

О. М. Роїк, А. О. Азарова, І. Р. Арсенюк

***ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ЯК
ІНСТРУМЕНТАРІЙ СТРАТЕГІЧНОГО
МЕНЕДЖМЕНТУ***

Ітерація	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	Σ
1	1	2	0	3	-1	6	11
	1	3	1	4	-1	12	20
	2	0	-1	12	-1	14	26
2	1	2	0	3	-1	6	11
	0	1	1	1	0	6	9
	0	-4	-1	6	1	2	4
3	1	0	-2	1	-1	-6	-7
	0	1	1	1	0	6	9
	0	0	3	10	1	26	40
4	1	0	1	11	0	20	33
	0	1	1	1	0	6	9
	0	0	3	10	1	26	40

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

О. М. Роїк, А. О. Азарова, І. Р. Арсенюк

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ЯК ІНСТРУМЕНТАРІЙ СТРАТЕГІЧНОГО МЕНЕДЖМЕНТУ

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей “Менеджмент організацій”, “Інтелектуальні системи прийняття рішень”, “Програмне забезпечення автоматизованих систем”. Протокол № 8 від 22 березня 2007 р.

Вінниця ВНТУ 2008

УДК 621.382

Р 53

Рецензенти:

С. В. Юхимчук, доктор технічних наук, професор

В. М. Міхалевич, доктор технічних наук, професор

Н. В. Поліщук, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Роїк О. М., Азарова А. О., Арсенюк І. Р.

Р53 Дослідження операцій як інструментарій стратегічного менеджменту.
Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 181 с.

У посібнику розглянуто методологічні основи дослідження операцій, що є, взагалі, інструментарієм прийняття стратегічних управлінських рішень. Зокрема, тут розглянуто задачі лінійного програмування, транспортні задачі, задачі дискретного та нелінійного програмування. Значну увагу також приділено теорії прийняття рішень.

Теоретичний матеріал, що викладено у посібнику, пояснюється на відповідних прикладах. Крім того, тут наведені приклади розв'язання задач, а також вправи для самостійних робіт, практичних та лабораторних занять. Посібник призначено для користування студентами денної та заочної форм навчання.

УДК 621.382

© О. М. Роїк, А. О. Азарова, І. Р. Арсенюк, 2008

ЗМІСТ

ЗМІСТ	0
ВСТУП.....	6
1 МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ.....	7
1.1 Етапи дослідження операцій.....	7
1.2 Математичне моделювання. Загальна структура.....	8
1.3 Етапи математичного моделювання. Приклади.....	11
1.4 Розділи і класи задач дослідження операцій.....	17
1.5 Основні вимоги до математичних моделей і їх властивості.....	19
1.6 Формалізація принципів оптимальної поведінки в моделях прийняття рішень	22
2 ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	25
2.1 Попередні відомості теорії лінійного програмування.....	25
2.2 Графічна інтерпретація розв'язання задач ЛП.....	32
2.3 Змістовний опис симплекс-методу розв'язання задач ЛП.....	36
2.4 Знаходження початкового опорного плану	37
2.5 Знаходження оптимального плану	41
2.6 Застосування симплекс-таблиць.....	46
2.7 Метод штучної бази	54
2.8 Двоїсті (спряжені) задачі лінійного програмування.....	55
3 ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ (Т-ЗАДАЧІ).....	60
3.1 Математична структура Т-задач.....	60
3.2 Визначення початкового опорного плану Т-задачі	62
3.3 Властивості опорних планів Т-задач.....	64
3.4 Розв'язання Т-задач методом потенціалів	65
3.5 Т-задачі з обмеженими пропускними здатностями.....	69
3.6 Задача про оптимальні призначення	73

3.7	Задача про максимальний потік. Метод Форда-Фалкерсона.....	75
3.8	Задача про найкоротший шлях на мережі. Метод Мінті	77
4	ДИСКРЕТНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	79
4.1	Задача дискретного ЛП. Метод Гоморі-1	79
4.2	Задача частково дискретного ЛП. Метод Гоморі-2.....	82
4.3	Задача дискретного ЛП. Метод Гоморі-3	84
4.4	Задача частково дискретного ЛП. Метод Дальтона-Ллевеліна.....	86
4.5	Задача дискретного ЛП. Метод гілок і границь	87
5	НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.	
	БЕЗУМОВНА ОДНОПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ	91
5.1	Загальні відомості	91
5.2	Методи виключення інтервалів	92
5.3	Поліноміальна апроксимація	98
6	НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.	
	МЕТОДИ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ	105
6.1	Класична задача математичного програмування.....	105
6.2	Задача опуклого квадратичного програмування.....	107
6.3	Метод Франка - Вульфа розв'язання задач квадратичного програмування (ЗКП).....	111
7	ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ	116
7.1.	Теорія корисності і прийняття рішень	116
7.1.1	Прийняття рішень в умовах ризику	116
7.1.2	Критерій «очікуване значення – дисперсія»	118
7.1.3	Критерій граничного рівня.....	119
7.2	Прийняття рішень в умовах невизначеності	120
7.2.1	Класичні критерії прийняття рішень.....	121
7.2.2	Похідні критерії.....	124
8	ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІГРОВИХ СИТУАЦІЯХ	129

8.1 Класифікація ігор	129
8.2 Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях.....	130
8.3 Змішане розширення матричної гри	135
8.4 Властивості розв'язання матричних ігор.....	137
8.5 Алгебраїчний метод розв'язання матричних ігор.....	140
8.6 Графічний метод розв'язання ігор $2 \times n$ і $m \times 2$	144
8.7 Матричний метод розв'язання ігор	146
8.8. Ітеративні методи розв'язання ігор	148
8.9 Метод послідовного наближення до ціни гри.....	151
9 ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ТА ДЛЯ	
ПРАКТИЧНИХ І ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ.....	153
9.1 Побудова математичних моделей задач	153
9.2 Розв'язання задач лінійного програмування	154
9.3 Розв'язання транспортних задач.....	156
9.5 Розв'язання задач нелінійного програмування	163
9.6 Розв'язання матричних ігор	164
9.7 Лабораторний практикум	165
10 КОНТРОЛЬНА РОБОТА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ	
ФОРМИ НАВЧАННЯ.....	166
10.1 Правила вибору задач контрольної роботи	166
10.2 Варіанти завдань контрольної роботи.....	167
ЛІТЕРАТУРА.....	180

ВСТУП

Дослідження операцій – це розділ прикладної математики, що займається побудовою математичних моделей реальних задач і процесів (економічних, соціальних, технічних, військових і таких інших), їх аналізом і застосуваннями. Більшість з цих моделей пов'язані з отриманням рекомендацій для прийняття *оптимальних* рішень.

Математична модель – це спрощена схема реального об'єкта (системи, процесу), складена за допомогою математичних символів і співвідношень. Процес побудови математичної моделі називається формалізацією.

У науці немає універсальних методів загальної теорії або побудови математичних моделей – надто велика розмаїтість практичних задач і рівень їх складності. Тому процес формалізації – це один з найскладніших етапів прикладного математичного дослідження.

Питання, що присвячені таким основам моделювання, як загальні принципи, вимоги до моделей, етапи формалізації, елементи моделі, види моделей – складають перший розділ дослідження операцій. Традиційно інші розділи дослідження операцій складають: ігрові моделі прийняття рішень; системи масового обслуговування; задачі багатокритеріальної оптимізації; дослідження операцій на графах; сіткове планування; календарне планування; моделі керування запасами; імітаційне моделювання.

Таким чином, дослідження операцій – це значна галузь математики, куди входять споріднені за напрямком розділи (моделі і методи). Одним і найбільшим з них є розділ, що присвячений методам оптимізації. Як предмет «Методи оптимізації» виникли раніше «Дослідження операцій» і займаються так званими екстремальними задачами. Це найпростіші задачі прийняття рішення, суть яких полягає у пошуку екстремальних значень заданої функції (цільова функція) на заданій множині значень її аргументів (множина допустимих рішень).

Математичне програмування займається тими екстремальними задачами, де множина допустимих рішень задається (описується) за допомогою деяких рівнянь або нерівностей. Отже, математичне програмування є розділом методів оптимізації. Залежно від характеру цих рівнянь або нерівностей (обмеження задачі) виникають задачі лінійного, нелінійного, динамічного програмування та їх різновиди. Тут термін «програмування» має значення планування, оптимізації, порівняння варіантів і т.п. Тому його не треба плутати з терміном програмування мовами ЕОМ.

Перед дослідженнями операцій (і його розділами) стоять такі основні задачі:

- складання математичних моделей задач прийняття рішення;
- питання існування "оптимальних" рішень у різних класах задач;
- розроблення необхідних і достатніх ознак оптимальності;
- розроблення методів чисельного обчислення "оптимальних" рішень.

1 МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1.1 Етапи дослідження операцій

Людина постійно стикається з необхідністю прийняття рішень як у побутовій, так і службовій областях своєї діяльності. Прийняті рішення відрізняються як за ступенем відповідальності, так і за ступенем значущості наслідків. Різними аспектами проблем, пов'язаних з прийняттям управлінських рішень, займаються багато наук, наприклад, таких як економіка, соціологія, право та інші.

На відміну від інших підходів дослідження операцій аналізує ці проблеми за допомогою математичного апарату. Це означає, що хоча б деякі дані, які фігурують у формулюванні задачі, повинні мати кількісні вирази. Якісні дані (умови) досліджуваної проблеми враховуються додатково і є своєрідним фоном для використання математичних моделей.

Прийняття рішень завжди припускає наявність особи або осіб, що приймають рішення (ОПР), мети, варіантів вибору рішення (множина допустимих рішень). Рішення приймаються з урахуванням певної обстановки, умов, що її супроводжують, і передумов. Це ті головні фактори, що властиві будь-якій задачі прийняття рішень, і які обов'язково повинні бути відображені в математичній моделі.

Мета ОПР – з урахуванням існуючих умов прийняти те рішення з множини допустимих у даній ситуації рішень, яке щонайкраще сприяє досягненню поставленої ними мети (оптимальне рішення).

