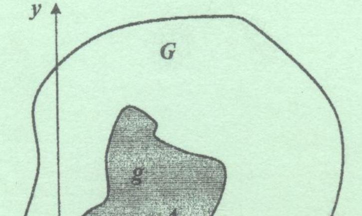
Н.В. Сачанюк-Кавецька, Л.І. Педорченко, Н.Б. Дубова

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

ЧАСТИНА 1



$$p(A)=\frac{mes\,g}{mes\,G}$$

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Н.В. Сачанюк-Кавецька, Л.І. Педорченко, Н.Б. Дубова

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МЕТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ
ЧАСТИНА 1

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник студентів технічних спеціальностей. Протокол № 11 від 2 липня 2007 р.

Вінниця ВНТУ 2008

УДК 519.21(075.8)
С 22

Рецензенти:

В.М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
В.М. Кичак, доктор технічних наук, професор
В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Сачанюк-Кавецька Н.В., Педорченко Л.І., Дубова Н.Б.
С 22 **Елементи теорії ймовірностей те математичної статистики. Частина 1.** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2008. -108 с.

В посібнику розглянуто основні поняття і теореми теорії ймовірностей, повторні незалежні випробування. . Наведена достатня кількість прикладів та задач, в тому числі і прикладного характеру, які вдало доповнюють текстовий матеріал, зрозумілі і легко сприймаються. Істотною особливістю даного посібника є розгляд в кожній з тем творчих завдань чи завдань підвищеної складності, що дозволить здійснити диференційований підхід при роботі із студентами.

До кожної теми розроблені питання для самоперевірки та розглянуто достатньо варіантів завдань для самостійної роботи.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 519.21(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ. Очевидно, що в природі, техніці та економіці немає явищ, в яких би не був присутній елемент випадковості. Існує два підходи до вивчення цих явищ. Класичний підхід полягає в тому, що виділяються основні фактори, які визначають дане явище і формують його основну закономірність, а рештою другорядних факторів нехтують. Такий підхід притаманний «точним» наукам.

Однак при дослідженні багатьох явищ необхідно враховувати не тільки основні фактори, а й множину другорядних факторів, які призводять до випадкових збурень та спотворення результату. Тому інший підхід до вивчення випадкових явищ вимагає спеціальних методів дослідження таких явищ. Розробкою саме таких методів, вивченням специфічних закономірностей спостережуваних випадкових явищ і займається теорія ймовірностей.

Вивчення ймовірнісних моделей дає змогу зрозуміти різноманітні властивості випадкових явищ на абстрактному та узагальненому рівні без експерименту. При великій кількості спостережень випадкові впливи значною мірою нівелюються і одержаний результат стає невипадковим, передбачуваним. Це твердження і є базою для практичного використання ймовірнісних методів дослідження. Метою вказаних методів є вивчення закономірностей масових випадкових явищ, прогнозування їх характеристик, контроль над цими явищами, обмеження області дії випадковості.

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці курсу теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів технічних вузів, – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Це не тільки навчальний посібник, але й коротке керівництво до розв'язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач (в тому числі фізичного, технічного та економічного змісту), які наводяться з розв'язуванням, та задачами для самостійної роботи. Задачі для самостійної роботи розглядаються в кінці кожної теми. Всього тем, розглянутих в навчальному посібнику, три: основні поняття теорії ймовірностей, основні теореми теорії ймовірностей та повторні незалежні випробування. Істотною особливістю даного посібника є розгляд з кожної теми творчих завдань чи завдань підвищеної складності.

Даний посібник може бути використаний студентами як денної, так і заочної форм навчання.

ТЕМА 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 Класифікація подій та операції над подіями

Подією будемо називати будь-який спостережуваний результат випробування, який можна зафіксувати. Позначають події великими літерами латинської абетки.

Наприклад, випробування – підкидання монети. Тоді можливими подіями будуть A= «Випав герб» та B = «Випала решка».

Випадковою будемо називати подію, що при неодноразовому проведенні одного і того ж випробування кожен раз відбувається по-різному. Наприклад, політ літака, який супроводжується відхиленням центу мас від теоретичної траєкторії і т.п.

Щоб кількісно порівнювати між собою події за ступенем їх об'єктивної можливості, потрібно з кожною подією пов'язати певне число.

Ймовірністю випадкової події називається чисельна міра ступеня об'єктивної можливості події (частота події). Позначається ймовірність $p(A)$, $p(B)\ldots$, а значення ймовірності належать відрізку $[0,1]$.

Подія називається *елементарною* (ω), якщо її не можна розвинути на більш прості події. Розглянемо випробування – підкидання грального кубика, тоді ω = «Випало два очки». *Множиною елементарних подій* (Ω) (повною групою подій, полем подій) називають сукупність усіх взаємно виключних подій, які охоплюють будь-яку подію для даного експерименту.

Приклад 1.1 Монету кидають три рази. Результат спостережень – поява герба *(Г)* або решки *(Р)* на верхній стороні монети. Подія А= «Решка випала не менше ніж 2 рази підряд». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати подію А.

Розв'язування

Розглянемо елементарні події:

ω_1 = «Поява герба»=*Г*, ω_2 = «Поява решки»=*Р*. Тоді

Ω={*ГГГ, ГРР, РГР, РРГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РРР*} і A={*ГРР, РРГ, РРР*}.

Достовірною називається подія, яка відбувається за будь-яких обставин. Ймовірність такої події дорівнює 1. Прикладом достовірної події є випадання не більше шести очок при підкиданні одного грального кубика.

Подія називається *неможливою,* якщо вона не відбувається за жодних обставин. Ймовірність такої події дорівнює 0. Прикладом неможливої події є випадання 12 очок при підкиданні одного грального кубика.

Події називаються *несумісними,* якщо вони не можуть відбуватись одночасно і *сумісними* в протилежному випадку. Приклади несумісних подій:

1) поява герба та решки при одному підкиданні монети;
2) промах та влучення в ціль при одному пострілі.

Дві несумісні події, з яких одна обов'язково повинна відбутись, називають *протилежними.* Подію, протилежну події A, будемо позначати $\overline{A}$ (подію $\overline{A}$ називають іноді *антиподією* події A).

Наприклад, «поява герба» та «поява решки» при підкиданні монети, «відсутність бракованих виробів» та «наявність хоча б одного бракованого виробу» в партії -- події протилежні.

Події називають *рівноможливими,* якщо жодна з цих подій не є більш можливою інших. Приклади рівноможливих подій:

1) поява герба чи поява решки при підкиданні монети;
2) поява 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок при підкиданні грального кубика;
3) влучення в мішень чи промах при пострілі.

Рівноможливі несумісні події, що утворюють повну групу, називаються *випадками* або *шансами.* Якщо випробування можна описати за допомогою шансів, то кажуть, що дане випробування зводиться до схеми випадків.

Для подій вводяться відношення та операції, аналогічні операціям над множинами. Нагадаємо основні з них.

1) $A \cup B = A + B$ - додавання подій, яке полягає у появі хоча б однієї з цих подій $(\omega \in (A \cup B) \leftrightarrow \omega \in A \quad або \quad \omega \in B)$. При додаванні подій використовується лінгвістичний сполучник «або» чи словосполучення «хоча б», «один з».

2) $A \cap B = AB$ - множення подій, яке полягає в одночасній появі цих подій $(\omega \in (A \cap B) \leftrightarrow \omega \in A \quad і \quad \omega \in B)$. При множенні подій використовується лінгвістичний сполучник «і» чи слово «одночасно».

3) $B - A$ - доповнення події A, яка відбудеться за умови появи події B і відсутності події A $(\omega \in (B - A) \leftrightarrow \omega \notin A \quad і \quad \omega \in B)$.

4) Нехай подія A містить n елементарних подій, а подія B – m елементарних подій. Тоді декартів добуток цих подій $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, \quad b \in B\}$ містить mn елементарних подій.

Приклад 1.2 Переможець олімпіади нагороджується: призом (подія A), грошовою премією (подія B), медаллю (подія C). Описати події: а) $A + B$; б) ABC; в) $AC - B$.

Розв'язування

а) Подія $A+B$ полягає в нагородженні переможця або призом, або премією.

б) Подія ABC полягає в нагородженні переможця одночасно і призом, і премією, і медаллю.

в) Подія $AC-B$ полягає в нагородженні переможця одночасно і призом, і премією без медалі.

Приклад 1.3 Проводяться три незалежні постріли по мішені. Описати події: а) A= «В мішені рівно один отвір»; б) B= «В мішені не менше двох отворів».

Розв'язування

а) Зрозуміло, що подія A може відбуватись по-різному, оскільки враження мішені можливе при першому, другому або третьому пострілах. Решта пострілів є невдалими. Тому розглянемо елементарні події:

ω_1 = «Мішень вражена при першому пострілі»;

ω_2 = «Мішень вражена при другому пострілі»;

ω_3= «Мішень вражена при третьому пострілі».

Тоді їх антиподії:

$\overline{\omega}_1$ = «Мішень не вражена при першому пострілі»;

$\overline{\omega}_2$ = «Мішень не вражена при другому пострілі»;

$\overline{\omega}_3$ = «Мішень не вражена при третьому пострілі».

Використовуючи розглянуті елементарні події, маємо:

$$A=\omega_1\overline{\omega}_2\overline{\omega}_3+\overline{\omega}_1\omega_2\overline{\omega}_3+\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\omega_3.$$

б) Подія B означає, що в мішені має бути два або три отвори. Використовуючи розглянуті елементарні події, маємо:

$$B=\omega_1\omega_2\overline{\omega}_3+\overline{\omega}_1\omega_2\omega_3+\omega_1\overline{\omega}_2\omega_3+\omega_1\omega_2\omega_3.$$

1.2 Елементи комбінаторного аналізу

Розглянемо таку задачу. Нехай з пункту A міста Вінниці в пункт B можна доїхати трьома видами транспорту: тролейбусом (Т), автобусом (А) та трамваєм (Тр), а з пункту B в пункт C – лише двома видами транспорту:

тролейбусом (Т) та трамваєм (Тр). Скількома способами можна доїхати з пункту A в пункт C? Розв'язок цієї задачі зводиться, очевидно, до підрахунку числа елементів в декартовому добутку множин $\{T, A, Tp\}\times\{T, Tp\}$. Число елементів, як ми знаємо, дорівнює добутку числа елементів першої множини на число елементів другої множини, тобто в нашому випадку це $3\cdot 2 = 6$. Отже, існує шість способів доїхати з пункту A в пункт C. Виявляється, що за цією простою задачею стоїть *основне правило комбінаторики.*

Нехай необхідно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 і так далі до k-ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій можна виконати $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ способами.

Приклад 1.4 Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

а) цифри можуть повторюватися;

б) ні одна з цифр не повторюється двічі;

в) цифри непарні і можуть повторюватися.

Розв'язування

а) Першою цифрою може бути одна із цифр 1, 2, 3, 4, 5, оскільки 0 не може бути першою цифрою, бо в такому випадку число не буде тризначним. Якщо перша цифра вибрана, то друга, як і третя цифра, може бути вибрана шістьома способами. Отже, загальне число тризначних чисел $5\cdot 6\cdot 6 = 180$.

б) Першою цифрою може бути одна із п'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, оскільки 0 не може бути першою цифрою. Якщо перша цифра вибрана, то другою може бути теж одна з п'яти цифр (тут уже враховується 0), а третя може бути вибрана чотирма способами з чотирьох цифр, що залишилися. Отже, загальна кількість таких тризначних чисел $5\cdot 5\cdot 4 = 100$.

в) Першою цифрою може бути одна з трьох цифр: 1, 3, 5. Друга та третя цифри теж можуть бути однією з цих трьох цифр. Таким чином, загальна кількість таких чисел дорівнює $3\cdot 3\cdot 3 = 27$.

Комбінацією (без повторень) називається довільна k-елементна підмножина n-елементної множини. Число різних комбінацій становить

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.1)$$

Числа (1.1) називаються біноміальними коефіцієнтами бінома Н'ютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n. \qquad (1.2)$$

Для зручності роботи з комбінаціями (без повторень) вкажемо їх основні *властивості:*

1) формула симетрії $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$;
2) формула додавання $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;
3) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
4) формула суми всіх біноміальних коефіцієнтів $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + C_n^n = 2^n$.

Приклад 1.5 Збірна команда університету з волейболу налічує 15 чоловік. Скільки різних варіантів повинен розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру?

Розв'язування

Число гравців волейбольної команди дорівнює шести. Значить, число всіх можливих варіантів – це число різних підмножин, які складаються з шести елементів у множині з 15-ти елементів. Таким чином, маємо

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,9!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13 = 5005.$$

Формули, які будуть встановлені нижче, відносять до упорядкованих множин. Дві упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються між собою або своїми елементами, або порядком елементів. Зрозуміло, що коли множина має більше одного елемента, то її можна упорядкувати більше ніж одним способом. Розглянемо скількома способами можна упорядкувати скінченну n-елементну множину A.

Упорядковані множини, які відрізняються одна від одної лише порядком своїх елементів (тобто можуть бути одержані з однієї і тієї ж множини лише переставлянням її елементів), називаються *перестановками*. Загальне число перестановок n-елементної множини A позначається P_n і обчислюється за формулою:

$$P_n = n! \qquad (1.3)$$

Приклад 1.6 Скількома різними способами можна розмістити п'ять книжок на книжковій поличці?

Розв'язування

Шукане число розміщень є числом способів упорядкування множини з п'яти елементів. Значить це число дорівнює $P_5 = 5! = 120$.

Розглянемо таку задачу. Скількома способами можна представити n-елементну множину A у вигляді об'єднання її підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_m$, що попарно не перетинаються, так що $|A_1| = k_1$, $|A_2| = k_2$, ... , $|A_m| = k_m$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Поставлену задачу можна розв'язати таким чином. Візьмемо довільну k_1-елементну підмножину A_1 множини A (це можна зробити $C_n^{k_1}$ способами); серед $n - k_1$ елементів, що залишилися, візьмемо k_2-елементну підмножину A_2 множини A (це можна зробити $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами) і т. д. За основним правилом комбінаторики маємо, що число шуканих відношень еквівалентності становить

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots$$

$$\cdot \frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Таким чином, має місце теорема.

Теорема 1.1 Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – деякі натуральні числа, такі, що $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Кількість способів, якими можна побудувати розбиття n-елементної множини A на класи $A_1, A_2, \ldots, A_m$, число елементів яких відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$, становить

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}. \tag{1.4}$$

Числа $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ називають поліноміальними коефіцієнтами.

Розглянемо одне з можливих застосувань даної теореми. Нехай маємо деякий алфавіт $X = \{a, b, c, \ldots, d\}$ з m символів і множину з n символів цього алфавіту, причому серед n елементів цієї множини є k_1 – букв a, k_2 – букв b, ... , k_m – букв d і $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Необхідно визначити кількість різних «слів», які можна побудувати з цих n букв.

Перенумеруємо місця, на яких стоять букви, числами від 1 до n. Кожне слово однозначно визначається множинами A_1 (номери місць, на яких стоять букви a), A_2 (номери місць, на яких стоять букви b), ..., A_m (номери місць, на яких стоять букви d). Отже, число різних слів дорівнює числу різних представлень n-елементної множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ у вигляді об'єднання її підможин A_1, A_2, …, A_m, тобто

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

З цієї задачі випливає інше формулювання попередньої теореми.

Теорема 1.2 Число різних перестановок, які можна побудувати з n елементів, серед яких знаходиться k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, …, k_m елементів m-го типу, дорівнює $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Приклад 1.7 Скільки «слів» довжини 8 можна скласти з букв «а» та «б» таких, щоб кількість букв «а» в цих словах не перевищувала три.

Розв'язування

Такими «словами» будуть всі «слова», які не мають жодної «а», всі «слова», які мають одну, дві та три букви «а». Тобто загальна кількість таких слів становить

$$C_8(0,8) + C_8(1,7) + C_8(2,6) + C_8(3,5) = \frac{8!}{0!8!} + \frac{8!}{1!7!} + \frac{8!}{2!6!} + \frac{8!}{3!5!} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93.$$

Нехай дана деяка неупорядкована n-елементна множина A. Скільки різних упорядкованих k-елементних підмножин може мати ця множина? Розглянемо два можливі варіанти цієї задачі:

а) підмножина має k різних між собою елементів;

б) підмножина має k не обов'язково різних між собою елементів.

Отже, в задачі «а» підмножини задаються не надлишково, а в задачі «б» – надлишково, але число всіх різних елементів підмножини разом з числом всіх екземплярів кожного з її елементів дорівнює k.

Упорядкована k-елементна підмножина множини A, всі елементи якої різні, називається *розміщенням без повторень*, а будь-яка упорядкована k-елементна підмножина множини A, всі k елементів якої не обов'язково різні, називається *розміщенням з повтореннями*. Зауважимо, що в першому випадку $k \le n$, причому якщо $k = n$, то в цьому випадку розміщення є перестановкою. У другому випадку k не обов'язково має бути меншим за n.

При розв'язуванні задачі «а» слід пам'ятати, що будь-яка її k-елементна підмножина може бути упорядкована одним із $k!$ способів, а число всіх можливих різних k-елементних підмножин множини A дорівнює C_n^k. Отже, число всіх можливих розміщень із n елементів по k дорівнює $k! \cdot C_n^k$, тобто має місце така теорема.

Теорема 1.3 Кількість упорядкованих k-елементних підмножин n-елементної множини A, всі k елементів якої різні, становить

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \qquad (1.5)$$

Приклад 1.8 Студенту необхідно скласти три іспити протягом семи днів. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язування

Шукане число способів дорівнює кількості триелементних упорядкованих підмножин множини з семи елементів, тобто існує $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ способів.

Якщо відомо, що останній іспит буде складатись сьомого дня, то число способів становить $3 \cdot A_5^2 = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.

Приклад 1.9 Скількома різними способами можна розмістити п'ять студентів в аудиторії, яка має 20 місць?

Розв'язування

Шукане число способів дорівнює числу розміщень із 20 елементів по 5 елементів, тобто $A_{20}^5 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480$.

Розв'яжемо задачу «б». Нехай $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ – деяка скінченна k-елементна множина, а $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – n-елементна множина і $f: B \to A$ – функція з B в A. Як відомо, цю функцію можна задати за допомогою таблиці значень

b_1	b_2	$\ldots$	b_k
a_{i1}	a_{i2}	$\ldots$	a_{ik}

де $a_{ij} = f(b_j)$, $j = \overline{1, k}$. Тепер нашу задачу можна сформулювати так: скільки існує функцій з множини B в множину A? В такому формулюванні задача розв'язується досить просто.

Умовимося називати кортежем довжини k елементи виду $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, де a_i – не обов'язково різні елементи деякої скінченної множини A. Оскільки кожний елемент a_{ij} може бути будь-яким елементом множини A, то число різних кортежів виду $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ може бути n^k.

Теорема 1.4 Кількість різних упорядкованих k-елементних підмножин n-елементної множини, всі k елементів якої не обов'язково різні між собою, дорівнює n^k.

Приклад 1.10 Скільки різних «слів» можна скласти в алфавіті $X = \{0, 1\}$ з восьми символів?

Розв'язування

Всіх таких «слів» буде стільки, скільки існує відображень восьмиелементної множини в множину з двох елементів, тобто $2^8 = 256$ слів.

1.3 Класичне означення ймовірності

Для практичної діяльності важливо вміти порівнювати події за ступенем їх об'єктивної можливості, тобто за ймовірністю події. Щоб визначення ймовірності стало математичним, необхідно визначити його кількісно.

Нехай результати деякого випробування утворюють повну групу подій та рівноможливі. При цьому кажуть, що випробування зводиться до схеми випадків або «схеми урн» (оскільки будь-яку ймовірнісну задачу можна замінити еквівалентною задачею з урнами та кульками різних кольорів).

Випадок називається *сприятливим події A*, якщо поява цього випадку приводить до появи події A.

Згідно з класичним означенням *ймовірність події A* дорівнює відношенню числа сприятливих цій події випадків до загального числа випадків, тобто

$$p(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.6}$$

де $p(A)$ – ймовірність події A;

m – кількість сприятливих події A випадків;

n – загальна кількість випадків.

Приклад 1.11 На окремих карточках написано три букви А, дві букви Н та одна буква С. Дитина навмання бере картки та прикладає одна до одної всі шість карток. Знайти ймовірність того, що вийде слово «АНАНАС».

Розв'язування

Нехай A= «Вийшло слово «АНАНАС»». Загальна кількість випадків $n = P_6 = 6! = 720$. Число сприятливих випадків $m = P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! = 12$, оскільки перестановка трьох букв А, що здійснюється $P_3 = 3!$ способами, та перестановка двох букв Н ($P_2 = 2!$) не змінюють складене з карток слово «АНАНАС». Таким чином,

$$p(A) = \frac{12}{720} = \frac{1}{60}.$$

Приклад 1.12 В ліфт на першому поверсі дев'ятиповерхового будинку ввійшло 4 осіб, кожна з яких може вийти незалежно від інших на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Яка ймовірність того, що всі пасажири вийдуть: а) на шостому поверсі; б) на одному поверсі; в) на різних поверхах?

Розв'язування

Оскільки загальна кількість випадків це є розміщення з повтореннями, то $n = 8^4 = 4096$.

Згідно з умовою задачі розглянемо три події:

A= «Всі пасажири вийдуть на шостому поверсі»;
B= «Всі пасажири вийдуть на одному поверсі»;
C= «Всі пасажири вийдуть на різних поверхах».

Оскільки в довільному будинку тільки один шостий поверх, то число випадків, сприятливих події A – m_1, дорівнює 1. Тоді

$$p(A) = \frac{1}{4096} = 0{,}00024.$$

Події B сприятимуть $m_2 = 8$ випадків, тому

$$p(B) = \frac{8}{4096} = 0{,}00195.$$

Події C сприятимуть $m_2 = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$ випадків і

$$p(C) = \frac{70}{4096} = 0{,}0171.$$

Приклад 1.13 В партії 100 виробів, з яких 4 – браковані. Партію довільним чином розділено навпіл і кожну частину відправлено споживачам. Яка ймовірність того, що всі браковані вироби дістануться: а) одному споживачу; б) обом споживачам порівну?

