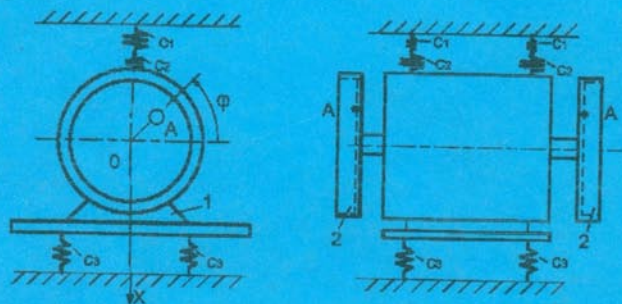


ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ДИНАМІКА

Розрахунково-графічні та контрольні завдання



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. А. Видмиш, В. О. Приятельчук, В. О. Федотов

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА ДИНАМІКА

Розрахунково-графічні та контрольні завдання

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2009

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 10 від 27.03.2008 р.)

Рецензенти:

І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор

В. І. Савуляк, доктор технічних наук, професор

О. В. Садовий, доктор технічних наук, професор

Видмиш, А. А.

В 44 Теоретична механіка. Динаміка. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : навчальний посібник / А. А. Видмиш, В. О. Приятельчук, В. О. Федотов. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 143 с.

Навчальний посібник вміщує 13 завдань з динаміки точки, твердого тіла, матеріальної системи. Кожне завдання має триста варіантів з прикладом виконання. Призначений для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 531 (075)

Зміст

Порядок та основні вимоги до виконання роботи.....	5
Розрахунково-графічні та контрольні завдання.....	6
Динаміка точки.....	6
Д.1 Дослідження руху точки.....	6
1.1 Приклад виконання завдання.....	10
Динаміка системи.....	15
Д.2 Використання теореми про рух центра мас для визначення переміщення тіл.....	15
2.1 Приклад виконання завдання.....	21
Д.3 Використання теореми про зміну головного вектора кількості руху системи для дослідження переміщення тіл.....	23
3.1 Приклад виконання завдання.....	34
Д.4 Використання теореми про зміну кінетичного моменту для дослідження руху матеріальної системи.....	38
4.1 Приклад виконання завдання.....	44
Д.5 Використання теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху матеріальної системи.....	49
5.1 Приклад виконання завдання.....	55
Д.6 Дослідження руху матеріальної системи із застосуванням основних (загальних) теорем динаміки.....	60
6.1 Приклад виконання завдання.....	60
6.1.1 Визначення зусиль в пасажів та між тілами.....	74
6.1.2 Визначення реакцій циліндричних парнів.....	76
Принцип Д'Аламбера.....	78
Д.7 Застосування принципу Д'Аламбера для визначення реакції в'язей.....	78
7.1 Приклад виконання завдання.....	84
Д.8 Додаткові динамічні реакції в'язей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.....	88
8.1 Приклад виконання завдання.....	88
Принцип Лагранжа.....	102
Д.9 Визначення реакцій в'язей врівноваженого плоского механізму за допомогою принципу віртуальних переміщень.....	102
9.1 Приклад виконання завдання.....	102
Д.10 Визначення опорних реакцій для складної статичної конструкції за допомогою принципу віртуальних переміщень.....	110
10.1 Приклад виконання завдання.....	110
Загальне рівняння динаміки.....	122
Д.11 Розрахунок характеристик руху механічної системи за допомогою загального рівняння динаміки.....	122
11.1 Приклад виконання завдання.....	122

Рівняння Лагранжа 2-го роду.....	132
Д.12 Дослідження руху матеріальної системи з використанням рівняння Лагранжа 2-го роду.....	132
12.1 Приклад виконання завдання.....	132
Д.13 Дослідження вільних коливань матеріальної системи.....	135
13.1 Приклад виконання завдання.....	135
Література	142

Порядок та основні вимоги до виконання роботи

З розділу „Динаміка” студенти виконують одну розрахунково-графічну або контрольну роботу. Студенти вибирають варіант схеми (рисунки) за двома останніми цифрами (шифр) залікової книжки (за винятком завдання Д.1) з таблиці 1, а дані для розрахунку – за останньою цифрою шифру з таблиць, що наведені в завданнях. В завданні Д.1 за останньою цифрою шифру вибирається схема, а за двома останніми – дані для розрахунку.

Таблиця 1

Варіант	Шифр
1	01, 31, 61, 91
2	02, 32, 69, 92
...	
29	29, 59, 89
30	30, 60, 90, 00

Студенти денної форми навчання оформляють розрахунково-графічне завдання відповідно до діючих стандартів ЄСКД (ГОСТ 2.105-95 або ДСТУ 3008-95).

Студенти заочної форми навчання можуть виконувати завдання в зошитах. На титульні сторінці зошита вказується номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, шифр, факультет, група і домашня адреса.

Розв'язання кожної задачі потрібно починати на розвороті зошита (з лівої сторінки), так, щоб розрахункова схема та формули, складені за нею, знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і наводиться коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові схеми (рисунки) виконуються за допомогою креслярських приладів. Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями. На кожній сторінці залишають поля для зауважень рецензента. Якщо робота висилається на повторну перевірку (при виконанні її у другому зошиті) обов'язково прикладається незарахована робота.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити роботу. Графік захисту планується деканом.

Динаміка точки

Д.1 Дослідження руху точки

Невільна матеріальна точка масою m (рис.1.1) рухається протягом τ с. по шорсткій поверхні ОА (коефіцієнт тертя ковзання f). В пункті А матеріальна точка із швидкістю $\vec{v}_A$ залишає поверхню ОА і через T_c падає в точку В ділянки АВ із швидкістю $\vec{v}_B$. Знайти і побудувати траєкторію руху точки на ділянці АВ та її швидкість в точці В.

Якщо точка рухається під дією постійних сил (табл.1.1), прийняти (рис.1.1), що сила $\vec{F} = 0$, а при змінних силах (табл. 1.2) сила опору $\vec{R}$ руху точки на ділянці АВ має напрямок протилежний вектору швидкості $\vec{v}$ точки.

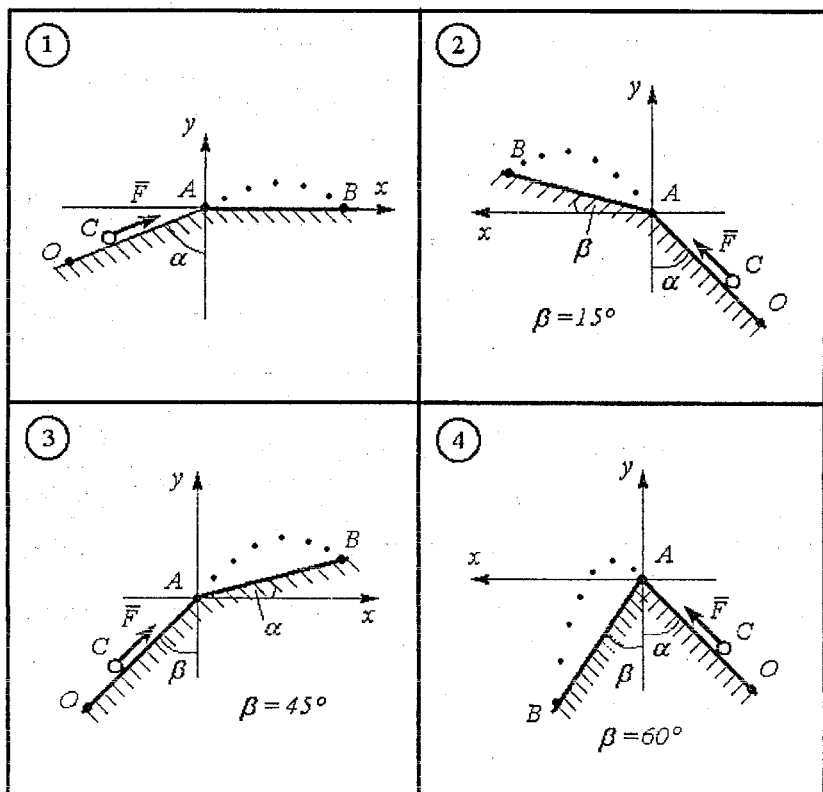
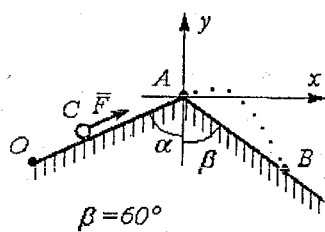
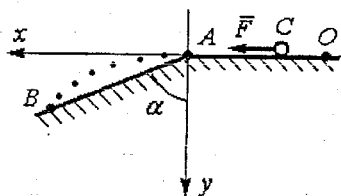


Рисунок 1.1

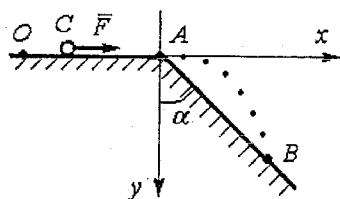
5



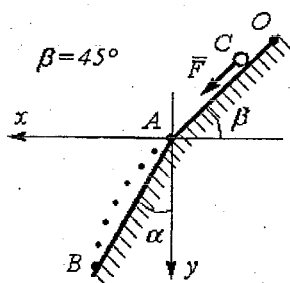
6



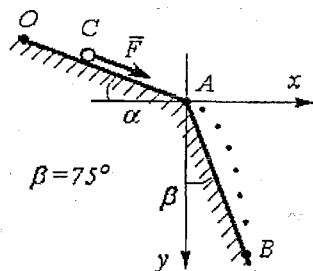
7



8



9



10

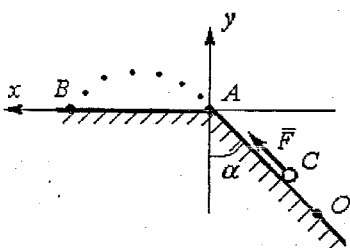


Рисунок 1.1 (продовження)

Таблица 1.1

Вариант	$v_0, \frac{м}{с}$	$l=OA, м$	$\tau, с$	$\alpha, град$	f
1	2	10		30	0,10
2	3		2	45	0,15
3		11	1	60	0,20
4	5		3	30	0,11
5	6	13		45	0,12
6		12	1,5	60	0,13
7	8	14		30	0,14
8	9		4	45	0,15
9		20	3	60	0,16
10	4		2	30	0,17
11	5	8		45	0,18
12		30	2	60	0,19
13	2	7		30	0,10
14	3		4	45	0,11
15		18	2	60	0,12
16	5		5	30	0,13
17	6	15		45	0,14
18		30	4	60	0,15
19	8	16		30	0,16
20	9		3	45	0,17
21		40	5	60	0,18
22	2		4	30	0,19
23	3	7		45	0,20
24		25	3	60	0,11
25	5	9		30	0,12
26	6		2	45	0,13
27		26	4	60	0,14
28	8		3	30	0,15
29	9	5		45	0,16
30		10	0,5	60	0,17

Таблица 1.2

Вариант	$v_0, \frac{m}{c}$	τ, c	$\alpha,$ град	f	F, H	$\bar{R}, H$
					Схемы 1,6,7-0 (рис. 1.1), $\bar{R}=0$	Схемы 2-5 (рис. 1.1), $\bar{F}=0$
1	4	3	60	0,20	$m \cdot (4+5t)$	$-3m\bar{v}$
2	5	4	45	0,18	$m \cdot (5+3t^2)$	$-m\bar{v}$
3	3	2	30	0,16	$m \cdot (3+8t)$	$-2m\bar{v}$
4	2	5	60	0,14	$m \cdot (2+7t^2)$	$-5m\bar{v}$
5	10	4	45	0,12	$m \cdot (1+5t)$	$-4m\bar{v}$
6	9	6	30	0,10	$m \cdot (2+9t^2)$	$-6m\bar{v}$
7	8	3	60	0,20	$m \cdot (1+2t)$	$-7m\bar{v}$
8	7	7	45	0,18	$m \cdot (7+t^2)$	$-8m\bar{v}$
9	6	8	30	0,16	$m \cdot (6+t)$	$-9m\bar{v}$
10	14	3	60	0,14	$m \cdot (1+8t^2)$	$-4m\bar{v}$
11	11	10	45	0,12	$m \cdot (2+3t)$	$-3m\bar{v}$
12	12	8	30	0,10	$m \cdot (3+4t^2)$	$-5m\bar{v}$
13	13	1	60	0,20	$m \cdot (1+9t)$	$-6m\bar{v}$
14	6	9	45	0,18	$m \cdot (5+3t^2)$	$-4m\bar{v}$
15	10	3	30	0,16	$m \cdot (2+6t)$	$-9m\bar{v}$
16	9	10	60	0,14	$m \cdot (1+9t^2)$	$-10m\bar{v}$
17	9	4	45	0,12	$m \cdot (2+7t)$	$-11m\bar{v}$
18	4	9	30	0,10	$m \cdot (3+8t^2)$	$-12m\bar{v}$
19	5	5	60	0,11	$m \cdot (4+5t)$	$-13m\bar{v}$
20	7	8	45	0,12	$m \cdot (5+7t^2)$	$-14m\bar{v}$
21	8	2	30	0,13	$m \cdot (6+t)$	$-13m\bar{v}$
22	14	7	60	0,14	$m \cdot (1+3t^2)$	$-11m\bar{v}$
23	12	3	45	0,15	$m \cdot (2+11t)$	$-9m\bar{v}$
24	10	6	30	0,16	$m \cdot (3+4t^2)$	$-7m\bar{v}$
25	8	4	60	0,17	$m \cdot (4+5t)$	$-5m\bar{v}$
26	6	5	45	0,18	$m \cdot (5+6t^2)$	$-3m\bar{v}$
27	7	6	30	0,19	$m \cdot (6+5t)$	$-2m\bar{v}$
28	5	4	60	0,20	$m \cdot (1+4t^2)$	$-12m\bar{v}$
29	7	8	45	0,21	$m \cdot (2+3t)$	$-11m\bar{v}$
30	9	3	30	0,22	$m \cdot (3+2t^2)$	$-14m\bar{v}$

1.1 Приклад виконання завдання

На невільну матеріальну точку масою m , що рухається по похилій шорсткій поверхні OA (рис. 1.2), діє сила $\vec{F} = 6m(1+2t)$ Н. Із швидкістю $\vec{v}_A$ точка залишає поверхню OA . На ділянці AB точка переміщується в середовищі з опором, сила якого $\vec{R} = -18m \cdot \vec{v}$ Н.

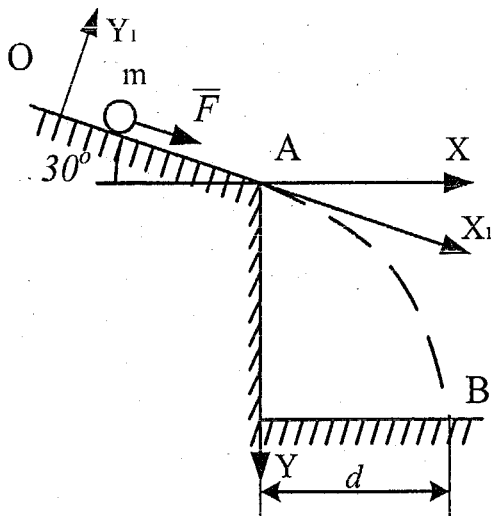


Рисунок 1.2

Знайти і побудувати траєкторію руху точки на ділянці AB , її швидкість в пункті B якщо: коефіцієнт тертя ковзання $-f = 0,25$; початкова швидкість точки $v_0 = 0,5$ м/с; $\tau = 2$ с; $d = 2,0$ м.

Розв'язання. Точка масою m на ділянці OA переміщується під дією сил: ваги $\vec{P}$, сили $\vec{F}$, нормальної реакції $\vec{N}$ шорсткої поверхні та сили тертя $\vec{F}_{mp}$ (рис. 1.3).

Запишемо закон руху точки на ділянці OA

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} + \vec{F}$$

в проекціях на осі X_1 та Y_1 .

$$m\ddot{x} = F - F_{mp} + P \sin 30^\circ. \quad (1.1)$$

$$m\ddot{y} = N - P \cos 30^\circ. \quad (1.2)$$

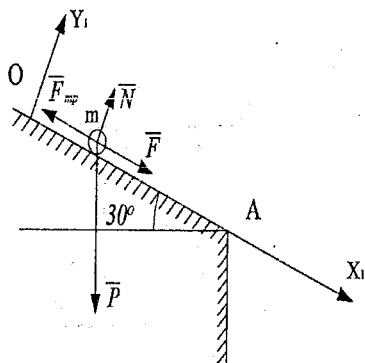


Рисунок 1.3

Силу тертя знайдемо за законом Амонтона-Кулона, який при переміщені точки з невеликою швидкістю запишеться:

$$F_{mp} = f \cdot N. \quad (1.3)$$

Оскільки точка рухається по прямій ОА, тоді $\ddot{y} = 0$, і з рівняння (1.2) отримаємо:

$$N = P \cos 30^\circ, \quad (1.4)$$

де $P = mg$.

Диференціальне рівняння (1.1), враховуючи (1.3) та (1.4) і значення сили F , набуває вигляду:

$$m\ddot{x}_1 = 6m(1+2t) - fmg \cos 30^\circ + mg \sin 30^\circ.$$

Або

$$\ddot{x}_1 = 12t + 8,78. \quad (1.5)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (1.5) при початкових умовах: при, $t = 0$, $\dot{x}_{10} = v_0 = 0,5 \text{ м/с}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}_1}{dt} &= 12t + 8,78, \\ \int_{0,5}^{\dot{x}} d\dot{x}_1 &= \int_0^t 12t \cdot dt + \int_0^t 8,78 \cdot dt, \\ \dot{x} &= 0,5 + 8,78t + 6t^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Відстань ОА точка проходить за τ с і її швидкість v_A в точці А знаходимо за формулою (1.6) при $t_1 = \tau$

$$v_A = 0,5 + 8,78 \cdot \tau + 6\tau^2,$$

$$v_A = 42,06 \text{ м/с}.$$

На ділянці АВ (рис. 1.4) точка рухається під дією сили ваги $\bar{P}$ та сили опору $\bar{R}$, що направлена в протилежну сторону швидкості точки.

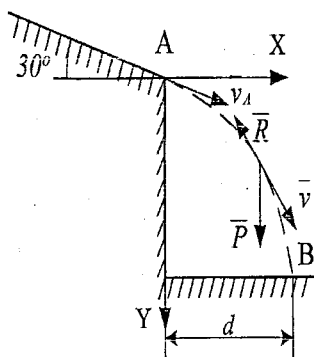


Рисунок 1.4

Запишемо диференціальне рівняння руху точки в проекціях на осі X та Y.

$$m\ddot{x} = R_x, \quad (1.7)$$

$$m\ddot{y} = P + R_y. \quad (1.8)$$

де $R_x = (-18m\bar{v})_x = -18m\dot{x}$, $R_y = (-18m\bar{v})_y = -18m\dot{y}$, $P = mg$.

Тоді

$$m\ddot{x} = -18m\dot{x}.$$

$$m\ddot{y} = mg - 18m\dot{y}.$$

Або

$$\ddot{x} = -18\dot{x}. \quad (1.9)$$

$$\ddot{y} = g - 18\dot{y}. \quad (1.10)$$

При $t=0$; $\dot{x}_0 = v_A \cdot \cos 30^\circ$, $x_0 = 0$; $\dot{y}_0 = v_A \cdot \sin 30^\circ$, $y_0 = 0$. (1.11)

Оскільки $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$, то в диференціальних рівняннях (1.9) та (1.10), розподіляючи, змінні, отримаємо:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -18dt,$$

$$\frac{d\dot{y}}{g - 18\dot{y}} = dt.$$

Інтегруючи рівняння при початкових умовах (1.11), знаходимо:

$$\ln \dot{x} - \ln(v_A \cos 30^\circ) = -18t, \quad \ln\left(\frac{\dot{x}}{v_A \cos 30^\circ}\right) = -18t.$$

$$\ln(g - 18\dot{y}) - \ln(g - 18g \sin 30^\circ) = -18t, \quad \ln\left(\frac{g - 18\dot{y}}{g - 18v_A \sin 30^\circ}\right) = -18t.$$

Або

$$\dot{x} = v_A e^{-18t} \cos 30^\circ. \quad (1.12)$$

$$\dot{y} = \frac{g}{18} + (v_A \sin 30^\circ - \frac{g}{18})e^{-18t}. \quad (1.13)$$

Інтегруємо рівняння (2.12) та (2.13) при початкових умовах (1.11).

$$x = \frac{v_A}{18}(1 - e^{-18t})\cos 30^\circ.$$

$$y = \frac{g}{18}t + \frac{1}{18}\left(v_A \sin 30^\circ - \frac{g}{18}\right)(1 - e^{-18t}).$$

Або

$$x = 2,02(1 - e^{-18t}). \quad (1.14)$$

$$y = 0,545t + 1,17(1 - e^{-18t}). \quad (1.15)$$

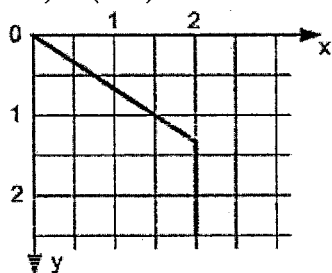
Із рівняння (1.14) та (1.15) знаходимо рівняння траєкторії руху точки на ділянці АВ.

$$y = 0,055 \ln\left(\frac{2,02}{2,02 - x}\right) + 0,58x. \quad (1.16)$$

Будуємо траєкторію руху точки (рис.1.5, б), використовуючи рівняння(1.16) (рис. 1.5, а) або формули (1.14) та (1.15).

t	x	y	y/x
0,1	1,686	1,03	0,61
0,3	2,011	1,33	0,66
0,7	2,02	1,55	0,77
1	2,02	1,72	0,85
1,5	2,02	1,99	0,98
2	2,02	2,26	1,12

а)



б)

Рисунок 1.5

Знайдемо швидкість точки v_B . При $t_2 = T$, $x_T = d$; тоді із рівняння (1.14) визначаємо час T руху точки на ділянці АВ.

$$d = 2,02(1 - e^{-18t}),$$

$$T = \frac{1}{18} \ln \left(\frac{2,02}{2,02 - d} \right) = 0,26 \text{ с.}$$

На підставі рівняння (1.12) та (1.13) визначаємо проекції швидкості $\overline{v_B}$ по осі X та Y ($t_2 = T$)

$$v_{BX} = v_A e^{-18T} \cos 30^\circ = 0,35 \text{ м/с.}$$

$$v_{BY} = \frac{g}{18} + \left(v_A \sin 30^\circ - \frac{g}{18} \right) e^{-18T} = 0,74 \text{ м/с.}$$

Швидкість точки $\overline{v_B}$ в пункті В ділянки АВ.

$$v_B = \sqrt{v_{BX}^2 + v_{BY}^2},$$

$$v_B = \sqrt{0,35^2 + 0,74^2} = 0,82 \text{ м/с.}$$

На ділянці АВ швидкість точки зменшилась від $v_A = 42,06 \text{ м/с}$ до $v_B = 0,82 \text{ м/с}$, тобто в $n = \frac{v_A}{v_B} = 51,3$ раз за рахунок сили $\overline{R}$ опору.

$$\text{Відповідь: } y = 0,055 \ln \left(\frac{2,02}{2,02 - x} \right) + 0,58x, \quad v_B = 0,82 \text{ м/с.}$$

Динаміка системи

Д.2 Використання теореми про рух центра мас для визначення переміщення тіл

Визначити переміщення призми 1 (рис. 2.1-2.5) по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 опустився на відстань S відносно призми 1 (схеми 1-19) або тіло 2 повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі (схеми 20-30). В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої.

Дані для розрахунків наведені в табл. 2.1 ($\beta = 90 - \alpha$).

Таблиця 2.1

В-т	Рисунок 1-19							Рисунок 20-30				
	S, м	m ₁ , кг	m ₂ , кг	m ₃ , кг	α град	R,м	r,м	m ₁ кг	m ₂ кг	m ₃ кг	α град	l, м
1	0,3	2	4	3	30	0,4	0,3	1	2	3	60	0,3
2	0,2	3	2	1	45	0,3	0,2	2	1	1,5	45	0,4
3	0,4	4	1	2	60	0,2	0,15	3	4	2	30	0,5
4	0,1	5	3	4	30	0,1	0,05	4	3	1	60	0,2
5	0,5	6	5	3	45	0,15	0,1	5	2	3	45	0,1
6	0,6	7	2	4	60	0,25	0,2	6	4	5	30	0,15
7	0,7	8	3	2	30	0,35	0,3	7	3	4	60	0,25
8	0,15	9	4	3	45	0,45	0,4	6	2	5	45	0,35
9	0,35	8	5	4	60	0,5	0,25	5	4	3	30	0,45
0	0,25	7	3	2	30	0,3	0,15	4	3	2	60	0,55

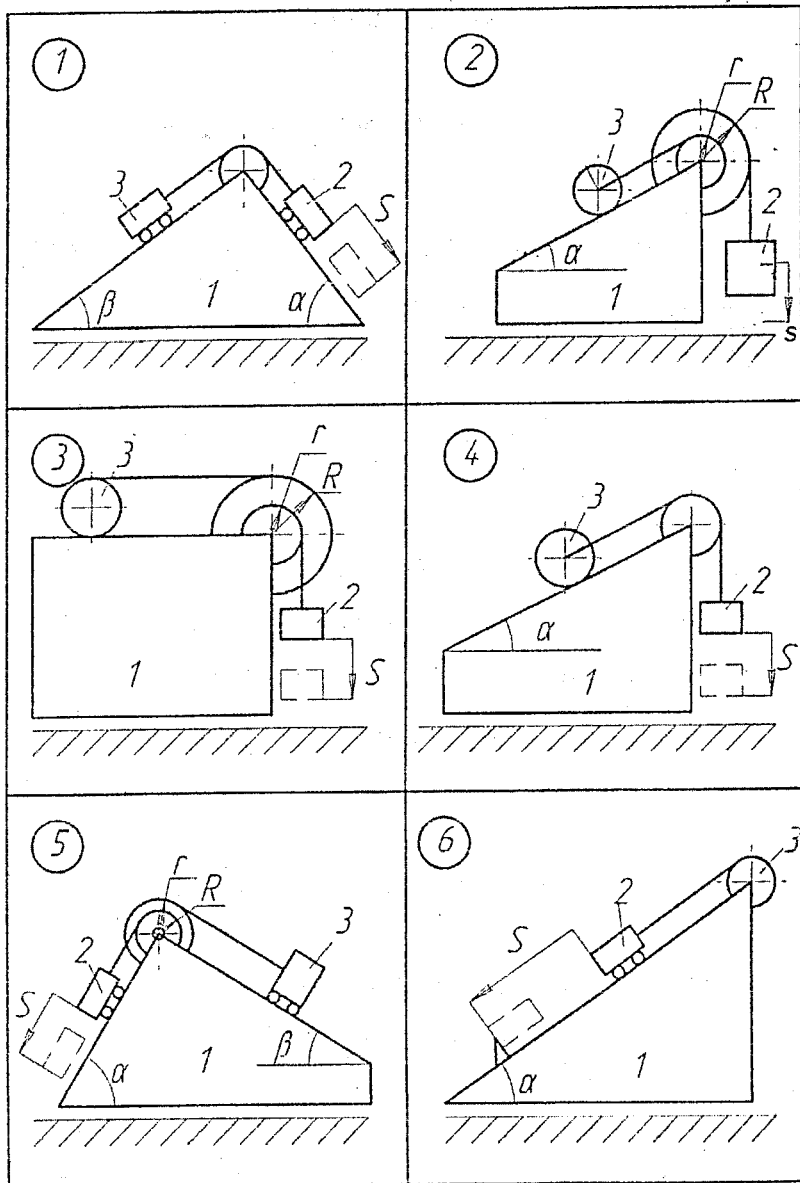


Рисунок 2.1

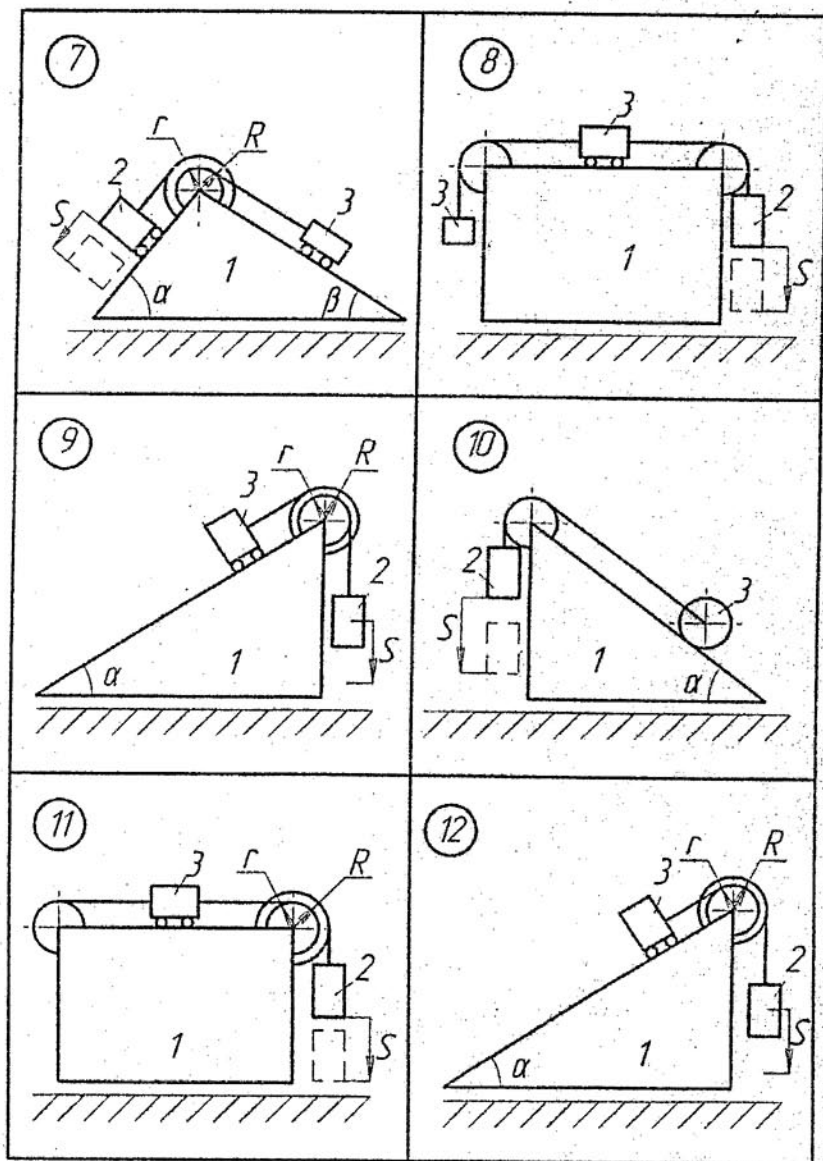


Рисунок 2.2

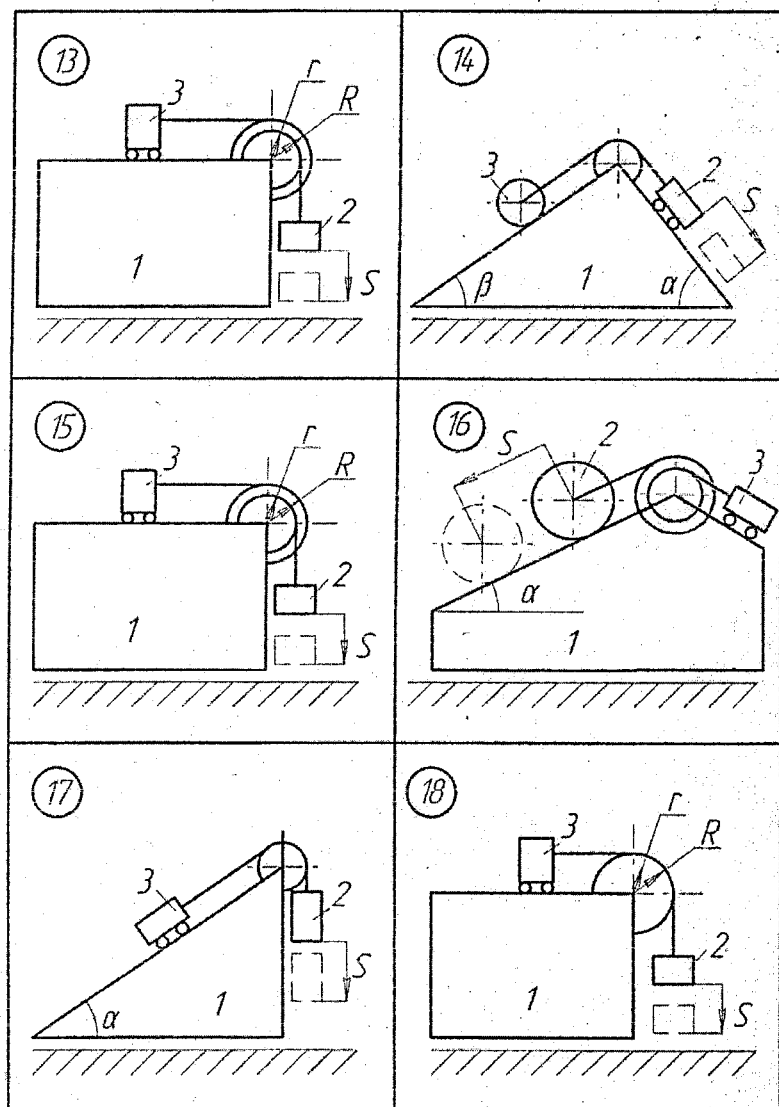


Рисунок 2.3

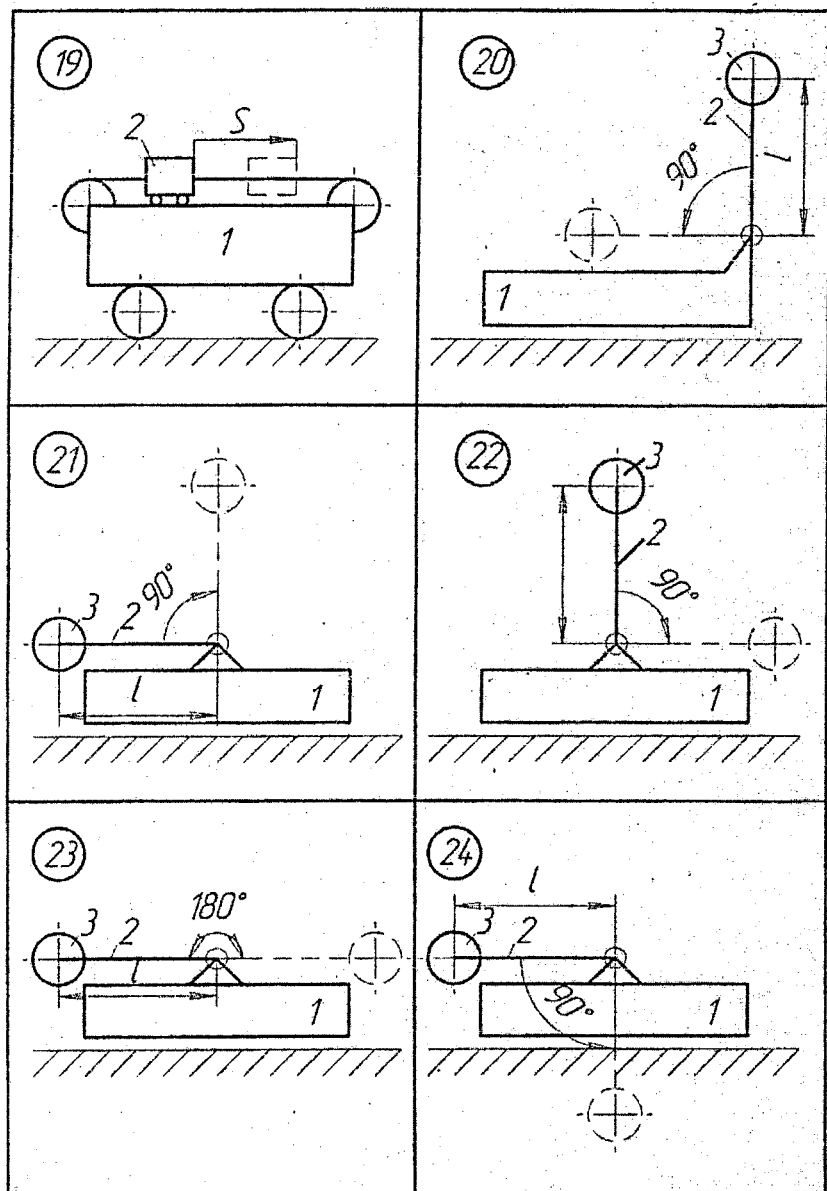


Рисунок 2.4

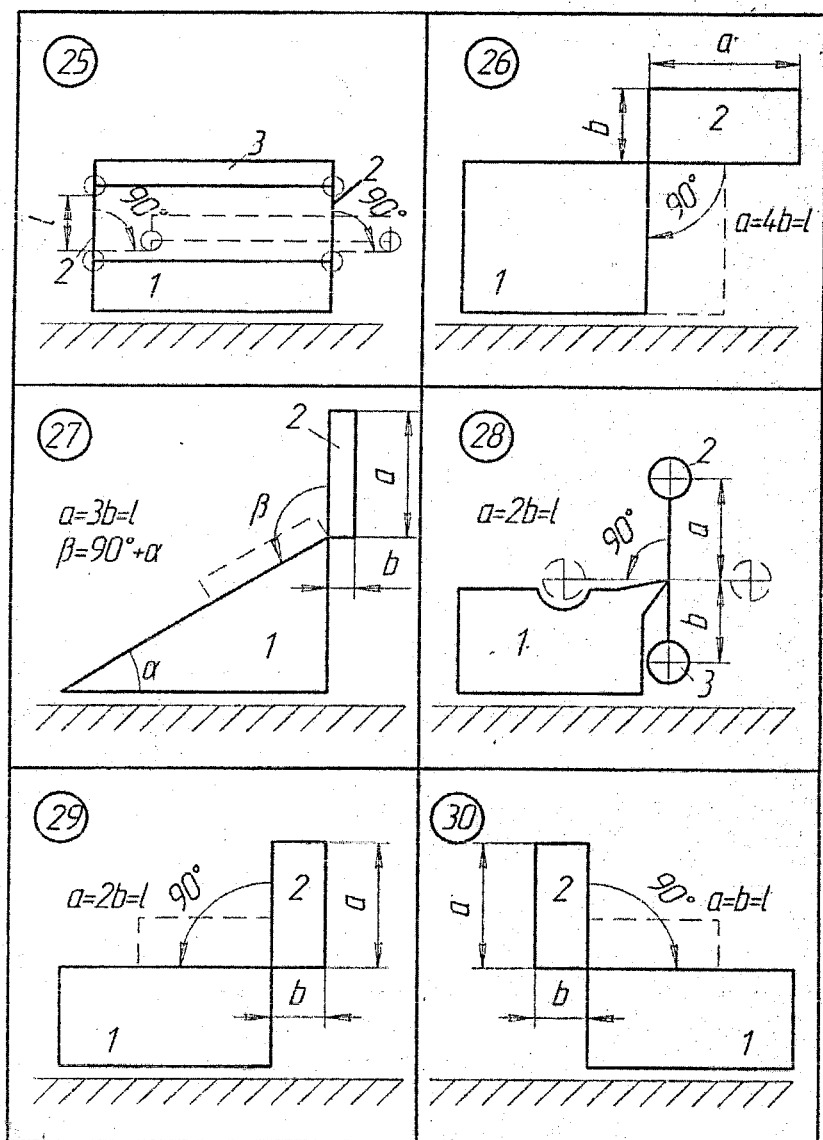


Рисунок 2.5

2.1 Приклад виконання завдання

По похилій площині (рис. 2.6) призми 1 масою $m_1=10\text{кг}$ спускається вантаж 2 ($m_2=6\text{кг}$), який тягне за допомогою невагомої нитки вантаж 3 масою $m_3=4\text{кг}$.

Знайти переміщення призми 1 по гладенькій горизонтальній площині, якщо тіло m_2 опустилось по похилій площині на $S=0,5\text{м}$.

Розв'язання. Покажемо зовнішні сили, які прикладені до матеріальної системи, що складається з призми 1 та тіл 2, 3. Такими силами є: $P_1=m_1g$ – сила ваги призми, $P_2=m_2g$ і $P_3=m_3g$ – вага відповідно другого та третього вантажів, N – реакція гладенької горизонтальної поверхні.

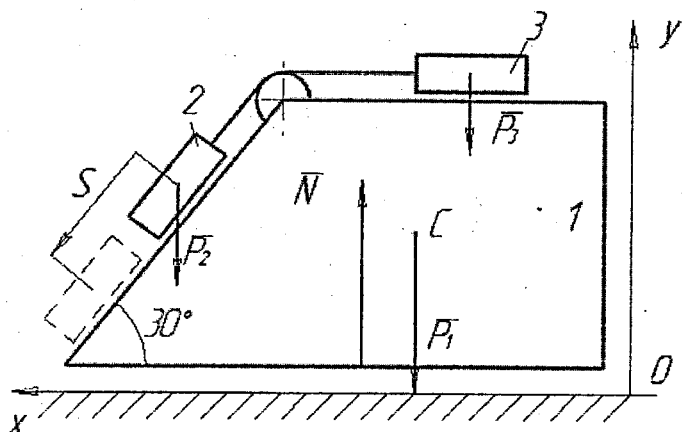


Рисунок 2.6

Запишемо теорему про рух центра мас матеріальної системи в проекціях на вісь X :

$$M\ddot{x}_c = F_x^e, \quad (2.1)$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3$, F_x^e – проекція головного вектора зовнішніх сил на вісь X .

Оскільки $F_x^e = 0$, то $M\ddot{x}_c = 0$. Тоді $M\dot{x}_c = C_1$.

В початковий момент часу система знаходилась у спокої і тому $C_1 = 0$. З формули (2.1) маємо:

$$Mx_c = C_2.$$

Таким чином, координата X_C центра мас матеріальної системи залишається сталою незалежно від переміщень тіл, що входять у систему.