Невід'ємною частиною методології дослідження операції є усебічний якісний і кількісний аналіз проблеми, що передує її математичному моделюванню. Тому говорять про системний аналіз проблеми, що припускає виконання таких компонентів:

- доматематичний (змістовний) аналіз проблеми;
- математичний аналіз проблеми;
- застосування результатів дослідження на практиці.

Проведення такого системного аналізу кожної конкретної задачі повинно здійснюватися операційною групою, що включає фахівців даної області (замовників), математиків, економістів, юристів, соціологів, психологів і ін.

Як не існує універсальних методів побудови математичних моделей, так і не існує універсальних методик і керівних принципів ДО. Кожне окреме дослідження має свої особливості. Тому можна рекомендувати лише деякі, досить загальні принципи та етапи дослідження операцій. Ці етапи включають.

1. Визначення мети дослідження.
2. Складання плану розроблення проекту.

3. Формулювання проблеми.
4. Збирання даних (статистичних, експертних і інших).
5. Побудову математичної моделі.
6. Розроблення обчислювального методу.
7. Розроблення технічного завдання на програмування.
8. Перевірку математичної моделі та оцінювання розв'язку.
9. Реалізацію результатів на практиці.

Етапи 1-4 відносяться до доматематичної частини дослідження і виконуються фахівцями тієї області, до якої належить досліджувана задача або проблема. Дуже важливо, щоб перед математичним моделюванням об'єкт дослідження (предметна область) був досконально вивчений самими постановниками (замовниками). Зокрема, дослідникам повинні бути вичерпно надані всі необхідні документальні і статистичні дані. Збирання статистичних даних або іншої інформації – не справа математиків, їх справа полягає в організації збереження, аналізі і обробленні даних, наданих їм замовниками в зручній формі (на носіях).

Етапи 5-8 відносяться до математичної частини досліджень. Це найскладніші і ключові етапи дослідження операцій. Етап 9 – завершальна частина досліджень здійснюється спільними зусиллями замовників і математиків-розробників моделі.

1.2 Математичне моделювання. Загальна структура

Під час визначення елементів математичної моделі будемо виходити з того, що в ДО і МП вивчаються задачі прийняття рішень і, як окремий випадок, задачі оптимізації.

Однією з основних вимог до побудови математичних моделей є облік основних факторів проблеми. Для визначення основних елементів моделей задач, прийняття рішення потрібно відповісти на такі питання:

- хто приймає рішення ?
- які цілі прийняття рішення для кожного ОПР ?
- у чому полягає прийняття рішення ?
- які можливості ОПР (з точки зору прийняття рішень)?
- за яких умов відбувається прийняття рішення?

Формалізуючи (описуючи математично) відповіді на ці питання ми отримаємо необхідну модель задачі.

Приклад 1.1. (*Планування добового випуску продукції*). Процес виготовлення виробів двох видів полягає в послідовному обробленні кожного з них на трьох верстатах. Відомі: час експлуатації кожного верстата за добу, оброблення одиниці кожного виробу на кожному верстаті, вартість реалізації одиниці кожного виробу.

Потрібно скласти для фірми план добового випуску виробів таким чином, щоб дохід від їх продажу був максимальним.

Під час аналізу згаданих найважливіших факторів будемо виходити тільки з умови задачі:

- ОПР – орган планування (фірма);
- мета – максимізація прибутку від продажу випущених за добу виробів двох видів;
- прийняття рішення для ОПР полягає у визначенні добових обсягів випуску кожного з двох видів виробів;
- можливості ОПР обмежені часовими ресурсами експлуатації верстатів трьох видів;
- про інші обмеження або умови у задачі нічого не говориться.

Після виявлення найважливіших факторів слід аналізувати всі параметри задачі: значення яких параметрів відомі (задані); які параметри є невідомими (шуканими) величинами; якими з параметрів ми можемо керувати (керовані змінні), а якими ні (некеровані параметри).

У наведеному прикладі відомими є такі параметри:

- добова норма b_1 експлуатації верстата 1;
- добова норма b_2 експлуатації верстата 2;
- добова норма b_3 експлуатації верстата 3;
- час a_{ij} оброблення одиниці виробу виду i на верстаті типу j ;
- вартість c_1 (продажу) одиниці виробу виду 1;
- вартість c_2 (продажу) одиниці виробу виду 2;

Усі ці параметри є некерованими, оскільки вони задані (їх значення можна знайти в довідниках або нормативах, визначити з набутого досвіду). Шуканими є такі величини:

- обсяг добового випуску виробу виду 1;
- обсяг добового випуску виробу виду 2.

Ці два параметри можна вважати керованими, оскільки фірма сама визначає їх величину (виходячи з реальних умов).

Далі для складання математичної моделі задачі потрібно ввести систему позначень невідомих параметрів задачі. Для нашого прикладу зробимо такі позначення:

x_1 – обсяг добового випуску одиниць виробу виду 1;

x_2 – обсяг добового випуску одиниць виробу виду 2.

Тоді прибуток від продажу x_1 і x_2 буде визначатися як $c_1 x_1 + c_2 x_2$, а час, необхідний для оброблення x_1, x_2 одиниць виробів на верстаті j - як

$$a_{ij} x_1 + a_{2j} x_2, (j = 1, 2, 3).$$

Тепер поставлену задачу можна сформулювати математично:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max,$$

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 \leq b_1,$$

$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_1,$$

$$a_{13} x_1 + a_{23} x_2 \leq b_1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Умова невід'ємності змінних впливає із смислу величин x_1 і x_2 - це доповнення моделі відсутньою інформацією.

Наведений запис і є задачею математичного програмування з цільовою функцією $c_1 x_1 + c_2 x_2$ і множиною допустимих рішень X , що описується п'ятьма нерівностями (на площині це багатокутник, утворений перерізом п'яти півплощин).

Наведена модель описує конкретну задачу прийняття рішення. Для з'ясування загальної структури таких задач введемо загальні позначення.

Позначимо через $N = \{1, 2, \dots, n\}$ множину сторін, що беруть участь у даній конкретній задачі, де кожен елемент і множина N називаються особами, що приймають рішення (ОПР), наприклад, окрема особистість, фірма, плановий орган великого концерну, уряду та інші. Кожен елемент $i \in N$ характеризується своїми можливостями. Позначимо через X_i множину усіх його допустимих рішень (стратегій, альтернатив). Припустимо, що такі множини математично описані: $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Після цього процес прийняття рішення всіма ОПР зводиться до такого формального акту: кожна з ОПР вибирає конкретний елемент $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$ зі своєї припустимої множини рішень. У результаті отримується набір $x = (x_1, \dots, x_n)$ обраних рішень, що називається ситуацією.

Формалізація цілей прийняття рішення здійснюється за такою схемою. Тим або іншим способом будуються аналітичні закони (функції) $f_1, \dots, f_n$, що ставлять у відповідність кожній ситуації x набір з n чисел $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$.

Функція $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n)$ називається критерієм якості i -ої ОПР. Число $f_i(x)$ є кількісною оцінкою ситуації x для i -ої ОПР з точки зору переслідуваної нею мети. Тому в моделі мета i -ої особи формалізується таким чином: вибрати таке рішення $x_i \in X_i$, щоб досягти найбільшого (найменшого) значення функції f_i . Однак досягнення цієї мети цілком від неї не залежить з огляду наявності інших сторін, що впливають на загальну ситуацію x з метою досягнення своїх власних цілей. Цей факт конфлікту інтересів пояснюється тим, що функція f_i крім x_i залежить і від інших змінних x_j ($i \neq j$). Тому в моделях прийняття рішення з багатьма учасниками застосовуються складніші принципи оптимальної поведінки, ніж пряма максимізація або мінімізація критерію якості.

Нарешті, нехай деяким чином (математично) описані усі ті умови, за яких відбувається прийняття рішень. Сукупність усіх цих умов (рівнянь зв'язку) позначимо одним символом Σ . Математично система Σ містить опис зв'язків між керованими і некерованими змінними, опис впливу випадкових факторів, облік динамічних характеристик та інші.

Таким чином, загальна структура задачі прийняття рішень з багатьма учасниками виглядає так:

$$\langle N; X_1, \dots, X_n; f_1, \dots, f_n; \Sigma \rangle. \quad (1.1)$$

Мета математичного моделювання – для поставленої фахівцями конкретної задачі – отримати конкретний опис елементів структури (1.1). Слід відзначити, що математичне моделювання – це дуже складна задача, потребує від розробників значних трудозатрат, навичок, знань і може бути виконана лише за наявності необхідного обсягу попередньої змістовної інформації.

Підсумовуючи, можна сказати, що основними елементами математичної моделі будь-якої задачі прийняття рішень є.

1. Множина ОПР (N).
2. Критерії якості ($f_1, \dots, f_n$).
3. Множина допустимих рішень ($X_1, \dots, X_n$).
4. Обмеження на параметри задачі, передумови, рівняння зв'язку (Σ).

Конкретизуючи ці елементи, їх характеристики і властивості, ми отримуємо той або інший конкретний клас задач (клас моделей) прийняття рішення. Так, якщо N складається тільки з одного елемента ($n = 1$), а всі умови і передумови вихідної реальної задачі можна описати у вигляді множини допустимих рішень цієї єдиної ОПР, то з (1.1) отримаємо структуру задач оптимізації (екстремальних задач)

$$\langle X, f \rangle. \quad (1.2)$$

У схемі (1.2) ОПР може розглядатися як орган планування, множина допустимих рішень X задається за допомогою обмежень на можливості ОПР, а критерій якості f називається цільовою функцією. При цьому задача оптимізації ставиться таким чином:

$$\max_{x \in X} f(x), \quad (f(x) \rightarrow \max), \quad (1.3)$$

$$\min_{x \in X} f(x), \quad (f(x) \rightarrow \min). \quad (1.4)$$

Це різна форма запису однієї і тієї ж задачі. Їх оптимальними розв'язками називаються пари $x^*, f(x^*)$.

1.3 Етапи математичного моделювання. Приклади

Для побудови математичної моделі конкретної задачі рекомендується виконати таку послідовність робіт.

1. Вивчення умови задачі (предметної області).
2. Визначення найважливіших факторів (див. підрозділ 1.2).
3. Виділення відомих і невідомих параметрів.
4. Виявлення керованих і некерованих параметрів.
5. Доповнення умови задачі відсутніми відомостями.
6. Введення системи позначень.

