

Огородніков В. А., Грушко О. В., Кириця І. Ю.

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків
Частина 2

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

Огородніков В. А., Грушко О. В., Кириця І. Ю.

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

**Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків
Частина 2**

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2011

УДК 531: 620 (075)
ББК 30. 121
О39

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 3 від 28.10.2010 р.)

Рецензенти:

І. С. Алієв, доктор технічних наук, професор

О. В. Нахайчук, доктор технічних наук, професор

І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор

Огородніков, В. А.

О39 Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Частина 2 : навчальний посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 146 с.

В посібнику наведені такі розділи: складний опір (позацентровий стиск, згин з крученням), енергетичні методи визначення переміщень, статично невідзначувані системи, позовжня стійкість, ударні та повторно-змінні навантаження. Посібник містить короткі теоретичні відомості, завдання до виконання розрахунково-графічних робіт, приклади виконання завдань, необхідні довідникові матеріали. Посібник призначений для студентів усіх спеціальностей денної форми навчання, що вивчають опір матеріалів.

УДК 531:620(075)
ББК 30. 121

© В. Огородніков, О. Грушко, І. Кириця, 2011

ЗМІСТ

Передмова	6
Порядок та основні вимоги до виконання роботи	6
1 СКЛАДНИЙ ОПІР	8
1.1 Позацентрове розтягання (стискання) прямого бруса	8
1.1.1 Короткі теоретичні відомості	8
1.1.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи	12
Задача 7. Розрахунок стержня на позацентровий стиск	12
Приклад виконання задачі 7	14
Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 7)	20
1.2 Згинання з крученням	20
1.2.1 Короткі теоретичні відомості	20
1.2.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи	24
Задача 8. Розрахунок вала редуктора на міцність.....	24
Приклад виконання задачі 8.....	30
1.2.3 Завдання до розрахунково-графічної роботи	34
Задача 9. Розрахунок плоскої рами з просторовим навантаженням.....	34
Приклад виконання задачі 9.....	35
Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задачі 8, 9)...	42
2 ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ	43
2.1 Короткі теоретичні відомості	43
2.1.1 Узагальнені сили і переміщення.....	43
2.1.2 Загальна формула для визначення переміщень. Метод Мора.	46
2.1.3 Обчислення інтегралів Мора способом Верещагіна	50
2.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи	52
Задача 10. Розрахунок на міцність та визначення переміщення бруса малої кривини при згині	52
Приклад виконання задачі 10.....	53
Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 10)	59
3 СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ	60
3.1 Короткі теоретичні відомості	60
3.1.1 Основні поняття та означення	60
3.1.2 Канонічні рівняння методу сил	63
3.1.3 Визначення переміщень у статично невизначуваних системах	66
3.1.4 Контроль правильності розв'язання статично невизначуваної системи	67
3.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи	68
Задача 11. Розкриття статичної невизначуваності рами	68
Приклад виконання задачі 11.....	70
Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 11)	76
4 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ	77

4.1 Короткі теоретичні відомості	77
4.1.1 Стійка та нестійка пружна рівновага	77
4.1.2 Формула Ейлера для визначення критичної сили стиснутого стержня.....	79
4.1.3 Вплив умов закріплення кінців стержня на значення критичної сили.....	79
4.1.4 Поняття про втрату стійкості при напруженнях, що перевищують границю пропорційності	79
4.1.5 Розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження	82
4.1.6 Перевірний розрахунок стиснутих стержнів	83
4.1.7 Проектувальний розрахунок.....	84
4.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи	86
Задача 12. Проектний розрахунок на стійкість	86
Приклад виконання задачі 12.....	88
Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 12)	92
5 РОЗРАХУНКИ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ	93
5.1 Короткі теоретичні відомості	93
5.1.1 Розрахунок при осьовій дії ударного навантаження	93
5.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи	96
Задача 13. Розрахунок балки при ударному навантаженні	96
Приклад виконання задачі 13.....	96
Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 13)	101
6 РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ НА ВИТРИВАЛІСТЬ.....	101
6.1 Короткі теоретичні відомості	101
6.1.1 Явище втоми матеріалів. Характеристики циклів.....	101
6.1.2 Визначення границі витривалості. Діаграма втоми	104
6.1.3 Вплив конструктивно-технологічних факторів на границю витривалості.....	106
6.1.4 Розрахунок на міцність при повторно-змінних навантаженнях	109
6.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи	110
Задача 14. Розрахунок вала на витривалість при згині та крученні.....	110
Приклад виконання задачі 14.....	112
Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 14)	118
Додаток А. Оформлення розрахунково-графічної роботи	119
Додаток Б. Механічні характеристики матеріалів.....	121
Додаток В. Сортамент прокатної сталі	124
Додаток Г. Геометричні характеристики деяких перерізів	132
Додаток Д. Значення визначених інтегралів, що часто зустрічаються при визначенні переміщень в кривих стержнях	134
Додаток Е. Довідкові дані до розрахунку стиснутих стержнів.....	135
Додаток Ж. Довідкові дані до визначення переміщень графічними методами	137

Додаток И. Дані до розрахунку валів.....	139
Додаток К. Співвідношення між деякими фізичними величинами в різних системах вимірювань	140
Додаток Л. Програма мінімум	141
Список найуживаніших термінів.....	144
Література	145

ПЕРЕДМОВА

Цей навчальний посібник написаний із врахуванням багаторічного досвіду викладання курсу опору матеріалів у Вінницькому національному технічному університеті. Він відрізняється від більшості посібників, виданих раніше іншими авторами конспективним викладенням матеріалу, наявністю 150 варіантів задач до кожного розділу із типовими розрахунками та застосуванням сучасної обчислювальної техніки.

В посібнику розкриті такі важливі для студентів машинобудівних та будівельних вищих навчальних закладів розділи, як складний опір (позацентровий стиск, згин з крученням), енергетичні методи визначення переміщень, статично невизначувані системи, поздовжня стійкість, ударні та повторно-змінні навантаження. Автори прагнули створити посібник максимально корисний студентам не тільки при вивченні дисципліни, але й при курсовому та дипломному проектуванні. Кожне із завдань ілюстроване детальним прикладом розрахунку із поясненнями при розв'язуванні задачі.

Цей навчальний посібник є продовженням однойменного посібника частини 1 [1], відповідно нумерація задач починається з №7.

ПОРЯДОК ТА ОСНОВНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

З дисципліни “Опір матеріалів” студенти виконують розрахунково-графічні роботи (РГР).

РГР мають бути оформлені згідно з діючими стандартами ЄСКД (2.105 і 2.106 для текстових конструкторських документів та 2.104 – для основних надписів). Розрахунково-графічні роботи виконуються на аркушах формату А4 (210×297 мм) основним креслярським шрифтом (стандарт 2.304-68) з висотою літер не менше 2,5 мм, машинописним або на принтері ЕОМ (Times New Roman 14 пт, одинарний інтервал) на одній стороні аркуша. Перша сторінка протоколу оформляється згідно зі стандартом 2.105-95; на наступних сторінках повинен бути штамп згідно зі стандартом 2.104-68 (додаток А). На титульній сторінці вказують номер розрахунково-графічної роботи, назву дисципліни, прізвище та ініціали студента, варіант, факультет і групу.

Як виняток допускається текст роботи писати каліграфічним розбірливим почерком пастою або чорнилом синього чи чорного кольору.

При необхідності виправити помилку неправильний символ закреслюють, а над ним пишуть виправлення. Допускається застосування коректора.

На одній сторінці допускається не більше трьох виправлень.

Розв'язання кожної задачі потрібно починати на новому аркуші так, щоб розрахункова схема та формули, складені за нею, знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і наводиться повна та коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові

схеми (рисунок) виконують за допомогою креслярських приладів або відповідних графічних програм. Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити роботу.

Вибір варіанта завдання здійснюється за шифром, який надається викладачем.

Наприклад: шифр варіанта – 308.

Номер схеми рисунка – 08. Варіант чисельних даних в таблиці – 3.

Приклад шифру в основному надписі.

ОМ.1Б-01.37.308

Студенти, що не виконали або не захистили хоча б одну розрахунково-графічну роботу не допускаються до іспиту з дисципліни "Опір матеріалів". В додатку Л наведена програма-мінімум знань, якими студенти повинні обов'язково володіти для складання іспиту на позитивну оцінку.

1 СКЛАДНИЙ ОПІР

Під складним опором (*combined stress*) розуміють різні комбінації простих навантажень бруса (розтягання (tension), стискання (compression), зсуву (shear), кручення (torsion) та згинання (bending).

У загальному випадку навантажування бруса у поперечних перерізах можуть діяти шість компонент внутрішніх сил – N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , $M_{кр}$, пов'язаних з чотирма простими деформаціями стержня – розтяганням (стисканням), зсувом, крученням та згинанням.

1.1 Позацентрове розтягання (стискання) прямого бруса

1.1.1 Короткі теоретичні відомості

Позацентрове розтягання-стискання (*eccentric tension-compression*) є окремим випадком складного згинання з розтяганням (стисканням), при якому брус розтягується силами, паралельними осі бруса, так що рівнодійна їх не збігається з віссю бруса (рис. 1.1), а проходить крізь точку p , що називається полюсом сили.

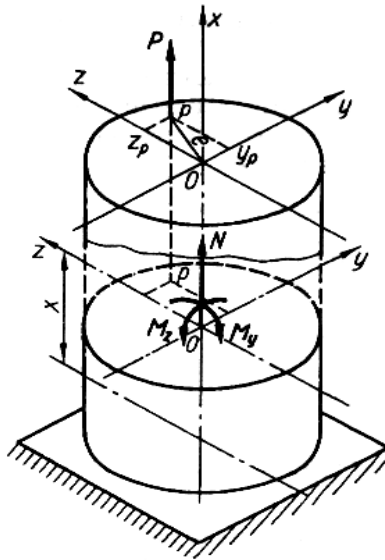


Рисунок 1.1 - Позацентрове навантаження

Нехай на брус довільного перерізу діє одна сила P , яка паралельна осі бруса й перетинає довільний поперечний переріз у точці p (рис. 1.1). Координати цієї точки в системі головних осей перерізу позначимо через y_p та z_p , а відстань від цієї точки до осі x , яка називається *ексцентриситетом* (*eccentricity*), – через e . У довільному поперечному перерізі при певному навантаженні діють такі внутрішні силові фактори: $N = P$; $M_y = Pz_p$; $M_z = Py_p$.

Отже, напруження в довільній точці перерізу складатимуться з напружень осевого розтягання силою N та напружень від чистого згинання моментами M_y та M_z :

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y. \quad (1.1)$$

Підставивши сюди замість N , M_y та M_z їхні значення, дістанемо

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p F}{J_y} z + \frac{y_p F}{J_z} y \right). \quad (1.2)$$

Ця формула набере дещо іншого вигляду, якщо виразити головні моменти інерції через радіуси інерції:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \right). \quad (1.3)$$

Для визначення небезпечної точки при складному профілі доцільно побудувати нейтральну лінію перерізу. Небезпечною в перерізі буде точка, найвіддаленіша від нейтральної лінії.

Рівняння нейтральної лінії матимемо, прирівнявши до нуля праву частину рівняння (1.3) і позначивши координати точок на нейтральній лінії через y_0 та z_0 :

$$\frac{z_p}{i_y^2} z_0 + \frac{y_p}{i_z^2} y_0 = -1. \quad (1.4)$$

Взявши в цьому рівнянні по черзі $z_0 = 0$ і $y_0 = 0$, знайдемо відрізки y_n та z_n , що відсікаються нейтральною лінією на осях y та z (рис. 1.2):

$$z_i = -\frac{i_y^2}{z_p}; \quad y_i = -\frac{i_z^2}{y_p} \quad (1.5)$$

Із залежностей (1.5) випливає, що нейтральна лінія перетинає координатні осі в точках, які належать квадранту, протилежному тому, в якому лежить точка p .

Тепер, провівши паралельно нейтральній лінії дотичні до контуру перерізу, знайдемо найбільш напружені точки A та B у розтягнутій та стиснутій зонах перерізу (рис. 1.2).

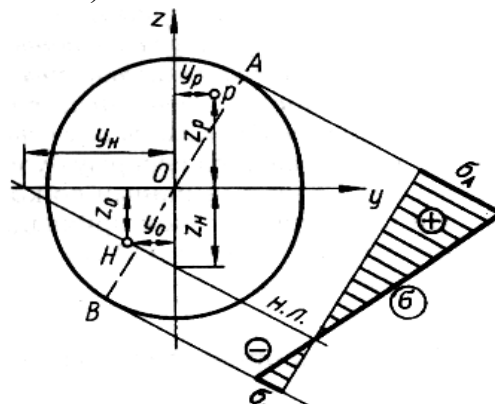


Рисунок 1.2 - Епюри напружень

Напруження в цих точках та умови міцності мають вигляд

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_A + \frac{y_p}{i_z^2} y_A \right) \leq [\sigma_+]; \quad (1.6)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_B + \frac{y_p}{i_z^2} y_B \right) \leq [\sigma_-].$$

Тут z_A, y_A та z_B, y_B — координати точок A та B , відповідно. Епюру напружень σ наведено на рис. 1.2. Для прямокутного перерізу умову міцності зручніше записати в такому вигляді:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (1.7)$$

Формули (1.6) та (1.7) справедливі й у випадку дії стискальної сили P , якщо немає небезпеки виникнення поздовжнього згинання.

Ядро перерізу (core of a cross-section). Досі ми зображали нейтральну лінію як таку, що проходить крізь переріз. Проте взагалі вона може проходити й поза перерізом. Дійсно, якщо сила P прикладена в центрі ваги, то нейтральна лінія проходить у нескінченності, оскільки напруження в цьому разі розподілені рівномірно.

Із збільшенням ексцентриситету e (рис. 1.3) нейтральна лінія наблизиться до перерізу і при деякому положенні сили P (на рис. 1.3, наприклад, при положенні A_3) вперше торкнеться контуру перерізу. При подальшому збільшенні ексцентриситету нейтральна лінія перетинає переріз, причому нормальні напруження в перерізі будуть обох знаків: з однієї сторони від нейтральної лінії — розтягальними, з іншої — стискальними.

Можна визначити зону таких віддалень сили P від осі, при яких нормальні напруження по всьому поперечному перерізу будуть одного знака. Така зона називається *ядром перерізу*. Це важливо для брусів з матеріалів, що погано чинять опір розтягання (наприклад, для цегляної кладки, для бетону та сірого чавуну).

Отже, *ядром перерізу називають зону навколо центра ваги поперечного перерізу, яка має таку властивість: якщо позацентрово прикладене навантаження розміщене в зоні ядра, то нормальні напруження в усіх точках поперечного перерізу мають один знак.*

Для побудови ядра перерізу будемо задаватися різними положеннями нейтральної лінії, дотичними до контуру перерізу, й обчислювати координати відповідних точок прикладання сили P за такими формулами, що впливають з виразу (1.5):

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_i}; \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_i}. \quad (1.8)$$

Обчислені координати визначають точки, що лежать на межі ядра перерізу.

Для полегшення побудови ядра перерізу використаємо таку властивість нейтральної лінії: *при повороті нейтральної лінії навколо деякої фіксованої точки A контуру перерізу точка прикладання сили переміщується вздовж деякої прямої*. Щоб обґрунтувати цю властивість, досить підставити в рівняння (1.4) координати точки $A(y_{OA}, z_{OA})$, що лежить на нейтральній лінії. Матимемо

$$\frac{z_p z_{OA}}{i_y^2} + \frac{y_p y_{OA}}{i_z^2} = -1. \quad (1.9)$$

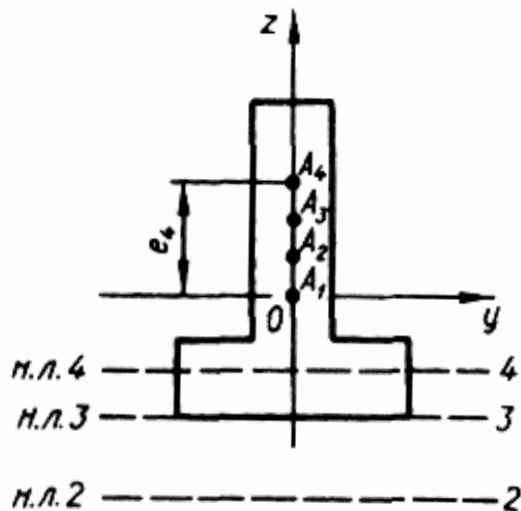


Рисунок 1.3 - Визначення точки ядра перерізу

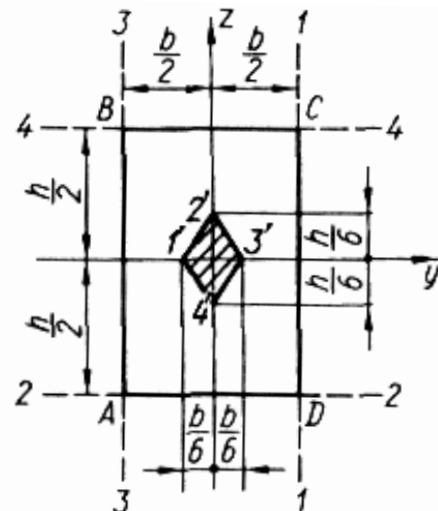


Рисунок 1.4 - Побудова ядра перерізу

Дійсно, рівняння (1.9) при $z_{OA} = \text{const}$ є рівнянням прямої лінії відносно координат точок прикладання сили $P - (y_p, z_p)$.

Отже, для побудови ядра перерізу будь-якої фігури треба провести кілька положень нейтральної лінії, що збігаються зі сторонами перерізу, а також дотикаються до точок, які виступають.

Побудуємо, наприклад, ядро перерізу для прямокутника $ABCD$ (рис. 1.4). Сумістимо спочатку нейтральну лінію зі стороною CD (положення 1 – 1'). Очевидно, в цьому разі

$$y_i = b/2; z_i = \infty.$$

Тоді із виразів (1.8)

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_i} = -\frac{b}{6}; \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_i} = 0.$$

Тут ураховано, що

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}; \quad i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12}.$$

Отже, координати точки I' ядра перерізу визначені.

Сумістимо тепер нейтральну лінію зі стороною AD (положення 2–2). Маємо

$$y_n = \infty; z_n = h / 2.$$

Тоді координати точки 2' ядра

$$y_p = 0; z_p = -\frac{h^2}{12(-h/2)} = \frac{h}{6}.$$

Аналогічно визначаються координати точок 3' та 4', що відповідають положенням 3 – 3 та 4 – 4 нейтральної лінії.

Оскільки при переході нейтральної лінії з однієї сторони на іншу вона повертається навколо кутової точки перерізу, то точка прикладання сили переміщується по прямій, утворюючи контур ядра. Отже, ядро перерізу буде ромбом з діагоналями, які дорівнюють одній третині відповідної сторони перерізу.

1.1.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

Задача 7*. Розрахунок стержня на позacentровий стиск

Чавунний короткий стержень, поперечний переріз якого зображений на рисунку 1.5, стискається поздовжньою силою P , прикладеною в точці P .

Необхідно:

- знайти допустиму стискальну силу P при даних розмірах перерізу і допустимих напруженнях для чавуна на стиск $[\sigma]_{cm}$ та на розтяг $[\sigma]_p$;
- побудувати епюру нормальних напружень в поперечному перерізі при допустимому навантаженні;
- побудувати ядро перерізу.

Таблиця 1.1

Варіант	a, m	Матеріал (чавун)
0	0,5	СЧ 12
1	0,4	СЧ 15
2	0,3	СЧ 18
3	0,5	СЧ 21
4	0,4	СЧ 24
5	0,3	СЧ 28
6	0,5	СЧ 32
7	0,4	СЧ 35
8	0,3	СЧ 38
9	0,5	СЧ 12

*Нумерація задач починається в посібнику [1]

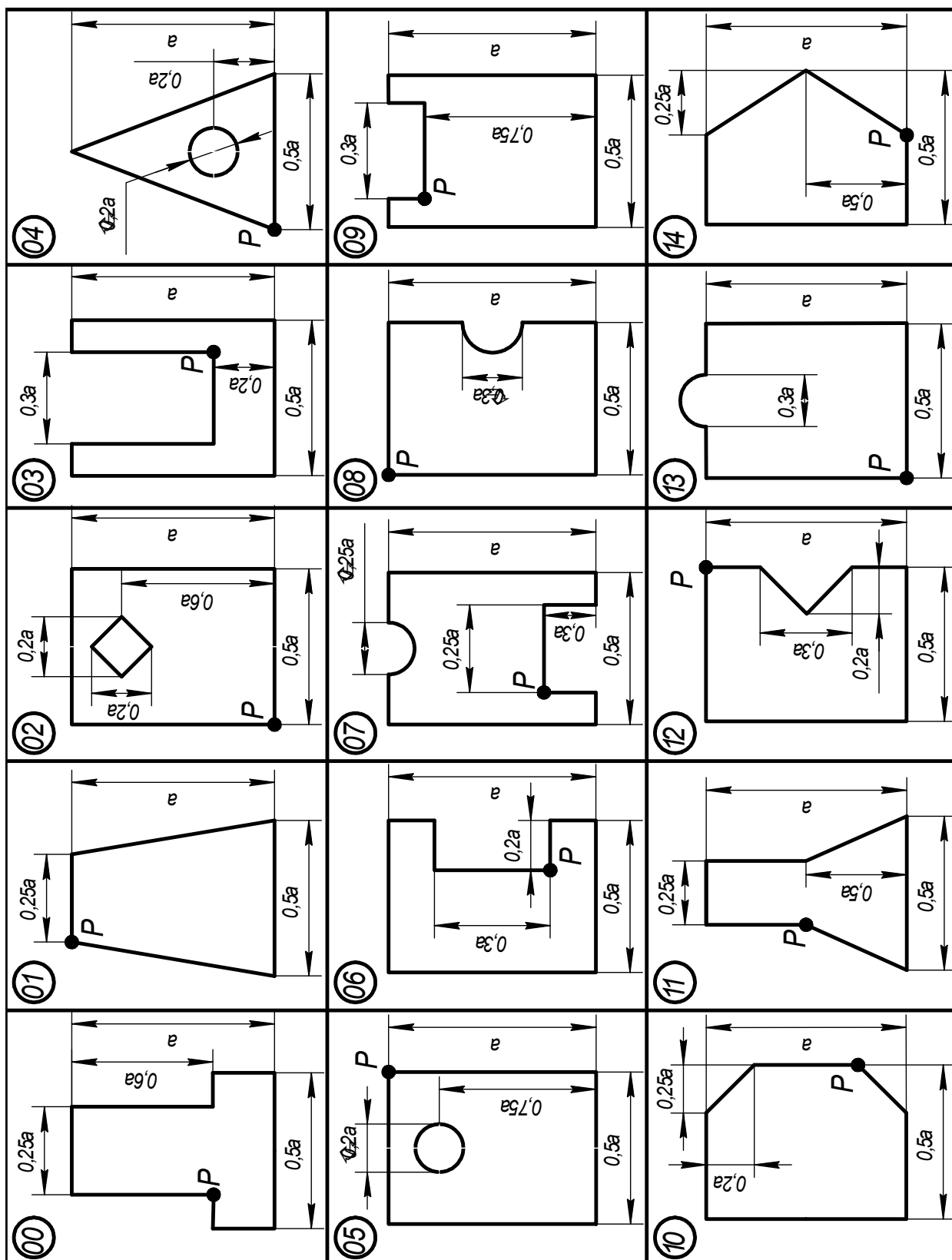


Рисунок 1.5 - Схеми до виконання задачі 7

Приклад виконання задачі 7

Коротка чавунна колона (чавун СЧ 12) заданого поперечного перерізу (рис.1.6) стискається силою P , що прикладена в точці P . Виконати розрахунок колони згідно з наведеним в задачі 7 порядком виконання.

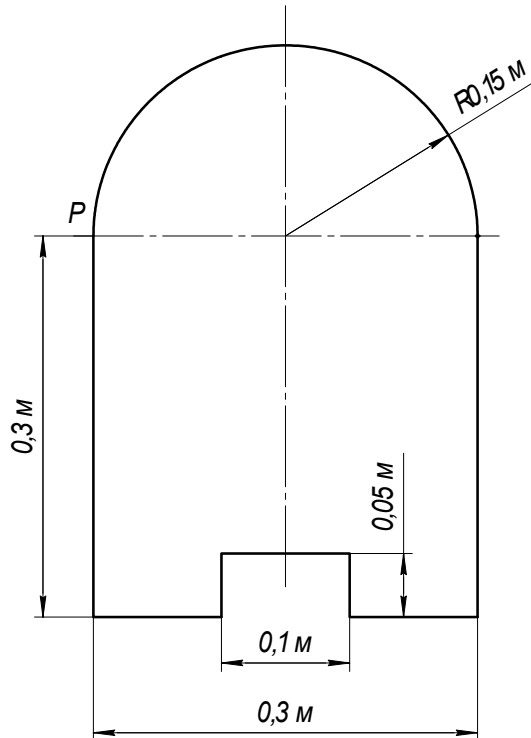


Рисунок 1.6 - Схема до прикладу задачі 7

Дано:

чавун СЧ 12,

$a = d = 0,3$ м.

Знайти:

$P_{\max}$, $\sigma(z, y)$, ядро перерізу -?

Розв'язування

1. Обчислюємо геометричні характеристики заданого перерізу

Координати центра ваги перерізу.

Оскільки фігура має вісь симетрії, то центр ваги буде лежати на цій осі (y_c).

Зобразимо дану складну фігуру у вигляді комбінації трьох простих: півкола, квадрата та прямокутника з від'ємною площею, центи ваги яких $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2$ та $\tilde{N}_3$, відповідно, показані на рисунку 1.7. Індеси вказують належність позначення до відповідної фігури.

Площі цих фігур

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi \cdot 0,3^2}{8} = 0,0353 \text{ (м}^2\text{)};$$

$$A_2 = a^2 = 0,3^2 = 0,09 \text{ (м}^2\text{)};$$

$$A_3 = b \cdot h = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Загальна площа фігури

$$A = A_1 + A_2 - A_3 = 0,0353 + 0,09 - 0,005 = 0,1203 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Проведемо допоміжну вісь z . Відстані від координат центрів ваги цих площ до осі z

$$y_1 = 0,3 + 0,212 \cdot d = 0,3 + 0,212 \cdot 0,3 = 0,364 \text{ (м)};$$

$$y_2 = \frac{0,3}{2} = 0,15 \text{ (м)};$$

$$y_3 = \frac{0,05}{2} = 0,025 \text{ (м)}.$$

Шукаємо координату y_c фігури до допоміжної осі z .

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 - A_3 y_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{0,0353 \cdot 0,364 + 0,09 \cdot 0,15 - 0,005 \cdot 0,025}{0,0353 + 0,09 - 0,005} = 0,218 \text{ (м)}.$$

Проводимо вісь z_c , яка разом з віссю y_c утворює систему головних центральних осей

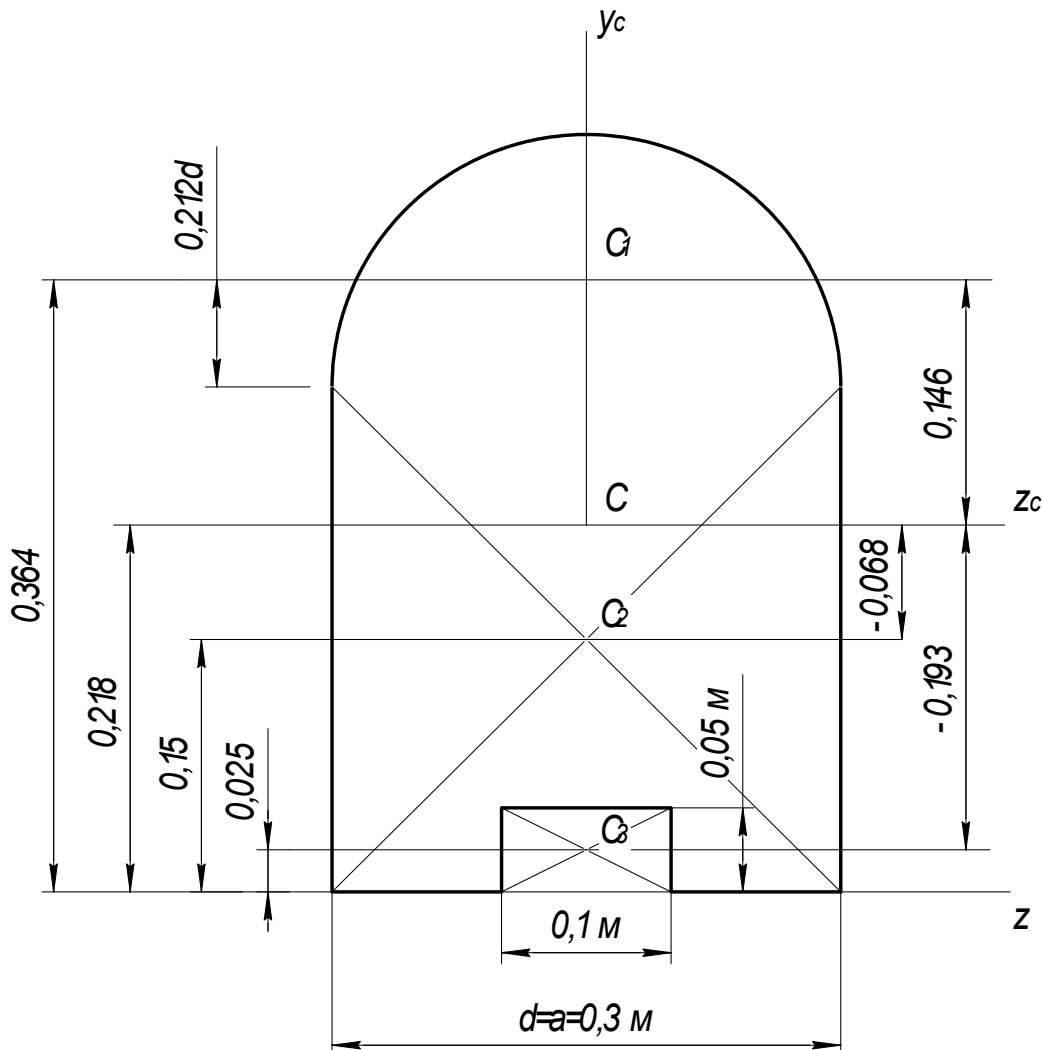


Рисунок 1.7 - Визначення центра ваги перерізу

1.2. Визначаємо головні моменти інерції перерізу

Моменти інерції окремих фігур в їхніх центральних осях

$$J_{z1} = 0,0068 \cdot d^4 = 0,0068 \cdot 0,3^4 = 5,51 \cdot 10^{-5} (\text{м}^4);$$

$$J_{y1} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi \cdot 0,3^4}{128} = 1,99 \cdot 10^{-4} (\text{м}^4);$$

$$J_{y2} = J_{z2} = \frac{a^4}{12} = \frac{0,3^4}{12} = 6,75 \cdot 10^{-4} (\text{м}^4);$$

$$J_{z3} = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,1 \cdot 0,05^3}{12} = 1,04 \cdot 10^{-6} (\text{м}^4);$$

$$J_{y3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,05 \cdot 0,1^3}{12} = 4,17 \cdot 10^{-6} (\text{м}^4).$$

Знаходимо координати центрів ваги $C_1(a_1; b_1)$, $C_2(a_2; b_2)$ та $C_3(a_3; b_3)$ в системі центральних осей $z_c - y_c$.

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 (\text{м}),$$

$$b_1 = y_1 - y_c = 0,364 - 0,218 = 0,146 (\text{м}),$$

$$b_2 = y_2 - y_c = 0,15 - 0,218 = -0,068 (\text{м}),$$

$$b_3 = y_3 - y_c = 0,025 - 0,218 = -0,193 (\text{м}).$$

Центральні осьові моменти інерції перерізу

$$J_{zc} = J_{z1} + b_1^2 \cdot A_1 + J_{z2} + b_2^2 \cdot A_2 - J_{z3} - b_3^2 \cdot A_3 = 5,51 \cdot 10^{-5} + 0,146^2 \cdot 0,0353 + 6,75 \cdot 10^{-4} + (-0,068)^2 \cdot 0,09 - 1,04 \cdot 10^{-6} - (-0,193)^2 \cdot 0,005 = 1,709 \cdot 10^{-3} (\text{м}^4);$$

$$J_{yc} = J_{y1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{y2} + a_2^2 \cdot A_2 - J_{y3} - a_3^2 \cdot A_3 = J_{y1} + J_{y2} - J_{y3} = 1,99 \cdot 10^{-4} + 6,75 \cdot 10^{-4} - 1,04 \cdot 10^{-6} = 8,696 \cdot 10^{-4} (\text{м}^4);$$

1.3. Визначаємо головні радіуси інерції перерізу

$$i_z^2 = \frac{J_{zc}}{A} = \frac{1,709 \cdot 10^{-3}}{0,1203} = 0,0142 (\text{м}^2);$$

$$i_y^2 = \frac{J_{yc}}{A} = \frac{8,696 \cdot 10^{-4}}{0,1203} = 7,23 \cdot 10^{-3} (\text{м}^2).$$

2. Будуємо нейтральну лінію та визначаємо небезпечні точки перерізу.

Будуємо нейтральну лінію через відрізки, які вона відсікає на головних осях

$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{0,0142}{0,082} = -0,173 (\text{м});$$

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{7,23 \cdot 10^{-3}}{-0,15} = 0,0482 (\text{м});$$

де $y_p = 0,082 (\text{м})$, $z_p = -0,15 (\text{м})$ – координати точки прикладення сили P в системі головних центральних осей $z_c - y_c$.

Відкладаємо в масштабі отримані відрізки z_H та y_H на осях та проводимо нейтральну лінію (рис. 1.8).

Небезпечні точки перерізу є найвіддаленішими від нейтральної лінії. Це точки А і В (рис. 1.8). Координати цих точок в системі $z_c - y_c$:

т. А (точка максимального розтягу „+”) $y_A = -0,218$ (м), $z_A = 0,15$ (м);

т. В (точка максимального стиску „-”) $y_B = 0,122$ (м), $z_B = -0,144$ (м).

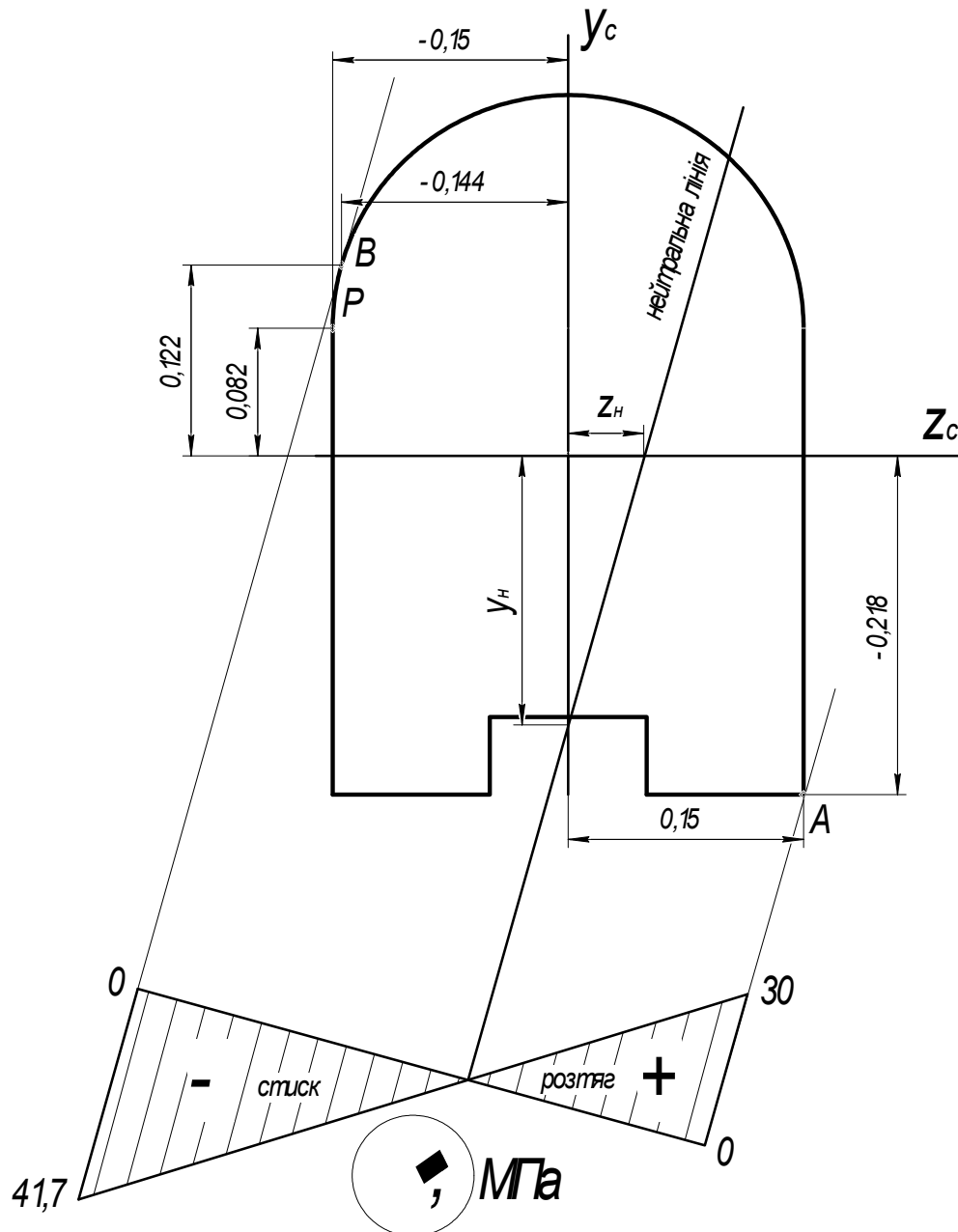


Рисунок 1.8 - Епюри нормальних напружень

3. Максимальне значення сили P .

3.1. Визначаємо допустимі напруження матеріалу стержня.

Для чавуну СЧ 12 границі міцності при розтягу і стиску, відповідно $\sigma_{\epsilon p} = 120$ МПа, $\sigma_{\epsilon c} = 500$ МПа (додаток Б, таблиця Б.5).

Задамося запасом міцності $n = 4$ (орієнтовні межі 3...5 для крихких матеріалів).

Допустимі напруження матеріалу становлять

$$[\sigma_+] = \frac{\sigma_{\epsilon p}}{n} = \frac{120}{4} = 30 \text{ (МПа)};$$

$$[\sigma_-] = \frac{\sigma_{\epsilon c}}{n} = \frac{500}{4} = 125 \text{ (МПа)}.$$

3.2. Визначаємо максимально допустиме значення сили P за умов міцності.

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_A + \frac{y_p}{i_z^2} y_A \right) \leq [\sigma_+];$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_B + \frac{y_p}{i_z^2} y_B \right) \leq [\sigma_-].$$

Звідки

$$P \leq \frac{A \cdot [\sigma_+]}{1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_A + \frac{y_p}{i_z^2} y_A} = \frac{0,1203 \cdot 30 \cdot 10^6}{1 + \frac{-0,15}{7,23 \cdot 10^{-3}} 0,15 + \frac{0,082}{0,0142} (-0,218)} = -1,07 \cdot 10^6 \text{ (Н)};$$

$$P \leq \frac{A \cdot [\sigma_-]}{1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_B + \frac{y_p}{i_z^2} y_B} = \frac{0,1203 \cdot 125 \cdot 10^6}{1 + \frac{-0,15}{7,23 \cdot 10^{-3}} (-0,144) + \frac{0,082}{0,0142} 0,122} = 3,20 \cdot 10^6 \text{ (Н)}.$$

Беремо меншу за модулем силу:

$$P_{\max} = 1,07 \text{ МН}.$$

3.3. Будуємо епюру нормальних напружень в перерізі.

Оскільки ця епюра лінійна, то достатньо визначити напруження в двох точках, зокрема в точках А та В. При прийнятій силі $P = -1,07$ МН (знак „-” показує, що вона стискальна)

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_A + \frac{y_p}{i_z^2} y_A \right) = \\ &= \frac{-1,07}{0,1203} \left[1 + \frac{-0,15}{7,23 \cdot 10^{-3}} 0,15 + \frac{0,082}{0,0142} (-0,218) \right] = 30 \text{ (МПа)}; \end{aligned}$$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_B + \frac{y_p}{i_z^2} y_B \right) =$$

$$= \frac{-1,07}{0,1203} \left[1 + \frac{-0,15}{7,23 \cdot 10^{-3}} (-0,144) + \frac{0,082}{0,0142} 0,122 \right] = -41,7 \text{ (МПа)}.$$

Будуємо епюру за отриманими значеннями, відкладаючи в масштабі відрізки (рис. 1.8) та візуально перевіряємо чи перетинає епюра нейтральну лінію в нулі.

3.4 Будуємо ядро перерізу

Проводимо характерні дотичні 1-1, 2-2 ... (нейтральні лінії) до перерізу. За координатами перетину з головними осями z_i , y_i визначаємо координати точки z_p , y_p прикладення сили P , при якій буде реалізована ця дотична.

Використовуємо формули

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_n}; \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_n}.$$

Для зручності результати обрахунків наводимо в вигляді таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

лінія	y_n , м	z_n , м	точка	y_p , м	z_p , м
1-1	-0,218	∞	P_1	0,065	0
2-2	∞	-0,15	P_2	0	0,048
3-3	0,294	-0,294	P_3	-0,048	0,025
4-4	0,232	∞	P_4	-0,061	0
5-5	0,294	0,294	P_5	-0,048	-0,025
6-6	∞	0,15	P_6	0	-0,048

З'єднуємо послідовно точки $P_1, P_2, \dots, P_6$ та заштрихуємо отриману область (рис. 1.9). Ядро перерізу побудовано.

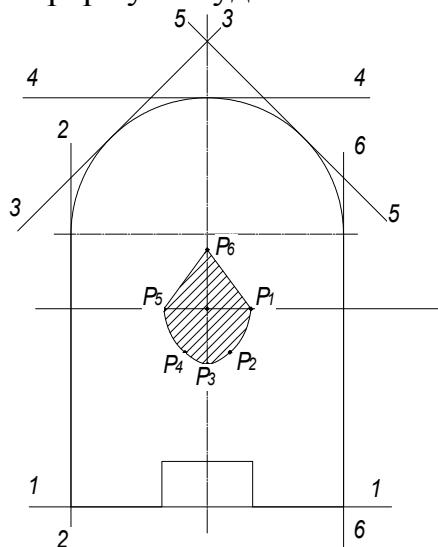


Рисунок 1.9 - Побудова ядра перерізу

Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 7)

1. Записати рівняння нейтральної лінії при позацентровому розтягу-стиску.
2. Записати умову міцності при позацентровому розтягу-стиску.
3. Чому при позацентровому розтягу-стиску зазвичай записують дві умови міцності?
4. Визначити напруження у вказаній точці, використовуючи аналітичний та графічний (з епюр) способи.
5. Побудувати нейтральну лінію, якщо сила P прикладена у вказаній точці.
6. Що таке ядро перерізу?
7. Для чого потрібно будувати нейтральну лінію?
8. В якій системі координат визначаються координати точок, що входять в розрахункові формули умов міцності?
9. В яких елементах конструкцій реалізуються деформації позацентровому розтягу-стиску – навести приклади.
10. За яким алгоритмом виконують розрахунки стержня при позацентровому розтягу-стиску?

1.2 Згинання з крученням (bending combined with torsion)

1.2.1 Короткі теоретичні відомості

Надалі розглянемо лише вали круглого поперечного перерізу.

Сили, що діють на вали (тиск на зуби шестерень, натяг ременів, власна вага вала та шківів тощо), спричиняють у поперечних перерізах валів такі внутрішні силові фактори: $M_{кр} = M_x$; M_y ; M_z ; Q_y та Q_z . Отже, в будь-якому поперечному перерізі одночасно виникають нормальні напруження від згинання в двох площинах, а також дотичні напруження від кручення та згинання.

Для розрахунку вала насамперед треба визначити небезпечні перерізи. З цією метою слід побудувати епюри згинальних моментів M_y , M_z та крутного моменту M_x .

При згинанні вала круглого або кільцевого перерізу в кожному з його перерізів відбувається пряме згинання під дією результуючого згинального моменту (рис. 1.10)

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.10)$$

Положення нейтральної лінії та епюри нормальних напружень σ від результуючого згинального моменту M показані на рис. 1.11. Напруження змінюються пропорційно відстані точок від нейтральної лінії.

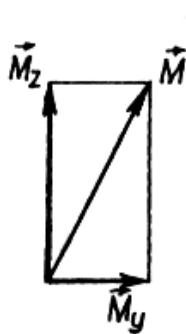


Рисунок 1.10 -
Результуючий
згинальний
момент

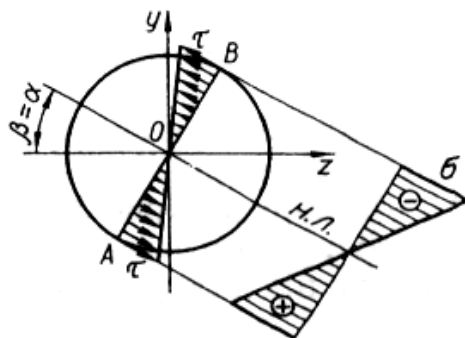


Рисунок 1.11 -
Епюри нормальних і
дотичних напружень

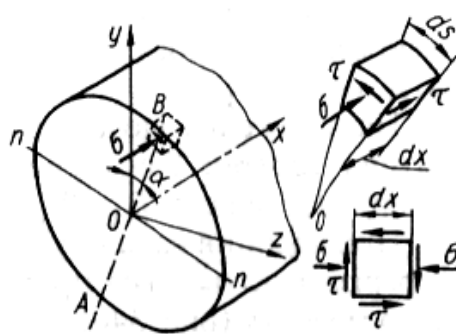


Рисунок 1.12 -
Напружений стан в
небезпечній точці

Очевидно, небезпечними точками є точки A та B , які найбільш віддалені від нейтральної лінії, – в них одночасно і нормальні напруження від згинання, і дотичні напруження мають найбільші значення:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \sqrt{\frac{M_y^2 + M_z^2}{W^2}}; \quad (1.11)$$

$$\tau_{\max} = M_{кр} / W_p. \quad (1.12)$$

Біля найбільш небезпечної точки B виділимо елемент (рис. 1.12). По чотирьох його гранях діють дотичні напруження, а до двох із цих граней прикладені ще й нормальні напруження. Решта граней вільні від напружень. Отже, при згинанні з крученням елемент у небезпечній точці перебуває в плоскому напруженому стані. Аналогічні напруження на гранях у брусі, що згинається.

Зазначимо, що в даному випадку складного напруженого стану впливом дотичних напружень від поперечних сил нехтуємо, оскільки вони значно менші, ніж дотичні напруження, спричинені крученням.

Для перевірки міцності елемента, який виділено біля небезпечної точки, треба, вибравши відповідну теорію міцності, скористатися однією з формул, наприклад формулою:

за IV теорією

$$\sigma_{еквIV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1.13)$$

Підставляючи у формулу (1.13) вирази (1.11), (1.12) для напружень та враховуючи, що $W_p = 2W$, матимемо

$$\sigma_{еквIV} = \frac{\sqrt{0,75M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (1.14)$$

Чисельник цієї формули є зведеним моментом, дія якого еквівалентна спільній дії трьох моментів (згідно з вибраною теорією міцності). Отже,

$$M_{36IV} = \sqrt{0,75M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{M^2 + 0,75M_{кр}^2}. \quad (1.15)$$

У разі потреби так само можна отримати формули для зведених моментів і за іншими теоріями міцності.

Неважко помітити, що тепер умову міцності (1.14) можна замінити однією простою формулою

$$\sigma_{екв} = M_{36} / W \leq [\sigma]. \quad (1.16)$$

Отже, при спільній дії згинання з крученням стержні круглого перерізу розраховують на згинання від зведеного моменту M_{36} .

Розв'язуючі нерівність (1.16) відносно W , дістанемо формули для визначення моменту опору:

$$W \geq M_{36} / [\sigma] \quad (1.17)$$

та діаметра круглого вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{36}}{\pi[\sigma]}} \approx \sqrt{\frac{10M_{36}}{[\sigma]}}. \quad (1.18)$$

Зазначимо, що наведені формули цілком придатні й для стержнів кільцевого перерізу.

Приклад. На вал (рис. 1.13) насаджено три зубчастих колеса. Колеса навантажені силами $P_1 = 4000$ Н, $P_2 = 3000$ Н, $P_3 = 2000$ Н, причому сила P_1 вертикальна, а сили P_2 та P_3 горизонтальні. Діаметри зубчастих коліс такі: $D_1 = 100$ мм; $D_2 = 300$ мм; $D_3 = 250$ мм. Допустимі напруження $[\sigma] = 60$ МПа. Доберемо діаметр вала за IV теорією міцності.

Замінімо діюче навантаження статично еквівалентною системою сил.

Перенесемо сили P_1 , P_2 та P_3 на вісь вала, замінюючи кожен з них силою, прикладеною в точках B , C або D , відповідно, й скручувальною парою сил $M_1 = \frac{1}{2}P_1D_1$; $M_2 = \frac{1}{2}P_2D_2$; $M_3 = \frac{1}{2}P_3D_3$, відповідно. Отже, дістаємо розрахункову схему (рис. 1.13).

