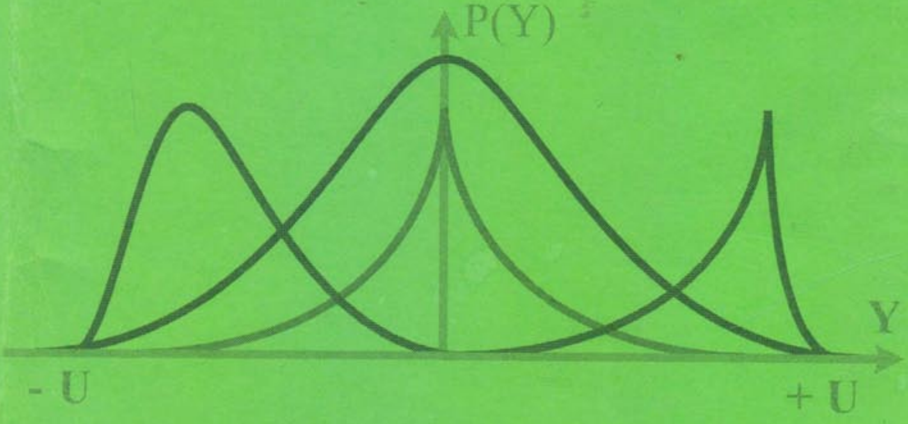
В. О. Поджаренко,

О. М. Васілевський,

В. Ю. Кучерук

ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ НА ОСНОВІ КОНЦЕПЦІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ



$$\nu_{eff} = (n-1)\frac{\left[u^2_{c_A}(y) + u^2_{c_B}(y)\right]^2}{u^4_A(y)}$$

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Поджаренко, О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук

ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ НА ОСНОВІ КОНЦЕПЦІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напряму підготовки "Метрологія та вимірювальна техніка". Протокол № 8 від 24 січня 2008 р.

Вінниця ВНТУ 2008

УДК 621.317: 389.14
П 44

Рецензенти:

П. Г. Столярчук, доктор технічних наук, професор
Р. Н. Квєтний, доктор технічних наук, професор
М. М. Биков, кандидат технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Поджаренко В. О., Васілевський О. М., Кучерук В. Ю.
П 44 **Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності.** Навчальний посібник. - Вінниця: ВНТУ, 2008.-128с.

У навчальному посібнику викладено основні положення міжнародного підходу до оцінювання якості вимірювань. Даний підхід розроблений Міжнародним комітетом мір і вагів та опублікований у вигляді «Керівництва з вираження невизначеності у вимірюваннях». Навчальний посібник містить послідовне викладення основ теорії невизначеності вимірювань, алгоритмів оцінювання невизначеностей, порядку додавання невизначеностей та форм подання невизначеностей результатів вимірювань. Навчальний посібник відповідає вимогам державних стандартів України та навчальній програмі дисципліни «Опрацювання результатів вимірювань, контролю та діагностики на основі теорії невизначеності вимірювань» і призначений для студентів напрямів підготовки «Метрологія, вимірювальна техніка та інформаційно-вимірювальні технології», «Автоматика та управління», «Інформатика та обчислювальна техніка» і аспірантів спеціальностей 05.11.08, 05.11.13, 05.13.05.

УДК 621.317: 389.14

ЗМІСТ

ВСТУП

При складанні звіту щодо результату вимірювання фізичної величини (physical size) необхідно подати кількісне зазначення якості результату так, щоб можна було правильно оцінити його надійність (reliability). Без такого зазначення результати вимірювань не можна порівняти ні між собою, ні з довідковими величинами, поданими у специфікації чи стандарті. Тому необхідно, щоб була легкоздійсненна, зрозуміла і загальноприйнята методика опрацювання результатів вимірювань на основі теорії невизначеності у вимірюваннях.

Поняття невизначеності як кількісної характеристики є порівняно новим у вимірюваннях, хоча похибка і аналіз похибки давно використовуються в метрології. У цей час загально визнано, що, коли вже оцінені всі відомі і допустимі компоненти похибки і внесені відповідні поправки, все ще залишається невизначеність відносно істинності встановленого результату, тобто сумніви у тому, наскільки добре результат вимірювання відображає значення вимірювальної величини (measuring size).

Так само як практично універсальне використання Міжнародної системи одиниць (SI) внесло узгодженість у всі наукові і технологічні вимірювання, так і всесвітня узгодженість в оцінці і вираженні невизначеності вимірювання повинна забезпечити належне розуміння і правильне використання широкого спектра результатів вимірювань в науці, техніці, торгівлі, промисловості. В еру світового ринку визначальним є те, щоб метод оцінювання і вираження невизначеності був однаковим у цілому світі, в результаті чого вимірювання, проведені в різних країнах, можна було легко порівняти.

Ідеальний метод оцінювання і вираження невизначеності результату вимірювання повинен бути універсальним: метод повинен бути придатним для всіх видів вимірювань і для всіх типів вхідних даних, що використовуються у вимірюваннях.

Величина, яка безпосередньо використовується для вираження невизначеності, повинна бути внутрішньо узгоджена: вона повинна бути безпосередньо виведена з компонентів, які її утворюють, а також не повинна залежати від згрупування цих компонентів і від їх розкладання на субкомпоненти; повинна бути можливість прямого використання невизначеності одного результату як компонента оцінки невизначеності іншого, в якому використовується перший результат.

Далі, у багатьох галузях промисловості і торгівлі, а також у сферах здоров'я і безпеки, часто необхідно подавати результат вимірювання з інтервалом, у якому, можливо, знаходиться більша частина розподілу значень, які обґрунтовано можуть характеризувати кількісно вимірювану величину. Таким чином, ідеальний метод оцінювання і вираження невизначеності повинен забезпечувати такий інтервал, зокрема, інтервал з ймовірністю охоплення або рівнем довіри, які реально відповідають йому.

Цей навчальний посібник базується на методах, наведених у Рекомендації INC I (1980) «Вираження експериментальних невизначеностей» робочої групи з встановлення невизначеностей, яку скликало Міжнародне бюро мір і вагів (МБМВ) у відповідь на запит Міжнародного комітету мір і вагів (МКМВ).

Невизначеність результату вимірювання у загальному випадку складається з кількох компонентів, які можна згрупувати у дві категорії, залежно від способу оцінювання їх числового значення: **тип А** – компоненти, оцінені статистичними методами; **тип В** – компоненти, оцінені іншими способами.

Між класифікацією на категорії А та В і класифікацією на "випадкові" і "систематичні" невизначеності, які раніше використовувалася, не завжди існує проста відповідність. Вираз "систематична невизначеність" (systematic uncertainty) може бути незрозумілим, його потрібно уникати.

Кожний детальний звіт про невизначеності повинен містити повний перелік компонентів і для кожного з них – метод, який використовувався при одержанні його числового значення.

Компоненти категорії А характеризуються оціненими дисперсіями S_i^2 (або оціненими "стандартними відхиленнями" S_i) і числом степенів вільності. У випадку необхідності слід зазначати коваріації.

Компоненти категорії В повинні характеризуватися величинами U_j^2, які можна розглядати як наближення до відповідних дисперсій, існування яких допускається. Величини U_j^2 можна розглядати як дисперсії, а U_j – як стандартні відхилення. При необхідності, коваріації повинні розглядатися аналогічно.

Сумарна невизначеність повинна характеризуватися числовим значенням, одержаним при застосуванні звичайного методу для складання дисперсій. Сумарна невизначеність і її компоненти повинні виражатися у формі "стандартних відхилень".

Якщо в окремих випадках для одержання загальної невизначеності сумарну невизначеність необхідно множити на коефіцієнт, то коефіцієнт множення повинен бути завжди зазначений.

З огляду на те, що Рекомендації INC I на сьогоднішній день є фактично стандартом вираження якості вимірювань у міжнародній практиці, необхідно впровадження їх положень в державні нормативні документи, а також вивчення їх у програмах вузів при підготовці бакалаврів та магістрів з метрології.

1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

1.1 Поняття невизначеності вимірювання

Слово "невизначеність" (uncertainty) означає сумнів, і, таким чином, у широкому сенсі "невизначеність вимірювання" означає сумнів щодо вірогідності результату вимірювання. Формальне означення терміна "невизначеність вимірювання" (uncertainty measuring), таке: **невизначеність вимірювання – параметр, пов'язаний з результатом вимірювання, який характеризує дисперсію значень, що можуть бути достатньо обґрунтовано приписані вимірюваній величині** [1].

Невизначеність результату вимірювання відображає відсутність точного знання значення вимірюваної величини. Результат вимірювання (measuring result) після внесення поправки на відомі систематичні ефекти залишається тільки оцінкою значення вимірюваної величини через невизначеності внаслідок випадкових ефектів і неточної поправки результату на систематичні ефекти.

Результат вимірювання (після внесення поправки) може бути максимально близьким до значення вимірюваної величини (і тому мати дуже малу похибку), навіть якщо він має велику невизначеність. Таким чином, невизначеність результату вимірювання не можна плутати з невідомою похибкою, що залишилась.

Оскільки точні значення складової похибки результату вимірювання невідомі і непізнавані, то невизначеності, пов'язані з випадковими і систематичними ефектами, що призводять до похибки, можуть бути оцінені. Але, навіть якщо оцінені невизначеності незначні, немає ніякої гарантії, що похибка (fault) результату вимірювання буде незначною, тому що при визначенні поправки або в оцінюванні неповноти знання якийсь систематичний ефект може не враховуватися, оскільки він не був розпізнаний. Таким чином, невизначеність результату вимірювання необов'язково є вказівкою на правдоподібність того, що результат вимірювання близький до значення вимірюваної величини; це просто оцінювання близькості результату вимірювання до найкращого значення, що відповідає наявним на цей час знанням.

Невизначеність вимірювання, отже, виражає той факт, що для даної вимірюваної величини і для даного результату її вимірювання немає єдиного значення, а є нескінченне число значень, розсіяних навколо результату, який узгоджується з усіма спостереженнями та даними, а також із знанням фізичного світу, який із різним ступенем упевненості може бути приписаний вимірюваній величині.

На рис. 1.1 подано ілюстрацію значення невизначеності вимірювання. З цього рисунка видно, чому основна увага сконцентрована на невизначеності, а не на похибці [2].

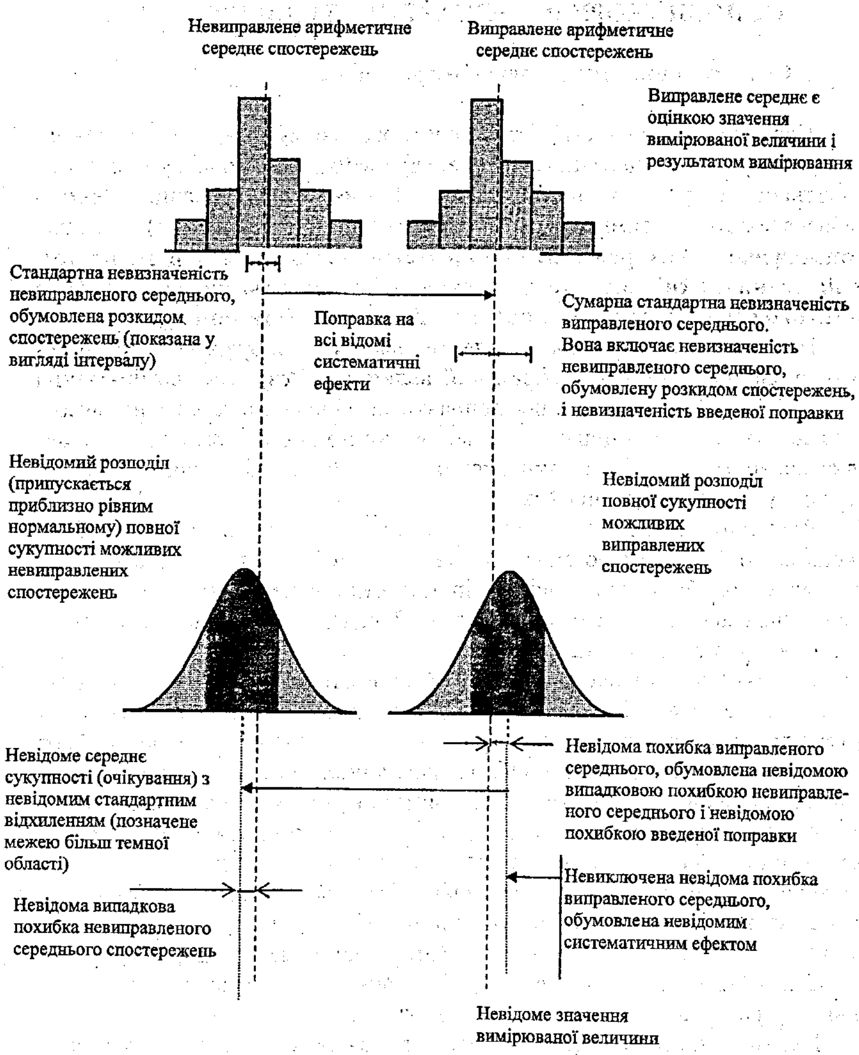


Рисунок 1.1 – Графічна ілюстрація значення невизначеності вимірювання

Точне значення похибки результату вимірювання, як правило, невідомо. Усе, що можна зробити – це оцінити значення вхідних величин, включаючи поправки на відомі систематичні ефекти разом із їхніми стандартними невизначеностями (оціненими стандартними відхиленнями), обумовленими як невідомими розподілами ймовірностей, вибірки для яких одержують шляхом повторних спостережень, так і суб'єктивними або апріорними розподілами, заснованими на всій наявній інформації; а потім розрахувати результат вимірювання за допомогою оцінених значень вхідних величин і сумарної стандартної невизначеності цього результату – за допомогою стандартних невизначеностей у випадку, якщо є тверда впевненість у тому, що всі ці операції були виконані правильно і всі значимі систематичні ефекти були враховані, можна припустити, що результат вимірювання є надійною оцінкою вимірюваної величини і що його сумарна стандартна невизначеність є надійною мірою її можливої похибки.

На практиці існує багато можливих джерел невизначеності при вимірюванні, включаючи такі:

а) неповне визначення вимірюваної величини;

б) неточна реалізація визначення вимірюваної величини;

в) вибірка, що не відображається – отримане значення може не відображати вимірювану величину;

г) неточні відомості про вплив навколишнього середовища на вимірювання або недосконале вимірювання умов навколишнього середовища;

д) суб'єктивна систематична похибка оператора при знятті показань з аналогових приладів (analog devices);

е) кінцева роздільна здатність приладу або поріг чутливості (threshold of sensitiveness);

ж) неточні значення, приписані еталонам, що використовуються при вимірюванні, стандартним зразкам речовин (standard standards of matters) і матеріалів;

и) неточні значення констант і інших параметрів, які були отримані із зовнішніх джерел і використовуються в алгоритмі опрацювання даних;

к) апроксимації і припущення, що використовуються у методі вимірювання і вимірювальній процедурі;

л) зміни в повторних спостереженнях вимірювальної величини при явно однакових умовах.

Ці джерела необов'язково є незалежними, і деякі з джерел від (а) до (к) можуть вносити вклад у джерело (л). Звичайно, невідомий систематичний ефект не може бути прийнятий в оцінку невизначеності результату вимірювання, але він вносить вклад у його похибку.

Введення поняття "невизначеність вимірювання" є вимушеною мірою, необхідною для одноманітного і спрощеного оцінювання достовірності вимірювання (evaluation of measuring authenticity), оскільки її визначення здійснюється на основі одержуваних результатів вимірювання, відомих умов вимірювань і характеристик використаної апаратури, а не на невідомому дійсному значенні вимірюваної величини.

1.2 Класифікація невизначеностей вимірювання

Невизначеності вимірювання класифікуються за такими двома класифікаційними ознаками: за *методами оцінювання* та за *способами їх вираження* (рис. 1.2) [3].

Всі невизначеності **за методами оцінювання** поділяються на тип А і тип В. Метою поділу на тип А та В є показ двох різних способів оцінювання компонентів невизначеності, і вона використовується тільки для зручності обговорення; вона не призначена для показу того факту, що існує розходження в природі цих компонентів, що є результатом цих двох типів оцінювання. Обидва типи оцінювання базуються на розподілах ймовірностей, і компоненти невизначеності кожного типу кількісно визначаються дисперсією або стандартним відхиленням.

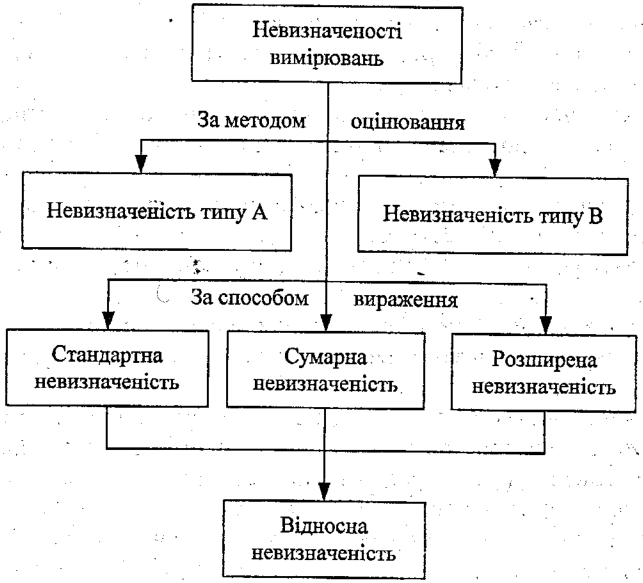


Рисунок 1.2 – Класифікація невизначеностей вимірювання

До типу А відносяться складові, які обчислюються із серії повторних спостережень і оцінюються шляхом застосування статистичних методів.

До типу В відносяться складові, які оцінюються іншими способами.

За способами вираження розрізняють стандартну, сумарну, розширену і відносну невизначеності.

Стандартна невизначеність – невизначеність результату вимірювання, що виражається як стандартне відхилення.

Сумарна невизначеність – стандартна невизначеність результату вимірювання, який одержують із значень інших величин, пов'язаних з вимірюваною величиною.

Розширена невизначеність – інтервальна оцінка невизначеності вимірювань, що являє собою добуток стандартної невизначеності на коефіцієнт охоплення, який залежить від виду розподілу рівня довіри.

Відносна невизначеність – відношення стандартної, сумарної або розширеної невизначеності до оцінки вимірюваної величини.

1.3 Методи оцінювання складових невизначеностей

Оцінювання складових невизначеностей можна одержувати апостеріорно або апріорно.

Апостеріорне оцінювання (aposteriori evaluation) проводиться за результатами вимірювання, контролю чи діагностики фізичної величини (ФВ) і оцінює його невизначеність. Воно можливе тільки при проведенні багаторазових спостережень вимірюваної величини. Ці вимірювання можуть проводитися в двох варіантах:

а) в умовах повторюваності (для оцінювання і мінімізації невизначеності вимірювань, обумовленої випадковими ефектами);

б) при зміні однієї з умов спостережень так, щоб одержати спостережувану змінність результатів (для оцінювання і мінімізації невизначеності результатів вимірювань, обумовленою змінною частиною невиключеної складової відомого систематичного ефекту).

В результаті опрацювання методами математичної статистики багатократних спостережень можна отримати міру їх розсіювання навколо оцінки очікуваного значення, що приймається за результат вимірювання. Як оцінку міри розсіювання результатів спостережень беруть експериментальне стандартне відхилення, яке називається **стандартною невизначеністю типу А.**

Апріорне оцінювання (apriori evaluation) складових невизначеності результатів вимірювань доводиться робити тоді, коли багаторазові спостереження для випадкового чи систематичного ефекту, що вивчається, в даному вимірюванні не проводяться. В цьому випадку слід опиратися на інформацію, одержану з раніше проведених вимірювань, фізичні властивості вимірюваної величини, паспортні дані на засіб вимірювальної техніки (ЗВТ) або довідники.

Розсіяність результатів вимірювань, що одержується в цьому випадку, характеризується оціненим стандартним відхиленням і називається **стандартною невизначеністю типу В.**

Таким чином, розділення невизначеностей на тип А і В показує відмінність в способах оцінювання складових, а не відмінність в джерелах їх виникнення. Обидва типи невизначеностей оцінюються на підставі розподілів вірогідності (спостережуваної – для типу А та пропонованої для типу В) і характеризуються кількісно стандартним відхиленням.

1.3.1 Оцінювання невизначеності за типом А. Експериментальну дисперсію, яка характеризує складову невизначеності, отриману в результаті оцінювання за типом А, знаходять із рядів повторних спостережень, і вона є статистичною оцінкою дисперсії. Експериментальне стандартне відхилення отримують як позитивний квадратний корінь з дисперсії, позначають як u_A і для зручності називають **стандартною невизначеністю типу А** [2].

Таким чином, для оцінювання стандартної невизначеності за типом А необхідно провести n незалежних спостережень вимірюваної величини q в умовах повторюваності. Окремі спостереження q_k відрізняються за значенням через випадкові зміни величин, що впливають.

У більшості випадків найкращою доступною оцінкою математичного сподівання чи очікуваного значення μ_q величини q, що змінюється випадковим чином, є середнє арифметичне або середнє значення $\overline{q}$ із n спостережень:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k . \tag{1.1}$$

Експериментальне стандартне відхилення (standard deviation), що характеризує змінність значень q_k, або, точніше, їхню дисперсію σ^2 щодо середнього значення $\overline{q}$, розраховують за формулою [2]

$$u_A(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(q_k - \overline{q}\right)^2}{n-1}} . \tag{1.2}$$

Оскільки за результат багаторазових вимірювань приймають середнє значення $\overline{q}$, то важливо оцінити його дисперсію.

Найкраща оцінка $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$ дисперсії середнього значення $u_A^2(\overline{q})$ виражається як

$$u_A^2(\overline{q}) = \frac{u_A^2(q_k)}{n} . \tag{1.3}$$

Тобто оцінка дисперсії середнього значення в n раз менша оцінки дисперсії результату окремого спостереження.

На практиці **стандартна невизначеність середнього значення** є більш зручнішою, ніж оцінка дисперсії, оскільки має ту ж саму розмірність, що і вимірювальна величина. Вона дорівнює позитивному квадратному кореню з оцінки дисперсії (1.3) та розраховується за формулою [2]

$$u_A(\overline{q}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2}{n(n-1)}}. \qquad (1.4)$$

Таким чином, стандартна невизначеність середнього значення в $\sqrt{n}$ раз менша стандартної невизначеності окремого спостереження.

При оцінюванні стандартної невизначеності за типом А необхідно враховувати, що число спостережень n має бути достатньо великим, щоб $\overline{q}$ давало надійну оцінку очікування μ_q випадкової змінної q і щоб $u_A^2(\overline{q})$ забезпечувала надійну оцінку дисперсії $\sigma^2(\overline{q})$.

З виразу (1.3) виходить, що оцінка стандартного відхилення середнього арифметичного $u_A(\overline{q})$ дорівнює

$$u_A(\overline{q}) = \frac{u_A(q_k)}{\sqrt{n}}. \qquad (1.5)$$

Стандартне відхилення оцінки стандартного відхилення середнього арифметичного $\sigma(u_A(\overline{q}))$ для нормального закону розподілу q, визначається виразом [4]

$$\sigma[u_A(\overline{q})] = \sigma(\overline{q})\sqrt{1 - \frac{2\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}}. \qquad (1.6)$$

Одержана з виразу (1.6) залежність відношення стандартного відхилення експериментального стандартного відхилення середнього арифметичного $u_A(\overline{q})$ до стандартного відхилення $\sigma(\overline{q})$ від числа спостережень приблизно описується виразом

$$\frac{\sigma[u_A(\overline{q})]}{\sigma(\overline{q})} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (1.7)$$

Якщо визнається можливість існування такого відхилення і його величина передбачається і може бути значною, то його можна описати за допомогою розподілу ймовірностей простого виду, заснованого на знанні, яке призвело до висновку, що воно може існувати і бути значним. Таким чином, якщо імовірність розглядається як ступінь впевненості, що подія відбудеться, внесок такого систематичного ефекту може бути включений у сумарну стандартну невизначеність результату вимірювання шляхом оцінювання його як стандартної невизначеності апріорного розподілу ймовірностей і розглядання її таким же чином, як і будь-яку іншу стандартну невизначеність вхідної величини.

Наприклад: специфікація конкретної вимірювальної процедури потребує, щоб визначена вхідна величина була розрахована з конкретного розкладання в степеневий ряд, члени вищого порядку якого відомі неточно. Систематичний ефект, обумовлений неможливістю точно оцінити члени, веде до невідомого постійного відхилення, яке не можна експериментально визначити шляхом повторення процедури. Таким чином, невизначеність, пов'язану з цим ефектом, не можна оцінити і включити в невизначеність кінцевого результату вимірювання, якщо дотримуватися частотної інтерпретації імовірності. Однак тлумачення імовірності на основі ступеня впевненості дозволяє оцінити невизначеність, що характеризує ефект, із апріорного розподілу ймовірностей (отриманого з наявного знання про неточно відомі члени) і включити її в розрахунок сумарної стандартної невизначеності результату вимірювання подібно будь-якій іншій невизначеності.

Крім збільшення розсіювання, зменшення числа спостережень приводить **до зміщення оцінки стандартного відхилення**. В роботі [5] для компенсації зміщення, рекомендується при кількості вимірювань n<10 вводити коефіцієнт поправки при оцінюванні експериментального стандартного відхилення $u_A(q_k)$, який для нормального закону розподілу дорівнює $\frac{t_p(\nu)}{k_p}$ — відношенню коефіцієнта Стьюдента $t_p(\nu)$ для числа степенів вільності $\nu = n-1$ і довірчого рівня p до коефіцієнта охоплення k_p для нормального закону розподілу і того ж довірчого рівня. Значення поправкового коефіцієнта для p=0,95 наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Залежність поправкового коефіцієнта $t_p(\nu)/k_p$ від числа спостережень n

Кількість спостережень, n	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_p(\nu)/k_p$	7	2,3	1,7	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2

Якщо випадкові зміни в спостереженнях вхідної величини корельовані, наприклад, за часом, то середнє значення і експериментальне стандартне відхилення середнього, можуть не відповідати бажаним оцінкам. У таких випадках результати спостережень слід аналізувати, використовуючи статистичні методи, які спеціально призначені для оброблення серії корельованих вимірювань, що випадково змінюються.

Наведені міркування показують, що оцінки стандартної невизначеності типу А необов'язково більш надійні, ніж оцінки типу В, і що в багатьох практичних вимірювальних ситуаціях, коли число спостережень обмежене, складові невизначеності, отримані з оцінювання за типом В, можуть бути відомі з більшою достовірністю, ніж складові, отримані за типом А.

На більш низьких рівнях перевірочної схеми, коли часто передбачається, що дані еталонів порівняння точно відомі, тому що вони були повірені національними лабораторіями первинних еталонів, невизначеність результату калібрування може включати тільки одну стандартну невизначеність типу А, оцінену зі згрупованого експериментального стандартного відхилення, що характеризує вимірювання.

1.3.2 Оцінювання невизначеності за типом В. Для оцінювання x_i вхідної величини X_i, яка не була отримана в результаті повторних спостережень, пов'язані з ними оцінена дисперсія $u^2(x_i)$ або стандартна невизначеність $u(x_i)$ визначаються на базі наукового судження, заснованого на всій доступній інформації про можливу змінність X_i. Тобто, стандартну невизначеність типу В одержують з передбачуваної функції щільності вірогідності, засновану на ступені упевненості в тому, що подія обов'язково відбудеться (ця вірогідність часто називається суб'єктивною вірогідністю).

Оцінювання невизначеності за типом В як правило ґрунтується на фонді порівняно надійної інформації. Фонд інформації може включати [2]:

- дані попередніх вимірювань;
- дані про вигляд розподілу ймовірностей;
- дані, отримані в результаті досвіду або загальні знання про поведінку і властивості відповідних матеріалів та ЗВТ;
- специфікація виробника, дані, що наводяться у свідченнях про повірку, калібровку чи в інших сертифікатах;
- невизначеності констант і довідкових даних.

Для зручності $u^2(x_i)$ і $u(x_i)$ оцінені таким способом, іноді називаються відповідно дисперсією типу В і стандартною невизначеністю типу В.

Правильне використання фонду доступної інформації для оцінювання стандартної невизначеності за типом В вимагає інтуїції, заснованої на досвіді і загальних знаннях, і є майстерністю, яка приходить з практикою. Слід визнати, що оцінка стандартної невизначеності за типом В може бути такою ж надійною, як і оцінка за типом А, особливо у вимірювальній ситуації, коли оцінювання за типом А ґрунтується на невеликій кількості статистично незалежних спостережень.

Якщо оцінка x_i береться зі специфікації виробника, свідоцтва про повірку, довідника або іншого джерела, і її невизначеність дається як деяке кратне стандартного відхилення, то стандартну невизначеність $u(x_i)$ можна прийняти рівною зазначеному значенню, поділеному на множник, і оцінена дисперсія $u^2(x_i)$ буде дорівнювати квадрату цієї частки.

Наприклад: свідоцтво про калібрування підтверджує, що маса m_s еталона з нержавіючої сталі з номінальним значенням 1 кг складає 1000,000325 г і що невизначеність цього значення дорівнює 240 мкг на рівні трьох стандартних відхилень. Тоді стандартна невизначеність еталона маси дорівнює $u(m_s)$=(240 мкг)/3=80 мкг. Оцінена дисперсія є $u^2(m_s)$= (80 мкг)^2 = $6{,}4 \cdot 10^{-9}$ г^2.

Наведена невизначеність величини x_i необов'язково дається у вигляді кратного стандартного відхилення. Замість цього можна зустріти, що згадана невизначеність визначає інтервал, довірчий рівень якого складає 90, 95 або 99 %. Якщо не зазначене інше, то можна припустити, що використовувався нормальний розподіл для обчислення згаданої невизначеності, і стандартну невизначеність для x_i одержують діленням наведеної невизначеності на відповідний коефіцієнт для нормального розподілу. Коефіцієнти, що відповідають вищевказаним трьом рівням довіри, дорівнюють: 1,64; 1,96 і 2,58.

Наприклад: свідоцтво про калібрування підтверджує, що опір еталонного резистора R_s із номінальним значенням 10 Ом є 10,000742 Ом ± 129 мкОм при 23°C і що згадана невизначеність 129 мкОм визначає інтервал, що складає 99 % довірчого рівня. Стандартну невизначеність резистора можна прийняти як $u(R_s)$=(129 мкОм)/2,58=50 мкОм. Оцінена дисперсія є $u^2(R_s)$ = (50 мкОм)^2 = $2{,}5 \cdot 10^{-9}$ Ом^2.

Розглянемо випадок, коли, опираючись на доступну інформацію, можна підтверджувати, що існує можливість п'ятдесят-на-п'ятдесят того, що значення вхідної величини X_i знаходиться в інтервалі від α_- до α_+ (іншими словами, можливість того, що X_i знаходиться в цьому інтервалі, складає 0,5 або 50 відсотків). Якщо можна припустити, що розподіл можливих значень X_i приблизно нормальний, то найкращу оцінку x_i величини X_i можна прийняти як середню точку цього інтервалу. Далі, якщо половина ширини цього інтервалу позначається як $\alpha=(\alpha_+ - \alpha_-)/2$, то можна прийняти $u(x_i) = 1{,}48\alpha$, тому що для нормального розподілу з сподіванням μ і стандартним відхиленням σ інтервал $\mu \pm \sigma/1{,}48$ охоплює приблизно 50 % розподілу.

Якщо базуючись на наявній інформації, можна стверджувати, що є приблизно 2 із 3 шансів, що значення X_i знаходиться в інтервалі від α_- до α_+ (іншими словами, імовірність того, що X_i знаходиться в цьому інтервалі, складає біля 0,67). Тоді з достатньою підставою можна прийняти $u(x_i)=\alpha$, тому що для нормального розподілу з сподіванням μ і стандартним відхиленням σ інтервал $\mu \pm \sigma$ охоплює приблизно 68,3 відсотка розподілу.

В інших випадках можна оцінити тільки межі (верхню і нижню межу) для X_i, зокрема, стверджувати, що імовірність того, що значення X_i знаходиться в інтервалі від α_- до α_+ для всіх практичних цілей, дорівнює одиниці і імовірність того, що X_i перебуває за межами цього інтервалу дорівнює нулю. Якщо немає конкретних зведень про можливі значення X_i усередині інтервалу, то можна тільки припустити, що з однаковою імовірністю X_i може знаходитися в будь-якому місці в його межах (рівномірний або прямокутний розподіл можливих значень). Тоді x_i, сподівання або очікуване значення X_i є середньою точкою інтервалу, $x_i=(\alpha_+ + \alpha_-)/2$, із відповідною дисперсією

$$u^2(x_i) = (\alpha_+ - \alpha_-)^2/12. \qquad (1.8)$$

Якщо різницю між границями $\alpha_+ - \alpha_-$ позначити як 2α, тоді з рівняння (1.8) отримуємо

$$u^2(x_i) = \alpha^2/3. \qquad (1.9)$$

Коли компонент невизначеності, отриманий таким чином, дає значний внесок у невизначеність результату вимірювання, має сенс одержати додаткові дані для її подальшого визначення.

Наприклад: у специфікаціях виробника для цифрового вольтметра вказується, що в інтервалі від року до двох років після калібрування приладу його похибка в діапазоні 1 В дорівнює показу, помноженому на $14\cdot10^{-6}$ плюс діапазон, помножений на $2\cdot10^{-6}$. Припустимо, що прилад використовується через 20 місяців після калібрування для вимірювання різниці потенціалів V в діапазоні 1 В та встановлено, що середнє арифметичне ряду незалежних повторних спостережень V дорівнює $\overline{V}$=0,928571 В при стандартній невизначеності $u(\overline{V})$ = 12 мкВ, обчисленої за типом А. Оцінку за типом В стандартної невизначеності, пов'язану із специфікаціями виробника, можна одержати в припущенні, що зазначена похибка дає симетричні границі адитивної поправки до $\overline{V}$, $\Delta\overline{V}$ сподівання, рівного нулю, і при рівній імовірності перебування в будь-якому місці в інтервалі. Півширина α симетричного прямокутного розподілу можливих значень $\overline{V}$ тоді дорівнює $\alpha = (14\cdot10^{-6})\cdot(0{,}928571$ В$)+(2\cdot10^{-6})\cdot$ (1 В) = 15 мкВ і з рівняння (1.9) $u^2(\Delta\overline{V})$ = 75 мкВ^2, а $u(\Delta\overline{V})$ = 8,7 мкВ. Оцінку значення вимірюваної величини V, для простоти позначена тим же самим символом V, виражається як $V=\overline{V}+\Delta\overline{V}$=0,928571 В. Сумарну стандартну невизначеність цієї оцінки одержують як підсумок стандартної невизначеності $\overline{V}$, що дорівнює 12 мкВ, обчисленої за типом А, із стандартною невизначеністю $\Delta\overline{V}$, що дорівнює 8,7 мкВ, обчисленої за типом В. Сумарна дисперсія, пов'язана з V, визначається як $u^2_c(V) = u^2(\overline{V})+u^2(\Delta\overline{V}) = 2{,}19\cdot10^{-12}$ В^2, а сумарна стандартна невизначеність $u_c(V)$ = 15 мкВ.

На закінчення необхідно відмітити, що при оцінюванні складових невизначеностей важливо не вести повторного підрахунку складової невизначеності. Якщо компонент невизначеності, що виникає від конкретного ефекту, оцінюється за типом В, то він повинен бути включений як незалежний компонент невизначеності при обчисленні сумарної стандартної невизначеності результату вимірювання тільки до того ступеня, щоб ефект не вносив вклад у виявлену змінність спостережень. Це пояснюється тим, що невизначеність, обумовлена тією частиною ефекту, що вносить вклад у спостерігаючу змінність, вже включена у компонент невизначеності, отриманий зі статистичного аналізу спостережень.

1.4 Способи вираження складових невизначеностей

Вимірювана величина Y функціонально залежить від цілого ряду вхідних величин X_1, X_2, ..., X_n, вони можуть бути як безпосередньо вимірювані величини, так і величини, що впливають на результат вимірювання (фізичні параметри навколишнього середовища, напруга живлення, параметри зовнішніх полів). Цей зв'язок виражається за допомогою рівняння вимірювання (equalization of measuring), яке, в загальному випадку, має такий вигляд

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N). \tag{1.10}$$

Самі вхідні величини X_1, X_2, ..., X_N, від яких залежить вихідна величина Y, можна розглядати як вимірювані величини, і вони самі можуть залежати від інших величин, включаючи поправки і поправкові коефіцієнти на систематичні ефекти, що веде до складної функціональної залежності f, яка ніколи не може бути записана точно. Крім того, f можна визначити експериментально або може існувати тільки як алгоритм, що повинний бути реалізований чисельно. Функцію f, варто інтерпретувати як функцію, що містить кожну величину, включаючи всі поправки і поправкові коефіцієнти, що можуть внести значну складову в результат вимірювання.

