

Крушевський Ю. В., Кравцов Ю. І., Мізерний В.М.

Електродинаміка
та
поширення радіохвиль

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Крушевський Ю. В., Кравцов Ю. І., Мізерний В.М.

Електродинаміка та поширення радіохвиль

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як збірник задач для студентів радіоелектронного профілю.
Протокол № 8 від 2 березня 2006 року

Вінниця ВНТУ 2006

УДК 538.3
К 84

Рецензенти:

***В.Я. Данилов**, доктор технічних наук, професор
Р.Н. Кветний, доктор технічних наук, професор
В.М. Кичак, доктор технічних наук, професор*

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

Крушевський Ю.В., Кравцов Ю.І., Мізерний В.М.
К 84 Електродинаміка та поширення радіо хвиль. Збірник задач. –
Вінниця: ВНТУ, 2006. –77с.

Збірник задач містить систематизований матеріал для вправ. В кожному розділі є короткі теоретичні відомості, приклади розв’язування типових задач, а також завдання для самостійної роботи з відповідями. Збірник задач розроблений у відповідності з планом кафедри та програмами дисциплін “Електродинаміка та поширення хвиль”, “Технічна електродинаміка”.

УДК 538.3

© Ю. Крушевський, Ю. Кравцов, В. Мізерний, 2006

Зміст

Вступ.....	4
Розділ 1. Математичні основи електродинаміки.....	5
1.1 Короткі теоретичні відомості.....	5
1.2 Приклади розв'язування типових задач.....	15
1.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	19
Розділ 2. Рівняння Максвелла.....	20
2.1 Короткі теоретичні відомості.....	20
2.2 Приклади розв'язування типових задач.....	23
2.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	25
Розділ 3. Граничні умови.....	26
3.1 Короткі теоретичні відомості.....	26
3.2 Приклад розв'язування типових задач.....	27
3.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	28
Розділ 4. Теорема Пойнтинга. Лема Лоренца.....	29
4.1 Короткі теоретичні відомості.....	29
4.2 Приклад розв'язування типових задач.....	31
4.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	31
Розділ 5. Плоскі електромагнітні хвилі.....	32
5.1 Короткі теоретичні відомості.....	32
5.2 Приклади розв'язування типових задач.....	35
5.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	37
Розділ 6. Відбиття та заповнення плоских електромагнітних хвиль.....	38
6.1 Короткі теоретичні відомості.....	38
6.2 Приклади розв'язування типових задач.....	40
6.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	42
Розділ 7. Хвилеводи.....	43
7.1 Короткі теоретичні відомості.....	43
7.2 Приклади розв'язування типових задач.....	49
7.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	51
Розділ 8. Об'ємні резонатори.....	53
8.1 Короткі теоретичні відомості.....	53
8.2 Приклади розв'язування типових задач.....	59
8.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	62
Розділ 9. Елементарні випромінювачі.....	64
9.1 Короткі теоретичні відомості.....	64
9.2 Приклади розв'язування типових задач.....	68
9.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	70
Розділ 10. Поширення радіохвиль.....	71
10.1 Короткі теоретичні відомості.....	71
10.2 Приклади розв'язування типових задач.....	73
10.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	76
Література.....	77

ВСТУП

Матеріал збірника задач охоплює усі основні розділи курсу “Електродинаміка та поширення радіохвиль” і відповідає програмі підготовки бакалаврів радіотехніки, які навчаються у Вінницькому національному технічному університеті.

Розділи побудовані за єдиним принципом, а саме: у першому підрозділі коротко викладаються теоретичні відомості, необхідні для самостійної роботи студентів; у другому – наводяться приклади детального розв’язання декількох типових задач; у третьому – пропонуються задачі для самостійного розв’язування.

Задачі складені з таким розрахунком, аби тривалість часу, який витрачається на їх розв’язання, відповідала навчальному навантаженню, передбаченому для цього курсу.

Збірник призначений для студентів радіотехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Може бути використаний особами, які самостійно вивчають курси “Електродинаміка та поширення радіохвиль”, “Технічна електродинаміка” і т. ін., або підвищують свою кваліфікацію.

1 МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

1.1 Короткі теоретичні відомості

1.1.1 Ортогональні системи координат

При розв'язуванні електродинамічних задач доводиться використовувати різні координатні системи. При виведенні загальних співвідношень доцільно записувати їх у такій математичній формі, яка б була придатною для будь-якої конкретної системи координат. В залежності від поставленої задачі при розв'язанні задач електродинаміки використовуються декартова (а), циліндрична (б) або сферична (в) системи координат, наведені на рис. 1.1.

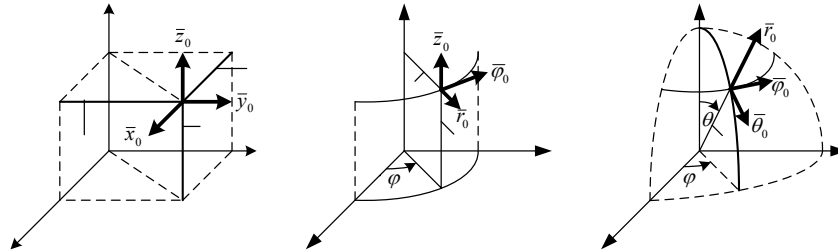


Рисунок 1.1

У випадку декартових координат, записаних у послідовності **x, y, z**, є справедливим співвідношення: $[\bar{x}_0 \bar{y}_0] = \bar{z}_0$.

Векторний добуток одиничного вектора (орта), орієнтованого вздовж осі **x**, і одиничного вектора, орієнтованого вздовж осі **y**, повинні дати одиничний вектор, орієнтований вздовж осі **z**. Іншими словами, правоходовий гвинт, який повертається в найкоротшому напрямку від осі **x** до осі **y**, повинен угвинчуватись у напрямку **z**.

Аналогічно, $[\bar{y}_0 \bar{z}_0] = \bar{x}_0$, $[\bar{z}_0 \bar{x}_0] = \bar{y}_0$.

У випадку циліндричних координат, записаних у послідовності **r, φ, z**, повинні виконуватись співвідношення:

$$[\bar{r}_0 \bar{\varphi}_0] = \bar{z}_0, \quad [\bar{\varphi}_0 \bar{z}_0] = \bar{r}_0, \quad [\bar{z}_0 \bar{r}_0] = \bar{\varphi}_0.$$

У випадку сферичних координат, записаних у послідовності **r, θ, φ**, мають бути справедливими співвідношення:

$$[\bar{r}_0 \bar{\theta}_0] = \bar{\varphi}_0, \quad [\bar{\theta}_0 \bar{\varphi}_0] = \bar{r}_0, \quad [\bar{\varphi}_0 \bar{r}_0] = \bar{\theta}_0.$$

а) x

Якщо у декартовій системі координат будуть прирости координат dx , dy , dz , то точка M , задана у цих координатах, відповідно пройде шлях:

$$dl_x = 1 \cdot dx, \quad dl_y = 1 \cdot dy, \quad dl_z = 1 \cdot dz,$$

де $L_x=1$, $L_y=1$, $L_z=1$ – коефіцієнти Ляме, які зв'язують прирости координат та відповідні їм переміщення точки вздовж відповідних координатних осей x , y , z .

Якщо у циліндричній системі координат будуть задані прирости координатам dr , $d\varphi$, dz , то точка M , задана у цих координатах, переміститься відповідно на відстані:

$$dl_r = 1 \cdot dr, \quad dl_\varphi = r \cdot d\varphi, \quad dl_z = 1 \cdot dz,$$

де $L_r=1$, $L_\varphi=r$, $L_z=1$ – коефіцієнти Ляме, які також зв'язують прирости координат та відповідні їм переміщення точки вздовж відповідних координатних осей r , φ , z .

Якщо у сферичній системі координат будуть задані прирости координатам dr , $d\theta$, $d\varphi$, то точка M , задана у цих координатах, переміститься відповідно на відстані:

$$dl_r = 1 \cdot dr, \quad dl_\theta = r \cdot d\theta, \quad dl_\varphi = r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi,$$

де $L_r=1$, $L_\theta=r$, $L_\varphi=r \sin \theta$ – коефіцієнти Ляме, які також зв'язують прирости координат та відповідні їм переміщення точки вздовж відповідних координатних осей r , θ , φ .

Таким чином, наприклад, елементарний об'єм можна записати:

- у декартовій системі координат $dv = dx \cdot dy \cdot dz$,
- у циліндричній системі координат $dv = r dr \cdot d\varphi \cdot dz$,
- у сферичній системі координат $dv = r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

1.1.2 Поняття про градієнт скалярного поля

Поле скалярної функції характеризується векторно-диференціальною характеристикою, яка називається **градієнтом**.

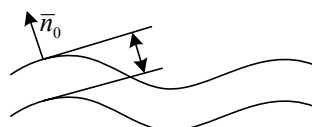


Рисунок 1.2

Гradient являє собою вектор, спрямований по нормалі до поверхні однакового рівня скалярної функції у бік зростання функції і чисельно є рівним швидкості зміни функції у даному напрямку. На рис. 1.2 показані поверхні рівнів U та $U + dU$ у полі скалярної функції U , а також одиничний нормальний вектор $\vec{n}_0$, зорієнтований у бік зростання функції U . Швидкість зміни функції у напрямку $\vec{n}_0$ характеризується похідною dU/dn , де dn – нескінченно малий приріст шляху у напрямку $\vec{n}_0$. Gradient функції позначають $grad\ U$ і записують у вигляді загального математичного співвідношення

$$gradU = \frac{dU}{dn} \cdot \vec{n}_0.$$

Таким чином, gradient є векторно–диференціальною операцією, яка виконується над скалярною функцією, в результаті утворюється векторна функція.

На рисунку 1.3,а показаний приклад gradienta скалярного поля температур з лінійним зростанням температури від холодного лівого кінця металевого стрижня (t_1) до гарячого правого кінця цього стрижня (t_2).

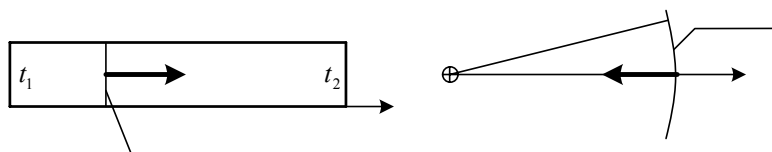


Рисунок 1.3

При цьому gradient поля температур у зазначеному на рисунку поперечному перерізі стрижня дорівнює

$$gradt = \vec{x}_0 \frac{dt}{dx}.$$

На рисунку 1.3,б показаний приклад gradienta скалярного поля електричних потенціалів, створеного точковим позитивним електричним зарядом q .

Gradient поля потенціалів у точці, віддаленій від заряду на відстань r , визначається співвідношенням

$$gradU = -\vec{r}_0 \cdot \frac{dU}{dr}.$$

У цих формулах $\bar{x}_0$ - орт напрямку ox , $\bar{r}_0$ - орт напрямку радіуса - вектора $\bar{r}$.

На рис. 1.3 показані поверхні рівнів скалярних полів:

а – поля температур $t=\text{const}$,

б – поля потенціалів $U=\text{const}$.

Вирази для градієнта у конкретних системах координат мають вигляд:

- декартова система координат

$$\text{grad}U = \bar{x}_0 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{z}_0 \frac{\partial U}{\partial z};$$

- циліндрична система координат

$$\text{grad}U = \bar{r}_0 \frac{\partial U}{\partial r} + \bar{\varphi}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \bar{z}_0 \frac{\partial U}{\partial z};$$

- сферична система координат

$$\text{grad}U = \bar{r}_0 \frac{\partial U}{\partial r} + \bar{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \bar{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

1.1.3 Поняття про дивергенцію та ротор векторного поля

При розгляді задач векторного аналізу використовують поняття про джерело (витік), яке створює поле, і про споживача (стік), який його поглинає. Прикладом витіку поля в електродинаміці є передавальна антена, а прикладом стоку – приймальна антена. Інтенсивність джерела чи стоку прийнято характеризувати векторно-диференціальною характеристикою, яка називається **дивергенцією**. Формально дивергенцію поля вектора $\bar{A}$ позначають $\text{div}\bar{A}$ і визначають виразом

$$\text{div}\bar{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \bar{A} \cdot \bar{n} dS}{\Delta v}. \quad (1.1.3.1)$$

Тут $\oint_{\Delta S}$ - інтеграл по замкнутій малій поверхні ΔS , яка охоплює точку, у якій

визначається дивергенція;

$\bar{A}$ - вектор, який характеризує поле;

$\vec{dS} = \vec{n}_0 \cdot dS$ - нескінченно малий елемент поверхні ΔS , помножений на одиничний нормальний вектор $\vec{n}_0$, спрямований зсередини замкнутої поверхні назовні;

ΔV - малий об'єм, який обмежується замкнутою поверхнею ΔS .

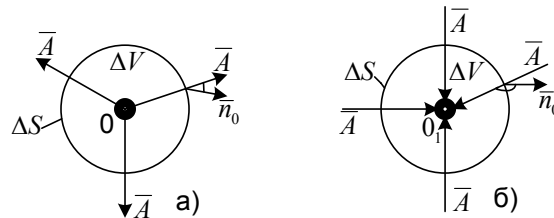


Рисунок 1.4

У чисельнику дробу у виразі (1.1.3.1) маємо значення потоку вектора $\vec{A}$ через малу (але скінченну) замкнуту поверхню ΔS . Дріб під знаком $\lim$ можна трактувати як середнє значення об'ємної густини цього потоку, тобто середнє значення інтенсивності поля в об'ємі ΔV . Шляхом граничного переходу об'єм ΔV і замкнута поверхня ΔS стягуються у точку. Таким чином, дивергенція характеризує інтенсивність джерела у точці O (рис. 1.4,а), або стоку у точці O_1 (рис. 1.4,б). Якщо у цій точці знаходиться джерело поля (рис. 1.4,а), то вектор $\vec{A}$ утворює з нормаллю $\vec{n}_0$ гострий кут, а скалярний добуток $\vec{A} \cdot \vec{dS} = A \cdot dS \cdot \cos(\vec{A}, \vec{n}_0)$ буде додатним. Векторне поле буде виходити з точки O , у якій визначається дивергенція, і точка O є джерелом поля. Дивергенція у такому випадку буде додатною скалярною величиною.

Якщо у цій точці знаходиться стік поля (рис. 1.4,б), то вектор $\vec{A}$ утворює з нормаллю $\vec{n}_0$ тупий кут, а скалярний добуток $\vec{A} \cdot \vec{dS} = A dS \cos(\vec{A}, \vec{n}_0)$ буде від'ємним. Векторне поле буде входити у точку O_1 , у якій визначається дивергенція і точка ця є стоком поля. Дивергенція при цьому буде від'ємною скалярною величиною.

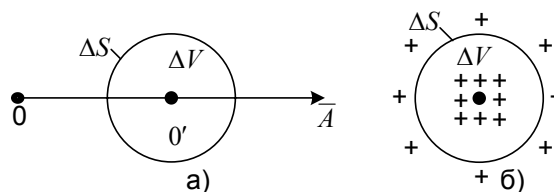


Рисунок 1.5

На рис. 1.5 показані випадки, коли дивергенція дорівнює нулю. Перший приклад (рис. 1.5,а) – це коли точка O' не містить ні витоків (джерела), ні

стоку (споживача) поля вектора $\vec{A}$. Другий приклад (рис. 1.5,б) – це коли, скажімо, буде однаковою кількість зарядів, які містяться у об'ємі Δv і кількість зарядів, які знаходяться з зовнішнього боку поверхні ΔS .

Крім дивергенції у векторному аналізі для характеристики векторного поля використовують векторно-диференціальну характеристику, яка називається **ротором** або **вихором**. Ротор поля вектора $\vec{A}$ позначають $\text{rot} \vec{A}$ і визначають за формулою:

$$\text{rot} \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \vec{n}_0 \frac{\oint_{\Delta L} \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S},$$

де $\oint_{\Delta L} \vec{A} d\vec{l}$ - циркуляція вектора $\vec{A}$ вздовж малого замкнутого контуру ΔL ;

$\oint_{\Delta L} \vec{A} d\vec{l} / \Delta S$ - середнє значення поверхневої густини циркуляції;

$\vec{n}_0$ - одиничний вектор, нормальний до поверхні ΔS у точці О;

ΔL - замкнутий контур, який охоплює малу поверхню ΔS .

Шляхом граничного переходу поверхня ΔS і контур ΔL стягуються у точку. Таким чином, ротор вектора $\vec{A}$ є циркуляція вектора $\vec{A}$, визначена у точці О, яка належить поверхні ΔS .

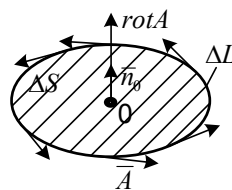


Рисунок 1.6

Зауважимо, що поверхня ΔS може бути не тільки плоскою, як зображено на рис. 1.6. Вона може бути опуклою або ввігнутою, але має обов'язково спиратися на контур ΔL . Знак ротора, так само як і циркуляції, залежить від напрямку обходу контуру ΔL вектором $\vec{A}$. Нагадаємо, що додатним напрямком обходу контуру є напрямок, коли поверхня ΔS буде знаходитись ліворуч від спостерігача, що рухається вздовж контуру.

Диференціально малий елемент контуру визначається як $d\vec{l} = \vec{\tau}_0 dl$, де $\vec{\tau}_0$ - одиничний вектор, дотичний до контуру в кожній його точці у додатному напрямку обходу контуру. Таким чином, у випадку, зображеному на рис 1.6, маємо додатну циркуляцію вектора $\vec{A}$ і, відповідно, додатне значення ротора вектора $\vec{A}$, що підтверджується знаком скалярного добутку

$$\vec{A} \cdot d\vec{l} = A \cdot dl \cos O = Adl > 0.$$

Якщо ж вектор $\vec{A}$ обходитиме контур у протилежному напрямку, то скалярний добуток

$$\vec{A} \cdot d\vec{l} = A \cdot dl \cdot \cos 180^\circ = -A dl < 0,$$

тобто циркуляція і ротор вектора, буде від'ємним.

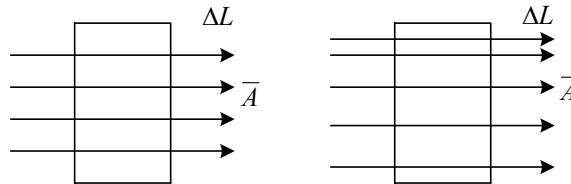


Рисунок 1.7

Ротор вектора $\vec{A}$ у випадку однорідного поля (рис. 1.7,а) дорівнює нулю. Якщо поле цього вектора буде неоднорідним (рис. 1.7,б), то ротор стає не рівним нулю. Таким чином, можемо сказати, що по суті своїй ротор є характеристикою ступеня неоднорідності векторного поля.

