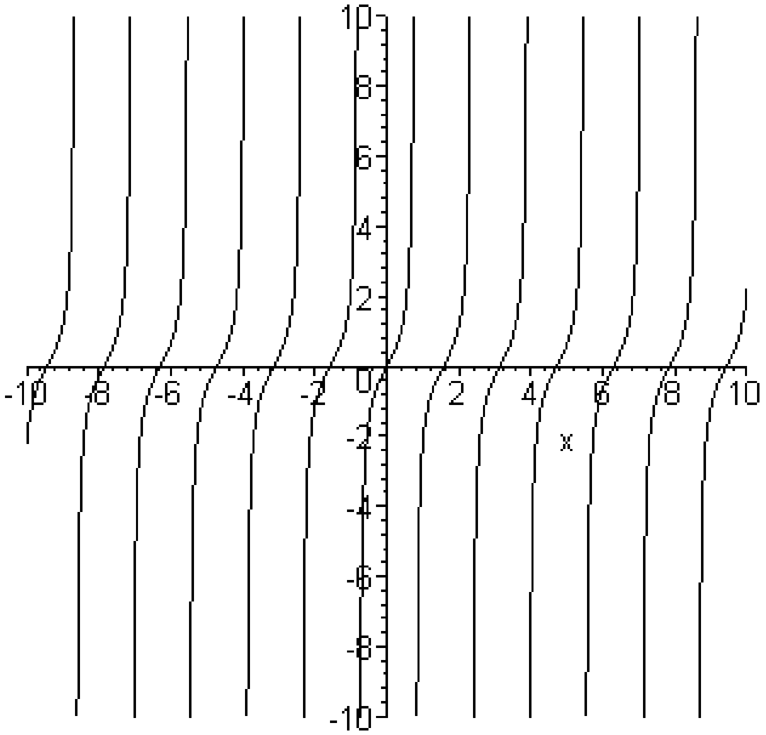
На думку авторів, надзвичайно ефективний прийом застосування Maple при знаходженні розв'язків тригонометричних рівнянь полягає в наочній перевірці правильності знайдених виразів. Продемонструємо цей прийом. На основі неправильного розв'язку, знайденого системою, згенеруємо координати декількох точок, абсциси яких збігаються зі значеннями кореня:

```
> `xy_8`:=seq([evalf(eval(`Розв_к_8`,_Z1=k)),0],k=-
10..10);
```

xy_8 := [-7.853981635, 0], [-7.068583472, 0], [-6.283185308, 0], [-5.497787144, 0], [-4.712388981, 0], [-3.926990818, 0], [-3.141592654, 0], [-2.356194490, 0], [-1.570796327, 0], [-.7853981635, 0], [0., 0], [.7853981635, 0], [1.570796327, 0], [2.356194490, 0], [3.141592654, 0], [3.926990818, 0], [4.712388981, 0], [5.497787144, 0], [6.283185308, 0], [7.068583472, 0], [7.853981635, 0]

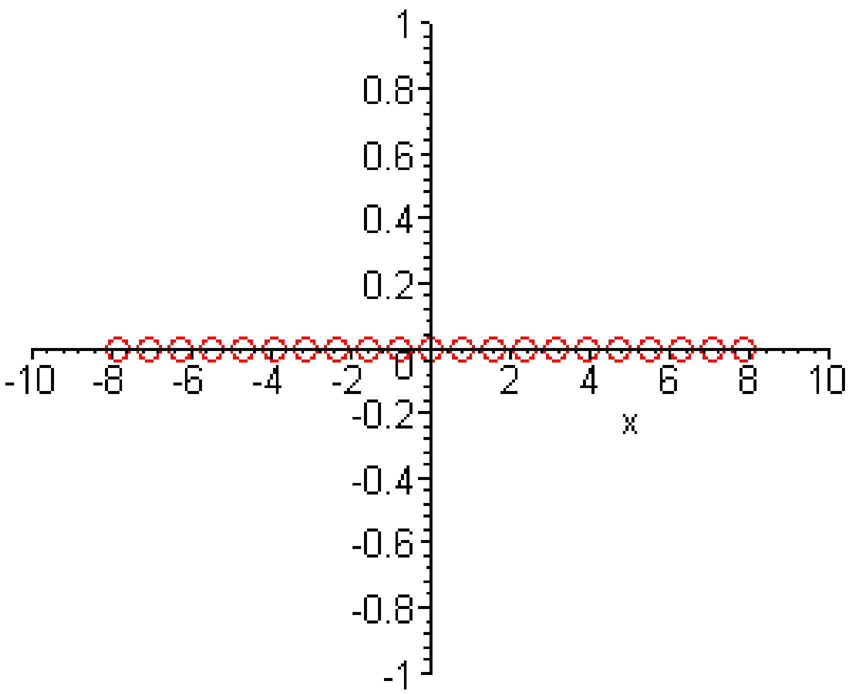
Відповідний діапазон значень $k = -10..10$ потрібно підбирати в кожному конкретному випадку. Побудуємо графік лівої частини тригонометричного рівняння, в якому права частина дорівнює нулю

```
> plot(lhs(`Рівняння_8`)-rhs(`Рівняння_8`),x=-10..10,-
10..10,style=[line],symbol=circle,symbolsize=17,color
=black,scaling=unconstrained,discont=true);g10:=%:
```



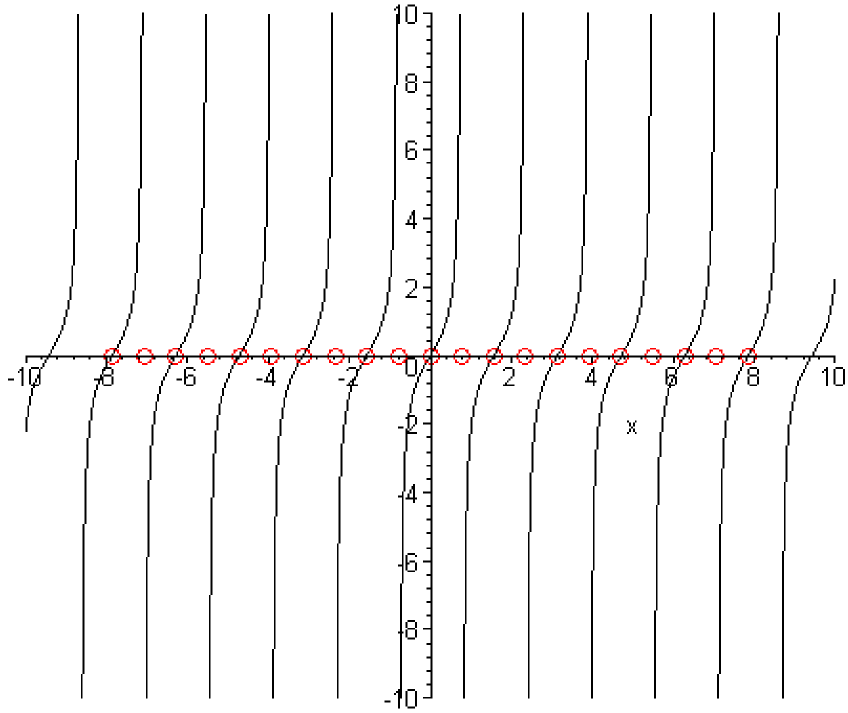
Побудуємо графік, на якому відображено згенеровані точки

```
> plot([`xy_8`],x=-10..10,-
1..1,style=[point],symbol=circle,symbolsize=17,color=
red,scaling=unconstrained);g20:=%:
```



Сумістимо останні два графіки в один

```
> plots[display]([g10,g20]);
```



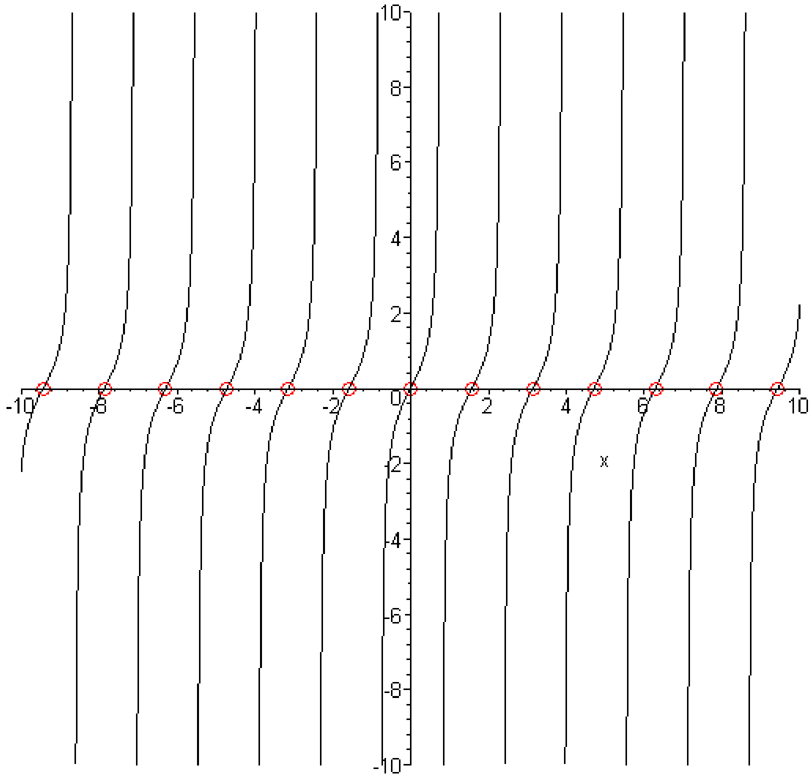
Із графіка видно, що ми маємо «зайві» корені! Зайві корені зображають ті виділені кружечками точки на осі абсцис, через які не проходять криві. Аналогічним чином перевіримо розв'язок, знайдений «вручну»:

```
> printf(`Згенеруємо координати точок`);
`Корені_вручну_8`:=seq([evalf(Pi*k/2),0],k=-10..10);
printf(`Будуємо графік`);
plot([`Корені_вручну_8`],x=-10..10,-
1..1,style=[point],symbol=circle,symbolsize=17,color=
red,scaling=unconstrained):g30:=%:
plots[display]([g10,g30]);
```

Згенеруємо координати точок

Ëîðåí³_âðó÷íó_8 := [-15.70796327, 0], [-14.13716694, 0], [-12.56637062, 0], [-10.99557429, 0], [-9.424777962, 0], [-7.853981635, 0], [-6.283185308, 0], [-4.712388981, 0], [-3.141592654, 0], [-1.570796327, 0], [0., 0], [1.570796327, 0], [3.141592654, 0], [4.712388981, 0], [6.283185308, 0], [7.853981635, 0], [9.424777962, 0], [10.99557429, 0], [12.56637062, 0], [14.13716694, 0], [15.70796327, 0]

Будуємо графік



Як видно, в даному випадку – корені правильні.

