

С. Г. Авдєєв, Т. І. Бабюк

Лекції з фізики

(коливання і хвилі, оптика)



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

С. Г. Авдєєв, Т. І. Бабюк

Лекції з фізики

(коливання і хвилі, оптика)

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як курс лекцій для студентів електротехнічних спеціальностей. Протокол № 7 від 27 грудня 2007 р.

Вінниця ВНТУ 2008

УДК 53 (075)
А 75

Рецензенти:

П. М. Зузяк, доктор фізико-математичних наук, професор
І. О. Сівак, доктор технічних наук, професор
В. Г. Дзісь, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

Авдєєв С. Г., Бабюк Т. І.
А 75 **Лекції з фізики, (коливання і хвилі, оптика).** Курс лекцій, –
Вінниця: ВНТУ, 2008. – 138с.

Посібник складено у відповідності з планом кафедри та програмою дисципліни курсу фізики для технічних вузів і пропонується студентам всіх форм навчання.

УДК 53 (075)

© С. Г. Авдєєв, Т. І. Бабюк, 2008

З М І С Т

Тема 1. Механічні й електромагнітні коливання.....	5
1 Гармонічні коливання і їх характеристики.....	5
2 Механічні гармонічні коливання.....	8
3 Гармонічний осцилятор. Пружинний, фізичний і математичний маятники.....	10
4 Вільні гармонічні коливання в коливальному контурі.....	14
Тема 2. Додавання гармонічних коливань.....	17
1 Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакових частот. Биття.....	17
2 Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу.....	22
3 Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань і його розв'язування.....	27
Тема 3. Вимушені механічні й електромагнітні коливання.....	31
1 Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язування..	31
2 Амплітуда і фаза вимушених коливань (механічних і електромагнітних). Резонанс. Резонансні криві. Параметричний резонанс.....	35
3 Змінний струм.....	38
4 Резонанс напруг.....	44
Тема 4. Пружні хвилі.....	45
1 Хвильові процеси. Поздовжні і поперечні хвилі.....	45
2 Рівняння біжучої хвилі. Фазова швидкість. Сферична хвиля.....	47
3 Одновимірне хвильове рівняння. Швидкість поширення хвиль.....	50
4 Енергія пружних хвиль. Потік і густина потоку енергії хвиль.....	54
Тема 5. Суперпозиція хвиль.....	57
1 Принцип суперпозиції хвиль. Групова швидкість.....	57
2 Інтерференція хвиль.....	58
3 Стоячі хвилі.....	61

Тема 6. Електромагнітні хвилі.....	64
1 Природа електромагнітних хвиль.....	64
2 Хвильові рівняння електромагнітних хвиль.....	67
3 Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Пойнтінга.....	71
Тема 7. Інтерференція світла.....	74
1 Принцип накладання двох хвиль. Інтенсивність. Поняття когерентності хвиль.....	74
2 Інтерференція світла від двох когерентних джерел. Дослід Юнга.....	78
3 Інтерференція в тонких плівках. Кільця Ньютона.....	81
4 Інтерференція багатьох хвиль.....	86
Тема 8. Дифракція світла.....	89
1 Метод зон Френеля. Дифракція Фраунгофера на круглому отворі.....	89
2 Дифракція Фраунгофера на щілині.....	94
3 Дифракційна решітка. Кутова дисперсія і роздільна здатність дифракційної решітки.....	98
4 Дифракція рентгенівських променів на просторовій решітці. Формула Вульфа-Брегга.....	102
Тема 9. Поляризація світла.....	103
1 Природне і поляризоване світло.....	103
2 Поляризація світла при відбиванні. Закони Брюстера й Малюса.....	107
3 Подвійне променезаломлення. Звичайний і незвичайний промені. Призма Ніколя.....	109
4 Штучна оптична анізотропія. Обертання площини поляризації.....	114
Тема 10. Квантова природа випромінювання	
1 Теплове випромінювання і його характеристики.....	120
2 Закон Кірхгофа.....	122
3 Закони Стефана – Больцмана і Віна.....	124
4 Формула Планка. Виведення законів Стефана-Больцмана і Віна.....	125
5 Зовнішній фотоефект. Ефект Комптона.....	128
Використана література	137

Тема 1. Механічні й електромагнітні коливання

- 1. Гармонічні коливання і їх характеристики.**
- 2. Механічні гармонічні коливання.**
- 3. Гармонічний осцилятор. Пружинний, фізичний і математичний маятники.**
- 4. Вільні гармонічні коливання в коливальному контурі.**

1. Гармонічні коливання і їх характеристики

Коливаннями називаються рухи або процеси, які характеризуються певною повторюваністю в часі. Коливальні процеси широко поширені в природі й техніці, наприклад, коливання маятника годинника, змінний електричний струм і т. д. При коливальному русі маятника змінюється координата його центра мас, а у випадку змінного струму – коливаються напруга й струм у колі. Фізична природа коливань може бути різною, тому розрізняють коливання механічні, електромагнітні й ін. Однак різні коливальні процеси описуються однаковими характеристиками й однаковими рівняннями. Звідси випливає доцільність єдиного підходу до вивчення коливань різної фізичної природи.

Коливання будуть вільними (або власними), якщо вони відбуваються за рахунок деякої енергії, переданої коливальній системі в початковий момент часу, при відсутності в наступні моменти часу будь-яких зовнішніх впливів на цю систему. Найпростішими коливаннями є гармонічні коливання, при яких коливна величина змінюється з часом за законом косинуса або синуса. Вивчення гармонічних коливань важливе з двох причин:

1) коливання, які зустрічаються у природі й техніці, при певних наближеннях є гармонічними;

2) різні періодичні процеси (процеси, які повторюються через рівні проміжки часу), можна подавати як суперпозицію гармонічних коливань.

Гармонічні коливання деякої фізичної величини x описуються таким рівнянням

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1)$$

де A – максимальне значення коливної величини x , яке називається *амплітудою коливань*;

ω_0 – колова, або циклічна частота;

φ – початкова фаза коливань для моменту часу $t = 0$;

$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза коливань для довільного моменту часу t .

Оскільки косинус змінюється в межах від $+1$ до -1 , то x може набувати значень від $+A$ до $-A$.

Певні стани системи в процесі гармонічних коливань повторюються через однаковий проміжок часу T , який називається *періодом коливань*. За цей час фаза коливання зростає на 2π , тобто

$$\omega_0(t+T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi,$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2)$$

Величина, обернена до періоду коливань

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (3)$$

виконана коливною системою за одиницю часу, називається *частотою коливань*. Прирівнюючи (2) і (3), одержимо

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Одиницею частоти є герц (Гц), це частота такого періодичного процесу, при якому за 1 с відбувається одне повне коливання.

Запишемо першу й другу похідні фізичної величини x гармонічного коливання, тобто визначимо швидкість і прискорення коливання:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (5)$$

тобто маємо гармонічні коливання тієї ж циклічної частоти. Амплітуди величин (4) і (5) відповідно дорівнюють $A\omega_0$ і $A\omega_0^2$. Фаза швидкості (4) відрізняється від фази фізичної величини (1) на $\pi/2$, а фаза прискорення (5) відрізняється від фази фізичної величини (1) на π .

Отже, у моменти часу, коли $x = 0$, $\frac{dx}{dt}$ має найбільші значення; коли ж x досягає максимальних від'ємних значень то в ці моменти часу $\frac{d^2x}{dt^2}$ будуть мати найбільші додатні значення (рис. 1).

З рівняння (5) одержуємо диференціальне рівняння гармонічних коливань (де враховано, що $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$),

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6)$$

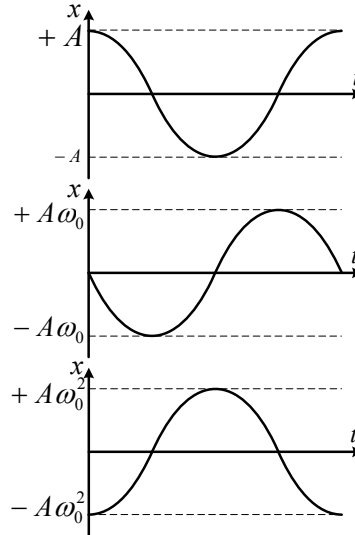


Рис. 1

Таким чином, розв'язком диференціального рівняння (6) є вираз (1).

Гармонічні коливання можна зобразити графічно за допомогою методу обертання вектора амплітуди або методу векторних діаграм. Для цього з довільної точки O , взятої на осі x , під кутом φ , який дорівнює початковій фазі коливання, відкладається вектор $\vec{A}$, модуль якого дорівнює амплітуді A гармонічного коливання (рис. 2).

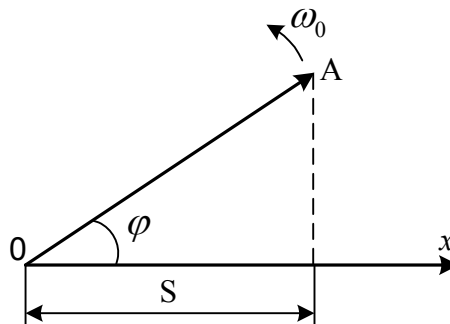


Рис. 2

Якщо цей вектор привести до обертання з кутовою швидкістю ω_0 то проекція кінця вектора буде переміщуватися по осі x і набувати значень від $-A$ до $+A$, а коливна величина буде змінюватися з часом за законом $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. У фізиці часто застосовується інший метод, який відрізняється від методу обертання вектора амплітуди лише за формою. У цьому методі коливну величину подають

комплексним числом відповідно до формули Ейлера для комплексних чисел

$$e^{ix} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (7)$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Тому рівняння гармонічного коливання (1) можна записати також в експонентній формі так:

$$x = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (8)$$

Права частина рівняння (8) є рівнянням гармонічних коливань.

2. Механічні гармонічні коливання

Нехай матеріальна точка виконує прямолінійні гармонічні коливання уздовж осі координат x біля положення рівноваги, прийнятого за початок координат. Тоді залежність координати x від часу t задається рівнянням (1),

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (9)$$

Відповідно до виразів (4) і (5) швидкість v і прискорення a коливної точки будуть дорівнювати:

$$\begin{aligned} v &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \\ a &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \end{aligned} \quad (10)$$

Сила $F = ma$, що діє на коливну матеріальну точку масою m , у відповідності з рівнянням (1) дорівнює

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Отже, сила, яка діє на матеріальну точку при гармонічних коливаннях, пропорційна зміщенню матеріальної точки від положення рівноваги і спрямована в протилежну сторону.

Кінетична енергія матеріальної точки, яка здійснює прямолінійні гармонічні коливання, дорівнює

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (11)$$

або

$$K = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (12)$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили F , дорівнює

$$\Pi = - \int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (13)$$

або

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (14)$$

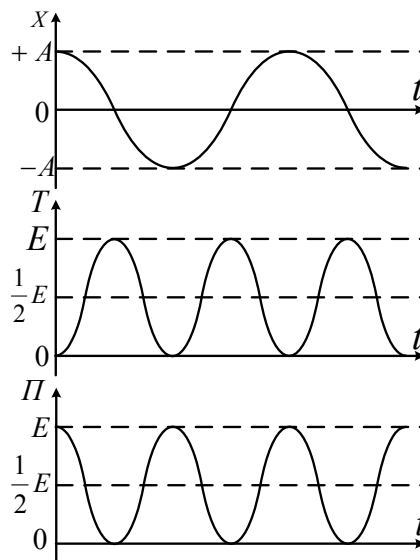


Рис. 3

Додавши (13) і (14), одержимо формулу для повної енергії гармонічного коливання:

$$E = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (15)$$

З формул (12) і (14) видно, що K і Π змінюються в часі з частотою, яка у два рази перевищує частоту гармонічного коливання. На рис. 3 показані графіки залежності x , K і Π від часу.

Оскільки середні значення $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}$, то з формул (11), (13) і (15) випливає, що

$$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} E.$$

3. Гармонічний осцилятор. Пружинний, фізичний і математичний маятники

Гармонічним осцилятором називається система, яка описується диференціальним рівнянням вигляду (6):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (16)$$

Коливання гармонічного осцилятора є важливим прикладом періодичного руху і служать точною або наближеною моделлю в багатьох задачах класичної і квантової фізики. Прикладами гармонічного осцилятора є пружинний, фізичний і математичний маятники, коливальний контур (для струмів і напруг настільки малих, щоб елементи контуру можна було вважати лінійними).

Пружинний маятник. Пружинний маятник – невеличке тіло масою m , яке підвішене до абсолютно пружної пружини і здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили $F = -kx$, де k - коефіцієнт пружності, у випадку пружини, названий жорсткістю (рис. 4).

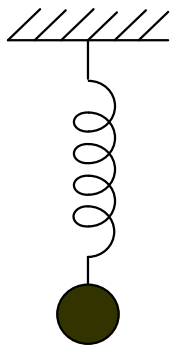


Рис.4

Диференціальне рівняння коливання маятника буде мати вигляд

$$m\ddot{x} = -kx,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (17)$$

З виразів (16) і (1) випливає, що пружинний маятник виконує гармонічні коливання за законом $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ з циклічною частотою $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ і періодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Формула (17) справедлива для пружних коливань у межах, для яких виконується закон Гука, тобто коли маса пружини мала в порівнянні з масою тіла.

В цьому випадку потенціальна енергія пружинного маятника, згідно з (13) дорівнює

$$П = \frac{kx^2}{2}. \quad (18)$$

Фізичний маятник. Фізичний маятник – тверде тіло, яке під дією сили тяжіння виконує гармонічні коливання відносно нерухомої горизонтальної осі, що проходить через точку підвішування і яка не збігається з центром мас C тіла (рис. 5).

Якщо маятник відхилений від положення рівноваги на деякий кут α_1 , то відповідно до основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла момент M сили F_τ , яка повертає маятник до положення рівноваги буде дорівнювати

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = F_\tau l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha, \quad (19)$$

де J – момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через точку O ;

l – відстань між точкою підвішування і центром мас маятника;

$F_\tau = -mg \sin \alpha \approx -mg \alpha$ – сила, яка повертає маятник у попереднє положення, (знак мінус обумовлений тим, що зростання F_τ і швидкості v завжди протилежні;

$\sin \alpha \approx \alpha$ – відповідає малим коливанням маятника, тобто малим відхиленням маятника від положення рівноваги.

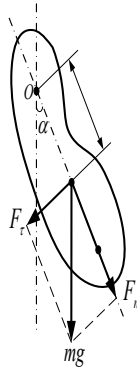


Рис. 5

Рівняння (19) можна записати у вигляді

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0,$$

або

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Приймаючи, що $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ одержимо рівняння $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$, ідентичне з (16), розв'язком якого є функція:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (20)$$

З виразу (20) випливає, що при малих коливаннях фізичний маятник виконує гармонічні коливання з циклічною частотою ω_0 і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (21)$$

де $L = \frac{J}{ml}$ – зведена довжина фізичного маятника.

Точка O' на продовженні прямої OC , яка відстоїть від осі підвішування на відстані зведеної довжини L , називається центром коливань фізичного маятника (рис. 5). Застосовуючи теорему Штейнера, можна показати, що OO' завжди більше $OC = l$. Точка підвішування O і центр коливань O' мають властивість взаємозамінності, якщо вісь підвішування перенести в центр коливань, то точка O , в якій

розміщувалась раніше вісь підвішування стане новим центром коливань і період коливань фізичного маятника не зміниться.

Математичний маятник. Математичний маятник – ідеалізована система, яка складається з матеріальної точки масою m , підвішеної на нерозтяжній невагомій нитці, і коливається під дією сили тяжіння (рис.6).

Гарним наближенням математичного маятника є невелика важка кулька, підвішена на тонкій довгій нитці. Момент інерції математичного маятника дорівнює

$$J = ml^2, \quad (22)$$

де l - довжина маятника.

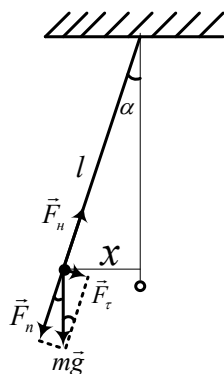


Рис. 6

Оскільки математичний маятник можна подати як окремий випадок фізичного маятника, припустивши, що вся маса фізичного маятника зосереджена в одній точці – центрі мас, то, підставивши вираз (22) у формулу (21), одержимо знайомий вираз для малих коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (23)$$

Порівнюючи формули (23) і (21), бачимо, що якщо зведена довжина L фізичного маятника дорівнює довжині l математичного маятника, то їх періоди коливань збігаються. Отже, зведена довжина фізичного маятника – це довжина такого математичного маятника, період коливань якого збігається з періодом коливань даного фізичного маятника.

4. Вільні гармонічні коливання у коливальному контурі

Серед різних електричних явищ особливе місце займають електромагнітні коливання, при яких фізичні величини (заряди, струми, електричні і магнітні поля) періодично змінюються. Для виникнення і підтримування електромагнітних коливань необхідні певні системи, найпростішою з яких є коливальний контур – ланцюг, який складається з увімкнених послідовно котушки індуктивністю L , конденсатора ємністю C і резистора опором R .

Розглянемо послідовні стадії коливального процесу в ідеалізованому контурі, опір якого безмежно малий $R \approx 0$. Для виникнення в контурі коливань конденсатор попередньо заряджають, надаючи його обкладкам заряди $\pm Q$. Тоді в початковий момент часу $t=0$ (рис. 5, а) між обкладками конденсатора виникне електричне поле, енергія якого

$$W = \frac{1}{2C} Q^2.$$

Замкнувши конденсатор на котушку індуктивності, він почне розряджатися й у контурі потече зростаючий з часом струм I . У результаті енергія електричного поля буде зменшуватися, а енергія магнітного поля котушки – зростати.

Оскільки $R \approx 0$, то, відповідно до закону збереження енергії, повна енергія контуру буде дорівнювати

$$W = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2} LI^2 = \text{const},$$

тому що енергія на нагрівання провідників у такому коливальному контурі не витрачається. У момент часу $t = \frac{1}{4}T$, коли конденсатор повністю розрядиться, енергія електричного поля зменшується до нуля, а енергія магнітного поля, а отже і струм досягають найбільшого значення (рис. 5,б). Починаючи з цього моменту часу струм у контурі буде зменшуватися; отже, почне слабшати магнітне поле котушки й індукований у ній струм, який тече (відповідно до правила Ленца) у тому ж напрямку, що й струм розрядки конденсатора. Конденсатор почне перезаряджатися, при цьому виникне електричне поле, яке намагатиметься послабити струм, який зрештою зменшується до нуля, а заряд на обкладках конденсатора досягне максимуму (рис. 5, в). Далі ті ж процеси почнуть протікати в зворотному напрямку (рис. 5, г) і система до моменту

часу $t = T$ прийде в початковий стан (рис. 5, а). Після цього почнеться повторення розглянутого циклу розрядки і зарядки конденсатора.

Якби втрат енергії не було, то в контурі відбувалися б періодичні незагасаючі коливання, тобто періодично змінювалися (коливалися) б заряд Q на обкладках конденсатора, напруга U на конденсаторі і сила струму I , яка тече через котушку індуктивності.

Отже, у контурі виникають електричні коливання з періодом T , причому протягом першої половини періоду струм тече в одному напрямку, протягом другої половини – у зворотному. Коливання супроводжуються перетвореннями енергій електричних і магнітних полів.

Електричні коливання у коливальному контурі можна зіставити з механічними коливаннями маятника (рис. 7), які супроводжуються взаємними перетвореннями потенціальної і кінетичної енергій маятника.

У даному випадку потенціальна енергія маятника $\frac{kx^2}{2}$ аналогічна енергії електричного поля конденсатора $\frac{Q^2}{2C}$, кінетична енергія маятника $\frac{mv^2}{2}$ – енергії магнітного поля котушки $\frac{LI^2}{2}$, а швидкість руху маятника – силі струму в контурі.

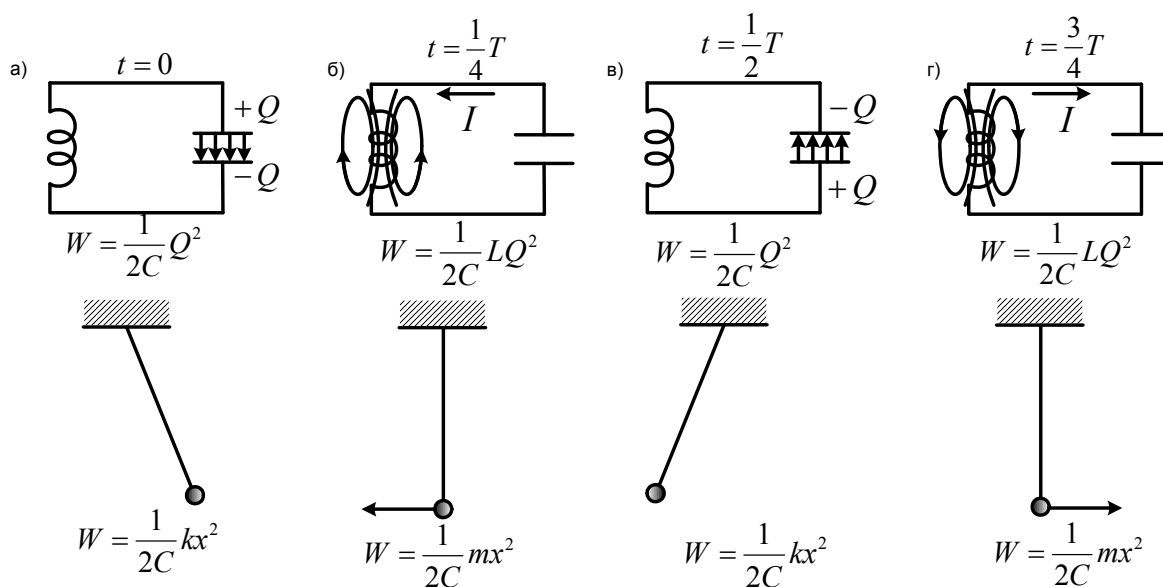


Рис.7

Роль інерції маятника буде зводитися до самоіндукції котушки, а роль сили тертя, яке діє на маятник – до опору контуру.

Відповідно до другого правила Кірхгофа, для контуру, який містить котушку індуктивністю L , конденсатор ємністю C і резистор опором R маємо

$$IR + U_C = \varepsilon_s,$$

де IR – спад напруги на резисторі;

$U_C = \frac{Q}{C}$ – напруга на конденсаторі;

$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$ – е.р.с. самоіндукції, яка виникає в котушці при протіканні в ній змінного струму (ε_s - єдина е.р.с. у контурі).

Отже,

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0. \quad (24)$$

Розділивши (24) на L і підставивши $I = \dot{Q}$ і $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$, одержимо диференціальне рівняння коливань заряду Q у контурі:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (25)$$

У даному коливальному контурі зовнішні е. р. с. відсутні, тому розглянуті коливання є вільними коливаннями. Якщо опір $R = 0$, то вільні електромагнітні коливання у контурі є гармонічними. Тоді з (25) одержимо диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань заряду Q в контурі:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (26)$$

З виразу (26) випливає, що заряд Q в коливальному контурі виконує гармонічні коливання за законом

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (27)$$

де Q_m – амплітуда коливань заряду конденсатора з циклічною частотою ω_0 , яка називається власною частотою контуру:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (28)$$

і періодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (29)$$

Формула (29) вперше була отримана Томсоном і називається формулою Томсона.

Сила струму в коливальному контурі буде дорівнювати

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (30)$$

де $I_m = \omega_0 Q_m$ — амплітуда сили струму.

Напруга на конденсаторі

$$U_c = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (31)$$

де $U_m = \frac{Q_m}{C}$ — амплітуда напруги.

З виразів (30) і (31) випливає, що коливання струму I випереджають за фазою коливання заряду Q на $\pi/2$, тобто коли струм досягає максимального значення, заряд (також і напруга) зменшуються до нуля і навпаки.

Цей взаємозв'язок був установлений при розгляді послідовних стадій коливального процесу в контурі і на підставі енергетичних міркувань. Вільні електромагнітні коливання в контурі є незгасаючими.

Тема 2. Додавання гармонічних коливань

- 1. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакових частот. Биття.**
- 2. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу.**
- 3. Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань і його розв'язування.**

- 1. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти. Биття**

Розглянемо додавання двох гармонічних коливань однакового напрямку з однаковими періодами, які відбуваються з деякою різницею

фаз і мають різні амплітуди. Нехай ці коливання відбуваються в напрямі осі x . Запишемо рівняння цих коливань

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{cases} \quad (1)$$

Циклічні частоти ω в обох випадках однакові. Зміщення x від положення рівноваги, при участі тіла одночасно в двох коливаннях, виражається алгебраїчною сумою

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

або

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Для знаходження результуючої амплітуди A і початкової фази результуючого коливання φ використаємо векторну діаграму (рис.1).

Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються з однаковою циклічною частотою ω , то різниця фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ між ними залишається постійною. Результуючу амплітуду A в цьому випадку визначають за теоремою косинусів, тобто

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (3)$$

або з урахуванням того, що $\cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ одержуємо:

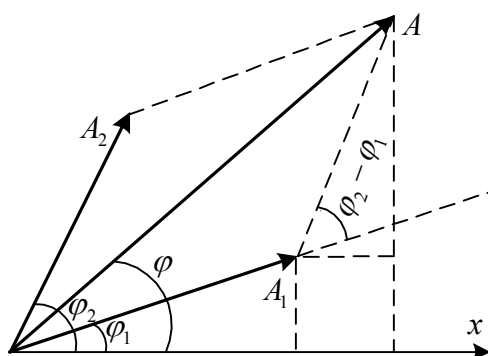


Рис.1

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (5)$$

Початкова фаза результуючого коливання φ дорівнює

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (6)$$

Значення амплітуди (5) і початкової фази (6) підставимо в рівняння (2), одержимо

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}). \quad (7)$$

Як видно з (7), сумарне коливання має такий же напрям і відбувається з тією ж циклічною частотою ω . Амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз обох коливань.

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi m$, де $(m = 0, 1, 2, \dots)$, то $A = |A_1 + A_2|$;

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi$, де $(m = 0, 1, 2, \dots)$, то $A = |A_1 - A_2|$.

Оскільки $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ може набувати значень від -1 до $+1$, то межі зміни амплітуди будуть такими:

$$|A_1 + A_2| \geq A \geq |A_1 - A_2| \quad (8)$$

Окремим випадком можна розглядати додавання коливань з близькими циклічними частотами ω_1 і ω_2 ($\omega_1 \approx \omega_2$). Періодична зміна амплітуди з часом, яка відбувається в цьому випадку, називається *биттям*. Нехай додаються два гармонічних коливання з амплітудами $A_1 = A_2 = A_0$ і близькими циклічними частотами ω_1 і ω_2 . Початкові фази таких гармонічних коливань можна вибрати однаковими, тому

$$x_1 = A_0 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (9)$$

$$x_2 = A_0 \cos(\omega_2 t + \varphi). \quad (10)$$

Різниця фаз двох коливань (9) і (10) буде дорівнювати $(\omega_2 - \omega_1)t$.

Скористаємось теоремою косинусів для визначення амплітуди биття

$$A^2 = 2A_0^2 [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t] \quad (11)$$

Замінімо вираз в квадратних дужках у відповідності з формулою

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t = 2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \quad (12)$$

Вираз (12) підставимо в (11)

$$A^2 = 4A_0^2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t. \quad (13)$$

або

$$A = \left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \quad (14)$$

Фаза результуючого коливання для довільного проміжку часу знаходиться із графіка (рис.2)

$$\Delta\Phi = \frac{\omega_2 t + \varphi + \omega_1 t + \varphi}{2} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi. \quad (15)$$

Результуюче коливання биття матиме вигляд:

$$x = \left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi\right), \quad (16)$$

де $\left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|$ – амплітуда биття.

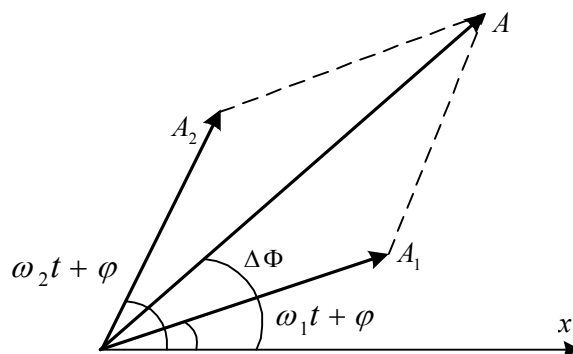


Рис.2

Графік залежності (16) має вигляд (рис 3):

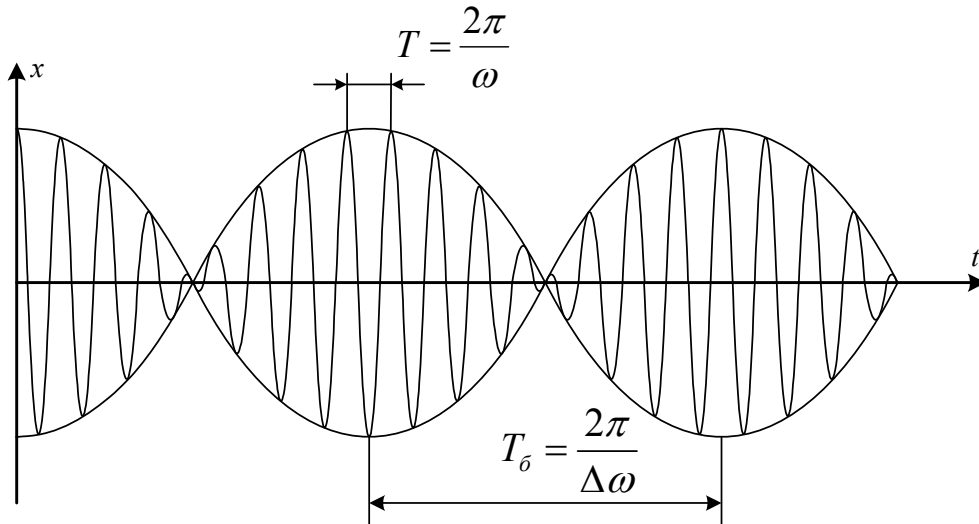


Рис. 3

Періодичність зміни амплітуди від максимуму до максимуму дає час, який називається *періодом биття*

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T_\delta = \pi, \quad \text{звідки} \quad T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (17)$$

Періодичність зміни амплітуди високочастотних коливань визначається за формулою

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} T = 2\pi, \quad \text{звідки} \quad T = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}. \quad (18)$$

Оскільки циклічні частоти досить близькі, то наближено

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (19)$$

За час T_δ відбувається n гармонічних високочастотних коливань, тому

$$T_\delta = nT. \quad (20)$$

З урахуванням співвідношень (17) і (19) вираз (20) перепишеться

$$\frac{2\pi}{\Delta\omega} = n \frac{2\pi}{\omega}, \quad (21)$$

звідки $\Delta\omega = \frac{\omega}{n}$, а для частот $\Delta\nu = \frac{\nu}{n}$.

