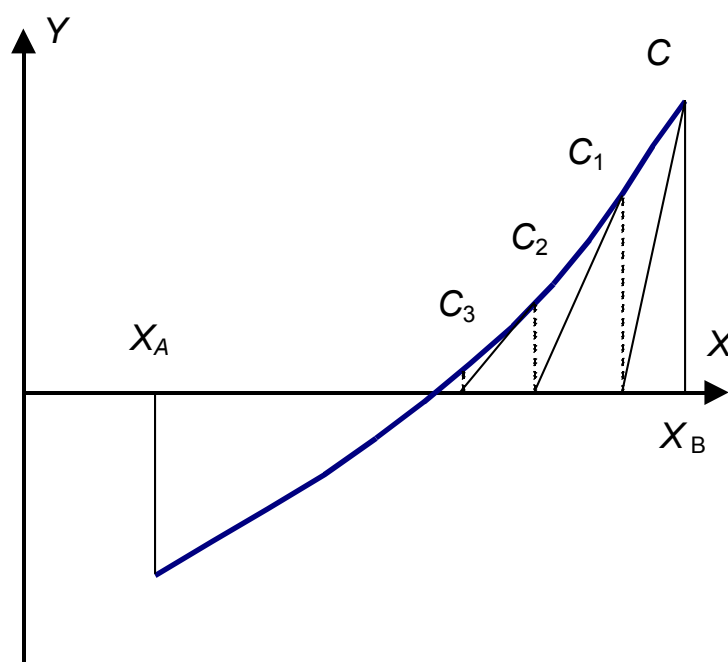


Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.В. Мотигін, В.І. Роптанов, А.В. Дудатьєв

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Частина 1 – Теоретичні відомості



Вінниця ВДТУ 2004

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.В. Мотигін, В.І. Роптанов, А.В. Дудатьєв

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Частина 1 – Теоретичні відомості

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальностей “Виробництво електронних засобів”, “Технології та засоби телекомунікацій”, “Захист інформації в комп’ютерних мережах”. Протокол № 8 від 1 квітня 2004р.

Вінниця ВДТУ 2004

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.В. Мотигін, В.І. Роптанов, А.В. Дудатьєв

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Частина 1 – Теоретичні відомості

Усі цитати, цифровий, фактичний матеріал та бібліографічні відомості перевірені, написання одиниць відповідає стандартам.

Зауваження рецензентів враховані.

Автори: _____ В.В. Мотигін
_____ В.І. Роптанов
_____ А.В. Дудатьєв

Вимогам, які висуваються до навчальної літератури відповідає.

До друку і в світ дозволяю на підставі §2 п.15 "Єдиних правил..."

Проректор з навчальної та науково-методичної роботи
_____ В.О.Леонтєв

Затверджено
на засіданні кафедри ОТ
Протокол № __ від “__” ____ 200__ р.
Зав. кафедри
_____ О.Д. Азаров

Вінниця ВДТУ 2004

УДК 519.95
М 85

Рецензенти:

С.В. Юхимчук, доктор технічних наук, професор
Р.Н. Квєтний, доктор технічних наук, професор
В.М. Лисогор, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

Мотигін В.В., Роптанов В.І., Дудатьєв А.В.

М 85 Чисельні методи в інженерних дослідженнях. Частина І. Теоретичні відомості. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2004. – 106с.

Навчальний посібник складається з двох частин. У першій частині в необхідному об'ємі розглянуті теоретичні питання чисельних методів – розв'язання алгебраїчних рівнянь вищих степенів і трансцендентних рівнянь, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, методи інтерполяції функцій, чисельне диференціювання й інтегрування функції, розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і систем, розв'язання крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь, методи апроксимації функцій, розв'язання крайової задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Друга частина навчального посібника присвячена використанню обчислювальних можливостей електронних таблиць для реалізації чисельних методів з необхідною точністю.

Навчальний посібник призначений для студентів технічних спеціальностей.

УДК 519.95

© Мотигін В.В., Роптанов В.І., Дудатьєв А.В., 2004

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	6
1 РОЗВ'ЯЗАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ	8
1.1 Постановка задачі розв'язання нелінійних рівнянь	8
1.2 Відокремлення коренів	8
1.3 Метод половинного ділення	10
1.4 Метод дотичних (Ньютона)	11
1.5 Метод простої ітерації	12
Контрольні питання	13
2 РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	14
2.1 Постановка задачі	14
2.2 Метод Гауса (метод послідовного виключення елементів)	14
Розв'язання даної системи.....	18
2.3 Метод Зейделя	18
Контрольні питання	21
3 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ.....	22
3.1 Постановка задачі	22
3.2 Інтерполяційна формула Лагранжа	22
3.3 Перша інтерполяційна формула Ньютона.....	23
3.4 Друга інтерполяційна формула Ньютона	24
Контрольні питання	26
4 ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.....	27
4.1 Апроксимація похідних і похибка формул чисельного диференціювання	27
4.2 Метод невизначених коефіцієнтів. Поліпшення апроксимації методом Рунге-Ромберга	30
Контрольні питання	31
5 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ.....	32
5.1 Постановка задачі	32
5.2 Метод прямокутників	32
5.3 Метод трапецій	34

5.4 Метод Сімпсона	34
5.5 Оцінювання похибки квадратурних формул	36
Контрольні питання	38
6 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ.....	39
6.1 Постановка задачі	39
6. 2 Методи Рунге-Кутта.....	41
6. 2. 1 Метод Ейлера.....	41
6. 2. 2 Модифікації методу Ейлера	42
6. 2. 3 Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності	44
6. 3 Оцінювання похибки чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь	45
6. 4 Розв'язання системи звичайних рівнянь першого порядку методом Рунге-Кутта	49
6. 5 Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку методом Рунге-Кутта	50
6. 6 Розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта-Мерсона.....	50
Контрольні питання	51
7 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ.....	53
7.1 Загальні відомості	53
7.1 Метод зведення до задачі Коші.....	54
7.3 Метод скінченних різниць	55
7.4 Метод колокації (метод збігів).....	58
7.5 Варіаційний метод.....	59
Контрольні питання	61
8 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ.....	62
8.1 Постановка задачі	62
8.2 Метод найменших квадратів	62
8.3 Лінійне наближення функції.....	63
8.4 Поліноміальне наближення функції	64
Контрольні питання	67

9 МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ	69
9.1 Постановка задачі	69
9.2 Рівняння параболічного типу. Явні та неявні скінченнорізницеві методи	71
9.3 Рівняння гіперболічного типу. Метод сіток	85
9.4 Скінченнорізницевий метод розв’язання рівнянь еліптичного типу	90
9.5 Метод Рітца.....	99
9.6 Метод Бубнова-Гальоркіна	102
Контрольні запитання.....	104
ЛІТЕРАТУРА.....	105

ПЕРЕДМОВА

У даному навчальному посібнику викладаються теоретичні основи чисельних методів. В основу навчального посібника покладений курс лекцій, що читається авторами на різних факультетах університету для студентів спеціальностей «Виробництво електронних засобів», «Технології та засоби телекомунікацій» і «Захист інформації».

На практиці в більшості випадків знайти точне розв'язання виниклої математичної задачі не вдається. Це відбувається головним чином не тому, що ми не вміємо цього робити, а тому що шуканий розв'язок звичайно не виражається в звичних для нас елементарних чи інших відомих функціях. Тому велике значення для інженера набули чисельні методи, особливо в зв'язку зі зростанням ролі математичних методів у різних галузях науки і техніки. Під чисельними методами маються на увазі методи розв'язання задач, які зводяться до арифметичних і деяких логічних дій над числами, тобто до тих дій, які виконує ЕОМ. У залежності від складності задач, заданої точності методу, що застосовується, може необхідно виконати від декількох десятків до багатьох мільярдів дій.

Глава 1 присвячена чисельним методам розв'язання алгебраїчних рівнянь вищих степенів і трансцендентних рівнянь. Тут розглядаються метод половинного ділення, метод дотичних (Ньютона), метод простої ітерації.

У главі 2 розглядаються методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглядаються метод Гауса (метод послідовного виключення елементів) і метод Зейделя.

Глава 3 містить опис методів інтерполяції функцій. Розглядаються інтерполяційна формула Лагранжа, інтерполяційні формули Ньютона для інтерполяції вперед та назад.

Глава 4 присвячена розгляду питань чисельного диференціювання функції. Розглядається застосування лівої, правої і центральних різницевих формул чисельного диференціювання. Також приділяється увага формулам чисельного диференціювання, отриманим на основі інтерполяційних формул Лагранжа і Ньютона. Велика увага приділена питанням точності формул чисельного диференціювання.

У главі 5 розглядаються чисельні методи інтегрування функцій. Розглядаються найчастіше використовувані методи прямокутників, трапецій і Симпсона. Наводиться порівняльна оцінка погрішності квадратурних формул.

Глава 6 містить розгляд методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і систем. Тут розглянуті метод Ейлера з усіма його модифікаціями, метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності. Розглянуто розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку і звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків методом Рунге-Кутта. Також наводиться розв'язання системи звичайних диференціальних

рівнянь методом Рунге-Кутта-Мерсона, в якому автоматично змінюється крок інтегрування.

Глава 7 присвячена розгляду наближених методів розв'язання крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Докладно розглянуті метод “стрільби” (метод зведення до задачі Коші) і метод кінцевих різниць (метод сіток).

У главі 8 розглянуті методи апроксимації функцій, зокрема, метод найменших квадратів для лінійного і квадратичного наближення.

Глава 9 містить методи розв'язання крайової задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для рівнянь параболічного типу розглянуті явні і неявні методи скінченних різниць, метод прогону для рівняння теплопровідності. Розглянуто метод сіток для рівнянь гіперболічного типу. Для рівнянь еліптичного типу розглянутий метод скінченних різниць. Дано поняття про метод прямих для розв'язання граничних задач. Розглядаються методи Рітца, Бубнова-Гальоркіна, Власова-Канторовича, а також метод, що ґрунтується на сплайн-апроксимації функції в одному напрямку, і метод, що ґрунтується на апроксимації функції дискретними рядами Фур'є.

Усі глави містять докладні приклади, що сприяють кращому розумінню сутності розглянутих чисельних методів, і контрольні питання.

Глави 1–3, 5, 6, 8 написані Володимиром Мотигіним, глави 4, 7 – Володимиром Роптановим, глава 9 – Андрієм Дудатьєвим.

1 РОЗВ'ЯЗАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Постановка задачі розв'язання нелінійних рівнянь

У технічних розрахунках часто виникає необхідність пошуку коренів нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь вигляду

$$f(x) = 0, \quad (1.1)$$

де $f(x)$ – алгебраїчний поліном n -го степеня або трансцендентна функція дійсної змінної x . Варто пам'ятати, що перші мають n коренів, а трансцендентні рівняння – можуть мати незкінченну множину коренів. Вже при $n = 4$ для алгебраїчних рівнянь і в складних трансцендентних рівняннях знайти корені точними методами не вдасться. Тому для цих цілей застосують різні методи послідовних наближень, що дуже зручно для розрахунків на ЕОМ. Знаходження наближених значень дійсних коренів звичайно складається з двох етапів:

- відділення коренів, тобто встановлення досить вузьких проміжків $[a, b]$, у яких міститься один і тільки один корінь рівняння;
- уточнення наближених значень коренів, тобто, знаходження їх із заданою точністю.

1.2 Відокремлення коренів

Для знаходження наближених значень коренів нелінійних рівнянь, що представляють собою алгебраїчні рівняння з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, \dots, a_n$ ($a_0 > 0$), можна використовувати формули Лагранжа, що визначають межі дійсних коренів. Верхня межа R_B^+ додаткових дійсних коренів у цьому випадку визначається як

$$R_b^+ = 1 + k \sqrt[k]{\frac{b}{a_0}}, \quad (1.2)$$

де $k(k \geq 1)$ – номер першого з від'ємних коефіцієнтів

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

b – найбільша величина з абсолютних значень від'ємних коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Нижня межа R_H^+ додатних коренів, верхня R_B^- та нижня R_H^- межі від'ємних коренів визначаються як

$$R_H^+ = \frac{1}{R_1}; \quad R_B^- = -\frac{1}{R_3}; \quad R_H^- = -R_2, \quad (1.3)$$

де R_1, R_2 і R_3 – верхні межі дійсних додатних коренів, що визначаються виразом (1.2) для таких допоміжних рівнянь:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = 0; \\f_2(x) &= f(-x) = 0; \\f_3(x) &= x^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

В загальному випадку в інтервалі від R_B^+ до R_H^+ кореня може і не виявитися. Але можливо і наявність декількох коренів у цьому інтервалі.

Приклад 1. Знайти межі коренів рівняння

$$x^3 - 4x + 2 = 0.$$

Згідно з виразом (1.2) знаходимо при $K = 2$, $b = 4$, $a_0 = 1$

$$R_B^+ = 1 + \sqrt{4} = 3.$$

Складаємо допоміжні рівняння (1.4):

$$f_1(x) = x^3 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{4}{x} + 2 \right) = 0 \text{ або } 2x^3 - 4x^2 + 1 = 0,$$

де $a_0 = 2$, $a_1 = -4$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $k = 1$ тоді $R_1 = 1 + \frac{4}{2} = 3$;

$$f_2(x) = x^3 - 4x - 2 = 0; a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -4, a_3 = -2, k = 2,$$

$$\text{а } R_2 = 1 + \sqrt{\frac{4}{1}} = 3; f_3(x) = x^3 \left(-\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x} + 2 \right) = 0, \text{ або } 2x^3 + 4x^2 - 1 = 0,$$

$$\text{де } a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 0, a_3 = -1 \text{ тоді } R_3 = 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 1,7943.$$

За формулою (1.3) знаходимо межі:

$$R_H^+ = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{3} \approx 0,3333; R_B^- = -\frac{1}{R_3} \approx -0,5557; R_H^- = -R_2 = -3.$$

Після встановлення меж додатних і від'ємних коренів рівняння на обраному інтервалі $[a, b]$: якщо $f(a) \times f(b) < 0$, то в цьому інтервалі є непарне число коренів полінома, якщо $f(a) \times f(b) > 0$, то в цьому інтервалі або немає коренів, або їх парне число.

Іноді доцільно для відділення коренів використовувати графічний метод. З цією метою загальну формулу нелінійного рівняння $f(x) = 0$ представляємо у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$ і потім будуємо графіки функцій $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$. Дійсними коренями нелінійного рівняння будуть абсциси точок перетинання цих кривих.

Так, для умов прикладу можна записати $x(x^2 - 4) + 2 = 0$, або $x = \frac{-2}{x^2 - 4}$. Тоді побудуємо графіки функцій (Рис. 1.1) $y_1 = x$ і $y_2 = \frac{-2}{x^2 - 4}$. За

графіками значення коренів рівняння будуть $x_1 \approx 0,5$; $x_2 \approx 1,6$; $x_3 \approx -2,2$. Після обчислення інтервалу $[a, b]$, у якому лежать корені, можна здійснити послідовне уточнення їх значень.

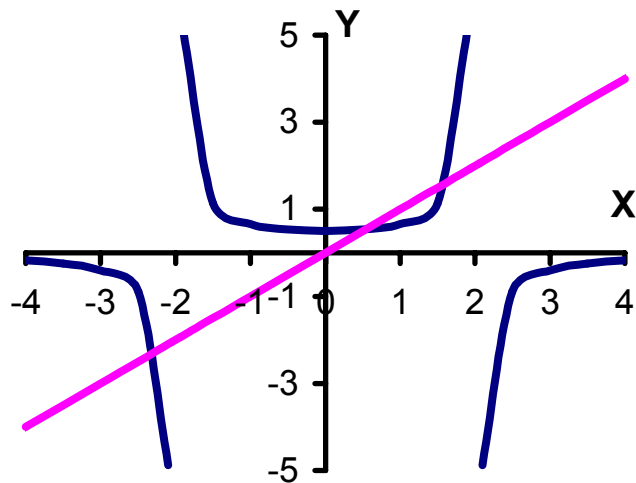


Рисунок 1.1 – Відокремлення коренів нелінійного рівняння

Для тригонометричних рівнянь інтервал пошуку коренів заздалегідь визначається постановкою задачі. При цьому частіше усього мова йде про головні значення аргументів.

Для відокремлення дійсних коренів таких рівнянь звичайно досить побудувати графіки зміни функції $f(x)$ в обраних межах зміни аргументу. З метою зменшення витрат часу, крок h зміни аргументу x можна вибрати досить великим, а потім в околах коренів $f(x)$ обчислювати значення функції з дробним кроком h/k , ($k > 1$). Часто змінюється аргумент від однієї з меж (верхньої або нижньої) і обчислюється значення функції до виявлення зміни її знака.

1.3 Метод половинного ділення

Ідея методу полягає в послідовній зміні меж інтервалу, в якому знаходиться корінь. Нехай межі інтервалу є x_A і x_B (Рис. 1.2). Визначимо середину інтервалу $x_1 = \frac{x_A + x_B}{2}$. Для подальших розрахунків обираємо ту половину інтервалу, значення функції на кінцях котрої протилежні за знаком, тобто перевіряємо виконання умови $f(x_1) \times f(x_B) < 0$. Приймаємо новий інтервал $[x_1, x_B]$. Потім знаходимо $x_2 = \frac{x_1 + x_B}{2}$, перевіряємо виконання умови $f(x_1) \times f(x_2) < 0$ і приймаємо нові межі x_1 та x_2 і т.д. Процес половинного ділення продовжуємо доти, поки на n -кроці не буде виконуватися одна з умов:

- 1) $f((x_{n-1} + x_n)/2) = 0$, тоді $x^* = (x_{n-1} + x_n)/2$ є шуканий корінь;

- 2) довжина відрізка, що містить корінь, стане менша ε (ε – задана точність обчислень), тобто $|x_{n-1} - x_n| < \varepsilon$, тоді $x^* = (x_{n-1} + x_n)/2$ є шуканий корінь.

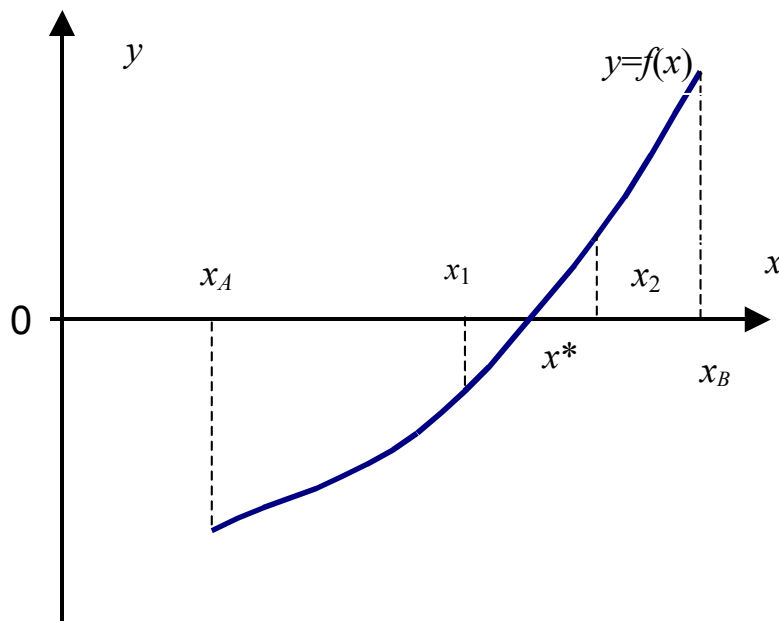


Рисунок 1.2 – Метод половинного ділення

1. 4 Метод дотичних (Ньютона)

Ідея методу полягає в послідовній заміні ділянки кривої $f(x)$, дотичною в точці C , що належить відрізку $[x_A, x_B]$ і яка перетнула вісь абсцис у точці x_1 (Рис. 1.3). Точка C вибирається з умови $f(C) \times f''(C) > 0$, що гарантує перебування наближеного значення кореня на ділянці $[x_A, x_B]$. При цьому передбачається, що рівняння $f(x)=0$ має один корінь на відрізку $[x_A, x_B]$ і функція $f(x)$ неперервна на цьому відрізку, а $f'(x)$ і $f''(x)$ не змінюють знак на ньому.

Уточнення значення кореня робиться за рекурентним співвідношенням

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (1.5)$$

де m визначає число ітерацій, що забезпечує досягнення заданої точності ε . Метод дотичних прискорює процес уточнення кореня, але має обмежене застосування, тому що для функцій, які мають ділянки з пологими схилами або ділянки паралельні осі абсцис, точка перетину дотичної з віссю абсцис може вийти за межі інтервалу $[x_A, x_B]$ і уточнення не відбудеться. Алгоритм являє собою ітераційний цикл із числом повторень, що визначається виконанням умови досягнення заданої точності ε , тобто

$$\left| \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right| \leq \varepsilon.$$

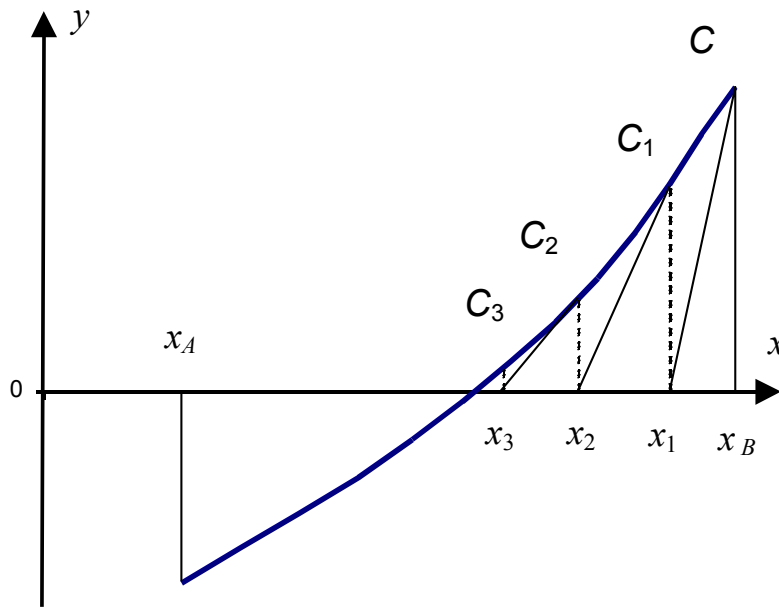


Рисунок 1.3 – Метод дотичних (Ньютона)

1.5 Метод простої ітерації

Ідея методу – послідовне уточнення значення кореня зі рівнянням $x = \varphi(x)$, рівносильним початковому рівнянню $f(x) = 0$. Обравши початкове наближення для кореня x_0 і підставивши його в праву частину перетвореного рівняння, одержимо наближення $x_1 = \varphi(x_0)$, потім послідовно $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1})$.

Якщо послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ має межу, то вона буде коренем рівняння $f(x) = 0$. Умовою збіжності процесу ітерації є дотримання нерівності $|\varphi'(x)| < 1$. Чим менший розмір $|\varphi'(x)|$, тим швидше процес розрахунку збігається. Обчислення проводяться доки $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$.

Приклад 2. Привести рівняння $x^3 - 5x + 1 = 0$ до вигляду, придатного для застосування методу ітерації.

Приведемо початкове рівняння до вигляду $x = \frac{x^3 + 1}{5}$. У цьому випадку $\varphi(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 1)$, а $|\varphi'(x)| = \frac{3x^2}{5}$. При $0 \leq x \leq 1$ обчислимо умову збіжності $|\varphi'(x)| = \frac{3}{5}x^2 \leq \frac{3}{5} < 1$. Умова виконується, і таке рівняння придатне для застосування методу ітерації.

Схема Ейткена-Стеффенсена дозволяє прискорити процес збіжності методу простої ітерації при обчисленні кожного наступного значення кореня згідно з виразом

$$x_n = \frac{x_{n-3}x_{n-1} - x_{n-2}^2}{x_{n-3} - 2x_{n-2} + x_{n-1}}, \quad n = 3, 4, \dots$$

Перше та друге наближення визначаються методом простої ітерації.

Контрольні питання

1. Чим викликана необхідність застосування чисельних методів розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь?
2. З яких етапів складається визначення коренів рівнянь?
3. Що значить відокремити корені рівняння?
4. Що значить уточнити корені рівняння?
5. Які методи уточнення коренів Вам відомі?
6. У чому полягає сутність методу половинного ділення? Поясніть на графіку.
7. Як оцінюється похибка кореня, знайденого методом половинного ділення?
8. Які умови повинні бути виконані для уточнення кореня, що знаходиться на відрізку $[x_A, x_B]$ методом дотичних?
9. Поясніть геометричний зміст методу дотичних.
10. Як вибирається початкове наближення кореня відповідно до методу дотичних?
11. У чому сутність методу простої ітерації?

$$\text{де } a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}a'_{1j} \text{ для } i, j = 2, 3, \dots, n; \quad (2.5)$$

Тепер із першого рівняння системи (2.4) знайдемо

і, підставивши його у всі інші рівняння цієї системи, одержимо систему $(n - 2)$ рівнянь із $(n - 2)$ невідомими:

$$\text{де } a''_{ij} = a'_{ij} - a'_{i1} a''_{1j} \text{ для } i, j = 3, 4, \dots, n; \quad (2.9)$$

Продовжуючи цей процес за розглянутою схемою, прийдемо на $(n - 2)$ -му кроці до системи двох рівнянь із двома невідомими:

$$\text{де } a_{ij}^{(n-2)} = a_{ij}^{(n-3)} - a_{i,n-2}^{(n-3)} a_{n-2,j}^{(n-2)} \text{ для } i, j = n-1, n; \quad (2.12)$$

З першого рівняння системи (2.11) знайдемо

і, підставивши його в друге рівняння системи (2.11), одержимо:

$$\text{де } a_{n,n}^{(n-1)} = a_{n,n}^{(n-2)} - a_{n,n-1}^{(n-2)} * a_{n-1,n}^{(n-1)}. \quad (2.16)$$

Розв'язавши рівняння (2.15), визначимо

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}. \quad (2.18)$$

Підставляючи знайдене значення x_n в (2.14), одержимо x_{n-1} . Діючи аналогічно, одержимо $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_3$. Потім із рівняння (2.7) обчислимо x_2 , а з рівняння (2.3) – x_1 .