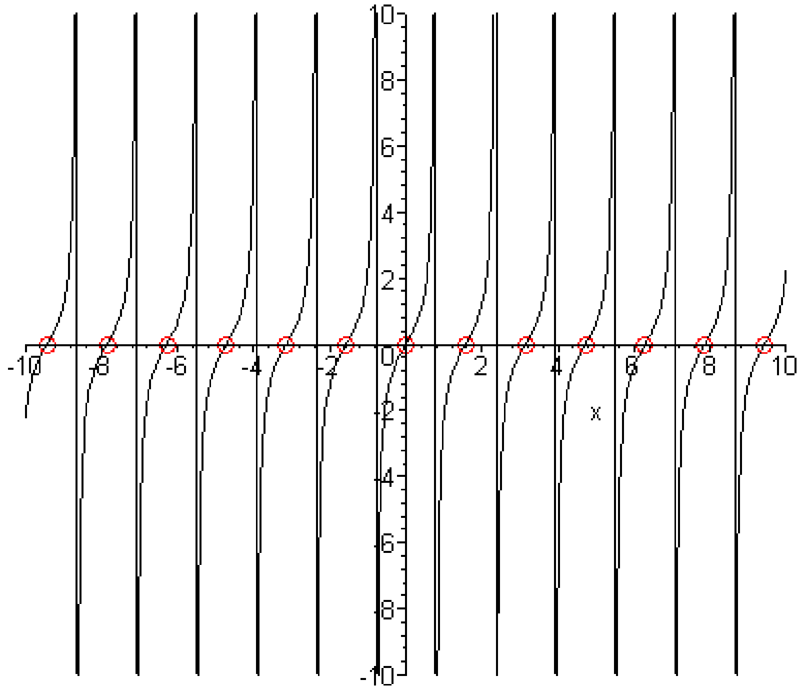
Декілька слів потрібно сказати про методику виведення графіків в даному випадку. Для суміщення різних графіків в одному ми використали команду plots[display] (команду display пакета plots). Звичайний, більш простий прийом суміщення графіків декількох функцій на одному за допомогою списку функцій в даному випадку неможливий через незрозумілий для авторів конфлікт між побудовою списку точок та опцією discont=true, яка задається для побудови функцій, що мають розриви. Дійсно

```
> plot([lhs(`Рівняння_8`)-rhs(`Рівняння_8`),[[`Корені_вручну_8`]]],x=-10..10,-10..10,style=[line],symbol=circle,symbolsize=17,color=black,scaling=unconstrained,discont=true);
```

```
Error, (in plot) invalid plot function: [[[-15.70796327, 0], [-14.13716694, 0], [-12.56637062, 0], [-10.99557429, 0], [-9.424777962, 0], [-7.853981635, 0], [-6.283185308, 0], [-4.712388981, 0], [-3.141592654, 0], [-1.570796327, 0], [0., 0], [1.570796327, 0], [3.141592654, 0], [4.712388981, 0], [6.283185308, 0], [7.853981635, 0], [9.424777962, 0], [10....
```

Без задання опції discont=true спосіб суміщення графіків декількох функцій на одному за допомогою списку функцій працює, але графік без указаної опції має дещо інший вигляд:

```
> plot([lhs(`Рівняння_8`)-rhs(`Рівняння_8`),[`Корені_вручну_8`]],x=-10..10,-10..10,style=[line,point],symbol=circle,symbolsize=17,color=[black,red],scaling=unconstrained);
```



9.2. Загальний принцип розв'язування тригонометричних рівнянь

Цей принцип полягає в тому, що всі тригонометричні функції, які входять в рівняння, виражають через яку-небудь одну тригонометричну функцію, яка залежить від одного і того ж аргументу. Розглянемо даний принцип на прикладах:

Приклад 9. Розв'язати рівняння $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

Розв'язання

Замінивши $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, отримаємо $2\left(1-\sin^2 x\right)+5\sin x-4=0;$

$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$. Замінимо $\sin x$ через t: $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}, \\ t=2. \end{array}\right.$

Повертаючись до заміни, отримаємо $\sin x = \frac{1}{2}$ або $\sin x = 2$. Перше рівняння системи є найпростішим тригонометричним і його розв'язком буде $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z \iff x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. У другому рівнянні системи права його частина $2 > 1$, тому рівняння $\sin x = 2$ розв'язків не має.

Відповідь: $\left\{ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \middle| n \in Z \right\}$.

```
> _EnvAllSolutions:=true:solve(2*(cos(x))^2+5*sin(x)-4=0);
```

$$\arctan(2, I\sqrt{3}) + 2\pi\_Z4\sim, \arctan(2, -I\sqrt{3}) + 2\pi\_Z4\sim, \frac{1}{6}\pi + 2\pi\_Z5\sim, \frac{5}{6}\pi + 2\pi\_Z5\sim$$

Перша і друга серії розв'язків містять уявну одиницю, а третю і четверту серії розв'язків, тобто $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, можна записати у звичному вигляді $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $\sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Розв'язання

$$\sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{8} \iff \sin x \cos x \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} \iff$$

$$\iff \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{8} \iff \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{8} \iff \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff$$

$$\iff 4x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in Z \iff x = (-1)^n \frac{\pi}{3} : 4 + \frac{\pi n}{4}, n \in Z \iff$$

$$\iff x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

Відповідь: $\left\{ (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4} \middle| n \in Z \right\}$.

```
> solve(sin(x)*(cos(x))^3-((sin(x))^3)*cos(x)=(sqrt(3))/8);
```

$$\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\arctan\left(\frac{1}{2} \frac{(2+\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}\right),$$

$$-\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{(2+\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right)+\pi,\ -\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(-2+\sqrt{3})}{\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right),$$

$$-\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(-2+\sqrt{3})}{-\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right)-\pi$$

Результат, який видала нам система, навіть без застосування _EnvAllSolutions:=true є досить громістким. Він потребує деякого спрощення. Для того, щоб не спрощувати кожний із елементів списку, можна скористатися командою map(), яка дозволяє застосувати функцію, оператор або команду, задану першим параметром до всіх елементів списку або множини. Робиться це таким чином:

```
> solve(sin(x)*(cos(x))^3-
((sin(x))^3)*cos(x)=(sqrt(3))/8);
```

$$\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{6}\pi,\ -\frac{5}{6}\pi,\ -\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(-2+\sqrt{3})}{\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right),$$

$$-\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(-2+\sqrt{3})}{-\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right)-\pi,\ -\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{(2+\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right),$$

$$-\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{(2+\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right)+\pi$$

```
> map(z->simplify(z),[%]);
```

$$\left[\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{6}\pi,\ -\frac{5}{6}\pi,\ \frac{1}{12}\pi,\ -\frac{11}{12}\pi,\ -\frac{5}{12}\pi,\ \frac{7}{12}\pi\right]$$

9.3. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом групування

Шляхом групування доданків рівняння зводяться до вигляду, коли ліва частина розкладена на множники, а права рівна нулю.

Приклад 11. Розв'язати рівняння

$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$.

Розв'язання

Згрупуємо доданки в лівій і правій частинах рівняння: $(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=(1+\cos 2x)+\cos x$. За формулою перетворення суми

синусів, а також за формулою косинуса подвійного кута, отримаємо
$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x \;\Leftrightarrow\; \sin 2x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1)$
$\Leftrightarrow\; (2\cos x+1)(\sin 2x-\cos x)=0 \;\Leftrightarrow\; (2\cos x+1)(2\sin x\cos x-\cos x)=0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; (2\cos x+1)\cos x(2\sin x-1)=0$. Звідси $\left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0,\\ \cos x=0,\\ 2\sin x-1=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2},\\ \cos x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2};\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\pi n,\;\; n\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\;\; k\in Z,\\ x=(-1)^l\arcsin\dfrac{1}{2}+\pi l,\;\; l\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\pi n,\;\; n\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\;\; k\in Z,\\ x=(-1)^l\dfrac{\pi}{6}+\pi l,\;\; l\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;\; \dfrac{\pi}{2}+\pi k;\; (-1)^l\dfrac{\pi}{6}+\pi l \,\middle|\, n,\; k,\; l\in Z\right\}$.

```
> _EnvAllSolutions:=true:
> solve(sin(x)+sin(2*x)+sin(3*x)=1+cos(x)+cos(2*x));
```

$$-\frac{1}{2}\pi+2\pi\_Z1\sim,\; \frac{1}{2}\pi+2\pi\_Z2\sim,\; \frac{2}{3}\pi+2\pi\_Z3\sim,\; -\frac{2}{3}\pi+2\pi\_Z3\sim,\; \frac{1}{6}\pi+2\pi\_Z4\sim,$$
$$\frac{5}{6}\pi+2\pi\_Z4\sim$$

Приклад 12. Розв’язати рівняння $\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}=\sin 2x$.