В процесі биття частоти генераторів визначаються в таких межах:

$$\nu - \frac{\nu}{n} < \nu < \nu + \frac{\nu}{n}. \quad (22)$$

Биття використовується для градуювання шкал невідомих генераторів в процесі їх виготовлення. Додавання однаконо направлених коливань забезпечує амплітудну модуляцію в радіотехніці, а також проміжну частоту супергетеродинного прийому радіо- і телепередач.

2. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу

Нехай матеріальна точка C одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях з однаковою циклічною частотою у взаємно перпендикулярних напрямках (рис. 4).

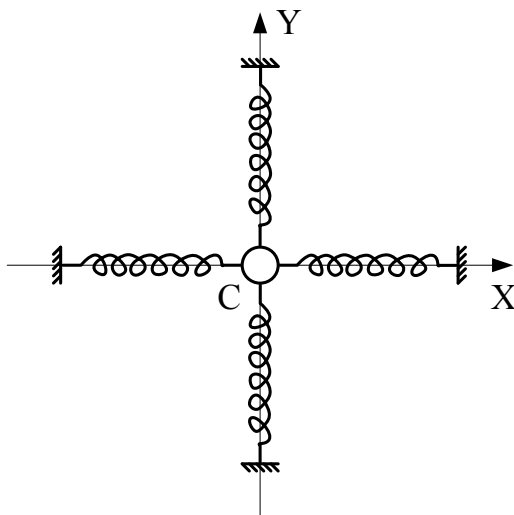


Рис.4

При збудженні коливань матеріальна точка C буде рухатись по деякій криволінійній траєкторії, форма якої залежить від різниці фаз обох коливань.

Рівняння коливань точки в напрямках осі x і осі y матимуть вигляд

$$x = A_1 \cos \omega t, \quad y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi), \quad (23)$$

де $\Delta\varphi$ – спільна різниця фаз цих коливань.

Щоб отримати рівняння траєкторії у звичайному вигляді, треба виключити з цих рівнянь час t .

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t, \quad \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}},$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \Delta\varphi) = \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi;$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi \right)^2 = \left(-\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi \right)^2,$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \Delta\varphi - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi + \frac{y^2}{A_2^2} = -\frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \Delta\varphi + \sin^2 \Delta\varphi.$$

В результаті отримаємо

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi. \quad (24)$$

Рівняння (24) є рівнянням траєкторії результуючого коливання точки C . Це рівняння є еліпсом, осі якого повернуті відносно осей x і y . Орієнтація еліпса і величина його півосей залежить від амплітуд A_1 і A_2 і різниці фаз $\Delta\varphi$.

Розглянемо окремі випадки.

1. Нехай $\Delta\varphi = \pm 2m\pi$, де $m = 0, 1, 2, \dots$. Тоді

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0,$$

звідки

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (25)$$

Результуюче коливання є гармонічним коливанням вздовж прямої з частотою ω і амплітудою $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ (рис.5).

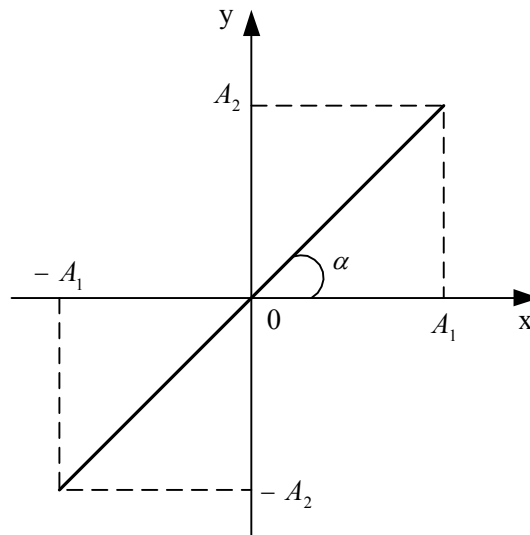


Рис.5

Пряма утворює з віссю x кут $\alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}$.

2. Нехай $\Delta\varphi = \pm(2m+1)\pi$, де $m = 0,1,2,\dots$
У цьому випадку

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)^2 = 0,$$

звідки

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (26)$$

Результуючий рух – це гармонічне коливання вздовж прямої $y = -\frac{A_2}{A_1} x$ (рис.6).

3. Нехай $\Delta\varphi = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$, де $m = 0,1,2,\dots$ В результаті одержуємо рівняння

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (27)$$

Це рівняння еліпса, осі якого збігаються з осями координат, а його півосі дорівнюють відповідним амплітудам (рис. 7). Якщо $A_1 = A_2$, то еліпс перетворюється в коло.

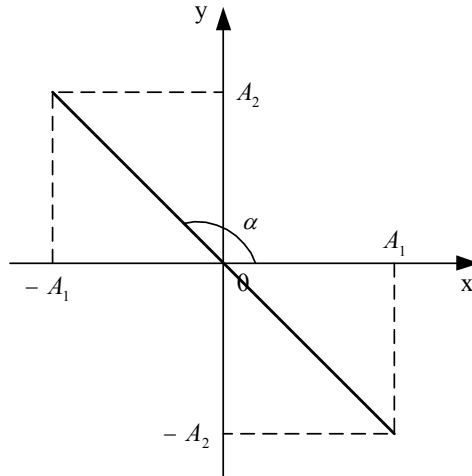


Рис.6

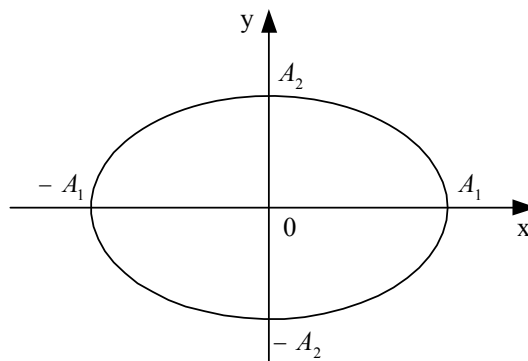


Рис.7

Два окремі випадки $\Delta\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ і $\Delta\varphi = -(2m+1)\frac{\pi}{2}$ відрізняються напрямком коливання по еліпсу або по колу. У випадку, коли циклічні частоти взаємно перпендикулярних коливань, що додаються, різні, то замкнута траєкторія результуючого коливання досить складна.

Замкнуті траєкторії, які рисуються одночасно коливальною точкою у взаємно перпендикулярних напрямках, називаються *фігурами Ліссажу*. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз коливань, які додаються.

На рис. 8 показана одна із найпростіших траєкторій, одержаних при додаванні взаємно перпендикулярних коливань з відношенням циклічних частот 1:2 і різниці фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$. Рівняння коливань мають вигляд:

$$x = A_1 \cdot \cos \omega t, \quad y = A_2 \cdot \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (28)$$

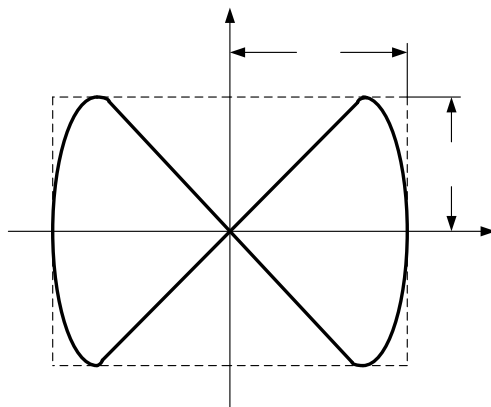


Рис. 8

Якщо відношення частот $\omega_1 : \omega_2$ дорівнює 1:2, а різниця фаз $\Delta\varphi = 0$, то траєкторія коливань точки вироджується в незамкнуту криву (рис. 9), у вздовж якої рухається точка то в одну то в протилежну сторони.

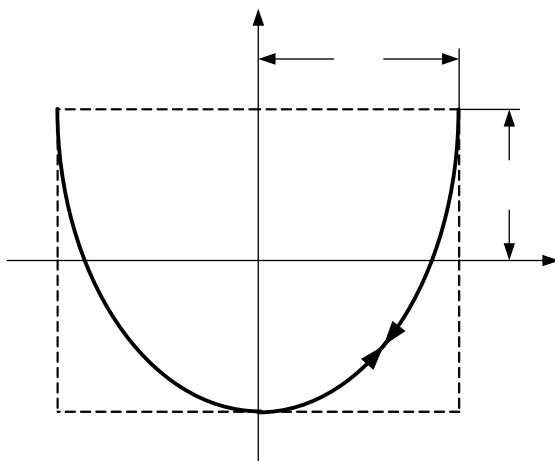


Рис. 9

Чим ближче до одиниці буде відношення частот $\omega_1 : \omega_2$, тим складнішою буде фігура Ліссажу. Для прикладу на рис. 10 наведена крива фігури Ліссажу з відношенням частот 3:4 і різницею фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

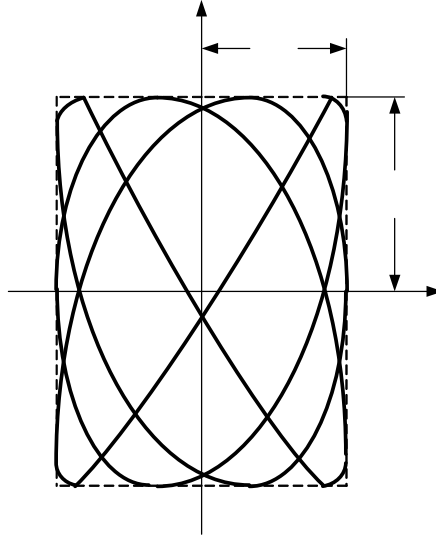


Рис. 10

3. Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань і його розв'язування

Розглянемо вільні згасаючі коливання, амплітуда яких внаслідок втрат енергії реальною коливальною системою зменшується з часом. Найпростішим механізмом зменшення енергії коливань є її перетворення в теплоту внаслідок тертя в механічних коливальних системах, а також омічних втрат і випромінювання електромагнітної енергії в електричних коливальних системах.

Закон згасання коливань визначається властивостями коливальних систем. Як правило розглядають лінійні системи – ідеалізовані реальні системи, у яких параметри, які визначають фізичні властивості системи, у ході процесу не змінюються. Лінійними системами є, наприклад, пружинний маятник при малих деформаціях пружини (в межах дії закону Гука), коливальний контур, індуктивність, ємність і опір якого не залежать ні від струму в контурі, ні від напруги. Різні за своєю природою лінійні системи описуються ідентичними лінійними диференціальними рівняннями, які дозволяють підходити до вивчення коливань різної фізичної природи з єдиної точки зору.

Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань лінійної системи задається у вигляді

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (29)$$

де x – коливна величина, яка описує той або інший фізичний процес;

β – коефіцієнт згасання;

ω_0 – циклічна частота вільних незгасаючих коливань цієї ж коливальної системи, тобто при $\beta = 0$ (при відсутності втрат енергії).

Щоб знайти розв'язок рівняння (29), слід фізичну величину x виразити через нову змінну z відповідно до рівняння

$$x = ze^{-\beta t}, \quad (30)$$

де $z = z(t)$.

Після підстановки першої і другої похідних від рівності (30) в рівняння (29) одержимо

$$\ddot{z} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0. \quad (31)$$

Розв'язок рівняння (31) залежить від знака коефіцієнта $(\omega_0^2 - \beta^2)$ перед шуканою величиною. Розглянемо випадок, коли цей коефіцієнт додатний, тобто $(\omega_0^2 - \beta^2) > 0$.

Тоді одержимо рівняння типу

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (32)$$

де

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (33)$$

Розв'язком рівняння (32) є рівняння типу (9) першої теми:

$$z = A_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (34)$$

Після підстановки (34) у (30) для випадку малих загасань ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) одержуємо розв'язок рівняння (29) у такому вигляді:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (35)$$

де $A = A_0 e^{-\beta t}$ — амплітуда згасаючих коливань;

A_0 – початкова амплітуда.

Залежність (35) показана на рис. 11 суцільною лінією, а амплітуда коливань – пунктирними лініями.

Проміжок часу $\tau = \frac{1}{\beta}$, протягом якого амплітуда згасання коливань зменшується у e разів, називається *часом релаксації*.

Згасання порушує періодичність коливань, тому згасаючі коливання не є періодичними, і до них поняття періоду або частоти незастосовне.

Однак якщо згасання малі, то можна умовно користуватися поняттям періоду як проміжку часу між двома послідовними максимумами (або мінімумами) коливань тієї чи іншої фізичної величини (рис. 11).

Період згасаючих коливань з урахуванням формули (33) дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (36)$$

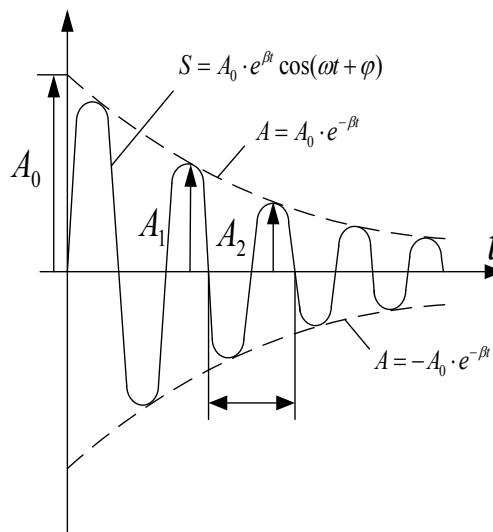


Рис. 11

Якщо $A(t)$ і $A(t + T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, які відповідають моментам часу, що відрізняються на один період, то їх відношення

$$\frac{A(t)}{A(t + T)} = e^{\beta T},$$

називається декрементом згасання, а його логарифм

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N} \quad (37)$$

називається *логарифмічним декрементом згасання*, а величина N визначає число коливань, які виконує коливальна система за час зменшення амплітуди в e разів.

Для характеристики втрат енергії коливальною системою з часом, користуються поняттям *добротності* θ , яка при малих значеннях логарифмічного декременту є помноженням на 2π відношенням повної накопленої системою енергії до середніх втрат енергії цією системою за час в один період, тобто

$$\theta = 2\pi \frac{W}{\Delta W(T)}, \quad (38)$$

де W — повна енергія системи;

$\Delta W(T)$ — середні втрати енергії системою за час в один період ($t=T$).

Повна енергія коливальної системи в момент часу t дорівнює

$$W(t) = \frac{m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{2}. \quad (39)$$

Енергія коливальної системи через час в один період дорівнює

$$W(t+T) = \frac{m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2}. \quad (40)$$

Втрати енергії системою за час в один період легко знайти відніманням від співвідношення (39) співвідношення (40), тобто

$$\Delta W(T) = W(t) - W(t+T) = \frac{m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{2} - \frac{m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2}. \quad (41)$$

Добротність коливальної системи одержимо, якщо поділити (39) на (41) і помножити одержану величину на 2π

$$\theta = 2\pi \frac{\frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{2}}{\frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{2} - \frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2}} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\delta}, \quad (42)$$

де δ – логарифмічний декремент згасання.

У виразі (42) враховано, що відношення

$$\frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{1}{1 - 1 + 2\beta T} = \frac{1}{2\beta T}.$$

У випадку, коли $\beta^2 \ll \omega_0^2$, то в формулі (42) період коливань T приймають рівним T_0 .

Тема 3. Вимушені механічні й електромагнітні коливання

1. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язування.
 2. Амплітуда і фаза вимушених коливань (механічних і електромагнітних). Резонанс. Резонансні криві. Параметричний резонанс.
 3. Змінний струм.
 4. Резонанс напруг.
1. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язування

Щоб у реальній коливальній системі одержати незгасаючі коливання, треба компенсувати цій системі втрати енергії. Таку компенсацію можна здійснити за допомогою будь-якого періодично діючого фактора $X(t)$, який змінюється за гармонічним законом:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t.$$

Для механічних коливань пружинного маятника роль $X(t)$ відіграє зовнішня вимушувальна сила

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

З урахуванням цієї сили закон руху пружинного маятника запишеться у вигляді

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Якщо скористатися позначеннями $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{r}{m} = 2\beta$, то прийдемо до рівняння

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (2)$$

Рівняння (2) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Розв'язок такого рівняння має складатися з двох частин, загального розв'язку відповідного рівняння без правої сторони і окремого розв'язку цього рівняння з правою стороною, тобто

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + A \cos(\omega t + \varphi),$$

де A_0 — амплітуда зміщення в початковий момент часу ($t=0$);

A — амплітуда коливань, які будуть усталені через деякий час.

Через деякий час t_1 , завдяки дії вимушувальної сили F_0 , амплітуда коливань досягне максимального значення (рис. 1).

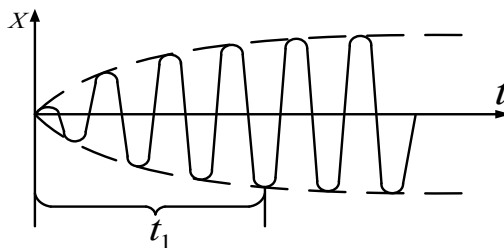


Рис. 1

З цього моменту часу розв'язком рівняння (2) буде лише функція

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

Відповідні похідні від (3) підставимо в рівняння (2), одержимо

$$A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) + 2\beta A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (4)$$

У виразі (4) сталі величини A і ω повинні мати такі значення, щоб гармонічна функція $\frac{F_0}{m} \cos \omega t$ дорівнювала сумі трьох гармонічних функцій, які стоять в лівій частині рівняння. Для виконання цієї умови, необхідно щоб сума трьох векторів при відповідних косинусах в лівій частині (4) дорівнювала вектору, який стоїть біля косинуса в правій частині. Однак вектори $A\omega^2$ і $A\omega_0^2$ напрямлені по одній лінії, але в різні боки. Вектор $2\beta A\omega$ напрямлений перпендикулярно до перших двох. Зазначена вище умова може бути реалізована за допомогою векторної діаграми (рис. 2).

Векторна діаграма дає можливість визначити амплітуду і початкову фазу вимушених коливань. З діаграми видно, що

$$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 = (2\beta A\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2. \quad (5)$$

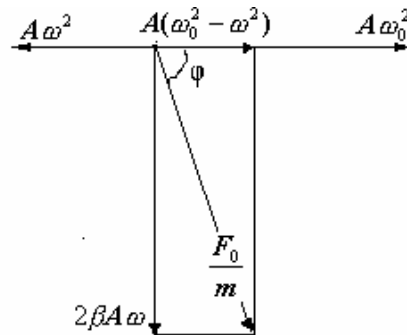


Рис. 2

Звідки амплітуда вимушених коливань буде дорівнювати

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (6)$$

Початкова фаза вимушених коливань, як видно з векторної діаграми, дорівнює

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

З урахуванням співвідношень (6) і (7) розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань (2) матиме вигляд

$$x = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}). \quad (8)$$

Якщо розглянути електричний коливальний контур, то змінною величиною в цьому випадку буде е.р.с., або змінна напруга

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (9)$$

Диференціальне рівняння вимушених коливань в коливальному контурі, з урахуванням (9), буде мати вигляд

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (10)$$

Використовуючи позначення, аналогічні до (2), прийдемо до рівняння

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (11)$$

Розв'язком рівняння (11) є функція, аналогічна до (3), тобто

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

Амплітуда заряду вимушених електромагнітних коливань буде дорівнювати

$$Q_m = \frac{U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (13)$$

Підстановка значень β і ω^2 в (13) дає значення амплітуди електромагнітних коливань в такому вигляді

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (14)$$

Похідна за часом від (12) дає можливість одержати в коливальному контурі закон зміни електричного струму

$$I = I_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}),$$

де $I_m = Q_m \omega$ — максимальний струм у коливальному контурі.

2. Амплітуда і фаза вимушених коливань (механічних і електромагнітних). Резонанс. Резонансні криві. Параметричний резонанс

Розглянемо залежність амплітуди A вимушених механічних (6) або електромагнітних (13) коливань від частоти ω . Механічні й електромагнітні коливання будемо розглядати одночасно, називаючи коливну величину або зміщенням (x) коливного тіла від положення рівноваги, або зарядом (Q) конденсатора.

З формули (6) випливає, що амплітуда A зміщення точок від положення рівноваги має максимум. Щоб визначити резонансну частоту $\omega_{рез}$ — частоту, при якій амплітуда A зміщення досягає максимуму, — потрібно дослідити на максимум функцію $A = f(\omega)$. Диференціюємо підкореневий вираз цієї функції за ω і прирівнюємо його до нуля:

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right] = 0,$$

$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2 \omega = 0$$

Ця рівність виконується при двох умовах $\omega = 0$, і $\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, фізичний зміст яких має лише додатне значення. Отже, резонансна частота буде дорівнювати

$$\omega_{рез} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (15)$$

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти вимушувальної сили до $\omega_{рез}$, називається *резонансом* (відповідно механічним або електричним). У випадку коли $\beta^2 \ll \omega_0^2$,

значення $\omega_{рез}$ практично збігається з власною частотою ω_0 коливної системи. Підставляючи (15) у формулу (6), одержимо

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (16)$$

На рис. 3 наведені залежності амплітуди вимушених коливань від частоти при різних значеннях коефіцієнта згасання β . З виразів (15) і (16) випливає, що чим менший коефіцієнт β , тим вище і правіше лежить максимум даної кривої. Якщо $\omega_0 \rightarrow 0$, то всі криві (див. рис.3) сходяться в одній точці, яка відповідає, відмінному від нуля граничному значенню амплітуди $A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$, так званому статичному відхиленню.

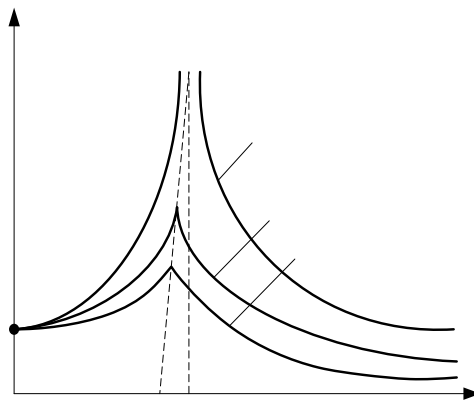


Рис.3

У випадку електромагнітних коливань $A_0 = \frac{U_m}{L\omega_0^2}$. Якщо $\omega \rightarrow \infty$, то всі криві мають асимптотичне наближення до нуля. Показані на рис. 3 криві називаються *резонансними кривими*.

З формули (16) випливає, що при малому згасанні ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) резонансна амплітуда зміщення буде мати вигляд

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}. \quad (17)$$

Поділимо значення резонансної амплітуди (17) на статичне значення амплітуди $A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$, одержимо добротність коливальної системи

$$\theta = \frac{A_{рез}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\delta}, \quad (18)$$

де δ — логарифмічний декремент згасання.

Як видно з (18), добротність коливальної системи характеризує її резонансні властивості. Чим більше число добротності, тим більша резонансна амплітуда.

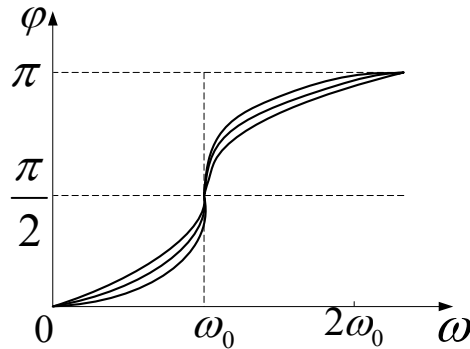


Рис. 4

Залежність φ від ω при різних коефіцієнтах β графічно показана на рис. 4, з якого випливає, що при зміні ω змінюється і зсув фаз φ . З формули (7) видно, що при $\omega = 0$, $\varphi = 0$, а при $\omega = \omega_0$ незалежно від значення коефіцієнта згасання β , $\varphi = \pi/2$, тобто сила випереджає за фазою коливання на $\pi/2$. При подальшому збільшенні ω зсув фаз зростає і при $\omega \gg \omega_0$, $\varphi \rightarrow \pi$, тобто фаза коливань майже протилежна до фази зовнішньої сили. Сімейство кривих, зображених на рис. 4, називається *фазовими резонансними характеристиками*.

Зупинимось коротко на явищі *параметричного резонансу*. Виявляється, що існують інші види зовнішніх взаємодій, з допомогою яких можна значно збільшити амплітуду коливань. Цей вид взаємодій полягає в тому, що в такт коливань періодично змінюють один із параметрів коливальної системи. Так, наприклад, зменшують довжину математичного маятника l , коли він перебуває в крайніх положеннях і дещо збільшують її, коли маятник проходить положення рівноваги, від цього маятник почне сильно розгойдуватись, амплітуда коливань буде швидко зростати, тобто наступить *явище параметричного резонансу*.

Збільшення енергії маятника відбувається за рахунок зміни довжини маятника. Сила натягу нитки маятника в цьому випадку є різною, — меншою в крайніх положеннях і більшою в момент проходження маятником положення рівноваги. При зменшенні довжини маятника (крайні положення) — зовнішні сили виконують від'ємну роботу, а при

збільшенні його довжини – додатну. Оскільки додатна робота за модулем є більшою за від’ємну, то сумарна робота за час одного повного коливання (період коливань) є більшою за нуль.

Прикладом параметричного резонансу є коливання гойдалки. Без будь-яких зовнішніх впливів дитина, перебуваючи на гойдалці, сама здатна збільшувати амплітуду коливань. Потрібно лише в крайніх положеннях підніматись, а в положенні рівноваги – трохи присідати. В цьому випадку коливальна система поповнюється енергією за рахунок мускульної сили ніг дитини.

Явища резонансу можуть бути як шкідливими, так і корисними. Наприклад, при конструюванні машин і різного роду споруд необхідно, щоб їх власна частота коливань не збігалася з частотою можливих зовнішніх впливів, інакше можуть виникнути вібрації, які призведуть до значних руйнувань. З іншого боку, наявність резонансу дозволяє знайти навіть дуже слабкі коливання, якщо їх частота збігається з частотою власних коливань приладу. Так, телебачення, радіотехніка, прикладна акустика, що сприймають електричні коливання, основані на використанні явища резонансу.

4. Змінний струм

Вимушені електромагнітні коливання, які виникають в колі, що містить резистор, котушку індуктивності і конденсатор, можна розглядати як змінний струм. В той же час змінний струм вважають квазістаціонарним, оскільки миттєві значення сили струму в усіх перетинах кола практично однакові. У порівнянні із швидкістю світла будь-які зміни в колі відбуваються досить повільно. Для миттєвих значень квазістаціонарних струмів виконуються закон Ома і правила Кирхгофа.

Розглянемо послідовно процеси, які відбуваються в колі, яке містить резистор, котушку індуктивності і конденсатор при вмиканні його до джерела змінної напруги

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (19)$$

де U_m – амплітуда напруги.

1. Розглянемо коло, в яке ввімкнули лише резистор R , а індуктивність L і ємність C – відсутні (рис.5,а).

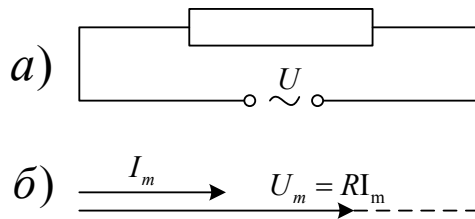


Рис.5, а,б

При виконанні умови квазістаціонарності струм через резистор R визначається законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t,$$

де амплітуда сили струму дорівнює

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

На векторній діаграмі (рис. 5,б) показано, що зсув фаз між напругою і струмом в колі, в якому є лише резистор R , дорівнює нулю.

2. Розглянемо випадок, коли змінний струм тече через котушку індуктивності L , в цьому випадку резистор R і ємність C в колі відсутні (рис. 6,а).

Якщо до кола прикладена змінна напруга (19), то через котушку потече змінний струм, в результаті чого в ній виникне е.р.с. самоіндукції $E = -L \frac{dI}{dt}$.

Тоді закон Ома для даного замкнутого кола буде мати вигляд

$$U_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0,$$

звідки

$$L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (20)$$

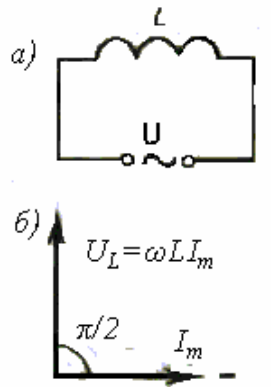


Рис. 6, а, б

Оскільки зовнішня напруга прикладена до котушки індуктивності, то

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \quad (21)$$

визначає спад напруги на котушці. З рівняння (20) випливає, що

$$dI = \left(\frac{U_m}{L} \right) \cos \omega t dt,$$

або після інтегрування, з урахуванням того, що постійна інтегрування дорівнює нулю, одержимо

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (22)$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}.$$

Величина

$$R_L = \omega L \quad (23)$$

називається *реактивним індуктивним опором* (або індуктивним опором).

З виразу (22) випливає, що для постійного струму, коли $\omega = 0$, котушка індуктивності опору не чинить. Підстановка значення $U_m = \omega L I_m$ у вираз (20) з урахуванням (21) приводить до наступного значення спаду напруги на котушці індуктивності:

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t. \quad (24)$$

Порівнюючи вирази (22) і (24) приходимо до висновку, що спад напруги U_L випереджає за фазою струм I , який тече через котушку, на $\pi/2$, що й показано на векторній діаграмі (рис. 6, б).

3. Нехай змінний струм у колі тече через конденсатор ємністю C , в цьому випадку активний опір R і котушка індуктивності L відсутні, (рис. 7, а).

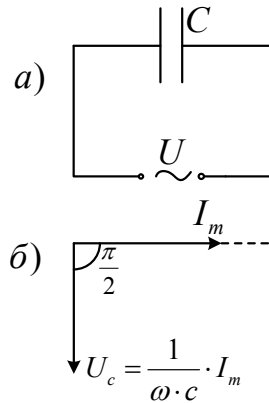


Рис.7, а,б

Якщо змінна напруга (19) прикладена до конденсатора то, в результаті постійного його перезарядження, у колі потече змінний струм. Оскільки вся зовнішня напруга прикладена до конденсатора, а опором підвідних проводів можна знехтувати, то

$$\frac{Q}{C} = U_c = U_m \cos \omega t.$$

Сила струму в цьому випадку буде дорівнювати

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (25)$$

де

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}.$$

Величина $R_c = \frac{1}{\omega C}$ називається *реактивним або ємнісним* опором. Для постійного струму ($\omega = 0$) $R_c = \infty$, тобто постійний струм через конденсатор текти не може. Спад напруги на конденсаторі у нашому випадку буде дорівнювати

$$U_c = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t. \quad (26)$$

Порівнюючи вирази (25) і (26) приходимо до висновку, що спад напруги U_c відстає за фазою від струму, який тече через конденсатор, на $\pi/2$. Це показано на векторній діаграмі (рис. 7, б).

4. Розглянемо коло змінного струму, що містить послідовно ввімкнуті резистор, котушку індуктивності і конденсатор. На рис. 8, а показане коло, що містить резистор опором R , котушку індуктивністю L і конденсатор ємністю C , на кінці якого подається змінна напруга (19).