Визначимо положення центра мас системи в початковий момент часу:

$$X_C = \frac{\sum_{k=2}^n m_k \cdot x_k}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M}. \quad (2.2)$$

Якщо вантаж 2 переміститься на величину Δx_2 , тоді тіло 3 – на Δx_3 , а призма 1 – Δx_1 і положення X_C центра мас знайдемо за формулою:

$$X_C = \frac{m_1(x_1 + \Delta x_1) + m_2(x_2 + \Delta x_2) + m_3(x_3 + \Delta x_3)}{M}. \quad (2.3)$$

Враховуючи (2.2), із формули (2.3) отримаємо:

$$m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 = 0. \quad (2.4)$$

Переміщення Δx_2 та Δx_3 складатимуться із відносного по призмі і переносного разом із призмою.

$$\Delta x_2 = S \cdot \cos 30^\circ + \Delta x_1,$$

$$\Delta x_3 = S + \Delta x_1.$$

Тепер із формули (2.4) знаходимо переміщення призми.

$$10 \cdot \Delta x_1 + 6(S \cdot \cos 30^\circ + \Delta x_1) + 4(S + \Delta x_1) = 0,$$

$$\Delta x_1 = -\frac{(6 \cdot \cos 30^\circ + 4)S}{10 + 6 + 4} = -0,229 \text{ м}.$$

Знак “мінус” вказує на те, що призма 1 перемістилася в сторону, протилежну додатному напрямку осі X.

Відповідь: призма 1 перемістилась вправо на 0,229 м.

Д. 3 Використання теореми про зміну головного вектора кількості руху системи для дослідження переміщення тіл

Електродвигун 1 (рис. 3.1 – 3.10) масою m_1 приєднується до системи нездеформованих пружин. На тілі 2 масою m_2 (однорідний диск радіуса R – варіант 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28; кільце радіуса R – варіант 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29; однорідний стержень $OA = R$ – варіант 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30), що з'єднане з ротором електродвигуна 1, закріплена матеріальна точка масою m_A на відстані OA від осі ротора електродвигуна. Ротор обертається з постійною кутовою швидкістю ω . Пружини приєднані до електродвигуна таким чином, що його статор переміщується поступально, а точка O по осі x

Знайти закон руху корпусу електродвигуна, центр мас якого O переміщується по вертикалі, побудувати графік руху точки O протягом одного періоду при кутовій швидкості $\omega = n \cdot \rho$ (ρ – частота, при якій спостерігається явище резонансу), якщо в початковий момент часу точка O зміщена із положення рівноваги на величину λ_0 і їй була надана швидкість v_0 , а тіло 2 почало обертатись навколо горизонтальної осі O з кутовою швидкістю ω .

Необхідні для розрахунку дані наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Варіант	m_1 , кг	m_2 , кг	m_A , кг	R , м	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	c_3 , Н/м	n	λ_0 , м	v_0 , м/с
1	15	2	0,6	0,2	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^3$	0,7	$3 \cdot 10^{-2}$	0
2	18	3	0,7	0,21	$3 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	0,65	$2,5 \cdot 10^{-2}$	1,5
3	21	4	0,8	0,22	$4 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	1,2	$2 \cdot 10^{-2}$	0,5
4	23	5	0,9	0,25	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	0,63	$-1,5 \cdot 10^{-2}$	2
5	25	6	1,0	0,3	$6 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	0,75	-10^{-2}	-1,5
6	10	1	0,5	0,15	$1 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	0,8	0	3
7	12	1,5	0,6	0,16	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	0,55	$5 \cdot 10^{-2}$	4
8	13	2,5	0,7	0,17	$3 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	1,3	$4 \cdot 10^{-2}$	-2,5
9	17	3,5	0,8	0,18	$4 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	1,25	$-3,5 \cdot 10^{-2}$	0,5
0	19	4,5	0,9	0,19	$5 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	1,3	$0,5 \cdot 10^{-2}$	-2,5

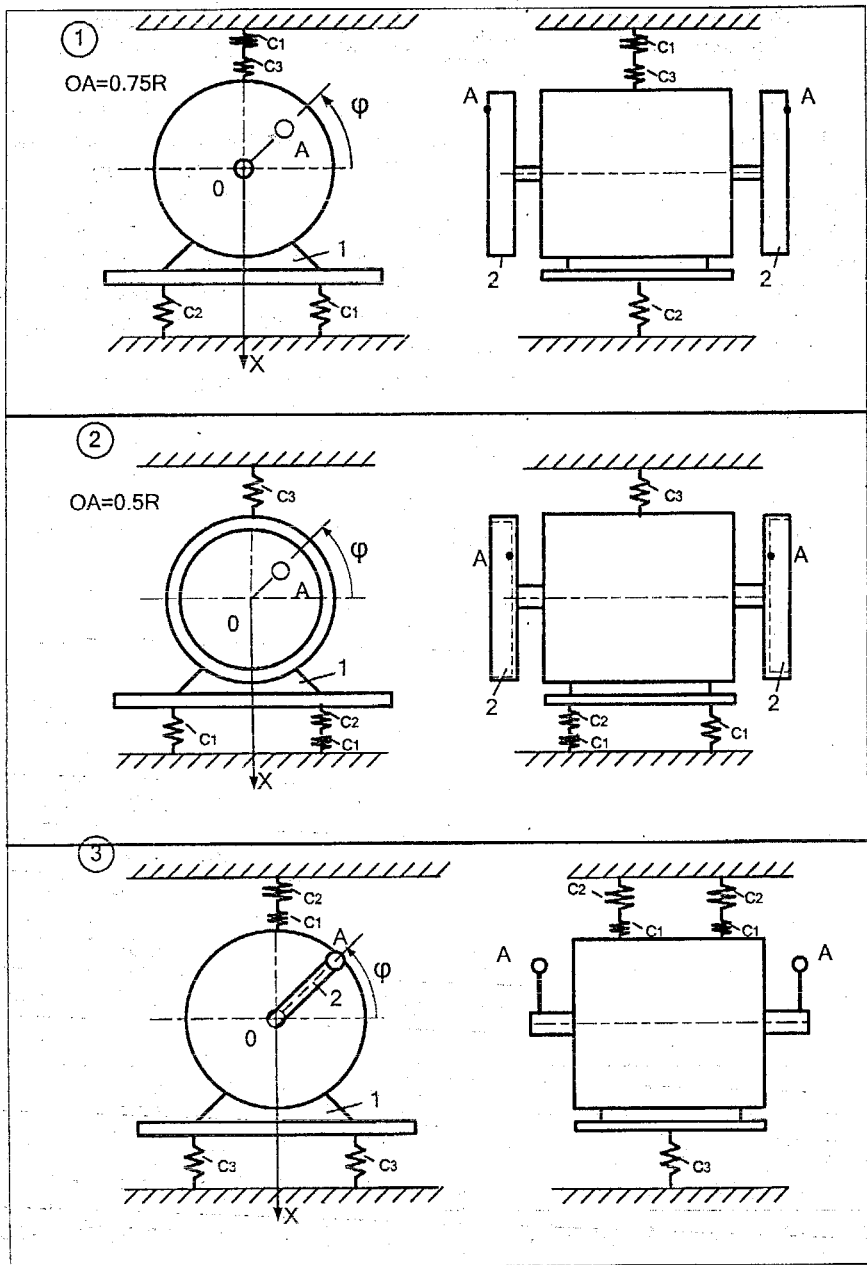


Рисунок 3.1

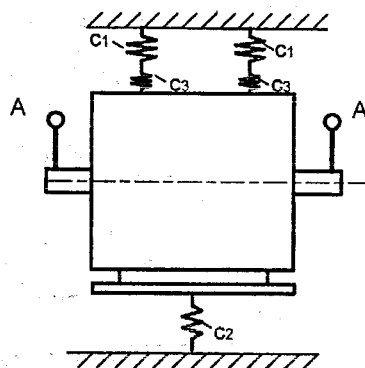
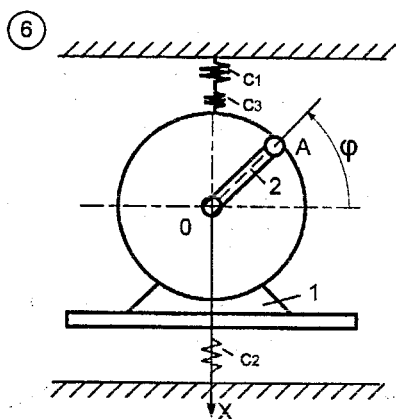
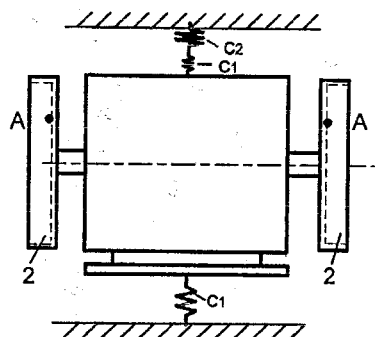
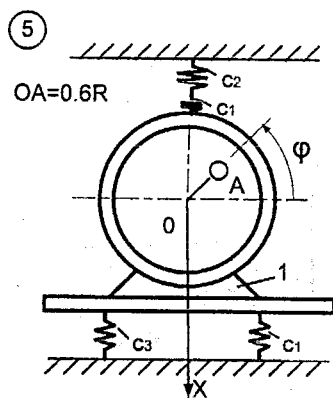
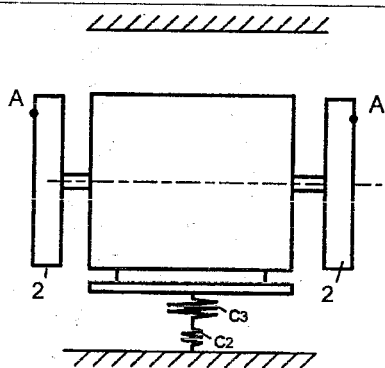
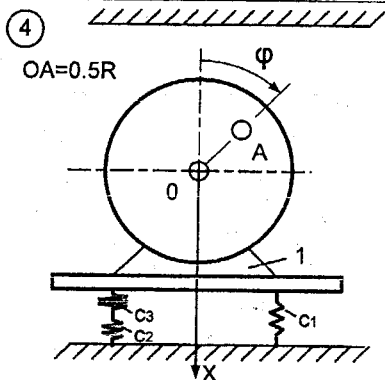
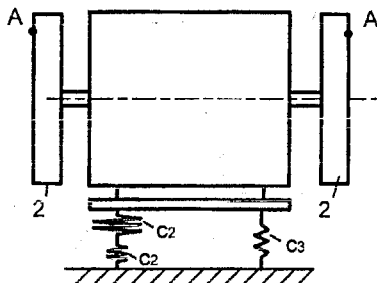
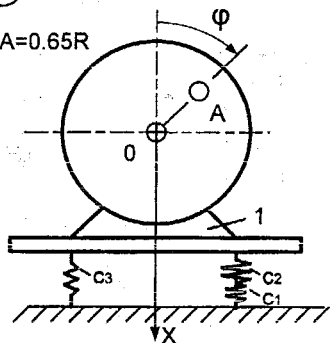


Рисунок 3.2

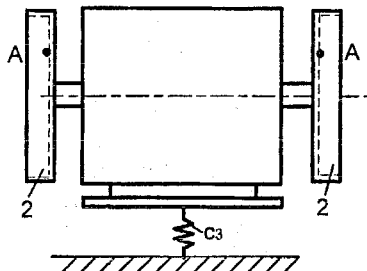
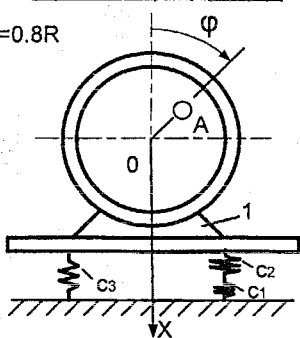
7

$$OA = 0.65R$$



8

$$OA = 0.8R$$



9

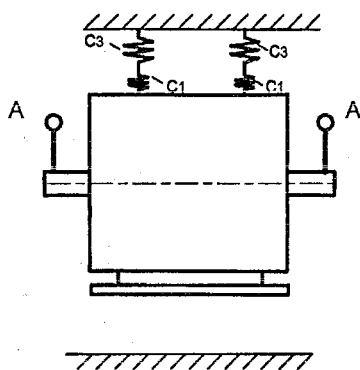
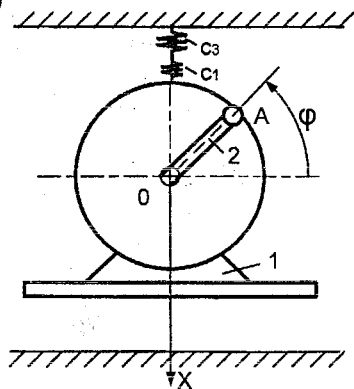


Рисунок 3.3

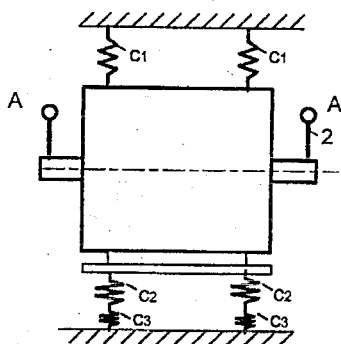
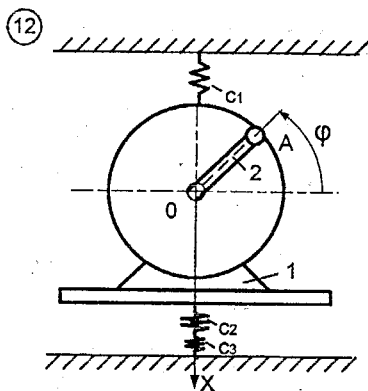
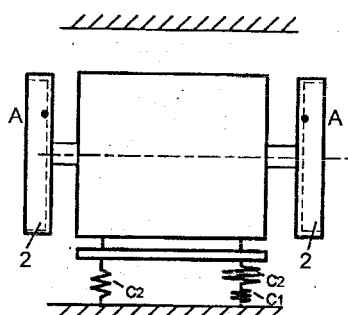
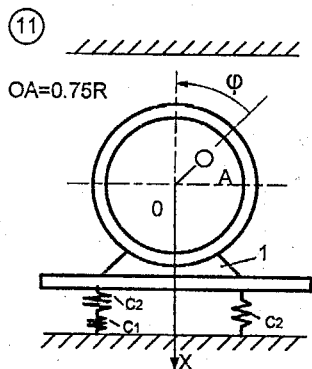
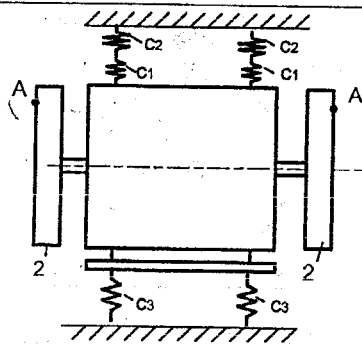
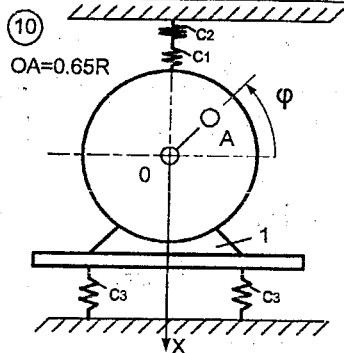
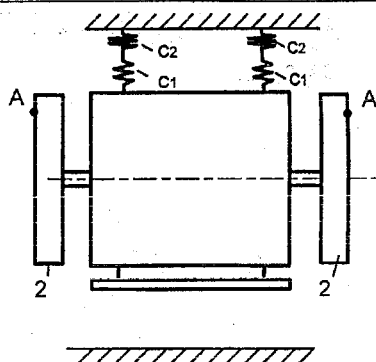
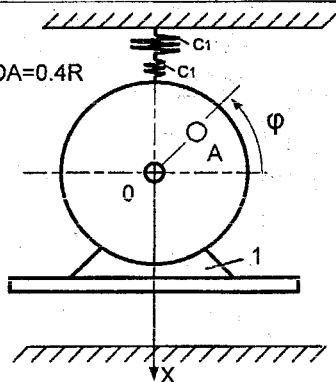


Рисунок 3.4

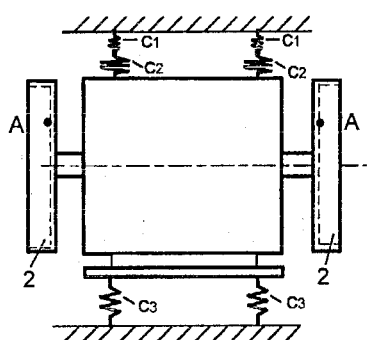
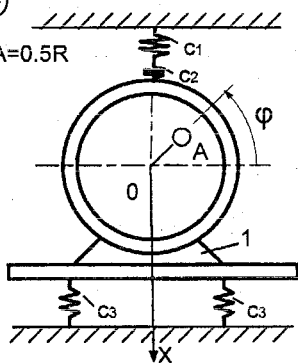
13

$$OA = 0.4R$$



14

$$OA = 0.5R$$



15

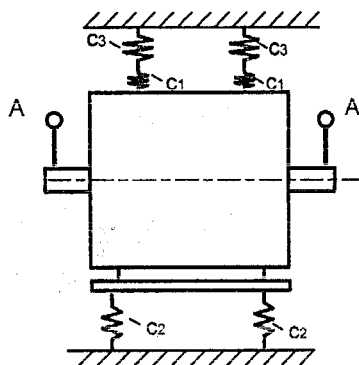
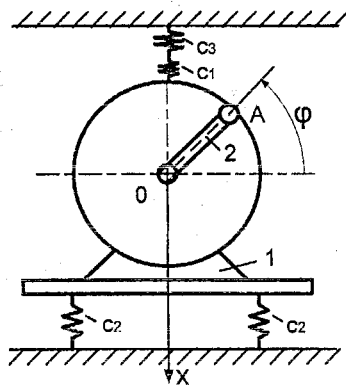
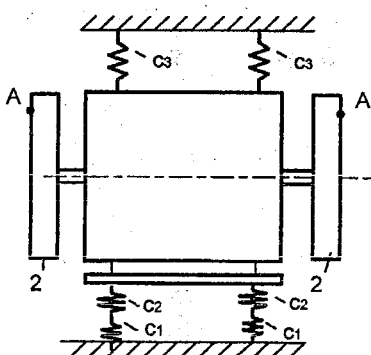
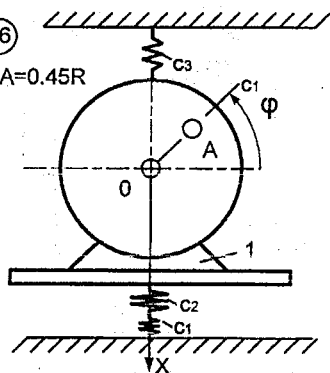


Рисунок 3.5

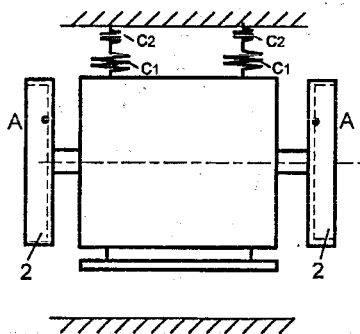
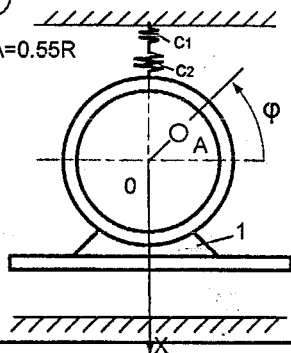
16

$$OA = 0.45R$$



17

$$OA = 0.55R$$



18

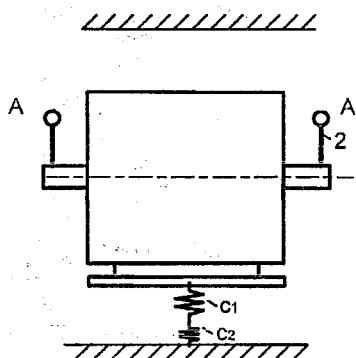
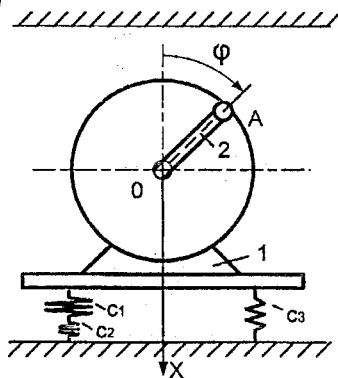
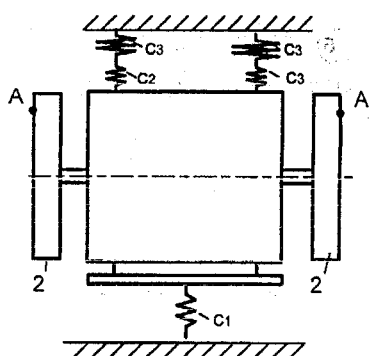
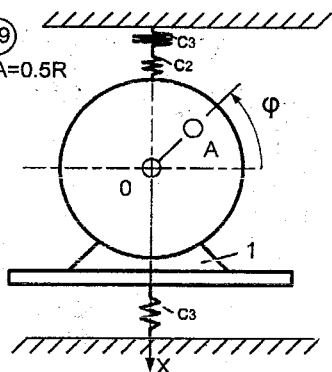


Рисунок 3.6

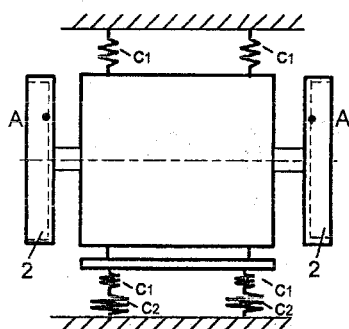
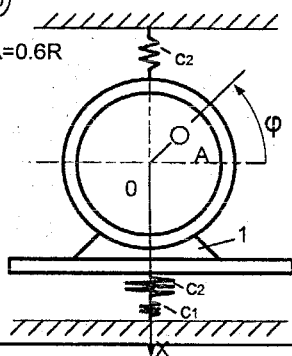
19

$$OA = 0.5R$$



20

$$OA = 0.6R$$



21

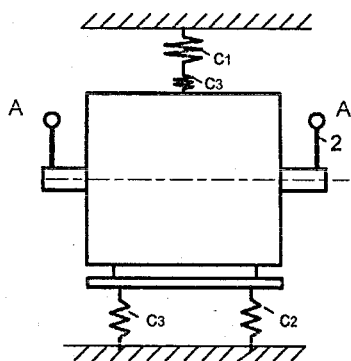
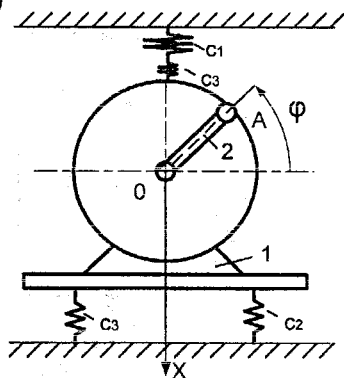
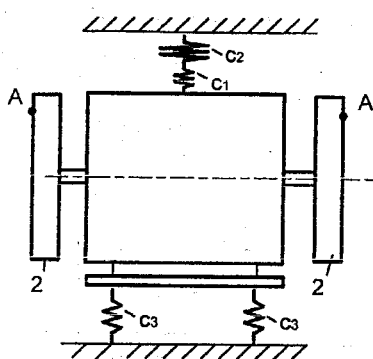
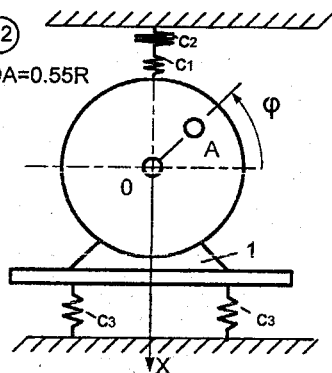


Рисунок 3.7

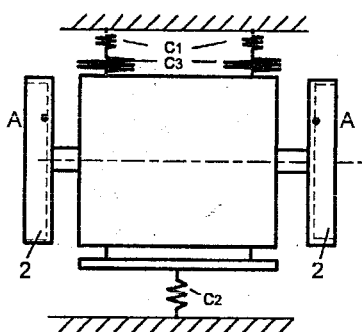
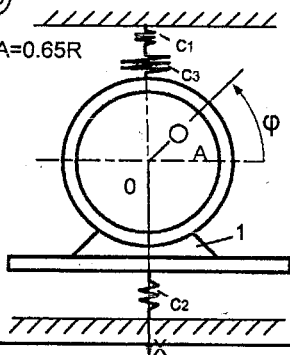
22

$$OA = 0.55R$$



23

$$OA = 0.65R$$



24

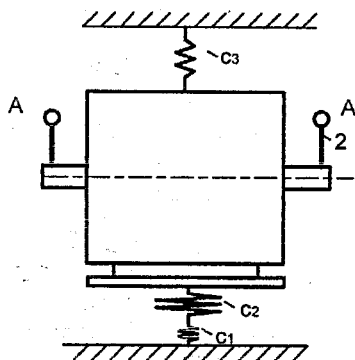
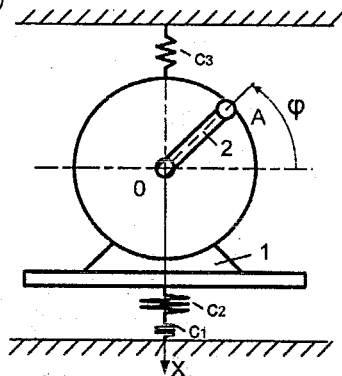
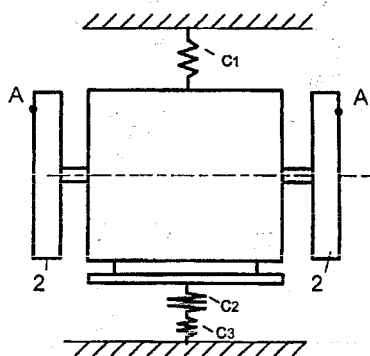
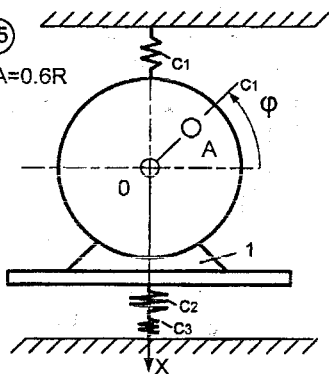


Рисунок 3.8

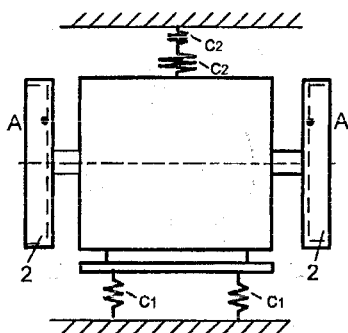
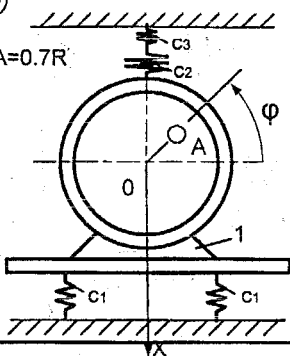
25

$$OA = 0.6R$$



26

$$OA = 0.7R$$



27

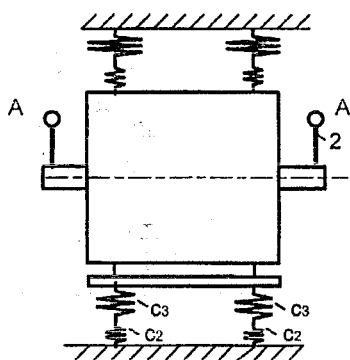
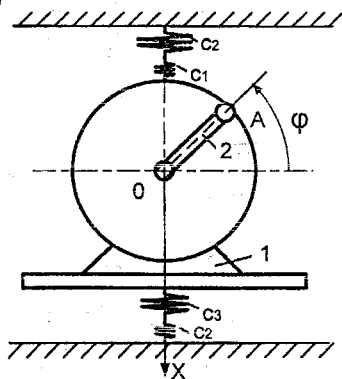
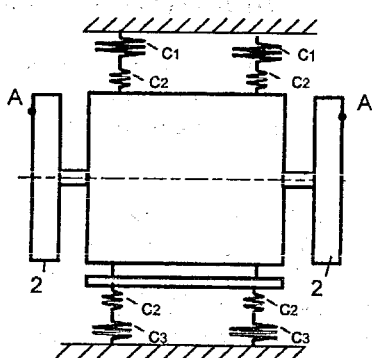
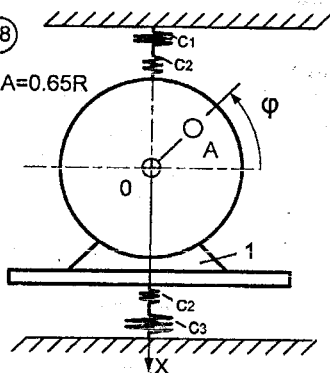


Рисунок 3.9

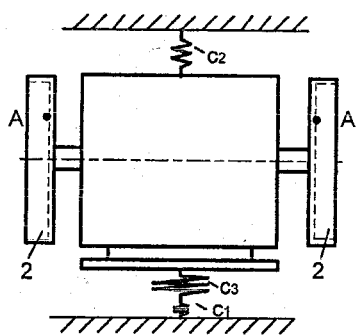
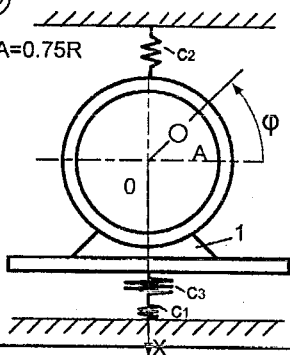
(28)

$$OA = 0.65R$$



(29)

$$OA = 0.75R$$



(30)

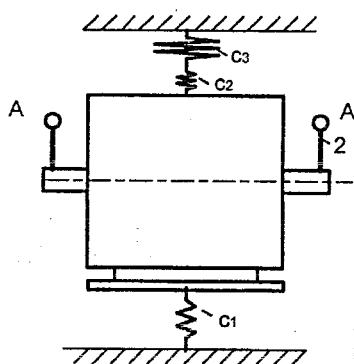
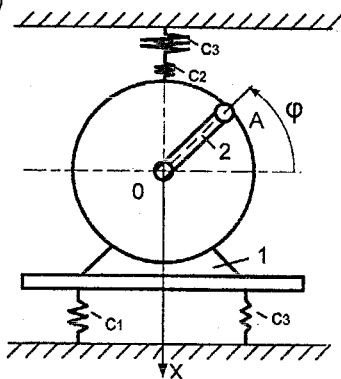


Рисунок 3.10

3.1 Приклад виконання завдання

Система тіл (рис. 3.11) до якої входить електродвигун 1 масою $m_2 = 20$ кг, однорідний стержень 2 масою $m_2 = 2$ кг та довжиною $\ell = 0,4$ м, матеріальна точка масою $m_A = 0,5$ кг, яка знаходиться в точці А ($OA = 2/3 \cdot \ell$).

Система пружин жорсткістю $C_1 = 2 \cdot 10^3$ Н/м, $C_2 = 3 \cdot 10^3$ Н/м, та $C_3 = 4 \cdot 10^3$ Н/м знаходиться у положенні статичної рівноваги.

В деякий момент часу точку О зміщують із положення рівноваги вгору на $x_0 = 2$ см і надають швидкість $v_0 = 3$ м/с вертикально вниз. Одночасно ротор електродвигуна починає обертатись із постійною кутовою швидкістю $\omega = 1/2 \cdot \rho$ (ρ – частота збурювальної сили) навколо горизонтальної осі.

Знайти закон та побудувати графік (при $t \geq 2 \cdot T$, де T – період) руху центра мас (точка О) електродвигуна.

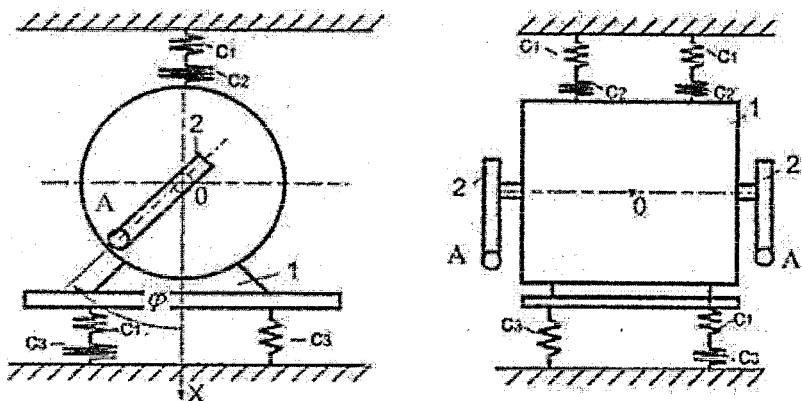


Рисунок 3.11

Розв'язання. Систему пружин замінюємо однією еквівалентною пружиною жорсткістю C

$$C = 2C_{12} + 2C_3 + 2C_{13} = \left(2 \cdot 1,2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{4}{3} \right) \cdot 10^3 = 13,07 \cdot 10^3 \frac{H}{m},$$

$$\text{де } C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 1,2 \cdot 10^3 \frac{H}{m},$$

$$C_{13} = C_1 \cdot C_3 / (C_1 + C_3) = 2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3) = 4/3 \cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

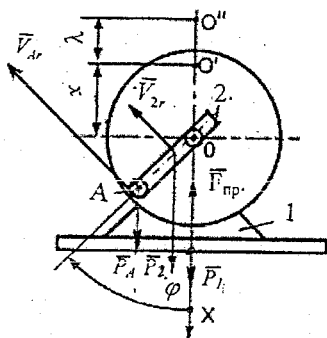


Рисунок 3.12

Розглянемо рух невідільної системи тіл (рис. 3.11): електродвигуна 1, двох однорідних стержнів 2, двох матеріальних точок А. Центр мас О електродвигуна зміщений із положення статичної рівноваги O' на величину x (рис. 3.12), а стержні 2 повернулися на кут φ навколо горизонтальної осі О. Дію в'язі (пружину жорсткістю C) замінюємо реакцією в'язі – силою F_{np} . Оскільки в точці O'' деформація пружин дорівнює нулю, то

$$F_{np} = C \cdot (x + \lambda), \quad (3.1)$$

де λ – статична деформація пружин, яка знаходиться за формулою

$$\lambda = (P_1 + 2P_2 + 2P_A) / C,$$

де P_1, P_2, P_A – вага відповідно тіл 1, 2 та матеріальної точки А.

Кутова швидкість обертання ротора

$$\omega = \frac{1}{2} p = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{m_1 + 2m_2 + 2m_A}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13,07 \cdot 10^3}{20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5}} = 11,43 \frac{1}{c}.$$

оскільки при явищі резонансу частота збуджувальної сили p дорівнює власній частоті коливань системи $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ (m – маса системи).

Для дослідження руху корпусу електродвигуна (рис. 3.12) використаємо теорему про зміну головного вектора кількості руху системи в проекції на вісь x .

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_x^e, \quad (3.2)$$

$$\text{де } F_x^e = P_1 + 2P_1 + 2P_A - F_{np}, \quad P_1 = m_1 g, \quad P_2 = m_2 g, \quad P_A = m_A g. \quad (3.3)$$

Проекція Q_x головного вектора кількості руху системи на вісь x

$$Q_x = m_1 \ddot{x} + 2m_2 \ddot{V}_{2x} + 2m_A \ddot{V}_{Ax}. \quad (3.4)$$

Використовуючи теорему додавання швидкостей, отримаємо проекцію швидкості точки А і швидкості центра мас тіл 2 на вісь х (рис.3.12).

$$V_{Ax} = \dot{x} + (\bar{V}_{Ar})_x = \dot{x} - \frac{2}{3} l \omega \sin \omega t, \quad (3.5)$$

$$V_{2x} = \dot{x} + (\bar{V}_{2r})_x = \dot{x} - \frac{1}{6} l \omega \sin \omega t,$$

де $\varphi = \omega \cdot t$.

Тепер формула (3.4), враховуючи (3.5), запишеться :

$$Q_x = \ddot{x} (m_1 + 2m_2 + 2m_A) - \left(\frac{1}{3} m_2 + \frac{4}{3} m_A \right) l \omega \sin \omega t. \quad (3.6)$$

Підставляючи значення Q_x (3.6) та F_x (3.3) в теорему (3.2), отримаємо диференціальне рівняння:

$$\ddot{x} (m_1 + 2m_2 + 2m_A) + cx = \left(\frac{1}{3} m_2 + \frac{4}{3} m_A \right) l \omega^2 \cos \omega t.$$

$$\text{Або} \quad \ddot{x} + k^2 x = h_0 \cos \omega t, \quad (3.7)$$

$$\text{де} \quad k^2 = \frac{c}{m_1 + 2m_2 + 2m_A} = \frac{13,07 \cdot 10^3}{20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5} = 522,8 \frac{1}{c^2},$$

$$h_0 = \frac{(m_2 + 4m_A) l \omega^2}{3(m_1 + 2m_2 + 2m_A)} = \frac{(2 + 4 \cdot 0,5) \cdot 0,4 \cdot 11,43^2}{3(20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5)} = 2,79 \frac{m}{c^2}.$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.7) складається із загального розв'язку однорідного диференціального рівняння $\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0$, а саме:

$$x_1 = B_1 \cos kt + B_2 \sin kt \quad (3.8)$$

та частинного розв'язку x_2 неоднорідного диференціального рівняння (3.7), який будемо шукати у вигляді:

$$x_2 = B_3 \cos \omega t. \quad (3.9)$$

Із (3.7) враховуючи (3.9), знаходимо B_3

$$-\omega^2 B_3 \cos \omega t + k^2 B_3 \cos \omega t = h_0 \cos \omega t,$$

$$B_3 = \frac{h_0}{k^2 - \omega_2^2} = \frac{2,79}{522,8 - 130,6} = 0,007.$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.7)

$$x = x_1 + x_2 = B_1 \cos(22,86t) + B_2 \sin(22,86t) + 0,007 \cos(11,43t). \quad (3.10)$$

Постійні інтегрування B_1 та B_2 визначимо із початкових умов:

$$\text{при } t = 0; \quad x_0 = -0,02 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3.11)$$

Швидкість V точки О (рис.3.12)

$$V = \dot{x} = -22,86 B_1 \sin(22,86t) + 22,86 B_2 \cos(22,86t) - 0,08 \sin(11,43t).$$

Із рівнянь (3.10), (3.12) та початкових умов (3.11) знаходимо постійні інтегрування B_1 та B_2 .

$$-0,02 = B_1 + 0,007, \quad 3 = 22,86 B_2. \quad B_2 = 0,13 \text{ м}; \quad B_1 = -0,027 \text{ м}.$$

Тепер рівняння (3.10) руху точки О електродвигуна запишеться:

$$x = -0,027 \cos(22,86t) + 0,13 \sin(22,86t) + 0,007 \cos(11,43t). \quad (3.13)$$

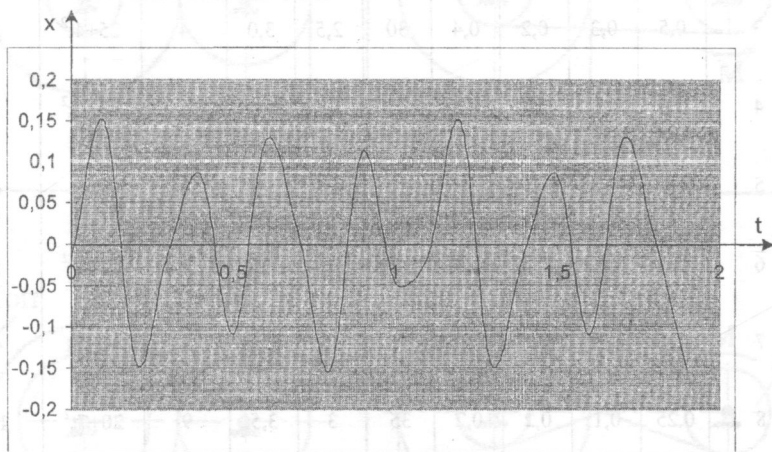


Рисунок 3.13

На рис.3.13 наведений графік руху точки О корпусу електродвигуна, який отриманий на підставі формули (3.13).

$$\text{Відповідь: } x = -0,027 \cos(22,86t) + 0,13 \sin(22,86t) + 0,007 \cos(11,43t).$$

Д.4 Використання теореми про зміну кінетичного моменту для дослідження руху матеріальної системи

Матеріальна система (рис. 4.1-4.5) приводиться до руху моментом M , що прикладений до однорідного тіла 3. Знайти закон руху тіла 1, якщо на тіло 2 діє постійний момент опору M .

В початковий момент часу кутова швидкість тіла 3 - ω_{30} . Масами пасів та їх ковзанням по шківках знехтувати. Тіла 2 та 3 обертаються навколо горизонтальних осей.

Дані для розрахунку наведені в таблиці 4.1. Де R_2, r_2, R_3 – розміри тіла 2 та 3; i_2 – момент інерції тіла 2 відносно осі обертання; m_1, m_2, m_3 – маси тіл 1, 2 та 3.