Таким чином, у розглянутому методі система зводиться до одного рівняння з одним невідомим (прямий хід), а потім послідовно обчислюються невідомі які залишились (зворотний хід).

При розв'язанні задач для контролю прямого ходу користуються контрольними сумами, що являють собою суму коефіцієнтів при невідомих і вільного члена для кожного рівняння системи (2.1). Для контролю обчислень в основній частині схеми над контрольними сумами виконуються ті ж дії, що і над іншими елементами рядка. Контрольна сума для кожного рядка повинна збігатися (при відсутності помилок в обчисленнях) із рядковою сумою, що являє собою суму всіх елементів з основної частини цього рядка. Рядкові суми мають ту властивість, яка використовується при контролі: при заміні правих частин системи рівнянь відповідними рядковими сумами утворюється така система, всі корені якої відрізняються від попередньої на одиницю. При усіх обчисленнях проміжні результати рекомендується записувати з двома запасними розрядами проти заданої точності, а в остаточній відповіді запасні розряди відкинути.

Схему розв'язання системи можна представити у вигляді таблиці (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Система	Рядкові суми	Контрольні суми	Етапи
1	2	3	4
Прямий хід			
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$ $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$	$S_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + b_1$ $S_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + b_2$ $S_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + b_3$	S_1 S_2 S_3	I
$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}$ $x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{23}}{a_{21}}x_3 = \frac{b_2}{a_{21}}$ $x_1 + \frac{a_{32}}{a_{31}}x_2 + \frac{a_{33}}{a_{31}}x_3 = \frac{b_3}{a_{31}}$	$S'_1 = 1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{b_1}{a_{11}}$ $S'_2 = 1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} + \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{b_2}{a_{21}}$ $S'_3 = 1 + \frac{a_{32}}{a_{31}} + \frac{a_{33}}{a_{31}} + \frac{b_3}{a_{31}}$	$S'_1 = \frac{S_1}{a_{11}}$ $S'_2 = \frac{S_2}{a_{21}}$ $S'_3 = \frac{S_3}{a_{31}}$	II

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4
$a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 = b'_2$ $a'_{32} x_2 + a'_{33} x_3 = b'_3$	$S''_2 = a'_{22} + a'_{23} + b'_2$ $S''_3 = a'_{32} + a'_{33} + b'_3$	$S''_2 = S'_2 - S'_1$ $S''_3 = S'_3 - S'_1$	III
$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \frac{b'_2}{a'_{22}}$ $x_2 + \frac{a'_{33}}{a'_{32}} x_3 = \frac{b'_3}{a'_{32}}$	$S'''_2 = 1 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} + \frac{b'_2}{a'_{22}}$ $S'''_3 = 1 + \frac{a'_{33}}{a'_{32}} + \frac{b'_3}{a'_{32}}$	$S'''_2 = \frac{S''_2}{a'_{22}}$ $S'''_3 = \frac{S''_3}{a'_{32}}$	IV
$a''_{33} x_3 = b''_3$	$S_3^{IV} = a''_{33} + b''_3$	$S_3^{IV} = S'''_3 - S'''_2$	V
$\left. \begin{aligned} a''_{33} x_3 &= b''_3 \\ a_2 + a''_{23} x_3 &= b''_2 \\ x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 &= b'_1 \end{aligned} \right\}$	$a''_{33} = \frac{a'_{33}}{a'_{32}} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}}; -b''_3 = \frac{b'_3}{a'_{32}} - \frac{b'_2}{a'_{22}}$ $a''_{23} = \frac{a'_{23}}{a'_{22}}; -b''_2 = -\frac{a'_{24}}{a'_{22}}; -a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$ $b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}}; -a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$		
Зворотний хід			
$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$	$\bar{x}_3 = \frac{S_3^{IV}}{a''_{33}}$	$\bar{x}_3 = x_3 + 1$	VI
$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \frac{b'_2}{a'_{22}}$ $x_2 + \frac{a'_{33}}{a'_{32}} x_3 = \frac{b'_3}{a'_{32}}$	$S'''_2 = 1 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} + \frac{b'_2}{a'_{22}}$ $S'''_3 = 1 + \frac{a'_{33}}{a'_{32}} + \frac{b'_3}{a'_{32}}$	$S'''_2 = \frac{S''_2}{a'_{22}}$ $S'''_3 = \frac{S''_3}{a'_{32}}$	VII
$a''_{33} x_3 = b''_3$	$S_3^{IV} = a''_{33} + b''_3$	$S_3^{IV} = S'''_3 - S'''_2$	VIII

Приклад 1. Користуючись вищенаведеною схемою, розв'яжемо систему алгебраїчних рівнянь третього порядку (Табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Коефіцієнти при невідомих			Вільні члени	Рядкові суми	Контрольні суми
x_1	x_2	x_3			
1	2	3	4	5	6
5,434	1,925	3,241	48,500	59,100	59,100
-1,304	8,305	5,436	50,230	62,666	62,666
2,326	-0,469	4,283	30,780	36,900	36,900

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5	6
Прямий хід					
1	0,35425	0,59642	8,92528	10,87595	10,87596
1	-6,36886	-4,16794	-38,51993	-48,05673	-48,05674
1	-0,21023	1,84135	13,23301	15,86414	15,86414
	-6,72231	-47,44521	-58,93268	-58,93268	-58,93268
	-0,56448	1,24493	4,30773	4,98818	4,98816
	1	0,70865	7,05703	8,76568	8,76568
	1	-2,20541	-7,63132	-8,83677	-8,83677
		-2,91409	-14,68835	-17,60244	-17,60245
$-2,91409 \cdot x_3 - 14,68835$ $x_2 + 0,70865 \cdot x_3 = 7,05703$ $x_1 + 0,354,25 \cdot x_2 + 0,59642 \cdot x_3 = 8,92528$					
Зворотний хід					
Розв'язання даної системи		Розв'язання контрольної системи		Контроль	
$x_3 = \frac{-14,68835}{-2,91409} = 5,04045$		$\bar{x}_3 = \frac{-17,60244}{-2,91409} = 6,04045$		$\bar{x}_3 = x_3 + 1$	
$x_2 = 7,05703 - 0,70685 \times 5,04045 = 3,48512$		$\bar{x}_2 = 8,76568 - 0,70865 \times 6,04045 = 4,48512$		$\bar{x}_2 = x_2 + 1$	
$x_1 = 8,92528 - 0,58642 \times 5,04045 - 0,35425 \times 3,48512 = 4,68446$		$\bar{x}_1 = 10,87596 - 0,59642 \times 6,04045 - 0,35425 \times 4,48512 = 5,68446$		$\bar{x}_1 = x_1 + 1$	

Результат: $x_1 = 4,684$; $x_2 = 3,485$; $x_3 = 5,040$.

2.3 Метод Зейделя

Істотного скорочення часу розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (до 30 %) можна домогтися, застосовуючи наближені (ітераційні) методи. При цьому необхідно задану систему привести до вигляду, зручного для реалізації ітераційними методами, і вирішити питання про збіжність методу.

Нехай задана система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.1). Приведемо її до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + f_1; \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + f_2; \\ \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + f_n. \end{cases} \quad (2.19)$$

У матричному вигляді систему можна записати як

$$X = CX + F. \quad (2.20)$$

Елементи матриці C та вектора F обчислюються за формулами:

$$c_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{jj}}; f_i = \frac{b_i}{a_{ii}}; i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.21)$$

Приведення системи (2.1) до вигляду (2.19) може бути виконано нескінченним числом способів, але необхідно вибрати такий, щоб система (2.19) привела до збіжного ітераційного процесу. Така задача завжди розв'язна, якщо визначник системи відмінний від нуля. Найбільш простим способом, тобто прямим розподілом, приведення до вигляду (3.19) виконується для умов:

$$\begin{aligned} &|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|; \\ &|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \dots + |a_{2n}|; \\ &\dots\dots\dots \\ &|a_{nn}| > |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n(n-1)}|. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Якщо для заданої системи (2.22) не виконується, то необхідно зробити такі перетворення рівнянь, які привели б до виконання цих умов (додавання або віднімання двох рівнянь системи (2.1)). Відомо, що ітераційний процес сходиться, якщо норма матриці C менша одиниці, тобто

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^2} < 1. \quad (2.23)$$

Умова (2.23) є достатньою для збіжності методу, а для його виконання необхідно, щоб на етапі приведення до (2.19) кожне рівняння системи (2.1) розв'язувалося щодо тієї невідомої змінної, яка має найбільший за модулем коефіцієнт. Тому порядок розташування рівнянь у системі має важливе значення.

Стратегія методу простої ітерації ґрунтується на послідовному наближенні до шуканого розв'язку системи шляхом підстановки в кожну наступну $(k+1)$ -у ітерацію наближення, отриманого на k -й ітерації. У якості початкового наближення звичайно приймають вектор-стовпець зведених членів перетвореної системи $x^{(0)} = \mathbf{F}$:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{F} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.24)$$

Умовою закінчення ітераційного процесу є

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Відмінність методу Зейделя від методу простої ітерації полягає в тому, що при обчисленні $(k+1)$ -го наближення для компоненти x_i враховуються вже обчислені раніше $(k+1)$ наближення для компонент $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}$. При цьому обчислення виконуються за формулами:

$$x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1;$$

$$x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k)} + f_2;$$

$$x_3^{(k+1)} = c_{31}x_1^{(k+1)} + c_{32}x_2^{(k+1)} + \dots + c_{3n}x_n^{(k)} + f_3;$$

.....

$$x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + c_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n.$$

Таким чином,

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j^{(k)} + f_i; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.26)$$

Метод Зейделя в більшості випадків дає більш швидку збіжність, ніж метод простих ітерацій.

Приклад 2. Привести задану систему до вигляду, придатного для застосування ітераційних методів, і перевірити збіжність:

$$\begin{aligned} 1,36x_1 + 3,04x_2 + 3,37x_3 &= 5,06; \\ 2,35x_1 - 1,48x_2 + 1,02x_3 &= 6,87; \\ 4,26x_1 + 2,45x_2 - 1,96x_3 &= -1,91. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Система не містить рівнянь із коефіцієнтами, модулі яких більші суми інших коефіцієнтів рівнянь, тобто (2.22) не виконується.

Додамо (2) із (3), віднімемо (1) із (2) і (1) із (3). Тоді одержимо:

$$\begin{aligned} 6,61x_1 + 0,97x_2 - 0,94x_3 &= 4,96; \\ 0,99x_1 - 4,52x_2 - 2,35x_3 &= 1,81; \\ 2,90x_1 - 0,59x_2 - 5,33x_3 &= -6,97. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Вигляд системи придатний для застосування ітераційних методів.

Розв'язавши перше рівняння (2.28) щодо x_1 , друге щодо x_2 і третє щодо x_3 , одержимо рівняння вигляду (2.19):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 - 0,1467x_2 + 0,1422x_3 + 0,7504; \\ x_2 &= 0,2190x_1 + 0 - 0,5199x_3 - 0,4004; \\ x_3 &= 0,5411x_1 - 0,1107x_2 + 0 + 1,3077. \end{aligned}$$

Перевіримо умову збіжності (2.23):

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -0,1467 & 0,1422 \\ 0,2190 & 0 & -0,5199 \\ 0,5441 & -0,1107 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\|C\| = \sqrt{(-0,1467)^2 + (0,1422)^2 + (0,2190)^2 + (-0,5199)^2 + (0,5441)^2 + (-0,1107)^2} = \\ = \sqrt{0,668298} = 0,8175 < 1$$

Контрольні питання

1. На які дві групи діляться використовувані на практиці методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
2. Які методи розв'язання систем називають точними?
3. У чому полягає сутність методу Гаусса?
4. Поясніть поняття «прямий хід» і «зворотний хід» при використанні схеми послідовного виключення елементів.
5. Для чого використовуються контрольні суми?
6. Чим відрізняється рядкова сума від контрольної суми?
7. Для чого використовується зворотний хід?
8. Що дає застосування ітераційних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
9. Як перевірити збіжність методу? Приведіть вирази для перевірки.
10. У чому полягає стратегія методу простої ітерації?
11. Що є умовою закінчення ітераційного процесу?
12. У чому полягає відмінність методу Зейделя від методу простої ітерації, що дає застосування цього методу?

3 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

3.1 Постановка задачі

Для функцій, заданих таблицями їхніх значень на скінченному інтервалі, виникає необхідність обчислення значень функцій для значень аргументів, відсутніх у таблиці, але які належать певному інтервалу. В цьому випадку будують функцію, яка у заданих точках приймає задані значення, а в інших точках інтервалу приблизно представляє задану функцію. А потім обчислення значень функції для будь-яких значень аргументу в області визначення заданої таблично функції виконують за побудованою функцією. Задача інтерполяції – побудова такої наближеної функції. Частіше усього інтерполяційну функцію відшукують у вигляді алгебраїчного багаточлена. Геометрично задача інтерполяції полягає в побудові кривої $y = F(x)$, що проходить через задану таблично систему точок $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$.

3.2 Інтерполяційна формула Лагранжа

Нехай функція $y = f(x)$ у точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, відповідно приймає значення $y_0, y_1, \dots, y_n$. Потрібно побудувати багаточлен $L_n(x)$ степеня не вище n , що приймає в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ (вузлах інтерполяції) значення $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Відстань між вузлами інтерполяції може бути різною. Розв'язок цієї задачі - багаточлен Лагранжа

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n. \quad (3.1)$$

Інтерполяційна формула Лагранжа в цьому випадку має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} y_k, \quad (3.2)$$

тобто знаменник містить усі різниці $(x_k - x_n)$, а чисельник – всі різниці за винятком $(x - x_k)$.

При цьому в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ значення багаточлена $L_n(x)$ і функції $f(x)$ збігаються. При інших значеннях x різниця $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ у загальному випадку відмінна від нуля і являє собою похибку методу. Величина $R_n(x)$ є залишковим членом інтерполяції.

Якщо функція $f(x)$ у проміжку $[a, b]$ має неперервні похідні до $(n+1)$ -го порядку, залишковий член можна представити у вигляді:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\varepsilon) \frac{\prod(x)}{(n+1)!}, \quad (3.4)$$

де $\prod(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$; (ε) залежить від x і лежить усередині відрізка $[a, b]$. Позначивши через $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} \{f^{(n+1)}(x)\}$, одержимо оцінку абсолютної похибки інтерполяційної формули Лагранжа:

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\prod(x)|. \quad (3.5)$$

Приклад 1. Задано функцію

x	1,1	1,5	2,0	2,6
y	0,0953	0,4055	0,6931	0,9555

Побудувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа й обчислити приблизно значення функції для $x = 1,3$. Для побудови інтерполяційного багаточлена скористаємося формулою (3.1) при $n = 3$:

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \times y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \times y_1 + \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \times y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \times y_3 = \\ &= \frac{(x - 1,5)(x - 2,0)(x - 2,6)}{(1,1 - 1,5)(1,1 - 2,0)(1,1 - 2,6)} \times 0,0953 + \frac{(x - 1,1)(x - 2,0)(x - 2,6)}{(1,5 - 1,1)(1,5 - 2,0)(1,5 - 2,6)} \times 0,4055 + \\ &+ \frac{(x - 1,1)(x - 1,5)(x - 2,6)}{(2,0 - 1,1)(2,0 - 1,5)(2,0 - 2,6)} \times 0,6931 + \frac{(x - 1,1)(x - 2,0)(x - 2,6)}{(2,6 - 1,1)(2,6 - 1,5)(2,6 - 2,0)} \times 0,9555 \approx \\ &\approx 0,0648x^3 - 0,5207x^2 + 1,7981x - 1,3389. \end{aligned}$$

Перевіряємо значення функції для вузлів інтерполяції:

$$L_3(1,1) \approx 0,0648 \times 1,13 - 0,5207 \times 1,12 + 1,7981 \times 1,1 -$$

$$- 1,3389 \approx 0,095291 \approx 0,0953;$$

$$L_3(1,5) \approx 0,405493 \approx 0,4055; \quad L_3(2,0) \approx 0,693095 \approx 0,6931;$$

$$L_3(2,6) \approx 0,955497 \approx 0,9555.$$

$$\text{Обчислюємо } f(1,3) \approx L_3(1,3) \approx 0,261108 \approx 0,2611.$$

3.3 Перша інтерполяційна формула Ньютона

Перша інтерполяційна формула Ньютона використовується для інтерполяції в точках x близьких до початку таблиці для функцій з рівновіддаленими вузлами інтерполяції (тобто аргумент змінюється з постійним кроком).

Якщо $y = f(x)$ задана у точках $x_i = x_0 + ih$ (для $i = 0, 1, \dots, n$), де h – крок інтерполяції, то в якості інтерполяційного багаточлена може бути обраний інтерполяційний багаточлен Ньютона

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}),$$

(3.6)

де $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$;

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$;

.....

$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

є скінченні різниці, починаючи з першого до n -го порядку.

Скінченні різниці різних порядків зручно представляти у вигляді таблиці (Табл. 3.1).

Таблиця 3.1

x	y	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^{n-1} y$	$\Delta^n y$
x_0	y_0	$\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$	$\Delta^{n-1} y_0 = \Delta^{n-2} y_1 - \Delta^{n-2} y_0$	$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$
x_1	y_1	$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$	$\Delta^{n-1} y_1 = \Delta^{n-2} y_2 - \Delta^{n-2} y_1$	
x_2	y_2	$\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta^1 y_3 - \Delta^1 y_2$		
x_{n-2}	y_{n-2}	$\Delta^1 y_{n-2} = y_{n-1} - y_{n-2}$	$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta^1 y_{n-1} - \Delta^1 y_{n-2}$		
x_{n-1}	y_{n-1}	$\Delta^1 y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$			
x_n	y_n				

Інтерполяційна формула в цьому випадку має вигляд

$$f(x) \approx y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

(3.7)

3.4 Друга інтерполяційна формула Ньютона

Друга інтерполяційна формула Ньютона використовується для інтерполяції в точках x , близьких до кінця таблиці для функцій із рівновіддаленими вузлами інтерполяції. Вона відрізняється від першої формули лише порядком чергування вузлів

$$f(x) \approx y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1). \quad (3.8)$$

Характерно, що будь-який k -й член інтерполяції багаточленів Ньютона залежить тільки від k перших або k останніх вузлів інтерполяції і значень функції в цих вузлах, тобто додавання нових вузлів інтерполяції викликає в інтерполяційних формулах Ньютона тільки додавання нових членів без зміни початкових. Ця перевага інтерполяційних багаточленів Ньютона перед інтерполяційним багаточленом Лагранжа. Однак інтерполяційні багаточлени Ньютона можуть бути записані тільки для вузлів інтерполяції, які мають однакову відстань.

Похибка інтерполяційних формул Ньютона така ж, як в інтерполяційній формулі Лагранжа, тому що при тих самих вузлах інтерполяції інтерполяційні багаточлени Ньютона і Лагранжа збігаються.

Приклад 2. Задано функцію

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
$f(x)$	0,17609	0,20412	0,23046	0,25527	0,27876	0,30103	0,32222	0,34242

Необхідно побудувати інтерполяційний багаточлен Ньютона й обчислити значення функції для $x_1 = 1,53$ і $x_2 = 2,18$.

Складемо таблицю скінченних різниць заданої функції (Табл. 3.2).

Таблиця 3.2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1,5	0,17609	0,02803	-0,00170	0,00019	-0,00002
1,6	0,20412	0,02633	-0,00151	0,00017	-0,00003
1,7	0,23045	0,02482	-0,00134	0,00014	-0,00003
1,8	0,25527	0,03348	-0,00120	0,00011	-0,00001
1,9	0,27875	0,02228	-0,00109	0,00010	
2,0	0,30103	0,02119	-0,0099		
2,1	0,32222	0,02020			
2,2	0,34242				

Тому що скінченні різниці четвертого порядку практично постійні, таблицю скінченних різниць закінчуємо на них. Точка $x = 1,53$ лежить на початку інтервалу інтерполяції, тому скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона (3.7) при $x_0 = 1,5$; $h = 0,1$ $q = \frac{x - x_0}{h} = 0,03$;

$$f(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + q\frac{(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 = \sum_{i=0}^4 A_i \Delta^i y_0;$$

де A_i - коефіцієнти при скінченних різницях.

Обчислення для $x = 1,53$ оформимо у вигляді таблиці (Табл. 3.3).

Таблиця 3.3

i	0	1	2	3	4
A_i	1	0,3	-0,105	0,0695	-0,040162
$\Delta^i y_0$	0,17609	0,02803	-0,00170	0,00019	-0,00002
$A_i \Delta^i y_0$	0,17609	0,008409	+0,000179		0,000001

Одержимо $f(1,53) = 0,18469$.

Точка $x = 2,18$ лежить наприкінці інтервалу інтерполяції, тому скористаємося другою інтерполяційною формулою Ньютона при $x_0 = 2,2$;

$$q = \frac{x - x_1}{h} = -0,2.$$

$$f(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + q\frac{(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \\ + q\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} = \sum_{i=0}^4 C_i \Delta^i y_{n-1},$$

де C_i – коефіцієнти при скінченних різницях.

Обчислення для $f(2,18)$ представимо у вигляді таблиці (Табл. 3.4).

Таблиця 3.4

i	0	1	2	3	4
C_i	1	-0,2	-0,08		0,0336
$\Delta^i y_{n-i}$	0,34242	0,02020	-0,00099	0,00010	-0,00001
$C_i \Delta^i y_{n-i}$	0,34242	-0,00404	0,00008	-0,00006	-0,000003

Одержимо $f(2,18) = 0,33841$.

Контрольні питання

1. Коли виникає необхідність побудови інтерполяційних функцій?
2. Що таке вузол інтерполяції?
3. Поясніть поняття «інтерполяційна функція».
4. Як будується інтерполяційний багаточлен Лагранжа?
5. Яка сутність поняття «скінченна різниця»?
6. Як обчислюються скінченні різниці першого, другого і n -го порядків?
7. Що таке перша інтерполяційна формула Ньютона?
8. Чим відрізняється й у яких випадках використовується друга інтерполяційна формула Ньютона?
9. У чому полягає перевага інтерполяційних багаточленів Ньютона перед інтерполяційним багаточленом Лагранжа?
10. Який недолік інтерполяційних багаточленів Ньютона?
11. Як визначити похибку інтерполяційних формул Ньютона?

4 ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Задачею чисельного диференціювання є наближене обчислення похідної функції за заданим у скінченному числі точок значенням цієї функції, що може мати різний фізичний зміст. Нагадаємо, наприклад, що додаткову інформацію про поведінку фізичної системи дає її чутливість, у визначення якої входить похідна функції F за параметром h (F може бути довільною функцією ланцюга, його полюсом чи нулем і т. п., а h – значенням параметра схеми, частотною змінною, робочою температурою і т. п.).

4.1 Апроксимація похідних і похибка формул чисельного диференціювання

Розглянемо найпростіші приклади формул чисельного диференціювання функції $U(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$. На відрізку $[a, b]$ введемо рівномірну сітку $\omega_h = \left\{ x_i = a + ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{b-a}{N} \right\}$, у вузлах X_i якої визначені значення $U_i = U(X_i)$. Тоді як за наближене значення $U'(x_i)$ можна взяти кожне з різницьових відношень:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad U_{x,i}^- &= \frac{U_i - U_{i-1}}{h} && \text{(ліва різницєва похідна),} \\ \text{б)} \quad U_{x,i} &= \frac{U_{i+1} - U_i}{h} && \text{(права різницєва похідна),} \\ \text{в)} \quad U_{\dot{x},i} &= \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} && \text{(центральна різницєва похідна).} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Припускаючи, що функція $U(x)$ має відповідну гладкість, можна показати (розкладанням у ряд Тейлора), що похибка розглянутих формул чисельного диференціювання характеризується виразами:

$$U_{x,i}^- = U'(x_i) - \frac{h}{2} U''(\xi_1), \quad U_{x,i} = U'(x_i) + \frac{h}{2} U''(\xi_2), \quad (4.2)$$

$$U_{\dot{x},i} = U'(x_i) + \frac{h^2}{6} U'''(\xi_3), \quad \xi_j \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \xi = \overline{1,3},$$

тобто ліва і права похідні мають перший порядок точності відносно h , а центральна – другий порядок точності (h^2).

Аналогічним чином другу похідну в точці x_i можна замінити функцією

$$U_{xx,i}^- = \frac{1}{h} (U_{x,i} - U_{x,i}^-) = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}, \quad (4.3)$$

похибка якої має другий порядок точності відносно h , тому що

$$U_{xx,i}^- = U''(x_i) + \frac{h^2}{12} U^{(IV)}(\xi).$$

У такий же спосіб можна одержати апроксимації похідних більш високих порядків і оцінку їхніх похибок. Крім розглянутої вище похибки апроксимації, що визначається величиною залишкового члена, існують і інші джерела похибок:

- неточні обчислення значень функції $U(x)$ у вузлах сітки ω_h ;
- похибки округлення.

Тому похибка, що виникає при обчисленні різницевих похідних, може перебільшувати значення функції $U(x)$ і навіть необмежено зростати при $h \rightarrow 0$, і в зв'язку з цим говорять про некоректність операції диференціювання за допомогою різницевих формул. Щоб не відбувалося істотного зниження точності, необхідно, щоб похибка округлення мала порядок погрішності апроксимації. При цьому оптимальну точність досягають різними процедурами регуляризації: наприклад, h вибирають з умови $|U(x+h) - U(x)| > \varepsilon$, що усуває вирахування близьких чисел. Можливий інший спосіб вибору h . У випадку заміни $U'(x)$ лівої різницевої похідної, наприклад, похибка апроксимації не більша $\frac{h}{2} M_2$, де $M_2 = \max |U''(x)|$.

