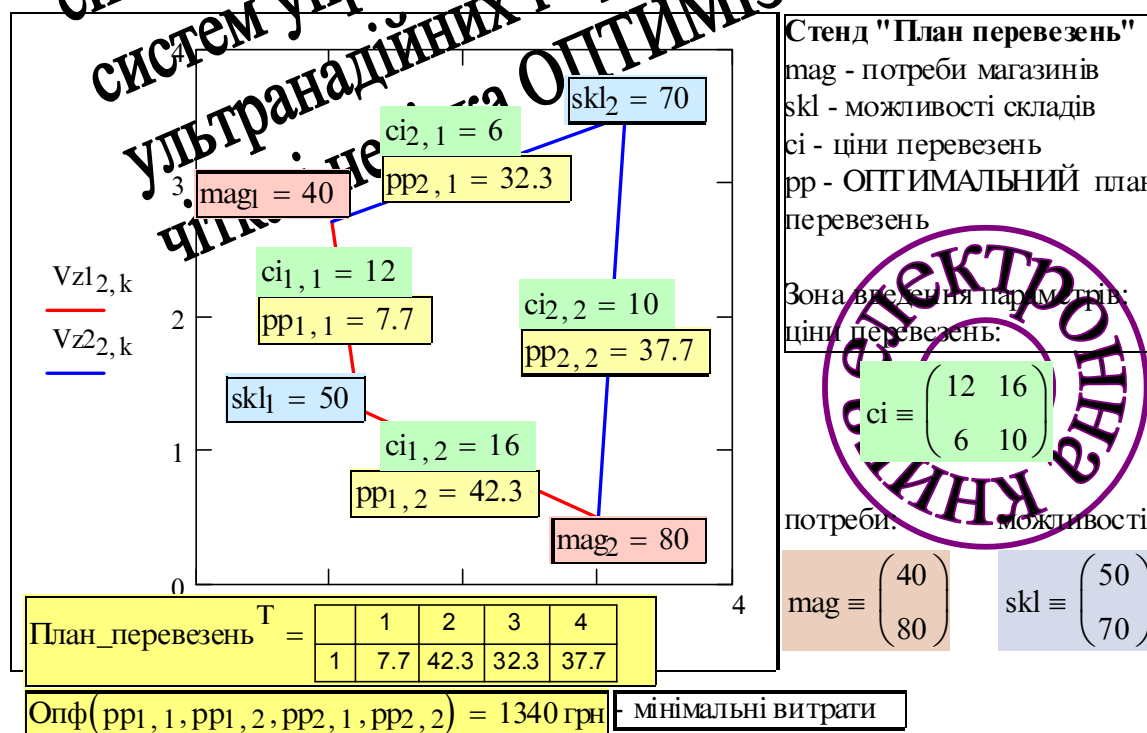


Т.М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов

Основи кібернетики та дослідження операцій

РОЗРОБКА І ДОСЛІДЖЕННЯ:
систем масового обслуговування,
систем управління об'єктами і процесами,
ультранадійних і просто надійних систем,
чітких нечітких ОПТИМІЗАЦІЯ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т.М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов.

**ОСНОВИ КІБЕРНЕТИКИ
ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ**

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальності 7.091401, Протокол № 10 від 31 травня 2001 року

Вінниця ВДТУ 2002

УДК 681.5: 681.3
Б 31

Р е ц е н з е н т и:

В. Т. Сусіденко, доктор економічних наук, професор
П.Г. Білоконний, професор
В.Н. Лисогор, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Боровська Т. М., Колесник І.С., Северілов В.А.

Б31 Основи кібернетики та дослідження операцій.

Навчальний посібник. - Вінниця: ВДТУ, 2002.- 242 с.

В посібнику розглянуто ряд задач, що складають основу стандартних курсів кібернетики та дослідження операцій. Це – задачі оптимального управління та стійкості складних систем, імовірнісних процесів – марківських процесів, процесів з розгалуженнями, задачі лінійного і нелінійного програмування, задачі масового обслуговування та управління запасами, задачі надійності складних систем, задачі оптимізації розвитку систем та прийняття рішень на базі нечіткої логіки. Посібник є електронною книгою – в комп'ютерній версії це система діалогових програм, що дозволяють вести серйозні дослідження і є ресурсом для виконання курсових і дипломних проектів. Посібник призначено для широкого кола інженерних та інженерно-економічних спеціальностей.

УДК 681.5: 681.3

© Т.М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов, 2002

ЗМІСТ

Вступ	3
1. Елементи математичної статистики	6
1.1. Міри розташування та розсіювання даних	7
1.2. Міри статистичного зв'язку даних.....	15
1.3. Міри групування даних - частотні розподіли	25
1.4. Ідентифікація частотних розподілів	43
2. Елементи теорії масового обслуговування	56
2.1. Елементи теорії масового обслуговування. Розрахунок та моделювання однофазної СМО	57
2.2. Розрахунок та моделювання багатофазної одноканальної СМО (конвеєрне виробництво)	71
3. Задачі управління запасами	84
3.1. Управління запасами. Базові математичні моделі управління запасами	85
3.2. Задача управління запасами при розподілених поставках і штрафах	94
3.3. Задача управління запасами зі штрафами	99
3.4. Розробка узагальнених математичних моделей управління запасами	103
4. Оптимізація планів виробництва та перевезень	117
4.1. Розробка базової математичної моделі для оптимізації транспортної задачі	118
4.2. Розробка інтерфейсу користувача з підсистемою оптимізації планів перевезень	127
4.3. Масштабування програми оптимізації планів перевезень. "Що-буде-якщо" аналіз	132
4.4. Розробка системи для розв'язання задач лінійного програмування альтернативними методами	140
5. Оптимізація розвитку систем	155
5.1. Одновимірна задача Марковиця. Варіаційне обчислення	156
5.2. Двовимірна задача Марковиця	167

5.3. Узагальнення задачі Марковиця для випадку нелінійних інвестиційних функцій	181
3	
6. Задачі оптимального управління динамічними системами при обмеженнях	192
6.1. Метод принципу максимуму Понтрягіна. Оптимальне управління інерційним об'єктом	193
6.2. Метод принципу максимуму Понтрягіна. Оптимальне управління об'єктом з демпфуванням	202
6.3. Метод принципу максимуму Понтрягіна. Оптимальне управління об'єктом-маятником	211
7. Оптимізація систем на базі нечіткої логіки	219
7.1. Приклад нечіткої оптимізації на базі експертних оцінок	220
7.2. Оптимізація надійності системи альтернативними методами	226
Література	239

Вступ

В даному посібнику розглянуто класичні і нові задачі оптимізації, моделювання, розрахунку того, що називають “кібернетичними системами”. Є досить вітчизняних і іноземних підручників і посібників з такого класу дисциплін. Але – з’являються нові задачі, нові методи для старих задач, нові інструменти для розв’язання задач – вчора аналогові обчислювальні машини, сьогодні – сучасні ЦОМ, мережі та ін.

У посібнику кожній задачі відповідає документ, що існує у двох формах – **паперовий документ і електронний документ** – фактично діалогова програма з відкритим для вивчення та змін текстом.

Відповідь на питання: що таке електронна книга, може бути надійним і вичерпним тестом для діагностики психічних відхилень у спеціалістів. Справді, якщо людина намагається визначити це через розмір шрифту, інтервали, місце для номерів сторінок... Усім відомо, що звичайна книга, це “корабель думки” (згідно Френсісу Бекону). Є підозра, що і електронна книга – теж корабель, ну, з новим типом двигуна.

Електронна книга – це процес, це певним чином повернення до традицій усної творчості докнижкових і ранньокнижкових епох. Кожен може її скопіювати, змінити на свій розсуд – як пісню? Результатом більшості документів є не отримання певного числового результату, а „інструменту” для розв’язання певного класу задач, „заготовки” для розробки більш досконалих „інструментів”. Щоб підкреслити, що результати є тільки елементами процесу, використовується замість номінального терміну „розв’язок” термін „розв’язання”. В посібнику розглядаються задачі саме управління в довільних системах – технічних, економічних, екологічних, тому використовується термін „управління”, а не „керування”.

. Усі розділи починаються з постановки задачі і завдань і далі даються приклади відповідей на усі питання завдання. На питання з економіки, безпеки даються дуже стислі відповіді, бо ця книга присвячена аспектам моделювання, синтезу та дослідження в режимі обчислювального експерименту.

Те, що подано в документах, з одного боку, - закінчені, робочі програми, з другого – це тільки “центри кристалізації” – кожна розробка орієнтована на проведення широких досліджень, подальшу модифікацію і вдосконалення математичних моделей. 10-15 сторінок розділу книги можуть бути розгорнені у 40-70 сторінок дипломного чи курсового проекту.

У формі електронної книги документи посібника пов’язані через стандартні гіперзв’язки (hyperlink) із центральним документом – ЗМІСТОМ, між собою і з різними довідками. Матеріали посібника можна копіювати і переносити у власні розробки. В цьому плані він – склад модулів, переважно таких, що відсутні в фірмових електронних книгах.

Основи кібернетики та дослідження операцій

Вводна лекція

Ще одна, чергова дисципліна в програмі навчання. За три з половиною роки освоєно їх достатньо. Щоб порівнювати і узагальнювати. Ця дисципліна формально і неформально пов'язана з усіма дисциплінами, що вже вивчались, і з тими, що будуть вивчатись. Можна буде побачити певне дублювання, повторення, таке повторення корисне і просто як повторення, але те, що повторюється буде дано з інших позицій, з іншої точки зору. Для чого? - Для стереобачення проблем і задач.

Традиції дисциплін “Основи кібернетики”, “Дослідження операцій” склалися у 40-80 роки. Детальніше про це бажано прочитати в самостійно в рекомендованій літературі. Сьогодні ця область науки одночасно в стані ста-

білізації і одночасно бурхливого розвитку. Як це так – одночасно? Легко це зрозуміти, слід тільки активно опрацювати матеріал даного посібника.

Цей посібник – електронна книга, він дозволяє вести обчислювальні експерименти, не виходячи зі сторінки, створювати ефективні і ефектні програми. Потрібні тільки комп'ютер і мінімальна зацікавленість.

Дисципліна ця, як і всі інші є найважливішою і найфундаментальнішою тому на сьогодні для освоєння цієї дисципліни виділено: **36 годин лекцій** (одна на тиждень) **18 годин практичних занять**, що дуже бажано відробити на ЦОМ, та **курсова робота** (25-35 сторінок обґрунтувань, розрахунків, досліджень - теж на комп'ютері).

Огляд літератури та змісту курсу.

Зараз коротко розглянемо зміст цієї дисципліни в історичному плані – що було вчора і що повинно бути сьогодні. Візьмемо дві досить популярні книги.

Ю.М.Коршунов “МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ”. Москва, "Энергия", 1980 – второе издание. Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Автоматика и телемеханика". Подасмо зміст цього посібника: (виконайте таку роботу – відзначте біля тем розділів "було", "буде" і назву дисципліни, де теж розглядаються ці питання – перевірте, чи орієнтуєтеся Ви у тому. що вивчаєте.)

1. Основные понятия теории множеств

- 1.1 Конечные и бесконечные множества
- 1.2 Операции над множествами
- 1.3 Операции над множествами и упорядочение множеств
- 1.4 Соответствия
- 1.5 Отображения и функции (в частности: функция, обратная функция, функция времени, функционал, оператор) *всего 40 стр*
- 1.6 Отношения (эквивалентности, порядка, доминирования)

2. Основы теории графов

- 2.1 Основные определения теории графов
- 2.2 Задача о кратчайшем пути
- 2.3 Транспортные сети *всего 20 стр*

3. Элементы линейной алгебры и выпуклые множества

- 3.1 Метрические пространства и расстояния
- 3.2 Линейные пространства
- 3.3 Эвклидовы пространства
- 3.4 Матрицы и линейные преобразования
- 3.5 Квадратные матрицы
- 3.6 Симметрические матрицы и квадратичные формы

- 3.7 Выпуклые множества *всего 50 стр*
- 4. Элементы теории вероятностей и мат статистики**
 - 4.1 Понятие вероятности
 - 4.2 Условные вероятности
 - 4.3 Непрерывные случайные величины и их распределения
 - 4.4 Числовые характеристики случайных величин
 - 4.5 Дискретные случайные процессы
 - 4.6 Элементы мат статистики
 - 4.7 Регрессионный анализ и планирование эксперимента *всего 80 стр*
- 5. Структура и математическое описание задач оптимального управления**
 - 5.1 Основные черты процесса управления
 - 5.2 Оптимизация процесса управления
 - 5.3 Математическое описание объекта управления
 - 5.4 Классификация задач оптимального управления
 - 5.5 Многошаговые процессы управления
 - 5.6 Основные понятия теории оптимизации *всего 30 стр*
- 6. Линейное и нелинейное программирование**
 - 6.1 Постановка задач линейного программирования
 - 6.2 Решение задач линейного программирования
 - 6.3 Нелинейное программирование
 - 6.4 Итеративные методы поиска экстремума *всего 38 стр*
- 7. Динамическое программирование**
 - 7.1 Оптимальное управление как вариационная задача
 - 7.2 Метод динамического программирования *всего 20 стр*
- 8. Теория игр**
 - 8.1 Предмет теории игр
 - 8.2 Цены и оптимальные стратегии игр
 - 8.3 Геометрическое представление игры
 - 8.4 Решение игр *всего 30 стр*
- 9. Теория статистических решений (статистические игры)**
 - 9.1 Структура статистических игр (замена оборудования, технологическая линия)
 - 9.2 Статистические игры без эксперимента
 - 9.3 Статистические игры с проведением единичного эксперимента
 - 9.4 Использование апостериорных вероятностей
 - 9.5 Статистические игры с последовательными выборками *всего 25 стр*
- 10. Задачи теории расписаний и массового обслуживания**
 - 10.1 Предмет теории расписаний
 - 10.2 Сетевое планирование и управление

- 10.3 Комбинаторные задачи на составление расписания
- 10.4 Примеры задач сводящихся к задаче коммивояжера
- 10.5 Методы решения задачи коммивояжера
- 10.6 Задачи массового обслуживания

У підсумку маємо 365 сторінок.

А тепер розглянемо ще одну книгу-підручник для англійських студентів, а саме:

Д. Тёрнер Вероятность, статистика и исследование операций. Москва, "Статистика", 1976. в оригинале: Modern Applied Mathematics. Probability-Statistics-Operational Research. J.C. Turner, Principal Lecturer in Mathematics Leeds Polytechnic

Часть 1 Некоторые понятия современной математики

- 1. Теория множеств
- 2. Матрицы
- 3. Неравенства
- 4. Теория графов

Часть 2 Вероятность и статистика

(дуже добре організований стислий стандартний курс)

Часть 3 Прикладная теория вероятностей и исследование операций

- 1. Цепи Маркова
- 2. Некоторые модели теории очередей
- 3. Линейное программирование
- 4. Сетевое планирование
- 5. Управление запасами.

У підсумку маємо 350 сторінок.

В даному посібнику вдвічі більше матеріалу у вдвічі меншому обсязі. Це можливо тому, що:

а) посібник написано в середовищі математичного пакету, що має потужний "Ресурсний центр", де можна легко знайти інформацію із загальних питань – про матриці, диференціальні рівняння, множини, теорію ймовірності та ін.;

б) в посібнику інтегровані теорія і практика - більшість розділів - тематичних модулів побудована так, що закони, теореми одразу перетворюються у працюючі рівняння та програми і в кінці кожного модуля побудовано "стенд" для проведення досліджень.

Стенд – екранна сторінка, де зібрані і зручно розташовані "входи" і "виходи" певної задачі чи моделі певної системи. Обчислювальний експеримент – не сурогат натурального. По-перше – можна експериментувати, з тим чого ще нема в реальності, по друге – в комп'ютері можна десять разів довести фірму до банкрутства, десять разів розбити літак – такий досвід неможли-

во набути в реальності. Мабуть саме це мав на увазі А.С. Пушкін "...наука сокращает нам опыт быстротекущей жизни".

Особливості посібника:

а) орієнтація на моделювання в середовищі математичних пакетів;
б) розв'язання задач паралельно альтернативними методами (наприклад, задача оптимізації виробничої системи розв'язується як дискретна методом динамічного програмування, як неперервна методом Лагранжа, на базі нечіткої логіки і методом Монте-Карло);

в) розгляд найновіших, найактуальніших задач сучасної глобалізованої техно-економіки, наприклад ігрова задача аналізу рівноваги і стійкості системи "виробники-споживачі";

г) орієнтація на розв'язання актуальних задач. Наприклад, те що названо "лекції", може бути зразками-заготовками для розділів курсової роботи, там є програмні модулі, які можна копіювати і вбудовувати в свої документи. Розділи посібника – досить автономні тематичні модулі, окремі файли, з якими можна працювати автономно, поза середовищем цієї електронної книги.

Нема тут нічого дивного, коли сьогодні значна частина студентських курсових робіт – просто відскановані сторінки паперових книг. Якщо вже копіювати (з повагою до авторських прав, зрозуміло), то працююче, "живе".

Тотальна комп'ютеризація принесла нові норми і стандарти:

а) **статтю, книгу**, де формули набрано в текстовому редакторі якщо її написане Ейлер, Лагранж, Ляпунов, Белман, Понтрягін..., а наш сучасник – **можна не читати**;

б) **людині, не можна довіряти** не тільки обчислення, але й алгебраїчні перетворення, отримання виразів для похідних та інтегралів – математичні моделі і програми часто одразу вбудовуватись в складні реальні системи управління і досить часто загублена складова чи помилковий мінус приводять до мільярдних втрат.

В цій книзі усі формули – працюючі. В книзі є "рімейки" з фундаментальної класики. Дивна річ – беремо сторінки з книг Белмана, Понтрягіна – набираємо у середовищі математичного пакету рівняння і формули з них, навіть найабстрактніші, і бачимо – вони працюють: можна обчислити оптимальні стратегії, побудувати оптимальну лінію переключення... Беремо книгу "масової науки" – все, що там написане – просто імітація. Неважко перегорнути сторінки цієї книги та переглянути її зміст. Все ж наведемо тут зміст посібника – для аналізу.

1. Лекції

- 1.1. Елементи математичної статистики - міри розташування та відхилення даних;
- 1.2. Міри статистичного зв'язку даних;

- 1.3. Емпіричні частотні розподілення;
- 1.4. Елементи теорії розподілень. Стійкі розподілення;
- 1.5. Елементи теорії масового обслуговування. Задачі теорії масового обслуговування;
- 1.6. Теорія управління запасами. Задачі управління запасами;
- 1.7. Задачі на графах. Оптимальні плани і маршрути перевезень;
- 1.8. Оптимальне управління. Варіаційне обчислення. Задача Марковиця;
- 1.9. Оптимальне управління. Метод принципу максимуму;
- 1.10. Нечіткі методи оптимізації та прийняття рішень;

2. **Задачі-проекти**

- 2.1. Розробка підсистеми прогнозування, планування і оптимізації для автоматизованої системи управління АЗС;
- 2.2. Розробка програмного модуля контролю та прогнозування якості продукції, що виробляється на конвеєрі;
- 2.3. Синтез регуляторів для нелінійних систем класу "перевернутий маятник";
- 2.4. Розробка ультранадійної САУ, нечутливої до відмов вимірювачів компонентів вектору стану об'єкта управління;
- 2.5. Розробка ультранадійної термінальної САУ, нечутливої до відмов приводів
- 2.6. Альтернативні методи оптимізації надійності технічної системи

1. Елементи математичної статистики

1.1 Міри розташування даних

На протязі попередніх семестрів Ви вже не раз, і не два, вивчали і використовували елементи теорії ймовірності і статистики в інших дисциплінах. Природно, що приходить час глянути на цю науку зверху, узагальнити, ув'язати і просто повторити. Все це буде потрібним і при виконанні курсової роботи.

Нагадаємо, що міри розташування – це середні, а міри відхилення – це середні відхилення від середніх. Дехто з вас, інтенсивно використовуючи середнє арифметичне та середнє квадратичне, забув про інші середні. Розглянемо ці міри на простих прикладах, і заодно ознайомимось з вбудованими статистичними функціями пакету. Припустимо, що вам дано масив експериментальних, емпіричних даних, наприклад:

$$\begin{pmatrix} \text{"Зріст"} & 130 & 145 & 176 & 220 \\ \text{"Вага"} & 110 & 100 & 60 & 55 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{pmatrix} \text{"Середній бал"} & 3.3 & 4.5 & 5.0 & 2.2 \\ \text{"Вага"} & 110 & 100 & 60 & 55 \end{pmatrix} \quad \text{або}$$

$$M := \begin{pmatrix} \text{"Дата"} & 13.1 & 15.1 & 17.1 & 33.1 & 1.2 & 12.2 \\ \text{"Кільк покупців"} & 90 & 110 & 55 & 45 & 50 & 150 \\ \text{"Індекс цін"} & 1.00 & 1.03 & 1.3 & 1.1 & 1.0 & 0.9 \end{pmatrix} \quad \text{ORIGIN}=1$$

Виділимо з матриці M вектор даних – для наскрізного прикладу. Це можна зробити за допомогою вбудованої функції `submatrix (A, ir, jr, ic, jc)`. Нагадаємо, що вбудовані статистичні функції пакету звичайно працюють з даними у формі вектора-стовпця.

$$Vr := \text{submatrix}(M, 2, 2, 2, 7) \quad V := Vr^T \quad Vr = (90 \ 110 \ 55 \ 45 \ 50 \ 150)$$

Незалежно від специфіки задачі для контролю та управління завжди потрібна найпростіша первинна обробка таких даних:

- виділення максимуму і мінімуму
- визначення розмірів масивів, сортування,
- визначення середнього, відхилень від середнього,

а вже потім більш складних характеристик – регресій і кореляцій, частотних розподілень та іншого.

V =

	1
1	90
2	110
3	55
4	45
5	50
6	150

Сьогодні функції статистичної обробки сьогодні вбудовані в усі пакети і системи програмування.

Наприклад, в пакеті Mathcad є такі функції
максимум мінімум, кількість рядків і стовпців (колонок) масиву

$$\max(V) = 150 \quad \min(V) = 45 \quad \text{rows}(M) = 3 \quad \text{cols}(M) = 7$$

Функція сортування:

$$\text{sort}(V)^T = (45 \ 50 \ 55 \ 90 \ 110 \ 150)$$
$$-\text{sort}(-V)^T = (150 \ 110 \ 90 \ 55 \ 50 \ 45)$$

Що таке середнє – майже очевидно: середня ціна, середня швидкість, ... але з ймовірністю 1 можна стверджувати, що ви не знаєте скільки існує видів середніх і яке середнє – “найкраще”??? Згадайте, придумайте різні середні.

Середнє – важлива характеристика набору кількісних даних. Вона вказує на “центр” даних. Точно так же, як люди можуть мати різні думки відносно “центру міста” (торговий центр, діловий центр, культурний центр...), так і в статистиці, в залежності від обставин використовують різні середні:

- 1) середнє діапазону;
- 2) середнє арифметичне;
- 3) середнє геометричне;
- 4) середнє гармонійне;
- 5) середнє квадратичне;
- 6) медіана (=медіанне середнє);
- 7) мода.

Розглянемо стисло визначення і формули цих середніх. Візьмемо тестовий масив із випадкових величин:

$$\text{ORIGIN} = 1 \quad N := 50 \quad i := 1..N \quad V_i := \text{rnd}(10) + \text{rnd}(10)$$

$$\text{rows}(V) = 50 \quad \text{cols}(V) = 1 \quad \max(V) = 18.319 \quad \min(V) = 1.946$$

1.Напівсума крайніх значень (=середнє діапазону).

Подасмо формулу визначення цього середнього у вигляді функції користувача. *Самостійно, не дивлячись у відповідь, знайдіть його переваги і вади цього середнього. (Легко обчислювати, але коли дані сконцентровані на якомусь краю діапазону – буде велика різниця з середнім арифметичним.)*

$$\text{polysyn}(V) := (\max(V) + \min(V)) \cdot 0.5 \quad \text{polysyn}(V) = 10.132$$

2. Середнє арифметичне

Це найбільш розповсюджене середнє, воно здається таким природним, і для цього є деякі підстави – ми потім розглянемо фундаментальну властивість середнього арифметичного і середньоквадратичного.

$$\text{Sar}(V) := \frac{1}{N} \cdot \sum_i V_i \quad \text{Sar}(V) = 10.119 \quad \text{mean}(V) = 10.119$$

3. Медіанне середнє, або просто медіана.

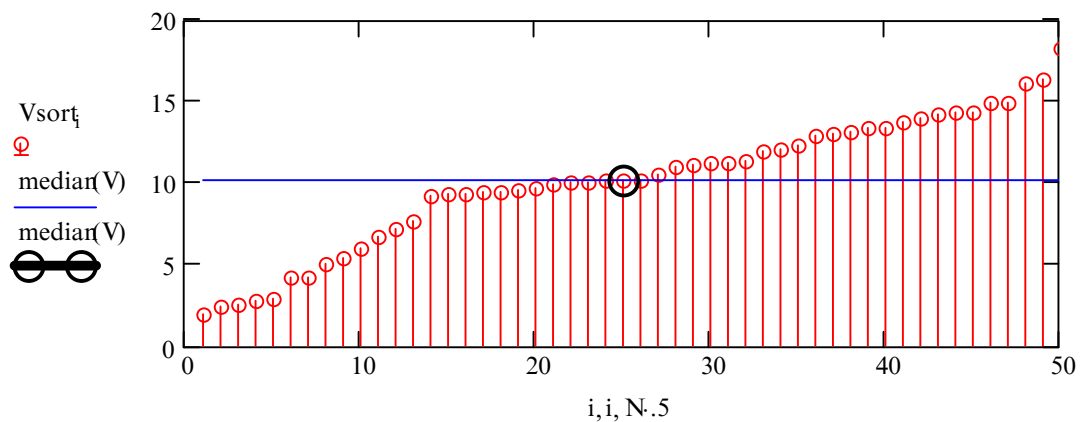
Медіана – величина, що знаходиться в середині набору даних, упорядкованого по зростанню. Звичайно медіану визначають на частотному розподіленні (📊📈).

Подаємо функцію користувача: і вбудовану функцію обчислення медіани:

$$\text{Smed}(v) := \text{sort}(v)_{\text{ceil}(\text{length}(v) \cdot 0.5)} \quad \text{Smed}(V) = 10.145 \quad \text{median}(V) = 10.156$$

На графіку сортованих даних медіана проходить через **середню** (25-ту) точку масиву. Якщо побудувати гістограму (=емпіричне частотне розподілення), то медіана ділить площу частотного розподілення навпіл.

$$V_{\text{sort}} := \text{sort}(V)$$



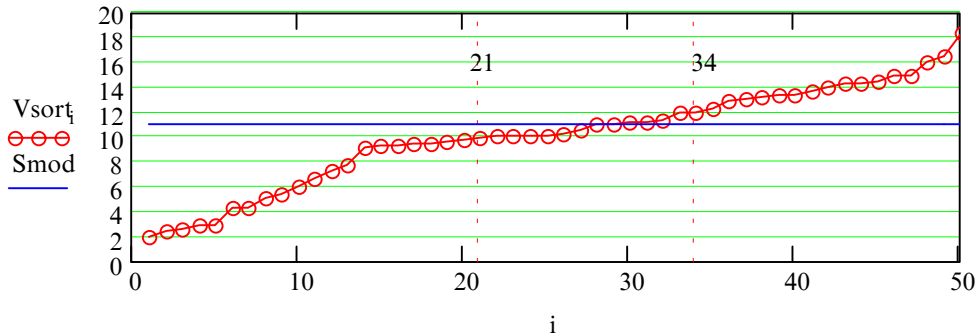
4. Мода

Мода є значення, що найбільш часто зустрічається в наборі даних. Інакше можна сказати, що це координата, де дані розташовуються найбільш щільно. Звичайно моду визначають на частотному розподіленні (ДК), і мод може бути декілька.

Визначати моду має зміст на великих вибірках, $N > 100$..., в даному випадку можна знайти її приблизно по графіку: бачимо, що в діапазоні 10-12 більше всього даних = $34 - 21 = 13$. На частотному розподіленні мода – це екст-

ремум. Вам зрозуміло тепер, що таке бімодальні, полімодальні розподілення. В пакеті є вбудована функція mode().

$$V_{N+1} := V_N \quad \text{mode}(V) = 11.329 \quad \text{Smod} := 11$$



5. Середнє геометричне

Середнє геометричне можна визначити й так: **"антилогарифм від середнього арифметичного від логарифмів величин набору даних"**. Далі подано формулу обчислення середнього геометричного, яку легше зрозуміти, ніж словесну. Використовується це середнє для усереднення послідовності дріб. Подаємо свою і вбудовану функцію. Між іншим, використовується в так званому “геометричному програмуванні” – дуже важливому методі оптимізації.

$$\text{Sgeom} := \left(\prod_i V_i \right)^{\frac{1}{N}} \quad \text{gmean}(V) = 9.068$$

$$\text{Sgeom} = 9.027$$

6. Середнє гармонійне

Середнє гармонійне можна визначити отак: **“зворотна величина від середнього арифметичного від зворотних величин набору даних”**. Далі подано формулу обчислення середнього гармонійного, що точно втілює словесну формулу.

Використовується це середнє для усереднення послідовності “швидкостей на однакових дистанціях” – придумайте змістовну задачу, ну, хоч для цеха автоматів: “задано випуск деталей за 8 годин для кожного наладчика (усього їх =N)...Чому дорівнює середній часовий випуск усього цеха?”

$$Sharm := \frac{N}{\sum_i \frac{1}{V_i}} \quad hmean(V) = 7.59$$

$$Sharm = 7.54$$

7. Середнє квадратичне

Корінь із середнього квадратичного дорівнює кореню із середнього арифметичного квадратів величин набору даних. (Є легка плутанина – часто середнім квадратичним називають саме корінь із середньоквадратичного). Використовується середнє квадратичне для моментів інерції та ін.

$$Sqvad := \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_i (V_i)^2} \quad Sqvad = 10.87$$

Збираємо усі середні для нашого прикладу разом і бачимо, що вони різні, як і наші визначення центра міста.

$$\begin{aligned} polysyn(V) &= 10.132 & Smod &= 11 & Sqvad &= 10.87 \\ Sar(V) &= 10.119 \\ Smed(V) &= 10.168 & Sgeom &= 9.027 & Sharm &= 7.54 \end{aligned}$$

Контрольні питання:

1. Яким повинен бути набір даних, щоб усі середні були однаковими?
2. Назвіть переваги. або “екологічну нішу” для кожного з середніх

1.2 Міри розсіювання(= Середні відхилення від середніх)

Почнемо розгляд з такої актуально-практичної задачі. Уявіть собі, що Ви виробили 5 підшипників, **середній** розмір яких 50мм при номіналі 50мм, а ваш колега теж 5 і з **середнім** розміром 49.99. Хто працює краще?...

Якщо підшипники мали такі розміри:

Ваші -45.00, 55.00, 46.00, 48.00, 56.00 Його - 49.98, 50.00, 49.98, 50.00, 49.99

Бачимо, що є якась різниця, але як її вимірити? Для кількісної оцінки

саме того, чим розрізняються ці два набори даних використовуються **міри розсіювання**. Як і для середніх можна запропонувати декілька альтернативних мір розсіювання. Ознайомимось з цими мірами та проведемо порівняльний аналіз

1. Розмах

Розмах – простіша міра розсіювання, дорівнює різниці максимального і мінімального значень набору даних. Цю величину можна зробити відносною, безрозмірною, поділивши її на середнє.

Проблемка: Якщо середнє від частки можна визначити як частку від середніх, то з мірами розкиду це не так. А як саме?

$$\frac{(\max(V) - \min(V))}{\text{mean}(V)} = 1.614$$

2. Середньоарифметичне відхилення від середньоарифметичного

Ця міра має унікальну властивість, через яку ніколи не використовується. **Докажіть цю властивість.** Це відсіюючий тест – завжди оце пам’ятайте:

$$\text{mean}(V - \text{mean}(V)) = 0$$

$$\text{OO} := \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_i (V_i - \text{mean}(V))$$

$$\text{OO} = -0$$

3. Середнє абсолютне відхилення від середньоарифметичного

На практиці частіше і додатні від’ємні відхилення є однаково не бажаними. Ну от, для мисливця, яка різниця – вище чи нижче пролетіла куля? Ця міра визначається як середнє арифметичне від модулів відхилень від середнього. Визначаємо її двома альтернативними методами.

Між іншим, риска над виразом – оператор векторизації. Означає вона “виконати операцію над кожним компонентом вектора чи матриці”. Векторизація прискорює обчислення.

$$\text{Dmod} := \text{mean}(\overrightarrow{|V - \text{mean}(V)|})$$

$$\text{dmod} := \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_i |V_i - \text{mean}(V)|$$

$$\text{dmod} = 3.093 \qquad \text{Dmod} = 3.056$$

4. Середнє квадратичне відхилення від середньоарифметичного

Для аналітичного розв'язання оптимізаційних задач статистики, коли треба брати похідну від міри розсіювання, легше взяти похідну від x^2 – це буде $2 \cdot x$ – лінійна функція. А похідна від модуля? От тому масова наука так любить квадратичні критерії та помилки. Ця міра визначається як **середнє арифметичне від квадратів відхилень від середнього**. Визначаємо її 4-ма альтернативними методами – по формулам і за вбудованою функцією `var(.)` – variance (варіація, дисперсія), `stdev(.)` – standard deviation (стандартне відхилення):

$$dqva := \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_i (V_i - \text{mean}(V))^2}$$

$$Dqva := \sqrt{\text{mean}((V - \text{mean}(V))^2)}$$

$$dqva = 3.971$$

$$Dqva = 3.935$$

$$\sqrt{\text{var}(V)} = 3.935$$

$$\text{stdev}(V) = 3.935$$

Фактично із множини мір відхилення в практиці використовується тільки ця остання міра. На то є підстави.

Властивості середньоквадратичного відхилення від середньоарифметичного.

1. Обчислення цієї міри (назви: variance, дисперсія) полегшується, **якщо урахувати властивість (не дивлячись у відповідь **докажіть це самостійно!?**)**:

$$\sum_i (V_i - \text{mean}(V))^2 = 788.335$$

$$\sum_i (V_i)^2 - (N \cdot \text{mean}(V))^2 = 764.26$$

Доказ (майже без коментарів):

$$\sum_i (V_i - \text{mean}(V))^2 = \sum_i (V_i)^2 - 2 \cdot N \cdot \text{mean}(V) \cdot \sum_i V_i + \sum_i (\text{mean}(V))^2$$

враховуємо, що

$$\sum_{i=1}^N V_i = N \cdot \text{mean}(V)$$

$$\sum_{i=1}^N \text{mean}(V) = N \cdot \text{mean}(V)$$

і отримуємо:- ствердження доказано.

$$\sum_i (V_i)^2 - 2 \cdot \text{mean}(V) \cdot (N \cdot \text{mean}(V)) + N \cdot (\text{mean}(V))^2 = \sum_i (V_i)^2 - N \cdot (\text{mean}(V))^2$$

2. Якщо обчислити середньоквадратичні відхилення від **різних середніх**, то виявиться, що найменше*** з них – **середньоквадратичне від середньоарифметичного**.

Тобто, якщо за міру розсіювання вибрати середньоквадратичне, то найкращим центром, (серединою) даних виявляється середньоарифметичне. Тому основними в статистиці стали саме ці міри і саме вони є вбудованими функціями багатьох мов і середовищ програмування.

Це легко перевірити експериментально і досить важко доказати. Спробуйте? Виконаємо експериментальну перевірку – запишемо вирази для середньоквадратичних відхилень від різних середніх:

$$dqsgm := \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_i (V_i - Sgeom)^2} \quad dqsgm = 4.118$$

$$dqsqv := \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_i (V_i - Sqvad)^2} \quad dqsqv = 4.041 \quad \boxed{dqva = 3.971}$$

$$dqshar := \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_i (V_i - Sharm)^2} \quad dqshar = 4.735$$

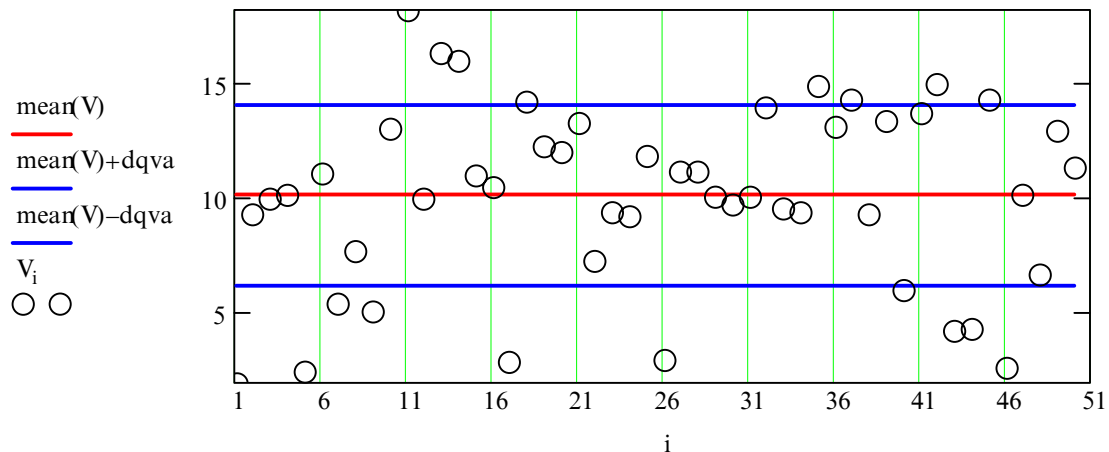
Бачимо, що середньоквадратичне відхилення від середньоарифметичного найменше середньоквадратичних відхилень від інших середніх.

Подасмо варіант програми – відповідь на наступне самостійне завдання. Пройгноруйте його, якщо не хочете втратити потенційний власний варіант.

$$kk_i := \text{if}(|V_i - \text{mean}(V)| - dqva > 0, 0, 1) \quad \text{Доля_даних} := \text{mean}(kk) \quad \boxed{\text{Доля_даних} = 0.64}$$

Будуємо тепер графік, на якому подаємо наші дані, середнє арифметичне і середні квадратичні відхилення.

Завдання. Напишіть САМОСТІЙНО програму для обчислення долі даних, що попадають в діапазон між стандартними відхиленнями. Модифікуйте програму для обробки масиву у 130 даних, 1300 даних. Подаємо завдання у графічному виді.



Завдання для самостійного виконання. Вбудовані функції дуже зручні, крім того вони:

- 1) не завжди вдалі;
- 2) є чорними ящиками;
- 3) розтренировують, відучають мислити і працювати.

Тому перевірте себе – не дивлячись на зразки напишіть банальні програми для знаходження максимуму і мінімуму.

```
brainpowder= | mi← 100000001
               | ma← -999999999
               | for i ∈ 1..N
               |   | mi← | Vi if Vi < mi
               |   |   | mi otherwise
               |   | ma← | Vi if Vi > ma
               |   |   | ma otherwise
               |   |
               |   | Otvet← ( mi )
               |   |       ( ma )
               |   |
               |   | Otvet
```

Бачимо, наша програма працює як фірмова:

$\text{brainpowder} = \begin{pmatrix} 1.946 \\ 18.319 \end{pmatrix}$

$\min(V) = 1.946$

$\max(V) = 18.319$

Тест 1. Перевірте експериментально, який відсоток даних попадає у діапазон $(x_c - \sigma, x_c + \sigma)$, для:

- 1) рівномірного розподілення
- 2) нормального розподілення

Який відсоток даних попадає у діапазон $(x_c - 2\sigma, x_c + 2\sigma)$, для

- 1) рівномірного розподілення
- 2) нормального розподілення.

Підказка – вбудована функція `rndnd(a)` видає випадкове число x з діапазону $(0 \leq x \leq a)$, а сума трьох таких чисел буде мати розподілення близьке до...

$$V2_i := \text{rnd}(10) + \text{rnd}(10)$$

$$dqva := \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_i (V2_i - \text{mean}(V2))^2}$$

$$kk_i := \text{if}(|V2_i - \text{mean}(V2)| - dqva > 0, 0, 1)$$

$$\text{Доля_даних} := \text{mean}(kk)$$

Тест 2. Прокоментуйте програму подану далі. Побудуйте графік видачі цієї програми як функцію N та M . Зробіть висновки відносно розкиду даних.

```

Доля_Д(N, M) :=
  for i ∈ 1.. N
    |
    | V_i ← ∑_{q=1}^M rnd(10/M)
    | "Енд"
    очікування ← mean(V)
    відх_серед_ква ← mean[(V - mean(V))^2]^0.5
    Верх ← очікування + відх_серед_ква
    Низь ← очікування - відх_серед_ква
    for i ∈ 1.. N
      |
      | попалq ← | 1 if Низь < V_i < Верх
      |           | 0 otherwise
      | "Енд"
    Відсоток ← mean(попало)

```

Доля_даних 0.7

$$\text{Доля_Д}(50,2) = 0.76 \quad \text{Доля_Д}(50,2) = 0.6 \quad \text{Доля_Д}(50,2) = 0.66$$

Останнє питання: Чому для одних і тих же вхідних параметрів програма Доля_Д(50,2) видає різні значення?

Основи кібернетики та дослідження операцій

1.2 Міри статистичного зв'язку даних (регресія, кореляція)

Ми розглянули міри групування та розсіювання даних. Тепер переходимо до мір статистичного зв'язку між даними. Де, коли, для чого використовуються ці міри, як вони визначаються? Розглянемо це з позицій інженера.

Розробка моделей усталених процесів “вхід-вихід” для підприємств і техпроцесів, перевірка теоретичних моделей, побудованих на базі певних фізичних законів звичайно базується на експериментально виявлених залежностях між цими входами і виходами. Експерименти з вимірюванням реальних входів виходів також виконуються і в процесі функціонування системи – для покращення та уточнення моделей систем та процесів, тобто для оптимізації, налаштування системи управління.

Регресійний аналіз – це метод побудови моделі, яка **найкраще** відповідає набору експериментальних даних. Априорно вважається, що дані вимірювань містять в собі “істинні” дані, засмічені **випадковими** помилками та шумами. Термін “найкраще відповідає” не означає, що модель точно співпадає з наявною вибіркою даних. Нам треба сконструювати якусь числову міру розходження моделі з експериментальними даними, яку ми і будемо мінімізувати. Ви вже морально підготовлені до того, що формально нема єдиної найкращої міри, але в певному сенсі вона є – це сума квадратів відхилень – аналог дисперсії, середньоквадратичного відхилення – ну дуже зручна міра.

1.2.1 Побудова лінійної регресійної моделі

На рисунку 1 подано N-мірний набір пар даних (наприклад кров'яний тиск у пацієнта – кров'яний тиск у лікаря після бесіди з пацієнтом). Прийнято попередню гіпотезу про статистичну **лінійну залежність** між цими величинами (якщо серйозно, то існує таке явище як **емпатія**). На графіку подано і цю модель і “помилки” даних відносно цієї моделі.

Вводимо дані для побудови графіків регресії. $\text{ORIGIN} := 1 \quad N := 100$

Модель статданих: $i := 1 \dots N$

$$A0d := 2 \quad A1d := 0.5 \quad X_i := .1 \cdot i + \text{rnd}(.5) \quad S = 5$$

$$Y_i := A1d \cdot X_i + A0d + \left(\text{rnd}(S) - \frac{S}{2} \right)$$

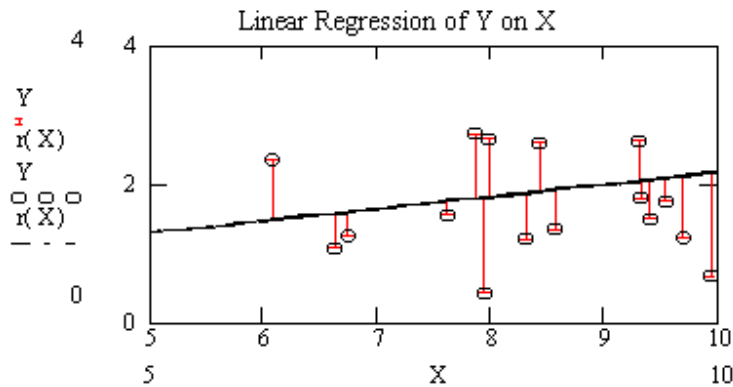


Рис.1 Схема лінійної регресії

Постановка задачі побудови лінійної регресії. Маємо набір пар даних (між якими підозрюється залежність) і лінійну модель (залежності):

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \quad y_i = A_0 + A_1 \cdot X_i$$

де y_i – величина, що прогнозується регресійною моделлю.

Необхідно отримати такі значення коефіцієнтів A_0 , A_1 , для яких сума квадратів помилок є мінімальною.

Отримання розв'язання задачі

Для кожної точки “незалежної” (такої, що ми прийняли за причину) експериментальної змінної X можна записати рівняння прогнозу:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_0 + A_1 \cdot X_1 \\ &\dots\dots\dots \\ y_N &= A_0 + A_1 \cdot X_N \end{aligned} \right\}$$

Для кожної точки можна записати рівняння помилки прогнозування:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= y_1 - Y_1 = A_0 + A_1 \cdot X_1 - Y_1 \end{aligned} \right\}$$

$$E_N = y_N - Y_N = A_0 + A_1 \cdot X_N - Y_N$$

Складаючи усі ці помилки, отримуємо вираз для критерію оптимізації – **суми квадратів помилок**:

$$F = (E_1)^2 + \dots + (E_i)^2 + \dots + (E_N)^2 \quad F = \sum_{i=1}^N (E_i)^2 = \sum_{i=1}^N (A_0 + A_1 \cdot X_i - Y_i)^2$$

Як розв'язати цю оптимізаційну задачу (*поставте собі 7 балів, якщо вам одразу прийшло в голову те, що написано далі*).

Шукаємо екстремум функції двох змінних A_0 та A_1 (а не X_i , Y_i , як Ви могли подумати). Завдяки квадратичності критерію, отримуємо лінійні рівняння для визначення оптимальних значень A_0 і A_1 . Необхідні умови мінімуму:

$$\frac{d}{dA_0} F(A_0, A_1) = 0$$

$$\frac{d}{dA_1} F(A_0, A_1) = 0$$

Увага! Цей конспект лекцій є електронною книгою, створеною в середовищі пакета Mathcad. Певні математичні операції тут виконуються символьним процесором. Для того, щоб отримувати чисто символьні результати, усі змінні символьних перетворень НЕ ПОВИННІ МАТИ ЧИСЛОВІ ЗНАЧЕННЯ. Тому ми трохи змінили назви змінних.

$$F(A_0, A_1) := \sum_{k=1}^K (A_0 + A_1 \cdot X_{k-1} - Y_{k-1})^2$$

Знаходимо вирази для похідних від цільової функції за допомогою символьного процесора.

$$\frac{d}{dA_0} F(A_0, A_1) \rightarrow 2 \cdot K \cdot A_0 + \sum_{k=1}^K (2 \cdot A_1 \cdot X_{k-1} - 2 \cdot Y_{k-1})$$

$$\frac{d}{dA_1} F(A_0, A_1) \rightarrow \sum_{k=1}^K [2 \cdot A_0 \cdot X_{k-1} + 2 \cdot A_1 \cdot (X_{k-1})^2 - 2 \cdot X_{k-1} \cdot Y_{k-1}]$$

Прирівнюємо вирази похідних до нуля. Виконуємо алгебраїчні перетворення, множник “2” у обох рівняннях виносимо і скорочуємо.

$$N \cdot A_0 + \sum_{i=1}^N A_1 \cdot X_i = \sum_{i=1}^N Y_i \quad A_0 \cdot \sum_{i=1}^N X_i + A_1 \cdot \sum_{i=1}^N (X_i)^2 = \sum_{i=1}^N X_i \cdot Y_i$$

Отримали систему двох рівнянь з двома невідомими – A_0 , A_1 . Записуємо її у матрично-векторному виді (використовуємо скорочені означення суми):

$$\begin{bmatrix} N & \sum_i X_i \\ \sum_i X_i & \sum_i (X_i)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i Y_i \\ \sum_i X_i \cdot Y_i \end{pmatrix}$$

Розв'язуємо цю систему рівнянь, отримуємо формули для параметрів регресії

$$A_0 := \left[\frac{\sum_i Y_i \cdot \left[\sum_i (X_i)^2 \right] - \sum_i X_i \cdot \sum_i X_i \cdot Y_i}{N \cdot \left[\sum_i (X_i)^2 \right] - \left(\sum_i X_i \right)^2} \right] \quad A_1 := \left[\frac{N \cdot \sum_i X_i \cdot Y_i - \sum_i X_i \cdot \sum_i Y_i}{N \cdot \left[\sum_i (X_i)^2 \right] - \left(\sum_i X_i \right)^2} \right]$$

Праворуч подано “кухню” – копію блока розв’язання системи рівнянь у символьному виді. Отримані нами вирази є досить складними, в них дуже легко припуститись помилки. Нагадуємо – сучасні стандарти програмування та роботи з математикою вимагають виключати людину із складних, але рутинних процедур.

Хто сьогодні перемножує вручну:

$$12345 \times 98706 = ?$$

В пакеті є вбудовані функції для обчислення параметрів регресії. Виводимо їх, **порівнюємо** з обчисленими за отриманими формулами:

$$a_0 := \text{intercep}(X, Y)$$

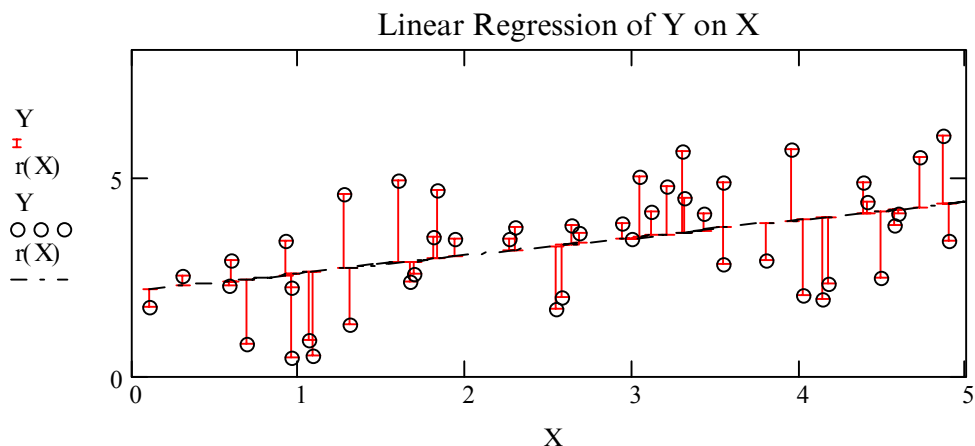
$$a_1 := \text{slope}(X, Y)$$

$$\begin{aligned} & \text{Given} \\ & N \cdot A_0 + \sum_{i=1}^N A_1 \cdot X_i = \sum_{i=1}^N Y_i \quad A_0 \cdot \sum_{i=1}^N X_i + A_1 \cdot \sum_{i=1}^N (X_i)^2 = \sum_{i=1}^N X_i \cdot Y_i \\ & \text{Find } \{A_0, A_1\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\left[-\sum_{i=1}^N X_i \cdot \sum_{i=1}^N X_i \cdot Y_i + \sum_{i=1}^N Y_i \cdot \sum_{i=1}^N (X_i)^2 \right]}{\left[-\left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2 + \sum_{i=1}^N (X_i)^2 \cdot N \right]} \\ \frac{\left[-\sum_{i=1}^N X_i \cdot \sum_{i=1}^N Y_i + \sum_{i=1}^N X_i \cdot Y_i \cdot N \right]}{\left[-\left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2 + \sum_{i=1}^N (X_i)^2 \cdot N \right]} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Обчислено за вбудованими функціями: $a_0 = 2.139$; $a_1 = 0.453$;
за нашими формулами: $A_0 = 2.139$; $A_1 = 0.453$;
точні значення, що ми “сховали” у модель: $A_{0d} = 2$; $A_{1d} = 0.5$.
Ввід розкиду $S \equiv 5$ Рівняння регресії: $r(x) := (A_0 + A_1 \cdot x)$

Якщо ви вивчаєте цей матеріал на комп'ютері, то можете проекспериментувати: натисніть декілька раз розкид S в моделі даних (див. сторінку 1). Так створюються нові реалізації випадкових даних. Можемо бачити, що значення параметрів регресії кожен раз децю змінюються. Можемо змінювати величину розкиду – при бажанні можна буде виявити, що значення параметрів регресії стануть менш точними. Порівняйте ці результати з A_{0d} і A_{1d} - параметрами “істинної” залежності.

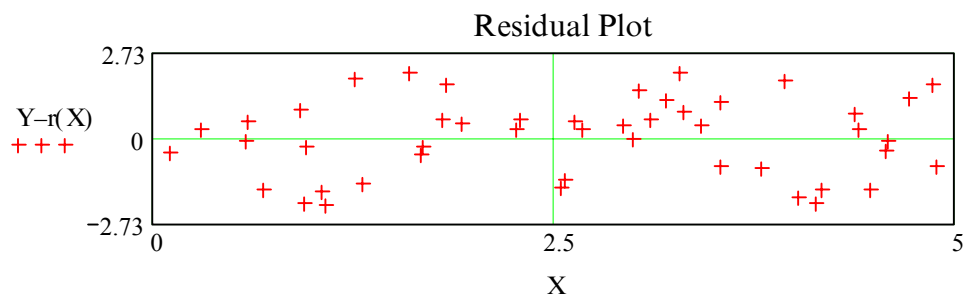
Наша модель даних (див. сторінку 1) – лінійна залежність “засмічена” випадковими числами, що імітують шуми вимірювання та інші випадкові фактори. Будуємо графік регресії вхідних даних. Увага! Цей графік взято з електронної книги – “Ресурсного центру” пакету Mathcad і залишено в оригінальному виді. Користуйтеся електронними книгами і поважайте авторські права.