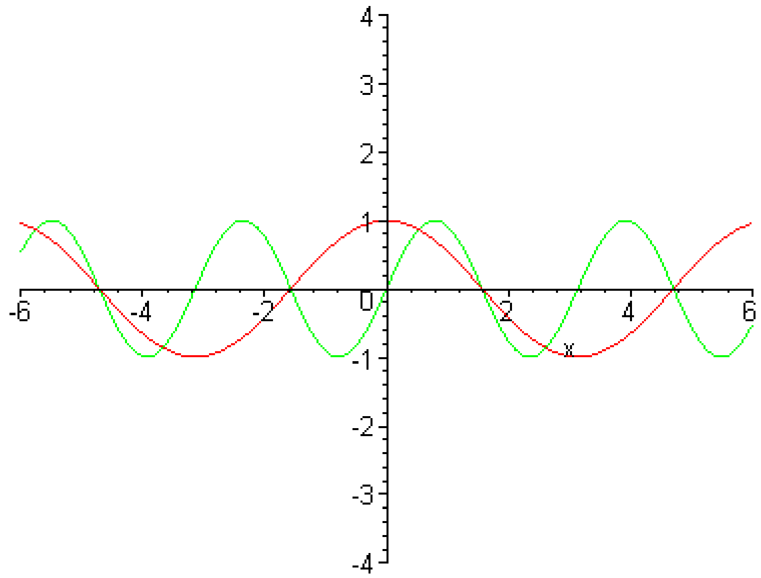
Розв’язання

За формулою різниці квадратів розпишемо ліву частину рівняння
$\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)=2\sin x\cos x \;\Leftrightarrow\; 1\cdot\cos x=2\sin x\cos x \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; \cos x(1-2\sin x)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ 1-2\sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\;\; n\in Z,\\ x=(-1)^m\dfrac{\pi}{6}+\pi m,\;\; m\in Z.\end{array}\right.$$

```
> plot([cos(x/2)^4-sin(x/2)^4,sin(2*x)],x=-6..6,-4..4);
```



Відповідь: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n;\ (-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m \middle| n,\ m\in Z\right\}.$

9.4. Рівняння, які розв'язуються пониженням степеня

Якщо тригонометричні рівняння містять $\sin x$, $\cos x$ в парному степені, то застосовують формули пониження степеня $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x$.

Розв'язання

$$\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}+\frac{1-\cos 12x}{2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ 2-\cos 6x-\cos 8x=2-\cos 10x-\cos 12x\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (\cos 10x+\cos 12x)-(\cos 6x+\cos 8x)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2\cos 11x\cos x-2\cos 7x\cos x=0\ \Leftrightarrow\ 2\cos x(\cos 11x-\cos 7x)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ -2\cos x\sin 9x\sin 2x=0$.

Кожний множник отриманого рівняння прирівнюємо до нуля і знаходимо його корені: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; $\sin 9x=0\Leftrightarrow 9x=\pi k,\ k\in Z\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{9},\ k\in Z$; $\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=\pi l,\ l\in Z\Leftrightarrow x=\frac{\pi l}{2},\ l\in Z$.

Відповідь: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi k}{9};\ \frac{\pi l}{2}\middle|\, n,\ k,\ l\in Z\right\}.$

9.5. Розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь, а також рівнянь, які зводяться до однорідних тригонометричних

Однорідні тригонометричні рівняння – це рівняння виду

$$a\cos x+b\sin x=0 \qquad (1)$$

і $a\cos^2 x+b\sin x\cos x+c\sin^2 x=0.$ (2)

Розв'язуються вони шляхом ділення обох частин рівняння на $\cos x\neq 0$ для рівняння виду (1) і на $\cos^2 x\neq 0$ для рівняння виду (2).

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\sin^2 x-2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.

Розв'язання

Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x\neq 0$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z\right)$:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-2\frac{\sin x}{\cos x}-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ tg^2 x-2tgx-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=3,\\ tgx=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=arctg3+\pi n,\ n\in Z,\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Перевіримо, чи $x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z$ не є коренем початкового рівняння: $\sin^2\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-3\cos^2\frac{\pi}{2}=1-0-0\neq 0$. Отже $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in Z$ не є коренем нашого рівняння.

Відповідь: $\left\{arctg3+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi k\,\middle|\, n,\ k\in Z\right\}.$

```
> solve((sin(x))^2-2*sin(x)*cos(x)-3*(cos(x))^2);
```

$$\arctan(3)+\pi\_Z5\sim,\ -\frac{1}{4}\pi+\pi\_Z5\sim$$

Приклад 15. Розв'язати рівняння $3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

Розв'язання

$$3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x(3\sin x-2\cos x)=0 \quad\Leftrightarrow$$

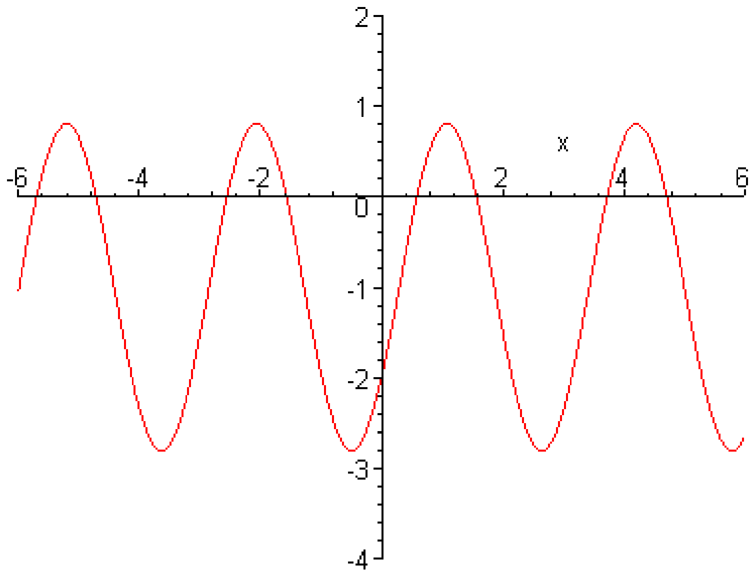
$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ 3\sin x-2\cos x=0.\end{array}\right.$$

Розв'яжемо перше рівняння сукупності: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Друге рівняння сукупності є однорідним тригонометричним, тому поділимо обидві частини рівняння $3\sin x - 2\cos x = 0$ на $\cos x \neq 0$: $\frac{3\sin x}{\cos x} - \frac{2\cos x}{\cos x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 3tgx - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; tgx = \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; x = arctg\frac{2}{3} + \pi m,\; m \in Z$.

Оскільки права частина рівняння дорівнює нулю, а ліву частину розглянути як функцію, то графічно розв'язками рівняння будуть абсциси точок перетину графіка функції $y = 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x$ з віссю OX.

```
> plot(3*sin(x)*cos(x)-2*(cos(x))^2,x=-6..6,-4..2);
```



Відповідь: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k;\; arctg\frac{2}{3} + \pi m \middle| k,\; m \in Z\right\}$.

9.6. Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою універсальної підстановки $tg\frac{x}{2} = t$

При розв'язуванні рівнянь виду $a\cos x + b\sin x = c$ зручно застосовувати універсальну підстановку $tg\frac{x}{2} = t$. Тоді функції $\sin x$, $\cos x$ нескладно виражаються через $tg\left(\frac{x}{2}\right)$ за такими формулами:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Оскільки використання універсальної підстановки можливе лише при $x \neq \pi + 2\pi n, \ n \in Z$, то потрібно перевіряти, чи не є числа виду $x = \pi + 2\pi n, \ n \in Z$ розв'язками початкового рівняння.

Приклад 16. Розв'язати рівняння $3\sin x - 4\cos x = 5$.

Розв'язання

Зробимо підстановку $tg\frac{x}{2} = t$, $\left(\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2\pi k, \ k \in Z\right)$.

Тоді $3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 4 \cdot \frac{(1-t^2)}{1+t^2} = 5 \Leftrightarrow \frac{6t - 4 + 4t^2}{1+t^2} = 5 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Значить $tg\frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = arctg3 + \pi n, \ n \in Z \Leftrightarrow x = 2arctg3 + 2\pi n, \ n \in Z$.

Перевіримо, чи не є розв'язком даного рівняння $x = \pi + 2\pi k, \ k \in Z$: $3\sin(\pi + 2\pi k) - 4\cos(\pi + 2\pi k) = 4 \neq 5$.

Відповідь: $\{2arctg3 + 2\pi n | n \in Z\}$.

Приклад 17. Розв'язати рівняння $3\sin 5z - 2\cos 5z = 3$.

Розв'язання

Можна замінити $5z$ через x, а потім зробити підстановку $tg\frac{x}{2} = t$, $\left(\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2\pi k, k \in Z\right)$. Тоді $3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 2 \cdot \frac{(1-t^2)}{1+t^2} = 3 \Leftrightarrow$ $t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ або $t = 5$. Повернувшись до підстановки $tg\frac{x}{2} = 1$ (а) або $tg\frac{x}{2} = 5$ (б), розв'яжемо по черзі рівняння (а) і (б):

(а): $tg\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z \Rightarrow$ $5z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \ n \in Z$;

(б): $tg\frac{x}{2} = 5 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = arctg5 + \pi m, \ m \in Z \Leftrightarrow x = 2arctg5 + 2\pi m, \ m \in Z$ $\Rightarrow 5z = 2arctg5 + 2\pi m, \ m \in Z \Leftrightarrow z = \frac{2}{5}arctg5 + \frac{2\pi m}{5}, \ m \in Z$.

Перевіримо, чи не є розв'язком даного рівняння $x = \pi + 2\pi k,\ \ k \in Z$: $3\sin 5(\pi + 2\pi k) - 2\cos 5(\pi + 2\pi k) = 2 \neq 3$.

