

І. В. Хом'юк, В. Л. Карпенко, В. В. Хом'юк

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ЧАСТИНА І

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. В. Хом'юк, В. Л. Карпенко, В. В. Хом'юк

Математичне програмування

Частина I

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей та форм навчання. Протокол № 4 від 27 листопада 2003р.

Вінниця ВНТУ 2004

УДК 378.147
X 76

Рецензенти:

О.В. Мороз, доктор економічних наук, професор

В.І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор

В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Хом'юк І.В., Карпенко В.Л., Хом'юк В.В.

X 76 **Математичне програмування.** Частина 1: Навчальний посібник.
– Вінниця: ВНТУ, 2004. - 78 с.

У навчальному посібнику подано теоретичні відомості з тем математичного програмування: розв'язування систем лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса, знаходження опорних розв'язків, геометричний та симплексний методи розв'язування задач лінійного програмування, математичні моделі деяких економічних задач у вигляді означень, теорем, властивостей. Розглянуті розв'язки прикладів з кожної теми, надається 30 варіантів завдань для лабораторних робіт та завдань для типових розрахунків з кожної теми для самостійного розв'язування.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 378.147

© Хом'юк І.В., Карпенко В.Л., Хом'юк В.В. 2004

Зміст

ВСТУП.....	4
1 Вступ до вивчення дисципліни. Приклади задач лінійного програмування	5
2 Метод Жордана-Гаусса.....	8
2.1 Знаходження опорних розв'язків.....	18
3 Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування	20
3.1 Загальна і основні задачі лінійного програмування.....	20
3.2 Геометричний спосіб розв'язування задач лінійного програмування.....	22
4 Симплекс метод розв'язування задач лінійного програмування.....	29
4.1 Поняття про симплексний метод (симплекс-метод).....	29
4.2 Метод штучного базису (М-метод).....	32
4.3 Поняття про вироджений розв'язок.....	35
5 Математичні моделі деяких економічних задач	37
6 Завдання для лабораторних робіт.....	42
6.1 Лабораторна робота № 1. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса.....	42
6.2 Лабораторна робота № 2. Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	47
6.3 Лабораторна робота № 3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	51
6.4 Лабораторна робота № 4. Розв'язування економічних задач...56	
7 Завдання для типових розрахунків.....	65
8 Відповіді до завдань типових розрахунків.....	75
Література.....	77

ВСТУП

Бурхливий розвиток економічного життя, економічної науки спричинив у свою чергу застосування нових методів у математиці. Виникла нова галузь математики – лінійне програмування, за допомогою якого досліджуються задачі, що мають множину розв’язків, з яких треба вибрати оптимальний.

Програмуванням таку галузь обчислень називають тому, що вона дає в кожному конкретному випадку “програму дій” для побудови розв’язку, а лінійним тому, що програмування оперує задачами, в яких розглядаються тільки лінійні залежності.

Праця “Математичні методи організації і планування виробництва” видатного математика Л.В.Канторовича, опублікована в 1939 р., була першою в галузі лінійного програмування, в якій розв’язано задачу планування завантаження верстатів. Там же показано, що розроблений метод придатний і для розв’язання транспортної задачі.

Особливо інтенсивно почали займатися лінійним програмуванням і застосуванням його в різноманітних питаннях економіки, починаючи з другої половини 40-х років. У 1947 – 1948 рр. Дж. Данциг (США) розробив універсальний метод розв’язання екстремальних лінійних задач, який він назвав “симплекс методом”.

У посібнику описано і поставлено деякі техніко-економічні задачі й показано, що розв’язання таких задач зводиться до розв’язання задач лінійного програмування та економічної інтерпретації їх.

Даний навчальний посібник містить у собі відомості з тем математичного програмування: “Геометричний метод розв’язування задач лінійного програмування”, “Симплекс–метод розв’язування задач лінійного програмування”, “Метод Жордана-Гаусса”, які вивчаються студентами технічних вищих навчальних закладів на I, II та III курсах навчання. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим курсом лекцій. Ці відомості підтверджуються прикладами. Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 30 варіантів для лабораторних робіт з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Якщо в групі більше студентів і викладач бажає видати всім різні варіанти, це можна зробити використовуючи літери прізвища, які відповідають алфавіту, поділеному на частини з номерами від 1 до 30 або скорелювати набір випадкових чисел. Наприклад, Іванов – 2, 8, 6, 5, 1, 4, 3; Петров – 30, 1, 8, 6, 25, 4, 17 і т. д. У даному посібнику наведені також завдання для виконання типових розрахунків, які передбачають застосування інформаційних технологій.

Навчальний посібник можна використовувати як для підготовки до колоквиумів, практичних занять з поданих тем, так і для типових розрахунків, контрольних домашніх робіт для студентів заочної форми навчання.

1 Вступ до вивчення дисципліни. Приклади задач лінійного програмування

Математичне програмування є математичною дисципліною, яка займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх розв'язання.

В загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого або найменшого значення цільової функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при умовах $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$ ($i = \overline{1, m}$), де f і g_i – задані функції, а b_i – деякі дійсні числа.

В залежності від функцій f і g_i математичне програмування можна розглядати як ряд самостійних дисциплін, що займаються вивченням і розробкою методів розв'язування певного класу задач.

Перш за все задачі математичного програмування поділяються на задачі лінійного і нелінійного програмування. При цьому якщо всі функції f і g_i лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Якщо хоча б одна із вказаних функцій нелінійна, то відповідна задача є задачею нелінійного програмування.

Окремим класом задач є задачі цілочисельного програмування. У цих задачах невідомі можуть приймати тільки цілі значення.

Задача, процес знаходження розв'язку якої є багатоетапним, відноситься до задачі динамічного програмування. У динамічному програмуванні цільова функція має спеціальну структуру (представляє собою суму або добуток функцій, які залежать від різних параметрів).

Розглянемо деякі із задач планування і управління, математичні моделі яких зводяться до оптимізаційних задач або до так званих задач лінійного програмування.

Визначення найкращого складу суміші. Іноді така задача називається задачею про вибір дієти. Нехай відомо вміст поживних речовин у різних продуктах харчування. Відомо також калорійність одиниці кожного виду продукту. Потрібно вибрати раціон так, щоб кожна корисна речовина, що міститься в продуктах і сумарна калорійність дієти були мінімальними.

До задач про суміші відносяться також задачі нижче наведеного типу. Бензини різних сортів отримують змішуванням різних нафтопродуктів. Задані показники якості бензину повинні витримуватись максимально точно. Але вихідні нафтопродукти мають різні технічні характеристики, і від того які нафтопродукти змішувати залежить рентабельність виробництва. У даній задачі потрібно скласти такий план змішування нафтопродуктів, який дав би змогу забезпечити максимальну рентабельність виробництва і дозволяв отримувати бензини заданих сортів у необхідних пропорціях.

Задача про оптимальний план випуску продукції. Нехай деяке підприємство випускає продукцію заданого асортименту. Затрати певного виду ресурсів на випуск одного виробу з вказаного асортименту, а також повні об'єми ресурсів є фіксованими. Прибуток, що отримують від реалізації кожного виду продукції величина постійна. Підприємству потрібно скласти такий план випуску продукції, який би був технологічно здійсненним за наявності вказаних ресурсів і в той же час приносив максимальний прибуток.

Транспортна задача. Ця задача виникає, коли мова йде про раціональне перевезення деякого однорідного продукту від виробників до споживачів. Припускається, що споживачам немає різниці звідки, з яких пунктів буде надходити продукт, головне, щоб він надходив в потрібному об'ємі. Але від того, наскільки раціонально будуть прикріплені пункти потреби до пунктів призначення, залежить об'єм транспортної роботи. У зв'язку з цим виникає задача про найбільш раціональне прикріплення до правильного напрямку перевезень вантажу, при якому потреби задовольняються, а витрати на транспортування мінімальні.

Задача розміщення. Нехай у відомих пунктах є або можуть бути розміщені підприємства, які виробляють деякий продукт. Цей продукт споживають в інших відомих пунктах. Відомі витрати на виробництво одиниці продукту і можливий максимальний об'єм виробництва в усіх пунктах виробництва, а також витрати на транспортування із пунктів виробництва в пункти споживання. Необхідно так вибрати місця розміщення нових підприємств, об'єми виробництва у них і план перевезення, щоб сумарні витрати на виробництво і транспортування всього необхідного об'єму продукту були мінімальними.

Інші види оптимізаційних задач.

Наведемо типові класи задач:

1) **управління запасами** (із збільшенням запасів збільшуються витрати на зберігання, але при цьому зменшуються втрати через можливість їх нестачі);

2) **розподілення ресурсів** (для певного набору робіт необхідно так розподілити ресурси, щоб отримати найбільший прибуток під час виконання цих робіт або мінімізувати втрати, що пов'язані із неповним забезпеченням ресурсами);

3) **ремонт і заміна обладнання** (робоче обладнання з часом зношується і має бути замінено, тому потрібно визначити найкращі строки поновленого ремонту і момент заміни обладнання модернізованим);

4) **масове обслуговування** (має місце в організаціях, що обслуговують черги замовлень або вимог, наприклад на телефонних станціях, ремонтних майстернях; тут задача полягає в тому, щоб мінімізувати сумарні очікувані втрати від несвоєчасного обслуговування замовлень);

5) **календарне планування** (дозволяє скласти такий розклад для завантажування обладнання, щоб сумарна тривалість комплексу завершуваних робіт була мінімальною);

6) **сітьове планування і управління** (має місце під час виконання важких об'єктів, які потребують значних коштів та коли необхідно узгодження строків завершення окремих комплексів робіт і моментів запуску операцій всього комплексу);

7) **вибір маршруту** (при проектуванні комунікацій або трубопроводів необхідно вибирати найкраще їх розміщення, щоб оптимізувати потоки в мережах);

8) **комбіновані задачі** (містять декілька типових задач одночасно).

Приклад. Для виготовлення трьох видів виробів А, В і С використовують токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного із типів обладнання наведені в таблиці.

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виду виробу			Загальний фонд робочого часу обладнання (год)
	А	В	С	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток	10	14	12	

Скласти математичну модель задачі, щоб прибуток від реалізації був максимальним.

Розв'язання. Припустимо, що буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду А, x_2 одиниць – виду В і x_3 одиниць – виду С. Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно затратити $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станкогодин фрезерного обладнання. Оскільки, як загальний фонд робочого часу станків даного типу не може перевищувати 120, то повинна виконуватись нерівність $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120$. Аналогічно складаємо такі обмеження:

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120$$

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280$$

$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240$$

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360$$

Оскільки кількість виготовлених виробів не може бути від'ємною, то слід додати ще обмеження: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Прибуток від їх реалізації складає : $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \rightarrow \max$.

2 Метод Жордана-Гаусса

Під час розв'язування системи лінійних рівнянь методом Гаусса розглядався матричний метод з контрольним стовпцем, у результаті чого дана система рівнянь зводилась до трикутної системи. Для подальшого викладу важливо познайомитись з модифікованим методом **Жордана-Гаусса**, який дозволяє знаходити безпосередньо значення невідомих.

Розглянемо систему двох рівнянь з трьома невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2. \end{cases}$$

Перше рівняння системи поділимо на $a_{11} \neq 0$. Одержимо:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{c_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \end{cases}$$

Після цього домножимо перше рівняння на $(-a_{21})$ і додамо до другого

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{c_1}{a_{11}}, \\ (a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}})x_2 + (a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}})x_3 = c_2 - \frac{c_1a_{21}}{a_{11}}. \end{cases}$$

Означення 1. Елемент a_{ij} системи за допомогою якого ми проводимо виключення невідомого зветься розв'язним елементом. Стовпець з цим елементом зветься розв'язним стовпцем, а рядок – розв'язним рядком.

Означення 2. Перетворення системи при якому:

- 1) розв'язний рядок ділиться на розв'язний елемент;
- 2) у розв'язному стовпці на місці розв'язного елемента ставиться 1, а всі інші нулі;
- 3) нові значення коефіцієнтів обчислюються за формулою

$$a'_{pk} = a_{pk} - \frac{a_{pj}a_{ik}}{a_{ij}}$$

називається **перетворенням однократного заміщення**.

Означення 3. Невідоме, яке входить лише в одне рівняння системи, називається базисним.

Означення 4. Невідомі системи, які не входять в базис, називаються вільними.

Означення 5. Якщо в базисному розв'язку вільні невідомі покласти рівними нулю, то одержимо розв'язок, який називається базисним.

Нехай дана система лінійних рівнянь

[illegible]

В матриці A цієї системи виберемо відмінний від нуля елемент a_{pq} .

Розглянемо нову систему рівнянь

[illegible]

з матрицею A' , коефіцієнти і вільні члени якої визначаються за формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip} \cdot a_{qi}}{a_{qp}} \\ b'_i = b_i - \frac{a_{ip} \cdot b_q}{a_{qp}} \end{array} \right., \text{якщо } i \neq q.$$

Зокрема, $a_{ip} = 0$, якщо $i \neq q$. Якщо $i = q$, то приймаємо $a'_{qj} = a_{qj}, b'_q = b_q$. Таким чином, q -ті рівняння в системах (1) і (2) однакові, а коефіцієнти при x_p в усіх рівняннях системи (2), крім q -го, рівні нулю.

Слід мати на увазі, що системи (1) і (2) одночасно сумісні або несумісні. У випадку сумісності ці системи рівносильні (їх розв'язки збігаються).

Для визначення елемента a'_{ij} матриці A' доцільно використовувати “правило прямокутника”.

Розглянемо чотири елементи матриці A : a_{ij} (елемент, який підлягає перетворенню), a_{qp} (розв'язний елемент) і елементи a_{ip} та a_{qj} . Для знаходження елемента a_i' слід від елемента a_{ij} відняти добуток елементів a_{ip} та a_{qj} , що розміщені в протилежних вершинах прямокутника, та поділити на розв'язний елемент a_{qp} :

$$\begin{array}{c} a_{ij} \dots\dots\dots a_{ip} \\ \\ a_{qj} \dots\dots\dots a_{qp} \end{array}$$

Аналогічним чином можна перетворити систему (2), прийнявши за розв'язний елемент матриці A' елемент $a'_{sr} \neq 0$, причому $s \neq q, r \neq p$. Після цього перетворення всі коефіцієнти при x_r , крім a_{sr} , перетворюються в нуль. Отримана система може бути знову перетворена і т.д. Якщо $\text{rang} A = n$ (ранг системи дорівнює числу невідомих), то після ряду перетворень прийдемо до системи рівнянь виду:

$$\begin{cases} k_1 x_1 = l_1, \\ k_2 x_2 = l_2, \\ \dots\dots\dots \\ k_n x_n = l_n, \end{cases}$$

з якої знаходять значення невідомих. Описаний метод, що оснований на послідовному виключенні невідомих, називається методом Жордана-Гаусса.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо коефіцієнти, вільні члени і суми коефіцієнтів і вільних членів (Σ – контрольний стовпець) у наступну таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	-3	2	6	7
1	-2	0	-1	-6	-8
0	1	1	3	16	21
2	-3	2	0	6	7

Ми взяли за розв'язний елемент коефіцієнт при x_1 у першому рівнянні. Перепишемо без змін рядок таблиці, що містить цей елемент

(розв'язний рядок), а всі елементи 1-го стовпця, крім розв'язного, замінимо нулями:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	-3	2	6	7
0					
0					
0					

За правилом прямокутника заповнюємо порожні клітинки таблиці (це ж правило застосуємо і до стовпця Σ):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	-3	2	6	7
0	-3	3	-3	-12	-15
0	1	1	3	16	21
0	-5	8	-4	-6	-7

Звертаємо увагу на те, що в контрольному стовпці отримуються суми елементів відповідних рядків. Поділивши на (-3) елементи 2-го рядка, отримаємо таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	-3	2	6	7
0	1	-1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	-5	8	-4	-6	-7

Приймемо за розв'язний 2-ий елемент 2-го рядка. Перший стовпець перепишемо без змін, елементи 2-го стовпця, крім розв'язного, замінимо нулями, 2-ий (розв'язний) рядок перепишемо без змін, елементи останніх клітинок таблиці перетворимо за правилом прямокутника:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	-2	1	2	2
0	1	-1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Поділимо елементи 3-го рядка на 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	-2	1	2	2
0	1	-1	1	4	5
0	0	1	1	6	8
0	0	3	1	14	18

Перетворимо таблицю, прийнявши за розв'язний 3-й елемент 3-го стовпця:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	-2	-4	-6

Поділимо елементи 4-го рядка на (-2):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	1	2	3

Перетворимо таблицю, прийнявши за розв'язний 4-ий елемент 4-го рядка:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	0	8	9
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

В результаті перетворень система рівнянь звелась до вигляду:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 8, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 6, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 4, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 2, \end{cases}$$

тобто $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$.

