Тичинська Л.М., Ковальчук М.Б., Черноволик Г.О.

Теорія функцій комплексної змінної

Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

Тичинська Л.М., Ковальчук М.Б., Черноволик Г.О.

Теорія функцій комплексної змінної

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей. Протокол № 9 від 26 квітня 2007 р.

Вінниця ВНТУ 2007

УДК 517.53 (075)
Т 46

Рецензенти:

Михалевич В.М., доктор технічних наук, професор
Кухарчук В.В., доктор технічних наук, професор
Матяш О.І. кандидат педагогічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Тичинська Л.М., Ковальчук М.Б, Черноволик Г.О.
Т 46 **Теорія функцій комплексної змінної**. Навчальний посібник. - Вінниця: ВДТУ, 2007.- 98 с.

У навчальному посібнику розглянуто поняття функцій комплексної змінної, види аналітичних функцій, інтегрування функцій комплексної змінної, класифікацію особливих точок. Наведено основні означення, теореми, формули та інші короткі відомості з теорії, методичні рекомендації та розв'язання типових задач з поясненням теоретичних положень. До кожної теми розроблено по 50 варіантів завдань для самостійної роботи.

УДК 517.53 (075)

Зміст

1 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І ДІЇ НАД НИМИ

1.1 Алгебраїчна форма

Комплексними числами називаються числа виду $z = x + iy$, де x та y – дійсні числа, а i – уявна одиниця, яка визначена рівностями

$$i=\sqrt{-1} \text{ або } i^2=-1.$$

Числа $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, відповідно, є дійсною та уявною частинами комплексного числа z. Два комплексних числа вважаються рівними, якщо рівні окремо їх дійсні і уявні частини.

Алгебраїчні дії над комплексними числами виконуються за формулами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 \pm iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.1}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.2}$$

Множення проводиться за допомогою правила множення двочлена на двочлен.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} \tag{1.3}$$

де $\overline{z}_2 = x_2 - iy_2$ – комплексне число, спряжене до $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2) = x_2^2 + y_2^2 \tag{1.4}$$

1.2 Геометричне зображення. Тригонометрична і показникова форми комплексних чисел

Кожне комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою площини *xOy*, яка має координати *(x, y)* (рис. 1.1), при цьому точки на осі *Ox* є дійсними числами. Вісь *Oy* називають уявною, а вісь *Ox* – дійсною осями. На координатній площині комплексному числу z можна поставити у відповідність вектор $\bar{r}$ (радіус-вектор точки z), який направлений з початку координат *O* в точку *z*.

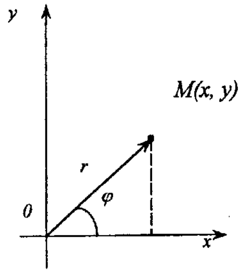

Рисунок 1.1

Довжину $r=|\vec{r}|$ цього вектора, тобто відстань від точки z до початку координат, називають ***модулем комплексного числа z*** і позначають $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Кут φ, який утворює вектор $\vec{r}$ з додатним напрямком осі Ох, називається ***аргументом числа z*** і позначається $Argz$. Для аргументу φ справедливі формули

$$x=r\cdot cos\varphi\,, y=sin\varphi\,;\ \frac{y}{x}=tg\varphi\ \ (\,r=|z|\ ,\ \varphi=Argz\,) \qquad (1.5)$$

Значення $Argz$ визначаються не однозначно, а з точністю до $2\pi k$ k=(0;±1;±2 ...).

Якщо φ змінюється в межах $-\pi<\varphi\le\pi$ або $0\le\varphi<2\pi$, то виділяють головну частину аргументу, яка позначається $arg\,z$, так що $Arg\quad z=arg\,z+2\pi k$, (k=0;±1;±2…), де $arg\,z$ є головним значенням $Arg\,z$, яке визначається умовами $-\pi<arg\,z<\pi$, причому

$$arg\quad z=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}\ , & x>0 \\ \pi+arctg\dfrac{y}{x}, & x<0,\quad y\ge0 \\ -\pi+arctg\ \dfrac{y}{x}, & x<0,\quad y<0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\quad y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\quad y<0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Виходячи з формули для x і y одержимо ***тригонометричну*** та ***показникову форми*** комплексного числа :

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi =$$
$$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} =$$
$$= |z|e^{i(\arg z + 2\pi k)}. \tag{1.7}$$

При цьому використали відому формулу Ейлера:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Для піднесення комплексного числа до степеня n справедлива формула Муавра:

$$z^n = (x+iy)^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{1.8}$$

Корені степеня n із комплексних чисел визначаються за формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{x+iy} = (x+iy)^{\frac{1}{n}} = (re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\varphi}{n}} =$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \tag{1.9}$$

де ($k = 0,1,2,\ldots n-1$).

1.3 Нескінченно віддалена точка

В комплексній площині z крім скінченних (власних) комплексних чисел, у яких дійсна і уявна частина скінченні дійсні числа, додається ще одне нескінченне (невласне) комплексне число, позначене символом ∞. Це число на комплексній площині називають нескінченністю або нескінченно віддаленою точкою.

Для нескінченності поняття дійсної і уявної частин, а також поняття аргументу не вводиться (зауважимо, що поняття аргументу не має змісту і для числа 0).

Для модуля комплексного числа $z = \infty$ використовується символ $+\infty$: $|z| = |\infty| = +\infty$.

Околом нескінченно віддаленої точки називається сукупність всіх точок z, які задовольняють нерівність $|z| > R$ (із приєднанням нескінченно віддаленої точки), тобто сукупність всіх точок z, які лежать зовні кола із центром в початку координат досить великого радіуса R.

Комплексна площина, доповнена числом $z = \infty$, називається повною або розширеною комплексною площиною.

2 ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

2.1 Визначення функцій комплексної змінної ($z = x + iy$)

Розглянемо дві площини комплексних чисел: площину z і площину w. Нехай на першій з них задана довільна множина точок E (вона може містити і точку $z = w$).

Означення. Говорять, що на множині E задана ***функція*** $w = f(z)$, якщо кожній точці z із E поставлено у відповідність одна чи декілька точок w. E називається ***множиною визначення*** функції $f(z)$, а множина K всіх значень w, які $f(z)$ приймає на E, – ***множиною зміни функції***.

Взявши $z = x + iy$, $w = u + iv$ одержимо $w = f(x + i\,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, звідки $u(x,y) = Re\, f(z)$; $v(x,y) = Im\, f(z)$.

Таким чином, задання функції комплексної змінної рівносильне заданню двох функцій u і v двох дійсних змінних. Про функцію $w = f(z)$ будемо казати, що вона відображає множину E точок площини z на множину точок площини w. Функцію при цьому називають відображенням.

Якщо функція $w = f(z)$ відображає множину E на множину K, то кожній точці w із K відповідає одна чи декілька точок z із E. Таким чином на K визначена функція $z = \varphi(w)$, яка називається оберненою стосовно функції $w = f(z)$ і відображає K на E.

Нехай функція $w = f(z)$ відображає множину K, а функція $w = g(w)$ відображає множину K на множину P. Функція $w = g\ (f(z))$, яка відображає E на P, називається складною функцією, а відображення E на P називається накладанням або суперпозицією відображень g і f.

2.2 Границя функції. Неперервність функції

Означення 1. Скінченна точка $w_0 = u_0 + iv_0$ називається ***границею функції*** $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ при $z \to z_0 = x_0 + iy_0$, якщо дійсні функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ двох змінних прямують, відповідно, до границь u_0 і v_0 при $z \to z_0$.

В цьому випадку пишуть $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

Означення 2. Функція $f(z)$ називається ***неперервною*** в скінченній точці z_0, якщо границя $f(z)$ при $z \to z_0$ скінченна і рівна $f(z_0)$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \neq \infty, \qquad (2.1)$$

Теорема. Для того, щоб функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ була неперервною в скінченній точці $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно і достатньо, щоб функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ були неперервні в точці (x_0, y_0).

2.3 Основні функції комплексної змінної

Показникова функція:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \qquad (2.2)$$

Тригонометричні функції:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{2.3}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{2.4}$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \tag{2.5}$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{2.6}$$

Гіперболічні функції:

$$chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \tag{2.7}$$

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \tag{2.8}$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, \tag{2.9}$$

$$cthz = \frac{chz}{shz}. \tag{2.10}$$

Логарифмічна функція:

$$Lnz = ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \tag{2.11}$$

де k - довільне ціле число.

Головне значення логарифма:

$$lnz = ln|z| + i \arg z. \tag{2.12}$$

Узагальнені показникові і степеневі функції:

$$a^{z} = e^{z \ln a}, \tag{2.12}$$

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}, \tag{2.13}$$

де z, a, α - довільні комплексні числа, причому $\alpha \neq 0$.

2.4 Похідна функції комплексної змінної

2.4.1 Диференційовність функції. Умови Коші-Рімана

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена в деякому околі скінченної точки z. Виберемо в цьому околі точку $z+\Delta z$ і нехай Δw буде приростом функції $f(z)$ при переході від точки z до точки $z+\Delta z$:

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$$

Означення. Якщо існує скінченна границя відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ коли $\Delta z \to 0$, то:

- функція $f(z)$ називається ***диференційовною*** в точці z;
- ця границя називається ***похідною функції f(z)*** в точці z і позначається символом

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y},$$

де $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$,

$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)$.

Теорема. Для того, щоб функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ була диференційовною в точці $z = x + iy$, необхідно і достатньо, щоб:

- дійсні функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були диференційовні в точці z;
- в точці $z = x + iy$ виконувались умови (умови Коші – Рімана):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.14}$$

або в полярних координатах

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{2.15}$$

Якщо умови Коші–Рімана виконуються, то похідна $f'(z)$ обчислюється за формулами:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (2.16)$$

або в полярних координатах ($z=re^{i\varphi}$)

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \qquad (2.17)$$

Для функції комплексної змінної зберігаються всі правила диференціювання:

1) $(f(z)+g(z))'=f'(z)+g'(z)$

2) $(f(z)\cdot g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

3) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

4) $(f[g(z)])'=f'[g(z)]\cdot g'(z)$

5) $f'(z)=\frac{1}{\varphi'(w)}$, f і φ взаємно обернені функції.

Означення 1. Функція *f(z),* однозначна і диференційовна в кожній точці області *D*, називається ***аналітичною*** (інакше, *регулярною* або *голоморфною*) ***в цій області***.

Означення 2. Функція *f(z)* називається ***аналітичною в скінченній точці z***, якщо вона є аналітичною в деякому околі точки *z*.

Означення 3. Точки *z*, в яких однозначна функція *f(z)* аналітична, називаються ***правильними*** точками *f(z)*. Точки, в яких функція не є аналітичною, називаються ***особливими*** точками цієї функції.

Означення 4. ***Диференціалом*** *df(z)* аналітичної функції $w = f(z)$ в скінченній точці z називається головна лінійна відносно Δz частина приросту Δw цієї функції.

Маємо $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$, звідки $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(z, \Delta z)$, де $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha = 0$.

Або $\Delta w = f'(z) \cdot \Delta z + \alpha \Delta z$.

Другий доданок $\alpha \Delta z$ є нескінченно малою, вищого порядку, ніж Δz. Звідки випливає, що $f'(z)\Delta z$ є диференціалом функції *f(z):* отже,

$df(z) = f'(z)\Delta z = f'(z)dz$ (або при $f(z) = z$ буде $dz = z'\Delta z = \Delta z$).

Всі введені поняття стосуються однозначних функцій в комплексній площині z (точка $z = \infty$ виключається з розгляду).

2.4.2 Гармонічні функції і їх зв'язок з аналітичними функціями

Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в деякій області D. Тоді в усіх точках D функції u і v задовольняють умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Диференціюючи першу з тотожностей за x, а другу – за y і почленно додаючи, одержимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2.18}$$

Диференціюючи першу з тотожностей за y, а другу – за x і віднімаючи почленно від першої рівності другу, одержимо: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ задовольняють одне і те ж диференціальне рівняння із частинними похідними, яке називається рівнянням Лапласа. Функції, які задовольняють це рівняння, називаються гармонічними функціями.

Завжди можна побудувати аналітичну функцію, для якої дана гармонічна функція є дійсною і уявною частинами. Нехай гармонічна функція $u(x, y)$ є дійсною частиною деякої аналітичної функції $f(z)$, гармонічну функцію $v(x, y)$ знаходимо з умов Коші-Рімана.

2.5 Інтегрування функції комплексної змінної

Інтеграл від функції комплексної змінної $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по дузі L в комплексній площині обчислюють за формулою:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u(x,y)+iv(x,y))(dx+idy) = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy +$$

$$+i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy. \qquad (2.19)$$

Якщо крива С задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, початкова та кінцева точки дуги С відповідають значенням параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} [z(t)] \quad z'(t) \quad dt, \qquad (2.20)$$

де $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, яка містить точки z_0 та z_1, то має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1}, \qquad (2.21)$$

де $\Phi(z)$ – довільна первісна для функції $f(z)$, тобто $\Phi'(z) = f(z)$ в області D.

Якщо функції $f(z)$ та $\varphi(z)$ - аналітичні в однозв'язній області D, а z_0 та z_1 - довільні точки області, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)dz = (f(z)\cdot\varphi(z))\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1}\varphi(z)\ f'(z)\ dz. \quad (2.22)$$

Теорема Коші (для однозв'язної області). Якщо функція *f(z)* - аналітична в однозв'язній області $\overline{D}$, то інтеграл від цієї функції по контуру *L*, який обмежує область D, дорівнює нулю $\int_L f(z)dz = 0$.

Теорема Коші (для багатозв'язної області (рис.2.1)). Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в багатозв'язній замкненій області $\overline{D}$, то інтеграл від цієї функції по зовнішньому контуру, який обмежує область *D*, дорівнює сумі інтегралів по всім внутрішнім контурам $L_0, L_1, ..., L_n$, які обмежують область *D*.

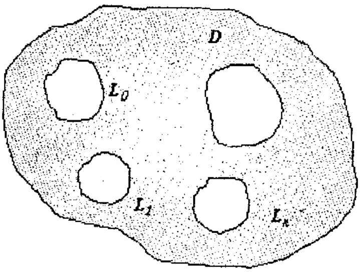

Рисунок 2.1

$$\int_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{Lk} f(z)dz.$$

Напрям обходу контурів – проти годинникової стрілки. Якщо дуга *L*, початок якої в точці *A* і кінець в точці *B*, лежить в області аналітичності *f(z)*, то

$$\int_L f(z)dz = F(B) - F(A), \text{ де } F'(z) = f(z). \quad (2.23)$$

Контурний інтеграл від аналітичної функції в однозв'язній області дорівнює приросту первісної на шляху інтегрування. Таблиця первісних функцій комплексної змінної збігається з таблицею первісних функцій дійсних значень.

2.6 Інтегральна формула Коші і її узагальнення

Якщо функція *f(z)* аналітична в області D, то і для довільної точки *z* цієї області і довільного замкненого кусково-гладкого контуру L, який лежить разом з обмеженою ним областю в середині області D і містить точку *z* в середині, мають місце такі представлення:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz, \ (z_0 \in D), \tag{2.24}$$

де контур L обходять так, що область D залишається весь час зліва.

Теорема. Якщо функція $f(z)$ аналітична в замкненій області $\overline{D}$, то в кожній точці області D вона диференційовна скільки завгодно разів, причому *n*-а похідна виражається формулою

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz \,.\ n = 1,2...,. \tag{2.25}$$

де *L* (границю області) *D* обходять в додатному напрямку.

2.7 Ряди

Ряд з комплексними числами $z_1 + z_2 + ... + z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається збіжним, якщо послідовність його частинних сум $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_n$ збігається, а число $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ називається його сумою.

Ряд з комплексними членами $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$.

Для дослідження на абсолютну збіжність використовуються всі ознаки збіжності додатних дійсних рядів, а саме: Д'Аламбера, Коші, порівняння та інші.

2.7.1 Степеневі ряди з комплексними членами

Степеневим рядом називається ряд вигляду:

$$c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n , \quad (2.26)$$

де z- комплексна змінна, а c_n і a – комплексні числа.

Якщо $a=0$, то одержимо ряд вигляду:

$$c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n . \quad (2.27)$$

Точки z, в яких ряд збігається, утворюють область збіжності даного ряду.

Для кожного степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ існує круг з центром в точці a, в якому він збігається і зовні якого він розбігається. В точках границі області збіжності степеневий ряд може як збігатись, так і розбігатись. Сума степеневого ряду $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ аналітична всередині області збіжності.

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ збігається в колі $|z-a| < R$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}$ збігається в області $|z-a| > r$, то для $0 < r < R < \infty$ областю збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ є кільце $r < (z-a) < R$.

2.7.2 Ряди Тейлора і Лорана

Функція $w = f(z)$, яка аналітична в крузі $|z-a| < R, (0 \le R \le \infty)$, розкладається в ряд за степенями $(z-a)$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \qquad (2.28)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=r}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

де $n=0,\ 1,\ 2...$ і $0<r<R$.

Ряд (2.28) називається рядом Тейлора функції *f(z)* і збігається до цієї функції всередині вказаного круга. Функція *f(z)*, яка аналітична в кільці $r<|z-a|<R,\quad 0\le r<R\le\infty$, розкладається в ряд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \qquad (2.29)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=p}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}dz},\quad n=0,\pm 1,...,$$

де $r<p<R$.

Ряд (2.29) називається рядом Лорана функції *f(z)*.

Отже, загальний вигляд ряду Лорана буде таким:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (2.30)$$

де ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ – головна частина ряду Лорана, (2.31)

а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)$ – правильна частина ряду Лорана . (2.32)

Областю збіжності степеневого ряду (2.31) з від'ємними степеням $(z-z_0)$, тобто ряду $\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+...+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ за умови, що $c_{-n}\neq 0$ та існує скінченна границя $r=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$, є зовнішність круга $|z-z_0|>r$.

2.7.3 Розкладання деяких функцій в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n\ !} + \ldots \qquad (2.33)$$

$$\sin\ z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\ !} + \ldots \qquad (2.34)$$

$$\cos\ z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)\ !} + \ldots \qquad (2.35)$$

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m\cdot(m-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{m\ (m-1)\ldots(m-n+1\ )}{3!} z^n + \ldots$$

$$(|z| < 1) \qquad (2.36)$$

$$\ln\ (1+\ z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} + \ldots \quad (|z| < 1) \qquad (2.37)$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + \ (-1)^n\ \ z^n \ldots, \qquad (|z| < 1) \qquad (2.38)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + \ z^n, \qquad (|z| < 1) \qquad (2.39)$$

2.8 Типи особливих точок

2.8.1 Нулі функції

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в точці z_0. Точка z_0 називається ***нулем функції $f(z)$ порядку n***, якщо виконуються умови

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0 \qquad (2.40)$$

Якщо $n=1$, то точка z_0 називається ***простим полюсом***.

Точка z_0 тоді і тільки тоді є нулем n-ого порядку функції $f(z)$, яка аналітична в точці z_0, коли в деякому околі цієї точки має місце рівність

$$f(z)=(z-a)^n\cdot\varphi(z),\qquad(2.41)$$

де $\varphi(z)$ - аналітична в околі z_0 і $\varphi(z_0)\neq 0$.

2.8.2 Ізольовані особливі точки

Точка z_0 називається ***ізольованою особливою точкою*** функції $f(z)$, якщо існує окіл цієї точки, в якому $f(z)$ аналітична всюди, крім самої точки z_0.

Точка z_0 називається ***усувною особливою точкою*** функції $f(z)$, якщо існує скінченна границя функції $f(z)$ в точці z_0:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=c<\infty.\qquad(2.42)$$

Точка z_0 називається полюсом функції $f(z)$ в точці z_0, якщо

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.\qquad(2.43)$$

Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб ця точка була нулем для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Точку z_0 називають полюсом n-ого порядку функції $f(z)$, якщо ця точка є нулем n-ого порядку для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. Якщо $n=1$, то полюс називається простим.

Для того, щоб точка z_0 була ***полюсом порядку*** n функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб функцію $f(z)$ можна було подати у вигляді

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n},\qquad(2.44)$$

де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точка z_0 називається ***істотно особливою точкою функції*** $f(z)$, якщо в точці z_0 функція $f(z)$ не має границі ні скінченної, ні нескінченної.