У колі виникне змінний струм, який викличе на всіх елементах кола відповідні спади напруг U_R , U_L і U_c . На рис. 8,б показана векторна діаграма амплітуд спадів напруг на резисторі U_R , котушці U_L і конденсаторі U_c .

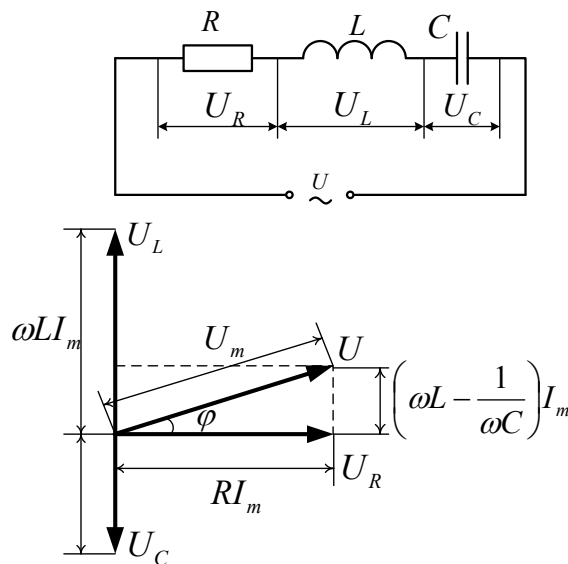


Рис. 8, а,б

Результуюча амплітуда U_m прикладеної напруги повинна бути рівною геометричній сумі амплітуд всіх спадів напруг. Як видно з рис. 8,б, кут φ визначає різницю або зсув фаз між напругою і силою струму. З рисунка випливає, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (27)$$

З прямокутного трикутника, скориставшись теоремою Піфагора, одержуємо, що

$$(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2,$$

звідки амплітуда сили струму буде дорівнювати

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (28)$$

Отже, якщо напруга в колі змінюється за законом

$$U = U_m \cos \omega t,$$

то в колі тече струм

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (29)$$

де φ і I_m визначаються відповідно формулами (27) і (28). Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (30)$$

називається *повним опором кола* змінного струму, а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

називається *реактивним опором*.

Розглянемо окремий випадок, коли в колі відсутній конденсатор. У цьому випадку спад напруг U_R і U_L в сумі дорівнює прикладеній напрузі U . Векторна діаграма для даного випадку показана на рис. 9, з якої видно, що

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega L}{R}, \\ I_m &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Отже, відсутність конденсатора в колі означає, що $C = \infty$, а не $C = 0$.

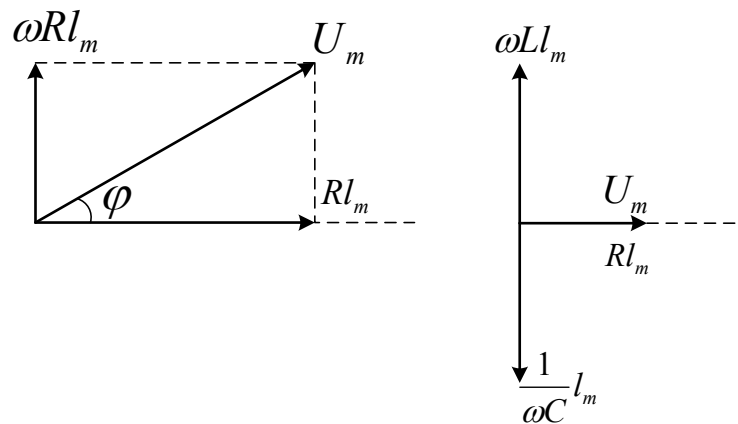


Рис. 9, а, б

Даний висновок можна трактувати так: зближаючи обкладки конденсатора до їх повного зіткнення, прийдемо до кола, у якому конденсатор відсутній (відстань між обкладками прямує до нуля, а ємність – до нескінченності).

4. Резонанс напруг

Якщо в колі змінного струму, що містить послідовно ввімкнуті конденсатор, котушку індуктивності і резистор (рис. 8,а)

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (32)$$

то кут зсуву фаз між струмом і напругою (27) перетворюється в нуль ($\varphi = 0$), тобто зміни струму і напруги відбуваються в одній фазі. Умову (32) задовольняє частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

У даному випадку повний опір кола Z (30) стає найменшим, рівним активному опорі R , а струм у колі визначаючись активним опором, досягає найбільших значень (при даному значенні U_m). При цьому спад напруги на активному опорі дорівнює зовнішній напрузі, прикладеній до кола ($U_R = U$), а спади напруг на конденсаторі (U_C) і котушці індуктивності (U_L) однакові за амплітудою і протилежні за фазою.

Розглянуте явище називається *резонансом напруг* (послідовним резонансом), тому що при цьому відбувається взаємна компенсація напруг U_L і U_C , кожна з яких може значно перевищувати прикладену до

кола напругу U . Векторна діаграма для резонансу напруг показана на рис. 9,б.

У випадку резонансу напруг

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез},$$

тому, підставивши в цю формулу значення резонансної частоти й амплітуди напруг на котушці індуктивності і конденсаторі, одержимо

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = \theta U_m,$$

де θ - добротність контуру.

Оскільки добротність звичайних коливальних контурів більша одиниці, то напруга на котушці індуктивності, а також і на конденсаторі перевищує напругу, прикладену до кола. Тому явище резонансу напруг використовується в техніці для підсилення коливання напруги певної частоти. Наприклад, у випадку резонансу на конденсаторі можна одержати напругу з амплітудою θU_m (θ у даному випадку – добротність контуру), що може бути значно більше U_m . Це підсилення напруги можливе тільки для вузького інтервалу частот біля резонансної частоти контуру, що дозволяє виділити з багатьох сигналів одне коливання певної частоти, тобто на радіоприймачі налаштуватися на потрібну довжину хвилі. Явище резонансу напруг необхідно враховувати при розрахунку ізоляції електричних ліній, які містять конденсатори і котушки індуктивності, тому що інакше може спостерігатися їх пробій.

Тема 4. Пружні хвилі

- 1. Хвильові процеси. Поздовжні і поперечні хвилі.**
- 2. Рівняння біжучої хвилі. Фазова швидкість. Сферична хвиля.**
- 3. Одновимірне хвильове рівняння. Швидкість поширення хвиль.**
- 4. Енергія пружних хвиль. Потік і густина потоку енергії хвиль.**

1. Хвильові процеси. Поздовжні і поперечні хвилі

Коливання, які збуджуються в будь-якій точці пружного середовища (твердого, рідкого або газоподібного), передаються від однієї точки середовища до іншої з кінцевою швидкістю, яка залежить від властивостей цього середовища. Чим далі розташовані частинки

середовища від джерела коливань, тим пізніше вони почнуть коливатися. Інакше кажучи, фази коливань частинок середовища і джерела тим більше відрізняються одна від одної, чим більша ця відстань. При вивченні поширення коливань в середовищі не враховується дискретний (молекулярний) характер будови самого середовища. В цьому випадку вважають, що частинки середовища мають неперервне заповнення навколишнього простору і проявляють пружні властивості.

Процес поширення коливань у суцільному пружному середовищі називається *хвильовим процесом* (або хвилею). При поширенні хвилі частинки середовища не рухаються разом із хвилею, а коливаються біля своїх положень рівноваги. Разом із хвилею від частинки до частинки середовища передається лише стан коливального руху і його енергія. Тому основною властивістю усіх хвиль незалежно від їхньої природи є *перенесення енергії без перенесення речовини*.

Серед різноманітних хвиль, які зустрічаються в природі й техніці, можна виділити такі їх типи: хвилі на поверхні рідини, пружні механічні і електромагнітні хвилі. Пружні механічні хвилі виникають і поширюються лише в пружному середовищі. Пружні хвилі ще діляться на *поздовжні* й *поперечні*. У поздовжніх хвилях частинки середовища коливаються в напрямку поширення хвилі, у поперечних – у площинах, перпендикулярних до напрямку поширення хвилі.

Поздовжні хвилі можуть поширюватися в середовищах, у яких виникають пружні сили *при деформаціях стиску і розтягу*. Це означає, що поздовжні хвилі поширюються у твердих, рідких і газоподібних середовищах.

Поперечні хвилі можуть поширюватися в середовищах, у яких виникають пружні сили *при деформаціях зсуву*, тобто фактично тільки у твердих тілах. У рідинах і газах виникають лише поздовжні хвилі, а у твердих тілах – як поздовжні, так і поперечні хвилі.

Пружна хвиля називається синусоїдальною (або гармонічною), якщо відповідні їй коливання частинок середовища є гармонічними. На рис. 1 показана синусоїдальна поперечна хвиля, яка поширюється зі швидкістю v уздовж осі x , тобто показана залежність між зміщенням $U_{(x,t)}$ частинок середовища, у хвильовому процесі, і відстанню x цих частинок від джерела коливань для будь-якого фіксованого моменту часу t .

Наведений графік функції $U_{(x,t)}$ не схожий на графік гармонічного коливання. Графік хвилі (рис.1) показує залежність зміщення всіх частинок середовища від відстані до джерела коливань у даний момент часу, а графік гармонічних коливань – залежність зміщення даної частинки від часу.

Відстань між найближчими частинками, які коливаються в одній фазі, називається *довжиною хвилі* λ (рис. 1). Довжина хвилі дорівнює відстані, на яку поширюється фаза коливань за час в один період, тобто

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (1)$$

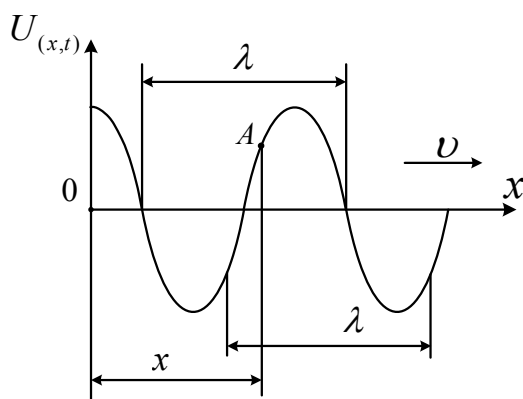


Рис. 1

Якщо розглянути хвильовий процес трохи детальніше, то стане ясно, що в хвильовому русі коливаються не лише частинки, розташовані уздовж осі x , а й сукупність частинок, розташованих у деякому об'ємі, тобто хвиля, поширюючись від джерела коливань, охоплює все нові і нові області простору. Геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі, називається хвильовою поверхнею. Хвильових поверхонь можна провести безліч. Хвильова поверхня у будь-який момент часу називається хвильовим фронтом. Для цього моменту часу хвильовий фронт може бути лише один.

Хвильові поверхні можуть мати довільну форму. В найпростішому випадку хвильові поверхні є сукупністю площин або сукупністю концентричних сфер. Відповідно хвиля називається *плоскою* або *сферичною*.

2. Рівняння біжучої хвилі. Фазова швидкість. Сферична хвиля

Якщо хвилі, поширюючись в пружному середовищі з кінцевою швидкістю, переносять енергію, то вони називаються *біжучими*. Перенесення енергії в хвильовому русі кількісно характеризується вектором густини потоку енергії. Вектор потоку енергії вперше для механічних пружних хвиль був введений російським фізиком Умовим і називається вектором Умова. Напрямок вектора Умова збігається з напрямком перенесення енергії, а його модуль дорівнює енергії, яка

переноситься хвилею через одиничну площадку, розташовану перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, за одиницю часу.

Для одержання рівняння біжучої хвилі — залежності зміщення коливної точки пружного середовища від координати і часу — розглянемо *плоску синусоїдальну хвилю*, допустивши, що вісь x збігається з напрямком поширення хвилі (рис. 21). У даному випадку хвильові поверхні, тобто поверхні однакої фази, перпендикулярні до осі x , а тому всі точки пружного середовища на цих поверхнях коливаються однаково. Зміщення будь-якої точки пружного середовища від положення рівноваги в цьому випадку залежить лише від координати x і часу t , а його величина буде дорівнювати $U_{x,t} = f(x,t)$.

Розглянемо деяку точку B , яка перебуває на відстані x від джерела коливань (рис. 1). Якщо коливання точок пружного середовища, які лежать у площині $x = 0$, описуються функцією $U_{(0,t)} = A \cos \omega t$, то точка B пружного середовища теж буде коливатися за тим же законом, але її коливання будуть відставати за часом від коливань джерела на τ , тому що для проходження хвилею відстані x необхідний час $\tau = \frac{x}{v}$, де v — швидкість поширення хвилі. Тоді рівняння коливань частинок, які лежать у площині x , буде мати вигляд

$$U_{x,t} = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (2)$$

де A — максимальне зміщення виділеної коливної точки B від положення рівноваги;

ω — циклічна частота генератора коливань джерела.

Рівняння (2) є рівнянням біжучої хвилі. Якщо плоска хвиля поширюється в протилежному напрямку, то

$$U_{x,t} = A \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right).$$

В загальному випадку рівнянням плоскої синусоїдальної хвилі, яка поширюється без поглинання енергії уздовж позитивного напрямку осі x , має вигляд

$$U_{x,t} = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right], \quad (3)$$

де A — амплітуда хвилі;

ω – циклічна частота хвилі;
 φ_0 – початкова фаза коливань, обумовлена вибором початкових значень x і t ;
 $[\omega(t - x/v) + \varphi_0]$ – фаза плоскої хвилі.

В рівнянні (3) синусоїдальний характер хвилі характеризують хвильовим числом, яке дорівнює

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4)$$

З врахуванням (4) рівняння (3) матиме вигляд

$$U_{x,t} = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (5)$$

Рівняння хвилі, яка поширюється в сторону менших значень осі x , відрізняється від (5) тільки знаком члена kx .

Розглянемо випадок, коли в процесі хвильового руху фаза коливань не змінюється з часом, тобто

$$\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0 = \text{const}. \quad (6)$$

Диференціюємо вираз (6) за часом, одержимо

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

звідки

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Отже, швидкість v поширення хвилі в рівнянні (6) є не що інше, як швидкість переміщення фази хвилі, а тому її називають *фазовою швидкістю*.

Сферичні хвилі утворюються в однорідному і ізотропному середовищі від точкових джерел коливань. Якщо повторити хід міркувань для плоскої хвилі, можна показати, що рівняння сферичної синусоїдальної

хвилі, хвилі, хвильові поверхні якої мають вигляд концентричних сфер, записується так

$$U_{r,t} = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (7)$$

де r – відстань від точкового джерела сферичних хвиль до виділеної точки пружного середовища.

У випадку сферичної хвилі навіть у середовищі, яке не поглинає енергії, амплітуда коливань не залишається постійною, а зменшується з відстанню за законом $\frac{1}{r}$. Рівняння (7) має місце лише для великих r , які значно перевищують розміри джерела коливань (джерело коливань тут можна вважати точковим).

З рівняння (3) можна одержати, що

$$v = \frac{\omega}{k},$$

тобто фазова швидкість синусоїдальних хвиль залежить від їхньої частоти. Це явище називають *дисперсією хвиль*, а середовище, у якому спостерігається дисперсія хвиль, називається *дисперсним середовищем*.

3. Одновимірне хвильове рівняння. Швидкість поширення хвиль

Рівняння довільної хвилі є розв'язком рівняння, яке називається *хвильовим*.

Для виведення цього рівняння скористаємось рівняння плоскої хвилі, яка поширюється в напрямку осі x . Розглянемо ділянку пружного середовища, яке характеризується модулем пружності E (рис. 2). З рисунка видно, що виділений елемент має переріз S і довжину Δx . Під дією зовнішньої сили F виділена ділянка пружного середовища деформується на величину ΔU .

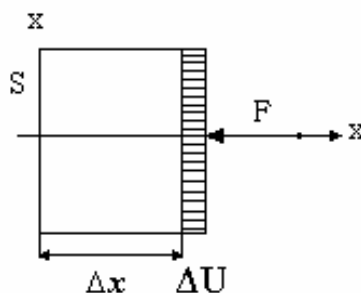


Рис. 2

Оскільки середовище є пружним, то для виділеної ділянки можна застосувати закон Гука

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta U}{\Delta x}, \quad (8)$$

де E – модуль Юнга;

$\frac{\Delta U}{\Delta x}$ – відносна деформація;

F – зовнішня сила;

S – площа виділеної ділянки пружного середовища в напрямі осі x .

В граничному випадку при $\Delta x \rightarrow 0$, рівняння (8) запишеться так

$$F = ES \frac{\partial U_{x,t}}{\partial x}. \quad (9)$$

Якщо збуджувати поздовжню хвилю в деякому пружному середовищі, яким є наприклад стержень перерізом S з модулем Юнга E , то на виділену ділянку будуть діяти дві сили (рис.3). Запишемо для цієї ділянки другий закон Ньютона

$$F_{x+\Delta x} - F_x = ma. \quad (10)$$

Сили в рівнянні (10) є пружними силами, а тому відповідно до рівняння (9) запишуться так

$$\begin{aligned} F_x &= ES \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_x, \\ F_{x+\Delta x} &= ES \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо підставити ці сили (11) в другий закон Ньютона (10), то після деяких перетворень одержимо

$$ES \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_x \right] = m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (12)$$

де m — маса виділеної ділянки пружного середовища.

Масу виділеної ділянки пружного середовища можна виразити через об'єм і густину речовини стержня так

$$m = \rho S \Delta x. \quad (13)$$

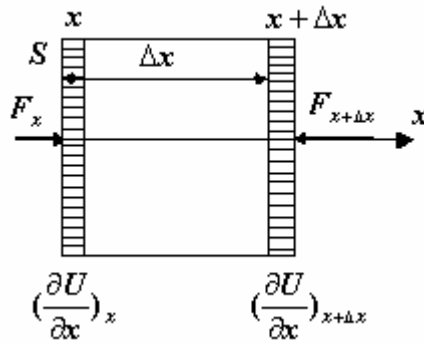


Рис.3

З урахуванням значення маси (13) і нескладних перетворень рівняння (12) запишеться так

$$\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(U_{x,t})_{x+\Delta x} - (U_{x,t})_x] = \frac{\partial^2 U_{x,t}}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Розглянувши граничний випадок при якому $\Delta x \rightarrow 0$, з рівняння (14) одержуємо рівняння, яке називається *хвильовим рівнянням*

$$\frac{\partial^2 U_{x,t}}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 U_{x,t}}{\partial x^2}. \quad (15)$$

Рівняння (15) є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку в частинних змінних. Розв'язком такого рівняння є уже відоме рівняння плоскої хвилі

$$U_{x,t} = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (16)$$

Знайдемо другі частинні похідні за часом t і координатою x від рівняння (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{x,t}}{\partial t^2} &= -A \omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \\ \frac{\partial^2 U_{x,t}}{\partial x^2} &= -A k^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Після підстановки відповідних похідних (17) в рівняння (15) та необхідних скорочень одержимо

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E}{\rho}. \quad (18)$$

Але оскільки $\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\lambda}{T \cdot 2\pi} = v$, то хвильове рівняння (15) буде мати інший вигляд

$$\frac{\partial^2 U_{x,t}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U_{x,t}}{\partial x^2}. \quad (19)$$

Таким чином швидкість поширення механічних хвиль у пружному середовищі залежить від пружних властивостей цього середовища і його густини

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (20)$$

Оскільки модуль Юнга характеризує стиснення або розтяг пружного середовища, то одержана швидкість (20) є фазовою швидкістю лише поздовжніх хвиль.

Фазова швидкість поперечних хвиль, які можуть існувати лише в твердому пружному середовищі, визначають заміною модуля Юнга в (20) на модуль зсуву G

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (21)$$

Розрахунки показують, що в твердому середовищі модуль Юнга E майже на порядок перевищує величину модуля зсуву G , тому фазова швидкість поздовжньої хвилі тут більша за швидкість поперечної хвилі, тобто

$$v_{\parallel} > v_{\perp}. \quad (22)$$

Важливо відмітити, що для механічних хвиль, які мають велику довжину λ рівняння (15) і (19) будуть нелінійними.

Якщо механічна хвиля поширюється в однорідному ізотропному середовищі, то хвильове рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 U_{x,y,z,t}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{x,y,z,t}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{x,y,z,t}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 U_{x,y,z,t}}{\partial t^2}. \quad (23)$$

Для механічних хвиль властивий принцип суперпозиції. Це означає, що при накладанні механічних хвиль відсутнє їх спотворення.

5. Енергія пружних хвиль. Потік і густина потоку енергії хвиль

Нехай в деякому пружному середовищі в напрямі осі x поширюється плоска поздовжня хвиля

$$U_{x,t} = A \cos(\omega t - \kappa x + \varphi_0). \quad (24)$$

Виділимо в цьому середовищі елементарний об'єм ΔV , настільки малий, щоб швидкість хвилі $\frac{\partial U_{x,t}}{\partial t}$ і швидкість деформації $\frac{\partial U_{x,t}}{\partial x}$ у всіх його точках були однакові.

Повну механічну енергію, локалізовану у виділеному об'ємі, можна розрахувати за формулою

$$\Delta W = \Delta K + \Delta \Pi,$$

де ΔK - кінетична енергія виділеного об'єму;

$\Delta \Pi$ - потенціальна енергія пружної деформації цього об'єму.

Кінетичну енергію, яку має виділений об'єм пружного середовища знаходимо за формулою

$$\Delta K = \frac{m v^2}{2} = \frac{\rho \Delta V \left(\frac{\partial U_{x,t}}{\partial t} \right)^2}{2}, \quad (25)$$

де ρ - густина середовища виділеного об'єму.

Першу похідну за часом виразу (24) підставимо в (25), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{x,t}}{\partial t} &= -A \omega \sin(\omega t - \kappa x + \varphi_0); \\ \Delta K &= \frac{\rho S \Delta x \omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t - \kappa x + \varphi_0), \end{aligned} \quad (26)$$

де $\kappa = \frac{\omega}{v}$ — хвильове число.

У відповідності з рис. 4 потенціальну енергію пружної деформації виділеного об'єму знаходимо так:

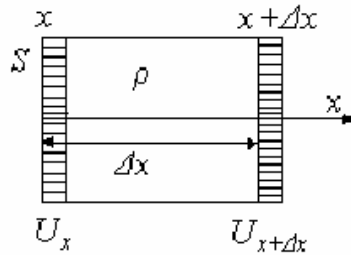


Рис. 4

$$\Delta\Pi = \frac{k\Delta U_{x,t}^2}{2}, \quad (27)$$

де k – коефіцієнт пружності середовища, який відповідно до закону Гука (8) дорівнює $k = \frac{ES}{\Delta x}$;

$\Delta U_{x,t} = U_{x+\Delta x} - U_x$ – величина деформації виділеного об'єму пружного середовища.

З урахуванням цих позначень (27) матиме вигляд

$$\Delta\Pi = \frac{ES}{2\Delta x} [U_{x+\Delta x} - U_x]^2. \quad (28)$$

Помножимо й поділимо (28) на Δx^2 , одержимо

$$\Delta\Pi = \frac{ES}{2\Delta x} \cdot \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2} [U_{x+\Delta x} - U_x]^2. \quad (29)$$

В граничному випадку при $\Delta x = 0$ одержуємо

$$\Delta\Pi = \frac{ES\Delta x}{2} \left[\frac{\partial U_{x,t}}{\partial x} \right]^2. \quad (30)$$

Підставимо у формулу (30) значення модуля Юнга $E = \rho v^2$, і швидкість деформації $\frac{\partial U_{x,t}}{\partial x} = A k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$, одержимо

$$\Delta\Pi = \frac{\rho S \Delta x \omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (31)$$

Повну енергію, локалізовану у виділеному об'ємі пружного середовища, одержимо при додаванні кінетичної енергії (26) і потенціальної енергії (31)

$$\Delta W = \Delta K + \Delta\Pi = \rho S \Delta x \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (32)$$

Якщо врахувати, що середнє значення квадрата синуса за час в один період дорівнює $\frac{1}{2}$, то одержимо середнє значення повної енергії, яке буде дорівнювати

$$\Delta \bar{W} = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2} \Delta V, \quad (33)$$

де $\Delta V = S \Delta x$ – елементарний об'єм пружного середовища.

Середнє значення густини енергії легко одержати, якщо (33) поділити на величину виділеного об'єму пружного середовища

$$\bar{w} = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2}. \quad (34)$$

Нехай через площадку S (рис.4), яка є перпендикулярною до напрямку поширення хвилі, за час Δt переноситься енергія ΔW . Тоді вектор густини енергії буде дорівнювати

$$\vec{R} = \frac{\Delta W}{S \Delta t} = \frac{\bar{w} S \vec{v} \Delta t}{S \Delta t} = \bar{w} \vec{v}, \quad (35)$$

де $\vec{R}$ – вектор густини потоку енергії;

$\bar{w}$ – середня густина перенесеної хвилями енергії;

$\vec{v}$ – вектор швидкості, модуль якої дорівнює фазовій швидкості хвиль з напрямком поширення хвиль і відповідно перенесення енергії.

Вектор потоку енергії $\vec{R}$ вперше одержав і розглянув видатний російський фізик Умов. На честь цього фізика він був названий *вектором Умова*.

Тема 5. Суперпозиція хвиль

1. Принцип суперпозиції хвиль. Групова швидкість.
2. Інтерференція хвиль.
3. Стоячі хвилі.

1. Принцип суперпозиції хвиль. Групова швидкість

Якщо в середовищі є декілька джерел коливань, то хвилі, які поширюються від них, йдуть незалежно одна від одної і після взаємного перетину розходяться далі так, ніби такої зустрічі і не було. Це положення називається принципом суперпозиції.

При поширенні декількох хвиль в лінійному середовищі, тобто середовищі де властивості хвиль не змінюються під дією різних збурень, створюваних хвилями, кожна з них поширюється так, начебто інші хвилі відсутні, а результуюче зміщення частинок середовища в будь-який момент часу дорівнює геометричній сумі зміщень, які одержують частинки, беручи участь у кожному окремому хвильовому процесі.

Виходячи з принципу суперпозиції будь-яка хвиля може бути подана у вигляді системи синусоїдальних хвиль, тобто у вигляді хвильового пакета, або групи хвиль.

Хвильовим пакетом називається суперпозиція хвиль, які мало відрізняються одна від одної за частотою, і займають в кожен момент часу обмежену область простору.

«Виготовимо» найпростіший хвильовий пакет із двох хвиль, які поширюються уздовж осі x з однаковими амплітудами і близькими частотами і відповідно хвильовими числами. Нехай $d\omega \ll \omega$ і $dk \ll k$. Тоді

$$\begin{aligned} U_{x,t} &= A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos([(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (1)$$

Хвиля (1) не є синусоїдальною, тому що її амплітуда повільно змінюється в залежності від координати x і часу t

$$A = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \right|. \quad (2)$$

За швидкість поширення цієї не синусоїдальної хвилі (хвильового пакета) приймають швидкість переміщення максимуму амплітуди хвилі,

вважаючи тим самим максимум як центр хвильового пакета. За умови, коли $t d\omega - x dk = \text{const}$, одержимо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = u. \quad (3)$$

Швидкість u є *груповою швидкістю*. Її можна визначити як швидкість руху групи хвиль, що утворюють у кожен момент часу локалізований у просторі хвильовий пакет.

Знайдемо зв'язок між груповою й фазовою швидкостями хвиль. У формулу (3) підставимо значення циклічної частоти ω , вираженої через хвильове число k і фазову швидкість v , тобто

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \left(\frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} \right) = v + k \left(-\frac{\lambda}{k} \right) \frac{dv}{d\lambda},$$

або

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (4)$$

При виведенні (4) враховано що $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ і $\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\lambda}{k}$.

Аналізуючи формулу (4) можна зробити висновок, що групова швидкість може бути і меншою і більшою фазової швидкості. Все залежить від знаку похідної $\frac{dv}{d\lambda}$.

У середовищі, в якому фазова швидкість не залежить від довжини хвилі, групова швидкість збігається з фазовою швидкістю.

Поняття групової швидкості дуже важливе, тому що саме вона фігурує при вимірюванні дальності в радіолокації, у системах керування космічними об'єктами і т.д. У теорії відносності доводиться, що *групова швидкість* $u \leq c$, у той час як для *фазової швидкості обмежень не існує*.

2. Інтерференція хвиль

Узгоджене проходження в часі і просторі декількох коливань або хвильових процесів пов'язується з поняттям когерентності.

Дві хвилі називаються *когерентними*, якщо вони мають однакову частоту і різниця їх фаз залишається постійною в часі.

Інтерференцією хвиль називається явище, яке відбувається при накладанні двох або кількох когерентних хвиль, при якому має місце стійке в часі їх взаємне підсилення в одних точках простору і ослаблення в інших в залежності від співвідношення між фазами цих хвиль.

Розглянемо накладення двох плоских хвиль, які випромінюються точковими джерелами S_1 і S_2 (рис.1) з амплітудами A_1 і A_2 , частотами ω_1 і ω_2 , хвильовими числами κ_1 і κ_2 .

Точкові джерела S_1 і S_2 випромінюють в напрямі точки M плоскі хвилі, рівняння яких мають вигляд

$$\begin{aligned} U_{r_1,t} &= A_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1 r_1 + \varphi_1), \\ U_{r_2,t} &= A_2 \cos(\omega_2 t - \kappa_2 r_2 + \varphi_2). \end{aligned} \quad (5)$$

де r_1 і r_2 – відстані від джерел хвиль до точки M ;
 κ_1 і κ_2 – хвильові числа;
 φ_1 і φ_2 – початкові фази обох хвиль;
 ω_1 і ω_2 – циклічні частоти хвиль.

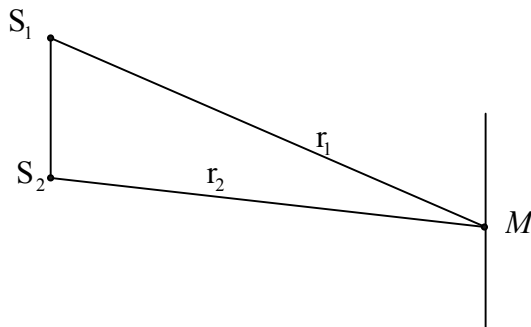


Рис. 1

Результуючу амплітуду при накладанні двох однаково направлених хвиль (5) знаходимо графічним методом (з допомогою векторної діаграми)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - (\kappa_1 x_1 - \kappa_2 x_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (6)$$

Розглянемо окремі випадки:

1. Нехай $\omega_1 \neq \omega_2$, $\kappa_1 \neq \kappa_2$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

В цьому випадку жодна складова правої сторони рівняння (6) не дорівнює нулю, а тому можна визначити лише середнє значення результуючої амплітуди. Оскільки середнє значення косинуса за час в один період дорівнює нулю, то

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2. \quad (7)$$

Рівняння (7) показує, що в цьому випадку в точці М відбувається просте додавання інтенсивностей ($I \sim A^2$)

$$I = I_1 + I_2.$$

2. Нехай $\omega_1 = \omega_2$, $\kappa_1 = \kappa_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$, $A_1 = A_2 = A_0$.
В цьому випадку рівняння (7) матиме вигляд

$$A^2 = 2A_0^2[1 + \cos \kappa \Delta r]. \quad (8)$$

Вираз під функцією косинуса в рівнянні (8) не залежить від часу, а тому не підлягає усередненню. Результируюча інтенсивність при накладанні двох хвиль в цьому випадку буде дорівнювати

$$I = 2I_0(1 + \cos \kappa \Delta r). \quad (9)$$

Рівність (9) показує, що розподіл інтенсивності при накладанні двох хвиль з рівними циклічними частотами, хвильовими числами й початковими фазами в різних точках простору буде різною. Такі хвилі називаються когерентними, а явище називається *інтерференцією*.