Таблиця 4.1

Варіант	$R_2, \text{ м}$	$R_3, \text{ м}$	$r_2, \text{ м}$	$i_2, \text{ м}$	$m_1, \text{ кг}$	$m_2, \text{ кг}$	$m_3, \text{ кг}$	$\omega_{30}, \frac{1}{\text{с}}$	$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$M_{\text{оп}}, \text{ Н}\cdot\text{м}$
1	0,4	0,25	0,2	0,3	10	0,5	1,0	2	$65+t$	10
2	0,3	0,2	0,1	0,2	20	1,5	2,0	3	$50+t^2$	8
3	0,5	0,3	0,2	0,4	30	2,5	3,0	4	$25+4t^2$	7
4	0,6	0,5	0,4	0,5	40	3,5	4	5	$75+2t^2$	9
5	0,55	0,3	0,25	0,35	50	4,5	5	6	$65+t$	6
6	0,3	0,15	0,2	0,3	15	1	1,5	1	$85+6t^2$	5
7	0,35	0,25	0,2	0,25	25	2	2,5	8	$15+3t$	4
8	0,25	0,1	0,2	0,2	35	3	3,5	9	$20+7t^2$	11
9	0,15	0,05	0,2	0,1	45	4	4,5	10	$95+7t$	9
0	0,55	0,4	0,35	0,4	7,5	5	5,5	11	$13+9t$	8

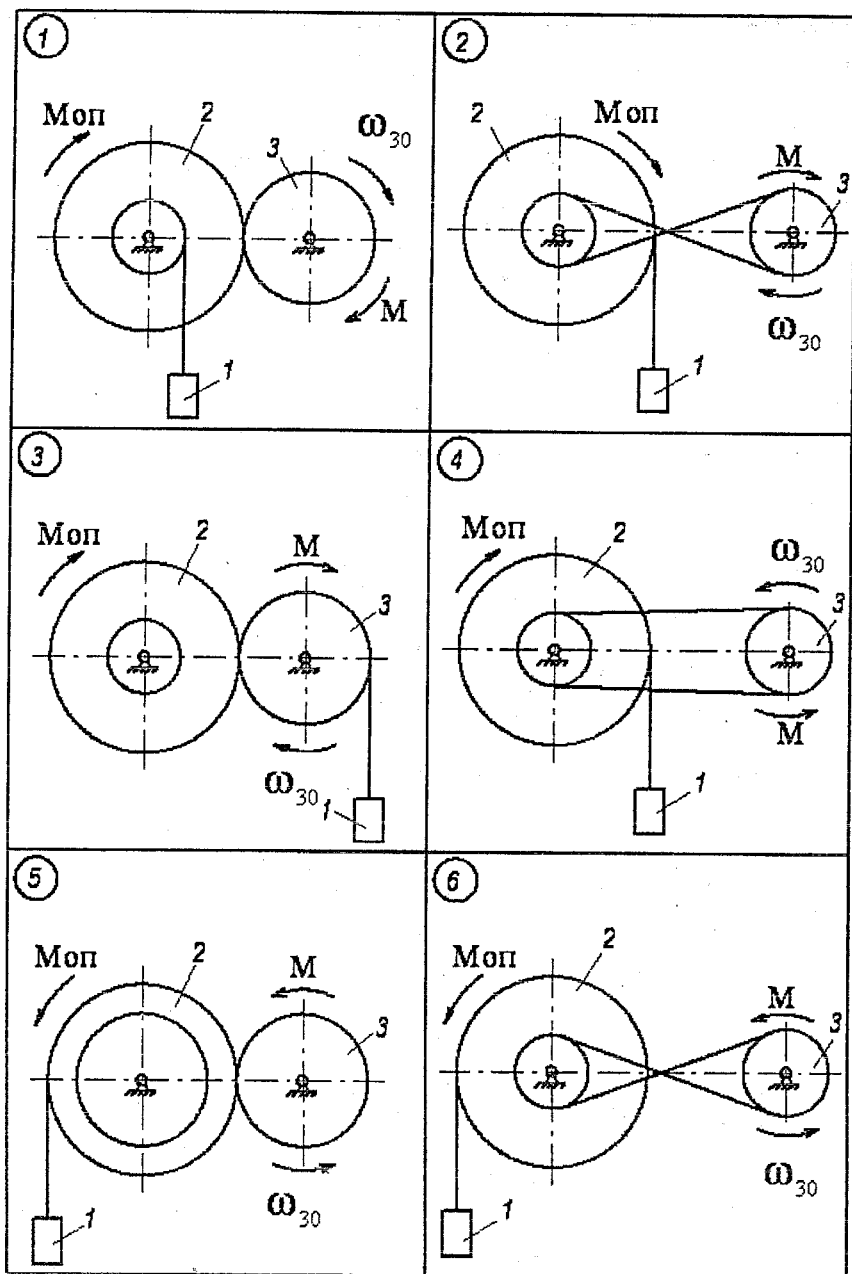


Рисунок 4.1

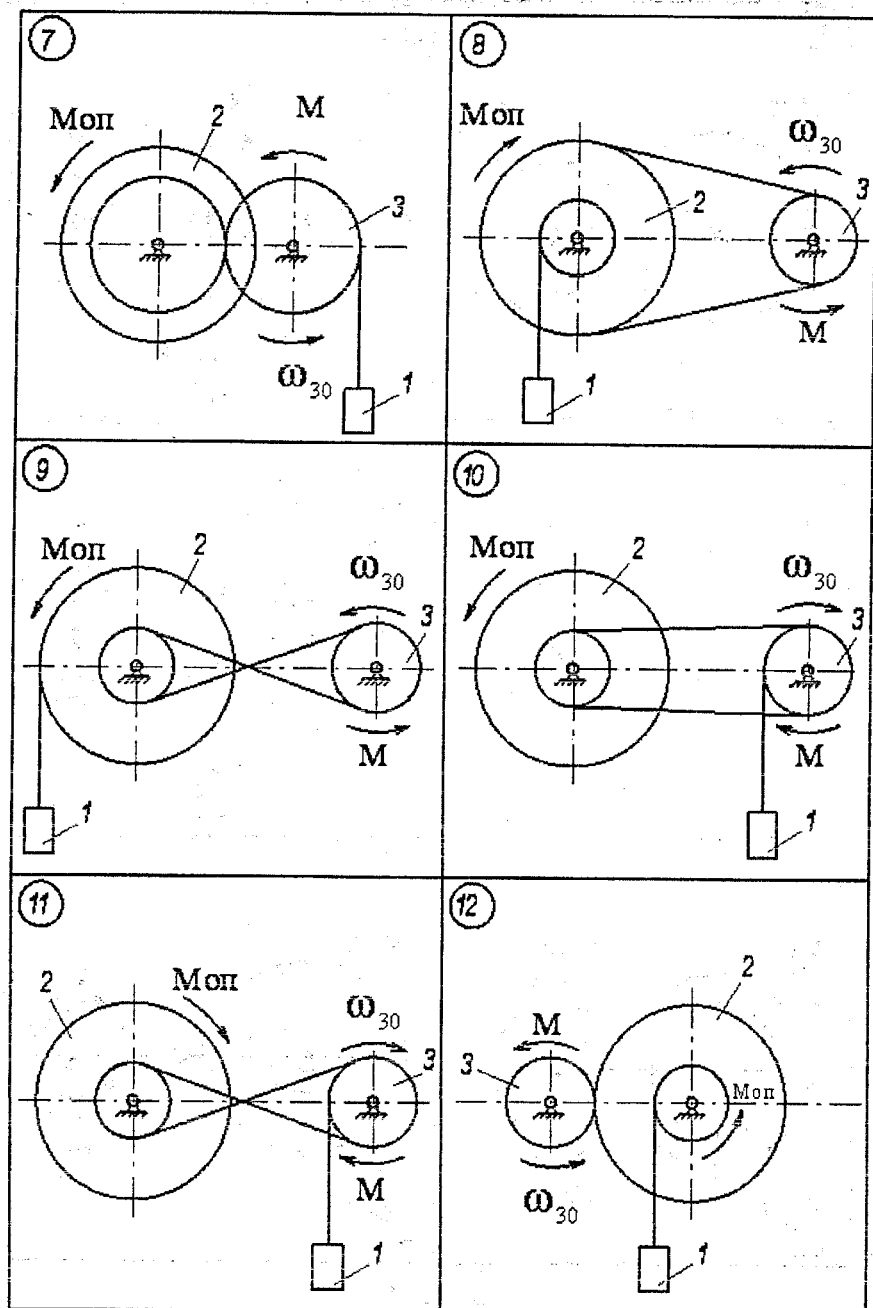


Рисунок 4.2

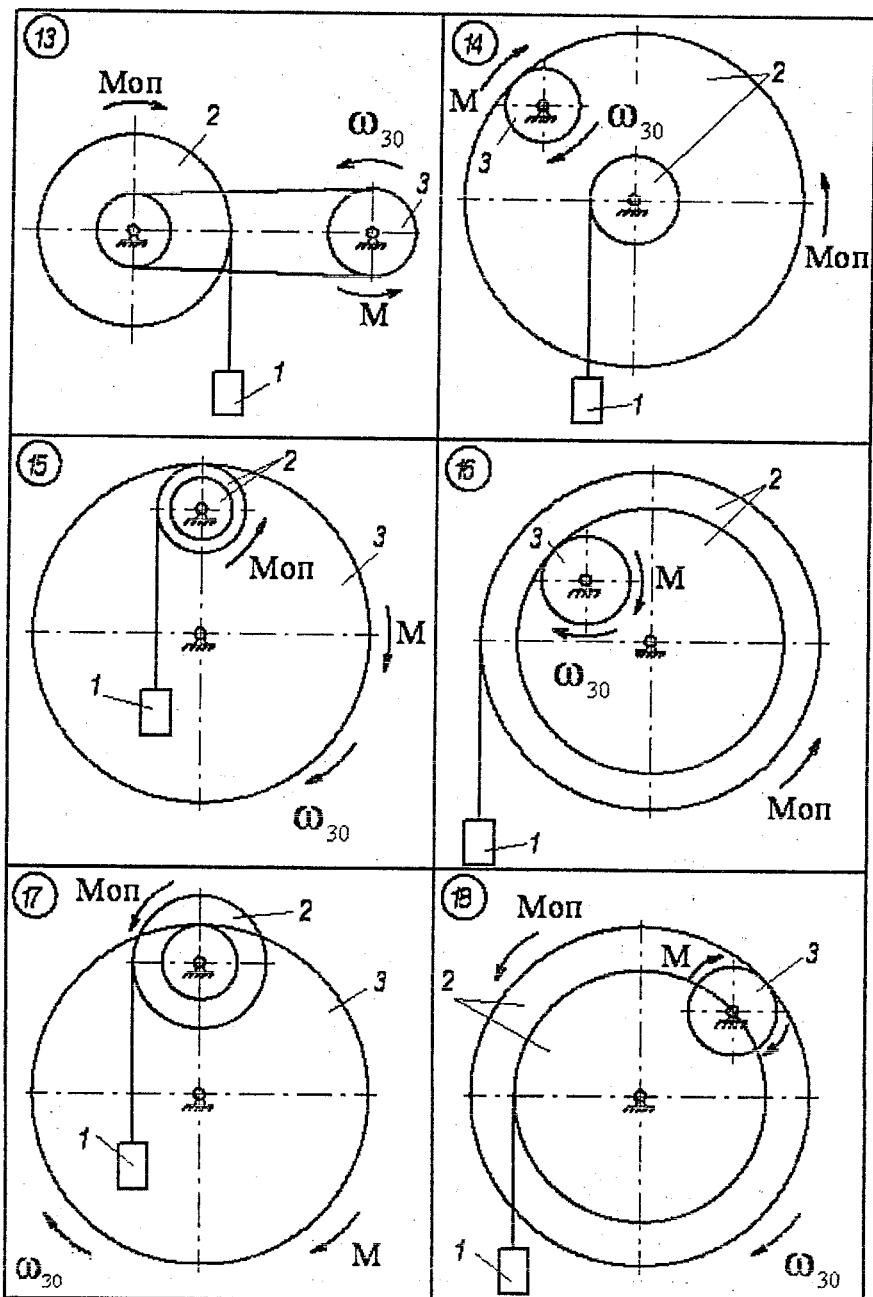


Рисунок 4.3

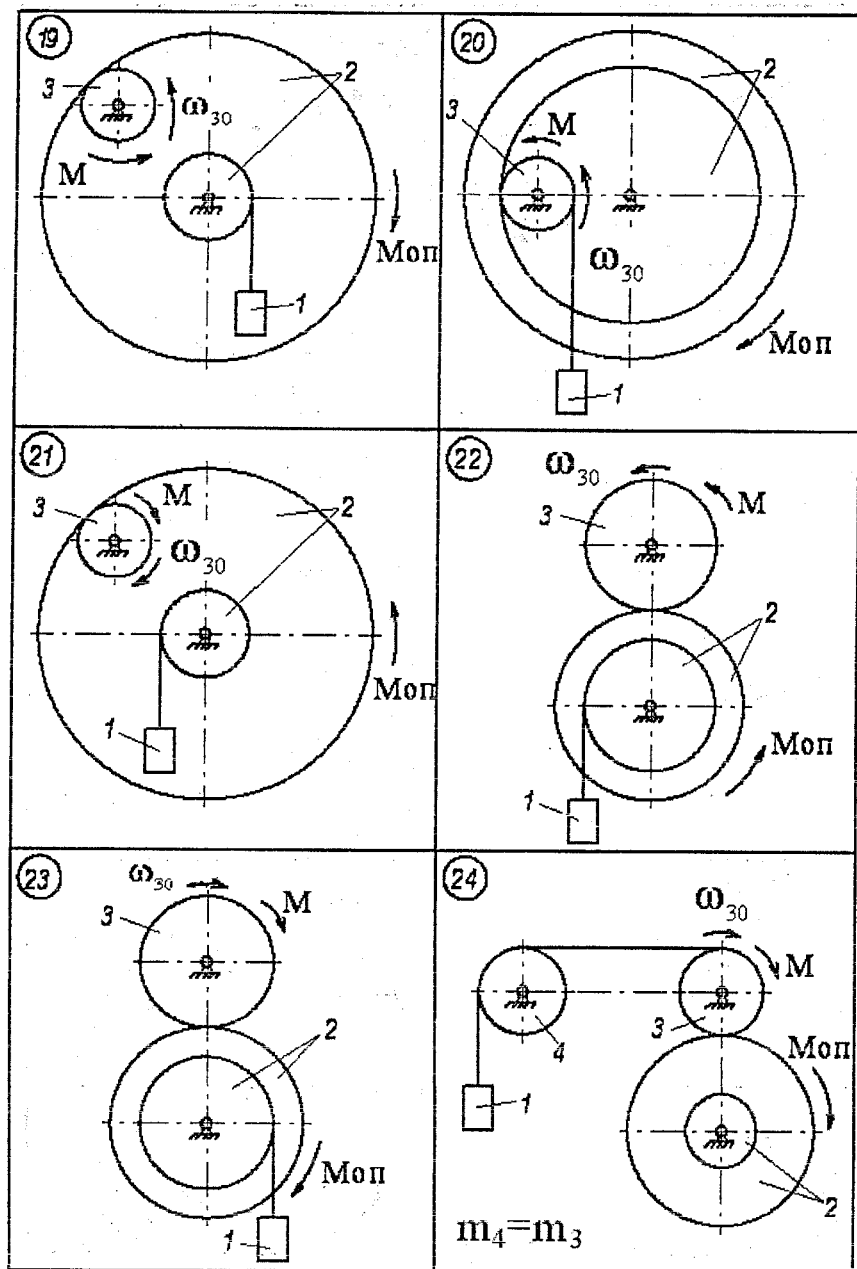


Рисунок 4.4

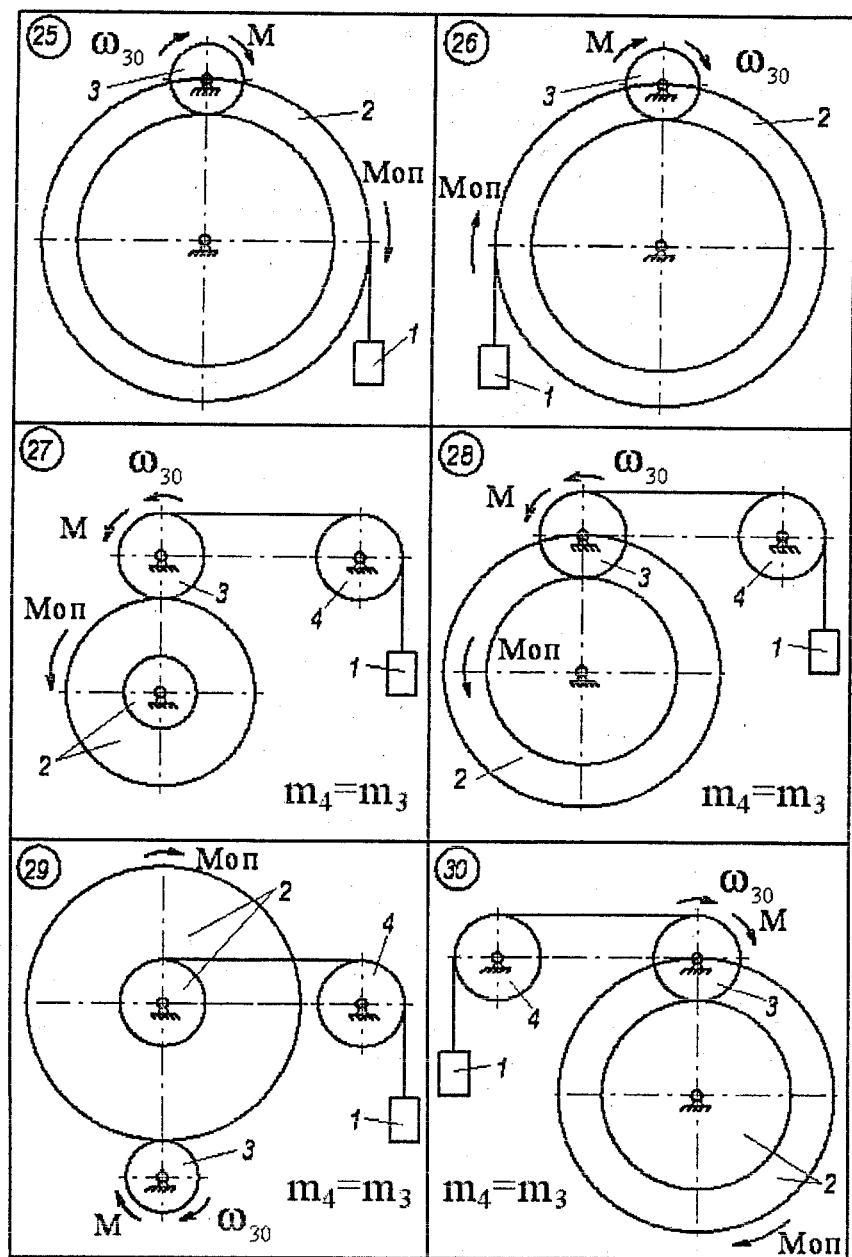


Рисунок 4.5

4.1 Приклад виконання завдання

До вантажу 1 (рис. 4.6) масою $m_1=20\text{кг}$ прив'язаний трос, який перекинутий через нерухомий блок 4 і другий кінець якого закріплений на поверхні шківів 2 радіусом r_2 ($m_2 = 2\text{кг}$). Механічна система приводиться до руху моментом $M = (16 + 11t^2) \text{ Н} \cdot \text{м}$, прикладеним до східчастого шківів 3 масою $m_3=3\text{кг}$.

Знайти закон руху вантажу 1, якщо на тіло 2 діє момент опору $M_{\text{оп}} = 15 \text{ Н} \cdot \text{м}$ і при $t = 0$ кутова швидкість тіла 3 – $\omega_{30} = 5 \frac{1}{\text{с}}$. Більший радіус у шківів 2 – $R_2=0,4\text{м}$, менший – $r_2 = 0,2\text{м}$, радіус інерції – $i_2 = 0,3\text{м}$. Тіла 3 та 4 мають однакові маси $m_3=m_4$ і розміри $R_3=R_4=0,3\text{м}$. Тіла 2,3 та 4 обертаються навколо горизонтальних нерухомих осей, а тіло 1 переміщується поступально.

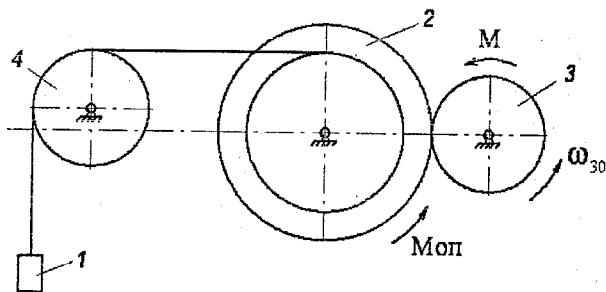


Рисунок 4.6

Розв'язання. Розглянемо окремо рух тіл 2 і 3 та механізму наведеного на рис. 4.6

До тіла 3 (рис. 4.7) прикладені зовнішні сили : пара сил з моментом M , сила тяжіння $P_3=m_3g$, реакції циліндричного шарніра X_3 і Y_3 , реакції тіла 2 – колове зусилля S_3 і сила нормального тиску N_3 .

Запишемо диференціальне рівняння обертання тіла 3 навколо нерухомої осі враховуючи, що якщо момент зовнішніх сил діє у напрямку руху тіла, тоді записуємо його з додатним знаком.

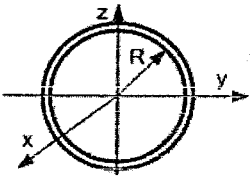
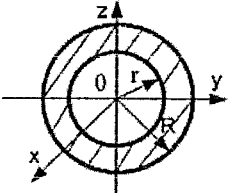
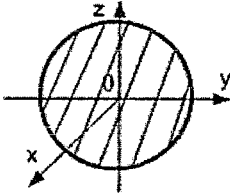
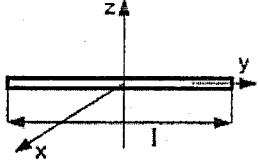
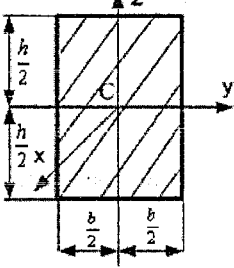
$$I_{z3}\ddot{\phi}_3 = \sum M_{z3}^e,$$

де $I_{z3} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2$ - момент інерції тіла відносно осі z ;

$\ddot{\phi}_3$ - кутове прискорення тіла 3;

$\sum M_{z3}^e = M - S_3 R_3$ - момент зовнішніх сил, прикладених до тіла 3, відносно осі z .

Таблиця 4.2 - Осьові моменти інерції однорідних тіл

Форми тіла	I_x	I_y	I_z
Кільце 	mR^2	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{2}$
	$\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$	$\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$	$\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$
Кругла пластина 	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$
Стержень 	$\frac{1}{12}ml^2$	0	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямокутна пластина 	$\frac{1}{12}m(h^2 + b^2)$	$\frac{1}{12}mh^2$	$\frac{1}{12}mb^2$

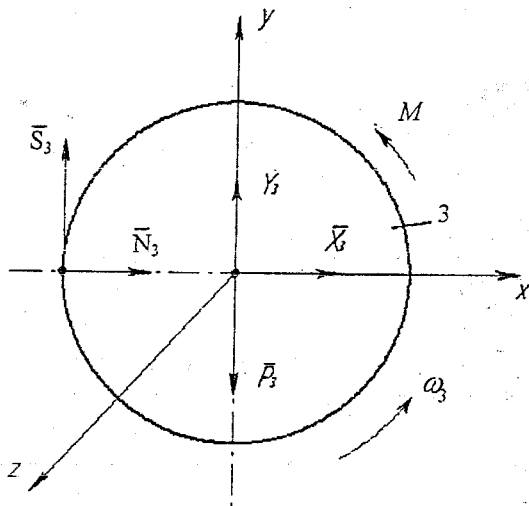


Рисунок 4.7

$$\frac{1}{2} m_3 R_3^2 \ddot{\varphi}_3 = M - S_3 R_3. \quad (4.1)$$

Початкові умови:

$$\text{при } t=0, \varphi_{30}=0, \dot{\varphi}_{30}=\omega_{30}. \quad (4.2)$$

На тіло 2 (рис. 4.8) діють такі зовнішні сили: сила тяжіння $P_2=m_2g$, реакції циліндричного шарніра X_2 та Y_2 , натяг троса S_2 (трос працює тільки на розтяг), реакції тіла 3 – S'_3 та N'_3 , які за третім законом Ньютона направлені в протилежні сторони сил S_3 та N_3 (рис. 4.7).

Диференціальне рівняння обертання тіла 2 (рис. 4.8) навколо горизонтальної осі Z.

$$I_{Z2} \ddot{\varphi}_2 = S'_3 R_2 - S_2 r_2 - M_{оп}, \quad (4.3)$$

де $I_{Z2}=m_2 i_2^2$ – момент інерції тіла 2 відносно осі Z.

Оскільки $S'_3 = S_3$, то рівняння (4.3) запишеться у вигляді

$$m_2 i_2^2 \ddot{\varphi}_2 = S_3 R_2 - S_2 r_2 - M_{оп}. \quad (4.4)$$

До тіл 1 та 4 (рис. 4.9) прикладені зовнішні сили: сили тяжіння $P_1=m_1g$ та $P_4=m_4g$, реакція троса S'_2 ($S'_2=S_2$), реакції циліндричного шарніра X_4 та Y_4 .

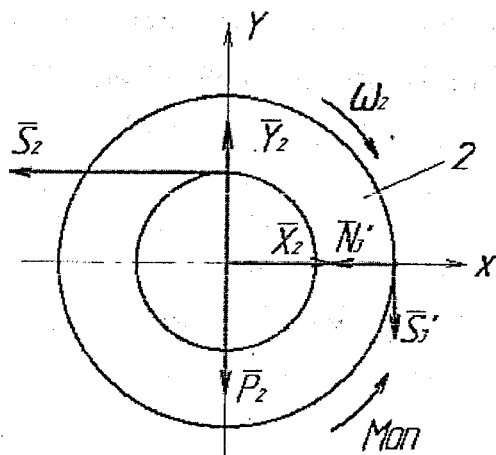


Рисунок 4.8

Теорема про зміну кінетичного моменту для тіл 1 та 4 (рис. 4.9) в проєкціях на вісь Z запишеться:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{(e)}, \quad (4.5)$$

де L_z – кінетичний момент системи тіл 1 та 4 відносно осі Z,
 $\sum M_z^e = S_2' \cdot R_4 - P_1 \cdot R_4 = S_2 R_4 - P_1 R_4$ – головний момент зовнішніх сил.

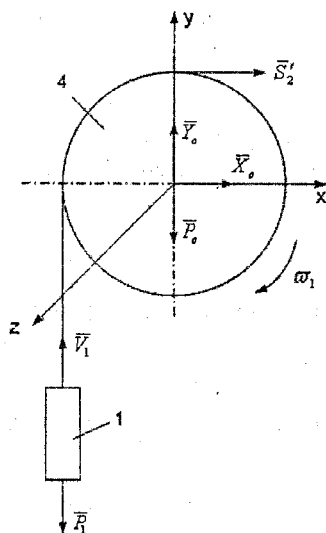


Рисунок 4.9

Кінетичний момент L_Z складається із моменту кількості руху L_{Z1}

тіла 1 та кінетичного моменту L_{Z4} тіла 4 відносно осі Z

$$L_{Z1} = m_1 V_1 R_4, \quad (4.6)$$

$$L_{Z4} = I_{Z4} \omega_4. \quad (4.7)$$

Враховуючи, що $V_1 = \omega_4 R_4$, а $I_{Z4} = \frac{1}{2} m_4 R_4^2$, кінетичний момент системи L_Z визначимо за формулою

$$L_Z = m_1 \omega_4 R_4^2 + \frac{1}{2} m_4 \omega_4 R_4^2 = \frac{1}{2} \omega_4 R_4^2 (2m_1 + m_4).$$

Тепер диференціальне рівняння (4.5) набуває вигляду

$$\frac{1}{2} \ddot{\phi}_4 (2m_1 + m_4) R_4^2 = (S_2 - m_1 g) R_4. \quad (4.8)$$

Якщо до диференціальних рівнянь (4.1), (4.4), (4.8) додати кінематичні співвідношення

$$\ddot{\phi}_3 R_3 = \ddot{\phi}_2 R_2, \quad \ddot{\phi}_2 r_2 = \ddot{\phi}_4 R_4, \quad \ddot{x}_1 = \ddot{\phi}_4 R_4 \quad (4.9)$$

тоді отримаємо систему шести рівнянь в які входять невідомі: $\ddot{x}_1, \ddot{\phi}_2, \ddot{\phi}_3, \ddot{\phi}_4, S_2, S_3$.

Розв'язуючи систему рівнянь (4.1), (4.4), (4.8), (4.9) маємо:

$$\ddot{x}_1 \left(m_1 + \frac{1}{2} m_4 + m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) = M \frac{R_2}{r_2 R_3} - \frac{M_0}{r_2} - m_1 g.$$

З урахуванням того, що $m_1=20\text{кг}$, $m_2=2\text{кг}$, $m_3=m_4=3\text{кг}$, $r_2=0,2\text{м}$, $R_2=0,4\text{м}$, $i_2=0,3\text{м}$, $R_3=R_4=0,3\text{м}$, $M = (16+11t^2)\text{Н}\cdot\text{М}$, $M_0=15\text{Н}\cdot\text{М}$, $g=9,81\text{м/с}^2$, отримаємо

$$\ddot{x}_1 = 2,29t^2 - 5,15. \quad (4.10)$$

Для визначення закону руху тіла 1, інтегруємо двічі диференціальне рівняння (4.10), беручи до уваги початкові умови (4.2)

$$\dot{x}_1 = \omega_{30} \cdot \frac{r_2 R_3}{R_2} = 0,15 \omega_{30},$$

$$x_{10} = 0.$$

Перший інтеграл диференціального рівняння (4.10)

$$\dot{x}_1 = 0,75 - 5,15 \cdot t + 0,76 \cdot t^3.$$

Закон руху тіла 1: $x_1 = (0,75 \cdot t - 2,575 \cdot t^2 + 0,19 \cdot t^4) \text{ м}$.

Відповідь: $x_1 = (0,75 \cdot t - 2,575 \cdot t^2 + 0,19 \cdot t^4) \text{ м}$.

Д.5 Використання теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху матеріальної системи

Матеріальна система (рис.5.1-5.5) рухається із стану спокою під дією сили тяжіння. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях S ($S_1=0.4\text{м}$). Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Тіла котяться по поверхнях без ковзання.

Величини для розрахунків наведені в табл. 5.1, де прийнято такі позначення: m_1, m_2, m_3 – маси тіл 1, 2, 3; R_2, r_2, R_3, r_3 — найбільші та найменші розміри ступінчастих шківів тіл 2 та 3; ρ_{2x}, ρ_{3x} — радіуси інерції ступінчастих шківів 2 та 3 відносно осі обертання; α, β кути нахилу площин до горизонту. Якщо тіла 2 або 3 однорідні, тоді при розрахунках брати відповідно R_2, R_3 . Шнури над похилими площинами паралельні цим площинам.

Таблиця 5.1

Варіант	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	ρ_{2x} , м	ρ_{3x} , м	α , град
1	6	1	2	0.6	0.5	0.5	0.3	0.6	0.4	30
2	8	2	2	0.8	0.6	0.7	0.4	0.7	0.6	45
3	10	3	3	0.65	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	60
4	5	0.5	1.5	0.5	0.4	0.45	0.2	0.45	0.3	30
5	4	0.75	1.25	0.4	0.3	0.3	0.15	0.35	0.2	45
6	9	4	1	0.4	0.35	0.35	0.25	0.3	0.3	60
7	3	0.3	1	0.3	0.2	0.25	0.15	0.2	0.2	30
8	2	0.2	0.3	0.2	0.15	0.25	0.2	0.2	0.25	45
9	11	4	2	0.7	0.6	0.6	0.3	0.65	0.5	60
0	12	5	1	0.75	0.65	0.65	0.45	0.7	0.5	30

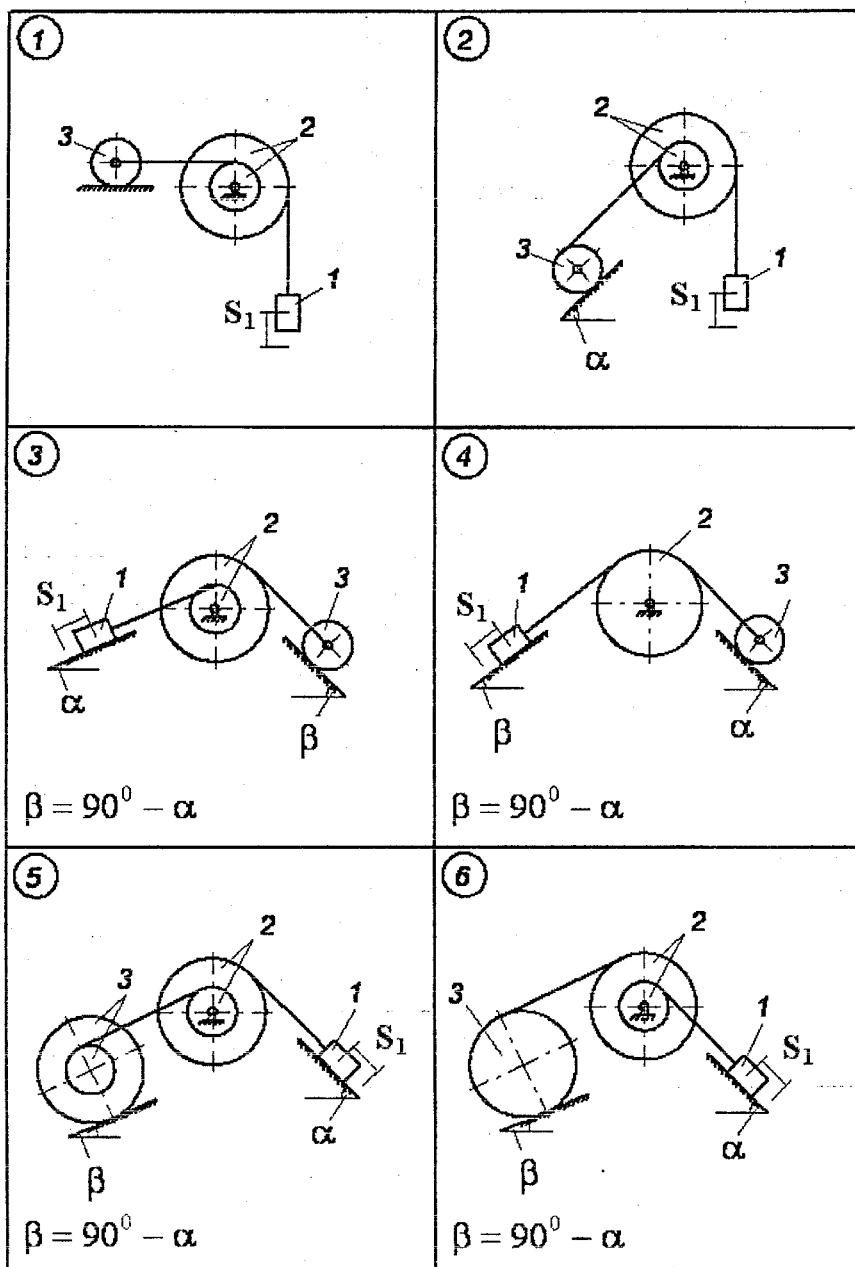


Рисунок 5.1

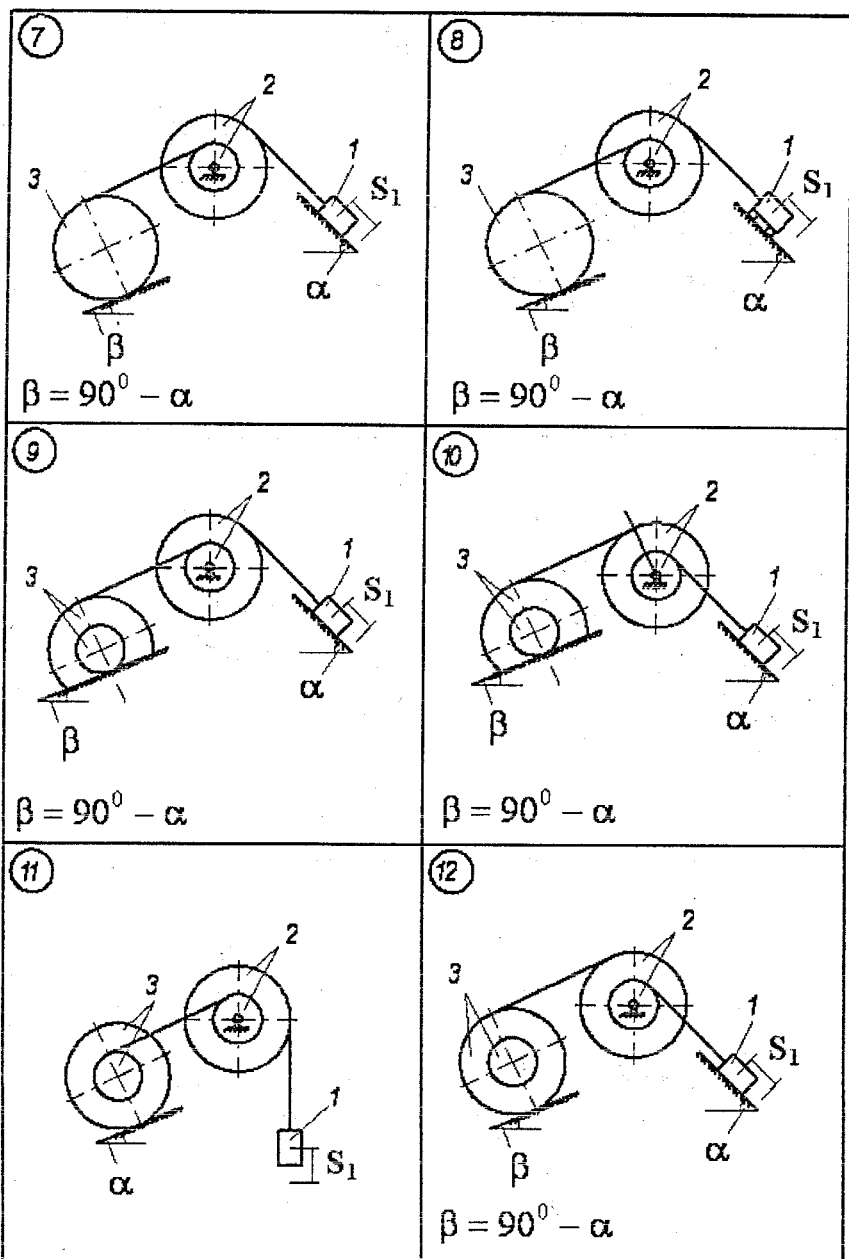
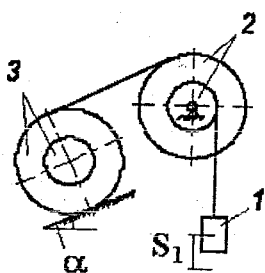
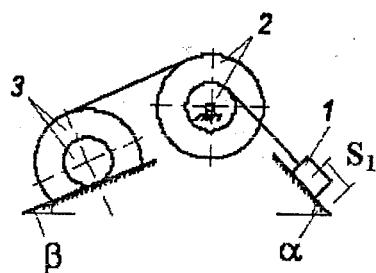


Рисунок 5.2

13

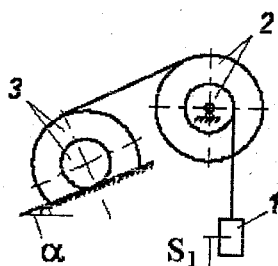


14

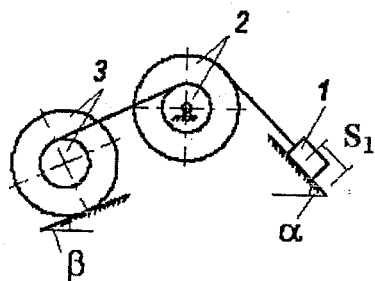


$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

15

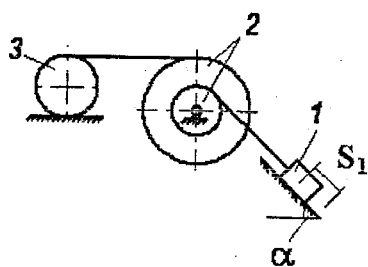


16

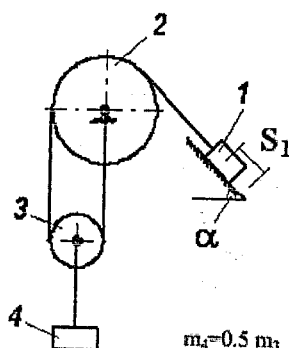


$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

17



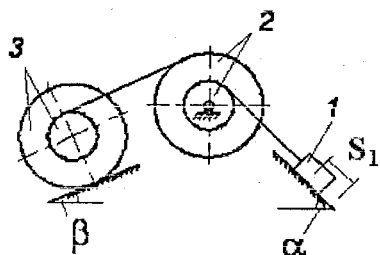
18



$$m_4 = 0.5 m_3$$

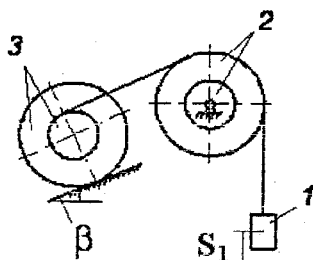
Рисунок 5.3

19



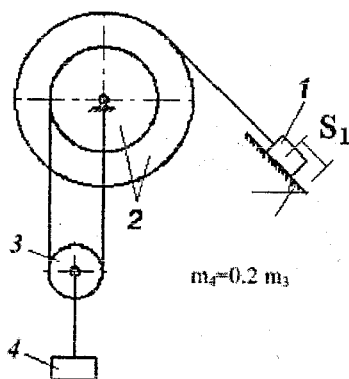
$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

20



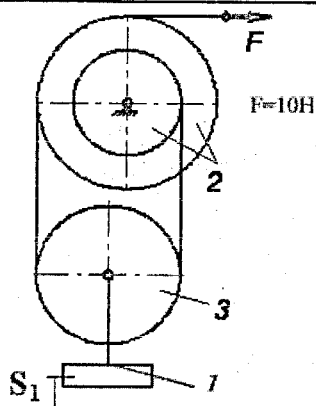
$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

21



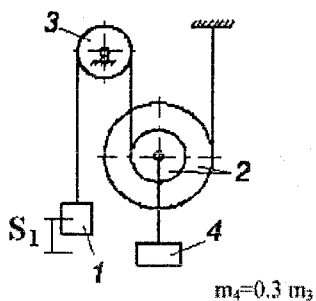
$$m_3 = 0.2 m_3$$

22



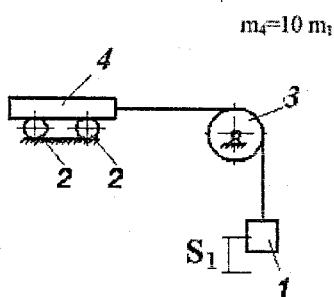
$$F = 10H$$

23



$$m_1 = 0.3 m_1$$

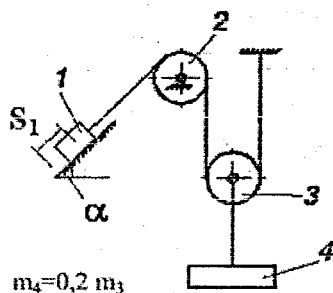
24



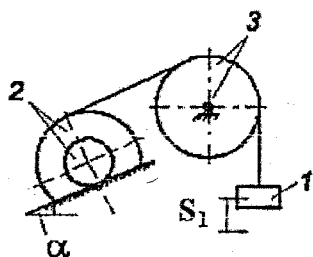
$$m_1 = 10 m_1$$

Рисунок 5.4

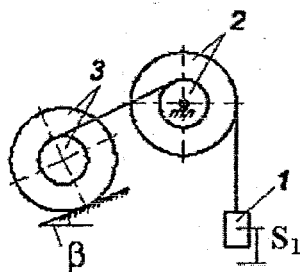
(25)



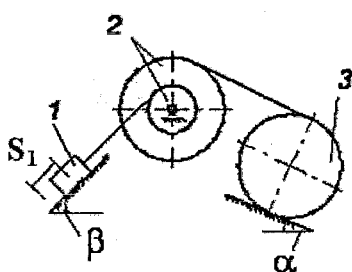
(26)



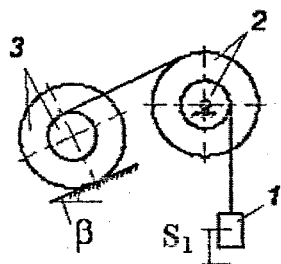
(27)



(28)



(29)



(30)

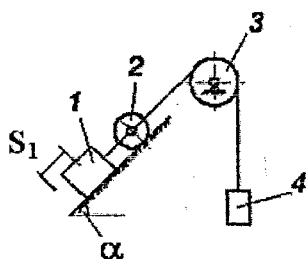


Рисунок 5.5

5.1 Приклад виконання завдання

Визначити прискорення та швидкість центра мас тіла 1 у момент часу, коли він пройде шлях S_1 , якщо матеріальна система (рис.5.6) починає рухатися із стану спокою. Масами шнурів знехтувати. Тіла 1 та 3 рухаються без ковзання. Дано: $m_1=10$ кг, $m_2=2$ кг, $m_3=1$ кг, $R_2=0,4$ м, $r_2=0,3$ м, $R_3=0,3$ м, $r_3=0,2$ м, $\rho_2=0,35$ м, $\rho_3=0,25$ м, $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $S_1=0,4$ м.