Для особливих точок справедливі такі твердження:

1. Для того, щоб точка z_0 була усувною особливою точкою функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб лоранівський розклад $f(z)$ в околі точки z_0 не містив головної частини.

2. Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб головна частина лоранівського розкладу $f(z)$ в околі точки z_0 містила скінченне число членів:

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (2.45)$$

$c_{-k}\neq 0$.

Найбільший із показників степеня різниці $(z-z_0)$ в знаменниках членів головної частини ряду Лорана збігається з порядком полюса.

3. Точка z_0 тоді і тільки тоді є істотно особливою точкою для функції $f(z)$, коли головна частина її лоранівського розкладу в околі точки z_0 містить нескінченно багато членів.

2.9 Лишки функції комплексної змінної

Лишком функції $w=f(z)$ в ізольованій особливій точці $z=a$ називається коефіцієнт A_{-1} ряду Лорана цієї функції, який дорівнює

$$res_a f(z)=A_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz, \qquad (2.46)$$

де c – замкнений контур, який лежить в області аналітичності функції $w=f(z)$, всередині якого лежить точка $z=a$ та інших особливих точок цієї функції немає.

Формули для обчислення лишків:

***В простому полюсі*:**

$$resf(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \qquad (2.47)$$

Якщо точка z_0 є простий полюс функції $f(z)$ і функцію $f(z)$ в околі точки z_0 можна подати як частку двох функцій $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причому $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, а $\psi'(z_0)\neq 0$, то

$$resf(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (2.48)$$

***В полюсі порядку n*:**

$$res\, f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\cdot[f(z)\cdot(z-z_0)^n]. \qquad (2.49)$$

Лишок в ізольованій особливій точці дорівнює нулю.

Якщо точка z_0 є істотно особливою точкою функції $f(z)$, то для знаходження $resf(z_0)$ необхідно знайти коефіцієнт c_{-1} в лоранівському розкладі функції $f(z)$ в околі точки z_0; це буде $resf(z_0)$

Основна теорема про лишки*:* Якщо функція $f(z)$ є аналітичною на межі С області D і неперервною всередині області, за винятком скінченної кількості особливих точок z_1, z_2, z_3,..,z_n, то

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}resf(z_k), \qquad (2.50)$$

де С– границя області D.

3 Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Знайти всі корені рівняння $z^4+3z^2+2=0$ і зобразити їх на комплексній площині.

***Розв'язання*:** Позначимо $z^2=t$. Тоді одержимо квадратне рівняння відносно t:

$$t^2+3t+=2=0,\ D=1,\ \sqrt{D}=1,$$

$$t_1=-1,\ t_2=-2.$$

Відповідно, корені z_i початкового рівняння будуть

$$\left[\begin{array}{l} z_1^2=-1 \\ z_2^2=-2 \end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l} z_1=i \\ z_2=-i \\ z_3=\sqrt{2}i \\ z_4=-\sqrt{2}i \end{array}\right..$$

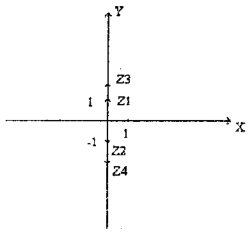

Рисунок 3.1

Позначимо $z_1=i$, $z_2=-i$, $z_3=\sqrt{2}i$ та $z_4=-\sqrt{2}i$ на комплексній площині. Кореню $z_1=i$ на комплексній площині відповідає точка з координатами $(0;1)$ (рис. 3.1). Відповідно

$$z_2=-i\ \to\ (0;-1),\qquad z_3=\sqrt{2}i\to\left(0;\sqrt{2}\right),\qquad z_4=-\sqrt{2}i\to\left(0;-\sqrt{2}\right).$$

Приклад 2. Для вказаних чисел z_1 та z_2 та заданого формулою числа z_3 виконати вказані дії:

1) знайти значення z_3;

2) числа z_1 та z_2 записати в тригонометричній та показниковій формах;

3) для числа z_1 знайти всі корені степеня m та зобразити їх на комплексній площині; зробити перевірку для одного із коренів;

4) число z_2 піднести до степеня k.

Розв'язання:

Нехай $z_1 = 3+3i$, $z_2 = -1-i$, $z_3 = \dfrac{4z_1 + z_1 z_2}{3\overline{z}_1 + 5 - 2i}$, $m=4$, $k=3$

1) Знайдемо значення $z_3 = \dfrac{4z_1 + z_1 z_2}{3\overline{z}_1 + 5 - 2i}$.

Оскільки $z_1 = 3+3i$, то $\overline{z}_1 = 3-3i$. Для знаходження добутку $z_1 \cdot z_2$ перемножимо почленно і врахуємо, що $i^2 = -1$. Помножимо чисельник і знаменник дробу на $(14+11i)$ - комплексне число, спряжене знаменнику і виконаємо ділення на дійсне число:

$$\frac{12-12i}{14-11i} = \frac{(12-12i)(14+11i)}{(14-11i)(14+11i)} = \frac{168+=132i-168i-132i^2}{196+154i-154i-121i^2} = \frac{300}{317} - \frac{36}{317}i.$$

2) Числа $z_1 = 3+3i$ та $z_2 = -1-i$ запишемо в тригонометричній та показниковій формах.

Оскільки $z = x+iy = 3+3i$, то $x=3$ $y=3$ $|z| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$; $x>0$ та $y>0$. Отже, $\varphi = arctg\dfrac{3}{3} = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа $z_1 = 3+3i$ будуть: $z_1 = \sqrt{18}\left(cos\dfrac{\pi}{4} + isin\dfrac{\pi}{4}\right)$ та $z_1 = \sqrt{18}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Маємо $z_2 = -1-i$, звідки $x=-1$ та $y=-1$. Тоді

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Оскільки $x<0$ та $y<0$, то $\varphi = arctg\dfrac{y}{x} - \pi = arctg\dfrac{(-1)}{(-1)} - \pi = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа $z_2=-1-i$ будуть

$$z_2=\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\,sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}-sin\frac{3\pi}{4}\right) \text{ та } z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

3) Для числа $z_1=3+3i$ знайдемо всі корені степеня $m=4$, зобразимо їх на комплексній площині та зробимо перевірку для одного із коренів.

Для знаходження коренів використаємо формулу (1.9).

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

За умовою $n=m=4$, отже,

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{18}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right), \text{ де } (k=0,1,2,3).$$

$$z_1=\sqrt[4]{18}\left(cos\frac{\pi}{16}+i\,sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$(k=0)$;

$$z_2=\sqrt[4]{18}\left(cos\frac{9\pi}{16}+i\,sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$z_3=\sqrt[4]{18}\left(cos\frac{17\pi}{16}+i\,sin\frac{17\pi}{16}\right),\ (k=2);$$

$$z_4=\sqrt[4]{18}\left(cos\frac{25\pi}{16}+i\,sin\frac{25\pi}{16}\right),\ (k=3).$$

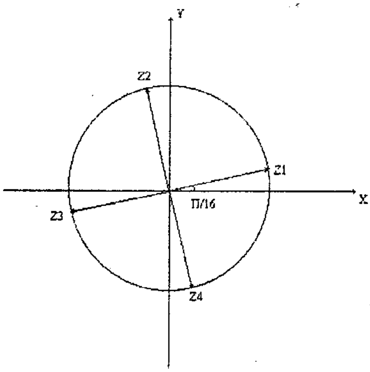

Рисунок 3.2

Зазначимо, що всі корені мають однакові модулі:

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=\sqrt[4]{18}.$$

Отже, всі вони лежать на колі з центром в початку координат і радіусом $\sqrt[4]{18}$. Аргументи цих чисел $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}k$. Це означає, що аргумент числа z_2

відрізняється від аргументу числа z_1 на $\frac{\pi}{2}$, аргумент числа z_3 відрізняється від аргументу числа z_1 на π, аргумент z_4 – на $\frac{3\pi}{4}$. Тому, побудувавши на площині вектор z_1, одержимо точки z_2, z_3, z_4, якщо повернемо вектор z_1 на кути $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ (рис. 3.2).

Зробимо перевірку для одного з коренів, наприклад, для $z_2 = \sqrt[4]{\sqrt{18}}\left(cos\frac{9\pi}{16} + isin\frac{9\pi}{16}\right)$.

Перевіримо, чи виконується рівність $\left[\sqrt[4]{\sqrt{18}}\left(cos\frac{9\pi}{16} + isin\frac{9\pi}{16}\right)\right]^4 = 3 + 3i$.

$$\left[\sqrt[4]{\sqrt{18}}\left(cos\frac{9\pi}{16} + isin\frac{9\pi}{16}\right)\right]^4 =$$

$$= \sqrt{18}\left[\left(cos^2\frac{9\pi}{16} + 2icos\frac{9\pi}{16}sin\frac{9\pi}{16} - sin^2\frac{9\pi}{16}\right)\right]^2 =$$

$$= \sqrt{18}\left[\left(cos2\cdot\frac{9\pi}{16} + isin2\cdot\frac{9\pi}{16}\right)\right]^2 = \sqrt{18}\left[\left(cos\frac{9\pi}{8} + isin\frac{9\pi}{8}\right)\right]^2 =$$

$$= \sqrt{18}\left[\left(cos^2\frac{9\pi}{8} + 2icos\frac{9\pi}{8}sin\frac{9\pi}{8} - sin^2\frac{9\pi}{86}\right)\right] = \sqrt{18}\left(cos\frac{9\pi}{4} + isin\frac{9\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{18}\left(cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + isin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{18}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{18}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = = 3 + 3i.$$

Отже, одержали тотожність $3 + 3i = 3 + 3i$.

4) Число $z_2 = -1 - i$ піднесемо до степеня $k = 3$.

Для піднесення комплексного числа z_2 до степеня використаємо формулу (1.8).

$$z^n = r^n\left(cos\,n\varphi + i\,sin\,n\varphi\right), \text{ де } n = k = 3.$$

Тоді $z^3 = r^3(cos3\varphi + i\,sin3\varphi)$, $r = \sqrt{2}$, $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Отже,

$$z_2^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3\left(cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^3\left(cos\cdot\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) - i\,sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - 2i.$$

Приклад 3. Зобразити на комплексній площині множину точок, яка задовольняє нерівність $|z + 4 - 3i| \le 2$.

Розв'язання:

Нерівність $|z - (4 + 3i)| \le 2$ означає, що відстань від точки $(-4 + 3i)$до точки z не більша двох. Цю умову задовольняють точки круга з центром в точці $(-4;3)$ радіуса 2, який обмежує коло $|z - (4 + 3i)| = 2$, тобто це є внутрішність круга (рис. 3.3).

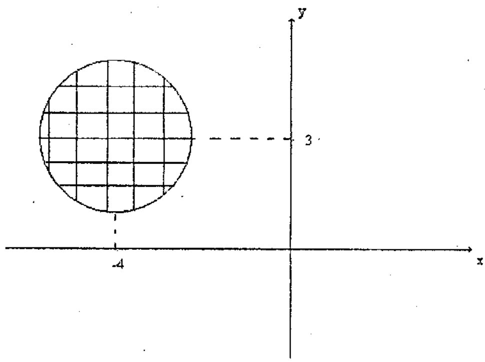

Рисунок 3.3

Приклад 4. Зобразити на комплексній площині множину точок, яка задовольняє нерівність $\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right| \le 3$.

Розв'язання: Помноживши ліву і праву частини даної нерівності на $|z + 2|$ одержимо рівносильну нерівність $|z - 2| \le 3 \cdot |z + 2|$.

Вираз $|z - 2|$ виражає відстань від точки z до точки з координатами (2; 0). Оскільки $z = x + iy$, то маємо, що

$$|z-2|=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$$

Аналогічно вираз $|z-(-2)|$ виражає відстань від точки z до точки з координатами (-2; 0)

Отже,

$$|z-(-2)|=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=$$

$$=\sqrt{(x+2)^2+y^2}.$$

Отримаємо нерівність

$$(x-2)^2+y^2\le 3\left((x+2)^2+y^2\right),$$

$$x^2+8x+y^2\ge 0.$$

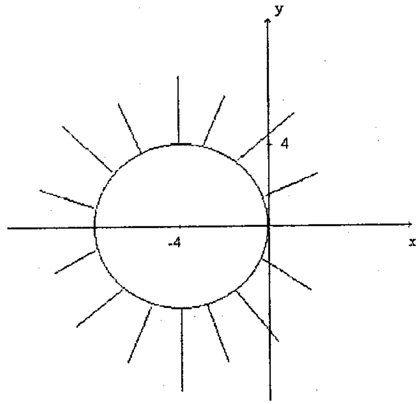

Рисунок 3.4

Виділимо повний квадрат і одержимо

$$(x+4)^2+y^2\ge 16.$$

Відповідно, шуканою множиною є зовнішність круга з центром в точці (-4; 0) радіуса 4 (рис. 3.4).

Приклад 5. Довести, що функція $f(z)=3z^3+4z$ аналітична та знайти похідну:

1) за формулою обчислення похідної аналітичної функції комплексної змінної (Коші–Рімана);
2) за таблицею похідних;
3) довести, що значення похідних збігаються.

Розв'язання:

1) Доведемо, що функція аналітична та знайдемо похідну за формулою обчислення похідної аналітичної функції комплексної змінної (Коші-Рімана).

Нехай $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, тоді $f(z) = 3(x+iy)^3 + 4(x+iy)$.

В останній рівності розкриємо дужки і виділимо дійсну і уявну частини. Одержимо

$$f(z) = 3x^3 - 9xy^2 + 4x + 9ix^2y - 3iy^3 + 4iy,$$

$$u(z) = 3x^3 - 9xy^2 + 4x,\ v(z) = 9x^2y - 3y^3 + 4y.$$

Для того, щоб функція $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ була аналітичною в області D, необхідно й достатньо, щоб існували в цій області неперервні частинні похідні від функцій $u(x;y)$ і $v(x;y)$, які задовольняють умови Коші–Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Обчислимо $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 - 9y^2 + 4,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -18xy,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 9x^2 - 9y^2 + 4,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 18xy.$$

Очевидно, що $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Умови Коші-Рімана виконуються для довільних x та y, тому функція $f(z) = 3z^3 + 4z$ аналітична на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну за формулою $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$f'(z) = (3z^3 + 4z)' = 9x^2 - 9y^2 + 4 + 18ixy.$$

2) Обчислимо похідну функції $f(z) = 3z^3 + 4z$ за таблицею похідних.

$$f'(z) = (3z^3 + 4z)' = 9z^2 + 4$$

3) Доведемо, що значення похідних збігаються. Оскільки $z = x = iy$, то $9z^2 + 4 = 9(x+iy)^2 + 4 = 9x^2 - 9y^2 + 4 + 18ixy$. Отже, значення похідних збігаються.

Приклад 6. Довести, що функція $f(z)=e^{-4z+3i}$ аналітична та знайти похідну:

1) за формулою обчислення похідної аналітичної функції комплексної змінної (Коші–Рімана);
2) за таблицею похідних;
3) довести, що значення похідних збігаються.

Розв'язання:

Оскільки $e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)$, то

$$e^{-4(x+iy)+3i}=e^{-4x}\left(\cos(3-4y)+i\sin(3-4y)\right).$$

Відповідно, $u=e^{-4x}\cos(3-4y)$, $v=e^{-4x}\sin(3-4y)$. Обчислимо $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-4e^{-4x}\cos(3-4y); \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=4e^{-4x}\sin(3-4y);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-4e^{-4x}\sin(3-4y); \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-4e^{-4x}\cos(3-4y).$$

Очевидно, що $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, тобто умови Коші-Рімана виконуються для довільних x та y, тому функція $f(z)=e^{-4z+3i}$ є аналітичною на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну за формулою $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$f'(z)=\left(e^{-4z+3i}\right)'=\frac{\partial}{\partial x}(e^{-4x}\cos(3-4y))+i\frac{\partial}{\partial x}(e^{-4x}\sin(3-4y))=$$
$$=-4e^{-4x}\cos(3-4y)-i4e^{-4x}\sin(3-4y).$$

За таблицею похідних

$$f'(z)=e^{-4z+3i}=-4e^{-4z+3i}=$$

$$= -4e^{-4(x+iy)+3i} = -4e^{-4x}\left(\cos(3-4y) + i\sin(3-4y)\right).$$

Отже, значення похідних збігаються.

Приклад 7. Довести, що функція $f(z) = z^3$ аналітична та знайти похідну:

1) за формулою обчислення похідної аналітичної функції комплексної змінної (Коші–Рімана);
2) за таблицею похідних.

Довести, що значення похідних збігаються.

Розв'язання: Нехай $z = re^{i\varphi}$, тоді маємо:

$$f(z) = z^3 = r^3 e^{i3\varphi} = r^3\left(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\right).$$

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана (2.15).

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Обчислимо $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial r}$ та $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2\cos 3\varphi; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 3r^2\sin 3\varphi;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -3r^3\sin 3\varphi; \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 3r^3\cos 3\varphi.$$

Очевидно, що умови Коші-Рімана виконуються для довільних r і φ.

Це означає, що функція $f(z) = z^3$ аналітична на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну функції двома способами: за формулою $f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$ та за таблицею похідних.

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\cos 3\varphi\right) + i\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\sin 3\varphi\right)\right) =$$

$$= \frac{r}{z}\left(3r^2\cos 3\varphi + i3r^2\sin 3\varphi\right) = \frac{3r^3}{z}\left(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\right) = \frac{3r^3}{z}e^{i3\varphi} = \frac{3z^3}{z} = 3z^2.$$

За таблицею похідних $f'(z)=\left(z^3\right)'=3z^2$.

Отже, значення похідних збігаються.

Приклад 8. Відновити функцію за заданою уявною частиною

$$v(x,y)=arctg\frac{y}{x}.$$

Розв'язання: Перевіримо чи є функція v уявною частиною деякої аналітичної функції $f(z)$, тобто чи виконується умова (2.18).

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{2xy}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{-x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}; \qquad -\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{2xy}{x^2+y^2}=0,$$

тобто $\Delta v=0$. Отже, функція $v=arctg\frac{y}{x}$ є уявною частиною деякої аналітичної функції $f(z)$.

Функція $v=arctg\frac{y}{x}$ і шукана функція $u(x;y)$ мають задовольняти умови Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Із цих умов одержимо систему

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left[arctg\frac{y}{x}\right]=-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{-x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[arctg\frac{y}{x}\right]=-\left[-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right]\cdot\left[-\frac{y}{x^2}\right]=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

З першого рівняння одержимо рівність

$$u=-\int\frac{xdx}{x^2+y^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=-\frac{1}{2}ln\left(x^2+y^2\right)+\varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ – поки що довільна функція змінної y. Продиференціюємо останню рівність за y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}+\varphi'(y),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y).$$

Порівняння цієї рівності із другим рівнянням системи дає

$$-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y),\ \varphi'(y)=0,\ \varphi(y)=C.$$

Таким чином, дійсна частина функції $f(z)$ має вигляд

$$u=-\frac{1}{2}ln\left(x^2+y^2\right)+C.$$

Отже, $f(z)=-\frac{1}{2}ln\left(x^2+y^2\right)+i\ arctg\frac{y}{x}+C$.

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int\limits_C(4+i+z\bar{z})dz$ по кривій C,

де C: $|z|=3$, $0\le arg\,z\le\frac{\pi}{2}$.

***Розв'язання*:** Запишемо рівняння контуру C в показниковій формі. Нехай $z=3e^{i\varphi}$, тоді $dz=3ie^{i\varphi}d\varphi$.

За формулою (2.21)

$$\int_C \left(4+i+z\bar{z}\right)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\left(4+i+3e^{i\varphi}\cdot 3e^{-i\varphi}\right)e^{i\varphi}d\varphi = (39i-3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{39i-3}{i}\cdot e^{i\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = (39+3i)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}-1\right) = -42-42i.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int_C (z+2)^2 dz$ по кривій C, де C – відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1=-2$ та $z_2=-2+i$.

***Розв'язання*:** Нехай $z=x+iy, f(z)=u+iv$, тоді

$$f(z)=z^2+4z+4=(x^2+4x-y^2+4)+\ i(2xy+4y),$$

звідки $u=x^2+4x-y^2+4$, $v=2xy+4y$.