Відповідь: (8; 6; 4; 2)

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 25. \end{cases}$$

а) методом Жордана-Гаусса;

б) знайти всі базисні розв'язки.

Розв'язання.

Складаємо таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	3	-2	1	15
2	1	1	0	20
3	-1	4	-1	25

Множимо перший рядок на (-2) і додаємо до 2-го та множимо перший рядок на (-3) і додаємо до 3-го рядка. В результаті отримаємо:

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	3	-2	1	15
0	-5	5	-2	-10
0	-10	10	-4	-20

Множимо 2-ий рядок на (-2) і додаємо до третього, при цьому отримаємо:

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	3	-2	1	15
0	-5	5	-2	-10
0	0	0	0	0

Поділимо другий рядок таблиці на (-5) .

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	3	-2	1	15
0	1	-1	$\frac{2}{5}$	2
0	0	0	0	0

Помножимо 2-ий рядок на (-3) і додамо до 1-го рядка, одночасно відкинемо 3-ій рядок таблиці, що містить одні нулі.

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	0	1	$-\frac{1}{5}$	9
0	1	-1	$\frac{2}{5}$	2

Отже, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 9, \\ x_2 - x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 2. \end{cases}$$

Прийmemo x_1, x_2 за базисні невідомі; x_3, x_4 за вільні невідомі. Тоді:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + \frac{1}{5}x_4 + 9, \\ x_2 = x_3 - \frac{2}{5}x_4 + 2. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ де $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Тоді дана система набере вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = 9 - c_1 + \frac{1}{5}c_2, \\ x_2 = 2 + c_1 - \frac{2}{5}c_2. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок системи:

$$\{9 - c_1 + (1/5)c_2; 2 + c_1 - (2/5)c_2; c_1; c_2\}.$$

б) Знайдемо базисні розв'язки системи.

Загальна кількість базисних розв'язків рівна: $C_4^2 = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$.

Запишемо всі можливі варіанти: $(x_1; x_2), (x_1; x_3), (x_1; x_4), (x_4; x_2), (x_4; x_3), (x_2; x_3)$.

Базисні невідомі (БН)	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	0	1	-1/5	9
x_2	0	1	-1	2/5	2
x_3	1	0	1	-1/5	9
x_2	1	1	0	1/5	11
x_3	0	-1	1	-2/5	-2
x_1	1	1	0	1/5	11
x_4	0	5/2	-5/2	1	5
x_1	1	1/2	1/2	0	10
x_4	-5	0	-5	1	-45
x_2	2	1	1	0	20
x_4	5	5	0	1	55
x_3	2	1	1	0	20

Отже, шляхом перетворень ми отримали шість базисних розв'язків:
 $X^{(1)} = (9; 2; 0; 0)$, $X^{(2)} = (0; 11; 9; 0)$, $X^{(3)} = (11; 0; -2; 0)$, $X^{(4)} = (10; 0; 0; 5)$,
 $X^{(5)} = (0; 20; 0; -45)$, $X^{(6)} = (0; 0; 20; 55)$.

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса та знайти всі базисні розв'язки

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 20, \\ x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Складаємо таблицю перетворень:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
	1	-1	3	1	4
	2	3	-1	-1	6
	1	-6	10	4	6
Помножимо 1-ий рядок на (-2) і додамо до 2-го рядка та помножимо 1-ий рядок на (-1) і додамо до 3-го рядка. В результаті отримаємо:					
	A	x_2	x_3	x_4	b_i
	1	-1	3	1	4
	0	5	-7	-3	-2
	0	-5	7	3	2
Додамо до 3-го рядка 2-ий та поділимо 2-ий рядок на 5.					
	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
	1	-1	3	1	4
	0	1	-7/5	-3/5	-2/5
	0	0	0	0	0
Додамо до 1-го рядка другий та опустимо 3-ій рядок таблиці перетворень, що містить всі нулі.					
	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
	1	0	8/5	2/5	18/5
	0	1	-7/5	-3/5	-2/5

Отже, ми отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{8}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{18}{5}, \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Прийmemo x_1, x_2 за базисні невідомі; x_3, x_4 за вільні невідомі. Нехай $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ де $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{18}{5} - \frac{8}{5}c_1 - \frac{2}{5}c_2, \\ x_2 = -\frac{2}{5} + \frac{7}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2, \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Загальний розв'язок: $\left\{ \frac{18}{5} - \frac{8}{5}c_1 - \frac{2}{5}c_2; -\frac{2}{5} + \frac{7}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2; c_1; c_2 \right\}$.

б) Базисні розв'язки:

Базисні невідомі (БН)	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	0	8/5	2/5	18/5
x_2	0	1	-7/5	-3/5	-2/5
x_3	5/8	0	1	1/4	9/4
x_2	7/8	1	0	-1/4	11/4
x_1	0	-5/7	1	3/7	2/7
x_3	1	8/7	0	-2/7	22/7
x_1	0	-5/3	7/3	1	2/3
x_4	1	2/3	2/3	0	10/3
x_3	-7/2	-4	0	1	-11
x_4	3/2	1	1	0	5
x_2	5/2	0	4	1	9
x_4	3/2	1	1	0	5

Отже, шляхом перетворень ми отримали базисні розв'язки:

$$X^{(1)} = \left(\frac{18}{5}; -\frac{2}{5}; 0; 0 \right); X^{(2)} = \left(0; \frac{11}{4}; \frac{9}{4}; 0 \right); X^{(3)} = \left(\frac{22}{7}; 0; \frac{2}{7}; 0 \right); X^{(4)} = \left(\frac{10}{3}; 0; 0; \frac{2}{3} \right);$$

$$X^{(5)} = (0; 0; 5; -11); X^{(6)} = (0; 5; 0; 9).$$

2.1 Знаходження опорних розв'язків

У економічних задачах досить часто вимагається умова невід'ємності компонент розв'язку. Виникає задача знаходження невід'ємних базисних розв'язків.

Означення 1. Невід'ємні базисні розв'язки системи рівнянь називаються **опорними розв'язками**.

Щоб не знаходячи усі базисні розв'язки, а потім з них вибирати тільки невід'ємні, потрібно вибирати розв'язний елемент з таких умов:

1) розв'язний стовпець вибирається так, щоб в ньому виявився хоча б один додатний елемент $a_{ij} > 0$;

2) розв'язний елемент вибирається з умови, щоб відношення $\frac{b_i}{a_{ij}}$ було найменшим ($b_i \geq 0, a_{ij} > 0$).

Після вибору розв'язного елемента, подальші обчислення проводять за звичайними правилами жорданових перетворень на одному кроці. Як і при знаходженні базисних розв'язків тут також необхідно слідкувати за тим, щоб на деякому кроці не повернутися до уже попередньо знайденого опорного розв'язку.

Означення 2. Жорданові перетворення з урахуванням двох вище вказаних умов називаються симплексними перетвореннями.

Для симплексних перетворень має місце така теорема.

Теорема. Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь невід'ємні, то після симплексних перетворень вони залишаються невід'ємними.

Розглянемо на конкретному прикладі, як, маючи початковий опорний розв'язок, можна знайти всі інші опорні розв'язки системи лінійних рівнянь.

Приклад. Знайти всі опорні розв'язки системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 5 \\ x_2 - 2x_3 + x_5 = 5 \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

Розв'язання.

Ця система (вільні члени якої додатні) може мати $C_5^3 = 10$ базисних розв'язків, проте лише частина з них може мати усі невід'ємні значення невідомих, тобто є опорними.

Запишемо задану систему лінійних рівнянь у вигляді таблиці

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Базисні невідомі (БН)
1	0	1	0	1	5	x_1
0	1	-2	0	1	5	x_2
0	0	1	1	-2	2	x_4

Очевидно система має початковий опорний розв'язок $X^{(0)} = (5; 5; 0; 2; 0)$.

Вибираємо за розв'язний стовпець, наприклад 3-ій, який має два додатних елементи: $a_{13} = 1$, $a_{33} = 1$. Для вибору розв'язного елемента обчислимо відношення: $\frac{b_1}{a_{13}} = \frac{5}{1} = 5$; $\frac{b_3}{a_{33}} = \frac{2}{1} = 2$. Найменшим виявилось відношення $\frac{b_3}{a_{33}} = 2$. Отже, за розв'язний елементи візьмемо $a_{33} = 1$.

Проведемо жорданове перетворення з розв'язним елементом $a_{33} = 1$, отримаємо таблицю:

БН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	-1	3	3
x_2	0	1	0	2	-3	9
x_3	0	0	1	1	-2	2

Отже, опорний розв'язок: $X^{(1)} = (3; 9; 2; 0; 0)$. Далі вибираємо за розв'язний стовпець 5-ий, в ньому тільки один додатний елемент $a_{15} = 3$. Його візьмемо за розв'язний елемент, замінимо його 1, в результаті перетворень (поділимо 1 рядок на 3).

БН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
	1/3	0	0	-1/3	1	1
	0	1	0	2	-3	9
	0	0	1	1	-2	2
x_2	1/3	0	0	-1/3	1	1
x_3	1	1	0	1	0	12
x_5	2/3	0	1	1/3	0	4

Новий опорний розв'язок такий: $X^{(2)} = (0; 12; 4; 0; 1)$. За розв'язний вибираємо четвертий стовпець, в ньому розв'язний елемент визначаємо з умови $\min \left\{ \frac{12}{1}, \frac{4}{1/3} \right\} = 12$. За розв'язний елемент виберемо 1 на перетині 4-го стовпця і 2-го рядка. В результаті перетворень дістанемо:

БН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	2/3	1/3	0	0	1	5
x_4	1	1	0	1	0	12
x_5	1/3	-1/3	1	0	0	0
x_5	2/3	1/3	0	0	1	4
x_4	0	1	-2	0	1	5
x_1	0	2	-3	1	0	12
x_1	1	-1	3	0	0	0

$X^{(3)} = (0; 12; 4; 0; 1)$. Аналогічно знаходимо $X^{(4)} = (0; 0; 0; 12; 5)$ і $X^{(5)} = (0; 0; 0; 12; 5)$.

Отже, ми знайшли п'ять опорних розв'язків.

3 Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування

3.1 Загальна і основні задачі лінійного програмування

Означення 1. Загальною задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}), \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}), \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}, l \leq n), \quad (4)$$

де a_{ij}, b_i, c_j – задані постійні величини і $k \leq m$.

Означення 2. Функція (1) називається цільовою функцією (або лінійною формою) задачі (1) - (4), а умови (2) - (4) - обмеженнями даної задачі.

Означення 3. Стандартною (або симетричною) задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1) при виконанні умов (2) і (4), де $k = m$ і $l = n$.

Означення 4. Канонічною (або основною) задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1) при виконанні умов (3) і (4), де $k = 0$ і $l = n$.

Означення 5. Сукупність чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняють обмеження задачі (2) - (4), називається допустимим розв'язком (або планом).

Означення 6. План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при якому цільова функція (1) приймає своє максимальне значення, називається оптимальним.

Значення цільової функції (1) при плані X будемо позначати через $F(X)$. Відповідно, якщо X^* – оптимальний план задачі, то для будь-якого X виконується нерівність $F(X) \leq F(X^*)$.

Щоб перейти від одної форми запису задачі лінійного програмування до іншої, потрібно в загальному випадку, по-перше, зводити задачу мінімізації функції до задачі максимізації, по-друге, переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки, по-третє, замінювати змінні, які не задовольняють умову невід'ємності.

В тому випадку, коли потрібно знайти мінімум функції $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, можна перейти до знаходження максимуму функції $F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$, оскільки $\min F = -\max(-F)$.

Обмеження нерівності вихідної задачі лінійного програмування вигляду “ $\leq$ ”, можна перетворити в обмеження-рівності шляхом додавання до їх лівих частин додаткових невід'ємних невідомих, а обмеження-нерівності вигляду “ $\geq$ ” - в обмеження-рівності відніманням від їх лівих частин додаткових невід'ємних невідомих. Таким чином, обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

перетворюється в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0), \quad (5)$$

а обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0), \quad (6)$$

В той же час кожне рівняння системи обмежень

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i. \end{cases} \quad (7)$$

3.2 Геометричний спосіб розв’язування задач лінійного програмування

Означення 7. Множина називається опуклою, якщо разом з довільними двома точками вона містить і їх довільну опуклу комбінацію.

Означення 8. Точка X опуклої множини називається кутовою, якщо вона не може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації будь-яких двох інших різних точок даної множини.

Теорема 1. Множина планів основної задачі лінійного програмування є опуклою (якщо вона непорожня).

Означення 9. Непорожня множина планів основної задачі лінійного програмування називається многокутником розв'язків, а довільна кутова точка многокутника розв'язків – вершиною.

Теорема 2. Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план, то максимальне значення цільова функція задачі прийме в одній із вершин многокутника розв'язків. Якщо максимальне значення цільова функція задачі приймає більше ніж в одній вершині, то вона приймає його в довільній точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Нехай дано задачу лінійного програмування:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max \quad (8)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{для } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (10)$$

В яку входять тільки дві змінні: x_1 і x_2 .

Кожна з нерівностей системи обмежень (9) і (10) визначає на координатній площині x_1Ox_2 деяку півплощину. При цьому, якщо

$x_2 \leq -\frac{a_{i1}}{a_{i2}}x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}}$, то це нижня півплощина, а якщо $x_2 \geq -\frac{a_{i1}}{a_{i2}}x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}}$ - то

верхня. Отже, областю допустимих розв'язків – множиною D задачі (8) – (10) є перетин (спільна частина) скінченної кількості півплощин, тобто деяка багатокутна область на площині.

Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування застосовується в основному в задачах з обмеженнями у вигляді системи нерівностей, які містять дві змінні.

Розв'язання таких задач виконується в два етапи:
перший етап – побудова області допустимих розв'язків – множини D ;
другий етап – пошук в цій області оптимального розв'язку.

Для побудови області допустимих розв'язків потрібно:

- 1) записати рівняння граничних прямих і побудувати їх графіки;
- 2) виділити області розв'язків кожної з нерівностей системи обмежень (9) і (10);
- 3) виділити область допустимих розв'язків D .

Зауваження 1. При побудові областей допустимих розв'язків D може мати місце один із трьох варіантів: 1) опуклий многокутник; 2) необмежена опукла багатокутна область; 3) пуста множина.

В першому випадку задача не має розв'язку через те, що система обмежень несумісна в області допустимих розв'язків; в другому випадку задача завжди має оптимальний розв'язок; в третьому випадку задача може мати або не мати розв'язку. Останнє пов'язано з необмеженим зростанням ($F_{\max} \rightarrow \infty$) або спаданням ($F_{\min} \rightarrow -\infty$) функції F в області допустимих значень.