1.1.4 Найважливіші векторні тотожності

Використовуючи наведені вирази для градієнта, дивергенції і ротора, можна довести такі векторно-диференціальні тотожності, які є справедливими для всіх ортогональних координатних систем:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } U &\equiv 0, \\ \text{div rot } \vec{A} &\equiv 0, \\ \text{div grad } U &\equiv \nabla^2 U, \\ \text{div}[\vec{A}\vec{B}] &\equiv \vec{B} \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \text{rot } \vec{B}, \\ \text{div}(\psi \text{grad } U) &\equiv \text{grad } \psi \text{grad } U + \psi \nabla^2 U, \\ \text{rot}(\psi \vec{A}) &\equiv [\text{grad } \psi \vec{A}] + \psi \text{rot } \vec{A}. \end{aligned} \quad \text{a)}$$

1.1.5 Теореми Остроградського - Гаусса та Стокса

Формально теорема Остроградського - Гаусса визначається виразом:

$$\oint_{\Delta S} \vec{A} d\vec{S} = \int_{\Delta V} \text{div } \vec{A} dv.$$

Ліва частина цього виразу є потік вектора $\vec{A}$ через замкнуту поверхню ΔS , яка охоплює об'єм ΔV . Підінтегральна функція $\text{div } \vec{A}$ у правій частині

виразу, як відомо з підрозділу 1.3, являє собою потік вектора $\vec{A}$ (інтенсивність поля цього вектора) у довільній точці об'єму ΔV . Очевидно, інтегрування по об'єму ΔV дасть суму потоків в усіх точках цього об'єму, яка буде дорівнювати потоку вектора $\vec{A}$ через поверхню ΔS , що обмежує об'єм ΔV .

Теорему Стокса формально можна представити виразом

$$\oint_{\Delta L} \vec{A} d\vec{l} = \int_{\Delta S} \text{rot} \vec{A} d\vec{S}.$$

Ліва частина цього виразу - це циркуляція вектора $\vec{A}$ вздовж замкнутого контуру ΔL , який стягує (охоплює) поверхню ΔS . Підінтегральна функція $\text{rot} \vec{A}$ у правій частині виразу, як відомо з підрозділу 1.3, являє собою циркуляцію вектора $\vec{A}$ у довільній точці поверхні ΔS . Таким чином, інтегрування по поверхні ΔS дасть суму циркуляцій в усіх точках цієї поверхні, яка буде дорівнювати циркуляції вектора $\vec{A}$ по усьому контуру ΔL , що обмежує (стягує) поверхню ΔS .

1.1.6 Формули для визначення градієнта, дивергенції та ротора

Для описування фізичних полів використовуються їх математичні моделі: скалярні і векторні поля. В довільній системі координат (ξ, η, ζ) скалярне поле набуває вигляду деякої функції $U(\xi, \eta, \zeta)$, яка приймає числові значення – дійсні або комплексні. Векторне поле $\vec{A}$ задається трьома проекціями на орти вибраної системи координат:

$$\vec{A} = \xi_0 A_\xi(\xi, \eta, \zeta) + \eta_0 A_\eta(\xi, \eta, \zeta) + \zeta_0 A_\zeta(\xi, \eta, \zeta).$$

Характеристикою величини та напрямку швидкості зміни скалярного поля в просторі є градієнт цього поля

$$\text{gradu} = \frac{1}{L_\xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \vec{\xi}_0 + \frac{1}{L_\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \vec{\eta}_0 + \frac{1}{L_\zeta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \zeta} \cdot \vec{\zeta}_0,$$

де L_ξ, L_η, L_ζ - коефіцієнти Ляме за координатами ξ, η, ζ . Вони є коефіцієнтами пропорційності між диференціалами узагальнених координат і нескінченно малими ребрами елементарного паралелепіпеду у довільній точці простору.

Коефіцієнти Ляме мають такі значення :

- для декартової системи координат (x, y, z) $L_\xi = L_\eta = L_\zeta = 1$;
- для циліндричної системи координат (r, φ, z) $L_r = 1, L_\varphi = r, L_z = 1$;
- для сферичної системи координат (r, θ, φ) $L_r = 1, L_\theta = r, L_\varphi = r \sin \theta$.

Тоді вирази для градієнта будуть мати вигляд:

- в декартовій системі координат:

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \overline{x_0} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \overline{y_0} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \overline{z_0};$$

- в циліндричній системі координат:

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \overline{r_0} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \overline{\varphi_0} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \overline{z_0};$$

- в сферичній системі координат:

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \overline{r_0} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \overline{\theta_0} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \overline{\varphi_0}.$$

Опис векторного поля $\overline{A}$ потребує дві характеристики: скалярну – дивергенцію $\text{div } \overline{A}$ та векторну – $\text{rot } \overline{A}$. Значення дивергенції дорівнює густині джерел (або споживачів) цього поля у заданій точці простору. Трактовка ротора векторного поля дещо складніша. Можна вважати, що він, по суті, характеризує ступінь відмінності поля від однорідного.

Дивергенцію векторного поля $\overline{A}$ обчислюють шляхом диференціювання його проєкцій за координатами:

- у декартовій системі координат:

$$\text{div } \overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

- у циліндричній системі координат:

$$\text{div } \overline{A} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

- у сферичній системі координат:

$$\text{div } \overline{A} = \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \sin \theta \cdot A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Ротор векторного поля вектора $\overline{A}$ має вигляд:

- у декартовій системі координат:

$$\text{rot } \bar{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cdot \bar{x}_0 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cdot \bar{y}_0 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cdot \bar{z}_0;$$

- у циліндричній системі координат:

$$\text{rot } \bar{A} = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) \cdot \bar{r}_0 + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \cdot \bar{\varphi}_0 + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \cdot \bar{z}_0;$$

- у сферичній системі координат:

$$\text{rot } \bar{A} = \frac{\bar{r}_0}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\bar{\theta}_0}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (A_\varphi \cdot r \sin \theta) \right] + \frac{\bar{\varphi}_0}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right].$$

Векторно-диференціальні операції зі скалярними і векторними полями зручно записувати за допомогою оператора Гамільтона ∇ .

Серед векторно-диференціальних операцій другого порядку у електродинаміці широке застосування має оператор Лапласа ∇^2 , дія якого на векторне поле $\bar{A}$ описується співвідношенням

$$\nabla^2 \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \text{rot rot } \bar{A}.$$

Векторно-диференціальна операція другого порядку, що діє на скалярне поле, задається оператором Лапласа у вигляді

$$\nabla^2 U = \Delta U = \text{div grad } U.$$

Оператор Лапласа в різних координатних системах записується таким чином:

- у декартовій системі координат:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

- у циліндричній системі координат:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

- у сферичній системі координат:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Графічно, як відомо, поля зображаються їх силовими лініями. У кожній точці силової лінії вектор поля є дотичним до неї. Там, де інтенсивність поля більша, силові лінії проводяться щільніше, або ж при тій самій щільності вектори беруть довгими.

1.2 Приклади розв'язування типових задач

1.2.1 Знайти значення градієнта електричного потенціалу U , заданого функцією $U=C/r$, у точці $x=1, y=2, z=3$, де r – радіус-вектор.

Розв'язуємо задачу у декартовій системі координат. Довжина радіуса-вектора дорівнює $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Скористаємось виразом для визначення градієнта:

$$\begin{aligned} \text{grad} U &= \bar{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) + \bar{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) + \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \\ &= \bar{x}_0 C \frac{2x}{-(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \bar{y}_0 C \frac{2y}{-(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \\ &+ \bar{z}_0 C \frac{2z}{-(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -C \frac{\bar{x}_0 \cdot x + \bar{y}_0 \cdot y + \bar{z}_0 \cdot z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}. \end{aligned}$$

Підставивши сюди значення координати точки $(1, 2, 3)$, отримаємо:

$$\text{grad} U = -\frac{C}{\sqrt{14}} (\bar{x}_0 + 2\bar{y}_0 + 3\bar{z}_0) \text{ В/м}.$$

Розв'яжемо цю саму задачу у сферичній системі координат для точок, які лежать на сфері радіусом $r = 5\text{м}$, вважаючи, що точкове джерело електричного поля розміщене у центрі цієї сфери. Для цього скористаємось виразом:

$$\text{grad} U = \bar{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C}{r} \right) + \bar{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{C}{r} \right) + \bar{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{C}{r} \right) = \bar{r}_0 \left(-\frac{C}{r^2} \right) \Big|_{r=5} = -\frac{C}{25} \bar{r}_0 \text{ В/м}.$$

1.2.2 Визначити значення дивергенції поля вектора $\bar{A}_0 = \bar{x}_0 \cdot x^3 y^2 + \bar{y}_0 z^2 y x + \bar{z}_0 x^2 y z^3$ у точці з координатами $(2, 1, 3)$.

Розв'язання. Скористаємось виразом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2 yx) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 yz^3) = (2x^2 y^2 + xz^2 + x^2 y \cdot 2z^2) \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1 \\ z=3}} \\ &= 8 + 18 + 72 = 98. \end{aligned}$$

1.2.3 Визначити дивергенцію поля вектора $\bar{A} = \bar{r}_0 r^2 \sin \varphi + \bar{\varphi}_0 z \cos \varphi + \bar{z}_0 r \sin \varphi \cdot z^2$, заданого у циліндричній системі координат, у точці $(1, \pi/6, 2)$.

Розв'язання. Скористаємося виразом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot r^2 \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(z \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(r \cdot r \sin \varphi z^2) \right] = \\ &= \frac{1}{r} (3r^2 \sin \varphi - z \sin \varphi + 2r^2 z \sin \varphi) = 3z \sin \varphi - \frac{z}{r} \sin \varphi + 2r \cdot z \sin \varphi = \\ &= (3r - \frac{z}{r} + 2r \cdot z) \sin \varphi \Big|_{\substack{r=1 \\ \varphi=\pi/6 \\ z=2}} = (3 - 2 + 4) \cdot \sin \pi/6 = 5 \cdot 0.5 = 2.5. \end{aligned}$$

1.2.4 Визначити дивергенцію поля вектора, заданого у сферичній системі координат $\bar{A} = \bar{r}_0 r^2 \sin \theta + \bar{\theta}_0 r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta + \bar{\varphi}_0 r \cos \varphi \cdot \sin \theta$, у точці $(2, \pi/3, \pi/6)$.

Розв'язання. Скористаємось виразом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot \sin \theta \cdot r^2 \cdot \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cdot r \cos \varphi \cdot \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta \cdot r \cos \varphi \cos \theta) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^4 \sin^2 \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r^2 \cos \varphi \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} [4r^3 \sin^2 \theta - r^2 \sin \varphi \cos \theta + 2 \cos \varphi \cos 2\theta] = \\ &= (4r \sin \theta - \sin \varphi \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{2 \cos \varphi \cos 2\theta}{\sin^2 \theta}) \Big|_{\substack{r=2 \\ \theta=\pi/3 \\ \varphi=\pi/6}} = \\ &= 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} + \frac{2 \cdot (\sqrt{3}/2)(-\sqrt{3}/2)}{4 \cdot 1/2} = 4\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

1.2.5 Визначити ротор поля вектора $\bar{A} = \bar{x}_0 x^3 y^2 + \bar{y}_0 z^2 xy + \bar{z}_0 x^2 yz^3$ у точці з координатами $(1, 2, 3)$.

Розв'язання. Скористаємось виразом:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \bar{A} &= \bar{x}_0 \left[\frac{\partial}{\partial y} (x^2 y z^3) - \frac{\partial}{\partial z} (z^2 x y) \right] + \bar{y}_0 \left[\frac{\partial}{\partial z} (x^3 y^2) - \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y z^3) \right] + \\
&+ \bar{z}_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} (z^2 x y) - \frac{\partial}{\partial y} (x^3 y^2) \right] = \left[\bar{x}_0 (x^2 z^3 - 2zyx) + \bar{y}_0 (2xyz^3) + \bar{z}_0 (yz^2 2x^3 y) \right] \Bigg|_{\substack{x=1 \\ y=2 \\ z=3}} = \\
&\bar{x}_0 (8 - 12) + \bar{y}_0 (-108) + \bar{z}_0 (18 - 4) = -4\bar{x}_0 - 108\bar{y}_0 + 14\bar{z}_0.
\end{aligned}$$

1.2.6 У декартовій системі координат проекції векторного поля $\bar{A}$ є сталими у кожній точці простору: $A_x = A_0$, $A_y = B_0$, $A_z = 0$. Побудувати картину силових ліній векторного поля.

Розв'язання. Оскільки одна з декартових складових векторного поля відсутня, то силові лінії мають являти собою сімейство простих кривих, що лежать у площинах, паралельних площині XY. Вектор поля $\bar{A}$ у кожній точці є дотичним до силової лінії, тому диференціальне рівняння силових ліній буде мати вигляд

$$dx / A_0 = dy / B_0.$$

Це є наслідком подібності двох прямокутних трикутників з катетами dx , dy і A_0 , B_0 відповідно. Загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$y = \frac{B_0}{A_0} \cdot x + C,$$

де C – довільна константа.

Таким чином, силові лінії поля являють собою сімейство паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом нахилу до осі OX, рівним B_0/A_0 (рис 1.8).

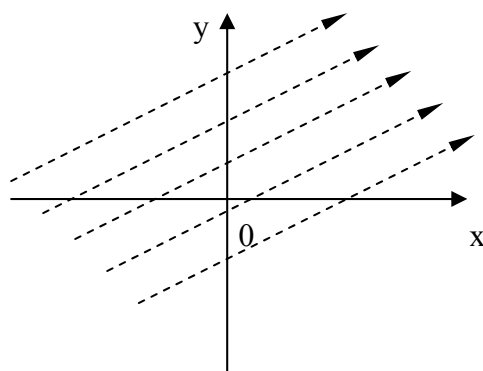


Рисунок 1.8

Векторне поле $\bar{A}$, що задовольняє в усіх точках досліджуваної області умову $\operatorname{div} \bar{A} = 0$ і $\operatorname{rot} \bar{A} \neq 0$, називається соленоїдним, або вихровим

(поле без джерел). При виконанні умови $\operatorname{div} \vec{A} \neq 0$ і $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$, поле $\vec{A}$ є потенціальним векторним полем. Якщо таке поле характеризує силу, що діє на матеріальну точку, то робота зовнішніх сил при обході замкненого контуру буде дорівнювати нулю лише у другому випадку.

1.2.7 В декартовій системі координат векторне поле $\vec{A}$ має єдину складову $A_y = x^2$

Перевірити, чи є це поле: а) соленоїдним; б) потенціальним.

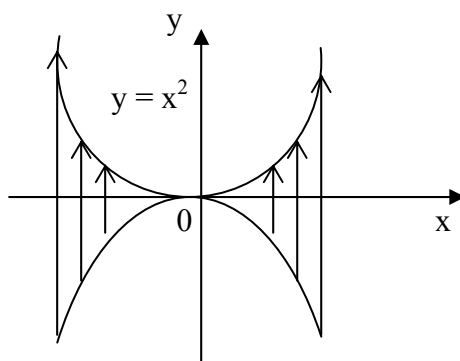


Рисунок 1.9

Розв'язання. Картина силових ліній поля $\vec{A}$ в площині XY зображена на рисунку 1.9. Використовуючи формулу для дивергенції цього поля, отримаємо:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial x^2}{\partial y} = 0.$$

Отже, досліджуване поле є соленоїдним. Оскільки $\operatorname{rot} \vec{A} = 2x \vec{Z}_0$, то це поле не є потенціальним.

1.2.8 Обчислити дивергенцію векторного добутку полів $\vec{A}$ і $\vec{B}$.

Розв'язання. Тут зручно скористатися оператором Гамільтона і записати

$$\nabla[\vec{A} \vec{B}] = \nabla_A[\vec{A} \vec{B}] + \nabla_B[\vec{A} \vec{B}].$$

Індекси біля оператора вказують поле, на яке він діє. Оскільки оператор діє лише на вектор, який знаходиться безпосередньо праворуч від нього, то останній вираз зручно переписати так:

$$\nabla[\vec{A} \vec{B}] = \nabla_A[\vec{A} \vec{B}] - \nabla_B[\vec{B} \vec{A}].$$

А вектор, на який оператор не діє, повинен бути винесеним за знак оператора подібно константі. Остаточоно отримуємо:

$$\operatorname{div}[\bar{A} \bar{B}] = \bar{B}[\nabla_A \bar{A}] - \bar{A}[\nabla_B \bar{B}] = \bar{B} \operatorname{rot} \bar{A} - \bar{A} \operatorname{rot} \bar{B}.$$

1.3 Задачі для самостійного розв'язування

1.3.1 Скалярне поле U задане в декартовій системі координат виразом $U = 2xy^2 + 3z^2 \sin x$. Обчислити векторне поле $\operatorname{grad} U$.

Відповідь: $\operatorname{grad} U = \bar{x}_0(2y^2 + 3z^2 \cos x) + \bar{y}_0(4xy + 6z \sin x)$

1.3.2 В декартовій системі координат векторне поле $\bar{A}$ має єдину складову $A_x = z^2$.

Побудувати якісно просторову картину розподілу силових ліній поля. Обчислити векторне поле $\operatorname{rot} \bar{A}$.

Відповідь: $\operatorname{rot} \bar{A} = \bar{y}_0 2z$.

1.3.3 В сферичній системі координат задане векторне поле $\bar{A} = \bar{r}_0 \cdot \frac{1}{r^2}$.

Визначити скалярне поле $\operatorname{div} \bar{A}$. Якісно побудувати картину силових ліній векторного поля.

Відповідь: $\operatorname{div} \bar{A} = 0$.

1.3.4 Визначити дивергенцію і ротор векторного поля, яке має у декартовій системі координат єдину складову $A_x = -10 \cos(x/\pi)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \bar{A} = \frac{10}{\pi} \cdot \sin(\frac{x}{\pi}), \operatorname{rot} \bar{A} = 0$.

1.3.5 Аналітично довести справедливості таких тотожностей векторного аналізу для декартових координат:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} &= 0, \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} \bar{A} &= 0, \\ \operatorname{grad}(U_1 U_2) &= U_2 \operatorname{grad} U_1 + U_1 \operatorname{grad} U_2, \\ \operatorname{div}(U \bar{A}) &= \bar{A} \operatorname{grad} U + U \operatorname{div} \bar{A}, \\ \operatorname{rot}(U \bar{A}) &= [\operatorname{grad} U \bar{A}] + U \operatorname{rot} \bar{A}, \end{aligned}$$

де U та $\bar{A}$ є довільними диференційовними скалярним та векторним потенціалами.

2 РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

2.1 Короткі теоретичні відомості

Відомо, що класична теорія електромагнітного поля спирається на рівняння Максвелла, які узагальнюють уже відомі закони на змінні у часі процеси. Для опису електромагнітних процесів у вакуумі достатньо двох основних векторів – напруженості електричного поля E і напруженості магнітного поля H . Крім того, визначають скалярне поле об'ємної густини електричного струму $\bar{j}$, пов'язаного з рухом носіїв заряду у просторі. Система рівнянь Максвелла, відносно перерахованих величин, записується у вигляді:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{j}_{np}, & \operatorname{div} \bar{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\mu_0 \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \bar{H} &= 0. \end{aligned}$$

У цих рівняннях присутні дві фундаментальні фізичні константи: $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м}$ - діелектрична стала і $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ - магнітна стала вакууму.

Серед важливих рівнянь згадаємо також закон збереження електричного заряду, який знаходить своє відображення в рівнянні неперервності лінії повного струму:

$$\operatorname{div} [\bar{j}_{el} + \bar{j}_{np} + \bar{j}_{zm}] = 0.$$

Перше рівняння Максвелла являє собою диференціальну форму запису відомого закону Ампера, до правої частини якого додано вектор густини струму зміщення, що поширює його дію на змінні у часі процеси:

$$\bar{j}_{zm} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Часто буває зручним користуватись поняттям густини стороннього електричного струму $\bar{j}_{el,ст}$, який виникає у просторі під дією стороннього джерела, тобто сил неелектромагнітного походження. Суму струмів провідності, зміщення та стороннього в електродинаміці називають повним струмом.

Друге рівняння системи рівнянь Максвелла описує закон електромагнітної індукції Фарадея, відомий з курсу загальної фізики.

З третього рівняння Максвелла випливає, що силові лінії потенціального електричного поля можуть починатися і закінчуватися тільки на електричних зарядах. При відсутності електричних зарядів потенціальне електричне поле відсутнє ($\text{div } \vec{E}=0$ при $\rho=0$).

З четвертого рівняння Максвелла випливає, що силові лінії магнітного поля завжди замкнені (магнітне поле не має джерел). Магнітне поле може бути лише вихровим.

Під дією електричного поля $\vec{E}$ в середовищі виникає струм провідності з об'ємною густиною

$$\vec{j}_{np} = \sigma \cdot \vec{E}.$$

Тут σ - питома об'ємна провідність середовища (См/м), а останнє співвідношення є диференціальною формою запису закону Ома.

Як відомо з курсу фізики, молекули і атоми речовини в електричному полі поляризуються, утворюючи у речовині векторне поле поляризованості $\vec{P}$. Цей вектор у кожній точці характеризує дипольний момент одиниці об'єму речовини. Якщо електричне поле змінюється у часі, то у середовищі виникає електричний струм, викликаний зміщенням зв'язаних зарядів, який називається струмом поляризації

$$\vec{j}_{пол} = \partial \vec{P} / \partial t.$$

Кожна точка простору характеризується вектором електричного зміщення $\vec{D}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \vec{P},$$

де $\epsilon_0 \vec{E}$ - вектор електричного зміщення у вакуумі.

Через це перше рівняння Максвелла набуває вигляду

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \cdot \vec{E} + \vec{j}_{ел.ст.}$$

Якщо речовину помістити у магнітному полі $\vec{H}$, то у ній, виходячи з класичних уявлень, утворюється вектор намагніченості $\vec{M}$, який є магнітним моментом одиниці об'єму речовини, а вектор магнітної індукції $\vec{B}$ вводиться співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M},$$

де $\mu_0 \vec{H}$ - вектор магнітної індукції у вакуумі.

Друге рівняння Максвелла в матеріальному середовищі має вигляд

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t .$$

Третє і четверте рівняння Максвелла записуються так:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Відомо, що у слабких полях як поляризованість $\vec{P}$, так і намагніченість $\vec{M}$ лінійно пов'язані з відповідними напруженостями полів:

$$\vec{P} = k_{\text{ел.}} \vec{E}; \quad \vec{M} = k_M \vec{H},$$

де $k_{\text{ел.}}$ і k_M – діелектрична і магнітна сприйнятливості речовини. Вони є сталими і незалежними від напруженостей полів.

На основі цього матеріальні рівняння електромагнітного поля можна записати у формі

$$\vec{D} = \varepsilon_\alpha \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_\alpha \vec{H}.$$

Коефіцієнтами пропорційності між напруженостями і індукціями є абсолютна діелектрична проникність $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_0(1 + k_{\text{ел.}})$ і абсолютна магнітна проникність $\mu_\alpha = \mu_0(1 + k_M)$. У розрахунках часто використовують відносні проникності

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha / \varepsilon_0 = 1 + k_{\text{ел.}}, \quad \mu = \mu_\alpha / \mu_0 = 1 + k_M.$$

На дуже високих частотах (у діапазоні НВЧ і оптичному діапазоні) доводиться враховувати скінченний час встановлення стану речовини, і тому з'являється залежність діелектричної і магнітної проникностей від частоти.

Слід зауважити, що всі наведені міркування є справедливими лише для ізотропних середовищ.

Четверте рівняння Максвелла $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ говорить про те, що оскільки у природі не існують магнітні заряди, то магнітне поле не може бути потенціальним. Проте у деяких випадках зручно скористатися формально введеним стороннім магнітним струмом, густину - $\vec{j}_{\text{ст.м}}$ якого слід додати до правої частини другого рівняння Максвелла,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{j}_{\text{ст.м}}.$$

У інтегральній формі чотири рівняння Максвелла записуються так:

$$\oint_L \overline{H} d\overline{l} = \int_S \left(\tau E + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \bar{j}_{cm..m} \right) \overline{dS};$$

$$\oint_L \overline{E} d\overline{l} = - \int_S \left(\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \bar{j}_{cm..m} \right) \overline{dS};$$

$$\oint_S \overline{D} d\overline{s} = q;$$

$$\oint_S \overline{B} d\overline{s} = 0.$$

У випадку монохроматичних електромагнітних процесів зручно користуватися рівняннями Максвелла, записаними для комплексних амплітуд векторів поля:

$$rot \dot{\overline{H}}_m = \dot{\bar{j}}_m \omega \dot{\varepsilon}_\alpha \dot{\overline{E}}_m + \dot{\bar{j}}_{m.ел};$$

$$rot \dot{\overline{E}}_m = - \dot{\bar{j}}_m \omega \mu_\alpha \dot{\overline{H}}_m - \dot{\bar{j}}_{m..m};$$

$$div \dot{\overline{D}}_m = \dot{\rho}_m;$$

$$div \dot{\overline{B}}_m = 0,$$

де $\dot{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_\alpha \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_\alpha} \right)$ - комплексна діелектрична проникність.

Наявність уявної частини проникності вказує на незворотне перетворення енергії електромагнітного поля в енергію теплових втрат. Якщо втрати пов'язані тільки з наявністю струмів провідності, то тангенс кута діелектричних втрат буде дорівнювати:

$$tg \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_\alpha}.$$

2.2 Приклади розв'язування типових задач

2.2.1 У немагнітному середовищі з $\varepsilon = 2.5$ існує електромагнітне поле, яке гармонічно змінюється в часі. У деякій точці простору вектор $\overline{E} = \overline{X}_0 \cdot 18 \sin(2\pi \cdot 10^{10} t)$, В/м.

Визначити об'ємну густину струму зміщення у цій точці.

Розв'язання. За визначенням струм зміщення дорівнює:

$$\bar{j}_{зм} = \varepsilon_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 25 \sin(2\pi \cdot 10^{10} t + 90^\circ).$$

Варто звернути увагу на те, що у просторі струм зміщення і електричне поле паралельні, проте струм випереджає поле за фазою на 90° .

2.2.2 Показати, що рівняння неперервності струму впливає з першого рівняння Максвелла.

Розв'язання. Застосувавши операцію дивергенції до 1-го рівняння Максвелла і скориставшись тотожністю $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = 0$, матимемо:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{E} + \operatorname{div} \bar{j}_{\text{ел.ст.}} + \operatorname{div} \bar{j}_{\text{пр.}} = 0.$$

Оскільки $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{E} = \operatorname{div} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \bar{j}_{\text{зм.}}$,

то:

$$\operatorname{div} \bar{j}_{\text{зм.}} + \operatorname{div} \bar{j}_{\text{ел.ст.}} + \operatorname{div} \bar{j}_{\text{пр.}} = \operatorname{div} (\bar{j}_{\text{зм.}} + \bar{j}_{\text{ел.ст.}} + \bar{j}_{\text{пр.}}) = 0.$$

2.2.3 Показати, що з четвертого рівняння Максвелла в неоднорідному середовищі, магнітна проникність якого є функцією просторових координат, впливає, що поле вектора його напруженості не є вихровим (соленоїдним).

Розв'язання. Застосувавши операцію дивергенції до четвертого рівняння Максвелла, отримаємо:

$$\operatorname{div} \bar{B} = \operatorname{div} (\mu_a \bar{H}) = \bar{H} \operatorname{grad} \mu_a + \mu_a \operatorname{div} \bar{H} = 0.$$

Звідси $\operatorname{div} \bar{H} = -\frac{1}{\mu_a} \bar{H} \cdot \operatorname{grad} \mu_a \neq 0$,

тобто поле магнітного вектора $\bar{H}$ не є соленоїдним.

2.2.4 Визначити швидкість змінення електричного поля в часі, яке в однорідному ізотропному середовищі без втрат з параметрами $\varepsilon = 4$, $\mu = 2,5$ породжує магнітне поле, ротор магнітної індукції якого дорівнює $10^{-7} \text{ Тл} / \text{м}$.

Розв'язання. Запишемо перше рівняння Максвелла у диференціальній формі для заданого середовища, яким є ідеальний діелектрик з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$ та відносною магнітною проникністю: $\mu = 2,5$:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Оскільки середовище є однорідним, то

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \bar{B}.$$

Підставивши значення $\operatorname{rot} \bar{H}$ у рівняння Максвелла, отримаємо швидкість змінення електричного поля у часі

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_a \varepsilon_a} \operatorname{rot} \bar{B}.$$

Пам'ятаючи, що $\mu_a = \mu_0 \cdot \mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,5 = 10\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ і

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 4 = \frac{1}{9\pi} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$, отримаємо :

$$\left| \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right| = \frac{1}{\mu_a \varepsilon_a} |\operatorname{rot} \bar{B}| = \frac{9\pi \cdot 10^9}{10\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 10^{-7} = 9 \cdot 10^8 \text{ В/м} \cdot \text{с}.$$

2.3 Задачі для самостійного розв'язування

2.3.1 Електромагнітна хвиля поширюється вздовж координати z і характеризується тим, що усі її складові поля залежать лише від координати z .

Скориставшись 1-м і 2-м рівняннями Максвелла, показати, що у такій хвилі будуть відсутні повздовжні складові E_z і H_z .

2.3.2 У плоскому конденсаторі з діелектриком ($\varepsilon = 4,2$ і $\sigma = 8 \cdot 10 \text{ См/м}$) створене електричне поле з частотою 50 МГц і амплітудою 30 В/м .

Визначити амплітудне значення та фазовий кут вектора густини повного струму, який протікає у цьому конденсаторі.

Відповідь: $\bar{j}_{\text{м.пов}} = 2,44 \text{ А/м}^2$; *струм випереджає по фазі напруженості поля на кут $0,16 \text{ рад}$.*

2.3.3 Між грозовою хмарою і Землею пробігає блискавка через електричне поле із середнім значенням напруженості $3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$.

Визначити середнє значення питомої провідності струму у каналі блискавки, якщо значення густини струму взяти 1500 А/м^2 .

Відповідь: $5 \cdot 10^{-4} \text{ См/м}$.

2.3.4 Визначити величину електричного точкового заряду, який створює електричне поле, дивергенція вектора напруженості якого у середовищі з $\varepsilon = 10$ дорівнює $0,36 \text{ В/м}^2$.

Відповідь: $3,2 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^3$.

2.3.5 Визначити швидкість змінення магнітного поля у часі, яке в ізотропному однорідному середовищі без втрат з $\varepsilon = 3$ і $\mu = 1.5$ породжує електричне поле, ротор якого дорівнює $14.4 \cdot 10^5 \text{ В/м}^2$.

Відповідь: $20 \frac{\text{А}}{\text{м} \cdot \text{с}}$.

2.3.6 При якому значенні напруженості електричного поля у провіднику з питомою провідністю $3 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ буде збуджено електричний струм з об'ємною густиною $9 \cdot 10^2 \text{ А/м}^2$?

Відповідь: $0,33 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}$.

2.3.7 Визначити розмірності гіпотетичних фізичних величин: магнітного заряду (монополя), магнітного струму, опору та провідності провідника магнітного струму.

3 ГРАНИЧНІ УМОВИ

3.1 Короткі теоретичні відомості

На межі поділу двох матеріальних середовищ з різними електродинамічними параметрами вектори поля мають задовольняти певні граничні умови. Кожен з векторів (наприклад, E) в точці на границі прийнято розкласти на нормальну і тангенціальну (дотичну) складові:

$$\vec{E} = E_n \vec{n}_0 + E_\tau \vec{\tau}_0,$$

де $\vec{n}_0$ і $\vec{\tau}_0$ - орти нормального і тангенціального напрямків до межі поділу відповідно.

Нормальні складові індукцій і тангенціальні складові напруженостей неперервні в кожній точці межі поділу:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}, & B_{1n} &= B_{2n}, \\ E_{\tau 1} &= E_{\tau 2}, & H_{\tau 1} &= H_{\tau 2}. \end{aligned}$$

Якщо одним з середовищ є ідеально провідний метал, для якого $\sigma \rightarrow \infty$, то на його поверхні тангенціальна складова електричного вектора відсутня:

$$E_{\tau} = 0.$$

На поверхні металу є електричний струм провідності з поверхневою густиною

$$\vec{j}_{np.S} = [\vec{n}_0 \cdot \vec{H}_{\tau}].$$

3.2. Приклад розв'язування задачі

Є плоска межа поділу двох середовищ з відносними діелектричними проникностями ε_1 і ε_2 (рис. 3.1).

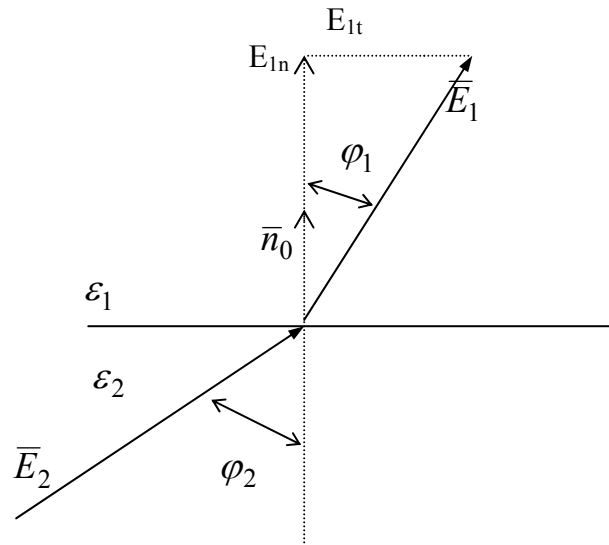


Рисунок 3.1

Силкові лінії електричного поля у першому середовищі утворюють кут φ_1 з напрямком нормалі.

Знайти орієнтацію силових ліній поля у другому середовищі.

Розв'язання. Скористаємось граничними умовами

$$D_{1n} = D_{2n},$$

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2},$$

або

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \varphi_1 = \varepsilon_2 E_2 \sin \varphi_2,$$

$$E_1 \sin \varphi_1 = E_2 \sin \varphi_2.$$

Поділивши друге рівняння на перше, отримаємо:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} \operatorname{tg} \varphi_2,$$

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

або

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \varphi_1 \right).$$

Зауважимо, що: 1) коли $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, кут $\varphi_2 > \varphi_1$; 2) коли $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, кут $\varphi_2 < \varphi_1$; 3) коли $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$, кут $\varphi_2 \rightarrow \pi/2$ незалежно від орієнтації поля у першому середовищі.

3.3. Задачі для самостійного розв'язування

3.3.1 У товщі магнітного матеріалу однорідного діелектрика з відомою відносною проникністю $\mu = 100$ спочатку було створено рівномірне магнітне поле $H = 0.1 \text{ А/м}$, а потім прорізані дві вузькі щілини (рис. 3.2), одна з котрих орієнтована паралельно полю, а друга - перпендикулярно до нього. Щілини заповнені повітрям. Яка величина напруженості магнітного поля в обох порожнинах?

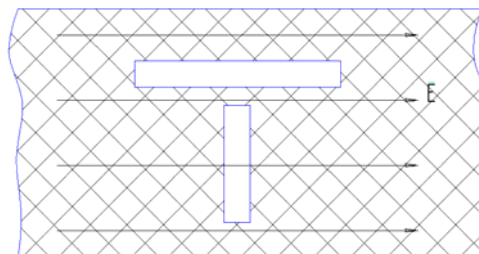


Рисунок 3.2

Вказівка: скористатися граничними умовами для векторів електричного поля.

Відповідь: якщо порожнина паралельна електричному полю, $H_{\text{пор.}} = 0.1 \text{ А/м}$, в іншому випадку - $H_{\text{пор.}} = 10 \text{ А/м}$.

3.3.2 На межі поділу двох середовищ з параметрами $\varepsilon_1 = 2.5$ і $\varepsilon_2 = 7.5$ електричний вектор з боку першого середовища має амплітуду 10 В/м і утворює кут 60° з межею поділу у другому середовищі.

Знайти орієнтацію електричного вектора з боку першого середовища та його амплітуду з боку другого середовища.

Відповідь: 17.3 В/м ; 30° .

3.3.3 Виходячи з результатів задачі 3.3.1, пояснити, чому твердий діелектрик, що має повітряні пухирці та канали, буде мати меншу електричну міцність, ніж однорідний.

3.3.4 На межі поділу двох середовищ з параметрами $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$ та $\varepsilon_2 = 3$, $\mu_2 = 1$ нормальна складова вектора електричного поля з боку першого середовища $E_1 = 10 \text{ В/м}$.

Визначити нормальну складову вектора електричного поля з боку другого середовища.

Відповідь: $3,33 \text{ В/м}$.

3.3.5 Розв'язати попередню задачу, коли межа поділу двох середовищ з площею 30 см^2 містить електричний заряд $q = 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ Кл}$.

Відповідь: $1,4 \text{ В/м}$.

3.3.6 На межі поділу двох середовищ з параметрами $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$ та $\varepsilon_2 = 3$, $\mu_2 = 1$ тангенціальна складова вектора магнітного поля з боку першого середовища $H_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}$.

Визначити тангенціальну складову вектора магнітної індукції та напруженості магнітного поля з боку другого середовища.

3.3.7 Розв'язати попередню задачу, коли по межі поділу протікає електричний струм з поверхневою густиною $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}$.

4 ТЕОРЕМА ПОЙНТИНГА. ЛЕМА ЛОРЕНЦА

4.1 Короткі теоретичні відомості

Електромагнітне поле є носієм енергії. Об'ємна густина енергії у будь-якій точці простору визначається за формулою

$$\varpi = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Закон збереження енергії знаходить своє відображення в теоремі Пойнтинга, записаній в диференціальній формі

$$\operatorname{div}[\overline{E}\overline{H}] + \sigma E^2 + \left(\overline{E} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \overline{H} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \right) = -\bar{j}_{cm} \cdot \overline{E},$$

або в інтегральній формі

$$\oint_S [\overline{E}_1 \overline{H}] d\overline{S} + \int_V \sigma E^2 dV + \int_V \overline{E} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} dV + \int_V \overline{H} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} dV = - \int_V \bar{j}_{cmel} \cdot \overline{E} dV.$$

Вектор Пойнтинга

$$\overline{P} = [\overline{E}\overline{H}] \rightarrow B_T / M^2$$

характеризує густину потоку потужності випромінювання з об'єму V через замкнену поверхню S , яка охоплює цей об'єм.

Для полів, які змінюються у часі за гармонічним законом, вводиться поняття комплексного вектора Пойнтинга

$$\dot{\overline{P}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\overline{E}}_m \dot{\overline{H}}_m^* \right].$$

Дійсна частина цього вектора

$$\overline{P}_{сер} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\overline{E}}_m \dot{\overline{H}}_m^* \right]$$

дорівнює середньому за період значенню потужності випромінювання.

З рівнянь Максвелла випливає низка додаткових співвідношень, що їх мають задовольняти електромагнітні поля. Так, якщо система сторонніх джерел $\dot{j}_{CT.1}$ збуджує у просторі електромагнітний процес $\dot{E}_1, \dot{H}_1$ в той час, коли системі $\dot{j}_{CT.2}$ відповідає поле $\dot{E}_2, \dot{H}_2$, то справедлива рівність:

$$\operatorname{div}[\dot{E}_{2m} \dot{H}_{1m}] - \operatorname{div}[\dot{E}_{1m} \dot{H}_{2m}] = \dot{E}_{1m} \dot{j}_{CT.2} - \dot{E}_{2m} \dot{j}_{CT.1},$$

яка називається лемою Лоренца в диференціальній формі, або рівність

$$\oint_S [\dot{E}_{2m} \dot{H}_{1m}] dS - \oint_S [\dot{E}_{1m} \dot{H}_{2m}] dS = \int_V \dot{E}_{1m} \dot{j}_{CT.2} dV - \int_V \dot{E}_{2m} \dot{j}_{CT.1} dV,$$

яка називається лемою Лоренца в інтегральній формі.

4.2 Приклад розв'язування типової задачі

У деякій точці простору задані комплексні амплітуди векторів поля,

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{x}_0 \cdot 28e^{j40^\circ}, \quad \dot{\vec{H}}_m = \dot{y}_0 \cdot 5 \cdot 10^{-2} e^{-j20^\circ}.$$

Знайти миттєві значення векторів поля, а також середнє значення вектора Пойнтинга.

Розв'язання. Миттєві значення пов'язані з комплексними амплітудами відомими формулами:

$$\begin{aligned}\bar{E}(t) &= \operatorname{Re}(\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}) = \dot{x}_0 \cdot 28 \cdot \cos(\omega t + 40^\circ), \\ \bar{H}(t) &= \operatorname{Re}(\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}) = \dot{y}_0 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(\omega t - 20^\circ).\end{aligned}$$

Для полів, які гармонічно змінюються у часі,

$$\bar{P}_{\text{сеп.}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] = 0.35 \dot{z}_0 B_T / \text{м}^2.$$

4.3 Задачі для самостійного розв'язування

4.3.1 У деякій точці простору вектор напруженості електричного поля $\vec{H} = \vec{x} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ А/м}$, а вектор Пойнтинга $\vec{P} = 8\vec{y}_0 + 12\vec{z}_0 \text{ ВТ/м}^2$.

Визначити вектор напруженості електричного поля.

Відповідь: $\vec{E} = 600\vec{y}_0 - 400\vec{z}_0 \text{ В/м}$.

4.3.2 У фіксованій точці простору відомі миттєві значення векторів поля

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \bar{E}_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_1), \\ \bar{H} &= \bar{H}_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}$$

де $\bar{E}_m$ і $\bar{H}_m$ - сталі вектори.

Визначити миттєве значення вектора Пойнтинга, його середнє значення та змінну у часі частину.

4.3.3 Комплексні амплітуди векторів електромагнітного поля у деякій точці простору задаються виразами:

$$\begin{aligned}\bar{E}_m &= \bar{x}_0 \cdot 1.4e^j + \bar{y}_0 \cdot 0.6e^{-j \cdot 0.3}, \\ \bar{H}_m &= -\bar{z}_0 \cdot 5 \cdot 10^{-2} e^{-j \cdot 0.8}.\end{aligned}$$

Визначити комплексний вектор Пойнтинга і його середнє значення.
Відповідь:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \bar{y}_0 \cdot 0.35 \cdot 10^{-2} e^{j \cdot 1.8} - \bar{x}_0 \cdot 1.5 \cdot 10^{-2} e^{j \cdot 0.5}, \\ \bar{P}_{\text{ср.}} &= -\bar{x}_0 \cdot 1.32 \cdot 10^{-2} - \bar{y}_0 \cdot 0.76 \cdot 10^{-2}, \text{ Вт / м}^2.\end{aligned}$$

4.3.4 Записати теорему Пойнтинга у інтегральній формі на випадок, коли об'єм V є: а) ідеальною передавальною антеною; б) ідеальною мікрохвильовою піччю; в) ідеальним об'ємним резонатором.

4.3.5 Визначити комплексну амплітуду вектора напруженості магнітного поля електромагнітної хвилі, якщо комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля $\dot{\bar{E}}_m = \bar{Z}_0 \cdot 5,4 \cdot e^j$ і комплексна амплітуда вектора густини потоку потужності цього поля $\dot{\bar{P}}_m = \bar{X}_0 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot e^{j30^\circ}$.

5 ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

5.1 Короткі теоретичні відомості

Плоскі електромагнітні хвилі існують в однорідних необмежених середовищах. У випадку полів, які змінюються у часі за гармонічним законом, комплексні амплітуди E і H задовольняють рівняння Гельмгольца

$$\begin{aligned}\nabla^2 \dot{\bar{E}}_m + k^2 \dot{\bar{E}}_m &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\bar{H}}_m + k^2 \dot{\bar{H}}_m &= 0,\end{aligned}$$

де $K = \omega \sqrt{\mu_\alpha \cdot \varepsilon_\alpha} = \alpha - j\beta$ - комплексний коефіцієнт поширення;

β - коефіцієнт фази;

α - коефіцієнт згасання.

Оскільки вихідні рівняння Максвелла дають однозначний зв'язок між E і H , достатньо знайти розв'язок лише одного з цих рівнянь.

Частинний розв'язок рівняння Гельмгольца описує однорідну плоску хвилю. Якщо вона поширюється вздовж осі z декартової системи координат, то згаданий розв'язок для прямої (падаючої) хвилі має вигляд:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_1(0) \cdot e^{-jkz}.$$

На високих частотах магнітні властивості більшості середовищ виражені слабо. Тому з достатнім для практики ступенем точності можна вважати $\mu_\alpha = \mu_0$.

Оскільки $\dot{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_\alpha(1 - jtg\delta)$, то комплексний коефіцієнт поширення

$$K = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_\alpha} \cdot \sqrt{1 - jtg\delta}.$$

Коефіцієнт фази β характеризує зміну фази гармонічного коливання при поширенні хвилі. Відстань, на якій фаза зміниться на 2π радіанів, називається довжиною хвилі:

$$\lambda = 2\pi/\beta.$$

Площина рівних фаз називається фазовим фронтом хвилі, а швидкість переміщення цієї площини – фазовою швидкістю:

$$V_\phi = \omega/\beta.$$

Коефіцієнти фази і згасання можуть бути виражені такими формулами:

$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + tg^2\delta} + 1)},$$

$$\alpha = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + tg^2\delta} - 1)}.$$

Фазова швидкість

$$V_\phi = \frac{C}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1 + tg^2\delta} + 1}}.$$

Довжина хвилі

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1 + tg^2\delta} + 1}}.$$

Відношення фазової швидкості в середовищі до швидкості світла у вакуумі називається коефіцієнтом заломлення:

$$n = \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}.$$

З рівнянь Максвелла випливає, що у випадку плоскої хвилі комплексні амплітуди векторів E і H зв'язані характеристичним опором середовища:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}, \quad \dot{E}_m = Z_c \dot{H}_m.$$

Характеристичний опір для вакууму

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi = 376.99 \text{ Ом}.$$

Плоска хвиля переносить енергію у напрямку поширення. Для гармонічних полів цей процес визначається середнім значенням вектора Пойнтинга

$$\bar{P}_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}_m \cdot \dot{\vec{H}}_m^* \right].$$

Часто $\bar{P}_{\text{сеп}}$ зручно виражати через напруженість електричного чи магнітного полів:

$$\bar{P}_{\text{сеп}} = \frac{|\dot{E}_m|^2}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{Z_c} \right) \bar{Z}_0 = \frac{|\dot{H}_m|^2}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{Z_c} \right) \bar{Z}_0.$$

У середовищах без втрат $\bar{P}_{\text{сеп}}$ не залежить від координати Z . Якщо ж середовище має втрати, то густина потоку потужності плоскої хвилі зменшується при поширенні за експоненціальним законом

$$\bar{P}_{\text{сеп}} = \bar{P}_{\text{сеп}}(0) e^{-2\alpha z}.$$

Величину втрат у середовищі характеризують погонним згасанням і вимірюють в $\text{дБ} / \text{м}$:

$$\alpha(\text{дБ} / \text{м}) = 20 \lg \frac{E(0)}{E(1)} = 10 \lg \frac{P(0)}{P(1)},$$

зв'язаним з коефіцієнтом згасання α співвідношенням $\alpha(\text{дБ} / \text{м}) = 8.69 \alpha(\text{рад})$.

Фазова швидкість плоскої хвилі в середовищі з втратами є функцією частоти. Таке явище називається дисперсією фазової швидкості.

У такому випадку при поширенні складних сигналів будуть порушуватись вихідні фазові і амплітудні співвідношення між окремими складовими спектра і, як наслідок, буде змінюватись форма сигналу у процесі його поширення. Для знаходження виду сигналу необхідно користуватись спектральним або операторним методом. Наприклад, покладаючи, що

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

є Фур'є-перетворенням сигналу в площині $Z=0$, можна знайти сигнал для будь-яких значень Z , використовуючи обернене перетворення Фур'є

$$S(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) e^{-j\omega t} e^{j\omega z} d\omega.$$

Якщо сигнали $Z(t, z)$ є вузькосмуговими, то можна показати, що їх обвідна у середовищах з втратами поширюється з груповою швидкістю

$$V_{гр.} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{1}{\partial \beta / \partial \omega}.$$

Якщо умова вузькосмуговості сигналу не виконується, то поняття групової швидкості перестає адекватно описувати трансформацію форми такого сигналу.

5.2 Приклади розв'язування типових задач

5.2.1 Плоска електромагнітна хвиля з частотою 10^8 Гц поширюється в середовищі з параметрами $\varepsilon = 4$, $tg\delta = 0.1$, $\mu = 1$.

Визначити фазову швидкість, довжину хвилі і коефіцієнт згасання.

Розв'язання. Врахуємо, що $tg\delta \ll 1$, і розкладаємо вираз для K у степеневий ряд. Обмежившись трьома першими членами, отримаємо:

$$K = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_\alpha} \sqrt{1 - jtg\delta} \approx \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_\alpha} \left(1 - j\frac{1}{2}tg\delta + \frac{1}{8}tg^2\delta\right).$$

Таким чином, для діелектриків з малими втратами коефіцієнт фази і коефіцієнт згасання приблизно дорівнюють:

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_\alpha} (1 + 0.125tg^2\delta) = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c} (1 + 0.125tg^2\delta),$$

$$\alpha \approx 0.5 \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_\alpha} tg\delta = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{2c} \cdot tg\delta.$$

Фазова швидкість хвилі

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon} (1 + 0.125tg^2\delta)}.$$

Отриманий результат показує, що наявність втрат у середовищі призводить до зміни величини фазової швидкості. Для $tg\delta = 0.1$ поправка складає 0,125%. При цьому можна показати, що

$$V_{\phi} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

За відомою величиною фазової швидкості знайдемо довжину хвилі

$$\lambda = v_{\phi} / f = 1,5 \text{ м}$$

і коефіцієнт згасання $\alpha = 0,21 \text{ м}^{-1}$.

5.2.2 Обчислити фазову швидкість, коефіцієнт згасання і глибину проникнення поля для плоскої електромагнітної хвилі з частотою 100 МГц, яка поширюється в металі з параметрами $\sigma = 1,21 \cdot 10^7 \text{ см/м}$, $\mu = 1$.

Розв'язання. В реальних металах густина струмів провідності значно більша густини струмів зміщення. Тому вираз для K можна приблизно переписати у вигляді

$$K = \omega \sqrt{\mu_{\alpha} \left(-j \frac{\tau}{\omega} \right)} = \sqrt{\mu_{\alpha} \left(\frac{\omega \mu_{\alpha} \tau}{2} \right)} (1-j) = \alpha - j\beta.$$

Коефіцієнт фази і коефіцієнт згасання у такому середовищі чисельно дорівнюють один одному

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_{\alpha} \sigma}{2}},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,21 \cdot 10^7}{2}} = 2,2\pi \cdot 10^4 \text{ рад/м}; \alpha = 2,2\pi \cdot 10^4 \text{ м}^{-1},$$

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{2,2\pi \cdot 10^4} = 9 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Під глибиною проникнення поля в метал d розуміють відстань, на якій його амплітуда зменшується в e разів. Очевидно, що

$$d = \frac{1}{\alpha} = 15 \text{ мкм}.$$

5.2.3 Плоска електромагнітна хвиля з частотою 10^8 Гц поширюється в середовищі з параметрами $\varepsilon = 4,41$, $\text{tg} \delta = 0,02$, $\mu = 1$. Амплітуда електричного поля в площині $Z=0$ рівна 50 В/м.

Визначити середню густину потоку потужності в площині $Z=10$ м.

Розв'язання. Густина потоку потужності хвилі визначається виразом

$$P_{\text{ср}}(Z) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \text{Re} \left(\frac{1}{Z_c} \right) e^{-j2\alpha z}.$$

Тобто, необхідно обчислити коефіцієнт згасання і характеристичний опір. Діючи так само, як і в задачі 5.2.1, можна знайти α . Підставлення вихідних даних дає $\alpha = 0.042 \text{ м}^{-1}$.

При визначенні характеристичного опору для $tg \ll 1$ можна використати наближений вираз для квадратного кореня. Тоді

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}} \frac{1}{1 - 0.5j \cdot tg \delta} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot (1 + j0.5tg \delta).$$

Отже,

$$P_{сер.}(Z) = \frac{|E|^2}{2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{120\pi} e^{-2\alpha z},$$

або після необхідних обчислень $P_{сер.}(Z = 10) = 2.83 \text{ Вт/м}^2$.

5.3 Задачі для самостійного розв'язування

5.3.1 У вакуумі поширюється плоска електромагнітна хвиля з частотою 30 МГц.

Визначити відстань, на якій фаза хвилі зростає на 90° , 180° , 270° , 540° і на 189° .

Відповідь: 2,5 м; 5 м; 7,5 м; 15 м і 60 м.

5.3.2 У середовищі з параметрами $\varepsilon = 9$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ поширюється в напрямку координати OZ плоска електромагнітна хвиля, комплексна амплітуда вектора напруженості магнітного поля якої в площині $Z=0$, $\dot{H} = (0.9\vec{x}_0 + 0.3\vec{y}_0) \cdot 10^{-2} \text{ А/м}$.

Визначити комплексну амплітуду вектора напруженості електричного поля цієї хвилі.

Відповідь: $\dot{H} = (-1.15\vec{x}_0 + 0.35\vec{y}_0) \text{ В/м}$.

5.3.3 Визначити характеристичний опір металу з питомою електричною провідністю $1 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ і відносною магнітною проникністю $\mu = 400$ на частотах 1 кГц і 1 МГц.

Відповідь: $4 \cdot 10^{-4} (1 + j)$ і $25 \cdot 10^{-4} (1 + j) \text{ Ом}$.

5.3.4 Деякий діелектрик на частоті 1 ГГц має параметри: $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$, $tg \delta = 10^{-3}$.

Визначити довжину хвилі, коефіцієнт згасання і характеристичний опір такого діелектрика.

Відповідь: 1,5 см; $2.09 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$; $60\pi \cdot e^{j0.5 \cdot 10^{-3}} \text{ Ом}$.

5.3.5 Визначити товщину залізного екрана, який забезпечує ослаблення амплітуди електричного поля на 40 дБ на частоті 50 МГц ($\mu_{\text{заліза}} = 1600$, $\sigma = 1 \cdot 10^7 \text{ См/м}$).

Відповідь: 3,5 мм.

5.3.6 Визначити, яке ослаблення поля забезпечить мідний екран товщиною 2 мм, коли частота випромінювання складає 100 МГц.

Відповідь: 300 раз.

5.3.7 Розрахувати товщину шару срібного покриття електромагнітного екрана, який забезпечить ослаблення поля на 60 дБ на частоті 3 ГГц.

Відповідь: $0,83 \cdot 10^{-6} \text{ м}$.

5.3.8 Вибрати матеріал і розрахувати товщину електромагнітного екрана, який забезпечить ослаблення потоку потужності електромагнітного поля на 40 дБ, коли довжина хвилі дорівнює 3 см.

Відповідь: срібло; $0,31 \cdot 10^{-6} \text{ м}$.

6 ВІДБИТТЯ ТА ЗАЛОМЛЕННЯ ПЛОСКИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

6.1. Короткі теоретичні відомості

При поширенні плоскої електромагнітної хвилі в просторі, який являє собою ділянки з різними значеннями параметрів $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ і границями розділу у вигляді площин, виникають відбиття і заломлення хвилі. Комплексні амплітуди цих хвиль пов'язані з комплексною амплітудою падаючої хвилі коефіцієнтом відбиття

$$\dot{R} = \dot{E}_{ms} / \dot{E}_{mn}$$

і коефіцієнтом заломлення (проходження)

$$\dot{T} = \dot{E}_{m3} / \dot{E}_{mn}.$$

Ці коефіцієнти у кожному конкретному випадку можуть бути знайдені на підставі граничних умов на площинах, які розділяють середовища з різними значеннями електродинамічних параметрів.

Якщо вектор Пойнтинга падаючої хвилі перпендикулярний до границі розділу, то

$$\dot{R} = \frac{\dot{Z}_{c2} - \dot{Z}_{c1}}{\dot{Z}_{c2} + \dot{Z}_{c1}},$$

$$\dot{T} = \frac{2\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c2} + \dot{Z}_{c1}},$$

де Z_{c1} і Z_{c2} - характеристичні (хвильові) опори першого і другого середовищ, відповідно. При похилому падінні напрямки поширень хвиль відносно границі розділу задаються кутами, які вимірюються відносно нормалі до цієї границі. З граничних умов випливає, що кути падіння φ , відбиття φ_v і заломлення φ_3 зв'язані законами Снелліуса:

$$\varphi = \varphi_v,$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_3} = \sqrt{\frac{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}}{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}}}.$$

Коефіцієнти відбиття R і заломлення T для заданого значення кута падіння залежать від орієнтації векторів електромагнітного поля відносно площини падіння. Якщо вектор E лежить у цій площині, то

$$R_{11} = \frac{z_{c2} \cos \varphi_3 - z_{c1} \cos \varphi}{z_{c2} \cos \varphi_3 + z_{c1} \cos \varphi},$$

$$T_{11} = \frac{2z_{c2} \cos \varphi}{z_{c2} \cos \varphi_3 + z_{c1} \cos \varphi}.$$

Якщо вектор E перпендикулярний площині падіння, то коефіцієнти відбиття і заломлення дорівнюють:

$$R_{\perp} = \frac{z_{c2} \cos \varphi - z_{c1} \cos \varphi_3}{z_{c2} \cos \varphi + z_{c1} \cos \varphi_3},$$

$$T_{\perp} = \frac{2z_{c2} \cos \varphi}{z_{c2} \cos \varphi + z_{c1} \cos \varphi_3}.$$

Для діелектричних середовищ, у яких $\mu=1$, коефіцієнти R і T зручно подати у більш компактній формі:

$$R_{11} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_3)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_3)},$$

$$T_{11} = \frac{2 \sin \varphi_3 \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_3) \cos(\varphi - \varphi_3)},$$

$$R_{\perp} = -\frac{\sin(\varphi - \varphi_3)}{\sin(\varphi + \varphi_3)},$$

$$T_{\perp} = \frac{\sin \varphi_3 \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_3)}.$$

З формули для R_{11} випливає, що при $\varphi + \varphi_3 = \pi/2$ коефіцієнт відбиття для плоских хвиль, вектор E яких лежить в площині падіння, дорівнює нулю і відбита хвиля на границі розділу двох середовищ не виникає. Кут падіння, при якому має місце це явище, називають кутом Брюстера. Значення кутів Брюстера для немагнітних середовищ знаходять зі співвідношення

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

У відповідності до рівняння

$$\sin \varphi_3 = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \varphi$$

при $\mu_1 \varepsilon_1 > \mu_2 \varepsilon_2$, завжди існує такий кут падіння, коли $\sin \varphi_3 = 1$, кут $\varphi_3 = \pi/2$, і заломлена хвиля спрямовується вздовж границі розділу середовищ. Такий кут падіння називається кутом повного внутрішнього відбиття $\varphi_{\text{п.в.в.}}$. Очевидно, що при усіх кутах падіння $\varphi \geq \varphi_{\text{п.в.в.}}$, заломлена хвиля буде “ковзати” вздовж границі розділу, тобто буде спостерігатися явище повного внутрішнього відбиття.

6.2 Приклади розв’язування типових задач

6.2.1 Плоска електромагнітна хвиля падає нормально з вакууму на границю розділу з середовищем, яке має параметри $\varepsilon = 16$, $\mu = 1$, $\sigma = 10^{-3}$ СМ/М.

Визначити комплексні коефіцієнти відбиття $\dot{R}$ і заломлення $\dot{T}$ на частоті 100 МГц. Вважаючи, що амплітуда напруженості електричного поля падаючої хвилі на площині $Z=0$ (границя розділу) дорівнює 10 В/м, записати вираз для миттєвого значення напруженості електричного поля відбитої хвилі.

Розв’язання. Враховуючи, що $\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a(1 - j \operatorname{tg} \delta)$ з виразу для $\dot{R}$ отримаємо:

$$\dot{R} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta}}{1 + \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta}}.$$

Обчислення зручніше провести, використовуючи наближений вираз для кореня квадратного

$$\sqrt{1-jtg\delta} \approx 1-0.5jtg\delta, \\ tg\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_\alpha} = \frac{10^{-3} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{2\pi \cdot 10^8 \cdot 16} = 0.11 \ll 1.$$

Тоді коефіцієнт відбиття

$$R = \frac{3 \cdot e^{-j0.07}}{5 \cdot e^{-j0.04}} = 0.6 \cdot 10^{-j0.03},$$

а коефіцієнт заломлення

$$\dot{T} = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{1-jtg\delta}} = \frac{2}{5 \cdot e^{-j0.04}} = 0.4 \cdot e^{j0.04}.$$

З урахуванням отриманого виразу для $\dot{R}$ комплексна амплітуда напруженості електричного поля відбитої хвилі дорівнює $E_{mv} = \dot{R} \cdot \dot{E}_{mn} = 6 \cdot e^{-j0.03}$. Переходячи від комплексних амплітуд до миттєвих значень, знаходимо $E_v = 6 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^8 t - 0.03 + \beta \cdot z)$.

6.2.2 Плоска електромагнітна хвиля з частотою 10^8 Гц падає нормально на мідну поверхню з електричною провідністю $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$ См/м.

Визначити потужність втрат на площині в $S = 1$ м², обумовлену властивістю металу.

Розв'язання. Для цього скористаємося формулою:

$$P_{сep} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{E}_m \dot{H}_m^*].$$

Застосовуємо граничні умови Леонтовича-Щиріна, відповідно до яких

$$P_{сep} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{\left[\dot{E}_\tau \cdot \dot{E}_\tau^* \right]}{Z_M} \right\} = \frac{|\dot{E}_\tau|^2}{2Z_M} \cdot \bar{n}_0,$$

де

$$Z_M = \text{Re} \{ \dot{Z}_M \} = \sqrt{\frac{\omega \mu_\alpha}{2\sigma}}.$$

Тоді для питомої потужності втрат матимемо:

$$P_{втр} = \frac{E_m^2 \cdot S}{2 \sqrt{\frac{\omega \mu_\alpha}{2\sigma}}}.$$

Підставивши числові значення, отримаємо: $P_{\text{втр}}=17,1$ Вт.

6.3 Задачі для самостійного розв'язування

6.3.1 Плоска електромагнітна хвиля падає нормально у напрямку осі OZ на границю розділу між вакуумом і ідеальним металом. Амплітуда напруженості електричного поля падаючої хвилі 0,754 В.

Визначити комплексні амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів відбитої хвилі, якщо вектор напруженості електричного поля падаючої хвилі спрямований вздовж осі OX декартової системи координат. Записати вирази для миттєвих значень напруженостей електричного і магнітного полів у вакуумі.

Відповідь:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{мв}} &= -0.754 \bar{x}_0 \text{ В / м}, \\ \dot{H}_{\text{мв}} &= 2 \cdot 10^{-3} \bar{y}_0 \text{ А / м}, \\ E(t, z) &= \bar{x}_0 1.508 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} z\right) \sin \omega t \text{ В / м}, \\ H(t, z) &= \bar{y}_0 4 \cdot 10^{-3} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} z\right) \cos \omega t \text{ А / м}.\end{aligned}$$

6.3.2 Плоска електромагнітна хвиля з частотою 100 МГц падає нормально на границю розділу між вакуумом і металом з питомою електропровідністю $\sigma=1 \cdot 10^7$ См/м та магнітною проникністю $\mu=2500$.

Визначити коефіцієнт відбиття хвилі.

Відповідь : $\dot{R} = -1 + j5.3 \cdot 10^{-3}$.

6.3.3 Плоска електромагнітна хвиля з частотою 100 МГц і середнім значенням густини потоку потужності 2 Вт/м² падає нормально з вакууму на поверхню металу з питомою електричною провідністю $\sigma=1 \cdot 10^7$ См/м і магнітною проникністю $\mu=2500$.

Визначити напруженість магнітного поля і середнє значення густини потоку потужності в металі безпосередньо біля границі розділу.

Відповідь: $2,085 \cdot 10^{-4} (1 + j) \text{ В / м}, 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ Вм / м}^2$.

6.3.4 Плоска електромагнітна хвиля, вектор напруженості електричного поля якої лежить в площині падіння, падає з вакууму на поверхню діелектрика з параметрами $\epsilon=3$, $\mu=1$, $\sigma=0$ під кутом $\varphi=60^\circ$.

Знайти співвідношення векторів Пойнтинга падаючої і заломленої хвиль. Оцінити отриманий результат з точки зору закону збереження енергії.

Відповідь: $P_{\text{зал}} = 0,58\pi$.

6.3.5 Плоска електромагнітна хвиля, вектор E якої лежить у площині падіння, падає з діелектрика з параметрами $\mu_1=1$, $\epsilon_1=16$, $\sigma_1=0$ на поверхню діелектрика з параметрами $\mu_2=1$, $\epsilon_2=1$, $\tau_2=0$.

Визначити кут Брюстера та кут повного внутрішнього відбиття.

Відповідь: 14° та $14,5^\circ$.

7 ХВИЛЕВОДИ

7.1 Короткі теоретичні відомості

Хвилевід являє собою порожнисту металеву трубку певної форми перерізу, в якій поширюється електромагнітна хвиля. Найчастіше застосовують хвилеводи прямокутного (рис. 7.1, а), круглого (рис. 7.1, б) перерізів і коаксіальні хвилеводи (рис. 7.1, в).

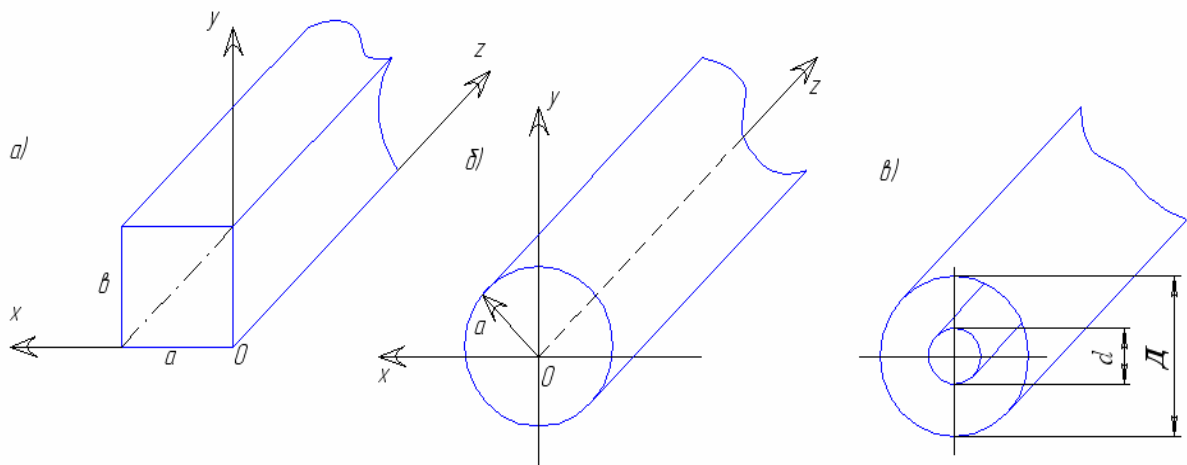


Рисунок 7.1

У хвилеводах з ідеально провідними стінками і однорідним заповненням можуть поширюватись хвилі електричного типу (E), у яких $H_z=0$, $E_z \neq 0$, і хвилі магнітного типу (H), у яких $E_z=0$, $H_z \neq 0$. В коаксіальних хвилеводах можуть також поширюватись хвилі поперечні (Т-типу), у яких $E_z = H_z = 0$.

Аналіз хвиль у прямокутних і круглих хвилеводах виконують шляхом розв'язання рівнянь Гельмгольца для складових E_z або H_z при

рівності нулю тангенціальної складової вектора електричного поля на стінках хвилеводу. Аналіз хвиль в коаксіальних хвилеводах виконують, виходячи з першого рівняння Максвелла.

Припустимо, що хвилевід заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю ϵ і магнітною проникністю $\mu=1$. Кожен конкретний тип хвилі в хвилеводі може поширюватись у тому випадку, коли

$$\lambda_{кр} > \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}},$$

де λ_0 - довжина хвилі генератора, чи у вакуумі;

$\lambda_{кр}$ - критична довжина хвилі, яка визначається розмірами і формою поперечного перерізу хвилеводу.

Для хвиль типу E_{mn} і H_{mn} в прямокутному хвилеводі

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}},$$

де a, b – розміри поперечного перерізу хвилеводу.

Для хвиль типу E_{mn} у круглому хвилеводі

$$\lambda_{кр} = 2\pi \frac{a}{\nu_{mn}},$$

де a - радіус хвилеводу,

ν_{mn} - n -й корінь рівняння, $J_m(x)=0$.

Для хвиль типу H_{mn} в круглому хвилеводі

$$\lambda_{кр} = 2\pi a / \mu_{mn},$$

де μ_{mn} – n -й корінь рівняння, $J'_m(x)=0$.

Значення коренів ν_{mn} і μ_{mn} наведені у таблицях 7.1 та 7.2.

Таблиця 7.1 - Значення коренів функцій Бесселя $J_m(x)$.

m	n			
	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,026	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	17,616
4	7,588	11,065	14,373	17,616

Таблиця 7.2 - Значення коренів похідних функцій Бесселя $J'_m(x)$

m	n		
	1	2	3
0	3,832	7,016	10,134
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,705	9,965
3	4,200	8,017	11,403
4	5,317	9,284	12,626

Для хвиль Т-типу в коаксіальному хвилеводі $\lambda_{кр}=\infty$.

Фазова швидкість хвилі в хвилеводі визначається величиною поєздовжнього хвильового числа

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2},$$

де $\varepsilon=2\pi/\lambda_0$, $g=2\pi/\lambda_{кр}$ - поперечне хвильове число.

Для знаходження фазової швидкості і довжини хвилі в хвилеводі використовується співвідношення

$$\beta_z = 2\pi/\lambda_{хв} = \omega/V_{\Phi},$$

де $\lambda_{хв}$ – довжина хвилі в хвилеводі.

Для хвиль типу E_{mn} та H_{mn} у прямокутному та круглому (циліндричному) хвилеводах фазова швидкість

$$V_{\Phi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}};$$

групова швидкість

$$V_{gp} = c \sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2};$$

довжина хвилі у хвилеводі

$$\lambda_{хв} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

Для хвилі Т- типу в коаксіальному хвилеводі

$$V_{\Phi} = V_{zp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \lambda_{XB} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Розв'язуючи рівняння Гельмгольца, можна отримати вирази для складових векторів напруженостей електричного і магнітного полів. Вирази для складових векторів напруженостей полів хвиль типу E_{mn} в прямокутному хвилеводі мають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= j \frac{zm\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{E}_y &= j \frac{zn\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{E}_z &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{H}_x &= -j\omega\varepsilon_a \frac{n\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{H}_y &= j\omega\varepsilon_a \frac{m\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{H}_z &= 0.\end{aligned}$$

Найнижчою з хвиль електричного типу є хвиля E_{11} . Вирази для складових векторів напруженостей полів хвиль типу H_{mn} в прямокутному хвилеводі мають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{H}_x &= j \frac{zm\pi}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{H}_y &= j \frac{zn\pi}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{E}_x &= j\omega\mu_a \frac{n\pi}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a \frac{m\pi}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\alpha z}, \\ \dot{E}_z &= 0.\end{aligned}$$

Основним типом хвилі в прямокутному хвилеводі при $(a > b)$ є хвиля H_{10} , для якої $\lambda_{кр}=2a$, а найближчими вищими типами – хвилі H_{20} , H_{01} , H_{11} .

Найбільше практичне значення має хвиля типу H_{10} в прямокутному хвилеводі, складові векторів поля якої описуються виразами:

$$\begin{aligned}\dot{E}_y &= E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\alpha z}, \\ \dot{H}_x &= -\frac{zm}{\omega\mu_a} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\alpha z}, \\ \dot{H}_z &= j\frac{\pi}{a} \frac{E_0}{\omega\mu_a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\alpha z}.\end{aligned}$$

Складові векторів полів хвиль типу E_{mn} в круглому хвилеводі мають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= j\frac{z}{g} E_0 J'm(gr) \cos(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{E}_\varphi &= j\frac{zm}{g^2 r} E_0 Jm(gr) \sin(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{E}_z &= E_0 Jm(gr) \cos(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{H} &= -j\frac{\omega\epsilon_a}{g^2 r} m E_0 Jm(gr) \sin(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{H}_\varphi &= -j\frac{\omega\epsilon_a}{g} E_0 J'm(gr) \cos(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{H}_z &= 0.\end{aligned}$$

Найвищою серед хвиль електричного типу в круглому хвилеводі є хвиля E_{01} , для якої $\lambda_{кр}=2\pi/\nu_{01}=2,613 a$.

Вирази для складових векторів поля хвиль H_{mn} в круглому хвилеводі мають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{H} &= -j\frac{z}{g} H_0 J'm(gr) \cos(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{H}_\varphi &= j\frac{zm}{g^2 r} H_0 Jm(gr) \sin(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{H}_z &= H_0 Jm(gr) \cos(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{E} &= j\frac{\omega\mu_a}{g^2 r} m H_0 Jm(gr) \sin(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{E}_\varphi &= j\frac{\omega\mu_a}{g} H_0 J'm(gr) \cos(m\varphi) e^{-j\alpha z}, \\ \dot{E}_z &= 0.\end{aligned}$$

Основним типом хвилі в круговому хвилеводі, яка має найбільше значення критичної довжини хвилі, є хвиля H_{11} , для якої $\lambda_{кр}=3,413 a$.

Комплексна амплітуда вектора $\dot{E}_{mc}$ біжучої хвилі у коаксіальному хвилеводі без втрат має вигляд:

$$\dot{E}_{mr} = \frac{\dot{U}_m}{\lg\left(\frac{D}{d}\right)} e^{-j\alpha z},$$

де $\dot{U}_m$ – комплексна амплітуда напруги між внутрішнім і зовнішнім провідниками в перерізі $Z=0$.

Характеристичним опором $Z_{xв}$ хвилеводу називається відношення поперечних складових векторів E і H . Для хвиль електричного типу

$$Z_{xв}^e = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2},$$

для хвиль магнітного типу

$$Z_{xв}^m = Z_c / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2},$$

де Z_c – характеристичний опір плоскої хвилі у середовищі, яке заповнює порожнину хвилеводу.

Характеристичний (хвильовий) опір коаксіального хвилеводу з хвилею Т-типу визначається виразом

$$Z_{xв}^T = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\left(\frac{D}{d}\right) = 138 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \lg\left(\frac{D}{d}\right).$$

В техніці НВЧ почали широко застосовуватися спрямовуючі системи, що називаються смужковими хвилеводами або смужковими лініями передачі, які особливо зручні в друкованих і інтегральних схемах НВЧ. Найбільше застосування мають несиметричні смужкові лінії передачі.

Строга теорія смужкових ліній дуже складна. В таких лініях передач з діелектричною основою хвилі Т-типу не можуть поширюватись. Однак теорія і практика показують, що поля і потік потужності зосереджуються, головним чином, в діелектрику між провідником смужкової лінії і заземленою пластиною. Тому можна зробити припущення про однорідність діелектрика, який заповнює всю лінію передачі.

Для практичних розрахунків зручні такі наближені співвідношення, які добре узгоджуються з експериментальними даними.

Погонні ємності (Ф/м) розраховують за формулами:

$$C_I = 1,06^{-11} \cdot \varepsilon (1 + v/d), \text{ коли } t/d \gg 1, \quad v/d < 0.6,$$

$$C_I = 1,06^{-11} \cdot \varepsilon (1 + v/d) / (1 - t/d), \text{ коли } v/d < 2,$$

$$C_I = 1,06^{-11} \cdot \varepsilon [(1 + v/d)(1 - t/d)], \text{ коли } v/d > 2.$$

Хвильовий опір з урахуванням товщини провідника смужкової лінії t розраховують за формулами:

$$Z_{xв} = \frac{\sqrt{\mu}}{\varepsilon} \frac{314}{1 + v/d} \left(1 - \frac{t}{d}\right), \text{ коли } \frac{v}{d} < 2,$$

$$Z_{xв} = 314 \frac{\sqrt{\mu}}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \frac{B}{d} \left(1 - \frac{t}{d}\right)}, \text{ коли } \frac{v}{d} > 2.$$

Хвильовий опір без урахування товщини провідника визначається співвідношенням:

$$Z_{xв} = \frac{\sqrt{\mu}}{\varepsilon} \frac{314}{1 + \frac{v}{d}}.$$

7.2 Приклади розв'язування задач

7.2.1 Які типи хвиль можуть поширюватись у круговому хвилеводі діаметром 4 см, заповненому діелектриком з відносною проникністю $\varepsilon = 2,25$? Частота коливань 10 ГГц.

Розв'язання. В даному хвилеводі можуть поширюватись лише ті типи хвиль, для яких виконується умова $\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}} < \lambda_{кр}$, де $\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon}}$ - довжина хвилі в

однорідному діелектрику. У нашому випадку $\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}} = 2 \text{ см}$. Критична довжина

хвилі у круглому хвилеводі дорівнює $2\pi a / \nu_{mn}$ для хвиль типу E_{mn} і $2\pi a / \mu_{mn}$ для хвиль типу H_{mn} . Отже, для типів хвиль, які поширюються, повинні

виконуватися умови $\frac{2\pi a}{\sqrt{\varepsilon} \cdot \lambda_0} > \nu_{mn}$, $\frac{2\pi a}{\sqrt{\varepsilon} \cdot \lambda_0} > \mu_{mn}$, $\frac{2\pi a}{\sqrt{\varepsilon} \cdot \lambda_0} = 4.187$, такі умови

задовольняють (див. табл. 7.1 і 7.2) типи хвиль E_{01} , E_{11} , H_{01} , H_{11} , H_{21} .

7.2.2 В прямокутному хвилеводі перетином 3х4 см поширюється хвиля типу E_{11} . Хвилевід заповнений пінополістиролом з діелектричною проникністю $\varepsilon = 1,21$. Частота коливань 8 ГГц.

Визначити фазову швидкість і довжину хвилі в хвилеводі.

Розв'язання. Знайдемо критичну довжину хвилі для коливання типу H_{11} в прямокутному хвилеводі:

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2}} = 4.8 \text{ см.}$$

Довжина хвилі генератора $\lambda_0 = c/f = 3,75 \text{ см.}$

Фазова швидкість у хвилеводі

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = 3.89 \times 10^8 \text{ м/с.}$$

Довжина хвилі в хвилеводі

$$\lambda_{хв} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = 4,87 \text{ см.}$$

7.2.3 При якому діаметрі круглого хвилеводу в ньому може поширюватись тільки один основний тип хвилі на частоті коливань 8 ГГц.

Розв'язання. Спочатку знайдемо довжину хвилі генератора $\lambda_0 = c/f = 3.75 \text{ см.}$ Основним типом кругового хвилеводу є хвиля H_{11} , критична довжина якої (див. табл. 7.1.)

$$\lambda_{кр}^{H_{11}} = \frac{2\pi a}{\mu_{11}} = \frac{2\pi a}{1.832} = 3.413a,$$

звідки отримуємо умову існування хвилі типу H_{11} : $\lambda_0 < 3.413a$; $a > 1,10 \text{ см.}$

Найближчим вищим типом хвилі у круглому хвилеводі є хвиля E_{01} , критична довжина якої

$$\lambda_{кр}^{E_{01}} = \frac{2\pi a}{V_{01}} = \frac{2\pi a}{2.405} = 2.613a.$$

Щоб ця хвиля не могла поширюватись, повинна виконуватись нерівність $\lambda_0 \geq 2.316a$, $a \leq \lambda_0/2.613 = 1,44 \text{ см.}$

Отже, діаметр хвилеводу повинен лежати у межах $2,20 \text{ см} < d < 2.88 \text{ см.}$

7.2.4 Розрахувати співвідношення між зовнішнім і внутрішнім діаметрами коаксіального кабелю з хвилею Т-типу, заповненого діелектриком з діелектричною проникністю $\varepsilon = 2,25$, якщо хвильовий опір кабелю дорівнює 75 Ом.

Розв'язання. Хвильовий опір коаксіального хвилеводу, заповненого діелектриком з параметрами μ , ε , визначається

$$Z_{\text{хв}} = 128 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \lg\left(\frac{D}{d}\right)}.$$

Звідси

$$\lg\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{Z_{\text{вх}}}{138} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{75 \cdot 1,5}{138} = 0,82,$$

або $D/d = 10^{0,82} = 6,6$.

7.2.5 Розрахувати хвильовий опір, погонні ємність і індуктивність несиметричної смужкової лінії передачі з повітряним заповненням. Параметри лінії $b=5$ мм, $d=1$ мм, $t=0.025$ мм.

Розв'язання. Смужкова лінія заповнена повітрям, для якого $\mu=1$, $\varepsilon=1$.

Тому хвильовий опір, коли $\frac{b}{d} > 2$, дорівнюватиме:

$$Z_{\text{хв}} = \frac{314 \sqrt{\mu}}{\varepsilon \left[1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{1-t/d} \right) \right]} = 51,24 \text{ Ом}.$$

Оскільки $\frac{t}{d} = 0,025 \ll 1$, то хвильовий опір можна визначити за формулою:

$$Z_{\text{хв}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\varepsilon} \frac{314}{1+b/d} = 52,33 \text{ Ом}.$$

Похибка при цьому, як бачимо, не перевищує 2,5%.

Погонна ємність $C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1-b/d) = 63,6$ пФ/м.

Погонну індуктивність знаходимо з формули

$$Z_{\text{вх}} = \sqrt{\frac{L}{C_1}},$$

$$L = Z_{\text{вх}} \cdot C_1 = 0,173 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}.$$

7.3 Задачі для самостійного розв'язування

7.3.1 Прямокутний хвилевід перерізом 23×10 мм заповнений діелектриком з відносною проникністю $\varepsilon=1,21$. Частота коливань 10 ГГц.

Визначити величини $V_{\text{ф}}$, $\lambda_{\text{хв}}$.

Відповідь: $3,41 \cdot 10^8$ м/с; $3,41$ см.

7.3.2 Визначити діапазон частот, в межах якого у круглому хвилеводі діаметром 5 см може поширюватись тільки основний тип хвилі.

Відповідь: $4,58...5,44$ ГГц.

7.3.3 В круглому хвилеводі діаметром 3 см, заповненому діелектриком, поширюється хвиля типу H_{11} . Частота коливань 4 ГГц.

Визначити діелектричну проникність речовини, яка заповнює хвилевод, якщо фазова швидкість хвилі дорівнює швидкості світла у вільному просторі.

Відповідь: $\varepsilon=3,13$.

7.3.4 Визначити характеристичний опір хвилі основного типу в прямокутному хвилеводі перерізом 23×10 мм при частотах коливань 7,5; 10 і 12,5 ГГц.

Відповідь: 754 Ом; 496 Ом; 443 Ом.

7.3.5 В круглому хвилеводі поширюється хвиля типу E_{01} . Частота коливань 10 Гц, довжина хвилі в хвилеводі 4 см.

Обчислити групову швидкість.

Відповідь: $2,25 \cdot 10^8$ м/с.

7.3.6 Розрахувати хвильовий опір коаксіального кабелю. Параметри кабелю: діаметр внутрішнього провідника 1,0 мм; діаметр зовнішнього – 6,5 мм; відносна проникність діелектрика $\varepsilon=2,25$.

Відповідь: $Z_{\text{хв}}=75$ Ом.

7.3.7 Визначити граничні розміри коаксіальної лінії передачі, при яких може поширюватись тільки хвиля основного типу довжиною 50 см. Хвильовий опір 75 Ом. Діелектрик – повітря.

Відповідь: $d=1.43$ см; $D=4.96$ см.

7.3.8 Визначити хвильовий опір несиметричної смужкової лінії передачі, якщо відомо, що діелектриком у ній є матеріал з діелектричною проникністю $\varepsilon=3,25$ та погонною ємністю 50 пФ/м.

Відповідь: $45,6$ Ом.

7.3.9 Визначити погонні параметри несиметричної смужкової лінії передачі, заповненої діелектриком, якщо відомо, що довжина хвилі у лінії 10 см, а хвильовий опір 40 Ом. Робоча частота 2,5 ГГц.

Відповідь: $0,52$ мкГн/м; $85,3$ пФ/м.

8 ОБ'ЄМНІ РЕЗОНАТОРИ

8.1 Короткі теоретичні відомості

Об'ємний резонатор являє собою відрізок хвильоводу певної довжини, в середині якого існують електромагнітні коливання.

Найбільше практичне застосування знаходять прямокутні (рис. 8.1, а), циліндричні (рис. 8.1, б), коаксіальні (рис. 8.1, в) і тороподібні (рис. 8.1, г) об'ємні резонатори. Усі вони, крім останнього, є, по суті, закороченими на кінцях відрізками відповідних хвильоводів.

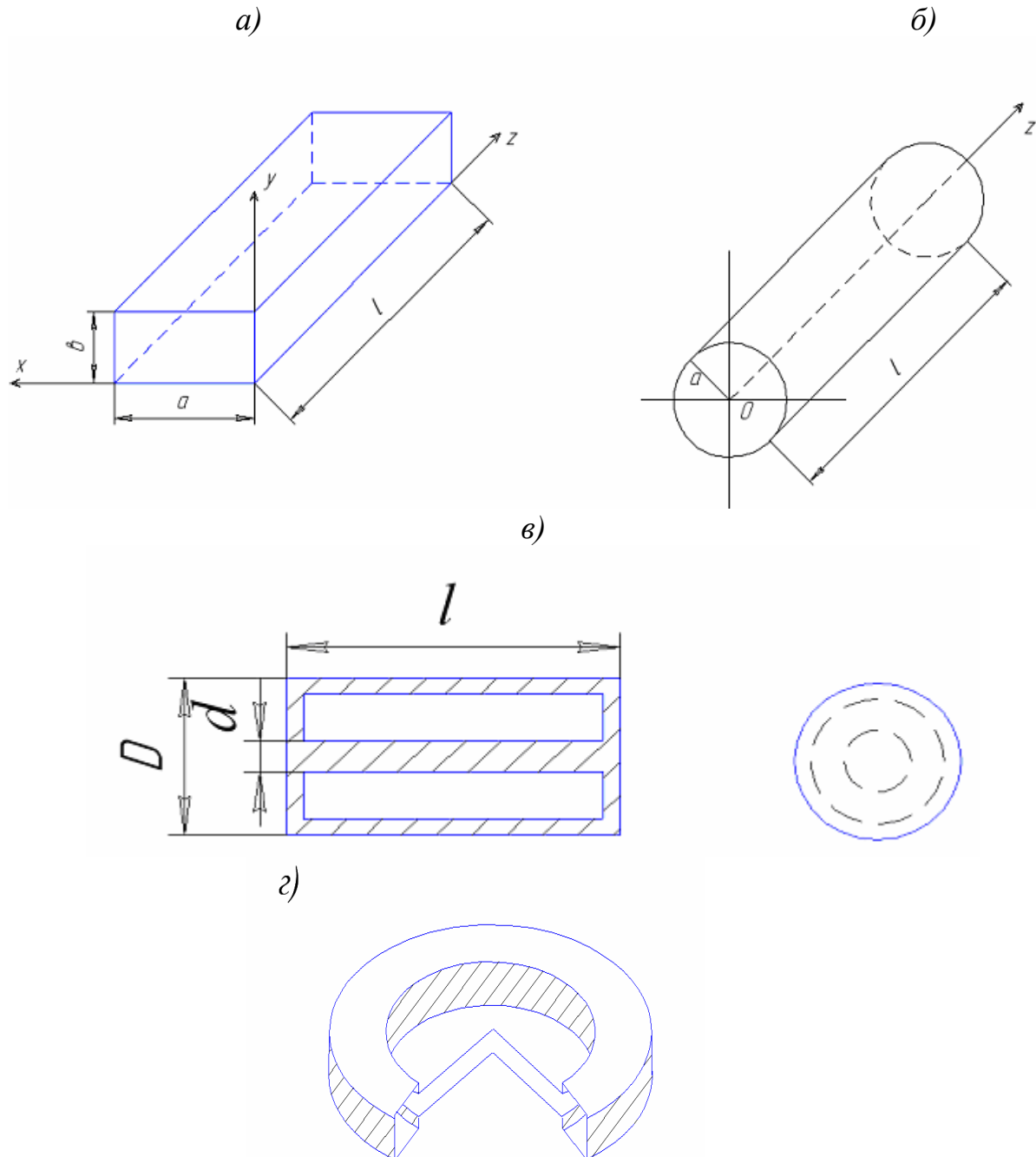


Рисунок 8.1

Прямокутний об'ємний резонатор. Резонансна частота коливань типу E_{mnp} і H_{mnp} визначається за формулою:

$$f_p = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

де a, b, l - геометричні розміри резонатора (див. рис. 8.1). Складові поля для коливань типу E_{mnp} мають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{mx} &= -E_{ox} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_{my} &= -E_{oy} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_{mz} &= E_{oz} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_{mx} &= -jH_{ox} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_{my} &= jH_{oy} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_{mz} &= 0.\end{aligned}$$

Складові поля коливань типу H_{mnp} :

$$\begin{aligned}\dot{H}_{mx} &= -H_{ox} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_{my} &= H_{oy} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_{mz} &= H_{oz} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_{mx} &= jE_{ox} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_{my} &= -jE_{oy} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_{mz} &= 0.\end{aligned}$$

Індекси m, n, p означають число півхвиль поля у резонаторі по осях x, y, z , відповідно.

Основним типом коливань у резонаторі є тип хвилі, яка має найбільше значення резонансної довжини хвилі. Наприклад, при $b < a$ і

$b < l$ основним типом коливань є H_{101} , складові поля якого описуються виразами

$$\begin{aligned}\dot{E}_{my} &= -jE_{oy} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_{mx} &= -H_{ox} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_{mz} &= H_{oz} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l}z\right).\end{aligned}$$

Для циліндричного об'ємного резонатора, резонансна частота коливань типу H_{mnp}

$$f_p = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

де μ_{mn} - n -й корінь рівняння $J'_m(x) = 0$.

Складові векторів поля коливань типу H в циліндричному резонаторі:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{mr} &= jE_{or} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a}r\right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_{m\varphi} &= jE_{o\varphi} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a}r\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_{mz} &= 0, \\ \dot{H}_{mr} &= H_{or} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a}r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_{m\varphi} &= -H_{o\varphi} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a}r\right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_{mz} &= H_{oz} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a}r\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right).\end{aligned}$$

Основним коливанням типу H у циліндричному резонаторі є H_{111} . Резонансна частота коливань типу E_{mnp}

$$f_p = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

де ν_{mn} - n -й корінь функції Бесселя $J_m(x)$.

Складові векторів поля коливань типу E у циліндричному резонаторі описуються виразами:

$$\begin{aligned}
\dot{H}_{mr} &= -jH_{or}J_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a}r\right)\sin(m\varphi)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\
\dot{H}_{m\varphi} &= -jH_{o\varphi}J'_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a}r\right)\cos(m\varphi)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\
\dot{H}_{mz} &= 0, \\
\dot{E}_{mr} &= -E_{or}J'_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a}r\right)\cos(m\varphi)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\
\dot{E}_{m\varphi} &= E_{o\varphi}J_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a}r\right)\sin(m\varphi)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\
\dot{E}_{mz} &= E_{oz}J'_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a}r\right)\cos(m\varphi)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right).
\end{aligned}$$

Основним коливанням типу E в циліндричному резонаторі є E_{010} , особливістю якого є те, що його резонансна частота не залежить від довжини резонатора.

У загальному випадку, коли резонатор є закороченим з обох кінців відрізком довільного хвилеводу, резонансну довжину хвилі визначають з умови

$$l = p \frac{\lambda_{x6}}{2},$$

де p - ціле число (повздовжній індекс),

λ_{x6} - довжина хвилі в хвилеводі (лінії передачі).

Зокрема, для основного коливання типу T_1 об'ємного коаксіального резонатора, який є закороченим з обох кінців відрізком коаксіальної лінії передачі, резонансна частота

$$f_p = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}l}.$$

У діапазоні дециметрових хвиль застосовуються коаксіальні резонатори, навантажені на конденсатор (рис 8.2).

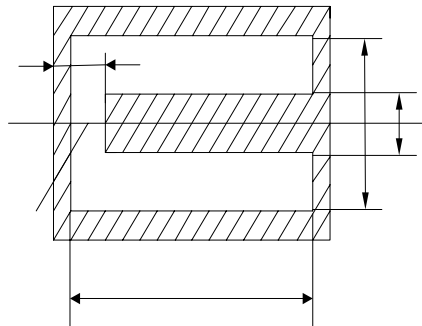


Рисунок 8.2

Резонансні частоти таких резонаторів визначають з розв'язку рівняння

$$Z_{\text{хв}}\left(\frac{2\pi f_p l}{c}\right) = \frac{1}{2\pi f_p \cdot c_H},$$

де $Z_{\text{хв}}$ – хвильовий опір коаксіальної лінії передачі;

c – швидкість світла;

c_H – ємність конденсатора, на який навантажена лінія.

Енергія, що запасається в об'ємному резонаторі будь-якого типу, визначається за теоремою Пойнтинга

$$W = \int_V \epsilon_a \frac{E_m^2}{2} dV = \int_V \mu_a \frac{H_m^2}{2} dV,$$

де E_m і H_m - амплітудні значення напруженості електричного і магнітного полів; інтегрування ведеться за об'ємом резонатора V .

Зокрема, для коливань типів $H_{101}, H_{011}, H_{110}$ в прямокутному об'ємному резонаторі

$$W = \frac{1}{8} \epsilon_a E_{\text{max}}^2 a d l,$$

де E_{max} - максимальна амплітуда напруженості електричного поля в резонаторі.