Для обчислення інтеграла по контуру застосуємо формулу (2.19) і одержимо

$$\int_C (z+2)^2 dz = \int_C (x^2+4x-y^2+4)dx-(2xy+4y)dy+$$
$$+i\int_C (2xy+4y)dx+(x^2+4x-y^2+4)dy.$$

Контуром C, що з'єднує точки $z_1=-2$ і $z_2=-2+i$, є відрізок прямої $x=-2$ $(0\le y\le 1)$. Це означає, що $dx=0$. Тому

$$\int_C (z+2)^2 dz = -\int_0^1 (2\cdot(-2)y+4y)dy + i\int_0^1 ((-2)^2+4\cdot(-2)-y^2+4)dy =$$

$$= -i\int_0^1 y^2 dy = -\frac{1}{3}i.$$

***Приклад* 11**. Обчислити інтеграл $\int\limits_C (2+6z)dz$ по відрізку прямої AB, яка з'єднує точки $z_A = 2$ та $z_B = 4+3i$, виразивши його через криволінійний інтеграл, та за формулою Ньютона-Лейбніца.

Розв'язання: Обчислення інтеграла функції $f(z) = u + iv$, де $u = u(x;y)$ і $v = v(x;y)$ – дійсні функції змінних x та y комплексної змінної z, зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів, а саме

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C udx - vdy + i\int\limits_C vdx + udy.$$

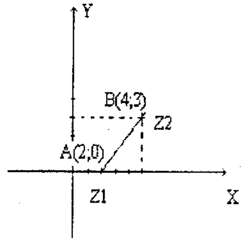

Рисунок 3.5

Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді $u+iv$, враховуючи, що $z = x + iy$. Одержимо

$f(z) = 2 + 6z = 2 + 6(x+iy) = (2+6x) + i6y$, де $u = 2+6x$, а $v = 6y$.

Отже, $\int\limits_C (2+6z)dz = \int\limits_C (2+6x)dx - 6ydy + i\int\limits_C 6ydx + (2+6x)dy$.

Рівняння прямої AB (рис. 3.5), яка проходить через точки $z_1 = 2$ та $z_2 = 4+3i$, буде $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y-0}{3-0}$, $y = \dfrac{3}{2}x - 3$ або $y = 1{,}5x - 3$ $(2 \le x \le 4)$, а значить $dy = 1{,}5dx$. Тому

$$\int\limits_C (2+6z)dz = \int\limits_2^4 \left(2+6x-9\cdot(1{,}5x-3)\right)dx + i\int\limits_2^4 \left(6(1{,}5x-3) + (2+6x)\cdot 1{,}5\right)dx =$$
$$= 13 + 78i.$$

Для обчислення даного інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца (2.21) необхідно перевірити виконання умов Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ та } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=6, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Очевидно, що $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Умови Коші-Рімана виконуються для довільних x та y, тому функція $f(z)=(2+6x)+i6y$ аналітична на всій комплексній площині.

Отже, для обчислення інтеграла $\int\limits_C (2+6z)dz$ можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца.

Одержимо

$$\int\limits_{2}^{4+3i}(2+6z)dz=(2z+3z^2)\Big|_2^{4+3i}=13+78i.$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=5}\frac{dz}{z^2+16}$:

1) за допомогою інтегральної формули Коші;

2) за допомогою теореми Коші про лишки.

***Розв'язання*:**

1) Обчислимо інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші.

В колі $|z|=5$ знаменник дробу перетворюється в нуль в точках $z_1=4i$ та $z_2=-4i$. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D, яка обмежена кусково-гладким замкненим контуром С, та на самому контурі, то справедлива інтегральна формула Коші (2.24):

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c\frac{f(z)dz}{z-z_0},\ z_0\in D.$$

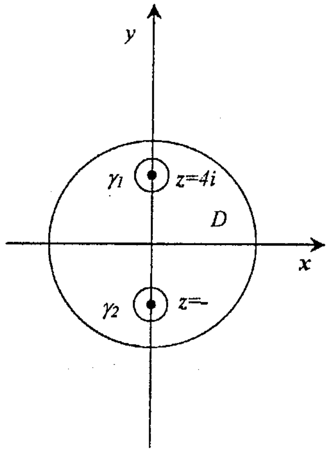

Рисунок 3.6

Побудуємо круги γ_1 і γ_2 з центрами в точках $z_1 = 4i$ і $z_2 = -4i$ (рис. 3.6) досить малих радіусів, таких, щоб вони не перетинались та повністю лежали в крузі $|z| \le 5$. В тризв'язній області, яка обмежена колами $|z| = 5$, γ_1 та γ_2, підінтегральна функція всюди аналітична. За теоремою Коші для багатозв'язної області

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+16} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+16}.$$

До кожного інтеграла в правій частині можна застосувати інтегральну формулу Коші. В результаті одержимо

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = \left.\frac{i2\pi}{z+4i}\right|_{z_1=4i} + \left.\frac{i2\pi}{z-4i}\right|_{z_1=-4i} = 0.$$

2) Обчислимо інтеграл за допомогою теореми Коші про лишки.

В області $|z| \le 5$ функція $f(z) = \dfrac{1}{z^2+16}$ аналітична всюди, крім точок $z_1 = 4i$ та $z_2 = -4i$. За теоремою про лишки

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = i2\pi\left(res f(4i) + res f(-4i)\right).$$

Класифікуємо особливі точки $z_1 = 4i$ та $z_2 = -4i$. Оскільки $\lim\limits_{z\to z_1} f(z) = \lim\limits_{z\to 4i} \dfrac{1}{(4i)^2+16} = \infty$ та $\lim\limits_{z\to z_2} f(z) = \lim\limits_{z\to -4i} \dfrac{1}{(-4i)^2+16} = \infty$, то точки z_1 та z_2 є полюсами функції $f(z) = \dfrac{1}{z^2+16}$. Точки $z_1 = 4i$ та $z_2 = -4i$ є простими полюсами.

У випадку простого полюса лишки обчислюються за формулою (2.47): $res f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z)(z - z_0) \right]$.

Отже, $res f(4i) = \lim\limits_{z \to 4i} \dfrac{1}{(z-4i)(z+4i)} \cdot (z - 4i) = \lim\limits_{z \to 4i} \dfrac{1}{z+4i} = \dfrac{1}{8i}$;

$$res f(-4i) = \lim_{z \to -4i} \frac{1}{(z-4i)(z+4i)} \cdot (z + 4i) = \lim_{z \to -4i} \frac{1}{z-4i} = -\frac{1}{8i}.$$

Отже,

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = \left(\frac{1}{8i} - \frac{1}{8i} \right) \cdot i2\pi = 0.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)} dz$:

1) за допомогою інтегральної формули Коші;

2) за допомогою теореми Коші про лишки.

Розв'язання:

1) Обчислимо інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші.

В крузі $|z| = 3$ знаменник підінтегрального виразу перетворюється в нуль в точці $z = 0$. Для використання інтегральної формули Коші (2.25) перепишемо інтеграл так:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)} dz = \int\limits_{|z|=3} \frac{\dfrac{cos(z+i\pi)}{e^z+2}}{z} dz.$$

Тут $z_0 = 0$ і функція $f(z) = \dfrac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)}$ аналітична в крузі $|z| \le 3$.

Тому $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)} dz = i2\pi f(0) = i2\pi \cdot \dfrac{cos\, i\pi}{1+2} = i\dfrac{2}{3}\pi\, cos\, i\pi$.

Оскільки, $\cos i\pi = \dfrac{e^{i(i\pi)} + e^{-i(i\pi)}}{2} = \dfrac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} = ch\pi$, то

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)}dz = i\frac{2}{3}\pi \cdot ch\pi$$

2) Обчислимо інтеграл за допомогою теореми Коші про лишки.

В крузі $|z| \le 3$ функція $f(z) = \dfrac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)}$ аналітична всюди, крім точки $z = 0$.

За теоремою Коші про лишки $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)}dz = i2\pi \cdot resf(0)$.

Класифікуємо особливу точку $z = 0$.

Оскільки

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)} = \infty,$$

то $z = 0$ – простий полюс функції $f(z) = \dfrac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)}$.

Тому:

$$resf(0) = \lim_{z\to 0} \frac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)} \cdot z = \frac{1}{3}ch\pi .$$

Таким чином,

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)}dz = i\frac{2}{3}\pi \cdot ch\pi .$$

Приклад 14. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{L_i} \dfrac{tg\, 2z}{z^3 \cdot (z+1)}dz$ за допомогою лишків. Зробити зображення контурів l_i в комплексній площині z.

$$l_1 : |z| = 2 \qquad l_2 : |z| = \frac{1}{4}; \quad l_3 : |z+i| = \frac{1}{4};$$

$$l_4 : \left|z - \frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{8}; \qquad l_5 : \left|z + \frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{8}.$$

***Розв'язання*:**

$$\oint\limits_{L_i} \frac{tg\, 2z}{z^3 \cdot (z+1)} dz = \oint\limits_{L_i} \frac{\sin 2z}{z^3 \cdot (z+1) \cdot \cos 2z} dz,$$

$z_1 = 0,\ z_2 = -i,\ z_3 = \frac{\pi}{4},\ z_4 = -\frac{\pi}{4}$ – особливі точки.

Визначимо типи особливих точок та обчислимо лишки в цих точках.

Для точки $z_1 = 0$: оскільки,

$$\lim_{z \to 0} \frac{tg\ 2z}{z^3 \cdot (z+1)} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{z \to 0} \frac{(tg\ 2z)'}{(z^4 + i \cdot z^3)'} = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{2}{\cos^2 2z}}{4 \cdot z^3 + 3 \cdot i \cdot z^2} = \infty,$$

то $z_1 = 0$ - полюс функції.

> **Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$ необхідно і достатньо, щоб ця точка була нулем для функції $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.**

Визначимо порядок полюса. Розглянемо функцію $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

$$\varphi(z) = \frac{\frac{1}{tg\ 2z}}{z^3 \cdot (z+i)} = \frac{z^3 \cdot (z+i) \cdot \cos\ 2z}{\sin 2z} = \frac{(z^4 + z^3 \cdot i) \cdot \cos\ 2z}{\sin 2z}.$$

Нехай $\varphi(z) = \frac{\psi(z)}{\psi_1(z)}$, де $\psi(z) = (z^4 + z^3 \cdot i) \cdot \cos\ 2z,\ \psi_1(z) = \sin\ 2z$.

Визначимо окремо порядок нуля для функцій $\psi(z)$ $\psi_1(z)$.

$\psi(z) = (z^4 + z^3 \cdot i) \cdot \cos\ 2z,\ \psi(z_1) = \psi(0) = 0.$

$\psi'(z)=(4z^3+3z^2\cdot i)\cdot cos\ 2z-(z^4+z^3\cdot i)\cdot 2\cdot sin\ 2z,\ \psi'(0)=0.$

$\psi''(z)=(-4z^4-4z^3\cdot i+12z^2+6z\cdot i)\cdot cos\ 2z-(8z^3+6z^2\cdot i+8z^3+$
$+6z^2\cdot i)\cdot sin\ 2z, \qquad \psi''(z_1)=\psi''(0)=0.$

$\psi'''(z)=(-16z^3-12z^2\cdot i+24+6\cdot i)\cdot cos\ 2z+(8z^4+8z^3\cdot i-24z^2-$
$12z\cdot i)\cdot sin\ 2z-\ (24z^2+12z\cdot i+24z+12z\cdot i)\cdot sin\ 2z-(16z^3+12z^2\cdot i+$
$16z^3+12z^2\cdot i)\cdot cos\ 2z=(-48z^3-36z^2\cdot i+24+6\cdot i)\cdot cos\ 2z+(8z^4+$
$8z^3\cdot i-48z^2-36z\cdot i+24z)\cdot sin\ 2z, \qquad \psi'''(z_1)=\psi'''(0)=24+6\cdot i\neq 0.$

Отже, точка $z_1=0$ є нулем третього порядку для функції $\psi(z)=(z^4+z^3\cdot i)\cdot cos\ 2z.$

$\psi_1(z)=sin\ 2z,\ \ \psi_1(z_1)=\psi_1(0)=0.$
$\psi_1'(z)=2\ cos\ 2z,\ \ \psi(0)=2\neq 0.$

Отже, точка $z_1=0$ є нулем першого порядку (або простим нулем) для функції $\psi_1(z)=sin\,2z$. Точка $z_1=0$ є нулем порядку 3-1=2 для функції $\varphi(z)$, а значить полюсом другого порядку для функції $f(z)=\dfrac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}$.

Обчислимо лишок функції в точці $z_1=0$.

Якщо точка z_0 є полюсом *n*-го порядку функції $f(z)$, то лишок в даній точці обчислюється за формулою:

$$res\ f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\cdot[f(z)\cdot(z-z_0)^n]$$

$$res\ f(0)=\frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}\cdot z^3\right]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{tg\ 2z}{z+i}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{2(z+i)}{cos^2 2z}-tg\ 2z}{(z+i)^2}=\frac{2i}{-1}=-2i.$$

Для точки $z_2=-i$: оскільки $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{tg\ 2z}{z^2\cdot(z+i)}=\infty$, то $z_2=-i$ – полюс функції. Визначимо порядок полюса.

Для того, щоб точка z_0 була полюсом порядку n функції $f(z)$ необхідно і достатньо, щоб функцію $f(z)$ можна було подати у вигляді $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0)\neq 0$.

$$f(z)=\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}=\frac{\dfrac{tg\ 2z}{z^3}}{(z+i)},$$

де $\varphi(z)=\dfrac{tg\ 2z}{z^3}$ – аналітична функція в околі точки $z_2=-i$.

$\varphi(z_2)=\dfrac{tg\ 2i}{(-i)^3}=itg\ 2i\neq 0$. Отже, $z_2=-i$ – полюс першого порядку, оскільки $n=1$.

За формулою (2.47)

$$res\ \ f(-i)=\lim_{z\to -i}\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+1)}\cdot(z+i)=\lim_{z\to -i}\frac{tg\ 2z}{z^3}=itg\ \ 2i.$$

Для точки $z_3=\dfrac{\pi}{4}$: оскільки,

$$\lim_{z\to z_3} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{sin\ 2z}{cos\ 2z\cdot z^3\cdot(z+i)}=\infty,$$

то $z_3=\dfrac{\pi}{4}$ - полюс функції. Визначимо порядок полюса.

$$\varphi(x)=\frac{1}{f(z)}=\frac{cos\ 2z\cdot z^3\cdot(z+i)}{sin\ 2z},\ \ \varphi(\frac{\pi}{4})=\frac{cos(2\cdot\frac{\pi}{4})\cdot(\frac{\pi}{4})^3\cdot(\frac{\pi}{4}+i)}{sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}=0,$$

$$\varphi'(x)=\left[\frac{z^4+iz^3}{tg\,2z}\right]'=\left[\frac{\left(4z^3+3iz^2\right)\cdot tg\,2z-\dfrac{2}{cos^2 2z}\cdot(z^4+iz^3)}{tg^2 2z}\right]=$$

$$=\left(\frac{4z^3+3iz^2}{tg\,2z}-\frac{2\cdot(z^4+iz^3)}{cos\,2z}\cdot\frac{cos\,2z}{sin\,2z}\right),\ \varphi'(\frac{\pi}{4})=-2\cdot(\frac{\pi}{4})^4+i\cdot(\frac{\pi}{4}^{3})\neq 0.$$

Отже, $z_3=\dfrac{\pi}{4}$ – простий полюс. Обчислимо лишок функції в точці $z_3=\dfrac{\pi}{4}$.

Якщо функцію $f(z)$ в околі точки z_0 можна подати як частку двох функцій $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причому $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$ а $\psi'(z_0)\neq 0$, тобто z_0 є простий полюс функції $f(z)$, то $resf(z_0)=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

$$f(z)\ \frac{sin\ 2z}{z^3\cdot(z+i)\cdot cos\ 2z}=\frac{\dfrac{sin\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}}{cos\ 2z},\ \text{де}\ \varphi(z)\ \frac{sin\ 2z}{z^3\cdot(z+i)},$$

$\psi(z)=cos\,2z$.

$$\varphi(\frac{\pi}{4})\neq 0,\ \psi(\frac{\pi}{4})=cos(2\cdot\frac{\pi}{4})=0,\ \psi'(z)=-2sin2z,\ \psi'(\frac{\pi}{4})=-2\neq 0.$$

$$resf(z_0)=\frac{\dfrac{sin\ 2z_0}{z_0^3\cdot(z_0+i)}}{\left(cos\ 2z_0\right)'}=\frac{sin\ 2z_0}{z_0^3\cdot(z_0+i)\cdot(-2\cdot sin\ 2z_0)}=$$

$$=\frac{1}{(-2)\cdot z_0^3\cdot(z_0+i)}.$$

Відповідно,

$$resf(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{(-2)\cdot\frac{\pi^3}{64}\cdot(\frac{\pi}{4}+i)}=\frac{-32}{\pi^3(\frac{\pi}{4}+i)}=\frac{-128}{\pi^3(\pi+4i)}.$$

Для точки $z_4=-\frac{\pi}{4}$: оскільки $\lim\limits_{z\to-\frac{\pi}{4}} f(z)=\lim\limits_{z\to-\frac{\pi}{4}}\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}=-\infty$,

то $z_4=-\frac{\pi}{4}$ – полюс функції. Визначимо порядок полюса.

Точка $z_4=-\frac{\pi}{4}$, як і точка $z_3=\frac{\pi}{4}$, є простим полюсом. Тому лишок в точці $z_4=-\frac{\pi}{4}$ можна обчислити за формулою (2.47):

$$res\ \ f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

$$f(z)=\frac{\frac{sin\ \ 2z}{z^3\cdot(z+i)}}{cos\ \ 2z},\ \ \varphi(z)=\frac{sin\ \ 2z}{z^3\cdot(z+i)},\ \ \psi(z)=cos\ \ 2z.$$

$$res\ \ f(z_0)=\frac{\frac{sin2z_0}{z_0^3\cdot(z_0+i)}}{(cos\ \ 2z_0)'}=\frac{sin2z_0}{z_0^3\cdot(z_0+i)\cdot(-2\cdot sin2z_0)}=\frac{1}{(-2)\cdot z_0^3\cdot(z_0+i)},$$

$$res\ \ f(-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{(-2)\cdot(-\frac{\pi}{4})^3\cdot(-\frac{\pi}{4}+i)}=$$

$$=\frac{128}{\pi^3(-\pi+4i)}.$$

Обчислимо інтеграл $\oint\limits_{l_i}\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+1)}dz$ за допомогою лишків.

1) Контур $l_1:|z|=2$, (рис. 3.7).

Контуром $l_1:|z|=2$ є коло з

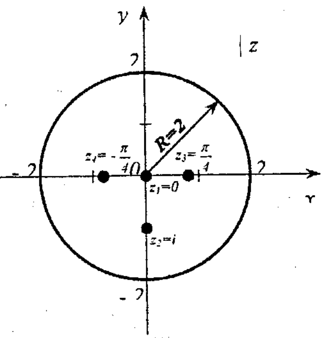

Рисунок 3.7

центром в точці (0, 0), радіус якого дорівнює 2. Даній області інтегрування належать всі особливі точки:

$$z_1 = 0; \quad z_2 = -i; \quad z_3 = \frac{\pi}{4}; \quad z_4 = -\frac{\pi}{4}.$$

> Якщо функція $f(z)$ є аналітичною на межі C області $l_2 : |z| = \frac{1}{4}\ D$ і неперервною всередині області, за винятком скінченної кількості особливих точок z_1, z_2, $z_3, ..., z_n$, то $\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} resf(z_k)$.

$$\int\limits_{l_1} \frac{tg2z}{z^3(z+1)}dz = 2\pi i(res\ f(0) + res\ f(-i) + res(\frac{\pi}{4}) + res\ f(-\frac{\pi}{4})).$$

$$\int\limits_{l_1} \frac{tg2z}{z^3(z+1)}dz = 2\pi i\left(-2i + itg\ 2i - \frac{128}{\pi^3 \cdot (\pi + 4i)} + \frac{128}{\pi^3 \cdot (-\pi + 4i)}\right) =$$

$$= 4\pi + 2\pi tg\ 2i - \frac{512}{\pi \cdot \left(\pi^2 + 16\right)}.$$

2) Контур $l_2 : |z| = \frac{1}{4}$.