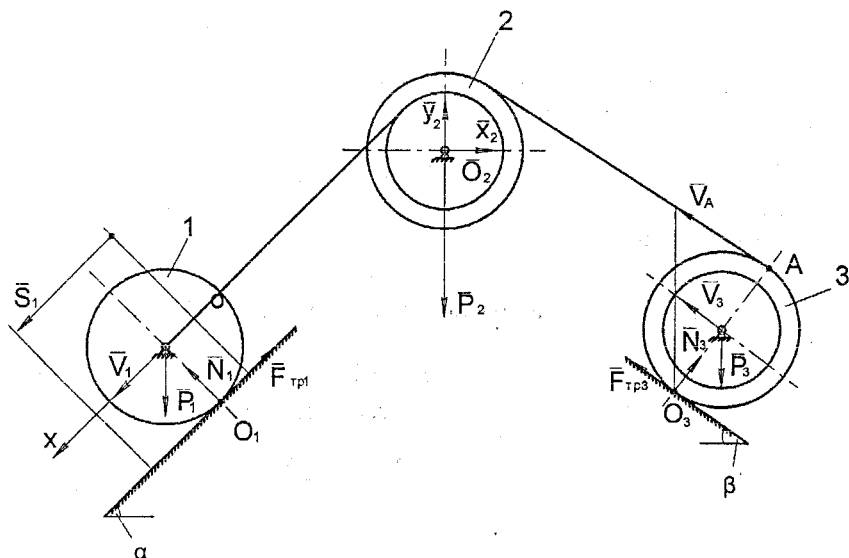


Рисунок 5.6

Розв'язання. Для дослідження руху матеріальної системи (рис.5.6) застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі.

$$\frac{dT}{dt} = \sum N^e + \sum N^i, \quad (5.1)$$

де T — кінетична енергія системи при $0 < x \leq S_1$;

$\sum N^i$ та $\sum N^e$ — сума потужностей внутрішніх та зовнішніх сил системи.

Матеріальна система (рис.5.6) складається із твердих тіл та нерозтяжних шнурів, тоді

$$\sum N^i = 0. \quad (5.2)$$

Диференціальне рівняння (5.1), враховуючи (5.2) набуває вигляду

$$\frac{dT}{dt} = \sum N^e. \quad (5.3)$$

Знайдемо кінематичні співвідношення між швидкостями точок, кутовими швидкостями тіл, записавши їх через швидкість V_1 центра мас тіла 1.

Кутова швидкість тіла 1, враховуючи, що миттєвий центр швидкості тіла 1 знаходиться в точці O_1 (рис.5.6)

$$\omega_1 = \frac{V_1}{R_1}, \quad (5.4)$$

де R_1 – радіус однорідного суцільного диска (тіла) 1.

Кутова швидкість тіла 2

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} \quad (5.5)$$

Швидкість точки А, враховуючи, що тіла 2 та 3 з'єднані нерозтяжним шнуром.

$$V_A = \omega_2 \cdot R_2. \quad (5.6)$$

Оскільки точка O_3 – миттєвий центр швидкості тіла 3, тоді

$$V_A = \omega_3 \cdot 2R_3. \quad (5.7)$$

Із (5.6) та (5.7) визначаємо кутову швидкість тіла 3

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{2R_3} = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}. \quad (5.8)$$

Швидкість V_3 центра мас тіла 3

$$V_3 = \omega_3 \cdot R_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2}. \quad (5.9)$$

Знайдемо переміщення центра мас тіла 3.

Оскільки
$$V_1 = \frac{dS_1}{dt}, \quad V_3 = \frac{dS_3}{dt} \quad (5.10)$$

і, враховуючи (5.9), отримаємо

$$\frac{dS_3}{dt} = \frac{dS_1}{dt} \cdot \frac{R_2}{2r_2}$$

або

$$dS_3 = \frac{R_2}{2r_2} \cdot dS_1. \quad (5.11)$$

При $t = 0$, $S_1 = 0$, та $S_3 = 0$ і після інтегрування (5.11) маємо:

$$S_3 = S_1 \cdot \frac{R_2}{2r_2}. \quad (5.12)$$

Знайдемо кінетичну енергію матеріальної системи як суму кінетичних енергій тіл 1, 2 та 3.

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (5.13)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2,$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$ — момент інерції тіла 1 відносно центральної осі.

Тоді, враховуючи (5.4),

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \cdot \frac{V_1^2}{R_1^2} = \frac{3}{4} m_1 V_1^2. \quad (5.14)$$

Тіло 2 обертається навколо горизонтальної осі і кінетична енергія знаходиться за формулою

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2,$$

де $I_2 = m_2 \rho_2^2$ — момент інерції тіла 2 відносно головної центральної осі;

ω_2 — кутова швидкість тіла 2 (5.5). Тоді

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_1^2 \cdot \frac{\rho_2^2}{r_2^2}. \quad (5.15)$$

Кінетична енергія тіла 3

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} I_3 \cdot \omega_3^2,$$

де $I_3 = m_3 \rho_3^2$ — момент інерції тіла 3 відносно головної центральної осі;

$$\omega_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3} \quad (5.8);$$

$V_3 = \omega_3 \cdot R_3$ — швидкість центра мас тіла 3.

$$T_3 = \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \cdot \frac{R_2^2 \cdot \rho_3^2}{r_2^2 R_3^2}. \quad (5.16)$$

Тепер кінетичну енергію (5.13) системи, враховуючи (5.14) – (5.16), визначимо за формулою

$$T = V_1^2 \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right) \right). \quad (5.17)$$

Покажемо зовнішні сили, що прикладені до матеріальної системи (рис.5.6). Знайдемо суму потужностей зовнішніх сил.

Потужність сил $\bar{P}_2$, $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$ дорівнює нулю тому, що точка O_2 прикладення сил нерухома.

Потужність сил $\bar{N}_1$, $\bar{F}_{TP1}$, $\bar{N}_3$, $\bar{F}_{TP3}$, дорівнює нулю, оскільки сили прикладені в миттєвих центрах швидкостей тіла 1 та 3.

Потужність зовнішніх сил, під дією яких рухається матеріальна система (рис. 5.6)

$$\sum N^e = N(\bar{P}_1) + N(\bar{P}_3),$$

$$\text{де } N(\bar{P}_1) = P_1 \cdot V_1 \cdot \sin \alpha; \quad N(\bar{P}_3) = -P_3 V_3 \cdot \sin \beta; \quad P_1 = m_1 g; \quad P_3 = m_3 g.$$

Тоді, враховуючи що (5.9)

$$V_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2}$$

отримаємо

$$\sum N^e = V_1 (m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta) \cdot g. \quad (5.18)$$

Підставляючи (5.17) і (5.18) в (5.3), маємо

$$\left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right) \right) \cdot \frac{dV_1^2}{dt} = V_1 (m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta) \cdot g. \quad (5.19)$$

Оскільки $\frac{dV_1^2}{dt} = 2V_1 \cdot a_1$ (a_1 – прискорення центра мас тіла 1), тоді

$$a_1 = \frac{m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta}{\frac{3}{2} m + m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{4} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right)} \cdot g.$$

Або, підставляючи дані умови задачі,

$$a_1 = \frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0.4}{2 \cdot 0.3} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{3}{2} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0.35^2}{0.3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0.4^2}{0.3^2} \left(1 + \frac{0.25^2}{0.3^2} \right)} \cdot 9.81 = 2.41 \frac{m}{c^2}.$$

Знайдемо швидкість центра мас тіла 1.

Рівняння (5.19) запишемо у вигляді:

$$\left(\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8}m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{P_3^2}{R_3^2}\right)\right) \cdot dV_1^2 = g(m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta) \cdot V_1 \cdot dt. \quad (5.20)$$

При $t=0$, $V_{10}=0$, $S_{10}=0$.

При $t=\tau$, $V_{1\tau}=V_1$, $S_{1\tau}=S_1$, (5.21)

де τ - час, за який центр мас тіла 1 пройде шлях S_1 .

Інтегруючи рівняння (5.20) за умовами (5.21), визначаємо швидкість центра мас тіла 1 за час τ ($V_1 \cdot dt = ds_1$).

$$V_1 = \sqrt{\frac{S_1 g (m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta)}{\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8}m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2}\right)}}$$

або підставляючи числові дані, отримаємо:

$$V_1 = \sqrt{\frac{0.4 \cdot 9.81 (10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0.4}{2 \cdot 0.3} \sin 45^\circ)}{\frac{3}{4} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0.35^2}{0.3^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{0.4^2}{0.3^2} \left(1 + \frac{0.25^2}{0.3}\right)}} = 1.3 \frac{m}{c}.$$

Відповідь: $V_1 = 1.3 \frac{m}{c}$; $a_1 = 2.41 \frac{m}{c^2}$.

Д.6 Дослідження руху матеріальної системи з застосуванням основних (загальних) теорем динаміки

Матеріальна система (рис.6.1-6.10) приводиться до руху електродвигуном 5, момент якого в період пуску $M_p (0 \leq t \leq 7c)$.

Знайти прискорення (схеми 1-3, 5-10, 12-17, 19-30) або кутове прискорення (схеми 4,11,18) тіла 1, зусилля в пасах та між тілами, реакції циліндричних шарнірів тіл 2 і 3 в момент часу t , якщо момент опору руху $M_{оп}$.

Натяг у ведучій частині нескінченного паса (схеми 5,10-13,16,18,22, 25,27,28,30) вдвічі більший від натягу у веденій.

Однорідне тіло 3 та східчастий шків 2 обертаються навколо паралельних осей.

В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання між тілами дорівнює f . Тіло 1 (схеми 2,10,19,30) переміщується по гладенькій похилій площині.

Масами пасів та їх ковзанням по шківках знехтувати.

Дані для розрахунку взяти з таблиці 6.1, де прийняті такі позначення: m_1, m_2, m_3 - маса тіл 1, 2 та 3; m_4 - маса пружної муфти; m_5 - маса ротора електродвигуна; I_4, I_5 - моменти інерції пружної муфти 4 та ротора електродвигуна 5 відносно осі обертання; R_3, R_2, r_2 - розміри тіл 3 та 2; i_2 - радіус інерції тіла 2.

6.1 Приклад виконання завдання

Матеріальна система (рис. 6.11) починає рухатись із стану спокою під дією моменту M_p електродвигуна 5. Осі тіл 1 та 2 горизонтальні. Коефіцієнт тертя між тілами f . В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Масою паса знехтувати.

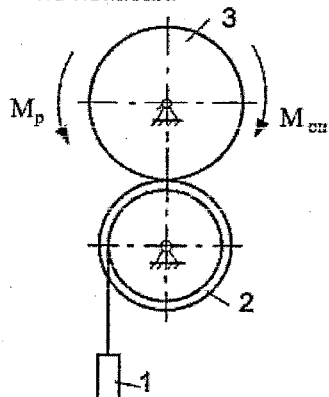
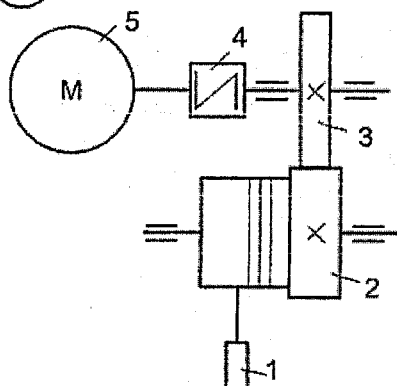
Визначити при $t_1 = 1.5c$ прискорення тіла 3, натяг S_6 у веденій 6 та ведучій 7 (S_7) частині паса ($S_7 = 2S_6$), зусилля в точці контакту тіл 2 та 3, реакції в'язей циліндричних (нерухомих) шарнірів тіл 1 та 2 якщо момент опору $M_{оп}$ (рис. 6.11), а тіло 1 - однорідний диск.

Прийняти: $2R_1 = 0,25 \text{ м}; \quad 2R_2 = 0,45 \text{ м}; \quad 2r_2 = 0,15 \text{ м}; \quad 2i_2 = 0,4 \text{ м};$
 $m_4 = m_1 = 0,5 \text{ кг}; \quad m_5 = m_2 = 5 \text{ кг}; \quad m_3 = 300 \text{ кг}; \quad M_p = (1000 + 100(7-t))H \cdot \text{м};$
 $M_{оп} = (11 + (7-t))H \cdot \text{м}; \quad f = 0,4; \quad I_5 = 0,004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_4 = 0,06 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$

Розв'язання. Для визначення прискорення тіла 3 (рис. 6.12) використаємо теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі.

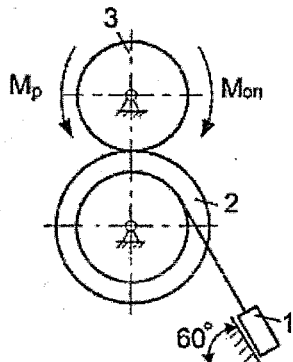
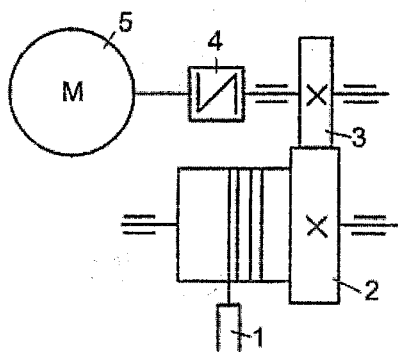
Електродвигун 5 та муфта 4
не показані

1



Електродвигун 5 та муфта 4
не показані

2



Електродвигун 5 та муфта 4
не показані

3

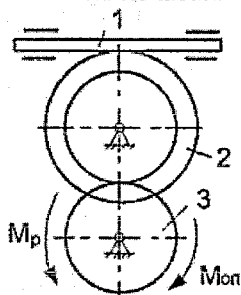
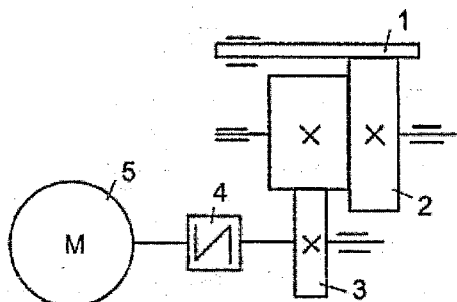
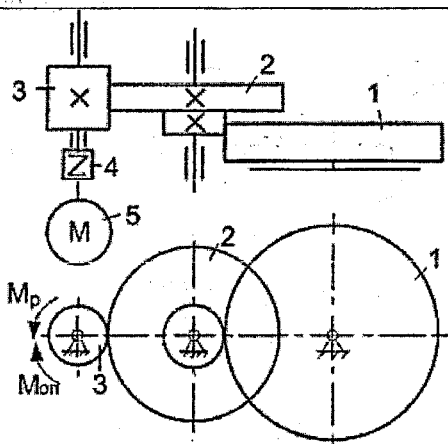
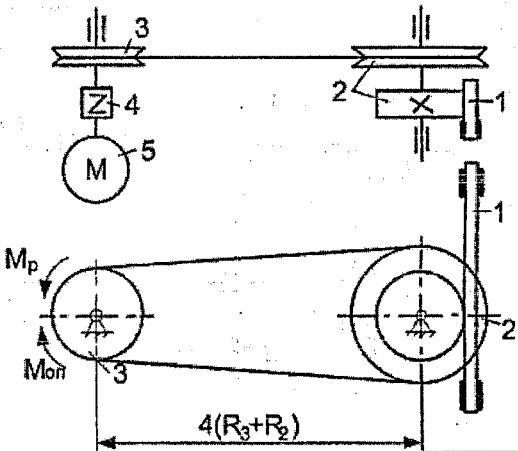


Рисунок 6.1

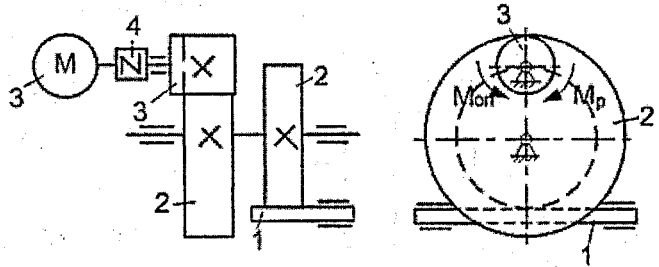
4



5



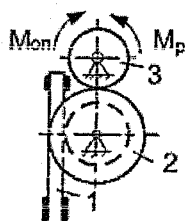
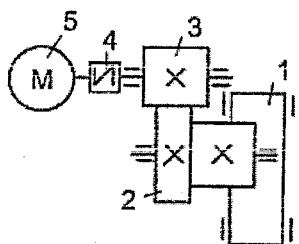
6



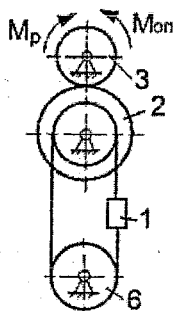
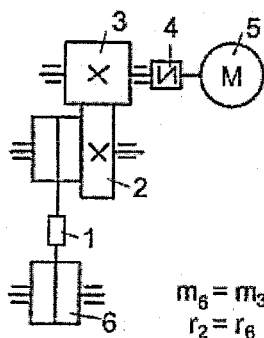
Електродвигун 5 та муфта 4 не показані

Рисунок 6.2

7



8



9

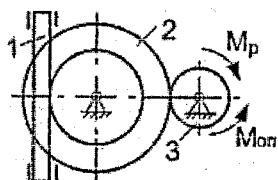
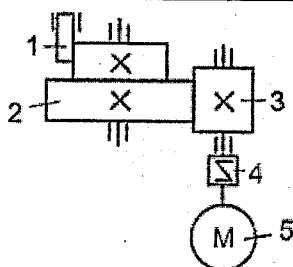


Рисунок 6.3

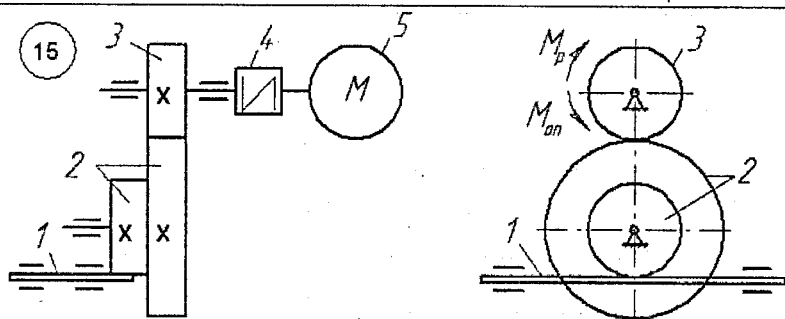
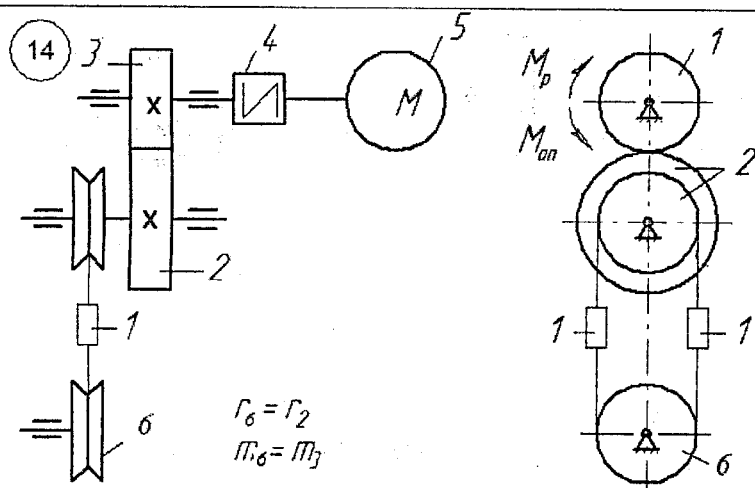
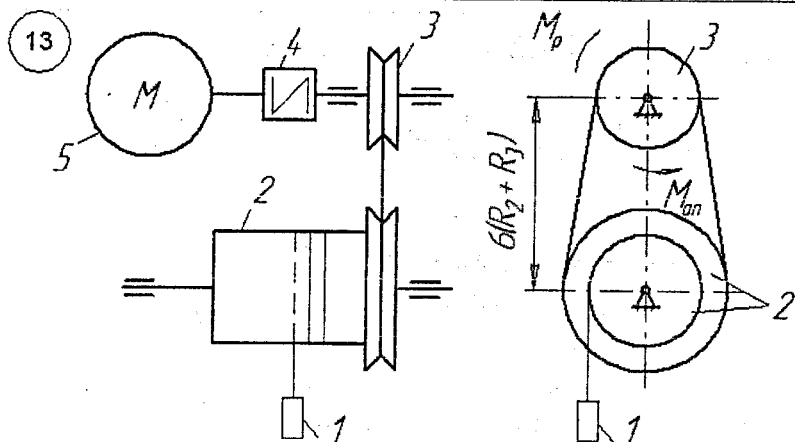
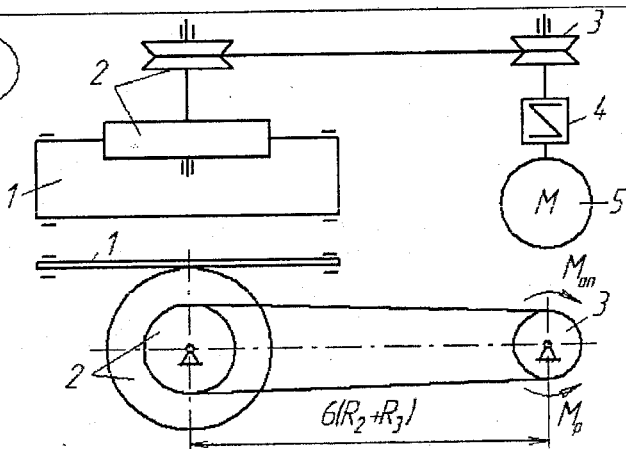
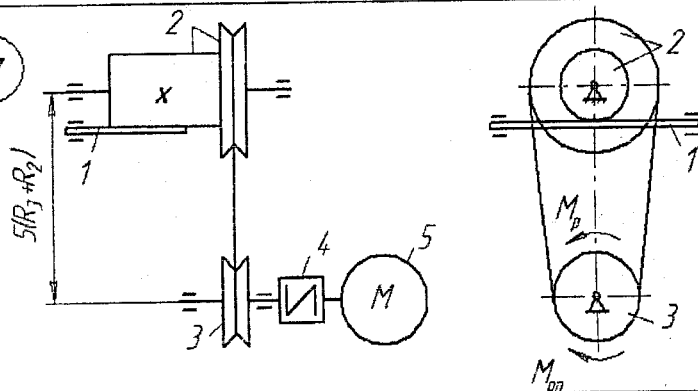


Рисунок 6.5

16



17



18

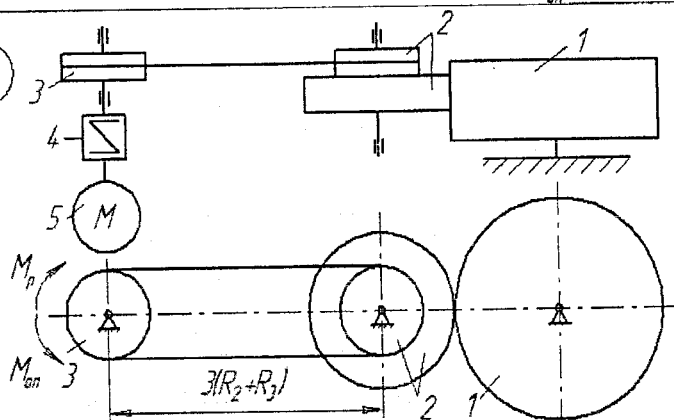
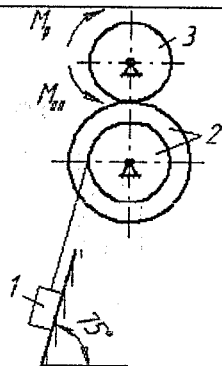
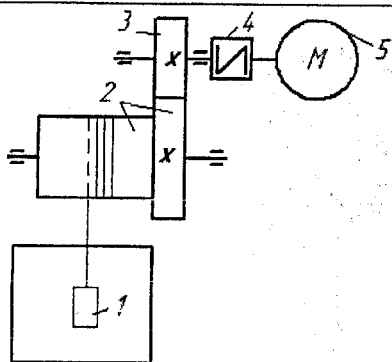
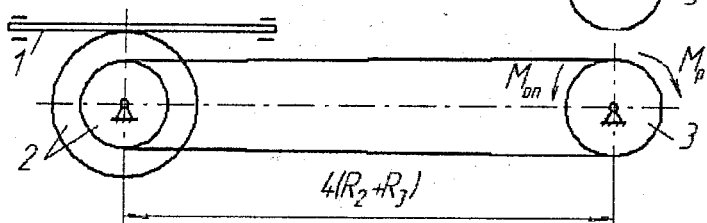
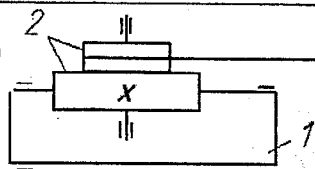


Рисунок 6.6

19



20



21

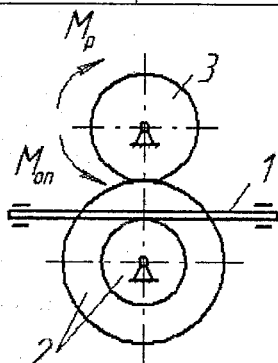
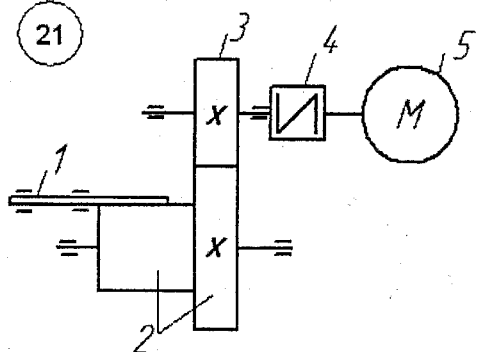
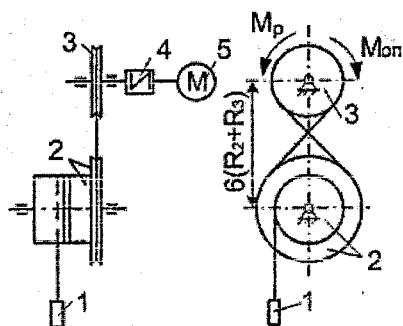
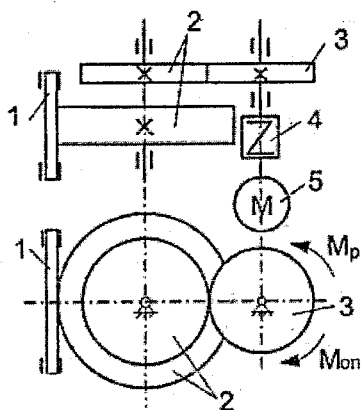


Рисунок 6.7

22



23



24

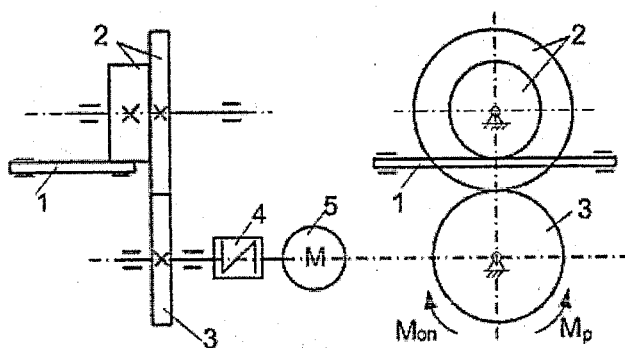
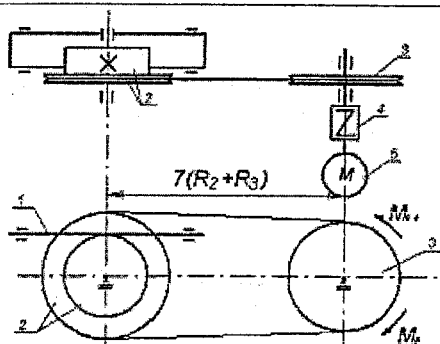
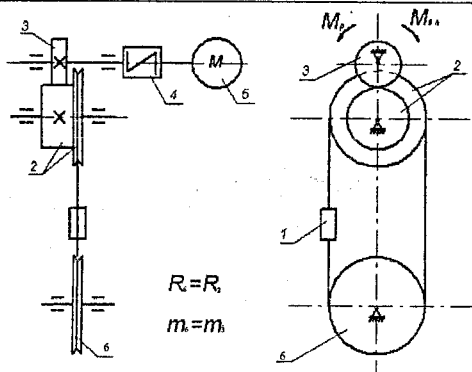


Рисунок 6.8

25



26



27

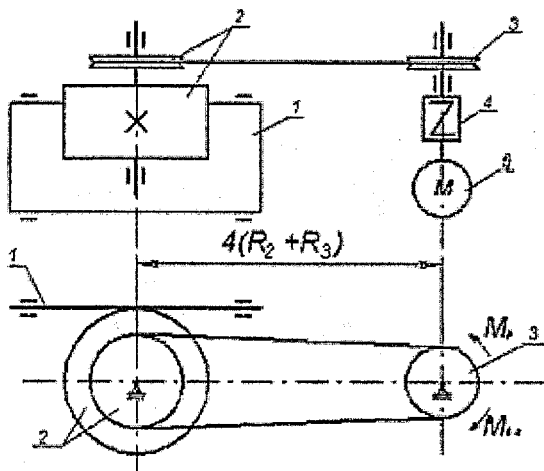
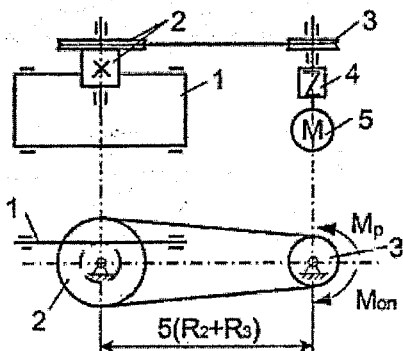
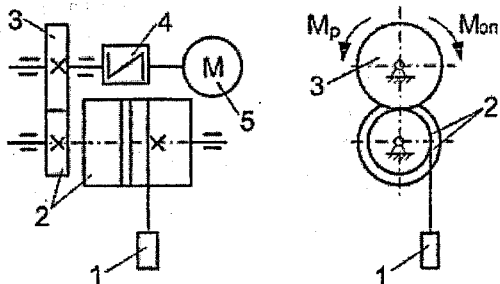


Рисунок 6.9

28



29



30

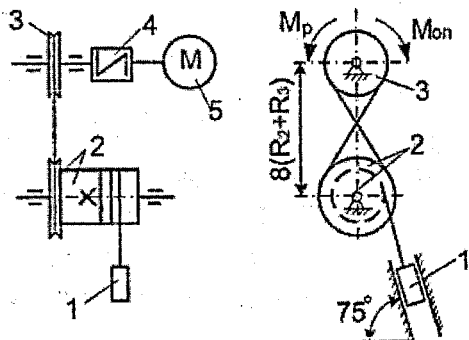


Рисунок 6.10

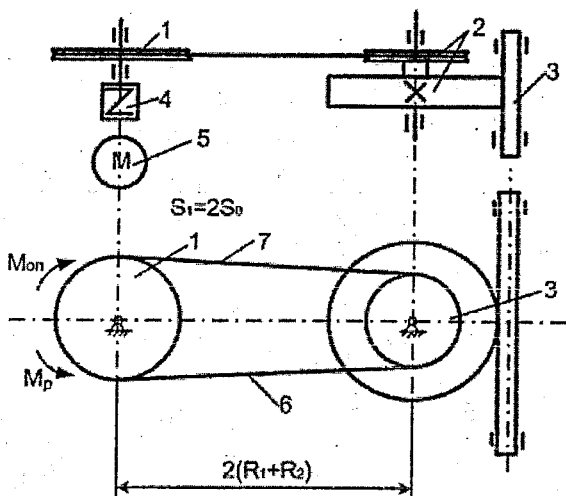


Рисунок 6.11

$$\frac{dT}{dt} = \sum N^e + \sum N^i, \quad (6.1)$$

де T – кінетична енергія системи;

$\sum N^e$ – сума потужностей зовнішніх сил системи;

$\sum N^i$ – сума потужностей внутрішніх сил системи;

$\sum N^i = 0$ – тіла тверді, а пас абсолютно гнучкий та нерозтяжний.

Кінетична енергія системи складається із кінетичної енергії тіл, що входять в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Тіла 1, 2, 4 та 5 обертаються навколо нерухомих горизонтальних осей і їх кінетична енергія знаходиться за формулами:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2, \quad T_4 = \frac{1}{2} I_4 \cdot \omega_1^2, \quad T_5 = \frac{1}{2} I_5 \cdot \omega_1^2, \quad (6.2)$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$, $I_2 = m_2 R_2^2$ – моменти інерції відповідно тіл 1 та 2;

ω_1, ω_2 – кутові швидкості тіл.

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2. \quad (6.3)$$

Взаємозв'язок між кінетичними характеристиками руху тіл (рис. 6.12)

$$\omega_2 = \frac{V_3}{R_2}, \quad \omega_1 = \omega_2 \frac{r_2}{R_1} = V_3 \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}. \quad (6.4)$$

Таблица 6.1

Вариант	m_1 , кг	$m_5=m_2$, кг	$m_4=m_3$, кг	I_4 , кг м ²	I_5 , кг м ²	$2R_2$, м	$2r_2$, м	$2i_2$, м	$2R_3$, м	M_D , Н·м	$M_{оп}$, Н·м	f	t_3 , с
1	150	10	2	0.05	0.005	0.3	0.2	0.25	0.1	$100+9(7-t)$	$7+(7-t)$	0.2	1.2
2	200	20	3	0.10	0.01	0.4	0.25	0.3	0.15	$150+11(7-t)$	$8+0.4(7-t)$	0.22	1.4
3	250	30	4	0.15	0.015	0.5	0.3	0.4	0.2	$150+13(7-t)$	$15+1.5(7-t)$	0.24	1.6
4	300	40	5	0.20	0.02	0.6	0.4	0.5	0.1	$500+20(7-t)$	$43+2(7-t)$	0.26	1.8
5	350	40	5	0.20	0.015	0.55	0.35	0.4	0.16	$600+62(7-t)$	$50+2(7-t)$	0.28	2.0
6	300	30	4	0.15	0.01	0.5	0.3	0.4	0.2	$550+50(7-t)$	$47+2(7-t)$	0.25	2.2
7	250	25	3	0.10	0.05	0.45	0.2	0.3	0.15	$300+27(7-t)$	$25+3(7-t)$	0.24	2.4
8	200	20	3	0.10	0.01	0.35	0.15	0.2	0.2	$200+15(7-t)$	$18+(7-t)$	0.22	2.6
9	150	15	2	0.05	0.004	0.3	0.1	0.2	0.1	$150+10(7-t)$	$9+0.2(7-t)$	0.2	2.8
0	200	20	3	0.10	0.08	0.4	0.2	0.3	0.2	$250+20(7-t)$	$12+0.4(7-t)$	0.18	3.0

Тіло 3 переміщується поступально із швидкістю V_3 , тоді

Запишемо кінетичну енергію системи, враховуючи (6.2), (6.3) та (6.4) як функцію швидкості V_3 тіла 3

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{зв}} \cdot V_3^2, \quad (6.5)$$

де $m_{\text{зв}} = (m_3 + m_2 \frac{r_2^2}{R_2^2} + (I_4 + I_5) \frac{r_2^2}{R_1^2 \cdot R_2^2} + \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2})$ — зведена маса системи.

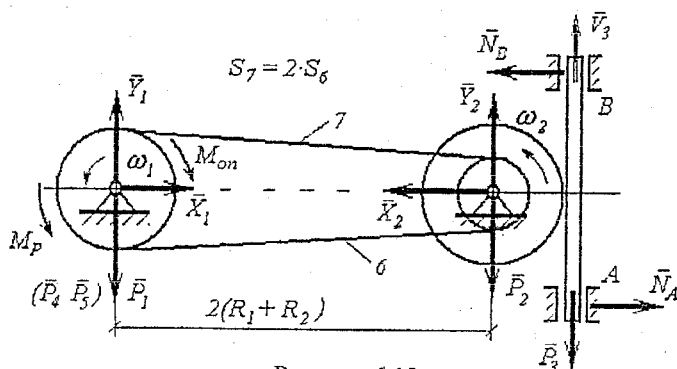


Рисунок 6.12

Знайдемо суму потужності зовнішніх сил (рис. 6.12) матеріальної системи: сили тяжіння P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , моменту електродвигуна M_p , моменту опору $M_{оп}$; реакції нерухомих (циліндричних) шарнірів $x_1, y_1, x_2, y_2, N_A, N_B$.

Потужність сил $P_1, P_2, P_3, P_4, x_1, y_1, x_2, y_2, N_A$ і N_B дорівнює нулю тому, що точки прикладання сил не переміщуються.

Тоді

$$\sum N^e = N(\bar{P}_3) + N(M_p) + N(M_{оп}),$$

$$\text{де } N(\bar{P}_3) = -P_3 V_3 = -m_3 g V_3,$$

$$N(M_p) = M_p \omega_1 = M_p \cdot V_3 \frac{r_2}{R_1 R_2},$$

$$N(M_{оп}) = -M_{оп} \omega_1 = -M_{оп} \cdot V_3 \frac{r_2}{R_1 R_2}.$$

Або

$$N^e = V_3 (M_p - M_{оп}) \frac{r_2}{R_1 R_2} - m_3 g. \quad (6.6)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи (6.1) з врахуванням (6.5) та (6.6) запишеться:

$$\frac{1}{2} m_{\text{в}} \frac{dV_3^2}{dt} = V_3 ((M_p - M_{\text{оп}}) \frac{r_2}{R_1 R_2} - m_3 g). \quad (6.7)$$

Оскільки $\frac{dV_3^2}{dt} = 2V_3 \cdot a_3$, тоді

$$a_3 = \frac{(M_p - M_{\text{оп}}) \cdot r_2 - m_3 R_1 R_2 g}{m_{\text{в}} R_1 R_2}. \quad (6.8)$$

Підставляючи дані умови задачі, отримаємо:

$$a_3 = 5.04 - 0.87t.$$

При $t_1 = 1.5 \text{ с}$, $a_3 = 3.74 \text{ м/с}^2$.

Кутові прискорення тіл 1 та 2

$$\ddot{\phi}_2 = \frac{a_3}{R_2} = 16.6 \frac{1}{\text{с}^2}, \quad \ddot{\phi}_1 = a_3 \frac{r_2}{R_1 R_2} = 10.0 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

6.1.1 Визначення зусиль в пасках та між тілами

Розглянемо окремо рух кожного тіла матеріальної системи (рис. 6.11).

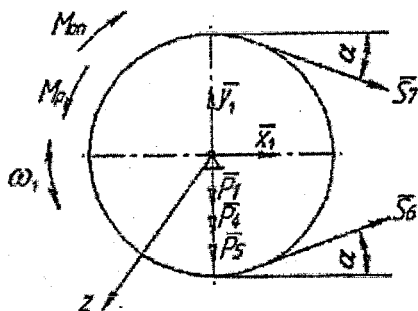


Рисунок 6.13

Запишемо диференціальне рівняння обертання тіла 1 (рис. 6.13) навколо нерухомої осі Z.

$$I_1 \ddot{\phi}_1 = M_p + S_6 R_1 - S_7 R_1 - M_{оп}. \quad (6.9)$$

Необхідно врахувати, що момент сили або пари сил буде додатним, якщо він діє у напрямку руху тіла. Так, у рівнянні (6.9) момент сили S_6 відносно осі Z та пари сил з моментом M_p беремо із додатним знаком, а момент сили S_7 та момент $M_{оп}$ - від'ємним.

На тіло 2 (рис. 6.14) під час руху діють зовнішні сили: сила тяжіння $P_2 = m_2 g$, реакція тіла 1 - S_2 та N_2 , реакції S_6' , S_7' нескінченного паса, реакції x_2 , y_2 нерухомого шарніра.

У диференціальному рівнянні руху тіла 2 (рис. 6.14) навколо горизонтальної осі Z

$$I_2 \cdot \ddot{\phi}_2 = -S_6' r_2 + S_7' r_2 + S_2 R_2 \quad (6.10)$$

сили $S_6' = S_6$ та $S_7' = S_7$ (відповідно до третього закону Ньютона).