Відповідь: $\left\{\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5};\ \frac{2}{5}arctg5 + \frac{2\pi m}{5} \middle| n,\ m \in Z\right\}$.

```
> solve(3*sin(5*z)-2*cos(5*z)=3,z);
```

$$\frac{1}{10}\pi + \frac{2}{5}\pi\_Z6\sim, -\frac{1}{5}\arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \frac{1}{5}\pi + \frac{2}{5}\pi\_Z7\sim$$

Бачимо, що перша множина розв'язків ідентична тій, яку ми отримали, розв'язуючи дане рівняння вручну. Друга ж записана в іншому вигляді. Тому перевіримо, чи будуть числа множини $z = \frac{2}{5}arctg5 + \frac{2\pi m}{5}$, $m \in Z$ розв'язком нашого рівняння:

```
> j:=3*sin(5*z)-2*cos(5*z)=3;
```

$$j := 3\sin(5z) - 2\cos(5z) = 3$$

```
> eval(j,z=(2/5)*arctan(5)+2*Pi/5);
```

$$3\sin(2\arctan(5)) - 2\cos(2\arctan(5)) = 3$$

```
> evalf(%);
```

$$3.000000000 = 3.$$

А також перевіримо, чи розв'язок, виданий системою, буде правильним:

```
> eval(j,z=-(1/5)*arctan(5/12)+Pi/5+2*Pi/5);
```

$$3 = 3$$

Робимо висновок, що і перший, і другий розв'язки є розв'язками нашого рівняння.

9.7. Метод введення допоміжного кута

Іноді при розв'язуванні тригонометричних рівнянь корисно скористатися формулою $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi)$, де $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. У цьому випадку φ називається **допоміжним аргументом** або **допоміжним кутом**.

Сенс методу полягає в тому, що деяку величину подають як тригонометричну функцію відповідного аргументу φ, а потім роблять тригонометричні перетворення.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x = 1$.

Розв'язання

1-й спосіб:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 5x=1 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 5x+\sin\frac{\pi}{6}\sin 5x=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}-5x\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow 5x-\frac{\pi}{6}=2\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in Z.$$

У процесі розв'язування ми врахували той факт, що якщо $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{1}{2}$, то φ можна покласти таким, що дорівнює $\frac{\pi}{6}$.

2-й спосіб:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 5x=1 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\cos 5x+\cos\frac{\pi}{3}\sin 5x=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+5x\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+5x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$$

$$\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in Z.$$

Відповідь: $\left\{\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5} \middle| n\in Z\right\}$.

Приклад 19. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

Розв'язання

Оскільки $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2}=2$, то поділимо обидві частини нашого рівняння на 2 і введемо допоміжний кут: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

$n\in Z \Leftrightarrow x=\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. Даний розв'язок можна розписати як $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow x=\pi n,\ n\in Z$, якщо n – непарне або $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$, якщо n – парне.

Відповідь: $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi n \middle| n\in Z\right\}$.

Розв'яжемо приклад 19 в системі Maple, застосовуючи smart-спосіб для розв'язування рівнянь:

```
> sqrt(3)*sin(x)-cos(x)=1;
```

$$\sqrt{3}\sin(x)-\cos(x)=1$$

```
> R0 := solve({sqrt(3)*sin(x)-cos(x) = 1});
```

$$R0 := \{x=\pi+2\pi\_Z8\sim\},\ \{x=\frac{1}{3}\pi+2\pi\_Z9\sim\}$$

Як бачимо, одержані в системі Maple розв'язки, є сукупностями коренів, які були отримані при непарному та парному *n*.

9.8. Розв'язування тригонометричних рівнянь способом підстановки

У деяких раніше розглянутих рівняннях застосовувалася заміна змінної, коли ці рівняння зводилися до алгебраїчних відносно однієї з тригонометричних функцій. Розглянемо більш складні випадки заміни змінних.

Приклад 20. Розв'язати рівняння $\sin^4 x+\cos^4 x-\sin 2x+\frac{1}{2}=0$.

Розв'язання

Скористаємося формулою $a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2$, тоді

$$\sin^4 x+\cos^4 x-\sin 2x+\frac{1}{2}=0 \iff$$

$$\iff \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin 2x+\frac{1}{2}=0 \iff$$

$$\iff 1-2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin x\cos x+\frac{1}{2}=0 \iff$$

$$\iff -2(\sin x\cos x)^2-2(\sin x\cos x)+\frac{3}{2}=0$$. Зробимо заміну $\sin x\cos x=t$:

$$-2t^2-2t+\frac{3}{2}=0 \iff 4t^2+4t-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{3}{2},\\ t=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$ Повернемось до заміни:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x\cos x=-\frac{3}{2},\\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sin 2x=-\frac{3}{2},\\ \frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=-3,\\ \sin 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n \middle| n\in Z\right\}.$

Приклад 21. Розв'язати рівняння $4-4(\cos x-\sin x)-\sin 2x=0$.

Розв'язання

Позначивши $z=\cos x-\sin x$, дістанемо $z^2=(\cos x-\sin x)^2=\cos^2 x-$ $-2\cos x\sin x+\sin^2 x=1-\sin 2x \Rightarrow \sin 2x=1-z^2$. Тоді початкове рівняння запишеться у вигляді $4-4z-\left(1-z^2\right)=0 \Leftrightarrow z^2-4z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1,\\ z=3.\end{array}\right.$

Повернемось до заміни:

$$\cos x-\sin x=1, \qquad (1)$$

або $\cos x-\sin x=3$. (2)

Найпростішим методом розв'язування рівняння (1) є метод введення допоміжного кута:

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Друге рівняння сукупності (2) розв'язків не має, оскільки $|\cos x-\sin x|=\left|\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2}$, а число $3>\sqrt{2}$.

Відповідь: $\left\{-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n \middle| n\in Z\right\}.$

```
> solve(4-4*(cos(x)-sin(x))-sin(2*x)=0,x);
```

$$-\frac{1}{2}\pi,\ 0,\ \arctan\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{7}, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{7}\right),\ \arctan\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{7}, \frac{3}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{7}\right)$$

Перші дві серії коренів відповідають розв'язку, отриманому «вручну», останні дві містять уявну одиницю, тому ними можна знехтувати.

9.9. Розв'язування тригонометричних рівнянь із застосуванням комбінованих способів

Приклад 22. Розв'язати рівняння $(\sin x - 1)(tgx + 1) = 0$.

Розв'язання

Наведемо дві форми запису розв'язання вихідного рівняння.

I форма запису розв'язання.

ОДЗ: $\cos x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\; n \in Z$.

Знаходимо значення x, що задовольняють рівняння $\sin x - 1 = 0$ і $tgx + 1 = 0$; якщо $\sin x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\; k \in Z$; якщо $tgx + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; tgx = -1 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{4} + \pi m,\; m \in Z$.

Оскільки через ОДЗ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\; n \in Z$, то серія розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\; k \in Z$ непридатна, вона не входить в ОДЗ, і, відповідно, є лише друга серія розв'язків $x = -\frac{\pi}{4} + \pi m,\; m \in Z$.

Відповідь: $\left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi m \middle| m \in Z \right\}$.

II форма запису розв'язання.

$$(\sin x - 1)(tgx + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x - 1 = 0, \\ tgx + 1 = 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\; n \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\; k \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m,\; m \in Z; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{4} + \pi m,\; m \in Z.$$

Відповідь: $\left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi m \middle| m \in Z \right\}$.

```
> solve((sin(x)-1)*(tan(x)+1)=0);
```

$$-\frac{1}{4}\pi + \pi\_Z12\sim, \frac{1}{2}\pi + 2\pi\_Z13\sim$$

З двох отриманих секцій розв’язків випливає розв’язок, виданий у першій секції.

Приклад 23. Розв’язати рівняння $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$. У відповіді зазначте кількість розв’язків на проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв’язання

Скористаємось формулами зведення для правої частини рівняння.

$$\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \cos 3x = -2\cos x \Leftrightarrow \cos 3x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 2\cos 2x + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \\ \cos 2x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \\ 2x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Для $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{3}$. Отже розв’язків на відрізку $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ два.

Відповідь: 2.

Приклад 24. Розв’язати рівняння $\sqrt{\cos x} = \sin x$.

Розв’язання

$$\sqrt{\cos x} = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \cos x \geq 0, \\ \left(\sqrt{\cos x}\right)^2 = (\sin x)^2 \end{cases}$$

Перші дві тригонометричні нерівності нашої комбінованої системи розв’язуємо з урахуванням властивостей тригонометричних функцій. Тоді маємо:

$$\begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos^2 x + \cos x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \;\; k \in Z, \\ x = \pm\arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi n, \;\; n \in Z. \end{cases} \Leftrightarrow \;\; x = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi n, \;\; n \in Z,$$

оскільки друга серія розв'язків зі знаком «–» не задовольняє нерівність $2\pi k \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \;\; k \in Z$.