Контуром $l_2 : |z| = \frac{1}{4}$ (рис. 3.8) є коло з центром в точці (0, 0), радіус якого дорівнює $\frac{1}{4}$. Цій області інтегрування належить лише одна особлива точка – $z_1 = 0$.

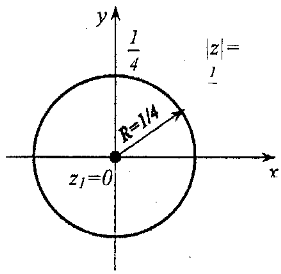

Рисунок 3.8

Тому $\int\limits_{l_1} \frac{tg2z}{z^3(z+1)}dz = 2\pi i res\ f(0) = 2\pi i \cdot (-2i) = 4\pi$.

3) Контур $l_3: |z+i| = \dfrac{1}{4}$.

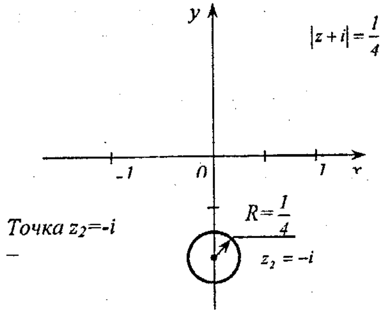

Рисунок 3.9

Контуром $l_3: |z+i| = \dfrac{1}{4}$ (рис. 3.9) є коло з центром в точці (0, -1), радіус якого дорівнює $\dfrac{1}{4}$. Цій області інтегрування належить лише одна особлива точка – $z_2 = -i$.

Тому

$$\int_{l_3} \frac{tg2z}{z^3(z+1)} dz = 2\pi i res\ f(-i) = 2\pi i \cdot (itg\ 2i) = -2\pi tg\ 2i .$$

4) Контур $l_4: \left|z - \dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{1}{8}$.

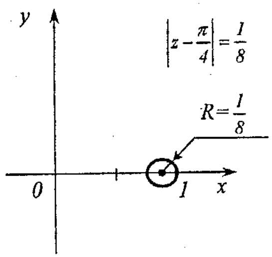

Рисунок 3. 10

Контуром $l_4: \left|z - \dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{1}{8}$ (рис. 3.10) є коло з центром в точці (0, $\dfrac{\pi}{4}$), радіус якого дорівнює $\dfrac{1}{8}$. Цій області інтегрування належить одна особлива точка – $z_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\int_{l_4} \frac{tg2z}{z^3(z+1)} dz = 2\pi i \cdot res\ f(\frac{\pi}{4}) = 2\pi \cdot \frac{-128}{\pi^3 \cdot (\pi + 4i)} = \frac{-256i}{\pi^2 \cdot (\pi + 4i)}.$$

5) Контур $l_5: \left|z + \dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{1}{8}$.

Контуром $l_5 : \left|z+\frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{8}$ (рис. 3.11) є коло з центром в точці $(0, -\frac{\pi}{4})$, радіус якого дорівнює $\frac{1}{8}$. Цій області інтегрування належить одна особлива точка – $z_4 = -\frac{\pi}{4}$.

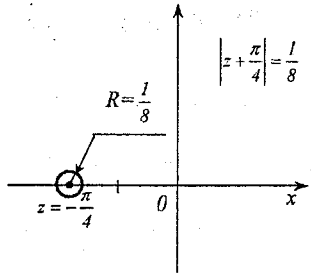

Рисунок 3.11

$$\int\limits_{l_5} \frac{tg2z}{z^3(z+1)} = 2\pi i \cdot res\, f(-\frac{\pi}{4}) = 2\pi i \cdot \frac{(-128)}{\pi^3 \cdot (-\pi + 4 \cdot i)} = \frac{-256 \cdot i}{\pi^2 \cdot (-\pi + 4 \cdot i)}.$$

Приклад 15. Обчистити інтеграл $\int\limits_{l_i} \frac{sh(z)}{z^2 \cdot (z^2+9)} dz$ за допомогою лишків. Зробити зображення контурів l_i в комплексній площині z.

$l_1 : |z| = 4$, $\quad l_2 : |z-3i| = 1$,

$l_3 : |z| = \frac{3}{2}$, $\quad l_4 : |z+3i| = 1$.

Розв'язання:

За умовою $f(z) = \frac{sh(z)}{z^2 \cdot (z^2+9)} = \frac{sh(z)}{z^2 \cdot (z+3i) \cdot (z-3i)}$. Відповідно точки $z_1 = 0$, $z_2 = 3i$ та $z_3 = -3i$ є особливими. Дослідимо особливі точки.

Для точки $z_1 = 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{shz}{z^2\left(z^2+9\right)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{z\to 0} \frac{e^z - e^{-z}}{2} . \frac{1}{z^2\left(z^2+9\right)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \left\{ \begin{matrix} \text{застосуємо} \\ \text{правило Лопіталя} \\ \text{для розкриття} \\ \text{невизначеності} \end{matrix} \right\} =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{(shz)'}{\left[z^2\left(z^2+9\right)\right]'} = \lim_{z\to 0} \frac{chz}{2z\left(z^2+9\right)+z^2.z} = \lim_{z\to 0} \frac{chz}{4z^3+18z} = \infty .$$

Отже, $z_1 = 0$ – полюс функції.

Оскільки $z_1 = 0$ є полюсом функції $\frac{shz}{z^2\left(z^2+9\right)}$, то ця точка є нулем функції $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

> Точка z_0 називається нулем функції $f(z)$ порядку n, якщо виконуються умови:
> $$f(z_0)=0, f'(z_0)=0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0)=0, f^{(n)}(z_0)\neq 0$$

Нехай $\varphi(z) = \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}$, тоді $\psi_1(z) = z^2(z^2+9)$ 0 і $\psi_2(z) = shz$.

Визначимо порядок нуля в точці $z_1 = 0$ окремо для $\psi_1(z)$ і $\psi_2(z)$.

$$\psi_1(z) = z^2(z^2+9), \qquad \psi_1(z_1) = \psi(0) = 0;$$

$$\psi_1'(z) = 2z(z^2+9) + z^2 \cdot 2z = 2z(2z^2+9) = 4z^3 + 18z, \qquad \psi_1'(z_1) = 0;$$

$$\psi_1''(z) = 12z^2 + 18, \qquad \psi_1''(z_1) = 18 \neq 0.$$

Отже, $z_1 = 0$ є нулем другого порядку для функції $\psi_1(z) = z^2(z^2+9)$.

$$\psi_2(z) = shz; \qquad \psi_2(z_1) = \psi_2(0) = 0;$$

$$\psi_2'(z) = chz; \qquad \psi_2'(z_1) = \psi_2'(0) = 1 \neq 0;$$

Отже, $z_1 = 0$ є простим нулем (або нулем першого порядку) функції $\psi_2(z) = shz$.

Відповідно, точка $z_1 = 0$ буде нулем порядку 2-1=1 функції $\varphi(z)$, а значить – простим полюсом для даної функції $f(z) = \frac{shz}{z^2(z^2+9)}$.

Для точки $z_2 = 3i$ $\lim\limits_{z \to 3i} \frac{shz}{z^2(z^2+9)} = \infty$. Отже, точка $z_2 = 3i$ – полюс функції $f(z)$

Визначимо порядок полюса.

Для того, щоб точка z_0 була полюсом порядку n функції *f(z)*, необхідно і достатньо, щоб функцію *f(z)* можна було подати у вигляді *f(z)* $= \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0) \neq 0$.

Подамо *f(z)* у вигляді $f(z) = \frac{\frac{shz}{z^2(z+3i)}}{z-3i}$, де $\varphi(z) = \frac{shz}{z^2(z+3i)}$ аналітична в околі точки $z_2 = 3i$, причому $\varphi(3i) = \frac{sh(3i)}{(3i)(3i+3i)} = -\frac{sh(3i)}{54} \neq 0$.

Відповідно, точка $z_2 = 3i$ є простим полюсом даної функції *f(z)*.

Для точки $z_3 = -3i$ $\lim\limits_{z \to -3i} \frac{shz}{z^2(z^2+9)} = \infty$. Отже, точка $z_3 = -3i$ – полюс функції *f(z)*.

Визначимо порядок полюса.

$$f(z) = \frac{\frac{shz}{z^2(z-3i)}}{z+3i},$$

де функція $\varphi(z) = \frac{shz}{z^2(z-3i)}$ аналітична в околі точки $z_3 = -3i$, причому $\varphi(-3i) = \frac{sh(-3i)}{(-3i)^2(-3i-3i)} = \frac{sh(-3i)}{(-9).(-6i)} = \frac{sh(-3i)}{54} \neq 0$. Відповідно, точка $z_3 = -3i$ є простим полюсом функції *f(z)*.

Обчислимо інтеграл за допомогою лишків.

1) Розглянемо область D_1, яка обмежена контуром $l_1 : |z| = 4$ (рис. 3.12).

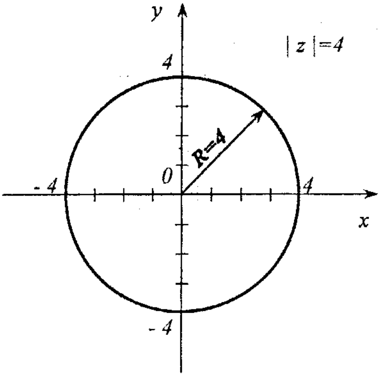

Рисунок 3.12

$|z|=4$ – це круг з центром в початку координат і R=4.

В області D_1 функція $f(z)=\dfrac{shz}{z^2(z^2+9)}$ аналітична всюди, крім точок $z_1=0$, $z_2=3i$, $z_3=-3i$.

За теоремою Коші про лишки:

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{shz)}{z^2(z^2+9)}dz=2\pi i(res\, f(0)+$$
$$+res\, f(3i)+res\, f(-3i)).$$

$$resf(0)=\begin{Bmatrix} n=1-\textit{порядок полюса} \\ resf(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]\end{Bmatrix}=\lim_{z\to 0}\frac{shz}{z^2(z^2+9}(z-0)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{shz}{z^2(z^2+9)}z=\lim_{z\to 0}\frac{shz}{z(z^2+9)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}=\begin{Bmatrix}\textit{викор.правило}\\ \textit{Лопіталя для}\\ \textit{розкриття невизн.}\end{Bmatrix}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(shz)'}{\left[z(z^2+9)\right]'}=\lim_{z\to 0}\frac{(shz)'}{\left(z^3+9z\right)'}=\lim_{z\to 0}\frac{chz}{3z^2+9}=\frac{1}{9}$$

$$resf(3i)=\lim_{z\to 3i}\frac{shz}{z^2(z+3i)(z-3i)}(z-3i)=\lim_{z\to 3i}\frac{shz}{z^2(z+3i)}=\frac{sh(3i)}{(-9)6i}=$$

$$=\frac{sh(3i)}{-54i}=\frac{ish(3i)}{54}$$

$$resf(-3i)=\lim_{z\to -3i}\frac{shz}{z^2(z+3i)(z-3i)}(z+3i)=\lim_{z\to -3i}\frac{shz}{z^2(z-3i)}=$$

$$=\frac{sh(-3i)}{(-3i)^2(-3i-3i)}=\frac{sh(-3i)}{(-9)(-6i)}=-\frac{ish(-3i)}{54}=\frac{i}{54}sh(3i).$$

Таким чином:

$$\oint_{|z|=4} \frac{shz}{z^2(z^2+9)} = 2\pi i\left(\frac{1}{9} + i\frac{1}{54}sh(3i) - i\frac{1}{54}sh(-3i)\right) =$$

$$2\pi i(\frac{1}{9} + i\frac{1}{24}sh(3i)).$$

2) Розглянемо область D_2, яка обмежена контуром $l_2: |z-3i| = 1$

$|z-3i| = 1$ – це круг з центром в точці $z_2 = 3i$ та $R = 1$ (рис. 3.13). В області D_2 функція $f(z) = \frac{shz}{z^2(z^2+9)}$ аналітична всюди, крім точки $z_2 = 3i$.

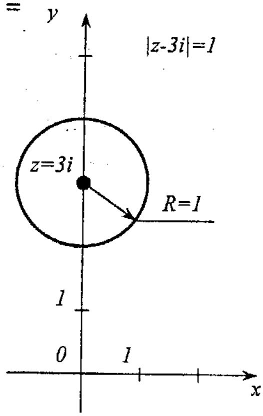

Рисунок 3.13

За теоремою Коші про лишки

$$\oint_{|z-3i|=1} \frac{shz}{z^2(z^2+9)} dz = 2\pi i\ resf(3i) = 2\pi i \frac{i}{54} sh(3i) = -\frac{\pi}{27} sh(3i).$$

3) Розглянемо область D_3, яка обмежена контуром l_3: $|z| = \frac{3}{2}$.

$|z| = \frac{3}{2}$ – це круг з центром в початку координат та $R=\frac{3}{2}$ (рис. 3.14). В області D_3 функція $f(z) = \frac{shz}{z^2(z^2+9)}$ аналітична всюди, крім точки $z_1 = 0$.

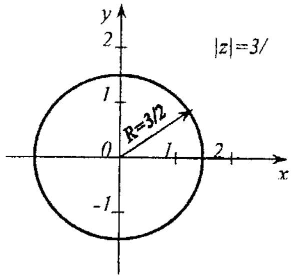

Рисунок 3.14

За теоремою Коші про лишки:

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{shz}{z^2(z^2+9)} dz = 2\pi i\, resf(0) = 2\pi i \frac{1}{9} = \frac{2}{9}\pi i.$$

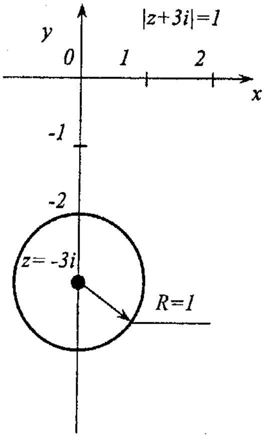

Рисунок 3.15

4) Розглянемо область D_4, яка обмежена контуром $l_4 : |z+3i| = 1$.

$|z+3i|=1$ – це круг (рис. 3.15) з центром в точці $z_3 = -3i$ та $R=1$.

В області D_4 функція $f(z) = \dfrac{shz}{z^2(z^2+9)}$ аналітична всюди, крім точки $z_3 = -3i$.

За теоремою Коші про лишки

$$\int\limits_{|z+3i|=1} \frac{shz}{z^2(z^2+9)} dz = 2\pi i \cdot resf(-3i) =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{i}{54} sh(-3i)\right);$$

$$\int\limits_{|z+3i|=1} \frac{shz}{z^2(z^2+9)} dz = 2\pi i \cdot resf(-3i) = 2\pi i\left(-\frac{i}{54} sh(-3i)\right) =$$

$$= 2\pi i \frac{i}{54} sh(3i) = -\frac{1}{27} \pi sh(3i).$$

Приклад 16. Розкласти функцію $f(z) = (z+5i) \cdot cos\dfrac{1}{(z+5i)^4}$ в ряд Лорана за степенями $(z+5i)$. Визначити характер особливих точок. Показати область збіжності ряду.

Розв'язання:

Для будь-якого комплексного числа ζ маємо:

$$cos\zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} + \frac{\zeta^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

Взявши $\zeta = z+5i$, одержимо:

$$cos\zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} + \frac{\zeta^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

$$(z+5i)\cdot cos\frac{1}{(z+5i)^4}=(z+5i)\cdot\left(1-\frac{1}{(z+5i)^8\cdot 2!}+\frac{1}{(z+5i)^{16}4!}-\frac{1}{(z+5i)^{24}6!}+..\right)$$

або

$$(z+5i)\cdot cos\frac{1}{(z+5i)^4}=(z+5i)-\frac{1}{(z+5i)^7\cdot 2!}+\frac{1}{(z+5i)^{15}4!}-\frac{1}{(z+5i)^{23}6!}+...=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+5i)^{8n-1}(2n)!}.$$

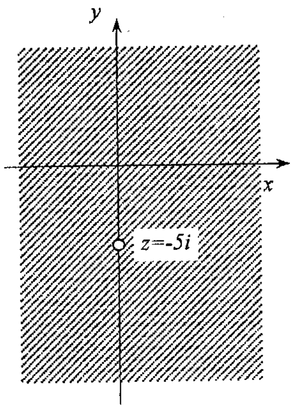

Рисунок 3.16

Розклад справедливий для будь-якої точки, крім $z=-5i$. В даному випадку функція $f(z)=(z+5i)\cdot cos\frac{1}{(z+5i)^4}$ аналітична в кільці $0<|z+5i|<+\infty$ (рис. 3.16).

Визначимо характер особливих точок.

Точка $z_0=-5i$ є ізольованою особливою точкою функції $f(z)=(z+5i)\cdot cos\frac{1}{(z+5i)^4}$, оскільки існує окіл цієї точки, в якому дана функція аналітична всюди, крім самої точки $z_0=-5i$.

$\lim\limits_{z\to-5i} f(z)=\lim\limits_{z\to-5i}(z+5i)\cdot cos\frac{1}{(z=5i)^4}$ – не існує. За ознаками особливих точок це – істотно особлива точка. Дослідження особливої точки можна зробити і використовуючи розклад функції *f(z)* в ряд Лорана (2.29) або (2.30).

Розглянемо головну частину отриманого ряду. Це ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+5i)^{8n-1}\cdot(2n)!}$. Головна частина лоранівського розкладу ряду в околі точки $z_0=-5i$ містить нескінченно багато членів. Отже, точка $z_0=-5i$ є істотно особливою точкою для функції $f(z)=(z+5i)\cdot cos\frac{1}{(z+5i)^4}$.

Нехай дано ряд

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+.....+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+..=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Якщо $c_{-n}\neq 0$ та існує скінченна границя $r=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$, то цей ряд збігається в області $|z-z_0|>r$.

Знайдемо область збіжності ряду .

Розглянемо ряд

$$(z+5i)\cdot cos\frac{1}{(z+5i)^4}=(z+5i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+5i)^{8n}\cdot(2n)!}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+5i)^{8n-1}\cdot(2n)!} \qquad (1)$$

Тут $c_{-n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $c_{-n-1}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}$,$z_0=-5i$.

Тоді

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\right|:\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)}=0.$$

Отже, ряд (1) збігається в області $|z+5i|>0$, тобто на всій площині, крім точки $z_0=-5i$ (рис. 3.16).

Приклад 17. Знайти Лоранівські розклади функції $f(z)$ за степенями

$$z_0 = 1+2i\text{, якщо } f(z) = \frac{z+1}{z\cdot(z-1)}.$$

Розв'язання:

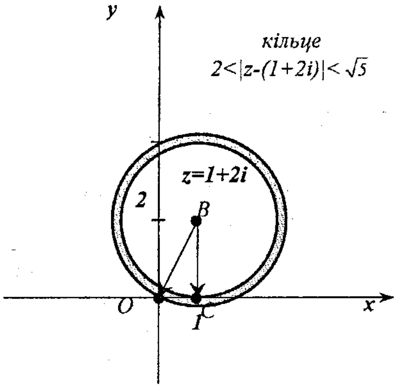

Рисунок 3.17

Розкладемо функцію $f(z)$ в ряд Лорана. Точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1$ – особливі точки функції $f(z)$. Розклад функції $f(z)$ в ряд Лорана будемо виконувати в трьох кільцях (рис. 3.17) з центром в точці $z_0 = 1+2i$. Точці $z_0 = 1+2i$ на координатній площині відповідає точка B(1; 2), точці $z_1 = 0$ – точка O(0; 0), точці $z_2 = 1$ – точка C(1; 0). З прямокутного трикутника $\Delta OCB(\angle C = 90^\circ)$ знайдемо радіуси кілець.

З трикутника $\Delta OCB(\angle C = 90^\circ)$ $CB=2$, $OC=1$, тоді за властивістю гіпотенузи $OB = \sqrt{OC^2 + CB^2} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$.