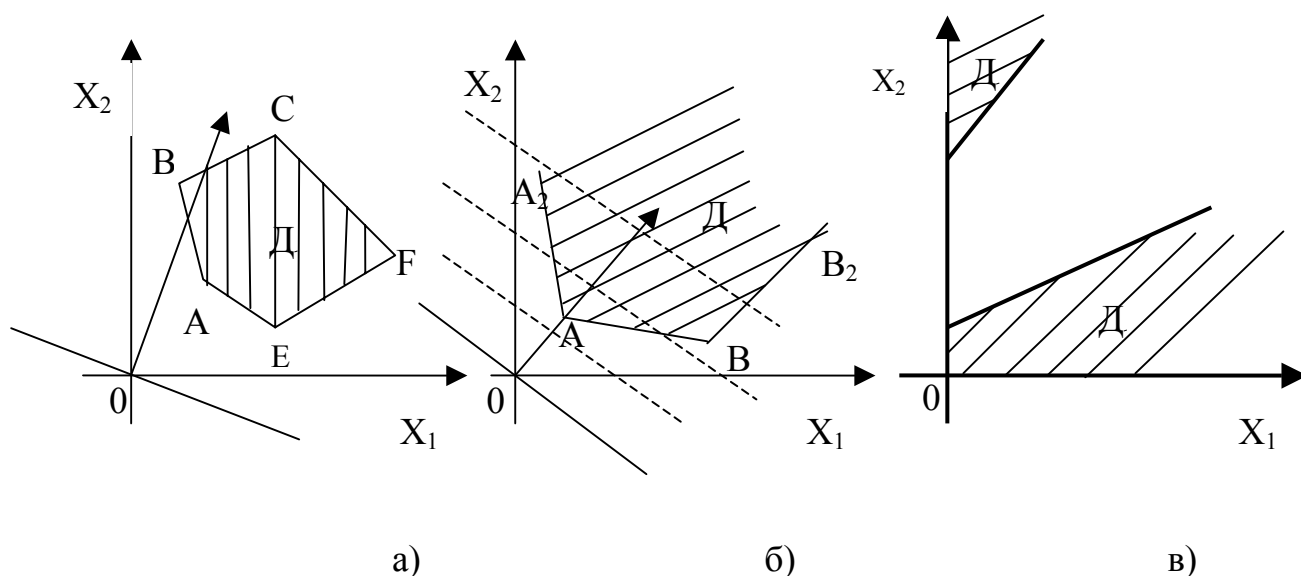


Рисунок 1 – Можливі варіанти допустимих розв'язків D

Далі необхідно перейти до другого етапу – знаходження оптимального розв'язку. Рівняння $F = c_1x_1 + c_2x_2$ при фіксованому значенні F визначає пряму, а при зміні F – сім'ю паралельних прямих з

параметром F . Вектор $\vec{N} = \{c_1, c_2\}$, перпендикулярний до всіх цих прямих, вказує напрямок зростання параметра F . Для всіх точок, які лежать на одній з прямих, функція F приймає певне значення, тому вказані прямі звуться лініями рівня для функції F .

Для знаходження оптимального розв'язку потрібно:

1) на рисунку, де побудована область D , побудувати вектор $\vec{N} = \{c_1, c_2\}$ і лінію рівняння $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$;

2) шляхом паралельного переміщення лінії рівня у напрямку вектора $\vec{N}$ знайти спільну точку лінії рівня і області D . Це буде вершина області D з координатами (x_1^*, x_2^*) . При подальшому паралельному переміщенні лінії рівня вона вже не буде мати спільних точок з областю D ;

3) знайти координати (x_1^*, x_2^*) вершини області D , як перетин двох прямих, які проходять через цю вершину;

4) обчислити максимальне значення цільової функції $F_{\max} = c_1x_1^* + c_2x_2^*$.

Зауваження 2. Якщо лінійна функція F досягає свого екстремального значення в одній кутовій точці, що є вершиною багатокутної області, то задача має єдиний оптимальний розв'язок, якщо більше, ніж в одній точці, то задача має нескінченну кількість оптимальних розв'язків.

Зауваження 3. Для задачі мінімізації лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ необхідно паралельно переміщувати в напрямку, протилежному напрямку вектора $\vec{N}$.

Зауваження 4. Якщо при паралельному переміщенні лінія рівня весь час буде перетинати допустиму область D , то лінійна функція $F = c_1x_1 + c_2x_2$ необмежена зверху на допустимій множині і задача (8) – (10) немає оптимального розв'язку (рис. 1б).

Зауваження 5. Графічний спосіб розв'язування задач ЛП застосовується інколи у випадку якщо система обмежень задачі має більше, ніж дві змінні.

Приклад 1. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:
 $F = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$, при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 18, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases} \text{ для } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання.

Будуємо область допустимих розв'язків – множину D . Процес побудови спочатку подамо у динаміці.

Розглянемо 1-шу нерівність $3x_1 + 9x_2 \leq 18$. Запишемо рівняння граничної прямої $l_1: 3x_1 + 9x_2 = 18$, оскільки рівняння з двома змінними в двовимірному просторі, тобто на площині, геометрично зображає пряму лінію. В системі координат на площині побудуємо пряму. Для побудови прямої l_1 досить взяти дві точки, які належать цій прямій. Візьмемо точки перетину прямої з осями координат:

якщо $x_1 = 0$, то $x_2 = 2$, якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 6$. Через точки $(0, 2)$ і $(6, 0)$ проводимо пряму l_1 (рис. 2). Пряма l_1 дану площину поділяє на дві півплощини. Нерівність $3x_1 + 9x_2 = 18 \Rightarrow x_2 \leq -1/3x_1 + 3$ визначає нижню півплощину по відношенню до прямої l_1 . На рис. 2, ця півплощина заштрихована.

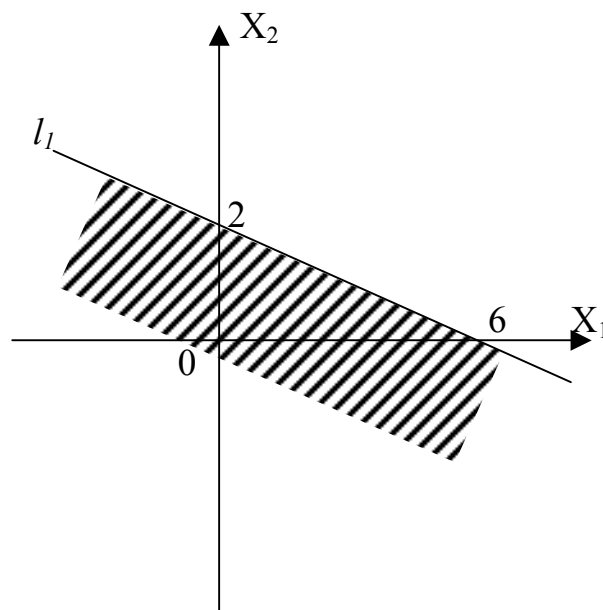


Рисунок 2 – Розв'язки нерівності 1

Аналогічно 2-га нерівність: $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ визначає граничну пряму $l_2: 3x_1 + 4x_2 = 12$. Для її побудови візьмемо точки перетину з осями координат: якщо $x_1 = 0$, то $x_2 = 3$, якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 4$. Через точки $(0, 3)$ і $(4, 0)$ проводимо пряму l_2 (рис.3). Аналогічно як і для прямої l_1 визначаємо напрямок штриховки та зображаємо її на рисунку. Нерівність $x_1 \geq 0$ геометрично зображає праву півплощину відносно осі ординат Ox_2 , разом з граничною прямою $x_1 = 0$, яка збігається з віссю Ox_2 . Аналогічно нерівність $x_2 \geq 0$ геометрично зображає верхню півплощину відносно осі

Ox_1 разом з граничною прямою $x_2 = 0$, яка збігається з віссю Ox_1 . Перетин (спільна частина) цих чотирьох півплощин визначає допустиму область D .

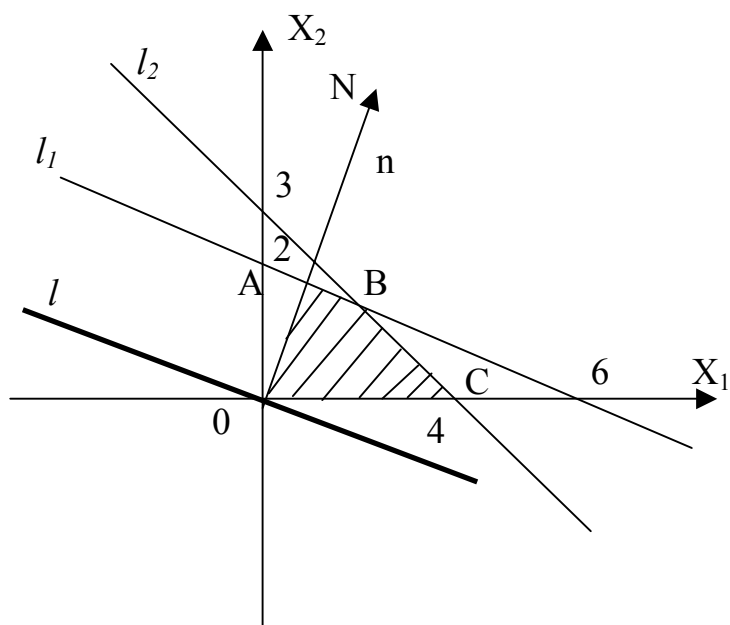


Рисунок 3 – Область допустимих розв'язків

Отже, допустимою областю D є опуклий багатокутник $OABC$, який на рис.3 заштрихований. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, будемо вектор $\vec{N} = \{2; 5\}$, який показує напрям зростання функції $F = 2x_1 + 5x_2$. Лініями рівня є прямі $2x_1 + 5x_2 = c$, де $c \in \mathbb{R}$. Надамо c значення нуля і проведемо пряму $l: 2x_1 + 5x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \{2; 5\}$ (рис. 3).

Щоб знайти найбільше значення функції $F = 2x_1 + 5x_2$ на багатокутнику $OABC$, спочатку знаходимо точку, в якій це значення досягається.

Для цього умовно переміщуємо пряму $l: 2x_1 + 5x_2 = 0$ паралельно самій собі по області D в напрямку вектора $\vec{N} = \{2; 5\}$ до тих пір, поки вона не перестане перетинати область D . Найбільшого значення лінійна функція $F = 2x_1 + 5x_2$ досягатиме у вершині B багатокутника $OABC$, тобто у точці виходу прямої l з даної області.

Знайдемо координати точки $B(x_1^*; x_2^*)$. Точка B лежить на перетині прямих l_1 і l_2 . Для знаходження координат точки B необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 18, \\ 3x_1 + 4x_2 = 12. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння системи друге, отримаємо:

$$5x_2 = 6 \rightarrow x_2^* = \frac{6}{5}. \text{ Тоді } 3x_1 = 12 - 4x_2 = 12 - 4 \cdot \frac{6}{5} = \frac{36}{5}, \text{ а відповідно}$$

$$x_1^* = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}. \text{ Тобто точка В має координати } \left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}\right).$$

Отже, найбільше значення лінійної функції:

$$F_{\max} = f(B) = 2 \cdot \frac{12}{5} + 5 \cdot \frac{6}{5} = \frac{54}{5}.$$

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $F = 2x_1 - 3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15, \\ x_1 - x_2 \geq -2, \\ 2x_1 + x_2 \geq -6. \end{cases}$$

Розв'язання:

Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

- 1) $l_1: 3x_1 + 2x_2 = 12$, яка проходить через точки $(0;6)$ та $(4;0)$;
- 2) $l_2: 3x_1 - 5x_2 = 15$, яка проходить через точки $(0;-3)$ та $(5;0)$;
- 3) $l_3: x_1 - x_2 = -2$, яка проходить через точки $(0; 2)$ та $(-2;0)$;
- 4) $l_4: 2x_1 + x_2 = -6$, яка проходить через точки $(0;-6)$ та $(-3;0)$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.4).

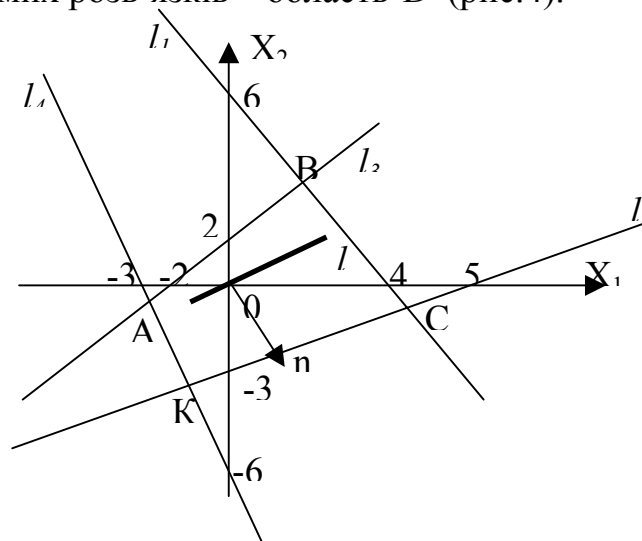


Рисунок 4 – Область допустимих розв'язків

Отже, допустимою областю D є опуклий багатокутник $ABCK$, який на рис.4 заштрихований. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\vec{N} = \{2; -3\}$. Проведемо пряму $l: 2x_1 - 5x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\vec{N}$ (рис. 4).

Умовно переміщуємо пряму $l: 2x_1 - 5x_2 = 0$ паралельно самій собі по області D у напрямі вектора $\vec{N} = \{2; -3\}$ до тих пір, поки вона не перестане перетинати область D . Найбільшого значення лінійна функція $F = 2x_1 - 3x_2$ досягатиме в найбільш віддаленій вершині K багатокутника $ABCK$, тобто у точці виходу прямої з даної області. Знайдемо координати точки $K (x_1^*; x_2^*)$. Точка K лежить на перетині прямих l_4 і l_2 . Для знаходження координат точки K необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 15, \\ 2x_1 + x_2 = -6. \end{cases}$$

Домножимо 2-ге рівняння системи на 5 і додамо до 1-го, отримаємо:

$$13x_2 = -15 \rightarrow x_2^* = -\frac{15}{13}. \text{ Тоді } x_2 = -6 - 2x_1 = -6 - 2 \cdot \left(-\frac{15}{13}\right) = -\frac{48}{13}. \text{ Тобто}$$

точка K має координати $\left(-\frac{48}{13}; -\frac{15}{13}\right)$.

Отже, найбільше значення лінійної функції:

$$F_{\max} = F(K) = 2 \cdot \left(-\frac{48}{13}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{15}{13}\right) = -\frac{51}{13}.$$

Найменшого значення лінійна функція $F = 2x_1 - 3x_2$ досягатиме в найближчій вершині B багатокутника $ABCK$, тобто у точці входу прямої l у дану область. Знайдемо координати точки $B (x_1'; x_2')$. Точка B лежить на перетині прямих l_1 і l_3 . Для знаходження координат точки B необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12, \\ x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$

Домножимо 2-ге рівняння системи на 2 і додамо до 1-го, отримаємо:

$$5x_1 = 8 \rightarrow x_1' = \frac{8}{5}. \text{ Тоді } x_2' = 2 + x_1 = 2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5}. \text{ Тобто точка } B \text{ має}$$

координати $\left(\frac{8}{5}; \frac{18}{5}\right)$.