7. Побудова математичної моделі задачі (математичний опис найважливіших факторів, співвідношень і зв'язків між параметрами).

У наведених нижче прикладах побудови моделей простежте ці етапи, які ми виконаємо без коментарів (див. з цього приводу приклад 1.1).

Приклад 1.2. (Розміщення замовлень). Фірма отримала замовлення на кілька тисяч нових виробів, що складаються з окремих блоків. Керівництво фірми прийняло рішення розмістити замовлення на виготовлення n блоків і вибрало n фірм-постачальників. Кожне замовлення таке велике, що фірма-постачальник не може виконати більше одного замовлення. Кожному постачальнику запропоновано визначити вартість виконання замовлення, тобто ціну, за якою він готовий поставити фірмі різні блоки. Фірма повинна укласти n контрактів на постачання їй n видів блоків, мінімізуювши при цьому загальні витрати на придбання комплектуючих вузлів зі сторони.

Позначимо: i – номер (назва) блока, $i = 1, \dots, n$; j – номер (назва) фірми-постачальника, $j = 1, \dots, n$; c_{ij} – вартість виконання i -го блока j -ої фірми (задане число). Крім того, введемо для кожного i і j число.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо замовлення } i \text{ виконується фірмою } j. \\ 0 - \text{ у протилежному випадку} \end{cases}$$

Цільова функція, що має сенс загальних витрат на купівлю комплектуючих блоків, запишеться так

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{n1}x_{n1} + c_{n2}x_{n2} + \dots + c_{nn}x_{nn} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}.$$

Обмеження задачі (на змінні x_{ij}) мають такий зміст:

- кожен i -й блок повинен бути виконаний;
- кожен постачальник j повинен виконати один (який-небудь) блок.

Математично ці умови запишуться відповідно як:

$$\begin{aligned} x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} &= 1, \\ x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{nj} &= 1 \dots \end{aligned}$$

Таким чином, приходимо до такої задачі оптимізації (моделі):

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} = 0 \text{ або } 1 \text{ для всіх } i, j. \end{aligned}$$

Приклад 1.3. (Вибір портфеля цінних паперів). Фахівцю з фінансового аналізу, що працює в банку (або в страховій компанії), потрібно визна-

чити найкращий набір акцій, облігацій та інших цінних паперів на ну суму з метою мінімізації ризику, пов'язаного з придбанням набору цінних паперів. Прибуток до кінця планового періоду на кожен долар, вкладений у папери j -го виду, характеризується двома показниками: a_j – фактичний прибуток (випадкове число), α_j – очікуваний прибуток. Потрібно, щоб очікуваний прибуток на долар інвестицій був для всього набору цінних паперів не нижче заданої величини b .

Для визначення моделі приймемо всі фонди, що виділені для придбання цінних паперів, рівними одиниці і позначимо через x_j – частку від усіх фондів, що виділяються для придбання цінних паперів виду j . Ризик враховується за допомогою коваріації (термін з теорії ймовірностей)

$$\sigma_{ij} = M(a_i - \alpha_i)(a_j - \alpha_j)$$

прибутку для цінних паперів виду i і виду j .

Математична модель запишеться як

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$$

за обмежень:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j &\geq b; \quad \sum_{j=1}^n x_j = 1; \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тут n – число різновидів цінних паперів. Цільова функція має сенс дисперсії фактичного прибутку (розсіювання фактичного прибутку від очікуваного), перше обмеження є умова на очікуваний прибуток, а останнє – на перевищення фондів, виділених на покупку цінних паперів.

Приклад 1.4 (Задача про рекламу). Фірма планує проведення радіо-рекламної кампанії щодо збуту автомобілів в одному з регіонів, де розташовано s радіостанцій, протягом двох тижнів. Фірма оцінила попередньо, якщо радіостанції j виділити y_j доларів, то чистий прибуток від збільшення збуту дорівнює $R_j(y_j)$ (R_j – функція реалізації прибутку від обсягу фінансування реклами). На рекламу виділена загальна сума, що дорівнює N доларів. Число оголошень на день не повинно перевищувати M . Якщо фірма виділила j -ій радіостанції y_j доларів, то число рекламних оголошень буде $K_j(y_j)$ (K_j – функція, яка кожній виділеній сумі ставить у відповідність кількість рекламних оголошень на день, і вважається відомою). Як потрібно фінансувати s радіостанцій, щоб отримати сумарний максимальний прибуток від реакції збуту на рекламу?

Очевидно, що математична модель буде мати вигляд:

$$\max \sum_{j=1}^s R_j(y_j)$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^s y_j \leq N, \quad \sum_{j=1}^s K_j(y_j) \leq M, \quad y_j \geq 0, j = 1, \dots, s.$$

Приклад 1.5. (*Задача керування виробництвом*). Фірма повинна розробити календарну програму випуску деякого виду виробів на плановий період, що складається з T відрізків (тижнів, місяців, кварталів, років). Передбачається, що для кожного з цих відрізків є точний прогноз попиту на продукцію, що випускається. Час виготовлення партії виробів настільки малий, що ним можна знехтувати. Для різних відрізків попит неоднаковий, крім того, на економічні показники виробництва впливають обсяги виготовлених партій. Збереження запасів, що виникають при цьому (перевищення випуску над попитом на деяких відрізках), пов'язано з певними витратами. Потрібно розробити таку програму, за якою загальна сума витрат на виробництво і зміст запасів буде мінімальною за умови повного задоволення попиту на продукцію.

Позначимо:

x_t – випуск продукції протягом деякого відрізка t ;

y_t – рівень запасів на кінець відрізка t ;

D_t – попит на продукцію для відрізка t ;

Витрати на відрізок t (позначимо їх через C_t) залежать від випуску x_t і рівня запасів y_t , тобто є функцією від цих невідомих величин: $c_t = c_t(x_t, y_t)$.

Вимога задоволення попиту в межах кожного часового відрізка означає, що рівень запасів на кінець відрізка t (тобто y_t) повинен дорівнювати сумі рівня запасів на початок відрізка t (тобто y_{t-1}) і випуску продукції на відрізок t (тобто x_t) мінус попит на відрізок t (тобто D_t).

Звідси отримуємо таку модель

$$\min \sum_{t=1}^T C_t(x_t, y_t)$$

за обмежень:

$$y_{t-1} + x_t - y_t = D_t, \quad t=1, 2, \dots, T;$$

$$y_T = 0, \quad x_t, y_t \geq 0 \text{ для всіх } t.$$

Тут y_0 – заданий рівень запасів на початок планового періоду, а y_T – рівень запасу на кінець періоду.

Приклад 1.6. (*Оптимізація схеми обслуговування*). Система обслуговування складається з n типів різних приладів (наприклад, каси в магазинах, телефонні лінії, автозаправні колонки та інші). Кожен прилад у будь-який момент часу обслуговує не більше однієї заявки (наприклад, покупця, телефонної розмови, автомобіля та інші). Відома кількість приладів j -го типу і число заявок i -го типу, що прибули в систему на момент часу t . Ві-

дома також ефективність j -го приладу під час обслуговування заявки i -го виду. Потрібно розподілити вільні прилади за заявками таким чином, щоб сумарна ефективність була найбільшою.

Для побудови моделі спочатку введемо позначення вільних величин:

N_j – кількість приладів j -го типу;

d_i^t – число заявок i -го типу на момент часу t ;

μ_{ij} – ефективність j -го приладу під час обслуговування заявки i -го виду. Позначимо шукану величину через x_{ij} – число приладів j -го виду, відведених для обслуговування заявок i -го типу.

Цих даних досить для складання математичної моделі вигляду

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_{ij}$$

за обмежень:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq N, j = 1, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq d_i^t, i = 1, \dots, m;$$

x_{ij} – цілі невід’ємні числа для всіх i, j , тут m і n задані числа кількості видів заявок і приладів.

Приклад 1.7. (*Вибір оптимального виду посівної культури*). Фермер може посіяти одну з трьох культур: A_1, A_2 або A_3 . Врожаї цих культур багато в чому залежать від погоди. Потрібно визначити, яку з цих культур сіяти, щоб забезпечити найбільший прибуток, якщо відома ціна a_i одного центнера культури $A_i, i = 1, 2, 3$ і середня врожайність кожної культури в залежності від погоди (літо буде посушливим, нормальним або дощовим). Достовірний прогноз погоди відсутній.

Позначимо через h_{ij} – врожайність i -ої культури за погодних умов j (тут $j=1$ – літо посушливе, $j=2$ – нормальне літо, $j=3$ – дощове літо). Числа h_{ij} , як і числа a_i задані (відомі). Реально може мати місце тільки одна із ситуацій $(i, j), i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$. Причому (i, j) означає, що посіяно культуру A_j , а погода знаходиться у стані j . Усього таких ситуацій дев’ять. Очевидно, що ОПР (фермер) може вибрати тільки вид культури, стан погоди від нього не залежить. Якщо фермер засіяв культуру A_1 , то він може отримати (залежно від стану погоди) один з таких прибутків: $a_1 h_{11}, a_1 h_{12}, a_1 h_{13}$, щодо культури A_2 : $a_2 h_{21}, a_2 h_{22}, a_2 h_{23}$, і для культури A_3 : $a_3 h_{31}, a_3 h_{32}, a_3 h_{33}$. Запишемо всі ці результати в одну таблицю (матрицю):

$$A = \begin{bmatrix} a_1 h_{11}, a_1 h_{12}, a_1 h_{13} \\ a_2 h_{21}, a_2 h_{22}, a_2 h_{23} \\ a_3 h_{31}, a_3 h_{32}, a_3 h_{33} \end{bmatrix}.$$

Ця матриця і є математичною моделлю вихідної задачі. У ній дія фермера зводиться до вибору одного з рядків матриці (однієї з трьох страте-

гій). Його прибуток залежить від «вибору» природою одного зі своїх станів (одного із трьох стовпців матриці). Наприклад, якщо фермер посіяв культуру A_2 , а літо вийшло дощовим, то прибуток фермера дорівнює a_2h_{23} .