Масштаб для графіка помилки регресії зроблено таким:

$$\text{scale} := \max(|r(X) - Y|) \cdot 1.1$$

$$\text{scale} = 2.732$$



Оце графік так званих “залишків” – відхилень даних Y від середнього, що не пояснюються регресією, тобто впливом параметра X . Ці залишки можуть бути спричинені: помилками вимірювання, впливом ще якихось факторів і, взагалі, властивістю самого процесу.

Міра статистичного зв’язку між даними – **кореляція**.

Задамо собі таке питання – а що, як статдані X і Y незалежні, не мають ніякого зв’язку. Формули регресії завжди видадуть якісь параметри. Інакше кажучи, як оцінити ступінь зв’язку між даними, як оцінити точність регресії. Введемо ще одну міру статистичного зв’язку між даними – кореляцію (точніше – **коваріацію**): є і відповідна вбудована функція:

$$s_{xy} := \frac{1}{N} \cdot \left[\sum_i (X_i - \text{mean}(X)) \cdot (Y_i - \text{mean}(Y)) \right] \quad \text{Covariance:} \quad s_{xy} = 3.808 \quad \text{cvar}(X, Y) = 3.808$$

Формально це **середнє арифметичне від добутку центрованих парних випадкових X та Y** . Ця величина не дуже зручна для оцінки лінійного зв’язку бо залежить ще від дисперсій X та Y . Нагадуємо їх для повторення:

$$s_x := \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \left[\sum_i (X_i - \text{mean}(X))^2 \right]} \quad s_y := \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \left[\sum_i (Y_i - \text{mean}(Y))^2 \right]}$$

Порівнюємо значення отримані за цими формулами та за вбудованими функціями.

$$\sigma_x := \text{stdev}(X) \quad \sigma_x = 2.898 \quad s_x = 2.898 \quad \sigma_y := \text{stdev}(Y) \quad \sigma_y = 1.895 \quad s_y = 1.895$$

Звичайно використовують нормовану величину – **коефіцієнт кореляції, що змінюється в діапазоні $-1 < rk < 1$ (-1 – від’ємна, $+1$ – додатна кореляція, 0 – нема кореляції)**.

Вбудована функція

$$rk := \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

$$rk = 0.693$$

Correlation coeff.

$$R_{xy} := \text{corr}(X, Y)$$

$$R_{xy} = 0.693$$

Тепер можемо сформулювати практичне правило для побудови регресій: **обчисліть спочатку коефіцієнт кореляції даних, ЯКЩО ВІН БЛИЗЬКИЙ ДО НУЛЯ**, то дані або незалежні або дуже засмічені помилками вимірювань або збуреннями. Зв'язок між регресією, кореляцією та дисперсіями (легко вивести самостійно, подивившись на отримані вище вирази для A_0 , A_1 , або знайти в підручниках з статистики. *Перевіряємо, бачимо, що дійсно співпадає..*

$$Ak1 := \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$Ako := \text{mean}(Y) - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot \text{mean}(X)$$

$$A_0 = 2.139 \quad A_1 = 0.453$$

$$A_{k0} = 2.139 \quad A_{k1} = 0.453$$

Як і коли використовувати статистичні характеристики.

У світовій науковій і не тільки літературі багато писалося і пишеться відносно зловживань або некоректного вживання статметодів. У совковій науці, особливо у економічних і гуманітарних напрямках статметоди були засобом прикриття пустих робіт. Зрозуміло чому у радянські часи у нас не могло бути сильних статистиків – для цього треба мати досить статданих і бути досить незалежним у висновках.

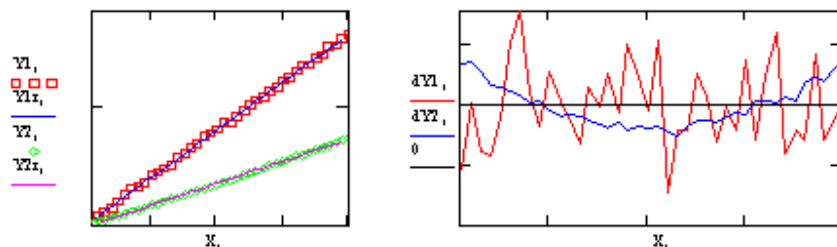
Белман у бібліографії до розділу книги “Процеси управління з адаптацією” подав поему “Гайавата ставить експеримент” написану Кендалом. Як інструкцію, з перших рук!, по застосуванню статметодів наведемо уривки з цієї поеми. Бажано прочитати повністю не тільки цю поему, але й роботи Белмана, Фішера, Кендала. Це – першоджерела. Ось як починає книгу “Часові ряди” Кендел: “Время, возможно, представляет собой наибольшую тайну в таинственной вселенной. Но его таинственная природа в этой книге нас, к счастью, не интересует”, а так продовжує: “Но если маленький мальчик обстреливает маятник горохом нерегулярным образом, то его движение будет возмущено”.

4.
Но упрямые индейцы
Возразили Гайавате,
Что они не понимают
Столь туманных рассуждений.
Им совсем неинтересен
Результат его попыток.
И они предполагают,
Что охотник должен метко
В цель стрелять. А если будет
Он впустую тратить стрелы-
Должен сам за них платить.

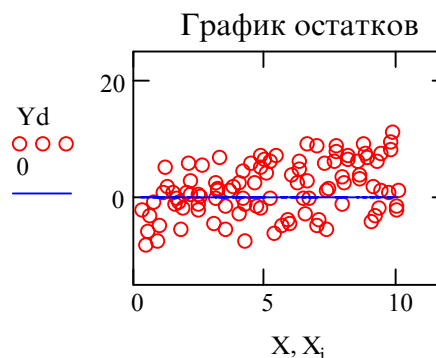
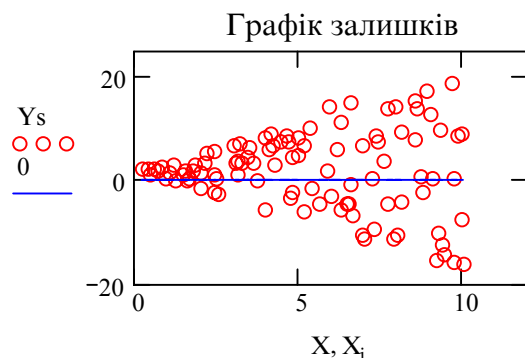
5
Раздражённый Гайавата
Стал цитировать обильно
Р.А. Фишера и Итса,
Приводит работы Финни,
Книги Кемпторна Оскара,
Главы Кокрана и Кокса,
Андерсена и Банкрофта.
Он взывал к авторитетам,
Убеждая несогласных,
Что в стрельбе всего важнее
Не прямое попадание,
А научно безупречный
Статистический подход.

12.
Тем не менее индейцы,
Не поверившие цифрам,
Отобрали у героя
Лёгкий лук его и стрелы
И сказали, что, возможно,
Гайавата в самом деле
Выдающийся статистик,
Но при этом совершенно
Бесполезен как стрелок.
Что ж касается дисперсий, То
какой то грубый неуч
Произнёс такое слово,
Что его сказать по чести,
В статистическом издании
Я не смею повторить.

Розглянемо стисло деякі особливості і правила аналізу даних. Почнемо з аналізу статистичних залежностей. Аналіз залишків – важлива неформальна частина аналізу даних. Нижче подано дві досить близькі до детермінованих залежності. “На око” вони лінійні, але, якщо побудувати збільшені графіки, то можна бачити, що залишки в одному випадку – випадкові, в іншому – досить детерміновані. Висновок – у другому випадку **залежність нелінійна**, потрібні інші моделі регресії.



Розглянемо ще два випадки – 2) розкид залишків збільшується з ростом X , це називається гетероскедастичність – треба враховувати це в моделі регресії; 3) розкид має лінійний тренд по X – це ознака наявності ще одної (крім X) незалежної змінної.



Ще одна особливість регресії. В деяких книгах стверджується, що *лінія регресії наближує істинну функціональну залежність між y та x* , але це зовсім не так. Обчислимо і побудуємо регресії Y по X , X по Y та істинну залежність.

$$a_0 := \text{intercept}(X, Y) \quad a_1 := \text{slope}(X, Y) \quad b_0 := \text{intercept}(Y, X) \quad b_1 := \text{slope}(Y, X)$$

$$\boxed{r(x) := a_0 + a_1 \cdot x}$$

$$rp(y) := b_0 + b_1 \cdot y$$

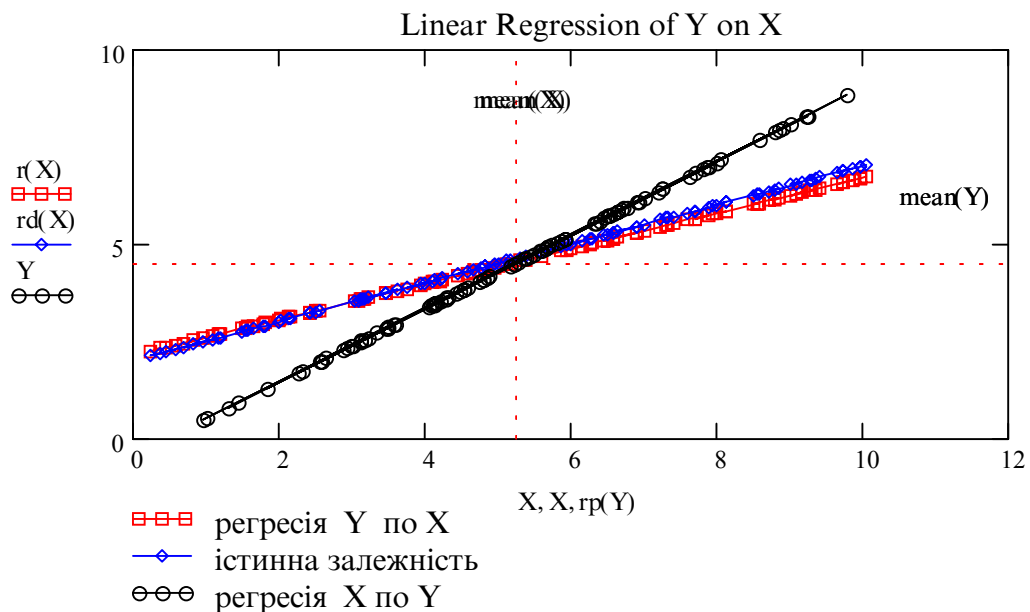
$$rd(x) := A_0d + A_1d \cdot x$$

В загальному випадку **“пряма” і “зворотна” регресії** не співпадають. Однак вони обов'язково повинні перетинатись в точці $(X_{\text{середнє}}, Y_{\text{середнє}})$. Якщо шуми вимірювання центровані, то істинна залежність теж проходить через цю точку. Але для кореляції завжди має місце:

$$\text{corr}(Y, X) = 0.695$$

$$\text{corr}(X, Y) = 0.695$$

Завдання. Покажіть самостійно, чому в загальному випадку ці регресії розрізняються, і коли вони співпадають.



Дивлячись на ці графіки запишемо собі, до пам'яті: **побудова лінії регресії Y по X має ціллю мінімізацію квадратів залишків “по напрямку Y ”, а тим самим оптимізацію прогнозування Y по X . Навпаки ж, лінія регресії X по Y мінімізує квадрати залишків “по напрямку X ” і оптимальна для прогнозування значень X по Y .**

Ще одне останнє зауваження: перш ніж обробляти дані, треба ретельно перевірити процедури їх отримання, вимірювання. По результатам такого

аналізу дані слід **розслоювати дані по типах об'єктів, коректувати вносити поправки на час (тренди), сезонність, відкидати явно некоректні дані (робастне оцінювання)**. Останній пункт відноситься і до анекдотичних випадків, наприклад, в даних про зріст замість 1,82 м записано 18,2м...Розглянемо конкретний приклад.

Приклад розслоєння даних

Постановка задачі. В неформальному плані це, наприклад, така задача. В цеху 234 на ділянці *іонної шліфовки* пластин проведено дослідження залежності шорсткості (шерехатості, шерхливості, шершавості, або по-простому – мікронерівностей). Згідно гіпотези здорового глузду шерхливість зменшується з ростом часу обробки. Але, як саме залежить якість поверхні від часу обробки, аналітично визначити неможливо із-за відсутності точних математичних моделей процесу обробки. Експериментальне визначення висоти нерівностей ускладнюється їх малими розмірами і впливом факторів (Рис.1).

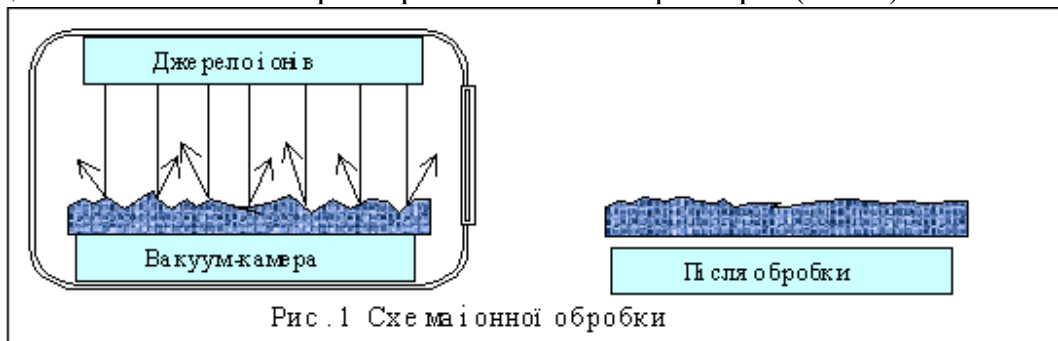
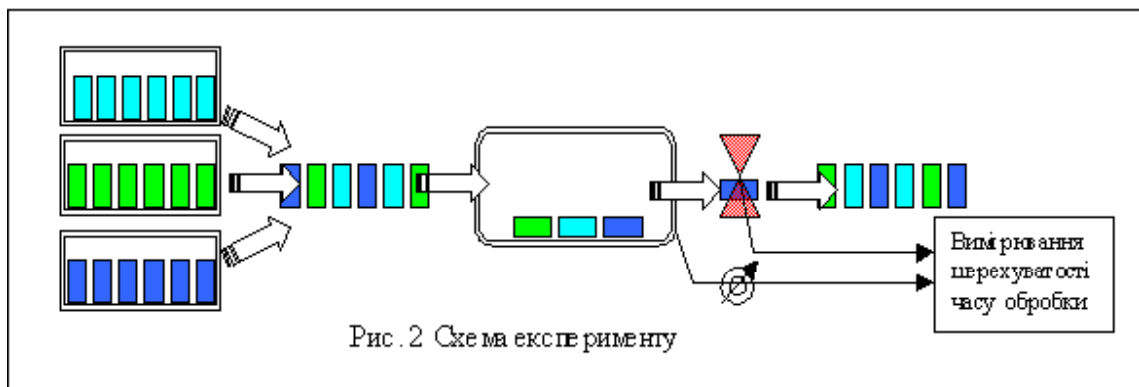


Рис.1 Схема іонної обробки

Проведено **експеримент**, в якому тривалість часу обробки $T_{об}$ змінювалась (точність реєстрації часу обробки – **1%**). Нерівності вимірювались з середньою випадковою помилкою $\pm 25\%$ і систематичною – **0%**.

Було проведено 90 експериментів, для чого **систематично-випадково** було відібрано 90 деталей-заготовок: по 30 штук від кожного з трьох постачальників заготовок, ці 30 штук вибирались з упаковки (на 100 штук) випадковим чином. Час обробки деталі задавався дискретного ряду значень 5, 10, 15, 20, 25, 30 хвилин так, щоб мати по 15 деталей на кожне значення часу обробки і реалізувався з вимірюваними відхиленнями (Рис.2).

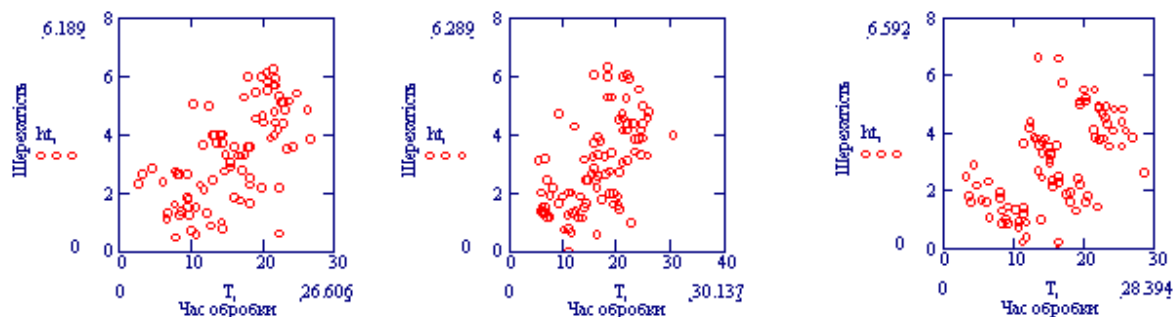


Проблема. По результатам статистичної обробки даних виявилось, що регресія (статистична залежність між парними статистичними даними) “гладкість - час обробки” має антиінтуїтивний нахил – **чим більше час обробки, - тим більше шерехатість???**

Задача Для заданого варіанту вхідних даних обчислити статистичні міри розташування (середні), розсіювання (дисперсії..), зв'язку (параметри регресій і кореляції).

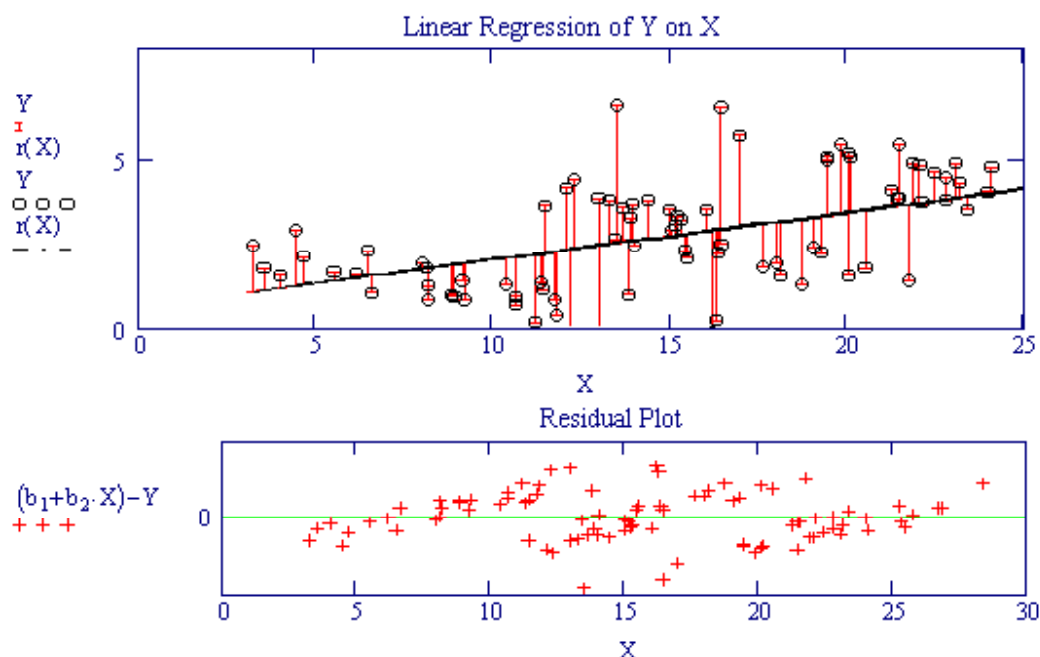
Провести аналіз для виявлення дійсних залежностей між гладкістю і часом обробки.

Подаємо результати такого аналізу - три реалізації випробування, наприклад, в перший, другий, третій день при абсолютно однакових умовах.



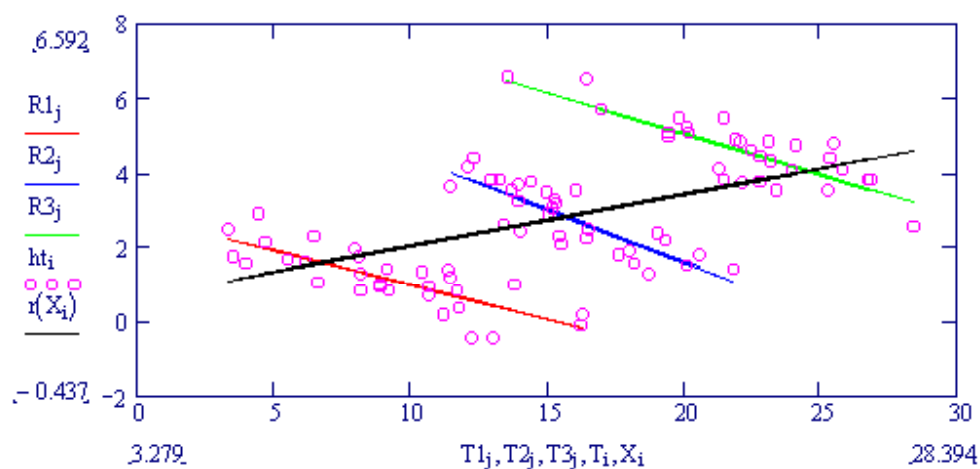
Будуємо графік регресії та залишків на фоні даних (увесь цей приклад повністю зроблено в середовищі пакету і використано як шаблони-фрейми подані вище графіки – ми скопіювали їх та підставили в них дані прикладу). Результати, як у Гайавати – з точки зору статистики – бездоганні, все в порядку – і дисперсії і кореляції.

Висновок – чим більше час обробки, тим гірше поверхня пластини? Для коментарів в таких ситуаціях вживається нестатистична лексика.



Статистики високого рангу дозволяють собі вживання терміну “глазо-мірний аналіз”. Не завжди він допомагає, але іноді без критеріїв довіри Фішера і Колмогорова можна побачити дійсну залежність.

Подаємо графіки регресій – на усіх даних і на розслоєних:



Дивимось на те, що бачимо, а також на рис. 2 – схему організації експерименту. Заготовки, які ми вважали ідентичними, бралися з трьох ящиків – від різних поставників. Заготовки від різних поставників мали **різний середній рівень** шерехатості.

Якщо будувати регресії для заготовок кожної партії окремо, то отримуємо регресії з приблизно однаковим від’ємним нахилом - чим більше час обробки, тим менше висота мікронерівностей. В літературі наводяться і більш “прикольні” випадки застосування статистичних методів, наприклад аналіз структури споживання сімей, коли змішувались сім’ї з великими і малими до-

ходами, пошук діагностичних ознак серцевих хвороб (США, мільйонні пусті витрати та ін.).



1.3 Ідентифікація частотних розподілень Вступ

Ідентифікація емпіричних частотних розподілень – типова, масова операція в проведенні досліджень, аналізі експериментальних даних. Сьогодні підсистеми, точніше – модулі ідентифікації частотних розподілень вбудовуються у різноманітні автоматизовані системи – диспетчерські, аналітичні помічники біржового маклера чи менеджера постачання.

Під ідентифікацією ми маємо на увазі знаходження деякого “теоретичного” розподілення, що найбільш відповідає експериментальним даним. Відомі теоретичні розподілення – це результат дії певних породжуючих механізмів та фундаментальних законів. Стратегічна ціль ідентифікації – по неповним, зашумленим даним виявити закони і механізми функціонування і на цій основі прогнозувати поведінку системи, управляти системою.

Приклад такої ідентифікації подано вище – спеціалісти компанії FrameStore разом з палеонтологами по скам’янілим відбиткам ідентифікували не тільки зовнішній вигляд, але й походку, динаміку польоту семиметрових літаючих ящерів. Це була довга, важка, витратна робота.

Матеріал цього розділу – ресурс (програмні модулі, шаблони документів і графіків) для першого розділу курсової роботи. Тематика курсових робіт – автоматизація задач управління в системах масового обслуговування, управління запасами та ін.

Тому задачі ідентифікації розглядаємо одразу на типових прикладах, зокрема, на прикладі АЗС, де треба мати дані **почастотним розподілення інтервалів між прибуттям клієнтів і частотним розподілення часу обслуговування клієнтів**.

1.3.1 Постановка задачі.

Для деякого набору статистичних даних $\{X_j\}$, $j = 1..M$ побудовано гістограму (емпіричне частотне розподілення $Rem[i]$, $i=1..N$ – число (груп) інтервалів. Розглядається ГІПОТЕЗА про те, що гістограма подає собою деяке теоретичне розподілення “засмічене” випадковими незалежними помилками з нормальними розподіленнями.

ПОТРІБНО ПІДТВЕРДИТИ АБО ВІДКИНУТИ ЦЮ ГІПОТЕЗУ

1.3.2 Порядок розв'язання задачі з використанням критерія Пірсона

1) Визначаємо параметри теоретичного розподілення, що НАЙ-

- КРАЩИМ чином наближає гістограму;
- 2) Обчислюємо значення критерія Персона;
 - 3) Визначаємо критичне значення критерія для заданої ймовірності істинності гіпотези для даного числа ступенів свободи розподілення с-квадрат;
 - 4) Порівнюємо значення критерія із критичним. Якщо воно більше критичного, гіпотеза відкидається(ПРИ ДАНОМУ РІВНІЙМОВІРНОСТІ!);
 - 5) Зауваження Перш, ніж застосовувати цей критерій, слід провести змістовний аналіз джерел і процедур отримання даних, виявити і виключити невинні помилки вимірювань, отримати дані з альтернативних джерел, і пам'ятати, що висновок на підставі критерія Пірсона (як і іншого статистичного) не є остаточним вироком.

Завжди слід цікавитись діючими у системі механізмами, що саме породжують досліджуєме частотне розподілення. Якщо досить точно відомо, що у системи повинно бути певне теоретичне розподілення, а згідно критерію Пірсона більш ймовірним є якесь інше, слід критично проаналізувати вхідні дані та процеси їх отримання і одночасно – джерела гіпотези про очікуване теоретичне розподілення. Виконаємо задачу згідно цим пунктам

1.3.3 Побудова гістограми для вхідного потоку (клієнтів)

Побудова гістограми. або емпіричного частотного розподілення є агрегуванням даних. Це стандартна процедура, вбудована в усі основні пакети програм.

ВВОДИМО згідно завданню функцію-генератор даних (ВВОД далі, тут - декорація)

```
X = rpois(100,5)      N := length(X)      N = 100      ORIGIN= 1
```

Проводимо попередній аналіз даних – визначаємо мінімум, максимум, середнє.

```
min(X) = 0           mean(X) = 4.7           max(X) = 12
```

1) Кількість інтервалів повинна бути такою, щоб в середньому в інтервал попадало не менше 7 елементів, тобто: В інтервал попадає: тобто більше7

```
Кільк_інт= 8      q := 1..8      N/8 = 12.5
```

2) Границі системи інтервалів беремо так, щоб до них входили мінімальне і максимальне значення. **Увага!** для дискретних розподілень інтервали повинні бути обов'язково цілочисленими!

Записуємо вираз для вектора інтервалів:

$$\text{Крок} := \text{cei} \left[\frac{(\max(X) - \min(X)) \cdot 1.2}{\text{Кільк_інт}} \right] \quad \boxed{\text{Int}_q := \text{cei}[\text{Крок}(q - 1) + \min(X) \cdot 0.98]}$$

Множники 1.1 та 0.98 – параметри для настроювання вектора інтервалів згідно пункту 2).

Метою інженерної праці сьогодні є не виконання якогось розрахунку, а створення програми (документу) для розв'язання певного класу задач. В нашому випадку це задачі визначення найкращого наближення гістограми деяким теоретичним розподіленням



Увага! – те, що подано далі - може бути основою розділу курсової роботи. Маємо вектор емпіричних даних і вектор інтервалів - обчислюємо гістограму:

$$\boxed{\text{Rem} := \text{his}(\text{Int}, X)}$$

Число “стовпчиків” гістограми на 1 менше числа границь інтервалів. Для зручності подальших обчислень додаємо одне, пусте значення до гістограми

$$\text{Rem}_{\text{Кільк_інт}} := 0 \quad !!!$$

!!!

Нормуємо гістограму – ділимо усі значення на об'єм вибірки N. Для контролю обчислюємо суму значень “стовпців” гістограми – вона повинна дорівнювати обсягу вибірки

$$P_{\text{em}} := \frac{\text{Rem}}{N} \quad N = 100 \quad \sum_q \text{Rem}_q = 100 \quad \sum_q P_{\text{em}_q} = 1 \quad t := 1..12$$

Обчислюємо моду, медіану, математичне очікування двома **альтернативними способами** – а) по виборці і для контролю, б) по гістограмі [1-33]

Мода(H_i, In) := csort(augment($In, -H_i$), 2)_{1,1} + 0.5·Крок

$X_{\text{мод}} := \text{mode}(X)$

Медіана(H_i, In) :=

$N \leftarrow \text{length}(H)$

$X_{\text{мед}} := \text{median}(X)$

$\text{sum} \leftarrow H_1$

for $i \in 2..N$

$X_{\text{мо}} := \text{mean}(X)$

$\text{sum} \leftarrow \text{sum}_{i-1} + H_i$

$\text{nom} \leftarrow 1$

$\text{Серед_Ар} := \sum_q P_{\text{em}_q} \cdot (In_q + .5 \cdot \text{Крок})$

while $\text{sum}_{\text{hom}} \leq 0.5 \cdot \text{sum}_N$

$\text{nom} \leftarrow \text{nom} + 1$

$\text{znMed} \leftarrow In_{\text{nom}}$

$\text{znMed} + 0.5 \cdot \text{Крок}$

Виводимо ці дані для контролю і осмисляжу: що ми втрачаємо, коли агрегуємо дані, що отримуємо? Чому не співпадають відповідні середні, обчислені різними способами?

Мода(Rem, In) = 3

Медіана(Rem, In) = 5

Серед_Ар = 5.16

$X_{\text{мод}} = 3$

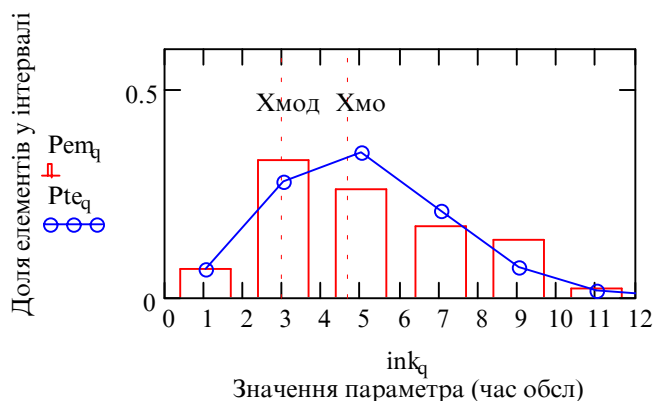
$X_{\text{мед}} = 4$

$X_{\text{мо}} = 4.69$

Коректуємо систему інтервалів (чому). Будуємо графіки гістограм і “схованого” в емпіричних даних теоретичного розподілення – “гіпотези”

$ink_q := In_q + \text{Крок} \cdot 5$ $P_{\text{te}_q} := \text{dpois}(ink_q, 5) \cdot \text{Крок}$

$X \equiv \text{rpois}(100, 5)$



Робимо стенд. Вище (червоне) вводяться вхідні. Саме на базі їх проведені обчислення, що подані на стор.2,3 Натискаючи (F9) цей вираз - генератор даних. Змінюючи обсяг вибірки: 1000, 10000,... можемо оцінити, як змінюється гістограма, середні

Виконуємо контроль нормованих даних:

$$\sum_q \text{Pem}_q = 1 \quad \sum_q \text{dpois}(\text{ink}_q, 5) \cdot \text{Крок} = 1$$

Формуємо і виводимо таблицю даних D2, що буде використана для апроксимації гістограми теоретичним розподіленням.

Зауваження. Пам'ятаємо, що вектор інтервалів дає границі інтервалів. Відповідне значення гістограми слід відносити до середини інтервалів. Подаємо розшифровку означень:

Int – інтервал-границя, **ink** – інтервал-середина, **Pem** – розподілення емпіричне, **Pte** – розподілення теоретичне.

Вище розроблено документ побудови гістограми по вхідним неаггерованим даним. Недолік традиційних документів Маткаду – вони немонолітні, тому:

БГ Збираємо тепер те, що було розроблено вище у ЦЕЙ блок обчислення гістограми і формування таблиці даних

Крок := $\text{ceil}\left[\frac{(\max(Xx) - \min(Xx)) \cdot 1.2}{\text{Кільк_інт}}\right]$ оце ми "впаяли" в текст формули тепер цей блок легко копіювати і переносити.

$\text{Int}_q := \text{ceil}[\text{Крок}(q - 1) + \min(Xx) \cdot 0.98]$ $\text{Rem} := \text{his}(\text{Int}, Xx)$ $\text{Rem}_{\text{Кільк_інт}} := 0$

$\text{Pem} := \frac{\text{Rem}}{N}$ $D2 := \text{augmen}(\text{Int} + 0.5 \cdot \text{Крок}, \text{Pem})$

Виводимо **таблицю агрегованих даних – значення гістограми та інтервалів, на яких вона побудована.** Зауваження. Вхідні неаггеровані дані (генератор даних), на базі яких блок БГ обчислює таблицю D2 розташовані далі на відповідному стенді.

$$D2^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	10	12	14	16
2	0.11	0.33	0.27	0.19	0.05	0.05	0	0

1.3.4 Оптимальна апроксимація гістограми теоретичним розподіленням

Після виконаної підготовчої роботи переходимо власне до ВИЗНАЧЕННЯ параметрів гіпотетичного теоретичного розподілення, що НАЙКРАЩИМ чином наближає гістограму. В даному випадку вибираємо гіпотезу – розподілення Пуассона (воно ж закладене в генераторі даних). Беремо нульове початкове значення індексів масивів – ORIGIN, так зручніше. Вибране розподілення має тільки один параметр

Увага – тут підставляється теоретичне розподілення – гіпотеза.

`rt(t, la) := dpois(t, la)`

`ORIGIN:= 0`

Виводимо (ще раз) емпіричні дані і контроль їх коректності:

$$D2^T = \begin{array}{c|cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \\ \hline 1 & 0.11 & 0.33 & 0.27 & 0.19 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 & \end{array} \quad \sum_{q=0}^7 D2_{q,1} = 1$$

Розв'язуємо задачу апроксимації даних заданою функцією. Знаходимо оптимальні по якомусь критерію відхилення від емпіричного розподілення параметри функції (в якості якогось критерія беремо, зрозуміло чому – квадратичний). Використовуємо розв'язуючий блок математичного пакета у варіанті `minerr()`, що перекладається так – “знайти значення змінних, що дають мінімальні відхилення від заданих умов”. Загальновідомо, що вбудовані методи оптимізації і математичного програмування (=розв'язання нелінійних систем) є досить неефективними і незручними. Найбільш безвідмовним і універсальним є `minerr()`.

- 1) Задаємо кількість точок апроксимації і початкові значення оптимізуємих параметрів:

`n := rows(D2) - 1` `n = 7` `q := 0..n` `la := 5`

- 2) Після `Given` записуємо умови - рівняння, нерівності:

`Given`

Після рівнянь записуємо функцію `Minerr()`

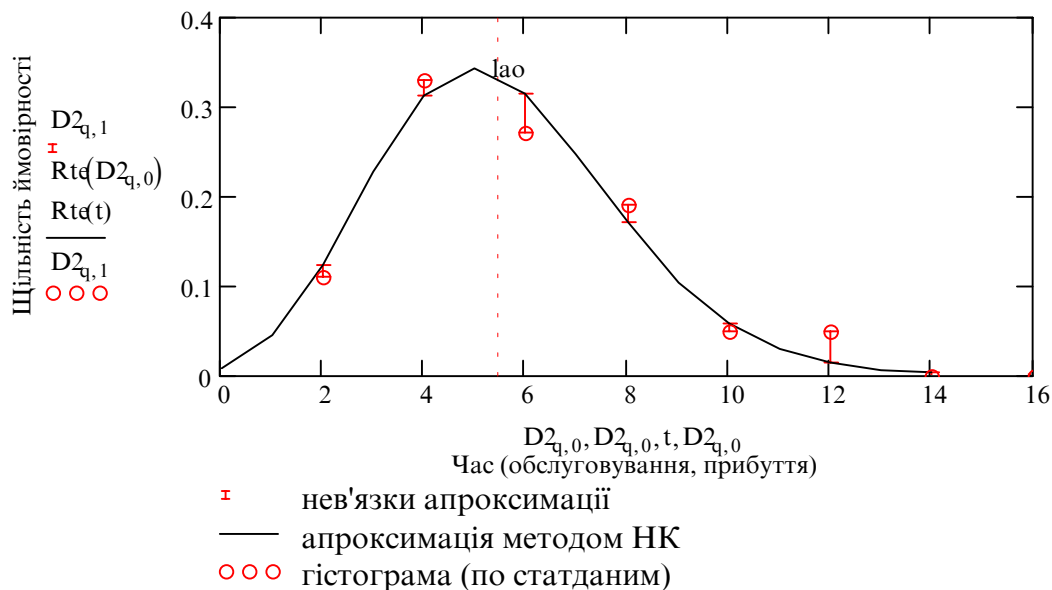
$$\sum_{q=0}^n \left(\frac{D2_{q,1}}{\text{Крок}} - \text{rt}(D2_{q,0}, la) \right)^2 = 0 \quad \text{la}_0 := \text{Minerr}(la)$$

Будуємо графік – перевіряємо, чи справді функція наближує емпіричні дані. Виводимо результати – оптимальне значення параметру la_0 . Покладайте по **Xx** і зробіть якісну оцінку розкиду реалізацій гістограми (графік) і значення параметру la_0

$Rt(t) := rt(t, lao) \cdot \text{Крок}$ $t := 0..14$

$lao = 5.502$

$Xx \equiv rpois(100, 5)$



Ми прийняли гіпотезу, що теоретичне розподілення – пуасонівське. Але можуть бути інші, конкурентні гіпотези. Дуже бажано висунути і перевірити ще хоч одну АЛЬТЕРНАТИВНУ ГІПОТЕЗУ. Виконаємо ідентифікацію **для альтернативної гіпотези: “теоретичне розподілення – гаусове”**. Увага! В курсовій роботі необхідно задачу ідентифікації виконати не менше, ніж для двох гіпотез.

Копіюємо попередній документ, видалимо з нього коментарі. Вводимо теоретичне розподілення – оце уся різниця. Не забороняється зробити компактний модуль ідентифікації, входами якого будуть – масив даних та гіпотетичне розподілення).

$rt2(t, mu, sgm) := dnorm(t, mu, sgm)$

- 1) Задаємо кількість точок апроксимації і початкові значення оптимізуємих параметрів (це зможе зробити самостійно програма ідентифікації):

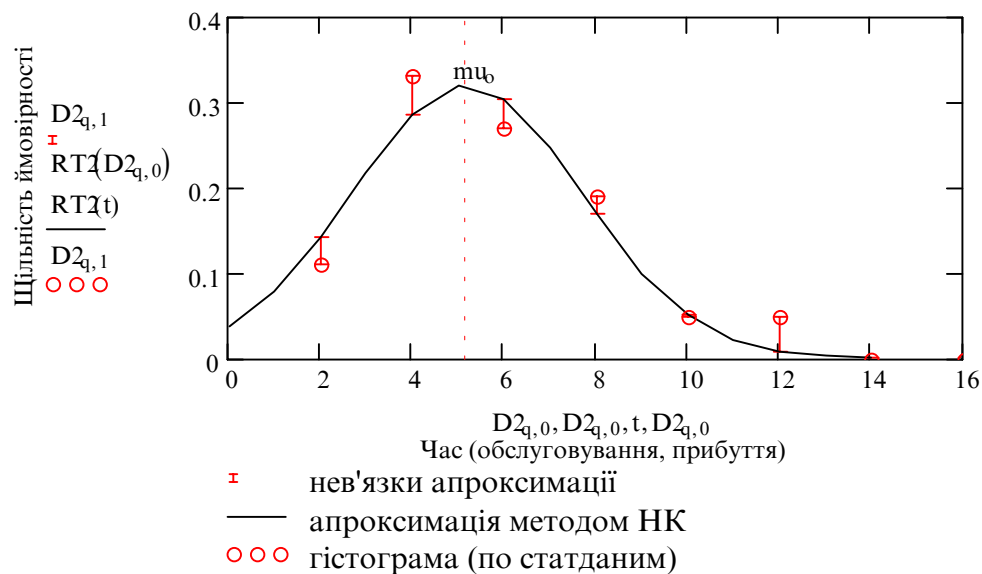
$n := \text{rows}(D2) - 1$ $n = 7$ $q := 0..n$ $mu := 5$ $sgm := 10001$

- 2) Записуємо систему рівнянь:

$$\sum_{q=0}^n \left(\frac{D2_{q,1}}{\text{Крок}} - rt2(D2_{q,0}, mu, sgm) \right)^2 = 0 \quad \begin{pmatrix} mu_b \\ sgm_b \end{pmatrix} := \text{Miner}(mu, sgm)$$

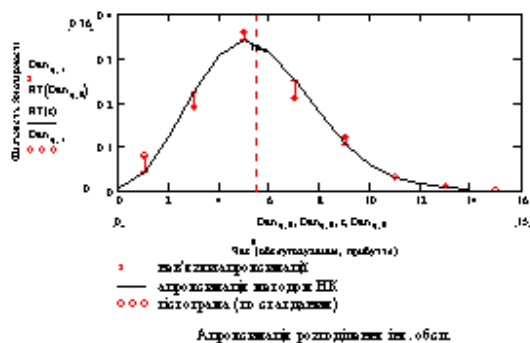
Будуємо графік – перевіряємо, чи справді функція наближує емпіричні дані. Виводимо результати – оптимальне значення параметрів m_ψ та sgm_ψ

$$RT\lambda(t) := rt2(t, m_\psi, sgm_\psi) \cdot \text{Крок} \quad t := 0..14 \quad m_\psi = 5.191 \quad sgm_\psi = 2.499$$

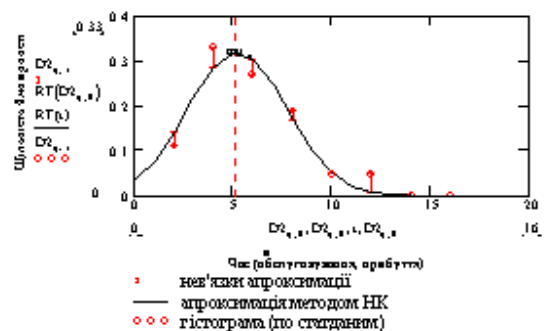


Виконаємо якісний аналіз отриманих результатів. Порівнюємо графіки апроксимацій (нижче) – і без критеріїв Пірсона і Колмогорова бачимо, що апроксимація нормальним розподіленням виглядає не зовсім нормальною, що і очікувалось, оскільки емпіричне розподілення дійсно є пуасонівським.

Пуасонівське



Гаусове



1.3.5 Перевірка вірогідності гіпотези про теоретичне розподілення за критерієм Пірсона

Проведемо перевірку гіпотез про те що розподілення подане емпіричними даними є а) пуасонівським, б) гаусовим за критерієм Пірсона. Подаємо

1) Обчислюємо значення критерія за формулою

$$Xi1 := \sum_{q=0}^n \frac{\left(\frac{D2_{q,1}}{K_{рок}} - dpois(D2_{q,0}, lao) \right)^2}{dpois(D2_{q,0}, lao)}$$

Для гіпотези: "пуасонівське розподілення" $Xi1 = 0.059$

$$Xi2:= \sum_{q=0}^n \frac{\left(\frac{D2_{q,1}}{K_{рок}} - dnorm(D2_{q,0}, m_{\text{б}}, sgmb) \right)^2}{dnorm(D2_{q,0}, m_{\text{б}}, sgmb)}$$

Для гіпотези: "гаусове розподілення" $Xi2 = 0.125$

2) Визначаємо ймовірність такого відхилення. Для цього спочатку треба отримати розподілення χ - квадрат із заданим числом ступенів вільності.

Число ступенів вільності **dv** визначається як число груп (інтервалів) гістограми

$$M := \text{КІЛЬК_ІН'} \quad dv1 := M - 1 - 1 \quad dv2 := M - 2 - 1 \quad xi := .0..5..24$$

а) гаусове $dv_2 = 5$ б) пуассонівське $dv_1 = 6$

$$X_i(x_i, d) := dchisq(x_i, d) \qquad IX(x_i, d) := pchisq(x_i, d)$$

```
xx := 13  X195 := root(dchisq(xx,dv1) - .05,xx)  X195 = 9.392
          X295 := root(dchisq(xx,dv2) - .05,xx)  X295 = 8.325
```

3) Визначаємо по графіку або таблиці розподілу χ^2 -квadrat ймовірність отриманого значення і ВИРІШУЄМ, прийняти, чи відкинути гіпотезу...

ПРИЙНЯТИ ГІПОТЕЗУ <-|->ВІДКИНУТИ ГІПОТЕЗУ- ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ

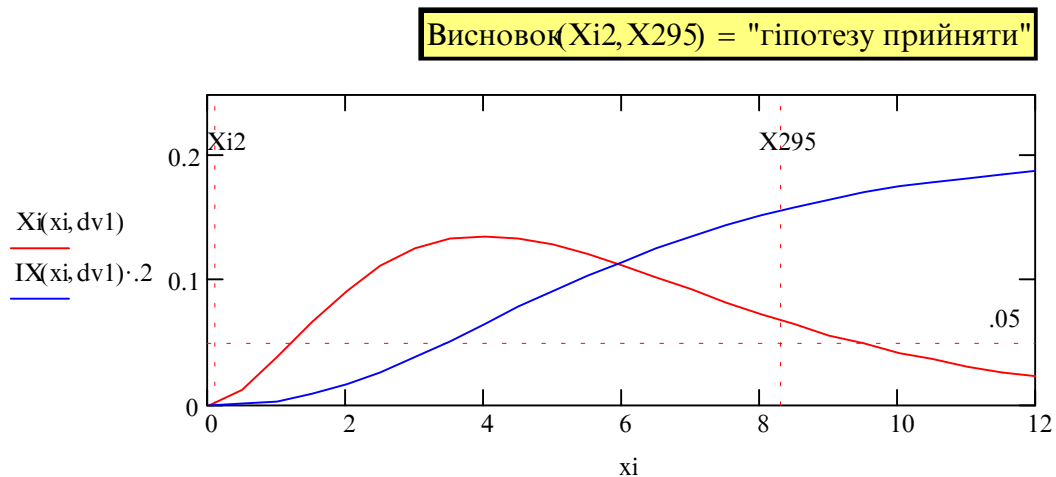
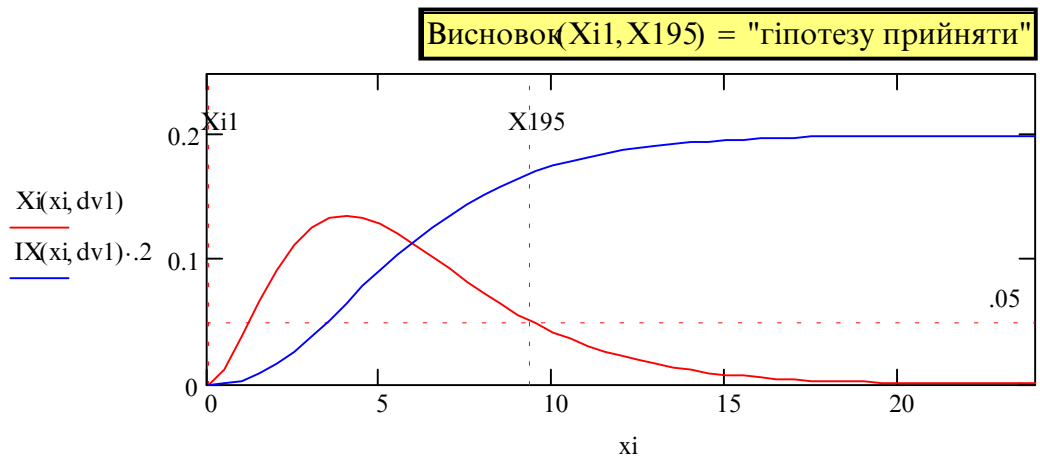
Чим відрізняється електронна книга від паперової? – електронна може бути мінімум секретарем-референтом. Це дуже просто робиться: напишемо, наприклад, такий модуль для аналізу результатів ідентифікації, і, певним чином, думати вже непотрібно.

```

Висновок(маємо, норма) :=
  v1 ← "гіпотезу прийняти"
  v2 ← "гіпотезу відкинути"
  виснов ←
    | v1 if маємо < норма
    | v2 otherwise

```

Висновок(12, 2) = "гіпотезу відкинути" Висновок(2, 12) = "гіпотезу прийняти"



Прокоментуємо те, що отримали – отримали те, що чекали: пуасонівське розподілення сходиться до гаусового і починаючи з певних значень параметрів, дуже подібне гаусовому. Імітовані статистичні дані є відносно дуже чистими – тому отримали такі малі значення критеріїв. Природно, що і те і те розподілення є статистично припустимими гіпотезами. Яку гіпотезу все ж прийняти: - ту що має менше значення критерія:

$$\text{НашВибір}(\text{крит1}, \text{крит2}) := \begin{cases} v1 \leftarrow \text{гіпотеза1} \\ v2 \leftarrow \text{гіпотеза2} \\ \text{виснов} \leftarrow \begin{cases} v1 & \text{if крит1} < \text{крит2} \\ v2 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

Таким чином: НашВибір(X_{i1}, X_{i2}) = "Пуасонівське" розподілення. Значення критерія для нього у разі (X_{i1}, X_{i2}) = 2.11 краще, ніж для конкурентної гіпотези.

Працюючи з електронною версією книги можете понатискувати ввод даних і подивитись як буде змінюватись змінна "НашВибір". Не вимагайте від статистики неможливого.

Можна перевірити(при бажанні) гіпотези за критерієм Колмогорова. Для цього обчислюємо максимальне відхилення D та параметр L

$$dF1_q := \frac{D_{2q,1}}{\text{Крок}} - \text{dpois}(D_{2q,0}, \text{lao}) \quad M = 8$$

$$D := |\max(dF1)| \quad L1 := D \cdot \sqrt{M} \quad L1 = 0.052$$

$$dF2_q := \frac{D_{2q,1}}{\text{Крок}} - \text{dnorm}(D_{2q,0}, \text{mu}, \text{sgm})$$

$$D := |\max(dF2)| \quad L2 := D \cdot \sqrt{M} \quad L2 = 0.064$$

По **таблицям** Колмогорова визначаємо величину ймовірності $P(L)$ і приймаємо рішення **гіпотезу прийняти/неприйняти**, в залежності від вибраного нами рівня довіри – ймовірності гіпотези. **Якщо обчислене значення критерія менше значення критерія для заданого рівня довіри – гіпотеза приймається.**

1.3.6 Розробка документу для оцінки впливу шумів в емпіричних даних на надійність результатів ідентифікації

А тепер виконаємо задачу апроксимації для інших емпіричних даних (у курсовій роботі необхідно ідентифікувати частотні розподілення мінімум для двох підсистем, процесів, наприклад – для різних ділянок конвеєрної системи, для процесів прибуття клієнтів і обслуговування клієнтів).

Потренуємось у застосуванні стандартних інформаційних технологій – скопіюємо та модифікуємо попередні модулі. Поставимо дослідницьку задачу – **визначення впливу рівня шумів і помилок в експериментальних даних на стійкість результатів ідентифікації.**

Як конкурентні гіпотези розглянемо експоненційне та геометричне розподілення. Це теж прототип для виконання розділу курсової роботи. Скопіюємо і ущільнимо відповідні розділи документу.

Побудова гістограми

1) Вводимо (генеруємо) вхідні дані

ORIGIN:= 0 X3 = rgeom(100,.2) N := length(X) N = 100

Проводимо попередній аналіз даних – визначаємо мінімум, максимум, середнє.

min(X3) = 0 mean(X3) = 4.5 max(X3) = 18

БГ Блок обчислення гістограми і формування ORIGIN:= 0 Вхід таблиці даних X3

Крок:= ceil $\left[\frac{(\max(X3) - \min(X3)) \cdot 1.2}{\text{Кільк_інт}}\right]$ Int_q := ceil[Крок(q - 1) + min(X3)·0.98]

Rem:= his(Int, X3) Rem_{Кільк_інт+1} := 0 Емпіричне розподілення: Rem := $\frac{\text{Rem}}{N}$

D3 := augmer[Int+ 0.5·Крок, Rem[(1 - sh) + rnd(2·sh)]]

В агреговані дані додаємо імітацію шумів вимірювання **sh = 0.9** - шум (вводиться в кінці документу). Вхідні неагреговані дані (генератор даних), на базі яких блок БГ обчислює таблицю D3 розташовані далі на відповідному стенді.

$$D3^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-1.5	1.5	4.5	7.5	10.5	13.5	16.5	19.5
1	0	0.106	0.059	0.024	0.019	0.012	0.012	0

Задаємо гіпотетичне розподілення:

rt(t, mu) := dgeom(t, mu)

Отримали гістограму, вибрали гіпотетичне теоретичне розподілення, тепер переходимо до розв'язання оптимізаційної задачі – шукаємо значення

параметрів теоретичного розподілення, що дають мінімум квадратичної помилки

Знаходження оптимальної апроксимації:

- 1) Визначаємо кількість точок апроксимації (=число стовпчиків гістограми) і початкові значення оптимізуємих параметрів:

$$n := \text{rows}(D3) - 1 \quad n = 7 \quad q := 0..n \quad \mu := .2$$

- 2) Записуємо систему рівнянь (критерій, обмеження, в даному випадку – одне рівняння). Мікрокоментар: Замість прирівнювати похідні до нуля, шукаємо безпосередньо мінімум.