Отже, $R_1 = OB = \sqrt{5}$ (од. вим.) і $R_2 = CB = 2$ (од. вим.). Відповідно розклад функції $f(z)$ в ряд Лорана будемо виконувати в кільцях:

1. $0 < |z-(1+2i)| < 2$,
2. $2 < |z-(1+2i)| < \sqrt{5}$,
3. $\sqrt{5} < |z-(1+2i)| < +\infty$.

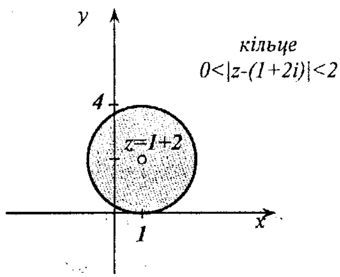

Рисунок 3.18

Розглянемо функцію $f(z)$ в кільці $0 < |z-(1+2i)| < 2$ (рис. 3.18).

В дане кільце не потрапляє жодна особлива точка, отже функція $f(z)$ розкладається в ряд Лорана за степенями $z_0 = 1+2i$.

Розкладемо вираз $\frac{z+1}{z\cdot(z-1)}$ на елементарні дроби

$$\frac{z+1}{z\cdot(z-1)} = \frac{-1}{z} + \frac{2}{z-1}.$$

Нехай $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, де $f_1(z) = \frac{-1}{z}$ та $f_2(z) = \frac{2}{z-1}$. Розкладемо функцію *f(z)* за степенями *(z-(1+2i))*.

$$f_1(z) = \frac{-1}{z} = -\frac{1}{z-(1+2i)+1+2i} = -\frac{1}{(1+2i)\cdot\left(1+\frac{z-(1+2i)}{1+2i}\right)},$$

$$f_2(z) = \frac{2}{z-1} = \frac{2}{(z-(1+2i)+2i} = \frac{2}{2i(\left(1+\frac{z-(1+2i)}{2i}\right)},$$

тоді

$$f(z) = -\frac{1}{(1+2i)\cdot\left(1+\frac{z-(1+2i)}{1+2i}\right)} + \frac{2}{2i\left(1+\frac{z-(1+2i)}{2i}\right)}. \qquad (1)$$

Для розкладу функцій $f_1(z)$ і $f_2(z)$ в ряд Лорана за степенями z-(1+2i) використаємо розклад

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n \cdot z^n + \ldots$$

$$f_1(z) = -\frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-(1+2i)}{1+2i}} =$$

$$= -\frac{1}{1+2i}\cdot\left(1-\frac{z-(1+2i)}{1+2i}+\left(\frac{z-(1+2i)}{1+2i}\right)^2 - \ldots + (-1)^n\left(\frac{z-(1+2i)}{1+2i}\right)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-(1+2i))^n}{(1+2i)^{n+1}} \qquad (2)$$

Визначимо область збіжності ряду (2).

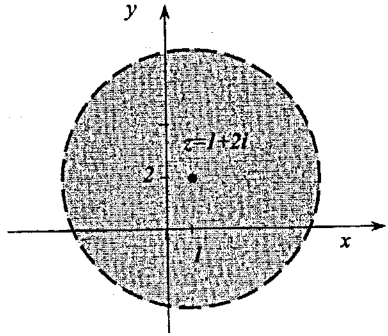

Рисунок 3.19

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \; c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+2i)^{n+1}},$$

$$c_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(1+2i)^{n+2}},$$

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(1+2i)^{n+2}\right|}{\left|(1+2i)^{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} |1+2i| = \sqrt{5}.$$

Тобто, областю збіжності ряду (2) є внутрішність круга $|z-(1+2i)| < 5$ (рис. 3.19).

$$f_2(z) = \frac{2}{2i\left(1+\dfrac{z-(1+2i)}{2i}\right)} =$$

$$= \frac{2}{2i}\left(1 - \frac{z-(1+2i)}{2i} + \frac{(z-(1+2i))^2}{(2i)^2} - \ldots + (-1)^n \left(\frac{z-(1+2i)}{2i}\right)^n + \ldots\right) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-(1+2i))^n}{(2i)^{n+1}} \qquad (3)$$

Визначимо область збіжності ряду (3).

$R_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|(2i)^{n+2}\right|}{\left|(2i)^{n+1}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} |2i| = 2$, тобто областю збіжності ряду (3) є круг $|z-(1+2i)| < 2$. Підставимо (2) та (3) в (1). Одержимо загальний вигляд розкладу функції $f(z) = \dfrac{z+1}{z\cdot(z-1)}$ в ряд Лорана в кільці $0 < |z-(1+2i)| < 2$ (рис. 3.18).

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-(1+2i))^n}{(1+2i)^{n+1}}+2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-(1+2i))^n}{(2i)^{n+1}}. \qquad (4)$$

Розглянемо функцію

$$f(z)=(z+5i)\cdot\cos\frac{1}{(z+5i)^4}$$

в кільці $2<|z-(1+2i)|<\sqrt{5}$ (рис. 3.20).

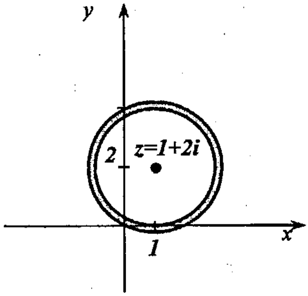

Рисунок 3.20

Ряд (2) для функції $f_1(z)=\frac{-1}{z}$ є збіжним в цьому кільці, оскільки областю збіжності ряду є круг $|z-(1+2i)|<5$. Ряд (3) для функції $f_2(z)=\frac{2}{z-1}$ розбігається у вказаному кільці, оскільки областю збіжності є внутрішність круга $|z-(1+2i)|<2$ (рис. 3.18). Тому перетворимо $f_2(z)$ так:

$$f_2(z)=\frac{2}{(z-(1+2i))\left(1+\frac{2i}{z-(1+2i)}\right)}=\frac{2}{z-(1+2i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{2i}{z-(1+2i)}}.$$

Тепер

$$f(z)=-\frac{1}{(1+2i)\cdot\left(1+\frac{z-(1+2i)}{1+2i}\right)}+\frac{2}{z-(1+2i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{2i}{z-(1+2i)}}. \qquad (5)$$

Розкладемо функцію (5) в ряд за степенями $(z-(1+2i))$.

$$f_2(z)=\frac{2}{z-(1+2i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{2i}{z-(1+2i)}}=\frac{2}{z-(1+2i)}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-(1+2i))^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2)^{n+1}i^n}{(z-(1+2i))^{n+1}}. \qquad (6)$$

Якщо існує скінченна границя $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$, то ряд (3.6) збігається в області $|z-(1+2i)|>r$.

Визначимо область збіжності ряду (6).

$$|c_{-n}|=\left|2^{n+1}\cdot i^{n}\right|,$$

$$|c_{-n-1}|=\left|2^{n+2}\cdot i^{n+1}\right|.$$

Тоді

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|2^{n+2}\cdot i^{n+1}\right|}{\left|2^{n+1}\cdot i^{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}|2i|=2.$$

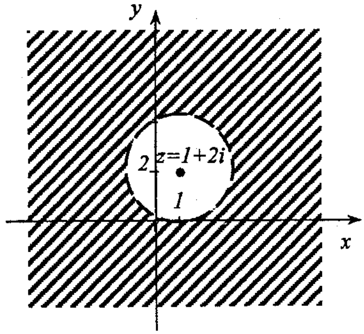

Рисунок 3.21

Отже, областю збіжності ряду (6) є зовнішність кругу $|z-(1+2i)|>2$ (рис. 3.21).

Підставимо (2) та (6) в (5) і одержимо розклад функції $f(z)=\dfrac{-1}{z}+\dfrac{2}{z-1}$ в ряд Лорана в кільці $2<|z-(1+2i)|<\sqrt{5}$.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-(1+2i))^{n}}{(1+2i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2)^{n+1}i^{n}}{(z-(1+2i))^{n+1}}. \tag{7}$$

Розглянемо функцію $f(z)=(z+5i)\cdot cos\dfrac{1}{(z+5i)^{4}}$

в кільці $\sqrt{5}<|z-(1+2i)|<+\infty$ (рис. 3.22).

Ряд (7) для функції $f_2(z)=\dfrac{2}{z-1}$ в даному кільці збіжний, а ряд (2) для функції $f_1(z)=\dfrac{-1}{z}$ – розбіжний. Тому перетворимо $f_1(z)$ так:

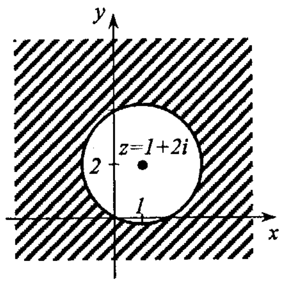

Рисунок 3.22

$$f_1(z) = -\frac{1}{(z-(1+2i))\cdot\left(1+\dfrac{1+2i}{z-(1+2i)}\right)}.$$

Тоді

$$f(z) = -\frac{1}{(z-(1+2i))\cdot\left(1+\dfrac{1+2i}{z-(1+2i)}\right)} + \frac{2}{z-(1+2i)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2i}{z-(1+2i)}}.$$

Розкладемо $f_1(z) = -\dfrac{1}{(z-(1+2i))\cdot\left(1+\dfrac{1+2i}{z-(1+2i)}\right)}$ в ряд.

$$f_1(z) = \frac{-1}{z-(1+2i)}\cdot\left(1-\frac{1+2i}{z-(1+2i)}+\left(\frac{1+2i}{z-(1+2i)}\right)^2-\ldots+(-1)^n\cdot\left(\frac{1+2i}{z-(1+2i)}\right)^n\right)=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1+2i)^n}{(z-(1+2i))^{n+1}}. \qquad (9)$$

Визначимо область збіжності ряду (9).

$$|c_{-n}| = \left|(1+2i)^n\right|, \quad |c_{-n-1}| = \left|(1+2i)^{n+1}\right|.$$

Тоді

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(1+2i)^{n+1}\right|}{\left|(1+2i)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}|1+2i| = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}.$$

Отже, областю збіжності ряду (9) є зовнішність круга $|z-(1+2i)| > \sqrt{5}$ (рис. 3.23).

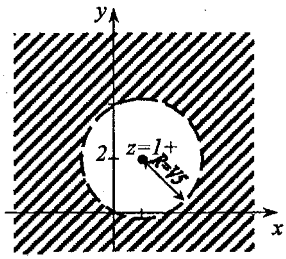

Рисунок 3.23

Підставимо (6) та (9) в (8).

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1+2i)^n}{(z-(1+2i))^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2)^{n+1}i^n}{(z-(1+2i))^{n+1}}. \qquad (3.10)$$

Ряд (10) є розкладом функції $f(z)=\dfrac{z+1}{z\cdot(z-1)}$ в ряд Лорана в кільці $\sqrt{5}<|z-(1+2i)|<+\infty$.

Визначимо характер особливих точок.

Точки $z_1=0$ і $z_2=1$ є ізольованими особливими точками функції $f(z)=\dfrac{z+1}{z\cdot(z-1)}$, оскільки існує окіл цих точок, в яких функція $f(z)$ аналітична всюди, крім цих точок.

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{z\cdot(z-1)}=\infty,\quad \lim_{z\to 1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z+1}{z\cdot(z-1)}=\infty.$$

За ознаками особливих точок точки $z_1=0$ і $z_2=1$ є полюсами функції $f(z)$. Визначимо порядок полюса в точках $z_1=0$ і $z_2=1$. Для цього подамо функцію $f(z)$ у вигляді $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, де $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0)\neq 0$, n вказує на порядок полюса.

$f(z)=\dfrac{\frac{z+1}{z-1}}{z}$. Тут $\varphi(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$, $\varphi(z_0=0)=-1\neq 0$, $n=1$. Відповідно, точка $z_1=0$ є простим полюсом.

$f(z)=\dfrac{\frac{z+1}{z}}{z-1}$. Тут $\varphi(z)=\dfrac{z+1}{z}$, $\varphi(z_2=1)=2\neq 0$, $n=1$. Відповідно, точка $z_2=1$ є простим полюсом.

Приклад 18. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{2z+3}{z(z+2i)}$ в ряд Лорана в

околі точок $z_1=0$ та $z_2=-2i$.

Розв'язання:

1) Розкладемо $f(z)$ в ряд Лорана.

а) Розкладемо задану функцію на елементарні дроби.

$$\frac{2z+3}{z(z+2i)}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z+2i};$$

$$A_1\,(z+2i)+A_2\,z=2z+3;$$

$$A_1z+A_12i+A_2z=2z+3;$$

$$z{:}\quad A_1+A_2=2.$$

$$z^0{:}\quad A_12i=3.$$

$$A_1=\frac{3}{2i}=-\frac{3}{2}i.$$

$$A_2=2\text{-}(-\frac{3}{2}i)=2+\frac{3}{2}i.$$

Отже, $\dfrac{2z+3}{z(z+2i)}=-\dfrac{3i}{2z}+\dfrac{2+\frac{3}{2}i}{z+2i}$.

Кожен дріб будемо розкладати в ряд геометричної прогресії у відповідних областях.

Точки $z_1=0$ та $z_2=2i$ є особливими точками даної функції. Отже, маємо два кільця $0<|z|<2$, $0<|z+2i|<2$

б) Розкладемо $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z_1=0$, тобто в кільці $0<|z|<2$ (рис. 3.24).

Використаємо розклад $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots(-1)^n z^n\ldots \quad (n=1)$.

$$f(z) = -\frac{3}{2}i\ \frac{1}{z} + \frac{2+\frac{3}{2}i}{z+2i}, \qquad (1)$$

$$\frac{2+\frac{3}{2}i}{z+2i} = \left(2+\frac{3}{2}i\right)\cdot\frac{1}{2i\left(1+\frac{z}{2i}\right)} = \frac{4+3i}{4i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2i}};$$

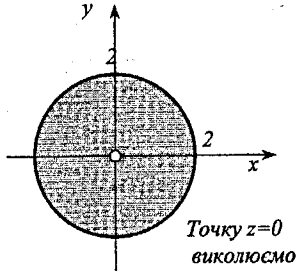

Рисунок 3.24

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2i}} = 1 - \frac{z}{2i} + \left(\frac{z}{2i}\right)^2 - \ldots + (-1)^n\left(\frac{z}{2i}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2i}\right)^n,$$

$$\frac{(4+3i)(-4i)}{4i(-4i)} = \frac{-16i+12}{16} = \frac{12}{16} - i = \frac{3}{4} - i.$$

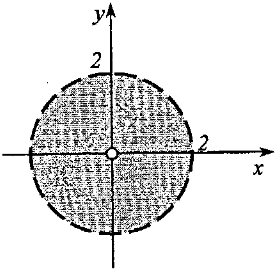

Рисунок 3.25

Отже,

$$f(z) = \frac{2+\frac{3}{2}i}{z+2i} = \left(\frac{3}{4}-i\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2i}\right)^n, \qquad (2)$$

де $\left|\frac{z}{2i}\right| < 1$, $|z| < 2$ – область збіжності ряду (2) (рис. 3.25).

Підставимо (2) в (1).

$$f(z) = -\frac{3}{2}i\frac{1}{z} + \left(\frac{3}{4}-i\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(2i)^n}$$ – ряд Лорана.

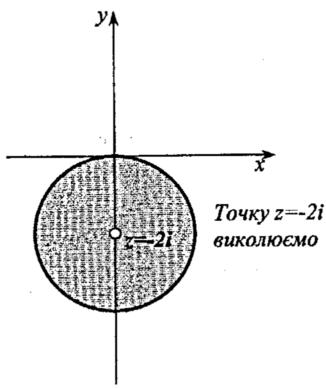

Рисунок 3.26

в) Розкладемо функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_1=-2i, тобто в кільці $0<|z+2i|<2$ (рис. 3.26).

$$\frac{2z+3}{z(z+2i)} = -\frac{3}{2}i\;\frac{1}{z} + \frac{2+\frac{3}{2}i}{z+2i}. \qquad (3)$$

Використовуємо розклад
$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n$, де z замінено на $-\frac{z+2i}{2i}$.

$$-\frac{3i}{2}\cdot\frac{1}{z} = -\frac{3i}{2}\cdot\frac{1}{z+2i-2i} = -\frac{3i}{2}\cdot\frac{1}{(-2i)\left(1-\frac{z+2i}{2i}\right)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2i}{2i}};$$

$$\frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{z+2i}{2i}} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{z+2i}{2i}\right)^n = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{(2i)^n}.(z+2i)^n =$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{(2i)^n}, \qquad (4)$$

де $\left|\frac{z+2i}{2i}\right| < 1$, $|z+2i| < 2$ (рис. 3.27) ($|2i| = 2$) – область збіжності ряду

Підставимо (4) в (1) і одержимо :

$$f(z) = \frac{2z+3}{z(z+2i)} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{(2i)^n} + \frac{2+\frac{3}{2}i}{z+2i}$$ – ряд

Лорана, де кільце $0<|z+2i|<2$ є його областю збіжності.

2) Визначимо характер особливих точок.

а) Розглянемо точку z_1=0 .

Оскільки $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\frac{2z+3}{z(z+2i)} = \infty$, то

точка z_1=0 є полюсом функції $f(z) = \frac{2z+3}{z(z+2i)}$.

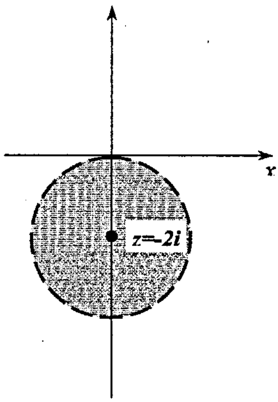

Рисунок 3.27

Знайдемо порядок полюса. Для цього подамо дану функцію у вигляді $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$,

де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 та $\varphi(z_0) \neq 0$.

$f(z) = \dfrac{\dfrac{2z+3}{z+2i}}{z}$, де функція $\varphi(z) = \dfrac{2z+3}{z+2i}$ – аналітична в околі точки $z_1 = 0$, причому $\varphi(z_1 = 0) = \dfrac{3}{2i} \neq 0$

Відповідно, точка $z_1 = 0$ є простим полюсом функції $f(z)$.

б) Розглянемо точку $z_2 = -2i$.

Оскільки $\lim\limits_{z\to -2i} f(z) = \lim\limits_{z\to -2i} \dfrac{2z+3}{z(z+2i)} = \infty$, то точка $z_2 = -2i$ є полюсом функції $f(z)$.

Подамо функцію $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = \frac{\dfrac{2z+3}{z}}{z+2i} (n=1),$$

де функція $\varphi(z) = \dfrac{2z+3}{z}$ аналітична в околі точки $z_2 = -2i$, причому

$$\varphi(z_2 = -2i) = \frac{-4i+3}{-2i} = \frac{(-4i+3)2i}{(-2i)2i} = \frac{8+6i}{4} = 2 + \frac{3}{2}i \neq 0.$$

Відповідно, точка $z_2 = 2i$ є простим полюсом функції $f(z)$.

4 Завдання для типових розрахунків

4.1 Комплексні числа

4.1.1 Знайти всі корені рівняння і зобразити їх на комплексній площині.

1. $z^2+z+1=0$
2. $z^4+3z^2-4=0$
3. $z^3+z^2+z=0$
4. $z^4-1=0$
5. $z^2+2z+3=0$
6. $z^4+2z^2-3=0$
7. $z^3+4z^2+5z=0$
8. $z^4-4=0$
9. $z^3+2z^2+5z=0$
10. $z^4+z^2-6=0$
11. $z^3-z^2+2z=0$
12. $z^4-36=0$
13. $5z^2+2z+2=0$
14. $z^4+3z^2-4=0$
15. $4z^3+5z^2+z=0$
16. $z^4-9=0$
17. $z^2+4z+8=0$
18. $z^4-2z^2-8=0$
19. $z^3-3z^2+3z=0$
20. $z^4-100=0$
21. $2z^2+6z+5=0$
22. $z^4-2z^2-15=0$
23. $2z^3-2z^2+3z=0$
24. $z^4-81=0$
25. $z^2+5z+8=0$
26. $z^4+z^2-12=0$
27. $2z^3-z^2+5z=0$
28. $z^4-64=0$
29. $z^2+6z+13=0$
30. $z^4-3z^2-10=0$
31. $3z^3+z^2+z=0$
32. $z^4-256=0$
33. $4z^2+2z+1=0$
34. $z^4+z^2-12=0$
35. $z^3+z^2+4z=0$
36. $z^4-49=0$
37. $z^2+3z+5=0$
38. $z^4-4z^2-5=0$
39. $4z^3-3z^2+z=0$
40. $z^4-81=0$
41. $2z^2+5z+4=0$
42. $z^4+6z^2+8=0$
43. $z^3-2z^2+5z=0$
44. $z^4-25=0$
45. $z^2+4z+6=0$
46. $z^4+4z^2+3=0$

47. $5z^3-2z^2+z=0$

48. $z^4-144=0$

49. $3z^2+z+1=0$

50. $z^4+6z^2+5=0$

4.1.2 Для заданих чисел z_1 та z_2 виконати вказані дії:

а) знайти значення z_3;

б) числа z_1 та z_2 записати в показниковій та тригонометричній формах;

в) для числа z_1 знайти всі корені степеня m та зобразити їх на комплексній площині; зробити перевірку одного з коренів;

г) число z_2 піднести до степеня k.