Таким чином, якщо дані показують, що f не моделює вимірювання до ступеня, обумовленого необхідною точністю результату вимірювання, то додаткові вхідні величини повинні бути включені в f для усунення неадекватності. Це може вимагати введення вхідної величини для відображення неповного знання явища, що впливає на вимірювану величину. Проте рівняння (1.10) може бути настільки елементарним як $Y=X_1-X_2$. Воно відображає моделі, наприклад, порівняння двох визначень однієї і тієї ж величини X.

Набір вхідних величин X_1, X_2, ..., X_N можна розділити на такі категорії:

- величини, чиї значення і невизначеності визначаються безпосередньо у вимірюванні. Ці значення і невизначеності можна одержати, наприклад, у результаті одного спостереження, повторних спостережень або висновку, заснованого на досвіді, і можуть вимагати визначення поправок до показань приладу і поправок на впливні величини, такі, як навколишня температура, атмосферний тиск і вологість;

- величини, чиї значення і невизначеності вносяться у вимірювання із зовнішніх джерел, такі як величини, пов'язані з атестованими еталонами, стандартними зразками речовин і матеріалів або стандартними довідковими даними.

Оцінку вимірюваної величини Y, позначену y, одержують із рівняння (1.10), використовуючи вхідні оцінки x_1, x_2, ..., x_N для значень N величин X_1, X_2, ..., X_N. Таким чином, вихідна оцінка y, яка є результатом вимірювання, виражається таким чином

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N). \tag{1.11}$$

У деяких випадках оцінку *y* можна одержати з

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{k} f(X_{1,k}, X_{2,k}, ..., X_{N,k}). \tag{1.12}$$

Таким чином, y береться як середнє арифметичне (middle arithmetic) або як середнє значення n незалежних визначень Y_k величини Y; при цьому кожне визначення має одну невизначеність і кожне засновано на повному наборі спостерігаючих значень N вхідних величин X_i, отриманих у той же самий час. Цьому способу усереднення замість: $y=f(X_1, X_2, ..., X_N)$, де $\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$ – є середнім арифметичним окремих спостережень $X_{i,k}$, можна віддати перевагу, коли f є нелінійною функцією вхідних величин $X_1, X_2, ..., X_N$, але два підходи є ідентичними, якщо f є лінійною функцією.

1.4.1 Вираження стандартної невизначеності. Стандартна невизначеність результату вимірювання виражається як стандартне відхилення.

Як вже зазначалось, експериментальне стандартне відхилення результатів спостережень, що називається стандартною невизначеністю типу А, одержують як позитивний квадратний корінь з дисперсії (1.2).

Стандартна невизначеність типу А середнього значення в $\sqrt{n}$ раз менша стандартної невизначеності окремого спостереження і визначається за формулою (1.4).

Для складових невизначеності, одержаних з оцінювання за типом В, оцінене стандартне відхилення $u(x_i)$, що називається стандартною невизначеністю типу В, обчислюють через верхні і нижні границі $[\alpha_-;\alpha_+]$ передбачуваного розподілу чи інтервал U, що має заданий довірчий рівень p. Для заданих границь розподілу стандартна невизначеність типу В обчислюється таким чином [2]:

а) для рівномірного закону розподілу (even law of distributing)

$$u(X)=\frac{\alpha_{+}-\alpha_{-}}{\sqrt{12}};\qquad(1.13)$$

б) для трикутного закону розподілу

$$u(X)=\frac{\alpha_{+}-\alpha'_{-}}{\sqrt{24}};\qquad(1.14)$$

в) для трапецоїдального закону розподілу

$$u(X)=\frac{[\alpha_{+}-\alpha_{-}]\sqrt{1+\beta^{2}}}{\sqrt{24}},\qquad(1.15)$$

при зміні β від 0 до 1 трапецоїдальне розподілення змінюється від трикутного до рівномірного;

г) для експоненціального закону розподілу

$$u(X)=\sqrt{\frac{(\alpha_{+}-x)(x-\alpha_{-})-(\alpha_{+}-2x+\alpha_{-})}{\lambda}},\qquad(1.16)$$

де x – очікуване значення;

λ – параметр розподілу.

Для заданих інтервалів U_p з відомим рівнем довіри p, в припущенні нормального закону розподілу, невизначеність типу B визначається за формулою

$$u(X)=\frac{U_p}{k_p},\qquad(1.17)$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для нормального закону розподілу, дорівнює 1,64; 1,96 і 2,58 для довірчих рівнів 0,9; 0,95 і 0,99.

1.4.2 Вираження сумарної невизначеності при некорельованих вхідних величинах. Стандартна невизначеність оцінки y вимірюваної величини Y і, отже, результату вимірювання, утворюється шляхом відповідного підсумовування стандартних невизначеностей вхідних оцінок x_1, x_2, ..., x_N. Ця сумарна стандартна невизначеність оцінки y позначається як $u_c(y)$.

Кожну вхідну оцінку x_i і пов'язану з нею стандартну невизначеність $u_c(x_i)$ одержують з розподілу можливих значень вхідної величини X_i. Цей розподіл вірогідності, як уже було сказано, може бути заснований на рядах спостережень $X_{i,k}$ величин X_i, або він може бути апріорним розподілом.

Результати вимірювань вважаються некорельованими коли усі вхідні величини є незалежними.

Сумарна стандартна невизначеність $u_c(y)$ є позитивним квадратним коренем з сумарної дисперсії $u^2_c(y)$, яка розраховується за формулою [2]:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i), \tag{1.18}$$

де f – функція, що подана в рівнянні (1.11);

$u(x_i)$ – стандартна невизначеність, оцінена за типом А або за типом В, як було описано раніше.

Сумарна стандартна невизначеність $u_c(y)$ є оціненим стандартним відхиленням і характеризує розкид значень (variation of values), які можуть бути з достатньою підставою приписані вимірюваній величині Y.

Рівняння (1.18) отримується в результаті апроксимації рівняння вимірювання (1.10) рядом Тейлора першого порядку і є законом розподілення невизначеності.

При значній нелінійності f у виразі (1.18) для $u^2_c(y)$ повинні бути включені члени вищого порядку (members of higher order) розкладання в ряд Тейлора. Якщо щільність розподілу кожного X_i симетрична щодо його середнього значення, то до членів рівняння (1.18) досить додати члени другого порядку [2]

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right]u^2(x_i)u^2(x_j). \tag{1.19}$$

Частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ у виразі (1.18) рівні $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ для $X_i = x_i$. Ці похідні, називаються коефіцієнтами чутливості, показують, як вихідна оцінка у змінюється із зміною значень вхідних оцінок x_1, x_2, ..., x_N. Зокрема, зміна в у, викликана невеличкою зміною Δx_i у вхідній оцінці x_i, дана формулою $(\Delta y)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot(\Delta x_i)$. Якщо ця зміна утворена стандартною невизначеністю оцінки x_i, то відповідна зміна в у буде $\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot u(x_i)$. Тому сумарну дисперсію $u_c^2(y)$ можна розглядати як суму членів, кожний із яких є оціненою дисперсією, пов'язаною з вихідною оцінкою у, викликаною оціненою дисперсією, пов'язаною з кожною вхідною оцінкою x_i. Це припускає запис рівняння (1.18) у вигляді

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left[c_i\cdot u(x_i)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}u_i^2(y), \tag{1.20}$$

де $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $u_c(y) = |c_i| u(x_i)$.

Частинні похідні являють собою $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}$, оцінені на сподіваннях X_i. Однак на практиці частинні похідні оцінюються як $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} | x_1, x_2, ..., x_N$.

Коефіцієнти чутливості $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ замість того, щоб розраховуватися з функції f іноді визначаються експериментальним шляхом за допомогою вимірювань зміни в Y, викликаної зміною в обраному X_i, підтримуючи при цьому інші вхідні величини незмінними. У цьому випадку знання функції f зводиться до емпіричного розкладання в ряд Тейлора (row of Teylora) першого порядку, заснованого на виміряних коефіцієнтах чутливості.

Якщо Y має вигляд $Y=cX_1^{p1} \cdot X_2^{p2} \cdot ... \cdot X_N^{pN}$ і відомо, що степені p_i являють собою позитивні або від'ємні числа, що мають малі невизначеності, то сумарну дисперсію, рівняння (1.18), можна виразити як

$$\left[\frac{u_c(y)}{y}\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i}\right]^2. \qquad (1.21)$$

Це рівняння має такий же вигляд, як і рівняння (1.20), але із сумарною дисперсією $u_c^2(y)$, вираженою як відносна сумарна дисперсія (dispersion) $\left[\frac{u_c(y)}{y}\right]^2$, і оціненою дисперсією $u_c^2(x_i)$, пов'язаною з кожною вхідною оцінкою, вираженою як оцінена відносна дисперсія $\left[\frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2$.

1.4.3 Вираження сумарної невизначеності при корельованих вхідних величинах. Рівняння (1.18) і ті рівняння, що виведені з нього, такі як (1.20) та (1.21), справедливі тільки в тому випадку, якщо вхідні величини X_i незалежні або некорельовані. Якщо які-небудь із X_i значною мірою корельовані, то кореляцію необхідно брати до уваги.

Коли вхідні величини корельовані (correlated entrance sizes), то вираз для сумарної дисперсії $u_c^2(y)$, пов'язаної з результатом вимірювання, буде мати вигляд:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j) =$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j), \qquad (1.22)$$

де x_i і x_j – є оцінками X_i і X_j;

$u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ є оціненою коваріацією x_i і x_j.

Ступінь кореляції (degree of correlation) між x_i і x_j характеризується оціненим коефіцієнтом кореляції [6]:

$$r(x_i,x_j)=\frac{u(x_i,x_j)}{u(x_i)u(x_j)}=\frac{\sum_{l=1}^{N_{ij}}(x_{i_l}-\bar{x}_i)(x_{j_l}-\bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{N_{ij}}(x_{i_l}-\bar{x}_i)^2\sum_{l=1}^{N_{ij}}(x_{j_l}-\bar{x}_j)^2}}, \qquad (1.23)$$

де $r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i)$ – коефіцієнт кореляції, який може знаходиться в таких межах $-1<r(x_i,x_j)<+1$. Якщо оцінки x_i і x_j незалежні, то $r(x_i,x_j) = 0$, і зміна однієї з них не означає очікуваної зміни іншої.

У термінах коефіцієнтів кореляції, які легше зрозуміти, ніж коваріації, вираз для сумарної дисперсії (1.22) можна записати у вигляді

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_ic_ju(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j). \qquad (1.24)$$

Для дуже особливого випадку, коли усі вхідні оцінки корельовані з коефіцієнтами кореляції $r(x_i,x_j) = 1$, рівняння (1.24) зводиться до вигляду

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}[c_iu(x_i)]^2=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2. \qquad (1.25)$$

Таким чином, сумарна стандартна невизначеність $u_c(y)$ є позитивним квадратним коренем із лінійної суми членів, що являють собою дисперсію вихідної оцінки у, викликану стандартною невизначеністю кожної вхідної оцінки x_i. Цю лінійну суму не варто плутати з загальним законом поширення похибок, хоча вони і мають схожу форму; стандартні невизначеності не є похибками.

Кореляція між двома вхідними величинами може існувати, якщо при їх визначенні використовують один і той же ЗВТ, фізичний еталон вимірювання або довідникові дані, що мають значну невизначеність. Наприклад, якщо поправка на температуру, що необхідна для оцінки вхідної величини X_i, отримується за допомогою деякого термометра і така ж поправка на температуру, необхідна для оцінки вхідної величини X_j, теж отримується за допомогою цього ж термометра, то дві вхідні величини можуть бути корельовані. Проте, якщо X_i і X_j визначаються як величини без поправок або якщо величини, які визначають калібрувальну криву термометра, включені в рівняння вимірювання як додаткові вхідні величини з незалежними стандартними невизначеностями, кореляція між X_i і X_j усувається.

Кореляції між вхідними величинами не можна ігнорувати, якщо вони є і значні. Пов'язані з ними коваріації слід оцінювати експериментально, змінюючи корельовані вхідні величини за типом А або використовуючи всю наявну інформацію про корельовану змінність даних величин за типом В. Правильне розуміння, що базується на минулому експерименті і загальних знаннях, особливо необхідне при оцінюванні степеня кореляції між вхідними величинами, що виникає через ефекти, що загально впливають, такі як температура навколишнього середовища, атмосферний тиск і вологість. На щастя, у багатьох випадках, ефекти таких впливів мають малий взаємозв'язок, так що можна припустити, що вхідні величини, випробовуючи такі впливи, некорельовані. Проте якщо не можна припустити, що вони некорельовані, самі кореляції можуть бути виключені, якщо загальні впливи введені в рівняння вимірювання як додаткові незалежні вхідні величини.

1.4.4 Вираження розширеної невизначеності. Міжнародні документи з оцінювання невизначеності у вимірюваннях рекомендують всім учасникам при поданні результатів всіх міжнародних звірень або інших робіт під егідою Міжнародного комітету мір і вагів (МКМВ) і Консультативних комітетів використовувати для виразу достовірності вимірювання сумарну стандартну невизначеність $u_c(y)$.

Проте в окремих випадках (у торгівлі, промисловості і регулюючих актах, а також коли справа стосується здоров'я і безпеки) доцільно додатково вказувати інтервальну міру невизначеності. Ця міра визначає інтервал для результату вимірювання, в межах якого може знаходитися велика частина розподілу значень, які можна з достатньою підставою приписати вимірюваній величині. Вказана інтервальна міра невизначеності називається **розширеною невизначеністю** (extended uncertainty) і позначається символом U. Розширену невизначеність U одержують шляхом множення сумарної стандартної невизначеності $u_c(y)$ на коефіцієнт охоплення (coefficient of scope) k [2].

$$U = ku_c(y). \tag{1.26}$$

У разі вказування розширеної невизначеності результат вимірювання виражається як $Y=y\pm U$, що означає, що найкращою оцінкою значення, що приписується величині Y є y, і що інтервал від $y-U$ до $y+U$ містить велику частину розподілу значень, які можна з достатньою підставою приписати вимірюваній величині Y. Такий інтервал виражається також як $y-U \le Y \le y+U$.

Терміни „довірчий інтервал" (confidence interval) і „довірчий рівень" (level of trust) мають в статистиці спеціальні визначення і застосовуються до інтервалу, що визначається U, тільки у тому випадку, коли виконані певні умови, включаючи умову, щоб всі складові невизначеності, що входять в $u_c(y)$, були отримані з оцінювання за типом А. У теорії невизначеності, при розгляді U як інтервалу навколо результату вимірювання, що містить велику частину розподілу вірогідності p, є вірогідністю охоплення або довірчим рівнем для цього інтервалу.

Необхідно відмітити, що множення $u_c(y)$ на якусь постійну величину не дасть ніякої нової інформації, а просто подасть інформацію, що раніше була, у новому вигляді.

Щоб отримати значення коефіцієнта охоплення k, який створює інтервал, відповідний заданому довірчому рівню p, необхідні точні відомості про закон розподілу вірогідності, що характеризує розсіювання результату вимірювання.

Якщо величина y розподілена за нормальним законом, то значення коефіцієнта охоплення для різних довірчих рівнів будуть рівні значенням, які наведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Значення коефіцієнта охоплення k для заданого довірчого рівня p

p ,%	68,27	90	95	95,45	99	99,73
K	1	1,645	1,96	2	2,576	3

Якщо величина y описується прямокутним розподілом, то значення коефіцієнта охоплення буде рівним 1 при довірчому рівні 57,74 %; 1,65 при p = 95%; 1,71 при p = 99% та $\sqrt{3}$ при p = 1. Прямокутний розподіл „вужчий", ніж нормальний, в тому сенсі, що він має кінцеву протяжність „хвостів".

Якщо закон розподілу величини y невідомий, то, маючи результати його багаторазових вимірювань можна визначити експериментальний закон розподілу. Процедура визначення емпіричного закону розподілу включає такі операції [3].

1. Графічна побудова експериментального закону розподілу (гістограмми або графік накопиченої частоти) і обговорення гіпотези про його вигляд.

2. Перевірка гіпотези за допомогою одного з критеріїв згоди (Пірсона, Колмогорова чи ін.).

Необхідно відзначити, що в більшості випадків інтервал U (особливо для значень p, близьких до 1) буде швидше невизначеним не тільки через наближене знання закону розподілу вірогідності результату вимірювання, що характеризується y і $u_c(y)$ (особливо в крайніх областях), але також через невизначеність самої $u_c(y)$.

Якщо випадкова величина y розподілена нормально, з сподіванням μ_y і стандартним відхиленням σ, а середнє арифметичне $\bar{y}$ результатів незалежних спостережень y_k із експериментальним стандартним відхиленням $s(\bar{y})$, то розподіл ймовірності змінної $t=(\bar{y}-\mu_y)/s(\bar{y})$ являє собою t-розподіл або розподіл Стьюдента (distributing of St'yudenta) із ν = n-1 степенями вільності (degrees of liberty).

Функція щільності ймовірності розподілу Стьюдента описується виразом:

$$f(t,\nu)=\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\frac{\Gamma\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}\right]}\left[1+\frac{t^2}{\nu}\right]^{\frac{-(\nu+1)}{2}}, \tag{1.27}$$

де Г – це гамма-функція;

ν = n - 1 – число ступенів вільності.

Очікування розподілу Стьюдента дорівнює нулю, а його дисперсія дорівнює $\frac{\nu}{\nu-2}$, для $\nu > 2$. При $\nu \to \infty$ розподіл Стьюдента прямує до нормального розподілу з $\mu=0$ та $\sigma=1$.

Отже, якщо вимірювана величина *Y* є єдино нормально розподіленою величиною X, Y=X; і якщо як оцінка X береться середнє арифметичне $\overline{X}$ від n незалежних спостережень X_k величини з експериментальним стандартним відхиленням середнього $s(\overline{X})$, то найкращою оцінкою Y є y = $\overline{X}$ і експериментальне стандартне відхилення цієї оцінки є $u_c(y) = s(\overline{X})$, то розширена невизначеність U, яка визначає інтервал від y-U до y+U, що зручно записувати як Y=y±U, дорівнюватиме:

$$U = ku_c(y) = t_p(\nu)u_c(y), \tag{1.28}$$

де $t_p(\nu)$ – коефіцієнт з розподілу Стьюдента для ймовірності охоплення p і числа ступенів вільності ν = n-1.

Число ступенів вільності ν дорівнює n-1 для єдиної величини, оціненої середнім арифметичним із n незалежних спостережень. Якщо n незалежних спостережень використовуються для визначення нахилу і місця перетинання прямої лінії методом найменших квадратів (МНК), то числом ступенів вільності їхніх стандартних невизначеностей буде ν = n-2. Тому що при обчисленні МНК m параметрів за допомогою n спостережень число ступенів вільності кожного параметра визначається як ν = n-m.

У міру того, як $\nu\to\infty$, t-розподіл наближається до нормального і наближені значення коефіцієнта Стьюдента можна розрахувати за формулою

$$t_p(\nu) \approx k\,(1+2/\nu)^{1/2}, \tag{1.29}$$

де k – коефіцієнт охоплення, необхідний для одержання інтервалу з рівнем довіри p для нормально розподілу.

Для того, щоб одержати точніше наближення для оцінки розширеної невизначеності, необхідно скористатися t-розподілом. Але в загальному випадку t-розподіл не буде описувати $(y-Y)/u_c(y)$, якщо $u_c^2(y)$ є сумою двох або більше оцінених компонентів дисперсії $u_i(y)=c_i^2u^2(x_i)$, навіть якщо кожне x_i – оцінка нормально розподіленої вхідної величини X_i. Проте розподіл цієї змінної може бути апроксимований t-розподілом при числі ефективних ступенів вільності ν_{eff}, отриманим з формули Велча-Саттерсвейта

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}. \tag{1.30}$$

При окремому обробленні стандартних невизначеностей за типом А і за типом В необхідно додатково до ν_{eff} розрахувати і повідомляти також значення ν_{effA} і ν_{effB}, обчислені з рівняння (1.30).

При підсумовуванні невизначеностей середніх значень вхідних величин, визначуваних за типом А, число ступенів вільності ν необхідно вибирати рівним n-1.

При підсумовуванні невизначеностей вхідних величин, що визначались за типом В, число ступенів вільності ν вибирається з виразу

$$\nu_i = 0{,}5\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]}. \tag{1.31}$$

Оскільки при оцінюванні стандартної невизначеності за типом В на основі апріорного розподілу імовірності вважалося, що α_+ і α_- вибирається так, що імовірність знаходження величини поза цим інтервалом була нескінченно малою, тобто допускалося, що значення $u(x_i)$ відомо точно, а це означає, що $\nu_i \to \infty$.

Якщо сумарна стандартна невизначеність $u_c(y)$ оцінюється окремо за типом А $u_{c_A}(y)$ і за типом В $u_{c_B}(y)$, то згадані величини зв'язані співвідношеннями $u_c^2(y)=u_{c_A}^2(y)+u_{c_B}^2(y)$. З урахуванням цього, вираз (1.30) можна записати в такому вигляді

$$\nu_{eff} = (n-1)\frac{\left[u_{c_A}^2(y)+u_{c_B}^2(y)\right]^2}{u_A^4(y)}. \tag{1.32}$$

1.4.5 Вираження відносної невизначеності. Враховуючи те, що відносна невизначеність – відношення стандартної, сумарної або розширеної невизначеності до оцінки вимірюваної величини:

- вираз для відносної стандартної невизначеності типу А описується відношенням

$$\tilde{u}_A = \frac{u_A(x)}{|x|},\ |x| \neq 0; \qquad (1.33)$$

- вираз для відносної стандартної невизначеності типу В описується відношенням

$$\tilde{u}_B = \frac{u_B(x)}{|x|},\ |x| \neq 0; \qquad (1.34)$$

- вираз для відносної сумарної невизначеності описується відношенням

$$\tilde{u}_c = \frac{u_B(y)}{|y|},\ |y| \neq 0; \qquad (1.35)$$

- вираз для відносної розширеної невизначеності описується відношенням

$$\tilde{U} = \frac{U}{|y|},\ |y| \neq 0. \qquad (1.36)$$

1.5 Рекомендації щодо складання звіту про невизначеність

В цілому, при складанні звіту за ієрархією вимірювань потрібно все більше подробиць про те, як були отримані результати вимірювання і його невизначеності. Проте на будь-якому рівні цієї ієрархії, включаючи комерційну і регулюючу діяльність на ринку, інженерну роботу в промисловості, калібрувальні послуги більш низького рівня, промислові дослідження і розробки, академічні дослідження, промислові первинні еталони і калібрувальні лабораторії, національні лабораторії еталонів і МБМВ, вся інформація, яка необхідна для повторної оцінки вимірювання повинна бути доступна для тих, кому вона може бути потрібною. Глибинна різниця полягає в тому, що на більш низьких рівнях ієрархії велика частина необхідної інформації може бути зроблена доступною у формі опублікованих звітів щодо калібрування і випробувань, специфікацій з випробувань, сертифікатів про калібрування і випробування, посібників з експлуатації, міжнародних і національних стандартів і локальних регулюючих актів.

Коли подробиці щодо вимірювання, включаючи те, як була оцінена невизначеність його результату, забезпечуються посиланням на існуючі документи, як це часто буває у випадку, коли результати калібрування наводяться в сертифікаті, обов'язково необхідно, щоб ці документи підтримувалися на сучасному рівні так, щоб вони відповідали безпосередньо використовуваній в наш час процедурі вимірювання.

Велике число вимірювань проводиться щодня в промисловості і торгівлі без яких-небудь розгорнутих звітів щодо невизначеності. Проте багато які з них проводяться за допомогою ЗВТ, що підлягають періодичному калібруванню або узаконеній повірці. Якщо відомо, що використовувані ЗВТ відповідають їхнім специфікаціям або існуючим нормативним документам, що на них поширюються, то невизначеності їхніх показань можуть бути витягнуті з цих специфікацій або нормативних документів.

При складанні звіту щодо результатів вимірювань і його невизначеностей краще дати занадто багато інформації, ніж занадто мало.

Тому при складанні звітів щодо невизначеностей потрібно [2]:

а) зрозуміло описати методи, що використовуються для обчислення результату вимірювання і його невизначеності з експериментальних спостережень і вхідних даних;

б) перерахувати всі складові невизначеностей і детально описати як вони оцінювалися;

в) подати аналіз даних таким чином, щоб можна було легко додержуватись всіх його важливих етапів і в разі потреби незалежно повторити обчислення результатів, що подаються;

г) дати всі значення і методи отримання поправок і константи, що використовуються в аналізі.

Для того, щоб перевірити наведений вище список, потрібно запитати себе: «Чи дав я достатньо інформації в достатньо зрозумілому вигляді для того, щоб мій результат можна було поліпшити в майбутньому, якщо з'явиться нова інформація або нові дані?».

Форму виразів із знаком «±» слід по можливості уникати, оскільки традиційно вона використовується для вказання інтервалу, що відповідає високому рівню довіри, і, отже, може бути сплутана з розширеною невизначеністю.

Коли вказується результат вимірювання і мірою невизначеності є розширена невизначеність $U = ku_c(y)$, потрібно:

а) дати повний опис, як визначена вимірювана величина Y;

б) зазначити результат вимірювання, як $Y=y\pm U$ і привести одиниці для y та U;

в) використовувати відносну розширену невизначеність $U/|y|$, $|y|\neq 0$, коли це можливо;

г) дати значення k, яке використовувалось для одержання U (або дати і k, і $u_c(y)$ для зручності тих, хто використовує результат);

д) навести приблизний довірчий рівень, пов'язаний з інтервалом $y\pm U$ і зазначити, як він був визначений.

Якщо процедура вимірювання визначає одночасно більше однієї вимірюваної величини, тобто якщо вона дає значення двох або більше вихідних оцінок y_i, то крім y_i і $u_c(y_i)$, для кожної оцінки потрібно дати елементи коваріаційної матриці $u(y_i,y_j)$ або елементи $r(y_i,y_j)$ матриці коефіцієнтів кореляції, а краще і ті, і інші.

Чисельні значення оцінки y і її стандартної невизначеності $u_c(y)$ або розширеної невизначеності U не варто давати з дуже великим числом цифр. Звичайно, достатньо навести $u_c(y)$ і U з двома значущими цифрами, хоча в деяких випадках може необхідно зберегти додаткові цифри для того, щоб уникнути похибок округлення в наступних розрахунках.

При повідомленні остаточних результатів іноді слід округлити невизначеності в бік збільшення, а не до найближчої цифри. Наприклад, $u_c(y)=10{,}47$ мкОм можна округлити до 11 мкОм. Однак здоровий глузд повинний узяти гору, і значення, таке як $u(x_i)=28{,}05$ кГц, варто округлити до 28 кГц. Вихідні і вхідні оцінки повинні округлятися так, щоб відповідати своїм невизначеностям, наприклад, якщо $y=10{,}05762$ Ом з невизначеністю $u(y)=21$ мОм, то числове значення y слід округлити до 10,058 Ом. Коефіцієнти кореляції повинні даватися з точністю до третьої цифри, якщо їхні абсолютні значення близькі до одиниці.

При детальному описі того, як були отримані результати вимірювання і його невизначеність, необхідно дотримуватися рекомендацій і, таким чином:

а) дати значення кожної вхідної оцінки x_i і її стандартної невизначеності $u(x_i)$ разом з описом того, як вони були отримані;

б) дати оцінені коваріації і коефіцієнти кореляції (а краще і ті, і інші) для всіх корельованих вхідних оцінок і методи, використані для їхнього одержання;

в) зазначити ступені вільності для стандартної невизначеності кожної вхідної оцінки і те, як вони були отримані;

г) дати функціональну залежність $Y=f(X_1, X_2, ..., X_N)$, і, у випадку потреби коефіцієнти чутливості $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Оскільки функціональна залежність f може бути надзвичайно складною і відсутньою в явному вигляді, і може бути подана тільки у вигляді комп'ютерної програми, не завжди є можливим дати f і її похідні. У цьому випадку f можна описати загальними термінами або дати відповідне посилання на використовувану програму. У таких випадках важливо, щоб було зрозуміло, як були отримані оцінка y вимірюваної величини Y і її сумарна стандартна невизначеність $u_c(y)$.

Контрольні запитання

1. Дайте класифікацію невизначеностей за методом їх оцінювання.
2. Наведіть класифікацію невизначеностей за способом їх вираження.
3. Опишіть процедуру визначення невизначеності типу А.
4. Як впливає зменшення числа спостережень на достовірність оцінки стандартної невизначеності типу А?
5. Що називають стандартною невизначеністю типу В і як її отримують?
6. Як оцінити стандартну невизначеність типу В, якщо вона задана як кратне стандартного відхилення, а вид закону розподілу ймовірностей не вказаний?
7. Оцініть стандартну невизначеність за типом В для випадку, коли відомі тільки межі розподілу.
8. Як записати невизначеність типу В, якщо заданий інтервал U з довірчою ймовірністю p в припущенні про нормальний закон розподілу ймовірності?
9. Що називається сумарною стандартною невизначеністю?
10. Що називається коефіцієнтами чутливості?
11. Запишіть вираз для сумарної невизначеності, якщо вхідні величини корельовані.
12. Наведіть формулу для експериментальної оцінки коефіцієнта кореляції (наближеної і точної).
13. Поясніть, що таке розширена невизначеність.
14. Що називають відносною невизначеністю?
15. Які відомості необхідно наводити в звіті про невизначеність?
16. Наведіть вирази для розрахунку відносних невизначеностей.
17. Наведіть формулу Велча-Саттерсвейта за якою визначається ефективне число ступенів вільності.
18. За якою формулою розраховується коефіцієнт кореляції та як він пов'язаний з коваріацією?
19. Перерахуйте можливі джерела виникнення невизначеностей при вимірюваннях.
20. В яких випадках рекомендується додатково вказувати інтервальну міру невизначеності.

2 ВИДИ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ У ВИМІРЮВАННЯХ

2.1 Класифікація видів невизначеностей

Оскільки на практиці існує багато можливих джерел невизначеності при вимірюваннях, то її оцінювання не є чисто математичною роботою, а вимагає детального вивчення природи вимірюваної величини і процесу вимірювання. Кінець кінцем, якість і цінність оцінки невизначеності результату вимірювання залежать від розуміння, критичного аналізу і чесності тих, хто бере участь в приписуванні її значення.

Види складових невизначеностей можна класифікувати за джерелами їх виникнення на невизначеності величини, що вимірюється і невизначеності вимірювального експерименту (рис. 2.1).

Рисунок 2.1 – Класифікація видів невизначеностей

Невизначеності величини, що вимірюється, існують до початку проведення експерименту. Їх значення не залежать від методики проведення експерименту, якості вимірювальної апаратури або кваліфікації оператора. Невизначеності величини, що вимірюється, обумовлені такими факторами:

а) невизначеність моделювання – уявлення людини про об'єкт вимірювання відображається в його свідомості у вигляді деякої моделі, яка описується сукупністю параметрів. Вимірювані величини, що визначаються за моделями, завжди відрізняються від властивостей реальних об'єктів, оскільки модель ніколи не може бути абсолютною копією оригіналу. Ця відмінність виражається невизначеністю, обумовленою неадекватністю моделі вимірюваної величини;

б) невизначеність специфікації – розмір фізичної величини, що вимірюється, і з самого початку залежить від параметрів зовнішніх впливів, які впливають на об'єкт вимірювання. Тому коректний підхід до вимірювання вимагає повного попереднього опису (специфікації) вимірюваної величини, який включає вказівки на час проведення вимірювання і умови їх проведення. Неповна специфікація вимірюваної величини приводить до виникнення відповідної невизначеності;

в) природні невизначеності. При підвищенні точності вимірювання чи збільшенні чутливості ЗВТ проявляються природні чинники, обмежуючі достовірність вимірювань. До таких факторів відносяться:

- дискретність вимірюваної величини (discreteness of measurand) на квантово-механічному рівні;
- теплові шуми, дробовий ефект (fractional effect) та ін.

Наявність перерахованих чинників обумовлює появу природних невизначеностей вимірювань, що визначають їх потенціальну точність.

Невизначеності вимірювального експерименту залежно від джерела виникнення поділяються на методичні, інструментальні та суб'єктивні.

Методичні невизначеності обумовлені недосконалістю методу вимірювання.

Інструментальні невизначеності – складові невизначеності, які визначаються недосконалістю ЗВТ, що використовуються.

Суб'єктивні невизначеності (subektivna uncertainty) – невизначеності, обумовлені особливостями органів чуття або неправильними діями оператора, наприклад, невизначеність, виникаюча внаслідок наявності явища паралакса при зчитуванні показань із шкали стрілкового ЗВТ.

2.2 Невизначеності величин, що вимірюються

2.2.1 Невизначеність моделювання. Моделювання об'єктів вимірювання (design of the obektiv measuring), що є необхідним в загальному випадку етапом планування вимірювань, найменше вивчена і мало відображена в метрологічній літературі процедура. Неадекватність моделі (model inadequacy) реальному об'єкту породжує ще до вимірювань (апріорі) невизначеність, названу невизначеністю моделювання (uncertainty design).

Складність моделі і ступінь її адекватності реальному об'єкту залежить від таких чинників:

а) вигляд і властивості об'єкта вимірювання;

б) мета і необхідна точність вимірювання (measuring exactness);

в) кількість апріорної інформації про об'єкт, кваліфікація метролога, що проводить вимірювання.

В процесі створення моделі виникає парадоксальна ситуація. Для того, щоб провести вимірювання шуканої величини, необхідно мати апріорну інформацію про її властивості, за якими встановлюється модель вимірювання. А ці властивості можуть бути визначені (виміряні) тільки в процесі експериментального вивчення об'єкта.

Необхідно відзначити, що відсутність відмінностей в результатах вимірювань не завжди гарантує правильність вибраної моделі. Так, наприклад, в роботі [7] показано, що для фігури, обмеженої дугами кіл, центри яких знаходяться у вершинах рівностороннього трикутника з довжиною сторони, рівною радіусам кіл (рис. 2.2), вимірювання діаметрів в різних напрямах за допомогою штангенциркуля дадуть однакові результати, рівні довжині сторони трикутника *a*.

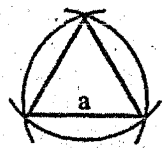


Рисунок 2.2 – Некругле коло

Розрахована за цими значеннями площа кола буде дорівнювати $\frac{\pi a^2}{4}$.

Насправді легко показати, що площа цієї фігури буде $\frac{a^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$. Відносна невиключена систематична похибка вимірювання (systematic error of measuring) площі складатиме близько 12%.

Якщо уявний центр кола прийняти як центр ваги фігури, який знаходиться на перетині медіан трикутника, то вимірювання радіуса кола в різних напрямах дадуть нам різні результати, що змінюються в межах від $\frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}} \approx 0{,}42a$ до $\frac{a}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58a$.

Таким чином, експериментальна перевірка вибраної моделі буде достовірна тільки у разі застосування правильно спланованої методики проведення вимірювань.

2.2.2 Невизначеність специфікації. Метою вимірювання є визначення числового значення вимірюваної фізичної величини. Коректний підхід до вимірювання вимагає повного попереднього опису специфікації вимірюваної величини, який включає вказівки на час проведення вимірювань і умови їх проведення. Умови проведення вимірювань указуються у вигляді сукупності величин впливу Θ_1, Θ_2, ..., Θ_m.

Залежність вимірюваної фізичної величини Y від параметрів зовнішніх впливів Θ_1, Θ_2, ..., Θ_m описується функцією впливу $Y = f(\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_m)$.

Неадекватне визначення величин впливу є причиною виникнення невизначеності специфікації і може привести до невідповідності між результатами вимірювань однієї і тієї ж величини, що проводилися в різних лабораторіях. Прикладом можуть бути еталони порівняння, призначені для звірення еталонів, які з тих або інших причин не можуть бути звіренні безпосередньо. Розмір відтвореної еталоном порівняння величини передається йому при звіренні в певних умовах, описуваних у вигляді сукупності величин впливу. Значення цих величин оцінюються з невизначеностями, обумовлюючими невизначеність відтвореної величини, яка буде при звіренні закладена в специфікацію на еталон.

Оцінку невизначеності специфікації (uncertainty of specification) можна одержати, визначивши за типом B стандартні невизначеності величин впливу $u(\Theta_i)$, i=1, 2, ..., m. Тоді сумарну невизначеність специфікації можна одержати відповідно до виразу (1.18).