Giver

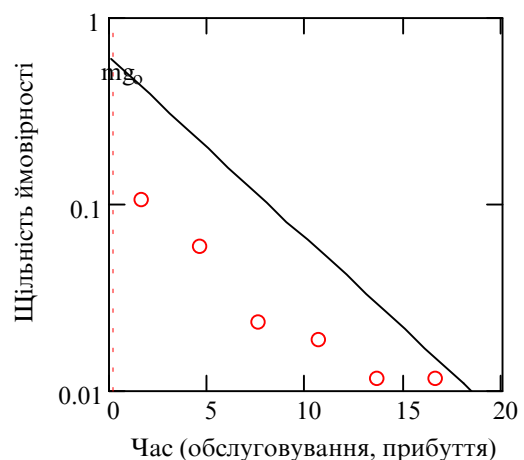
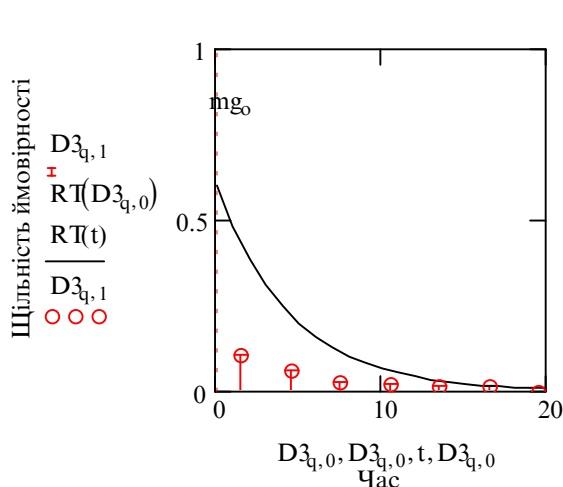
$$\sum_{q=0}^n \left(\frac{D3_{q,1}}{K_{\text{рок}}} - \text{rt}(D3_{q,0}, \mu) \right)^2 = 0 \quad \text{mg}_0 := \text{Miner}(\mu)$$

- 3) Будуємо графік - перевіряємо, чи справді функція наближує емпіричні дані. Виводимо результати – оптимальне значення параметру μ_0 .

Ввод вхідних даних

$$RT(t) := \text{rt}(t, \text{mg}_0) \cdot K_{\text{рок}} \quad t := 0..20 \quad \text{mg}_0 = 0.2$$

$$X3 \equiv \text{rgeom}(100, .2)$$



Робимо теж саме для конкурентної гіпотези для тих же даних але без повторень і коментарів.

Побудова гістограми

Виводимо таблицю агрегованих даних – значення гістограми та інтервалів.

$$D3^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-1.5	1.5	4.5	7.5	10.5	13.5	16.5	19.5
1	0	0.106	0.059	0.024	0.019	0.012	0.012	0

Задаємо ГІПОТЕТИЧНЕ розподілення: $rt(t,r) := dexp(t,r)$ ORIGIN:= 0

Отримали гістограму, вибрали гіпотетичне теоретичне розподілення, тепер переходимо до розв'язання оптимізаційної задачі – шукаємо значення параметрів теоретичного розподілення, що дають мінімум квадратичної помилки:

Знаходження оптимальної апроксимації

- 1) Визначаємо кількість точок апроксимації (=число стовпчиків гістограми) і початкові значення оптимізуємих параметрів:

$$n := \text{rows}(D3) - 1 \quad n = 7 \quad q := 1..n \quad mu := .2$$

- 2) Записуємо систему рівнянь (критерій, обмеження, в даному випадку – одне рівняння). Мікрокоментар. Замість прирівнювати похідні до нуля, шукаємо безпосередньо мінімум.

Giver

$$\sum_{q=0}^n \left(\frac{D3_{q,1}}{\text{Крок}} - rt(D3_{q,0}, mu) \right)^2 = 0 \quad rr_0 := \text{Miner}(mu)$$

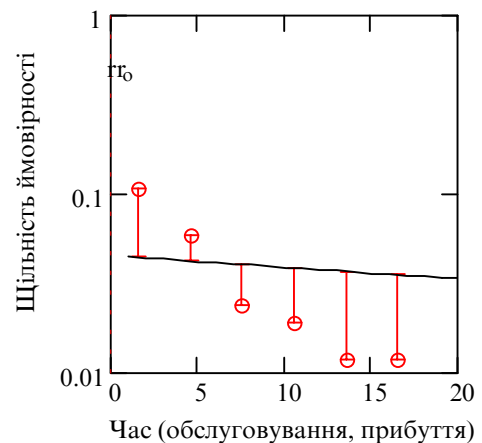
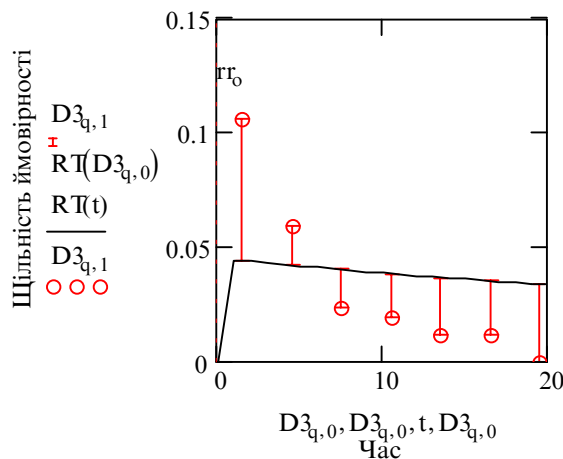
- 3) Будуємо графік – перевіряємо, чи справді функція наближує емпіричні дані. Увага! Використовуємо тіж самі дані (вище) перевіряємо другу гіпотезу. Виводимо результати - оптимальне значення параметру mu_0 .

Ввод вхідних даних

$$RT(t) := rt(t, rr_0) \cdot \text{Крок} \quad t := 0..20$$

$$rr_0 = 0.015$$

(введено вище)



2.5 Перевірка вирогідності гіпотези про теоретичне розподілення за критерієм Пірсона

Проведемо перевірку гіпотез про те, що розподілення подане емпіричними даними є або: гіпотеза1:= "геометричне", або: гіпотеза2:= "експоненційне" за критерієм Пірсона. Подасмо послідовність кроків по перевірці гіпотези про теоретичне розподілення.

1) Обчислюємо значення критеріяза формулою

$$Xi1 := \sum_{q=0}^n \frac{\left(\frac{D3_{q,1}}{K_{\text{рок}}} - d_{\text{geom}}(D3_{q,0}, m_{g0}) \right)^2}{d_{\text{geom}}(D3_{q,0}, m_{g0}) + 0.005} \quad \text{Для гіпотеза1= "геометричне" розподілення -цілочислене}$$

Xi1 = 0.355

$$Xi2 := \sum_{q=0}^n \frac{\left(\frac{D3_{q,1}}{K_{\text{рок}}} - d_{\text{exp}}(D3_{q,0}, r_{r0}) \right)^2}{d_{\text{exp}}(D3_{q,0}, r_{r0})} \quad \text{Для гіпотеза2= "експоненційне" розподілення}$$

Xi2 = 0.059

Вводимо випадковий шум $sh = 0.9$ - так ми перевіряємо працездатність критерія Пірсона. Випадкові величини - це випадкові величини, задаючи (F9) нові реалізації вхідних даних можемо спостерігати інші значення критеріїв.

Але треба – мислити: може вибраний підхід до апроксимації має якісь вади...

2) Визначаємо ймовірність такого відхилення. Для цього спочатку треба отримати розподілення χ квадрат із заданим числом ступенів вільності.

По таблиці або графіку розподілення визначаємо ймовірність такого значення критерія для χ квадрат розподілу із числом ступенів вільності dv .

Число ступенів вільності dv визначається як число груп (інтервалів) гістограми $M - 1 - r$ (r - число параметрів теоретичного розподілу, наприклад, для геометричного $r1 := 1$, для експоненційного теж $r2 := 1$).

$$M := \text{Кільк_інт} \quad dv1 := M - r1 - 1 \quad dv2 := M - r2 - 1 \quad xi := .0, .5 .. 24$$

Число ступенів вільності розподілення χ -квадрат для теоретичних розподілень (підстав свої назви та число ступ свободи) а) геометричне б) експоненційне

$$dv2 = 6 \quad dv1 = 6$$

Використовуємо вбудовані функції χ^2 -квадрат розподілення.

$$Xi(xi, d) := dchisq(xi, d)$$

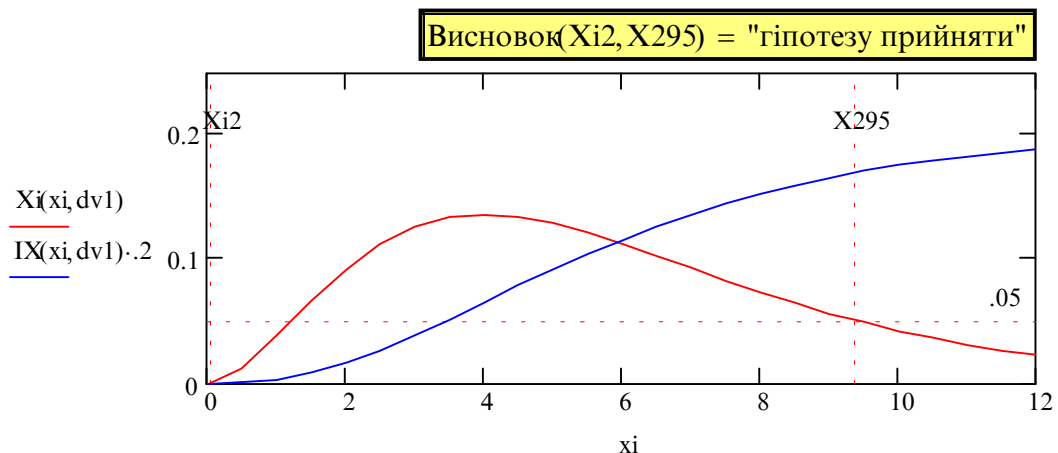
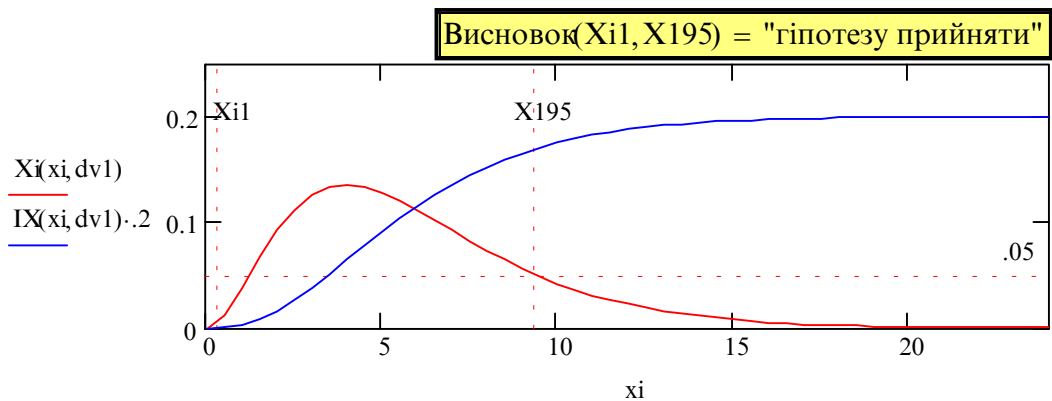
$$IX(xi, d) := pchisq(xi, d)$$

Визначаємо значення X_{I95} , що відповідає ймовірності 95%.

$$xx := 13 \quad X_{I95} := \text{root}(dchisq(xx, dv1) - .05, xx) \quad X_{I95} = 9.392$$

$$X_{295} := \text{root}(dchisq(xx, dv2) - .05, xx) \quad X_{295} = 9.392$$

3) Визначаємо по графіку або таблиці розподілу χ^2 -квадрат ЙМОВІР-НІСТЬ отриманого значення і ВИРІШУЄМО, прийняти, чи відкинути гіпотезу...



Підсумки і висновки

- 1) Не довіряйте своїм даним – ретельно їх проаналізуйте їх – чи можуть там бути великі помилки, чи не є вони сумішшю даних із різних джерел, по різному вимірюваних, чи не можна їх якось розслюїти, скоректувати.
- 2) Проаналізуйте можливі **механізми** породження даних (детерміновані і стохастичні процеси).
- 3) Статистика не компенсує недостатні і недостовірні дані – головна

задача – вдосконалювати техніку і джерела отримання даних, вводити альтернативні незалежні канали вимірювання та передачі даних.

- 4) Збільшуйте число точок контролю та управління для вашого складного розподіленого об'єкта. При можливості користуйтеся найпростішими засобами статаналізу.
- 5) Побудуйте графіки подібні поданим вище. Оцініть розкиди значень критеріїв (Пірсона, Колмогорова).
- 6) Після всього цього можете використати обчислені значення критеріїв – для “остаточного полірування” вашого аналізу.



1.5 Елементи теорії масового обслуговування

Вступ. Історія

В теорії масового обслуговування основним є поняття черги. Тому її називають ще теорією черг. Кожен знає, що таке черга. Наведіть три-чотири приклади черг.

Наприклад, черга в крамниці, черга виробів на конвеєрі біля місць виконання операцій, машини біля світлофорів, літаки в повітряній зоні аеропорту (посадка) та біля ЗПС (злітно-посадочної смуги) (зліт), черги до інтернетівських серверів, черги на телефонних станціях, черга ще нерозбомблених цілей (є і воєнні СМО). В деяких системах черга небажана взагалі, в деяких - припустима обмежена, а в деяких - необхідна (подайте приклад?). Але сьогодні черги стали іншими - черги виробників і постачальників до клієнтів. Спочатку стисло **переглянемо добуток класичної теорії масового обслуговування.**

Між іншим, до чого картинка вгорі? Тому, що це класика і продуктивний напрям. Тому, що головна ідея там - обслуговування незалежно від якихось ймовірностей завжди повинно бути на висоті.

Основні задачі теорії масового обслуговування (ТМО) - визначення:

- 1) максимальної довжини черги;
- 2) необхідної швидкості обслуговування;
- 3) кількості паралельно працюючих приладів обслуговування та ін.

Щоб відповісти на ці питання треба побудувати математичні моделі СМО (що ми вже почали в попередніх лекціях). Експериментуючи з моделлю СМО, можемо отримати відповіді на питання. Експериментальні дані отримані при спостереженні реальних систем використовуються для верифікації моделі.

Трохи історії. В 1909-1917 роках датський математик А.К.Ерланг опублікував важливі результати дослідження теоретичних моделей телефонних систем. Потім Д. Кендалом було виконано узагальнення СМО, зокрема виконана класифікація СМО, що дещо застаріла на сьогодні в зв'язку з розширенням задач і схем побудови СМО.

Для аналізу і синтезу СМО можуть бути використані:

- 1) детермінована модель черги (для розрахунку беруться середні значення інтенсивності вхідного потоку і часу обслуговування з деяки-

- ми “запасами”).
- 2) модель на базі теорії розподілень (частотні розподілення для інтенсивності вхідного потоку і часу обслуговування);
 - 3) марківська модель черги (виділяються певні стани об’єкта обслуговування ймовірності переходів між ними);
 - 4) модель на базі імітаційного моделювання випадкових процесів надходження об’єктів і обслуговування.

1.5.1 Загальний опис СМО

Розглянемо узагальнену схему СМО (Рис.1). В загальному випадку обслуговування заявок може бути багатоканальним і багатофазним. Фази обслуговування – це операції, що виконуються в певній послідовності, відповідними приладами, канали обслуговування – паралельно працюючі прилади певної фази обслуговування.

Неважко дати класифікацію багатофазних і багатоканальних систем, неважко знайти приклади таких систем. Далі буде дано визначення і класифікація СМО.

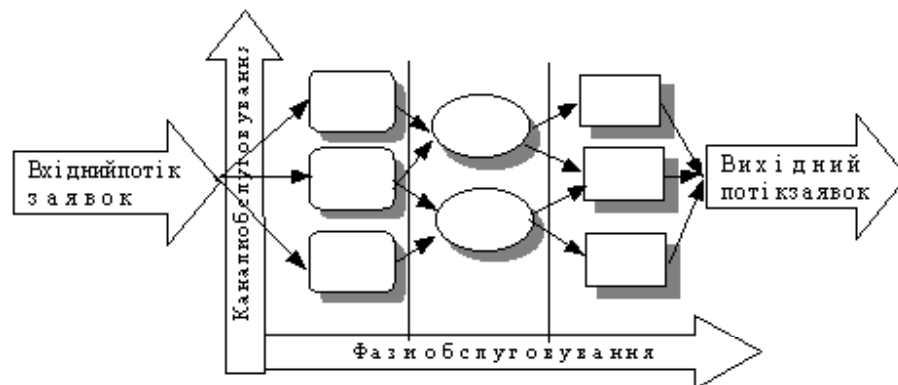


Рис. 1 Узагальнена схема системи масового обслуговування

Виконаємо опис СМО за такими пунктами: а) основні компоненти моделі СМО; б) основні характеристики СМО.

а) Основні компоненти моделі СМО;

- 1) Опис вхідного потоку вимог (ймовірносні характеристики, сезонні коливання, тренд...);
- 2) Опис способу, яким виконується обслуговування - дисципліна обслуговування (ймовірносні характеристики та ін.).
- 3) Опис дисципліни черги (наприклад: “першим прийшов - першим обслугований”, “останнім прийшов - першим обслугований”, пріоритети різним категоріям заявок, наприклад – пожежні машини заправляти в першу чергу, міліцію – в другу, усіх інших – без пріоритетів...).

Завжди слід пам'ятати, що неадекватність математичного подання реальної системи, з багатьма спрощеннями та ідеалізаціями – неминуча. Це правило в отриманні і використанні математики у вивченні реальних процесів, тому треба КРИТИЧНО СПРИЙМАТИ результати, що отримані на моделі і перевіряти їх експериментально.

б) Основні характеристики СМО

Головний інтерес мають такі характеристики.

- 1) Довжина черги в різні моменти часу (динаміка черги).
- 2) Загальна тривалість знаходження вимоги (клієнта. Об'єкта) в системі.
- 3) Доля простоїв, або, навпаки, – інтенсивність завантаження обслуговуючих пристроїв.

Класифікація систем масового обслуговування:

Для СМО розроблено стандартну класифікацію по різних ознакам, серед яких найбільш важливими є:

- Структура системи;
- Закон розподілення поступаючих на неї потоків вимог;
- Закон розподілення часу обслуговування, порядок (дисципліна) обслуговування, допустима довжина черги перед обслуговуючими приладами(каналами).

Будь-яка система характеризується своєю структурою, тобто складом її основних частин і функціональними зв'язками між ними. Для СМО такими частинами є обслуговуючі прилади (канали). Якщо система містить тільки один канал, така СМО називається одноканальною. Однак в ряді випадків система може мати декілька каналів, призначених для одночасного (паралельного) обслуговування поступаючих вимог. Такі СМО називають батоканальними.

Спеціалізація окремих каналів по визначеним операціям приводить до багатофазної СМО, кожна фаза якої може включати в собі один або декілька каналів, обслуговуючих послідовно один и той же (для фази) потік вимог. В цьому випадку вимог вважається повністю обслугованою тільки тоді, коли послідовно пройде усі фази обслуговування. Кожну фазу можна розглядати як одно- або багатоканальну СМО.

В практиці проектування і експлуатації реальних систем найбільш часто зустрічаються такі закони розподілення: **пуасонівський М, рівномірний D, ерлангівський Е, довільний G.**

Для характеристики СМО використовується символіка, запропонована **Д. Кендаллом** [5,7], яка включає в себе п'ять розрядів, призначених для характеристики відповідно:

- 1) потоку вимог;

- 2) закону часу обслуговування вимог;
- 3) особливості структури;
- 4) особливості черги;
- 5) опис дисципліни обслуговування.

В залежності від особливостей реальних систем і їх призначення на довжину черги перед фазами СМО можуть накладатись обмеження. В цьому випадку розрізняють СМО з обмеженою або необмеженою довжиною черги.

Вимоги, що поступають на СМО з обмеженою чергою, вважаються втраченими, якщо в момент їх приходу черга була заповнена. СМО, для яких вимоги можуть втрачатися, називаються СМО затратами. Для СМО з необмеженою чергою вимоги, що поступають коли усі канали зайняті, чекають початку свого обслуговування в черзі доти, поки якийсь канал не звільниться від обслуговування до появи пріоритетних вимог.

Розрізняють СМО з пріоритетним обслуговуванням і СМО з дисципліною: “першим прийшов – першими обслугований”.

В залежності від загального числа джерел вимог U_i ($i=1,..k$), кількості направляючих від них вимог і повернення обслугованих вимог до джерела розрізняють замкнені та розімкнені СМО. Замкненими системами (системи з обмеженим вхідним потоком) називають системи, які призначені для обслуговування обмеженого числа джерел вимог. Загальне число вимог, циркулюючих в замкненій системі – обмежене (звичайно - постійне).

В тому випадку, коли число джерел вимог необмежене або коли одне джерело посилає в систему необмежене число вимог, СМО називають розімкненими.

Розглянемо приклади кодування класів СМО

СИСТЕМА $M/M/1/\infty$, розшифровується так:

M – вхідний потік вимог – пуасонівський;

M – розподілення часу обслуговування – експоненційне (гіпотетично);

1 – число каналів = 1;

∞ – обмеження на довжину черги нема (безкінечна допустима черга).

Розшифруйте самостійно: **E/G/12/5**

(Ерлангівський вхідний потік вимог, довільний закон часу обслуговування, 12 каналів, обмежена черга – шоста вимога: “клієнт побачив, що черга біля кас 5 чоловік і пере думав обслуговуватись”, або: “6-тий літак не встигли обслуговувати(збити) – улетів”).

Показники ефективності СМО.

До показників ефективності СМО відносять:

- розподілення ймовірності для числа вимог n в системі;
- середнє число вимог в черзі або в системі;
- розподілення часу очікування в черзі або часу перебування

- вимоги в системі;
- середнє і дисперсія часу очікування;
- середня тривалість інтервалу зайнятості системи;
- середнє число обслуговуємих(за одиницю часу) вимог;
- розподілення ймовірності для числа зайнятих каналів системи (ну уявіть собі АТС);
- вартості: каналів обслуговування, втрат від несвоєчасного обслуговування (черг), вартості диспетчеризації (управління, перенапрявлення) потоків вимог та ін.

Усі показники якості обслуговування систем можна умовно розділити на три види: **ймовірносні, моментні, економічні**, які тісно пов'язані між собою. З імовірнісних характеристик широко застосовуються такі як:

$P(k = n)$, або, скорочено $P(n)$ – ймовірність того, що в системі знаходиться n вимог; $P(k > n_{\max})$ – ймовірність того, що поступаюча вимога буде втрачена та ін.

Із моментних характеристик к найбільш важним відносяться:

- середнє число вимог в системі:

$$n_{\text{середн}} = \sum P(n) \cdot n \quad n = 0 \dots \infty \quad (1)$$

середнє числѳ вимог в черзі (s - число каналів СМО):

$$v_{\text{середн}} = \sum_n P(n) \cdot (n - s) \quad n = s + 1 \dots \infty \quad (2)$$

середнє число обслуговуємих вимог в каналах обслуговування:

$$j_{\text{середн}} = \sum_n P(n) \cdot n \quad n = 0 \dots s \quad (3)$$

- середнє число вільних приладів:

$$r_{\text{середн}} = \sum_n P(n) \cdot (s - n) \quad n = 0 \dots s \quad (4)$$

середній час очікування в черзі ():

$$\omega_{\text{середн}} = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} p(\omega) \cdot \omega \, d\omega \quad p(\omega) = \frac{d}{d\omega} P(\omega) \quad (5)$$

ω – змінна інтегрування

- середня тривалість перебування вимоги в системі

$$u_{\text{середн}} = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} g(\omega) \cdot \omega \, d\omega \quad g(\omega) = \frac{d}{d\omega} G(\omega) \quad (6)$$

ω – змінна інтегрування.

В цих формулах прийняти такі означення:

$F(t)$ – функція розподілення часу очікування вимоги черзі;

$G(t)$ – функція розподілення часу перебування вимоги в системі;

$P(n)$ – функція розподілення числа вимог в системі;

Для кожного моменту часу виконуються такі рівності:

Середнє число обслуговуваних вимог + середнє число вільних приладів = число каналів системи:

$$j_c + r_c = s \quad (7)$$

Середнє число вимог в черзі + середнє число вимог на обслуговуванні = середнє число вимог в системі:

$$v_c + j_c = n_c \quad (8)$$

Середня тривалість обслуговування вимог + середня тривалість очікування вимоги в черзі = середня тривалість перебування вимоги в системі:

$$t_{ob_c} + \omega_c = u_c \quad (9)$$

В усталеному стані роботи СМО, якщо такий існує, вихідний потік дорівнює вхідному: $\lambda_{vx} = \lambda_{вих} = \lambda_c$. Якщо, крім того вхідні вимоги не залежать від вихідних (розімкнена система), то попередні рівності приводяться до виду:

інтенсивність потоку вимог * середня тривалість перебування вимоги в системі = середнє число вимог в черзі

$$\lambda_{\text{вимог/хвилину}} * \lambda_{\text{хвилин}} = \lambda_{\text{вимог}} \quad \lambda_c \cdot \omega_c = v_c \quad (10)$$

інтенсивність потоку вимог * середня тривалість перебування вимоги в системі = середнє число вимог в системі

$$\lambda_{\text{вимог/хвилину}} * u_{\text{хвилин}} = n_{\text{вимог}} \quad \lambda_c \cdot u_c = n_c \quad (11)$$

Очевидно, що чим менше значення таких показників, як λ , u , n , тим вище ефективність системи з **точки зору джерела вимог** (клієнта). Однак зменшення значень цих показників зв'язане з підвищенням економічних витрат виконавця.

До складу узагальненого критерія ефективності СМО включають вартість очікування вимог в черзі і вартість простою каналів. Зауваження. перша складова – втрати клієнта, друга – витрати виконавця. Чи буде виконавець

враховувати першу складову? – В умовах конкуренції і якщо він планує бізнес надовго – буде обов’язково.

Розглянемо приклад побудови моделі вартості СМО з s каналами. Задаємо період T , для якого треба розрахувати середню вартість $\text{Варт}(s)$, через $C1_{\text{черг}}$ означимо вартість (втрати) очікування одної вимоги в одиницю часу, а через $C2_{\text{прост}}$ – вартість простою одного каналу в одиницю часу, отримаємо:

$$\text{Варт}(s) = (C1_{\text{черг}} \cdot v_c + C2_{\text{прост}} \cdot r_c) \cdot T \quad (12)$$

Підставляємо значення середнього числа вимог в черзі (2) та середнього числа вільних приладів (4) отримуємо:

$$\text{Варт}(s) = \left[C1_{\text{черг}} \cdot \sum_{n=s+1}^{\infty} P(n) \cdot (n-s) + C2_{\text{прост}} \cdot \sum_{n=0}^s P(n) \cdot (s-n) \right] \cdot T \quad (13)$$

Якщо вартості $C1_{\text{черг}}$ и $C2_{\text{прост}}$ постійні в періоді T , то можна використати “повну приведену вартість СМО в одиницю часу” [2-4]:

$$\gamma(s) = C1_{\text{черг}} \cdot \sum_{n=s+1}^{\infty} P(n) \cdot (n-s) + C2_{\text{прост}} \cdot \sum_{n=0}^s P(n) \cdot (s-n) \quad (14)$$

Щоб обчислювати, мінімізувати ці витрати, необхідно отримати функцію $P(n)$ - розподілення ймовірностей для кількості вимог в системі (вимоги в черзі + вимоги на обслуговуванні).

Який же з названих вище методів розрахунку СМО вибрати? Коротко охарактеризуємо їх:

- 1) **детермінована модель черги** – дуже проста, але мало реалістична;
- 2) **модель на базі теорії розподілень** ефективна для узагальнень, прогнозів, оптимізації, але такі моделі існують для небагатьох випадків. Такі моделі важко отримати;
- 3) **марківські моделі СМО** – дозволяють отримувати результати як аналітичними методами так і числовими, мають певні обмеження - не завжди є реалістичними;
- 4) **методи на базі імітаційного моделювання** – найбільш поширені в інженерній практиці. Дозволяють враховувати усі особливості СМО. Недолік – дають тільки числові результати. Згідно совковому стандарту проектних розробок Ви повинні вибрати з цих методів “оптимальний”. Для тих, хто має уяву про методологію науки і сучасні інформаційні технології неважко вибрати “оптимальний варіант”: ці методи взаємодоповнюють, взаємоконтролюють один одного, тому і використовуємо їх разом. Починаємо з імітаційного моделювання,

що іноді характеризується так: “...грубый силовой приём, используемый в ситуациях, когда другие средства не дают результата”.

1.5.2 Розрахунок та моделювання однофазної одноканальної СМО

Імітаційні математичні моделі СМО

Задаємо такі змінні для опису стану одноканальної однофазної СМО:

$S_{1,t}$ - випадкова подія - прибув (1), чи не прибув (0) клієнт;

$S_{2,t}$ - випадкова подія - обслуговано (0), чи поки не обслуговано (1) клієнта; (необов'язкова)

$S_{3,t}$ - подія - прилад вільний (1), зайнятий (обслуговуванням) (0);

$S_{4,t}$ - кількість клієнтів у черзі;

$S_{5,t}$ - кількість тактів чергового обслуговування пройшло (і ще не скінчилось).

Не описуємо тут сценарій роботи СМО – він немовби очевидний. Почнемо із загального – записуємо матрично-векторне рівняння процесів у СМО. Його словесна формула: “поточний стан дорівнює операторному перетворенню від попереднього стану”, тобто:

$$S^{(t+1)} = \mathfrak{R}(S^{(t)})$$

де $\mathfrak{R}$ - **нелінійний оператор**. Наша задача - деталізувати цей оператор - записати систему рівнянь і реалізувати її у вигляді програмного модуля. Сучасні програмні середовища допускають інтеграцію класичних етапів “математична модель – алгоритм-програма”. Але, як і на початку ери програмування діє закон “програма більше десяти рядків не відлагоджується.

Спочатку розробляємо і тестуємо модулі для реалізації випадкових подій (*прибуття клієнта, обслуговування клієнта*). Розглянемо **дві версії модуля** – перший для довільних розподілень величини (*інтервалу прибуття, часу обслуговування*), другий для окремого, але важливого випадку, коли ймовірність події на кожному кроці (такті) функціонування СМО постійна і незалежна від інших подій.

Моделюємо СМО як імпульсну систему, що працює з певним кроком квантування T . Як вибрати цей крок моделювання системи? Використаємо знання з курсу ТАУ – там крок квантування для моделювання неперервної динамічної системи ми вибирали досить малим, так, щоб досить точно передати поведінку неперервної системи. Виберемо крок моделювання так:

$$T_{\text{моделювання}} = \delta \cdot T_{\text{середній_інтерва.}} \quad \delta = 0.1 - 0.2$$

Тобто, беремо крок моделювання в 5-10 разів меншим, ніж середній інтервал між прибуттям вимог (клієнтів).

Тепер, виходячи з цього припущення формуємо логіку роботи модуля: генерується випадкове число int із заданим розподіленням. Воно інтерпретується як кількість тактів Тмод до прибуття чергового клієнта. Увага! Це внутрішня, штучна змінна системи моделювання, вона “невідома” системі, її не можна використовувати для прогнозування і планування.

```

прб := | int ← 0
      | for t ∈ 1..12
      |   | if int < 1
      |   |   | s1_t ← 1
      |   |   | int ← rbinom(1, 20, .1)
      |   | otherwise
      |   |   | int ← int - 1
      |   |   | s1_t ← 0
      |   | "Endfor"
      | s1

```

- початкове значення змінної
- "осталося кроків до прибуття
- цикл по крокам моделювання
- якщо інтервал = 0,
- клієнт прибув.
- Генерується новий інтервал при-
- буття
- інакше
- до прибуття на крок менше
- прибуття клієнта на кроці моде-
- лювання не було
- програма повертає вектор подій
- "прибуття клієнта"

Вище подано приклад програмного модуля, що реалізує цю ідею. Як можна бачити, заміною одного рядка – генератора чисел із заданим розподіленням модуль можна настроїти на інше розподілення. Можна зробити це більш елегантно – зробити модуль функцією від функції розподілення (тобто параметром функції буде не число, а функція).

Приклади змінних елементів модуля: $|rnorm(1, 0, 10)|_1$ $|rpois(1, .3)|_1$

Подаємо другу версію програми для випадку, коли ймовірність події на кожному кроці (такті) функціонування СМО постійна і незалежна від інших подій.

Зауваження. В програмі два зайвих рядки. Один з них – коментар у лапках – підвищує читабельність програми. Не тільки старше, але й молоде покоління, що крім класичного Паскаля нічого не знає, звикло до блок-схем і структурованих текстів програм, де усі структурні одиниці мають початок і кінець (begin - end, for – end for, if – end if... ets.). Тому природно дописати пару коментарів чи виразів, що покращать читабельність програми, для автора, в першу чергу, і для інших.

prb(my) :=	sto ← 100				
	for t ∈ 1..8				
	<table> <tr> <td>s1_t ←</td><td>0 if rnd(1) > my</td></tr> <tr> <td></td><td>1 otherwise</td></tr> </table>	s1 _t ←	0 if rnd(1) > my		1 otherwise
s1 _t ←	0 if rnd(1) > my				
	1 otherwise				
	"next t"				
	s1				

$$\text{prb}(0.2) =$$

	1
1	1
2	0
3	0
4	1
5	0
6	1
7	0
8	0

$$\text{prb}(0.7) =$$

	1
1	0
2	0
3	1
4	1
5	0
6	0
7	0
8	1

Переходимо до розробки повної програми моделювання. Цю програму можна було б зібрати з модулів, подібних вище розглянутим. Можна просто підставити тексти цих модулів, що і зроблено. Програма невелика, і ми можемо бачити разом фактично всю систему рівнянь СМО в термінах змінних s1 - s5. Слід пам'ятати, що змінні визначені поза програмою – **глобальні** і в програмі їх **видно**, а змінні, визначені в програмі – **локальні**, їх **видно** тільки в цій програмі і **не видно** за її межами.

Задаємо кількість кроків моделювання:

	Kolstep:= 200	t := 1.. Kolstep	ORIGIN= 1
Ss :=	<pre> inp ← 0 ino ← 0 sp <1> ← пст for t ∈ 1.. Kolstep if inp < 1 sp_{1,t} ← 1 inp ← rbinom(1, N, 1 - q)₁ otherwise inp ← inp - 1 sp_{1,t} ← 0 sp_{4,t+1} ← sp_{4,t} + sp_{1,t} if sp_{3,t} ∧ sp_{4,t} ino ← rpoi(1, ля)₁ sp_{5,t} ← 0 sp_{4,t+1} ← sp_{4,t} - 1 sp_{3,t+1} ← 0 if sp_{3,t+1} < 1 ino ← ino - 1 sp_{5,t+1} ← sp_{5,t} + 1 if ino < 1 sp_{3,t+1} ← 1 sp_{5,t} ← 0 "endfor" sp</pre>		<pre> inp - інтервал часу до прибуття ino - інтервал часу до кінця обслу- гування - ввод початкового стану. Цикл по крокам моделювання. - вже розглянутий вище модуль імі- тації випадкової події "прибуття клі- єнта" Розподілення інтервалів прибуття в даному випадку - біноміальне з пара- метрами N, q. Для використання ін- шого розподілення досить замінити цей рядок програми. - черга на наступний період - якщо прилад вільний і черга не ну- льова генерація випадкового інтервала об- слуговування чергового клієнта - обнулення лічильника тактів обслу- говування - черга зменшується - прилад зайнято - якщо прилад зайнято - декремент інтервалу до кінця обслу- говування - інкремент лічильника тактів обслу- говування - якщо обслуговування закінчилось - прилад вільний - обнулення лічильника тактів обслу- говування - ностальгія - те, що програма повертає під іменем Sp</pre>

Текст нашої програми є гібридом лістингу і блок-схеми. Написано цей текст в основному системою програмування. Оператори, блоки, структурні елементи – все це вибрано з меню програмування. І саме головне – цю про-

граму легко оформити як функцію відповідних параметрів.

Побудова стенду для дослідження СМО. Контрольний приклад.

Стенд – екранна сторінка, де сконцентровані і зручно розташовані входи і виходи програми моделювання – числові значення параметрів, таблиці, графіки, текстові кнопки для “включення / відключення” режимів і об’єктів. графіки процесів, обчислених за розробленою програмою.

*Зверніть увагу, що ці параметри вводяться в режимі абсолютного при-
своєння, тому вони відомі програмі, розташованій вище. Пам’ятайте, що
цей документ – об’єктна програма, де модулі-об’єкти посиляють і прийма-
ють повідомлення за певними правилами.*

$tp := 0..14$ $pvx(x) := dbinom(x, N, 1 - q)$ $pob(x) := dpois(x, \lambda)$

Обчислення середніх та
стандартних відхилень
для розподілень вхідного
потoku та обслуговування.

$$\begin{aligned} cv &:= \sum_{tp} pvx(tp) \cdot tp & \sigma_v &:= \sqrt{\sum_{tp} pvx(tp) \cdot (tp - cv)^2} \\ co &:= \sum_{tp} pob(tp) \cdot tp & \sigma_o &:= \sqrt{\sum_{tp} pob(tp) \cdot (tp - co)^2} \end{aligned}$$

Початковий стан середнє стандарт. відх.

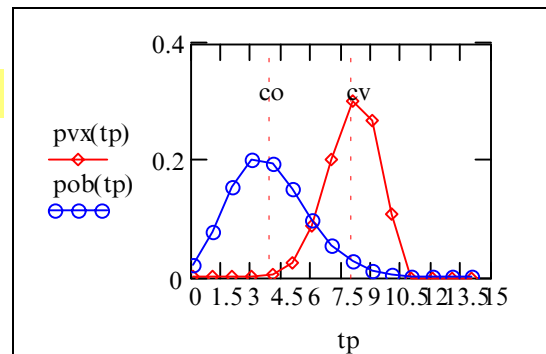
пст $\equiv$	0
	0
	1
	20
	0

Обслуговування $co = 3.9$ $\sigma_o = 1.97$

Прибуття $cv = 8$ $\sigma_v = 1.26$

Коефіцієнт завантаження системи:

$$\frac{co}{cv} = 0.49$$



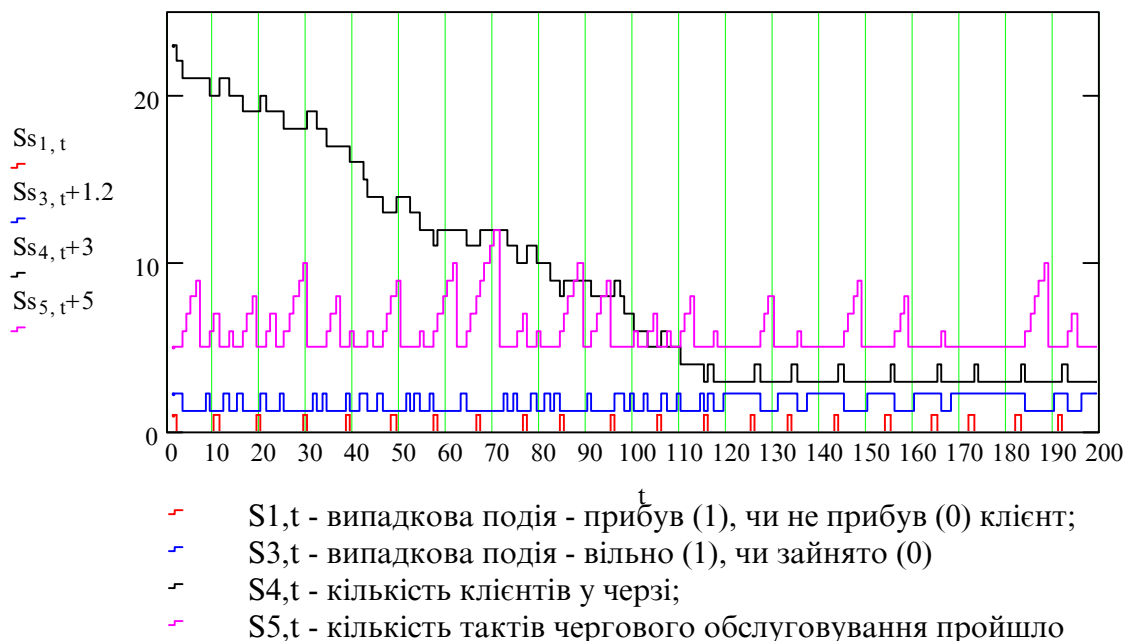
Увага = "система_Працездатна"

Середня_черга = 4 машини

$N \equiv 10$ $q \equiv .2$

$\Leftarrow$ параметри розподілення інтервалів прибуття

параметри розподілення часу обслуговування $\Rightarrow$ $ля \equiv 3.9$



Інструкція користувачу: Тим, хто занадто довіряє критеріям Пірсона, Колмогорова і просто критеріям довіри, корисно понатискати мишею N, a, b... При цьому обчислюються **нові реалізації** процесів. Можна побачити, що досить часто виникають "аномальні" реалізації з великими чергами – все це просто *природні властивості випадкових процесів* з певними постійними статистичними характеристиками. Саме це малося на увазі в класиці "...прикажу бити себе по морде два рази в день...за то, что доверился случайности" (Я. Гашек Похождения бравого солдата Швейка)

Марківські математичні моделі СМО

Марківські моделі є одним з альтернативних засобів аналізу і синтезу СМО. Подивимось, з чого ми починали, коли розробляли імітаційну математичну модель СМО. Ми описали стан системи такими змінними:

$S_{1,t}$ – **випадкова** подія: прибув (1), чи не прибув (0) клієнт;

$S_{2,t}$ – **випадкова** подія: обслуговано (0), чи поки не обслуговано (1) клієнта; (необов'язкова змінна)

$S_{3,t}$ – подія: прилад вільний (1), зайнятий (обслуговуванням) (0);

$S_{4,t}$ – кількість клієнтів у черзі;

$S_{5,t}$ – кількість тактів чергового обслуговування пройшло (і ще не скінчилось).

А тепер подивимось на нашу систему під *іншим кутом зору*, виділимо такі стани для у нашої системи:

$St0$ – нема черги,

$St1$ – черга в одну машину,

$St2$ – черга у дві машини, і..

на першому етапі, щоб не ускладнювати дуже модель, зробимо сюрреалістичне (понад) припущення, що третій клієнт, побачивши чергу в дві машини від'їжджає.

Складаємо матрицю переходів для цих станів.

Ймовірність переходу із стану: $St0$

$St1$

$St2$

↓

↓

↓

$$\begin{array}{lcl} \text{У стан:} & St0 & \Leftarrow \\ & St1 & \Leftarrow \\ & St2 & \Leftarrow \end{array} \begin{pmatrix} q1 & q1 \cdot p2 & 0 \\ p1 & q1 \cdot q2 + p1 \cdot p2 & q1 \cdot p2 \\ 0 & q2 \cdot p1 & q1 \cdot q2 + p1 \cdot p2 + q2 \cdot p1 \end{pmatrix} = M$$

Вона повинна бути отримана САМОСТІЙНО на основі словесного опису станів поданого далі. Приймаємо стандартні означення для ймовірностей: ймовірність прибуття – $p1$ (на протязі одного такту, періоду, крока роботи системи), ймовірність неприбуття – $q1 = 1 - p1$, ймовірність обслуговування – $p2$, ймовірність необслуговування – $q2 = 1 - p2$.

Зауваження. В першій частині документу були інші означення: $m_u = p1$ та $l_a = p2$.

Напишемо **словесні формули** для елементів матриці переходів M :

m_{11} – (черги не було), не було прибуття - черга осталась нульовою;

m_{12} – (черга в одну машину), прибуття не було 'і' обслуговування скінчено – черга стала нульовою;

m_{21} – (черги не було), є прибуття – черга стала одиничною;
 m_{22} – (черга в одну машину), не було прибуття 'і' не було обслуговування 'або' було прибуття 'і' було обслуговування - *черга зосталась одиничною*;
 m_{23} – (черга в дві машини), прибуття не було 'і' обслуговування скінчено – черга стала одиничною;
 m_{32} – (черга в одну машину), є прибуття 'і' обслуговування не скінчено – в черзі стало дві машини;
 m_{33} – (черга в дві машини), (не було прибуття 'і' не було обслуговування) 'або' (було прибуття 'і' було обслуговування) 'або' (було прибуття 'і' не було обслуговування, але ж клієнт поїхав далі) – *черга зосталась у 2 машини*. Відповідні елементи матриці переходів нульові, якщо, згідно з умовами задачі, відповідні події неможливі.

Задаємо кількість кроків моделювання

Kolstep:= 20 t := 1.. Kolstep ORIGIN= 1

Задаємо початкові умови і значення параметрів вхідного потоку і обслуговування.

Якось нематеріалістично сприймається “ймовірність черги в 2 машини”. Прийmemo таку (необов’язкову) інтерпретацію вектора X: На розподіленому комплексі АЗС маємо 10 колонок. На початку періоду по завантаженню вони розподілялись так:

- бензоколонки з чергою = 0
- бензоколонки з чергою = 1
- бензоколонки з чергою = 2

$$X^{(1)} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

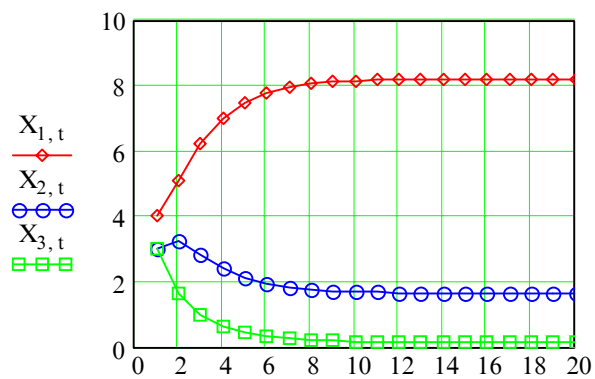
Записуємо матрицю переходів, виводимо її значення для заданих параметрів:

$$M_0 := \begin{pmatrix} q_1 & q_1 \cdot p_2 & 0 \\ p_1 & q_1 \cdot q_2 + p_1 \cdot p_2 & q_1 \cdot p_2 \\ 0 & q_2 \cdot p_1 & q_1 \cdot q_2 + p_1 \cdot p_2 + q_2 \cdot p_1 \end{pmatrix} \quad M_0 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.495 & 0 \\ 0.1 & 0.46 & 0.495 \\ 0 & 0.045 & 0.505 \end{pmatrix}$$

i := 1..3 Контроль матриці переходів: $\sum_i M_{q,1} = 1$ $\sum_i M_{q,2} = 1$ $\sum_i M_{q,3} = 1$

І нарешті записуємо рівняння марківського процесу: $X^{(t+1)} := M_0 \cdot X^{(t)}$

(***)



—◆— кількість колонок з чергою =
 —○— кількість колонок з чергою =
 —□— кількість колонок з чергою =

$p1 \equiv 0.1$ - Ймовірність прибуття

$p2 \equiv 0.55$ - Ймовірність обслуговування

$q1 \equiv 1 - p1$ $q2 \equiv 1 - p2$

Коефіцієнт завантаження системи:

$$\frac{p1}{p2} = 0.18$$

Повідомлення "система_Працездатна"

Розподіл колонок по завантаженню:

$$X_{1,20} = 8.19$$

$$X_{2,20} = 1.66$$

$$X_{3,20} = 0.15$$

Неважко дати інтерпретацію результатів і для випадку однієї колонки: % часу у певному стані...

Виконаємо ревізію і аналіз того, що отримали:

Імітаційна модель СМО:

$$S_{\langle t+1 \rangle} = \text{НОП}(S_{\langle t \rangle})$$

Марківська модель СМО:

$$X_{\langle t+1 \rangle} := M \circ X_{\langle t \rangle}$$

Моделі належать до одного структурного класу, але відрізняються (подамо порівняльний опис)

Модель НЕЛІНІЙНА, універсальна.

Реалістичність моделі потенційно не обмежена - можна ураховувати все.

Модель не дозволяє отримувати узагальнені аналітичні результати.

Може вбудовуватись у реальні автоматизовані системи управління - для прогнозування і планування.

Опис вектору стану:

$S_{1,t}$ - прибув (1), чи не прибув (0) клієнт;

$S_{2,t}$ - обслуговано (0), чи не обслуговано (1) клієнта; (необов'язкова змінна)

$S_{3,t}$ - прилад вільний (1), зайнятий (0);

$S_{4,t}$ - кількість клієнтів у черзі;

$S_{5,t}$ - кількість тактів чергового обслуговування.

Опис оператора переходу

- специфікації операцій в системі в залежності від ситуацій - прибуття, неприбуття, наявність черги, розмір черги....

Модель ЛІНІЙНА, має обмеження – ймовірність переходу з певного стану не залежить від тривалості знаходження в цьому стані.

Реалістичність моделі суттєво обмежена.

Модель дозволяє отримувати узагальнені аналітичні результати. (= теорія марківських процесів)

Може обмежено використатись у реальні автоматизованих системах.

Опис вектору стану:

$X_{1,t}$ - ймовірність перебування в стані "черга=0";

$X_{2,t}$ - ймовірність перебування в стані "черга=1";

$X_{3,t}$ - ймовірність перебування в стані "черга=2" ітд.

Опис оператора переходу

матриця перехідних ймовірностей, де

m_{11} - ймовірність переходу черга =0 → черга =0 на даному інтервалі

m_{12} - ймовірність переходу черга =0 → черга =1...



1.5.3 Розрахунок та моделювання багатофазної одноканальної СМО (конвеєрне виробництво)

Вступ. Постановка задачі

Ціль даного розділу розробка математичної моделі і програми для імітаційного моделювання роботи багатофазної СМО, або конвеєра. В загальному випадку обслуговування заявок (виконання заданих операцій на робочих місцях конвеєра) може бути багатоканальними, багатофазним. Фази обслуговування – це операції, що виконуються в певній послідовності, відповідними приладами, канали обслуговування – паралельно працюючі прилади певної фази обслуговування.

Між іншим, до чого картинка вгорі? Тому, що це класика і продуктивний напрям. Тому що головна ідея там – безвихідних ситуацій для кого загодно, тим більше - для людини, не буває. Класична теорія масового обслуговування має 3-5 красивих результатів для 3-5 задач. На практиці зустрічаються переважно задачі, для яких наука може дати тільки один інструмент – імітаційне моделювання.

Конвеєри є окремим випадком СМО. Специфіка конвеєрних виробництв:

- а) вхідний потік “заявок” є детермінованим і рівномірним;
- б) особлива дисципліна обслуговування – “заявка”, що випадає з ритму конвеєра, може бути просто знята, але може бути зупинений весь конвеєр;
- в) “проблеми”, що виникають на певній фазі роботи конвеєра звичайно впливають на інші – і попередні і наступні фази. Одна з головних задач управління – запобігання ситуаціям, коли певних фазах виникають черги “заявок на обслуговування”.

Розробка програмного модуля імітації роботи конвеєра.

Приклади поточних виробництв

Класичні приклади поточних виробництв – збирання автомашин, мотоциклів, двигунів, телевізорів, принтерів, виробництво багатьох продтоварів. Відомий класичний приклад поточного виробництва – бройлерна фабрика ім. Луначарського. Останній приклад – початок масового виробництва інтелектуальних кавоварок і чашок в США.

Суперконвеєром було виробництво телевізорів – головний конвеєр починався на складі комплектуючих (1 поверх), де на нього встановлювалось шасі, проходив через три поверхи і закінчувався на складі готової продукції знову на першому поверсі, де на упаковку наклеювався знак якості та ін. Головний конвеєр взаємодіяв з допоміжними – вузлової зборки, виробництва друкованих плат, випробування (“випалювання” дефектів). Тепер на базі цього експрес-аналізу конвеєрних систем сформулюємо задачу управління конвеєром:

Визначення для кожної ділянки ймовірностей виникнення черг, тобто ситуацій “попередній виріб ще не оброблено, а на ділянку надходить наступний виріб”.

Вибір потрібної продуктивності ділянки для збалансування з темпом роботи конвеєра (наприклад на певні фази може працювати 3, 4, або 5 чоловік), вибір оптимального темпу роботи конвеєра – компромісу між продуктивністю і ймовірністю браку та простоїв. Можливіше один спосіб забезпечення нормальної роботи конвеєра – створення на кожній ділянці буферних запасів виробів: коли на черговому виробі потрібну операцію не встигли зробити – на конвеєр ставлять виріб з буферного запасу.

Альтернативні математичні моделі для розподілень інтервалів між виробами

Припускаємо, що відхилення від номінального часу виконання операції на кожному робочому місці конвеєра незалежні. Тому для обчислення розподілення сумарного відхилення після виконання якоїсь операції можна застосовувати такі альтернативні ММ:

а) неперервна формула для згортки вхідного розподілення і розподілення “перетворювача”:

$$P_{vyx}(n) = \int_{-D}^D X_{vx}(n) \cdot R_p(n - \rho) d\rho \quad D1 = (-\infty .., \infty)$$

б) дискретна формула для згортки вхідного розподілення і розподілення “перетворювача”

$$P_{vyx_n} = \sum_{\rho} P_{vx_p} \cdot P_{p_{f_n-\rho}} \quad \rho = (-\infty .., \infty)$$

в) обчислення розподілення по даним імітаційного або натурального експерименту, результатом якого є масив випадкових чисел: $M = \{\Delta t_{vx_i} + \Delta t_{p_i}\}; i = 1 .. N$, де Δt_{vx_i} – випадкове відхилення часу входу і-го виробу; Δt_{p_i} – випадкове відхилення часу виконання операції. Тоді в термінах вбудованої статистичної функції “гістограма” вихідне розподілення буде:

$$P_{vyx}(k) = \text{his}(\text{in}, M) \cdot \frac{1}{N}$$

де in - вектор інтервалів, $k = 1 \dots K$ – індекс інтервалу. Що до вибору “оптимальної моделі”, то згідно сучасним стандартам на інформаційно-обчислювальні системи слід виконувати обчислення і переробку інформації за декількома альтернативними моделями, це забезпечує контроль і надійність при незначних додаткових витратах на обчислювальні ресурси.