Проведемо аналіз співвідношення (9).

а) якщо $\kappa \Delta r = \pm 2n\pi$, де $n = 1, 2, 3, \dots$ і $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ — інтенсивність при накладанні двох когерентних хвиль буде дорівнювати

$$I = 4 I_0. \quad (10)$$

Якщо в різниці ходу двох когерентних хвиль вкладається ціле число хвиль, то при їх накладанні інтенсивність зростає в 4 рази. Ця умова є умовою максимумів інтерференції, тобто

$\Delta r = \pm n\lambda$, де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ — умова максимумів інтерференції.

б) якщо $\kappa \Delta r = \pm (2n + 1)\pi$, де $n = 1, 2, 3, \dots$ і $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ — інтенсивність при накладанні двох когерентних хвиль буде дорівнювати

$$I = 0. \quad (11)$$

Якщо в різниці ходу двох когерентних хвиль вкладається непарне число півхвиль, то при їх накладанні результуюча інтенсивність буде дорівнювати нулю. Ця умова є умовою мінімумів інтерференції, тобто

$$\Delta r = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}, \text{ де } n=0, 1, 2, 3, \dots \text{ — умова мінімумів інтерференції.}$$

3. Стоячі хвилі

Особливим випадком інтерференції є стоячі хвилі. Стоячі хвилі - це хвилі, які утворюються при накладанні двох біжучих хвиль, що поширюються назустріч одна одній з однаковими частотами і амплітудами.

Нехай дві плоскі хвилі поширюються назустріч одна одній вздовж осі x в пружному середовищі без затухання, при цьому виберемо початок відліку x так, щоб початкова фаза φ дорівнювало нулю, тобто

$$\begin{aligned} U_{(x,t)_1} &= A \cos(\omega t - kx), \\ U_{(x,t)_2} &= A \cos(\omega t + kx). \end{aligned} \quad (12)$$

Додамо ці рівняння і врахувавши, що $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, отримаємо *рівняння стоячої хвилі*

$$U_{x,t} = U_{(x,t)_1} + U_{(x,t)_2} = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \quad (13)$$

Множник $\cos \omega t$ показує, що в точках середовища виникає коливання з тією ж частотою ω , що і коливання зустрічних хвиль.

Множник $2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, який не залежить від часу, виражає амплітуду $A_{\text{ст}}$ результуючих хвиль, точніше — амплітуда як величина позитивна, дорівнює абсолютному значенню цього множника:

$$A_{\text{ст}} = \left| 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right|. \quad (14)$$

Амплітуда результуючого коливання залежить від координати x , що визначає положення точок середовища. Точки середовища, де амплітуда $A_{\text{ст}}$ досягає максимального значення $2A$, називаються пучностями стоячої хвилі. Координати пучностей визначають із умови

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi, (m=0, 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Точки середовища, де $A_{cm} = 0$, називаються *вузлами стоячої хвилі*. Точки середовища, що знаходяться у вузлах, не коливаються. Координати вузлів визначаються із умови

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}, (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Із співвідношень (15) і (16) координати пучностей і вузлів відповідно дорівнюють

$$x_n = \pm m \frac{\lambda}{2}, \quad \text{і} \quad x_e = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (17)$$

Відстань між двома сусідніми пучностями отримаємо, якщо знайдемо різницю двох значень x_n для двох послідовних значень m : тобто відстань між сусідніми пучностями дорівнює половині довжини тих хвиль, в результаті інтерференції яких утворюється дана стояча хвиля

$$x_n(m+1) - x_n(m) = \left[(m+1)\frac{\lambda}{2} - m\frac{\lambda}{2} \right] = \frac{\lambda}{2}. \quad (18)$$

Відстань вузла від найближчої пучності дорівнює:

$$x_e - x_n = (2m+1)\frac{\lambda}{4} - m\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}. \quad (19)$$

На рис. 2 наведено характер руху частинок середовища при встановленні в ньому поперечної стоячої хвилі через проміжок часу $T/2$. Стрілками показано напрямки руху частинок, які викликані тією чи іншою хвилею.

Отже, в стоячій хвилі є ряд нерухомих вузлових точок, які розміщені на відстані півхвилі одна від одної. Частинки між вузлами коливаються з різними амплітудами, від нуля у вузлі до подвійної амплітуди у пучності. Всі частинки одночасно проходять через положення рівноваги і одночасно досягають максимальних відхилень, отже, коливаються в однакових фазах. В суміжному інтервалі між вузлами характер коливань такий же, але фаза протилежна.

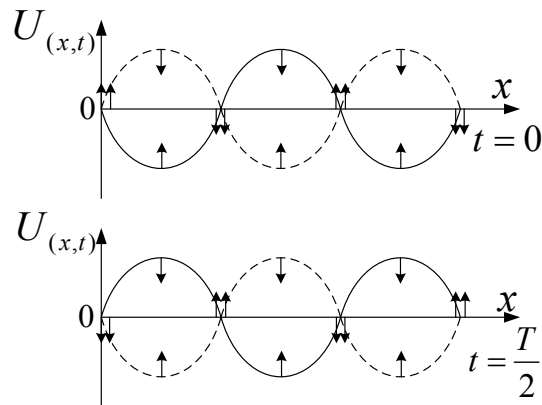


Рис. 2

У стоячій хвилі енергія не переноситься - повна енергія коливань кожного елемента об'єму середовища, обмеженого сусіднім вузлом і пучністю, не залежить від часу. Вона лише переходить з кінетичної енергії в потенціальну енергію пружно деформованого середовища і навпаки. Відсутність перенесення енергії стоячою хвилею є результатом того, що падаюча і відбита хвилі, які утворюють цю стоячу хвилю, переносять енергію в рівних кількостях і в протилежних напрямках.

Лише в межах відстаней, рівних половині довжини хвилі, відбуваються взаємні перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки.

На межі, де відбувається відбивання хвилі, може утворюватись як вузол так і пучність. Якщо середовище, від якого відбувається відбивання хвилі, менш густе, то в місці відбивання буде утворюватись пучність (рис.3,а). Утворення вузла можливе лише при відбиванні хвилі від більш густого середовища (рис.3,б).

Утворення вузла пов'язане з тим, що хвиля, відбиваючись від більш густого середовища, змінює свою фазу на протилежну. Тому накладання хвиль різних напрямків приводить до утворення вузла.

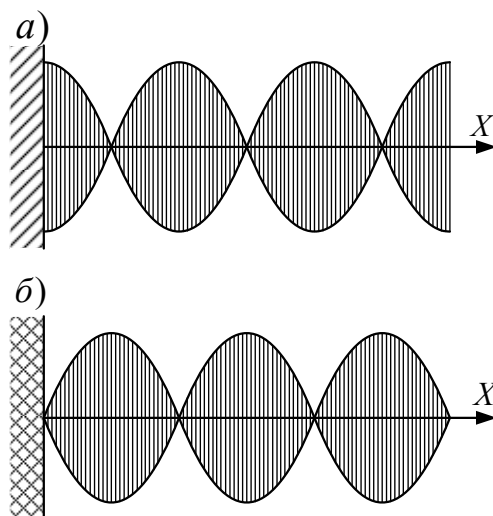


Рис. 3

Якщо ж хвилі відбиваються від менш густого середовища, то зміни фази хвиль не відбувається. Хвилі тут накладаються в одній і тій же фазі, а тому в місці накладання утворюється пучність.

Тема 6. Електромагнітні хвилі

1. Природа електромагнітних хвиль.
2. Хвильові рівняння електромагнітних хвиль.
3. Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Пойнтінга.

1. Природа електромагнітних хвиль

Існування електромагнітних хвиль — змінного електромагнітного поля, яке поширюється в просторі з кінцевою швидкістю, — впливає з рівнянь Максвелла. Рівняння Максвелла сформульовані ще в 1865 р. на основі узагальнення емпіричних законів електричних і магнітних явищ і розвитку ідеї Фарадея. Вирішальну роль для підтвердження теорії Максвелла зіграли досліди Герца (1888), які довели, що електричні й магнітні поля дійсно поширюються у вигляді хвиль, властивості яких повністю описуються рівняннями Максвелла. В інтегральній формі рівняння Максвелла мають вигляд:

$$\oint_L E dl = - \oint_S \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_n dS; \quad (1)$$

$$\oint_S E dS = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \oint_V \rho dV; \quad (2)$$

$$\oint_L H dl = \oint_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right)_n dS; \quad (3)$$

$$\oint_S B dS = 0. \quad (4)$$

З цих рівнянь можна зробити кілька важливих висновків:

- змінне магнітне поле $\frac{\partial B}{\partial t}$ в (1) є причиною виникнення в просторі вихрового електричного поля;
- причиною виникнення статичного електричного поля в (2) є наявність у просторі статичних електричних зарядів $\oint_V \rho dV$;

- струм провідності $j dS$ і струм зміщення $\frac{\partial D}{\partial t} dS$ в (3) є причиною виникнення у просторі вихрового магнітного поля;
- магнітних зарядів у природі (4) не існує.

Джерелом електромагнітних хвиль може бути будь-який електричний коливальний контур або провідник, по якому тече змінний електричний струм, оскільки для утворення електромагнітних хвиль необхідно створити в просторі змінне електричне поле (струм зміщення) (3), або відповідно змінне магнітне поле (1). Випромінювальна здатність джерела електромагнітних хвиль визначається його формою, розмірами і частотою коливань. Щоб випромінювання було помітним, необхідно збільшити об'єм простору, у якому створюється змінне електромагнітне поле. Тому для одержання електромагнітних хвиль непридатні закриті коливальні контури, оскільки в них електричне поле зосереджене між обкладками конденсатора, а магнітне – усередині котушки індуктивності.

Герц у своїх дослідах, зменшуючи число витків котушки і площу пластин конденсатора, а також розсовуючи їх (рис. 1, а, б), здійснив перехід від закритого коливального контуру до відкритого коливального контуру (вібратора Герца), який складається з двох стрижнів, розділених іскровим проміжком (рис. 1, в). Якщо в закритому коливальному контурі змінне електричне поле зосереджене усередині конденсатора (рис. 1, а), то у відкритому – воно заповнює навколишній простір (рис. 1, в), що істотно підвищує інтенсивність електромагнітного випромінювання.

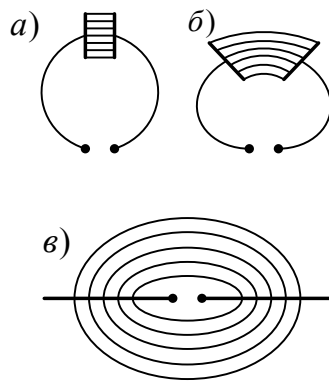


Рис. 1

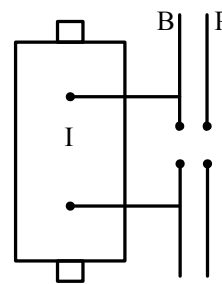


Рис. 2

Коливання в такій системі підтримуються за рахунок джерела е.р.с., увімкненого до обкладок конденсатора, а іскровий проміжок застосовується для того, щоб збільшити різницю потенціалів, до якої в початковий момент часу заряджаються обкладки конденсатора.

Для утворення електромагнітних хвиль вібратор Герца B під'єднували до індуктора I (рис. 2). Коли напруга на іскровому проміжку досягала пробивного значення, виникала іскра, яка замикала обидві половини вібратора, і у вібраторі виникали вільні згасаючі коливання. При зникненні іскри контур розмикався і коливання припинялися. Потім індуктор знову заряджав конденсатор, виникала іскра й у контурі знову спостерігалися коливання, і т.д. Для реєстрації електромагнітних хвиль Герц використовував інший вібратор, який був названий резонатором P , що мав таку ж частоту власних коливань, як і випромінювальний вібратор. Коли електромагнітні хвилі досягали резонатора, то в його зазорі виникала електрична іскра.

Для одержання незгасаючих коливань необхідно створити автоколивальну систему, яка б забезпечувала подачу енергії з частотою, рівною частоті власних коливань контуру. Тому в 20-х роках минулого сторіччя перейшли до генерування електромагнітних хвиль за допомогою електронних ламп. Лампові генератори дозволяють одержувати коливання заданої (практично будь-якої) потужності і синусоїдальної форми.

Електромагнітні хвилі, які мають досить широкий діапазон частот (або довжин хвиль $\lambda = c/\nu$, де c - швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі), відрізняються одна від одної за способам їх генерації і реєстрації, а також за своїми властивостями. Тому електромагнітні хвилі поділяються на кілька видів: радіохвилі, світлові хвилі, рентгенівське і γ -випромінювання (табл. 1). Слід зазначити, що межі між різними видами електромагнітних хвиль досить умовні.

Таблиця 1.

Вид випромінювання	Довжина хвилі, м	Частота, Гц	Джерело випромінювання
Радіохвилі	$10^3 - 10^4$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{12}$	Коливальний контур Вібратор Герца Ламповий генератор
Світлові хвилі:			
- інфрачервоне випромінювання	$5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{11} - 3,7 \cdot 10^{14}$	Лампи
- видиме світло	$8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$	Нагріті тіла
- ультрафіолетове випромінювання	$4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	$7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	Лазери
Рентгенівське випромінювання	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	Рентгенівські трубки
Гамма-випромінювання	$< 6 \cdot 10^{-12}$	$> 5 \cdot 10^{19}$	Радіоактивність Космічне випромінювання

Наслідком теорії Максвелла є поперечний характер електромагнітних хвиль: вектори $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ напруженостей електричного і магнітного полів хвилі взаємно перпендикулярні (рис. 3) і лежать у площині, яка є перпендикулярною до вектора $\mathbf{v}$ швидкості поширення хвилі, причому вектори $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ і $\mathbf{v}$ утворюють правоїгнотову систему.

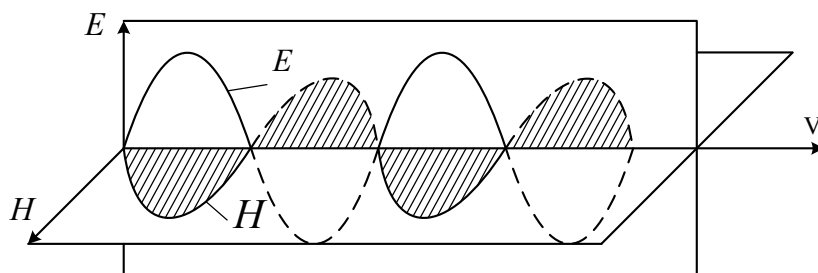


Рис. 3

З рівнянь Максвелла випливає також те, що в електромагнітній хвилі вектори $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ завжди коливаються в однакових фазах (рис. 3), причому миттєві значення $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ у будь-якій точці пов'язані співвідношенням

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H. \quad (5)$$

Рівняння коливань векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$, які є плоскими монохроматичними електромагнітними хвилями (рис.3), мають вигляд

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \cos(\omega t - \kappa x), \\ H_y &= H_0 \cos(\omega t - \kappa x), \end{aligned} \quad (6)$$

де E_0 і H_0 — відповідні амплітуди електричного і магнітного полів хвилі;
 ω — колова, або циклічна частота;
 κ — хвильове число ($\kappa = \omega/v$).

2. Хвильові рівняння електромагнітних хвиль

Для одержання хвильових рівнянь електромагнітних хвиль, розв'язком яких є рівняння (6), скористаємось рівняннями Максвелла.

Розглянемо замкнутий контур в системі координат E_z, o, x , сторони якого відповідно дорівнюють ℓ і Δx . Запишемо для цього замкнутого контуру рівняння Максвелла (1)

$$\oint_L E d\ell = E_{(z,t)x} \cdot \ell - E_{(z,t)(x+\Delta x)} \ell,$$

$$-\oint_S \frac{\partial B_{y,t}}{\partial t} dS = -\frac{\partial B_{y,t}}{\partial t} \cdot \Delta x \ell. \quad (7)$$

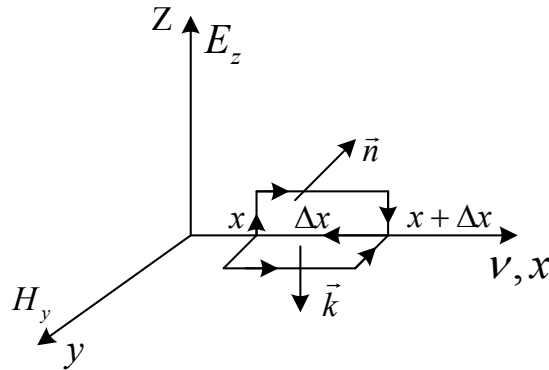


Рис. 4

Оскільки ліві сторони рівнянь (7) відповідають рівнянню Максвелла (1), то праві сторони цих рівнянь можна прирівняти. Після незначних спрощень одержуємо

$$\frac{E_{(z,t)x} - E_{(z,t)(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{\partial B_{y,t}}{\partial t}. \quad (8)$$

В граничному випадку, коли $\Delta x \rightarrow 0$, рівняння (8) набуде вигляду

$$\frac{\partial E_{z,t}}{\partial x} = -\frac{\partial B_{y,t}}{\partial t},$$

де $B_{y,t} = \mu\mu_0 H_{y,t}$, зв'язок індукції магнітного поля з напруженістю цього поля. З урахуванням цього зауваження формула (8) набуде вигляду

$$\frac{\partial E_{z,t}}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{y,t}}{\partial t}. \quad (9)$$

Рівняння Максвелла (3) використаємо до замкнутого контуру в координатній площині $H_{y,0,x}$ (рис.4), вважаючи що вільні електричні заряди відсутні, а тому струм провідності $j dS = 0$

$$\oint_L \mathbf{H}_{y,t} d\ell = \mathbf{H}_{(y,t)x} \cdot \ell - \mathbf{H}_{(y,t)(x+\Delta x)} \cdot \ell, \quad (10)$$

$$-\oint_S \frac{d\mathbf{D}_{z,t}}{dt} dS = -\frac{\partial \mathbf{D}_{z,t}}{\partial t} \cdot \ell \cdot \Delta x.$$

Оскільки ліві сторони рівнянь (10) однакові, то й праві сторони однакові. Прирівняємо праві сторони цих рівнянь, одержимо

$$\frac{\mathbf{H}_{(y,t)x} - \mathbf{H}_{(y,t)(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{\partial \mathbf{D}_{z,t}}{\partial t}.$$

В граничному випадку, коли $\Delta x \rightarrow 0$, одержимо

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{y,t}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{D}_{z,t}}{\partial t}. \quad (11)$$

Оскільки $\mathbf{D}_{x,t} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}_{x,t}$, то рівняння (11) набуде вигляду

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{y,t}}{\partial x} = -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{z,t}}{\partial t}. \quad (12)$$

Продиференціюємо рівняння (12) за координатою x , одержимо

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_{y,t}}{\partial x^2} = -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{z,t}}{\partial x} \right). \quad (13)$$

Замість виразу в дужках правої сторони рівняння (13) підставимо його значення з рівняння (9), одержимо

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_{y,t}}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}_{y,t}}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Продиференціюємо рівняння (9) за координатою x , одержимо

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{z,t}}{\partial x^2} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{y,t}}{\partial x} \right). \quad (15)$$

Похідну в дужках правої сторони рівняння (15) замінімо на відповідну похідну з рівняння (12), одержимо

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{z,t}}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{z,t}}{\partial t^2}. \quad (16)$$

З рівнянь (14) і (16) шляхом незначних перетворень одержуємо хвильові рівняння електромагнітних хвиль

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{z,t}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{z,t}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}_{y,t}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}_{y,t}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогічні до (17) хвильові рівняння можна одержати, якщо кожне з рівнянь (6) двічі диференціювати за часом і координатою і виключити з них функцію косинуса, тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{z,t}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \kappa x), \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{z,t}}{\partial x^2} &= -\kappa^2 \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \kappa x). \end{aligned}$$

Звідки, врахувавши що $\frac{\omega^2}{\kappa^2} = v^2$, одержуємо

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{z,t}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{z,t}}{\partial x^2}. \quad (18)$$

Аналогічно диференціюємо друге рівняння (6) й після незначних спрощень одержуємо

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_{y,t}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}_{y,t}}{\partial x^2}. \quad (19)$$

Зіставлення рівнянь (18) і (19) з рівняннями (17) дає можливість визначити швидкість поширення електромагнітних хвиль

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}. \quad (20)$$

Якщо врахувати, що для вакууму $\varepsilon = 1$ і $\mu = 1$, то швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі буде дорівнювати

$$c = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (21)$$

Одержане значення швидкості поширення електромагнітних хвиль у вакуумі добре збігається зі швидкістю поширення світла. В діелектричному середовищі (крім феромагнетиків) швидкість поширення електромагнітних хвиль менша на $\sqrt{\varepsilon}$, тобто

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (22)$$

Для світлових хвиль, які можуть поширюватись в прозорих діелектричних середовищах, величину $\sqrt{\varepsilon}$ називають показником заломлення і позначають через n , тому

$$v = \frac{c}{n}. \quad (23)$$

3. Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Пойнтінга

Можливість виявлення електромагнітних хвиль указує на те, що вони переносять енергію. Об'ємна густина w енергії електромагнітної хвилі складається з об'ємних густин $w_{ел.}$ і $w_{маг.}$ електричного і магнітного полів:

$$w = w_{ел.} + w_{маг.} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (24)$$

В рівняння (9), яке дорівнює $\frac{\partial E_{z,t}}{\partial x} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_{y,t}}{\partial t}$ підставимо необхідні похідні рівнянь (6), тобто

$$\frac{\partial E_{z,t}}{\partial x} = E_0 \kappa \sin(\omega t - \kappa x),$$

$$\frac{\partial H_{y,t}}{\partial t} = -H_0 \omega \sin(\omega t - \kappa x),$$

одержимо

$$E_0 \kappa \sin(\omega t - \kappa x) = \mu \mu_0 H_0 \omega \sin(\omega t - \kappa x). \quad (25)$$

Після необхідних спрощень одержимо

$$\mathbf{E}_0 = \mu\mu_0 \frac{\omega}{\kappa} \mathbf{H}_0. \quad (26)$$

Оскільки $\frac{\omega}{\kappa} = v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$, то вираз (36) перепишеться

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 = \sqrt{\mu\mu_0} \mathbf{H}_0. \quad (27)$$

Рівність (27) справедлива не лише для амплітудних значень напруженостей електричного й магнітного полів, але й для будь-яких їх значень, тобто

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \mathbf{E} = \sqrt{\mu\mu_0} \mathbf{H}. \quad (28)$$

Вираз (24) густини енергії електромагнітних хвиль перепишемо в такому вигляді

$$w = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \mathbf{E} \cdot \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \mathbf{E}}{2} + \frac{\sqrt{\mu\mu_0} \mathbf{H} \cdot \sqrt{\mu\mu_0} \mathbf{H}}{2},$$

або з урахуванням (28) одержимо

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{v} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \quad (29)$$

Нехай електромагнітна хвиля поширюється зі швидкістю v в напрямі осі x . Виділимо прямокутний паралелепіпед з площею торця S і стороною $v\Delta t$, як це показано на рис. 5.

Повна енергія, яка буде перенесена через площу S за час Δt буде дорівнювати

$$W = wSv\Delta t. \quad (30)$$

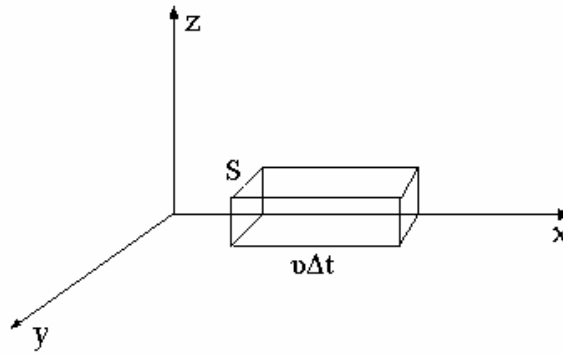


Рис. 5

Із цієї формули знайдемо вектор потоку енергії, яка переноситься через площу S в напрямі осі x із швидкістю v , тобто

$$\vec{R} = \frac{W}{S\Delta t} = \frac{wSv\Delta t}{S\Delta t} = w\vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{H}. \quad (31)$$

Оскільки вектори E і H взаємно перпендикулярні й утворюють з напрямком поширення хвилі правогвинтову систему, то напрямок вектора $[\vec{E} \cdot \vec{H}]$ збігається з напрямком перенесення енергії, а модуль цього вектора дорівнює $E \cdot H$. Отже, вектор густини потоку електромагнітної енергії називається вектором Пойнтінга.

Якщо електромагнітні хвилі поглинаються або відбиваються тілами, то відповідно до теорії Максвелла вони повинні здійснювати на тіла деякий тиск. Тиск електромагнітних хвиль пояснюється тим, що під дією електричного поля хвилі заряджені частинки речовини починають упорядковано рухатися і крім того зі сторони магнітного поля хвилі на частинку діє сила Лоренца. Однак величина цього тиску досить мізерна. Можна оцінити, що при середній потужності сонячного випромінювання на Землю діє тиск, який не перевершує 5 мкПа. Вперше тиск електромагнітного випромінювання вдалось виміряти російському фізику Лебедеву. Поле електромагнітних хвиль має певний імпульс, величину якого можна оцінити через енергію так

$$p = \frac{W}{c}, \quad (32)$$

де W — енергія електромагнітної хвилі;

c — швидкість поширення електромагнітних хвиль.

Тема 7. Інтерференція світла

1. Принцип накладання двох хвиль. Інтенсивність. Поняття когерентності хвиль.
2. Інтерференція світла від двох когерентних джерел. Дослід Юнга.
3. Інтерференція в тонких плівках. Кільця Ньютона.
4. Інтерференція багатьох хвиль.

1. Принцип накладання двох хвиль. Інтенсивність. Поняття когерентності хвиль

При накладанні довільних хвиль відбувається просте додавання їх інтенсивностей, тобто

$$I = \sum_{i=1}^n I_i \quad (1)$$

У випадку когерентних хвиль, тобто хвиль однакових циклічних частот, амплітуд, хвильових чисел і сталої різниці фаз, інтенсивності хвиль не додаються, а перерозподіляються в просторі з утворенням максимумів і мінімумів. Таке явище в фізиці називається *інтерференцією*.

У випадку світлових хвиль перерахованих умов когерентності не завжди достатньо. Треба ще щоб вектори $\vec{E}$ електромагнітних полів інтерферуючих хвиль коливались вздовж однакового напрямку, тобто, щоб інтерферуючі хвилі були поляризовані в одній площині.

Слід зауважити, що навіть збіг векторів $\vec{E}$ двох інтерферуючих хвиль ще не означає збігу векторів $\vec{H}$ цих хвиль. Ось чому практично не можливо побудувати ідеальних джерел незалежної дії, які б давали повною мірою когерентні промені. Останнім часом побудовані досить близькі до ідеальних, лазерні джерела. Такі джерела дають хвилі високої монохроматичності (одноколірності), а це означає і когерентності. Інтерференційна картина від лазерних променів (окремі лазери) є дещо спотворена порівняно з картиною інтерференції, одержаної від когерентних променів одного незалежного джерела.

Насамперед в'ясимо, який з двох векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ в електромагнітній хвилі, а це означає і світловій хвилі, є головним, або домінуючим.

На електрон, який рухається в речовині з боку електромагнітного поля, діє сила F , яка дорівнює:

$$\vec{F} = -(q\vec{E} + q[\vec{v}_1 \cdot \vec{B}]), \quad (2)$$

де $q\vec{E}$ – сила, з якою діє на заряд електрона електрична складова $\vec{E}$ електромагнітної хвилі;

$q[\vec{v}_1 \cdot \vec{B}]$ – магнітна складова сили.

Зупинимось дещо детальніше на природі магнітної складової сили, з якою електромагнітна хвиля діє на заряджену частинку. Вектор індукції магнітного поля $\vec{B}$ виражаємо через вектор напруженості $\vec{H}$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}. \quad (3)$$

З теорії електромагнітних коливань (Лекція № 6) відомо, що

$$\sqrt{\mu\mu_0} H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E. \quad (4)$$

З урахуванням (4) вираз (3) перепишеться:

$$B = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} E. \quad (5)$$

Значення індукції магнітного поля B з (5) підставимо в (2)

$$F = -[qE + qv_1 \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} E]. \quad (6)$$

Однак $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} = \frac{1}{v}$, де v – фазова швидкість електромагнітної хвилі, тому

$$F = -(qE + q\frac{v_1}{v} E) \quad (7)$$

Оцінимо величину швидкості v_1 електрона в атомі. Відомо, що при вимушених коливаннях електрона в атомі його амплітуда може досягати розмірів самого атома, а це величина, яка має порядок 10^{-10} м. Частота коливань для світлових променів має порядок 10^{15} Гц, тому

$$v_1 = \omega R = \omega A = 2\pi\nu A = 2\pi 10^{15} 10^{-10} \approx 10^6 \text{ м/с}.$$

Фазова швидкість світла має порядок 10^8 м/с .

Поділимо величину електричної сили на величину магнітної сили, з якими світлові промені діють на електрони в атомі.

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{qEv}{qEv_1} = \frac{v}{v_1} \approx \frac{10^8}{10^6} \approx 100. \quad (8)$$

Вектор $\vec{E}$ електромагнітної хвилі за своєю дією перевищує в ≈ 100 разів дію вектора $\vec{H}$.

З цих причин вектор $\vec{E}$ електромагнітної хвилі вважають домінуючим або світловим вектором. Коли говорять про поляризацію світлових променів, то мають на увазі коливання в певному напрямі лише вектора $\vec{E}$. Вектор $\vec{H}$ теж коливається в певному напрямі, але в площині, яка є перпендикулярною до вектора $\vec{E}$.

Слід пам'ятати, що джерелами світлових хвиль є нагріті тіла, в яких атоми періодично збуджуються (рис. 1) і через час $\tau = 10^{-8} \text{ с}$, повертаючись у нормальний стан, випромінюють кванти або порції електромагнітних хвиль. За час збудженого стану випромінюється цуг, довжина якого l не перевищує 3 м

$$l = \tau c, \quad (9)$$

де τ – час збудженого стану;
 c – швидкість світла.

Таким чином довжину окремого цугу $l = 3 \text{ м}$ можна вважати максимальною довжиною когерентності, а час $\tau = 10^{-8} \text{ с}$ – максимальним часом когерентності.