Розв'язування

а) Нехай A= «Всі браковані вироби дісталися одному споживачеві». Загальне число способів, якими можна вибрати 50 виробів із 100, дорівнює $n = C_{100}^{50}$. Події A сприяють випадки, коли із 50 виробів буде або 46 стандартних з 96, або 50 стандартних з 96, їх число $m = C_{96}^{46} \cdot C_4^4 + C_{96}^{50} \cdot C_4^0$. Тому

$$p(A) = \frac{C_{96}^{46} \cdot C_4^4 + C_{96}^{50} \cdot C_4^0}{C_{100}^{50}} = \frac{C_{96}^{46} \cdot 1 + C_{96}^{46} \cdot 1}{C_{100}^{50}} = \frac{2C_{96}^{46}}{C_{100}^{50}} = \frac{2 \cdot 96! \cdot 50! \cdot 50!}{46! \cdot 50! \cdot 100!} =$$

$$= \frac{2 \cdot 96! \cdot 46! \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{46! \cdot 96! \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} = 0{,}117.$$

б) Нехай B= «В кожній партії по два бракованих вироби». Тепер події B сприятимуть випадки, коли з 50 відправлених одному споживачеві виробів буде 48 стандартних з 96 та 2 бракованих з 4, їх число $m = C_{96}^{48} \cdot C_4^2$. Тому

$$p(B) = \frac{C_{96}^{48} \cdot C_4^2}{C_{100}^{50}} = \frac{96! \cdot 4! \cdot 50! \cdot 50!}{48! \cdot 48! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 100!} = \frac{96! \cdot (2! \cdot 3 \cdot 4)(48! \cdot 49 \cdot 50)^2}{(48!)^2 \cdot 2! \cdot 2 \cdot (96! \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100)} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot (49 \cdot 50)^2}{2 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} = 0{,}383.$$

Приклад 1.14 В магазині продали 21 холодильник з 25 холодильників трьох марок, що були наявні в кількості 5, 7 та 13 штук. Припускаючи, що ймовірність бути проданим для холодильника кожної марки однакова, знайти ймовірність того, що залишились нерозпроданими холодильники: а) однієї марки; б) трьох різних марок.

Розв'язування

а) Нехай A= «Залишились нерозпроданими холодильники однієї марки». Загальне число способів, якими можна одержати 4 (непроданих) холодильники з 25, рівне $n = C_{25}^4$. Число способів, якими можна одержати 4 холодильники першої марки з 5, дорівнює $m_1 = C_5^4$; другої марки із 7 – $m_2 = C_7^4$ та третьої марки з 13 – $m_3 = C_{13}^4$. Події A за правилом додавання подій сприяють $m = m_1 + m_2 + m_1 = C_5^4 + C_7^4 + C_{13}^4$ випадків. Тому

$$p(A) = \frac{C_5^4 + C_7^4 + C_{13}^4}{C_{25}^4} = \frac{5 + 35 + 715}{12650} = \frac{755}{12650} = 0{,}06.$$

б) Нехай B= «Залишились нерозпроданими холодильники трьох різних марок». Ця подія може відбуватись за одним з трьох варіантів. За першим варіантом подія B відбудеться, якщо залишаться 1, 1, 2 холодильники відповідно 1-ї, 2-ї та 3-ї марок; за другим варіантом – 1, 2, 1 та за третім 2, 1, 1 холодильники 1-ї, 2-ї та 3-ї марок відповідно. Згідно з умовою задачі та правилом множення подій маємо число випадків, сприятливих першому варіанту $m_1 = C_5^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^2$; другому – $m_2 = C_5^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{13}^1$; третьому варіанту – $m_3 = C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^1$. Загальне число сприятливих події B випадків дорівнює $m = m_1 + m_2 + m_3$. Таким чином,

$$p(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^2 + C_5^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{13}^1 + C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^1}{C_{25}^4} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 78 + 5 \cdot 21 \cdot 13 + 10 \cdot 7 \cdot 13}{12650} =$$

$$= \frac{5005}{12650} = 0{,}396.$$

Слід відмітити, що ймовірності подій використовуються при кількісному оцінюванні інформації дискретних джерел повідомлень. Будь-яке джерело інформації створює повідомлення тільки з того набору символів (елементів), який воно має в своєму арсеналі. Якщо ймовірність вибору символів повідомлень неоднакова, то джерело інформації визначається такою схемою:

$$A = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, \ldots, & a_i, \ldots, & a_m \\ p(a_1), & p(a_2), \ldots, & p(a_i), \ldots, & p(a_m) \end{bmatrix},$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ – символи (елементи) алфавіту джерела повідомлень; $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_i), \ldots, p(a_m)$ – ймовірності того, що джерело повідомлень знаходиться в станах $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$, що називається ансамблем повідомлень. При цьому $\sum_{i=1}^{m} p(a_i) = 1$.

1.4 Геометричне означення ймовірності

Одним із істотних недоліків класичного означення ймовірності, який обмежує його використання, є той факт, що таке означення передбачає скінченне число можливих результатів випробування.

Виявляється, іноді цей недолік можна подолати, використовуючи *геометричне* означення ймовірності, тобто знаходячи ймовірність потрапляння точки в деяку область (відрізок, частину площини і т.п.).

Нехай, наприклад, плоска фігура g складає частину плоскої фігури G. На фігуру G навмання кидається точка. Це означає, що всі точки області G «рівноправні» стосовно влучення туди випадково кинутої точки. Нехай подія A= «Влучення кинутої точки на фігуру g» і її ймовірність пропорційна площі фігури g та не залежить ні від її розташування відносно G, ні від її форми. Тоді

$$p(A)=\frac{S_g}{S_G}, \tag{1.7}$$

де S_g та S_G – відповідно площі областей g та G (рис. 1.1).

Фігуру g називають сприятливою події A.

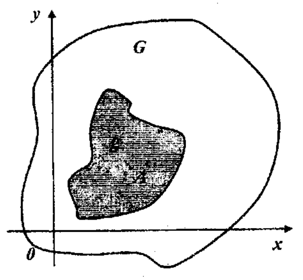


Рисунок 1.1

Область, на яку розповсюджується поняття геометричної ймовірності, може бути одновимірною (пряма, відрізок), двовимірною (площина) та тривимірною (деяке тіло в просторі). Позначивши міру (довжину, площу, об'єм) області через mes, одержуємо таке означення.

Геометричною ймовірністю події A називається відношення міри сприятливої цій події області до міри всієї області, тобто

$$p(A)=\frac{mes\,g}{mes\,G}. \tag{1.8}$$

Приклад 1.15 Дві особи – A та B вирішили зустрітися в певному місці, домовившись тільки про те, що кожен прийде туди в довільний момент часу з 11-ї до 12-ї години та буде чекати протягом 30 хвилин. Якщо партнер до того часу не надійшов або встиг залишити домовлене місце, зустріч не відбудеться. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язування

Позначимо моменти надходження в певне місце осіб A та B відповідно через x та y. В прямокутній системі координат візьмемо за початок відліку 11-у годину, а за мірило вимірювання – 1 годину. За умовою $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Цим нерівностям задовольняють координати будь-якої точки, що належать квадрату $OKLM$ зі стороною, рівною 1 (рис. 1.2).

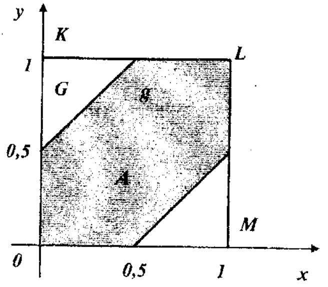


Рисунок 1.2

Нехай подія C= «Зустріч двох осіб» відбудеться, якщо різниця x та y не перевищує 0,5 години (за абсолютною величиною), тобто $|y-x| \le 0{,}5$. Розв'язком останньої нерівності є смуга $x-0{,}5 \le y \le x+0{,}5$, яка в середині квадрата на рисунку 1.2 є заштрихованою областю g. За формулою (1.7)

$$p(C)=\frac{S_g}{S_G}=\frac{1-2\cdot 0{,}5^3}{1^2}=0{,}75,$$

оскільки площа області g дорівнює площі квадрата G без суми площ двох кутових (не заштрихованих) трикутників.

Питання для самоперевірки

1. Що називають подією? Наведіть приклад.
2. Що називають випадковою подією? Наведіть приклад.
3. Що називають ймовірністю випадкової події?
4. Яку подію називають елементарною? Наведіть приклад.
5. Що називають множиною (повною групою) елементарних подій? Наведіть приклад.
6. Яку подію називають достовірною, а яку – неможливою? Наведіть приклад.
7. Які події називають сумісними, а які несумісними? Наведіть приклад.

8. Які події називають рівноможливими? Наведіть приклад.
9. Що називають шансом? Наведіть приклад.
10. Визначте операцію додавання подій.
11. Визначте операцію множення подій.
12. Визначте операцію доповнення подій.
13. Що називають декартовим добутком подій?
14. Яка різниця між декартовим квадратом деякої множини A і множиною всіх двохелементних підмножин цієї множини.
15. Сформулюйте основне правило комбінаторики.
16. Що називають комбінацією з n елементів по m елементів? Як обчислюється число таких комбінацій?
17. Перерахуйте властивості біноміальних коефіцієнтів.
18. Що називають перестановкою n-елементної множини? Як обчислюється число таких перестановок?
19. Скількома способами можна представити n-елементну множину A у вигляді об'єднання її підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_m$, що попарно не перетинаються, так, щоб $|A_1| = k_1$, $|A_2| = k_2$, ... , $|A_m| = k_m$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.
20. Як можна застосовувати поліноміальні коефіцієнти?
21. Що називають розміщенням із n елементів по m елементів без повторень? Як обчислюється число таких розміщень?
22. Що називають розміщенням із n елементів по m елементів з повтореннями? Як обчислюється число таких розміщень?
23. Дайте класичне означення ймовірності випадкової події.
24. Дайте геометричне означення ймовірності випадкової події.
25. Скількома способами можна розмістити три книжки на книжковій поличці?
26. Скільки існує функцій із множини A в множину B, якщо $|A| = m$, $|B| = n$?
27. На кафедрі математики працює 15 викладачів. Скількома способами можна скласти комісію з трьох чоловік для приймання заборгованостей?

28. Група студентів налічує 25 чоловік. Із них 15 подобається математика, 10 – фізика, 8 – не подобається ні математика, ні фізика. Скільком студентам подобається і математика і фізика?

29. На зборах студентів-відмінників були студенти як другого, так і третього курсів. Всі вони або любителі прози, або любителі поезії. Студентів-хлопців було 16, а любителів прози – 24. Студентів-дівчат буде рівно стільки, скільки хлопців любителів прози. Скільки студентів було на зборах?

30. В шаховому турнірі брали участь 40 чоловік, і кожні два шахісти зіграли між собою лише один раз. Скільки партій було зіграно в турнірі?

31. Скільки прямих можна провести через n точок, якщо ніякі три з них не лежать на одній прямій?

32. *У шухляді лежать червоні та чорні шкарпетки. Якщо із шухляди навмання витягають дві шкарпетки, то ймовірність того, що вони обидві червоні, дорівнює 0,5. Яка мінімально можлива кількість шкарпеток у шухляді? Яка мінімально можлива кількість шкарпеток у шухляді, якщо кількість чорних шкарпеток парна?

33. *Яка ймовірність того, що корені квадратного рівняння $x^2+2bx+c=0$ дійсні?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.1

1. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Подія А= «Випало більше решок, ніж гербів». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати подію А.

2. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, що відповідає кількості очок, які випали в перший і другий раз. Подія А= «Обидва рази випала кількість очок, кратна трьом». Побудувати множину елементарних подій Ω на основі опису експерименту і підмножину, яка відповідає події А.

3. Монету кидають 3 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Подія А= «Решка випала не менше, ніж 2 рази підряд». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати подію А.

4. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Герб випав не менше, ніж 2 рази підряд». В= «Жодного разу не випав герб». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

5. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, що відповідають кількості очок, які випали і першого і другого разу. Подія А= «Обидва рази випала кількість очок, більша 5». Побудувати простір Ω елементарних подій і підмножину, яка відповідає події А.

6. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Подія А= «Герб випав рівно 1 раз», В= «Решка випала не раніше, ніж при 3-му підкиданні». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

7. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, які відповідають кількості очок, що випали на верхній грані першого і другого разу. Події: А= «Обидва рази випала кількість очок, кратна 2», В= «Обидва рази випала кількість очок не менша 5». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

8. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Герб випав рівно 2 рази»; В= «Решка випала менше ніж 3 рази». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

9. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, що відповідають кількості очок, які випали кожного разу. Подія А= «Обидва рази випала кількість очок, менша 3». Побудувати множину елементарних подій Ω на основі опису експерименту і підмножину, яка відповідає події А.

10. Монету кидають тричі. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Подія А= «Решка випала рівно 2 рази». Побудувати множину Ω елементарних подій та описати подію А.

11. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, що відповідають кількості очок, які випали кожного разу. Подія А= «Обидва рази випала кількість очок, менша 3». Побудувати множину елементарних подій Ω на основі опису експерименту і підмножину, яка відповідає події А.

12. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Решка випала рівно 3 рази»; В= «Герб випав не раніше, ніж при 3-му підкиданні». Побудувати множину Ω елементарних подій та описати події А і В.

13. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, що відповідають кількості очок, які випали кожного разу. Подія А= «Жодного разу не випало число 6». Побудувати множину елементарних подій Ω на основі опису експерименту і підмножину, яка відповідає події А.

14. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Решка випала принаймні 2 рази підряд». В= «Герб випав не раніше, ніж при другому підкиданні». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

15. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, що відповідають кількості очок, які випали кожного разу. Подія А= «Обидва рази випала кількість очок, менша 4». Побудувати

множину елементарних подій Ω на основі опису експерименту і підмножину, яка відповідає події А.

16. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Випало більше гербів, ніж решок». В= «Решка випала рівно 2 рази». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

17. Монету кидають тричі. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Герб випав не менше, ніж 2 рази підряд». В= «Решка випала рівно 1 раз». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

18. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Герб випав рівно 3 рази»; В= «Решка випала не раніше, ніж при другому підкиданні». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

19. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, які відповідають кількості очок, що випали на верхній грані першого і другого разу. Події: А= «Жодного разу не випало число 5», В= «Обидва рази випала кількість очок менша 5». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

20. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Решка випала рівно один раз»; В= «Герб випав принаймні 3 рази». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

21. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, які відповідають кількості очок, що випали на верхній грані першого і другого разу. Події: А= «Обидва рази випала кількість очок більша 2», В= «Обидва рази випала кількість очок, не менша 4». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

22. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Герб випав не більше двох разів»; В= «Решка випала принаймні 3 рази підряд». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

23. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, які відповідають кількості очок, що випали на верхній грані

першого і другого разу. Події: А= «Обидва рази випала кількість очок, не більша 4», В= «Обидва рази випала непарна кількість очок». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

24. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, які відповідають кількості очок, що випали на верхній грані першого і другого разу. Події: А= «Обидва рази випала кількість очок більша 3», В= «Жодного разу не випало 3». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

25. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Герб випав рівно двічі»; В= «Герб випав не раніше, ніж при 3-му киданні». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

26. Монету кидають до першої появи герба. Результат спостережень – загальна кількість кидань. Події: А= «Герб випав при 4-му підкиданні»; В= «Герб випав не раніше, ніж при 4-му підкиданні». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

27. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, які відповідають кількості очок, що випали на верхній грані кожного разу. Події: А= «Обидва рази випала кількість очок, менша 4», В= «Жодного разу не випало число 4». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

28. Монету кидають до першої появи цифри. Результат спостережень – загальна кількість кидань. Події: А= «Решка випала при 4-му підкиданні»; В= «Решка випала не раніше, ніж при 4-му підкиданні». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

29. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, які відповідають кількості очок, що випали на верхній грані першого і другого разу. Події: А= «Обидва рази випала кількість очок, кратна 3». Побудувати множину елементарних наслідків Ω за описом експерименту і підмножину, яка відповідає події А.

30. Монету кидають тричі. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Подія А= «Герб випав не менше, ніж 2 рази підряд». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати подію А.

31. *Дві особи стріляють у мішень по одному разу. Подія A - у мішень влучив перший стрілець. Подія B - у мішень влучив другий стрілець. Виразити через A та B такі події: C - два влучення у мішень; D - хоч би одне влучення у мішень; E - лише одне влучення у мішень.

32. *Маємо такі події: A - навмання взята деталь першого сорту; B - навмання взята деталь другого сорту; C - навмання взята деталь третього сорту. Що означають події $A \cup B$; $\overline{A \cup B}$; $A \cap C$; $(A \cup B) \cup C$?

33. *У книжковій шафі стоять підручники з математики, фізики та хімії. Учень навмання бере два підручники. Скласти повну групу подій, які при цьому можуть відбутися.

Завдання 1.2

1. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що: а) сума кількості очок не перевищуватиме 3; б) добуток кількості очок не перевищуватиме 3; в) добуток кількості очок ділитиметься на 3.

2. Дехто купив картку спортлото і відмітив у ній 6 із наявних 49 номерів, після чого в тиражі розігрується 6 „виграшних" номерів із 49. Знайти ймовірність таких подій. A= «Правильно вгадані 3 виграшних номери із 6»; B= «Правильно вгадані всі 6 номерів».

3. Є вироби 4-х сортів, причому кількість виробів I сорту дорівнює 1, II – 2, III – 3, IV – 5. Для контролю навмання беруть 7 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 1 виріб I сорту, 1 – II, 2 – III і 3 – IV.

4. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{1}{4}$.

5. Моменти початку двох подій навмання розподілені в проміжку часу від T_1=900 хвилин до T_2=1100 хвилин. Одна із подій триває 10 хв., друга – 20 хв. Знайти ймовірність того, що: а) події «перекриваються» в часі; б) «не перекриваються».

6. Серед 10 лотерейних білетів є 2 виграшних. Навмання взяли 6 білетів. Знайти ймовірність того, що: 1) серед них немає виграшних; 2) один виграшний.

7. У крузі радіуса $R=12$ навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що вона попаде в одну із двох фігур, які не перетинаються і площі яких дорівнюють $S_1=2{,}37$ та $S_2=3{,}52$.

8. У ліфт 10-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 5 пасажирів. Кожний із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі вийдуть на різних поверхах; б) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж самому поверсі; в) всі пасажири вийдуть на 8-му поверсі; г) на одному із поверхів вийде 2 пасажири, а на іншому – 3.

9. Серед дев'яти лотерейних білетів є 2 виграшних. Навмання беруть 4 білети. Знайти ймовірність того, що серед них: а) один виграшний; б) немає виграшних.

10. Є вироби трьох сортів, причому кількість виробів І сорту дорівнює 3, ІІ-2, ІІІ-4. Для контролю навмання беруть 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 2 вироби І сорту, 2-ІІ і 1-ІІІ сорту.

11. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує $\frac{3}{16}$.

12. (Задача Бертрана) На колі радіуса r навмання вибираються 2 точки і з'єднуються хордою. Знайти ймовірність того, що довжина хорди перевищує величину $r\sqrt{3}$.

13. 25 екзаменаційних білетів містять по 2 питання, що не повторюються. Студент може відповісти лише на 45 питань. Яка ймовірність того, що взятий студентом екзаменаційний білет містить відомі йому питання?

14. Мале підприємство одержало 20 радіоприймачів, з яких 5 бракованих. Навмання для перевірки взяли три приймачі. Яка ймовірність того, що серед взятих приймачів будуть: а) тільки стандартні приймачі; б) тільки браковані приймачі; с) один бракований та два стандартних?

15. У ліфт 7-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 3 пасажири. Кожний із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі вийдуть на різних поверхах; б) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж самому поверсі; в) всі пасажири вийдуть на 4-му поверсі; г) на одному із поверхів вийде 2 пасажири, а на іншому – один.

16. В урні є 10 куль: із них 3 білих і 7 чорних. Із урни навмання виймають 2 кулі. Яка ймовірність того, що: а) обидві кулі білі; б) одна куля біла; в) обидві кулі однакового кольору.

17. На площині проведені паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють: в першому випадку 2 см; в другому – 10 см. На площину кидають навмання круг радіусом 3 см. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної із прямих ліній?

18. Моменти початку двох подій навмання розподілені в проміжку часу від T_1=900 хвилин до T_2=930 хвилин. Одна із подій триває 10 хв., друга також 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що: а) події «перекриваються» в часі; б) «не перекриваються».

19. Студент забув останні три цифри потрібного телефону, але він пам'ятає, що всі три цифри різні, тому набирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що цифри набрано правильно.

20. Серед 25 студентів групи, в якій є 10 дівчат, розігрують 5 квитків на концерт. Визначити ймовірність того, що квитки виграють дві дівчини.

21. Партію з N виробів перевіряє контролер шляхом відбору навмання n виробів і визначення їх якості. Якщо серед вибраних контролером виробів немає жодного бракованого, то вся партія виробів приймається, у протилежному випадку всі вироби посилають на додаткову перевірку. Яка ймовірність того, що партія виробів, яка містить M бракованих, буде прийнята контролером?

22. В урні 15 червоних, 9 синіх та 6 зелених куль однакового розміру. Навмання беруть 6 куль. Яка ймовірність того, що будуть взяті 1 зелена, 2 синіх та 3 червоних кулі?

23. Два студенти домовились зустрітись у певному місці між 17-ю та 18-ю годинами. Той, хто прийде першим, повинен чекати іншого

протягом 15 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність зустрічі, якщо час приходу на місце зустрічі кожного студента незалежний і рівноможливий протягом вказаної години.

24. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{2}{7}$.

25. Є вироби 4-х сортів, причому кількість виробів I сорту дорівнює 5, II–1, III–2 і IV–2. Для контролю навмання беруть 6 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 3 вироби I сорту ,1–II і 1–III і 1 –IV.

26. У групі є 12 студентів, серед яких 3 відмінники. За списком навмання відібрано 7 студентів. Знайти ймовірність того, що: а) серед відібраних студентів є 2 відмінники; б) немає жодного відмінника.

27. Той, хто прийде першим, чекає другого протягом 20 хвилин, після чого йде. Чому дорівнює ймовірність зустрічі осіб за умови, що кожна з них може прийти навмання у будь-який момент між 18-ю та 19-ю годинами, незалежно одна від одної?

28. Кидають 2 гральних кубики. Знайти ймовірність того, що: а) сума кількості очок не перевищує 6; б) добуток кількості очок не перевищує 6; в) добуток кількості очок ділиться на 6.

29. В ліфт шестиповерхового будинку сіли 5 пасажирів. Кожен незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі пасажири вийдуть на різних поверхах; б) всі пасажири вийдуть на 3-му поверсі; в) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж самому поверсі; г) на одному із поверхів вийде 3 пасажири, а на іншому –2.

30. В ящику є 30 однакових деталей, серед яких 6 браковані. Навмання взято 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих деталей: а) немає бракованих; б) 2 браковані деталі.

31. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину 0,3.

32. Еліпсоїд $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ поміщено в кулю $x^2+y^2+z^2=9$. Знайти ймовірність того, що поставлена навмання в середині кулі точка виявиться всередині еліпсоїда.

33. Серед 35 екзаменаційних білетів є 10, які студенти не знають. Два студенти беруть по одному білету. Знайти ймовірність таких подій: а) А= «Перший студент взяв «гарний» білет»; б) В= «Другий студент взяв «гарний» білет»; в) С= «Обидва студенти взяли «гарні» білети».