1. $z_1=-3+3i$, $z_2=-1+i$,

$$z_3=\frac{z_1z_2-3+2i}{4(2\overline{z}_1-5z_2)^2},\qquad m=4,\qquad k=5.$$

2. $z_1=1+i$, $z_2=2i$,

$$z_3=\frac{z_1(z_2-4i)^2}{3\overline{z}_1-5z_2},\qquad m=3,\qquad k=4.$$

3. $z_1=-1+i$, $z_2=-2+2i$,

$$z_3=\frac{(5z_1-3z_2)(3+2i)}{\overline{z}_1z_2-4+i},\qquad m=5,\qquad k=8.$$

4. $z_1=-4i$, $z_2=-1-i$,

$$z_3=\frac{(4z_1+2z_1)^2\overline{z}_2}{3\overline{z}_1+5-4i},\qquad m=5,\qquad k=6.$$

5. $z_1=-2$, $z_2=-1+i$,

$$z_3=\frac{5+4i-(3z_1-2z_2)^3}{z_1\overline{z}_2(5+3i)},\qquad m=4,\qquad k=5.$$

6. $z_1=3i$, $z_2=5+5i$,

$$z_3=\frac{2z_1\overline{z}_2-3i}{4i(\overline{z}_1-5z_2)},\qquad m=4,\qquad k=5.$$

7. $z_1 = 3-3i$, $z_2 = -i$,

$$z_3 = \frac{z_1\overline{z}_2 + 6 - 4i}{2i\overline{z}_1 - 7z_2}, \qquad m = 4, \qquad k = 4.$$

8. $z_1 = -5+5i$, $z_2 = -1+i$,

$$z_3 = \frac{7(z_1 + 3i\overline{z}_2)^2}{4\overline{z}_1 z_2 - 2 + i}, \qquad m = 5, \qquad k = 10.$$

9. $z_1 = 5$, $z_2 = -3+3i$,

$$z_3 = \frac{\overline{z}_1 + 5iz_1\overline{z}_2}{(3z_1 + 1 - 2i)^2}, \qquad m = 4, \qquad k = 6.$$

10. $z_1 = -3$, $z_2 = 5+5i$,

$$z_3 = \frac{4i - (2z_1 + z_2)^2}{z_1\overline{z}_2(2+3i)}, \qquad m = 5, \qquad k = 8.$$

11. $z_1 = 3i$, $z_2 = -2+2i$,

$$z_3 = \frac{iz_1\overline{z}_2 + 1 - 2i}{5(\overline{z}_1 - 4z_2)^2}, \qquad m = 4, \qquad k = 5.$$

12. $z_1 = 1-i$, $z_2 = 2+2i$,

$$z_3 = \frac{(z_1 z_2 - 4i)^2}{3i(2\overline{z}_1 - 5z_2)}, \qquad m = 3, \qquad k = 4.$$

13. $z_1 = 3+3i$, $z_2 = 4$,

$$z_3 = \frac{2z_1 + 3iz_2}{(\overline{z}_1 z_2 - 4)^2 + 2i}, \qquad m = 4, \qquad k = 8.$$

14. $z_1 = -4i$, $z_2 = 2+2i$,

$$z_3 = \frac{4z_1 + 5iz_1\overline{z}_2}{(2i\overline{z}_1 + 1 - 4i)^2}, \qquad m = 5, \qquad k = 6.$$

15. $z_1 = 3$, $z_2 = -1+i$,

$$z_3 = \frac{4i(z_1 + 2z_2)^2}{z_1 + \overline{z}_2(5+3i)}, \qquad m = 4, \qquad k = 4.$$

16. $z_1 = 3+3i$, $z_2 = 1-i$,

$$z_3 = \frac{z_1(z_2-3+2i)^2}{5i(3\overline{z}_1+45z_2)}, \quad m=4, \quad k=5.$$

17. $z_1 = 1-i$, $z_2 = 2+2i$,

$$z_3 = \frac{2z_1\overline{z}_2+3-4i}{3i(\overline{z}_1-5z_2)^2}, \quad m=4, \quad k=4.$$

18. $z_1 = 4+4i$, $z_2 = 2-2i$,

$$z_3 = \frac{(4z_1+3z_2)^2}{\overline{z}_1 z_2+4+2i}, \quad m=5, \quad k=6.$$

19. $z_1 = 4i$, $z_2 = 3-3i$,

$$z_3 = \frac{3(z_1+2z_1)+\overline{z}_2}{(3\overline{z}_1+5)^2-4i}, \quad m=4, \quad k=6.$$

20. $z_1 = 1$, $z_2 = -6+6i$,

$$z_3 = \frac{2i-(z_1+2z_2)^3}{z_1+\overline{z}_2(4-3i)}, \quad m=4, \quad k=5.$$

21. $z_1 = -1+i$, $z_2 = -2-2i$,

$$z_3 = \frac{z_1(2z_2+5)^2+8i}{-2i(3\overline{z}_1+5z_2)}, \quad m=4, \quad k=5.$$

22. $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2$,

$$z_3 = \frac{z_1 z_2+4i}{(3\overline{z}_1+5z_2)^2}, \quad m=3, \quad k=4.$$

23. $z_1 = 3+3i$, $z_2 = -2+2i$,

$$z_3 = \frac{5i(2z_1-3z_2)^2}{\overline{z}_1(3z_2-4)+i}, \quad m=5, \quad k=4.$$

24. $z_1 = -2i$, $z_2 = 5+5i$,

$$z_3 = \frac{z_1-2iz_1\overline{z}_2}{3(\overline{z}_1+1-2i)^3}, \quad m=5, \quad k=4.$$

25. $z_1 = -1, \quad z_2 = 2+2i,$

$$z_3 = \frac{1+2i+(z_1-2z_2)^2}{2iz_1+\overline{z}_2(2+3i)}, \qquad m=4, \qquad k=5.$$

26. $z_1 = 3i, \quad z_2 = 1-i,$

$$z_3 = \frac{z_1(z_2-4+i)^2}{4i(2\overline{z}_1-5z_2)}, \qquad m=4, \qquad k=5.$$

27. $z_1 = 1+i, \quad z_2 = 2-2i,$

$$z_3 = \frac{(z_1z_2+4i)(2+3i)}{3\overline{z}_1-5z_2}, \qquad m=4, \qquad k=4.$$

28. $z_1 = 1-i, \quad z_2 = -2+2i,$

$$z_3 = \frac{(4z_1-z_2)^2(2+3i)}{2\overline{z}_1z_2+4+4i}, \qquad m=5, \qquad k=4.$$

29. $z_1 = -i, \quad z_2 = -5-5i,$

$$z_3 = \frac{z_1+2(z_1+\overline{z}_2)^2}{\overline{z}_1+5z_2-4i}, \qquad m=5, \qquad k=6.$$

30. $z_1 = -2i, \quad z_2 = 3+3i,$

$$z_3 = \frac{-2+(4i+z_1-z_2)^2}{z_1\overline{z}_2(1+3i)}, \qquad m=4, \qquad k=5.$$

31. $z_1 = -3+3i, \quad z_2 = 5-5i,$

$$z_3 = \frac{2z_1z_2+3+2i}{4(\overline{z}_1+3z_2)^2}, \qquad m=4, \qquad k=5.$$

32. $z_1 = -4+4i, \quad z_2 = -3i,$

$$z_3 = \frac{z_1(2iz_2-5i)^2}{3\overline{z}_1-4z_2}, \qquad m=3, \qquad k=4.$$

33. $z_1 = 2i, \quad z_2 = -1+i,$

$$z_3 = \frac{(2z_1-3z_2)(2-i)}{\overline{z}_1(2z_2+3+4i)^2}, \qquad m=5, \qquad k=6.$$

34. $z_1=-2,\qquad z_2=1+i,$

$$z_3=\frac{(5z_1+2z_1)\overline{z}_2}{(3\overline{z}_1-4)(5-4i)},\quad m=5,\qquad k=6.$$

35. $z_1=-4,\qquad z_2=-3+3i,$

$$z_3=\frac{2+4i(z_1+2z_2)}{3iz_1\overline{z}_2(1+3i)},\quad m=4,\qquad k=5.$$

36. $z_1=-5i,\qquad z_2=2+2i,$

$$z_3=\frac{5z_1(z_2-3+2i)}{4i(2\overline{z}_1-5z_2)^2},\quad m=4,\qquad k=5.$$

37. $z_1=6+6i,\quad z_2=2-2i,$

$$z_3=\frac{z_1(5z_2+2-4i)}{(2\overline{z}_1-5z_2)^2},\quad m=3,\qquad k=4.$$

38. $z_1=2i,\qquad z_2=-5+2i,$

$$z_3=\frac{7i(z_1+3z_2)^2}{\overline{z}_1(z_2+6-2i)},\quad m=5,\qquad k=7.$$

39. $z_1=-4i,\qquad z_2=3-3i,$

$$z_3=\frac{4i(z_1+2z_1\overline{z}_2)}{2\overline{z}_1+3-4i},\quad m=5,\qquad k=6.$$

40. $z_1=3,\qquad z_2=2+2i,$

$$z_3=\frac{(1+4i-3z_1+2z_2)^2}{z_1+\overline{z}_2(2+3i)},\quad m=4,\qquad k=5.$$

41. $z_1=-5+5i,\qquad z_2=4+4i,$

$$z_3=\frac{5z_1(3z_2-5)^2+2i}{4i(2\overline{z}_1-5z_2)},\quad m=4,\qquad k=5.$$

42. $z_1=1+i,\qquad z_2=2,$

$$z_3=\frac{6z_1+(5z_2-4i)^2}{2i(\overline{z}_1-5z_2)},\quad m=3,\qquad k=4.$$

43. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = i$,

$$z_3 = \frac{(3z_1 + 5z_2)(2+i)}{3i\overline{z}_1 z_2 - 2 + 5i}, \qquad m = 5, \qquad k = 8.$$

44. $z_1 = 4 - 4i$, $z_2 = -8$,

$$z_3 = \frac{7z_1 + 2z_1\overline{z}_2}{(3\overline{z}_1 + 4 - 2i)^2}, \qquad m = 5, \qquad k = 4.$$

45. $z_1 = -6$, $z_2 = 2 + 2i$,

$$z_3 = \frac{(5+2i)(3z_1 - 2z_2)}{z_1 + \overline{z}_2(1+3i)}, \qquad m = 4, \qquad k = 5.$$

46. $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = 1 - i$,

$$z_3 = \frac{z_1(2i + z_2)^2 + 6i}{3i(2\overline{z}_1 - 9z_2)}, \qquad m = 4, \qquad k = 5.$$

47. $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 2$,

$$z_3 = \frac{(3 + 7i + z_1)z_2 - 4i}{(3\overline{z}_1 - 5z_2)^2}, \qquad m = 3, \qquad k = 4.$$

48. $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -2 + 2i$,

$$z_3 = \frac{5(z_1 - 3z_2)^2}{2\overline{z}_1 z_2 - 3 + 4i}, \qquad m = 5, \qquad k = 4.$$

49. $z_1 = 5i$, $z_2 = 4 + 4i$,

$$z_3 = \frac{8z_1 + 3z_1(\overline{z}_2 + 4 - 3i)}{3i(\overline{z}_1 + 5 - 4i)}, \qquad m = 4, \qquad k = 6.$$

50. $z_1 = 8$, $z_2 = 2 - 2i$,

$$z_3 = \frac{1 + 4i - (3z_1 + 2z_2)^2}{2iz_1 - \overline{z}_2(5+3i)}, \qquad m = 3, \qquad k = 5.$$

4.2 Функції комплексної змінної

4.2.1 Зобразити на комплексній площині множини точок, які задовольняють вказані нерівності.

1. $|z+2-6i| \le 2$.
2. $Im\, z^2 > 2$.
3. $1 \le |z+3-2i| \le 4$.
4. $Re(2iz) > 4$
5. $0 \le arg\, z \le \dfrac{\pi}{3}$.
6. $|z-2+i| \ge 3$
7. $-3 < Re\, z < 5$.
8. $\left|\dfrac{z+3}{z-4}\right| \le 1$.
9. $2 < Re(2+iz) < 7$.
10. $|z| > 5, Im\, z \ge 0$.
11. $-3 < Im(2i+iz) < 5$.
12. $|z+5-2i| \ge 4$.
13. $Re(2iz) > 4$.
14. $\left|\dfrac{z+2}{z-5}\right| \le 1$.
15. $\dfrac{\pi}{6} \le arg\, z \le \dfrac{\pi}{2}$.
16. $Im\, z^2 < 3$.
17. $2 < Re\, z < 6$.
18. $3 \le |z+5-i| \le 5$.
19. $|z+1-i| \le 5$.
20. $|z| < 4, Im\, z \ge 2$.
21. $-4 < Re(5+iz) < 1$.
22. $|z+i| \ge 4, Re\, z < 0$.
23. $Re(2iz) > 4$.
24. $\left|\dfrac{z-i}{z+4}\right| = 3$.
25. $\dfrac{\pi}{2} \le arg\, z \le \dfrac{3\pi}{4}$.
26. $Re\, z^2 < 2$.
27. $-2 < Re\, \overline{z} < 3$.
28. $1 \le |z+2-3i| \le 4$.
29. $|z+7-2i| \ge 6$.
30. $|z+i| < 2, Im\, z \ge 0$.
31. $|z-2+4i| \le 5$.
32. $Im\, z^2 = 3$.
33. $3 < |z+5-i| < 4$.
34. $.Re(z^2 - \overline{z}) = 4$
35. $\dfrac{3\pi}{4} \le arg\, z \le \dfrac{7\pi}{3}$.
36. $|\overline{z} - i| > 5$
37. $-2 < Re\, z < 6$.
38. $\left|\dfrac{z+i}{z-2}\right| \ge 4$.
39. $-3 < Im(2iz) < 5$.
40. $|z+1| > 4, Im\, z \le 0$.

41. $|z+4-8i|\le 5$.

42. $Im z^2=1$.

43. $2\le|z+1+2i|\le 7$.

44. $Re(3i\overline{z})<5$

45. $\frac{\pi}{2}\le arg z\le\frac{7\pi}{4}$.

46. $|z-1+8i|\ge 5$

47. $1<Re(z+5)<6$.

48. $\left|\frac{z+i}{z+5}\right|\le 2$.

49. $-2<Im(3i+i\overline{z})<3$.

50. $|z-i|<4, Re z\ge 0$.

4.2.2 Довести, що функція аналітична на всій комплексній площині. Знайти похідну функції

а) за теоремою Коші-Рімана;

б) за таблицею похідних.

Показати, що значення похідних збігаються.

1. $w=2z^3-iz+3z^2$.
2. $w=sin(2+iz)$
3. $w=z^3+4iz^2+3z$.
4. $w=z^3+iz^2$.
5. $w=(2z+i)^2$
6. $w=e^{2zi}$.
7. $w=sh5iz$
8. $w=3e^{3zi}$.
9. $w=2cos(2z+2i)$
10. $w=5e^{5zi}$.
11. $w=sin(2z-i)$.
12. $w=5e^{zi}$.
13. $w=5z^3+2iz+2z^2$.
14. $w=ch4iz$.
15. $w=8e^{4zi+5}$. $w=(5z+2i)^2$
16. $w=sin(5+iz)$
17. $w=4e^{2z+i}$.
18. $w=(z+1)^2$.
19. $w=sh4z$
20. $w=sin2z$.
21. $w=2z^3-iz+3z^2$.
22. $w=cos9z$.
23. $w=2e^{2zi}$.
24. $w=sin(z-2i)$.
25. $w=7cos(iz)$
26. $w=(3z-4)^2+z$.
27. $w=7cos(z+7)$.
28. $w=z^2-2iz+3i$
29. $w=9cos(z+i)$.
30. $w=ch3iz$

31. $w=2\cos(9z+i)$.

32. $w=6\cos(z+2)$.

33. $w=(z+2i)^3$

34. $w=2iz^2+3z+i$

35. $w=\cos(2z+i)$.

36. $w=sh4iz$.

37. $w=2\cos z$.

38. $w=\dfrac{1}{2}e^{3zi}$.

39. $w=(z+1)^3$

40. $w=2e^{zi+1}$.

41. $w=\sin 5iz$ $w=4e^{z+i}$.

42. $w=7z^2-7z+3$.

43. $w=2e^{3z+2i}$.

44. $w=(2z+1)^3$

45. $w=\sin 2iz$.

46. $w=4e^{2z+i}$.

47. $w=7e^{zi+4}$.

48. $w=z^3+z+i$.

49. $w=5\sin(z-i)$.

4.2.3 Відновити аналітичну в околі z_0 функцію $f(z)$ за заданою дійсною $u(x,y)$ чи уявною $v(x,y)$ частиною.

1. $u(x,y)=x^2+y^2+x$, $f(0)=0$.
2. $u(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)$, $f(0)=0$.
3. $u(x,y)=x^2-y^2-2y$, $f(0)=0$.
4. $u(x,y)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y$, $f(0)=2$.
5. $u(x,y)=x^2-y^2+2x+1$, $f(0)=1$.
6. $u(x,y)=e^{-y}\cos x$, $f(0)=1$.
7. $u(x,y)=1-e^x\sin y$, $f(0)=1+i$.
8. $u(x,y)=3x^2y-y^3-y$ $f(0)=0$.
9. $u(x,y)=x^3-3xy^2-x$, $f(0)=0$.
10. $u(x,y)=e^x(x\cos y-x\sin y)$, $f(0)=0$.
11. $u(x,y)=x^2-y^2-2x+1$, $f(0)=0$.

12. $u(x,y)=x^2-3xy+1,$ $\qquad f(0)=1.$

13. $v(x,y)=e^{-y}\sin x+y,$ $\qquad f(0)=1.$

14. $u(x,y)=-2xy-2y,$ $\qquad f(0)=i.$

15. $v(x,y)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y,$ $\qquad f(0)=2.$

16. $v(x,y)=2xy-2y,$ $\qquad f(0)=1.$

17. $u(x,y)=e^x\cos y,$ $\qquad f(0)=1+i.$

18. $v(x,y)=2xy+x,$ $\qquad f(0)=0.$

19. $v(x,y)=3x^2y-y^3,$ $\qquad f(0)=1.$

20. $v(x,y)=e^{-y}\sin x,$ $\qquad f(0)=1.$

21. $u(x,y)=x^2-y^2-x,$ $\qquad f(0)=0.$

22. $v(x,y)=2xy+y,$ $\qquad f(0)=0.$

23. $u(x,y)=e^{-y}\cos x+x,$ $\qquad f(0)=1.$

24. $u(x,y)=2x^2+2y^2+2x,$ $\qquad f(0)=0.$

25. $u(x,y)=3e^y\cos x,$ $\qquad f(0)=1.$

26. $u(x,y)=2x^2-2y^2-4y,$ $\qquad f(0)=0.$

27. $u(x,y)=\dfrac{e^{4x}+1}{e^{2x}}\cos 2y,$ $\qquad f(0)=2.$

28. $u(x,y)=x^2-y^2+x-1,$ $\qquad f(0)=-1.$

29. $u(x,y)=e^{-y}\cos x+3y,$ $\qquad f(0)=1.$

30. $u(x,y)=3-2e^x\sin y,$ $\qquad f(0)=3-2i.$

31. $u(x,y)=3x^2y-y^3-y$ $\qquad f(0)=0.$

32. $u(x,y)=x^3-3xy^2-x,$ $\qquad f(0)=0.$

33. $u(x,y)=3x^2-3y^2+x,$ $\qquad f(0)=0.$

34. $v(x,y)=3e^x(y\cos y+x\sin y)$, $f(0)=0$.