Відповідь: $\left\{ \arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi n \middle| n \in Z \right\}$.

```
> `Рівняння_24`:=sqrt(cos(x))=sin(x);
```

$$Ð³âíÿííÿ\_24 := \sqrt{\cos(x)} = \sin(x)$$

Перевіримо правильність знайдених коренів. Для цього згенеруємо координати деякої сукупності точок, абсциси яких збігаються зі значеннями кореня:

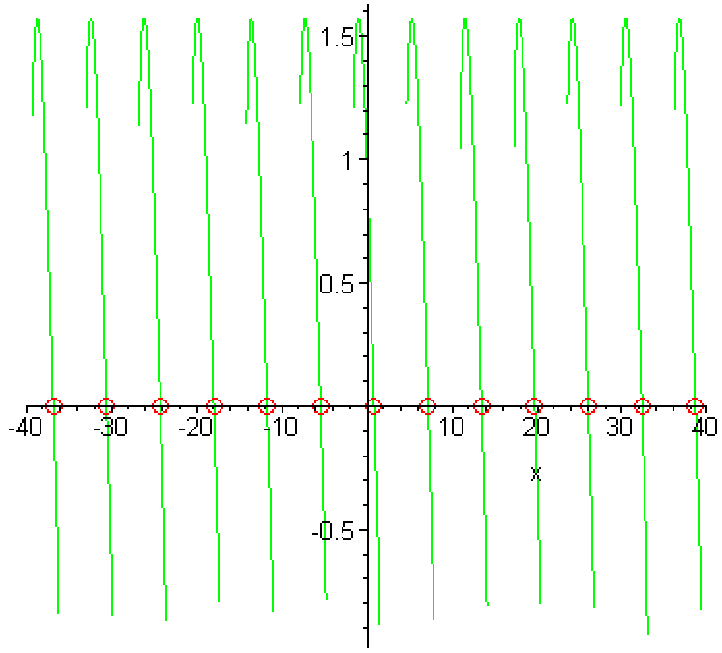
```
> `Корені_24`:=arccos((sqrt(5)-1)/2)+2*Pi*k;
`xy_24`:=seq([evalf(`Корені_24`),0],k=-10..10);
```

$$Êîðåí³\_24 := \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2\,\pi\,k$$

xy_24 := [-61.92729618, 0], [-55.64411087, 0], [-49.36092556, 0], [-43.07774026, 0], [-36.79455495, 0], [-30.51136964, 0], [-24.22818433, 0], [-17.94499902, 0], [-11.66181372, 0], [-5.378628413, 0], [.9045568953, 0], [7.187742203, 0], [13.47092752, 0], [19.75411282, 0], [26.03729813, 0], [32.32048344, 0], [38.60366875, 0], [44.88685406, 0], [51.17003936, 0], [57.45322467, 0], [63.73640998, 0]

Побудуємо графік

```
> plot([[`xy_24`],lhs(`Рівняння_24`)-
rhs(`Рівняння_24`)],x=-40..40,style=[point,line],
symbol=circle,symbolsize=17,scaling=unconstrained);
```



Із графіка видно, що корені знайдені правильно.

Приклад 25. Розв'язати рівняння $3\sin^7 x + 5\cos^{16} x = 8$.

Розв'язання

Оскільки $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, то

$\left|3\sin^7 x + 5\cos^{16} x\right| \le 3\left|\sin^7 x\right| + 5\left|\cos^{16} x\right| \le 3 + 5 = 8$. Знак «=» з урахуванням наведених нерівностей може мати місце тільки у тому випадку, коли

$$\begin{cases} \sin^7 x = 1, \\ \cos^{16} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \left|\cos x\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \; x \in \varnothing \text{ (оскільки } \sin^2 x + \cos^2 x = 1\text{)}.$$

Відповідь: $\varnothing$.

```
> `Рівняння_25`:=3*sin(x)^7+5*cos(x)^16=8;
```

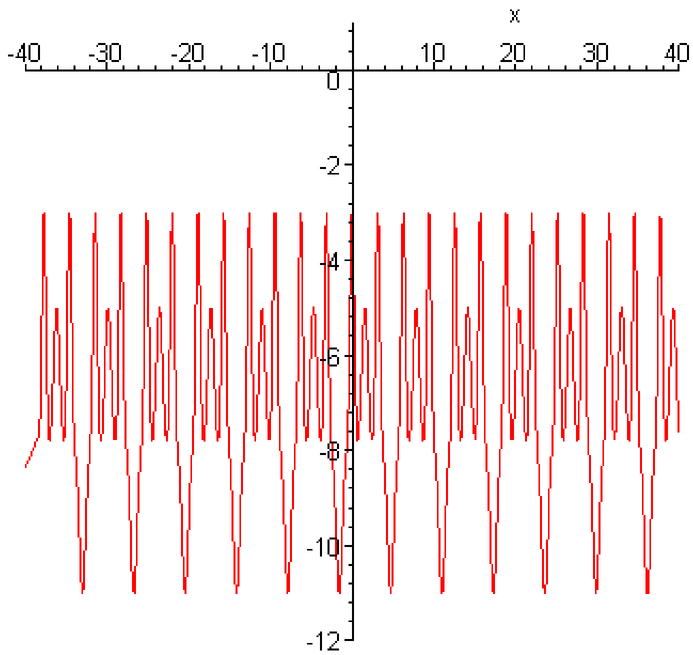
$$Ð³âíÿííÿ\_25 := 3\sin(x)^7 + 5\cos(x)^{16} = 8$$

Перенесемо праву частину рівняння в ліву і побудуємо графік виразу

```
> 3*sin(x)^7+5*cos(x)^16-8;
```

$$3\sin(x)^7 + 5\cos(x)^{16} - 8$$

```
> plot([lhs(`Рівняння_25`)-rhs(`Рівняння_25`)],x=-
40..40,-
12..1,style=[line],symbol=circle,symbolsize=17,
scaling=unconstrained);
```



Із графіка видно, що точок перетину з віссю абсцис не існує, отже відповідь правильна.

9.10. Розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами та завдань із застосуванням тригонометричних функцій підвищеної складності

Приклад 26. Визначити кількість цілих значень параметра *a*, при яких рівняння $4\cos x = a+1$ має розв'язки.

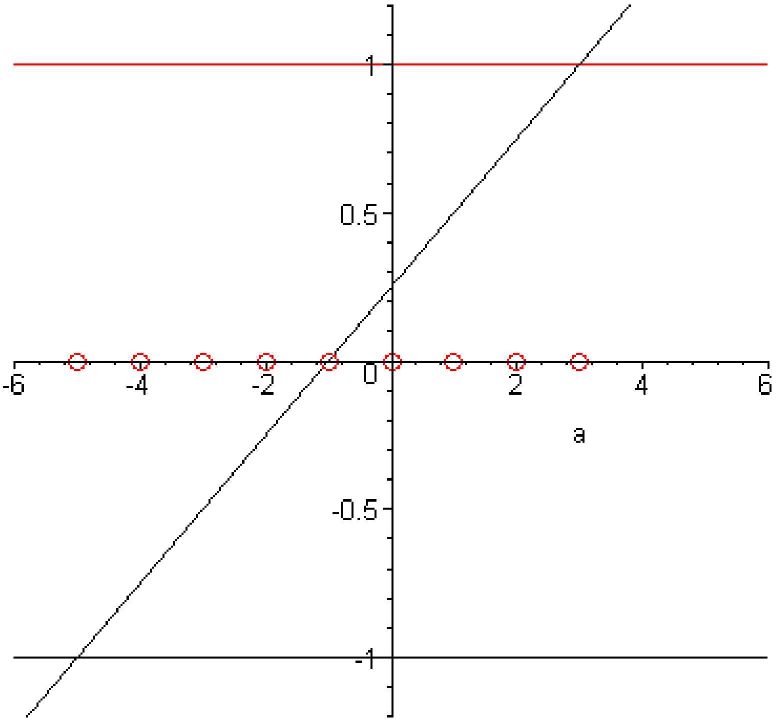
Розв'язання

$4\cos x = a+1 \iff \cos x = \dfrac{a+1}{4}$. За властивістю функції $y=\cos x$ – $|\cos x| \le 1$, тому $\left|\dfrac{a+1}{4}\right| \le 1 \iff -1 \le \dfrac{a+1}{4} \le 1 \iff -5 \le a \le 3$. Цілими значеннями, які належать отриманому проміжку, є: –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3. Їх кількість – 9.

Відповідь: 9.

Побудуємо графік прямої $\dfrac{a+1}{4}$, горизонтальних прямих $y=-1$ і $y=1$ та отриманих цілочислових значень параметра *a*.

```
> plot([[seq([k,0],k=-5..3)],(a+1)/4,-1,1],a=-6..6,-1.2..1.2,style=[point,line$3],symbol=circle,symbolsize=17,scaling=unconstrained,color=[red,black$2]);
```



Графіка наочно показує результати розв'язання.

Приклад 27. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \cos\pi(x-1)=1+(y-1)^2, \\ \sin\frac{\pi y}{2}=x^2+2x+2. \end{cases}$ У відповідь запишіть добуток $x_0 y_0$, якщо $(x_0;\ y_0)$ – розв'язок системи рівнянь.

Розв'язання

Згідно з властивостями тригонометричних функцій, що $|\cos\pi(x-1)|\le 1$ та $\left|\sin\frac{\pi y}{2}\right|\le 1$, отримаємо: $\begin{cases} -1\le 1+(y-1)^2\le 1, \\ -1\le x^2+2x+2\le 1; \end{cases}$ звідки $\begin{cases} -2\le (y-1)^2\le 0, \\ -2\le (x+1)^2\le 0. \end{cases}$ Дана система нерівностей виконується лише при $y=1$; $x=-1$.

Тоді добуток $x_0 y_0 = 1\cdot(-1)=-1$.

Відповідь: -1.