1.3 Альтернативні математичні моделі для розподілень відхилень параметрів виробів

Відхилення параметрів виробів від номінальних можуть бути результатом розбалансування і люфтів фіксуючих пристроїв; зміни температури, деградації інструменту, запилення атмосфери та багатьох інших факторів. Відхилення можуть мати як детермінований, так і систематичний характер. Розподілення цих відхилень обумовлені діючими в технологічній операції “механізмами”. Типовими для технологічних процесів є рівномірне, гаусове, пуассонівське, геометричне та інші типові розподілення.

Таким чином, для вибору математичної моделі слід вивчити специфіку техпроцесу, визначити “механізм” породження відхилень і використовувати його безпосередньо в імітаційних методах, або взяти відповідне частотне розподілення при використанні методів теорії ймовірності.

Сучасні пакети мають бібліотеки типових розподілень та генераторів випадкових чисел із заданими законами розподілення. Наводимо вирази та стандартні функції для деяких з них: нормальне, хі-квадрат, біноміальне, пуассонівське, експоненційне, геометричне:

$\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$	$\frac{1}{2^{\frac{d}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot x^{\frac{d}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$	$\frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k}$
$\text{dnorm}(x, \mu, \sigma)$	$\text{dchisq}(x, d)$	$\text{dbinom}(k, N, p)$
$\text{rnorm}(n, \mu, \sigma)$	$\text{rchisq}(n, d)$	$\text{rbinom}(n, N, p)$
$r \cdot \exp(-r \cdot x) \quad \text{dexp}(x, r)$	$p \cdot (1-p)^k \quad \text{dgeom}(k, p)$	$\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \text{dpois}(k, \lambda)$
$\text{rexp}(n, r)$	$\text{rgeom}(n, p)$	$\text{rpois}(n, \lambda)$

Аналіз альтернатив реалізації і вибір програмного середовища

Сучасні технології розробки прикладних програм, незважаючи на зовнішню різноманітність побудовані за єдиною схемою як послідовність етапів:

- 1) формулювання **списку функцій системи** (специфікація) =>
- 2) ручна або автоматична трансляція специфікації у **діючий макет програми** =>
- 3) повторення п.2 – **розробка альтернативних версій** => відлагодження, випробування та взаємоперевірка версій =>
- 4) ручна або автоматична **трансляція макета програми у код** (.EXE-модуль).

Нашу програму *для випадку інтенсивного використання на робочому місці* можна реалізувати в однаково ефективно в Excel, Access, Visual FoxPro, Delphi, в математичних пакетах та ін. До цих продуктів випускаються бібліотеки готових модулів і прототипів, які досить тільки параметризувати і можна включити в свою програму. *Для відлагоджування та проведення аналітичних досліджень* з цілями стратегічного прогнозування краще розробити програму (документ) у середовищі математичного пакета, наприклад Matlab або Mathcad.

Ці пакети дають безмежні можливості досліднику і одночасно мають компілятори для створення .EXE-модулів. Сьогодні тільки маленькі критичні фрагменти програми пишуться вручну, на Асемблері. Для ситуації швидкого отримання конкретних результатів все частіше вибирається середовище математичного пакета. Останній приклад – корпорація Matworks, що випускає пакет Matlab зробила програмне забезпечення для безпосереднього підключення комп'ютера до будь яких джерел даних – аналогових, цифрових.

Програма забезпечує перетворення та первинну обробку даних, що потім можуть оброблятися потужними засобами пакета Matlab. Таким чином, створений в середовищі математичного пакету макет програми управління якимсь процесом можна перетворити в автоматизовану систему управління реальним, а не модельним процесом. Етап створення програми в кодах може взагалі відпасти.

Такою є еволюція програмних засобів та технологій розробки програм.

Оцінка економічної ефективності конвеєра

Для аналізу ефективності конвеєра потрібно проаналізувати, врахувати, кількісно оцінити велику кількість нетривіальних факторів, таких як швидкість зміни конструкції виробу, коливання попиту на ринку, швидкість зміни технологій... Оцінимо приріст витрат та прибутків, пов'язаний з використанням розроблюваної автоматизованої системи. Ефект від використання про-

грами проявляється в підвищенні якості рішень користувачами за рахунок точних прогнозів.

Як відомо, якість роботи на конвеєрі знижується при виникненні черги. Для деяких виробництв черга неможлива і конвеєр просто зупиняють, або знімають (пропускають) з конвеєра виріб. Враховуючи це, узагальнену модель ефективності конвеєра подамо так:

$$E_{\text{sum}} = C_i \cdot \left[\frac{T_c \cdot (1 - P_p(T_k))}{T_k} \cdot (1 - P_b(T_k)) \right]$$

де C_i – вартість одного виробу; T_c – номінальна тривалість роботи конвеєра за добу; T_k – темп роботи конвеєра, параметр, величина якого визначається і оптимізується у завданні; $P_b(T_k)$ – ймовірність браку, $P_p(T_k)$ – ймовірність зупинки конвеєра як функції темпу роботи конвеєра. Якісно ці залежності описуються так: при підвищенні темпу, тобто зменшенні T_k , підвищується ймовірність браку і ймовірність зупинки конвеєра при виникненні черги на вході в якусь ділянку.

Проблеми безпеки життєдіяльності та забезпечення сприятливих умов роботи на конвеєрі.

Для більшості матеріальних виробництв людина є небажаним елементом конвеєра, а конвеєр – небажаним місцем роботи людини. На певних ділянках конвеєрів по збиранню автомашин, двигунів, де працюють зварювальні, монтажні роботи, взагалі людина з'являється тільки при зупиненому конвеєрі для наладки. Там де одночасно працюють люди і роботи, верстати-автомати, останні вигороджуються на червоне пофарбованою сіткою... (шум, електроінструменти, рухомі елементи конвеєра...).

Радикальний шлях безпеки та забезпечення – виключення людей з безпосередньо виробничого процесу, якщо це не можливе – ізоляція людей від виробничого процесу в спецприміщеннях, звідки вони виконують дистанційні контроль і управління. Якщо не можливе і це – винести виробничі операції, де потрібні люди в окремі ділянки. Останнє потребує знімати і ставити вироби на головний конвеєр, що можливо не для усіх виробництв.

Розробка блок-схеми і алгоритм програми

Опишемо задачу програми: Для заданого варіанту вхідних даних необхідно обчислити частотні розподілення для сумарних відхилень часу обробки виробів після кожної ділянки і на виході конвеєра.

На підставі цих даних обґрунтовано вибираємо оптимальну пропускну спроможність. Для підвищення надійності результатів виконуємо розрахунки за **альтернативними** моделями – згортки розподілень та імітаційного моделювання.

Ввід і контроль даних

Формуємо зону вводу даних.

Задаємо: кількість партії виробів, індекс ділянки, індекс інтервалу розподілення:

$M := 200$ $q := 1..4$ $k := 1..M$ $ORIGIN = 1$

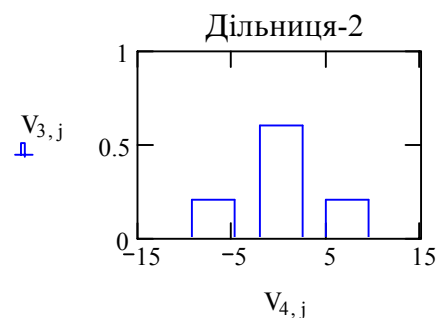
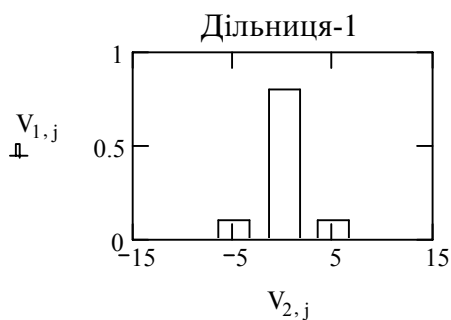
$V := \begin{pmatrix} .1 & .8 & .1 \\ -5 & 0 & 5 \\ .2 & .6 & .2 \\ -7 & 0 & 7 \\ .6 & .3 & .1 \\ -4 & 4 & 12 \\ .3 & .4 & .3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

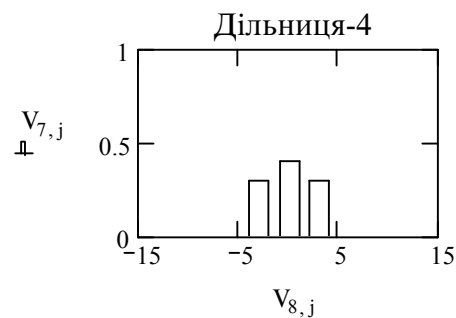
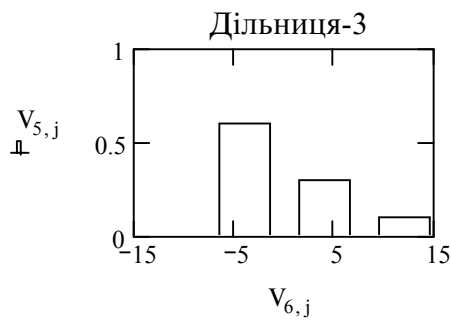
V - це матриця статистичних даних про відхилення часу виконання операції по кожній ділянці. Кожний непарний рядок матриці задає ймовірності певних відхилень часу виконання. Кожен парний рядок - величини цих відхилень.

Контроль даних. Статистичні дані, особливо отримані вручну слід перевірити на відсутність грубих помилок. Будуємо графіки усіх розподілень. Згідно умовам задачі **усі розподілення повинні бути центрованими** (мати середнє = 0). Це означає що при вибраному темпі роботи конвеєра середня продуктивність (пропускна спроможність) усіх ділянок однакова. Обчислюємо середні:

$j := 1..cols(V)$ $cols(V) = 3$ $q := 1..0.5 \cdot rows(V)$ $rows(V) = 8$

Дивимось на таблицю (матрицю) даних V та графіки емпіричних розподілень (гістограми) і бачимо структуру даних – непарні рядки матриці – це ймовірності, парні – значення інтервалів.





Перевіряємо: нормованість розподілів:

$$\text{Сума_ймовірностей} := \sum V_{2q-1,j}$$

$$\text{Сума_ймовірностей} = \begin{matrix} & j & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

центрованість розподілів:

$$\sum V_{2-q-1,j} \cdot V_{2-q,j}$$

$$\begin{matrix} j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Розробка модуля імітаційного моделювання роботи конвеєра

В сучасних технологіях розробки програм етапи матмодель-блок-схема-алгоритм - програма ІНТЕГРУЮТЬСЯ. Матмодель є виконуємою, тобто формула є одночасно і програмою. Блок-схема також часто буває виконуємою програмою.

Перше, з чого почнемо – повторимо визначення індексних змінних:

k – індекс (номер) виробу; **q** - номер дільниці; **j** - номер інтервалу частотного розподілення(згідно з умовами задачі усі розподілення для часу операцій зборки задано на трьох інтервалах).

“Витягуємо” з матриці вхідних даних окремо..

матрицю ймовірностей **p** і матрицю значень інтервалів **z**

$$p_{q,j} := V_{2q-1,j}$$

$$z_{q,j} := V_{2-q,j}$$

Формуємо масив **g** із **M** x 4 (розмір партії виробів*кількість дільниць) випадкових чисел і записуємо вираз, який **вибирає одне із значень інтервалу відповідного дискретного частотного розподілення з відповідною ймовірністю**. Те, що подано нижче **власне і є центральний модуль** програми імітації роботи конвеєра.

$$g_{k,q} := \text{rnd}(\text{натисни}) \cdot \text{жми} \quad dT_{q,k} := \text{if}(g_{k,q} < p_{q,1}, z_{q,1}, \text{if}(g_{k,q} < p_{q,2}, z_{q,2}, z_{q,3}))$$

Виводимо значення сформованих даних – для контролю, аналізу і порівняння. **Масив Dt інтерпретується так:** стовпчик – це виріб з партії, рядок – зсув часу обробки (випередження з мінусом, відставання з "+") обробки на кожній дільниці. Наприклад, у якомусь стовпцю №33 маємо 5, 5, -4, -3. Озна-

чає це випередження на 5 сек. на 1-ій дільниці, на 5с - на 2-ій, запізнення на 4с - на 3-ій і знову ж запізнення на 3с на 4-ій дільниці.

$$g =$$

	1	2	3	4
1	0.001	0.193	0.585	0.35
2	0.823	0.174	0.71	0.304
3	0.091	0.147	0.989	0.119
4	0.009	0.532	0.602	0.166
5	0.451	0.057	0.783	0.52
6	0.876	0.956	0.539	0.462

$$dT =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-5	5	-5	-5	0	5	5	0	-5	0
2	-7	-7	-7	0	-7	7	7	7	0	7
3	-4	12	12	12	12	-4	12	-4	-4	-4
4	0	0	-3	-3	3	3	3	3	3	3

$$z =$$

	1	2	3
1	-5	0	5
2	-7	0	7
3	-4	4	12
4	-3	0	3

$$p =$$

	1	2	3
1	0.1	0.8	0.1
2	0.2	0.6	0.2
3	0.6	0.3	0.1
4	0.3	0.4	0.3

$\leq$ Оці матриці
розпаковані з
цієї $\Rightarrow$

$$V =$$

	1	2	3
1	0.1	0.8	0.1
2	-5	0	5
3	0.2	0.6	0.2
4	-7	0	7
5	0.6	0.3	0.1
6	-4	4	12
7	0.3	0.4	0.3
8	-3	0	3

Зауваження. Вище подана **найпростіша і обмежена по можливостям альтернатива програми імітаційного моделювання роботи конвеєра**, можна, наприклад, написати її в мові програмування Mathcadу виді процедури, одним з параметрів якої буде вектор із вбудованих функцій частотних розподілень. Така програма буде більш універсальною. Зробіть це.

Можна написати програму орієнтовану на використання пакета моделювання систем Math Connex, це дасть можливість спостерігати процес роботи конвеєра в динаміці, в реальному часі. Існує альтернатива з використанням анімації і більш складної візуалізації з використанням таких компонентів, як пакет інженерної і ділової графіки - Visio, що є також компонентом програмної платформи Mathcad.

Модуль обчислення часових інтервалів між виробами на конвеєрі

Допускаючи випередження та запізнення на виконанні операцій для даного виробу на кожній дільниці незалежними (що не завжди виконується) можемо записати вирази для відхилень моментів виходу виробу з відповідних дільниць (це вже є рутинна):

$$dT_T := dT^T$$

Оце другий головний модуль – вирази для обчислення відхилень часу проходження k-го виробу через ділянки: першу $M1_k := dTT_{k,1}$

другу $M2_k := dTT_{k,1} + dTT_{k,2}$

третю $M3_k := dTT_{k,1} + dTT_{k,2} + dTT_{k,3}$

і четверту $M4_k := dTT_{k,1} + dTT_{k,2} + dTT_{k,3} + dTT_{k,4}$

Тепер можемо розв'язувати різні задачі, наприклад: **як знайти інтервал між виходом деякого (qq - 1)-го виробу з ділянки №4 і входом наступного qq-го виробу на цю ділянку??** Отак:

темп = 16 qq := 2..M $Mx_{qq} := M3_{qq} + M4_{qq-1} + \text{темп}$

$$M4^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	-16	10	-3	4	8	11	27	6	-6	6	0	9	0	9	7	15	6	4

$$Mx^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0	10	26	20	25	32	51	46	13	13	25	28	28	28	35	35	34	23	39	33	39

Напишемо програму для обчислення кількості ситуацій, коли на 4-ту ділянку “наїжджає” наступний виріб, коли ще не закінчено роботи з попереднім.

```

( kzb4 )
( vrzb4 ) :=
  Nn ← length(Mx)
  kzb ← 0
  vrzb ← 0
  for i ∈ 1..Nn
    if Mx_i ≤ 0
      kzb ← kzb + 1
      vrzb ← vrzb - Mx_i
  ( kzb )
  ( vrzb )

```

Що повертає ця програма - розшифруйте змінні – її видачу.

length(Mx) = 200

kzb4 = 12

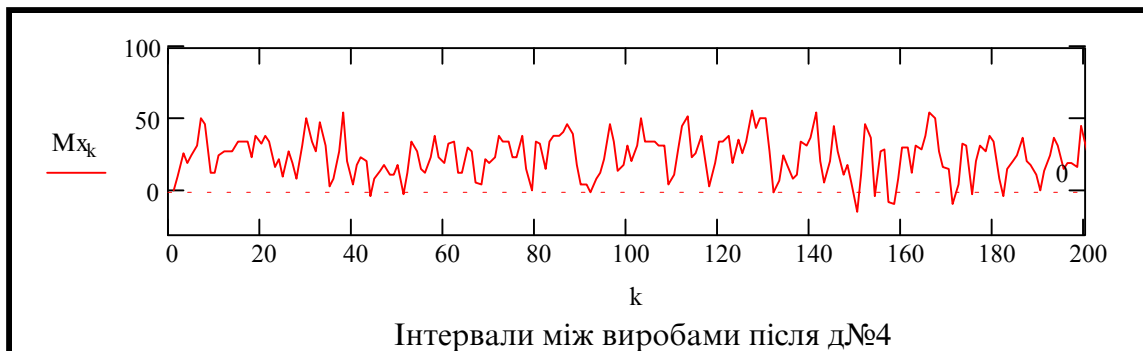
vrzb4 = 56

проц_зб := $\frac{kzb4}{\text{length}(Mx)}$

простоїв := $\frac{\text{темп} \cdot \text{vrzb4sec}}{\text{length}(Mx)}$

Це змінна, що ініціює переобчислення процесу імітації роботи конвеєра - натисніть її:

натисни ≡ 1



При темпі роботи конвейера: маємо такі показники збоїв: простоїв

темп = 16

проц_зб = 6%

простоїв = 4.48 sec

У цій програмі прийнято такі означення:

kzb4 – кількість збоїв, тобто ситуацій, коли часовий інтервал між виробами менше нуля;

vrzb4 – час простоїв у секундах (сума усіх від'ємних інтервалів, коли виріб повинен чекати звільнення дільниці).

Модуль побудови гістограм для інтервалів між виробами

Обчислюємо середні значення і стандартні відхилення для потоку виробів після кожної дільниці. Будуємо гістограми (=емпіричні частотні розподілення) для розподілення інтервалів між виробами для усіх ділянок конвеєра. Для цього використовуємо бібліотечний модуль з розділу 1.3 (копіюємо цей модуль і налаштуємо). В поданих далі виразах використано такі вбудовані функції пакету min(.), max(.), hist(., .) – мінімум і максимум на елементах масиву і гістограма для елементів масиву при заданому векторі інтервалів **in**.

Задаємо: кількість інтервалів і ранжовані змінні для інтервалів і їх границь:

Kint:= 8 M = 200 m := 1..(Kint- 1) n := 1.. Kint

Формуємо вектори границь інтервалів і обчислюємо гістограми:

$$in_{1n} := \min(M1) \cdot 1 + \frac{(n-1) \cdot (\max(M1) - \min(M1))}{Kint \cdot 8} \quad R1 := \text{hist}(in1, M1) \cdot \frac{1}{M}$$

$$in_{2n} := \min(M2) \cdot 1 + \frac{(n-1) \cdot (\max(M2) - \min(M2))}{Kint \cdot 8} \quad R2 := \text{hist}(in2, M2) \cdot \frac{1}{M}$$

$$in_{3n} := \min(M3) \cdot 1 + \frac{(n-1) \cdot (\max(M3) - \min(M3))}{Kint \cdot 8} \quad R3 := \text{hist}(in3, M3) \cdot \frac{1}{M}$$

$$in_{4n} := \min(M4) \cdot 1 + \frac{(n-1) \cdot (\max(M4) - \min(M4))}{Kint \cdot 8} \quad R4 := \text{hist}(in4, M4) \cdot \frac{1}{M}$$

$$\sum_m R1_m = 1 \quad \sum_m R3_m = 1$$

$$\sum_m R2_m = 1 \quad \sum_m R4_m = 1$$

Контроль даних. Не довіряй: собі, а ще більше – ЦОМ. Зокрема за рахунок числових коефіцієнтів у формулах для інтервалів гістограм так підбираємо границі діапазонів, щоб усі дані входили в діапазон – контроль – відповідна сума повинна бути одиничною, – але діапазон не повинен бути занадто великим – гістограма буде неінформативною.

Оце все третій головний модуль нашої програми

Відлагодження програми, отримання результатів тестування.

Виведемо результати розрахунку параметрів техпроцесу для заданих вхідних даних. Будуємо графіки гістограм, наносимо лінії допуску на відхилення часу обробки (це темп роботи конвеєра – змінна Темп), аналізуємо...

Те що подано нижче може бути легко доведено до екрана диспетчера конвеєра – гістограми можуть бути прогнозними, або побудованими чисто на емпіричних даних. Диспетчер дивлячись на такі графіки може узагальнено оцінити стабільність і точність роботи ділянок, на базі цих даних він може зменшити або збільшити темп роботи конвеєра. *Понатискайте (курсор на “жми”, та натискайте F9) змінну “жми” – подивіться як змінюються показники роботи конвеєра, гістограми, статистичні показники, змінійте темп роботи конвеєра.*

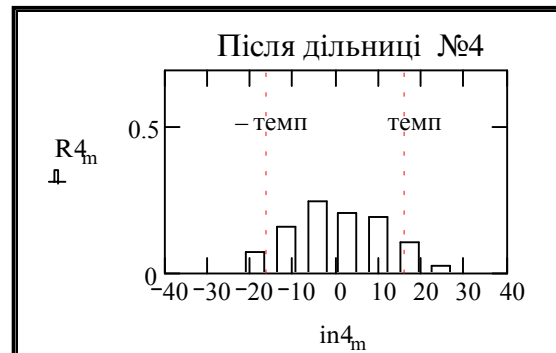
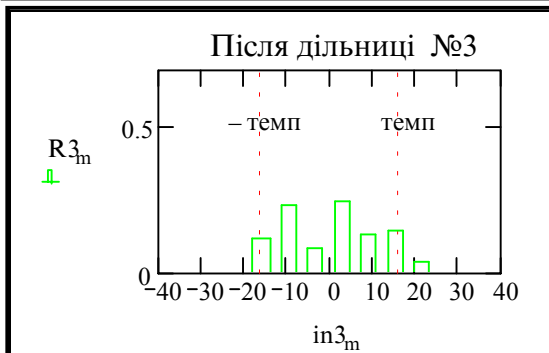
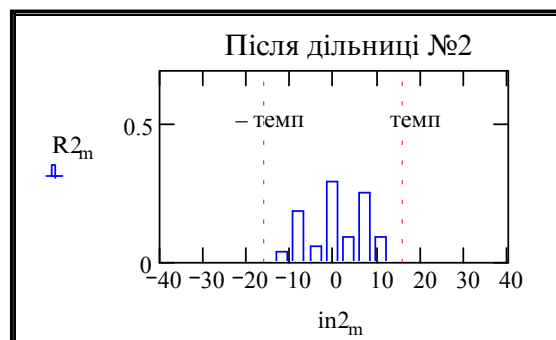
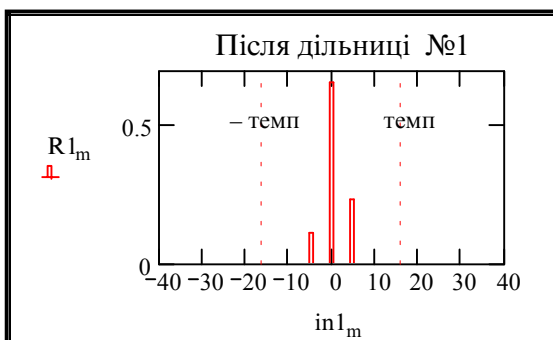
Темп роботи конвеєра

темп $\equiv$ 16 сек

жми $\equiv$ 1

проц_зб = 6%

простоїв = 4.48 sec



Виводимо значення середніх та стандартних відхилень

$mean(M1) = 0.625$ $mean(M2) = 1.64$ $mean(M3) = 3.8$ $mean(M4) = 4.25$

$stdev(M1) = 2.87$ $stdev(M2) = 6.195$ $stdev(M3) = 10.388$ $stdev(M4) = 10.732$

Висновки-1. Дивлячись на графіки розподілень (побудовані в одному масштабі), бачимо:

а) що розподілення після кожної ділянки наближується до нормально-

го і "розпливається" згідно з відповідними положеннями теорії ймовірності;

б) що при вибраному темпі роботи (25-30 с) конвеєр працює на грані черги – діапазон відхилення часу досягає ± 25 сек. Дійсно, якщо попередній виріб запізнюється на 30 сек., а наступний випереджає час на 30 сек., то....

Висновки-2. Отримали програмну систему, що може обробляти як натуральні, так і імітовані дані і діагностувати і прогнозувати по зміні статистичних характеристик тренди параметрів техпроцесів типа – деградація інструмента, втрати стабільності (наприклад люфти в обладнанні..)

Моделювання роботи конвеєра на базі використання згортки Розподілень

Розглянемо коротко альтернативний метод обчислення розподілень інтервалів і відповідно альтернативну методологію моделювання. Розглянемо стисло, що стоїть за звичайно пустими термінами "методологія моделювання". В попередній моделі ми оперували з **часовими інтервалами між виробами**, що обробляються на конвеєрі.

В даній моделі об'єкти операцій – **частотні розподілення цих інтервалів** випадку.

Якщо випадковий процес із заданим розподіленням деякого параметра P_{α} проходить через якийсь "перетворювач" де розподілення цього параметру змінюється згідно з розподіленням перетворювача. Вихідне розподілення обчислюється за інтегралом згортки, або його дискретним еквівалентом:

для неперервних розподілень i для дискретних розподілень
 $D1 = (-\infty \dots \infty)$

$$P_{\nu y_h} = \sum_{\rho} P_{\nu x_{\rho}} \cdot P_{P_{h-\rho}} \quad P_{\nu y x}(x) = \int_{-D}^D X_{\nu x}(\rho) \cdot R_P(x - \rho) d\rho$$

Задаємо діапазони і відповідні ранжовані змінні:

$D := 20$ $ORIGIN = -D$ $x := -D..D$ $\rho := -D..D$ $k := -D..D$ $xx_k := k \cdot 1$

Задаємо вхідне розподілення $X_{\nu x}()$ та розподілення (відхилень) часу обробки $R_P(x, d)$ на ділянках. Задаємо їх з ряду причин неперервними - це природно, і менше програмних ускладнень.

$$X_{\nu x}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } |x| > 2 \\ 0.25 & \text{if } |x| \leq 2 \end{cases}$$

$$R_P(x, d) := \begin{cases} hh \leftarrow \frac{1}{d} \\ kk \leftarrow \frac{hh}{d} \\ 0 & \text{if } |x| > d \\ kkx + hh & \text{if } (x \geq -d) \wedge (x \leq 0) \\ hh - kk \cdot x & \text{if } (x \leq d) \wedge (x > 0) \end{cases}$$

Контролюємо їх: обчислюємо розподілення після ділянки №1:

$$\int_{-D}^D X_{vx}(x) dx = 1 \quad \int_{-D}^D R_p(x, d) dx = 1 \quad P_{vyx}(x) := \int_{-D}^D X_{vx}(\rho) \cdot R_p(x - \rho, d) d\rho$$

"Редкая птица долетит до середины Днепра", **як відомо**, хоч і не-широкий він. **Отак і тут**, щоб обчислити (взагалі і в розумний час) розподілення після ділянки №2 - $P_{v2}(x)$, необхідно виконати ряд операцій. (зрозумілих лише тим, хто "бачить", як працюють і взаємодіють "сховані" в програмній платформі програмні модулі, і побачить, що fP_k це не те, що $P_{vyx}(k)$).

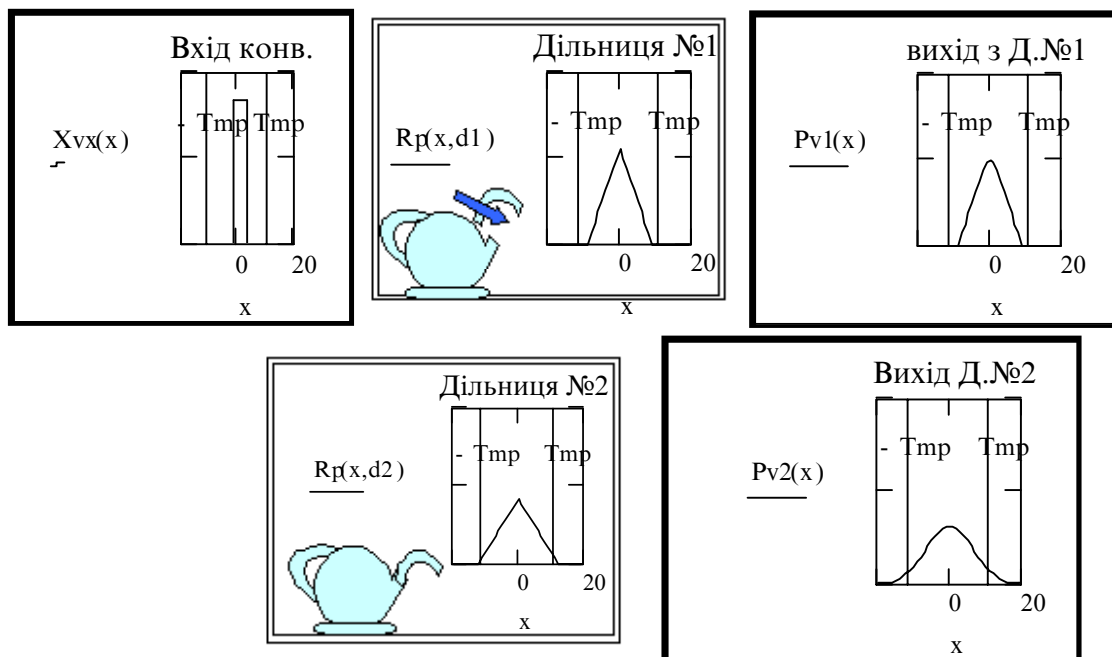
$Pf_k := P_{vyx}(k)$ $WRITEPRN("b19kon") := Pf$ $fP := READPRN("b19kon.prn")$

$Pv1(x) := \text{linter}(px, fP, x)$

$$Pv2(x) := \int_{-D}^D Pv1(r) \cdot R_p(x - r, d2) dr$$

Увага! Після переобчислень не забувайте натиснути файлову операцію "читати"

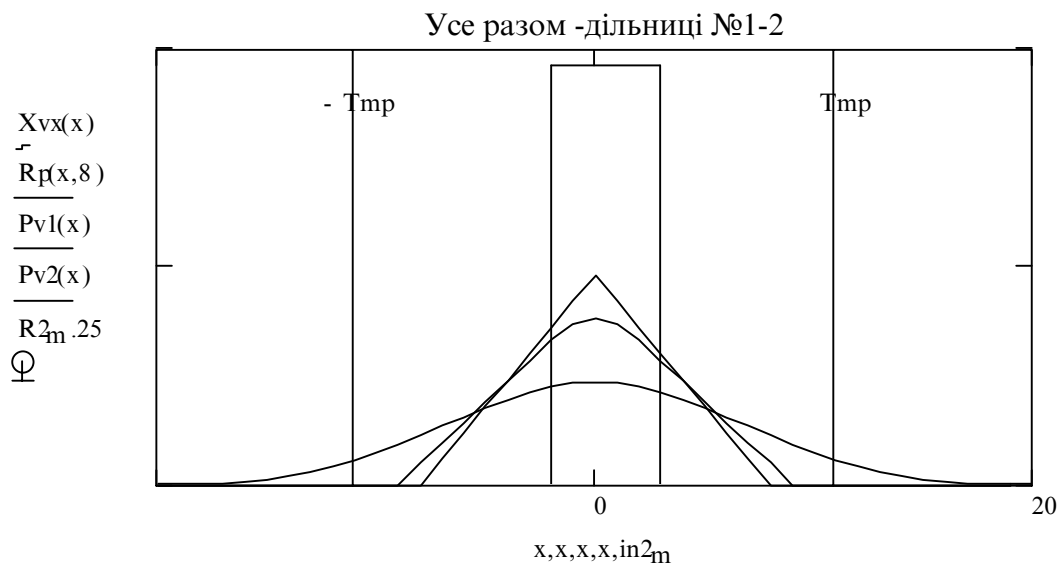
$Tmp := 11$ $d1 = 9$ $d2 = 12$



На схемі вище подано приклад оформлення результатів моделювання за методом згортки. Щоб не ускладнювати документ і залишити щось для самостійної роботи, подаємо розподілення тільки для двох ділянок. Для прикладу розглядаємо процес збирання виробу – "ікавка", тобто інтелектуальна кавова-

рка.

ORIGIN= 1



Перспективні напрямки робіт по підвищенню надійності конвеєра

Моделювання, статистика – інструменти аналізу того, що склалося. А про надійність сказано “надійність не вправа з статистики, а пошук конкретних конструкторських рішень та заходів”. Розглянемо конвеєрні системи в таких ракурсах.

А) Стратегічний напрямок -

- а) **зміна** конструкції виробу в напрямку зменшення кількості складових – блоків, модулів;
- б) **спрощення** інтерфейсів – замість гвинтів та гайок – заціпки, кнопки, клей та ін.;
- в) **ізоляція** критичних технологічних операцій – винесення їх в спецбокси зі стабілізацією усіх умов – температури, вібрацій, газового середовища, запилення;
- г) повна **відмова від** конструкцій і технологій, що є шкідливими, або потребують великих інтелектуальних зусиль для організації контролю і управління(адаптивні, з навчанням, генетичними алгоритмами та інші КСУЯП)

Г) Тактичні міроприємства -

- 1) можливість зупинки конвеєра з кожного робочого місця
- 2) можливість просто знімати з конвеєра аномальні вироби і ..
- 3) можливість постановки на конвеєр виробів з резерву, що є на кожній ділянці.

1.6.4 Розробка узагальнених математичних моделей управління запасами.

Вступ. Постановка задачі

В розділах 1,2,3 цієї теми ми розглянули три класи детермінованих задач управління запасами - для випадків разових, і розподілених поставок, поставок зі штрафами. Для постійного детермінованого попиту ми отримали досить прості аналітичні розв'язання, а сама задача зводилася до знаходження екстремуму функції однієї змінної. Тепер узагальнимо цю задачу - будемо розглядати випадковий попит з довільним розподіленням ймовірності.

Спочатку трохи історії. Задача управління запасами відноситься до класу варіаційних задач, тому що шукається не один якийсь параметр - розмір партії та ін, а певна функція часу - оптимальна стратегія. Як ми побачимо далі, оптимальне розв'язання в багатьох випадках має розривний характер – “або замовити в оптимальному розмірі, або нічого не замовляти”. Ми вже розглядали варіаційну задачу з такою структурою оптимальної стратегії - задачу Марковиця про оптимізацію сумарного прибутку на кінцевому інтервалі часу.

Подані далі постановки і розв'язання задач управління запасами були отримані ще 40 років тому Р.Белманом [3]. Це фундаментальна класика. Саме на базі розгляду таких задач Белман створив метод динамічного програмування. Жорсткі обмеження на витрати, обсяги виробництва, терміни не завжди адекватні реальності - не випадково Р. Белман разом із Л.Заде створили новий науковий напрям - теорію розмитих множин та нечітку логіку. Р. Белман розробив методику розв'язання для цілої низки поступово ускладнюючихся задач, де розв'язання однієї задачі використовується як перше наближення для наступної.

Вибираємо запропоновані Белманом методи для побудови програмних модулів для оптимізації стратегій управління запасами.

Постановка узагальненої задачі управління запасами

В загальній постановці, задача управління запасами - це окремий випадок проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності.

Опишемо ситуацію управління запасами. Попит на певні товари є випадковим з певним розподіленням ймовірностей. Для задоволення попиту в певні моменти видаються замовлення в розмірах, що розраховуються або задаються незмінними. Створюється певний рівень запасів, але допускається в певні моменти виникнення дефіциту він ліквідується по певним штрафним розцінкам.

Що може бути у цій задачі управлінням? З певних причин поповнювати

запаси вигідно "імпульсно" партіями певного розміру.

Але в якому розмірі і коли видавати замовлення на поставку чергових партій для поповнення запасів? На якому рівні слід підтримувати середні і максимальні запаси при умові, що попит має випадкові коливання і тренди? Чи є якісь закономірності у попиті на певні групи товарів?

Що до закономірностей, то для певних товарів на певних інтервалах часу є такі закономірності - це так звані "ринкові вікна" для товарів з високим темпом морального старіння, наприклад, моделі мобільних телефонів змінюються кожні півроку. Це означає, що створювати запас мобільних телефонів більше ніж на 1-2 місяці - нерозумно - вони швидко обезцінюються.

Нові інформаційні технології дають можливість засоби виживання в сучасному оточенні - без статистики, з постійними обвальними змінами. Це

1) інтернет - можливість в онлайні отримувати хоч кожную хвилину інформацію про стан ринків, і тут же аналізувати її власною програмою класу "аналітичним помічником менеджера";

2) можливості комп'ютерної симуляції - імітаційного моделювання. Ми можемо експериментувати, набирати досвід, працюючи з віртуальною реальністю, створюючи теж онлайн програми для "що буде, якщо аналізу", ризик-аналізу.

Починаючи розробку програмних засобів оптимального управління напишемо програму моделювання типового процесу зміни запасів, де замість управлінь стоять "заглушки" - постійні і випадкові параметри і оцінимо ефективність традиційного управління.

Подасмо приклад такої програми. Вона прозора - не потребує коментарів і працює - в електронній версії - питання можна задавати самій програмі

```
PR := | ORIGIN ← 1                                ORIGIN = 1
      | запaс ← поч_зап                             i := 1..100
      | попит1 ← 10
      | for i ∈ 1..100
      |   | попитi+1 ← 8 + 0.1·i + rnd(колив_попиту)
      |   | партія ← 105 + rnd(37) + i
      |   | мом ← | 1 if mod[i, (9 + ceil(rnd(1)))] = 0
      |   |       | 0 otherwise
      |   | запaсi+1 ← запaс – попитi + партія·мом
      | вихід ← stack(попитT, запaсT)
      | вихід
```

На рис. 1 подано графіки попиту та зміни запасів, так щоб відобразити можливі ситуації зміни запасів - зміни попиту, виникнення дефіцитів.

Працюючи з електронною версією цього документу можна “пограти в рулетку”. Поставте курсор на цю зону вводу: і натискуйте F9 - отримаєте реалізації випадкового процесу. Ви побачите, що графік зміни запасів досить значно змінюється, часто виникають ситуації з великими дефіцитами. На рис. 2 подано приклади реалізацій процесів.

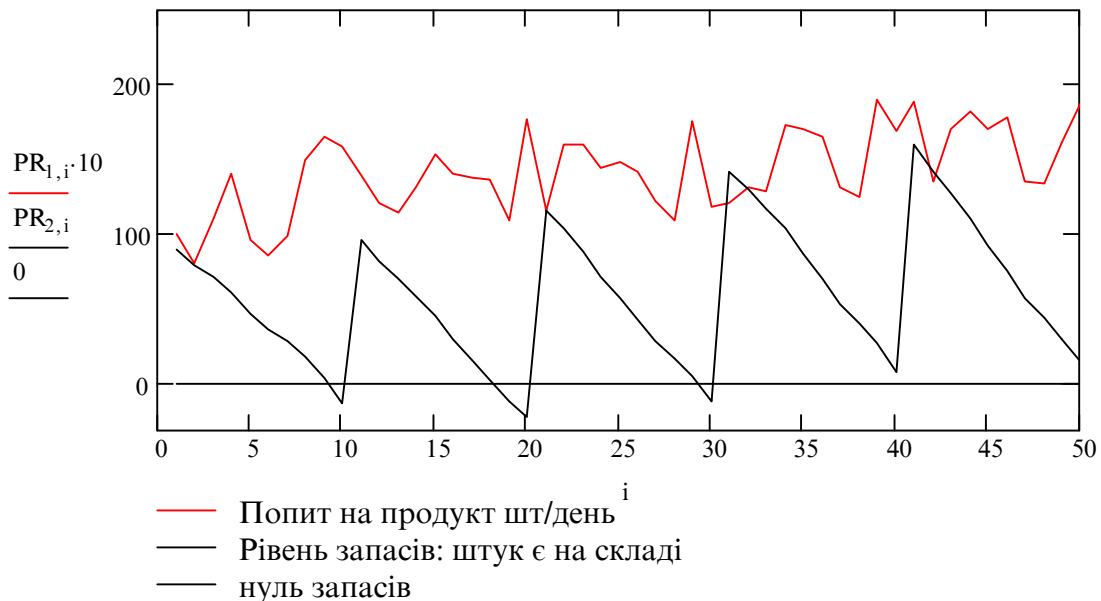


Рис. 1 Приклад процесів зміни попиту та рівня запасів

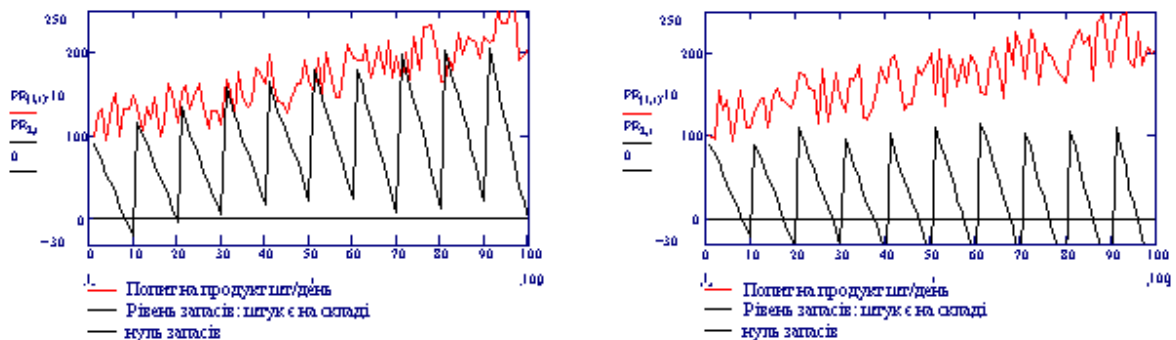


Рис. 2 Приклади реалізації процесів зміни запасів при випадкових коливаннях попиту.

Очевидно, що вже не можна розпланувати поставки на рік вперед - треба приймати рішення на кожному кроці процесу відносно значень вибраних управляючих змінних. Це можуть бути:

1. Розмір партії q ;
2. Моменти видачі замовлення - $T_{зм}[k]$
3. Максимальний або мінімальний або середній рівень запасів q_{max} , q_{min} , q_c .

Очевидно, що ці змінні пов'язані між собою. В залежності від специфіки задачі певні управляючі змінні можуть бути фіксованими:

моменти видачі замовлень $T_{зм}[k]$; розмір партій q .

Критерієм управління природно взяти сумарні витрати $C_{сум}$. Складовими витрат можуть бути витрати на організацію поставок C_1 , витрати на закупівлю товарів C_2 , витрати на зберігання запасів C_3 . До витрат на зберігання можуть бути включені витрати від морального старіння виробів, зміни цін та іншого. Розглянемо послідовно задачі Белмана, на основі яких будується система управління запасами.

Задача управління запасами при кінцевому інтервалі процесу постачання

Подаємо цю задачу точно в постановці Белмана. Вважаємо, що нам відомі такі функції:

(а) $\phi(s) \cdot ds$ - Ймовірність того, що попит буде знаходитись в інтервалі $s \leq \text{demand} \leq s + ds$;

(б) $k(z)$ - Вартість номінального замовлення розміром z на початку циклу забезпечення попиту;

(в) $p(z)$ - Вартість “штрафного” замовлення розміром z , зробленого у кінці циклу, коли виявилось перевищення попиту над запасами на складі.

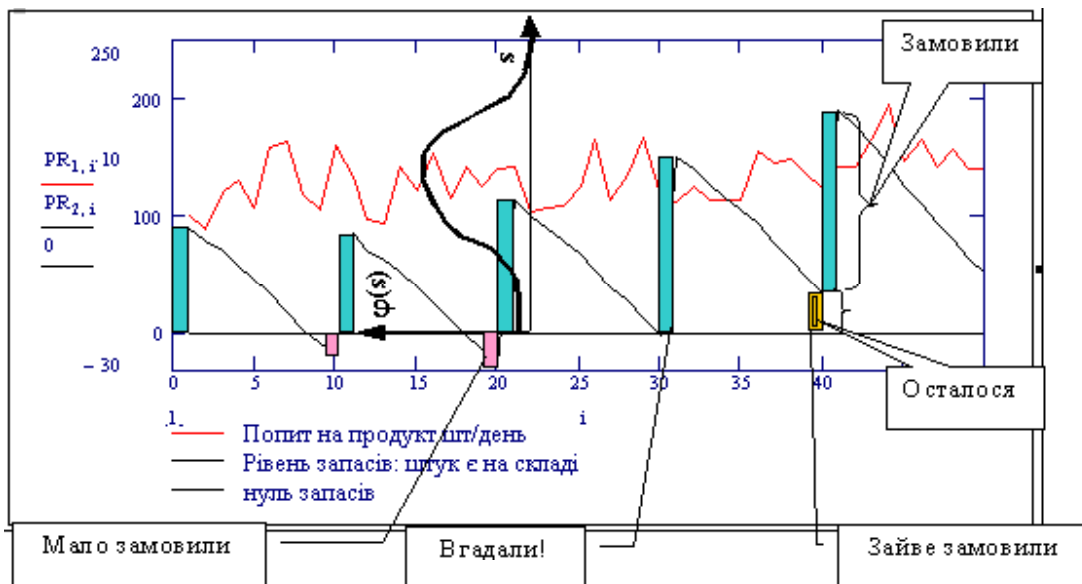


Рис. 3 Управління запасами при невизначеному попиті

Означимо через x рівень запасів на початку циклу (рис. 3) забезпечення попиту. Один цикл складається з таких подій:

- на початку циклу менеджер виходячи із досвіду, чи розрахунків ви-

значає бажаний рівень запасів y , потім замовляє $z = y - x$ одиниць товару, де x - залишок від попереднього циклу, якщо $y < x$, то нічого не замовляється;

- потім **на протязі циклу** запас розходжується відповідно з попитом;

- **в кінці циклу**, якщо виявляється дефіцит, то попит задовольняється по штрафній вартості (це може мати різні інтерпретації - термінове замовлення, премія покупцю та ін.), якщо залишок - то він переходить у наступний цикл.

Припустимо, що процес складається з n етапів (циклів). На першому створюється запас y_1 одиниць товару, на другому - y_2 і т.д.

Послідовність замовлень (вектор) $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ назовемо **стратегією управління**. Кожній стратегії відповідає певна сумарна очікувана вартість, що складається з вартості номінального замовлення та вартості штрафного замовлення, якщо він потрібен.

Поставимо задачу визначення стратегії, що мінімізує очікувану (середню) сумарну вартість $C_{смс}$.

Друга більш важлива задача - мінімізація ймовірності того, що вартість перейде деякий заданий рівень. Це фактично задача **мінімізації витрат при заданій надійності забезпечення попиту**. Наша задача може мати і іншу інтерпретацію - технічну: штрафні поставки - це ремонт після відмови. З математичної точки зору рівняння задачі управління запасами відносяться до класу рівнянь "відновлення".

Стратегія, що веде до мінімуму очікуваної сумарної вартості, називається оптимальною.

На будь якому етапі результат оптимізації - стратегія - повністю визначається двома змінними - початковим запасом x та кількістю етапів до кінця процесу n . Це відомий принцип оптимальності Белмана, який базується на відсутності "післядії". Визначимо цю функцію (це і є Функція Белмана, на якій базується метод динамічного програмування = планування):

$f(n, x)$ - Очікувана сумарна вартість для n -етапного процесу з початковим рівнем запасу x при використанні оптимальної стратегії видачі замовлень. Подамо стисло процес отримання функціонального рівняння для визначення функції $f(n, x)$.

Зауваження. У Белмана ця функція записана як $f_n(x)$, означення $f(n, x)$ може бути некоректним, якщо для різних n функції $f_n(x)$ належатимуть до різних структурних класів. Але в нашому випадку це допустиме. Якщо на першому кроці замовлено $z = y - x \geq 0$, то очікувані витрати будуть:

$$\text{Сум_витрати}(1, x) = k(y - x) + \int_y^{\infty} p(s - y) \cdot \phi(s) ds$$

Тоді функція мінімальних витрат визначиться так:

$$f(1, x) = \min \left(k(y - x) + \int_y^\infty p(s - y) \cdot \phi(s) ds \right); \quad y \geq x.$$

Для процесів з числом кроків 2 і більше маємо рекурентну залежність:

$$f(n, x) = \min_{y \geq x} \left[k(y - x) + \int_y^\infty p(s - y) \cdot \phi(s) ds + f[(n - 1), 0] \cdot \int_y^\infty \phi(s) ds \dots \right. \\ \left. + \int_0^y f[(n - 1), (y - s)] \cdot \phi(s) ds \right] \quad (7)$$

Задача управління запасами при необмеженому інтервалі часу

Для того щоб розглядати необмежені інтервали функціонування системи слід ввести показник дисконтування грошових потоків (знецінення майбутніх витрат і прибутків) - **a**. Це має економічне обґрунтування і просто необхідно для отримання математично коректної задачі - без безконечних витрат.

$$f(x) = \min_{y \geq x} \left(k(y - x) + a \cdot \int_y^\infty p(s - y) \cdot \phi(s) ds + a \cdot f(0) \cdot \int_y^\infty \phi(s) ds \dots \right. \\ \left. + \int_0^y f(y - s) \cdot \phi(s) ds \right) \quad (8)$$

Це рівняння більш просте ніж (7) в ньому треба визначити тільки одну функцію $f(x)$ а не цілу послідовність з n функцій.

Проаналізуємо те, що ми отримали. Ми отримали функціональні рівняння, - певні залежності для невідомих функцій $f(x)$. Ми часто працюємо з певним класом функціональних рівнянь - диференційними і не замислюємось, як же ми їх розв'язуємо. Лінійні дифрівняння розв'язуються на базі підстановки Ейлера: "розв'язання шукаємо у виді $x(t) = C \cdot e^{a \cdot t}$ ". В наші часи відомий математик узагальнив метод розв'язання дифрівнянь: "смотреть на дифференциальное уравнение, пока его решение не придёт в голову". Белман додав своє до цього фольклору "Теперь мы будем поднимать сами себя за волосы!" [2].

Але, коли для певного класу задач знайдено вид функції оптимального управління, то розв'язання їх стає простим, формалізованим, загальнодоступним - ну як розв'язання дифрівнянь. Розглянемо випадки коли явний вид розв'язання можна знайти.

Задача управління запасами при пропорційній вартості витрат

Припущення про те, що витрати на замовлення партії прямо пропор-

ційні обсягу партії, а штрафні витрати - пропорційні обсягу штрафного замовлення, є досить реалістичними - потім ми додамо організаційні витрати на партію, оптові значки, розглянемо нелінійні функції вартості.

Прийняті нами припущення суттєво спрощують задачу. Властивості розв'язання визначаються теоремою [3].

Теорема. Розглянемо рівняння

$$f(x) = \min_{y \geq x} \left[k \cdot (y - x) + a \cdot \int_y^\infty p \cdot (s - y) \cdot \phi(s) ds + a \cdot f(0) \cdot \int_y^\infty \phi(s) ds + \dots \right. \\ \left. + \int_0^y f(y - s) \cdot \phi(s) ds \right] \quad (9)$$

Припускаємо, що виконуються такі умови:

(а) k та p - позитивні константи;

(б) $\phi(s) > 0$; $\int_0^\infty \phi(s) ds = 1$; $\int_0^\infty s \cdot \phi(s) ds < \infty$ - розподілення ймовірностей має кінцеву дисперсію;

(в) $0 < a < 1$ - грошові потоки дисконтуються - приводяться до одного часового горизонту;

(г) $a \cdot p > k$ - навіть дисконтована штрафна вартість поставок більше номінальної вартості - інакше вигідно все поставляти в штрафному режимі.

Нехай $x_{ек}$ - єдиний корінь рівняння:

$$k = a \cdot p \cdot \int_y^\infty \phi(s) ds + a \cdot k \cdot \int_0^y \phi(s) ds \quad (10)$$

Нехай $x_{ек}$ - єдиний корінь рівняння:

(а) $y = x_{ек}$ - при $0 \leq x \leq x_{ек}$ (11)

(б) $y = x$ - при $x > x_{ек}$.

інакше кажучи, оптимальний рівень запасів дорівнює $x_{ек}$ (x - Єдиний Корінь рівняння (10)). При умові $a \cdot p \leq k$ (дешевше платити штрафи, ніж тримати великі запаси).

Доказ теореми. Наводимо доказ так, як його подано Белманом - це приклад методики пошуку розв'язань функціональних рівнянь. З перших рук!