35. $u(x,y)=x^2-y^2-2y$, $f(0)=0$.

36. $v(x,y)=2\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y$, $f(0)=4i$.

37. $v(x,y)=4x^2-4y^2+2x+1$, $f(0)=i$.

38. $u(x,y)=e^{-y}\cos x$, $f(0)=1$.

39. $u(x,y)=5+2e^x\cos y$, $f(0)=7$

40. $v(x,y)=3x^2y-y^3+2y$ $f(0)=0$.

41. $u(x,y)=x^3-3xy^2-x$, $f(0)=0$.

42. $v(x,y)=4x^2-4y^2+7x$, $f(0)=0$.

43. $u(x,y)=-2e^x(y\cos y+x\sin y)$, $f(0)=0$.

44. $u(x,y)=4x^2-4y^2+3y$, $f(0)=0$.

45. $u(x,y)=3\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y$, $f(0)=3$.

46. $u(x,y)=3x^2-3y^2+7x+2$, $f(0)=2$.

47. $v(x,y)=2e^{-y}\cos x$, $f(0)=2i$.

48. $u(x,y)=4+3e^x\sin y$, $f(0)=4+3i$.

49. $u(x,y)=3x^2y-y^3+5x$ $f(0)=0$.

50. $u(x,y)=x^3-3xy^2-x$, $f(0)=0$.

4.2.4 Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій.

1. $\int\limits_L (z+\overline{z})dz$; $L:\left\{|z|=1, 0\le \arg z\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

2. $\int\limits_L z\,Im\,zdz$; $L:\{|z|=2, 0\le arg\,z\le\pi\}$.

3. $\int\limits_{AB} z\,Re\,2zdz$; AB - відрізок прямої, $z_A=i$, $z_B=2+i$.

4. $\int\limits_L(\bar{z}-2z)dz$; $L:\left\{|z|=1, -\frac{\pi}{2}\le arg\,z\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

5. $\int\limits_L z^2\,Im\,z^2dz$; $L:\{|z|=2, 0\le arg\,z\le\pi\}$.

6. $\int\limits_{AB}\bar{z}dz$; AB - відрізок прямої, $z_A=1$, $z_B=3+i$.

7. $\int\limits_L(5z-\bar{z})dz$; $L:\left\{|z|=1, 0\le arg\,z\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

8. $\int\limits_L z\,Re\,z^3dz$; $L:\{|z|=1, 0\le arg\,z\le\pi\}$.

9. $\int\limits_{AB} z\,Re\,\bar{z}dz$; AB - відрізок прямої, $z_A=0$, $z_B=2+2i$.

10. $\int\limits_L(3z+2\bar{z})dz$; $L:\left\{|z|=4, 0\le arg\,z\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

11. $\int\limits_L|z|\,Im\,zdz$; $L:\{|z|=2, 0\le arg\,z\le\pi\}$.

12. $\int\limits_{AB} z\,Im\,z^3dz$; AB - відрізок прямої, $z_A=1$, $z_B=i$.

13. $\int\limits_L(z+\bar{z})dz$; $L:\left\{|z|=1, 0\le arg\,z\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

14. $\int\limits_L\bar{z}\,Im\,zdz$; $L:|z|=4$.

15. $\int\limits_{AB} Re\,z^3dz$; AB - відрізок прямої, $z_A=0$, $z_B=2+4i$.

16. $\int\limits_L(z-2\bar{z})dz$; $L:\left\{|z|=5, \frac{\pi}{2}\le arg\,z\le\frac{3\pi}{2}\right\}$.

17. $\int\limits_L|z|\,Im\,z^3dz$; $L:\left\{|z|=1, 0\le arg\,z\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

18. $\int\limits_{AB} \overline{z}^2\, Re\, z dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = i$, $z_B = -1 - i$.

19. $\int\limits_{L} (6z - \overline{z})dz$; $L: \left\{ |z| = 2, 0 \le arg\, z \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

20. $\int\limits_{L} |z| Re\, z^3 dz$; $L: \left\{ |z| = 1, 0 \le arg\, z \le \frac{3\pi}{2} \right\}$.

21. $\int\limits_{L} (3z^2 + \overline{z})dz$; $L: \left\{ |z| = 4, \frac{\pi}{2} \le arg\, z \le \pi \right\}$.

22. $\int\limits_{AB} \overline{z} dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = -1 + i$.

23. $\int\limits_{L} |z| dz$; $L: \left\{ |z| = \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \le arg\, z \le \frac{3\pi}{4} \right\}$.

24. $\int\limits_{L} (2z - \overline{z}^2)dz$; $L: \left\{ |z| = 1, 0 \le arg\, z \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

25. $\int\limits_{AB} z\, Im\, z^2 dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$.

26. $\int\limits_{L} |z| Re\, z^2 dz$; $L: \left\{ |z| = 4, 0 \le arg\, z \le \frac{3\pi}{2} \right\}$.

27. $\int\limits_{L} (2\overline{z} - 3z)dz$; $L: \left\{ |z| = 2, 0 \le arg\, z \le \pi \right\}$.

28. $\int\limits_{AB} 2z\, Re\, z dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = i$, $z_B = 2 + i$.

29. $\int\limits_{L} \overline{z}\, Re\, z^3 dz$; $L: |z| = 1$.

30. $\int\limits_{L} (z^2 + 3\overline{z})dz$; $L: \left\{ |z| = 4, \frac{\pi}{2} \le arg\, z \le \frac{3\pi}{2} \right\}$.

31. $\int\limits_{AB} 2z\, Re\, z dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = i$, $z_B = 2 + i$.

32. $\int\limits_{L} Im\, z^2 d\dot{z}$; $L: |z| = 2$.

33. $\int\limits_L (5z - 2\overline{z})dz$; $L: \left\{ |z| = 1, 0 \le arg\, z \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

34. $\int\limits_L 2z\, Im\, z dz$; $L: \{ |z| = 2, -\pi \le arg\, z \le \pi \}$.

35. $\int\limits_{AB} z\, Re\, 3iz dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = 2i$, $z_B = 2 + 2i$.

36. $\int\limits_L (\overline{z} - 3z)dz$; $L: \left\{ |z| = 1, 0 \le arg\, z \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

37. $\int\limits_L z^2\, Im\, 4z^2 dz$; $L: \{ |z| = 2, 0 \le arg\, z \le \pi \}$.

38. $\int\limits_{AB} \overline{z} dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = i$, $z_B = 3 + i$.

39. $\int\limits_L (2z - \overline{z})dz$; $L: \left\{ |z| = 1, 0 \le arg\, z \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

40. $\int\limits_L z\, Re\, z^2 dz$; $L: \left\{ |z| = 1, 0 \le arg\, z \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

41. $\int\limits_{AB} z\, Re\, \overline{z} dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 3 + 3i$.

42. $\int\limits_L (8z + \overline{z})dz$; $L: \{ |z| = 4, 0 \le arg\, z \le \pi \}$.

43. $\int\limits_L |z|\, Im\, 2z dz$; $L: \{ |z| = 2, 0 \le arg\, z \le \pi \}$.

44. $\int\limits_{AB} z\, Im(iz^3)dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = 2$, $z_B = 2i$.

45. $\int\limits_L (5z + 6\overline{z})dz$; $L: \left\{ |z| = 1, 0 \le arg\, z \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

46. $\int\limits_L \overline{z}\, Im(2iz)dz$; $L: |z| = 1$.

47. $\int\limits_{AB} 3\, Re\, z^3 dz$; AB - відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 3 + 6i$.

48. $\int\limits_L (7z + 2\overline{z})dz$; $L: \left\{ |z| = 1, \dfrac{\pi}{2} \le arg\, z \le \dfrac{3\pi}{2} \right\}$.

49. $\int\limits_{L}|z|\,Im\,z^2dz$; $L:\left\{|z|=2, 0\le arg\,z\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

50. $\int\limits_{AB}\bar{z}^2\,Re(3z)dz$; AB - відрізок прямої, $z_A=i$, $z_B=1-i$.

4.2.5 Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по відрізку прямої AB:

а) виразивши його через криволінійний інтеграл;

б) за формулою Ньютона-Лейбніца.

1. $\int\limits_{AB}(z^2+2z+1)dz,\qquad z_A=0,\qquad z_B=2i.$

2. $\int\limits_{AB}(3z+2i)dz,\qquad z_A=2,\qquad z_B=2+2i.$

3. $\int\limits_{AB}e^{2z}dz,\qquad z_A=0,\qquad z_B=1.$

4. $\int\limits_{AB}cos\,2zdz,\qquad z_A=\frac{\pi}{2},\qquad z_B=\pi.$

5. $\int\limits_{AB}(z^2+2iz)dz,\qquad z_A=-5,\qquad z_B=2i.$

6. $\int\limits_{AB}(3iz^3+2)dz,\qquad z_A=0,\qquad z_B=6-2i.$

7. $\int\limits_{AB}(z^2-2iz+5)dz,\qquad z_A=-1+i,\qquad z_B=3-2i.$

8. $\int\limits_{AB}sin\frac{z}{2}dz,\qquad z_A=0,\qquad z_B=2-2i.$

9. $\int\limits_{AB}(1-z^2)dz,\qquad z_A=2,\qquad z_B=2i.$

10. $\int\limits_{AB}ch\frac{z}{3}dz,\qquad z_A=0,\qquad z_B=3+3i.$

11. $\int\limits_{AB} (iz^2 - 3z + 1)dz, \quad z_A = 0, \quad z_B = 5 + 2i.$

12. $\int\limits_{AB} (7z + 2)dz, \quad z_A = 1, \quad z_B = 6 - 2i.$

13. $\int\limits_{AB} e^{2iz} dz, \quad z_A = 0, \quad z_B = 5i.$

14. $\int\limits_{AB} \cos 3z dz, \quad z_A = \frac{\pi}{4}, \quad z_B = \pi.$

15. $\int\limits_{AB} (z^3 + iz + 2)dz, \quad z_A = 0, \quad z_B = 5 + 5i.$

16. $\int\limits_{AB} (3z^2 + 2i)dz, \quad z_A = 2, \quad z_B = -2i.$

17. $\int\limits_{AB} (4z^2 + 3iz + 5)dz, \quad z_A = -2 + 2i, \quad z_B = 3 + 2i.$

18. $\int\limits_{AB} \sin 3iz dz, \quad z_A = 0, \quad z_B = \frac{\pi}{4}.$

19. $\int\limits_{AB} (1 - 3z^3)dz, \quad z_A = 1 + i, \quad z_B = 2 + i.$

20. $\int\limits_{AB} sh\frac{z}{2} dz, \quad z_A = 0, \quad z_B = 2 - 2i.$

21. $\int\limits_{AB} (z + 5)dz, \quad z_A = -2i, \quad z_B = 1.$

22. $\int\limits_{AB} (z - 2i)dz, \quad z_A = 2, \quad z_B = 3 + 2i.$

23. $\int\limits_{AB} e^{-iz} dz, \quad z_A = 0, \quad z_B = 1.$

24. $\int\limits_{AB} \cos 4z dz, \quad z_A = 0, \quad z_B = \frac{\pi}{4}.$

25. $\int\limits_{AB} (z + \cos z)dz, \quad z_A = 0, \quad z_B = \pi.$

26. $\int\limits_{AB} (3iz^3 + 2i)dz, \quad z_A = -3 + i, \quad z_B = 6 - 2i.$

27. $\int\limits_{AB} (z^2 - 2)dz, \qquad z_A = -1 + i, \qquad z_B = 2 - 2i.$

28. $\int\limits_{AB} (1 - 2\sin z)dz, \qquad z_A = 0, \qquad z_B = 2 - 2i.$

29. $\int\limits_{AB} (1 + z^2)dz, \qquad z_A = 4, \qquad z_B = 4i.$

30. $\int\limits_{AB} ch2z dz, \qquad z_A = 0, \qquad z_B = 1 + 3i.$

31. $\int\limits_{AB} (z^2 + 2z - 1)dz, \qquad z_A = 0, \qquad z_B = 3 - 3i.$

32. $\int\limits_{AB} (5iz + 2)dz, \qquad z_A = 0, \qquad z_B = 2 - 2i.$

33. $\int\limits_{AB} e^{-3z} dz, \qquad z_A = 0, \qquad z_B = 1.$

34. $\int\limits_{AB} \cos 5z dz, \qquad z_A = \frac{\pi}{2}, \qquad z_B = \pi.$

35. $\int\limits_{AB} (z^2 - 3z + 4)dz, \qquad z_A = 0, \qquad z_B = 3 + 9i.$

36. $\int\limits_{AB} (4iz^2 + 2)dz, \qquad z_A = 1, \qquad z_B = -2i.$

37. $\int\limits_{AB} (5z^2 - 2iz)dz, \qquad z_A = -2 + i, \qquad z_B = -2i.$

38. $\int\limits_{AB} 3\sin\frac{\pi}{6} dz, \qquad z_A = 0, \qquad z_B = 2i.$

39. $\int\limits_{AB} (3 - iz^3)dz, \qquad z_A = 3, \qquad z_B = i.$

40. $\int\limits_{AB} ch\frac{z}{3} dz, \qquad z_A = 0, \qquad z_B = 3 + 3i.$

41. $\int\limits_{AB} (3z^2 + i)dz, \qquad z_A = -3i, \qquad z_B = 2.$

42. $\int\limits_{AB} (3z + i)dz, \qquad z_A = 2, \qquad z_B = -i.$

43. $\int\limits_{AB} e^{5z}dz,\qquad z_A = 0,\qquad z_B = 4.$

44. $\int\limits_{AB} \cos 2iz dz,\qquad z_A = 0,\qquad z_B = \pi.$

45. $\int\limits_{AB} (2z + e^z)dz,\qquad z_A = 0,\qquad z_B = 2 + i.$

46. $\int\limits_{AB} (z^2 + 2i)dz,\qquad z_A = 0,\qquad z_B = 6 - i.$

47. $\int\limits_{AB} (-2iz + 5)dz,\qquad z_A = -3 + 3i,\qquad z_B = 3 - 3i.$

48. $\int\limits_{AB} \sin iz dz,\qquad z_A = 0,\qquad z_B = \frac{\pi}{2}.$

49. $\int\limits_{AB} (\cos z - z^2)dz,\qquad z_A = 0,\qquad z_B = \frac{\pi}{4}.$

50. $\int\limits_{AB} ch 3z dz,\qquad z_A = 0,\qquad z_B = 3i.$

4.2.6 Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші та за допомогою теореми про лишки.

1. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{2z}}{(z-i)^2(z+1)}dz \qquad l_1 : |z| = 2; \qquad l_2 : |z - i| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z + 1| = \frac{1}{2}; \qquad l_4 : |z - 1| = \frac{1}{2}.$

2. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos(z\pi)}{(z^2+1)(z+i)^2}dz \qquad l_1 : |z| = 3; \qquad l_2 : |z - i| = 1;$

$l_3 : |z + i| = \frac{1}{2}; \qquad l_4 : |z - 1| = \frac{1}{2}.$

3. $\int\limits_{l_i} \frac{ch 2z}{z^2(z^2+9)}dz \qquad l_1 : |z| = 4; \qquad l_2 : |z - i| = \frac{3}{2};$

$l_3 : |z - 3i| = 1; \qquad l_4 : |z + 3i| = 1.$

4. $\int\limits_{l_i} \frac{ch z}{(z+1)^2(z^2+1)} dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{5}{2}$; $\quad l_2: |z+1| = \frac{1}{2}$;

$l_3: |z-i| = \frac{1}{2}$; $\quad l_4: |z+i| = \frac{1}{2}$.

5. $\int\limits_{l_i} \frac{ch z}{z^4-1} dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{5}{2}$; $\quad l_2: |z-1| = \frac{1}{2}$;

$l_3: |z+1| = \frac{1}{2}$; $\quad l_4: |z-i| = 1$.

6. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{3z}}{z^2(z+2)} dz$ $\quad l_1: |z| = 3$; $\quad l_2: |z+2| = 1$;

$l_3: |z| = 1$; $\quad l_4: |z-1| = \frac{1}{2}$.

7. $\int\limits_{l_i} \frac{sh 2z}{(z+1)(z-1)^2} dz$ $\quad l_1: |z| = 2$; $\quad l_2: |z| = \frac{1}{2}$;

$l_3: |z-1| = \frac{3}{4}$; $\quad l_4: |z+1| = \frac{1}{2}$.

8. $\int\limits_{l_i} \frac{ctg 2z}{z^2(z+1)} dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{3}{2}$; $\quad l_2: |z| = \frac{1}{2}$;

$l_3: |z+1| = \frac{1}{4}$; $\quad l_4: |z-i| = 0.3$.

9. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{iz}}{(z+1)^2(z-1)} dz$ $\quad l_1: |z| = 3$; $\quad l_2: |z-1| = 1$;

$l_3: |z+1| = 1$; $\quad l_4: |z| = \frac{1}{2}$.

10. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos 2z}{(z^2+1)z^2} dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{3}{2}$; $\quad l_2: |z+i| = \frac{1}{2}$;

$l_3: |z-1| = \frac{1}{2}$; $\quad l_4: |z-i| = \frac{1}{2}$.