Отже, найменше значення лінійної функції:

$$F_{\min} = F(B) = 2 \cdot \frac{8}{5} - 3 \cdot \frac{18}{5} = -\frac{38}{5}.$$

4 Симплекс метод розв'язування задач лінійного програмування

4.1 Поняття про симплексний метод (симплекс метод)

Розглянемо канонічну задачу лінійного програмування, у якій система лінійних рівнянь розв'язана відносно одиничного базису і всі вільні члени невід'ємні числа:

$$F = -c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 = b_1, \\ x_2 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 = b_2, \\ x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 = b_3, \\ x_j \geq (j=1,2,\dots,6) \end{cases} \quad (1)$$

Запишемо цільову функцію у вигляді:

$$F - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - c_4x_4 - c_5x_5 - c_6x_6 = -c_0 \quad (2)$$

Система (1) має опорний розв'язок $X_0 = \{b_1; b_2; b_3; 0; 0; 0\}$ при якому $F_0 = -c_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.

Рівняння (1_1) помножимо на c_1 , рівняння (1_2) помножимо на c_2 , рівняння (1_3) помножимо на c_3 і додамо до рівняння (2). Одержимо:

$$\begin{aligned} F - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - c_4x_4 - c_5x_5 - c_6x_6 + c_1x_1 + c_1(a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6) + c_2x_2 + \\ + c_2(a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6) + c_3x_3 + c_3(a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6) = -c_0 + c_1b_1 + c_2b_2 + \\ + c_3b_3 \Rightarrow \\ F + x_4(c_1a_{14} + c_2a_{24} + c_3a_{34} - c_4) + x_5(c_1a_{15} + c_2a_{25} + c_3a_{35} - c_5) + x_6(c_1a_{16} + \\ + c_2a_{26} + c_3a_{36} - c_6) = F_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Коефіцієнти цього рівняння

$$a_{0k} = \sum_{i=1}^3 c_i a_{ik} - c_k, \quad (k=4,5,6) \quad (4)$$

Приєднаємо рівняння (3) до системи (1), вважаючи F базисною змінною. Складемо таблицю:

c_1	Базис	$-c_0$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{ij}
c_1	x_1	b_1	1	0	0	a_{14}	a_{15}	a_{16}	
c_2	x_2	b_2	0	1	0	a_{24}	a_{25}	a_{26}	
c_3	x_3	b_3	0	0	1	a_{34}	a_{35}	a_{36}	
	F	F_0	0	0	0	a_{ij}	a_{05}	a_{06}	

Останній рядок таблиці зветься нульовим або індексним. Оптимальний розв'язок – це один з опорних розв'язків. Будемо переходити у складеній таблиці, що зветься симплексною, від одного опорного розв'язку до іншого так, щоб цільова функція F при цьому зростала. Ці перетворення будемо виконувати доти, поки функція F не досягне найбільшого значення, притримуючись при цьому такого правила:

- 1) в індексному рядку знаходимо від'ємний елемент, що має найбільше абсолютне значення;
- 2) стовпець з цим елементом беремо за розв'язний;
- 3) у цьому стовпці за розв'язний беремо додатний елемент для якого відношення $\frac{b_i}{a_{ij}}$ є найменшим;

4) після цього робимо симплексне перетворення таблиці.

Теорема. Якщо після симплексного перетворення таблиці:

- 1) всі оцінки індексного рядка невід'ємні, то одержаний опорний розв'язок є оптимальним;
- 2) якщо в індексному рядку є хоча б одна від'ємна оцінка, а в стовпці з такою оцінкою є додатні числа, то розв'язок можна покращити, зробивши наступне симплексне перетворення;
- 3) якщо в індексному рядку є хоча б одна від'ємна оцінка, стовпець якої не містить додатних елементів, то задача не має оптимального розв'язку ($F \rightarrow \infty$).

Примітка. Якщо в результаті симплексних перетворень одержано оптимальний розв'язок і при цьому оцінка якої-небудь вільної змінної дорівнює нулю, то задача має безліч розв'язків (має альтернативний оптимум).

Приклад 1.

Знайти найбільше значення лінійної функції $F = 7x_1 + 5x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ 3x_2 \leq 15, \\ 3x_1 \leq 18, \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання.

Зведемо систему обмежень до рівностей. Для цього в друге обмеження додамо балансну змінну $x_4 \geq 0$, у третє – $3x_5 \geq 0$, у четверте – $3x_6 \geq 0$. У результаті отримаємо:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,3,4,5,6.$$

Складаємо симплексні таблиці і робимо їх перетворення.

c_i	Базис	0	7	5	0	0	0	0	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{ij}
0	x_3	19	2	3	1	0	0	0	19/2
0	x_4	13	2	1	0	1	0	0	13/2
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	
0	x_6	6	1	0	0	0	0	1	6-min
	F	0	-7	-5	0	0	0	0	
0	x_3	7	0	3	1	0	0	-2	7/3
0	x_4	1	0	1	0	1	0	-2	1-min
0	x_5	5	0	1	0	0	1	1	5
7	x_1	6	1	0	0	0	0	1	
	F	42	0	-5	0	0	0	7	
0	x_3	4	0	0	1	-3	0	4	1-min
5	x_2	1	0	1	0	1	0	-2	4/3
0	x_5	4	0	0	0	-1	1	3	6
7	x_1	6	1	0	0	0	0	1	
	F	47	0	0	0	5	0	-3	
0	x_6	1	0	0	1/4	-3/4	0	1	
5	x_2	3	0	1	1/2	-1/2	0	0	
0	x_5	1	0	0	-3/4	5/4	1	0	
7	x_1	5	1	0	-1/4	3/4	0	0	
	F	50	0	0	3/4	11/4	0	0	

В індексному рядку немає від'ємних оцінок, тому ми одержали оптимальний розв'язок задачі: $F_{\max} = 50$, $X_{\text{opt}} = \{5; 3; 0; 0; 1; 1\}$.

Відповідь: $F_{\max} = 50$.

Приклад 2.

Дослідити дану функцію $F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3,4,5). \end{cases}$$

Розв'язання.

Складемо симплексну таблицю:

c_i	Базис	0	2	1	-1	1	-1	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{ij}
-1	x_3	5	1	1	1	0	0	5
1	x_4	9	2	1	0	1	0	9
-1	x_5	7	1	2	0	0	1	(7/2)- min
	F	-3	-2	-3	0	0	0	
-1	x_3	3/2	1/2	0	1	0	-1/2	3- min
1	x_4	11/2	3/2	0	0	1	-1/2	11/3
1	x_2	7/2	1/2	1	0	0	1/2	7
	F	15/2	-1/2	0	0	0	3/2	
2	x_1	3	1	0	2	0	-1	
1	x_1	1	0	0	-3	1	1	
1	x_2	2	0	1	-1	0	1	
	F	9	0	0	1	0	1	

У індексному рядку немає від'ємних чисел, тому ми одержали оптимальний розв'язок: $F_{\max} = 9, X_{\text{opt}} = \{3; 2; 0; 1; 0\}$.

Відповідь: $F_{\max} = 9, X_{\text{opt}} = \{3; 2; 0; 1; 0\}$.

4.2 Метод штучного базису (М-метод)

Нехай задана канонічна задача лінійного програмування:

$$F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,\dots,4), \\ b_i \geq 0 \ (i=1,2). \end{cases} \quad (1)$$

Система обмежень цієї задачі не зведена до одиничного базису. В систему обмежень (1) введемо дві змінні $x_5 \geq 0$ і $x_6 \geq 0$, що зветься штучним базисом і розглянемо задачу лінійного програмування:

$$T = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 - M(x_5 + x_6) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + x_5 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + x_6 = b_2, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,6) \end{cases} \quad (2)$$

де M – деяке достатньо велике стале число.

Задача (2), на відміну від задачі (1) має початковий опорний розв'язок $Y_{opt} = \{0; 0; 0; 0; b_1; b_2\}$.

Розглянемо довільний опорний розв'язок задачі (2):

$$Y = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \beta_5; \beta_6\}.$$

Якщо в ньому покласти $\beta_5 = \beta_6 = 0$, то $X = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4\}$ буде опорним розв'язком задачі (1). Навпаки, якщо $X = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4\}$ – опорний розв'язок задачі (1), то $Y = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; 0; 0\}$ – розв'язок задачі (2). Тому розв'язки X і Y зветься відповідними.

Теорема. 1. Якщо в оптимальному розв'язку M -задачі (2) $Y_{opt} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \beta_5; \beta_6\}$ штучні змінні дорівнюють нулю ($\beta_5 = \beta_6 = 0$), то відповідний розв'язок $X = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4\}$ задачі (1) є оптимальним розв'язком останньої.

2. Якщо в оптимальному розв'язку M -задачі (2) хоча б одна штучна змінна відмінна від нуля, то система обмежень (1) несумісна.

3. Якщо M -задача (2) не має оптимального розв'язку, то не має оптимального розв'язку і початкова задача (1).

Приклад. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$F = 6x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \geq 12, \\ x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Зведемо задачу до канонічної форми:

$$F = 6x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 - 5x_2 + x_4 = 5, \\ 9x_1 + 10x_2 + x_5 = 90, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,5). \end{cases}$$

Ввівши в перше рівняння штучну змінну $x_6 \geq 0$, одержимо M -задачу:

$$F = 6x_1 + x_2 - Mx_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_6 = 12, \\ x_1 - 5x_2 + x_4 = 5, \\ 9x_1 + 10x_2 + x_5 = 90, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,6). \end{cases}$$

Складаємо для останньої задачі симплексну таблицю і шляхом перетворень останньої виключаємо штучну змінну з базису. При цьому у таблиці записуємо два індексні рядки – перший, що відповідає цільовій функції F , і другий, що відповідає штучній змінній. Перетворення таблиці починаємо з оцінок другого індексного рядка.

c_i	Базис	0	6	1	0	0	0	$-M$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{ij}
$-M$	x_6	12	4	-3	-1	0	0	1	3- min 5 10
0	x_4	5	1	-5	0	1	0	0	
0	x_5	90	9	10	0	0	1	0	
	x_5	0	-6	-1	0	0	0	0	
M	T	-12	-4	3	1	0	0	0	
6	x_1	3	1	-3/4	-1/4	0	0		
0	x_4	2	0	-17/4	1/4	1	0		
0	x_5	63	0	67/4	9/4	0	1		
	T	18	0	-11/2	-3/2	0	0		
6	x_1	390/67	1	0	-10/67	0	3/67	1205/55- min 252/9	
0	x_4	1205/67	0	0	55/67	1	17/67		
1	x_2	252/67	0	1	9/67	0	4/67		
	T	2592/67	0	0	-51/67	0	22/67		
6	x_1	100/11	1	0	0	2/11	1/11		
0	x_3	241/11	0	0	1	65/11	17/55		
1	x_2	9/11	0	1	0	-9/55	1/55		
	T	609/11	0	0	0	51/55	31/55		

В індексному рядку немає від'ємних оцінок. Тому ми знайшли оптимальний розв'язок M -задачі:

$$T_{\max} = \frac{609}{11}; \quad Y_{\text{opt}} = \left\{ \frac{100}{11}; \frac{9}{11}; \frac{241}{11}; 0; 0; 0 \right\}.$$

Оскільки у цьому розв'язку штучна змінна $x_6 = 0$, то оптимальний розв'язок канонічної задачі ЛП:

$$F_{\max} = \frac{609}{11}; \quad X_{\text{opt}} = \left\{ \frac{100}{11}; \frac{9}{11}; \frac{241}{11}; 0; 0; 0 \right\}.$$

Тоді розв'язок початкової задачі:

$$F_{\max} = \frac{609}{11}; \quad X_{\text{opt}} = \left\{ \frac{100}{11}; \frac{9}{11} \right\}.$$

4.3 Поняття про вироджений розв'язок

При розгляді симплексного методу, припускалось, що $b_i > 0$ як у вихідній системі так і у системах, що отримані після чергових ітерацій. Якщо ж у деяких рівняннях вільні члени $b_i = 0$, то у відповідному цій системі опорному розв'язку базисні невідомі, відносно яких ці рівняння розв'язані, приймають нульові значення.

Означення. Опорний розв'язок, у якому хоча б один із базисних невідомих приймає нульове значення, називається виродженим розв'язком, а задача лінійного програмування, яка має хоча б один вироджений розв'язок – виродженою задачею.

Використовуючи в цьому випадку послідовні ітерації, ми можемо повернутися до набору базисних і вільних невідомих, що вже зустрічалися, тобто з'являється так зване зациклювання в схемі підрахунку. Щоб запобігти йому доцільно використовувати таке правило.

Правило. Якщо на будь-якому етапі підрахунку виникає невизначеність у виборі розв'язного рядка, тобто виявилось декілька рівних мінімальних відношень $\frac{b_i}{a_{ip}}$, то слід вибирати той рядок, для якого

відношення елементів наступного стовпця до розв'язного є найменшим. Якщо при цьому знову виявляться рівні мінімальні відношення, то складають відношення елементів наступного стовпця, і так до тих пір, поки розв'язний рядок не визначиться однозначно.

Приклад 1.

Знайти максимум функції $F = x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_j > 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Складаємо M -задачу

$$T = x_1 + x_2 - Mx_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Розв'яжемо останню задачу шляхом симплексних перетворень.

c_i	Базис	0	1	1	0	0	0	$-M$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{ij}
0	x_6	10	1	2	1	0	0	0	5 1- min 10
$-M$	x_3	2	1	2	0	-1	0	1	
0	x_5	10	2	1	0	0	1	0	
M	T	0	-1	-1	0	0	0	0	
		-2	-1	-2	0	1	0	0	
0	x_3	8	0	0	1	1	0	2- min 6	
1	x_2	1	1/2	1	0	-1/2	0		
0	x_5	9	3/2	0	0	1/2	1		
	T	1	-1/2	0	0	-1/2	0		
0	x_1	8	0	0	1	1	0	3- min	
1	x_5	2	1	2	0	-1	0		
0	x_3	6	0	-3	0	2	1		
	T	2	0	1	0	-1	0		
0	x_1	5	0	3/2	1	0	-1/2	10/3- min 10	
1	x_3	5	1	1/2	0	0	1/2		
0	x_4	3	0	-3/2	0	1	1/2		
	T	5	0	-1/2	0	0	1/2		
1	x_1	10/3	0	1	2/3	0	-1/3		
1	x_2	10/3	1	0	-1/3	0	2/3		
0	x_4	8	0	0	1	1	0		
	T	20/3	0	0	1/3	0	1/3		

В індексному рядку немає від'ємних чисел. Тому ми одержали оптимальний розв'язок M - задачі: $T_{\max} = \frac{20}{3}$; $Y_{opt} = \left\{ \frac{10}{3}; \frac{10}{3}; 0; 8; 0; 0 \right\}$.

Тоді оптимальний розв'язок початкової задачі:

$$F_{\max} = \frac{20}{3}; \quad X_{\text{opt}} = \left\{ \frac{10}{3}, \frac{10}{3} \right\}.$$

5 Математичні моделі деяких економічних задач

Розглянемо на конкретних прикладах моделі деяких економічних задач.

Задача 1.

Столярний цех меблевого комбінату може виготовити 400 стільців або 100 столів. Але оздоблювально-фарбувальний цех цього комбінату в змозі обробити не більше 250 од. (столів або стільців). Прибуток від реалізації одного стільця 18 грн., стола – 54 грн. Скласти програму виробництва, яка б забезпечила максимальний прибуток.

Розв'язання: Складемо математичну модель даної задачі.

Нехай x_1 – кількість стільців;

x_2 – кількість столів. Тоді система обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{400} + \frac{x_2}{100} \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 250 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

А відповідно до умови цільова функція визначається співвідношенням:

$$F = 18x_1 + 54x_2 \rightarrow \max$$

Задача 2.