В даному випадку ми маємо трансцендентні рівняння. Слід розуміти, що розв'язання трансцендентних, зокрема, тригонометричних, рівнянь є задачею складною для будь-якої системи символьної математики. Цей приклад зайвий раз показує, що вузький набір інструментів стандартного застосування системи далеко не завжди приводить до успіху. Дійсно, спробуємо знайти розв'язок системи рівнянь:

```
> restart:
with(RealDomain):
```

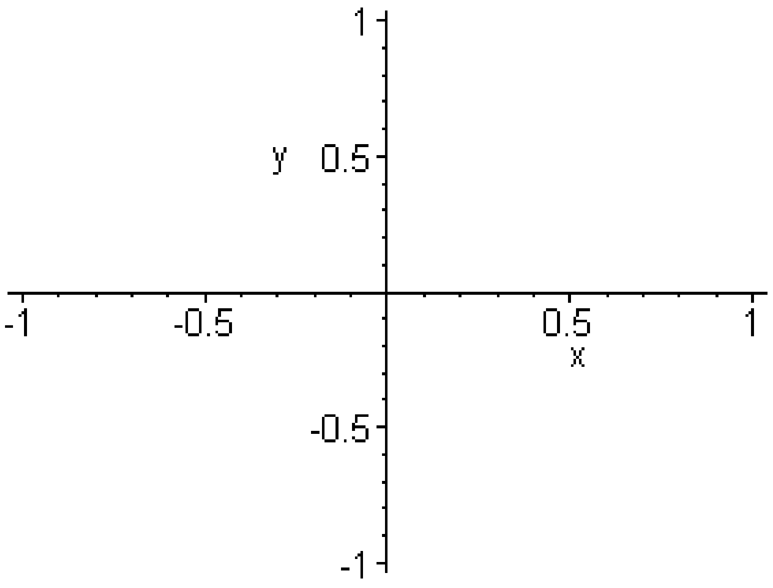
```
Warning, these protected names have been redefined and unprotected: Im, Re, ^, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech, signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan, tanh
```

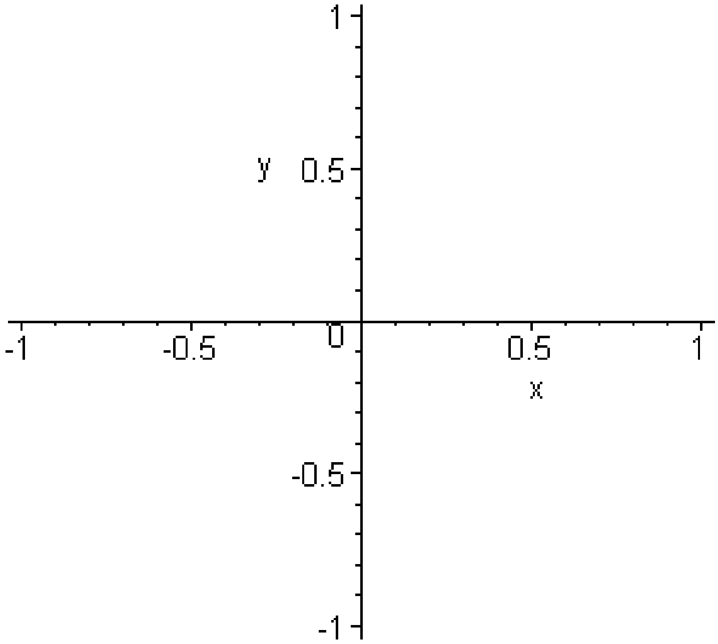
```
> solve({cos(Pi*(x-1))=1+(y-1)^2,sin(Pi*y/2)=x^2+2*x+2},{x,y});
```

Команда solve розв'язок знайти не змогла.

Спробуємо побудувати графіки заданих ліній. В даному випадку кожне з рівнянь подано у вигляді неявної функції. Для побудови графіків функцій, що задані неявно, в Maple існує команда **plots[implicitplot]:**

```
> plots[implicitplot](cos(Pi*(x-1))=1+(y-1)^2, x=-2..2,y=-2..2);
plots[implicitplot](sin(Pi*y/2)=x^2+2*x+2,    x=-2..2, y=-2..2);
```





Графіки рівнянь відсутні!

Спробуємо застосувати команду наближеного знаходження розв'язків рівнянь та систем рівнянь

```
> fsolve({cos(Pi*(x-1))=1+(y-1)^2,sin(Pi*y/2)=x^2+2*x+2},{x,y},{x=-1.5..0,y=0.5..1.5});
```

$$\mathrm{fsolve}\left(\{\cos(\pi(x-1))=1+(y-1)^2, \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)=x^2+2x+2\}, \{x, y\}, \{x=-1.5..0, y=.5..1.5\}\right)$$

І в такий спосіб успіху не досягли.

Перевіримо, чи задовольняє вихідну систему рівнянь розв'язок, знайдений ручним способом:

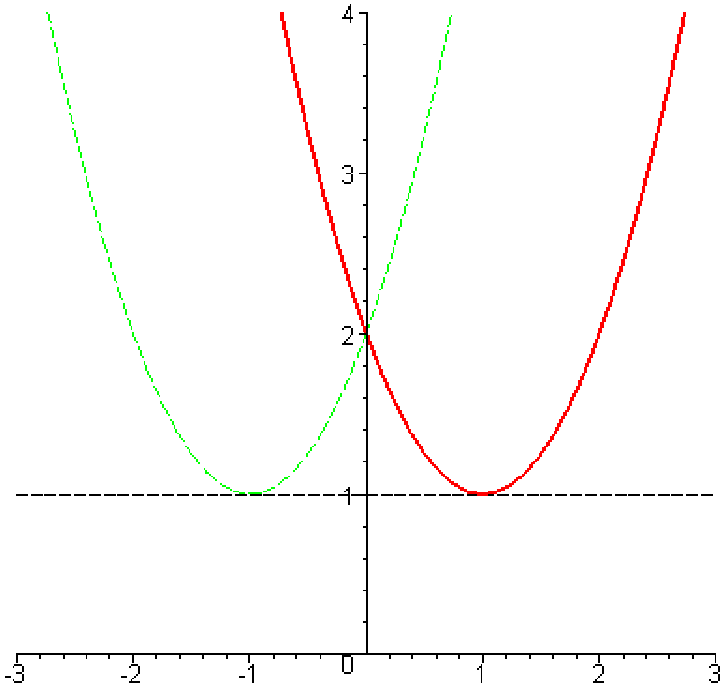
```
> subs(x=-1,y=1,[cos(Pi*(x-1))=1+(y-1)^2,sin(Pi*y/2)=x^2+2*x+2]);eval(%);
```

$$\left[\cos(-2\pi)=1, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\right]$$

$$[1=1, 1=1]$$

Ми впевнилися, що знайдений розв'язок систему задовольняє. Для того, щоб отримати наочну ілюстрацію, побудуємо графіки правих частин рівнянь

```
> plot([[y,1+(y-1)^2,y=-3..3],[x,x^2+2*x+2,x=-3..3],1], -3..3,0..4,linestyle=[1,3$2],thickness=[2,1$2],color=[red,green,black]);
```



Із побудованих графіків видно, що тільки при $x \approx -1,\ y = 1$ праві частини рівнянь досягають значення 1, залишаючись більше 1 при інших x, y. Оскільки ліві частини рівнянь не можуть приймати значення більші за 1, то це означає, що за умови існування розв'язку наближений розв'язок дорівнює $x \approx -1,\ y = 1$. Команда fsolve знаходить розв'язок із будь-якою точністю. Але для цього потрібно вказати прийнятний відрізок, на якому знаходиться корінь.

```
> fsolve({cos(Pi*(x-1))=1+(y-1)^2,sin(Pi*y/2)
=x^2+2*x+2},{x,y},{x=-1.1..-0.9,y=0.9..1.1});
```

$$\{x = -.9999999998, y = 1.000000000\}$$

Межі «прийнятного відрізка» потрібно визначати в кожному конкретному випадку методом підбору.

Приклад 28. Зазначте кількість розв'язків рівняння

$\sqrt{\sin x}\left(4 - 5\cos x - 2\sin^2 x\right) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання

ОДЗ: $\sin x \geq 0 \ \Leftrightarrow\ 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

Кожний множник вихідного рівняння прирівняємо до нуля:

$\sqrt{\sin x} = 0 \ \Leftrightarrow\ \sin x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \pi n, n \in Z$ або $4 - 5\cos x - 2\sin^2 x = 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 4 - 5\cos x - 2\left(1 - \cos^2 x\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 2, \\ \cos x = \dfrac{1}{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Отже загальний розв'язок можна записати у вигляді сукупності $\left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in Z, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z.\end{array}\right.$ А, враховуючи ОДЗ, коренями на проміжку $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ є 0 і $\dfrac{\pi}{3}$.

```
> restart:
with(RealDomain):
Warning, these protected names have been redefined and unprotected: Im, Re, ^, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech, signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan, tanh
> solve(sqrt(sin(x))*(4-5*cos(x)-2*(sin(x))^2));
```

$$0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

Перевіримо, чи задовольняють отримані розв'язки вихідне рівняння

```
> subs(x=0,sqrt(sin(x))*(4-5*cos(x)-2*(sin(x))^2));eval(%);
subs(x=Pi/3,sqrt(sin(x))*(4-5*cos(x)-2*(sin(x))^2));eval(%);
subs(x=-Pi/3,sqrt(sin(x))*(4-5*cos(x)-2*(sin(x))^2));eval(%);
```

$$\sqrt{\sin(0)}\,(4 - 5\cos(0) - 2\sin(0)^2)$$

$$0$$

$$\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left(4 - 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right)$$

$$0$$

$$\sqrt{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\left(4 - 5\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)$$

$$0$$

І в останньому випадку при $x=-\frac{\pi}{3}$ система «не помітила», що корінь із від'ємного числа не існує. Якщо ж замість команди subs застосувати команду eval, сторонній корінь система розпізнає:

```
> eval(sqrt(sin(x))*(4-5*cos(x)-2*(sin(x))^2),x=0);
eval(sqrt(sin(x))*(4-5*cos(x)-2*(sin(x))^2),x=Pi/3);
eval(sqrt(sin(x))*(4-5*cos(x)-2*(sin(x))^2),x=-Pi/3);
```

$$0$$

$$0$$

$$undefined$$

Undefined – невизначений.

Відповідь: 2 розв'язки.

Приклад 29. Знайдіть усі дійсні значення параметра a, при яких рівняння $\sin 2x-(a+2)(\sin x+\cos x)+2a+1=0$ має розв'язок.

Розв'язання

Замінимо $\sin x+\cos x$ через t, тоді $(\sin x+\cos x)^2=t^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2 \Leftrightarrow 1+\sin 2x=t^2$, звідси $\sin 2x=t^2-1$.

Отже, рівняння набуває вигляду $t^2-1-(a+2)t+2a+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2-(a+2)t+2a=0$. Розв'яжемо квадратне рівняння відносно змінної t:

$$D=(a+2)^2-4\cdot 2a=a^2+4a+4-8a=a^2-4a+4=(a-2)^2;$$

$$t_{1,2}=\frac{a+2\pm\sqrt{(a-2)^2}}{2}=\frac{a+2\pm|a-2|}{2} \Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{a+2\pm(a-2)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=a. \end{array}\right.$$

Зробимо оцінку t, для цього розділимо обидві частини рівності $\sin x+\cos x=t$ на $\sqrt{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{t}{\sqrt{2}}$; за допомогою введення допоміжного кута $\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{t}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{t}{\sqrt{2}}$ (I).