34. В ящику є 15 однакових деталей, на яких проставлені номери 1, 2,..., 15. Навмання взято 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих деталей виявляться: а) деталі № 3 і № 5; б) деталі № 3.

35. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{1}{12}$.

36. Кулю $x^2+y^2+z^2=9$ поміщено всередину еліпсоїда $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$. Знайти ймовірність того, що поставлена навмання всередині еліпсоїда точка виявиться всередині кулі.

37. Серед 8 лотерейних білетів 3 виграшних. Навмання взяли 4 білети. Знати ймовірність того, що: а) серед них два виграшних; б) немає виграшних.

38. У ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі зайшло 6 пасажирів. Кожний із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі вийдуть на різних поверхах; б) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж самому поверсі; в) всі пасажири вийдуть на 7-му поверсі; г) на одному із поверхів вийдуть 4 пасажири, а на іншому – 2.

39. Є вироби трьох сортів, причому кількість виробів I сорту дорівнює 3, II–4, III–3. Для контролю навмання беруть 6 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 2 вироби I сорту , 3–II та 1–III.

40. У крузі радіуса R=13 навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що вона потрапить в одну із двох фігур, які не перетинаються і площі яких дорівнюють S_1=2,53 та S_2=3,52.

41. Моменти початку двох подій навмання розподілені в проміжку часу від 800-ї до 830-ї хвилини. Одна із подій триває 10 хвилин, а друга – 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що: а) події «перекриваються» в часі; б) «не перекриваються».

42. Підкидають 2 гральні кубики. Знайти ймовірність того, що: а) сума кількості очок не перевищує 18; б) добуток кількості очок не перевищує 18; в) добуток кількості очок ділиться на 18.

43. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі зайшло 4 пасажирів. Кожний із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі вийдуть на різних поверхах; б) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж самому поверсі; в) всі пасажири вийдуть на 6-му поверсі; г) на одному із поверхів вийдуть 3 пасажири, а на іншому – 1.

44. В ящику є 10 деталей, серед яких 4 пофарбованих. Складальник навмання виймає 3 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих деталей: а) всі деталі пофарбовані; б) немає пофарбованих; в) одна деталь пофарбована.

45. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{4}{15}$.

46. На площині проведені три паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють 2,5 см і 9 см. На площину кидають навмання круг радіусом 2 см. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної із прямих ліній?

47. Дехто купив білет спортлото і відмітив в ньому 6 із наявних 49 номерів, після чого в тиражі розігруються 6 «виграшних» із 49. Знайти ймовірність того, що: а) правильно вгадані 3 «виграшних» номери із 6-ти; б) правильно вгадані 4 «виграшних» номери із 6-ти; в) правильно вгадані 5 «виграшних» номери із 6-ти.

48. Набираючи телефонний номер, який складається із шести цифр, абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що номер набрано правильно, якщо: а) цифри непарні і різні; б) цифри кратні трьом; в) одна із них – 0, а друга – кратна 4.

49. В ящику є 12 однакових деталей з номерами 1, 2, 3,..., 12. Навмання взято 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих деталей виявляться: а) деталі № 1 і № 2; б) деталь № 2.

50. У коробці 10 однакових виробів, причому 3 із них пофарбовані. Навмання виймається 2 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них виявляться: а) два пофарбованих вироби; б) один пофарбований; в) хоча б один пофарбований.

51. Кулю радіуса R=1 см поміщено всередині куба, ребро якого дорівнює 2 см. Знайти ймовірність того, що поставлена навмання всередині куба точка виявиться всередині кулі.

52. Кулю радіуса R=4 см поміщено всередині куба, ребро якого дорівнює 8 см. Знайти ймовірність того, що поставлена навмання всередині куба точка виявиться всередині кулі.

53. Є вироби трьох сортів, причому кількість виробів I сорту дорівнює 9, II–6, III–5. Для контролю навмання беруть 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 3 вироби I сорту , 1–II.

54. Два студенти домовились зустрітись в певному місці між 11-ю і 12-ю годинами дня. Той, хто прийшов першим, чекає другого протягом 15 хвилин, після чого залишає це місце. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен студент навмання вибирає час свого приходу.

55. Підкидають 2 гральні кубики. Знайти ймовірність того, що: а) сума кількості очок не перевищує 4; б) добуток кількості очок не перевищує 4; в) добуток кількості очок ділиться на 4.

56. В автобусі є 5 пасажирів. Знайти ймовірність того, що на решті із п'яти зупинок буде виходити: а) по одному пасажиру; б) на одній із решти зупинок вийдуть 3 пасажири, а на іншій – 2; в) всі 5 пасажирів вийдуть на останній зупинці. Вважається, що кожен із пасажирів з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якій із зупинок.

57. Набираючи телефонний номер, абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що номер набрано правильно, якщо: а) цифри кратні 4; б) цифри непарні; в) цифри непарні і різні.

58. В ящику є 20 однакових деталей, із них 6 бракованих. Навмання взято 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих деталей: а) немає бракованих; б) 2 браковані деталі.

59. Визначити ймовірність того, що номер першої зустрічної машини: а) складається із парних цифр; б) має перші дві однакові; в) має один нуль і дві непарних цифри. Відомо, що всі номери чотиризначні, починаючи з номера 0001, не повторюються і рівноможливі.

60. Визначити ймовірність того, що номер першої зустрічної машини: а) не містить однакових цифр; б) має дві однакові; в) має дві пари однакових непарних цифр. Відомо, що всі номери чотиризначні, починаючи з номера 0001, не повторюються і рівноможливі.

61. *У щорічній лотереї розіграють шість основних тиражів та один додатковий, який відбувається після основного п'ятого. Із 100000 серій в кожному основному тиражі виграють 170 серій, а в кожному додатковому – 230 серій. Знайти ймовірність виграшу на один лотерейний квиток за перші десять років: а) в основному тиражі; б) в додатковому тиражі; в) в довільному тиражі.

62. *Із наявних n виробів j-ту ознаку мають n_j вироби ($j=\overline{1,k}$, $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$). Визначити ймовірність того, що із m взятих навмання виробів вказані ознаки мають $m_1, m_2, \ldots, m_k$ виробів, причому $\sum_{j=1}^{k} m_j = m$.

63. *По m урнах випадково розклали n однакових кульок. Визначити ймовірність того, що: а) в першій урні n_1 кулька, в другій – n_2, ..., в m-ій – n_m; б) є урни, в яких відповідно n_1, $n_2, \ldots$, n_m кульок, якщо числа n_1, $n_2, \ldots$, n_m різні і $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$.

ТЕМА 2 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1 Теорема додавання ймовірностей

Сформулюємо теорему (правило) додавання ймовірностей.

Теорема 2.1 Ймовірність суми скінченного числа несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B+\ldots+K)=p(A)+p(B)+\ldots+p(K). \tag{2.1}$$

Доведення

Доведемо теорему для схеми випадків, розглядаючи суму двох подій.

Нехай в результаті випробування із загальної кількості n рівноможливих та несумісних наслідків випробування події A сприяють m_1 випадків, а події B – m_2 випадків (рис. 2.1).

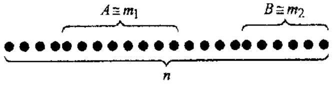


Рисунок 2.1

Згідно з класичним означенням $p(A)=\dfrac{m_1}{n}$, $p(B)=\dfrac{m_2}{n}$. Оскільки ці події несумісні, то жоден із випадків, сприятливих одній події, не є сприятливим іншій (рис. 2.1). Тому події $A+B$ сприятливими є m_1+m_2 випадків. Таким чином,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=p(A)+p(B).$$

Наслідок 1 Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1:

$$p(A)+p(B)+\ldots+p(K)=1. \tag{2.2}$$

Дійсно, якщо події $A,B,\ldots,K$ утворюють повну групу, то вони єдино можливі та несумісні.

Оскільки події $A,B,\ldots,K$ – єдино можливі, то подія $A+B+\ldots+K$, суть якої у появі в результаті випробування хоча б однієї з цих подій, є достовірною. Тобто: $P(A+B+\ldots+K)=1$. В силу теореми додавання ймовірностей для несумісних подій $A, B, \ldots, K$ маємо

$$P(A+B+\ldots+K)=p(A)+p(B)+\ldots+p(K)=1.$$

Наслідок 2 Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$p(A)+p(\overline{A})=1. \qquad (2.3)$$

Дане твердження випливає з того, що протилежні події утворюють повну групу.

Приклад 2.1 Ймовірність виходу з ладу пристрою при експлуатації терміном до року дорівнює 0,13, а при експлуатації терміном понад три роки – 0,36. Знайти ймовірність виходу з ладу пристрою при експлуатації від року до 3 років.

Розв'язування

Нехай

$A=$ «Вихід з ладу пристрою при експлуатації терміном до року»;

$B=$ «Вихід з ладу пристрою при експлуатації терміном від року до трьох років»;

$C=$ «Вихід з ладу пристрою при експлуатації терміном понад три роки».

За умовою $p(A)=0{,}13$, $p(C)=0{,}36$. Зрозуміло, що $C=A+B$, де події A та B несумісні. За теоремою додавання $p(C)=p(A)+p(B)$, звідки

$$p(B)=p(C)-p(A)=0{,}36-0{,}13=0{,}23.$$

Зауваження. Розглянута *теорема додавання застосовується лише для несумісних подій* і спроба її використання для сумісних подій призводить до хибних і навіть абсурдних результатів. Наприклад, нехай ймовірність події $A_i=$ «Виграш на будь-який білет грошово-речової лотереї» дорівнює $p(A_i)=0{,}05$ і придбано 100 білетів ($i=\overline{1,100}$). Тоді, застосовуючи теорему додавання, одержимо, що ймовірність виграшу хоча б на один із 100 білетів дорівнює

$$p(A_1+A_2+\ldots+A_{100})=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_{100})=\underbrace{0{,}05+0{,}05+\ldots+0{,}05}_{100\,раз}=5.$$

Абсурдність одержаної відповіді пояснюється неможливістю застосування в даному випадку теореми додавання, оскільки виграші на кожен із білетів (події A_i, $i=\overline{1,100}$) є сумісними подіями.

2.2 Умовна ймовірність. Теорема множення ймовірностей. Незалежні події

Розглянемо приклад.

Приклад 2.2 У ящику 5 деталей, серед яких 3 стандартні і 2 браковані. По черзі з нього виймають по одній деталі (з поверненням та без повернення). Знайти ймовірність того, що вийнята вдруге деталь є стандартною за умови, що першого разу вийняли: а) стандартну деталь; б) браковану деталь.

Розв'язування

Нехай події A та B – поява стандартної деталі відповідно першого та другого разу. Очевидно, що $p(A)=\frac{3}{5}$. Якщо витягнута деталь повертається до ящика, то ймовірність витягнути стандартну деталь вдруге $p(B)=\frac{3}{5}$. Якщо витягнута деталь до ящика не повертається, то ймовірність витягнути стандартну деталь вдруге $p(B)$ залежить від того, яку деталь було витягнуто першого разу – стандартна (подія A) чи бракована (подія $\overline{A}$). В першому випадку $p(B)=\frac{2}{4}$, в другому випадку $p(B)=\frac{3}{4}$, оскільки серед тих чотирьох деталей, що залишились, стандартних деталей буде дві або три.

Розглянутий приклад наочно продемонстрував поняття *умовної ймовірності* – ймовірності події B, знайденої за умови, що подія A відбулась. Позначається умовна ймовірність $p_A(B)$, або $p(B|A)$.

В прикладі 2.2 маємо, що $p_A(B)=\frac{2}{4}$ і $p_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{4}$.

Має місце теорема.

Теорема 2.2 Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, знайдену за умови, що перша подія відбулась, тобто

$$p(AB)=p(A)\cdot p_A(B)=p(B)\cdot p_B(A). \tag{2.4}$$

Доведення

Нехай із загальної кількості рівноможливих та несумісних наслідків випробування (подій) події A сприяє m випадків, події B – k випадків, а їх одночасній появі, тобто події AB – l випадків ($l \le m, l \le k$) (рис. 2.2).

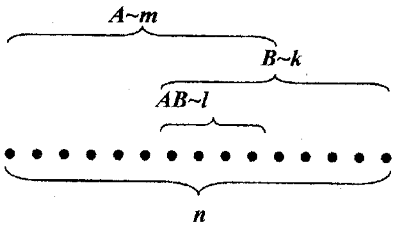


Рисунок 2.2

Згідно з класичним означення ймовірності $p(A) = \frac{m}{n}$, $p(AB) = \frac{l}{n}$.

Після того як подія A відбулась, число всіх рівноможливих випадків скоротилось з n до m, а число випадків, сприятливих події B – з k до l. Тому умовна ймовірність становить

$$p_A(B) = \frac{l}{m} = \frac{l/n}{m/n} = \frac{p(AB)}{p(A)}. \qquad (2.5)$$

Аналогічно

$$p_B(A) = \frac{p(AB)}{p(B)}. \qquad (2.6)$$

Помноживши праву та ліву частину рівностей (2.5) та (2.6) відповідно на $p(A)$ та $p(B)$ одержуємо

$$p(AB) = p(A) \cdot p_A(B) = p(B) \cdot p_B(A).$$

Теорема множення ймовірностей легко узагальнюється на випадок довільної кількості подій:

$$p(ABC \ldots KL) = p(A) \cdot p_A(B) \cdot p_{AB}(C) \cdot \ldots \cdot p_{ABC \ldots K}(L), \qquad (2.7)$$

тобто ймовірність добутку декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовні ймовірності інших; при цьому умовна ймовірність кожної наступної події обчислюється за припущення, що всі попередні події відбулись.

Приклад 2.3 Робота електронного пристрою припинилась внаслідок виходу із ладу одного з п'яти уніфікованих блоків. Проводиться послідовна заміна кожного блока новим до тих пір, доки пристрій не почне працювати. Яка ймовірність того, що доведеться замінити: а) 2 блоки; б) 4 блоки?

Розв'язування

а) Позначимо події:

A_i= «i-тий блок справний», $i=\overline{1,5}$;

B= «Заміна двох блоків».

Зрозуміло, що доведеться замінити два блоки, якщо 1-й блок справний (4 шанси з 5), а 2-ий – несправний (1 шанс з 4, що залишились), тобто $B=A_1\cdot\overline{A_2}$. Таким чином, за теоремою множення (2.4)

$$p(B)=p(A_1\cdot\overline{A_2})=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

б) Нехай подія C=«Заміна чотирьох блоків». Очевидно, що

$$C=A_1\cdot A_2\cdot A_2\cdot\overline{A_4}=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)\cdot p_{A_1A_2}(A_3)\cdot p_{A_1A_2A_3}(\overline{A_4})=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Слід відмітити, що умовну ймовірність досить часто використовують при визначенні ентропії складних повідомлень, що їх виробляють декілька статистичних джерел. Наприклад, для залежних джерел повідомлень A та B умовна ймовірність $p(a_i|b_j)$ – це ймовірність того, що джерело повідомлень A прийме i-ий стан, якщо відомо, що джерело B прийняло j-ий стан. Сукупна ймовірність появи двох взаємонезалежних подій визначається як добуток ймовірності появи однієї з них на умовну ймовірність другої відносно першої.

Теорема множення ймовірностей набуває найбільш простого вигляду коли події, що утворюють добуток, *незалежні.* Подія B називається незалежною від події A, якщо її ймовірність не залежить від того відбулась подія A чи ні $p(B)=p_A(B)$ (або $p(A)=p_B(A)$). В протилежному випадку подія B буде називатись залежною від події A.

Доведемо, що якщо подія B не залежить від A, то і подія A не залежить від B.

Дійсно, оскільки за умовою подія B не залежить від A, то $p(B)=p_A(B)$. Запишемо теорему множення ймовірностей (2.4) в двох формах:

$$p(AB)=p(A)\cdot p_A(B)=p(B)\cdot p_B(A).$$

Замінюючи $p_A(B)$ на $p(B)$, одержуємо

$$p(A)\cdot p(B)=p(B)\cdot p_B(A).$$

Припускаючи, що $p(B)\neq 0$ маємо

$$p(A)=p_B(A),$$

тобто подія A не залежить від B.

Таким чином, залежність та незалежність подій завжди взаємна. Тому можна дати інше означення незалежності подій.

Дві події називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої.

Приклад 2.4 Встановити залежні чи ні події A та B з прикладу 2.2.

Розв'язування

У випадку повернення витягнутої деталі $p_A(B)=p_B(A)=p(B)=\frac{3}{5}$, тобто події A та B незалежні. Якщо витягнута деталь до ящика не повертається, то $p_A(B)\neq p_B(A)$ $\left(\frac{2}{4}\neq\frac{3}{4}\right)$, тобто $p_A(B)\neq p(B)$ і події A та B залежні.

Приклад 2.5 Ймовірність влучного пострілу для першого стрілка дорівнює 0,8, для другого – 0,7 для третього – 0,9. Кожен стрілок робить по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що в мішені буде рівно два отвори.

Розв'язування

Позначимо події:

A_i= «Влучний постріл i-го стрілка», $i=1,2,3$;

B= «В мішені рівно два отвори».

Зрозуміло, що $B=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+A_1\cdot A_3\cdot\overline{A_2}+A_3\cdot A_2\cdot\overline{A_1}$. За теоремами додавання та множення для незалежних подій

$$p(B)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A_3})+p(A_1)\cdot p(A_3)\cdot p(\overline{A_2})+p(A_3)\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A_1})=$$

$$=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}3+0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}398.$$

Зауваження. Говорячи про незалежність подій, відмітимо таке.

1) В основі незалежності подій лежить їх фізична незалежність. Це означає, що множини випадкових факторів, що призводять до того чи іншого наслідку випробування, не перетинаються. Наприклад, якщо в цеху є дві установки, що ніяк не пов'язані між собою за умовами виробництва, то простій кожної установки – незалежні події. Якщо ці установки пов'язані єдиним технологічним циклом, то простій однієї з цих установок залежить від стану роботи іншої.

Разом з тим, якщо множини випадкових факторів перетинаються, то події, що з'являються в результаті випробування, не обов'язково залежні.

Наприклад розглядаються події:
$A=$ «Витягнута навмання з колоди карта пікової масті»;
$B=$ «Витягнута навмання з колоди карта – туз».

Потрібно з'ясувати, чи є події A та B залежними. Маємо

$$p(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\ \text{(в колоді 4 тузи із 36 карт)},$$

$$p_A(B)=\frac{1}{9}\ \text{(в колоді 1 туз із 9 карт пікової масті)}.$$

Оскільки $p_A(B)=p(B)$, то події A та B незалежні.

2) Попарна незалежність декількох подій ще не означає їх незалежності в сукупності. Переконаємось в цьому на прикладі (приклад С.М. Бернштейна).

Припустимо, що грані правильного тетраедра пофарбовані: 1-ша – в червоний колір (подія A), 2-га – в зелений (подія B), 3-тя – в синій (подія C) і 4-та – в усі три кольори (подія ABC). При підкиданні тетраедра ймовірність будь-якої грані, на яку він впаде, мати однаковий колір дорівнює 0,5 (оскільки всього граней 4, а з відповідним кольором 2, тобто два шанси з чотирьох). Таким чином, $p(A)=p(B)=p(C)=0{,}5$.

В такий же спосіб можна підрахувати, що

$$p_B(A)=p_A(B)=p_C(A)=p_C(B)=p_A(C)=p_B(C)=0{,}5$$

(один шанс з двох), тобто події A, B та C попарно незалежні. Якщо відбулись одночасно дві події, наприклад A та B (подія AB), то третя подія C обов'язково відбудеться, тобто $p_{AB}(C)=1$ і аналогічно $p_{AC}(B)=1$,

$p_{BC}(A)=1$. Це означає, що ймовірність кожної з подій A, B та C змінилась і ці події залежні.

При розв'язування певного класу задач необхідно знайти ймовірність суми двох або декількох сумісних подій, тобто ймовірність появи хоча б однієї з цих подій. Нагадаємо, що в цьому випадку застосовувати теорему додавання ймовірностей у вигляді (2.1) не можна.

Теорема 2.3 Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку, тобто

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB). \tag{2.8}$$

Доведення

Подамо подію $A+B$, суть якої є поява хоча б однієї з подій A та B, у вигляді суми трьох несумісних варіантів:

$$A+B=A\overline{B}+\overline{A}B+AB.$$

Тоді за теоремою додавання маємо

$$p(A+B)=p(A\overline{B})+p(\overline{A}B)+p(AB). \tag{2.9}$$

Враховуючи, що $A=A\overline{B}+AB$, $p(A)=p(A\overline{B})+p(AB)$, і аналогічно $B=\overline{A}B+AB$, $p(B)=p(\overline{A}B)+p(AB)$ знаходимо

$$p(A\overline{B})=p(A)-p(AB); \quad p(\overline{A}B)=p(B)-p(AB). \tag{2.10}$$

Таким чином, підставляючи вирази (2.10) в (2.9), одержуємо

$$p(A+B)=[p(A)-p(AB)]+[p(B)-p(AB)]+p(AB)=p(A)+p(B)-p(AB).$$

Зауваження. У випадку трьох та більше сумісних подій формула (2.8) досить громіздка. Тому простіше перейти до протилежної події L:

$$L=\overline{A+B+\ldots+K}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\ldots\cdot\overline{K}.$$

Враховуючи те, що протилежні події утворюють повну групу, маємо:

$$p(A+B+\ldots+K)=1-p(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\ldots\cdot\overline{K}), \tag{2.11}$$

тобто ймовірність суми декількох сумісних подій $A, B, \ldots, K$ дорівнює різниці між одиницею та ймовірністю добутку протилежних подій $\overline{A}, \overline{B}, \ldots, \overline{K}$.

Якщо при цьому події $A, B, \ldots, K$ – незалежні, то

$$p(A+B+\ldots+K)=1-p(\overline{A})\cdot p(\overline{B})\cdot\ldots\cdot p(\overline{K}). \qquad (2.12)$$

Приклад 2.6 Серед 100 лотерейних квитків є 5 виграшних. Яка ймовірність виграшу хоча б на один із квитків, якщо придбано: а) 2 квитки; б) 4 квитки?

Розв'язування

Нехай A_i= «Виграш на i-ий квиток», $i=1,2,3,4$.

а) За формулою (2.8) ймовірність виграшу хоча б на один із квитків

$$p(A_1+A_2)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1A_2)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)=$$
$$=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}-\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}=0{,}098.$$

б) За формулою (2.11) ймовірність виграшу хоча б на один квиток із чотирьох

$$p(A_1+A_1+A_3+A_4)=1-p(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4})=1-\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}=0{,}188.$$

2.3 Розв'язування задач з використанням теорем додавання та множення ймовірностей

Приклад 2.7 Ймовірність того, що студент складе перший іспит, дорівнює 0,9; другий – 0,9; третій – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе: а) тільки два іспити; б) тільки один іспит; в) три іспити; г) хоча б два іспити; д) хоча б один іспит; є) тільки другий іспит.