Для встановлення торговельного павільйону потрібно бруски довжиною 5м розпиляти на менші бруски розмірами: 1,5 м; 2,4 м; 3,2 м; в кількостях 15 шт. першого розміру, 20 шт. – другого і більше 30 шт. – третього, щоб величина відходів була мінімальною.

Деталі (бруски)	Способи розпилювання			
	I	II	III	IV
1,5 м	3	1	1	0
2,4 м	0	1	0	2
3,2 м	0	0	1	0
Відходи	0,5	1,1	0,3	0,2

Розв'язання: Нехай x_1 – брусків, що розпиляли I способом
 x_2 – брусків, що розпиляли II способом
 x_3 – брусків, що розпиляли III способом
 x_4 – брусків, що розпиляли IV способом.

$$\begin{cases} \text{деталей, довжиною 1,5 м :} & 3x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ \text{деталей довжиною 2,4 м :} & x_2 + 2x_4 = 20 \\ \text{деталей довжиною 3,2 м :} & x_3 \geq 30 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Тоді цільова функція має вигляд:

$$F = 0,5x_1 + 1,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \rightarrow \min$$

Задача 3.

Для виготовлення коктейлів А і В використовуються соки С і D. Порція (0,2 л.) коктейлю А складається із 40% соку С і 60% соку D, а коктейлю В – із 60% соку С і 40% соку D. Ціна А – 68 коп., В – 72 коп. за порцію. При якій кількості коктейлів А, В буде отримано максимальний прибуток якщо соку С маємо 100 л., соку D – 160 л.

Розв'язання: Нехай x_1 – кількість порцій А,
 x_2 – кількість порцій В.

$$\begin{cases} \text{Тоді соку С маємо} & (0,4x_1 + 0,6x_2) \cdot 0,2 = 100 \\ \text{соку D маємо} & (0,6x_1 + 0,4x_2) \cdot 0,2 = 160 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2.$$

Відповідно цільова функція дорівнює $F = 68x_1 + 72x_2 \rightarrow \max$

Задача 4.

Фермер Петренко має земельну ділянку 150 га. Від тогорічного врожаю він залишив великі запаси картоплі, насіння кукурудзи, пшениці і трав на посадку. Він хоче розподілити свої 150 га між цими чотирма культурами так, щоб отримати максимальний прибуток. Однак фермер Петренко займається ще й іншою роботою, тому він може присвятити роботі на земельній ділянці не більше 50 годин в тиждень протягом тих 10 тижнів, які необхідні для посіву, вирощування, збору врожаю.

За таблицею скласти план, що вказує скільки кілограмів насіння кожної культури має засіяти фермер, щоб отримати максимальний прибуток.

Види насіння	Га/ кг насіння	Заг. к-ть годин/ кг насіння	Прибуток/ кг насіння
Картопля	0,1	0,6	4
Кукурудза	0,2	0,5	6
Пшениця	0,3	0,4	6
Трави	0,4	0,3	5

Розв'язання: Нехай $y_i, i = 1, 2, 3, 4$ – кількість кілограмів насіння (картоплі, кукурудзи, пшениці і трав), яке фермер повинен засіяти

$$\begin{cases} 0,1y_1 + 0,2y_2 + 0,3y_3 + 0,4y_4 \leq 150, \\ 0,6y_1 + 0,5y_2 + 0,4y_3 + 0,3y_4 \leq 500, \\ y_i \geq 0. \end{cases}$$

Тоді $F(y) = 4y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 5y_4 \rightarrow \max$

Задача 5.

Фермер має в своєму розпорядженні 100 га землі, фіксовану кількість (найманих робітників): 160 людино-годин найманої праці і 1100 грн для проведення капіталовкладень. Він хоче виростити два врожаї: пшениці або картоплі, які дають прибуток 120 грн/га і 40 грн/га відповідно. Затрати (висівання, вирощування, і т. д.) складають 20 грн/га для пшениці та 10 грн/га для картоплі. Затрати праці, необхідні на вирощування врожаю складають 4 людино-години/га і 1 людино-година/га відповідно (пшениця, картопля). Фермера цікавить скільки гектарів пшениці і скільки гектарів картоплі йому необхідно засадити, щоб прибуток був максимальним.

Розв'язання:

Нехай y_1 – кількість гектарів, які планується відвести під картоплю, y_2 – кількість гектарів, які планується відвести під пшеницю.

Тоді:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \leq 100 \\ y_1 + 4y_2 \leq 160 \\ 10y_1 + 20y_2 \leq 1100 \end{cases} \quad y_1, y_2 \geq 0$$

Відповідно до умови задачі $F = 40y_1 + 120y_2 \rightarrow \max$

Задача 6.

Дієтолог повинна скласти для одного з своїх пацієнтів меню ланча, включаючи в нього хліб (не більше 2,5 скибок), масло, молоко (не більше 2-х склянок) так, щоб пацієнт отримав за кожним ланчем не менше ніж,

13 од. вітаміну А і 10 од. вітаміну В. Вміст вітамінів у вказаних продуктах подано в таблиці.

Вітаміни	Хліб	Масло	Молоко
А	2 од. / скибка	4 од. / порція	2 од. / порція
В	2 од. / скибка	10 од. / порція	3 од. / порція

В яких кількостях потрібно дієтологу включити дані продукти в меню ланча, щоб при мінімальних затратах задовольнити потреби свого пацієнта, якщо відомо, що скибка хліба коштує 2 центи, порція масла – 2 центи, склянка молока – 10 центів.

Розв'язання:

Нехай y_1 – кількість хліба,
 y_2 – кількість масла,
 y_3 – кількість молока.

Тоді за умовою задачі система обмежень набуде вигляду:

$$\begin{array}{l} \text{вітамін А :} \\ \text{вітамін В :} \\ \text{молоко :} \\ \text{хліб :} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 13 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 10 \\ y_3 \geq 2 \\ y_1 \leq \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Оскільки витрати на ланч пацієнта мають бути мінімальними, то
 $F(y) = 2y_1 + 2y_2 + 10y_3 \rightarrow \min$

Задача 7.

Скласти раціон відгодівлі худоби. При відгодівлі кожна тварина щоденно має отримати не менше 90 од. поживної речовини S_1 , не менше 8 од. поживної речовини S_2 , не менше 12 од. поживної речовини S_3 . Для складання раціону використовую два види корму. Кількість одиниць поживної речовини в 1 кг. корму та вартість 1 кг. корму приведені в таблиці.

Поживні речовини	Кількість одиниць поживної речовин в 1 кг корму	
	Корм I	Корм II
S_1	3	1
S_1	1	2
S_1	1	6
Вартість 1 кг корму (грн)	4	6

Скласти денний раціон потрібної поживності з мінімальними вартісними затратами.

Розв'язання:

Нехай x_1 – кількість кілограмів 1-го виду корму,

x_2 – кількість кілограмів 2-го виду корму.

Тоді система обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки затрати на відгодівлю мають бути мінімальними, то $F(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$

6 Завдання для лабораторних робіт

6.1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса.

Завдання 1

а) Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса

б) Знайти всі базисні розв'язки системи рівнянь.

$$1.1 \quad \begin{cases} x_1 - 6x_2 - 3x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 12. \end{cases}$$

$$1.2 \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 - 8x_4 = 9. \end{cases}$$

$$1.3 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$1.4 \quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

$$1.5 \quad \begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 4x_4 = 10. \end{cases}$$

$$1.6 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

$$1.7 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 8. \end{cases}$$

$$1.8 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$$

$$1.9 \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

$$1.10 \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

$$1.11 \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

$$1.12 \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + 8x_4 = 4. \end{cases}$$

$$1.13 \begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = 4, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

$$1.14 \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 8x_4 = 7. \end{cases}$$

$$1.15 \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 4x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$$

$$1.16 \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20. \end{cases}$$

$$1.17 \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 15, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 25, \\ 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 10. \end{cases}$$

$$1.18 \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 20, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$$

$$1.19 \begin{cases} 3x_1 - x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 12. \end{cases}$$

$$1.20 \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 14. \end{cases}$$

$$1.21 \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 15, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 25. \end{cases}$$

$$1.22 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.23 \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

$$1.24 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

$$1.25 \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 20, \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 10, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$1.26 \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$1.27 \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 7. \end{cases}$$

$$1.28 \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$1.29 \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

$$1.30 \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 10. \end{cases}$$

Завдання 2.

Знайти всі опорні (невід'ємні базисні) розв'язки системи лінійних рівнянь.

$$2.1 \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 36, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$$

$$2.2 \begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + 3x_4 + 5x_5 = 36, \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

$$2.3 \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_5 = 21, \\ -x_2 + x_3 + x_5 = 3, \\ 4x_2 + x_4 - x_5 = 21, \\ x_2 - x_5 + x_6 = 3. \end{cases}$$

$$2.4 \begin{cases} x_1 - 4x_4 + x_6 = 3, \\ x_3 - x_4 + x_6 = 6, \\ x_4 + x_5 = 6, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_6 = 33. \end{cases}$$

$$2.5 \begin{cases} x_1 + 3x_4 - 2x_5 = 9, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 8, \\ x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 9. \end{cases}$$

$$2.6 \begin{cases} -x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ -5x_2 + x_3 - 2x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

$$2.7 \begin{cases} x_1 - x_5 + x_6 = 4, \\ x_2 - 4x_5 - x_6 = 12, \\ x_3 + x_5 + x_6 = 8, \\ x_4 + x_5 - x_6 = 3. \end{cases}$$

$$2.8 \begin{cases} 7x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 + x_6 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 4. \end{cases}$$

$$2.9 \begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_6 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_7 = 6. \end{cases}$$

$$2.10 \begin{cases} x_1 + 4x_3 + x_6 = 30, \\ x_2 - 4x_3 + 3x_6 = 12, \\ x_3 + x_4 - 2x_6 = 3, \\ 2x_3 + x_5 + 3x_6 = 30. \end{cases}$$

$$2.11 \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 & + x_4 & = 3, \\ -x_2 + 4x_4 + x_5 & = & 12, \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 8, \\ x_2 - x_4 & + x_5 & = 4. \end{array} \right.$$

$$2.12 \left\{ \begin{array}{lcl} & x_2 + x_3 & = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 & + x_4 & = 33, \\ x_1 - x_2 & + x_5 & = 6, \\ x_1 - 4x_2 & + x_6 & = 3. \end{array} \right.$$

$$2.13 \left\{ \begin{array}{lcl} -2x_1 + x_2 + x_3 & = & 3, \\ x_1 + 4x_2 & + x_4 & = 30, \\ 3x_1 + 2x_2 & + x_5 & = 30, \\ 3x_1 - 4x_2 & + x_6 & = 12. \end{array} \right.$$

$$2.14 \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 3, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 & + x_5 & = 5, \\ 6x_1 - 5x_2 - 2x_3 & + x_6 & = 2, \\ 8x_1 - x_2 - x_3 & + x_7 & = 1. \end{array} \right.$$

$$2.15 \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 & + x_2 + x_3 - x_4 & = 1, \\ 2x_1 & + 5x_2 - x_3 & + x_5 = 4, \\ 3x_1 & - x_2 - x_3 & + x_6 = 1, \\ 5x_1 & + 5x_2 + 3x_3 & + x_7 = 8. \end{array} \right.$$

$$2.16 \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & - x_5 + x_6 & = 3, \\ x_2 & - x_5 + 4x_6 & = 21, \\ & x_3 + 4x_5 - x_6 & = 21, \\ & x_4 + x_5 - x_6 & = 3. \end{array} \right.$$

$$2.17 \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 & + 3x_3 + x_4 & = 6, \\ 3x_1 & - 2x_3 & + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 & + 4x_3 & = 2, \\ -2x_1 & + x_3 & + x_6 = 5. \end{array} \right.$$

$$2.18 \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & + x_4 & = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & + x_5 & = 3, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 & + x_6 & = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 & + x_7 & = 24. \end{array} \right.$$

$$2.19 \left\{ \begin{array}{lcl} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 5, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 & + x_5 & = 7, \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 & + x_6 & = 12, \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 & + x_7 & = 6. \end{array} \right.$$

$$2.20 \left\{ \begin{array}{lcl} x_2 & + 3x_4 & = 6, \\ & x_3 + x_4 & = 2, \\ x_1 & - x_4 & = 4, \\ & x_4 + x_5 & = 5. \end{array} \right.$$

$$2.21 \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & - x_4 & - 2x_6 = 5, \\ x_2 & + 2x_4 - 3x_5 + x_6 & = 3, \\ & x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 & = 5. \end{array} \right.$$

$$2.22 \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 3x_2 & + 5x_4 & = 31, \\ & - 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = 9, \\ & 3x_3 - x_4 + x_5 & = 21. \end{array} \right.$$

$$2.23 \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = 4, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_6 & = 14, \\ x_2 + 5x_3 + x_7 & = 5. \end{cases} \quad 2.24 \begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 & = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 & = 2, \\ 8x_1 - x_2 - 8x_3 + x_7 & = 8. \end{cases}$$

$$2.25 \begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 & = 8, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 & = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_7 & = 2. \end{cases} \quad 2.26 \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 & = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 & = 5, \\ x_3 - 2x_4 + x_5 & = 2. \end{cases}$$

$$2.27 \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 & = 31, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 & = 21. \end{cases} \quad 2.28 \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 & = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 & = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 & = 5. \end{cases}$$

$$2.29 \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 + 2x_5 & = 3, \\ -2x_2 + x_3 - x_5 & = 5, \\ 6x_2 - 5x_4 - 2x_5 + x_6 & = 5. \end{cases} \quad 2.30 \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 & = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_4 & = 32, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 & = 16, \\ x_1 - x_2 + x_6 & = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_7 & = 2. \end{cases}$$

Питання до захисту лабораторної роботи №1

1. Який елемент називається розв'язним?
2. Яке перетворення називається перетворенням однократного заміщення?
3. Які невідомі називаються базисними?
4. Який розв'язок системи називається опорним?
5. Що називається рангом матриці?
6. Яких умов слід дотримуватися під час вибору розв'язного елементу?
7. Які властивості має базис?

6.2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Тема: Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування

Завдання 1.

Знайти найбільше значення лінійної форми: $F(x) = ix_1 + (i + 2)x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} ix_1 + (3i)x_2 \leq 5i + 1 \\ (i + 4)x_1 + ix_2 \leq 5i + 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(i взяти рівним номеру варіанта).

Завдання 2.