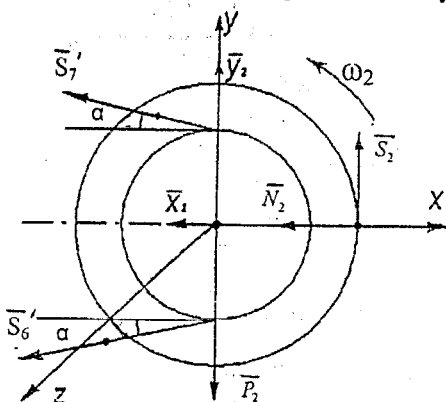


Рисунок 6.14

Для тіла 3 (рис. 6.15), що переміщується під дією сили тяжіння $P_3 = m_3 g$, реакції нерухомих шарнірів N_A та N_B , реакції S_2' та N_2' тіла 3, запишемо теорему про рух центра мас в проєкціях на вісь Y (вісь Y направляється в сторону руху тіла 3)

$$m_3 \ddot{y}_3 = -P_3 - S_2'. \quad (6.11)$$

Звичайно $S_2' = S_2$.

Із диференціальних рівнянь (6.10) - (6.11) знаходимо ($S_7 = 2S_6$):

$$S_2 = -m_3(g + \ddot{y}_3),$$

$$S_6 = \frac{1}{r_2} (I_2 \ddot{\phi}_2 + m_3(g + \ddot{y}_3) \cdot R_2).$$

При $t_f = 1,5 \text{ c}$ ($\ddot{y}_3 = a_3$).

$$S_2 = -300(9,81 + 3,74) = -4065 \text{ н.}$$

$$S_6 = \frac{1}{0,075} (5 \cdot 0,2^2 \cdot 16,6 + 300(9,81 + 3,74) \cdot 0,225) = 12239,0 \text{ н.}$$

$$S_7 = 24478,0 \text{ н.}$$

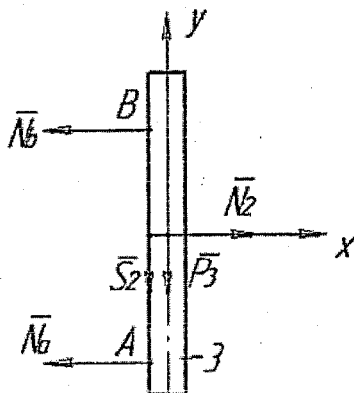


Рисунок 6.15

За законом Амонтона-Кулона

$$S_2 = f N_2.$$

Звідки:

$$N_2 = \frac{S_2}{f} = \frac{4065}{0,4} = 10162,5 \text{ н.}$$

6.1.2 Визначення реакції циліндричних шарнірів

Для тіла 1 та 2 запишемо теорему про рух центра мас в проекціях на осі X та Y.

Тіло 1 (рис. 6.13)

$$m_1 \ddot{x}_{c_1} = x_1 + S_6 \cos \alpha + S_7 \cos \alpha, \quad (6.12)$$

$$m_1 \ddot{y}_{c_1} = y_1 - S_7 \sin \alpha + S_6 \sin \alpha - P_1 - P_4 - P_5.$$

Тіло 2 (рис. 6.14)

$$m_2 \ddot{x}_{c_2} = -x_2 - N_2 - S_6' \cos \alpha - S_7' \cos \alpha, \quad (6.13)$$

$$m_2 \ddot{y}_{c_2} = y_2 - P_2 + S_2 - S_6' \sin \alpha + S_7' \sin \alpha.$$

В рівнянні (6.12) – (6.13) $\ddot{x}_{c_1} = \ddot{y}_{c_1} = \ddot{x}_{c_2} = \ddot{y}_{c_2} = 0$, оскільки центри мас тіл 1, 2 знаходяться на нерухомих осях обертання тіл.

Отримали систему рівнянь

$$\begin{aligned} x_1 + (S_7 + S_6) \cos \alpha &= 0, \\ y_1 - (S_7 - S_6) \sin \alpha - P_1 - P_4 - P_5 &= 0, \\ x_2 + N_2 + (S_7 + S_6) \cos \alpha &= 0, \\ y_2 - P_2 + S_2 - (S_6 - S_7) \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

в якій невідомі величини: x_1, y_1, x_2, y_2 .

Розв'язуючи систему рівнянь (6.14), отримаємо

$$\begin{aligned} x_1 &= -(S_7 + S_6) \cos \alpha, \\ y_1 &= m_1 g - (S_7 - S_6) \sin \alpha + m_4 g + m_5 g, \\ x_2 &= -N_2 - (S_7 + S_6) \cos \alpha, \\ y_2 &= m_2 g - S_2 + (S_7 - S_6) \sin \alpha, \end{aligned}$$

де $P_1 = m_1 g, P_2 = m_2 g, P_4 = m_4 g, P_5 = m_5 g$

$$\sin \alpha = \frac{R_1 - r_2}{\sqrt{4(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - r_2)^2}} = 0,071,$$

$$\cos \alpha = \frac{2(R_1 + R_2)}{\sqrt{4(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - r_2)^2}} = 0,997.$$

При $t_f = 1,5 \text{ с}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= -36606,8 \text{ н}; & y_1 &= 927,8 \text{ н}; \\ x_2 &= -46769,3 \text{ н}; & y_2 &= 3245,0 \text{ н}. \end{aligned}$$

Відповідь:

$$a_3 = 3,74 \text{ м/с}^2; S_6 = 1223,9 \text{ н}; S_7 = 24478,0 \text{ н};$$

$$S_2 = -4065 \text{ н}; N_2 = 10162,5 \text{ н}; x_1 = -36606,8 \text{ н};$$

$$y_1 = 927,8 \text{ н}; x_2 = -46769,3 \text{ н}; y_2 = 3245,0 \text{ н}.$$

Принцип Д'Аламбера

Д.7 Застосування принципу Д'Аламбера для визначення реакцій в'язей

Для підйому вантажу 1 (рис. 7.1–7.5) використовується електродвигун з моментом M , що приводить до руху барабан 2, маса якого розподілена по ободу радіуса R_2 . Знайти реакції в'язей балки АВ вагою P та довжиною l .

Масою абсолютно гнучких тросів знехтувати. Ковзання тросів по шківках відсутнє. В схемах 6, 13, 21, 25 похила площина гладенька. Ковзання тіла 1 в точці контакту з похилою площиною (схеми 8, 9, 11, 15, 18, 23, 24) відсутнє.

Дані для розрахунку взяти з таблиці 7.1, де прийняті такі позначення: I_p – момент інерції ротора електродвигуна відносно осі обертання; m_d – маса електродвигуна; m_1 – маса вантажу; m_6 – маса барабана.

Таблиця 7.1

Варіант	I_p , кг·м ²	R_2 , м	P , Н	l , м	m_1 , кг	m_6 , кг	m_d , кг	M , Н·м
1	0,2	0,22	200	1,2	200	8	40	550
2	0,15	0,2	190	1,1	180	7,6	38	420
3	0,13	0,18	180	1,0	160	7,2	36	350
4	0,12	0,16	170	1,2	140	6,8	32	280
5	0,11	0,14	160	1,1	120	6,4	28	220
6	0,1	0,12	150	1,0	110	6,0	24	180
7	0,08	0,10	140	1,2	100	5,6	18	140
8	0,06	0,095	130	1,1	90	5,2	16	120
9	0,05	0,09	120	1,0	80	4,8	14	115
0	0,04	0,08	110	1,2	70	4,2	12	110

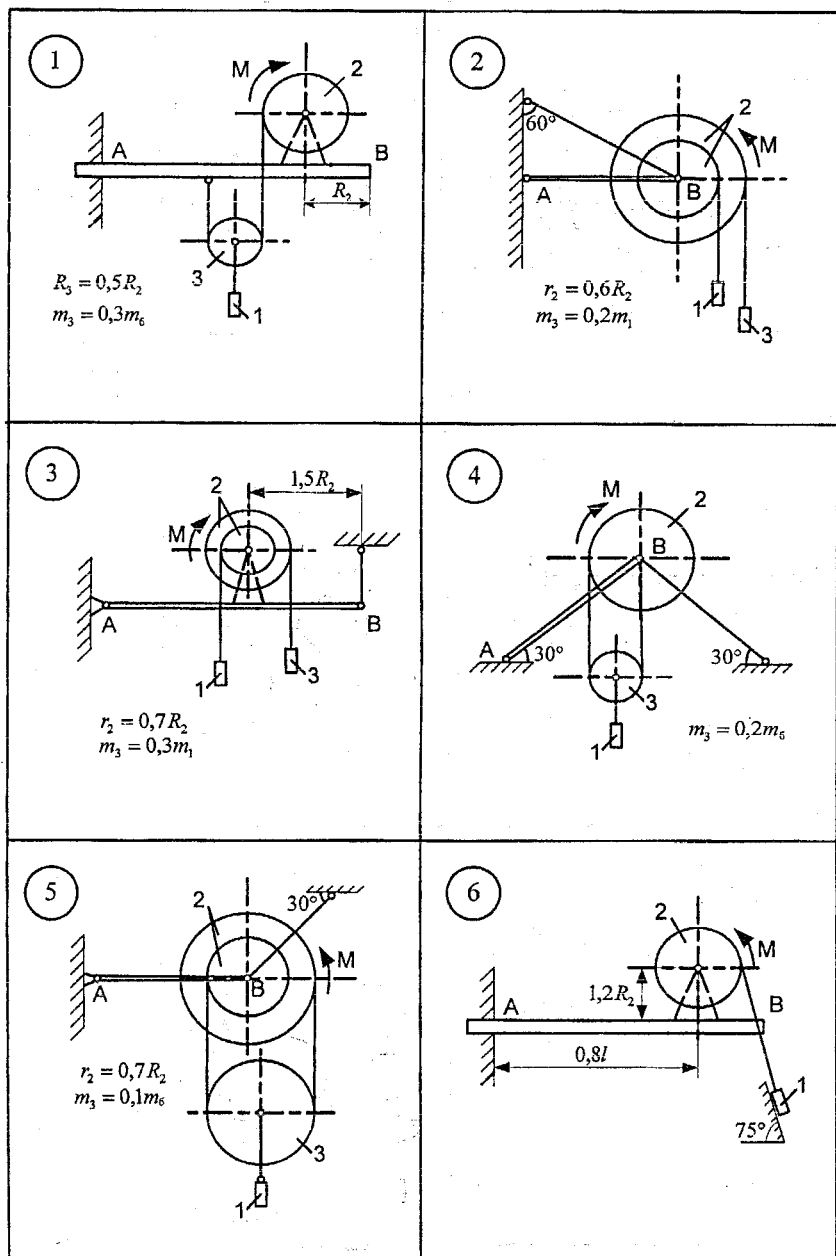


Рисунок 7.1

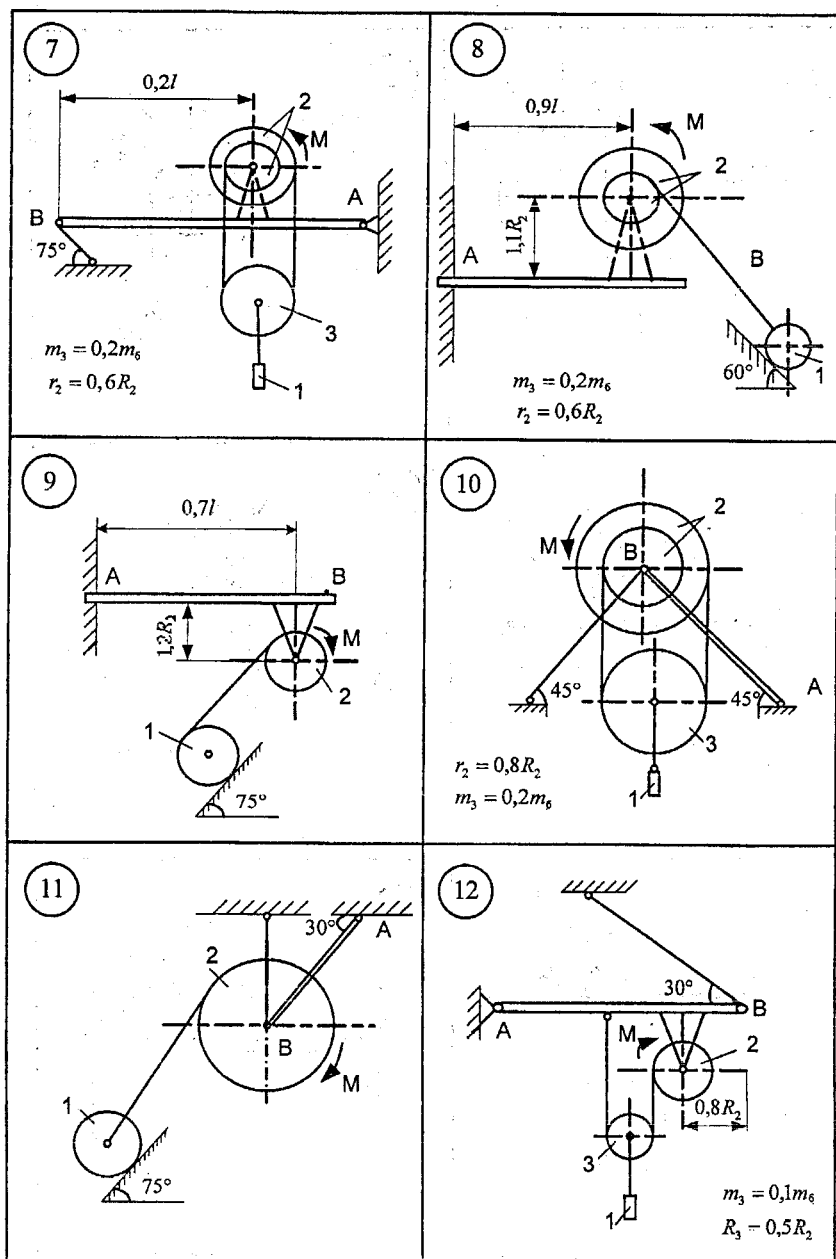


Рисунок 7.2

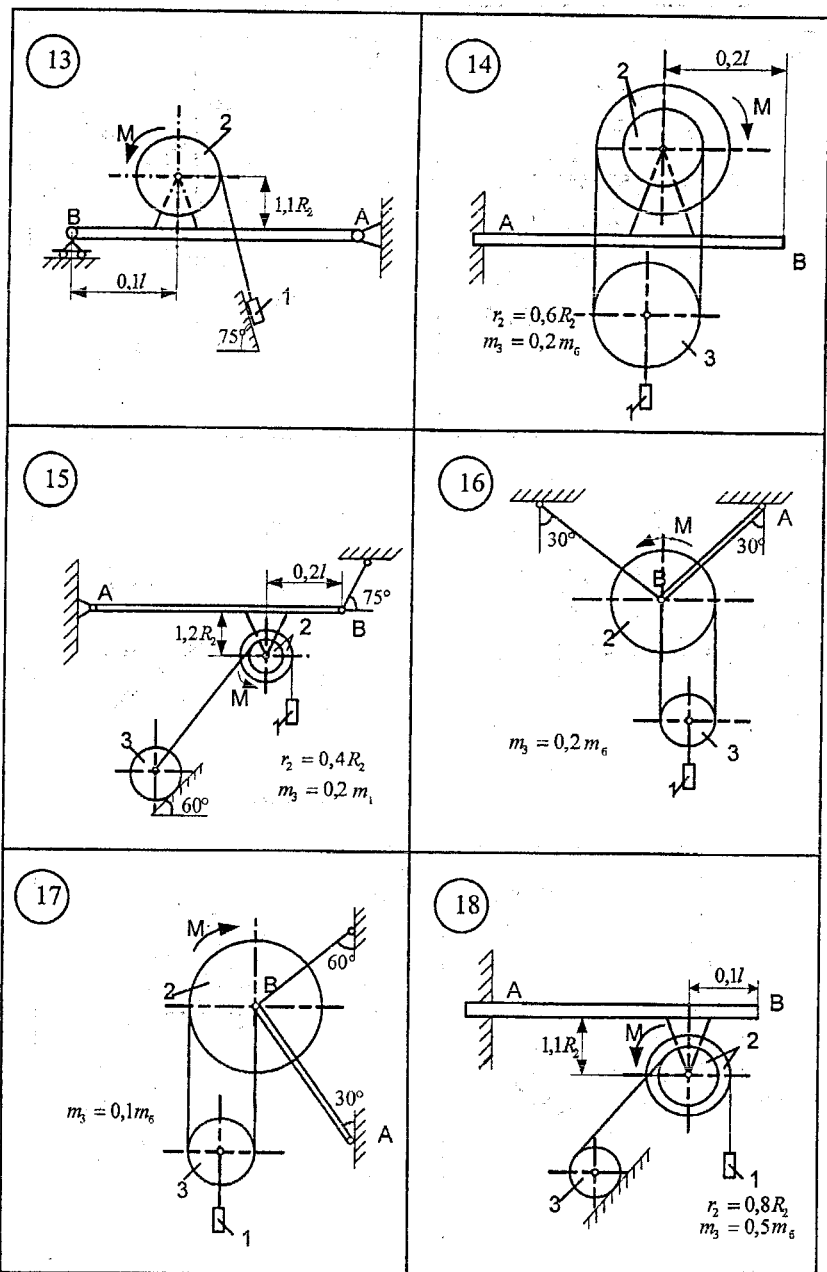


Рисунок 7.3

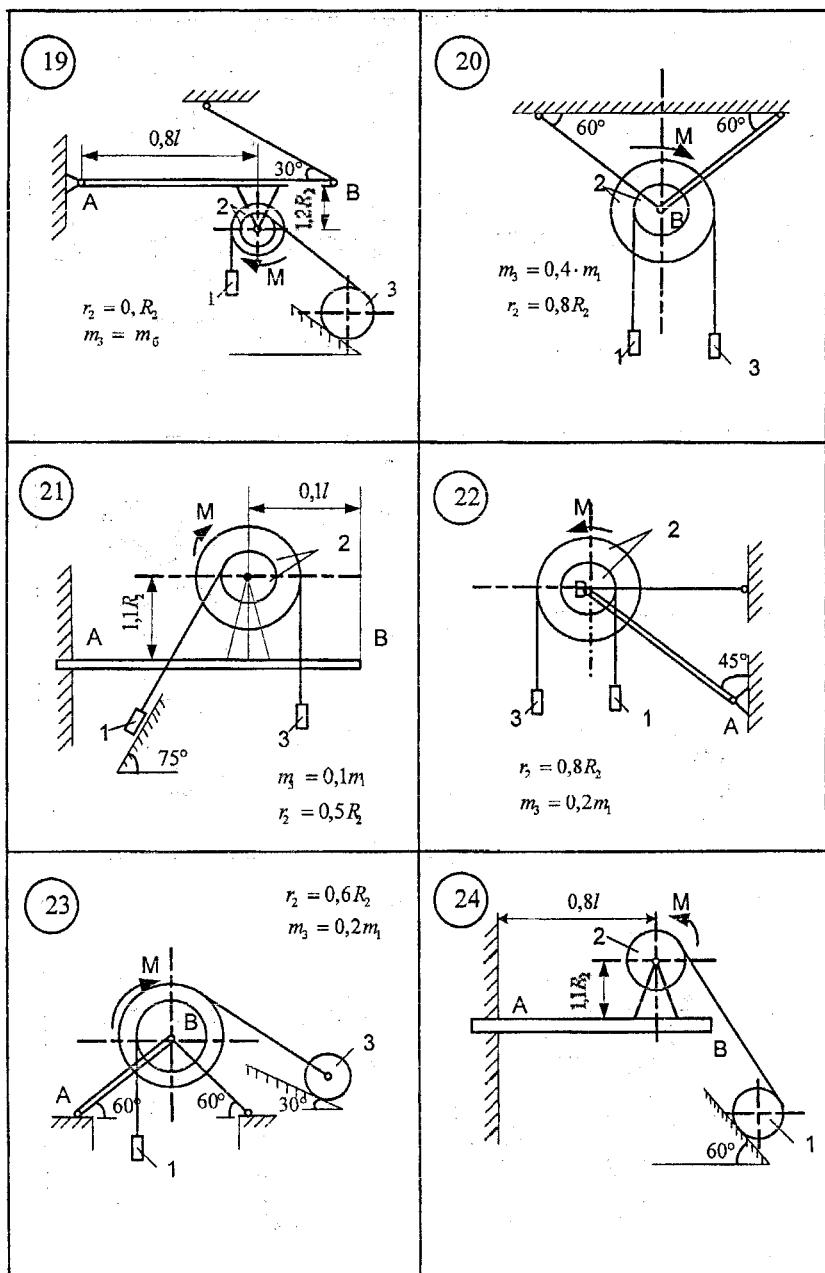
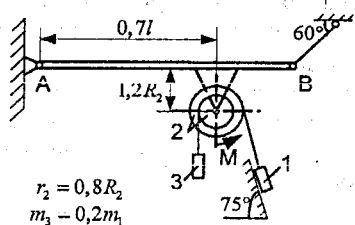
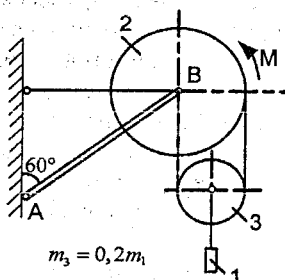


Рисунок 7.4

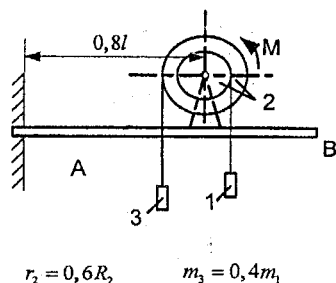
25



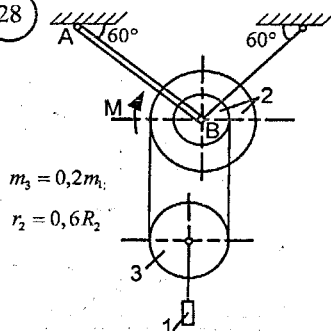
26



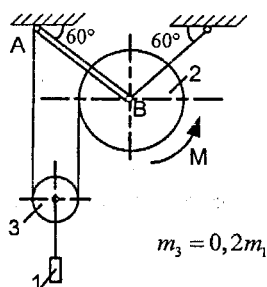
27



28



29



30

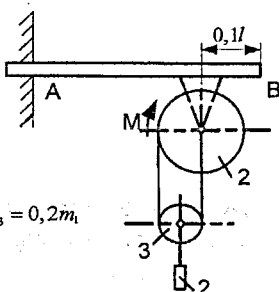


Рисунок 7.5

7.1 Приклад виконання завдання

Вантаж 1 (рис. 7.6) тросом з'єднаний з центром мас рухомого блока 3, який приводиться до руху пасом, один кінець якого закріплений в точці С, а другий перекинута через нерухомий блок 4 і зафіксований на барабані 2 масою m_2 , що приводиться до руху електродвигуном з моментом M . Знайти реакції жорсткого зацімлення А однорідної балки АВ довжиною l і вагою P . Масою блока 4, троса та паса знехтувати. Маса електродвигуна m_d , момент інерції ротора – I_p . Тіло 3 – однорідний диск, а маса барабана 2 розподілена по ободу радіусом R_2 .

Дані для розрахунку:

$$m_1 = 300 \text{ кг}; I_p = 0,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; m_3 = 10 \text{ кг}; m_2 = 15 \text{ кг};$$

$$m_d = 35 \text{ кг}; P = 250 \text{ Н}; l = 1 \text{ м}; R_2 = 0,2 \text{ м}; M = 320 \text{ Н} \cdot \text{м}; \alpha = 30^\circ.$$

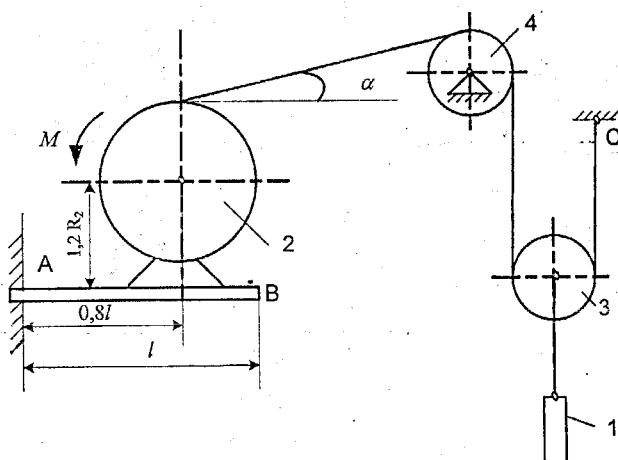


Рисунок 7.6

Розв'язування. Розглянемо матеріальну систему, що складається з балки АВ, електродвигуна і барабана 2 (рис 7.7).

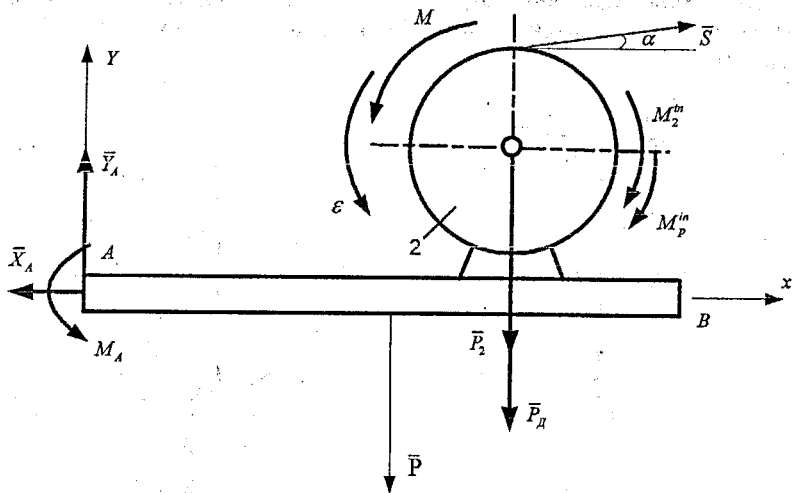


Рисунок 7.7

Запишемо принцип Д'Аламбера для плоскої довільної системи сил в проекціях на осі X та Y.

$$\begin{aligned} F_x + R_x + F_x^m &= 0, \\ F_y + R_y + F_y^m &= 0, \\ M_A^F + M_A^Y + M_A^m &= 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Рівняння (7.1) для системи сил (рис 7.7) записується у вигляді:

$$\begin{aligned} -X_A + S \cdot \cos \alpha &= 0, \\ Y_A - P - P_D - P_2 + S \cdot \sin \alpha &= 0, \\ M_A + M - M_2^m - P \cdot \frac{l}{2} - 0,8(P_2 + P_D) \cdot l - S \cdot R_2 - M_P^m - \\ - S \cdot 1,2 \cdot R_2 \cdot \cos \alpha + 0,8 \cdot S \cdot l \cdot \sin \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

де S – реакція паса;

$M_2^m = I_2 \cdot \varepsilon$ – головний момент сил інерції барабана;

ε – кутове прискорення ротора електродвигуна та барабана;

$M_P^m = I_P \cdot \varepsilon$ – головний момент сил інерції ротора електродвигуна;

X_A, Y_A, M_A – реакції жорсткого зчеплення; $P_D = m_D \cdot g$, $P_2 = m_2 \cdot g$.

При визначенні моменту сили $\bar{S}$ відносно центра A використовувалось правило паралельного переносу сили.

В трьох рівняннях (7.2) п'ять невідомих $X_A, Y_A, M_A, \varepsilon, S$.

Додаткові рівняння отримаємо, якщо використаємо принцип Д'Аламбера для визначення моментів сил відносно точки К (рис. 7.8) та точки D (рис. 7.9).

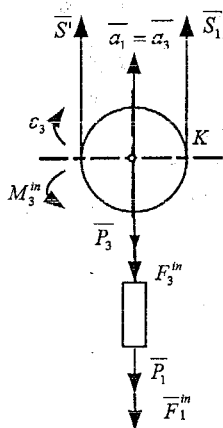


Рисунок 7.8

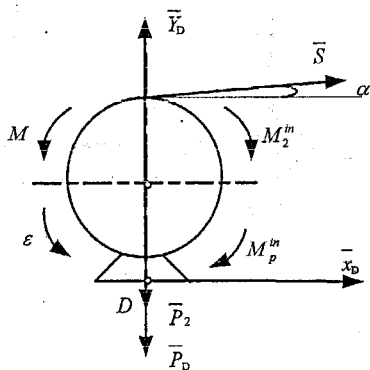


Рисунок 7.9

$$M_K^F + M_K^R + M_K^{in} = 0 \text{ (рис. 7.8),}$$

$$-2S' \cdot R_3 + M_3^{in} + R_3(P_1 + P_3 + F_1^{in} + F_3^{in}) = 0, \quad (7.3)$$

де $S' = S$, R_3 – радіус шківів 3, $P_3 = m_3 g$, $P_1 = m_1 g$, $F_1^{in} = m_1 \cdot a_1$;

$$F_3^{in} = m_3 \cdot a_3, \quad M_3^{in} = I_3 \cdot \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon \frac{R_2}{2R_3}, \quad a_3 = a_1 = \frac{1}{2} \varepsilon R_2;$$

$I_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot R_3^2$, S_1 – реакція нерухомої частини троса.

$$M_D^F + M_D^R + M_D^{in} = 0 \text{ (рис. 7.9),}$$

$$M - M_2^{in} - M_p^{in} - S \cdot R_2 - 1,2 R_2 \cdot S \cdot \cos \alpha = 0, \quad (7.4)$$

де x_D , y_D – реакції балки АВ.

Із рівнянь (7.3), (7.4) визначаємо натяг S паса:

$$S = \frac{MR_2(2m_1 + 3m_3) + 4g(m_1 + m_3)(I_p + m_2 R_2^2)}{8(I_p + m_2 R_2^2) + R_2^2(2m_1 + 3m_3)(1 + 1,2 \cos \alpha)}$$

Або, підставляючи дані умови задачі, отримаємо:

$$S = \frac{320 \cdot 0,2(2 \cdot 300 + 3 \cdot 10) + 4 \cdot 9,81(300 + 10)(0,25 + 15 \cdot 0,2^2)}{8 \cdot (0,25 + 15 \cdot 0,2^2) + 0,2^2(2 \cdot 300 + 3 \cdot 10)(1 + 1,2 \cos 30^\circ)} = 1075,1 \text{ Н.}$$

Величину сил X_A та Y_A визначаємо з перших двох рівнянь системи (7.2):

$$X_A = S \cdot \cos \alpha = 1075,1 \cdot \cos 30^\circ = 931 \text{ (H)}.$$

$$Y_A = P + P_D + P_2 - S \cdot \sin \alpha = 250 + (35 + 15) \cdot 9,81 - 1075,1 \cdot \sin 30^\circ = 202,95 \text{ (H)}.$$

Із третього рівняння (7.2) з врахуванням (7.4) визначимо величину M_A :

$$M_A = P \frac{l}{2} + 0,8(P_2 + P_D) \cdot l - 0,8 \cdot S \cdot l \cdot \sin \alpha = 125 + 0,8(15 + 35) \cdot 9,81 - 0,8 \cdot 1075,1 \cdot \sin 30^\circ = 87,4 \text{ (H} \cdot \text{м)}.$$

Відповідь: $X_A = 931 \text{ H}$, $Y_A = 202,95 \text{ H}$, $M_A = 87,4 \text{ H} \cdot \text{м}$.

Д.8 Додаткові динамічні реакції в'язей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Однорідні тіла 1 та 2 (рис. 8.1 - 8.10) обертаються навколо нерухомої осі z під дією моменту M . Центри мас тіл зміщені від осі обертання (статична невірноваженість тіл) на величини e_1 та e_2 , відповідно. Знайти додаткові динамічні реакції циліндричних шарнірів А і В при $t = t_1$, і порівняти їх зі статичними, якщо при $t = 0$ кутова швидкість тіл ω_0 .

Дані для розрахунку наведені в табл. 8.1. Якщо ω_0 (табл. 8.1) має від'ємний знак, то початкова кутова швидкість направлена в протилежну сторону моменту M .

Таблиця 8.1

В-т	m_1 , кг	m_2 , кг	e_1 , мм	e_2 , мм	α , град	l_1 , м	l_2 , м	a , м	b , м	M , Н·м	ω_0 , с ⁻¹	R_1 , м	R_2 , м	t_1 , с
1	2	3	0,1	0,2	30	0,2	0,3	0,1	0,15	$6+4t^2$	10	0,2	0,35	2
2	3	4	0,15	0,19	45	0,3	0,4	0,15	0,14	$4+3t$	-5	0,22	0,33	3
3	4	5	0,18	0,1	60	0,4	0,5	0,13	0,13	$8+3t^2$	0	0,24	0,31	4
4	1	2	0,19	0,11	30	0,1	0,2	0,12	0,12	$8t$	15	0,26	0,29	1
5	2	3	0,2	0,12	45	0,2	0,3	0,11	0,11	$7+3t^3$	-10	0,28	0,26	2
6	3	4	0,1	0,13	60	0,3	0,4	0,1	0,1	$3+t^2$	5	0,3	0,25	2
7	4	2	0,11	0,18	30	0,4	0,35	0,2	0,2	$2+3t^2$	0	0,32	0,23	3
8	5	2	0,12	0,17	45	0,5	0,2	0,19	0,19	$1+6t^3$	-15	0,34	0,21	4
9	1	3	0,13	0,16	60	0,1	0,3	0,18	0,18	$5+3t^2$	10	0,36	0,19	2
0	2	4	0,14	0,15	30	0,2	0,4	0,17	0,17	$3+5t$	-5	0,4	0,15	3

8.1 Приклад виконання завдання

До системи однорідних тіл 1 та 2 (рис. 8.11), що обертаються з кутовою швидкістю $\omega_0 = 6\text{с}^{-1}$, прикладається обертальний момент $M = (3+7t)$ Н·м. Знайти статичні та додаткові динамічні реакції циліндричних шарнірів А і В при $t_1 = 2\text{с}$, якщо: $m_1=3\text{ кг}$; $m_2=5\text{ кг}$; $e_1=0,1\text{ мм}$; $e_2=0,3\text{ мм}$; $l_1=0,25\text{ м}$; $l_2=0,25\text{ м}$; $a=0,05\text{ м}$; $b=0,15\text{ м}$; $R_1=0,1\text{ м}$; $R_2=0,2\text{ м}$.

Розв'язання. Переміщенню тіл 1 та 2 (рис 8.11) перешкоджають в'язі: нерухомі (циліндричні) шарніри А і В. На підставі аксіоми звільнення від в'язей, дію шарнірів А і В та тіла замінюємо реакціями в'язей – Y_A , X_A , Y_B , X_B (рис. 8.12).