Приклад 1.8. (*Вибір асортименту товарів*). На базі торгової організації є n типів одного з товарів асортиментного мінімуму. У магазин повинен бути завезений тільки один з типів даного товару. Потрібно вибрати той тип товару, який доцільно завезти в магазин. Якщо товар типу j буде користуватися попитом, то магазин від його реалізації дістане прибуток p_j , якщо ж він не буде користуватися попитом – то збиток q_j . Скласти математичну модель цієї задачі в умовах невизначеного попиту. Керуючись формалізацією задачі прикладу 1.7, обґрунтуйте, що шукана модель має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & -q_1 & \dots & -q_1 \\ -q_2 & p_2 & \dots & -q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -q_3 & -q_3 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

Поясніть задачу магазину на цій моделі.

Приклад 1.9. (*Планування оптимального терміну закінчення проектних робіт*). Компанія повинна реалізувати проект будівництва об'єкта, що складається з n операцій (робіт). Керівники комплексу оцінили тривалість виконання кожної операції та установили послідовність операцій, тобто точно визначили, які операції обов'язково повинні бути закінчені, щоб могла початися кожна з операцій, що входять у комплекс. Керівництву компанії треба з'ясувати, яка найменша можлива тривалість реалізації всього проекту, тобто найбільш ранній із усіх можливих термінів його завершення. Під час побудови математичної моделі припустимо, що проект складається з п'яти операцій A, B, C, D, E . За умовою відома послідовність операцій і їх тривалість. Нехай:

Операції	Безпосередньо попередні операції	Тривалість операцій
A	-	t
B	-	t
C	A	t
D	A	t
E	B, D	t_E
F	C, E	-

Фіктивна операція F , що починається в момент завершення проекту, вводиться для зручності (див. нижче). Другий стовпчик таблиці означає, що операцію C не можна почати, перш ніж не закінчена операція A і т.д.

Приймемо, що змінними є терміни початку операції (введемо лише ті

з них, що потрібні для розв'язання задачі):

y_{CD} – момент початку операцій C і D ;

y_E – момент початку операції E ;

y_F – момент початку операції F .

Тут, y_F – момент завершення всього комплексу. Моменти y_A і y_B – моменти 0 початку операцій, оскільки операції A і B не мають попередніх. При цьому математична модель має вигляд:

$$\min y_F$$

за обмежень:

$$y_{CD} \geq t_A; \quad y_E \geq t_B; \quad y_E \geq t_D + y_{CD}; \quad y_F \geq t_C + y_{CD}; \quad y_F \geq t_E + y_E.$$

1.4 Розділи і класи задач дослідження операцій

Розділи і класи задач дослідження операцій можна класифікувати, виходячи з елементів загальної структури (1.1), підходячи до їх характеристик з різних точок зору. Тому одне тільки перерахування назв зайняло б кілька сторінок. Ми визначимо тут тільки найбільші класи задач. Почнемо з характеристики середовища (Σ) прийняття рішення.

Якщо елементи математичної моделі (1.1) не залежать від часу, тобто процес прийняття рішення зводиться до миттєвого акту вибору точки із заданої множини, то задача ДО називається статичною. Інакше, коли прийняття рішення є багатостадійним (дискретним) або неперервним (у часі) процесом, то задача ДО називається динамічною. Приклади 1.1-1.4, 1.7 і 1.8 відносяться до статичних, а приклади 1.5-1.6 і 1.9 – до динамічних задач. Задачі ДО, що не містять випадкових величин і ймовірносних явищ називаються детермінованими (приклади 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.9), задачі, що характеризуються випадковими величинами з імовірнісними оцінками – стохастичними (приклади 1.3, 1.4, 1.6), а задачі прийняття рішення в умовах невизначеності – конфліктними (приклади 1.7, 1.8).

Залежно від кількості ОПР в (1.1) розрізняють задачі оптимізації (1.2) і ігрові задачі ($n \geq 2$, де n – число елементів на множині N).

Ігрова задача (або гра) – це математична модель задачі прийняття рішення в умовах конфлікту, тобто в тих ситуаціях, коли має місце протистояння інтересів двох або більше сторін. Залежно від характеру конфлікту розрізняють, антагоністичні (приклади 1.7, 1.8), неантагоністичні (безкоаліційні) і корпоративні ігри.

Якщо в задачі оптимізації всі елементи лінійні (цільова функція та обмеження), то отримуємо задачі лінійного програмування (приклади 1.1, 1.2), інакше – задачі нелінійного програмування (приклад 1.3 і 1.4, якщо функції R_j і K_j нелінійні). Якщо в задачі оптимізації присутній фактор часу, то вона називається задачею оптимального керування (приклад 1.5). Іноді такі задачі називають задачами динамічного програмування. Однак

ця неточна назва, оскільки динамічне програмування – це назва методу розв’язання задач оптимального керування.

Часто в ОПР є не одна, а кілька цілей. Математична модель

$$\langle X; f_1, \dots, f_n; \Sigma \rangle \quad (1.5)$$

такої задачі називається задачею багатокритеріальної (векторної) оптимізації. У моделі (1.5) ОПР вибирає розв’язок $x \in X$ таким чином, щоб отримати якомога більші значення $f_1(x), \dots, f_n(x)$ критеріїв.

Є такі класи задач ДО, що отримали свою назву, виходячи з їх призначення: системи масового обслуговування (приклад 1.6), задачі керування запасами (приклад 1.3), задачі сіткового і календарного планування (приклад 1.9).

Для повноти сприйняття нижче наведемо ті «класичні» задачі ДО, що, завдяки їх типовості, зустрічаються в багатьох підручниках з математичного програмування. Деякі з них відносяться до початку виникнення теорії оптимізації. Приклади служать для ілюстрації деяких видів задач прийняття рішень і не претендують на реальність в останній інстанції, це навчальні задачі. Задачі і моделі, що становлять безпосередній практичний інтерес, будуть докладнішими, глибокими і складними. Навчальні задачі – це перше наближення до реальних (практичних) задач, їх спрощений аналог. Керуючись матеріалами попередніх двох параграфів, читач може самостійно отримати їх математичні моделі.

Задача оптимального розкрою матеріалу. Фірма виготовляє виріб, що складається з p деталей (наприклад, комплект постільної білизни). Причому в один виріб ці деталі входять у кількостях $k_1, \dots, k_r$. З цією метою визначається розкрій m партій матеріалу. У i -ій партії є b_i одиниць матеріалу. Кожну одиницю матеріалу можна розкроїти на деталі n способами. Під час розкрою одиниці i -ої партії j -им способом виходить a_{ijr} деталей r -го виду. Потрібно скласти такий план розкрою матеріалів, щоб з них отримати максимальне число виробів.

Транспортна задача. Є n постачальників і m споживачів деякого однорідного продукту. Відомі випуск продукції кожного постачальника і потреби в ній кожного споживача, а також витрати на перевезення продукції від постачальників до споживачів.

Треба побудувати план транспортних перевезень з мінімальними транспортними витратами з урахуванням пропозицій постачальників і попиту споживачів.

Задача про призначення на роботу. Є n робіт і n виконавців. Вартість виконання роботи i виконавцем j дорівнює c_{ij} . Потрібно розподілити виконавців на роботи так, щоб мінімізувати витрати.

Задача про суміші (про раціон). З m видів вихідних матеріалів, кож-

ний з яких складається з n компонентів, скласти суміш, у якій вміст компонентів повинен бути не менше $b_1, \dots, b_n$. Відомі ціни одиниці матеріалів: $c_1 \dots c_m$ і питома вага j -го компонента в одиниці i -го матеріалу. Треба скласти суміш, у якій витрати були б мінімальними.

Задача про рюкзак. Є n предметів у рюкзаку. Вага предмета i дорівнює p_i , а його цінність – c_i ($i = 1, \dots, n$). Потрібно для заданої цінності вантажу вибрати сукупність предметів мінімальної ваги.

Задача про комівояжера. Є n міст і задана відстань c_{ij} між ними ($i, j = 1, \dots, n$). Вийжджаючи з одного (вихідного) міста, комівояжер повинен побувати в усіх інших містах один раз і повернутися у вихідне місто. Треба визначити, у якому порядку слід об'їжджати міста, щоб сумарна пройдена відстань була найменшою.

Задача про верстат. На універсальному верстаті обробляються однакові партії з n деталей. Перехід від оброблення деталі i до оброблення деталі j вимагає переналагодження верстата, що займає c_{ij} часу. Потрібно визначити послідовність оброблення деталей, за якою загальний час переналагоджень верстата при обробленні партії деталей був би мінімальним.

Задача про розподіл капіталовкладень. Є n проектів, причому для кожного проекту i відомий очікуваний ефект y_i від його реалізації і необхідна величина капіталовкладень g_i . Загальний обсяг капіталовкладень не може перевищувати заданої величини b . Потрібно визначити, які проекти необхідно реалізувати, щоб сумарний ефект був найбільшим.

