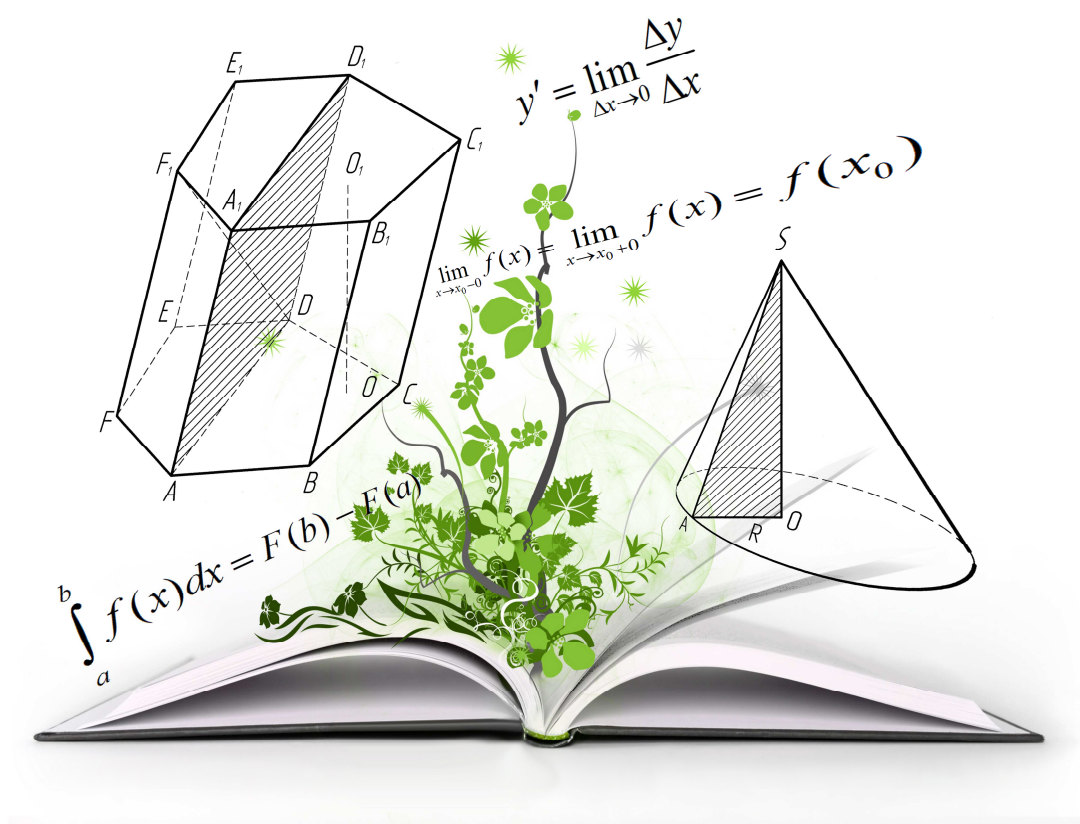


В. О. Краєвський, О. Д. Краєвська

МАТЕМАТИКА

для довузівської підготовки студентів-іноземців

Частина 2



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Краєвський, О. Д. Краєвська

МАТЕМАТИКА

для довузівської підготовки студентів-іноземців. Частина 2

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2010

УДК [512.1+514.1] (075)

ББК 22.10

К78

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №7 від 26.02.2009 р.)

Рецензенти:

В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор

В. І. Ключко, доктор педагогічних наук, професор

Д. А. Найко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Краєвський, В. О.

К78 Математика для довузівської підготовки студентів-іноземців.
Частина 2 : навчальний посібник / В. О. Краєвський, О. Д. Краєвська. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 137 с.

У другій частині посібника містяться матеріали із векторної алгебри, тригонометрії, початків аналізу, комбінаторики, теорії комплексних чисел та геометрії. До кожної теми розроблений теоретичний матеріал, в якому основний акцент робиться на вивченні студентами математичних термінів українською мовою. Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю прикладів розв'язання типових завдань.

Рекомендується для студентів-іноземців підготовчих факультетів.

УДК [512.1+514.1] (075)

ББК 22.10

© В. Краєвський, О. Краєвська, 2010

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Тема 22. Елементи векторного числення.....	5
Тема 23. Тригонометричні функції	11
Тема 24. Границя. Неперервність функції.....	23
Тема 25. Похідна функції	32
Тема 26. Первісна. Інтеграл	39
Тема 27. Комплексні числа	44
Тема 28. Комбінаторика. Біном Ньютона.....	53
Тема 29. Точка. Пряма. Кут.....	58
Тема 30. Коло. Круг	64
Тема 31. Трикутник.....	69
Тема 32. Многокутники.....	77
Тема 33. Многогранні кути. Многогранники.....	85
Тема 34. Тіла обертання	94
Література	99
Словник математичних термінів	100

ВСТУП

Математика вивчає кількісні відношення та просторові форми навколишнього світу. Поняття та об'єкти математики являють собою абстракції кількісних відношень та просторових форм, які спостерігаються в природі. Вивчаючи матеріальні процеси з кількісної сторони, мають справу з багатьма величинами. Наприклад, різні фізичні процеси характеризуються такими величинами, як маса, густина, температура, теплоємність, сила та напруга струму тощо. У хімії користуються такими поняттями, як валентність, атомна маса, моль, в геометрії – довжина відрізка, площа, об'єм і т. д. Вивчаючи математичну сторону явищ, цікавляться тільки числовими значеннями величин, незважаючи на їхній конкретний зміст.

Елементарна математика в основному має справу із сталими величинами та з найпростішими геометричними фігурами (трикутник, коло тощо) і обмежується лише початковим вивченням кількісних відношень та просторових форм. Понять та методів елементарної математики не досить для опису процесів, які характеризуються змінними величинами. Введення в математику поняття змінної величини і функції дало змогу перейти від розв'язування окремих фізичних та геометричних задач до створення загальних методів розв'язування цих задач.

Навчальний посібник відповідає програмі курсу математики для студентів-іноземців підготовчих факультетів вузів України. Крім того, може використовуватись абітурієнтами, які готуються до вступних іспитів у вузи. Мета його – забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичного матеріалу з основних розділів математики, сприяти формуванню навичок застосування теоретичного матеріалу для розв'язання конкретних прикладів, допомогти студентам при самостійному розв'язанні задач.

Складається посібник із двох частин, які видаються окремими книжками. У першій частині містяться матеріали з арифметики і алгебри. У другу частину увійшли теоретичний матеріал та завдання із векторної алгебри, тригонометрії, початків аналізу, комбінаторики, теорії комплексних чисел та геометрії.

Тема 22

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО ЧИСЛЕННЯ

Elements of vector calculus

Вектором (**вектор – vector**) називається напрямлений відрізок прямої.

Будь-який вектор має початок (**початок вектора – origin of vector**) і кінець (**кінець вектора – terminus**). Якщо початок вектора позначити A , а кінець – B , то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (рис. 1).

Початок вектора називають точкою прикладання (**точка прикладання – point of application**).

Довжина відрізка, що зображує вектор $\overrightarrow{AB}$, називається модулем вектора (**модуль вектора – modulus of vector**) або довжиною вектора і позначається $|\overrightarrow{AB}|$. Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

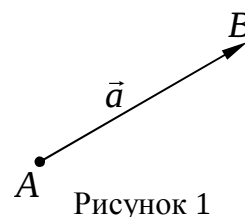


Рисунок 1

Якщо відомі координати кінця $B(x_B; y_B; z_B)$ і початку $A(x_A; y_A; z_A)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$, можна знайти з формули

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}.$$

Довжина (модуль) вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

де x, y, z – координати вектора $\vec{a}$.

Приклад 1

Знайти модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1; -2; 3)$, $B(2; -5; 4)$.

Розв'язання

Знайдемо спочатку координати вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \{2 - 1; -5 - (-2); 4 - 3\} = \{1; -3; 1\}.$$

Тоді довжина вектора $\overrightarrow{AB}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11} \text{ лін. од.}$$

Вектор називається нульовим (нуль-вектором), якщо його початок і кінець збігаються.

Вектори називаються колінеарними (**колінеарний – collinear**), якщо вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих. Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b},$$

де x_a, y_a, z_a – координати вектора $\vec{a}$; x_b, y_b, z_b – координати вектора $\vec{b}$.

Вектори рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову довжину і однаковий напрям (рис. 2).

Якщо вектори мають однакову довжину і протилежні напрями, то вони називаються протилежними (рис. 3).

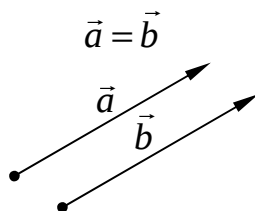


Рисунок 2

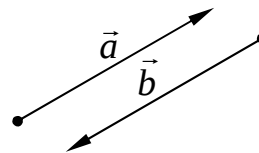


Рисунок 3

Приклад 2

Перевірити, чи вектори $\vec{a} = (1; -2; 3)$ та $\vec{b} = (2; -4; 1)$ є колінеарними.

Розв'язання

З умови (3) маємо

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{3}{1}.$$

Очевидно, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не є колінеарними.

Лінійні операції над векторами

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор, який іде з початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, за умови, що вектор $\vec{b}$ прикладено до кінця вектора $\vec{a}$ (рис. 4).

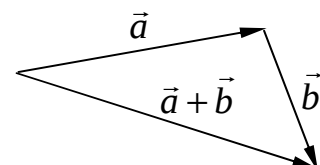


Рисунок 4

Операція додавання векторів підпорядкована

таким властивостям:

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативний закон);

б) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативний закон).

Для кожного вектора $\vec{a}$ існує вектор $\vec{a}'$ такий, що $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$ ($\vec{0}$ – нульовий вектор); $\vec{a}'$ – вектор, протилежний вектору $\vec{a}$.

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ вектора $\vec{a}$ і вектора $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Правило побудови різниці $\vec{a} - \vec{b}$: різниця $\vec{a} - \vec{b}$ прикладених до спільного початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ являє собою вектор, що йде з кінця від'ємника (вектора $\vec{b}$) до кінця зменшуваного вектора $\vec{a}$ (рис. 5).

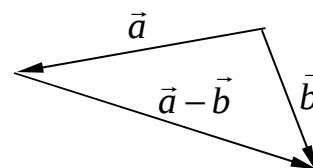


Рисунок 5

Добутком $\alpha\vec{a}$ ($\vec{a}\alpha$) вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a}$, має довжину $|\alpha||\vec{a}|$ і має напрям, що збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$ і протилежний цьому напрямку, якщо $\alpha < 0$.

Операція множення вектора на число підпорядкована таким властивостям:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b};$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a};$$

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}.$$

Проекція (*projection*) вектора на вісь та її властивості

Нагадаємо, що числовою віссю (або просто віссю) називається пряма, на якій вибрано початкову точку (початок), додатний напрям (що позначається на рисунках стрілкою) та одиничний відрізок (одиницю масштабу).

Нехай u – деяка вісь, $\overrightarrow{AB}$ – вектор, довільно розміщений на площині. Позначимо через A' і B' проєкції на вісь u відповідно початку A і кінця B цього вектора (рис. 6). Припустимо, що A' , на осі u має координату x_1 , а B' – координату x_2 .

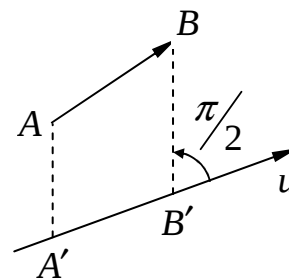


Рисунок 6

Різниця $x_2 - x_1$ між координатами проекції кінця та початку вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь u називається проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$, на цю вісь і позначається $pr_u \overrightarrow{AB}$.

Якщо φ – кут між вектором $\vec{a}$ і віссю u , то, очевидно, що

$$pr_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів, називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos (\widehat{\vec{a} \vec{b}}),$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначаються своїми декартовими координатами

$$\vec{a} = (x_a; y_a; z_a), \quad \vec{b} = (x_b; y_b; z_b),$$

то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b.$$

Приклад 3

Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a} = (1; -2; 3)$ та $\vec{b} = (2; -4; 1)$.

Розв'язання

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = 13.$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходиться як відношення скалярного добутку цих векторів до добутку їх довжин, а саме:

$$\cos (\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos (\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Приклад 4

Знайти кут між векторами $\vec{a} = (3; -2; 0)$ та $\vec{b} = (-1; 1; 2)$, та проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Розв'язання

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} =$$
$$= \frac{-5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{4}} = \frac{-5}{2\sqrt{13}}.$$

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{|3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b = 0.$$

Вправи

1. За заданими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$;

б) $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$;

в) $\vec{c} = -3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

2. Визначити значення x та y , при яких вектори $\overrightarrow{AB}$ ($A(7;3;-1)$, $B(8;8;-3)$) і $\vec{b}(x;y;-1)$ будуть колінеарними.

3. Модуль вектора $\vec{a}(1;1;m)$ дорівнює 4. Знайдіть m .

5. Проекція вектора $\vec{b}(0,4,-3)$ на вектор $\vec{a}$ дорівнює 2. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

4. Знайдіть вектор $\vec{c}$, якщо задано вектори $\vec{a}(1;2;4)$ і $\vec{b}(-1;0;5)$ і відомо що:

а) $\vec{c} = \vec{a} + 7\vec{b}$;

б) $\vec{c} = 3\left(-\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}\right) + 2\vec{a}$;

в) $\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}$;

г) $\vec{c} = 3(\vec{b} \cdot \vec{a})$.

6. Знайти вершини B і C трикутника ABC , якщо $A(1;-1;3)$, $\overrightarrow{AB} = (1;0;4)$, $\overrightarrow{BC} = (1;-4;5)$.

7. При яких значеннях x вектори $(x^3 - 1)\vec{a}$ та $2x\vec{a}$ будуть однаково напрямлені, якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$?

8. Дано вектори $\vec{a}(2;-3;5)$, $\vec{b}(-1;1;-3)$ і $\vec{c}(3;7;1)$. Знайти координати вектора $\vec{p}(x;y;z)$, якщо $\vec{p}\vec{a} = 12$, $\vec{p}\vec{b} = -6$ і $\vec{p} \perp \vec{c}$.

9. Дано вектори $\vec{a}(6;-8;5\sqrt{2})$ і $\vec{b}(2;-4;-\sqrt{2})$. Знайти кут, утворений вектором $\vec{a} - \vec{b}$ із віссю Oz .

10. Знайти вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}(2\sqrt{2};-1;4)$, якщо $|\vec{b}| = 10$.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Trigonometrical functions

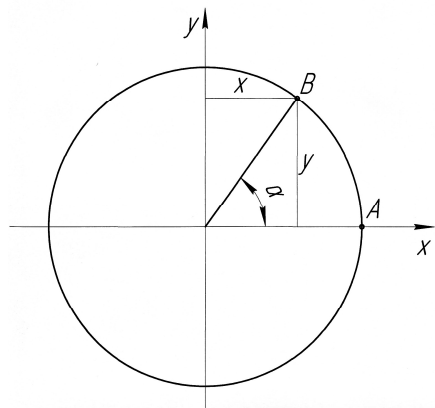


Рисунок 1

$$\sin \alpha = \frac{y}{R}; \cos \alpha = \frac{x}{R}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}; \sec \alpha = \frac{R}{x}; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{R}{y}.$$

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу (тут і далі $n \in \mathbb{Z}$ означає, що n – ціле число):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули додавання:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x, y, x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x, y, x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули подвійного аргументу:

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули половинного аргументу (для функцій $\sin$ і $\cos$ – формули пониження степеня):

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2};$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули перетворення суми в добуток:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули перетворення добутку в суму:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Співвідношення між $\sin x$, $\cos x$ і $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на схожу			
u	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$			
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
	$\alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$			

Вказівки до розв'язування тригонометричних рівнянь

1. Найпростішими тригонометричними рівняннями називаються рівняння виду $\sin x = a$ (де $|a| \leq 1$), $\cos x = a$ (де $|a| \leq 1$), $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Формули розв'язування цих рівнянь мають такий вигляд:

$$\sin x = a, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = a, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x = a, x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg} x = a, x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z.$$

В окремих випадках при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ маємо такі формули:

$$\sin x = 0, x = \pi n, n \in Z;$$

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x = 0, x = \pi n, n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg} x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Рівняння виду $\sin(\omega x + \varphi) = a$, $\cos(\omega x + \varphi) = a$, $\operatorname{tg}(\omega x + \varphi) = b$, $\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi) = b$ ($|a| \leq 1$, $\omega \neq 0$, φ , b – будь-які дійсні числа) також відносяться до найпростіших. Їх слід розв'язувати за попередніми формулами, замінивши x на $\omega x + \varphi$.

Приклад 1

$$\text{Розв'язати рівняння } \sqrt{3} + 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Розв'язання

$$2\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3};$$

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$5x = \pm\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

2. При розв'язуванні тригонометричних рівнянь часто використовуються розкладання на множники і введення нової змінної (метод підстановки).

Приклад 2

Розв'язати рівняння $2\sin^2 5x + 3\cos 5x - 3 = 0$.

Розв'язання

За формулою $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$:

$$2(1 - \cos^2 5x) + 3\cos 5x - 3 = 0;$$

$$2(1 - \cos^2 5x) + 3\cos 5x - 3 = 0;$$

$$-2\cos^2 5x + 3\cos 5x - 1 = 0;$$

$$2\cos^2 5x - 3\cos 5x + 1 = 0.$$

Нехай $\cos 5x = t$, тоді

$$2t^2 - 3t + 1 = 0;$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1;$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{4};$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2};$$

$$1) \quad \cos 5x = 1;$$

$$2) \quad \cos 5x = \frac{1}{2};$$

$$5x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$5x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x_1 = \frac{2}{5}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = \frac{2}{5}\pi n, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

3. Однорідними рівняннями називаються рівняння виду

$$a \sin kx + b \cos kx = 0;$$

$$a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 kx = 0;$$

$$a \sin^3 kx + b \sin^2 kx \cos kx + c \sin kx \cos^2 kx + d \cos^3 kx = 0.$$

Рівняння

$$a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 kx = d$$

при $d \neq 0$ не є однорідним, але його можна звести до однорідного рівняння, замінивши d тотожно рівним йому виразом $d(\sin^2 kx + \cos^2 kx)$.

Для розв'язування однорідних рівнянь у випадку $a \neq 0$ розглянемо ті значення x , при яких $\cos kx = 0$. Тоді з кожного рівняння випливає, що при тих самих значеннях x повинно і $\sin kx = 0$, а це неможливо. Отже, розв'язками цих рівнянь можуть бути тільки ті значення x , при яких $\cos kx \neq 0$. Тому, якщо (при $a \neq 0$) розділити обидві частини першого рівняння на $\cos kx$, друге рівняння – на $\cos^2 kx$, третє рівняння – на $\cos^3 kx$, то втрати коренів не буде.

У результаті отримаємо алгебраїчне рівняння відносно $\operatorname{tg} kx$, для розв'язування якого слід ввести заміну $\operatorname{tg} kx = z$.

Приклад 3

Розв'язати рівняння $\sin^2 3x + 7 \sin 6x = 15 \cos^2 3x$.

Розв'язання

$$\sin^2 3x + 14 \sin 3x \cos 3x - 15 \cos^2 3x = 0.$$

Це однорідне тригонометричне рівняння II-ого степеня. Поділимо ліву і праву частину його на $\cos^2 3x$.

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} + 14 \frac{\sin 3x \cos 3x}{\cos^2 3x} - 15 \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 3x} = \frac{0}{\cos^2 3x};$$

$$\operatorname{tg}^2 3x + 14 \operatorname{tg} 3x - 15 = 0.$$

Нехай $\operatorname{tg} 3x = y$, тоді

$$y^2 + 14y - 15 = 0;$$

$$y_1 = 1, y_2 = -15.$$

$$1) \quad \operatorname{tg} 3x = 1;$$

$$3x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \quad \operatorname{tg} 3x = -15;$$

$$3x = -\operatorname{arctg} 15 + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 15 + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

Відповідь: $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, x_2 = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 15 + \frac{\pi n}{3}$, де $k, n \in \mathbb{Z}$.

Вправи

1. Знайдіть радіанну міру таких кутів:

$1^\circ; 18^\circ; 45^\circ; 105^\circ; 360^\circ; 1080^\circ; 27^\circ 45'$.

2. Порівняйте:

$$1) \sin 25^\circ \text{ і } \operatorname{tg} 25^\circ;$$

$$2) \cos 75^\circ \text{ і } \operatorname{ctg} 75^\circ;$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \text{ і } \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}.$$

3. Спростити вирази:

а) $a^2 \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \sec \pi - b^2 \sin \frac{3\pi}{2}$;

б) $a^2 \sin 2\pi + 2ab \cos \frac{3\pi}{2} + b^2 \operatorname{tg} 2\pi$;

в) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

г) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$;

д) $\frac{\sin^2 \alpha}{\sec^2 \alpha - 1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}$;

е) $(1 - \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

4. Довести тотожності:

а) $\frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

б) $\operatorname{cosec}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha - 1}{1 - \sin^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$;

в) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin^2 \alpha$;

г) $\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

5. Обчислити:

а) $\sin(-1125^\circ)$;

б) $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$;

в) $4 \sin 810^\circ + 3 \cos 720^\circ - 3 \sin 630^\circ + 5 \cos 900^\circ$;

г) $\frac{2 \sin 3281^\circ - \sin 1481^\circ}{2 \operatorname{tg} 585^\circ}$.

6. Спростити вирази:

а) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right);$

б) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sec\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right);$

в) $1 - \cos(2\alpha - \pi) - \cos(4\alpha + \pi) + \cos(6\alpha - 2\pi);$

г) $1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right);$

д) $\operatorname{tg}^2 \frac{11\pi}{3} + \sin 5,5\pi - \cos\left(-\frac{26\pi}{3}\right);$

е) $\frac{\sin(x - \pi) \cdot \cos(x - 2\pi) \cdot \sin(2\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - x) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}.$

7. Знайти область визначення функцій:

а) $y = \arccos(1 - x);$

б) $y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x};$

в) $y = \arccos 2^x;$

г) $y = \arcsin |x|.$

8. Довести тотожності:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$

б) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad x \neq 0;$

в) $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b;$

г) $\sin 2a - \cos 2a \cdot \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a;$

д) $\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{4}}.$

9. Спростити вирази:

а) $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ$;

б) $\cos 5 \cos 2 - \sin 5 \sin 2$;

в) $\sin \varphi \cos 2\varphi + \cos \varphi \sin 2\varphi$;

г) $\frac{\sin 56^\circ \sin 124^\circ - \sin 34^\circ \cos 236^\circ}{\cos 28^\circ \cos 88^\circ + \cos 178^\circ \sin 208^\circ}$;

д) $\frac{\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{tg} 20^\circ}$;

е) $2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$;

ж) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} \right)$;

и) $\sin^2 26^\circ - \sin^2 64^\circ$;

к) $1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}$;

л) $\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$;

м) $2 \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ$.