У циліндричному об'ємному резонаторі енергію обчислюють за такими формулами:

- для коливань типу E_{010}

$$W = 0.423 \epsilon_a E_{\text{max}}^2 a^2 l,$$

- для коливань типу E_{011}

$$W = \frac{\epsilon_a l a^2}{4} \left[\frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{V_{01}}{a}\right)^2}{\left(\frac{V_{01}}{a}\right)^2} \right] E_{\text{max}}^2,$$

- для коливань типу H_{011}

$$W = 0.316 \epsilon_a E_{\text{max}}^2 a^2 l,$$

- для коливань типу H_{111}

$$W = 0.749 \varepsilon_a E_{\max}^2 a^2 l.$$

Добротність об'ємного резонатора визначають як відношення енергії електромагнітного поля, яка запасється в резонаторі, до енергії, яка губиться за один період власних коливань.

$$Q = \frac{\omega_p \int_V \mu_a |H|^2 dV}{R_s \oint_s |H|^2 ds}.$$

Для коливань типу H_{101} у прямокутному резонаторі

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a}{2R_s} \frac{abl(a^2 + l^2)}{a^3(l + 2b) + l^3(a + 2b)}.$$

Добротність найважливіших типів коливань у циліндричному резонаторі розраховують за формулами:

- для коливань типу E_{010}

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a}{2R_s} \frac{al}{a + l},$$

- для коливань типу E_{011}

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a}{2R_s} \frac{al}{2a + l},$$

- для коливань типу H_{011}

$$Q = \frac{\pi f_p \mu_a}{R_s} \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a \mu_a l_a^2}{\mu_a^2 \frac{l}{a} + \pi^2 \frac{a^2}{l^2}},$$

- для коливань типу H_{111}

$$Q = \frac{\pi f_p \mu_a}{R_s} \frac{\lambda_p (1 - \frac{l}{\mu_{11}})^2 \left[\mu_{11}^2 + (\frac{\pi a}{l \mu_{11}})^2 \right]^{1/2}}{2\pi \left[\mu_{11}^2 + (\frac{\pi a}{l})^2 + (1 - \frac{2a}{l})(\frac{\pi a}{l \mu_{11}})^2 \right]}.$$

У наведених формулах враховані лише втрати у металевих стінках резонаторів. Якщо резонатор заповнений діелектриком з втратами, то підсумкова добротність

$$Q = \frac{1}{1/Q_M + \operatorname{tg} \delta},$$

де Q_M - добротність резонатора, який має лише втрати в металевих стінках ;
 $\operatorname{tg} \delta$ - тангенс кута втрат речовини, яка заповнює резонатор.

8.2 Приклади розв'язування типових задач

8.2.1 Прямокутний об'ємний резонатор має такі розміри $a = 20_{\text{мм}}, b = 30_{\text{мм}}, l = 50_{\text{мм}}$.

Визначити резонансні частоти трьох нижчих типів коливань.

Розв'язання. В прямокутному резонаторі нижчими можуть бути коливання типів H_{101}, H_{011} і E_{010} , у яких один з індексів дорівнює 0, а два інших – одиниці. Визначимо резонансну довжину хвилі цих типів коливань.

Запишемо формулу для резонансної частоти:

$$f_p = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2},$$

де $c = 3.8 \cdot 10^8$ м/с - швидкість світла у вакуумі.

Підставивши числові дані, знайдемо резонансні частоти для вказаних типів коливань, а саме:

для H_{101} $f_p = 8.1 \cdot 10^9$ Гц ,

для H_{011} $f_p = 5.9 \cdot 10^9$ Гц ,

для E_{010} $f_p = 9 \cdot 10^9$ Гц .

Таким чином, основним є коливання H_{011} , у якого значення f_p найменше, за ним коливання H_{101} та E_{010} .

8.2.2 Визначити резонансну частоту та власну добротність прямокутного резонатора з розмірами $a = 35$ мм, $b = 15$ мм, $l = 30$ мм, матеріал – латунь, коливання типу H_{101} .

Розв'язання. Визначимо резонансну частоту для типу коливання H_{101} за допомогою формули для резонансної частоти

$$f_p = \frac{C}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2},$$

де $C = 3,8 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ - швидкість світла у вакуумі.

Підставивши числові дані, знайдемо резонансну частоту для коливання типу H_{101} : $f_p = 8,6 \cdot 10^9 \text{ Гц}$.

Для визначення власної добротності резонатора скористаємося співвідношенням:

$$Q = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{a \cdot b \cdot l \cdot (b^2 + a^2)}{2b \cdot (a^3 + b^3) + a \cdot b \cdot (a^2 + b^2)},$$

де δ - товщина скін-шару.

Товщина скін-шару визначається за допомогою співвідношення

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_a \cdot \sigma}},$$

де σ - питома провідність стінок резонатора.

Для латуні $\sigma = 5,65 \cdot 10^7 \frac{\text{сим}}{\text{м}}$, $\mu_a = \mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$.

Підставивши числові дані, знайдемо власну добротність резонатора:
 $Q = 6500$.

8.2.3 Визначити резонансну частоту та добротність прохідного резонатора, виконаного на хвилеводі з розмірами: $a = 23 \text{ мм}$, $b = 10 \text{ мм}$, відстань між неоднорідностями $l = 5 \text{ см}$, коефіцієнт відбиття від неоднорідності $|\Gamma| = 0,6$, фаза коефіцієнта відбиття $\varphi_\Gamma = 170^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи умови резонансу, запишемо співвідношення для визначення відстані між неоднорідностями, з якого знайдемо довжину хвилі в хвилеводі при резонансі:

$$l = p \frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi_\Gamma}{2\pi} \cdot \lambda, \quad \lambda = \frac{l}{\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\Gamma}{2\pi}}.$$

Далі знайдемо резонансну довжину хвилі резонатора $\lambda_{\text{рез}}$ та резонансну частоту $f_{\text{рез}}$. Довжина хвилі в хвилеводі при резонансі пов'язана з резонансною довжиною хвилі таким співвідношенням:

$$\lambda = \frac{\lambda_{\text{рез}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{\text{рез}}}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}.$$

Після перетворення отримаємо:

$$\lambda_{рез} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad f_{рез} = c / \lambda_{рез}.$$

Запишемо формулу для визначення добротності прохідного резонатора:

$$Q = \frac{|\Gamma|}{1 - |\Gamma|^2} \cdot \frac{\beta \cdot l}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2},$$

де $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ - фазова постійна.

Підставивши числові дані, знайдемо резонансну частоту та добротність резонатора: $f_{рез} = 8,6$ ГГц, $Q = 775$.

8.2.4 Циліндричний резонатор діаметром 5см і довжиною 5см заповнений діелектриком з параметрами $\varepsilon = 2,25$, $tg\delta = 2 \cdot 10^{-4}$. Матеріал стінок – мідь.

Який тип коливань є основним? Знайти резонансну частоту, добротність і смугу пропускання резонатора на цьому типі коливань.

Розв'язання. Основним коливанням типу E в циліндричному резонаторі є E_{010} з резонансною частотою

$$f_p' = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{2,405}{a}\right)^2}.$$

Основним коливанням типу H є H_{111} з резонансною частотою

$$f_p'' = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{1,841}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}.$$

Не важко переконатися, що

$$\left(\frac{2,405}{2,5}\right)^2 < \left(\frac{1,841}{2,5}\right)^2 + \left(\frac{3,14}{5}\right)^2.$$

А тому основним є коливання типу E_{010} , для якого

$$f_p = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \frac{2,405}{2,5} = 3,06 \cdot 10^9 \text{ Гц}.$$

Добротність резонатора $Q=3250$. Смуга пропускання $2\Delta f = f_p / Q = 9,4 \cdot 10^5 \text{ Гц}$.

8.2.5 Визначити граничну енергію, яка може бути накопичена в коаксіальному резонаторі з розмірами $d = 10 \text{ мм}$, $D = 40 \text{ мм}$, $l = 80 \text{ мм}$ на основному типі коливань. Максимально допустима напруженість електричного поля 30 кВ/см .

Розв'язання. Електричне поле основної хвилі в коаксіальному резонаторі має тільки радіальну складову

$$E_r = \frac{k}{r} \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right),$$

де k - деякий коефіцієнт.

Енергію, яка запасасться в резонаторі, знаходимо з виразу

$$W = \frac{\pi \epsilon \alpha c^2 l}{2} \ln\left(\frac{D}{d}\right).$$

Максимальна концентрація електричного поля існує всередині резонатора на поверхні внутрішнього провідника, тобто при $r = d/2$. Її значення дорівнює

$$E_{\text{дон}} = \frac{2k}{d},$$

звідки

$$k = E_{\text{дон}} \frac{d}{2}.$$

Підставимо це значення у формулу для енергії:

$$W = \frac{\pi}{8} \epsilon \alpha E_{\text{дон}}^2 d^2 l \ln\left(\frac{D}{d}\right),$$

або після числових підстановок: $W = 0,3466 \cdot 10^4 \text{ Дж}$.

8.3 Задачі для самостійного розв'язування

8.3.1 Визначити резонансні частоти коливань типів E_{010} і H_{111} у циліндричному резонаторі, діаметр і довжина якого однакові і дорівнюють 6 см .

Відповідь: $3,8 \cdot 10^9 \text{ ГГц}$ і $5,8 \cdot 10^9 \text{ ГГц}$.

8.3.2 Об'ємний резонатор утворений відрізком прямокутного хвилеводу перерізом $23 \cdot 10 \text{ мм}$, в середині якого переміщується поршень.

Визначити границі переміщення поршня для перестроювання резонатора в межах $7,5\text{--}1,5 \text{ ГГц}$. Тип коливань H_{101} .

Відповідь: $8,2 \text{ мм} < l < 40,5 \text{ мм}$.

8.3.3 Визначити резонансну частоту коаксіального резонатора, розріз якого зображено на рис. 8.2. Розміри резонатора: $D = 40 \text{ мм}$, $d = 10 \text{ мм}$, $l = 100 \text{ мм}$, $h = 1,5 \text{ мм}$. Вказівка: розрахунок ємності C вести за наближеною формулою для плоского конденсатора.

Відповідь: 713 МГц .

8.3.4 Прямокутний об'ємний резонатор з розмірами $a = 3 \text{ см}$, $b = 2 \text{ см}$, $l = 5 \text{ см}$ працює на основному типі коливань. Стінки резонатора посріблені, резонатор заповнений діелектриком з параметрами $\varepsilon = 2,5$, $\text{tg} = 5 \cdot 10^{-4}$.

Визначити резонансну частоту і добротність резонатора. Яка буде добротність резонатора при відсутності втрат в діелектрику?

Відповідь: $3,125 \text{ ГГц}$, 1984 , 12180 .

8.3.5 Визначити резонансну частоту і добротність циліндричного об'ємного резонатора з коливанням типу H_{011} . Діаметр і довжина резонатора 6 см , провідність матеріалу стінок $5,7 \cdot 10^7 \text{ см/м}$.

Відповідь: $7,91 \text{ ГГц}$; 35330 .

9 ЕЛЕМЕНТАРНІ ВИПРОМІНЮВАЧІ

9.1 Короткі теоретичні відомості

Елементарним електричним випромінювачем називається відрізок провідника, по якому протікає змінний електричний струм $I_{cm,el}$, причому довжина провідника l значно менша довжини хвилі у вакуумі (рис. 9.1).

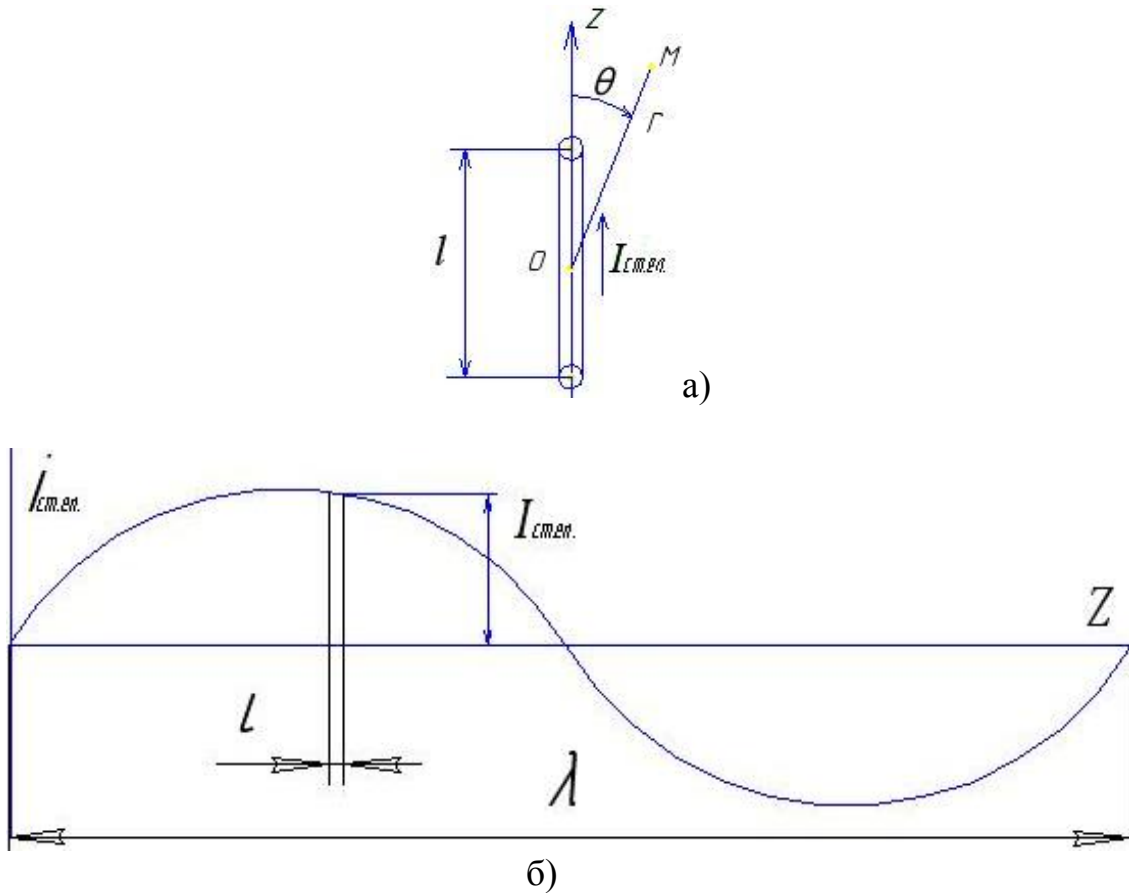


Рисунок 9.1

Поле такого випромінювача, розташованого на початку координат, описується рівняннями:

$$\begin{aligned} H_{\varphi}^* &= \frac{I_{cm,el} l}{4\pi r^2} (1 + jkr) e^{-jkr} \sin \theta, \\ H_r^* &= \frac{I_{cm,el} l}{j2\pi\omega\epsilon_0 r^3} (1 + jkr) e^{-jkr} \cos \theta, \\ H_{\theta}^* &= \frac{I_{cm,el} L}{j4\pi\omega\epsilon_0 r^3} (1 + jkr - k^2 r^2) e^{-jkr} \sin \theta. \end{aligned}$$

У далекій зоні (зоні випромінювання), коли $\lambda \gg r$, маємо:

$$H_{\varphi}^* = j \frac{I_{cm.ел} l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta,$$

$$E_{\theta}^* = j \frac{I_{cm.ел} l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} e^{-jkr} \sin \theta.$$

У цій зоні поле носить локально-плоский характер, причому

$$\dot{E}_{\theta} / \dot{H}_{\varphi} = Z_c,$$

діаграма спрямованості по полю визначається виразом:

$$f(\theta) = \sin \theta.$$

Потужність випромінювання P_{Σ} знаходимо інтегруванням середнього значення вектора Пойнтинга $\Pi_{сер}$ по довільній поверхні S , яка охоплює випромінювач:

$$P_{\Sigma} = \oint_S \Pi_{сер} ds,$$

де

$$\Pi_{сер} = \frac{1}{2} R_e \begin{bmatrix} \dot{E} & H^* \end{bmatrix}.$$

Для елементарного електричного випромінювача

$$P_{\Sigma} = \frac{\pi Z_c (I_{cm.ел} l)^2}{3\lambda^2},$$

або

$$P_{\Sigma} = \frac{(I_{cm.ел} l)^2}{2} R_{\Sigma}$$

як потужність, що втрачається на фіктивному опорі R_{Σ} , який називається опором випромінювання:

$$R_{\Sigma} = \frac{2\pi}{3} Z_{сер} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Для вакууму $Z_{сер} = Z_0 = 120\pi \text{ Ом}$, звідки:

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Елементарний магнітний випромінювач – це магнітний „провідник” довжиною $l \ll \lambda$, по якому протікає фіктивний магнітний струм $I_{ст.м}$. До цього класу можуть бути віднесені рамковий і щілинний випромінювачі.

Вирази для складових поля елементарного магнітного випромінювача в далекій зоні мають вигляд:

$$E_{\varphi}^* = -j \frac{I_{ст.ел} l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta ,$$

$$H_{\theta}^* = \frac{I_{ст.ел} l}{2\lambda Z_c} e^{-jkr} \sin \theta .$$

Рамковий випромінювач являє собою невеличку дротяну петлю площею S , по якій протікає змінний електричний струм. Такий випромінювач стає елементарним, якщо периметр рамки малий порівняно з довжиною хвилі.

Якщо у попередніх виразах зробити заміну

$$I_{ст.м} l = -j\omega\mu a I_{ст.ел} S ,$$

то отримаємо вирази для складових поля рамкового випромінювача в далекій зоні:

$$E_{\varphi}^* = -\frac{I_{ст.ел} \pi S Z_c}{\lambda^2 r} e^{-jkr} \sin \theta ,$$

$$H_{\theta}^* = \frac{I_{ст.ел} \pi S}{\lambda^2 r} e^{-jkr} \sin \theta .$$

Щілинний випромінювач утворюється тонкою металевою площиною, у якій прорізана щілина довжиною $l_{щ}$ і шириною d . Щоб щілину можна було вважати елементарним випромінювачем, необхідно виконати такі умови: $l_{щ} \ll \lambda$, $d \ll 1$. Щілина може збуджуватись джерелом високочастотної напруги, яке підводиться до її країв. Таке збудження є двостороннім (щілина випромінює в обидва півпростори).

Здійснюючи у попередніх виразах підстановки

$$I_{ст.м} = 2U_{щ} \quad \text{та} \quad l = l_{щ} ,$$

отримаємо вирази для складових поля елементарного щілинного випромінювача в далекій зоні при двосторонньому збудженні:

$$E_{\varphi}^* = -j \frac{U_{щ} I_{щ}}{\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta ,$$

$$H_{\theta}^* = j \frac{U_{щ} I_{щ}}{\lambda r Z_c} e^{-jkr} \sin \theta ,$$

де $U_{щ}$ - напруга в щілині.

Діаграма спрямованості елементарного магнітного випромінювача (рамкового і щілинного) визначається виразом

$$f(\theta) = \sin \theta .$$

Потужність випромінювання P_{Σ} для щілинного випромінювача та опір випромінювання R_{Σ} визначаються за формулами:

$$P_{\Sigma} = \frac{4}{3} \pi \frac{U_{щ}}{Z_c} \left(\frac{l_{щ}}{\lambda} \right)^2 ,$$

$$R_{\Sigma} = \frac{3}{8\pi} Z_c \left(\frac{\lambda}{l_{щ}} \right)^2 .$$

Для вакууму або повітря, де $Z_c = Z_0 = 120\pi \text{ Ом}$,

$$R_{\Sigma} = 45 \left(\frac{\lambda}{l_{щ}} \right)^2 \text{ Ом} .$$

Елемент Гюйгенса являє собою випромінювач, який відповідає нескінченно малому елементу поверхні фронту плоскої електромагнітної хвилі з лінійною поляризацією.