Оскільки $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le 1$, то й $\left|\frac{t}{\sqrt{2}}\right|\le 1$, тобто $-1\le\frac{t}{\sqrt{2}}\le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$, або $|t|\le\sqrt{2}$.

Отже, $t=2$ не задовольняє наші умови, тому $t=a$, а оскільки $|t|\le\sqrt{2}$, то і $|a|\le\sqrt{2}$, і з рівності (I) $\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}+\pi n,\ \ n\in Z\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}+\pi n,\ \ n\in Z.$$

Відповідь: для $\left[\begin{array}{l} a>\sqrt{2}, \\ a<-\sqrt{2} \end{array}\right.$ розв’язків немає;

для $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$ $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}+\pi n,\ \ n\in Z$.

```
> restart:
```

В цьому прикладі Maple може допомогти на етапі дослідження функції $\sin(x)+\cos(x)$

```
> minimize(sin(x)+cos(x), x=0..2*Pi, location=true);
maximize(sin(x)+cos(x), x=0..2*Pi, location=true);
```

$$-\sqrt{2},\ \left\{\left[\ \left\{x=\frac{5\pi}{4}\right\},-\sqrt{2}\right]\right\}$$

$$\sqrt{2},\ \left\{\left[\ \left\{x=\frac{\pi}{4}\right\},\sqrt{2}\right]\right\}$$

Команди **minimize** та **maximize** допомогли визначити найбільше та найменше значення, що їх може приймати функція $\sin(x)+\cos(x)$.

Отже, значення параметра а, при яких рівняння має розв’язок, визначаються умовою $|a|\le\sqrt{2}$.

Оскільки $\cos(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, можемо записати

```
> trigsubs(sin(x)+sin(y));
subs(y=Pi/2-x,op(%));
eval(%);
_EnvAllSolutions:=true:
%%=a;
solve(%,x);
```

$$\left[2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\right]$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=a$$

$$-\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)-2\arcsin\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\_B1\sim+2\pi\_Z3\sim+\pi\_B1\sim$$

```
> about([_B1,_Z3]);
[_B1, _Z3]:
 is used in the following assumed objects
 [_Z3] assumed integer
 [_B1] assumed OrProp(0,1)
```

За допомогою команди **about** ми дізналися, що одна із згенерованих системою змінних може приймати тільки цілі значення, а інша – тільки значення 0 або 1.

Система правильно знайшла корінь останнього рівняння, але форма його виведення для нас незручна.

Приклад 30. Зазначте усі дійсні значення параметра a, при яких рівняння $\frac{a^2}{1-tg^2x}=\frac{\sin^2x+a^2-2}{\cos 2x}$ має розв'язки. Знайдіть ці розв'язки.

Розв'язання

Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ 1-tg^2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ tgx\neq\pm 1,\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z,\\ x\neq\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z.\end{cases}$$

Оскільки перше й друге значення однакові, то в ОДЗ входять будь-які x, окрім $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ (I) і $x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z$ (II).

Перетворимо вихідне рівняння за допомогою тригонометричних формул: $\frac{a^2}{1-tg^2x}=\frac{\sin^2x+a^2-2}{\cos 2x}\Leftrightarrow\frac{a^2}{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{\sin^2x+a^2-2}{\cos^2x-\sin^2x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2\cos^2x}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{\sin^2x+a^2-2}{\cos^2x-\sin^2x}.$$

Врахувавши ОДЗ: $a^2\cos^2x=\sin^2x+a^2-2\Leftrightarrow a^2\cos^2x=1-\cos^2x+a^2-2$ $\Leftrightarrow a^2\cos^2x+\cos^2x=a^2-1\Leftrightarrow\cos^2x\left(a^2+1\right)=a^2-1$. Оскільки $a^2+1>0$ для будь-яких a, то $\cos^2x=\frac{a^2-1}{a^2+1}$; згідно з формулою пониження степеня маємо $\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{a^2-1}{a^2+1} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{2(a^2-1)}{a^2+1}-1 \Leftrightarrow$

$\cos 2x=\frac{2a^2-2-a^2-1}{a^2+1} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{a^2-3}{a^2+1}$. Оскільки $|\cos 2x|\le 1$, то й

$\left|\frac{a^2-3}{a^2+1}\right|\le 1$ або $-1\le\frac{a^2-3}{a^2+1}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a^2-3}{a^2+1}\le 1,\\ \frac{a^2-3}{a^2+1}\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3\le a^2+1,\\ a^2-3\ge -a^2-1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}a\in R,\\ a^2\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a\ge 1,\\ a\le -1.\end{array}\right.$ Крім того, згідно з (I) і (II), отримане рівняння

$\cos 2x=\frac{a^2-3}{a^2+1}$ має розв'язок, якщо $\begin{cases}\cos 2\left(\pm\frac{\pi}{4}+\pi m\right)\ne\frac{a^2-3}{a^2+1},\\ \cos 2\left(\frac{\pi}{2}+\pi m\right)\ne\frac{a^2-3}{a^2+1}\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\ne\frac{a^2-3}{a^2+1},\\ \cos(\pi+2\pi m)\ne\frac{a^2-3}{a^2+1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\ne\frac{a^2-3}{a^2+1},\\ -1\ne\frac{a^2-3}{a^2+1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\ne\pm\sqrt{3},\\ a\ne\pm 1.\end{cases}$$

Отже, $\cos 2x=\frac{a^2-3}{a^2+1}$ для $|a|>1$, $|a|\ne\sqrt{3}$, $2x=\pm\arccos\frac{a^2-3}{a^2+1}+2\pi l,\ l\in Z$

$\Leftrightarrow\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a^2-3}{a^2+1}+\pi l,\ l\in Z$.

Відповідь: для $|a|\le 1$ і $|a|=\sqrt{3}$ розв'язків немає.

для $|a|>1$ і $|a|\ne\sqrt{3}$ $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a^2-3}{a^2+1}+\pi l,\ l\in Z$.

9.11. Тренувальні вправи

Завдання 1. Розв'язати найпростіші тригонометричні рівняння.

1. $\cos 5x=1$.
2. $\sin\frac{\pi x}{2}=1$.
3. $\cos 2x=-1$.
4. $tgx=\frac{3\pi}{2}$.

5. $\sin\frac{x}{9}=-\frac{1}{2}$.

6. $ctg 8x=\sqrt{3}$.

7. $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

8. $tg\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=1$.

9. $ctg\left(4x-\frac{\pi}{9}\right)=-\sqrt{3}$.

10. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

11. $\frac{\sin x+1}{\cos x}=0$.

12. $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x-1}=0$.

13. $\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{tgx+1}=0$.

14. $\cos\sqrt{x-1}=0$.

15. $\sin\left(x^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. Визначити найменший розв’язок рівняння $\sqrt{3}+2\sin\frac{\pi x}{18}=0$, який належить проміжку (20; 60).

Завдання 2. Розв’язати рівняння способом приведення до однієї з функцій.

1. $3\sin x-2\cos^2 x=-3$.
2. $2ctgx-tgx-1=0$.
3. $4\cos^2 x+\sin x=1$.
4. $2\sin^2 2x+\cos 2x=1$.
5. $3\sin\frac{x}{5}=2\cos^2\left(\frac{x}{5}+\pi\right)$.
6. $\sin^4 8x-4\cos^2 8x=-\frac{7}{16}$.

Завдання 3. Розв'язати однорідні рівняння і ті, що до них зводяться.

1. $6\sin x + 7\cos x = 0$.
2. $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.
3. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.
4. $2\sin^2 x + \cos^2 x = 5\sin x\cos x$.
5. $6\sin^2 3x + \sin 3x\cos 3x - \cos^2 3x = 2$.
6. $\sin^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x + 5\cos^4 x = 0$.

Завдання 4. Розв'язати рівняння за допомогою універсальної підстановки.

1. $2\sin x + 3\cos x = 3$.
2. $5\sin x - \cos x = 1$.
3. $5\sin 2x + 12\cos 2x = -12$.
4. $\sin 2z + \cos 2z = tgz$.

Завдання 5. Розв'язати рівняння методом введення допоміжного аргументу.

1. $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3}$.
3. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$.
4. $\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} = 1$.
5. $\sqrt{2}\sin 8x - \cos 8x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
6. $2\sin x - \cos x = \frac{4}{5}$.

Завдання 6. Розв'язати рівняння, застосовуючи формули пониження степеня.

1. $\sin^2 3x = \frac{3}{4}$.
2. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2}$.
3. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.
4. $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 1$.
5. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.
6. $\sin^2(7 + 6x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right) = \cos^2(7 - 10x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 12x\right)$.

7. Вказати кількість розв'язків рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ на проміжку $[0;\ \pi]$.

Завдання 7. Розв'язати рівняння, використовуючи заміну змінної.

1. $(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$.
2. $6tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - tg\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \sqrt{3} = 0$.
3. $\sin 2x = \sin x + \cos x$.
4. $ctg^4 2z = \cos^2 4z + 1$.
5. $\sin^4 x + \cos^4 x - \sin 2x + \frac{1}{2} = 0$.
6. $\frac{1 + \cos 3x}{2 - \cos 3x} = 2\cos^2 3x$.

Завдання 8. Розв'язати тригонометричні рівняння, використовуючи різні методи.

1. $\sin\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}$.
2. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
3. $\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x = \frac{1}{2}$.
4. $2\cos^2\frac{x}{4} - 1 = -2$.
5. $\cos^3 x + \cos^2 x = 0$.
6. $9\sin x \cos 3x = \sin x$.
7. $2\cos x \cos 4x + \cos x - 2\cos 4x - 1 = 0$.
8. $ctgx - \sin 2x ctgx = 0$.
9. $(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x$.
10. $(1 - \cos 6x)\cos 20x = \sin^2 3x$.
11. $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$.
12. $\sin 3x = \cos x + \sin(x + 93\pi)$.
13. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(15\pi + 6x)$.
14. $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$.
15. $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.