10. Обчислити:

а) $\sin \left(\arcsin \left(\frac{15}{17} \right) + \arccos \left(-\frac{12}{18} \right) \right)$;

б) $\sin \left(\operatorname{arccotg}(-1,05) - \operatorname{arctg} 2,4 \right)$;

в) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\operatorname{arccotg} \left(\frac{1}{9} \right) + \operatorname{arccotg} \left(\frac{4}{5} \right) \right) \right)$;

г) $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ$;

д) $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

11. Спростити вирази:

а) $\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}$;

б) $2 \sin^2 \frac{a}{2} + \cos a$;

в) $\sqrt{1 + \cos 8a}$;

г) $\frac{1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right)}{1 + \cos (2\pi - 2\alpha)}$.

12. Довести тотожності:

а) $\frac{2\sin a - \sin 2a}{2\sin a + \sin 2a} = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2};$

б) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \cos 2x;$

в) $2\operatorname{cosec} 4a - \operatorname{ctg} 2a = \operatorname{tg} 2a.$

13. Спростити вирази:

а) $2\sin 10^\circ \cdot \sin 40^\circ + \cos 50^\circ;$

б) $\cos 4 \cdot \cos 6 - \sin 1 \cdot \sin 3;$

в) $\frac{\sin \alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}.$

14. Розв'язати рівняння:

а) $\sin 3x = -1;$

б) $\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 1;$

в) $\cos 3x = -0,2586;$

г) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3};$

д) $\frac{\cos x - \sqrt{5}}{\cos x - 10} = \frac{\cos x}{\cos x + \sqrt{5}};$

е) $3\sin x - 7\cos x = 0;$

ж) $2\sin^2 x - \sin x = 0;$

и) $3\sin x = 2\cos^2 x;$

к) $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x;$

л) $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x;$

м) $\cos x(2\cos x + 1) = 1.$

15. Розв'язати рівняння:

а) $3\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 0;$

б) $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 2;$

в) $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x;$

г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - x) = 0;$

д) $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \cdot \sin x = 4\sin^3 x;$

е) $2\sin x \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x - 5\cos^2 x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0;$

ж) $2\sin x + \cos x \operatorname{ctg} x + 2 = 0$;

и) $\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 1$;

к) $\operatorname{tg}^2 5x = \cos 3x - 1$;

л) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

16. Розв'язати рівняння:

а) $\sin 2x - \frac{\sin 4x}{4\cos^2 x} = 1$;

б) $\sin 2x \cdot \sin x + \cos 3x = 0$;

в) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \cos 2x$;

г) $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x$;

д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$;

е) $4\sin x + 3\cos x = 5$;

ж) $3(1 - \sin 2x) = 1 + \cos 2x$;

и) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$;

к) $\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = 1$.

17. Розв'язати нерівності:

а) $|\sin x| > |\cos x|$;

б) $\sin x > \frac{1}{2}$;

в) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $6\cos^2 x - 11\cos x + 4 > 0$;

д) $\operatorname{tg} x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Тема 24

ГРАНИЦЯ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Limit. Function continuity

Границя числової послідовності

Розглянемо числову послідовність $y_n = \frac{2n+1}{2n+3}$, $n \in N$.

Обчислимо кілька членів цієї послідовності

$$y_1 = \frac{3}{5}, y_2 = \frac{5}{7}, y_3 = \frac{7}{9}, y_4 = \frac{9}{11}, \dots$$

Як бачимо, із зростанням номера n члени послідовності дедалі ближче наближаються до числа 1. Це означає, що із зростанням номера n величина $|y_n - 1|$ стає дедалі меншою. Виникає питання, чи може ця величина стати меншою, ніж $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{1000000}$ і взагалі меншою за довільне наперед задане додатне число. З'ясуємо, наприклад, коли (для яких номерів n) справджується нерівність

$$|y_n - 1| < \frac{1}{100}.$$

Розглянемо ліву частину цієї нерівності:

$$|y_n - 1| = \left| \frac{2n+1}{2n+3} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{2n+3} \right| = \frac{2}{2n+3}.$$

Отже, щоб виконувалась нерівність $|y_n - 1| < \frac{1}{100}$, треба щоб виконувалась нерівність $\frac{2}{2n+3} < \frac{1}{100}$, звідки $n > \frac{197}{2} = 98\frac{1}{2}$. Номерами n , які задовольняють останню нерівність, є $n = 99, 100, 101, \dots$, тобто всі n , починаючи з $n = 99$.

Таким чином, отримали

$$|y_n - 1| < \frac{1}{100}, \text{ для } n = 99, 100, 101, \dots$$

Геометрично це означає, що всі члени числової послідовності $\{y_n\}$ при $n > 99$ знаходяться від точки 1 на відстані, яка менша $\frac{1}{100}$.

Аналогічно можна розв'язати поставлене питання і для будь-якого іншого наперед заданого додатного числа.

Таким чином, послідовність $\{y_n\}$ має таку властивість: для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N (натуральне число), який залежить від ε ($N = N(\varepsilon) > 0$), що при всіх $n > N$ маємо $|y_n - 1| < \varepsilon$. У цьому разі кажуть, що число 1 є границею числової послідовності $\{y_n\}$ і записують

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1.$$

Число A називається границею (**границя – limit**) числової послідовності $\{y_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon) > 0$, що для усіх $n > N(\varepsilon)$, виконується нерівність $|y_n - A| < \varepsilon$.

Якщо A границя числової послідовності $\{y_n\}$, це записують так

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A.$$

Послідовність, яка має границю, називається збіжною (**збіжна послідовність – convergent sequence**), в іншому випадку – розбіжною (**розбіжна послідовність – divergent sequence**).

Границя функції неперервного аргументу

Введемо спочатку на основі теорії границь числових послідовностей поняття границі функції неперервного аргументу.

Нехай задано функцію неперервного аргументу x визначену на множині X ,

$$y = f(x), x \in X.$$

Кожній послідовності значень змінної x з множини X

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

відповідає послідовність відповідних значень функції $f(x)$

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots,$$

тобто послідовності $\{x_n\} \in X$ відповідає послідовність $\{f(x_n)\}$.

Означення границі функції в точці за Гейне. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 . Число A називають границею функції $f(x)$ у точці x_0 , якщо для довільної послідовності значень аргументу $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ взятої із X , для якої $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, $n \in N$, послідовність відповідних значень функції $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ має границю, яка дорівнює числу A ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$), і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

(читається: границя f від x при x , що прямує до x_0 , дорівнює A).

Приклад 1

Функція $f(x) = \frac{2x-4}{x^2-4}$ визначена всюди, крім точок $x = \pm 2$. Дослідимо поведінку цієї функції в околі точки $x_0 = 2$. Виберемо в області визначення функції довільну послідовність $\{x_n\}$ збіжну до числа 2, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Якщо $x_n \neq 2$, $n \in N$, то

$$f(x_n) = \frac{2(x_n - 2)}{(x_n - 2)(x_n + 2)} = \frac{2}{(x_n + 2)}.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(x_n + 2)} = \frac{1}{2}.$$

Отже, незалежно від вибору послідовності $\{x_n\}$, для якої $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ і $x_n \neq 2$, $n \in N$, відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до числа $\frac{1}{2}$.

Означення границі функції за Коші. Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки x_0 (крім, можливо, самої точки x_0). Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (в точці $x = x_0$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$), таке, що при $0 < |x - x_0| < \delta$ справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Односторонні границі

Якщо $f(x)$ прямує до границі b_1 при x , що прямує до деякого числа x_0 так, що x приймає лише значення, що менші за x_0 , то пишуть $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = b_1$ і називають b_1 границею функції $f(x)$ у точці x_0 зліва (**ліва границя – limit from the left**). Якщо x приймає лише значення, що більші за x_0 , то пишуть $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = b_2$ і називають b_2 границею функції $f(x)$ у точці x_0 справа (**права границя – limit from the right**).

Якщо дві односторонні границі рівні, то лише тоді говорять про границю функцій у точці $x = x_0$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A.$$

Приклад 2

Знайти односторонні границі у точці $x=1$ функції $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$.

Розв'язання

$$\lim_{x \rightarrow 1 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 - 0} x = \{1 - 0\} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 + 0} 2 = 2.$$

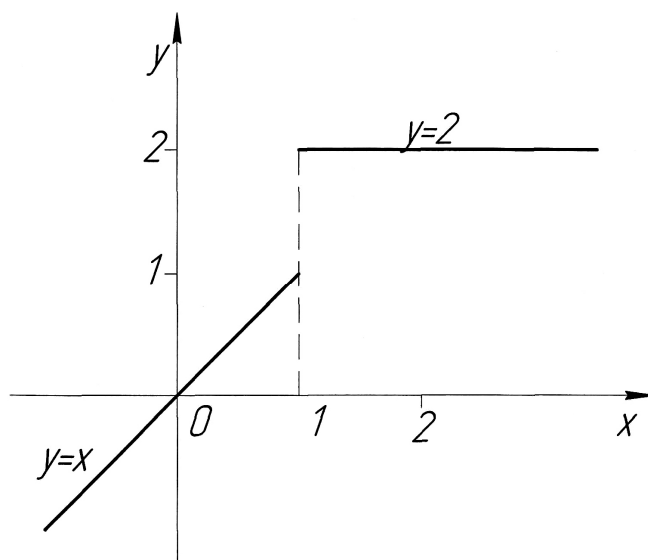


Рисунок 1

Поняття границі функції на нескінченності

Досі ми розглядали поняття границі функції в точці x_0 , де x_0 – певне дійсне число. Досліджуючи функції, областю визначення яких є інтервали $(-\infty; +\infty)$, $(-\infty; b)$ або $(a; +\infty)$, де a, b – дійсні числа, часто доводиться вивчати поведінку цих функцій при як завгодно великих за модулем значеннях аргументу. Тому доцільно ввести поняття границі функції при $x \rightarrow \pm\infty$.

Означення 1. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a; +\infty)$. Число A називають границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ і пишуть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M(\varepsilon) \geq a$, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для усіх x , які задовольняють умову $x > M(\varepsilon)$.

Означення 2. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty; b)$. Число A називають границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ і пишуть $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon) \leq b$, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для усіх x , які задовольняють умову $x < N(\varepsilon)$.

Означення 3. Число A називають границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $P(\varepsilon) > 0$, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх x , які задовольняють умову $|x| < P(\varepsilon)$.

Правила обчислення границь функцій

1. Якщо x_0 належить області визначення елементарної функції $y = f(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ мають у точці x_0 границю, C – довільне дійсне число, m – довільне натуральне число, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^m = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^m.$$

Розкриття невизначеностей $\left\{ \frac{0}{0} \right\}, \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}, \{\infty - \infty\}$

Невизначеності типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}, \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}, \{\infty - \infty\}$ здебільшого розкриваються

за допомогою алгебраїчних перетворень.

Приклад 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 5}{x^3 + x^2 - 1} &= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Приклад 4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} &= \left\{ \frac{1 - 4 \cdot 1 + 3}{1 - 1} \right\} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = \\ &= \left| x - 1 \neq 0 \right| = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = \{1 - 3\} = -2. \end{aligned}$$

Приклад 5

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2 - x}{x^2 - 4} \right) = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2-x}{(x-2)(x+2)} \right) = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{4}.$$

Приклад 6

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{6-x}-2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (\sqrt{6-x}+2)}{(\sqrt{6-x}-2) \cdot (\sqrt{6-x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (\sqrt{6-x}+2)}{2-x} = -\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{6-x}+2) = -4. \end{aligned}$$

Неперервність функцій

Нехай функція $y = f(x)$ визначена при деякому значенні x_0 і у деякому околі із центром в x_0 . Нехай $y_0 = f(x_0)$.

Якщо x надати деякого приросту Δx , то функція y отримає деякий приріст Δy , що виражається формулою

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Функція $y = f(x)$ називається неперервною у точці x_0 , якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 (і в самій точці x_0) і якщо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Запишемо умову неперервності у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Тоді можна сформулювати необхідні умови неперервності функції.

1. Функція $f(x)$ повинна бути визначена у точці x_0 .
2. Повинні існувати скінченні права і ліва односторонні границі у точці x_0 .
3. Односторонні границі повинні бути рівні між собою і дорівнювати значенню функції у точці x_0 , тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо хоча б одна з цих умов у точці x_0 не виконується, то говорять, функція має розрив при $x = x_0$. Точка $x = x_0$ називається точкою розриву.

Класифікація точок розриву

Точки розриву функції класифікуються залежно від того, як саме порушується необхідна та достатня умова неперервності функції.

Тут можливі такі випадки.

1. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має (скінченну) границю зліва і справа, і вони дорівнюють одна одній, але не дорівнюють значенню функції $f(x)$ в точці x_0 або значення $f(x_0)$ не існує, то точку x_0 називають точкою усувного розриву функції.

2. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має границю зліва і справа, причому $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, то точку x_0 називають точкою розриву функції із скінченним стрибком.

Величину $\delta = \left| \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \right|$ називають стрибком функції

$f(x)$ у точці x_0 .

Точки усувного розриву та розриву функції із скінченним стрибком називають точками розриву 1-го роду. Ці точки характеризуються тим, що в кожній з них функція має скінченну границю як зліва, так і справа.

Решту точок розриву функції називають точками розриву 2-го роду. Очевидно, що кожна точка розриву 2-го роду характеризується тим, що в ній функція не має хоча б однієї з односторонніх границь.

Приклад 7

Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f(0) = \frac{\sin x}{x} \Big|_{x=0} \text{ — не визначена.}$$

Отже у $x_0 = 0$ розрив 1-го роду усувного типу.

Вправи

1. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x - 5}{1 - x^2};$

ж) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 + x}{1 - \sqrt{x + 3}};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4x^2 + 3x^3}{x^3 - 7x - 10};$

и) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{1 - \sqrt{x}};$

в) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + 10x + 20}{x^3 - 10x^2 - 1};$

к) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1};$

л) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 5x - 6};$

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3};$

м) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\sqrt{x^2 + 4} - x \right) \right);$

е) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 6x - 7};$

н) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right).$

2. Дослідити на неперервність функцію $y = 3^{\frac{1}{x+1}} + 1$ в точках $x_1 = 1$ і $x_2 = -1$.

3. Дослідити на неперервність функцію $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0; \\ \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2} + 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

у точках $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{2}$ та побудувати її графік.

4. Дана функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3; \\ A, & x = 3. \end{cases}$

При яких значеннях A функція $f(x)$ буде неперервною у точці $x = 3$? Побудувати графік функції.

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Derivative of function

Границя відношення приросту функції (**приріст функції – *increment of function***) Δy до приросту аргументу (**приріст аргументу – *increment of argument***) Δx при довільному прямуванні Δx до нуля називається похідною функції $y = f(x)$ у точці x і позначається одним з таких символів: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Отже,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо вказана границя існує, то функцію $f(x)$ називають диференційовною (**диференційовна функція – *differentiable function***) у точці x , а операцію знаходження похідної y' – диференціюванням (**диференціювання – *differentiation***).

Геометричний зміст похідної: похідна у точці x дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної (**дотична до кривої – *tangent to curve***), що проведена у точці $M(x, y)$ до графіка функції $y = f(x)$.

Фізичний зміст похідної: похідна визначає швидкість зміни функції у точці x відносно аргументу x .

Правила диференціювання

(C - стала величина, $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – деякі диференційовні функції):

1) $(C)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$;

$$6) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

$$7) \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

8) якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$ – **складна функція (composite function)**, що складена із диференційовних функцій, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx};$$

9) якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена диференційовна функція $x = g(y)$ і $\frac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

Таблиця похідних елементарних функцій

$$1) (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (\alpha \in \mathbb{R});$$

$$11) (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

$$2) (a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$$

$$12) (\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} u';$$

$$3) (e^u)' = e^u u';$$

$$13) (\text{arcctg } u)' = -\frac{1}{1+u^2} u';$$

$$4) (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u';$$

$$14) (\text{sh } u)' = \text{ch } u \cdot u';$$

$$5) (\ln u)' = \frac{1}{u} u';$$

$$15) (\text{ch } u)' = \text{sh } u \cdot u';$$

$$6) (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$16) (\text{th } u)' = \frac{1}{\text{ch}^2 u} u';$$

$$7) (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$17) (\text{cth } u)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 u} u'.$$

$$8) (\text{tg } u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$9) (\text{ctg } u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

$$10) (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до кривої (**нормаль до кривої – normal to curve**) $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Функція $y = f(x)$ називається зростаючою в деякому інтервалі, якщо більшому значенню аргумента з цього інтервала відповідають більші значення функції, тобто при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Функція $y = f(x)$ називається спадною, якщо більшому значенню аргумента відповідають менші значення функції, тобто при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Ознаки зростання і спадання функції

1. Якщо диференційовна функція $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ зростає, то її похідна на цьому відрізку невід'ємна, тобто $f'(x) \geq 0$; якщо функція спадає, то її похідна недодатна ($f'(x) \leq 0$).

2. Якщо похідна функції $y = f(x)$, що неперервна на відрізку $[a; b]$, додатна ($f'(x) > 0$), то функція зростає на цьому відрізку, якщо похідна від'ємна ($f'(x) < 0$) – функція спадає.

Інтервали, у яких функція не спадає чи не зростає, називаються інтервалами монотонності функції (**інтервал монотонності – monotonicity interval**). Характер монотонності функції може змінюватись лише у тих точках її області визначення, у яких змінюється знак першої похідної. Точка, у якій перша похідна функції перетворюється у нуль чи не існує, називається критичною.

Приклад 1

Знайти інтервали монотонності та критичні точки функції $y = 2x^2 - \ln x$.

Розв'язання

Функція визначена при $x > 0$. Знаходимо її похідну

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}.$$

В області визначення функції $y' = 0$ при $4x^2 - 1 = 0$, тобто при $x_0 = \frac{1}{2}$. Знайдена точка розбиває область функції на інтервали $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$y' < 0$	функція спадає
$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$	$y' > 0$	функція зростає

Точка x_1 називається точкою локального максимуму (**локальний максимум – local maximum**) функції $y = f(x)$, якщо для будь-яких достатньо малих $|\Delta x| \neq 0$ виконується нерівність $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$. Точка x_2 називається точкою локального мінімуму (**локальний мінімум – local minimum**) функції $y = f(x)$, якщо для будь-яких достатньо малих $|\Delta x| \neq 0$ виконується нерівність $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$. Точки максимуму і мінімуму називаються точками екстремуму функції (**екстремум функції – extremum of function**).

Необхідна ознака (requirement) локального екстремуму: якщо функція $y = f(x)$ має у точці $x = x_0$ екстремум, то або $f'(x_0) = 0$, або $f'(x)$ не існує.

Достатня ознака (sufficient condition) локального екстремуму. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна у деякому інтервалі, що містить критичну точку $x = x_0$, і диференційовна у всіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо $f'(x)$ при $x < x_0$ додатна, а при $x > x_0$ від'ємна, то при $x = x_0$ функція $y = f(x)$ має максимум. Якщо $f'(x)$ при

$x < x_0$ від'ємна, а при $x > x_0$ додатна, то при $x = x_0$ функція $y = f(x)$ має мінімум.

Приклад 2

Дослідити на екстремум функцію $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання

Область визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$. Знайдемо її похідну

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1).$$

Визначимо критичні точки функції. У критичних точках похідна функції дорівнює 0 або не існує.

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 \neq 0 \end{cases} - \text{критичні точки. Вони розбивають область визначення}$$

функції на інтервали: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$.

$(-\infty; -1)$	$y' > 0$	функція зростає
$(-1; 0)$	$y' < 0$	функція спадає
$(0; +\infty)$	$y' > 0$	функція зростає

$x_1 = -1$ – точка локального максимуму, $y_{\max} = y(-1) = 1$; $x_2 = 0$ – точка локального мінімуму, $y_{\min} = y(0) = 0$.

Вправи

1. Знайти похідні функцій:

а) $y = x^7$;

б) $y = \frac{1}{x^2}$;

в) $y = x\sqrt{x}$;

г) $y = \sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^{-1}} + 3x^{-2} - (5x)^{-3} + 4$;

$$\text{д) } y = \sqrt{3x\sqrt{5x}};$$

$$\text{е) } y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3};$$

$$\text{ж) } y = 6x^3 - 4x^2 + 10x;$$

$$\text{и) } y = 5x^2(x - x^2);$$

$$\text{к) } y = \frac{1-x}{1+x};$$

$$\text{л) } y = \frac{3}{x - x^2 + 3};$$

$$\text{м) } y = \sin x \cdot \cos x.$$

2. Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \sin^3 x + \cos^3 x;$$

$$\text{б) } y = \sqrt[3]{1-x^3};$$

$$\text{в) } y = (x+7)^3;$$

$$\text{г) } y = \sin 2x;$$

$$\text{д) } y = x \ln x;$$

$$\text{е) } y = -\ln \cos x;$$

$$\text{ж) } y = \lg(\sin 3x + 2^x);$$

$$\text{и) } y = a^{2x}.$$

3. Визначити проміжки зростання, спадання та точки максимуму та мінімуму функцій:

$$\text{а) } y = 3 + 4x - x^2;$$

$$\text{б) } y = \frac{x^2 + 1}{x};$$

$$\text{в) } y = x - \ln x;$$

$$\text{г) } y = \frac{e^x}{x+1}.$$

4. Довести зростання функції на усій області визначення:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 21$;

б) $y = x + \frac{1}{1+x^2}$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції на заданих інтервалах:

а) $f(x) = x^3 - 3x, x \in [-0,5; 0,5]$;

б) $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}, x \in [1; 6]$;

в) $y = x - 2\sqrt{x-2} - 3, x \in [2; 11]$;

г) $y = 2(x^2 + 1), x \in [-1; 3]$.

6. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

а) $y = x^2 + 2x + 1$;

в) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;

б) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;

г) $y = xe^x$.

7. Знайти рівняння дотичної до графіка функції з абсцисою у точці x_0 :

а) $f(x) = x^2, x_0 = 2$;

б) $f(x) = e^x, x_0 = 0$;

в) $f(x) = x^2 + x^{-2}, x_0 = 1$.

8. Нехай $S(t) = 4t^2 + 2$ – закон прямолінійного руху точки, де S – шлях, t – час руху. Знайти швидкість точки у момент часу $t = 1$.

ПЕРВІСНА. ІНТЕГРАЛ

Antiderivative. Integral

Функція F називається первісною для функції f на заданому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Загальний вигляд первісних для функції $f(x) \in F(x) + C$, де C – довільна стала, а $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$.

Таблиця первісних

Функція $f(x)$	Первісна $F(x)$	Функція $f(x)$	Первісна $F(x)$
a	ax	$\sin x$	$-\cos x$
x^p	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$	$\cos x$	$\sin x$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$		

Правила знаходження первісних:

а) якщо F первісна для f , а G – первісна для g , то $F + G$ є первісною для $f + g$;

б) якщо F первісна для f , а k – стала, то kF є первісною для kf ;

в) якщо $F(x)$ первісна для $f(x)$, а $k \neq 0$ і b – сталі, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною для функції $f(kx + b)$

Приклад 1

Знайти первісну функції $f(x) = \left(4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 1 \right)$.