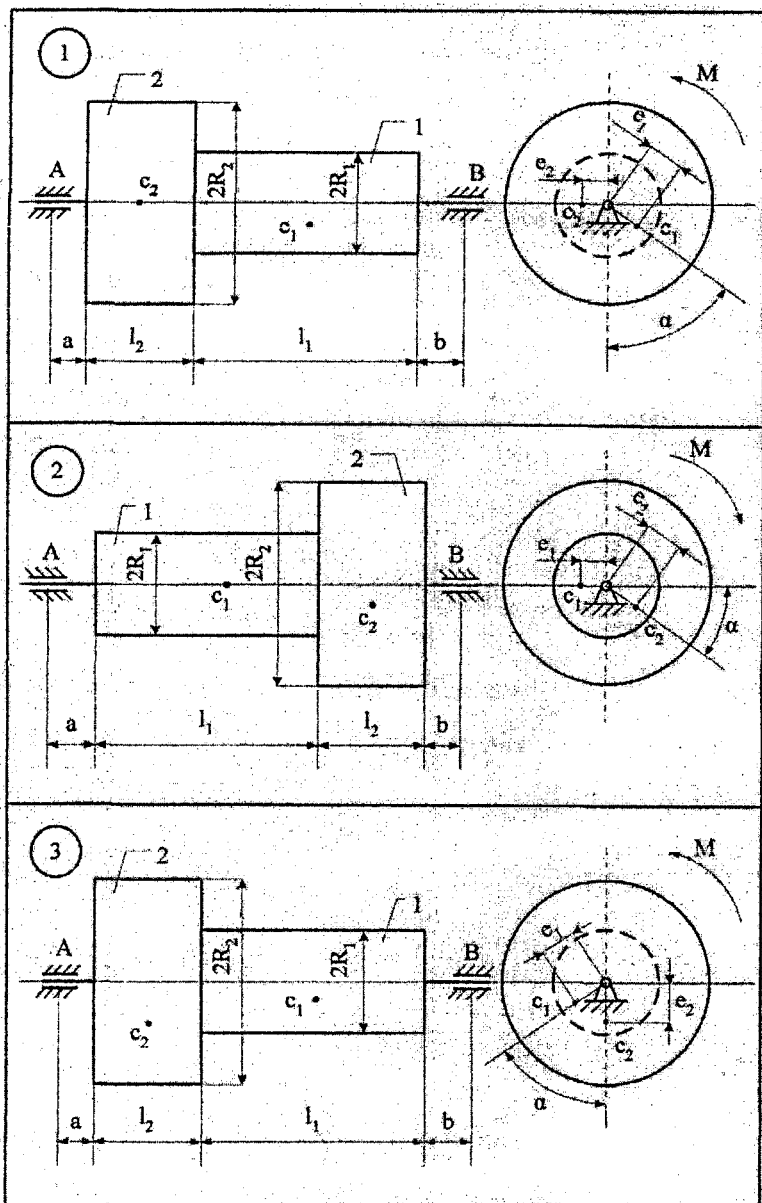


Рисунок 8.1

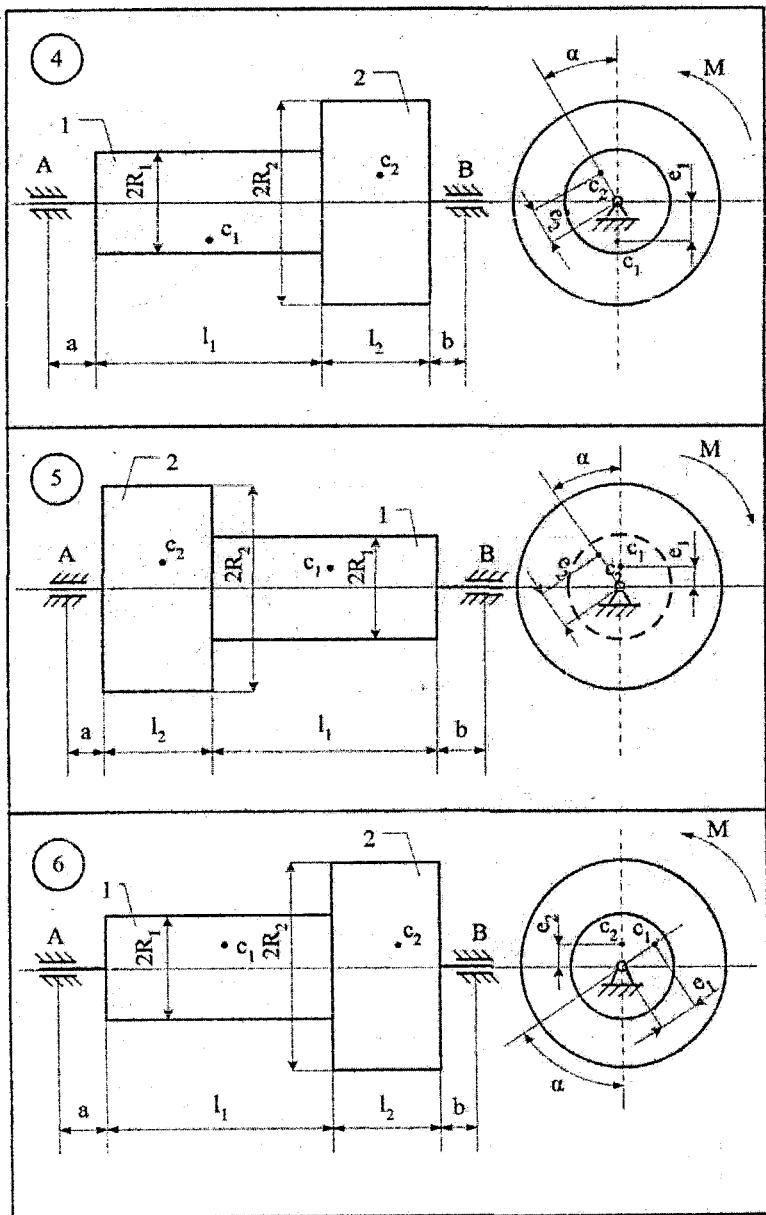


Рисунок 8.2

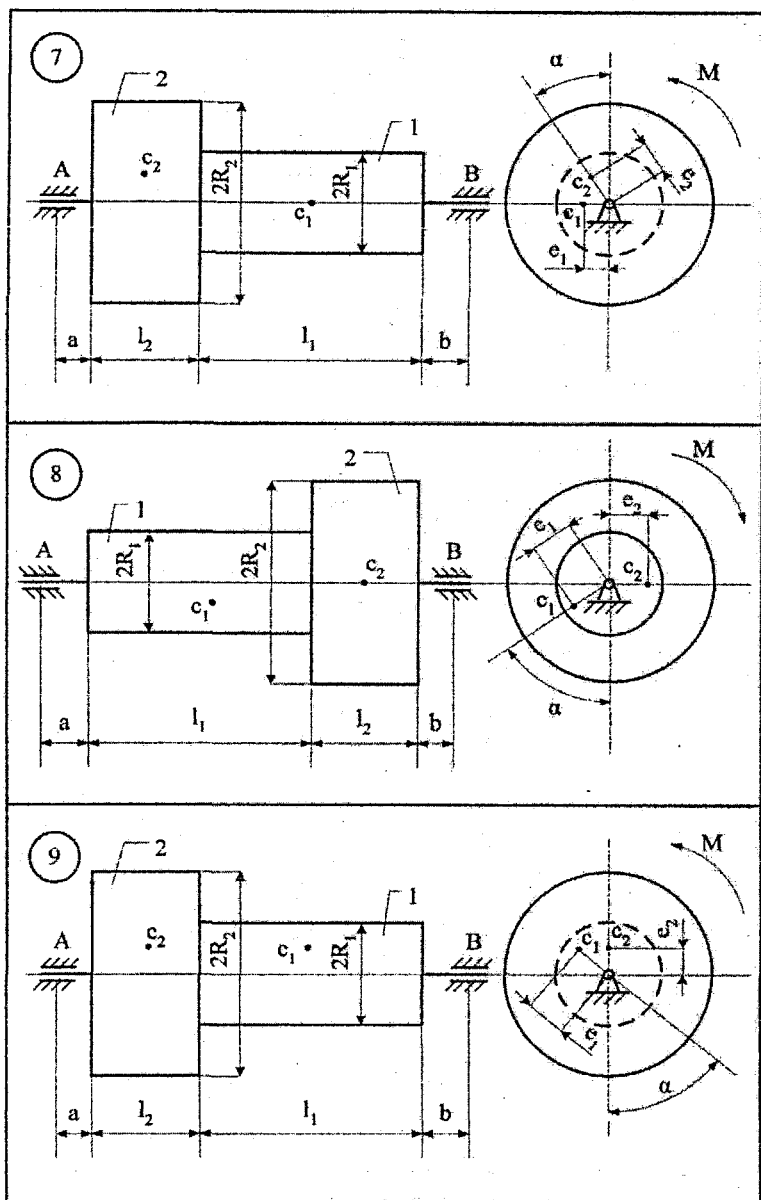


Рисунок 8.3

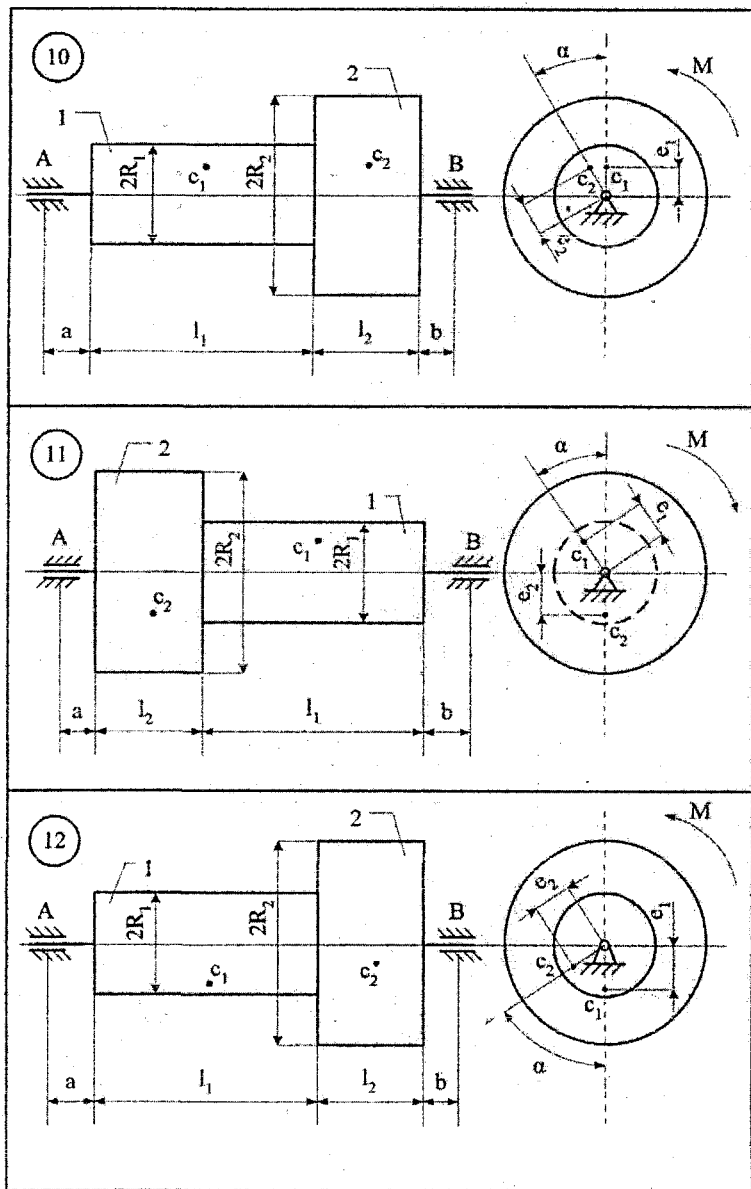


Рисунок 8.4

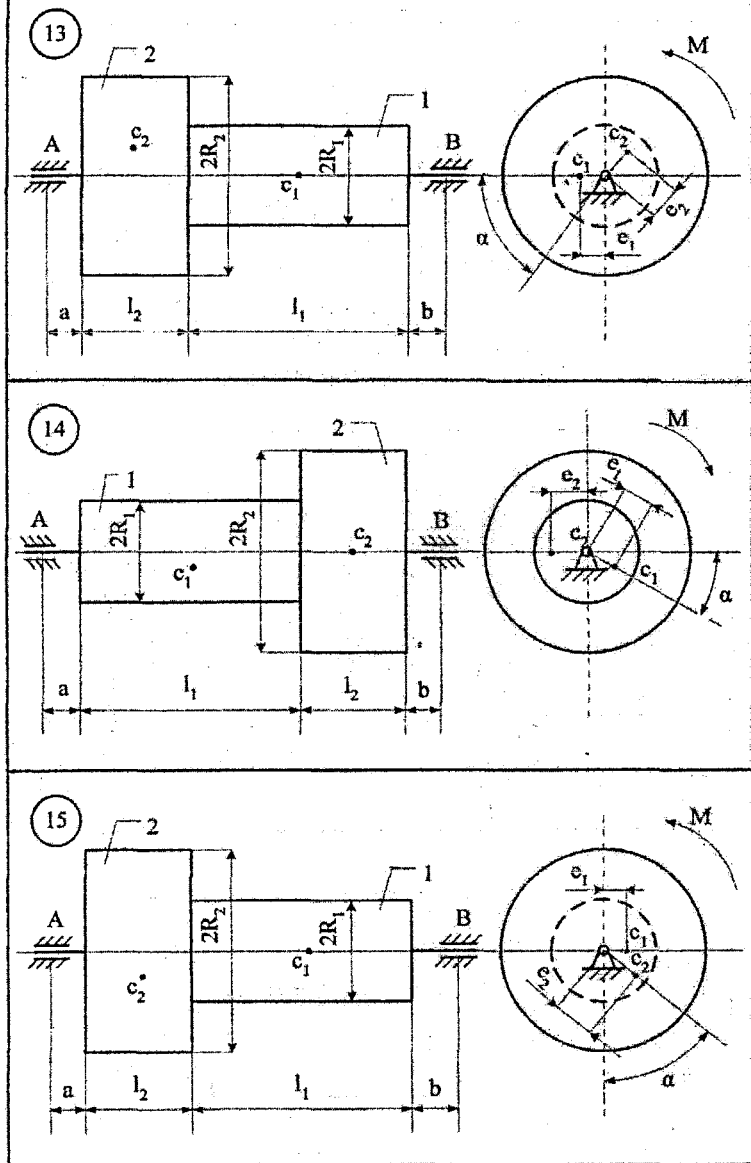


Рисунок 8.5

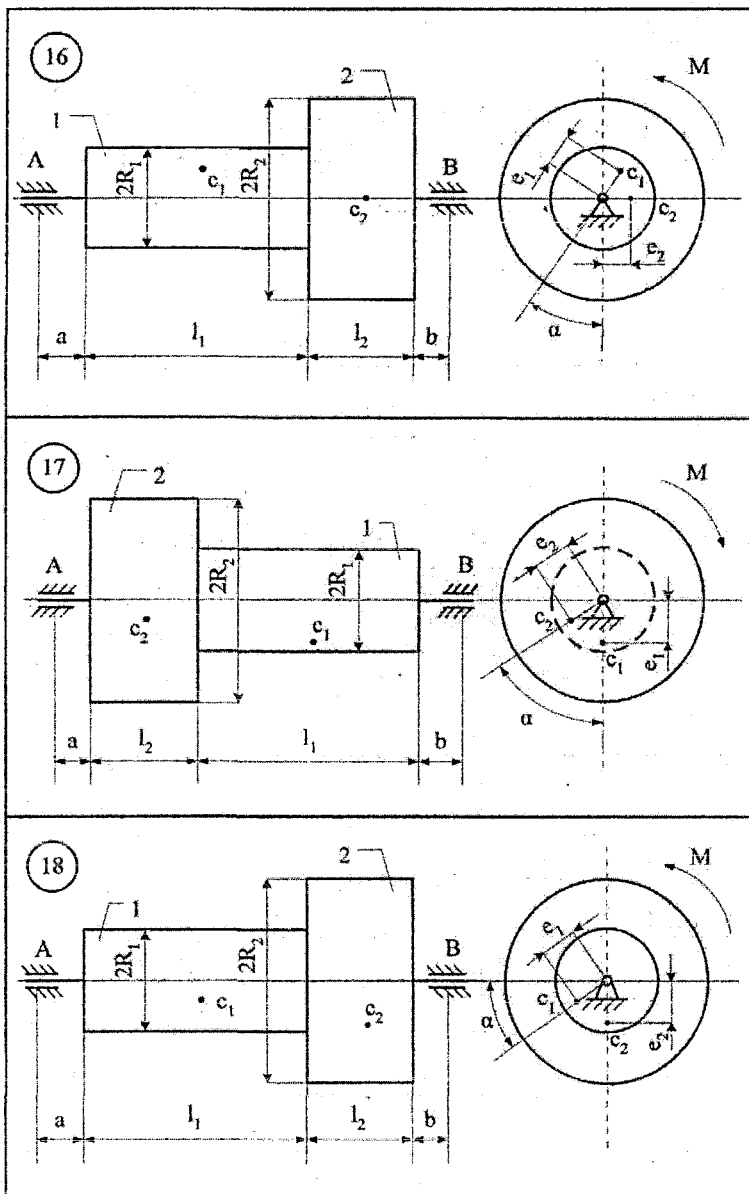


Рисунок 8.6

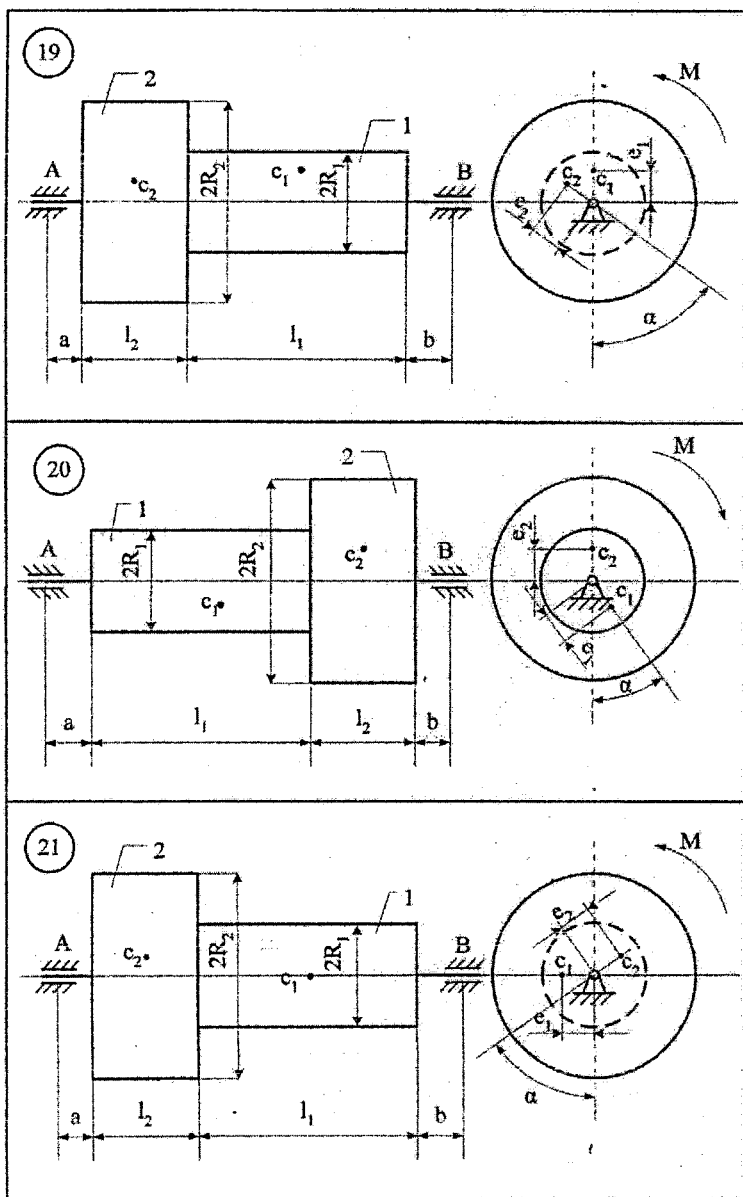


Рисунок 8.7

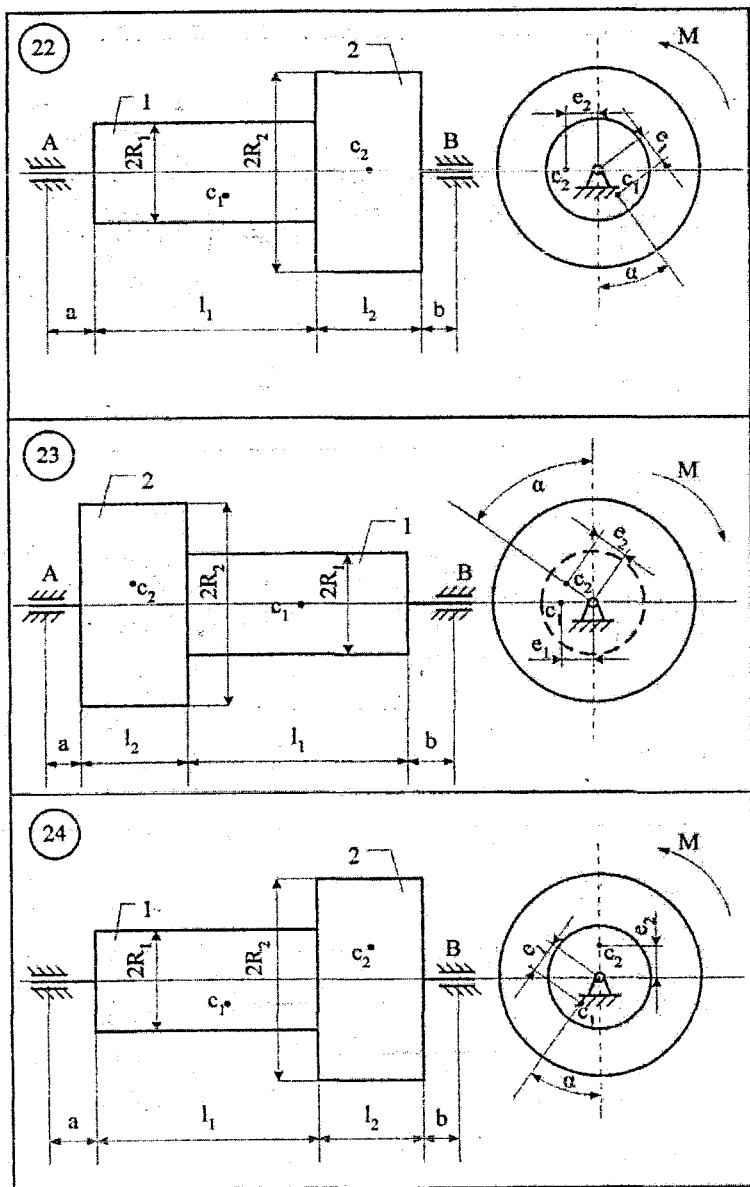


Рисунок 8.8

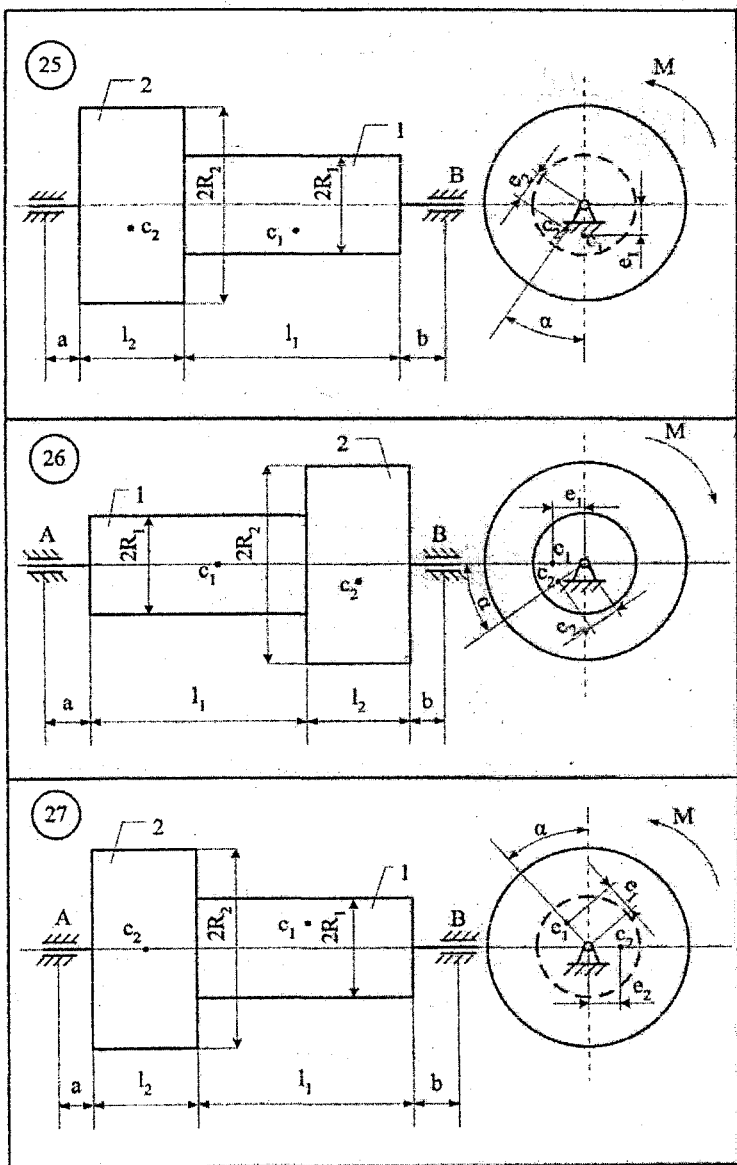


Рисунок 8.9

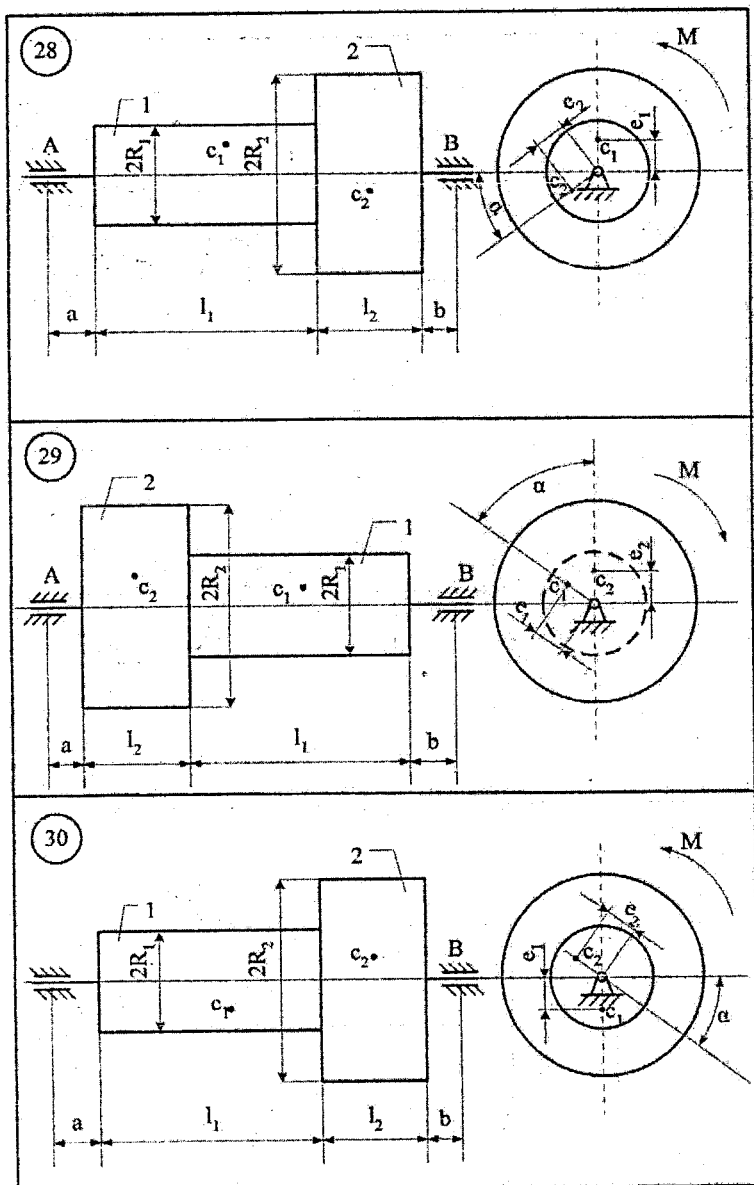


Рисунок 8.10

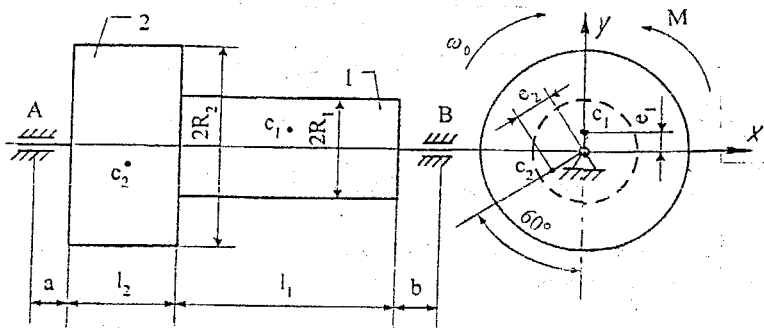


Рисунок 8.11

Реакції Y_A, X_A, Y_B, X_B запишемо як суму статичних $Y_A^C, X_A^C, Y_B^C, X_B^C$ та додаткових динамічних реакцій $Y_A^\Delta, X_A^\Delta, Y_B^\Delta, X_B^\Delta$.

$$Y_A = Y_A^C + Y_A^\Delta, X_A = X_A^C + X_A^\Delta, \quad (8.1)$$

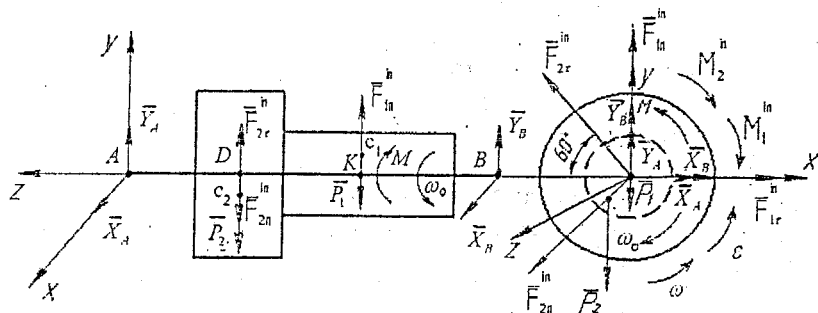


Рисунок 8.12

$$Y_B = Y_B^C + Y_B^\Delta, X_B = X_B^C + X_B^\Delta.$$

Статичні реакції в'язей визначаються при $\omega = 0, \varepsilon = 0$ з рівнянь (рис.8.12):

$$\sum F_y = 0; \quad Y_A^C - P_1 - P_2 + Y_B^C = 0;$$

$$\sum F_x = 0; \quad X_A^C + X_B^C = 0;$$

$$\sum m_x \bar{F} = 0;$$

$$-P_2 \left(a + \frac{l_2}{2} \right) - P_1 \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2} \right) + Y_B^C (a + b + l_1 + l_2) = 0; \quad (8.2)$$

$$\sum m_y \bar{F} = 0; \quad -X_B^C (a + b + l_1 + l_2) = 0,$$

$$\text{де } P_1 = m_1 g, \quad P_2 = m_2 g.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо:

$$X_B^C = 0; \quad X_A^C = 0,$$

$$Y_B^C = g \frac{m_2(a+0,5l_2) + m_1(a+l_2+0,5l_1)}{a+b+l_1+l_2} =$$

$$= 9,81 \frac{5(0,05+0,05) + 3(0,05+0,1+0,125)}{0,05+0,15+0,25+0,1} = 23,63 \text{ Н}$$

$$Y_A^C = g(m_1 + m_2) - Y_B^C = 9,81(3+5) - 23,63 = 54,85 \text{ Н}.$$

Таким чином: $R_A^C = 54,85 \text{ Н}$, $R_B^C = 23,63 \text{ Н}$.

Для визначення реакцій циліндричних шарнірів А і В (рис.8.12), використаємо принцип Д'Аламбера:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}^{in} = 0,$$

$$\vec{M}_A^F + \vec{M}_A^R + \vec{M}_A^{in} = 0.$$

В проекціях на осі X, Y, Z

$$F_{1r}^{in} - F_{2r}^{in} \times \cos 60^\circ - F_{2n}^{in} \times \sin 60^\circ + X_A + X_B = 0,$$

$$-P_1 - P_2 + F_{1n}^{in} + F_{2r}^{in} \times \sin 60^\circ - F_{2n}^{in} \times \cos 60^\circ + Y_A + Y_B = 0,$$

$$F_{2r}^{in} \times AD \times \sin 60^\circ - P_2 \times AD - F_{2n}^{in} \times AD \times \cos 60^\circ + F_{1n}^{in} \times AK - P_1 \times AK + Y_B \times AB = 0, \quad (8.3)$$

$$-F_{1r}^{in} \times AK + F_{2r}^{in} \times AD \times \cos 60^\circ + F_{2n}^{in} \times \sin 60^\circ \times AD - X_B \times AB = 0,$$

$$M - M_1^{in} - M_2^{in} = 0,$$

де сили інерції, зведені до центрів D і K;

$$F_{1n}^{in} = m_1 \times e_1 \times \omega^2, \quad F_{1r}^{in} = m_1 \times e_1 \times \varepsilon, \quad F_{2n}^{in} = m_2 \times e_2 \times \omega^2, \quad F_{2r}^{in} = m_2 \times e_2 \times \varepsilon,$$

де ε – кутове прискорення;

ω – кутова швидкість тіл;

I_{z1}, I_{z2} – моменти інерції тіл відносно осі Z; $M = (3+7)t$

Із останнього рівняння системи (8.3) знайдемо кутову швидкість ω та кутове прискорення ε тіл.

$$M - I_{z1} \times \varepsilon - I_{z2} \times \varepsilon = 0,$$

$$\text{де } I_{z1} \cong \frac{1}{2} m_1 R_1^2, I_{z1} \cong \frac{1}{2} m_2 R_2^2.$$

Оскільки $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, тоді

$$(I_{z1} + I_{z2}) \times \frac{d\omega}{dt} = 3 + 7t. \quad (8.4)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (8.4) при початкових умовах:

при

$$t_1 = 0, \quad \omega_0 = -3 \text{ с}^{-1}.$$

$$I_z(\omega + 3) = +t(3 + 3.5t). \quad (8.5)$$

$$\text{Звідки: } \omega = 3 - \frac{t}{I_z} (3 + 3.5t).$$

Визначимо кутове прискорення $\varepsilon = \ddot{\phi}$ (8.4) та кутову швидкість (8.5)

при $t_1 = 2 \text{ с}$.

$$\varepsilon_1 = \frac{3+7t}{I_z} = \frac{3+7 \times 2}{0,115} = 147,8 \text{ с}^{-2},$$

$$\omega_1 = -3 + \frac{2}{0,115} \times (3 + 3,5 \times 2) = 170,9 \text{ с}^{-1}$$

$$\text{де } I_z \cong \frac{1}{2} \times m_1 \times R_1^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times R_2^2 \cong 0,115 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Додаткові динамічні реакції опор А і В знайдемо із перших чотирьох рівнянь системи (8.3), враховуючи (8.1) та (8.2)

$$F_{1r}^{in} - F_{2r}^{in} \times \cos 60^\circ - F_{2n}^{in} \times \sin 60^\circ + X_A^\Delta + X_B^\Delta = 0,$$

$$F_{1n}^{in} + F_{2r}^{in} \times \sin 60^\circ - F_{2n}^{in} \times \cos 60^\circ + Y_A^\Delta + Y_B^\Delta = 0,$$

$$F_{2r}^{in} \times AD \times \sin 60^\circ - F_{2n}^{in} \times AD \times \cos 60^\circ + F_{1n}^{in} \times AK + Y_B^\Delta \times AB = 0,$$

$$-F_{1r}^{in} \times AK + F_{2r}^{in} \times AD \times \cos 60^\circ + F_{2n}^{in} \times \sin 60^\circ \times AD - X_B^\Delta \times AB = 0,$$

$$\text{де } AD = a + \frac{l_2}{2}, AK = a + l_2 + \frac{l_1}{2}, AB = a + l_2 + l_1 + b.$$

Або:

$$\begin{aligned} \varepsilon(m_1 \times e_1 - m_2 \times e_2 \times \cos 60^\circ) - m_2 \times e_2 \times \omega^2 \times \sin 60^\circ + X_A^\Delta + X_B^\Delta &= 0, \\ \omega^2(m_1 \times e_1 - m_2 \times e_2 \times \cos 60^\circ) + m_2 \times e_2 \times \varepsilon \times \sin 60^\circ + Y_A^\Delta + Y_B^\Delta &= 0, \\ m_2 \times e_2(\varepsilon \times \sin 60^\circ - \omega^2) \times \left(a + \frac{l_2}{2}\right) + m_1 \times e_1 \times \omega^2 \times \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2}\right) + Y_B^\Delta \times (a + l_2 + l_1 + b) &= 0, \\ -m_1 \times e_1 \times \varepsilon \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2}\right) + \varepsilon \times m_2 \times e_2(\varepsilon \times \cos 60^\circ + \omega^2 \times \sin 60^\circ) \times \left(a + \frac{l_2}{2}\right) - X_B^\Delta \times \\ \times (a + l_2 + l_1 + b) &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Із рівнянь (8.6) знаходимо складові додаткових динамічних реакцій циліндричних шарнірів: $X_A^\Delta, X_B^\Delta, Y_A^\Delta, Y_B^\Delta$, при $t_1 = 2\text{с}$ ($\varepsilon = \varepsilon_1, \omega = \omega_1$).

$$Y_B^\Delta = -\frac{m_2 \times e_2(\varepsilon_1 \times \sin 60^\circ - \omega_1^2 \times \cos 60^\circ) \left(a + \frac{l_2}{2}\right) + m_1 \times e_1 \times \omega_1^2 \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2}\right)}{a + l_2 + l_1 + b} = -3,95 \text{ Н}.$$

$$X_B^\Delta = \frac{m_2 \times e_2(\varepsilon_1 \times \cos 60^\circ + \omega_1^2 \times \sin 60^\circ) \left(a + \frac{l_2}{2}\right) - m_1 \times e_1 \times \varepsilon_1 \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2}\right)}{a + l_1 + l_2 + b} = 6,90 \text{ Н}.$$

$$Y_A^\Delta = -Y_B^\Delta - m_2 \times e_2 \times \varepsilon_1 \times \sin 60^\circ - \omega_1^2(m_1 \times e_1 - m_2 \times e_2 \times \cos 60^\circ) = 7,73 \text{ Н}.$$

$$X_A^\Delta = -X_B^\Delta - \varepsilon_1(m_1 \times e_1 - m_2 \times e_2) \cos 60^\circ + m_2 \times e_2 \times \omega_1^2 \times \sin 60^\circ = 31,0 \text{ Н}.$$

Додаткові динамічні реакції циліндричних шарнірів А і В

$$R_A^\Delta = \sqrt{(X_A^\Delta)^2 + (Y_A^\Delta)^2} = \sqrt{31,0^2 + 7,73^2} = 31,94 \text{ Н},$$

$$R_B^\Delta = \sqrt{(X_B^\Delta)^2 + (Y_B^\Delta)^2} = \sqrt{6,9^2 + 3,95^2} = 7,95 \text{ Н}.$$

При $t_1 = 2\text{с}$ додаткові динамічні реакції шарнірів складають 59% для шарніра А та 33,6% для шарніра В від статичних реакцій в'язей.
Відповідь: $R_A^\Delta = 31,94 \text{ Н}$, $R_B^\Delta = 7,95 \text{ Н}$.

Принцип Лагранжа

Д. 9 Визначення реакцій в'язей врівноваженого плоского механізму за допомогою принципу віртуальних переміщень

Плоский механізм, що зображений на рисунках 9.1 – 9.5 в тридцяти варіантах, знаходиться в рівновазі під дією сил $\overline{P}$, $\overline{F}$ і моменту M . Розміри ланок, кути, значення P і M наведені в таблиці 9.1 по варіантах.

Таблиця 9.1

Варіант	Н	Н·м	см					град.	
	P	M	r_1	R_1	r_2	R_2	l	α	β
1	48	16	5	25	12	36	180	60	75
2	36	5	12	24	8	32	120	30	60
3	50	4	15	30	22	44	150	15	30
4	32	15	8	32	12	48	140	60	15
5	60	12	4	20	10	30	100	45	60
6	25	10	30	60	16	80	130	75	45
7	45	8	10	20	18	27	110	45	15
8	18	6	5	25	18	36	150	45	30
9	24	20	10	15	14	28	120	60	45
0	64	32	6	12	16	24	130	45	15

Застосовуючи принцип віртуальних переміщень, визначити силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє.

9.1 Приклад виконання завдання

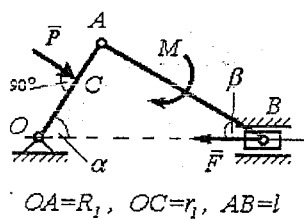
Плоский механізм, що зображений на рисунку 9.6, знаходиться в рівновазі під дією сил $\overline{P}$, $\overline{F}$ і моменту M . Знайти силу F , якщо сила $\overline{P}$ перпендикулярна до горизонтальної лінії OD . В остаточних розрахунках прийняти, що $OA = R = 1,2$ м, $OB = r = 0,8$ м, $M = 2$ кН·м, $P = 10$ кН, $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 15^\circ$.

Розв'язання. Застосовуємо принцип віртуальних переміщень.

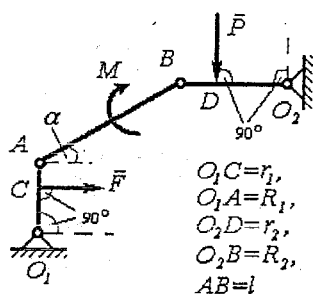
$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{(a)} = 0. \quad (9.1)$$

Надаємо точкам механізму можливі переміщення, які не порушують умов ідеальних в'язей. Якщо стержень OB повернеться навколо осі O на малий кут $\delta\varphi$, то точки A і B набувають лінійних переміщень δS_A і δS_B , відповідно. Переміщення зображаємо на рис. 9.7. Можливе переміщення для точки D - δS_D .

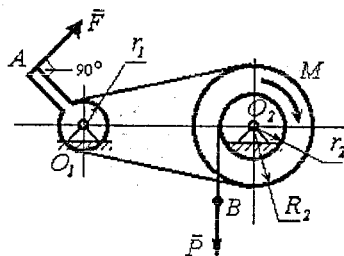
1



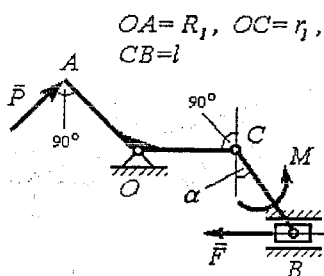
2



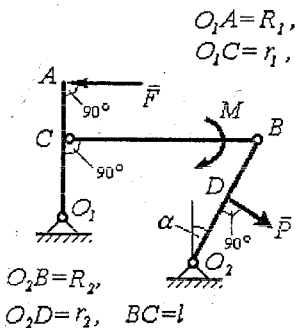
3



4



5



6

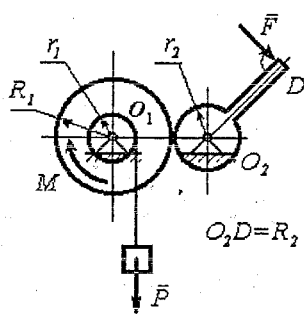
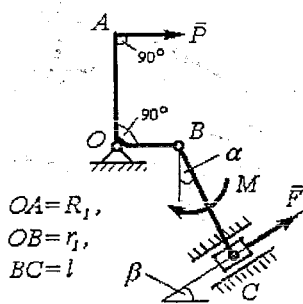
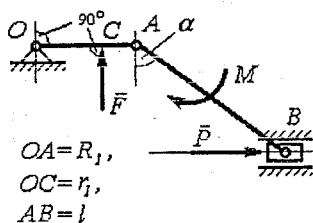


Рисунок 9.1

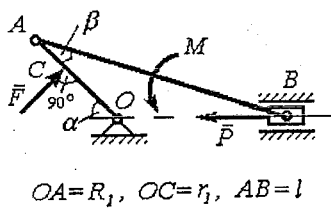
7



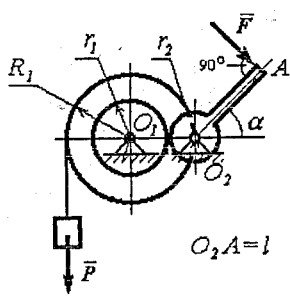
8



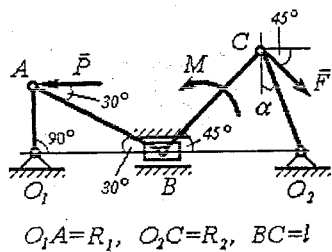
9



10



11



12

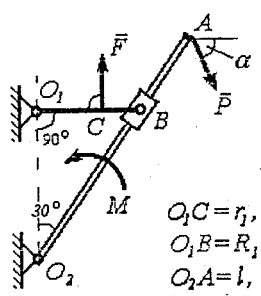
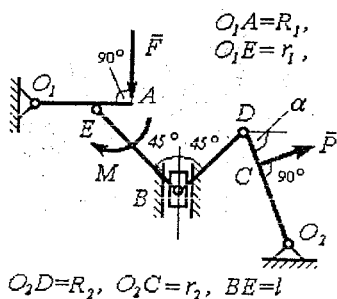
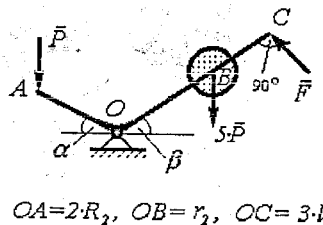


Рисунок 9.2

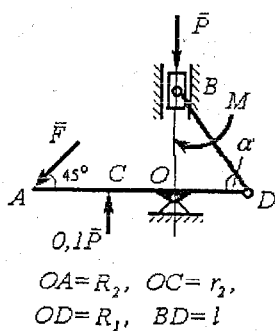
13



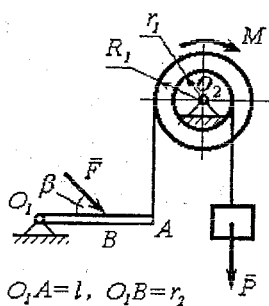
14



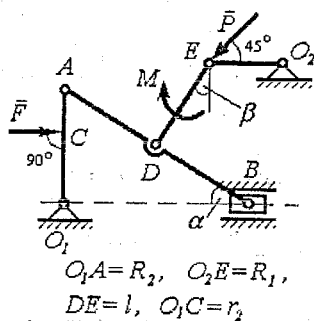
15



16



17



18

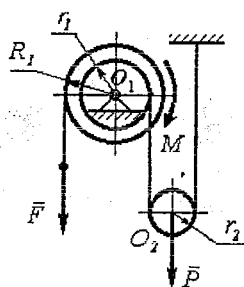
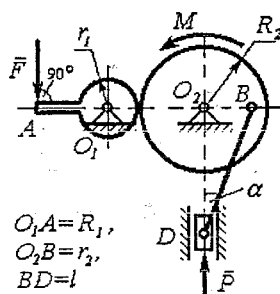
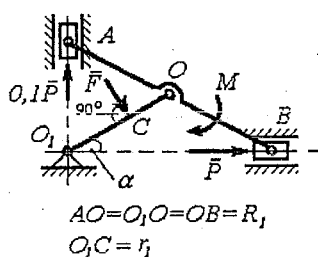


Рисунок 9.3

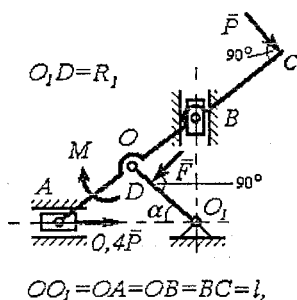
19



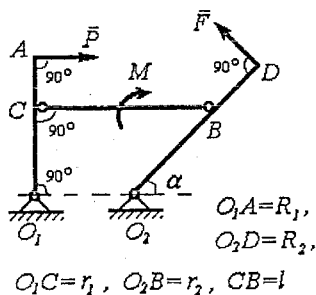
20



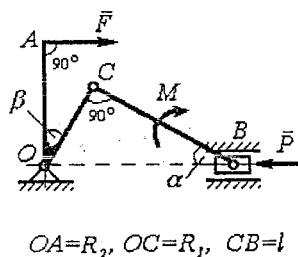
21



22



23



24

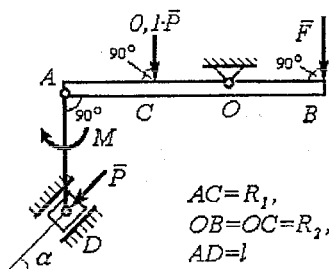
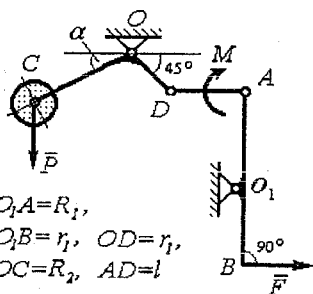
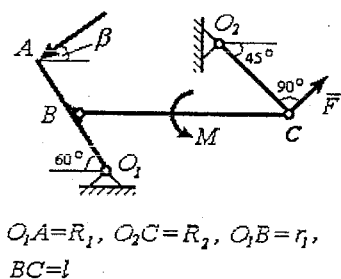


Рисунок 9.4

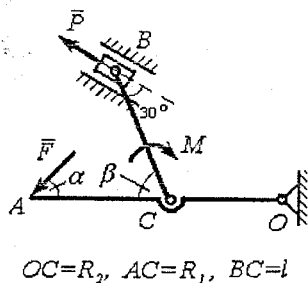
(25)



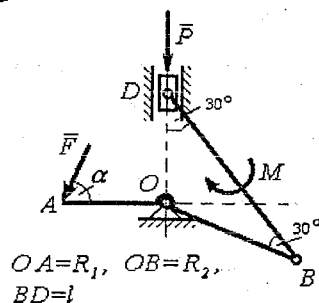
(26)



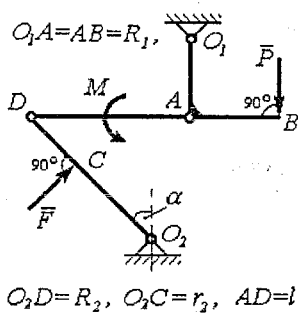
(27)



(28)



(29)



(30)

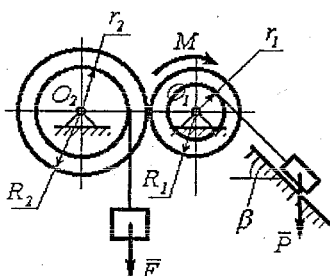


Рисунок 9.5

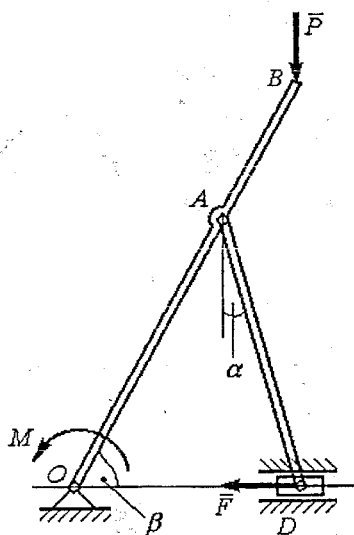


Рисунок 9.6

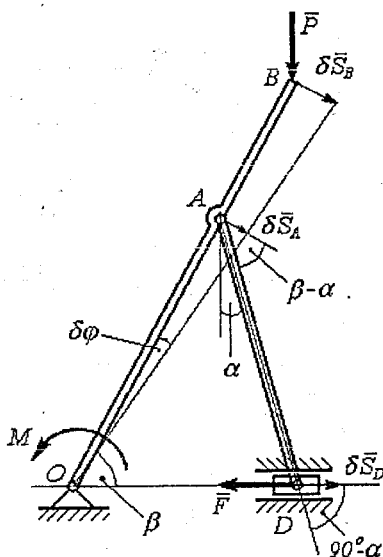


Рисунок 9.7

Згідно з принципом (9.1) запишемо суму віртуальних робіт для силових навантажень M , P і F .