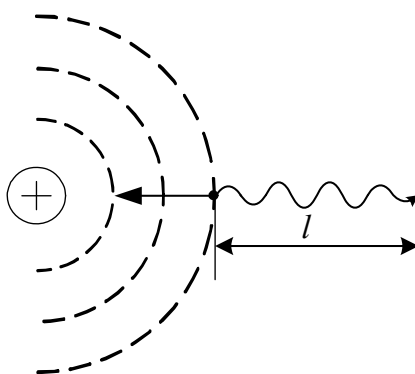


Рис. 1

Реально інтерферують одночасно досить багато хвиль, які випромінюються величезною кількістю атомів. При цьому пучок променів не завжди строго когерентний. З цих причин довжина когерентності різко зменшується. Зменшується також час когерентності.

В такому реальному світловому пучку фаза хвиль здійснює випадкові зміни. Тому час когерентності визначається як час, протягом якого випадкова зміна різниці фаз хвиль досягає величини π . Такий час називається *часом когерентності*.

Відповідні розрахунки показують, що цей час пов'язаний зі ступенем немонохроматичності реальних світлових променів, тобто:

$$t_{\text{ког}} = \frac{1}{\Delta \nu}, \quad (10)$$

де $\Delta \nu$ – визначає розкид частот світлових хвиль в пучку.

Оскільки

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \text{то} \quad d\nu = \left| \frac{cd\lambda}{\lambda^2} \right| \quad \text{або} \quad \Delta \nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}. \quad (11)$$

З урахуванням (11) час когерентності (10) матиме вигляд

$$t_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}, \quad (12)$$

де λ – довжина хвилі в пучку світла;

c – фазова швидкість світла;

$\Delta\lambda$ – інтервал зміни довжин хвиль в пучку світла.

Формула (12) визначає реальний час когерентності. Реальна довжина когерентності в цьому випадку буде дорівнювати

$$l_{\text{ког}} = t_{\text{ког}} c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (13)$$

Формула (13) показує, що довжина когерентності визначається ступенем немонохроматичності променів у пучку світла. Чим більші когерентні промені, тобто мале значення $\Delta\lambda$, тим більша довжина когерентності.

Велика довжина когерентності лазерних променів пояснюється якраз високою монохроматичністю лазерного випромінювання.

Приклад. Пучок світла з довжиною хвиль від $\lambda_1 = 500\text{нм}$ до $\lambda_2 = 510\text{нм}$ використовують для одержання інтерференційної картини. Визначити для цього випромінювання довжину і час когерентності.

$$l_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{(5 \cdot 10^{-7})^2}{10^{-8}} = 25 \cdot 10^{-6} (\text{м}).$$

$$t_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{c \cdot \Delta\lambda} = \frac{25 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8}} = 8 \cdot 10^{-14} (\text{с}).$$

Важливо знати:

1. Відстань, яку проходять світлові промені між двома точками простору, називаються *геометричним шляхом* l .
2. Геометричний шлях, помножений на показник заломлення середовища, називається *оптичним шляхом* l_n .
3. Коли розглядають явище інтерференції світла, то мають на увазі лише оптичний шлях.
4. Інтерферують лише когерентні промені, оптична різниця ходу яких перебуває в межах довжини когерентності.
5. Промінь, який відбивається від оптично більш густого середовища (має більший показник заломлення n), змінює свою фазу на протилежну.
6. На межі з оптично менш густим середовищем зміни фази на протилежну при відбиванні світла не відбувається.

2. Інтерференція світла від двох когерентних джерел. Дослід Юнга

Ще в кінці 17 ст. Гюйгенс, вивчаючи фізичні процеси пов'язані з поширенням світла, встановив принцип, який дозволяв за відомим положенням хвильового фронту визначити його положення в наступні моменти часу. Цей принцип дістав назву *принципу Гюйгенса*.

Згідно з принципом Гюйгенса будь-яка точка хвильової поверхні (поверхні однієї фази) може бути розглянута як вторинне точкове джерело світлових хвиль (рис.2).

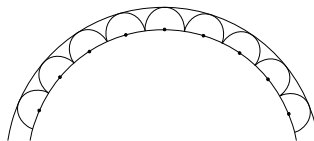


Рис. 2

Запропонований Гюйгенсом принцип дозволяє пояснити з хвильової точки зору закони відбивання і заломлення світла, а також механізм одержання когерентних хвиль в досліді Юнга.

Юнг здійснив такий дослід: малий отвір А (рис. 3) в непрозорому екрані освітлюється інтенсивним джерелом монохроматичного (одноколірного) світла. Згідно з принципом Гюйгенса отвір А стає новим вторинним точковим джерелом світла. Це світло падає на два наступні

малі отвори B_1 і B_2 , які в свою чергу стають джерелами когерентних хвиль, оскільки вони утворені з однакових пугів.

Когерентні хвилі від двох вторинних точкових джерел світла B_1 і B_2 накладаються і на екрані E створюють інтерференційну картину з перерозподілом інтенсивності. В точці накладання хвиль буде спостерігатись максимум інтенсивності, якщо в оптичній різниці ходу цих хвиль $\Delta l = l_1 - l_2$ буде вкладатись ціле число хвиль або парне число півхвиль

$$\Delta l = \pm k\lambda = \pm 2k \frac{\lambda}{2}; \quad (14)$$

Якщо в різниці ходу Δl двох хвиль вкладається непарне число півхвиль, то вони гасять одна одну, тобто спостерігається мінімум інтерференції

$$\Delta l = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (15)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots$ – порядок максимуму або мінімуму.

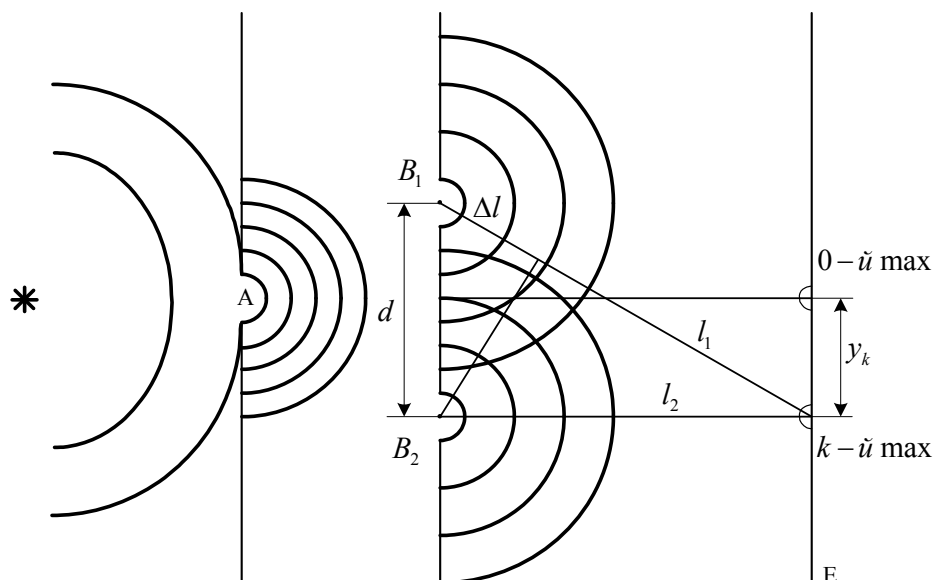


Рис. 2

Розглянемо більш детально дослід Юнга. Нехай відстань між щілинами B_1 і B_2 дорівнює d , а відстань від щілин до екрана L , причому

$L \gg d$. Позначимо відстань на екрані від нульового максимуму до точки утворення k -го максимуму через y_k (рис.4).

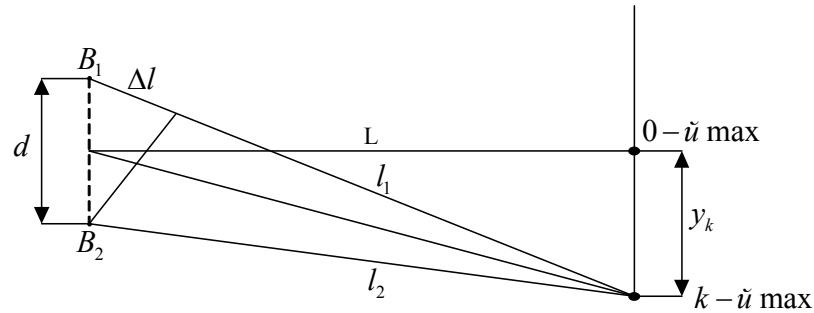


Рис. 4

Якщо d і y_k набагато менші за L , то наближено одержимо

$$\frac{\Delta l}{d} = \frac{y_k}{L}, \quad (16)$$

звідки

$$y_k = \frac{\Delta l \cdot L}{d}. \quad (17)$$

Положення k -го максимуму на екрані можна одержати, якщо в (17) підставити Δl із (14), тоді

$$y_k = \pm \frac{k\lambda L}{d}. \quad (18)$$

Для знаходження ширини інтерференційної полоси віднімаємо від y_k
 y_{k-1}

$$\Delta y_k = \frac{k\lambda L}{d} - \frac{(k-1)\lambda L}{d} = \frac{\lambda L}{d}. \quad (19)$$

Оскільки величини, які входять у формулу (19) є сталими, то ширина максимумів інтерференції теж є сталою величиною.

Ми розглянули приклад, коли дві хвилі від когерентних джерел (щілин) “поширюються” в однорідному середовищі з однаковою швидкістю. Однак в інших дослідах інтерферуючі хвилі можуть проходити різні середовища, і як наслідок мати різні фазові швидкості. У цьому випадку замість геометричної різниці ходу променів слід говорити про оптичну різницю ходу, тобто

$$\Delta l = n_1 l_1 - n_2 l_2 = \pm 2k \frac{\lambda}{2} \quad (\text{max}), \quad (20)$$

$$\Delta l = n_1 l_1 - n_2 l_2 = \pm(2k + 1) \frac{\lambda}{2} \text{ (min)}. \quad (21)$$

При виведенні формул максимумів і мінімумів інтерференції від двох променів ми вважали, що щілини Юнга для вторинних хвиль безмежно вузькі. Кінцева ширина щілини буде приводити до розмивання максимумів і мінімумів. На досить широких щілинах максимуми будуть перекриватись, і інтерференція спостерігатись не буде.

Інтерференцію можна спостерігати й у білому світлі, тобто немонохроматичному світлі. У цьому випадку кожна смуга буде райдужно пофарбована, інтерференція супроводжується розкладанням світла на монохроматичні складові (чим більше значення λ , тим на більшій відстані перебуватимуть максимуми один від одного).

3. Інтерференція світла в тонких плівках. Кільця Ньютона

Не слід вважати, що інтерференцію світла можна спостерігати лише в лабораторних умовах із застосуванням спеціального обладнання. Кожному з нас не раз доводилось спостерігати за свіченням мильних плівок, олійних плям на поверхні води, кольори гартованих предметів, кольори найтонших металевих покриттів фарфорових виробів, різноколірність крил різних метеликів, бджіл тощо. В усіх цих випадках інтерференція світла спостерігається в досить тонких прозорих плівках, товщина яких близька до довжини хвилі і перебуває в межах довжини когерентності.

Розглянемо плоско паралельну прозору плівку товщиною d , на яку падає під кутом α плоска монохроматична хвиля.

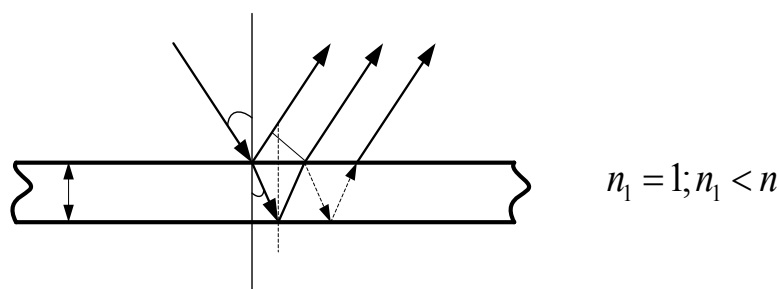


Рис. 5

Плівка має товщину d (рис. 5) і показник заломлення n . Падаюча хвиля в точці А ділиться на дві частини, одна з яких 1', змінивши фазу на протилежну, відбивається під кутом α до перпендикуляра в точці падіння. Друга частина 2' після заломлення у точці А і С відбивається в точці В. Далі промені 1' і 2' поширюються паралельно.

Накладання променів $1'$ і $2'$ здійснюється на сітківці ока спостерігача. Результати інтерференції залежать від оптичної різниці ходу цих променів.

Знайдемо оптичну різницю ходу променів $1'$ і $2'$, яка відповідно до рис. 5 буде дорівнювати

$$\Delta = (AB + BC)n - \left(AD + \frac{\lambda}{2}\right), \quad (22)$$

де $AB = BC = \frac{d}{\cos \beta}$; $AD = AC \sin \alpha$; $AC = 2d \operatorname{tg} \beta$.

Підставивши значення цих величин в (22), одержимо

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) - \frac{\lambda}{2},$$

або

$$\Delta = 2dn \cos \beta - \frac{\lambda}{2}. \quad (23)$$

Формула (23) дає залежність оптичної різниці ходу хвиль від кута заломлення β і параметрів плівки.

Знайдемо залежність оптичної різниці ходу хвиль $1'$ і $2'$ від кута падіння α , вважаючи що

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \text{ і що } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Тому

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}},$$

або

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \quad (24)$$

В залежності від того, яке число півхвиль вкладається в оптичній різниці ходу хвиль Δ , плівка буде світлою (умова $\max$) або темною (умова $\min$).

Важливо знати:

1. При освітленні плівки білим світлом для деяких хвиль виконується умова $\max$, а для деяких – умова $\min$. Тому плівка буде забарвлена певним кольором.
2. Колір плівки залежить від кута падіння променя, а тому полоси інтерференції в цьому випадку називаються полосами однакового нахилу.
3. Можливість ослаблення білого світла внаслідок інтерференції широко використовується у сучасних оптичних приладах (фотоапаратах, біноклях тощо). Для цього на поверхню лінзи наносять тонкий шар прозорої плівки з показником заломлення, меншим, ніж у лінзи, і більшим, ніж у повітря. Товщину прозорої плівки беруть такою, щоб мінімуми інтерференції спостерігалися в середній частині видимого спектра ($\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$). Таку оптику називають просвітленою (рис.6).

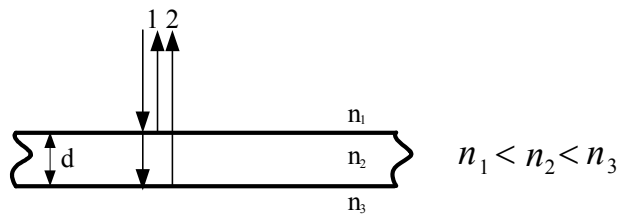


Рис. 6

Промінь 1 при відбиванні від поверхні плівки змінив фазу на протилежну. Промінь 2 двічі пройшов товщину плівки d і при відбиванні на нижній частині плівки теж змінив фазу на протилежну. Оптична різниця ходу в плівці буде дорівнювати

$$\Delta = 2dn_2 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 2dn_2.$$

Якщо в Δ вкладається непарне число півхвиль, то промені від плівки не відбиваються, тобто спостерігається умова $\min$.

$$\Delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} - \text{умова } \min.$$

Окремим видом інтерференції світла є інтерференція в повітряному зазорі у вигляді клина між опуклою стороною плоско опуклої лінзи і поверхнею плоскої пластинки (рис. 7).

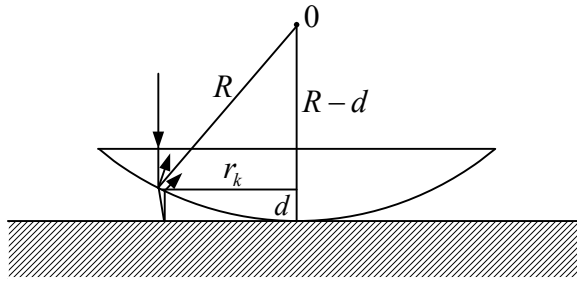


Рис. 7

Промені 1 і 2 одержані з одного променя, а тому є когерентні. Оптична різниця ходу променів у повітряному зазорі дорівнює

$$\Delta = 2dn + \frac{\lambda}{2}, \quad (25)$$

де n – показник заломлення середовища між лінзою і плоско паралельною пластинкою;

d – товщина зазору в указаному місці.

Промені 1 і 2 є відбитими, тому розглядається результат інтерференції у відбитому світлі. Аналогічно можна розглянути інтерференцію світла у прохідному світлі. В цьому випадку фаза поміняється на протилежну, а різниця ходу на $\frac{\lambda}{2}$.

Знайдемо радіуси світлих і темних кілець Ньютона у відбитому світлі.

Для світлих кілець $\Delta = 2k \frac{\lambda}{2}$, а для темних кілець $\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$, де $k = 1, 2, 3, \dots$

Радіус k -го кільця визначаємо з рисунка, де розглядаємо прямокутний трикутник.

$$R^2 = (R - d)^2 + r_k^2, \quad (26)$$

або

$$R^2 = R^2 - 2Rd + d^2 + r_k^2.$$

Нехтуючи нескінченно малою величиною d^2 , одержимо

$$r_k = \sqrt{2Rd}. \quad (27)$$

Для знаходження радіусів світлих кілець необхідно оптичну різницю ходу для променів у зазорі прирівняти до умови $m\lambda$, тобто

$$2dn + \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{2},$$

звідки

$$d = (2k - 1) \frac{\lambda}{4n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

тому

$$r_k = \sqrt{\frac{2R(2k - 1)\lambda}{4n}} = \sqrt{\frac{R\lambda(2k - 1)}{2n}}. \quad (28)$$

Вираз (28) дає радіуси світлих кілець Ньютона.

Для темних кілець

$$2dn + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

звідки

$$d = \frac{k\lambda}{2n},$$

тому

$$r_k = \sqrt{\frac{R\lambda k}{n}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

Вираз (29) визначає радіуси темних кілець Ньютона.

Важливо знати:

1. Правильна форма кілець Ньютона легко спотворюється при різних, навіть незначних, дефектах при шліфуванні різних поверхонь. Тому спостереження форми кілець Ньютона є найтоншим контролем якості шліфування поверхонь.
2. Явище інтерференції світла використовується у ряді дуже точних вимірювальних приладів, які називаються інтерферометрами. В цьому випадку точність вимірювань лінійних розмірів сягає 10^{-8} мм.
3. Кільця Ньютона утворюються в зазорі між опуклою лінзою і плоско паралельною пластинкою при однаковій (різна для різних кілець) товщині зазору. Тому полоси інтерференції, якими є кільця Ньютона, носять назву полоси однакової товщини.

4. Інтерференція багатьох хвиль

В попередніх питаннях була розглянута інтерференція лише двох когерентних хвиль. Насправді в реальних умовах інтерференція є багатохвильовою, тобто одночасно інтерферують десятки когерентних променів (рис. 8).

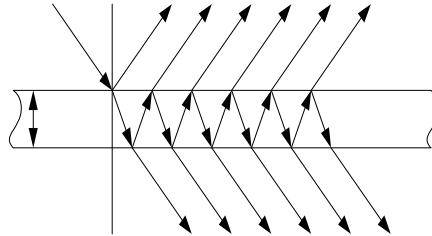


Рис. 8

Відбиті хвилі 1, 2, 3, 4, ..., мають спадну інтенсивність. В залежності від коефіцієнта відбиття інтенсивність цих хвиль може відрізнятися у сотні разів. Аналогічні властивості мають прохідні промені 1', 2', 3', 4',

Амплітуди відбитих хвиль досить різко відрізняються між собою

$$A_1 \gg A_2 \gg A_3 \gg A_4 \dots$$

Промені 1,2,3,4,5,6, ... (рис. 8) зсунуті за фазою на однакову величину δ . Це пов'язано з тим, що оптична різниця ходу сусідніх променів є сталою величиною.

Для спрощення розглянемо випадок, коли відбиті плоскі хвилі мають однакову амплітуду A_0 і сталу різницю фаз δ . Результуючу амплітуду при інтерференції N хвиль легко визначити, скориставшись векторною діаграмою. Кожна хвиля в цьому випадку зсунута за фазою відносно до попередньої хвилі на сталу величину δ (рис. 9).

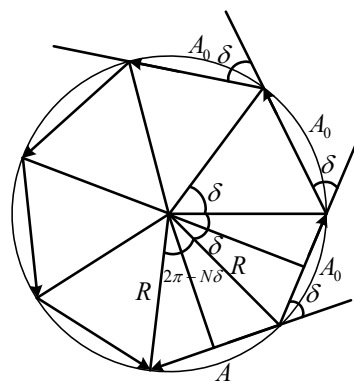


Рис. 9

З рисунка видно, що

$$A = 2R \sin \frac{2\pi - N\delta}{2}. \quad (30)$$

З трикутника, який розміщений поряд

$$A_0 = 2R \sin \frac{\delta}{2}. \quad (31)$$

Але

$$\sin\left(\pi - \frac{N\delta}{2}\right) = \sin \pi \cdot \cos \frac{N\delta}{2} - \cos \pi \sin \frac{N\delta}{2} = \sin \frac{N\delta}{2}. \quad (32)$$

Поділивши (30) на (31) та врахувавши вираз (32), одержимо

$$A = A_0 \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}. \quad (33)$$

Вираз (33) дає можливість розрахувати результуючу амплітуду при накладанні багатьох хвиль, зсунутих за фазою на сталу величину δ .

Інтенсивність хвиль у цьому випадку пропорційна квадрату амплітуди, тобто

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad (34)$$

Проведемо короткий аналіз виразів (33) і (34).

1. Нехай $\delta = \pm 2k\pi$, де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, тоді $A = A_0 \frac{\sin(Nk\pi)}{\sin(k\pi)}$, одержуємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

Для розкривання невизначеності скористаємось правилом Лопіталя

$$\frac{[\sin(Nk\pi)]'}{[\sin(k\pi)]'} = \frac{N\pi \cos(Nk\pi)}{\pi \cos(k\pi)} = N.$$

У цьому випадку $A = NA_0$, а $I = N^2 I_0$. Графічна інтерпретація цих результатів показана на рис. 10.

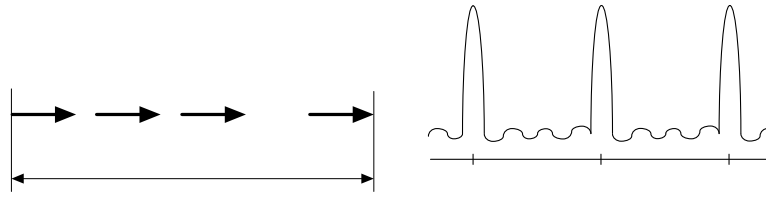


Рис.10

При цих умовах одержані головні максимуми інтерференції.

A_0 A_0 A_0 ...

2. Нехай $N\delta = \pm 2k\pi$, де $k = 0, 1, 2, \dots$, тоді

A

$$A = A_0 \frac{\sin(k\pi)}{\sin \frac{k\pi}{N}} \quad \text{і} \quad I = I_0 \frac{\sin^2(k\pi)}{\sin^2 \frac{k\pi}{N}}.$$

Для будь-яких значень k одержуємо, що $A = 0$ і $I = 0$. Одержані головні мінімуми інтерференції. До уваги не беруться $k = 0$, $k = N$, $k = 2N$ і т.д., оскільки там розміщуються головні максимуми.

Графічна інтерпретація цього результату показана на рис. 11:

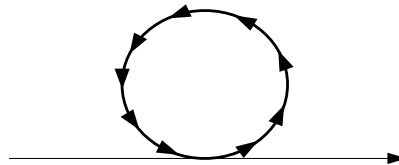


Рис. 11

3. Нехай $\delta = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

У цьому випадку будуть отримані побічні максимуми.

Тема 8. Дифракція світла

1. Метод зон Френеля. Дифракція Фраунгофера на круглому отворі.
2. Дифракція Фраунгофера на щілині.
3. Дифракційна решітка. Кутова дисперсія і роздільна здатність дифракційної решітки.
4. Дифракція рентгенівських променів на просторовій решітці.

1. Метод зон Френеля. Дифракція Фраунгофера на круглому отворі

Дифракцією називають сукупність явищ, які спостерігаються в середовищі з різними неоднорідностями і пов'язані з відхиленням світлових променів від законів геометричної оптики. Це означає, що світлові промені мають властивість огинати перешкоди.

Явища інтерференції і дифракції світла не містять суттєвих відмінностей. В кожному із цих явищ відбувається перерозподіл інтенсивності.

Розрізняють два види дифракцій – дифракція Френеля, яка відбувається на різних неоднорідностях від точкових джерел світла і дифракція Фраунгофера, яка відбувається у паралельних променях від далеких джерел.

За допомогою принципу Гюйгенса-Френеля легко пояснити з точки зору хвильових властивостей світла закон прямолінійного поширення світла в однорідному середовищі. Розглянувши взаємну інтерференцію вторинних хвиль, Френель застосував прийом, який дістав назву методу зон Френеля.

Розглянемо спочатку основні положення принципу Гюйгенса-Френеля:

- кожен елемент хвильової поверхні площею S виступає в ролі точкового джерела вторинних сферичних хвиль, амплітуда яких пропорційна площі цього елемента;
- вторинні джерела, які еквівалентні точковому джерелу S_0 , є когерентними, а тому випромінювання в них дає явище інтерференції;
- з однакових площ хвильових поверхонь випромінюється однакова енергія;
- найбільше енергії від вторинних джерел випромінюється в напрямі нормалі до цієї поверхні.

Розглянемо дифракцію сферичних хвиль або дифракцію Френеля, яка здійснюється у випадку, коли дифракційна картина спостерігається на скінченній відстані ϱ від перешкоди, яка викликала дифракцію.

Сферична хвиля, яка поширюється від точкового джерела S_0 , зустрічає на своєму шляху діафрагму D з круглим отвором (рис.1).

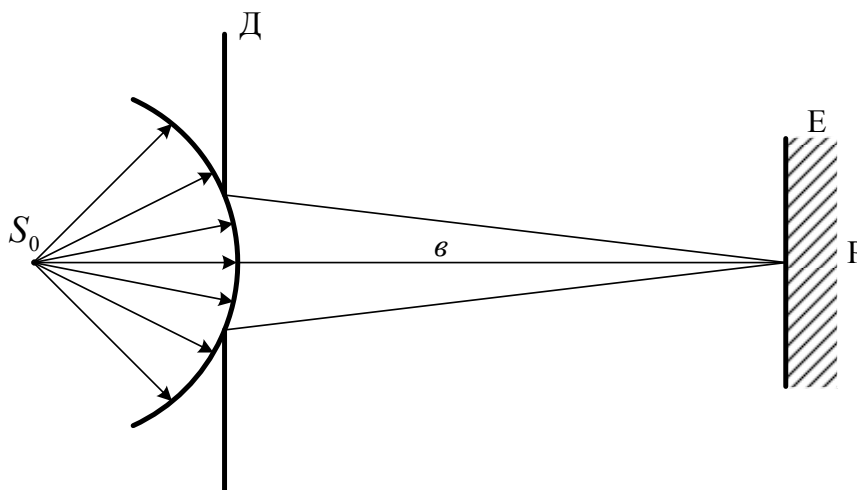


Рис.1

Дифракційну картину спостерігають на екрані E , який перебуває на відстані ϱ від хвильової поверхні, на мить зафіксованої в круглому отворі радіусом r .

Вигляд дифракційної картини залежить від кількості зон Френеля, які вкладаються в отворі. Для отримання зон Френеля необхідно до найкоротшої відстані від екрана до хвильової поверхні додати $\frac{\lambda}{2}$, а потім радіусом $\varrho + \frac{\lambda}{2}$ на випуклій частині хвильової поверхні нарисувати коло (рис.2). Потім до відстані $\varrho + \frac{\lambda}{2}$ додають ще $\frac{\lambda}{2}$ і радіусом $\varrho + \lambda$ на хвильовій поверхні рисують наступне коло і т.д.. Смуги на хвильовій поверхні називаються *зонами Френеля*. Вони побудовані так, що фаза хвиль від початку зони до її кінця змінюється на протилежну.

Це означає, що кожна наступна зона випромінює світло в протилежній фазі до попередньої зони. Побудовані так зони Френеля мають однакові площі, а тому випромінюють однакову енергію. Кут між перпендикуляром до будь-якої зони і напрямком на точку P зростає, а це означає що енергії від кожної наступної зони прийде в точку P менше, ніж від попередньої зони.

Амплітуди коливань, які будуть збуджуватись в точці P світлом від кожної із зон Френеля, будуть зменшуватись із ростом числа зон Френеля, тому

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > \dots > A_n. \quad (1)$$

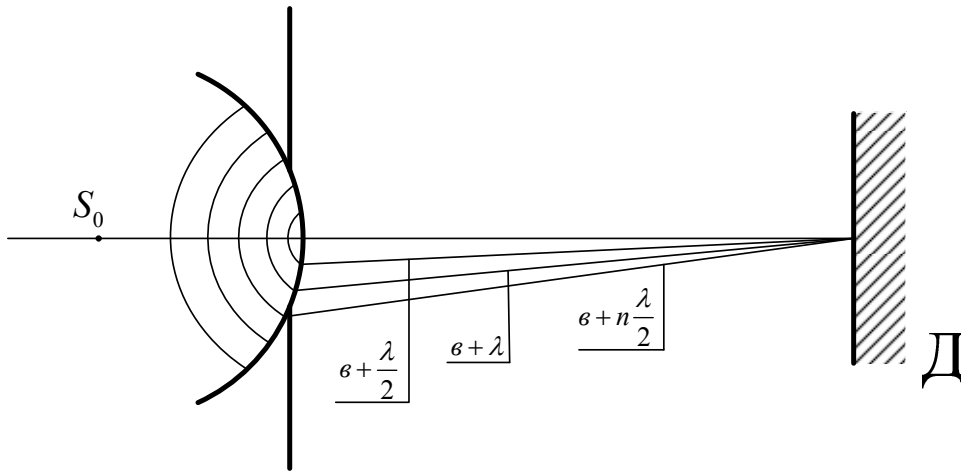


Рис.2

Але фази коливань від сусідніх зон відрізняються на π , тому амплітуда A_p результуючого коливання в точці Р буде дорівнювати

$$A_p = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (2)$$

У виразі (2) амплітуди від непарних зон мають один знак, а від парних зон мають протилежний знак. Використовуючи цю умову формулу (2) можна записати так

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (3)$$

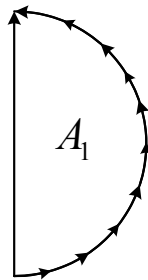
Завдяки монотонності зменшення амплітуди коливань від кожної із зон Френеля вирази в дужках наближено дорівнюють нулю, для прикладу

$$\frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2} - A_2 \approx 0, \text{ або } \frac{A_3}{2} + \frac{A_5}{2} - A_4 \approx 0 \text{ і т.д.}$$

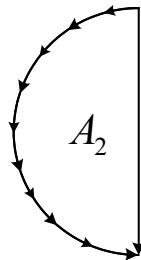
Тому якщо в круглому отворі вкладається n зон Френеля, то при рості $n \rightarrow \infty$ $A_p \rightarrow \frac{A_1}{2}$. Це означає, що в деякій точці Р на екрані результуюча амплітуда A_p від всієї сферичної хвильової поверхні дорівнює половині амплітуди центральної зони Френеля.