Наприклад: вимірювана величина – потужність P, що розсіюється при температурі t на терморезисторі, що має значення R_0, при температурі t_0 і температурний коефіцієнт опору α, і залежить від різниці потенціалів V, що подаються на клеми терморезистора, як [2]

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = \frac{V^2}{R_0(1+\alpha(t-t_0))}.$$

У цьому рівнянні V – вхідна величина, t_0, R_0, α і t – величини впливу. Коефіцієнти чутливості для величин впливу рівні:

$$c_1 = \frac{\partial P}{\partial t_0} = \frac{V^2\alpha}{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2} = \frac{P\alpha}{1+\alpha(t-t_0)};$$

$$c_2 = \frac{\partial P}{\partial R_0} = -\frac{V^2\alpha}{R_0^2[1+\alpha(t-t_0)]} = -\frac{P}{R_0};$$

$$c_3 = \frac{\partial P}{\partial \alpha} = -\frac{V^2(t-t_0)}{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2} = \frac{P(t-t_0)}{1+\alpha(t-t_0)};$$

$$c_4 = \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{V^2\alpha}{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2} = -\frac{P\alpha}{1+\alpha(t-t_0)}.$$

Звідси сумарна невизначеність специфікації потужності на терморезисторі визначатиметься виразом

$$u(P) = \sqrt{c_1^2u^2(t_0) + c_2^2u^2(R_0) + c_3^2u^2(\alpha) + c_4^2u^2(t)}.$$

На практиці специфікація вимірюваної величини залежить від необхідної точності вимірювання. Вимірювану величину слід визначати з достатньою повнотою відносно необхідної точності, щоб для всіх практичних цілей, пов'язаних з вимірюванням, її значення було єдиним. Наприклад, якщо довжину сталевого стрижня з номінальною довжиною 1м потрібно визначити з точністю до мікрометра, то його специфікація повинна включати температуру і тиск, при яких ця довжина визначається (плюс інші визначальні параметри величин впливу). Проте якщо довжина повинна бути визначена з точністю до міліметра, то її специфікація може бути істотно скорочена.

2.2.3 Природні невизначеності. При підвищенні точності вимірювання або збільшенні чутливості ЗВТ проявляються природні чинники, що обмежують достовірність вимірювань.

Наявність вказаних чинників обумовлює появу природної невизначеності вимірювань, що визначає потенціальну точність вимірювань.

Потенціальне обмеження цього рівня обумовлене дискретністю вимірюваних величин (наприклад, вимірювання заряду не може бути проведено точніше, ніж визначений заряд електрона) або флуктуаціями, що визначаються дискретністю речовини і енергії. Точність вимірювання на цьому рівні обмежується законами квантової механіки. Формальним віддзеркаленням виходу на квантово-механічний рівень точності вимірювань служить поява в математичному описі чинників, якими не можна нехтувати, постійної Планка ($h = 6{,}63\text{-}10^{-34}$ Дж/Гц). Одним з таких чинників є принцип невизначеності Гейзенберга, сформульований в 1927 році, що накладає обмеження на граничну точність, з якою можна визначити динамічні змінні мікроскопічної системи. Згідно з цим принципом окрема величина може бути в принципі визначена з будь-якою точністю, проте, дві величини, квантово-механічні оператори яких не комутують, не можна одночасно визначити скільки завгодно точно.

Так, співвідношення невизначеностей для координати x і зв'язаної з нею змінної – компоненти імпульсу p_x має вигляд [7]:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad (2.1)$$

де $\hbar = {h}/{2\pi}$.

Аналогічно формулюється співвідношення невизначеностей для другої пари зв'язаних величин – енергії і часу

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \qquad (2.2)$$

Це співвідношення зв'язує невизначеність $\Delta E = \sigma_E$ енергії атомної системи з невизначеністю $\Delta t = \sigma_t$ часу t, протягом якого вимірюється енергія.

Оскільки постійна Планка надзвичайно мала, то наведені вирази при макроскопічних вимірюваннях позбавлені практичного значення. Невизначеність вказаних величин лежить далеко за межами досягнутої точності експериментів.

При вимірюванні макроскопічних величин максимальна точність також обмежена статистичними флуктуаціями біля середнього значення. Якщо флуктуації неможливо зменшити при фіксованих зовнішніх умовах, то їх, як правило, називають шумами. Причини виникнення шумів можна розділити на три групи:

- теплові коливання при ненульовій температурі;
- корпускулярна природа речовини і електрики;
- співвідношення невизначеностей квантової механіки.

2.3 Невизначеності вимірювального експерименту

2.3.1 Методичні невизначеності. Під методом вимірювань розуміють логічну послідовність операцій, описану в загальній формі і використану при виконанні вимірювань. Недосконалість методу вимірювання приводить до виникнення методичних похибок. Їх відмінною особливістю є те, що вони можуть бути визначені лише шляхом створення математичної моделі або імітаційним моделюванням вимірюваного об'єкта. Після створення такої моделі і визначення її параметрів, можна оцінити методичну похибку вимірювання, за своїм характером – систематичну. Оцінка методичної похибки може бути використана як поправка до результату вимірювання. Виправлений результат вимірювання обтяжений невиключеним залишком систематичної похибки, обумовленим похибками визначення параметрів моделі. Стандартне відхилення невиключених залишків систематичної похибки є оцінкою методичної невизначеності. Розглянемо приклади методичних невизначеностей.

Невизначеність оцінки дії ЗВТ на об'єкт вимірювання. Цю невизначеність досліджуватимемо на прикладі вольтметра, приєднаного до джерела напруги V з внутрішнім опором R. Сам вольтметр має вхідний опір $R_{вх}$.

В цьому випадку значення напруги на вході вольтметра (невиправлений результат вимірювання) буде рівним

$$V_{вх} = V_R \frac{R_{вх}}{R + R_{вх}}.$$

Визначимо виправлений результат вимірювання, з урахуванням поправки на систематичну похибку вимірювання, обумовлену шунтуванням опору джерел вхідним опором вольтметра

$$V_R = V_{вх} \frac{R + R_{вх}}{R_{вх}}.$$

Розглядаючи цей вираз як рівняння непрямих вимірювань, з урахуванням відсутності кореляції між похибками визначення вхідного опору вольтметра і опору джерела, можна записати вираз для невизначеності моделювання як:

$$u(V) = \sqrt{c_R^2 u_R^2 + c_{вх}^2 u_{вх}^2},$$

де u_R – невизначеність оцінки опору вольтметра;
$u_{вх}$ – невизначеність оцінки опору джерела;

$$c_R = \frac{\partial V_R}{\partial R} = \frac{V_{вх}}{R_{вх}};$$

$$c_R = \frac{\partial V_R}{\partial R_{вх}} = -V_{вх} \frac{R}{R_{вх}^2}.$$

Значення опору джерела і вольтметра відомі приблизно, в межах деяких границь $[R_{min}; R_{max}]$, $[R_{вх\,min}; R_{вх\,max}]$. Враховуючи всі значення опорів всередині вказаних границь рівномірними, можна оцінити за типом В невизначеності обох опорів як:

$$u_B(R) = \frac{(R_{min} - R_{max})}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta R}{\sqrt{12}};$$

$$u_B(R_{вх}) = \frac{(R_{вх\,min} - R_{вх\,max})}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta R_{вх}}{\sqrt{12}}.$$

Таким чином, стандартна невизначеність $u(V)$ буде рівна

$$u(V) = \frac{V_{вх} R}{R_{вх}\sqrt{12}} \sqrt{\delta^2(R) + \delta^2(R_{вх})},$$

де $\delta(R) = \frac{\Delta R}{R}$; $\delta(R_{вх}) = \frac{\Delta R_{вх}}{R_{вх}}$ – відносні інтервали можливих значень опорів.

Невизначеність алгоритму оброблення результатів вимірювань. У метод вимірювання можуть бути закладені обчислювальні операції – визначення середнього, середньоквадратичного або середнього абсолютного значення ряду спостережень параметра вимірюваної величини, що змінюється, чисельна інтеграція або диференціювання, обчислення значення елементарної функції шляхом розкладання в ряд і т.д. Залежно від вибраного алгоритму оброблення результати вимірювань можуть бути обтяжені відповідними похибками. Стандартне відхилення цих похибок є оцінкою невизначеності використовуваного алгоритму оброблення.

Наприклад, при визначенні середнього значення вимірюваної величини q через середнє арифметичне $\bar{q}$ ряду спостережень q_k, дисперсія оцінки середнього арифметичного складе, як відомо

$$s^2(\bar{q}) = s^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} s^2(q_k) = \frac{n}{n^2} s^2(q_k) = \frac{s^2(q_k)}{n},$$

тому невизначеність алгоритму оброблення результатів вимірювань буде дорівнювати

$$s(\bar{q}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2}{n(n-1)}}.$$

2.3.2 Інструментальні невизначеності – це невизначеності, обумовлені недосконалістю ЗВТ.

Ці невизначеності, залежно від режиму використання ЗВТ, розділяють на статичні і динамічні. Статична невизначеність – це невизначеність вимірювання ФВ, розмір якої можна вважати незмінним за час вимірювання. Динамічна невизначеність – це складова невизначеності вимірювань, яка виникає додатково до статичної під час динамічних вимірювань, при яких розмір ФВ, що вимірюється, не можна вважати постійним. Вона визначається двома чинниками: динамічними властивостями ЗВТ і характером змін в часі вимірюваної величини.

Прикладом статичної невизначеності цього типу є невизначеність, обумовлена нелінійністю функції перетворення ЗВТ, наприклад, нелінійність закону Гука в широкому діапазоні, нелінійність температурних датчиків (ефект Зеєбека). при вимірюванні температури, частотні невизначеності вольтметрів змінного струму. Прикладом динамічних невизначеностей є невизначеності, обумовлені інерційними властивостями ЗВТ (інерційністю термометра при вимірюванні температури, інерційними властивостями спідометра при визначенні швидкозмінних швидкостей і т.д.).

Однією з невизначеностей, які найчастіше зустрічаються і закладені в принцип дії всіх цифрових ЗВТ, є невизначеність квантування безперервної величини при аналого-цифровому перетворенні.

В процесі квантування відбувається вимірювальне перетворення величини, що безперервно змінюється, X у величину $X_N=Nq$, що ступінчасто змінюється, із заданими розмірами ступенів q. При цьому нескінченній безлічі можливих значень величин X ставиться у відповідність кінцева і підрахункова безліч можливих показань або вихідних кодів цифрового пристрою N.

Квантуванню, як вимірювальному перетворенню, властива похибка, що виникає при відображенні безперервної за розміром величини X обмеженої за числом розрядів N. Похибка квантування рівна різниці між результатами вимірювання та дійсним значенням величини $X_д$

$$\Delta = X_N - X_д, \tag{2.3}$$

якщо похибка міри і компаратора дорівнює нулю. Таким чином, як випливає з (2.3), залежність похибки квантування Δ від вимірюваної величини X лінійна в межах кроку квантування q.

У цифрових ЗВТ вимірювана величина X, що знаходиться між двома рівнями квантування X_N і X_{N+1}, як правило, відображена нижнім числовим значенням N. В цьому випадку похибка квантування Δ завжди негативна, а її максимальне значення рівне кроку квантування q. Оскільки X може приймати будь-яке рівномірне значення в межах кроку квантування, заданого рівнями квантування X_N і X_{N+1}, то стандартна невизначеність квантування, розрахована за типом В, визначатиметься як стандартне відхилення рівномірного закону розподілу з вказаними межами і складатиме значення

$$u_в(\Delta) = \frac{q}{\sqrt{12}}.$$

2.3.3 Суб'єктивні невизначеності. Суб'єктивні невизначеності або невизначеності оператора, обумовлені такими факторами.

1. Інерційними властивостями органів чуття спостерігача, наприклад, при запізнюванні у відліках максимального положення покажчика в балістичних приладах.

2. Впливом місцерозташування спостерігача і особливостями системи відліку, помилками в інтерполяції відліку, що попадає між двома оцифрованими відмітками.

3. Обмеженням діапазону чутливості і нелінійністю характеристик сприйняття органів чуття, наприклад, неправильне визначення нульового биття при вимірюванні частоти гетеродинним частотоміром обумовлене обмеженням знизу частотного діапазону чутливості вуха.

У гетеродинному частотомірі вимірювана частота f_x визначається з умови рівності зразковій частоті f_0, що виробляється гетеродином, який перенастроюється. При наближеній рівності вказаних частот на виході частотоміра виходять нульові биття, тобто коливання різницевої (близької до нуля) частоти $|f_0 - f_x|$. Як індикатор цього биття в деяких типах частотомірів застосовуються головні телефони, а як компаратор – вухо оператора. Оскільки нижня межа діапазону чутливості вуха людини складає 16-20 Гц, то межі похибки відліку будуть дорівнювати ±(16-20) Гц. Стандартна невизначеність відліку, розрахована за типом В, в припущенні рівномірного розподілу положення нульового биття усередині цього інтервалу, буде очевидно рівною $(16\text{-}20)/\sqrt{3} \approx 9{,}2 - 11{,}5$ Гц. Вказана похибка компенсується застосуванням методу «вилки», при якому шукана частота визначається як середнє арифметичне частот гетеродина, що відповідають зникненню f_{01} і появі f_{02} звуку в телефонах. Проте і в цьому випадку похибку порівняння не вдається зробити менше ±10 Гц, що відповідає стандартній невизначеності 6 Гц.

Контрольні запитання

1. Приведіть класифікацію видів невизначеностей.
2. Що таке методична невизначеність?
3. Виразіть невизначеність, що виникає при врахуванні дії вхідного опору вольтметра на джерело напруги.
4. Наведіть приклади невизначеностей алгоритму оброблення результатів вимірювань.
5. Перерахуйте невизначеності вимірювального експерименту.
6. Що таке невизначеність специфікації?
7. Оцініть невизначеність квантування цифрових ЗВТ.
8. Наведіть приклад невизначеностей, обумовлених недоліком виготовлення чи конструкції ЗВТ.

3 СПОСОБИ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ НА ОСНОВІ КОНЦЕПЦІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Найважливішою ознакою класифікації вимірювань є вид рівняння вимірювання, за яким їх розділяють на прямі, опосередковані, сумісні та сукупні. Для цих видів вимірювань нижче будуть розглянуті способи опрацювання їх результатів і обчислення невизначеностей.

3.1 Опрацювання результатів прямих вимірювань

Під прямими вимірюваннями розуміють вимірювання, при яких значення ФВ одержують безпосередньо [8]. При цьому вимірювана величина Y приймається рівною величині X, що безпосередньо спостерігається $Y = X$.

Прямі вимірювання (direct measurings) – це найпоширеніший і найпростіший вид вимірювань. Ці вимірювання є складовим елементом опосередкованих, сумісних і сукупних вимірювань. Прямі вимірювання можна виконувати шляхом одноразових і багаторазових спостережень. Вибір кількості спостережень визначається вимогами до точності вимірювання і допустимою трудомісткістю опрацювання їх результатів.

Найпоширенішими на практиці є вимірювання з одноразовим спостереженням, які найпростіші, продуктивні та найдешевші. Вимірювання з багаторазовими спостереженнями виконуються при підвищених вимогах до точності вимірювань. Такі вимірювання характерні для професійної метрологічної діяльності і виконуються в основному співробітниками метрологічних служб, а також при точних наукових експериментах. Це складні, трудомісткі і дорогі вимірювання, доцільність яких повинна бути завжди переконливо обґрунтована.

3.1.1 Опрацювання результатів прямих вимірювань з одноразовими спостереженнями. Прямі одноразові вимірювання проводять з числом спостережень не більше трьох. Повторні спостереження в цьому випадку виконуються для страхування від здійснення промахів. Для оцінювання сумарної невизначеності результатів прямих вимірювань з одноразовими спостереженнями необхідно апріорно знати значення всіх її складових. Таким чином, складові сумарної невизначеності прямих вимірювань з одноразовими спостереженнями оцінюються за типом В. Порядок опрацювання такий.

1 . Аналізується схема вимірювання, апріорна інформація про умови проведення вимірювання, метрологічні характеристики вживаної апаратури.

2 . Проводиться одне або три спостереження значення вимірюваної величини. Результат одного із спостережень, який не має промахів,

приймають за оцінку у результату вимірювання Y.

3. Знаходять стандартні невизначеності типу В вимірюваної величини. Початковими даними для знаходження є:

– відомості про розподіл імовірності вимірюваної величини, засновані на даних попередніх вимірювань;

– дані, засновані на досвіді дослідника або загальних знаннях про поведінку і властивості відповідних приладів і матеріалів; невизначеності констант і довідкових даних;

– дані перевірки, калібрування, відомості виробника про прилад і т.д.

Різні варіанти початкових даних визначають вибір одного з варіантів обчислення стандартної невизначеності (див. пункти 1.4.1 – 1.4.2).

Наприклад: здійснюється вимірювання напруги постійного струму за допомогою вольтметра. Показання вольтметра V_x=1,347 В. Необхідно визначити результат вимірювання і оцінити невизначеність вимірювання напруги [2].

1. Складаємо специфікацію вимірювань:

а) аналіз умов вимірювань:

– вимірювання проводяться в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря +25°С;

б) аналіз схеми вимірювання:

– напруга вимірюється на виході джерела з внутрішнім опором R =(100 ±10) кОм;

– межа вимірювання приладу - 2 В;

в) аналіз технічних характеристик приладу:

– робочі умови застосування приладу: температура навколишнього повітря від 5 до 40°С;

– ступінь квантування приладу складає ціну одиниці молодшого розряду;

– межа основної відносної похибки приладу при вимірюванні постійної напруги на піддіапазонах 0,2; 2 В дорівнює значенням, що обчислюються за формулою

$$\delta = \pm\left[0{,}25 + 0{,}2\left(\frac{V_k}{V_x} - 1\right)\right],$$

де V_k – значення встановленого піддіапазону вимірювання, В;

V_x – показання приладу, В;

– межа додаткової похибки приладу, викликана відхиленням температури навколишнього повітря від нормальної до будь-якої в межах робочої області температури, не більше межі основної похибки на кожні 10°С зміни температури;

– активний вхідний опір $R_{вх}$ приладу (10±1) МОм при вимірюванні постійної напруги.

2. Визначимо виправлений результат вимірювання, з урахуванням поправки на систематичну похибку вимірювання, обумовлену шунтуванням опору джерела вхідним опором вольтметра. Оскільки:

$$V_{вх} = V_R \frac{R_{вх}}{R + R_{вх}},$$

де V_R – напруга холостого ходу на виході джерела;

V_x – показання вольтметра,

то

$$V_R = V_{вх} \frac{R + R_{вх}}{R_{вх}} = 1{,}36047 \text{ В}.$$

3. Визначаємо складові $u_i(V)$ сумарної невизначеності вимірювання напруги.

Основна невизначеність вимірювання, обчислюється через вираз для основної відносної похибки δ в припущенні про рівномірний розподіл похибки усередині меж.

Оскільки межі відносної похибки рівні

$$\delta = \pm\left[0{,}25 + 0{,}2\left(\frac{V_k}{V_x} - 1\right)\right] = \pm 0{,}347\,\%,$$

то межі абсолютної похибки будуть дорівнювати

$$\Delta = \frac{\delta \cdot V_k}{100\%} = \pm 0{,}00347 \cdot 1{,}347 = \pm 0{,}00467 \text{ В}.$$

Звідси основна невизначеність вимірювань буде дорівнювати

$$u_1 = \frac{|\Delta|}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}00467}{1{,}732} \approx 0{,}0027\text{В}.$$

Оскільки вимірювання проводяться в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря +25°С, а межа додаткової похибки приладу, викликаної зміною температури навколишнього повітря від нормальної (20°С) до будь-якої в межах робочої області температури, не більше межі основної похибки на кожні 10°C зміни температури, то додаткова температурна невизначеність буде рівною

$$u_2 = \frac{25-20}{10} u_1 = 0{,}5 u_1 \approx 0{,}00135 \text{ В}.$$

Невизначеність квантування u_3 вимірюваної напруги рівна похибці квантування, діленій на коефіцієнт охоплення для рівномірного закону розподілу

$$u_3 = \frac{0{,}0005}{\sqrt{3}} \approx 0{,}00029 \text{ В}.$$

Невизначеність поправки u_4, обумовлена невизначеністю $u_{вх}$ вхідного опору вольтметра $R_{вх}$ і невизначеністю u_R опору джерела R, визначається з виразу для поправки q

$$q = -(V_x - V_R) = V_x \frac{R + R_{вх}}{R_{вх}} - V_x = V_x \frac{R}{R_{вх}}.$$

Розглядаючи цей вираз як рівняння непрямих вимірювань, з урахуванням відсутності кореляції між похибками визначення вхідного опору вольтметра і опору джерела, можна записати

$$u_4 = \sqrt{W_R^2 u_R^2 + W_{вх}^2 u_{вх}^2},$$

де $W_R = \dfrac{\partial q}{\partial R} = \dfrac{V_{вх}}{R_{вх}} = 0{,}1347$ мкВ/Ом;

$$W_{вх} = \frac{\partial q}{\partial R_{вх}} = -\frac{V_{вх} R}{R_{вх}^2} = -1{,}347 \text{ нВ/Ом}.$$

Значення опору джерела і вольтметра відомі приблизно, в межах деяких границь $[R_{min};\ R_{max}]$, $[R_{вх\,min};\ R_{вх\,max}]$. Враховуючи, що всі значення опорів всередині вказаних границь рівномірні, можна оцінити за типом В невизначеності обох опорів як

$$u_B(R) = \frac{(R_{min} - R_{max})}{\sqrt{12}} = \frac{20}{3{,}4641} = 5{,}7735 \text{ кОм};$$

$$u_B(R_{вх}) = \frac{(R_{вх\,min} - R_{вх\,max})}{\sqrt{12}} = \frac{2}{3{,}4641} = 0{,}57735 \text{ МОм}.$$

Стандартна невизначеність u_4 поправки буде дорівнювати

$$u_4 = \sqrt{W_R^2 u_R^2 + W_{вх}^2 u_{вх}^2} = 7{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

Сумарна стандартна невизначеність вимірювання напруги буде рівною

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} = 0{,}0032 \text{ В}.$$

Аналізуючи складові невизначеності, можна побачити, що невизначеність квантування u_3 значно менша, ніж невизначеності u_1, u_2 і u_4, тому нею при розрахунку сумарної невизначеності можна нехтувати. Невизначеність поправки u_4 значна, оскільки джерело напруги має досить велике значення внутрішнього опору R. При малих R, в порівнянні з вхідним опором вольтметра $R_{вх}$, цією невизначеністю можна також нехтувати.

Задавшись довірчим рівнем p= 0,95, з урахуванням припущення про нормальність закону розподілу результату вимірювання, знаходимо розширену невизначеність

$$U = ku_c(Y) = 2 \cdot 0{,}0032 = 0{,}0064 \text{ В}.$$

Отже, записуємо результат вимірювання у вигляді

$$V = 1{,}360 \pm 0{,}006 \text{ В},\ p = 0{,}95$$

або

$$1{,}354 \le 1{,}360 \le 1{,}366 \text{ В},\ p = 0{,}95.$$

3.1.2 Опрацювання результатів прямих вимірювань із багаторазовими спостереженнями. Метою опрацювання результатів вимірювань із багаторазовими спостереженнями полягає в зменшенні невизначеності результату вимірювань. При опрацюванні багаторазових вимірювань вирішують такі дві задачі.

1. Визначають деяке наближене значення у вимірюваної величини Y, яке називається оцінкою і найкращим чином (з погляду її ефективності) відповідає одержаним результатам.

2. Визначають за типом А експериментальну стандартну невизначеність результатів окремих спостережень y_k (k = 1, 2, ..., n) і результату вимірювання у.

При статистичному опрацюванні результатів спостережень слід дотримуватися таких операцій:

а) виключити із числа результатів спостереження результати, що містять промахи;

б) виключити відомі систематичні похибки із результатів спостережень;

в) обчислити середнє арифметичне виправлених результатів спостережень, що приймається за результат вимірювання

$$y = \overline{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{n}; \tag{3.1}$$

г) обчислити експериментальне стандартне відхилення результату спостереження

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y})^2}{n-1}}; \tag{3.2}$$

д) обчислити експериментальне стандартне відхилення результату вимірювання (середнього арифметичного)

$$u_A(\overline{y}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y})^2}{n(n-1)}}; \tag{3.3}$$

е) оцінити складові $u_i(Y)$ сумарної стандартної невизначеності за типом В невиключених залишків систематичної похибки результату вимірювання (аналогічно тому, як це робилося для прямих вимірювань з одноразовими спостереженнями);

ж) обчислити сумарну невизначеність типу В результату вимірювання

$$u_{cB}(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i^{\,2} u_i^2(Y)}; \tag{3.4}$$

и) обчислити сумарну невизначеність результату вимірювання

$$u_c(Y) = \sqrt{u_A^2(\overline{y}) + u_{cB}^2(Y)}; \tag{3.5}$$

к) визначити розширену невизначеність результату вимірювання як

$$U = t_p(\nu_{eff}) u_c(Y); \tag{3.6}$$

л) записати результат вимірювання у вигляді

$$Y = \bar{y} \pm U,\ p \quad (3.7)$$

або

$$\bar{y} - U \leq Y \leq \bar{y} + U,\ p. \quad (3.8)$$

3.1.3 Опрацювання груп прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями. При проведенні міжлабораторних випробувань виникає специфічна модель вимірювань, яка називається гніздовою структурою [3]. Особливістю цих вимірювань є те, що вони проводяться у різний час, різними ЗВТ, в різних умовах, різними методами, різними операторами.

При цьому утворюється декілька груп прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями, які для зменшення невизначеності слід об'єднувати, одержуючи єдиний результат вимірювання. З огляду на те, що невизначеності (дисперсії) спостережень в кожній з груп мають різне значення, визначення сумарної невизначеності об'єднаного результату вимірювань необхідно проводити з урахуванням математичного апарату, який називається дисперсійним аналізом.

При опрацюванні декількох груп спостережень необхідно враховувати кількість чинників і врівноваженість гніздової структури.

Урівноваженою гніздовою структурою називається структура з однаковою кількістю спостережень в групах. Неврівноважена структура складається з груп з різним числом спостережень.

Кількість чинників визначається числом рівнів «гніздування». Під чинником розуміють відмінність в умовах проведення груп спостережень. Ним може бути день, в який проводилися вимірювання, прилад або метод вимірювань, оператор, місце проведення вимірювань і т.д.

Розглянемо просту модель урівноваженої одноетапної гніздової структури, що найчастіше зустрічається на практиці.

Нехай є J груп прямих багаторазових спостережень величини Y по K спостережень в кожній групі. Алгоритм опрацювання результатів цих спостережень полягає в такому.

1.Визначаються середні арифметичні кожної групи спостережень:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} y_{jk}, \quad (3.9)$$

де y_{jk} – k-те спостереження величини $Y(k=1,\ 2,\ ...,K)$ в j-й групі (j=1, 2, ..., J).

2. Визначається середнє арифметичне $\bar{y}$ одержаних середніх арифметичних $\bar{y}_j$, що приймається за якнайкращу оцінку вимірюваної величини Y:

$$Y = \bar{y} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\bar{y}_j = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{jk}, \tag{3.10}$$

3. Обчислюється оцінка внутрішньогрупової дисперсії в j-й групі (число таких дисперсій рівне числу груп J)

$$s_j^2 = \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}\left(y_{jk} - \bar{y}_j\right)^2. \tag{3.11}$$

4. Знаходиться експериментальна дисперсія середніх арифметичних груп

$$s^2\left(\bar{y}_j\right) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\left(\bar{y}_j - \bar{y}\ \right)^2. \tag{3.12}$$

Така оцінка тільки одна.

5. Визначається, чи є міжгрупова складова дисперсії значною в порівнянні з внутрішньогруповою складовою. Для цього виконують такі операції:

а) визначають дві незалежні оцінки усередненої внутрішньогрупової дисперсії спостережень. Першу оцінку, позначимо як s_I^2, виходить із спостережуваних відхилень щоденних середніх арифметичних $\bar{y}_j$ (3.9). Оскільки $\bar{y}_j$ є середнє арифметичне K спостережень, його оцінена дисперсія $s^2\left(\bar{y}_j\right)$ при допущенні, що міжгрупова дисперсія рівна нулю, оцінюється як $\frac{s_I^2}{K}$. Тоді з рівняння (3.11) випливає

$$s_I^2 = Ks^2\left(\bar{y}_j\right) = \frac{K}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\left(\bar{y}_j - \bar{y}\right)^2. \tag{3.13}$$

Ця оцінка має (J - 1) ступенів вільності. Друга оцінка, позначена як s_{II}^2, є середньою оцінкою дисперсії, одержаною з J індивідуальних значень внутрішньогрупової дисперсії $s_j^2\left(y_{jk}\right)$

$$s_{II}^2 = \bar{s}_j^2\left(y_{jk}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{J}\nu_j s_j^2\left(y_{jk}\right)}{\sum_{j=1}^{J}\nu_j}. \tag{3.14}$$

Оскільки структура урівноважена і всі ступені вільності $\nu_j = K-1$, то й вираз, що виходить в результаті для s_{II}^2 є просто середнє арифметичне $s_j^2(y_{jk})$

$$s_{II}^2 = \overline{s}_j^2(y_{jk}) = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} s_j^2(y_{jk}). \qquad (3.15)$$

Таким чином, з урахуванням виразу (3.11), отримують

$$s_{II}^2 = \frac{1}{J(K-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{jk}-\overline{y})^2, \qquad (3.16)$$

що є оцінкою, що має $J(K-1)$ ступенів вільності.

Оскільки оцінка s_I^2 ґрунтується на змінності середніх арифметичних, тоді як оцінка s_{II}^2, ґрунтується на змінності внутрішньогрупових спостережень, їх відмінність показує можливу присутність міжгрупової змінності;

б) порівнюють значення s_I^2 і s_{II}^2. Для цього використовують F-тест.

Відомо, що F-розподіл складових є розподілом імовірності відношення

$$F(\nu_I, \nu_{II}) = \frac{s_I^2(\nu_I)}{s_{II}^2(\nu_{II})} \qquad (3.17)$$

двох незалежних оцінок $s_I^2(\nu_I)$ і $s_{II}^2(\nu_{II})$ дисперсії нормально розподіленої випадкової змінної. Параметри ν_I, і ν_{II} є відповідними ступенями вільності двох оцінок, а $0 \le F(\nu_I, \nu_{II}) \le \infty$. Критичні значення F для різної ймовірності (квантилі F-розподілу) внесені в таблицю розподілу Фішера для різних значень ν_I і ν_{II} [3].

Звичайно, критичні значення F задаються для ймовірності 0,95, 0,975 або 0,99. Якщо розраховане значення $F(\nu_I, \nu_{II})$ більше, ніж критичне для заданої ймовірності ($F_{0,95}$, $F_{0,975}$ або $F_{0,99}$), то це тлумачиться як наявність міжгрупової дисперсії, оскільки $s_I^2(\nu_I)$ більше $s_{II}^2(\nu_{II})$ на статистично значущу величину.

6. При $F(\nu_I, \nu_{II}) < F_p$ коли існування міжгрупової похибки заперечується, оскільки різниця між s_I^2 і s_{II}^2 не розглядається як статистично значуща, оцінену дисперсію $s^2(\overline{y})$ для $\overline{y}$ слід розраховувати із загального виразу

$$s^2(\bar{y}) = \frac{1}{JK(JK-1)} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (y_{jk} - \bar{y}_j)^2 . \qquad (3.18)$$

Це співвідношення еквівалентно виразу

$$s^2(\bar{y}) = \frac{(J-1)s_I^2 + J(K-1)s_{II}^2}{JK(JK-1)} . \qquad (3.19)$$

Дійсно, можна переписати вираз (3.18) як

$$s^2(\bar{y}) = \frac{1}{JK(JK-1)} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \left[(y_{jk} - \bar{y}_j) + (\bar{y}_j - \bar{y}) \right]^2 =$$

$$\frac{1}{JK(JK-1)} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \left[(y_{jk} - \bar{y}_j)^2 + (\bar{y}_j - \bar{y})^2 + 2(y_{jk} - \bar{y}_j)(\bar{y}_j - \bar{y}) \right].$$

В отриманому виразі

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (y_{jk} - \bar{y}_j)^2 = J(K-1)s_{II}^2;$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (y_j - \bar{y})^2 = J(K-1)s_I^2;$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} 2(y_{jk} - \bar{y}_j)(\bar{y}_j - \bar{y}) = 2\sum_{j=1}^{J} (\bar{y}_j - \bar{y}) \sum_{k=1}^{K} (y_{jk} - \bar{y}_j) =$$

$$= 2\sum_{J=1}^{J} (\bar{y}_j - \bar{y})(K\bar{y}_j - K\bar{y}_j) = 0 .$$

З врахуванням цього одержано вираз (3.19). Таким чином, якщо припустити, що всі поправки на систематичні ефекти враховані і всі інші складові невизначеності незначні, то результат вимірювання можна записати як

$$Y = \frac{1}{JK} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} y_{jk} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \bar{y}_j = \bar{y},$$

з сумарною стандартною невизначеністю $s^2(\bar{y})$ (3.19), що має JK - 1 ступенів вільності.

Розширену невизначеність результату вимірювання можна розрахувати за формулою

$$U = t_p(\nu)s(\bar{y}),$$

де $t_p(\nu)$ – коефіцієнт Стьюдента для числа ступенів вільності ν = JK - 1 і довірчого рівня p. Для $\nu > 30$ замість коефіцієнта Стьюдента можна брати коефіцієнт охоплення для нормального закону розподілу.

7. При $F(\nu_I, \nu_{II}) \geq F_p$ існування міжгрупової дисперсії приймається і передбачається, що вона випадкова. Тоді оцінена дисперсія $\bar{y}$ виходить з $s^2(\bar{y}_j)$, оскільки вона належним чином відображає як внутрішньогрупову, так і міжгрупову випадкові складові дисперсії. Таким чином,

$$s^2(\bar{y}) = \frac{s^2(\bar{y}_j)}{J} \tag{3.20}$$

і з урахуванням рівняння (3.12), отримаємо

$$s^2(\bar{y}) = \frac{\sum_{j=1}^{J}(\bar{y}_j - \bar{y})^2}{J(J-1)}. \tag{3.21}$$

Ця оцінка дисперсії має J - 1 ступенів вільності.

Розширену невизначеність результату вимірювання в такому випадку можна розрахувати за формулою $U = t_p(\nu)s(\bar{y})$ де $t_p(\nu)$ – коефіцієнт Стьюдента для числа ступенів вільності ν = J - 1 та довірчого рівня p.

3.2 Опрацювання результатів опосередкованих вимірювань

При опосередкованих вимірюваннях (indirect measurings) шукане значення ФВ Y визначають на підставі результатів прямих вимірювань N інших ФВ $X_1, X_2, \ldots, X_N$, функційно пов'язаних з шуканою величиною [8]

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N). \tag{3.22}$$

Самі вхідні величини $X_1, X_2, \ldots, X_N$ від яких залежить вихідна величина Y, можна розглядати як вимірювані величини, і вони самі можуть залежати від інших величин, включаючи поправки і поправковий коефіцієнти на систематичні ефекти, що веде до ускладнення функціональної залежності f, яка ніколи не може бути записана точно. У випадку, якщо виявляється, що f не моделює вимірювання до ступеня, що накладається необхідною точністю його результату, то для усунення неадекватності в рівняння (3.22) повинні бути включені додаткові вхідні величини.

При отриманні оцінки *y* вимірюваної величини *Y* і її невизначеності необхідно враховувати два фактори:

– функція f у загальному випадку істотно нелінійна;

– оцінки x_1, x_2, ..., x_N вхідних величин X_1, X_2, ..., X_N можуть бути зв'язані між собою або корельовані, якщо їх вимірювання проводяться одночасно, однотипними приладами, в однакових умовах.

У разі істотної нелінійності *f* [2] або наявності кореляції між оцінками x_1, x_2, ..., x_N, надійну оцінку вимірюваної величини слід проводити за формулою

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(X_{1,k}, X_{2,k}, ..., X_{N,k}\right), \tag{3.23}$$

де $X_{1,k}, X_{2,k}, ..., X_{N,k}$ – k-те спостереження $(k = 1,2,...,n)$ вхідних величин X_1, X_2, ..., X_N.

Таким чином, y береться як середнє значення n незалежних спостережень Y_k величини Y; при цьому кожне спостереження має одну і ту ж невизначеність і кожне засноване на повному наборі спостережуваних значень N вхідних величин X_i, одержаних в один і той самий час.

В цьому випадку стандартна невизначеність типу А результату непрямого вимірювання обчислюється за формулою

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(Y_k - y\right)^2}{n(n-1)}}. \tag{3.24}$$

Зазвичай на практиці оцінку *y* вимірюваної величини *Y*, одержують з простішого виразу

$$y = \left(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N\right), \tag{3.25}$$

де $\overline{X}_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}}{n}$ є середнім арифметичним окремих спостережень $X_{i,k}$.

В цьому випадку, оцінене стандартне відхилення, зв'язане з вихідною оцінкою чи з результатом вимірювання y, називається сумарною стандартною невизначеністю і позначається $u_c(y)$, отримують із оціненого стандартного відхилення, зв'язаного з кожною вхідною оцінкою x_i, називається стандартною невизначеністю і позначається $u_c(x_i)$.

Кожну вхідну оцінку x_i і зв'язану з нею стандартну невизначеність $u_c(x_i)$ отримують із розподілу можливих значень вхідної величини X_i. Цей розподіл ймовірностей, як вже було сказано, може бути оснований на рядах спостережень $X_{i,k}$, величин X_i чи він може бути апріорним розподілом. В першому випадку отримують оцінки складової стандартної невизначеності за типом А, в другому випадку – оцінки за типом В.

Спосіб додавання стандартних невизначеностей залежить від ступеня корельованості вхідних величин.

3.2.1 Оцінювання некорельованих вхідних величин. У випадку незалежності вхідних величин алгоритм опрацювання результатів непрямих вимірювань полягає в такому.

1. Визначають оцінку вимірюваної величини Y за формулою $y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$, де $x_1, x_2, ..., x_N$ – оцінки вхідних величин X_1, X_2, ..., X_N, отримані за результатами одноразових чи багаторазових прямих вимірювань. В останньому випадку як оцінки беруть середнє арифметичне n спостережень X_i

$$x_i = \overline{X}_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}}{n}. \tag{3.26}$$

2. Знаходять стандартні невизначеності $u(x_i)$ оцінок $x_1, x_2, ..., x_N$ вхідних величин. Вони можуть бути отримані за типом А (тільки у випадку багаторазових вимірювань X_1, X_2, ..., X_N) чи за типом В (як у випадку одноразових, так і у випадку багаторазових вимірювань X_1, X_2, ..., X_N, як було описано раніше.

3. Обчислюють сумарну стандартну невизначеність оцінки вимірюваної величини у за формулою

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}, \tag{3.27}$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – коефіцієнти чутливості, які розраховуються як часткові похідні $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ для X_i=x_i.

При значній нелінійності f у вираз (3.27) повинні бути включені члени більш високого порядку розкладу в ряд Тейлора. Якщо щільність розподілу кожного X_i симетрична відносно його середнього значення, то до підкореневого виразу достатньо додати члени другого порядку

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right)u^2(x_i)u^2(x_j). \quad (3.28)$$

4. Визначають розширену невизначеність оцінки вимірюваної величини за формулою

$$U = ku_c(y), \quad (3.29)$$

де коефіцієнт охоплення k приймається рівним коефіцієнту Стьюдента $t_p(\nu_{eff})$ для ефективного числа ступенів вільності ν_{eff}, отриманого з формули Велча-Саттерсвейта

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} u_i^4(y)}{\nu_i}} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)\right]^2}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} u_i^4(y)}{\nu_i}}. \quad (3.30)$$

У виразі (3.30) $u_i(y) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)$, а значення ступенів вільності ν_i приймається рівним ∞, якщо $u(x_i)$ визначається за типом В і рівним n-1, якщо $u(x_i)$ визначається за типом А, де n – число багаторазових вимірювань, що проводяться при отриманні оцінки $u(x_i)$.

5. Записують результати вимірювання у вигляді

$$Y = y \pm U, \quad p \quad (3.31)$$

чи

$$y - U \le Y \le y + U, \quad p. \quad (3.32)$$

3.2.2 Оцінювання корельованих вхідних величин. Значна кореляція між двома вхідними величинами може існувати, якщо при їх визначенні використовують один і той же вимірювальний пристрій, фізичний еталон вимірювання чи довідкові дані, які мають значну невизначеність. Наприклад, якщо поправка на температуру, необхідна для оцінки вхідної величини X_i, отримується за допомогою деякого термометра і така ж поправка на температуру необхідна для оцінки вхідної величини X_j також отримується за допомогою цього ж термометра, то дві вхідні величини можуть бути корельовані.

У випадку корельованих вхідних величин алгоритм опрацювання результатів непрямих вимірювань є таким.

1. Визначають оцінку вимірюваної величини за формулою $y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$, де $x_1, x_2, ..., x_N$ – оцінки вхідних величин X_1, X_2, …, X_N,

отримані за результатами багаторазових прямих вимірювань, як такі беруться середні арифметичні n спостережень $\overline{X}_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{i,k}}{n}$.

При цьому, як і в випадку незалежних непрямих вимірювань, вбачається, що із числа багаторазових спостережень видалені спостереження, обтяжені грубими похибками чи промахами, а також внесені всі поправки на відомі систематичні ефекти.

2. Знаходять стандартні невизначеності $u(x_i)$ оцінок $x_1, x_2, ..., x_N$ вхідних величин. Вони можуть бути отримані за типом А (тільки у випадку багаторазових вимірювань X_1, X_2, …, X_N) чи за типом В (як у випадку одноразових, так і у випадку багаторазових вимірювань X_1, X_2, …, X_N).

3. Розраховують значення коефіцієнтів чутливості

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial X_i} \text{ при } X_i = x_i \ (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.33}$$

4. Знаходять попарні оцінки кореляційних моментів

$$u(x_i, x_j) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_{i,k} - \overline{x}_i)(x_{j,k} - \overline{x}_j)}{n-1}. \tag{3.34}$$

5. Розраховують коефіцієнт кореляції

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}, \quad -1 < r(x_i, x_j) < 1. \tag{3.35}$$

6. Визначають оцінку дисперсії результату вимірювання

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(\overline{x}_i) + 2\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=2}^{N} c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j). \tag{3.36}$$

7. Знаходять розширену невизначеність результату непрямого вимірювання $U = t_p(\nu_{eff})u_c$, де $t_p(\nu_{eff})$ – коефіцієнт Стьюдента для заданого довірчого рівня p і числа ступенів вільності ν_{eff}, що визначається за формулою (3.30).

8. Записують результати вимірювання у вигляді

$$Y = y \pm U, \quad p \text{ або } y - U \le Y \le y + U, \quad p.$$

3.3 Опрацювання результатів сумісних вимірювань

Сумісними називаються вимірювання декількох однойменних ФВ, які проводяться одночасно для визначення залежності між ними [8]

$$Y = f(X, V, W, ..., Z). \qquad (3.37)$$

Найчастіше на практиці визначають залежність Y від одного аргумента X

$$Y = f(X). \qquad (3.38)$$

При цьому сумісно визначають n значень аргумента x_k, k = 1, 2, ..., n і відповідні значення величини y_k, і за отриманими даними визначають функціональну залежність (3.38). Цей випадок ми будемо розглядати і далі. Методи, які при цьому застосовуються, прямо переносяться на залежність від декількох аргументів.

В метрології сумісні вимірювання двох аргументів застосовуються при градуюванні ЗВТ, в результаті якого визначається градуйована характеристика, яка наводиться в паспорті ЗВТ у вигляді таблиці, графіка чи аналітичного виразу. Найкраще задавати її в аналітичному вигляді, оскільки така форма подання найбільш компактна і зручна для вирішення широкого кола практичних задач. Прикладом сумісних вимірювань може бути задача визначення температурної залежності опору терморезистора

$$R(t) = R_{20} + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2, \qquad (3.39)$$

де R_{20} – опір терморезистора при 20°C;

α, β – температурні коефіцієнти опору.

Для визначення R_{20}, α чи β проводиться вимірювання R(t) в n температурних точках (n > 3), і за цими результатам визначається шукана залежність.

При визначенні залежності в аналітичному вигляді слід притримуватись такого порядку.

1. Побудувати графік шуканої залежності $y = f(x)$, де y, x – результати вимірювання Y, X в n заданих точках.

2. Задати передбачений функціональний вигляд залежності:

$$Y = f(X, A_0, A_1, ..., A_m), \qquad (3.40)$$

де A_j – невідомі параметри залежності.

Вигляд залежності може бути відомий або з фізичної закономірності, які описують явище, яке покладене в основу роботу ЗВТ, або на основі попереднього досліду і попереднього аналізу даних (аналіз графіка шуканої залежності).

3. Вибрати метод визначення параметрів цієї залежності. При цьому необхідно враховувати вибраний вигляд залежності і апріорні дані про похибки вимірювань x_k і y_k.

4. Обчислити оцінки параметрів A_j залежності вибраного вигляду.

5. Оцінити ступінь відхилення експериментальної залежності від аналітичної для перевірки правильності вибору вигляду залежності.

6. Визначити невизначеність знаходження $\widetilde{A}_j$, застосовуючи відомі характеристики невизначеностей вимірювання x і y.

7. Оцінити невизначеність знаходження y_k в заданій точці x_k за отриманою аналітичною залежністю з урахування попарної кореляції між оцінками параметрів A_i, A_j.

В сучасній математиці розроблені численні методи вирішення таких задач. Найпоширенішими з них є метод найменших квадратів (МНК).

3.3.1 Метод найменших квадратів. В МНК оцінки параметрів початкової залежності визначають з умови, що сума квадратів відхилень експериментальних значень від розрахункових значень мінімальна, тобто

$$\sum_{k=1}^{n}\left(y_k - f\left(x_k, \widetilde{A}_0, ..., \widetilde{A}_m\right)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\delta_k^2 = Q = \min, \qquad (3.41)$$

де δ_k – нев'язки.

При розгляді МНК обмежимось випадком, коли шукана функція – поліном

$$y_k = \sum_{j=0}^{m} A_j x_k^{\,j} = A_0 + A_1 x_k + A_2 x_k^{\,2} + ... + A_m x_k^{\,m}, \qquad (3.42)$$

де $k = 1,2,...,n$.

Задача полягає в тому, щоб визначити такі значення коефіцієнтів $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_m$, при яких виконувалась би умова (3.41).

Для цього запишемо вираз для нев'язок в кожній експериментальній точці

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 x_1 + \widetilde{A}_2 x_1^{\,2} + ... + \widetilde{A}_m x_1^{\,m} - y_1 = \delta_1 \\ \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 x_2 + \widetilde{A}_2 x_2^{\,2} + ... + \widetilde{A}_m x_2^{\,m} - y_2 = \delta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 x_n + \widetilde{A}_2 x_n^{\,2} + ... + \widetilde{A}_m x_n^{\,m} - y_n = \delta. \end{array}\right\}. \qquad (3.43)$$

Число точок n вибирають більшим, ніж степінь полінома m+1. Це, як буде показано нижчє, необхідно для зменшення похибки розрахунку $\widetilde{A}_j$.

Згідно з принципом найменших квадратів (3.41), найкращими значеннями коефіцієнтів $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, ..., \widetilde{A}_m$ будуть ті, для яких сума квадратів нев'язок

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^{\,2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 x_k + ... + \widetilde{A}_m x_k^{\,m} - y_k\right)^2 \tag{3.44}$$

буде мінімальною. Мінімум функції багатьох змінних $\widetilde{A}_j$, як відомо, досягається тоді, коли всі її окремі похідні дорівнюють нулю. Тому, диференціюючи (3.44), отримаємо

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial Q}{\partial \widetilde{A}_0} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 x_k + \widetilde{A}_2 x_k^{\,2} + ... + \widetilde{A}_m x_k^{\,m} - y_k\right) = 0 \\
\dfrac{\partial Q}{\partial \widetilde{A}_1} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 x_k + \widetilde{A}_2 x_k^{\,2} + ... + \widetilde{A}_m x_k^{\,m} - y_k\right) x_k = 0 \\
\dotfill \\
\dfrac{\partial Q}{\partial \widetilde{A}_m} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 x_k + \widetilde{A}_2 x_k^{\,2} + ... + \widetilde{A}_m x_k^{\,m} - y_k\right) x_k^{\,m} = 0
\end{array}\right\}. \tag{3.45}$$

Таким чином, замість початкової умовної системи (3.42), яка загалом являється системою несумісною, оскільки має n рівнянь з m+1 невідомими $(n > m+1)$, ми отримаємо систему лінійних відносно $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, ..., \widetilde{A}_m$ рівнянь (3.45). В ній число рівнянь при будь-якому n точно дорівнює числу невідомих $m+1$. Система (3.45) називається системою нормальних рівнянь.

Таким чином, поставлена задача полягає в приведенні умовної системи до нормальної.

Скориставшись позначеннями, введеними Гаусом

$$[x] = \sum_{k=1}^{n} x_k, [x^m] = \sum_{k=1}^{n} x_k^{\,m}, [x^m y] = \sum_{k=1}^{n} x_k^{\,m} y_k$$

і після скорочення всіх рівнянь на 2 і перегрупуванні членів, отримаємо

$$
\left.\begin{array}{l}
[y]=n\widetilde{A}_0+[x]\widetilde{A}_1+\ldots+[x^m]\widetilde{A}_m \\
[yx]=[x]\widetilde{A}_0+[x^2]A_1+\ldots+[x^{m+1}]\widetilde{A}_m \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[yx^m]=[x^m]\widetilde{A}_0+[x^{m+1}]\widetilde{A}_1+\ldots+[x^{2m}]\widetilde{A}_m
\end{array}\right\}. \qquad (3.46)
$$

Аналізуючи вирази (3.42) і (3.46) бачимо, що для отримання першого рівняння нормальної системи, достатньо додати всі рівняння системи (3.42). Для отримання другого рівняння нормальної системи (3.46), додаються всі рівняння системи (3.42), попередньо помножені на x_k. Тобто, для отримання r-го рівняння нормальної системи необхідно помножити рівняння системи (3.42) на x_k^{r-1} і додати отримані вирази.

Розв'язування системи (3.46) описується за допомогою визначників

$$
\widetilde{A}_0=\frac{D_0}{D}, \quad \widetilde{A}_1=\frac{D_1}{D}, \quad \ldots, \quad \widetilde{A}_m=\frac{D_m}{D},
$$

де головний визначник D дорівнює

$$
D=\begin{vmatrix}
n & [x] & \ldots & [x^m] \\
[x] & [x^2] & \ldots & [x^{m+1}] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
[x^m] & [x^{m+1}] & \ldots & [x^{2m}]
\end{vmatrix}, \qquad (3.47)
$$

а визначники D_j розраховуються з головного визначника D шляхом заміни стовпця з коефіцієнтами при невідомому A_j на стовпець з вільними членами

$$
D_j=\begin{vmatrix}
n & [x] & \ldots & [y] & \ldots & [x^m] \\
[x] & [x^2] & \ldots & [yx] & \ldots & [x^{m+1}] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
[x^m] & [x^{m+1}] & \ldots & [yx^m] & \ldots & [x^{2m}]
\end{vmatrix}. \qquad (3.48)
$$

Невизначеність величин $\widetilde{A}_j$, знайдених як результат сукупних вимірювань, виражається такою формулою:

$$s(\widetilde{A}_j)=\sqrt{\frac{D_{(j+1)(j+1)}}{D}\frac{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2}{(n-m)}},\tag{3.49}$$

де $D_{(j+1)(j+1)}$ – алгебраїчне доповнення елементів головного визначника D, який отримується шляхом видалення з матриці визначника стовпця $(j+1)$ і рядка $(j+1)$;

δ_k – обчислюються при підставленні в кожне умовне рівняння оцінок початкових величин $\widetilde{A}_0,\widetilde{A}_1,...,\widetilde{A}_m$.

Розширена невизначеність знаходження $\widetilde{A}_j$ обчислюється за формулою:

$$U(\widetilde{A}_j)=k_p s(\widetilde{A}_j),\tag{3.50}$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який знаходиться із розподілу Стьюдента за числом ступенів вільності $n-m$ і заданому довірчому рівню p.

Щоб оцінити невизначеність вимірювання y_k за отриманою аналітичною залежністю з урахуванням попарної кореляції між оцінками параметрів A_i, A_j, необхідно скористатись виразом для оцінки дисперсії непрямих вимірювань, який можна отримати з рівняння (3.42):

$$u^2(y_k)=\sum_{j=0}^{m}x_k^{2j}s^2(\widetilde{A}_j)+2\sum_{j=0}^{i=1}\sum_{i=1}^{m}x_k^i x_k^j u(\widetilde{A}_i,\widetilde{A}_j),\tag{3.51}$$

де $u(\widetilde{A}_i,\widetilde{A}_j)$ – коефіцієнт коваріації між $\widetilde{A}_i,\widetilde{A}_j$, що визначається за формулою:

$$u(\widetilde{A}_i,\widetilde{A}_j)=\frac{D_{(i+1)(j+1)}}{D}\frac{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2}{n-m},\tag{3.52}$$

де $D_{(i+1)(j+1)}$ – алгебраїчне доповнення елементів головного детермінанта D, який отримується шляхом видалення з матриці визначника стовпця $(i+1)$ і рядка $(j+1)$ з множенням отриманого визначника на $(-1)^{i+j+2}$

Таким чином, сумарна стандартна невизначеність $u_c(y_k)$ знаходження y_k в заданій точці x_k за отриманою аналітичною залежністю визначається як додатний квадратний корінь з виразу (3.51).

При збільшенні числа m, об'єм виконаної роботи швидко зростає, і тому, на практиці, звичайно, обмежуються поліномом не вище 3-го ступеня.

3.3.2 Розрахунок параметрів лінійної залежності. На практиці найпоширеніший випадок $m = 1$ (лінійне рівняння)

$$y_i = A_0 + A_1 x_i, \qquad i = 1,...,n. \tag{3.53}$$

Для цього випадку з виведених вище формул отримуємо нормальну систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} [y] &= n\widetilde{A}_0 + [x]\widetilde{A}_1 \\ [xy] &= [x]\widetilde{A}_0 + [x^2]\widetilde{A}_2 \end{aligned}\right\}. \tag{3.54}$$

Детермінанти цієї системи

$$D = \begin{vmatrix} n & [x] \\ [x] & [x^2] \end{vmatrix}, \qquad D_0 = \begin{vmatrix} [y] & [x] \\ [xy] & [x^2] \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} n & [y] \\ [x] & [xy] \end{vmatrix}.$$

Оцінки коефіцієнтів A_0, A_1 лінійної залежності (3.53) виражаються формулами

$$\widetilde{A}_0 = \frac{D_0}{D} = \frac{[y]\cdot[x^2] - [xy]\cdot[x]}{n\cdot[x^2] - [x]^2}, \qquad \widetilde{A}_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{n\cdot[xy] - [x]\cdot[y]}{n\cdot[x^2] - [x]^2}.$$

Оскільки алгебраїчні доповнення елементів головного детермінанта дорівнюють $D_{11} = x^2, D_{22} = n$, то стандартні невизначеності знаходження $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1$ будуть дорівнювати:

$$s(\widetilde{A}_0) = \sqrt{\frac{x^2}{nx^2 - [x]^2}} s(\delta), \qquad s(\widetilde{A}_1) = \sqrt{\frac{n}{nx^2 - [x]^2}} s(\delta),$$

де $s(\delta) = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}{n-2}}$.

Розширені невизначеності знаходження $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1$ визначаються з виразу (3.50) $U(\widetilde{A}_j) = k_p s(\widetilde{A}_j)$, в якому коефіцієнт охоплення k_p знаходять із розподілення Стьюдента за числом ступенів вільності $(n-2)$ і заданому довірчому рівню p.

Дисперсія y_k в заданій точці x_k за отриманою аналітичною залежністю з урахування кореляції між оцінками параметрів A_0, A_1, визначається з виразу:

$$u^2(y_k) = s^2(\widetilde{A}_0) + x_k^2 s^2(\widetilde{A}_1) + 2x_k u(\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1), \qquad (3.55)$$

де $u(\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1)$ – коефіцієнт коваріації між $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1$, що визначається за формулою

$$u(\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1) = s^2(\delta)\frac{D_{12}}{D} = s^2(\delta)\frac{-[x]}{nx^2 - [x]^2}. \qquad (3.56)$$

Таким чином, сумарна стандартна невизначеність знаходження y_k в заданій точці x_k за отриманою аналітичною залежністю визначається як додатний квадратний корінь з виразу (3.55).

3.3.3 Розрахунок параметрів неполіноміальних залежностей за допомогою МНК. В результаті метрологічних досліджень, нерідко доводиться зустрічатись з випадком, коли при визначенні нелінійної залежності підвищення степеня полінома в розумних межах не призводить до суттєвого зменшення похибки апроксимації. В цьому випадку часто застосовують перетворення функції $Y = f(X)$ в лінійну залежність $Y^* = A_0 + A_1 X^*$ шляхом заміни змінних $X^* = \Phi(X)$, $Y^* = \Psi(Y)$.

Цей прийом добре реалізується для функцій такого виду:

а) показникова, $Y = A_0 e^{A_1 X}$, для якої в результаті заміни змінної $Y^* = \ln Y$, отримаємо $Y^* = A_0^* + A_1 X$, де $A_0^* = \ln A_0$;

б) степенева $Y = A_0 X^{A_1}$, для якої в результаті заміни змінних $Y^* = \ln Y, X^* = \ln X$ отримуємо $Y^* = A_0^* + A_1 X^*$, де $A_0^* = \ln A_0$;

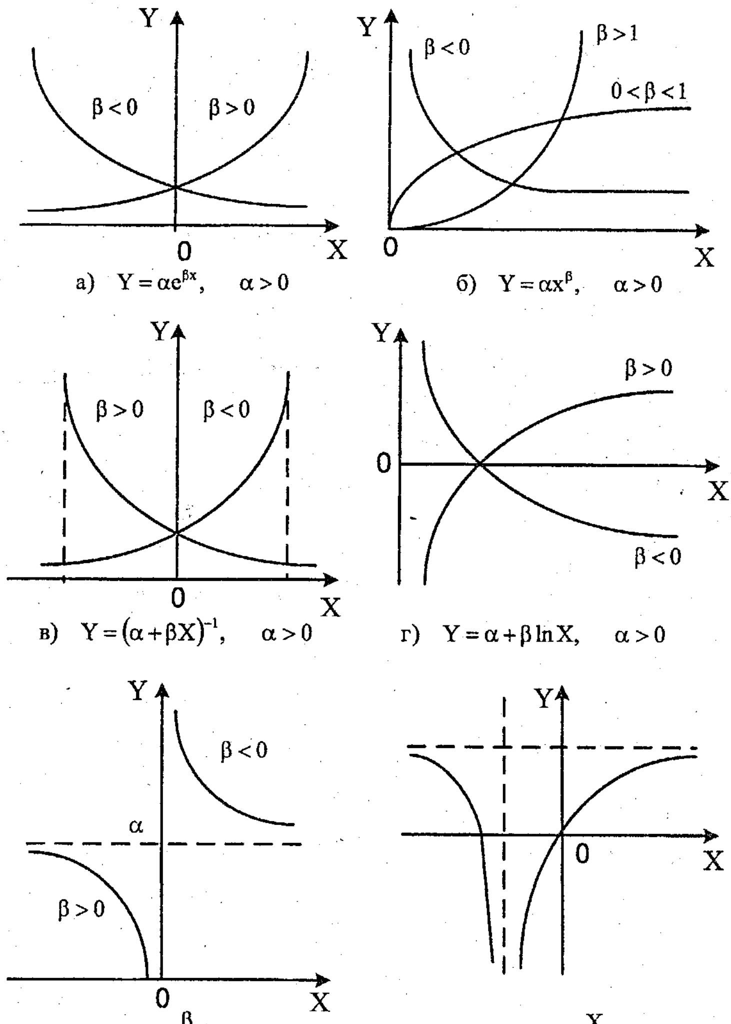
в) логарифмічна $Y = A_0 + A_1 \ln X$, для якої в результаті заміни змінної $X^* = \ln X$ отримуємо $Y = A_0 + A_1 X^*$;

г) гіперболічна $Y = A_0 + A_1 / X$, для якої в результаті заміни змінної $X^* = 1/X$ отримуємо $Y = A_0 + A_1 X^*$;

д) дробово-лінійна функція першого виду $Y = (A_0 + A_1 X)^{-1}$, для якої в результаті заміни змінної $Y^* = 1/Y$ отримуємо $Y^* = A_0 + A_1 X$;

е) дробово-лінійна функція другого виду $Y = \dfrac{X}{A_1 + A_0 X}$, для якої в результаті заміни змінних $Y^* = 1/Y$, $X^* = 1/X$ отримуємо $Y^* = A_0 + A_1 X$.

Графіки перерахованих функцій наведені на рис. 3.1. При визначенні невизначеностей знаходження оцінок $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_1$ необхідно пам'ятати, що у випадках показникової і степеневої функції параметр A_0, зв'язаний з параметром A_0^* виразом $A_0 = e^{A_0^*}$.



а) $Y = \alpha e^{\beta x}, \quad \alpha > 0$

б) $Y = \alpha x^{\beta}, \quad \alpha > 0$

в) $Y = (\alpha + \beta X)^{-1}, \quad \alpha > 0$

г) $Y = \alpha + \beta \ln X, \quad \alpha > 0$

д) $Y = \alpha + \frac{\beta}{X}, \quad \alpha > 0$

е) $Y = \frac{X}{\alpha + \beta X}, \quad \alpha > 0$

Рисунок 3.1 – Графіки апроксимуючих функцій

Тому невизначеності $\widetilde{A}_0$ і $\widetilde{A}_1^*$ будуть зв'язані співвідношенням $s(\widetilde{A}_0) = s(A_0^*)e^{A_0^*}$.

3.4 Опрацювання результатів сукупних вимірювань

Сукупні вимірювання – одночасне вимірювання декількох однойменних ФВ, при яких початкові значення величин визначають шляхом розв'язання системи рівнянь, які отримуються при вимірюванні цих величин в різних поєднаннях [8].

Систему рівнянь сукупних вимірювань можна записати в такому вигляді:

$$x_i = f_i(y_1, y_2, ..., y_m), \tag{3.57}$$

де $i = 1,2,...,n;\ n > m$.

Тобто характерною особливістю сукупних вимірювань, так як і сумісних, є та обставина, що число рівнянь більше, ніж число невідомих.

Тут x_i – результати прямих вимірювань різних поєднань початкових величин $Y_1, Y_2, ..., Y_m$.

Таким чином, на відміну від опосередкованих вимірювань, проводяться вимірювання декількох початкових величин, причому останні знаходяться в результаті вирішення системи рівнянь.

Легко помітити, що система рівнянь (3.57) аналогічна до системи рівнянь сумісних вимірювань. Але є принципова відмінність сукупних вимірювань від сумісних, перш за все в поставленні вимірювальної задачі: в результаті сукупних вимірювань визначається не функціональна залежність між величинами (як це зроблено при сумісних вимірюваннях), а самі величини, при чому величини однойменні.

Не дивлячись на відмінності, опрацювання експериментальних даних при сумісних і сукупних вимірюваннях, проводиться практично одними і тими ж прийомами.

Сукупні вимірювання широко розповсюджені в метрологічній практиці, наприклад, при калібруванні мір чи шкал приборів. В цьому випадку система рівнянь сукупних вимірювань має вигляд:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} C_{ij} y_j, \text{ при } i = 1,2,...,n, \tag{3.58}$$

де y_j – результат вимірювання початкових величин;

C_{ij} – відомі коефіцієнти;

x_i – результати порівняння різних комбінацій поєднання мір чи поділок шкал;

m – кількість значень величин, що підлягають визначенню;

n – кількість комбінацій (рівнянь).

При калібруванні коефіцієнти C_{ij} набувають таких значень:

а) 0 – якщо Y_j не приймає участі в i – му вимірюванні;

б) 1 – якщо вимірюється сума декількох величин, в яку входить Y_j;

в) -1 – якщо сума декількох величин порівнюється з Y_j.

Якщо число рівнянь дорівнює числу невідомих, то система (3.58) вирішується однозначно, а дійсні значення вимірюваних величин і їх стандартні і розширені невизначеності визначаються методами оброблення опосередкованих вимірювань. Однак для зменшення невизначеностей калібрування проводиться порівняння більшого числа комбінацій, ніж кількість значень величин, які визначаються. Тоді оцінювання результатів вимірювання проводиться як при сумісних вимірюваннях. Для вирішення системи умовних рівнянь, як правило, застосовують МНК. Цей метод витікає з принципу максимальної правдоподібності і є оптимальним при таких умовах:

- результати вимірювання x містять незалежні випадкові похибки з нульовими математичними сподіваннями і однаковими дисперсіями;
- похибки мають нормальний розподіл.

При виконанні цих умов отримані оцінки будуть незміщеними і ефективними.

Аналогічно розглянутому в підрозділі 3.3, можна записати систему рівнянь відносно нев'язок

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{m} C_{ij} y_i - x_i. \tag{3.59}$$

Сума квадратів буде дорівнювати

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(C_{i1} y_1 + \ldots + C_{im} y_m - x_i\right)^2. \tag{3.60}$$

Диференціюючи вираз (3.60) за параметрами y_j, отримаємо систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y_1} &= 2\sum_{i=1}^{n} \left(C_{i1} y_1 + \ldots + C_{im} y_m - x_i\right) C_{i1} \\ &\ldots \\ \frac{\partial Q}{\partial y_m} &= 2\sum_{i=1}^{n} \left(C_{i1} y_1 + \ldots + C_{im} y_m - x_i\right) C_{im} \end{aligned}\right\}, \tag{3.61}$$

видозмінюючи яку і застосовуючи позначення Гауса, отримуємо нормальну систему рівнянь відносно y_j

$$\left.\begin{aligned}[xC_1] &= [C_1^2]y_1 + \ldots + [C_1C_m]y_m \\ &\ldots \\ [xC_m] &= [C_1C_m]y_1 + \ldots + [C_m^2]y_m\end{aligned}\right\}. \qquad (3.62)$$

Розв'язок цієї системи за допомогою визначників має вигляд:

$$y_j = \frac{D_j}{D}, \qquad (3.63)$$

де D – головний визначник системи:

$$D = \begin{vmatrix} [C_1^2] & [C_1C_2] & \ldots & [C_1C_m] \\ [C_1C_2] & [C_2^2] & \ldots & [C_2C_m] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [C_1C_m] & [C_2C_m] & \ldots & [C_m^2] \end{vmatrix}, \qquad (3.64)$$

а визначник D_j отримується із головного шляхом заміни j-го стовпця на стовпець з вільними членами

$$D_j = \begin{vmatrix} [C_1^2] & \ldots & [YC_1] & \ldots & [C_1C_m] \\ [C_1C_2] & \ldots & [YC_{21}] & \ldots & [C_2C_m] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [C_1C_m] & \ldots & [YC_{m1}] & \ldots & [C_m^2] \end{vmatrix}. \qquad (3.65)$$

Експериментальні стандартні відхилення y_j визначаються за формулою:

$$s(y_j) = \sqrt{\frac{D_{jj}}{D}\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n-m}}, \qquad (3.66)$$

де D_{jj} – алгебраїчне доповнення головного визначника, яке отримується із останнього викреслюванням j-го стовпця і j-го рядка.

Нев'язки δ_i знаходять за формулою (3.59).

Розширені невизначеності результатів сукупних вимірювань знаходять із виразу:

$$U(y_j) = t_p(\nu)s(y_j), \tag{3.67}$$

де $t_p(\nu)$ – коефіцієнт Стьюдента для $\nu = n - m$ ступенів вільності.

Контрольні запитання

1. Який вид вимірювань є найпростішим та найпоширенішим на практиці?
2. В яких випадках застосовуються прямі вимірювання з багаторазовими спостереженнями?
3. Перерахуйте послідовність дій при опрацюванні результатів прямих вимірювань з одноразовими спостереженнями.
4. В чому суть опрацювання результатів прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями з точки зору невизначеності результату вимірювання?
5. Які операції потрібно виконати при опрацюванні результатів прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями?
6. В чому полягає специфічна модель вимірювання з багаторазовими спостереженнями, яка називається „гніздовою структурою"?
7. Наведіть алгоритм опрацювання декількох груп прямих багаторазових спостережень?
8. Які вимірювання називаються опосередкованими та чим вони відрізняються від прямих вимірювань?
9. В якому випадку оцінки вхідних величин при опосередкованих вимірюваннях можуть бути взаємно корельованими?
10. Як змінюється формула для сумарної стандартної невизначеності оцінки опосередкованих вимірювань (за відсутності кореляції між аргументами) у випадку значної нелінійності рівняння вимірювання?
11. За якою формулою визначається ефективне число степенів вільності при записі розширеної невизначеності опосередкованих вимірювань?
12. Запишіть алгоритм опрацювання результатів непрямих вимірювань при наявності кореляції між двома вхідними величинами.
13. В якому випадку застосовуються сумісні вимірювання та як вони опрацьовуються?
14. В чому полягає суть методу найменших квадратів (МНК) та у яких випадках він використовується?
15. Наведіть порядок дій при визначенні залежності між двома величинами за допомогою МНК.

4 ПРИКЛАДИ ТА ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИРАЖЕННЯ КОМПОНЕНТІВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

4.1 Практичні рекомендації щодо вираження компонентів невизначеності

4.1.1 Випадковість та повторність спостережень. Невизначеності, які визначаються на основі повторних спостережень, часто протипоставляються тим, що оцінюються за допомогою інших способів як об'єктивні, статистично точні та ін. При цьому неправильно припускається, що їх можна оцінювати простим застосуванням статистичних формул до спостережень і що для їхніх оцінок не потрібно застосування якогось судження.

Слід, насамперед, поставити запитання: "До якого ступеня повторні спостереження є цілком незалежними повтореннями вимірювальної процедури?" Якщо всі спостереження входять в одну вибірку і якщо здійснення вибірок є частиною вимірювальної процедури, оскільки вимірювана величина є властивістю будь-якого матеріалу (у противагу властивості даного конкретного матеріалу), то тоді повторні спостереження не є незалежними; до дисперсії повторних спостережень, які входять в одну вибірку, варто додати оцінку складової дисперсії, обумовлену можливими розбіжностями між вибірками. Якщо встановлення нуля приладу є частиною вимірювальної процедури, то вона повинна проводитися як частина кожного повторення, навіть якщо є дуже малий дрейф протягом періоду проведення спостережень, тому що потенційно існує статистично обумовлена невизначеність, яка приписується встановленню нуля.

Подібним же чином, якщо знімаються показання барометра, то, у принципі, їх варто знімати при кожному повторенні вимірювань (бажано при цьому змінити його показання і дозволити йому повернутися в положення рівноваги), оскільки можуть бути зміни як у показаннях, так і в процесі їхнього зняття, навіть якщо барометричний тиск залишається постійним.

По-друге, потрібно запитати, чи є усі впливи, що передбачаються випадковими, дійсно випадковими. Чи є середні і дисперсії їхніх розподілів постійними або, можливо, є дрейф значень невимірюваної впливної величини у період повторних спостережень? Якщо є достатня кількість спостережень, то можна розрахувати середні арифметичні результати першої і другої половини періоду і їх експериментальні стандартні відхилення і порівняти два середніх один з одним, щоб визначити, чи є розходження між ними статистично значимим і чи існує, таким чином, вплив, що змінюється у часі.

Якщо значення величин у лініях загального забезпечення у лабораторії (напруга і частота електричної мережі, тиск і температура води, тиск азоту і ін.) є впливними величинами, то, звичайно, в їхніх коливаннях є дуже невипадковий елемент, який не можна не враховувати.

Якщо найменша значуща цифра в показаннях цифрового приладу безупинно змінюється під час спостереження під впливом "шумів", то іноді буває важко не вибрати (не віддаючи при цьому собі звіту) значення цього знака, яке здається кращим. Краще знайти які-небудь способи для „заморожування" показань приладу в довільний момент для записування „замороженого" показання [2].

4.1.2 Кореляції. Коваріація, пов'язана з оцінками двох вхідних величин X_i і X_j, може бути прийнята рівною нулю або вважатися несуттєвою, якщо:

а) X_i і X_j – некорельовані випадкові змінні, а не фізичні величини, які передбачаються інваріантними, наприклад, тому, що вони повторно, але не одночасно, вимірювалися в різних незалежних експериментах або тому, що вони подають результуючі величини різних оцінок, які проводилися незалежно;

б) якась з величин X_i і X_j може розглядатися як постійна;

в) наявна інформація недостатня для оцінки коваріації, пов'язаної з оцінками X_i і X_j.

Чи є дві вхідні величини, які повторно й одночасно спостерігаються, корельовані, можна визначити за допомогою рівняння (1.23). Наприклад, якщо вплив температури на частоту генератора не компенсується або компенсується погано, а частота є вхідною величиною, якщо навколишня температура також є вхідною величиною і якщо за ними спостерігають одночасно, то може бути значна кореляція, яка може бути продемонстрована обчисленою коваріацією частоти генератора і навколишньої температури.

На практиці вхідні величини часто є корельованими, тому що ті ж самі речовинний еталон вимірювання, вимірювальний прилад, довідкові дані або навіть метод вимірювань, що мають суттєву невизначеність, використовуються в оцінці їх значень. Без утрати спільності припустимо, що дві вхідні величини X_i і X_j, оцінені за допомогою x_i і x_j, залежать від множини некорельованих змінних $Q_1, Q_2, ..., Q_L$. Таким чином, $X_1 = F(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$ і $X_2 = G(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$, хоча деякі з цих змінних можуть у дійсності з'явитися тільки в одній функції. Якщо $u^2(q_l)$ являє собою оцінену дисперсію, пов'язану з оцінкою q_l змінної Q_l, то тоді оцінена дисперсія, пов'язана з x_1, отримується з рівняння

$$u^2(x_1) = \sum(\partial F/\partial q_l)^2 u^2(q_l),\ l = 1...L \quad (4.1)$$

і аналогічне рівняння буде для $u^2(x_2)$. Оцінена коваріація, пов'язана з x_1 і x_2, отримується як

$$u(x_1,x_2) = \sum(\partial F/\partial q_l)(\partial G/\partial q_l)\, u^2(q_l),\ l = 1...L. \quad (4.2)$$

Оскільки тільки ті члени, для яких $\partial F/\partial q_l \neq 0$ і $\partial G/\partial q_l \neq 0$ при заданому l вносять свій внесок у суму, коваріація дорівнює нулю, якщо жодна зі змінних не є загальною для F і G.

Оцінений коефіцієнт кореляції $r(x_1,x_2)$, пов'язаний із двома оцінками x_1 і x_2, визначають з $u(x_1,x_2)$ (4.2), при цьому $u(x_1)$ визначаються з рівняння (4.1), а $u(x_2)$ – з аналогічного виразу. Також можливо, що оцінена коваріація, пов'язана з двома вхідними величинами, містить статистичну компоненту.

Приклад: Еталонний резистор R_s використовується в одному і тому ж вимірюванні для визначення як струму I, так і температури t. Струм визначається шляхом вимірювання цифровим вольтметром різниці потенціалів на затискачах еталонного резистора; температура визначається шляхом вимірювання за допомогою моста опору й еталонного резистора опору $R_t(t)$ каліброваного резистивного датчика температури, для якого залежність опору від температури в діапазоні 15°C≤ t ≤ 30°C виражається як $t = \alpha R_t^2(t) - t_o$, де α и t_o – відомі константи. Таким чином, струм визначається із співвідношення $I = V_s/R_s$, а температура із співвідношення $t = \alpha\beta(t)R_s^2(t) - t_o$, де $\beta(t)$ – вимірюване відношення $R_t(t)/R_s$, отримане за допомогою моста [1, 2].

Оскільки тільки величина R_s є загальною у виразах для I і t, з рівняння (4.2) одержуємо коваріацію для I і t

$$u(I, t) = (\partial I/\partial R_s)(\partial t/\partial R_s)u^2(R_s) = - (V_s/R_s^2)(2\alpha\beta^2(t)R_s)u^2(R_s) =$$
$$= -(2I(t+t_0)/R_s)u^2(R_s).$$

Для одержання числового значення коваріації в цей вираз підставляють числові значення вимірюваних величин I і t і значення R_s і $u(R_s)$, наведені у свідоцтві про калібрування еталонного резистора. Одиницею для вираження u(I, t), очевидно, є A °C, оскільки розмірність відносної дисперсії $(u(R_s)/R_s)^2$ дорівнює 1 (вона є безрозмірною величиною).

Далі, нехай величина P буде пов'язана з вхідними величинами I і t співвідношенням $P = C_0T^2/(T_0 + t)$, де C_0 і T_0 – відомі константи з дуже малими невизначеностями. Тоді дисперсія P виражається через дисперсії I і t і їхні коваріації як

$$u^2(P)/P^2 = 4u^2(I)/I^2 - 4u(I,t)/I(T_0 + t) + u^2(t)/(T_0 + t)^2.$$

Дисперсії $u^2(I)$ і $u^2(t)$ одержують, застосувавши рівняння (1.18) до співвідношення $I = V_s/R_s$ і $t = \alpha\beta^2(t)R_s^{\,2} - t_0$. Результати обчислень такі:

$$u^2(I)/I^2 = u^2(V_s)/V_s^{\,2} + u^2(R_s)/R_s;$$

$$u^2(t) = 4(t+t_0)^2u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t+t_0)^2u^2(R_s)/R_s^{\,2},$$

де для простоти передбачається, що невизначеності констант t_0 і α також дуже малі. Ці вирази можна легко оцінити, тому що $u^2(V_s)$ і $u^2(\beta)$ можуть бути визначені, відповідно, при повторному знятті показань вольтметра і моста опорів. Звичайно, будь-які невизначеності, властиві самим приладам і використовуваним вимірювальним процедурам, повинні також бути прийняті до уваги, коли визначаються $u^2(V_s)$ і $u^2(\beta)$.

Необхідність введення коваріації $u(x_i,x_j)$ можна обминути, якщо вихідна множина вхідних величин X_1, X_2,... , X_N, від яких залежить вимірювана величина Y, перевизначається таким чином, щоб включити як додаткові незалежні вхідні величини, ті величини Q_l, що є загальними для двох або більше вхідних X_i (може необхідно провести додаткові вимірювання, щоб цілком установити співвідношення між Q_l і X_i). Водночас у деяких ситуаціях може більш зручно зберегти коваріації, ніж збільшувати число вхідних величин. Подібний процес може бути здійснений у відношенні коваріацій неперервних повторних спостережень, але ідентифікація прийнятних додаткових вхідних величин часто проводиться для даного випадку і є нефізичною.

4.1.3 Необхідність оцінювання за типом В. Якщо б вимірювальна лабораторія мала у своєму розпорядженні необмежений час і ресурси, то вона могла б провести вичерпні статистичні дослідження кожного мислимого джерела невизначеності, наприклад, використовуючи багато різних моделей і типів приладів, різні методи вимірювання, різні застосування методу і різні апроксимації у своїх теоретичних моделях вимірювання. Невизначеності, пов'язані з усіма цими джерелами, могли б потім бути оцінені за допомогою статистичного аналізу рядів спостережень; і невизначеність, обумовлена кожним джерелом, могла б бути охарактеризована статистично оціненим стандартним відхиленням. Іншими словами, усі компоненти невизначеності були б отримані з оцінювання за типом А. Оскільки такі дослідження практично нездійсненні з економічного розуміння, багато складових невизначеностей повинні оцінюватися будь-якими іншими практично здійсненними способами. Саме таким є оцінювання за типом В [1].

4.1.4. Математично детерміновані розподіли. Одним із джерел невизначеності цифрового приладу є дискретність його відлікового пристрою. Наприклад, якщо навіть усі повторні показання були ідентичними, невизначеність вимірювання, приписувана повторювальності, не буде дорівнювати нулю, тому що існує діапазон вхідних сигналів приладу, який покриває відомий інтервал, при якому будуть ті ж самі показання. Якщо дискретність відлікового пристрою дорівнює δx, то значення впливу, яке викликає дане показання X, може з рівною імовірністю лежати в будь-якому місці інтервалу від $X-\delta x/2$ до $X+\delta x/2$. Вплив, таким чином, описується прямокутним розподілом ймовірностей шириною δx при дисперсії $u^2=(\delta x)^2/12$, при цьому припускається, що стандартна невизначеність $u=0{,}29\delta x$ для будь-якого показання.

Таким чином, прилад для зважування з відліковим пристроєм, у якому найменша значуща цифра відповідає 1 г, має дисперсію, обумовлену дискретністю пристрою, $u^2=(1/12)г^2$ і стандартну невизначеність $u=(1/\sqrt{12})=0{,}29$ г.

Визначені види гістерезиса можуть викликати невизначеності аналогічного виду. Показання приладу можуть відрізнятися на фіксовані і відомі значення в залежності від того, збільшуються або зменшуються послідовні значення. Досвідчений оператор візьме до уваги напрямок послідовних показань і уведе відповідну поправку. Проте напрямок гістерезиса не завжди спостерігається: можуть існувати сховані коливання усередині приладу щодо точки рівноваги, так що показання залежить від напрямку, за яким наближаються до цієї точки. Якщо діапазон можливих показань за цією причиною дорівнює δx, то дисперсія дорівнює $u^2=(\delta x)^2/12$, а стандартна невизначеність, обумовлена гістерезисом, $u=0{,}29\delta x$.

Округлення або відсікання чисел, яке відбувається при автоматичній редукції даних комп'ютером, може також бути джерелом невизначеності. Роздивимося, наприклад, комп'ютер із довжиною слова в 16 біт. Якщо в процесі обчислень число, що має таку довжину слова, віднімається від іншого числа, від якого воно відрізняється тільки у 16-ому біті, залишається тільки один значущий біт. Таке може спостерігатися при оцінюванні погано обумовлених алгоритмів і це важко передбачити. Можна одержати емпіричне визначення невизначеності шляхом збільшення найбільш важливої для обчислень вхідної величини (часто існує одна така, що пропорційна значенню вихідної величини) за допомогою малих прирощень до тих пір, поки вихідна величина не зміниться; найменша зміна вихідної величини, яка досягається таким способом, може бути прийнята як міра невизначеності; якщо вона дорівнює δx, то дисперсія $u^2=(\delta x)^2/12$, а $u=0{,}29\delta x$ [2].

4.1.5 Запозичені вхідні значення. Запозиченим значенням вхідної величини є таке, що не оцінювалося в ході даного вимірювання, а було отримано десь у результаті незалежного оцінювання. Часто таке запозичене значення супроводжується повідомленням того або іншого вигляду про його невизначеність. Наприклад, невизначеність може бути зазначена у вигляді стандартного відхилення, значення, кратного стандартному відхиленню або половині ширини інтервалу, що має зазначений довірчий рівень. У інших випадках можуть бути зазначені верхня і нижня межа або може бути не дано ніякої інформації щодо невизначеності. У останньому випадку ті, хто використовують це значення, повинні застосувати свої власні знання про можливе значення невизначеності, виходячи з природи величини, надійності джерела, невизначеностей, отриманих для таких величин на практиці та ін.

Деякі калібровані лабораторії прийняли практику вираження невизначеності у вигляді верхньої і нижньої границі, які визначають інтервал, який має мінімальний довірчий рівень, наприклад, принаймні 95%. Це можна розглядати як приклад так званої безпечної невизначеності, і її не можна перетворити в стандартну невизначеність без знання того, як вона обчислювалася. Якщо наведено достатньо інформації, то її можна повторно розрахувати, у протилежному випадку повинно бути проведено незалежне оцінювання невизначеності будь-якими способами, наявними в розпорядженні.

Деякі невизначеності даються просто як максимальні межі, у яких, як говорять, лежать усі значення величини. Звичайно передбачається, що всі значення в цих межах є рівномірними (прямокутний розподіл ймовірностей), але такий розподіл не варто припускати, якщо є підстави очікувати, що значення, близькі до меж, менше імовірні, ніж ті, що лежать ближче до центру інтервалу. Прямокутний розподіл половини ширини a має дисперсію $a^2/3$; нормальний розподіл, для котрого a є половиною ширини інтервалу з рівнем довіри 99,73 % має дисперсію $a^2/9$. Розумно прийняти припущення для цих значень, наприклад, допускаючи трикутний розподіл, для якого дисперсія складає $a^2/6$ [1, 2].

4.1.6 Вхідні величини, що вимірюються. Якщо оцінка вхідної величини отримана з одиничного спостереження за допомогою конкретного засобу вимірювання, що відкалібрований за допомогою еталона з малою невизначеністю, то невизначеність оцінки – це, в основному, невизначеність відтворення. Дисперсію повторних вимірювань за допомогою такого ЗВТ можна отримати раніше, необов'язково з точно таким же значенням показання, але з достатньо близьким до нього, щоб його можна було використовувати; при цьому можна припустити, що ця дисперсія може бути застосована до аналізованої вхідної величини. Якщо така інформація відсутня, то оцінка повинна ґрунтуватися на характері вимірювальної апаратури або ЗВТ, відомих дисперсіях інших ЗВТ аналогічної конструкції та ін.

Не всі ЗВТ надходять із свідоцтвом про калібрування або вимірювальною характеристикою. Проте більшість вимірювальних приладів створюється відповідно до розробленого стандарту і повіряється або заводом виробником, або незалежною повірочною організацією відповідно до чинних нормативних документів. Звичайно стандарт містить метрологічні вимоги, часто у вигляді максимально допустимих похибок, яким повинний відповідати даний ЗВТ. Ця відповідність ЗВТ вимогам визначається шляхом порівняння з еталонним ЗВТ, максимальна невизначеність якого, яка припускається, звичайно вказується у стандарті. Отже, ця невизначеність є компонентом невизначеності повіреного приладу.

Якщо нічого невідомо про характеристику похибки градуювальної кривої повіреного ЗВТ, то слід припустити, що існує рівна імовірність того, що похибка має будь-яке значення в припустимих межах, тобто прямокутний розподіл ймовірностей. Проте деякі типи ЗВТ мають такі градуювальні криві, що похибки можуть бути, наприклад, завжди позитивними в одній частині діапазону вимірювання і від'ємними в інших частинах. Іноді така інформація може бути витягнута з відповідних документів.

Вимірювання часто здійснюються в стандартних контрольованих умовах, які вважаються постійними протягом усіх рядів вимірювань. Наприклад, вимірювання можуть проводитися на зразках у перемішуваній масляній ванні, температура якої регулюється за допомогою термостата. Температуру ванни можна вимірювати в момент кожного вимірювання на зразку, але якщо температура ванни змінюється циклічно, то миттєва температура зразка може не відповідати температурі, що показується термометром у ванні. Розрахунок флуктуацій температури зразка, заснований на теорії теплопередачі і їхньої дисперсії виходить за рамки, але він повинен починатися з відомого або передбачуваного температурного циклу для ванни. Цей цикл можна спостерігати за допомогою високочутливої термопари і реєстратора температури, проте, у випадку їхньої відсутності його можна приблизно вивести з даних про характер регулювання.

Відомі випадки, коли всі можливі значення величини лежать по одну сторону від одного граничного значення. Наприклад, при вимірюванні постійної вертикальної висоти h (вимірювана величина) стовпа рідини в манометрі, вісь вимірювача висоти може відхилятися від вертикалі на невеличкий кут β. Відстань l, визначена за допомогою цього приладу, завжди буде більша, ніж h; ніякі значення, менші ніж h, неможливі. Це обумовлено тим, що h дорівнює проекції l на вертикаль: $h = l/\cos\beta$, а всі значення $\cos\beta$ менші одиниці; ніякі значення, більші ніж одиниця, неможливі. Ця так звана косинусна похибка може також виявлятися в тому, що проекція h'cosβ вимірюваної величини h' дорівнює відстані l, тобто l = h'cosβ, і відстань, яка спостерігається, завжди менша вимірюваної величини.

Якщо ввести нову змінну δ=1-cosβ , то, вважаючи β ≈ 0 або δ<<1, як це звичайно спостерігається на практиці, одержуємо дві різні ситуації:

$$h = l_c(1 - \delta); \tag{4.3}$$

$$h = l_c (1 + \delta). \tag{4.4}$$

Тут l_c, найкраща оцінка l, є середнім арифметичним або середнім із n незалежних повторних спостережень l_k для l з оціненою дисперсією $u^2(l_c)$. Таким чином, із рівнянь (4.3) і (4.4) випливає, що для одержання оцінки h або h' необхідна оцінка поправкового коефіцієнта δ, у той час як для одержання сумарної стандартної невизначеності оцінки h або h' потрібна $u^2(\delta)$, оцінена дисперсія δ. Більш конкретно, застосування рівняння (1.18) до рівнянь (4.3) і (4.4) дає для $u_c^2(h)$ і $u_c^2(h')$ (відповідно зі знаками «–» і «+»):

$$u_c^2 = (1\pm\delta)^2\, u^2(l_c) + \bar{l}^{\,2}\, u^2(\delta); \tag{4.5}$$

$$u_c^2 \approx u^2(l_c) + l_c^{\,2}\, u^2(\delta). \tag{4.6}$$

Для одержання оцінок очікуваного значення δ і дисперсії δ припустимо, що вісь приладу, який використовується для вимірювання висоти стовпа рідини в манометрі, обмежена фіксацією у вертикальній площині і що розподіл значень кута нахилу β біля очікуваного нульового значення є нормальним розподілом із дисперсією σ^2. Хоча β може мати як додатні, так і від'ємні значення, δ = 1-cosβ є додатним для всіх значень β. Якщо припустити, що неузгодженість осі приладу необмежена, то орієнтація осі може змінюватися в межах тілесного кута, оскільки вона може бути неузгоджена також за азимутом, але β у цьому випадку буде завжди додатним кутом.

У обмеженому або одновимірному випадку елемент імовірності p(β)dβ пропорційний $[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)]d\beta$; у необмеженому або двовимірному випадку елемент імовірності пропорційний $[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)]\sin\beta d\beta$. Функції щільності ймовірностей p(δ) у цих двох випадках є виразами, необхідними для визначення математичного сподівання і дисперсії δ для використання в рівняннях (4.3) і (4.5). Їх можна легко одержати з цих елементів імовірності, тому що кут β може бути невеличким, і, отже, δ=1-cosβ і sinβ можна розкласти в ряд із членами нижчого порядку, ніж β. Це дає

$$\delta \approx \beta^2/2,\ \sin\beta \approx \beta = (2\delta)^{1/2} \text{ і } d\beta = d\delta(2\delta)^{1/2}.$$

Тоді функції щільності ймовірностей будуть мати такі вирази:
- в одновимірному випадку

$$p(\delta) = \exp[(-\delta)/\sigma^2]/[\sigma(\pi\delta)^{1/2}], \tag{4.7}$$

- у двовимірному випадку

$$p(\delta) = \exp[(-\delta) / \sigma^2]/\sigma^2, \tag{4.8}$$

де $\int_0^{\infty} p(\delta)d(\delta) = 1$.

Рівняння (4.7) і (4.8), які показують, що найбільше імовірне значення поправки δ в обох випадках є нульовим, дають в одновимірному випадку $E(\delta) = \sigma^2/2$ і $var(\delta) = \sigma^4/2$ для математичного сподівання і дисперсії δ, а в двовимірному випадку $E(\delta) = \sigma^2$ і $var(\delta) = \sigma^4$. Тоді рівняння (4.3), (4.4) і (4.6) матимуть вигляд:

$$h = l_c\,[1-(d/2)u^2(\beta)], \tag{4.9}$$

$$h' = l_c\,[1+(d/2)u^2(\beta)], \tag{4.10}$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(l_c) + (d/2)\, l_c^2 u^4(\beta), \tag{4.11}$$

де d – розмірність (d = 1 або 2) і $u(\beta)$ – стандартна невизначеність кута β, прийнята за найкращу оцінку стандартного відхилення σ в припущенні про нормальний розподіл, яка повинна оцінюватися з урахуванням усієї наявної інформації про вимірювальний процес (оцінювання за типом В). Це приклад того випадку, коли оцінка значення вимірюваної величини залежить від невизначеності вхідної величини.

Хоча рівняння (4.9) - (4.11) специфічні для нормального розподілу, можна провести аналіз, допускаючи інші розподіли для β. Наприклад, якщо для β прийняти симетричний прямокутний розподіл із верхньою і нижньою межею $+\beta_0$ і $-\beta_0$ в одновимірному випадку і $+\beta_0$ і нуль у двовимірному випадку, то $E(\delta) = \beta_0^2/6$ і $var(\delta) = \beta_0^2/45$ для одновимірного і $E(\delta) = \beta_0^2/4$ і $var(\delta) = \beta_0^2/48$ для двовимірного випадків [2].

4.1.7 Невизначеність зразка. Багато вимірювань пов'язано зі звіренням невідомого об'єкта з відомим еталоном, що має аналогічні характеристики, для калібрування цього невідомого об'єкта. Як приклад можна привести кінцеві міри довжини, деякі термометри, набори мас, резистори і високочисті матеріали. У більшості таких випадків методи вимірювання не особливо чутливі до вибору зразка (тобто конкретного невідомого об'єкта, який калібрується) і, навпаки, не чутливі до впливу цього вибору, підготуванню зразка або дію різних факторів, що впливають на навколишнє середовище, тому що невідомий об'єкт і еталон звичайно реагують однаково на вплив таких змінних величин.

У деяких ситуаціях, які зустрічаються в практиці вимірювань, вибір і підготування зразків відіграють більш важливу роль. Це часто спостерігається при хімічному аналізі природних матеріалів. На відміну від штучно створених матеріалів, які можуть забезпечити однорідність більшого ступеня, ніж це потрібно для вимірювань, природні матеріали часто бувають дуже неоднорідними. Ця неоднорідність призводить до двох додаткових компонентів невизначеності. Оцінювання першого із них потребує визначення того, наскільки адекватно обраний зразок відображає вихідний матеріал, який піддається аналізу. Оцінювання другого компоненту потребує визначення того, якою мірою повторні компоненти впливають на вимірювання і наскільки адекватний для них застосований метод вимірювання.

В інших випадках ретельне планування експерименту може дозволити зробити статистичне оцінювання невизначеності, обумовленої зразком. Проте, як правило, особливо в тих випадках, коли дія впливних факторів навколишнього середовища на зразок є суттєвою, для оцінювання невизначеності необхідні майстерність і знання аналітика, отримані з практичного досвіду і всієї доступної існуючої інформації.

4.2 Узагальнений алгоритм оцінювання та вираження невизначеностей вимірювань

Основні етапи, яких необхідно дотримуватися при оцінюванні та вираженні невизначеності результату вимірювання можна звести до єдиного алгоритму опрацювання (рис. 4.1) [9, 10], який полягає в такому.

1. Складання математичної залежності (рівняння вимірювань) між вихідною Y і вхідними X_i (X_1, ..., X_N) величинами, від яких вона залежить: $Y=f(X_1, \ldots, X_N)$. Функція f повинна містити кожну величину, включаючи всі поправки та поправкові множники на відомі систематичні ефекти, яка може внести значну складову в невизначеність результату вимірювання, основні та додаткові абсолютні похибки ЗВТ, що використовуються при вимірюваннях. Під час складання математичної залежності необхідно дотримуватися рекомендацій, які наведені в МІ 13.002-2003 [11].

2. Визначити x_i – оцінене значення вхідної величини X_i або на основі статистичного аналізу серії спостережень, або іншим способом (оцінювання із зовнішніх джерел, таких як величини, пов'язані з атестованими еталонами, стандартними зразками речових і матеріалів чи стандартними довідниковими даними).

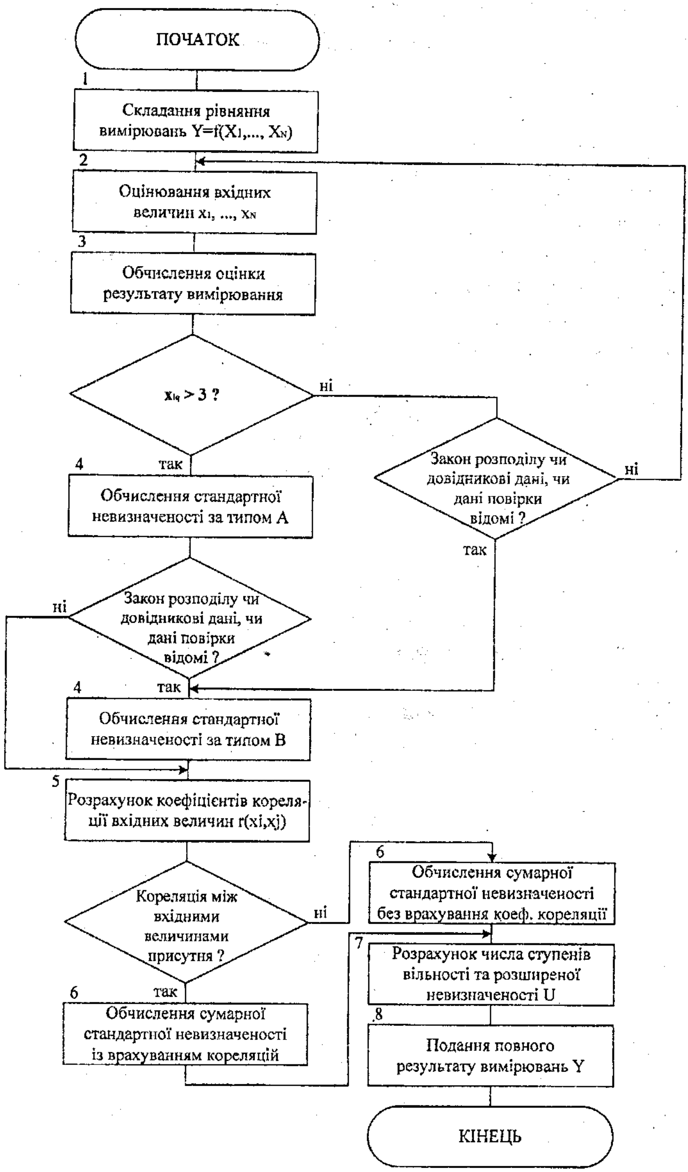


Рисунок 4.1 – Узагальнений алгоритм опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності

При проведенні багаторазових вимірювань за значення і-тої вхідної величини x_i приймають середнє арифметичне n_i результатів ряду окремих спостережень x_{iq} (див. 1.3).

В отримані значення x_1, ..., x_N вносяться поправки на відомі систематичні ефекти.

3. Обчислення оцінки результату вимірювання вихідної величини y отримують при підстановці в рівняння вимірювань оцінок вхідних величин: $y=f(x_1, \ldots, x_N)$.

4. Якщо кількість спостережень і-тої вхідної величини більше трьох і невідомо ні закону розподілу ймовірності, ні довідникових даних, ні даних повірки чи калібрування, то стандартна невизначеність $u(x_i)$ розраховується тільки за типом А (див. 1.3.1).

Якщо ж відомо і результати багатократних спостережень вхідної величини і дані зовнішніх джерел (отримані іншими способами), що перераховані в пункті 2, то крім розрахунку стандартної невизначеності типу А, необхідно проводити обчислення стандартних невизначеностей типу В.

Стандартні невизначеності типу В, можна обчислювати через верхні і нижні межі $[a_-; a_+]$ припустимого закону розподілу чи проміжок U_p, що має заданий довірчий рівень p (див. 1.3.2).

При відсутності багаторазових спостережень та наявності інших даних (нестатистичних), розраховується тільки стандартна невизначеність типу В.

5. Якщо значення яких-небудь вхідних величин (x_i, x_j) пов'язані між собою (попарно корельовані), то необхідно розрахувати коефіцієнт кореляції (див. 1.4.3).

6. Обчислити сумарну стандартну невизначеність $u_c(y)$ результату вимірювання y із врахуванням стандартних невизначеностей типу А і В (А або В) та коефіцієнтів кореляцій.

При відсутності кореляції між вхідними величинами сумарну стандартну невизначеність визначають за формулою (1.18).

При наявності кореляцій між вхідними величинами сумарну стандартну невизначеність обчислюють за формулою (1.24).

Якщо вклади в $u_c^2(y)$ стандартних невизначеностей оцінювалися окремо за типом А і за типом В, то позначивши їх як $u_{cA}^2(y)$ і $u_{cB}^2(y)$ та розрахувавши окремо, отримаємо загальну сумарну стандартну невизначеність, яка пов'язана із сумарними невизначеностями типу А і В співвідношенням [2]

$$u_c^2(y) = u_{cA}^2(y) + u_{cB}^2(y). \qquad (4.12)$$

7. Для розрахунку розширеної невизначеності U потрібно отримати значення коефіцієнта охоплення k_p, що створює проміжок, який відповідає

заданому довірчому рівню p. В загальному випадку коефіцієнт охоплення вибирають у відповідності з формулою [2]

$$k_p = t_p(v_{eff}), \tag{4.13}$$

де t_p (v_{eff}) – квантиль розподілу Стьюдента з ефективним числом ступенів вільності v_{eff} і довірчою ймовірністю p.

Значення коефіцієнта t_p (v_{eff}), як правило, вибирається з довідникової таблиці за значенням ефективного числа ступенів вільності, що розраховується за формулою (1.30).

Розрахувавши ефективне число ступенів вільності v_{eff} та вибравши коефіцієнт охоплення k_p, отримаємо розширену невизначеність, яка обчислюється за формулою

$$U = k_p \cdot u_c(y). \tag{4.14}$$

8. Подання повного результату вимірювання включає в себе оцінку вихідної величини і приписане їй значення розширеної невизначеності із зазначенням довірчого рівня.

Значення розширеної невизначеності вказується з кількістю значущих цифр, не більше двох. Результат вимірювання, як і значення вхідних величин, заокруглюють так, щоб вони відповідали своїм невизначеностям.

Таким чином, при поданні результатів вимірювань рекомендується наводити достатню кількість інформації для того, щоб можна було проаналізувати чи повторити весь процес отримання результату вимірювання і обчислення невизначеностей вимірювань, а саме:

- алгоритм отримання результату вимірювань;
- алгоритм розрахунку всіх поправок та їх невизначеностей;
- невизначеності всіх використовуваних даних та способи їх отримання;
- алгоритми обчислення сумарної і розширеної невизначеностей [6].

4.3 Приклади опрацювання невизначеностей результатів вимірювань

У даному підрозділі наводяться приклади, які детально проароблені, щоб проілюструвати основні принципи оцінювання і вираження невизначеності у вимірюваннях.

4.3.1 Калібрування кінцевої міри довжини. Цей приклад показує, що навіть явно проста задача вимірювання може включати тонкі аспекти оцінювання невизначеності.

Довжину кінцевої міри номінальною довжиною 50 мм визначають шляхом порівняння її з відомим еталоном тієї ж самої номінальної довжини. Прямий результат звірення цих двох кінцевих мір довжини є різниця d у їхніх довжинах:

$$d = l(1+a\Theta) - l_s(1+a_s\Theta_s), \qquad (4.15)$$

де l – вимірювана величина, тобто довжина при 20°C кінцевої міри довжини, яка калібрується;

l_s – довжина еталона при 20°C, наведена в сертифікаті про калібрування;

a і a_s – коефіцієнти теплового розширення кінцевої міри довжини, яка калібрується, й еталона, відповідно;

Θ і Θ_s – відхилення температури від 20°C кінцевої міри довжини й еталона, відповідно [2].

Виходячи з рівняння (4.15), вимірювана величина дається рівнянням

$$l = (l_s(1+a_s\Theta_s) + \mathrm{d})/(1+a\Theta) = l_s + \mathrm{d} + l_s(a_s\Theta_s - a\Theta) + ... \qquad (4.16)$$

Якщо різницю температури між кінцевою мірою, яка калібрується, й еталоном записати у вигляді $\delta\Theta = \Theta_s - \Theta$, а різниця їхніх коефіцієнтів теплового розширення як $\delta a = a - a_s$, то рівняння (4.16) приймає вигляд

$$l = \mathrm{f}(l_s, \mathrm{d}, a_s, \Theta, \delta a, \delta\Theta) = l_s + \mathrm{d} - l_s(\delta a\,\Theta - a_s\delta\Theta). \qquad (4.17)$$

Результати оцінювання показали, що різниці $\delta\Theta$ і δa дорівнюють нулю, але не їхній невизначеності; передбачається, що δa, a_s, $\delta\Theta$, Θ є некорельованими (якби вимірювана величина була виражена через змінні a, Θ, a_s, Θ_s, то було б необхідно включити кореляцію між a і a_s і Θ і Θ_s).

Таким чином, із рівняння (4.17) випливає, що оцінку значення вимірюваної величини l можна одержати з простого виразу $l_s + \bar{\mathrm{d}}$, де l_s - довжина еталона при 20°C, наведена в сертифікаті про калібрування, а d - оцінена за допомогою $\bar{\mathrm{d}}$, середньому арифметичному з n = 5 незалежних повторних спостережень. Сумарну стандартну невизначеність $u_c(l)$ значення l отримують, підставивши рівняння (4.17), у рівняння (1.18), як описано нижче.

Відповідні аспекти цього прикладу, описані тут і в наступних підрозділах, підсумовані в таблиці 4.1.

При передбаченні, що $\delta a = 0$ і $\delta\theta = 0$, така підстановка дає

$$u_c^2(l) = c_s^2u^2(l_s) + c_d^2u^2(d) + c_{as}^2u^2(a_s) + c_\theta^2u^2(\theta) + \\ + c_{\delta a}^2u^2(\delta a) + c_{\delta\theta}^2u^2(\delta\theta), \qquad (4.18)$$

де $c_s = \partial f/\partial l_s = 1 - (\delta a\theta + a_s\delta\theta) = 1$,

$c_d = \partial f/\partial d = 1$,

$c_{as} = \partial f/\partial a_s = - l_s\,\delta\theta = 0$,

$c_\theta = \partial f/\partial\theta = - l_s\delta a = 0$,

$c_{\delta a} = \partial f/\partial\delta a = - l_s\,\theta$,

$c_{\delta\theta} = \partial f/\partial\delta\theta = - l_s a_s$,

і таким чином

$$u_c^2(l) = u^2(l_s) + u^2(d) + l_s^2\,\theta^2u^2(\delta a) + l_s^2a_s^2\,u^2(\delta\theta). \qquad (4.19)$$

Невизначеність калібрування еталона, $u(l_s)$.

Сертифікат про калібрування дає розширену невизначеність еталона U=0,075 мкм і вказує, що це значення було отримано з використанням коефіцієнта охоплення k=3. Тоді стандартна невизначеність є

$$u(l_s) = (0{,}075\ \text{мкм})/3 = 25\ \text{нм}.$$

Невизначеність вимірюваної різниці довжин, u(d).

Сумарне експериментальне стандартне відхилення, яке характеризує звірення l і l_s визначалося зі змінності 25 незалежних повторних спостережень різниці довжин двох кінцевих мір і склало 13 нм. При звіреннях у цьому прикладі проводилося 5 повторних спостережень. Стандартна невизначеність, пов'язана із середнім арифметичним цих показань складає

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = (13\ \text{нм})/\sqrt{5} = 5{,}8\ \text{нм}.$$

Відповідно до свідчення про калібрування компаратора, використовуваного для звірення l і l_s, його невизначеність, обумовлена випадковими похибками, складає ±0,01 мкм при довірчому рівні 95 % і заснована на 6 повторних вимірюваннях; таким чином, стандартна невизначеність із використанням t-коефіцієнта $t_{95}(5) = 2{,}57$ для $\nu = 6\text{-}1 = 5$ степенів вільності, буде

$$u(d_1) = (0{,}01\ \text{мкм})/2{,}57 = 3{,}9\ \text{нм}.$$

Невизначеність компаратора, обумовлена систематичними похибками, у сертифікаті дається рівною 0,02 мкм на рівні трьох сигм. Тому стандартну невизначеність, викликану цією причиною, можна прийняти як

$$u(d_2) = (0{,}02\ \text{мкм})/3 = 6{,}7\ \text{нм}.$$

Загальний внесок одержують із суми оцінених дисперсій

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93\ \text{нм}^2$$

або

$$u(d) = 9{,}7\ \text{нм}.$$

Таблиця 4.1 - Зведена таблиця компонентів стандартної невизначеності

Компоненти стандартної невизначе-ності $u(x_i)$	Джерело невизначеності	Значення стандартної невизначе-ності $u(x_i)$	$c_i \equiv \equiv \partial f/\partial x_i$	$u_i(l) \equiv \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$ (нм)	Ступені вільності
$u(l_s)$	Калібрування еталонної кінцевої міри	25 нм	1	25	18
$u(d)$	Обмірювана розбіжність між кінцевими мірами довжини	9,7 нм	1	9,7	25,6
$u(\bar{d})$	Повторні спостереження	5,8 нм			24
$u(d_1)$	Випадкові ефекти компаратора	3,9 нм			5
$u(d_2)$	Систематичні ефекти компаратора	6,7 нм			8
$u(a_s)$	Коефіцієнт теплового розширення еталонної кінцевої міри довжини	$1{,}2\cdot10^{-6}$°C	0	0	
$u(\theta)$	Температура випробувальної ванни	0,41 °C	0	0	
$u(\bar{\theta})$	Середня температура ванни	0,2 °C			
$u(\Delta)$	Циклічна зміна температури у кімнаті	0,35 °C			
$u(\delta a)$	Різниця коефіцієнтів розширення кінцевих мір довжини	$0{,}58\cdot10^{-6}$ °C^{-1}	$-l_s\theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Різниця температур кінцевих мір довжини	0,029 °C	$l_s a_s$	16,6	2
$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1002$ нм^2 $u_c(l) = 32$ нм $\nu_{еф}(l) = 16$					

Невизначеність коефіцієнта теплового розширення, $u(a_s)$.

Коефіцієнт теплового розширення еталонної кінцевої міри довжини дається, як a_s=$11{,}5\cdot10^{-6}$ °C^{-1} із невизначеністю, поданою прямокутним розподілом із межами $\pm\, 2\cdot10^{-6}$ °C^{-1}. Тоді стандартна невизначеність

$$u(a_s) = (2\cdot10^{-6}\ °C^{-1})/\sqrt{3} = 1{,}2\cdot10^{-6}\ °C^{-1}.$$

Оскільки $c_{as} = \partial f/\partial a_s = -\ l_s\ \delta\theta = 0$, то ця невизначеність нічого не вносить у невизначеність l першого порядку. Однак вона вносить у неї внесок другого порядку.

Невизначеність відхилення температури кінцевої міри довжини, $u(\theta)$.

Стверджується, що температура випробувальної ванни підтримується (19,9±0,5) °C; при цьому температура в момент окремого спостереження не записується. Говориться, що зазначене максимальне відхилення $\Delta =$ $= 0{,}5°C$ являє собою амплітуду приблизно циклічної зміни температури в термостатичній системі, а не невизначеність середньої температури. Значення відхилення середньої температури

$$\overline{\theta} = (19{,}9 - 20)°C = -0{,}1\ °C$$

саме має стандартну невизначеність, обумовлену невизначеністю середньої температури випробувальної ванни:

$$u(\overline{\theta}) = 0{,}2\ °C,$$

у той час як циклічну зміну у часі створює U-образний (арксинусний) розподіл температур, який дає у результаті стандартну невизначеність

$$u(\Delta) = (0{,}5\ °C)/\sqrt{2} = 0{,}35\ °C.$$

Відхилення температури θ можна взяти рівним $\overline{\theta}$, і стандартна невизначеність утворюється з рівняння:

$$u^2(\theta) = u^2(\overline{\theta}) + u^2(\Delta) = 0{,}165\ (°C)^2,$$

яке дає $u(\theta) = 0{,}41\ °C$.

Через те, що $c_0 = \partial f/\partial\theta = -l_s\delta a = 0$, то ця невизначеність також не вносить ніякого внеску в невизначеність l першого порядку, але вона вносить вклад у другий порядок.

Невизначеність різниці коефіцієнтів розширення, $u(\delta a)$.

Оцінені межі зміни δa такі: $\pm 1\cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$ із рівною імовірністю того, що δa буде мати будь-яке значення в діапазоні між цими межами. Стандартна невизначеність дорівнює

$$u(\delta a) = (1\ 10^{-6}\ °C^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}58\cdot 10^{-6}\ °C^{-1}.$$

Невизначеність різниці температур кінцевих мір довжини, $u(\delta\theta)$.

Припускають, що еталонна і випробувана кінцеві міри довжини знаходяться при одній і тій же температурі, але різниця температур з однаковою імовірністю може мати будь-яке значення в оціненому інтервалі від -0,05 °C до +0,05 °C. Стандартна невизначеність дорівнює

$$u(\delta\theta) = (0{,}05\ °C)/\sqrt{3} = 0{,}029\ °C.$$

Сумарна стандартна невизначеність.

Сумарну стандартну невизначеність $u_c(l)$ обчислюють із рівняння (4.19). Збирають окремі члени, підставляють у цей вираз і одержують

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= (25\ нм)^2 + (9{,}7\ нм)^2 + (0{,}05\ м)^2(-0{,}1\ °C)^2(0{,}58\cdot 10^{-6}\ °C^{-1})^2 + \\ &+ (0{,}05\ м)^2(11{,}5\cdot 10^{-6}\ °C^{-1})^2(0{,}029\ °C)^2 = (25\ нм)^2 + (9{,}7\ нм)^2 + \\ &+ (2{,}9\ нм)^2 + (16{,}6\ нм)^2 = 1002\ нм^2, \end{aligned} \qquad (4.20)$$

або $u_c(l) = 32 нм$.

Очевидно, що домінуючим компонентом невизначеності є невизначеність еталона $u(l_s) = 25$ нм.

Сертифікат про калібрування еталонної кінцевої міри довжини дає $l_s = 50{,}000623$ мм як її довжину при 20°C. Середнє арифметичне $\overline{d}$ п'ятьох повторних спостережень різниці довжин невідомої й еталонної кінцевих мір складає 215 нм. Таким чином, через те, що $l = l_s + \bar{d}$ довжина l невідомої кінцевої міри довжини при 20°C складає 50,000838 мм. Остаточний результат можна уявити в такому вигляді: l = 50,000838мм із сумарною стандартною невизначеністю u_c = 32 нм. Відповідна відносна сумарна стандартна невизначеність складає $p/l = 6{,}4 \cdot 10^{-7}$.

Розширена невизначеність.

Припустимо, що потрібно одержати розширену невизначеність $U_{99} = k_{99} u_c(l)$, яка забезпечує інтервал із довірчим рівнем приблизно 99 %. Необхідні ступені вільності зазначені в таблиці 4.1. Вони були отримані таким чином.

1. Невизначеність калібрування еталона $u(l_s)$. У сертифікаті про калібрування вказується, що число ефективних ступенів вільності сумарної стандартної невизначеності, для яких була отримана зазначена розширена невизначеність, складає $\nu_{еф}(l_s) = 18$.

2. Невизначеність вимірюваної різниці довжин u(d). Хоча $\bar{d}$ було отримано з п'ятьох повторних спостережень, тому що $u(\bar{d})$ отримано із сумарного експериментального стандартного відхилення, заснованого на 25 спостереженнях, число ступенів вільності $u(\bar{d})$ складає $\nu(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$. Число ступенів вільності $u(d_1)$ невизначеності, обумовленої випадковими ефектами на компараторі складає $u(d_1) = 6 - 1 = 5$, тому що d_1 було отримано із шести повторних вимірювань. Можна припустити, що значення невизначеності ±0,02мкм для систематичних ефектів, обумовлених компаратором, є надійним на 25 % і, таким чином, число ступенів вільності є $\nu(d_2) = 8$. Тоді число ефективних ступенів вільності u(d), $\nu_{еф}$(d), одержують із рівняння

$$\nu_{еф}(d) = [u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2 / [u^4(\bar{d})/\nu(\bar{d}) + u^4(d_1)/\nu(d_1) + u^4(d_2)/\nu(d_2)] =$$
$$= (9{,}7\ нм)^4 / ((5{,}8\ нм)^4/24 + (3{,}9\ нм)^4/5 + (6{,}7\ нм)^4/8) = 25{,}6.$$

3. Невизначеність різниці коефіцієнтів розширення $u(\delta a)$. Оцінені границі $\pm 1 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$ для змінності δa є надійними на 10 %. Це дає число ступенів вільності рівним $\nu(\delta a) = 50$.

4. Невизначеність різниці температур кінцевих мір довжини $u(d\theta)$. Передбачається, що оцінений інтервал від -0,05°C до +0,05 °C для різниці температур $\delta\theta$ є надійним тільки на 50 %, що дає $\nu(\delta\theta) = 2$.

Визначення $\nu_{еф}(l)$ здійснюється точно таким же чином, як і обчислення $\nu_{еф}$(d) у 2), описаному вище. Таким чином, із рівняння (4.20)

$$\nu_{еф}(l) = (32\ нм)^4 / [(25\ нм)^4/18 + (9{,}7\ нм)^4/25{,}6 +$$
$$+ (2{,}9\ нм)^4/50 + (16{,}6\ нм)^4/2] = 16{,}7.$$

Для одержання необхідної розширеної невизначеності це значення зменшується до наступного меншого цілого числа, $\nu_{еф}(l) = 16$. Потім, із таблиці випливає, що $t_{99}(16) = 2{,}92$, і тому $U_{99} = t_{99}(16) u_c(l) = 2{,}92 \cdot (32\ нм) =$ = 93 нм. Остаточний результат вимірювання може бути зазначений, як l = = (50,000838±0,000093) мм, де число, що йде за символом ±, є чисельне значення розширеної невизначеності, а U визначається із сумарної стандартної невизначеності u_c=32 нм і коефіцієнта охоплення k = 2,92, заснованого на t-розподілі для ν=16 ступенів вільності, і визначає оцінений інтервал із довірчим рівнем 99 %. Відповідна відносна розширена невизначеність складає $U/l = 1{,}9 \cdot 10^{-6}$.

Членами другого порядку є

$$l_s^2 u^2(\delta a) u^2(\theta) + l_s^2 u^2(a_s) u^2(\delta\theta),$$

але тільки перший із цих членів вносить значний внесок у сумарну невизначеність $u_c(l)$

$$l_s^2 u^2(\delta a) u^2(\theta) = (0{,}05\ \text{м})(0{,}58 \cdot 10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1})(0{,}41\ {}^\circ\text{C}) = 11{,}7\ \text{нм},$$

$$l_s^2 u^2(a_s) u^2(\delta\theta) = (0{,}05\ \text{м})(1{,}2 \cdot 10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1})(0{,}029\ {}^\circ\text{C}) = 1{,}7\ \text{нм}.$$

Отже, члени другого порядку збільшують $u_c(l)$ з 32 нм до 34 нм.

4.3.2 Вимірювання активного і реактивного опорів. Цей приклад демонструє опрацювання множини вимірюваних величин або вихідних величин, що визначаються одночасно при одному вимірюванні, і кореляцію їхніх оцінок. У прикладі розглядаються тільки випадкові зміни спостережень; у дійсній практиці невизначеності поправок на систематичні ефекти також будуть вносити вклад у невизначеність результатів вимірювання. Дані аналізуються двома різними способами, але обидва дають ті ж самі цифрові значення.

Активний опір R і реактивний опір X елементу кола визначають шляхом вимірювання амплітуди V різниці потенціалів на його виводах, яка змінюється синусоїдально, амплітуди I змінного струму, що проходить через нього, і кута зсуву фаз Φ змінної різниці потенціалів щодо змінного струму. Таким чином, трьома вхідними величинами є V, I і Φ, а трьома вихідними (вимірюваними величинами) є три складові імпедансу: R, X і Z. Через те, що $Z^2 = R^2 + X^2$*, то є тільки дві незалежні вихідні величини [2].*

Вимірювані величини, пов'язані з вхідними величинами законом Ома

$$R = (V/I)\sin\Phi;\ X = (V/I)\sin\Phi;\ Z = (V/I). \tag{4.21}$$

Передбачається, що п'ять незалежних рядів одночасних спостережень цих трьох вхідних величин. V, I і Φ отримані в однакових умовах, а результати цих спостережень наведені в таблиці 4.2. Тут же дані середні арифметичні спостереження і експериментальні стандартні відхилення цих середніх, обчислених з рівнянь (1.1) і (1.3). Середні значення беруться як найкращі оцінки математично очікуваних значень вхідних величин, а експериментальні стандартні відхилення є стандартними невизначеностями цих середніх.

Внаслідок того, що середні значення $\overline{V}$, $\overline{I}$, $\overline{\Phi}$ одержують з одночасних спостережень, вони корельовані, і ці кореляції повинні прийматися в увагу при обчисленні стандартних невизначеностей вимірюваних величин R, X і Z. Необхідні коефіцієнти кореляції легко одержують із рівняння (1.23), використовуючи значення $s(\bar{V},\bar{I})$, $s(\bar{V},\bar{\Phi})$ і $s(\bar{I},\bar{\Phi})$. Результати включені в таблицю 4.2, де слід пам'ятати, що $r(x_i,x_j)=r(x_j,x_i)$ і $r(x_i,x_i)=1$.

Таблиця 4.2 – Значення вхідних величин V, I і Φ, отримані з п'ятьох рядів спостережень

Номер ряду k	Вхідні величини		
	V(B)	I(мА)	Φ (рад)
1	5,007	19,663 19,639	1,0456
2	4,994	19,640 19,685	1,0438
3	5,005	19,678	1,0468
4	4,990		1,0428
5	4,999		1,0433
Середнє арифметичне	$\bar{V}=4{,}9990$	$\bar{I}=19{,}6610$	$\bar{\Phi}=1{,}04446$
Експериментальне стандартне відхилення середнього	$s(\bar{V})=0{,}0032$	$s(\bar{I})=0{,}0095$	$s(\bar{\Phi})=0{,}00075$
Коефіцієнти кореляції $r(\bar{V},\bar{I})=-0{,}36$ $r(\bar{V},\bar{\Phi})=0{,}86$ $r(\bar{I},\bar{\Phi})=-0{,}65$			

Результати аналізу даних першим способом зведені в таблицю 4.3.

Значення трьох вимірюваних величин R, X і Z одержують із залежностей, даних у рівнянні (4.21), використовуючи середні значення $\bar{V}$, $\bar{I}$, $\bar{\Phi}$, наведені в таблиці 4.2 для V, I і Φ. Стандартні невизначеності R, X і Z одержують із рівняння (1.24), тому що, як указувалося вище, вхідні величини $\bar{V},\bar{I},\bar{\Phi}$ корельовані. Як приклад розглянемо $Z=\bar{V}/\bar{I}$. При ототожненні $\bar{V}$ із x_1, $\bar{I}$ із x_2 і f із $Z=\bar{V}/\bar{I}$ рівняння (1.24) для сумарної невизначеності Z дає:

$$u_c^2(Z)=(1/\bar{I})^2u^2(\bar{V})+(\bar{V}/\bar{I}^2)^2u^2(\bar{I})+2(1/\bar{I})(-\bar{V}/\bar{I}^2)u(\bar{V})u(\bar{I})r(\bar{V},\bar{I})=$$
$$=Z^2(u(\bar{V})/\bar{V})^2+Z^2(u(\bar{I})/\bar{I})^2-2Z^2(u(\bar{V})/\bar{V})(u(\bar{I})/\bar{I})r(\bar{V},\bar{I}), \quad (4.22)$$

або

$$u_{c,r}^2(Z)=u_r^2(\bar{V})+u_r^2(\bar{I})-2u_r(\bar{V})u_r(\bar{I})r(\bar{V},\bar{I}),$$

де $u(\bar{V})=s(\bar{V})$, $u(\bar{I})=s(\bar{I})$, а підрядковий індекс r в останньому виразі показує, що u є відносною невизначеністю.

Підставивши відповідні числові значення з таблиці 4.2 у рівняння (4.22), одержуємо $u_c(Z)=0{,}236\ \Omega$.

Оскільки ці три вимірювані або вихідні величини залежать від тих же самих вхідних величин, то вони теж корельовані. Елементи коваріаційної матриці, яка описує цю кореляцію, можна записати у загальному випадку як:

$$u(y_l,y_m)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j),\ i,j=1...N, \qquad (4.23)$$

де $y_l = f_l(x_1, x_2, ..., x_N)$ і $y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_N)$.

Рівняння (4.23) є узагальненням рівняння, коли q_l у цьому виразі корельовані. Оцінені коефіцієнти кореляції вихідних величин, як зазначено в рівнянні (1.23), визначаються таким чином: $r(y_l,y_m) = u(y_l,y_m)/[u(y_l)u(y_m)]$. Слід визнати, що діагональні елементи коваріаційної матриці $u(y_l,y_l) \equiv u(y_l)$ є оцінками дисперсій вихідних величин y_l і, що для $m = l$ рівняння (4.23) ідентично рівнянню (1.24).

Щоб застосувати рівняння (4.23) до цього прикладу, приймаються такі позначення:

$$y_1 = R,\ \ x_1 = \overline{V},\ \ u(x_i) = s(x_i),\ \ y_2 = X,\ \ x_2 = \overline{I},\ \ N=3,\ \ y_3 = Z, x_3 = \overline{\Phi}\ .$$

Результати обчислень R, X і Z, оцінок їхніх дисперсій і коефіцієнтів кореляції дані в табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Обчислені значення вихідних величин R, X і Z (перший спосіб)

Номер вимірюваної величини l	Співвідношення між оцінкою вимірюваної величини y_l і вхідними величинами x_i	Значення оцінки y_l, яка є результатом вимірювання	Сумарна стандартна невизначеність $u_c(y_l)$ результату вимірювання
1	$y_1 = R = (\overline{V}/\overline{I})\ \cos\overline{\Phi}$	$y_1 = R = 127{,}732\Omega$	$u_c(R) = 0{,}071\Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}06\cdot10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\overline{V}/\overline{I})\ \sin\overline{\Phi}$	$y_2 = X = 219{,}847\Omega$	$u_c(X) = 0{,}295\ \Omega$ $u_c(X)/X =$ $= 0{,}13\cdot10^{-2}$
3	$y_3 = Z = \overline{V}/\overline{I}$	$y_3 = Z = 254{,}260\Omega$	$u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$ $u_c(Z)/Z =$ $= 0{,}09\cdot10^{-2}$
Коефіцієнти кореляції $r(y_l, y_m)$ $r(y_1,y_2) = r(R,X) = -0{,}588$ $r(y_1,y_3) = r(R, Z) = -0{,}485$ $r(y_2,y_3) = r(X,Z) = 0{,}993$			

Результати аналізу даних другим способом зведені в табл. 4.4.

Через те, що дані були отримані у вигляді п'ятьох рядів спостережень трьох вхідних величин V, I і Ф, можна обчислити значення R, X і Z із кожного ряду вхідних даних, а потім узяти середнє арифметичне цих п'ятьох значень для одержання найкращих оцінок R, X і Z.

Експериментальне стандартне відхилення кожного середнього значення (який є його сумарною стандартною невизначеністю) потім обчислюють із п'ятьох окремих значень звичайним способом; і оцінені коваріації цих трьох середніх значень обчислюють, використовуючи рівняння (1.23) безпосередньо щодо п'яти окремих значень із яких одержують кожне середнє значення. У результатах, отриманих цими двома способами, немає розбіжностей у значеннях вихідних величин, стандартних невизначеностей і оцінок коваріації, за винятком ефектів другого порядку, пов'язаних із заміною таких членів, як $\overline{V}/\overline{I}$ або cos$\overline{\Phi}$ на $\overline{V/I}$, або $\overline{\cos\Phi}$.

Щоб продемонструвати цей спосіб, у таблиці 4.4 дані значення R, X і Z, обчислені в кожному з п'ятьох рядів спостережень. Потім середні арифметичні, стандартні невизначеності й оцінені коефіцієнти кореляції безпосередньо обчислювалися з цих окремих значень. Числові результати, отримані таким чином, незначно відрізняються від результатів, даних у таблиці 4.3.

Другий спосіб є прикладом одержання оцінки у із $\overline{Y} = (\sum Y_k)/n$, $k = 1...n$, у той час як перший спосіб є прикладом одержання у з $Y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$. Ці два способи дають однакові результати, якщо f є лінійною функцією своїх вхідних величин (за умови, що коефіцієнти кореляції, які експериментально спостерігаються, приймаються до уваги, коли застосовується перший спосіб). Якщо f не є лінійною функцією, тоді результати, отримані першим способом, будуть відрізнятися від результатів, отриманих другим способом, у залежності від ступеня нелінійності, оцінених дисперсій і коваріацій X_i. Це можна бачити з виразу

$$Y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N) + 0{,}5\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{X}_i\partial\overline{X}_j}u(\overline{X}_i, \overline{X}_j) + ..., \quad i, j = 1, ..., N, \quad (4.24)$$

де другий член справа є членом другого порядку при розкладанні в ряд Тейлора величини f по $\overline{X}_i$. У даному випадку перевага віддається другому способові, тому що даний спосіб уникає апроксимації $Y=f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$ і краще відбиває використану процедуру вимірювання – те, що дані фактично були зібрані в ряди.

З іншого боку, другий спосіб буде непідходящим, якщо дані табл. 4.2 подають $n_1=5$ спостережень різниці потенціалів V, за якими ідуть $n_2=5$ спостережень струму I, потім $n_3=5$ спостережень фази Φ; і неможливим якщо $n_1 \neq n_2 \neq n_3$, (фактично це погана вимірювальна процедура – проводити вимірювання таким способом, тому що різниця потенціалів на повному опорі і струм, який йде через нього, безпосередньо взаємозалежні).

Якщо дані, наведені в табл. 4.2 витлумачити наново таким чином, щоб другий спосіб виявився неприйнятним, і якщо припустити, що кореляції між величинами V, I і Φ відсутні, то коефіцієнти кореляцій не будуть значущими і їх варто встановити рівними нулю. Якщо це зробити в табл. 4.2, то рівняння (4.23) зводиться до еквівалента рівняння

$$u(y_l,y_m)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}u^2(x_i),\ i=1,\ldots,N, \tag{4.25}$$

і його застосування до даних табл. 4.2 призведе до змін у табл. 4.3, які показані у табл. 4.5.

Таблиця 4.4 – Обчислені значення вихідних величин R, X і Z (другий спосіб)

Номер ряду k	Індивідуальні значення вимірюваних величин		
	$R=(V/I)\cos\Phi$ (Ω)	$X=(V/I)\sin\Phi$ (Ω)	$Z=V/I$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Середнє арифметичне	$y_1=\overline{R}=127{,}732$	$y_2=\overline{X}=219{,}847$	$Y_3=\overline{Z}=254{,}260$
Експериментальне стандартне відхилення середнього	$s(\overline{R})=0{,}071$	$s(\overline{X})=0{,}295$	$s(\overline{Z})=0{,}236$
Коефіцієнти кореляції $r(y_l, y_m)$ $r(y_1,y_2)=r(\overline{R},\overline{X})=-0{,}588$ $r(y_1,y_3)=r(\overline{R},\overline{Z})=-0{,}485$ $r(y_2,y_3)=r(\overline{X},\overline{Z})=0{,}993$			

Таблиця 4.5 – Зміни в табл. 4.3 у припущенні, що коефіцієнти кореляції табл. 4.2 дорівнюють нулю

Сумарна стандартна невизначеність результату вимірювання $u_c(y_l)$
$u_c(R)=0{,}195$ Ω $u_c(R)/R=0{,}15\cdot10^{-2}$
$u_c(X)=0{,}201$ Ω $u_c(X)/X=0{,}09\cdot10^{-2}$
$u_c(Z)=0{,}204$ Ω $u_c(Z)/Z=0{,}08\cdot10^{-2}$
Коефіцієнти кореляції $r(y_l, y_m)$ $r(y_1,y_2)=r(R,X)=0{,}056$ $r(y_1,y_3)=r(R,Z)=0{,}527$ $r(y_2,y_3)=r(X,Z)=0{,}878$

4.3.3 Калібрування термометра. Цей приклад ілюструє використання методу найменших квадратів для одержання лінійної градуювальної кривої, а також те, як параметри апроксимації – перетинання і нахил, їх оцінені дисперсії і коваріації використовуються для одержання з кривої значень і стандартної невизначеності передбаченої поправки.

Термометр калібрується шляхом порівняння $n = 11$ показань температури t_k термометра, кожне з яких має незначну невизначеність, із відповідними відомими опорними температурами $t_{R,k}$ у діапазоні температур від 21 °C до 27°C для одержання поправок $b_k = t_{R,k} - t_k$ у показаннях. Вимірювані поправки b_k і вимірювані температури t_k є вхідними величинами при оцінюванні. Лінійна градуювальна крива

$$b(t) = y_1 + y_2(t - t_0) \tag{4.26}$$

апроксимує обмірювані поправки і температури методом найменших квадратів. Параметри y_1 і y_2, що є, відповідно, перетинанням і нахилом каліброваної кривої, являють собою дві вимірювані або вихідні величини, які треба визначити. Температура t_0 є зручно обраною точною опорною температурою; вона не є незалежним параметром, що треба визначати методом найменших квадратів. Після того, як знайдені y_1 і y_2 разом із їхніми оціненими дисперсіями і коваріаціями, рівняння (4.26) може бути використане для передбачення значення поправки і її стандартної невизначеності, що треба внести в показання термометра для будь-якого значення температури t [2].

Опираючись на метод найменших квадратів і при виконанні припущень, зроблених у 4.1, вихідні величини y_1 і y_2 і їхні оцінені дисперсії і коваріації одержують шляхом мінімізації суми

$$S = \sum[b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)]^2,\ k = 1...n.$$

Це дає такі рівняння для y_1 і y_2, їхніх експериментальних дисперсій $s(y_1)$ і $s(y_2)$ і їхнього оціненого коефіцієнта кореляції $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2)/ s(y_1)s(y_2)$, де $s(y_1,y_2)$ є їх оціненою коваріацією

$$y_1 = [(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k\theta_k)(\sum \theta_k)]/D, \tag{4.27}$$

$$y_2 = [n(\sum b_k\theta_k) - (\sum b_k)(\sum \theta_k)]/D, \tag{4.28}$$

$$s^2(y_1) = s^2\sum \theta_k^2/D,\ s^2(y_2) = ns^2/D, \tag{4.29}$$

$$r(y_1, y_2) = -\sum \theta_k/(n\sum \theta_k^2)^{-1/2}, \tag{4.30}$$

$$s^2 = \sum[b_k - b(t_k)]^2/(n-2), \tag{4.31}$$

$$D = n\sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 = n\sum(\theta_k - \bar{\theta})^2 = n\sum(t_k - \bar{t})^2, \tag{4.32}$$

де всі суми по k від 1 до n, $\theta_k = t_k - t_0$, $\bar{\theta} = (\sum\theta_k)/n$ і $\bar{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ - різниця між вимірюваною поправкою або поправкою b_k, яка спостерігається при температурі t_k і поправкою $b(t_k)$, передбаченою апроксимуючою кривою $b(t) = y_1+y_2(t-t_0)$ при t_k. Дисперсія s^2 є мірою загальної невизначеності апроксимації, де коефіцієнт n - 2 відбиває той факт, що оскільки два параметри y_1 і y_2 визначаються на основі n спостережень, то число ступенів вільності $\nu = n-2$.

Дані, які треба апроксимувати, подані в 2-ій і 3-ій колонках табл. 4.6. Приймаючи t_0 = 20 °C як опорну температуру, рівняння (4.27 - 4.31) дають

$$y_1 = -0{,}1712\ °C,\ s(y_1) = 0{,}0029\ °C,$$

$$y_2 = 0{,}00218,\ s(y_2) = 0{,}00067,$$

$$r(y_1,y_2) = -0{,}930,$$

$$s = 0{,}0035\ °C.$$

Таблиця 4.6 – Дані, використовувані для одержання лінійної градуювальної кривої термометра методом найменших квадратів

Номер показання k	Показання термометра t_k, °C	Поправка, яка спостерігається $b_k = t_{R,k} - t_k$, °C	Передбачена $B(t_k)$, °C	Різниця між поправками $b_k - b(t_k)$, °C
1	21,521	-0,171	-0,1679	-0,0031
2	22,012	-0,169	-0,1668	- 0,0022
3	22,512	-0,166	-0,1657	- 0,0003
4	23,003	-0,159	-0,1646	+0,0056
5	23,507	-0,164	-0,1635	- 0,0005
6	23,999	-0,165	-0,1625	- 0,0025
7	24,513	-0,156	-0,1614	+ 0,0054
8	25,002	-0,157	-0,1603	+0,0033
9	25,503	-0,159	-0,1592	+ 0,0002
10	26,010	-0,161	-0,1581	- 0,0029
11	26,511	-0,160	-0,1570	- 0,0030

Той факт, що нахил y_2 більше ніж у 3 рази перевищує його стандартну невизначеність, служить показанням того, що потрібна градуювальна крива, а не фіксована усереднена поправка. Тоді градуювальну криву можна подати у вигляді

$$b(t) = -0{,}1712(29)\ °C + 0{,}00218(67)(t - 20\ °C), \qquad (4.33)$$

де числа в дужках являють собою чисельні значення стандартних невизначеностей, віднесені до відповідних останніх цифр зазначених результатів для перетинання і нахилу. Це рівняння дає передбачене значення поправки $b(t)$ при будь-якій температурі t, і, зокрема, значення $b(t_k)$ при $t = t_k$. Ці значення дані в 4-ому стовпчику таблиці, тоді як в останньому стовпчику дані різниці між вимірюваними і передбаченими значеннями $b_k - b(t_k)$. Аналіз цих різниць можна використовувати для перевірки обґрунтованості лінійної моделі; існують формальні тести, але в цьому прикладі вони не розглядаються.

Вираз для сумарної стандартної невизначеності передбаченого значення поправки можна легко одержати, застосовуючи закон поширення невизначеності, рівняння (1.24), до рівняння (4.26). Відмічаючи, що $b(t) = f(y_1,y_2)$, і записавши $u(y_1) = \delta(y_1)$ і $u(y_2) = \delta(y_2)$, одержимо

$$u_c^2(b(t)) = u^2(y_1) + (t_1 - t_0)^2\, u^2(y_2) + 2(t - t_0)u(y_1)u(y_2)r(y_1,y_2). \quad (4.34)$$

Оцінена дисперсія $u_c^2(b(t))$ є мінімальною при $t_{min} = t_0 - u(y_1)r(y_1,y_2)/u(y_2)$, яка у даному випадку дорівнює $t_{min} = 24{,}0085$ °C.

Як приклад використання рівняння (4.34) припустимо, що потрібна поправка на показання термометра і його невизначеність при $t = 30$ °C, яка перебуває за межами температурного діапазону, у якому термометр був у дійсності відкалібрований. Підстановка $t = 30$ °C у рівняння (4.33) дає: $b(30°C) = -0{,}1494$ °C, а рівняння(4.34) набуває вигляду

$$u_c^2(b(30°C)) = (0{,}0029°C)^2 + (10°C)^2(0{,}00067)^2 +$$
$$+2(10°C)(0{,}0029°C)(0{,}00067)(-0{,}930) = 17{,}1\cdot 10^{-6}\ °C^2,$$

або $u_c(b(30°C)) = 0{,}0041$ °C.

Таким чином, поправка при 30 °C дорівнює -0,1494 °C із сумарною стандартною невизначеністю $u_c = 0{,}0041$°C і $\nu = n - 2 = 9$ ступенями вільності.

Рівняння (4.30) для коефіцієнта кореляції $r(y_1,y_2)$ означає, що, якщо t_0 вибрано таким чином, що $\sum\theta_k = \sum(t_k - t_0) = 0$, $k = 1...n$, то $r(y_1,y_2) = 0$ і y_1 і y_2 будуть некорельовані, тим самим спрощуючи обчислення стандартної невизначеності передбаченої поправки. Оскільки $\sum\theta_k = 0$, коли $t_0 = \bar{t} = (\sum t_k)/n$, $k = 1...n$, і в даному випадку $\bar{t} = 24{,}0085$ °C, то повторна апроксимація методом найменших квадратів при $t_0 \to \bar{t} = 24{,}0085$°C призведе до значень y_1 і y_2, які є некорельованими (температура $\bar{t}$ є також температурою, при якій $u^2(b(t))$ мінімальна). Але повторна апроксимація не є необхідною, тому що це може бути показано рівняннями:

$$b(t) = y_1' \text{ і } y_2(t - \bar{t}), \quad (4.35)$$

$$u_c^2(b(t)) = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2), \quad (4.36)$$

$$r(y_1' \text{ і } y_2) = 0, \tag{4.37}$$

де $y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$, $\bar{t} = t_0 - s(y_1)r(y_1,y_2)/s(y_2)$, $s^2(y_1') = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1,y_2)]$, а при записі рівняння (4.36) були зроблені підстановки $u(y_1') = s(y_1')$ і $u(y_2) = s(y_2)$.

Застосовуючи ці залежності одержимо

$$b(t) = -0{,}1625(11) + 0{,}00218(67)(t - 24{,}0085\ °C), \tag{4.38}$$

$$u_c^2(b(t)) = (0{,}0011)^2 + (t - 24{,}0085\ °C)^2(0{,}000067)^2. \tag{4.39}$$

Той факт, що ці вирази дають ті ж самі результати, як і рівняння (4.33) і (4.34), можна перевірити, якщо повторити обчислення $b(30°C)$ і $u_c^2(b(30°C))$.

Підставивши $t = 30°C$ в рівняння (4.38) і (4.39), одержимо

$$b(30°C) = -0{,}1494°C,$$

$$u_c(b(30°C)) = 0{,}0041°C,$$

що ідентично результатам, отриманим при підстановці у рівняння (4.34). Оцінену коваріацію між двома передбаченими поправками $b(t1)$ і $b(t2)$ можна одержати з рівняння (4.30).

Метод найменших квадратів можна використовувати для апроксимації кривої більш високого порядку за точками даних; цей метод також застосовується для випадків, коли точки окремих даних мають невизначеності. Для більш докладного ознайомлення з цим питанням варто ознайомитися з [8]. Однак можна зазначити такі два випадки, де не передбачається, що обмірювані поправки b_k відомі точно.

1. Припустимо, що кожна t_k має дуже малу невизначеність, нехай кожне з n значень $t_{R,k}$ одержують із рядів m повторних показань і сумарної оцінки дисперсії для таких показань, визначеної на основі великої кількості даних, отриманих за декілька місяців, є s_p^2. Тоді оцінена дисперсія кожного $t_{R,k}$ є $s_p^2/m = u_0^2$, і кожна поправка, що спостерігається, $b_k = t_{R,k} - t_k$ має ту ж саму стандартну невизначеність u_0^2. У цих умовах (і якщо немає причин припускати некоректність лінійної моделі) u_0^2 заміняє s^2.

2. Припустимо, що кожна t_k має дуже малу невизначеність, що поправка ε_k застосовується для кожного з n значень $t_{R,k}$ і що кожна поправка має однакову стандартну невизначеність u_a. Тоді стандартна невизначеність кожного $b_k = t_{R,k} - t_k$ також є u_a, а $s^2(y_1)$ заміняється на $s^2(y_1) + u_a^2$ та $s^2(y_1')$ – на $s^2(y_1') + u_a^2$.

4.3.4 Вимірювання активності. Цей приклад схожий на приклад 4.3.2 про одночасне вимірювання активного і реактивного опору тим, що дані можна аналізувати двома різними способами, але кожний із них дає суттєво однаковий чисельний результат. Перший підхід ще раз демонструє необхідність узяти до уваги кореляції, які спостерігаються між вхідними величинами.

Невідома концентрація активності радону (^{222}Rn) у зразку води визначається рідинно-сцинтиляційним способом при використанні стандартного зразка радону у воді з відомою концентрацією активності. Невідому концентрацію активності одержують шляхом вимірювання трьох складових, які складаються приблизно з 5 г води і 12 г сцинтилятора із органічної емульсії в ампулах об'ємом 22 мл:

- джерело (а) – стандартний зразок, який складається зі стандартного розчину масою m_s із відомою концентрацією активності;

- джерело (б) – підібраний чистий зразок води, який не містить радіоактивних речовин, використовуваний для одержання фонової швидкості підрахунку;

- джерело (в) – зразок, що складається з аліквотної маси m_x із невідомою концентрацією активності.

Виконується шість циклів вимірювань трьох складових в такому порядку: стандартний зразок – чистий зразок – зразок; і кожний інтервал підрахунку T_0 з поправкою на мертвий час для кожного джерела під час усіх шести циклів складає 60 хвилин. Хоча не можна припустити, що фонова швидкість підрахунку залишається постійною протягом повного інтервалу підрахунку (65 годин), передбачається, що розраховані числа, отримані для кожного чистого зразка, можна використовувати як представницькі для фонової швидкості підрахунку час вимірювань стандартного зразка і зразка в тому ж самому циклі. Дані наведені в таблиці 4.7, де: t_s, t_B, t_x – значення часу від моменту відліку $t = 0$ до середини інтервалів підрахунку $T_0 = 60$ хв (із поправкою на мертвий час) для ампул, відповідно, із стандартним зразком, чистим зразком і зразком; хоча t_B указується для повноти картини, воно не потрібно для аналізу; C_s, C_B, C_x – число імпульсів, зареєстрованих під час інтервалів підрахунку $T_0 =$ $= 60$ хв із поправкою на мертвий час для ампул, відповідно, із стандартним зразком, чистим зразком і зразком.

Рахункові імпульси, які спостерігаються, можна описати, як:

$$C_s = C_B + \varepsilon A_s T_0 m_s e^{-\lambda t_s}, \tag{4.40}$$

$$C_x = C_B + \varepsilon A_x T_0 m_x e^{-\lambda t_x}, \tag{4.41}$$

де ε – ефективність виявлення ^{222}Rn із використанням рідкої сцинтиляції для даного складу джерела передбачена незалежною від рівня активності;

A_s – концентрація активності стандартного зразка на момент відліку $t = 0$;

A_x – вимірювана величина, яка визначається як невідома концентрація активності зразка на момент відліку t = 0;

m_s – маса стандартного розчину;

m_x – маса аліквотного зразка;

λ – постійна розпаду для ^{222}Rn: $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1{,}25894 \cdot 10^{-4}$ хв$^{-1}$ ($T_{1/2}$=5505,8 хв) [2].

Рівняння (4.40) і (4.41) показують, що для шести індивідуальних значень ні C_s, ні C_x, наведені в таблиці 4.7, не можна усереднити безпосередньо через експоненціальний розпад активності стандартного зразка і невеличкі зміни фонового підрахунку від циклу до циклу. Замість цього необхідно звернутися до підрахунку з поправками на розпад і фон (або до швидкості підрахунку, обумовленої як число імпульсів, поділене на T_0 = 60 хв). Це припускає об'єднання рівнянь (4.40) і (4.41) для одержання такого виразу щодо невідомої концентрації через відомі величини

$$A_x = f(A_s, m_s, m_x, C_s, C_x, C_в, t_s, t_x, \lambda) =$$
$$= A_s m_s (C_x - C_в)\exp(\lambda t_x) / [m_x (C_s - C_в)\exp(\lambda t_s)] =$$
$$= A_s m_s (C_x - C_в)\exp(\lambda t_x - t_s) / m_x (C_s - C_в), \quad 4.42)$$

де $(C_x - C_в)\exp(\lambda t_x)$ і $(C_s - C_в)\exp(\lambda t_s)$ є кількість підрахунків із поправкою на фон, відповідно, для зразка і стандартного зразка на момент відліку t = 0 для тимчасового інтервалу T_0 = 60 хв. З іншого боку, можна просто записати

$$A_x = f(A_s, m_s, m_x, R_s, R_x) = A_s m_s R_x/(R_s m_x), \quad (4.43)$$

де швидкості підрахунку R_s і R_x з поправкою на фон і розпад визначаються за формулами:

$$R_x = (C_x - C_в)\exp(\lambda t_x)/T_0, \quad (4.44)$$

$$R_s = (C_s - C_в)\exp(\lambda t_s)/T_0. \quad (4.45)$$

Таблиця 4.7 – Підраховані показники для визначення концентрації активності невідомого зразка

Цикл k	Стандартний зразок		Чистий зразок		Зразок	
	t_s (хв)	C_s (число)	t_B (хв)	C_B (число)	t_x (хв)	C_x (число)
1	243,74	15380	305,56	4054	367,37	41432
2	984,53	14978	1046,10	3922	1107,66	38706
3	1723,87	14394	1785,43	4200	1846,99	35860
4	2463,17	13254	2524,73	3830	2586,28	32238
5	3217,56	12516	3279,12	3956	3340,68	29640
6	3956,83	11058	4018,38	3980	4079,94	26356

Таблиця 4.8 підсумовує значення швидкостей підрахунку R_s і R_x із поправками на фон і розпад, розраховані за рівняннями (4.44) і (4.45), із використанням даних таблиці 4.7 і $\lambda = 1{,}25894\cdot10^{-4}$ хв$^{-1}$, як зазначено вище. Слід зазначити, що відношення $R = R_x/R_s$, найбільш легко розрахувати при використанні виразу

$$(C_x - C_в)\exp(\lambda(t_x - t_s)) / (C_s - C_в).$$

Середні арифметичні $\overline{R}_s$, $\overline{R}_x$ і $\overline{R}$, а також їх експериментальні стандартні відхилення $s(\overline{R}_s)$, $s(\overline{R}_x)$ і $s(\overline{R})$ розраховуються звичайним способом. Коефіцієнт кореляції $r(\overline{R}_x, \overline{R}_s)$ розраховується з рівняння (1.23).

Через невеличку змінність значень $\overline{R}_x$ і $\overline{R}_s$ відношення середніх $\overline{R}_x/\overline{R}_s$ і стандартна невизначеність $u(\overline{R}_x/\overline{R}_s)$ цього відношення практично збігаються, відповідно, із середнім відношенням $\overline{R}$ і його експериментальним стандартним відхиленням $s(\overline{R})$, як наведено в останньому стовпчику таблиці 4.8. Однак при розрахунку стандартної невизначеності $u(\overline{R}_x/\overline{R}_s)$ необхідно враховувати кореляцію між R_x і R_s, подану коефіцієнтом кореляції $r(\overline{R}_x, \overline{R}_s)$, використовуючи рівняння (1.23).

Варто визнати, що відповідні експериментальні стандартні відхилення R_x і R_s, $\sqrt{6}\,s(\overline{R}_x)$ і $\sqrt{6}\,s(\overline{R}_s)$ показують змінність цих величин, яка від 2 до 3 разів більша, ніж змінність, яка передбачається статистикою Пуассона для процесу підрахунку; остання включена у змінність підрахунку, і її не потрібно враховувати окремо.

Одержання невідомої концентрації активності A_x і її сумарної стандартної невизначеності $u_c(A_x)$ із рівняння (4.43) потребує знання A_s, m_s і m_x, а також їхніх стандартних невизначеностей. Вони дані так:

$$A_s = 0{,}1368 \text{ Бк/г},\ u(A_s) = 0{,}0018 \text{ Бк/г},\ u(A_s)/A_s = 1{,}32\cdot10^{-2};$$

$$m_s = 5{,}0192 \text{ г},\ u(m_s) = 0{,}005 \text{ г},\ u(m_s)/m_s = 0{,}10\cdot10^{-2};$$

$$m_x = 5{,}0571 \text{ г},\ u(m_x)=0{,}0010 \text{ г};\ u(m_x)/m_x = 0{,}02\cdot10^{-2}.$$

Інші можливі джерела невизначеності оцінюються як дуже малі:

- стандартні невизначеності часу розпаду: $u(t_{s,k})$ і $u(t_{x,k})$;

- стандартна невизначеність постійної розпаду ^{222}Rn: $u(\lambda) = 10^{-7}$ хв$^{-1}$. (Значущою величиною є коефіцієнт розпаду $\exp(\lambda(t_x - t_s))$, який змінюється від 1,01563 для циклів k = 4 і 6 до 1,01570 для циклу k = 1. Стандартна невизначеність цих значень складає $u = 1{,}2\cdot10^{-5}$);

- невизначеність, пов'язана з можливою залежністю ефективності детектування сцинтиляційного лічильника від використовуваного джерела (стандартний зразок, чистий зразок і зразок);

- невизначеність поправки на мертвий час лічильника і поправки на залежність ефективності підрахунку від рівня активності.

Як зазначено вище, A_x і $u_c(A_x)$ можуть бути отримані двома різними шляхами з рівняння (4.43). При першому підході A_x обчислюється із середніх арифметичних $\overline{R}_x$ і $\overline{R}_s$, що дає

$$A_x = A_s m_s \overline{R}_x / (\overline{R}_s m_x) = 0{,}43000 \text{ Бк/г}. \qquad (4.46)$$

Сумарна дисперсія $u_c^2(A_x)$ дорівнює:

$$u_c^2(A_x)/A_x^2 = u^2(A_s)/A_s^2 + u^2(m_s)/m_s^2 + u^2(m_x)/m_x^2 +$$
$$+ u^2(\overline{R}_x)/\overline{R}_x^2 + u^2(\overline{R}_s)/\overline{R}_s^2 - 2\, r(\overline{R}_x, \overline{R}_s)\, u(\overline{R}_x) u(\overline{R}_s)/(\overline{R}_x \overline{R}_s), \qquad (4.47)$$

де останні три члени дають $u^2(\overline{R}_x/\overline{R}_s)/(\overline{R}_x/\overline{R}_s)^2$ – оцінену відносну дисперсію $(\overline{R}_x/\overline{R}_s)$. Результати в таблиці 4.8 показують, що $\overline{R}$ не точно дорівнює $(\overline{R}_x/\overline{R}_s)$ і що стандартна невизначеність $u^2(\overline{R}_x/\overline{R}_s)$ для $\overline{R}_x/\overline{R}_s$ не точно дорівнює стандартній невизначеності $s(\overline{R})$ для $\overline{R}$.

Підстановка значень відповідних величин у рівняння (4.46) і (4.47) дає

$$u_c(A_x)/A_x = 1{,}93 \cdot 10^{-2},\ u_c(A_x) = 0{,}0084 \text{ Бк/г}.$$

Результат вимірювання тоді можна записати як: $A_x = 0{,}4300$ Бк/г із сумарною стандартною невизначеністю $u_c = 0{,}0083$ Бк/г.

При другому підході, що не враховує кореляцію між $\overline{R}_x$ і $\overline{R}_s$, A_x обчислюється, використовуючи середнє арифметичне $\overline{R}$. Таким чином

$$A_x = A_s m_s / m_x = 0{,}0084 \text{ Бк/г}. \qquad (4.48)$$

Вираз для $u_c^2(A_x)$ такий

$$u_c^2(A_x)/A_x^2 = u^2(A_s)/A_s^2 + u^2(m_s)/m_s^2 + u^2(m_x)/m_x^2 + u^2(\overline{R})/\overline{R}^2, \qquad (4.49)$$

що дає $u_c(A_x)/A_x = 1{,}95 \cdot 10^{-2}$, $u_c(A_x) = 0{,}0084$ Бк/г.

Результат вимірювання можна зазначити як: $A_x = 0{,}4304$ Бк/г із сумарною стандартною невизначеністю $u_c = 0{,}0084$ Бк/г.

Ефективні ступені вільності u_c можна оцінити, використовуючи формулу Велча-Саттерсвейта.

Із двох результатів кращим є другий, тому що він не враховує заміни середнього значення відношення двох величин на відношення середніх значень цих величин; він краще відбиває використану процедуру вимірювань – дані насправді були зібрані в різні цикли.

Однак, розбіжність між значеннями A_x, що утворюється при двох підходах, мала в порівнянні зі стандартною невизначеністю, приписуваною кожному з них, і розбіжністю між двома стандартними невизначеностями можна цілком знехтувати. Така відповідність показує, що два підходи еквівалентні, коли кореляції, які спостерігаються, враховані належним чином.

Таблиця 4.8 – Розрахунок швидкостей підрахунку з поправками на розпад і фон

Цикл K	R_x (хв$^{-1}$)	R_s (хв$^{-1}$)	t_x-t_s (хв)	$R=R_x/R_s$
1	652,46	194,65	123,63	3,3520
2	666,48	208,58	123,13	3,1953
3	665,80	211,08	123,12	3,1543
4	655,68	214,17	123,11	3,0615
5	651,87	213,92	123,12	3,0473
6	623,31	194,13	123,11	3,2107
$\overline{R}_x = 652{,}60$, $\overline{R}_s = 206{,}09$ $s(\overline{R}_x)= 6{,}42$, $s(\overline{R}_s)=3{,}79$ $s(\overline{R}_x)/\overline{R}_x= 0{,}98\cdot10^{-2}$, $s(\overline{R}_s)/\overline{R}_s =1{,}84\cdot10^{-2}$ $\overline{R}_x / \overline{R}_s =3{,}167$, $u(\overline{R}_x/\overline{R}_s) = 0{,}045$ $u(\overline{R}_x/\overline{R}_s)/(\overline{R}_x/\overline{R}_s) = 1{,}42\cdot10^{-2}$				$\overline{R}=3{,}170$ $s(\overline{R}) = 0{,}046$ $s(\overline{R})/\overline{R} = 1{,}44\cdot10^{-2}$
Коефіцієнт кореляції				
$r(\overline{R}_x, \overline{R}_s) = 0{,}646$				

4.3.5 Вимірювання сили електричного струму. Схема вимірювань показана на рис. 4.1 [6].

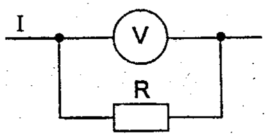


Рисунок 4.1 - Схема вимірювання сили струму

Рівняння вимірювань має вигляд

$$I = f(V,R) = \frac{V}{R}, \tag{4.50}$$

де I – сила струму,

V – напруга,

R – опір шунта.

В результаті вимірювання напруги отримані такі значення V_i в мілівольтах 100; 100,68; 100,83; 100,79; 100,64; 100,63; 100,94; 100,6; 100,68; 100,76; 100,64 при температурі $t = (23 \pm 0{,}05)°C$.

На основі отриманих значень обчислюють середнє значення напруги за формулою

$$\overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i = 100{,}72 \text{ мВ}. \tag{4.51}$$

Значення опору шунта встановлено при калібруванні для $I = 10\,A$ і $t = 23{,}00°C$ і дорівнює $R_0 = 0{,}010088$ Ом.

Результат вимірювань сили струму отримують за формулою

$$I = \frac{\overline{V}}{R_0} = 9{,}984\,A. \qquad (4.52)$$

Визначають середньоквадратичне відхилення (СКВ) середньоарифметичного значення напруги $S(\overline{V})$, яке характеризує випадкову складову похибки при вимірюваннях напруги за формулою

$$S(\overline{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(V_i - \overline{V})^2}{n(n-1)}} = 3{,}4 \cdot 10^{-2}\ мВ. \qquad (4.53)$$

Тоді відносне значення середньоквадратичного відхилення (СКВ) $\overline{V}$ буде дорівнювати

$$\tilde{S}(\overline{V}) = \frac{S(\overline{V})}{\overline{V}} = 0{,}034\ \%. \qquad (4.54)$$

Межі невиключеної систематичної похибки вольтметра визначені при його калібруванні у вигляді такого виразу (у виразах для меж похибок при рівних значеннях відхилень будемо нехтувати знаком $\pm$)

$$\theta_V = 3 \cdot 10^{-4}\,V + 0{,}02\,мВ. \qquad (4.55)$$

Тоді при $V = \overline{V}$ отримуємо

$$\theta_V = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\,мВ,$$

$$\tilde{\theta}_V = 0{,}050\ \%.$$

Межі невиключеної систематичної похибки значення опору шунта, визначені при його калібруванні, дорівнюють

$$\tilde{\theta}_R = 0{,}070\%.$$

Тоді при $R = R_0$ отримуємо: $\theta_R = 7 \cdot 10^{-4} \cdot R_0 = 7{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом.

Межі невиключеної систематичної складової похибки значення опору шунта, які обумовлені похибкою вимірювання температури, знаходимо з формули:

$$R = R_0[1 + \alpha(t - t_0)], \qquad (4.56)$$

де R_0 – значення опору при $t = t_0 (t_0 = 23{,}00°C; R_0 = 0{,}010088\,Ом)$;

α – температурний коефіцієнт ($\alpha = 6\cdot 10^{-6}K^{-1}$).

Якщо межі вимірювання температури дорівнюють Δt, то межі відповідної складової похибки значення опору дорівнюють

$$\theta_{R,t} = \alpha\Delta t\cdot R.$$

При $\Delta t = 0{,}05°C$ отримуємо

$$\theta_{R,t} = 3{,}0\cdot 10^{-9}\,\text{Ом},\ \tilde{\theta}_{R,t} = 3{,}0\cdot 10^{-5}\,\%.$$

Цю складову похибки можна далі не враховувати оскільки вона має мале числове значення в порівнянні з іншими складовими.

Для додавання невиключених систематичних похибок робимо припущення про рівномірний закон розподілу їх всередині меж θ_V і θ_R. Тоді СКВ сумарної невиключеної систематичної складової похибки результату вимірювань сили струму визначаємо за формулою:

$$S_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2\frac{\theta_V^2}{3} + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2\frac{\theta_R^2}{3}}, \tag{4.57}$$

де $\dfrac{\partial f}{\partial V} = \dfrac{1}{R}, \dfrac{\partial f}{\partial R} = -\dfrac{V}{R^2}$ – коефіцієнти чутливості.

Тоді отримуємо

$$S_\theta = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\theta_V^2}{3} + \left(\frac{\overline{V}}{R^2}\right)^2\frac{\theta_R^2}{3}} = 5{,}0\cdot 10^{-3}\,A,$$

$$\tilde{S}_\theta = 0{,}05\,\%.$$

Довірчі межі сумарної невиключеної систематичної складової похибки результату вимірювань сили струму при ймовірності $p = 0{,}95$ оцінюємо за формулою

$$\theta(0{,}95) = 1{,}1\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2\theta_V^2 + \left(\frac{-V}{R^2}\right)^2\cdot\theta_R^2} = 9{,}5\cdot 10^{-3}\,A.$$

$$\tilde{\theta}_{(0,95)} = 0{,}95\,\%.$$

СКВ випадкової складової похибки результату вимірювань сили струму визначаємо за формулою

$$S = \frac{\partial f}{\partial V}\cdot S(\overline{V}) = 3{,}4\cdot 10^{-3}\,A.$$

$$\tilde{S} = 0{,}034\,\%.$$

СКВ сумарної похибки результату вимірювань сили струму обчислюємо за формулою

$$S_\Sigma = \sqrt{S^2 + S_\theta^2} = 6{,}0\cdot 10^{-3}\,A,$$

$$\tilde{S}_\Sigma = 0{,}060\,\%.$$

Довірчі межі похибки результату вимірювань сили струму при $p=0{,}95$ і числі ефективних ступенів вільності $\nu_{eff}=n-1=9$ обчислюємо за формулою

$$\Delta_{0,95}=\frac{t_{0,95}(9)S+\theta(0{,}95)}{S+S_\theta}\cdot S_\Sigma=0{,}012\,А,$$

$$\tilde{\Delta}_{0,95}=0{,}012\,\%.$$

За типом А обчислюємо стандартну невизначеність, обумовлену джерелом невизначеності, яке має випадковий характер.

Стандартну невизначеність напруги, обумовлену джерелом невизначеності, яке має випадковий характер, визначаємо за формулою

$$u_A(V)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(V_i-\overline{V})^2}{n(n-1)}}, \qquad (4.58)$$

$$u_A(V)=3{,}4\cdot10^{-2}\,мВ,\ \tilde{u}_A=0{,}034\,\%.$$

Стандартну невизначеність сили струму, обумовлену джерелом невизначеності, яке має випадковий характер, визначаємо за формулою

$$u_A=\frac{\partial f}{\partial V}\cdot u_A(V)=3{,}4\cdot10^{-3}\,А, \qquad (4.59)$$

$$\tilde{u}_A=0{,}034\,\%.$$

За типом В обчислюємо стандартні невизначеності, обумовлені джерелами невизначеності, які мають систематичний характер. Закон розподілу всередині меж вважаємо рівномірним.

Межі систематичного зміщення при вимірюваннях напруги, які визначені при калібруванні вольтметра, дорівнюють $3\cdot10^{-4}\cdot\overline{V}+0{,}02$. Тоді відповідну стандартну невизначеність обчислюємо за формулою

$$u_{BV}=\frac{3\cdot10^{-4}\cdot\overline{V}+0{,}02}{\sqrt{3}}=2{,}9\cdot10^{-2}\,мВ, \qquad (4.60)$$

$$\tilde{u}_{B,V}=0{,}029\,\%.$$

Межі, всередині яких лежить опір шунта, визначені при калібруванні шунта і дорівнюють $7\cdot10^{-4}\cdot R$. Тоді при $R=R_0$ відповідну стандартну невизначеність обчислюємо з виразу

$$u_{B,R}=\frac{7\cdot10^{-4}\cdot R_0}{\sqrt{3}}=4{,}0\cdot10^{-4}\,Ом,\ \tilde{u}_{B,R}=0{,}040\,\%.$$

Межі зміни значення опору шунта, обумовленого зміною температури, дорівнюють $\alpha \cdot \Delta t \cdot R_0$. Відповідну стандартну невизначеність отримуємо у відповідності з формулою

$$u_{B,t} = \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot R_0}{\sqrt{3}} = 1{,}7 \cdot 10^{-9}\,\text{Ом},\ \tilde{u}_{B,t} = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\,\%.$$

В подальшому цією складовою можна знехтувати.

Сумарну стандартну невизначеність, обчислену за типом В, визначаємо з формули

$$u_B = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 U_{B,V}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 U_{B,R}^2} = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{A}, \qquad (4.61)$$

$$\tilde{u}_B = 0{,}050\,\%.$$

Сумарну стандартну невизначеність обчислюємо так

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 6{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{A},\ \tilde{u}_c = 0{,}060\,\%.$$

Ефективне число ступенів вільності визначаємо за формулою

$$\nu_{eff.} = \frac{u_c^4}{\dfrac{\left(\dfrac{1}{R} \cdot u_A\right)^4}{n-1} + \dfrac{\left(\dfrac{1}{R} \cdot u_{B,V}\right)^4}{\infty} + \dfrac{\left(\dfrac{V}{R^2} \cdot u_{B,R}\right)^4}{\infty}} = 87. \qquad (4.62)$$

Коефіцієнт охоплення для такого ефективного числа ступенів вільності складає

$$k = t_{0,95}(\nu_{eff}) = 1{,}96.$$

Розширена невизначеність визначається за формулою

$$U_{0,95} = k \cdot u_c = 0{,}012\ \text{A},\ \tilde{U}_{0,95} = 0{,}12\,\%. \qquad (4.63)$$

Отже, результат вимірювань запишемо у вигляді

$$I = 9{,}984 \pm 0{,}012;\ p = 0{,}95.$$

4.3.6 Багаторазові вимірювання частоти синусоїдального сигналу. *Проводиться вимірювання з багаторазовими спостереженнями частоти синусоїдального сигналу за допомогою електронно-розрахункового частотоміра. Показання частотоміра f складають, кГц:*
151348; 151342; 151344; 151346; 151348; 151349; 151345; 151351; 151343; 151344; 151359; 151350; 151347; 151348; 151346; 151352; 151345; 151349; 151347; 151346.

Необхідно оцінити невизначеність вимірювання частоти [2].

Складаємо специфікацію вимірювань:

а) аналіз умов вимірювань:

- вимірювання проводяться в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря + 25°С;

б) аналіз схеми вимірювання:

- час підрахунку приладу – 10 мс;
- час, який пройшов після встановленя дійсного значення частоти опорного генератора частотоміра – 3 місяці.

в) аналіз технічних характеристик приладу:

- робочі умови застосування приладу: температура навколишнього повітря від -30 до + 50°С;
- відносна похибка вимірювання частоти синусоїдальних сигналів δf в межах значень, розрахованих за формулою

$$\delta f = \pm\left(\delta_0 + \frac{1}{f_{вим} t_{лічби}}\right), \tag{4.64}$$

де δ_0 – відносна похибка за частотою внутрішнього опорного генератора, рівна після самопрогріву в період не менше 2 годин $\pm 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ за 30 днів і $\pm 5 \cdot 10^{-7}$ за 12 місяців після встановлення дійсного значення частоти;

$\frac{1}{f_{вим} t_{лічби}}$ – похибка квантування;

$f_{вим}$ – вимірювана частота, Гц;

$t_{лічби}$ – час підрахунку (лічби), с;

- температурний коефіцієнт частоти опорного генератора не більше $\pm 10^{-9}$ на 1 °С.

Усунемо з результатів вимірювань грубі похибки і промахи. Для цього розрахуємо:

- середнє арифметичне отриманих результатів

$$\bar{f} = \frac{\sum_{k=1}^{20} f_k}{20} = 151347{,}45 \text{ кГц};$$

- стандартне відхилення результатів від середнього арифметичного

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(f_k-\bar{f}\right)^2}{n-1}}=3{,}78 \text{ кГц};$$

- інтервал невизначеності, що відповідає довірчому рівню 0,9973 в припущенні нормального закону розподілу результатів спостережень

$$U=3s=11{,}33 \text{ кГц};$$

- межі цього інтервалу для результатів спостережень складають

$$f_{min}=151336{,}12 \text{ кГц}; \; f_{max}=151358{,}78 \text{ кГц}.$$

Найбільший результат спостереження 151359 кГц виходить за межі розрахованого інтервалу, тому усувається з числа результатів спостереження як обтяжений грубою похибкою (або промахом).

Обчислимо середнє арифметичне виправлених результатів спостережень, що приймається за результат вимірювання

$$\bar{f}=\frac{\sum_{k=1}^{19} f_k}{19}=151346{,}84 \text{ кГц}.$$

Обчислимо експериментальне стандартне відхилення результату спостереження

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(f_k-\bar{f}\right)^2}{n-1}}=2{,}69 \text{ кГц}.$$

Обчислимо експериментальне стандартне відхилення результату вимірювання (середнє арифметичне)

$$s(\bar{f})=\frac{s}{\sqrt{n}}=617 \text{ Гц}.$$

Оцінимо складові сумарної стандартної невизначеності за типом В $u_i(Y)$ невиключених залишків систематичної похибки результату вимірювання.

Невизначеність частоти внутрішнього опорного генератора частотоміра обчислюється через вираз для основної відносної похибки δf в припущенні про рівномірний розподіл похибки усередині меж.

Межі відносної похибки δ_0 не перевищують $\pm 5 \cdot 10^{-7}$.

Межі абсолютної похибки будуть в цьому випадку рівні

$$\Delta_0 = f\delta_0 = \pm 5 \cdot 10^{-7} \cdot 151346840 = \pm 76 \text{ Гц}.$$

Стандартна невизначеність частоти опорного генератора u_1, в припущенні про рівномірний розподіл похибки усередині меж, буде рівною

$$u_1 = \frac{|\Delta_0|}{\sqrt{3}} = 44 \text{ Гц}.$$

Невизначеність квантування u_2 визначається з меж похибки квантування

$$\Delta_{кв} = \pm \frac{1}{t_{лічби}} = \pm \frac{1}{10 \cdot 10^{-3}} = \pm 100 \text{ Гц}$$

за формулою

$$u_2 = \frac{|\Delta_{кв}|}{\sqrt{3}} = 57{,}7 \text{ Гц}.$$

Невизначеність u_3, обумовлена зміною частоти опорного генератора при зміні температури навколишнього середовища від 20°C (температура калібрування частотоміра t_k) до 25°C (температура навколишнього середовища у момент вимірювань $t_{вим}$), обчислена через температурний коефіцієнт частоти $\pm 10^{-9}$ і в припущенні про рівномірний розподіл усередині меж, буде рівна

$$u_3 = \frac{f_{вим}|t_{вим} - t_k|}{\sqrt{3}} k_t = \frac{151346840(25 - 20)}{\sqrt{3}} 10^{-9} = 0{,}437 \text{ Гц}.$$

Обчислимо сумарну невизначеність типу В результату вимірювання

$$u_{cB}(f) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \approx \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 73 \text{ Гц}.$$

При обчисленні сумарної невизначеності типу В складовою u_3 зважаючи на її мале значення знехтували. Складову u_2 можна зменшити до такої величини, якою можна знехтувати, збільшивши час підрахунку (лічби).

Обчислимо сумарну невизначеність результату вимірювання

$$u_c(f)=\sqrt{s^2(\bar{f})+u_{cB}^2(f)}=621 \text{ Гц}.$$

Задавшись довірчим рівнем p = 0,95, з урахуванням припущення про нормальність закону розподілу результату вимірювання, знаходимо розширену невизначеність

$$U=ku_c(f)=2\cdot 621=1242 \text{ Гц},$$

де k = 2 – коефіцієнт охоплення.

Записуємо результат вимірювання у вигляді

$$f=151346{,}8\pm 1{,}2 \text{ кГц}, \ p=0{,}95.$$

4.3.7 Калібрування декількох груп спостережень еталона напруги. *Проводиться калібрування еталона вольта за допомогою стабільного джерела опорної напруги протягом декількох тижнів. У кожний з J = 10 днів проводяться K = 5 незалежних повторних спостережень різниці потенціалів V_s. Необхідно одержати якнайкращу оцінку результату вимірювань і оцінити її невизначеність [2].*

Визначаємо середні арифметичні кожної групи спостережень за формулою (3.9) (результати подані в табл. 4.9)

$$\overline{V}_j=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}V_{jk},$$

де V_{jk} – позначає k-те спостереження різниці потенціалів V_s еталона (k =1, 2 , ..., K) в j-ий день (j =1, 2, ..., J).

Знаходимо найкращу оцінку вимірюваної величини V_s як середнє арифметичне $\overline{V}_j$

$$V_s=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\overline{V}_j=\overline{V}=10{,}000097 \text{ В}.$$

Визначаємо оцінки внутрішньогрупової дисперсії $s_j^2(V_{jk})$ у кожній j-й групі за формулою (3.11)

$$s_j^2(V_{jk})=\frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk}-\overline{V}_j)^2 .$$

Таблиця 4.9 – Результати експериментальних досліджень еталона напруги

День, j	1	2	3	4	5
$\overline{V}_j$, В	10,000172	10,000116	10,000013	10,000144	10,000106
$s_j^2(V_{jk})$	60	77	111	101	67
День, j	6	7	8	9	10
$\overline{V}_j$, В	10,000031	10,00006	10,000125	10,000163	10,000041
$s_j^2(V_{jk})$	93	80	73	88	86

За формулою (3.12) знаходимо експериментальну дисперсію середніх арифметичних груп

$$s^2(\overline{V}_j)=\frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j-\overline{V})^2=(52\text{мкВ})^2 .$$

За формулами (3.13) і (3.16) визначаємо дві незалежні оцінки усередненої внутрішньогрупової дисперсії спостережень:

$$s_I^2=Ks^2(\overline{V}_j)=\frac{K}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j-\overline{V})^2=(128\text{мкВ})^2,$$

що має J - 1 = 9 ступенів вільності;

$$s_{II}^2=\overline{s}_j^2(V_{jk})=\frac{1}{J(K-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk}-\overline{V}_j)^2=(85\text{мкВ})^2,$$

що має J(K - 1) = 40 ступенів вільності.

За формулою (3.17) обчислюємо відношення двох незалежних оцінок $s_I^2(\nu_I)$ і $s_{II}^2(\nu_{II})$

$$F(\nu_I,\nu_{II})=\frac{s_I^2(\nu_I)}{s_{II}^2(\nu_{II})}=2{,}25 .$$

Критичні значення F для ймовірностей 0,95 і 0,975 і для числа степенів вільності ν_I = 9 і ν_{II} = 40 знаходять за таблицею розподілу Фішера: $F_{0,95}$ = 2,12; $F_{0,975}$ = 2,45.

Для ймовірності 0,975 $F(\nu_I, \nu_{II}) < F_p$, тому існування міжгрупової похибки заперечується. В цьому випадку оцінену дисперсію $s^2(\bar{y})$ для $\bar{y}$ знаходимо з виразу (3.19)

$$s^2(\overline{V}) = \frac{(J-1)s_I^2 + J(K-1)s_{II}^2}{JK(JK-1)} = (13мкВ)^2$$

з (JK - 1) = 49 ступенями вільності.

Розширену невизначеність результату вимірювання розраховуємо за формулою

$$U = ks(\overline{V}) = 2 \cdot 13 = 26мкВ,$$

де k = 2 – коефіцієнт охоплення для нормального закону розподілу і довірчого рівня p = 0,95.

Для ймовірності 0,95, коли $F(\nu_I, \nu_{II}) \geq F_p$ існування міжгрупової дисперсії приймається, а оцінена дисперсія $\overline{V}$ виходить з виразу

$$s^2(\overline{V}) = \frac{s_j^2(\overline{V}_j)}{J} = \frac{(57мкВ)^2}{10} = 325(мкВ)^2$$

і має J - 1 = 9 ступенів вільності.

Розширену невизначеність результату вимірювання можна розрахувати за формулою

$$U = t_p(\nu)s(\overline{V}) = 2{,}26 \cdot 18 = 40{,}7мкВ,$$

де $t_p(\nu) = 2{,}26$ – коефіцієнт Стьюдента для числа ступенів вільності ν = = J - 1 = 9 і довірчого рівня p = 0,95.

Методи дисперсійного аналізу широко застосовуються при обробленні результатів міжлабораторних випробувань. Такі випробування передбачають участь ряду незалежних, однаково компетентних лабораторій, що проводять декілька груп прямих вимірювань. Звичайно передбачається, що розбіжності між окремими результатами як усередині однієї лабораторії, так і між лабораторіями, є статистичними за природою, незалежно від причин що їх викликають. В цьому випадку кожне лабораторне середнє значення є незміщеною оцінкою результату вимірювання, а якнайкращою оцінкою результату об'єднаних спостережень вважають, звичайно, середнє лабораторних середніх значень.

4.3.8 Опрацювання результатів вимірювань при вимірювальному контролі несинхронності обертання кутових швидкостей. Рівняння вимірювання частот обертання із подальшим обчисленням несинхронності обертання між двома частотами обертання роторів взаємозв'язаних електродвигунів на заданих частотах має вигляд [12]

$$\Delta N_o = f(A_1, A_2, f_{оп}, z_м) = N_{o1} - N_{o2} = \frac{60f_{оп}}{A_1 z_м} - \frac{60f_{оп}}{A_2 z_м}, \qquad (4.65)$$

де ΔN_o – несинхронність обертання роторів електродвигунів (ЕД);

N_{o1} – частота обертання ротора одного ЕД;

N_{o2} – частота обертання ротора іншого ЕД;

$f_{оп}$ – опорне значення частоти квантування (16 МГц);

A_1, A_2 – кількість імпульсів, що відповідає частотам обертання головного і допоміжного ЕД.

Під час вимірювання кількості імпульсів у відповідності з рівнянням (4.65) отримано три групи спостережень частот обертання в об/хв, по 16 значень в кожній групі, які наведено в табл. 4.10.

Вимірювання здійснювались в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря +23°С. Експлуатаційні умови використання частотоміра від -30 до +50 °С. Відносна похибка квантування δN_o при вимірюванні частот обертання розраховується за формулою

$$\delta N_o = \frac{N_o z_М}{60 f_{оп}}. \qquad (4.66)$$

Відносна похибка опорної частоти внутрішнього генератора дорівнює $\pm 2{,}5 \cdot 10^{-7}$. Температурний коефіцієнт частоти опорного генератора не більше $\pm 1 \cdot 10^{-9}$ на 1 °С.

Проведемо оцінювання складових сумарної стандартної невизначеності за типом В невиключених залишків систематичної похибки результатів вимірювань.

Оскільки межі відносної похибки опорної частоти $\delta_{оп}$ не перевищують $\pm 2{,}5 \cdot 10^{-7}$, то межі абсолютної похибки вимірювання частот обертання будуть дорівнювати

$$\Delta_{оп} = \overline{N_o}\delta_{оп} = \pm 2{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 3022{,}53 = \pm 7{,}56 \cdot 10^{-3} \text{об/хв}, \qquad (4.67)$$

де $\overline{N_o} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} \overline{N_{o\,j_k}} = 3052{,}53 \text{об/хв}.$

Стандартну невизначеність опорної частоти u_1, при нормальному законі розподілу похибки всередині меж визначимо за формулою

$$u_1 = \frac{|\Delta_{оп}|}{k_p} = 3{,}86 \cdot 10^{-3} об/хв, \qquad (4.68)$$

де k_p – коефіцієнт охоплення при нормальному законі розподілу, який дорівнює 1,96 для довірчого рівня p=0,95.

Таблиця 4.10 – Результати вимірювання частот обертання головного та допоміжного ЕД

i	Перша група спостережень частот обертання головного і допоміжного ЕД		Друга група спостережень частот обертання головного і допоміжного ЕД		Третя група спостережень частот обертання головного і допоміжного ЕД	
	N_{o11}	N_{o21}	N_{o12}	N_{o22}	N_{o13}	N_{o23}
1	1195	1183	3005	2993	4889	4866
2	1201	1190	3011	3000	4883	4891
3	1199	1179	3008	2992	4888	4875
4	1188	1207	2999	2971	4869	4883
5	1192	1209	2987	2997	4867	4892
6	1197	1186	2995	3008	4877	4899
7	1199	1178	2998	3010	4850	4871
8	1178	1205	3006	2999	4862	4887
9	1186	1197	2993	2974	4873	4899
10	1194	1171	2996	2988	4859	4878
11	1193	1210	2989	2962	4884	4896
12	1204	1182	3000	2981	4876	4893
13	1200	1189	3012	2999	4855	4882
14	1203	1191	3005	2995	4859	4883
15	1205	1197	3007	3017	4861	4879
16	1198	1196	2994	2973	4877	4894

Відносну стандартну невизначеність опорної частоти розрахуємо за формулою

$$\widetilde{u}_1 = \frac{u_1}{|\overline{N_o}|} \cdot 100\% = 1{,}28 \cdot 10^{-4}\%. \qquad (4.69)$$

Невизначеність квантування u_2 визначимо з меж відносної похибки квантування (4.66) за формулою

$$u_2 = \frac{z_M \left(\overline{N_o}\right)^2}{60 f_{оп} k_p} = 0{,}29 об/хв. \qquad (4.70)$$

Відносна невизначеність квантування у відповідності з (4.69) буде дорівнювати $\widetilde{u}_2 = 9{,}64 \cdot 10^{-3}\%$.

Невизначеність u_3, що обумовлена зміною опорної частоти при зміні температури навколишнього середовища від +20°С (температура калібрування частотоміра t_k) до +23°С (температура навколишнього середовища в момент вимірювань $t_{вим}$), обчислимо через температурний коефіцієнт частоти $k_t=\pm 1\cdot 10^{-9}$ при нормальному законі розподілу за формулою

$$u_3 = \frac{\left|t_{вим} - t_k\right| \cdot k_t}{k_p} \overline{N_o} = 4{,}63 \cdot 10^{-5} об/хв, \quad (4.71)$$

а відносна невизначеність обумовлена зміною температури навколишнього середовища буде дорівнювати $\tilde{u}_3 = 1{,}53 \cdot 10^{-6}\%$.

Сумарну стандартну невизначеність типу В несинхронності обертання головного та допоміжного ЕД, обумовлену джерелами невизначеностей, що мають випадковий характер при опосередкованих вимірюваннях частот обертання з врахуванням кореляційного зв'язку розрахуємо за формулою

$$u_4^2 = c_1^2 u^2\left(\overline{N1_o}\right) + c_2^2 u^2\left(\overline{N2_o}\right) + 2c_1c_2 u\left(\overline{N1_o}\right) u\left(\overline{N2_o}\right) r\left(\overline{N1_o}, \overline{N2_o}\right). \quad (4.72)$$

Коефіцієнти чутливості (c_1 та c_2) з урахуванням рівняння (4.65) обчислимо за формулами

$$c_1 = \frac{\partial \Delta N_o}{\partial A_1} = -\frac{60 f_{on}}{\overline{A_1}^2 z_M} = -\frac{\overline{N1_o}^2 z_M}{60 f_{on}}, \quad c_2 = \frac{\partial \Delta N_o}{\partial A_2} = \frac{60 f_{on}}{\overline{A_2}^2 z_M} = \frac{\overline{N2_o}^2 z_M}{60 f_{on}}. \quad (4.73)$$

Стандартні невизначеності [$u(\overline{N1_o})$, $u(\overline{N2_o})$] при вимірюванні частот обертання відповідно дорівнюють

$$u(\overline{N1_o}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{J}\left(N_{o1\,j} - \overline{N1_o}\right)^2}{J(J-1)}}, \quad u(\overline{N2_o}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{J}\left(N_{o2\,j} - \overline{N2_o}\right)^2}{J(J-1)}}. \quad (4.74)$$

Значення коефіцієнта кореляційного зв'язку між частотами обертання головного і допоміжного ЕД розрахуємо за формулою

$$r\left(\overline{N1_o}, \overline{N2_o}\right) = \frac{u\left(\overline{N1_o}, \overline{N2_o}\right)}{u\left(\overline{N1_o}\right) u\left(\overline{N2_o}\right)}, \quad (4.75)$$

де $u(\overline{N1_o}, \overline{N2_o})$ – кореляційний момент, який обчислюється за формулою

$$u(\overline{N1_o},\overline{N2_o})=\frac{\sum_{j=1}^{J}\left(\overline{N_{o1j}}-\overline{N1_o}\right)\left(\overline{N_{o2j}}-\overline{N2_o}\right)}{J(J-1)}. \tag{4.76}$$

Для отримання числових значень кореляційного моменту та коефіцієнта кореляційного зв'язку розрахуємо середні значення частот обертання головного $\overline{N1_o}$ і допоміжного $\overline{N2_o}$ ЕД в діапазоні частот від 20 до 80 Гц за формулами

$$\overline{N1_o}=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\overline{N_{o1j}}=3022{,}21\text{об/хв},\ \overline{N2_o}=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\overline{N_{o2j}}=3022{,}85\text{об/хв}.$$

Підставивши середні арифметичні значення частот $\overline{N1_o}$ і $\overline{N2_o}$ у формулу (4.73) отримаємо такі числові значення коефіцієнтів чутливості: $c_1=-0{,}5709$ об/хв, а $c_2=0{,}5711$ об/хв. Стандартна невизначеність вимірювання частот обертання головного ЕД, з врахуванням (4.74) буде дорівнювати $u\left(\overline{N1_o}\right)=1060{,}88$ об/хв, а для допоміжного ЕД – $u\left(\overline{N2_o}\right)=1066{,}38$ об/хв. Значення кореляційного моменту у відповідності з (4.76) складає $u\left(\overline{N1_o},\overline{N2_o}\right)=1131288{,}29$ об/хв. Підставивши значення кореляційного моменту і стандартних невизначеностей у формулу (4.75) отримаємо коефіцієнт кореляційного зв'язку, який дорівнює $r\left(\overline{N1_o},\overline{N2_o}\right)=0{,}999989$.

Таким чином, підставивши отримані числові значення коефіцієнтів у рівняння (4.72), отримаємо сумарну стандартну невизначеність типу В несинхронності обертання роторів ЕД, що складає $u_4=4{,}37$ об/хв. Відносна сумарна невизначеність типу В дорівнює $\tilde{u}_4=0{,}145\%$.

Сумарну стандартну невизначеність несинхронності обертання роторів ЕД розрахуємо за формулою

$$u_c=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2}=4{,}38\text{об/хв}, \tag{4.77}$$

а відносна сумарна невизначеність дорівнює $\tilde{u}_c=0{,}145\%$.

З врахуванням того, що закон розподілу результатів вимірювань є нормальним і довірчий рівень складає p=0,95, знайдемо розширену невизначеність результатів опосередкованого визначення несинхронності обертання за формулою

$$U_{0,95}=t_{0,95}(v_{eff})u_c. \tag{4.78}$$

Ефективне число ступенів вільності v_{eff} визначимо із співвідношення

$$v_{eff} = \frac{u_c^4}{\frac{u_1^4 + u_2^4 + u_3^4}{J-1} + \frac{u_4^4}{\infty}} = 104072, \qquad (4.79)$$

і тоді коефіцієнт охоплення буде дорівнювати

$$t_{0,95}(v_{eff}) = t_{0,95}(\infty) = 1{,}96.$$

Підставивши значення коефіцієнта охоплення та сумарну стандартну невизначеність (4.77) в рівняння (4.78), отримаємо розширену невизначеність несинхронності обертання роторів головного і допоміжного ЕД, яка складає $U_{0,95} = 1{,}96 \cdot 4{,}38 = \pm 8{,}58 об/хв$, а відносна розширена невизначеність дорівнює $\tilde{U}_{0,95} = 0{,}28\%$.

Таким чином, результат вимірювання несинхронності обертання роторів ЕД запишемо у вигляді

$$0{,}73 \le \Delta N_0 \le 17{,}89 об/хв, \; p = 0{,}95$$

або

$$\Delta N_0 = \overline{\Delta N_0} \pm U_{0,95} = 9{,}31 \pm 8{,}58 об/хв, \; p = 0{,}95.$$

4.3.9 Оцінювання невизначеності вимірювального каналу активності іонів. Модельне рівняння вимірювального каналу активності іонів складових елементів гумусу в ґрунті з іонселективним вимірювальним перетворювачем має вигляд

$$\Delta U = U_0 + \frac{2{,}3RT}{n_A F} \lg\left(a_A + K_c (a_B)^{n_A/n_B}\right), \qquad (4.80)$$

де ΔU – різниця потенціалів на виході вимірювального перетворювача; U_0 – стандартний постійний потенціал чутливого елементу (електрода порівняння U_0=201 ± 3мВ); R – універсальна газова стала; T – абсолютна температура; F – число Фарадея; n_A, n_B – заряди іонов A і B, відповідно; a_A – активність іонов A, яку потрібно визначити; a_B – активність іонов B, яка заважає визначенню іонів A; K_c – коефіцієнт селективності (максимально можливе значення якого складає 10^{-1}).

Оскільки при контролі гумусового стану ґрунтів необхідно вимірювати вміст таких одновалентних речовин як фторид, нітратний азот, амонійний азот, калій, то в рівнянні (4.80) відношення $\frac{2{,}3RT}{n_A F}$ є сталою величиною, що відображає чутливість іонселективних електродів відносно іонів А. Ця чутливість складає $S=59{,}16$ мВ при температурі досліджуваного середовища 25 °С.

Зміна активності іонів приводить до зміни різниці потенціалів. Для подальшого підсилення малих різниць потенціалів у вимірювальному каналі (ВК) активності іонів використовується вимірювальний підсилювач, який має задовольнити такі вимоги:

- мати диференціальний вхід для зменшення дії синфазної перешкоди;
- мати низький рівень нульового сигналу;
- мати великий коефіцієнт послаблення синфазної перешкоди.

Після підсилення вимірювальний сигнал надходить на вхід аналого-цифрового перетворювача (АЦП), де перетворюється на двійковий код N.

Таким чином, кінцевий варіант рівняння перетворення ВК активності іонів набуде вигляду:

$$N = \left[U_0 + S\lg\left(a_A + 0{,}1a_B\right)\right]\frac{K2^m}{U_{оп}}, \tag{4.81}$$

де $U_{оп}$ – опорне значення напруги АЦП (5 В); m – разрядність АЦП (m=16); K – коефіцієнт підсилення.

З даних попередніх досліджень відомо, що межі невиключених залишків систематичних похибок такі:

- стандартний потенціал U_0 чутливого елементу складає $\theta_{U0} = \pm 3$ мВ;
- значення абсолютної похибки вимірювання активності іонів складає $\theta_a = 5\cdot10^{-6}\,\frac{моль}{дм^3}$;
- максимальний температурний коефіцієнт зсуву підсилювача складає 0,25мВ/°С;
- температурний коефіцієнт опорної напруги аналого-цифрового перетворювача (АЦП) складає $k_t = 10^{-5}/°C$;
- відхилення опорної напруги від номінального значення не перевищує $\theta_{U_{оп}} = \pm 0{,}02$ В.

Оскільки з довідникових даних невідомо за яким законом розподілу розподілена невизначеність чутливого елементу, тому приймаємо, що вона розподілена за рівномірним законом розподілу та розрахуємо її за формулою

$$u_{U0} = \frac{\theta_{U0}}{\sqrt{3}} \approx 1{,}73\,мВ. \tag{4.82}$$

Стандартну невизначеність абсолютної похибки вимірювання активності іонів в припущенні про нормальний закон розподілу похибки вимірювання всередині меж обчислимо за формулою

$$u_a = \frac{\theta_a}{k} \approx 2{,}55 \cdot 10^{-3} \frac{\text{ммоль}}{\text{дм}^3}, \tag{4.83}$$

де k – коефіцієнт охоплення для нормального розподілу, який дорівнює 1,96 для ймовірності 95%.

Сумарну стандартну невизначеність іонселективних електродів, обчислену за типом В, з урахуванням рівнянь (4.82) і (4.83), визначимо за формулою

$$u^2_{\text{ВПs}} = \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial U_0}\right)^2 u^2_{U0} + \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial a_A}\right)^2 u^2_a + \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial a_B}\right)^2 u^2_a, \tag{4.84}$$

де $\frac{\partial \Delta U}{\partial U_0} = 1$ – коефіцієнт чутливості стандартного потенціалу;

$\frac{\partial \Delta U}{\partial a_A} = \frac{S}{2{,}3(a_A + K_c a_B)}$ – коефіцієнт чутливості активності іонів А, який для нижнього діапазону вимірювань ($D_{min} = 10^{-6}$моль/дм^3) складає 23383,4 Вдм^3/моль;

$\frac{\partial \Delta U}{\partial a_B} = \frac{K_c S}{2{,}3(a_A + K_c a_B)}$ – коефіцієнт чутливості активності іонів В, що заважають визначенню вимірюваних іонів А, який для нижнього діапазону вимірювань ($D_{min} = 10^{-6}$моль/дм^3) складає 2338,34 Вдм^3/моль.

Підставляючи розраховані значення коефіцієнтів чутливості в рівняння (4.84) сумарна стандартна невизначеність іонселективних електродів складе $u_{\text{ВПs}} \approx 60$ мВ.

Оскільки вимірювання можуть проводиться при зміні температури навколишнього середовища від 5 до 40 °С, максимальна зміна температури при цьому складає $\Delta t = 35°C$, то враховуючи температурний коефіцієнт зсуву підсилювача 0,25мВ/°С, напруга зміщення складе $U_{см}$=35°С·0,25мВ/°С = 8,75 мВ. При відомому коефіцієнті підсилення K=10, максимальне значення напруги зсуву буде рівним $U_{смmax}=U_{см}\cdot K$=87,5мВ. Враховуючи максимальне вихідне значення напруги підсилювача $U_{вих}$= =±5В, його максимальну відносну похибку можна розрахувати за формулою

$$\delta_K = \frac{U_{смmax}}{2U_{вих}} = 8{,}75 \cdot 10^{-3}. \tag{4.85}$$

Розрахувавши максимальну відносну похибку підсилювача, стандартну невизначеність, яка вноситься підсилювачем при вимірюванні активності іонів в припущенні про нормальний закон розподілу, розрахуємо за формулою:

$$u_K = \frac{\Delta U_{max} \delta_K}{k} \approx 0{,}83\,\text{мВ}, \tag{4.86}$$

де ΔU_{max} – максимальна різниця потенціалів, яка відповідає максимальній активності іонів (максимальний діапазон вимірювання ВК складає D_{max}=0,5 моль/дм^3) при максимально можливій активності заважаючих іонів В.

Невизначеність $u_{ОП}(\Delta t)$, обумовлена змінами опорної напруги джерела при зміні температури навколишнього середовища від 20 °С (температура калібрування джерела опорного значення напруги АЦП t_1) до 35°С (максимально можлива зміна температури досліджуваного середовища Δt), обчислена через температурний коефіцієнт, в припущенні про рівномірний розподіл меж, розрахуємо за формулою

$$u_{оп}(\Delta t) = \frac{k_t(\Delta t - t_1)}{\sqrt{3}} U_{оп} \approx 0{,}43\,\text{мВ}. \tag{4.87}$$

Невизначеність $u_{ОП}(\theta)$, що обумовлена відхилення опорної напруги від номінального значення, в припущенні про рівномірний розподіл, буде рівною

$$u_{U0} = \frac{\theta_{U_{оп}}}{\sqrt{3}} \approx 11{,}55\,\text{мВ}. \tag{4.88}$$

Таким чином, сумарна стандартна невизначеність джерела опорної напруги АЦП, яка складається з невизначеностей розрахованих за формулами (4.87) і (4.88), буде рівною

$$u_{ОПs} = \sqrt{(u_{оп}(t))^2 + (u_{U0})^2} \approx 11{,}56\,\text{мВ}. \tag{4.89}$$

Стандартну невизначеність u_h, яка вноситься процесом квантування напруги, що надходить на вхід АЦП, в припущенні про рівномірний закон розподілу, визначимо так

$$u_h = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{U_{оп}}{2^m \sqrt{3}} \approx 44{,}05\,\text{мкВ}. \tag{4.90}$$

Враховуючи розраховані за формулами (4.84), (4.86), (4.89) і (4.90) стандартні невизначеності, на кожному з етапів перетворення, сумарну стандартну невизначеність ВК активності іонів обчислимо за формулою

$$u_S = \sqrt{u^2_{ВПs} + u^2_K + u^2_{ОПs} + u^2_h} \approx 61{,}11 мВ. \quad (4.91)$$

Таким чином, аналізуючи отримані результати видно, що максимальну невизначеність має первинний іонселективний вимірювальний перетворювач.

Припустивши, що сумарний закон розподілу ВК є нормальним з довірчим рівнем не нижче 0,95, розрахуємо розширену невизначеність ВК активності іонів за формулою

$$U_{0.95} = ku_S. \quad (4.92)$$

Підставивши значення коефіцієнта охоплення k та сумарну стандартну невизначеність (4.91) в рівняння (4.92), отримаємо розширену невизначеність вимірювального каналу активності іонів, яка складає $U_{0,95} = 1{,}96 \cdot 61{,}11 = \pm 119{,}78 мВ$.

Отже, на підставі довідкових даних і даних попередніх досліджень, проведено оцінку невизначеності ВК активності іонів, яка в діапазоні вимірювання від 10^{-6} до 0,5 моль/дм^3 не перевищує 62 мВ при максимальній активності заважаючих іонів В.

4.3.10 Оцінювання невизначеності комп'ютерно-вимірювальної системи контролю якості електроенергії. Для вимірювального контролю показників якості електроенергії (ЕЕ) розроблено комп'ютерно-вимірювальну систему, функціональна схема якої подана на рис. 4.2.

Як видно з рис. 4.2, до складу комп'ютерно-вимірювальної системи входять: вимірювальний трансформатор (ВТР), який здійснює зниження змінної напруги електричної мережі до рівня 5 В, а також служить гальванічною розв'язкою між об'єктом контролю (ОК) і персональним комп'ютером (ПК); операційний підсилювач (ОП) типу LM358, що здійснює масштабування зниженої змінної напруги в діапазон роботи напруги АЦП, який вбудовано в мікроконтролер Atmega8535; джерело опорної напруги на мікросхемі типу TL431, що забезпечує стабілізацію постійной напруги +5В; подільник постійної напруги на резисторах R3 і R4 для задання коефіцієнта масштабування; схема моніторингу скидання на мікросхемі типу 1171СП42 для скидання мікроконтролера при зниженні постійної напруги живлення нижче рівня 4 В; послідовний інтерфейс RS-232 для передавання даних до ПК, як такий може бути використана мікросхема типу ADM232LIN або MAX202E.

Для вимірювального контролю вказаних показників якості ЕЕ потрібно два вимірювальних канали (ВК). Один для вимірювання частоти змінної напруги, а другий для вимірювання миттєвих значень амплітуди змінного сигналу із подальшим усередненням. При визначенні часових параметрів, послідовність перетворень у частотному ВК можна подавати у вигляді

$$T_x \to \frac{T_x}{2} \to \frac{T_x}{2} \cdot f_0 \to N_т, \tag{4.93}$$

де T_x – період зміни напруги в електричній мережі, що після масштабування ОП подається на вхід AIN0 мікроконтролера; f_0 – частота зразкових імпульсів кварцового резонатора (ZQ); $N_т$ – кількість імпульсів, що заповнили невідомий період T_x (рис. 4.2).

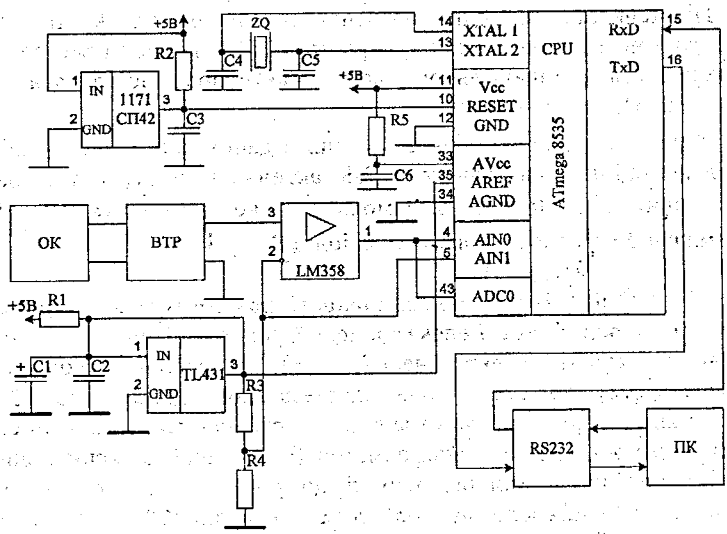


Рисунок 4.2 – Функціональна схема комп'ютерно-вимірювальної системи контролю якості електроенергії

Як видно з (4.93), спочатку невідомий період синусоїди T_x ділиться на два, тобто аналоговий компаратор мікроконтролера на рівні 2,5 В формує по передньому фронту період, який дорівнює півперіоду вимірюваної величини. Потім сформований компаратором період заповнюється імпульсами зразкової частоти f_0, які підраховуються таймер-лічильником мікроконтролера, на виході якого формується значення у вигляді бінарного коду $N_т$, яке потім необхідно домножити на два. Це значення передається через послідовний порт до ПК, який зберігає виміряні значення в файл та визначає відхилення часових параметрів і виводить їх на екран монітора. Таким чином, рівняння перетворення частотного ВК буде мати вигляд

$$N_T = \frac{1}{2} \cdot f_0 \cdot T_x. \qquad (4.94)$$

Для визначення параметрів напруги, використовується другий ВК, який має таку послідовність перетворень (див. рис. 4.2)

$$U_x \to \frac{U_x}{k} \to (\frac{U_x}{k} + \frac{U_0}{2}) \to \frac{(\frac{U_x}{k} + \frac{U_0}{2})}{h} \to N_u, \qquad (4.95)$$

де U_x – невідома напруга електричної мережі; k – коефіцієнт трансформації; U_0 – опорна напруга АЦП; h – крок квантування АЦП; N_u – значення напруги у бінарному коді.

З урахуванням того, що крок квантування $h=U_0/2^n$, де n – розрядність АЦП мікроконтролера, рівняння перетворення ВК миттєвих значень напруги має вигляд

$$N_u = \frac{2^n}{k \cdot U_0} \cdot U_x. \qquad (4.96)$$

Оскільки дана комп'ютерно-вимірювальна система складається з двох ВК, то оцінимо складові невизначеностей окремо за частотним ВК і за ВК напруги. При вимірюванні частоти, стандартна невизначеність типу В складається з невизначеності квантування періоду u_1, невизначеності u_2, що обумовлена зміною опорної частоти при зміні температури навколишнього середовища та невизначеності передавання даних через послідовний інтерфейс u_3. А при вимірюванні напруги стандартна невизначеність типу В складається з невизначеності трансформації u_4, невизначеності ОП u_5, невизначеності квантування АЦП u_6, і також з невизначеності передавання даних через послідовний інтерфейс u_3.

Оскільки із стандарту відомо, що максимальна частота мережі живлення f_{xmax} може приймати значення 53 Гц, а частота кварцового резонатора складає 8 МГц, то невизначеність квантування періоду u_1 в припущені про рівномірний закон розподілу визначимо з меж відносної похибки квантування за формулою

$$u_1 = \frac{f_{x\max}^2}{f_0\sqrt{3}} = \frac{53^2}{8\cdot 10^6\sqrt{3}} \approx 0{,}2\cdot 10^{-3}\,\text{Гц}. \qquad (4.97)$$

Невизначеність u_2, що обумовлена зміною опорної частоти при зміні температури навколишнього середовища від $t_1 = 12$ °С до $t_2 = 35$ °С, розрахуємо через температурний коефіцієнт опорної частоти $k=\pm 10^{-9}$ на 1°С при рівномірному законі розподілу за формулою

$$u_2 = \frac{k|t_2 - t_1|}{\sqrt{3}} f_{x\max} = 53\frac{|35-12|10^{-9}}{1{,}73} \approx 0{,}7\cdot 10^{-6}\,\text{Гц}. \qquad (4.98)$$

Відповідно до технічних характеристик на послідовний інтерфейс типу ADM232LIN максимальна відносна похибка передавання на швидкості 19200 бот складає $\delta=0{,}2\cdot 10^{-3}$, тоді з урахуванням довідникових даних, невизначеність передавання даних через послідовний інтерфейс u_3, в припущенні про рівномірний закон розподілу, можна розрахувати за формулою

$$u_3 = \frac{\delta f_{x\max}}{\sqrt{3}} = \frac{53\cdot 0{,}2\cdot 10^{-3}}{1{,}73} \approx 6{,}13\cdot 10^{-3}\,\text{Гц}. \qquad (4.99)$$

Враховуючи рівняння перетворення частотного ВК (4.94) знайдемо його сумарну стандартну невизначеність типу В за формулою

$$u_{cf_x} = \sqrt{\left(\frac{\partial N_T}{\partial f_x}\right)^2 \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)} =$$

$$= 1{,}4\sqrt{\left(0{,}2\cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(0{,}7\cdot 10^{-6}\right)^2 + \left(6{,}13\cdot 10^{-3}\right)^2} \approx 0{,}01\,\text{Гц}. \qquad (4.100)$$

Для розрахунку розширеної невизначеності необхідно вибрати коефіцієнт охоплення, який розраховується через число ступенів вільності, яке для невизначеностей типу В дорівнює нескінченності, а коефіцієнт охоплення при довірчому рівні 0,95 складає 1,96. Таким чином, розширена невизначеність типу В буде дорівнювати

$$U = 1{,}96 u_{cf_x} \approx 0{,}02\,\text{Гц}. \qquad (4.101)$$

Таким чином, частотний ВК має сумарну стандартну невизначеність типу В, що не перевищує 0,01 Гц, відносне значення якої розрахуємо за формулою

$$\widetilde{u}_{cf_x} = \frac{u_{cf_x}}{f_{x\,max}} \cdot 100\% = 0{,}02\%. \qquad (4.102)$$

Отже, розширена невизначеність частотного ВК при довірчому рівні 0,95 дорівнює 0,02 Гц, а відносне значення розширеної невизначеності типу В не перевищує 0,02%.

ВК напруги характеризується такими параметрами: максимальна вхідна змінна напруга U_{xmax} не перевищує 250 В, вторинна обмотка ВТР складає 5 В, клас точності ВТР складає γ = 0,05, опорна напруга АЦП мікроконтролера дорівнює U_0 = 5 В, а розрядність АЦП n = 8.

З урахуванням наведених параметрів стандартну невизначеність трансформації u_4, в припущенні про нормальний закон розподілу і довірчий рівнень 0,95 (при цьому коефіцієнт охоплення k_p = 1,96), розрахуємо за формулою

$$u_4 = \frac{\gamma U_{x\,max}}{100\% k_p} = \frac{0{,}125}{1{,}96} \approx 0{,}06\text{В}. \qquad (4.103)$$

При можливій зміні температури навколишнього середовища на Δt = 23°С та дрейфу напруги зміщення нуля ОП, який дорівнює 3 мкВ/°С, розрахуємо напругу зміщення, яка складає $U_{зм}$=23°С·3мкВ/°С=69мкВ. При відомому коефіцієнті підсилення К = 1 знайдемо максимальну напругу зміщення, що дорівнює $U_{змmax}$ = $U_{зм}$·К = 69 мкВ. Знаючи максимальну вихідну напругу підсилювача $\Delta U_{вих}$ = 5 В, максимальна відносна похибка ОП буде рівною

$$\delta_п = \frac{U_{зм\,max}}{\Delta U_{вих}} \cdot 100\% = \frac{69 \cdot 10^{-6}}{5} \cdot 100\% \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}\%. \qquad (4.104)$$

Знаючи максимальну відносну похибку ОП, максимальна абсолютна похибка, що вноситься ОП дорівнюватиме

$$\Delta_{п\,max} = \frac{U_x \delta_п}{100} = \frac{5 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3}}{100} \approx 0{,}07 \cdot 10^{-3}\text{В}. \qquad (4.105)$$

Тоді стандартна невизначеність, що вноситься ОП у результат вимірювань в припущенні про нормальний закон розподілу похибки всереедені меж складає

$$u_5 = \frac{|\Delta_{п\,max}|}{k_p} = \frac{0{,}07 \cdot 10^{-3}}{1{,}96} \approx 0{,}04 \cdot 10^{-3}\text{В}, \qquad (4.106)$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для нормального закону розподілу і довірчого рівня 0,95 дорівнює 1,96.

Невизначеність квантування АЦП u_6 в припущенні про рівномірність закону розподілу визначимо за формулою

$$u_6 = \frac{kU_0}{2^n\sqrt{3}} = \frac{U_2 U_0}{U_{1max} 2^n \sqrt{3}} = \frac{5 \cdot 5}{1{,}73 \cdot 250 \cdot 2^8} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-3}\text{B}, \quad (4.107)$$

де U_2 – максимальна напруга у вторинній обмотці ВТР (5 В), U_1 – максимальна напруга у первинній обмотці ВТР (250 В).

Враховуючи рівняння перетворення ВК напруги (4.96) знайдемо його сумарну стандартну невизначеність типу В, яка при прямих вимірюваннях розраховується за формулою

$$u_{cU_x} = \sqrt{u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_3^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}06^2 + \left(0{,}04 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(0{,}2 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(6{,}13 \cdot 10^{-3}\right)^2} \approx 0{,}1\text{B}. \quad (4.108)$$

Розширена невизначеність розраховується аналогічно до рівняння (4.101) і для ВК напруги буде дорівнювати

$$U_{U_x} = 1{,}96 u_{cU_x} \approx 0{,}2\text{B}. \quad (4.109)$$

Отже, ВК напруги має сумарну стандартну невизначеність типу В, що не перевищує 0,1 В та розширену невизначеність 0,2В при довірчому рівні 0,95. Відносне значення розширеної невизначеності типу В складає

$$\tilde{u}_{U_x} = \frac{U_{U_x}}{U_{x\,max}} 100\% = \frac{0{,}2}{250} 100\% \approx 0{,}08\%. \quad (4.110)$$

Таким чином, проведене оцінювання невизначеностей комп'ютерно-вимірювальної системи контролю якості електроенергії показали, що відносна сумарна стандартна невизначеність типу В частотного ВК не перевищує 0,02%, а відносна сумарна стандартна невизначеність типу В каналу для вимірювання напруги не перевищує 0,04%.

ЛІТЕРАТУРА

1. Guide to the Expression of Uncertainly in Measurement. – Switerland: ISO, 1993. – 101 p.

2. Руководство по выражению неопределенностей измерения. Научный редактор Слаев В. А. – Санкт-Петербург. – НПО ВНИИМ им.Менделеева, 1999. – 126 с.

3. Захаров И. П., Кукуш В. Д. Теория неопределенности в измерениях. – Харьков: Консум, 2002. – 256 с.

4. Клейман А. С. Методы обработки результатов наблюдений, погрешности которых распределены по законам, отличаются от нормального. – Харьков: ХИРЕ, 1992. – 91 с.

5. Guidelines for the Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibrations. – Western European Calibration Cooperation, 1990. – 17 p.

6. МИ 2552-99. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений». – Санкт-Петербург: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1999. – 27 с.

7. Кунце Х. И. Методи физических измерений. – М.: Мир, 1989. – 216 с.

8. Володарський Є. Т., Кухарчук В. В., Поджаренко В. О., Сердюк Г. Б. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю. – Вінниця: Велес, 2001. – 219 с.

9. Васілевський О. М. Алгоритм оцінювання невизначеності у вимірюваннях при виконанні метрологічних робіт // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. - № 3 (7). – 2006. – С. 147-151.

10. Васілевський О. М., Поджаренко В. О. Система вимірювального контролю параметрів взаємозвязаних роторних машин. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – 156 с.

11. МІ 13.002-2003. Методика обґрунтування рівнянь вимірювань та оцінки методичної складової похибки (невизначеності) результатів вимірювань. – Харків: ХДНДІМ. – 2003. – 11 с.

12. Сопрунюк П. М., Василевский А. Н., Чабанюк Ю. А. Неопределенность результатов измерений при контроле асинхронности вращения электромеханических преобразователей // Системи обробки інформації. – 2006. – Випуск 7 (56). – С. 72 – 75.

13. ДСТУ ISO/IEC 17025-2001. Загальні вимоги до компетентності випробувальних та калібрувальних лабораторій. – К.: Держстандарт України, 2001. – 31 с.

14. Giacomo P. The expression of Experimental Uncertainties (Recommendation INC-1), BIMP // Metrologia. – 1981. - №11. – P. 73.

15. Васілевський О., Сопрунюк П., Чабанюк Ю. Оцінювання невизначеності вимірювань // Матеріали II-ї Міжнародної науково-технічної конференції "Сучасні проблеми мікроелектроніки,

радіоелектроніки, телекомунікацій та приладобудування" (СПМРТП-2006). – Вінниця. – 2006. – С. 58 – 59.

17. Захаров И. П. Составление бюджета неопределенности совместных измерений // Український метрологічний журнал. – 2005. - №2. – С. 5 – 11.

18. Грановский В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспериментальных даных при измерениях. – Л.: Энергия, 1990. – 288 с.

19. Чубатенко В. Я. Особливості оцінювання невизначеності вимірювань, реалізованих вимірювальними каналами // Труды IV МНТК "Метрологія-2004". – Харків: ННЦ "Інститут метрології", 2004. – С. 130 – 137.

20. Коцюба А., Новіков В. Процедура оцінювання невизначеності вимірювання випробувальної лабораторії // Стандартизація, сертифікація, якість. – 2003. - № 1. – С. 39 – 41.

21. Василевский А. Н., Поджаренко В. А., Дидыч В. Н. Неопределенность измерительного канала активности ионов при контроле гумусового состояния почв с помощью ионселективных электродов // Системи обробки інформації. – 2008. – Випуск 4 (71). – С. 85 – 87.

22. Грановский В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат, Ленинг. отд-ние, 1990. – 288 с.

23. Земельман М. А. Метрологические основы технических измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 228 с.

24. Васілевський О. М., Кучерук В. Ю., Севастьянов В. М., Войтов О. А. Методика оцінювання невизначеності результатів вимірювань під час перевірки тахометричних перетворювачів // Відбір і обробка інформації. – 2007. – № 26 (102). – С. 88 – 94.

25. Васілевський О. М. Комп'ютерно-вимірювальна система контролю якості електроенергії загального призначення та аналіз її невизначеностей // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – №1 (11). – 2008. – С. 21 – 26.

СПИСОК ТЕРМІНІВ

Аналогові прилади – analog devices
Апостеріорне оцінювання – aposteriori evaluation
Апріорне оцінювання – apriori evaluation
Вимірювальна величина – measuring size
Величини впливу – vplivni sizes
Дискретність вимірюваної величини – discreteness of measurand
Дисперсія – dispersion
Довірчий інтервал – confidence interval
Довірчий рівень – level of trust
Дробовий ефект – fractional effect
Коефіцієнт охоплення – coefficient of scope
Корельовані вхідні величини – correlated entrance sizes
Моделювання об'єктів вимірювання – design of the obektiv measuring
Надійність – reliability
Неадекватність моделі – model inadequacy
Невизначеність – uncertainty
Невизначеність вимірювання – uncertainty measuring
Невизначеність моделювання – uncertainty design
Невизначеність специфікації – uncertainty of specification
Опосередковані вимірювання – indirect measurings
Оцінювання достовірності вимірювання – evaluation of measuring authenticity
Поріг чутливості – threshold of sensitiveness
Похибка – fault
Прямі вимірювання – direct measurings
Результат вимірювання – measuring result
Рівномірний закон розподілу – even law of distributing
Рівняння вимірювання – equalization of measuring
Розкид значень – variation of values
Розподіл Стьюдента – distributing of St'yudenta
Розширена невизначеність – extended uncertainty
Ряд Тейлора – row of Teylora
Середнє арифметичне – middle arithmetic
Систематична невизначеність – systematic uncertainty
Систематична похибка вимірювання – systematic error of measuring
Стандартне відхилення – standard deviation
Стандартні зразки речовин – standard standards of matters
Ступені вільності – degrees of liberty
Ступінь кореляції – degree of correlation
Суб'єктивні невизначеності – subektivna uncertainty
Точність вимірювання – measuring exactness
Фізична величина – physical size

Навчальне видання

Володимир Олександрович Поджаренко

Олександр Миколайович Васілевський

Володимир Юрійович Кучерук

Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності

Навчальний посібник

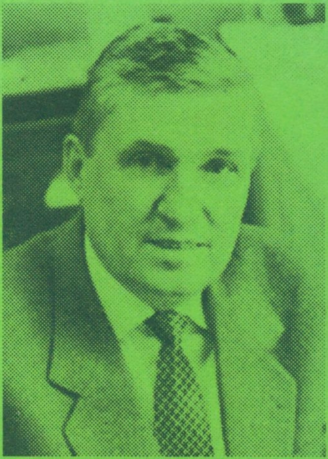
Оригінал-макет підготовлено О. М. Васілевським

Редактор О. Д. Скалоцька

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 30.12.08 р. Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7х42 1/4 Папір офсетний
Друк різографічний Ум. друк. арк. 8.1
Тираж 100 прим.
Зам. № 2009-013

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ



Поджаренко Володимир Олександрович - доктор технічни наук, професор, завідувач кафедри "Метрологія та промислова автоматика" Вінницького національного технічного університету

Васілевський Олександр Миколайович - кандидат технічних наук, доцент кафедри метрології та промислової автоматики Вінницького національного технічного університету

Кучерук Володимир Юрійович - доктор технічних наук, професор кафедри метрології та промислово автоматики Вінницького національного технічного університету