Розв'язування

а) Позначимо незалежні події A_i= «Студент складе i-ий іспит», $i=1,2,3$;

B= «Студент кладе два іспити з трьох». Очевидно, що

$B=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3=0{,}9\cdot0{,}9\cdot0{,}2+0{,}9\cdot0{,}1\cdot0{,}8+0{,}1\cdot0{,}9\cdot0{,}8=0{,}306$.

б) Нехай подія C= «Студент складе один іспит з трьох». Зрозуміло, що ця подія відбудеться, якщо студент складе або тільки 1-ий іспит, або тільки 2-ий іспит, або тільки 3-ий іспит, тобто

$$p(C) = p(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}044.$$

в) Нехай подія D= «Студент складе три іспити», тобто $D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Тоді

$$p(D) = p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}648.$$

г) Нехай подія E = «Студент складе хоча б два іспити». Зрозуміло, що дана подія означає, що студент складе будь-які два іспити або всі три, тобто

$$E = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

і

$$p(E) = 0{,}306 + 0{,}648 = 0{,}954.$$

д) Нехай подія F= «Студент складе хоча б один іспит». Зрозуміло, що ця подія включає в себе подію C, подію D та подію B (сім варіантів). Однак простіше знайти ймовірність події F, якщо перейти до протилежної події $\overline{F}$ = «Студент не складе жодного іспиту». Таким чином

$$p(F) = 1 - p(\overline{F}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}998.$$

є) Нехай подія K= «Студент складе тільки 2-ий іспит». Зрозуміло, що $K = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$ і маємо

$$p(K) = p(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}018.$$

Приклад 2.8 Причиною розриву електричного кола слугує вихід з ладу елемента K_1 або одночасний вихід з ладу двох елементів – K_2 та K_3. Елементи можуть вийти з ладу незалежно один від одного з ймовірностями, рівними відповідно 0,1; 0,2; 0,3. Знайти ймовірність розриву кола.

Розв'язування

Позначимо події:

A_i= «Вихід з ладу елемента K_i», $i = 1, 2, 3$;

B= «Розрив електричного ланцюга».

Зрозуміло, що подія B відбудеться, якщо відбудеться або подія A_1, або подія $A_2 \cdot A_3$, тобто $B = A_1 + A_2 \cdot A_3$. За формулою (2.8) маємо

$$p(B) = p(A_1) + p(A_2 \cdot A_3) = p(A_1) + p(A_2 \cdot A_3) - p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$$

$$= p(A_1) + p(A_2) \cdot p(A_3) - p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}154.$$

Приклад 2.9 Ділянка електричного кола має вигляд:

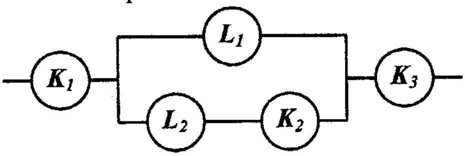


Рисунок 2.3

Надійність кожного елемента подано в таблиці:

Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2
Надійність	0,5	0,6	0,4	0,9	0,8

Визначити надійність даної системи.

Розв'язування

Зрозуміло, що надійність даної системи можна обчислити за формулою:

$$p = p(K_1) \cdot [1 - (1 - p(L_1))(1 - p(L_2)P(K_2))] \cdot p(K_3).$$

Таким чином, маємо

$$p = 0{,}5 \cdot [1 - 0{,}1 \cdot (1 - 0{,}8 \cdot 0{,}6)] \cdot 0{,}4 = 0{,}5 \cdot 0{,}948 \cdot 0{,}4 = 0{,}1896.$$

Приклад 2.10 Виробничі потужності трьох станків, що обробляють однакові деталі, відносяться як $1:3:6$. Серед несортованої партії оброблених деталей навмання взяли дві. Яка ймовірність того, що: а) одна з них оброблена на третьому станку; б) обидві оброблені на одному і тому ж станку?

Розв'язування

а) Позначимо події:

A_i= «Деталь оброблено на i-му станку», $i = 1, 2, 3$;

B - «Одна із взятих деталей оброблена на третьому станку».

За умовою

$$p(A_1)=\frac{1}{1+3+6}=0{,}1; \quad p(A_2)=\frac{3}{1+3+6}=0{,}3; \quad p(A_3)=\frac{6}{1+3+6}=0{,}6.$$

Зрозуміло, що $B=A_1A_3+A_2A_3+A_3A_1+A_3A_2$ (при цьому потрібно врахувати, що або першу деталь оброблено на третьому станку, або другу). За теоремами додавання та множення (для незалежних подій) маємо:

$$p(B)=p(A_1)p(A_3)+p(A_2)p(A_3)+p(A_3)p(A_1)+p(A_3)p(A_2)=$$

$$=0{,}1\cdot 0{,}6+0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}6\cdot 0{,}1+0{,}6\cdot 0{,}3=0{,}48\,.$$

б) Нехай подія C= «Обидві відібрані деталі оброблено на одному станку». Тоді $C=A_1A_1+A_2A_2+A_3A_3$ і

$$p(C)=p(A_1A_1)+p(A_2A_2)+p(A_3A_3)=0{,}1^1+0{,}3^2+0{,}6^2=0{,}46.$$

Приклад 2.11 Партія зі 100 деталей піддається вибірковому контролю. Умовою непридатності всієї партії є наявність хоча б однієї бракованої деталі серед п'яти відібраних. Яка ймовірність для даної партії бути не прийнятою, якщо вона містить 5% браку?

Розв'язування

Позначимо події:

A_i= «Перевірена i-та деталь стандартна», $i=1,2,3,4,5$;

$\overline{A}$= «Партія прийнята». Очевидно, що $\overline{A}$ можна подати $\overline{A}=A_1A_2A_3A_4A_5$. За умовою задачі $p(A_1)=\frac{95}{100}$, оскільки всього деталей 100, а стандартних 95. Після появи події A_1 деталей залишається 99, а стандартних 94. Тому $p_{A_1}(A_2)=\frac{94}{99}$. Аналогічно $p_{A_1A_2}(A_3)=\frac{93}{98}$, $p_{A_1A_2A_3}(A_4)=\frac{92}{97}$ та $p_{A_1A_2A_3A_4}(A_5)=\frac{91}{96}$. Тоді

$$p(\overline{A})=\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96}=0{,}77;$$

а шукана ймовірність $p(A)=1-0{,}77=0{,}23$.

Приклад 2.12 Екзаменаційний білет для письмового іспиту складається з 10 запитань – по 2 запитання із 20 кожної з п'яти тем. З кожної теми студент підготував лише половину всіх запитань. Яка ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти хоча б на одне запитання кожної з п'яти тем?

Розв'язування

Позначимо події:
A_1 = «Студент підготував 1-ше запитання білета з кожної теми»;
A_2 = «Студент підготував 2-ге запитання білета з кожної теми»;
B_i= «Студент підготував хоча б одне запитання з двох з i-ої теми», $i=1,2,3,4,5$;
C= «Студент склав іспит».

За умовою $C=B_1B_2B_3B_4B_5$. Припускаючи відповіді студента з різних тем незалежними, за теоремою множення ймовірностей

$$p(C)=p(B_1)p(B_2)p(B_3)p(B_4)p(B_5)=(p(B_i))^5,$$

оскільки всі $p(B_i)$ рівні і обчислюються за формулою (2.11)

$$p(B_i)=p(A_1+A_2)=1-p(\overline{A_1}\overline{A_2})=1-p(\overline{A_1})p_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})=1-\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}=0{,}763.$$

Таким чином

$$p(C)=(p(B_i))^5=0{,}763^5=0{,}259.$$

Приклад 2.13 На іспиті з «Теорії ймовірностей» 24 білети. Студент знає 20 білетів. Він витягнув один білет і не знав його. Йому запропонували витягнути інший. Яка ймовірність того, що студент складе іспит?

Розв'язування

Позначимо події:
A= «Студент витягнув білет, який не знав»;
B= «Студент витягнув білет, який знав». Зрозуміло, що за умовою задачі подія AB= «Складено іспит».

За теоремою множення ймовірностей $p(AB)=p(A)\cdot p_A(B)$. Оскільки $p(A)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$ і $p_A(B)=\frac{20}{23}$, то

$$p(AB)=\frac{1}{6}\cdot\frac{20}{23}=\frac{10}{69}\approx 0{,}145.$$

2.4 Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Теорема 2.3 Якщо подія A може відбутись тільки за умови появи однієї з подій (гіпотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків кожної з гіпотез на відповідні умовні ймовірності події A:

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n} p(H_i)\cdot p_{H_i}(A). \tag{2.13}$$

Доведення

За умовою гіпотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу, тобто вони єдино можливі та несумісні.

Оскільки гіпотези єдино можливі, а подія A за умовою теореми може відбутись лише з однією з них, то

$$A=H_1A+H_2A+\ldots+H_nA.$$

В силу несумісності гіпотез можна застосувати теорему додавання ймовірностей:

$$p(A)=p(H_1A)+p(H_2A)+\ldots+p(H_nA)=\sum_{i=1}^{n} p(H_iA).$$

За теоремою множення ймовірностей $p(H_iA)=p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)$. Підставивши ці рівності у попередній вираз одержуємо

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n} p(H_i)\cdot p_{H_i}(A).$$

Наслідком теореми множення та формули повної ймовірності є ***формула Байєса.***

Вона застосовується тоді, коли подія A, яка може відбутись тільки за появи однієї з подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу, відбулась і необхідно провести кількісне переоцінювання апріорних ймовірностей цих гіпотез $p(H_1), p(H_2), \ldots, p(H_n)$, відомих до випробування. Тобто необхідно знайти апостеріорні (одержувані після проведення випробування) умовні ймовірності гіпотез $p_A(H_1)$, $p_A(H_2)$,..., $p_A(H_n)$.

Для одержання шуканої формули запишемо теорему множення ймовірностей подій A та H_i в двох формах:

$$p(AH_i)=p(A)\cdot p_A(H_i)=p(H_i)\cdot p_{H_i}(A),$$

звідки

$$p_A(H_i)=\frac{p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)}{p(A)}, \tag{2.14}$$

або, враховуючи (2.13),

$$p_A(H_i)=\frac{p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)}. \qquad (2.15)$$

Формула (2.15) називається ***формулою Байєса.*** Значення цієї формули полягає в тому, що при появі події A, тобто у міру надходження нової інформації, ми можемо перевіряти та коригувати висунуті до випробування гіпотези. Байєсовський підхід дає змогу коригувати управлінські рішення в економіці, оцінки невідомих параметрів розподілу ознак, що вивчаються в статистичному аналізі і т.п.

Приклад 2.14 До торгової фірми надійшли телевізори від трьох постачальників у співвідношенні 1:4:5. Практика показує, що телевізори, які надходять від 1-го, 2-го та 3-го постачальників, не потребують ремонту протягом гарантійного терміну відповідно у 98, 88 та 92% випадків. 1) Знайти ймовірність того, що одержаний телевізор не потребує ремонту протягом гарантійного терміну; 2) Проданий телевізор потребував ремонту протягом гарантійного терміну. Від якого постачальника ймовірніше за все надійшов цей телевізор?

Розв'язування

1) Позначимо події:
H_i= «Телевізор надійшов до торгової фірми від i-го постачальника», $i=1,2,3$;
A= «Телевізор не потребує ремонту протягом гарантійного терміну».

За умовою

$$p(H_1)=\frac{1}{1+4+5}=0{,}1; \quad p_{H_1}(A)=0{,}98;$$

$$p(H_2)=\frac{4}{1+4+5}=0{,}4; \quad p_{H_2}(A)=0{,}88;$$

$$p(H_3)=\frac{5}{1+4+5}=0{,}5; \quad p_{H_3}(A)=0{,}92.$$

За формулою повної ймовірності (2.13)

$$p(A)=0{,}1\cdot 0{,}98+0{,}4\cdot 0{,}88+0{,}5\cdot 0{,}92=0{,}91.$$

2) Подія $\overline{A}$ = «Телевізор потребує ремонту протягом гарантійного терміну»; $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}91 = 0{,}09$.

За умовою

$$p_{H_1}(\overline{A}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02\,; \quad p_{H_2}(\overline{A}) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12\,; \quad p_{H_3}(\overline{A}) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08.$$

За формулою Байєса (2.15)

$$p_{\overline{A}}(H_1) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}02}{0{,}09} = 0{,}022\,; \qquad p_{\overline{A}}(H_2) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}12}{0{,}09} = 0{,}533\,;$$

$$p_{\overline{A}}(H_3) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}08}{0{,}09} = 0{,}444\,.$$

Таким чином, після появи події $\overline{A}$ ймовірність гіпотези H_2 збільшилась з $p(H_2) = 0{,}4$ до максимальної $p_{\overline{A}}(H_2) = 0{,}533$.

Якщо раніше найбільш ймовірною була гіпотеза H_3, то у світлі нової інформації (поява події $\overline{A}$) найбільш ймовірною стала гіпотеза H_2 – телевізор надійшов від другого постачальника.

Приклад 2.15 Відомо, що в середньому 95% продукції, що її випускає завод, відповідає стандарту. Спрощена схема контролю визначає придатною продукцію з ймовірністю 0,98, якщо вона стандартна, та з ймовірністю 0,06, якщо вона нестандартна. Визначити ймовірність того, що: 1) взятий навмання виріб пройде спрощений контроль; 2) виріб стандартний, якщо він: а) пройшов спрощений контроль; б) двічі пройшов спрощений контроль.

Розв'язування

1) Позначимо події:

H_1 = «Взятий навмання виріб стандартний»;

H_2 = «Взятий навмання виріб бракований»;

A = «Виріб пройшов спрощений контроль».

За умовою

$$p(H_1) = 0{,}95\,; \quad p(H_2) = 0{,}05\,; \quad p_{H_1}(A) = 0{,}98\,; \quad p_{H_2}(A) = 0{,}06\,.$$

Ймовірність того, що взятий навмання виріб пройде спрощений контроль, за формулою повної ймовірності (2.13):

$$p(A)=0{,}95\cdot 0{,}98+0{,}05\cdot 0{,}06=0{,}934.$$

2. а) Ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, стандартний, обчислюємо за формулою Байєса (2.15):

$$p_A(H_1)=\frac{0{,}95\cdot 0{,}98}{0{,}934}=0{,}997.$$

б) Нехай подія $A^*=$ «Вибраний навмання виріб двічі пройшов спрощений контроль». Тоді за теоремою множення ймовірностей

$$p_{H_1}(A^*)=0{,}98\cdot 0{,}98=0{,}9604 \text{ та } p_{H_2}(A^*)=0{,}06\cdot 0{,}06=0{,}0036.$$

За формулою Байєса (2.15)

$$p_{A^*}(H_1)=\frac{0{,}95\cdot 0{,}9604}{0{,}95\cdot 0{,}9604+0{,}05\cdot 0{,}0036}=0{,}9998.$$

Оскільки

$$p_{A^*}(H_2)=1-0{,}9998=0{,}0002$$

дуже мала, то гіпотезу H_2 про те, що виріб, який двічі пройшов спрощений контроль, є бракованим потрібно відкинути як практично неможливу подію.

Приклад 2.16 Два мисливці незалежно один від одного стріляли по мішені, роблячи по одному пострілу. Ймовірність влучного пострілу для першого мисливця дорівнює 0,8; для другого – 0,4. Після стрільби в мішені виявлено одну пробоїну. Яка ймовірність того, що вона належить: а) 1-му мисливцю; б) 2-му мисливцю?

Розв'язування

Позначимо події:

H_1= «Обидва мисливці промахнулись»;

H_2= «Обидва мисливці влучили в мішень»;

H_3= «1-ий мисливець влучив в мішень, а 2-ий промахнувся»;

H_4= «2-ий мисливець влучив в мішень, а 1-ий промахнувся»;

A= «В мішені одна пробоїна (одне влучення)».

Знайдемо ймовірності гіпотез та умовні ймовірності події A для цих гіпотез:

$$p(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}12\,; \quad p_{H_1}(A)=0\,;$$

$$p(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32\,; \quad p_{H_2}(A)=0\,;$$

$$p(H_3)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48\,; \quad p_{H_3}(A)=1\,;$$

$$p(H_4)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08\,; \quad p_{H_4}(A)=1\,.$$

Тепер за формулою Байєса (2.15)

$$p_A(H_3)=\frac{0{,}48\cdot 1}{0{,}12\cdot 0+0{,}32\cdot 0+0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1}=\frac{6}{7}=0{,}857\,;$$

$$p_A(H_4)=\frac{0{,}08\cdot 1}{0{,}12\cdot 0+0{,}32\cdot 0+0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1}=\frac{1}{7}=0{,}143\,,$$

Тобто, в шість разів більш ймовірно, що в мішень влучив 1-ий мисливець.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте та доведіть теорему додавання ймовірностей.
2. Чому дорівнює сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу? Відповідь обґрунтуйте.
3. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій?
4. Наведіть приклад, який би підтвердив, що теорема додавання ймовірностей застосовується тільки для несумісних подій.
5. Що називають умовною ймовірністю? Наведіть приклад.
6. Сформулюйте та доведіть теорему множення ймовірностей.
7. Узагальніть теорему множення ймовірностей на випадок довільної кількості подій.
8. Які події називають незалежними? Наведіть приклад.
9. Доведіть, що якщо подія B не залежить від A, то і подія A не залежить від B.
10. Що лежить в основі незалежності подій? Наведіть приклад.
11. Покажіть, що попарна незалежність декількох подій ще не означає їх незалежності в сукупності.
12. Чому дорівнює ймовірність суми двох сумісних подій? Доведіть дану формулу.
13. Якого вигляду набуває формула обчислення суми ймовірностей для випадку двох і більше сумісних подій?
14. Запишіть та доведіть формулу повної ймовірності.
15. Виведіть формулу Байєса.
16.* В журі із трьох чоловік два члени незалежно один від одного приймають справедливе рішення з ймовірністю p, а третій для прийняття рішення підкидає монету (остаточне рішення виноситься більшістю голосів). Журі із однієї особи приймає справедливе рішення з ймовірністю p. Яке з цих журі приймає справедливе рішення з більшою ймовірністю?
17.* Скільки в середньому раз потрібно підкинути гральний кубик до появи шістки?
18.* Три в'язні A, B, C однакової зразкової поведінки подали прохання щодо дострокового звільнення. Адміністрація вирішила звільнити двох з трьох. Таке рішення відоме в'язням, але вони не знають хто саме ці двоє. У в'язня A в охороні є товариш, який знає, кого саме випустять, але A вважає неетичним запитувати, чи буде його звільнено. Однак хоче запитати, чи буде звільнений в'язень B чи C. Перш ніж запитати, він оцінює ймовірність свого звільнення як $2/3$. A думає, що якщо охоронець скаже «B буде звільнено», то його шанси зменшаться до 0,5, оскільки в цьому випадку будуть звільнені або A та B, або B та C. Однак A помиляється в своїх розрахунках. Поясніть це явище.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.1

1. У двох партіях 71% і 47% доброякісних виробів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:

   а) хоч би один бракований виріб;
   б) два бракованих вироби;
   в) один бракований виріб?

2. Ймовірність того, що ціль вражена при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,61, другим – 0,55. Перший зробив 2, а другий 3 постріли. Знайти ймовірність того, що ціль не вражена.

3. Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень влучить тільки один із стрільців.

4. При увімкненні запалювання двигун починає працювати з ймовірністю p. Знайти ймовірність того, що двигун почне працювати при другому увімкненні запалювання.

5. В одному ящику 5 білих і 10 червоних куль, в другому – 10 білих і 5 червоних. Навмання з кожного ящика виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що:

   а) серед них одна біла й одна червона куля;
   б) хоч би одна біла куля;
   в) обидві кулі білі.

6. Ймовірність того, що ціль вражена при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,62, другим – 0,54. Перший зробив 3, а другий 2 постріли. Знайти ймовірність того, що ціль не вражена.

7. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених виробів тільки один стандартний.

8. Над виготовленням деякого виробу працюють послідовно k робітників; якість виробу при передачі наступному робітникові не перевіряється. Перший робітник допускає брак з ймовірністю p_1, другий – з ймовірністю

p_2 і т. д. Знайти ймовірність того, що при виготовленні буде допущено брак.

9. У двох партіях 75% і 43% доброякісних виробів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:

а) хоч би один бракований виріб;

б) два бракованих вироби;

в) один бракований і один доброякісний виріб?

10. Ймовірність того, що ціль вражена при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,74, другим – 0,42. Обидва стрільці зробили по 2 постріли. Знайти ймовірність того, що ціль не вражена.

11. Ймовірність влучення в ціль першим стрільцем дорівнює p_1, а другим – p_2. Стрільці зробили постріли одночасно. Яка ймовірність того, що перший із них влучить в ціль, а другий – ні?

12. При одному циклі огляду радіолокаційною станцією, яка стежить за космічним об'єктом, об'єкт виявляється з ймовірністю p. Виявлення об'єкта у кожному циклі відбувається незалежно від інших. Знайти імовірність того, що при n циклах об'єкт буде виявлено.

13. В одному ящику 7 білих і 8 червоних куль, в другому – 9 білих і 6 червоних. Навмання з кожного ящика виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що:

а) серед них одна біла й одна червона куля;

б) хоч би одна червона куля;

в) обидві червоні кулі.

14. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Імовірність того, що формула міститься в I, II, III довіднику відповідно дорівнює 0,8; 0,6 і 0,7. Знайти ймовірність того, що формула міститься, принаймні, в двох довідниках.

15. Кожна із чотирьох незалежних подій може відбуватися з ймовірностями 0,012; 0,010; 0,006 і 0,002; відповідно. Знайти ймовірність того, що в результаті досліду відбудеться хоч би одна із подій.

16. Обчислювальна машина складається з n блоків. Надійність протягом часу T першого блока дорівнює p_1, другого – p_2 і т.д. Блоки перестають працювати незалежно один від одного. При відмові будь-якого блока перестає працювати машина. Знайти ймовірність того, що машина перестане працювати за час T.

17. В одному ящику 8 пофарбованих і 4 непофарбованих вироби, в другому – 10 пофарбованих та 2 непофарбованих вироби. Навмання з кожного ящика виймають по одному виробу. Знайти ймовірність того, що:

а) серед них немає пофарбованих виробів;

б) хоч би один пофарбований виріб;

в) один пофарбований і один непофарбований.

18. Ймовірність того, що ціль вражена при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,65, другим – 0,5. Перший зробив 2, а другий 4 постріли. Знайти ймовірність того, що ціль не вражена.

19. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Імовірність того, що формула міститься в I, II, III довіднику, відповідно дорівнює 0,7; 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що формула міститься тільки в одному довіднику.