Цей же висновок можна отримати за допомогою графічного додавання амплітуд. Поділимо хвильову поверхню кожної зони Френеля на підзони значно меншої площі, ніж сама зона. Амплітуди коливань в точці P від таких підзон будуть змінювати свій напрям на протилежний лише під кінець зони.

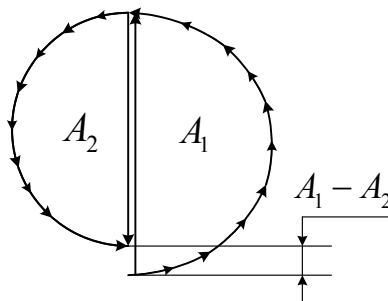
Графічне зображення результуючої амплітуди A_1 від всіх підзон першої зони Френеля має вигляд



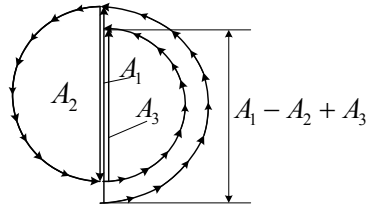
Результуюча амплітуда A_2 від всіх підзон другої зони Френеля має аналогічне графічне зображення, зміщене за фазою на величину π



Якщо в круглому отворі вкладається дві зони Френеля, то результуюча амплітуда від цих зон буде дорівнювати $A_1 - A_2$



Якщо в круглому отворі вкладається три зони Френеля, то результуюча амплітуда від цих зон буде дорівнювати



В цьому випадку A_p буде дорівнювати

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \frac{A_3}{2} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2}. \quad (3)$$

Якщо в круглому отворі вкладається непарне число зон Френеля, то в точці P буде спостерігатись максимум інтенсивності. У випадку парного числа зон Френеля, наприклад, двох зон Френеля

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} \right) - \frac{A_2}{2} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} \quad (4)$$

одержуємо умову мінімуму дифракції.

В загальному випадку для n зон Френеля амплітуда коливань у точці P буде дорівнювати

$$A_p = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_n}{2}. \quad (5)$$

Якщо n непарне, в точці P буде максимум дифракції. Якщо n парне, то у точці P буде мінімум дифракції.

Якщо на шляху світлових променів від круглого отвору розмістити непрозорий диск, який буде перекривати кілька центральних зон Френеля, то в точці P буде завжди світла пляма, тобто максимум дифракції. Амплітуда коливань у точці P буде дорівнювати половині амплітуди від наступної за диском зони Френеля, тобто

$$A_p = \frac{A_n}{2}, \quad (6)$$

де n – число перекритих круглим диском зон Френеля.

Якщо на шляху світлових променів розмістити пластинку, яка б перекривала всі парні або всі непарні зони Френеля, то інтенсивність світла в точці P різко зросте. В цьому випадку

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2} + \frac{A_5}{2} + \frac{A_7}{2} + \dots + \frac{A_n}{2}. \quad (7)$$

Така пластинка називається зонною пластинкою. Ще більшого ефекту можна добитись, якщо парні, або не парні зони Френеля перекриваються пластинкою, здатною у відповідних місцях змінювати фазу коливань на протилежну. Це досягається зміною товщини самої пластинки у місцях розміщення парних або непарних зон Френеля. В цьому випадку пластинку називають фазною.

Амплітуда коливань у точці P для фазної пластинки буде дорівнювати

$$A_p = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n. \quad (8)$$

Фазна пластинка має властивості збиральної лінзи.

2. Дифракція Фраунгофера на щілині

Нехай на досить довгу вузьку прямокутну щілину шириною b перпендикулярно до неї падає плоска світлова хвиля. Розмістимо за щілиною збиральну лінзу, а у фокальній площині екран для спостережень результатів дифракції (рис. 3).

Щілину шириною b ділять на N вузьких смуг шириною

$$\Delta b = \frac{b}{N}, \quad (9)$$

де b – ширина щілини;

N – число смуг на які поділено щілину;

Δb – ширина однієї смуги.

Оптична різниця ходу двох променів від однієї смуги шириною Δb буде дорівнювати

$$\Delta = \Delta b \sin \varphi. \quad (10)$$

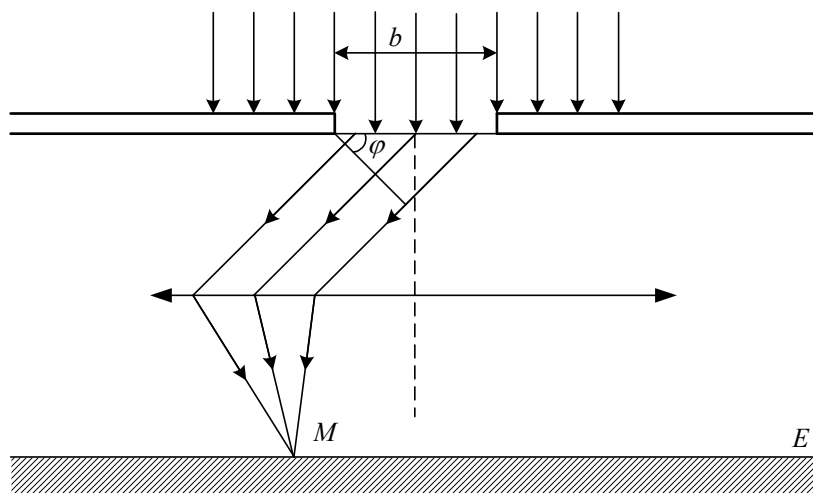


Рис. 3

Оптична різниця ходу Δ пов'язана з оптичною різницею фаз співвідношення

$$\delta = k\Delta = k\Delta b \sin \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{N} \sin \varphi, \quad (11)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число;

φ – кут дифракції.

Для знаходження результуючої амплітуди від всіх смуг, яка буде збуджуватися в точці M (рис.3), використаємо формулу результуючої амплітуди при інтерференції багатьох хвиль

$$A = \frac{A_0}{N} \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi b}{N\lambda} \sin \varphi\right)}, \quad (12)$$

де A_0 – амплітуда хвиль від всієї щілини;

N – число смуг, на які поділена щілина шириною b ;

φ – кут дифракції.

Розглянемо випадок, коли $N \rightarrow \infty$. У цьому випадку

$$\sin\left(\frac{\pi b}{N\lambda} \sin \varphi\right) \rightarrow \frac{\pi b}{N\lambda} \sin \varphi. \quad (13)$$

Формула (12) з урахуванням (13) перепишеться

$$A = \frac{A_0 \lambda N}{N \pi b} \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin \varphi} = \frac{A_0 \lambda}{\pi b} \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin \varphi}. \quad (14)$$

Оскільки інтенсивність світлових хвиль I пропорційна A^2 , то

$$I = \frac{I_0 \lambda^2}{\pi^2 b^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin^2 \varphi}. \quad (15)$$

Знайдемо умови мінімуму й максимуму дифракції світлових хвиль, які приходять у точку M (рис.3) від однієї щілини. У точці M інтенсивність

світлових хвиль буде дорівнювати нулю, якщо $\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right) = 0$. Це можливо лише у випадку, коли $\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = \pm k\pi$, звідки

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (16)$$

де b – ширина щілини;

φ – кут дифракції;

k – порядок максимуму;

λ – довжина хвилі монохроматичного світла.

Умова (16) є умовою мінімуму дифракції від однієї щілини.

У точці M буде спостерігатись максимум дифракції, якщо $\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right) = 1$. Це можливо за умови, коли $\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, звідки

$$b \sin \varphi = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (17)$$

Умова (17) є умовою максимуму дифракції від однієї щілини.

Розглянемо окремі випадки залежності амплітуди хвиль, які приходять від однієї щілини в точку накладання, від кута дифракції φ :

а) нехай $\varphi = 0$. Підставивши в (12) значення цього кута, одержимо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для розкривання цієї невизначеності можна використати правило Лопітала

$$\frac{\left[\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)\right]'}{\left[\sin\left(\frac{\pi b}{N\lambda} \sin \varphi\right)\right]'} = \frac{\cos\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right) \frac{\pi b}{\lambda} \cos \varphi}{\cos\left(\frac{\pi b}{N\lambda} \sin \varphi\right) \frac{\pi b}{N\lambda} \cos \varphi} = N. \quad (18)$$

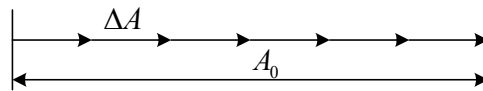
Якщо підставити цей результат у (12) одержимо, що

$$A = \frac{A_0}{N} N = A_0, \quad (19)$$

де $\frac{A_0}{N} = \Delta A$ – амплітуда хвиль від окремої вузької смуги;

N – число смуг, на які поділено щілину.

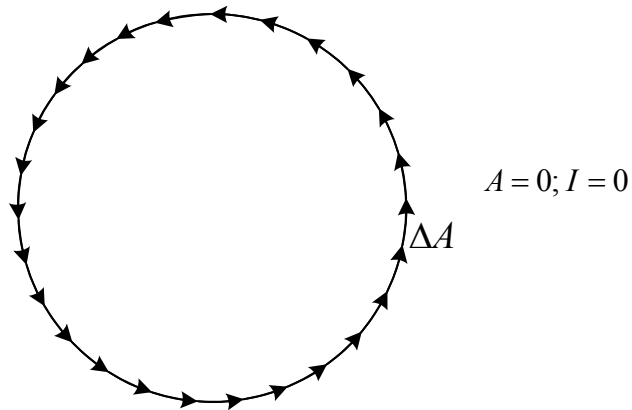
Графічна інтерпретація висновку (19) має вигляд



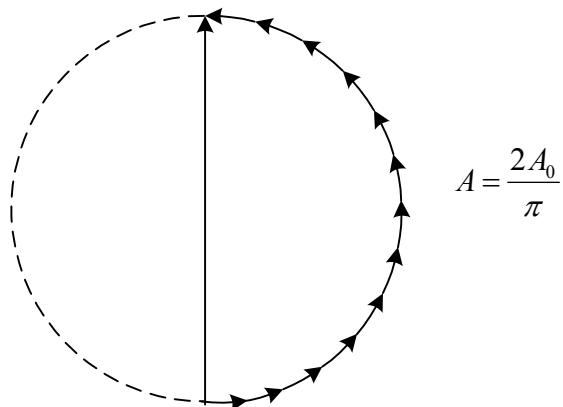
а відповідно інтенсивність хвиль буде дорівнювати

$$I = I_0.$$

б) нехай $b \sin \varphi = \pm 2k\lambda$. В цьому випадку $A = 0$ і $I = 0$, а амплітуди ΔA від окремих смуг, на які ми поділили щілину, після додавання дають замкнену лінію



в) нехай $b \sin \varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$. В цьому випадку додавання амплітуд ΔA в довільній точці накладання не дає замкнутої лінії. Графічна інтерпретація цього висновку, а також результуюча амплітуда, показані нижче на рисунку.



3. Дифракційна решітка. Кутова дисперсія і роздільна здатність дифракційної решітки

Дифракційною решіткою називається оптичний прилад, який складається з великої кількості однакових щілин, розділених між собою однакової ширини непрозорими проміжками. Відстань d між серединами двох сусідніх щілин, називається сталою дифракційної решітки.

Якщо розмістити паралельно решітці збиральну лінзу, то в її фокальній площині на екрані можна буде спостерігати результати дифракції світла від решітки (рис.4).

Оптична різниця ходу променів від двох сусідніх щілин дорівнює

$$\Delta = d \sin \varphi \quad (21)$$

Оптична різниця фаз в цьому випадку буде дорівнювати

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi \quad (22)$$

В точку P на екрані приходять промені від усіх щілин. Всі ці промені зсунуті за фазою на однакову величину δ .

Для знаходження результуючої амплітуди всіх хвиль, які прийшли в точку P слід скористатися формулою результуючої амплітуди при інтерференції багатьох хвиль

$$A = A_0 \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}. \quad (23)$$

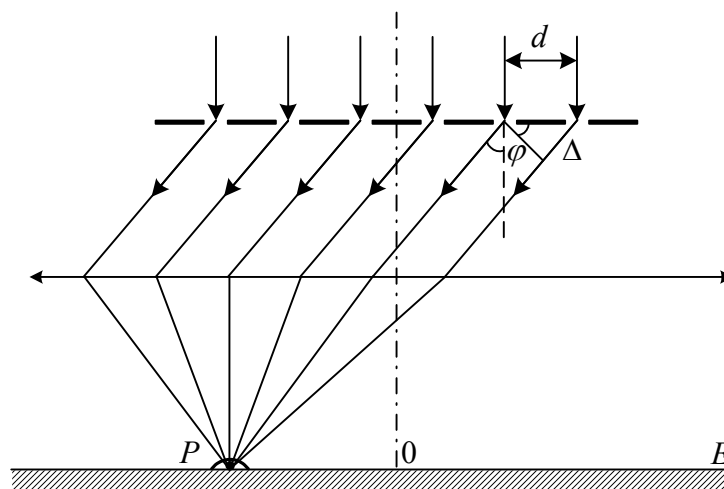


Рис. 4

З урахуванням (22) результуюча амплітуда A_p буде дорівнювати

$$A_p = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi d N}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}, \quad (24)$$

де A_0 – амплітуда хвиль від однієї щілини;

N – число щілин у решітці;

d – стала дифракційної решітки;

λ – довжина хвилі монохроматичного світла.

Проведемо аналіз формули (24).

а) якщо вираз у знаменнику (24) досягає мінімуму, тобто буде дорівнювати нулю, то амплітуда A_p буде найбільшою. Ця умова є умовою максимуму дифракції на дифракційній решітці, тобто

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi = \pm k \pi,$$

звідки

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda. \quad (25)$$

Формула (25) є умовою головних максимумів дифракції на дифракційній решітці.

б) побічні максимуми дифракції можна одержати, якщо чисельник у формулі (24) досягає максимуму. Це можливо за умови, коли

$$\frac{\pi d N}{\lambda} \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (26)$$

Після скорочення одержимо

$$d \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2N}. \quad (27)$$

Вираз (27) є умовою побічних максимумів дифракції на дифракційній решітці.

в) побічні мінімуми дифракції на дифракційній решітці одержуємо із умови коли чисельник формули (25) буде найменшим, тобто коли

$$\frac{\pi d N}{\lambda} \sin \varphi = \pm k \pi \quad (28)$$

звідки

$$d \sin \varphi = \pm \frac{k \lambda}{N}. \quad (29)$$

Формула (29) є умовою побічних мінімумів на дифракційній решітці. Дифракція світла на дифракційній решітці, яка має N щілин, показана на рис.5.

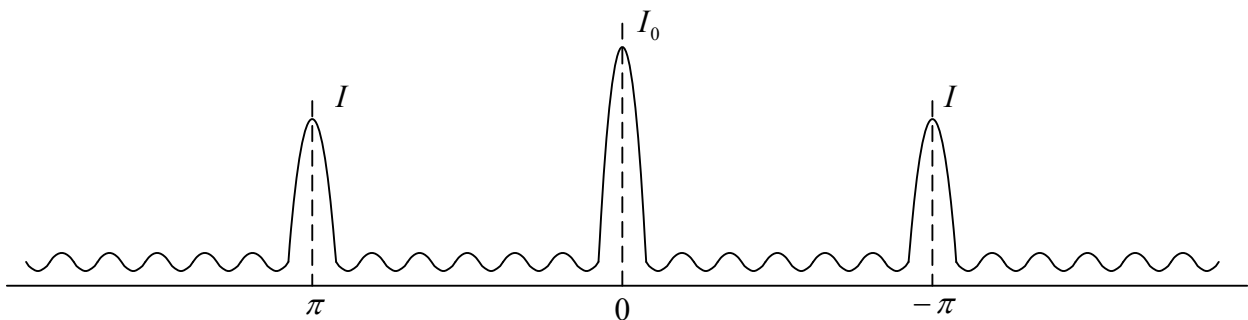


Рис.5

Розрахунки показують, що $I = 0,67I_0$. Для достатньо великих значень N побічні мінімуми і побічні максимуми не проявляються. Число головних максимумів дифракції визначається відношенням d до λ ($m \leq d/\lambda$), при цьому $\sin \varphi = 1$.

Важливо знати:

а) внаслідок немонохроматичності біле сонячне світло після проходження дифракційної решітки дає максимуми II, III і більш високих порядків у вигляді спектрів.

б) хороша решітка з малим d і великим N дає дифракційні спектри з великою роздільною здатністю. Характерною ознакою дифракційних спектрів є рівномірний розподіл кольорів у спектрі. На відміну від дифракційного спектра, призматичний спектр стиснутий в області червоних кольорів і розширений в області фіолетових кольорів.

Кожна дифракційна решітка характеризується кутовою дисперсією, яка позначається буквою D

$$D = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda}, \quad (30)$$

де $\delta\varphi$ – кутова відстань між спектральними лініями, які відрізняються за довжиною хвилі на величину $\delta\lambda$.

Для знаходження кутової дисперсії дифракційної решітки слід продиференціювати формулу головних максимумів дифракції $d \sin \varphi = k\lambda$, тобто

$$d \cos \varphi \delta\varphi = k\delta\lambda,$$

звідки

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}.$$

В межах невеликих кутів $\cos \varphi \approx 1$, тому можна вважати, що

$$D = \frac{k}{d}. \quad (31)$$

Таким чином кутова дисперсія обернено пропорційна періоду решітки d . Чим вищий порядок спектра k , тим більша дисперсія.

Роздільною здатністю спектрального приладу, а таким є дифракційна решітка, називають безрозмірну величину

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \quad (32)$$

де R – роздільна здатність;

λ – довжина хвилі;

$\delta\lambda$ – мінімальна різниця довжин хвиль двох сусідніх спектральних ліній, при якій ці лінії спостерігаються роздільно, якщо виконується умова Релея. Згідно з умовою Релея дві спектральні лінії будуть видимі роздільно у випадку, коли мінімум другої спектральної лінії знаходиться не ближче максимуму першої лінії (рис.6).

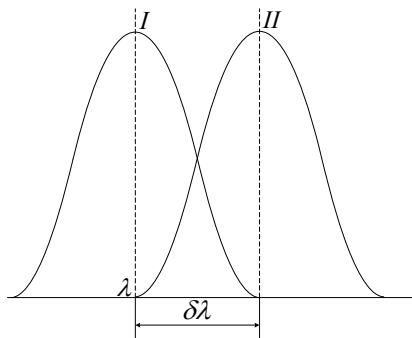


Рис.6

Знайдемо роздільну здатність дифракційної решітки. За умовою Релея максимум першої лінії в крайньому випадку збігається з мінімумом другої спектральної лінії. Якщо спектральні лінії будуть розміщені ближче ніж $\delta\lambda$, то жоден спектральний прилад розділити їх не зможе.

Запишемо умову головного максимуму для другої спектральної лінії

$$d \sin \varphi_{\max} = k(\lambda + \delta\lambda). \quad (33)$$

Умова першого побічного мінімуму для другої лінії

$$d \sin \varphi_{\min} = \left(k + \frac{1}{N}\right)\lambda. \quad (34)$$

Оскільки ліві частини однакові, то прирівняємо праві частини цих рівнянь

$$k(\lambda + \delta\lambda) = \left(k + \frac{1}{N}\right)\lambda,$$

або

$$k\lambda + k\delta\lambda = k\lambda + \frac{\lambda}{N},$$

звідки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN,$$

де k – порядок спектра;

N – число всіх щілин у решітці.

4. Дифракція рентгенівських променів на просторовій решітці. Формула Вульфа-Брегга

Рентгенівське випромінювання має значно менші довжини хвиль ніж видиме світло. Звичайні дифракційні решітки для рентгенівського випромінювання використати не можливо, оскільки $\lambda \ll d$. У цьому випадку використовують кристалічні структури, стала решітки яких збігається за розмірами з λ .

Плоскі вторинні хвилі, які відбиваються від різних атомних шарів є когерентними, а тому будуть давати інтерференцію один з одним (рис.7).

З рис.7 видно, що різниця ходу двох хвиль, відбитих від сусідніх атомних шарів, дорівнює

$$AB + BC = 2d \sin \theta,$$

де d – стала кристалічної структури;

θ – кут ковзання.

Для максимумів дифракції на просторовій решітці

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda . \quad (36)$$

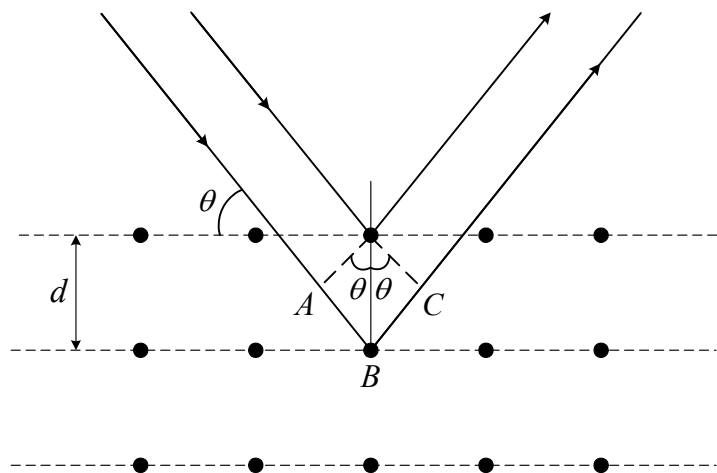


Рис.7

Формула (36), яка має назву формули Вульфа-Брегга, має досить велике практичне використання в спектральному та структурному аналізах при вивченні властивостей твердих тіл.

Тема 9. Поляризація світла

1. Природне і поляризоване світло.
2. Поляризація світла при відбиванні. Закони Брюстера й Малюса.
3. Подвійне променезаломлення. Звичайний і незвичайний промені. Призма Ніколя.
4. Штучна оптична анізотропія. Обертання площини поляризації.

1. Природне і поляризоване світло

В світлових хвилях вектори напруженості електричного поля $\vec{E}$ і магнітного поля $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні і коливаються

перпендикулярно до напрямку поширення вектора швидкості $\vec{v}$. Тому для повного опису стану поляризації світлового пучка необхідно знати поведінку лише одного з векторів. Таким вектором є *світловий вектор* – вектор напруженості $\vec{E}$ електричного поля. При дії світла на речовину дія електричної складової напруженості поля $\vec{E}$ перевищує дію магнітної складової $\vec{H}$ приблизно в 100 разів.

Світлове випромінювання є сумарним електромагнітним випромінюванням величезної кількості атомів. Атоми випромінюють світлові хвилі незалежно один від одного, тому світлова хвиля, яка випромінюється тілом, характеризується різними напрямками коливання світлового вектора $\vec{E}$ (рис.1). В даному випадку рівномірний розподіл в просторі векторів $\vec{E}$ пояснюється великою кількістю атомарних випромінювачів, а рівність амплітуд $\vec{E}$ – однаковою середньою інтенсивністю випромінювання кожного з атомів.

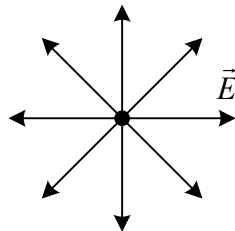


Рис. 1

Розглянемо дві взаємно перпендикулярні монохроматичні хвилі, які поширюються вздовж додатного напрямку осі OX ,

$$E_y = E_1 \cos(\omega t - kx), \quad E_z = E_2 \cos(\omega t - kx + \varphi). \quad (1)$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота;

$k = \frac{\omega}{v}$ – хвильове число;

E_1, E_2 – амплітуди E_y і E_z ;

φ – спільна різниця фаз коливань E_y і E_z .

Щоб знайти траєкторію результуючого коливання світлового вектора при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань, визначимо $\cos(\omega t - kx)$ з рівняння для E_y :

$$\cos(\omega t - kx) = \frac{E_y}{E_1}, \quad (2)$$

тоді

$$\sin(\omega t - kx) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_1}\right)^2}. \quad (3)$$

Оскільки

$$\cos(\omega t - kx + \varphi) = \cos(\omega t - kx) \cos \varphi - \sin(\omega t - kx) \sin \varphi,$$

то

$$\frac{E_z}{E_2} - \frac{E_y}{E_1} \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_1}\right)^2} \sin \varphi.$$

Піднесемо до квадрату рівняння (3), одержимо:

$$\frac{E_y^2}{E_1^2} + \frac{E_z^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_y E_z}{E_1 E_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (4)$$

Отримане співвідношення (4) є рівнянням еліпса, довільно орієнтованого відносно осей OY і OZ . Отже, кінець вектора $\vec{E}$ в кожній точці поля описує еліпс, який лежить у площині, перпендикулярній до осі OX . Така хвиля називається *еліптично поляризованою*.

Якщо $\varphi = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$, де $(m = 0, 1, 2, \dots)$, то отримуємо рівняння еліпса, орієнтованого відносно осей OX і OY :

$$\frac{E_y^2}{E_1^2} + \frac{E_z^2}{E_2^2} = 1. \quad (5)$$

Схематично на рис.2 зображено еліптично поляризовану хвилю.

При $E_1 = E_2 = E_0$ еліпс перетворюється в коло. Така хвиля називається *поляризованою по колу*.

Якщо внаслідок будь-яких зовнішніх впливів появляється переважний напрямок коливань вектора $\vec{E}$, то *світло частково поляризоване*.

Площина, в якій відбувається коливання вектора $\vec{E}$, називається *площиною поляризації*.

За міру ступеня поляризації приймають вираз

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (6)$$

де $I_{\max}$ і $I_{\min}$ - відповідно, максимальна і мінімальна інтенсивність світла, що відповідають двом перпендикулярним компонентам вектора $\vec{E}$.

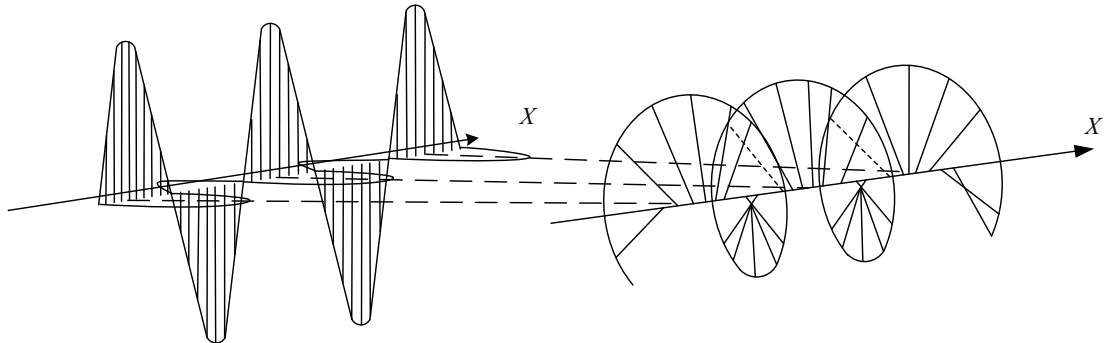


Рис.2

Для природного світла $I_{\max} = I_{\min}$ і $P = 0$. Для плоскополяризованого - $I_{\min} = 0$ і $P = 1$. Для еліптично поляризованого світла поняття ступеня поляризації не застосовується (у такого світла коливання повністю впорядковані).

Плоскополяризоване світло можна отримати з природного за допомогою приладів, які називаються *поляризаторами*. Ці прилади вільно пропускають коливання, паралельні площині поляризації, яка називається *головною площиною*, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні до цієї площини. В ролі поляризаторів можуть бути лише анізотропні середовища в яких в різних напрямках проявляються різні оптичні властивості. Одним із природних кристалів, які використовуються як поляризатори, може бути турмалін.

Прилади, за допомогою яких виявляють поляризацію світла, називають *аналізаторами*. Роль аналізаторів виконують прилади, за допомогою яких одержують лінійно поляризоване світло (рис.3). Будь-який поляризатор може бути аналізатором і навпаки.

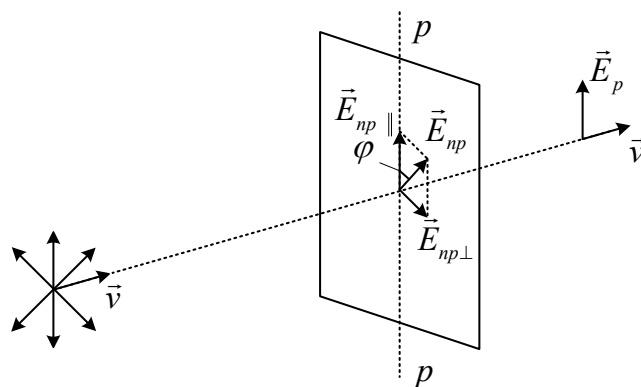


Рис.3

2. Поляризація світла при відбиванні. Закони Брюстера й Малюса

Якщо природне світло падає на межу поділу двох діелектриків (наприклад, повітря і скла), то частина його відбивається, а частина заломлюється і поширюється у другому середовищі.

Якщо поставити на шляху відбитого і заломленого променів аналізатор, то буде видно, що відбитий і заломлений промені частково поляризовані: при повертанні аналізатора навколо осі інтенсивність світла періодично підсилюється і ослаблюється (повного затухання не спостерігається).

Проведені дослідження показали, що у відбитих променях переважають коливання, перпендикулярні до площини падіння, в заломленому – коливання, паралельні до площини падіння (рис.4).

Ступінь поляризації - ступінь виділення світлових хвиль з певною орієнтацією електричного вектора $\vec{E}$ - залежить від кута падіння променів і показника заломлення.

Шотландський фізик Брюстер встановив закон, згідно з яким відбитий промінь є повністю плоскополяризованим при куті падіння i_0 (кут Брюстера), який задовольняє умову

$$\operatorname{tg} i_0 = n_{21}, \quad (7)$$

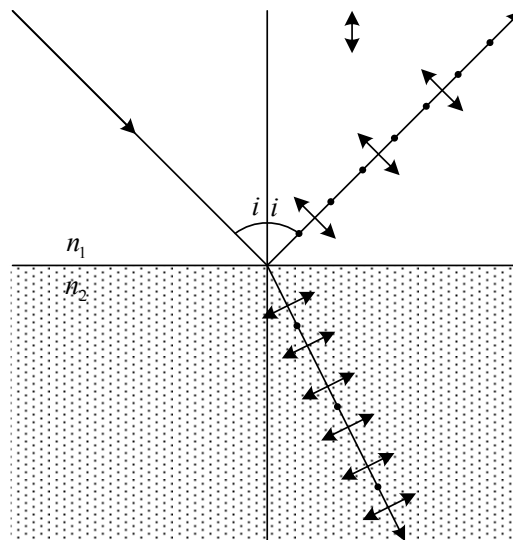


Рис. 4

де n_{21} – показник заломлення другого середовища відносно першого.

Ступінь поляризації заломленого променя при куті падіння n_{21} досягає найбільшого значення, проте цей промінь залишається поляризованим лише частково.

Якщо світло падає на границю поділу під кутом Брюстера, то відбитий і заломлений промені будуть взаємно перпендикулярними.

Відбивання під кутом Брюстера дає змогу отримати лінійно поляризоване світло, однак його інтенсивність невелика і для скла ($n=1,5$) дорівнює близько 15%, тобто основна його частина поширюється у напрямку заломлення хвилі, яка поляризована не повністю. Для збільшення ступеня поляризації заломлених хвиль їх треба пропустити крізь стіс скляних пластинок. Стіс з десяти скляних пластинок дає змогу отримати майже стопроцентну поляризацію заломлених хвиль.

Нехай на поляризатор падає природне світло (рис.5).

Виберемо хвилю, вектор напруженості електричного поля якої E_p , коливається у площині, що утворює з головною площиною поляризатора p - p кут φ . При вході в поляризатор падаючу хвилю можна подати у вигляді двох коливань, які відбуваються у взаємно перпендикулярних площинах:

$$E_{p\parallel} = E_p \cos \varphi, \quad E_{p\perp} = E_p \sin \varphi.$$

Перше коливання пройде через поляризатор, друге буде затримане. Інтенсивність хвилі, що пройшла через поляризатор, пропорційна квадрату амплітуди хвилі, тобто дорівнює

$$I_p = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (8)$$

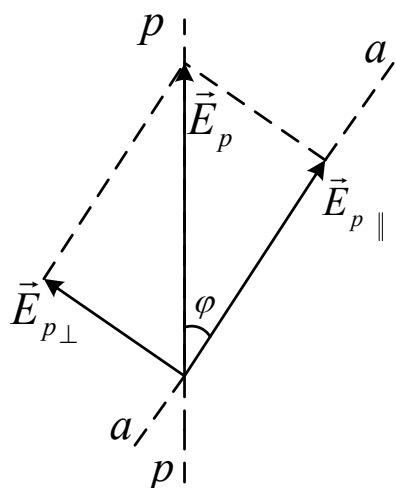


Рис.5

де I_p – інтенсивність хвиль, амплітуда яких E_p .

В природному світлі всі значення φ рівно імовірні. Тому частина світла, яке пройшло через поляризатор, буде дорівнювати середньому значенню $\cos^2 \varphi$, тобто $1/2$.

Якщо обертати поляризатор навколо напрямку проходження природного світла, то інтенсивність світла, яке пройшло через поляризатор, залишається незмінною, при цьому змінюється лише орієнтація площини поляризації світла.

Розглянемо випадок проходження лінійно поляризованого світла через аналізатор. При вході в аналізатор світлового променя з напрямком амплітуди вектора E під кутом φ до площини поляризації аналізатора, амплітуда електричного вектора якого E_p , ділиться на два лінійно поляризованих промені. Через аналізатор пройде лише складова амплітуди

$$E_{p\parallel} = E_p \cos \varphi. \quad (9)$$

Інтенсивність променів, які пройдуть через аналізатор, пропорційна квадрату амплітуди, тому

$$I_a = I_p \cos^2 \varphi. \quad (10)$$

Отримане співвідношення називається *законом Малюса*.

3. Подвійне променезаломлення. Звичайний і незвичайний промені. Призма Ніколя

Усі прозорі кристали (крім кристалів кубічної системи, які оптично ізотропні) є оптично анізотропні, їх відносна діелектрична проникність і показник заломлення залежать від напрямку електричного вектора $\vec{E}$ світлової хвилі.

В оптично анізотропних кристалах спостерігається явище подвійного променезаломлення, яке полягає в тому, що промінь світла, падаючи на поверхню кристала, роздвоюється в ньому на два промені, що далі поширюються з різними швидкостями.

Кристали, які дають подвійне променезаломлення, діляться на одновісні і двовісні. В одновісних кристалів для одного із променів виконується закон заломлення, зокрема заломлений промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до заломлюючої поверхні. Цей промінь називається *звичайним* (*o*). Для другого променя, який називається *незвичайним* (*e*), закон заломлення світла не виконується. Незвичайний

промінь не лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до поверхні кристала.

На рис.6 показане явище подвійного променезаломлення в одновісному кристалі, коли пучок світла падає на кристал перпендикулярно до поверхні кристала. Звичайний промінь (o) є продовженням падаючого, а незвичайний (e) при проникненні в кристал відхиляється на якийсь кут.

Одновісними кристалами є ісландський шпат, кварц, турмалін, а двовісними - слюда, гіпс. У двовісних кристалів обидва промені незвичайні. В одновісних кристалах існує єдиний напрямок, вздовж якого подвійне променезаломлення не спостерігається.

Напрямок в кристалі, по якому поширюються звичайний і незвичайний промені не розділяючись і з однаковою швидкістю, називається оптичною віссю кристала.

Оптична вісь - це не пряма лінія, яка проходить через ту чи іншу точку в кристалі, а певний напрямок в кристалі. Довільна пряма, паралельна до цього напрямку, є *оптичною віссю кристала*.

Площина, яка проходить через промінь і оптичну вісь кристала, називається *головною площиною* або *головним перерізом кристала*. Через кристал можна провести безмежну множину паралельних оптичних осей і безмежну множину паралельних головних перерізів. Лінія перерізу двох довільних головних перерізів завжди є оптичною віссю. На рис.5 оптична вісь збігається з напрямком OO , а промінь, який падає на кристал в цьому напрямку, не роздвоюється.

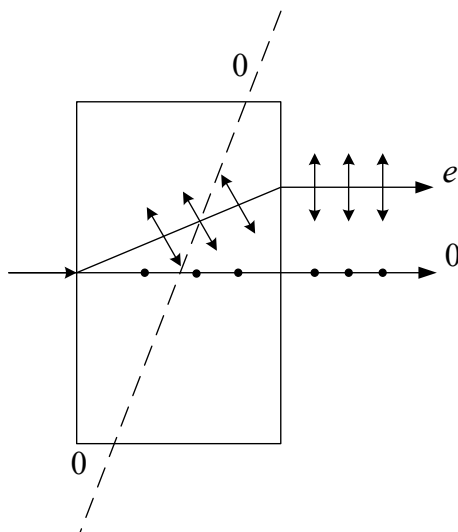


Рис.6

Дослідження звичайного і незвичайного променів показує, що обидва промені повністю поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках. Електричний вектор у звичайному промені перпендикулярний до площини

головного перерізу, а в незвичайному промені лежить у площині головного перерізу (рис.5), тобто площина поляризації звичайного променя перпендикулярна до площини головного перерізу, а незвичайного – збігається з площиною головного перерізу.

Після виходу з кристала, якщо не брати до уваги поляризацію у двох взаємно перпендикулярних напрямках (площинах), ці два промені нічим один від одного не відрізняються.

Подвійне променезаломлення пояснюється анізотропією кристалів. У кристалах некубічної системи діелектрична проникність ϵ є залежною від напрямку дії електричного поля $\vec{E}$. В одновісних кристалах ϵ в напрямку оптичної осі і в напрямку, який перпендикулярний до неї, має різні значення $\epsilon_{\perp}$ і $\epsilon_{\parallel}$, які називаються поперечною і повздовжньою діелектричними проникностями кристала. В інших напрямках ϵ має проміжне значення. А оскільки $n = \sqrt{\epsilon}$ і $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$, то з анізотропії ϵ випливає, що світловим хвилям з різними напрямками коливання вектора $\vec{E}$ відповідають різні значення показника заломлення і швидкості світлових хвиль.

Явище подвійного променезаломлення лежить в основі роботи поляризаційних пристроїв, які використовують для отримання поляризованого світла. Найчастіше для цього застосовуються *призми* і *поляроїди*.

Типовий представник поляризаційних призм - *призма Ніколя* (ніколь) – подвійна призма з ісландського шпату, склеєна вздовж лінії AB канадським бальзамом (живиця канадського кедра) з $n=1,55$ (рис.7).

Оптична вісь OO спрямована під кутом 48° до вхідної грані AC . Природний промінь L при падінні на грань AC ділиться на звичайний o і незвичайний промінь e .

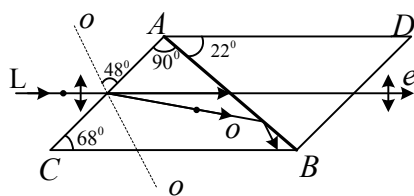


Рис. 7

При певному виборі кутів призми звичайний промінь падає на шар бальзаму під кутом 76° , який більший за граничний, а тому зазнає повного внутрішнього відбивання й поглинається зафарбованою гранню

СВ. Незвичайний промінь виходить з призми паралельно до грані *СВ*. Площина його поляризації збігається з площиною головного перерізу.

Всі анізотропні кристали тією чи іншою мірою поглинають світло. Коефіцієнт поглинання неоднаковий для звичайного і незвичайного променів і залежить від напрямку поширення світла в кристалі. Це явище називається дихроїзмом. Значний дихроїзм у видимій області спектра мають кристали *турмаліну*, в якому коефіцієнт поглинання для звичайного променя в багато разів більший, ніж для незвичайного. Пластинка турмаліну завтовшки *1мм* практично повністю поглинає звичайний промінь, і світло, яке проходить крізь неї, буде лінійно поляризованим.

Плівка завтовшки *0,1 мм*, на яку нанесено кристалики гепатиту, повністю поглинає звичайний промінь видимої області спектра.

Поляризатори, для створення яких використане явище дихроїзму, називаються *поляроїдами*.

Якщо на одновісний кристал падає лінійно поляризоване світло, то звичайні і незвичайні хвилі, які при цьому виникають, є когерентні. Розглянемо взаємодію двох когерентних лінійно поляризованих хвиль, які поширюються в одному напрямі, площини поляризації яких взаємно перпендикулярні. Це реалізується за допомогою призми Ніколя *N*, на яку падає природне світло від джерела *S* і кристалічної пластинки, вирізаної з одновісного кристала, бокова грань якої паралельна оптичній осі (рис.8).

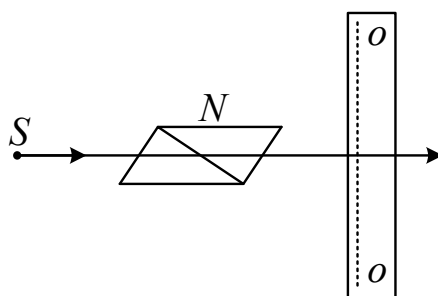


Рис.8

Площина поляризації світла, яке виходить з поляризатора, утворює з оптичною віссю пластинки кут $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і у пластинці поширюватимуться звичайний і незвичайний промені в напрямку падаючого променя. Нехай *E* - амплітудне значення електричного вектора променя, який падає на пластинку (рис.9). Тоді амплітуди електричних векторів звичайного і незвичайного променів будуть дорівнювати

$$E_{o\alpha} = E \sin \alpha, \quad E_{e\alpha} = E \cos \alpha.$$

Після проходження пластинки завтовшки d між звичайним і незвичайним променями виникає різниця ходу $\Delta = (n_o - n_e)d$ або різниця фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_o} (n_o - n_e) d,$$

де λ_o - довжина хвилі у вакуумі.

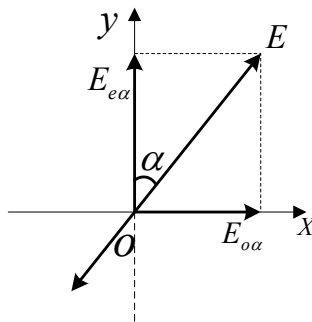


Рис. 9

Коливання електричних векторів звичайного і незвичайного променів здійснюються за законом

$$E_o = E_{oa} \cos(\omega t - \delta) = E \sin \alpha \cos(\omega t - \delta),$$

$$E_e = E_{ea} \cos \omega t = E \cos \alpha \cos \omega t. \quad (11)$$

При додаванні цих коливань отримуємо рівняння еліпса, довільно орієнтованого відносно осей OX і OY :

$$\frac{E_o^2}{E_{oa}^2} + \frac{E_e^2}{E_{ea}^2} - 2 \frac{E_o E_e}{E_{oa} E_{ea}} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (12)$$

Отже, отримуємо еліптично поляризовану хвилю.

Якщо $\Delta = (n_0 - n_e)d = \frac{\lambda_0}{4}$, то $\delta = \frac{\pi}{2}$ і еліпс орієнтований відносно головних осей кристала. При $E_0 = E_e$ ($\alpha = 45^\circ$) на виході з пластини світло буде циркулярно поляризованим. Пластинка, для якої

$$\Delta = (n_0 - n_e)d = \pm \left(m + \frac{1}{4} \right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

називається *пластинкою у чверть хвилі*. Знак "+" відповідає негативним кристалам, а знак "-" – позитивним. Пластинка, для якої

$$\Delta = (n_0 - n_e)d = \pm \left(m + \frac{1}{3} \right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

називається *пластинкою у півхвилі*. В цьому випадку зсув фаз $\delta = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) 2\pi$.

Пройшовши таку пластинку, лінійно поляризоване світло залишається лінійно поляризованим, а електричний вектор змінює напрямок коливань на кут 2α за годинниковою стрілкою. Якщо $\Delta = (n_0 - n_e)d = m\lambda_e$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то $\delta = 2\pi$ і лінійно поляризоване світло після проходження пластинки в одну довжину хвилі буде також лінійно поляризованим без зміни орієнтації площини поляризації.

4. Штучна оптична анізотропія. Обертання площини поляризації

Подвійне променезаломлення спостерігається в природних анізотропних середовищах. Існують різні способи отримання *штучної оптичної анізотропії*, тобто надання оптичної анізотропії природно ізотропним речовинам.

Оптично ізотропні речовини стають оптично анізотропними під дією :

- *одностороннього стиску або розтягу* (дослідження проводив Брюстер на кристалах кубічної системи, склі та ін.);
- *електричного поля* (рідини, аморфні тіла, гази) (Керр);
- *магнітного поля* (рідини, скло, колоїди) (Коттон, Мутон).

У згаданих випадках речовина набуває властивостей одновісного кристала, оптична вісь якого збігається з напрямком дії механічної деформації або дії електричного чи магнітного полів.

Мірою оптичної анізотропії служить різниця показників заломлення звичайного і незвичайного променів у напрямку, перпендикулярному до оптичної осі.

Оптичну анізотропію, яка виникає під впливом деформації, можна виявити, якщо помістити досліджуване тіло A між поляризатором p і аналізатором a , які схрещені між собою (рис.10). Доки тіло не деформоване, така система світла не пропускає.

При односторонньому стиску або розтязі тіла вздовж напрямку OO в ньому виникає оптична анізотропія, яка еквівалентна анізотропії одновісного кристала з оптичною віссю OO . Звичайний і незвичайний промені будуть поширюватися в напрямку, який перпендикулярний до OO , із різними швидкостями v_0 і v_e .

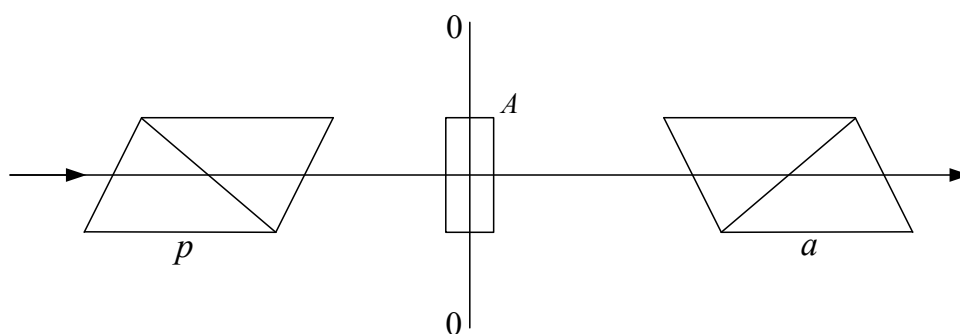


Рис. 10

Якщо головний переріз поляризатора не паралельний і не перпендикулярний до OO , то світло, яке пройшло через деформоване тіло, стане еліптично поляризованим і його не можна погасити аналізатором.

Різниця коефіцієнтів заломлення $n_0 - n_e = \frac{v_0}{c} - \frac{v_e}{c}$ може служити мірою анізотропії. Досліди показують, що різниця $n_0 - n_e$ пропорційна напрузі σ в даній точці тіла:

$$n_0 - n_e = k_1 \sigma, \quad (15)$$

де k_1 - коефіцієнт пропорційності, який залежить від властивостей речовини.

Різниця фаз, яку матимуть звичайний і незвичайний промені, пройшовши тіло завтовшки l , дорівнює

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_0 - n_e) = 2\pi C \sigma l, \quad (16)$$

де λ_0 – довжина хвилі світла у вакуумі;

$C = \frac{k_1}{\lambda}$ – новий коефіцієнт пропорційності.

Явище штучної оптичної анізотропії при деформаціях використовують для виявлення внутрішніх залишкових деформацій, які можуть виникати у виробках зі скла та інших прозорих ізотропних матеріалів внаслідок порушення технології їх виготовлення. Оптичний метод вивчення на прозорих моделях розподілу внутрішніх напруг у різних деформованих частинах машин і споруд широко застосовують у сучасній техніці. Для цього використовують моделі, виготовлені з целулоїду або іншої ізотропної речовини.

Оскільки величина оптичної анізотропії пропорційна напрузі σ , то за виглядом смуг однакового кольору, які виникають при спостереженні моделі між схрещеними ніколями, можна зробити висновок про величину залишкових деформацій.

Оптична анізотропія може виникнути також і в рідині під впливом зовнішніх динамічних впливів. Виникнення оптичної анізотропії в потоці рідини може бути використане для вивчення властивостей полімерів і пластмас.

У 1875р. Д. Керр виявив, що рідкий або твердий ізотропний діелектрик, вміщений у дуже сильне однорідне електричне поле, стає оптично анізотропним. Це явище називають *ефектом Керра*. Принципову схему спостереження цього явища в рідинах зображено на рис.10, де P і a – поляризатор і схрещений з ним аналізатор (рис.11).

Між ними розміщена кювета з конденсатором (комірка Керра), між пластинами якого знаходиться досліджувана рідина. За відсутності електричного поля світло через систему не проходить.

Досліди показали, що під дією однорідного електричного поля в плоскому конденсаторі рідина набуває властивостей одновісного двозаломлюючого кристала, оптична вісь якого збігається з напрямком вектора $\vec{E}$ напруженості електричного поля конденсатора. Різниця показників заломлення рідини для звичайного і незвичайного променів монохроматичного світла в напрямку, який перпендикулярний до вектора $\vec{E}$, пропорційна E^2 :

$$n_0 - n_e = k_2 E^2 \quad (17)$$

де k_2 – коефіцієнт пропорційності.

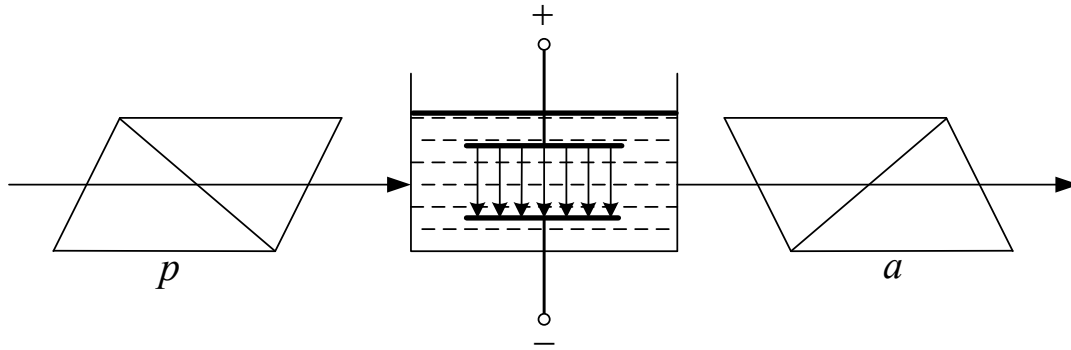


Рис. 11

Якщо довжина шляху променів між обкладками конденсатора l , то різниця фаз між звичайним і незвичайним променями буде дорівнювати

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_0 - n_e) l = \frac{2\pi}{\lambda_0} l k_2 E^2 = 2\pi l B E^2, \quad (18)$$

де $B = \frac{k_2}{\lambda_0}$ - стала Керра, яка залежить від природи речовини, довжини хвилі λ_0 , температури і швидко зменшується з її збільшенням.

Часто користуються іншою константою Керра K , яка пов'язана з B співвідношенням

$$K = \frac{B\lambda}{n},$$

де n – абсолютний показник заломлення речовини за відсутності електричного поля.

У 1930 р. було виявлено існування ефекту Керра і в газах. Трудність спостереження цього явища пов'язана з тим, що значення B для газів на кілька порядків менше ніж для рідин.

Для більшості речовин $B > 0$, тобто ці речовини за своїми оптичними властивостями в однорідному електричному полі подібні до оптично позитивних одновісних кристалів. Є речовини, для яких $B < 0$.

Ефект Керра пояснюється різною поляризацією молекул за різними напрямками. За відсутності поля молекули орієнтовані довільно, тому рідина в цілому не виявляє анізотропії. Під дією поля молекули повертаються так, щоб в напрямі поля були орієнтовані або їх дипольні електричні моменти (у полярних молекул), або напрям найбільшої поляризації (у неполярних молекул). В результаті речовина стає оптично анізотропною.

Ефект Керра практично безінерційний, тобто перехід речовини з ізотропного стану в анізотропний (і назад) при вмиканні поля становить $\approx 10^{-10}$ с. Тому цей ефект може бути ідеальним світловим затвором і застосовується в швидкоплинних процесах (звукозапис, відтворення звуку, швидкісні фото - і кінознімання), в оптичній локації.

Штучну анізотропію можна створити також дією магнітного поля, яка спостерігається у речовинах, молекули яких анізотропні, тобто в парамагнетиках. За відсутності зовнішнього магнітного поля молекули розміщуються хаотично, результатом чого є статистична анізотропія. Якщо таку речовину помістити в досить сильні магнітні поля, то відбудеться напрямлена орієнтація власних магнітних моментів молекул. Це зумовлює анізотропію речовини, яка приводить до подвійного променезаломлення. Таке середовище поводить себе як одновісний кристал, оптична вісь якого паралельна вектору індукції поля $\vec{B}$. Це явище називається явищем Коттона-Мутона, або магнітооптичним. Різниця показників заломлення середовища в цьому випадку дорівнює

$$n_0 - n_e = k_3 B^2, \quad (19)$$

де k_3 - коефіцієнт пропорційності.

Різниця фаз між звичайним і незвичайним променями дорівнює

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_0 - n_e) l = \frac{2\pi}{\lambda_0} l k_3 E^2 = 2\pi D l B^2, \quad (20)$$

де $D = \frac{k_3}{\lambda_0}$ - стала, яка залежить від природи речовини, довжини хвилі світла λ_0 і температури.

У кристалічних тілах, а також у деяких ізотропних рідинах, крім подвійного заломлення променів, спостерігається явище, яке полягає в тому, що площа коливань електричного вектора світлової хвилі повертається на деякий кут при проходженні світла крізь такі речовини. Це *явище називається обертанням площини поляризації або оптичною активністю*. Якщо речовина не знаходиться у зовнішньому магнітному полі, то оптична активність буде природною.

Природну оптичну активність відкрив у 1811 р. Д. Араго на пластинках кварцу, вирізаних перпендикулярно до оптичної осі.

Прийнято визначати напрям обертання площини поляризації відносно спостерігача, погляд якого спрямований назустріч падаючому променю. Обертання називають правим (додатним), якщо площа поляризації обертається вправо (за годинниковою стрілкою) для спостерігача, і лівим (від'ємним), якщо вона обертається вліво.

Експериментально встановлено, що в природі існує два типи кристалів кварцу, які є дзеркальним відображенням один одного. Перші обертають площину поляризації вправо, другі – вліво і відповідно називаються право- і лівоповоротним кварцом. Кут обертання площини поляризації пропорційний товщині шару оптично активної речовини і для монохроматичного світла, довжина світлової хвилі якого λ визначається формулою

$$\varphi = \alpha l, \quad (21)$$

де l – довжина шляху променя в оптично активному середовищі;

α – коефіцієнт пропорційності, який називають оберальною здатністю, або питомим обертанням.

Коефіцієнт пропорційності залежить від природи речовини, температури та довжини хвилі і дорівнює величині кута, на який повертається площина поляризації монохроматичного світла при проходженні шару завтовшки l м.

Для оптично активних рідин та розчинів Ж. Біо у 1831 р. встановив, що кут повороту площини поляризації φ прямо пропорційний товщині шару l і концентрації C оптично активної речовини, тобто

$$\varphi = [\alpha]Cl, \quad (21)$$

де $[\alpha]$ - коефіцієнт пропорційності, який називається *питомим обертанням розчину*.

Коефіцієнт $[\alpha]$ залежить від природи оптично активної речовини і розчинника, температури та довжини хвилі світла.

Біо також експериментально встановив наближену залежність величини $[\alpha]$ від довжини хвилі λ :

$$[\alpha] \sim \frac{l}{\lambda^2}. \quad (22)$$

Властивості оптичної активності розчинів дають змогу визначити їх концентрації. *Прилади, за допомогою яких проводять такі вимірювання, називаються поляриметрами.* Оскільки для розчину цукру питома обертає $[\alpha]$ значне, то поляриметри набули широкого застосування в медичній практиці й техніці.

Тема 10. Квантова природа випромінювання

- 1. Теплове випромінювання і його характеристики.**
- 2. Закон Кірхгофа.**
- 3. Закони Стефана – Больцмана і Віна.**
- 4. Формула Планка. Виведення законів Стефана - Больцмана і Віна**
- 5. Зовнішній фотоефект. Ефект Комптона.**

1. Теплове випромінювання і його характеристики

Тіла, які нагріті до досить високих температур, світяться. Світіння тіл, яке обумовлене нагріванням, називається тепловим випромінюванням. Теплове випромінювання є найбільш поширеним в природі і відбувається за рахунок енергії теплового руху атомів і молекул речовини. Теплове випромінювання властиве всім тілам, які мають температуру, вищу за 0К. Теплове випромінювання має суцільний спектр частот, положення максимуму якого залежить від температури. При високих температурах випромінюються ультрафіолетові й видимі електромагнітні хвилі, при більш низьких температурах - переважно інфрачервоні хвилі.

Сьогодні відомі кілька видів випромінювань. Серед них - фотолюмінісценція (спочатку енергія поглинається, а потім випромінюється); хемілюмінесценція - енергія звільняється у вигляді випромінювання за рахунок хімічних реакцій; електролюмінісценція - свічення розріджених газів в електричних полях і теплове випромінювання - випромінювання нагрітих тіл. Теплове випромінювання - практично єдиний вид випромінювання, яке може бути рівноважним. Припустимо, що нагріте (випромінююче) тіло поміщене в порожнину, обмежену ідеальною не відбиваючою оболонкою. З часом, у результаті безперервного обміну енергією між тілом і випромінюванням, наступить рівновага, тобто тіло в одиницю часу буде поглинати стільки ж енергії, скільки й випромінювати. Якщо рівновага між тілом і випромінюванням з будь-якої причини буде порушена то тіло випромінює енергії більше, ніж поглинає. Якщо в одиницю часу тіло більше випромінює, ніж поглинає (або навпаки), то температура тіла почне знижуватися (або підвищуватися). У результаті буде послаблятися (або зростати) кількість випромінюваної тілом енергії, доки, нарешті, не встановиться нова рівновага. Всі інші види випромінювання невірноважені.

Кількісною характеристикою теплового випромінювання є його випромінювальна здатність - потужність випромінювання з одиниці площі поверхні тіла в інтервалі частот одиничної ширини:

$$R_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^{sun.}}{d\nu}, \quad (1)$$

де $dW_{\nu,\nu+d\nu}^{sun.}$ – енергія електромагнітного випромінювання, яка випускається за одиницю часу з одиниці площі поверхні тіла в інтервалі частот від ν до $\nu + d\nu$.

Одиницею енергетичної світності є джоуль на метр у квадраті в секунду (Дж/(м²с)).

Енергетична випромінювальна здатність тіла може бути виражена також через функцію довжини хвилі, оскільки

$$dW_{\nu,\nu+d\nu}^{sun.} = R_{\nu,T} d\nu = R_{\lambda,T} d\lambda. \quad (2)$$

Оскільки $c = \lambda \nu$, то $\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c}$, тому

$$dR_{\nu,T} = R_{\lambda,T} \frac{\lambda^2}{c}. \quad (3)$$

Знак мінус у виразі $\frac{d\lambda}{d\nu}$ вказує на те, що із зростанням однієї з величин (λ або ν) інша величина зменшується.. Тому надалі знак мінус будемо опускати.

Знаючи енергетичну випромінювальну здатність на кожній спектральній ділянці, можна обчислити інтегральну випромінювальну здатність тіла на всіх частотах, але при певній температурі:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} d\nu. \quad (4)$$

Здатність тіл поглинати падаюче на них випромінювання характеризується поглинальною здатністю, яка дорівнює

$$A_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^{ногл.}}{dW_{\nu,\nu+d\nu}^{над.}}, \quad (5)$$

де показано, яка частина енергії, принесеної за одиницю часу на одиницю площі поверхні тіла падаючими на неї електромагнітними хвилями

$dW_{\nu, \nu+d\nu}^{nad.}$ із частотами від ν до $\nu+d\nu$, поглинається тілом $dW_{\nu, \nu+d\nu}^{пол.}$.

Поглиняльна здатність тіла – величина безрозмірна.

Тіло, яке здатне поглинати повністю при будь-якій температурі все падаюче на нього випромінювання будь-якої частоти, називається абсолютно чорним. Отже, поглиняльна здатність абсолютно чорного тіла для всіх частот і температур дорівнює одиниці ($A_{\nu, T} = 1$). Абсолютно чорних тіл у природі немає, однак такі тіла, як сажа, платинова чернь, чорний оксамит і деякі інші у певному інтервалі частот за своїми властивостями близькі до них.

Ідеальною моделлю абсолютно чорного тіла є замкнута порожнина з невеликим отвором (рис. 1), внутрішня поверхня якої покрита чорною фарбою. Промінь світла, що потрапив усередину такої порожнини, багаторазово буде відбиватися від стінок, у результаті чого інтенсивність практично зменшується до нуля.

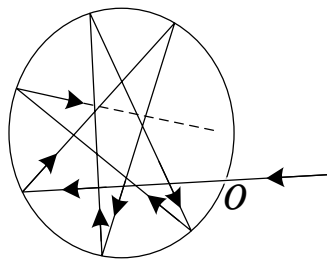


Рис. 1

Досліди показують, що при розмірі отвору, меншому 0,1 діаметра порожнини, падаюче випромінювання на всіх частотах практично «повністю поглинається». Внаслідок цього відкриті вікна будинків з боку вулиці завжди виглядають чорними, хоча усередині кімнат досить світло через відбивання світла від стін.

Поряд з поняттям абсолютно чорного тіла використовують поняття сірого тіла – тіла, поглиняльна здатність якого менша одиниці, але однакова для всіх частот і залежить тільки від температури, матеріалу й стану поверхні тіла. Таким чином, для сірого тіла $A_{\nu, T}^{cip.} = A_T < 1$.