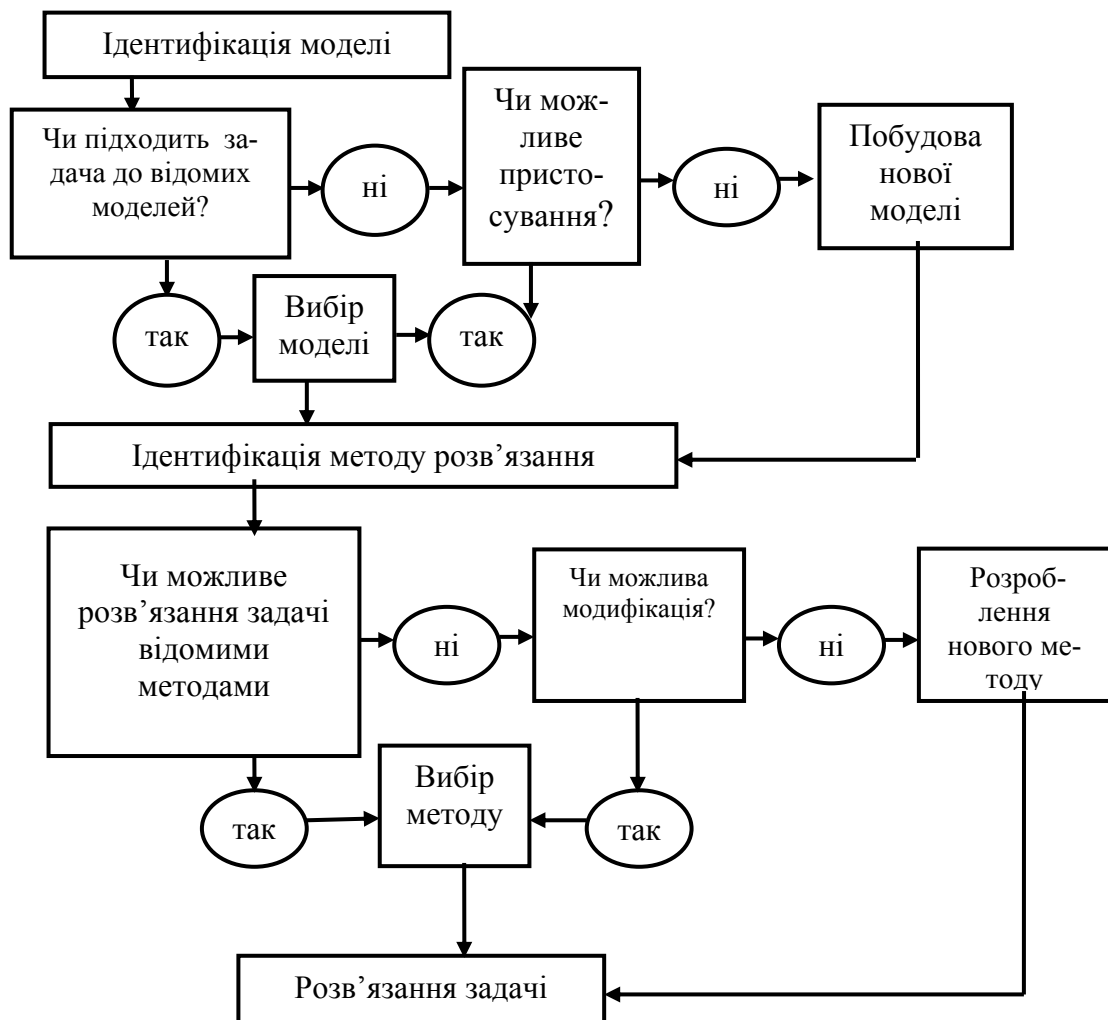
Задача про розміщення виробництва. Планується випуск m видів продукції, що могли б вироблятися на n підприємствах ($n > m$). Витрати виробництва і збуту одиниці продукції, плановий обсяг річного виробництва продукції і планова вартість одиниці продукції кожного виду відомі. Потрібно з n підприємств вибрати такі m підприємств, кожне з яких буде виробляти один вид продукції.

1.5 Основні вимоги до математичних моделей і їх властивості

Правильна побудова математичної моделі досліджуваної задачі – основна умова успішної розробки проекту. Неправильно побудована модель може призвести до помилкових висновків і виявитися неекономічною під час експлуатації. Правильно розроблена модель може істотно поліпшити економічні результати діяльності фірми або ефективність функціонування організації. Розроблення моделі для аналізу досліджуваного виду діяльності вимагає творчого підходу. Крім того, щоб правильно зрозуміти сутність досліджуваної проблеми, необхідно зібрати і ретельно проаналізувати великий обсяг даних. Практичного значення модель набуває за умови, що її вивчення наявними засобами доступніше, ніж вивчення самого об'єкта. З усього сказаного впливають такі вимоги до моделі:

- адекватність (відповідність моделі своєму оригіналу);
- простота (відсутність другорядних факторів);
- об'єктивність (відповідність наукових висновків реальним умовам);
- чутливість (здатність моделі реагувати на зміну параметрів);
- стійкість (малому збурюванню вихідних параметрів повинна відповідати мала зміна розв'язання задачі (моделі));
- універсальність (широта області застосування).

У теорії оптимізації у наш час розроблено велике число моделей і методів розв'язання різних класів задач (див. підрозділ 1.4). Тому під час побудови математичної моделі будь-якої задачі виникають проблеми ідентифікації: чи можна використовувати відому модель для формалізації даної задачі, а якщо ні, то у якій мірі потрібне перероблення (пристосування) відповідної моделі? Процес ідентифікації математичної моделі і методу розв'язання задачі показаний на схемі, що наведена на рисунку нижче.



Розглянемо такий процес на прикладі.

Приклад 1.10 (Задача розміщення підприємств). З метою розширення

сфери діяльності фірма планує відкрити кілька нових філій. Пункт i є однією з можливих точок розміщення нової філії потужністю S_i , а постійні витрати пов'язані з його експлуатацією, дорівнюють $F_i \geq 0$ незалежно від фактичного обсягу випуску. Існує усього m можливих пунктів ($i=1,2,\dots,m$) розміщення, але відкривати філії у всіх цих пунктах нераціонально. Для кожного пункту i виготовлення і пункту j збуту відомі: $c_{ij} \geq 0$ – сукупні виробничі і транспортні витрати; $F_{ij} \geq 0$ – деякі постійні витрати (F_{ij} не залежить від обсягу перевезень $x_{ij} > 0$, однак для $x_{ij} = 0 \rightarrow F_{ij} = 0$). Потрібно вибрати такі пункти розміщення нових підприємств, щоб сумарні витрати були мінімальні.

Для побудови математичної моделі цієї задачі, виходячи зі схожості умов, слід орієнтуватися на модель класичної транспортної задачі, сформульованої у підрозділі 1.4 і яка має вигляд

$$\min \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij} \text{ (сумарні транспортні витрати)} \quad (1.5)$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m \text{ (пропозиція);} \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, j = 1, \dots, n \text{ (попит);} \quad (1.7)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ (обсяг перевезень)} \quad (1.8)$$

Для нашого прикладу введемо позначення:

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо вибрано пункт розміщення } i; \\ 0 - \text{ у протилежному випадку.} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо маршрут } (i, j) \text{ використовується;} \\ 0 - \text{ у протилежному випадку.} \end{cases}$$

$$U_{ij} = \min (a_i, b_j).$$

Тоді замість функції (1.5) отримаємо сумарні витрати у вигляді:

$$\min \sum_{i=1}^m F_i y_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F_{ij} z_{ij}. \quad (1.9)$$

Замість обмеження (1.6) на потужності постачальників вводимо обмеження на пропускні здатності маршрутів

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i y_i, i = 1, \dots, m, \quad (1.10)$$

при цьому обмеження (1.7) за попитом споживачів залишається без змін:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \geq b_j, j = 1, \dots, m. \quad (1.11)$$

Побудову моделі ще не закінчено. Слід забезпечити, щоб умова $x_{ij} > 0$ виконувалося тільки у випадку, коли $z_{ij} = 1$. Це досягається за допомогою лінійних обмежень:

$$x_{ij} \leq U_{ij} z_{ij} \text{ для будь-яких } i, j = 1, \dots, m. \quad (1.12)$$

Крім того,

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (1.13)$$

Тепер можна сказати, що модель (1.9) - (1.13) задачі 1.10 отримана у результаті модифікації моделі (1.5) - (1.8) класичної транспортної задачі.

1.6 Формалізація принципів оптимальної поведінки в моделях прийняття рішень

Під принципом оптимальності розуміється така сукупність правил, за допомогою яких ОПР визначає свою дію (рішення, альтернативу, стратегію, управлінське рішення), і яка щонайкраще сприяє досягненню поставленої ним мети. Принцип оптимальності вибирається виходячи з урахування конкретних умов прийняття рішення: кількості учасників, їх можливостей і цілей, характеру зіткнення інтересів (антагонізм, неантагонізм, кооперація і т.п.).

В моделях прийняття рішення, особливо в теорії ігор, розроблено багато формальних принципів оптимальної поведінки. Тут ми зупинимося лише на деяких з них.

Принцип максимізації (мінімізації). Такий принцип застосовується, в основному, у задачах математичного програмування (див. підрозділи (1.2) - (1.4)).

Принцип згортання критеріїв. Застосовується при оптимізації багатьох критеріїв одним координуючим центром (задача багатокритеріальної оптимізації (1.5)). Для кожного з критеріїв (цільових функцій) $f_1(u), \dots, f_n(u)$ експертним шляхом призначаються «ваги» (числа) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$: $\alpha_i \geq 0$,

$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, причому α_i показує «важливість або значимість» критерію f . Далі

розв'язок x^* з множини допустимих рішень X вибирається такий, щоб максимізувати (мінімізувати) згортання критеріїв

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x^*).$$

Принцип лексикографічної переваги. Це ще один принцип оптимальності в задачах багатокритеріальної оптимізації. Спочатку критерії ранжуються за важливістю. Нехай таке ранжування складено:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x).$$

Розв'язок $x^* \in X$ буде «кращий», ніж розв'язок $x \in X$ у сенсі лексикографічної переваги, якщо виконується одна з $n+1$ умов:

- 1) $f_1(x^*) > f_1(x)$;
- 2) $f_1(x^*) = f_1(x), f_2(x^*) > f_2(x)$;
- 3) $f_1(x^*) = f_1(x), f_2(x^*) = f_2(x), f_3(x^*) > f_3(x)$;
-
- n) $f_i(x^*) = f_i(x)$ для $i = 1, \dots, n-1, f_n(x^*) > f_n(x)$;
- n+1) $f_i(x^*) = f_i(x)$ для $i = 1, \dots, n$.

Принцип мінімаксу. Застосовується при зіткненні інтересів двох антагоністичних сторін (антагоністичний конфлікт). Кожна ОПР спочатку для кожної своєї стратегії (альтернативи) обчислює «гарантований» результат, потім остаточно вибирає ту стратегію, за якою цей результат найкращий у порівнянні з іншими його стратегіями. Така дія не дає ОПР «максимального виграшу», однак, є єдиним розумним принципом оптимальності в умовах антагоністичного конфлікту. Зокрема, виключається будь-який ризик.