Використовується евристичний (інтелектуальний?) підхід: звідкись приходить (у голову) правдоподібне розв'язання, ми його перевіряємо підстановкою в (9), якщо воно задовольняє, то в силу теореми про єдине (єдинственності), це і буде оптимальне розв'язання. Оптимальне розв'язання згідно (9) повинно задовольняти необхідній умові екстремуму (похідна дорівнює нулю).

$$\frac{d}{dy} \left[k \cdot (y - x) + a \cdot \int_y^{\infty} p \cdot (s - y) \cdot \phi(s) ds + a \cdot f(0) \cdot \int_y^{\infty} \phi(s) ds + \int_0^y f(y - s) \cdot \phi(s) ds \right] = 0$$

Визначаємо складові похідної

$$\frac{d}{dy} k \cdot (y - x) \rightarrow k \quad \frac{d}{dy} a \cdot \int_y^{\infty} p \cdot (s - y) \cdot \phi(s) ds \rightarrow a \cdot \int_y^{\infty} -p \cdot \phi(s) ds$$

А як же брати похідну від ще невідомої функції? Згідно декларованій стратегії управління запасами, функція Белмана цієї задачі повинна мати вид $f(x) = -k \cdot x$, тому відповідні похідні будуть такими:

$$\frac{d}{dy} \int_0^y f(y - s) \cdot \phi(s) ds = a \cdot k \cdot \int_0^y \phi(s) ds \quad \frac{d}{dy} a \cdot f(0) \cdot \int_y^{\infty} \phi(s) ds = 0$$

Враховуємо, що (сума ймовірностей повної групи подій) $\int_0^{\infty} \phi(s) ds = 0$,

тоді рівняння (10) приводиться до виду

$$\int_y^{\infty} \phi(s) ds = \frac{a \cdot p - k}{a(p - k)} \quad (12)$$

Неважко бачити, що рівняння (12) має тільки один корінь - теорему доказано.

1.6.5 Розробка робочих програм та інтерфейсу для системи управління запасами

Вступ. Постановка задачі

В попередньому розділі були вибрані і обґрунтовані методи оптимального управління запасами в умовах невизначеності попиту. Теоретична основа розробки - методи і методологія розроблена Р. Белманом - принцип оптимальності, метод функціональних рівнянь, функціональної апроксимації та їх сума - метод динамічного програмування.

За рахунок введення дисконтування для необмеженого інтервалу часу функціонування системи ми отримали відносно просте функціональне рівняння з однією невідомою функцією - оптимальною стратегією.

Попередньою гарантією ефективності вибраної нами методології є той факт, що Белман постійно підкреслював непродуктивність і неконструктивність методу динамічного програмування. Наприклад, "динамічне програмування не метод, а стан розуму", "Наконец, мы укажем вид общего решения, хотя не сможем извлечь из этого особой пользы", "рассмотрим свойства этого решения во всей его неприкрытой простоте"[3,4].

В цьому розділі подано розробку базової версії автоматизованої системи - помічника менеджера постачання. Ця система для довільних законів розподілення ймовірностей попиту, вартостей планового і термінового - штрафного постачання повинна розраховувати параметри оптимального процесу забезпечення попиту (розмір партії, середній рівень запасів та ін.). Крім цього система повинна забезпечити:

- а) можливість проведення обчислювального експерименту;
- б) можливість візуального контролю кожного елементу моделей і програмних модулів;
- в) відкритість для модифікації - користувач може все (майже) бачити, змінювати і сам може вибирати, які фрагменти системи слід закрити паролями від змін і (або) проглядання.

Слід відзначити, що сьогодні все більше програмних продуктів мають відкриті тексти. Не тільки Linux. Корпорація Palisade продає не тільки готові аналітичні програми, але й модулі для збирання таких програм. Корпорація Mathworks відкрила для користувачів тексти (на VC++) програмних модулів платформи Matlab.

До комплексу даної системи повинен входити модуль ідентифікації частотних розподілень. Такі модулі стають поступово вбудованими функціями програмних платформ.

Розробка модуля для визначення оптимального рівня запасів

Будуємо модуль для розв'язання рівняння (10) при довільних частотних розподіленнях попиту. Вважаємо, що вид і параметри частотного розподілення ідентифіковані (можна використати і просто емпіричне частотне розподілення, але тоді буде закрита можливість для аналітичних досліджень).

Створюємо зону вводу параметрів (в рамці), задаємо їх значення (для "контрольного прикладу"). Задаємо (вибираємо) вид розподілення.

Назва розподілення $N :=$ "нормальне"; Середнє $\mu := 12$; Дисперсія $\sigma := 3$;

Норма дисконту $\rho := 0.1$; $a := 1 - \rho$; $a = 0.9$

вартості: звичайної поставки $k := 5$ штрафної поставки $p := 10$

Контроль рівня штрафу $a \cdot p > k = 1$ (можна зробити більш ефектний)

Вибране розподілення $\phi(x, \sigma) := \text{dnorm}(x, \mu, \sigma)$ $x := 0..30$; $y := 0..30$

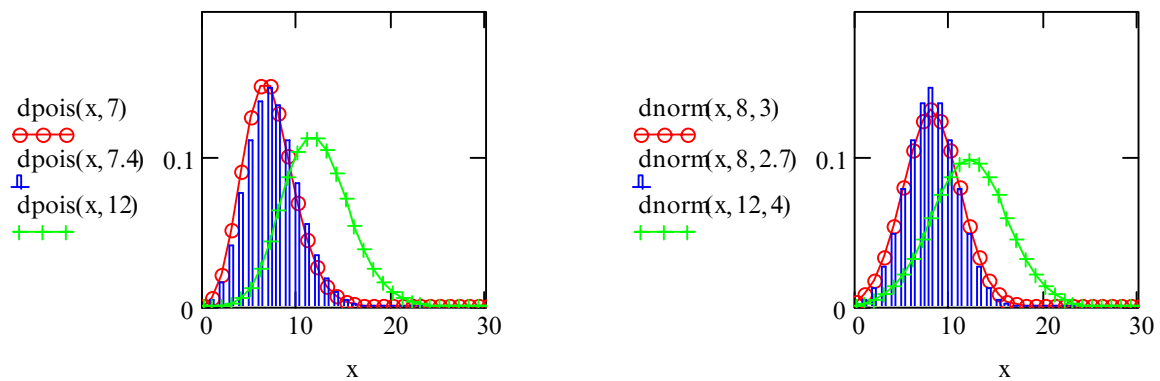


Рис. 1 Приклади частотних розподілень - альтернативних гіпотез

Зауваження. В реальній системі модуль ідентифікації частотних розподілень попиту чи цін може працювати на онлайнних даних що поступають по мережам. Технічних проблем тут нема, є проблеми організаційно-фінансові: наявність джерел даних. можливість підписки та оплати...

Виконаємо алгебраїчні перетворення рівняння (10) і побудуємо графіки - для аналізу і графічного розв'язання рівняння.

$$k = a \cdot p \cdot \int_y^\infty \phi(s, \sigma) ds + a \cdot k \cdot \int_0^y \phi(s, \sigma) ds \quad \frac{1}{a} - \int_0^y \phi(s, \sigma) ds = \frac{p}{k} \cdot \int_y^\infty \phi(s, \sigma) ds$$

$$F1(y, \sigma) := \frac{1}{a} - \int_0^y \phi(s, \sigma) ds \quad F2(y, \sigma) := \frac{p}{k} \cdot \int_y^\infty \phi(s, \sigma) ds \quad F1(y, \sigma) - F2(y, \sigma) = 0$$

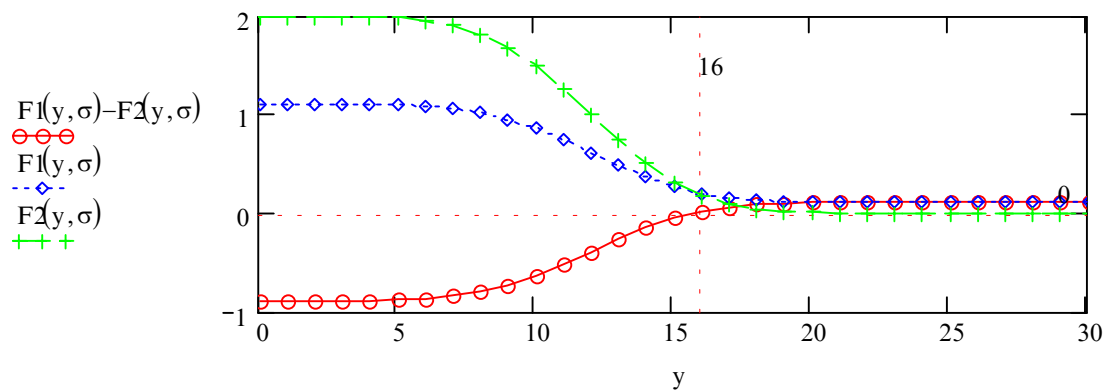


Рис. 2 До пошуку нульового кореню рівняння (10)

Опт_рівень_зап:= 15.7

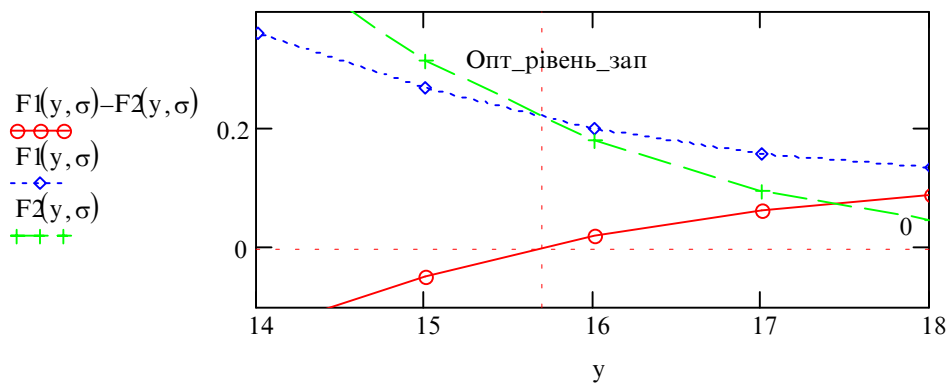


Рис. 3 Графічне розв'язання рівняння (10)

Знайдемо корінь рівняння (10) вбудованим числовим пошуковим методом. Задаємо стартове (для пошуку) значення $y_p := 12$. Після ключового слова “Дано” пишемо систему рівнянь

Given

$$\frac{1}{a} - \int_0^{y_p} \phi(s, \sigma) ds = \frac{p}{k} \cdot \int_{y_p}^{\infty} \phi(s, \sigma) ds \quad y_p \geq 0$$

Увага! Результат розв'язання формуємо як функцію параметрів σ , p , k . З точки зору традиційної математики те, що написано нижче - рівність функцій від різних змінних. Якщо ці змінні незалежні, то ці функції повинні дорівнювати константі. А в даному випадку це визначення функції користувача в термінах розв'язуючого блоку “Given- Find”. Це типова конструкція мови C++. Інтерпретатору і компілятору це зрозуміло.

$Xek(\sigma, p, k) := Find(y_p)$

$\sigma p := 0.2, 0.7 \dots 3.2$

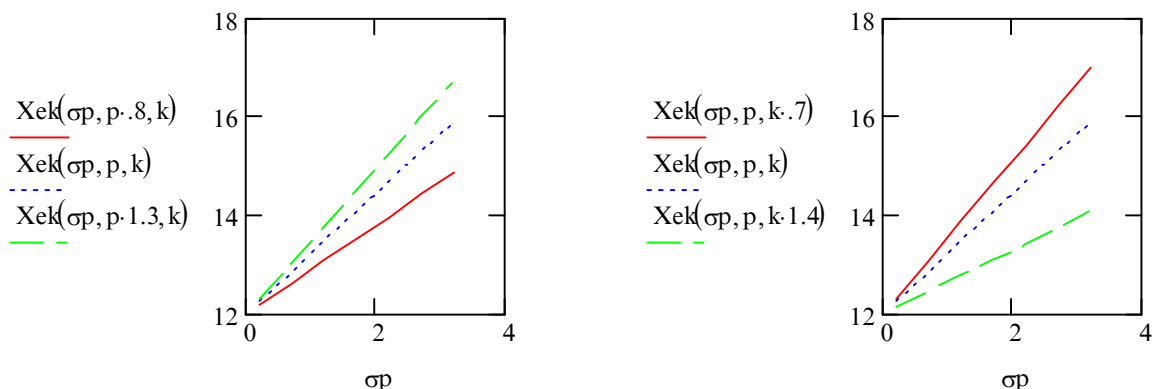


Рис. 4 Залежності оптимального середнього рівня запасів від дисперсії та вагностей замовлень

Бачимо, що залежності для оптимального рівня запасів дуже прості - так і повинно бути, тому що функції витрат - **лінійні**. Легко узагальнити за-

дачу на випадок нелінійних - випуклих функцій витрат.

Виводимо для порівняння графічне і числове розв'язання рівняння (10).

$$\text{Опт_рівень_зап} = 15.7 \quad \text{Хек}(\sigma, p, k) = 15.661$$

Бачимо, що $\sigma + \mu = 15$ є гарною оцінкою оптимального рівня запасів. Чому?

Розробка модуля імітації довільних функцій попиту

Потрібну для обчислювального експерименту імітацію функцій попиту з довільними розподіленнями робимо на базі вбудованих генераторів випадкових чисел. Неважко по аналогії побудувати процеси з нестационарними характеристиками, трендами та ін.

```
mu = 12      sigma = 3      Nкроків_процесу = 100      i := 1..100
Попит := rnorm(Nкроків_процесу, mu, sigma)      Pop2 := rnorm(Nкроків_процесу, mu, sigma)
Pop3 := rnorm(Nкроків_процесу, 2*mu, 1)
```

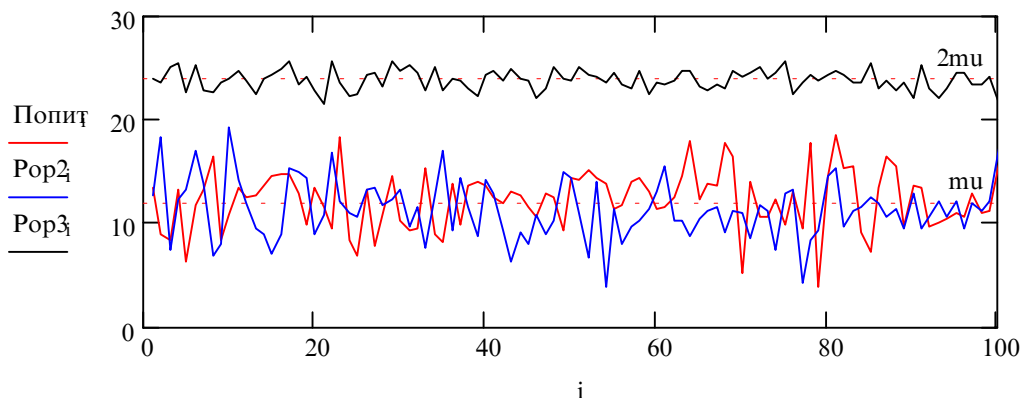


Рис. 5 Приклади реалізацій функції попиту

Розробка модуля імітації процесів постачання

Людина звикає до певної “площинної” причинно-просторової логіки в написанні документів та розв'язанні задач (європеець до логіки “зліва-направо, згори-вниз”, японець до логіки “згори-вниз, зліва-направо”). За такою логікою, розбавленою операторами циклів та переходів будувались програми.

Об'єктно-орієнтоване програмування - це перехід від традиційної логіки до “гіпер – просторової”, від тексту до гіпертексту. Об'єктна програма - це мережа з об'єктів-модулів, посилають повідомлення від інших об'єктів та отримують їх.

Для сучасних програмних середовищ характерна інтеграція тексту і виходу програми, зникнення для певних процедур тексту програми. Типовий приклад останнього - макрорекордінг, коли ми робимо те, що повинна робити

програма, а рекордер пише під ці дії текст, який ми іноді бачимо і редагуємо, іноді - ні.

Напишемо модуль за лінійною логікою, але останню частину - стенд зробимо за об'єктною: спочатку подамо результати моделювання, а за ними - ввід вхідних даних.

Подаємо специфікацію вхідних даних:

Номинальна вартість замовлення одиниці товару	km = 5
Штрафна вартість замовлення одиниці товару	pm = 12
Норма дисконтування грошових потоків	am = 0.8
Запас на початку періоду одиниць	X0 = 50
Кількість замовлень	nzak = 10
Вводимо розподілення ймовірностей рівнів попиту	

$$f(x, \mu, \sigma) := \text{dnorm}(x, \mu, \sigma)$$

Копіюємо з розділу 4.2 модуль визначення оптимального рівня запасів і вписуємо в нього імена змінних, що вводяться далі.

yp := 21 Giver

$$\frac{1}{am} - \int_0^{yp} f(s, \mu, \sigma) ds = \frac{pm}{km} \cdot \int_{yp}^{\infty} f(s, \mu, \sigma) ds \quad yp \geq 0$$

$$\text{Хор}(\mu, \sigma, pm, km) := \text{Find}(yp) \quad \text{Хор}(\mu, \sigma, pm, km) = 15.669$$

Розв'язання ми зробили функцією 4-ьох змінних. Тепер пишемо програму - копіюємо та модифікуємо модуль з розділу 1.6.1 Подамо її короткий опис.

1. Програма використовує як підпрограму визначену вище функцію $\text{Хор}(\mu, \sigma, p, k)$.

2. Програма використовує певні глобальні змінні документа - вони вводяться далі - на стенді в режимі глобального присвоєння.

3. У програмі визначені певні локальні змінні - вони діють тільки в цій програмі і "невидимі" у головній програмі - цьому документі.

4. Програма повертає у головну програму (цей документ) масив 2xN кроків - значення поточних попиту та рівня запасів.

Вихід програми можна розширити - виводити значення показників якості управління запасами (сумарних витрат, штрафів та ін.)

```

OPk := | запас ← X0
      | "Визначаємо інтервал між партіями (оптимізація - в розділі 3)"
      | interval ← ceil( $\frac{\text{Нкроків\_процесу}}{\text{nzak}}$ )
      | "Обчислюємо імітацію попиту на всі кроки процесу"
      | попит ← rnorm(Nкроків_процесу, 1, mu, sigma)
      | "Визначаємо оптимальний розмір запасів"
      | Opzar ← Xop(mu, sigma, pm, km)
      | "Визначаємо розмір партії"
      | Opzak ← Opzar * interval
      | "Цикл по крокам процесу (наприклад - дням)"
      | for i ∈ 1 .. Nкроків_процесу
      |   | "Логіка оптимальної стратегії згідно (10) з розділу 3"
      |   | партія ←  $\begin{cases} (\text{Opzak} - \text{запас}) & \text{if } \text{запас} < \text{Opzak} \\ 0 & \text{if } \text{запас} \geq \text{Opzak} \end{cases}$ 
      |   | "Логіка видачі (і отримання) партій товару"
      |   | moment ←  $\begin{cases} 1 & \text{if } \text{mod}(i, \text{interval}) = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 
      |   | "Обчислення поточного запасу"
      |   | запас+1 ← запас - попитi + партія * moment
      |   | "Формування вихідного масиву"
      |   | вихід ← stack(попитT, запасT)
      | вихід

```

Тестуємо програму

OPk =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	13	8	5	15	5	6	21	13	17	13	15	10	18	1	13	11	14	16
2	50	37	29	24	9	4	-2	-23	-36	-52	144	128	118	100	100	87	76	62

$$k_0 := \frac{\text{Нкроків_процесу}}{\text{nzak}}$$

Те, що подано далі - стенд: усі виходи і входи зібрані на одній екранній сторінці.

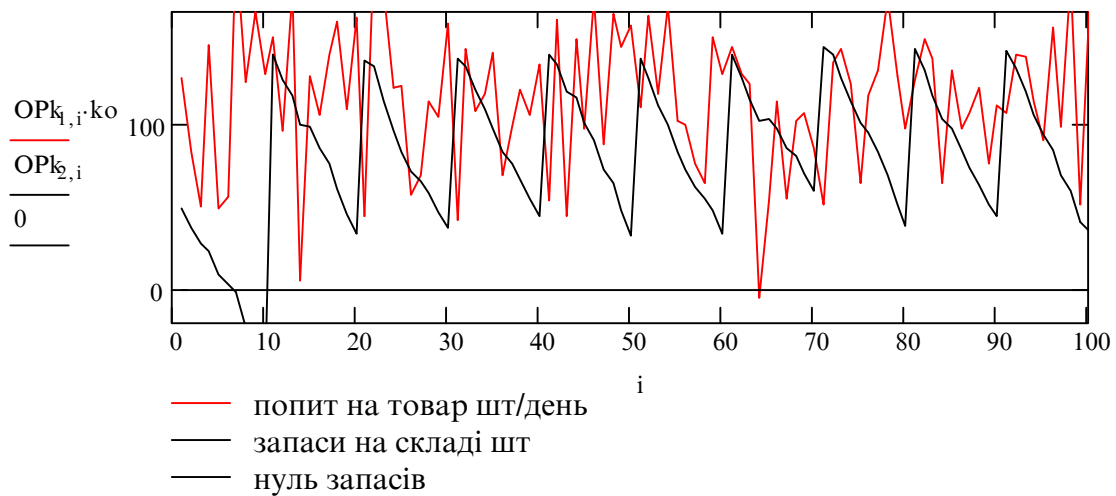


Рис. 6 Реалізація оптимального процесу постачання (управління запасами)

номінальна вартість замовлення одиниці $k_m \equiv 5$ середній попит $\mu_m \equiv 12$
 Штрафна вартість замовлення одиниці $p_m \equiv 12$ розкид попиту $\sigma_m \equiv 4$
 Норма дисконтування $a_m \equiv 0.8$

Запас початковий $X_0 \equiv 50$ Кількість заказів $n_{zak} \equiv 10$

Оптимальний рівень запасів $X_{op}(\mu_m, \sigma_m, p_m, k_m) = 15.669$

Плата за мінімізацію ризику $\frac{X_{op}(\mu_m, \sigma_m, p_m, k_m)}{\mu_m} = 1.306$

Мінімальні витрати _____ Дійсні витрати _____

Програму і стенд можна вдосконалювати і модифікувати. Нижче подано **приклад** - результат моделювання для випадку попиту із суттєвим сезонним коливанням. Програма модифікована так, щоб для кожного циклу переобчислювати оптимальний розмір запасів.

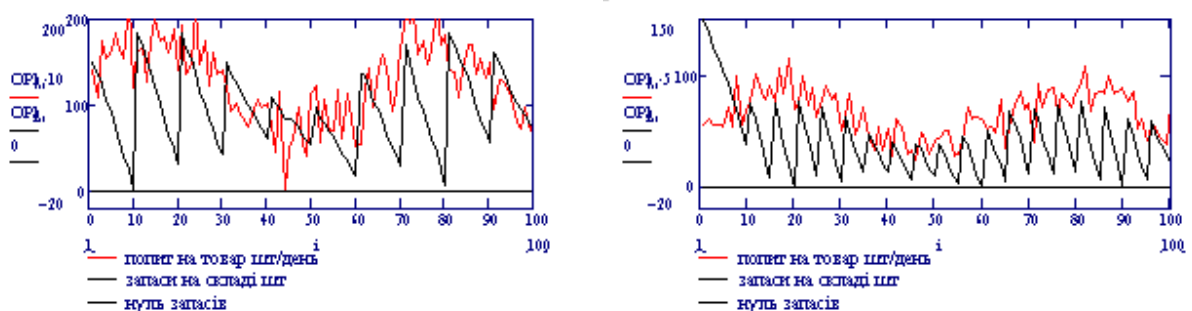


Рис. 7 Реалізації оптимального процесу управління запасами для випадку великого сезонного тренду (10 і 20 партій за період)

Випробування автоматизованої системи

Проведемо випробування системи для таких граничних ситуацій:

- 1) велика невизначеність - великі штрафи;
- 1) велика невизначеність - малі штрафи;
- 1) мала невизначеність - великі штрафи;
- 1) мала невизначеність - малі штрафи.

Далі подано копії екранів для перелічених вище ситуацій. Бачимо, що система працездатна і придатна для підтримки прийняття рішень по управлінню запасами.

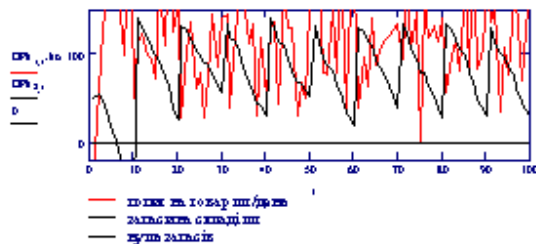


Рис. 6 Реалізація оптимального процесу постачання (управління запасами)

номінальна вартість замовлення $\lambda = 5$ середній попит $\mu = 12$
Штрафна вартість замовлення $\sigma = 7$ розкид попиту $\sigma = 5$
Норма дисконтування $\alpha = 0.9$
Запас початковий $X_0 = 50$ Кількість замовлень $n = 10$
Оптимальний рівень запасів $X_{opt}(\mu, \sigma, \alpha, \lambda, n) = 14.447$
Плата за мінімізацію ризику $\frac{X_{opt}(\mu, \sigma, \alpha, \lambda, n)}{\mu} = 1.221$
Мінімальні витрати μ Пійсні витрати μ

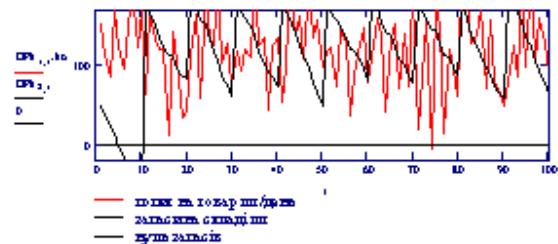


Рис. 6 Реалізація оптимального процесу постачання (управління запасами)

номінальна вартість замовлення $\lambda = 5$ середній попит $\mu = 12$
Штрафна вартість замовлення $\sigma = 12$ розкид попиту $\sigma = 5$
Норма дисконтування $\alpha = 0.9$
Запас початковий $X_0 = 50$ Кількість замовлень $n = 10$
Оптимальний рівень запасів $X_{opt}(\mu, \sigma, \alpha, \lambda, n) = 18.834$
Плата за мінімізацію ризику $\frac{X_{opt}(\mu, \sigma, \alpha, \lambda, n)}{\mu} = 1.571$
Мінімальні витрати μ Пійсні витрати μ

Малі штрафи

Великі штрафи

Велика невизначеність

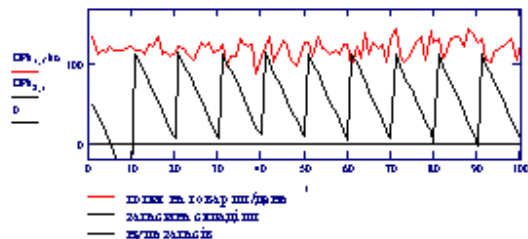


Рис. 6 Реалізація оптимального процесу постачання (управління запасами)

номінальна вартість замовлення $\lambda = 5$ середній попит $\mu = 12$
Штрафна вартість замовлення $\sigma = 7$ розкид попиту $\sigma = 1$
Норма дисконтування $\alpha = 0.9$
Запас початковий $X_0 = 50$ Кількість замовлень $n = 10$
Оптимальний рівень запасів $X_{opt}(\mu, \sigma, \alpha, \lambda, n) = 12.589$
Плата за мінімізацію ризику $\frac{X_{opt}(\mu, \sigma, \alpha, \lambda, n)}{\mu} = 1.049$
Мінімальні витрати μ Пійсні витрати μ

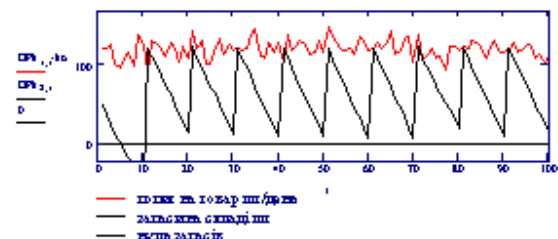


Рис. 6 Реалізація оптимального процесу постачання (управління запасами)

номінальна вартість замовлення $\lambda = 5$ середній попит $\mu = 12$
Штрафна вартість замовлення $\sigma = 12$ розкид попиту $\sigma = 1$
Норма дисконтування $\alpha = 0.9$
Запас початковий $X_0 = 50$ Кількість замовлень $n = 10$
Оптимальний рівень запасів $X_{opt}(\mu, \sigma, \alpha, \lambda, n) = 13.409$
Плата за мінімізацію ризику $\frac{X_{opt}(\mu, \sigma, \alpha, \lambda, n)}{\mu} = 1.049$
Мінімальні витрати μ Пійсні витрати μ

Малі штрафи

Великі штрафи

Мала невизначеність

Висновки.

Розглянуто базову модель управління запасами в умовах невизначенос-

ті. Для оптимізації вибрано метод динамічного програмування. Отримано програмну систему для розрахунку оптимального по критерію сумарних витрат управління запасами і моделювання процесів постачання (забезпечення попиту).

Проведено випробування системи, що підтвердило працездатність програмної системи. Проведено також випробування на модифікацію і розширення функцій. Отримана версія з розрахунком оптимального рівня запасів на кожному циклі постачання.

4. Задачі на графах. Оптимальні плани та маршрути перевезень

Вступ. Постановка задачі

Задача цього розділу - розробка базової математичної моделі транспортної задачі. Базовою моделлю вважаємо задачу забезпечення поставок у пункти призначення заданих кількостей певних товарів чи ресурсів із заданої системи пунктів постачання.

В базовій моделі витрати на перевезення вважаємо лінійними функціями відстаней і об'ємів перевезень (=тонокілометрів). Цільову функцію - сумарні витрати на перевезення - вважаємо теж лінійною функцією обсягу перевезень.

На основі базової моделі потім будуть будуватись більш реалістичні моделі перевезень для таких випадків:

- а) випадкові коливання потреби в товарах;
- б) нелінійні функції витрат на перевезення;
- в) з урахуванням затримок на перевезення, штрафів за затримки та ін.

Інтелектуальність розроблюваної системи не в тому, що вона приймає рішення за менеджера, а в тому, що вона

- 1) робить прозорим весь механізм оптимізації та прийняття рішення;
- 2) виконує обов'язкову для прикладних програм функцію навчання користувача - саме навчання, а не натаскування міфічного "оператора АСУ";
- 3) легко модифікується, приймає досвід користувача.

Відомий спеціаліст по експертним системам Д. Мічі [4] писав, що головна властивість експертних систем не в тому, що вони можуть запропонувати розв'язання неформалізованої задачі, а в тому що вони можуть крок за кроком показати, користувачу, як вони прийшли до такого рішення.

Транспортні задачі - це задачі суттєво математичного характеру і природно зробити прозорими і зрозумілими математичні моделі.

Сьогодні без перебільшень усі оптимізаційні задачі розв'язані і запрограмовані - в Екселі, Маткаді, Матлабі сотні готових функцій і підпрограм, але не дуже ефективних, не безпомилкових і абсолютно закритих від користувача. В наступному розділі для побудови системи буде використано вбудовані методи розв'язання задач лінійного і нелінійного програмування.

В даному розділі паралельно розглядаються - відкрита програма розв'язання задачі ЛП і розв'язання на базі вбудованої функції пакету.

Цей розділ є також частиною автоматизованої системи, а саме - підсистемою навчання користувача.

4.1 Розробка базової математичної моделі для оптимізації транспортної задачі

Розподілена система постачання складається з N баз (складів, фабрик...) та M "крамниць" (пунктів споживання). Потрібно розв'язати транспортну задачу по критерію мінімальних загальних витрат на перевезення при заданих запасах на базах A_i та потребі їх в магазинах B_j а також тарифах вартості перевезення одиниці вантажу від кожної бази до кожної крамниці C_{ij} . Задаємо певні значення параметрів для контрольного прикладу. Природно, що в автоматизованій системі вони будуть вводиться користувачем, або з інших файлів і баз даних. Записуємо умови задачі у матрично-векторному виді

$$\begin{array}{llll} \text{(3 бази та 4 крамниці)} & \text{індекси баз} & \text{індекси крамниць} & \\ \text{ORIGIN} = 1 & N := 3 & M := 4 & i := 1..N \quad j := 1..M \\ \text{Потреби крамниць: } B := (15 \ 15 \ 40 \ 30) & \text{Запаси на базах: } A := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матриця витрат на перевезення одиниці вантажу з i -ої бази в j -у крамницю

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

В класичній транспортній задачі потреби споживачів повинні дорівнювати можливостям баз постачання. Перевіряємо збалансованість задачі.

Потреби крамниць

$$\sum_{j=1}^4 (B^T)_j = 100$$

$$15 + 15 + 40 + 30 = 100$$

Можливості баз

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 100$$

$$30 + 50 + 20 = 100$$

Теоретичні відомості.

Загальний алгоритм розв'язання транспортної задачі

Основні етапи розв'язання збалансованої транспортної задачі є такими:

I. Побудова математичної моделі задачі

Словесне формулювання задачі: знайти план перевезень - таку матрицю X (кожен елемент якої X_{ij} задає кількість вантажу, що доставляється з i -ї бази в j -ту крамницю), що забезпечує **мінімум** цільової функції C - вартості усіх перевезень при **$n + m$ обмеженнях** на потреби магазинів та поставки з баз. З урахуванням введених означень це формулювання записується у виді:

$$\min \left(\sum_i \sum_j C_{ij} \cdot X_{ij} \right) \quad \text{при умовах:} \quad \sum_i X_{ij} = B_j \quad \sum_j X_{ij} = A_i$$

В розгорнутому виді цільова функція має такий вид:

$$C_{\text{sum}} = C_{11} \cdot X_{11} + C_{12} \cdot X_{12} + C_{13} \cdot X_{13} + C_{14} \cdot X_{14} + C_{21} \cdot X_{21} + C_{22} \cdot X_{22} + C_{23} \cdot X_{23} + C_{24} \cdot X_{24} \dots \\ + C_{31} \cdot X_{31} + C_{32} \cdot X_{32} + C_{33} \cdot X_{33} + C_{34} \cdot X_{34}$$

Можна записати цільову функцію і в більш компактному виді - це буде важливо при роботі із системами великої розмірності. Вибране програмне середовище дозволяє працювати матрицями в 1000x1000 елементів - аби була достатня зовнішня пам'ять.

$$C_s := \begin{pmatrix} \text{C11} & C12 & C13 & C14 \\ C21 & C22 & C23 & C24 \\ C31 & C32 & C33 & C34 \end{pmatrix} \quad X_s := \begin{pmatrix} \text{X11} & X12 & X13 & X14 \\ X21 & X22 & X23 & X24 \\ X31 & X32 & X33 & X34 \end{pmatrix}$$

$$C_{\text{sums}} := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M C_{s,i,j} \cdot X_{s,i,j}$$

Це діюча формула з якою можна працювати і в символьному і числовому режимах. Ось результат її розкриття:

$$C_{\text{sums}} \rightarrow C11 \cdot X11 + C12 \cdot X12 + C13 \cdot X13 + C14 \cdot X14 + C21 \cdot X21 + C22 \cdot X22 + C23 \cdot X23 + C24 \cdot X24 + C31 \cdot X31 + \dots$$

Записуємо обмеження: для крамниць, для баз, для пошукуваних змінних. В цілому маємо систему з $N + M + N \cdot M = 19$ нерівностей:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = A_1 \quad A_1 = 30$	}	N рівнянь балансу для кожної бази (вивіз)
$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = A_2 \quad A_2 = 50$		
$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = A_3 \quad A_3 = 20$		
$X_{11} + X_{21} + X_{31} = B_1 \quad (B^T)_1 = 15$	}	M рівнянь балансу для кожної крамниці (завіз)
$X_{12} + X_{22} + X_{32} = B_2 \quad (B^T)_2 = 15$		
$X_{13} + X_{23} + X_{33} = B_3 \quad (B^T)_3 = 40$		
$X_{14} + X_{24} + X_{34} = B_4 \quad (B^T)_4 = 30$		

$$\left. \begin{array}{llll} X_{11} \geq 0 & X_{12} \geq 0 & X_{13} \geq 0 & X_{14} \geq 0 \\ X_{21} \geq 0 & X_{22} \geq 0 & X_{23} \geq 0 & X_{24} \geq 0 \\ X_{31} \geq 0 & X_{32} \geq 0 & X_{33} \geq 0 & X_{34} \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} N \times M \text{ нерівностей -} \\ \text{невід'ємність усіх} \\ \text{елементів плану перевезень} \end{array}$$

II. Застосування алгоритму методу розв'язання транспортної задачі складається з таких кроків

- 1) Формування задачі, що є двоїстою до заданої.
- 2) Визначення початкового (такого, що задовольняє обмеженням) плану перевезень.
- 3) Перевірка отриманого плану на оптимальність.
- 4) Перехід до нового плану перевезень.
- 5) Перехід до пункту 3) та повторення пунктів 3), 4) до тих пір, поки не буде отриманий оптимальний план, або виявиться, що дана задача не має оптимального розв'язання.

Пункти 1-5 неважко реалізувати як програму у будь якому програмному середовищі. Звичайно користуються готовими бібліотечними програмними модулями.

III. Економічна інтерпретація отриманого математичного розв'язання

Розв'яжемо задачу крок за кроком згідно вище поданому алгоритму

1) Формування двоїстої задачі. Вводимо змінні u_1, u_2, u_3 (по числу баз) та v_1, v_2, v_3, v_4 (по числу крамниць) та складаємо таблицю, рядки якої відповідають обмеженням прямої задачі (це потім будуть коефіцієнти при двоїстих невідомих змінних), а останній рядок - коефіцієнти рівняння цільової функції.

В першому стовпці запишемо означення спряжених - двоїстих змінних, в останньому стовпці - обмеження B_j . Ця таблиця полегшує запис та осмислення двоїстої (спряженої) задачі.

Поряд з таблицею виводимо її джерела - матриці A, B, C . В перших двох рядках подано припустимі (відносно A та B) плани перевезень

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}
план-1:	15	15				40	10				20	
план-0	15		15			25	25		15	5		
u_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	30
u_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	50
u_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	20
v_1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	15
v_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	15
v_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	40
v_4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	30
	1	8	2	3	4	7	3	1	5	3	4	11

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 30 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 3 & 20 \\ \hline \end{array} \quad B^T = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 15 \\ \hline 2 & 15 \\ \hline 3 & 40 \\ \hline 4 & 30 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 8 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 7 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 4 & 11 \\ \hline \end{array}$$

Формулювання і запис двоїстої задачі лінійного програмування (ЛП)

Двоїста задача ЛП формулюється так: Знайти розв'язання системи обмежень (це суми по стовпцям поданої вище таблиці)....

$$\left. \begin{array}{lll} u_1 + v_1 \leq 1 & u_2 + v_1 \leq 4 & u_3 + v_1 \leq 5 \\ u_1 + v_2 \leq 8 & u_2 + v_2 \leq 7 & u_3 + v_2 \leq 3 \\ u_1 + v_3 \leq 2 & u_2 + v_3 \leq 3 & u_3 + v_3 \leq 4 \\ u_1 + v_4 \leq 3 & u_2 + v_4 \leq 1 & u_3 + v_4 \leq 11 \end{array} \right\}$$

$$C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 8 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 7 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 4 & 11 \\ \hline \end{array}$$

...яке максимізує таку цільову функцію

$$F = 30 \cdot u_1 + 50 \cdot u_2 + 20 \cdot u_3 + 15 \cdot v_1 + 15 \cdot v_2 + 40 \cdot v_3 + 30 \cdot v_4$$

2) Визначення початкового (задовільного відносно обмежень) плану перевезень

Використовуємо спосіб "північно-західний кут" (або : "верхній лівий"). Згідно цьому способу спочатку максимально можлива кількість товару з бази розміщується у верхній лівій клітці таблиці, потім в наступній клітці в тому ж рядку..., аж поки не буде використана (спустошена) 1-ша база постачання, потім наступні клітки в другому рядку (тобто розподіляється товар з другої бази) і т.д.

Виконується контроль допустимості плану - суми по рядкам та стовпцям повинні дорівнювати відповідним обмеженням. Використовуючи матрицю, що подана ліворуч обчислюємо значення цільової функції.

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} \text{pp} & \text{Mag1} & \text{Mag2} & \text{Mag3} & \text{Mag4} & \text{ockl} \\ \hline \text{Ck11} & 15 & 15 & 0 & 0 & 30 \\ \text{Ck12} & 0 & 0 & 40 & 10 & 50 \\ \text{Ck13} & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 \\ \hline \text{omag} & 15 & 15 & 40 & 30 & \text{ooo} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} F1 := 1 \cdot 15 + 8 \cdot 15 + 3 \cdot 40 + 1 \cdot 10 + 11 \cdot 20 \\ F1 = 485 \end{array}$$

3) **Перевірка отриманого плану на оптимальність.** Повертаємось до початкової таблиці і верхньому рядку записуємо перший план перевезень. Випишуємо обмеження для тих стовпців, де $X_{ij} \neq 0$, задаємо нульові значення зайвим змінним, знаходимо значення інших змінних та підставляємо їх в нерівності. Якщо не усі нерівності виконуються – це означає, що план ще не оптимальний.

Порівнюємо дійсні значення нерівностей з потрібними.

$u1 := 0$	$u2 := -10$	$u3 := 0$	$v1 := 1$	$v2 := 8$	$v3 := 3$	$v4 := 11$
Маємо:	Потрібно:		Маємо:	Потрібно:		
$u1 + v1 = 1$	$u1 + v1 \leq 1$		$u2 + v1 = -9$	$u2 + v1 \leq 4$ nev		
$u1 + v2 = 8$	$u1 + v2 \leq 8$		$u2 + v2 = -2$	$u2 + v2 \leq 7$		
$u2 + v3 = -7$	$u2 + v3 \leq 3$		$u1 + v3 = 3$	$u1 + v3 \leq 2$ nev		
$u2 + v4 = 1$	$u2 + v4 \leq 1$		$u1 + v4 = 11$	$u1 + v4 \leq 3$		
$u3 + v4 = 11$	$u3 + v4 \leq 11$		$u3 + v1 = 1$	$u3 + v1 \leq 5$		
$u3 + v3 = 3$	$u3 + v3 \leq 4$ nev		$u3 + v2 = 8$	$u3 + v2 \leq 3$		

4) Перехід до нового плану перевезень

Тепер, зберігаючи баланс перевезень, покращуємо план, - виносимо перевезення у клітки з малою вартістю перевезень. Записуємо отриманий після **двох циклів (кроків)** перерозподілу план у вхідну таблицю (вгорі) та перевіряємо його на оптимальність. Бачимо, що сумарні витрати зменшились майже вдвічі відносно початкового плану.

$$F2 := 1 \cdot 15 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 11 \cdot 5$$

$$F1 = 485 \quad F2 = 245 \quad F1 - F2 = 240$$

Перевіримо цей план на оптимальність. Використаємо один з вбудованих методів - функцію (підпрограму) розв'язання числовим методом довільних систем рівностей та нерівностей і інших відношень - так званий розв'язуючий блок Given- Find. Ми задаємо для цільової функції відношення "краще (тобто менше) витрат, що дає наш другий план.

Можливо використати вбудовану функцію оптимізації (Optimize(...)) - ми можемо вибрати метод оптимізації спосіб пошуку, точність та ін.

В робочих програмах використовуємо цю можливість.

Зауваження. Якщо користувач бажає створити автономну програму, то в пакеті Matlab та ін. йому дається можливість отримати для своїх розробок тексти модулів на C++, при бажанні, зрозуміло.

Задаємо початкові наближення рівними другому плану перевезень.

$$Ztr := 245 \quad X11 := 15 \quad X12 := 15 \quad X13 := 0 \quad X14 := 0 \quad X21 := 0 \quad X22 := 0$$

$$X31 := 0 \quad X32 := 0 \quad X33 := 0 \quad X34 := 0 \quad X21 := 0 \quad X23 := 0 \quad X24 := 0$$

Після ключового слова Given записуємо систему рівнянь прямої задачі (в наступному розділі буде подано програмну систему для розв'язання та аналізу двоїстої пари задач) для даних контрольного прикладу.

Giver

$$1 \cdot X_{11} + 8 \cdot X_{12} + 2 \cdot X_{13} + 3 \cdot X_{14} + 4 \cdot X_{21} + 7 \cdot X_{22} + 3 \cdot X_{23} \dots \leq Z_{tr} \\ + 1 \cdot X_{24} + 5 \cdot X_{31} + 3 \cdot X_{32} + 4 \cdot X_{33} + 11 \cdot X_{34}$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 30$$

$$X_{11} \geq 0$$

$$X_{21} \geq 0$$

$$X_{31} \geq 0$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 15$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 50$$

$$X_{12} \geq 0$$

$$X_{22} \geq 0$$

$$X_{32} \geq 0$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 15$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 20$$

$$X_{13} \geq 0$$

$$X_{23} \geq 0$$

$$X_{33} \geq 0$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 40$$

$$X_{14} \geq 0$$

$$X_{24} \geq 0$$

$$X_{34} \geq 0$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 30$$

Після системи рівнянь пишемо ключову функцію Find() - знайти, що замикає розв'язуючий блок. Виводимо обидва плани.

Оптимальний_план:= Find(X11,X12,X13,X14,X21,X22,X23,X24,X31,X32,X33,X34)

Оптимальний_план

	1
1	4
2	0
3	19
4	8
5	11
6	0
7	16
8	22
9	0
10	15
11	5
12	0

Наш_план

	1
1	15
2	0
3	15
4	0
5	0
6	0
7	25
8	25
9	0
10	15
11	0
12	5

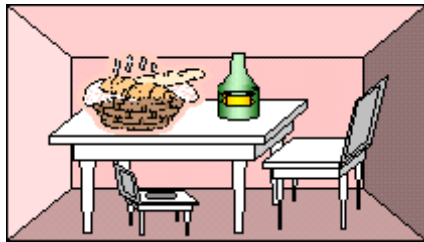
Оптимальний_план- Наш_план

	1
1	-11
2	0
3	4
4	8
5	11
6	0
7	-9
8	-3
9	0
10	0
11	5
12	-5

Бачимо, що наш план не дуже близький до оптимального плану перевезень.

Але витрати нашого плану відрізняються від оптимального на півпроцента!

Це добре знають практики і математики - система обмежень класичної транспортної задачі - випукла і тому близькі до оптимуму плани не можуть значно відрізнятись по значенню цільової функції.



4.2 Розробка програмної системи для розв'язання задач лінійного програмування альтернативними методами

Рис. 1 "Каков стол, таков стул"[рнп].

Вступ. Постановка задачі

В попередньому розділі розглянуто одну з головних задач систем масового обслуговування - задачу оптимізації плану перевезень. Згідно з завданням і концепцією побудови автоматизованої системи, розробляємо підсистему - набір "зроби сам" з альтернативних методів і базових модулів розв'язання задач ЛП. Додаткове призначення цієї підсистеми - навчання користувача. Не забороняється назвати цей розділ "інструкція для користувача".

Нагадаємо, що наша система призначена не для "оператора АСУ", а для користувача-професіонала (в тому числі керівника, власника), що бажає робити з прозорою системою, мати доступи до кожного рівняння, бачити не тільки числа, але й візуальну картину задачі та її розв'язання.

Перед користувачем тут ставляться такі задачі:

Освоєння методів оптимізації на базі теорії нечіткості.

Освоєння сучасних інформаційних технологій, зокрема: багатоверсійного програмування, створення програм на базі бібліотечних модулів.

Розробка програмної системи класу "що буде якщо" для аналізу і розв'язання задачі лінійного програмування.

Використання теорії двоїстості для аналізу практичних задач.

Ревізія значення ЛП для науки і практики сучасності.

Задачі лінійного програмування (ЛП) зустрічаються у практичній діяльності спеціалістів будь якого профілю. В ЛП склалися певні класи задач - транспортна, виробнича, визначення оптимального раціону та ін. В цьому розділі аналіз і розв'язання задачі ЛП виконується на типовому (класичному) прикладі. Подамо опис цієї конкретної задачі-**прикладу**, Деяка фірма постачає два ($i = 1..2$, задача потім масштабується) види продукції - столи і стільці. Для виробництва використовуються три ($j = 1..2$) види ресурсів - сировини і комплектуючих, наприклад, - дуб, лак, цвяхи.

Задано технологічну матрицю A , елемент якої A_{ij} визначає, скільки i -го ресурсу потрібно для виготовлення одиниці j -ої продукції.

Задані обмеження по кожному виду ресурсів (B_1, B_2, B_3) - вектор запасів ресурсів.

Задано ціни одиниці кожного виду продукції - стола, стільця - (C_1, C_2) - вектор цін.

Задано цільову функцію - сумарний дохід: $S_{dox}(x_1, x_2) := C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2$, де x_1, x_2 - кількості виготовлених столів і стільців.

Ціль оптимізації - знайти план випуску (x_{1op}, x_{2op}), що задовольняє обмеженням по ресурсам і дає максимальний сумарний дохід.

1 Розробка стенду для графічного розв'язання задачі

Записуємо вхідні дані згідно постановці задачі ЛП

Технологічна матриця: наявні ресурси: ціни: цільова функція (критерій):

$$\text{ORIGIN} = 1 \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \\ 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad S_{dox}(x_1, x_2) := C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2$$

Обмеження по ресурсам

Обмеження здорового глузду:

$$A_{1,1} \cdot x_1 + A_{1,2} \cdot x_2 \leq B_1 \quad A_{2,1} \cdot x_1 + A_{2,2} \cdot x_2 \leq B_2 \quad A_{3,1} \cdot x_1 + A_{3,2} \cdot x_2 \leq B_3 \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Обмеження записуємо як рівності, розв'язуємо їх відносно змінної x_2 - кількості стільців, цільову функцію теж розв'язуємо відносно x_2 - отримуємо такі функції від x_1 - кількості столів.

$$x_1 := 0, 0.2, \dots, 25 \quad Dox(x_1) := (S_{dxg} - C_1 \cdot x_1) \div C_2$$

$$\text{Обме1}(x_1) := \frac{(B_1 - A_{1,1} \cdot x_1)}{A_{1,2}} \quad \text{Обме2}(x_1) := \frac{(B_2 - A_{2,1} \cdot x_1)}{A_{2,2}} \quad \text{Обме3}(x_1) := \frac{(B_3 - A_{3,1} \cdot x_1)}{A_{3,2}}$$

Формуємо границю області (=симплекс), точки якої (x_1, x_2) задовольняють усім обмеженням.

$$\text{Обмс}(x_1) := \min(\text{Обме1}(x_1), \text{Обме2}(x_1), \text{Обме3}(x_1))$$

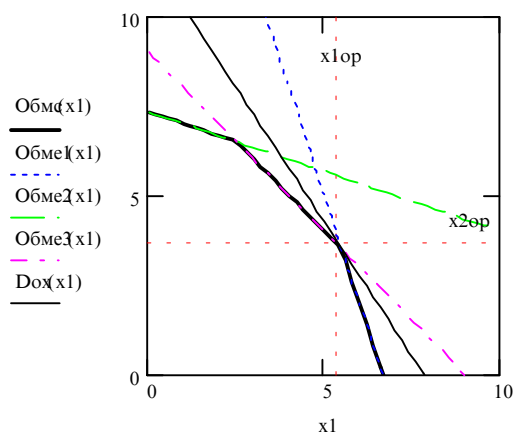
Для побудови тримірних графіків вводимо дискретні змінні $X1_i$ та $X2_j$.

$$\text{Диапазон} := 50 \quad i := 1.. \text{Диапазон} \quad j := 1.. \text{Диапазон} \quad h := .15 \quad X1_i := h \cdot i \quad X2_j := h \cdot j$$

Формуємо дискретну функцію двох змінних - цільову функцію "обрізану" обмеженнями.

$$\text{Dop}_{i,j} := \text{if}[(A_{1,1} \cdot X1_i + A_{1,2} \cdot X2_j \leq B_1) \cdot (A_{2,1} \cdot X1_i + A_{2,2} \cdot X2_j \leq B_2) \cdot (A_{3,1} \cdot X1_i + A_{3,2} \cdot X2_j \leq B_3), S_{dox}(X1_i, X2_j), 0]$$

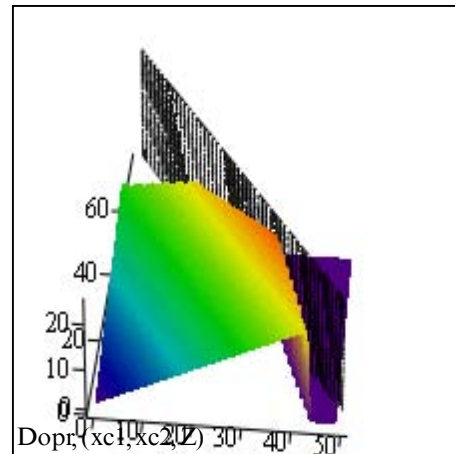
$$x_{1op} \equiv 5.4 \quad x_{2op} \equiv 3.7 \quad S_{dxg} \equiv 23.5 \quad x_{cl,i,j} := i \quad x_{c2,j} := \left(\frac{S_{dxg}}{h} - C_1 \cdot x_{cl,i,j} \right) \div C_2 \quad Z_{i,j} := j \cdot 5$$



$$A \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \equiv \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$C \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Те, що вище - не "рис. 1.77", а **стенд**. Ви можете (в електронній версії) змінювати параметри задачі і, "не відходячи від каси" бачити наслідки. Можна б подати легенди на кожну залежність, але користувач звичайно бажає сам розібратись, де яка залежність. Ясно, що товста лінія - симплекс з обмежень, що і як він обмежує, видно на правому графіку, де по осям x, y відкладаються x_1 та x_2 , а по осі z - відповідні значення цільової функції = сумарного доходу. На правому графіку подано також площину "постійне значення цільової функції", що є дотичною до симплексу. Точка дотику - оптимум.

Інструкція користувачу стенду

"Стійкі ленінці" ще досі вимагають писати "інструкцію системному програмісту" до сучасної прикладної програми, що часто створюється в діалоговому генераторі програм... Популярні теми гумору там - "інструкція по користуванню молотком" та ін.

І до нашого стенду потрібна інструкція.

П1. Змінюй параметр s_{dxg} (дохід), поки графік цільової функції не стане дотикатись до симплекса.

П2. Підбери значення x_{1op} та x_{2op} (кількості столів та стільців) так, щоб горизонтальна і вертикальна лінії проходили через точку дотику. Отримані значення цих трьох параметрів і є розв'язанням задачі оптимізації.

П3. Напиши програму, яка зробить все це без тебе.

2. Розв'язання задачі ЛП числовим методом

Сьогодні методи розв'язання оптимізаційних задач, взагалі, і задачі ЛП, зокрема, часто вбудовуються в математичні пакети. Від користувача вимагається **коректно записати свою задачу** і сподіватися на успіх, який не гарантовано. Використаємо можливості пакета. Копіюємо готовий блок - фрейм розв'язання задачі і налаштуємо його.

Записуємо функцію, екстремум якої шукаємо:

$$D(x_1, x_2) := C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2$$

Записуємо початкові значення пошукуваних змінних: $x_1 := 1$ $x_2 := 1$

Після ключового слова *Given* записується система обмежень (рівностей, нерівностей)

$$\text{Given} \quad A_{1,1} \cdot x_1 + A_{1,2} \cdot x_2 \leq B_1 \quad A_{2,1} \cdot x_1 + A_{2,2} \cdot x_2 \leq B_2 \quad A_{3,1} \cdot x_1 + A_{3,2} \cdot x_2 \leq B_3$$

і отримуємо (не завжди) розв'язання: $\begin{pmatrix} x_{1\text{opd}} \\ x_{2\text{opd}} \end{pmatrix} := \text{Maximize}(D, x_1, x_2)$

$$S_{\text{dxd}} := S_{\text{dof}}(x_{1\text{opd}}, x_{2\text{opd}})$$

$$x_{1\text{opd}} = 5.5$$

$$x_{2\text{opd}} = 3.5$$

$$S_{\text{dxd}} = 23.5$$

Зауваження. Те, що вище взято в рамку - це програмний модуль. Його можна копіювати, переносити з документа в документ. Рамки і виділення кольором - це стандарт усіх сучасних продуктів. В логіко-семантичному аспекті - це інверсія відносно традиційного подання текстів (лістингів) програм - там в тест програми вкраплювались коментарі, тут в текст коментарю "вкраплюються" елементи програми.

Нагадаємо: стандарт програмування в C++ дозволяє вводити користувачу свої оператори та ін. Потім ці "спецслова" обробляються предтранслятором у стандартний текст C++. Все призначено для того, щоб створювати тексти програм, що подібні до звичайних текстів "для людини", а не для машини.

Знову ж нагадуємо, що поданий вище блок - "верхівка айсберга" - під ним модулі, що написані на C++. В цілому ж повна програма цього модулю на 70% складається з викликів функцій Windows, на 25% - виклики функцій Mathcad, і останні 5% - специфіка нашого модуля - параметри, опис розташування елементів та ін.

3 Розв'язання задачі ЛП методом нечіткої оптимізації

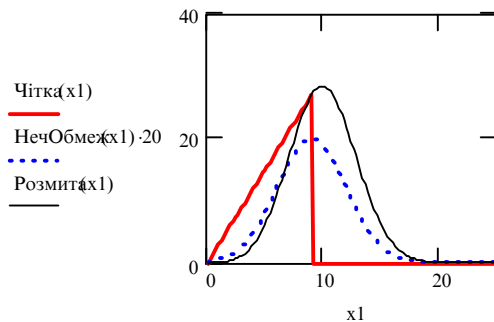
Ми зневажливо відносимось до теорії теплорода, середньовічних методів множення чисел, астрології і хіромантії і не помічаємо, що місце розвінчаних забобонів і ритуалів займають нові. Більшість постановок оптимізаційних задач і методів їх розв'язання, є або а) штучними, але корисними (як теорія теплорода), або і штучними і ...

У ранньому середньовіччі не багато студентів освоювали множення "корабликом", сьогодні не більше студентів освоюють симплекс-метод.

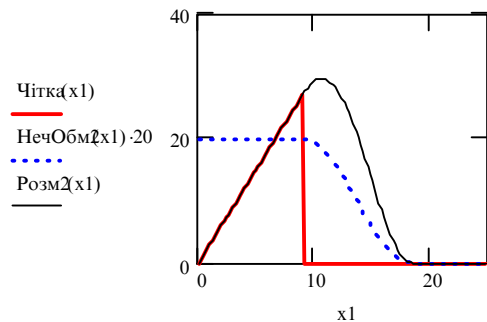
А чи не міг Нобелівський Лауреат академік Канторович трошки інакше поставити задачу ЛП і використати інший метод? Розглянемо методику постановки і розв'язання задачі ЛП як задачі нечіткої оптимізації. Зауважимо, що успіх, продуктивність, довге життя певного наукового напрямку залежить і від його назви. Так один усім відомий напрямок "оволодів масами", коли замість: "системи з моделлю об'єкта у контурі зворотного зв'язку із

зворотним зв'язком по вимірюваним координатам вектору стану", "асимптотичні ідентифікатори", "динамічні компенсатори"; охрестили так: "теорія спостерігачів", "спостерігачі". Теорія нечітких множин теж перестане бути модою, даватиме стійкі практичні результати, коли вона називатиметься просто "фузня" (від fuzzy theory, по аналогії з "прання", "знання", "кузня", "дегазація" та ін.).

Поглянемо на обмеження нашої задачі ЛП з точки зору практики: чи фабрика збанкрутує, якщо замість $B = 100$ одиниць 1-го ресурсу у виробництві буде використано 95 або 105 одиниць? Може й збанкрутує, може стане корпорацією, але в даному конкретному випадку немає фізичних законів, що забороняють "розмити" обмеження. В реальному житті малі відхилення (100 ± 3) ніяк не визначаються результатах бізнесу, середні (100 ± 20) - зменшать дохід, а великі (100 ± 70) - можуть звести до нуля, привести до збитків..



а)



б)

Замінімо обмеження на "функцію штрафу", що дорівнює 1 при $B = 100$ (=обмеження виконується) і плавно та "природним чином" зменшується при відхиленнях від номіналу.

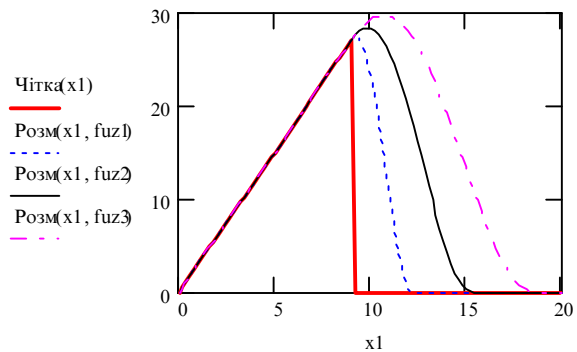
Визначимо "розмиту" цільову функцію як добуток цільової функції на нечітке обмеження, побудуємо графіки і проаналізуємо те, що бачимо на них. Нижче закрито (сколапсовано) без паролю альтернативні варіанти нечітких обмежень і нечітких цільових функцій. Щоб не відвертати увагу від графіків.

На графіках вище подано дві альтернативи - симетрична функція штрафу, та функція штрафу, яка "карає" тільки за перевищення обмеження.

Ступінь розмитості можна міняти - від дуже малої, тоді ми маємо задачу з чіткими обмеженнями, до великої. Іноді ця ступінь визначається специфікою задачі - дійсними штрафами за недопостачання, та кредитними відсотками, іноді розмитість - просто параметр процесу оптимізації - збільшення розмитості покращує сходимість пошукових методів, але і зменшує точність знаходження екстремуму.

На цьому графіку показано залежність розмитих (нечіткої) цільової функції $\text{Розм}(x1, \text{fuz})$ при зміні ступіню розмитості fuz нечіткої (розмитій) функції обмеження $\cdot \text{НечОбм2}(x1) \cdot$.

$\text{fuz1} \equiv 1$ $\text{fuz2} \equiv 2$ $\text{fuz3} \equiv 3$



в)

Рис. 3 Фаззифікації обмежень

Методи теорії нечіткості слід називати "фузня", ще і для того, щоб попередити тих, хто спішить та нервових - теорія нечіткості не є логічно завершеною - в ній не визначені однозначно правила роботи з функціями належності. Кожен раз вони конструюються виходячи із специфіки задачі, здорового глузду і формальної логіки. В поданих вище графіках функції належності сконструйовані з функції гаусова розподілення $\text{dnorm}(\cdot)$ та $\text{cos}(\cdot)$. Ці функції закриті (без пароллю) вище.

В теорії нечітких множин існують операції над множинами, аналоги, відповідних операцій над звичайними множинами - об'єднання множин (диз'юнкція), перетин множин (кон'юнкція), належність, або включення та ін. Загальноприйнятого єдиного визначення для цих відношень поки немає.

На графіку а) функція штрафу (належності) обмеження "карає" як за перевищення обмеження, так і за зменшення; на графіку б) функція штрафу карає тільки за перевищення ліміту. Звернемо увагу на те, що екстремум функції належності не співпадає з екстремумом цільової функції. Неформальне обґрунтування цього: при збільшенні обсягу ресурсу підприємство виробляє додаткову продукцію, отримує додатковий дохід. При малих перевищеннях штраф, ще малий порівняно з додатковим доходом.

Хто ж в реальній ситуації накладає ці штрафи? В ринковій економіці - ринок: більше ресурсу, - більше ціна, кредити на закупівлю, додаткова продукція зсуває ціни ринку до зменшення...

Формуємо функції належності для кожного обмеження, а потім функцію належності усіх обмежень. Беремо вхідний матеріал - відповідні "чіткі" функції:

$$\text{Обмеж1}(x1) := \frac{(B_1 - A_{1,1} \cdot x1)}{A_{1,2}} \quad \text{Обмеж2}(x1) := \frac{(B_2 - A_{2,1} \cdot x1)}{A_{2,2}} \quad \text{Обмеж3}(x1) := \frac{(B_3 - A_{3,1} \cdot x1)}{A_{3,2}}$$

$$\text{Sдох}(x1, x2) := C_1 \cdot x1 + C_2 \cdot x2$$

Записуємо рядок параметрів (кількість кроків, кроки обчислень) для дискретних функцій:

$$\text{Диап} := 40 \quad i := 1.. \text{Диап} \quad j := 1.. \text{Диап} \quad h := 0.4 \max(B) \div \text{Диап} \quad X_{1i} := h \cdot i \quad X_{2j} := h \cdot j$$

Формуємо дискретну цільову функцію "обрізану" "жорсткими" обмеженнями:

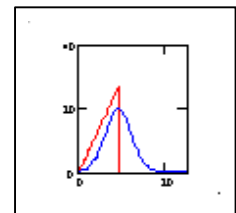
$$\text{Dop}_{i,j} := \text{if}[(A_{1,1} \cdot X_{1i} + A_{1,2} \cdot X_{2j} \leq B_1) \cdot (A_{2,1} \cdot X_{1i} + A_{2,2} \cdot X_{2j} \leq B_2) \cdot (A_{3,1} \cdot X_{1i} + A_{3,2} \cdot X_{2j} \leq B_3), \text{Sdox}(X_{1i}, X_{2j}), 0]$$

Записуємо функції належності обмежень (є така термінологія: переводимо обмеження у нечіткий формат, виконуємо фазифікацію обмежень та ін.)

Альтернатива 1. Симетрична функція належності.

Використаємо таку функцію належності обмежень:

Реалізуємо її (мають значення тільки топологічні властивості функції) на базі гаусового розподілення, а мірою нечіткості буде fuzь - дисперсія розподілення: (при $\text{fuzь} = 0$ маємо чітке обмеження).



$$\text{НенормованеНечіткеОбмеження}(k1, x2) := \text{dnorm}(B_1 - A_{1,1} \cdot x1 - A_{1,2} \cdot x2, 0, \text{fuzь})$$

$$\text{НенормованеНечіткеОбмеження}(x1, x2) := \text{dnorm}(B_2 - A_{2,1} \cdot x1 - A_{2,2} \cdot x2, 0, \text{fuzь})$$

$$\text{НенормованеНечіткеОбмеження}(x1, x2) := \text{dnorm}(B_3 - A_{3,1} \cdot x1 - A_{3,2} \cdot x2, 0, \text{fuzь} \cdot 5)$$

Дискретизуємо і нормуємо ці функції так, щоб максимальні значення були одиничними.

$$\text{NNO}_{1,j} := \text{НенормованеНечіткеОбмеження}(X_{1i}, X_{2j}) \quad \max(\text{NNO}) = 0.399$$

$$\text{NNO}_{2,j} := \text{НенормованеНечіткеОбмеження}(X_{1i}, X_{2j}) \quad \max(\text{NNO}) = 0.399$$

$$\text{NNO}_{3,j} := \text{НенормованеНечіткеОбмеження}(X_{1i}, X_{2j}) \quad \max(\text{NNO}) = 0.797$$

$$\text{NO1} := \text{NNO1} \div \max(\text{NNO}) \quad \text{NO2} := \text{NNO2} \div \max(\text{NNO}) \quad \text{NO3} := \text{NNO3} \div \max(\text{NNO}) \quad \max(\text{NO}) = 1$$

Згорнути **функції належності обмежень**, що повинні виконуватись в нашій задачі усі разом (кон'юнкція) у єдину можна по різному (попереджали про це вище).

Перша альтернатива згортки - перемножити функції належності.

Це можна записати так:

або так

$$\text{Обфуз}_{C_i,j} = \frac{(\text{NO}_{1,j} \cdot \text{NO}_{2,j} \cdot \text{NO}_{3,j})}{\max(\text{Обфуз}_C)}$$

$$\text{Обфуз}_C := \frac{\overrightarrow{(\text{NO}_3 \text{ NO}_1 \text{ NO}_2)}}{\max(\overrightarrow{(\text{NO}_1 \text{ NO}_2 \text{ NO}_3)})}$$

Записуємо загальну функцію належності:

$$\boxed{\text{Критфуз}_{i,j} := \text{Обфуз}_{C_i,j} \cdot \text{Sdox}(X_{1i}, X_{2j})}$$

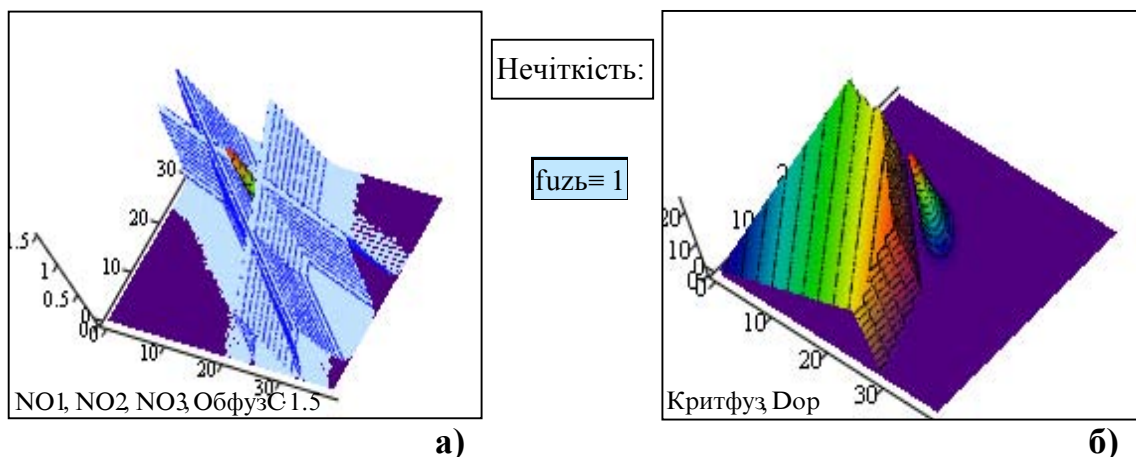


Рис. 4 Порівняння чіткого і розмитого розв'язання альтернатива 1

Проаналізуємо те, що бачимо на графіках. На першому - а) подано розмиті обмеження і згортку цих обмежень - нечітку кон'юнкцію. Бачимо, що загальна функція належності має максимум за межами третього обмеження. Так і повинно бути - ми взяли симетричну функцію належності, що "накладає штраф" не тільки за перебільшення обмеження, але і за зменшення. **Це не помилки - ми просто поставили задачу з іншими критеріями "бажано - небажано"**. Є підозра, що класичні постановки задач ЛП є менш реалістичними, ніж "розмиті"

На другому графіку - б) подано "чітку" цільову функцію з чіткими обмеженнями "менше можна - більше не можна" і нечітку цільову функцію, що є кон'юнкцією усіх обмежень і функції цілі (сумарного доходу). Отримали, те що і повинні отримати - поставили задачу з іншою "системою цінностей" і отримали дещо інше розв'язання. Відносно своїх умов розв'язання обох задач коректні - яке з них вибрати в реальній ситуації - справа того, хто приймає рішення.

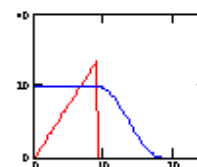
Друга альтернатива згортки - в кожній точці (x_1, x_2) брати мінімум з трьох функцій:

$$\text{Обфуз}C_{i,j} := \min(NO_{1,j}, NO_{2,j}, NO_{3,j})$$

Ця альтернатива згортки дає приблизно такі ж результати. Перевірте самостійно. Для цього достатньо замінити функцію $\text{Обфуз}C_{i,j}$ у відповідному місці документу.

Альтернатива 2. Несиметрична функція належності.

Використаємо таку функцію належності обмежень: Реалізуємо її на базі тригонометричної функції (це майже не принципово - значення мають топологічні властивості функції), а мірою нечіткості буде fuzz - період.



Як можна бачити з малюнку, ця функція "штрафує" тільки за перевищення обмеження. Тобто тут логіка ближче до логіки, що використана у класичній постановці задачі ЛП.

$$\text{НечОб}1(x1, x2) := \begin{cases} \text{Тьфу} \leftarrow B_1 - A_{1,1} \cdot x1 - A_{1,2} \cdot x2 \\ 1 \text{ if } \text{Тьфу} > 0 \\ [0.5(1 + \cos(\text{Тьфу} \div \text{фузь}))] \text{ if } -\pi < \frac{\text{Тьфу}}{\text{фузь}} \leq 0 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Нижче закрито (сколапсовано) без паролю функції належності обмежень. Вони такі ж як і подана ліворуч. Можна винайти щось більш природне.

Дискретизуємо і нормуємо ці функції, але нормування в даному випадку зайве бо функції належності згідно визначенню мають одиничні максимальні значення (див. вище).

$$\text{КритфузН}(x1, x2) := \text{НечОб}1(x1, x2) \cdot \text{НечОб}2(x1, x2) \cdot \text{НечОб}3(x1, x2) \cdot \text{Sдох}(x1, x2)$$

$$\text{NNO}_{1,j} := \text{НечОб}1(X_{1j}, X_{2j}) \quad \text{NNO}_{2,j} := \text{НечОб}2(X_{1j}, X_{2j}) \quad \text{NNO}_{3,j} := \text{НечОб}3(X_{1j}, X_{2j})$$

$$\text{NO}1 := \text{NNO}1 \div \max(\text{NNO}) \quad \text{NO}2 := \text{NNO}2 \div \max(\text{NNO}2) \quad \text{NO}3 := \text{NNO}3 \div \max(\text{NNO}3)$$

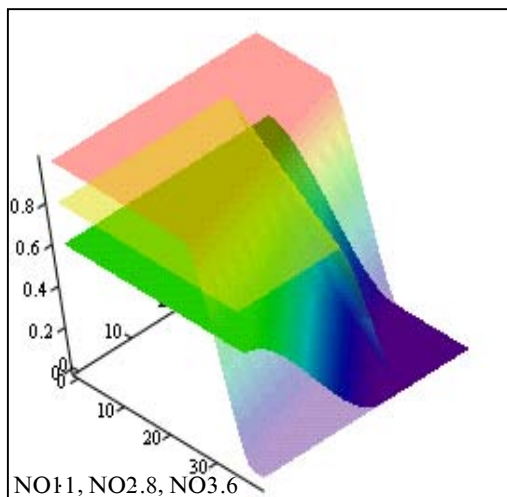
$$\text{Контроль:} \quad \max(\text{NNO}) = 1 \quad \max(\text{NO}2) = 1$$

Записуємо загальну функцію належності обмеження (її теж можна не нормувати)

$$\text{ОбфузC} := \frac{\text{NO}1 \cdot \text{NO}2 \cdot \text{NO}3}{\max(\text{NO}1 \cdot \text{NO}2 \cdot \text{NO}3)}$$

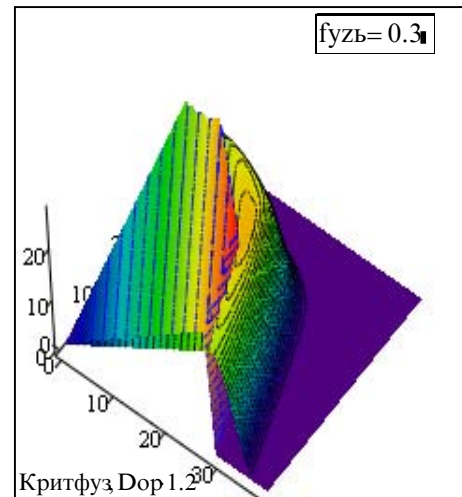
І, нарешті, записуємо загальну цільову функцію

$$\text{Критфуз}_{i,j} := \text{ОбфузC}_{i,j} \cdot \text{Sдох}(X_{1j}, X_{2j})$$



Нечіткість:

$$\text{фузь} \equiv 1.6$$



$$\text{фузь} = 0.3$$

Інструкція користувачу: змінюй параметр розмитості фузь від 0.1 до 7. Дивись на результати з різних точок зору. Для цього мишею повертай графіки.

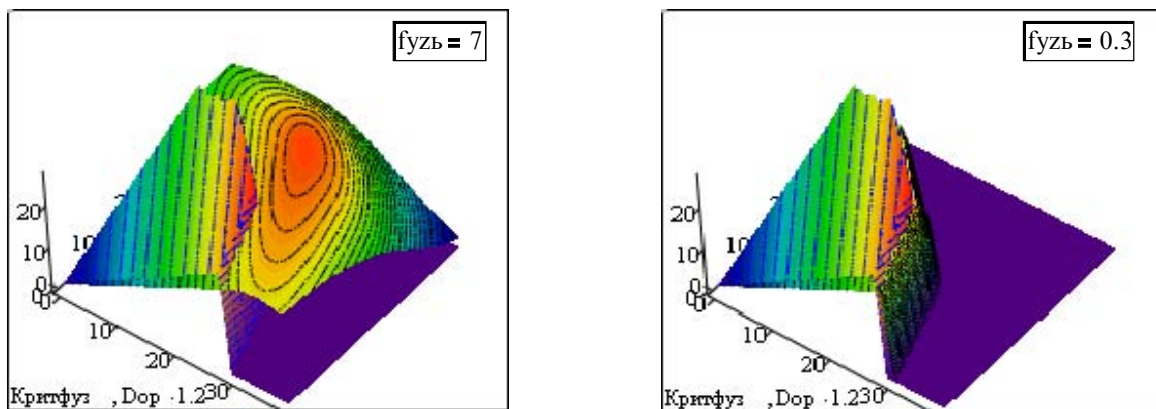


Рис. 5 Порівняння чіткого і розмитого розв'язання альтернатива 2

Проаналізуємо те, що бачимо на графіках. На першому - подано розмиті обмеження. На другому графіку - подано "чітку" цільову функцію з урахуванням чітких обмежень "менше можна - більше не можна" і нечітку цільову функцію, що є кон'юнкцією усіх обмежень і функції цілі (сумарного доходу). Нижче подано вид цільової функції при різних значеннях параметра розмитості. Бачимо - при малих значеннях розмитості приходимо до чіткої задачі, отримаємо те ж саме розв'язання. При великій розмитості розв'язання **суттєво не співпадає** із розв'язанням чіткої задачі. відповідним задачею. Висновок - один з методів некоректний, треба вибрати "істинний". Неважко бачити, що обое методи коректні просто вони розв'язували різні задачі. Отримали, те що і повинні чекати - так поставили нечітку задачу, що розв'язання її сходиться при зменшенні нечіткості до розв'язання "чіткої задачі". Ну а тепер нарешті....

...записуємо функцію, екстремум якої шукаємо: $D(x1, x2) := \text{Критфуз}H(x1, x2)$

Записуємо початкові значення пошукуваних змінних: $xx1 := 1$ $xx2 := 1$

і отримуємо (не завжди) розв'язання: $\begin{pmatrix} x1_{\text{opn2}} \\ x2_{\text{opn2}} \end{pmatrix} := \text{Maximize}(D, xx1, xx2)$

$Sdxn2 := Sdox(x1_{\text{opn2}}, x2_{\text{opn2}})$

$x1_{\text{opn2}} = 5.4$

$x2_{\text{opn2}} = 3.9$

$Sdxn2 = 24$

Підводимо підсумки

- формуємо і виводимо таблицю результатів оптимізації. Якщо ви не знаєте як виробити 4,1 стола, розширяйте ринок і виробляйте...41 стіл.

Результати_оптимізації				
	1	2	3	4
1	"Метод оптим."	"стілів"	"стільців"	"доход"
2	"Графічний"	5.4	3.7	23.5
3	"Розмитий"	5.5	3.5	23.5
4	"Нечіткий"	5.4	3.9	24

"Розмитий" доход трохи більше - так і повинно бути, бо там не заборонено переступати через обмеження.

4 Постановка і розв'язання двоїстої задачі

Не варто зовсім відміняти ЛП. Ще дуже багато корисного може дати використання результатів теорії двоїстості в ЛП, якщо оволодіти цією теорією. Для деякої (= прямої) задачі ЛП (лінійного програмування):

$$\max \{C^T \cdot X\} \quad \text{при } A \cdot X \leq B$$

двоїстою (спряженою) називається така задача ЛП

$$\min \{B^T \cdot Y\} \quad \text{при } A^T \cdot Y \geq C$$

Головний результат теорії двоїстості - теорема про мінімакс:

$$\max \{C^T \cdot X\} = \min \{B^T \cdot Y\}$$

Чим цей результат корисний для практики?

Ситуація №1. Маємо задачу ЛП великої розмірності і одне якесь допустиме розв'язання $X_{\text{прям}}$. Чи далеко воно від бажаного оптимуму? - записуємо двоїсту задачу ЛП, знаходимо якесь припустиме її розв'язання $X_{\text{спряж}}$. На основі теореми про мінімакс можна стверджувати, що оптимальне розв'язання знаходиться в діапазоні:

$$X_{\text{спряж}} \leq X_{\text{опт}} \leq X_{\text{прям}}$$

Ситуація №2. Спряжена задача може бути більш легкою для розв'язання (в яких випадках, чому - дійдіть до цього самостійно)

Спряжена задача - абстракція, чи вона має теж техніко-економічну інтерпретацію як і основна задача ЛП? Корисно знайти інтерпретацію самостійно. Подамо підказку. В лінійній економіці, без доданої вартості, теорема про мінімакс стверджує, що максимально можливий прибуток дорівнює мінімально можливим витратам. Якщо змінні $x_1, x_2, \dots$ - план випуску, то змінні $y_1, y_2, \dots$ - т написана відповідь).

Запишемо пряму та спряжену задачі в розгорнутому виді. Запишемо вхідні дані.

Розходи ресурсів
на один виріб

Запаси ресурсів
обмеження

Ціна
одиниці

План
випуску

$$Aa := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \quad Bb := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{дуб} \\ \text{лак} \\ \text{цвяхи} \end{pmatrix} \quad Cc := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{"грн/стіл"} \\ \text{"грн/стул"} \end{pmatrix} \quad Xx := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{стілів} \\ \text{стільців} \end{pmatrix}$$

Подаємо у цих означеннях **пряму** задачу ЛП
Знайти **максимум** цільової функції:

$$C^T \cdot X \rightarrow C_0 \cdot X_0 + C_1 \cdot X_1$$

при обмеженнях

$$A \cdot X \leq B \rightarrow \begin{pmatrix} a_{0,0} \cdot X_0 + a_{0,1} \cdot X_1 \\ a_{1,0} \cdot X_0 + a_{1,1} \cdot X_1 \\ a_{2,0} \cdot X_0 + a_{2,1} \cdot X_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Робимо теж саме для спряженої задачі

Розходи ресурсів на один виріб	обмеження на вартість виробів	кількості ресурсів	Ціни ресурсів (план)
-----------------------------------	----------------------------------	-----------------------	-------------------------

$$A^T \rightarrow \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & a_{2,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & a_{2,1} \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{"грн/стіл"} \\ \text{"грн/стул"} \end{pmatrix} \quad B^T \rightarrow \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

Подаємо у цих означеннях **двоїсту** (спряжену) задачу ЛП
Знайти **мінімум** цільової функції:

$$B^T \cdot Y \rightarrow b_0 \cdot Y_0 + b_1 \cdot Y_1 + b_3 \cdot Y_2$$

при обмеженнях

$$A \cdot Y \geq C \rightarrow \begin{pmatrix} a_{0,0} \cdot Y_0 + a_{1,0} \cdot Y_1 + a_{2,0} \cdot Y_2 \\ a_{0,1} \cdot Y_0 + a_{1,1} \cdot Y_1 + a_{2,1} \cdot Y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

Зауваження. Були використані означення X замість x , A замість A та in . щоб використати апарат символьних обчислень - там потрібні змінні без присвоєних числових значень.

Стенд для знаходження розв'язань спряжених задач ЛП

Для набуття практичних навичок і осмислення двоїстості виконаємо (на ЦОМ) практичне заняття - знаходження розв'язання задачі ЛП методом проб і помилок.

Спочатку записуємо два модулі для розв'язання прямої і двоїстої задач ЛП при умові, що значення цільових функцій $K_{пр}$ та $K_{дв}$ задані. Задача ЛП розв'язується так: починаємо з малого значення $K_{пр}$ та великого для $K_{дв}$ і змінюємо їх у відповідному напрямку, поки функція $Find()$ не почервоніє (буде повідомлення "не знайдено розв'язання", якщо курсор на $Find()$).

Пряма задача - максимізація доходу від виробництва

$x_1 := 1$ $x_2 := 1$ $K_{пр} = 23.5$

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq B \quad C^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = K_{пр} \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Підказка:

$$\begin{pmatrix} x_{1opp} \\ x_{2opp} \end{pmatrix} := Find\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} x_{1opp} \\ x_{2opp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{1opd} \\ x_{2opd} \\ S_{dxg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 3.5 \\ 23.5 \end{pmatrix}$$

Двоїста задача - мінімізація витрат на виробництво

$$y1 := 1 \quad y2 := 1 \quad y3 := 1 \quad \text{КритД} = 24.35$$

Given

$$A^T \cdot \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} \geq C \quad B^T \cdot \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} = \text{КритД} \quad y1 \geq 0 \quad y2 \geq 0 \quad y3 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} y1_{op} \\ y2_{op} \\ y3_{op} \end{pmatrix} := \text{Find} \left(\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} \right) \quad \begin{pmatrix} y1_{op} \\ y2_{op} \\ y3_{op} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

Будуємо графіки (копіюємо і редагуємо модулі з першого розділу).
Обмеження записуємо як рівності, розв'язуємо їх відносно змінної $x2$ -
кількості стільців, цільову функцію теж розв'язуємо відносно $x2$ - отримуємо
такі функції від $x1$ - кількості столів.

$$x1 := 0, 0.2.. 25 \quad \text{ДоХ}(x1) := (\text{КритП} - C_1 \cdot x1) \div C_2$$

$$\text{Обме1}(x1) := \frac{(B_1 - A_{1,1} \cdot x1)}{A_{1,2}} \quad \text{Обме2}(x1) := \frac{(B_2 - A_{2,1} \cdot x1)}{A_{2,2}} \quad \text{Обме3}(x1) := \frac{(B_3 - A_{3,1} \cdot x1)}{A_{3,2}}$$

Формуємо границю області (=симплекс), точки якої ($x1$, $x2$)
задовольняють усім обмеженням.

$$\text{ОбмП}(x1) := \min(\text{Обме1}(x1), \text{Обме2}(x1), \text{Обме3}(x1))$$

Теж саме робимо для спряженої задачі:

$$\text{РоХ}(y1, y2) := (\text{КритД} - B_1 \cdot y1 - B_2 \cdot y2) \div B_3$$

$$\text{Обм1}(y1, y2) := \frac{(C_1 - A_{1,1} \cdot y1 - A_{2,1} \cdot y2)}{A_{3,1}} \quad \text{Обм2}(y1, y2) := \frac{(C_2 - A_{1,2} \cdot y1 - A_{2,2} \cdot y2)}{A_{3,2}}$$

$$\text{ОбД}(y1, y2) := \max(\text{Обм1}(y1, y2), \text{Обм2}(y1, y2))$$

Для побудови тримірних графіків вводимо дискретні (індексовані)
змінні $X1_i$, $X2_j$, $Y1_i$,

$$\text{Диап} := 50 \quad i := 1.. \text{Диап} \quad j := 1.. \text{Диап} \quad h := 0.15 \quad X1_i := h \cdot i \quad X2_j := h \cdot j$$

$$\text{SдоХ}(x1, x2) := C_1 \cdot x1 + C_2 \cdot x2 \quad h2 := 0.05 \quad Y1_i := h2 \cdot i \quad Y2_j := h2 \cdot j \quad Y3_i := h2 \cdot i$$

Формуємо дискретну функцію двох змінних - цільову функцію прямої
задачі "обрізану" обмеженнями.

$$\text{Дор}_{i,j} := \text{if}[(A_{1,1} \cdot X1_i + A_{1,2} \cdot X2_j \leq B_1) \cdot (A_{2,1} \cdot X1_i + A_{2,2} \cdot X2_j \leq B_2) \cdot (A_{3,1} \cdot X1_i + A_{3,2} \cdot X2_j \leq B_3), \text{SдоХ}(X1_i, X2_j), 0]$$

Формуємо відповідні дискретні функції для спряженої задачі

$$\text{РоХ}_{i,j} := \frac{\text{РоХ}(Y1_i, Y2_j)}{h2} \quad \text{Обм1}_{i,j} := \frac{\text{Обм1}(Y1_i, Y2_j)}{h2} \quad \text{Обм2}_{i,j} := \frac{\text{Обм2}(Y1_i, Y2_j)}{h2} \quad \text{ОбД}_{i,j} := \frac{\text{ОбД}(Y1_i, Y2_j)}{h2}$$

Зареєструйся - введи ім'я
Користувач:= "Дебагер"

$$xc1_{i,j} := i \quad xc2_{i,j} := \left(\frac{\text{КритП}}{h} - C_1 \cdot xc1_{i,j} \right) \div C_2 \quad Zi,j := j \cdot 5$$

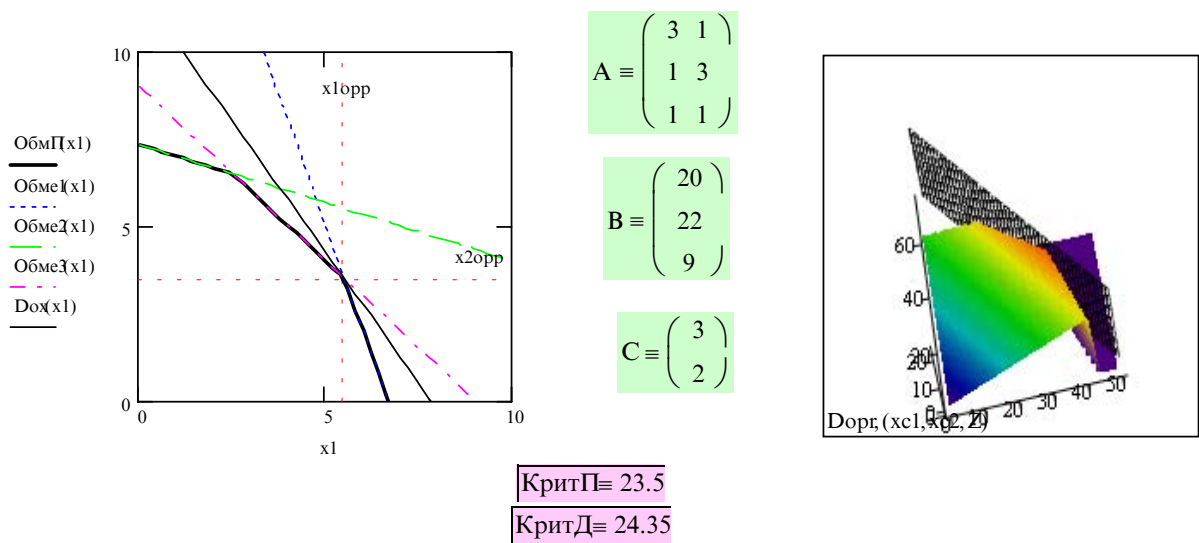


Рис. 6 Графічне розв'язання прямої задачі (2 змінних, 3 обмеження)

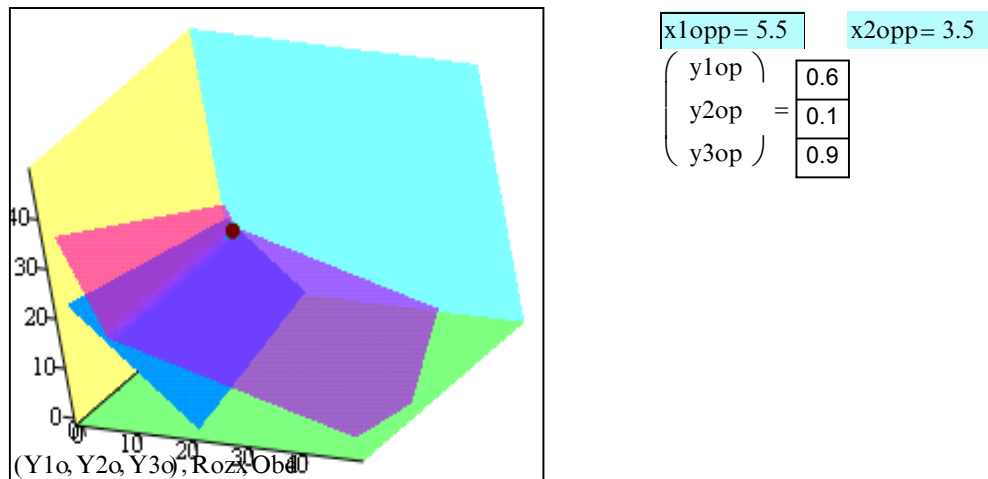


Рис. 7 Графічне розв'язання двоїстої задачі (3 змінних, 2 обмеження)

Інструкція користувачу стенда. Шановний Користувач= "Дебагер" !

1. **Введи дані** своєї задачі - A, B, C.
2. **Встанови значення** цільових функцій КритП - малим (для Прямої виробничої задачі), КритД - великим (для Двоїстої задачі).
3. **Змінюй** (у відповідному напрямі) ці значення, дивлячись на графіки, не виходячи за обмеження, **поки** не досягнеш мінімаксу.
4. **Можна** повертати 3D-графіки мишею у зручний ракурс.

5. Розробка модуля для розв'язання та аналізу пари спряжених задач ЛП

На основі виконаних досліджень зробимо зручний для користування і переносу в інші документи модуль. **Входи модуля** - певна задача ЛП. В

модулі автоматично формується спряжена (двоїста) задача. **Виходи модуля а)** розв'язання пари задач; **г)** приклад висновків, що може зробити менеджер, дивлячись на ці розв'язання.

Вхідні дані технологічна матриця:

$$Aa := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

обмеження:

$$Bb := \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ціни:

$$Cc := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

М2 Прямая задача. Записуємо цільову функцію, екстремум якої шукаємо:

$$Dp(xx1, xx2) := Cc1 \cdot xx1 + Cc2 \cdot xx2$$

Записуємо початкові значення пошукуваних змінних: $xx1 := 1$ $xx2 := 1$

Записуємо систему обмежень (рівностей, нерівностей)

$$\text{Given} \quad xx1 \geq 0 \quad xx2 \geq 0$$

$$Aa_{1,1} \cdot xx1 + Aa_{1,2} \cdot xx2 \leq Bb_1 \quad Aa_{2,1} \cdot xx1 + Aa_{2,2} \cdot xx2 \leq Bb_2 \quad Aa_{3,1} \cdot xx1 + Aa_{3,2} \cdot xx2 \leq Bb_3$$

і отримуємо (не завжди) розв'язання: $\begin{pmatrix} x1opp \\ x2opp \end{pmatrix} := \text{Maximize}(Dp, xx1, xx2)$

$$\text{Сумдох} := Dp(x1opp, x2opp)$$

$$x1opp = 5.5$$

$$x2opp = 3.5$$

$$\text{Сумдох} = 23.5$$

М3 Двоїста задача. Записуємо цільову функцію, екстремум якої шукаємо:

$$Dd(yy1, yy2, yy3) := Bb1 \cdot yy1 + Bb2 \cdot yy2 + Bb3 \cdot yy3$$

Записуємо початкові значення пошукуваних змінних: $yy1 := 1$ $yy2 := 1$
 $yy3 := 1$

Записуємо систему обмежень (рівностей, нерівностей)

$$\text{Given} \quad yy1 \geq 0 \quad yy2 \geq 0 \quad yy3 \geq 0$$

$$Aa_{1,1} \cdot yy1 + Aa_{2,1} \cdot yy2 + Aa_{3,1} \cdot yy3 \geq Cc_1 \quad Aa_{1,2} \cdot yy1 + Aa_{2,2} \cdot yy2 + Aa_{3,2} \cdot yy3 \geq Cc_2$$

і отримуємо (не завжди) розв'язання: $\begin{pmatrix} y1op \\ y2op \\ y3op \end{pmatrix} := \text{Minimize}(Dd, yy1, yy2, yy3)$

$$\text{Сумвитр} := Dd(y1op, y2op, y3op) \quad y1op = 0.5$$

$$y2op = 0$$

$$y3op = 1.5$$

$$\text{Сумвитр} = 23.5$$

Приклад висновків, що може зробити менеджер, дивлячись на ці результати:

$$\text{Зайве_дуб} := Bb_1 - Aa_{1,1} \cdot x1opp - Aa_{1,2} \cdot x2opp$$

$$\text{Зайве_дуб} = 0$$

$$\text{Зайве_лак} := Bb_2 - Aa_{2,1} \cdot x1opp - Aa_{2,2} \cdot x2opp$$

$$\text{Зайве_лак} = 6$$

$$\text{Зайве_цвях} := Bb_3 - Aa_{3,1} \cdot x1opp - Aa_{3,2} \cdot x2opp$$

$$\text{Зайве_цвях} = 0$$

продати надлишок Зайве_лак = 6

Таким чином, якщо у двоїстій задачі якась змінна = оцінка ресурсу дорівнює нулю, то відповідний ресурс не використовується повністю у

оптимальному плані виробництва. Можна зменшити запас ресурсу на відповідну величину, **сумарний дохід не зменшиться. Перевірте!**

В реальних умовах ціни "скачуть", технології вдосконалюються, ресурси...

І тут потрібна програмна система не для розрахунку "оптимального" плану, а для аналізу **"що буде, якщо"**, система для ризик-аналізу, не на базі класично-дурнувятих **"інтервалів довіри"** (як відомо з класики, випадку довірятись не можна), а на підставі конкретних розрахунків для можливих альтернатив зовнішніх умов та власних дій.

Висновки

Розроблено набір базових модулів для комплексного аналізу і розв'язання задач ЛП альтернативними методами: графічним, пошуковим, нечітким, на базі теорії двоїстості. Усі модулі випробувані і вони можуть легко бути модифіковані на вищі розмірності задач.

Розроблені модулі дозволяють розв'язувати і нелінійні задачі. Модулі можна переносити простим копіюванням в інші документи.

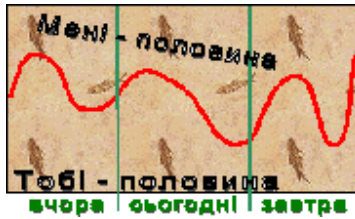
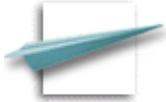


Рис. 1 Схема системи



4.3 Дискретні задачі оптимізації при обмеженнях. Задача розподілення виробничих ресурсів в часі

BUSINESS AND FINANCE Allocating Production Resources

Вступ. Постановка задачі

В попередніх роботах ми оптимізували розподілення узагальнених ресурсів "впоперек" - між виробничими елементами, між виробами (скільки випускати столів і стільців). В цій роботі ми продовжуємо ділити ресурси "впоперек" - між працею і капіталом, але, крім того, і "вздовж" - в часі по рокам певного планового періоду.

Друга особливість цієї роботи, в тому, що вона взята - з ресурсного центру Mathcad 2000 Pro (звідки саме - дивись заставку вище). В свою чергу цей документ розроблено на базі іншого першоджерела (наводимо посилання з даного документу) :

Note: This example is based on an example in Section 3.6 of *Production and Operations Analysis* by Steven Nahmias, second edition, published by Irwin in 1993. Тобто, вчимось поважати авторські права, - на інтелектуальну власність.

Третя особливість роботи - частину текстів подано і в оригіналі. Не довіряйте перекладам!

Четверта - розв'язуємо задачу високої розмірності (40 рівнянь), але вбудованим методом оптимізації. Закладаємо у чорний ящик вхідні дані - отримуємо відповідь. Чи можна їй вірити? Чи гарно це взагалі? Щоб придумати, написати, відлагодити програму оптимізації на класичних мовах програмування потрібен місяць роботи, щоб вижити, треба писати такі програми за 1-10 годин. Тому необхідно навчитися ефективно використовувати вже створене. Чи добре, що мало хто сам собі пече хліб, шиє одяг, пише програми. Певним боком - недобре, але іншого поки не видно.

Завдання

1. На базі даного документу розробіть програму для обчислення ризику (при умовах розкиду прогнозних даних)

2. Модифікуйте документ на випадок довільного числа планових періодів 3-12.

Опис задачі

This QuickSheet solves a complex resource allocation problem using Linear Programming.

The problem is to meet a forecasted demand, D_p , during each of six time periods by adjusting production levels through the hiring and firing of workers in each time period. A predicted productivity, K_{nt} , per worker for each time period is also available for the model. The number of workers hired and fired in period, t , is given by H_t and F_t , and the inventory level in period, t , is I_t . There's a cost associated with hiring and firing and with any inventory level. The work force in period, t , is W_t , and the units produced in period, t , are given by P_t .

Write the cost, C , as a function of all five of these variables, since you want complete output from the model. The sum on the right, however, involves only the hiring and firing costs and the inventory cost.

Цей документ розв'язує складну проблему розподілення ресурсів засобами лінійного програмування.

Проблема в тому, щоб задовольняти прогнозований попит D_p на протязі 6-ти періодів часу підтримуючи потрібний рівень виробництва наймом/звільненням робітників. Задана для кожного періоду прогнозна продуктивність K_{nt} одного робітника. Означимо через H_t та F_t кількості найнятих, звільнених робітників в період t , а через I_t - рівень інвестицій. Вважаємо, що витрати обумовлені наймом/звільненням та інвестиціями. Кількість працюючих в період t - W_t , а обсяг випуску продукції в той же період - P_t .

Визначимо вартість $C()$, як функцію усіх п'яти визначених вище змінних: H - найнято; F - звільнено; I - інвестиції; W - кількість працюючих; P - випуск продукції; якщо ми хочемо повністю урахувати усі чинники в моделі. В даному прикладі враховано тільки три складових.

Кількість періодів планування $T_p := 6$ ORIGIN# 1

$$C(H, F, I, W, P) := 500 \sum_{t=1}^{T_p} H_t + 1000 \sum_{t=1}^{T_p} F_t + 80 \sum_{t=1}^{T_p} I_t$$

Objective function C:

Цільова функція C:

$$CF(H, F, I, W, P) := \sum_{t=1}^{Tp} (500H_t + 1000F_t + 80I_t)$$

Задаємо такі граничні значення змінних

$$W_6 := 0$$

$$P_6 := 0$$

$$I_6 := 600$$

$$F_6 := 0$$

$$H_6 := 0$$

Задаємо* початкові значення для I та W:

$$I_0 = 500$$

$$W_0 = 650$$

Demand forecast for each of the six time intervals, entered in an input table:

Задаємо* вхідну таблицю прогнозованого попиту для 6-ти інтервалів

Production rate forecast in units produced per worker in each time period:

Задаємо вхідну таблицю прогнозу продуктивності праці для 6-ти інтервалів

D =

	1
1	600
2	1200
3	2200
4	3200
5	1000
6	600

Kn :=

	1
1	2.931
2	3.517
3	2.638
4	3.81
5	3.224
6	2.198

Now, write the constraints for each of the six time periods inside a Solve Block:

Тепер, в середині Розв'язуючого Блока записуємо обмеження для 6-ти періодів:

Given

$$\left. \begin{array}{ll} W_1 - W_0 - H_1 + F_1 = 0 & W_4 - W_3 - H_4 + F_4 = 0 \\ W_2 - W_1 - H_2 + F_2 = 0 & W_5 - W_4 - H_5 + F_5 = 0 \\ W_3 - W_2 - H_3 + F_3 = 0 & W_6 - W_5 - H_6 + F_6 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Блок балансу праці:} \\ \text{Зміна кількості працюючих =} \\ \text{прийняті - звільнені} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{ll} P_1 - I_1 + I_0 = D_1 & P_4 - I_4 + I_3 = D_4 \\ P_2 - I_2 + I_1 = D_2 & P_5 - I_5 + I_4 = D_5 \\ P_3 - I_3 + I_2 = D_3 & P_6 - I_6 + I_5 = D_6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Блок балансу виробничої потужності:} \\ \text{Попит = Виробнича потужність +} \\ \text{попередні інвестиції - поточні інвестиції} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{ll} P_1 - K_{n1} \cdot W_1 = 0 & P_4 - K_{n4} \cdot W_4 = 0 \\ P_2 - K_{n2} \cdot W_2 = 0 & P_5 - K_{n5} \cdot W_5 = 0 \\ P_3 - K_{n3} \cdot W_3 = 0 & P_6 - K_{n6} \cdot W_6 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Блок балансу продуктивності робочої} \\ \text{сили і виробничої потужності:} \\ \text{Виробнича потужність} = (\text{продуктивність} \\ \text{праці робітника}) * (\text{кількість робітників}). \\ \text{Constraints relating production to work} \\ \text{force} \end{array}$$

$$W \geq 0 \quad P \geq 0 \quad I \geq 0 \quad F \geq 0 \quad H \geq 0 \quad \text{Nonnegativity constraints обмеження} \\ \text{здорового глузду}$$

$$I_6 = 600 \quad \text{Бажані інвестиції на останньому} \\ \text{інтервалі. Target value for final inventory}$$

Use linear programming to find the values for H, F, I, W, and P that satisfy the predicted demand with minimum cost:

$$\left(\begin{array}{c} H \\ F \\ I \\ W \\ P \end{array} \right) := \text{Minimize}(CF, H, F, I, W, P) \quad \text{This is the minimum cost.}$$

Зверніть увагу на таку дрібничку - у лівій частині цього заключного виразу блока оптимізації у векторних дужках стоять змінні H, F, I, W, P - це пошукувані ОПТИМАЛЬНІ значення; у правій частині у дужках подано: ім'я цільової функції (повинно бути унікальним!) а потім список змінних, по яким виконується оптимізація. Подивимось ще раз на цільову функцію. Не будемо плутати те, що праворуч і те, що ліворуч

$$CF(H, F, I, W, P) = \sum_{t=1}^{Tp} (500H_t + 1000F_t + 80I_t)$$

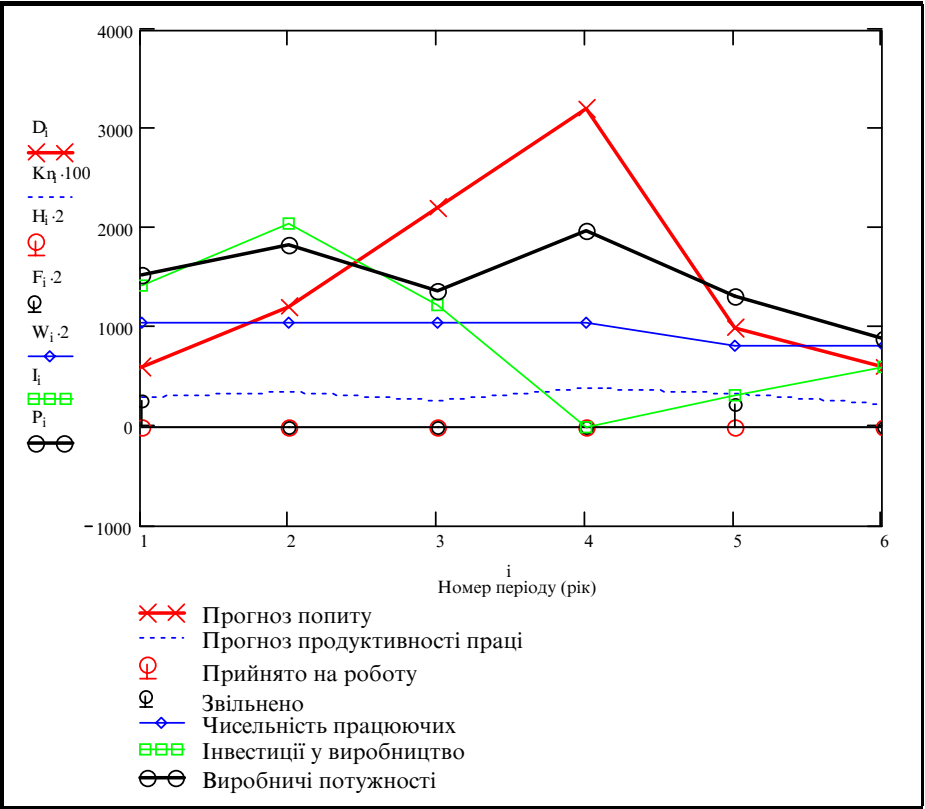
А тепер оформимо (в прототипі це не робилось) результати у виді зручного стенду для "що буде якщо" - аналізу.