На схемі наведено як значення прикладених зовнішніх навантажень (P_i , M_{ki}), так і значення спричинених ними опорних реакцій.

Розглядаючи окремо сили в горизонтальній та вертикальній площинах (рис. 1.14, а та б), будемо епюри згинальних моментів. Для побудови сумарної епюри моментів M визначаємо ординати в характерних точках за формулою (1.10):

у перерізі B

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{160^2 + 50^2} = \sqrt{28100} = 167,6 \text{ (Н·м)};$$

у перерізі C

$$M = \sqrt{440^2 + 562,5^2} = \sqrt{510006} = 714,2 \text{ (Н·м)};$$

у перерізі D

$$M = \sqrt{640^2 + 250^2} = \sqrt{472100} = 687,1 \text{ (Н·м)}.$$

Епюру M , побудовану за цими даними, наведено на рис. 1.14, в. Як уже зазначалося, на ділянках BC та CD така епюра має завищені значення ординат (дійсні значення показано штриховою лінією).

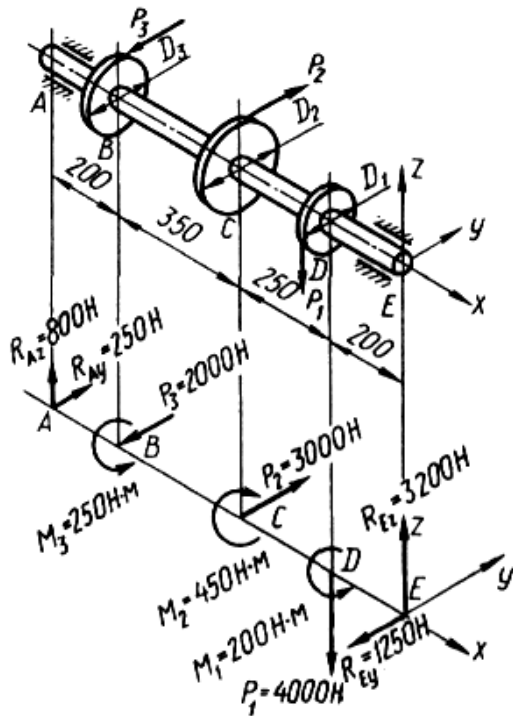


Рисунок 1.13 –
Побудова схеми

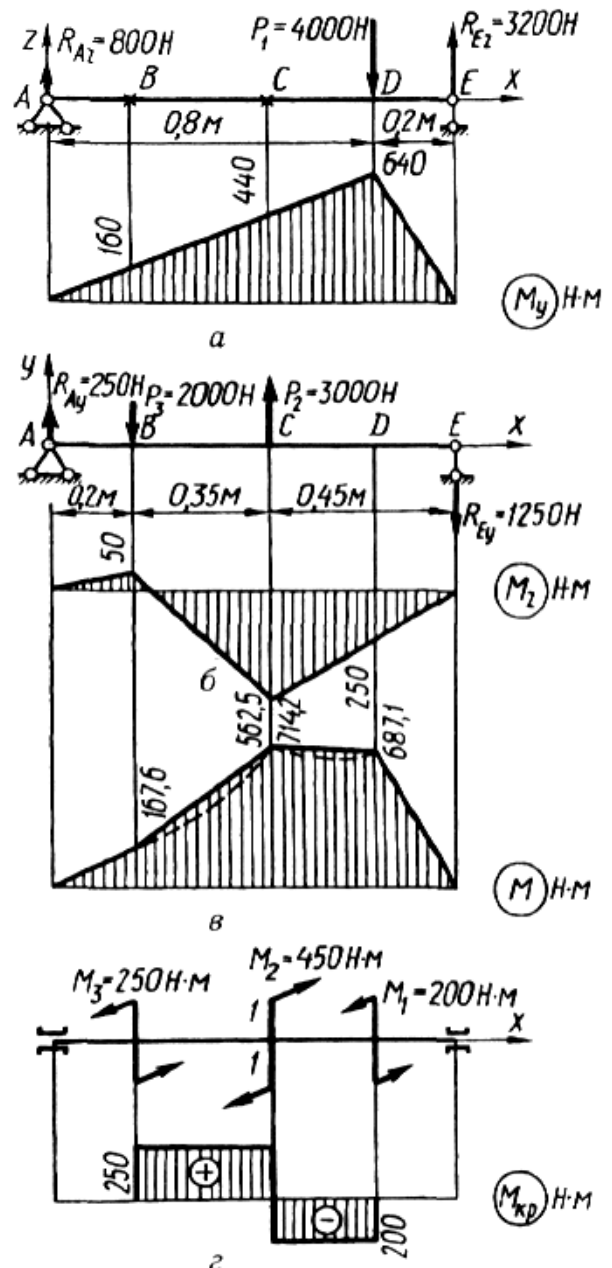


Рисунок 1.14 -
Епюри внутрішніх зусиль

Розглядаючи моменти, що діють на вал, будуємо епюру крутних моментів (рис. 1.14, з).

Порівнюючи епюри M та $M_{кр}$, знаходимо, що небезпечним є переріз $I - I$ в точці C , де одночасно діють $M = 714,2 \text{ Н·м}$ та $M_{кр} = 250 \text{ Н·м}$.

Згідно з IV теорією міцності, зведений момент визначаємо за формулою (1.15):

$$M_{36} = \sqrt{0,75 \cdot 250^2 + 714,2^2} = \sqrt{556881,25} = 746,3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Підставляючи зведений момент у формулу (1.17), дістаємо потрібний осьовий момент опору:

$$W \geq \frac{M_{36}}{[\sigma]} = \frac{746,3 \cdot 10^{-6}}{60} = 12,44 \text{ см}^3$$

і, взявши $W \approx 0,1d^3$, обчислюємо потрібний діаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{10W} = \sqrt[3]{10 \cdot 12,44} = \sqrt[3]{124,4} = 4,99 \text{ см}.$$

Округливши до найближчого стандартного діаметра, вибираємо $d = 50 \text{ мм}$.

1.2.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

Задача 8. Розрахунок вала редуктора на міцність

На вал насаджені зубчасті прямозубі колеса. До коліс прикладені колові сили F_{t1}, F_{t2}, F_{t3} . Необхідно:

- з умови рівноваги визначити величину F_{t1} або F_{t3} ;
- побудувати епюри крутних моментів;
- визначити сили, які згинають вал в горизонтальній і вертикальній площинах, F_t і F_r ($F_r = F_t \cdot \tan \alpha$), де F_r - радіальна сила; α - нормальний кут зачеплення, $\alpha = 20^\circ$;
- побудувати епюру згинальних моментів в горизонтальній і вертикальній площинах;
- побудувати епюру сумарних згинальних моментів;
- підібрати діаметр вала за третьою теорією міцності.

Дані для розв'язання задач взяти з таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

№ варіанта	F_{t1} кН	F_{t2} кН	F_{t3} кН	$[\sigma], \text{МПа}$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	Ділильні діаметри зубчастих коліс, м		
							d_1	d_2	d_3
1	-	6,0	6,0	120	0,08	0,10	0,12	0,10	0,08
2	5,5	6,5	-	120	0,10	0,08	0,09	0,11	0,15
3	-	7,0	6,5	140	0,09	0,12	0,18	0,12	0,09
4	6,0	7,5	-	140	0,11	0,13	0,10	0,14	0,18
5	-	8,0	7,0	160	0,13	0,14	0,18	0,15	0,10
6	6,5	6,0	-	120	0,12	0,09	0,08	0,11	0,16
7	-	6,5	7,5	140	0,14	0,12	0,14	0,12	0,09
8	7,0	7,0	-	140	0,12	0,14	0,08	0,13	0,16
9	-	7,5	8,0	160	0,15	0,16	0,16	0,14	0,12
10	7,5	8,0	-	160	0,10	0,14	0,11	0,15	0,20

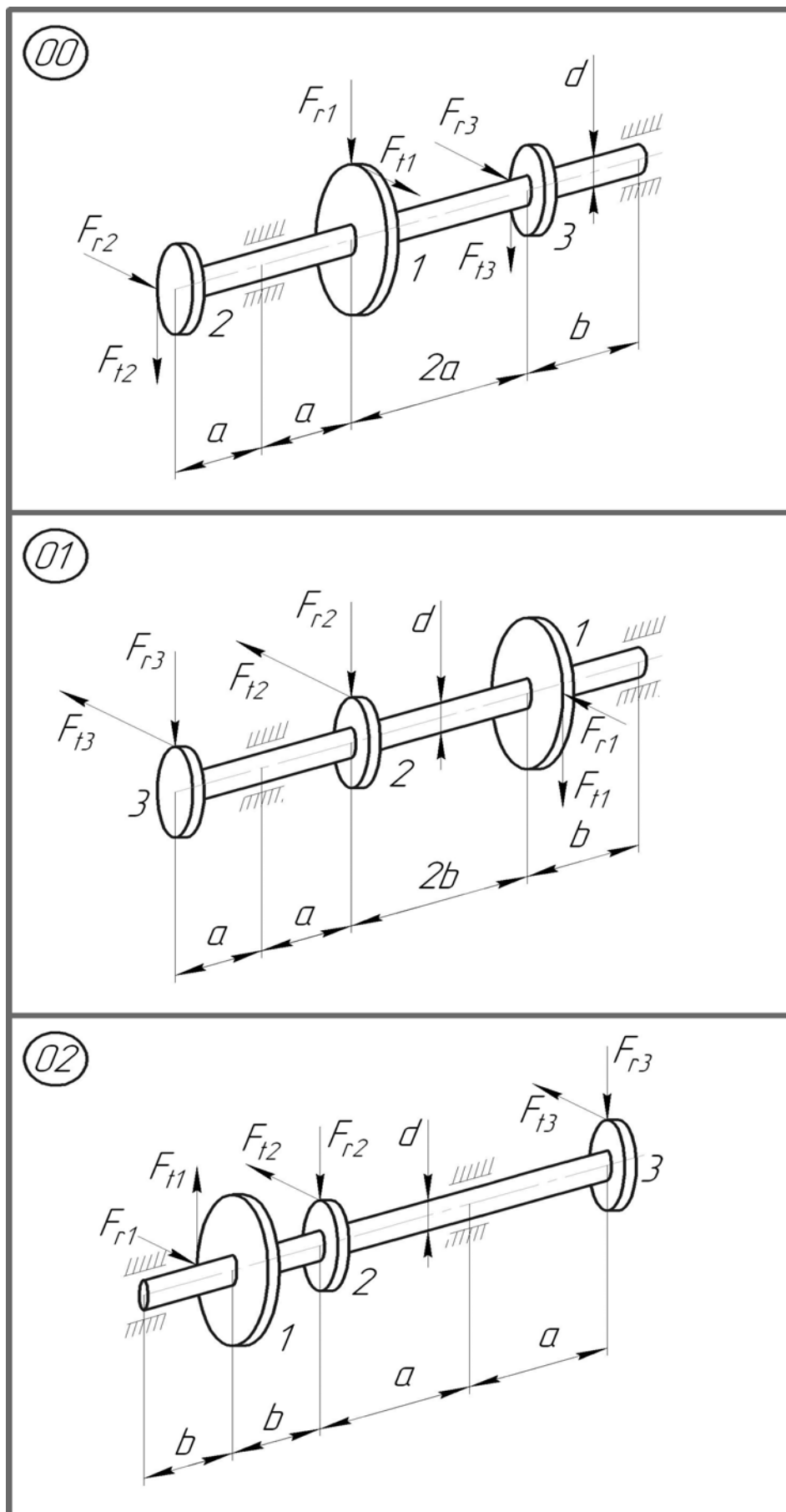
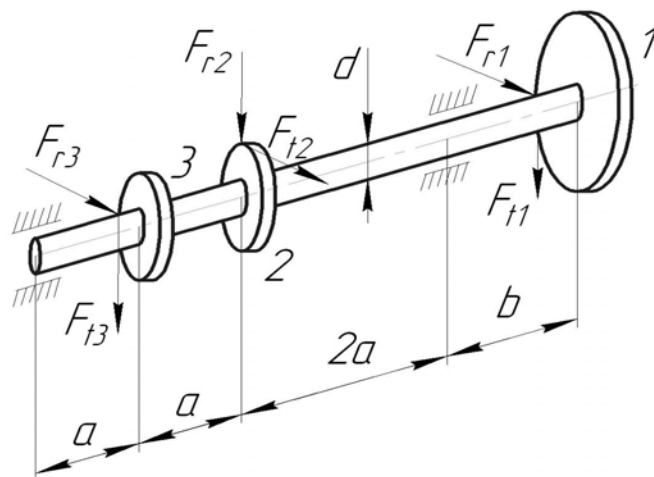
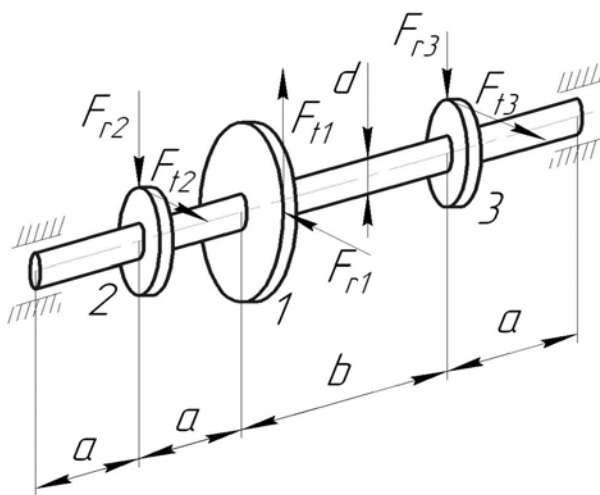


Рисунок 1.15 - Схеми до виконання задачі 8

03



04



05

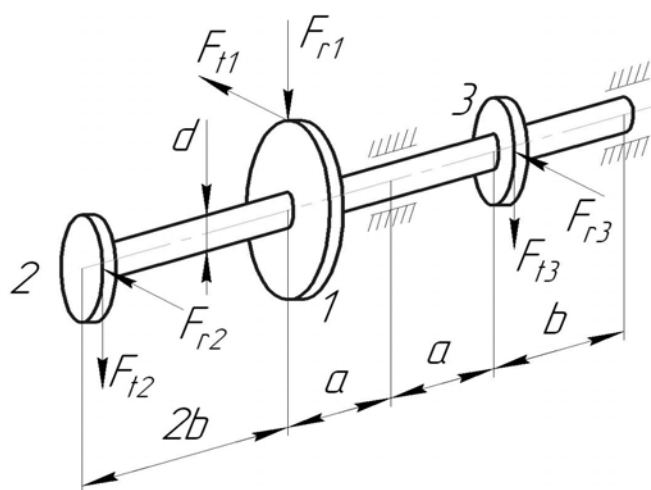


Рисунок 1.16 - Схеми до виконання задачі 8

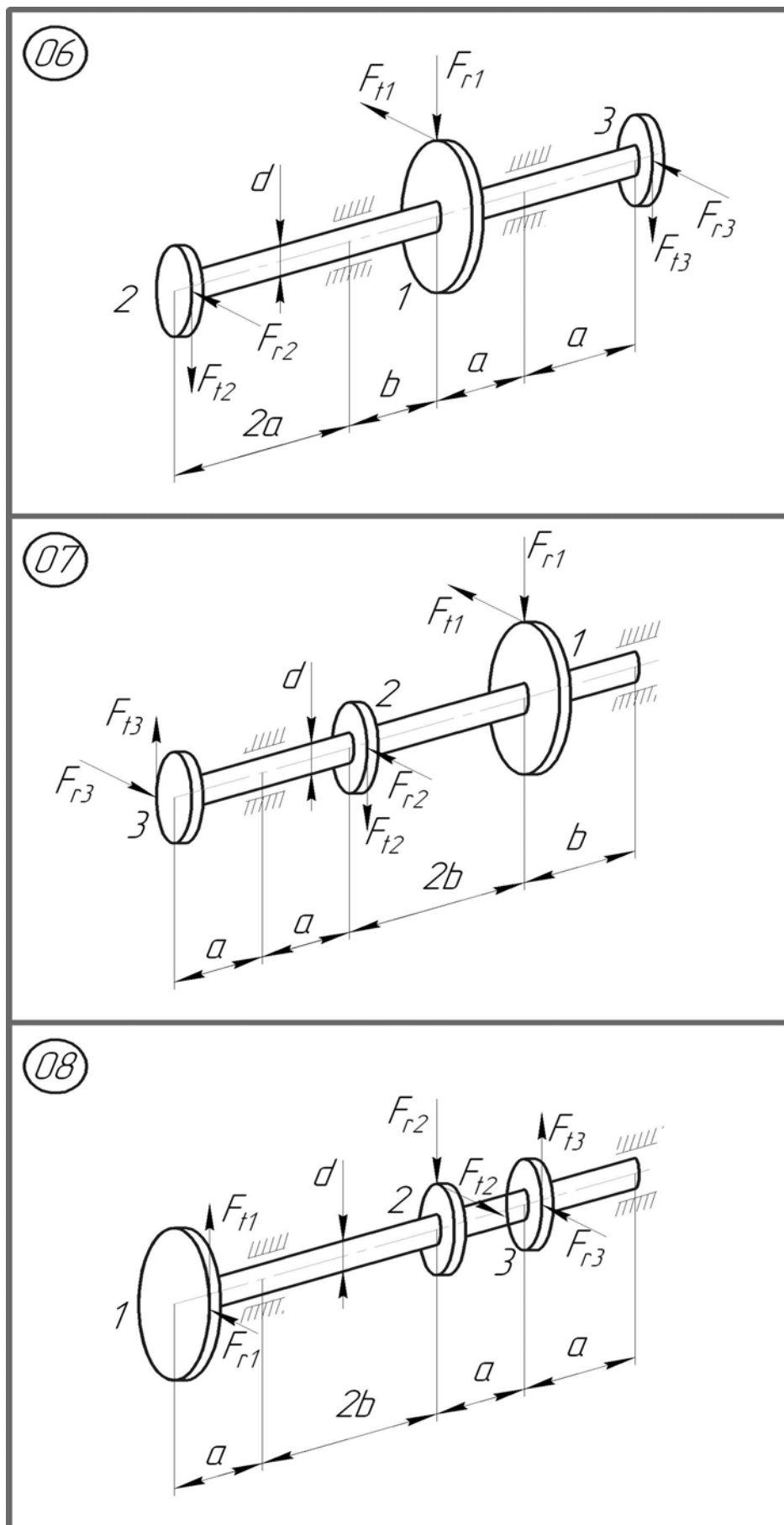
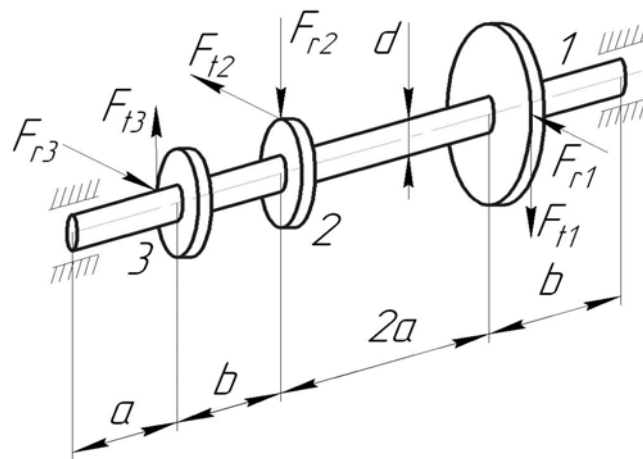
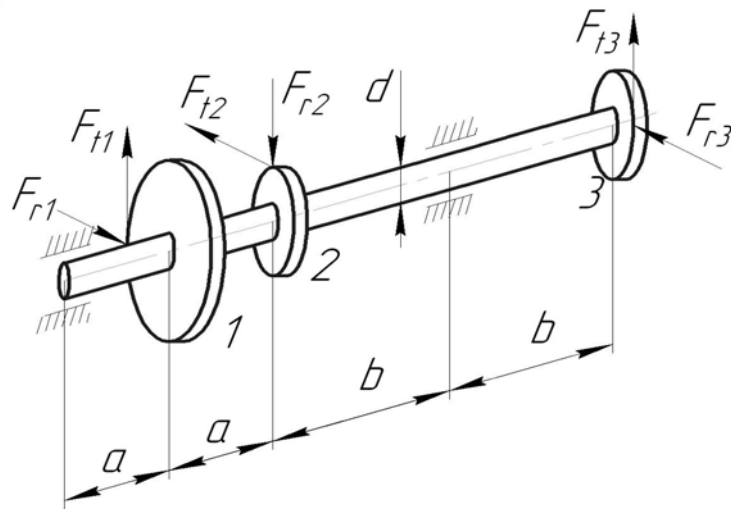


Рисунок 1.17 - Схеми до виконання задачі 8

09



10



11

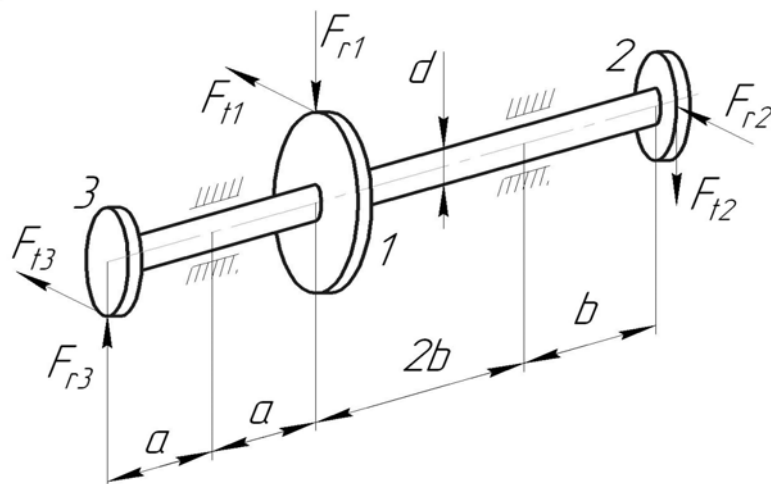


Рисунок 1.18 - Схеми до виконання задачі 8

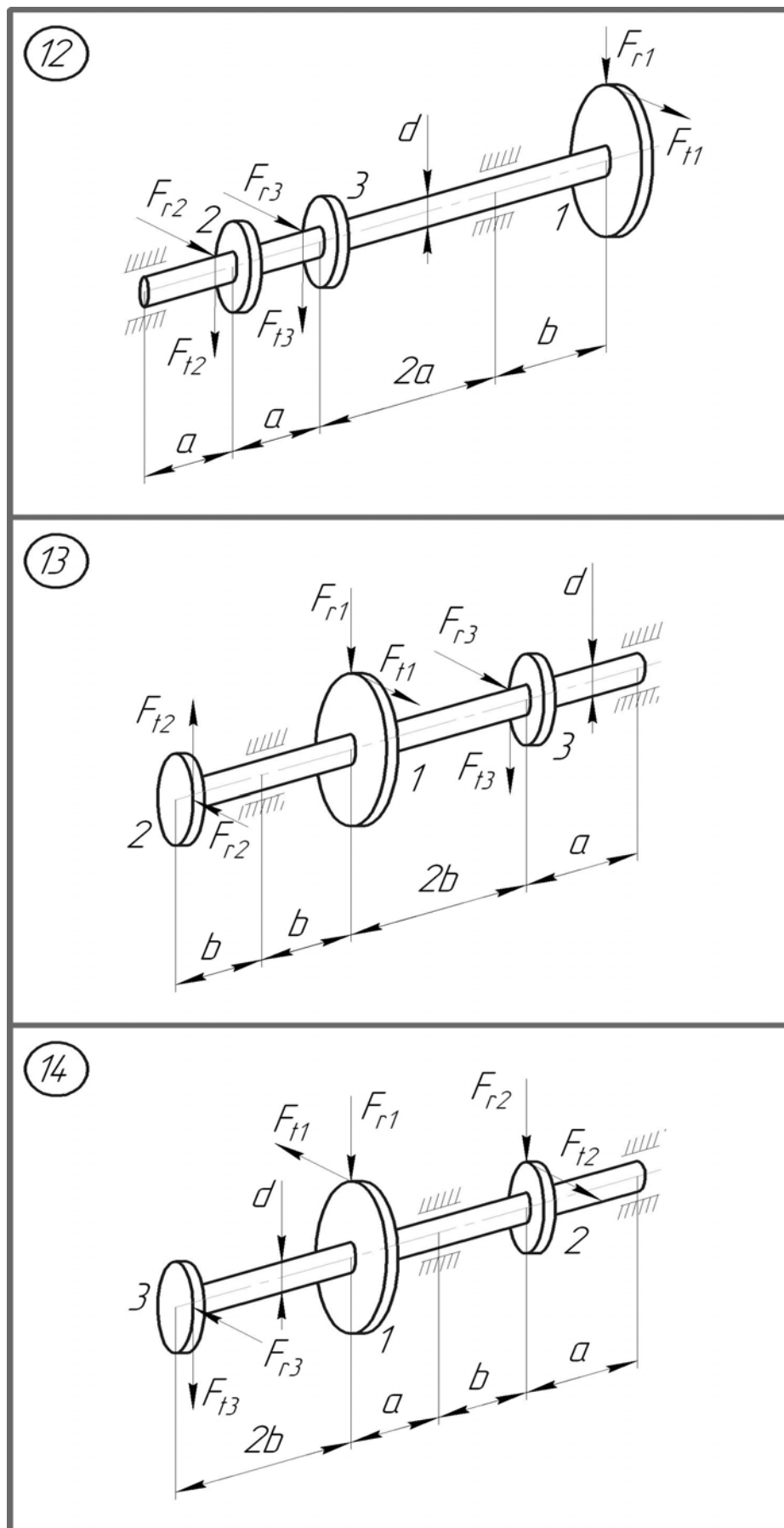


Рисунок 1.19 - Схеми до виконання задачі 8

Приклад виконання задачі 8

Визначити діаметр ділянок вала редуктора, навантаженого згідно зі схемою:

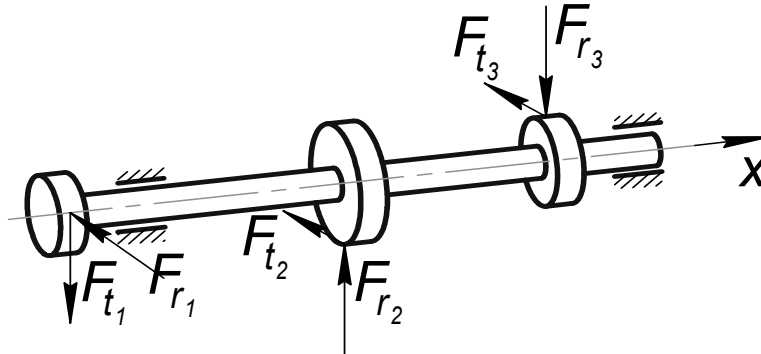


Рисунок 1.20 - Схема до прикладу задачі 8

Дано:

$$D_1 = 0,1 \text{ м};$$

$$D_2 = 0,15 \text{ м};$$

$$D_3 = 0,11 \text{ м};$$

$$[\sigma] = 120 \text{ МПа};$$

$$F_{t1} = 5 \text{ кН};$$

$$F_{t2} = 4 \text{ кН};$$

Знайти:

$$d_1, d_2, \dots - ?$$

Розв'язування

1. За умови рівноваги вала визначаємо невідому колову силу F_{t3}

$$\sum M_x = -F_{t1} \cdot \left(\frac{D_1}{2}\right) - F_{t2} \cdot \left(\frac{D_2}{2}\right) + F_{t3} \cdot \left(\frac{D_3}{2}\right) = 0;$$

$$F_{t3} = \frac{1}{d_3} (F_{t1} \cdot D_1 + F_{t2} \cdot D_2) = \frac{1}{11} (5 \cdot 10 + 4 \cdot 15) = 10 \text{ (кН)}.$$

Визначаємо радіальні сили, що діють на зубчаті колеса при $\text{tg} \alpha = \text{tg } 20^\circ = 0,364$;

$$F_{r1} = F_{t1} \cdot 0,364 = 5 \cdot 0,364 = 1,82 \text{ (кН)};$$

$$F_{r2} = F_{t2} \cdot 0,364 = 4 \cdot 0,364 = 1,46 \text{ (кН)};$$

$$F_{r3} = F_{t3} \cdot 0,364 = 10 \cdot 0,364 = 3,64 \text{ (кН)}.$$

2. Визначаємо крутні моменти, що передаються кожним зубчастим колесом

$$T_1 = F_{t1} \cdot \left(\frac{D_1}{2}\right) = 5 \cdot \left(\frac{0,1}{2}\right) = 0,25 \text{ (кН·м)};$$

$$T_2 = F_{t_2} \cdot \left(\frac{D_2}{2} \right) = 4 \cdot \left(\frac{0,15}{2} \right) = 0,3 \text{ (кН·м)};$$

$$T_3 = F_{t_3} \cdot \left(\frac{D_3}{2} \right) = 10 \cdot \left(\frac{0,11}{2} \right) = 0,55 \text{ (кН·м)}.$$

3 Замінімо діюче навантаження статично еквівалентною системою сил.

Перенесемо сили F_{t_1} , F_{t_2} , F_{t_3} на вісь вала, замінюючи кожен з них силою, прикладеною в точках C , D , E й парою сил - крутних моментів T_1 , T_2 та T_3 , відповідно. Отже, отримаємо розрахункову схему (рис. 1.21), на якій показано лише вісь вала та систему сил, що приводиться до прикладених до цієї осі.

Вибираємо розрахункові площини XOY та ZOX – вертикальну та горизонтальну та проектуємо сили на ці площини.

4. Розглядаємо кожен площину окремо та будуємо епюри внутрішніх зусиль в цій площині.

4.1 Горизонтальна площина.

Визначаємо опорні реакції

$$\sum M_A = F_{t_1} \cdot 0,1 - F_{t_2} \cdot 0,2 - F_{t_3} \cdot 0,4 + R_{By} \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum M_B = F_{t_1} \cdot 0,6 - R_{Ay} \cdot 0,5 + F_{t_2} \cdot 0,3 + F_{t_3} \cdot 0,1 = 0;$$

$$R_{By} = 9,24 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ay} = 6,58 \text{ (кН)}.$$

Виконуємо перевірку

$$\sum F_y = -F_{t_1} + R_{Ay} - F_{t_2} - F_{t_3} + R_{By} = -1,82 + 6,58 - 4 - 10 + 9,24 = 0.$$

Поперечні сили.

Епюри поперечних сил будуємо зліва направо, використовуючи властивості таких епюр – вони мають графіки констант та стрибки на відповідні сили.

$$\text{Ділянка DA } Q_y = -F_{t_1} = -1,82 \text{ (кН)}.$$

$$\text{Ділянка AC } Q_y = -F_{t_1} + R_{Ay} = -1,82 + 6,58 = 4,76 \text{ (кН)}.$$

$$\text{Ділянка CE } Q_y = -F_{t_1} + R_{Ay} - F_{t_2} = -1,82 + 6,58 - 4 = 0,76 \text{ (кН)}.$$

$$\text{Ділянка EB } Q_y = -F_{t_1} + R_{Ay} - F_{t_2} - F_{t_3} = -1,82 + 6,58 - 4 - 10 = -9,24 \text{ (кН)}.$$

Згинальні моменти.

Визначаємо значення згинальних моментів в характерних точках і з'єднуємо ці точки прямими лініями.

Ділянка DA (зліва направо)

$$\text{т. D: } M_z = 0 \text{ (кН·м)};$$

$$\text{т. A: } M_z = -F_{t_1} \cdot 0,1 = -1,82 \cdot 0,1 = -0,182 \text{ (кН·м)}.$$

Ділянка AC

т. С: $M_z = -F_{t1} \cdot (0,1 + 0,2) + R_{Ay} \cdot 0,2 = -1,82 \cdot 0,3 + 6,58 \cdot 0,2 = 0,77 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$.

Ділянка ЕВ (справа наліво)

т. В: $M_z = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$;

т. Е: $M_z = R_{By} \cdot 0,1 = 9,24 \cdot 0,1 = 0,924 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$.

4.2. Вертикальна площина

Визначаємо опорні реакції

$$\sum M_A = F_{t1} \cdot 0,1 + F_{r2} \cdot 0,2 - F_{r3} \cdot 0,4 + R_{Bz} \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum M_B = F_{t1} \cdot 0,6 - R_{Az} \cdot 0,5 - F_{r2} \cdot 0,3 + F_{r3} \cdot 0,1 = 0;$$

$$R_{Bz} = 1,33 \text{ (кН)};$$

$$R_{Az} = 5,85 \text{ (кН)}.$$

Виконуємо перевірку

$$\sum F_y = -F_{t1} + R_{Az} + F_{r2} - F_{r3} + R_{Bz} = -5 + 5,85 + 1,46 - 3,64 + 1,33 = 0.$$

Поперечні сили

Ділянка DA $Q_z = -F_{t1} = -5 \text{ (кН)}$.

Ділянка AC $Q_z = -F_{t1} + R_{Az} = -5 + 5,85 = 0,85 \text{ (кН)}$.

Ділянка CE $Q_z = -F_{t1} + R_{Az} + F_{r2} = -5 + 5,85 + 1,46 = 2,31 \text{ (кН)}$.

Ділянка ЕВ $Q_z = -F_{t1} + R_{Az} + F_{r2} - F_{r3} = -5 + 5,85 + 1,46 - 3,64 = -1,33 \text{ (кН)}$.

Згинальні моменти

Ділянка DA

т. D: $M_y = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$;

т. А: $M_y = -F_{t1} \cdot 0,1 = -5 \cdot 0,1 = -0,5 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$.

Ділянка AC

т. С: $M_y = -F_{t1} \cdot (0,1 + 0,2) + R_{Az} \cdot 0,2 = -5 \cdot 0,3 + 5,85 \cdot 0,2 = -0,33 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$.

Ділянка ЕВ

т. В: $M_y = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$;

т. Е: $M_y = R_{Bz} \cdot 0,1 = 1,33 \cdot 0,1 = 0,133 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$.

4.3. Будуємо епюри крутних моментів

Епюри крутних моментів будуємо зліва направо, використовуючи властивості таких епюр – вони мають графіки констант та стрибки на відповідні моменти.

Ділянки DA, AC $M_{кр} = T_1 = 0,25 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$.

Ділянка CE $M_{кр} = T_1 + T_2 = T_3 = 0,55 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$.

Ділянка ЕВ $M_{кр} = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}$.

4.4. Будуємо епюри зведених моментів (використовуємо четверту теорію міцності)

За третьою теорією міцності (найбільших дотичних напружень)

$$M_{3\theta}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{кр}^2}.$$

Визначаємо значення зведених моментів в характерних точках і з'єднуємо ці точки лініями (прямими, якщо лінія починається з нуля, і кривими в інших випадках)

$$\text{т. D: } M_{3\theta}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0,25^2} = 0,25 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{т. A: } M_{3\theta}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0,182^2 + 0,5^2 + 0,25^2} = 0,59 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{т. C: } M_{3\theta}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0,77^2 + 0,33^2 + 0,55^2} = 1,01 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{т. B: } M_{3\theta}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0,924^2 + 0,133^2 + 0,55^2} = 1,08 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{т. E: } M_{3\theta}^{III} = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

5. Розраховуємо мінімальні діаметри ділянок вала за умовою міцності при згині з крученням.

$$\sigma = \frac{M_{кр}}{W_z} \leq [\sigma];$$

де $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ - осьовий момент опору круга, звідки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{3\theta} 32}{[\sigma] \pi}}.$$

Ділянки EB, CE $M_{3\theta \max}^{III} = 1,08 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{3\theta} 32}{[\sigma] \pi}} = \sqrt[3]{\frac{1,08 \cdot 10^3 \cdot 32}{120 \cdot 10^6 \pi}} = 0,045 \text{ (м)}.$$

Ділянка DA $M_{np \max}^{III} = 1,01 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{3\theta} 32}{[\sigma] \pi}} = \sqrt[3]{\frac{1,01 \cdot 10^3 \cdot 32}{120 \cdot 10^6 \pi}} = 0,042 \text{ (м)}.$$

Ділянка AC $M_{np \max}^{III} = 1,59 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{3\theta} 32}{[\sigma] \pi}} = \sqrt[3]{\frac{0,59 \cdot 10^3 \cdot 32}{120 \cdot 10^6 \pi}} = 0,037 \text{ (м)}.$$

Округлюємо отримані значення до стандартних (Додаток К) та остаточно беремо $d_{AD} = 45 \text{ мм}$, $d_{AC} = 40 \text{ мм}$, $d_{CE} = 45 \text{ мм}$, $d_{EB} = 45 \text{ мм}$.

Відповідь: $d_{AD} = 45 \text{ мм}$, $d_{AC} = 40 \text{ мм}$, $d_{CE} = 45 \text{ мм}$, $d_{EB} = 45 \text{ мм}$.

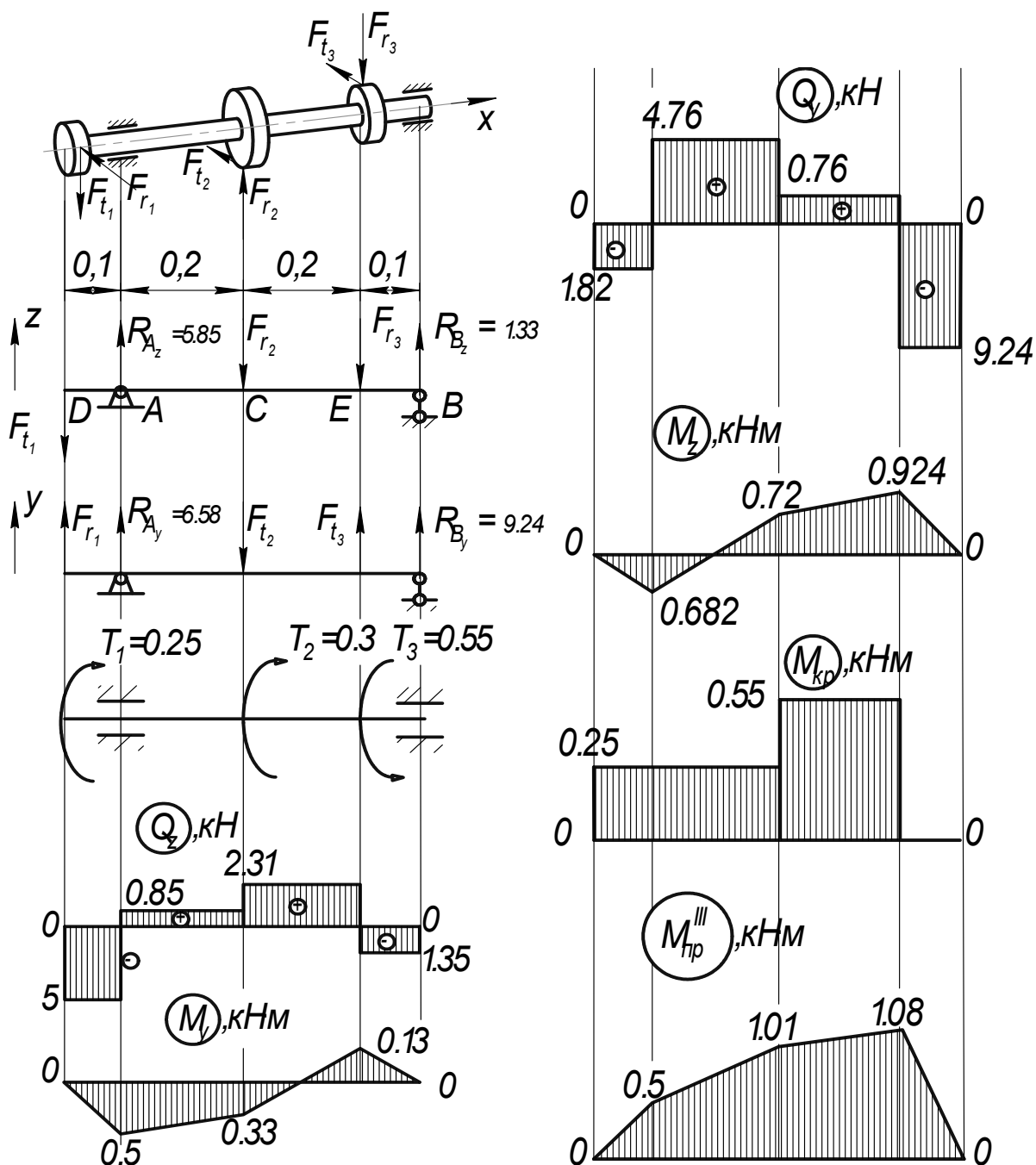


Рисунок 1.21 - Епюри внутрішніх зусиль

Питання до захисту задачі 8 на С. 42.

1.2.3 Завдання до розрахунково-графічної роботи

Задача 9. Розрахунок плоскої рами з просторовим навантаженням

На рисунках 1.22 – 1.23 зображено в аксонометрії вісь ламаного стержня круглого поперечного перерізу, розташованого в горизонтальній площині. На стержень діє вертикальне навантаження q .

Зобразити розрахункову схему в аксонометрії. Побудувати окремо епюри згинальних і крутних моментів та визначити діаметри ділянок стержня за третьою теорією міцності, якщо $[\sigma] = 160$ МПа.

Дані взяти з таблиці 1.4.

Таблиця 1.4

№ варіанта	P, кН	q, кН/м	a, м	b, м	c, м
0	6	10	1	0,5	1,2
1	7	8	1,2	1	0,5
2	8	6	1,2	0,5	1
3	9	12	1	0,8	0,6
4	10	14	0,5	1	0,8
5	11	11	1	0,5	1
6	12	9	0,5	0,8	1
7	13	8	0,6	1	1,2
8	14	5	1	0,4	0,8
9	12	4	1	1	1

Приклад виконання задачі 9

Для просторової рами, що навантажена згідно зі схемою (рис. 1.24) побудувати епюри внутрішніх зусиль та визначити необхідні діаметри поперечних перерізів ділянок за третьою теорією міцності.

Дано:

$P = 8$ кН; $q = 6$ кН/м;

$a = 1$ м; $b = 0,6$ м; $c = 1,2$ м;

$[\sigma] = 160$ МПа.

Знайти:

$d_i - ?$

1. Будуємо епюри внутрішніх зусиль

Перерізи вибираємо таким чином, щоб розглядати консольну частину рами так як показано на рис. 1.25. Для кожного перерізу вказуємо локальну систему координат таким чином, щоб вісь x збігалася з віссю ділянки та була направлена до частини стержня, що розглядається. Вісь y направляємо вертикально, вісь z утворює праву систему координат. Таким чином, моменти зовнішніх сил відносно осі x будуть крутними моментами, відносно осі y – згинальними моментами в горизонтальній площині, відносно осі z – в вертикальній площині.

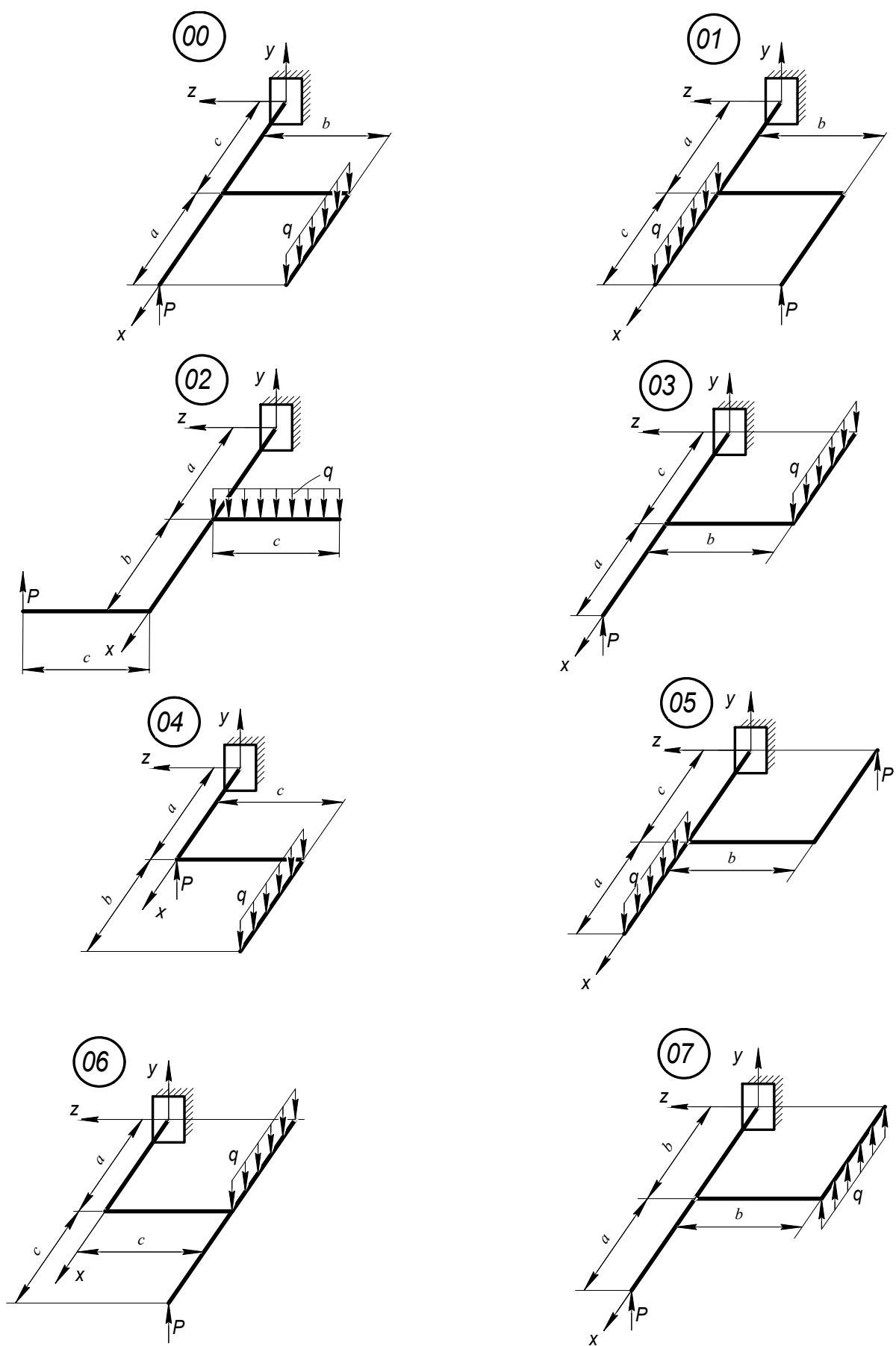


Рисунок 1.22 - Схеми до виконання задачі 9

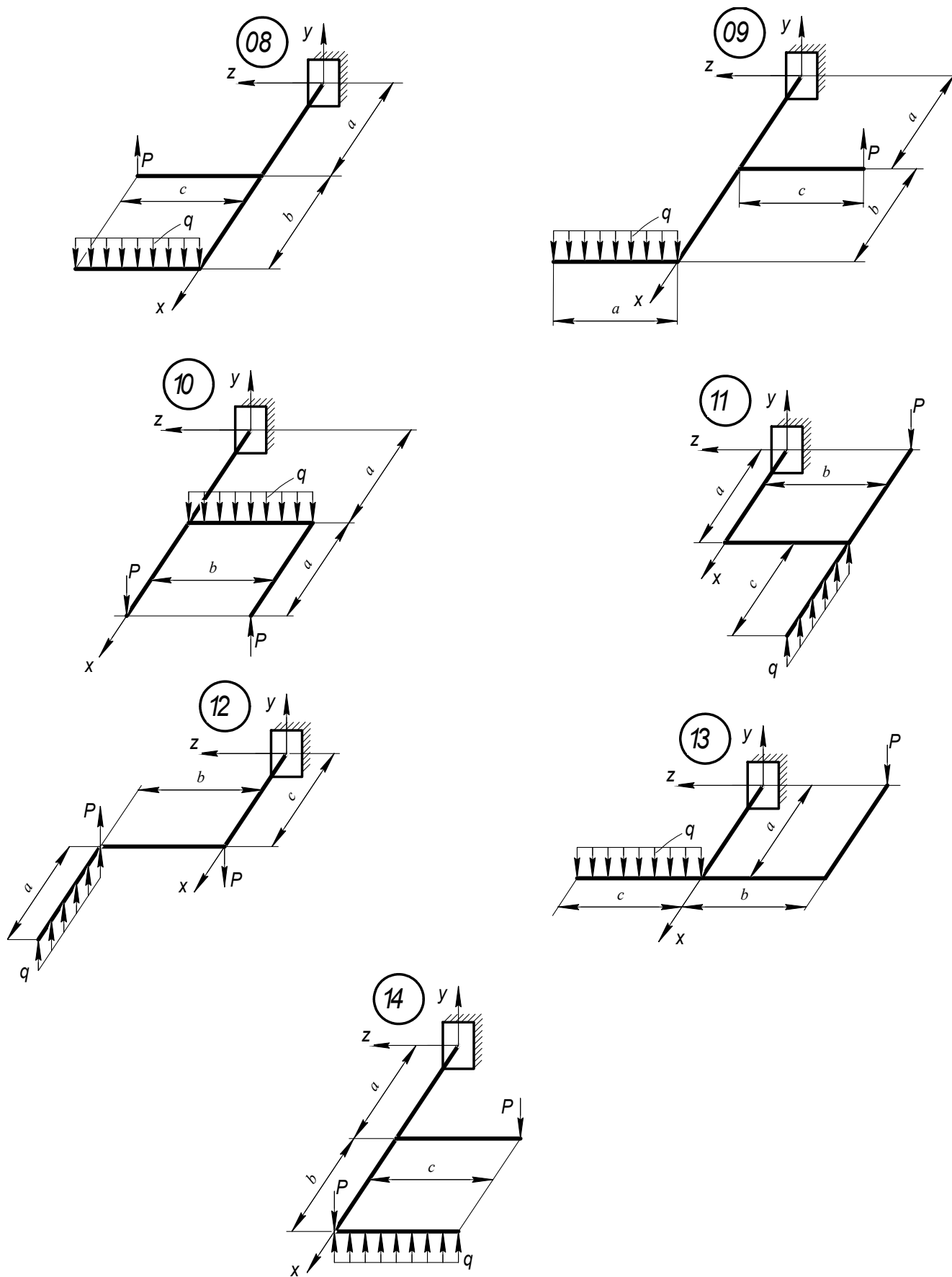


Рисунок 1.23 - Схеми до виконання задачі 9

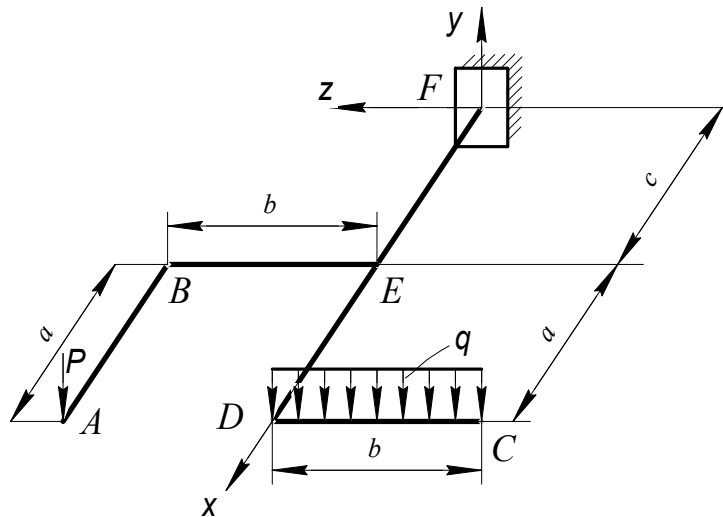


Рисунок 1.24 - Схема до прикладу задачі 9

Розв'язування

Оскільки навантаження на раму вертикальне, то поперечні сили і згинальні моменти (епюри) будуть лежати в вертикальній площині $хоу$.