Принцип рівноваги. Це узагальнення принципу мінімаксу, коли у взаємодії беруть участь багато сторін, кожна з яких переслідує свою мету (прямого протистояння немає). Нехай число ОПР є n . Набір обраних стратегій $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ називається рівноважним, якщо одностороннє відхилення будь-якої ОПР від цієї ситуації може призвести хіба лише до зменшення його ж «виграшу». У цій ситуації учасники не отримують «максимального» виграшу, але вони змушені дотримуватись її.

Принцип оптимальності за Парето. Даний принцип припускає як оптимальні ті ситуації (набори стратегій $x_1, \dots, x_n$), при яких поліпшення «виграшу» окремого учасника неможливе без погіршення «виграшів» ін-

ших учасників. Цей принцип висуває більш слабкі вимоги до поняття оптимальності, ніж принцип рівноваги. Тому Парето-оптимальні ситуації існують майже завжди.

Принцип недомінуючих результатів. Цей принцип є представником багатьох принципів оптимальності в корпоративних іграх (колективне прийняття рішень) і приводить до поняття «ядра» рішень. Всі учасники об'єднуються і спільними погодженими діями максимізують «загальний виграш». Принцип недомінуючих результатів – це один із принципів «справедливого» розподілу між учасниками. Це та ситуація, коли жоден з учасників не може аргументовано заперечити проти запропонованого розподілу (елемента «ядра»). Існують й інші принципи оптимального розподілу загального сумарного виграшу.

Принципи стійкості (погрози і контрпогрози). Ідея всіх принципів стійкості на основі погроз і контрпогроз: кожна коаліція учасників висуває свою пропозицію, супроводжуючи його реальною погрозою, якщо пропозиція не буде прийнята іншими учасниками, то будуть початі такі дії, що погіршують положення інших учасників і не погіршують (можливо поліпшують) положення загрозової коаліції. Оптимальним вважається те рішення, в умовах якого проти будь-якої погрози, будь-якої коаліції знайдеться контрпогроза з боку іншої коаліції.

Арбітражні схеми. Економічні конфлікти наводять на думку про арбітраж. Небажано, щоб зіткнення інтересів переходили, наприклад, у відкриті погрози і контрпогрози. Повинні існувати соціальні механізми, що дозволяли б враховувати переваги і стратегічні можливості кожного учасника і забезпечили б «справедливе» розв'язання конфлікту. Такий механізм або особа, або система голосування, називається арбітром. В теорії ігор оптимальне, у смислі арбітражної схеми, рішення будується за системою аксіом, що включає такі поняття, як статус-кво, оптимальність за Парето, лінійність альтернатив, незалежність від рангів тощо.

Далі розглянемо питання оптимального прийняття рішення в умовах невизначеності. Для визначення оптимальної поведінки ОПР таку ситуацію корисно моделювати як антагоністичну гру двох осіб, де супротивником ОПР розглядається природа. Остання наділяється всіма імовірними в даних умовах можливостями. В іграх з природою існують свої специфічні принципи оптимального вибору рішення.

Принцип крайнього песимізму (критерій Вальда). Відповідно до цього принципу гра з природою (прийняття рішення в умовах невизначе-

ності) ведеться як гра з розумним і агресивним супротивником, що робить усе для того, щоб перешкодити нам досягти успіху. Оптимальною вважається стратегія ОПР за якою гарантується виграш не менший, ніж дозволений природою.

Принцип мінімаксного ризику (критерій Севіджа). Цей принцип також песимістичний, але при виборі оптимальної стратегії радить орієнтуватися не на виграш, а на ризик. Ризик визначається як різниця між максимальним виграшем ОПР, за умови повної інформації про стан природи і реальним її виграшем за умови відсутності цієї інформації. Як оптимальна вибирається та стратегія, за якою ризик буде мінімальним.

Принцип песимізму - оптимізму (критерій Гурвіца). Цей критерій рекомендує при виборі рішення не керуватися ні крайнім песимізмом (завжди розраховуй на гірше), ні крайнім оптимізмом «ще так не було, щоб якось не було». Відповідно цьому критерію максимізується зважене середнє між виграшами крайнього песимізму і крайнього оптимізму. Причому «вага» вибирається із суб'єктивних розумінь про небезпеку ситуацій.

Концепція динамічної стійкості. Усі викладені вище принципи оптимальності сформульовані щодо статичних задач прийняття рішення. Спроба застосування їх у динамічних задачах може призвести до різних ускладнень. Головне – це особливості динамічних процесів. Потрібно, щоб той або інший принцип оптимальності, що був обраний на початку процесу (у початковий момент часу), залишався оптимальним у будь-якому поточному стані (у будь-який момент часу) до кінця динамічного процесу. Цей принцип називається динамічною стійкістю.

2 ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1 Попередні відомості теорії лінійного програмування

Задача математичного програмування вигляду (1.3) або (1.4) називається задачею лінійного програмування (ЛП), якщо цільова функція f є лінійною функцією, а множина допустимих розв'язків X задається лінійними нерівностями або рівняннями

$$\min(\max) f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \quad (2.2)$$

.....

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k.$$

$$x_l \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (2.3)$$

або у векторному вигляді

$$\begin{aligned} f(x) = \bar{c}^T \cdot \bar{x} \rightarrow \min(\max); \\ A \cdot \bar{x} \leq \bar{b}; \\ \bar{x} \geq \bar{0}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де

$$A = \{ \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n \}; \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \dots, \bar{A}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}; \bar{x} = [x_1, \dots, x_n]^T; \bar{c} = [c_1, \dots, c_n]^T.$$

Наведена модель є стандартною постановкою задачі ЛП, у якій в системі обмежень (2.2) можуть бути різні відношення типу « $<$ », « $>$ », « $=$ ». Тут $c_1, \dots, c_n$ – коефіцієнти при цільовій функції, $a_{11}, \dots, a_{mn}$ – коефіцієнти при змінних в системі обмежень, $b_1, \dots, b_k$ – вільні члени системи обмежень. Усі ці компоненти задачі ЛП є відомими (заданими) числами. Невідомими (шуканими) змінними будуть елементи вектора $\{x_1, \dots, x_n\}^T$. При цьому задача ЛП полягає у тому, щоб знайти такі значення змінних $x_1^*, \dots, x_n^*$ (точку мінімуму (максимуму)), щоб вони, по-перше, задовольняли обмеження (2.2) і (2.3) (умова допустимості), а, по-друге, щоб у точці $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ цільова функція f приймала мінімальне (максимальне) значення $f(x^*)$ (умова оптимальності). Аналогічно ставиться задача на мінімум.

Крім стандартної форми запису задачі ЛП є також загальна і канонічна форми запису. Загальна форма запису аналогічна стандартній за винятком відсутності обмежень за знаком для шуканих змінних $\{x_1, \dots, x_n\}^T$.

У канонічній формі задач ЛП треба знайти екстремум цільової функції за системою обмежень, що описуються рівняннями та за умови невід'ємності усіх шуканих змінних:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow (\text{extrem} : \text{max/min}) ; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = 1, k ; \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, n . \end{aligned}$$

Між формами запису задач ЛП є правила переходу. Розглянемо правила переходу від загальної форми до канонічної. У системі обмежень нерівності типу $\leq$ перетворюються у рівності шляхом додавання до її лівої частини додаткової невід'ємної змінної $x_{n+1} \geq 0$. Так само перетворюються у рівності нерівності типу $\geq$ шляхом віднімання від їх лівих частин додат-

кової невід'ємної змінної $x_{n+1} \geq 0$. При цьому слід зауважити, що умову $\geq$ легко звести до $\leq$, помноживши кожен нерівність на -1, аналогічно тому як обмеження типу $x_j \leq 0$ можна звести до обмежень типу $x_j \geq 0$ помноживши їх на -1 та замінивши знак змінних $x_j = -x_j \geq 0, j = r+1, s$. Кожну змінну, на знак якої не накладено обмежень, можна описати як різницю двох невід'ємних змінних $x_j = x'_j - x''_j$ де $x'_j \geq 0, x''_j \geq 0, j = s+1$. При цьому обмеження типу $x_j \geq d$, де $d \neq 0$, можна перетворити в рівність за правилом: $x_j = d + x'_j$, де $x'_j \geq 0$.

Приклад 2.1. Звести до канонічної таку загальну задачу ЛП:

$$\begin{aligned} & -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \min; \\ & -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4; \\ & 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 2; \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6; \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Застосовуючи вищенаведені правила зводимо задачу ЛП до вигляду:

$$\begin{aligned} & -2x_1 + x'_2 + 3x'_3 - 3x''_3 - 2x'_4 + 2x''_4 \rightarrow \min; \\ & 2x_1 + x'_2 + 3x'_3 - 3x''_3 + x'_4 - x''_4 = 4; \\ & 3x_1 + x'_2 - 3x'_3 + 2x''_3 + x'_4 - x''_4 - x_5 = 2; \\ & 5x_1 - 3x'_2 + x'_3 - x''_3 + x_6 = 6; \\ & x_1, x'_2, x'_3, x''_3, x'_4, x''_4, x_5, x_6 \geq 0, \end{aligned}$$

що досягається введенням додаткових змінних $x_5 \geq 0$ та $x_6 \geq 0$ в друге і третє обмеження-нерівності, заміною $x'_2 = -x_2 \geq 0$ та описом змінних x_3 та x_4 , що не обмежені за знаком, запишемо у вигляді $x_3 = x'_3 - x''_3$, де $x'_3, x''_3 \geq 0$; $x_4 = x'_4 - x''_4$, де $x'_4, x''_4 \geq 0$.