Розв'язання

Знайдемо первісні функцій

$$f_1(x) = x^3 \Rightarrow F_1(x) = \frac{x^4}{4},$$

$$f_2(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow F_2(x) = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow F_3(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2},$$

$$f_4(x) = 1 \Rightarrow F_4(x) = x.$$

Застосовуючи властивості 1 та 2 отримаємо:

$$F(x) = 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + 2\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + x = x^4 - \frac{6\sqrt[3]{x^5}}{5} - \frac{1}{x^2} + x.$$

Сума площ усіх прямокутників (рис. 1) дорівнює

$$S_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})).$$

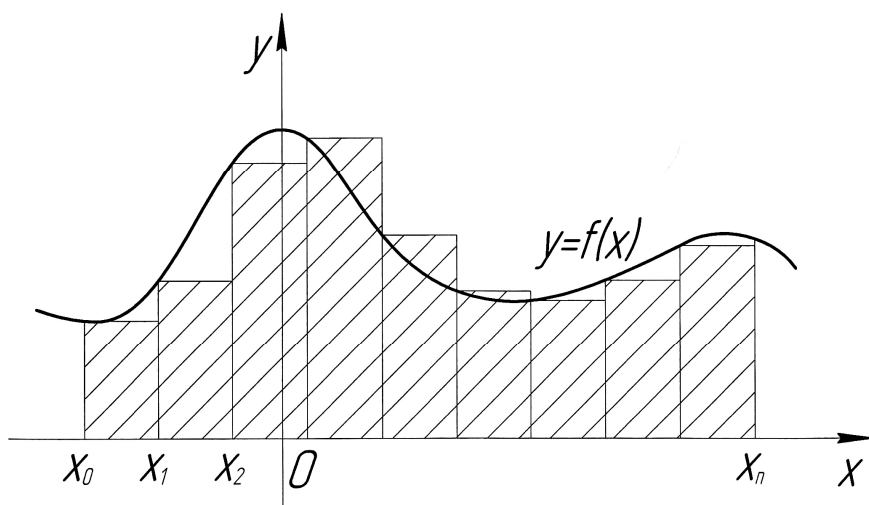


Рисунок 1

Для будь-якої неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f (необов'язково невід'ємної) S_n прямує до деякого числа, якщо $n \rightarrow \infty$. Це число називають інтегралом функції f від a до b і позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читається: «Інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»). Числа a і b називаються межами

інтегрування: a – нижньою межею, b – верхньою. Знак $\int$ називається знаком інтеграла. Функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, а змінна x – змінною інтегрування.

Формула Ньютона–Лейбніца має вигляд $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Площа криволінійної трапеції $aABb$, обмежена віссю Ox , прямими $x=a$ і $x=b$ та графіком невід'ємної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ (рис. 2), визначається за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

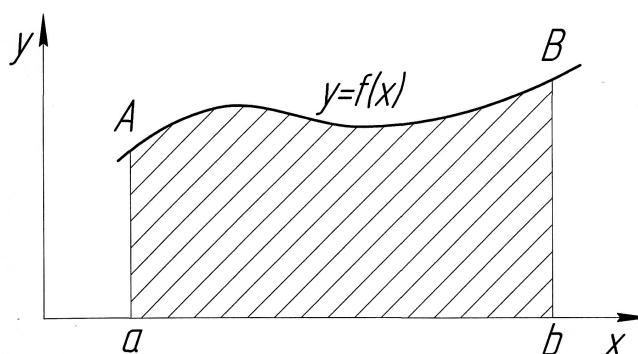


Рисунок 2

Приклад 2

Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = 3x - x^2$ і $y = -x$.

Розв'язання

Знаходимо точки перетину даних кривих:

$$\begin{cases} y = 3x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = 3x - x^2 \end{cases}$$

Система має два розв'язки: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -4 \end{cases}$. Маємо дві точки пе-

ретину графіків функцій. Будуємо фігуру, площу якої шукаємо (рис. 3).

Тоді

$$S = \int_0^4 (3x - x^2 - (-x))dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ кв.од.}$$

Відповідь: $S = \frac{32}{3}$ кв.од.

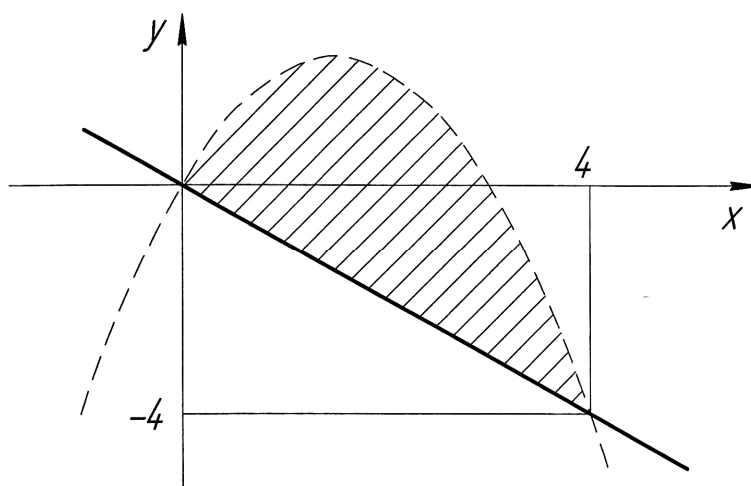


Рисунок 3

Вправи

1. Знайти первісну $F(x)$, якщо:

а) $f(x) = 7 - 2x$;

е) $f(x) = 2 \ln x - x^2$;

б) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;

ж) $f(x) = \frac{4}{(x+3)^2} + \frac{7}{\sin^2 3x}$;

в) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

и) $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$.

г) $f(x) = 2 \sin x + \cos 3x$;

д) $f(x) = \frac{3}{\cos^2 2x}$;

2. Знайти первісну $F(x)$ для функції $y = f(x)$, графік якої проходить через точку M :

а) $f(x) = \frac{1}{2^x}$, $M\left(1; \frac{5}{\ln 2}\right)$;

б) $f(x) = e^{-3x}$, $M(0; -2)$;

в) $f(x) = x^4$, $M(-1; 2)$;

г) $f(x) = \sin 2x$, $M(0; 1)$.

3. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int_3^6 dx;$

ж) $\int_{-2}^{14} \sqrt[3]{1 + \frac{x}{2}} dx;$

б) $\int_4^5 \sqrt{x} dx;$

и) $\int_2^8 \frac{dx}{x \ln 2};$

в) $\int_1^2 \frac{6}{x^4} dx;$

к) $\int_1^{64} \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}} dx;$

г) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx;$

л) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx;$

д) $\int_0^1 \sqrt{1-x} dx;$

м) $\int_{\pi/3}^{\pi} (\sin 2x \cos 3x + 2 \sin^2 x \sin 3x) dx.$

е) $\int_0^{3\pi/2} \cos \frac{x}{3} dx;$

4. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:

а) $y = 4x - 5, x = -3, x = 2, y = 0;$

б) $y^2 = 9x, x = 1, x = 9;$

в) $y = x^2 + 4x, y = x + 4;$

г) $y = 9 - x^2, y = 0;$

д) $y = x^2 - 2x + 2, y = 2 + 4x - x^2;$

е) $y = \frac{5}{x}, y = 6 - x;$

ж) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 3.$

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Complex number

Величина y^2 при будь-якому числовому значенні b буде невід'ємною, тобто вона може бути або додатною або рівною нулю, наприклад, при $y = \pm 8$ маємо $y^2 = +64$; при $y = 0$ і $y^2 = 0$.

Таким чином, серед дійсних чисел немає жодного, квадрат якого дорівнював би від'ємній величині. Отже, і корінь квадратний із від'ємної величини $\sqrt{-y^2}$ не може бути виражений жодним дійсним числом.

Чи означає це, що величина $\sqrt{-y^2}$ є уявною, неіснуючою, як її називали внаслідок традиції, що незмінно повторювалась при всякому наступному розширенні поняття числа? Авжеж ні. Величина $\sqrt{-y^2}$ є реально існуючою величиною, яка не може бути виражена вузьким, недосконалим поняттям дійсного числа. Для розширення поняття числа крім дійсної одиниці, за допомогою якою виражаються усі дійсні числа, необхідно ввести принципіально нову одиницю, яку будемо позначати буквою i , маючи на увазі під цим позначенням величину

$$i = \sqrt{-1} \text{ або } i^2 = -1$$

Тоді $\sqrt{-y^2}$ може бути виражено через нову одиницю i так:

$$\sqrt{-y^2} = \sqrt{(-1) \cdot y^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{y^2} = iy.$$

За історичною традицією число i назвали уявною одиницею (**уявна одиниця – *imaginary unit***), а числа iy – чисто уявними числами. Число виду

$$x + iy$$

одержало назву комплексного числа, у якому розрізняють дійсну частину (x) (**дійсна частина – *real part***) і уявну частину (y) (**уявна частина – *imaginary part***).

Комплексні числа почали з'являтися в роботах окремих математиків починаючи з XVI століття. Але широке визнання й поширення вони одержали лише в XIX столітті після того, як на рубежі XVIII - XIX століть од-

ночасно й незалежно один від одного К. Гауссом (в 1797–1799 р.), К. Веселем (в 1798–1799 р.) і Ж. Арганом (в 1806 р.) була дана геометрична інтерпретація комплексних чисел як точок числової площини, і після того, як за допомогою комплексних чисел вдалося вирішити ряд практично важливих задач, нерозв'язаних в області дійсних чисел.

До тих пір до комплексних чисел ставилися з великою недовірою й не розуміли їхньої суті навіть багато великих математиків. Наприклад, Лейбніц писав: «Комплексне число – це тонкий і разючий засіб божественного духу, майже амфібія між буттям і небуттям».

Комплексним числом z називається вираз виду

$$z = x + iy$$

(алгебраїчна форма (*algebraic form*) комплексного числа), де x і y – будь-які дійсні числа, а i – уявна одиниця.

Числа x і y називають, відповідно, дійсною та уявною частинами комплексного числа z і позначають

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називається спряженим (**спряжене – *adjoined***) до комплексного числа $z = x + iy$.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Комплексне число $z = x + iy$ зображається на площині Oxy точкою M із координатами (x, y) чи вектором, початок якого знаходиться у точці $O(0;0)$, а кінець у точці $M(x, y)$ (рис. 1).

Довжина ρ вектора $\overline{OM}$ називається модулем (**модуль – *modulus***) комплексного числа і позначається $|z|$

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Кут φ , утворений вектором $\overline{OM}$ із віссю Ox , називається аргументом (**аргумент – *amplitude***) комплексного числа z і позначається $\varphi = \operatorname{Arg} z$; він визначається не однозначно, а із точністю до доданка, який кратний 2π :

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де $\arg z$ – головне значення $\operatorname{Arg} z$, що визначається умовами

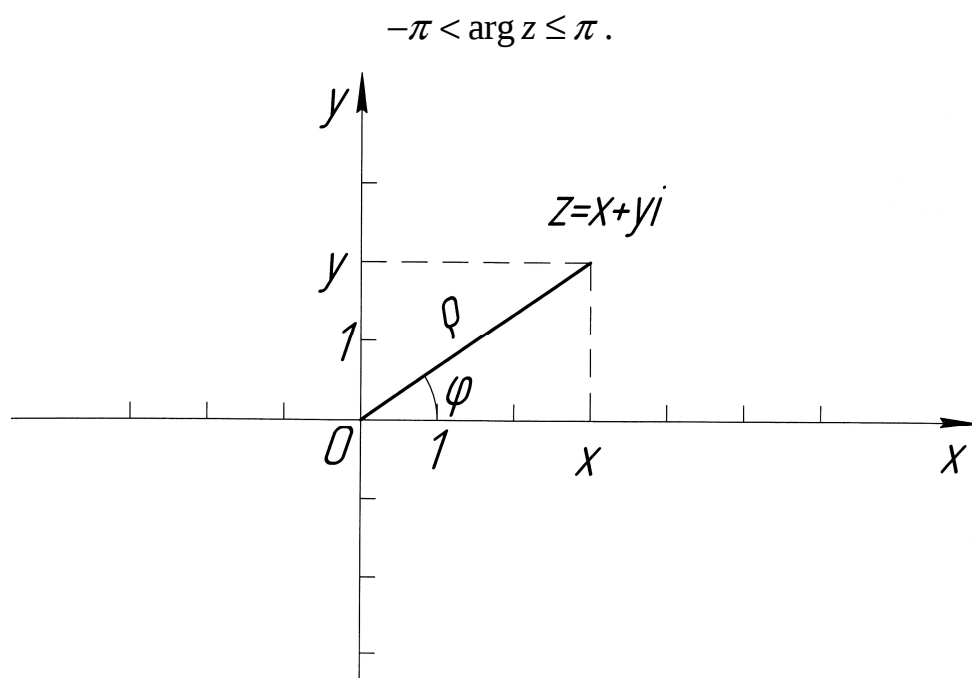


Рисунок 1

Модуль і аргумент комплексного числа є параметрами, які визначають тригонометричну та показникову форму запису комплексних чисел:

$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ – **тригонометрична форма (*goniometric form*)**;

$z = \rho e^{i\varphi}$ – **показникова форма (*exponential form*)**.

При виконанні алгебраїчних дій над комплексними числами потрібно вміти переходити від алгебраїчної форми запису до тригонометричної (показникової) і навпаки. Для цього використовуються формули переходу, очевидні з рис. 1.

Формули переходу від тригонометричної (показникової) форми запису до алгебраїчної:

$$x = \rho \cos \varphi;$$

$$y = \rho \sin \varphi.$$

Формули переходу від алгебраїчної форми запису до тригонометричної (показникової):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Два комплексні числа z_1 і z_2 рівні тоді і лише тоді, коли їх модулі рівні, а їх аргументи або рівні, або відрізняються на величину, що кратна 2π :

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots), \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = z_2.$$

Дійсна та уявна частини комплексного числа виражаються через спряжені комплексні числа таким чином:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Приклад 1

Подати в тригонометричній та показниковій формах число $z = 2\sqrt{3} + 2i$:

Розв'язання

З алгебраїчної форми числа визначаємо:

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$y = 2$$

Тоді

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

Отже,

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) - \text{тригонометрична форма } z;$$

$$z = 4e^{\frac{\pi i}{6}} - \text{показникова форма } z.$$

Приклад 2

Розв'язати рівняння $x^2 + 4x + 13 = 0$.

Розв'язання

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 13 = -36;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i;$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = -2 + 3i, x_2 = -2 - 3i.$$

Приклад 3

При яких дійсних значеннях x та y виконується рівність

$$x(2 - i) + y(2i - 1) = 4 - 5i?$$

Розкриваючи дужки в лівій частині рівняння та групуючи дійсні та уявні частини, отримаємо

$$(2x - y) + i(-x + 2y) = 4 - 5i.$$

Використовуючи означення рівності комплексних чисел, прирівняємо дійсні та уявні частини справа та зліва:

$$\begin{cases} 2x - y = 4; \\ -x + 2y = -5. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на 2 та додамо його до першого. Отримаємо

$$\begin{cases} 3y = -6; \\ x = 2y + 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = -2. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } x = 1, y = -2.$$

Алгебраїчні дії над комплексними числами

В алгебраїчній формі запису дії над комплексними числами потрібно виконувати вважаючи, що i звичайний символічний множник, єдина його особливість, що $i^2 = -1$.

Додавання і віднімання комплексних чисел виконується лише в алгебраїчній формі. Отже, якщо комплексні числа задано в тригонометричній (показниковій) формі, то перше, що необхідно зробити, щоб виконати операцію додавання або віднімання, використовуючи формули переходу перейти до алгебраїчної форми запису.

Додавання

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (iy_1 + iy_2) = \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Віднімання

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + (iy_1 - iy_2) = \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Приклад 4

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 - 3i \\ z_2 &= -7 + 5i \end{aligned} \Rightarrow z_1 + z_2 = 2 - 3i - 7 + 5i = (2 - 7) + i(-3 + 5) = -5 + 2i.$$

Операції множення і ділення можна виконувати у будь-якій формі запису (бажано використовувати ту форму запису, у якій задано обидва комплексні числа).

Множення:

а) алгебраїчна форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2i^2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (ix_1y_2 + ix_2y_1) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); \end{aligned}$$

б) тригонометрична форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Rightarrow \\ z_1 z_2 &= \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \end{aligned}$$

в) показникова форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\varphi_2} \Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Ділення:

а) алгебраїчна форма запису.

Для ділення двох комплексних чисел в алгебраїчній формі необхідно і ділене і дільник помножити на спряжене до дільника комплексне число.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \Rightarrow \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 - y_1 y_2 i^2}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \end{aligned}$$

б) тригонометрична форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Rightarrow \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \end{aligned}$$

в) показникова форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\varphi_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Приклад 5

Обчислити $z = \frac{\sqrt{3} + i}{2 - \sqrt{3}i}$.

Розв'язання

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2-\sqrt{3}i} \cdot \frac{2+\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i} = \frac{2\sqrt{3}+2i+3i-\sqrt{3}}{4+3} = \frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{5}{7}i.$$

Піднесення до натурального степеня та
пошук кореня із комплексного числа

Операції піднесення до степеня та пошук кореня виконуються лише у тригонометричній (показниковій) формі запису комплексного числа.

Піднесення до натурального степеня:

а) тригонометрична форма

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi);$$

б) показникова форма

$$z = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = \rho^n e^{in\varphi}.$$

Знаходження кореня:

а) тригонометрична форма

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1;$$

б) показникова форма

$$z = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\varphi + 2\pi k i}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Приклад 6

Обчислити $(-\sqrt{3} - i)^5$.

Розв'язання

Визначимо тригонометричну форму комплексного числа, що підноситься до степеня. Згідно з умовою $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$. Тоді,

$$\rho = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\varphi = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}-i)^5 &= \left(2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right) \right)^5 = \\&= 2^5 \left(\cos\left(-5\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-5\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 32 \left(\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right) \right) = \\&= 32 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 32 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 16\sqrt{3} - 16i.\end{aligned}$$

Вправи

1. Подати в тригонометричній та показниковій формах:

а) $z_1 = 1 + i$;

в) $z_3 = 2i$;

б) $z_2 = -\sqrt{3} - i$;

г) $z_4 = -5$.

2. Подати в алгебраїчній формі:

а) $z_1 = 2 \cdot e^{\frac{\pi i}{6}}$;

б) $z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$;

в) $|z_3| = 1, \arg z_3 = \pi$.

3. Знайти z , якщо:

а) $z = z_1 z_2, z_1 = (1 + i), z_2 = (1 - 3i)$;

г) $z = (-\sqrt{3} - i)^5$;

б) $z = \frac{2}{-i} + i \cdot \overline{(1 - i)}$;

д) $z = \sqrt[3]{1 + i}$;

в) $z = \frac{2}{1 + i} - \frac{1 - i}{1 + i} \frac{2 - 2i}{1 - 2i}$;

е) $z^2 + i = 0$.

4. Знайти корені квадратних рівнянь:

а) $x^2 - 2x + 2 = 0$;

б) $x^2 + 6x + 13 = 0$;

в) $x^2 + 16 = 0$.

КОМБІНАТОРИКА. БІНОМ НЬЮТОНА

Combinatorial analysis. Binomial theorem

При вивченні теорії ймовірностей важливе значення відіграє теорія сполук, яка розглядає множини по m предметів, взятих із даних n предметів. Такі множини називаються сполуками. Нас завжди цікавитиме лише кількість сполук і не цікавитиме природа тих предметів, з яких складаються сполуки. Складові сполук, називаються елементами. Позначають їх буквами $a, b, c, d, \dots$

Сполуки можуть відрізнятися одна від одної або елементами і порядком елементів, або лише порядком елементів, або лише елементами. В залежності від цього розглядають три види сполук: розміщення, перестановки та комбінації.

Сполуки, які відрізняються як складом елементів, так і їх порядком, називаються розміщенням (**розміщення – arrangement**), а їх число позначається символом A з верхнім та нижнім індексами.

Наприклад, розміщеннями з трьох елементів a, b, c по два будуть: ab, ac, bc, ba, ca, cb .

Кількість розміщень із n елементів по m позначається через A_n^m і обчислюється за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Приклад 1

Скільки можна написати трицифрових чисел з різними цифрами, не використовуючи 0?

Розв'язання

Такі числа можна розглядати як розміщення з дев'яти цифр по три. Таким чином,

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

Приклад 2

Кидають гральний кубик два рази. Скільки може бути випадків, коли цифра, яка з'явиться при першому киданні відрізняється від цифри, яка з'явиться при другому киданні?

Розв'язання

Розв'язання цієї задачі зводиться до обчислення кількості розміщень із шести елементів по два:

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 6 = 30.$$

Сполуки, які складені з усіх наявних елементів і відрізняються лише порядком елементів називаються перестановками (**перестановка – *commutation***). Число перестановок n -елементної множини позначається через P .

Наприклад, перестановками з трьох елементів a, b, c будуть: $abc, acb, cab, cba, bac, bca$.

Перестановки можна розглядати як окремий випадок розміщень, коли $m = n$. Це дає можливість вивести формулу для обчислення кількості перестановок:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Зауваження. Число n може приймати не тільки натуральні значення, воно може також дорівнювати нулю. Прийнято вважати, що $0! = 1$.

Приклад 3

Скількома способами можна посадити в рядок по одному 6 декоративних дерев?

Розв'язання

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Приклад 4

Скільки різних п'ятицифрових чисел, більших за 20 000, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, якщо цифри 2, 3, 4 входять в кожне число по одному разу, а цифра 1 – два рази?

Розв'язання

В даній задачі елементами є числа 1, 1, 2, 3, 4, а тому кожна перестановка дає п'ятицифрове число, і їх буде: $P_5 = 5!$ Але ж в кожне число входить дві одиниці. Змінюючи одиниці місцями, отримуємо те ж саме число, тому різних п'ятицифрових чисел буде: $\frac{1}{2} \cdot P_5 = \frac{1}{2} \cdot 5! = 60$. Якщо одиниця зустрічається на першому місці, то числа будуть меншими за 20 000 і їх буде $P_4 = 4! = 24$ (перестановки з чотирма цифрами). Отже, шукана кількість чисел знаходиться як різниця:

$$\frac{1}{2} \cdot P_5 - P_4 = 60 - 24 = 36.$$

Сполуки, які містять в собі m елементів із даних n і відрізняються одна від одної принаймні одним елементом, називаються комбінаціями (**комбінація – combination**) з n елементів по m .

Наприклад, комбінаціями з трьох елементів a, b, c по два будуть: ab, ac, bc .

Кількість комбінацій з n елементів по m позначають як C_n^m і знаходять за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Комбінації мають таку властивість, що $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Приклад 5

На склад поступило 100 деталей. Для вибіркового контролю потрібно взяти дві з цієї сотні. Скількома способами можна виконати цю операцію?

Розв'язання

В даній задачі потрібно обчислити кількість комбінацій з 100 елементів по два:

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!(100-2)!} = \frac{100!}{2!98!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950.$$

Числа $C_1^0, C_1^1, C_2^0, C_2^1, C_2^2, C_3^0, C_3^1, \dots$ зручно записати у вигляді таблиці:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & C_1^0 & & C_1^1 & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 \\
 & & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
 & & & & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 & & & & & & C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
 & & & & & & & \dots & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Якщо обчислити значення цих символів, то одержимо:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & & & \dots & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Таблицю отриманих чисел називають трикутником Паскаля (**трикутник Паскаля – *Pascal pyramid***).

Ряд питань теорії ймовірностей потребують знання так званої формули бінома Ньютона.

З алгебри відомі формули скороченого множення:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
 \end{aligned}$$

Коефіцієнти в правих частинах цих формул збігаються відповідно з другим і третім рядками трикутника Паскаля. Неважко довести, що ця закономірність збігається для 4-го, 5-го і т.д. степеня суми. Таким чином, для суми n -го степеня можна записати, що:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m.$$

Відповідна формула називається формулою бінома Ньютона. Вираз $C_n^m a^{n-m} b^m$ називається загальним членом бінома Ньютона. В окремих випадках при $n = 2, 3, 4, \dots$ з формули бінома Ньютона можна вивести відомі формули скороченого множення.

Вправи

1. Хлопець забув дві останні цифри телефону свого друга, але пам'ятає, що вони різні і більші за 6. Яку максимальну кількість телефонних дзвінків може зробити хлопець перш ніж почує голос друга?

2. Скількома різними способами можна розсадити групу із 8 людей на 8 стільців?

3. Множина складається із десяти літер українського алфавіту. Дослід полягає у виборі без повертання 4 літер і запису слова у порядку вибору літер. Скільки 4-літерних слів можна отримати у такому досліді?

4. Треба розподілити виконання досліджень на шести дослідних ділянках між трьома студентами. Скількома способами можна здійснити розподіл, якщо кожен повинен отримати дві ділянки?

5. Цифри 1, 2, ..., 9 записують у випадковому порядку. Знайдіть кількість можливих сполук цифр, у яких 1 та 2 стоятимуть поряд.

6. Із партії, що містить 25 виробів, серед яких є браковані, для контролю беруть 3 вироби. Скільки різних сполук виробів можна утворити таким чином?

ТОЧКА. ПРЯМА. КУТ

Point. Line. Angle

Основними геометричними фігурами на площині є точка і пряма. Точки позначають великими латинськими літерами (на рис. 1 показано точку A), а прямі – малими латинськими літерами (на рис. 2. – пряма a). На рис. 3 зображено пряму c та точки E і F . Точка F лежить на прямій c , а точка E не лежить на прямій c . Інакше кажучи, точка F належить прямій c , а точка E не належить їй.

Рисунок 1

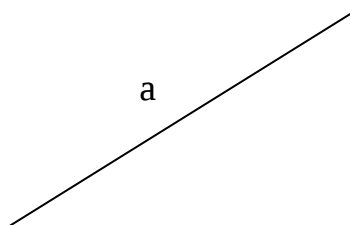


Рисунок 2

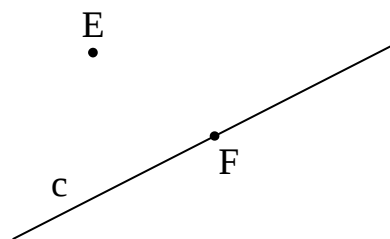


Рисунок 3

Відрізком (**відрізок – segment**) називається частина прямої, яка складається з усіх точок прямої, що лежать між двома даними її точками. Ці точки називають кінцями відрізка. Відрізок позначають, записуючи його кінці (відрізок AB на рис. 4).

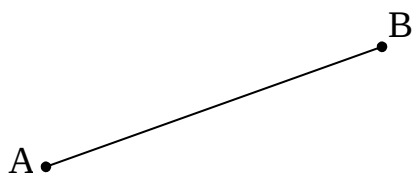


Рисунок 4

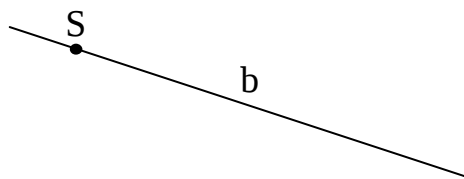


Рисунок 5

Точка S розбиває пряму b на дві півпрямі (**півпряма – half-line**), які називаються променями (**промінь – ray**) (рис. 5). Точка S називається початковою точкою (**початкова точка – initial point**) променя. Точка A (рис. 6) розбиває пряму на два променя a_1 та a_2 , які називаються доповняльними.

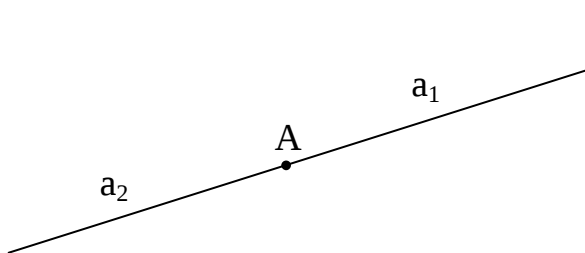


Рисунок 6

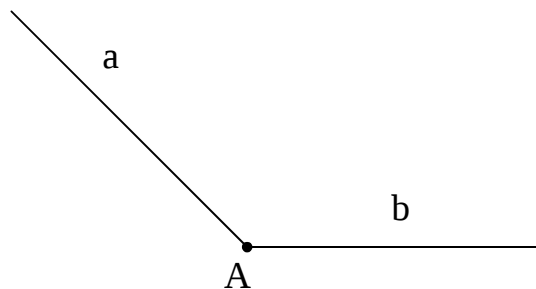


Рисунок 7

Кутом називається фігура, яка складається з точки – вершини кута (**вершина кута – *vertex of angle***) – і двох різних півпрямих, що виходять з цієї точки, і називаються сторонами кута (рис. 7). Якщо сторони кута є доповняльними півпрямими однієї прямої, то кут називається розгорнутим (**розгорнутий кут – *flat angle***) (рис. 6).

Кути вимірюються градусами (**градус – *degree***) за допомогою транспортира (**транспортир – *protractor***) (рис. 8). Кут, що дорівнює 90° , називається

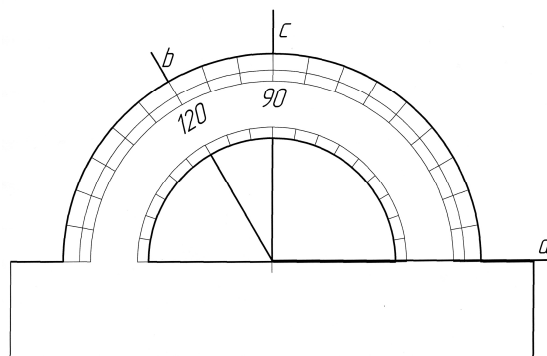


Рисунок 8

прямым кутом (**прямий кут – *right angle***) (рис. 8б). Кут, менший за 90° , називається гострим кутом (**гострий кут – *sharp angle***) (рис. 8а). Кут, більший ніж 90° і менший ніж 180° , називається тупим кутом (**тупий кут – *blunt angle***) (рис. 8в).

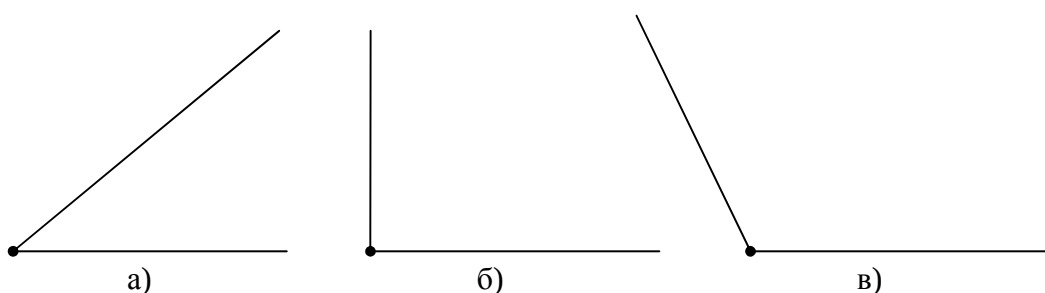


Рисунок 9

Два кути називаються суміжними (**суміжні кути – *adjacent angles***), якщо в них одна сторона спільна, а інші сторони цих кутів є доповняльними півпрямими (рис. 10). Сума суміжних кутів дорівнює 180°

$$\angle ACD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Два кути називаються вертикальними (**вертикальні кути – *vertical angles***), якщо сторони одного кута є доповняльними півпрямими сторін другого. Кути (a_1b_1) і (a_2b_2) (рис. 11) – вертикальні. Кути (a_1b_2) і (a_2b_1) – також вертикальні. Вертикальні кути рівні

$$\angle(a_1b_1) = \angle(a_2b_2);$$

$$\angle(a_1b_2) = \angle(a_2b_1).$$

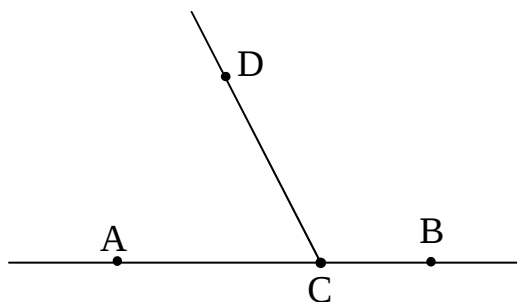


Рисунок 10

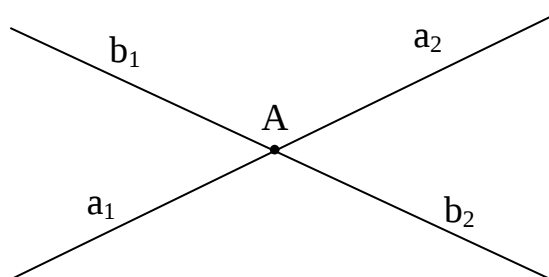


Рисунок 11

Бісектрисою (**бісектриса – *bisecting line***) кута називається промінь, який виходить з його вершини, проходить між його сторонами і ділить кут пополам (рис. 12)

$$\angle(ac) = \angle(bc).$$

Прямі, які лежать в одній площині і не перетинаються, називаються паралельними (**паралельні прямі – *parallel lines***) (рис. 13).

Дві прямі називаються перпендикулярними (**перпендикулярні прямі – *perpendicular lines***), якщо вони перетинаються під прямим кутом (рис. 14).

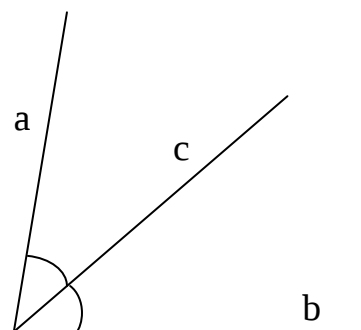


Рисунок 12

Нехай AB і CD – дві прямі й AC – третя пряма, що перетинає прямі AB і CD (рис. 15). Пряма AC відносно AB і CD називається січною (**січна – *secant line***). Кути, які утворюються в результаті перетину прямих AB і CD січною AC , мають спеціальні назви. Якщо точки B і D лежать в одній півплощині відносно прямої AC , то кути $\angle BAC$ і $\angle DCA$ називаються внутрішніми односторонніми (**внутрішні односторонні кути – *interior opposite angles***) (рис. 15a). Якщо точки B і D лежать у різних півплощинах відносно прямої AC , то кути $\angle BAC$ і $\angle DCA$ називаються внутрішні-

ми різносторонніми (внутрішні різносторонні кути – *interior versatile angles*).

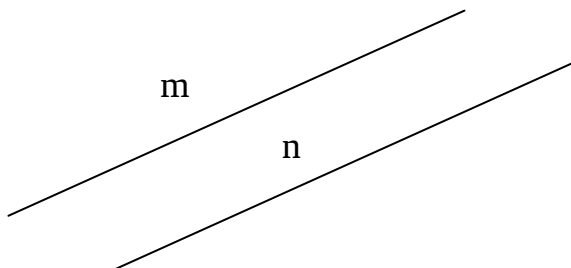


Рисунок 13

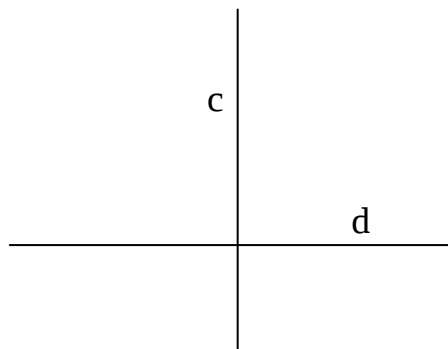


Рисунок 14

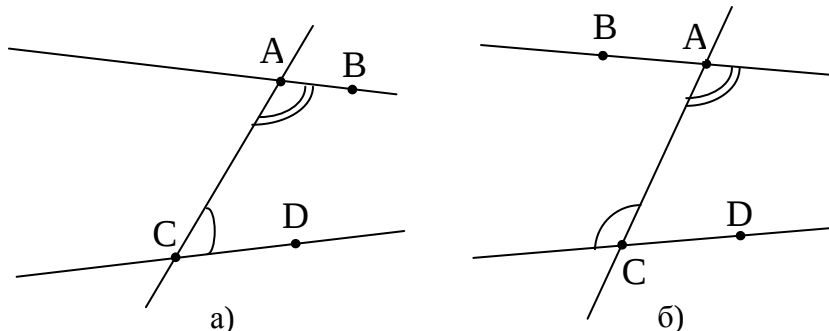


Рисунок 15

Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою прямою (рис. 16), то внутрішні різносторонні кути рівні, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°

$$\angle CAB = \angle ABF;$$

$$\angle DAB = \angle ABE;$$

$$\angle CAB + \angle ABE = 180^\circ;$$

$$\angle DAB + \angle ABF = 180^\circ.$$

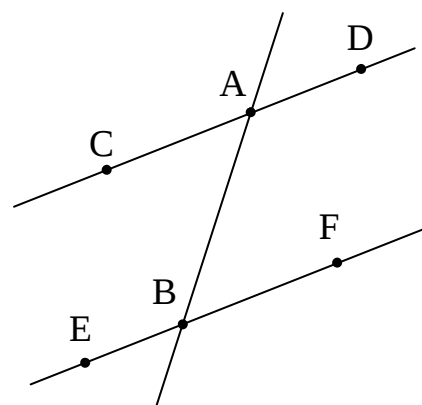


Рисунок 16

Пряма, яка перетинає площину, називається перпендикулярною до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині й проходить через точку перетину (рис. 17а).

Перпендикуляром (**перпендикуляр** – *perpendicular*), опущеним з даної точки на дану площину, називається відрізок, що з'єднує дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини. Кі-

нець цього відрізка, який лежить на площині, називається основою перпендикуляра.

Відстанню (**відстань** – *distance*) від даної точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину.

Похилою (**похила** – *slanting line*), проведеною з даної точки до даної площини, називається будь-який відрізок, який з'єднує дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром. Кінець відрізка, що лежить у площині, називається основою похилої.

Відрізок, який з'єднує основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї точки, називається проекцією похилої. На рис. 17б AC – похила, AB – перпендикуляр, BC – проекція похилої AC на площину α .

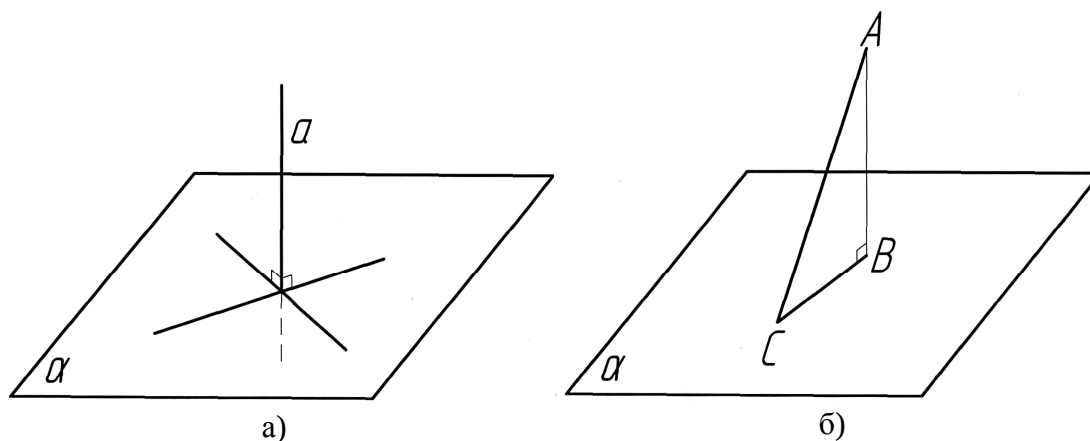


Рисунок 17

Приклад 1

Різниця двох внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнює 30° (рис. 18). Знайдіть ці кути.

Розв'язання

Нехай $\angle ABC = x$, $\angle BAD = y$.

За умовою задачі $x - y = 30$.

Оскільки $\angle ABC$ і $\angle BAD$ внутрішні односторонні, то $x + y = 180$. Маємо систему

$$\begin{cases} x - y = 30; \\ x + y = 180. \end{cases}$$

Розв'язавши систему отримаємо

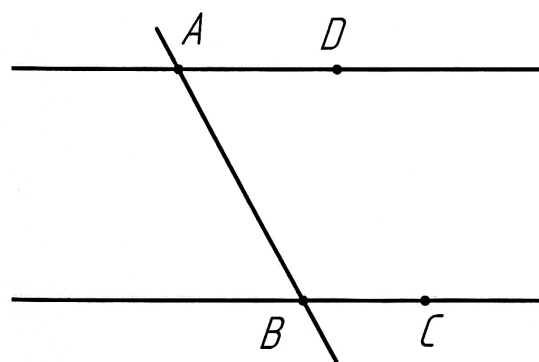


Рисунок 18

$$\begin{cases} x = 105; \\ y = 75. \end{cases}$$

Відповідь: $\angle ABC = 105^\circ$, $\angle BAD = 75^\circ$.

Вправи

1. На відрізку AB завдовжки 15 м взято точку C . Знайдіть довжини відрізків AC і BC , якщо:

- а) відрізок AC на 3 м довший за відрізок BC ;
- б) відрізок AC у два рази довший за відрізок BC ;
- в) точка C – середина відрізка AB ;
- г) довжини відрізків AC і BC відносяться як 2:3.

2. Доведіть, що кут між бісектрисами суміжних кутів прямих.

3. Один з кутів, утворених перетином двох прямих, дорівнює 30° . Чому дорівнює решта кутів?

4. Прямі AB та CD перетинаються у точці O , сума величин кутів $\angle AOD$ і $\angle COB$ дорівнює 220° . Знайдіть величину кута $\angle AOC$.

5. З вершини розгорнутого кута (aa_1) в одній півплощині проведено промені b і c . Чому дорівнює кут (bc) , якщо:

- а) $\angle(ab) = 50^\circ$, $\angle(ac) = 70^\circ$;
- б) $\angle(a_1b) = 50^\circ$, $\angle(ac) = 70^\circ$.

6. Сума двох внутрішніх різносторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнює 150° . Чому дорівнюють ці кути?

7. Під яким кутом перетинаються бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих?

8. Відрізок AB довжиною 10 см перетинає площину. Точка A віддалена від площини на 5 см, точка B віддалена від площини на 3 см. Знайдіть довжину проекції відрізка AB на площину.

КОЛО. КРУГ

Circle. Disk

Колом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї ж площини. Ця точка називається центром кола (**центр кола – center of circle**).

Радіус (radius) R – це відрізок, що з'єднує центр кола з будь-якою його точкою.

Діаметр (diameter) D – це відрізок, що з'єднує дві точки кола і проходить через його центр.

Хорда (chord) – це відрізок, що з'єднує дві точки кола.

Пряма, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називається дотичною (**дотична – tangent**). На рис. 1 дотичною до кола є пряма AK .

Пряма, яка має з колом дві спільні точки, називається січною (**січна – secant line**). На рис. 1 PM – січна.

Через точку, взятую поза колом, можна провести безліч січних і лише дві дотичних.

Відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки (від даної точки до точок дотику), рівні: $KL = KQ$.

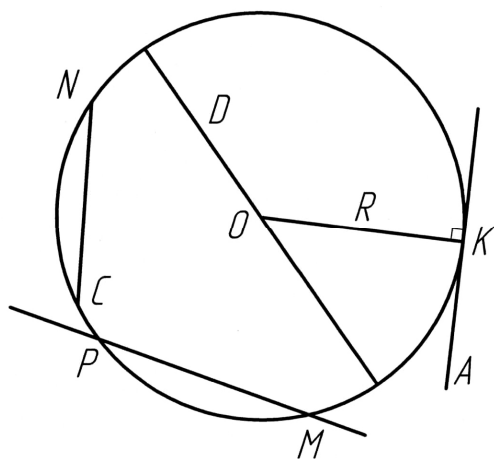


Рисунок 1

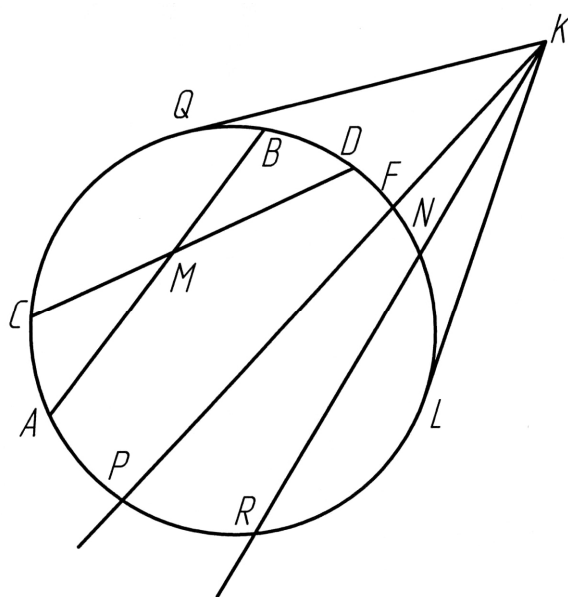


Рисунок 2

Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці M (рис. 2), то

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD$$

Якщо з точки K проведено дві січні, що перетинають коло в точках P, F і R, N , то $FK \cdot PK = NK \cdot PK$.

Для січної KP і дотичної KL правильна рівність

$$FK \cdot PK = KL^2.$$

Коло називається описаним навколо многокутника (**описане коло – *circumcircle***), якщо воно проходить через усі його вершини.

Центр кола, описаного навколо многокутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін.

Коло називається вписаним у многокутник (**вписане коло – *inscribed circle***), якщо воно дотикається до усіх його сторін.

Центр кола, вписаного у многокутник, є точка перетину бісектрис його кутів.

Центральним кутом (**центральний кут – *central angle***) у колі називається кут, утворений двома радіусами. $\angle AOB$ – центральний, що опирається на дугу $\widehat{AB}$ (рис. 3).

Центральний кут дорівнює градусній мірі дуги, на яку він опирається:

$$\angle AOB = \widehat{AB}.$$

Вписаним у коло кутом називається кут, утворений двома хордами, що виходять з однієї точки. $\angle MPK$ – вписаний, що опирається на дугу $\widehat{MK}$.

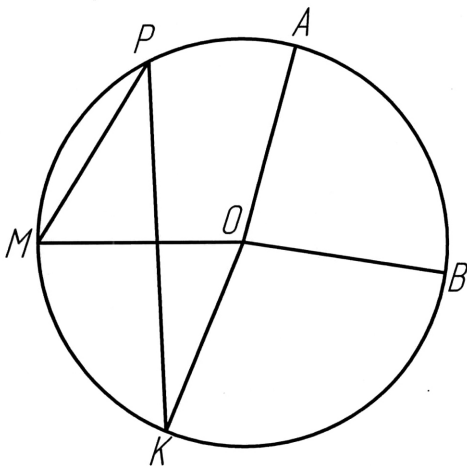


Рисунок 3

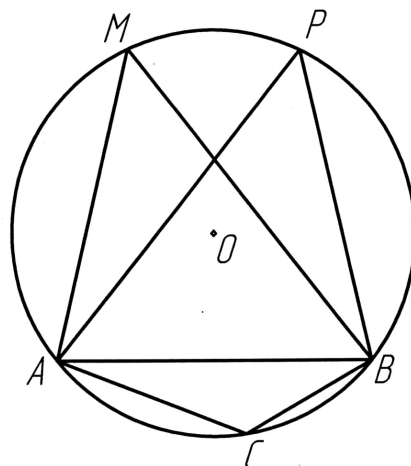


Рисунок 4

Вписаний кут (*inscribed angle*) дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він опирається (рис. 4)

$$\angle MPK = \frac{1}{2} \widehat{MK} = \frac{1}{2} \angle MOK.$$

Вписані кути, що опираються на одну і ту ж дугу, рівні, якщо їхні вершини лежать з однієї сторони відносно хорди, що з'єднує кінці дуги, а в сумі становлять 180° , якщо їхні вершини лежать по різні сторони відносно цієї хорди:

$$\angle AMB = \angle APB, \angle AMB + \angle ACB = 180^\circ.$$

Вписані кути, що опираються на діаметр кола, прямі.

Описаним кутом (**описаний кут – *circumscribed angle***) називається кут, утворений двома дотичними, що виходять з однієї точки. $\angle MEK$ – описаний кут (рис. 5).

Описаний кут вимірюється піврізницею градусних мір більшої й меншої дуг, на які точки дотику розбивають коло

$$\angle MEK = \frac{\widehat{MBK} - \widehat{MAK}}{2}.$$

Кут між двома хордами, що перетинаються, дорівнює півсумі градусних мір дуг, одна з яких знаходиться між сторонами цього кута, а друга – між продовженням цих сторін.

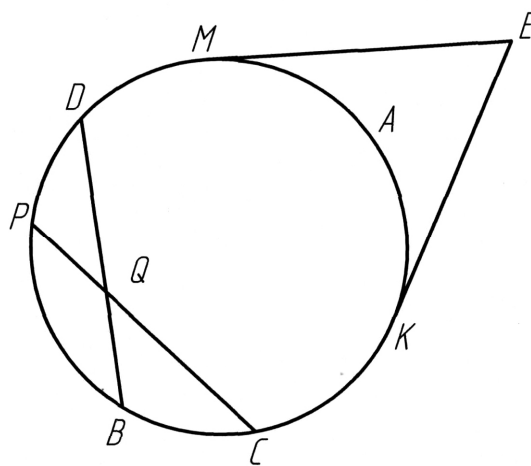


Рисунок 5

$$\angle BQC = \angle DQP = \frac{\widehat{PD} + \widehat{BC}}{2}.$$

З рис. 6:

$$\angle ACD = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BP}}{2},$$

$$\angle A_1CD = \frac{\widehat{A_1D} - \widehat{A_1P}}{2},$$

$$\angle MNK = \frac{\widehat{MQN}}{2}.$$

Кругом називається частина площини, обмежена колом.

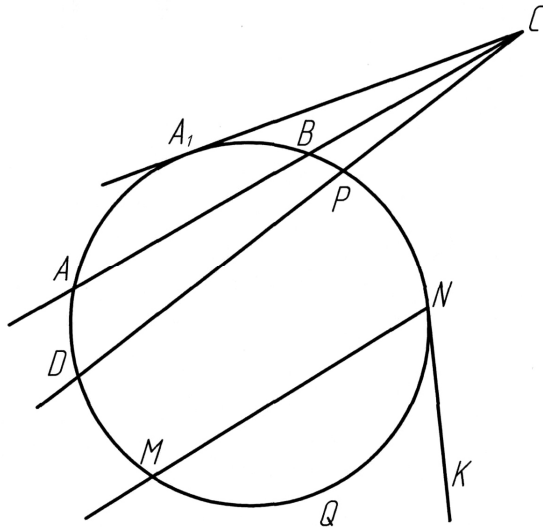


Рисунок 6

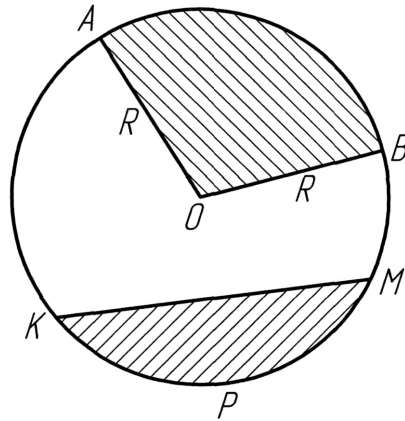


Рисунок 7

Сектором (**сектор – sector**) називається частина круга, обмежена дугою кола і двома радіусами, проведеними до кінців цієї дуги. AOB – сектор.

Сегментом (**сегмент – segment**) називається частина круга, обмежена дугою і хордою, що її стягує. На рис. 7 KMP – сегмент.

Основні формули

Рівняння кола з центром $O(a;b)$ (r – радіус кола)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Довжина (**length**) кола:

$$C = 2\pi r.$$

Довжина дуги (n° – величина дуги у градусах; α – величина дуги в радіанах):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ}; \quad l = r\alpha.$$

Площа (**area**) круга

$$S = \pi r^2.$$

Сектор (l – довжина дуги, яка обмежує сектор; n° – градусна міра центрального кута; α – радіанна міра центрального кута):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ}; \quad S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha.$$

Площа сегмента визначається різницею площ сектора і трикутника, утвореного його радіусами і хордою сегмента (рис. 8).

Приклад 1

Знайдіть площу кругового кільця, що обмежена двома колами із спільним центром і радіусами 4 см і 6 см.

Розв'язання

Згідно із рис. 9

$$S_{\text{кіль}} = S_{\text{зовн}} - S_{\text{вн}},$$

де $S_{\text{зовн}}$ і $S_{\text{вн}}$ – площі зовнішнього і внутрішнього кругів відповідно. Враховуючи, що площа круга обчислюється за формулою $S = \pi r^2$, отримаємо

$$S_{\text{кіль}} = \pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 4^2 = 20\pi \approx 62,83 \text{ см}^2.$$

Відповідь: $S_{\text{кіль}} \approx 62,83 \text{ см}^2$.

Вправи

1. Знайдіть довжину радіуса кола, довжина якого дорівнює 78,5.
2. Серед двох концентричних кіл одна має довжину 167 см, а друга – 117 см. Знайдіть ширину кільця.
3. Центральний кут сектора величиною 36° . Знайдіть довжину його дуги, якщо $R_{\text{сект}} = 3$ см.
4. Знайдіть довжину радіуса круга, площа якого дорівнює $706,5 \text{ см}^2$.
5. Площа круга дорівнює Q . Знайдіть площу сектора із дугою 30° .
6. Знайдіть площу сегмента, якщо його радіус довжиною R і дуга 90° .

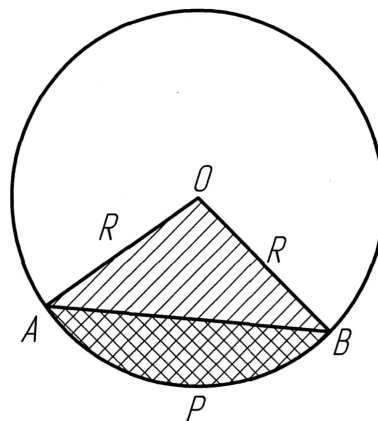


Рисунок 8

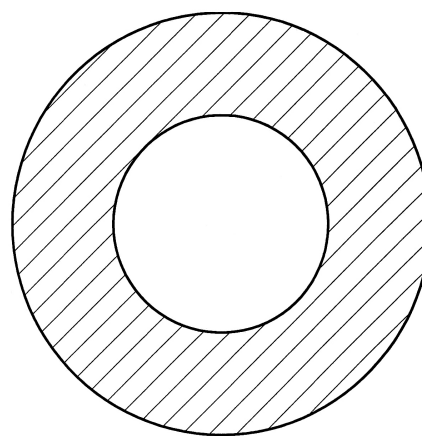


Рисунок 9

ТРИКУТНИК

Triangle

Трикутником називається фігура утворена замкнутою ламаною, яка складається з трьох ланок.

Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180° .

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним. Сума зовнішніх кутів трикутника дорівнює 360° .

У кожному трикутнику навпроти більшого кута лежить більша сторона, і навпаки.

Будь-яка сторона трикутника менша від суми, але більша від різниці двох інших сторін.

Висотою (**висота – height**) трикутника називається перпендикуляр, опущений з будь-якої вершини трикутника на протилежну сторону або на її продовження (рис. 1).

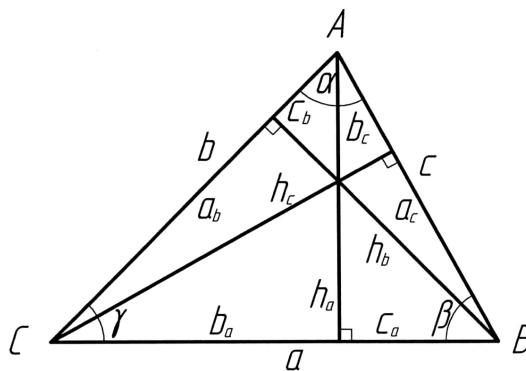


Рисунок 1

Висоти трикутника перетинаються в одній точці (ортоцентр).

Медіаною (**медіана – median**) трикутника називається відрізок, що з'єднує будь-яку вершину трикутника із серединою протилежної йому сторони (рис. 2).

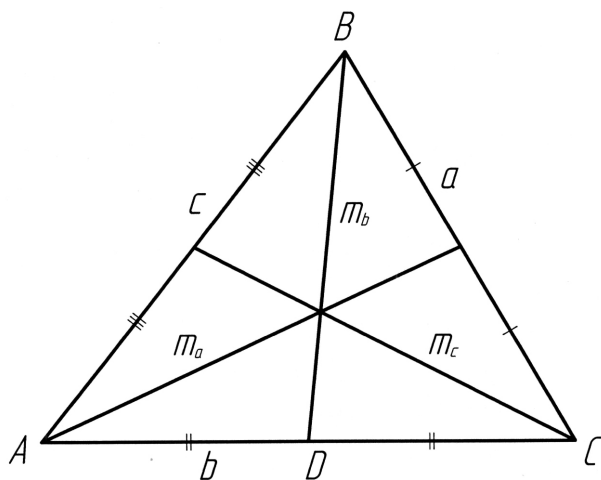


Рисунок 2

Медіани трикутника перетинаються в одній точці. Ця точка є центром ваги трикутника і ділить кожну медіану у відношенні 2:1 (рахуючи від вершини).

Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси будь-якого кута цього трикутника від вершини до протилежної сторони (рис. 3).

Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. Ця точка є центром вписаного кола. У будь-якому трикутнику бісектриса лежить між відповідними медіаною і висотою. Центром описаного навколо трикутника кола є точка перетину перпендикулярів до сторін трикутника, проведених через їхні середини.

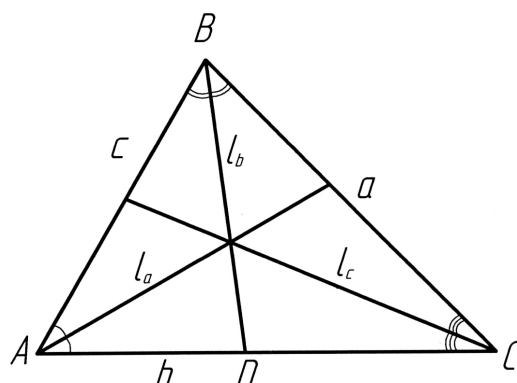


Рисунок 3

Середня лінія (medial line) трикутника – відрізок, що з'єднує середини двох його сторін. Вона паралельна до третьої сторони і дорівнює її половині.

Основні формули Довільний трикутник

($p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр ; R – радіус описаного кола; r – радіус вписаного кола; S – площа)

Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Теорема тангенсів

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Відношення між сторонами

$$a:b:c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Висота трикутника

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Медіани трикутника

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2};$$

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2};$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2};$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Медіана ділить трикутник на два рівновеликих трикутники (рис. 2):

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDC}.$$

Бісектриси трикутника

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p(p-a)};$$

$$l_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{ac p(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{ab p(p-c)};$$

$$l_a = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc [(b+c)^2 - a^2]};$$

$$l_b = \frac{1}{a+c} \sqrt{ac [(a+c)^2 - b^2]};$$

$$l_c = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab [(a+b)^2 - c^2]}.$$

Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону трикутника на частини, пропорційні прилеглим сторонам (рис. 3)

$$BA : AD = BC : CD.$$

$$h_a \leq l_a \leq m_a, h_b \leq l_b \leq m_b, h_c \leq l_c \leq m_c.$$

Площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} a h_a;$$

$$S = \frac{1}{2} b c \sin \alpha;$$

$$S = p r;$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \text{формула Герона};$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)}};$$

$$S = \frac{p}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}};$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{2 h_a h_b h_c R}.$$

Площі подібних трикутників відносяться як квадрати їх відповідних лінійних елементів: сторін, висот, медіан, бісектрис тощо. Площі подібних багатокутників відносяться як квадрати їх відповідних сторін або діагоналей.

Прямокутний трикутник (*right triangle*) (рис. 4)

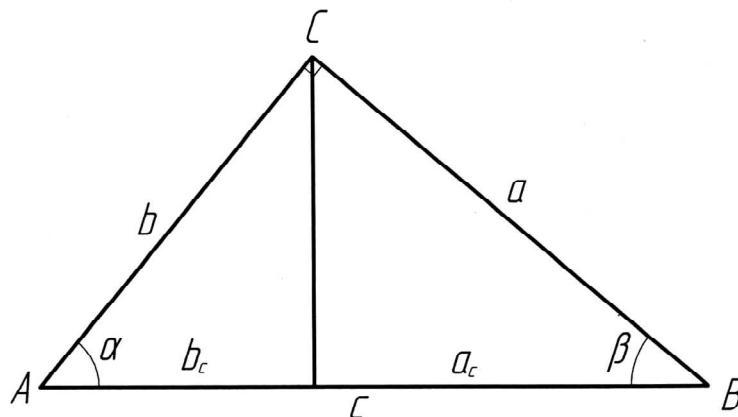


Рисунок 4

$a^2 + b^2 = c^2$ – теорема Піфагора;

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha = \cos \beta;$$

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha = \sin \beta;$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta;$$

$$R = \frac{c}{2};$$

$$r = \frac{a + b - c}{2};$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a}, \frac{b}{c} = \frac{b_c}{a}.$$

Рівнобедрений трикутник (*isosceles triangle*) (рис. 5)

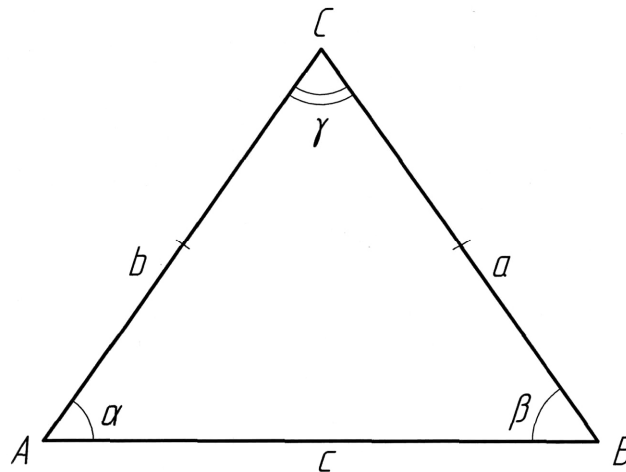


Рисунок 5.

$a = b$, a і b – бокові сторони, c – основа;

$\alpha = \beta$ (кути при основі);

$$h_a = h_b = \frac{2S}{a};$$

$$h_c = m_c = l_c = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2};$$

$$S = \frac{c}{4} \sqrt{4a^2 - c^2};$$

$$R = \frac{a^2}{2h_c};$$

$$r = \frac{ch_c}{2a + c}.$$

Рівнобедрений прямокутний трикутник (45° *right triangle*) (рис. 6)

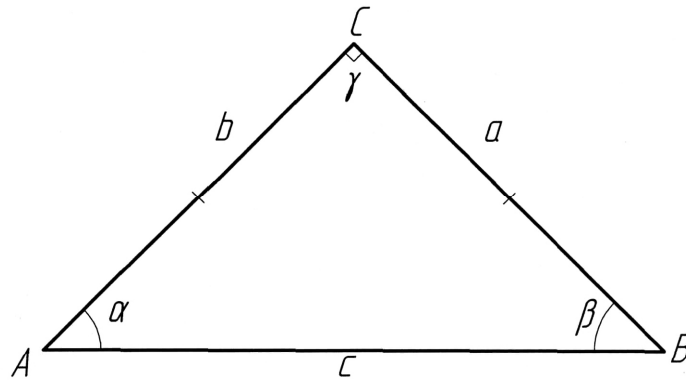


Рисунок 6

$$a = b = \frac{c}{\sqrt{2}};$$

$$\alpha = \beta = 45^\circ, \gamma = 90^\circ;$$

$$S = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{4};$$

$$m_a = m_b = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$m_c = h_c = l_c = \frac{c}{2}.$$

Рівносторонній трикутник (*equilateral triangle*) (рис. 7)

$$a = b = c;$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ;$$

$$h_a = h_b = h_c = m_a = m_b = m_c = l_a = l_b = l_c = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3ar}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4};$$

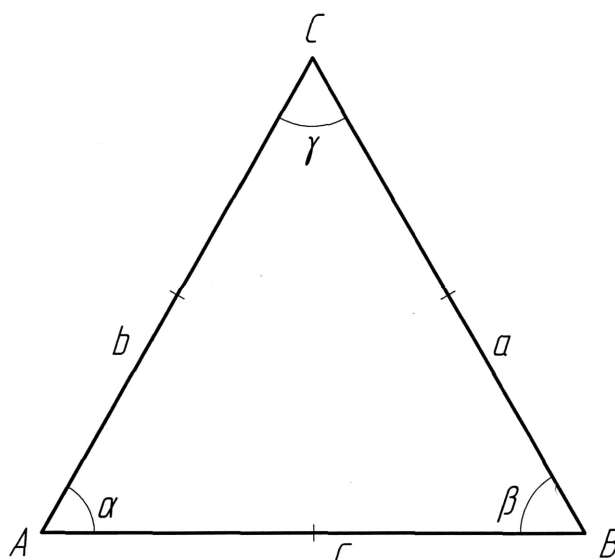


Рисунок 7

$$R = 2r;$$

$$r = \frac{\sqrt{3}a}{6};$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Приклад 1

Знайти площу трикутника ABC , якщо $AB = 3$ см, $BC = 7$ см і довжина медіани BM дорівнює 4 см.

Розв'язання

Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ABCD$ (рис. 8). Діагоналі паралелограма при перетині діляться навпіл, тому точка M лежить на діагоналі BD і $BD = 2BM = 8$ см.

Площі трикутників ABC і BDC складають половину площі паралелограма $ABCD$, отже, площі цих трикутників рівні:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDC}.$$

У трикутнику BDC відомі довжини трьох його сторін: $BC = 7$ см, $CD = 3$ см, $BD = 8$ см. Площу трикутника BDC знайдемо за формулою Герона:

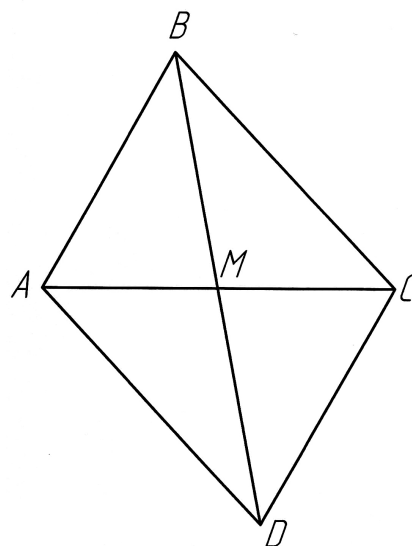


Рисунок 8

$$S_{\triangle BCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9(9-7)(9-3)(9-8)} = 6\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$\text{Тоді } S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$\text{Відповідь: } S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Вправи

1. На боковій стороні рівнобедреного трикутника побудовано рівносторонній трикутник; довжина периметра рівностороннього трикутника дорівнює 45 м, а периметр рівнобедреного трикутника 40 м. Визначить довжину основи рівнобедреного трикутника.

2. Медіана, що проведена до однієї із бокових сторін рівнобедреного трикутника, ділить його периметр на дві частини довжиною 15 і 6 см. Знайдіть довжини сторін трикутника.

3. У рівнобедреному трикутнику одна сторона дорівнює 25 м, а інша 10 м. Яка з них є основою?

4. Визначіть величини кутів трикутника, якщо вони відносяться як 1:2:3.

5. У рівнобедреному трикутнику величина кута при основі складає $\frac{4}{5}$ величини свого суміжного кута. Знайдіть величини кутів трикутника.

6. З вершини прямого кута трикутника ABC проведено висоту BD . Знайдіть кут CBD , знаючи, що $\angle A = 20^\circ$.

7. Довжини сторін трикутника дорівнюють 8, 10 та 12 см. Знайдіть довжини сторін трикутника, вершинами якого будуть середини сторін даного трикутника.

8. Величина кута при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 60° . Довжина бокової сторони цього трикутника 10 см. Знайдіть довжину середньої лінії.

МНОГОКУТНИКИ

Polygon

Многокутник називається опуклим (**опуклий многокутник** – *convex polygon*), якщо він розміщений по одну сторону від будь-якої сторони, необмежено продовженої. Сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого многокутника (n -кутника) дорівнює $n(n-2)$ радіанів, тобто $180^\circ(n-2)$. Сума зовнішніх кутів опуклого многокутника дорівнює 2π радіанів, тобто 360° .

Правильні многокутники

$$\angle A_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \text{ – внутрішній кут правильного } n\text{-кутника.}$$

$$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n} \text{ (рис. 1).}$$

Сторона правильного n -кутника:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$a_n = 2r \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Площа

$$S = \frac{a_n \cdot r}{2} n = \frac{R^2 \sin \frac{180^\circ}{n}}{2} n.$$

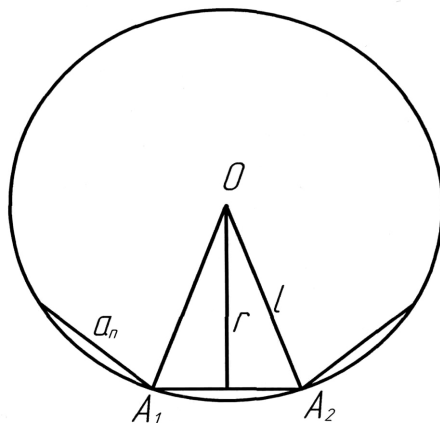


Рисунок 1

Чотирикутники Властивості чотирикутників

Вписаного

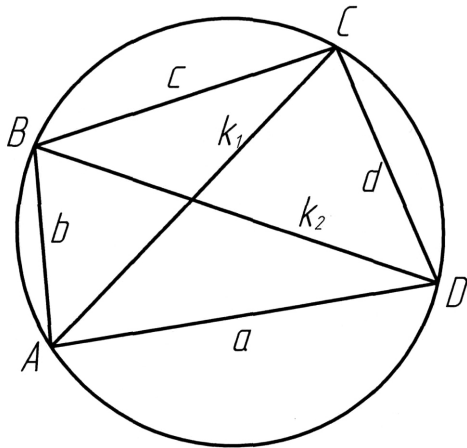


Рисунок 2

Описаного

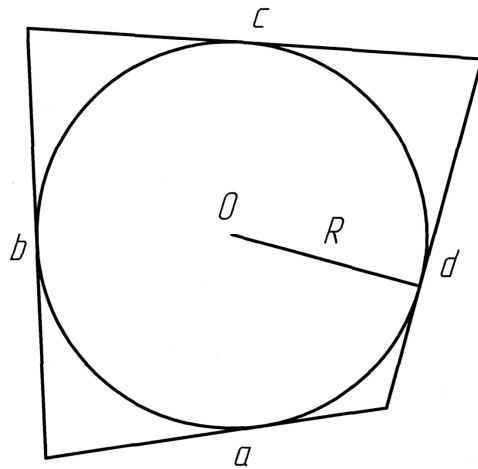


Рисунок 3

$$\angle A + \angle C = 180^\circ;$$

$ac + bd = k_1 k_2$ – теорема Птолемея.

$$a + c = b + d;$$

$$S = pr.$$

Паралелограм (*parallelogram*)

Паралелограм – це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні (рис. 4).

Ознака паралелограма. Якщо діагоналі (**діагональ** – *diagonal*) чотирикутника перетинаються і в точці перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник є паралелограм.

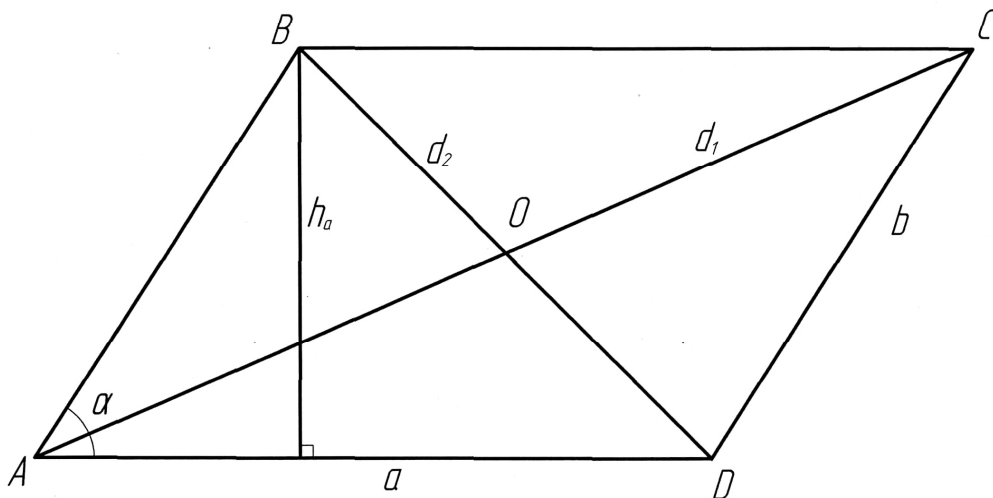


Рисунок 4

Властивості паралелограма

1. Діагоналі в точці перетину діляться навпіл: $AO = OC$, $BO = OD$.
2. Протилежні сторони рівні: $AD = BC$, $AB = CD$.
3. Протилежні кути рівні: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
4. Сума сусідніх кутів дорівнює 180° : $\angle A + \angle D = \angle A + \angle B = 180^\circ$.
5. Сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів сторін паралелограма:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

6. Площа $S = ah_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(\widehat{d_1 d_2})$.

Прямокутник (rectangle)

Прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі (рис. 5).

Властивості прямокутника

1. Протилежні сторони рівні: $AD = BC$, $AB = CD$.
2. Діагоналі рівні: $AC = BD$.
3. Квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів двох різних його сторін: $d^2 = a^2 + b^2$.

4. Точка перетину діагоналей – центр описаного кола, радіус якого

$$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

5. Площа $S = a \cdot b = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$.

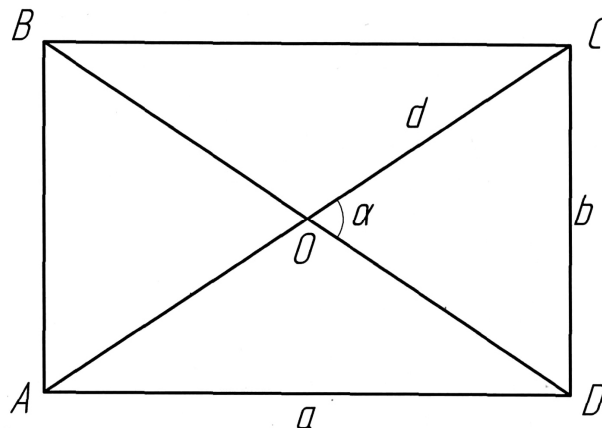


Рисунок 5

Ромб (diamond)

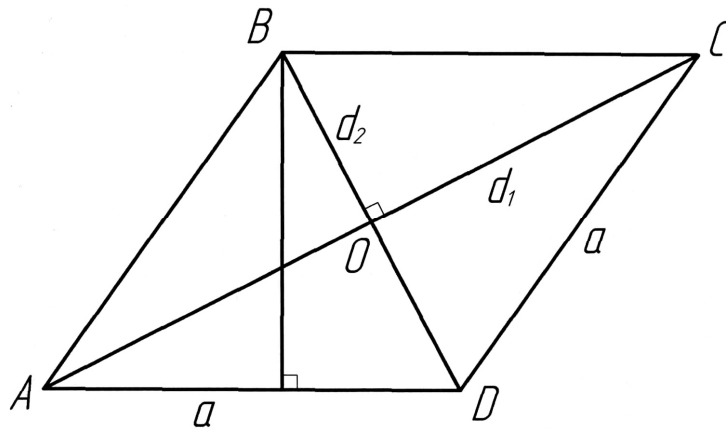


Рисунок 6

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні (рис. 6).

Властивості ромба

1. Протилежні кути рівні: $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$.
2. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.
3. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні: $d_1 \perp d_2$.
4. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$, $d_1 = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$, $d_2 = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$.
5. Центр кола, вписаного у ромб, є точкою перетину діагоналей. Радіус кола дорівнює половині висоти ромба: $r = \frac{h}{2}$.

$$\text{Площа } S = ah = \frac{1}{2} d_1 d_2 = a^2 \sin \alpha.$$

Квадрат (square)

Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні (рис. 7).

Властивості квадрата

1. Всі кути прямі.
2. Діагоналі рівні:

$$AC = BD = d = a\sqrt{2}.$$

3. Діагоналі є бісектрисами кутів.
4. Діагоналі взаємно перпендикулярні: $AC \perp BD$.
5. Центр вписаного кола і центр описаного кола є точкою перетину діагоналей.

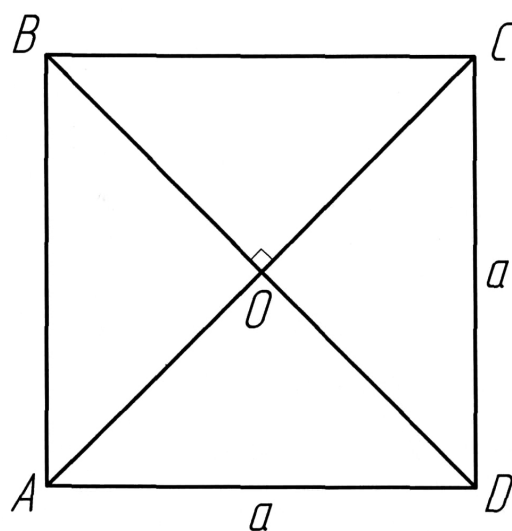


Рисунок 7

6. Радіус описаного кола

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

7. Радіус вписаного кола дорівнює

$$r = \frac{a}{2}.$$

8. Площа

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

Трапеція (trapezoid)

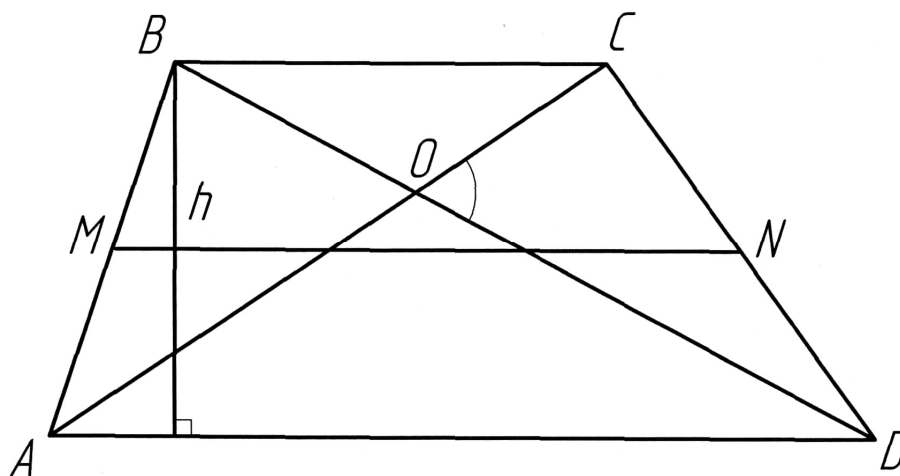


Рисунок 8

Трапеція – це чотирикутник, у якого тільки дві протилежні сторони паралельні. AD і BC – основи трапеції, AB і CD – бічні сторони (рис. 8).

Відрізок MN , що з'єднує середини бічних сторін трапеції, називається середньою лінією трапеції.

$$MN = \frac{AD + BC}{2};$$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ;$$

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC.$$

Площа

$$S = \frac{AD + BC}{2} h = MN \cdot h = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$$

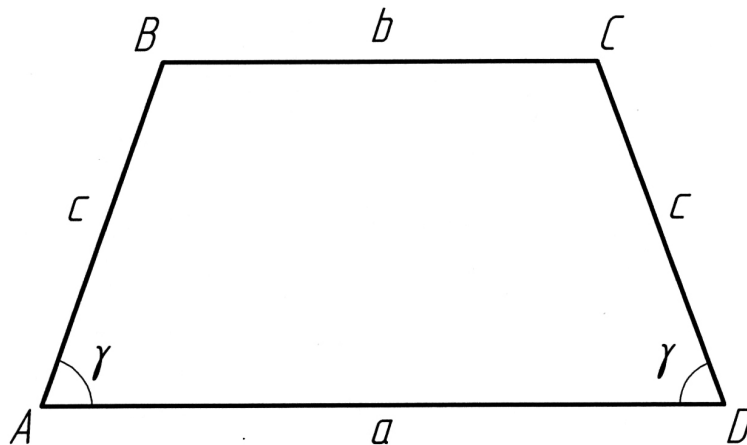


Рисунок 9

Якщо бічні сторони трапеції рівні, то трапеція називається рівнобічною. $AB = CD$; $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ (рис. 9).

Якщо у рівнобічній трапеції діагоналі взаємно перпендикулярні, то висота дорівнює середній лінії. Тоді $S = h^2$.

Коло можна описати лише навколо рівнобічної трапеції.

Висота рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, є середнім геометричним між її основами: $h^2 = AD \cdot BC$.

Якщо у рівнобічну трапецію вписано коло, то її бічна сторона дорівнює середній лінії.

Приклад 1

Знайдіть відношення площі круга, описаного навколо квадрата, до площі круга вписаного у цей квадрат.

Розв'язання

Нехай a – сторона квадрата, r – радіус вписаного кола, R – радіус описаного кола.

Тоді

$$\frac{S_{on}}{S_{en}} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Відомо, що

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad r = \frac{a}{2}.$$

Тоді

$$\frac{S_{on}}{S_{en}} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{4}{a^2} = 2.$$

Відповідь: $\frac{S_{on}}{S_{en}} = 2$.

Вправи

1. Довжини двох сторін паралелограма відносяться як 3:4, а довжина його периметра дорівнює 2,8 см. Визначіть довжини його сторін.

2. У паралелограмі $ABCD$ проведена бісектриса кута A , яка перетинає сторону BC у точці E . Визначіть довжини відрізків BE та EC , якщо $AB = 9$ та $AD = 15$ см.

3. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а одна сторона довша іншої на 1,4 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей до сторін.

4. Довжина середньої лінії трапеції дорівнює 8 дм і ділиться діагоналлю на два відрізки, різниця довжин яких дорівнює 2 дм. Знайдіть довжини основ трапеції.

5. У рівнобедреній трапеції довжина більшої основи дорівнює 18 см, довжина висоти 5 см, величина тупого кута дорівнює 135° . Знайдіть середню лінію трапеції.

6. Периметр ромба 8 см, довжина висоти 1 см. Знайдіть величини кутів ромба.

7. Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Обчисліть величини кутів ромба.

8. Дано квадрат, довжина сторони якого дорівнює 1 м. Діагональ його служить стороною другого квадрата. Знайдіть довжину діагоналі другого квадрата.

9. Дано квадрат із стороною, довжина якої 6 см. Середини сторін квадрата послідовно з'єднані відрізками. Доведіть, що отриманий чотирикутник – квадрат та знайдіть його периметр.

10. Обчисліть довжину найменшої діагоналі правильного n -кутника, якщо його сторони дорівнюють a :

а) $a = 1$ см, $n = 5$;

б) $a = 4$ см, $n = 6$.

11. Довжина діагоналі прямокутника дорівнює 305 см, а величина площі 37128 см^2 . Знайдіть периметр прямокутника.

12. Знайдіть площу ромба, довжини діагоналей якого дорівнюють 72 і 40 см.

13. Знайдіть площу паралелограма, якщо довжина однієї з його сторін дорівнює 51 см, а довжини діагоналей 40 та 74 см.

14. Знайдіть площу рівнобедреної трапеції, у якої довжини основ дорівнюють 10 та 26 см, а діагоналі перпендикулярні боковим сторонам.

МНОГОГРАННІ КУТИ. МНОГОГРАННИКИ

Polyhedral angle. Polyhedral solid

Двогранним кутом (**двогранний кут** – *flat-roof angle*) називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.

Півплощини називаються гранями (**грань** – *bound*), а пряма, що їх обмежує, – ребром (**ребро** – *edge*) двогранного кута.

Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перерізає його грані по двох півпрямих. Кут, утворений цими півпрямими, називається лінійним кутом двогранного кута.

Величина двогранного кута вимірюється величиною його лінійного кута ($\angle SKM$ – лінійний кут двогранного кута з ребром AB , рис. 1).

Тригранним кутом (abc) (**тригранний кут** – *trihedral angle*) називається фігура, яка складається з трьох плоских кутів (ab), (bc), і (ac) (рис. 2). Ці кути називаються гранями тригранного кута, а їхні сторони – ребрами. Спільна вершина плоских кутів називається вершиною тригранного кута.

Двогранні кути, утворені гранями тригранного кута, називаються двогранними кутами тригранного кута.

Аналогічно дається означення многогранного кута.

Многогранник – це тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників, які називаються його гранями.

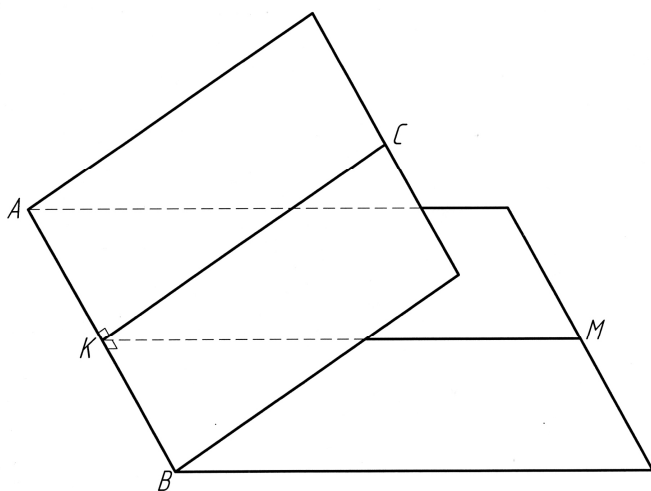


Рисунок 1

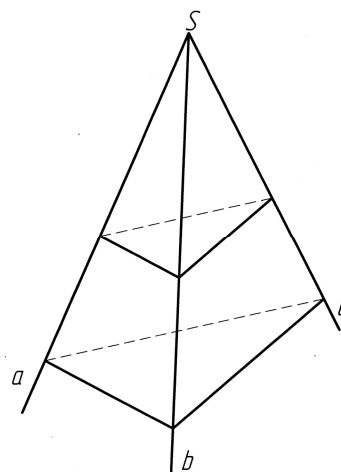


Рисунок 2

Многогранник називається опуклим, якщо він лежить по один бік від площини кожного з плоских многокутників на його поверхні.

Сторони граней називаються ребрами многогранника, а вершини – вершинами многогранника.

Призма (*prism*)

Многогранник, дві грані якого n -кутники (основи) (**основа – base**), що лежать у паралельних площинах, а решта n граней – паралелограми (бічні грані) (**бічна грань – lateral face**), називається n -кутною призмою.

Спільні сторони бічних граней призми називаються бічними ребрами.

Відрізок, перпендикулярний до площин основ призми, кінці якого належать цим площинам (**площина – plane**), називається висотою призми ($OO_1 = H$, рис. 3).

Діагоналлю призми називається відрізок, який з'єднує дві вершини призми, що не належать одній грані.

Діагональною площиною призми називається площина, що проходить через діагональ основи та бічне ребро, а фігура, одержана при перерізі цією площиною призми, називається діагональним перерізом призми (AA_1D_1D – діагональний **переріз (cut set)**).

Якщо бічні ребра призми перпендикулярні до її основ, то призма називається прямою.

Якщо бічні ребра призми не перпендикулярні до її основ, то призма називається похилою.

Пряма призма (*right-angle prism*) називається правильною, якщо її основи є правильними многокутниками.

Паралелепіпед (*parallelepiped*)

Паралелепіпедом називається призма, основами якої є паралелограми (рис. 4).

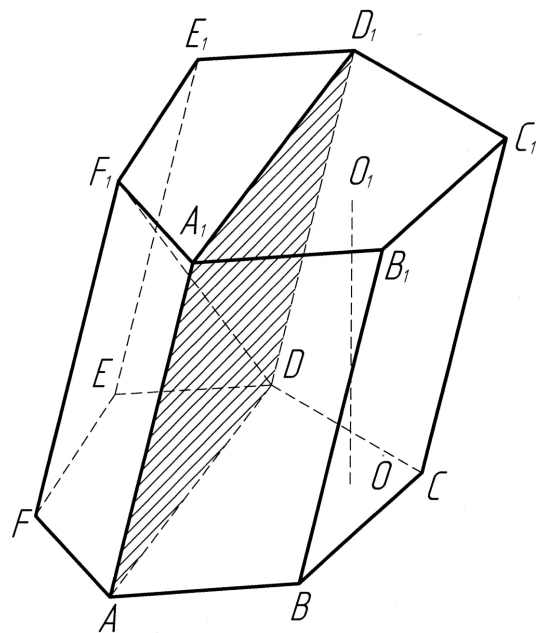


Рисунок 3

Якщо бічні ребра паралелепіпеда перпендикулярні до площин основ, його називають прямим, якщо ж не перпендикулярні – похилим.

Прямий паралелепіпед, основами якого є прямокутники, називається прямокутним.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, називаються його вимірами.

Властивості паралелепіпеда

1. Протилежні грані паралелепіпеда паралельні та рівні.

2. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл.

3. Середина діагоналі паралелепіпеда є його центром симетрії (**симетрія – symmetry**).

Властивості прямокутного паралелепіпеда

1. Квадрат довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

2. Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

3. Прямокутний паралелепіпед має три площини симетрії.

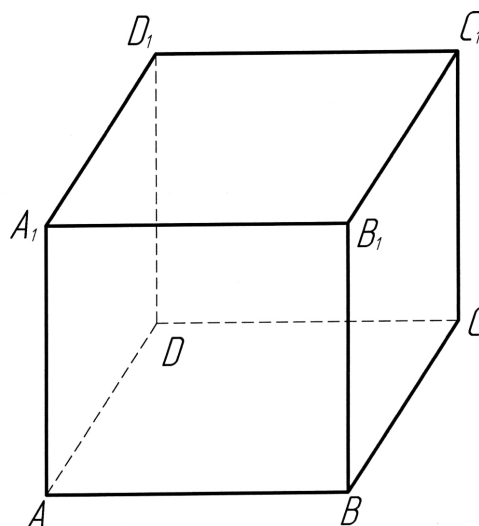


Рисунок 4

Піраміда (*pyramid*)

Многогранник, одна з граней якого – довільний багатокутник (основа), а решта граней – трикутники (бічні грані), що мають спільну вершину, називається пірамідою.

Висотою піраміди називається перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи ($SO = H$, рис. 5).

Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний багатокутник, а вершина піраміди проектується в центр основи.

Усі бічні грані правильної піраміди рівні рівнобедрені трикутники.

Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з вершини піраміди, називається апофемою цієї піраміди.

Властивості піраміди

1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то вони нахилені до площини основи під однаковими кутами і вершина цієї піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.

2. Якщо всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковими кутами, то вони рівні.

3. Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом α , то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди, а площа бічної поверхні

$$Q = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}.$$

4. Якщо бічне ребро піраміди утворює рівні кути із суміжними сторонами основи, то основа висоти піраміди знаходиться на бісектрисі кута, утвореного цими сторонами основи.

5. Якщо піраміду перерізати площиною, паралельною до основи, то:
- а) бічні ребра та висота піраміди поділяються цією площиною на пропорційні відрізки;
 - б) у перерізі утворюється многокутник, подібний до основи піраміди;
 - в) площі перерізу та основи відносяться як квадрати їхніх віддалей від вершини піраміди.

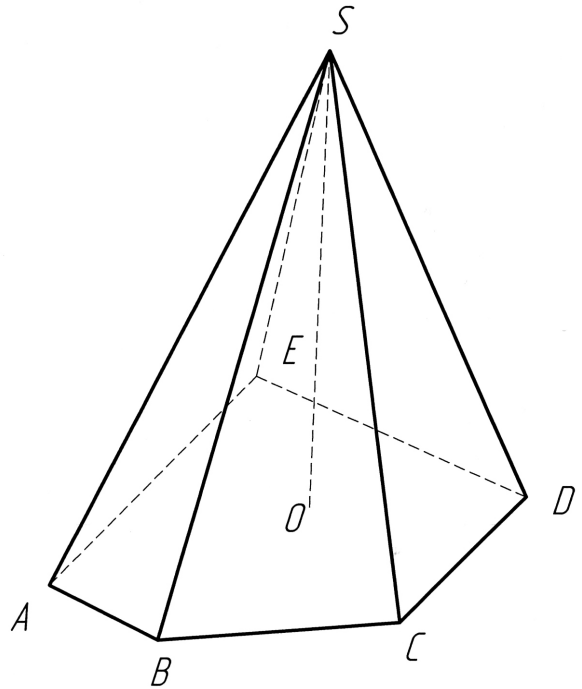


Рисунок 5

Правильні многогранники

Многогранник називається правильним, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники і всі його многогранні кути мають однакове число граней.

Існує п'ять типів правильних опуклих многогранників: **тетраедр** (*tetrahedron*), **гексаедр** (*hexahedron*), **октаедр** (*octahedron*), **додекаедр** (*dodecahedron*), **ікосаедр** (*icosahedron*).

Тетраедр (правильний чотиригранник) – трикутна піраміда, всі ребра якої рівні.

Гексаедр (правильний шестигранник, **куб (cube)**) – це многогранник, у якого всі грані квадрати.

Октаедр (правильний восьмигранник) – многогранник, у якого всі грані правильні трикутники. У кожній його вершині сходиться по чотири ребра.

Додекаедр (правильний дванадцятигранник) – многогранник, у якого всі грані правильні п'ятикутники. У кожній вершині його сходиться по три ребра.

Ікосаедр (правильний двадцятигранник) – многогранник, у якого всі грані правильні трикутники. У кожній вершині його сходиться по п'ять ребер.

Формули для правильних многогранників

a – ребро многогранника, N – кількість вершин,

n – кількість ребер, S – площа поверхні, V – **об'єм (volume)**,

R – радіус описаної кулі, r – радіус вписаної кулі

Тетраедр $N = 4; n = 6; S = a^2 \sqrt{3};$
 $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}; R = \frac{a \sqrt{6}}{4}; r = \frac{a \sqrt{6}}{12}.$

Гексаедр $N = 8; n = 12; S = 6a^2;$
 $V = a^3; R = \frac{a \sqrt{3}}{2}; r = \frac{a}{2}.$

Октаедр $N = 6; n = 12; S = 2\sqrt{3}a^2;$
 $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}; R = \frac{a}{\sqrt{2}}; r = \frac{a}{\sqrt{6}}.$

Додекаедр $N = 20; n = 30; S = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$
 $V = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}); R = \frac{a \sqrt{3} (1 + \sqrt{5})}{4};$
 $r = \frac{a \sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20}.$

Ікосаедр

$$N = 12; n = 30; S = 5\sqrt{3}a^2;$$

$$V = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}); R = \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4};$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}.$$

Основні формули для визначення поверхонь і об'ємів
многогранників

1. Довільна призма (l – бічне ребро; P – периметр основи; S – площа основи; H – висота; $P_{пер}$ – периметр перпендикулярного перерізу; $S_{біч}$ – площа бічної поверхні; $S_{нов}$ – площа повної поверхні; V – об'єм):

$$S_{біч} = P_{пер}l;$$

$$S_{нов} = S_{біч} + 2S;$$

$$V = SH.$$

2. Пряма призма:

$$S_{біч} = Pl;$$

$$S_{нов} = S_{біч} + 2S;$$

$$V = SH.$$

3. Прямокутний паралелепіпед (a , b , c – його виміри; d – діагональ):

$$S_{біч} = 2c(a + b);$$

$$S_{нов} = 2(ab + bc + ca);$$

$$V = abc;$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

4. Куб (a – ребро):

$$S_{біч} = 4a^2;$$

$$S_{нов} = 6a^2;$$

$$V = a^3;$$

$$d = a\sqrt{3}.$$

5. Довільна піраміда (S – площа основи; H – висота; V – об'єм):

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

6. Правильна піраміда (P – периметр основи; l – апофема; $S_{\text{біч}}$ – площа бічної поверхні):

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2}Pl;$$

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

7. Довільна зрізана піраміда (S_1 і S_2 – площі основ; h – висота; V – об'єм):

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

8. Правильна зрізана піраміда (P_1 і P_2 – периметри основ; l – апофема; $S_{\text{біч}}$ – площа бічної поверхні):

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l.$$

Приклад 1

Діагоналі трьох граней прямокутного паралелепіпеда, що сходяться в одній вершині, дорівнюють a , b , c . Знайдіть лінійні розміри паралелепіпеда.

Розв'язання

Позначимо через x , y , z лінійні розміри паралелепіпеда (рис. 6). Маємо

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

$$y^2 + z^2 = a^2,$$

$$x^2 + z^2 = b^2.$$

Почленно додаючи перші два рівняння і віднімаючи третє, отримаємо

$$2y^2 = c^2 + a^2 - b^2.$$

Звідки

$$y = \sqrt{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}}.$$

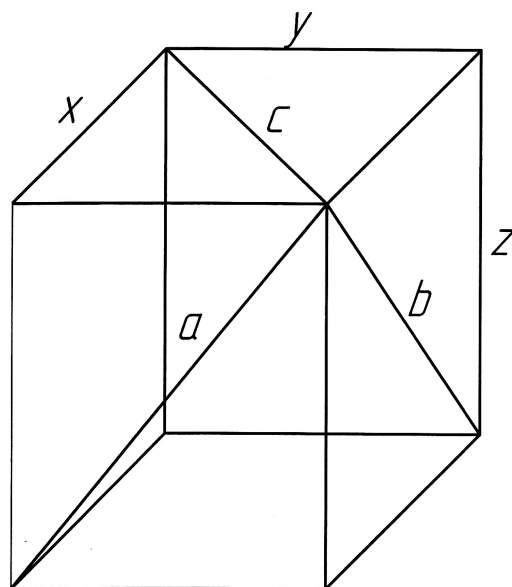


Рисунок 6

Аналогічно знаходимо

$$x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}},$$
$$z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$$

Вправи

1. Знайдіть діагоналі прямого паралелепіпеда, у якого усі ребра мають довжину a , а величина гострого кута основи дорівнює 60° .
2. Ребро куба має довжину a . Знайдіть відстань від вершини куба до його діагоналі.
3. Основою прямого паралелепіпеда служить ромб. Діагоналі ромба мають довжину 6 та 9 см. Довжина діагоналі бокової грані дорівнює 13 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.
4. Довжина діагоналі правильної чотирикутної призми дорівнює 9 см, площа повної поверхні дорівнює 144 см^2 . Знайдіть довжину сторони основи та довжину бокового ребра.
5. Якщо довжину кожного ребра куба збільшити на 2 см, то його об'єм збільшиться на 98 см^3 . Знайдіть довжину ребра куба.
6. Діагональ правильної чотирикутної призми довжиною 3,5 м, діагональ бокової грані – 2,5 м. Знайдіть об'єм призми.
7. Довжина периметра основи правильної трикутної піраміди дорівнює $30\sqrt{3}$, а довжина бокового ребра дорівнює 26 см. Знайдіть довжину висоти піраміди.
8. Знайдіть довжину сторони правильної чотирикутної піраміди, якщо її висота 6 дм, а довжина апофеми дорівнює 6,5 дм.

9. Основа піраміди – прямокутний трикутник із катетами довжиною 6 та 8 см. Усі бокові ребра піраміди мають довжину 13 см. Знайдіть висоту піраміди.

10. У правильній чотирикутній піраміді довжина сторони основи дорівнює 14 см, а довжина бокового ребра – 10 см. Знайдіть площу діагонального перерізу.

11. Довжини сторін основи трикутної піраміди дорівнюють 6, 10 і 14 см. Площини бокових граней нахилені до основи під кутом 60° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

12. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди мають довжину 4 та 1 см, бокове ребро має довжину 2 см. Знайдіть висоту піраміди.

13. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді висота дорівнює 12 см, різниця довжин сторін основ дорівнює 10 см, а площа повної поверхні дорівнює 512 см^2 . Знайдіть довжини сторін основ.

14. Основою піраміди служить ромб, у якого довжина сторони дорівнює 15 дм. Бокові грані нахилені до площини основи під кутом 45° . Довжина більшої діагоналі основи дорівнює 24 дм. Знайдіть об'єм піраміди.

15. Довжина усіх бокових ребер піраміди дорівнює $\frac{269}{32}$. Основа піраміди – трикутник, довжини сторін якого 13, 14 та 15 см. Знайдіть об'єм піраміди.

16. Потрібно визначити об'єм та площу повної поверхні правильної чотирикутної зрізаної піраміди, довжини сторін основ якої дорівнюють 24 та 12 см, а висота – 8 см.

ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Body of revolution

Циліндр (*cylinder*)

Циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони як осі (рис. 1).

Основи циліндра – рівні круги, що лежать у паралельних площинах, $AA_1 = l$ – **твірна** (*generating line*) циліндра, $AA_1 = OO_1 = H$ – висота циліндра.

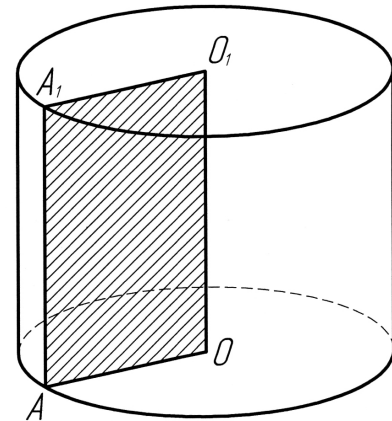


Рисунок 1

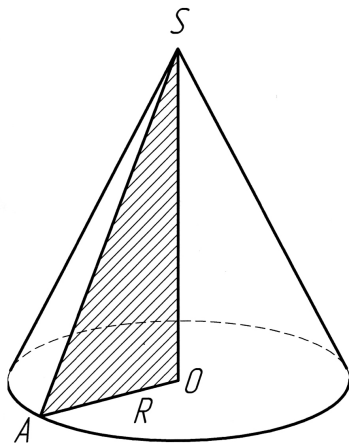


Рисунок 2

Конус (*cone*)

Прямим круговим конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета як осі (рис. 2).

$SA = l$ – твірна, $SO = H$ – висота, S – вершина, круг з радіусом $OA = R$ – основа конуса.

Зрізаний конус (*frustum*)

Тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції навколо меншої бічної сторони як осі, називається зрізаним конусом (рис. 3).

Зрізаний конус можна утворити при обертанні рівнобічної трапеції навколо осі симетрії.

Круги з радіусом OA і O_1A_1 – основи зрізаного конуса. $AA_1 = l$ – твірна, $OO_1 = H$ – висота зрізаного конуса.

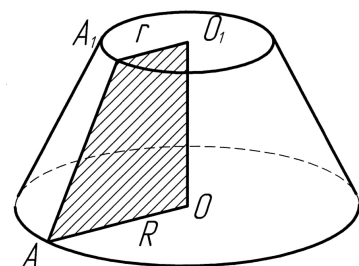


Рисунок 3

Куля (*solid sphere*)

Кулею називається тіло, утворене обертанням півкруга навколо його діаметра як осі (рис. 4).

Множина усіх точок простору, що міститься на певній додатній відстані R від даної точки, називається сферою.

Частинами кулі є кульовий сегмент і кульовий сектор.

Кульовим сегментом (**кульовий сегмент – *globe calotte***) називається тіло, утворене обертанням кругового сегмента навколо його осі симетрії (рис. 5).

Кульовим сектором називається тіло, утворене обертанням кругового сектора навколо його осі симетрії (рис. 6).

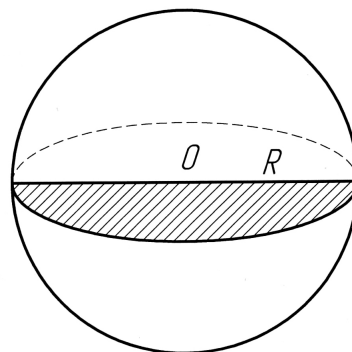


Рисунок 4

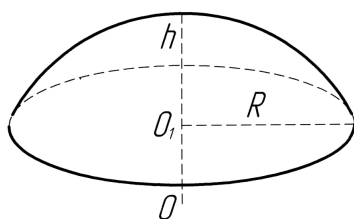


Рисунок 5

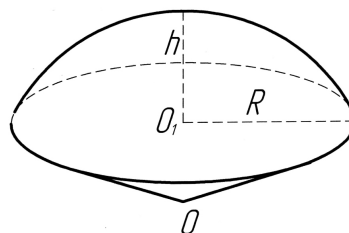


Рисунок 6

Основні формули для визначення поверхонь і об'ємів тіл обертання

1. Циліндр (R – радіус основи; H – висота; $S_{нов}$ – площа повної поверхні; $S_{біч}$ – площа бічної поверхні; V – об'єм):

$$S_{біч} = 2\pi RH;$$

$$S_{нов} = 2\pi R(H + R);$$

$$V = \pi R^2 H.$$

2. Конус (R – радіус основи; H – висота; l – твірна; $S_{нов}$ – площа повної поверхні; $S_{біч}$ – площа бічної поверхні; V – об'єм):

$$S_{біч} = \pi Rl;$$

$$S_{нов} = \pi R(l + R);$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

3. Куля, сфера (R – радіус кулі; S – площа сферичної поверхні; V – об'єм):

$$S = 4\pi R^2;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

4. Кульовий сегмент (R – радіус кулі; h – висота сегмента; S – площа сферичної поверхні сегмента; V – об'єм):

$$S = 2\pi Rh;$$

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right).$$

5. Кульовий сектор (R – радіус кулі; h – висота сегмента; V – об'єм):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Приклад 1

Розглядаються усі можливі трикутні призми заданого об'єму V . Навколо кожної з цих призм описано циліндр. Знайти найменшу площу поверхні цього циліндра.

Розв'язання

Висоту призми позначимо H , довжину сторони основи a , радіус описаного циліндра R (рис. 7).

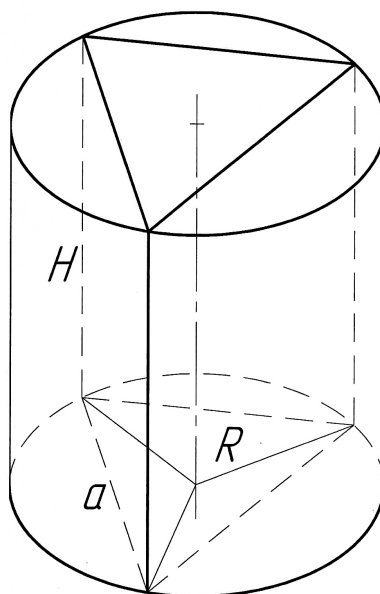


Рисунок 7

Цей радіус дорівнює радіусу кола, що описане навколо основи призми, а оскільки основа – правильний трикутник, то $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

За умовою $V = SH = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 H$, звідки $H = \frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$. Враховуючи це знаходимо площу поверхні циліндра $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH = \frac{2\pi}{3}\left(a^2 + \frac{4V}{a}\right)$. Площа S є функцією змінної a . Знаходимо критичну точку цієї функції:

$$a = \sqrt[3]{2V}.$$

Очевидно, що функція S має при $a = \sqrt[3]{2V}$ найменше значення і воно дорівнює

$$S_{\min} = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt[3]{4V^2} + \frac{4V}{\sqrt[3]{2V}}\right) = 2\pi\sqrt[3]{4V^2}.$$

Відповідь: $S_{\min} = 2\pi\sqrt[3]{4V^2}$.

Вправи

1. Висота циліндра на 10 см довше радіуса основи, а площа повної поверхні дорівнює $144\pi \text{ см}^2$. Знайдіть радіус основи та висоту циліндра.

2. Площа основи конуса дорівнює $25\pi \text{ дм}^2$. Твірна конуса довша висоти на 1 дм. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

3. У зрізаному конусі твірна дорівнює 30 см, радіус нижньої основи – 34 см, висота – 24 см. Знайдіть радіус верхньої основи.

4. Бокова поверхня циліндра розгортається у квадрат із довжиною сторони a . Знайдіть об'єм циліндра.

5. В основі циліндра проведена хорда довжиною a . Відповідний їй центральний кут дорівнює α . Висота циліндра H . Знайдіть об'єм циліндра.

6. Площа основи конуса $9\pi \text{ см}^2$; площа повної поверхні $24\pi \text{ см}^2$. Знайдіть об'єм конуса.

7. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його бокової поверхні дорівнює 18, а відстань від центра основи до твірної дорівнює 3.

8. Об'єм зрізаного конуса дорівнює $584\pi \text{ см}^3$, а радіуси основ дорівнюють 10 і 7 см. Визначте висоту.

9. Кулю, радіус якої дорівнює 41 дм, перерізали площиною на відстані 9 см від центра. Знайдіть площу перерізу.

10. На поверхні кулі дано три точки. Прямолінійна відстань між ними дорівнює 6 та 10 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини, що проходить через ці три точки, якщо радіус кулі дорівнює 13 см.

11. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть площу її поверхні.

12. Площа поверхні кулі дорівнює $225\pi \text{ см}^2$. Знайдіть об'єм кулі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике. – К.: «Наукова думка», 1972. – 744 с.
2. Волков Ю. І., Найко Д. А. Лінійна алгебра й аналітична геометрія з елементами програмування мовою Паскаль: Навчальний посібник. – К.: НМК ВО, 1990. – 144 с.
3. Дорохин Д. П., Плаксенко З. Е., Бажора Г. Ф. Сборник задач и упражнений по математике. – М.: Высш. шк., 1986. – 248 с.
4. Людвичек К. В. Математика. – Харьков, 2003. – 258 с.
5. Математика. Алгебра и начала анализа: Підручник / А. И. Лобанов. – К.: Вища шк., 1987. - 304 с.
6. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубінчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підручник. – К.: Зодіак-Еко, 2001. — 688 с.
7. Погорелов О. В. Геометрія: Підручник. – К.: Освіта, 1993. – 352 с.
8. Навчальні програми (довузівська підготовка іноземних громадян) / Б. Андрющенко. – К.: Політехніка, 2005. – 84 с.
9. Алгебра і початки аналізу: Навчальний посібник / А. Колмогоров. – К.: Радянська школа, 1987. – 336 с.
10. Formula – математика для школи / І. Виспянський. – Режим доступу: <http://www.formula.co.ua>.

СЛОВНИК МАТЕМАТИЧНИХ ТЕРМІНІВ

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
абсциса	абсцисса	abscissa	abscisse	Abszisse	abscisa
алгебраїчна форма	алгебраическая форма	algebraic form	forme algébrique	algebraische Form	forma algebraica
аргумент	аргумент	argument	argument	Argument	argumento
арифметична прогресія	арифметическая прогрессия	arithmetical progression	progression arithmétique	arithmetische Reihe	progresión aritmética
арифметичний корінь	арифметический корень	arithmetical root	racine arithmétique	arithmetische Wurzel	raíz aritmética
біном Ньютона	бином Ньютона	binomial theorem	binôme de Newton	Newtonsches Binom	binomio de Newton
бісектриса	биссектриса	bisecting line	bissectrice	Bisektrix	bisectriz

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
бічна грань	боковая грань	lateral face	limite latérale	Seitenrand	arista lateral
в x раз більше ніж	в x раз больше чем	x times more than	à x fois plus que	in x ist mehr mal als	en x veces más que
в x раз важче ніж	в x раз тяжелее чем	x times heavier than	à x une fois est plus lourde que	in x ist mal schwerer als	en x la vez es más pesada que
в x раз довше ніж	в x раз длиннее чем	x times longer than	à x une fois est plus longue que	in x ist mal länger als	en x la vez es más larga que
в x раз коротше ніж	в x раз короче чем	x times shorter than	à x une fois est plus courte que	in x ist mal kürzer als	en x la vez es más corta que
в x раз легше ніж	в x раз легче чем	x times easier than	à x une fois est plus facile que	in x ist mal leichter als	en x la vez es más fácil que
в x раз менше ніж	в x раз меньше чем	x times less than	à x une fois est plus petite que	in x ist weniger mal als	en x la vez es más pequeña que

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
вектор	вектор	vector	vecteur	Vektor	vector
векторне числення	векторное исчисление	vector calculus	calcul vectoriel	Vektorrechnung	cálculo vectorial
вертикальні кути	вертикальные углы	vertical angles	angles verticaux	Scheitelwinkel	esquinas verticales
вершина кута	вершина угла	vertex of angle	sommet d'un angle	Winkelspitze	cima de la esquina
визначити	определить	evaluate	fixer	bestimmen	calcular
виконати дії	выполнить действия	to execute operations	accomplir les actions	Handlungen zu erfüllen	cumplir las acciones
вираз	выражение	expression	expression	Ausdruck	expresión
висота	высота	height	hauteur	Höhe	altura
від'ємний	отрицательный	negative	négatif	negativ	negativo

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
від'ємник	вычитаемое	subtrahend	nombre à soustraire	Subtrahend	sustraendo
віднімання	вычитание	subtraction	soustraction	Abziehen	sustracción
відношення	отношение	ratio	rapport	Verhältnis	razón
відповідь	ответ	answer	réponse	Antwort	solución
відрізок	отрезок	segment	segment	Abschnitt	segmento
відсоток	процент	per cent	pour-cent	Prozent	por ciento
відстань	расстояние	distance	distance	Abstand	distancia
вісь абсцис	ось абсцисс	abscissa axis	axe des abscisses	Abszissenachse	eje de las abscisas
вісь ординат	ось ординат	ordinate axis	axe des ordonnées	Ordinatenachse	eje de las ordenadas

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
внутрішні односторонні кути	внутренние односторонние углы	interior opposite angles	angles intérieurs unilatéraux	inneren einseitigen Winkel	esquinas interiores unilaterales
внутрішні різносторонні кути	внутренние разносторонние углы	interior versatile angles	angles intérieurs variés	inneren vielseitigen Winkel	esquinas interiores multilaterales
вписане коло	вписанная окружность	inscribed circle	cercle inscrit	Inkreis	círculo insertado
вписаний кут	вписанный угол	inscribed angle	angle inscrit	Peripheriewinkel	esquina insertada
вправа	упражнение	exercises	exercice	Übung	ejercicio
всього	всего	total	total	im ganzen	total
гексаедр	гексаэдр	hexahedron	hexaèdre	Hexaeder	hexaedro

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
геометрична прогресія	геометрическая прогрессия	geometric progression	progression géométrique	geometrische Reihe	progresión geométrica
гіпербола	гипербола	hyperbola	hyperbole	Hyperbel	hipérbole
гострий кут	острый угол	sharp angle	angle aigu	spitzer Winkel	ángulo agudo
градус	градус	degree	degré	Grad	grado
границя	предел	limit	limite	Limes	límite
грань	грань	bound	pan	Fläche	arista
графік	график	graph	graphique	Kurvenbild	gráfico
двогранний кут	двугранный угол	flatroof angle	dièdre	Diederwinkel	diedro
декартові координати	декартовы координаты	Cartesian coordinates	coordonnées cartésiennes	kartesische Koordinaten	coordenadas Cartesian

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
десятковий дріб	десятичная дробь	decimal	fraction décimale	dekadischer Bruch	fracción decimal
дискримінант	дискриминант	discriminant	discriminant	Diskriminante	discriminador
диференційовна функція	дифференцируемая функция	differentiable function	fonction différentiable	differenzierte Funktion	función diferenciada
диференціювання	дифференцирование	differentiation	différenciation	Differenzierung	diferenciación
діагональ	диагональ	diagonal	diagonale	Diagonale	diagonal
діаметр	диаметр	diameter	diamètre	Durchmesser	diámetro
дійсна частина	действительная часть	real part	partie réelle	Realteil	parte válida
ділене	делимое	dividend	dividende	Dividend	dividendo
ділення	деление	division	division	Dividieren	división

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
дільник	делитель	divisor	diviseur	Divisor	divisor
добуток	произведение	product	produit	Produkt	producto
довжина	длина	length	longueur	Länge	longitud
додавання	сложение	addition	addition	Addition	adición
доданок	слагаемое	item	nombre à additionner	Summand	sumando
додатний	положительный	positive	positif	positiv	positivo
додатний напрям	положительное направление	positive direction	direction positive	positive Richtung	dirección positiva
додекаедр	додекаэдр	dodecahedron	dodécaèdre	Dodekaeder	dodecaedro
достатня ознака	достаточный признак	sufficient condition	signe suffisant	ausreichende Merkmal	indicio suficiente

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
дотична	касательная	tangent	tangente	Tangente	tangente
дробова частина	дробная часть	fractional part	partie fractionnaire	Bruchteil	parte fraccionada
дужки	скобки	parenthesis	parenthèses	Klammern	paréntesis
екстремум	экстремум	extremum	extremum	Extremum	valor extremo
залежна змінна	зависимая переменная	dependent variable	variable dépendante	abhängige Variable	variable dependiente
записувати	записывать	write	noter	aufzeichnen	anotar
зведене квадратне рівняння	приведенное квадратное уравнение	reduced quadratic	équation du second degré amenée	gebrachte quadratische Angleichung	ecuación de segundo grado llevada
звичайний дріб	обычная дробь	fraction	fraction ordinaire	gewöhnliche Bruch	fracción regular
зменшуване	уменьшаемое	minuend	diminué	Minuend	reducido

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
змінна	переменная	variable	variable	Veränderliche	variable
знайти	найти	find	trouver	finden	hallar
знак	знак	sign	signe	Vorzeichen	signo
знак віднімання	знак вычитания	sign of subtraction	signe de la soustraction	Subtraktionszeichen	signo a la resta
знак ділення	знак деления	division sign	signe de la division	Bruchstrich	signo a la división
знак додавання	знак сложения	plus sign	signe de l'addition	Additionszeichen	signo a la adición
знак множення	знак умножения	multiplication sign	signe multiplicatif	Malzeichen	signo a la multiplicación
знак рівності	знак равенства	equality sign	signe d'égalité	Gleichheitszeichen	signo a la igualdad
знаменник	знаменатель	denominator	dénominateur	Nenner	denominador

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
знаменник геометричної прогресії	знаменатель геометрической прогрессии	geometric ratio	raison géométrique	Stufensprung	denominador de la progresión geométrica
зрізаний конус	срезанный конус	frustum	cône coupé	abgeschnittenen Kegel	cono cortado
зростаюча функція	возрастающая функция	increasing function	fonction augmentant	Anstiegsfunktion	función que crece
ікосаедр	икосаэдр	icosahedron	icosaèdre	Ikosaeder	icosaedro
інтеграл	интеграл	integral	intégrale	Integral	integral
ірраціональна нерівність	иррациональное неравенство	irrational inequality	inégalité irrationnelle	irrationale Ungleichheit	desigualdad irracional
калькулятор	калькулятор	calculator	calculatrice	Rechner	calculador
квадрат	квадрат	square	carré	Quadrat	cuadrado

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
квадратне рівняння	квадратное уравнение	quadratic	équation quadratique	quadratische Gleichung	ecuación de segundo grado
квадратний корінь	квадратный корень	square root	racine carrée	Quadratwurzel	raíz cuadrada
кінець вектора	конец вектора	terminus	fin du vecteur	Ende des Vektors	fin del vector
клас	класс	class	classe	Klasse	clase
коефіцієнт	коэффициент	coefficient	coefficient	Koeffizient	coeficiente
колінеарний	коллинеарный	collinear	colinéaire	kollinear	colineal
коло	окружность	circle	circonférence	Kreis	circunferencia
кома	запятая	decimal point	virgule	Komma	coma
комбінаторика	комбинаторика	combinatorial analysis	analyse combinatoire	Kombinatorik	combinatoria

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
комбінація	комбинация	combination	combinaison	Kombination	combinación
комплексне число	комплексное число	complex number	nombres complexes	komplexe Zahl	números complejos
конус	конус	cone	cône	Kegel	cono
координата	координата	coordinate	coordonnée	Koordinate	coordenada
координатна площина	координатная плоскость	coordinate plane	plan coordonné	Koordinatenebene	plano de coordenadas
координатна пряма	координатная прямая	coordinate line	ligne droite coordonnée	Koordinatengerade	recta de coordenadas
корінь	корень	root	racine	Wurzel	raíz
корінь n-го степеня	корень n-ой степени	n-th root	racine du n-ème degré	Wurzel der n. Stufe	raíz del n grado

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
крайній член пропорції	крайний член пропорции	extreme	termes extrêmes d'une proportion	äusserste Mitglied der Proportion	miembro extremo de la proporción
круг	круг	disk	cercle	Kreis	círculo
куб	куб	cube	cube	Kubus	cubo
кубічний корінь	кубический корень	cube root	racine cubique	Kubikwurzel	raíz cúbica
куля	шар	solid sphere	sphère	Kugel	esfera
кульовий сегмент	шаровой сегмент	globe calotte	segment sphérique	Kugelsegment	segmento esférico
кут	угол	angle	angle	Winkel	esquina
ліворуч	слева	from the left of	à gauche (de)	von links	a (la) izquierda

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
лінійна функція	линейная функция	linear function	fonction linéaire	lineare Funktion	función lineal
лінійне рівняння	линейное уравнение	linear equation	équation linéaire	eine lineare Gleichung	ecuación lineal
лічба	счет	counting	calcul	Rechnung	cálculo
логарифмічна нерівність	логарифмическое неравенство	logarithmic inequality	inégalité logarithmique	logarithmische Ungleichheit	desigualdad logarítmica
логарифмічна функція	логарифмическая функция	logarithmic function	fonction logarithmique	logarithmische Funktion	función logarítmica
локальний максимум	локальный максимум	local maximum	maximum local	lokal Maximum	máximo local
локальний мінімум	локальный минимум	local minimum	minimum local	lokal Minimum	mínimo local

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
медіана	медиана	median	médiane	Mediane	mediana
метод підстановки	метод подстановки	substitution method	méthode de la substitution	Einsetzungsver- fahren	método de la substitución
мінус	минус	minus	moins	Minus	menos
многогранний кут	многогранный угол	polyhedral angle	angle polyédrique	Raumwinkel	ángulo poliedro
многогранник	многогранник	polyhedral solid	polyèdre	Vielflach	poliedro
многокутник	многоугольник	polygon	polygone	Vieleck	polígono
многочлен	многочлен	polynomial	polynôme	Polynom	polinomio
множення	умножение	multiplication	multiplication	Multiplikation	multiplicación
множина	множество	set	multitude	Menge	multitud

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
множник	множитель	multiplier	multiplicateur	Multiplikator	multiplicador
модуль	модуль	module	module	Modul	módulo
модуль вектора	модуль вектора	modulus of vector	module du vecteur	Modul des Vektors	módulo del vector
на x більше ніж	на x больше чем	greater by x than	sur x plus que	auf x ist mehr es als	en x más que
на x важче ніж	на x тяжелее чем	heavier by x than	sur x il est plus lourd que	auf x ist es schwerer als	en x es más pesado que
на x довше ніж	на x длиннее чем	longer by x than	sur x est plus long que	auf x ist länger als	en x es más largo que
на x коротше ніж	на x короче чем	shorter by x than	sur x est plus court que	auf x ist kürzer als	en x es más corto que
на x легше ніж	на x легче чем	easier by x than	sur x il est plus facile que	auf x ist es leichter als	en x es más fácil que

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
на x менше ніж	на x меньше чем	less by x than	sur x il y a moins de que	auf x ist weniger es als	en x es más pequeño que
найменше спільне кратне	наименьшее общее кратное	least common multiple	le plus petit commun multiple	kleinstes gemeinsames Vielfaches	mínimo común múltiplo
наприклад	например	for example	par exemple	videlicet	por ejemplo
наступний	следующий	next	suivant	folgend	siguiente
натуральне число	натуральное число	natural number	nombre naturel	natürliche Zahl	número natural
незалежна змінна	независимая переменная	independent variable	variable indépendante	unabhängige Variable	variable independiente
необхідна ознака	необходимый признак	requirement	signe nécessaire	notwendige Merkmal	indicio necesario

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
непаралельна	непараллельная	nonparallel	non la parallèle	ungleichlaufend	no paralelo
непарна функція	нечетная функция	odd function	fonction impaire	unpaare Funktion	función impar
непарний	нечетный	odd	impair	ungerade	impar
неповна частка	неполное частное	partial quotient	privé incomplet	unvollständige Quotient	incompleto privado
неповне квадратне рівняння	неполное квадратное уравнение	pure quadratic	équation du second degré incomplète	unvollständige quadratische Angleichung	ecuación de segundo grado incompleta
неправильний дріб	неправильная дробь	improper fraction	fraction impropre	unechter Bruch	fracción incorrecta
нерівність	неравенство	inequality	inéquation	Ungleichung	desigualdad
нескінченний	бесконечный	infinite	infini	unendlich	infinito

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
нестрога нерівність	нестрогое неравенство	unstrict inequality	d'égalité-inégalité	nicht strenge Ungleichheit	desigualdad no rigurosa
нормаль до кривої	нормаль к кривой	normal to curve	normale vers la courbe	Normal zur Kurve	normal a la curva
обернена пропорційність	обратная пропорциональ- ность	inverse proportionality	proportionnalité inverse	Rückproportiona- lität	proporcionalidad de vuelta
обернено пропорційний	обратно пропорциональ- ный	inverse proportional	inversement proportionnel	zurück den proportionalen	atrás proporcional
об'єм	объем	volume	volume	Ausmaß	volumen
область визначення	область определения	definitional domain	domaine de définition	Definitionsbereich	esfera de la definición
область значень	область значений	range of values	domaine de valeurs	Wertebereich	recorrido

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
одиничний відрізок	единичный отрезок	unit segment	segment unitaire	Einheitsstrecke	trozo singular
одночлен	одночлен	monomial	monôme	Monom	monomio
октаедр	октаэдр	octahedron	octaèdre	Oktaeder	octaedro
описане коло	описанная окружность	circumcircle	cercle décrit	Umkreis	círculo descrito
описаний кут	описанный угол	circumscribed angle	angle décrit	beschriebenen Winkel	esquina descrita
опуклий многокутник	выпуклый многоугольник	convex polygon	polygone convexe	konvexe Vieleck	polígono convexo
ордината	ордината	ordinate	ordonnée	Ordinate	ordenada
основа	основа	base	base	Basis	base

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
основа степеня	основа степени	base of power	base du degré	Grundlage der Stufe	base del grado
остача від ділення	остаток от деления	residue of division	reste de la division	Rest von der Teilung	resto de la división
парабола	парабола	parabola	parabole	Parabel	parábola
паралелепіпед	параллелепипед	parallelepiped	parallélépipède	Parallelepipedon	paralelepipedo
паралелограм	параллелограмм	parallelogram	parallélogramme	Parallelogramm	paralelogramo
паралельні прямі	параллельные прямые	parallel lines	lignes droites parallèles	Parallele	rectas paralelas
парна функція	четная функция	even function	fonction paire	gerade Funktion	función par
парний	четный	even	pair	gerade	par
первісна	первообразная	antiderivative	primordiale	Stammfunktion	primordial

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
перевіряти	проверя́ть	examine	contrôler	ausprobieren	comprobar
переріз	сечение	section	section	Durchschnitt	sección
перестановка	перестановка	commutation	réarrangement	Permutation	traslado
період	период	period	période	Periode	período
періодичний дріб	периодическая дробь	periodic fraction	fraction périodique	periodischer Bruch	fracción periódica
перпендикуляр	перпендикуляр	perpendicular	perpendiculaire	Senkrechte	perpendicular
перпендикулярні прямі	перпендикуляр- ные прямые	perpendicular lines	lignes droites perpendiculaires	senkrechten Geraden	rectas perpendiculares
півпряма	полупрямая	halfline	demi-droite	Halbgerade	semirecta
піраміда	пирамида	pyramid	pyramide	Pyramide	pirámide

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
площа	площадь	area	aire	Fläche	área
площина	плоскость	plane	plan	Fläche	plano
плюс	плюс	plus	plus	Plus	más
показник степеня	показатель степени	exponent	exposant	Exponent	exponente
показникова нерівність	показательное неравенство	exponential inequality	inégalité exponentielle	vorbildliche Ungleichheit	desigualdad exponencial
показникова форма	показательная форма	exponential form	forme exponentielle	vorbildliche Form	forma exponencial
показникова функція	показательная функция	exponential function	fonction exponentielle	Exponential-funktion	función exponencial
половина	половина	half	moitié	Hälfte	mitad

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
попередній	предыдущий	previous	précédent	vorherig	anterior
порівнювати	сравнивать	compare	comparer	vergleichen	comparar
порівняння	сравнение	comparison	comparaison	Kongruenz	comparación
порядок зростання	порядок возрастания	increasing order	ordre de l'augmentation	Ordnung des Anwachsens	orden del acrecentamiento
порядок спадання	порядок убывания	decreasing order	ordre спадання	Ordnung der Abnahme	orden de la merma
послідовність	последовательность	consequence	succession	Reihenfolge	consecuencia
похила	наклонная	slanting line	oblique	schief	inclinado
похідна	производная	derivative	dérivée	Ableitung	derivada
початкова точка	начальная точка	initial point	point de départ	Aufpunkt	punto de arranque

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
початок вектора	начало вектора	origin of vector	origine d'un vecteur	Bezugspunkt	comienzo del vector
початок відліку	начало отсчета	zero point	repère de référence	Nullpunkt	comienzo de la lectura
початок координат	начало координат	coordinate origin	origine des coordonnées	Ursprung	origen de las coordenadas
правильний дріб	правильная дробь	proper fraction	fraction propre	echter Bruch	fracción propia
праворуч	справа	from the right of	à droite (de)	von rechts	a (la) derecha
призма	призма	prism	prisme	Prisma	prisma
приклад	пример	example	exemple	Beispiel	ejemplo

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
приріст аргумента	приращение аргумента	increment of argument	accroissement de la variable	Zunahme des Argumentes	crecimiento del argumento
приріст функції	приращение функции	increment of function	accroissement de la fonction	Zunahme der Funktion	crecimiento de la función
проекція	проекция	projection	projection	Projektion	proyección
промінь	луч	ray	rayon	Strahl	rayo
пропорція	пропорция	proportion	proportion	Proportion	proporción
протилежний	противоположный	opposite	opposé	gegenüberliegend	opuesto
процент	процент	per cent	pour-cent	Prozent	por ciento
пряма	прямая	straight line	ligne droite	Gerade	línea recta

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
пряма призма	прямая призма	rightangle prism	prisme direct	gerade Prisma	prisma directo
пряма пропорційність	прямая пропорциональ- ность	direct proportionality	proportionnalité directe	gerade Proportionalität	proporcionalidad directa
прямий кут	прямой угол	right angle	angle droit	Rechter	ángulo recto
прямо пропорційний	прямо пропорциональ- ный	directly proportional	directement proportionnel	gerade proportionalen	directamente proporcional
прямокутний трикутник	прямоугольный треугольник	right triangle	triangle rectangle	rechtwinkliges Dreieck	triángulo ortogonio
прямокутник	прямоугольник	rectangle	rectangle	Rechteck	rectángulo
радіус	радиус	radius	rayon	Radius	radio

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
раціональне число	рациональное число	rational number	nombre rationnel	Rationalzahl	número racional
ребро	ребро	edge	arête	Kante	borde
рівність	равенство	equality	égalité	Gleichung	igualdad
рівнобедрений прямокутний трикутник	равнобедренный прямоугольный треугольник	45° right triangle	triangle rectangle isocèle	gleichschenkliges rechteckige Dreieck	triángulo isósceles rectangular
рівнобедрений трикутник	равнобедренный треугольник	isosceles triangle	triangle isocèle	gleichschenkliges Dreieck	triángulo isósceles
рівносільні нерівності	равносільные неравенства	equivalent inequalities	inégalités équivalentes	gleichbedeutenden Ungleichheiten	desigualdades equivalentes
рівносільні рівняння	равносільные уравнения	equivalent equations	équations équivalentes	gleichbedeutenden Angleichungen	ecuaciones equivalentes

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
рівносторонній трикутник	равносторонний треугольник	equilateral triangle	triangle équilatéral	gleichseitiges Dreieck	triángulo equilátero
рівняння	уравнение	equation	équation	Gleichung	ecuación
рівняння першого степеня	уравнение первой степени	simple equation	équation linéaire	Gleichung ersten Grades	ecuación de primer grado
різниця	разность	difference	différence	Differenz	resto
різниця арифметичної прогресії	разность арифметической прогрессии	common difference	raison arithmétique	Verschiedenheit der arithmetischen Progression	diferencia de la progresión aritmética
розв'язання	решение	solution	décision	Auflösen	decisión
розв'язати	решить	solve	décider	lösen	decidir
розгорнутий кут	развернутый угол	flat angle	angle déployé	gestreckter Winkel	esquina desenvuelta

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
розміщення	размещение	arrangement	placement	Anordnung	instalación
розряд числа	разряд числа	number position	ordre	Zahlenstelle	categoría del número
ромб	ромб	diamond	losange	Rhombus	rombo
сегмент	сегмент	segment	segment	Segment	segmento
сектор	сектор	sector	secteur	Ausschnitt	sector
середній член пропорції	средний член пропорции	means of proportion	termes moyens d'une proportion	mittlere Mitglied der Proportion	término medio de la proporción
середня лінія	средняя линия	midline	ligne élastique	Mittellinie	línea media
симетричний	симметричный	symmetric	symétrique	symmetrisch	simétrico
симетрія	симметрия	symmetry	symétrie	Symmetrie	simetría

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
система нерівностей	система неравенств	inequality system	inégalités simultanées	System der Ungleichheiten	sistema de las desigualdades
система рівнянь	система уравнений	combined equations	système d'équations	Gleichungssystem	sistema de las ecuaciones
січна	секущая	secant line	sécante	Sekante	secante
скінченний	конечный	finite	final	endlich	final
складна функція	сложная функция	compodite function	fonction de fonction	komplizierte Funktion	función difícil
скоротити дроб	сократить дроб	reduce fraction	réduire une fraction	einen Bruch kleinern	simplificar el quebrado
спадна функція	нисходящая функция	dropdown function	fonction descendant	absteigende Funktion	función decreciente

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
спільний множник	общий множитель	common factor	multiplificateur total	allgemeinen Faktor	multiplicador general
спряжений	сопряженный	adjoint	conjugué	konjugiert	conjugado
степенева функція	степенная функция	power function	fonction puissance	Potenzfunktion	función pausada
ступінь	степень	power	puissance	Potenz	potencia
строга нерівність	строгое неравенство	strict inequality	inégalité sévère	strenge Ungleichheit	desigualdad rigurosa
сума	сумма	sum	somme	Summe	suma
суміжні кути	сопряженные углы	conjugate angles	angles associés	verknüpften Winkel	ángulos conjugados
таблиця	таблица	table	tableau	Tabelle	tabla

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
твірна	образующая	generator	génératrice	Erzeugende	generatriz
тетраedr	тетраedr	tetrahedron	tétraèdre	Tetraeder	tetraedro
тіло обертання	телo вращенія	body of revolution	corps de révolution	Rotationskörper	cuerpo de revolución
тотожний	тождественный	identical	identique	identisch	idéntico
точка	точка	point	point	Punkt	punto
точка прикладання	точка приложения	point of application	point d'application	Angriffspunkt	punto de aplicación
транспортир	транспортир	protractor	rapporteur	Transporteur	transportador
трапеція	трапедия	trapezoid	trapèze	Trapez	trapecio
третина	треть	one third	un tiers	Drittel	tercio

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
тригонометрична форма	тригонометрическая форма	goniometric form	forme trigonométrique	trigonometrische Form	forma trigonométrica
тригонометричні функції	тригонометрические функции	trigonometrical functions	fonctions trigonométriques	trigonometrischen Funktionen	funciones trigonométricas
тригранний кут	трехгранный угол	trihedral angle	angle trièdre	Dreikantig	esquina triangular
трикутник	треугольник	triangle	triangle	Dreieck	triángulo
трикутник Паскаля	треугольник Паскаля	Pascal pyramid	triangle de Pascal	Zahlendreieck	triángulo del Pascal
тупий кут	тупой угол	blunt angle	angle obtus	stumpfer Winkel	ángulo obtuso
уявна одиниця	мнимая единица	imaginary unit	unité imaginaire	imaginäre Einheit	unidad imaginaria
уявна частина	мнимая часть	imaginary part	partie imaginaire	Imaginärteil	parte imaginaria

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
формула	формула	formula	formule	Formel	fórmula
функція	функция	function	fonction	Funktion	función
хорда	хорда	bisecant	corde	Sehne	cuerda
центр кола	центр окружности	center of circle	centre du cercle	Zentrum des Kreises	centro del círculo
центральний кут	центральный угол	central angle	angle au centre	Zentriwinkel	ángulo central
циліндр	цилиндр	cylinder	cyindre	Zylinder	cilindro
цифра	цифра	figure	chiffre	Zahl	cifra
ціла частина	целая часть	integer part	partie entière	Einerstelle	parte entera
ціле число	целое число	integer	nombre entière	ganze Zahl	entero

українська	російська	англійська	французька	німецька	іспанська
частка	частное	quotient	quotient	Quotient	cociente
чверть	четверть	quarter	quart	Viertel	cuarto
чисельник	числитель	numerator	numérateur	Zähler	numerador
читати	читать	read	lire	lesen	leer

Навчальне видання

**Краєвський Володимир Олександрович
Краєвська Ольга Дмитрівна**

**МАТЕМАТИКА ДЛЯ ДОВУЗІВСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ
СТУДЕНТІВ-ІНОЗЕМЦІВ
Частина 2**

Навчальний посібник

Редактор О. Скалоцька

Оригінал-макет підготовлено В. Краєвським

Підписано до друку .
Формат 29,7×41¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. .
Наклад прим. Зам. № .

Вінницький національний технічний університет,
науково-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.