Поздовжні сили при такому навантаженні в рамі не будуть виникати.

Запишемо для кожної ділянки рівняння поперечних сил, згинальних та крутних моментів.

Ділянка АВ:

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_y = P = 8 \text{ (кН)},$$

$$M_z(x_1) = P \cdot x_1 = 8 \cdot x_1,$$

$$\text{при } x_1 = 0 \text{ (м)} \quad M_z(0) = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)},$$

$$\text{при } x_1 = 1 \text{ (м)} \quad M_z(1) = 8 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Ділянка ВЕ:

$$0 \leq x_2 \leq 0,6 \text{ м}$$

$$Q_y = P = 8 \text{ (кН)},$$

$$M_x = P \cdot a = 8 \cdot 1 = 8 \text{ (кН}\cdot\text{м)},$$

$$M_z(x_2) = P \cdot x_2 = 8 \cdot x_2,$$

$$\text{при } x_2 = 0 \text{ (м)} \quad M_z(0) = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)},$$

$$\text{при } x_2 = 0,6 \text{ (м)} \quad M_z(0,6) = 4,8 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Ділянка CD:

$$0 \leq x_3 \leq 0,6 \text{ м}$$

$$Q_y(x_3) = q \cdot x_3 = 6x_3 \text{ (кН)},$$

$$M_x = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)},$$

$$M_z(x_3) = \frac{q \cdot x_3^2}{2} = 3x_3^2,$$

$$\text{при } x_3 = 0 \text{ (м)} \quad Q_y(0) = 0 \text{ (кН)},$$

$$\begin{aligned}
 & M_z(0) = 0 \text{ (кН·м)}, \\
 \text{при } x_3 = 0,6 \text{ (м)} \quad & Q_y(0,6) = 3,6 \text{ (кН)}, \\
 & M_z(0,6) = 1,08 \text{ (кН·м)}.
 \end{aligned}$$

Ділянка DE:

$$0 \leq x_4 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_y = q \cdot 0,6 = 3,6 \text{ (кН)},$$

$$M_x = \frac{q \cdot 0,6^2}{2} = 1,08 \text{ (кН·м)},$$

$$M_z(x_4) = q \cdot 0,6 \cdot x_4 = 3,6 \cdot x_4,$$

$$\text{при } x_4 = 0 \text{ (м)} \quad M_z(0) = 0 \text{ (кН·м)},$$

$$\text{при } x_4 = 1 \text{ (м)} \quad M_z(1) = 3,6 \text{ (кН·м)}.$$

Ділянка DE:

$$0 \leq x_5 \leq 1,2 \text{ м}$$

$$Q_y = P + q \cdot 0,6 = 8 + 6 \cdot 0,6 = 11,6 \text{ (кН)},$$

$$M_x = \frac{q \cdot 0,6^2}{2} - P \cdot 0,6 = 1,08 - 4,8 = -3,72 \text{ (кН·м)},$$

$$M_z(x_5) = q \cdot 0,6 \cdot (1 + x_5) + P \cdot (1 + x_5) = 11,6 + 11,6x_5,$$

$$\text{при } x_5 = 0 \text{ (м)} \quad M_z(0) = 11,6 \text{ (кН·м)},$$

$$\text{при } x_5 = 1,2 \text{ (м)} \quad M_z(1,2) = 25,52 \text{ (кН·м)}.$$

Для всіх ділянок $Q_z = N = 0$, $M_y = 0$, $M_x = M_{\varepsilon\delta}$, $M_z = M_{\zeta\tilde{a}}$.

За отриманими значеннями будуємо епюри в аксонометрії (рис. 1.26).

Епюри згинальних моментів відкладаємо на розтягнутих волокнах.

Розташування епюр крутних моментів особливого значення не має. Додатні значення поперечної сили відкладені над віссю.

2. Розрахунок на міцність

Впливом поперечних сил нехтуємо.

За третьою теорією міцності (найбільших дотичних напружень)

$$M_{3\theta}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{\kappa p}^2}.$$

Визначаємо максимальні значення зведених моментів в відповідних точках кожної ділянки

$$\text{AB: Т. В: } M_{3\theta \text{ max}}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{\kappa p}^2} = \sqrt{8^2 + 0^2 + 0^2} = 8 \text{ (кН·м)}.$$

$$\text{BE: Т. Е: } M_{3\theta \text{ max}}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_{\kappa p}^2} = \sqrt{4,8^2 + 8^2} = 9,33 \text{ (кН·м)}.$$

$$\text{CD: Т. D: } M_{3\theta \text{ max}}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_{\kappa p}^2} = \sqrt{1,08^2 + 0^2} = 1,08 \text{ (кН·м)}.$$

$$\text{DE: Т. Е: } M_{3\theta \text{ max}}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_{\kappa p}^2} = \sqrt{3,6^2 + 1,08^2} = 3,76 \text{ (кН·м)}.$$

$$\text{EF: Т. F: } M_{3\theta \text{ max}}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_{\kappa p}^2} = \sqrt{25,52^2 + 3,72^2} = 25,79 \text{ (кН·м)}.$$

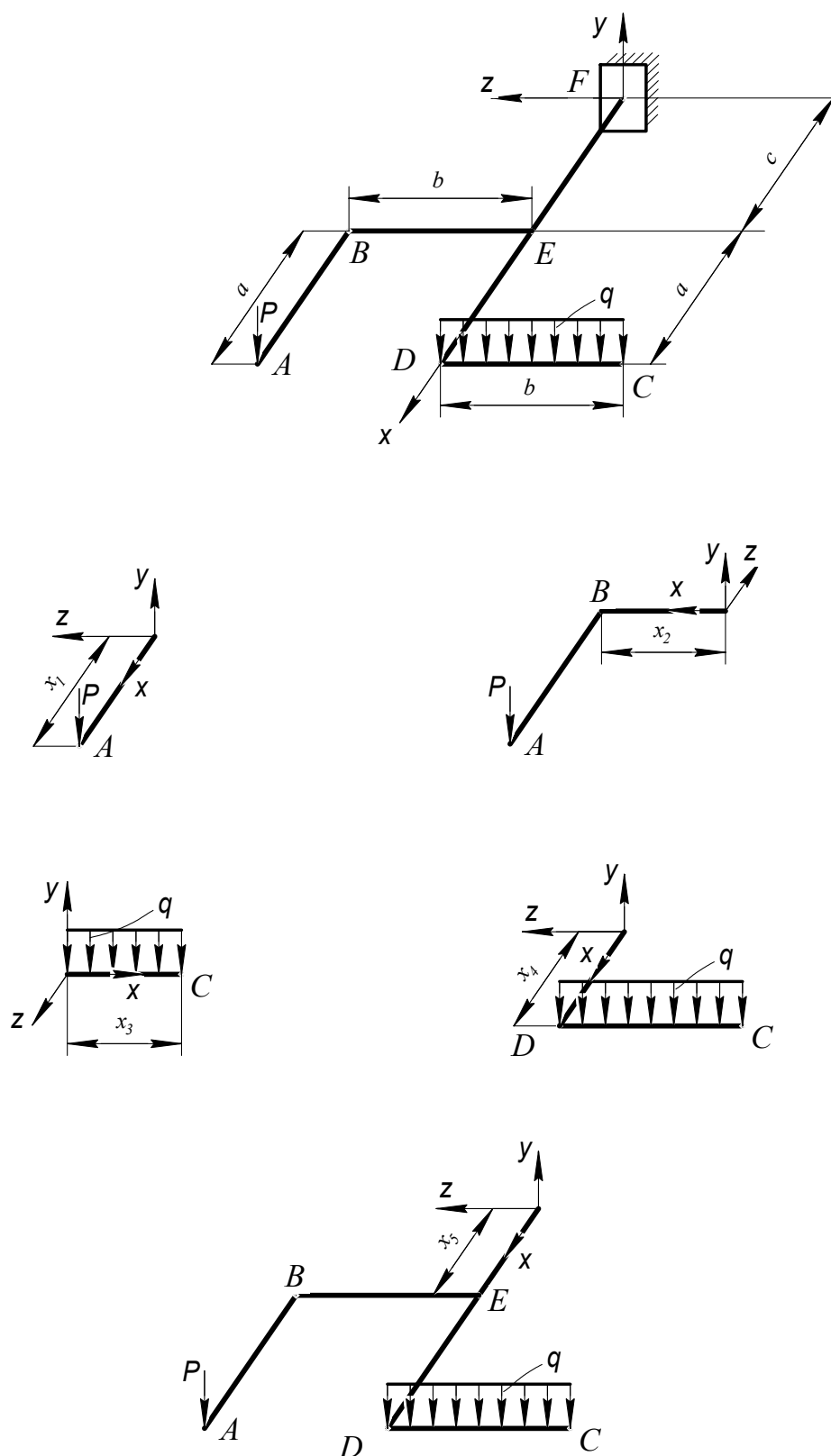


Рисунок 1.25 - Характерні перерізи на розрахункових ділянках

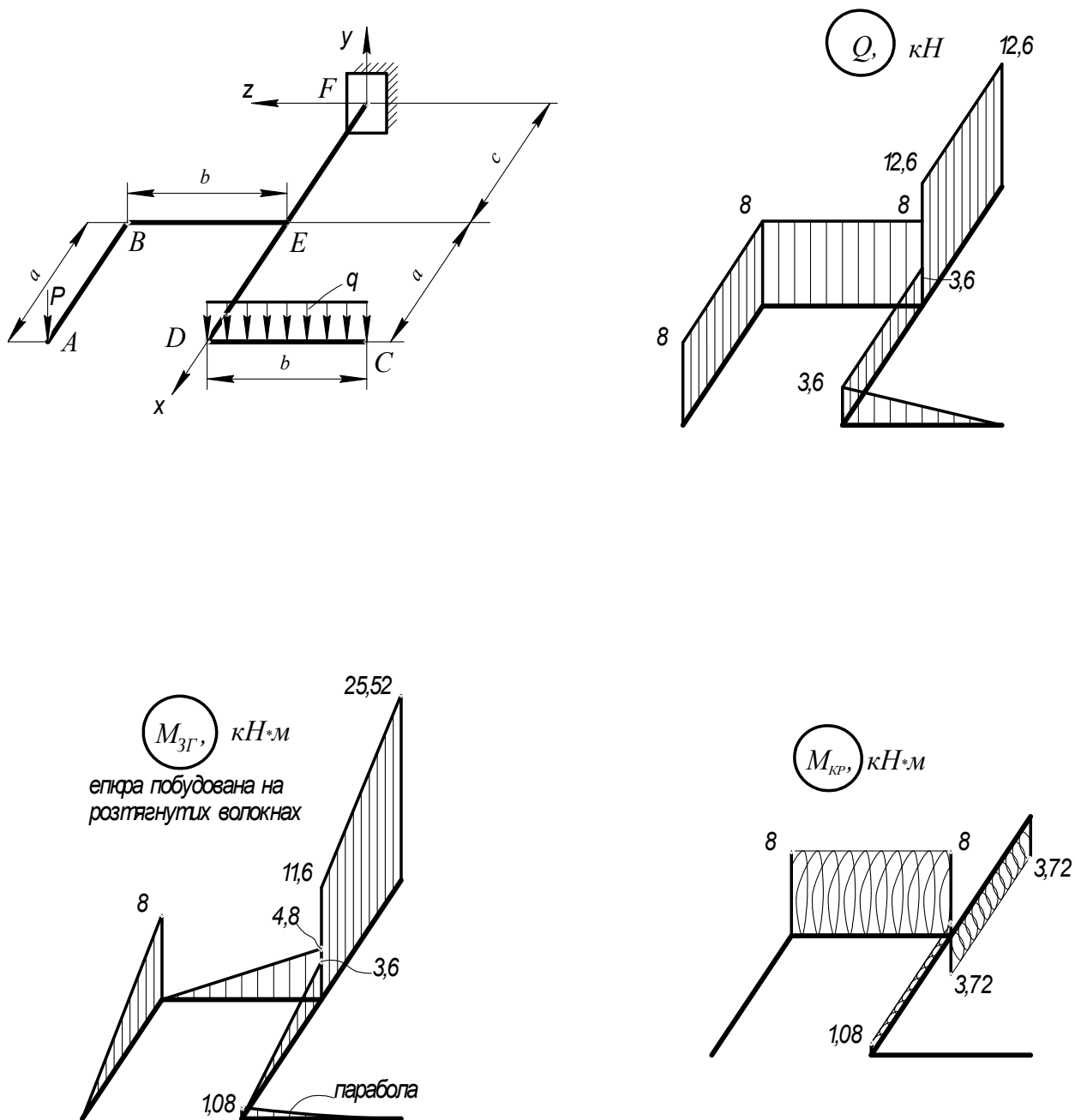


Рисунок 1.26 - Епюри внутрішніх зусиль

Розраховуємо мінімальні діаметри ділянок вала за умовою міцності при згині з крученням.

$$\sigma = \frac{M_{кр}}{W_z} \leq [\sigma],$$

де $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ - осьовий момент опору круга, звідки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{3г} 32}{[\sigma] \pi}}.$$

Ділянка АВ:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{зг} 32}{[\sigma] \pi}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^3 \cdot 32}{160 \cdot 10^6 \pi}} = 0,0799 \text{ (м)}.$$

$$\text{BE: } d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{зг} 32}{[\sigma] \pi}} = \sqrt[3]{\frac{9,33 \cdot 10^3 \cdot 32}{160 \cdot 10^6 \pi}} = 0,0841 \text{ (м)}.$$

$$\text{CD: } d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{зг} 32}{[\sigma] \pi}} = \sqrt[3]{\frac{1,08 \cdot 10^3 \cdot 32}{160 \cdot 10^6 \pi}} = 0,0410 \text{ (м)}.$$

$$\text{DE: } d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{зг} 32}{[\sigma] \pi}} = \sqrt[3]{\frac{3,76 \cdot 10^3 \cdot 32}{160 \cdot 10^6 \pi}} = 0,0621 \text{ (м)}.$$

$$\text{EF: } d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{зг} 32}{[\sigma] \pi}} = \sqrt[3]{\frac{25,79 \cdot 10^3 \cdot 32}{160 \cdot 10^6 \pi}} = 0,1180 \text{ (м)}.$$

Округлюємо отримані значення до стандартних (додаток К, ряд Ра 40) та остаточно приймаємо $d_{AB} = 80$ мм, $d_{BE} = 85$ мм, $d_{CD} = 42$ мм, $d_{DE} = 63$ мм, $d_{EF} = 120$ мм.

Відповідь: $d_{AB} = 80$ мм, $d_{BE} = 85$ мм, $d_{CD} = 42$ мм, $d_{DE} = 63$ мм, $d_{EF} = 120$ мм.

Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задачі 8, 9)

1. Записати умову міцності при згині з крученням та пояснити її.
2. Що таке зведений момент та як він визначається за третьою та четвертою теоріями міцності?
3. Визначити максимальне еквівалентне напруження у вказаному перерізі вала (рами).
4. В яких елементах конструкцій реалізуються деформації згину з крученням? Навести приклади.
5. Побудувати епюри розподілу нормальних та дотичних напружень у вказаному перерізі вала.
6. За якою залежністю визначається необхідний діаметр вала (рами) при згині з крученням?
7. За яким алгоритмом виконують розрахунки вала при згині з крученням?
8. Які епюри внутрішніх зусиль вказують на згин з крученням? Які епюри не використовуються в розрахунку і чому?
9. Чому для вала будують епюри в двох розрахункових площинах – вертикальні та горизонтальні? Чи має значення саме такий вибір площин?

2 ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ

2.1 Короткі теоретичні відомості

2.1.1 Узагальнені сили і переміщення

Однією з найважливіших задач опору матеріалів є оцінка жорсткості конструкції, тобто ступеня її викривлення під дією навантаження, зміщення зв'язків, зміни температури. Для розв'язання цієї задачі потрібно визначити переміщення (лінійні та кутові) довільно навантаженої пружної системи (балки, рами, криволінійного стержня, ферми тощо). Така сама задача постає при розрахунку конструкцій на динамічні навантаження і при виявленні статичної невизначуваності системи. В останньому випадку, як уже зазначалося, складають рівняння спільності деформацій, які містять у собі переміщення певних перерізів.

Розглядатимемо загальний метод визначення переміщень у стержневих системах, який ґрунтується на двох фундаментальних принципах механіки: початку можливих переміщень і законі збереження енергії.

Як відомо з теоретичної механіки, робота постійної сили P на переміщенні Δ за її напрямом дорівнює добутку значення сили на зазначене переміщення:

$$A = P\Delta.$$

У задачах опору матеріалів і будівельної механіки зовнішні навантаження відзначаються великою різноманітністю і, як правило, становлять групи сил. Вираз для роботи групи постійних сил також можна подати у вигляді добутку двох величин:

$$A = P\Delta_P, \quad (2.1)$$

у якому множник P залежить тільки від сил групи і називається *узагальненою силою (generalized force)*, а Δ_P залежить від переміщень і називається *узагальненим переміщенням (generalized displacement)*.

Отже, *під узагальненою силою будемо розуміти будь-яке навантаження (зосереджені сили, зосереджені моменти, розподілене навантаження), а під узагальненим переміщенням – той вид переміщення, на якому узагальнена сила виконує роботу.*

Розглянемо деякі приклади узагальнених сил і переміщень.

1. На рис. 2.1 зображено узагальнену силу, яка складається з двох однакових за модулем протилежних сил P , прикладених у точках A та B і напрямлених по одній прямій. Припустимо, що точки прикладення сил перемістились у напрямі BA на відрізки Δ_1 і Δ_2 . Очевидно, робота системи постійних сил на цих переміщеннях

$$A = P\Delta_1 - P\Delta_2 = P(\Delta_1 - \Delta_2) = P\Delta_P, \quad (2.2)$$

де $\Delta_P = \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l$ – зміна відстані l між точками прикладення сил.

Отже, в цьому прикладі P – узагальнена сила, а зміна Δl довжини відрізка AB – узагальнене переміщення.

2. Нехай група сил складається з пари сил, момент якої $M = Pa$ (рис. 2.2). Припустимо, що елемент AB повернувся на кут $d\theta$. Шляхи, пройдені силами пари в напрямі їхньої дії,

$$AA_1 = OA d\theta; BB_1 = OB d\theta.$$

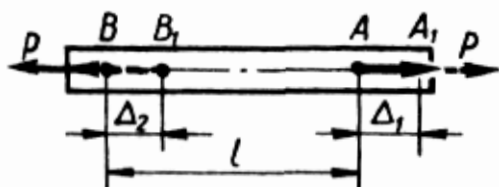


Рисунок 2.1 -
Узагальнена сила

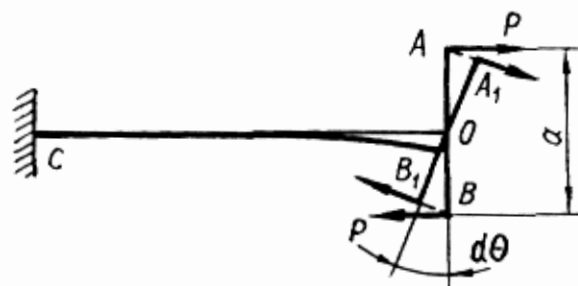


Рисунок 2.2 -
Узагальнений момент

Сумарна робота обох сил

$$A = P \cdot AA_1 + P \cdot BB_1 = P(OA + OB)d\theta = Pad\theta = Md\theta. \quad (2.3)$$

Отже, якщо узагальненою силою є момент M пари, то узагальненим переміщенням буде кут повороту $d\theta$ у площині дії пари.

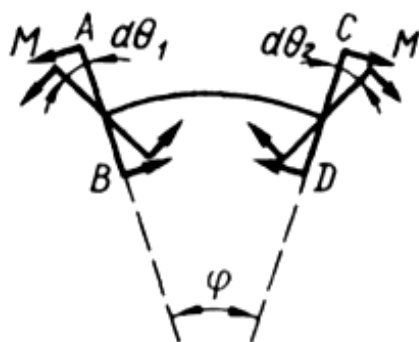


Рисунок 2.3

Легко також довести, що при дії на елементи AB і CD (рис. 2.3) двох однакових за модулем і протилежно напрямлених пар з моментом M узагальненою силою є момент пари M , а узагальненим переміщенням – зміна кута φ між елементами AB і CD . Інакше

$$\Delta_P = d\theta_1 + d\theta_2.$$

Умовимося надалі узагальнені переміщення (як лінійні, так і кутові) якого-небудь перерізу стержня позначати літерою Δ або δ з двома індексами. Перший індекс відображає точку і напрям переміщення, другий – указує

причину цього переміщення. Наприклад, Δ_{PP} означає переміщення точки прикладення сили P у напрямі її дії, спричинене цією самою силою (рис. 2.4, а). На рис. 2.4, б зображено консоль, навантажену на вільному кінці зосередженим моментом. Очевидно, кут повороту перерізу, де прикладений момент, слід позначити Δ_{MM} . Тут перший індекс означає переміщення в напрямі моменту M .

Для позначення повного переміщення точки, спричиненого кількома зусиллями, при Δ зберігається тільки перший індекс. Так, повний прогин і кут повороту перерізу B балки, зображеної на рис. 2.5, слід позначити відповідно через Δ_P і Δ_M , прогин перерізу C – через Δ_Q .

Розглядаючи досить жорсткі лінійно деформівні конструкції (тобто системи, деформації яких відповідають закону Гука), можна на підставі принципу незалежності дії сил визначати повні переміщення точок як суму переміщень, спричинених окремими навантаженнями.

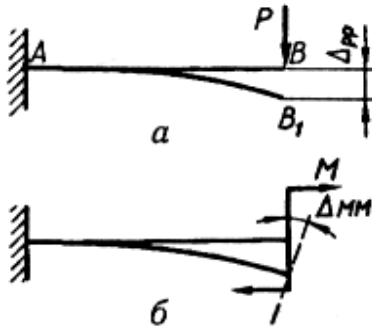


Рисунок 2.4 -
Позначення переміщень

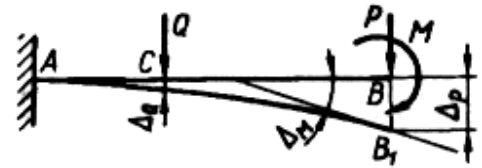


Рисунок 2.5 -
Узагальнені переміщення

Для зображеної на рис. 2.5 балки прогин і кут повороту перерізу B можна записати у вигляді

$$\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM}; \quad (2.4)$$

$$\Delta_M = \Delta_{MP} + \Delta_{MQ} + \Delta_{MM}.$$

де Δ_{PP} – переміщення точки B у напрямі сили P від сили P ;

Δ_{PQ} – те саме від сили Q ;

Δ_{PM} – те саме від моменту M ;

Δ_{MP} – переміщення B у напрямі пари M (кут повороту) від сили P ;

Δ_{MQ} – те саме від сили;

Δ_{MM} – те саме від пари M .

Переміщення, спричинене одиничною силою ($\bar{P}=1$) або одиничною парою ($\bar{M}=1$), будемо позначати літерою δ і називати *питомим*. При цьому умовимося вважати одиничні сили чи пари, які спричинюють переміщення δ , безрозмірними.

Якщо одинична сила $\bar{P}=1$ спричинила переміщення δ_P , то, згідно з принципом незалежності дії сил, повне переміщення, спричинене силою P ,

$$\Delta_P = P\delta_P. \quad (2.5)$$

З виразу (2.5) легко визначити одиницю питомого переміщення:

$$[\delta_P] = \frac{\text{одиниця узагальненого переміщення}}{\text{одиниця узагальненої сили}}. \quad (2.6)$$

Зазначимо, що навантаження, яке діє на конструкцію, як правило, позначають літерами $P, M, X, \dots$ з числовими індексами (наприклад, $X_1, X_2, \dots$). У цьому разі літерні індекси при Δ або δ замінюють відповідними числовими, тобто замість Δ_{x_1} пишуть $\Delta_1, (\Delta_2, \delta_{12}, \dots)$.

На рис. 2.6 зображено позначення переміщень вільного кінця рами від дії різних сил (P, X_1, X_2, X_3). Повні переміщення перерізу C у горизонтальному і вертикальному напрямках (тобто в напрямках дії сил X_1 і X_2), а та-

кож кут повороту (переміщення в напрямі дії X_3) відповідно можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{1P} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13}; \\ \Delta_2 &= \Delta_{2P} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23}; \\ \Delta_3 &= \Delta_{3P} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

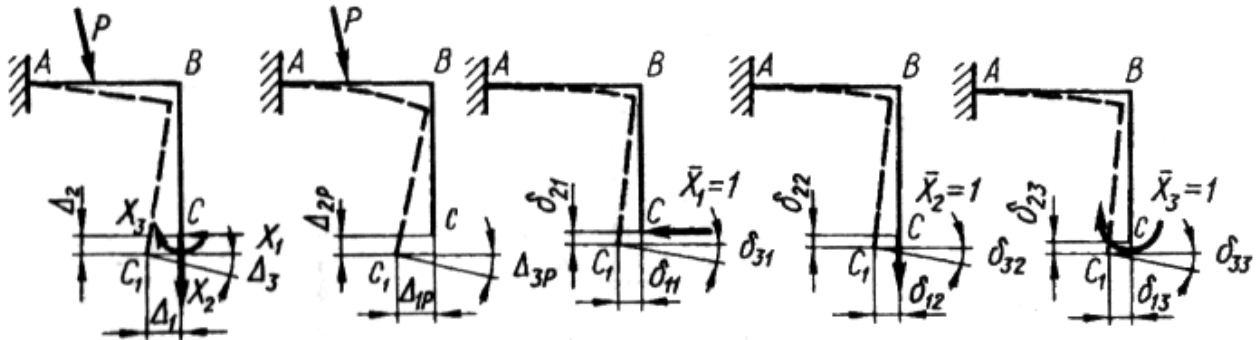


Рисунок 2.6 - Позначення переміщень

Тут

$$X_1\delta_{11} = \Delta_{11}; \quad X_2\delta_{12} = \Delta_{12}; \quad X_3\delta_{13} = \Delta_{13}; \quad X_i\delta_{mi} = \Delta_{mi}.$$

Для оцінювання одиниці переміщення δ_{mi} домножимо обидві частини останнього рівняння на X_m . Тоді

$$X_m X_i \delta_{mi} = X_m \Delta_{mi}$$

виражатиметься в одиницях роботи (Дж). Звідси переміщення

$$[\delta_{mi}] = \frac{X_m \Delta_{mi}}{[X_m][X_i]} = \frac{\text{Дж}}{H \cdot \text{Дж}} = \frac{1}{H}.$$

2.1.2 Загальна формула для визначення переміщень. Метод Мора

Розглянемо довільну плоску стержневую систему (балку, раму, ферму тощо), навантажену заданими силами P (рис. 2.7, а). Зусилля в довільному перерізі системи позначимо через M_p , Q_p , N_p . Нехай потрібно визначити переміщення (узагальнене) будь-якої точки системи в напрямі i – i .

Введемо допоміжний стан (рис. 2.7, б), що є заданою системою, навантаженою лише однією одиничною силою (узагальненою) $\bar{X}_i = 1$, прикладеною в тій самій точці m і в напрямі шуканого переміщення Δ_{iP} . Зусилля в довільному перерізі допоміжного стану, спричинені дією одиничної сили $\bar{X}_i = 1$, позначимо через $\bar{M}_i$, $\bar{Q}_i$, $\bar{N}_i$.

У загальному випадку дії сил формула для переміщення містить шість доданків:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \left(\frac{\bar{M}_{iy} M_{Py}}{EJ_y} + \frac{\bar{M}_{iz} M_{Pz}}{EJ_z} + \frac{\bar{M}_{ikp} M_{Pkp}}{GJ_k} + k_y \frac{\bar{Q}_{iy} Q_{Py}}{GF} + k_z \frac{\bar{Q}_{iz} Q_{Pz}}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} \right) ds. \quad (2.8)$$

Індекси y, z у формулі (2.8) позначають головні осі, індекс «кр» – крутний момент. Зазначимо, що наведену формулу можна застосувати і для кривих стержнів малої кривини.

Формулу (2.8) вперше було виведено Мором. Визначення переміщень за цією формулою часто називають *методом Мора* (*dummy-load method, Maxweel-Mohr method, unit-load method*). Зазначимо, що метод Мора – це найзагальніший метод визначення переміщень стержневих систем. Його значення особливо велике при розрахунку статично невизначуваних систем.

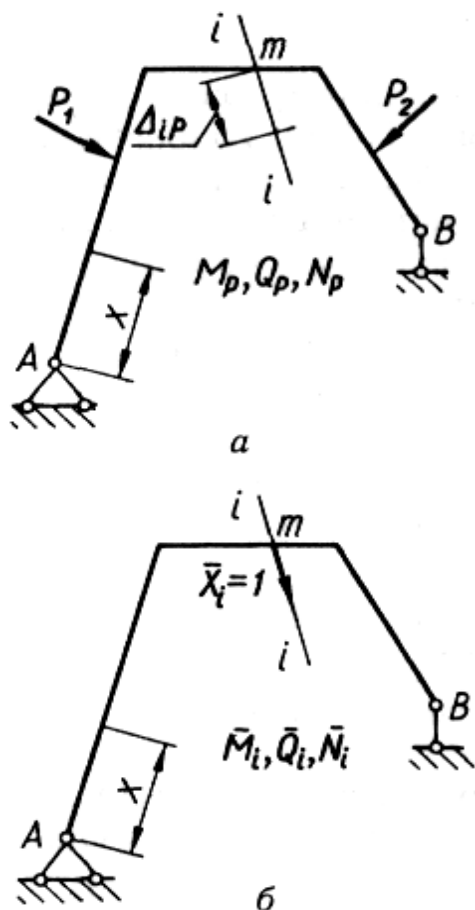


Рисунок 2.7 - До визначення переміщень в напрямі $i - i$

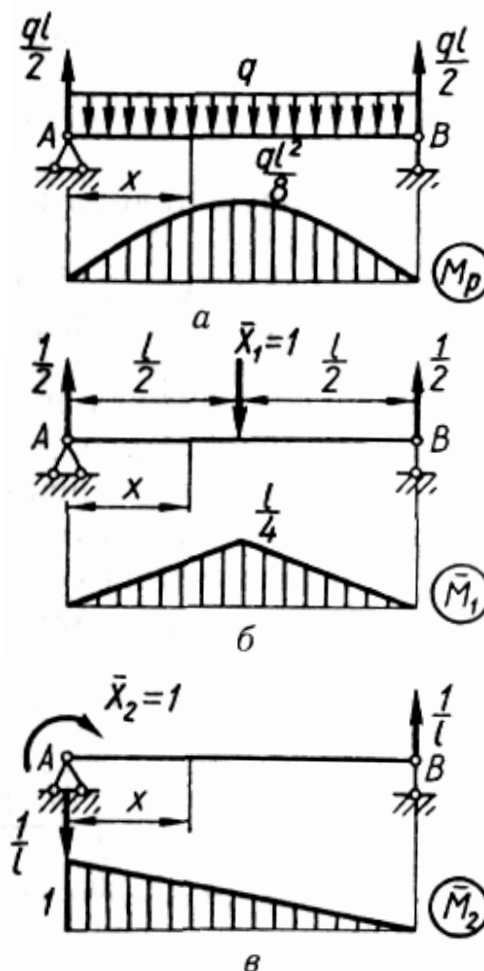


Рисунок 2.8 - Визначення прогину і кута повороту

Здебільшого при визначенні переміщень у балках, рамах та арках можна знехтувати впливом поздовжніх деформацій і деформацій зсуву, враховуючи лише переміщення, спричинені згинанням і крученням. Тоді формула (2.8) для плоскої системи набирає вигляду

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ}. \quad (2.9)$$

При просторовому навантаженні, згідно з формулою (2.8),

$$\Delta_{iP} = \sum \left(\int_S \frac{\overline{M}_{iy} M_{Py} ds}{EJ_y} + \int_S \frac{\overline{M}_{iz} M_{Pz} ds}{EJ_z} + \int_S \frac{\overline{M}_{i\delta\delta} M_{P\delta\delta} ds}{GJ_\delta} \right). \quad (2.10)$$

При визначенні переміщень вузлів шарнірних ферм, що складаються з прямих стержнів, у формулі Мора зберігається тільки один доданок:

$$\Delta_{iP} = \sum_m \frac{\overline{N}_i N_P}{E_m F_m} l_m. \quad (2.11)$$

Ця формула має назву *формули Максвелла*.

Можна запропонувати таку послідовність визначення переміщень за методом Мора:

1. Будують допоміжну систему, яку навантажують одиничним навантаженням у точці, де треба визначити переміщення. Визначаючи лінійні переміщення, у заданому напрямі прикладають одиничну силу, визначаючи кутові переміщення, – одиничний момент;

2. Для кожної ділянки системи записують вирази силових факторів у довільному перерізі заданої (M_p, N_p, Q_p) і допоміжної ($\overline{M}_i, \overline{N}_i, \overline{Q}_i$) систем;

3. Обчислюють інтеграли Мора (по ділянках у межах всієї системи). Як вже зазначалося, при розрахунку плоских балок, рам і арок виходять з формули (2.9), просторових систем – (2.10), ферм – (2.11);

4. Якщо обчислене переміщення додатне, то це означає, що його напрям збігається з вибраним напрямом одиничної сили. Від'ємний знак свідчить про те, що дійсний напрям шуканого переміщення протилежний напрямові одиничної сили.

Розглянемо приклади застосування методу Мора для визначення переміщень у різних стержневих системах.

Припустимо, що треба визначити прогин по середині прогону та кут повороту на опорі шарнірно обпертої балки ($EJ = \text{const}$), навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q (рис. 2.8, а), а також дослідити вплив поперечних сил на максимальний прогин.

1. Для визначення прогину по середині прогону прикладаємо в цьому місці допоміжної балки (рис. 2.8, б) одиничну зосереджену силу. В довільному перерізі першої ділянки балки ($0 \leq x \leq l/2$)

$$M_P(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}; \quad \overline{M}_1(x) = \frac{1}{2}x.$$

Ураховуючи симетрію, дістанемо

$$\Delta_{1P} = 2 \int_0^{l/2} \frac{\overline{M}_1(x) M_P(x) dx}{EJ} = \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} x \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Врахуємо вплив дотичних напружень на шуканий прогин, припускаючи, що балка має прямокутний переріз. Очевидно, при $0 \leq x \leq l/2$

$$Q_P(x) = \frac{ql}{2} - qx; \quad \overline{Q}_1(x) = \frac{1}{2}.$$

На підставі формули (2.8) прогин, спричинений дією поперечних сил,

$$\Delta_{1P}^Q = 2 \int_0^{l/2} k \frac{\overline{Q}_1 Q_P dx}{GF} = \frac{2k}{GF} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \left(\frac{ql}{2} - qx \right) dx = k \frac{ql^2}{8GF} = \frac{2}{5} \frac{ql^2}{EJ}.$$

При цьому враховано, що коефіцієнт форми для прямокутного перерізу

$$k = 1,2, \quad \text{а} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \approx \frac{3}{8} E.$$

Підсумовуючи вирази для переміщень, знаходимо, що

$$\Delta_{1P} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{2}{5} \frac{ql^2}{EF} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \left(1 + 2,6 \frac{h^2}{l^2} \right).$$

Другий член у дужках, що відображає вплив поперечної сили, при відношенні висоти перерізу до довжини прогону $h/l = 1/10$ дорівнює 0,026. Отже, прогин, спричинений поперечною силою, становить менше ніж 3% прогину, спричиненого згинальними моментами.

2. Для визначення кута повороту опорного перерізу допоміжну балку навантажують одиничним моментом (рис. 2.8, в). При $0 \leq x \leq l/2$ маємо

$$M_P(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}; \quad \overline{M}_2(x) = 1 - \frac{x}{l};$$

$$\Delta_{2P} = \int_0^l \frac{\overline{M}_2(x) M_P(x) dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{ql^3}{24EJ}. \quad (2.12)$$

Додатний знак свідчить про те, що напрям повороту збігається з напрямом одиничного моменту.

Визначимо вертикальне переміщення вузла B шарнірно-стержневої системи (рис. 2.9, а), яка складається з двох однакових стержнів AB і BC постійного поперечного перерізу. Допоміжну систему зображено на рис. 2.9, б.

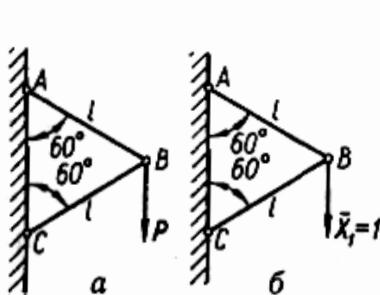


Рисунок 2.9 - Визначення переміщення т. В ферми

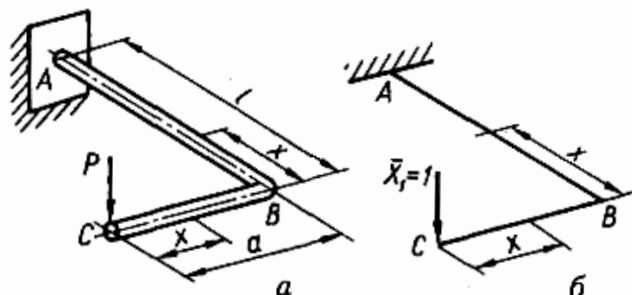


Рисунок 2.10 - Визначення вертикального переміщення

Розглядаючи рівновагу вирізаного вузла B , знаходимо зусилля в стержнях для обох станів:

Стержень	N_P	$\overline{N}_1$
AB	P	1
BC	$-P$	-1

З формули (2.11) маємо

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\overline{N}_1 N_P l}{EF} = 2 \frac{Pl}{EF} \quad (2.13)$$

Приклад. Розміщена в горизонтальній площині рама ABC (рис. 2.10, а) складається з двох стержнів однакового круглого поперечного перерізу. Визначимо вертикальне переміщення точки C . Допоміжну систему зображено на рис. 2.10, б.

Переміщення Δ_{1P} можна визначити з формули (2.8). Для довільних перерізів двох ділянок маємо:

для I ділянки ($0 \leq x \leq l/2$)

$$M_P = Px; M_{P_{кр}} = 0; \overline{M}_1 = x; M_{1_{кр}} = 0;$$

для II ділянки ($0 \leq x \leq l$)

$$M_P = Px; M_{P_{кр}} = Pa; \overline{M}_1 = x; M_{1_{кр}} = a;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int_S \frac{\overline{M}_1 M_P dx}{EJ} + \int_S \frac{\overline{M}_{1_{кр}} M_{P_{кр}} dx}{GJ_P} = \\ &= \int_0^a \frac{Px^2 dx}{EJ} + \int_0^l \frac{Px^2 dx}{EJ} + \int_0^l \frac{Pa^2 dx}{GJ_P} = \frac{P(a^3 + l^3)}{3EJ} + \frac{Pa^2 l}{GJ_P}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.1.3 Обчислення інтегралів Мора способом Верещагіна

Обчислення інтегралів Мора істотно спрощується, якщо одна з епюр (у дійсному чи одиничному стані) прямолінійна при сталому по довжині поперечному перерізі. Ця умова виконується для систем, що складаються з прямих стержнів, оскільки при цьому епюри внутрішніх сил від одиничного навантаження (зосередженої сили або пари) завжди обмежені прямими лініями.

Графоаналітичний спосіб визначення інтеграла Мора був запропонований О. М. Верещагіним і має назву *способу Верещагіна*. Згідно з цим методом загальна формула (2.9) для визначення переміщень у системах з прямих стержнів набирає вигляду

$$\Delta_{iP} = \int_l \frac{\overline{M}_1 M_P dx}{EJ} = \frac{\Omega \overline{M}_c}{EJ}, \quad (2.17)$$

де Ω – площа епюри M_P ,

c – її центр ваги,

$\overline{M_C}$ – ордината епюри від одиничного навантаження під центром ваги епюри M_P .

Інтеграл Мора дорівнює добутку площі епюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної епюри від одиничного навантаження, розміщену під центром ваги епюри від заданого зовнішнього навантаження. Обчислення за цією формулою виконують по ділянках, на кожній з яких епюра від одиничного навантаження має бути прямолінійною (рис. 2.12). Тоді, коли обидві епюри прямолінійні, можна множити площу будь-якої з них на ординату іншої під центром ваги першої.

Якщо епюра M_P має складний вигляд, то її слід розбити на прості фігури (рис. 2.13), для яких легко визначити площу і положення центра ваги.

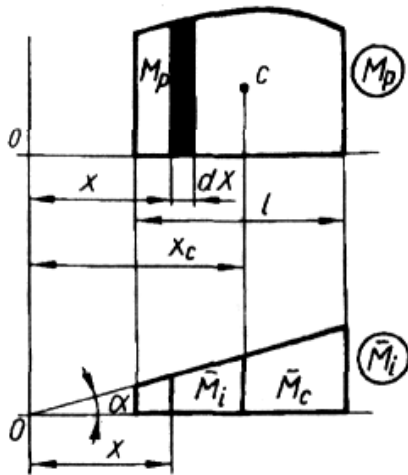


Рисунок 2.11 -
До виведення формули
Верещагіна

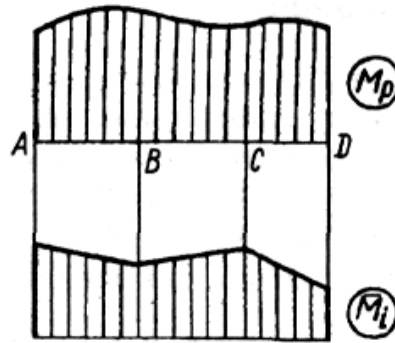


Рисунок 2.12 -
Розбиття епюр на
характерні ділянки

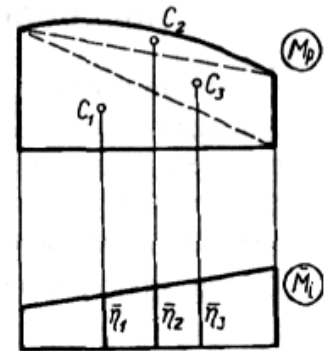


Рисунок 2.13 -
Розбиття епюри на
прості фігури ділянки

При цьому кожен з площ треба множити на ординату одиничної епюри під центром ваги відповідної площі. Ординати в цьому разі зручно позначати замість $\overline{M_{Ck}}$ літерами η_k , де $k = 1; 2; \dots$.

Отже,

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1;\dots} \frac{\Omega_k \overline{\eta_k}}{EJ}. \quad (2.18)$$

Переміщення від дії осевих і поперечних сил, а також крутних моментів виражаються аналогічно:

$$\Delta_{iPN} = \sum \frac{\Omega \overline{N_C}}{EF}; \quad \Delta_{iPQ} = \sum k \frac{\Omega \overline{Q_C}}{GF}; \quad \Delta_{iP_{кр}} = \sum \frac{\Omega \overline{M_{C_{кр}}}}{GJ_k},$$

де Ω — площа епюри N_P , або Q_P , або $M_{P_{кр}}$ від заданого навантаження;

$\overline{N_C}$, $\overline{Q_C}$, $\overline{M_{C_{кр}}}$ – ординати відповідних епюр осевих, поперечних сил і крутних моментів від одиничного навантаження, взяті під центрами ваги епюр N_P , Q_P , $M_{P_{кр}}$.

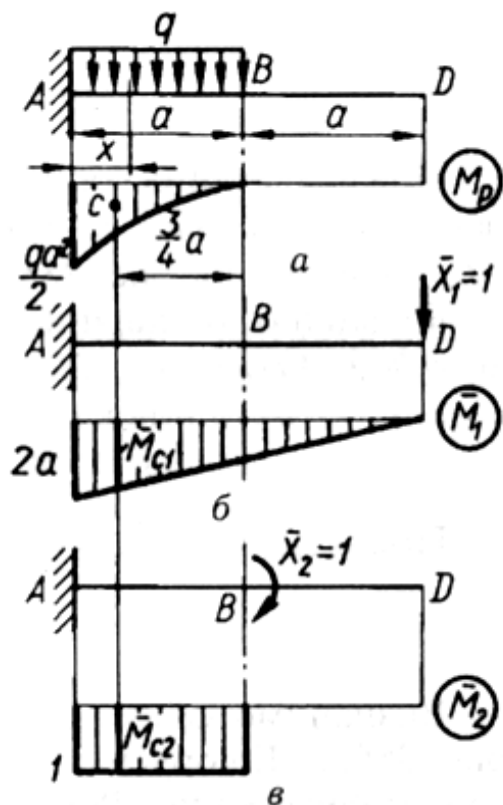


Рисунок 2.14 - Визначення переміщень за Верещагіним

Якщо епюри від заданого і одиничного навантажень протилежні за знаком, то їхній добуток має знак «мінус».

Спосіб Верещагіна широко застосовують при розрахунку рамних конструкцій (конструкцій, в яких кути в місцях з'єднання окремих стержнів, жорсткі до деформації, залишаються жорсткими після неї).

Розглянемо приклади застосування способу Верещагіна для визначення переміщень у стержневих системах.

Визначимо прогин у точці D і кут повороту перерізу B консолі (рис. 2.14, а). Відповідні допоміжні (одиничні) стани зображено на рис. 2.14, б, в.

Будуємо епюри згинальних моментів M_p і $\overline{M}_i$. Прогин у точці D балки за Верещагіним

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\Omega \overline{M}_{C1}}{EJ}.$$

На ділянці AB площа епюри $M_p \Omega = (1/6)qa^3$. Центр ваги цієї площі, обмеженої квадратичною параболою $q(a-x)^2/2$ (рис. 2.14, а), розміщений на відстані $(3/4)a$ від точки B . Ордината допоміжної епюри $\overline{M}_{C1} = (7/4)a$. На ділянці BD $\Omega = 0$. Отже,

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \frac{qa^3}{6} \frac{7}{4} a = \frac{7}{24} \frac{qa^4}{EJ}.$$

Для визначення кута повороту допоміжну систему навантажимо одиничною парою. Очевидно, $\overline{M}_{C2} = 1$. Отже, кут повороту перерізу B

$$\Delta_{2P} = \sum \frac{\Omega \overline{M}_{C2}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{qa^3}{6} 1 = \frac{qa^3}{6EJ}.$$

Для визначення переміщень використовують також і інші способи, які ґрунтуються на способі Верещагіна - спосіб Верещагіна-Даркова та Сімпсона-Карнаухова (додаток Ж).

2.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

Задача 10. Розрахунок на міцність та визначення переміщення бруса малої кривини при згині

Для заданого кривого бруса (рис. 2.15) підібрати двотавровий переріз

виходячи з умови міцності за нормальними напругами, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Визначити кут повороту і горизонтальне переміщення перерізу в т. А. Радіус кривизни осі бруса 3 м, матеріал стержня – Ст. 3.

План розв'язання:

1. Побудувати епюри внутрішніх зусиль. Знайти небезпечний переріз;
2. Визначити розміри двотаврового перерізу із умови міцності за нормальними напругами, як для бруса малої кривизни, розташувавши переріз найвигіднішим чином;
3. Користуючись методом Мора, визначити горизонтальне переміщення і кут повороту в точці А.