Приклад 2.2. Перехід від канонічної форми запису задачі ЛП до стандартної. Структура задачі ЛП залежить від рангу r системи обмежень. Якщо $r < n$, то $n-r$ змінним, які називають *небазисними*, можна надавати будь-які значення, при цьому r змінні, що називаються *базисними*, можна визначити через небазисні. Розглянемо канонічну задачу ЛП:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\ & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6; \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 16; \\ & x_j \geq 0, j = 1, 4. \end{aligned}$$

Ранг системи обмежень дорівнює двом. Тому за небазисні змінні виберемо, наприклад, x_1 та x_4 . Визначимо через них базисні змінні x_2 та x_3 :

$$x_1 = 8 + \frac{3}{2}x_2 - x_3 ; \quad x_4 = -6 + x_1 + x_2 + x_3 = 2 + \frac{5}{2}x_2 .$$

Оскільки x_1 та x_4 невід'ємні, то: $8+3/2x_2 - x_3 \geq 0$; $2+5/2x_2 \geq 0$. При цьому цільова функція від небазисних змінних набуде такого вигляду:

$$10 + 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \max.$$

Запишемо тепер задачу у стандартній формі:

$$\begin{aligned} 10 + 5x_2 - 3x_3 &\rightarrow \max; \\ -3/2x_2 + x_3 &\leq 8; \\ -5/2x_2 &\leq 2; \\ x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

У векторному вигляді задача перетворення у канонічну форму запису буде мати такий вигляд. Якщо система обмежень задана у формі $A \cdot \bar{x} \leq \bar{b}$, то можна, увівши додаткові змінні, звести її до вигляду

$$A \cdot \bar{x} + E \cdot \bar{y} = \bar{b}, \quad \bar{x} \geq 0, \quad \bar{y} \geq 0,$$

де $\bar{y} = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]^T$. Якщо ж обмеження задані у формі $A \cdot \bar{x} \geq \bar{b}$, то

$$A \cdot \bar{x} - E \cdot \bar{y} = \bar{b}, \quad \bar{x} \geq 0, \quad \bar{y} \geq 0.$$

Розглянемо задачу з обмеженнями $A \cdot \bar{x} \leq \bar{b}$ або у вигляді системи:

[illegible]

Введемо такі позначення:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \dots, \bar{A}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}, \bar{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \bar{A}_{n+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{A}_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \dots$$

Тоді канонічну задачу ЛП можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \rightarrow \min(\max)$$

$$x_1 \cdot \bar{A}_1 + x_2 \cdot \bar{A}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{A}_n + x_{n+1} \cdot \bar{A}_{n+1} + \dots + x_{n+m} \cdot \bar{A}_{n+m} = A_0,$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}.$$

Вектори $\bar{A}_i$ називаються векторами умов, а сама задача ЛП називається розширеною щодо вихідної задачі. Нехай D і D_1 – допустимі множини розв’язків вихідної і розширеної задач, відповідно. Тоді будь-якій точці множини D_1 відповідає єдина точка множини D і навпаки. У загальному випадку, допустима множина D вихідної задачі є проекцією множини D_1 розширеної задачі на підпростір вихідних змінних.

Означення 2.1. Набір чисел $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, що задовольняє обмеження задачі лінійного програмування, називається її **планом**.

Означення 2.2. Розв’язком задачі лінійного програмування називається її план, що мінімізує (або максимізує) лінійну форму.

Уведемо поняття базисного розв’язку. З матриці розширеної задачі $A_p = [\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{n+m}]$ виберемо m лінійно незалежних векторів-стовпців, що позначимо як матрицю $B_{m \times m}$, а через $D_{m \times n}$ позначимо матрицю із стовпців, що залишилися. Тоді $A_p = [B, D]$, і обмеження розширеної задачі лінійного програмування можна записати у вигляді:

$$A_p \cdot \bar{x} = B \cdot \bar{x}_B + D \cdot \bar{x}_D = \bar{A}_0. \quad (2.5)$$

Очевидно, що стовпці матриці B утворюють базис m -вимірного простору. Тому вектор $\bar{A}_0$ і будь-який стовпець матриці D можна зобразити у вигляді лінійної комбінації стовпців матриці B .

Помножимо обидві частини виразу (2.5) на матрицю B^{-1} , що є матрицею, оберненою щодо матриці B , і як результат отримаємо

$$B^{-1} \cdot B \cdot \bar{x}_B + B^{-1} \cdot D \cdot \bar{x}_D = B^{-1} \cdot \bar{A}_0, \quad (2.6)$$

звідки знайдемо вектор розв’язку $\bar{x}_B$:

$$\bar{x}_B = B^{-1} \cdot \bar{A}_0 - B^{-1} \cdot D \cdot \bar{x}_D. \quad (2.7)$$

Для різних значень $\bar{x}_D$, будемо отримувати різні розв’язки $\bar{x}_B$, і якщо покласти, що $\bar{x}_D = \bar{0}$, то будемо мати

$$\bar{x}_B = B^{-1} \cdot \bar{A}_0. \quad (2.8)$$

Розв'язок (2.8) називають **базисним розв'язком** системи з m рівнянь з $m + n$ невідомими.

Якщо отриманий розв'язок містить тільки додатні компоненти, то такий розв'язок називається **допустимим базисним розв'язком**.

Особливість допустимих базисних розв'язків полягає у тому, що вони є крайніми точками допустимої множини D_1 розширеної задачі.

Якщо серед компонентів $\bar{x}_B$ немає нульових, то допустимий базисний розв'язок називається **невиродженим**.

Означення 2.3. План $\bar{x}$ задачі лінійного програмування будемо називати опорним, якщо вектори умов $\bar{A}_i$ з додатними коефіцієнтами лінійно незалежні.

Тобто опорний план – це допустимий базисний розв'язок розширеної системи і є кутовою точкою багатокутника розв'язків.

Означення 2.4. Опорний план називається **невиродженим**, якщо він містить m додатних компонентів (за числом обмежень).

Невироджений опорний план утворюється перерізанням n гіперплощин з $n+m$ гіперплощинами, що утворюють допустиму область розв'язків. У випадку виродженості в кутовій точці багатокутника розв'язків перерізається більше n гіперплощин.

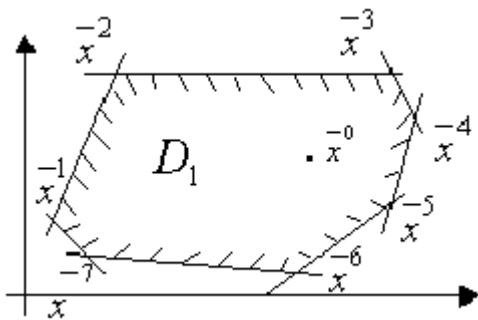
Теорема 2.1. (Основна теорема лінійного програмування).

1. Лінійна форма $z = \bar{c}^T \cdot \bar{x}$ досягає свого мінімуму в кутовій точці багатокутника розв'язків.

2. Якщо вона приймає мінімальне значення більше ніж в одній кутовій точці, то вона досягає того ж самого значення у будь-якій точці, що є опуклою комбінацією цих кутових точок.

Доведення. Доведення теореми ґрунтується на такій лемі.

Лема. Якщо D – замкнена, обмежена і опукла множина, що має скінченне число крайніх (кутових) точок, то будь-яка точка $\bar{x} \in D$ може бути зображена у вигляді опуклої комбінації крайніх точок D .



1. Нехай $\bar{x}^0$ – деяка внутрішня точка (див. на рисунку). Багатокутник обмежений, замкнений і має скінченне число кутових точок, D – допустима множина.

Припустимо, що $\bar{x}^0$ є оптимальною точкою, тобто $z(\bar{x}^0) \leq z(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in D$. Припу-

стимо, також, що точка $\bar{x}^0$ не є кутовою.

Тоді на підставі леми точку $\bar{x}^0$ можна визначити через кутові точки бага-

токутника $\bar{x}^{-i}$, тобто $\bar{x}^{-0} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \bar{x}^{-i}$, $\forall \alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$.

Оскільки функція $z(\bar{x})$ лінійна, то

$$z(\bar{x}^{-0}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot z(\bar{x}^{-i}).$$

Виберемо серед точок $\bar{x}^{-i}$ ту, у якій лінійна форма $z(\bar{x})$ приймає найменше значення. Нехай це буде точка $\bar{x}^{-k}$. Позначимо мінімальне значення функції в кутовій точці через z^* :

$$z^* = z(\bar{x}^{-k}) = \min_{1 \leq i \leq p} \{z(\bar{x}^{-1}), z(\bar{x}^{-2}), \dots, z(\bar{x}^{-p})\}.$$

Підставимо це значення в лінійну форму замість $z(\bar{x}^{-i})$ і отримаємо

$$z(\bar{x}^{-0}) \geq \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot z^* = z^* \cdot \sum_{i=1}^p \alpha_i = z^*.$$

Оскільки, за припущенням, $\bar{x}^{-0}$ – оптимальна точка, то ми отримали суперечність: $z(\bar{x}^{-0}) \geq z^*$. Отже, $z(\bar{x}^{-0}) = z(\bar{x}^{-k})$, $\bar{x}^{-0} = \bar{x}^{-k}$ – кутова точка.

2. Припустимо, що лінійна форма $z(\bar{x})$ приймає мінімальне значення більш ніж в одній кутовій точці, наприклад, у кутових точках $\bar{x}^{-1}, \bar{x}^{-2}, \dots, \bar{x}^{-q}$ $z(\bar{x}^{-1}) = z(\bar{x}^{-2}) = \dots = z(\bar{x}^{-q}) = z^*$. Тоді якщо $\bar{x}$ є опуклою комбінацією цих точок, тобто

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \bar{x}^{-i}, \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1 \quad \text{і} \quad \forall i \quad \alpha_i \geq 0,$$

то $z(\bar{x}) = z\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \bar{x}^{-i}\right) = z^* \cdot \sum_{i=1}^q \alpha_i = z^*$. Тобто, якщо мінімальне значення досягається більш ніж в одній кутовій точці, то цього ж значення лінійна форма досягає в будь-якій точці, що є опуклою комбінацією цих точок.

Теорема 2.2. Якщо відомо, що система векторів умов $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m$, ($m \leq n$) лінійно незалежна, причому така, що

$$x_1 \cdot \bar{A}_1 + \dots + x_m \cdot \bar{A}_m = \bar{A}_0,$$

де всі $x_j > 0$, то точка $\bar{x} = [x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0]^T$ є кутовою точкою багатокутника розв'язків.

Теорема 2.3. Якщо вектор $\bar{x}$ є кутовою точкою багатокутника розв'язків, то вектори умов, що відповідають додатним компонентам вектора $\bar{x}$, є лінійно незалежними. При цьому: кутова точка багатокутника розв'язків має не більше ніж m додатних компонентів вектора $\bar{x}$; кожній кутовій точці багатокутника розв'язків відповідає m лінійно незалежних векторів, що належать системі векторів $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$.