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{(a)} = -M \cdot \delta \varphi + P \cdot \delta S_B \cdot \cos \beta - F \cdot \delta S_D = 0. \quad (9.2)$$

Встановимо залежність між переміщеннями і виразимо $\delta \varphi$, δS_B і δS_D через δS_A .

Для ланки OB :
$$\delta \varphi = \frac{\delta S_A}{OA} = \frac{\delta S_B}{OB}.$$

Для ланки AD на основі того, що проекції переміщень на вісь, що проходить через точки A і D , буде: $\delta S_A \cdot \cos(\beta - \alpha) = \delta S_D \cdot \sin \alpha$.

Тому:

$$\delta \varphi = \frac{\delta S_A}{OA}; \quad \delta S_B = \frac{OB}{OA} \cdot \delta S_A; \quad \delta S_D = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \delta S_A. \quad (9.3)$$

Підставляємо переміщення (9.3) в рівняння (9.2)

$$-M \frac{\delta S_A}{OA} + P \frac{OB}{OA} \delta S_A \cos \beta - F \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha} \delta S_A = 0.$$

Переміщення $\delta S_A \neq 0$, тому після скорочення на δS_A і спрощення отримаємо:

$$F = \frac{(P \cdot OB \cdot \cos \beta - M) \sin \alpha}{OA \cdot \cos(\beta - \alpha)} = \frac{(P \cdot r \cdot \cos \beta - M) \sin \alpha}{R \cdot \cos(\beta - \alpha)}. \quad (9.4)$$

Підставляємо дані:

$$F = \frac{(10 \cdot 0,8 \cdot \cos 60^\circ - 2) \sin 15^\circ}{1,2 \cdot \cos(45^\circ)} = \frac{(10 \cdot 0,8 \cdot 0,5 - 2) 0,2588}{1,2 \cdot 0,707} = 0,61 \text{ кН}.$$

Відповідь: $F = 0,61 \text{ кН}$.

Д 10 Визначення опорних реакцій для складної статичної конструкції за допомогою принципу віртуальних переміщень

На рис.10.1 – 10.5 по варіантах зображено раму, яка складається з двох частин, з'єднаних між собою шарніром С. Рама закріплена до опор в точках А, В, а в варіантах 1, 5, 6, 7, 23 додатковою опорою в точці D. Рама навантажена силами P_1 , P_2 розподіленим навантаженням інтенсивністю q і моментом M . Напрямки сил P_1 і P_2 вказуються кутами φ_1 і φ_2 .

Визначити опорні реакції рами, використовуючи принцип віртуальних переміщень і виконати статичну перевірку одержаних результатів.

В остаточних розрахунках силові навантаження, кути і геометричні розміри взяти в таблиці 10.1 по варіантах.

Таблиця 10.1

Варіант	кН		кН·м	кН/м	Град.		м			
	P_1	P_2	M	q	φ_1	φ_2	a	b	c	h
1	14	0	6	0,5	30	45	5	3	4	2
2	0	4	8	1,2	60	15	6	3	2	4
3	12	0	3	0,9	75	30	4	4	3	3
4	0	5	16	1,5	45	15	8	5	4	3
5	5	0	10	1,4	45	60	7	6	5	5
6	0	8	0	1,2	60	45	2	4	4	4
7	18	0	15	0,4	75	45	3	3	5	5
8	0	6	6	0,8	15	30	9	8	4	7
9	15	0	20	0,6	15	60	6	8	7	3
0	0	9	3	0,7	45	75	5	6	2	4

10.1 Приклад виконання завдання

Плоска рама, що зображена на рис.10.6, навантажена силою P , напрямок якої вказує кут α , моментом M і розподіленням інтенсивності навантаження q . Геометричні розміри рами визначені розмірами a , b , h .

Визначити опорні реакції заданої рами в точках А і В, виконати статичну перевірку знайдених реакцій.

В остаточних розрахунках прийняти:

$$P = 10 \text{ кН}; \quad M = 5 \text{ кНм}; \quad q = 2 \text{ кН/м}; \quad \alpha = 60^\circ;$$

$$a = 2 \text{ м}; \quad b = 3 \text{ м}; \quad h = 2,5 \text{ м}.$$

Розв'язання. Опори А і В є плоскими шарнірами, в яких реакції розкладаємо на складові по вертикалі та горизонталі.

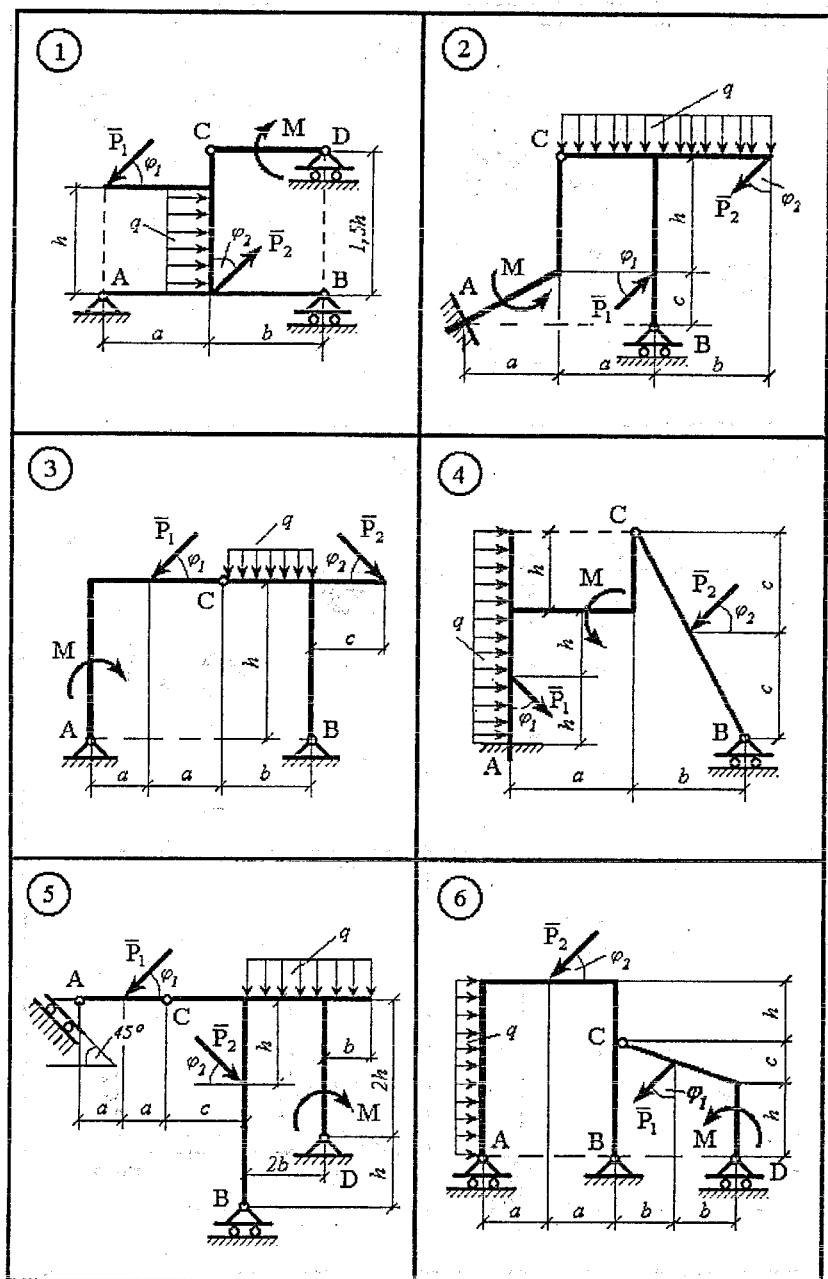


Рисунок 10.1

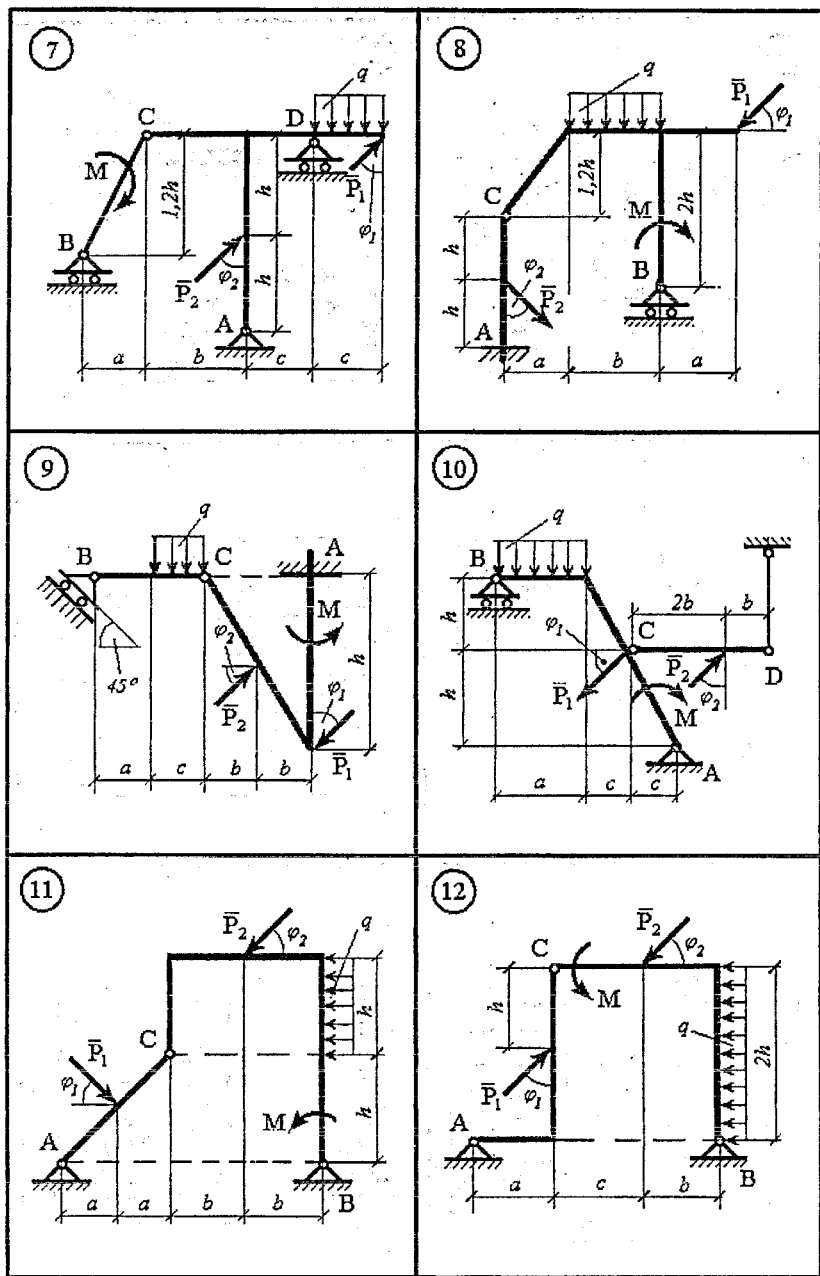
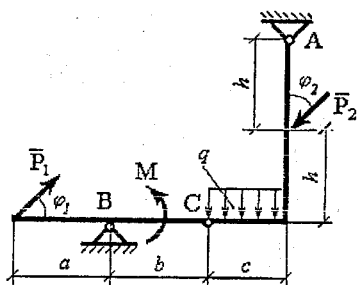
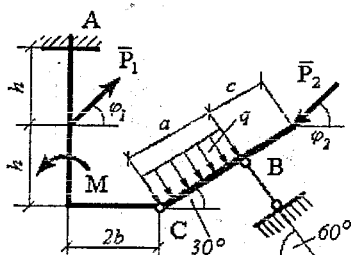


Рисунок 10.2

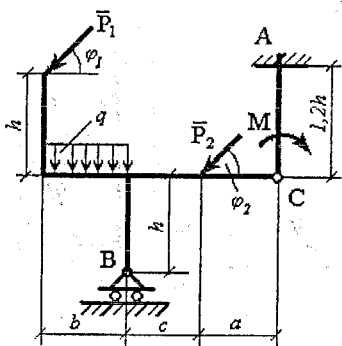
13



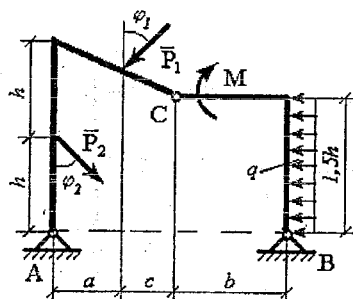
14



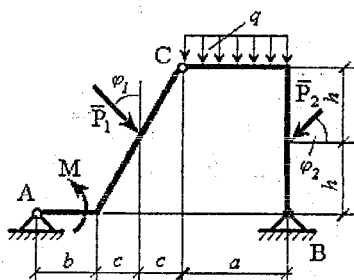
15



16



17



18

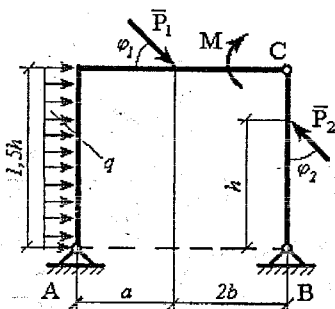
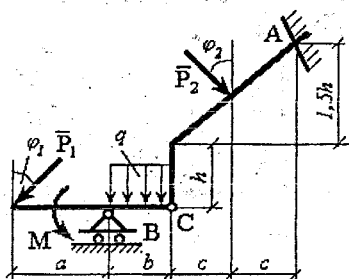
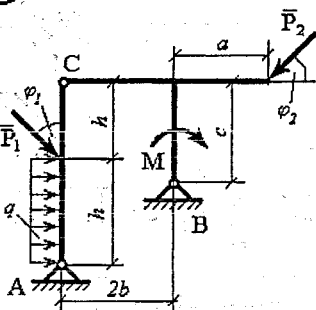


Рисунок 10.3

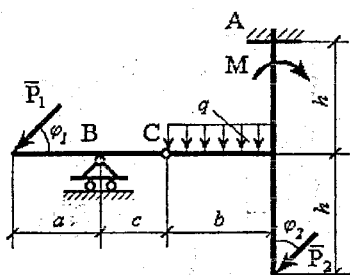
(19)



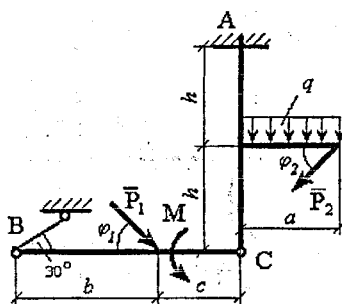
(20)



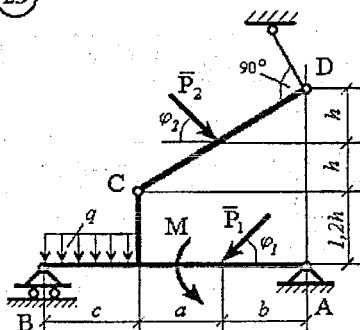
(21)



(22)



(23)



(24)

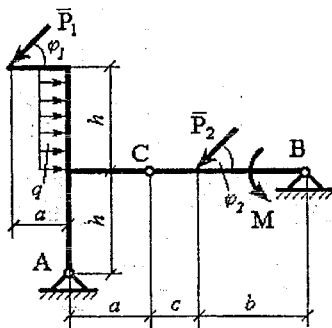
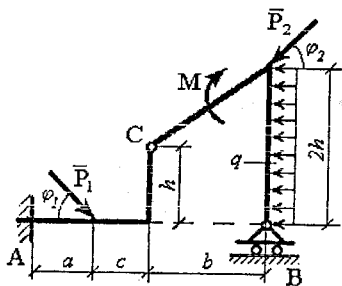
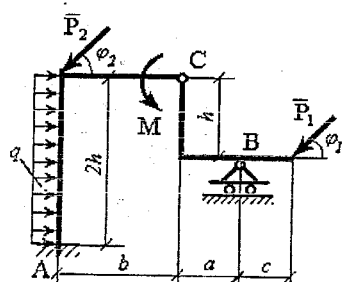


Рисунок 10.4

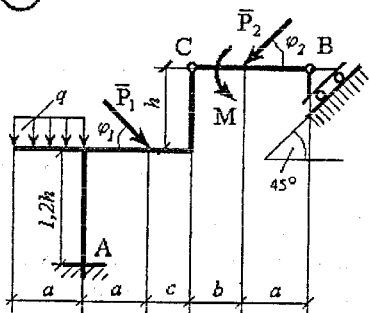
25



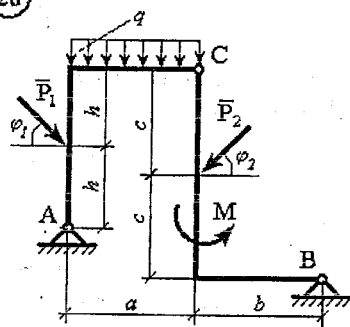
26



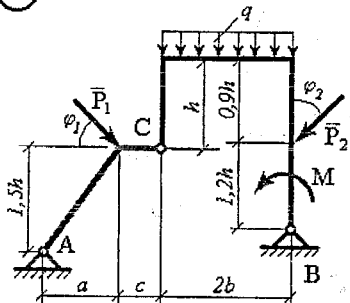
27



28



29



30

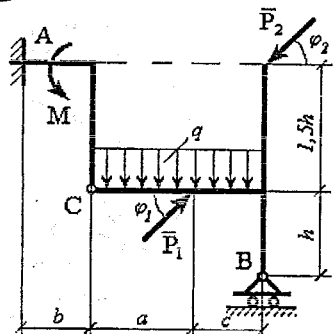


Рисунок 10.5

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A;$$

$$\bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B.$$

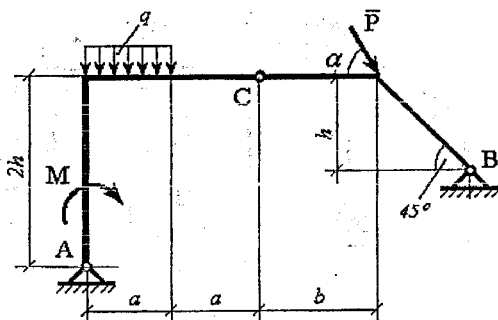


Рисунок 10.6

Згідно з принципом віртуальних переміщень сума елементарних робіт активних сил рівна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{(a)} = 0. \quad (10.1)$$

Щоб знайти силу $\bar{X}_A$ створюємо умови, при яких вона стає активною, тобто виконує роботу. Для цього в опорі А звільняємось від в'язі і надаємо віртуальне переміщення δS_A по горизонталі, як показано на рис.10.7.

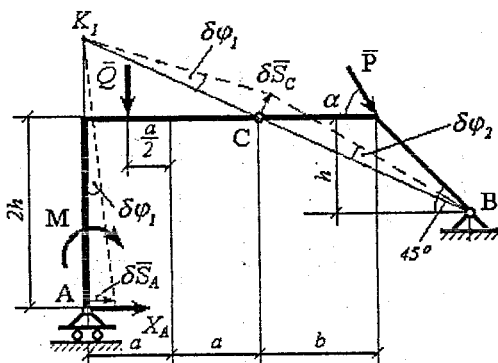


Рисунок 10.7

При такій умові рама перетворюється в механізм, де частина рами AC – назовемо її лівою частиною, і BC – правою частиною, здійснюють віртуальні переміщення як тверді тіла. Ліва частина виконує поворот навколо миттєвого центра точки K_1 на кут $\delta \varphi_1$, а права – навколо центра B

на кут $\delta\varphi_2$. Складемо рівняння згідно з принципом (10.1) для ситуації зображеної на рис.10.7.

$$\sum \delta A_k^{(a)} = X_A \cdot K_1 A \cdot \delta\varphi_1 - M \cdot \delta\varphi_1 - Q \cdot \frac{a}{2} \cdot \delta\varphi_1 - P \cdot \sin\alpha \cdot h \cdot \delta\varphi_2 + P \cdot \cos\alpha \cdot h \cdot \delta\varphi_2 \quad (10.2)$$

Точка С є спільною для лівої та правої частин, тому:

$$\delta S_C = K_1 C \cdot \delta\varphi_1 = BC \cdot \delta\varphi_2. \quad (10.3)$$

Звідки

$$\delta\varphi_2 = \frac{K_1 C}{BC} \cdot \delta\varphi_1 = \frac{2a}{b+h} \cdot \delta\varphi_1.$$

Підставляємо $\delta\varphi_2$ в формулу (10.2).

$$X_A \cdot K_1 A \cdot \delta\varphi_1 - M \cdot \delta\varphi_1 - Q \cdot 0,5 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 - P \cdot h \cdot \sin\alpha \cdot \frac{2a}{b+h} \cdot \delta\varphi_1 + P \cdot h \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2a}{b+h} \delta\varphi_1 = 0.$$

Віртуальне переміщення $\delta\varphi_1 \neq 0$, тому скоротивши на нього, отримуємо:

$$X_A = \frac{(b+h)(M + 0,5aQ) + 2Pah(\sin\alpha - \cos\alpha)}{K_1 A(b+h)}.$$

Попередньо визначимо силу Q рівномірно розподіленого навантаження:

$$Q = q \cdot a = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН}.$$

З рис.10.7 визначаємо $K_1 A$:

$$K_1 A = 2h + \frac{2ah}{b+h} = 2h \frac{a+b+h}{b+h}.$$

Тоді реакція X_A визначається за формулою:

$$X_A = \frac{(b+h)(M + 0,5aQ) + 2Pah(\sin\alpha - \cos\alpha)}{2h(a+b+h)}. \quad (10.4)$$

Визначення реакції Y_A . Надаємо віртуального переміщення δS_A в точці А так, щоб Y_A стала активною. Тоді створюється така ситуація, яка зображена на рис.10.8. Для правої частини рами центром повороту залишається точка В, а для лівої частини таким центром є точка K_2 . Віртуальні кутові переміщення для лівої і правої частин рами відповідно рівні $\delta\varphi_1$ і $\delta\varphi_2$.

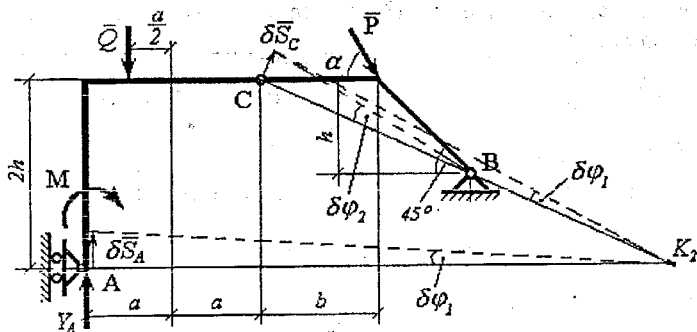


Рисунок 10.8

Складаємо рівняння робіт згідно з принципом (10.1)

$$\sum \delta A_k^{(a)} = Y_A \cdot K_2 A \cdot \delta \varphi_1 - M \cdot \delta \varphi - Q(K_2 A - 0,5a) \delta \varphi_1 - \delta \varphi_2 + P \cdot \cos \alpha \cdot h \cdot \delta \varphi_2 = 0. \quad (10.5)$$

По рис.10.8 визначаємо $K_2 A$ і співвідношення між кутовими переміщеннями $\delta \varphi_1$ і $\delta \varphi_2$.

$$K_2 A = 2a + b + b + 2h = 2(a + b + h);$$

$$\delta S_C = K_2 C \cdot \delta \varphi_1 = BC \cdot \delta \varphi_2; \quad K_2 C = 2BC; \quad \delta \varphi_2 = 2 \delta \varphi_1.$$

Реакція Y_A остаточно буде рівна:

$$Y_A = \frac{Q(1,5a + 2b + 2h) + 2Ph(\sin \alpha - \cos \alpha) - M}{2(a + d + h)}. \quad (10.6)$$

Визначення реакції X_B . Надаємо опорі B віртуального переміщення δS_B по горизонталі. Ліва частина набуває віртуального переміщення $\delta \varphi_1$ навколо центра A, а права – віртуального переміщення $\delta \varphi_2$ навколо миттєвого центра точки K_3 , як показано на рис.10.9.

Складаємо суму віртуальних робіт.

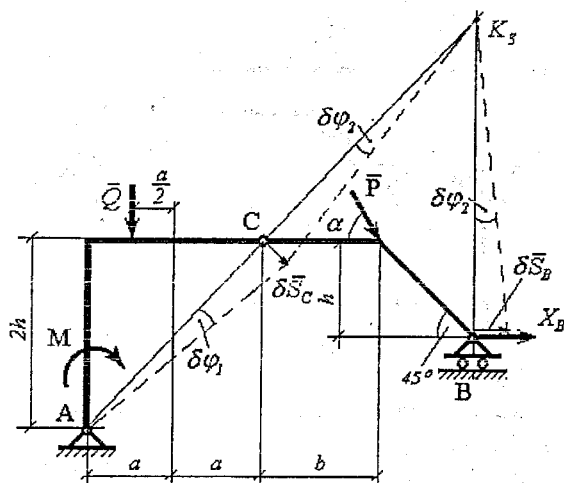


Рисунок 10.9

$$\begin{aligned} \sum \partial A_k^{(a)} = & M \cdot \partial \varphi_1 - 0,5Qa \cdot \partial \varphi_1 + P \cos \alpha \cdot (K_3B - h) \partial \varphi_2 + P \sin \alpha \cdot h \partial \varphi_2 + \\ & + X_B \cdot K_3B \partial \varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Знаходимо відстань K_3B і співвідношення між переміщеннями $\delta \varphi_1$ і $\delta \varphi_2$ по рис.10.9.

$$K_3B = h + \frac{h}{a}(b+h) = \frac{h}{a}(a+b+h), \quad \delta S_C = AC \cdot \delta \varphi_1 = K_3C \cdot \delta \varphi_2,$$

$$\delta \varphi_2 = \frac{AC}{K_3C} \delta \varphi_1, \quad \frac{AC}{K_3C} = \frac{2a}{b+h}, \quad \delta \varphi_2 = \frac{2a}{b+h} \delta \varphi_1.$$

Після підстановки K_3B та $\delta \varphi_2$ в рівняння (10.7) і спрощення виразів для X_B отримуємо:

$$X_B = - \frac{(b+h)(M + 0,5aQ) + 2Ph[(b+h)\cos\alpha + h\sin\alpha]}{2h(a+b+h)}. \quad (10.8)$$

Визначасмо реакцію Y_B . Надаємо точці B вертикальне віртуальне переміщення δS_B , отримуємо ситуацію, що зображена на рис.10.10.

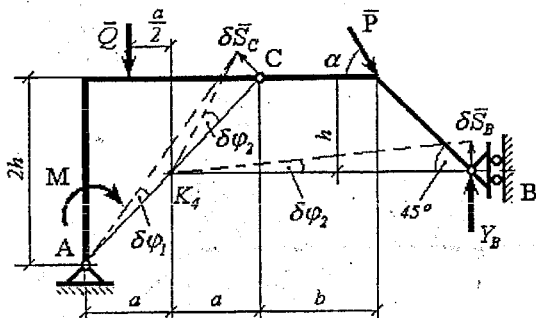


Рисунок 10.10

Ліва частина обертається навколо центра A на кут $\delta\varphi_1$, а права – навколо точки K_4 на кут $\delta\varphi_2$.

Складаємо суму елементарних робіт згідно з (10.1)

$$\sum \delta A_k^{(a)} = -M \cdot \delta\varphi_1 - 0,5a \cdot \delta\varphi_1 - P \sin \alpha \cdot (K_4 B - h) \cdot \delta\varphi_2 - P \cos \alpha \cdot h \cdot \delta\varphi_2 + Y_B \cdot K_4 B \cdot \delta\varphi_2 = 0. \quad (10.9)$$

Знаходимо $K_4 B$ і співвідношення між переміщеннями $\delta\varphi_1$ і $\delta\varphi_2$.

$$K_4 B = a + b + h, \quad \delta S_C = K_4 C \cdot \delta\varphi_1 = AC \cdot \delta\varphi_2,$$

$$AC = 2 \cdot K_4 C, \quad \delta\varphi_2 = 2 \cdot \delta\varphi_1.$$

Тоді:

$$Y_B = \frac{M + 0,5aQ + 2P[(b+a) \sin \alpha + h \cos \alpha]}{2(a+b+h)}. \quad (10.10)$$

Підставляємо P , M , Q , α , a , b , h , що задані в умові прикладу. За формулами (10.4), (10.6), (10.8) і (10.10) обчислюємо невідомі реакції.

$$X_A = \frac{(3+2,5)(5+0,5 \cdot 4 \cdot 2) + 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 2,5(0,866 - 0,5)}{2 \cdot 2,5(2+3+2,5)} = 2,296 \text{ кН}.$$

$$Y_A = \frac{4(1,5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2,5) + 2 \cdot 10 \cdot 2,5(0,866 - 0,5) - 5}{2(2+3+2,5)} = 4,62 \text{ кН}.$$

$$Y_B = -\frac{(3+2,5)(5+0,5 \cdot 4 \cdot 2) + 2 \cdot 10 \cdot 2,5 \cdot [(3+2,5) \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,866]}{2 \cdot 2,5 \cdot (2+3+2,5)} = -7,296 \text{ кН}.$$

$$Y_B = \frac{5 + 0,5 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 10 \cdot [(2+3) \cdot 0,866 + 2,5 \cdot 0,5]}{2(2+3+2,5)} = 8,04 \text{ кН.}$$

Виконаємо перевірку знайдених реакцій. Для цього розглянемо розрахункову схему на рис.10.11, де в опорах А і В зображені складові реакцій і складемо рівняння на основі рівнянь рівноваги для плоскої довільної системи сил в системі координат хАу.

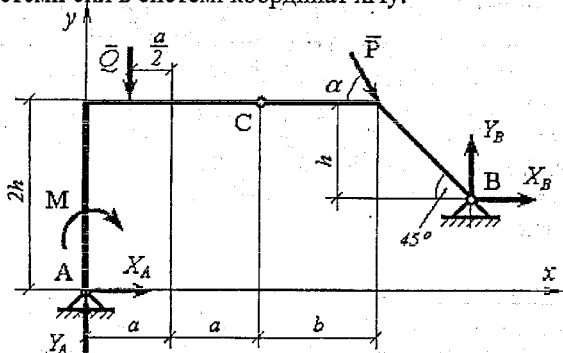


Рисунок 10.11

Якщо реакції знайдені правильно, то повинні виконуватись рівняння:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_i = 0. \quad (10.12)$$

Складаємо такі рівняння і підставляємо в них дані умови задачі і знайдені реакції.

$$\sum X_i = X_A + P \cos \alpha + X_B = 2,296 + 10 \cdot 0,5 - 7,296 = 0;$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q - P \sin \alpha + Y_B = 4,62 - 4 - 10 \cdot 0,866 + 8,04 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_{C_i} &= X_A \cdot 2h - Y_A \cdot 2a - M + Q \cdot 1,5a - P \sin \alpha \cdot b + X_B \cdot h + Y_B(b+h) = \\ &= 2,296 \cdot 2 \cdot 2,5 - 4,62 \cdot 2 \cdot 2 - 5 + 4 \cdot 1,5 \cdot 2 - 10 \cdot 0,866 \cdot 3 + (-7,296) \cdot 2,5 + \\ &+ 8,04 \cdot (3 + 2,5) = -18,48 + 11,48 - 5 + 12 - 25,98 - 18,24 + 44,22 = \\ &= 67,7 - 67,7 = 0. \end{aligned}$$

Таким чином переконуємось, що реакції опор А і В знайдені правильно. Відповідь: $X_A = 2,296 \text{ кН}$, $Y_A = 4,62 \text{ кН}$, $X_B = -7,296 \text{ кН}$, $Y_B = 8,04 \text{ кН}$.

Д.11 Розрахунок характеристик руху механічної системи за допомогою загального рівняння динаміки

Механічна система (рис. 11.1 – 11.5) складається з вантажу 1 масою m_1 , двох шківів 2 і 3 з масами m_2 і m_3 , радіусами ступенів r_2 і R_2 , r_3 і R_3 , та радіусами інерції $i_2 = 1,2 \cdot r_2$, $i_3 = 1,5 \cdot r_3$ відповідно і суцільного циліндричного катка 4 масою m_4 . На шків 2 або 3, діє постійний момент M . Вантаж 1, або каток 4, лежать на гладенькій горизонтальній або похилій площині з кутом нахилу α чи β до горизонталі. Тертя при русі вантажу 1 і ковзання при коченні катка 4 відсутні. Система розташована в вертикальній площині.

Визначити прискорення вантажу 1 і натяг троса, який до нього закріплений, якщо масою тросів і тертям в підшипниках шківів нехтуємо.

В остаточних розрахунках прийняти значення параметрів з таблиці 11.1 по варіантах.

Таблиця 11.1

В-т	кг				см				Н·м	град.	
	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	R_2	r_3	R_3	M	α	β
1	5	0	2	3	10	25	18	35	8	15	45
2	15	4	0	10	8	32	20	36	6	30	60
3	12	0	3	8	12	24	15	30	5	45	30
4	8	5	0	2	6	18	4	32	4	600	15
5	14	0	6	4	9	27	10	20	12	45	60
6	6	2	0	3	3	12	6	24	6	15	60
7	20	0	15	8	14	28	15	30	5	45	75
8	10	6	0	5	8	16	8	32	8	30	45
9	16	0	10	6	6	9	16	32	10	15	45
0	18	3	0	12	5	20	8	24	5	45	60

11.1 Приклад виконання завдання

Для механічної системи, яка наведена на рис. 11.6, задано: $m_1 = 30$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 2$ кг, $m_4 = 1$ кг, $R_1 = 0,1$ м, $R_2 = 0,3$ м, $R_3 = 0,4$ м, $\alpha = 30^\circ$. Радіус інерції ступінчатого барабана 2 рівний $i = 0,25$ м, коефіцієнт тертя ковзання тіла 3 по горизонтальній площині $f = 0,2$. Циліндричне тіло 4 котиться по похилій площині без тертя і без ковзання.

Визначити прискорення тіла 1 – a_1 , тіла 3 – a_3 , натяги тросів N_1 і N_3 , до яких ці тіла прикріплені.