Результати оптимізації (мінімум витрат)
 Найнято Звільнено Персонал Інвестиції Потужність
 шт/рік

Прогнози
 Попит шт/рік
 Продуктивність

H =	F =	W =	I =	P =	D =	Kn =																																																																																																		
<table><tr><td></td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td></tr><tr><td>5</td><td>0</td></tr><tr><td>6</td><td>-0</td></tr></table>		1	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	-0	<table><tr><td></td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>130</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>-0</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td></tr><tr><td>5</td><td>114</td></tr><tr><td>6</td><td>-0</td></tr></table>		1	1	130	2	0	3	-0	4	0	5	114	6	-0	<table><tr><td></td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>520</td></tr><tr><td>2</td><td>520</td></tr><tr><td>3</td><td>520</td></tr><tr><td>4</td><td>520</td></tr><tr><td>5</td><td>406</td></tr><tr><td>6</td><td>406</td></tr></table>		1	1	520	2	520	3	520	4	520	5	406	6	406	<table><tr><td></td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1422.8</td></tr><tr><td>2</td><td>2050</td></tr><tr><td>3</td><td>1220.5</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td></tr><tr><td>5</td><td>308.2</td></tr><tr><td>6</td><td>600</td></tr></table>		1	1	1422.8	2	2050	3	1220.5	4	0	5	308.2	6	600	<table><tr><td></td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1523</td></tr><tr><td>2</td><td>1827</td></tr><tr><td>3</td><td>1371</td></tr><tr><td>4</td><td>1979</td></tr><tr><td>5</td><td>1308</td></tr><tr><td>6</td><td>892</td></tr></table>		1	1	1523	2	1827	3	1371	4	1979	5	1308	6	892	<table><tr><td></td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>600</td></tr><tr><td>2</td><td>1200</td></tr><tr><td>3</td><td>2200</td></tr><tr><td>4</td><td>3200</td></tr><tr><td>5</td><td>1000</td></tr><tr><td>6</td><td>600</td></tr></table>		1	1	600	2	1200	3	2200	4	3200	5	1000	6	600	<table><tr><td></td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2.931</td></tr><tr><td>2</td><td>3.517</td></tr><tr><td>3</td><td>2.638</td></tr><tr><td>4</td><td>3.81</td></tr><tr><td>5</td><td>3.224</td></tr><tr><td>6</td><td>2.198</td></tr></table>		1	1	2.931	2	3.517	3	2.638	4	3.81	5	3.224	6	2.198
	1																																																																																																							
1	0																																																																																																							
2	0																																																																																																							
3	0																																																																																																							
4	0																																																																																																							
5	0																																																																																																							
6	-0																																																																																																							
	1																																																																																																							
1	130																																																																																																							
2	0																																																																																																							
3	-0																																																																																																							
4	0																																																																																																							
5	114																																																																																																							
6	-0																																																																																																							
	1																																																																																																							
1	520																																																																																																							
2	520																																																																																																							
3	520																																																																																																							
4	520																																																																																																							
5	406																																																																																																							
6	406																																																																																																							
	1																																																																																																							
1	1422.8																																																																																																							
2	2050																																																																																																							
3	1220.5																																																																																																							
4	0																																																																																																							
5	308.2																																																																																																							
6	600																																																																																																							
	1																																																																																																							
1	1523																																																																																																							
2	1827																																																																																																							
3	1371																																																																																																							
4	1979																																																																																																							
5	1308																																																																																																							
6	892																																																																																																							
	1																																																																																																							
1	600																																																																																																							
2	1200																																																																																																							
3	2200																																																																																																							
4	3200																																																																																																							
5	1000																																																																																																							
6	600																																																																																																							
	1																																																																																																							
1	2.931																																																																																																							
2	3.517																																																																																																							
3	2.638																																																																																																							
4	3.81																																																																																																							
5	3.224																																																																																																							
6	2.198																																																																																																							

Сумарні витрати $C(H, F, I, W, P) = 692364$



Введіть
 Ваш
 прогноз
 попиту:

D ≡

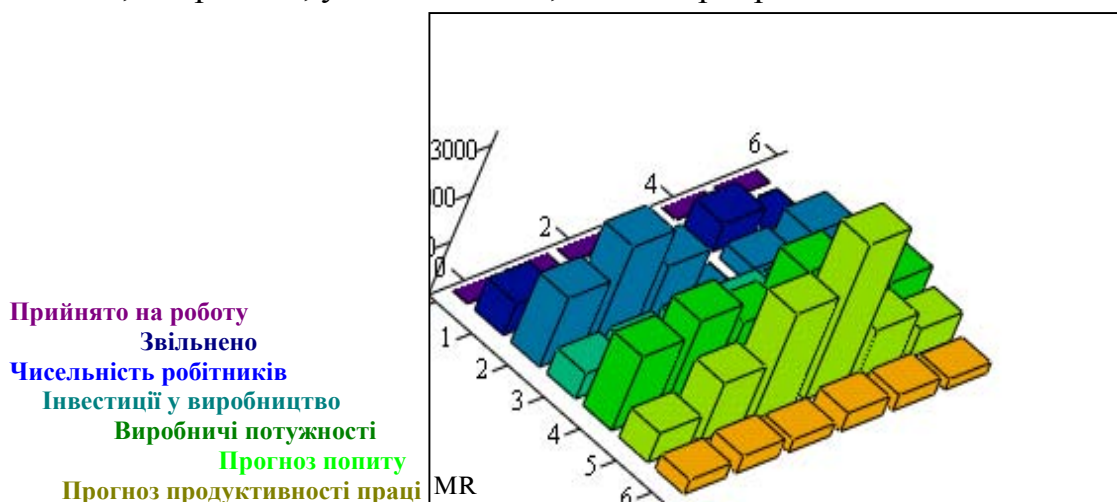
Ввід стартових: інвестиції $I_0 = 500$; чисельність робітників $W_0 = 650$

Look at the variable W to see what the work force levels should be for each time period. Since the work force must be an integer, round these results up. (You would then want to feed these rounded values back into C, since the rounding will raise the cost slightly).

Поданий вище англомовний коментар відноситься до конкретної ситуації, якої може не бути на стенді при інших значеннях змінних.

Пробуємо змінювати дані, спостерігаємо наслідки і бачимо, що наш стенд недостатньо інтелектуальний - він нічому не не вчиться нічого не запам'ятовує. Прогнози попиту мають певні розкиди, і згідно канонам системного аналізу Як мінімум слід доповнити систему аналізом чутливості. Наприклад, з видачею трьох оптимальних планів - а) для номінального та для б) найгіршого і б) найкращого (для нас) прогнозів попиту та вартості робочої сили.

Необмежено можна вдосконалювати подання результатів. Нижче подано альтернативу двомірним графікам - тримірна стовпчикова діаграма, зроблена в Mathcad. Більше можливостей у спеціалізованих пакетів, наприклад, у пакета Ахунт, тієї ж корпорації.



Контрольні запитання

1. Дайте стисле словесне формулювання виробничої задачі, що є об'єктом даної роботи.
2. Дайте стислий матрично-векторний запис цієї задачі.
3. Як записати оптимізаційну задачу з обмеженням для розв'язання її в середовищі Mathcad.
5. Кількість змінних і обмежень у розглянутій задачі?
6. Запишіть цільову функцію розглянутої задачі?
7. *Ускладнюють чи полегшують оптимізаційну задачу обмеження?

Завдання для самостійного виконання

1. Модифікуйте документ для 8, 10, 12 періодів планування.
2. Модифікуйте документ для обчислення трьох варіантів оптимального плану - під номінальний, песимістичний та оптимістичний прогноз.
3. Модифікуйте документ для аналізу чутливості оптимальної вартості до малих (до 10%) відхилень змінних управління від оптимального плану.
4. Модифікуйте документ для обчислення ризиків (втрат) за рахунок випадкових коливань попиту.

1.8 Оптимальне управління. Задача Марковиця. Варіаційне обчислення.

Вступ. Варіаційні задачі

Досі ми розглядали оптимізаційні задачі, де треба було знайти екстремум функції 2-ох, 3-ох .. змінних.

На практиці зустрічаються оптимізаційні задачі, де треба знайти не декілька чисел, а цілу функцію - оптимальну стратегію управління. Формально, це задача знаходження екстремуму функції безконечного числа змінних (формально неперервна функція задається безконечним числом своїх значень).

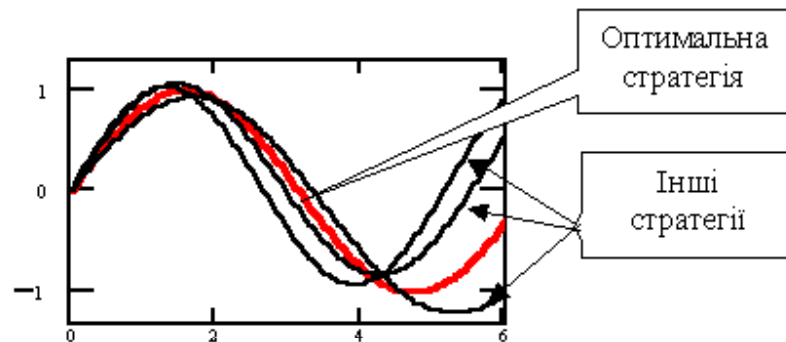


Рис. 1 Варіаційна задача - пошук функцій, що оптимізують певні критерії.

Функцію, що є розв'язанням варіаційної задачі, можна наблизити рядом дискретних значень, можна розкласти в ряд по певним базисним функціям (наприклад, в ряд Фур'є) - тоді варіаційна задача зведеться до звичної задачі оптимізації деякої функції $N < \infty$ змінних.

Особливість варіаційних задач в тому, що розв'язання їх **дуже легко** знаходиться "саме собою", природним способом, і **дуже важко** - математичними методами. Розглянемо декілька прикладів варіаційних задач у нашому оточенні.

Ейфелева, Останкінська башти, башта Шухова мають форму, що дає мінімум ваги при заданій висоті та міцності.

Дроти між стовпами провисають між стовпами не просто так, а по так званій "ланцюговій лінії", що мінімізує зусилля в дроті.

Краплини води на склі приймають форму, яка мінімізує зусилля на поверхні. Подібну форму надають сучасним великим резервуарам для нафти.

Математичне розв'язання варіаційних задач потребує найвищої кваліфікації та просто винахідливості. Нові розв'язання варіаційних задач з'являються дуже рідко, а ті, що відомі - майже усі - **іменні**, наприклад, задача Ейлера, Задача Лагранжа, задача Больца, метод динамічного програмування Белмана, метод принципу максимуму Понтрягіна.

В цьому курсі не ставиться задача систематичного вивчення варіаційного обчислення - це задачі університетського курсу вищої математики. Ми послідовно розглянемо ряд класичних задач, де шукається саме оптимальна стратегія управління.

Першою розглянемо так звану **задачу Марковиця**. З одного боку вона дуже просто розв'язується для окремого випадку. Актуальність цієї задачі зростає - є велика потреба в узагальнених методах її розв'язання.

Постановка задачі

Задачі максимізації повного прибутку, отримання максимальної кількості продукції ніколи не переставали бути актуальними. Традиційно, починаючи з робіт Р. Белмана, викладення дискретного методу динамічного програмування ведеться на прикладі оптимізації сумарного прибутку у багатокроковому виробничому процесі.

Цікаво, що Белман створив дискретний метод динамічного програмування для "поганих" варіаційних задач - дискретних, з "жорсткими" обмеженнями. Він же, разом із Л. Заде запропонував підхід на базі "нечіткої логіки". Цей підхід дозволяє дискретні задачі з обмеженнями типу нерівностей трансформувати у неперервні, такі що можуть бути розв'язані класичними варіаційними методами. Зауважимо, - не пощастило дещо останньому підходу? Особливо у нас, не так переклали суть: точніше це ' розмита логіка ', а ще точніше ' м'яка логіка ' і при тому дуже чітка і однозначна у виконанні певних постулатів і законів. Між іншим, і динамічне програмування зовсім не програмування, а "динамічне планування", якщо точно перевести, а от control - це не контроль, а управління...

Розглянемо два види варіаційних задач: 1) з обмеженнями на припустимі витрати (управляюча дія) типу нерівностей; 2) класичні варіаційні задачі без обмежень.

1.8.1 Задачі максимізації повного прибутку. Задача Марковиця

Розглядаємо дещо ідеалізовану задачу з математичної економіки. Маємо економічну систему, в якій виробляються N видів продукції, що випускаються з темпами $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_N(t)$ (одиниць вимірювання за місяць, квартал, рік). Залежності прирощень темпів випуску від капіталовкладень (інвестицій у розширення виробництва) будемо вважати лінійними для усіх видів виробництв. Задаємо також обмеження на параметри і початкову умову для виробництва.

$$\text{ORIGIN} = 1 \quad \frac{d}{dt} x_i = \sum_{j=1}^N a_{i,j} \cdot y(t)_j \quad a_{i,j} > 0 \quad y(t)_j \leq x(t)_j \quad x(0)_j = c_j$$

$i := 1..N \quad j := 1..N$

Звернемо увагу на виділене нерівність - воно інтерпретується як "поточний розмір інвестицій не повинен бути більше поточного доходу (обсягу виробництва)". Потім, на основі отриманого розв'язання задачі можна буде розглянути більш реалістичні постановки з кредитами, акціонерним, капіталом та ін. Згідно з умовами задачі, потік продукції $x_{t,i}$ розподіляється на дві складові: $x_{t,i}$ та $z_{t,i}$ - темп (потік) інвестицій у розширення виробництва і темп прибутку (що використовується десь за межами системи, тобто:

$$z_{t,i} = x_{t,i} - y_{t,i}$$

Потрібно визначити оптимальну стратегію інвестицій (не плутати з поточними витратами на виробництво видів продукції), що максимізує повний прибуток:

$$JN = \int_0^T \sum_{j=1}^N (x_{t,i} - y_{t,i}) dt$$

Одномірна задача

Розглянемо розв'язання одномірної задачі. Розв'язання багатомірних задач має ту ж структуру і властивості, але відповідно воно більш трудомістке - більше змінних, більше рівнянь. Оскільки ми робимо працюючий документ, що потім буде модифіковано для випадку N змінних, то використовуємо означення з індексами (наприклад єдиний в одномірній задачі елемент технологічної матриці ми означаємо як a_{11}).

Записуємо диференціальне рівняння: $\frac{d}{dt} x(t)_i = a_{11} \cdot y(t)_1$ (= обмеження, що

задане диференціальним рівнянням), обмеження типу нерівність для коефіцієнта a_{11} :

$a_{11} > 0$, початкова умова - значення для $x(t)$ при $t = 0$: $x(0)_1 = c_1$ і,

нарешті, функціонал $J_1 = \int_0^T (x(t)_1 - y(t)_1) dt$

Ціль оптимізації - максимум функціоналу. Управляюча змінна (те, що від нас залежить) - функція інвестицій $Y_{opt}(t)$.

Розв'язання задачі

Розв'яжемо диференціальне рівняння відносно x :

$$\boxed{\frac{d}{dt} x(t)_1 = a_{1,1} \cdot y(t)_1} \quad \boxed{dx_1 = a_{1,1} \cdot y(t)_1 \cdot dt} \quad \boxed{x(t)_1 = c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^T y(t)_1 dt} \quad (1)$$

Підставимо вираз для $x(t)_1$ у функціонал:

$$J_1 = \int_0^T (x(t)_1 - y(t)_1) dt \quad J_1 = \int_0^T \left(c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^T y(t_1)_1 dt_1 - y(t)_1 \right) dt \quad (2)$$

$$\text{де } y(t)_1 \text{ задовольняє умові} \quad 0 \leq y(t)_1 \leq c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^T y(t)_1 dt \quad (3)$$

Ця умова інтерпретується так: не можна інвестувати більше, ніж заробляється. Ми бачимо, що права частина нерівності - це вираз для x_1 (3).

Завдання для самостійного виконання. За (1-33(якщо не підглядати)) бали, виходячи тільки з інтуїції, опишіть характер оптимального управління (пропорційно, спочатку.. збільшувати, потім зменшувати та ін.) $Y_{opt}(t)$.

Змінюємо порядок інтегрування у (2) і отримуємо:

$$J_1 = c_1 \cdot T + \int_0^T [a_{1,1} \cdot (T - t) - 1] \cdot y(t_1)_1 dt_1 \quad (4)$$

Зауваження. Відносно отриманого виразу може виникнути ряд питань. Чи можна змінювати порядок інтегрування? - Можна, бо оператор інтегрування лінійний. Дещо заважає осмисленню те що внутрішній і зовнішній інтеграл (у виразі (2)) беруться по змінним що мають однакову розмірність - час. Слід тільки дотримуватись певних правил при визначенні границь інтегрування. Неважко дати змістовну інтерпретацію кратному інтегралу при зміні порядку інтегрування, якщо замінити його подвійною сумою, а змінні t, t_1 на індекси k, l . Тоді

ми побачимо, що ми замінюємо підсумовування стовпців на підсумовування рядків. по тій же області.

Завдання для самостійного виконання. За 19 балів виведіть (4) з (2).

Проаналізуємо інтеграл (4). Щоб функціонал був максимальним, підінтегральний вираз в кожний момент часу повинен бути максимально можливим. Як цього досягнути? Бачимо - підінтегральний вираз - це добуток виразів $[a_{1,1} \cdot (T - t) - 1]$ та $y(t)_1$. Перший множник - функція часу, на яку ми не маємо впливу, другий множник - $y(t)_1$ - це пошукувана управляюча функція - розмір інвестицій у розширення виробництва.

Як же слід сформулювати цю функцію? Перший множник - функція часу, що в момент $t = 0$, при умові $a_{1,1} \cdot T > 1$, стає меншою нуля. На підставі цього і вибираємо стратегію у правління (техніко-економічним процесом "інвестиції-виробництво").

При заданих нами додаткових умовах відносно a_{11} і T . що є природними, **функція $Y_{opt}(t)$ повинна бути максимально можливою там, де перший множник додатний, і нульовою, там де він від'ємний.**

Тобто, в деякий момент часу T_1 має місце "переключення" управління з стратегії "усе у виробництво" в стратегію "усе у накопичення". Увага! Далі для скорочення означимо **$Y_{opt}(t) = y_1(t)$.**

Враховуючи обмеження (3) на $y_1(t)$ маємо:

$$y_1(t) = \begin{cases} \left(c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^T y_1(t) dt \right) & \text{if } 0 \leq t \leq T_1 \\ 0 & \text{if } T_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (5)$$

Отримаємо явний вираз для $y_1(t)$. Продиференціюємо рівняння (5):

$$y_1(t) = c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^T y_1(t) dt \quad \frac{d}{dt} y_1(t) = a_{1,1} \cdot y_1(t) \quad \frac{d}{dt} y_1(t) - a_{1,1} \cdot y_1(t) = 0$$

Розв'язуємо отримане нами звичайне лінійне однорідне дифрівняння першого порядку (САМОСТІЙНО?).

Записуємо характеристичне рівняння $s - a_{11} = 0$ і знаходимо його корінь $s = a_{11}$

Записуємо розв'язання дифрівняння, враховуємо граничне (початкове) значення $x_1(0)$ і те, що оптимальне управління починається з $y_1(0) = x_1(0)$:

$$\boxed{y1(t) = c1 \cdot e^{a_{11} \cdot t}} \quad - \text{ до моменту переключення } T1! \quad (6)$$

Розробка стенда для аналізу інвестиційної політики

Сьогодні нерационально і дуже замало отримати якесь конкретне розв'язання інженерно - економічної задачі. Прикладну програму розрахунку слід оформити у виді стенду для "що-буде-якщо" аналізу. Програми такого типу поширені сьогодні як і гороскопи. Наша, на відміну від ринкових прототипів відкрита. Назва стенду є певним перебільшенням - ми розглядаємо тільки одновимірну задачу Марковиця. Вводимо значення параметрів:

$$a_{11} := 0.27 \quad c1 := 2 \quad T := 12 \quad t := 0, 0.5..12$$

Визначимо момент $T1$ переключення управління (ще раз див. (4)) (з стратегії "усе у виробництво" в стратегію "усе у накопичення/споживання")

$$a_{11} \cdot (T1 - t) - 1 = 0 \text{ solve, } t1 \rightarrow \frac{(a_{11} \cdot T1 - 1)}{a_{11}} \quad T1 := \frac{(a_{11} \cdot T - 1)}{a_{11}} \quad T1 = 8.3$$

Прокоментуємо ці вирази. Ми використали символьний процесор для розв'язання рівняння відносно змінної $T1$. Але нам прийшлося ввести штучні змінні без числових значень, тому що пакет поки примусово підставляє у символьні вирази значення тих змінних, яким ці були вже присвоєні. Потім ми скопіювали результат (у другий вираз). повернулися до старих змінних і вивели числовий результат.

Символьні процесори вийшли з "підпілля" (вони ж були сховані у компіляторах мов програмування) і швидко еволюціонують. Вже сьогодні діє де-факто стандарт: **усі алгебраїчні перетворення, виводи, розв'язання алгебраїчних і диференціальних рівнянь виконувати в символьному процесорі.**

Причина - помилки (переплутали знак, загубили складову...) в інженерних розрахунках і прикладних програмах стають все більш дорогими, вагомими! Особливо небезпечні "нелетальні помилки" типу: результат відрізняється від коректного на 5-15%. Це непомітно може привести фірму до банкрутства на протязі року, якщо вона буде користуватись такою програмою планування і прогнозування (такі випадки були).

Увага, для початківців. Тут використано не індексовані змінні, а схожі на них імена змінних, що набираються так $a.11$, $x.1$, $y.1$. Коли курсор виведено з виразу, крапка зникає, а вирази стають такими: a_{11} ,

x_1 , y_1 . Індексована змінна - це масив, змінна з нижнім індексом - скалярна змінна.

Записуємо рівняння для темпу виробництва $x_1(t)$, інвестицій (підставили (6) у (5)) $y_1(t)$, "прибутку" $z_1(t)$, сумарного прибутку $Sz(t)$:

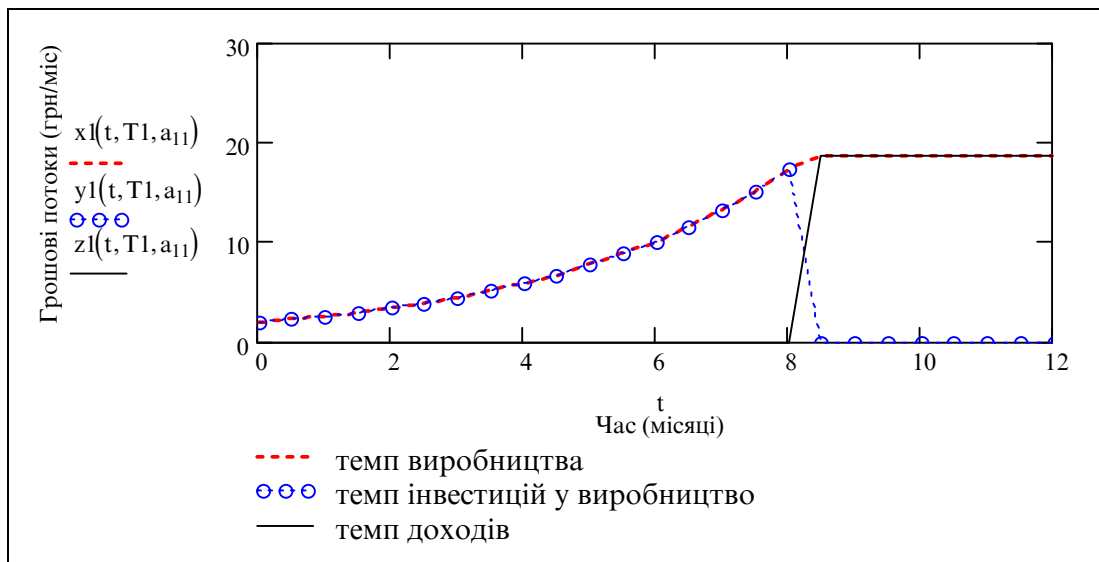
$$T_1 := \frac{(a_{11} \cdot T - 1)}{a_{11}} \quad y_1(t, T_1, a_{11}) := \begin{cases} \left(c_1 + a_{11} \cdot \int_0^t c_1 \cdot e^{a_{11} \cdot t} dt \right) & \text{if } 0 \leq t \leq T_1 \\ 0 & \text{if } T_1 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$x_1(t, T_1, a_{11}) := \begin{cases} y_1(t, T_1, a_{11}) & \text{if } 0 \leq t \leq T_1 \\ y_1(T_1 - .01, T_1, a_{11}) & \text{if } T_1 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$z_1(t, T_1, a_{11}) := x_1(t, T_1, a_{11}) - y_1(t, T_1, a_{11}) \quad Sz(t, T_1, a_{11}) := \int_0^t z_1(t, T_1, a_{11}) dt$$

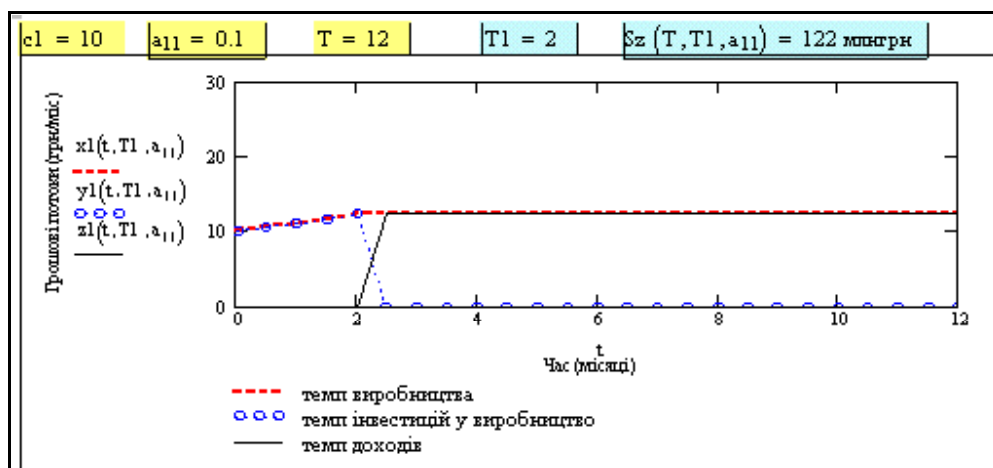
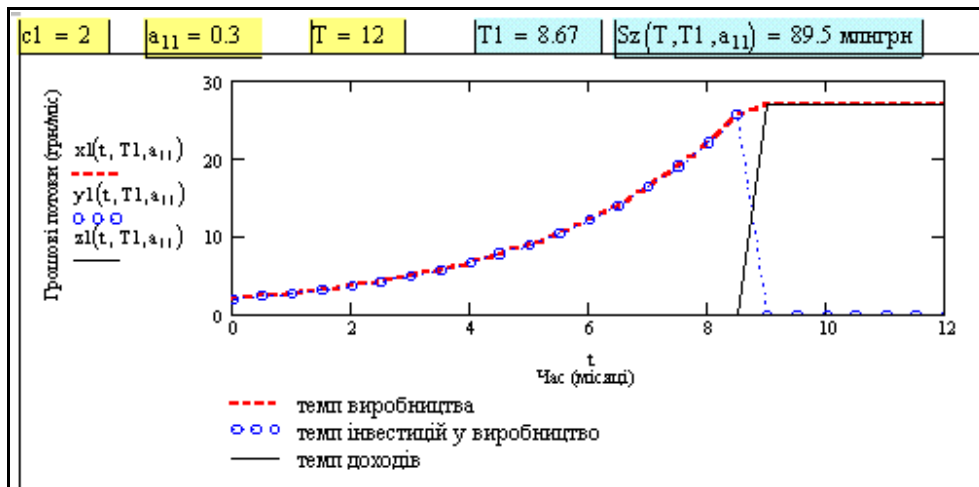
Збираємо входи і виходи в стенд:

$c_1 = 2$	$a_{11} = 0.27$	$T = 12$	$T_1 = 8.3$	$Sz(T, T_1, a_{11}) = 69.4 \text{ млн грн}$
-----------	-----------------	----------	-------------	---



Зауваження. Числа в прикладі взято умовні.

Подаємо кілька копій екрану для інших значень параметрів



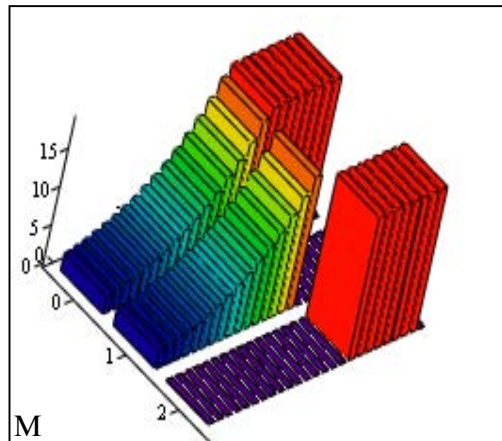
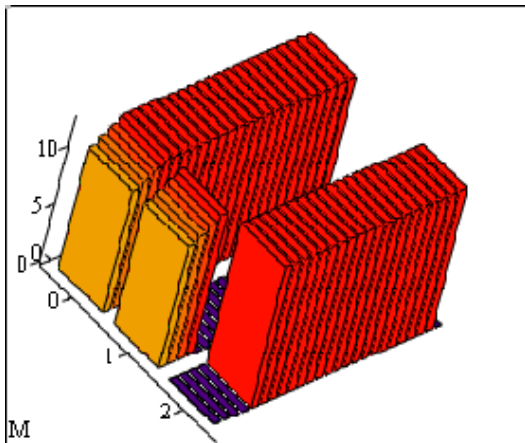
Отримане розв'язання дійсно оптимальне - спробуємо змінити момент переключення

$$Sz(T, T1, a_{11}) = 69.4 \text{ млнгрн}$$

$$Sz(T, T1 \cdot 0.9, a_{11}) = 67.9 \text{ млнгрн}$$

$$Sz(T, T1 \cdot 1.1, a_{11}) = 67.4 \text{ млнгрн}$$

Подаємо вихід у виді тримірної стовпчикової діаграми. Для одномірної задачі це майже не дає додаткової інформації, але це бажане для багатомірних задач.



На цих графіках подано дві ситуації - виробництва з малою і великою віддачею інвестицій у виробничі потужності.

Завдання для самостійного виконання

1. Спробуйте розв'язати задачу для випадку, коли бюджетне обмеження $y_1(t) \leq x_1(t)$ є м'яким (нечітким) 55 балів.
2. Розробіть програму для розв'язання задачі (методом динамічного програмування та ін.) для випадку, коли диференціальна віддача інвестицій у розширення виробництва є нелінійним: $\frac{d}{dt}x(t)_i = f_n(y(t)_1)$, де $f_n(y(t)_1)$ - нелінійна функція а) випукла, б) увігнута, 3) логістична 299 балів.
3. Модифікуйте стенд так, щоб вхідні параметри вводилися біля графіка - 15 балів.
4. Модифікуйте стенд так, щоб виводились одночасно три процеси - номінальний і для $+\Delta p$, $-\Delta p$ - заданого розкиду деякого параметра - 25 балів.
5. Розробіть програму для розв'язання двомірної задачі Марковиця 75 балів.
6. Розробіть програму для розв'язання тримірної задачі Марковиця 100 балів.

2. Класичні варіаційні задачі

Як було сказано на початку розділу, нові наукові підходи, нові програмно - апаратні можливості дозволяють ефективно використовувати класичні варіаційні методи для розв'язання задач

прогнозування, планування і управління соціо–техніко-економічними системами. Для того, щоб ефективно застосовувати ці методи треба їх освоїти до рівня напівавтоматичних навичок. Далі подано розв'язання типових, "навчальних" варіаційних задач. Новим є застосування засобів математичного пакета. Не розглядаються якісь техніко-економічні інтерпретації цих задач - це залишено для самостійного виконання.

Задача Ейлера. Приклад 1

Постановка задачі

Потрібно знайти функцію $Y_{opt}(t)$, що при заданих граничних умовах: $Y(0) = 2$ $Y(1) = 0$ або в мові пакета: $y_0 := 2$; $y_k := 0$; $t_0 := 0$; $t_k := 1$ дає мінімум інтегральному функціоналу:

$$J(y(t)) = \int_0^T \left[y(t)^2 + 4 \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \right] dt \quad \max \{ J(y(t)) \} ??$$

Розв'язання задачі

1. Записуємо функцію - підінтегральний вираз функціонала (функцію y та її похідну записуємо як звичайні змінні: y та py).

$$F(y, py) := y^2 + 4py^2$$

2. Отримуємо відповідні похідні від функції (в середовищі пакету немає спецозначень для окремих похідних)

$$\frac{d}{dy} F(y, py) \rightarrow 2 \cdot y \quad \frac{d}{dpy} F(y, py) \rightarrow 8 \cdot py$$

3. Записуємо рівняння Ейлера у загальному виді, підставляємо вирази для похідних, виконуємо алгебраїчні перетворення.

$$\frac{d}{dy} F(y, py) - \frac{d}{dt} \frac{d}{dpy} F(y, py) = 0 \Rightarrow 2 \cdot y(t) - 8 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} y(t) - 0.25 \cdot y(t) = 0$$

4. Розв'язуємо отримане дифрівняння (в даному випадку - звичайне, лінійне, другого порядку), використовуємо символний процесор для знаходження коренів характеристичного рівняння s_1 та s_2 .

$$s^2 - 0.25 = 0 \text{ solve, } s \rightarrow \begin{pmatrix} .50000000000000000000 \\ -.50000000000000000000 \end{pmatrix}; \quad s_1 := 0.5; \quad s_2 := -0.5.$$

Запишемо розв'язання цього рівняння у загальному виді

$$y(t) = C1 \cdot e^{s1 \cdot t} + C2 \cdot e^{s2 \cdot t}$$

З граничних умов визначаємо постійні C1 та C2.

при $t0 := 0$ $y0 := 2$, тобто $y(0) = C1 \cdot e^{s1 \cdot 0} + C2 \cdot e^{s2 \cdot 0} = C1 + C2$

при $tk := 1$ $yk := 0$, тобто $y(1) = C1 \cdot e^{s1 \cdot 1} + C2 \cdot e^{s2 \cdot 1} = C1 \cdot e^{0.5} + C2 \cdot e^{-0.5}$

Використовуємо розв'язуючий блок і знаходимо C1 та C2 у числовому виді.

$$Cv1 := 1 \quad Cv2 := 2$$

Giver

$$\left. \begin{aligned} Cv1 \cdot e^{s1 \cdot t0} + Cv2 \cdot e^{s2 \cdot t0} &= y0 \\ Cv1 \cdot e^{s1 \cdot tk} + Cv2 \cdot e^{s2 \cdot tk} &= yk \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} := \text{Find}(Cv1, Cv2) \quad \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.16 \\ 3.16 \end{pmatrix}$$

Для узагальнення і впевненості - визначаємо C1 та C2 у символьному виді:

Giver

$$\left. \begin{aligned} C1 \cdot e^{S1 \cdot T0} + C2 \cdot e^{S2 \cdot T0} &= Y0 \\ C1 \cdot e^{S1 \cdot Tk} + C2 \cdot e^{S2 \cdot Tk} &= Yk \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Find}(C1, C2) \rightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{(\exp(S2 \cdot Tk) \cdot Y0 - Yk \cdot \exp(S2 \cdot T0))}{(\exp(S2 \cdot Tk + S1 \cdot T0) - \exp(S1 \cdot Tk + S2 \cdot T0))} \\ &\frac{-(-\exp(S1 \cdot T0) \cdot Yk + Y0 \cdot \exp(S1 \cdot Tk))}{(\exp(S2 \cdot Tk + S1 \cdot T0) - \exp(S1 \cdot Tk + S2 \cdot T0))} \end{aligned} \right]$$

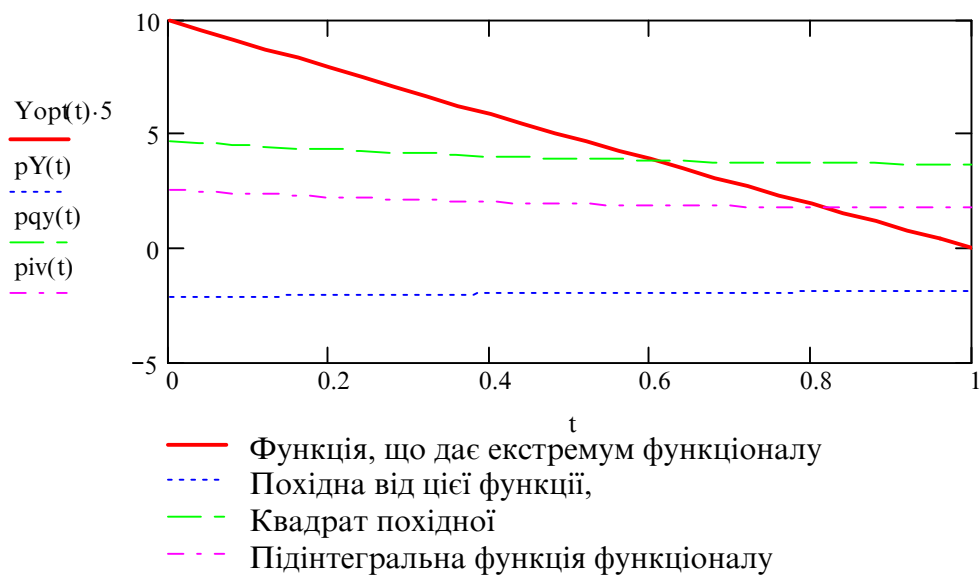
$$\begin{pmatrix} C1sim \\ C2sim \end{pmatrix} := \left[\begin{aligned} &\frac{(\exp(s2 \cdot tk) \cdot y0 - yk \cdot \exp(s2 \cdot t0))}{(\exp(s1 \cdot t0 + s2 \cdot tk) - \exp(s2 \cdot t0 + s1 \cdot tk))} \\ &\frac{-(-\exp(s1 \cdot t0) \cdot yk + y0 \cdot \exp(s1 \cdot tk))}{(\exp(s1 \cdot t0 + s2 \cdot tk) - \exp(s2 \cdot t0 + s1 \cdot tk))} \end{aligned} \right]$$

$$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.16 \\ 3.16 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C1sim \\ C2sim \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.16 \\ 3.16 \end{pmatrix}$$

Бачимо, що отримані альтернативними методами розв'язання для C1 та C2 співпали. Записуємо робочі вирази для отриманої оптимальної функції (= стратегії, політики, управління) $Y_{opt}(t)$, похідної $pY(t)$ підінтегрального виразу $piv(t)$ і будуємо графіки. Бачимо, що функція $Y_{opt}(t)$, що дає мінімум функціоналу, досить близька до прямої. Чи не можна було прийти до цього розв'язання більш легкими шляхами??

$$Y_{opt}(t) := (C1 \cdot e^{s1 \cdot t} + C2 \cdot e^{s2 \cdot t}); \quad Nn := 25; \quad t := t0, t0 + \frac{(tk - t0)}{Nn} .. tk$$

$$pqy(t) := \left(\frac{d}{dt} Y_{opt}(t) \right)^2; \quad piv(t) := \frac{d}{dt} Y_{opt}(t) + \left(\frac{d}{dt} Y_{opt}(t) \right)^2; \quad pY(t) := \frac{d}{dt} Y_{opt}(t)$$



Задача Ейлера. Приклад 2

Розв'яжемо ще одну подібну варіаційну задачу. Використаємо при цьому "нові інформаційні технології", що в перекладі з наукової мови на побутову означає - скопіюємо і відредагуємо попередній документ. Перевіримо, чи може цей документ доведений до рівня фрейма - програми куди згідно сценарію підставляються параметри задачі класу "варіаційна задача Ейлера". Ще раз нагадаємо - задача інженера не виконання якогось розрахунку, а створення програми для виконання певного класу розрахунків. В даному випадку проблема в тому що рівняння Ейлера-Лагранжа для варіаційної задачі дуже не завжди мають аналітичне розв'язання.

Постановка задачі

Потрібно знайти функцію $Y_{opt}(t)$, що при заданих граничних умовах: $ORIGIN=0$ $y(t_0)=2$ $y(t_k)=0$ або в мові пакета: $y_0:=2$; $y_k:=0$; $t_0:=1$; $t_k:=2$ дає мінімум інтегральному функціоналу:

$$J(y(t)) = \int_0^T \left[y(t)^2 + 2 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \right] dt \quad \max \{ J(y(t)) \} ??$$

Розв'язання задачі

1. Записуємо функцію - підінтегральний вираз функціонала (функцію у та її похідну записуємо як звичайні змінні: Y та PY):

$$F(Y, PY) := Y^2 + 2Y \cdot PY + PY^2$$

2. Отримуємо відповідні похідні від функції, що входять до рівняння Ейлера:

$$\frac{d}{dY} F(Y, PY) \rightarrow 2 \cdot Y + 2 \cdot PY; \quad \frac{d}{dPY} F(Y, PY) \rightarrow 2 \cdot Y + 2 \cdot PY.$$

Потрібні певні навички у користуванні символьним процесором. Отак, у два етапи, находимо складну похідну:

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{dPY} F(Y, PY) = \frac{d}{dt} (2 \cdot Y(t) + 2 \cdot PY(t)) \rightarrow 0 = 2 \cdot \frac{d}{dt} Y(t) + 2 \cdot \frac{d}{dt} PY(t).$$

3. Записуємо рівняння Ейлера у загальному виді, підставляємо вирази для похідних, виконуємо алгебраїчні перетворення.

$$\frac{d}{dY} F(Y, PY) - \frac{d}{dt} \frac{d}{dPY} F(Y, PY) = 0 \Rightarrow 2 \cdot Y + 2 \cdot \frac{d}{dt} Y - 2 \cdot \frac{d}{dt} Y - 2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} Y = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2} Y - Y = 0. \text{ Записуємо характеристичне рівняння } s^2 - 1 = 0.$$

4. Розв'язуємо отримане дифрівняння (в даному випадку - звичайне, лінійне, другого порядку), використовуємо символьний процесор для знаходження коренів характеристичного рівняння s_1 та s_2 .

$$s^2 - 1 = 0 \text{ solve, } s \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad s_1 := 1; \quad s_2 := -1.$$

Запишемо розв'язання цього рівняння у загальному виді

$$y(t) = C1 \cdot e^{s1 \cdot t} + C2 \cdot e^{s2 \cdot t}$$

З граничних умов визначаємо постійні C1 та C2.

при $t_0 := 1$ $y_0 := 2$, тобто $y(0) = C1 \cdot e^{s1 \cdot 1} + C2 \cdot e^{s2 \cdot 1}$

при $t_k := 2$ $y_k := 0$, тобто $y(1) = C1 \cdot e^{s1 \cdot 2} + C2 \cdot e^{s2 \cdot 2}$

Маємо систему з двох рівнянь з двома невідомими. Використовуємо розв'язуючий блок і знаходимо C1 та C2 спочатку у числовому виді.

$$Cv1 := 1 \quad Cv2 := 2$$

Giver

$$\left. \begin{aligned} Cv1 \cdot e^{s1 \cdot t_0} + Cv2 \cdot e^{s2 \cdot t_0} &= y_0 \\ Cv1 \cdot e^{s1 \cdot t_k} + Cv2 \cdot e^{s2 \cdot t_k} &= y_k \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} := \text{Find}(Cv1, Cv2) \quad \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.12 \\ 6.29 \end{pmatrix}$$

Для узагальнення і впевненості - визначаємо C1 та C2 у символьному виді:

Giver

$$\left. \begin{aligned} C1 \cdot e^{S1 \cdot T_0} + C2 \cdot e^{S2 \cdot T_0} &= Y_0 \\ C1 \cdot e^{S1 \cdot T_k} + C2 \cdot e^{S2 \cdot T_k} &= Y_k \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Find}(C1, C2) \rightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{(\exp(S2 \cdot T_k) \cdot Y_0 - Y_k \cdot \exp(S2 \cdot T_0))}{(\exp(S2 \cdot T_k + S1 \cdot T_0) - \exp(S1 \cdot T_k + S2 \cdot T_0))} \\ &\frac{(\exp(S1 \cdot T_0) \cdot Y_k - Y_0 \cdot \exp(S1 \cdot T_k))}{(\exp(S2 \cdot T_k + S1 \cdot T_0) - \exp(S1 \cdot T_k + S2 \cdot T_0))} \end{aligned} \right]$$

$$\begin{pmatrix} C1_{sim} \\ C2_{sim} \end{pmatrix} := \left[\begin{aligned} &\frac{(\exp(s2 \cdot tk) \cdot y_0 - y_k \cdot \exp(s2 \cdot t_0))}{(\exp(s1 \cdot t_0 + s2 \cdot tk) - \exp(s2 \cdot t_0 + s1 \cdot tk))} \\ &\frac{-(-\exp(s1 \cdot t_0) \cdot y_k + y_0 \cdot \exp(s1 \cdot tk))}{(\exp(s1 \cdot t_0 + s2 \cdot tk) - \exp(s2 \cdot t_0 + s1 \cdot tk))} \end{aligned} \right] \quad \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.12 \\ 6.29 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C1_{sim} \\ C2_{sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.12 \\ 6.29 \end{pmatrix}$$

Бачимо, що отримані альтернативними методами розв'язання для C1 та C2 співпали. Записуємо робочі вирази для отриманої оптимальної функції (= стратегії, політики, управління) $Y_{opt}(t)$, похідної $pY(t)$ підінтегрального виразу $piv(t)$ і будуємо графіки. Бачимо, що функція

$$Y_{op}(t) := (C1 \cdot e^{s1 \cdot t} + C2 \cdot e^{s2 \cdot t}); \quad N_n := 25; \quad t := t0, t0 + \frac{(tk - t0)}{N_n} .. tk \quad \blacksquare$$

The graph shows three functions plotted against time t from 1 to 2. The y-axis ranges from -5 to 10. The red solid line represents the function $Y_{opt}(t) \cdot 5$, which starts at 10 and decreases to 0. The blue dashed line represents the derivative $pY(t)$, which starts at approximately -2.5 and increases slightly to -1. The green dashed line represents the square of the derivative $piv(t)$, which starts at approximately 6.25 and increases to approximately 1.5.

t	$Y_{opt}(t) \cdot 5$ (red solid)	$pY(t)$ (blue dashed)	$piv(t)$ (green dashed)
1.0	10.0	-2.5	6.25
1.2	8.0	-2.2	4.84
1.4	6.0	-1.8	3.24
1.6	4.0	-1.5	2.25
1.8	2.0	-1.2	1.44
2.0	0.0	-1.0	1.00

Legend:

- Функция, що дає екстремум функціоналу
- - - Похідна від цієї функції,
- - - Квадрат похідної

1. Знайдіть розв'язання варіаційної задачі для функціоналу

2. Знайдіть розв'язання варіаційної задачі для функціоналу

3. Поставте яку-небудь задачу оптимального управління, що зводиться до класичної варіаційної задачі, наприклад задачу оптимального процесу сплати боргів -15 -150 балів.

4. Поставте яку-небудь задачу оптимального за критерієм мінімуму інтеграла від квадрата помилки. Дифференціальна динаміка процесу - лінійне а) 1-го порядку, б) 2-го порядку. 200 б.

5. Поставте яку-небудь задачу оптимального за критерієм мінімуму інтеграла від квадрата управління. Дифрівняння динаміки процесу - лінійне а) першого порядку, б) другого порядку. 25 -200 балів.

Контрольні запитання

1. Визначення і приклади функції, функціоналу, оператора.
2. Визначення і приклади варіації? функції, функціоналу.
3. Порядок розв'язання класичної варіаційної задачі.
4. Порядок розв'язання класичної варіаційної задачі при наявності обмежень.
5. Класифікація обмежень у оптимізаційних задачах.
6. Типові інтегральні критерії оптимізаційних задач техніки та економіки.

Чітко про нечіткість
Оптимальне пожежне
відро

1.9.1 Приклад нечіткої оптимізації
на базі експертних оцінок.

Вступ.

Ефективність діяльності інженера, менеджера визначається не стільки знанням окремих методів і окремих задач, а тим, наскільки легко, впевнено і застосовує для остаточного розв'язання до визначеного часу. В цьому розділі для псевдоконкретної задачі комплексно використовуються - ідентифікація емпіричних залежностей, оптимізація на базі розмитої логіки, графічні методи аналізу задачі та ін. Оптимізація на базі розмитої логіки вже була використана для задач лінійного програмування. Тепер розглянемо цей метод на прикладі задачі з нелінійною цільовою функцією і обмеженнями.

Постановка задачі

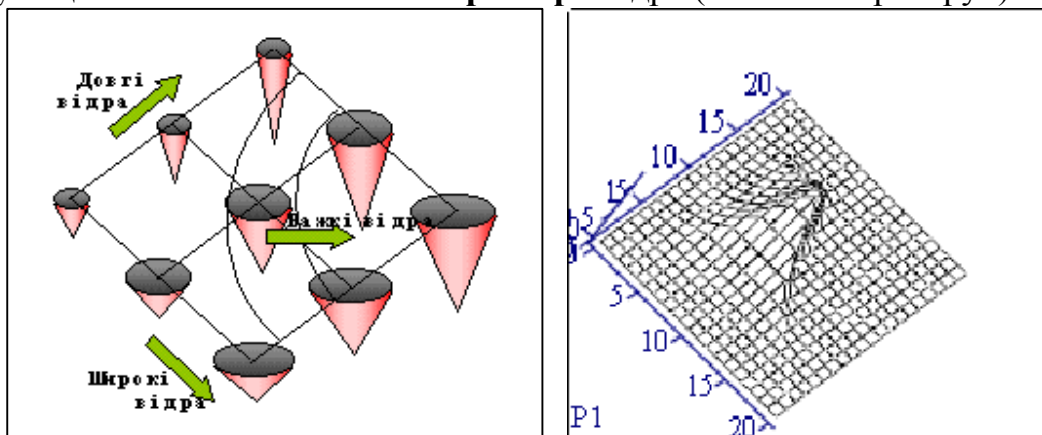
Детально ознайомитись з об'єктом оптимізації можна 1) по книзі В.Ф.Очкова "Mathcad 8 Pro для інженерів и студентів", 2) переглянувши серію "Маски на пожежі", 3) оглянувши пожежний щит десь на підприємстві.

Пожежне відро (малюнок ліворуч) повинно **задовольняти суперечливим і нечітким вимогам** – бути:

а) в міру широким, б) помірно високим, в) не дуже важким, але досить вагомим для гасіння пожежі.

Треба

а) формалізувати нечіткі вимоги, б) сконструювати цільову функцію і знайти оптимальні розміри відра (малюнок праворуч)



1. Конструювання функції належності для радіуса відра

Задаємо спочатку функцію, якою будемо наближати експертні оцінки - нормальне розподілення. Чому саме нормальне? - принциповим є тільки топологія, можна взяти довільну гладку додатну функцію з максимумом в середині діапазону.

$$\mu(\text{Par}, A, B) := \left| \begin{array}{l} \text{"Саморобна ф-ція норм. розподілення (є вбудована dnorm(,} \\ \exp[A \cdot (B - \text{Par})^2] \end{array} \right|$$

Подаємо дані опитування експертів про оптимальний радіус відра

$$\mu_r := \left(\begin{array}{cccccccccccc} 25 & 50 & 75 & 100 & 125 & 150 & 175 & 200 & 225 & 250 & \text{"Радіус відра (мм)"} \\ .05 & .12 & .22 & .42 & .8 & 1 & .65 & .47 & .29 & .11 & \text{"0-незручно, 1-зручно"} \end{array} \right)$$

Розв'язуємо задачу апроксимації даних опитування у вибраному двох параметричному класі функцій. Це буде **функція належності** для радіуса відра. Підбираємо оптимальні по якомусь (=квадратичному) критерію відхилення від емпіричного розподілення) параметри функції. Використовуємо розв'язуючий блок. Задаємо початкові значення оптимізуємих параметрів:

$$n := \text{cols}(\mu_r) - 1 \quad n = 10 \quad A := -0.013 \quad B := 100$$

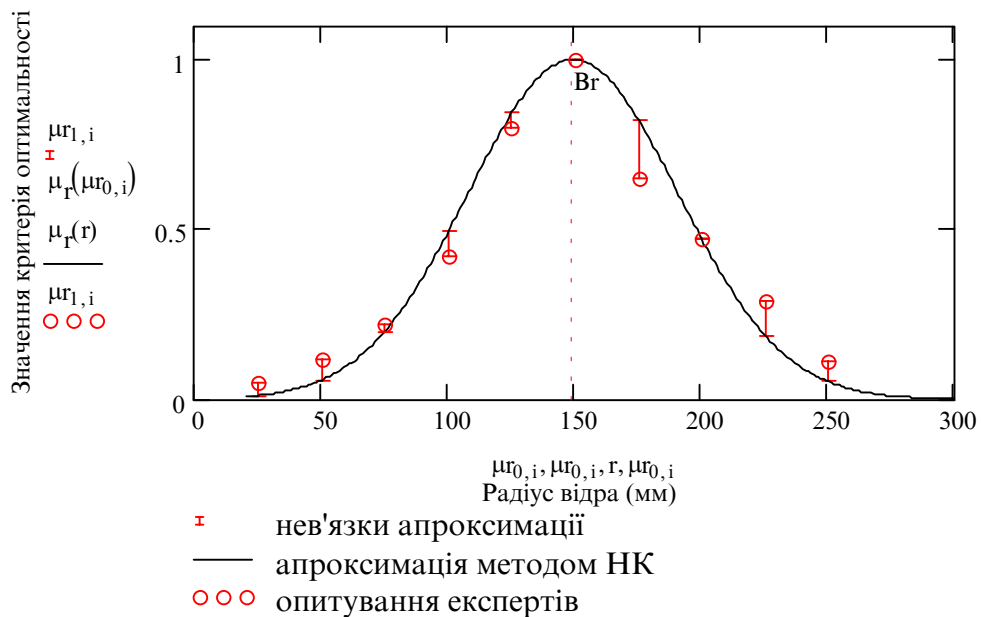
Мінімізуємо суму квадратів відхилень:

Giver

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\mu_{r1,i} - \mu(\mu_{r0,i}, A, B))^2 = 0 \quad \left(\begin{array}{c} A_r \\ B_r \end{array} \right) := \text{Miner}(A, B)$$

Виводимо результати. Будуємо графік - перевіряємо, чи справді функція наближує емпіричні дані.

$$A_r = -2.919 \times 10^{-4} \quad B_r = 149.212 \quad \mu_r(r) := \mu(r, A_r, B_r) \quad i := 0..n-1 \quad r := 20..300$$



Функція належності по радіусу

2. Конструювання функції належності для висоти відра

Аналогічно отримуємо функцію належності для висоти відра. Вводимо дані опитування експертів про оптимальну висоту відра.

$$\mu_h := \begin{pmatrix} 100 & 200 & 270 & 350 & 400 & 430 & 470 & 500 & 550 & 600 & \text{"Висота відра (мм)"} \\ .01 & .2 & .4 & .98 & .98 & .7 & .6 & .34 & .01 & .0 & \text{"0-незручно, 1-зручно"} \end{pmatrix}$$

$$n := \text{cols}(\mu_h) - 1 \quad n = 10$$

Для різноманітності **далі заперта під пароль зона з оптимізацією функції належності**. Це робиться так: Ставимо курсор на вільне місце, в меню **Insert** вибираємо пункт **Area** - з'являться дві лінії. Їх можна пересувати мишею так, щоб охопити певну зону. Потім у меню **Format** вибираємо теж **Area**. Там будуть пункти Lock (блокувати від змін, Unlock - розблокувати, Collapse - сховати, Expand - розкрити сховане. Ясно, коли вони потрібні, і що з ними робити. Як позбавитись від зони - клацнути мишею на лінії відкритої зони. Головне правило - завжди пишіть пароль поряд із зоною.