Знайти найбільше і найменше значення лінійної форми:

$$2.1 \quad \begin{cases} F(x) = 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \geq -4, \\ -3x_1 + x_2 \geq -6, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq -12. \end{cases}$$

$$2.2 \quad \begin{cases} F(x) = 5x_1 + x_2 \\ 4x_1 - x_2 \leq 8, \\ -2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq -6. \end{cases}$$

$$2.3 \quad \begin{cases} F(x) = -7x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 7, \\ 3x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq -2. \end{cases}$$

$$2.4 \quad \begin{cases} F(x) = -x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 - x_2 \leq 3, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 19, \\ x_1 + x_2 \geq -5. \end{cases}$$

$$2.5 \quad \begin{cases} F(x) = -x_1 - 3x_2 \\ -2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \geq -4, \\ 2x_1 - x_2 \geq -8, \\ -3x_1 - 4x_2 \geq -12. \end{cases}$$

$$2.6 \quad \begin{cases} F(x) = 7x_1 + 5x_2 \\ 12x_1 - x_2 \leq 24, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45, \\ 6x_1 + 5x_2 \geq -30, \\ x_1 - x_2 \geq -10. \end{cases}$$

$$2.7 \quad \begin{cases} F(x) = 12x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq -6. \end{cases}$$

$$2.8 \quad \begin{cases} F(x) = -x_1 + 5x_2 \\ 7x_1 - x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq -4. \end{cases}$$

$$2.9 \quad \begin{cases} F(x) = 7x_1 + 5x_2 \\ 12x_1 - x_2 \leq 24, \\ 9x_1 + 9x_2 \leq 45, \\ 6x_1 + 5x_2 \geq -30, \\ 5x_1 - x_2 \geq -10. \end{cases}$$

$$2.10 \quad \begin{cases} F(x) = -x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ 4x_1 - x_2 \leq 10, \\ -x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 6. \end{cases}$$

$$2.11 \quad \begin{cases} F(x) = 12x_1 + 3x_2 \\ 8x_1 - 3x_2 \leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq -24, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 3x_1 - 5x_2 \geq -15. \end{cases}$$

$$2.12 \quad \begin{cases} F(x) = x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq -2. \end{cases}$$

$$2.13 \quad \begin{cases} F(x) = x_1 + 4x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15. \end{cases}$$

$$2.14 \quad \begin{cases} F(x) = 3x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\ x_1 - 3x_2 \geq -9, \\ -3x_1 + 2x_2 \geq -6. \end{cases}$$

$$2.15 \quad \begin{cases} F(x) = 3x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 18, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 - x_2 \leq 5. \end{cases}$$

$$2.16 \quad \begin{cases} F(x) = 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 9, \\ -x_1 - 5x_2 \leq 6, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 4. \end{cases}$$

$$2.17 \quad \begin{aligned} F(x) &= 8x_1 + 4x_2 \\ \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -6, \\ -2x_1 + x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \geq -8, \\ -x_1 - 2x_2 \geq -4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.18 \quad \begin{aligned} F(x) &= 4x_1 - 8x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq -10, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15, \\ -4x_1 + 7x_2 \leq 28. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.19 \quad \begin{aligned} F(x) &= 4x_1 + 2x_2 \\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ -3x_1 + x_2 \geq -6, \\ 2x_1 - x_2 \geq -4, \\ 7x_1 + 14x_2 \geq -21. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.20 \quad \begin{aligned} F(x) &= -x_1 + 3x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ -4x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \geq -2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.21 \quad \begin{aligned} F(x) &= -3x_1 + x_2 \\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ -x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.22 \quad \begin{aligned} F(x) &= 2x_1 - 2x_2 \\ \begin{cases} -2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 - 4x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.23 \quad \begin{aligned} F(x) &= x_1 - 3x_2 \\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 - 2x_2 \leq 14. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.24 \quad \begin{aligned} F(x) &= x_1 + 3x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq -2, \\ -3x_1 + x_2 \geq -6, \\ 5x_1 + 7x_2 \geq -35, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.25 \quad \begin{aligned} F(x) &= -3x_1 - 2x_2 \\ \begin{cases} 8x_1 + x_2 \leq 8, \\ -x_1 - x_2 \leq 2, \\ 5x_1 - x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.26 \quad \begin{aligned} F(x) &= 6x_1 + 3x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 - x_2 \leq -6, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\ x_1 + 2x_2 \geq -4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.27 \quad \begin{cases} F(x) = -2x_1 - 4x_2 \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 \geq -6. \end{cases}$$

$$2.28 \quad \begin{cases} F(x) = x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq 6, \\ 5x_1 - x_2 \leq -4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 \geq 10. \end{cases}$$

$$2.29 \quad \begin{cases} F(x) = -2x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 4x_1 - x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + 7x_2 \geq -35, \\ -x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$$

$$2.30 \quad \begin{cases} F(x) = 2x_1 - 7x_2 \\ 7x_1 - x_2 \geq -14, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -12, \\ x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq -15. \end{cases}$$

Питання для захисту лабораторної роботи №2

1. Які задачі лінійного програмування можна розв'язувати графічним методом?
2. Яка область є розв'язком лінійної нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$?
3. Яку область утворюють допустимі розв'язки задачі лінійного програмування і що вона собою являє?
4. Як знайти графічно оптимальну вершину?
5. Які можливі випадки областей допустимих розв'язків при графічному розв'язуванні задач лінійного програмування?

6.3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Тема: Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Завдання 1.

Шляхом перетворення симплекс-таблиць, розв'язати задачі лінійного програмування (для всіх задач вважати $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$)

$$\begin{array}{ll} 1.1. & \begin{cases} F = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 9. \end{cases} \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{ll} & \begin{cases} F = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 8. \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.3. & \begin{cases} F = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5. \end{cases} \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 1.4. & \begin{cases} F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.5. & \begin{cases} F = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24. \end{cases} \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 1.6. & \begin{cases} F = x_1 - 5x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 4. \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.7. & \begin{cases} F = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ 4x_1 + x_2 \leq 8. \end{cases} \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 1.8. & \begin{cases} F = 12x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 \leq 18, \\ x_2 - 3x_3 \leq 4. \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.9. & \begin{cases} F = 5x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 22, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 4, \\ x_2 + x_3 \leq 18. \end{cases} \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 1.10. & \begin{cases} F = -x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 12, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 16, \\ x_3 \leq 6. \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.11. & \begin{cases} F = 5x_1 - x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \leq 10, \\ x_2 \leq 13. \end{cases} \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 1.12. & \begin{cases} F = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_2 \leq 2. \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

$$1.13 \quad \begin{aligned} &F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} -x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_2 &\leq 5, \\ x_1 - x_2 &\leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.14 \quad \begin{aligned} &F = 7x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ x_2 \leq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.15 \quad \begin{aligned} &F = x_1 - x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 14, \\ x_2 + x_3 \leq 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.16 \quad \begin{aligned} &F = 5x_1 - x_2 + 4x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 18, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 \leq 20, \\ x_3 \leq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.17 \quad \begin{aligned} &F = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 6x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + 6x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.18 \quad \begin{aligned} &F = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20, \\ x_2 \leq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.19 \quad \begin{aligned} &F = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.20 \quad \begin{aligned} &F = x_1 - 3x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 16. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.21 \quad \begin{aligned} &F = x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ x_1 \leq 8, \\ x_2 \leq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.22 \quad \begin{aligned} &F = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 \leq 8, \\ x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 48. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.23 \quad \begin{aligned} &F = 4x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 12, \\ x_1 \leq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.24 \quad \begin{aligned} &F = 16x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 14, \\ 5x_1 - x_3 \leq 10, \\ x_2 \leq 12. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.25 \quad \begin{aligned} &F = x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 \leq 16, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 20, \\ x_2 \leq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.26 \quad \begin{aligned} &F = -7x_1 + x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 25, \\ 5x_1 - x_3 \leq 26, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.27 \quad \begin{aligned} &F = x_1 + 7x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 5x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 \leq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.28 \quad \begin{aligned} &F = 5x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 12, \\ -x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 40. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.29 \quad \begin{aligned} &F = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 \leq 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 45, \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 \leq 20. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.30 \quad \begin{aligned} &F = 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 \leq 14. \end{cases} \end{aligned}$$

Завдання 2.

Методом штучного базису знайти найменше значення лінійної форми $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ при заданих обмеженнях:

$$2.1 \quad \begin{aligned} &F = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ &\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.2 \quad \begin{aligned} &F = -6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 \\ &\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 7x_4 = 10, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 10. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.3 \quad \begin{aligned} &F = -3x_1 - x_3 \\ &\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ -2x_3 \leq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.4 \quad \begin{aligned} &F = -x_1 + x_3 - 2x_2 \\ &\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 22. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.5 \quad \begin{aligned} &F = -2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ &\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.6 \quad \begin{aligned} &F = -4x_1 + x_2 - x_3 \\ &\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 \leq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.7 \quad \begin{aligned} &F = 5x_1 - x_2 \\ &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.9 \quad \begin{aligned} &F = -2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ &\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 30, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.11 \quad \begin{aligned} &F = -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \\ &\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.13 \quad \begin{aligned} &F = -12x_1 - x_2 + 4x_3 \\ &\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ 8x_1 + x_2 \geq 15. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.15 \quad \begin{aligned} &F = -x_1 - x_2 + 5x_3 \\ &\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.17 \quad \begin{aligned} &F = -x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ &\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 30, \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 12. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.19 \quad \begin{aligned} &F = 7x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 \\ &\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 \geq 12, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 \geq 8, \\ -x_2 + x_3 \leq 12 \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.21 \quad \begin{aligned} &F = -5x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ &\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 18. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.8 \quad \begin{aligned} &F = -x_1 + 3x_2 - x_3 \\ &\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 16, \\ 8x_1 + x_2 - x_3 \leq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.10 \quad \begin{aligned} &F = -8x_1 + 3x_2 - 6x_3 \\ &\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 12, \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.12 \quad \begin{aligned} &F = -5x_1 + 3x_2 - x_4 \\ &\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 18. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.14 \quad \begin{aligned} &F = 12x_1 - x_2 + 13x_3 \\ &\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 = 12, \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 15. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.16 \quad \begin{aligned} &F = x_1 - 2x_3 + 4x_4 \\ &\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 12, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 18. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.18 \quad \begin{aligned} &F = 7x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \\ &\begin{cases} 2x_1 + x_4 = 15, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_2 \leq 6 \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.20 \quad \begin{aligned} &F = x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ &\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 6, \\ x_2 + x_3 \geq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.22 \quad \begin{aligned} &F = -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ &\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 \geq -8, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 6. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.23 \quad \begin{aligned} F &= 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 \\ \begin{cases} 4x_1 + x_2 & \geq 12, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq 18. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.24 \quad \begin{aligned} F &= -4x_1 - x_2 - 7x_3 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq 16, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 & \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.25 \quad \begin{aligned} F &= x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 \\ \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 & = 6, \\ 2x_1 & + x_3 \geq 18. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.26 \quad \begin{aligned} F &= -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \begin{cases} 2x_1 & - x_3 = 5, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 & \geq 12. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.27 \quad \begin{aligned} F &= -16x_1 + x_2 - x_3 \\ \begin{cases} -8x_1 - x_2 + x_3 & = 18, \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq 25. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.28 \quad \begin{aligned} F &= -x_1 + 5x_2 - 6x_3 \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 & \geq 12, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & \geq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.29 \quad \begin{aligned} F &= -5x_1 + x_4 \\ \begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 25, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 & \geq 30. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2.30 \quad \begin{aligned} F &= -2x_1 - x_2 - x_4 \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 & \geq 6, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 & = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Питання для захисту лабораторної роботи №3

1. До яких методів розв'язування задач лінійного програмування належить симплекс метод та на чому він оснований?
2. Сформулювати основну теорему симплекс-методу.
3. Коли використовується метод штучного базису?
4. Який розв'язок називається виродженим?
5. Якого правила слід дотримуватися, щоб запобігти зациклюванню у схемі підрахунку?

6.4 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Тема: Розв'язування економічних задач

Завдання.

Скласти математичну модель економічної задачі і розв'язати її симплекс-методом.

№ 1. Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 потрібно використати 4 види сировини S_1, S_2, S_3, S_4 . Запаси кожного виду сировини на підприємстві обмежені. При цьому запаси і кількість кожного виду сировини, необхідні для виробництва (в ум. од.) кожного виду продукції зазначені в таблиці, а також прибуток (у грошових одиницях) підприємства від реалізації однієї одиниці кожного виду продукції.

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції	
		P_1	P_2
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Прибуток від реалізації одиниці продукції		7	5

Визначити оптимальний план випуску продукції, тобто такий план, який дає би максимальний прибуток від її реалізації.

№ 2. Промкомбінат для виготовлення двох видів різних виробів використовує 3 види сировини. На виробництво однієї одиниці виробу А витрачається сировини I виду 12 одиниць, II виду - 4 одиниці і III – 3 одиниці. На виробництво однієї одиниці виробу В використовується сировина I виду в кількості 3 одиниці, II – 5 одиниць і III – 14 одиниць. Сировини I виду комбінат має 264 одиниці, II – 136 одиниць і III – 266 одиниць. Прибуток від реалізації одного виробу А складає 6 додаткових одиниць, а одного виробу В – 4 одиниці. Скласти план виробництва виробів, які забезпечують максимальний прибуток від їх реалізації.

№ 3. Для виробництва двох видів виробів кондитерська фабрика використовує 3 види автоматів. На виробництво одного виробу А фабрика використовує автомат I виду протягом 3 годин, II виду – 4 години і III виду – 5 годин. На виготовлення одного виробу В фабрика використовує автомат I виду протягом 6 годин, II виду – 3 години і III виду – 2 години. На виробництво всіх виробів фабрика може використовувати автомат I виду не більше, ніж 102 години, II виду – не більше ніж 91 годину і III виду не більше 105 годин. Прибуток від реалізації виробу А складає

7 грн., а виробу В – 9 грн. Скласти план виробництва кондитерської фабрики, який забезпечив би максимальний прибуток від реалізації виробів А і В.

№ 4. Задача на складання раціону. При відгодівлі кожна тварина повинна щоденно отримати не менше 8 од. поживної речовини S_1 , не менше 12 од. речовини S_2 і не менше 9 од. речовини S_3 . Для складання раціону використовують 2 види корму. Склад кількості одиниць поживних речовин в кг кожного виду корму і вартість 1 кг корму приведені в таблиці.

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму	
	Корм 1	Корм 2
S_1	2	1
S_2	6	1
S_3	1	3
Вартість 1 кг корму (в грн.)	18	12

Необхідно скласти даний раціон потрібної поживності, причому затрати на нього повинні бути мінімальні.

№ 5. Для виготовлення виробів А і В є 200 кг металу. На виготовлення одного виробу А витрачається 2 кг металу, а виробу В – 4 кг. Скласти план виробництва, який забезпечував би найбільшу виручку від продажу виробів, якщо відпускна вартість одного виробу А становить 3 грн., а виробу В – 2 грн., причому виробів А потрібно виготовити не більше 80, а виробів В – не більше 40.

№ 6. Виробнича потужність складального цеху становить 120 виробів типу А і 360 виробів типу В за добу. Технічний контроль пропускає за добу 200 виробів того чи іншого типу (байдуже). Вартість виробу типу А у 4 рази вища, ніж виробу типу В. Потрібно скласти оптимальний план випуску готової продукції, тобто такий план, щоб прибуток від реалізації цієї продукції був максимальним.

№ 7. Столярний цех меблевого комбінату протягом робочого дня може виготовити 400 стільців або 100 столів. Але оздоблювально-фарбувальний цех цього комбінату може обробити не більше 250 одиниць (столів або стільців). Прибуток від реалізації одного стола становить 54 грн., а стільця 18 грн. Скласти оптимальний план добового виробництва столів і стільців за цих умов, який забезпечив би максимальний прибуток.

№ 8. Підприємство випускає продукцію двох видів P_1, P_2 , використовуючи три види сировини C_1, C_2, C_3 , запас якої обмежений. Витрати сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції P_1, P_2 , прибуток підприємства від продажу одиниці готової продукції кожного виду наведені в таблиці.

Вид сировини	Запаси сировини	Кількість одиниць сировини, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції.	
		P_1	P_2
C_1	36	4	6
C_2	14	1	2
C_3	12	3	2
Прибуток від реалізації одиниці продукції.		5	4

Скільки одиниць продукції кожного виду необхідно виробити, щоб прибуток підприємства був максимальним?

№ 9. Для відгодівлі тварин використовують два види корму K_1, K_2 , вартість 1 кг корму K_1 – 5 грн., а корму K_2 – 2 грн. У кожному кілограмі корму K_1 міститься 5 од. поживної речовини А, 2,5 од. поживної речовини Б і 1 од. поживної речовини С, а в кожному кілограмі корму K_2 міститься відповідно 3 од. речовини А, 3 од. речовини Б і 1,3 од. речовини С. Яку кількість корму кожного виду потрібно витратити щоденно, щоб затрати на відгодівлю були мінімальними, якщо добовий раціон передбачає поживних одиниць типу А не менше 225 од., типу Б – не менше 150 од., типу С – не менше 80 од.?