Якщо взяти цей елемент у вигляді прямокутника (рис. 9.2), то можна зауважити, що елемент Гюйгенса еквівалентний взаємно перпендикулярним елементам електричного і магнітного поверхневих струмів, розташованих на поверхні $\Delta S = \Delta x \Delta y$ ($\Delta x \ll \lambda, \Delta y \ll \lambda$), густини котрих рівні

$$\dot{j}_{cm,el}^s = \left[\overline{Z_0} \dot{H} \right], \quad \dot{j}_{cm,m}^s = \left[\overline{Z_0} \dot{E} \right] .$$

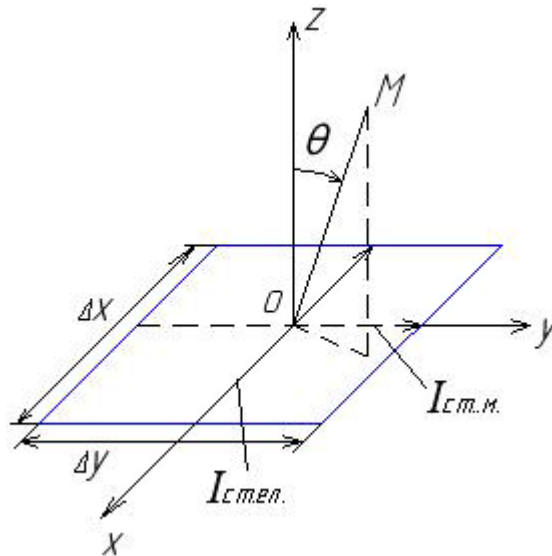


Рисунок 9.2

Поле елемента Гюйгенса в далекій зоні, записане у сферичній системі координат, має вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -j \frac{j_{ст.ел.} \Delta S Z_c}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) (\bar{\theta} e \cos \varphi - \varphi_0 \sin \varphi) e^{-jkz}, \\ \dot{H} &= -j \frac{j_{ст.ел.} \Delta S}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) (\bar{\theta} e \sin \varphi - \varphi_0 \cos \varphi) e^{-jkz}.\end{aligned}$$

Діаграма спрямованості елемента Гюйгенса в площинах $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/2$ визначається виразом:

$$F(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta).$$

9.2 Приклади розв'язування типових задач

9.2.1 На відстані 1 км максимальна амплітуда напруженості електричного поля диполя Герца дорівнює $10^{-2} B/m$.

Визначити потужність, яку випромінює диполь.

Розв'язання. З виразів для P_{Σ} і R_{Σ} елементарного електричного випромінювача маємо:

$$P_{\Sigma} = 80\pi^2 \frac{(I_{cm.ел.})^2}{2} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

З іншого боку відомо, що

$$E_{\theta} = \frac{I_{CT.EL} l}{2\lambda r} Z_C \sin \theta,$$

звідки

$$I_{cm.ел.} \frac{l}{\lambda} = 2E_{\theta} \frac{r}{Z_C \sin \theta}.$$

Максимальною напруженість поля буде при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тоді, вважаючи що $Z_C = Z_0 = 120\pi$, знаходимо:

$$P_{\Sigma} = \frac{160\pi^2 E_{\theta}^2 r^2}{Z_0^2} = \frac{160\pi^2 E_{\theta}^2 r^2}{(120\pi)^2} = \frac{160(10^{-2})^2 (10^3)^2}{120^2} = 1.11 Bm.$$

9.2.2 Квадратна рамка зі стороною 10 см створює максимальну амплітуду напруженості електричного поля $5 \cdot 10^{-4} B/m$ на відстані 1 км.

Визначити струм у рамці, якщо $\lambda = 4m$.

Розв'язання. З виразу E_{φ} для рамкового випромінювача визначаємо амплітуду струму в рамці.

$$I_{cm.ел} = \frac{E_{\varphi} \lambda^2 r}{S\pi Z_C \sin \theta}.$$

Максимальна напруженість поля буде при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тоді, вважаючи що $Z_C = Z_0 = 120\pi$, знаходимо

$$I_{cm.ел} = \frac{E_{\varphi} \lambda^2 r}{S\pi Z_C} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 4^2 \cdot 10^3}{(0.1)^2 \pi 120\pi} = 0.68 A.$$

9.2.3 Щілинний випромінювач довжиною 5 мм збуджено високочастотною напругою 1 В.

Визначити потужність і опір випромінювання щілинного вібратора, якщо довжина хвилі випромінювання дорівнює 50 мм.

Розв'язання. Використовуючи вираз для потужності випромінювання елементарного щілинного випромінювача, отримаємо:

$$P_{\varepsilon} = \frac{4}{3} \pi \frac{U_{щ}^2}{Z_C} \left(\frac{l_{щ}}{\lambda}\right)^2 = \frac{4\pi(5 \cdot 10^{-3})^2}{3120\pi(5 \cdot 10^{-2})^2} = 5.56 \cdot 10^{-8} Bm.$$

З виразу для опору випромінювання визначаємо:

$$R_{\varepsilon} = 45 \left(\frac{\lambda}{l_{\text{из}} \right)^2 = \frac{45(5 \cdot 10^{-2})^2}{(5 \cdot 10^{-3})^2} = 4500 \text{ Ом}.$$

9.3 Задачі для самостійного розв'язування

9.3.1 Визначити струм і опір випромінювання антени радіомовної станції висотою 100 м, яка працює на довжині хвилі 1700 м і випромінює потужність 1000 кВт.

Відповідь: 856 А і 2,73 Ом.

9.3.2 В електричному колі існує струм з амплітудою 5 А і частотою 50 Гц. Площа, обмежена контуром кола, дорівнює 2 м².

Яка потужність буде втрачатися цим колом на випромінювання?

Яким буде цей результат на частоті 50 МГц?

Відповідь: $1.2 \cdot 10^{-21} \text{ Вт}$, $1.2 \cdot 10^3 \text{ Вт}$.

9.3.3 Визначити напругу в щілині довжиною 5 см, якщо в точці з координатами $r = 1 \text{ км}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ напруженість електричного поля $E_{\varphi} = 10^{-4} \text{ В/м}$.

Частота коливань 10^8 Гц .

Відповідь: 6 В.

9.3.4 Визначити потужність випромінювання елементарного електричного вібратора в сферичний простір, обмежений кутами $\theta_1 = 90^\circ$ і $\theta_2 = 89^\circ$. Довжина вібратора 5 см, амплітуда струму 10 А, довжина хвилі 3 м.

Відповідь: $14.34 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}$.

9.3.5 Визначити відношення між струмом в елементарному електричному випромінювачі і напругою в щілинному випромінювачі за умови випромінювання однакової потужності. Конфігурації обох випромінювачів однакові.

Відповідь: $I_{\text{ел}} / U_{\text{щ}} = 5.3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

10 ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ

10.1 Короткі теоретичні відомості

Особливості поширення радіохвиль в конкретному середовищі визначаються властивостями цього середовища.

В електродинаміці для локального опису властивостей середовища використовують матеріальні рівняння

$$\overline{D} = (\varepsilon_\alpha)E, \quad \overline{B} = (\mu_\alpha)\overline{H}, \quad \overline{j} = (\sigma)\overline{E}.$$

Коефіцієнти (ε_α) , (μ_α) , і (τ) на загал є тензорами і можуть залежати від ряду параметрів. Характер цих залежностей покладено в основу класифікації різних середовищ. Так, якщо властивості середовища залежать від напряму прикладних полів E і H , то такі середовища називають анізотропними. Якщо коефіцієнти (ε_α) , (μ_α) , і (τ) залежать від абсолютних величин H і E , то подібні середовища є нелінійними. Розрізняють також неоднорідні середовища, в яких величини (ε_α) і (μ_α) є функціями координати вибраної точки середовища, і однорідні середовища, в яких ця залежність відсутня. Коефіцієнти (ε_α) , (μ_α) , і (τ) можуть залежати від частоти електромагнітних коливань ω . У цьому випадку середовища є дисперсійними.

Однорідні ізотропні іонізовані середовища

Іонізований газ через його особливості часто виділяють як специфічне середовище, яке називається плазмою. За складом газова плазма є сумішшю нейтральних, негативно заряджених і позитивно заряджених частинок. У цілому плазма квазінейтральна, тобто концентрація негативно заряджених частинок (електронів) у середньому дорівнює концентрації позитивно заряджених частинок (іонів).

Частинки, які складають плазму, взаємодіють як з зовнішніми електромагнітними полями, так і між собою. Взаємодія між частинками приводить до появи у плазмі різних колективних рухів (коливань), що є характерною особливістю плазми як середовища. Найпростіші коливання плазми пов'язані з кулонівською взаємодією заряджених частинок. Частота цих коливань називається власною частотою плазми ω_p . Для електронів

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n}{m \varepsilon_p}},$$

де e і m – заряд і маса електрона,

n – концентрація електронів у плазмі.

Взаємодію між двома частинками у плазмі називають зіткненням. Багато з процесів у плазмі визначаються величиною ν_{ij} - числом зіткнень на секунду зарядженої частинки сорту i з іншими частинками сорту j . У газовій плазмі найважливішою характеристикою є частота зіткнень електронів з нейтральними молекулами газу $\nu_{EM} = \nu$.

З макроскопічної точки зору плазма характеризується електродинамічними параметрами ε, μ і σ . Власний магнетизм плазми невеликий і можна з великим ступенем точності вважати, що $\mu=1$.

Якщо електричне поле змінюється з частотою ω , а зовнішнє магнітне поле відсутнє, то відносна діелектрична проникність і провідність плазми дорівнюють, відповідно,

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}, \quad \sigma = \frac{\omega_p^2 \nu \varepsilon_p}{\omega^2 + \nu^2}.$$

При $\nu \ll \omega$ ці вирази спрощуються:

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \sigma \approx \frac{\omega_p^2 \nu \varepsilon_p}{\omega^2}.$$

Узагальненою електродинамічною характеристикою середовища буде комплексна діелектрична проникність

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}.$$

Коефіцієнт поширення плоскої електромагнітної хвилі в середовищі

$$K = \frac{\omega}{c} \sqrt{\dot{\varepsilon}} = \beta - j\alpha,$$

причому

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_p}\right)^2}},$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}}.$$

Якщо активні втрати у плазмі невеликі і виконується умова $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a} \ll \varepsilon$, то

останні вирази набувають вигляду: $\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}$, $\alpha = 0$.

Іноді коефіцієнт фази β і коефіцієнт згасання α виражають через дійсну і уявну частини коефіцієнта заломлення.

$$\dot{n} = \sqrt{\dot{\varepsilon}} = n' - jn''.$$

При проходженні плоскої електромагнітної хвилі через однорідний плазмовий шар завтовшки L складові векторів електромагнітного поля зазнають ослаблення на величину

$$\Delta = 8.686 \int_0^L \beta dZ, \text{ дБ}.$$

При цьому додатковий зсув фази, викликаний наявністю плазми, складає

$$\delta_\varphi = \int_0^L \left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right) dZ, \text{ рад}.$$

10.2 Приклади розв'язування типових задач

10.2.1 Плоска електромагнітна хвиля поширюється в однорідній ізотропній газовій плазмі.

Визначити відносну діелектричну проникність і провідність плазми, якщо коефіцієнт поширення хвилі на частоті 480 МГц дорівнює $5 - j2 \text{ м}^{-1}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для α і β , виразимо дійсну і уявну частини коефіцієнта заломлення як

$$n' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}} = \frac{\beta c}{\omega},$$

та

$$n'' = \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}} = \frac{\alpha c}{\omega}.$$

Піднесемо перший та другий вираз до квадрата і віднімемо від першого отриманого виразу другий:

$$(n')^2 - (n'')^2 = \varepsilon = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 (\beta^2 - \alpha^2).$$

Обчислимо добутки

$$n'n'' = \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \cdot \alpha \cdot \beta$$

і використаємо цей вираз для знаходження провідності:

$$\sigma = 2C^2 \varepsilon_0 \alpha \beta / \omega.$$

За умовою задачі $\beta = 5, \alpha = 2$. Підставляючи ці значення до виразів для ε і σ знаходимо, що $\varepsilon = 0.2078$, $\sigma = 5.28 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}$.

10.2.2 Використовуючи рівняння неперервності, отримати вираз для власної частоти електронної плазми без урахування в ній зіткнень. При виведенні вважати, що струм у плазмі переноситься тільки електронами з зарядом e і масою m . Концентрація електронів дорівнює n .

Розв'язання. Нехай ρ – об'ємна густина заряду в плазмі. Густина струму провідності j_{np} пов'язана зі зміною об'ємної густини заряду рівнянням неперервності

$$\frac{d\rho}{dt} = -\text{div} \bar{j}_{np}.$$

Для достатньо швидкоплинних процесів, як, наприклад, у даному випадку, можна вважати, що струм переноситься тільки найбільш легкими частинками – електронами. Тому густина струму у плазмі $\bar{j}_{np} = ne\bar{V}_{сер}$, де $\bar{V}_{сер}$ – середня швидкість електронів. Рівняння руху „середнього” електрона без урахування зіткнень у плазмі має вигляд

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = -eE.$$

З урахуванням виразу для густини струму провідності його можна переписати таким чином:

$$\frac{d\bar{j}_{np}}{dt} = -\frac{e^2 n E}{m}.$$

Продиференціювавши рівняння неперервності за t і використавши останній вираз для однорідної плазми, отримаємо:

$$\text{div} \frac{d\bar{j}_{np}}{dt} = \text{div} -\frac{e^2 n E}{m} = \frac{e^2 n}{m} \text{div} E = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Враховуючи закон Гаусса, знаходимо рівняння вільних коливань об'ємної густини заряду:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_0^2 \rho,$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n}{m \varepsilon_0}}$ - власна частота плазми.

10.2.3 Знайти значення частоти електромагнітної хвилі, що проходить через плазму з параметрами $\omega_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$ і $\nu = 10^8 \text{ с}^{-1}$, при якій густина струму провідності дорівнює густині струму зміщення.

Розв'язання. Густина струму провідності у плазмі

$$j_{np} = \tau E = \frac{\omega_0^2 \nu \varepsilon_0}{\omega^2 + \nu^2} E.$$

Густина струму зміщення у плазмі

$$j_{zm} \omega \varepsilon \varepsilon_0 E = \omega \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2}\right) \varepsilon_0 E.$$

Прирівнявши значення густини струму провідності до густини струму зміщення, отримаємо кубічне рівняння відносно частоти сигналу

$$\omega^3 + \omega(\nu^2 - \omega_0^2) - \omega_0^2 \nu = 0.$$

У канонічній формі це рівняння має вигляд:

$$\omega^3 + 3p\omega + 2q = 0,$$

де

$$p = \frac{\nu^2 - \omega_0^2}{3} 10^{16}, \quad q = \frac{\omega_0^2 \nu}{2} = 2 \cdot 10^{24}.$$

Легко перевірити, що дійсний корінь останнього рівняння

$$\omega_o = u + \nu,$$

де

$$u = \sqrt{-q + \sqrt{q^2 + p^2}} = 1.55 \cdot 10^8,$$

$$\nu = \sqrt{-q - \sqrt{q^2 + p^2}} = 0.64 \cdot 10^8.$$

Звідси знаходимо значення частоти сигналу, при якому $j_{np} = j_{zm}$:

$$\omega = (1.55 + 0.64) \cdot 10^8 = 2.19 \cdot 10^8 \text{ рад/с}.$$

10.3 Задачі для самостійного розв'язування

10.3.1 Концентрація електронів у газовій плазмі дорівнює 10^{18} см^{-3} , частота зіткнень електронів з молекулами 10^9 с^{-1} .

Визначити відносну діелектричну проникність і провідність плазми. Розрахунок провести для двох частот сигналу: $f_1 = 10^8 \text{ Гц}$ та $f_2 = 10^{10} \text{ Гц}$.

Відповідь:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= -21.8 & \varepsilon_2 &= 0.992 \\ \sigma_1 &= 0.202 \text{ см/м} & \sigma_2 &= 7.12 \cdot 10^{-5} \text{ см/м}\end{aligned}$$

10.3.2 Максимальна концентрація електронів в іоносфері Землі дорівнює 10^6 см^3 , частота зіткнення електронів з частинками газу 10^7 с^{-1} .

Визначити потужність, яка поглинається в одиниці об'єму іоносферної хвилі, якщо амплітуда напруженості електричного поля плоскої хвилі складає 1 В/м , а довжина хвилі 10 м .

Відповідь: 3.96 мкВт/м^3 .

10.3.3 Визначити коефіцієнт фази β і згасання α плоскої хвилі, яка поширюється в плазмі без урахування зіткнень електронів з частинками газу, якщо власна частота плазми дорівнює $2\pi \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$.

Розрахунок провести для двох частот сигналу: $f_1 = 8 \cdot 10^9 \text{ Гц}$ та $f_2 = 2 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$.

Відповідь: $\beta_1 = 88,86 \text{ рад/м}$; $\alpha_1 = 88,86 \text{ м}^{-1}$; $\beta_2 = 362,75 \text{ рад/м}$; $\alpha_2 = 0$.

10.3.4 Під час зондування однорідної ізотропної газової плазми плоскою електромагнітною хвилею з лінійною поляризацією було виміряне погонне ослаблення 8.68 дБ/м і додатковий зсув фази на одиниці довжини -10 рад/м .

Визначити концентрацію електронів і ефективну частоту зіткнень електронів з частинками газу, якщо довжина хвилі зондувального сигналу 30 см .

Відповідь: $9,595 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$; $3,7 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$.

10.3.5 Газова плазма характеризується такими параметрами: концентрація електронів $5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, ефективна частота зіткнень електронів з іншими частинками $2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$.

Визначити коефіцієнт поширення плоскої хвилі у плазмі на частоті 30 Гц .

Відповідь: $K = 628 - j0.0149 \text{ м}^{-1}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баскаков С. И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Советское радио, 1992.
2. Вольман. В. И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971.
3. Грудинская Г. П. Распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1975.
4. Фальковский И.О. Техническая электродинамика.-М.: Связь, 1978.
5. Федоров Н. Н. Основы электродинамики.- М.: Высшая школа, 1980
6. Сборник задач по курсу “Электродинамика и распространение радиоволн”/ Под ред. С.Н.Баскакова. – М.: Высшая школа, 1981.
7. Крушевський Ю.В., Кравцов Ю.І., Мізерний В.М. Електродинаміка та поширення радіохвиль. Ч.1. Основи електродинаміки: Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 127с.

Навчальне видання

**Юрій Володимирович Крушевський
Юрій Іванович Кравцов
Віктор Миколайович Мізерний**

**ЕЛЕКТРОДИНАМІКА
ТА
ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ**

Збірник задач

Оригінал-макет підготував Кравцов Ю.І.

Редактор В.О. Дружиніна

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7х42_{1/4}
Друк ізографічний
Тираж
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