При цьому необхідно, щоб похибка округлення $\delta_{x,i} = (\tilde{U}_i = U_i + \delta_i)$ була порівнянна з похибкою апроксимації, тобто

$$|\delta_{x,i}| \leq \frac{2\delta}{h} \leq \frac{h}{2} M_2, \quad (4.4)$$

де δ – верхня границя погрішностей округлення δ_i , $\delta_{i-1} : |\delta_i| \leq \delta$.

Обчислення при заданій δ необхідно проводити не з довільним малим кроком, а при $h \geq 2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}$. Іноді згладжують табличні значення функції підбором апроксимуючої функції, наприклад, сплайна 3-го степеня.

Багато формул чисельного диференціювання можна одержати як наслідок інтерполяційних формул. У якості інтерполяційного зручно використовувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа, побудований для функції $U(x)$. Такий багаточлен, побудований за трьома точками x_{i-1} , x_i , x_{i+1} , має вигляд

$$L_{2,i}(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{h_i(h_i+h_{i+1})} U_{i-1} - \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h_i+h_{i+1}} U_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})} U_{i+1}. \quad (4.5)$$

Знаходимо $L'_{2,i}(x)$ і вважаємо, що

$$U'(x) \approx L'_{2,i}(x), x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad (4.6)$$

(можна довести, що $L'_{2,i}(x)$ апроксимує $U'(x)$ за другим порядком). Неважко показати, що у випадку рівномірної сітки ($h_{i+1}=h_i=h$) приходимо до центральної різницевої похідної $L'_{2,i}(x) = U_{x,i}$ (за допомогою $L_{1,i}(x)$ можна одержати однобічні ліву і праву різницеві похідні). Обчислюючи другу похідну $L_{2,i}(x)$ одержуємо наближений вираз для

$$U''(x) \text{ при } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] : U''(x) \approx L''_{2,i}(x),$$

який на рівномірній різницевій сітці збігається з другою різницевою похідною $U''_{xx,i}$ (2-й порядок апроксимації має місце лише в точці $X=X_i$, щодо інших точок $X=X_{i\pm 1}$ - це апроксимація 1-го порядку).

Для наближеного обчислення похідних $U^{(m)}(x)$, $m > 2$ необхідно залучати інтерполяційні багаточлени більш високого порядку, ніж $L_{2,1}(x)$ (тобто збільшувати число інтерполяційних вузлів).

Просліджується така закономірність: з ростом n (і відповідної гладкості функції $U(x)$) порядок точності формул відносно h , збільшується, а з ростом m (номера похідної) - зменшується. Похибка формули чисельного диференціювання $U^{(m)}(x) \approx L^{(m)}_n(x)$ може мати таку оцінку:

$$|R_n^{(m)}(x)| = |U^{(m)}(x) - L_n^{(m)}(x)| = O(h^{n-m+1}), \quad (4.7)$$

де $R_n^{(m)}(x) = \frac{U^{(n+5)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$ - залишковий член інтерполяційної формули).

У тому випадку, коли точка x , у якій ми шукаємо m -у похідну функцію $U(x)$ така, що $\omega_{n+1}^{(m)} = 0$, то порядок точності формули чисельного диференціювання підвищується на одиницю. Неважко також помітити, що при парному n у середньому вузлі для парної похідної порядок точності формули на одиницю більший, ніж в інших вузлах. Тому рекомендується використовувати формули чисельного диференціювання з вузлами, розташованими симетрично щодо тієї точки, де шукається похідна.

Приведені вище формули чисельного диференціювання, побудовані за допомогою інтерполяційних багаточленів Лагранжа, виражаються через табличні значення функції. Іноді зручні формули чисельного диференціювання, що виражаються через скінченні різниці функцій. Для цього використовують інтерполяційні багаточлени Ньютона (Стірлінга чи Бесселя):

$$U(x) \approx N(x_0 + th) = U_0 + t\Delta U_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 U_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n U_0,$$

$$t = \frac{(x - x_0)}{h}.$$

Диференціюючи цей багаточлен за $x \left(\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dx} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dN}{dt} \right)$ можна одержати формули для обчислення похідних будь-якого порядку, наприклад:

$$U'(x) = \frac{1}{h} (\Delta U_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 U_0 + \dots + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!} \Delta^3 U_0 + \dots); \quad (4.8)$$

$$U''(x) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 U_0 + \frac{6t-6}{3!} \Delta^3 U_0 + \dots). \quad (4.9)$$

4.2 Метод невизначених коефіцієнтів. Поліпшення апроксимації методом Рунге-Ромберга

Досить часто замість використання багаточлена Лагранжа для випадку довільного розташування вузлів, що приводить до громіздких виразів, зручніше застосовувати метод невизначених коефіцієнтів. Шуканий вираз для похідної 2-го порядку в точці X_i представляється у вигляді лінійної комбінації заданих значень функції у вузлах $X_0, \dots, X_n$

$$U_i^{(k)} = C_0 U_0 + C_1 U_1 + \dots + C_n U_n. \quad (4.10)$$

Припускаючи, що формула точна для багаточленів $U=I$, $U=X-X_i$, ..., $U=(X-X_i)^n$ одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів C_i , $i = \overline{0, n}$.

Приклад. Для чотирьох рівновіддалених вузлів ($x_{i+1}-x_i=h$, $i = \overline{0, 2}$) вираз для 1-й похідної в точці $X=X_1$ може бути записаний у вигляді

$$U'_1 = C_0 U_0 + C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3. \quad (4.11)$$

З умови того, що формула точна для функції $U = 1$, одержимо (з врахуванням $U' = 0$)

$$0 = C_0 * 1 + C_1 * 1 + C_2 * 1 + C_3 * 1, \quad (4.12)$$

а з умови точного розв'язання формули (4.12) для $U=X-X_0$ ($U'=1$)

$$1 = C_0(x_0 - x_0) + C_1(x_1 - x_0) + C_2(x_2 - x_0) + C_3(x_3 - x_0) \\ \text{чи } hC_1 + 2hC_2 + 3hC_3 = 1. \quad (4.13)$$

Припускаючи, що вираз (4.11) правильний також для багаточленів $U=(x-x_0)^2$, $U=(x-x_0)^3$ аналогічно одержуємо ще два рівняння:

$$hC_1 + 4hC_2 + 9hC_3 = 2; \\ hC_1 + 8hC_2 + 27hC_3 = 3; \quad (4.14)$$

які замикають систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) щодо невідомих коефіцієнтів C_i , $i = \overline{1, 3}$. Знайшовши їх: $C_0 = -\frac{1}{3h}$, $C_1 = -\frac{1}{2h}$,

$C_2 = -\frac{1}{h}$, $C_3 = -\frac{1}{6h}$, одержимо таку формулу чисельного диференціювання

$$U'_1 = \frac{1}{6h}(-2U_0 - 3U_1 + 6U_2 - U_3). \quad (4.15)$$

Хоча порядок точності формул чисельного диференціювання прямо пропорційний числу вузлів, використовуваних при апроксимації, при збільшенні числа вузлів такі формули стають досить громіздкими. Спосіб уточнення розв'язання при заданій кількості використовуваних вузлів одержав назву методу Рунге-Ромберга.

Якщо $f(X, h)$ – різницева апроксимація похідної $F(x)$ на рівномірній сітці з кроком h , то похибку апроксимації представимо у вигляді

$$R = F(x) - f(x, h) = h^p \varphi(x) + O(h^{p+1}). \quad (4.16)$$

Вибравши інший крок $h_1=kh$, неважко одержати

$$F(x) = f(x, kh) + (kh)^p \varphi(x) + O((kh)^{p+1}). \quad (4.17)$$

З рівностей (4.16) і (4.17) знаходимо вираз для головного члена похибки

$$h^p \varphi(x) = \frac{f(x, h) - f(x, kh)}{k^p - 1} + O(h^{p+1}). \quad (4.18)$$

Тому за результатами двох розрахунків значення похідної з порядком $p(f(x, h) \text{ і } f(x, kh))$ легко одержати її уточнене значення с порядком точності $p+1$

$$F(x) = f(x, h) + \frac{f(x, h) - f(x, kh)}{k^p - 1} + O(h^{p+1}). \quad (4.19)$$

Остання формула носить назву формули Рунге. У випадку, коли розрахунки можуть бути зроблені з q різними кроками $h_1, h_2, \dots, h_q$ порядок точності формули чисельного диференціювання можна підвищити на $(q-1)$ за формулою Ромберга

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x, h_1) & h_1^p & h_1^{p+1} & \dots & h_1^{p+q-2} \\ f(x, h_2) & h_2^p & h_2^{p+1} & \dots & h_2^{p+q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x, h_q) & h_q^p & h_q^{p+1} & \dots & h_q^{p+q-2} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 1 & h_1^p & h_1^{p+1} & \dots & h_1^{p+q-2} \\ 1 & h_2^p & h_2^{p+1} & \dots & h_2^{p+q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & h_q^p & h_q^{p+1} & \dots & h_q^{p+q-2} \end{vmatrix} + O(h^{p+q-1}). \quad (4.20)$$

Контрольні питання

1. В чому полягає задача чисельного диференціювання?
2. Як знайти помилку чисельного диференціювання?
3. Для чого використовується поліноми Лагранжа?
4. Для чого використовуються поліноми Ньютона?
5. Як використовуються для чисельного диференціювання скінченні різниці?
6. Наведіть сутність методу невизначеного коефіцієнта.
7. Наведіть сутність методу Рунге-Ромберга.

5 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

5.1 Постановка задачі

Потреба обчислення визначених інтегралів виникає повсякчасно при розв'язанні різних інженерних та економічних задач. Якщо вдасться знайти аналітичну форму та виразити інтеграл у вигляді комбінацій алгебраїчних та трансцендентних функцій, то обчислення зводиться до підстановки меж інтегрування в формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (5.1)$$

Але в більшості випадків не вдається знайти аналітичну формулу або ж вона на стільки складна, що обчислення інтеграла стає задачею, яка не розв'язується за допомогою (5.1). Тоді доцільно застосування методів чисельного інтегрування, сутність якого зводиться до розбиття заданого інтервалу на множину менших інтервалів та знаходження сумарної площі як сукупності елементарних ділянок, що отримані в результаті розбиття. Таким чином, для неперервної функції $f(x)$ на скінченному інтервалі $[a, b]$ обчислення одним з чисельних методів визначеного інтегралу I представляється у вигляді суми ділянок так, що

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{K=1}^n \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x)dx = \sum_{K=1}^n I_K,$$

де I_K – площа елементарної ділянки, що отримана в результаті розбиття.

При цьому чим менший інтервал розбиття, тим точніше буде інтегральна сума, але виросте об'єм обчислень. Існуючі методи чисельного інтегрування направлені на забезпечення заданої точності обчислень при фіксованій кількості інтервалів та при автоматичному виборі їх числа в процесі обчислень.

Формули наближеного інтегрування називають квадратурними формулами.

5.2 Метод прямокутників

Це найбільш простий метод, який оснований на заміні площі криволінійної трапеції площею прямокутника (рис. 5.1.)

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (5.2)$$

де $f(x_i)$ – значення функції $f(x)$ на початку кожного i -го відрізка інтерполяційної функції $\varphi(x)$; n – число відрізків розбиття інтервалу інтегрування $[a, b]$.

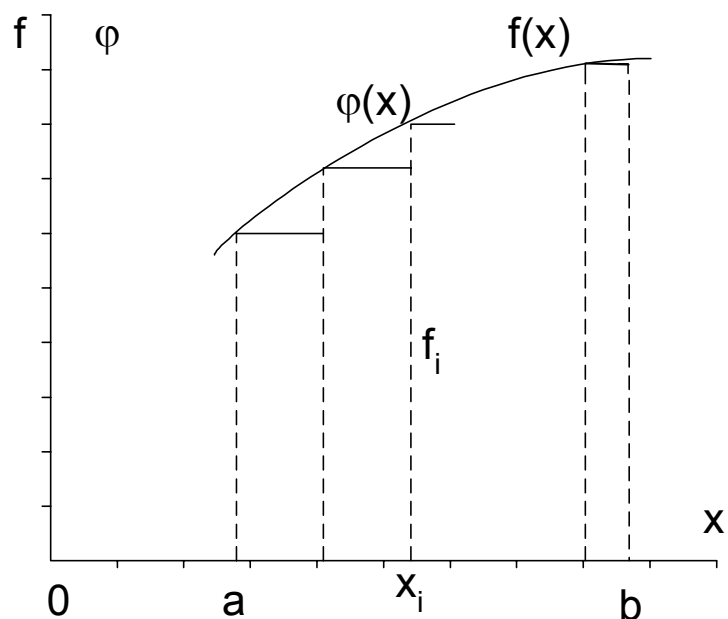


Рисунок 5.1

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ при $n=10$. Представити обчислення у вигляді табл. 5.1.

Таблиця 5.1

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x_i)$	1,000	0,969	0,883	0,769	0,717	0,667	0,625

Продовження табл. 5.1

7	8	9	$\sum_{i=1}^n f(x_i)$
0,7	0,8	0,9	
0,588	0,556	0,526	7,237

Більш точним є спосіб, коли за ординату приймається півсума двох сусідніх значень функції $\varphi(x)$:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right). \quad (5.3)$$

Застосовуючи (5.3) для попереднього прикладу, отримаємо $I = 6,693$.

5.3 Метод трапецій

Сутність даного методу полягає в заміні площі криволінійної трапеції площею трапеції, що утворена хордою, яка зв'язує кінці інтервалів розбиття, (Рис. 5.2):

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (5.4)$$

де $f(x_i)$ та $f(x_{i+1})$ – відповідно значення функції $f(x)$ на початку та в кінці кожного i -го відрізка інтерпольовальної ламаної $\phi(x)$; n – число відрізків розбиття інтервалу інтегрування $[a, b]$.

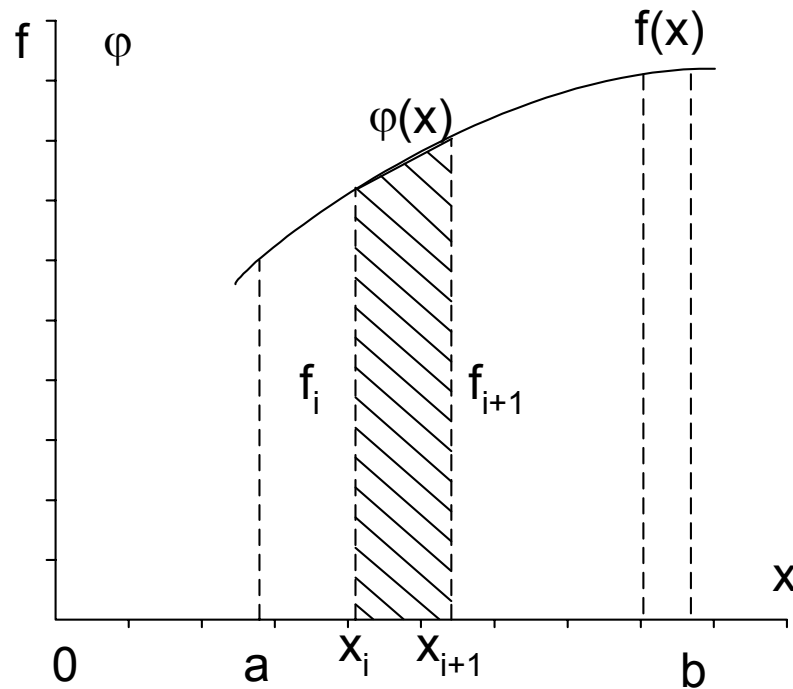


Рисунок 5.2

Таким чином, площа кожної елементарної трапеції дорівнює добутку її середньої лінії $\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$ на висоту $h = x_{i+1} - x_i$. При цьому для усього інтервалу $[a, b]$ справедливий вираз:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)).$$

5.4 Метод Сімпсона

Сутність даного методу полягає в заміні площі криволінійної трапеції площею, обрізаною подвійним інтервалом розбиття та параболою, що проходить через точки $(x_i, f(x_i))$, $((x_{i+1}), f(x_{i+1}))$ та $(x_{i+2}, f(x_{i+2}))$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \frac{b-a}{3n} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})),$$

де $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ та $f(x_{i+2})$ – значення функції $f(x)$ відповідно на початку, всередині та кінці кожного подвоєного відрізка (тобто $n = 2$) інтерполяційної функції $\varphi(x)$ (рис. 5.3). Геометрично це слід пояснити так: площа криволінійної трапеції, що обмежена параболою, рівна добутку $1/6$ основи цієї трапеції на суму крайніх ординат та збільшена в чотири рази середньої ординати параболі:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} (f(x_0) + f(x_{2m})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2m-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2m-2})) \quad (5.5)$$

де $f(x_0) = f(a)$; $f(x_{2m}) = f(b)$; $f(x_i) = f(x_i)$ – значення функції в точках x_i , де $i = 1, 2, \dots, 2m-1$; $n = 2m$ (парне число відрізків розбиття).

Формула (5.5) називається формулою Сімпсона.

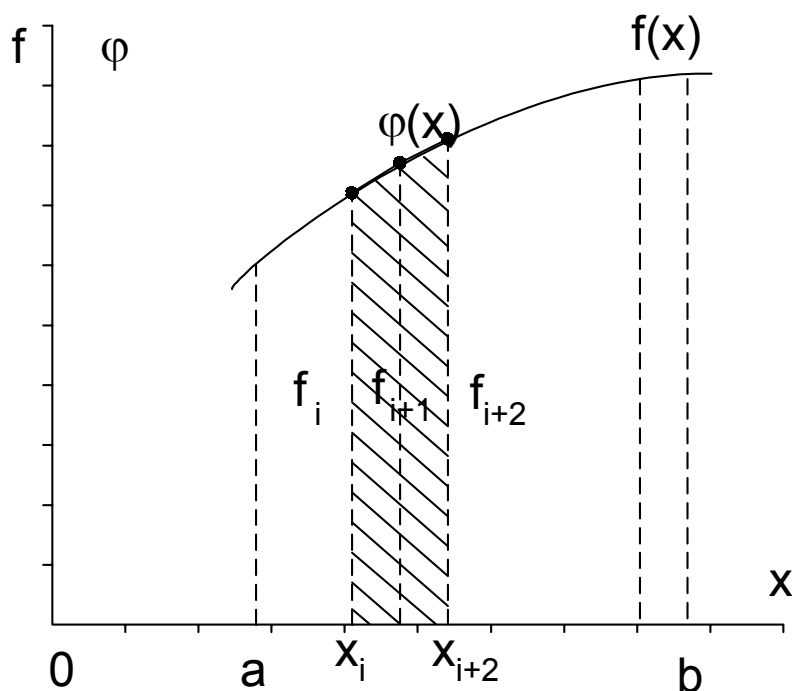


Рисунок 5.3

Слід пам'ятати, що у випадку малого вибраного кроку будуть великі витрати машинного часу, а великий вибраний крок не забезпечить точності інтегрування. Тому в алгоритмах, як правило, передбачається автоматичний вибір кроку інтегрування. Початковий крок виконується для $H = \sqrt[4]{\varepsilon}$, де ε – задана точність інтегрування. Після обчислення значення інтеграла

приймається $H = H/2$ і знову розраховується значення інтеграла. При цьому обчислюється абсолютна величина різниці цих двох отриманих значень інтеграла. Якщо вона менша заданої точності, розрахунки припиняються, і отримане останнє значення інтеграла вважається тим, що шукалося. Якщо ні, то подібнення кроку продовжується до виконання умови точності.

Для програмування зручніше користуватись замість формули (5.5) такою:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2(b-a)}{3n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2(f(x_1)+f(x_3)+\dots+f(x_{2m-1})) + (f(x_2)+f(x_4)+\dots+f(x_{2m})) \right). \quad (5.6)$$

5.5 Оцінювання похибки квадратурних формул

Встановлено, що точність інтегрування ε пов'язана з кроком інтегрування співвідношеннями:

➤ для методу прямокутників $\varepsilon \approx H$; (5.7)

➤ для методу трапецій $\varepsilon \approx H^2$; (5.8)

➤ для методу Сімпсона $\varepsilon \approx H^4$. (5.9)

Оцінити похибку обчислення можна за допомогою нерівностей:

➤ для методу трапецій $|R_{mp}| \leq \frac{|I_H - I_{2H}|}{3}$; (5.10)

➤ для методу Сімпсона $|R_C| \leq \frac{|I_H - I_{2H}|}{15}$, (5.11)

де I_H та I_{2H} – наближені значення інтеграла, що обчислені за квадратурною формулою з кроком H та $2H$, відповідно:

$$R_{mp} = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{[a,b]} |f''(x)|; \quad (5.12)$$

$$R_C = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{[a,b]} |f^{IV}(x)|. \quad (5.13)$$

Якщо необхідно обчислити певний інтеграл з заданою точністю ε , потрібно:

- вибрати деякий крок H ;
- обчислити I_H та I_{2H} ;
- за (5.12) чи (5.13) обчислити R_{mp} чи R_C ;
- за (5.10) чи (5.11) обчислити;
- якщо точність недостатня, то зменшуємо крок $H1 = H/2$ та знову робимо усі обчислення, оцінюючи похибку для кроку $H1$, і так до тих пір, поки не буде досягнута задана точність.

Приклад 2. Обчислити $\int_0^{1,2} \frac{x^3 dx}{e^x + 1}$ за формулами трапецій та Сімпсона при $n = 12$. Оцінити похибку отриманих результатів. Оформити обчислення у вигляді табл. 5.2.

Таблиця 5.2

i	x_i	$\frac{x_i^3}{e^{x_i} + 1}$	Метод трапецій		Метод Сімпсона	
			C_i	C'_i	a_i	a'_i
0	0	0,000000	1	1	1	1
1	0,1	0,000475	2	0	4	0
2	0,2	0,003601	2	2	2	4
3	0,3	0,011490	2	0	4	0
4	0,4	0,025684	2	2	2	2
5	0,5	0,047193	2	0	4	0
6	0,6	0,076538	2	2	2	4
7	0,7	0,113812	2	0	4	0
8	0,8	0,158733	2	2	2	2
9	0,9	0,210718	2	0	4	0
10	1,0	0,268941	2	2	2	4
11	1,1	0,332404	2	0	4	0
12	1,2	0,399989	1	1	1	1
Σ			2,899163	1,466991	4,331346	2,165148
I			$I_H=0,144958$	$I_{2H}=0,146699$	$I_H=0,144378$	$I_{2H}=0,144343$
R			0,000796	<0,0006	$1,561 \times 10^{-12}$	<0,000002

Відповідь: $I = 0,1450 \pm 0,0006$ (за методом трапецій);

$I = 0,144378 \pm 0,000002$ (за методом Сімпсона).

Порядок заповнення таблиці 5.2:

➤ обчислюємо $x_i = a + iH$ ($i = 0, 1, \dots, 12$); в нашому випадку $a = 0$; $H = 0,1$;

➤ обчислюємо $y_i = \frac{x_i^3}{e^{x_i} + 1}$ ($i = 0, 1, \dots, 12$);

➤ обчислюємо за формулою трапецій з кроком 0,1 при $n = 12$ наближене значення визначеного інтеграла

$$I_H = \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{11} + y_{12}) = \frac{1,2}{24} \sum_{i=0}^{12} c_i y_i ;$$

➤ в стовпчик c_i ставимо значення коефіцієнтів при y_i ;

➤ в рядку Σ значення $\sum_{i=0}^{12} c_i y_i$;

- в рядку I_H значення $\frac{1,2}{24} \sum_{i=0}^{12} c_i y_i$;
- обчислюємо за формулою трапецій з кроком 0,2 при $n = 6$ наближене значення визначеного інтеграла

$$I_{2H} = \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \dots + 2y_{10} + y_{12}) = \frac{1,2}{12} \sum_{i=0}^{12} c'_i y_i ;$$

оскільки точки $x_1, x_3, \dots, x_{11}$ пропускаються, то для них $c'_i = 0$;

- оцінюємо похибку за (5.10) та (5.12);
- робимо аналогічні обчислення за формулою Сімпсона з кроком $H = 0,1$ при $n = 12$ за (5.5);
- робимо аналогічні обчислення за формулою Сімпсона з кроком $2H = 0,2$ при $n = 6$ за (5.5);
- оцінюємо похибку за (5.11) та (5.13).

Контрольні питання

1. Чому виникає необхідність використання чисельних методів інтегрування?
2. В чому полягає сутність чисельних методів інтегрування?
3. Як називаються формули наближеного інтегрування?
4. Поясніть, на чому ґрунтується метод прямокутників?
5. Які відомі способи обчислення ординати прямокутних ділянок?
6. Поясніть, на чому ґрунтується метод трапецій?
7. В чому полягає сутність методу Сімпсона?
8. Як здійснюється автоматичний вибір кроку інтегрування в методі Сімпсона?
9. Яким співвідношенням пов'язана точність інтегрування та крок інтегрування для методів прямокутників, трапецій та Сімпсона?
10. Як оцінити похибку обчислень інтеграла для методу Сімпсона?

6 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

6.1 Постановка задачі

Простим диференціальним рівнянням n -го порядку називається вираз

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (6.1)$$

що встановлює зв'язок між однією незалежною змінною x , невідомою функцією y та її похідними $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

Розв'язанням диференціального рівняння є деяка функціональна залежність $y(x)$, яка при підстановці в рівняння обертає його в тотожність. Існує множина розв'язків рівняння (6.1), які можна об'єднати та записати у вигляді спільного розв'язку

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

де $c_1, c_2, \dots, c_n$ - приведені постійні.