11. $\int\limits_{l_i} \frac{\sin(\pi z)}{z^4 - 1} dz$ $\quad l_1 : |z| = 2;$ $\quad l_2 : |z - i| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z + 1| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4 : |z - 1| = \frac{1}{2}.$

12. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{2z}}{z^2(z^2 + 4)} dz$ $\quad l_1 : |z| = \frac{5}{2};$ $\quad l_2 : |z| = 1;$

$l_3 : |z + 2i| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4 : |z - 2i| = \frac{1}{2}.$

13. $\int\limits_{l_i} \frac{\sin 2z}{(z+1)^2(z^2+9)} dz$ $\quad l_1 : |z| = 4;$ $\quad l_2 : |z| = 1;$

$l_3 : |z - 1| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4 : |z - i| = \frac{1}{2}.$

14. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{3z}}{z(z-1)^2} dz$ $\quad l_1 : |z| = 2;$ $\quad l_2 : |z| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z - 1| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4 : |z - i| = \frac{1}{2}.$

15. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos 2z}{(z+2)^2(z-1)} dz$ $\quad l_1 : |z| = 3;$ $\quad l_2 : |z + 2| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4 : |z - 1| = \frac{1}{2}.$

16. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{z}}{z^2(z^2 + 4)} dz$ $\quad l_1 : |z| = 3;$ $\quad l_2 : |z| = \frac{3}{2};$

$l_3 : |z + 2i| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4 : |z - 2i| = \frac{1}{2}.$

17. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos 3z}{(z+3)^2(z-1)} dz$ $\quad l_1 : |z| = 4;$ $\quad l_2 : |z| = 1;$

$l_3 : |z - 1| = \frac{3}{2};$ $\quad l_4 : |z + 3| = 1.$

18. $\int\limits_{l_i} \frac{\sin(\pi z)}{(z-3)^2(z+1)}dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{7}{2};$ $\quad l_2: |z-3| = 2;$

$l_3: |z| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4: |z+1| = \frac{3}{4}.$

19. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos 2z}{(z-1)(z+1)^2}dz$ $\quad l_1: |z| = 2;$ $\quad l_2: |z-1| = 1;$

$l_3: |z| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4: |z+1| = 1.$

20. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{2z}}{(z^2-1)z^2}dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{3}{2};$ $\quad l_2: |z| = \frac{3}{4};$

$l_3: |z-1| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4: |z+1| = \frac{1}{2}.$

21. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{3z}}{(z+3)z^2}dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{7}{2};$ $\quad l_2: |z-3| = 2;$

$l_3: |z| = 1;$ $\quad l_4: |z+3| = 3.$

22. $\int\limits_{l_i} \frac{sh 2z}{(z+1)^2(z+i)}dz$ $\quad l_1: |z| = 2;$ $\quad l_2: |z-i| = 1;$

$l_3: |z+1| = \frac{3}{4};$ $\quad l_4: |z-1| = \frac{1}{2}.$

23. $\int\limits_{l_i} \frac{ch(\pi z)}{(z-1)^2(z+2)}dz$ $\quad l_1: |z| = 3;$ $\quad l_2: |z-1| = 1;$

$l_3: |z| = \frac{3}{4};$ $\quad l_4: |z+2| = \frac{3}{4}.$

24. $\int\limits_{l_i} \frac{tg z}{(z-1)^2(z^2+1)}dz$ $\quad l_1: |z| = 2;$ $\quad l_2: |z+1| = \frac{3}{4};$

$l_3: |z| = \frac{3}{4};$ $\quad l_4: |z-1| = \frac{1}{2}.$

25. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos(\pi z)}{z^2(z+2)} dz$ $\qquad l_1: |z|=3;$ $\qquad l_2: |z-i|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z|=\frac{1}{2};$ $\qquad l_4: |z+2|=1.$

26. $\int\limits_{l_i} \frac{\sin 3z}{(z^2+2)(z-1)} dz$ $\qquad l_1: |z|=2;$ $\qquad l_2: |z|=\frac{3}{4};$

$l_3: |z-\sqrt{2}i|=\frac{1}{4};$ $\qquad l_4: |z-1|=\frac{1}{2}.$

27. $\int\limits_{l_i} \frac{ch 2z}{(z^2-3)(z+2)^2} dz$ $\qquad l_1: |z|=4;$ $\qquad l_2: |z|=1;$

$l_3: |z+2|=\frac{1}{6};$ $\qquad l_4: |z-\sqrt{3}|=\frac{1}{6}.$

28. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{2z}}{z(z+1)^2} dz$ $\qquad l_1: |z|=\frac{3}{2};$ $\qquad l_2: |z|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z+1|=\frac{1}{4};$ $\qquad l_4: |z-i|=\frac{3}{4}.$

29. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{3z}}{(z+2)^2(z^2+1)} dz$ $\qquad l_1: |z|=\frac{7}{2};$ $\qquad l_2: |z-i|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z+2|=\frac{3}{4};$ $\qquad l_4: |z|=\frac{1}{2}.$

30. $\int\limits_{l_i} \frac{tg 2z}{(z+3)^2(z-1)} dz$ $\qquad l_1: |z|=\frac{3}{2};$ $\qquad l_2: |z+i|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z-1|=\frac{1}{2};$ $\qquad l_4: |z-i|=\frac{1}{2}.$

31. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{3iz}}{z^2(z+i)} dz$ $\qquad l_1: |z|=2;$ $\qquad l_2: |z|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z+i|=\frac{1}{2};$ $\qquad l_4: |z+1|=\frac{1}{2}.$

32. $\int\limits_{l_i} \frac{\sin(\pi z)}{(z+i)^2(z-i)}dz$ $l_1: |z| = 2$; $l_2: |z-i| = 1$;

$l_3: |z| = \frac{1}{2}$; $l_4: |z+i| = 1$.

33. $\int\limits_{l_i} \frac{ch2z}{z^2(z^2+4)}dz$ $l_1: |z| = 4$; $l_2: |z-i| = \frac{1}{2}$;

$l_3: |z+2i| = \frac{1}{2}$; $l_4: |z-2i| = \frac{1}{2}$.

34. $\int\limits_{l_i} \frac{shz}{(z+3)(z^2+1)}dz$ $l_1: |z| = 4$; $l_2: |z+1| = \frac{1}{2}$;

$l_3: |z-i| = \frac{1}{4}$; $l_4: |z+i| = \frac{1}{2}$.

35. $\int\limits_{l_i} \frac{ch2z}{z^4-16}dz$ $l_1: |z| = \frac{5}{2}$; $l_2: |z-1| = \frac{1}{2}$;

$l_3: |z+2i| = \frac{1}{2}$; $l_4: |z-2i| = 1$.

36. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{4z}}{(z+3)^2(z+2)}dz$ $l_1: |z| = 5$; $l_2: |z+2| = 1$;

$l_3: |z| = 1$; $l_4: |z+3| = \frac{1}{4}$.

37. $\int\limits_{l_i} \frac{sh2z}{(z+2)(z-1)^2}dz$ $l_1: |z| = \frac{1}{2}$; $l_2: |z| = 3$;

$l_3: |z-1| = \frac{3}{4}$; $l_4: |z+2| = \frac{1}{3}$.

38. $\int\limits_{l_i} \frac{ctg3z}{z^2(z+2)}dz$ $l_1: |z| = \frac{5}{2}$; $l_2: |z| = \frac{1}{2}$;

$l_3: |z+1| = \frac{1}{4}$; $l_4: |z-i| = 0.3$.

39. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{2iz}}{(z+2)^2(z-2)}dz$ $\quad l_1: |z| = 3;\quad l_2: |z-2| = 1;$

$l_3: |z+2| = 1;\quad l_4: |z| = \frac{1}{2}.$

40. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos 3z}{(z^2+4)z^2}dz$ $\quad l_1: |z| = 3;\quad l_2: |z+2i| = \frac{1}{2};$

$l_3: |z-1| = \frac{1}{2};\quad l_4: |z-2i| = \frac{1}{2}.$

41. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{3z}}{(z-3i)^2(z+1)}dz$ $\quad l_1: |z| = 4;\quad l_2: |z-3i| = \frac{1}{2};$

$l_3: |z+1| = 1;\quad l_4: |z-1| = \frac{1}{4}.$

42. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos(2z\pi)}{(z^2+4)(z-i)}dz$ $\quad l_1: |z| = 3;\quad l_2: |z-2i| = 1;$

$l_3: |z+2i| = \frac{1}{2};\quad l_4: |z-1| = \frac{1}{2}.$

43. $\int\limits_{l_i} \frac{sh 2z}{(z-1)^2(z^2+9)}dz$ $\quad l_1: |z| = 4;\quad l_2: |z-3i| = \frac{1}{2};$

$l_3: |z-1| = \frac{1}{2};\quad l_4: |z+1| = \frac{1}{2}.$

44. $\int\limits_{l_i} \frac{ch 3z}{(z+2)^2(z^2+1)}dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{5}{2};\quad l_2: |z+1| = \frac{1}{2};$

$l_3: |z-i| = \frac{1}{2};\quad l_4: |z+i| = \frac{1}{2}.$

45. $\int\limits_{l_i} \frac{ch z}{z^4-4}dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{5}{2};\quad l_2: |z-\sqrt{2}| = \frac{1}{4};$

$l_3: |z+\sqrt{2}| = \frac{1}{2};\quad l_4: |z-i| = \frac{1}{4}.$

46. $\int\limits_{l_i} \frac{e^z}{z^2(z+5)} dz$ $\quad l_1: |z| = 6;$ $\quad l_2: |z+2| = 1;$

$l_3: |z| = 1;$ $\quad l_4: |z+5| = \frac{1}{2}.$

47. $\int\limits_{l_i} \frac{sh2z}{z(z-3)^2} dz$ $\quad l_1: |z| = 4;$ $\quad l_2: |z| = \frac{1}{2};$

$l_3: |z-3| = \frac{3}{4};$ $\quad l_4: |z+1| = \frac{1}{2}.$

48. $\int\limits_{l_i} \frac{cos(2iz)}{z^2(z-1)} dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{3}{2};$ $\quad l_2: |z| = \frac{1}{2};$

$l_3: |z-1| = \frac{1}{4};$ $\quad l_4: |z-i| = 0.3.$

49. $\int\limits_{l_i} \frac{e^z}{(z+2)^2(z-4)} dz$ $\quad l_1: |z| = 5;$ $\quad l_2: |z-4| = 1;$

$l_3: |z+2| = 1;$ $\quad l_4: |z| = \frac{1}{2}.$

50. $\int\limits_{l_i} \frac{cos 5z}{(z^2+1)z^2} dz$ $\quad l_1: |z| = \frac{3}{2};$ $\quad l_2: |z+i| = \frac{1}{2};$

$l_3: |z-1| = \frac{1}{2};$ $\quad l_4: |z-i| = \frac{1}{2}.$

4.2.7 Для функцій $f_1(z)$ та $f_2(z)$ виконати такі дії:

а) розкласти функції в ряд Лорана;

б) визначити характер особливих точок;

в) вказати область збіжності ряду.

1. $f_1(z) = z^3 cos\frac{1}{z^3}$ за степенями z;

$f_2 = \frac{3z}{(z-1)(z-i)}$ в околі точок $z_1 = 1$ та $z_2 = 2+3i$.

2. $f_1(z)=\dfrac{1}{(z-i)^2}e^{(z-i)^3}$ за степенями $z-i$;

$f_2=\dfrac{5z}{(z+2)(z-i)}$ в околі точок $z_1=i$ та $z_2=1+2i$.

3. $f_1(z)=(z-i)^4 e^{\frac{1}{(z-i)^2}}$ за степенями $z-i$;

$f_2=\dfrac{3z}{(z-1)(z-i)}$ в околі точок $z_1=1$ та $z_2=2-3i$.

4. $f_1(z)=(z+2i)^2 e^{\frac{1}{z+2i}}$ за степенями $z+2i$;

$f_2=\dfrac{3z-3}{z(z+2i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=1-2i$.

5. $f_1(z)=(z-2i)^2 \cos\dfrac{1}{z-2i}$ за степенями $z-2i$;

$f_2=\dfrac{4z-1}{z(z-1)}$ в околі точок $z_1=1$ та $z_2=1+3i$.

6. $f_1(z)=(z-i)^3 \sin\dfrac{1}{(z-i)^2}$ за степенями $z-i$;

$f_2=\dfrac{3z+2}{z^2(z-i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=1-i$.

7. $f_1(z)=(z+i)^2 e^{\frac{1}{(z+i)^3}}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{2}{z^2+9}$ в околі точок $z_1=3i$ та $z_2=3+2i$.

8. $f_1(z)=\dfrac{1}{(z+i)^2}e^{(z+i)^2}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{4z+3}{z^2(z-2i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=2+i$.

9. $f_1(z)=z^4 \cos\dfrac{1}{z^2}$ за степенями z;

$f_2=\dfrac{3}{(z-3)(z-i)}$ в околі точок $z_1=i$ та $z_2=2+3i$.

10. $f_1(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{(z-i)^2}}$ за степенями $z-i$;

$f_2=\dfrac{2-2z}{(z+3)(z+2)}$ в околі точок $z_1=-3$ та $z_2=1+2i$.

11. $f_1(z)=z^2 \cos\dfrac{1}{z^3}$ за степенями z;

$f_2=\dfrac{z}{(z+2)(z-i)}$ в околі точок $z_1=-2$ та $z_2=1-i$.

12. $f_1(z)=\dfrac{1}{(z-2i)^2}e^{(z-2i)^2}$ за степенями $z-2i$;

$f_2=\dfrac{5z+1}{(z+2)(z-2i)}$ в околі точок $z_1=2i$ та $z_2=1+2i$.

13. $f_1(z)=(z-1)^3 e^{\frac{1}{z-1}}$ за степенями $z-1$;

$f_2=\dfrac{2z}{(z+1)(z-2i)}$ в околі точок $z_1=-1$ та $z_2=1-3i$.

14. $f_1(z)=(z+2)e^{\frac{1}{z+2}}$ за степенями $z+2$;

$f_2=\dfrac{z-1}{z^2(z-2i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=1-2i$.

15. $f_1(z)=(z+2i)\cos\dfrac{1}{(z+2i)^2}$ за степенями $z+2i$;

$f_2=\dfrac{5z+1}{(z+2i)(z-i)}$ в околі точок $z_1=2i$ та $z_2=1+i$.

16. $f_1(z)=(z+1)^2 \sin\dfrac{1}{(z+1)^2}$ за степенями $z+1$;

$f_2=\dfrac{3z+1}{z^2(z-i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=1-i$.

17. $f_1(z)=(z-1)^3 e^{\frac{1}{z-1}}$ за степенями $z-1$;

$f_2=\dfrac{2z+1}{z^3(z-1)^2}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=3+2i$.

18. $f_1(z)=\dfrac{1}{(z+i)^2}e^{(z+i)^3}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{3z-1}{(z+1)^2(z-i)}$ в околі точок $z_1=-1$ та $z_2=2+i$.

19. $f_1(z)=(z+2)^4\cos\dfrac{1}{(z+2)^2}$ за степенями $z+2$;

$f_2=\dfrac{1}{(z-3i)(z+i)}$ в околі точок $z_1=-i$ та $z_2=2+3i$.

20. $f_1(z)=(z+3i)e^{\frac{1}{(z+3i)^2}}$ за степенями $z+3i$;

$f_2=\dfrac{2-2z}{(z+3)(z+2)}$ в околі точок $z_1=-3$ та $z_2=1+2i$.

21. $f_1(z)=(z+4)^3\cos\dfrac{1}{(z+4)^3}$ за степенями $z+4$;

$f_2=\dfrac{z}{(z+1)(z-i)}$ в околі точок $z_1=-1$ та $z_2=4+3i$.

22. $f_1(z)=\dfrac{1}{(z-2i)^2}e^{z-2i}$ за степенями $z-2i$;

$f_2=\dfrac{z+2}{(z+2i)(z-i)}$ в околі точок $z_1=i$ та $z_2=1+2i$.

23. $f_1(z)=(z-3i)^4e^{\frac{1}{(z-3i)^2}}$ за степенями $z-3i$;

$f_2=\dfrac{z+4}{(z+1)(z-4i)}$ в околі точок $z_1=-1$ та $z_2=5-3i$.

24. $f_1(z)=(z+i)^2e^{\frac{1}{z+i}}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{z+5}{z(z-4i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=2-2i$.

25. $f_1(z)=(z-i)^3\cos\dfrac{1}{z-i}$ за степенями $z-i$;

$f_2=\dfrac{4z+3}{z^2(z-1)}$ в околі точок $z_1=1$ та $z_2=4+3i$.

26. $f_1(z)=(z+3)^3 \sin\frac{1}{(z+3)^2}$ за степенями $z+3s$;

$f_2=\frac{2}{z^2(z+3i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=-2-i$.

27. $f_1(z)=(z+3i)^3 e^{\frac{1}{(z+3i)^2}}$ за степенями $z+3i$;

$f_2=\frac{1}{z^2+16}$ в околі точок $z_1=4i$ та $z_2=-3+2i$.

28. $f_1(z)=\frac{1}{(z+i)^2}e^{(z+i)^2}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\frac{z+5}{z^2(z-4i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=2-3i$

29. $f_1(z)=(z+2)^2 \cos\frac{1}{(z+2)^2}$ за степенями $z+2$;

$f_2=\frac{3z+1}{(z+3)(z+i)}$ в околі точок $z_1=i$ та $z_2=1+3i$

30. $f_1(z)=(z+4)^3 e^{\frac{1}{(z+4)^2}}$ за степенями $z+4$;

$f_2=\frac{5-2z}{(z-3i)(z+1)}$ в околі точок $z_1=-3i$ та $z_2=1+2i$

31. $f_1(z)=(z+2)^2 \cos\frac{1}{(z+2)^3}$ за степенями $z+2$;

$f_2=\frac{2z}{(z-2i)(z+i)}$ в околі точок $z_1=2i$ та $z_2=2+i$

32. $f_1(z)=\frac{1}{(z+2i)^2}e^{(z+2i)^3}$ за степенями $z+2i$;

$f_2=\frac{z+4}{(z-2i)(z+5)}$ в околі точок $z_1=2i$ та $z_2=1+2i$

33. $f_1(z)=(z+3i)^4 e^{\frac{1}{(z+3i)^2}}$ за степенями $z+3i$;

$f_2=\frac{3z+1}{(z-3i)(z-2)}$ в околі точок $z_1=3i$ та $z_2=2+5i$

34. $f_1(z)=(z+i)^3 e^{\frac{1}{(z+i)^2}}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{z-3}{z(z-2i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=1-2i$

35. $f_1(z)=(z-3i)^2 \cos\dfrac{1}{z-3i}$ за степенями $z-3i$;

$f_2=\dfrac{z+1}{z(z+2i)}$ в околі точок $z_1=-2i$ та $z_2=1+3i$

36. $f_1(z)=(z+2i)^2 \sin\dfrac{1}{(z+2i)^3}$ за степенями $z+2i$;

$f_2=\dfrac{3z}{z^2(z+4i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=-2+3i$

37. $f_1(z)=(z+i)^2 e^{\frac{1}{(z+i)^3}}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{5z}{z^2+1}$ в околі точок $z_1=i$ та $z_2=3+2i$

38. $f_1(z)=\dfrac{1}{(z+i)^2} e^{(z+i)^2}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{z+4}{z^2(z+4i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=2-i$

39. $f_1(z)=z\cos\dfrac{1}{z^2}$ за степенями z;

$f_2=\dfrac{3z-2}{(z-2)(z-i)}$ в околі точок $z_1=i$ та $z_2=2+3i$

40. $f_1(z)=(z+3i)^3 e^{\frac{1}{(z+3i)^2}}$ за степенями $z+3i$;

$f_2=\dfrac{z+5}{(z+1)(z+2i)}$ в околі точок $z_1=-1$ та $z_2=4-2i$

41. $f_1(z)=z\cos\dfrac{1}{z^2}$ за степенями z;

$f_2=\dfrac{z+5}{(z-3i)(z+i)}$ в околі точок $z_1=3i$ та $z_2=2+3i$

42. $f_1(z)=\dfrac{1}{(z+3i)^2}e^{(z+3i)^2}$ за степенями $z+3i$;

$f_2=\dfrac{z}{(z+2i)(z-3i)}$ в околі точок $z_1=2i$ та $z_2=1-2i$

43. $f_1(z)=(z-4i)^4 e^{\frac{1}{(z-4i)^2}}$ за степенями $z-4i$;

$f_2=\dfrac{4z+2}{(z-1)(z-2i)}$ в околі точок $z_1=1$ та $z_2=4-3i$

44. $f_1(z)=(z-5i)^3 e^{\frac{1}{z-5i}}$ за степенями $z-5i$;

$f_2=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=1-2i$

45. $f_1(z)=(z+i)^3 cos\dfrac{1}{z+i}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{2z+5}{z(z+2)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=-2+3i$

46. $f_1(z)=(z+i)^3 sin\dfrac{1}{(z+i)^2}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{3z-1}{z^2(z-3i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=-1-i$

47. $f_1(z)=(z+i)^2 e^{\frac{1}{(z+i)^3}}$ за степенями $z+i$;

$f_2=\dfrac{2z}{z^2+25}$ в околі точок $z_1=5i$ та $z_2=3+2i$

48. $f_1(z)=\dfrac{1}{(z-3i)^3}e^{(z-3i)^2}$ за степенями $z-3i$;

$f_2=\dfrac{z+3}{z^2(z+2i)}$ в околі точок $z_1=0$ та $z_2=-2+i$

49. $f_1(z)=(z+3)^2 cos\dfrac{1}{(z+3)^2}$ за степенями $z+3$;

$f_2=\dfrac{3z+2}{(z-1)(z+4i)}$ в околі точок $z_1=1$ та $z_2=-1+3i$

50. $f_1(z)=(z+5i)^3 e^{\frac{1}{(z+5i)^2}}$ за степенями $z+5i$;

$$f_2=\frac{2z+5}{(z+i)(z+2)}$$ в околі точок $z_1=i$ та $z_2=-3+2i$.

Список літератури

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.2. – М.: Наука, 1985.
2. Бугров Я.С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985.
3. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы высшей математики./ Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. – М.: Наука, 1986.
4. Сборник задач по курсу высшей математики./ Под ред. Кручковича Г.И. – М., 1973.
5. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навчальний посібник: У двох книгах. Книга 2/ І.П Ва-сильченко, В.Я. Данилов, А.Я. Лобанов, Є.Ю. Таран. – 2-е видання, зі змінами. – К.: Либідь, 1994.

Навчальне видання

Любов Михайлівна Тичинська, Майя Борисівна Ковальчук
Галина Олександрівна Черноволик

Теорія функцій комплексної змінної
Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Черноволик Г.О.
Редактор В.О. Дружиніна

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 17.07.2007р.
Формат 29,7×42 $^1/_4$
Друк різографічний
Тираж 100 прим.
Зам. № 2007-113

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 6.7

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ.