

А.А. Барковська, Б.С. Грига,
Т.І. Найко, В.М. Подзе, С.І. Резнік

**Тести та тестові завдання з математики для
слухачів ІндП**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А.А. Барковська, Б.С. Грига,
Т.І. Найко, В.М. Подзе, С.І. Резнік

Тести та тестові завдання з математики для слухачів ІнДП

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник слухачів Інституту довузівської підготовки. Протокол №8 від 31 березня 2005р.

Вінниця ВНТУ 2006

УДК 51(075)
Т 36

Рецензенти:

В.М.Дубчак, доктор технічних наук доцент (ВДАУ)

В.І. Ключко, доктор педагогічних наук професор (ВНТУ)

В.М.Михалевич, доктор технічних наук професор (ВНТУ)

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

А.А. Барковська, Б.С. Грига, Т.І. Найко, В.М. Подзе, С.І. Резнік
Т 36 **“Тести та тестові завдання для слухачів ІнДП”**. Навчальний посібник. — Вінниця: ВНТУ, 2005. — 104с.

Даний посібник містить теоретичні викладки з деяких питань елементарної математики а також тестові завдання з арифметики, алгебри та геометрії. В склад посібника додано зразки тестів, які пройшли апробацію в процесі навчання слухачів ІнДП.

Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри прикладної математики та програмою дисципліни “Елементарна математика”.

УДК 51(075)

© А.А. Барковська, Б.С. Грига, Т.І. Найко, В.М. Подзе, С.І. Резнік, 2006

ЗМІСТ

1	Передмова	5
2	Теоретичні викладки з деяких питань елементарної математики	5
2.1	Ірраціональні нерівності	5
2.2	Текстові задачі	7
2.3	Модуль. Вирази, що містять знак модуля	8
2.4	Тригонометричні формули	28
3	ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ. АРИФМЕТИКА	31
4	АЛГЕБРА	33
4.1	Властивості степеня і кореня. Тотожні перетворення	33
4.2	Лінійні рівняння	36
4.3	Квадратні рівняння	39
4.4	Системи рівнянь з двома невідомими, що містить рівняння другого степеня	41
4.5	Дробово-раціональні алгебраїчні рівняння	44
4.6	Рівняння вищих степенів	45
4.7	Системи алгебраїчних рівнянь	47
4.8	Послідовність. Арифметична та геометрична прогресії	47
4.9	Алгебраїчні нерівності	50
4.10	Ірраціональні рівняння та нерівності	53
4.11	Модуль в тестових завданнях	55
4.12	Тригонометричні тотожності	56
4.13	Тригонометричні рівняння	57
4.14	Властивості логарифмів. Показникові і логарифмічні рівняння	58
4.15	Системи показникових та логарифмічних рівнянь	61
4.16	Показникові та логарифмічні нерівності	61
4.17	Функція	64
4.18	Похідна функції. Застосування похідної	69
5	ГЕОМЕТРІЯ. ПЛАНІМЕТРІЯ	72
5.1	Кути	72
5.2	Рівнобедрений і рівносторонній трикутники	72
5.3	Прямокутні та різносторонні трикутники	73
5.4	Паралелограм, ромб, квадрат, прямокутник	74
5.5	Трапеція	76
5.6	Коло	76
5.7	Многокутники	77
5.8	Вписані і описані фігури	78
5.9	Вектор. Декартові координати (на площині і у просторі)	79
6	СТЕРЕОМЕТРІЯ	83
6.1	Основні поняття, аксіоми і теореми стереометрії	83
6.2	Призма	84
6.3	Піраміда	85
6.4	Циліндр	87
6.5	Конус	90

6.6 Куля.....	92
6.7 Тіла обертання	92
6.8 Задачі на комбінації тіл обертання.....	93
7 ЗРАЗКИ ТЕСТІВ	95
7.1 Тести для набору у ЗФМШ.	95
7.2 Тести для проведення предметного тестування.	97
8 СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	111

1 Передмова

Цей посібник призначений для проведення тестування різних форм: перевірки, контролю та моніторингу знань. Його можна також використати як навчальний посібник. Він містить завдання з усіх розділів програми елементарної математики.

Ці завдання мають три рівні складності: обов'язковий, підвищений і поглиблений.

Застосування тестів у навчальному процесі зумовлене необхідністю об'єктивного оцінювання учнів. Тест – це завдання на діяльність та еталон відповіді. Наявність жорстко фіксованої відповіді не дає змоги будь-кому вплинути на оцінку відповіді учня і вона може бути визнана об'єктивною. При цьому викладач не має право “натягувати” оцінку, зараховуючи “майже правильну відповідь”, інакше така оцінка нічим не буде відрізнятися від традиційної.

Тестування відзначається необхідністю, відповідністю одержаних результатів поставленій межі та диференціювальною системою.

Зібрані в посібнику завдання дають можливість складати різноманітні тести: альтернативні, вибіркові, на відтворення, тести-задачі тощо.

Посібник адресується абітурієнтам та випускникам, може бути корисним також учням старших класів середніх шкіл, ліцеїв і гімназій.

2 Теоретичні викладки з деяких питань елементарної математики

2.1 Ірраціональні нерівності

Розв'язування ірраціональної нерівності зводяться до розв'язування рівносильної їй сукупності систем раціональних нерівностей.

Необхідно пам'ятати:

1. Якщо обидві частини нерівності піднести до непарного степеня, то завжди отримується нерівність, рівносильна заданій.
2. Обидві частини нерівності можна підносити до парного степеня лише в тому випадку, якщо вони обидві невід'ємні. При цьому завжди одержується нерівність, рівносильна заданій (в області допустимих значень).

3. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$$

4. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$$

Приклад 1

Розв'язати нерівність: $\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 5x + 3} < x$

Розв'язання:

Рівносильна нерівність $x^3 + 2x^2 - 5x + 3 < x^3$; $2x^2 - 5x + 3 < 0$.

Знаходимо корені квадратного рівняння $2x^2 - 5x + 3 = 0$. Маємо

$x_1 = 1, x_2 = 1,5$. Отже, $1 < x < \frac{3}{2}$.

Відповідь: $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Приклад 2

Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 3x + 6} \leq 3x - 4$.

Розв'язання:

Рівносильна система нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 6 \geq 0 \\ 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 6 \leq (3x - 4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ x \geq \frac{4}{3} \\ 8x^2 - 21x + 10 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ \left[x \leq \frac{5}{8}, \right. \\ \left. x \geq 2 \right] \end{cases} \Rightarrow x \geq 2.$$

Відповідь: $[2, +\infty)$.

Приклад 3

Розв'язати нерівність: $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > 2x - 8$.

Розв'язання:

Задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{cases} 2x - 8 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} x < 4 \\ \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 4 \end{cases} \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x \geq 4 \\ 4 < x < 5 \end{cases} \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} x \leq 1 \\ 4 < x < 5 \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} 2x - 8 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 > (2x - 8)^2 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} x \leq 1, & x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 20 < 0 \end{cases} \end{cases} \right]$$

Відповідь: $(-\infty, 1] \cup (4, 5)$.

Приклад 4

Розв'язати нерівність: $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} \leq \sqrt{6-x}$.

Розв'язання

Запишемо нерівність у вигляді: $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$. Рівносильна нерівність в ОДЗ:

$$2x - 1 \leq x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(6-x)} + 6 - x, \quad \sqrt{(x-1)(6-x)} \geq x - 3.$$

Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ (x-1)(6-x) \geq 0 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} x \leq 3 \\ 1 \leq x \leq 6 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \begin{cases} 3 \leq x \leq 6 \\ \frac{3}{2} \leq 3 \leq 5 \end{cases} \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ (x-1)(6-x) \geq 0 \\ (x-1)(6-x) \geq (x-3)^2 \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 6 \\ 2x^2 - 13x + 15 \leq 0 \end{cases} \right]$$

Розв'язком даної сукупності є множина: $1 \leq x \leq 5$.

Відповідь: $[1, 5]$.

2.2 Текстові задачі

Текстові алгебраїчні задачі є традиційними видами конкурсних задач. Основні типи цих задач це задачі “на рух” і “на роботу”; задачі з ціло-числовими невідомими; задачі “на відсотки”; задачі, для розв'язування яких використовується застосування похідної.

При розв'язуванні задач “на рух” рух вважають рівномірним і прямолінійним, пройдений шлях обчислюється за формулою $S=vt$. Якщо тіло рухається за течією річки, то його швидкість дорівнює сумі швидкості в стоячій воді плюс швидкість течії річки; а якщо проти течії — то різниці цих швидкостей.

При розв'язуванні задач на рух зустрічаються такі дві ситуації:

а) Зустрічний рух. В цьому випадку, якщо початкова відстань між об'єктами була S , їх швидкості v_1 і v_2 , то час, через який вони зустрічаються, дорівнює $t = \frac{S}{v_1 + v_2}$.

б) Один об'єкт доганяє інший (рух в одному напрямку) то $t = \frac{S}{v_2 - v_1}$.

Дуже близькою є математична модель задач на рух за моделлю задач, в яких виконується певна робота, або задач на наповнення резервуарів.

Будемо використовувати позначення: робота — A ; продуктивність праці — N (кількість роботи, що виконується за одиницю часу). Робота, що виконується за час t , в такому випадку дорівнює: $A = Nt$.

Абстрактна робота (яка не вимірюється в кількості виробів і т. п.) приймається за одиницю.

Продуктивність спільної роботи дорівнює сумі продуктивностей.

Для успішного розв'язання задач на відсотки потрібно вміти виконувати такі вправи:

а) знаходити відсоток від числа. Для цього, щоб знайти $\alpha\%$ від числа β , потрібно число β поділити на 100 і помножити на α ;

б) Знаходити число за його відсотками. Якщо відомо, що $\alpha\%$ числа x дорівнюють β , то число можна знайти за формулою $x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot 100$.

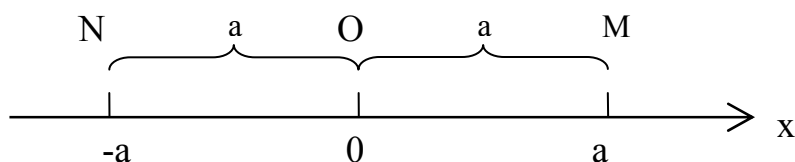
в) Знаходити процентне співвідношення чисел. Щоб знайти процентне співвідношення двох чисел a і b , потрібно відношення цих чисел помножити на 100%.

Схема розв'язування задач з використанням похідної практично скрізь одна і та ж. Сукупність вимог задач дозволяє побудувати так звану цільову функцію. Після цього потрібно лише розв'язати екстремальну задачу — знайти мінімум або максимум побудованої функції.

2.3 Модуль. Вирази, що містять знак модуля

Модуль числа a позначається символом $|a|$.

1. З геометричної точки зору:



$$M(a); N(-a); OM=ON=|a|; |a| \geq 0$$

$$|a|=a; |-a|=a$$

2. З алгебраїчної точки зору:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0 \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases} \quad |a| \geq 0$$

3. $|5|=5$; $|-3,2|=3,2$; $|0|=0$

4. Якщо $a > 0$, то $-a < 0$

$$a = 0 \quad -a = 0$$

$$a < 0 \quad -a > 0$$

5. $(-a)$ — вираз, протилежний виразу a (число протилежне числу a).

6. $a > 0$: $|a|=a$

$$|-a| = -(-a) = a$$

$a < 0$: $|a| = -a$

$$|-a| = -a$$

7. $|a| = |-a|$

8. $\begin{cases} \text{Якщо } a > 0, \text{ то } |a| = a; \\ \text{Якщо } a < 0, \text{ то } |a| > 0, \text{ тобто } a < |a| \end{cases} \quad a \leq |a|$

9. $\begin{cases} \text{Якщо } a < 0, \text{ то } |a| = -a \text{ або } a = -|a| \\ \text{Якщо } a > 0, \text{ то } |a| = a > 0; -|a| < 0; -|a| < a; a > -|a| \end{cases} \quad -|a| \leq a$

10. $-|a| \leq a \leq |a|$

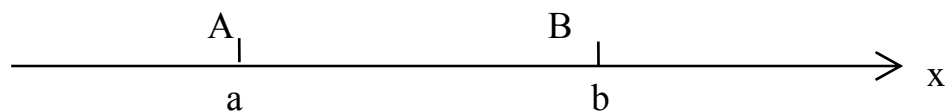
$$-|a| \leq a \leq |a|$$

11. $a^2 = (|a|)^2 = |a^2|$

12. $(|a| = |b|) \Leftrightarrow a^2 = b^2$

13. Відстань між точками a і b

$$A(a); B = |a - b|$$



РІВНЯННЯ $|X|=a$

1. $a > 0$

$$x=a \text{ або } x=-a$$

4. $|x|=7$

$$x=7 \text{ або } x=-7$$

$$\text{Відповідь: } x=\pm 7$$

6. $|x|=0$

$$x=0$$

$$\text{Відповідь: } x=0$$

2. $a=0$

$$x=0$$

5. $|x|=2,5$

$$x=2,5 \text{ або } x=-2,5$$

$$\text{Відповідь: } x=\pm 2,5$$

7. $|x|=-10$

$$-10 < 0$$

$$\text{Відповідь: дійсних коренів немає.}$$

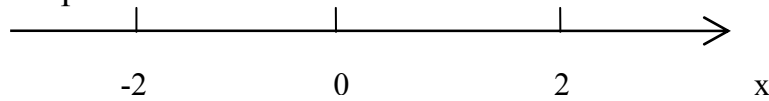
3. $a < 0$

дійсних коренів немає

$$8. |x|=2$$

$$x=2 \text{ або } x=-2$$

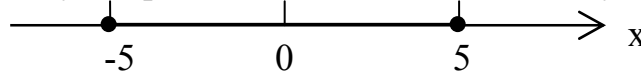
(-2) і 2 – це точки на координатній прямій, які віддалені від 0 на 2 одиниці; їх дві, по різні сторони від 0 - в додатному і від'ємному напрямках координатної прямої.



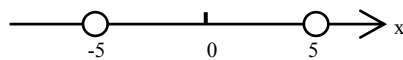
НЕРІВНОСТІ $|X| < a$, $|X| > a$

$$1. |x| \leq 5$$

Геометричний розв'язок. Знайдемо на координатній прямій точки, які віддалені від початку координат на відстань, не більшу, ніж 5 од.



$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -5 \end{cases} \quad X \in [-5; 5] \quad -5 \leq x \leq 5$$



$$2. |x| < 5$$

$$x \in (-5; 5) \quad \begin{cases} x > -5 \\ -5 < x < 5 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$3. |x| < 8$$

Алгебраїчний розв'язок:

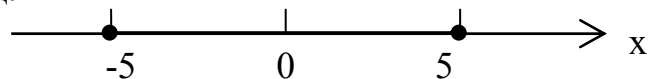
$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0, \text{ тому} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 8 \\ -x < 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 8 \\ x > -8 \end{cases}$$

$$-8 < x < 8$$

$$4. |x| \geq 5$$

Геометричний розв'язок x- це координати точок, які віддалені від 0 на відстань, не меншу 5 од.

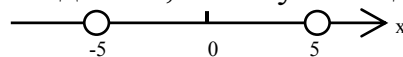


$$x \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

$$5. |x| > 5$$

Точки віддалені від 0 на відстань, більшу за 5 од.



$$x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$$

$$\begin{cases} x < -5 \\ x > 5 \end{cases}$$

$$6. |x| \geq 3$$

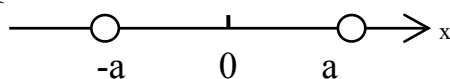
Алгебраїчний розв'язок:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ -x \geq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

$$\text{Отже: } x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$$

$$7. |x| < a; a > 0$$

$$\begin{cases} x < a \\ -x < a \end{cases} \quad \begin{cases} x < a \\ x > -a \end{cases}$$

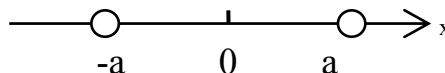


$$-a < x < a$$

$$x \in (-a; a)$$

$$8. |x| > a$$

$$\begin{cases} x > a \\ -x > a \end{cases} \quad \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty).$$

ВПРАВИ

Розв'язати рівняння

$$1. |x| > 1 \quad \text{Відповідь: } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

$$2. |x| < 3 \quad \text{Відповідь: } x \in (-3; 3).$$

$$3. |x| \leq 5 \quad \text{Відповідь: } x \in [-5; 5].$$

$$4. |x| \geq 2 \quad \text{Відповідь: } x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$$

$$5. |x| \geq -2 \quad \text{Відповідь: } x \in \mathbb{R}.$$

$$6. |x| \leq -2 \quad \text{Відповідь: розв'язків немає.}$$

$$7. |x| > -3 \quad \text{Відповідь: } x \in (-\infty; +\infty).$$

$$8. |x| < -5 \quad \text{Відповідь: розв'язків немає.}$$

Зобразити на координатній прямій точки:

1. $x = 2$

6. $|x| = 3$

11. $|3-x| = x-3$

2. $|x| > 2,5$

7. $|x^2| = 4$

12. $|3-x| = 3-x$

3. $|x| \leq 4$

8. $|x-1| = x-1$

13. $|x+2| = |x-2|$

4. $3 \leq x < 5$

9. $|x+1| = x+1$

5. $|x| = 0$

10. $|x+5| = -5-x$

ГРАФІК ФУНКЦІЇ $y = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ -x & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Область визначення:

$D(|x|) = R$

$D(|y|) = R$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$

$x \in (-\infty; +\infty)$

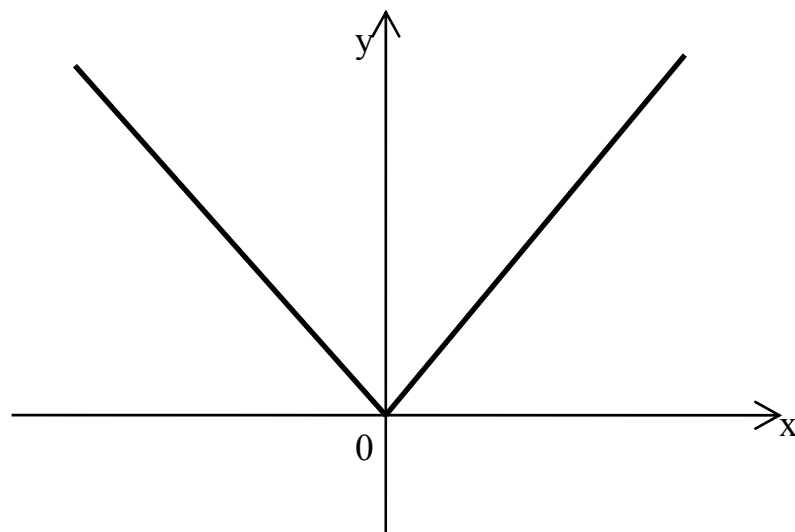
$$y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ -x & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Множина значень:

$y \in [0; +\infty)$

$E(y) = [0; +\infty)$

$E(|x|) = [0; +\infty)$

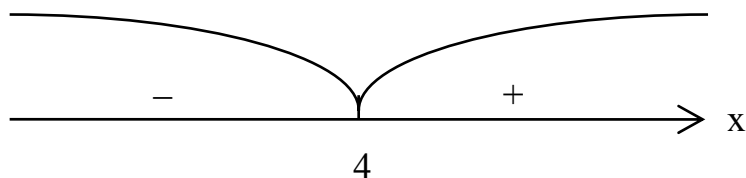
ВИРАЗИ ВИДУ $|t|$ t – вираз, що стоїть під знаком модуля.

1. Розкрити знак модуля:

$$|x-4| = \begin{cases} (x-4) & \text{при } (x-4) \geq 0 \\ -(x-4) & \text{при } (x-4) < 0 \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{при } x \geq 4 \\ 4-x & \text{при } x < 4 \end{cases}$$

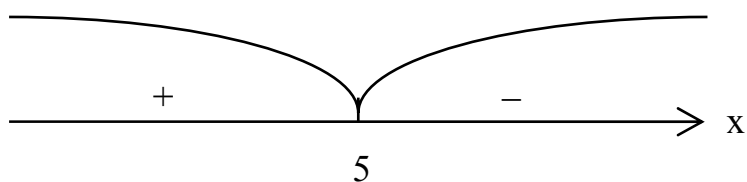
Використаємо координатну пряму для розкриття модуля:



2. Розкрити знак модуля:

$$|5 - x| = \begin{cases} (5 - x) \text{ при } (5 - x) \geq 0 \\ x - 5 \text{ при } (5 - x) < 0 \end{cases} \quad |5 - x| = \begin{cases} 5 - x \text{ при } x \leq 5 \\ x - 5 \text{ при } x > 5 \end{cases}$$

Використовуємо координатну пряму для встановлення знака, з яким розкривається модуль: $x=5$ — точка, в якій вираз $(5-x)$ змінює знак, а на інтервалах $(-\infty; 5)$ і $(5; +\infty)$ вираз зберігає знак



РІВНЯННЯ ВИДУ $|x+m|=a$

1. $|x-3|=0$
 $x-3=0$
 $x=3$

2. $|x+2|=-7$
 $-7 < 0$
 дійсних коренів немає
 Відповідь: дійсних коренів немає.

3. $|x+9|=1$

а)

$$\begin{cases} x+9=1 \\ x+9=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-8 \\ x=-10 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \begin{cases} x+9=1 \\ x+9 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+9=-1 \\ x+9 < 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x=-8 \\ x \geq -9 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-10 \\ x < -9 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-8 \\ x=-10 \end{cases}$$

Відповідь: -10, -8.

4. $|x-7|=5$

$$\begin{cases} \begin{cases} x-7 \geq 0 \\ x-7=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x-7 < 5 \\ -(x-7)=5 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x \geq 7 \\ x=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 7 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x=12 \\ x=2 \end{cases}$$

Відповідь: 2; 12.

Отже:

$$|f(x)|=a$$

при $a < 0$ розв'язків немає

при $a=0$, $f(x)=0$

$$\text{при } a > 0 \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$$

$$5. \quad |x-5|=3$$

$$\begin{cases} x-5=3 \\ -(x-5)=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5=3 \\ x-5=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=8 \\ x=2 \end{cases}$$

Відповідь: 2; 8.

$$6. \quad |x-3|=5$$

Алгебраїчний розв'язок:

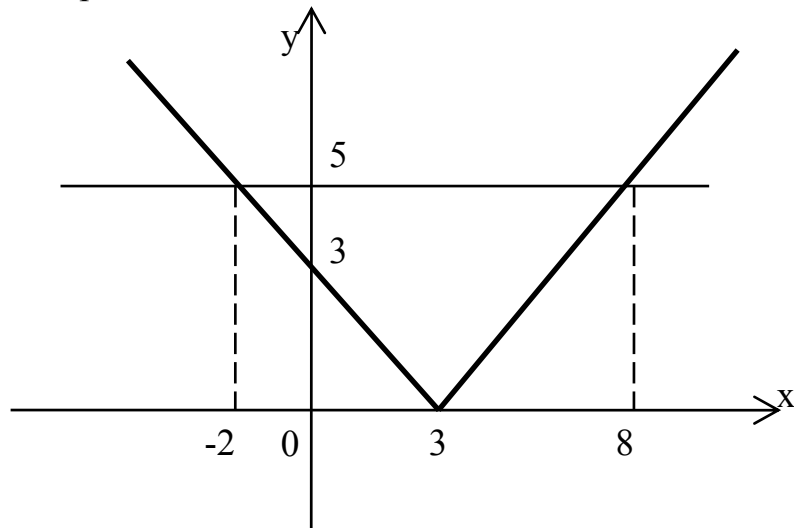
$$\begin{cases} \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 < 0 \\ -(x-3)=5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=8 \\ x=-2 \end{cases}$$

Геометричний розв'язок:



$$\begin{cases} y = x - 3 \\ x - 3 \geq 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} y = -(x - 3) \\ x - 3 < 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

Тоді x - абсциси точок перетину обох графіків – і дадуть корені рівняння.

Відповідь: -2, 8.

$$7. \quad ||x-5|-11|=3$$

$$\begin{cases} |x-5|-11=3 \\ |x-5|=14 \end{cases}$$

$$\text{або} \quad \begin{cases} |x-5|-11=-3 \\ |x-5|=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5=14 \\ x-5=-14 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-5=8 \\ x-5=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=19 \\ x=-9 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x=13 \\ x=-3 \end{cases}$$

Відповідь: -9; -3; 13; 19.

8. $||x-5|+3|=4$

$$\begin{cases} |x-5|+3=4 \\ |x-5|+3=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} |x-5|=1 \\ |x-5|=-7 \end{cases}$$

$$|x-5|=1 \quad |x-5|=-7$$

дійсних коренів немає.

$$\begin{cases} x-5=1 \\ x-5=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ x=4 \end{cases}$$

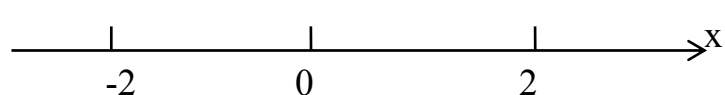
Відповідь: 4; 6.

ВПРАВИ

1. $|x|=3$ Відповідь: -3; 3.
2. $|x+5|=3$ Відповідь: -2; -8.
3. $|x+4|=0$ Відповідь: -4
4. $|x+5|=-3$ Відповідь: коренів немає.
5. $|2x-7|=5$ Відповідь: 1; 6

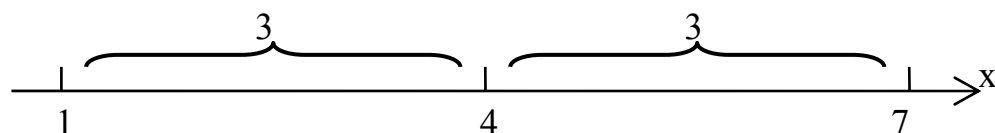
ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ВИРАЗУ $|x+m|$

1. $|x|=2$ $|x-0|=2$



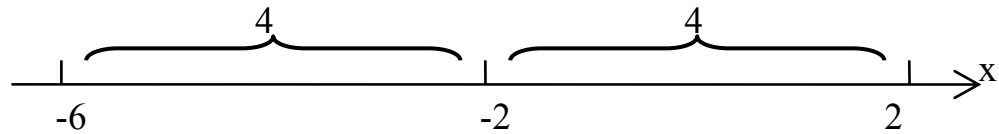
2. $|x-4|=3$

$$\begin{cases} x-4=3 \\ x-4=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ x=1 \end{cases}$$



$$3. |x+2|=4$$

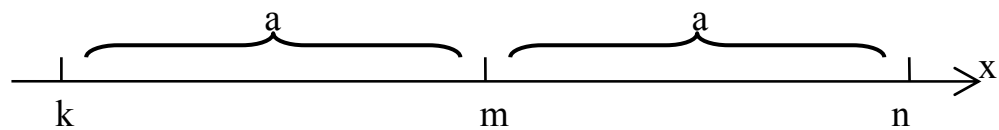
$$\begin{cases} x+2=4 \\ x+2=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ x=-6 \end{cases}$$



$$|x+2|=|x-(-2)|$$

$$4. |x-m|=a$$

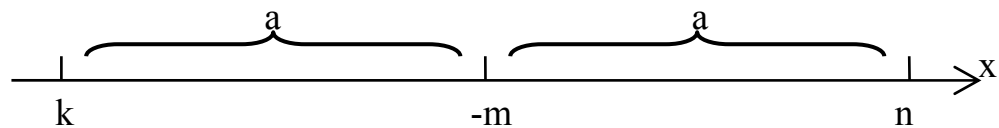
$$\begin{cases} x-m=a \\ x-m=-a \end{cases} \quad \begin{cases} x=a+m \\ x=-a+m \end{cases} \quad \begin{cases} x=m+a \\ x=m-a \end{cases}$$



Отже: розв'язати це рівняння — означає знайти всі точки на числовій осі Ox , які віддалені від точки з координатою m на відстань a . Таких точок дві: точка з координатою $(m+a)$ і точка з координатою $(m-a)$.

$$5. |x+m|=a$$

$$\begin{cases} x+m=a \\ x+m=-a \end{cases} \quad \begin{cases} x=-m+a \\ x=-m-a \end{cases}$$



Отже, з геометричної точки зору вираз $|x+m|$ виражає відстань між точками з координатами x та $(-m)$ $|x+m|=|x-(-m)|$

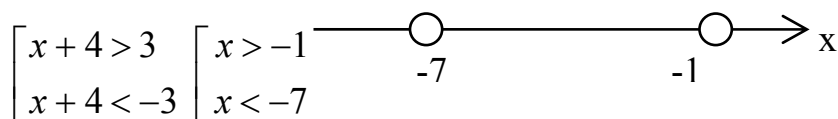
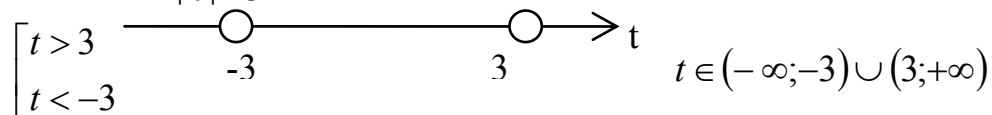
НЕРІВНОСТІ ВИДУ $|x+m| < > a$

$$1. |x+4| > 3$$

$$1\text{-й спосіб: } |x+4| > 3$$

$$x+4=t$$

$$|t| > 3$$

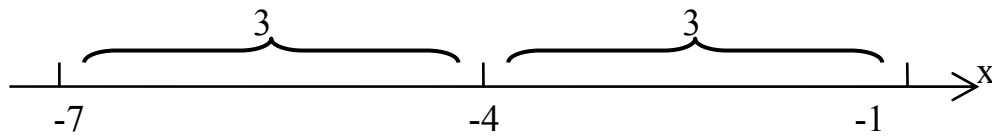


2-й спосіб (геометричний):

$$|x+4| > 3$$

$$|x-(-4)| > 3$$

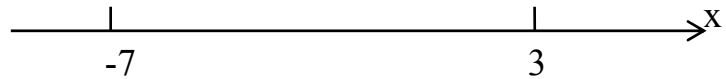
Знайдемо на координатній прямій точки, віддалені від точки (-4) більше, ніж на 3 од.



Відповідь: $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$.

2. $|x+2| \geq 5$

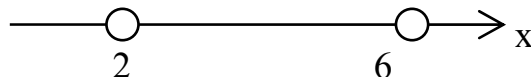
$$\begin{cases} x+2 \geq 5 \\ x+2 \leq -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x < -7 \end{cases}$$



$x \in (-\infty; -7] \cup [3; +\infty)$

3. $|x-4| < 2$

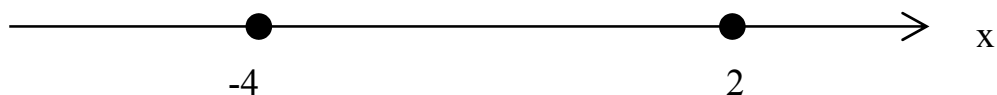
$$-2 < x < 6$$



$x \in (2; 6)$

4. $|x+1| \leq 3$

$$-3 \leq x+1 \leq 3$$



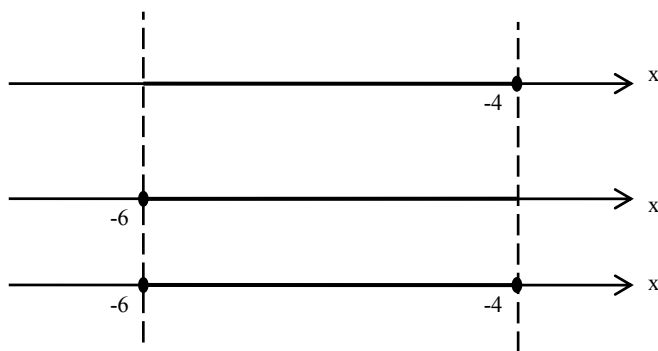
$$-4 \leq x \leq 2$$

$x \in [-4; 2]$

5. $|x+5| \leq 1$

$$-1 \leq x+5 \leq 1$$

$$\begin{cases} x+5 \leq 1 \\ x+5 \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq -6 \end{cases}$$



$$-6 \leq x \leq -4$$

$$x \in [-6; -4]$$

6. $|2x+5| > 9$

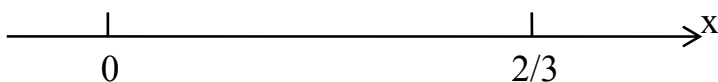
$$\begin{cases} 2x+5 > 9 \\ -(2x+5) > 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 4 \\ 2x < -14 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x < -7 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -7) \cup (2; +\infty)$$

Відповідь: $\begin{cases} x > 2 \\ x < -7 \end{cases}$

7. $|3x-1| \leq 1$

1-й спосіб:



$$-1 \leq 3x-1 \leq 1$$

$$0 \leq 3x \leq 2$$

$$0 \leq x \leq 2/3$$

$$x \in [0; 2/3]$$

2-й спосіб:

$$\begin{cases} 3x-1 \leq 1 \\ 3x-1 \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \leq 2 \\ 3x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2/3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Відповідь: $x \in [0; 2/3]$

8. $|x-7| \leq 0$

Очевидно, що цю нерівність можна замінити сукупністю:

$$\begin{cases} |x-7| < 0 - \text{ не має розв'язків} \\ |x-7| = 0 \Leftrightarrow (x-7) = 0; \quad x = 7 \end{cases}$$

Відповідь: 7

9. $|5x+4| \geq -2$

Очевидно, що $x \in R$, оскільки при будь-якому x маємо: $|5x+4| \geq 0 \geq -2$.

Відповідь: $x \in (-\infty; +\infty)$.

10. $|5x+3| > -4$

Оскільки $-4 < 0 \leq |5x+3|$, то розв'язком нерівності є будь-яке дійсне число.

Відповідь: $x \in R$

11. $|2x-8| \leq -9$

Оскільки при будь-якому x $|4x-9| \geq 0$, то нерівність розв'язків не має.

Отже:

1) $|f(x)| < a$

а) при $a \leq 0$ розв'язків немає

б) при $a > 0$ $-a < f(x) < a$

або:
$$\begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}$$

2) $|f(x)| > a$

а) $a \leq 0$, то розв'язком нерівності буде область визначення функції $f(x)$

б) $a > 0$, то
$$\begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}$$

ВПРАВИ

Розв'язати нерівність:

1) $|x+4| < 2$ Відповідь: $x \in (-6; -2)$.

2) $|x-4| \geq 5$ Відповідь: $x \in (-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$.

3) $|x-3| \leq 0$ Відповідь: $x = 3$.

4) $|x-3| < 0$ Відповідь: розв'язків немає.

5) $|x-3| \geq 0$ Відповідь: $x \in (-\infty; +\infty)$.

6) $|x-3| > 0$ Відповідь: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

7) $x + |x-3| > 0$ Відповідь: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Знайти найбільший (найменший) цілочисловий додатний (від'ємний) розв'язок нерівності.

8) $|x-3| < 2$ Відповідь: 2.

9) $|x+2| \geq 3$ Відповідь: -5; 1.

10) $|x+2| < 1$ Відповідь: -2.

11) $|x+1| \geq 4$ Відповідь: -5.

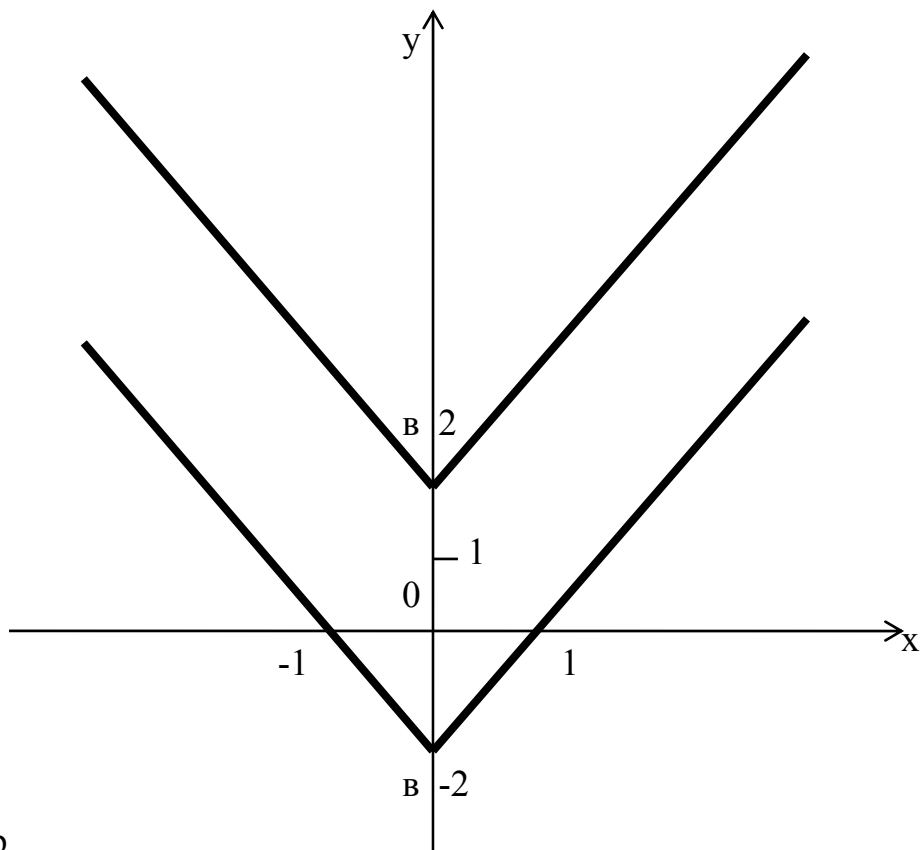
12) $|x-1| > 0$ Відповідь: 2.

13) $|x+3| < 0$ Відповідь: розв'язків немає.

14) $|x+1| > 0$ Відповідь: -2.

15) $|x-4| < 0$ Відповідь: розв'язків немає.

ГРАФІК ФУНКЦІЇ



1-й спосіб:

1. $y = |x| + 2$

$$y = \begin{cases} x + 2 & \text{при } x \geq 0 \\ -x + 2 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

2. $y = |x| - 1$

$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{при } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

2-й спосіб: Паралельним перенесенням графіка функції $y = |x|$ вздовж осі Оу на b одиниць.

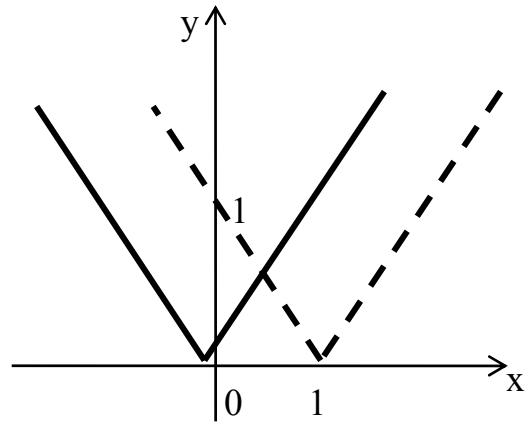
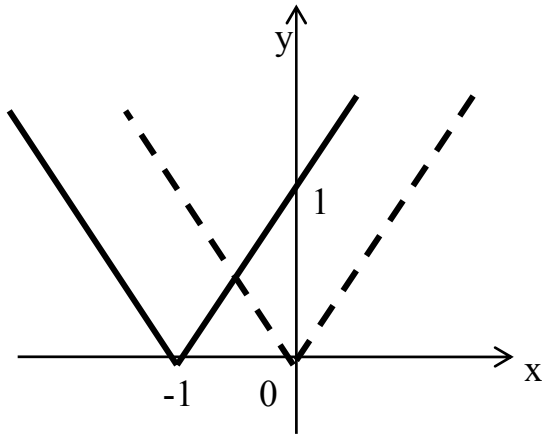
3-й спосіб. Будується графік $y = x + b$, а потім ту частину графіка, що розміщена ліворуч від осі Оу, відкидають і заміняють фігурою, симетричною відносно осі Оу тієї частини графіка, що розміщена праворуч від осі Оу.

ГРАФІК ФУНКЦІЇ $y = |x + b|$

1. $y = |x + 1|$

2. $y = |x - 1|$

1-й спосіб.



$$y = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1) & \text{при } x + 1 < 0 \end{cases}$$

$$y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{при } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{при } x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$y = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{при } x < -1 \end{cases}$$

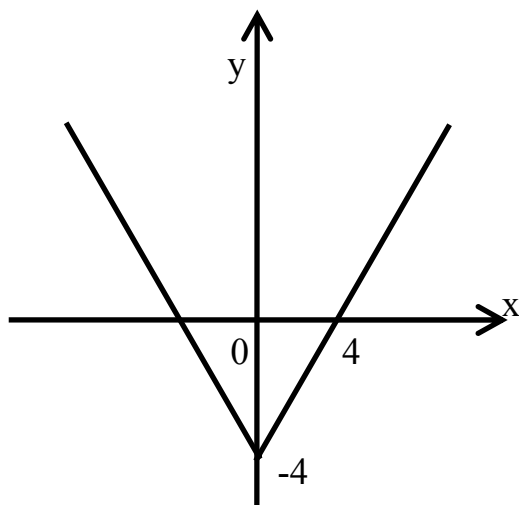
$$y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{при } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{при } x < 1 \end{cases}$$

2-й спосіб: Паралельним перенесенням графіка функції $y = |x|$ вздовж осі Ox вправо при $b < 0$ та вліво при $b > 0$.

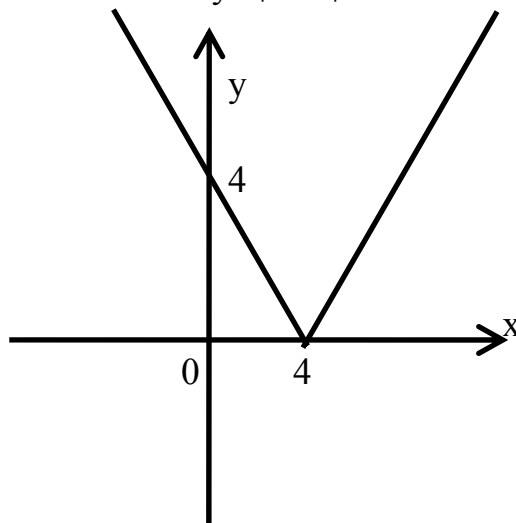
3-й спосіб: Будується графік $y = x + b$, а потім ту частину графіка, що знаходиться під віссю Ox , симетрично відображають відносно осі Ox , тому що $|x + b| \geq 0$; для від'ємних значень $(x + b)$ функція приймає ті ж значення, що і для $(x + b) \geq 0$, тобто графік симетричний відносно прямої $x = -b$. Частину графіка, розміщену над віссю Ox , не змінюють.

Побудувати графіки функцій

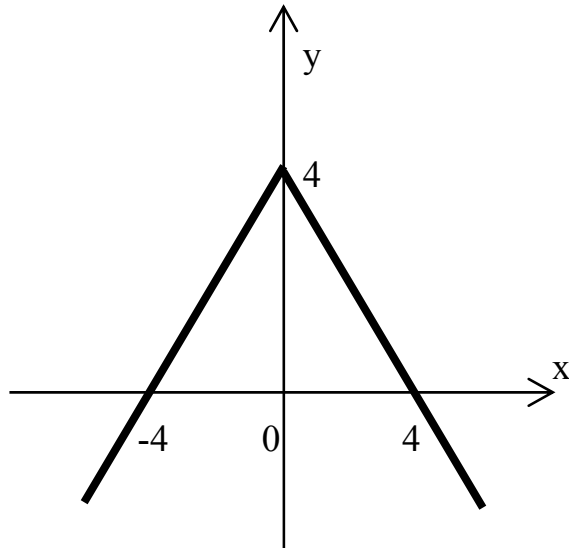
1. $y = |x| - 4$



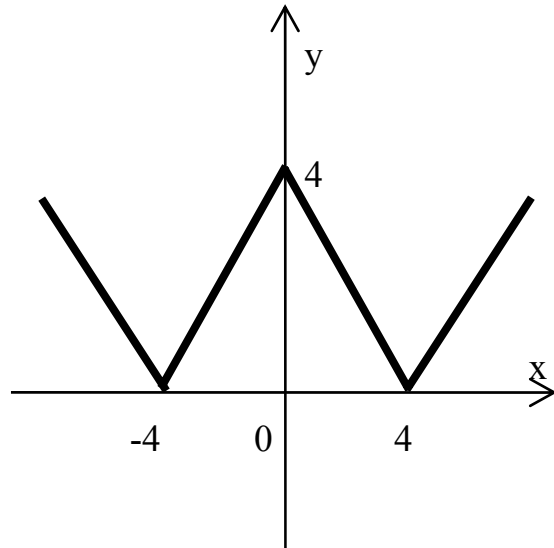
2. $y = |x - 4|$



$$3. y = 4 - |x| = -|x| + 4$$



$$4. y = ||x| - 4|$$



а) $y = x$

б) $y = |x|$

в) $y = |x| - 4$

г) $y = ||x| - 4|$

Отже:

1. $y = f(|x|)$; оскільки $f(-x) = f(x)$, то будемо графік $y = f(x)$ при $x \geq 0$ і симетрично відображаємо відносно осі Oy .

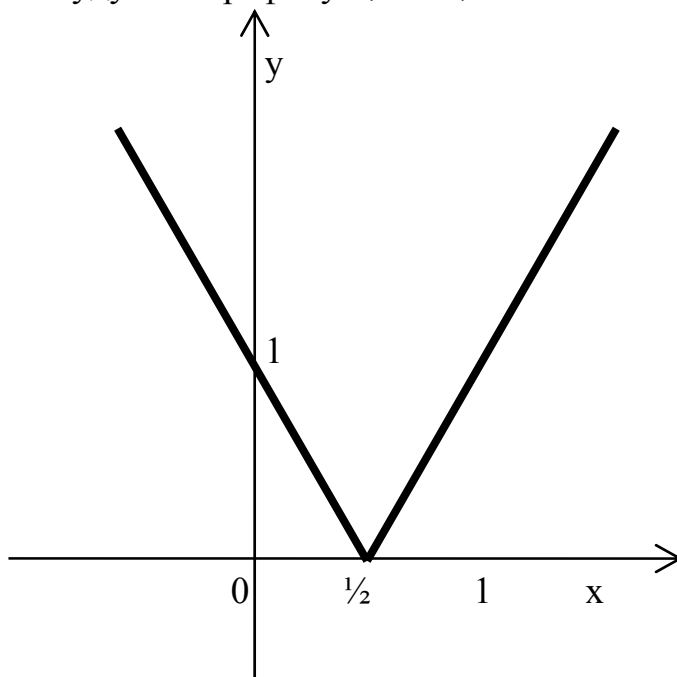
2. $y = |f(x)|$

✓ Будемо графік $y = f(x)$.

✓ Частина графіка, що лежить над віссю Ox , залишається без змін.

✓ Частина графіка, що лежить нижче осі Ox , відображається відносно цієї осі.

5. Побудувати графік $y = |2x - 1|$



1-й спосіб:

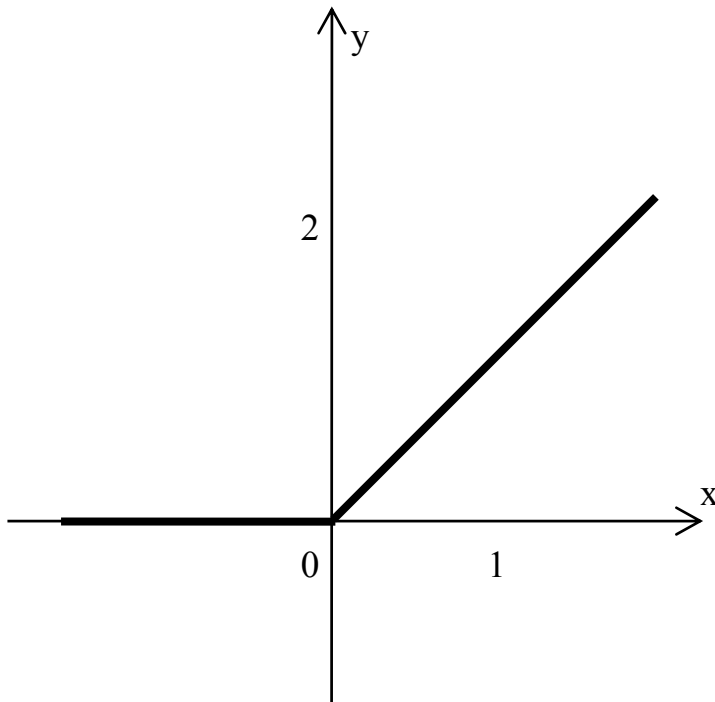
$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{при } (2x - 1) \geq 0 \\ -(2x + 1) & \text{при } (2x - 1) < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{при } x \geq 1/2 \\ -2x + 1 & \text{при } x < 1/2 \end{cases}$$

2-й спосіб:

$$y = |2x - 1| = |2(x - 1/2)| = 2|x - 1/2|$$

6. Побудувати графік $y = |x| + x$

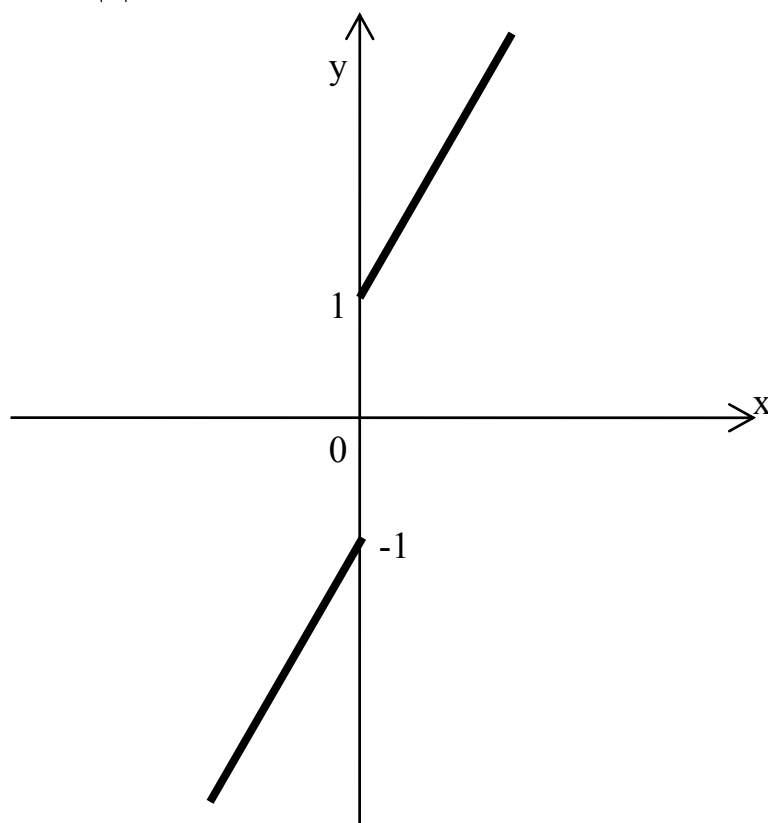


а) $x \geq 0;$ $|x| = x$
 $y = 0$

б) $x < 0;$ $|x| = -x$
 $y = 0$

$$y = \begin{cases} 2x & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

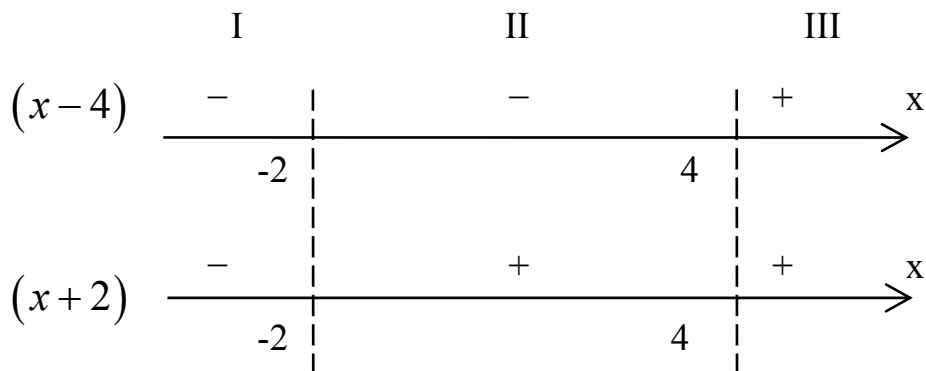
7. Побудувати графік $y = \frac{x}{|x|} + x$.



ВИРАЗИ ВИДУ $|x+m| \pm |x+n|$

1. Спростити вираз: $A = |x-4| + |x+2|$.

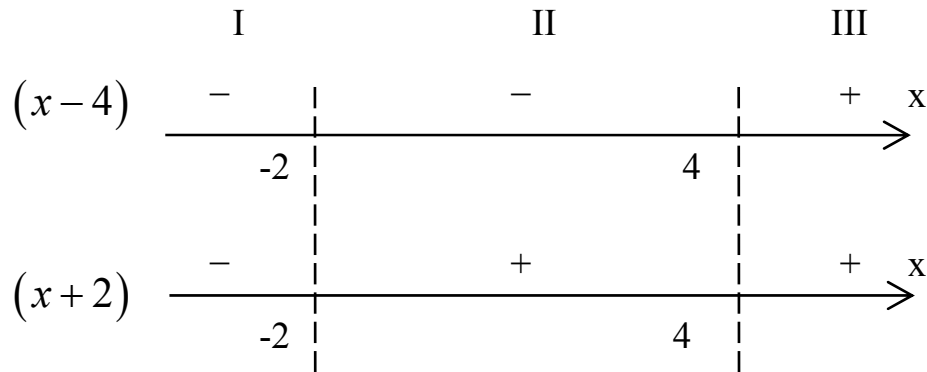
Скористаємося методом інтервалів і знайдемо проміжки, на кожному із яких вирази $(x-4)$ і $(x+2)$ зберігають знак.



- I. $x \leq -2$; $x \in (-\infty; -2]$
 $A = -(x-4) - (x+2) = -2x+2$
- II. $-2 < x \leq 4$; $x \in (-2; 4]$
 $A = -(x-4) + (x+2) = 6$
- III. $x > 4$; $x \in (4; +\infty)$
 $A = (x-4) + (x+2) = 2x-2$

Відповідь: $A = \begin{cases} -2x + 2 & \text{при } x \leq -2 \\ 6 & \text{при } -2 < x \leq 4 \\ 2x - 2 & \text{при } x > 4 \end{cases}$

2. $A = |x-4| - |x+2|$



I. $x \leq -2$; $x \in (-\infty; -2]$

$A = -(x-4) + (x+2) = 6$

II. $-2 < x \leq 4$; $x \in (-2; 4]$

$A = -(x-4) - (x+2) = -2x + 2$

III. $x > 4$; $x \in (4; +\infty)$

$A = (x-4) - (x+2) = 2x - 6$

Відповідь: $A = \begin{cases} 6 & \text{при } x \leq -2 \\ -2x + 2 & \text{при } -2 < x \leq 4 \\ 2x - 6 & \text{при } x > 4 \end{cases}$

ВПРАВИ

Спростити вирази:

1. $A = |6+x| + |5-x|$

2. $A = |6+x| - |5-x|$

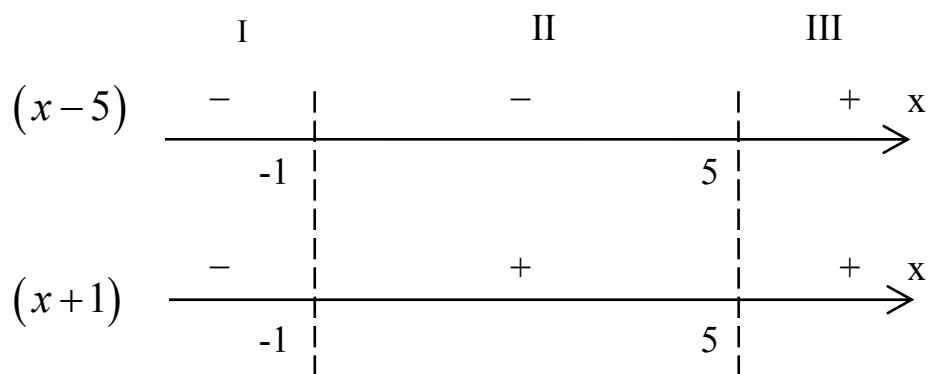
3. $A = |5-x| - |6-x|$

4. $A = |5-x| + |6-x|$

5. $A = |x-3| + |x+2| + |2x+5|$

ГРАФІКИ ВИДУ $y = |x \pm a| \pm |x \pm b|$

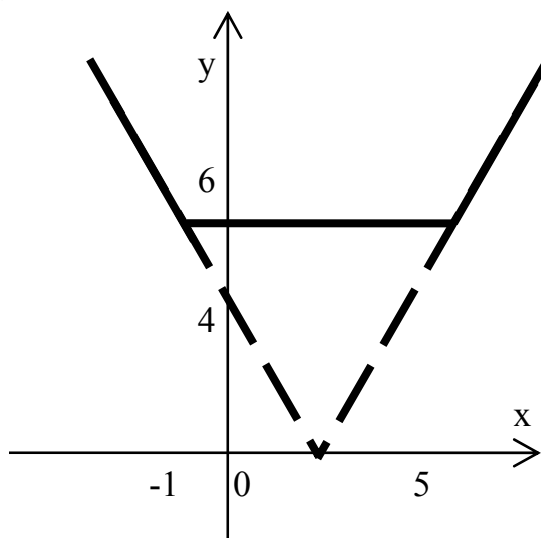
1. Побудувати графік $y = |x-5| + |x+1|$



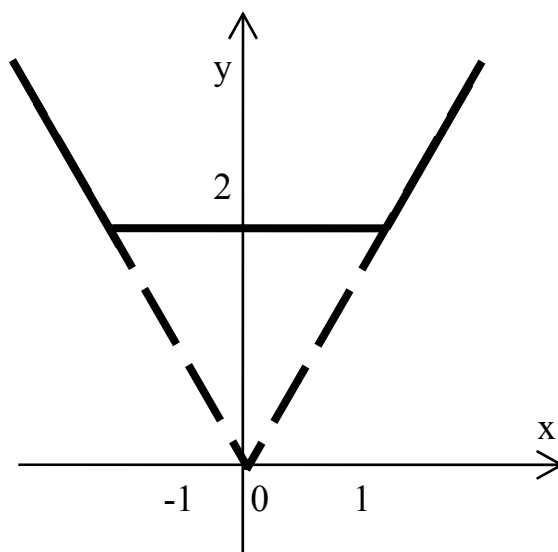
I. $x \in (-\infty; -1]$ $y = -x + 5 - x - 1 = -2x + 4$

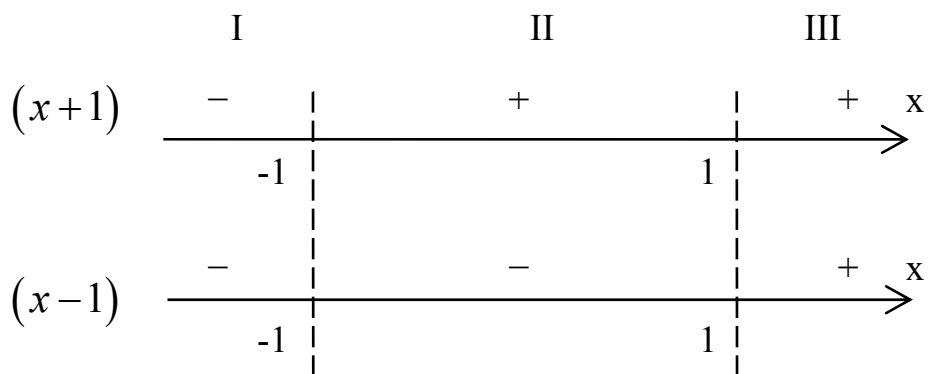
II. $x \in (-1; 5]$ $y = -x + 5 + x + 1 = 6$

III. $x \in (5; +\infty)$ $y = x - 5 + x + 1 = 2x - 4$



2. Побудувати графік $y = |x+1| + |x-1|$



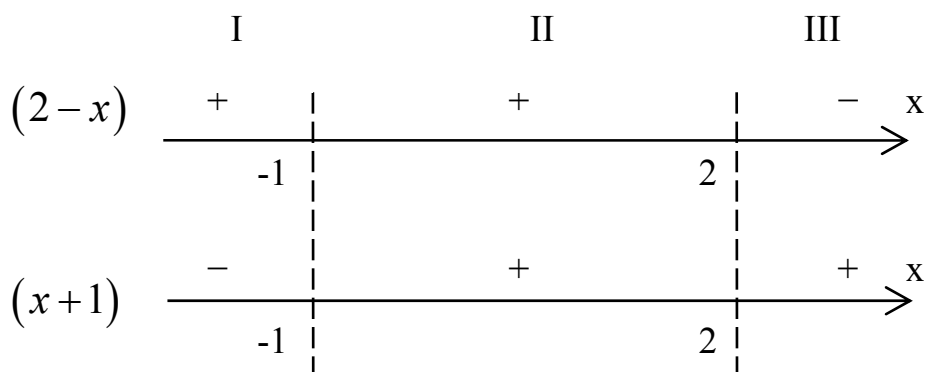


I. $x < -1, \quad y = -2x$

II. $-1 \leq x \leq 1, \quad y = 2$

III. $x > 1, \quad y = 2x$

3. Побудувати графік $y = |2-x| - |x+1|$



I. $x \leq -1; \quad x \in (-\infty; -1]$.

$y = (2-x) + (x+1) = 3; \quad y = 3$

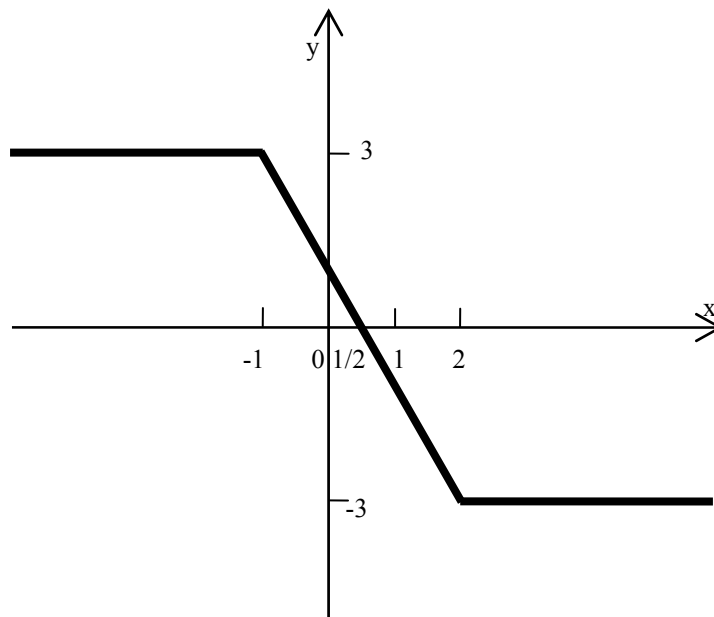
II. $-1 < x < 2 \quad x \in (-1; 2]$

$y = (2-x) - (x+1) = -2x+1; \quad y = -2x+1$

III. $x > 2 \quad x \in (2; +\infty]$

$y = -(2-x) - (x+1) = -3 \quad y = -3$

Відповідь: $y = \begin{cases} 3 & \text{при } x \in (-\infty; -1] \\ -2x + 1 & \text{при } x \in (-1; 2] \\ -3 & \text{при } x \in (2; +\infty) \end{cases}$



2.4 Тригонометричні формули

1 Формули додавання

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

2 Функції подвійного кута

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

3 Функції половинного кута

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

4 Формули зниження степеня

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

5 Формули перетворення алгебраїчної суми тригонометричних функцій в добуток

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha;$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

6 Формули перетворення добутків тригонометричних функцій в алгебраїчну суму

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

7 Формули, які пов'язують між собою тригонометричні функції, приводять до формул, які пов'язують між собою обернені тригонометричні функції. Наведемо деякі з них:

$$7.1 \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } x \in [-1; 1];$$

$$7.2 \quad \arctg(x) + \operatorname{arcctg}(x) = \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } x \in \mathbb{R};$$

$$7.3 \quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x);$$

$$7.5 \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$7.4 \quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$7.6 \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$7.7 \quad \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ якщо } x \in (0;1);$$

$$7.8 \quad \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ якщо } x \in (0;1);$$

$$7.9 \quad \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ якщо } x \in (0; +\infty);$$

$$7.10 \quad \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ якщо } x \in (0; +\infty);$$

3 ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ. АРИФМЕТИКА

1. Які числа називаються натуральними?
2. Якого класу натуральних чисел не існує?
3. Які натуральні числа називаються простими?
4. Які натуральні числа називаються складеними?
5. Які арифметичні операції можна виконувати в множині натуральних чисел?
6. Які арифметичні операції називаються основними?
7. Який закон не має місця для основних арифметичних операцій?
8. Який закон називають комутативним (переставним)?
9. Який закон називають асоціативним (об'єднувальним)?
10. Який закон називають дистрибутивним (розподільним)?
11. Які числа діляться на 2 без остачі?
12. Які числа діляться на 3 без остачі?
13. Які числа діляться на 4 без остачі?
14. Які числа діляться на 5 без остачі?
15. Які числа діляться на 9 без остачі?
16. Які числа діляться на 25 без остачі?
17. На яке число не ділиться число 60 без остачі?
18. На яке число не ділиться число 54 без остачі?
19. На яке число не ділиться число 40 без остачі?
20. Яке число називають дільником?
21. Яке число називають спільним дільником?
22. Яке число називають найбільшим спільним дільником?
23. Як обчислюється найбільший спільний дільник?
24. Якому числу рівний найбільший спільний дільник чисел 54 та 72?
25. Якому числу рівний найбільший спільний дільник чисел 42 та 36?
26. Якому числу рівний найбільший спільний дільник чисел 34 та 27?
27. Яке число називають кратним?
28. Яке число називають спільним кратним?
29. Яке число називають найменшим спільним кратним?
30. Як обчислюється найменше спільне кратне?
31. Яке із вказаних чисел (432, 216, 648) є найменшим спільним кратним для чисел 54 та 72?
32. Яке із вказаних чисел (270, 540, 810) є найменшим спільним кратним для чисел 45 та 54?
33. Яке із вказаних чисел (605, 1210, 1815) є найменшим спільним кратним для чисел 55 та 121?
34. Які числа називають цілими?
35. Яка причина появи цілих чисел?
36. Множину яких чисел породжує розв'язок рівняння $n + x = m$?
37. Які арифметичні операції можна виконувати в множині цілих чисел?
38. Як додаються цілі числа?
39. Яке число є сумою двох додатних чисел?

40. Яке число є сумою двох від'ємних чисел?
41. Як додати два числа, одне з яких є додатне, а інше від'ємне?
42. Яке число є різницею двох додатних чисел?
43. Яке число є різницею двох від'ємних чисел?
44. Як відняти від додатного числа від'ємне число?
45. Як відняти від від'ємного числа додатне число?
46. Які арифметичні закони мають місце для цілих чисел?
47. Які числа називають раціональними?
48. Яка причина появи раціональних чисел?
49. Множину яких чисел породжує розв'язок рівняння $q \cdot x = p$?
50. Які арифметичні операції можна виконувати в множині раціональних чисел?
51. Які числа називають дробами?
52. Яку властивість дробу називають основною?
53. Як додати два дроби з однаковими знаменниками?
54. Яке число називають спільним знаменником двох дробів?
55. Як привести два дроби до спільного знаменника?
56. Як додати два дроби з різними знаменниками?
57. Як відняти два дроби з однаковими знаменниками?
58. Як відняти два дроби з різними знаменниками?
59. Як перемножити два дроби?
60. Як обґрунтувати правило множення двох дробів?
61. Як розділити дріб на дріб?
62. Як обґрунтувати правило ділення дробу на дріб?
63. Який дріб називають правильним дробом?
64. Який дріб називають неправильним дробом?
65. Який дріб називають змішаним дробом?
66. Як перетворити неправильний дріб в змішаний?
67. Як перетворити змішаний дріб в неправильний?
68. Який дріб називають звичайним дробом?
69. Який дріб називають десятковим дробом?
70. Як знайти $\frac{p}{q}$ частину від числа a ?
71. Як знайти число, якщо відомо, що $\frac{p}{q}$ частина його рівна b ?
72. Яку частину від числа a складає число b ?
73. Що розуміють під поняттям „ступінь числа a ”?
74. Які числа називають дійсними?
75. Яка причина появи дійсних чисел?
76. Множину яких чисел породжує розв'язок рівняння $x^n = a$?
77. Які числа називаються ірраціональними?
78. Довести, що $\sqrt{2}$ - ірраціональне число.
79. Які операції можна виконувати в множині дійсних чисел?
80. Як перетворити звичайний дріб в десятковий?

81. Як перетворити десятковий дріб в звичайний?
82. Який дріб називають нескінченним десятковим дробом?
83. Який дріб називають нескінченним десятковим періодичним дробом?
84. Як перевести нескінченний десятковий періодичний дріб в звичайний?
85. Як виконується заокруглення до k -го знаку з нестачею?
86. Як виконується заокруглення до k -го знаку з надлишком?
87. Як виконується наближене обчислення до k -го знаку?
88. Що розуміють під поняттям „процент”?
89. Як знайти $k\%$ від числа a ?
90. Як знайти число, якщо відомо, що $k\%$ його рівні b ?
91. Який процент від числа a складає число b ?
92. Що розуміють під поняттям „пропорція”?
93. Спростити
$$\frac{\left(9\frac{37}{42} - 7\frac{43}{96}\right) \cdot \frac{24}{35} + \left(15,9 - 13\frac{13}{20}\right) : 1\frac{1}{8}}{\left(0,75 \cdot \frac{2}{7} + 24,15 : 2,3 - 10,4\right) \cdot 0,3125}.$$
94. Спростити
$$\left(\frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2\frac{1}{3}}{(15,2 - 1,4) : \frac{3}{70}} + 0,125\right) : 2\frac{1}{2} + 0,43.$$
95. Спростити
$$\frac{2\frac{3}{4} : 11 + 3\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} - \left(2\frac{1}{6} + 4,5\right) \cdot 0,375}{2,5 - 0,4 \cdot 3\frac{1}{3}}.$$

4 АЛГЕБРА

4.1 Властивості степеня і кореня. Тотожні перетворення

1. Що розуміють під висловом „узагальнення поняття степеня”?
2. Якому числу дорівнює a^0 ?
3. Як обчислюється a^{-1} ?
4. Як обчислюється $a^{\frac{p}{q}}$?
5. Як обчислюється $(a^p)^q$?
6. Як обчислюється a^{p+q} ?
7. Як обчислюється a^{p-q} ?
8. Як обчислюється $a^{p \cdot q}$?
9. Які обмеження існують для числа, яке підносять до степеня?
10. Що розуміють під „раціональним степенем числа”?
11. Що розуміють під поняттям „число в ірраціональному степені”?
12. Як називається вираз, що містить числа та букви, які об’єднані операціями множення та піднесення до степеня?
13. Який вираз називається одночленом?

14. Як перемножаються одночлени?
15. Як додаються одночлени?
16. Як називають суму одночленів?
17. Який вираз називають многочленом?
18. Що означає вислів „стандартний вигляд многочлена”?
19. Які члени многочлена називають подібними?
20. Як зводять подібні члени многочлена?
21. Як додають многочлени?
22. Чому рівний результат додавання многочленів
 $(2x^3 + 4x^2 - 5x + 4) + (x^3 - 5x^2 + 7x - 4)$?
23. Як перемножити многочлен на многочлен?
24. Чому рівний результат множення многочленів $(x^2 + x + 2) \cdot (x - 1)$?
25. Як ділять многочлен на многочлен?
26. Чому рівний результат спрощення виразу $(x^3 + x - 2) : (x - 1)$?
27. Чому рівна остача при діленні многочлена $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ на многочлен $x^2 + x - 1$?
28. Чому рівна частка при діленні многочлена $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ на многочлен $x^2 + x - 1$?
29. Яке число називають коренем многочлена?
30. Чи є число 3 коренем многочлена $3x^4 - 5x^3 + 2x - 114$?
31. Чи є число -2 коренем многочлена $3x^4 - 5x^3 + 2x - 4$?
32. Як формулюють теорему Безу?
33. Чому рівна остача при діленні многочлена $2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ на двочлен $x - 2$?
34. Що таке дільники вільного члена?
35. Для чого використовують схему Горнера?
36. Як використовують схему Горнера?
37. Як спрощено можна розділити многочлен $f(x)$ на двочлен $x - a$?
38. Які многочлени називають рівними?
39. Чому рівні числа a та b , якщо многочлени $x^2 - ax + 3$ та $x^2 + 5x + b$ рівні?
40. Які рівності називають тотожностями?
41. Чи є тотожністю рівність $(x + 3) \cdot (x - 2) = x^2 + x - 6$?
42. Чи є тотожністю рівність $(x + 3) \cdot (x - 2) = x^2 + 2x - 6$?
43. Як записується різниця квадратів двох виразів?
44. Чому рівний результат спрощення виразу $(x^2 + 5x - 3)^2 - (x^2 + 5x - 4)^2$?
45. Як записується квадрат суми двох виразів?
46. Чому рівний добуток виразів $(3x + 4) \cdot (3x + 4)$?
47. Як записується квадрат різниці двох виразів?
48. Чому рівний добуток виразів $(4x - 3) \cdot (4x - 3)$?
49. Як записується куб суми двох виразів?
50. Чому рівний добуток виразів $(3x + 2)^2 \cdot (3x + 2)$?

51. Як записується куб різниці двох виразів?
52. Як спростити вираз $(2x-3) \cdot (2x-3)^2$?
53. Як записується різниця кубів двох виразів ?
54. Як спростити вираз?
55. Як спростити вираз $(5x-2) \cdot (25x^2+10x+4)$?
56. Як записується сума кубів двох виразів?
57. Як спростити вираз $(x-3)^3 + (x+4)^3$?
58. Як спростити вираз $(4x+1) \cdot (16x^2-4x+1)$?
59. Як записується квадрат суми трьох виразів?
60. Як спростити вираз $(x^2-3x+4)^2$?
61. Що називають алгебраїчним дробом?
62. Яка основна властивість алгебраїчного дробу?
63. Як скоротити алгебраїчний дріб?
64. Як можна скоротити алгебраїчний дріб $\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x-4}$?
65. Якими можуть бути алгебраїчні дробу?
66. Який алгебраїчний дріб називають правильним?
67. Яким є алгебраїчний дріб $\frac{x^2+2x-5}{x^3+3x^2-2x+7}$?
68. Який алгебраїчний дріб називають неправильним?
69. Яким є алгебраїчний дріб $\frac{x^3-3x^2+2x+5}{x^2-12x-4}$?
70. Яким є алгебраїчний дріб $\frac{x^2+21x-4}{3x^2-x+1}$?
71. Як виділити цілу частину з алгебраїчного дробу?
72. Що означає знайти спільний знаменник двох алгебраїчних дробів?
73. Як знайти спільний знаменник двох алгебраїчних дробів $\frac{x-5}{x^3-27}$ та $\frac{x^2+4}{x^2-2x-3}$?
74. Як додати два алгебраїчних дробу?
75. Як додати алгебраїчних дробу $\frac{x-3}{x^2+4x+3}$ та $\frac{2x+7}{x^2+4x+3}$?
76. Як перемножити два алгебраїчних дробу?
77. Як відняти від одного алгебраїчного дробу інший?
78. Як розділити один алгебраїчний дріб на інший?
79. Спростити $\frac{b^2+4b-45}{b^2-12b+35}$.
80. Спростити $\frac{3x^2+x-2}{3x^2+5x+2}$.
81. Спростити $\frac{10ab-15b^2}{4a^2-6ab} - \frac{10b^2-15ab}{4ab-6a^2}$.

82. Спростити $\frac{2x^2 + 10xy}{x^2 - 25y^2} - \frac{2x^2 - 10xy}{x^2 - 10xy + 25y^2}$.
83. Спростити $\frac{a^2 - 4a + 4}{a^2 + ab - 2a - 2b} - \frac{a^2 - ab + 2b - 4}{a^2 + 2a + 2b - b^2}$.
84. Спростити $\frac{x^4 - y^4}{4x^2 - 2x - y - y^2} \cdot \frac{2x + y}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}$.
85. Спростити $\frac{a^6 - b^6}{a^2 + a - 3b - 9b^2} \cdot \frac{a - 3b}{(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2}$.
86. Спростити $\frac{6xy + 6 - 4x - 9y}{x^2 - 12x + 36} \cdot \frac{9y^2 - 12y + 4}{3xy - 18y - 2x + 12}$.
87. Спростити $\frac{15ab - 15 + 9a - 25b}{9a^2 - 30ab + 25b^2} \cdot \frac{9a^2 - 30a + 26}{15a - 25b + 9a^2 - 25b^2}$.
88. Спростити $\left(\sqrt{a - 2a^2 + a^3} - \frac{2a\sqrt{a}}{\sqrt{(1-a)^2}} \right) : \left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a-1} - \left(\frac{1-a}{\sqrt{a}} \right)^{-1} \right)$.
89. Спростити $\left(\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{1+a}} - \frac{\sqrt{1+a}}{1+\sqrt{a}} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{1+a}} - \frac{\sqrt{1+a}}{1-\sqrt{a}} \right)^2$.
90. Спростити $\left(\frac{2}{2a-b} - \frac{2}{2a+b} - \frac{1}{2a-5b} \right) : \frac{b^2}{4a^2 - b^2}$.
91. Спростити $\frac{a^2 - 1}{n^2 + na} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{a - an^3 - n^4 + n}{1 - a^2}$.
92. Спростити $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{2a+1}{\sqrt{3}} \right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2a-1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right)$.
93. Спростити $\left((1-p^2)^{-\frac{1}{2}} - (1+p^2)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 + 2(1-p^4)^{-\frac{1}{2}}$.
94. Спростити $\frac{\sqrt{(2p+1)^3} + \sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2}\sqrt{4p^2-1}} = \left[p \geq \frac{1}{2} \right]$.
95. Спростити $\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$.
96. Спростити $\left(\left(\sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q} \right)^{-2} + \left(\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q} \right)^{-2} \right) : \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{p - q}$.

4.2 Лінійні рівняння

1. Що називається лінійним рівнянням з однією змінною?
2. Що називається коренем або розв'язком лінійного рівняння?

3. Які лінійні рівняння називаються рівносильними?
4. При яких перетвореннях лінійного рівняння одержуємо рівняння, рівносильне даному?
5. Що означає розв'язати лінійне рівняння?
6. Що називається областю допустимих значень або областю визначення лінійного рівняння?
7. Які рівняння називаються рівняннями першого степеня з однією змінною?
8. Скільки коренів може мати лінійне рівняння?
9. Розв'язати рівняння:

1) $3(2x + 5) + x = 4x - 18$;	7) $0,7 = 2(x + 3,5) - 2x$;
2) $4 - 3x = 8(1 - x)$;	8) $4(2 + x) - x = 3x + 9$;
3) $8(9 - 2x) = 5(2 - 3x)$;	9) $2x + 3 = 2(x + 1) + 1$;
4) $5(z + 3) = 8(10 - z)$;	10) $z + 2(4 + z) = 3z + 8$;
5) $3(x - 5) + x = 4x - 18$;	11) $-8 + 3(x + 5) + x = 2(3 + 2x) + 1$;
6) $2x - 1 = 2x + 2$;	12) $5x + 6 = 5(x + 1) + 1$.
10. Які з наведених нижче рівнянь лінійні, а які – першого степеня:

а) 1) $-4x = 16$,	2) $8z = 0$,	в) 1) $0t = 5$,	2) $0x = 0$,
3) $0y = 18$,	4) $0x = 9$;	3) $6s = 7$,	4) $5z = 0$;
б) 1) $5x = 0$,	2) $3x = 5$,	г) 1) $9x = 0$,	2) $3y = 8$,
3) $0z = 0$,	4) $0y = 6$;	3) $0z = 19$,	4) $0x = 0$?
11. Три трактори зорали разом 72га. Перший зорав на 6га більше землі від другого, а другий на 9га більше від третього. Скільки гектарів зорав кожний тракторист?
12. У трьох класах усього 79 учнів. У другому на 3 учні більше, ніж у першому, а в третьому на 2 учні менше, ніж у першому. Скільки учнів у кожному класі?
13. Відстань між двома станціями потяг зі швидкістю 70 км/год може проїхати на півгодини швидше, ніж зі швидкістю 60 км/год. Знайти цю відстань.
14. Бригада повинна була виконати завдання з виготовлення деталей за 5 днів, а виконала роботу за 3 дні, бо виготовляла щодня на 12 деталей більше. Скільки деталей виготовила бригада?
15. Сформулювати означення лінійного рівняння з двома змінними.
16. Що таке розв'язок лінійного рівняння з двома змінними?
17. Чим є графік лінійного рівняння з двома змінними?
18. Коли говорять, що дані лінійні рівняння утворюють систему лінійних рівнянь?
19. Що називається розв'язком системи лінійних рівнянь з двома змінними?
20. Що означає розв'язати систему лінійних рівнянь з двома змінними?

21. У чому полягає суть графічного способу розв'язання системи лінійних рівнянь з двома змінними?
22. Як розв'язати систему лінійних рівнянь способом підстановки?
23. Як розв'язати систему лінійних рівнянь способом додавання?
24. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома невідомими?
25. Записати формули розв'язків системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими за допомогою визначників (формули Крамера).
26. Дати графічну інтерпретацію розв'язків системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.
27. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y = 2, \\ 3x - y = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 6, \\ 4x + y = 12; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - y = -2, \\ 3x - 3y = 6. \end{cases}$$

28. Скільки розв'язків має система рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 3y = 5, \\ 3x + 9y = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 4y = 1, \\ 2x - 8y = 3; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 8, \\ y = 15; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 6x + 10y = 36, \\ 3x + 5y = 18? \end{cases}$$

29. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 12, \\ 3x - 5y = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 4y = 11, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + z = 52, \\ x - 3z = 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2y + 3z = 216, \\ y + z = 82; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 4(x - 3z) + 33z = 50, \\ 5(x + 2z) - 3x = 18; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 7(2x + y) - 5(3x + y) = 6, \\ 3(x + 2y) - 2(x + 3y) = -6; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{4} = 5, \\ \frac{x+y}{12} + \frac{x-y}{3} = 6; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} \frac{y-1}{4} - \frac{x+1}{3} = 2, \\ \frac{x+3}{4} - \frac{y+1}{3} = -4; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + 2y = 18, \\ -x + 3y = 2; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 3x - 8y = 1, \\ 4x + 8y = 20; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 3x + 7y = 7, \\ 8x + 7y = 22; \end{cases} \quad 12) \begin{cases} 8z + 3t = 7, \\ -4z - 5t = 7; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 5, \\ a - \frac{b}{2} = 5; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \frac{m}{3} - \frac{n}{3} = 0, \\ m - \frac{7n}{2} = 2; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \frac{1-3x}{4} - \frac{4-2p}{3} = 0, \\ 0,7 = 0,4p - 0,3x; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \frac{2x-1}{6} - \frac{9-5m}{8} = 0, \\ 2x = 1,5m + 0,5. \end{cases}$$

30. Дослідити систему лінійних рівнянь:

$$1) \begin{cases} ax + 4y = 2, \\ 9x + ay = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (m+3)x + 4y = 5 - 3m, \\ 2x + (5+m)y = 8; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x - (a+1)y = 4, \\ 6x - (3a-7)y = a-1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (a+1)x - 4y = 1, \\ 3x - ay = 2. \end{cases}$$

31. На будівництві працювало 50 мулярів і теслярів. Згодом кількість мулярів збільшилась у 2 рази, а теслярів – у 3 рази, і всіх стало 130. Скільки спочатку було мулярів і теслярів на будівництві?
32. Туристи проїхали 640 км. З них 7 годин вони їхали потягом і 4 години автобусом. Знайти швидкість потяга, якщо вона на 5 км/год більша від швидкості автобуса.
33. Швидкість моторного човна за течією 23 км/год, а проти течії 17 км/год. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії.
34. Половина одного числа на 4 більша від третини другого, а половина другого числа на 18 більша від чверті першого. Знайти ці числа.
35. Поле площею 100 га розділили на дві частини так, що площа однієї стала на 5 га меншою від половини площі другої. Знайти площу кожної частини.
36. По колу, довжина якого дорівнює 100 м, рухаються два тіла. Вони зустрічаються через кожні 20 с, рухаючись в одному і тому самому напрямі, і через кожні 4 с, рухаючись у протилежних напрямках. Знайти швидкість кожного тіла.
37. Сума цифр двозначного числа дорівнює 12. Якщо до цього числа додати 36, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайти це число.
38. Змішали 30%-й розчин соляної кислоти з 10%-м і дістали 600 г 15%-го розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?

4.3 Квадратні рівняння

1. Сформулювати означення квадратного рівняння.
2. Що таке дискримінант квадратного рівняння?
3. За якою формулою розв'язують квадратні рівняння?

4. Скільки розв'язків може мати квадратне рівняння?
5. Що таке зведене квадратне рівняння?
6. Які рівняння називаються неповними квадратними рівняннями?
7. Як розв'язують неповні квадратні рівняння?
8. Сформулювати теорему Вієта.
9. Сформулювати теорему, обернену до теореми Вієта.
10. Яке з рівнянь не має дійсних коренів:
 - а) $x^2 + x + 1 = 0$;
 - б) $2y^2 - 3y - 2 = 0$;
 - в) $0,5x^2 + 2x - 2 = 0$;
 - г) $8z^2 - z - 4 = 0$?
11. Яке з рівнянь має кратні корені:
 - а) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;
 - б) $x^2 - 12x + 35 = 0$;
 - в) $x^2 - 6x + 10 = 0$;
 - г) $5x^2 + 31x - 28 = 0$?
12. У якого з рівнянь корені мають однакові знаки:
 - а) $3x^2 - 7x + 2 = 0$;
 - б) $x^2 - x - 6 = 0$;
 - в) $6x^2 - 5x + 6 = 0$;
 - г) $4x^2 + 3x - 10 = 0$?
13. У якого з рівнянь корені мають різні знаки:
 - а) $2x^2 - 7x - 30 = 0$;
 - б) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
 - в) $3x^2 + 2x + 4 = 0$;
 - г) $8z^2 - z + 4 = 0$?
14. Розв'язати рівняння:
 - 1) $x(7 - x) = 3x^2 - 8$,
 - 2) $2x(3x + 4) = 4x^2 + 5x + 27$,
 - 3) $3x(5x + 3) = 2x(6x + 5) + 2$,
 - 4) $(x - 5)^2 = 3x + 25$.
15. Добуток двох послідовних цілих чисел більший від їх суми на 239. Знайти ці числа.
16. Квадрат суми двох послідовних натуральних чисел більший від суми їх квадратів на 264. Знайти ці числа.
17. Знайти три послідовні цілі числа, сума квадратів яких дорівнює 434.
18. Знайти два числа, сума яких дорівнює 61, а добуток 900.
19. Кілька точок розміщені на площині так, що ніякі три з них не лежать на одній прямій. Якщо кожен з них сполучити відрізками зі всіма іншими даними точками, то утвориться 153 відрізків. Скільки дано точок?
20. У шаховому турнірі було зіграно 66 партій. Знайти кількість учасників турніру, якщо відомо, що кожен учасник зіграв з кожним по одній партії.
21. На першість району з футболу зіграно 56 матчів, причому кожна команда зіграла з кожною по два рази. Скільки команд брало участь у грі?
22. В опуклому багатокутнику проведено всі можливі діагоналі. Виявилося, що їх разом 27. Скільки сторін у цього багатокутника?

23. Розкласти на лінійні множники такі вирази:

1) $-x^2 + 7x - 12 = 0$,

2) $2x^2 + 9x - 5 = 0$,

3) $5 - 9x^2 - 2x^2 = 0$,

4) $3x^2 - 8x - 3 = 0$.

24. Скласти квадратні рівняння за відомими коренями:

1) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$,

2) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$,

3) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$,

4) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

25. Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 5x - 2 = 0$ знайти суму кубів його коренів.

26. Виразити $x_1^3 + x_2^3$ через коефіцієнти рівняння $x^2 + px + q = 0$, де x_1, x_2 — його корені.

27. Не розв'язуючи рівняння $15x^2 + 12x - 3 = 0$ знайти суму квадратів його коренів.

28. Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 7x + 2 = 0$ знайти $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ де x_1, x_2 — його корені.

4.4 Системи рівнянь з двома невідомими, що містить рівняння другого степеня

1. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + x + y = 6, \\ y - x = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 3y = -5, \\ 7x + 3y = 23; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 y^2 = 8, \\ x^2 y^3 = 4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 5, \\ (x + y) \frac{x}{y} = 6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 - 3y = -2, \\ 7x + 3y = 23; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x + y = 4; \end{cases}$

$$11) \begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15, \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12, \\ 2(x + y)^2 - y^2 = 14; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$$

2. Дві бригади, працюючи одночасно, обробили ділянку землі за 12 годин. За який час обробить цю ділянку кожна бригада окремо, якщо продуктивності праці бригад відноситься як 3:2?
3. За 4 дні спільної роботи 2 трактори різних потужностей зорали $\frac{2}{3}$ поля. За скільки днів можна було б зорати все поле кожним трактором окремо, якщо першим трактором можна зорати все поле на 5 днів швидше, ніж другим?
4. Водонапірний бак наповнюється двома трубами за 2 год. 55 хв. Перша труба наповнює бак на 2 год. швидше від другої. За який час кожна труба окремо може наповнити бак?
5. Двоє робітників виконують певне завдання разом за 12 днів. Якщо половину роботи виконає один робітник, а потім його замінить другий, то все завдання буде виконане за 25 днів. За скільки днів кожний робітник може виконати все завдання?
6. Товарний потяг був затриманий у дорозі на 12 хв, а потім на перегоні 60 км надолужив втрачений час, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайти початкову швидкість потягу.
7. Мотоцикліст зупинився перед слагбаумом на 24 хв. Збільшивши швидкість на 10 км/год, він подолав запізнення на перегоні у 80 км. Визначити швидкість мотоцикліста після зупинки.
8. Електропотяг був затриманий у дорозі на 4 хв. і ліквідував запізнення на перегоні 20 км, збільшивши швидкість на 10 км/год. Визначити швидкість потягу за розкладом.
9. Запізнившись на 20 хв, потяг пройшов перегін 160 км із швидкістю, яка перевищує швидкість за розкладом на 16 км/год, і прибув до кінця перегону вчасно. Яка швидкість потягу на цьому перегоні за розкладом?

10. З двох міст, відстань між якими дорівнює 160 км, назустріч один одному виїхали два велосипедисти і зустрілися на середині дорозі. Яка швидкість кожного велосипедиста, якщо перший виїхав на 1 год. пізніше від другого і рухався із швидкістю на 4 км/год більшою, ніж швидкість другого велосипедиста?
11. З двох міст, відстань між якими дорівнює 60 км, назустріч один одному виїхали два велосипедисти і зустрілися на середині дорозі. Яка швидкість кожного велосипедиста, якщо перший виїхав на 1 год. раніше від другого і рухався із швидкістю на 5 км/год більшою, ніж швидкість другого велосипедиста?
12. Руда містить 40% домішок, а виплавлений з неї метал – 4% домішок. Скільки одержимо металу з 24 т руди?
13. З 38 т сировини другого сорту, що містить 25% домішок, після переробки виходить 30 т сировини першого сорту. Скільки відсотків домішок міститься у сировині першого сорту?
14. Свіжі фрукти містять 72% води, а сухі – 20% води. Скільки сухих фруктів отримаємо з 20 кг свіжих фруктів?
15. З 40 т руди виплавляють 20 т металу, що містить 6% домішок. Скільки відсотків домішок міститься в руді?
16. Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати роботу за 24 год. 24 хв. За скільки годин може виконати роботу кожна з бригад, працюючи окремо, якщо половину роботи друга бригада виконує на 1 год. швидше, ніж перша?
17. Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати роботу за 3 год. 36 хв. За скільки годин може виконати роботу кожна з бригад, працюючи окремо, якщо половину роботи перша бригада виконує на 1 год. 30 хв. швидше, ніж друга?
18. Басейн наповнюється водою за 2 години, якщо одночасно відкрили дві труби. Щоб наповнити басейн лише через першу трубу, потрібно затратити часу на 3 години більше, ніж якби басейн наповнювали через другу. Через скільки годин басейн наповниться водою через кожную трубу окремо?
19. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 4 дні. Перший робітник може виконати роботу сам на 6 днів швидше, ніж другий. За скільки днів виконає цю роботу кожний робітник, працюючи окремо?
20. Сума квадратів двох чисел дорівнює 221. Якщо кожне з чисел збільшити на одиницю, то сума їх квадратів буде дорівнювати 265. Знайти ці числа.
21. Різниця двох чисел у 6 разів менша від їх суми, а різниця квадратів цих чисел дорівнює 24. Знайти ці числа.
22. Сума цифр двозначного числа дорівнює 11, а сума квадратів його цифр – 65. Знайти це число.
23. Два цехи повинні були виготовити за планом 180 верстатів за рік. Перший цех виконав план на 112%, а другий – на 110%, тому разом

вона виготовили 200 верстатів. Скільки верстатів понад план виготовив кожний цех?

24. Після того, як від числа спочатку відняли 10%, потім – 25% залишку і ще 20% нового залишку, дістали число 27. Знайти початкове число.
25. Від тривалого зберігання ячмінь втрачає за перший рік 3% своєї маси, а за кожний наступний рік по 1%. Скільки залишиться від 100ц ячменю через 3 роки?

4.5 Дробово-раціональні алгебраїчні рівняння

1. Які рівняння називаються раціональними алгебраїчними рівняннями?
2. Які рівняння називаються дробово-раціональними алгебраїчними рівняннями?
3. Які рівняння називаються трансцендентними?
4. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{2x-5}{x-2} + 1 = \frac{3x-5}{x-1}$;

2) $\frac{5+4z}{3-2z} + \frac{9z-7}{3z-2} = 1$;

3) $\frac{4}{1+x} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2-3}{1-x^2}$;

4) $\frac{2z-1}{2z+1} - \frac{2z+1}{2z-1} = \frac{8}{1-4z^2}$.

5. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{3}{x-2} = \frac{10}{x} - \frac{7}{x+2}$;

2) $\frac{1}{x} + \frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$;

3) $\frac{x+9}{x-1} + \frac{x+1}{x+5} = 2$;

4) $\frac{2z^2-7z+3}{2z-1} = 1+z$.

6. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{1+3x}{2+x} + \frac{x-1}{2-x} = 1$;

2) $\frac{5x-7}{9} + \frac{14}{2x-3} = x-1$;

3) $\frac{x-4}{12} + \frac{2x-22}{x-6} = \frac{16-x}{4}$;

4) $\frac{2z-3}{z-2} + \frac{z+1}{z-1} = \frac{3z+11}{z+1}$.

7. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$;

2) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$;

$$3) \frac{x^2 - 2x - 6}{x} - \frac{3x}{x^2 - 2x - 6} - 2 = 0;$$

$$4) \frac{x^2 + 2x - 6}{x} - \frac{3x}{x^2 + 2x - 6} + 2 = 0.$$

8. Розв'язати рівняння:

$$1) \frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5;$$

$$2) \frac{2x-3}{x-1} + 1 = \frac{6x-x^2-6}{x-1};$$

$$3) \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{4x-5}{x^2-x-2};$$

$$4) \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0.$$

4.6 Рівняння вищих степенів

1. Які рівняння називаються рівняннями вищих степенів?
2. Для рівнянь яких степенів немає загальних формул для їх коренів?
3. Розв'язати рівняння:

$$1) x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$$

$$2) 2x^8 + x^4 - 15 = 0,$$

$$3) 4x^4 - 25x^2 + 36 = 0,$$

$$4) x^6 + 19x^3 - 216 = 0.$$

4. Розв'язати рівняння:

$$1) (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0;$$

$$2) (x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680;$$

$$3) (x-1)(x+1)(x+2)^x = 24;$$

$$4) (x-2)(x+1)(x+4)(x+7) = 19.$$

5. Розв'язати рівняння:

$$1) (x^2 - 8)^2 + 4(x^2 - 8) - 5 = 0;$$

$$2) (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0;$$

$$3) (x^2 + 2x)^2 - 11(x+1)^2 + 35 = 0;$$

$$4) (x^2 - 2x) - 11(x-1)^2 + 35 = 0.$$

6. Розв'язати рівняння:

$$1) \frac{5x}{x^2 - 3x + 12} - \frac{3x}{2x^2 - 15x + 24} + 2 = 0;$$

$$2) \frac{2x}{x^2 - 2x + 5} + \frac{3x}{x^2 + 2x + 5} = \frac{7}{8};$$

$$3) \frac{4x}{x^2 + x + 4} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 4} = -\frac{3}{2};$$

$$4) \frac{x^2 - x + 6}{3} - \frac{2x^2}{x^2 - 4x + 6} = \frac{x}{6}.$$

7. Розв'язати рівняння:

$$1) 4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47;$$

$$2) 2x^2 - 7x - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} + 9 = 0;$$

$$3) x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4;$$

$$4) 6x^2 + 5x + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - 38 = 0.$$

8. Розв'язати рівняння:

$$1) 6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0;$$

$$2) 2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0;$$

$$3) x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0;$$

$$4) 6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0.$$

9. Розв'язати рівняння:

$$1) x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0;$$

$$2) x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0;$$

$$3) x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0;$$

$$4) x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 19x - 6 = 0.$$

10. Розв'язати рівняння:

$$1) (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 2) - 2(x + 2)^2 = 0;$$

$$2) (x - 2)^2 - (2x + 1)(x - 2) - 2(2x + 1)^2 = 0;$$

$$3) (x - 1)^2 - 4(x^2 - 1)^2 + 3(x + 1)^2 = 0;$$

$$4) (x - 2)^2 - 6(x^2 - 4) + 5(x + 2)^2 = 0.$$

11. Розв'язати рівняння:

$$1) (x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2;$$

$$2) 4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) = 3x^2;$$

$$3) (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2;$$

$$4) (x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 6) = 60x^2.$$

4.7 Системи алгебраїчних рівнянь

1. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^3 y^3 = -8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 y^3 + x^3 y^2 = 12, \\ x^2 y^3 - x^3 y^2 = 4; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ xy = 3. \end{cases}$$

2. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ xy(x + y) = 6; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2 y + y^2 = 20; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x + y) = -2. \end{cases}$$

3. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^6 + y^6 = 65, \\ x^4 - x^2 y^2 + y^4 = 13; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 158, \\ 3x^2 y + y^3 = -185; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 + xy + y^2 = 13; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$$

4.8 Послідовність. Арифметична та геометрична прогресії

1. Означення числової послідовності.
2. Наведіть приклад скінченної числової послідовності.
3. Записати послідовність парних натуральних чисел.
4. Записати послідовність непарних натуральних чисел.
5. Записати послідовність натуральних чисел.
6. Записати послідовність чисел, обернених до натуральних.
7. Напишіть кілька перших членів послідовності квадратів натуральних чисел. Який її n -ий член?
8. Напишіть кілька перших членів і n -ий член послідовності кубів натуральних чисел.
9. Напишіть кілька перших членів послідовності натуральних чисел, кратних 3.
10. Чи правильно, що $a_n = 5n - 3$ — формула n -го члена послідовності натуральних чисел, які при діленні на 5 дають остачу 2?

11. Послідовність $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ така, що сума будь-яких двох її сусідніх членів дорівнює 0. Напишіть її n -ий член.
12. Означення арифметичної прогресії.
13. Що називається різницею арифметичної прогресії.
14. Якщо арифметична прогресія зростаюча, то якою є її різниця?
15. Якщо арифметична прогресія спадна, то якою є її різниця?
16. Чому дорівнює сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців?
17. Записати формулу n -го члена арифметичної прогресії.
18. Вивести формулу суми перших n членів арифметичної прогресії.
19. Доведіть, що кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює півсумі сусідніх з ним двох членів.
20. Довести таке твердження: для того, щоб три числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{b+a}$ утворювали арифметичну прогресію, необхідно і достатньо, щоб числа a^2, b^2, c^2 також утворювали арифметичну прогресію.
21. Означення геометричної прогресії.
22. Яке число називається знаменником геометричної прогресії?
23. Чи можна вважати геометричною прогресією із знаменником 1 кожен арифметичну прогресію з різницею 0?
24. Записати формулу n -го члена геометричної прогресії.
25. Вивести формулу для знаходження суми n перших членів геометричної прогресії.
26. Доведіть, що квадрат кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх його членів.
27. Яке число вважають сумою нескінченної геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником $|q| < 1$.
28. Задача Архімеда. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$.
29. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її перший, другий і четвертий члени утворюють арифметичну прогресію.
30. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо другий, третій і п'ятий її члени утворюють арифметичну прогресію.
31. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її четвертий, п'ятий і сьомий члени утворюють арифметичну прогресію.
32. При діленні дев'ятого члена арифметичної прогресії на другий член у частці дістаємо 5, а при діленні тринадцятого члена на шостий член у частці дістаємо 2 і в остачі 5. Знайдіть перший член і різницю прогресії.
33. Знайти чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, у якій сума крайніх членів дорівнює -49 , а сума середніх членів дорівнює 14.

34. Знайти три перших члени нескінченної геометричної прогресії із знаменником $|q| < 1$, сума якої дорівнює 6, а сума п'яти перших членів дорівнює $\frac{93}{16}$.
35. Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 2, а сума квадратів цих самих чисел дорівнює $\frac{14}{9}$. Знайти ці числа.
36. Сума третього і дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 8. Знайти суму 11 перших членів цієї прогресії.
37. Знайти перший член і знаменник геометричної прогресії, коли відомо, що $a_4 - a_2 = -\frac{45}{32}$ і $a_6 - a_4 = -\frac{45}{512}$.
38. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 429, різниця її дорівнює -22. Скільки членів цієї прогресії треба взяти, щоб їхня сума дорівнювала 3069?
39. Знайти число членів скінченної геометричної, прогресії в якій перший, другий і останній члени, відповідно дорівнюють 3, 12 і 3072.
40. Знайти суму всіх додатних парних двозначних чисел, що діляться на 3 без остачі.
41. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 21, а сума їхніх квадратів дорівнює 189. Знайти перший член і знаменник цієї прогресії.
42. Знайти суму всіх парних тризначних чисел, що діляться на 3.
43. Знайти чотири числа, перші з яких утворюють геометричну прогресію, а останні три – арифметичну прогресію. Сума крайніх чисел дорівнює 21, а сума середніх 18.
44. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 91. Якщо до цих членів додати, відповідно, 25, 27 і 1 то дістанемо три числа, що утворюють арифметичну прогресію. Знайти сьомий член геометричної прогресії.
45. Знайти три числа, що утворюють геометричну прогресію, коли відомо, що їхній добуток дорівнює 64, а їхнє середнє арифметичне дорівнює $\frac{14}{3}$.
46. Три числа x, y, z утворюють у вказаному порядку геометричну прогресію, а числа $x, 2y, 3z$ утворюють у вказаному порядку арифметичну прогресію. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, відмінний від одиниці.
47. Сума двох трицифрових чисел, записаних однаковими цифрами в зворотному порядку, дорівнює 1252. Знайдіть ці числа, якщо сума їхніх цифр дорівнює 14, а сума квадратів їхніх цифр – 84. Розмістіть цифри так, щоб вони утворили геометричну прогресію.
48. Між числами 4 і 324 впишіть три числа, які б разом з даними числами утворили геометричну прогресію.

49. Сума трьох чисел, що становлять арифметичну прогресію, дорівнює 12. Якщо до них, відповідно, додати 1, 2 і 11, то утворені числа становитимуть геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.
50. Три числа утворюють арифметичну прогресію. Сума цих чисел дорівнює 3, а сума їх кубів дорівнює 4. Знайти ці числа.
51. Між числами 1 та 5,5 вставити дев'ять чисел так, щоб усі 11 чисел утворили арифметичну прогресію.
52. В арифметичній прогресії перший член дорівнює 28, а сума двадцяти п'яти перших членів дорівнює 925. Знайдіть різницю і тридцять шостий член прогресії.
53. Якою є сума натуральних чисел, які менші за 190 і не кратні 3?
54. Другий, перший і третій члени арифметичної прогресії, різниця якої відмінна від нуля, утворюють у вказаному порядку геометричну прогресію. Знайдіть її знаменник.

4.9 Алгебраїчні нерівності

1. Як за допомогою символів записати, що число a більше числа b ?
2. Як за допомогою символів записати, що число a є не меншим числа b ?
3. Якщо число a більше числа b , то якою буде різниця $(b - a)$ додатною чи від'ємною?
4. Яке з чисел a і b більше, якщо $a - b = -3,7$?
5. Якщо $x = 7$, то що більше: $2x + 3$ чи $3x + 2$?
6. Доведіть, що $n^2 - 2n + 1 \geq 0$ при будь-якому значенні n .
7. Замінити $*$ значком $>$ або $<$:
 - а) $a < b$ і $b < c$, то $a * c$;
 - б) якщо $c > 0$, то $a < b \Rightarrow ac * bc$;
 - в) якщо $c < 0$, то $a < b \Rightarrow ac * bc$;
 - г) якщо $a < b$ і $c < d$, то $(a + c) * (b + d)$;
 - д) якщо a, b, c, d – додатні, то при $a < b$ і $c < d$ впливає, що $ac * bd$;
8. Що більше: a чи b , якщо:
 - а) різниці $a - c$ і $c - b$ – додатні?
 - б) різниці $b - c$ і $c - a$ – від'ємні?
 - с) різниці $a - n$ і $n - b$ – невід'ємні числа?
9. В якому порядку на координатній прямій розміщені точки з координатами a, b, c і d , якщо $a < c, b > c, d > b$?
10. За умови, що $a > b$, яким знаком (більше чи менше) потрібно замінити $*$:
 - а) $2a * 2b$;
 - б) $-a * -b$;
 - в) $-\frac{1}{2}a * -\frac{1}{2}b$?
11. Що більше: $\frac{1}{a}$ чи $\frac{1}{b}$, якщо $a < b$ і $ab < 0$?

12. Записати в порядку зростання числа $\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}; \frac{1}{d}$, якщо всі вони

від'ємні і $a > c$, $b < d$ і $d < c$.

13. Довести, що сума додатного числа і оберненого йому числа не менше 2.

14. Довести, що середнє арифметичне двох невід'ємних чисел не менше їх середнього геометричного.

15. Довести, що для будь-яких значень a справедлива нерівність

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 \geq a.$$

16. Довести, що для будь-яких значень x і y справедлива нерівність:

$$a) \quad 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 2y > -5 \qquad б) \quad x^2 + 6x + y^2 - 4y + 15 > 0$$

17. Розв'язати нерівність:

$$a) \quad 4(a+8) - 7(a-1) < 12;$$

$$б) \quad 1 > 1,5(4-2b) + 0,5(2-6b);$$

$$в) \quad y - \frac{y-1}{2} - \frac{y+3}{4} > 2;$$

$$г) \quad \frac{x-1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6};$$

$$д) \quad \frac{5}{3}x + \frac{7-3x}{2} < x - \frac{7-3x}{3} + \frac{x}{6};$$

$$е) \quad (6x-1)^2 - 12x(5+3x) < 8,2;$$

$$ж) \quad \frac{2(5x-2)}{9} - 17 \leq \leq \frac{4(23-2x)}{5} - \frac{5(11x+1)}{9};$$

$$з) \quad 14\frac{1}{2} - \frac{2(x+3)}{5} > \frac{3x}{2} - \frac{2(x-7)}{3}.$$

18. Розв'язати нерівність:

$$a) \quad 2x^2 + x - 3 \geq 0;$$

$$б) \quad 8 - 3x < 5x^2;$$

$$в) \quad 7x \geq x^2;$$

$$г) \quad x^2 > 0;$$

$$д) \quad x^2 \geq 6\frac{1}{4};$$

$$е) \quad x^2 + 3 > 0;$$

$$ж) \quad -5 - x^2 \geq 0;$$

$$з) \quad 4x^2 - 4x + 1 > 0;$$

$$и) \quad 9x^2 + 4 \leq 12x;$$

$$к) \quad 2x^2 - x + 5 > 0;$$

19. Розв'язати нерівність:

$$a) \quad \frac{x}{x-3} \geq 0;$$

$$б) \quad \frac{x-3}{2x} \geq 5;$$

$$л) \quad x > 3x^2 + 7;$$

$$м) \quad (x-2)^2 + 48 \leq (2-3x)^2;$$

$$н) \quad (2x-1)(x+3) \leq 0;$$

$$о) \quad (3x-1)(x+2) > 20;$$

$$п) \quad \frac{8x^2-3}{5} + \frac{9x^2-5}{4} < 2;$$

$$р) \quad (x-7)(x+3) + (x-1)(x+5) \geq 0;$$

$$с) \quad (x-2)^2 < 25.$$

$$в) \quad 2x^3 - 9x^2 + 10x < 0;$$

$$з) \quad (x+1)^2(x^2+3x) \geq 0;$$

$$д) \quad \frac{x^2 - 5x + 4}{x-3} > 0;$$

$$е) \quad \frac{x}{3} - \frac{4}{x} > \frac{4}{3};$$

$$ж) \quad (x-4)^2(-x^2+8x-15) \leq 0;$$

$$з) \quad (x+2)(x-3) > (x+2)(2x-5);$$

$$и) \quad (x-3)(x^2+4x) > (x-3)(x+18);$$

$$к) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2};$$

$$л) \quad \frac{3x^2 - x^4}{4x - x^2 + 5} > 0;$$

$$м) \quad \frac{-(x+4)^2(x-1)^5(x-4)}{x^3(x-7)^2(x-3)^3} \times$$

$$\times (x^2+3) \geq 0;$$

$$н) \quad (x^2+3x)(3x^2-3x+1) \leq \\ \leq (x^2+3x)(x^2+2x-1)$$

$$о) \quad \frac{(x+5)^2(x-6)}{x-25} \leq 0;$$

$$п) \quad \frac{2x+1}{x^2+5x} > \frac{2}{x+2};$$

$$р) \quad \frac{x}{x^2+3x+2} > \frac{x}{x^2+7x+12};$$

$$с) \quad \frac{4}{x-2} - \frac{9}{x-3} \geq 1;$$

$$т) \quad \frac{9}{x+3} - \frac{4}{x+2} \geq 1.$$

20. Чому дорівнює найбільший цілий розв'язок системи нерівностей:

$$а) \quad \begin{cases} 2x-1 > 6, \\ 5-3x > -13. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} 2x-1 < x+3, \\ 5x-1 > 6-2x, \\ x-5 < 0. \end{cases}$$

$$в) \quad \begin{cases} 15(y-4)-14(y-3) < y(y-9)-y^2, \\ \frac{5-y}{3} - y > 14 - \frac{2-y}{6}. \end{cases}$$

$$г) \quad \begin{cases} 2x^2+9x \leq -7, \\ 2x+5 \leq 0. \end{cases}$$

$$д) \quad \begin{cases} x^2+5x-6 < 0, \\ x^2+4x < 0. \end{cases}$$

$$е) \quad \begin{cases} \frac{2x}{x-1} \leq 5, \\ \frac{x^2-16}{x+1} < 0. \end{cases}$$

21. Чому дорівнює сума цілих розв'язків системи нерівностей:

$$а) \quad \begin{cases} \frac{5}{x+3} - \frac{1}{x-1} < 1, \\ \frac{4}{x^2+5x} + \frac{x+1}{x+5} < \frac{2}{x}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \begin{cases} x^2 - 12x + 32 > 0, \\ x^2 - 8x - 20 < 0. \end{cases} \\ \text{в)} \quad & \begin{cases} \frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}, \\ \frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} < \frac{5x+1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

22. Який найменший цілий розв'язок нерівності:

а) $-11 \leq \frac{x}{x-1} < 5;$

б) $3 < x^2 - 2x < 15.$

23. Якими мають бути значення $\overline{m}$, щоб нерівність $(\overline{m}+1)x^2 - 2(\overline{m}-1)x + 3\overline{m} - 3 < 0$ справджувалась при всіх дійсних значеннях x ?

24. Якими мають бути значення a , щоб нерівність $x^2(a^2-1) + 2(a-1)x + 1 > 0$ справджувалась при всіх дійсних значеннях x ?

25. Яким має бути k , щоб нерівність $\frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} \leq 3$ справджувалась при всіх дійсних значеннях x ?

4.10 Ірраціональні рівняння та нерівності

1. Яке рівняння називається ірраціональним?
2. Що розуміють під областю допустимих значень для ірраціонального рівняння?
3. Як розв'язують ірраціональне рівняння виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$?
4. Як розв'язують ірраціональне рівняння виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + \sqrt{q(x)}$?
5. Що таке метод введення нової змінної при розв'язуванні ірраціонального рівняння.
6. Що таке штучні методи розв'язування ірраціонального рівняння?
7. Як розв'язують найпростіші ірраціональні рівняння виду $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = p$?
8. Як розв'язують найпростіші ірраціональні рівняння виду $\sqrt{a \cdot f(x) + b} \pm \sqrt{c \cdot f(x) + d} = p$?
9. Як розв'язують найпростіші ірраціональні рівняння виду $\sqrt[3]{ax+b} \pm \sqrt[3]{cx+d} = p$?

10. Як розв'язують ірраціональні рівняння виду
 $\sqrt[3]{a \cdot f(x) + b} \pm \sqrt[3]{c \cdot f(x) + d} = p$?
11. Як розв'язують ірраціональні рівняння виду
 $\sqrt{ax + b + m\sqrt{cx + d}} \pm \sqrt{kx + p + n\sqrt{cx + d}} = q$?
12. Як розв'язують найпростіші ірраціональні нерівності виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$?
13. Як розв'язують ірраціональні нерівності виду $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$?
14. Як розв'язують найпростіші ірраціональні нерівності виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$?
15. Як розв'язують ірраціональні нерівності виду $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$?
16. Як розв'язують ірраціональні нерівності виду $\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}$?
17. Як розв'язують ірраціональні нерівності виду
 $R(\sqrt[n]{f(x)}, \sqrt[m]{f(x)}) > 0$?
18. Розв'язати ірраціональні рівняння:
 $x - \sqrt[3]{x^2 - x - 1} = 1; \quad \sqrt{1 - 4x} + 2 = \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$
19. Розв'язати ірраціональне рівняння $4\sqrt{x + 16} + x = 1 + 4\sqrt{3x + 22}.$
20. Розв'язати ірраціональне рівняння $4\sqrt{x + 4} + x = 4\sqrt{5x + 24} - 11.$
21. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x + 5} + \sqrt{2x + 8} = 7.$
22. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x} + 3 = 2x$
23. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6.$
24. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{6 - x} = x.$
25. Розв'язати ірраціональне рівняння $4\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2 - 10\frac{1+x}{\sqrt{x}} + 4 = 0.$
26. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x} + 2x = 1.$
27. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x + \frac{11}{4}} = x - 1.$
28. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x + 2} = x - 4.$
29. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x}\sqrt{1 - x} = x.$
30. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 4} = 6.$
31. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{4 - x} = x.$
32. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2.$
33. Розв'язати ірраціональне рівняння $3\sqrt{x - 3} + 20 = 2x + 3\sqrt{37 - 3x}.$
34. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x + 17} - \sqrt{x - 7} = 4.$
35. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt[3]{x - 6} - 3\sqrt{x - 6} + 2 = 0.$

36. Розв'язати ірраціональне рівняння $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$.
37. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{1-4x+4x^2} < 5$.
38. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{x^2-5x+6} \geq 1-x$.
39. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{2x-x^2} < 5-x$.
40. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{7x-12} < x$.
41. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{x^2+7x+10} > x+3$.
42. Розв'язати ірраціональну нерівність $2+x-\sqrt{3x-x^2} > 0$.
43. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{5x-6} \leq x$.
44. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{x^2+7x+10} > 3+x$.
45. Розв'язати ірраціональну нерівність $x+\sqrt{x^2-9x+16} \geq 4$.
46. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{7x-12} < x$.
47. Розв'язати ірраціональну нерівність $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$.
48. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{x^2-4x} > x-3$.
49. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{x^2-x-12} < x$.
50. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{9x-20} < x$.
51. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{5x-6} \leq x$.
52. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{x^2+5x+4} \geq x+2$.
53. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{2x-x^2} < 5-x$.
54. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{x^2+7x+10} > 3+x$.
55. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{7x-12} < x$.
56. Розв'язати ірраціональну нерівність $2+x-\sqrt{3x-x^2} > 0$.
57. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$.
58. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$.

4.11 Модуль в тестових завданнях

1. Що називається модулем дійсного числа a ? Назвати його властивості.
2. При яких значеннях m виконується рівність $m = |m|$?
3. При яких значеннях c виконується рівність $-c = |c|$?
4. При яких значеннях x виконується нерівність $|x| < 5$?
5. При яких значеннях y виконується нерівність $|y| \geq 2$?
6. Чому дорівнює вираз $|3\sqrt{7}-8|-2|\sqrt{7}-2,6|+5\sqrt{7}+0,8$ після спрощення?

7. Чому дорівнює вираз $\frac{x+|x|}{x}$ після спрощення?
8. При яких значеннях x виконується нерівність $|x-3| > -1$?
9. Чи існують такі значення x , при яких $\frac{|x^2-9|}{|x-1|} + 3 < -2$?
10. При яких значеннях x виконується рівність $||x-1|-2|=1$?
11. При яких значеннях x виконується рівність $x^2 - 5 = 4|x|$?
12. При яких значеннях x виконується рівність $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$?
13. При яких значеннях x виконується рівність $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 5x + 6| = 1$?
14. При яких значеннях x виконується рівність $\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x-5|} = 1$?
15. При яких значеннях x і y існує розв'язок системи $\begin{cases} x+3|y|-1=0 \\ x+y+3=0 \end{cases}$?
16. При яких значеннях x виконується нерівність $|x^2 - 5x| < 6$?
17. При яких значеннях x виконується нерівність $\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| \geq 1$?
18. При яких значеннях x виконується нерівність $|x-1| + |x+2| - |x-3| > 4$?
19. При яких значеннях x виконується нерівність $|x^2 - 4x| + 3 \geq x^2 + |x-5|$?
20. При яких значеннях x існує розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} |x^3 - 1| > 1 - x \\ x^2 \leq \left| 1 - \frac{2}{x^2} \right| \end{cases}$?

4.12 Тригонометричні тотожності

1. Вивести формулу $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.
2. Перетворити вираз $\cos(\alpha - \beta)$.
3. Перетворити вираз $\cos(\alpha + \beta)$.
4. Перетворити вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.
5. Перетворити вираз $\sin(\alpha + \beta)$.
6. Перетворити вираз $\sin(\alpha - \beta)$.
7. Перетворити вираз $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.
8. Перетворити вираз $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.
9. Перетворити вираз $\sin 2\alpha$.
10. Перетворити вираз $\cos 2\alpha$.
11. Перетворити вираз $\operatorname{tg} 2\alpha$.
12. Перетворити вираз $\sin \alpha \sin \beta$.

13. Перетворити вираз $\cos \alpha \cos \beta$.
14. Перетворити вираз $\sin \alpha \cos \beta$.
15. Перетворити вираз $\cos \alpha + \cos \beta$.
16. Перетворити вираз $\sin \alpha + \sin \beta$.
17. Спростити вираз $\operatorname{tg} \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$.
18. Спростити вираз $\operatorname{ctg} \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$.
19. Спростити вираз $\cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha$.
20. Спростити вираз $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.
21. Спростити вираз $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$.
22. Спростити вираз $\cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.
23. Спростити вираз $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha + (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \sin^2 \alpha$.
24. Спростити вираз $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1$.
25. Спростити вираз $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1$.

4.13 Тригонометричні рівняння

1. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$.
2. Розв'язати рівняння $2 \cos \frac{x}{2} = \sqrt{3}$.
3. Розв'язати рівняння $\sin 2x = \sqrt{3}$.
4. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
5. Розв'язати рівняння $\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0$.
6. Розв'язати рівняння $2 \cos(-2x) - 1 = 0$.
7. Розв'язати рівняння $\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 1$.
8. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$.
9. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$.
10. Розв'язати рівняння $4 \sin^2 x - 1 = 0$.
11. Розв'язати рівняння $2 \sin^2 x - 3 \sin x = 1$.
12. Розв'язати рівняння $4 \cos^2 x - \sin x = 0$.
13. Розв'язати рівняння $2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x - 1 = 0$.
14. Розв'язати рівняння $\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = 0$.
15. Розв'язати рівняння $\sin^2 x + \sin 2x - 3 \cos^2 x = 0$.

16. Розв'язати рівняння $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$.
17. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 5x = 0$.
18. Розв'язати рівняння $\frac{3}{5 \operatorname{tg} x + 8} = 1$.
19. Розв'язати рівняння $\frac{5}{3 \sin x + 4} = 2$.
20. Розв'язати рівняння $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}$.
21. Записати загальний розв'язок рівняння $\sin x = a$.
22. Записати загальний розв'язок рівняння $\cos x = a$.
23. Записати загальний розв'язок рівняння $\operatorname{tg} x = a$.
24. Записати загальний розв'язок рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.

4.14 Властивості логарифмів. Показникові і логарифмічні рівняння

1. Назвати основні властивості логарифмів. Записати відповідні формули.
2. Обчислити:

$$1) 81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}};$$

$$2) \sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}};$$

$$3) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 4} + \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{\log_5 2}};$$

$$4) 2^{\log_8 5} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_3 4}.$$

3. Знайти x за даним його логарифмом:

$$1) \log_c x = 3 \log_c (a + b) - 2 \log_c (a - b);$$

$$2) \log_a x = \frac{1}{2} \log_a (m - n) - \frac{1}{3} \log_a (m + n);$$

$$3) \log_2 x = 2 \log_2 (a + b) - \frac{2}{3} \log_2 (a - b) + \frac{1}{2} \log_2 a;$$

$$4) \log_5 x = \frac{1}{2} \log_5 (a - b) - \frac{2}{5} \log_5 (a + b) - \frac{2}{3} \log_5 a.$$

4. Дати означення показникового рівняння.
5. Які властивості показникової функції використовуються при розв'язанні показникових рівнянь?

6. Розв'язати рівняння:

$$1) \left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3};$$

$$2) 0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x};$$

$$3) \sqrt[3]{\sqrt[3]{4^{x+1}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{0,5^{2-4x}}};$$

$$4) \left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}.$$

7. Розв'язати рівняння:

$$1) 5^{(3-x)(x^2+x-2)} = 1;$$

$$2) 3^{x^2-5x+6} = 1;$$

$$3) 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 12} = 1;$$

$$4) \left(\frac{2}{7}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = 1.$$

8. Розв'язати рівняння:

$$1) 3^{x-1} + 3^{x+2} + 3^{x-3} = 3159;$$

$$2) 3^{x-6} - 3^{x-9} + 3^{x-5} = 963;$$

$$3) 5^{x-3} - 5^{x-4} - 16 \cdot 5^{x-5} = 4;$$

$$4) 5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0.$$

9. Розв'язати рівняння:

$$1) 7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3};$$

$$2) 5^x - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 5^{x-1};$$

$$3) 2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2};$$

$$4) 7^x - 5^{x+1} = 3 \cdot 5^{x-1} - 13 \cdot 7^{x-1}.$$

10. Розв'язати рівняння:

$$1) 2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0;$$

$$2) 4^x + 16 = 10 \cdot 2^x;$$

$$3) 3^{x+2} + 9^{x+1} = 810;$$

$$4) 3^{4x} - 4 \cdot 3^{2x} + 3 = 0.$$

11. Розв'язати рівняння:

$$1) 6 \cdot 9^x + 6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x = 0;$$

$$2) 4^x - 2 \cdot 5^{2x} = 10^x;$$

$$3) 4 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 2^{2x} = 5 \cdot 6^x;$$

$$4) 10^{2x} + 25^x = 4,25 \cdot 50^x.$$

12. Розв'язати рівняння:

$$1) (\sqrt{5+24})^x + (\sqrt{5-\sqrt{24}})^x = 10;$$

$$2) (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4;$$

$$3) (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 6;$$

$$4) (\sqrt{7+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{7-2\sqrt{12}})^x = 14.$$

13. Розв'язати рівняння:

$$1) 2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6;$$

$$2) 81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30;$$

$$3) 2^{\cos x} \cdot 2^{\cos^2 x} \cdot 2^{\cos^3 x} \dots = 2;$$

$$4) 3^{\sin x} \cdot 3^{\sin^2 x} \cdot 3^{\sin^3 x} \dots = 3.$$

14. Дати означення логарифмічного рівняння.

15. Які властивості логарифмічної функції використовуються при розв'язуванні логарифмічних рівнянь?

16. Розв'язати рівняння:

$$1) \log_5 \frac{4x-7}{x} = 2; \quad 2) \log_2 \frac{x+5}{x-1} = 2;$$

$$3) \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-5}{x-1} = -2; \quad 4) \log_3 \frac{2x-3}{x+4} = 1.$$

17. Розв'язати рівняння:

$$\lg(x+1,5) + \lg x = 0; \quad \lg(x-5) + \lg(x+6) = 1;$$
$$\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6.$$

18. Розв'язати рівняння:

$$\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6;$$

$$\lg(x+1,5) + \lg x = 0;$$

$$\lg(x-5) + \lg(x+6) = 1.$$

19. Розв'язати рівняння:

$$1) \log_3^2 x - 3\log_3 x - 10 = 0;$$

$$2) \log_7^2(13x-1) - 3\log_7(13x-1) + 2 = 0;$$

$$3) \log_4^2 4x - \log_4 x^4 - 12 = 0;$$

$$4) \lg^2 x - \lg x^3 + 2 = 0.$$

20. Розв'язати рівняння:

$$1) \log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4;$$

$$2) \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7;$$

$$3) \log_2(x+4) - \log_{\frac{1}{2}}(2x+3) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{1-2x};$$

$$4) \lg_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11.$$

21. Розв'язати рівняння:

$$1) \log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0;$$

$$2) \log_2 x + \log_x 2 = 2;$$

$$3) 2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1;$$

$$4) \lg_5 x + \log_x 25 = 3.$$

22. Розв'язати рівняння:

$$1) 7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3 \cdot 5^{\lg x-1} - 13 \cdot 7^{\lg x-1};$$

$$2) 27^{\lg x} - 7 \cdot 9^{\lg x} - 21 \cdot 3^{\lg x} + 27 = 0;$$

$$3) 5^{\lg x} - 3^{\lg x-1} = 3^{\lg x+1} - 5^{\lg x-1};$$

$$4) 4^{\log_9 x^2} - 13 = 4^{\log_9 x} - 4^{\log_9 x-1}.$$

23. Розв'язати рівняння:

$$1) x^{\log_2 x} = \sqrt[4]{3x^3};$$

$$2) 5^{\log_3 x+2} = 81x;$$

$$3) x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1};$$

$$4) x^{\log_2 x} = 4x.$$

4.15 Системи показникових та логарифмічних рівнянь

1. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{0,5x} - 2^y = 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2^x - 3^{2y} = 7, \\ 3^y - 2^{0,5x} = -1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3^x - 5 \cdot 2^y = 4001, \\ 3 \cdot 2^y + 3^x = 8097; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5. \end{cases}$$

2. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 9, \\ 2^x - 2^y = 16; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

3. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2^{x+y} = 16, \\ \lg x + \lg y = \lg 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3^{2x+y} = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2 \lg 3; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 32^{4x-y} = 16 \cdot 8^{x+y}, \\ \log_2(x-y) = 3. \end{cases}$$

4.16 Показникові та логарифмічні нерівності

1. Які властивості показникової функції використовуються при розв'язуванні показникових нерівностей?

2. Розв'язати нерівності:

$$1) \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8;$$

$$2) (\sqrt{3})^x \leq \frac{1}{3};$$

$$3) (0,2)^x \geq \frac{1}{25};$$

$$4) \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \frac{1}{9}.$$

3. Розв'язати нерівності:

$$1) 3^{\frac{x+1}{x}} > 3;$$

$$2) 2^{\frac{2x-1}{x}} < 4;$$

$$3) \left(\frac{1}{8}\right)^{-2x} < 4^3;$$

$$4) \left(\frac{1}{27}\right)^{-2x} > 9^3.$$

4. Розв'язати нерівності:

$$1) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3} \geq 3^{1-x};$$

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x-2} \geq 4^{x-1};$$

$$3) (0,5)^{1-\frac{3}{x}} \geq 8 \cdot (0,5)^x;$$

$$4) 2^{1+\frac{8}{x}} \geq 0,5 \cdot 2^x.$$

5. Розв'язати нерівності:

$$1) (2,7)^{\frac{x^2+x-6}{x}} \leq 1;$$

$$2) (0,5)^{\frac{x^2-x-2}{x}} \leq 1;$$

$$3) (0,3)^{\frac{x^2+2x-3}{x}} \geq 1;$$

$$4) (0,7)^{\frac{x^2+x-6}{x}} \leq 1.$$

6. Розв'язати нерівності:

$$1) 2^{2x+2} - \frac{3}{4} \cdot 2^{x+2} \leq 1;$$

$$2) 9^x - 3^x \leq 6;$$

$$3) 4^x - 2^x \geq 2;$$

$$4) 9^x - 6 \cdot 3^{x-1} \leq 3.$$

7. Розв'язати нерівності:

$$1) 2^x \geq \frac{1}{2}; \quad 2) 3^x \leq \frac{1}{9}; \quad 3) \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4; \quad 4) \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9.$$

8. Розв'язати нерівності:

$$1) 2^{9x-x^3} \geq 1;$$

$$2) (0,4)^{x^3-x^2-20x} < 1;$$

$$3) (2,56)^{\sqrt{x}-1} \geq \left(\frac{5}{8}\right)^{4\sqrt{x}+1};$$

$$4) (2,5)^{3\sqrt{x}+1} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{x}-1}.$$

9. Розв'язати нерівності:

$$1) 3 \cdot 2^x + 5^{x+1} \geq 3 \cdot 5^x + 2^{x+3};$$

$$2) 7 \cdot 2^{2x} + 2^{2x+1} \leq 3^{2x+1} + 3^{2x};$$

$$3) 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2};$$

10. Розв'язати нерівності:

1) $24^{x+1} - 9 \cdot 4^x + 4 \leq 0$;

2) $(0,5)^{4x-2} - 9 \cdot (0,25)^x + 2 \leq 0$;

3) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$;

4) $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$.

11. Які властивості логарифмічної функції використовуються при розв'язуванні логарифмічних нерівностей?

12. Розв'язати нерівності:

1) $\log_{0,2}(x+1) < -2$;

2) $\log_2(x-4) < 2$;

3) $\log_3(x+2) < 1$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) > -1$.

13. Розв'язати нерівності:

1) $\log_3 \frac{2x+1}{x+1} \geq 1$;

2) $\log_4 \frac{3x-1}{x-1} \geq 1$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$;

4) $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leq 1$.

14. Розв'язати нерівності:

1) $\log_4(x^2 - 6x + 8) \geq 0,5$;

2) $\log_{0,2}(x^2 - 2x - 3) \geq -1$;

3) $\log_5(x^2 + 2x - 3) \leq 1$;

4) $\log_{0,3}(x^2 - 5x + 7) > 0$.

15. Розв'язати нерівності:

1) $4\log_2^2(x-1) + \log_2(x-1) > 5$;

2) $\log_3^2 x - 3\log_3 x > -2$;

3) $4\log_5^2 x - \log_5 x > 2$;

4) $4\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$.

16. Розв'язати нерівності:

1) $\log_{0,1}(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,1}(10 - 2x)$;

2) $\log_2(x^2 + x - 2) \leq \log_2(2x + 10)$;

3) $\log_{0,3}(2x^2 - 9x + 4) \geq 2\log_{0,3}(x + 2)$;

4) $\log_{0,5}(2x^2 + 3x + 1) \geq 2\log_{0,5}(1 - x)$.

17. Розв'язати нерівності:

1) $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \frac{5}{2}$;

2) $\log_3 x + \log_x 9 > 2$;

3) $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$;

4) $\log_x \frac{3}{8-2x} \geq -2$.

18. Розв'язати нерівності:

1) $\log_{x-4}(2x^2 - 9x + 4) > 1$;

2) $\log_{x^2-3}(4x+2) > 1$;

3) $\log_x(\log_9(3^x - 9)) < 1$;

4) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

19. Розв'язати нерівності:

1) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1$;

3) $2\log_3 \log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} \log_3 (9\sqrt[3]{x}) \geq 1$;

4) $\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} - \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} < 0$.

20. Розв'язати нерівності:

1) $x^{0,5 \log_{0,5} x - 3} \geq (0,5)^{3 - 2,5 \log_{0,5} x}$;

2) $x^{\log_2 x} + 16x - \log_2 x < 17$;

3) $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x} + 3$;

4) $x^{\lg^2 x - 3 \lg x + 1} > 1000$.

21. Знайти області визначення функцій:

1) $y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}$;

2) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+1}{x-1}}$;

3) $y = \log_5 \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$;

4) $y = \log_2 \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 6}$.

1) $y = \sqrt{\frac{2x+3}{5-x}} + \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$;

2) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\lg \sqrt{x-1}}$;

3) $y = \lg(x^2 - 36) + \sqrt{7-x}$;

4) $y = \lg(x^2 - 25) + \sqrt{4-x}$.

4.17 Функція

1. Означення функції.
2. Функція – це закон відповідності, чи значення, яке вона приймає?
3. Як визначається функція при аналітичному способі задання?
4. Як визначається функція при табличному способі задання?
5. Як визначається функція при графічному способі задання?
6. Як визначається функція при словесному способі задання?
7. Що називають числовою послідовністю?
8. Що називають областю визначення функції?
9. Які обмеження накладають на область визначення дробово-раціональної функції?
10. В яких точках функція $y = \frac{x+2}{x-3}$ невизначена?
11. Які обмеження накладають на область визначення функції, що містять аргумент під коренем?

12. В яких точках функція $y = \frac{\sqrt{x+5}}{x-3}$ визначена?
13. Які обмеження накладають на область визначення логарифмічної функції?
14. В яких точках функція $y = \log_2(x-4)$ невизначена?
15. В яких точках функція $y = \log_{x+3} 7$ невизначена?
16. В яких точках функція $y = \log_{x-2}(x-3)$ визначена?
17. В яких точках функція $y = \log_{1-x}(x+7)$ невизначена?
18. Які обмеження накладають на область визначення тригонометричних функцій?
19. В яких точках функція $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ невизначена?
20. В яких точках функція $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ невизначена?
21. В яких точках функція $y = \sin\left(\frac{1}{x} + 5\right)$ невизначена?
22. В яких точках функція $y = \cos \frac{x+2}{x-3}$ невизначена?
23. В яких точках функція $y = \operatorname{tg}(\pi - x)$ визначена?
24. В яких точках функція $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ невизначена?
25. Які обмеження накладають на область визначення обернених тригонометричних функцій?
26. В яких точках функція $y = \arcsin(3x-1)$ визначена?
27. В яких точках функція $y = \arccos(2x+5)$ невизначена?
28. В яких точках функція $y = \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-3}$ невизначена?
29. В яких точках функція $y = \operatorname{arcctg} x^3$ невизначена?
30. Що називають областю зміни значень функції?
31. Які значення не може приймати функція $y = -x^2 + 3x - 2$?
32. Які обмеження накладають на область зміни значень тригонометричних функцій?
33. Які значення не може приймати функція $y = 5 \sin(2x+3)$?
34. Які значення не може приймати функція $y = 3 \cos(5x-2)$?
35. Які значення не може приймати функція $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x-2}$?
36. Які значення не може приймати функція $y = \operatorname{ctg} \frac{2-x}{x+1}$?
37. Які обмеження накладають на область зміни значень показникових функцій?
38. Які значення не може приймати функція $y = -2^{3x-1}$?
39. Які значення не може приймати функція $y = 3^{5x+1}$?

40. Які обмеження накладають на область зміни значень функції, що містить аргумент під корнем?
41. Які значення не може приймати функція $y = \sqrt{x-6}$?
42. Які значення не може приймати функція $y = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-1}}$?
43. Яку функцію називають парною?
44. Чи буде парною функція $y = x^2 - 3$?
45. Чи буде парною функція $y = x^3 - 3x$?
46. Чи буде парною функція $y = x^2 - 3x + 4$?
47. Чи буде парною функція $y = \operatorname{tg} x$?
48. Чи буде парною функція $y = \operatorname{ctg}(x^2 + 1)$?
49. Чи буде парною функція $y = \log_3 x$?
50. Чи буде парною функція $y = \sqrt{x^2 + 7}$?
51. Чи буде парною функція $y = \sqrt[3]{2 - x^3}$?
52. Чи буде парною функція $y = \cos(2x - 3)$?
53. Чи буде парною функція $y = \sin(3x^2 - 5)$?
54. Чи буде парною функція $y = \operatorname{tg}(x^2 + 6)$?
55. Чи буде парною функція $y = \operatorname{ctg}(3x + 7)$?
56. Яку функцію називають непарною?
57. Чи буде непарною функція $y = \sqrt[3]{2 - x^3}$?
58. Чи буде непарною функція $y = \log(3x - 4)$?
59. Чи буде непарною функція $y = \frac{x}{x^2 + 9}$?
60. Чи буде непарною функція $y = \sin(x^3 - x)$?
61. Чи буде непарною функція $y = \cos(x - 5)$?
62. Яку функцію називають знакосталою?
63. Чи буде знакосталою функція $y = \sqrt{x + 7}$?
64. Чи буде знакосталою функція $y = -|x^2 - 4|$?
65. Чи буде знакосталою функція $y = \cos|x|$?
66. Чи буде знакосталою функція $y = \log(x^2 + 2)$?
67. Поняття кореня функції.
68. Чи має корені функція $y = 2x^4 - 7x^2 + 8$?
69. Чи має корені функція $y = 7x^2 - 4x - 8$?
70. Чи має корені функція $y = 2x^2 + 8x + 3$?
71. Чи має корені функція $y = \lg(x^2 + 3x + 1)$?
72. Що називають проміжками знакосталості функції?
73. Яку функцію називають зростаючою?
74. Чи буде зростаючою функція $y = \log(x^2 + 2)$?

75. Чи буде зростаючою функція $y = \cos x + 1$?
76. Чи буде зростаючою функція $y = \sin(3x^2 + 2)$?
77. Яку функцію називають спадною?
78. Чи буде спадною функція $y = \log\left(\frac{1}{x} + 2\right)$?
79. Чи буде спадною функція $y = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$?
80. Чи буде спадною функція $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x} + 2\right)$?
81. Дайте означення максимуму функції?
82. Як відрізняються максимум та найбільше значення функції?
83. Дайте означення мінімуму функції?
84. Як відрізняються мінімум та найменше значення функції?
85. Що розуміють під поняттям „графік функції”?
86. Що розуміють під поняттям „границя числової послідовності”?
87. Які умови існування границі числової послідовності?
88. Чи має границю послідовність $a_n = \frac{n+2}{n^2+1}$?
89. Чи має границю послідовність $a_n = \frac{n^3+2}{n^2+1}$?
90. Чи має границю послідовність $a_n = n + \sqrt{n}$?
91. Чи має границю послідовність $a_n = \frac{n+2}{n+1}$?
92. Що розуміють під поняттям „границя функції в точці”?
93. Навести приклади границь, якщо в точці функція існує.
94. Що розуміють під поняттям границі функції у нескінченності?
95. Що розуміють під поняттям обмеженості функції?
96. Чи є обмеженою функція $y = \frac{1-x}{x+2}$ в точці $x = -2$?
97. Чи є обмеженою функція $y = \frac{1-x}{x^2-2}$ в точці $x = \sqrt{2}$?
98. Чи є обмеженою функція $y = \log_3(x-5)$ в точці $x = 5$?
99. Чи є обмеженою функція $y = \sqrt{x-4}$ в точці $x = 4$?
100. Що розуміють під відсутністю границі функції в точці?
101. Що розуміють під відсутністю границі функції на нескінченності?
102. Що розуміють під висловом „нескінченно мала функція”?
103. Чи є нескінченно малою функція $y = \log(x-1)$ в точці $x = 2$?
104. Чи є нескінченно малою функція $y = \sin(x-\pi)$ в точці $x = 2\pi$?
105. Чи є нескінченно малою функція $y = \sqrt{x-5}$ в точці $x = 2$?
106. Чи є нескінченно малою функція $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ в точці $x = \pi$?
107. Що розуміють під висловом „нескінченно велика функція”?

108. Чи є нескінченно великою функція $y = \log(x-1)$ в точці $x=1$?
109. Чи є нескінченно великою функція $y = \frac{3}{x}$ в точці $x=0$?
110. Який взаємозв'язок між нескінченно малою та нескінченно великою функцією?
111. Які нескінченно малі функції називають еквівалентними?
112. Чи є еквівалентними нескінченно малі функції $y = \sin x$ та $y = x$ в точці $x=0$?
113. Чи є еквівалентними нескінченно малі функції $y = \sin x$ та $y = \operatorname{tg} x$ в точці $x=0$?
114. Чи є еквівалентними нескінченно малі функції $y = \sin x$ та $y = \arcsin x$ в точці $x=0$?
115. Що розуміють під поняттям односторонньої границі функції в точці?
116. Чи збігаються односторонні границі функції $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ в точці $x=3$?
117. Чи збігаються односторонні границі функції $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$ в точці $x=2$?
118. Яку функцію називають неперервною в точці?
119. Яка різниця між означеннями неперервності функції в точці через односторонні границі функції та через нескінченно малі прирости?
120. Яка функція називається неперервною на відрізку?
121. Чи є неперервною функція $y = \frac{x-3}{x+1}$ в точці $x=-1$?
122. Чи є неперервною функція $y = \sqrt{x-3}$ в точці $x=3$?
123. Чи є неперервною функція $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ в точці $x=0$?
124. Чи є неперервною функція $y = 3^{2x}$ в точці $x=-1$?
125. Якому числу рівна границя виду $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$?
126. Якому числу рівна границя виду $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$?
127. Якому числу рівна границя виду $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$?
128. Якому числу рівна границя виду $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$?
129. Якому числу рівна границя виду $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x}$?
130. Яку функцію називають оберненою?
131. Які умови існування оберненої функції?
132. Чи є функція $y = 2^x$ оберненою для функції $y = \log_2 x$?
133. Чи є функція $y = x^3$ оберненою для функції $y = \sqrt[3]{x}$?
134. Чи є функція $y = \operatorname{arctg} x$ оберненою для функції $y = \operatorname{tg} x$?
135. Чи є функція $y = \cos x$ оберненою для функції $y = \frac{1}{\cos x}$?

136. Чи є функція $y = \operatorname{tg} x$ оберненою для функції $y = \operatorname{ctg} x$?
137. Що називають приростом аргументу?
138. Що називають приростом функції?

4.18 Похідна функції. Застосування похідної

1. Що називають похідною функції в точці?
2. Як безпосередньо обчислити похідну функції $y = x^2$ в точці $x = 0$?
3. Що називають похідною функції на проміжку?
4. Що розуміють під геометричним змістом похідної?
5. Чим є кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в точці?
6. Що розуміють під фізичним змістом похідної?
7. Чим є швидкість руху матеріальної точки?
8. Як обчислюється похідна сталої функції?
9. Як обчислюється похідна незалежної змінної?
10. Як обчислюється похідна добутку сталої величини на функцію?
11. Як обчислюється похідна суми двох функцій?
12. Як обчислюється похідна добутку двох функцій?
13. Як обчислюється похідна частки двох функцій?
14. Як обчислюється похідна добутку сталої на функцію?
15. Як обчислюється похідна складеної функції?
16. Як обчислюється похідна оберненої функції?
17. Як обчислюється похідна степеневі функції?
18. Як обчислюється похідна показникової функції?
19. Як обчислюється похідна логарифмічної функції?
20. Як обчислюється похідна функції $y = \sin x$?
21. Як обчислюється похідна функції $y = \cos x$?
22. Як обчислюється похідна функції $y = \operatorname{tg} x$?
23. Як обчислюється похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$?
24. Як обчислюється похідна функції $y = \arcsin x$?
25. Як обчислюється похідна функції $y = \arccos x$?
26. Як обчислюється похідна функції $y = \operatorname{arctg} x$?
27. Як обчислюється похідна функції $y = \operatorname{arcctg} x$?
28. Як записується рівняння дотичної до графіка функції?
29. Як обчислюється кут між двома кривими в заданій точці?
30. Яка необхідна умова зростання функції?
31. Чи може зростати функція $y = \frac{1}{x^3 + 1}$?
32. Яка достатня умова зростання функції?
33. На яких проміжках функція зростає $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 7$?
34. Яка необхідна умова спадання функції?
35. Чи може спадати функція $y = \frac{1}{1 - x^3}$?
36. Яка достатня умова спадання функції?

37. На яких проміжках функція $y = \frac{x^2 - 4}{x + 4}$ спадає?
38. Яка необхідна умова існування екстремуму функції?
39. Чи може мати екстремум функція $y = x^3 - x^2 + x$?
40. Яка достатня умова існування максимуму функції?
41. В яких точках існує максимум функції $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 9$?
42. Яка достатня умова існування мінімуму функції?
43. В яких точках існує мінімум функції $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 7$?
44. Що розуміють під поняттям „асимптоти функції в точці” (вертикальна асимптота)?
45. Що розуміють під поняттям „асимптоти функції на нескінченності” (горизонтальна асимптота)?
46. Що називають графіком функції?
47. Яку функцію називають лінійною функцією? Її графік.
48. Яку функцію називають обернено-пропорційною функцією? Її графік.
49. Яку функцію називають квадратичною функцією? Її графік.
50. Яку функцію називають кубічною функцією? Її графік.
51. Яку функцію називають степеневою функцією? Її графік.
52. Яку функцію називають дробово-раціональною функцією? Її графік.
53. Яку функцію називають показниковою функцією? Її графік.
54. Яку функцію називають логарифмічною функцією? Її графік.
55. Як називають функцію, задану виразом $y = \sin x$? Її графік.
56. Як називають функцію, задану виразом $y = \cos x$? Її графік.
57. Як називають функцію, задану виразом $y = \operatorname{tg} x$? Її графік.
58. Як називають функцію, задану виразом $y = \operatorname{ctg} x$? Її графік.
59. Як називають функцію, задану виразом $y = \arcsin x$? Її графік.
60. Як називають функцію, задану виразом $y = \arccos x$? Її графік.
61. Як називають функцію, задану виразом $y = \operatorname{arctg} x$? Її графік.
62. Як називають функцію, задану виразом $y = \operatorname{arcctg} x$? Її графік.
63. Як називають функцію, задану виразом $y = \sqrt{x}$? Її графік.
64. Як називають функцію, задану виразом $y = \sqrt[3]{x}$? Її графік.
65. Як називають функцію, задану виразом $y = \sqrt[n]{x}$? Її графік.
66. Як називають функцію, задану виразом $y = |x|$? Її графік.
67. Як називають функцію, задану виразом $y = [x]$? Її графік.
68. Як називають функцію, задану виразом $y = \{x\}$? Її графік.
69. Які графіки мають взаємно обернені функції?
70. Що спільного у графіках функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$?
71. Що спільного у графіках функцій $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$?
72. Що спільного у графіках функцій $y = \sin x$ та $y = \arcsin x$?

73. Що спільного у графіках функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{arctg} x$?
74. Що спільного у графіках функцій $y = 2x - 1$ та $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$?
75. Що називають елементарними перетвореннями графіків функцій?
76. Як перетворюються графіки функцій при паралельному перенесенні?
77. Як перетворюються графіки функцій при симетричному перенесенні?
78. Як перетворюються графіки функцій при стисненні відносно осі?
79. Як перетворюються графіки функцій при розтягуванні відносно осі?
80. Як побудувати графік функції виду $y = f(|x|)$?
81. Як побудувати графік функції виду $y = |f(x)|$?
82. Як обчислюється похідна частки двох функцій?
83. Як обчислюється похідна функції $y = \sin x$?
84. Як обчислюється похідна функції $y = \cos x$?
85. Як обчислюється похідна функції $y = \operatorname{tg} x$?
86. Як обчислюється похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$?
87. Яка необхідна умова зростання функції?
88. Яка достатня умова зростання функції?
89. Яка необхідна умова спадання функції?
90. Яка достатня умова спадання функції?
91. Знайти похідну функції $y = (2x + 1)^4$.
92. Знайти похідну функції $y = (3 - 5x)^5$.
93. Знайти проміжки зростання функції $y = x^2 - 2x + 3$.
94. Знайти проміжки спадання функції $y = x^2 - 6x + 8$.
95. Знайти критичні точки функції $y = 6 + 12x - x^3$.
96. Знайти проміжки зростання функції $y = 5x^2 - 3x + 1$.
97. Знайти проміжки спадання функції $y = x^2 - x$.
98. Знайти критичні точки функції $y = 2x^3 - 24x - 8$.
99. Знайти похідну функції $y = \cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right)$.
100. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{2} \sin^2 x$.
101. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$ на відрітку $[0; 3]$.
102. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = (x^2 - 1)(x + 1)$ на відрітку $[-2; 0]$.

5 ГЕОМЕТРІЯ. ПЛАНІМЕТРІЯ

5.1 Кути

1. Які кути називаються суміжними?
2. Чому дорівнює сума суміжних кутів?
3. Які кути називаються вертикальними?
4. Якщо один з кутів, утворених в результаті перетину двох прямих, прямий, то чому дорівнюють утворені решта три кути?
5. Чи можуть два суміжні кути бути обидва :
 - а) гострими?
 - б) тупими?
 - в) прямими?
6. Чому дорівнюють кути, утворені перетином двох прямих, коли відомо, що один з них у 4 рази більший від іншого?
7. Чому дорівнюють кути, утворені перетином двох прямих, якщо сума трьох з них дорівнює 270°?
8. Чому дорівнює кут між бісектрисами двох суміжних кутів?

5.2 Рівнобедрений і рівносторонній трикутники

1. Сформулювати три ознаки рівності трикутників.
2. Подібні трикутники(означення).
3. Сформулювати ознаки подібності трикутників.
4. Означення рівнобедреного трикутника. Властивість кутів рівнобедреного трикутника.
5. Означення висоти, бісектриси і медіани трикутника.
6. Означення рівностороннього трикутника. Записати формулу для знаходження площі рівностороннього трикутника, якщо відома сторона a .
7. Записати формулу для знаходження висоти рівностороннього трикутника, якщо відома сторона a .
8. Записати формулу для знаходження площі рівнобедреного трикутника, якщо бічна сторона дорівнює b , а кут між бічними сторонами дорівнює α .
9. Записати формулу для знаходження площі рівнобедреного трикутника, якщо відомо його основу a і висоту h .
10. Висота правильного трикутника дорівнює 10 см. Обчислити периметр трикутника.
11. Периметр правильного трикутника дорівнює 63 см. Знайти медіану трикутника.
12. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як 5:7. Периметр цього трикутника дорівнює 91,8 см. Знайти сторони трикутника.

13. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см. Обчислити периметр трикутника, якщо основа трикутника відноситься до бічної сторони як 4 : 3.
14. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 56° . Знайти інші кути трикутника.
15. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 71° . Знайти інші кути трикутника.
16. Кут при вершині рівнобедреного трикутника на 66° більший від кута при основі. Знайти кути трикутника.
17. Зовнішній кут рівнобедреного трикутника при основі дорівнює 110° . Знайти кути трикутника.
18. У рівносторонньому трикутнику медіана дорівнює $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ см. Знайти периметр трикутника.
19. У рівносторонньому трикутнику бісектриса дорівнює $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см. Знайти периметр трикутника.
20. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 35 см. Знайти основу трикутника, якщо вона менша від бічної сторони на 2,5 см.
21. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 21 см. Знайти бічну сторону трикутника, якщо вона більша від основи на 1,5 см.
22. Периметр трикутника дорівнює 108 см. Знайти сторони трикутника, якщо вони прямо пропорційні числам 8; 5 і 5. Визначити вид трикутника.
23. Знайти сторони трикутника, якщо вони прямо пропорційні числам 4; 7 і 7, а периметр трикутника дорівнює 45 см. Визначити вид трикутника.
24. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а висота, проведена до неї, дорівнює $\sqrt{11}$ см. Знайти бічну сторону трикутника.
25. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 13 см, а основа дорівнює 10 см. Знайти висоту, проведену до основи.

5.3 Прямокутні та різносторонні трикутники

1. Записати формулу для знаходження площі прямокутного трикутника, якщо відомо катети a і b .
2. Сформулювати теорему Піфагора.
3. Чому дорівнює квадрат висоти, проведеної до гіпотенузи в прямокутному трикутнику?
4. Записати формулу для знаходження площі трикутника, якщо відомо основу і висоту трикутника.
5. Записати формулу для знаходження площі трикутника, якщо відомо дві його сторони і кут між ними.
6. Записати формулу Герона для знаходження площі трикутника.

7. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см. Обчислити периметр трикутника, якщо один з катетів дорівнює 20 см.
8. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3:4. Знайти катети трикутника, якщо гіпотенуза дорівнює 50 см.
9. Гіпотенуза прямокутного трикутника відноситься до катета як 5:4. Знайти сторони трикутника, якщо другий катет дорівнює 30 см.
10. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 120 см. Знайти сторони трикутника, якщо вони відносяться як 3: 4: 5.
11. Сторони прямокутного трикутника відносяться як 5:12:13. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 см.
12. Катет прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а медіана, проведена до другого катета, дорівнює 13 см. Обчислити периметр трикутника.
13. Катет прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а медіана, проведена до другого катета дорівнює 10 см. Обчислити периметр трикутника.
14. Сторони трикутника дорівнюють 30 см, 35 см і 40 см. Знайти довжини середніх ліній, проведених у трикутнику.
15. У трикутнику проведені середні лінії, довжини яких дорівнюють 3,5см; 4,2 см і 4,5 см. Знайти сторони трикутника.
16. Кути трикутника пропорційні числам 2; 3; 4;. Знайти кути трикутника.
17. Кути трикутника відносяться як 5: 6 :7. Знайти кути трикутника.
18. У трикутнику два кути відносяться як 2: 3. Знайти кути трикутника, якщо третій кут дорівнює 80° .
19. Дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 10 см. Знайти третю сторону трикутника, якщо кут між ними 60° .
20. Дві сторони трикутника утворюють кут 60° , а їх довжини дорівнюють 16 см і 6 см. Знайти третю сторону трикутника.
21. Сторони трикутника, які утворюють кут 60° , дорівнюють 25 см і 40 см. Обчислити периметр трикутника.
22. Дві сторони трикутника утворюють кут 60° і дорівнюють 5 см і 8 см. Обчислити периметр трикутника.
23. Дві сторони трикутника дорівнюють 78 см і 75 см, а висота, проведена до третьої сторони, дорівнює 72 см. Обчислити довжини відрізків, на які ділить третю сторону висота.
24. Бісектриса кута трикутника, сторони якого дорівнюють 18 см і 30 см, ділить протилежну сторону на відрізки, різниця яких дорівнює 10 см. Обчислити периметр трикутника.
25. Бісектриса кута трикутника, різниця сторін якого дорівнює 12 см, ділить протилежну сторону на відрізки 15 см і 25 см. Знайти сторони трикутника.

5.4 Паралелограм, ромб, квадрат, прямокутник

1. Записати формули для знаходження площі паралелограма.

2. Записати формули для знаходження площі прямокутника, квадрата, ромба.
3. Означення діагоналей чотирикутника.
4. Чому дорівнює сума квадратів діагоналей паралелограма?
5. Чому дорівнює сума квадратів діагоналей ромба?
6. Чому дорівнює площа довільного чотирикутника?
7. Один з кутів паралелограма дорівнює 70° . Знайти інші кути паралелограма.
8. Тупий кут паралелограма дорівнює 120° . Знайти кути паралелограма.
9. Кути паралелограма, що прилягають до однієї сторони, відносяться як 1: 2. Знайти кути паралелограма.
10. Сторони паралелограма відносяться як 3: 5. Обчислити периметр паралелограма, якщо менша сторона дорівнює 9 см.
11. Більша сторона паралелограма дорівнює 12 см. Обчислити периметр паралелограма, якщо його сторони відносяться як 2: 3.
12. Різниця двох сторін паралелограма дорівнює 4 см. Знайти сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.
13. Сума двох сторін паралелограма дорівнює 20 см. Знайти сторони паралелограма, якщо вони відносяться як 2: 3.
14. Периметр паралелограма дорівнює 60 см. Знайти сторони паралелограма, якщо вони відносяться як 2: 3.
15. Одна сторона паралелограма у 2 рази більша від іншої. Знайти сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 36 см.
16. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить протилежну сторону на відрізки 6 см і 5 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайти сторони паралелограма.
17. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить протилежну сторону на відрізки 10 см і 6 см, починаючи з вершини тупого кута. Знайти сторони паралелограма.
18. Сторони прямокутника дорівнюють 20 см і 15 см. Знайти діагональ прямокутника.
19. Одна сторона прямокутника більша від іншої на 5 см. Знайти сторони прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 25 см.
20. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см. Обчислити периметр ромба.
21. Сторона ромба дорівнює 20 см, а його діагоналі відносяться як 3: 4. Знайти діагоналі ромба.
22. Сторона квадрата дорівнює 10 см. Знайти діагональ квадрата.
23. Діагональ квадрата дорівнює 12 см. Знайти сторону квадрата.
24. З вершини кута прямокутника проведено бісектрису, яка ділить діагональ на відрізки 15 см і 20 см. Обчислити периметр трикутника.
25. Діагоналі ромба відносяться як 3: 4. Знайти діагоналі ромба, якщо його периметр дорівнює 100 см.

5.5 Трапеція

1. Означення трапеції. Записати формулу для знаходження площі трапеції та формулу для знаходження середньої лінії трапеції.
2. Основи трапеції відносяться як 2: 5. Середня лінія дорівнює 35 см. Знайти основи трапеції.
3. Основи трапеції відносяться як 2: 3. Знайти середню лінію трапеції, якщо різниця основ дорівнює 10 см.
4. Середня лінія трапеції дорівнює 25 см. Знайти основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 10 см.
5. У рівнобічній трапеції кути, що прилягають до бічної сторони, відносяться як 1: 2. Знайти кути трапеції.
6. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 10 і 16 см, а висота дорівнює 4 см. Знайти бічну сторону трапеції.
7. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 12 см і 18 см, а висота дорівнює 4 см. Знайти бічну сторону трапеції.
8. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює 15 см. Обчислити периметр трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 20 см.
9. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює середній лінії. Обчислити периметр трапеції, якщо бічна сторона дорівнює 15 см.
10. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 12 см. Знайти площу трапеції, якщо її висота дорівнює 5,5 см.
11. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см. Знайти висоту трапеції, якщо її площа дорівнює 150 см^2 .
12. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 6 см, а кут при основі дорівнює 45° . Обчислити площу трапеції.
13. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 12 см, висота дорівнює 4 см, а бічна сторона дорівнює 5 см. Обчислити площу трапеції.
14. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює 6 см, бічна сторона дорівнює 5 см, а висота дорівнює 4 см. Обчислити площу трапеції.

5.6 Коло

1. Означення кола.
2. Записати формулу для знаходження довжини кола та формулу для знаходження площі круга.
3. Означення круга.
4. У колі проведено хорду довжиною 12 см. Знайти відстань від центра кола до хорди, якщо його радіус дорівнює 10 см.
5. У колі проведено хорду довжиною 12 см. Знайти радіус кола, якщо відстань від центра кола до хорди дорівнює 8 см.
6. З точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди довжиною 15 см і 20 см. Знайти відстань між кінцями хорд.

7. Відстань від точки на колі до кінців діаметра дорівнює 10 см і 24 см. Знайти радіус кола.
8. Відстань від точки кола до кінців діаметра дорівнює 30 см і 40 см. Знайти діаметр кола.
9. Довжина кола дорівнює 6π см. Знайти площу круга.
10. Площа круга дорівнює $78,5 \text{ см}^2$. Знайти діаметр круга.
11. Яка фігура називається колом?
12. Яке коло є описаним навколо трикутника?
13. Де знаходиться центр кола, описаного навколо трикутника?
14. Яке коло є вписаним в трикутник?
15. Де знаходиться центр кола, вписаного в трикутник?
16. Який дотик кіл називається:
 - а) зовнішнім?
 - б) внутрішнім?
17. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних точок?
18. Який кут є вписаним в коло?
19. Чому дорівнює кут, вписаний в коло?
20. Чому дорівнюють вписані кути, сторони яких проходять через кінці діаметра кола?
21. З точки кола проведено діаметр і хорду, що дорівнює радіусу. Чому дорівнює кут між ними?
22. З точки кола проведено дві хорди, кожна з яких дорівнює радіусу. Чому дорівнює кут між ними?
23. Чому дорівнюють кути, під якими перетинаються прямі, що дотикаються до кола в кінцях хорди, яка дорівнює радіусу?
24. Чи можуть дотикатися кола, якщо їх радіуси дорівнюють 25 см і 50 см, а відстань між центрами становить 60 см?
25. Сторона трикутника дорівнює 10 см, а протилежний їй кут – 150° . Чому дорівнює радіус описаного кола?
26. Де знаходиться центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника?
27. На які два трикутники ділить прямокутний трикутник медіана, проведена до гіпотенузи?
28. За якою формулою знаходиться довжина кола радіуса R ?
29. За якою формулою знаходиться довжина дуги кола радіуса R , що відповідає центральному куту n° ?
30. Як отримати радіанну міру кута з градусної і навпаки?

5.7 Многокутники

1. За якою формулою можна знайти суму внутрішніх кутів опуклого n -кутника?
2. Який многокутник називається правильним?

3. За якою формулою можна знайти радіус кола, описаного навколо правильного многокутника із стороною a і кількістю сторін n ?
4. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника зі стороною a ?
5. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо квадрата зі стороною a ?
6. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо шестикутника зі стороною a ?
7. За якою формулою можна знайти радіус кола, вписаного в правильний многокутник із стороною a і кількістю сторін n ?
8. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a ?
9. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в квадрат зі стороною a ?
10. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в правильний шестикутник зі стороною a ?
11. Чому дорівнює відношення периметрів двох подібних правильних n -кутників зі сторонами a і b ?
12. Чому дорівнює відношення радіусів вписаних і описаних кіл двох подібних правильних n -кутників зі сторонами a і b ?

5.8 Вписані і описані фігури

1. Сформулювати теорему синусів і записати чому дорівнює кожне з трьох відношень, якщо відомо радіус кола R , описаного навколо трикутника.
2. Формула радіуса кола, вписаного у правильний трикутник.
3. Формула радіуса кола, описаного навколо правильного трикутника.
4. Формула радіуса кола, описаного навколо квадрата.
5. Скільки градусів містить центральний кут, якщо відповідна йому дуга становить $2/3$ кола?
6. Записати формулу радіуса описаного кола навколо правильного шестикутника.
7. Записати формулу радіуса вписаного кола в правильний шестикутник.
8. Записати формулу для радіуса описаного кола навколо трикутника, сторони якого a , b , c .
9. Записати формулу для радіуса вписаного у трикутник кола, сторони якого a , b , c .
10. Записати формулу для знаходження радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник, якщо a , b – катети трикутника, c – гіпотенуза.
11. Теорема косинусів.
12. Записати формулу для знаходження площі описаного многокутника, якщо відомо p — півпериметр його, та r — радіус кола вписаного в цей многокутник.

13. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а основа 24 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.
14. Радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює 25 см. Площа трикутника дорівнює 192 см^2 . Знайти бічну сторону трикутника, якщо його основа дорівнює 24 см.
15. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 192 см^2 , а радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 12,5 см. Знайти основу трикутника, якщо бічна сторона трикутника дорівнює 20 см.
16. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а основа дорівнює 24 см. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник, якщо його площа дорівнює 192 см^2 .
17. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 192 см^2 , а основа дорівнює 24 см. Знайти бічну сторону трикутника, якщо радіус кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює 6 см.
18. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 192 см^2 , а його бічна сторона дорівнює 20 см. Знайти основу трикутника, якщо радіус кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює 6 см.
19. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.
20. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 6,5 см. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника.
21. Катети прямокутного трикутника відносяться як 5: 12. Знайти сторони трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 13 см.
22. Сторони прямокутного трикутника відносяться як 3: 4: 5, а його периметр дорівнює 48 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.
23. Діагональ прямокутника, вписаного в коло, дорівнює 80 см. Знайти радіус кола.
24. Радіус кола, описаного навколо прямокутника дорівнює 8 см. Знайти діагональ прямокутника.
25. Сторони прямокутника, вписаного в коло, дорівнюють 12 см і 16 см. Знайти радіус кола.

5.9 Вектор. Декартові координати (на площині і у просторі)

1. Записати рівняння кола.
2. Записати формулу відстані між двома точками на площині.
3. Яке число називається скалярним добутком двох векторів, які задано на площині?
4. Яке число називається скалярним добутком двох векторів, які задано у просторі?
5. Чому дорівнює скалярний добуток двох векторів, якщо відомо абсолютні величини цих векторів і кут між ними?

6. Записати координати середини відрізка, якщо координати кінців відрізка задано на площині.
7. Записати координати середини відрізка, якщо координати кінців відрізка задано у просторі.
8. Записати умову перпендикулярності двох векторів.
9. Записати умову колінеарності двох векторів, які задано на площині.
10. Записати умову колінеарності двох векторів, які задано у просторі.
11. Що є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які задано в просторі?
12. За якою формулою знаходиться кут між двома векторами?
13. Чому дорівнює абсолютна величина вектора $\overline{AB}$, якщо задано координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$?
14. Знайти відстань між точками A і B , якщо $A(1;2)$; $B(-2;6)$.
15. Знайти відстань між точками A і B , якщо $A(4;-2)$; $B(1;2)$.
16. Скласти рівняння кола, центр якого знаходиться в початку координат, а радіус дорівнює 5 см.
17. Скласти рівняння кола, центр якого знаходиться в початку координат, а радіус дорівнює 9 см.
18. Рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$. Чи лежать на колі точки $A(1;2)$ і $B(-4;3)$?
19. Рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$. Чи лежать на колі точки $M(5;-1)$ і $N(3;4)$?
20. Знайти координати середини відрізка AB , якщо $A(1;0)$ і $B(2;3)$.
21. Знайти координати середини відрізка AB , якщо $A(2;3)$ і $B(3;2)$.
22. Знайти вектор $\vec{c}$, що дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2;5)$; $\vec{b}(4;-3)$.
23. Знайти вектор $\vec{c}$, що дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}(10;-4)$; $\vec{b}(-4;8)$.
24. Дано вектор $\vec{a}(2;-3)$. Знайти вектор $\vec{c} = 2\vec{a}$.
25. Які знаки мають координати точки на площині, якщо вона належить першій чверті?
26. Які знаки мають координати точки на площині, якщо вона належить другій чверті?
27. Які знаки мають координати точки на площині, якщо вона належить третій чверті?
28. Які знаки мають координати точки на площині, якщо вона належить четвертій чверті?
29. Чому дорівнюють абсциси точок, що лежать на осі ординат?
30. Чому дорівнюють ординати точок, що лежать на осі абсцис?
31. Чому дорівнюють координати початку координат?
32. Яка формула координат середини відрізка на площині?
33. Вкажіть формулу відстані між двома точками на площині.
34. Вкажіть рівняння кола.
35. Які особливості розміщення прямої, якщо в рівнянні $ax + by + c = 0$ коефіцієнт $a = 0$?

36. Які особливості розміщення прямої, якщо в рівнянні $ax + by + c = 0$ коефіцієнт $b = 0$?
37. Які особливості розміщення прямої, якщо в рівнянні $ax + by + c = 0$ коефіцієнт $c = 0$?
38. Який геометричний зміст коефіцієнта k у рівнянні прямої $y = kx + q$?
39. За якої умови пряма і коло не перетинаються?
40. За якої умови пряма і коло перетинаються у двох точках?
41. За якої умови пряма і коло дотикаються?
42. Що таке вектор?
43. Які півпрямі називаються однаково напрямленими?
44. Які півпрямі називаються протилежно напрямленими?
45. Що означає: вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ однаково напрямлені?
46. Що таке абсолютна величина вектора?
47. Які вектори називаються рівними?
48. Що таке координати вектора?
49. Дайте означення суми векторів.
50. Доведіть векторну рівність $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.
51. Дайте означення різниці векторів.
52. Дайте означення добутку вектора на число.
53. Які вектори називаються колінеарними?
54. Який вектор називається одиничним?
55. Дайте означення скалярного добутку векторів.
56. Як визначається кут між векторами?
57. Чому дорівнює кут між однаково напрямленими векторами?
58. Чому дорівнює скалярний добуток векторів, якщо вони перпендикулярні?
59. На прямій, паралельній осі Ox , є дві точки. Одна з них має ординату $y = 2$. Чому дорівнює ордината другої точки?
60. На прямій, перпендикулярній до осі Ox , задано дві точки. Одна з них має абсцису $x = 3$. Чому дорівнює абсциса другої точки?
61. Якою є сума координат основи перпендикуляра, який опущено з точки $A(2; 3)$ на вісь Ox ?
62. При якому значенні x точки $A(4; 3)$ і $B(x; -1)$ розміщені на одній прямій, паралельній осі Oy .
63. Які точки симетричні точці $M(2; 3)$ відносно координатних осей.
64. Скільки існує точок на осі ординат рівновіддалених від точки $A(4; -6)$ на відстань 5 одиниць.
65. Вкажіть суму координат вершини D паралелограма, якщо три послідовні його вершини: $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(3; -1)$.
66. Чому дорівнює різниця між абсцисою і ординатою точки перетину прямої з віссю Oy , якщо пряма задана рівнянням $x + 2y + 3 = 0$?
67. Чому дорівнює сума координат точки з абсцисою $x = -1$, якщо ця точка належить прямій $3x + 4y = 1$?

68. Вказати різницю між абсцисою і ординатою точки перетину прямих, заданих рівняннями $x + 2y + 3 = 0$ і $4x + 5y + 6 = 0$.
69. Чому дорівнюють коефіцієнти a і b прямої $ax + by = 1$, якщо вона проходить через точки $(1; 2)$ і $(2; 1)$?
70. Вказати рівняння кола з центром в точці C , яке проходить через точку A , якщо $A(-1; -1)$ і $C(-4; 3)$.
71. Вкажіть центр кола на осі Ox , якщо відомо, що коло проходить через точку $(1; 4)$ і радіус кола дорівнює 5.
72. Знайдіть координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0$.
73. Визначити найкоротшу відстань між двома колами:
 $x^2 + y^2 + 6x - 4y = -9$, і $x^2 + y^2 - 6x + 4y = -12$.
74. Визначити найкоротшу відстань між двома колами:
 $x^2 + y^2 + 4x - 8y = -16$, $x^2 + y^2 - 4x + 8y = -19$.
75. Визначити найкоротшу відстань між двома колами:
 $x^2 + y^2 - 10y + 2x = -22$, $x^2 + y^2 - 2y - 10x = -22$.
76. Визначити найкоротшу відстань між двома колами:
 $x^2 + y^2 - 6y - 2x = -9$, $x^2 + y^2 + 2y - 6x = -1$.
77. Знайти відстань від центра кола $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ до вершини параболу $y = x^2 + 4x + 5$.
78. Вказати рівняння прямої, що проходить через точки $A(2; 3)$, $B(1; 4)$.
79. Яким буде рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 3)$ і паралельна прямій $2y + x - 4 = 0$.
80. Знайти рівняння кола з діаметром AB , якщо $A(0; 2)$, $B(6; -2)$.
81. Знайти координати вектора $\vec{a}$, колінеарного вектору $\vec{b}(3; -4)$, якщо $|\vec{a}| = 15$.
82. Знайти вектор $\vec{a}$, колінеарний вектору $\vec{b}(2; 3)$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 26$.
83. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 3)$ та утворює з віссю абсцис гострий кут, тангенс якого дорівнює 3.
84. Чому дорівнює сума довжин хорд кола, які лежать на осях координат, якщо рівняння кола: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.
85. Знайдіть суму довжин векторів $2\vec{a} + 3\vec{b}$ і $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, якщо $\vec{a}(3; 5)$, $\vec{b}(-2; -4)$.
86. Знайти координати і довжину вектора $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, якщо $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(3; 0)$, $\vec{c}(4; -3)$.
87. Знайти косинус кута між векторами $2\vec{a}$ та $\frac{1}{3}\vec{b}$, якщо $\vec{a}(1; -2)$ і $\vec{b}(6; 3)$.
88. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$ та його довжину, якщо $\vec{c} = 7\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{a}(1; -1)$ і $\vec{b}(5; -2)$.
89. Знайти точки з абсцисою 7 на колі, заданому рівнянням $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

90. Знайти точки з ординатою 8 на колі, заданому рівнянням $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
91. Знайти довжину відрізка, обмеженого точками перетину прямої $3x - 4y + 12 = 0$ з осями координат.
92. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; -3)$ і утворює з віссю абсцис такий самий кут, що і пряма $5y - 3x + 10 = 0$.
93. Визначити кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо: $\vec{a}(2; 5)$ і $\vec{b}(3; -7)$.
94. Знайти довжину середньої лінії трапеції, якщо: $A(-2; -3)$, $B(-3; 1)$, $C(7; 7)$, $D(3; 0)$.
95. Встановити вид трикутника за координатами його вершин: $A(15; 10)$, $B(11; 7)$, $C(3; 15)$.
96. Знайти координати вершини D паралелограма за координатами трьох його вершин A , B , C , якщо: $A(2; 3)$, $B(1; 4)$, $C(0; -2)$.
97. Знайти координати вектора $\vec{x}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{a}(6; -8)$ і утворює гострий кут з віссю Ox і $|\vec{x}| = 50$.
98. Знайти координати вектора $\vec{y}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{a}(-5; 12)$ і утворює гострий кут з віссю Oy і $|\vec{y}| = 13$.
99. Вказати координати вектора $\vec{b}$, якщо $|\vec{b}| = \sqrt{13}$ і вектор $\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{a}(3; 2)$ та утворює тупий кут з віссю Oy .
100. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}| = 5$ і вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до вектора $\vec{b}(-3; 4)$ та утворює гострий кут з віссю Ox .
101. Знайти таку точку $D(x; y)$, щоб вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$ були рівними, якщо $A(1; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 1)$.
102. При яких m і n абсолютна величина вектора $\vec{a}(5; m)$ дорівнює 13, а вектора $\vec{b}(n; 24)$ дорівнює 25?
103. При якому значенні m вектори $\vec{a}(3; 4)$ і $\vec{b}(m; 2)$ перпендикулярні?
104. При яких значеннях λ і μ має місце векторна рівність $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, якщо $\vec{a}(1; 0)$, $\vec{b}(1; 1)$, $\vec{c}(-1; 0)$.

6 СТЕРЕОМЕТРІЯ

6.1 Основні поняття, аксіоми і теореми стереометрії

1. Назвати основні поняття стереометрії.
2. Що називається простором у стереометрії?
3. Що називається фігурою?
4. Які фігури називаються плоскими?
5. Дати означення паралельності прямої і площини.
6. Сформулювати ознаку паралельності прямої і площини.
7. Дати означення паралельності площин.

8. Сформулювати ознаку паралельності площин.
9. Дати означення перпендикулярності прямої і площини.
10. Сформулювати теорему про перпендикулярність прямої і площини.
11. Дати означення перпендикулярності двох площин.
12. Сформулювати теорему про перпендикулярність двох площин.
13. Сформулювати теорему про три перпендикуляри.

6.2 Призма

1. Площа бічної грані правильної трикутної призми дорівнює 48 см^2 , а периметр основи – 12 см. Обчислити бічне ребро призми.
2. Площа бічної грані чотирикутної призми дорівнює 48 см^2 , а периметр основи – 12 см. Обчислити бічне ребро призми.
3. Бічна грань правильної трикутної призми – квадрат, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{2}$. Обчислити периметр основи призми.
4. Бічна грань правильної чотирикутної призми – квадрат, діагональ якого дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Обчислити периметр основи призми.
5. Діагональний переріз правильної чотирикутної призми – квадрат, площа якого дорівнює 18 см^2 . Обчислити периметр основи призми.
6. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 8 см, а її бічне ребро – 10 см. Обчислити об'єм призми.
7. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, а її бічне ребро – $2\sqrt{3}$ см. Обчислити об'єм призми.
8. Висота правильної трикутної призми дорівнює $4\sqrt{3}$, а радіус кола, описаного навколо її основи, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Обчислити об'єм призми.
9. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, – 8 см. Обчислити об'єм призми, якщо її висота рівна 14 см.
10. В основі призми лежить прямокутний трикутник з катетами 6 см та 8 см. Висота призми рівна 10 см. Обчислити об'єм призми.
11. Периметр основи правильної трикутної призми дорівнює 24 см. Обчислити діагональ бічної грані призми, якщо її площа дорівнює 48 см^2 .
12. У правильній трикутній призмі площа основи дорівнює $4\sqrt{3} \text{ см}^2$. Обчислити висоту призми, якщо діагональ бічної грані дорівнює 5 см.
13. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з основою 12 см та висотою, проведеною до неї, 8 см. Обчислити діагональ грані, що містить бічну сторону трикутника, якщо висота призми дорівнює 24 см.
14. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 8 см та 6 см. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу цього трикутника, дорівнює 26 см. Обчислити висоту призми.

15. В правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 4 см. Обчислити висоту цієї призми, якщо її діагональ дорівнює 9 см.
16. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною 10 см та медіаною, проведеною до основи, 8 см. Обчислити об'єм призми, якщо діагональ найбільшої грані дорівнює 13 см.
17. У правильній чотирикутній призмі радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює $10\sqrt{2}$ см. Діагональ бічної грані 25 см. Обчислити об'єм призми.
18. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з основами 9 см та 14 см і більшою бічною стороною 13 см. Обчислити об'єм призми, якщо менша її діагональ 25 см.
19. В основі прямої призми лежить прямокутник зі стороною 6 см та радіусом описаного кола 5 см. Обчислити об'єм призми, якщо її діагональ рівна 26 см.
20. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з основою 12 см та бічною стороною 10 см. Обчислити об'єм призми, якщо діагональ меншої бічної грані дорівнює 26 см.
21. В правильній чотирикутній призмі діагональ дорівнює 9 см, а діагональ основи - $4\sqrt{2}$ см. Обчислити повну поверхню призми.
22. В правильній чотирикутній призмі діагональ дорівнює 9 см, а її висота 1 см. Обчислити повну поверхню призми.
23. У правильній трикутній призмі радіус кола, вписаного в основу, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут 45° . Обчислити бічну поверхню призми.
24. У правильній трикутній призмі медіана основи дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а діагональ бічної грані – 10 см. Обчислити бічну поверхню призми.
25. В основі прямої призми лежить ромб з діагоналями 10 та 24 см. Менша діагональ призми дорівнює 26 см. Обчислити повну поверхню призми.

6.3 Піраміда

1. Площа бічної грані правильної трикутної піраміди дорівнює 48 см^2 , а периметр основи – 12 см. Обчислити апофему піраміди.
2. Площа бічної грані чотирикутної піраміди дорівнює 96 см^2 , а периметр основи – 24 см. Обчислити апофему піраміди.
3. Бічна грань правильної трикутної піраміди – правильний трикутник, висота якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Обчислити периметр основи призми.
4. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди – правильний трикутник, висота якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Обчислити периметр основи піраміди.

5. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди – правильний трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ см². Обчислити периметр основи піраміди.
6. Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди – правильний трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ см². Обчислити площу основи піраміди.
7. Бічна грань правильної трикутної піраміди – правильний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см. Обчислити площу основи піраміди.
8. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а діагональ її основи дорівнює 6 см. Обчислити об'єм піраміди.
9. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 8, 9, та 13 см. Висоти всіх бічних граней піраміди дорівнюють 10 см. Обчислити бічну поверхню піраміди.
10. В основі піраміди лежить ромб, висота якого дорівнює 6 см, а його площа 60 см². Висоти всіх бічних граней піраміди дорівнюють 10 см. Обчислити бічну поверхню піраміди.
11. В правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а бічне ребро – 5 см. Обчислити висоту піраміди.
12. В основі піраміди лежить прямокутник, сторони якого дорівнюють 6 та 8 см. Всі бічні ребра піраміди дорівнюють 13 см. Обчислити висоту цієї піраміди
13. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а бічна сторона 10 см. Висоти всіх бічних граней дорівнюють 5 см. Обчислити висоту піраміди.
14. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник, один з катетів якого дорівнює 6 см. Всі бічні ребра піраміди дорівнюють 13 см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Обчислити другий катет трикутника.
15. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює 4 см, а її висота - $\sqrt{13}$ см. Обчислити сторону основи піраміди.
16. У правильній чотирикутній піраміді апофема дорівнює 5 см, а радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Обчислити об'єм піраміди.
17. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а висота, проведена до неї, – 4 см. Основою висоти піраміди є вершина даного трикутника, яка протилежна його основі. Більше бічне ребро дорівнює 13 см. Обчислити об'єм піраміди.
18. Основою піраміди є ромб, площа якого дорівнює 600 см², а сторона – 25 см. Висоти всіх бічних граней дорівнюють 15 см. Обчислити об'єм піраміди.
19. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник, катет якого 6 см, а радіус описаного навколо нього кола 5 см. Всі бічні ребра піраміди дорівнюють 13 см. Обчислити об'єм піраміди.

20. У правильній трикутній піраміді радіус вписаного в основу кола дорівнює $\sqrt{3}$ см, а її апофема - $\sqrt{51}$ см. Обчислити об'єм піраміди.
21. В основі піраміди лежить ромб, площа якого дорівнює 600 см^2 , а сторона - 25 см. Основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей. Обчислити бічну поверхню піраміди, якщо її висота дорівнює 9 см.
22. Основою піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює 150 см^2 , а його периметр 60 см. Основою висоти є точка перетину бісектрис даного трикутника. Обчислити бічну поверхню піраміди, якщо її висота дорівнює 12 см.
23. Основою піраміди є правильний трикутник, сторона якого дорівнює 12 см. Основою висоти піраміди є середина сторони цього трикутника. Висота більшої бічної грані дорівнює 6 см. Обчислити бічну поверхню піраміди.
24. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює 6 см, а висота - $\sqrt{13}$ см. Обчислити бічну поверхню піраміди.
25. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 25 см, а радіус вписаного в нього кола дорівнює 5 см. Висоти всіх бічних граней піраміди дорівнюють 13 см. Обчислити бічну поверхню піраміди.

6.4 Циліндр

1. Осьовим перерізом циліндра є квадрат. Площа основи циліндра дорівнює $36\pi \text{ см}^2$. Обчислити висоту циліндра.
2. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Обчислити об'єм циліндра.
3. Довжина основи циліндра дорівнює 12π см, а його висота дорівнює 10 см. Обчислити об'єм циліндра.
4. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого 64 см^2 . Обчислити бічну поверхню циліндра.
5. В циліндрі на відстані 8 см від його осі і паралельно їй зроблено переріз, діагональ якого дорівнює 13 см. Обчислити висоту циліндра, якщо його радіус дорівнює 10 см.
6. В циліндрі на відстані 8 см від його осі і паралельно їй проведено переріз, площа якого дорівнює 120 см^2 . Обчислити висоту циліндра, якщо його радіус дорівнює 10 см.
7. В нижній основі циліндра хорда, яка дорівнює 6 см, віддалена від його осі на 4 см. Обчислити об'єм циліндра, якщо відстань від центра верхньої основи до кінця цієї хорди дорівнює 13 см.
8. В циліндрі на відстані 6 см від його осі і паралельно їй зроблено переріз, діагональ якого дорівнює 20 см^2 . Обчислити бічну поверхню циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 10 см.

9. В циліндрі на відстані 24 см від його осі і паралельно їй зроблено переріз, діагональ якого дорівнює 25 см^2 . Обчислити бічну поверхню циліндра, якщо цей переріз перетинає основу по хорді, яка дорівнює 20 см.
10. Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює 8 см, проведено площину, що перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу 120° . Знайти площу перерізу, якщо його діагональ дорівнює 16 см.
11. Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює $6\sqrt{2}\text{ см}$, проведено площину, що перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу 90° . Знайти площу перерізу, якщо кут між діагоналлю перерізу і вказаною хордою дорівнює 60° .
12. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює $\frac{6}{\pi}\text{ см}^2$. Знайти площу бічної поверхні циліндра.
13. У циліндрі на відстані 16 см від його осі і паралельно зроблено переріз, діагональ якого дорівнює 13 см. Знайти радіус основи циліндра, якщо його висота дорівнює 5 см.
14. У циліндрі паралельно його осі зроблено переріз, діагональ якого утворює з площиною нижньої основи кут φ . Цей переріз перетинає основу по хорді, яка стягує дугу a . Визначити площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює R .
15. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, площа якого дорівнює 54 см^2 . Знайти об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 9 см.
16. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині його повної поверхні. Знайти повну поверхню циліндра, якщо діагональ осьового перерізу дорівнює 5 см.
17. У циліндрі паралельно його осі проведено площину. Вона перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом a . Діагональ утвореного перерізу дорівнює b і нахилена до основи під кутом β . Визначити об'єм циліндра.
18. Бічна поверхня циліндра розгортається в квадрат із стороною 9 см. Знайти об'єм циліндра.
19. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом 120° , а з центра верхньої основи – під кутом 60° . Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо довжина хорди дорівнює 6 см.
20. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом 90° , а з центра верхньої основи – під кутом 60° . Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 6 см.
21. Відрізок, що з'єднує центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 6 см. Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює діаметру основи.

22. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см. Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює діаметру основи.
23. Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює 8 см, проведено площину, що перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу 120° . Знайти площу перерізу, якщо його діагональ дорівнює 16 см.
24. Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює $6\sqrt{2}$ см, проведено площину, що перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу 90° . Знайти площу перерізу, якщо кут між діагоналлю перерізу і вказаною хордою дорівнює 60° .
25. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює $\frac{6}{\pi}$ см². Знайти площу бічної поверхні циліндра.
26. У циліндра на відстані 8 см від його осі і паралельно їй зроблено переріз, діагональ якого дорівнює 13 см. Знайти радіус основи циліндра, якщо його висота дорівнює 5 см.
27. У циліндра паралельно його осі зроблено переріз, діагональ якого утворює з площиною нижньої основи кут φ . Цей переріз перетинає основу по хорді, яка стягує дугу a . Визначити площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює R .
28. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, площа якого дорівнює 54 см². Знайти об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 9 см.
29. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині його повної поверхні. Знайти повну поверхню циліндра, якщо діагональ осьового перерізу дорівнює 5 см.
30. У циліндрі паралельно його осі проведено площину. Вона перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом α . Діагональ утвореного перерізу дорівнює b і нахилена до основи під кутом β . Визначити об'єм циліндра.
31. Бічна поверхня циліндра розгортається в квадрат із стороною 9 см. Знайти об'єм циліндра.
32. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом 120° , а з центра верхньої основи – під кутом 60° . Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо довжина хорди дорівнює 6 см.
33. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом 90° , а з центра верхньої основи – під кутом 60° . Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 6 см.
34. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 6 см. Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює діаметру основи.

35. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см. Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює діаметру основи.

6.5 Конус

1. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник. Твірна конуса дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Обчисліть висоту конуса.
2. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ см². Обчисліть довжину основи конуса.
3. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник, сторона якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Обчисліть об'єм конуса.
4. Площа основи конуса дорівнює 36π см², а його твірна 10 см. Обчислити бічну поверхню конуса.
5. В основі конуса проведена хорда, довжина якої дорівнює 50 см. Ця хорда віддалена від вершини конуса на 60 см. Обчислити радіус основи конуса, якщо його висота дорівнює 52 см.
6. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник, периметр якого дорівнює $16(2 + \sqrt{2})$ см. Знайти площу повної поверхні цього конуса.
7. Через вершину конуса проведено площину під кутом 45° до площини основи. Ця площина перетинає основу по хорді, відстань до якої від вершини 6 см. Знайти об'єм конуса, якщо довжина радіуса – 5 см.
8. Радіуси основ зрізаного конуса – 3 дм та 7 дм, твірна – 5 дм. Знайти площу осьового перерізу.
9. Площі основ зрізаного конуса – 4 м² та 16 м². Через середину висоти проведено площину паралельно основі. Знайти площу перерізу.
10. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає основу по хорді, довжина якої дорівнює a . Ця хорда стягує дугу 60° . Кут між твірними в перерізі 90° . Знайти площу бічної поверхні конуса.
11. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α , а відстань від центра основи до твірної конуса – α . Знайти площу бічної поверхні конуса.
12. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює β , а відстань від центра основи до середини твірної – α . Знайти об'єм конуса.
13. Висота і твірна конуса відносяться як 4:5, а об'єм конуса дорівнює 96π см³. Знайти площу повної поверхні конуса.
14. В основі конуса проведено хорду завдовжки a , яку видно із центра основи під кутом α , а з вершини конуса – під кутом β . Знайти площу бічної поверхні конуса.
15. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α , а з вершини конуса – під кутом β . Знайти

- площу бічної поверхні конуса, якщо відстань від центра основи до проведеної хорди дорівнює d .
16. В основі конуса проведено хорду завдовжки $8\sqrt{2}$ см на відстані 4 см від центра основи. Знайти об'єм конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом 60° .
 17. В основі конуса проведено хорду завдовжки 12 см яку видно із центра основи під кутом 120° . Знайти об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 8 см.
 18. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює φ , зроблено переріз. Знайти площу утвореного перерізу, якщо висота конуса дорівнює h і утворює з його твірною кут α .
 19. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , зроблено переріз. Знайти площу цього перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює R , а твірна утворює з площиною основи кут β .
 20. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , зроблено переріз, який утворює з площиною основи конуса кут β . Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює h .
 21. Переріз конуса, який проходить через його вершину, перетинає основу конуса по хорді, яку видно з центра основи під кутом β . Площина перерізу утворює з висотою конуса кут φ . Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює h .
 22. Висота конуса дорівнює 16 см, а кут при вершині осьового перерізу – 120° . Знайти площу повної поверхні конуса.
 23. Висота конуса дорівнює 10 см, а кут, який утворює твірна конуса з площиною основи, – 45° . Знайти площу повної поверхні конуса.
 24. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 240π см². Знайти об'єм цього конуса, якщо радіус його основи дорівнює 12 см.
 25. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 180π см². Знайти об'єм цього конуса, якщо його твірна дорівнює 12 см.
 26. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α , а із вершини конуса – під кутом β . Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо радіус його основи дорівнює R .
 27. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α , а із вершини конуса – під кутом β . Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює l .
 28. Площа повної поверхні конуса дорівнює 200π см², а його твірна – 17 см. Знайти об'єм конуса.
 29. Площа повної поверхні конуса дорівнює 90π см², а його твірна більша за радіус основи на 8 см. Знайти об'єм конуса.
 30. Висота конуса дорівнює 20 см, а відстань від центра його основи до твірної – 12 см. Знайти об'єм конуса.
 31. Радіус основи конуса дорівнює $4\sqrt{5}$ см, а відстань від центра його основи до твірної – 8 см. Знайти об'єм конуса.

32. Об'єм конуса з радіусом основи 6 см дорівнює $96\pi \text{ см}^3$. Обчислити площу повної поверхні конуса.
33. Об'єм конуса дорівнює $100\pi \text{ см}^3$, висота – 12 см. Обчислити площу повної поверхні конуса.
34. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає основу по хорді, довжина якої дорівнює a . Ця хорда стягує дугу 90° . Кут між твірними в перерізі дорівнює 60° . Знайти площу бічної поверхні конуса.

6.6 Куля

1. Об'єм кулі дорівнює $288\pi \text{ см}^3$. Обчислити площу поверхні цієї кулі.
2. Площа поверхні кулі дорівнює $36\pi \text{ см}^2$. Обчислити об'єм цієї кулі.
3. Дві рівні сфери радіуса R см розташовані так, що центр однієї сфери лежить на поверхні іншої. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються дані сфери.
4. Об'єми двох куль відносяться як 27 : 64. Як відносяться площі їх поверхонь?
5. Знайти об'єм матеріалу, який необхідно затратити на виготовлення порожньої кулі, у якої зовнішній діаметр дорівнює 15 см, а внутрішній – 14 см.
6. Радіуси двох куль дорівнюють 13 см і 15 см, а відстань між їх центрами – 14 см. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.
7. Зовнішній діаметр порожньої кулі дорівнює 18 см, а товщина стінок – 3 см. Знайти об'єм стінок.

6.7 Тіла обертання

1. Рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона – 10 см, обертається навколо бічної сторони. Знайти об'єм тіла обертання.
2. Трикутник із сторонами 10 см, 17 см і 21 см обертається навколо бічної сторони. Знайти площу поверхні тіла обертання.
3. Трикутник із сторонами 20 см, 37 см і 51 см обертається навколо бічної сторони. Знайти об'єм тіла обертання.
4. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 10 см і 15 см, обертається навколо гіпотенузи. Знайти площу поверхні тіла обертання.
5. Рівнобічна трапеція з основами 2 см і 3 см і гострим кутом 60° обертається навколо меншої основи. Знайти об'єм тіла обертання.
6. Рівнобедрений трикутник з бічною стороною, що дорівнює 20 см і основою 10 см, обертається навколо осі, яка містить його основу. Знайти об'єм тіла обертання.

7. Рівнобедрений трикутник з кутом при вершині 120° і бічною стороною 20 см обертається навколо основи. Знайти площу поверхні тіла обертання.
8. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 7 см, а твірна—5 см. Знайти площу осьового перерізу конуса.
9. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 11 см і 16 см, а твірна — 13 см. Знайти відстань від центра меншої основи до точки кола більшої основи.
10. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r ($R > r$), а твірна утворює з площиною основи кут 45° . Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса.
11. У зрізаному конусі діагоналі осьового перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна дорівнює l і утворює з площиною основи кут α . Визначити площу повної поверхні зрізаного конуса.
12. У зрізаному конусі площі основ дорівнюють 1 см^2 і 49 см^2 , а площа паралельного основам перерізу дорівнює їх півсумі. На які частини площина ділить висоту конуса?

6.8 Задачі на комбінації тіл обертання

1. Відношення об'єму кулі до об'єму вписаного в неї циліндра дорівнює $\frac{16}{9}$. Знайти кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра та віссю.
2. Конус і циліндр мають спільну основу. Вершина конуса знаходиться в центрі другої основи циліндра. Знайти кут між віссю конуса і твірною, якщо площа повної поверхні циліндра відноситься до площі повної поверхні конуса як $m:n$.
3. У кулю вписано циліндр. Знайти об'єм циліндра, якщо об'єм кулі дорівнює V , а діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною його основи кут α .
4. Площа бічної поверхні конуса, описаного навколо кулі, дорівнює $\frac{3}{2}$ площі поверхні кулі. Знайти висоту конуса, якщо радіус кулі дорівнює r .
5. Твірна конуса утворює з його віссю кут α . Знайти відношення об'єму конуса до об'єму описаної навколо нього кулі.
6. Твірна конуса утворює з його площиною кут α . Різниця між твірною та радіусом основи дорівнює d . Знайти площу поверхні кулі, вписаної в конус.
7. У кулю, радіус якої R , вписано конус. Твірна конуса утворює з площиною основи кут α . Знайти об'єм конуса.
8. Кулю, об'єм якої V , вписано в конус. Твірна конуса утворює з площиною основи кут α . Знайти об'єм конуса.

9. У кулю вписано конус, об'єм якого дорівнює V . Знайти радіус кулі, якщо кут між висотою та твірною конуса дорівнює α .
10. У конус вписано циліндр, висота якого дорівнює радіусу основи конуса. Визначити кут між віссю конуса і його твірною, якщо повна поверхня циліндра відноситься до площі основи конуса як 3:1.
11. У зрізаний конус вписано кулю. Об'єм цієї кулі становить половину об'єму конуса. Визначити кут нахилу твірної конуса до площини основи.
12. У зрізаний конус, твірна якого нахилена до більшої основи під кутом α , вписано кулю радіуса r . Знайти довжину лінії, вздовж якої куля дотикається до бічної поверхні конуса.
13. У кулю, радіус якої R , вписано зрізаний конус. Основи зрізаного конуса відсікають від кулі два сегменти, дуги в осьовому перерізі яких відповідно дорівнюють α і β . Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса.
14. У кулю вписано циліндр. Знайти об'єм кулі, якщо відомо, що площини основ відсікають від кулі сегменти висотою h і об'ємом V .
15. Знайти кут між твірною і площиною нижньої основи зрізаного конуса, якщо його об'єм у три рази більший від об'єму вписаної в нього кулі.
16. У конус вписано кулю. Довести, що відношення площі повної поверхні конуса до площі поверхні кулі дорівнює відношенню їх об'ємів.

7 ЗРАЗКИ ТЕСТІВ

7.1 Тести для набору у ЗФМШ.

Варіант 1

1. Обчислити: $1\frac{1}{3} + 0,08 : \frac{1}{5}$.

- а) 1,7; б) $1\frac{11}{15}$; в) $4\frac{6}{25}$; г) інша відповідь.

2. Скільки відсотків становить число 5 від числа 75.

- а) $6\frac{2}{3}$; б) 3,75; в) 6,6; г) інша відповідь.

3. Спростити $\frac{8a+4}{1-4a^2}$ і обчислити при $a = -1$.

- а) 1,3; б) $-\frac{4}{5}$; в) $\frac{4}{3}$; г) інша відповідь.

4. Спростити $\frac{(1-\cos 2\alpha) \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}$ і обчислити при $\alpha = 15^\circ$.

- а) 1,7; б) 0,5; в) $4\frac{6}{25}$; г) інша відповідь.

5. Знайти восьмий член арифметичної прогресії, перший член якої 12, а п'ятнадцятий 54.

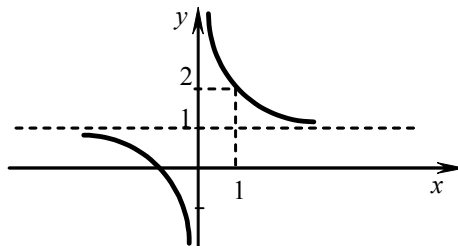
- а) 27; б) 33; в) 38; г) інша відповідь.

6. Знайти область визначення функції $y = \frac{2x-7}{5} + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

- а) $[0; 1) \cup (1; 2]$; б) $[3,5; 2]$; в) $[3,5; \infty)$; г) інша

відповідь.

7. Ескіз графіка якої функції зображено на рисунку?



- а) $y = 1 + \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{2}{x+1}$; в) $y = 2x - 1$; г) інша
відповідь.

8. Знайти площу прямокутного трикутника з гіпотенузою 12 см і гострим кутом 60° .
 а) $18\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) 18 см^2 ; в) $9\sqrt{3} \text{ см}^2$; г) інша відповідь.
9. Знайти кути трикутника ABC , коли відомо, що $\angle A$ на 20° більший кута B і в 2 рази менший за кут C .
 а) $40^\circ, 20^\circ, 120^\circ$; б) $60^\circ, 40^\circ, 80^\circ$; в) $50^\circ, 30^\circ, 100^\circ$;
 г) інша відповідь.
10. Побудувати вектор $\vec{c}$, що є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

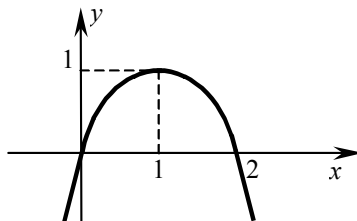


Варіант 2

1. Обчислити: $2,04 - 0,5 : \frac{2}{3}$.
 а) 2,5; б) $-0,6$; в) $-0,96$; г) інша відповідь.
2. Скільки відсотків становить число 4 від числа 30.
 а) 13,3; б) $13\frac{1}{3}$; в) 7,5; г) інша відповідь.
3. Спростити $\frac{3x + x^2}{x^2 - 9}$ і обчислити при $x=1,2$.
 а) $-\frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-0,6$; г) інша відповідь.
4. Спростити $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ і обчислити при $\alpha = 15^\circ$.
 а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) інша відповідь.
5. Знайти десятий член арифметичної прогресії, перший член якої 6, а шостий 41.
 а) 69; б) 66; в) 65; г) інша відповідь.
6. Знайти область визначення функції $y = \frac{5 - 2x}{7} + \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x + 1}$.

- а) $[-2; -1) \cup (-1; 2]$; б) $(-\infty; -1)$; в) $x \neq -1$; г) інша відповідь.

7. Ескіз графіка якої функції зображено на рисунку?



- а) $y = (1 - x)^2$; б) $y = x^2 + 1$; в) $y = 1 - x^2$; г) інша відповідь.

8. Знайти площу прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 6 см і протилежний гострий кут 60° .

- а) $36\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) $6\sqrt{3} \text{ см}^2$; в) $12\sqrt{3} \text{ см}^2$; г) інша відповідь.

9. Знайти кути трикутника ABC , коли відомо, що $\angle A$ в 3 рази більший за кут B і на 30° більший за кут C .

- а) $120^\circ, 15^\circ, 45^\circ$; б) $105^\circ, 25^\circ, 50^\circ$; в) $90^\circ, 30^\circ, 60^\circ$; г) інша відповідь.

10. Побудувати вектор $\vec{c}$, що є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



7.2 Тести для проведення предметного тестування.

№ 1

1. Виконати дії:

$$3\frac{2}{3} : 5\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{39}.$$

- а) $1\frac{1}{3}$; б) $2\frac{2}{3}$; в) $3\frac{1}{2}$; г) $2\frac{1}{39}$.

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4. \end{cases}$$

- а) $(-1; -4)$; б) $(4; 1)$; в) $(-1; -4)$; г) $(4; 1); (-1; -4)$.

3. Розв'язати нерівність:

$$\log_2(x+2) < 1.$$

а) $-2 < x < 1$; б) $x > -2$; в) $x > 7$; г) $x > 5$.

4. Розв'язати рівняння:

$$\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

а) $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$; б) $\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$; в) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$; г) $k\pi, k \in Z$.

5. Розв'язати рівняння: $x^2 - 3x + (x^2 - 3x + 5)^{0.5} = 7$.

6. Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 30. Якщо від першого числа відняти 5, від другого – 4, а третє залишити без змін, то отримані числа утворять геометричну прогресію. Знайти ці числа.

№ 2

1. Виконати дії:

$$13\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} + 16\frac{1}{2} : \frac{11}{16}.$$

а) 42; б) 32; в) 35; г) 40.

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 13x - 8y = 28, \\ 11x + 8y = 44. \end{cases}$$

а) $(3; \frac{11}{8})$; б) $(-3; \frac{11}{8})$; в) $(-3; -\frac{11}{8})$; г) інша відповідь.

3. Розв'язати нерівність:

$$(0,2)^x \geq \frac{1}{25}.$$

а) $x \geq -2$; б) $x \leq 2$; в) $x \leq -2$; г) інша відповідь.

4. Спростити вираз:

$$\operatorname{tg}\alpha(1 - \sin^2\alpha)$$

а) $\sin\alpha$ б) $\cos\alpha$; в) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$; г) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

5. Розкласти число 6 на два невід'ємні доданки так, щоб добуток квадрата першого доданка на другий доданок був найбільшим.

6. Розв'язати рівняння: $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$.

№ 3

1. Виконати дії:

$$3\frac{2}{3} : \frac{1}{18} + 5\frac{5}{12} : \frac{13}{36}.$$

а) 81; б) 74; в) $35\frac{1}{3}$; г) $41\frac{2}{3}$.

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9. \end{cases}$$

а) $(\frac{1}{2}; 1)$; б) $(2; 1)$; в) $(1; 8)$; г) інша відповідь.

3. Розв'язати рівняння:

$$\log_{0,2}(2x+5)=1.$$

а) -3,4; б) -2,4; в) 2,4; г) інша відповідь.

4. Розв'язати рівняння:

$$\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

а) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; г) $x \in \emptyset$.

5. Знайти область визначення функції: $y = \frac{3x-5}{x^2-4} + \sqrt{4x-x^2}$.

6. Знайти суму цілих розв'язків нерівності: $2^{|x^2-5x|} \leq 64$.

№ 4

1. Спростити вираз:

$$\frac{3a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{6a^3} \cdot \frac{2a^3}{b}.$$

а) a^2 ; б) ab ; в) ab^2 ; г) a^2b .

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

а) $(3; 4)$; б) $(4; 3)$; в) $(3; 4)$; г) $(-4; -3)$.

3. Розв'язати рівняння:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x+10}.$$

а) $\frac{20}{9}$; б) 0; в) $\frac{19}{9}$; г) інша відповідь.

4. Спростити вираз:

$$\operatorname{ctg} \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$$

а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$; г) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$.

5. Знайти довжину сторін прямокутника, що має площу 144 см^2 та найменший периметр.

6. Розв'язати нерівність: $\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15) > 0$.

№ 5

1. Спростити вираз:

$$\frac{5x^3}{y^2} \cdot \frac{y^3}{10x^2} \cdot \frac{4y}{x}.$$

- а) $2y^2$; б) y^3 ; в) $2xy$; г) x^2y^2 .

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$$

- а) (1; 4); б) (4; 1); в) (1; 4); (4; 1); г) (−4; −1).

3. Розв'язати нерівність:

$$\log_2(x - 4) < 2.$$

- а) $4 < x < 8$; б) $x < 8$; в) $x > 8$; г) інша відповідь.

4. Розв'язати рівняння:

$$2 \cos \frac{x}{2} = \sqrt{3}$$

- а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; б) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; в) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$; г) $\pm \frac{\pi}{3} + 4\pi k, k \in Z$.

5. Розв'язати рівняння: $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = \frac{5}{2}.$

6. Побудувати графік функції: $y = |8 + 2|x| - x^2|.$

№ 6

1. Виконати дії:

$$7 - (2\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{11} + 3,75) : \frac{5}{7}.$$

- а) 8; б) 2; в) $\frac{1}{77}$; г) інша відповідь.

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y = 15, \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$$

- а) (7; 4); б) (7; 5); в) (6; 4); г) (5; 4).

3. Розв'язати нерівність: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$

а) $x \leq -3$; б) $x \leq 3$; в) $x \geq -3$; г) $x \geq -3$.

4. Спростити вираз:

$$\cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

а) -1 б) 1 ; в) 2 ; г) -2 .

5. Розв'язати рівняння: $\log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x + \log_{\frac{1}{25}} x = 5$.

6. Число збільшили на 20%. На скільки відсотків тепер потрібно його зменшити, щоб отримати початкове?

№ 7

1. Виконати дії:

$$1 - \left(0,4 \cdot 3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{15}{33}.$$

а) $\frac{53}{33}$; б) 2 ; в) $-\frac{20}{33}$; г) інша відповідь.

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y = 28, \\ 3x - 2y = 14. \end{cases}$$

а) $(10; 8)$; б) $(8; 10)$; в) $(7; 9)$; г) $(10; 10)$.

3. Розв'язати рівняння:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) = -2.$$

а) 5 ; б) 3 ; в) 4 ; г) -2 .

4. Розв'язати рівняння:

$$\sin 2x = \sqrt{3}$$

а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $x \in \emptyset$; в) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; г) $\pm \frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5. Розв'язати рівняння:

$$x^4 - x^3 - 27x + 27 = 0.$$

6. Три числа, що утворюють арифметичну прогресію, в сумі дають 15. Якщо до першого і другого додати по одиниці, а до третього -4 , то отримані числа становитимуть геометричну прогресію. Знайти ці числа.

№ 8

1. Виконати дії:

$$2,5 \cdot 24 + 3\frac{2}{3} : \frac{1}{9} - 2\frac{2}{5} : 12.$$

а) $92,8$; б) 2 ; в) $10,2$; г) інша відповідь.

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y = 16, \\ 2x - 5y = 5. \end{cases}$$

а) (10; 3); б) (9; 3); в) (10; 4); г) (9; 5).

3. Розв'язати рівняння:

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-3x}.$$

а) 2; б) 2,5; в) 3; г) інша відповідь.

4. Спростити вираз:

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$$

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\sin \alpha$; г) інша відповідь.

5. Знайти довжину сторін прямокутника, що при периметрі 48 см має найбільшу площу.

6. Розв'язати нерівність: $|x^2 - 2x - 15| \leq -2x + 15$.

№ 9

1. Знайти 24% від 300.

а) 72; б) 7,2; в) 0,72; г) 30.

2. Розв'язати нерівність:

$$(2 - x)\sqrt{x + 1} < 0.$$

а) $(-1; 2)$; б) $(-\infty; 2)$; в) $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$; г) $[-1; \infty)$.

3. Розв'язати рівняння:

$$2^{x+2} \cdot 5^x = 400.$$

а) 1,25; б) 1,9; в) 0,7; г) 2.

4. Спростити вираз:

$$\cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

а) 1; б) 0; в) $\cos 2\alpha$; г) інша відповідь.

5. Визначити перший член та кількість членів геометричної прогресії, в якій: $q = 3$; $a_n = 567$; $S_n = 847$.

6. Розв'язати нерівність: $\log_{x+3} \frac{x-1}{x+2} \leq \log_{x+3} 2$.

№ 10

1. Знайти 36% від 200.

а) 72; б) 36; в) 3,6; г) 7,2.

2. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ 3-2x > 0. \end{cases}$$

а) $(-1,5; 3)$; б) $(-3; 1,5)$; в) $(-3; -4,5)$; г) інша відповідь.

3. Обчислити:

$$\log_3 \log_3 \log_3 27.$$

а) 1; б) 0; в) -1; г) 3.

4. Розв'язати рівняння:

$$\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

а) $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}, k \in Z$; б) $\frac{k\pi}{4}, k \in Z$; в) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$; г) $\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$.

5. Сума другого та п'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 9, а третього і шостого дорівнює 15. Знайти перший член та різницю прогресії.

6. Розв'язати рівняння: $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4$.

№ 11

1. Знайти 12% від 500.

а) 60; б) 12; в) 6; г) 50.

2. Розв'язати нерівність:

$$(x-1)\sqrt{x} < 0.$$

а) $(-\infty; 1)$; б) $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$; в) $(0; \infty)$; г) $(0; 1)$.

3. Знайти значення похідної функції $y = \frac{x^2}{x+1}$ в точці $x_0 = -2$.

а) -8; б) 0; в) 4; г) інша відповідь.

4. Спростити вираз:

$$2\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

а) 1; б) 0; в) 3; г) інша відповідь.

5. Знайти перший член і кількість членів геометричної прогресії, в якій:
 $q = 3$; $a_n = 1458$; $S_n = 2186$.

6. Розв'язати нерівність: $\log_{x^2+2x}(x+2) \leq 11$.

№ 12

1. Знайти число, якщо 12% його дорівнюють 60.

а) 500; б) 300; в) 800; г) 400.

2. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2(x+3) - (x-8) < 4, \\ 6x < 4(x+1) - 1. \end{cases}$$

а) немає розв'язків; б) $(-\infty; -10)$; в) $(1,5; \infty)$; г) $(-10; 1,5)$.

3. Розв'язати рівняння:

$$3^{x+2} - 3^x = 72.$$

а) 2; б) 3; в) 4; г) інша відповідь.

4. Розв'язати рівняння:

$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

5. В арифметичній прогресії сьомий член дорівнює 2,3, а чотирнадцятий член дорівнює 7,2. Знайти перший член та різницю прогресії.

6. Розв'язати рівняння: $\log_x 125x \cdot \log_5^2 x = 4$.

№ 13

1. Знайти число, якщо 24% його дорівнюють 72.

а) 300; б) 120; в) 144; г) 200.

2. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{x-1} < 2.$$

а) $[1; 5)$; б) $(-\infty; 5)$; в) $(-\infty; 5]$; г) $(1; 5)$.

3. Знайти значення похідної функції $y = (x-3)^2$ в точці $x_0 = 2$.

а) -10 ; б) -2 ; в) 25 ; г) інша відповідь.

4. Спростити вираз:

$$\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 - \sin^2 \alpha + 1.$$

а) 1; б) 2; в) 0; г) інша відповідь.

5. Визначити перший член і знаменник геометричної прогресії, в якій:

$$\begin{cases} b_6 - b_3 = 468, \\ b_4 - b_1 = 52. \end{cases}$$

6. Розв'язати нерівність: $\log_{x+4} \frac{x-2}{x+3} \leq \log_{x+4} 2$.

№ 14

1. Знайти число, якщо 46% його дорівнюють 23.

а) 50; б) 25; в) 150; г) 100.

2. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 4x - 5 < 2x - 2, \\ 4 - 2x < x - 2. \end{cases}$$

а) $(-\infty; 1,5)$; б) $(1,5; \infty)$; в) $(-5; 1,5)$; г) інша відповідь.

3. Знайти значення виразу:

$$5^{\log_5 2 + \log_5 3}.$$

а) 6; б) 5; в) 8; г) інша відповідь.

4. Розв'язати рівняння:

$$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; г) $\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5. В арифметичній прогресії шостий член дорівнює 1,3, а одинадцятий член дорівнює 5,8. Знайти перший член та різницю прогресії.

6. Розв'язати рівняння: $\log_5^2 x + \log_{5x} 5x^{-1} = 1$.

№ 15

1. Обчислити:

$$2^3 \cdot 1,25 \cdot 10^{-1}.$$

а) 1; б) 2; в) 8; г) 0,1.

2. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{x-2} < 1.$$

а) $(-\infty; 3)$; б) $(-\infty; 3]$; в) $(2; 3)$; г) $[2; 3)$.

3. Розв'язати рівняння:

$$2^{x+3} \cdot 3^x = 288.$$

а) 1; б) 1,5; в) 2; г) -1,5.

4. Спростити вираз:

$$\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1.$$

а) -1; б) -2; в) 1; г) інша відповідь.

5. Визначити перший член і знаменник геометричної прогресії, в якій:

$$\begin{cases} b_5 - b_3 = 15, \\ b_4 - b_2 = 6. \end{cases}$$

6. Розв'язати нерівність: $\log_{x+1} \frac{x-5}{2x-3} > 0$.

№ 16

1. Обчислити:

$$5^3 \cdot 2^3 - (0.1)^{-3}.$$

а) 0; б) 1; в) 2; г) 0,1.

2. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3x - 2 < 1,5x + 1, \\ 5x + 3 < 4x - 1. \end{cases}$$

а) $(-\infty; -4)$; б) $(-4; \infty)$; в) $(-4; 5)$; г) інша відповідь.

3. Обчислити:

$$\log_3 10 - \log_3 \frac{10}{9}.$$

а) 2; б) 1; в) 3; г) 5.

4. Розв'язати рівняння:

$$2 \cos(-2x) - 1 = 0.$$

а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; в) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

г) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5. Різниця арифметичної прогресії дорівнює 3, а її п'ятий член дорівнює 0. Знайти суму перших десяти членів прогресії.

6. Розв'язати нерівність: $\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x \leq -4$.

№ 17

1. Розв'язати рівняння:

$$x - 4 = \sqrt{x + 8}.$$

а) 8; б) 1; в) 5; г) -4.

2. Знайти шостий член геометричної прогресії, якщо $b_1 = 32, q = \frac{1}{2}$.

а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) інша відповідь.

3. Розв'язати нерівність:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) > -1.$$

а) $x < 0,5$; б) $0,5 < x < 1,5$; в) $x > 1,5$; г) $x > 3$.

4. Знайти похідну функції:

$$y = \cos x \cdot \sin x$$

а) 1; б) $\cos 2x$; в) $2 \sin 2x$; г) інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння:

$$2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x - 1 = 0$$

6. Побудувати графік функції:

$$y = \operatorname{ctg} x \cdot |\sin x|.$$

№ 18

1. Розв'язати рівняння:

$$(x - 3)(x + 4)(x - 5) = 0.$$

а) 3; -4; 5; б) 2; 1; 3; в) 3; 4; 5; г) інша відповідь.

2. Знайти одинадцятий член арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 2, d = 3$.

а) 27; б) 25; в) 32; г) 35.

3. Розв'язати рівняння:

$$2^{x+3} - 2^x = 112.$$

а) 3; б) 4; в) 5; г) -2.

4. Знайти проміжки зростання функції: $y = x^2 - 2x + 3$.

а) $x \in (1; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; 1)$; в) $(1; 2)$; г) інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = 0.$$

6. Розв'язати рівняння:

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$$

№ 19

1. Розв'язати рівняння:

$$x - 2 = \sqrt{2 - x}.$$

а) -3 ; б) 2 ; в) 21 ; г) 7 .

2. Знайти п'ятий член геометричної прогресії, якщо $b_1 = 2$, $q = 2$.

а) 26 ; б) 32 ; в) 26 ; г) 30 .

3. Розв'язати нерівність:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \frac{1}{9}.$$

а) $x \leq -2$; б) $x \geq -2$; в) $x \leq 2$; г) $x \geq 2$.

4. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$ на відрізку $[0; 3]$.

а) $8; 4$; б) $8; 4\frac{1}{4}$; в) $-8; 4$; г) інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння:

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

6. Побудувати графік функції:

$$y = \sin x + \sqrt{\sin^2 x}.$$

№ 20

1. Розв'язати рівняння:

$$(x - 1)(x - 3)(x - 5) = 0.$$

а) $1; 3; 5$; б) $2; 3; 4$; в) $0; -1; 3$; г) $2; 3; 6$.

2. Знайти суму членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 2$, $d = 3$, $n = 7$.

а) 77 ; б) 66 ; в) 52 ; г) 48 .

3. Розв'язати нерівність:

$$\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > -1.$$

а) $x < 0$; б) $0 < x < 1,5$; в) $x > 1,5$ г) інша відповідь.

4. Знайти проміжки спадання функції

$$y = x^2 - 6x + 8.$$

а) $(2; 4)$; б) $(-\infty; 3)$; в) $(3; +\infty)$; г) інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння:

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 5x = 0.$$

6. Розв'язати рівняння:

$$6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12.$$

№ 21

1. Розв'язати рівняння:

$$x + 2 = \sqrt{x + 4}.$$

а) -3; б) 0; в) 5; г) 12.

2. Знайти п'ятий член геометричної прогресії, якщо $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$.

а) 26; б) 32; в) 26; г) 30.

3. Розв'язати рівняння:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{2}\right)^{5x-3}.$$

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) 2; г) $\frac{1}{3}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = (x^2 - 1)(x + 1)$ на відрізку $[-2; 0]$.

а) -1; -16; б) $-\frac{5}{27}$; -16; в) 16; 1; г) інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{3}{5\operatorname{tg} x + 8} = 1.$$

6. Побудувати графік функції:

$$f(x) = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}.$$

№ 22

1. Спростити вираз:

$$\frac{4m^3}{3n^2} \cdot \frac{6n^4}{2m} : \frac{2m^2 n^2}{n^3}.$$

а) $6n^3$; б) $5m^2 n$; в) $3m^2 n^2$; г) m^3 .

2. Знайти суму членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 2$, $d = 3$, $n = 7$.

а) 45; б) 38; в) 51; г) 49.

3. Розв'язати нерівність:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-2x} < 4^3.$$

а) $x > 1$; б) $x < 1$; в) $x > -1$; г) $x < -1$.

4. Матеріальна точка рухається за законом $S(t)=1-2t^2+t^3$. Знайти її швидкість в момент $t=3$.

- а) 60; б) 64; в) 10; г) інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{5}{3\sin x + 4} = 2.$$

6. Розв'язати рівняння:

$$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 1024.$$

№ 23

1. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x^2 - 36} = \sqrt{2x - 1}.$$

- а) 7; б) 5; -7; в) 7; -5; г) інша відповідь.

2. Знайти суму членів геометричної прогресії, якщо $b_1 = 2$, $q = 3$, $n = 4$.

- а) 27; б) 29; в) 31; г) 80.

3. Розв'язати нерівність:

$$\log_2(x+2) < 1.$$

- а) $-2 < x < 1$; б) $x > -2$; в) $x > 7$; г) $x > 5$.

4. Знайти проміжки зростання функції:

$$y = 5x^2 - 3x + 1.$$

- а) $(0,3; +\infty)$; б) $\left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 0,3)$; г) інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}.$$

6. Побудувати графік функції: $y = \operatorname{tg} x \cdot |\cos x|$

№ 24

1. Розв'язати рівняння:

$$(x-3)(x-5)(x-7) = 0.$$

- а) 3; 5; 7; б) 2; 3; 4; в) 3; 2; 5; г) 3; 6; 9.

2. Знайти суму членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 25$, $d = -2$, $n = 8$.

- а) 144; б) 108; в) 54; г) 72.

3. Розв'язати нерівність:

$$0,5^{2x-1} < 0,25.$$

- а) $x > 1,5$; б) $x < 0,5$; в) $0 < x < 1,5$; г) інша відповідь.

4. Знайти проміжки спадання функції $y = x^2 - x$.

а) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; в) $(-\infty; 2)$; г) інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння:

$$\sin^2 x + \sin 2x - 3 \cos^2 x = 0.$$

6. Розв'язати рівняння:

$$5^{\log_5^2(x-1)} + (x-1)^{\log_5(x-1)} = 10.$$

8 СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. “Алгебра і початки аналізу”. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ: “Зодіак-ЕКО”, 2002.
2. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. “Алгебра і початки аналізу”. Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ: “Зодіак-ЕКО”, 2002.
3. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. “Алгебра і початки аналізу”. Підручник для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ: “Зодіак-ЕКО”, 2000.
4. Бевз Г.П. “Алгебра”. Пробний підручник для 7-9 класів середньої школи. – Київ: “Освіта”, 1997.
5. Каплан Я.Л. “Рівняння”. – Київ: “Радянська школа”, 1968.
6. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпченко А.К. “Дидактичні матеріали з математики”. Навчальний посібник. – Київ: “Вища школа”, 2001.
7. Жлуктенко В.І., Бегун А.В., Клименко Р.М. “Конкурсні задачі з математики для вступників до економічних вузів та факультетів”. – Ірпінь: ВТФ “Перун”, 1994.
8. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. “Збірник задач з математики”. Посібник для вступників до вузів. – Київ: “Либідь”, 1993.
9. Бондаренко М.Ф., Дікарев В.А., Мельников О.Ф., Семенець В.В., Шклярів Л.Й. “Математика для вступників до вузів”. Навчальний посібник. – Харків: “Компанія СМІТ”, 2002.
10. Погорєлов О.В. “Геометрія. Планіметрія.” Підручник для 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ: “Освіта”, 2003.
11. Погорєлов О.В. “Геометрія. Стереометрія.” Підручник для 10-11 класів середньої школи. – Київ: “Освіта”, 2001.
12. Сканаві М.І. “Збірник задач з математики для вступників до ВТУЗів”. – Київ: “Вища школа”, 1994.
13. Абрамчук В.С., Тютюн Л.А., Шунда Н.М. “Основні методи розв’язування задач”. Посібник з математики для вступників до вищих навчальних закладів. III частина. – Вінниця, 2002.
14. Гетманцев В.Д., Саушкін О.Ф., Сіліч Н.М., Щетинська А.І. “Математика”. Контрольні індивідуальні завдання. Посібник для слухачів підготовчих відділень та вступників до вищих навчальних закладів. – Київ: “Либідь”, 1994.
15. Гетманцев В.Д., Саушкін О.Ф., “Математика. Тригонометрія.” Посібник для вступників до вищих навчальних закладів. – Київ: “Либідь”, 1994.
16. Середкіна О.В. “Задачник для абітурієнтів”. – Харків: “Торсінг”, 2003.

Навчальне видання

Володимир Дмитрович Дереч,
Алла Андріївна Барковська,
Тетяна Іванівна Найко

Тести та тестові завдання з математики для слухачів І-го курсу ЗФМШ при ВНТУ

Навчальний посібник

Оригінал макет підготовлено авторами

Редактор В.О. Дружиніна

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7×42 $\frac{1}{4}$

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний

Друк різнографічний
Тираж прим.
Зам. №

Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