20. У двох партіях 86% і 32% доброякісних виробів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:

а) хоч би один доброякісний виріб;

б) один доброякісний виріб;

в) два браковані вироби?

21. Знайти ймовірність того, що партія із 40 виробів, серед яких 2 браковані, буде прийнята при випробуванні, якщо умовами прийому допускається не більше одного бракованого приладу із 30.

22. Два гравці по черзі кидають монету. Вважається, що виграє той гравець, у якого раніше випаде герб. Перший кидок робить гравець A, другий – B, третій – A і т.д. Знайти ймовірність того, що:

а) виграв гравець B до 6-го кидка;

б) виграв гравець A не пізніше 6-го кидка.

23. Чотири мисливці домовились стріляти у дичину в певній послідовності. Наступний мисливець робить постріл тільки у випадку промаху попереднього. Ймовірність влучення для першого мисливця дорівнює 0,6, для другого – 0,7, для третього і четвертого – 0,8. Знайти ймовірність того, що буде зроблено: а) один; б) два; в) три; г) чотири постріли.

24. Виготовляються деталі для приладу у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Деталь вважається придатною, якщо відхилення розміру кожного з ребер від заданого не перевищує 0,01. Ймовірність відхилень,

які перевищують 0,01, складає для довжини p_1=0,06, для ширини p_2=0,04, для висоти p_3=0,1. Знайти ймовірність непридатності деталі.

25. Ймовірність того, що потрібна складальнику деталь міститься в I, II, III ящику, відповідно дорівнює 0,7; 0,4 і 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь міститься тільки в одному ящику.

26. Два мисливці стріляють у вовка, причому кожен робить по два постріли. Для першого мисливця ймовірність влучення дорівнює 0,6, для другого – 0,7. Яка ймовірність влучення у вовка хоч би при одному пострілі?

27. У двох партіях 75% і 33% доброякісних виробів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:

а) хоч би один бракований виріб;
б) два бракованих вироби;
в) один доброякісний, один бракований виріб?

28. Знайти ймовірність того, що партія із 30 виробів, серед яких 2 браковані, буде прийнята при випробуванні, якщо умовами прийому допускається не більше одного бракованого виробу з 10.

29. Є m радіолокаційних станцій, кожна з яких за один цикл огляду виявляє об'єкт з імовірністю p (незалежно від інших циклів і від інших станцій). За час T кожна станція встигає зробити n циклів. Знайти ймовірність того, що об'єкт буде виявлений кожною із станцій.

30. У двох партіях 74% і 44% доброякісних виробів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:

а) хоч би один доброякісний виріб;
б) два доброякісні вироби;
в) один доброякісний і один бракований виріб?

31. Ймовірність того, що потрібна складальнику деталь міститься в I, II, III і IV ящику, відповідно дорівнює 0,4; 0,7; 0,6 і 0,8. Знайти ймовірність того, що деталь міститься в двох ящиках.

32. Дві гармати ведуть стрілянину по танку. Ймовірність влучення в танк для першої гармати дорівнює 0,6, для другої – 0,7. Знайти ймовірність хоч би одного влучення в танк, якщо з кожної гармати зроблено по 3 постріли.

33. Ймовірність того, що ціль вражена при одному пострілі першим стрільцем, дорівнює 0,73, другим – 0,43. Перший зробив 2, а другий – 1 постріл. Знайти ймовірність того, що ціль не вражена.

34. В одному ящику 12 червоних і 6 синіх ґудзиків. Навмання виймають 2 ґудзики. Яка ймовірність того, що:

а) ґудзики одноколірні;

б) один ґудзик червоний та один синій;

в) обидва ґудзики червоні?

35. Ймовірність того, що при одному вимірюванні деякої фізичної величини буде допущена похибка, яка перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Зроблено 3 незалежні виміри. Знайти ймовірність того, що тільки при одному із них допущено похибку, яка перевищує задану точність.

36. Припустимо, що для однієї торпеди ймовірність потопити корабель дорівнює 0,5. Яка імовірність того, що 4 торпеди потоплять корабель, якщо для цього достатньо одного влучення торпеди в ціль?

37. Прилад, який працює протягом часу t, складається з трьох вузлів, кожен з яких незалежно від інших може протягом цього часу відмовити. Відмова хоча б одного вузла призводить до відмови приладу в цілому. Ймовірність безвідмовної роботи першого вузла дорівнює 0,7, другого – 0,8 і третього – 0,9. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу.

38. Два стрільці А та В по черзі стріляють в мішень. Для першого стрільця ймовірність влучення дорівнює 0,8, для другого – 0,6. Перший постріл робить стрілець А, другий – В, третій – А і т.д. Знайти ймовірність того, що:

а) в мішень влучив стрілець В до 5-го пострілу;

б) в мішень влучив стрілець А не пізніше 5-го пострілу.

39. В ящику є 10 деталей, серед яких 4 пофарбовані. Складальник навмання взяв 3 деталі. Знайти ймовірність того, що хоч би одна із взятих деталей пофарбована.

40. На складі знаходиться 60 виробів, виготовлених 3-ма бригадами. З них 30 виробів виготовлені першою бригадою, 16 – другою і 14 – третьою. Знайти ймовірність надходження для складання деталі, виготовленої другою або третьою бригадою.

41. В першій урні 1 біла і 4 чорні кулі, в другій – 2 білі і 3 чорні кулі, в третій – 3 білі і 2 чорні кулі. З кожної урни вийняли по одній кулі. Знайти ймовірність того, що серед них буде 1 біла і 2 чорні кулі.

42. Достатньою умовою для складання колоквіуму є правильна відповідь на одне із двох питань, які запропоновані викладачем студентові. Студент не знає восьми питань з тих 40, які можуть бути запропоновані на колоквіумі. Яка ймовірність складання колоквіуму?

43. По каналу зв'язку передається 5 повідомлень. Кожне з них (незалежно від інших) з ймовірністю 0,2 спотворюється. Знайти ймовірність того, що:

а) всі повідомлення будуть передані без спотворення;

б) не менше, ніж 2 повідомлення буде спотворено.

44. У двох партіях 73% і 45% доброякісних виробів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:

а) хоч би один бракований виріб;

б) два бракованих вироби;

в) один бракований виріб?

45. Булочки, які випускає хлібозавод, мають такий розподіл за масою: найменші 98 г – 5%, найбільші 108 г – 10%, решта – 85% булочок має нормальну масу (98 – 102 г). З величезної партії навмання беруть 2 булочки. Знайти ймовірність того, що:

а) обидві булочки мають нормальну масу;

б) одна булочка має найменшу масу, а друга – найбільшу?

46. Ймовірність хоч би одного влучення в ціль при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі.

47. В обчислювальній лабораторії є 6 основних автоматів та 4 напівавтомати. Ймовірність того, що за час виконання деякого розрахунку автомат вийде із ладу, дорівнює 0,95, для напівавтомата ця ймовірність дорівнює 0,8. Студент виконує розрахунок на навмання взятій машині. Знайти ймовірність того, що до закінчення розрахунку машина не вийде з ладу.

48. Робітник обслуговує 3 верстати. Ймовірність того, що протягом години верстат не вимагатиме уваги від робітника, для першого верстата дорівнює 0,3, для другого – 0,5 і для третього – 0,6. Знайти ймовірність того, що:

а) протягом години хоч би один верстат не вимагатиме уваги від робітника;

б) протягом 2-х годин жоден верстат не вимагатиме уваги від робітника.

49. На випробному стенді в певних умовах випробовують 5 приладів. Ймовірність того, що протягом часу T відмовить деякий з цих приладів, дорівнює 0,01 й однакова для всіх приладів. Знайти ймовірність того, що протягом часу T:

а) відмовить хоча б один із приладів, які випробовуються;

б) не відмовить жоден із 5-ти приладів;

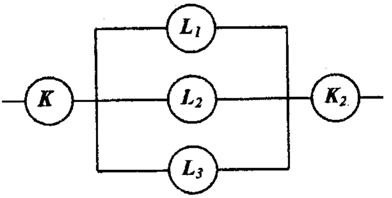
в) всі прилади відмовлять.

50. Із партії виготовлених мікросхем, серед яких 20 придатних і 5 бракованих, для контролю взято 8 штук. Знайти ймовірність того, що серед них:

а) всі мікросхеми придатні;

б) 3 браковані мікросхеми.

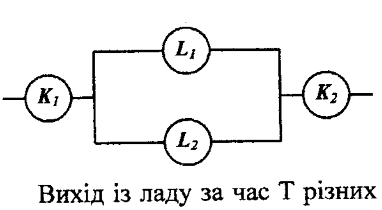
51. Ділянка електричного кола має вигляд:



Елемент	K	K_2	L_1	L_2	L_3
Ймовірність	0,6	0,5	0,4	0,7	0,5

Вихід із ладу за час Т різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу Т.

52. Ділянка електричного кола має вигляд:

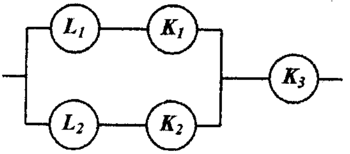


Елемент	K_1	K_2	L_1	L_2
Ймовірність	0,3	0,7	0,9	0,8

Вихід із ладу за час Т різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу Т.

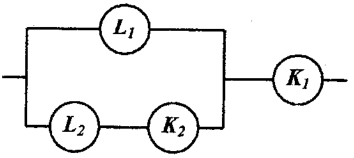
53. Вихід із ладу за час Т різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.).

Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T, якщо ділянка електричного кола має вигляд:



Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2
Ймовірність	0,5	0,4	0,6	0,8	0,7

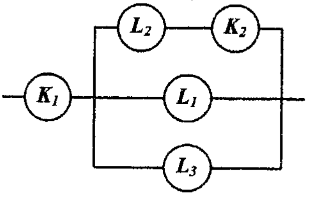
54. Ділянка електричного кола має вигляд:



Елемент	K_1	K_2	L_1	L_2
Ймовірність	0,6	0,5	0,4	0,7

Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T.

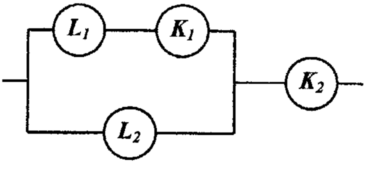
55. Ділянка електричного кола має вигляд:



Елемент	K_1	K_2	L_1	L_2	L_3
Ймовірність	0,5	0,7	0,6	0,8	0,9

Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T.

56. Ділянка електричного кола має вигляд:

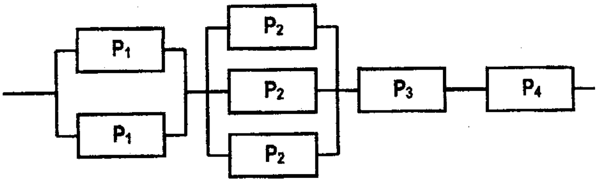


Елемент	K_1	K_2	L_1	L_2
Ймовірність	0,5	0,7	0,6	0,8

Вихід із ладу за час Т різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу Т.

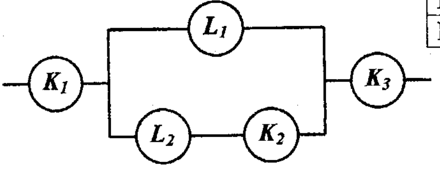
57. В технічній системі будують не всі, а тільки деякі (найменш надійні) вузли. Надійності вузлів проставлені на рисунку. Знайти надійність Р системи.

P_1	P_2	P_3	P_4
0,7	0,6	0,9	0,95



58. Ділянка електричного кола має вигляд:

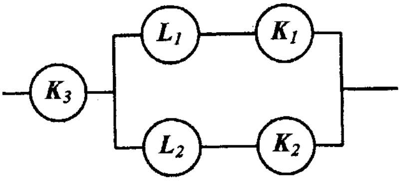
Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2
Ймовірність	0,5	0,6	0,4	0,9	0,8



Вихід із ладу за час Т різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу Т.

59. Ділянка електричного кола має вигляд:

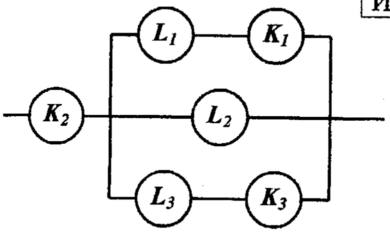
Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2
Ймовірність	0,6	0,5	0,8	0,4	0,7



Вихід із ладу за час Т різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу Т.

60. Ділянка електричного кола має вигляд:

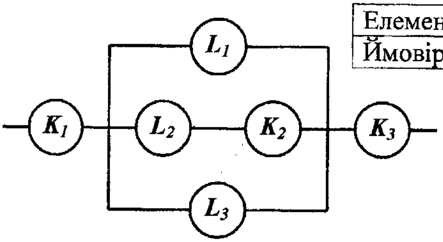
Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2	L_3
Ймовірність	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	0,7



Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T.

61. Ділянка електричного кола має вигляд:

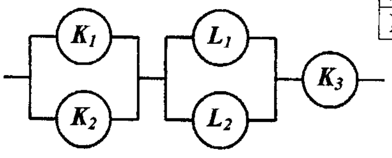
Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2	L_3
Ймовірність	0,5	0,6	0,4	0,7	0,75	0,8



Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T.

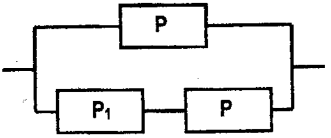
62. Ділянка електричного кола має вигляд:

Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2
Ймовірність	0,6	0,8	0,7	0,85	0,9



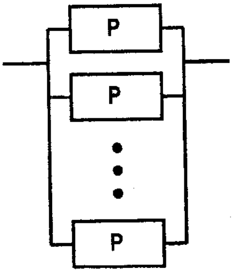
Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T.

63. Для підвищення надійності приладу він дублюється точно таким самим приладом.



Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) кожного приладу дорівнює p. При виході з ладу першого приладу відбувається миттєве перемикання на другий. Надійність перемикального пристрою П, який забезпечує перемикання з першого приладу, що відмовив, на другий, дорівнює p_1. Знайти надійність системи, яка складається з двох приладів, що дублюють один одного. $p=0{,}85$; $p_1=0{,}54$.

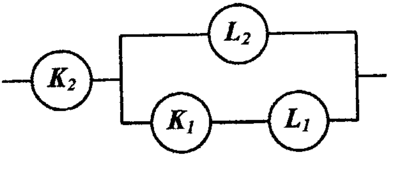
64. Для підвищення надійності прилад дублюється $(n-1)$ точно такими самими приладами.



Надійність кожного приладу дорівнює P. Знайти надійність P системи. Скільки потрібно взяти приладів, що підвищити надійність до заданої p_1?

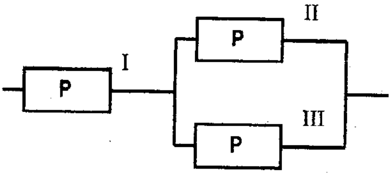
65. Ділянка електричного кола має вигляд:

Елемент	K_1	K_2	L_1	L_2
Ймовірність	0,6	0,5	0,7	0,9



Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T.

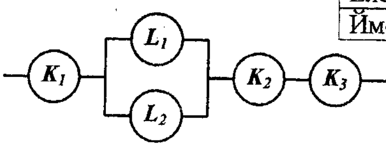
66. Прилад складається з 3-х вузлів. В I вузлі – n_1 елемент, в II – n_2, в III – n_3. Для роботи приладу, безумовно, необхідний I вузол, два інших вузли II і III дублюють один одного.



Надійність кожного елемента вузла одна і та ж сама і дорівнює p. Вихід із ладу одного елемента означає вихід із ладу всього вузла. Елементи виходять із ладу незалежно один від одного. Знайти надійність приладу P.

67. Ділянка електричного кола має вигляд:

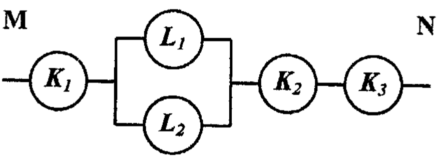
Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2
Ймовірність	0,6	0,5	0,7	0,85	0,9



Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T.

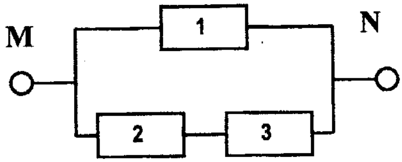
68. Електричне коло між точками M и N складене за схемою:

Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2
Ймовірність	0,6	0,5	0,3	0,4	0,7



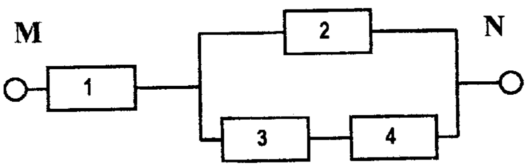
Вихід з ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають такі імовірності (табл.). Визначити ймовірність розриву електричного кола за зазначений проміжок часу T.

69. Електричне коло складене за схемою:



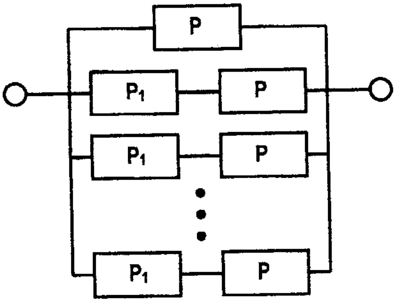
Елементи 1, 2, 3 виходять із ладу незалежно один від одного з ймовірностями 0,2; 0,1; 0,4 відповідно. Знайти ймовірність розриву електричного кола.

70. Електричне коло складене з 4-х елементів за схемою:



Елементи 1, 2, 3, 4 виходять із ладу незалежно один від одного з ймовірностями 0,3; 0,1; 0,2; 0,25 відповідно. Знайти ймовірність розриву електричного кола.

71.* Для підвищення надійності прилад дублюється (n–1) іншими такими самими приладами.



Надійність (безвідмовність роботи) кожного приладу дорівнює p. Знайти надійність P системи, якщо для вмикання кожного дублюючого приладу застосовується пристрій з надійністю p_1. Скільки потрібно взяти приладів, що підвищити надійність до заданої P?

72.* k кульок розкидають випадковим чином та незалежно одна від одної по n лунках, що розташовані одна за одною вздовж прямої лінії ($k < n$). Знайти ймовірність того, що вони займуть k сусідніх лунок.

73.* В лотереї n білетів, з яких l виграшних. Дехто купив k білетів. Знайти ймовірність того, що він виграє хоча б на один білет.

74.* Обстрілюють деякий об'єкт n незалежними пострілами. Об'єкт складається з k частин (елементів). Ймовірність влучення в i-ий елемент при одночасному пострілі дорівнює p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Знайти ймовірність $P_{l_0, l_1, \ldots, l_k}$ того, що в результаті стрільби буде l_0 промахів, l_1 влучення в перший елемент, і т.д., загалом l_i влучень в i-ий елемент ($i = 1, 2, \ldots, k$), $\sum_{i=1}^{k} l_i = n$.

75.* В умовах попередньої задачі знайти ймовірність знищення об'єкта, якщо для цього потрібно знищити не менш, ніж два елементи, а для знищення елемента достатньо одного влучення.

76.* N стрільців по черзі стріляють по одній мішені. Ймовірність влучення в мішень для кожного стрільця дорівнює p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Стрільба ведеться до першого влучення. Виграє той стрілець, який першим влучить у мішень. У кожного стрілка є запас з n патронів. Визначити ймовірність того, що виграє i-ий стрілець.

Завдання 2.2

1. Із 1000 ламп 400 належать до першої партії, 350 - до другої, а решта до третьої. В першій партії 6%, в другій - 5%, в третій - 4% бракованих ламп. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа - бракована.

2. В першій урні 9 білих і 1 чорна куля, в другій - 2 білих і 6 чорних. З першої урни в другу переклали 3 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона - біла.

3. До магазину надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 60%, другий - 30%, третій -10%. Серед виробів першого заводу 85%, другого 70%, третього 80% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений третім заводом.

4. Три стрільці роблять по одному пострілу в одну і ту ж саму мішень. Ймовірність влучень у мішень при одному пострілі для першого – 0,6; для другого – 0,4; для третього – 0,8. Яка ймовірність того, що другий стрілець промахнувся, якщо після пострілу в мішені виявилося дві пробоїни.

5. Відомо, що 92% випущених заводом виробів відповідає стандартові. Спрощена схема контролю визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,96 і нестандартну з ймовірністю 0,06. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, не відповідає стандартові.

6. В альбомі 18 чистих і 10 гашених марок. З них навмання виймаються 3 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки – чисті.

7. Із 1000 ламп 430 належать до першої партії, 180 - до другої, а решта до третьої. В першій партії 4%, в другій – 6%, в третій – 3% бракованих ламп. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа – бракована.

8. В першій урні 7 білих і 3 чорних кулі, в другій – 5 білих і 1 чорна. З першої урни в другу переклали 4 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність що вона – біла.

9. В альбомі 7 чистих і 6 гашених марок. З них навмання виймаються 2 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки - чисті.

10. На склад надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 42%, другий - 38%, третій - 20%. Серед виробів першого заводу 80%, другого 70%, третього 85% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений другим заводом.

11. Сигнали із пунктів A і B в пункт C передаються із спотвореннями. Ймовірність спотворення з A дорівнює 0,4; із B – 0,5. Співвідношення між числом передач дорівнює K_A:K_B = 5:3. Знайти ймовірність того, що одержаний сигнал спотворений. З якого пункту, найімовірніше, передано спотворений сигнал?

12. Із 1000 магнітофонів 650 належать до першої партії, 220 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 3%, в другій – 6%, в третій – 5% бракованих виробів. Навмання вибирається один магнітофон. Знайти ймовірність того, що вибраний магнітофон – справний.

13. В першій партії 25 стандартних виробів і 3 нестандартних, в другій – 40 стандартних виробів і 2 нестандартних. Із першої партії в другу перекладено 14 виробів. Після цього з другої партії виймається навмання 1 виріб. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб – стандартний.

14. В альбомі 6 чистих і 6 гашених марок. З них навмання виймається 1 марка (яка може бути як чистою, так і гашеною), піддається спецгасінню і повертається в альбом. Після цього знов навмання виймаються 2 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки - гашені.

15. Три мисливці роблять по одному пострілу в одну і ту ж саму мішень. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі для першого мисливця – 0,7; для другого – 0,6; для третього – 0,45. Яка ймовірність того, що третій мисливець промахнувся, якщо після пострілу в мішені виявилося дві пробоїни.

16. До магазину надходять газові лічильники з трьох заводів, причому перший завод постачає 20%, другий – 35%, третій – 45%. Серед виробів першого заводу 80%, другого 70%, третього 90% першосортних. Купуємо один виріб, він і виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний газовий лічильник випущений першим заводом.