Для виділення одного частинного розв'язку необхідно задати n умов, які єдиним чином визначають постійні $c_1, c_2, \dots, c_n$. Ці умови для однієї точки x_0 являють собою сукупність значень функцій $y(x)$ та всіх її похідних в цій точці:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (6.2)$$

Така задача інтегрування рівняння (6.1) називається задачею Коші, а умови (6.2) називаються початковими умовами.

Диференціальне рівняння n -го порядку (6.1) можна представити як систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y' = y_1(x); \\ y_1' = y_2(x); \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n(x); \\ y_n' = f(x, y, y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)), \end{cases}$$

для розв'язання якої використовуються методи, що являють собою узагальнення методів розв'язання одного диференціального рівняння першого порядку. При $n = 1$ рівняння (6.1) має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)). \quad (6.3)$$

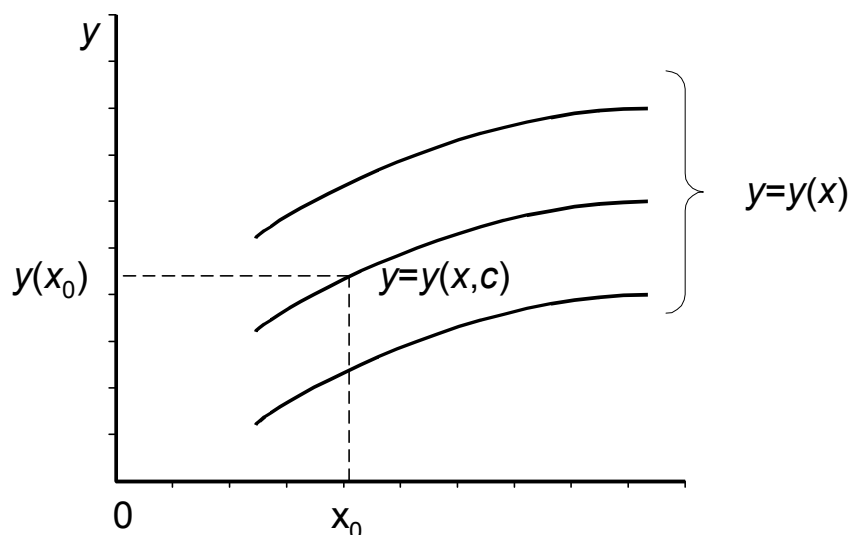


Рисунок 6.1

Геометрично його можна інтерпретувати як задання сім'ї кривих $y(x)$ через її похідні, де кожна крива (рис. 6.1.) є розв'язком (6.3) і характеризується спільним розв'язком $y = y(x, c)$. Для вибору однієї кривої з цієї сім'ї, тобто частинного розв'язку $y = y(x, c)$, необхідно задати початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \quad (6.4)$$

тобто одну точку на кривій розв'язку.

Наближені методи інтегрування простих диференціальних рівнянь дозволяють розв'язати задачу Коші та знайти деяку функцію $\tilde{y}(x)$, що близька до шуканої функції $y(x)$ – істинний розв'язок. Якщо розв'язок $\tilde{y}(x)$ отримується у вигляді аналітичного виразу, то метод розв'язання називається аналітичним, а якщо у вигляді таблиці чисел – чисельним.

Найбільш розповсюджений аналітичними методами є метод ітерацій, коли рівняння (6.3) перетворюється в інтегральне рівняння з врахуванням початкових умов (6.4)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx,$$

яке розв'язується методом інтегрування за допомогою степеневих рядів, коли шукана функція (частинний розв'язок) формально представляється у вигляді ряду Тейлора:

$$\tilde{y}(x) = y_0 + (x - x_0)y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0'' + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + \dots$$

Але аналітичне розв'язання має обмежене коло прикладних задач. Тому виникає необхідність в отриманні чисельних методів розв'язання в вигляді таблиць чисел, які дають можливість знайти в деяких точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ наближення $\tilde{y}(x_1), \tilde{y}(x_2), \dots, \tilde{y}(x_n)$ до точних розв'язків

$y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$. Найбільше розповсюдження отримали методи Ейлера, Рунге-Кутта та Хемінга. Вибір методу залежить від величини кроку та потрібної точності. Можна виділити два випадки: потрібно знайти розв'язок на короткому проміжку і з помірною точністю (метод Ейлера чи Ейлера-Коші забезпечує такий наближений розв'язок) та розв'язок на проміжку великої довжини чи короткому проміжку з високою точністю (методи Рунге-Кутта, Хеммінга та ін.)

6. 2 Методи Рунге-Кутта

На практиці для розв'язання диференціальних рівнянь широко застосовується група методів яка відома за назвою методів Рунге-Кутта. Різні методи цієї групи вимагають більшого чи меншого об'єму обчислень і відповідно забезпечують більшу чи меншу точність. Методи Рунге-Кутта мають такі властивості:

1. Ці методи є однокроковими: щоб знайти y_{i+1} потрібна інформація тільки про попередню точку x_i, y_i .
2. Вони узгоджуються з рядом Тейлора аж до членів порядку h^k , де степінь k різний для різних методів і називається порядком точності методу.
3. Вони не вимагають обчислення похідних від $f(x, y)$, а вимагають тільки обчислення самої функції.

Саме завдяки третій властивості методи Рунге-Кутта більш зручні для практичних обчислень. Однак для обчислення одної наступної точки доведеться обчислювати функцію $f(x, y)$ кілька раз при різних значеннях x і y .

6. 2. 1 Метод Ейлера

Метод Ейлера є методом Рунге-Кутта першого порядку точності, тому що узгоджується з розкладанням у ряд Тейлора до членів порядку h .

Ідея даного методу полягає в заміні істинного розв'язку рівняння (6.3) ламаною лінією $\tilde{y}(x)$. При цьому розрахункова формула

$$y(x_i + 1) = y(x_i) + hf(x_i, y_i) \quad (6.5)$$

виводиться з (6.3) при заміні похідної її різницеvim зображенням.

В (6.5) h – крок інтегрування, $i = 1, 2, \dots, n$. Провівши дотичну (рис. 6.2.) до $y(x)$ в точці $A(x_0, y_0)$ до перетинання її з ординатою в точці $B_1(x_1, y_1)$, яка віддалена від точки A по осі абсцис на величину кроку h , отримаємо $\operatorname{tg} \alpha = f(x_0, y_0) \approx (y_1 - y_0)/h$. Звідси $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$. Провівши дотичну до $y(x)$ в точці B до перетинання її з ординатою x_2 (точка c_2) і потім з точки B_1 лінію $B_1C_1 \parallel BC_2$, отримаємо $\operatorname{tg} \alpha_1 = f(x_1, y_1) \approx (y_2 - y_1)/h$. Звідки $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$.

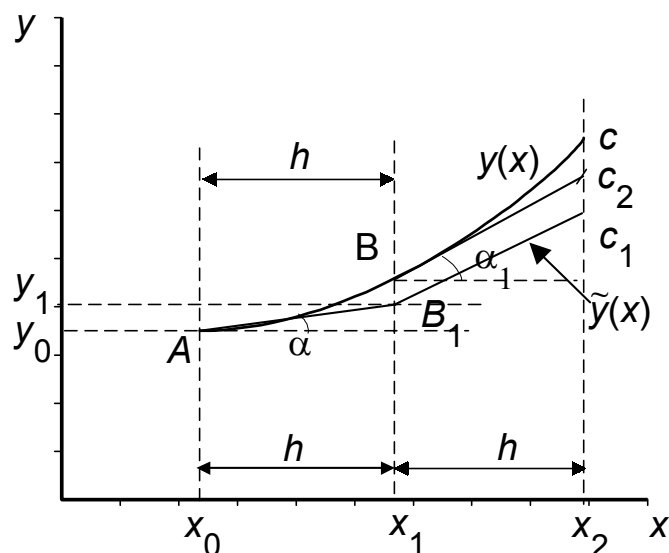


Рисунок 6.2

Таким чином, ми отримаємо ламану AB_1C_1 , що є наближенням $\tilde{y}(x)$ до дійсного розв'язку. Отже, перше значення функції y_1 в точці $x_1 = x_0 + h$ розраховується за допомогою попередньо заданих початкових умов (6.4), а всі наступні y_i за попередніми $y(i+1)$ у відповідності з (6.5).

Для оцінювання похибки методу формула (6.5) порівнюється з розкладом в ряд Тейлора в околі точки x_i :

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{3} y'''_i + \dots \quad (6.6)$$

З врахуванням (6.6) формула (6.5) узгоджується з розкладом в ряд Тейлора до членів першого порядку (h) і похибка методу пропорційна h^2 . Збільшення точності методу Ейлера можна досягнути зменшенням кроку інтегрування, що, однак, збільшує об'єм обчислень.

6. 2. 2 Модифікації методу Ейлера

Модифікації методу Ейлера є методами Рунге-Кутта другого порядку точності і дозволяють збільшити точність обчислень та досягнути похибки, яка буде пропорційною h^3 .

Одна з модифікацій полягає в корекції положення кінцевої точки відрізка, яким замінюється інтегральна крива (на кожному кроці). Корекція полягає в урахуванні тангенса кута нахилу в точці, яка віддалена від початкової на $h/2$ (рис. 6.3).

Проводиться дотична AC через точку A з координатами (x_i, y_i) та тангенсом кута нахилу $f(x_i, y_i)$ до перетину з прямою $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$ в точці $C(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ і обчислюється $y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$.

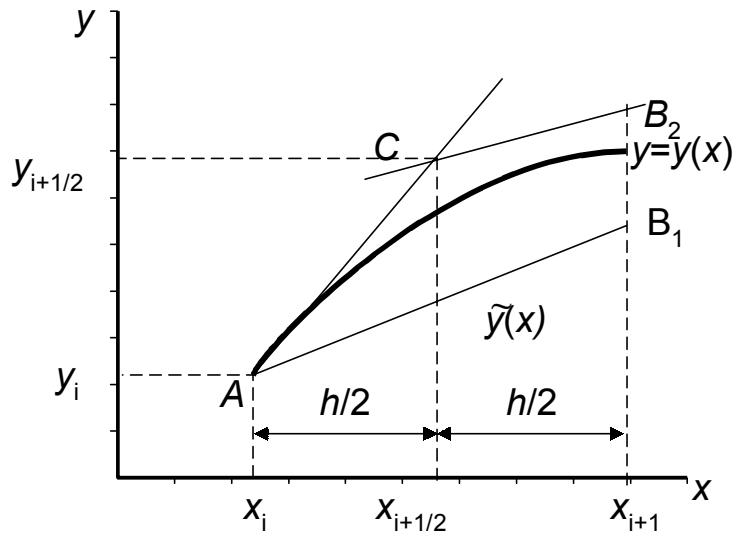


Рисунок 6.3

В точці C обчислюється похідна $f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$, з врахуванням якої проводиться дотична CB_2 . А далі з точки A проводиться пряма $AB_1 \parallel CB_2$ до перетинання з ординатою $x_{i+1} = x_i + h$ та обчислюється значення y в новій точці B_1 , тобто

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + hy'_i\right). \quad (6.7)$$

Це і є модифікована формула Ейлера.

Друга модифікація, що відома як метод Ейлера-Коші, передбачає (рис. 6.4) корегування положення кінцевої точки відрізка, яким замінюється інтегральна крива (на кожному кроці) за усередненим значенням тангенса кута нахилу дотичних, що проведені в точках (x_i, y_i) та $(x_i + h, y_i + hy'_i)$. Остання точка в методі Ейлера позначалась x_{i+1}, y_{i+1} . Знаходження точки B_1 з координатами x_{i+1}, y_{i+1} можна простежити за рис. 6.4. Методом Ейлера знаходиться точка $(x_i + h, y_i + hy'_i)$ на прямій AB_2 , в якій знову обчислюється тангенс кута дотичної (пряма LL). Потім усереднення двох тангенсів дає пряму MM , паралельно якій з точки A проводиться відрізок AB_1 , що відповідає функції $\tilde{y}(x)$ на відрізку x_i, x_{i+1} . Точка B_1 буде визначати ординату y_{i+1} . Таким чином, розрахункові формули такі:

$$\begin{aligned} y_{i+1}^{(0)} &= y_i + hf(x_i, y_i); \\ y_{i+1}^{(k+1)} &= y_i + \frac{h}{2} \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)});$$

$$h = x_{i+1} - x_i.$$

Числа K_1, K_2, K_3 і K_4 мають певний геометричний зміст (рис. 6.5). Нехай крива ACB є дійсним розв'язком рівняння $y' = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$.

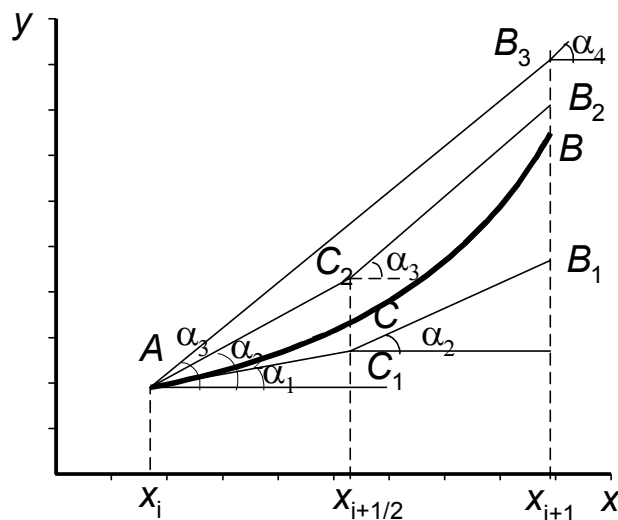


Рисунок 6.5

Число K_1 з точністю до множника $h = x_{i+1} - x_i$ являє собою кутовий коефіцієнт дотичної в точці A до кривої ABC , тобто $K_1 = h \cdot y'_i = hf(x_i, y_i)$.

Точка C_1 має координати $\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$. Виходячи з цього, число

K_2 з точністю до множника h є кутовим коефіцієнтом прямої, яка паралельна дотичній до кривої ABC в точці C (C_1B_1 – відрізок цієї прямої). Через точку A проведемо пряму $AC_2 \parallel C_1B_1$. Тоді точка C_2 буде мати координати $\left(x_i + h, y_i + \frac{K_2}{2}\right)$, а K_3 – кутовий коефіцієнт прямої, за допомогою котрого передбачається координати точки B_3 (C_2B_2 – відрізок цієї дотичної). Через точку A проведемо $AB_3 \parallel C_2B_2$ та отримаємо точку B_3 з координатами $(x_i + h, y_i + K_3)$. Тоді K_4 є кутовим коефіцієнтом прямої, яка паралельна дотичній до кривої ABC в точці B .

6.3 Оцінювання похибки чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Основним недоліком чисельних методів є накопичення похибок в процесі розв'язання. Похибки, що допущені при визначенні початкових значень y_1, y_2, y_3 у відповідності з (6.5) чи (6.10), викликають систематичне нарощування похибок при подальших обчисленнях.

Як вже було вказано, похибка методу Ейлера пропорційна h^2 , модифікованих методів – h^3 , методу Рунге-Кутта – h^5 . Однак значення коефіцієнтів пропорційності залежать від кроку інтегрування і від характеру шуканої функції.

Застосовуючи чисельні методи, доцільно так проводити обчислення, щоб кожен раз можна було б порівнювати наближені значення функції $\tilde{y}_i, i=1,2,\dots,n$, отримані з різним кроком. Для цього спочатку береться досить великий крок інтегрування та визначається значення функції в першій точці – $y_1^{(1)}$. Потім крок дробиться та знову знаходиться значення функції в цій же точці – $y_1^{(i)}$. Ці ітерації повторюються до тих пір, поки буде виконуватись нерівність

$$|y_1^{(K+1)} - y_1^{(K)}| > \varepsilon,$$

де ε – попередньо задана точність, K – номер ітерації для першої точки.

Після цього вказана процедура виконується для точки y_2 , потім для y_3 і т.д. В результаті шукана наближена функція буде зображена у табличному вигляді, де $y_i^{(K+1)}$ – наближене значення функції в точці x_i , що отримане шляхом $K+1$ ітерації:

x	x_0	x_1	x_2	$\cdot \cdot \cdot$	x_n
y	y_0	$y_1^{(K+1)}$	$y_2^{(K+1)}$	$\cdot \cdot \cdot$	$y_n^{(K+1)}$

Приклад розв'язування звичайного диференціального рівняння методами Ейлера і Рунге-Кутта. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \sin x + \cos y, \quad y(0) = 0$$

з точністю до $\varepsilon = 0,01$ в інтервалі $[0; 0,5]$.

Для зрівняння знайдемо розв'язок для $h = 0,1 (h \approx \sqrt{0,01})$ також методом Ейлера; побудуємо таблицю розв'язків (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

i	x	y	Проміжні обчислення		$f(x, y)$	$\Delta y = hf(x, y)$
			$\sin x$	$\cos y$		
0	0	0	0	1	1	0,1
1	0,1	0,1	0,09983	0,99500	0,94831	0,10948
2	0,2	0,20948	0,20795	0,97814	1,18609	0,11861
3	0,3	0,32809	0,32223	0,94666	1,26889	0,12689
4	0,4	0,45498	0,43944	0,89827	1,33771	0,13377
5	0,5	0,58875				

Для розв'язання задачі методом Рунге-Кутта оберемо $h = 0,25$ та побудуємо таблицю розв'язків (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

i	x	y	Проміжні обчислення		$f(x, y)$	K	Δy
			$\sin x$	$\cos y$			
0	0	0	0	1	1	0,25	0,27802
	0,125	0,125	0,12468	0,99220	1,11688	0,27922	
	0,125	0,13961	0,12468	0,99027	1,11495	0,27874	
	0,25	0,27874	0,24740	0,96140	1,20880	0,30220	
1	0,25	0,27802	0,24740	0,96160	1,20900	0,30225	0,31139
	0,375	0,42915	0,36627	0,90932	1,27559	0,31890	
	0,375	0,58860	0,36627	0,83172	1,19799	0,28950	
	0,5	0,57752	0,47943	0,83782	1,31725	0,32931	
2	0,5	0,58941					

Для порівняння візьмемо $\frac{h}{2} = 0,125$ та знайдемо розв'язки методом

Рунге-Кутта; побудуємо таблицю розв'язків (табл. 6.3)

Таблиця 6.3

i	x	y	Проміжні обчислення		$f(x, y)$	K	Δy
			$\sin x$	$\cos y$			
0	0	0	0	1	1	0,125	0,13245
	0,625	0,0625	0,06266	0,99805	1,06071	0,13256	
	0,625	0,6628	0,06246	0,99780	1,06026	0,13253	
	0,125	0,13253	0,12468	0,99123	1,11591	0,13949	
1	0,125	0,13245	0,12468	0,99124	1,11592	0,13949	0,14558
	0,1879	0,20220	0,18640	0,97963	1,16603	0,14575	
	0,1875	0,20553	0,18640	0,97899	1,16539	0,14567	
	0,25	0,27812	0,24740	0,96157	1,20897	0,15112	
2	0,25	0,27803	0,24740	0,96160	1,20900	0,15112	0,15549
	0,3125	0,35359	0,30744	0,93814	1,24558	0,15570	
	0,3125	0,35588	0,30744	0,93734	1,24478	0,15560	
	0,375	0,43363	0,36627	0,90745	1,27372	0,15921	
3	0,375	0,43352	0,36627	0,90749	1,27376	0,16762	0,17064
	0,4375	0,51733	0,42368	0,86914	1,29282	0,17331	
	0,4375	0,52017	0,42368	0,86774	1,29112	0,17349	
	0,5	0,60701	0,47942	0,82136	1,30078	0,16260	
4	0,5	0,60416					

Наведемо розв'язок у вигляді табл. 6.4 для методу Ейлера, табл. 6.5 – методу Рунге-Кутта.

Таблиця 6.4

Крок i	x	y	Проміжні обчислення			$f(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0				$f(x_0, y_0)$	$hf(x_0, y_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$				$f(x_1, y_1)$	$hf(x_1, y_1)$
...	...	...				...	...
n	$x_n = x_0 + nh$	$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$				$f(x_n, y_n)$	$hf(x_n, y_n)$

Таблиця 6.5

i	x	y	Проміжні обчис- лення		$f(x, y)$		k_i
0	x_0	y_0			$f(x_0, y_0)$	$K_1^{(0)}$	$\Delta y_0 =$ $= \frac{1}{6}(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} +$ $+ 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)})$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$			$f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$	$K_2^{(0)}$	
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$			$f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$	$K_3^{(0)}$	
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$			$f(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)})$	$K_4^{(0)}$	
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y$			$f(x_1, y_1)$	K_i	$\Delta y_1 =$ $= \frac{1}{6}(K_1^{(1)} + 2K_2^{(1)} +$ $+ 2K_3^{(1)} + K_4^{(1)})$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 \pm \frac{K_1^{(1)}}{2}$			$f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2}\right)$	$K_1^{(0)}$	
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2}$			$f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2}\right)$	$K_2^{(0)}$	
	$x_1 + h$	$y_1 + K_3^{(1)}$			$f(x_1 + h, y_1 + K_3^{(1)})$	$K_3^{(0)}$	
2	$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + \Delta y$			$f(x_2, y_2)$	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Для розв'язання задачі методом Ейлера використаємо (6.5) та оберемо крок $h = 0,05$. Результати обчислень зведемо в табл. 6.6.

$$K_{3j}^{(i)} = hf_j \left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{K_{21}^{(i)}}{2}, y_{2i} + \frac{K_{22}^{(i)}}{2}, \dots, y_{ni} + \frac{K_{2n}^{(i)}}{2} \right);$$

$$K_{4j}^{(i)} = hf_j \left(x_i + h, y_{1i} + K_{31}^{(i)}, y_{2i} + K_{32}^{(i)}, \dots, y_{ni} + K_{3n}^{(i)} \right);$$

для $i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

6.5 Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку методом Рунге-Кутта

Розглянемо диференціальне рівняння n -го порядку.

$$y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (6.13)$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad \dots \quad y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Це рівняння можна звести до системи n диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y' = y_1; \\ y_1' = y_2; \\ y_2' = y_3; \\ \dots \\ y_{n-2}' = y_{n-1}; \\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \quad (6.14)$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0; \quad y_1(x_0) = y'_0; \quad \dots \quad y_{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Получене рівняння (6.14) розв'язується методом Рунге-Кутта за формулами (6.12).

6.6 Розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта-Мерсона

Метод Рунге-Кутта-Мерсона відноситься до методів, в яких крок інтегрування автоматично змінюється. Якщо задана система вигляду

$$z_j' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$$

з початковими умовами $z_j(x_0) = z_{j0}$ для $j = 1, 2, \dots, n$, то її треба привести до вигляду, зручного для розрахунків, для чого в систему вводиться рівняння $x' = 1$. Тоді система буде мати вигляд:

$$y_j' = f(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}), \quad (6.15)$$

де $y_1 = x, y_2 = z_1, y_3 = z_2, \dots, y_n = z_{n-1}, y_{n+1} = z_n$.

Інтегрування системи (6.15) здійснюється методом, що дозволяє обчислити значення $y_{j,i+1}$ для послідовних значень незалежної змінної за співвідношенням, аналогічним (6.12):

$$y_{j,i+1} = y_{j,i} + \Delta y_{j,i}; \quad (6.16)$$

$$\text{де } \Delta y_{j,i} = \frac{1}{2} \left(K_{1j}^{(i)} + 4K_{4j}^{(i)} + K_{6j}^{(i)} \right),$$

$$K_{1j}^{(i)} = \frac{h}{3} f_j \left(x_i, y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni} \right);$$

$$K_{2j}^{(i)} = \frac{h}{3} f_j \left(x_i + \frac{h}{3}, y_{1i} + K_{11}^{(i)}, y_{2i} + K_{12}^{(i)}, \dots, y_{ni} + K_{1n}^{(i)} \right);$$

$$K_{3j}^{(i)} = \frac{h}{3} f_j \left(x_i + \frac{h}{3}, y_{1i} + \frac{K_{11}^{(i)} + K_{21}^{(i)}}{2}, \dots, y_{ni} + \frac{K_{1n}^{(i)} + K_{2n}^{(i)}}{2} \right);$$

$$K_{4j}^{(i)} = \frac{h}{3} f_j \left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{3(K_{11}^{(i)} + 3K_{31}^{(i)})}{8}, \dots, y_{ni} + \frac{3(K_{1n}^{(i)} + 3K_{3n}^{(i)})}{8} \right);$$

$$K_{5j}^{(i)} = \frac{h}{3} f_j \left(x_i + h, y_{1i} + 6 \left(K_{41}^{(i)} + \frac{K_{11}^{(i)} - 3K_{31}^{(i)}}{4} \right), \dots, y_{ni} + 6 \left(K_{4n}^{(i)} + \frac{K_{1n}^{(i)} - 3K_{3n}^{(i)}}{4} \right) \right).$$

Оцінювання похибки на кожному кроці інтегрування здійснюється за формулою

$$\varepsilon_j^{(i)} = K_{1j}^{(i)} + 4 \left(K_{4j}^{(i)} - \frac{9K_{3j} + K_{sj}}{8} \right). \quad (6.17)$$

Після обчислення згідно з (6.16) кожного наступного значення $y_{j,i+1}$ за (6.17) обчислюється $\varepsilon_j^{(i)}$ та береться максимальне її значення (за абсолютною величиною), що аналізується таким чином. Якщо $\max |\varepsilon_j^{(i)}| > \frac{\varepsilon}{5}$, то крок ділиться навпіл, тобто $h_{\text{нове}} = \frac{h_{\text{старе}}}{2}$. Якщо $\max |\varepsilon_j^{(i)}| = \frac{\varepsilon}{32}$, то крок подвоюється. В інших випадках крок не змінюється. Не дивлячись на громіздкість, метод найбільш швидкий та дає достатньо високу точність.