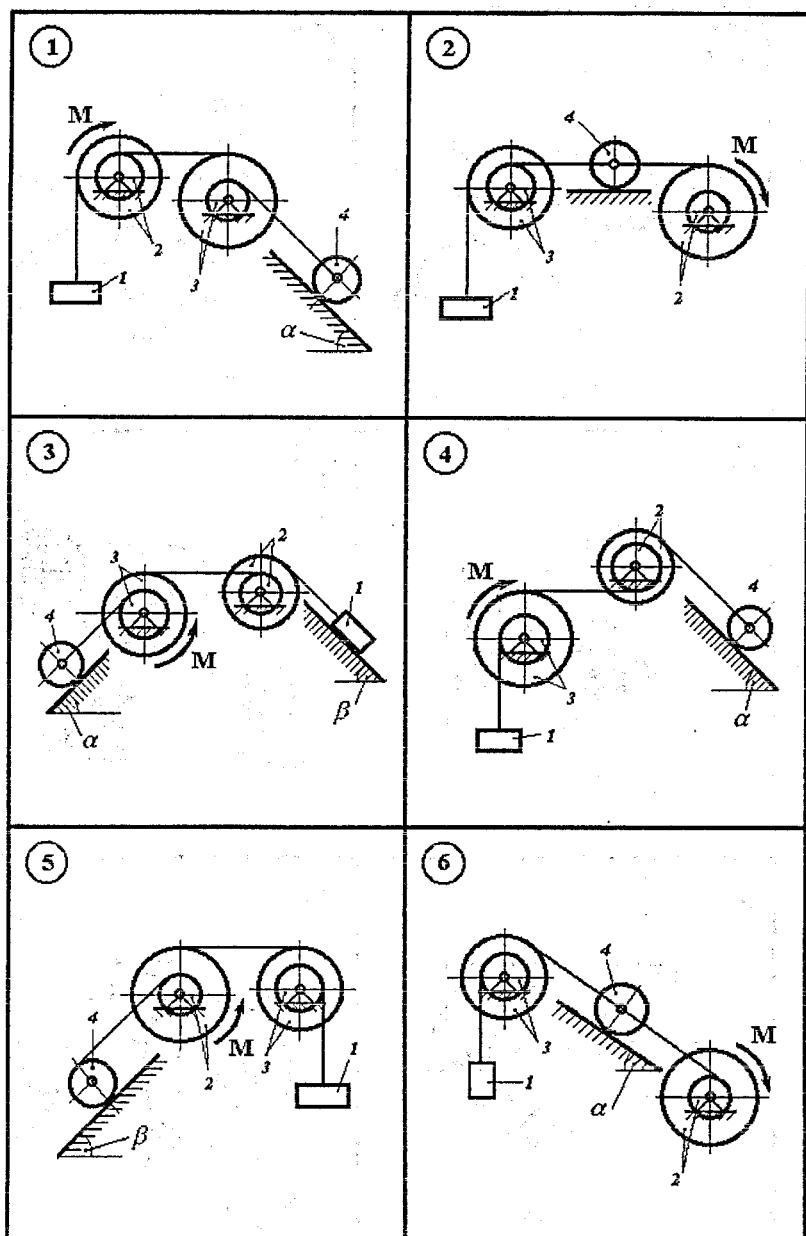


Рисунок 11.1

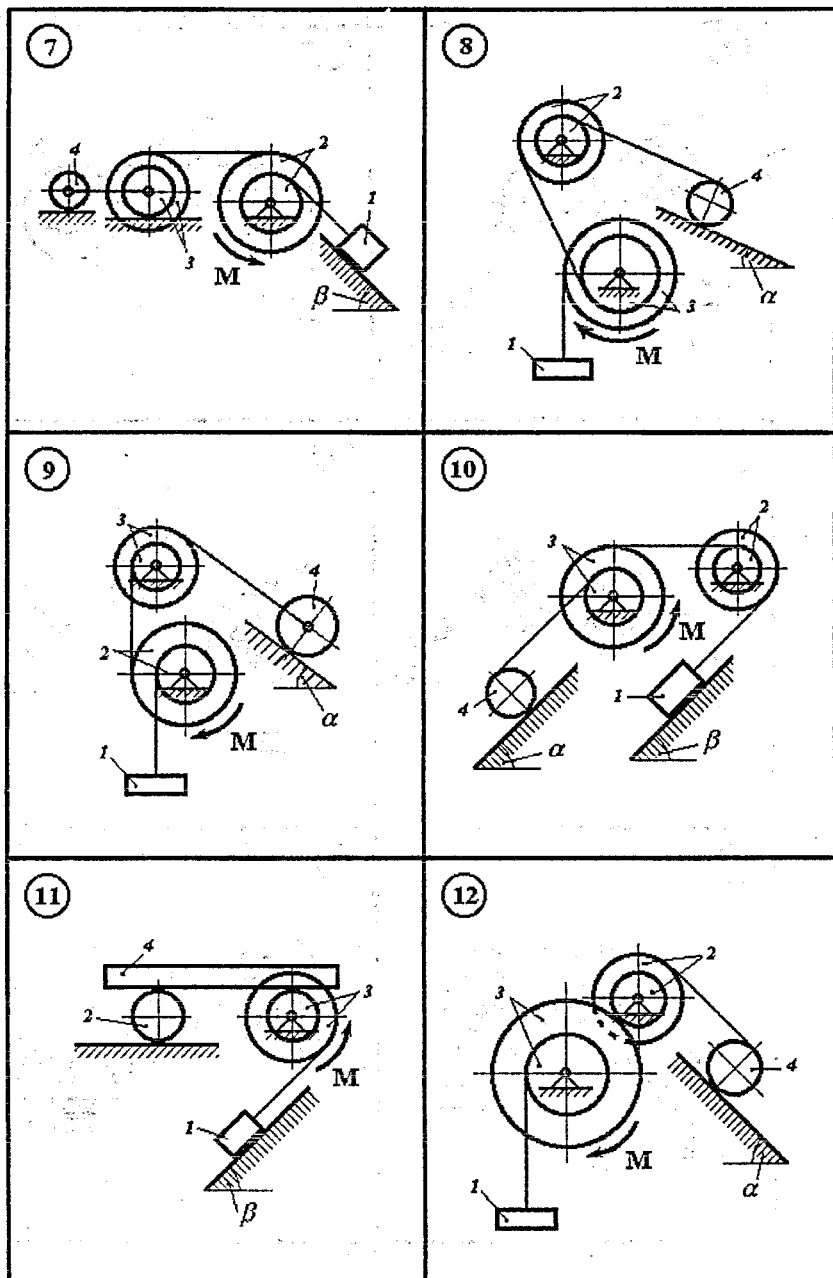


Рисунок 11.2

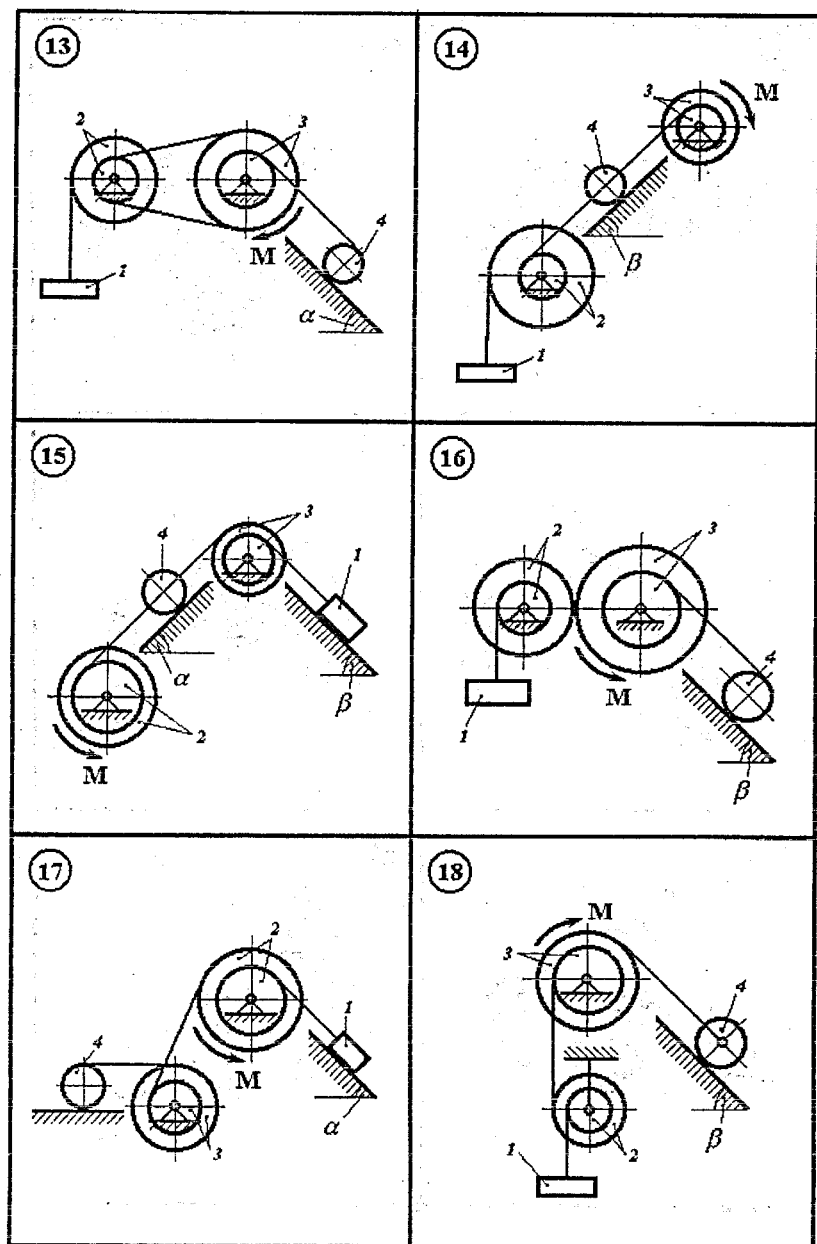


Рисунок 11.3

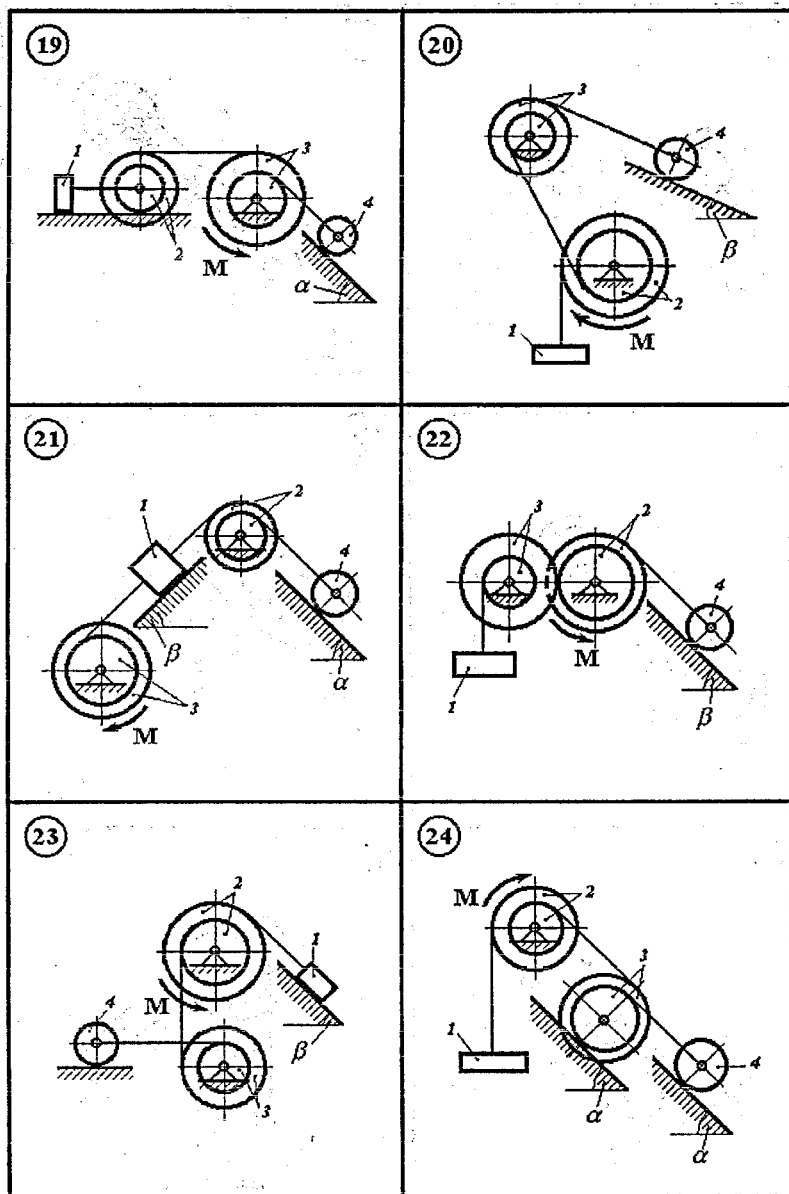
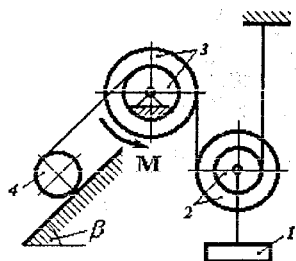
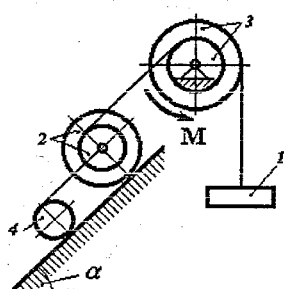


Рисунок 11.4

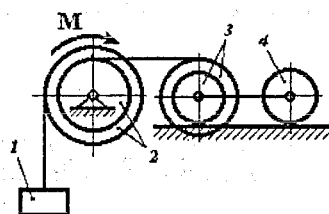
25



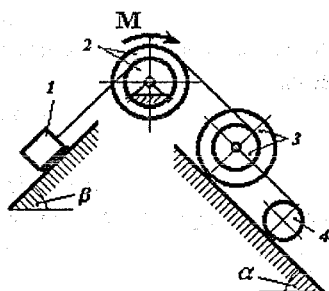
26



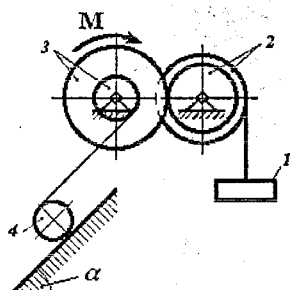
27



28



29



30

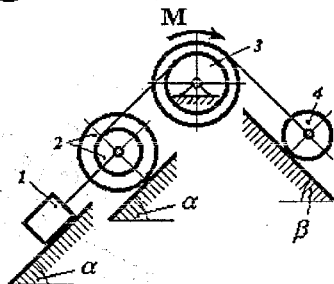


Рисунок 11.5

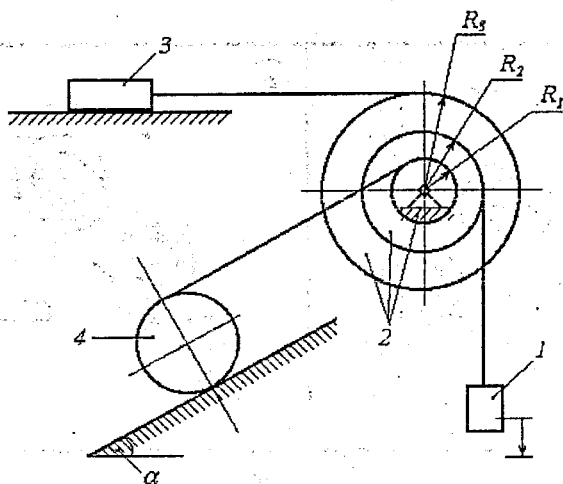


Рисунок 11.6

Розв'язання. Для розв'язування задачі використовуємо загальне рівняння динаміки:

$$\sum \delta A_k^{(a)} + \sum \delta A_k^{(ik)} = 0. \quad (11.1)$$

Покажемо для всіх тіл механізму активні сили, напрямки прискорень, інерційні сили і віртуальні переміщення, що зображені на рис. 11.7.

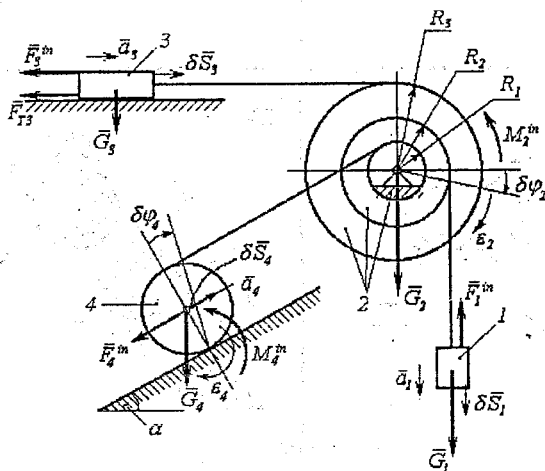


Рисунок 11.7

Активні сили: $G_1, G_2, G_3, G_4, F_{T_3}$.

Інерційні сили: $F_1^{in}, M_2^{in}, F_3^{in}, F_4^{in}, M_4^{in}$.

Віртуальні переміщення:

для тіла 1 – δS_1 , для тіла 2 – $\delta \varphi_2$, для тіла 3 – δS_3 , для тіла 4 – $\delta \varphi_4$ і δS_4 .

Складаємо загальне рівняння динаміки відповідно до формули (11.1).

$$G_1 \cdot \delta S_1 - F_{T_3} \cdot \delta S_3 - G_4 \cdot \delta S_4 \cdot \sin \alpha - F_1^{in} \cdot \delta S_1 - M_2^{in} \cdot \delta \varphi_2 - \\ - F_3^{in} \cdot \delta S_3 - F_4^{in} \cdot \delta S_4 - M_4^{in} \cdot \delta \varphi_4 = 0. \quad (11.2)$$

В рівняння (11.2) не ввійшли сили G_2 і G_3 тому, що вони роботи не виконують. Виразимо віртуальні переміщення δS_4 , $\delta \varphi_4$, δS_3 і $\delta \varphi_2$ через δS_1 .

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta S_1}{R_2} = \frac{\delta S_3}{R_3} = \frac{2 \cdot \delta S_4}{R_1}; \delta \varphi_4 = \frac{\delta S_4}{R_4}.$$

Звідки:

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta S_1}{R_2}, \delta S_3 = \frac{R_3}{R_2} \delta S_1, \delta S_4 = \frac{R_1}{2 \cdot R_2} \delta S_1, \delta \varphi_4 = \frac{R_1}{2 \cdot R_2 \cdot R_4} \delta S_1 \quad (11.3)$$

Моменти інерції тіл 2 і 4 відповідно рівні:

$$I_2 = m_1 \cdot i^2, I_4 = \frac{1}{2} m_4 \cdot R_4^2. \quad (11.4)$$

Знайдемо активні сили:

$$G_1 = m_1 \cdot g, G_4 = m_4 \cdot g, F_{T_3} = f \cdot m_3 \cdot g. \quad (11.5)$$

Знайдемо інерційні сили:

$$F_1^{in} = m_1 \cdot a_1, M_2^{in} = I_2 \cdot \varepsilon_2, F_3^{in} = m_3 \cdot a_3, F_4^{in} = m_4 \cdot a_4, M_4^{in} = I_4 \cdot \varepsilon_4.$$

Виразимо кутові прискорення E_2 і E_4 , а також прискорення a_3 і a_4 через a_1 .

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2} = \frac{a_3}{R_3} = \frac{2 \cdot a_4}{R_1}; \varepsilon_4 = \frac{a_4}{R_4},$$

$$\text{тому } a_3 = \frac{R_3}{R_2} \cdot a_1, a_4 = \frac{R_1}{2 \cdot R_2} \cdot a_1, \varepsilon_4 = \frac{R_1}{2 \cdot R_2 \cdot R_4} \cdot a_1.$$

Тоді інерційні сили матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} M_2^{\text{ин}} &= m_2 \cdot i^2 \cdot \frac{a_1}{R_2}, \quad F_3^{\text{ин}} = m_3 \cdot \frac{R_2}{R_2} \cdot a_1, \quad F_4^{\text{ин}} = m_4 \cdot \frac{R_1}{2 \cdot R_2} \cdot a_1, \\ M_4^{\text{ин}} &= \frac{1}{4} \cdot m_4 \cdot \frac{R_4 \cdot R_1}{R_2} \cdot a_1. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Підставляємо активні сили (11.5), інерційні сили (11.6) і віртуальні переміщення (11.3) в рівняння (11.2)

$$\begin{aligned} m_1 \cdot g \cdot \delta S_1 - f \cdot m_3 \cdot g \cdot \frac{R_2}{R_2} \cdot \delta S_1 - m_4 \cdot g \cdot \frac{R_1}{2 \cdot R_2} \cdot \delta S_1 \cdot \sin \alpha - m_1 \cdot a_1 \cdot \delta S_1 - \\ - m_2 \cdot i^2 \cdot \frac{a_1}{R_2} \cdot \frac{\delta S_1}{R_2} - m_3 \cdot \frac{R_2}{R_2} \cdot a_1 \cdot \frac{R_2}{R_2} \cdot \delta S_1 - m_4 \cdot \frac{R_1}{2 \cdot R_2} \cdot a_1 \cdot \frac{R_1}{2 \cdot R_2} \delta S_1 - \\ - \frac{1}{4} \cdot m_4 \cdot \frac{R_4 \cdot R_1}{R_2} \cdot a_1 \cdot \frac{R_1}{2 \cdot R_2 \cdot R_4} \delta S_1 = 0. \end{aligned}$$

Після спрощення і скорочення на $\delta S_1 \neq 0$ одержуємо рівняння

$$\left(m_1 - f \cdot m_3 \cdot \frac{R_2}{R_2} - m_4 \cdot \frac{R_1}{2 \cdot R_2} \cdot \sin \alpha \right) \cdot g = a_1 \cdot \left[m_1 + m_2 \cdot \left(\frac{i}{R_2} \right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{R_2}{R_2} \right)^2 + \frac{3}{8} \cdot m_4 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]$$

звідки

$$a_1 = \frac{m_1 - f \cdot m_3 \cdot \frac{R_2}{R_2} - m_4 \cdot \frac{R_1}{2 \cdot R_2} \cdot \sin \alpha}{m_1 + m_2 \cdot \left(\frac{i}{R_2} \right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{R_2}{R_2} \right)^2 + \frac{3}{8} \cdot m_4 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2} \cdot g.$$

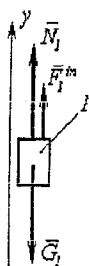
Підставимо дані умови:

$$a_1 = \frac{30 - 0,2 \cdot 2 \cdot \frac{0,4}{0,3} - 1 \cdot \frac{0,1}{2 \cdot 0,3} \cdot 0,5}{30 + 5 \cdot \left(\frac{0,25}{0,3} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{0,4}{0,3} \right)^2 + \frac{3}{8} \cdot 1 \cdot \left(\frac{0,1}{0,3} \right)^2} \approx 0,86 \cdot g \approx 8,43 \text{ м/с}^2.$$

$$a_3 = \frac{R_2}{R_2} \cdot a_1 = \frac{0,4}{0,3} \cdot 0,86 \cdot g \approx 1,15 \cdot g \approx 11,24 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення натягів тросів, що прикріплені до тіл 1 і 3, застосуємо принцип Даламбера.

Розглянемо сили, які діють на вантаж 1 і покажемо їх на рис. 11.8.



Згідно з принципом Даламбера

$$\bar{G}_1 + \bar{N}_1 + \bar{F}_1^{\text{in}} = 0.$$

Проектуємо цю векторну рівність на вісь oy , отримаємо:

$$-G_1 + N_1 + F_1^{\text{in}} = 0.$$

Звідки

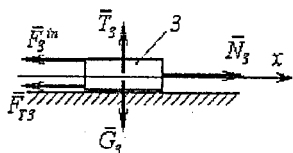
$$N_1 = G_1 - F_1^{\text{in}}.$$

Або:

$$N_1 = m_1 \cdot g - m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot (g - a_1) = 30 \cdot (9,8 - 8,43) = 41,1 \text{ Н}.$$

Рисунок 11.8

Розглянемо сили, які діють на тіло 3, що зображено на рис. 11.9., на основі



принципу Даламбера

$$\bar{G}_3 + \bar{T}_3 + \bar{N}_3 + \bar{F}_{T_3} + \bar{F}_3^{\text{in}} = 0.$$

Проектуємо це рівняння на вісь ox .

$$N_3 - F_{T_3} - F_3^{\text{in}} = 0.$$

Рисунок 11.9

Звідки:

$$N_3 = F_{T_3} + F_3^{\text{in}} = f \cdot m_3 \cdot g + m_3 \cdot a_3 = m_3 \cdot (f \cdot g + a_3) = 2 \cdot (0,2 \cdot 9,8 + 11,24) = 26,4 \text{ Н}.$$

Відповідь: $a_1 = 8.43 \text{ м/с}^2$, $N_3 = 26.4 \text{ н}$.

Д. 12 Дослідження руху матеріальної системи з використанням рівняння Лагранжа 2-го роду

Матеріальна систем (рис. 11.1 – 11.5) починає рухатись із стану спокою. Знайти прискорення та швидкість з якою опускається тіло 1 після того, коли воно пройде шлях S . Масами шнурів, силами опору знехтувати. Тіла котяться по поверхні без ковзання.

Величини для розрахунків взяти з табл. 11.1 (С.123).

12.1 Приклад виконання завдання

Знайти прискорення та швидкість центра мас тіла 1 (рис. 12.1), коли він пройде відстань S_1 , якщо матеріальна система починає рухатись із стану спокою. Масою тросів знехтувати. Тіла 1 та 3 переміщуються без ковзання. Прийняти: $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 1$ кг; $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $r_3 = 0,2$ м; $\rho_2 = 0,3$ м; $\rho_3 = 0,25$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $S_1 = 0,4$ м.

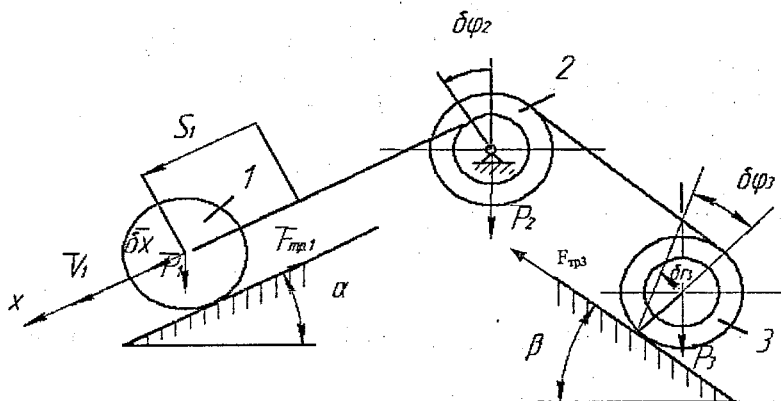


Рисунок 12.1

Розв'язання. Положення тіл системи (рис. 12.1) визначаємо узагальненою координатою x .

Для дослідження руху матеріальної системи застосуємо рівняння Лагранжа 2-го роду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (12.1)$$

На рис. 12.1 $V_1 = \dot{x}$ - узагальнена швидкість. Кінетична енергія системи при переміщенні центра мас тіла 1 на величину S_1 (підрозділ Д. 5)

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{зс}} V_1^2, \quad (12.2)$$

де $m_{\text{зс}} = \frac{3}{2} m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{4} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right)$ - зведена маса системи.

Знайдемо ліву частину рівняння (12.1)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_{\text{зс}} V_1.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m_{\text{зс}} a_1, \quad (12.4)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{dV_1}{dt}.$$

Узагальнену силу Q_x знайдемо за формулою

$$Q_x = \frac{\sum \delta A}{\delta x}, \quad (12.5)$$

де $\sum \delta A$ - сума віртуальних робіт активних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{F}_{\text{мр1}}$ і $\bar{F}_{\text{мр3}}$ (рис. 12.1);

δx - варіація узагальненої координати x . Горизонтальні складові $\bar{F}_{\text{мр1}}$ і $\bar{F}_{\text{мр3}}$ реакцій неідеальних (жорстких) похилих поверхонь віднесені до активних сил.

Робота сил $\bar{P}_1, \bar{F}_{\text{мр1}}$ і $\bar{F}_{\text{мр3}}$ на можливих переміщеннях дорівнює нулю.

Віртуальна робота активних сил

$$\sum \delta A = P_1 \cdot \delta x \cdot \sin \alpha - P_3 \cdot \delta r_3 \cdot \sin \beta, \quad (12.6)$$

$$\text{де } P_1 = m_1 \cdot g, \quad P_3 = m_3 \cdot g, \quad \delta r_3 = \delta x \frac{R_2}{2r_2}.$$

$$\text{Тепер} \quad \sum \delta A = g \left(m_1 \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \cdot \sin \beta \right) \cdot \delta x. \quad (12.7)$$

Тоді з формули (12.5), враховуючи (12.7), отримаємо:

$$Q_x = g \left(m_1 \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \cdot \sin \beta \right). \quad (12.8)$$

Рівняння Лагранжа 2-го роду (12.1) при врахуванні (12.3), (12.4) і (12.8) набуває вигляду:

$$m_{\text{зс}} a_1 = g \left(m_1 \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \cdot \sin \beta \right)$$

звідки:

$$a_1 = \frac{g}{m_{3g}} \left(m_1 \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \cdot \sin \beta \right). \quad (12.9)$$

Або, підставляючи дані з умови задачі,

$$a_1 = \frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0,4}{2 \cdot 0,3} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{3}{2} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0,35^2}{0,3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0,4^2}{0,3^2} \left(1 + \frac{0,25^2}{0,3^2} \right)} \cdot 9,81 = 2,41 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки $a_1 = \frac{dV_1}{dt} \cdot \frac{dS_1}{dS_1} = V_1 \cdot \frac{dV_1}{dS_1}$, тоді із формули (12.9) знаходимо швидкість V_1

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{S_1 \cdot g \left(m_1 \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \cdot \sin \beta \right)}{m_{3g}}} \quad (12.10)$$

Підставляючи числові дані, отримаємо:

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0,4}{2 \cdot 0,3} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{3}{2} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0,35^2}{0,3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0,4^2}{0,3^2} \left(1 + \frac{0,25^2}{0,3^2} \right)}} = 1,3 \text{ м/с.}$$

Відповідь: $a_1 = 2,41 \text{ м/с}^2$, $v_1 = 1,3 \text{ м/с}$.

Д. 13 Дослідження вільних коливань матеріальної системи

У матеріальній системі (рис. 6.1 – 6.10) після t_1 з початку руху раптово зупинився ротор електродвигуна. Знайти закон руху тіла 3 якщо до зупинки електродвигун має момент M_p (моментом опору руху можна нехтувати).

В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Тіло 1 (схеми 2, 10, 19, 30) переміщується по гладенькій похилій площині. Масами і пружністю пасів, тросів та їх ковзанням по шківів знехтувати. Однорідне тіло 3 та ступінчастий шків 2 обертаються навколо паралельних осей. Масою пружної муфти 4 знехтувати.

Дані для розрахунку взяти з табл. 13.1, де прийняті такі позначення: m_1, m_2, m_3 – маса тіл 1, 2 та 3; m_5 – маса ротора електродвигуна; I_5 – момент інерції ротора відносно осі обертання; C – жорсткість пружної муфти 4; R_3, R_2, r_2 – розміри тіл 3 та 2; i_2 – радіус інерції тіла 2.

13.1 Приклад виконання завдання

Матеріальна система (рис. 13.1) починає рухатись із стану спокою під дією моменту M_p електродвигуна 5. Через t_1 секунд ротор електродвигуна раптово зупинився. Знайти закон руху тіла 1. Осі тіл 1, 5 та 2 лежать в горизонтальній площині.

Таблиця 13.1

В-т	m_1 , кг	$m_2 =$ m_5 , кг	m_3 , кг	I_5 , кг·м ²	$2R_2$, м	$2r_2$, м	$2i_2$, м	$2R_3$, м	M_p , Н·м	$\frac{C}{H \cdot m}$, рад	t_1 , с
1	150	10	2	0,005	0,3	0,2	0,25	0,1	100+9(7-t)	1600	1,2
2	200	20	3	0,01	0,4	0,25	0,3	0,15	150+11(7-t)	2000	1,4
3	250	30	4	0,015	0,5	0,3	0,4	0,2	150+13(7-t)	1800	1,6
4	300	40	5	0,02	0,6	0,4	0,5	0,1	500+20(7-t)	7000	1,8
5	350	40	6	0,015	0,55	0,35	0,4	0,16	600+62(7-t)	8000	2,0
6	300	30	4	0,01	0,5	0,3	0,4	0,2	550+5(7-t)	7500	2,2
7	250	25	3	0,05	0,45	0,2	0,3	0,15	300+27(7-t)	3800	2,4
8	200	20	3	0,01	0,35	0,15	0,2	0,2	200+15(7-t)	2600	2,6
9	150	15	2	0,004	0,3	0,1	0,2	0,1	150+10(7-t)	2500	2,8
0	200	20	3	0,08	0,4	0,2	0,3	0,2	250+20(7-t)	4000	3,0

При розрахунку прийняти: $2R_1 = 0,25\text{м}$, $2R_2 = 0,45\text{м}$, $2r_2 = 0,15\text{м}$; $2i_2 = 0,4\text{м}$;
 $m_1 = 0,5\text{кг}$; $m_2 = m_5 = 5\text{кг}$; $m_3 = 300\text{кг}$; $M_p = (1000 + 100(7-t))\text{Н} \cdot \text{м}$; $I_5 = 0,004\text{кг} \cdot \text{м}^2$;
 $C = 200000 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}$; $t_1 = 1,5\text{с}$.

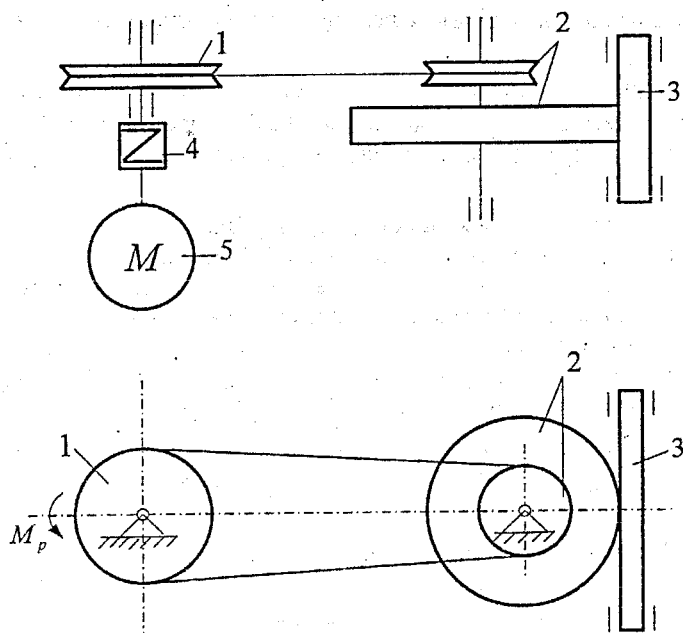


Рисунок 13.1

Розв'язання. Якщо за узагальнену координату прийняти кут повороту φ (рис. 13.2) тіла 1 від положення статичної рівноваги, тоді рівняння Лагранжа II роду запишеться:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad (13.1)$$

де T – кінетична енергія системи;

Q_{φ} – узагальнена сила узагальненої координати φ ;

$\dot{\varphi} = \omega$ – узагальнена швидкість;

φ – узагальнена координата з початком в положенні статичної рівноваги системи ($\varphi = 0$).

Знайдемо кінетичну енергію системи, яка складається з суми кінетичних енергій тіл 1, 2, 3 і 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_5, \quad (13.2)$$

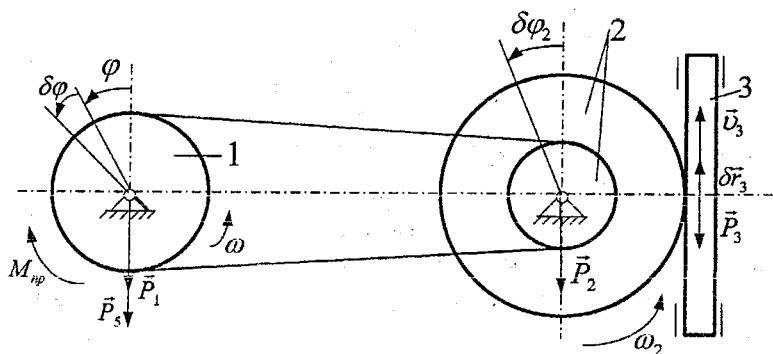


Рисунок 13.2

Тіла 1, 2 та 5 обертаються навколо нерухомих горизонтальних осей і їх кінетична енергія знаходиться за формулами:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega^2 \\ T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \\ T_5 = \frac{1}{2} I_5 \omega^2 \end{cases} \quad (13.3)$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$, $I_2 = m_2 i_2^2$ – моменти інерції відповідно тіл 1 та 2;

$$\omega_2 = \omega \cdot \frac{R_1}{r_2}.$$

Тіло 3 переміщується поступально із швидкістю v_3 , тоді:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2, \quad (13.4)$$

$$\text{де } v_3 = \omega \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{r_2}.$$

Кінетична енергія системи (13.2), враховуючи (13.3) та (13.4), запишеться:

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{св}} \cdot \omega^2, \quad (13.5)$$

де $I_{\text{св}} = I_5 + m_2 \cdot \frac{i_2^2 \cdot R_2^2}{r_2^2} + m_3 \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R_1^2$ – зведений момент інерції системи.

Знайдемо величини, що входять в ліву частину рівняння Лагранжа II роду (13.1).

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_{\varphi 0} \cdot \ddot{\varphi}. \end{cases} \quad (13.6)$$

Узагальнену силу Q_φ визначимо за формулою:

$$Q_\varphi = \frac{\sum \delta A}{\delta \varphi}, \quad (13.7)$$

де δA – віртуальна робота активних сил;

$\delta \varphi$ – варіація узагальненої координати φ (бажано надавати в сторону збільшення координати φ).

Визначимо віртуальну роботу δA активних сил системи (рис.13.2) враховуючи, що при зупинці ротора електродвигуна $M_p = 0$

$$\sum \delta A = -M_{10} \cdot \delta \varphi - P_3 \cdot \delta r_3, \quad (13.8)$$

де $M_{10} = C(\varphi - \varphi_{\text{н0}})$, $\varphi_{\text{н0}} = \frac{P_3}{C} \cdot \frac{R_2 \cdot R_1}{r_2}$ – статична деформація

пружної муфти, $\delta r_3 = \delta \varphi \cdot \frac{R_1}{r_2} \cdot R_2$.

Або:

$$\sum \delta A = -C \left(\varphi - \frac{P_3}{C} \cdot \frac{R_2 \cdot R_1}{r_2} \right) \delta \varphi - P_3 \frac{R_1}{r_2} \cdot R_2 \cdot \delta \varphi = -C \cdot \varphi \cdot \delta \varphi. \quad (13.9)$$

Узагальнена сила (13.7), враховуючи (13.9), запишеться:

$$Q_\varphi = -C \cdot \varphi. \quad (13.10)$$

Оскільки матеріальна система консервативна, тоді узагальнену силу можемо знайти іншим методом за формулою:

$$Q_u = - \frac{d\Pi}{d\varphi}.$$

Потенціальна енергія системи Π визначається роботою моменту пружної муфти та сили ваги тіла 3 на переміщенні системи із зміщеного положення, коли тіло 1 має координату φ , в нульове положення статичної рівноваги:

$$\Pi = \Pi(M_{\text{пр}}) + \Pi(P_3),$$

$$\text{де } \Pi(M_{\text{пр}}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi + \varphi_0} c\varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2} c\varphi^2 + c\varphi \cdot \varphi_0,$$

$$\Pi(P_3) = P_3 \varphi \frac{R_1 \cdot R_2}{r_2}.$$

$$\text{Тоді } \Pi = \frac{1}{2} c\varphi^2 + c\varphi \cdot \varphi_0 + P_3 \varphi \frac{R_1 \cdot R_2}{r_2}.$$

В положенні статичної рівноваги:

$$\left(\frac{d\Pi}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0, \text{ тоді } c\varphi_0 + P_3 \frac{R_1 \cdot R_2}{r_2} = 0.$$

І узагальнена сила знаходиться за формулою:

$$Q_u = -\frac{d\Pi}{dU} = -\frac{d}{dU} \left(\frac{1}{2} c\varphi^2 \right) = -c\varphi.$$

Таким чином, рівняння Лагранжа II роду (13.1) набуває вигляду:

$$I_{\varphi\varphi} \cdot \ddot{\varphi} = -C \cdot \varphi. \quad (13.11)$$

Або

$$\ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0,$$

$$\text{де } k^2 = \frac{C}{I_{\varphi\varphi}} = \frac{C}{I_s + m_2 \cdot \frac{i_2^2 \cdot R_1^2}{r_2^2} + m_3 \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R_1^2}.$$

Циклічна частота вільних коливань

$$k = \sqrt{\frac{C}{I_s + m_2 \cdot \frac{i_2^2 \cdot R_1^2}{r_2^2} + m_3 \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R_1^2}}, \quad k = 68,4 \frac{1}{c}.$$

Інтегруючи диференціальні рівняння (13.11), отримуємо рівняння руху тіла 1:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (13.12)$$

Для визначення постійних C_1 та C_2 знайдемо кутову швидкість тіла 1:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (13.13)$$

Використаємо початкові умови задачі при

$$t = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \omega_0. \quad (13.14)$$

Тоді із рівнянь (13.12) і (13.13) маємо:

$$C_1 = \varphi_0, \quad C_2 = \frac{\omega_0}{k}. \quad (13.15)$$

Початкову кутову швидкість ω_0 знайдемо на підставі теореми про зміну кінетичної енергії системи:

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \quad (13.16)$$

де N^e – потужність зовнішніх сил (рис. 13.3);

N^i – потужність внутрішніх сил.

Нехтуючи потужністю моменту пружної муфти, приймаємо $N^i=0$.

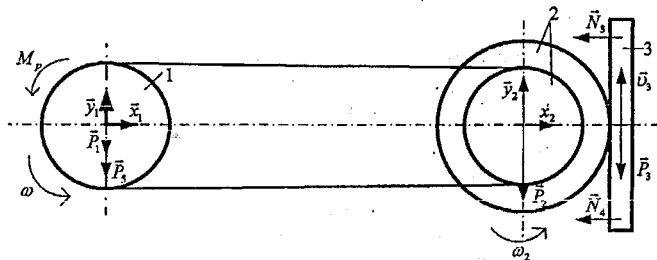


Рисунок 13.3

Потужність зовнішніх сил:

$$N^e = N(M_p) + N(\bar{P}_3), \quad (13.17)$$

де $N(M_p) = M_p \omega$;

$$N(\bar{P}_3) = -P_3 v_3 = -m_3 g \omega \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{r_2}.$$

Із теореми (13.16), враховуючи (13.5) та (13.17), знаходимо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_{\text{св}} \cdot \omega^2 \right) = \omega (M_p - m_3 g \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{r_2}).$$

$$\ddot{\phi} = \frac{M_p \cdot r_2 - m_3 g R_1 \cdot R_2}{I_{\text{св}} \cdot r_2}.$$

Або:

$$\ddot{\phi} = 13,96 - 2,34t. \quad (13.18)$$

Інтегруємо рівняння (13.18) при умовах, що:

при $t = 0$; $\dot{\phi} = 0$,

при $t = t_1$; $\ddot{\phi} = \omega_0$.

Отримуємо: $\omega_0 = 18,3 \frac{1}{\text{с}}$.

Для визначення ϕ_0 , розглянемо рух ротора електродвигуна (рис.13.4)

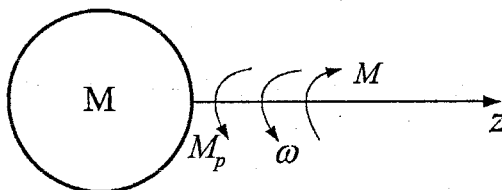


Рисунок 13.4

Запишемо диференціальне рівняння руху ротора навколо нерухомої осі Z:

$$I_3 \cdot \ddot{\phi} = M_p - M, \quad (13.19)$$

де $M = C \cdot \phi$ – момент, який передає пружна муфта.

Із (13.19) та (13.18) при $t = 1,5$ с знаходимо:

$$\varphi_0 = \frac{1}{C} (1000 + 100(7 - 1,5) - I_3(13,96 - 2,34 \cdot 1,5)),$$

$$\varphi_0 = 0,0077 \text{ рад}.$$

Тепер рівняння руху тіла 1 (13.12), враховуючи (13.15), запишеться:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\omega_0}{k} \sin kt,$$

$$\varphi = 0,0077 \cos 68,4t + 0,2675 \sin 68,4t.$$

Амплітуда коливань A :

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\omega_0^2}{k^2}}, \quad A = 0,2676 \text{ м}.$$

Період коливань T_I :

$$T_I = \frac{2\pi}{k}, \quad T_I = 0,092 \text{ с}.$$

Відповідь: $\varphi = 0,0077 \cos 68,4t + 0,2675 \sin 68,4t$.

1. Бать Н. М., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. – Т.2 – М.: Наука, 1985. – 560с.
2. Березова О. В., Друшляк Г. Е., Солодовников Р. В. Теоретическая механика: Сб. задач. – К.: Высш. шк. Главное изд – во, 1980. – 324 с.
3. Бражниченко Н. А. и др. Сборник задач по теоретической механике / Н. А. Бражниченко, Н. Л. Кац, Б. Л. Минцберг, В. Н. Морозов. – М.: Судпромгиз, 1963. – 562 с.
4. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2 т. – Т.2. – М.: Наука, 1979. – 461 с.
5. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: В 2 ч. – М.: Наука, 1967. – ч. 1. – 468 с.; ч. 2. – 332 с.
6. Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л. Курс теоретической механики, – М.: Высш. шк., 1974. – 528 с.
7. Кильчевский И. А. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1972 – 1977. – Т.1. – 456 с.; Т.2. – 462 с.
8. Ключев В. И., Терехов И. Б. Электропривод и автоматизация общепромышленных механизмов: Учебник для вузов, – М.: Энергия, 1980. – 360 с.
9. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1984. – Т.1. – 352 с.; Т.2. – 640 с.
10. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
11. Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. Теоретична механіка. Динаміка матеріальної системи. Розрахунково-графічні та контрольні завдання. Навчальний посібник – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 85 с.
12. Савин Г. Н., Пуцяга Т. В., Фрадлин Б. Н. Курс теоретической механики. –К.: Высш. шк., 1973. – 359 с.
13. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособ. для техн. вузов / Яблонский А. А., Норейко С. С., Вольфсон С. А. и др.; Под ред. А. А.Яблонского. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.
14. Сендлер А. С. Электропривод и автоматизация металлорежущих станков: Учебное пособие. – М.: ВШ, 1972. – 440 с.
15. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1977. – Т.1. – 431 с.; Т.2. – 532 с.
16. Яскілка М. Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібник. – К.: Вища шк.: Веселка, 1999. – 351с.

Навчальне видання

**Видмиш Андрій Андрійович
Приятельчук Володимир Олексійович
Федотов Валерій Олександрович**

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА ДИНАМІКА

Розрахунково-графічні та контрольні завдання

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна

Коректор З. Поліщук

Оригінал-макет підготовлений В. Федотовим

Підписано до друку 3.11.2009 р.

Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman.

Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 9.1

Наклад 75 прим. Зам № 2009-183

**Вінницький національний технічний університет,
науково-методичний відділ ВНТУ.**

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Тел. (0432) 59-85-32.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

**Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.**

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Тел. (0432) 59-85-32.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.