17. В партії із 100 виробів кількість бракованих не може перевищувати п'яти, причому всі значення (0, 1, 2, 3, 4, 5) числа бракованих виробів однаково можливі. Відомо, що серед 10 навмання взятих виробів 9 виявились придатними. Знайти ймовірність того, що решта виробів також придатна.

18. Із 1000 електроплиток 180 належать до першої партії, 270 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 3%, в другій – 5%, в третій – 4% бракованих виробів. Навмання вибирається одна електроплитка. Знайти ймовірність того, що вибрана електроплитка – справна.

19. В першій урні 40 білих і 8 чорних куль, в другій – 20 білих і 4 чорних. З першої урни в другу переклали 3 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона – чорна.

20. В альбомі 7 чистих і 8 гашених марок. З них навмання виймаються 4 марки (які можуть бути як чистими, так і гашеними), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки – чисті.

21. До магазину надходять пилососи з трьох заводів, причому перший завод постачає 25%, другий – 45%, третій – 30%. Серед виробів першого заводу 86%, другого 60%, третього 80% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний пилосос випущений другим заводом.

22. На спостережній станції встановлено 3 радіолокатори різної конструкції. Ймовірність виявити ціль за допомогою першого радіолокатора дорівнює 0,81, другого – 0,75; третього – 0,9. Спостерігач навмання включив один радіолокатор. Яка ймовірність виявлення цілі? Яка ймовірність того, що ціль виявлена другим радіолокатором?

23. На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю 0,8 надходить суміш завади з корисним сигналом, з ймовірністю 0,2 – тільки завада.

Якщо надходить корисний сигнал з завадою, то пристрій реєструє наявність деякого сигналу з ймовірністю 0,7; якщо тільки завада – то з ймовірністю 0,3. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність деякого сигналу. Знайти ймовірність того, що до його складу входить корисний сигнал.

24. Мікросхема може належати до однієї із трьох партій, причому співвідношення між кількістю мікросхем в партіях дорівнює N1:N2:N3= 3:2:5. Ймовірність того, що мікросхема працює задану кількість годин, кожної з партій відповідно дорівнює 0,65; 0,8 і 0,75. Знайти ймовірність того, що мікросхема пропрацює задану кількість годин. Ймовірніше, до якої партії вона належить?

25. На склад надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 55%, другий – 25%, третій – 20%. Серед виробів першого заводу 70%, другого 80%, третього 75% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений другим заводом.

26. В альбомі 13 чистих і 11 гашених марок. З них навмання виймаються 2 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 4 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

27. В першій урні 6 білих і 4 чорних кулі, в другій – 1 біла і 7 чорних. З першої урни в другу переклали 2 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона – біла.

28. Із 1000 ламп 360 належать до першої партії, 600 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 4%, в другій – 3%, в третій – 5% бракованих ламп. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа - бракована.

29. Із 1000 виробів 700 належать до першої партії, 90 до другої, а решта до третьої. В першій партії 8%, в другій – 5%, в третій – 4% бракованих виробів. Навмання вибирається один виріб. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб бракований.

30. В першій урні 3 білих і 2 чорні кулі, в другій – 4 білих і 4 чорних. З першої урни в другу переклали 2 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

31. До магазину надходять вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 55%, другий – 25%, третій – 20%. Серед виробів першого заводу 70%, другого 80%, третього 90% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений третім заводом.

32. Мікросхема може належати до однієї із двох партій, причому співвідношення між кількістю мікросхем в партіях дорівнює N1:N2 = 7:8. Ймовірності того, що лампа пропрацює задану кількість годин, для цих партій відповідно дорівнюють 0,85 і 0,7. Знайти ймовірність того, що мікросхема пропрацює задану кількість годин, і що ця лампа належить до першої партії?

33. Два автомати виготовляють деталі, які надходять до складального цеху. Ймовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,08; а на другому – 0,12. Продуктивність першого автомата вдвічі вища, ніж у другого. Ймовірніше на якому автоматі виготовлена нестандартна деталь серед тих, що надійшли до складу?

34. В першій урні 5 білих і 5 чорних куль, в другій – 4 білих і 10 чорних. З першої урни в другу переклали 2 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

35. В альбомі 12 чистих і 7 гашених марок. З них навмання виймаються 2 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 4 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

36. На базу надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 40%, другий – 30%, третій – 30%. Серед виробів першого заводу 80%, другого 90%, третього 90% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений другим заводом.

37. Сигнали із пунктів B і C в пункт *O* передаються із спотвореннями. Ймовірність спотворення з B дорівнює 0,3 із C – 0,4. Співвідношення між числом передач дорівнює $M_1:M_2=1:2$. Знайти ймовірність того, що одержаний сигнал спотворений. Ймовірніше із якого пункту передано спотворений сигнал?

38. Із 1000 виробів 80 належать до першої партії, 710 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 6%, в другій – 5%, в третій – 4% бракованих

виробів. Навмання вибирається один виріб. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб бракований.

39. В першій урні 13 білих і 12 чорних куль, в другій – 4 білих і 6 чорних. З першої урни в другу переклали 5 куль, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність, що вона біла.

40. В альбомі 9 чистих і 6 гашених марок. З них навмання виймаються 2 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

41. До магазину надходять світильники з трьох заводів, причому перший завод постачає 40%, другий – 30%, третій – 30%. Серед виробів першого заводу 80%, другого 80%, третього 90% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний світильник випущений другим заводом.

42. Сигнали із пунктів В і С в пункт В передаються із спотвореннями. Ймовірність спотворення з В дорівнює 0,4; із С – 0,25. Співвідношення між числом передач дорівнює $K_B:M_C = 8:12$. Знайти ймовірність того, що одержаний сигнал спотворений. Ймовірніше, із якого пункту передано спотворений сигнал?

43. Два автомати виготовляють деталі, які надходять до складального цеху. Ймовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі – 0,11; а на другому – 0,09. Продуктивність другого автомата вдвічі вища, ніж першого. Знайти ймовірність того, що на конвеєр надійшла стандартна деталь, і що ця деталь виготовлена першим автоматом?

44. Із 1000 виробів 630 належать до першої партії, 230 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 5%, в другій – 4%, в третій – 3% бракованих виробів. Навмання вибирається один виріб. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб бракований.

45. В першій урні 1 біла і 9 чорних куль, в другій – 3 білих і 3 чорних. З першої урни в другу переклали 4 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

46. На базу надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 46%, другий – 24%, третій – 30%. Серед виробів першого заводу 90%, другого 75%, третього 80% першосортних. Купуємо один

виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений другим заводом.

47. Три автомати виготовляють деталі, які надходять до складального цеху. Ймовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,04; на другому – 0,09, а на третьому – 0,05. Продуктивність першого і другого автоматів вдвічі вища, ніж третього. Ймовірніше на якому автоматі виготовлена стандартна деталь, яка надійшла до складу?

48. Телеграфне повідомлення складається із сигналів "крапка" і "тире". Статистичні властивості завад такі, що спотворення в середньому дорівнює 25% повідомлень "крапка" і 20% повідомлень "тире". Відомо, що серед переданих сигналів "крапка" і "тире" зустрічаються у співвідношенні 3:2. Знайти ймовірність того, що прийнято переданий сигнал, якщо прийнято сигнал"крапка".

49. Транзистор може належати до однієї із двох партій, причому співвідношення між кількістю транзисторів в партіях дорівнює $M_1:M_2 = 6:8$. Ймовірності того, що транзистор працює задану кількість годин, для цих партій відповідно дорівнюють 0,85 і 0,7. Знайти ймовірність того, що транзистор пропрацює задану кількість годин, і що цей транзистор належить до першої партії?

50. На склад надходять однотипні вироби з трьох заводів. Причому перший завод постачає 40%, другий – 20%, третій – 40%. Серед виробів першого заводу 85%, другого 90%, третього 80% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений першим заводом.

51. Два автомати виготовляють деталі, які надходять до складального цеху. Ймовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,03; а на другому – 0,08. Продуктивність першого автомата вдвічі вища, ніж другого. Ймовірніше, на якому автоматі виготовлена нестандартна деталь?

52. Із 1000 виробів 500 належать до першої партії, 320 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 5%, в другій 3%, в третій 6% бракованих виробів. Навмання вибирається один виріб. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб бракований.

53. В першій урні 7 чорних і 3 білих кулі, в другій – 5 білих і 2 чорних. З першої урни в другу переклали 3 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

54. Сигнали із пунктів В і С в пункт А передаються із спотвореннями. Ймовірність спотворення з В дорівнює 0,25; із С – 0,3. Співвідношення між числом передач дорівнює $M_в:M_с = 8:6$. Знайти ймовірність того, що одержаний сигнал спотворений і що він переданий із пункту С?

55. Один із чотирьох стрільців викликається на лінію вогню і робить постріл. Ціль вражена. Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,4; для другого – 0,6; для третього – 0,8 і для четвертого – 0,5. Знайти ймовірність того, що постріл зробив четвертий стрілець.

56. До магазину надходять світильники з трьох заводів, причому перший завод постачає 42%, другий – 28%, третій – 30%. Серед виробів першого заводу 85%, другого 90%, третього 80% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний світильник випущений другим заводом.

57. В альбомі 13 чистих і 8 гашених марок. З них навмання виймаються 5 марок (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймається 2 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

58. Із 1000 газових лічильників 450 належать до першої партії, 280 до другої, а решта до третьої. В першій партії 3,5%, в другій – 4%, в третій – 2% бракованих виробів. Навмання вибирається один лічильник. Знайти ймовірність того, що вибраний лічильник бракований.

59. В першій урні 2 білих і 3 чорних кулі, в другій – 7 білих і 1 чорна. З першої урни в другу переклали 2 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

60. На склад надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 40%, другий – 45%, третій – 15%. Серед виробів першого заводу 70%, другого 85%, третього 90% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений третім заводом.

61. Два автомати виготовляють деталі, які надходять до складального цеху. Ймовірність одержати нестандартну деталь на першому автоматі дорівнює 0,12; а на другому – 0,2. Продуктивність першого автомата вдвічі вища, ніж другого. Знайти ймовірність того, що на конвеєр надійшла стандартна деталь, і що ця деталь виготовлена першим автоматом?

62. Сигнали із пунктів В і С в пункт A передаються із спотвореннями. Ймовірність спотворення з В дорівнює 0,4; із С – 0,55. Співвідношення між числом передач дорівнює $H_B:H_C$ =9:7. Знайти ймовірність того, що одержаний сигнал спотворений. Ймовірніше, із якого пункту передано спотворений сигнал?

63. Із 1000 фотоапаратів 270 належать до першої партії, 640 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 4%, в другій – 2%, в третій – 3% бракованих виробів. Навмання вибирається один виріб. Знайти ймовірність того, що вибраний фотоапарат бракований.

64. В першій урні 8 чорних і 3 білих кулі, в другій – 3 білих і 1 чорна. З першої урни в другу переклали 1 кулю, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

65. В альбомі 12 чистих і 10 гашених марок. З них навмання виймаються 4 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймається 2 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

66. На базу надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 35%, другий – 40%, третій – 25%. Серед виробів першого заводу 75%, другого 70%, третього 90% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений першим заводом.

67. Мікросхема може належати до однієї із двох партій, причому співвідношення між кількістю мікросхем в партіях дорівнює $N_1:N_2 = 9:5$. Ймовірності того, що мікросхема працює задану кількість годин, для цих партій відповідно дорівнюють 0,65 і 0,8. Знайти ймовірність того, що мікросхема пропрацює задану кількість годин. Ймовірніше, до якої партії вона належить?

68. Два автомати виготовляють деталі, які надходять до складального цеху. Ймовірність одержання нестандартної деталі на першому

автоматі дорівнює 0,07; а на другому – 0,18. Продуктивність другого автомата вдвічі вища, ніж першого. Знайти ймовірність того, що на конвеєр надійшла стандартна деталь і що ця деталь виготовлена першим автоматом?

69. Із 1000 електродвигунів 220 належать до першої партії, 110 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 5%, в другій – 3%, в третій – 4% бракованих виробів. Навмання вибирається один двигун. Знайти ймовірність того, що вибраний електродвигун бракований.

70. В першій урні 8 чорних і 2 білих кулі, в другій – 3 білих і 2 чорні. З першої урни в другу переклали 2 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона чорна.

71. В альбомі 7 чистих і 8 гашених марок. З них навмання виймаються 2 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

72. На склад надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 68%, другий – 22%, третій – 10%. Серед виробів першого заводу 70%, другого 80%, третього 90% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений другим заводом.

73. Телевізор може належати до однієї із двох партій, причому співвідношення між кількістю телевізорів в партіях дорівнює $M_I:M_2 = 6:8$. Ймовірності того, що телевізор пропрацює задану кількість годин, для цих партій відповідно дорівнюють 0,8 і 0,75. Знайти ймовірність того, що телевізор пропрацює задану кількість годин, і що він належить до другої партії?

74. Три стрільці роблять одночасно постріли по мішені, причому дві кулі влучили. Знайти ймовірність того, що третій стрілець влучив у мішень, якщо ймовірність влучень в мішень для першого – 0,6; для другого – 0,5; для третього – 0,4.

75. В першій урні 6 білих і 4 чорних кулі, в другій – 3 білих і 3 чорних. З першої урни в другу переклали 2 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона чорна.

76. Є дві партії однотипних виробів по 16 і 20 штук. В першій партії 2, а в другій 3 бракованих вироби. Навмання взятий виріб з першої партії перекладено в другу партію, після чого навмання виймається один виріб із другої партії. Він виявився якісним. Ймовірніше, який виріб перекладено в другу партію?

77. Сигнали із пунктів A, B і C передаються із спотвореннями в пункт D. Ймовірність спотворення з A дорівнює 0,3; із B – 0,25; із C – 0,2. Співвідношення між числом передач дорівнює M_A:$M_в$:Hc = 5:8:7. Знайти ймовірність того, що одержаний сигнал спотворений. Ймовірніше, із якого пункту передано спотворений сигнал?

78. На склад надходять мікросхеми з трьох заводів, причому перший завод постачає 45%, другий – 20%, третій – 35%. Серед виробів першого заводу 80%, другого 70%, третього 65% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбана мікросхема випущена другим заводом.

79. В партії з 60 виробів кількість бракованих не може перевищувати двох, причому всі значення (0, 1, 2) числа бракованих виробів однаково можливі. Відомо, що 6 навмання взятих виробів виявилися придатними. Знайти ймовірність того, що решта виробів також придатні.

80. До магазину надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 30%, другий – 34%, третій – 36%. Серед виробів першого заводу 75%, другого 70%, третього 80% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений першим заводом.

81.* Одному володареві надокучив астролог зі своїми неправдивими віщуваннями, і він вирішив покарати його. Проте володар надав йому можливість вижити і наказав розподілити у дві урни дві білі і дві чорні кулі. Кат вибере навмання урну і з неї вийме кулю. Якщо куля буде чорною, астролога стратять, якщо білою – помилують. Як астролог повинен розподілити кулі в урнах, щоб забезпечити собі найбільшу ймовірність залишитись живим.

82.* Урна містить n куль. Усі припущення про число білих куль в урні однаково ймовірні. Навмання вийнята з урни куля виявилась білою. Обчислити ймовірність усіх припущень про склад куль в урні. Яке припущення найбільш імовірне?

83.* З урни, що містить n куль невідомого кольору, взяли одну кулю, що виявилась білою. Після цього знову виймають кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла? Усі припущення про кількість білих куль в урні однаково ймовірні.

84.* Пілот здійснює посадку літака, спостерігаючи за аеродромом візуально або «сліпо» (за приладами). У разі візуальної посадки ймовірність благополучного результату дорівнює p_1. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) «сліпої» посадки – p_2. Якщо прилади під час «сліпої» посадки спрацьовують нормально, то літак сідає благополучно з тією ж самою ймовірністю, що й у разі візуальної посадки. Якщо прилади «сліпої» посадки не спрацювали, то пілот може благополучно посадити літак з ймовірністю $p_1^* < p_1$. Знайти повну ймовірність благополучної посадки літака, якщо відомо, що в k % випадків існує необхідність посадки за приладами.

85.*Прилад містить два блоки, справність кожного з яких необхідна для функціонування приладу. Ймовірності безвідмовної роботи протягом проміжку часу T для цих блоків відповідно дорівнюють p_1 та p_2. Прилад випробовувався протягом часу T та вийшов з ладу. Визначити ймовірність того, що відмовив перший блок, другий блок, обидва блоки.

86.*Дві урни містять білі та червоні кулі, які неможливо розрізнити на дотик. Урна A містить 2 червоні та 1 чорну кулю; урна B – 101 червону та 100 чорних куль. Навмання вибирається одна із урн, і ви одержуєте нагороду, якщо правильно називаєте урну після витягування з неї двох куль. Після витягування першої кулі та визначення її кольору ви вирішуєте, чи повернути цю кулю в урну перед тим, як витягнути другу. Якою повинна бути ваша стратегія?

87.*Дуелянти A, B та C сходяться для тристоронньої дуелі. Відомо, що для A ймовірність влучення в ціль дорівнює 0,3, для C – 0,5, а B стріляє без промаху. Дуелянти можуть стріляти в будь-якого супротивника на вибір. Першим стріляє A, другим B, потім C і т.д. в циклічному порядку (поранений вибуває з дуелі) доти, доки лише один чоловік залишається неушкодженим. Якою повинна бути стратегія A?

ТЕМА 3 ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Досить часто виникають задачі, які можна уявити у вигляді випробувань, що багаторазово повторюються, і в яких потрібно знайти ймовірність числа m появ деякої події A в n випробуваннях. Наприклад, необхідно визначити ймовірність певної кількості влучень у мішень при декількох пострілах, ймовірність певного числа бракованих виробів в даній партії і т.д.

Якщо ймовірність появи події A у кожному випробуванні не змінюється в залежності від результатів інших випробувань, то такі випробування називають *незалежними відносно події* A. Якщо незалежні повторні випробування проводяться за одних і тих же умов, то ймовірність появи події A в кожному випробуванні залишається сталою. Описана послідовність незалежних випробувань одержала назву *схеми Бернуллі.*

3.1 Формула Бернуллі (частинна теорема повторення випробувань)

Теорема 3.1 Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала, то ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A з'явиться m раз в n незалежних випробуваннях дорівнює

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{3.1}$$

де $q = 1 - p$.

Доведення

Нехай

A_i = «Поява події A в i-му випробуванні»;

$\overline{A_i}$ = «Відсутність події A в i-му випробуванні», $i=1, 2, 3,\ldots, n$;

B_m = «В n незалежних випробуваннях подія A з'явилась m раз.

Подамо подію B_m через елементарні події A_i та $\overline{A_i}$.

Наприклад, при $n=3$, $m=2$ подія B_2 набуває вигляду

$$B_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

В загальному вигляді маємо

$$B_m = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m \cdot \overline{A_{m+1}} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A_{n-1}} \cdot A_n + \ldots +$$
$$+ \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \overline{A_{n-m}} \cdot A_{n-m+1} \cdot \ldots \cdot A_n, \qquad (3.2)$$

тобто кожен варіант появи події B_m (кожен доданок суми (3.2)) складається з m появ події A та $n-m$ непояв цієї події.

Число всіх варіантів (доданків суми (3.2)) дорівнює числу способів вибору з n випробувань m, в яких з'явилась подія A, тобто числу комбінацій C_n^m. Ймовірність кожного такого варіанта за теоремою множення незалежних подій дорівнює $p^m \cdot q^{n-m}$, оскільки $p(A_i) = p$, $p(\overline{A_i}) = q$, i=1, 2, 3,..., n. У зв'язку з тим, що варіанти несумісні, за теоремою додавання ймовірностей маємо

$$P_{m,n} = p(B_m) = \underbrace{p^m \cdot q^{n-m} + \ldots + p^m \cdot q^{n-m}}_{C_n^m \text{ раз}} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Приклад 3.1 Ймовірність виготовлення на автоматичному станку стандартної деталі дорівнює 0,8. Знайти ймовірності можливої кількості появи бракованих деталей серед 5 відібраних.

Розв'язування

Ймовірність виготовлення бракованої деталі $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Шукані ймовірності знаходимо за формулою Бернуллі (3.1):

$$P_{0,5} = C_5^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}32768; \quad P_{1,5} = C_5^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096;$$

$$P_{2,5} = C_5^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048; \quad P_{3,5} = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512;$$

$$P_{4,5} = C_5^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 = 0{,}0064; \quad P_{5,5} = C_5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}00032.$$

Одержані ймовірності зобразимо графічно точками з координатами $(m,\ P_{m,n})$. Сполучаючи ці дискретні точки прямолінійними відрізками, одержимо *багатокутник, або полігон, розподілу ймовірностей* (рис. 3.1)

Розглянувши багатокутник розподілу (рис. 3.1) відмічаємо, що є таке значення $m_0 = 1$, яке має найбільшу ймовірність $P_{m,n}$.

Число m_0 появ події A в n випробуваннях називається *найімовірнішим*, якщо ймовірність появи цієї події $P_{m_0,n}$ принаймні не менша за ймовірності інших подій $P_{m,n}$ для довільного m.

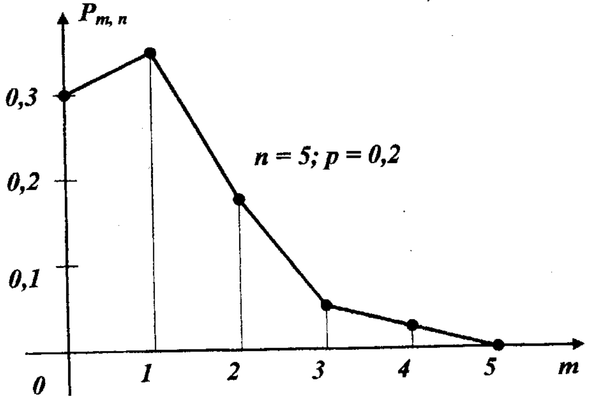


Рисунок 3.1

Для знаходження m_0 складемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} P_{m_0,n} \ge P_{m_0+1,n}, \\ P_{m_0,n} \ge P_{m_0-1,n}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Розв'яжемо першу нерівність системи (3.3). Використовуючи формули Бернуллі та числа комбінацій без повторень, запишемо:

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}.$$

Оскільки $(m_0+1)! = m_0!(m_0+1)$, $(n-m_0)! = (n-m_0-1)!(n-m_0)$, то одержуємо спрощену нерівність $\frac{1}{n-m_0} q \ge \frac{1}{m_0+1} p$, звідки $q(m_0+1) \ge p(n-m_0)$.

Тепер $m_0(p+q) \ge np-q$ або $m_0 \ge np-q$ (оскільки $p+q=1$).

Розв'язуючи другу нерівність системи (3.3), одержуємо аналогічно: $m_0 \le np+p$. Об'єднуючи одержані розв'язки двох нерівностей, маємо подвійну нерівність:

$$np-q \le m_0 \le np+p. \tag{3.4}$$

Відмітимо, що оскільки різниця $np+q-(np-p) = p+q = 1$, то завжди існує ціле число m_0, яке задовольняє нерівність (3.4)

Приклад 3.2 За даними прикладу 2.1 знайти найімовірнішу кількість появи бракованих деталей серед 5 відібраних та ймовірність цієї кількості.

Розв'язування

За формулою (3.4) $5\cdot 0{,}2-0{,}8\le m_0\le 5\cdot 0{,}2+0{,}2$ або $0{,}2\le m_0\le 1{,}2$. Єдине ціле число, що задовольняє одержану нерівність $m_0=1$, а її ймовірність $P_{1,5}=0{,}4096$ була обчислена в прикладі 2.1.

Приклад 3.3 Скільки разів потрібно підкидати гральний кубик, щоб найімовірніше випадіння трійки дорівнювало б 10?

Розв'язування

В даному випадку $p=\frac{1}{6}$. Згідно з (3.4) $n\cdot\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\le 10\le n\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ або $n-5\le 60\le n+1$. Звідки $59\le n\le 65$, тобто гральний кубик потрібно підкинути від 59 до 65 раз включно.

3.2 Загальна теорема повторення випробувань

Нехай випробування проводяться в неоднакових умовах і ймовірність події від випробування до випробування змінюється. Позначимо через p_i – ймовірність появи події A в i-му випробуванні; $q_i=1-p_i$ – ймовірність відсутності події A в i-му випробуванні. Нехай ймовірність $P_{m,n}$ – ймовірність того, що в результаті n випробувань подія A з'явиться m раз. Тоді функцію

$$\varphi_n(z)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_i)z, \tag{3.5}$$

де z – довільний параметр, називають *виробничою функцією ймовірностей* $P_{m,n}$, якщо її розвинення в ряд за степенями z дає як коефіцієнти ймовірності $P_{m,n}$.

Має місце теорема.

Теорема 3.2 Ймовірність того, що подія A в n незалежних випробуваннях з'явиться m раз, дорівнює коефіцієнту при z^m у виразі виробничої функції, тобто

$$\varphi_n(z)=\sum_{m=0}^{n}P_{m,n}\cdot z^m. \tag{3.6}$$

Приклад 3.4 Проводяться чотири незалежні постріли по одній і тій же мішені з різних відстаней. Ймовірність влучення при цих пострілах дорівнює $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}4$. Знайти ймовірності жодного, одного, двох, трьох та чотирьох влучень.

Розв'язування

Побудуємо виробничу функцію за формулою (3.5):

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i)z = (0{,}9 + 0{,}1z)(0{,}8 + 0{,}2z)(0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}6 + 0{,}4z) =$$

$$= 0{,}302 + 0{,}440z + 0{,}215z^2 + 0{,}040z^3 + 0{,}002z^4.$$

Тоді за формулою (3.6) маємо:

$$P_{0,4} = 0{,}302; \quad P_{1,4} = 0{,}44;$$

$$P_{2,4} = 0{,}215; \quad P_{3,4} = 0{,}04;$$

$$P_{4,4} = 0{,}002.$$

3.3 Формула Пуассона

Припустимо, що потрібно обчислити ймовірність $P_{m,n}$ появи події A при великій кількості випробувань n, наприклад, $P_{300,500}$. За формулою Бернуллі (3.1)

$$P_{300,500} = \frac{500!}{300! \cdot 200!} \cdot p^{300} \cdot q^{200}.$$

Зрозуміло, що в цьому випадку безпосереднє обчислення за формулою Бернуллі технічно складне, особливо якщо врахувати, що самі p та q – дробові числа. Тому виникає бажання мати більш прості наближені формули обчислення $P_{m,n}$ при достатньо великих n. Такі формули, що називаються *асимптотичними*, існують та визначаються теоремами Пуассона, локальною та інтегральною теоремами Муавра – Лапласа. Найбільш простою є теорема Пуассона.

Теорема 3.3 Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні прямує до нуля ($p \to 0$) при необмеженому збільшенні кількості випробувань n ($n \to \infty$), причому добуток np прямує до сталого числа λ

($np \to \lambda$), то ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A з'явиться m раз в n незалежних випробуваннях, задовольняє граничну рівність

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}. \qquad (3.7)$$

Доведення

За формулою Бернуллі (3.1)

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^n (1-p)^{-m},$$

або, враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty} np = \lambda$, тобто при достатньо великих n $p \approx \frac{\lambda}{n}$ і

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m}{m!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = \ldots = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{m-1}{n}\right) = 1,$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right)^{-\lambda} = e^{-\lambda}$ та $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}.$$

Строго кажучи, умова теореми Пуассона суперечить вихідному твердженню схеми випробування Бернуллі, згідно з яким ймовірність появи події в кожному випробуванні $p = const$. Однак у випадку, коли p – стала і мала, кількість випробувань n велика та число $\lambda = np$ – незначне (будемо припускати, що $\lambda = np \le 10$), то з граничної рівності (3.7) випливає *наближена формула Пуассона:*

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda). \qquad (3.8)$$

В таблиці (додаток А) наведено значення функції Пуассона $P_m(\lambda)$.

Приклад 3.5 На факультеті навчається 1825 студентів. Яка ймовірність того, що 6 січня є днем народження одночасно чотирьох студентів факультету?

Розв'язування

Ймовірність того, що день народження студента 6 січня, дорівнює $p = \frac{1}{365}$. Оскільки ймовірність $p = \frac{1}{365}$ – мала, $n = 1825$ – велике та $\lambda = np = \frac{1825}{365} = 5 \leq 10$, то застосуємо формулу Пуассона (3.8):

$P_{4,1825} = P_4(5) = 0{,}1755$ (за таблицею додатка А).

3.4 Локальна та інтегральна формули Муавра - Лапласа

Теорема 3.4 *(локальна теорема Муавра - Лапласа).* Якщо ймовірність p появи події А в кожному випробуванні стала та відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A з'явиться m раз в n незалежних випробуваннях при достатньо великому n, наближено дорівнює

$$P_{m,n} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{3.9}$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ – } \textit{функція Гаусса} \tag{3.10}$$

та

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{3.11}$$

Чим більше n, тим точніша наближена формула (3.9), яка називається *локальною формулою Муавра – Лапласа.* Наближені значення ймовірностей $P_{m,n}$, обчислені за формулою (3.9), на практиці досить часто використовують як точні при $npq \geq 20$.

Для спрощення розрахунків, пов'язаних з використанням формули (3.9), складено таблицю значень функції Гаусса (таблиця, додаток В). Користуючись цією таблицею, необхідно знати основні ***властивості*** функції $\varphi(x)$ (3.10).

1. Функція $\varphi(x)$ є парною, тобто $\varphi(-x)=\varphi(x)$.
2. Функція $\varphi(x)$ – монотонно спадна при додатних значеннях x, зокрема при $x\to\infty$, $\varphi(x)\to 0$ (можна вважати, що вже при $x>4$ $\varphi(x)\approx 0$).

Приклад 3.6 В деякій місцевості із 100 сімей 80 мають авто. Знайти ймовірність того, що із 400 сімей авто мають 300.

Розв'язування

Ймовірність того, що сім'я має авто, становить $p=\frac{80}{100}=0{,}8$. Оскільки $n=400$ достатньо велике (умова $npq=400\cdot 0{,}8\cdot(1-0{,}8)=64\ge 20$ виконується), то застосовуємо локальну теорему Муавра–Лапласа.

Спочатку визначаємо за формулою (3.11) $x=\frac{300-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-2{,}5$.

Тоді за формулою (3.9)

$$P_{300,\,400}\approx\frac{\varphi(-2{,}5)}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{\varphi(2{,}5)}{\sqrt{64}}=\frac{0{,}0175}{8}\approx 0{,}0022$$

(значення $\varphi(2{,}5)$ знайдено за таблицею додатка В).

Досить мале значення ймовірності $P_{300,\,400}$ не повинно викликати сумніви, оскільки окрім події «рівно 300 сімей із 400 мають авто» можливими є ще 400 подій: «0 із 400», «1 із 400», ..., «400 із 400» зі своїми ймовірностями. Усі ці події утворюють повну групу, а це означає, що сума їх ймовірностей дорівнює одиниці.

Нехай за умовою прикладу (3.6) необхідно знайти ймовірність того, що від 300 до 360 сімей (включно) мають авто. В цьому випадку, за теоремою додавання ймовірність шуканої події

$$P_{400}(300\le m\le 360)=P_{300,\,400}+P_{301,\,400}+\ldots+P_{360,\,400}.$$

Загалом обчислити кожен доданок можна і за локальною формулою Муавра–Лапласа, але велика кількість доданків робить розрахунки досить громіздкими. В таких випадках використовується така теорема.

Теорема 3.5 (*інтегральна теорема Муавра–Лапласа*). Якщо ймовірність p появи події А в кожному випробуванні стала та відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_{m,n}$ того, що число m появ події A в n

незалежних випробуваннях належить відрізку $[a, b]$ при достатньо великому n, наближено дорівнює

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right], \tag{3.12}$$

де

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \tag{3.13}$$

*функція (*або *інтеграл ймовірностей) Лапласа;*

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}. \tag{3.14}$$

Формула (3.12) називається *інтегральною формулою Муавра–Лапласа.* Ця наближена формула на практиці досить часто використовується як точна при $npq \ge 20$.

Функція $\Phi(x)$ табульована (таблиця, додаток *C*). Для застосування цієї таблиці потрібно знати ***властивості*** функції Лапласа.

1. Функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
Дійсно,

$$\Phi(-x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \begin{Bmatrix} t = -z, & dt = -dz, \\ t_a = 0, & t_a = x \end{Bmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\Phi(x),$$

оскільки величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування.

2. Функція $\Phi(x)$ монотонно зростає, причому при $x \to \infty$ $\Phi(x) \to 1$ (можна вважати, що вже при $x > 4$ $\Phi(x) \approx 1$).

Доведемо цю властивість. Оскільки похідна інтеграла із змінною верхньою межею дорівнює значенню підінтегральної функції у верхній межі ($\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$) та завжди додатна, то $\Phi(x)$ зростає уздовж усієї числової осі.

Знайдемо

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\left\{\begin{array}{l} z=\frac{t}{\sqrt{2}},\quad dt=\sqrt{2}dz, \\ \textit{межі інтегрування не} \\ \textit{змінюються} \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\sqrt{2}\,dz=\left\{\begin{array}{l}\textit{в силу парності} \\ \textit{підінтегральної функції}\end{array}\right\}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz.$$

Враховуючи, що $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz=\sqrt{\pi}$ (інтеграл Ейлера–Пуассона), маємо

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}=1.$$

Приклад 3.7 За даними прикладу 3.6 обчислити ймовірність того, що від 300 до 360 (включно) сімей із 400 мають авто.

Розв'язування

Застосуємо інтегральну теорему Муавра–Лапласа ($npq=64\geq 20$). Спочатку визначимо за (3.14)

$$x_1=\frac{300-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-2{,}5;\qquad x_2=\frac{360-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=5{,}0.$$

Тепер за формулою (3.12), враховуючи властивості функції $\Phi(x)$, маємо

$$P_{400}(300\leq m\leq 360)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi(5{,}0)-\Phi(-2{,}5)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi(5{,}0)+\Phi(2{,}5)\right]\approx$$

$\approx\frac{1}{2}(1+0{,}9876)=0{,}9938$ (за табл. C додатків $\Phi(2{,}5)=0{,}9876$, $\Phi(5{,}0)=1$).

Розглянемо наслідки інтегральної теореми Муавра–Лапласа.

Наслідок 1 Число m появ події A відрізняється від добутку np не більше, ніж на $\varepsilon>0$ (за абсолютною величиною), тобто

$$P_n(|m-np|\le\varepsilon)\approx\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (3.15)$$

Доведення

Нерівність $|m-np|\le\varepsilon$ рівносильна подвійній нерівності $np-\varepsilon\le m\le np+\varepsilon$. Тоді за інтегральною формулою (3.12)

$$P_n(|m-np|\le\varepsilon)=P_n(np-\varepsilon\le m\le np+\varepsilon)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{np+\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{np-\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)+\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

Наслідок 2 Частота $\frac{m}{n}$ події A належить відрізку $[\alpha,\beta]$, тобто

$$P_n(\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta)\approx\frac{1}{2}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)], \qquad (3.16)$$

де

$$z_1=\frac{\alpha-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \qquad z_2=\frac{\beta-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}. \qquad (3.17)$$

Доведення

Нерівність $\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta$ рівносильна нерівності $\alpha n\le m\le\beta n$. Тоді за інтегральною формулою (3.12) та формулою (3.14) маємо:

$$P_n(\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta)=P_n(\alpha n\le m\le\beta n)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta n-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha n-np}{\sqrt{npq}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)\right].$$

Наслідок 3 Частота $\frac{m}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності p не більше, ніж на $\Delta > 0$ (за абсолютною величиною), тобто

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \Delta\right) \approx \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \tag{3.18}$$

Доведення

Нерівність $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \Delta$ рівносильна нерівності $|m - np| \leq \Delta n$. Застосовуючи формулу (3.15) отримуємо:

$$P_n(|m - np| \leq \Delta \cdot n) \approx \Phi\left(\frac{\Delta \cdot n}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Приклад 3.8 За даними прикладу 3.6 знайти ймовірність того, що від 280 до 360 сімей із 400 мають авто.

Розв'язування

Помічаємо, що межі відрізка $[280, 360]$ симетричні відносно $np = 320$. Тоді за формулою (3.15)

$$P_{400}(280 \leq m \leq 360) = P_{400}(|m - 320| \leq 40) \approx \Phi\left(\frac{40}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = \Phi(5) \approx 1.$$

Приклад 3.9 За статистичними даними в середньому 85% новонароджених доживають до 60 років. Знайти ймовірність того, що із 2000 новонароджених частота тих, хто дожив до 60 років, буде: а) належати відрізку $[0{,}7; 0{,}95]$; б) буде відрізнятись від ймовірності цієї події за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02. При якій кількості новонароджених з надійністю 0,95 частота тих, хто дожив до 60 років, буде належати відрізку $[0{,}81; 0{,}89]$.

Розв'язування

а) За умовою $p = 0{,}85$. Оскільки $n = 2000$ досить велике (умова $npq = 2000 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15 = 255 \geq 20$ виконується), то використаємо наслідок 2 інтегральної теорема Муавра–Лапласа. Спочатку за формулами (3.17) обчислимо

$$z_1=\frac{0{,}7-0{,}85}{\sqrt{\frac{0{,}85\cdot 0{,}15}{2000}}}\approx\frac{0{,}05}{\sqrt{0{,}00006}}\approx-18{,}99\,;\quad z_2=\frac{0{,}95-0{,}85}{\sqrt{\frac{0{,}85\cdot 0{,}15}{2000}}}\approx\frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}00006}}\approx 12{,}66\,.$$

Тепер за формулою (3.16) та властивостями функції $\Phi(x)$ маємо:

$$P_{2000}(0{,}7\le\frac{m}{n}\le 0{,}95)\approx\frac{1}{2}[\Phi(12{,}66)+\Phi(18{,}99)]\approx 1\,.$$

Тобто практично достовірно, що від 0,7 до 0,95 числа новонароджених з 2000 доживуть до 60 років.

б) За формулою (3.18)

$$P_{2000}\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}85\right|\le 0{,}02\right)\approx\Phi\left(\frac{0{,}02\cdot\sqrt{2000}}{\sqrt{0{,}85\cdot 0{,}15}}\right)\approx\Phi\left(\frac{0{,}894}{0{,}357}\right)\approx\Phi(2{,}5)=0{,}9876.$$

в) За умовою $P_{2000}(0{,}81\le\frac{m}{n}\le 0{,}89)=0{,}95$ або

$$P_{2000}(-0{,}04\le\frac{m}{n}-0{,}85\le 0{,}04)=P_{2000}\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}85\right|\le 0{,}04\right)=0{,}95\,.$$

За формулою (3.18) при $\Delta=0{,}04$ $\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)=0{,}95$. За таблицею додатка С $\Phi(t)=0{,}95$ при $t=1{,}96$, тобто $\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}=t$, звідки

$$n=\frac{t^2pq}{\Delta^2}=\frac{1{,}96^2\cdot 0{,}85\cdot 0{,}15}{0{,}04^2}=\frac{0{,}489804}{0{,}0016}\approx 306\,.$$

3.5 Розв'язування задач із використанням теорем повторення випробувань

Приклад 3.10 В середньому 20% пакетів акцій на аукціонах продаються за початково заявленою ціною. Знайти ймовірність того, що із 9 пакетів в результаті торгів за початковою ціною: 1) не буде продано 5 пакетів;

2) буде продано: а) менше 2 пакетів; б) не більше двох пакетів; в) хоча б 2 пакети; г) найімовірніше число пакетів.

Розв'язування

1. Ймовірність того, що пакет акцій не продано за початковою ціною, становить $p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. За формулою Бернуллі (3.1)

$$P_{5,9} = C_9^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}066.$$

2. а) За умовою $p = 0{,}2$. Тоді подія – продано менше двох пакетів за початковою ціною означає, що продано нуль або один пакет. Тобто

$$P_9(m < 2) = P_{0,9} + P_{1,9} = C_9^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^9 + C_9^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}436.$$

б) Подія – продано не більше двох пакетів за початковою ціною означає, що продано нуль, один або два пакети. Тобто

$$P_9(m \le 2) = P_{0,9} + P_{1,9} + P_{2,9} = C_9^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^9 + C_9^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^8 + C_9^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}738.$$

в) Для знаходження ймовірності події – продано за початковою ціною хоча б два пакети акцій – перейдемо до протилежної події (продано за початковою ціною менше двох пакетів акцій). Тоді

$$P_9(m \ge 2) = 1 - P_9(m < 2) = 1 - \left(P_{0,9} + P_{1,9}\right) = 1 - 0{,}436 = 0{,}564.$$

г) Найімовірніше число проданих акцій за початковою ціною визначиться з умови (3.4), тобто

$$9 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le m_0 \le 9 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \quad \text{або } 1 \le m_0 \le 2,$$

тобто найімовірніших є два числа $m_0 = 1$ та $m_0' = 2$. Тому ймовірність

$$P_{\text{найімовір.}} = P_{1,9} + P_{2,9} = C_9^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^8 + C_9^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}604.$$

Приклад 3.11 Завод відправив на базу 10000 стандартних виробів. Середня кількість виробів, що псуються під час транспортування, складає 0,02%. Знайти ймовірність того, що із 10000 виробів: 1) буде пошкоджено: а) три; б) хоча б три; 2) не буде пошкоджено: а) 9997; б) хоча б 9997.

Розв'язування

1. а) Ймовірність того, що виріб буде пошкоджено при транспортуванні, становить за умовою $p = 0{,}0002$. Оскільки ця ймовірність мала, $n = 10000$ –

велике та $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2 \le 10$, то потрібно застосовувати формулу Пуассона (3.7):

$$P_{3,10000} = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = P_3(2) = 0{,}1804$$

(таблиця, додаток А).

б) Ймовірність $P_{10000}(m \ge 3)$ може бути обчислена як сума великої кількості доданків:

$$P_{10000}(m \ge 3) = P_{3,10000} + P_{4,10000} + \ldots + P_{10000,10000}.$$

Зрозуміло, що простіше знайти цю ймовірність, використавши антиподію:

$$P_{10000}(m \ge 3) = 1 - P_{10000}(m < 3) = 1 - (P_{0,10000} + P_{1,10000} + P_{2,10000}) =$$

$$= 1 - (0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707) = 0{,}3233.$$

Необхідно відмітити, що для обчислення ймовірності $P_{10000}(m \ge 3)$ не можна застосовувати інтегральну формулу Муавра–Лапласа, оскільки не виконується основна умова її використання.

2. а) В даному випадку $p = 1 - 0{,}0002 = 0{,}9998$ та потрібно знайти $P_{9997,10000}$, для безпосереднього обчислення якої не можна застосувати ні формулу Пуассона (p велика), ні локальну формулу Муавра–Лапласа ($npq \approx 2 < 20$). Однак подія «не буде пошкоджено 9997 виробів з 10000» рівносильна події «буде пошкоджено 3 вироби із 10000», ймовірність якої 0,1804.

б) Подія «не буде пошкоджено хоча б 9997 виробів з 10000» рівносильна події «буде пошкоджено не більше трьох виробів із 10000», для якої $p = 0{,}0002$ та

$$P_{10000}(m \le 3) = P_{0,10000} + P_{1,10000} + P_{2,10000} + P_{3,10000} =$$

$$= 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 + 0{,}1804 = 0{,}8572.$$

Приклад 3.12 За результатами перевірок податковими інспекціями встановлено, що в середньому кожне друге мале підприємство регіону має порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що із 2000 зареєстрованих у регіоні малих підприємств мають порушення фінансової дисципліни: а) 980 підприємств; б) найімовірніше число підприємств; в) не менше 980 підприємств; г) від 980 до 1020 підприємств.

Розв'язування

а) За умовою $p=0,5$. Оскільки $n=2000$ достатньо велике (умова $npq=2000\cdot 0,5\cdot 0,5=500\geq 20$ виконується), то застосуємо локальну формулу Муавра–Лапласа. Спочатку за (3.11) обчислимо

$$x=\frac{980-2000\cdot 0,5}{\sqrt{2000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=-0,89,$$

потім за формулою (3.9)

$$P_{980,\,2000}=\frac{f(-0,89)}{\sqrt{2000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=\frac{f(0,89)}{\sqrt{500}}\approx\frac{0,2685}{22,36}\approx 0,012$$

(значення функції $f(0,89)$ знайдено за таблицею із додатка B).

б) За формулою (3.4) найімовірніше число

$$2000\cdot 0,5-0,5\leq m_0\leq 2000\cdot 0,5+0,5 \text{ або } 999,5\leq m_0\leq 1000,5$$

і ціле число $m_0=1000$. Тепер за формулами (3.11) та (3.9) маємо:

$$x=\frac{1000-2000\cdot 0,5}{\sqrt{2000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=0 \text{ та } P_{1000,\,2000}=\frac{f(0)}{\sqrt{500}}\approx\frac{0,3989}{22,36}\approx 0,018.$$

в) Необхідно знайти

$$P_{2000}(m\geq 980)=P_{2000}(980\leq m\leq 2000).$$

Застосуємо інтегральну формулу Муавра–Лапласа (3.12), попередньо знайшовши за формулою (3.14)

$$x_1=\frac{980-2000\cdot 0,5}{\sqrt{2000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=-0,89; \quad x_2=\frac{2000-2000\cdot 0,5}{\sqrt{2000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=44,72.$$

Тепер

$$P_{2000}(980\leq m\leq 2000)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi(44,72)-\Phi(-0,89)\right]\approx\frac{1}{2}\left[\Phi(44,72)+\Phi(0,89)\right]=$$

$= \frac{1}{2}(1+0,6265) = 0,81325$.

г) Помічаємо, що межі інтервалу 980 та 1020 симетричні відносно значення $np = 2000 \cdot 0,5 = 1000$ і за формулою (3.18):

$$P_{2000}(980 \le m \le 1020) = P_{2000}(|m-100| \le 20) \approx \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{500}}\right) = \Phi(0,89) = 0,2685.$$

Приклад 3.13 У страхової компанії 10000 клієнтів. Страховий внесок кожного клієнта становить 500 грн. При появі страхової події, ймовірність якої за відомими даними експертів можна вважати рівною $p = 0,005$, страхова компанія зобов'язана сплатити клієнту страхову компенсацію 50000 грн. На який прибуток може розраховувати страхова компанія з надійністю 0,95?

Розв'язування

Розмір прибутку компанії становить різницю між загальним внеском усіх клієнтів та загальною страховою компенсацією, яку виплачують n_0 клієнтам при появі страхової події, тобто

$$П = 500 \cdot 10000 - 50000 \cdot n_0 = 50000(100 - n_0) \text{ (грн.)}.$$

Для визначення n_0 застосуємо інтегральну теорему Муавра–Лапласа (вимога $npq = 10000 \cdot 0,005 \cdot 0,995 = 49,75 \ge 20$ виконана).

За умовою задачі

$$P_{10000}(0 \le m \le n_0) \approx \frac{1}{2}[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] = 0,95, \qquad (3.19)$$

де m – кількість клієнтів, яким буде виплачено страхову компенсацію;

$$x_1 = \frac{0-np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\frac{np}{q}} = -\sqrt{\frac{10000 \cdot 0,005}{0,995}} = -7,09; \quad x_2 = \frac{n_0 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Звідки

$$n_0 = np + x_2 \cdot \sqrt{npq} = 10000 \cdot 0,005 + x_2 \cdot \sqrt{49,75} = 50 + x_2 \cdot \sqrt{49,75}.$$

Із співвідношення (3.19)

$$\Phi(x_2) = 1{,}9 + \Phi(x_1) = 1{,}9 + \Phi(-7{,}09) \approx 1{,}0 - 1 = 0{,}9 .$$

За таблицею додатка C знаходимо, що $\Phi(x_2) = 0{,}9$ при $x_2 = 1{,}645$. Таким чином,

$n_0 = 50 + 1{,}645 \cdot \sqrt{49{,}75} = 61{,}6$ та

$$П = 50000(100 - n_0) = 50000(100 - 61{,}6) = 1920000 \text{ (грн.)},$$

тобто з надійністю 0,95 очікуваний прибуток становить 1,92 млн. грн.

3.6 Поліноміальна схема

Як відмічалося раніше, схема Бернуллі є послідовністю незалежних випробувань з двома можливими результатами. При цьому в кожному випробуванні подія A може з'явитись з однією і тією ж ймовірністю p, а подія $\overline{A}$ – з ймовірністю $q = 1 - p$.

За *поліноміальною схемою* здійснюється перехід від послідовності незалежних випробувань з двома можливими результатами (A та $\overline{A}$) до послідовності незалежних випробувань з k взаємно виключними результатами $A_1, A_2, ..., A_k$. При цьому в кожному випробуванні події $A_1, A_2, ..., A_k$ з'являються, відповідно, з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_k$. Тоді ймовірність $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A_1 відбудеться m_1 раз, A_2 – m_2 і т.д., подія A_k – m_k раз ($m_1 + m_2 + ... + m_k = n$), визначиться за формулою:

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k} . \quad (3.20)$$

Доведемо цю формулу. Нехай подія B= «В n незалежних випробуваннях подія A_1 з'явиться m_1 раз, A_2 – m_2 і т.д., подія A_k – m_k раз», ($m_1 + m_2 + ... + m_k = n$). Подія B може бути подана як сума несумісних варіантів, ймовірність кожного з яких за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій дорівнює $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$. Число таких варіантів визначається числом перестановок з повтореннями (1.4) з n елементів.

Зокрема, у випадку двох результатів при $m_1 = m$, $m_2 = n - m$, $p_1 = p$, $p_2 = q = 1 - p$ формула (3.20) є формулою Бернуллі (3.1).

Приклад 3.14 Людина певної соціальної групи з ймовірністю 0,2 може бути брюнетом, з ймовірністю 0,3 – шатеном, з ймовірністю 0,4 – блондином та з ймовірністю 0,1 – рудим. Знайти ймовірність того, що у складі обраної навмання групи з восьми чоловік: а) порівну брюнетів, шатенів, блондинів та рудих; б) блондинів втричі більше за рудих.

Розв'язування

а) За формулою (3.20) ймовірність шуканої події A= «У групі із 8 чоловік порівну брюнетів, шатенів, блондинів та рудих» дорівнює

$$P_8(2,2,2,2) = \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} 0{,}2^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0145.$$

б) Нехай подія B= «У групі із 8 чоловік блондинів втричі більше за рудих». Дану подію можна подати у вигляді суми двох несумісних подій (варіантів):

B_1= «У групі із 8 чоловік 3 блондини та 1 рудий»;

B_2= «У групі із 8 чоловік 6 блондинів та 3 рудих».

За формулою (3.20), припускаючи, що $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}1$; $p_3 = 1 - (0{,}4 + 0{,}1) = 0{,}5$, знайдемо

$$p(B_1) = P_8(3,1,4) = \frac{8!}{3!1!4!} 0{,}4^3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}1120;$$

$$p(B_2) = P_8(6,2) = \frac{8!}{6!2!} 0{,}4^6 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0011;$$

$$p(B) = p(B_1) + p(B_2) = 0{,}1120 + 0{,}0011 = 0{,}1131.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте та доведіть частинну теорему повторення випробувань.
2. Що називають багатокутником, або полігоном, розподілу ймовірностей?
3. Яке число називають найімовірнішим?
4. Виведіть формулу для знаходження найімовірнішого числа.
5. Яку функцію називають виробничою ймовірністю $P_{m,n}$?
6. Сформулюйте загальну теорему повторення випробувань.
7. Сформулюйте та доведіть формулу Пуассона.
8. Запишіть наближену формулу Пуассона.
9. Сформулюйте локальну теорему Муавра–Лапласа.
10. Перерахуйте основні властивості функції Гаусса.
11. Сформулюйте інтегральну теорему Муавра–Лапласа.
12. Перерахуйте та доведіть основні властивості функції Лапласа.
13. Доведіть, що $P_n\left(|m-np|\le\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$, якщо p – ймовірність появи події А в кожному випробуванні, m – число появ події A в n незалежних випробуваннях.
14. Доведіть, що $P_n(\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)\right]$, якщо $z_1=\frac{\alpha-p}{\sqrt{pq/n}}$, $z_2=\frac{\beta-p}{\sqrt{pq/n}}$; p – ймовірність появи події А в кожному випробуванні, m – число появ події A в n незалежних випробуваннях.
15. Доведіть, що частота $\frac{m}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності p не більше ніж на $\Delta>0$ (за абсолютною величиною), тобто $P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\Delta\right)\approx\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$.
16. Охарактеризуйте поліноміальну схему.
17. *(Задача Л. Керролла). В урні лежать дві кульки, відносно яких спочатку відомо, що кожна з них або біла, або чорна. Було проведено випробування. З урни декілька разів підряд витягали по 1 кульці, дивилися, якого вона кольору, і знову повертали її в урну. Результати виявилися такими: всі витягнуті кульки були білими, а ймовірність витягнути білу кульку стала рівною $\alpha/(\alpha+p)$. Випробування повторили ще m раз. Витягнуті кульки завжди були білими. Чому дорівнює ймовірність витягнути білу кульку після $m+1$ випробування?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.1

1. Середня щільність хвороботворних мікробів в одному кубічному метрі повітря дорівнює 100. Береться на пробу 2 дм^3 повітря. Знайти ймовірність того, що в ньому буде виявлено хоча б один мікроб.

2. Зроблено п'ять незалежних пострілів. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі однакова і дорівнює p. Знайти ймовірність: а) одного, двох, трьох, чотирьох та п'яти влучень; б) ймовірність хоча б одного влучення; в) ймовірність не менше двох влучень; г) ймовірність не більше трьох влучень.

3. У родині семеро дітей. Будемо вважати, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що в родині: а) чотири хлопчики та три дівчинки; б) не більше як три хлопчики; в) принаймні, одна дівчинка.

4. Ймовірність малому підприємству бути банкротом за час t дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед шести малих підприємств за час t збережуться: а) два; б) більше двох підприємств.

5. За даними технологічного контролю в середньому 2 % виготовлених на заводі годинників потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що зі 100 годинників, виготовлених на заводі, додатково відрегулювати потрібно буде не більше, ніж три годинники.

6. В середньому п'ята частина авто, що надходять в продаж, некомплектні. Знайти ймовірність того, що серед десяти авто мають некомплектність: а) три авто; б) менше трьох.

7. Проводиться залп із шести гармат по деякому об'єкту. Ймовірність влучення в об'єкт з кожної гармати дорівнює 0,6. Знайти ймовірність ліквідації об'єкта, якщо для цього необхідно не менше п'яти влучень.

8. Ймовірність того, що будь-який абонент подзвонить на комутатор протягом години, дорівнює 0,02. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години подзвонять 8 абонентів?

9. Товариство складається з 700 осіб. Знайти ймовірність того, що в чотирьох з них день народження припадає на Різдво.

10. Яка ймовірність того, що в стовпчику з 300 навмання відібраних монет число монет, розташованих решкою догори, буде від 125 до 274?

11. Що ймовірніше виграти в рівносильного противника: а) чотири партії з п'яти чи п'ять із дев'яти; б) не менше чотирьох партій з п'яти чи не менше п'яти партій з дев'яти?

12. Деяке виробництво дає 3% браку. Яка ймовірність того, що з узятих на дослідження 3300 виробів бракованих буде не більше 51?

13. В середньому по 15% договорів страхова компанія сплачує страхову компенсацію. Знайти ймовірність того, що з десяти договорів буде пов'язано з виплатою страхової компенсації: а) чотири договори; б) менше трьох договорів.

14. Ймовірність проростання елітної моркви дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних насінин число пророслих буде між 1890 і 1930.

15. Прилад складається з дев'яти вузлів. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи протягом часу t) для кожного вузла дорівнює 0,8. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що за час t: а) відмовить принаймні два вузли; б) відмовлять рівно три вузли; в) відмовлять не менше як три вузли.

16. Ймовірність проростання насіння даної рослини дорівнює 0,7. Висаджено 834 насінини. Знайти ймовірність того, що частота проростання рослини відхилиться за абсолютною величиною від ймовірності не більше ніж на 0,03.

17. Скільки потрібно провести дослідів з підкидання монети, щоб з ймовірністю 0,83 можна було очікувати відхилення частоти випадання «герба» від теоретичної ймовірності 0,5 на абсолютну величину, меншу ніж 0,02.

18. Передбачається, що 10% нових малих підприємств припиняють свою діяльність протягом року. Яка ймовірність того, що із шести малих підприємств не більше двох протягом року припинять свою діяльність?

19. Два рівносильні супротивники грають в шахи. Що більш ймовірно: а) виграти дві партії з чотирьох чи три партії з шести; б) не менше двох партій з шести чи менше трьох партій з шести?

20. В банк доставлено 5000 пакетів грошових знаків. Ймовірність того, що пакет містить недостатню чи надлишкову кількість грошових знаків, дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що при перевірці буде виявлено: а) три помилково укомплектовані пакети; б) не більше трьох помилково укомплектованих пакетів.

21. Будівельна фірма, яка займається будівництвом дач, розкидає рекламні листки по поштових скриньках. Попередній досвід роботи компанії показує, що приблизно в одному випадку з двох тисяч надходить замовлення. Знайти ймовірність того, що при розміщенні 100 000 листків число замовлень буде: а) 55; б) знаходитись в межах від 55 до 65.

22. В університеті навчаються 1578 студентів. Ймовірність того, що день народження студента припаде на певний день року, дорівнює $\frac{1}{365}$. Знайти: а) найбільш імовірну кількість студентів, які народились 28 вересня, та ймовірність такої події; б) ймовірність того, що принаймні 5 студентів мають один і той самий день народження.

23. Підручник видано тиражем 5000 примірників. Ймовірність того, що екземпляр підручника зброшурований неправильно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що: а) тираж містить 5 бракованих книг; б) принаймні 2498 книг зброшуровані правильно.

24. Два баскетболісти роблять по 3 кидки м'ячем в корзину. Ймовірності влучення м'яча в корзину при кожному кидку дорівнюють, відповідно, 0,6 та 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) в обох буде однакова кількість влучень; б) у першого баскетболіста буде більше влучень, ніж у другого.

25. Відомо, що в середньому 75% усіх телевізорів, що виготовляються заводом, є продукцією першого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що у виготовленій партії виявиться: а) 8 телевізорів першого сорту, якщо партія містить 12 телевізорів; б) 130 телевізорів першого сорту, якщо партія містить 250 телевізорів?

26. Аудиторну роботу з теорії ймовірностей з першого разу вдало виконують 45% студентів. Знайти ймовірність того, що із 500 студентів роботу вдало виконають: а) 200 студентів; б) не менше 200 студентів.

27. При обстеженні статутних фондів банків встановлено, що п'ята частина банків мають статутний фонд 100 млн. грн. Знайти ймовірність того, що серед 2000 банків мають статутний фонд понад 100 млн. грн.: а) не менше 400; б) від 400 до 500 банків включно.

28. Скільки потрібно взяти деталей, щоб найімовірніша кількість придатних деталей дорівнювала 70, якщо ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою, дорівнює 0,2?

29. Ймовірність того, що пасажир на встигне до відправки потягу, дорівнює 0,01. Знайти найбільш імовірну кількість пасажирів із 800, що спізняться на потяг та ймовірність цієї кількості.

30. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює $p = 0{,}9$. Знайти: а) з ймовірністю 0,9545 межі (симетричні відносно p), в яких міститься частка стандартних деталей серед 900 перевірених; б) ймовірність того, що частка нестандартних деталей серед них міститься в межах від 0,08 до 0,11.

31. Ймовірність проростання насіння гороху дорівнює $p = 0{,}9$. Скільки насінин потрібно посіяти, щоб з ймовірністю 0,991 можна було очікувати, що частка пророслих насінин відхилиться від ймовірності $p = 0{,}9$ не більше, ніж на 0,03 за абсолютною величиною?

32. Ймовірність того, що дилер, який займається торгівлею цінними паперами, продасть їх, дорівнює 0,8. Скільки повинно бути цінних паперів, щоб з ймовірністю 0,996 можна було стверджувати, що частка проданих серед них відхилиться від 0,8 не більше, ніж на 0,04 за абсолютною величиною?

33. В страхової компанії є 20 000 клієнтів. Кожен з них, страхуючись від нещасного випадку, вносить 600 грн. Ймовірність нещасного випадку 0,0055, а страхова компенсація, яка сплачується постраждалому, становить 60 000 грн. Яка ймовірність того, що: а) страхова компанія буде мати збитки; б) на відшкодування страхових компенсацій піде більше половини усіх коштів, що надійшли від клієнтів.

34. Перший прилад складається із 10 вузлів, другий – з 8 вузлів. За час t кожен вузол першого приладу виходить з ладу, незалежно від інших, з ймовірністю 0,1; другого – з ймовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що за час t в першому приладі вийде з ладу хоча б один вузол, а в другому – принаймні два вузли.

35. Студент певного інституту за рівнем підготовки з ймовірністю 0,3 є «слабким», з ймовірністю 0,5 – «середнім», з ймовірністю 0,2 – «сильним». Яка ймовірність того, що серед навмання вибраних шести студентів інституту: а) кількість «слабких», «середніх» та «сильних» виявиться однаковою; б) кількість «слабких» та «сильних» виявиться однаковою?

36. Два шахісти умовились зіграти десять результативних партій. Ймовірність виграшу кожної окремої партії першим гравцем дорівнює $\frac{2}{3}$, другим – $\frac{1}{3}$ (нічиї не враховуються). Чому дорівнює ймовірність виграшу всієї гри (потрібно виграти понад п'ять партій) першим гравцем, другим гравцем, загального нічийного результату?

37. Яке найменше число випробувань достатньо провести, щоб з ймовірністю не меншою за 0,75 можна було очікувати, що успіх настане принаймні два рази, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює 0,07?

38. Кожні п'ять незалежних випробувань полягають в одночасному підкиданні трьох монет. Знайти ймовірність того, що принаймні під час одного випробування випадуть три герби.

39. Під час передавання повідомлення ймовірність спотворення одного знака дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що повідомлення з 20 знаків: а) не буде спотворене; б) містить рівно чотири спотворення; в) містить не більше чотирьох спотворень.

40. Серед насіння пшениці 0,7% бур'янів. Яка ймовірність під час випадкового відбору 1000 насінин виявити: а) рівно 5 насінин бур'янів; б) не менше як п'ять насінин бур'янів; в) не більше ніж п'ять насінин бур'янів?

41. На лекції присутні 150 студентів. Знайти ймовірність того, що один з присутніх народився 19 січня і два народились 28 вересня.

42. Імовірність того, що на сторінці книжки можуть виявитись помилки, дорівнює 0,002. Перевіряється книжка, яка містить 800 сторінок. Знайти ймовірність того, що з помилками виявляться: а) шість сторінок; б) від п'яти до десяти сторінок.

43. Дослід полягає в тому, що підкидають 4040 разів монету (дослід Бюффона), при цьому герб випав 2048 разів. Знайти ймовірність того, що в

разі повторення досліду Бюффона частота появи герба відхилиться від 0,5 не більше, ніж у попередньому досліді Бюффона.

44. Знайти приблизно ймовірність того, що під час 400 випробувань успіх настане рівно 104 рази, якщо ймовірність в кожному випробуванні дорівнює 0,3.

45. Ймовірність того, що подія A відбудеться під час кожного з 1000 випробувань, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що: а) частота успіхів відхиляється від 0,6 менше ніж на 0,03; б) кількість успіхів за тих самих умов знаходиться між 600 та 680.

46. В урні міститься порівну чорних та білих куль. В одному експерименті під час 20000 витягувань з поверненням було витягнуто 6022 білих та 5989 чорних куль. Яка ймовірність такого результату експерименту? Якщо повторити цей експеримент, то яка ймовірність того, що за модулем відхилення дістанемо білих куль більше за найімовірніше число?

47. У селищі 2500 жителів. Кожен із них приблизно вісім разів на місяць їздить до міста, підбираючи дні поїздки з випадкових причин незалежно від інших. Яка найменша кількість пасажирів повинна вміщуватись у потязі, щоб він переповнювався в середньому не частіше ніж один раз за 90 днів (потяг ходить один раз на добу)?

48. Ймовірність появи події A в кожному незалежному експерименті дорівнює 0,8. Скільки потрібно здійснити експериментів, щоб з ймовірністю 0,9 можна було очікувати, що подія A відбудеться не менше, ніж 75 разів?

49. Під час передавання повідомлення ймовірність спотворення одного знака дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що повідомлення з 40 знаків: а) не буде спотворене; б) містить рівно чотири спотворення; в) містить не більше чотирьох спотворень.

50. Для одного баскетболіста ймовірність влучити м'ячем у корзину під час одного кидання дорівнює 0,3. Зроблено 20 кидків. Знайти найімовірніше число влучень і відповідну ймовірність.

51.*Яка ймовірність того, що при підкиданні 100 монет випаде рівно 50 гербів?

52.* Чеканник кладе m фальшивих монет у скриньку, яка містить n монет. Король, підозрюючи чеканника, дістає навмання по одній монеті з кожної із n скриньок та перевіряє їх. Яка ймовірність того, що у виборці із n монет рівно r виявляться фальшивими.

53.* Спори, що розносяться повітрям, продукують маленькі колонії плісняви на пластинках желатину у лабораторії. В середньому на пластинці є три колонії. Яка частина пластинок має рівно три колонії? Якщо середня кількість колоній дорівнює достатньо великому цілому числу m, то яка частина пластинок містить рівно m колоній?

54.* У хлібному магазині продаються кекси, в середньому 20 кексів за день. Яка ймовірність того, що в магазині буде продано парну кількість кексів? (Передбачається, що кількість покупок підпорядковується закону Пуассона.)

55.* За якої мінімальної кількості людей в компанії ймовірність того, що хоча б два з них народились в один і той же день, не менше 0,5?

56.* Ви маєте на меті знайти людину, день народження якої збігається з вашим. Скільки незнайомців вам доведеться опитати, щоб ймовірність зустріти таку людину була не меншою за 0,5?

57.* (Задача Банаха) Деякий математик, що курить, носить із собою дві коробки сірників. Щоразу, коли він хоче дістати сірник, вибирає навмання одну з коробок. Знайти ймовірність того, що коли математик витягне вперше порожню коробку, в іншій коробці виявляється m сірників ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$; n - число сірників, що були спочатку в кожній з коробок).

Додаток А

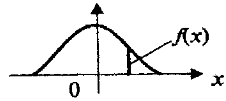
Значення функції Пуассона $P_m(\lambda)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

m \ λ	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0.0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0 0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Додаток В

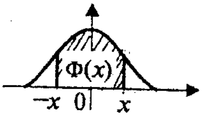
Значення функції Гаусса $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$



Цілі та десяткові частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5.0	0,0000015									

Додаток C

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$



Цілі та десяткові частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6679	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7984	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9392	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9533
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9841	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9331	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9951	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,2	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,3	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,4	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,5	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,6	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

ЛІТЕРАТУРА

1. Бочаров П.П., Печенкин А.В. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Гардарика, 1998.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1987.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Наука, 1988.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 2002.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для вузов. – 7-е изд. стереотип. – М.: Высшая школа, 2001.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977.
8. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002.
9. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1975.
10. Кэрролл Л. История с узелками. Пер. с англ. /Под ред. Я.А. Смородинского. – М.: ООО «Издательство АСТ»; Харьков: Фолио, 2001.
11. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
12. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. Пер. с англ. /Под ред. Ю.В. Линника. 3-е изд. – М.: Наука, 1985.
13. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004.
14. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций /Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.
15. Четыркин Е.М., Калихман И.Л. Вероятность и статистика. – М.: Финансы и статистика, 1982.

Навчальне видання

Наталія Василівна Сачанюк-Кавецька

Лідія Іванівна Педорченко

Надія Борисівна Дубова

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Частина 1

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Н.В. Сачанюк-Кавецькою

Редактор В.О. Дружиніна

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 20.05.2008 р.
Формат 29.7 × 42 $^1/_4$
Друк різографічний
Тираж 100 прим.
Зам. № 2008-065

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 6.9

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