Дослідження теплового випромінювання зіграло важливу роль у створенні квантової теорії світла, тому необхідно розглянути закони, яким воно підпорядковується.

2. Закон Кірхгофа

Кірхгоф, аналізуючи умови рівноважного випромінювання в ізольованій системі тіл, встановив кількісний зв'язок між спектральною густиною випромінювальної здатності й спектральною поглиняльною здатністю тіл. Відношення спектральної густини випромінювальної здатності тіла до спектральної поглиняльної здатності не залежить від

природи тіла; воно є для всіх тіл універсальною функцією частоти (довжини хвилі) і температури

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}. \quad (6)$$

Вираз (6) дістав назву закону Кірхгофа. Оскільки для абсолютно чорного тіла $A_{\nu,T} = 1$, то із закону Кірхгофа (6) випливає, що $R_{\nu,T}$ для абсолютно чорного тіла дорівнює $r_{\nu,T}$. Таким чином, універсальна функція Кірхгофа $r_{\nu,T}$ є не що інше як спектральна густина випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла. Отже, відповідно до закону Кірхгофа, для всіх тіл у природі відношення спектральної густини випромінювальної здатності до спектральної поглинальної здатності дорівнює спектральній густині випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла при тій же температурі й частоті.

Із закону Кірхгофа треба усвідомити, що спектральна густина випромінювальної здатності будь-якого тіла в будь-якій області спектра завжди менша спектральної густини випромінювання абсолютно чорного тіла (при тих же значеннях T і ν), оскільки $A_{\nu,T} < 1$ й $R_{\nu,T} < r_{\nu,T}$. Крім того, з (6) випливає, що якщо тіло не поглинає електромагнітних хвиль якоїсь частоти, то воно їх і не випромінює.

Використовуючи закон Кірхгофа, вираз для інтегральної випромінювальної здатності тіла (4) можна записати так

$$R_T = \int_0^{\infty} A_{\nu,T} r_{\nu,T} d\nu. \quad (7)$$

Для сірого тіла

$$R_T^{cip.} = A_T \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = A_T R_e, \quad (8)$$

де

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu \quad (9)$$

Якщо випромінювання не підпорядковується закону Кірхгофа, то воно не є тепловим.

3. Закони Стефана-Больцмана й Віна

В законі Кірхгофа (6) стверджується, що спектральна густина випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла є універсальною функцією, тому знаходження її явної залежності від частоти й температури є важливим завданням теорії теплового випромінювання.

Аналізуючи експериментальні дані, вчені І. Стефан і Л. Больцман, застосовуючи лише термодинамічний метод, розв'язали це завдання лише частково, установивши залежність інтегральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла R_e від температури. Цей закон дістав назву закону Стефана-Больцмана,

$$R_e = \sigma T^4, \quad (10)$$

тобто інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла пропорційна термодинамічній температурі в четвертій степені. Тут σ - постійна Стефана-Больцмана. Експериментальне значення постійної Стефана-Больцмана дорівнює

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт } / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4).$$

Закон Стефана-Больцмана, визначаючи залежність R_e від температури, не дає відповіді щодо спектрального складу випромінювання абсолютно чорного тіла. Експериментальні криві залежності функції $r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{v,T}$ від довжини хвилі λ при різних температурах показані на (рис. 2). Криві мають явно виражений максимум, який із підвищенням температури зміщується у бік більш коротких хвиль.

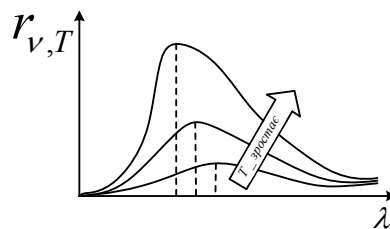


Рис. 2

Площа, обмежена кривою залежності $r_{\lambda,T}$ від λ пропорційна інтегральній випромінювальній здатності R_e абсолютно чорного тіла й, за законом Стефана-Больцмана, четвертому степені температури.

Німецький фізик В. Він, опираючись на закони термодинаміки й електродинаміки, установив залежність довжини хвилі λ , на яку припадає максимум функції $r_{\lambda,T}$, від температури T . Відповідно до цього закону

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (11)$$

де b – постійна Віна, її експериментальне значення дорівнює $2,9 \cdot 10^{-3}$ мК.

Вираз (11) називають законом зміщення Віна, оскільки він показує зсув положення максимуму функції $r_{\lambda,T}$ із зростанням температури в області коротких довжин хвиль. Закон Віна пояснює, чому при зниженні температури нагрітих тіл у їх спектрі усе сильніше переважає довгохвильове випромінювання (наприклад, перехід білого кольору випромінювання в червоний при охолодженні металу).

Незважаючи на те, що закони Стефана-Больцмана й Віна відіграють у теорії теплового випромінювання важливу роль, вони не відносяться до фундаментальних законів, тому що не дають загальної картини розподілу енергії випромінювання за частотами при різних температурах.

4. Формула Планка. Виведення законів Стефана-Больцмана й Віна

Значення спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла було знайдено німецьким фізиком М. Планком у 1900 р. Для цього йому довелося відмовитися від одного із основних положень класичної фізики, відповідно до якого енергія будь-якої випромінювальної системи може змінюватися неперервно, тобто приймати довільні значення. Відповідно до висунутої Планком квантової гіпотези, атомні осцилятори випромінюють енергію не безупинно, а певними порціями – квантами, причому енергія кванта пропорційна частоті коливання:

$$\varepsilon_o = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (12)$$

де $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Оскільки енергія випромінювання випускається порціями, то енергія осцилятора ε може приймати лише певні *дискретні значення*, кратні цілому числу елементарних порцій енергії ε_0 :

$$\varepsilon = nh\nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Використовуючи статистичні методи й квантовий характер теплового випромінювання, М. Планк вивів формулу універсальної функції Кірхгофа

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (13)$$

яка блискуче погоджується з експериментальними даними розподілу енергії в спектрах випромінювання абсолютно чорного тіла у всьому інтервалі частот від 0 до ∞ і при різних температурах. Теоретичний зміст цієї формули М. Планк розповів 14 грудня 1900 р. на засіданні Німецького фізичного гуртка. Цей день став датою народження квантової фізики.

Використовуючи формулу Планка можна одержати закон Стефана-Больцмана. Згідно з (9)

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu, T} d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu.$$

Введемо позначення $x = h\nu/(kT)$, звідки $dx = h d\nu/(kT)$; $d\nu = kT dx/h$. Тут k – стала Больцмана, яка дорівнює $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. З урахуванням цих позначень інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла R_e буде дорівнювати

$$R_e = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4, \quad (14)$$

де $\sigma = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$, так як $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$.

Таким чином, дійсно формула Планка дозволяє одержати закон Стефана-Больцмана. Крім того, підстановка числових значень k , c и h дає для постійної Стефана-Больцмана величину, яка добре погоджується з експериментальними даними.

Закон зміщення Віна одержимо за допомогою формули (3) і (13):

$$r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T} = \frac{2\pi^5 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1}. \quad (15)$$

Досліджуємо вираз (15) на максимум, здійснивши попередньо такі заміни:

$$\frac{hc}{kT\lambda} = x, \text{ звідки } \lambda = \frac{hc}{kTx}.$$

Підставимо ці заміни в (15), одержимо

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi^5 k^5 T^5}{h^4} \frac{x^5}{e^x - 1}. \quad (16)$$

Похідну від (16) прирівняємо до нуля $\left[\frac{x^5}{e^x - 1} \right]' = 0$, одержимо

$$\frac{5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0,$$

звідки

$$5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x = 0, \text{ або } 5\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - x = 0.$$

Розв'язавши останнє трансцендентне рівняння графічним способом (рис.3), знайдемо значення змінної величини x , при якій функція (16) досягає максимуму $x=4,965$.

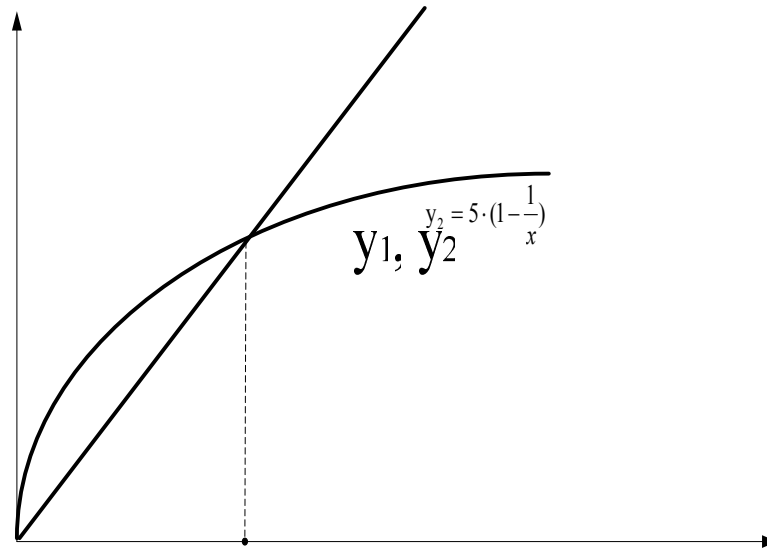


Рис. 3

Отже,

$$\frac{hc}{kT\lambda} = 4,965,$$

звідки

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{4,965k} \frac{1}{T} = 2,9 \cdot 10^{-3} \frac{1}{T} \text{ м} \cdot \text{К},$$

тобто, ми одержали закон зміщення Віна.

Таким чином, формула Планка не тільки добре погоджується з експериментальними даними, але й містить у собі дослідні закони теплового випромінювання, а також дозволяє обчислити постійні в законах теплового випромінювання. Отже, формула Планка є повним розв'язком основного завдання теплового випромінювання, поставленого Кірхгофом. Його розв'язування стало можливим лише завдяки революційній квантовій гіпотезі Планка.

5. Зовнішній фотоефект. Ефект Комптона

Метал – це тверде тіло, в якому є вільні електрони, що можуть хаотично рухатися між вузлами кристалічної решітки. Характерною особливістю металів є їх блиск. Якщо метал опромінювати світлом, то з

нього вилітають вільні електрони. Цей експериментальний факт називається фотоефектом (рис.4).

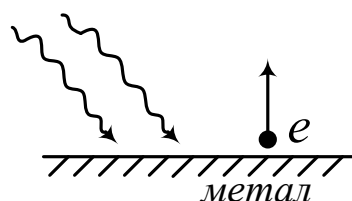


Рис. 4

Щоб пояснити, чому з металу вилітають електрони під дією світла, слід спочатку зрозуміти, чому вони самочинно не вилітають з металу, без дії світла, якщо вони там є.

Що таке метал? Метал - це речовина, у якій при утворенні решітки частина валентних електронів починає перебувати у вільному стані, а вузли кристалічної решітки, які втратили валентні електрони, стають позитивними іонами. Чому електрони не вилітають за межі металу, адже в ньому ніяких стінок немає? Відповідь проста: як тільки окремий електрон випадково вилітає за межі металу, то весь його шматок (до цього він був нейтральним) стає позитивно зарядженим, і утворене електричне поле цього шматка зтягує електрон назад в метал.

Щоб зрозуміти цей процес дещо глибше розглянемо поведінку окремих молекул в рідині (рис.5).

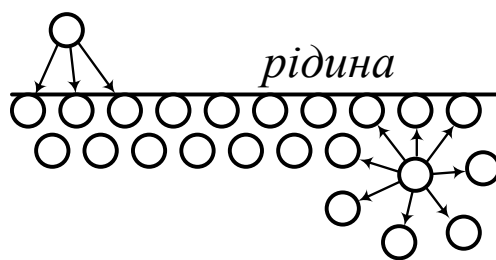


Рис.5

У рідині молекули нейтральні, а тому між ними діють молекулярні сили взаємодії. Коли молекула рідини випадково вилітає за межі її поверхні, то в більшості випадків pojawiaються сили, які зтягують її назад в рідину. Через це поверхня рідини має чітку границю між стінками, а також повітряним шаром біля її поверхні.

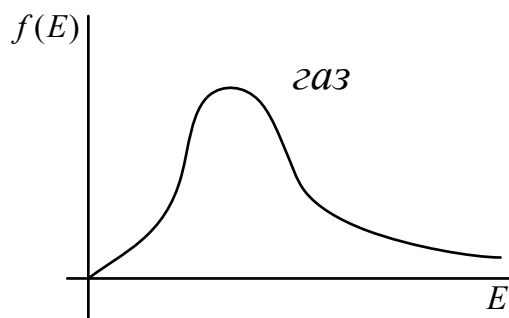


Рис.6

На рис. 6 показана залежність функції розподілу молекул повітря за кінетичними енергіями. Подібний розподіл за кінетичними енергіями характерний також для молекул рідини. Виходить у рідинах завжди є молекули, які за рахунок хаотичного теплового руху можуть мати більшу енергію, ніж потрібно для подолання роботи виходу. Такі молекули легко долають сили притягання, тобто виконують роботу з подолання молекулярних сил притягання й вилітають за межі рідини. Цей процес називається випаровуванням.

Повернемося тепер до питання, чому самочинно не вилітають електрони з металу, адже вони в металі ведуть себе як ідеальний газ? Серед великої кількості вільних електронів у металі завжди знайдуться досить енергійні електрони, які здатні долати потенціальний бар'єр і вилітати за межі металу. За цією логікою має відбуватися безперервне випаровування електронів з металу. До чого це призвело б? Це призвело б до того, що шматок металу постійно набував би позитивного заряду. На будь-який шматок металу налипав би всякий дріб'язок, пил, папірці. Цього на практиці не спостерігається. Це означає, що електрони не випаровуються і що функція розподілу електронів за енергіями усередині металів не така, як для газів або рідин. Дослідження залежності функції розподілу електронів за енергіями в металі показують, що вона така, як на рис.7. Був би «хвіст» у цієї функції розподілу, – електрони б випаровувалися, і шматок був би обліплений всяким дріб'язком. Максимальні енергії електронів в металі не перевищують деякого значення E_0 , а тому в металі мають енергію в інтервалі $[0, E_0]$. Якщо виділити вузький інтервал енергії ΔE , то заштрихована площа визначає число електронів з енергією в цьому інтервалі, а електронів, енергії яких більші за E_0 , там взагалі немає.

Факт, що метал не обліплений пилом, беззаперечно підтверджує, що функція розподілу електронів у металі немає хвоста, однак стверджувати, що енергія електронів у металі повинна мати обрив при значеннях E_0 теж не можна.

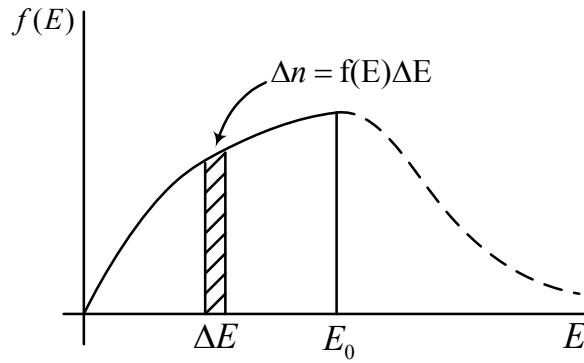


Рис. 7

На рис. 8 показана картина потенціальної енергії електронів у металі. Поза металом діє сила $\vec{F} = -\frac{dU}{dx}$, яка зтягує електрони в метал. Всередині металу електрон знову вільний, сила на нього не діє, а потенціальна енергія постійна.

Повна енергія електрона складається з потенціальної і кінетичної енергій. Енергія E_0 , на якій обривається функція розподілу, це максимальна повна енергія електрона в металі. Мінімальна повна енергія електрона близька до нуля. Весь спектр енергій електронів лежить у межах від дна цієї ями до рівня E_0 . Повна енергія електрона значно менша тієї, яку слід надати електрону, щоб він став вільним. Рівень E – це енергія для вільного електрона. Найенергійнішому електрону (який має максимальну кінетичну енергію) усередині металу, щоб досягти до краю ями, не вистачає шматка A , ця енергія називається *роботою виходу*.

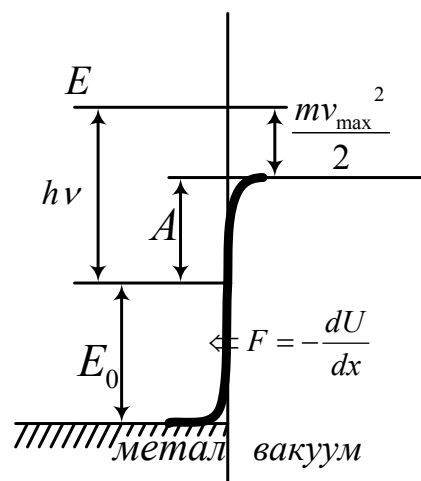


Рис. 8

Чому вилітають електрони з металу під дією світла? Нічого дивного тут немає. Світло – це електромагнітна хвиля, яка здатна проникати в метал. Змінне електричне поле електромагнітної хвилі може надавати електрону достатню енергію. Якщо імпульс електрона виявиться направленим до границі металу з вакуумом, то він вилетить за його межі. Варто було б очікувати, що чим більша інтенсивність падаючого світла, тобто чим більша амплітуда хвилі, тим з більшими швидкостями будуть вилітати електрони з металу, тому що тим більшу енергію вони можуть одержати від цієї хвилі. І тут виникла перша проблема, насправді, не впливає інтенсивність світла на швидкості, з якими вилітають електрони з металу. Швидкість електрона, який вилітає за межі металу, залежить не від падаючої енергії, а від кольору. Якщо на метал направити синє світло, то електрони будуть вилітати з більшими швидкостями ніж в тому випадку, коли на метал направити червоне світло. Якщо світити світлом із ще більшою довжиною хвилі, то вони взагалі не будуть вилітати, яка б не була їх інтенсивність. Пояснити ці протиріччя було не так просто.

Для розв'язування цієї проблеми довелося відмовитися від хвильової теорії й визнати, що при взаємодії з речовиною світло поводить ся як потік частинок, тобто повернутися до старих корпускулярних понять, які в свій час запропонував Ньютон.

Чим же відрізняються хвилі й частинки? Освітлюємо шматок металу джерелом монохроматичного світла з певною довжиною хвилі, наприклад зеленим. Вимірюємо швидкості, з якими вилітають електрони з металу. Виявляється, ці швидкості змінюються в межах від нуля до деякої максимальної швидкості. В цьому випадку не складно порахувати скільки електронів вилітає за одну секунду з металу. Коли віддалятися від джерела, інтенсивність падаючого світла знижується, але швидкості, з якими вилітають електрони, не залежать від відстані, а ось число електронів, які вилітають, залежить.

Енергія фотона пов'язана із частотою. Те, що ми у хвильовій теорії називали частотою, просто візуально проявляється у кольорі й визначає енергію фотона: $E_{\phi} = h\nu$, де h – постійна Планка. Імпульс фотона – це

енергія, поділена на швидкість світла: $p = \frac{E_{\phi}}{c} = \frac{h\nu}{c}$.

Фотон – це частинка, маса спокою якої дорівнює нулю а енергія $E = pc$. В одних фізичних явищах світло проявляє хвильові властивості (дифракція, інтерференція), в інших – корпускулярні властивості (наприклад, фотоефект).

Якщо в метал проникає фотон, який має енергію $h\nu$ більшу, ніж робота виходу, то електрон вилетить із металу, і надлишок енергії піде на його кінетичну енергію, і ми тоді бачимо, що

$$h\nu = \frac{mv_{\max}^2}{2} + A. \quad (17)$$

Це знаменита формула Ейнштейна. Ейнштейн у 1921 році одержав Нобелівську премію не за теорію відносності, а от за цю формулу, яку тепер може написати будь-який школяр. Здавалося б за що премія? А за те, що треба було усвідомити, що світло може проявляти квантові властивості.

З рис. 8 видно, що якщо енергія фотона менша роботи виходу, то електрон з ями не вилетить, тут фотоефект не відбувається. Якщо метал освітлювати світлом із частотами меншими, ніж $\nu_0 = \frac{A}{h}$, то при таких частотах фотоефект взагалі не відбувається.

Мінімальна частота світлових променів, при якій ще можливий фотоефект, називається *червоною межею фотоефекту*.

Куди діваються фотони, якщо вони вибивають електрони з металу? Фотони поглинаються іншими атомами і зникають.

Куди діваються електрони, якщо їх вибивають фотони? Деяка кількість електронів під дією світла вилітає за межі металу, від чого метал набуває позитивного заряду. Зрештою позитивний заряд металу стане настільки великим, що максимальної кінетичної енергії, якої набув електрон, не вистачить, щоб летіти в безмежність. Що тоді буде відбуватися? Електрони вилітають за межі металу і тут же повертаються назад. Це означає, що всякий шматок металу при освітленні (рис.9) повинен мати деякий позитивний заряд, і що він оточений хмаркою електронів біля його поверхні.

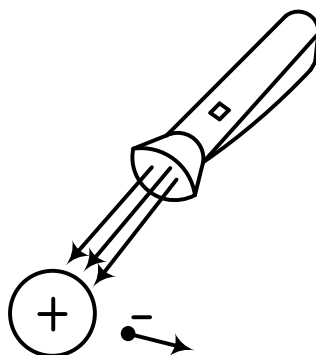


Рис.9

Розрізняють фотоефект зовнішній, внутрішній і вентильний. Зовнішнім фотоелектричним ефектом (фотоефектом) називається

випромінювання електронів речовиною під дією електромагнітного випромінювання. Зовнішній фотоефект спостерігається у твердих тілах (металах, напівпровідниках, діелектриках), а також у газах на окремих атомах і молекулах (фотоіонізація).

Перші фундаментальні дослідження фотоефекту були виконані російським ученим А. Г. Столетовим. Принципова схема для дослідження фотоефекту наведена на рис. 10. Два електроди (катод K з досліджуваного металу й анод A – у схемі Столетова застосовувалася металева сітка) у вакуумній трубці ввімкнені до батареї так, що за допомогою потенціометра R можна змінювати не тільки значення, але й знак поданої на них напруги. Струм, який виникає при освітленні катода монохроматичним світлом (через кварцове віконце), вимірювався ввімкненим у ланцюг міліамперметром. Опромінюючи катод світлом різних довжин хвиль, Столетов установив такі закономірності, які не втратили свого значення до нашого часу:

- найбільш ефективну дію здійснюють ультрафіолетові промені;
- під дією світла речовина втрачає тільки негативні заряди;
- сила струму, яка виникає під дією світла, прямо пропорційна його інтенсивності.

У 1899 р. фізики Ф. Ленард і У. Томсон методом відхилення зарядів у електричному й магнітному полях визначили питомий заряд частинок, які вириваються світлом з катода, довівши, що ці частинки є електронами (рис. 10).

Це було підтверджено в 1922 р. дослідями російських фізиків А.Ф.Йоффе й М.І.Добронравова, які досліджували фотоефект на мікроскопічних заряджених металевих порошинах.

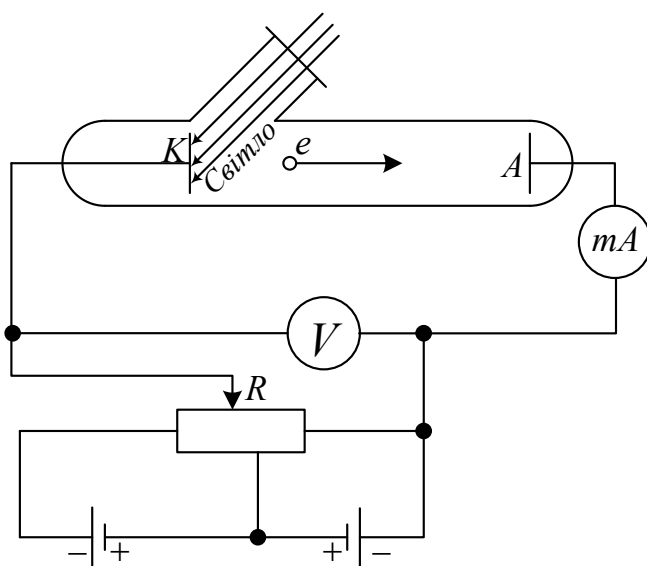


Рис.10
134

Внутрішній фотоефект – це викликані електромагнітним випромінюванням переходи електронів усередині напівпровідника або діелектрика із зв'язаних станів у вільні стани без вильоту назовні. У результаті концентрація носіїв струму усередині тіла збільшується, що приводить до виникнення фотопровідності (підвищення електропровідності напівпровідника або діелектрика при його освітленні) або до виникнення е.р.с.

Вентильний фотоефект - виникнення е.р.с. при освітленні контакту двох різних напівпровідників або напівпровідника й металу (при відсутності зовнішнього електричного поля). Вентильний фотоефект відкриває, таким чином, шляхи для прямого перетворення сонячної енергії в електричну.

У свій час був проведений експеримент, який мав підтвердити корпускулярну природу світла, тобто проявлення корпускулярних властивостей світла при його взаємодії з речовиною. Прикладом такого розсіювання світла на електронах атомів є синє небо. Електрони атомів у верхніх шарах атмосфери коливаються у полі падаючих хвиль з частотою хвилі, випромінюючи вторинні хвилі з тією ж частотою, а вони створюють розсіяне світло. Наведений приклад пояснюється взаємодією світла з речовиною, і підпадає під корпускулярну теорію. Відповідно до корпускулярної теорії розсіювання світлових променів відбувається трохи інакше.

На електрон налітає фотон, який наділений відповідною енергією і імпульсом. Відбувається зіткнення, яке не можна порівняти із зіткненням бильярдних куль.

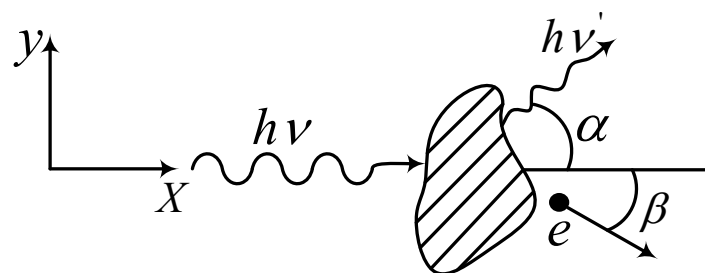


Рис.12

Електрон і фотон якось між собою взаємодіють, а потім розлітаються. Якщо припустити, що електрон нерухомий і наділений лише енергією спокою, то після взаємодії з фотоном його енергія зростає, а

енергія фотона зменшиться, тобто: $h\nu' < h\nu \Rightarrow \nu' < \nu$. Виходить, розсіяні фотони мають меншу частоту, ніж частота падаючого світла. Подивимось тепер кількісно.

Енергія фотона до зіткнення $h\nu$, а електрона до зіткнення дорівнює енергії спокою m_0c^2 . Після зіткнення фотон набуває енергії $h\nu'$, а електрон $-mc^2$. Імпульс фотона у проекції на вісь x до зіткнення дорівнює $p_\phi + 0$, а після зіткнення $p'_\phi \cos \alpha + p_e \cos \beta$. Відповідно у проекції на вісь y імпульс фотона до зіткнення дорівнює 0 , а після зіткнення $p'_\phi \sin \alpha - p_e \sin \beta$. Закони збереження енергії і імпульсу дають три рівняння:

$$E_\phi + m_0c^2 = E'_\phi + \sqrt{p_e^2c^2 + m_0^2c^4}, \quad (18)$$

$$p_\phi = p'_\phi \cos \alpha + p_e \cos \beta, \quad (19)$$

$$0 = p'_\phi \sin \alpha - p_e \sin \beta. \quad (20)$$

Ці три рівняння описують зіткнення фотона з електроном. Якщо вважати відомими величинами E_ϕ, p_ϕ , а невідомими — величини: E'_ϕ, p'_ϕ, p_e , а також кути α, β , то маємо п'ять невідомих величин у трьох рівняннях. Це означає, що однозначно описати результат зіткнення фотона і електрона не можна.

Від кута β можна позбутися, якщо рівняння (19) і (20) піднести до квадрату і додати, одержимо

$$(p_\phi - p'_\phi \cos \alpha)^2 + p'^2_\phi \sin^2 \alpha = p_e^2. \quad (21)$$

Будемо визначати частоту розсіювання ν' у вигляді функції від кута розсіювання, тобто $\nu' = f(\alpha)$. Піднесемо рівняння (18) до квадрату і розв'яжемо систему разом з рівнянням (21), тобто

$$p_\phi^2 - 2p_\phi p'_\phi \cos \alpha + p'^2_\phi = p_e^2,$$

$$(E_\phi - E'_\phi)^2 + 2mc^2(E_\phi - E'_\phi) = p_e^2c^2.$$

Знайдемо p'_ϕ , врахувавши що $E_\phi = p_\phi c$ і $E'_\phi = p'_\phi c$, одержимо

$$p'_\phi = \frac{p_\phi}{1 + \frac{p_\phi}{mc}(1 - \cos \alpha)}. \quad (22)$$

Вираз (22) дає можливість визначити імпульс розсіяного фотона, вираженого через імпульс падаючого фотона і кут розсіювання α .

З формули (22) випливає, що якщо $p_\phi \ll mc$, то $p'_\phi \approx p_\phi$, тобто частота розсіяного світла приблизно збігається з частотою падаючого світла. В цьому випадку працює хвильова природа світла. При великих частотах падаючого світла, частота розсіяного світла стає меншою частоти падаючого, а це є гарним підтвердженням корпускулярної природи світла.

Залежність частоти розсіяного світла від частоти падаючого світла легко одержати з формули (22), замінивши p'_ϕ на $\frac{h\nu'}{c}$ і p_ϕ на $\frac{h\nu}{c}$, як це показано формулою (23)

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2}(1 - \cos \alpha)} \quad (23)$$

Ефект Комптона є наглядним прикладом підтвердження корпускулярних властивостей світла.

Використана література

1. Б. М. Яворський, А. А. Детлаф, Л. Б. Милковська. Курс фізики, II – К.: Вища школа, 1972. – 432 с.
2. Б. М. Яворський, А. А. Детлаф. Курс фізики. т. III. – К.: Вища школа, 1973. – 499 с.
3. Т. И. Трохимова. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.
4. И. В. Савельев. Курс общей физики, т. I, II, III. М.: Наука, – 1986. – 432 с., 496 с., 318 с.
5. І. М. Кучерук, В. П. Дущенко. Загальна фізика. Оптика, квантова фізика. – К.: Вища школа, 1991. – 463 с.
6. Ф. А. Корольов. Курс физики. Оптика, атомная и ядерная физика. – М.: Просвещение, 1974. – 608 с.

Навчальне видання

Сергій Григорович Авдєєв
Тодор Ілліч Бабюк

ЛЕКЦІЇ З ФІЗИКИ

(коливання і хвилі, оптика)

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Авдєєвим С. Г.
Редактор В.О. Дружиніна
Коректор З. В. Поліщук

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7х42^{1/4}
Друк різнографічний
Тираж прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-виданничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