Примітка. При виконанні завдання бажано виконати перевірку інтегрування, користуватись сучасними математичними прикладними пакетами програм (Mathcad, Matlab, Mathematical тощо)

Таблиця 2.1

Номер варіанта	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кНм	α , °
0	11	2	3	30
1	2	1	2	45
2	3	2	1	60
3	4	1	2	30
4	5	2	1	45
5	3	3	3	60
6	2	4	2	30
7	3	2	2	45
8	2	3	3	60
9	1	4	3	30

Приклад виконання задачі 10

Для заданого кривого бруса (рис. 2.16) підібрати двотавровий переріз, визначити кутове, горизонтальне та вертикальне переміщення перерізу в точці прикладення сили P_2 . Матеріал стержня – сталь Ст. 3, допустимі нормальні напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Дано:

$P_1 = 5 \text{ кН}$; $P_2 = 10 \text{ кН}$; $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $R = 2 \text{ м}$,

$\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 3\pi/2$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$

Знайти:

$N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$; № переріза; θ_B , $f_B^{\text{верт}}$, 01– ?

Розв'язування

*1. Будуємо епюри внутрішніх силових факторів**

Розділяємо стержень на дві ділянки і складаємо рівняння поздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів для кожної з них (рис. 2.17).

* Методика побудови епюр для кривого стержня детально викладена, наприклад, в [1]

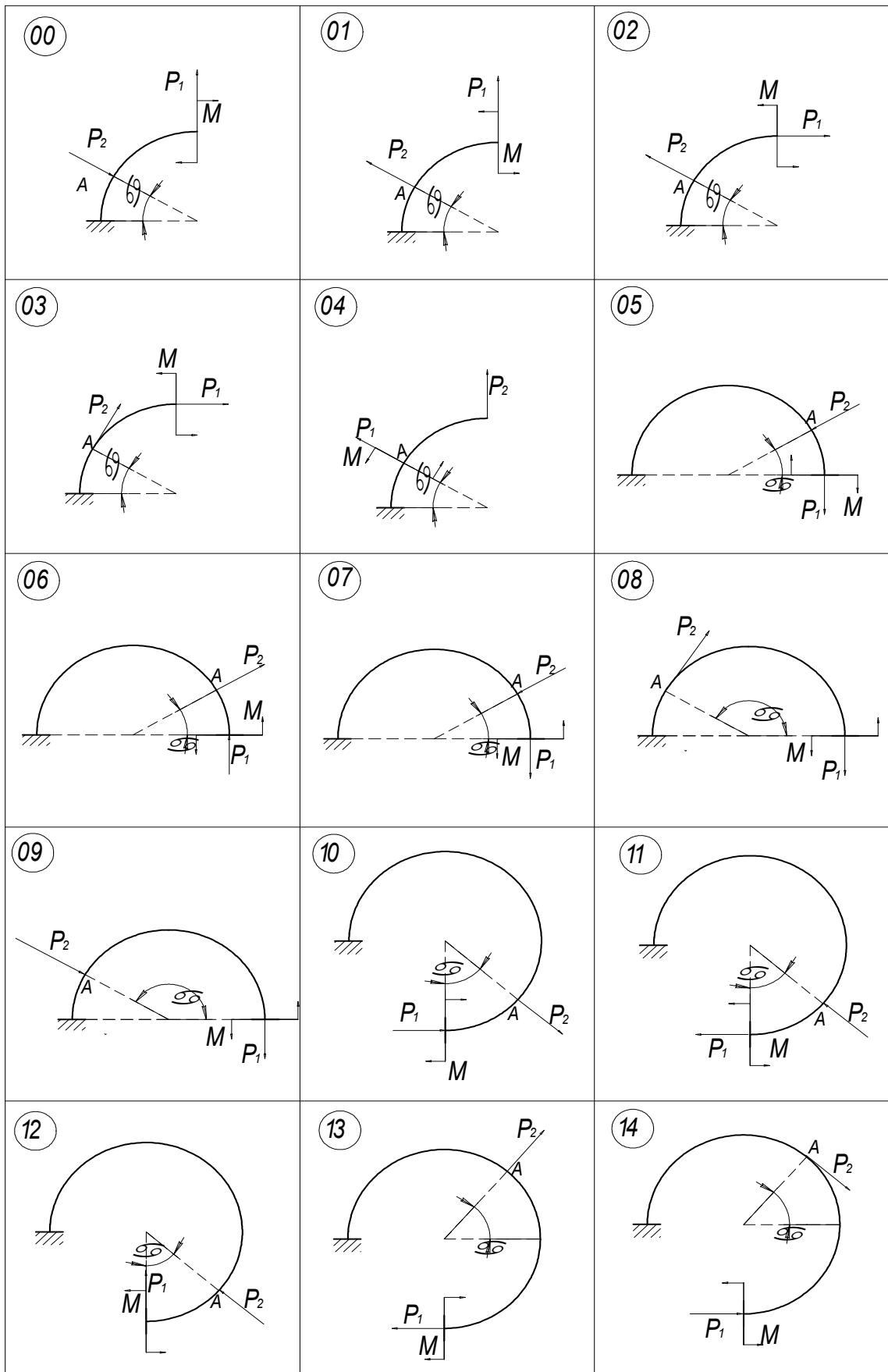


Рисунок 2.15 - Схеми до виконання задачі 10

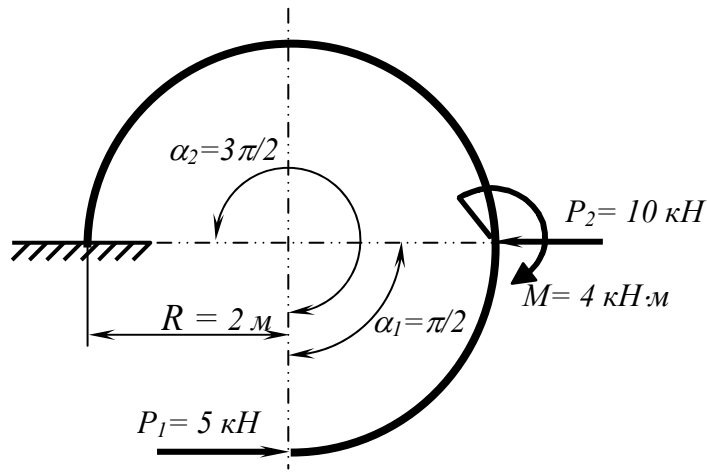


Рисунок 2.16 - Схема до задачі 10

Ділянка АВ

$$0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2.$$

$$N(\varphi_1) = -P_1 \cdot \cos(\varphi_1) = -5 \cdot \cos(\varphi_1);$$

$$Q(\varphi_1) = -P_1 \cdot \sin(\varphi_1) = -5 \cdot \sin(\varphi_1);$$

$$M(\varphi_1) = -P_1 \cdot R \cdot [1 - \cos(\varphi_1)] = -10 \cdot [1 - \cos(\varphi_1)].$$

Ділянка ВС

$$0 \leq \varphi_2 \leq \pi.$$

$$N(\varphi_2) = -P_1 \cdot \cos(\varphi_2 + \alpha_1) - P_2 \cdot \sin(\varphi_2) = -5 \cos(\varphi_2 + \pi/2) - 10 \sin(\varphi_2) = -5 \cdot \sin(\varphi_2);$$

$$Q(\varphi_2) = -P_1 \cdot \sin(\varphi_2 + \alpha_1) + P_2 \cdot \cos(\varphi_2) = -5 \cdot \sin(\varphi_2 + \pi/2) + 10 \cdot \cos(\varphi_2) = 5 \cdot \cos(\varphi_2);$$

$$M(\varphi_2) = -P_1 \cdot R \cdot [1 - \cos(\varphi_2 + \alpha_1)] + P_2 \cdot R \cdot \sin(\varphi_2) + M =$$

$$= -10 \cdot [1 - \cos(\varphi_2)] + 20 \cdot \sin(\varphi_2 - \pi/2) + 4 = -6 + 10 \cdot \sin(\varphi_2).$$

З інтервалом в $\pi/6$ (30°) знаходимо значення внутрішніх силових факторів в перерізах (таблиця 2.2).

Таблиця 2.2

	Ділянка АВ $0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$				Ділянка ВС $0 \leq \varphi_2 \leq \pi$						
	0^0	30^0	60^0	90^0	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0
N(φ) , кН	-5	-4,33	-2,5	0	0	-2,5	-4,33	-5	-4,33	-2,5	0
Q(φ) , кН	0	-2,5	-4,33	-5	5	4,33	2,5	0	-2,5	-4,33	-5
M(φ) , кН·м	0	-1,34	-5	-10	-6	-1	2,66	4	2,66	-1	-6

За отриманими значеннями будуюмо на осі криволінійного стержня епюри поздовжніх $N(\varphi)$, поперечних сил $Q(\varphi)$ та згинальних моментів $M(\varphi)$ (рис. 2.17).

Ординати згинальних моментів відкладені в сторону стиснутих волокон без вказання знаку. При прийнятому правилі знаків ординати зі знаком “+” до центра кривизни від осі стержня, “-” від центра кривизни від осі стержня. При побудові на розтягнутих волокнах – навпаки.

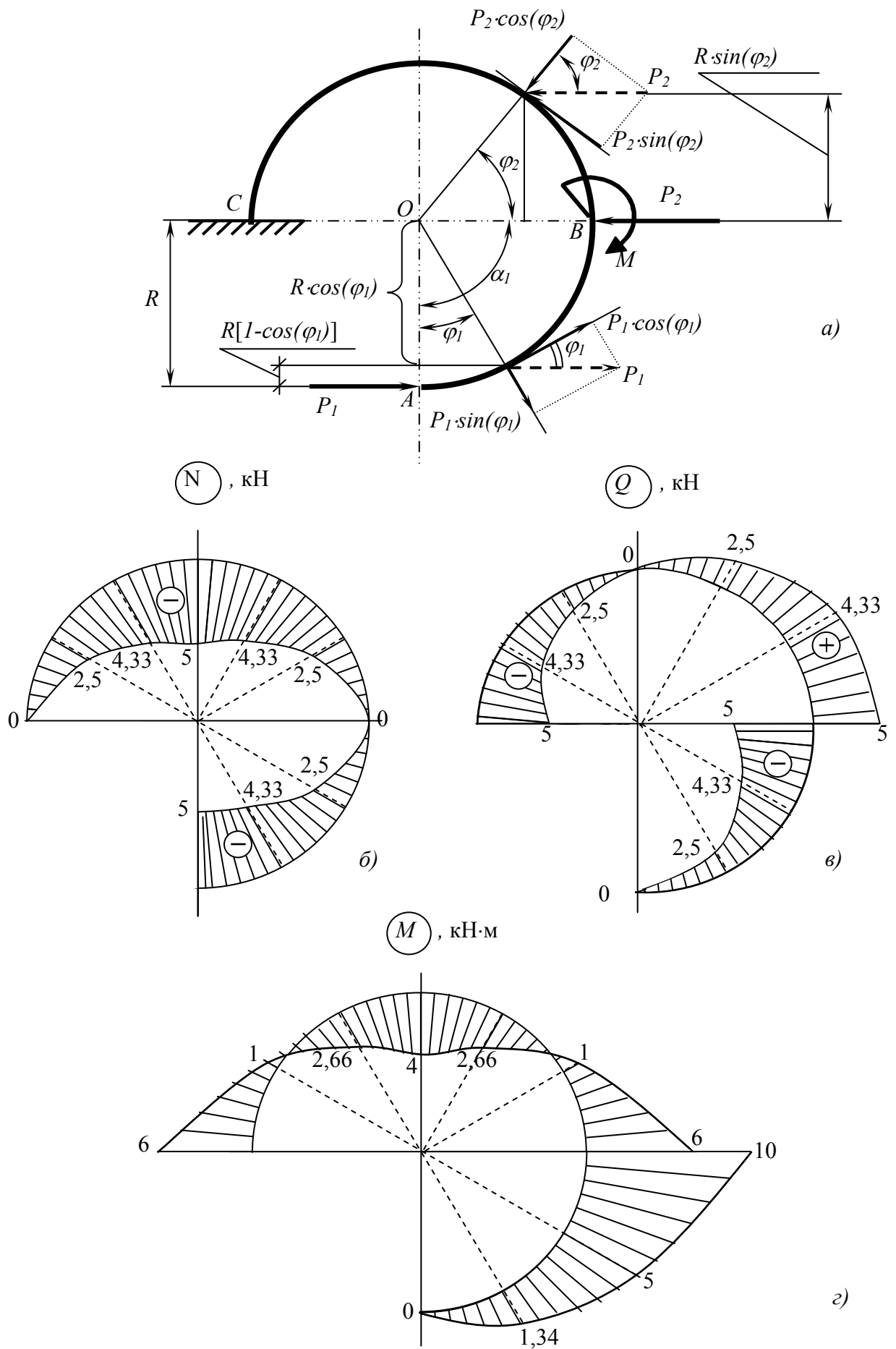


Рисунок 2.17 - Епюри внутрішніх зусиль

2. Підбираємо переріз за умови міцності

Поперечними та поздовжніми силами нехтуємо. Також нехтуємо зміщенням нейтральної лінії від вісі стержня за рахунок малості його кривизни.

Отже умова міцності

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Необхідний момент опору

$$W_z \geq \frac{M_{z\max}}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 62,5 \cdot 10^{-6} (\text{м}^3) = 62,5 \text{ см}^3.$$

За сортаментом підбираємо двотавр №14 (додаток В), для якого $W_z = 81,7 \text{ см}^3$, $I_z = 572 \text{ см}^4$.

3. Визначаємо переміщення перерізу в т. А (кутове, горизонтальне, вертикальне та повне)

Згідно з формулою Мора для плоского стержня малої кривизни

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \left(\frac{\overline{M}_i M_{Pz}}{EJ_z} + k_y \frac{\overline{Q}_{iy} Q_{Py}}{GF} + \frac{\overline{N}_i N_P}{EF} \right) ds.$$

Нехтуємо переміщенням від дії поперечних та поздовжніх сил та переходимо до інтегрування по центральному куту φ_2 ($0 \leq \varphi_2 \leq \pi$)

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \frac{\overline{M}_i M_P}{EJ_z} ds = \int_0^\pi \frac{\overline{M}_i(\varphi_2) \cdot M_P(\varphi_2)}{EJ_z} \cdot R \cdot d\varphi_2 = \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi \overline{M}_i(\varphi_2) \cdot M_P(\varphi_2) d\varphi_2.$$

3.1 Кутове переміщення

Для визначення кутового переміщення прикладемо в т. В одиничний згинальний момент (рис. 2.18).

$$M_P(\varphi_2) = -6 + 10 \cdot \sin(\varphi_2).$$

Згинальний момент в перерізі від цієї сили

$$\overline{M}_1(\varphi_2) = \overline{X}_1 = 1.$$

$$\begin{aligned} \theta_B = \Delta_{1P} &= \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi \overline{M}_1(\varphi_2) \cdot M_P(\varphi_2) d\varphi_2 = \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi (-6 + 10 \cdot \sin(\varphi_2)) d\varphi_2 = \\ &= \frac{R}{EJ_z} \left[-6 \int_0^\pi d\varphi_2 + 10 \int_0^\pi \sin(\varphi_2) d\varphi_2 \right] = \frac{R}{EJ_z} [-6 \cdot \pi + 10 \cdot 2] = \\ &= \frac{2}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} [-6 \cdot \pi + 10 \cdot 2] \cdot 10^3 = 2,88 \cdot 10^{-4} (\text{рад}) = 0,017^\circ. \end{aligned}$$

Значення інтегралів в виразі знаходили, використовуючи допоміжну таблицю додатка Д.

Знак “+” означає, що переріз повертається за напрямком одиничного момента $\overline{X}_1 = 1$.

3.2 Вертикальне переміщення

Для визначення вертикального переміщення прикладемо в т. В вертикальну одиничну силу (рис. 2.19).

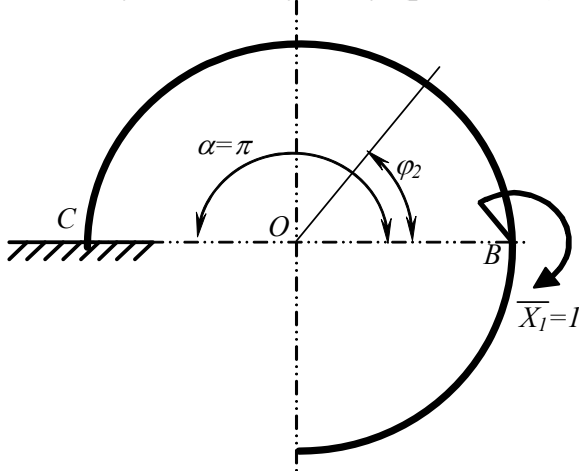


Рисунок 2.18 - Визначення кутового переміщення

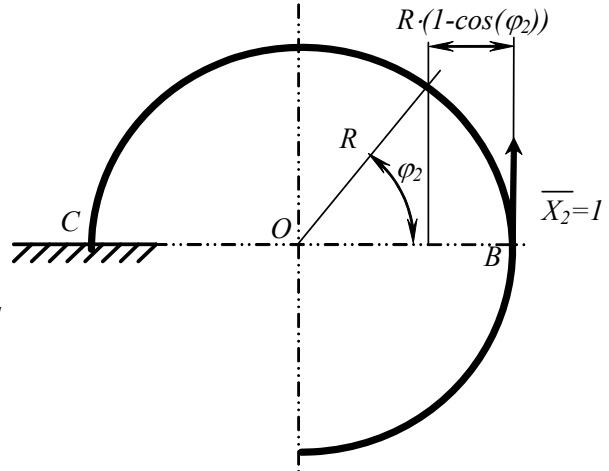


Рисунок 2.19 - Визначення вертикального переміщення

Згинальний момент в перерізі від цієї сили

$$\overline{M}_2(\varphi_2) = -\overline{X}_2 \cdot R (1 - \cos(\varphi_2)) = -1 \cdot 2 \cdot (1 - \cos(\varphi_2)) = -2 + 2 \cos(\varphi_2).$$

$$\begin{aligned} f_B^{верт} = \Delta_{2P} &= \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi \overline{M}_2(\varphi_2) \cdot M_P(\varphi_2) d\varphi_2 = \\ &= \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi (-2 + 2 \cdot \cos(\varphi_2)) (-6 + 10 \cdot \sin(\varphi_2)) d\varphi_2 = \\ &= \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi [12 - 20 \sin(\varphi_2) - 12 \cos(\varphi_2) + 20 \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2)] d\varphi_2 = \\ &= \frac{R}{EJ_z} \left[12 \int_0^\pi d\varphi_2 - 20 \int_0^\pi \sin(\varphi_2) d\varphi_2 - 12 \int_0^\pi \cos(\varphi_2) d\varphi_2 + 20 \int_0^\pi \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) d\varphi_2 \right] = \\ &= \frac{R}{EJ_z} [12\pi - 20 \cdot 2 - 12 \cdot 0 + 20 \cdot 0] = \frac{2}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} [12 \cdot \pi - 40] \cdot 10^3 = \\ &= -0,000577 \text{ (м)} = -0,577 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Знак “-” означає, що переріз переміщується проти напрямку одиничної сили $\overline{X}_2 = 1$, тобто вниз.

3.3 Горизонтальне переміщення

Для визначення горизонтального переміщення прикладемо в т. В горизонтальну одиничну силу.

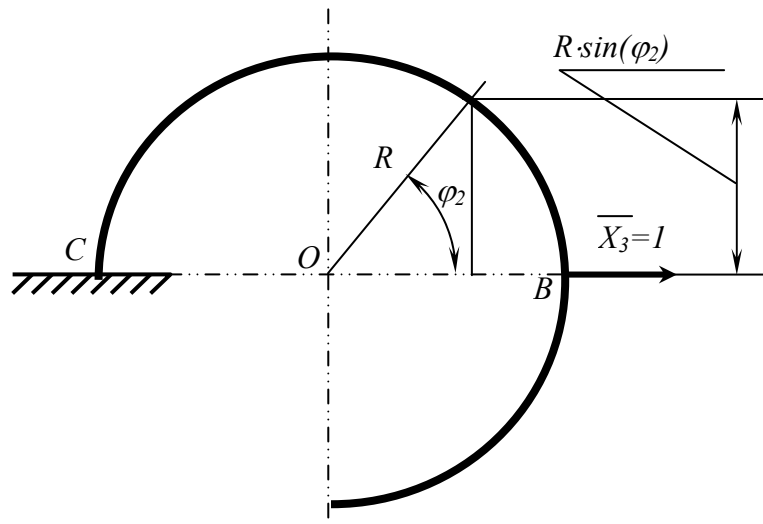


Рисунок 2.20 - Визначення горизонтального переміщення

Згинальний момент в перерізі від цієї сили

$$\overline{M}_3(\varphi_2) = -\overline{X}_3 \cdot R \cdot \sin(\varphi_2) = -1 \cdot \sin(\varphi_2) = -\sin(\varphi_2).$$

$$f_B^{zop} = \Delta_{3P} = \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi \overline{M}_3(\varphi_2) \cdot M_P(\varphi_2) d\varphi_2 = \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi -\sin(\varphi_2) (-6 + 10\sin(\varphi_2)) d\varphi_2 =$$

$$= \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi [12\sin(\varphi_2) - 10\sin^2(\varphi_2)] d\varphi_2 = \frac{R}{EJ_z} \left[12 \int_0^\pi \sin(\varphi_2) d\varphi_2 - 10 \int_0^\pi \sin^2(\varphi_2) d\varphi_2 \right] =$$

$$= \frac{2}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} [12 \cdot 2 - 10 \cdot 1,571] \cdot 10^3 = -0,00187 \text{ (м)} = -1,87 \text{ мм.}$$

Знак “–” означає, що переріз переміщується проти напрямку одиничної сили $\overline{X}_3 = 1$, тобто ліворуч.

Повне переміщення знаходимо за теоремою Піфагора

$$f = \sqrt{(f_B^{верт})^2 + (f_B^{zop})^2} = \sqrt{(0,577)^2 + (1,87)^2} = 1,96 \text{ (мм)}.$$

Відповідь: двотавр №14, $\theta_B = 0,017^\circ$, $f_B^{верт} = 0,577 \text{ мм}$, $f_B^{zop} = 1,87 \text{ мм}$.

Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 10)

1. Які епюри будуються для розрахунку на міцність кривих плоских стержнів? Пояснити необхідність кожної епюри.
2. Записати інтеграл Мора при визначенні переміщень перерізу кривого стержня та пояснити його.
3. За яким алгоритмом визначаються переміщення в стержневих системах довільної конфігурації?
4. Що називається вантажним станом?
5. Що називається одиничним станом?

6. Які відмінності розрахунку лінійного і кутового переміщення кривого стержня?
7. Що означає знак мінус перед числом визначеного переміщення?
8. Як визначити повне переміщення перерізу та його напрямок?
9. Визначити переміщення (кутове або лінійне) вказаного перерізу.
10. Чому при розрахунку переміщень стержневих конструкцій використовують лише залежності згинального моменту?

3 СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ (STATICALLY INDETERMINATE SYSTEM)

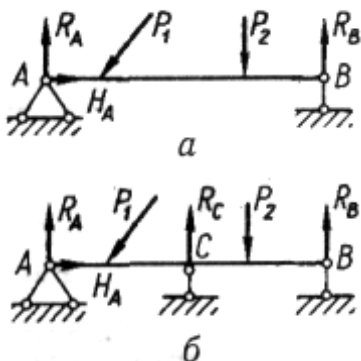
3.1 Короткі теоретичні відомості

3.1.1 Основні поняття та означення

Як уже зазначалося, статично невизначуваними називаються системи (*statically indeterminate system*), силові фактори в елементах яких тільки з рівнянь рівноваги визначити не можна. У таких системах зв'язків більше, ніж потрібно для рівноваги. Отже, деякі зв'язки виявляються в цьому розумінні так би мовити *зайвими*, а зусилля в них – *зайвими невідомими*. За числом зайвих зв'язків або зайвих невідомих зусиль установлюють ступінь статичної невизначуваності системи.

Розглянемо найбільш загальні випадки статично невизначуваних систем, причому основну увагу приділимо статично невизначуваним балкам та рамам.

На рис. 3.1, *а* зображено шарнірно обперту балку – систему статично визначену і геометрично незмінювану. Всі три реакції (R_A , H_A , R_B) визначаються з трьох умов рівноваги плоскої системи сил. Використовуючи метод перерізів, легко знайти силові фактори Q , M будь-якому перерізі балки.



Додамо ще один зв'язок, наприклад шарнірно рухому опору в перерізі C (рис. 3.1, *б*). Хоч у наслідок цього система стала більш міцною та жорсткою, проте з погляду геометричної незмінюваності цей зв'язок зайвий. Тепер з трьох рівнянь рівноваги чотири реакції R_A , H_A , R_B , R_C визначити не можна. Отже, зображена на рис. 3.1, *б* балка один раз статично невизначувана.

Рисунок 3.1 - Статично визначена і невизначувана балки

На рис. 3.2, *а* наведено двічі статично невизначувану балку. Для визначення п'яти реакцій є три рівняння рівноваги. Отже, система має два зайвих зв'язки. Вона може бути утворена, наприклад, із консолі (рис. 3.2, *б*) установленням шарнірно рухомих опор у перерізах B та C .

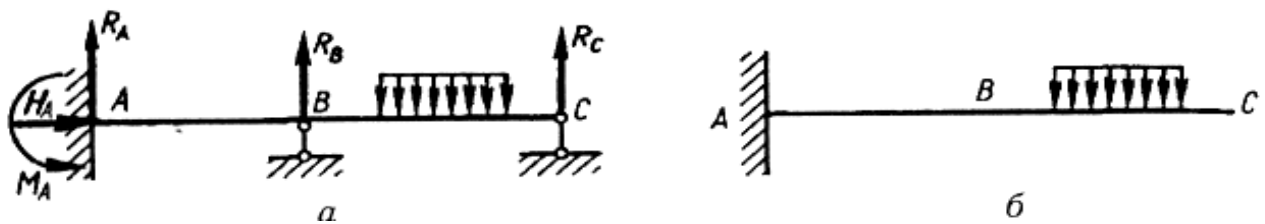


Рисунок 3.2 - Двічі статично невизначувана балка

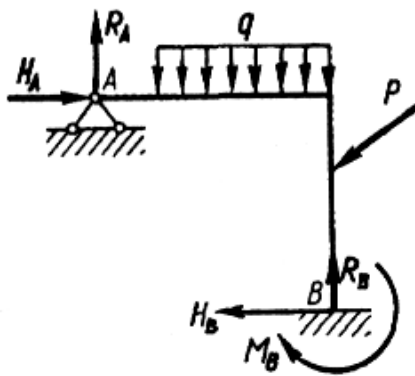


Рисунок 3.3 - Двічі статично невизначувана рама

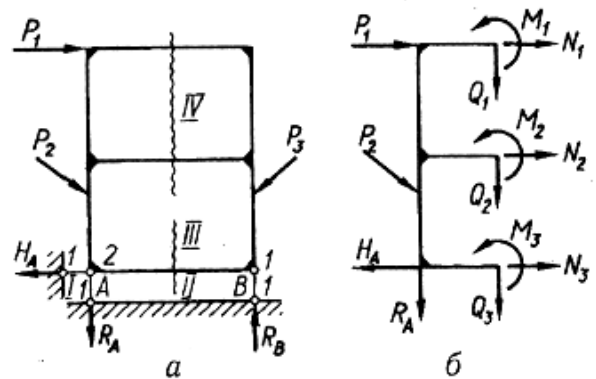


Рисунок 3.4 - Шість раз статично невизначувана рама

У конструкціях часто застосовують статично невизначувані балки з ламаною віссю – рами. На відміну від ферм, де стержні з'єднані між собою шарнірами й навантажені силами, прикладеними у вузлах, рами мають один або кілька жорстких вузлів. У жорсткому вузлі торці з'єднуваних стержнів не дістають відносних поступальних переміщень, а також відносних поворотів.

Рамні конструкції можуть складатись як з прямолінійних, так і з криволінійних елементів. На рис. 3.3 зображено двічі статично невизначувану плоску раму. В цьому прикладі, як і в попередньому, для визначення п'яти реакцій зовнішніх зв'язків маємо тільки три рівняння рівноваги.

Рами можуть бути навантажені цілком довільним навантаженням, будь-як орієнтованим.

Статична невизначуваність може бути наслідком не тільки введення додаткових зовнішніх зв'язків, а й умов утворення системи. Розглянемо раму на рис. 3.4, а. Очевидно, реакції R_A , H_A , R_B зовнішніх зв'язків (опор) легко визначити з рівнянь рівноваги. Проте після цього рівняння рівноваги не дають змоги визначити всі силові фактори в елементах рами.

Розріжемо раму на дві частини й розглянемо рівновагу однієї з частин (рис. 3.4, б). Дію відкинутої частини на залишену замінимо в кожному з перерізів розрізу трьома силовими факторами: осьовою силою N , поперечною силою Q та згинальним моментом M . Отже, з трьох рівнянь рівноваги треба визначити дев'ять невідомих зусиль. Система шість разів статично невизначувана. Вона складається з двох замкнених безшарнірних контурів, кожен з яких тричі статично невизначуваний.

Зазначимо, що встановлення шарніра на осі стержня (рис. 3.5, а) перетворює на нуль згинальний момент у даному перерізі й, отже, знижує ступінь статичної невизначуваності на одиницю. Такий шарнір називають *одиначним*. Очевидно, рама, зображена на рис. 3.5, а, п'ять разів статично невизначувана.

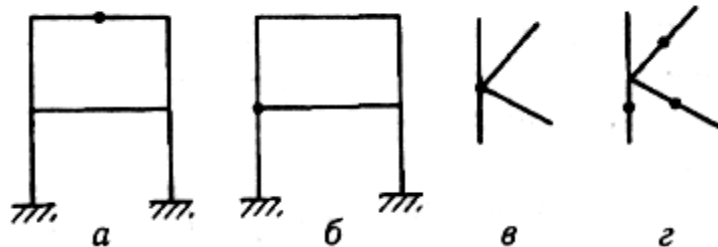


Рисунок 3.5 – Одиначні шарніри в рамі

Шарнір, розміщений у вузлі, де збігаються n стержнів (рис. 3.5, в), знижує ступінь статичної невизначуваності на $n - 1$, оскільки замінює собою таку саму кількість одиначних шарнірів (рис. 3.5, г). Такий шарнір називається *загальним*. Рама, зображена на рис. 3.5, б, чотири рази статично невизначувана.

Ступінь статичної невизначуваності плоских систем можна визначити за формулою

$$s = 3k - \vartheta, \quad (3.1)$$

де s – ступінь статичної невизначуваності;

k – кількість замкнених контурів за умови повної відсутності шарнірів;

m – кількість шарнірів у перерахунку на одиначні.

Основа (земля) розглядається як стержень. Наприклад, рама, наведена на рис. 3.4, має чотири замкнуті контури; біля кожного шарніра вказано відповідну кількість одиначних шарнірів, при цьому група стержнів, жорстко зв'язаних між собою, вважається одним стержнем.

Тож у розглядуваному прикладі $k = 4$, $m = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6$. Отже, $s = 3 \cdot 4 - 6 = 6$.

Для визначення зусиль у статично невизначуваних системах додатково до рівнянь статки складають так звані рівняння сумісності деформацій. Насправді, зайві зв'язки обмежують переміщення тих перерізів, до яких вони прикладені. Цю обставину й використовують для складання додаткових рівнянь, які разом з рівняннями статки дають змогу визначити всі силові фактори в елементах системи.

Розглянемо етапи розрахунку статично невизначуваної системи.

1. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності, тобто кількість зайвих зв'язків або зайвих зусиль.

2. Усуваючи зайві зв'язки, замінюємо вихідну систему статично визначуваною, яку називають основною системою (main system). Вибір зайвих зв'язків залежить від бажання того, хто робить розрахунок. Тому для однієї й тієї самої статично невизначуваної вихідної системи можливі різні варіа-

нти основних систем. Однак треба стежити за тим, щоб кожна з них була геометрично незмінюваною. Рациональний вибір системи спрощує розрахунок.

Отже, основною системою називається будь-який із статично визначуваних варіантів розглядуваної системи, здобутої звільненням її від зайвих зв'язків.

3. Завантажуємо основну систему заданим навантаженням і зайвими

невідомими зусиллями, що замінюють дію усунених зв'язків. Така система називається *еквівалентною системою (equivalent system)*.

4. Для того щоб основна система була еквівалентною вихідній системі, невідомі зусилля треба добирати так, щоб деформація основної системи не відрізнялася від деформації вихідної статично невизначуваної. Для цього прирівнюють до нуля переміщення точок прикладання невідомих зусиль у напрямі їх дії. Із здобутих таким чином рівнянь знаходять значення зайвих невідомих.

Визначати переміщення відповідних точок основної системи можна будь-яким способом, проте найкраще загальними методами – методом Мора або способом Верещагіна.

Знайшовши зайві невідомі зусилля, визначаємо реакції, будуємо епюри внутрішніх силових факторів, а також добираємо перерізи та перевіряємо міцність звичайними способами.

Наведена схема розрахунку має назву *методу сил (work method)*, оскільки як основні невідомі тут вибирають зусилля зайвих зв'язків.

3.1.2 Канонічні рівняння (canonical equations) методу сил

Додаткові рівняння переміщень, що виражають рівність нулю переміщень у напрямках зайвих невідомих, зручно складати в так званій *канонічній формі*, тобто за певною закономірністю.

Спочатку розглянемо систему один раз статично невизначувану (рис. 3.6, а). Як зайву невідому виберемо шарнірно-рухому опору B . Тоді, навантаживши основну систему заданим навантаженням і зайвою невідомою силою X_1 (рис. 3.6,

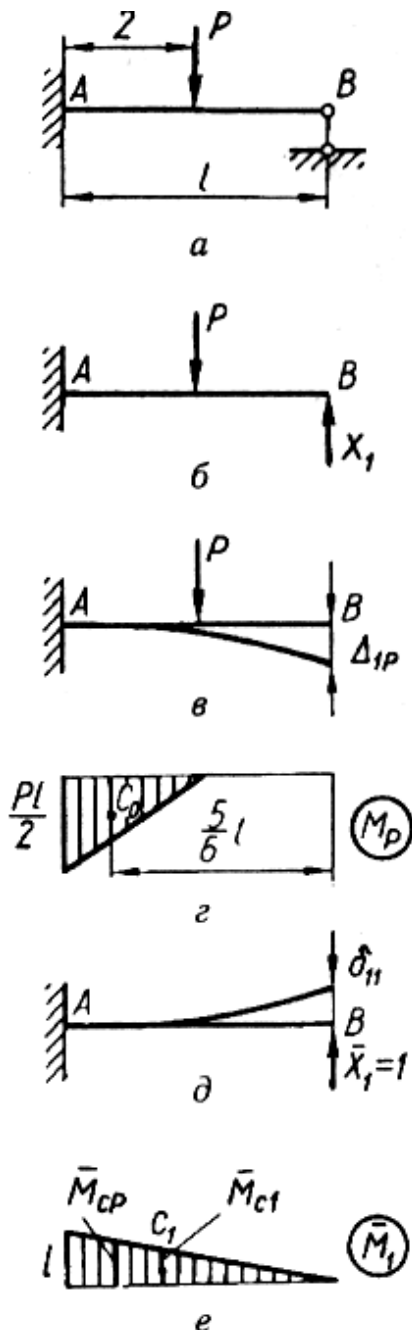


Рисунок 3.6 -
Розкриття статичної
невизначеності

б) отримаємо рівняння

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (3.2)$$

де Δ_{IP} – переміщення від заданого навантаження (рис. 3.6, в);

δ_{II} – переміщення в напрямі X_I від сили $\overline{X_I} = 1$ (рис. 3.6, δ).

Це канонічна форма рівняння переміщень для один раз статично невизначуваної системи. З формули (3.2)

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}, \quad (3.3)$$

або, обчислюючи переміщення δ_{II} та Δ_{IP} , використовуючи формулу Верещагіна і дані рис. 3.6, з, е, матимемо

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{\bar{\omega}_1 \bar{M}_{C1}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EJ}; \\ \Delta_{1P} &= \frac{\omega_P \bar{M}_{CP}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{Pl^2}{4} \left(-\frac{5}{6} l \right) = -\frac{5Pl^3}{48EJ}.\end{aligned}$$

Підставивши ці дані у формулу (3.3), остаточно знайдемо

$$X_1 = \frac{5}{16}P.$$

Для системи з двома зайвими зв'язками, як, наприклад, на рис. 3.7, а, б матимемо

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Це канонічна форма рівнянь переміщень для системи двічі статично невизначуваної.

За аналогією можна записати в канонічній формі рівняння перемі-
щень для будь-якої n разів статично невизначуваної системи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ... + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P}=0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ... + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P}=0; \\ \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ... + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP}=0. \end{array} \right.$$

Переміщення Δ_{iP} та δ_{ik} , що входять до канонічних рівнянь, найчастіше визначають за методом Мора або способом Верещагіна. При цьому для балок та рам впливом поперечних та поздовжніх сил, як правило, нехтують і враховують лише згинальні моменти. Однак, визначаючи переміщення в балках прямокутного поперечного перерізу, для яких відно-

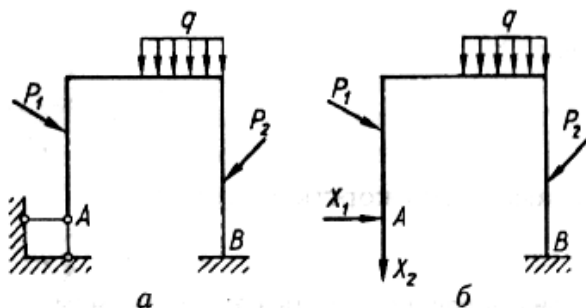


Рисунок 3.7 - Задана і еквівалентна система

шення висоти перерізу до довжини прогону $h/l \geq 1/5$, поперечні сили враховувати обов'язково. При розрахунку статично невизначуваних рам з великими зазначеними відношеннями ($h/l > 1/5$) похибка, спричинена неврахуванням інтегралів поздовжніх та поперечних сил, також може стати істотною, особливо для високих рам. Слід мати на увазі, що в реальних балкових, рамних та арочних конструкціях відношення h/l , як правило, менше за $1/10$. Тому при обчисленні переміщень у загальній формулі Мора цілком допустимо зберегти інтеграл, що враховує лише згинальні моменти.

Для визначення переміщень будемо епюри згинальних моментів (див., наприклад, рис. 3.6) в основній системі окремо від заданого навантаження (стан P) і від кожної одиничної сили: $\overline{X}_1 = 1$ (стан 1); $\overline{X}_2 = 1$ (стан 2); ..., $\overline{X}_n = 1$ (стан n). Ординати відповідних епюр позначимо, як звичайно, через $M_P, \overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_n$. Тоді на підставі формули (3.9) знаходимо

$$\Delta_{1P} = \int_S \frac{\overline{M}_1 M_P ds}{EJ}; \Delta_{2P} = \int_S \frac{\overline{M}_2 M_P ds}{EJ}; \dots; \Delta_{nP} = \int_S \frac{\overline{M}_n M_P ds}{EJ}.$$

Питомі переміщення, що мають однакові індекси й називаються *головними коефіцієнтами канонічних рівнянь*, визначають так:

$$\delta_{11} = \int_S \frac{\overline{M}_1 M_1 ds}{EJ}; \delta_{22} = \int_S \frac{\overline{M}_2 M_2 ds}{EJ}; \dots; \delta_{nn} = \int_S \frac{\overline{M}_n M_n ds}{EJ}.$$

Очевидно, що ці переміщення додатні.

Питомі переміщення, в яких індекси неоднакові, називають *побічними коефіцієнтами* й визначають за формулами

$$\delta_{12} = \int_S \frac{\overline{M}_1 M_2 ds}{EJ}; \delta_{13} = \int_S \frac{\overline{M}_1 M_3 ds}{EJ}; \dots; \delta_{ik} = \int_S \frac{\overline{M}_i M_k ds}{EJ}.$$

Вони можуть бути додатними або від'ємними, а також дорівнювати нулю.

На підставі теореми про взаємність переміщень $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Для систем, що складаються з прямолінійних елементів, обчислювати переміщення зручно за способом Верещагіна. Наприклад, для статично невизначуваної балки, зображеної на рис. 3.6:

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega_P \overline{M}_{cP}}{EJ}; \delta_{11} = \frac{\Omega_1 \overline{M}_{c1}}{EJ}; \Omega_P = \frac{Pl^2}{8};$$

$$\overline{M}_{cP} = \frac{5}{6}l; \Omega_1 = \frac{l^2}{2}; \overline{M}_{c1} = \frac{2}{3}l.$$

Отже,

$$\Delta_{1P} = -\frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ}; \delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

З формули (3.3)

$$X_1 = \frac{5}{16} P.$$

3.1.3 Визначення переміщень у статично невизначуваних системах

Визначивши зайві невідомі зусилля, переміщення в статично невизначуваних системах можна знайти звичайними способами. При цьому слід користуватися методами, які в кожному окремому випадку найбільш просто приводять до результату. Наприклад, прогини та кути повороту перерізів статично невизначуваних балок, що несуть складне навантаження, зручно визначати за методом початкових параметрів. Спосіб Мора, що є універсальним, може застосовуватися в усіх випадках. Ним широко користуються при визначенні переміщень у балках, рамах, фермах.

Обчислюючи переміщення за формулою Мора

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \frac{\overline{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum \int_S \frac{\overline{N}_i N_P ds}{EF} + \sum \int_S \frac{\overline{Q}_i Q_P ds}{GF} \quad (3.4)$$

слід розглянути задану систему під дією навантаження (остаточні епюри силових факторів M , N та Q статично невизначуваної системи), а також під дією одиничного силового фактора, що відповідає шуканому переміщенню (одиничні епюри $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$, $\overline{Q}_i$). Якщо при цьому одиничні навантаження прикладати безпосередньо до заданої статично невизначуваної системи, то кожен раз для побудови одиничних епюр $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$, $\overline{Q}_i$ знову доведеться розв'язувати статично невизначувану задачу. Однак цього можна уникнути, якщо врахувати, що вихідна статично невизначувана система й основна статично визначувана, навантажена заданими силами та знайденими зайвими невідомими, повністю тотожні за умовами роботи. Тому, визначаючи будь-яке переміщення, ми маємо право прикладати одиничне навантаження до основної статично визначуваної системи. Остання може бути вибрана за будь-яким можливим варіантом.

Обчислимо взаємні переміщення точок A_1 , A_2 та B_1 , B_2 відповідно в горизонтальному та вертикальному напрямках для рами (рис. 3.8, а).

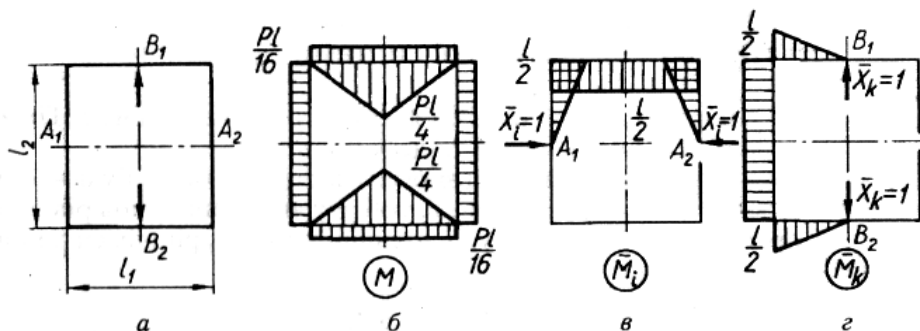


Рисунок 3.8 - Визначення взаємних переміщень

Визначимо лише переміщення, спричинені згинанням, оскільки переміщеннями від поздовжніх деформацій та зсуву можна знехтувати. На рис. 3.8, б наведено складові сумарної епюри згинальних моментів у вигляді, зручному для застосування способу Верещагіна.

Для визначення взаємного переміщення в горизонтальному напрямі точок A_1 , A_2 прикладаємо до основної системи в цих точках (рис. 3.8, в) одиничні сили $\overline{X}_i = 1$. Перемножуючи епюри M та $\overline{M}_i$ і вважаючи, що $l_1 = l_2 = l$ знаходимо

$$\Delta_{A_1-A_2} = \Delta_i = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{Pl^2}{16} \frac{l}{2} + \frac{Pl^2}{8} \frac{l}{2} - 2 \frac{Pl^2}{32} \frac{l}{4} \right) = \frac{Pl^3}{64EJ}.$$

Щоб визначити взаємне вертикальне переміщення точок B_1 та B_2 , прикладаємо до основної системи в цих точках дві одиничні сили $\overline{X}_k = 1$ (рис. 3.8, г). Перемножуючи епюри M та $\overline{M}_k$, знаходимо, що

$$\Delta_{B_1-B_2} = \Delta_k = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pl^2}{16} \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16} \frac{l}{6} \cdot 2 + \frac{l^2}{8} \frac{Pl}{16} \cdot 2 \right) = \frac{5}{192} \frac{Pl^3}{EJ}.$$

3.1.4 Контроль правильності розв'язання статично невизначуваної системи

Остаточні епюри N , Q та M обов'язково потрібно перевірити. Перевіряють при цьому умови рівноваги та деформацій.

Для перевірки умов рівноваги слід вирізати вузол або яку-небудь частину системи й переконатися в її рівновазі, тобто у виконанні умов рівності нулю суми проекцій або моментів усіх зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до цієї частини:

$$\Sigma P_x = 0; \Sigma P_y = 0; \Sigma M = 0.$$

При цьому потрібні величини слід брати безпосередньо з остаточних епюр.

Розглянемо, наприклад, як мають бути перевірені умови рівноваги для епюри згинальних моментів, наведеної на рис. 3.9. Виріжемо вузли B та C (рис. 3.10). Дію відкинутих частин рами на вузли замінимо відповідно згинальними моментами M_{BA} , M_{BC} , M_{BE} та M_{CB} , M_{CD} . Напрями моментів відповідають розміщенню епюр на стиснутих волокнах.

З умов рівноваги вузла B випливає, що

$$M_{BA} + M_{BE} - M_{BC} = 0.$$

З умови рівноваги вузла C випливає, що моменти M_{CB} та M_{CD} мають бути однаковими за модулем та протилежні за напрямом. Аналогічно можна перевірити епюри N та Q .

Зазначимо, що перевірка умов рівноваги не є достатньою, оскільки перевірка правильності побудови епюр за знайденими значеннями зайвих невідомих зусиль не дає підстав для міркування про правильність самих величин.

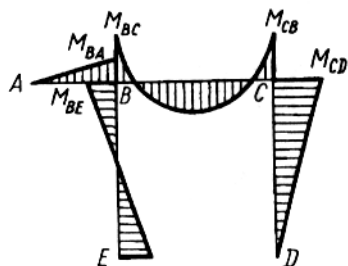


Рисунок 3.9 - Епюра згинального моменту

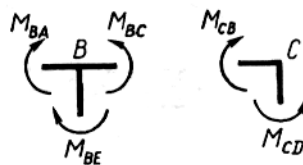


Рисунок 3.10 - Рівновага вузлів рами

Загальним контролем є перевірка виконання умов нерозривності деформацій. При цьому слід переконатися, що остаточні епюри узгоджуються з умовами опорних закріплень та нерозривності контуру.

Оскільки в заданій статично невизначуваній системі переміщення в напрямі будь-якого зайвого зв'язку дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів на епюру моментів якого завгодно i -го стану основної системи має дорівнювати нулю, тобто

$$\sum \int \frac{\overline{M}_i M ds}{EJ} = 0.$$

Як основну систему i -го стану найкраще вибирати систему, відмінну від взятої при розрахунку. Кількість перевірок умов деформацій має дорівнювати кількості зайвих зв'язків.

Оскільки при розрахунку системи зайві невідомі обчислюються з певною точністю, то й результати перевірки, звичайно, мають деяку похибку – шукані переміщення не дорівнюють нулю. Тому при перевірці рекомендується окремо обчислювати суми додатних та від'ємних членів. Якщо різниця між обома сумами, виражена у відсотках до меншої з них, невелика (до 5%), то результат розрахунку можна вважати задовільним.

3.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

Задача 11. Розкриття статичної невизначуваності рами

Для заданої статично невизначеної сталеві рами (рис. 3.11) двотаврового поперечного перерізу побудувати епюри внутрішніх зусиль. Підібрати номер двотавра при $[\sigma] = 160$ МПа та визначити величину переміщень вертикального $f_A^{верт}$, горизонтального $f_A^{гор}$ або кут повороту Θ_A перерізу в т. А, вказаного в таблиці 3.1.

План розв'язування:

1. Визначити ступінь статичної невизначуваності;
2. Вибрати основну та скласти еквівалентну систему;

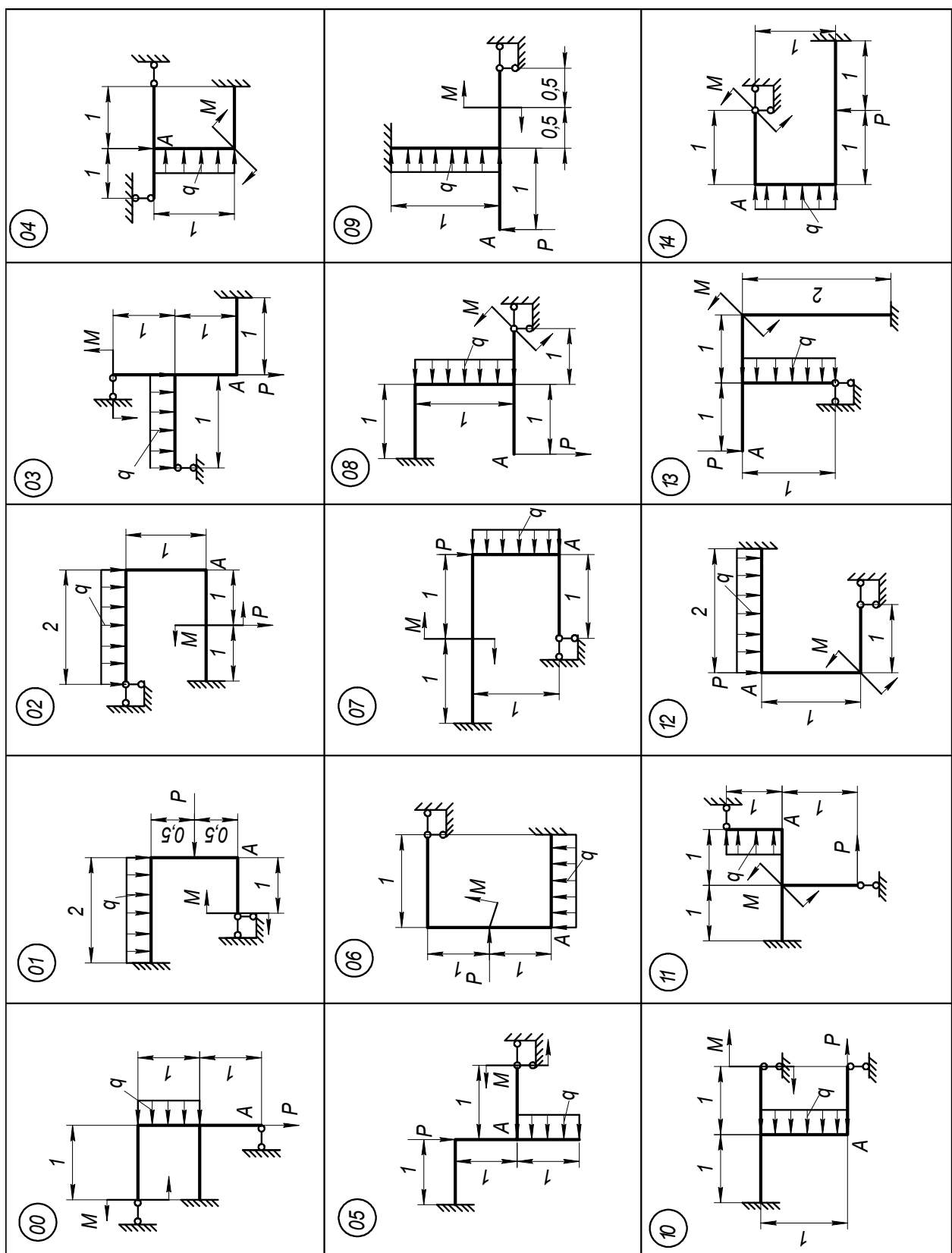


Рисунок 3.11 - Схеми до виконання задачі 11

3. Скласти канонічні рівняння методу сил, визначити коефіцієнти цих рівнянь та розв'язати отриману систему рівнянь;
4. Побудувати епюри поперечної, поздовжньої сили та згинального моменту;
5. Виконати деформаційну перевірку правильності розкриття статичної невизначуваності;
6. Підібрати двотавровий переріз рами за умовою міцності за нормальними напруженнями;
7. Визначити переміщення перерізу в т. А, вказаного в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

номер варіанта	q, кН/м	P, кН	M, кНм	Переміщення
0	0	20	30	$f_A^{верт} *$
1	30	20	0	Θ_A
2	20	0	40	$f_A^{гор} *$
3	0	20	30	Θ_A
4	40	20	0	$f_A^{верт} *$
5	30	0	20	Θ_A
6	0	20	10	$f_A^{гор} *$
7	10	20	0	Θ_A
8	20	0	60	$f_A^{верт} *$
9	0	20	50	Θ_A

*Якщо вказане переміщення дорівнює нулю (за схемою навантаження одиничною силою), то необхідно шукати інше переміщення: $f_A^{верт}$ або $f_A^{гор}$.

Приклад виконання задачі 11

Розрахувати статично невизначену раму, зображену на рис. 3.12, а, згідно з планом задачі 11.

Дано:

$P = 5$ кН;

$M = 15$ кН·м;

$q = 10$ кН/м;

$[\sigma] = 160$ МПа.

Знайти:

N , Q і M_z ; № перерізу; вертикальне та кутове переміщення т. С.

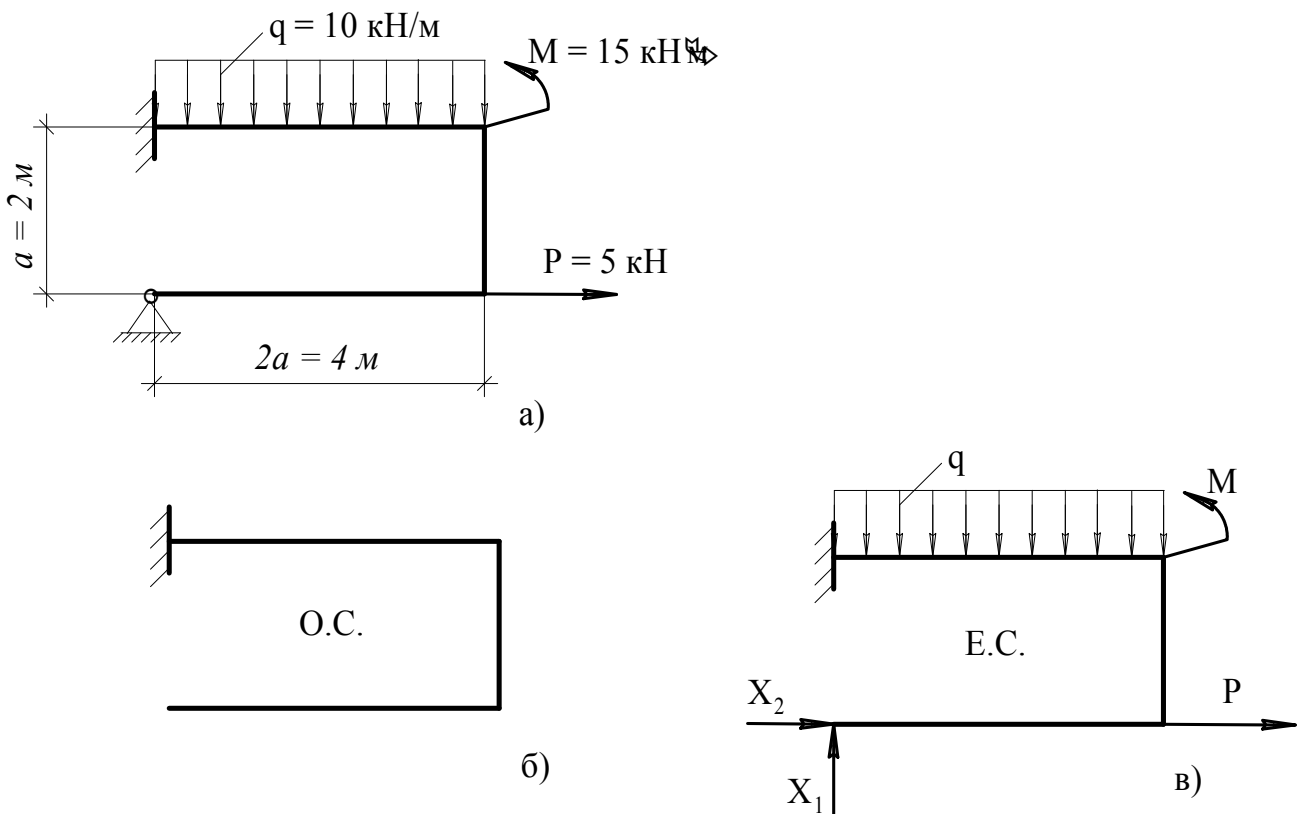


Рисунок 3.12 - Задана, основна і еквівалента системи

Розв'язування

1. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності
 $s = 3k - \text{ш} = 3 \cdot 2 - 4 = 2$.
2. Вибираємо основну систему (рис. 3.12, б).
3. Будуємо еквівалентну систему (рис. 3.12, г). X_1, X_2 позначені невідомі реакції опори в т. А.
4. Записуємо систему канонічних рівнянь методу сил та визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

4.1. Завантажуємо основну систему одиничною силою $\overline{X_1} = 1$ (замість невідомої X_1 в тому ж напрямку) (рис. 3.13). Будуємо епюри згинального моменту $\overline{M_1}$ від дії одиничної сили (вважаємо, що поздовжні та поперечні сили створюють набагато менші переміщення, ніж згинальний момент, тому ними будемо нехтувати).

4.2. Завантажуємо основну систему одиничною силою $\overline{X_2} = 1$. Будуємо епюри згинального моменту $\overline{M_2}$ для одиничного стану (рис. 3.13).

4.3. Завантажуємо основну систему зовнішнім навантаженням. Будуємо епюри згинального моменту M_p для вантажного стану (рис. 3.13).

4.4. Визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь шляхом розкриття інтеграла Мора через способи Верещагіна, Сімпсона-Карнаухова, Верещагіна-Даркова (додаток Ж). Спосіб перемноження епюр на кожній ділянці вибирається за бажанням, проте важливо пам'ятати, що спосіб Верещагіна-Даркова справедливий лише для прямолінійних епюр.

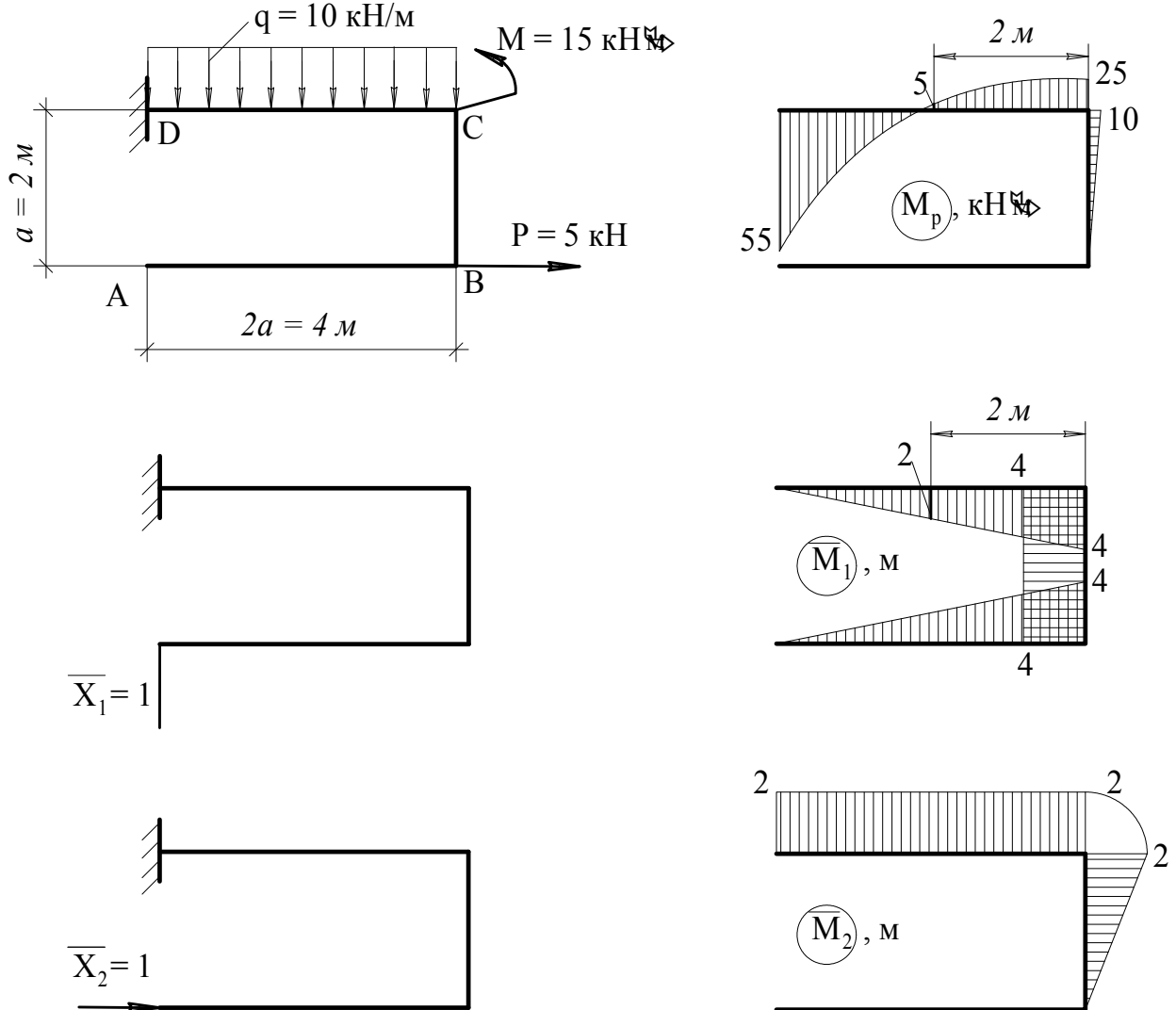


Рисунок 3.13 - Вантажні та одиничні епюри

$$\delta_{11} = \sum \int_S \frac{\overline{M_1} \overline{M_1} ds}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 4 \right] \cdot 2 + \frac{1}{EJ_z} \cdot (4 \cdot 2) \cdot [4] = \frac{224}{3EJ_z};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int_S \frac{\overline{M_1} \overline{M_2} ds}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot [2] - \frac{1}{EJ_z} \cdot (4 \cdot 2) \cdot [1] = -\frac{24}{EJ_z};$$

$$\delta_{22} = \sum \int_S \frac{\overline{M_2} \overline{M_2} ds}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \cdot (2 \cdot 4) \cdot [2] + \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{56}{3EJ_z};$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int_S \frac{M_p \overline{M_1} ds}{EJ_z} = \frac{4}{6EJ_z} \cdot (-25 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 5) - \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot [4] = -\frac{400}{3EJ_z};$$

$$\Delta_{2p} = \sum_S \int \frac{M_p \overline{M}_2 ds}{EJ_z} = \frac{4}{6EJ_z} \cdot (-55 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 5 + 25 \cdot 2) + \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 2\right] = 0.$$

4.5. Розв'язуємо систему канонічних рівнянь методу сил та визначаємо X_1, X_2

$$\left. \begin{aligned} \frac{224}{3EJ_z} X_1 - \frac{24}{EJ_z} X_2 - \frac{400}{3EJ_z} &= 0; \\ -\frac{24}{EJ_z} X_1 + \frac{56}{3EJ_z} X_2 + 0 &= 0. \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{224}{3} X_1 - 24 X_2 - \frac{400}{3} &= 0; \\ -24 X_1 + \frac{56}{3} X_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ або } \left. \begin{aligned} 28 X_1 - 9 X_2 - 50 &= 0; \\ -9 X_1 + 7 X_2 &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

Звідки дістаємо (шляхом стандартного розв'язання отриманої системи рівнянь)

$$X_1 = \frac{70}{23} = 3,043 \text{ (кН)},$$

$$X_2 = \frac{90}{23} = 3,913 \text{ (кН)}.$$

Виконуємо перевірку розв'язку

$$28 \cdot \frac{70}{23} - 9 \cdot \frac{90}{23} - 50 = 0;$$

$$-9 \cdot \frac{70}{23} + 7 \cdot \frac{90}{23} = 0.$$

5. Розглядаємо еквівалентну систему разом із знайденими реакціями X_1, X_2 (рис. 3.14) та будуємо епюри N, Q і M_z .

6. Виконуємо перевірку розкриття статичної невизначеності (деформаційну). Кількість перевірок має бути рівною ступеню статичної невизначеності.

Вибираємо основну систему, відмінну від попередньої і визначаємо переміщення точок, які за умовою задачі дорівнюють „0”. Зокрема, вертикальне та кутове переміщення перерізу в точці D (рис. 3.14).

6.1. Завантажуємо основну систему одиничною силою $\overline{X}_3 = 1$. Знаходимо необхідні реакції. Будуємо епюри згинального моменту $\overline{M}_3$ для одиничного стану (рис. 3.15).

Вертикальне переміщення перерізу в точці D

$$f_D^{sep} = \Delta_{3p} = \sum \int_S \frac{M_z \overline{M}_3 ds}{EJ_z} = \frac{4}{6EJ_z} \cdot (-4 \cdot 6,739 \cdot 2 - 20,654 \cdot 4) -$$

$$- \frac{2}{6EJ_z} \cdot (-2 \cdot 5,654 \cdot 4 + 2 \cdot 12,172 \cdot 4 + 12,172 \cdot 4 - 5,654 \cdot 4) +$$

$$+ \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 12,174 \cdot 4 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 4 \right] \right) = \frac{0,03}{EJ_z} \approx 0.$$

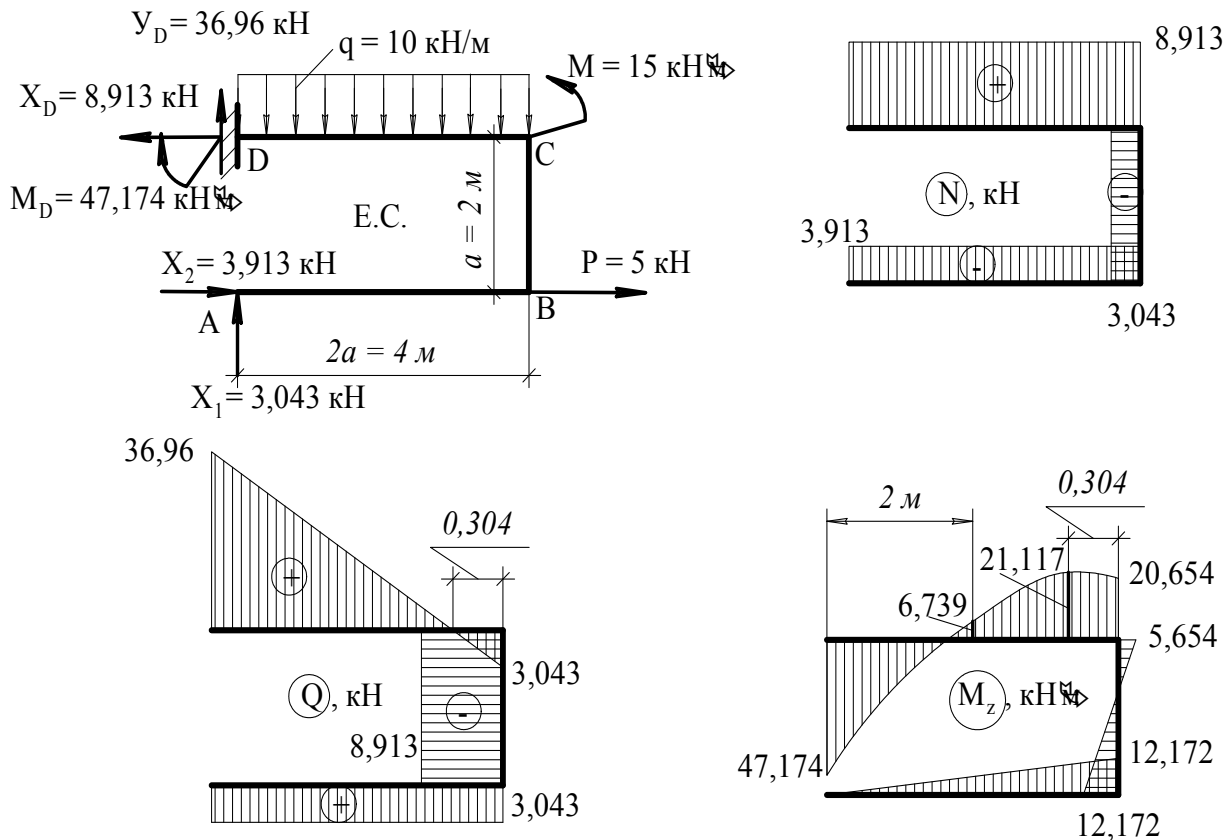


Рисунок 3.14 - Епюри внутрішніх зусиль

6.2. Завантажуємо основну систему одиничним моментом $\overline{X}_4 = 1$. Знаходимо необхідні реакції. Будуємо епюри згинального моменту $\overline{M}_4$ для одиничного стану (рис. 3.15).

Кутове переміщення перерізу в точці D

$$\theta_D = \Delta_{4p} = \sum \int_S \frac{M_z \overline{M}_4 ds}{EJ_z} = \frac{2}{6EJ_z} \cdot (5,654 \cdot 2 \cdot 1 - 12,172 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{4}{6EJ_z} \cdot (-47,174 \cdot 1 + 4 \cdot 6,739 \cdot 1 + 20,654 \cdot 1) = \frac{0,003}{EJ_z} \approx 0.$$

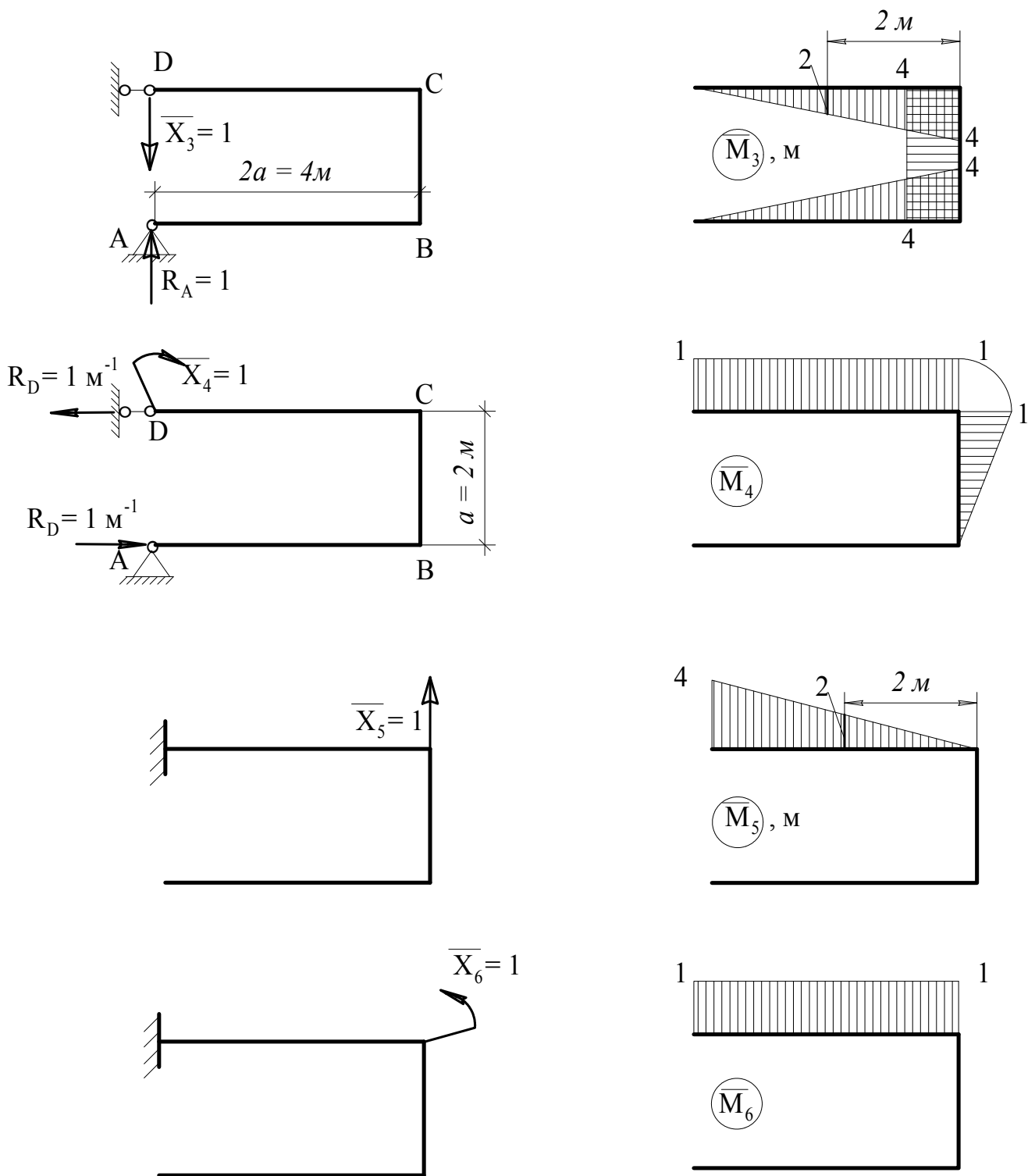


Рисунок 3.15 - Одиничні епюри

Оскільки знайдені переміщення близькі до нуля (через округлення розрахункових величин), то робимо висновок, що статична невизначеність розкрита правильно.

7. Підбираємо переріз за умовою міцності.

Поперечними та поздовжніми силами нехтуємо.

Умова міцності

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Необхідний момент опору

$$W_z \geq \frac{M_{z\max}}{[\sigma]} = \frac{47,174 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 297,8 \cdot 10^{-6} (\text{м}^3) = 297,8 \text{ см}^3.$$

За сортаментом підбираємо двотавр 24а (додаток В), для якого $W_z = 317 \text{ см}^3$, $I_z = 3800 \text{ см}^4$.

8. Визначаємо вертикальне та кутове переміщення т. С.

8.1. Завантажуємо основну систему (можна будь-яку, проте простіше працювати з консольною рамою при побудові епюр) одиничною силою $\overline{X}_5 = 1$. Будуємо епюри згинального моменту $\overline{M}_5$ для одиничного стану (рис. 3.15).

Вертикальне переміщення перерізу в точці С

$$\begin{aligned} f_C^{\text{верт}} = \Delta_{5p} &= \sum \int_S \frac{M_z \overline{M}_5 ds}{EJ_z} = \frac{4}{6EJ_z} \cdot (4 \cdot 6,739 \cdot 2 - 47,174 \cdot 4) = \\ &= -\frac{89,86}{EJ_z} = -\frac{89,86 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = -0,0113 (\text{м}) = -11,3 (\text{мм}). \end{aligned}$$

Знак мінус показує, що переріз переміщується вниз (проти напрямку одиничної сили $\overline{X}_5 = 1$).

8.2. Завантажуємо основну систему одиничним моментом $\overline{X}_6 = 1$. Будуємо епюри згинального моменту $\overline{M}_6$ для одиничного стану (рис. 3.15).

Кутове переміщення перерізу в точці С

$$\begin{aligned} \theta_C = \Delta_{6p} &= \sum \int_S \frac{M_z \overline{M}_6 ds}{EJ_z} = \frac{4}{6EJ_z} \cdot (-47,174 \cdot 1 + 4 \cdot 6,739 \cdot 1 + 20,654 \cdot 1) = \\ &= \frac{0,291}{EJ_z} = \frac{0,291 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = 3,65 \cdot 10^{-5} (\text{рад}) = 0,0021^\circ. \end{aligned}$$

Отриманий кут повороту близький до нуля.

Відповідь: двотавр 24а, $\theta_C = 0,0021^\circ \approx 0$, $f_C^{\text{верт}} = 11,3 \text{ мм}$.

Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 11)

1. Записати систему канонічних рівнянь для один раз та двічі статично невизначеної системи.
2. Як визначити ступінь статичної невизначеності рами?

3. Що називається основною системою? Нарисувати принаймні дві основних системи для заданої.
4. Що називається еквівалентною системою?
5. Що називається вантажним станом при розкритті статичної невизначуваності системи?
6. Як визначаються коефіцієнти канонічних рівнянь методу сил? Показати на прикладі.
7. За яким алгоритмом розкривають статичну невизначеність рами?
8. За яким алгоритмом визначаються переміщення перерізу в статично невизначуваній рамі?
9. В чому полягає зміст деформаційної перевірки розкриття статичної невизначуваності?

4 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

4.1 Короткі теоретичні відомості

4.1.1 Стійка та нестійка пружна рівновага

Виконуючи розрахунки на міцність та жорсткість при різних деформаціях, ми вважали, що під час деформації будь-якої системи має місце лише одна наперед відома форма рівноваги. Насправді у деформованому стані рівновага між зовнішніми та спричиненими ними внутрішніми силами пружності може бути не тільки стійкою, а й нестійкою.

Пружна рівновага буде *стійкою*, якщо деформоване тіло при будь-якому малому відхиленні від стану рівноваги намагається повернутися до початкового стану й повертається до нього після припинення зовнішнього впливу, який порушив початковий стан рівноваги.

Пружна рівновага *нестійка*, якщо деформоване тіло, виведене з неї будь-якою зовнішньою дією, продовжує деформуватися в напрямі наданого йому відхилення й після припинення зовнішньої дії у вихідний стан не повертається.

Між цими двома станами рівноваги існує перехідний стан, який називається *критичним*, при якому деформоване тіло перебуває у байдужій рівновазі: воно може зберегти вихідну форму, але може й втратити її внаслідок навіть дуже незначного впливу.

Стійкість форми рівноваги деформованого тіла залежить від прикладених до нього навантажень. Наприклад, якщо сили, що стискають стержень, невеликі, то вихідна форма рівноваги залишається стійкою (рис. 4.1, *а*). При зростанні прикладених сил досягається стан байдужої рівноваги, при якому поряд з прямолінійною формою стержня можливі суміжні з нею злегка викривлені форми рівноваги (штрихові лінії на рис. 4.1, *б*). При дальшому найнезначнішому збільшенні навантаження характер деформації стержня різко змінюється – стержень випинається (*buckling*) (рис. 4.1, *в*),

прямолинійна форма рівноваги перестає бути стійкою. Це означає, що навантаження перевищило критичне значення.

Навантаження, перевищення якого спричинює втрату стійкості вихідної форми тіла, називають критичним і позначають $P_{кр}$ (critical load).

Можна стверджувати, що досягнення навантаженнями критичних значень рівнозначне руйнуванню конструкції, оскільки нестійка форма рівноваги неминуче буде втрачена, що пов'язано з практично необмеженим зростанням деформацій та напружень. Особлива небезпека руйнування внаслідок втрати стійкості полягає в тому, що, як правило, воно відбувається раптово й при низьких значеннях напружень, коли міцність елемента ще далеко не вичерпана.

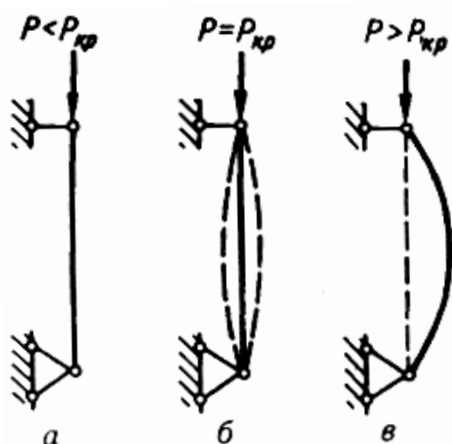


Рисунок 4.1 - Поздовжня втрата стійкості

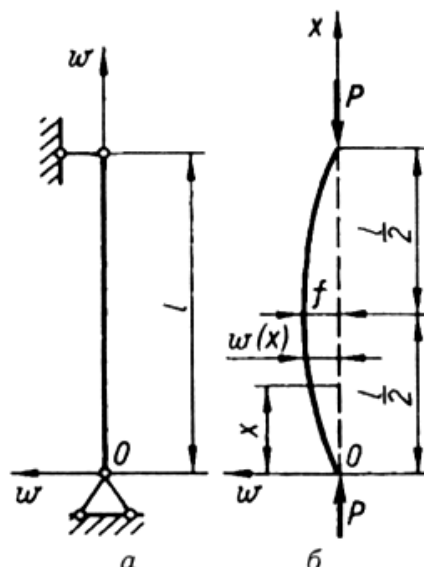


Рисунок 4.2 - До виведення формули Ейлера

До моменту настання критичного стану пружні деформації за модулем зовсім невеликі, і зростання їх майже непомітне для ока. Проте з моменту настання критичного стану до моменту руйнування залишкові деформації наростають надто швидко, й практично немає часу вжити заходів щодо запобігання катастрофі, яка загрожує. Отже, при розрахунку на стійкість критичне навантаження подібне руйнівальному при розрахунку на міцність. Для забезпечення певного запасу стійкості необхідно, щоб задовольнялася умова

$$P \leq [P]. \quad (4.1)$$

Тут

$$[P] = P_{кр} / n_{ст}. \quad (4.2)$$

де P – діюче навантаження; $n_{ст}$ – коефіцієнт запасу стійкості.

Отже, щоб розрахувати стиснуті стержні на стійкість, треба вивчити способи визначення критичних навантажень $P_{кр}$.

4.1.2 Формула Ейлера для визначення критичної сили стиснутого стержня

Припустимо, що під дією сили P , яка дещо перевищує критичну силу $P_{кр}$, стержень з шарнірно закріпленими кінцями (рис. 4.2, а) трохи зігнувся (рис. 4.2, б).

Найменше значення поздовжньої стискальної критичної сили (*Euler load*) $P_{кр}$, при якому стає можливим поздовжнє згинання

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}. \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) є формулою, що вперше була виведена Ейлером.

4.1.3 Вплив умов закріплення кінців стержня на значення критичної сили

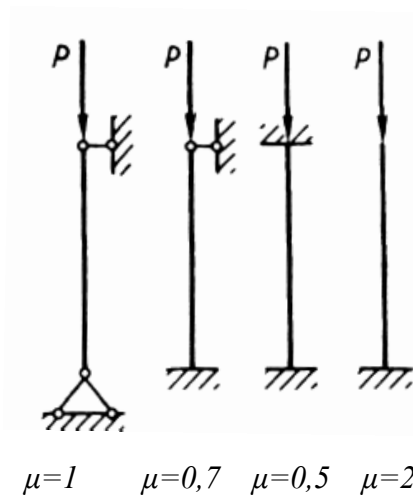


Рисунок 4.3 - Коефіцієнти приведення довжини

чення μ для деяких стержнів, що найбільш часто зустрічаються на практиці.

Різні випадки обпирання та навантажування стержня зводяться до основного випадку введенням у формулу для $P_{кр}$ так званої зведеної довжини $l_{зв} = \mu l$. Це поняття вперше було використано Ф. С. Ясинським.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (4.4)$$

де $\mu l = l_{зв}$ – зведена довжина стержня;

l – фактична довжина стержня;

μ – коефіцієнт зведення довжини.

З формули Ейлера (4.4) випливає, що критичне навантаження залежить від найменшої жорсткості $EJ_{\min}$, довжини стержня l та коефіцієнта μ . На рис. 4.3 наведено значення μ для деяких стержнів, що найбільш часто зустрічаються на практиці.

4.1.4 Поняття про втрату стійкості при напруженнях, що перевищують границю пропорційності

Виведення формули Ейлера ґрунтується на застосуванні диференціального рівняння пружної лінії. Тому скористатися цією формулою можна лише тоді, коли справедливий закон Гука, тобто доки критичне напруження (напруження стискання, що відповідає критичній силі) не перевищує границі пропорційності:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq \sigma_{пц}. \quad (4.5)$$

Виведемо формулу для критичного напруження $\sigma_{кр}$. Відповідно до виразів (4.5) та (4.4)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{F(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i)^2}. \quad (4.6)$$

Тут $i^2 = i_{\min}^2 = J_{\min} / F$ – квадрат найменшого з головних радіусів інерції стержня; $F = F_{бр}$ – площа брутто поперечного перерізу стержня. Ввівши безрозмірну величину

$$\lambda = \mu l / i, \quad (4.7)$$

що називається *гнучкістю стержня (slenderness ratio of a bar)*, остаточно знайдемо

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (4.8)$$

тобто критичне напруження стержня залежить тільки від пружних властивостей матеріалу (модуля пружності E) та гнучкості стержня λ .

Функціональна залежність (4.8) становить видозміну формули Ейлера. У системі координат $\sigma_{кр} \approx \lambda$ цю залежність можна подати у вигляді гіперболічної кривої, що називається *гіперболою Ейлера*. Як приклад наведемо такий графік (рис. 4.4) для стержня зі сталі марки Ст.3, для якої модуль пружності $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, границя текучості $\sigma_{\tau} = 240$ МПа, а границя пропорційності $\sigma_{пц} = 200$ МПа. Графік показує, що із зростанням гнучкості стержня критичне напруження прямує до нуля, і навпаки, із наближенням гнучкості стержня до нуля критичне напруження прямує до нескінченності.

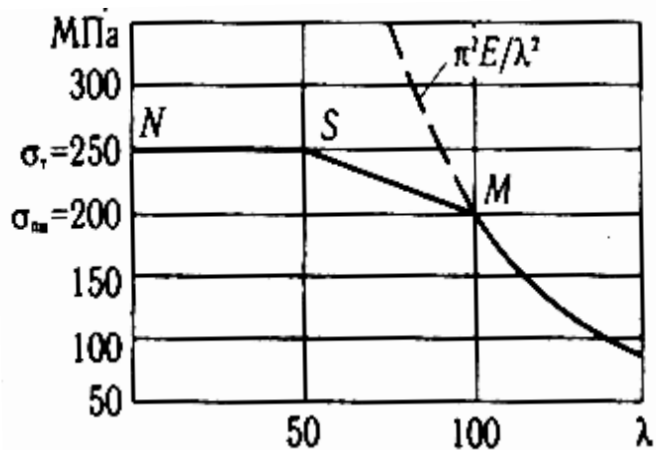


Рисунок 4.4 - Залежність критичних напружень і гнучкості

Однак з умови (4.5) застосованості формули Ейлера відповідно до формули (4.8) маємо

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

і, отже,

$$\lambda_{кр} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (4.9)$$

Це означає, що формула Ейлера стає непридатною при гнучкості стержня, меншій за граничне значення $\lambda_{кр}$, яке залежить тільки від властивостей матеріалу, тобто в розглядуваному прикладі при

$$\lambda < \lambda_{ep} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Те саме можна отримати і графічно. Якщо на осі ординат ($\sigma_{кр}$) відкласти значення границі пропорційності ($\sigma_{пц} = 200$ МПа) і провести із отриманої точки K пряму, паралельну осі абсцис, то вона в перетині з гіперболою Ейлера дасть точку M , абсциса якої і є λ_{ep} . Ліворуч від точки M гіперболу Ейлера зображено штриховою лінією, оскільки вона тут дає значення напружень вищі за границю пропорційності, тобто такі, що не відповідають умовам її застосування.

Проте явище поздовжнього згинання продовжує існувати й за границею пружності. Дослідами встановлено, що дійсні критичні напруження для стержнів середньої та малої гнучкості $\lambda < \lambda_{ep}$ менші, ніж визначені за формулою Ейлера. Отже, в цьому разі формула Ейлера дає завищені значення критичної сили, тобто завжди переоцінює дійсну стійкість стержня. Тому використання формули Ейлера для стержнів, що втрачають стійкість за границею пружності, не тільки принципово неправильне, а й дуже небезпечне за своїми наслідками.

Теоретичне розв'язання задачі про стійкість за границею пропорційності складне, тому зазвичай користуються емпіричними формулами, отриманими в результаті обробки багатьох дослідних даних.

Ф. С. Ясинський зібрав та обробив великий дослідний матеріал щодо поздовжнього згинання стержнів, у результаті чого склав таблицю критичних напружень залежно від гнучкості для низки матеріалів та запропонував просту емпіричну формулу для обчислення критичних напружень за границею пропорційності:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda. \quad (4.10)$$

Значення коефіцієнтів a та b для деяких матеріалів наведено в табл. Е.2 (додаток Е). Для чавуну користуються параболічною залежністю

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (4.11)$$

де $c = 0,53$.

За цими даними для кожного матеріалу при $0 < \lambda < \lambda_{ep}$ можна побудувати графік залежності критичних напружень від гнучкості стержня.

За деяким значенням гнучкості (позначимо його λ_0) напруження $\sigma_{кр}$, обчислене за формулою (4.10) або (4.11), стає таким, що дорівнює граничному напруженню при стисканні, а саме:
для пластичних матеріалів

$$\sigma_{кр} = \sigma_T,$$

для крихких матеріалів

$$\sigma_{кр} = \sigma_B. \quad (4.12)$$

Стержні, в яких $\lambda < \lambda_0$, називають *стержнями малої гнучкості*. Їх розраховують тільки на міцність.

У розглядуваному прикладі (рис. 4.4) частина графіка критичних напружень за границею пропорційності (при $50 < \lambda < 100$) має вигляд злегка нахиленої прямої SM , а частина (при $0 < \lambda < 50$) – горизонтальної лінії NS . Отже, графік $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ для сталі Ст.3 складається з трьох частин: гіперболи Ейлера при $\lambda > 100$, похилої прямої при $50 < \lambda < 100$ та майже горизонтальної прямої при $\lambda < 50$. Похила пряма SM відповідає напруженням між границею пропорційності і границею текучості. Горизонтальна пряма SN відповідає напруженню, що дорівнює границі текучості.

4.1.5 Розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження

Можна вважати, що нейтрально стиснуті стержні втрачають свою несучу здатність від втрати стійкості раніше, ніж від втрати міцності, оскільки критичне напруження завжди менше за границю текучості або границю міцності:

$$\sigma_{кр} < \sigma_n,$$

де $\sigma_n = \sigma_T$ – для пластичних матеріалів;

$\sigma_n = \sigma_B$ – для крихких матеріалів.

Слід нагадати, що для стержнів малої гнучкості ($\lambda < \lambda_0$) важко казати про явище втрати стійкості прямолінійної форми стержня, як це має місце для стержнів середньої та великої гнучкості. Несуча здатність стержнів малої гнучкості визначається міцністю матеріалу.

Критичне напруження для центрально стиснутих стержнів середньої та великої гнучкості, мабуть, більш небезпечне, ніж границя текучості для пластичних матеріалів або границя міцності для крихких матеріалів при простому розтяганні. Очевидно, що при практичному вирішенні питання щодо стійкості стержня не можна припустити виникнення в ньому критичного напруження, а слід взяти відповідний запас стійкості.

Щоб визначити допустиме напруження на стійкість, потрібно вибрати коефіцієнт запасу n_{cm} . Тоді

$$[\sigma_{cm}] = \sigma_{кр} / n_{cm}. \quad (4.13)$$

Коефіцієнт запасу на стійкість беруть дещо більший, ніж основний коефіцієнт запасу на міцність ($n_{cm} > n$). Це обумовлено тим, що для центрально стиснутих стержнів низка обставин, неминучих на практиці (ексцентриситет прикладання стискальних сил, початкова кривина і неоднорідність стержня), сприяють поздовжньому згинанню, тоді як при інших видах деформації ці обставини майже не відбиваються. Коефіцієнт запасу стійкості для сталей вибирають у межах 1,8...3,0; для чавуну – 5,0...5,5; для деревини – 2,8...3,2. Зазначимо, що менші значення $n_{\tilde{\sigma}}$ вибирають для меншої гнучкості.

Допустиме напруження на стійкість $[\sigma_{cm}] = \sigma_{кр} / n_{cm}$ та допустиме напруження на міцність при стисканні $[\sigma_-] = \sigma_i / n$ взаємно пов'язані. Складемо відношення їх:

$$\frac{[\sigma_{cm}]}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{кр}}{n_{cm} \sigma_n}, \text{ або } [\sigma_{cm}] = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_n} \frac{n}{n_{cm}} [\sigma_-]. \quad (4.14)$$

Позначивши

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_n} \frac{n}{n_{cm}} = \varphi,$$

матимемо

$$[\sigma_{cm}] = \varphi [\sigma_-]. \quad (4.15)$$

Тут φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість. Цей коефіцієнт для кожного матеріалу можна обчислити при всіх значеннях гнучкості λ й подати у вигляді таблиці або графіка залежності φ від λ . Значення коефіцієнта φ для сталей, чавуну та деревини наведено в таблиці Е.1 (додаток Е). Користуючись аналогічними таблицями, можна досить просто розрахувати стержні на стійкість.

Складемо умову стійкості стиснутих стержнів:

$$\sigma \leq [\sigma_{cm}]. \quad (4.16)$$

Оскільки

$$\sigma = N / F_{\sigma p}, \text{ а } [\sigma_{cm}] = \varphi [\sigma_-],$$

то умова стійкості набирає вигляду

$$\sigma = N / F_{\sigma p} \leq \varphi [\sigma_-]. \quad (4.17)$$

При розрахунку на стійкість місцеві ослаблення перерізу практично не змінюють значення критичної сили, тому в розрахункові формули вводиться повна площа $F_{\sigma p}$ поперечного перерізу.

Розглянемо два види розрахунку на стійкість стиснутих стержнів – перевірний та проектувальний.

4.1.6 Перевірний розрахунок стиснутих стержнів

Порядок перевірного розрахунку на стійкість при використанні таблиці коефіцієнтів φ такий:

1) виходячи з відомих розмірів та форми поперечного перерізу, визначаємо найменший осьовий момент інерції $J_{\min}$, площу $F_{\sigma p}$, обчислюємо мінімальний радіус інерції

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F_{\sigma p}}$$

та гнучкість

$$\lambda = \mu l / i_{\min};$$

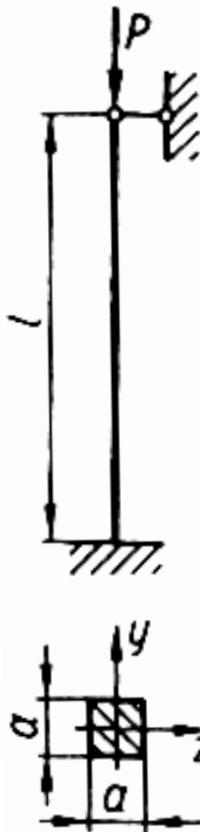
2) за таблицею знаходимо коефіцієнт φ та обчислюємо допустиме напруження на стійкість за формулою

$$[\sigma_{ст}] = \varphi[\sigma_-];$$

3) порівнюємо дійсне напруження $\sigma = P / F_{до}$ з допустимим напруженням $\sigma_{до}$ на стійкість:

$$\sigma \leq [\sigma_{ст}].$$

Приклад. Перевіримо на стійкість стиснуту дерев'яну колону (рис. 4.5) квадратного поперечного перерізу ($a = 15$ см) завдовжки $l = 5$ м, якщо основне допустиме напруження $[\sigma_-] = 10$ МПа, а стискальна сила $P = 100$ кН.



Визначаємо такі величини:

площу –

$$F = a^2 = 225 \text{ см}^2;$$

момент інерції –

$$J = \frac{a^4}{12} = \frac{15^4}{12} = 4210 \text{ см}^4;$$

радіус інерції –

$$i = \sqrt{J / F} = 4,34 \text{ см};$$

зведену довжину –

$$l_{зв} = \mu l = 0,7l = 0,7 \cdot 5 = 3,5 \text{ м} = 350 \text{ см};$$

гнучкість –

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{350}{4,34} = 80,6.$$

З таблиці Е.1 (додаток Е) інтерполяцією знаходимо, що

$$\varphi = 0,48 - \frac{0,48 - 0,38}{10} 0,6 = 0,474.$$

Тоді

$$[\sigma_{ст}] = \varphi[\sigma_-] = 0,474 \cdot 10 = 4,74 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{100 \cdot 10^3}{225 \cdot 10^{-4}} = 4,44 \text{ МПа}.$$

Оскільки $\sigma = 4,44 \text{ МПа} < 4,74 \text{ МПа}$, то стійкість колони забезпечено.

4.1.7 Проектувальний розрахунок

У розрахунковій формулі на стійкість

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F_{бр}} \leq [\sigma_-], \text{ або } F_{бр} \geq \frac{P}{\varphi[\sigma_-]},$$

є дві невідомі величини — коефіцієнт φ та шукана площа бруто $F_{бр}$ поперечного перерізу. Тому при доборі перерізів слід користуватися методом послідовних наближень, варіюючи значення коефіцієнта φ . Як правило, в першій спробі беруть $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,4$. Вибираючи будь-яке з цих значень φ_1 , визначають потрібну площу $F_{бр}$ та добирають переріз. Вибраний переріз перевіряють та визначають фактичне значення φ'_1 . Якщо φ'_1 значно відрізняється від φ_1 , то й напруження відрізняється від допустимого. Тоді слід повторити розрахунок, тобто зробити другу спробу, взявши середнє за модулем значення між φ_1 та φ'_1 :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}. \quad (4.18)$$

У результаті другої спроби визначають φ_2 . Якщо потрібна третя спроба, то

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2}$$

і т. д. Як правило, при доборі перерізів потрібно не більше ніж дві-три спроби.

Приклад. Доберемо за сортаментом двотавровий поперечний переріз стержня завдовжки 5 м, що зазнає дії центрального стискального навантаження 320 кН. Обидва кінці стержня затиснуті. Матеріал – сталь Ст.3. Основне допустиме напруження $[\sigma_-] = 160 \text{ МПа}$.

Визначимо розрахункову зведену довжину стержня:

$$l_{зв} = \mu l = 0,5l = 0,5 \cdot 500 = 250 \text{ см.}$$

Добираємо поперечний переріз за методом послідовних наближень.

Перша спроба: вибираємо $\varphi_1 = 0,5$; потрібна площа поперечного перерізу

$$F_{бр} = \frac{P}{\varphi[\sigma_-]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр 27 з площею $F = 40,2 \text{ см}^2$ та мінімальним радіусом інерції $i_{min} = i_{ст} = 2,54 \text{ см}$. Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{l_{зв}}{i_{min}} = \frac{250}{2,54} = 98,5.$$

За табл. Е.1 (додаток Е) при лінійній інтерполяції

$$\varphi'_1 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} 98,5 = 0,614 \gg \varphi_1 = 0,4.$$

Перейдемо до другого наближення, взявши $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,614}{2} \approx 0,557$.

Потрібна площа поперечного перерізу стержня

$$F = \frac{320 \cdot 10^3}{0,557 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 36 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр з площею $F = 37,5 \text{ см}^2$ та мінімальним радіусом інерції $i_{min} = i_{ст} = 2,63 \text{ см}$. Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{l_{3\theta}}{i_{\min}} = \frac{250}{2,63} = 95.$$

За таблиці Е.1 (додаток Е) знаходимо коефіцієнт φ'_2 :

$$\varphi'_2 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} 5 = 0,645 \gg \varphi_2 = 0,557.$$

Переходимо до третього наближення, взявши

$$\varphi_3 = \frac{0,557 + 0,645}{2} \approx 0,60.$$

Обчислюємо потрібну площу:

$$F = \frac{320 \cdot 10^3}{0,60 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 33,3 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 24 з площею $F = 34,8 \text{ см}^2$ та мінімальним радіусом інерції $i_{\min} = i_{\text{ст}} = 2,37 \text{ см}$. Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{l_{3\theta}}{i_{\min}} = \frac{250}{2,37} = 105.$$

Для $\lambda = 105$ коефіцієнт

$$\varphi_2 = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} 5 = 0,56.$$

Обчислимо напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,56 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4}} = 164 \text{ МПа}.$$

Перенапруження становить

$$\frac{164 - 160}{160} 100\% \approx 2,5\%.$$

Остаточню вибираємо для стержня двотавр 24.

4.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

Задача 12. Проектний розрахунок на стійкість

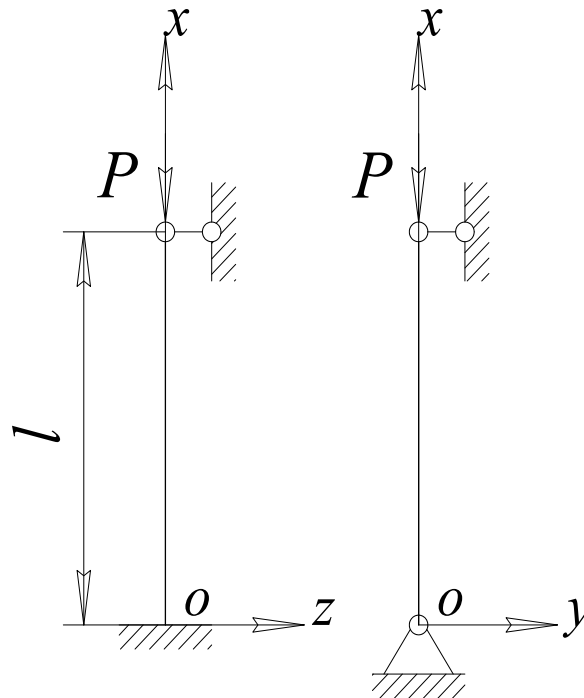
Стержень завдовжки l складного поперечного перерізу зазнає дії центрального стискального навантаження P (рис. 4.6). Матеріал – сталь Ст.3, основне допустиме напруження $[\sigma_-] = 160 \text{ МПа}$.

Поперечний переріз стержня прийняти згідно рис. 4.7. Схеми закріплення кінців стержня в двох головних площинах подані в таблиці 4.1.

Необхідно:

- визначити раціональне розміщення перерізу щодо умов закріплення для подальшого розрахунок стояка на стійкість в площині мінімальної жорсткості;

- підібрати за сортаментом (додаток В) поперечний переріз стержня, користуючись таблицями коефіцієнтів зниження допустимого напруження (додаток Е);
- обчислити критичну силу та запас за стійкістю стержня.



Увага! Умови закріплення брати з таблиці 4.1

Рисунок 4.6 - Схеми закріплення кінців стержня

Таблиця 4.1

Номер варіанта	Р, кН	l, м	Спосіб закріплення кінців стояка			
			Площина XOZ		Площина XOY	
			Нижній кінець	Верхній кінець	Нижній кінець	Верхній кінець
0	300	8,5	защемлення	шарнір	шарнір	шарнір
1	350	8	защемлення	шарнір	шарнір	шарнір
2	400	7,5	шарнір	защемлення	шарнір	шарнір
3	450	7	шарнір	шарнір	защемлення	защемлення
4	500	6,5	защемлення	защемлення	защемлення	шарнір
5	550	6	защемлення	шарнір	шарнір	шарнір
6	600	5,5	шарнір	шарнір	защемлення	шарнір
7	650	3	защемлення	вільне	шарнір	шарнір
8	700	3,5	шарнір	шарнір	защемлення	вільне
9	750	4	шарнір	шарнір	защемлення	шарнір

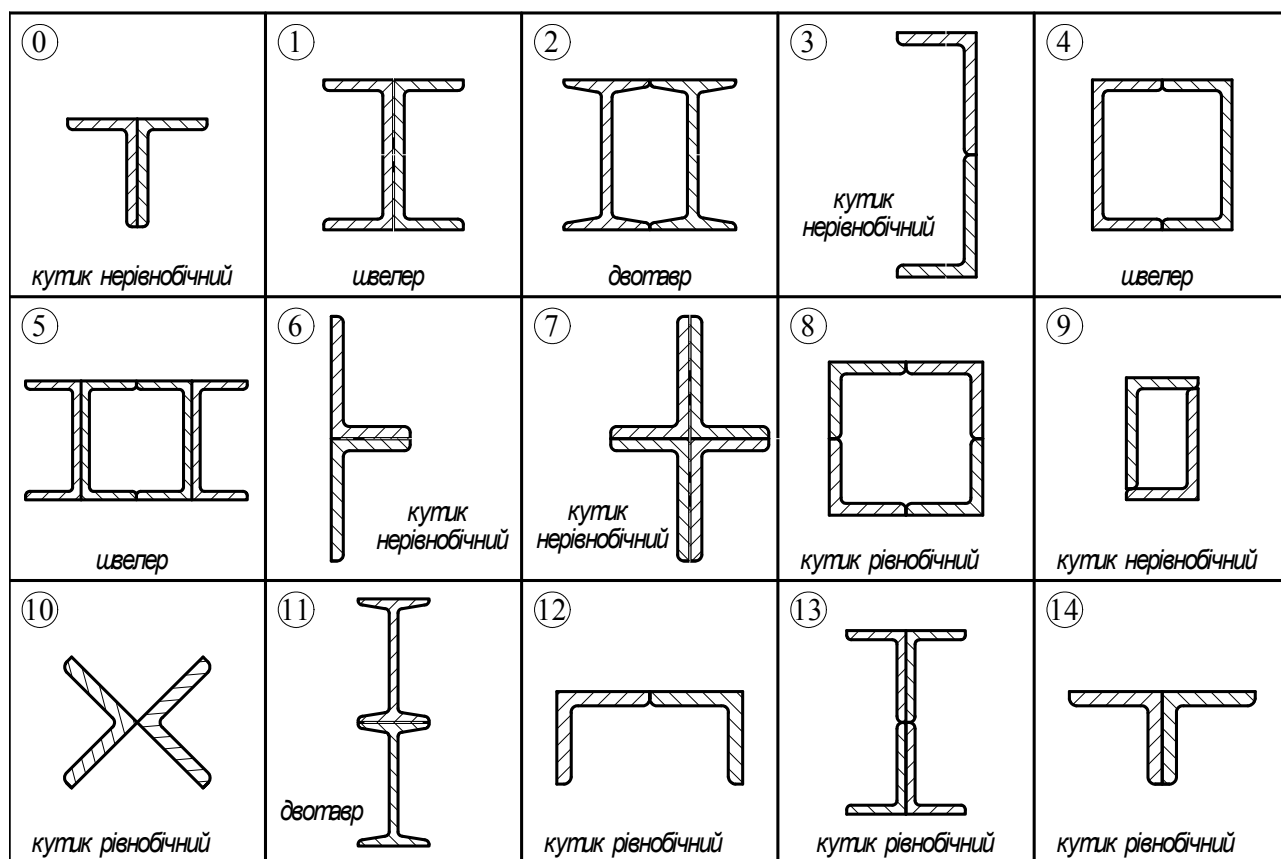


Рисунок 4.7 - Схеми до виконання задачі 12

Приклад виконання задачі 12

Стержень завдовжки $l = 6$ м зазнає дії центрального стискального навантаження $P = 800$ кН. Матеріал стержня – сталь Ст.3. Основне допустиме напруження $[\sigma_-] = 160$ МПа. Підібрати за сортаментом поперечний переріз стержня, що складається з двох жорстко з'єднаних між собою двотаврів (рис. 4.8, б).

Схеми закріплення кінців стержня в двох головних площинах показані на рисунку (рис. 4.8, а). Розрахунок виконати для раціонального розміщення перерізу щодо закріплення. Обчислити запас за стійкістю стержня.

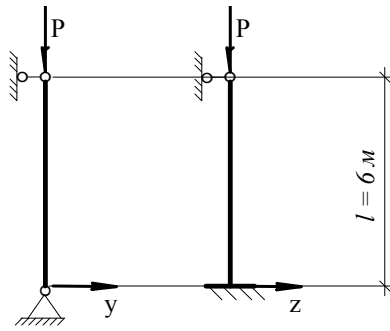
Розв'язування

Коефіцієнти умов закріплення стержня згідно з рис. Е.1 додатка Е $\mu_z = 1$, $\mu_y = 0,7$.

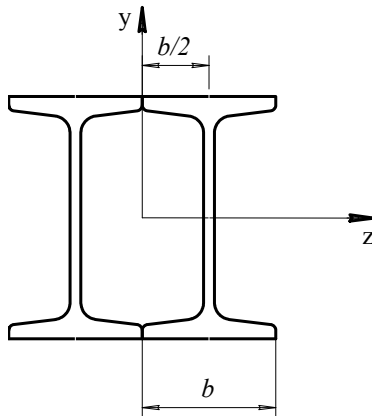
1. Перша спроба

Задаємось $\varphi_1 = 0,5$; потрібна площа поперечного перерізу (брутто)

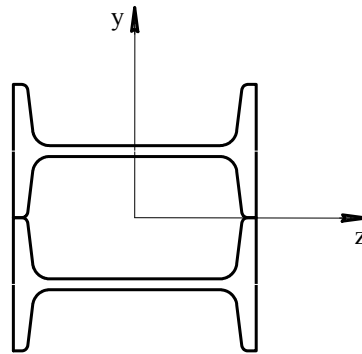
$$A_{бр} = \frac{P}{\varphi[\sigma_-]} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 100 \text{ см}^2.$$



а)



б)



в)

Рисунок 4.8 - Схеми до прикладу задачі 12

Потрібна площа одного двотавра

$$A'_{\text{дп}} = \frac{A_{\text{дп}}}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ см}^2,$$

де 2 - кількість однакових двотаврів.

За сортаментом (додаток В) вибираємо двотавр 30а з такими геометричними характеристиками: площа $A = 49,9 \text{ см}^2$, радіус інерції $i_z = 12,5 \text{ см}$, ширина полиці $b = 14,5 \text{ см}$, момент інерції $I_y = 436 \text{ см}^4$.

Вибираємо раціональне розміщення перерізу

Розміщуємо переріз так, як вказано на рис. 4.8, б.

Визначаємо радіус інерції відносно осі y

$$i_y = \sqrt{\frac{2 \left(I_y + A \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right)}{2A}} = \sqrt{\frac{436 + 49,9 \left(\frac{14,5}{2} \right)^2}{49,9}} = 7,83 \text{ (см)}.$$

Гнучкість стержня в двох головних площинах

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 600}{7,83} = 53,64;$$

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{1 \cdot 600}{12,5} = 48;$$

$\lambda_y = \lambda_{\max 1}$, отже розрахунок при такому виборі закріплення необхідно проводити по осі у (в площині хоз).

Розміщуємо переріз так, як вказано на рис. 4.8, в.

В такому випадку радіуси інерції $i_y = 12,5 \text{ см}$, $i_z = 7,83 \text{ см}$.

Гнучкості стержня

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 600}{12,5} = 33,6;$$

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{1 \cdot 600}{7,83} = 76,6;$$

$$\lambda_z = \lambda_{\max 2}.$$

Оскільки $\lambda_{\max 1} < \lambda_{\max 2}$, то розміщення перерізу у випадку, показаному на рис. 4.8, б, буде раціональним. Отже подальший розрахунок будемо проводити саме для такого закріплення.

Вказівка. Раціональному розміщенню перерізу завжди буде відповідати така умова: якщо $\mu_y < \mu_z$, то $i_y < i_z$ і якщо $\mu_y > \mu_z$, то $i_y > i_z$.

Таким чином, при $\lambda_{\max} = 53,64$ за табл. Е.1 (додаток Е) при лінійній інтерполяції

$$\begin{aligned} \varphi'_1(\lambda_{\max}) &= \varphi(53,64) = \varphi(50) - \frac{\varphi(50) - \varphi(60)}{10} 3,64 = \\ &= 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{10} 3,64 = 0,878. \end{aligned}$$

Оскільки $\varphi'_1 = 0,878 \gg \varphi_1 = 0,5$, то будемо проводити подальші уточнення. (Розв'язок вважається приблизно знайденим, якщо розбіжність між цими величинами складає не більше 5% від більшого значення.)

2. Друге наближення

Приймаємо

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,878}{2} \approx 0,6892.$$

Потрібна площа поперечного перерізу

$$A_{\sigma p} = \frac{P}{\varphi[\sigma_-]} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,6892 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 72,5 \text{ см}^2.$$

Потрібна площа одного двотавра

$$A'_{\sigma p} = \frac{A_{\sigma p}}{2} = \frac{72,5}{2} = 36,25 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр 24а з такими геометричними характеристиками: площа $A = 37,5 \text{ см}^2$, радіус інерції $i_z = 10,1 \text{ см}$, ширина полиці $b = 12,5 \text{ см}$, момент інерції $I_y = 260 \text{ см}^4$.

Визначаємо радіус інерції відносно осі у

$$i_y = \sqrt{\frac{2 \left(I_y + A \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right)}{2A}} = \sqrt{\frac{260 + 37,5 \left(\frac{12,5}{2} \right)^2}{37,5}} = 6,78 \text{ (см)}.$$

Гнучкість стержня в двох головних площинах

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 600}{6,78} = 61,98;$$

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{1 \cdot 600}{10,1} = 59,4;$$

$\lambda_y = \lambda_{\max}$, отже розрахунок проводимо по осі у.

При $\lambda_{\max} = 61,98$ при лінійній інтерполяції

$$\varphi'_2(61,98) = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} 61,98 = 0,8504.$$

Оскільки $\varphi'_2 = 0,8504 \gg \varphi_2 = 0,6892$, то будемо в той самий спосіб проводити подальші уточнення.

Для наочності подальші наближення, разом із попередніми, зведемо в таблицю 4.2.

Таблиця 4.2

Величина	Наближення			
	перше	друге	третє	четверте
1 $\varphi = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$	$\varphi_1 = 0,5$	0,6892	0,7698	0,8034
2 $A_{\sigma p} \geq \frac{P}{\varphi[\sigma_-]}, \text{ см}^2$	100	72,5	64,95	62,23
3 $A'_{\sigma p} = \frac{A_{\sigma p}}{2}, \text{ см}^2$	50	36,25	32,48	31,23
4 Двотавр, номер	30а	24а	22а	22
5 $A, \text{ см}^2$	49,9	37,5	32,8	30,6
6 $i_y = \sqrt{\frac{I_y + A \left(\frac{b}{2} \right)^2}{A}}, \text{ см}$	7,83	6,78	6,502	5,948
7 $i_z, \text{ см}$	12,5	10,1	9,22	9,13
8 λ_y	53,64 $= \lambda_{\max}$	61,98 $= \lambda_{\max}$	64,592	70,61= $\lambda_{\max}$
9 λ_z	48,78	59,4	65,08 $= \lambda_{\max}$	65,71
10 $\varphi'(\lambda_{\max})$	0,878	0,8504	0,837	0,8063

Вказівка.

Зверніть увагу на монотонне зростання або зменшення розрахункових величин в таблиці в кожному рядку. Це ознака правильності проведення наближень. Якщо на черговому наближенні порушується така тенденція, то слід переглянути розрахунки саме на цьому етапі. Особливо це стосується перерізів, що складаються з кутиків, оскільки необхідні площі відповідають декілька кутиків з різними радіусами інерції. В цьому випадку необхідно прийняти інший розмір перерізу та повторити наближення.

Бачимо, що в останньому наближенні $\varphi'_4 = 0,8034 \approx \varphi_4 = 0,8063$.

Обчислимо еквівалентні напруження:

$$\sigma_{екв} = \frac{P}{\varphi_4 2A} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,8063 \cdot 2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4}} = 162 \text{ МПа.}$$

Перенапруження становить

$$\Delta = \frac{\sigma_{екв} - [\sigma_-]}{[\sigma_-]} 100 = \frac{162 - 160}{160} 100 = 1,25\% < 5\%.$$

Допустиме значення перенапруження $[\Delta] = 5\%$.

Вказівка.

Інколи два сусідніх за сортаментом перерізу дають перенапруження і недонапруження, що перевищує допуск в 5%, тоді залишають переріз з недонапруженням, пояснивши вибір.

3. Визначаємо запас за стійкістю

Оскільки $61 < \lambda_{\max} < 100$, де 61 та 100 – граничні значення гнучкості для сталі Ст. 3 (табл. Е.2, додаток Е), то критичне напруження визначаємо з формули Ясинського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda_{\max} = 304 - 1,11 \cdot 70,61 = 225,6 \text{ МПа.}$$

Критична сила

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot 2A = 225,6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4} = 1,38 \cdot 10^6 \text{ (Н).}$$

Коефіцієнт запасу за стійкістю

$$k_{ст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{1,38 \cdot 10^6}{800 \cdot 10^3} = 1,73.$$

Відповідь: двотавр 22, $k_{ст} = 1,73$.

Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 12)

1. За яким алгоритмом підбирається переріз стиснутого стержня (із використанням коефіцієнта зниження допустимого напруження)?
2. Чому при проектному розрахунку використовують послідовні наближення?
3. Записати формулу Ейлера та пояснити її.
4. Записати формулу розрахунку гнучкості та пояснити її.
5. Записати умову стійкості стержня із використанням коефіцієнта зменшення допустимого напруження та пояснити її.

6. В яких випадках критичні напруження розраховуються за формулою Ейлера (границі застосування формули Ейлера)?
7. В яких випадках критичні напруження розраховуються формулою Ясинського?
8. В яких випадках можна говорити про раціональне розміщення перерізу щодо умов закріплення? Якій умові відповідає це розміщення?
9. Чому при розрахунку на стійкість беруть до уваги лише максимальну гнучкість?
10. Що називається критичною силою?
11. Що таке запас за стійкістю та як він визначається для заданого стержня і навантаження? Які орієнтовні значення запасу для різних конструкційних матеріалів?

5 РОЗРАХУНКИ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ (IMPACT LOAD)

5.1 Короткі теоретичні відомості

5.1.1 Розрахунок при осьовій дії ударного навантаження

Явище удару має місце тоді, коли швидкість розглядуваного елемента конструкції або стичних з ним частин протягом дуже малого проміжку часу змінюється на скінченну величину. Великі прискорення (сповільнення), що виникають при цьому, приводять до появи значних сил інерції, які діють у напрямі, протилежному напрямку прискорень, тобто в напрямі руху тіла. У випадку падаючого вантажу силу удару (динамічну силу P_d) можна обчислити за формулою

$$P_d(t) = \frac{Q}{g} j(t), \quad (5.1)$$

де Q – вага падаючого вантажу;

g – прискорення вільного падіння;

$j(t)$ – прискорення падаючого вантажу після зіткнення з перешкодою.

Проте визначення сили удару $P_d(t)$ за формулою (5.1) пов'язане з великими труднощами, оскільки не відомо час співударяння, тобто час, протягом якого швидкість рухомого тіла зменшується від свого максимального значення в момент зіткнення з тілом, що ударяється (початок удару), до нуля після деформації останнього (кінець удару).

У зв'язку із зазначеними труднощами, що виникають при визначенні динамічних напружень та деформацій, в інженерній практиці виходять з так званої технічної теорії удару, яка ґрунтується на таких припущеннях.

1. При співударянні тіло, що ударяє, рухається разом з тілом, що зазнає удару, до розвитку найбільших деформацій. При цьому немає пружних хвиль у тілах і пов'язаних з ними відскоків тіла, що ударяє (такий удар називають *непружним*).

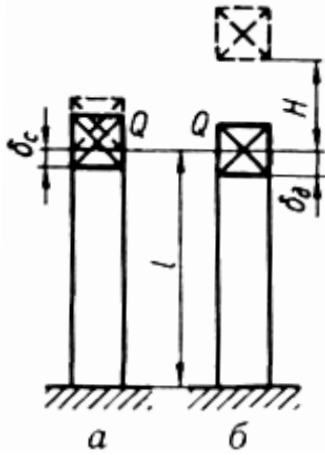


Рисунок 5.1- Статична і динамічна деформація

2. За проміжок часу співударяння деформації поширюються по всьому об'єму тіла, що зазнає удару, а залежність між силами та деформаціями, що виникають, відповідає закону Гука.

3. При співударянні рухомих тіл зменшення кінетичної енергії системи дорівнює збільшенню потенціальної енергії деформації тіл. При цьому нехтують втратами енергії на місцеві пластичні деформації, а також інерцією маси тіла, що зазнає удару.

4. Вважають, що система тіл при співударянні має один ступінь вільності, тобто положення системи визначається однією координатою.

Формули для визначення динамічних напружень та деформацій при осьовому ударі наведемо на прикладі системи (рис. 5.1), що складається з вертикально розміщеного пружного призматичного стержня з жорсткістю при розтяганні (стисканні) $c = EF/l$, на торець якого з висоти H вільно падає вантаж Q .

Припустимо, що вантаж прикладається до стержня статично, тобто навантаження повільно наростає від нуля до максимального значення (рис. 5.1, а) і стискає стержень на величину δ_c . При падінні вантажу з висоти H унаслідок удару на стержень діятиме динамічна сила P_d , більша ніж сила Q і укорочення стержня δ_d буде більше за δ_c (рис. 5.1, б).

Зміна переміщень та деформацій при ударній дії навантаження Q порівняно з переміщеннями (деформаціями) при статичній дії того самого навантаження характеризується *коефіцієнтом динамічності*

$$k_d = \delta_d / \delta_c, \quad (5.2)$$

звідки динамічну деформацію через статичну можна виразити формулою

$$\delta_d = k_d \delta_c. \quad (5.3)$$

Ураховуючи лінійний зв'язок між напруженнями та деформаціями, а також припускаючи, що модулі пружності при статичній і ударній дії навантаження однакові, що з достатньою точністю підтверджується експериментом, можна за аналогією з формулою (5.3) встановити зв'язок між статичним та динамічним напруженнями:

$$\sigma_d = k_d \sigma_c, \quad (5.4)$$

де

$$\sigma_c = Q / F \quad (5.5)$$

— напруження, яке виникає в стержні при стисканні силою, що дорівнює вазі падаючого вантажу.

Щоб використати формули (5.3), (5.4), потрібно визначити коефіцієнт динамічності k_d . Розраховуватимемо на підставі теорії удару, маючи на

увазі, що залежність між силами та деформаціями має один і той самий вигляд як при статичних, так і при динамічних навантаженнях, тобто

$$\delta_C = P_C / c; \quad (5.6)$$

$$\delta_D = P_D / c, \quad (5.7)$$

де P_C – статичне навантаження, що дорівнює вазі падаючого вантажу (у цьому разі $P_C = Q$);

P_D – динамічне навантаження, що є силою інерції тіла, яке ударяє, в перший момент його зіткнення зі стержнем.

Коефіцієнт динамічності

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + 2H / \delta_C}. \quad (5.8)$$

Маючи на увазі, що $H = v^2 / 2g$ (v – швидкість падаючого вантажу в момент початку удару), коефіцієнт динамічності можна записати у вигляді

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_C}}. \quad (5.9)$$

Тепер, виходячи із залежності (5.4), запишемо вираз для напружень при ударі:

$$\sigma_D = k_D \sigma_C = \sigma_C \left(1 + \sqrt{1 + 2H / \delta_C} \right) \quad (5.10)$$

або

$$\sigma_D = \sigma_C \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_C}} \right) = \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{lF}}. \quad (5.11)$$

Аналогічно визначаємо зусилля при ударі:

$$P_D = \sigma_D F = P_C \left(1 + \sqrt{1 + 2H / \delta_C} \right). \quad (5.12)$$

З аналізу формул (5.10) і (5.11) випливає, що *при рівномірно розподілених напруженнях, однакових в усіх поперечних перерізах стержня, динамічні напруження залежать не тільки від площі F поперечного перерізу, як це має місце при дії статичного навантаження в статично визначуваних системах, а й від довжини l і модуля пружності E матеріалу стержня*. Отже, можна сказати, що динамічні напруження в стержні при ударі залежать як від об'єму, так і від якості матеріалу стержнів. При цьому чим більший об'єм пружного стержня, що зазнає удару (чим більша «енергоємність» стержня), тим менші динамічні напруження, а чим більший модуль пружності матеріалу стержня, тим динамічні напруження більші.

Сказане справедливе для призматичних стержнів (стержнів однакового поперечного перерізу).

5.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

Задача 13. Розрахунок балки при ударному навантаженні

На балку двотаврового поперечного перерізу, що закріплена за допомогою шарнірних опор, з висоти h падає вантаж P .

Необхідно:

1. Знайти найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі балки при статичній дії вантажу P ;
2. Знайти максимальне динамічне напруження при ударі;
3. Знайти максимальне динамічне напруження при падінні вантажу на балку у випадку, коли на опорах вмонтовано амортизатори з піддатливістю α (піддатливість – це переміщення, що припадає на одиницю сили).

Варіанти схем балок показано на рис. 5.2, а. Необхідні дані взяти з таблиці 5.1. У розрахунках прийняти модуль пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Вагою балки знехтувати.

Таблиця 5.1

Номер варіанта	Номер двотавра	l , м	P , кН	h , м	α , м/кН
0	30	2	0,5	0,5	0,025
1	24	2,7	1,0	0,1	0,02
2	20а	2,5	1,5	0,2	0,023
3	22а	3,0	2,0	0,3	0,027
4	24а	2,8	0,75	0,15	0,028
5	27	3,5	0,80	0,35	0,03
6	30	3,2	0,9	0,40	0,027
7	27а	3,1	1,25	0,45	0,029
8	30а	2,2	1,28	0,55	0,03
9	27	1,75	1,2	0,5	0,035

Приклад виконання задачі 13

Дано:

схема (див. рис. 5.3); двотавр 30а,

$l = 2,5$ м; $P = 1,3$ кН; $h = 0,15$ м; $\alpha = 0,025$ м/кН.

Знайти:

$\sigma_{\max}^{ст}$, $\sigma_{\max}^{дин}$, $\sigma_{\max}^{дин'}$ - ?

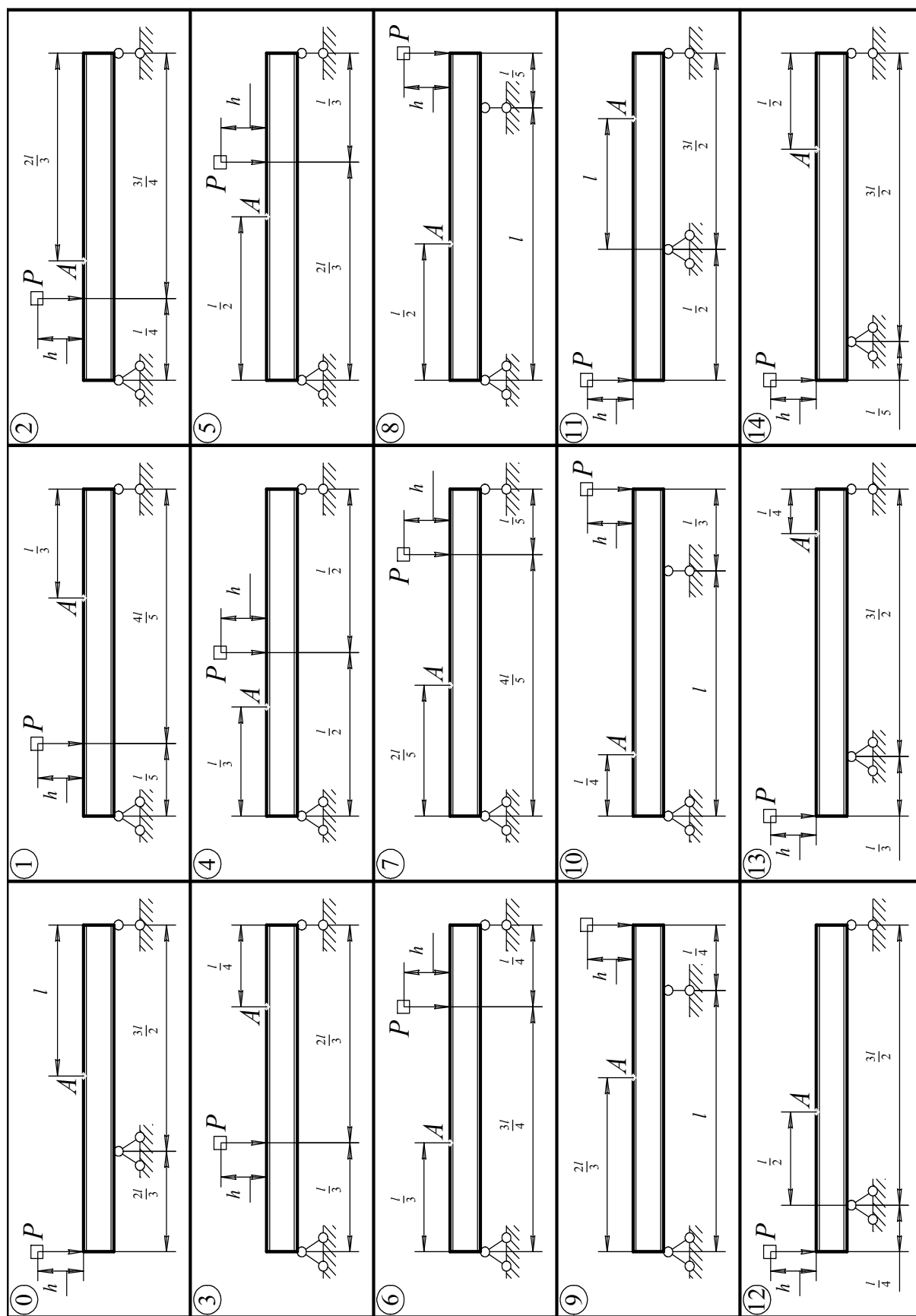


Рисунок 5.2 - Схеми до виконання задачі 13

Розв'язування

1. Знаходимо найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі балки при статичному навантаженні

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_z}.$$

За таблицями сортаменту двотавра 30а, $W_z = 518 \text{ см}^3$.

Знаходимо реакції з умов рівноваги та побудуємо епюру M (рис. 5.3).

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot l - P \cdot \frac{1}{5}l = 0 \Rightarrow R_H = 0,2P.$$

$$\sum M_A = 0, R_B l - P \cdot \frac{4}{5}l = 0 \Rightarrow R_B = 0,8P.$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0; R_A + R_B = P; 0,2P + 0,8P = P.$$

Епюра M на ділянках лінійна, зі зломом у точці C .

$$M_c = R_{AH} \cdot \frac{4}{5}l = 0,2P \cdot \frac{4}{5}l = \frac{1}{5}P \cdot \frac{4}{5}l = \frac{4}{25}Pl.$$

Максимальний згинальний момент у перерізі C .

$$M_{\max} = \frac{4}{25} \cdot Pl = \frac{4}{25} \cdot 1300 \cdot 2,5 = 520 \text{ Н} \cdot \text{м} = 0,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимальне напруження:

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{520}{518 \cdot 10^{-6}} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ МПа}.$$

2. Максимальне напруження при ударі по балці з жорсткими опорами.

Коефіцієнт динамічності

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cn}}}.$$

Переміщення точки удару від статично прикладеної сили (прогин перерізу C) визначаємо методом Мора за правилом Верещагіна. Будуємо епюру одиничних сил M^0 (рис. 5.3).

Реакції від дії одиничної сили F^0 знаходимо так само, як від дії сили P :

$$R_A^0 = 0,2F^0 = 1/5 = 0,2;$$

$$R_B^0 = 0,8F^0 = 4/5 = 0,8.$$

Ордината епюри M^0 у точці C

$$M_c^0 = R_H^0 \cdot \frac{4}{5}l = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}l = \frac{4}{25}l = 0,4 \text{ м}.$$

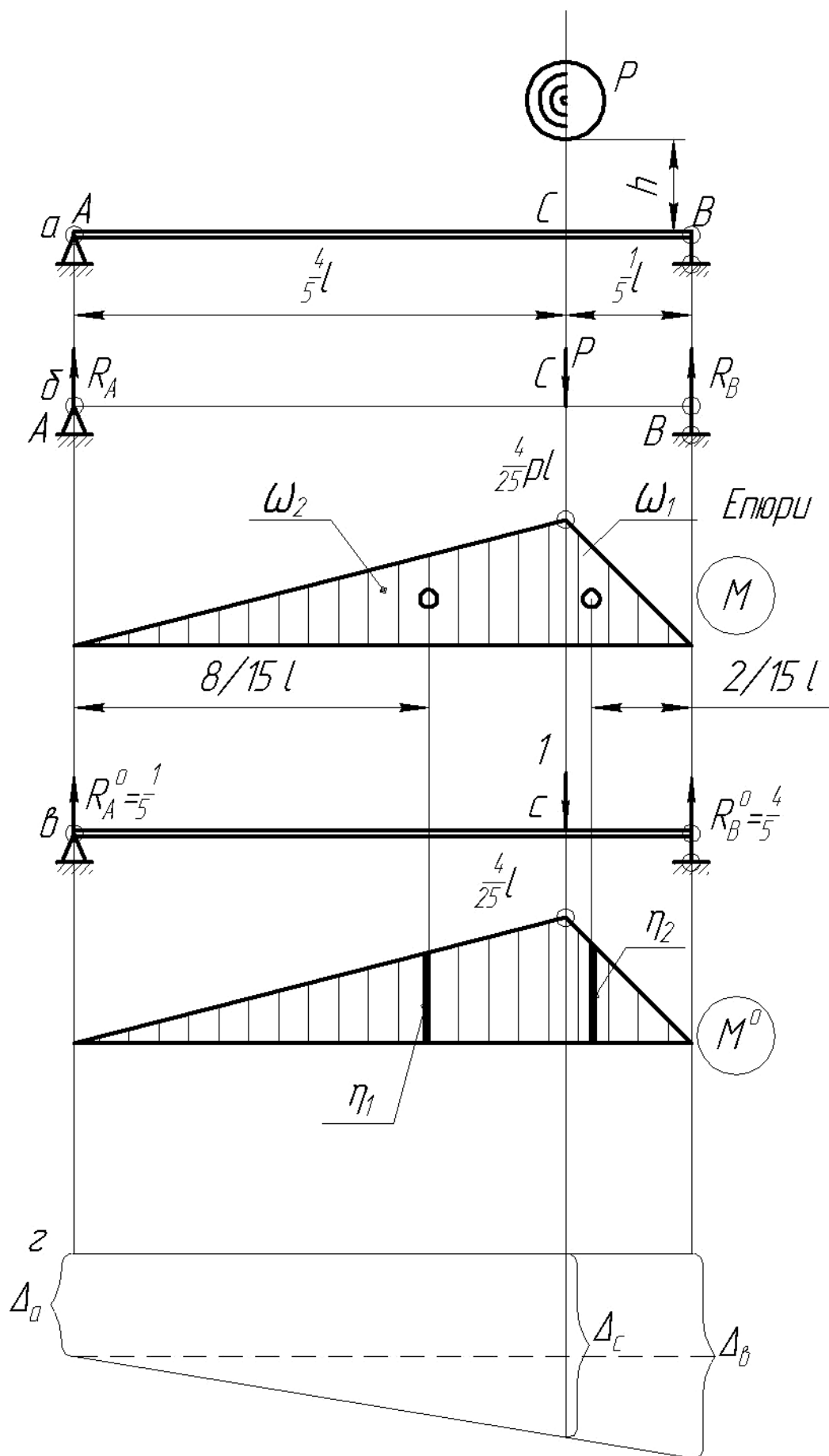


Рисунок 5.3 - До розв'язання прикладу задачі 13

Переміщення

$$\Delta_{cm} = \sum \frac{\omega_i y_i}{EI} = \frac{\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2}{EI},$$

де ω_1, ω_2 – площі епюри M :

$$\omega_1 = \frac{4}{25} Pl \cdot \frac{4}{5} l \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{125} \frac{Pl^2}{EI};$$

$$\omega_2 = \frac{4}{25} Pl \cdot \frac{1}{5} l \cdot \frac{1}{2EI} = \frac{2}{50} Pl^2 \cdot \frac{1}{EI};$$

η_1, η_2 – ординати одиничної епюри під центром ваги відповідної вантажної площі

$$\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{15} l = \frac{8}{75} l.$$

Таким чином

$$\Delta_{cm} = \frac{8}{125} \frac{Pl^2}{EI} \cdot \frac{8}{75} l + \frac{2}{50} \frac{Pl^2}{EI} \cdot \frac{8}{75} l = \frac{Pl^3}{EI} (0,00683 + 0,00423) = 0,0111 \frac{Pl^3}{EI}.$$

Статичне переміщення

$$\Delta_c = 0,0111 \frac{Pl^3}{EI} = 0,0111 \cdot \frac{130 \cdot 250^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 7780} = 0,00145 \text{ см} = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Коефіцієнт динамічності

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,15}{1,45 \cdot 10^{-5}}} = 146.$$

Максимальне динамічне напруження

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = 146 \cdot 1,0 = 146 \text{ МПа}.$$

1. Максимальне динамічне напруження для випадку, коли на опорах вмонтовано амортизатори.

Задача відрізняється величиною коефіцієнта динамічності:

$$\sigma_{\max}^{\partial} = \sigma_{\max}^{cm} \cdot K_{\partial}';$$

$$K_{\partial}' = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}'}}.$$

Статичне переміщення точки удару визначаємо з урахуванням податливості опор

$$\Delta_{cm}' = \Delta_{cm} + \Delta_c,$$

де $\Delta_{\tilde{\partial}}$ – переміщення точки C , спричинене деформацією компенсаторів.

З рис. 5.3:

$$\Delta_c = \Delta_A + \frac{4}{5} (\Delta_B - \Delta_A);$$

$$\Delta_A = \alpha R_A = 0,025 \cdot 0,26 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta_B = \alpha R_B = 0,025 \cdot 1,04 = 26 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta_c = 6,5 \cdot 10^{-3} + \frac{4}{5} (26 \cdot 10^{-3} - 6,5 \cdot 10^{-3}) = 22,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Коефіцієнт динамічності

$$K'_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,15}{1,45 \cdot 10^{-5} + 22,1 \cdot 10^{-3}}} = 4,82.$$

Максимальні динамічні напруження:

$$\sigma'_{\max}{}^{\text{дин.}} = 4,82 \cdot 1 = 4,82 \text{ МПа};$$

$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{дин}}}{\sigma'_{\max}{}^{\text{дин.}}} = \frac{146}{4,82} = 30,3.$$

Таким чином, використання амортизаторів зменшує величину максимальних напружень при ударі в 30,3 рази.

Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 13)

1. Дати означення коефіцієнта динамічності.
2. Як визначається коефіцієнт динамічності через висоту падіння вантажа? Пояснити формулу.
3. За яким виразом розраховується коефіцієнт динамічності?
4. Як визначити напруження та переміщення в будь-якій точці системи, що зазнає дії ударних навантажень?
5. Визначити максимальні напруження та деформації (динамічні) перерізу в т. А при ударі на прикладі власної задачі.
6. За яким алгоритмом розраховується система на міцність чи жорсткість в умовах ударних навантажень?
7. Як можна пом'якшити дію ударних навантажень? На яку характеристику системи впливають в цьому випадку?
8. В яких практичних випадках намагаються посилити дію ударних навантажень? За рахунок чого?
9. Записати умови міцності та жорсткості в умовах динамічних навантажень.

6 РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ НА ВИТРИВАЛІСТЬ

6.1 Короткі теоретичні відомості

6.1.1 Явище втоми матеріалів. Характеристики циклів

Опір матеріалів дії навантажень, що змінюються в часі за модулем або за знаком, суттєво відрізняється від опору дії статичного

навантаження. При цьому під дією змінних навантажень елементи конструкцій руйнуються при значно менших навантаженнях, ніж під дією статичних навантажень. Типовим прикладом деталі, що зазнає змінних навантажень, є шток поршневої машини, знак напружень в якому змінюється відповідно до змін напрямку руху поршня.

Практикою встановлено: якщо елемент конструкції багаторазово піддавати змінному навантаженню певного рівня, то після деякої кількості змін напружень у ньому виникне тріщина, яка поступово буде розвиватися. Урешті-решт деталь зруйнується, не давши при цьому помітних залишкових деформацій навіть тоді, коли матеріал високопластичний.

Кількість циклів до появи першої тріщини і до повного руйнування буде тим більшою, чим менше напруження. Характерно, що руйнування матеріалу під дією повторно-змінних навантажень може відбутися при напруженнях, нижчих за границю текучості.

Руйнування матеріалу під дією повторно-змінних напружень називають руйнуванням від втоми.

Утомою матеріалів (зокрема, металів) називають явище руйнування внаслідок поступового накопичення в них пошкоджень, що призводять до виникнення тріщини при багаторазовому повторенні навантажень.

Здатність металів чинити опір руйнуванню при дії повторно-змінних напружень називається *опором втоми матеріалу*.

Вивчення питань втоми в опорі матеріалів має дуже велике значення. Такі важливі деталі, як осі залізничних вагонів, колінчасті вали, шатуни моторів, гребні гвинти, пружини клапанів, повітряні гвинти, поршневі пальці й багато інших деталей виходять з ладу здебільшого внаслідок руйнувань утомного характеру.

Руйнування від втоми відбувається, якщо має місце одна з таких двох особливостей прикладання навантаження:

1) багаторазове прикладання навантаження одного знака, наприклад періодично змінюваного від нуля до максимуму (рис. 6.1, а);

2) багаторазове повторення навантаження, що періодично змінюється не тільки за модулем, а й за знаком (знакозмінні навантаження), коли на опір втоми матеріалу одночасно впливають як повторність, так і змінність навантажування. При цьому розрізняють зміну навантаження за симетричним циклом (рис. 6.1, б) та за несиметричним (рис. 6.1, в).

Для руйнування від втоми недостатньо змінності напружень. Потрібно також, щоб напруження мали певне значення.

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір не руйнуючись при будь-якій довільно великій кількості повторень змінних напружень, називається границею витривалості (границею втоми).

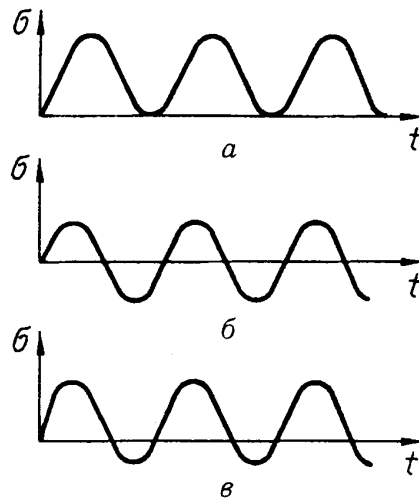


Рисунок 6.1 - Види циклічних навантажень

При розгляді опору матеріалів дії змінних напружень у більшості випадків інженерної практики припускається, що ці напруження є періодичними функціями часу $p = f(t)$ з періодом T .

Сукупність усіх значень напружень за час одного періоду називають *циклом напружень*. На опір утоми в основному впливають максимальні p_{max} та мінімальні p_{min} напруження циклу. Крім них в опорі матеріалів вводять поняття *постійного*, або *середнього*, напруження циклу p (рис. 6.2):

$$p_{cp} = \frac{p_{max} + p_{min}}{2}, \quad (6.1)$$

та поняття про амплітуду p_a циклу, що характеризує змінність напружень:

$$p_a = \frac{p_{max} - p_{min}}{2}. \quad (6.2)$$

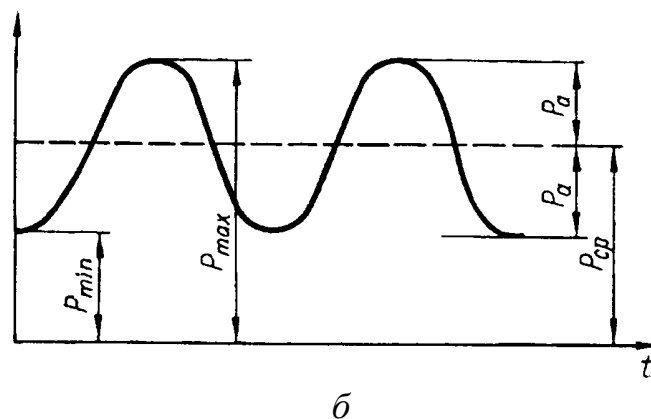


Рисунок 6.2 - До визначення характеристик циклу

Подвоєне значення амплітуди коливань напружень називається *розмахом циклу*. Відношення мінімального напруження циклу до максимального з урахуванням знаків цих напружень називається *характеристикою циклу* або *коефіцієнтом асиметрії циклу* і позначається літерою r :

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}. \quad (6.3)$$

Найнебезпечнішим є так званий симетричний цикл, коли, $p_{\max} = -p_{\min}$ та $p_{cp} = 0$, при якому

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} = -1.$$

Границя витривалості при симетричному циклі є мінімальною для даного типу деформації й позначається через p_{-1} . У випадку напруження, що змінюється від нуля до максимуму, тобто при віднульовому (пульсуючому) циклі, коли $p_{\min} = 0$,

$$r = \frac{0}{p_{\max}} = 0,$$

а границя витривалості, що відповідає даному циклу, позначається через p_0 .

При $p_0 = \text{const}$, тобто коли діє постійне статичне навантаження, $p_{\max} = p_{\min} = p$ і характеристика циклу

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} = \frac{p}{p} = 1.$$

У загальному випадку границю витривалості, отриману при характеристиці циклу r , позначають p_r : границю витривалості, визначену при будь-якому певному значенні r , наприклад при $r = -0,5$, позначають відповідно $p_{-0,5}$.

Цикли, що мають однакові характеристики r , називаються *подібними*. Характеристика циклу, або коефіцієнт асиметрії, може змінюватися від $-\infty$ до $+\infty$.

6.1.2 Визначення границі витривалості. Діаграма втоми

Для визначення границі витривалості того чи іншого матеріалу потрібно на відповідній випробувальній машині випробувати партію зразків з даного матеріалу в кількості 6 – 12 шт. Для цього найчастіше беруть гладкі циліндричні зразки діаметром 7...10 мм.

Границі витривалості матеріалу при вибраній характеристиці циклу r , зрозуміло, будуть однаковими залежно від виду деформації, при якій випробовують зразки, тобто залежно від того, при змінних напруженнях розтягання-стискування, змінному крученні, згинанні або ж в умовах складного напруженого стану їх випробовують. Тому, ставлячи за мету визначення границі витривалості, слід наперед зазначити, при якому виді деформації та характері зміни напружень за цикл треба визначити границю витривалості.

У лабораторних умовах симетричний цикл здійснити найбільш просто. Схему найпростішої установки для визначення границі витривалості при ротаційному згинанні у разі симетричного циклу зображено на рис. 6.3. При обертанні зразка його зовнішні волокна зазнаватимуть наперемінно то розтягання (коли вони знизу), то стискання (при повороті зразка на 180°).

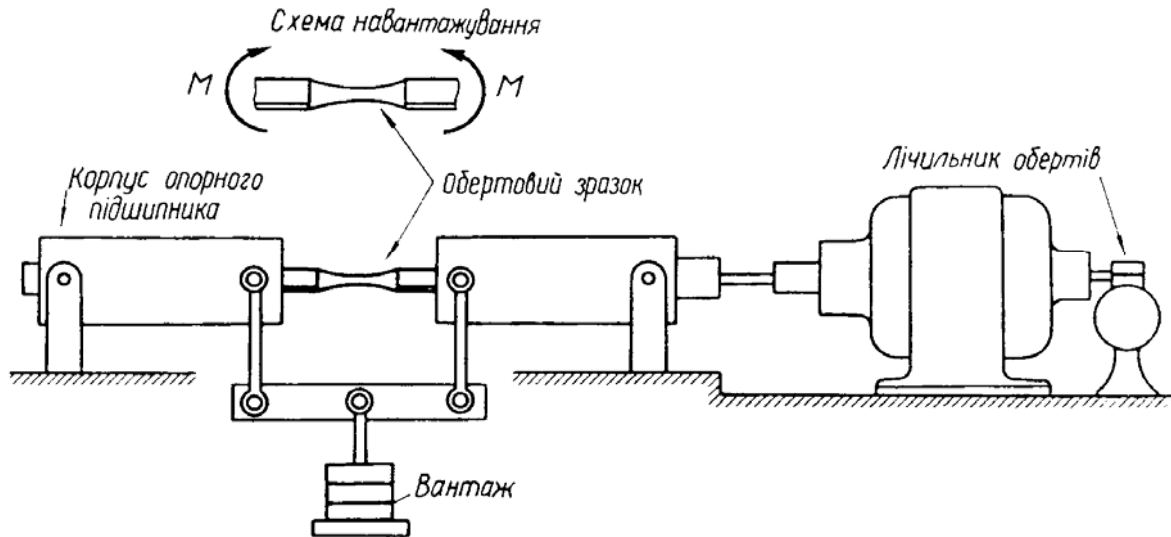


Рисунок 6.3 - Випробувальна машина на втому

При випробуванні партії зразків з метою визначення границі витривалості потрібно давати такі навантаження на окремі зразки, щоб вони не руйнувалися, витримавши різну кількість циклів навантажування.

Обробка здобутих експериментальних даних, як правило, супроводжується побудовою *кривої утоми*, яку в літературі часто називають *кривою Веллера* (рис. 6.4). Криву утоми будують по точках у координатах кількості циклів N та напруження p_{max} . Кожному зразку, що зруйнувався, на діаграмі відповідає одна точка з координатами N (кількість циклів до руйнування) та p_{max} (напруження), тобто крива утоми є функцією $p_{max} = f(N)$.

Порядок прикладання навантажень на випробовувані зразки здебільшого вибирають спадним, тобто на перший зразок дають навантаження, що значно перевищують границю витривалості, а навантаження на наступні зразки поступово знижують. Зрозуміло, що кожен з менш навантажених зразків буде витримувати дедалі більшу кількість циклів. Можна вибрати й інший порядок навантажування.

Будуючи криву утоми по точках зруйнованих зразків, легко переконатися, що, наприклад, при випробуванні сталі (рис. 6.4, крива I) при високому рівні напруження крива стрімко спадає, а в міру зниження їх крутість зменшується, і крива асимптотично наближається до деякої горизонтальної прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, величиною якого й визначається границя витривалості. Ордината точки на кривій, де остання практично починає збігатись із зазначеною асимптотою, відповідає такому

напруженню, при якому зразок не зруйнується, пройшовши кількість циклів, що відповідає наперед заданій величині, так званій *базі випробувань* N_0 .

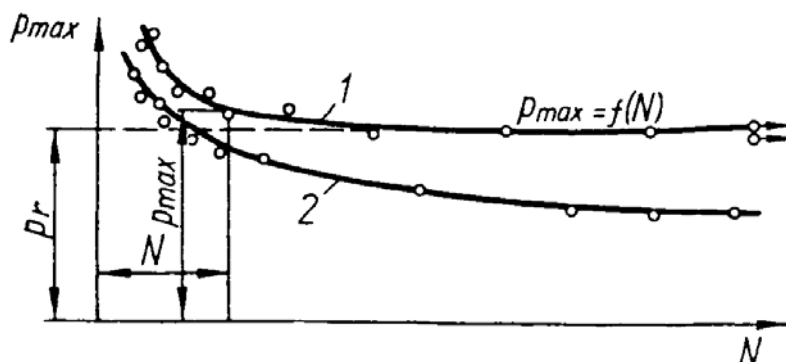


Рисунок 6.4 - Крива Веллера

6.1.3 Вплив конструктивно-технологічних факторів на границю витривалості

Вплив концентрації напружень

Найважливішим фактором, що знижує границю витривалості, є концентрація напружень, спричинена різкою зміною перерізу деталі. Концентраторами напружень на практиці є шпонкові канавки, отвори в деталі, нарізки на поверхні, малі радіуси заокруглень у місцях різкої зміни розмірів перерізів тощо. Концентрація напружень, як правило, сприяє зародженню тріщини від утоми, яка, розвиваючись, призводить урешті-решт до руйнування деталі.

При розгляді питань опору утоми використовують поняття *ефективного*, або *дійсного*, коефіцієнта концентрації, який є відношенням границі витривалості гладкого зразка без концентрації напружень до границі витривалості зразка з концентрацією напружень, що має такі самі абсолютні розміри перерізів. Ці коефіцієнти надалі позначаються так:
для нормальних напружень

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}; \quad (6.4)$$

для дотичних напружень

$$k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}}, \quad (6.5)$$

де σ_{-1} та τ_{-1} — границі витривалості для гладких зразків;

σ_{-1k} та τ_{-1k} — границі витривалості зразків з концентрацією напружень.

Вплив розмірів (масштабний фактор)

Ефективність концентрації напружень пов'язана з абсолютними розмірами перерізу деталі, а саме: зі збільшенням розмірів деталі при збереженні її геометричної подібності значення ефективних коефіцієнтів концентрації напружень збільшуються.

Абсолютні розміри перерізів деталі, впливаючи на ефективність концентрації напружень, істотно впливають також на границю витривалості зразків без концентрації напружень. При цьому зі збільшенням абсолютних розмірів перерізів границі витривалості знижуються. Відношення границі витривалості деталі розміром d до границі витривалості лабораторного зразка подібної конфігурації, що має малі розміри ($d_0 = 7...10$ мм), називають *коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів перерізу* і позначають відносно нормальних напружень так:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1d_0}}. \quad (6.6)$$

Коефіцієнти впливу абсолютних розмірів перерізу можна визначити й на зразках з концентрацією напружень. У цьому разі

$$\varepsilon_{\sigma_k} = \frac{\sigma_{-1kd}}{\sigma_{-1kd_0}}, \quad (6.7)$$

причому деталь розміром d та зразок малого розміру d_0 мають бути геометрично подібні.

Для розрахунку елементів машин з урахуванням впливу розмірів деталі як за наявності концентраторів напружень, так і без них, існують спеціальні графіки типу наведених на рис. 6.5 (тут шкала d — логарифмічна), побудовані на основі експериментів. Тут крива 1 відповідає деталі з вуглецевої сталі без джерела концентрації напружень, а крива 2 — деталі з легированої сталі ($\sigma_B = 1000...1200$ МПа) при відсутності концентрації напружень та вуглецевої сталі за наявності помірної концентрації напружень. Крива 3 відповідає деталі з легированої сталі за наявності концентрації напружень, а крива 4 — будь-якій сталі при сильному концентраторі (типу нарізки).

Як свідчать експерименти, при збільшенні діаметра до 150...200 мм зниження границі витривалості зразків при ротаційному згинанні може досягати 30...45 %. Дослідні дані свідчать про малий вплив абсолютних розмірів на опір утоми при однорідному напруженому стані — розтяганні-стисканні. При крученні, як і при згинанні, зниження границі витривалості зі збільшенням розмірів деталі виявляється значно більше. Це пояснюється впливом градієнта напружень.

Зниження границь витривалості зі збільшенням абсолютних розмірів деталі можна пояснити також впливом таких факторів:

1) зменшенням механічної міцності матеріалу зі збільшенням діаметра заготовок навіть за умови додержання належної термічної обробки їх;

2) зміною властивостей поверхневого шару після механічної обробки, оскільки ці зміни виявляються різними при різних розмірах деталі;

3) неоднорідністю механічних властивостей та напруженістю різних зерен у зв'язку з полікристалічною структурою металу і як наслідок — підвищенням імовірності більш раннього руйнування від утоми зі збільшенням розмірів деталі; цей фактор, мабуть, є основним.

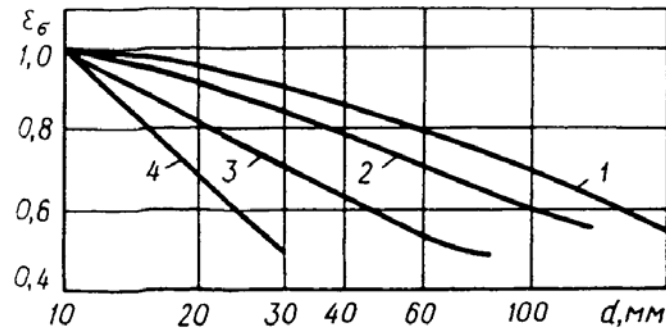


Рисунок 6.5 - Графіки коефіцієнта впливу абсолютних розмірів

Опір утоми матеріалів оцінюється за границею витривалості σ_{-1d_0} , яка визначається на гладких лабораторних зразках малого діаметра, а для висновку про міцність деталі при змінних напруженнях потрібно знати її границю витривалості σ_{-1kd} . Тому вводять додаткове поняття *ефективного коефіцієнта концентрації напружень деталі*

$$k_{\sigma d} = \frac{\sigma_{-1d_0}}{\sigma_{-1kd}}. \quad (6.8)$$

Коефіцієнт $k_{\sigma d}$ враховує сумарний вплив концентрації напружень та абсолютних розмірів на опір утоми й визначається за даними випробувань зразків та моделей різних перерізів.

Вплив стану поверхні

Здебільшого поверхневі шари елемента конструкції, який зазнає дії циклічних навантажень, виявляються більш напруженими, ніж внутрішні (зокрема, це відбувається при згинанні та крученні). Крім того, поверхня деталі майже завжди має дефекти, пов'язані з якістю механічної обробки, а також з корозією внаслідок впливу оточуючого середовища. Тому тріщини від утоми, як правило, починаються з поверхні, а погана якість останньої призводить до зниження опору утоми.

Вплив стану обробленої поверхні на утому оцінюється коефіцієнтом β , що дорівнює відношенню границі витривалості випробуваного зразка з певною обробкою поверхні до границі витривалості старанно полірованого зразка.

Шкідливий вплив мікронерівностей поверхні здебільшого пом'якшується пластичною деформацією, що спричинюється у поверхневому шарі

механічною обробкою і поширюється на деяку глибину; ця глибина залежить від режимів різання і, зокрема, від подачі. При грубій обточці вона може досягати 1 мм і більше, а при шліфуванні й поліруванні не перевищує сотих часток міліметра. Пластична деформація поверхневого шару може підвищити границю витривалості на 10...20 %.

На границю витривалості істотно впливає корозія. Цей вплив буде різним тоді, коли метал, що зазнав корозії до випробування на опір утоми, не зазнає її під час випробовувань, і тоді, коли метал зазнає корозії під час випробовувань. В обох зазначених випадках, особливо в другому, корозія спричинює різке зниження границь витривалості (до 70...80 %). Зниження границі витривалості при корозії виражене тим більше, чим вища границя міцності металу і чим більше останній схильний до корозії.

У разі простих видів деформації при зміні напружень у деталі за симетричним циклом запас міцності при дії, наприклад, нормальних напружень можна обчислити за формулою

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1kd}}{\sigma_a}, \quad (6.9)$$

де σ_{-1kd} — границя витривалості деталі при розтяганні-стисканні або при згинанні;

σ_a — номінальні фактично діючі знакозмінні напруження.

6.1.4 Розрахунок на міцність при повторно-змінних навантаженнях

Для розрахунку на міцність при змінному навантаженні у разі складного напруженого стану можна використати відповідні теорії міцності. При цьому для матеріалів у пластичному стані, як відомо, застосовують III та IV теорії міцності.

Тоді, маючи на увазі, що $n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1kd}}{\sigma_a}$ — коефіцієнт, який характери-

зує запас міцності тільки за нормальними напруженнями, та $n_{\tau} = \frac{\tau_{-1kd}}{\tau_a}$ —

коефіцієнт, що характеризує міцність тільки за дотичними напруженнями, на підставі співвідношення матимемо

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2}, \quad (6.10)$$

звідки запас міцності n при складному напруженому стані, наприклад при спільній дії згинання та кручення, визначатиметься за формулою

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (6.11)$$

Позначимо

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \quad (6.12)$$

Остаточні вирази для запасу міцності

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_N}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma d} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_{cpM}}, \quad (6.13)$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_{cpM}}. \quad (6.14)$$

Запаси міцності при розрахунку на опір втоми залежать від точності визначення зусиль та напружень, від однорідності матеріалів, якості технології виготовлення деталі та інших факторів. При підвищеній точності розрахунку (з широким використанням експериментальних даних щодо визначення зусиль, напружень та характеристик міцності), при достатній однорідності матеріалу та високій якості технологічних процесів береться запас міцності $n = 1,3 \dots 1,4$. Для звичайної точності розрахунку (без належної експериментальної перевірки зусиль та напружень) при помірній однорідності матеріалу $n = 1,4 \dots 1,7$. При зниженій точності розрахунку (немає експериментальної перевірки зусиль та напружень) і зниженій однорідності матеріалу, особливо для литва та деталей великих розмірів, $n = 1,7 \dots 3,0$.

Найвірогідніші дані про потрібні запаси міцності деталі можна отримати на підставі результатів натурних випробувань деталей або досвіду експлуатації машин з деталями цього типу.

6.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

Задача 14. Розрахунок вала на витривалість при згині та крученні

Ступінчастий вал обертається на двох шарикопідшипниках (рис. 6.1), на вал діє сила P та циклічні скручувальні моменти T з коефіцієнтом асиметрії r .

Якість поверхні характеризується величиною шорсткості.

Потрібно:

1. Показати розрахункову схему вала;
2. Побудувати епюри згинальних моментів та визначити небезпечні перерізи;
3. Розрахувати згинальні моменти в небезпечних перерізах;
4. З умови міцності при згині і крученні визначити $[P]$ (допустиму величину сили P);
5. Розрахувати коефіцієнт запасу вала.

Дані взяти з табл. 6.1.

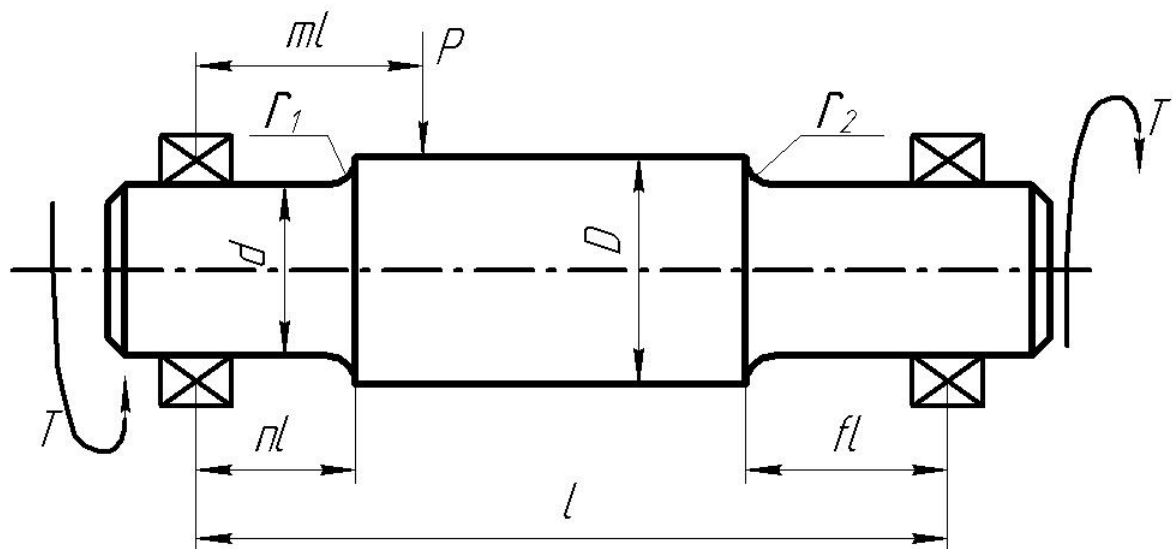


Рисунок 6.6 - Схема до виконання задачі 14

Таблиця 6.1

Номер варіанта	Матеріал	$[n_\sigma],$ $[n_\tau]$	r	Шорсткість R_a , мм
0	Сталь 35	2,2	-0,7	1,25
1	Сталь 30	2,1	-0,8	2,3
2	Сталь 10	2,4	-0,6	0,32
3	Сталь 45	2,3	-0,4	0,16
4	Сталь 50	2,7	-0,3	2,5
5	30ХМ	2,8	0,4	1,26
6	40Х	2,9	0,5	0,32
7	12ХН3А	2,6	0,4	0,63
8	30ХГСА	3,0	0,7	0,16
9	40ХНМА	2,9	0,6	0,32

Таблиця 6.2 – Дані геометрії вала (схеми 00, 01 ... 14)

Номер рисунка	l	a	m	n	f	d	D	r_1	r_2
	см					мм			
00	85	25	0,44	0,32	0,39	42	98	2	9
01	80	20	0,42	0,34	0,40	41	80	1	10
02	95	35	0,48	0,34	0,39	43	74	4	7
03	90	30	0,46	0,33	0,38	38	76	3	8
04	105	45	0,52	0,30	0,36	46	70	6	4
05	100	40	0,50	0,35	0,34	45	72	3	3
06	115	55	0,56	0,38	0,37	48	66	9	3
07	110	50	0,54	0,37	0,33	47	68	10	3
08	125	65	0,48	0,40	0,31	50	62	10	1
09	120	60	0,58	0,39	0,32	49	64	9	2
10	80	20	0,44	0,32	0,39	43	74	4	7
11	90	30	0,48	0,34	0,39	45	72	3	3
12	100	40	0,52	0,30	0,36	50	62	10	1
13	110	50	0,56	0,38	0,37	42	98	2	9
14	120	60	0,48	0,40	0,31	41	80	1	10

За даними самостійно зобразити рисунок в масштабі.

6.3 Приклад розв'язання задачі 14

Дано:

матеріал – сталь 40ХН;

$l = 120$ см; $a = 50$ см; $m = 0,52$; $n = 0,35$;

$f = 0,30$; $d = 45$ мм; $D = 70$ мм; $r_1 = 9$ мм;

$r_2 = 5$ мм; $[n_\sigma] = 2,5$; $r = -0,4$; шорсткість $R_a = 0,32$.

Розв'язування

Показники статичної і циклічної міцності сталі 40ХН (див. додатки В, Г)

$\sigma_{міц} = 1000$ МПа; $\sigma_{0,2} = 800$ МПа; $\tau_{0,2} = 390$ МПа;

$\sigma_{-1} = 400$ МПа; $\tau_{-1} = 240$ МПа; $\psi_\sigma = 0,15$; $\psi_\tau = 0,075$.

1. Знаходимо максимальну і мінімальну величини крутних моментів:

$M_{\max} = P \cdot a = P \cdot 50$ см; $M_{\min} = r \cdot M_{\max} = (-0,4) \cdot 50 = -20P$ см.

2. Креслимо розрахункову схему вала згідно з вихідними даними (рис. 6.1).

3. Будуємо епюри згинальних моментів і визначаємо небезпечні перерізи вала.

4. Визначаємо опорні реакції (рис. 6.1).

$$V_B = \frac{0,52 \cdot 120 \cdot P}{120} = 0,52P;$$

$$\sum M_B = 0; \quad V_A = 120 - P \cdot (57,6) = 0;$$

$$V_A = \frac{P \cdot 57,6}{120} = 0,48P.$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0, \quad V_A - P + V_B = 0; \quad 0,48P + 0,52P - P = 0.$$

5. Визначаємо згинальні моменти у характерних перерізах:

$$M_A = 0; \quad M_C = V_A \cdot 62,4 = 0,48 \cdot P \cdot 62,4 = 30P \text{ см.}$$

Будуємо епюру M (рис. 6.1). Крутні моменти по довжині вала однакові. Тому небезпечні перерізи визначаємо, орієнтуючись на розрахункову схему вала і епюру згинальних моментів (рис. 6.2). Такими є перерізи C і E , тому що за наявності концентраторів напружень у вигляді ступінчатої зміни діаметрів тут діють згинальні моменти, близькі до максимального.

6. Обчислення згинальних моментів у небезпечних перерізах.

Переріз C :

$$M_C = V_A \cdot 35 = 0,48P \cdot 35 = 16,8P \text{ см.}$$

Переріз E :

$$M_E = V_B \cdot 40 = 0,52P \cdot 40 = 20,8P \text{ см.}$$

7. Визначимо $[P]$. Знаходимо $[P]_C$ і $[P]_E$ - величини допустимої сили для кожного перерізу. Менша з них і буде $[P]$.

Переріз C .

Знаходимо $[P]_C^C$ - допустиму величину сили P з умови міцності при згинанні.

$$n_\sigma \geq [n_\sigma].$$

Нормальне напруження в небезпечній точці перерізу при обертанні вала змінюється за симетричним циклом. Тому коефіцієнт запасу обчислимо за формулою

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma d} \cdot \sigma_a}.$$

$$\text{Амплітудне напруження } \sigma_a = \sigma_{\max} = \frac{M}{W}.$$

Осьовий момент опору перерізу вала

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4,5^3}{32} = 8,95 \text{ см}^3. \text{ Тоді}$$

$$\sigma_a^C = \frac{MC}{W} = \frac{16,8P}{8,95} = 1,89P \cdot \frac{1}{\text{см}^2}.$$

Загальний коефіцієнт зниження границі витривалості деталі при симетричному циклі знайдемо за формулою:

$$K_{\sigma\partial} = \frac{K_{\sigma}}{\beta \varepsilon_{\sigma}}.$$

При $\frac{D}{d} = \frac{70}{45} = 1,56$: $\frac{r^C}{d} = \frac{r_1}{d} = \frac{9}{45} = 0,2$ і $\sigma_M = 1000 \text{ МПа}$ коефіцієнти концентрації напружень $K_{\sigma}^C = 1,38$; $K_{\tau}^C = 1,24$ (див. додаток Д) $\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\tau} = 0,755$ (див. додаток Е). При шорсткості $R_a 0,32$ $\frac{1}{\beta} = 1$ (додаток Ж).

$$K_{\sigma\partial}^C = \frac{1,38 \cdot 1}{0,755} = 1,83; K_{\tau\partial}^C = \frac{1,24 \cdot 1}{0,755} = 1,64$$

із (6.1) і (6.2) одержимо:

$$\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma\partial}^C \sigma_a^C} \geq [n_{\sigma}] = \frac{400}{1,83 \cdot 1,89P / 10^2} \geq 2,5$$

$$[P]_{\sigma}^C = \frac{400 \cdot 10^2}{1,83 \cdot 1,89 \cdot 2,5} = 4626 \text{ Н}.$$

$$\text{Розмірність: } \sigma_{-1} - \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}, \sigma_a^C - \frac{P}{\text{мм}^2}.$$

Знаходимо $[P]_{\tau}^C$ – допустиму величину сили P з умови міцності при крученні

$$n_{\tau} \geq [n_{\tau}].$$

Матеріал у небезпечній точці сприймає асиметричний цикл дотичних напружень. Тому визначимо допустиме значення сили $[P]_{\tau(r)}^C$ з умови утомної міцності і сили $[P]_{\tau(r)}^C$. Записуємо умову утомної міцності $n_{\tau(r)} \geq [n_{\tau}]$. Визначаємо коефіцієнт запасу $n_{\tau(r)}$ відносно границі витривалості. Для цього обчислюємо добуток $\rho \cdot K_{\tau\partial}^C$. Характеристика $\rho = \frac{\tau_a}{\tau_C}$:

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{kp \max}}{W_p} - \frac{M_{kp \min}}{W_p} \right);$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{kp \max}}{W_p} + \frac{M_{kp \min}}{W_p} \right).$$

Полярний момент опору перерізу вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W = 2 \cdot 8,946 = 17,9 \text{ см}^3;$$

$$\tau_a = \frac{M_{kp \max} - M_{kp \min}}{2W_p} = \frac{(50 - (-20))P}{2 \cdot 17,9} = 1,96 P / \text{см}^2.$$

$$\tau_c = \frac{(50 - 20)P}{2 \cdot 17,9} = 0,84 P / \text{см}^2;$$

$$\rho = \frac{1,96P}{0,84P} = 2,33.$$

Оскільки величина добутку $\rho \cdot K_{\tau 0}^C = 2,33 \cdot 1,64 > 1$, то для обчислення коефіцієнта запасу використовуємо формулу

$$n_{\tau(r)} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau 0}^C \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_c} \geq [n_{\tau}] = \frac{240}{1,64 \left(\frac{1,96P}{10^2} \right) + 0,075 \left(\frac{0,84P}{10^2} \right)} \geq 2,5;$$

$$[P]_{\tau(r)}^C = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,64 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84) 2,5} = 2970 \text{ Н}.$$

Розмірність: $\tau_{-1} - \text{Н} / \text{мм}^2$; $\tau_a, \tau_c - \text{Н} / \text{мм}^2$.

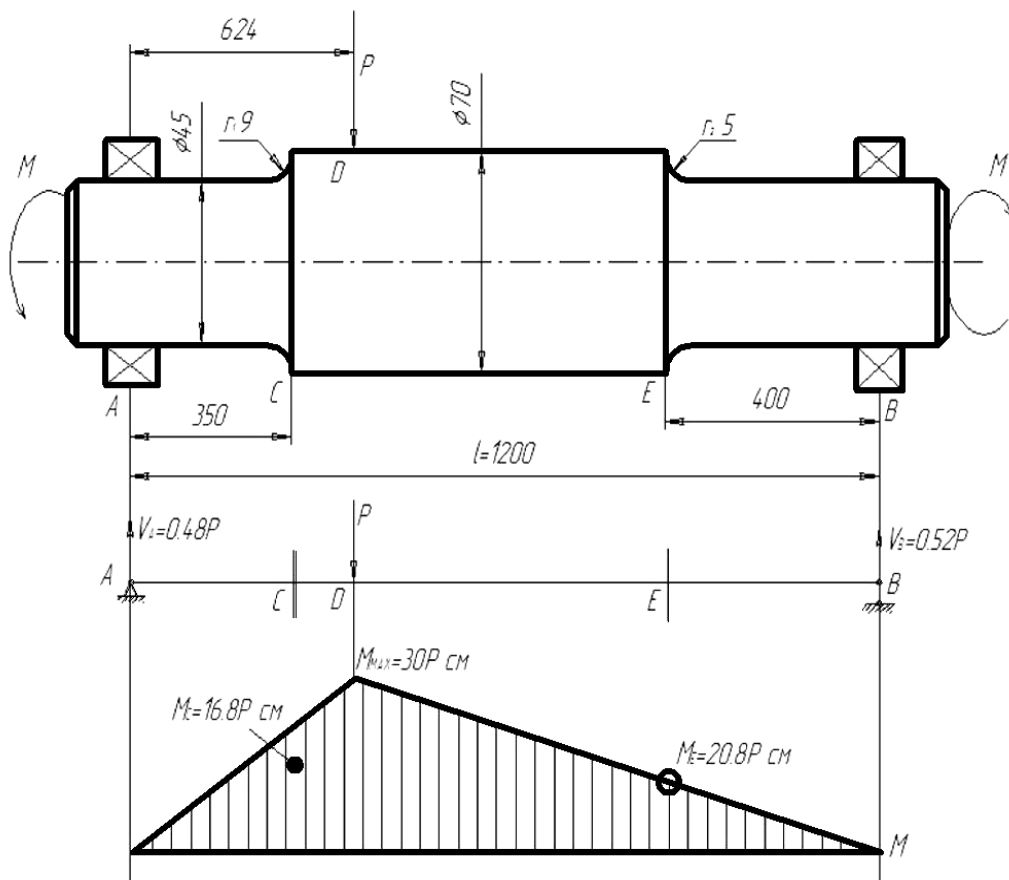


Рисунок 6.7 - Розрахункова схема вала

Знаходження $[P]_{\tau(T)}^L$.

Записуємо умову статичної міцності

$$n_{\tau(T)} \geq [n_{\tau}].$$

Коефіцієнт запасу відносно границі текучості обчислюємо за формулою

$$n_{\tau(T)} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}},$$

$$\text{де } \tau_{\max} = \tau_a + \tau_c = (1,956 + 0,838) \frac{P}{\text{см}^2} = 2,9 \frac{P}{\text{см}^2}. \quad (6.15)$$

Враховуючи (6.13 - 6.15), одержимо

$$\frac{\tau_T}{\tau_{\max}} \geq [n_{\tau}] \Rightarrow \frac{390}{2,90 / 10^2} \geq 2,5 \Rightarrow [P]_{\tau(T)}^{\omega} = \frac{390 \cdot 10^2}{2,9 \cdot 2,5} \Rightarrow [P]_{\tau(T)}^{\omega} = 5390 \text{ Н}.$$

З порівняння величин

$$[P]_{\sigma}^{\omega} = 3720 \text{ Н}, [P]_{\tau(r)}^{\omega} = 2970 \text{ Н}, [P]_{\tau(T)}^{\omega} = 5390 \text{ Н}.$$

Робимо висновок, що для перерізу L допустима величина сили $[P]^L = 2970 \text{ Н}$.

Переріз E

Знаходимо $[P]_{\sigma}^E$

$$\sigma_a^E = \sigma_{\max}^E = \frac{M_E}{W} = \frac{20,8P}{8,95} = 2,32 \frac{P}{\text{мм}^2}.$$

Визначаємо коефіцієнти $K_{\sigma D}^E$ і $K_{\tau D}^E$.

$$\text{При } \frac{D}{d} = \frac{70}{45} = 1,56, \frac{r^E}{d} = \frac{r_2}{d} = \frac{5}{45} = 0,11 \text{ і } \sigma_E = 1000 \text{ МПа},$$

$$K_{\sigma}^E = 1,62, K_{\tau}^E = 436, \quad \varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\tau} = 0,76; 1/\beta = 1.$$

$$\text{Тоді } K_{\sigma D}^E = \frac{1,62}{0,76} = 2,15; K_{\tau D}^E = \frac{1,36 \cdot 1}{0,76} = 1,8;$$

$$\frac{\sigma - 1}{K_{\sigma}^E \sigma_a^E} \geq [n_{\sigma}] = \frac{400}{2,15(1,79P / 10^2)} \geq 2,5 \Rightarrow$$

$$[P]_{\sigma}^E = \frac{400 \cdot 10^2}{2,15 \cdot 1,79 \cdot 2,5} \Rightarrow [P]_{\sigma}^E = 4160 \text{ Н}.$$

$$\text{Розмірність } \sigma_{-1} - \text{Н} / \text{мм}^2, \sigma_a^E - \frac{P}{\text{мм}^2}.$$

Обчислюємо $[P]_{\tau}^E$ при асиметричному крученні.

Критерій $\rho \cdot K_{\tau D}^E = 2,33 \cdot 1,8 > 1$, і коефіцієнт запасу відносно границі витривалості обчислюємо за формулою

$$n_{\tau(r)} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D}^E \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_c} \geq [n_{\tau}] \Rightarrow \frac{240}{1,8(\frac{1,961}{10^2}) + 0,0075(\frac{0,841}{10^2})} \geq 2,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [P]_{\tau(r)}^E = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,8 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84)2,5} \Rightarrow [P]_{\tau(r)}^E = 2680 \text{ Н}.$$

Амплітудні τ_a і середні τ_c напруження в перерізах L і E однакові. Тому

$$[P]_{\tau(T)}^E = [P]_{\tau(T)}^L = 5340 \text{ Н}.$$

Як видно з порівняння $[P]_{\sigma}^E$, $[P]_{\tau(r)}^E$ і $[P]_{\tau(T)}^E$, для перерізу E допустима величина сили $[P]^E = 2680 \text{ Н}$.

Отже, допустима величина сили P для вала визначається утомою міцності матеріалу в небезпечній точці перерізу E .

$$[P] = [P]^E = 2680 \text{ Н}.$$

Обчислення коефіцієнта запасу міцності

При плоскому напруженому стані коефіцієнт запасу визначають за формулою

$$n = \frac{n_{\sigma} n_T}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_T^2}}.$$

Обчислюємо n для кожного ймовірно небезпечного перерізу. Менша величина є коефіцієнтом запасу вала.

Коефіцієнт запасу n_{σ} за нормальним напруженням обчислюється в небезпечній точці перерізів L і E .

Переріз L

$$n_{\sigma}^L = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_a^L},$$

$$\sigma_a^L = 1,88 \cdot [P] / \text{см}^2 = \frac{1,88 \cdot 2680}{10^2} \cdot \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 50,4 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$n_{\sigma}^L = \frac{400}{1,83 \cdot 50,4} \Rightarrow n_{\sigma}^L = 4,34,$$

$$n_{\tau}^L = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D}^L \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \tau_a} = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,64 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84) 2680} \Rightarrow n_{\tau}^L = 2,74,$$

$$n_L = \frac{n_{\sigma}^L \cdot n_{\tau}^L}{\sqrt{(n_{\sigma}^L)^2 + (n_{\tau}^L)^2}} = \frac{4,34 \cdot 2,74}{\sqrt{4,34^2 + 2,74^2}} \Rightarrow n_L = 2,3.$$

Переріз E

$$n_{\sigma}^E = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}^E \cdot \sigma_a^E},$$

$$\sigma_a^E = 1,79[P] / \text{см}^2 = \frac{1,79 \cdot 2680}{10^2} \frac{H}{\text{мм}^2} = 48 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$n_{\sigma}^E = \frac{400}{48 \cdot 2,3} \Rightarrow n_{\sigma}^E = 3,6.$$

Оскільки величина $[P]$ визначена з умови міцності матеріалу в небезпечній точці перерізу E при крученні, то

$$n_{\tau}^E = [n_{\tau}] = 2,5; \quad n_E = \frac{n_{\sigma}^E n_{\tau}^E}{\sqrt{(n_{\sigma}^E)^2 + (n_{\tau}^E)^2}} = \frac{3,6 \cdot 2,5}{\sqrt{3,6^2 + 2,5^2}} \Rightarrow n_{\sigma} = 2,05.$$

Значить, коефіцієнт запасу вала

$$n = n_E = 2,05.$$

Відповідь: $[P] = 2680 \text{ Н}$; $n = 2,05$.

Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 14)

1. Який порядок розрахунку вала на витривалість при згині та крученні?
2. Як знаходяться максимальні і мінімальні величини крутних моментів?
3. Як визначаються небезпечні перерізи?
4. Як визначається амплітудне навантаження?
5. Як знаходиться полярний момент опору перерізу вала?
6. Як обчислюється коефіцієнт запасу міцності?
7. Як визначається величина допустимого зусилля?

Додаток А
Оформлення розрахунково-графічної роботи

Титульний лист

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

Інститут МТ

Кафедра ОМПМ
Секція опору матеріалів

Розрахунково-графічна робота № 4
з дисципліни “Опір матеріалів”

Задача 7. Розрахунок стержня на позacentровий стиск

Задача 8. Розрахунок вала на згин з крученням

Варіант 108

Викладач: доцент, к.т.н. _____ О. І. Іванов
(підпис)

“ ____ ” _____ 2011 р.

Виконав: ст. гр. 1Б-10 _____ І. О. Петров
(підпис)

“ ____ ” _____ 2011 р.

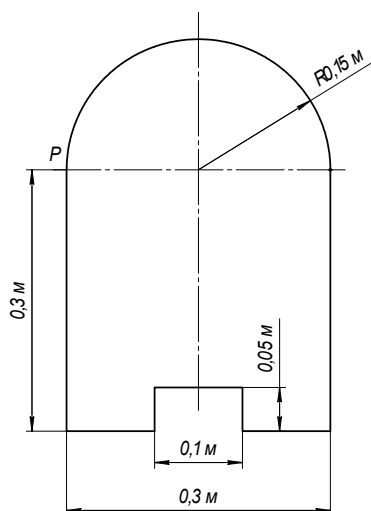
ВНТУ 2011

297

Задача 7

Розрахунок стержня на позacentровий стиск

Абсолютно жорстка балка підтримується в горизонтальному положенні пружними сталевими стержнями за схемою. Обчислити необхідну площу перерізів цих стержнів при заданому їх співвідношенні.



Дано:

Визначити:

Розв'язування

Відповідь

7	10	23	15	10	11	10
3	Ар	№ док.ум.	Під-	Датс	ОМ.1Б-10.38.108	Лист
						2

210

5

Додаток Б

Механічні характеристики матеріалів

Таблиця Б.1 – Механічні характеристики конструкційних вуглецевих сталей звичайної якості (ГОСТ 380-71)

Марка сталі	Статичні навантаження				Повторно-змінні навантаження		
	σ_{σ} , МПа	σ_T , МПа	τ_T , МПа	δ , %	σ_{-1}° , МПа	σ_{-1} , МПа	τ_{-1} , МПа
Ст. 1	320÷400	180	—	28	120÷150	160÷220	80÷120
Ст. 2	320÷400	190÷220	—	26	120÷160	170÷220	80÷130
Ст. 3	380÷470	210÷240	160	21÷23	120÷160	170÷220	100÷130
Ст. 4	420÷520	240÷260	—	19÷21	—	190÷250	—
Ст. 5	500÷620	260÷280	190	15÷17	170÷220	220÷300	130÷180
Ст. 6	600÷720	300÷310	220	—	190÷250	250÷340	150÷200

Таблиця Б.2 – Механічні характеристики конструкційних вуглецевих сталей якісних (ГОСТ 1050-74)

Марка сталі	Статичні навантаження				Повторно-змінні навантаження		
	σ_{σ} , МПа	σ_T , МПа	τ_T , МПа	δ , %	σ_{-1}° , МПа	σ_{-1} , МПа	τ_{-1} , МПа
10	340	210	140	31	120÷150	160÷220	80÷120
20	420	250	160	25	120÷160	170÷220	100÷130
25	460	280	—	23	—	190÷250	—
30	500	300	170	21	170÷210	200÷270	110÷140
35	540	320	190	20	170÷220	220÷300	130÷180
40	580	340	—	19	180÷240	230÷320	140÷190
45	610	360	220	16	190÷250	250÷340	150÷200
50	640	380	—	14	200÷260	270÷350	160÷210
55	660	390	—	13	—	—	—
60	690	410	—	12	220÷280	310÷380	180÷220
20Г	460	280	—	24	—	—	—
30Г	550	320	—	20	—	220÷320	—
50Г	660	400	—	13	—	290÷360	—

Таблиця Б.3 – Механічні характеристики деяких конструкційних легованих сталей (ГОСТ 4543-71)

Марка сталі	Статичні навантаження				Повторно-змінні навантаження		
	σ_{σ} , МПа	σ_T , МПа	τ_T , МПа	δ , %	σ_{-1}° , МПа	σ_{-1} , МПа	τ_{-1} , МПа
20Х	800	650	—	11	—	380	170÷230
40Х	1000	800	—	10	250	350÷380	225
45Х	1050	850	—	9	—	400÷500	—
30ХМ	950	750	—	11	370	310÷410	230
40ХН	1000	800	390	11	290	400	240
12ХН3А	950	700	400	11	270÷320	390÷470	220÷260
20ХН3А	950	750	—	12	300÷320	430÷450	245÷255
40ХНМА	1000	950	—	12	—	500÷700	270÷380
30ХГСА	1100	850	—	10	500÷535	510÷540	220÷245

Таблиця Б.4 – Механічні характеристики пружинних сталей

Сталі	Характеристики міцності					Модулі пружності		τ_{-1} , МПа
	$\sigma_{\text{вр}}$, МПа	$\sigma_{\text{тр}}$, МПа	$\sigma_{\text{пцр}}$, МПа	$\tau_{\text{тс}}$, МПа	$\tau_{\text{вс}}$, МПа	E , МПа	G , МПа	
Середньо-вуглецева	1500-1600	1000-1200	750-900	600-800	850-1100	$2,1 \cdot 10^5$	$8,1 \cdot 10^4$	300-390
Високо-вуглецева	1450-1700	950-1350	800-1000	650-900	1100-1400	$2,0 \cdot 10^5$ - $2,2 \cdot 10^5$	$7,6 \cdot 10^4$ - $8,3 \cdot 10^4$	300-420
Хромо-ванадієва	1600-1750	1500-1600	900-1000	950-1000	1700-1300	$2,01 \cdot 10^5$ - $2,05 \cdot 10^5$	$8,0 \cdot 10^4$	330-360
Кремне-марганцева	1600-1700	1400-1500	900-950	950-1000	1350	$2,05 \cdot 10^5$	$7,6 \cdot 10^4$	300-330
Кремне-ванадієва	1400-1500	950-1050	600-650	900	1200-1250	$2,3 \cdot 10^5$	$8,3 \cdot 10^4$	270-300

Таблиця Б.5 – Механічні характеристики сірих чавунів (ГОСТ 1412-85)

Марка чавуну	Статичні навантаження			Повторно-змінні навантаження		
	$\sigma_{\text{вр}}$, МПа	$\sigma_{\text{вс}}$, МПа	$\tau_{\text{с}}$, МПа	σ_{-1}° , МПа	σ_{-1} , МПа	τ_{-1} , МПа
СЧ 10	100	417	—	—	—	—
СЧ 12	120	500	—	—	—	—
СЧ 15	150	650	240	—	70	50
СЧ 18	180	700	—	35	90	—
СЧ 20	200	714	280	-	95	76
СЧ 21	210	950	280	—	100	80
СЧ 24	240	1000	300	65	120	100
СЧ 25	250	885	312	68	125	104
СЧ 28	280	1100	350	75	150	110
СЧ 30	300	1150	365	70	130	110
СЧ 32	320	1200	390	70	140	115
СЧ 35	350	1200	400	75	150	115
СЧ 38	380	1400	460	-	150	115

Таблиця Б.6 – Механічні характеристики високоміцних чавунів з кулястим графітом (ГОСТ 7293-85)

Марка чавуну	Статичні навантаження				δ , %	Повторно-змінні навантаження	
	$\sigma_{\text{вр}}$, МПа	$\sigma_{\text{вс}}$, МПа	$\sigma_{\text{т}}$, МПа	$\tau_{\text{в}}$, МПа		σ_{-1} , МПа	τ_{-1} , МПа
ВЧ 45-0	450-500	1500-1600	350-400	450÷500	0,4-1,4	180-200	--
ВЧ 50-1,5	500-600	1700-1800	400-500	500÷550	1,5-3,0	200-220	170-210
ВЧ 60-2	600-700	2000-2100	420-550	600÷750	2-3	170-230	150-160
ВЧ 45-5	450-550	1800-2000	320-420	400-450	5-10	180-200	--
ВЧ 40-10	400-550	2000-2200	300-400	--	10-20	250-280	198

Таблиця Б.7 – Механічні характеристики ковких чавунів (ГОСТ 1215-79)

Марка чавуну	Статичні навантаження				δ , %	Повторно-змінні навантаження		
	$\sigma_{вр}$, МПа	$\sigma_{вс}$, МПа	σ_T , МПа	τ_B , МПа		σ_{-1}° , МПа	σ_{-1} , МПа	τ_{-1} , МПа
КЧ 30-6	300	—	190	340	6(7)	70	120	110
КЧ 33-8	330	—	210	345	8(9)	80	130	120
КЧ 35-10	350	—	220	350	10(11)	80	140	130
КЧ 37-12	370	—	230	370	12(13)	80	140	130
КЧ 50-4	500	—	270	520	4(3,5)	110	180	160

Таблиця Б.8 – Механічні характеристики деяких матеріалів

Матеріал	σ_T , МПа	σ_σ , МПа	δ , %	НВ	Галузь застосування
Латунь Л68*	91; 520	320; 660	55; 30	55; 150	Труби, дрiт, листи
Бронза олов'яна БрО10*	—	250	11	80	Арматура
Дуралюмін нормальний Д1*	110; 240	210; 420	18; 15	45; 113	Труби, пресовані профілі
Дуралюмін підвищеної якості Д6*	50; 380	180; 500	8; 20	50; 125	Труби, профілі
Сосна звичайна (15% вологості)	61÷31	93,1÷115	—	1,99÷2,7	—
Дуб (15% вологості)	29÷74	128,8	—	4,63÷6,53	—
Текстоліти на основі бавовняних тканин	70÷80	45÷110	—	30	Колеса зубчасті, підшипники ковзання, панелі
Капрон	—	60	150; 200	10÷12	Канати

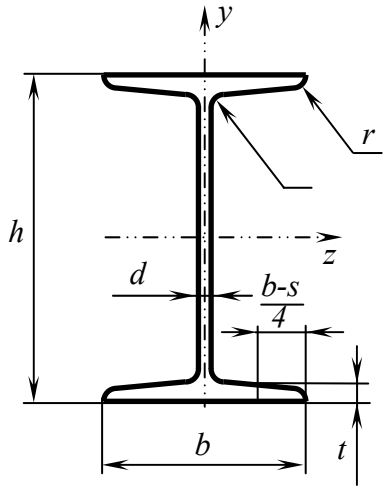
Примітка до таблиці Б.8.* Перші цифри дані для м'якого стану матеріалу, другі – для твердого.

Додаток В

Сортамент прокатної сталі

Таблиця В.1

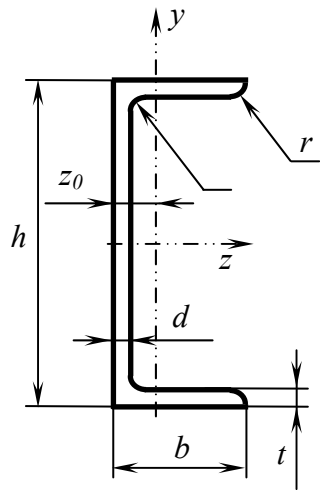
Сталь гарячекатана. Балки двотаврові. Сортамент (ГОСТ 8239 – 72)



Номер швелера	h	b	d	t	R	r	Площа перерізу	Маса 1 м	Довідникові дані для осей						
									z				y		
									$I_z,$ $см^4$	$W_z,$ $см^3$	$i_z,$ $см$	$S_z^{max},$ $см^3$	$I_y,$ $см^4$	$W_y,$ $см^3$	$i_y,$ $см$
	$мм$						$A,$ $см^2$	Kz							
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407	11,3	229	337	50	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Таблиця В.2

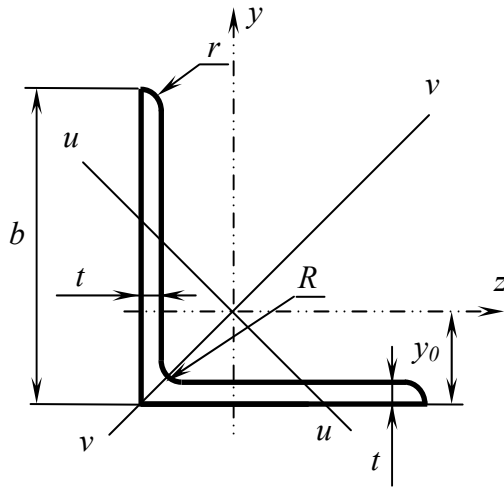
Сталь гарячекатана. Швелери з паралельними гранями полиць (ГОСТ 8240 – 72)



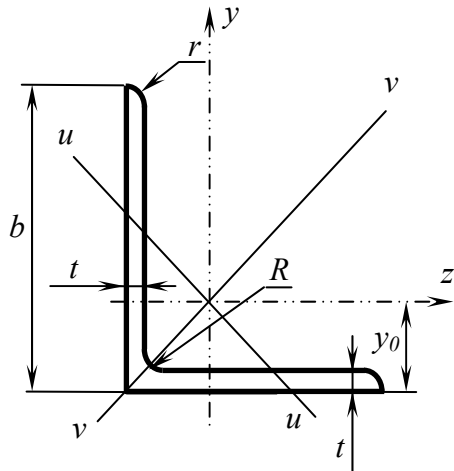
Номер швелера	h	b	d	t	R	r	Площа перерізу	Маса 1 м	Довідникові дані для осей							z_0 , см		
	$мм$								A , см ²	кг	z				y			
											I_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	S_{zmax} , см ³	I_y , см ⁴		W_y , см ³	i_y , см
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84	22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21		
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90	48,8	15,0	2,55	9,02	9,35	4,06	1,120	1,29		
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05	89,8	22,5	3,16	13,3	13,9	5,31	1,240	1,38		
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,9	8,59	175	34,9	3,99	20,5	22,6	7,37	1,440	1,53		
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,3	10,4	305	50,8	4,79	29,7	34,9	9,84	1,620	1,66		
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,6	12,3	493	70,4	5,61	40,9	51,5	12,9	1,810	1,82		
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	17,0	13,3	547	78,2	5,68	45,2	65,2	15,7	1,960	2,04		
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,1	14,2	750	93,8	6,44	54,3	72,8	16,4	2,000	1,97		
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,5	15,3	827	103	6,51	59,5	90,5	19,6	2,150	2,19		
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,7	16,3	1090	121	7,26	70,0	100	20,6	2,200	2,14		
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,2	17,4	1200	133	7,34	76,3	123	24,3	2,350	2,36		
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,4	18,4	1530	153	8,08	88,0	134	25,2	2,390	2,30		
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,2	19,8	1680	168	8,17	96,2	162	29,7	2,540	2,53		
22	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,7	21,0	2120	193	8,90	111	178	31,0	2,580	2,47		
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	6,0	28,8	22,6	2340	212	9,01	121	220	37,0	2,770	2,75		
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,6	24,0	2910	243	9,75	139	248	39,5	2,850	2,72		
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,9	25,8	3200	266	9,86	152	302	46,5	3,030	3,01		
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,2	27,7	4180	310	10,9	178	314	46,7	2,990	2,78		
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,5	31,8	5830	389	12,0	224	393	54,8	3,120	2,83		
33	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,5	36,5	8010	486	13,1	281	491	64,6	3,250	2,90		
36	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,4	41,9	10850	603	14,3	350	611	76,3	3,380	2,99		
40	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,5	48,3	15260	763	15,8	445	760	89,9	3,510	3,05		

Таблиця В.3

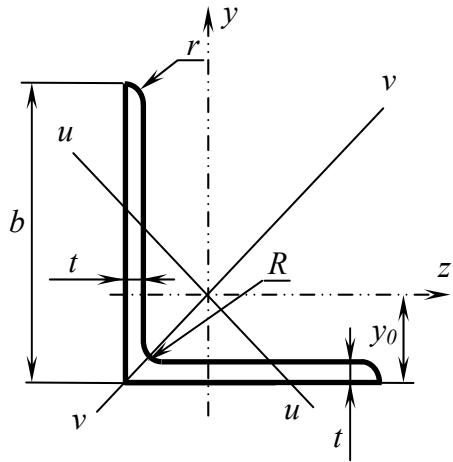
Кутики сталіні гарячекатані рівнобічні. Сортамент (ГОСТ 8509 – 86)



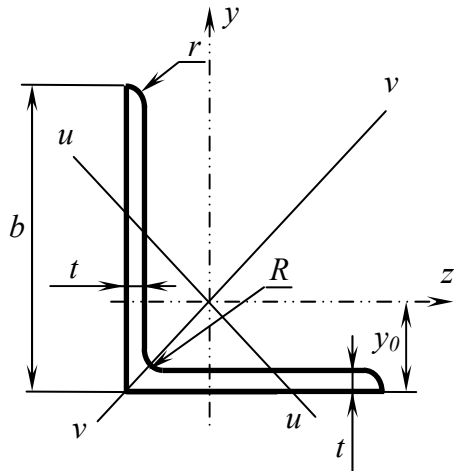
Номер кутика	Розміри, мм				Площа пере- різу, $A \text{ см}^2$	Довідникові величини для осей										Маса 1 м кг
	b	t	R	r		z			$v-v$		$u-u$			$I_{zy},$ см^4	$y_0,$ см	
						$I_z,$ см^4	$W_z,$ см^3	$i_z,$ см	$I_{v \max},$ см^4	$i_{v \max},$ см^4	$I_{u \min},$ см^4	$W_u,$ см^4	$i_{u \min},$ см			
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4			1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4			1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
		5			2,27	1,22	0,72	0,73	1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	0,69	0,80	1,78
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	4	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4			2,27	1,84	0,87	0,90	2,29	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
		5			2,78	2,20	1,06	0,89	3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	1,27	0,93	2,18
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
		4			2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
		5			3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	5	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		5			3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
		6			4,48	6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52
4,5	45	3	5	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	2,04	1,38	10,5	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
		5			4,29	8,03	2,51	1,37	12,7	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
		6			5,08	9,35	2,95	1,36	14,8	1,71	3,90	2,06	0,88	5,45	1,34	3,99
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,3	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	2,54	1,54	14,6	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	3,13	1,53	17,8	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6			5,69	13,07	3,69	1,52	20,7	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
		7			6,56	14,84	4,23	1,50	23,5	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15
		8			7,41	16,51	4,76	1,49	26,0	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82
5,6	56	4	6	2	4,38	13,10	3,21	1,73	20,8	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5			5,41	15,97	3,96	1,72	25,4	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25



Номер кутика	Розміри, мм				Площа пере- різу, $A \text{ см}^2$	Довідникові величини для осей										$I_{zy},$ см^4	$y_0,$ см	Маса 1 м, кг
	b	t	R	r		z			$v-v$		$u - u$							
						$I_z,$ см^4	$W_z,$ см^3	$i_z,$ см	$I_{v \max },$ см^4	$i_{v \max },$ см^4	$I_{u \min },$ см^4	$W_u,$ см^4	$i_{u \min },$ см					
6	60	4	7,0	2,3	4,72	16,21	3,70	1,85	25,7	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71		
		5			5,83	19,79	4,56	1,84	31,4	2,32	8,18	3,49	1,18	11,6	1,66	4,58		
		6			6,92	23,21	5,40	1,83	36,8	2,31	9,60	3,99	1,18	13,6	1,70	5,43		
		8			9,04	29,55	7,00	1,81	46,8	2,27	12,34	4,90	1,17	17,2	1,78	7,10		
		10			11,08	35,32	8,52	1,79	55,6	2,24	15,00	5,70	1,16	20,3	1,85	8,70		
6,3	63	4	7	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,9	2,45	7,81	3,26	1,25	11,0	1,69	3,90		
		5			6,13	23,10	5,05	1,94	36,6	2,44	9,52	3,87	1,25	13,7	1,74	4,81		
		6			7,28	27,06	5,98	1,93	42,9	2,43	11,2	4,44	1,24	15,9	1,78	5,72		
7	70	4,5	8	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,0	2,72	12,0	4,53	1,39	17,0	1,88	4,87		
		5			6,86	31,94	6,27	2,16	50,7	2,72	13,2	4,92	1,39	18,7	1,90	5,38		
		6			8,15	37,58	7,43	2,15	59,6	2,71	15,5	5,66	1,38	22,1	1,94	6,39		
		7			9,42	42,98	8,57	2,14	68,2	2,69	17,8	6,31	1,37	25,2	1,99	7,39		
		8			10,67	48,16	9,68	2,12	76,4	2,68	20,0	6,99	1,37	28,2	2,02	8,37		
		10			13,11	57,90	11,8	2,10	91,5	2,64	24,3	8,17	1,36	33,6	2,10	10,3		
7,5	75	5	9	3	7,39	39,53	7,21	2,31	62,6	2,91	16,4	5,74	1,49	23,1	2,02	5,80		
		6			8,78	46,57	8,57	2,30	73,9	2,90	19,3	6,62	1,48	27,3	2,06	6,89		
		7			10,10	53,34	9,89	2,29	84,6	2,89	22,1	7,43	1,48	31,2	2,10	7,96		
		8			11,50	59,84	11,2	2,28	94,9	2,87	24,8	8,16	1,47	35,0	2,15	9,02		
		9			12,80	66,10	12,4	2,27	105	2,86	27,5	8,91	1,46	38,6	2,18	10,10		
8	80	5,5	9	3	8,63	52,68	9,03	2,47	83,6	3,11	21,8	7,10	1,59	30,9	2,17	6,78		
		6			9,38	56,97	9,80	2,47	90,4	3,11	23,5	7,60	1,58	33,4	2,19	7,36		
		7			10,85	65,31	11,3	2,45	104	3,09	27,0	8,55	1,58	38,3	2,23	8,51		
		8			12,30	73,36	12,8	2,44	116	3,08	30,3	9,44	1,57	43,0	2,27	9,65		
		10			15,14	88,58	15,7	2,42	140	3,04	36,9	11,1	1,56	56,7	2,35	11,9		
		12			17,90	102,7	18,4	2,40	162	3,01	43,2	12,6	1,55	59,5	2,42	14,1		
9	90	6	10	3,3	10,61	82,10	12,5	2,78	130	3,50	34,0	9,88	1,79	48,1	2,43	8,33		
		7			12,28	94,30	14,5	2,77	150	3,49	38,9	11,2	1,78	55,4	2,47	9,64		
		8			13,93	106,1	16,4	2,76	168	3,48	43,8	12,3	1,77	62,3	2,51	10,9		
		9			15,60	118,0	18,3	2,75	186	3,46	48,6	13,5	1,77	68,0	2,55	12,2		
		10			17,17	128,6	20,1	2,74	204	3,45	53,3	14,5	1,76	75,3	2,59	13,5		
		12			20,33	149,7	23,9	2,71	236	3,41	62,4	16,5	1,75	86,2	2,67	16,0		

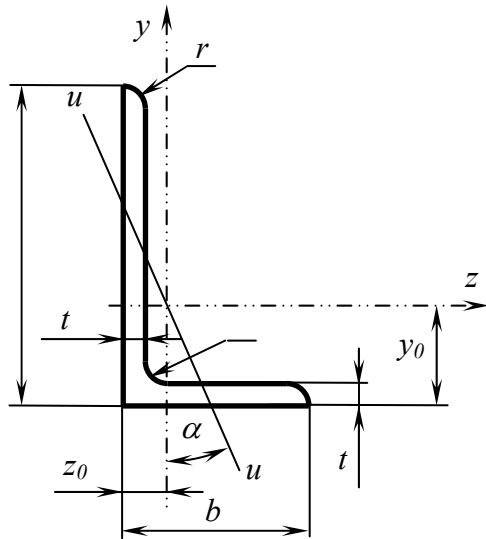


Номер кутика	Розміри, мм				Площа пере- різу, $A \text{ см}^2$	Довідникові величини для осей										Маса 1 м, кг
	b	t	R	r		z			$v-v$		$u - u$			$I_{zy}, \text{см}^4$	$y_0, \text{см}$	
						$I_z, \text{см}^4$	$W_z, \text{см}^3$	$i_z, \text{см}$	$I_{v \max}, \text{см}^4$	$i_{v \max}, \text{см}^4$	$I_{u \min}, \text{см}^4$	$W_u, \text{см}^4$	$i_{u \min}, \text{см}$			
10	100	6,5	12	4	12,82	122,1	16,7	3,09	193	3,88	50,7	13,4	1,99	71,4	2,68	10,1
		7			13,75	130,6	17,9	3,08	207	3,88	54,2	14,1	1,98	76,4	2,71	10,8
		8			15,60	147,2	20,3	3,07	233	3,87	60,9	15,7	1,98	86,3	2,75	12,2
		10			19,24	178,9	25,0	3,05	284	3,84	74,1	18,5	1,96	110	2,83	15,1
		12			22,80	208,9	29,5	3,03	331	3,81	86,8	21,1	1,95	122	2,91	17,9
		14			26,28	237,2	33,8	3,00	375	3,78	99,3	23,5	1,94	138	2,99	20,6
		15			27,99	250,7	36,0	2,99	396	3,76	105	24,6	1,94	145	3,03	22,0
		16			29,68	263,8	38,0	2,98	416	3,74	112	25,8	1,94	152	3,06	23,3
11	110	7	12	4	15,2	175,6	21,8	3,40	279	4,29	72,7	17,4	2,19	106	2,96	11,9
		8			17,2	198,2	24,8	3,39	315	4,28	81,8	19,3	2,18	116	3,00	13,5
12	120	8	12	4,0	18,80	260	29,7	3,72	412	43,68	107	23,3	2,39	153	3,25	14,76
		10			23,24	317	36,6	3,69	504	4,66	131	27,7	2,37	187	3,33	18,24
		12			27,60	372	43,3	3,67	590	4,62	153	31,8	2,36	218	3,41	21,67
		15			33,99	449	53,0	3,63	711	4,57	186	37,4	2,34	262	3,53	26,68
12,5	125	8	14	4,6	19,7	294	32,2	3,87	467	4,87	122	25,7	2,49	172	3,36	15,5
		9			22,0	327	36,0	3,86	520	4,86	135	28,3	2,48	192	3,40	17,3
		10			24,3	360	39,7	3,85	571	4,84	149	30,5	2,47	211	3,45	19,1
		12			28,9	422	47,1	3,82	670	4,82	174	34,9	2,46	248	3,53	22,7
		14			33,4	482	54,2	3,80	764	4,78	200	39,1	2,45	282	3,61	26,2
		16			37,8	539	61,1	3,78	853	4,75	224	43,1	2,44	315	3,68	29,6
14	140	9	14	4,6	24,7	466	45,6	4,34	739	5,47	192	35,9	2,79	274	3,78	19,4
		10			27,3	512	50,3	4,33	814	5,46	211	39,1	2,78	301	3,82	21,5
		12			32,5	602	59,7	4,31	957	5,43	248	45,0	2,76	354	3,90	25,5
15	150	10	14	4,6	29,33	635	58,1	4,65	1009	5,86	261	45,3	2,98	374	4,07	23,02
		12			34,89	747	68,9	4,63	1188	5,83	307	52,3	2,97	440	4,15	27,39
		15			43,08	908	84,7	4,59	1443	5,79	374	62,0	2,95	534	4,27	33,82
		18			51,09	1060	99,9	4,56	1681	5,74	439	70,9	2,93	621	4,38	40,11
16	160	10	16	5,3	31,4	774	66,2	4,96	1229	6,25	319	52,5	3,19	455	4,30	24,7
		11			34,4	844	72,4	4,95	1341	6,24	348	56,5	3,18	496	4,35	27,0
		12			37,4	913	78,6	4,94	1450	6,23	376	60,5	3,17	537	4,39	29,4
		14			43,3	1046	90,8	4,92	1662	6,20	431	68,2	3,16	615	4,47	34,0
		16			49,1	1175	103	4,89	1866	6,17	485	75,9	3,14	690	4,55	38,5
		18			54,8	1290	114	4,87	2061	6,13	537	82,1	3,13	771	4,63	43,0
		20			60,4	1419	126	4,85	2248	6,10	589	90,0	3,12	830	4,70	47,4

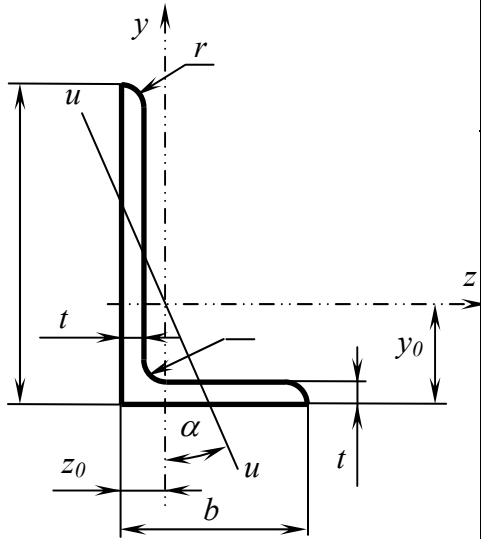


Номер кутика	Розміри, мм				Площа пере-різу, $A \text{ см}^2$	Довідникові величини для осей										Маса 1 м, кг
	b	t	R	r		z			$v-v$		$u - u$			$I_{zy}, \text{см}^4$	$y_0, \text{см}$	
						$I_z, \text{см}^4$	$W_z, \text{см}^3$	$i_z, \text{см}$	$I_{v \max}, \text{см}^4$	$i_{v \max}, \text{см}^4$	$I_{u \min}, \text{см}^4$	$W_u, \text{см}^4$	$i_{u \min}, \text{см}$			
18	180	11	16	5,3	38,8	1216	92,5	5,60	1933	7,06	500	72,9	3,59	716	4,85	30,5
		12			42,2	1317	100	5,59	2093	7,04	540	78,2	3,58	776	4,89	33,1
		15			52,2	1607	124	5,55	2555	7,00	660	93,1	3,56	948	5,01	41,0
		18			62,0	1884	146	5,51	2993	6,95	775	107	3,54	1108	5,13	48,7
		20			68,4	2061	161	5,49	3271	6,91	851	116	3,53	1210	5,20	53,7
20	200	12	18	6	47,1	1823	125	6,22	2896	7,84	749	98,7	3,99	1073	5,37	37,0
		13			50,9	1961	134	6,21	3116	7,83	805	105	3,98	1156	5,42	39,9
		14			54,6	2097	144	6,20	3333	7,81	861	112	3,97	1236	5,46	42,8
		16			62,0	2363	163	6,17	3755	7,78	970	124	3,96	1393	5,54	48,7
		18			69,3	2621	182	6,15	4165	7,75	1077	136	3,94	1544	5,62	54,4
		20			76,5	2871	201	6,12	4560	7,72	1182	147	3,93	1689	5,70	60,1
		24			90,8	3351	237	6,08	5314	7,65	1388	168	3,91	1963	5,85	71,2
		25			94,3	3466	246	6,06	5494	7,63	1438	173	3,91	2028	5,89	74,0
		30			111,5	4020	289	6,00	6351	7,55	1698	193	3,86	2332	6,07	87,6
22	220	14	21	7	60,4	2814	175	6,83	4470	8,60	1159	139	4,38	1655	5,93	47,4
		16			68,6	3175	199	6,81	5045	8,58	1306	153	4,36	1862	6,92	53,8
25	250	16	24	8	78,4	4717	258	7,76	7492	9,78	1942	203	4,98	2775	6,75	61,5
		18			87,7	5247	289	7,73	8337	9,75	2158	223	4,96	3089	6,83	68,9
		20			97,0	5765	319	7,71	9160	9,72	2370	243	4,94	3395	6,91	76,1
		22			106,1	6270	348	7,69	9961	9,69	2579	261	4,93	3691	7,00	83,3
		25			119,7	7006	392	7,65	11125	9,64	2887	287	4,91	4119	7,11	94,0
		28			113,1	7717	435	7,61	12244	9,59	3190	312	4,89	4527	7,23	104,5
		30			142,0	8177	462	7,59	12965	9,56	3389	328	4,89	4788	7,31	111,4

Таблиця В.4 Кутики сталіні гарячекатані нерівнобічні. Сортамент (ГОСТ 8510 – 86)



Номер кутика	мм					Пло-ща пере-різу, см ²	Довідникові дані для осей												Кут нахи-лу осі, tg α	Маса 1 м, кг
	B	b	t	R	r		z			y			u – u (min)			z ₀ , см	y ₀ , см	I _{zy} , см ⁴		
							I _z , см ⁴	W _z , см ³	i _z , см	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	I _u , см ⁴	W _u , см ³	i _u , см					
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,39	0,91
3/2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43	0,42	1,12
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,42	1,46
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,38	1,17
			4			1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,37	1,52
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,38	1,48
			4			2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,38	1,94
			5			3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,37	2,38
4/3	40	30	4	4,0	1,3	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,54	2,09
			5			3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00	0,53	2,57
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,38	1,68
			4			2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,37	2,20
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,40	1,90
			4			3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,40	2,49
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,4	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,40	2,81
			5			4,41	13,8	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,40	3,46
6,3/4	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,3	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,39	3,17
			5			4,98	19,9	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,39	3,91
			6			5,90	23,3	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,39	4,63
			8			7,68	29,6	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,38	6,03
6,5/5	65	50	5	6,0	2,0	5,56	23,4	5,20	2,05	12,1	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77	0,57	4,36
			6			6,60	27,5	6,16	2,04	14,1	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,5	0,57	5,18
			7			7,62	31,3	7,08	2,03	16,1	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,9	0,57	5,98
			8			8,62	35,0	7,99	2,02	18,9	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,6	0,57	6,77
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,8	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,40	4,39
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	34,8	6,81	2,39	12,5	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,0	0,43	4,79
			6			7,25	40,9	8,08	2,38	14,6	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,1	0,43	5,69
			7			8,37	46,8	9,31	2,36	16,6	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,2	0,43	6,57
			8			9,47	52,4	10,5	2,35	18,5	4,88	1,40	10,9	4,14	1,07	1,29	2,52	17,8	0,43	7,43
8/5	80	50	5	8,0	2,7	6,36	41,6	7,71	2,56	12,7	3,28	1,41	7,57	2,75	1,09	1,13	2,60	13,2	0,38	4,99
			6			7,55	49,0	9,15	2,55	14,9	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,5	0,38	5,92

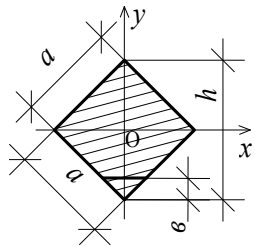
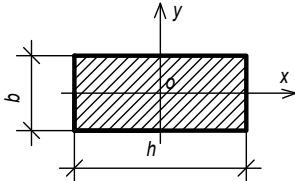
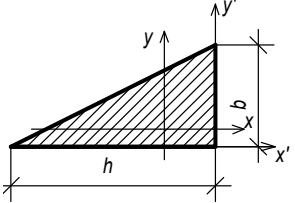
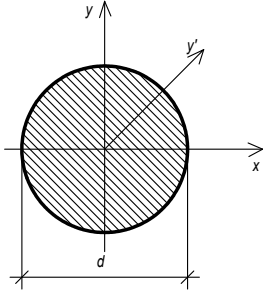
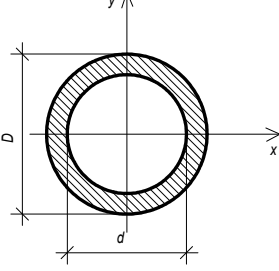
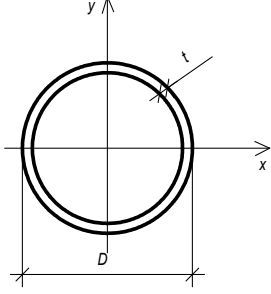


Номер кутика	мм					Пло-ща пере-різу, см ²	Довідникові дані для осей												Кут нахи-лу осі, tg α	Маса 1 м, кг
	B	b	t	R	r		z			y			u – u (min)			z ₀ , см	y ₀ , см	I _{zy} , см ⁴		
							I _z , см ⁴	W _z , см ³	i _z , см	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	I _u , см ⁴	W _u , см ³	i _u , см					
8/6	80	60	6 7 8	8,0	2,7	8,15 9,42 10,7	52,1 59,6 66,9	9,42 10,9 12,4	2,53 2,52 2,50	25,2 28,7 32,2	5,58 6,43 7,26	1,76 1,75 1,74	13,6 15,6 17,5	4,66 5,34 5,99	1,29 1,29 1,28	1,49 1,53 1,57	2,47 2,52 2,56	21,0 24,0 26,8	0,54 0,54 0,54	6,39 7,39 8,37
9/5,6	90	56	5,5 6 8	9,0	3,0	7,86 8,54 11,2	65,3 70,6 90,9	10,7 11,7 15,2	2,88 2,88 2,85	19,7 21,2 27,1	4,53 4,91 6,39	1,58 1,58 1,56	11,8 12,7 16,3	3,81 4,12 5,32	1,22 1,22 1,21	1,26 1,28 1,36	2,92 2,95 3,04	20,5 22,2 28,3	0,38 0,38 0,38	6,17 6,70 8,77
10/6,3	100	63	6 7 8 10	10	3,3	9,58 11,1 12,6 15,5	98,3 113 127 154	14,5 16,8 19,0 23,3	3,20 3,19 3,18 3,15	30,6 35,0 39,2 47,2	6,27 7,23 8,17 9,99	1,79 1,78 1,77 1,75	18,2 20,8 23,4 28,3	5,27 6,06 6,82 8,31	1,38 1,37 1,36 1,35	1,42 1,46 1,50 1,58	3,23 3,28 3,32 3,40	31,5 36,1 40,5 48,6	0,39 0,39 0,39 0,38	7,53 8,70 9,87 12,1
10/6,5	100	65	7 8 10	10	3,3	11,2 12,7 15,7	114 138 156	16,9 19,1 23,5	3,19 3,18 3,15	38,3 43,0 51,7	7,70 8,70 10,6	1,85 1,84 1,82	22,8 25,2 30,6	6,43 7,26 8,83	1,41 1,41 1,40	1,52 1,56 1,64	3,24 3,28 3,37	38,0 42,6 51,2	0,41 0,41 0,41	8,81 9,99 12,3
11/7	110	70	6,5 8	10	3,3	11,5 13,9	142 172	19,1 23,2	3,53 3,51	45,6 54,6	8,42 10,2	2,00 1,98	26,9 32,3	7,05 8,50	1,53 1,52	1,58 1,64	3,55 3,61	46,8 55,9	0,40 0,40	8,98 10,9
12,5/8	125	80	7 8 10 12	11	3,7	14,1 16,0 19,7 23,4	227 256 312 365	26,7 30,3 37,3 44,1	4,01 4,00 3,98 3,95	73,7 81,0 101 117	11,9 13,5 16,5 19,5	2,29 2,28 2,26 2,24	43,4 48,8 59,3 69,5	9,96 11,3 13,7 16,1	1,76 1,75 1,74 1,72	1,80 1,84 1,92 2,00	4,01 4,04 4,14 4,22	74,7 84,1 102 118	0,40 0,40 0,40 0,40	11,0 12,9 15,5 18,3
14/9	140	90	8 10	12	4,0	18,0 22,2	364 444	38,3 47,2	4,49 4,47	120 146	17,2 21,1	2,58 2,56	70,3 85,5	14,4 17,6	1,98 1,96	2,03 2,12	4,49 4,58	121 147	0,41 0,40	14,1 17,5
16/10	160	100	9 10 12 14	13	4,3	22,9 25,3 30,0 34,7	606 667 784 897	56,0 61,9 73,4 84,7	5,15 5,13 5,11 5,08	186 204 239 272	24,0 26,4 31,2 35,9	2,85 2,84 2,82 2,80	110 121 142 162	20,0 22,0 25,9 29,8	2,20 2,19 2,18 2,16	2,24 2,28 2,36 2,43	5,19 5,23 5,32 5,40	194 213 249 282	0,39 0,39 0,38 0,38	18,0 19,9 23,6 27,3
18/11	180	110	10 12	14	4,7	28,3 33,7	952 1123	78,6 93,3	5,80 5,77	276 324	32,3 38,2	3,12 3,10	165 194	27,0 31,8	2,42 2,40	2,44 2,52	5,88 5,97	295 348	0,37 0,37	22,2 26,5
20/12,5	200	125	11 12 14 16	14	4,7	34,9 37,9 43,9 49,8	1449 1568 1801 2026	107 117 135 152	6,45 6,43 6,41 6,38	446 482 551 617	46,0 49,9 57,4 64,8	3,58 3,57 3,54 3,52	264 285 327 367	38,3 41,5 47,6 53,6	2,75 2,74 2,73 2,72	2,79 2,83 2,91 2,99	6,50 6,54 6,62 6,71	465 503 575 643	0,39 0,39 0,39 0,38	27,4 29,7 34,4 39,1

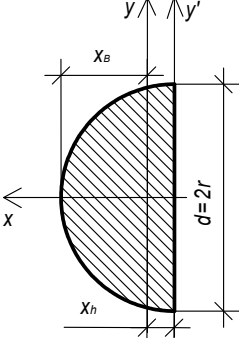
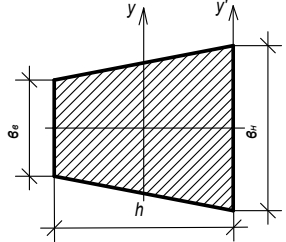
Додаток Г

Геометричні характеристики деяких перерізів

Таблиця Г.1

Переріз	Параметри перерізу
	Квадрат на ребро $A = a^2; \quad h = a\sqrt{2}; \quad J_x = J_y = \frac{a^4}{12};$ $W_x = 0,118a^3.$ При зрізі верхнього та нижнього кутів W_x збільшується. Найбільший момент опору при зрізі кутів $W_{x \text{ зріз}} = 0,124h^3$ при $b = h/18$.
	Прямокутник $A = bh; \quad J_y = \frac{bh^3}{12}; \quad J_x = \frac{hb^3}{12}; \quad W_x = \frac{b^2h}{6};$ $W_y = \frac{bh^2}{6}.$
	Прямокутний трикутник $A = \frac{bh}{2}; \quad x_{h_1} = \frac{h}{3}; \quad x_{h_2} = \frac{2h}{3}; \quad b_1 = \frac{b}{3}; \quad b_2 = \frac{2b}{3};$ $J_x = \frac{hb^3}{36}; \quad J_y = \frac{h^3b}{36}; \quad J_{x'} = \frac{hb^3}{12}; \quad J_{y'} = \frac{h^3b}{12}.$
	Круг $A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad J_x = J_y = J_{y'} = \frac{\pi d^4}{64};$ $J_{p_0} = 2J_y = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_y = W_x = W_{y'} = \frac{\pi d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$
	Кільце $A = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2); \quad \alpha = \frac{d}{D};$ $J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4); \quad W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4);$ $W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4); \quad I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4).$
	Тонке кільце ($t < D$) $A = \pi D t; \quad J_x = J_y = \frac{\pi D^3 t}{4}; \quad W_x = W_y = \frac{\pi D^2 t}{2};$ $I_p = \frac{\pi D^3 t}{2}; \quad W_p = \pi D^2 t.$

Продовження таблиці Г.1

	Півколо $A = \frac{\pi d^2}{8}; \quad x_h = 0,2122d; \quad x_b = 0,2878d;$ $J_y = 0,0068d^4; \quad J_x = J_{y'} = \frac{\pi d^4}{128}.$
	Трапеція $A = \frac{1}{2}(b_b + b_h)h;$ $x_h = (b_h + 2b_b)h/[3(h_h + h_b)];$ $x_b = (2b_h + b_b)h/[3(b_h + b_b)];$ $J_y = h^3(b_h^2 + 4b_h b_b + b_b^2)/[36(b_h + b_b)];$ $J_{y'} = h^3(b_h + 3b_b)/12;$ $J_{y''} = h(2b_h + b_b)/12.$

Додаток Д

Значення визначених інтегралів, що часто зустрічаються при визначенні переміщень в кривих стержнях

Таблиця Д.1

Інтеграл	Границя інтегрування			
	від 0 до α	від 0 до $\frac{\pi}{4}$	від 0 до $\frac{\pi}{2}$	від 0 до π
$\int \sin \varphi \, d\varphi$	$1 - \cos \alpha$	0,293	1	2
$\int \cos \varphi \, d\varphi$	$\sin \alpha$	0,707	1	0
$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi$	$-\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,143	0,785	1,571
$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,643	0,785	1,571
$\int \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi$	$\frac{\sin^3 \alpha}{3}$	0,118	0,333	0
$\int \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi$	$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{3}$	0,216	0,333	0,667
$\int \sin 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}$	0,5	1	0
$\int \cos 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin 2\alpha$	0,5	0	0
$\int \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi$	$\frac{\sin^2 \alpha}{2}$	0,25	0,5	0
$\int \varphi \sin \varphi \, d\varphi$	$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha$	0,152	1	3,141
$\int \varphi \cos \varphi \, d\varphi$	$\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1$	0,262	0,571	-2
$\int \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha) - \frac{1}{8}(\cos 2\alpha - 1)$	0,0833	0,868	2,47
$\int \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha \sin 2\alpha) + \frac{1}{8}(\cos 2\alpha - 1)$	0,226	0,368	2,47
$\int \varphi \sin 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\alpha \cos 2\alpha}{2}$	0,25	0,785	-1,571
$\int \varphi \cos 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4}(\cos 2\alpha - 1) + \frac{\alpha \sin 2\alpha}{2}$	0,143	-0,5	0
$\int \sin(\alpha - \varphi) \sin \varphi \, d\varphi$	$\frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{\alpha \cos 2\alpha}{2}$	0,076	0,5	1,571
$\int \cos(\alpha - \varphi) \cos \varphi \, d\varphi$	$\frac{\alpha \sin \alpha}{2}$	0,278	0,785	0

Додаток Е

Довідникові дані до розрахунку стиснутих стержнів

Таблиця Е.1 – Значення коефіцієнта φ зниження основного допустимого напруження на стиск

Гнучкість $\lambda = \mu \cdot l / i_{\min}$	φ						
	сталі Ст3 і Ст4	сталь Ст5	Бетон		Дюралю- міній	сірий чавун	дереви- на
			важ- кий	лег- кий	Д16Т		
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	1,0	1,0	0,999	0,97	0,99
20	0,97	0,96	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,95	0,93	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,85	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,80	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,74	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,67	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,59	0,51	—	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,50	0,45	—	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	—	0,142	—	0,25
120	0,45	0,37	—	—	0,119	—	0,22
130	0,40	0,32	—	—	0,101	—	0,18
140	0,36	0,28	—	—	0,087	—	0,16
150	0,32	0,25	—	—	0,076	—	0,14
160	0,29	0,23	—	—	—	—	0,12
170	0,26	0,21	—	—	—	—	0,11
180	0,23	0,19	—	—	—	—	0,10
190	0,21	0,17	—	—	—	—	0,09
200	0,19	0,16	—	—	—	—	0,08

Таблиця Е.2 – Параметри для визначення критичних напружень

Матеріал	σ_y ($\sigma_{0,2}$)	σ_{pr}	$\sigma_{кр}=a \cdot b \cdot \lambda$		Граничні значення гнучкості	
			a	b		
	МПа				λ_u	λ_0
Сталь:						
Ст 2	215	215	258	0,68	105	62
Ст 3	235	195	304	1,11	100	61
20, Ст 4	255	215	328	1,07	96	60
25, Ст 5, 35л	275	235	343	1,13	92	57
35, 45л	314	265	390	1,40	90	55
45	353	300	440	1,64	85	52
50, 55л	373	314	464	1,83	82	50
10Г2СД, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15ХСНД	343	294	421	1,49	83	50
30ХМА, 35ХМФА, 30ГСА, 40ХНМА	834	687	981	5,46	55	28
30ХГСА	890	750	1100	6,65	58	30
Дюралюміній:						
Д16Т	314	250	398	2,78	53	30
Д6Т	275	215	294	1,40	57	15
Сосна, ялина	—	—	28,7	0,19	70	—

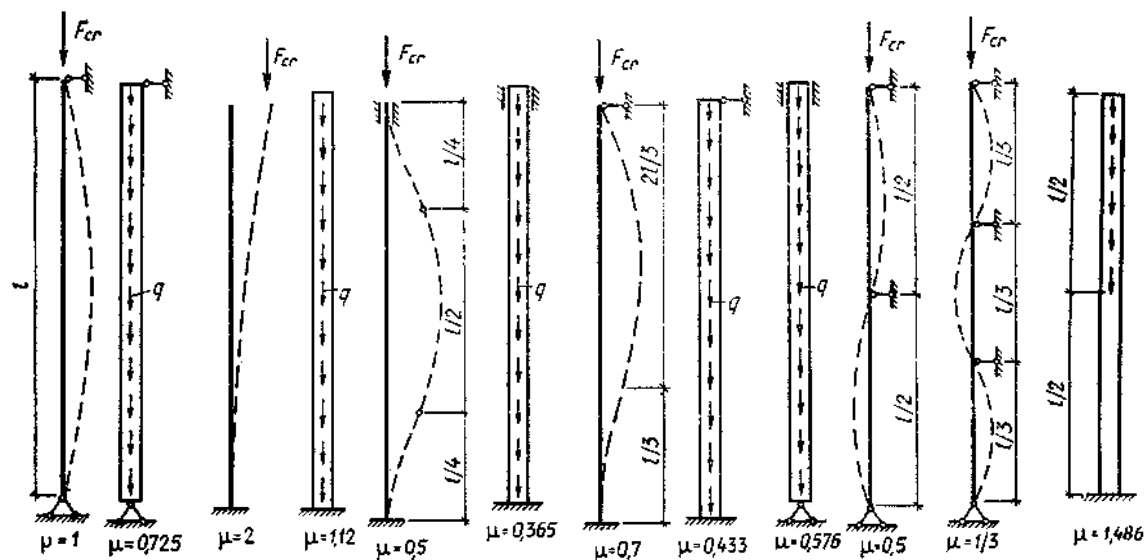
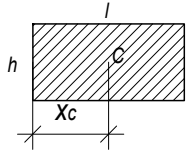
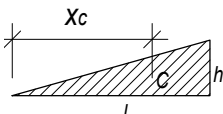
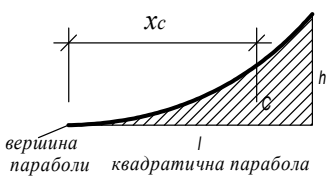
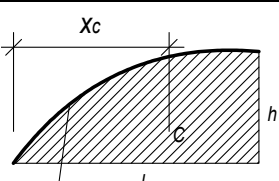
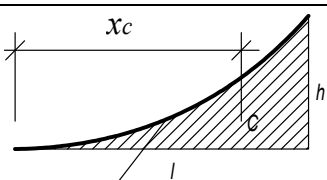


Рисунок Е.1 – Коефіцієнти приведення довжини

Додаток Ж

Довідкові дані до визначення переміщень графічними методами

Таблиця Ж.1 – Площі і абсциси центрів ваги простих фігур

Фігура	Площа A	Положення центра ваги X_c
	$l \cdot h$	$\frac{1}{2} \cdot l$
	$\frac{1}{2} \cdot l \cdot h$	$\frac{2}{3} \cdot l$
 вершина параболы квадратична парабола	$\frac{1}{3} \cdot l \cdot h$	$\frac{3}{4} \cdot l$
 квадратична парабола	$\frac{2}{3} \cdot l \cdot h$	$\frac{5}{8} \cdot l$
 кубічна парабола	$\frac{1}{4} \cdot l \cdot h$	$\frac{4}{5} \cdot l$

Таблиця Ж.2 – До розкриття інтегралу Мора

	Спосіб Верещагіна $\int_0^l M(x)M_1(x)dx = \Omega \cdot \eta;$ $M(x)$ – довільна; $M_1(x)$ – прямолінійна; Ω – площа епюри $M(x)$; C – координата центра ваги площі Ω; η – значення M_1 під центром ваги C.
	Спосіб Сімпсона-Карнаухова $\int_0^l M(x)M_1(x)dx = \frac{l}{6}(ab + 4ef + cd);$ $M(x)$ – довільна; $M_1(x)$ – прямолінійна.
	Верещагіна-Даркова (Мюллера-Бреслау) $\int_0^l M(x)M_1(x)dx = \frac{l}{6}(2ab + ad + bc + 2cd);$ $M(x), M_1(x)$ – прямолінійні.

Додаток И

Дані до розрахунку валів

Таблиця И.1 – Шпонки призматичні

d вала, мм	Шпонка, мм			
	b	h	ρ	l^*
12-17	5	5	0,25-0,40	10-56
17-22	6	6		14-70
22-30	8	7		18-90
30-38	10	8	0,40-0,60	22-110
38-44	12	8		28-140
44-50	14	9		36-160
50-58	16	10		45-180
58-65	18	11		50-200
65-75	20	12	0,60-0,80	56-220
75-85	22	14		63-250
85-95	25	14		70-280

* Довжина шпонки вибирається із такого ряду: 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200; 220; 250; 280.

Ряди діаметрів валів:

а) на ділянках без підшипників кочення (ГОСТ 6636-69, Ra 40): 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 53; 56; 60; 63; 67; 71; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150; 160; 170; 180; 190; 200.

б) на ділянках з підшипниками кочення (ГОСТ 8338-75): 15; 17; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 130; 140; 150; 160.

Таблиця И.2 – Коефіцієнти α , β і γ в розрахунках на кручення стержнів прямокутного перерізу

h/b	1	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
α	0,208	0,346	0,418	0,493	0,645	0,801	1,128	1,789	2,456	3,123
β	0,141	0,294	0,375	0,457	0,622	0,790	1,123	1,789	2,456	3,123
γ	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,746	0,743	0,742	0,742

$$W_k = \alpha h b^2, I_k = \beta h b^3, (h \geq b); \tau'_{\max} = \gamma \tau_{\max}$$

Таблиця И.3 – Значення масштабного фактора α_m

d , мм	15	20	30	40	50	70	100	200
α_m	1,15	1,2	1,3	1,4	1,45	1,55	1,7	1,9

Таблиця И.4 – Значення коефіцієнта чутливості α_n

Спосіб обробки	σ_a , МПа		
	400	800	1200
Полірування	1	1	1
Шліфування	1,1	1,1	1,15
Тонке обточування	1,15	1,25	1,35
Грубе шліфування чи обточування	1,2	1,35	1,55
Наявність окалини	1,35	1,9	2,75

Додаток К

Співвідношення між деякими фізичними величинами в різних системах вимірювань

Одиниці напруження (тиску, питомої потенціальної енергії деформації)

$$1 \text{ кгс/см}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па} \approx 0,1 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$1 \text{ кгс/мм}^2 = 9,81 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 10 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$1 \text{ тс/см}^2 = 9,81 \cdot 10^7 \text{ Па} \approx 100 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^8 \text{ Па};$$

$$1 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Одиниці зусиль

$$1 \text{ кгс} = 9,81 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н};$$

$$1 \text{ тс} = 1 \cdot 10^3 \text{ кгс} = 9,81 \cdot 10^3 \text{ Н} \approx 1 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$1 \text{ кН} = 1 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Одиниці моментів сил

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 9,81 \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 10 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{см} = 9,81 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$1 \text{ кН} \cdot \text{м} = 1 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Одиниці довжини, площі, моментів опору, моментів інерції

$$1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$1 \text{ см} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$1 \text{ мм}^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$1 \text{ см}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$1 \text{ см}^3 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$1 \text{ см}^4 = 1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Одиниці вимірювання кута

$$1^\circ = \pi/180 \text{ рад} = 0,01745 \text{ рад}.$$

Одиниці потужності

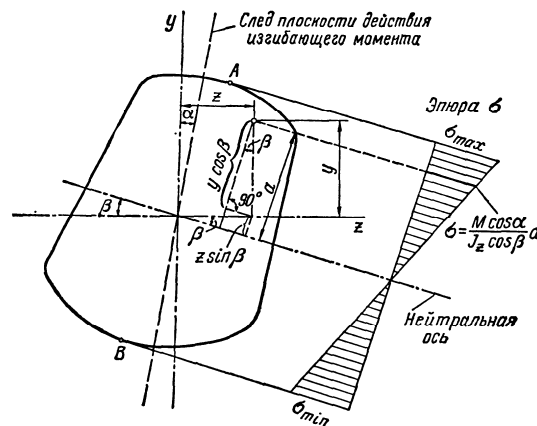
$$1 \text{ к.с. (кінська сила)} = 745,7 \text{ Вт}.$$

Додаток Л

Програма-мінімум зі складання іспиту Частина II

Незнання хоча б одного з цих теоретичних розділів та формул або невміння їх використовувати для розв'язування найпростіших практичних задач оцінюється незадовільною оцінкою.

Косий згин



Рівняння нейтральної лінії при косому згині

$$y = z \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y}.$$

Умови міцності при неплоскому згині та косому згині

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = M \left(\frac{z_A \sin \alpha}{I_y} + \frac{y_A \cos \alpha}{I_z} \right) \leq [\sigma_+];$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = M \left(\frac{z_B \sin \alpha}{I_y} + \frac{y_B \cos \alpha}{I_z} \right) \leq [\sigma_-].$$

Позацентровий розтяг-стиск

Умови міцності при позацентровому розтягу-стиску

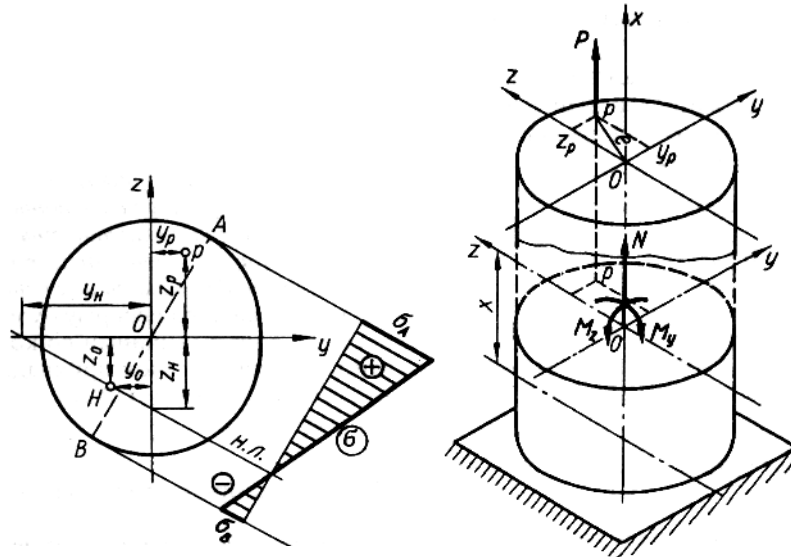
$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_A + \frac{y_p}{i_z^2} y_A \right) \leq [\sigma_+];$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_B + \frac{y_p}{i_z^2} y_B \right) \leq [\sigma_-].$$

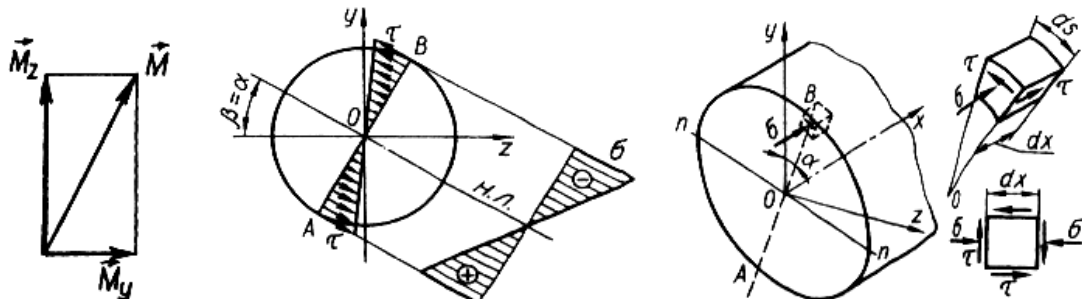
Рівняння нейтральної лінії при позacentровому розтягу-стиску

$$\frac{z_p}{i_y^2} z_0 + \frac{y_p}{i_z^2} y_0 = -1;$$

$$z_i = -\frac{i_y^2}{z_p}; \quad y_i = -\frac{i_z^2}{y_p} \text{ (у відрізках).}$$



Згин з крученням



Умова міцності при згині з крученням (вал круглого перерізу – $W_Z = \frac{\pi d^3}{32}$):

$$\sigma_{еквIV} = \frac{M_{збIV}}{W_Z} \leq [\sigma].$$

Енергетична теорія міцності (IV), теорія найбільших дотичних напружень (III)

$$\sigma_{еквIV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{еквIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Зведений момент

$$M_{збIII} = \sqrt{M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{M^2 + M_{кр}^2};$$

$$M_{збIV} = \sqrt{0,75M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{M^2 + 0,75M_{кр}^2}.$$

Енергетичні методи визначення переміщень

Метод Мора

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \frac{\overline{M_i} M_P ds}{EJ}.$$

Спосіб Верещагіна обчислення інтегралів Мора

$$\int_0^l M(x) M_1(x) dx = \Omega \cdot \eta;$$

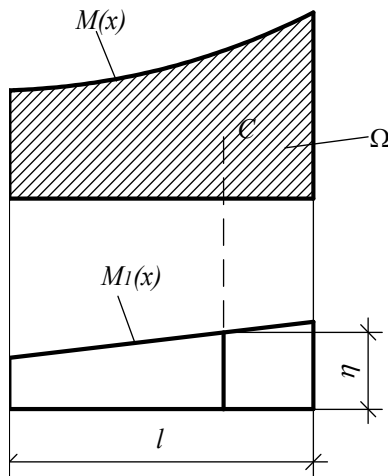
$M(x)$ – довільна;

$M_1(x)$ – прямолінійна;

Ω – площа епюри $M(x)$;

C – координата центра ваги площі Ω ;

η – значення M_1 під центром ваги C .



Статично невизначувані системи

Канонічні рівняння методу сил

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0; \\ \dots &\dots \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Стійкість центрально стиснутих стержнів

Критична сила за Ейлером

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}.$$

Критичне напруження за Ейлером

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2}.$$

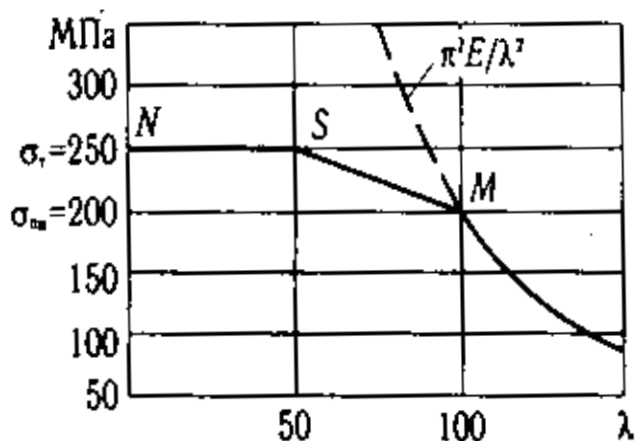
Гнучкість стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}}.$$

Умова застосування формули Ейлера

$$\lambda_{ep} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{нц}}}.$$

Умова стійкості (інженерна): $\sigma = \frac{P}{\phi A_{\sigma p}} \leq [\sigma_-].$



Залежність критичних напружень від гнучкості (сталь Ст.3)

СПИСОК НАЙУЖИВАНІШИХ ТЕРМІНІВ

витривалість – fatigue
внутрішнє зусилля – interior load
гнучкість стержня - slenderness ration of a bar
границя витривалості – fatigue limit
границя міцності – ultimate tensile strength, tensile strength
границя текучості – yield stress
дотичне напруження – shearing stress
еквівалентна система - equivalent system
ексцентриситет - eccentricity
жорсткість – stiffness
згинання - bending
згинання з крученням - bending combined with torsion
згинальний момент – bending moment
зсув - shear
кривина – curvature
критичне навантаження - critical load, Euler load
кручення - torsion
метод Мора - dummy-load method, Maxweel-Mohr method, unit-load method
метод сил - work method
міцність – strength
момент – resisting moment
навантаження зовнішнє – exterior load
напруження – stress
нормальне напруження – normal stress
одинична сила – single force
основна система - main system
переміщення – displacement
позацентрове розтягання-стискання - eccentric tension-compression
поздовжня сила – normal force
поперечна сила – shearing force
рама – frame
розтягання - tension
сила – force
складний опір - combined stress
статично невизначувана система - statically indeterminate system
стержень – bar
стискання - compression
стійкість – stability, buckling
ударне навантаження - impact load
узагальнена сила - generalized force
узагальнене переміщення - generalized displacement
умова міцності – strength condition
ядро перерізу - core of a cross-section

ЛІТЕРАТУРА

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Частина 1 : навчальний посібник / Огородніков В. А., Грушко О. В., Побережний М. І. – Вінниця : ВНТУ, 2003. – 158 с.
2. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський ; За ред. Г. С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К. : Вища школа, 2004. – 655 с. : іл.
3. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: учебник для втузов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
4. Дарков А. В. Сопротивление материалов : учебник для втузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро – К. : Вища школа, 1975. – 654 с.
5. Беляев Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 608 с.
6. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – К. : Наукова думка, 1975. – 704 с.
7. Беляев Н. М. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н. М. Беляев ; Под ред. В. К. Качурина – М. : Наука, 1968. – 348 с.