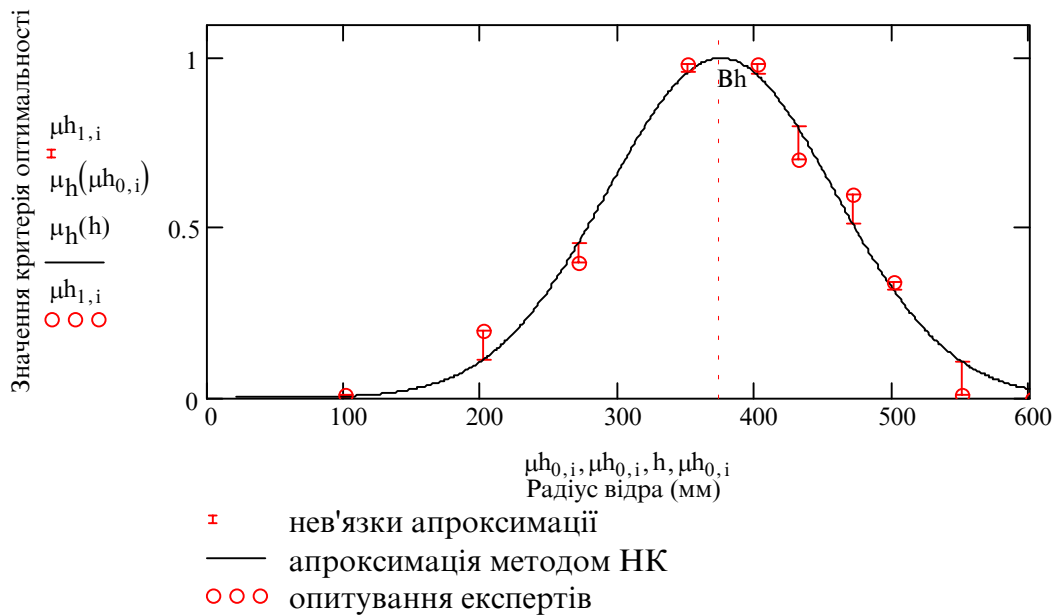
$$A := -0.01 \quad B := 400$$

Giver

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\mu_{h_{1,i}} - \mu(\mu_{h_{0,i}}, A, B))^2 = 0 \quad \begin{pmatrix} Ah \\ Bh \end{pmatrix} := \text{Miner}(A, B)$$

Виводимо результати. Будуємо графік - перевіряємо апроксимацію.

$Ah = -0.000073$ $Bh = 374.15$ $\mu_h(h) := \mu(h, Ah, Bh)$ $i := 0..n-1$ $h := 20..600$



Функція належності по висоті

3. Конструювання функції належності для об'єму відра

Ще раз повторюємо процедуру - формуємо функцію належності для об'єму відра.

Вводимо дані опитування експертів про оптимальну масу (вагу) відра.

$$\mu_v := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 13 & 15 & \text{"Обсяг води (л)"} \\ 1 & 1 & 1 & .9 & .65 & .33 & .11 & .05 & .01 & .0 & \text{"1-відро легке, 0-відро важке"} \end{pmatrix}$$

Функція належності тут має інший топологічний характер. Щоб менше думати і використати попереднє, штучно робимо дані симетричними і на них визначаємо параметри, потім "підправляємо" функцію належності. Ніхто не забороняє Вам зробити це по-своєму. "протез":

$$\mu_{1v} := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 13 & 15 & \text{"Обсяг води (л)"} \\ .11 & .33 & .65 & .9 & .65 & .33 & .11 & .05 & .01 & 0 & \text{"симетр.для узгодження"} \end{pmatrix}$$

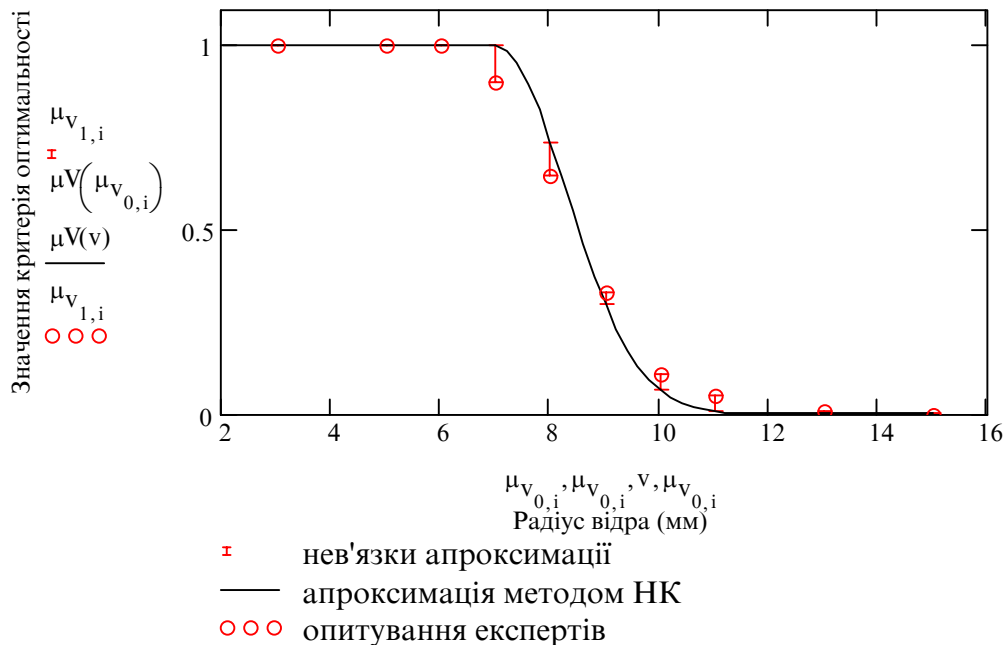
$$n := \text{cols}(\mu_v) - 1 \quad n = 10 \quad A := -0.1 \quad B := 5$$

Giver

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\mu_{1v_{1,i}} - \mu(\mu_{1v_{0,i}}, A, B))^2 = 0 \quad \begin{pmatrix} A_v \\ B_v \end{pmatrix} := \text{Minert}(A, B)$$

$$\mu V(v) := \text{if}(v < B_v, 1, \mu(v, A_v, B_v))$$

$$A_v = -0.31 \quad B_v = 7.01 \quad i := 0..n-1 \quad v := 2, 2.2..15$$



Функція належності по масі

4. Конструювання двовірної функції належності для радіуса і висоти

Згідно методології нечіткої оптимізації для формування загальної функції належності КОМБІНУЄМО усі функції належності. Ця процедура не повністю формалізована. Тут треба враховувати змістовний характер задачі, специфіку. В даному випадку використовуємо операцію "мінімальний з". Тобто, глобальна функція належності в кожній точці простору параметрів приймає менше з трьох функцій належності значення.

Може виникнути питання звідки взялася формула для об'єму відра - це ж формула для об'єму конуса. Третя змінна оптимізації повністю визначається іншими змінними - висотою та радіусом.

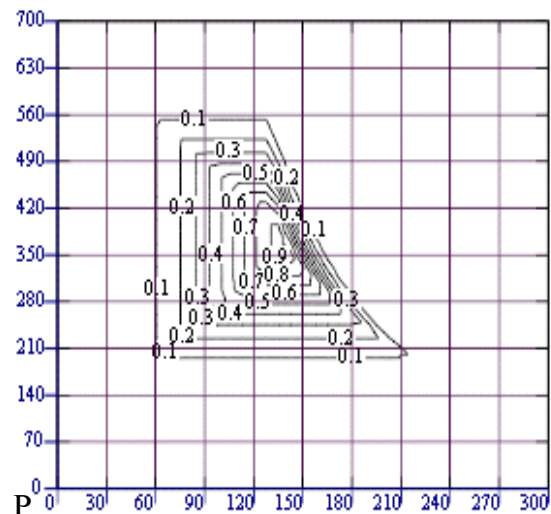
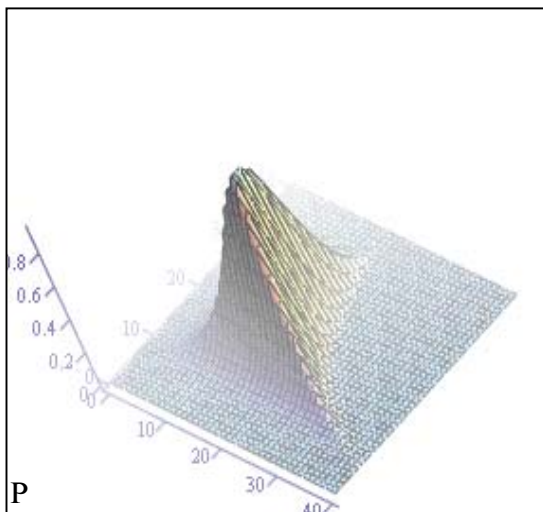
$$\mu_{rh}(r, h) := \min \left[\begin{array}{l} \mu_r(r) \\ \mu_h(h) \\ \mu_V \left[v \leftarrow \frac{\left(\frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h \right)}{100^2 \cdot 100} \right] \end{array} \right]$$

Для побудови тримірних графіків функція двох змінних задається матрицею. Вводимо індекси і визначаємо відповідні ранжовані змінні.

$N := 40 \quad i := 0..N \quad j := 0..N \quad r1 := 0 \quad r2 := 300 \quad h1 := 0 \quad h2 := 700$

$r_i := r1 + \frac{r2 - r1}{N} \cdot i \quad h_j := h1 + \frac{h2 - h1}{N} \cdot j \quad P_{i,j} := \mu_{rh}(r_i, h_j)$

Будуємо графіки функції належності у двох видах - як тримірний графік і як карту з ліній рівня. З правого графіка знімаємо значення і координати максимуму.



Знаходимо екстремум усіма доступними способами. Подаємо для прикладу такі:

$\begin{pmatrix} \text{rop} \\ \text{hop} \end{pmatrix} := \left \begin{array}{l} \text{Ma} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \text{for } j \in 0..N \\ \quad \quad \left(\begin{array}{l} \text{Ma} \leftarrow P_{i,j} \\ \text{ii} \leftarrow i \\ \text{jj} \leftarrow j \end{array} \right) \text{ if } P_{i,j} > \text{Ma} \\ \text{ro} \leftarrow r1 + \text{ii} \cdot \left(\frac{r2 - r1}{N} \right) \\ \text{ho} \leftarrow h1 + \text{jj} \cdot \left(\frac{h2 - h1}{N} \right) \\ \left(\begin{array}{l} \text{ro} \\ \text{ho} \end{array} \right) \end{array} \right.$	а) по графіку $h_{21} = 367.5 \quad r_{18} = 135$ $\mu_{rh}(r_{18}, h_{21}) = 0.943$ б) вбудованою функцією "максимум на масиві" $\max(P) = 0.944$ в) функцією користувача (визначеною через програму) $\text{hop} = 350 \quad \text{rop} = 142.5$ $\mu_{rh}(\text{rop}, \text{hop}) = 0.944$
--	--

Знайдено оптимальне відро. Зрозуміло, що задача не є найважливішою для народного господарства. Але саме на таких задачах можна навчитися так, щоб вільно і творчо застосувати знання у народному господарстві. Зробимо останній погляд на функцію належності. А саме, подивимось, як вона формується з окремих функцій належності

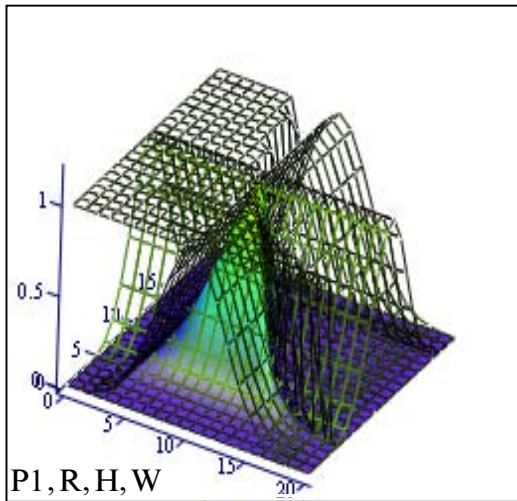
$$N := 20 \quad i := 0..N \quad j := 0..N \quad r1 := 0 \quad r2 := 300 \quad h1 := 0 \quad h2 := 700$$

$$r_i := r1 + \frac{r2 - r1}{N} \cdot i \quad h_j := h1 + \frac{h2 - h1}{N} \cdot j \quad W_{i,j} := \mu V \left[v \leftarrow \frac{\left[\frac{\pi}{3} \cdot (r_i)^2 \cdot h_j \right]}{100^2 \cdot 100} \right]$$

$$R_{i,j} := \mu_r(r_i)$$

$$H_{i,j} := \mu_h(h_j)$$

$$P_{i,j} := \mu_{rh}(r_i, h_j)$$



6. Контрольні запитання

1. Проаналізуйте поняття "нечітка ймовірність", "нечітка надійність", "систематична система..."- що у них загального.
2. Джерела та інтерпретації нечіткості.
3. Опишіть процедуру апроксимації експертних оцінок. Яка оптимізаційна задача тут розв'язується.
4. Класифікація ситуацій де можна/неможна застосовувати експертні оцінки.
5. Постановка задачі оптимізації функції N змінних при чітких обмеженнях.
6. Постановка задачі оптимізації функції N змінних при нечітких обмеженнях.



1.9.2 Оптимізація надійності альтернативними методами

Вступ. Формулювання цілей

Цей розділ є підсумковим не тільки для теми оптимізації та прийняття рішень на базі **розмитої логіки**, але і для курсу в цілому. В цьому розділі ми на прикладі досить типової задачі повторимо **методи оптимізації та моделювання**.

Природно, що ми поставимо ціль не розв'язання якоїсь окремої задачі, навіть альтернативними методами, а створення діалогового документу (ну, - програми) для розв'язання певного класу задач.

На початку курсу було сказано, що складні системи і процеси, якими займається кібернетика та дослідження операцій, не можуть бути чітко визначені. Це можна зробити тільки через серію розгорнутих прикладів та "розмов з приводу". Стратегічна ціль цього розділу - дати приклад методології системних наук, до яких відносяться кібернетика і дослідження операцій.

Постановка задачі

Розглядається система з трьох (для прикладу) послідовно поєднаних підсистем. Ефективність системи залежить від ефективностей підсистем. Кожна підсистема може мати в своєму складі 1, 2, 3... паралельно працюючих елементів. Ефективність підсистеми залежить від ефективностей її паралельно працюючих елементів. Природно припустити, що у випадку непрацездатності усіх елементів підсистеми і підсистема, і система в цілому будуть непрацездатними. Сумарна вартість системи обмежується.

Потрібно вибрати кількості елементів в кожній підсистемі так, щоб максимізувати ефективність системи в цілому. Можлива зворотна задача - мінімізація вартості при обмеженні ефективності.

Розглянемо можливі інтерпретації задачі.

1. Багатофазна система масового обслуговування, чи виробнича система. Потрібно в рамках бюджету вибрати кількості "верстатів" на кожній фазі обслуговування чи виробництва так, щоб ефективність (це може бути надійність обслуговування, кількість і якість продукції) була максимальною.
2. Технічна система з трьох послідовно поєднаних підсистем. Потрібно в рамках бюджету вибрати кратність резервування для кожної підсистеми так, щоб надійність системи була максимальною. В умовах високих технологій та

інтелектуалізації технічних систем істинна надійність (теорія, методи) все далі уходить від цієї наївної задачі. **Надійність сьогодні - не імовірнісна, а детермінована категорія, надійність завжди була не вправою з статистики, а пошуком конкретних конструкторських розв'язань.**

Але є традиція - розглядати важливі задачі на псевдореалістичних злегка дурнувятих прикладах - це настроює на критичне відношення до чергової порції знань.

1. Математична модель надійності і вартості резервованої системи

Подасемо **робочу математичну модель** надійності і вартості резервованої системи. Кожен тип елементів системи характеризується показниками надійності r_i (ймовірність працездатності на заданому періоді) і вартості c_i

$$\text{ORIGIN} = 1 \quad i := 1..3 \quad r_1 := 0.8 \quad c_1 := 1 \quad r_2 := 0.65 \quad c_2 := 2 \quad r_3 := 0.7 \quad c_3 := 3$$

Задається обмеження сумарної вартості системи: $C_0 := 15$

Записуємо у матрично векторному виді вхідні дані і виконуємо **контроль** коректності даних

$$q_i := 1 - r_i \text{ - ймовірність відмови на заданому періоді} \quad r = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.65 \\ 0.7 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.35 \\ 0.3 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{(r+q)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Записуємо математичну модель надійності резервованої системи із заданою конфігурацією (послідовне поєднання ідентично резервованих елементів) у вигляді функції користувача, що потім буде використана у програмі.

$$R(x_1, x_2, x_3, q_1, q_2, q_3) := [1 - (q_1)^{x_1+1}] \cdot [1 - (q_2)^{x_2+1}] \cdot [1 - (q_3)^{x_3+1}]$$

Записуємо математичну модель вартості резервованої системи теж у вигляді функції користувача, і визначаємо долю вартості системи, яка може бути використана на резервування в рамках обмеження сумарної вартості:

$$C(x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) := c_1 \cdot (x_1 + 1) + c_2 \cdot (x_2 + 1) + c_3 \cdot (x_3 + 1) \quad CR := C_0 - c_1 - c_2 - c_3$$

2. Постановка оптимізаційної задачі. Обґрунтування вибору метода оптимізації

Постановка задачі: Для системи з трьох послідовно поєднаних підсистем із заданими вартостями і надійностями, **знайти кратність резервування кожної підсистеми, що забезпечує максимальну надійність при обмеженні сумарної вартості системи.**

Вибір методу оптимізації. Вибираємо метод узгоджений з математичними властивостями задачі та інженерними потребами і сучасними принципами конструювання програм, а саме:

1. Програма повинна розв'язувати досить широкий клас задач, мати інтерфейс в межах екранної сторінки, дозволяючи вводити вхідні змінні і отримувати виходи у зручній формі.
2. В даній задачі цільова функція (надійність) монотонно залежить від ресурсу (кратності резервування), тому саме на підмножині варіантів з граничною вартістю (з урахуванням дискретності) знаходиться точка екстремуму.
3. Сучасна прикладна інтерактивна програма, що не призначена для вбудовування в мікроконтролер та ін. розробляється у спеціалізованому програмному середовищі, де із зростаючою ймовірністю цю задачу можна знайти, як уже розв'язану. Джерела готових розв'язань - "електронні книги, "електронні конференції"..

Альтернативи методів оптимізації - метод динамічного програмування, метод невизначених множників Лагранжа; метод оптимізації на базі нечіткого визначення цілей і обмежень; метод випадкового пошуку; група переборних методів типу "гілок та границь"; група методів нелінійного програмування.

Вибираємо поки модифікований метод динамічного програмування. Записуємо базове функціональне рівняння Белмана для дискретної задачі з адитивним критерієм.

$$f(N, p1) = \max(g(p1, q1) + f(N-1, T(p1, q1))) \quad q1 \in QQ - \text{область допустимих управлінь}$$

У цьому рівнянні $f(N, p1)$ - пошукувана функція, що дає залежність **оптимального значення** критеріальної функції від **початкового стану $p1$** і **кількості кроків процесу N** .

$g(p1, q1)$ - функція доходу, що залежить від $p1$ - поточного стану, і $q1$ - "управління", "стратегія", "політика" - тобто те, що ми можемо вибирати. Для нашого процесу оптимізації $q1$ - кратність резервування i -го елемента. Р.Белман вважав динамічне програмування (ДП) не методом а "станом ума". Знайти найкраще подання якоїсь задачі у термінах ДП - це штука, винахідницька задача.

Подаємо в стислому формулюванні логіку моделі процесу оптимізації та реалізуючої цей процес програми для нашого задачі: **упорядковано, починаючи з якогось "кута" відбираємо граничні варіанти, одночасно на них виділяємо оптимальний. В кінці роботи програми маємо масив граничних варіантів, та координату і показник оптимального варіанта.** Далі подано реалізацію цього методу.

3. Обґрунтування вибору програмного середовища і технології розробки системи

Сучасні технології розробки прикладних програм незважаючи на зовнішню різноманітність побудовані за єдиною схемою:

- 1) формулювання списку функцій системи (специфікація) =>
- 2) ручна або автоматична трансляція специфікації у діючий макет програми

=>

3) повторення п.2 - розробка альтернативних версій => відлагодження, випробування та взаємоперевірка версій =>

4) ручна або автоматична трансляція макета програми у код (.EXE- модуль).

Нашу програму **для випадку інтенсивного використання на робочому місці** можна реалізувати однаково ефективно в Excel, Access, Visual FoxPro, Delphi і інших продуктах цих класів. До цих продуктів випускаються бібліотеки готових модулів і прототипів, які досить тільки параметризувати і можна включити в свою програму. **Для відлагоджування та проведення аналітичних досліджень** з цілями стратегічного прогнозування слід розробити програму (документ) у середовищі математичного пакета, наприклад Matlab або Mathcad. Ці пакети дають безмежні можливості досліднику і одночасно мають компілятори для створення EXE - модулів.

4. Математичні моделі економічної ефективності систем з резервуванням

Взагалі, чи завжди потрібна надійність? Почнемо з лінгвістичної моделі - сценарію виробництва, продажу і експлуатації системи. Нехай деяка система (чайник, наприклад) випускається масово, відмова системи ніяких втрат окрім втрати самої системи не викликає.

Для масових явищ можемо застосувати методи статистичної теорії надійності: на протязі року вийде з ладу $P \cdot M$ систем, де P - ймовірність виходу з ладу системи на протязі року, M - річний обсяг виробництва (і продаж). Додаткові сумарні витрати суспільства (користувача, якщо купляє не там; виробника, якщо дається річна гарантія) дорівнюють: $P \cdot M \cdot C_0$, де C_0 - вартість існуючої системи.

Нехай проведено якісь дослідження, капіталовкладення в технології з постійними витратами $C_{\text{пост}}$, введено резервування елементів системи з витратами dC і в результаті надійність підвищилась на dP . В підсумку маємо економію суспільства: $P \cdot M \cdot C_0 - (P - dP) \cdot M \cdot (C + dC + K_a \cdot C_{\text{пост}}) > 0$?

Перший крок аналізу ефективності - перевірка позитивності ефекту, потім на базі даної моделі виконується більш детальний аналіз. Слід зауважити, що результатом досліджень може бути повна зміна конструкції + технології системи з одночасним зниженням вартості і підвищенням надійності.

5. Порівняльний аналіз сучасних методів забезпечення надійності

В традиційній теорії надійності підвищення надійності монотонно залежить від вартості системи. Для високих технологій ця залежність може бути зворотною - **чим дешевша система, тим вона надійніша і якісніша**.

Але це потребує пошуку структурних, а не параметричних змін в системі, наприклад:

☞ замінити технологію виготовлення печатної плати, кристалу на нову, бездефектну,

☞ замінити три ненадійних печатних плати, на 12 однокристальних систем з такою ж вартістю і абсолютною надійністю, об'єднати їх у відмовостійку конфігурацію, а додатково отримати "премію" - закрити екологічно шкідливу ділянку травлення печатних плат.

☞ Можна зробити систему з автоматичною реконфігурацією (сучасні сервери), з автоматичною діагностикою і компенсацією люфтів і дрейфу параметрів (сучасні принтери і верстати).

☞ Можна ввести неідентичне резервування (сучасні великі системи і спецсистеми), організувати інформаційні банки (сучасні інформаційно - вимірювальні системи). Відповідні напрямки називаються - гарантоспроможність, відмовостійкість, живучість, структурна надійність. Останній, простіший, засіб у боротьбі за надійність і якість - ідентичне резервування. Єдина проблема тут - розрахунок оптимального резервування елементів системи. Тимчасові труднощі в цій задачі - дискретність та розмірність.

6. Розробка блок-схеми роботи користувача в автоматизованій системі

Для проектування інтерфейсу програми необхідно: визначити задачу, що буде розв'язувати користувач, вибрати оптимальну послідовність кроків, скласти блок-схему роботи користувача. А ще необхідно пам'ятати, що в сучасних програмних системах, починаючи з 1С - бухгалтерії, сам користувач настраює собі інтерфейс. В даному документі можна змінювати все, що не закрито паролем від змін і читання.

7. Розробка алгоритму і програми для оптимізації конфігурації системи.

Далі подано коментовану блок-схему - текст програми оптимізації

$Xr(Cs, c1, c2, c3) :=$	$Cr \leftarrow Cs - c1 - c2 - c3$ break if $Cr < 0$ $x1m \leftarrow \text{floor}\left(\frac{Cr}{c1}\right)$ $x2m \leftarrow \text{floor}\left(\frac{Cr}{c2}\right)$ $x3m \leftarrow \text{floor}\left(\frac{Cr}{c3}\right)$ $n \leftarrow 0$ $Rmax \leftarrow 0$ $x3 \leftarrow 0$ $x2 \leftarrow 0$ $x11 \leftarrow x1m$ $u \leftarrow 0$ while $x11 > 0$ $u \leftarrow u + 1$ $x11 \leftarrow x1m - \text{ceil}\left(\frac{c3}{c1}\right) \cdot (u - 1)$ $n \leftarrow n + 1$ $x3 \leftarrow u - 1$ $Ma \langle n \rangle \leftarrow \begin{pmatrix} x11 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$ if $Rmax < R(x11, x2, x3, q1, q2, q3)$ $Rmax \leftarrow R(x11, x2, x3, q1, q2, q3)$ $nmax \leftarrow n$ $x1 \leftarrow x11$ while $x1 > 0$ $x1 \leftarrow x1 - 1$ $dc1 \leftarrow Cs - C(x1, x2, x3, c1, c2, c3)$ $vx2 \leftarrow \text{floor}\left(\frac{dc1}{c2}\right)$ if $vx2 > 0$ $n \leftarrow n + 1$ $Ma \langle n \rangle \leftarrow \begin{pmatrix} x1 \\ x2 + vx2 \\ x3 \end{pmatrix}$ "продов-" "-жуємо програму" if $Rmax < R(x1, x2 + vx2, x3, q1, q2, q3)$ $Rmax \leftarrow R(x1, x2 + vx2, x3, q1, q2, q3)$ $nmax \leftarrow n$ $\begin{pmatrix} Ma \\ Rmax \\ nmax \end{pmatrix}$	- ресурс для резервування - вихід якщо його нема ресурсу - якщо ресурси віддати тільки одному елементу - обчислення відповідних кратностей резервування - максимально можливих для даного типу елемента -індекс варіанта -значення максимальної надійності -початкова конфігурація системи <i>(конфігурація системи =вектор кратностей резервування системи)</i> -перший індекс перебору варіантів - цикл -поки усі ресурси не взято з першого елемента, знімаємо стільки перших елементів, щоб додати один елемент третього типу - додаємо новий задовільний варіант у масив Ma - обчислення надійності задовільної конфігурації - перевірка на екстремум - цикл - поки усі ресурси не взято з першого елемента, один резервний елемент першого типу знімаємо і додаємо відповідну кількість резервних елементів типу 2 - ... якщо це можливо і в цьому випадку додаємо новий задовільний варіант у масив Ma - перевірка на екстремум -те, що повертає програма: масив варіантів, максимальна надійність та номер оптимальної конфігурації
-------------------------	---	--

Як можна бачити (вище), поставлена ціль досягнута - модуль майже не виходить за межі сторінки. Є й недолік у програми - занадто широка - мало місця для коментарів.

Між іншим, ця проблема знята у MathConnex - там схему задачі на екрані (це програма, блок-схема...) можна масштабувати, щоб усе було на одній сторінці і, навпаки, - щоб роздивитись у деталях якийсь блок.

Програма має дві особливості: а) вона працює, б) за винятком останнього кроку, де маємо $x_1 < 0$. Виняток не є летальним недоліком, бо можна просто відкинути останнє значення, а якщо почати виправляти програму, так вона може стати непрацюючою.

8. Розробка блок-схеми і програми аналізу даних оптимізації Відлагодження і тестування програми

Виконуємо ці пункти разом, згідно тенденціям інтеграції етапів розробки програми.

Проводимо тести програми оптимізації. Бачимо (дивись униз), що для критичного випадку $C_s=6$, при $c_1+c_2+c_3=6$ - коли немає ресурсу для резервування - програма повертає нулі. Для $C_s=7$ вже повертається масив з 2-ох варіантів. Для обмеження $C_s=133$ надійність=1, число переглянутих варіантів - 2753. Обчислюється такий варіант за 11 сек роботи.

$$X_1(6, c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_1(7, c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} \{3,2\} \\ 0.437 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_s = 15 \\ C_s = 15 \end{matrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.65 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$$X_1(C_s, c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} \{3,19\} \\ 0.864 \\ 13 \end{pmatrix} \quad X_1(33, 1, 2, 3) = \begin{pmatrix} \{3,136\} \\ 0.996 \\ 100 \end{pmatrix} \quad X_1(133, 1, 2, 3) = \begin{pmatrix} \{3,2753\} \\ 1 \\ 2.085 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Наша програма оформлена, як процедура, від параметрів. Вона також бачить глобальні змінні. Те, що повертає процедура оформляємо у вигляді компактної структури даних. Розпакуємо тепер видачу програми.

$Rn(Cx) := X_1(Cx, c_1, c_2, c_3)_2$ - надійність оптимального варіанту

$Nm(Cx) := X_1(Cx, c_1, c_2, c_3)_3$ - номер оптимального варіанту

$xR(Cx) := X_1(Cx, c_1, c_2, c_3)_1$ - масив граничних (задовільних) варіантів

$xop(Cx) := xR(Cx)_{\langle Nm(Cx) \rangle}$ - параметри оптимального варіанта

Виводимо результати оптимізації для заданих даних (=контрольного прикладу). Маємо:

задані надійності, ціни оптимальне резервування та надійність

$$q = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.35 \\ 0.3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{xor}(15) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Rn(15) = 0.864 \quad Cc = 15$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} := \text{xor}(15) \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{pmatrix} := q \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix} := c$$

Виконаємо контроль результатів. Перевіряємо усе, що було написане і використане, - підставляємо дані у праві, ліві частини функцій, процедур...

$$R(x1, x2, x3, q1, q2, q3) := [1 - (q1)^{x1+1}] \cdot [1 - (q2)^{x2+1}] \cdot [1 - (q3)^{x3+1}]$$

$$C(x1, x2, x3, c1, c2, c3) := c1 \cdot (x1 + 1) + c2 \cdot (x2 + 1) + c3 \cdot (x3 + 1)$$

Бачимо, поки все збігається:

$$R(x1, x2, x3, q1, q2, q3) = 0.864 \quad c1 \cdot (x1 + 1) + c2 \cdot (x2 + 1) + c3 \cdot (x3 + 1) = 15$$

$$[1 - (q1)^{x1+1}] \cdot [1 - (q2)^{x2+1}] \cdot [1 - (q3)^{x3+1}] = 0.864 \quad C(x1, x2, x3, c1, c2, c3) = 15$$

9. Розробка інтерфейсу для аналізу ефективності резервування

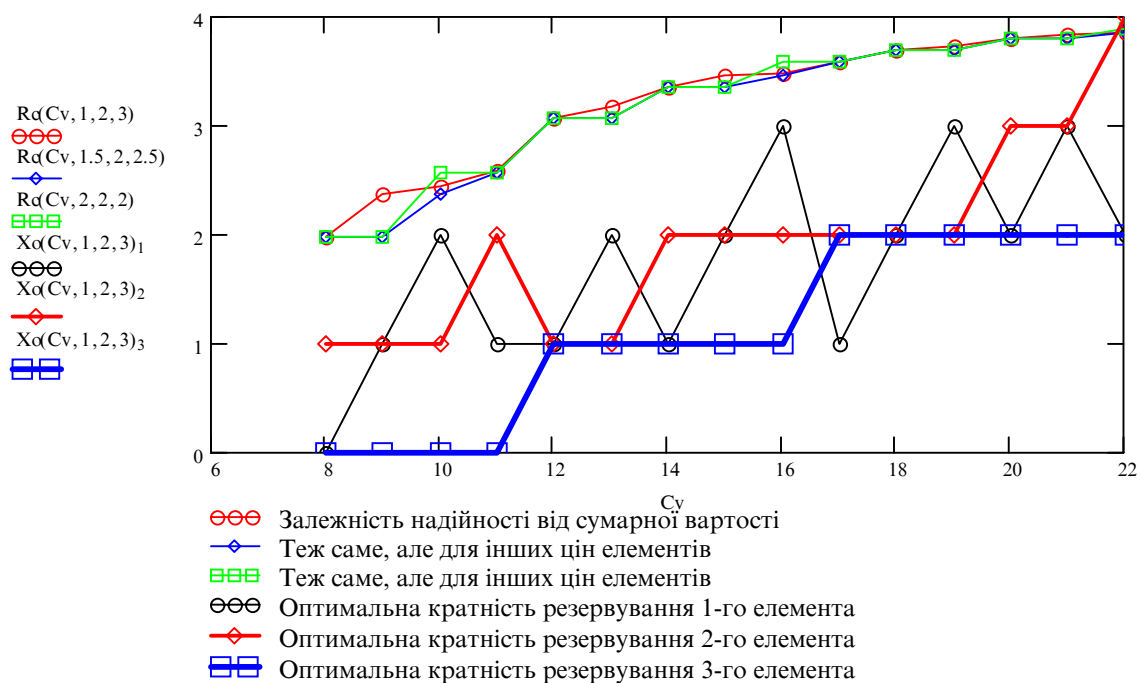
З множини допустимих варіантів резервування перший модуль програми відібрав підмножину граничних, відносно обмеження варіантів, тобто варіантів, вартість яких найближча до граничної. Формуємо масив даних для проведення аналізу,

$$X\alpha(Cx, c1, c2, c3) := (X\alpha(Cx, c1, c2, c3)_1) \langle X\alpha(Cx, c1, c2, c3)_3 \rangle$$

$$Cv := 8, 9 \dots 22 \quad R\alpha(Cx, c1, c2, c3) := (X\alpha(Cx, c1, c2, c3)_2) \cdot 4$$

➡ Вектор-функція кратностей резервування

➡ Функція надійності системи

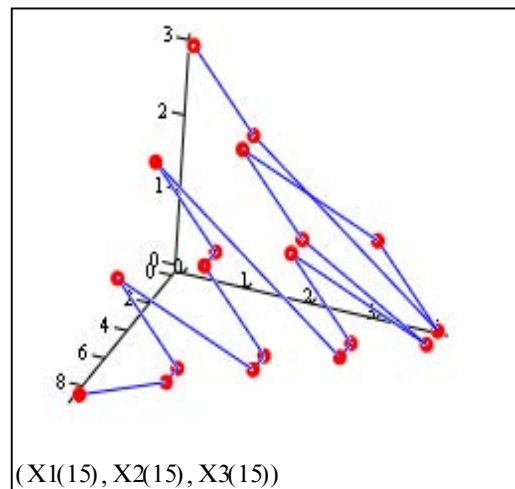
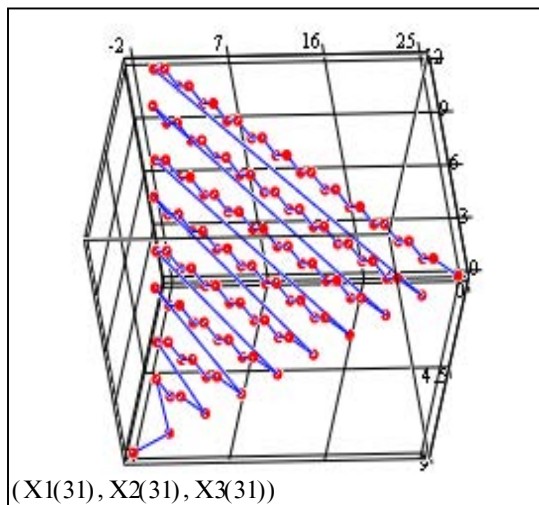


Дивлячись на графіки, бачимо, досить точні розв'язання можна отри-

мати якщо задачу розглядати як неперервну. Тобто можна бачити загальні властивості задачі і **тільки тепер обґрунтовано можна вибрати метод оптимізації**.

Маємо інтерфейс, що не тільки дає якісь числа, а дозволяє глянути на задачу "згори". Зробимо ще крок у цьому напрямку - витягнемо та побудуємо поверхню - границю допустимих варіантів резервування. Записуємо потрібні вирази, будуємо графіки.

$$X1(Cx) := (xR(Cx)^T)^{(1)} \quad X2(Cx) := (xR(Cx)^T)^{(2)} \quad X3(Cx) := (xR(Cx)^T)^{(3)}$$



Графіки побудовано для двох значень обмежень сумарної вартості: 15 та 31 одиниця.

Контроль програми. Програма досить складна і може мати непомітний дефект - пропускати оптимум. Перевіримо її використавши альтернативний метод знаходження оптимального варіанта. Варіант з максимальною надійністю можна знайти, використовуючи вбудовану функцію пакета для сортування стовпців матриці X (див. вище) по значенню останнього - 5-го рядка - значенню надійності.

Це робиться так: Додаємо до матриці варіантів резервування вектор-рядок надійності цих варіантів і сортуємо по значенню останнього рядка, виводимо таблицю, де варіанти ранжовані за надійністю.

$$\text{cols}(xR(15)) = 19 \quad u := 1.. \text{cols}(xR(15)) \quad Rz_u := R(xR(15)_{1,u}, xR(15)_{2,u}, xR(15)_{3,u}, q_1, q_2, q_3) \quad Rz := Rz^T$$

$$Mx(C) := \text{stack}(xR(C), Rz) \quad Mx\text{sort} := \text{rsort}(Mx(15), 4)$$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mxsort=	1	9	0	0	6	6	7	3	1	4	5
	2	0	0	4	0	1	1	0	4	2	2
	3	0	3	0	1	0	0	2	0	0	0
	4	0.455	0.516	0.557	0.591	0.614	0.614	0.631	0.668	0.67	0.67

Контроль
(пересунь
движок)
 $Rn(15) = 0.864$

Достоїнства такого способу - простота і швидкість, а також те, що ми маємо не одну точку екстремуму, а можемо бачити близькі до оптимального варіанти резервування.

Недоліки - простота, неможливість побудувати залежність оптимальної надійності від рівня обмеження чи цін елементів.

10. Напрямки модифікації програми для захисту від помилок вхідних даних

Тепер звертаємось до останнього завдання - запропонувати напрямки модифікації програми для захисту від помилок вхідних даних. Частина цих напрямків просто реалізована при розробці і відлагодження програмної системи. Це:

- 1) перевірка умов допустимості усіх вхідних величин у програмі,
- 2) альтернативні методи обчислення,
- 3) графічний вивід.

11. Розробка програми оптимізації для випадку неперервних змінних

Пам'ятаючи головний тезис даного посібника - найкраща альтернатива - це сума альтернатив, розв'яжемо оптимізаційну задачу як неперервну. Тобто допустимо, щоб кратності резервування x_1 , x_2 , x_3 приймали нецілочислові значення. Отримані розв'язання повинні бути близькими до цілочислових розв'язань, їх можна використати як перші наближення і для контролю. Розглянемо в цьому документі два альтернативних метода оптимізації -

- метод невизначених множників Лагранжа і
- метод оптимізації на базі розмитої логіки.

11а. Метод невизначених множників Лагранжа

Маємо цільову функцію $R(x_1, x_2, x_3, q_1, q_2, q_3)$ - надійність системи і обмеження $C(x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) = 0$ на вартість системи (див. розділ 1.1).

Записуємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, q_1, q_2, q_3, \lambda) := R(x_1, x_2, x_3, q_1, q_2, q_3) + \lambda \cdot C(x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$$

Необхідна умова екстремуму - похідні від функції Лагранжа по усім змінним оптимізації повинні бути нульовими. В даному випадку можна знайти аналітичні вирази для похідних і навіть розв'язання в символьному виді, але ми використаємо вбудовані числові методи пакету. Задаємо початкові значення змінних:

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 2 \quad x_3 := 3 \quad \lambda := 1 \quad q := 1..3$$

Записуємо (після given) систему рівнянь - три похідних і обмеження вартості системи:

Given

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx1} L(x1, x2, x3, q1, q2, q3, \lambda) &= 0 & c1 \cdot (x1 + 1) + c2 \cdot (x2 + 1) + c3 \cdot (x3 + 1) - Co &= 0 \\ \frac{d}{dx2} L(x1, x2, x3, q1, q2, q3, \lambda) &= 0 & x1 &\geq 0 & x2 &\geq 0 & x3 &\geq 0 \\ \frac{d}{dx3} L(x1, x2, x3, q1, q2, q3, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

і отримуємо розв'язання: $\text{RezervOp} = \text{Find}(x1, x2, x3, \lambda)$

а це тримаємо в резерві: $\text{RezervOp} = \text{Miner}(x1, x2, x3, \lambda)$ ■

$$\text{RezervOp} = \begin{pmatrix} 1.526 \\ 1.839 \\ 1.265 \\ -0.024 \end{pmatrix} \quad \text{Mxsort}_{t, 19} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Поряд виведено результати дискретної оптимізації. Зауваження. Вбудовані в Mathcad числові методи оптимізації та розв'язання рівнянь не є всемогутніми і занадто інтелектуальними. Іноді функція $\text{find}(\cdot)$ не працює (оптимізуєма функція має незручну структуру, наприклад, “гірський хребет”). Функція $\text{minerr}(\cdot)$ дає розв'язання досить близьке до дискретного.

Оптимізація на базі нечіткої логіки

Теорія нечіткості була запропонована для моделювання задач з розмитими, нечітко визначеними границями, умовами. Ефективним є застосування цієї теорії для розв'язання задач з обмеженнями. Навіть там, де все чітко визначено, введення штучної нечіткості підвищує ефективність числових методів пошуку екстремуму.

Обмеження вартості системи природним чином є нечітким - завжди допускається деяке відхилення від заданої величини. Таким же природно нечітким є обмеження маси, наприклад, в авіакосмічній техніці конструкторів преміюють/штрафують за зменшення/збільшення маси розроблюваної системи.

Записуємо цільову функцію і номінальне обмеження:

$$\text{Rlt}(x1, x2, x3) := \left[1 - (q1)^{x1+1} \right] \cdot \left[1 - (q2)^{x2+1} \right] \cdot \left[1 - (q3)^{x3+1} \right]$$

$$\text{Ogr}(x1, x2, x3) := c1 \cdot (x1 + 1) + c2 \cdot (x2 + 1) + c3 \cdot (x3 + 1) - Cog$$

Перетворюємо обмеження в нечітке - конструюємо **функцію належності** для обмеження. (Для цього використовуємо вбудовану функцію нормального розподілення. Чому нормального? - Це не принципово, вирішальними є певні топологічні властивості функції, можна було взяти іншу функцію):

$$\text{Fpog}(x1, x2, x3) := \text{dnorm}(\text{Ogr}(x1, x2, x3), 0, \text{fuznja})$$

Задаємо ранжовані змінні, діапазон, крок зміни x_1, x_2, x_3

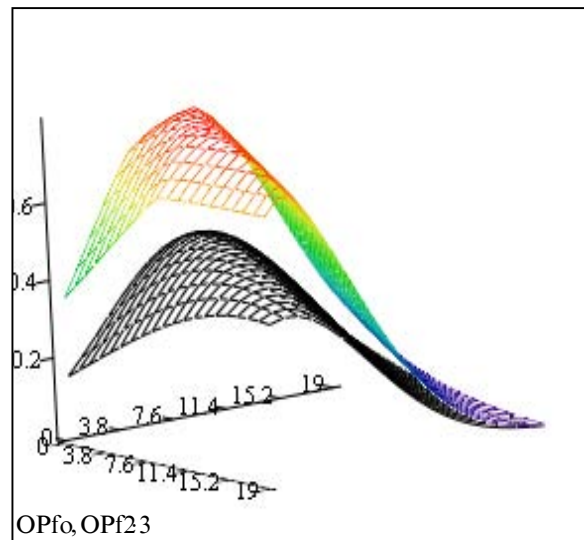
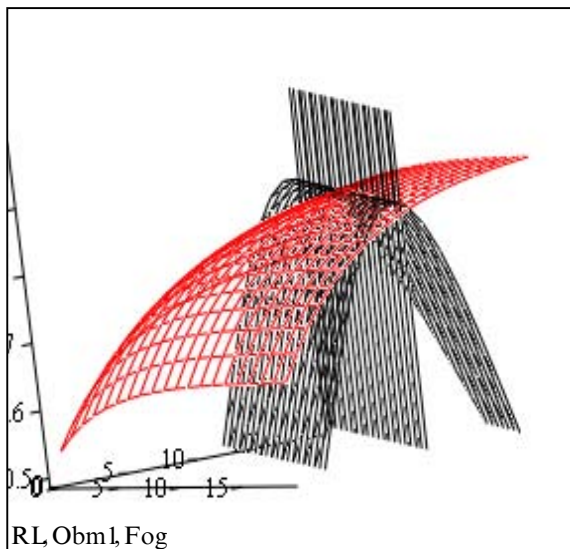
$QQ := 20 \quad i := 1..QQ \quad j := 1..QQ \quad k := 1..QQ \quad h := .15 \quad X1_i := h \cdot i \quad X2_j := h \cdot j \quad X3_k := h \cdot k \quad xf := 1$

Конструюємо загальну функцію належності. Для цього ми виконуємо над усіма нечіткими обмеженнями і цільовою функцією операцію "нечітка кон'юнкція". Ця операція в теорії нечітких множин визначається ситуативно, в залежності від "фізичного смислу" цільової функції і обмежень - розмірності та ін. Розглядаємо дві альтернативи:

а) добуток	б) мінімум від функцій належності.
$OPf1_{i,j} := RL(X1_i, X2_j, 0) \cdot Fpog(X1_i, X2_j, 0)$	$OPf0_{i,j} := \min(RL(X1_i, X2_j, 2), Fpog(X1_i, X2_j, 2) \cdot 4)$
$OPf3_{i,j} := RL(X1_i, X2_j, 3) \cdot Fpog(X1_i, X2_j, 3)$	$OPf2_{i,j} := RL(X1_i, X2_j, 2) \cdot Fpog(X1_i, X2_j, 2)$
$RL_{i,j} := RL(X1_i, X2_j, 1) \cdot 1$	$Fog_{i,j} := Fpog(X1_i, X2_j, 1) \cdot 4.35$
	$Obm1_{i,j} := Ogr(X1_i, X2_j, 1) \cdot 5$

Важливе значення має можливість "побачити власними очима" об'єкти маніпуляцій. Тут маємо проблему - функція трьох змінних потребує чотиривимірного простору. Тому беремо три фіксованих значення змінної $x_3 = 0$, що означає - нема резервування, $x_3 = 2$ - оптимальне резервування, $x_3 = 3$ - надмірне резервування. Будуємо по три тривимірних графіки - три "зрізи" чотирьохвимірної поверхні.

На лівому графіку подано 1) цільову функцію, 2) чітке обмеження, 3) обмеження переведене у нечіткий формат. На правому - дві альтернативи загальної функції належності. Розглядати ці функції **дуже бажано на комп'ютері** - мишею можна повернути зображення в який завгодно ракурс, Ctrl+мишею можна змінювати розмір зображення та ще багато чого.



На першому графіку подано цільову функцію, чітке і розмите обмеження. Усі три поверхні проходять через точку екстремуму. На другому графіку

подано два варіанти конструювання загальної функції належності - через добуток і через мінімум. Функції мають екстремум приблизно в одній точці.

Нарешті виконуємо саму оптимізацію.

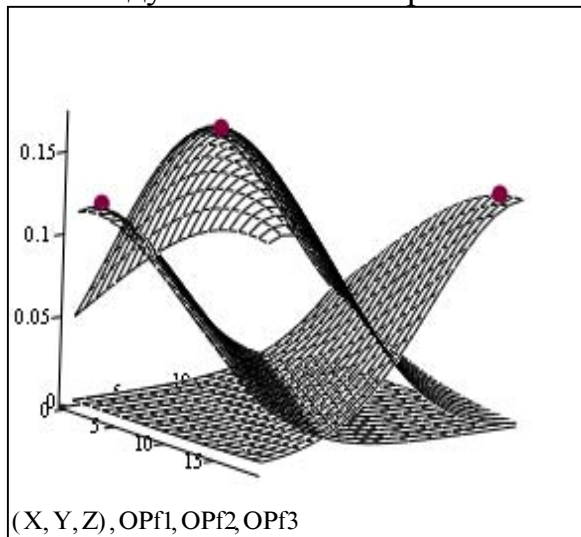
Це вираз для функції належності: Це визначення максимуму цієї функції:

$$OPf(x1, x2, x3) := Rlb(x1, x2, x3) \cdot Fpog(x1, x2, x3)$$

$$XOP := \text{Maximize}(OPf, x1, x2, x3)$$

Максимум знайдено вбудованим "Квазі - Ньютоновим методом". Методи вибираються через меню, що викликається правою кнопкою миші, курсор на ім'я функції.

На графіку внизу подано три "зрізи" чотирьохмірної функції належності. Рядом для порівняння подано три кращих дискретних конфігурації резервування, XOP - оптимум по методу нечіткої оптимізації, RezervOp - оптимум по методу множників Лагранжа.



$$Mxsort^{(17)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0.82 \end{pmatrix}$$

$$fuznja \equiv 2$$

$$XOP = \begin{pmatrix} 1.54 \\ 1.86 \\ 1.283 \end{pmatrix}$$

$$Mxsort^{(18)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0.836 \end{pmatrix}$$

$$Cog \equiv 15$$

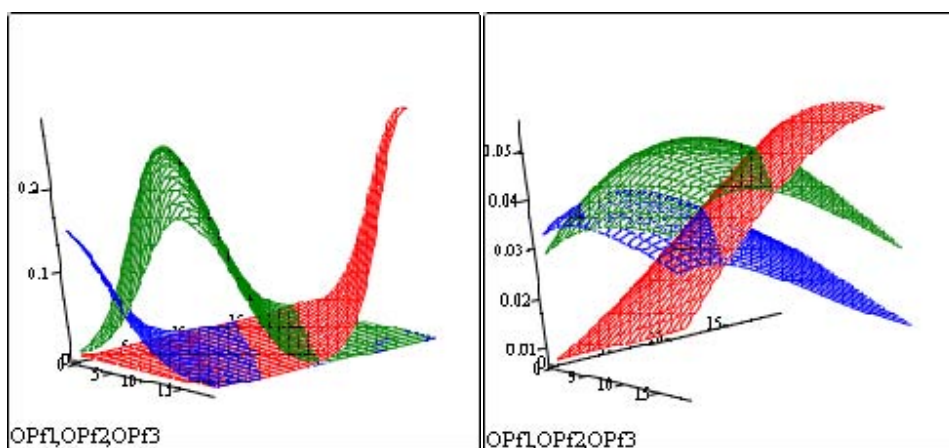
$$Mxsort^{(19)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0.864 \end{pmatrix}$$

$$RezervOp = \begin{pmatrix} 1.526 \\ 1.839 \\ 1.265 \\ -0.024 \end{pmatrix}$$

Підсумки і висновки

Перше враження людини з нормальною психікою від нечітких методів - чиста алхімія, крім того, більш ніж підозріла термінологія, велика кількість інформаційного шуму. Попереджали ж Р.Белман і Л.Заде - засновники цього напрямку, що все це занадто складне.

Перевіряємо чи дійсно це дає стійкі результати, і не є штучно підібраним. Змінюємо параметр **функції належності** обмежень - fuznja, що характеризує ступінь "розмитості" обмеження (дисперсія це в теорії ймовірності). Бачимо (на графіках і в таблицях), що в діапазоні $1 < fuznja < 5$ результати досить стабільні - вони вказують на оптимальне резервування 2-2-1.



fuznja = 1

fuznja = 5

$XOP = \begin{pmatrix} 1.53 \\ 1.844 \\ 1.27 \end{pmatrix}$	$XOP = \begin{pmatrix} 1.605 \\ 1.956 \\ 1.366 \end{pmatrix}$
---	---

Висновки

Розроблено автоматизовану систему для розв'язання і дослідження певного класу оптимізаційних задач. Використано альтернативні методи оптимізації. Система легко може бути модифікована для задач більшої розмірності..