16. $\sin\left(\frac{x}{2}+33^\circ\right)\sin\left(\frac{x}{2}-12^\circ\right)=\sin\left(78^\circ+\frac{x}{2}\right)\sin\left(57^\circ-\frac{x}{2}\right)$.

17. $\sin 3x=-\sin x\cos^2 2x$.

18. $\cos 9x=-2\cos 3x$.

19. Зазначте кількість розв'язків рівняння
$2\sin 5x\cos 6x+\sin x=2\sin 7x\cos 4x$ на проміжку $[0;\ \pi]$.

20. Зазначте кількість розв'язків рівняння $tgx-2\cos x=1-2tgx\cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

21. $1+2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x$.

22. $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$.

23. $\sin^2 5x+1=\cos^2 3x$.

24. $2\sin^2 x+tg^2 x=2$.

25. $\sqrt{\sin x}=\cos x$.

26. $\sqrt{2\cos x-1}=-\sin x$.

27. $\sqrt{9-16tgx}=4tgx-1$.

28. $2\sin^5 x+3\cos^{10} x=5$.

29. $\cos 2x=1+y^2$.

30. $\sqrt{9-x^2}\sin 2x=0$.

9.12. Орієнтовна контрольна робота № 9

1. Розв'язати рівняння: $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-\sqrt{2}$.
2. Розв'язати рівняння: $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5}=0$.
3. Розв'язати рівняння: $3\sin x-2\cos^2 x=-3$.
4. Розв'язати рівняння: $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0$.
5. Розв'язати рівняння: $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2$.

Список літератури

1. Аладьев В. З. Программирование и разработка приложений в Maple: монография / В. З. Аладьев, В. К. Бойко, Е. А. Ровба. - Гродно : ГрГУ; Таллинн : Межд. акад. Ноосферы, Балт. отд., 2007. – 458 с.
2. Аладьев В. З. Эффективная работа в Maple 6/7 / Аладьев В. З. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 336 с.
3. Алєксєєв В. М. Математика. Довідковий повторювальний курс : навч. посібник / Алєксєєв В. М., Ушаков Р. П. ; за ред. М. Й. Ядренка. – К. : Вища шк., 1992. – 295 с.
4. Алексеев Е. Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9 / Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. – М. : НТ Пресс, 2006. – 496 с.
5. Бондаренко М. Ф. Математика для вступників до вузів : навч. посібник / М. Ф. Бондаренко, В. А. Дікарєв, О. Ф. Мельников та інші. – Харків : «Компанія СМІТ», 2002. – 1120 с.
6. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель / Васильев А. Н. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 353 с.
7. Гальперіна А. Р. Математика. Типові тестові завдання : збірник / А. Р. Гальперіна, О. Я. Михєєва. – Х. : Веста, 2009. – 128 с. + Додат. (16 с.). – (Серія журналу «Вісник ТІМО»).
8. Дьяконов В. П. Maple 7 : учебный курс / Дьяконов В. П. – СПб. : Питер, 2002. – 672 с.
9. Дьяконов В. П. Maple 9 в математике, физике и образовании / Дьяконов В. П. – М. : СОЛОН-Пресс, 2004. – 688 с.
10. Егоров В. К. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / В. К. Егоров, В. В. Зайцев, Б. А. Кордомский ; под ред. М. И. Сканави. – М. : Высшая школа, 1992. – 528 с.
11. Кирсанов М. "Графы в Maple" / М. Кирсанов. – М. : Физматлит, 2007. – 168 с.
12. Литвиненко В. И. Практикум по элементарной математике / В. И. Литвиненко. – М. : Просвещение, 1991. – 352 с.
13. Манзон Б. М. Maple V Power Edition / Манзон Б. М. – М. : Информационно-издательский дом «Филин», 1998. – 240 с.
14. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / Матросов А. В. – СПБ. : БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.

15. Михалевич В. М. Математичне програмування разом з Maple. Частина І. Методи розв’язування задач лінійного програмування : навчальний посібник / Михалевич В. М. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 158 с.
16. Михалевич В. М. Maple. Комп’ютерна підтримка курсу вищої математики в технічному вузі. Частина І. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія : навчальний посібник. / Михалевич В. М. – Вінниця : ВНТУ, 2004. – 111 с.
17. Михалевич В. М. Excel-VBA-Maple програма генерації задач з дисциплін математичного спрямування // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2005. – № 2. – С. 74–83.
18. Письменный Д. Т. Готовимся к экзамену по математике : домашний репетитор / Письменный Д. Т. – М. : Рольф, 1999. – 288 с.
19. Прохоров Г. Математический пакет Maple V Release 4 : Руководство пользователя / Г. В. Прохоров, В. В. Колбеев, К. И. Желнов и др. – Калуга : Облиздат, 1998.
20. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: Maple 8. / Сдвижков О. А. – М. : Солон-пресс, 2003. – 176 с.
21. Тарасевич Ю. Информационные технологии в математике. / Тарасевич Ю. М. – М. : СОЛОН-Пресс, 2003. – 133 с.
22. Титаренко О. М. Форсований курс шкільної математики : навчальний посібник / Титаренко О. М. – Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2005. – 368 с.
23. Титаренко О. 5770 задач з математики з відповідями. / Титаренко О. М. – Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2005. – 336 с.

Українсько-англійський словник найуживаніших термінів

Абсциса – abscissa
Аргумент – argument
Арифметичний корінь – arithmetical root
Біквадратне рівняння – biquadratic
Вершина кута – vertex of angle
Визначити – evaluate
Виконати дії – to execute operations
Вираз – expression
Від’ємний – negative
Від’ємник – subtrahend
Віднімання – subtraction
Відношення – ratio
Відповідь – ansver
Відсоток – persent
Відстань – distance
Вісь абсцис – abscissa axis
Вісь ординат – ordinate axis
Властивість – property
Вправа – exercise
Гіпербола – hyperbole
Гострий кут – arris
Градус – degree
Графік – schedule
Двочлен – binomial
Декартові координати – cartesian coordinates
Десятковий дріб – decimal
Дискримінант – discriminant
Ділене – dividend
Ділення – division
Дільник – divisor
Добуток – product
Довжина – length
Доданок – item
Додатний – positive
Дріб – fraction
Дробова частина – fractional part
Дужки – brackets
Залежна змінна – dependent variable
Заміна – replacement
Зведення –reduction
Звичайний дріб – normal shot
Зменшуване – minuend
Змінна – change

Знайти – find
Знак – sign
Знаменник – denominator
Зростаюча функція – increasing function
Інтервал – interval
Ірраціональність – irrationality
Квадратне рівняння – quadratic
Квадратний корінь – square root
Квадратний тричлен – quadratic trinomial
Коефіцієнт – coefficient
Координата – coordinate
Корені рівняння – equation roots
Корінь – root
Корінь n-го степеня – n-th power root
Крайній член пропорції – extreme proportional
Кубічний корінь – cubical root
Кут – angle
Метод інтервалів – intervals method
Метод підстановки – method of substitution
Многочлен – polynomial
Множник – factor
Модуль – module
Наближене значення – approximate value
Наприклад – for example
Наступний – next
Натуральне число – natural number
Натуральний степінь – natural power
Невід'ємний – nonnegative
Непарний – odd
Неповне квадратне рівняння – partial quadratic
Неправильний дріб – improper fraction
Нерівність – inequality
Нескінченний – infinite
Нескінченність – infinity
Нестрога нерівність – unstrict inequality
Обернена пропорційність – inverse proportion
Об'єднання – union
Область визначення функції –domain of function
Область значень функції – range of function
Одночлен – monomial
Ордината – ordinate
Основа степеня – base power
Парабола – parabola
Парна функція – even function

Перевірка – check
Перестановка – permutation
Перетворення – transformation
Периметр – perimeter
Період – period
Періодичний дріб – periodical fraction
Підводити до другого (третього) степеня – raise to the second (third) power
Подібні члени – similar terms
Показник кореня – root exponent
Правило – rule
Приклад – example
Проміжок – interval
Пропорція – proportion
Процент – percentage
Пряма – straight line
Пряма пропорційність – direct proportionality
Радикал – radical
Радіус – radius
Раціональне число – rational number
Раціональність – rationality
Рівність – equality
Рівносильність – equivalence
Рівняння – equation
Різниця – difference
Розбивають – devide
Розв'язок – solution
Розв'язок системи – solution of system
Розклад – expansion
Розкласти на множники – factorial expansion
Симетричний – symmetrical
Система – system
Скінченний – finite
Скоротити дріб – reduce Fractions
Спадна функція – decreasing function
Співвідношення – ratio
Спільний множник – a common factor
Спосіб додавання – the way of adding
Спосіб підстановки – way of substitution
Спростити – simplify
Спряжений – conjugation
Степенева функція – power function
Степінь – power
Степінь полінома – degree of polynomial
Строга нерівність – strict inequality

Сума – sum
Таблиця – table
Тотожні перетворення – identical transformation
Тотожність – identity
Точка – point
Тригонометрична функція – trigonometric function
Трикутник – triangle
Узагальнений – generalized
Фігурна дужка – brace
Формула – formula
Функція – function
Цифра – figure
Ціла частина – integer part
Ціле число – integer
Чверть – quarter, quadrant
Чисельник – numerator
Числова вісь – number axis
Числова пряма – numerical line
Штриховка – shading

Навчальне видання

Михалевич Володимир Маркусович
Дода Анастасія Федорівна

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА
НОВІТНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ (MAPLE)
Ч. 2

Практикум

Редактор В. Дружиніна

Оригінал-макет підготовлено А. Додою

Підписано до друку
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк.
Наклад прим. Зам. №

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
Серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у вінницькому національному технічному університеті
в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021. м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-81-59.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
Серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.