№ 10. Цех випускає трансформатори (ТР) двох видів. На один ТР І виду витрачається 5 кг трансформаторного заліза і 3 кг дроту, а на один ТР ІІ виду – 3 кг залізу і 2 кг дроту. Від реалізації одного ТР І виду цех одержує прибуток в 12 ум. од., а від реалізації одного ТР ІІ виду – 10 ум. од. Скільки трансформаторів кожного виду повинен випускати цех, щоб одержати найбільшу суму прибутку, якщо цех має 480 кг заліза і 300 кг дроту ?

№ 11. Цех хлібобулочних виробів за 1 робочий день може виготовити 3000 виробів А або 1000 виробів В. Однак, торговельна мережа (за встановленим опитуванням) щоденно може реалізувати 2000 виробів обох видів. Роздрібна ціна виробу А – 66 коп. за штуку, а виробу В – 46 коп. Скласти оптимальну програму виробництва хлібобулочних виробів, якщо треба випускати не менше 100 виробів кожного виду.

№ 12. Сталь повинна містити 3 легувальних елементів А, В, С. Для її виробництва використовується шихта двох видів. Вартість однієї тонни шихти, вміст елементів для кожного виду і необхідна кількість їх для виробництва 100 т сталі подані у таблиці.

Вид шихти	Вартість 1 тонни шихти	Легувальні елементи		
		А	В	С
I	3	3	2	1
II	2	1	1	1
Необхідна кількість легувальних елементів		9	8	6

Визначити найбільші затрати для виробництва сталі даної марки.

№ 13. Із 253 одиниць деякого матеріалу майстерня може виготовити вироби А і вироби В. На виготовлення одного виробу А потрібно 7 одиниць матеріалу, а на виготовлення одного виробу В – 4 одиниці матеріалу. Прибуток від реалізації одного виробу А складає 10 грн., а одного виробу В – 8 грн. Виробів А повинно виготовлятися не менше трьох, виробів В – не менше двох. Знайти таку програму виробництва, яка забезпечила б максимальний прибуток.

№ 14. Для нормального функціонування технологічного процесу в одному з цехів, який виготовляє фруктові води, необхідні хімічні речовини M_1 , M_2 , M_3 , денна норма яких повинна бути не менша 48, 60, 80 вагових одиниць відповідно. Ці речовини містяться в сумішах N_1 , N_2 , N_3 . Вміст кожної речовини (M_1 , M_2 , M_3) в кожній з сумішей (N_1 , N_2 , N_3), а також ціна 1л суміші приведені в таблиці.

Види хімічних речовин	Мінімальна потреба	Склад хімічних речовин в сумішах		
		N_1	N_2	N_3
M_1	48	1	0	2
M_2	60	2	3	0
M_3	80	0	2	4
Ціна суміші		2	3	4

Визначити оптимальний набір сумішей N_1 , N_2 , N_3 , які задовольняють потреби цеху в необхідному об'ємі речовин M_1 , M_2 , M_3 .

№ 15. На звірофермі можна вирощувати чорнобурих лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовується три види кормів. Кількість корму кожного виду, який повинні одержувати щоденно лисиці і песці, приведені в таблиці. В ній же зазначені загальна кількість корму кожного виду, який може бути використаний звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця.

Вид корму	Кількість од. корму, який щоденно повинні одержувати		Загальна кількість корму
	Лисиця	Песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації 1 шкурки (ум . од.)	16	12	

Визначити скільки лисиць і песців слід вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальним.

№ 16. Для виробництва двох видів виробів А і В використовують три типи технічного обладнання. При виробництві одиниці виробу А використовується обладнання I типу протягом 9 годин, обладнання II типу 6 годин, III типу – 4 години. На виробництво одного виробу В обладнання I типу використовується 6 годин, II типу 12 годин і III типу 10 годин. На виробництво всіх виробів підприємство може використовувати обладнання I типу не більше ніж 168 год., II не більше ніж 192 год., III – не більше 164 годин. Прибуток від реалізації одиниці готового виробу А складає 14 грн., а виробу В – 18 грн. Скласти план виробництва виробів А і В, який забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

№ 17. На меблевій фабриці із стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів в кількостях, що відповідно рівні 24, 31 і 18 шт. Кожний лист фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість заготовок, що одержують при двох способах розкроювання приведені в таблиці. В ній же зазначена величина відходів, які одержують при розкроюванні одного листа фанери цими способами.

Вид заготовки	Кількість заготовок (шт.) при розкроюванні за способом	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина відходів (см ³)	12	16

Визначити скільки листів фанери і яким способом слід розкроїти так, щоб було одержано не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних відходах.

№ 18. Для виробництва двох видів виробів А і В використовується токарне, фрезерне і шліфувальне обладнання. Норми затрат часу для кожного із типів обладнання на один виріб даного виду приведені в таблиці. В ній же зазначений загальний фонд робочого часу для кожного із типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу.

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виробу		Загальний фонд корисного часу робочого обладнання (год.)
	А	В	
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток від реалізації	14	18	

Скласти план випуску виробів А і В, який забезпечив би максимальний прибуток від їх реалізації.

№ 19. Спеціалізовані господарства, які вирощують овочі, для підживлення посівів використовують комбіновані добрива трьох видів B_1 , B_2 , B_3 . Для підживлення посівів на 1 га необхідно внести 24 одиниці хімічної речовини A_1 , 30 одиниць хімічної речовини A_2 , 15 одиниць хімічної речовини A_3 . Склад необхідних хімічних речовин в одиниці комбінованих добрив і ціна одиниці ваги кожного добрива приведені в таблиці.

Хімічні речовини	Норма внесення речовин на 1 га	Склад хімічних речовин на одиницю ваги добрива		
		B_1	B_2	B_3
A_1	24	1	4	3
A_2	30	2	5	3
A_3	15	0	3	2
Ціна одиниці ваги добрива		5	2	4

Яка мінімальна вартість оптимальної кількості хімічної речовини вноситься на 1 га посіву ?

№ 20. Підприємство має ресурси в умовних одиницях : обладнання 100 од., енергія 80 од.; виробляє 4 види продукції P_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Затрати на виробництво кожного виду продукції та доходи від її реалізації приведені в таблиці.

Продукція	Ресурси і затрати на од. продукції		Прибуток
	Обладнання	Енергія	
P_1	2	2	1
P_2	3	3	4
P_3	4	1	3
P_4	5	1	5

Визначити план випуску для кожного виду продукції, який би давав найбільший дохід.

№ 21. Для виготовлення кожного з двох хлібобулочних виробів використовується 2 види тіста, яке готують заздалегідь. На один виріб P_1 витрачається 0,1 кг тіста I виду і 0,15 кг тіста II виду, а на виріб P_2 – 0,2 кг тіста I виду і 0,1 кг тіста II виду. Ціна одного виробу P_1 – 32 коп., а P_2 – 58 коп. Тіста I виду заготовлено 60 кг, а II – 40 кг. Потрібно визначити таку програму виробництва, яка забезпечила б максимальний прибуток.

№ 22. Для пошиття брюк та курток є 120 м тканини. На пошиття однієї пари брюк витрачається 2 м тканини, а на пошиття однієї куртки – 3 м тканини. Ціна брюк – 36 грн., а куртки 60 грн. Визначити оптимальний план виробництва, який забезпечував би максимальний прибуток, якщо кількість брюк не повинна перевищувати 36, а кількість курток – 24.

№ 23. Для визначення строків відгодівлі піддослідній тварині необхідно давати щоденно не менше 15 одиниць речовини A_1 і не менше 15 одиниць речовини A_2 . Не маючи цих речовин в чистому вигляді, вирішили придбати речовину B_1 по 1 грн. або B_2 по 3 грн. за 1 кг, причому кожний кг B_1 містить 1 одиницю речовини A_1 і 5 одиниць A_2 , а 1 кг B_2 - 5 одиниць A_1 і 1 одиницю A_2 . Визначити оптимальну кількість речовини B_1 і B_2 в щоденному раціоні.

№24. Для виготовлення виробів двох видів є 100 кг металу. На виготовлення одного виробу I виду використовується 2 кг металу, а на виробу II виду – 4 кг. Скласти план виробництва, що забезпечує отримання найбільшого прибутку від продажу виробів, якщо вартість одного виробу I виду складає 3 грн., а виробу II виду – 2 грн., причому виробів I виду потрібно виготовити не більше 40, а виробів II виду – не більше 20.

№ 25. Виробнича потужність складального цеху становить 120 виробів А і 360 виробів В на добу. Технічний контроль пропускає за добу 200 виробів того чи іншого типу (не має різниці). Вироби типу А в 4 рази дорожчі виробів типу В. Потрібно спланувати випуск готової продукції так, щоб підприємству був забезпечений найбільший прибуток.

№ 26. Для відгодівлі тварин використовується два види кормів; вартість 1 кг корму I виду – 5 грн., а корму II виду – 2 грн. У кожному кілограмі корму I виду міститься 5 од. поживної речовини А, 2,5 од. поживної речовини Б і 1 од. поживної речовини В, а у кожному кілограмі корму II виду відповідно 3; 3 і 1,3 од. Яку кількість корму кожного виду необхідно використовувати щоденно, щоб витрати на відгодівлю були мінімальними, якщо добовий раціон передбачає споживання речовин типу А не менше 225 од., типу Б – не менше 150 од. і типу В – не менше 80 од. ?

№ 27. Продукцією міського молокозаводу є молоко, кефір і сметана. На виробництво 1 т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 т молока. При цьому витрати робочого часу на розливання 1 т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-год. На розфасовці 1 т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Всього для виробництва молочної продукції завод може використати 130 000 кг молока. Основне обладнання може бути задіяне протягом 21,4 машино-год, а автомати для розфасовки сметани – протягом 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру і сметани відповідно рівні 30, 22 і 136 грн. Завод повинен щоденно виробляти не менше 100 т молока. На виробництво іншої продукції немає ніяких обмежень. Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості щоденно треба виготовляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

№28. Для виготовлення виробів двох видів склад може відпустити металу не більше 80 кг, причому на виріб I виду використовується 2 кг, а на виріб II виду – 1 кг металу. Необхідно спланувати виробництво так, щоб був забезпечений найбільший прибуток, якщо виріб I виду потрібно виготовити не більше 30 шт., а виробів II виду не більше 40 шт., причому один виріб I виду коштує 5 грн., а II виду – 3 грн.

№ 29. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі А, В і С використовує три види основної сировини: цукор, патоку і фруктове пюре. Норми використання сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду наведені у таблиці. У таблиці також вказана кількість сировини кожного виду, яка може використовуватись фабрикою, а також наведений прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми використання сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	А	В	С	
Цукор	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	-	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т продукції (грн.)	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, що забезпечить максимальний прибуток від її реалізації.

№ 30. На швейній фабриці для виготовлення чотирьох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми використання тканини всіх артикулів на пошиття одного виробу наведені у таблиці. У ній також вказана загальна кількість тканини кожного артикулу і ціна одного виробу даного виду. Визначити, скільки виробів кожного виду повинна випустити фабрика, щоб вартість виготовленої продукції була мінімальною.

Артикул тканини	Норми використання тканини (м) на один виріб виду				Загальна кількість тканини (м)
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	—	4	800
Ціна одного виробу (грн.)	9	6	4	7	

7 Завдання для типових розрахунків

Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Завдання №1

Вважаючи, що $x_i \geq 0$, розв'язати задачу лінійного програмування:

а) за допомогою перетворень симплексних таблиць;

б) за допомогою програми “Пошук рішень” в таблицях Excel.

Варіанти:

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ \text{№1. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 &= 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 &= 10. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 3x_1 + 2x_2 - 6x_6 \rightarrow \max \\ \text{№2. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 &= 18, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_6 &= 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 &= 36. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max \\ \text{№3. } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 &= 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 &= 42, \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_4 + x_6 &= 125. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 8x_1 + 7x_4 + x_6 \rightarrow \max \\ \text{№4. } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 &= 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 &= 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 &= 25. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= x_1 + 3x_2 - 5x_4 - 2x_6 \rightarrow \max \\ \text{№5. } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 &= 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 &= 32. \end{cases} \end{aligned}$$

$$F = 3x_1 + 2x_2 - 5x_6 \rightarrow \max$$

$$\text{№6. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_5 + x_6 = 32, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24. \end{cases}$$

$$F = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$\text{№7. } \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 36, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 16, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 24. \end{cases}$$

$$F = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \rightarrow \max$$

$$\text{№8. } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118. \end{cases}$$

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \rightarrow \max$$

$$\text{№9. } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320. \end{cases}$$

$$F = -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + 8x_6 \rightarrow \max$$

$$\text{№10. } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 60, \\ 7x_1 - 17x_2 + 26x_3 + 31x_4 - 35x_5 + 6x_6 = 420. \end{cases}$$

$$F = 5x_1 - x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 5x_5 + x_6 \rightarrow \max$$

$$\text{№11. } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 36, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 30. \end{cases}$$

$$F = -5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 8x_6 \rightarrow \max$$

$$\text{№12. } \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 60, \\ 7x_1 - 16x_2 + 25x_3 + 31x_4 - 10x_5 + 6x_6 = 420. \end{cases}$$

$$F = -9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 6x_6 \rightarrow \max$$

$$\text{№13. } \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 80, \\ 6x_1 - 16x_2 + 27x_3 + 33x_4 - 10x_5 + 6x_6 = 420. \end{cases}$$

$$F = -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 8x_6 \rightarrow \max$$

№14.
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 8x_5 + x_6 = 62, \\ 7x_1 - 17x_2 + 26x_3 + 31x_4 - 35x_5 + 6x_6 = 440. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 2x_3 + x_5 - 4x_6 \rightarrow \max$$

№15.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 & + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 & + 2x_3 + x_4 & - 2x_6 = 30, \\ x_1 & + 3x_3 & + x_5 - 4x_6 = 54. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

№16.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = 26, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & + x_5 = 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & - x_6 = 8. \end{cases}$$

$$F = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6x_6 \rightarrow \max$$

№17.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 & + 6x_6 = 16, \\ -x_1 + 2x_2 & + x_4 - 2x_6 = 25, \\ x_1 & + 5x_3 + x_5 - 4x_6 = 32. \end{cases}$$

$$F = 4x_1 + 3x_2 - 5x_4 + x_5 + 2x_6 \rightarrow \max$$

№18.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & - 2x_4 + x_5 = 24, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 & = 45, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 & + x_6 = 36. \end{cases}$$

$$F = x_1 + 8x_2 + 7x_4 + x_6 \rightarrow \max$$

№19.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & - 3x_4 & - 2x_6 = 24, \\ & 4x_2 + x_3 - 4x_4 & - 3x_6 = 12, \\ & 5x_2 & + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25. \end{cases}$$

$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_5 \rightarrow \max$$

№20.
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 & - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 & + 8x_4 + x_6 = 32. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_6 \rightarrow \max \\ \text{№21. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 & - 3x_5 + 5x_6 = 52, \\ 4x_1 & + x_3 & + 2x_5 - 4x_6 = 24, \\ -2x_1 & + 2x_3 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 36. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max \\ \text{№22. } \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 & = 42, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & - x_5 = 24, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 36. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + x_3 + 3x_4 - 7x_5 \rightarrow \max \\ \text{№23. } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = 132, \\ 4x_1 - 3x_2 & + x_4 + x_5 = 48, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 & = 100. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 9x_4 - 5x_5 + x_6 \rightarrow \max \\ \text{№24. } \begin{cases} x_1 - x_2 & + 5x_4 + x_5 - x_6 = 186, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & + x_6 = 66, \\ 2x_1 & + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 + x_6 = 81. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max \\ \text{№25. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = 28, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & + x_5 = 24, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & - x_6 = 12. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 2x_2 + x_5 - 8x_6 \rightarrow \max \\ \text{№26. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 & + 6x_6 = 20, \\ -x_1 + 2x_2 & + x_4 - 2x_6 = 45, \\ x_1 & + 5x_3 + x_5 - 4x_6 = 38. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 8x_1 + 3x_2 - 5x_4 + x_5 \rightarrow \max \\ \text{№27. } \begin{cases} 4x_1 - x_2 & - 2x_4 + x_5 = 64, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 & = 45, \\ -2x_1 + 3x_2 & + 4x_4 + x_6 = 36. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 8x_2 + 7x_4 + x_6 \rightarrow \max \\ \text{№28. } \begin{cases} x_1 - 2x_2 & - 3x_4 & - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & - 4x_4 & - 3x_6 = 42, \\ & 5x_2 & + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_6 \rightarrow \max \\ \text{№29. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 & - 3x_5 & + 5x_6 = 48, \\ 4x_1 & + x_3 & + 2x_5 & - 4x_6 = 24, \\ -8x_1 & + 2x_3 + x_4 - 3x_5 & + 6x_6 = 16. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 8x_5 \rightarrow \max \\ \text{№30. } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = 36, \\ 4x_1 - 5x_2 & + x_4 + x_5 & = 64, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - 8x_5 + 3x_6 & = 42. \end{cases} \end{aligned}$$

Приклад

Вважаючи, що $x_i \geq 0$, розв'язати задачу лінійного програмування :

- а) за допомогою перетворень симплексних таблиць;
- б) за допомогою програми " Пошук рішень " в таблицях Excel.

$$\begin{aligned} F &= 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 - 5x_5 + 3x_6 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 - x_2 & + 5x_4 + x_5 - x_6 = 88, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 & + 2x_6 = 136, \\ 2x_1 & + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 + x_6 = 76. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язання

- а) Розв'яжемо задачу двома способами.