Контрольні питання

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку?
2. Що є розв'язком диференціального рівняння?
3. Що таке частинний розв'язок диференціального рівняння? Поясніть на графіку.
4. Чому виникає необхідність застосовувати наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь? Як розділяються наближені методи?
5. В чому відмінність методів розв'язання диференціальних рівнянь?
6. В чому ідея методу Ейлера?
7. В чому сутність модифікації методу Ейлера? Поясніть на графіку.

8. В чому сутність методу Рунге-Кутта? Поясніть на графіку.
9. Як оцінюється похибка різноманітних чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь?
10. В чому ідея розв'язання системи диференціальних рівнянь 1-го порядку?
11. В чому ідея розв'язання системи диференціальних рівнянь n -го порядку?

7 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

7.1 Загальні відомості

Визначимо спочатку поняття крайової задачі для диференціального рівняння n -го порядку. Розглянемо диференціальне рівняння n -го порядку вигляду:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad (7.1)$$

та n -крайових умов

$$\begin{aligned} \Phi_l(y(x_1), y'(x_1), \dots, y^{(n-1)}(x_1), y(x_2), y'(x_2), \dots, y^{(n-1)}(x_2), \dots, y(x_k), \\ y'(x_k), \dots, y^{(n-1)}(x_k)) = 0; \\ l = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Тут $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ – будь-які наперед задані значення аргументу та введені значення

$$y^{(s)}(x_i) = \left. \frac{d^s y}{dx^s} \right|_{x=x_i};$$

$\Phi_l(\bullet)$, $F(\bullet)$ – задані нелінійні функції своїх аргументів. Якщо функції $\Phi_l(\bullet)$ залежать від значень y та похідних не менше, ніж в двох точках, то задача (7.1) та (7.2) називається крайовою.

Розв'язати крайову задачу – означає, знайти таку функцію $y(x)$, яка задовольняє рівняння (7.1) та умову (7.2). Крайова задача може не мати жодного, мати один, декілька або нескінченно багато розв'язків.

Крайова задача називається лінійною, якщо рівняння (7.1) та умови (7.2) лінійні. Рівняння (7.1) в цьому випадку має вигляд

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

де $p_0, p_1, \dots, p_n, f$ – невідомі, неперервні на $[a, b]$ функції.

Для простоти запишемо лінійні крайові умови тільки для двох точок $x_1=a$ та $x_2=b$ в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(l)} y(a) + \beta_0^{(l)} y(b) + \alpha_1^{(l)} y'(a) + \beta_1^{(l)} y'(b) + \dots + \alpha_{n-1}^{(l)} y^{(n-1)}(a) + \\ + \beta_{n-1}^{(l)} y^{(n-1)}(b) = \gamma_l, l = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

де $\alpha_s^{(l)}, \beta_i^{(l)}$ та γ – задані постійні числа. Такі крайові задачі називаються двоточковими.

Лінійна крайова задача називається однорідною, якщо:

А) $f(x) \equiv 0$ для $x \in [a, b]$;

Б) $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = 0$.

В протилежному випадку крайова задача називається неоднорідною.

Розглянемо деякі методи розв'язування лінійної двоточної крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку.

7.1 Метод зведення до задачі Коші

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (7.3)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані та неперервні на $[a, b]$ функції.

Потрібно знайти розв'язок рівняння (7.3), що задовольняє умови:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^{(l)} y(a) + \beta_0^{(l)} y(b) + \alpha_1^{(l)} y'(a) + \beta_1^{(l)} y'(b) &= \gamma_1 \\ \alpha_0^{(2)} y(a) + \beta_0^{(2)} y(b) + \alpha_1^{(2)} y'(a) + \beta_1^{(2)} y'(b) &= \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Розв'язування крайової задачі (7.3) та (7.4) можна замінити розв'язанням трьох задач Коші. При цьому розв'язок початкової задачі $y(x)$ шукається у вигляді:

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (7.5)$$

де y_0 , y_1 та y_2 – розв'язки таких задач Коші:

$$y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0 = f(x); \quad y_0(a) = 0; \quad y_0'(a) = 0;$$

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0; \quad y_1(a) = 1; \quad y_1'(a) = 0;$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0; \quad y_2(a) = 0; \quad y_2'(a) = 1.$$

Підставимо (7.5) при $x=a$ та $x=b$ в умови (7.4), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення постійних C_1 та C_2 . Розв'язавши її та підставивши отримані C_1 та C_2 в (7.5) будемо мати розв'язок даної крайової задачі. Якщо визначник алгебраїчної системи відрізняється від 0, то вона, а значить, і крайова задача, має розв'язок, або має їх нескінченну кількість. У зв'язку з цим і крайова задача або не має розв'язку, або має їх нескінченну кількість.

В деяких випадках крайову задачу вдається звести до розв'язання меншої кількості задач Коші. Це визначається характером крайових умов. Якщо умови (7.4) мають вигляд:

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1; \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2;$$

де $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$, то розв'язок можна шукати в формі

$$y(x) = y_0(x) + C y_1(x).$$

Тут $y_0(x)$ є розв'язком однієї з двох задач Коші, приведених нижче.

1. При $\alpha_0 \neq 0$

$$L(y_0) = f(x);$$

$$y_0'(a) = 0; y_0(a) = \gamma_1 / \alpha_0.$$

2. При $\alpha_1 \neq 0$

$$L(y_0) = f(x);$$

$$y_0(a) = 0; y_0'(a) = \gamma_1 / \alpha_1.$$

В тому же виразі для $y(x)$ функція $y_1(x)$ є розв'язком задачі Коші

$$L(y_1) = 0;$$

$$y_1(a) = K\alpha_1; y_1'(a) = -K\alpha_0,$$

де $K \neq 0$ – будь-яка постійна.

Постійна C визначається з другої крайової умови у вигляді

$$C = \frac{\gamma_2 - [\beta_0 y_0(b) + \beta_1 y_1'(b)]}{\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b)}.$$

Якщо $\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b) \neq 0$, то можна визначити постійну C , та крайова задача буде мати єдиний розв'язок. Якщо ж $\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b) = 0$, то крайова задача або не має розв'язок, або має їх нескінченну кількість.

Якщо краєві умови мають вигляд

$$y(a) = A; y(b) = B, \quad (7.6)$$

то $y_0(x)$ є розв'язком задачі

$$L(y_0) = f(x);$$

$$y_0(a) = A; y_0'(a) = 0,$$

а $y_1(x)$ є розв'язком задачі

$$L(y_1) = 0;$$

$$y_1(a) = 0; y_1'(a) = 1,$$

Розв'язок крайової задачі з умовами (7.6) буде мати вигляд

$$y(x) = y_0(x) + \frac{B - y_0(b)}{y_1(b)} y_1(x).$$

7.3 Метод скінченних різниць

Якщо розв'язок потрібно знайти в проміжку $[a, b]$, то останній треба вузлами $x_0=a, x_1=a+h; \dots; x_n=b$, де $h=(b-a)/n$ розбити на часткові проміжки $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1 \dots n-1$.

Диференціальне рівняння, що записане для кожної точки x_i , змінюється скінченно-різницеvim рівнянням, а похідні, що входять в крайові умови, - скінченними різницями. В результаті приходимо до алгебраїчної задачі. Необхідні для такої заміни формули, що виражають похідні через значення функції в вузлах, отримують за допомогою ряду Тейлора в такому вигляді:

$$y'(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} + O(h); \quad (\text{права формула})$$

$$y'(x_k) = \frac{y(x_k) - y(x_{k-1})}{h} + O(h); \quad (\text{ліва формула})$$

$$y'(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}))}{2h} + O(h^2); \quad (\text{центральна формула})$$

$$y'(x_k) = \frac{y(x_{k+2}) - 2y(x_{k+1}) + y(x_k))}{2h} + O(h^2); \quad (\text{ліва формула})$$

$$y'(x_k) = \frac{y(x_k) - 2y(x_{k-1}) + y(x_{k-2}))}{2h} + O(h^2); \quad (\text{права формула})$$

$$y''(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))}{h^2} + O(h^2); \quad (\text{центральна формула})$$

де $O(h)$ та $O(h^2)$ – залишкові члени відповідно порядку h та h^2 .

Формули більш високого відносно кроку h порядку точності мають дуже незручний вигляд і тут не приводяться. Відкинувши залишкові члени, отримаємо формули, в яких наближено виражені похідні через значення функції в вузлах.

Нехай потрібно розв'язати рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (7.7)$$

з умовами

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= \gamma_1; \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= \gamma_2, \end{aligned} \quad (7.8)$$

де $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$; $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$.

Припустимо, що задача (7.7) та (7.8) має один розв'язок. Напишемо рівняння (7.7) для точки $x=x_k$ ($k=1, 2, \dots, n-1$)

$$\begin{aligned} y''(x_k) + p(x_k)y'(x_k) + q(x_k)y(x_k) &= f(x_k), \\ k &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Підставимо в нього $y'(x_k)$ та $y''(x_k)$, вираз через значення функції в вузлах:

$$\frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))}{h^2} + p(x_k) \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}))}{2h} + q(x_k)y(x_k) = f(x_k) + O(h^2).$$

Відкинувши залишковий член та помноживши його на h^2 , отримаємо скінченно-різницеве рівняння, що наближено заміняє диференціальне рівняння в точці x_k

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{h}{2} p(x_k)\right] y_{k+1} + [h^2 q(x_k) - 2] y_k + \left[1 - \frac{h}{2} p(x_k)\right] y_{k-1} &= h^2 f(x_k), \\ k &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Крайові умови замінюються співвідношеннями

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_0 h - \alpha_1) y_0 + \alpha_1 y_1 &= h \gamma_1 \\ (\beta_1 + h \beta_0) y_n - \beta_1 y_{n-1} &= h \gamma_2 \end{aligned} \right\}. \quad (7.10)$$

Рівняння (7.9) та (7.10) в сукупності утворюють алгебраїчну систему $(n+1)$ рівнянь з $(n+1)$ невідомими.

Матриця цієї системи має тридіагональний вигляд:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_0 h - \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{43} & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} & a_{nn+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_1 & \beta_1 + h\beta_0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{де } a_{ii-1} = 1 - \frac{h}{2} p(x_{i-1}); \quad a_{ii} = h^2 q(x_{i-1}) - 2;$$

$$a_{ii+1} = 1 + \frac{h}{2} p(x_{i-1}); \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Потрібно замітити, що при складанні алгебраїчної системи похідні, що входять в рівняння (7.7), апроксимуються з порядком точності h^2 , а похідні, що входять в крайові умови, - з порядком точності h . Щоб порядок апроксимації у рівнянь та крайових умов був однаковим, необхідно використовувати більш точні формули для першої похідної. Однак це дуже ускладнює алгебраїчну систему. Тому іноді важливо отримувати систему з меншим порядком точності апроксимації, але з більш простою матрицею. Для отримання потрібної точності вибирають найменший крок.

Якщо вектор розв'язків з компонентами $y_0, y_1, \dots, y_n$ визначають через Y , а вектор правих частин – через F , то отриману алгебраїчну систему можна записати як

$$AY = F, \quad (7.11)$$

та розв'язувати її будь-яким відомим методом. При цьому рекомендується використовувати тридіагональний вигляд матриці A . Перед тим, як вибрати метод розв'язання, потрібно впевнитися в існуванні розв'язку системи $AY = F$. Не існує методів, що дозволяють встановити, чи розв'язується система для будь-яких граничних задач та для будь-яких способів апроксимації, оскільки при розгляданні питання про розв'язання доводиться опиратися на конкретні властивості диференціального та різницевого рівнянь.

Приведемо відомі результати для крайової задачі вигляду:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (7.12)$$

$$y(a) = A; \quad y(b) = B. \quad (7.13)$$

Отримана для неї алгебраїчна система (7.11) розв'язується, якщо крок h є таким, що

$$\frac{h}{2} \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 1 \text{ при } a \leq x \leq b, \text{ та якщо } q(x) \leq 0 \text{ при } x \in [a, b]$$

У зв'язку з тим, що в процесі обчислення з'являється похибка округлень, на практиці розв'язується система

$$A\tilde{Y} = F + r, \quad (7.14)$$

де $r = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ – похибка, що виникає від округлень. Нехай $|r_k| \leq \delta; k = 0, 1, 2, \dots, n$. Тоді справедлива така теорема про близькість $\tilde{Y}(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ до істинного розв’язку $y(x)$ початкової задачі.

Теорема 7.1. Нехай $y(x)$ – розв’язок крайової задачі (7.12) та (7.13) – має на $[a, b]$ неперервні похідні до четвертого порядку включно та виконуються нерівності

$$\frac{h}{2} \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 1;$$

$$q(x) \leq 0 \quad \text{при } x \in [a, b]$$

та співвідношення $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta}{h^2} = 0$; тоді наближений розв’язок $\tilde{Y}(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$

системи (7.14) може бути побудований також при $h \rightarrow 0$ і він є рівномірним відносно x та збігається до точного розв’язку $y(x)$.

7.4 Метод колокації (метод збігів)

Нехай потрібно на проміжку $[a, b]$ знайти розв’язок диференціального рівняння

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (7.15)$$

що задовольняє крайові умови

$$y(a) = A; y(b) = B. \quad (7.16)$$

Метод колокації дозволяє побудувати наближений розв’язок $y_n(x)$ задачі (7.15) та (7.16) в аналітичній формі

$$y_n(x) = U_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i U_i(x). \quad (7.17)$$

Система функцій $U_0(x), U_1(x), \dots, U_n(x)$ називається координатною системою, вибирається обчислювальником так, що:

а) $U_0(x)$ задовольняє умову (7.16), $U_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) задовольняє умову: $U_i(a)=0, U_i(b)=0$;

б) система $U_0(x), U_1(x), \dots, U_n(x)$ є лінійно незалежною;

в) функції $U_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$ неперервні на $[a, b]$ разом зі своїми похідними до другого порядку включно;

г) система функцій $\{U_i(x)\}_{i=0}^n$ є повною в класі двічі неперервно-диференціальних функцій, це значить, що для будь-якої функції $\varphi(x) \in C_2([a, b])$ та будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий поліном:

$$P_n(x) = U_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i U_i(x), \text{ що}$$

$$|\varphi(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

$$|\varphi'(x) - P'_n(x)| < \varepsilon$$

$$|\varphi''(x) - P_n''(x)| < \varepsilon$$

для всіх $x \in [a, b]$.

Тоді наближений розв'язок $y_n(x)$, обчислений за формулою (7.17), задовольняє крайові умови (7.16), але не обов'язково буде задовольняти диференціальне рівняння (7.15), тобто $L[y_n(x)] \neq f(x)$.

Визначимо коефіцієнти $a_1, a_2, \dots$ так, щоб $L[y_n(x)]$ в будь-якому випадку був близьким до $f(x)$. В методі колокації за критерій близькості приймають збіг $L[y_n(x)]$ з $f(x)$ в деякому наборі точок. Виберемо на $[a, b]$ систему вузлів

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$$

при умові:

$$L[y_n(x_k)] = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7.18)$$

Дана система є алгебраїчною системою для визначення коефіцієнтів $a_1, a_2, \dots, a_n$. Підставивши $y_n(x)$ з виразу (7.17) в (7.18), отримаємо

$$U_0''(x_k) + p(x_k)U_0'(x_k) + q(x_k)U_0(x_k) + \sum_{i=1}^n a_i [U_i''(x_k) + p(x_k)U_i'(x_k) + q(x_k)U_i(x_k)] = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7.19)$$

Якщо функції $\{U_i(x)\}_{i=0}^n$ вибрані так, як указано вище, то алгебраїчна система (7.19) має єдиний розв'язок. Тоді $y_n(x)$, знайдене за формулою (7.17), є наближеним розв'язком даної крайової задачі. Число функцій $U_i(x)$ вибирається обчислювачем згідно з точністю, що вимагається.

В якості системи $\{U_i(x)\}_{i=0}^n$ для відрізка $[a, b]$ можна взяти, наприклад,

$$U_0(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a);$$

$$U_i(x) = (x-a)(b-x)x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

але для відрізка $[0, \pi]$

$$U_0(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a);$$

$$U_i(x) = \sin\left[i\pi \frac{x-a}{b-x}\right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ці системи функцій задовольняють всі перелічені вище умови.

7.5 Варіаційний метод

Як і метод колокації, варіаційний метод дає можливість шукати наближений розв'язок крайової задачі в аналітичній формі. Ідея методу полягає в заміні крайової задачі деякою варіаційною задачею. Нехай потрібно на проміжку $[a, b]$ знайти розв'язок задачі

$$-\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = f(x); \quad (7.20)$$

$$y(a) = A; y(b) = B, \quad (7.21)$$

де $p(x)$ – функція, що є неперервно диференційовною та $p(x) \geq 0$ на $[a, b]$; $q(x)$ та $f(x)$ неперервні на $[a, b]$, причому $q(x) \geq 0$. Пов'яжемо з крайовою задачею варіаційну задачу. Розглянемо функціонал

$$I(y) = \int_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2 - 2f(x)y] dx \quad (7.22)$$

на множині допустимих значень функції $y(x)$, тобто функцій, неперервно диференційовних на $[a, b]$ та таких, що задовольняють крайові умови

$$y(a) = A; y(b) = B.$$

Функція $y(x)$, що дає мінімум функціонала $I(y)$, є розв'язком крайової задачі (7.20) та (7.21), та навпаки. На цій основі розв'язання крайової задачі (7.20) та (7.21) можна замінити розв'язанням варіаційної задачі (7.22).

Існують різні методи, що дозволяють знайти функцію $y(x)$, яка дає мінімум функціонала $I(y)$. Розглянемо метод Рітца. Вибираємо послідовність координатних функцій $\{U_i(x)\}$, $i=0, 1, 2, \dots$, що задовольняють умови:

а) $U_i(x) \in C_2([a, b])$, $i = 0, 1, 2, \dots$;

б) $U_0(a) = A; U_0(b) = B; U_i(a) = U_i(b) = 0$, $i = 1, 2, \dots$;

в) при будь-якому значенні n функції $U_0(x)$, $U_1(x)$, $\dots$, $U_n(x)$ лінійно незалежні;

г) множина поліномів $y_n(x) = U_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i U_i(x)$ повна в просторі

$$C_2([a, b]).$$

Наближений розв'язок варіаційної задачі шукається з рівняння

$$y_n(x) = U_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i U_i(x). \quad (7.23)$$

Зазначимо, що $y_n(x)$ при будь-якому виборі $a_1, a_2, \dots$ задовольняють краєві умови (7.21) та є неперервно диференційовною функцією. Параметри $a_1, a_2, \dots$ визначаються з умови мінімуму функціонала $I(y)$. Підставимо (7.23) та (7.22), продиференціюємо за a_k та прирівняємо похідні нулю, в результаті отримаємо лінійну алгебраїчну систему для визначення $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_a^b [p(x)U'_k U'_i + q(x)U'_k U_i] dx \right\} a_i = - \int_a^b [p(x)U'_0 U'_k + q(x)U_0 U_k - f(x)U_k] dx, \quad (7.24)$$

$$k=1, 2, \dots, n.$$

Якщо функції $p(x)$, $q(x)$ та $\{U_i(x)\}$, $i=1, 2, \dots$ задовольняють вище сформульовані умови, то система (7.24) має єдиний розв'язок $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$. Тоді

$$y_n(x) = U_0(x) + \sum_{i=1}^n \overline{a_i} U_i(x)$$

приймається за наближений розв'язок варіаційної задачі (7.22), а значить, і крайової задачі (7.20) та (7.21). Обираючи $n = 1, 2, \dots$ отримаємо послідовність $y_1(x), y_2(x), \dots$. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n) = I(y^*)$, то послідовність $\{y_n(x)\}$

називається мінімізуючою. При виконанні всіх умов, накладених на функції $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ та систему функцій $\{U_i(x)\}$, $i=1, 2, \dots$ послідовність $\{y_n\}$, побудована на методі Рітца, буде мінімізуючою. На питання, чи буде послідовність $\{y_n(x)\}$ збігатися до розв'язку задачі (7.20) та (7.21), відповідає теорема 7.2.

Теорема 7.2. Якщо виконані умови $p(x) > 0$ та $p(x) \in C_1([a, b])$, $q(x) \geq 0$ та $f(x), q(x) \in C([a, b])$ послідовність функцій $\{y_n(x)\}$ є мінімізуючою для варіаційної задачі (7.22), то ця послідовність функцій буде рівномірно на $[a, b]$ збігається до розв'язку $y(x)$ крайової задачі (7.20) та (7.21).

Контрольні питання

1. Що розуміємо під крайовою задачею?
2. Що означає «розв'язати крайову задачу»?
3. Яка крайова задача називається лінійною?
4. Сформулюйте однорідну крайову задачу?
5. Як звести крайову задачу до задачі Коші?
6. В чому полягає сутність методу скінченних різниць.
7. Для чого використовується ряд Тейлора при розв'язуванні крайових задач?
8. Скільки рівнянь і скільки невідомих буде мати алгебраїчна система?
9. Як записати алгебраїчну систему у матричному вигляді?
10. Як треба вибирати крок h , щоб алгебраїчна система мала розв'язок.
11. В чому полягає сутність методу збігів?
12. Що у методі збігів називається координатною системою?
13. Що у методі збігів приймається за критерій близькості?
14. В чому полягає сутність варіаційного методу?
15. В чому полягає сутність методу Рітца?
16. Які вимоги повинні виконуватися для підбору координатної системи функцій?

8 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

8.1 Постановка задачі

В процесі пошуку закономірностей протікання явищ та процесів в інженерній практиці виникає задача пошуку за даними спостережень аналітичних залежностей одного параметра від іншого. Загальна постановка цієї задачі може мати такий вигляд. Відомо, що між x та y існує функціональна залежність. В результаті експерименту отримана таблиця значень:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Потрібно знайти функцію, що наближено описувала б зв'язок між x та y .

Експериментальними даними в такій задачі є табличні значення функції, яку потрібно апроксимувати деякою аналітичною функцією.

Прийнято, що функція, яка схожа на табличну (отриману експериментально), називається емпіричною функцією чи емпіричною формулою.

Слід пам'ятати, що задача побудови емпіричної формули відмінна від задачі інтерполювання, оскільки при великому обсязі вихідних даних (x_i, y_i є параметрами, які спостерігаються) складна інтерполяційна формула може збільшити кількість похибок, а емпірична, яка згладжує неточність спостережень, краще відобразить дійсність.

Побудова емпіричної формули включає два етапи:

- виявлення загального вигляду залежності;
- визначення найкращих параметрів залежності.

Підбір емпіричної формули в значній мірі залежить від досвіду дослідника. При уважному спостереженні за геометричним розміщенням експериментальних даних можна з достатньою точністю визначити вид апроксимуючої функції: багаточлен, степенева, показова, логарифмічна та ін. В багатьох випадках обирається (коли немає інших наявних ознак) в якості емпіричної залежності багаточлен вигляду $y = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$. Однак яким би не був вид апроксимуючої функції, виникає задача визначення таких її параметрів, які б найкращим чином збігалися з експериментальними даними. Одним з таких ефективних методів є метод найменших квадратів.

8.2 Метод найменших квадратів

Сутність даного метода в тому, що є залежність $f(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$, близька до заданої сукупності значень x_i, y_i в сенсі мінімуму квадратичного відхилення

$$R = \sum_{i=1}^n (f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.1)$$

а відхилення апроксимуючої функції від експериментальних значень

$$\varepsilon_i = f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.2)$$

Тоді задача складається з вибору такої сукупності параметрів $a_0, a_1, \dots, a_m$, при яких значення критерію (8.1) є мінімальним. При цьому завжди $n > m$, оскільки при $n = m$ це є задача інтерполяції, в якій R може бути зведено до нуля. Необхідною умовою мінімуму критерію (8.1) є рівність нулю усіх частинних похідних функцій R за параметрами $a_0, a_1, \dots, a_m$, тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a_0} &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial a_i} &= 0, \quad \text{де } i = 1, 2, \dots, m. \\ &\dots, \\ \frac{\partial R}{\partial a_m} &= 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$

Розв'язавши систему рівнянь (8.3), знаходимо значення $a_1, a_2, \dots, a_m$, які є коефіцієнтами шуканої залежності.

8.3 Лінійне наближення функції

Нехай шукана функція є лінійною і двопараметричною відносно x , тобто $y = a_0 + a_1 x$. Тоді критерій (8.1) приймає вигляд

$$R = \sum_{i=0}^n (f(x_i, a_0, a_1) - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (8.4)$$

Умови мінімуму цього критерію

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial R}{\partial a_1} = 0. \quad (8.5)$$

Система рівнянь (8.5), яка отримана за рахунок диференціювання (8.4) приймає вигляд:

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_i x_i - y_i) = 0; \\ 2 \sum_{i=1}^n x_i (a_0 + a_i x_i - y_i) = 0, \end{cases}$$

чи після перетворення

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n y_i; \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (8.6)$$

Звідки

$$a_1 = \frac{(n+1)\sum_{i=0}^n x_i y_i - \sum_{i=0}^n x_i \sum_{i=0}^n y_i}{(n+1)\sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)^2};$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=0}^n y_i - a_1 \sum_{i=0}^n x_i}{(n+1)}.$$

Знайдені значення a_0 та a_1 підставляються в шукане лінійне рівняння.

8.4 Поліноміальне наближення функції

Якщо лінійна апроксимуюча функція дає в заданих точках значне відхилення, використовується наближення поліномами другого та вищих степенів вигляду

$$y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=0}^m a_j x^j.$$

Так, для квадратних наближень (при $m = 2$) визначення параметрів a_0, a_1, a_2 за методом найменших квадратів зводиться до знаходження мінімуму критерію (8.1), який є функцією трьох змінних a_0, a_1, a_2

$$R = \sum_{i=0}^n (f(x_i, a_0, a_1, a_2) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2.$$

Умови мінімуму квадратичного критерію мають вигляд:

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0;$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) x_i = 0;$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) x_i^2 = 0;$$

чи після перетворень

$$(n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)a_2 = \sum_{i=0}^n y_i;$$

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3\right)a_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i;$$

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^4\right)a_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2. \quad (8.7)$$

Обчислення коефіцієнтів системи (8.7) зручно представляти в вигляді таблиці (Табл. 8.1).

Таблиця 8.1

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
0	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	y_0	$y_0 x_0$	$y_0 x_0^2$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$y_1 x_1$	$y_1 x_1^2$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
n	x_n	x_n^2	x_n^3	x_n^4	y_n	$y_n x_n$	$y_n x_n^2$
Σ	$\sum_{i=0}^n x_i$	$\sum_{i=0}^n x_i^2$	$\sum_{i=0}^n x_i^3$	$\sum_{i=0}^n x_i^4$	$\sum_{i=0}^n y_i$	$\sum_{i=0}^n x_i y_i$	$\sum_{i=0}^n y_i x_i^2$

Досить зручними при виборі апроксимуючих залежностей можуть бути приведені в таблиці 8.2 функції та їх лінійні аналоги, що отримані шляхом деяких перетворень.

Таблиця 8.2

Вигляд функції	Лінійний аналог	Значення параметрів
$y = ax^b$	$Y = \alpha + bx$	$Y = \lg y, x = \lg x, \alpha = \lg a$
$y = ab^x$	$Y = \alpha + \beta x$	$Y = \lg y, \alpha = \lg a, \beta = \lg b$
$y = a + \frac{b}{x}$	$Y = ax + b$	$Y = xy$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$Y = ax + b$	$Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$Y = ax + b$	$Y = \frac{x}{y}$
$y = a \lg x + b$	$y = ax + b$	$x = \lg x$

Якщо є набір експериментальних даних з $(n+1)$ точок, то порядок апроксимуючого полінома завжди повинен бути меншим числа цих точок. З зменшенням m емпірична залежність спрощується, але похибка апроксимації зростає. Завищення m призводить до зростання числа обчислювальних операцій.

Степінь полінома можна було брати рівним порядку скінченних різниць, які мало відрізняються. Лінійна апроксимація застосовується тільки тоді, коли перші скінчення різниці мало відрізняються одна від одної.

Для перевірки відповідності емпіричної формули експериментальним даним обчислюють (8.2), що і буде похибкою апроксимації, й можна

вважати виведену емпіричну формулу доцільною. В іншому випадку рекомендується змінити формулу.

Приклад вибору та розрахунку апроксимуючої залежності. Функція задана таблицею.

x	-3	-1	0	1	2	3	4
y	2,9	1,0	-0,2	-1,5	-0,4	0,5	2,0

Обчислення коефіцієнтів (8.6) і (8.7) оформимо у вигляді табл. 8.3.

Таблиця 8.3

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
0	-3	9	-27	81	2,9	-8,7	26,1
1	-1	1	-1	1	1,0	-1,0	1
2	0	0	0	0	-0,2	0	0
3	1	1	1	1	-1,5	-1,5	-1,5
4	2	4	8	16	-0,4	-0,8	-1,6
5	3	9	27	81	0,5	1,5	4,5
6	4	16	64	256	2,0	8	32
	6	40	72	436	4,3	-2,5	60,5

Для знаходження коефіцієнта a_0 і a_1 розв'яжемо систему рівнянь (8.6):

$$\begin{cases} 7a_0 + 6a_1 = 4,3; \\ 6a_0 + 40a_1 = -2,5. \end{cases}$$

Звідки $a_0 = 0,766$; $a_1 = -0,177$.

З цього слідує, що апроксимуюча функція буде

$$f_1(x, a_0, a_1) = 0,766 + 0,117x.$$

Для знаходження коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 багаточлена другого степеня розв'яжемо систему рівнянь (8.7)

$$\begin{cases} 7a_0 + 6a_1 + 40a_2 = 4,3; \\ 6a_0 + 40a_1 + 72a_2 = -2,5; \\ 40a_0 + 72a_1 + 436a_2 = 60,5. \end{cases}$$

Звідки $a_0 = -0,458$; $a_1 = -0,454$; $a_2 = 0,256$.

Як наслідок апроксимуюча функція буде

$$f_2(x, a_0, a_1, a_2) = -0,458 - 0,454x + 0,256x^2.$$

Побудуємо отримані залежності (рис. 8.1) і відмітимо задані точки.

Обчислимо за допомогою (8.2) відхилення апроксимуючих залежностей ϵ .

Оформимо обчислення у вигляді таблиці (Табл. 8.4).

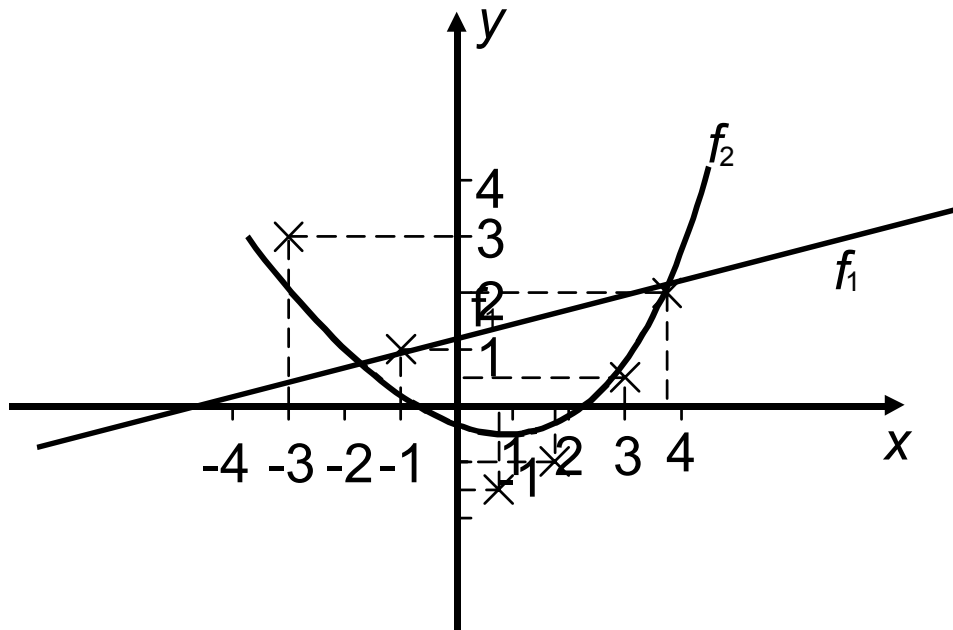


Рисунок 8.1

Таблиця 8.4

x_i	-3	-1	0	1	2	3	4
y_i	2,9	1,0	-0,2	-1,5	-0,4	0,5	2,0
f_1	0,415	0,883	0,766	0,883	1,000	1,117	1,234
ε_1	2,485	0,117	0,966	2,383	1,400	0,617	0,766
f_2	3,244	0,252	-0,458	-0,656	0,342	0,484	1,822
ε_2	0,344	0,748	-0,258	0,944	0,058	0,016	0,178

Звідси, $\sum_{i=0}^6 \varepsilon_1^2 = 15,727$, а $\sum_{i=0}^6 \varepsilon_2^2 = 1,668$, тобто можна вважати багато-

член 2-го порядку апроксимуючою функцією з точністю до ε .

Контрольні питання

1. Яка загальна постановка задачі апроксимації?
2. Що таке емпірична функція чи формула?
3. У чому відмінність задачі апроксимації від задач інтерполявання?
4. З яких етапів складається визначення емпіричної формули?
5. В чому сутність методу найменших квадратів?
6. Як обчислюється відхилення апроксимуючої функції від експериментальних значень?
7. Що є умовою мінімуму критерію квадратного відхилення?
8. Як отримати систему рівнянь для визначення коефіцієнтів при лінійному наближенні за методом найменших квадратів?
9. Як отримати систему рівнянь для визначення коефіцієнтів при квадратичному наближенні за методом найменших квадратів?

10. Назвіть приклади апроксимуючих функцій та їх лінійні аналоги.
11. Як використовувати скінченні різниці для вибору степені апроксимуючого полінома?
12. Як перевірити відповідність емпіричної формули експериментальним даним?

9 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

9.1 Постановка задачі

Диференціальні рівняння в частинних похідних та інтегральні рівняння використовуються в різноманітних галузях природознавства. Отримувати їх розв'язок у явному вигляді вдається лише в найпростіших випадках. У зв'язку з цим особливого значення набувають наближені методи розв'язання різних задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних, систем диференціальних рівнянь в частинних похідних та інтегральних рівнянь (тобто задач математичної фізики). Нами розглядаються деякі, найбільш поширені методи чисельного розв'язання задач математичної фізики - в основному методи чисельного розв'язування задач лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними. Викладання методів у випадку довільної кількості змінних вимагає громіздких записів, в той час як головні ідеї методів добре зрозумілі й у найпростіших випадках.

Наближені методи чисельного розв'язання різних задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних можна розбити на три групи:

- 1) методи, у яких наближений розв'язок отримується в аналітичній формі, наприклад, у вигляді відрізка деякого ряду;
- 2) методи, за допомогою яких можна дістати таблицю наближених значень шуканого розв'язку в деяких точках розглядуваної області;
- 3) методи, що базуються на поєднанні аналітичних перетворень та чисельних методів.

До першої групи методів відноситься, перш за все, метод Фур'є для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних, точний розв'язок за яким отримується у вигляді деякого ряду; при цьому за наближений може вважатися сума деякої кількості його перших членів. До цієї групи відносяться й варіаційні методи розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних, в основу яких покладено заміну крайової задачі для диференціального рівняння еквівалентною їй варіаційною. Наближене розв'язання крайової задачі зводиться до визначення наближеного розв'язку відповідної

До другої групи методів відносяться скінченнорізникові методи чисельного розв'язання задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних. Відповідно до них диференціальна задача замінюється скінченнорізницевою і різницевий розв'язок визначається на сітці.

Методи прямих, сплайн-апроксимацій, граничних елементів та інші в загальному випадку становлять третю групу методів, у яких на першому етапі відбуваються різні аналітичні перетворення, що перетворюють вихідну крайову задачу в одновимірну або в систему лінійних алгебраїчних рівнянь, а на другому етапі останні реалізують чисельно. У методі прямих

шукається наближений розв'язок диференціального рівняння в частинних похідних вздовж деякої сім'ї прямих. При цьому замість диференціального рівняння в частинних похідних виникає система звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується чисельними методами. Застосовуючи метод сплайн-апроксимацій, наближений розв'язок вихідного диференціального рівняння в частинних похідних записується у вигляді деякого ряду і наближений розв'язок шукається на всій області визначення розв'язку задачі. У методі граничних елементів головною є залежність між значеннями шуканих функцій в середині розглядуваної області та їх значеннями на границі. Встановлюється ця залежність переходом від диференціальних рівнянь до інтегральних співвідношень, що реалізуються чисельно.

Розглянемо постановку задач, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Математичні моделі суцільних тіл приводять до рівнянь в частинних похідних. Наприклад, зміна температури у нерухомому тілі, яке знаходиться в полі дії різних джерел тепла, описується рівнянням теплопровідності

$$c(u, \bar{r}, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left[k(u, \bar{r}, t) \operatorname{gradu} \right] + q(u, \bar{r}, t) \quad (9.1)$$

де u – температура; c – теплоємність; k – коефіцієнт теплоємності; q – густина джерел тепла. Незалежними змінними у фізичних задачах звичайно є час t та координата $\bar{r}$; можуть бути й інші змінні, наприклад, швидкість частинок $\bar{v}$ у задачах перенесення. Розв'язок потрібно шукати в деякій області зміни незалежних змінних $G(u, \bar{r}, \bar{v}, \dots)$. Повна математична постановка задачі містить диференціальне рівняння, а також додаткові умови, що дозволяють з багатьох розв'язків диференціального рівняння обрати один. Додаткові умови, як правило, задаються на границі області G .

Якщо однією з незалежних змін є t , то найчастіше розглядають область вигляду

$$G(t, \bar{r}, \dots) = g(\bar{r}, \dots) \times [t_0, T],$$

тобто розв'язок шукають у деякій просторовій області $g(\bar{r}, \dots)$ на відрізку часу $t_0 \leq t \leq T$. У цьому випадку додаткові умови, що задано при $t = t_0$, називаються початковими, а додаткові умови, що задано на границі $\Gamma(\bar{r})$ області $g(\bar{r})$, – *граничними*.

Задача, яка має лише початкові умови, називається *задачею Коші*. Наприклад, для рівняння теплопровідності (9.1) у необмеженому просторі можна поставити задачу з початковими умовами

$$u(t_0, \bar{r}) = \mu(\bar{r}) \quad (9.2)$$

Якщо $\mu(\bar{r})$ – кусково-неперервна обмежена функція, то розв'язок задачі (9.1), (9.2) є єдиним у класі обмежених функцій.

Задача з початковими і граничними умовами називається *мішаною крайовою задачею* або *нестационарною крайовою задачею*. Для рівняння (9.1) додаткові умови такої задачі можуть мати вигляд, наприклад,

$$u(t_0, \bar{r}) = \mu(\bar{r}), \bar{r} \in g(\bar{r}), u(t, \bar{r}) = \mu(t, \bar{r}), t_0 \leq t \leq T. \quad (9.3)$$

Для цього рівняння допустимі й інші граничні умови, наприклад, які містять нормальну похідну розв'язку.

При дослідженні усталених станів або стаціонарних процесів (що не залежать від часу) у суцільному середовищі формуються математичні задачі, що не залежать від часу. Їх розв'язок шукається в області G , а додаткові умови граничні. Такі задачі називаються *крайовими*.

Ми обмежимося розглядом коректно поставлених задач, коли для деякого класу початкових і граничних даних розв'язок (у заданому класі функцій) існує, однозначно й неперервно залежить від цих даних. Вважатимемо, що розв'язок неперервно залежить від коефіцієнтів у рівнянні.

Наведемо класифікацію рівнянь другого порядку, які мають такий вигляд:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0, \quad (9.4)$$

де u_{xx} – друга похідна температури за x ,
 u_{xy} – друга похідна температури за x та y ,
 u_{yy} – друга похідна температури за y ,
 u_x – похідна температури за x ,
 u_y – похідна температури за y .

Коефіцієнти рівняння (9.4) залежать взагалі від x, y . Якщо коефіцієнти не залежать від змінних, то це буде лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами; якщо F лінійно залежить від u , а інші коефіцієнти від u не залежать, – лінійне рівняння зі змінними коефіцієнтами. Якщо коефіцієнти залежать від u , то рівняння (9.4) називається *квазілінійним*.

При $A \equiv B \equiv C \equiv 0$, але $D \neq 0$ та $E \neq 0$, то рівняння (9.4) має перший порядок і називається рівнянням переносу.

Рівняння другого порядку класифікуються за знаком дискримінанта $B^2 - AC$: в гіперболічних рівняннях дискримінант додатний, в параболічних – дорівнює нулю, в еліптичних – від'ємний.

Фізичні процеси, які описуються вищезгаданими типами рівнянь, істотно різняться одні від одних. Відповідно повні постановки задач для цих типів рівнянь мають свої особливості. Коротко про це буде йти мова у відповідних параграфах цього розділу.

9.2 Рівняння параболічного типу. Явні та неявні скінченнорізницьові методи

Розглянемо параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (9.5)$$

прототипом якого є рівняння теплопровідності.

Покажемо, чому рівняння (9.5) можна розглядати як математичну модель поширення тепла. Розглянемо довгий стрижень, який витягнуто вздовж осі x (рис. 9.1). Вважатимемо, що стрижень повністю теплоізолюваний, за винятком, можливо, кінців, і потік тепла може поширюватися лише в напрямі осі x . Нехай $u(t, x)$ – температура стрижня (в кельвінах) у точці x у момент часу t та a – площа поперечного перерізу стрижня.

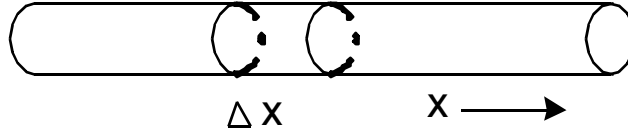


Рисунок 9.1

З елементарної фізики відомо, що кількість тепла, яка проходить за одиницю часу крізь переріз, перпендикулярний осі стрижня, є $-kau_x$, де $k > 0$ — коефіцієнт теплопровідності. Таким чином, якщо градієнт температури u_x у даному перерізі від'ємний, тобто температура зліва вища, ніж справа, то тепло крізь цей переріз буде проходити зліва направо. Отже, якщо ми розглянемо елемент стрижня довжини x , то за одиницю часу до цього елемента через переріз x надходить кількість тепла, що дорівнює $(-kau_x)|_x$ та виходить крізь переріз $x + \Delta x$ кількість тепла, що дорівнює $(-kau_x)|_{x+\Delta x}$, тобто кількість тепла в елементі змінюється на

$$(-kau_x)|_x - (-kau_x)|_{x+\Delta x}. \quad (9.6)$$

З іншого боку, як відомо, кількість тепла, яку має елемент, пропорційна масі елемента та його температурі; точніше, вона дорівнює $sa\Delta s\rho u_t$, де s - питома теплоємність матеріалу, а ρ - його густина (маса на одиницю об'єму).

З цього випливає, що похідна за часом від кількості тепла в елементі буде дорівнювати кількості тепла за формулою (9.6), тобто

$$sa\Delta s\rho u_t = (-kau_x)|_{x+\Delta x} - (-kau_x)|_x.$$

При переході до границі по $x \rightarrow \infty$ дістанемо

$$u_t = \frac{1}{s\rho} (ku_x)|_x. \quad (9.7)$$

Якщо k не залежить від x , то це рівняння перетворюється на (9.5), де $c = k/s\rho$. Отже, похідна від температури за часом у такому тонкому стрижні пропорційна другій похідній від температури за просторовою змінною.

Для виділення розв'язку рівняння в частинних похідних необхідно задати деякі початкові та граничні умови. Нехай у розглядуваній задачі про тонкий стрижень у початковий момент часу $t = 0$ нам відомий розподіл $g(x)$ температури у стрижні. Вважаємо, що довжина стрижня дорівнює l ,

його лівий кінець знаходиться в точці $x = 0$. Припускаючи також, що кінці стержня мають постійну температуру, тобто:

$$u(t, 0) = \alpha \quad u(t, l) = \beta, \quad (9.8)$$

де α і β – задані сталі. Співвідношення (9.8) є граничними умовами за просторовою змінною x . Як початкову умову використовуємо заданий початковий розподіл температури:

$$u(0, x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (9.9)$$

Таким чином, можна сформулювати задачу з фізичної точки зору. Маємо стержень, кінці якого мають фіксовану температуру α і β . Вважаючи початковий розподіл температури вздовж стержня відомим, слід знайти температуру будь-якої точки стержня x у довільний момент часу $t > 0$. Математичною моделлю цієї проблеми є диференціальне рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c = \frac{k}{sp}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

із граничними (9.8) та початковими умовами (9.9). Інший варіант формулювання задачі пов'язаний з врахуванням неоднорідності матеріалу стержня. Якщо, наприклад, стержень має сплав, склад якого повільно змінюється функція від x , тоді густина, теплопровідність і теплоємність стержня також, взагалі кажучи, будуть функціями від x . Отже, задача тепер буде описуватися рівнянням (9.7), де $\rho = \rho(x)$, $s = s(x)$ і $k = k(x)$. Це вже рівняння не з постійними, а зі змінними коефіцієнтами. Можна взяти до уваги, що в загальному випадку коефіцієнт теплопровідності залежить не тільки від матеріалу, але й від температури і рівняння (9.7) стає нелінійним.

Зазначимо, що рівняння теплопровідності є математичною моделлю і для цілого ряду інших фізичних явищ, як от, наприклад, дифузія газу.

У цій главі починається вивчення скінченнорізницевого методу розв'язання рівнянь у частинних похідних. Розглянемо мішану задачу для рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами. В області $\{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ потрібно знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad (9.10)$$

що задовольняє початкову умову

$$u(0, x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (9.11)$$

і граничну умову

$$u(t, 0) = \alpha(t), \quad u(t, 1) = \beta(t), \quad (9.12)$$

де $g(x)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – задані функції. Як відомо, при означених припущеннях щодо гладкості розв'язок задачі (9.10) – (9.12) існує та єдиний. При вивченні апроксимації різницевою схемою припустимо, що розв'язок $u(t)$ має необхідну кількість похідних за t і x . Розв'язок задачі (9.10) – (9.12) неперервно залежить від початкових та граничних даних.

При побудові різницевої схеми введемо сітку в області змінних і задамо шаблон, тобто множину точок сітки, що бере участь в апроксимації диференціального виразу. Сітка вводиться за змінною x із кроком $h = \Delta x$ таким чином,

$$\omega_h = \{x_j = j\Delta x = jh, j = 0, 1, \dots, N, hN = 1\},$$

а за змінною t із кроком $\tau = \Delta t$ (позначимо її $\omega_\tau = \{t_m = m\Delta t = m\tau, m = 0, 1, \dots, K, K\tau = T\}$), T – верхня межа інтервалу часу.

Точки (t_m, x_j) $j = 0, 1, \dots, N, m = 0, 1, \dots, K$ утворюють вузли просторово-часової сітки $\omega_{\tau, h} = \omega_\tau \times \omega_h$ (див. рис. 9.2). Вузли (t_m, x_j) , що належать відрізкам $I_0 = \{0 \leq x \leq 1, t=0\}$, $I_1 = \{x=0, 0 \leq t \leq T\}$, $I_2 = \{x=1, 0 \leq t \leq T\}$, відносяться до граничних вузлів сітки $\omega_{\tau, h}$, а всі інші вузли – внутрішні. На рис. 9.2 1 – граничні вузли, 2 – внутрішні. Варіанти шаблонів наведено на рис. 9.3 (а – явна схема; б – суто неявна схема, в – симетрична схема; г – тришарова схема).

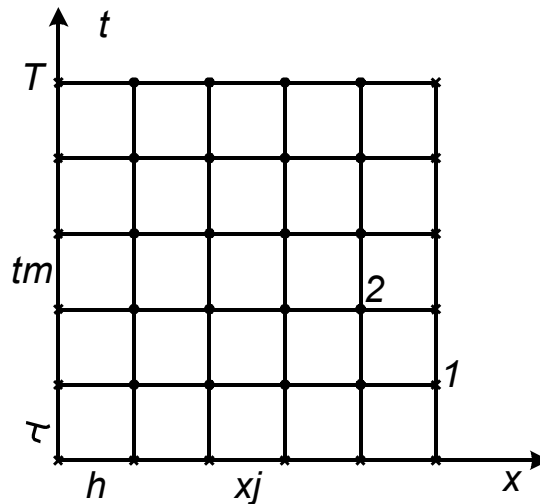


Рисунок 9.2 – Розташування вузлів просторово-часової сітки

Шаром називається множина всіх вузлів сітки $\omega_{\tau, h}$, що мають одну й ту ж часову координату. Таким чином, m -м шаром буде множина вузлів $(t_m, x_0), (t_m, x_1), \dots, (t_m, x_N)$. Для функції $u(t, x)$, визначеної на сітці $\omega_{\tau, h}$, введемо позначення

$$u_j^m = u(t_m, x_j);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t}; \quad (9.13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^m + 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x^2)}; \quad (9.14)$$

Для апроксимації рівняння (9.10) у точці (t_m, x_j) введемо шаблон (рис. 9.3,а), що складається з чотирьох вузлів $(t_m, x_{j\pm 1})$, (t_m, x_j) , (t_{m+1}, x_j) . Похідну $\partial u / \partial t$ замінимо в точці (t_m, x_j) різницевою співвідношенням (9.13), а $\partial^2 u / \partial x^2$ — різницевою похідною (9.14). Праву частину $f(x, t)$ замінимо наближеною сітчастою функцією ϕ_j^m , якою може бути один із виразів:

$$f(t_m, x_j), \quad \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - 1/2}^{x_j + 1/2} f(t_m, x) dx;$$

$$\frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_j - 1/2}^{x_j + 1/2} f(t, x) dx$$

Результатом буде різницеве рівняння

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = c \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x^2)} + \phi_j^m, \quad (9.15)$$

що апроксимує початкове диференціальне рівняння в точці (t_m, x_j) за першим порядком за t і другим порядком за x при умові, що різниця $\phi_j^m - f(t_m, x_j)$ має той самий порядок малості.

Різницевою схемою є сукупність різницевих рівнянь, що апроксимують первісне диференціальне рівняння в усіх внутрішніх вузлах сітки, та додаткові (початкові і граничні) умови — в граничних вузлах сітки. Різницеву схему за аналогією з диференціальною задачею назовемо *різницевою задачею*. У даному випадку різницева схема має вигляд

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = c \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x^2)} + \phi_j^m, \quad (9.16)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, \quad m = 0, 1, \dots, k-1, \quad hN = 1, \quad k\tau = T$$

$$u_0^m = \mu_1(t_m), \quad u_N^m = \mu_2(t_m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.17)$$

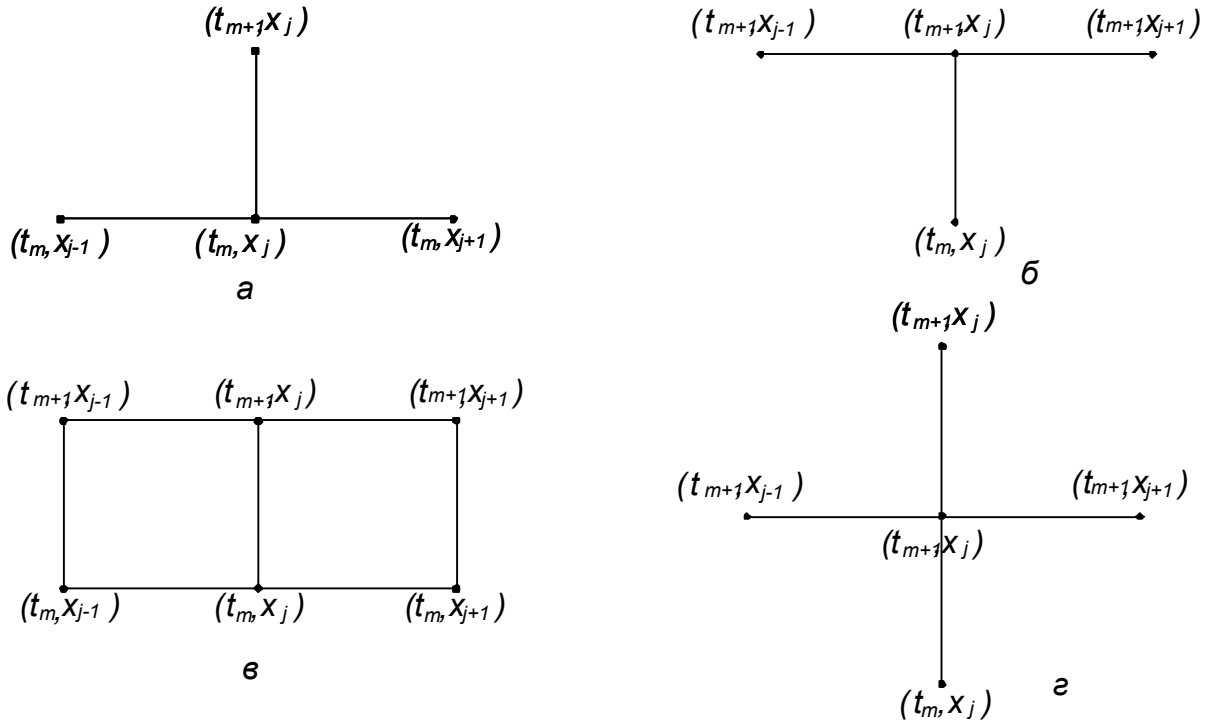


Рисунок 9.3 – Варіант шаблонів просторово-часової сітки

Ця схема є системою лінійних алгебраїчних рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих. Розв'язувати таку систему слід за шарами. Розв'язок на нульовому шарі заданий початковими умовами $u_j^0 = g(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, N-1$. Якщо розв'язок u_j^m , $j = 0, 1, \dots, N$ на шарі m вже знайдений, то розв'язок u_j^{m+1} на $m+1$ шарі відшукується за явними формулами:

$$u_j^{m+1} = u_j^m + \mu (u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m) + \varphi_j^m, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (9.18)$$

$$\mu = \frac{c \Delta t}{(x)^2}. \quad (9.19)$$

Значення $u_0^{m+1} = \mu_1(t_{m+1})$ $u_N^{m+1} = \mu_2(t_{m+1})$ остаточно можна визначити з граничних умов. Тому схема (9.18) називається *явною різницевою схемою*.

Похибка різницевої схеми (9.18) визначається як різниця між розв'язками вихідної задачі (9.10) — (9.12) та задачі (9.16). Нехай $u(t, x)$ — точний розв'язок рівняння (9.10) із початковою умовою (9.11) та граничними умовами (9.12). Якщо підставити цей точний розв'язок у різницеве рівняння (9.16), то воно задовольниться не повністю, а з деякою похибкою, яка називається *локальною похибкою дискретизації*. Таким чином, локальна похибка дискретизації у точці (t, x) дорівнює

$$e = \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} - \frac{c}{(\Delta x)^2} [u(t + \Delta t, x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)] \quad (9.20)$$

Припустимо, що нам відомо значення точного розв'язку $u(t, x)$ для деякого t і всіх $x \in [0, 1]$ і ми хочемо використати (9.16) при $\varphi_j^m = 0$ для отримання наближеного розв'язку в момент $t + \Delta t$. Якщо позначити цей наближений розв'язок як $\hat{u}(t + \Delta t, x)$ тоді

$$o = \frac{\hat{u}(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} - \frac{c}{(\Delta x)^2} [u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)]$$

Віднімаючи цю рівність від (9.20), дістанемо

$$\hat{u}(t + \Delta t, x) - u(t + \Delta t, x) = e \Delta t.$$

Таким чином, похибка, яку припустили на одному кроці за часом за різницевою схемою (9.16), дорівнює локальній похибці дискретизації, помноженій на Δt . Значення e у (9.20) легко оцінити за допомогою Δt і Δx .

Дійсно, якщо вважати u функцією тільки від t , вважаючи x фіксованим, то із розкладу в ряд Тейлора

$$u(t + \Delta t, x) = u(t, x) + u'_t(t, x) \Delta t + 0[(\Delta t)^2],$$

отримаємо

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = u'_t(t, x) + 0(\Delta t). \quad (9.22)$$

Розглянемо u як функцію від x , вважаючи t фіксованим. Якщо розкласти в ряд Тейлора $u(t, x + \Delta x)$, $u(t, x - \Delta x)$, то після нескладних перетворень, можна отримати

$$u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x) = u''_x(t, x)(\Delta x)^2 + 0[(\Delta x)^4],$$

отже

$$\frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} = u''_x(t, x) + 0((\Delta x)^2). \quad (9.23)$$

Якщо тепер підставити (9.22) і (9.23) у (9.20) і скористатися тим, що $\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (оскільки u – точний розв'язок диференціального рівняння), отримаємо

$$e = 0(\Delta t) + 0[(\Delta x)^2]. \quad (9.24)$$

Це говорить про те, що скінченнорізницевий метод (9.16) має перший порядок точності за часом і другий порядок точності за просторовою змінною. Вираз (9.24) дає нам похибку наближеного розв'язку на одному кроці за часом. Доведення того, що похибка дискретизації наближається до нуля на всьому відрізку $[0, t]$, достатньо складне і в загальному випадку вимагає додаткових даних про характер наближення до нуля Δt і Δx . Ствердження про те, що локальна похибка дискретизації (9.24) при

$\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ наближається до нуля ϵ , по суті, необхідною умовою наближення до нуля глобальної похибки дискретизації і називається умовою узгодженості різницевої схеми. Те, що із узгодженості різницевого методу не обов'язково впливає збіжність наближеного розв'язку до точного, пов'язане з проблемою стійкості різницевої схеми. Деякі аспекти цієї проблеми розглянемо на прикладі явної різницевої схеми (9.18). Отримаємо точний розв'язок різницевого рівняння (9.18), що задовольняє граничні і початкові умови:

$$u_0^m = u_n^m \quad m = 0, 1, \dots; \quad (9.25)$$

$$u_j^0 - \text{задане}, j=0, 1, \dots, N-1.$$

Розв'яжемо за допомогою методу відокремлення змінних і зображення розв'язку у вигляді розкладу в ряди Фур'є, Припустимо, що розв'язок u_j^m може бути зображений у вигляді

$$u_j^m = v_m w_j, \quad j=1, 2, \dots, N-1, \quad m=0, 1, \dots \quad (9.26)$$

Ця формула є прикладом відокремлення змінних для різницевого рівняння. Підставляючи (9.26) у (9.18) і групуємо члени, дістанемо:

$$\frac{v_{m+1} - v_m}{\mu v_m} = \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{w_j}, \quad j=1, 2, \dots, N-1, \quad m=0, 1, \dots$$

У цьому рівнянні ліва частина не залежить від j , а права — від m ; отже, обидві частини повинні дорівнювати деякій сталій, нехай $-\lambda$. Таким чином,

$$v_{m+1} - v_m = -\lambda \mu v_m, \quad m=0, 1, \dots, \quad (9.27)$$

$$w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1} = -\lambda w_j, \quad j=1, 2, \dots, N-1, \quad (9.28)$$

де з граничних умов (9.25) $w_0 = w_N = 0$. Рівняння (9.28) являє собою задачу визначення власних значень для тридіагональної матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ . & . & . & . \\ & & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для того, щоб матриця мала саме такий вигляд, була обрана стала λ із знаком мінус. Ця матриця має власні значення

$$\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{k\pi}{N}, \quad k=1, \dots, N-1 \quad (9.29)$$

і відповідні власні сектори

$$\omega_k = \left[\sin(k\pi\Delta x), \sin(2k\pi\Delta x), \dots, \sin((N-1)k\pi\Delta x) \right], \quad k=1, \dots, N-1, \quad (9.30)$$

де $\Delta x = 1/N$.

Таким чином, при кожному $\lambda = \lambda_k$ значення $w_j = \sin(jk\pi\Delta x)$, $j = 0, 1, \dots, N$ задовольняють (9.28). У той же час (9.28) при будь-якому λ має розв'язок $v_m = (1 - \lambda\mu)^m v_0$, $m = 0, 1, \dots$

Таким чином, співвідношення

$$v_m w_j = (1 - \lambda_k \mu)^m \sin(jk\pi\Delta x), \quad m = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

при кожному k визначають розв'язок (9.18). Як і у випадку диференціальних рівнянь, лінійна комбінація цих розв'язків також є розв'язком. З цього випливає, що

$$u_j^m = \sum_{k=1}^{N-1} a_k (1 - \lambda_k \mu)^m \sin(jk\pi\Delta x), \quad m = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (9.31)$$

є розв'язком (9.18) при будь-якому значенні α_k . Якщо α_k обчислити за формулами

$$\alpha_k = \sum_{l=1}^{N-1} g(x_l) \sin(k\pi l\Delta x), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (9.32)$$

то розв'язок u_j^m буде задовольняти початкову умову

$$u_j^0 = g(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (9.33)$$

Розглянемо (9.31) з іншого боку. Рівняння $\partial u / \partial t = c \partial^2 u / \partial x^2$ з граничними умовами $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ є математичною моделлю задачі про розподіл температури в тонкому ізолюваному стрижні, кінці якого знаходяться при нульовій температурі. За відсутністю джерел тепла очікується, що температура усіх точок стержня буде наближатись до нуля, тобто що $u(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Природно вимагати, щоб скінченнорізницеві апроксимації u_j^m наближалися до нуля при $t \rightarrow \infty$. Із (9.31) випливає, що при довільних початкових умовах це буде мати місце в тому і лише в тому випадку, якщо

$$|1 - \mu \lambda_k| < 1, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (9.34)$$

Оскільки μ і всі λ_k додатні, (9.34) буде виконуватися в тому і лише тому випадку, коли $-(1 - \mu \lambda_k) < 1, k = 1, \dots, N-1$, або, якщо

$$\mu \leq \min \frac{2}{\lambda_k} = \left(1 - \cos \frac{\pi(N-1)}{N}\right)^{-1} = \left(1 + \cos \frac{\pi}{N}\right)^{-1}. \quad (9.35)$$

Використано те, що найбільшим із λ_k є λ_{N-1} . Оскільки $\mu = c\Delta t / (\Delta x)^2$, із (9.34) дістанемо

$$\Delta t < (\Delta x)^2 / \left[c \left(1 + \cos \frac{\pi}{N}\right) \right]. \quad (9.36)$$

Умова (9.36) дає обмеження на співвідношення кроків Δt і Δx . Якщо цю умову не буде виконано, то у загальному випадку отриманий за різницевою схемою (9.18) наближений розв'язок u_j^m буде розходитися при $m \rightarrow \infty$ і, що легко побачити, буде все гірше апроксимувати збіжний до нуля розв'язок диференціального рівняння.

Умову (9.36) можна замінити іншою умовою

$$\Delta t \leq (\Delta x)^2 / (2c), \quad (9.37)$$

із якої завжди випливає (9.36). Умова (9.37) називається *умовою стійкості різницевої схеми* (9.18). Різницеві схеми, стійкі лише при деякому обмеженні на співвідношення кроків за простором і часом, називаються *умовно стійкими*. Отже, схема (9.18) умовно стійка; при $c = 1$ умова стійкості має вигляд $\tau/h^2 \leq 0.5$. Найзручніший вигляд схема (9.18) має:

при $\mu = 1/2$

$$u_j^{m+1} = (u_{j+1}^m + u_{j-1}^m) / 2 + \Delta t \varphi_j^m; \quad (9.38)$$

при $\mu = 1/6$

$$u_j^{m+1} = \frac{1}{6} (u_{j+1}^m + 4u_j^m + u_{j-1}^m) + \Delta t \varphi_j^m. \quad (9.39)$$

Оцінювання похибок наближених розв'язків, отриманих із рівняння (9.38), (9.39) для задачі (9.10)–(9.12), мають відповідно вигляд:

$$\begin{aligned} |u - \hat{u}| &\leq \frac{T}{4} \left(M_2 + \frac{1}{3} M_4 \right) (\Delta x)^2; \\ |u - \hat{u}| &\leq \frac{T}{72} \left(\frac{1}{3} M_3 + \frac{1}{5} M_5 \right) (\Delta x)^4, \end{aligned}$$

де u , $\hat{u}$ — точний і наближений розв'язок, відповідно

$$\begin{aligned} M_2 &= \max \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|; & M_3 &= \max \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|; \\ M_4 &= \max \left| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right|; & M_5 &= \max \left| \frac{\partial^5 u}{\partial t^5} \right|; \end{aligned}$$

Умова (9.37) стосується також і питання про збіжність до нуля похибки дискретизації при наближенні до нуля Δt і Δx . Можна показати, що якщо Δt і Δx наближатимуться до нуля так, що буде виконано (9.37), то відповідний наближений розв'язок збігатиметься до точного. Це — окремий випадок більш загального принципу, відомого як теорема еквівалентності Лакса, який для широкого класу диференціальних рівнянь і узгоджених різницевих схем стверджує, що глобальна похибка дискретизації буде наближатися до нуля в тому і лише в тому випадку, якщо використаний різницевий метод стійкий.

При зменшенні кроку за простором Δx умова (9.37) накладає все жорсткіші обмеження на значення кроку за часом (див. табл. 9.1, де $c=1$). Це може призвести до того, що доведеться рухатися за часом із значно меншим кроком, аніж визначено залежністю від часу розв'язку самого диференціального рівняння.

Таблиця 9.1

Δx	Δt
0,1	$0,5 \cdot 10^{-2}$
0,01	$0,5 \cdot 10^{-4}$
0,001	$0,5 \cdot 10^{-5}$

Хоча аналіз обмежувався найпростішим диференціальним рівнянням і найпростішою різницевою схемою, вимоги малості кроку за часом є загальною проблемою, яка виникає при розв'язанні параболічних і подібних їм рівнянь за допомогою явних скінченнорізницевих методів.

Ця вимога є основним спонукальним моментом для використання так званих неявних методів.

Скінченнорізницевий метод (9.18) називається *явним*, бо значення u_j^{m+1} на наступному часовому шарі обчислюються за явними формулами через значення на попередньому шарі. Всупереч цьому розглянемо для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (9.40)$$

різницеву схему

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = c \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2}. \quad (9.41)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1.$$

За формулою ця схема подібна (9.15), але має істотну різницю, яка полягає в тому, що значення u_j у правій частині обчислюються на $(m+1)$ -му часовому шарі, а не на m -му. Якщо при відомому значенні u_j^m ($j=1, 2, \dots, N-1$), потрібно обчислити u_j^{m+1} ($j=1, 2, \dots, N-1$), то, зрозуміло, що значення всіх змінних u_j у правій частині (9.41) нам невідомі. Отже, враховуючи шаблон для суто неявних схем (рис. 9.3,б), розглядатимемо (9.41) як систему рівнянь, що визначають значення u_j^{m+1} ($j=1, 2, \dots, N-1$). У цьому й полягає одна з основних різниць між явними та неявними методами: в явних методах ми маємо явні формули (як-то (9.18)), які дають змогу виразити u_j^{m+1} через значення u_j у попередні моменти часу, а в неявних методах для переходу на наступний часовий шар

нам доводиться розв'язувати систему рівнянь. Проаналізуємо систему детальніше. Якщо встановити $\tau = \tau_0$, то (9.41) можна переписати як

$$A(\tau_0) \dot{y} = b(\tau_0), \quad (9.42)$$

або в матрично-векторному вигляді

$$A(\tau_0) \dot{y} = b(\tau_0). \quad (9.43)$$

Для виведення (9.43) ми використовували крайові (9.12) та початкові (9.11) умови; тому, як і раніше, $y(0) = y_0$ для $\tau = \tau_0$; ці значення увійшли в праві частини першого та останнього рівнянь (9.43). Початкові умови мають вигляд $y(\tau_0) = y_0$. Неявний метод (9.42) складається тепер із визначення y з $\dot{y}$ за допомогою розв'язання на кожному кроці за часом системи лінійних рівнянь (9.43). Матриця системи (9.43) тридіагональна і, через те, що $A(\tau_0)$ є діагонально-домінуючою. Таку систему рівнянь можна ефективно розв'язувати методом прогонки.

Хоча система (9.43) може бути розв'язана досить ефективно, цей метод вимагає більших витрат на один крок за часом, ніж явний метод (9.18). Проте, як компенсація за ці додаткові витрати, ми отримуємо істотний вигаиш у стійкості методу, що в багатьох випадках дозволяє використовувати значно більший крок за часом, ніж в явному методі, і таким чином значно скоротити необхідний машинний час.

Накреслимо схему аналізу стійкості неявного методу за зразком явної схеми.

Припустимо, як і раніш, що $\tau = \tau_0$. Тоді розкладу (9.31) відповідає зображення

$$A(\tau_0) \dot{y} = b(\tau_0). \quad (9.44)$$

Якщо

$$A(\tau_0) \dot{y} = b(\tau_0), \quad (9.45)$$

то (9.44) тотожно задовольняє різнищеві рівняння (9.42) для будь-яких значень y . Якщо y обчислюється за формулою

(9.46)

тоді значення задовольнятимуть початкові умови.

Як і раніше, можна зробити висновок, що наближений розв'язок відбиває поведінку розв'язання диференціального рівняння лише в тому випадку, коли при . Із (9.44) видно, що в загальному випадку це матиме місце тоді й лише тоді, коли:

(9.47)

Але оскільки , із (9.45) дістанемо

(9.48)

тому (9.47) дійсно виконується. Найістотнішим є те, що (9.48) виконується для будь-якого . Оскільки , звідси випливає, що

(9.48) виконується для кожного співвідношення . У такому випадку кажуть, що метод є безумовно стійким, розуміючи під цим стійкість методу при будь-якому відношенні .

Той факт, що метод (9.42) безумовно стійкий, не означає, що ми отримуватимемо непоганий наближений розв'язок при будь-якому виборі i . Як і завжди, вони повинні бути достатньо малими, щоб забезпечити малість похибки дискретизації. Можна показати, що метод (9.42), як і відповідний явний метод (9.18), мають перший порядок малості за часом та другий порядок малості за просторовою змінною, тобто похибку дискретизації можна відобразити у вигляді .

Припустимо, що . Тоді для сумірності внеску в повну похибку від дискретизації за часом та дискретизації за простором ми повинні поставити вимогу, щоб .

Таким чином, хоча умова стійкості неявного методу не накладає жодних обмежень на співвідношення кроків , вимоги до стійкості можуть привести до виникнення подібних обмежень. Оцінювання похибки наближеного розв'язку (9.42) при розв'язанні задачі (9.10)–(9.12) має вигляд

де u і i – точний та наближений розв'язки. При чисельному розв'язанні практичних задач, які описуються параболічними рівняннями в частинних похідних, звичайно використовуються неявні методи. Справа в тому, що виграш, пов'язаний із гарною стійкістю неявних різницевих схем, значно

перевищує ту додаткову роботу, яка необхідна при реалізації кроку за часом. Більшість фактичних методів мають складнішу структуру, ніж схема (9.42), та принципи залишаються тими ж. Часто використовують метод Крайка-Ніколсона, що є усередненням явного (9.18) та неявного (9.42) методів. Дійсно, якщо взяти середнє правих частин (9.18) і (9.42), ми дістанемо (використовуючи шаблон $\tilde{b}$ (див. рис. 9.3)):

$$(9.49)$$

Якщо встановити $\tilde{b}$, при запису (9.49) у матрично-векторній формі, ліва частина буде ідентична (9.43), а права матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & \tilde{b} \\ & \tilde{b} \end{aligned} \quad (9.50)$$

Таблиця 9.2

	0	0,075	0,150	0,225	0,300	0,375	0,450	0,525	0,600
64	0,400	0,469	0,509	0,524	0,517	0,493	0,457	0,412	0,362
63	0,409	0,478	0,516	0,529	0,521	0,497	0,459	0,413	0,362
62	0,419	0,486	0,523	0,535	0,526	0,500	0,461	0,414	0,362
61	0,428	0,494	0,530	0,541	0,531	0,504	0,464	0,415	0,362
60	0,438	0,502	0,537	0,547	0,536	0,507	0,466	0,416	0,362
59	0,447	0,510	0,544	0,553	0,540	0,511	0,468	0,417	0,362
58	0,456	0,519	0,551	0,559	0,545	0,514	0,471	0,419	0,362
57	0,466	0,527	0,558	0,565	0,550	0,518	0,473	0,420	0,362
56	0,475	0,535	0,566	0,571	0,554	0,521	0,475	0,421	0,362
55	0,484	0,543	0,573	0,576	0,559	0,525	0,478	0,422	0,362
10	0,906	0,913	0,891	0,844	0,775	0,689	0,588	0,478	0,362
9	0,916	0,921	0,898	0,849	0,780	0,693	0,591	0,479	0,362
8	0,925	0,929	0,905	0,855	0,785	0,697	0,594	0,481	0,362
7	0,934	0,937	0,911	0,861	0,790	0,701	0,597	0,483	0,362
6	0,944	0,945	0,918	0,867	0,795	0,705	0,600	0,484	0,362
5	0,953	0,953	0,925	0,872	0,800	0,709	0,603	0,486	0,362
4	0,963	0,961	0,931	0,878	0,805	0,714	0,607	0,488	0,362
3	0,972	0,968	0,937	0,884	0,810	0,718	0,610	0,490	0,362
2	0,981	0,976	0,943	0,889	0,815	0,723	0,614	0,492	0,362
1	0,991	0,983	0,949	0,895	0,820	0,727	0,618	0,494	0,362
0	1,000	0,989	0,955	0,900	0,825	0,732	0,622	0,498	0,362

Отже, метод (9.49) зводиться до розв'язання на кожному кроці за часом тридіагональної системи рівнянь. Матриця коефіцієнтів цієї системи

збігається з матрицею системи (9.43), а вектор правих частин, що задається формулами (9.50), визначається трохи складніше, ніж у (9.43). Таким чином, метод (9.49) вимагає на кожному кроці за часом трохи більшого обсягу обчислень. Перевага методу (9.49) полягає, проте, в тому, що він є не лише безумовно стійким, як і (9.42), але й має другий порядок точності як за просторовою змінною, так і за часовою.

Приклад. Використовуючи метод сіток, розв'язати рівняння теплопровідності для заданих початкових і граничних умов .

Розрахунки виконуються за розрахунковою схемою (9.39), вважаючи, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Результати розрахунків наведені в табл. 9.2 для деяких значень m .

9.3 Рівняння гіперболічного типу. Метод сіток

Звернемося до хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Розглянемо пружну струну, натягнену вздовж осі x та закріплену в точках $x=0$, $x=L$ (рис. 9.4). Якщо струну відтягнути і відпустити, то вона почне коливатися, як зображено на рисунку. Вважатимемо струну «ідеальною», тобто припустимо, що струна абсолютно гнучка і що натяг T сталий за всією довжиною струни, не залежить від t і великий порівняно з вагою струни. Позначимо відхилення струни в будь-якій проміжній точці x і в момент часу t через $u(x,t)$ і малі порівняно з довжиною струни L .



До того ж вважатимемо, що у будь-якій точці тангенс кута нахилу вигнутої струни набагато менший за одиницю і що струна коливається в одній площині; нехтуватимемо горизонтальним зсувом точок струни порівняно з вертикальним.

За другим законом Ньютона сила дорівнює добутку маси та прискорення. За допомогою досить елементарних міркувань можна показати, що відхилення струни задовольняє рівняння (9.61), де $c = T/m$, m — питома маса матеріалу (маса одиниці довжини). Для формування задачі необхідно задати початкові та граничні умови. Оскільки кінці струни закріплені, у точках $x = 0$ і $x = L$, граничні умови мають вигляд

$$(9.62)$$

За початкову умову слід взяти початкове відхилення і початкову швидкість точок струни. У даному випадку

$$(9.63)$$

Таким чином, диференціальне рівняння (9.61), граничні (9.62) і початкові умови повністю визначають математичну модель задачі.

Розглянемо побудову різницевої схеми для рівняння коливань (9.61) на відрізку $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$ із початковими і граничними умовами:

$$; \quad (9.64)$$

$$(9.65)$$

Вважаємо, що ця задача поставлена коректно, тобто її розв'язок існує, він єдиний і неперервно залежить від початкових і граничних умов. Використовуватимемо ту ж саму сітку, що й у підрозділі 9.2, тобто

Зрозуміло, що мінімальний шаблон, на якому можна апроксимувати рівняння (9.61), це п'ятиточковий шаблон, зображений на рис. 9.3 з. Таким чином, на відміну від схем рівняння теплопровідності, де використовувалися лише два часових шари (шари m і $m + 1$), тут потрібно використовувати три часових шари: $m-1$, m , $m+1$. Такі схеми називаються тришаровими. При їх застосуванні вважається, що при відшукуванні значень на верхньому шарі значення на попередніх шарах зберігаються у пам'яті ЕОМ. При цьому, у протиположності до методу для рівнянь параболічного типу, доводиться вилучати додатковий обсяг пам'яті для зберігання; усе це впливає із того, що диференціальне рівняння (9.61) містить у собі другу похідну за часом.

Найпростішою різницевою апроксимацією рівняння (9.61) і граничних умов (9.65) є система рівнянь:

$$(9.66)$$

$$, \quad (9.67)$$

Для переходу до обчислень необхідно задати значення i , які можна отримати із початкових умов (9.64)

(9.68)

Друга формула виникає як апроксимація початкової умови різницевого відношення. Із граничних умов маємо

(9.69)

Оцінювання похибки апроксимації у цьому випадку виглядає як:

(9.70)

де —точне значення.

Таким чином, значення наближеного розв'язку на $(m + 1)$ часовому шарі можна обчислити за формулою:

(9.71)

Якщо , то формула має найпростіший вигляд

(9.72)

Оцінювання похибки наближеного розв'язку (9.71) у смугі $0 \leq x \leq S$, $0 \leq t \leq T$

де u – точний розв'язок;

Найпростіша заміна другої із початкових умов (9.64) другим рівнянням (9.68) має лише перший порядок апроксимації за τ . Оскільки рівняння (9.66) апроксимує вихідне рівняння (9.61) із другим порядком, бажано, щоб і різницева початкова умова також мала другий порядок апроксимації. Якщо функція $f(x)$ має скінченну другу похідну, то значення u можна визначити за допомогою формули Тейлора

(9.73)

Використовуючи рівняння (9.61) для $c = 1$ і початкові умови (9.64), можна записати

(9.74)

Тоді за формулою (9.73) матимемо

(9.75)

Отже, різницеве рівняння (9.75) апроксимує другу умову (9.64) із другим порядком малості за τ і за h .

Сукупність рівнянь (9.66), (9.67), першого із рівнянь (9.68) і (9.75) становить різницеву схему, яка апроксимує вихідну задачу (9.61)–(9.63).

Покажемо ще один спосіб побудови різницевої початкової умови із другим порядком апроксимації. Замінімо похідну різницеvim відношенням , що має другий порядок. Тоді з початкових умов матимемо:

(9.76)

Напишемо різницеве рівняння (9.72) для шару $m=0$:

(9.77)

Вилучивши з рівняння (9.76), (9.77) значення , дістанемо

(9.78)

Оцінювання похибки значень має вигляд:

(9.79)

де

(9.80)

Легко показати, що локальна похибка дискретизації у схемі (9.66) дорівнює $O[(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2]$, тобто різницева схема має другий порядок точності як за просторовою змінною, так і за часом.

Для аналізу стійкості можна знов скористатися методом відокремлення змінних, припускаючи, що значення α і β в граничних умовах (9.65) дорівнюють нулю. Нехай . Підставляючи це зображення у (9.66), отримуємо:

(9.81)

(9.82)

Рівняння (9.82) збігається з (9.28), і їх розв'язок визначається виразами (9.29), (9.30). Рівняння (9.81) зовнішньо мають ту ж форму, що і (9.82), проте являють собою різницеvim аналог задачі Коші, де значення v_0 і v_1 вважаються заданими. Розв'язок (9.82) можна записати у вигляді:

де $\eta_{\pm}$ -корені характеристичного рівняння

тобто

а коефіцієнти γ_i можна визначити за заданими початковими умовами v_0 і v_1 . Таким чином, розв'язок (9.66) може бути записаний у вигляді

$$(9.83)$$

де індекс k вказує, що відповідні γ і η обчислюються для $\lambda = \lambda_k$. Щоб значення залишалися обмеженими при довільних і будь-яких початкових умовах, необхідно й достатньо, щоб $|\eta_{kj}| \leq 1$. Легко перевірити, що якщо:

$$(9.84)$$

то $|\eta_{kj}| = 1$, а якщо $\lambda_k \mu - 4 > 0$, то $\eta_{k,-} < -1$. Отже, (9.84) є необхідною й достатньою умовою стійкості. Оскільки власні значення λ_k містяться в інтервалі $0 < \lambda_k < 4$, то для виконання (9.84) достатньо щоб $\mu \leq 1$ або

$$(9.85)$$

Ця умова є, по суті, й необхідною. Справа в тому, що $\lambda_n \rightarrow 4$ при $n \rightarrow \infty$; так що будь-яка, слабша за (9.85), умова призведе при достатньо великих n до порушення умови (9.84). Умова стійкості (9.85) накладає на Δt значно менш жорсткі обмеження, ніж умови (9.37) у випадку рівняння теплопровідності. Дійсно, з (9.85) видно, що потрібно зменшувати пропорційно, а не квадрату, як у випадку (9.37).

Приклад. Знайти розв'язок задачі для рівняння коливання струни

із початковими умовами, і крайовими умовами де

Для розв'язання використаємо співвідношення:

При цьому, а для визначення можна використати один із засобів, наприклад:

При розрахунках вважаємо, що:

Результати розрахунку наведені в табл. 9.3.
Таблиця 9.3

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0,0	0,000000	0,050000	0,100000	0,150000	0,200000	0,250000
0,1	0,009511	0,017284	0,76512	0,120286	0,146032	0,157271
0,2	0,032368	0,036023	0,038570	0,072544	0,077556	0,059746
0,3	0,052935	0,052654	0,032055	-0,005159	-0,013742	-0,042330
0,4	0,049540	0,048967	0,009925	-0,054231	-0,125046	-0,139754
0,5	0,000199	0,006810	-0,037319	-0,109961	-0,180243	-0,212499
0,6	-0,110919	-0,086087	-0,113076	-0,163330	-0,197415	-0,310246
0,7	-0,287573	-0,230805	-0,212099	-0,200530	-0,293334	-0,392670
0,8	-0,517291	-0,413584	-0,318259	-0,342102	-0,395785	-0,449746
0,9	-0,769996	-0,604745	-0,543588	-0,513514	-0,498514	-0,482271
1,0	-1,000000	-0,900000	-0,800000	-0,700000	-0,600000	-0,500000

9.4 Скінченнорізницевий метод розв'язання рівнянь еліптичного типу

Рівняння з частинними похідними, які залежать від просторових координат, мають назву *стаціонарних рівнянь*. Такі рівняння можуть мати природне походження і описувати процеси різної природи, які не змінюються у часі. Прикладами таких рівнянь можуть бути задачі про визначення прогину навантаженої балки, тиск газу в неоднорідному силовому полі, стаціонарний розподіл тепла в тілі та ін. Усі ці задачі мають загальну властивість: припускається, що зовнішній вплив не залежить від часу, а початкові умови задані достатньо давно, й тому фізична система встигла вийти на стаціонарний розв'язок, який не залежить від часу.

Прикладом повної математичної постановки задачі для рівняння еліптичного типу є задача з крайовими умовами першого роду, яка має назву *задачі Діріхле для рівняння Пуассона*

(9.86)

яке задано в однозв'язній області G з границею Γ . Коефіцієнти в рівнянні, права частина та границя Γ є достатньо гладкими: $a(x, y) > 0$, $b(x, y) > 0$, $g(x, y) \leq 0$ в G . Постановка задачі: знайти функцію $u(x, y)$, яка задовольняє всередині деякої області G рівняння (9.86), а на границі Γ умову:

(9.87)

де $\varphi(x, y)$ - задана неперервна функція. Припускаємо, що є такі, що розв'язок задачі (9.86), (9.87) існує, є єдиним і є достатньо гладкою функцією. При отримуюмо задачу Діріхле для рівняння Лапласа, одною з важливих властивостей якої є виконання принципу максимуму: неперервний в G і відмінний від константи розв'язок $u(x, y)$

може досягати свого максимального за модулем значення тільки на границі Γ . Звідси випливає, що є справедливою оцінка

$$(9.88)$$

яка означає стійкість задачі за граничними даними. Вкриємо область G площини (x, y) сіткою паралельних прямих (рис. 9.4)

Точки перетину цих прямих мають назву *вузлів*. Розглянемо тільки вузли, розташовані всередині області G . Два вузли (x_i, y_k) називають *сусідніми*, якщо відстань між ними за віссю x або за віссю y дорівнює h . Вузли, які мають чотирьох сусідів, розташованих всередині області G , мають назву *внутрішніх*. Множина всіх внутрішніх вузлів називається *сітчастою областю* G_h (рис. 9.4). Вузли, у яких хоча б один сусідній вузол не належить G_h , називаються *граничними*. Множина всіх граничних вузлів називається *границею сітчастої області* Γ_h (рис. 9.4).

Як і в попередніх розділах цієї глави, замінимо похідні внутрішніх вузлів в (9.86) різницевиими відношеннями другого порядку точності апроксимації за формулами

Підставляючи ці співвідношення в (9.86), відкинувши похибку апроксимації похідних, отримаємо різницеві рівняння для невідомих :

$$(9.89)$$

де введені позначки значень коефіцієнтів і правої частини у вузлі (x_i, y_k) : $a_{i,k}, b_{i,k}, c_{i,k}, d_{i,k}, g_{i,k}, f_{i,k}$, наприклад $f_{i,k} = f(x_i, y_k), (x_i, y_k) \in G_{h2w}$.

Співвідношення (9.89) містять, крім невідомих u у внутрішніх вузлах, ще й невідомі u на границі сітчастої області.

Для граничних вузлів запишемо співвідношення

або

в залежності від того, яка точка $(x, \pm \theta h, y_k)$ або $(x_i, y \pm \theta h)$, $0 \leq \theta \leq 1$, перетин неперервної границі Γ з лініями сітки знаходиться ближче до граничного вузла (рис. 9.5). Ці співвідношення означають, що значення $u(x_i, y_k)$ при $(x_i, y_k) \in \Gamma_h$ отримуються лінійною інтерполяцією значень $u(x, y)$ у внутрішньому вузлі і в точці перетину Γ з сіткою. Відкинувши в останніх співвідношеннях похибку апроксимації, дістанемо вираз для невідомих $u_{i,k}$ в граничних вузлах

$$\text{або} \quad (9.90)$$

де введено позначення Зауважимо,
що в (9.90) дробова частина кроку h (величина θ) залежить від вузла $\theta = \theta_{i,k}$. Щоб не ускладнювати запис в (9.90), індекси i та k випущені.

Приєднуючи рівняння (9.90) до (9.89), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $u_{i,k}$. У цій системі число рівнянь дорівнює числу невідомих і числу вузлів в G_h та Γ_h .

Система рівнянь (9.89), (9.90) - це різницева схема неперервної задачі (9.86), (9.87). Розв'язок цієї різницевої схеми - наближення до точного роз-

в'язку у вузлах (x_i, y_k) . Перепишемо систему рівнянь (9.89) у вигляді:

$$, \quad (9.91)$$

де коефіцієнти задаються формулами:

За припущенням, гладкі функції

$$\text{тому} \quad (9.92)$$

для достатньо малого кроку h . Зауважимо, що має місце рівність

$$. \quad (9.93)$$

Для розв'язання системи лінійних рівнянь отриманої різницевої схеми можуть застосовуватись методи, викладені в розділі 2 (метод простої ітерації). Перепишемо систему рівнянь (9.91), (9.90) у вигляді, зручному для застосування методу простої ітерації для внутрішніх вузлів

$$, \quad (9.94)$$

для граничних вузлів

Тут для внутрішніх вузлів використовувався п'ятиточковий шаблон, (див. Рис. 9.3, г).

Припустимо, що $g_{i,k} < 0$ і виконуються умови (9.92). Розв'яжемо систему рівнянь відносно $u_{i,k}$ методом простої ітерації згідно з ітераційним процесом:

для внутрішніх вузлів

,

для граничних вузлів

$p=0,1,2,\dots$, задане.

Доведено, що якщо $g_{i,k} < 0$ та виконується умова (9.92), то послідовні наближення збігаються до точного розв'язку різницевої схеми або системи рівнянь (9.94), (9.95) і має місце оцінка

,

де

Доведення цього твердження полягає в перевірці умови збіжності методу простої ітерації для системи лінійних рівнянь, при цьому мається на увазі, що невідомий вектор утворює елементи ,. Наприклад, компоненти вектора можна перенумерувати таким чином:

нехай , ; тоді

Відносно вектора різницева схема є системою лінійних рівнянь в матричному записі $Ax = b$, де матриця A має в кожному рядку не більше п'яти ненульових елементів:

Це пов'язано з тим, що похідні в кожному внутрішньому вузлі (i, k) апроксимувались за п'ятьма сусідніми вузлами.

Розв'язання різницевих рівнянь при $h \rightarrow 0$ збігається до точного розв'язання крайової задачі зі швидкістю, яка визначається порядком апроксимації рівнянь та крайових умов. Таким чином, для точного розв'язання $(u(x, y) \in C^4 [G])$ оцінка похибки

(9.96)

Оцінювання похибки (9.96) є справедливою, якщо точний розв'язок неперервно диференційовний чотири рази в області G . Для областей з кутовими точками, наприклад, прямокутника, взагалі кажучи, $u(x, y) \notin C^4 [G]$. Але якщо гранична функція, тобто $\varphi(x, y)$ задовольняє в кутах спеціальні умови узгодження, то точний розв'язок $u(x, y) \in C^4 [G]$ і є вірною оцінка (9.96).

Для прямокутної області: такими умовами
узгодження можуть бути:

- 1) достатня гладкість $\varphi(x, y)$,
- 2) функція $\varphi(x, y)$ повинна задовольняти в кутах прямокутника диференціальне рівняння.

Оцінка похибки (9.96) має в основному теоретичне значення, оскільки містить константу C , яку практично важко визначити

Тому в реальних розрахунках використовується правило Рунге оцінювання похибки, аналогічне тому, яке використовується в чисельному розв'язанні задачі Коші і розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь.

Робиться два варіанти розрахунку з кроком h та з кроком $h/2$; тоді похибка має вигляд

і головна частина похибки визначається на вузлах, що збігаються.

Потрібно зазначити, що рівномірними прямокутними сітками найбільш зручно користуватися при розв'язанні задач у прямокутних областях. Якщо область має форму паралелограма (скошена система), то користуються координатами, осі яких паралельні сторонам цього паралелограма. Декартові прямокутні координати пов'язані з косокутними координатами (ξ, η) співвідношеннями $x = \xi + \eta \cos \alpha$; $y = \eta \sin \alpha$, де α – кут між ξ та η . У диференціальних виразах похідні за x та y замінюються похідними за ξ та η . Усі похідні апроксимуються за допомогою центральних різниць. Якщо область має форму кола, зручно користуватись полярними координатами $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Наведемо деякі загальні зауваження. При чисельному розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних методом сіток можуть бути використані тільки різницеві схеми, які збігаються, оскільки в цьому разі можна розраховувати на отримання наближеного розв'язку задачі, достатньо близького до точного. Але й різницеві схеми, що збігаються, не завжди можуть бути використані при практичному розв'язанні задачі, оскільки при використанні методу сіток при обчисленні значень граничних функцій та правої частини виникають похибки. Щоб ці похибки не спотворили істинного розв'язання різницевої схеми, остання повинна бути стійкою за граничними умовами і за правою частиною. При використанні нестійкої різницевої схеми спотворення істинного розв'язку тим сильніше, чим дрібніша сітка; при використанні ж великої сітки не можна розраховувати на те, що розв'язок різницевої схеми буде близький до точного розв'язку крайової задачі для диференціального рівняння в силу поганої різницевої апроксимації рівняння.

Крім того, під час розв'язання різницевої задачі в процесі розрахун-

ків нам обов'язково доведеться округляти значення розв'язків у вузлах сітки. Ці помилки можуть значно спотворити картину розв'язання, тому необхідною вимогою є стійкість різницевої схеми щодо помилок, які виникають в результаті округлення значень розв'язку у вузлах сітки. Оскільки помилки округлення значень розв'язку в вузлах сітки, принаймні, в найпростіших випадках можна компенсувати зміною правої частини різницевого рівняння, то особливо суттєвою є вимога до стійкості правої частини. Необхідно взяти до уваги й числовий алгоритм, який використовується для розв'язання різницевої схеми. Навіть у випадку, коли різницева схема стійка за граничними умовами і за правою частиною, при невдалому виборі алгоритму для розрахунку розв'язання цієї різницевої схеми може відбутися велике накопичення обчислювальної похибки, у цьому разі нестійким буде сам процес розрахунку. Нестійкі алгоритми розрахунку практично непридатні у випадку дрібної сітки.

Приклад. Розглянемо рівняння

(9.97)

на квадраті $G = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ з крайовими умовами

(9.98)

на сторонах квадрата.

Щоб функція $u(x, y)$ задовольняла умови узгодження, підставимо (9.98) в (9.97) і, таким чином, визначимо функцію $f(x, y)$

(9.99)

Отже, точний розв'язок рівняння (9.97) з крайовими умовами (9.98) - це й є функція (9.99), яка визначена всередині області G .

Метод побудови цього прикладу з відомим точним розв'язком крайової задачі є традиційним при відпрацюванні програми розв'язку класу задач, що розглядаються.

Оберемо крок $h=1/3$. Перенумеруємо вузли таким чином, як показано на рис. 9.6. Для значень u_0 у граничних вузлах із (9.98) дістаємо:

.

Рисунок 9.6

Для значень u у внутрішніх вузлах із (9.97), (9.99) отримуємо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими:

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно $u_{2,2}$, $u_{2,3}$, $u_{3,2}$, $u_{3,3}$, відшукаємо наближені значення до відповідних точних значень розв'язку $u(1/3, 1/3)$, $u(2/3, 1/3)$, $u(1/3, 2/3)$, $u(2/3, 2/3)$.

9.5 Метод Рітца

Метод Рітца відноситься до варіаційних і базується на відповідності між знаходженням розв'язку крайової задачі для диференціального рівняння в частинних похідних і розв'язку задачі про мінімум функціоналу, який відповідає крайовій задачі, що розглядається.

Зупинимось на основній ідеї методу Рітца на прикладі задачі про мінімум подвійного інтеграла

$$J(U) = \iint_D U^2 dx dy, \quad (9.104)$$

$$\text{при умові } U = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (9.105)$$

де Γ – границя області D .

Нехай $U^*(x, y)$ – точний розв'язок задачі (9.104), (9.105), а $J(U^*) = m$ – мінімум. Якщо можемо побудувати функцію $U(x, y)$, для якої значення інтеграла (9.104) близьке до значення m , то ця функція буде достатнім наближенням до шуканого розв'язку u^* . Для знаходження такої функції $U(x, y)$ методом Рітца запропоновано такий підхід. Вибирається функція, що залежить від кількох параметрів

$$U = \Phi \quad (9.106)$$

яка задовольняє умову (9.105). За рахунок вибору параметрів $a(i = 1, 2, \dots, n)$ можна побудувати таку функцію, яка дає інтегралу $J(U)$ найменше значення. При цьому вихідна задача (9.104), (9.105) зводиться до такої: підставивши функцію Φ з (9.106) у вираз (9.104) і виконавши необхідні операції, задачу про знаходження мінімуму функціоналу зводимо до задачі про знаходження мінімуму функції n змінних a_i . Тоді для знаходження мінімуму цієї функції необхідно задовольнити умову

$$(i = 1, 2, \dots, n). \quad (9.107)$$

Тобто, для знаходження параметрів a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) маємо систему рівнянь (9.107). Незалежно від того, чи функція Φ лінійна або нелінійна, маємо завжди лінійну систему рівнянь (9.107). Розв'язавши цю систему і підставивши знайдені значення параметрів a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) у вираз (9.106), знаходимо наближене значення $u(x, y)$ шуканого розв'язку. Можна чекати, що зі збільшенням числа параметрів a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) кожне наступне наближення буде наближатися до точного розв'язку. Вираз (9.106) можна шукати у вигляді відрізку ряду

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k \partial y^k} \quad (9.108)$$

де (x, y) – задані координатні функції, що задовольняють граничні умови. Тоді, якщо функції $\frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k \partial y^k}$ утворюють повну систему функцій при $(x, y) \in \Omega$, то нескінченний ряд (9.108) був би точним розв'язком задачі.

Але при скінченному числі координатних функцій маємо наближений розв'язок.

Розглянемо, як приклад, задачу про згин прямокутної пластини сталої товщини зі сторонами a і b під дією навантаження q , всі сторони якої жорстко закріплені.

Така задача описується рівнянням

$$\Delta^2 w = -q, \quad (9.109)$$

з граничними умовами:

$$\text{при } x = 0, a: w = 0,$$

$$\text{при } y = 0, b: w = 0, \quad (9.110)$$

Згідно з методом Рітца розв'язок задачі (9.109), (9.110) шукаємо у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{m,n} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9.111)$$

Функціонал у даному випадку набуває вигляду

$$I(w) = \frac{1}{2} \iint_D \left(\Delta w \right)^2 dx dy. \quad (9.112)$$

Якщо обмежитися у виразі (9.111) одним членом, то після підстановки його у функціонал (9.112) і виконання всіх операцій дістанемо

$$I = \frac{1}{2} \iint_D \left(\Delta w \right)^2 dx dy \quad (9.113)$$

Звідки, задовольняючи умови стаціонарності (9.107), маємо

$$\Delta^2 w = -q. \quad (9.114)$$

Остаточно одержуємо розв'язок задачі (9.109), (9.110) у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{m,n} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (9.115)$$

Для квадратної пластини ($a = b$) максимальний прогин у центрі пластини ($x = y = \frac{a}{2}$) дорівнює

$$\frac{q a^4}{64 D} \quad (9.116)$$

Точне значення прогину, одержане в рядах, дорівнює $\frac{q a^4}{64 D}$, тобто похибка становить 1,5%. Якщо у розв'язку (9.111) врахувати сім членів ряду, то одержаний результат збігається з точним.

9.6 Метод Бубнова-Гальоркіна

Поряд з методом Рітца для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних застосовується метод Бубнова-Гальоркіна, який має тісний зв'язок з варіаційними проблемами і, зокрема, з методом Рітца.

Викладемо основну ідею методу Бубнова-Гальоркіна. Нехай треба знайти розв'язок задачі для диференціального рівняння в частинних похідних

$$L[U(x, y)] = 0 \quad (9.117)$$

з відповідними граничними умовами. Шукатимемо наближений розв'язок крайової задачі у вигляді

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x, y) \quad (9.118)$$

де (x, y) ($i = 1, 2, \dots, n$) – деяка система заданих функцій, що задовольняють граничні умови, а c_i – невизначені коефіцієнти. Вважаємо, що функції $u_i(x, y)$ лінійно незалежні і є перші n функцій деякої повної системи функцій. Для того щоб $U(x, y)$ була точним розв'язком крайової задачі для рівняння (9.118), треба, щоб вираз $L(U)$ дорівнював нулю точно, а ця вимога

рівносильна вимозі ортогональності виразу $L(U)$ до всіх функцій системи $(i=1, 2, \dots, n, \dots)$. Але ж маючи у своєму розпорядженні тільки n

коефіцієнтів можна лише задовольняти n умов ортогональності.

Задовольняючи ці умови, приходимо до системи

$$\begin{aligned} dx dy = \\ = \end{aligned} \quad dx dy = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (9.119)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (9.119), знаходимо коефіцієнти $(i=1, 2, \dots, n)$. Підставляючи знайдені коефіцієнти c у вираз (9.118), отримаємо шуканий розв'язок крайової задачі.

Метод Бубнова-Гальоркіна взагалі не зв'язаний з варіаційними проблемами і може використовуватись для розв'язання тих задач, де не можна побудувати функціонал, що відповідає крайовій задачі для рівняння (9.117). Але для задач, які зв'язані з варіаційними проблемами, метод Бубнова-Гальоркіна знаходиться у тісному зв'язку і з методом Рітца.

Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до розв'язання крайових задач розглянемо на прикладі розв'язання тієї ж самої задачі, що розв'язувалась методом Рітца, тобто задачі про згин прямокутної пластини при рівномірному навантаженні q з жорстко закріпленими сторонами. Задача описується рівнянням

$$L [w(x,y)] = \quad = \quad (9.120)$$

з граничними умовами:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, a: \quad w = 0, \quad = 0; \\ \text{при } y = 0, b: \quad w = 0, \quad = 0. \end{aligned} \quad (9.121)$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$w(x, y) = \quad (9.122)$$

При цьому задовольняються всі граничні умови (9.121). Тоді ліва частина виразу (9.119) після підстановки в неї розв'язку (9.122) з урахуванням одного члена набуває значення

$$dx dy = \dots \quad (9.123)$$

Прирівнюючи одержану величину нулю, знаходимо те ж саме значення коефіцієнта, що й за методом Рітца, тобто

$$\dots \quad (9.124)$$

Таким чином, для даної задачі метод Бубнова-Гальоркіна дає розв'язок, який повністю збігається з розв'язком, отриманим за методом Рітца.

Контрольні запитання

1. Класифікація методів розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
2. Постановка задачі розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
3. Розв'язання рівнянь параболічного типу.
4. Різницева схема.
5. Різницева задача.
6. Що таке локальна похибка дискретизації.
7. Що таке умовно стійкі різницеві схеми.
8. Рівняння гіперболічного типу.
9. Метод сіток.
10. Скінченнорізницевий метод розв'язання рівнянь еліптичного типу.
11. Постановка задачі Діріхле для рівняння Пуасона.

12. Оцінювання похибки розв'язання рівнянь еліптичного типу.
13. Метод Рітца.
14. Метод Бубнова-Гальоркіна.
15. Чим відрізняється метод Бубнова-Гальоркіна від методу Рітца.

ЛІТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Высшая школа, 1992, – 368с.
2. Метьюз Дж., Финк К. Численные методы. – СПб.: Вильямс, 2001, – 720с.
3. Данилович В.П. Чисельні методи в задачах та вправах. – Київ: НМК ВО, 1991 – 128с.
4. Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995, – 280с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973, – 315с.
6. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982, – 256с.
7. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970, – 486с.
8. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. - М.: Просвещение, 1990, – 261с.
9. Монахов В.М., Беляева Э.С., Краснер Н.Я. Методы оптимизации. – М.: Просвещение, 1978, – 308с.
10. Форсайт Дж., Малькольм М., Моллер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980, – 418с.
11. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1968, – 400с.
12. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. – М.: Мир, 1977, – 584с.

Навчальне видання

Мотигін Володимир Вячеславович
Роптанов Володимир Ілліч
Дудатьєв Андрій Веніамінович

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Частина 1 – Теоретичні відомості

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Дудатьєвим А.В.
Редактор В.О. Дружиніна
Коректор З.В. Поліщук

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7×421/4
Друк різнографічний
Тираж прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