1. Звичайний симплексний метод.

Спочатку за допомогою перетворень таблиць Гаусса знайдемо опорний розв'язок задачі лінійного програмування:

Базис	c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	88	1	-1	0	5	1	-1
	136	-2	3	5	2	0	2
	76	2	0	2	-4	3	1
	50	0	-1	-1	7	-1/2	-3/2
	212	0	3	7	-2	3	3
x_1	38	1	0	1	-2	3/2	1/2
x_4	50/7	0	-1/7	-1/7	1	-1/14	-3/14
	1584/7	0	19/7	47/7	0	20/7	18/7
x_1	366/7	1	-2/7	5/7	0	19/14	1/14
x_4	26	0	1/12	5/12	1	1/6	0
x_6	88	0	19/18	47/18	0	10/9	1
x_1	46	1	-13/36	19/36	0	23/18	0

Одержали опорний розв'язок $X = \{ 46; 0; 0; 26; 0; 88 \}$.
Знаючи опорний розв'язок, складаємо симплексну таблицю:

b_i	Базис	0	3	-1	7	9	-5	3
		c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
9	x_4	26	0	1/12	5/12	1	1/6	0
3	x_6	88	0	19/18	47/18	0	10/9	1
3	x_1	46	1	-13/36	19/36	0	23/18	0
	F	636	0	23/6	37/6	0	41/3	0

Оскільки в індексному рядку немає від'ємних чисел, то знайдений опорний розв'язок є оптимальним, тобто :

$$F_{\max} = 636 \text{ при } X = \{ 46; 0; 0; 26; 0; 88 \}.$$

2. Метод штучного базису

Для сформульованої задачі безпосередньо записати опорний план не можна. Тому розглянемо розширену задачу:

$$F_1 = 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 - 5x_5 + 3x_6 - M(x_7 + x_8 + x_9) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 88, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_6 + x_8 = 136, \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 + x_6 + x_9 = 76, \\ x_i \geq 0, \end{cases}$$

де x_7, x_8, x_9 – штучні змінні.

Розширена задача лінійного програмування має опорний розв'язок:

$$Y = \{ 0; 0; 0; 0; 0; 0; 88; 136; 75 \}.$$

Складаємо для нього симплексну таблицю (*таблиця 1*).

Оскільки у другому індексному рядку є від'ємні числа, то опорний розв'язок розширеної задачі не є оптимальним. Тому потрібно шляхом симплексних перетворень цей опорний розв'язок покращити.

Перша ітерація

Знаходимо у другому індексному рядку найбільше за абсолютною величиною від'ємне число. Це число рівне -10. Стовпець, що містить число -10, зветься розв'язним. Після цього знаходимо відношення вільних членів c_i до додатних елементів розв'язного стовпця і серед них вибираємо найменше значення. У розв'язному стовпці йому відповідає елемент, що зветься розв'язним елементом. Для нашого випадку розв'язним буде елемент $a_{32} = 5$. Відносно цього елемента робимо перше симплексне перетворення таблиці. В результаті замість штучної змінної x_8 базисною стає змінна x_3 . Після цього стовпець із штучною змінною x_8 з таблиці вилучаємо. Оскільки у другому індексному рядку є від'ємні числа, то продовжуємо симплексні перетворення таблиці.

Друга ітерація

Найменшому за абсолютною величиною від'ємному числу (-4) другого індексного рядка відповідає розв'язний елемент $a_{53} = 3$. Відносно цього елемента робимо друге симплексне перетворення таблиці. В результаті замість штучної змінної x_9 у базис ввійде змінна x_5 . Після цього стовпець з штучною змінною x_9 з таблиці вилучаємо.

Оскільки у другому індексному рядку є від'ємні числа, то процес продовжуємо.

Третя ітерація

Найменшому за абсолютною величиною від'ємному числу (- 6,6) другого індексного рядка відповідає розв'язний елемент $a_{41} = 6,6$. Відносно цього елемента робимо третє симплексне перетворення таблиці. В результаті замість штучної змінної x_7 у базис ввійде змінна x_4 . Після цього стовпець з штучною змінною x_7 з таблиці вилучаємо. Оскільки тепер штучні змінні у базис не входять, то другий індексний рядок з таблиці вилучаємо. Розглядаємо перший індексний рядок. У ньому є від'ємні числа. Тому процес симплексних перетворень продовжуємо.

Четверта ітерація

Найменшому за абсолютною величиною від'ємному числу (- 10,5) першого індексного рядка відповідає розв'язний елемент $a_{13} = 0,949$. Відносно цього елемента робимо четверте симплексне перетворення таблиці. В результаті замість змінної x_5 у базис ввійде x_1 . Розглядаємо перший індексний рядок. У ньому є від'ємне число. Тому процес симплексних перетворень продовжуємо.

П'ята ітерація

Найменшому за абсолютною величиною від'ємному числу (-2,36) першого індексного рядка відповідає розв'язний елемент $a_{62} = 0,383$. Відносно цього елемента робимо п'яте симплексне перетворення таблиці. У результаті замість змінної x_3 у базис ввійде x_6 . Розглядаємо перший індексний рядок. У ньому немає від'ємних чисел. Тому одержаний розв'язок є оптимальним.

Оптимальний розв'язок розширеної задачі :

$$F_{1\max} = 636, \quad Y = \{ 46; 0; 0; 26; 0; 88; 0; 0; 0 \}.$$

Оптимальний розв'язок початкової задачі :

$$F_{\max} = 636, \quad X = \{ 46; 0; 0; 26; 88 \}.$$

Таблиця 1

		0	3	-1	7	9	-5	3	-M	-M	-M	Ci /	
b	Базис	Ci	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	/A ij	
-M	X7	88	1	-1	0	5	1	-1	1	0	0		
-M	X8	136	-2	3	5	2	0	2	0	1	0	27,2	min
-M	X9	76	2	0	2	-4	3	1	0	0	1	38	
	F	0	-3	1	-7	-9	5	-3	0	0	0		
M		-300	-1	-2	-7	-3	-4	-2	0	0	0		
-M	X7	88	1	-1	0	5	1	-1	1		0	88	
7	X3	27,2	-0,4	0,6	1	0,4	0	0,4	0		0		
-M	X9	21,6	2,8	-1,2	0	-4,8	3	0,2	0		1	7,2	min
	F	190,4	-5,8	5,2	0	-6,2	5	-0,2	0		0		
M		-109,6	-3,8	2,2	0	-0,2	-4	0,8	0		0		
-M	X7	80,8	0,067	-0,6	0	6,6	0	-1,07	1			12,2	min
7	X3	27,2	-0,4	0,6	1	0,4	0	0,4	0			68	
-5	X5	7,2	0,933	-0,4	0	-1,6	1	0,067	0				
	F	154,4	-10,5	7,2	0	1,8	0	-0,53	0				
M		-80,8	-0,07	0,6	0	-6,6	0	1,067	0				
9	X4	12,24	0,01	-0,09	0	1	0	-0,16				1224	
7	X3	22,3	-0,4	0,64	1	0	0	0,465					
-5	X5	26,79	0,949	-0,55	0	0	1	-0,19				28,2	min
	F	132,4	-10,5	7,36	0	0	0	-0,24					
9	X4	11,96	0	-0,09	0	1	-0	-0,16					
7	X3	33,7	0	0,4	1	0	0,43	0,383					
3	X1	28,21	1	-0,57	0	0	1,05	-0,2					
	F	428,2	0	1,34	0	0	11	-2,36					
9	X4	26	0	0,08	0,42	1	0,17	0					
3	X6	88	0	1,06	2,61	0	1,11	1					
3	X1	46	1	-0,36	0,53	0	1,28	0					
	F	636	0	3,83	6,17	0	13,7	0					

б) Розв'яжемо задачу лінійного програмування за допомогою програми "Пошук рішень" в електронних таблицях Excel.

Будемо вважати, що невідомі змінні розміщені в комірках (\$B\$3:\$G\$3). Коефіцієнти цільової функції помістимо в комірки (B4:G4), а коефіцієнти системи обмежень помістимо в комірки (B5:G5). Вільні члени системи помістимо в комірки (I5:I7). За цільову приймемо комірку H4. Значення цільової функції візьмемо: = СУМА ДОБУТКІВ (\$B\$3:\$G\$3; B4:G4). Після цього виділимо комірку H4 і перетягнемо її за правий нижній кут (при цьому курсор перетвориться у чорний знак плюс) на комірки (H5:H7).

У меню "Сервіс" виберемо "Пошук рішень", а у ньому пункт "Параметри". Тут вибираємо "Невід'ємні значення". Потім

повертаємося у "Пошук рішень". Тут за цільову беремо комірку Н4, ставимо вимогу максимального значення цільової комірки і беремо обмеження $(H5:H7) \leq (I5:I7)$. Після цього натискаємо "Виконати".

Результат обчислень приведений у таблиці Excel :

Цільова комірка - Н4							
46	0	0	26	0	88		
3	-1	7	9	-5	3	636	
1	-1	0	5	1	-1	88	88
-2	3	5	2	0	2	136	136
2	0	2	-4	3	1	76	76

Одержали:

$$F_{\max} = 636, \quad X = \{ 46; 0; 0; 26; 0; 88 \}.$$

8 Відповіді до завдань типових розрахунків

1. $F_{\max} = 68;$ $X = \{ 0; 0; 5,5; 35; 0; 1 \}$
2. $F_{\max} = 66;$ $X = \{ 18; 0; 6; 66; 0; 0 \}$
3. $F_{\max} = 222,25;$ $X = \{ 0; 0; 198,25; 31,25; 86,5; 0 \}$
4. $F_{\max} = 39;$ $X = \{ 23; 4; 0; 1; 0; 0 \}$
5. $F_{\max} = 16,4;$ $X = \{ 9,2; 2,4; 0; 0; 45,6; 0 \}$
6. $F_{\max} = 148;$ $X = \{ 0; 74; 0; 66; 14; 0 \}$
7. $F_{\max} = 260;$ $X = \{ 44; 20; 0; 0; 92 \}$
8. $F_{\max} = 159;$ $X = \{ 0; 0; 6; 28; 3 \}$
9. $F_{\max} = 3920;$ $X = \{ 0; 0; 0; 80; 0; 440 \}$
10. $F_{\max} = 3420;$ $X = \{ 0; 0; 0; 0; 60; 420 \}$
11. $F_{\max} = 190;$ $X = \{ 6; 0; 10; 8; 0; 0 \}$
12. $F_{\max} = 757,5;$ $X = \{ 0; 7,5; 0; 0; 0; 90 \}$
13. $F_{\max} = 430;$ $X = \{ 0; 2,5; 0; 0; 0; 70 \}$
14. $F_{\max} = 2468;$ $X = \{ 0; 68; 0; 0; 0; 266 \}$
15. $F_{\max} = 92;$ $X = \{ 24; 0; 10; 82; 0; 0 \}$
16. $F_{\max} = 66;$ $X = \{ 0; 0; 5; 36; 0; 2 \}$
17. $F_{\max} = 60;$ $X = \{ 12; 0; 4; 61; 0; 0 \}$
18. $F_{\max} = 132;$ $X = \{ 9; 0; 0; 0; 6; 45 \}$
19. $F_{\max} = 99;$ $X = \{ 74; 0; 87; 0; 0; 25 \}$
20. $F_{\max} = 62;$ $X = \{ 9,2; 2,4; 0; 0; 45,6; 0 \}$

21. $F_{\max} = 176;$ $X = \{ 0; 88; 0; 72; 12; 0 \}$
22. $F_{\max} = 362;$ $X = \{ 62; 26; 0; 0; 126 \}$
23. $F_{\max} = 175,12;$ $X = \{ 17,36; 16,96; 0; 29,44; 0 \}$
24. $F_{\max} = 552;$ $X = \{ 58,5; 0; 33; 25,5; 0; 0 \}$
25. $F_{\max} = 76;$ $X = \{ 0; 0; 6; 40; 0; 0 \}$
26. $F_{\max} = 78;$ $X = \{ 10; 0; 0; 75; 28; 0 \}$
27. $F_{\max} = 208;$ $X = \{ 9; 0; 0; 0; 28; 54 \}$
28. $F_{\max} = 395;$ $X = \{ 74; 0; 43; 0; 25 \}$
29. $F_{\max} = 168;$ $X = \{ 0; 84; 0; 52; 12; 0 \}$
30. $F_{\max} = 81,9;$ $X = \{ 13,3; 0; 31; 0; 10,8 \}$

Література:

1. Пак В.В., Носенко Ю.А. Вища математика. –К.: "Либідь", 1996.
2. Ермольев Ю.М. и др. Математические методы исследования операций. – М., Высшая школа, 1998.
3. Калихман И.Л. Линейная алгебра и математическое программирование - М.: Высшая школа, 1967.
4. Карпелевич Ф.М., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука, 1967.
5. Кузнецов Ю.Н., Козубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.
6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
7. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. – М.: Статистика, 1972.
8. Балашевич В.А. Основы математического программирования. – Мн: Выш. шк., 1985.
9. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування.: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001.
10. Мину Мишель. Математическое программирование: Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990.
11. Новіков В.В., Яценко С.А. Лінійне і нелінійне програмування.: Навч. посібник / МВО України. –К.: НМК ВО, 1992.
12. Роїк О.М., Месюра В.І. Математичні методи дослідження операцій. – Вінниця: ВДТУ, 2002.

Навчальне видання

Ірина Володимирівна Хом'юк
Володимир Леонідович Карпенко
Віктор Вікторович Хом'юк

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ЧАСТИНА I

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Хом'юк І.В.

Редактор С.А. Малішевська

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¹/₄
Друк різнографічний
Тираж прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк..

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