Підсумовуючи вищеописане, можна відзначити такі властивості задач лінійного програмування.

1. Допустима множина розв'язків ЛП або порожня, або є опуклим багатокутником у R^n , що є перерізом півпросторів, які описуються нерівностями (2.2) - (2.3). Вона може бути як обмеженою, так і необмеженою, у будь-якому випадку це замкнений багатокутник.

2. Якщо допустима множина не порожня, а цільова функція обмежена зверху (для задачі максимізації, а для задачі мінімізації – обмежена знизу) на цій множині, то задача ЛП має оптимальний розв'язок.

3. Оптимальні розв'язки задачі ЛП (якщо вони існують) завжди знаходяться на межі допустимої множини. Точніше, якщо існує єдиний оптимальний розв'язок, то ним є одна з вершин багатокутника допустимих розв'язків.

4. Якщо дві або кілька вершин є оптимальними розв'язками, то будь-яка їх опукла комбінація також є оптимальним розв'язком, тобто існує нескінченна множина точок максимуму або мінімуму.

Методами розв'язання задач ЛП є графічний метод (у випадку двох змінних) або його різновиди (у загальному випадку).

2.2 Графічна інтерпретація розв'язання задач ЛП

Геометрична інтерпретація дає можливість наочно зобразити структуру задач ЛП, що сприяє засвоєнню їх основних властивостей. У найпростіших випадках одно- і двовимірних просторів геометричне зображення дає змогу знайти розв'язання задачі ЛП у стандартній формі якнайзручнішим способом. Також, матимемо на увазі, що геометричну інтерпретацію задачі можна задати у канонічній формі з числом незалежних невідомих $k = n - m \leq 2$ та задачі у загальній формі запису, яка може бути зведена до канонічної форми запису. Розглянемо таку задачу.

Знайти екстремум лінійної форми (2.1) за умови обмежень (2.2) - (2.3), при цьому у цих виразах покладемо, що $n=2$. Кожна із нерівностей системи обмежень визначає півплощину, що обмежується прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, ($i = \overline{1, m}$). Умови невід'ємності шуканих змінних визначають півплощини відповідно з граничними прямими $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Якщо система обмежень сумісна, то переріз півплощин як опуклих множин, утворить опуклу множину точок, координати якої є розв'язками

системи рівнянь обмежень. Сукупність цих точок і буде множиною планів або допустимих розв'язків. Лінійну форму на площині можна інтерпретувати як сім'ю деяких паралельних прямих, кожна з яких визначається значенням цільової функції.

Якщо $f = 0$, пряма проходить через початок координат. Інші значення цільової функції є відстанню даної прямої від початку координат помноженою на довжину вектора $C = (c_1, c_2)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних лінійної форми. Нас цікавлять лише ті прямі, які відповідають лінійній формі, що мають спільні точки із сторонами багатокутника розв'язків. При цьому задача ЛП полягає у тому, щоб, зміщуючи пряму лінійної форми, знайти спільну з нею таку точку багатокутника розв'язків, в якій лінійна форма приймає екстремальне значення. Напрямок руху прямої цільової функції визначається вектором $C = (c_1, c_2)$. Під час зміщення прямої лінійної форми в його напрямку значення цільової функції зростає, а під час переміщення у протилежному напрямку – спадає.

В усіх випадках екстремальні значення цільової функції досягаються на межі множини планів (пряма лінійної форми дотикається до багатокутника розв'язків у граничних точках) і визначення екстремальних значень лінійної форми зводиться до порівняння їх у граничних точках багатокутника, заданих обмеженнями. При цьому можливі такі випадки.

1. Багатокутник планів задачі ЛП обмежений, при цьому лінійна форма досягає екстремуму або в окремих вершинах багатокутника, або на деякій грані або на ребрі, якщо гіперплощини рівні паралельним граням.

2. Багатокутник планів задачі ЛП є необмеженим. Тоді лінійна форма може бути необмеженою на множині планів лише знизу або лише зверху, або і знизу, і зверху.

3. Множина планів задачі ЛП порожня, тобто не існує багатокутника існування планів, які б не суперечили системі обмежень.

Зауваження. Для будь-якої розмірності вектора шуканих змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$ канонічної форми, розмірність багатокутника планів завжди визначається числом незалежних змінних, тобто різницею між кількістю залежних змінних і рангом системи обмежень: $k = n - m$, $m = r$.

Алгоритм геометричної інтерпретації задач ЛП з двома основними змінними містить такі етапи.

1. У кожному обмеженні, що задане нерівністю, замінити знаки нерівностей на знаки рівнянь і провести на площині $x_1 \times x_2$ відповідні їм прямі.

2. Знайти півпростір, заданий відповідним обмеженням – нерівністю.

3. Виявити багатокутник планів задачі.

4. Провести гіперплощину – пряму рівня цільової функції, що має спільні точки з багатокутником планів.

5. Визначити напрям зміщення прямої рівня цільової функції для досягнення екстремуму.

6. Знайти точку (або точки) багатокутника, де пряма рівня досягає екстремуму або встановити її необмеженість на множині планів задачі.

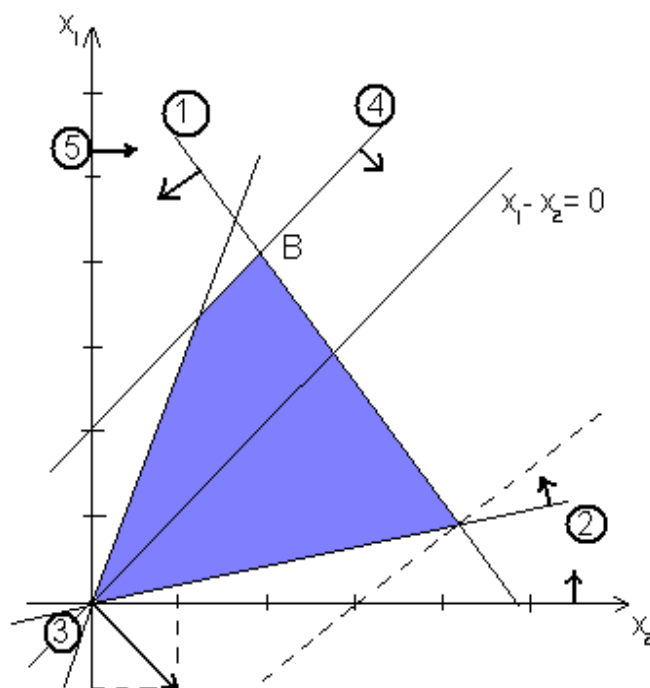
7. Знайти координати точки розв'язку задачі ЛП, що і буде оптимальним планом задачі.

Приклад 2.3. (Випадок єдиного оптимального розв'язку). Використовуючи графічний метод, знайти розв'язок такої задачі ЛП:

$$\begin{aligned} \max f(x) &= x_1 - x_2; \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 14; \\ x_1 - 4x_2 &\leq 0; \\ 3x_1 - x_2 &\geq 0; \\ -x_1 + x_2 &\leq 2; \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язування. На площині R^2 будуємо допустиму множину, що описується шістьма нерівностями. Це буде перерізання шести півплощин, кожна з яких задається обмеженням – нерівністю на R^2 . Наприклад, першу з них $3x_1 + 2x_2 \leq 14$ будуємо таким чином. Проводимо пряму $3x_1 + 2x_2 = 14$, що є межею цієї півплощини. Щоб визначити, яку з півплощин, що лежать з обох сторін від цієї прямої, описує нерівність $3x_1 + 2x_2 \leq 14$, досить поставити в ній координати початку координат, тобто $(0,0)$. Якщо нерівність виконується, то беремо ту півплощину, що містить початок координат, якщо не виконується, то беремо півплощину, що не містить початку координат. У нашому випадку $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 14$.

На рисунку нижче у кружках написані номери ліній (меж півплощин), а півплощини позначені стрілками. У результаті перерізання побудованих шести півплощин отримуємо багатокутник ОАВС, що і є допустимою



множиною даної задачі. Можна перевірити, що будь-яка точка у ньому задовольняє усі шість нерівностей, а для будь-якої точки поза цим багатокутником хоча б одна з цих нерівностей буде порушена.

Таким чином, геометрично задача звелася до того, щоб у межах багатокутника ОАВС знайти точку $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, у якій цільова функція $f(x^*)$ отримує максимальне значення.

Завдяки властивості 1.3 ми заздалегідь знаємо, що точкою максимуму нашої цільової функції є одна або деякі з вершин

О, А, У або С. Для того, щоб визначити цю вершину, проведемо будь-яку лінію рівня цільової функції, тобто проведемо пряму $f(x) = c_1$, де $c = \text{const}$. Для простоти візьмемо $c=0$, тоді лінія рівня є $x_1 - x_2 = 0$. Збільшуючи праву частину цього рівняння (наприклад, $x_1 - x_2 = 1$, $x_1 - x_2 = 3$ і т.д.), ми знайдемо паралельний зсув лінії рівня вниз, причому, чим більша права частина, тим більший зсув. Якщо ж зменшимо праву частину (наприклад, $x_1 - x_2 = -1$, $x_1 - x_2 = -2$ і т.д.), то спостерігаємо зсув вверх.

Звідси зрозуміло, що зміщаючи лінію рівня у напрямку зростання цільової функції, ми знайдемо ту вершину багатокутника ОАВС, що відповідає точці максимуму. Як видно з вищенаведеного рисунка, це є точка С.

Щоб відразу визначити напрямок зростання функції t , обчислюють її градієнт ∇f . Для лінійної функції градієнт завжди дорівнює вектору, що складається з коефіцієнтів цієї функції.

Для нашої цільової функції $f(x) = x_1 - x_2$ градієнт $\nabla f = (1, -1)$. Як відомо, градієнт, що перпендикулярний лінії рівня, показує напрямок зростання функції, а антиградієнт, тобто вектор $-\nabla f$, показує напрямок убуття функції. Отже, зміщуючи лінію рівня $x_1 - x_2 = 0$ у напрямку вектора ∇f , знаходимо точку максимуму С.

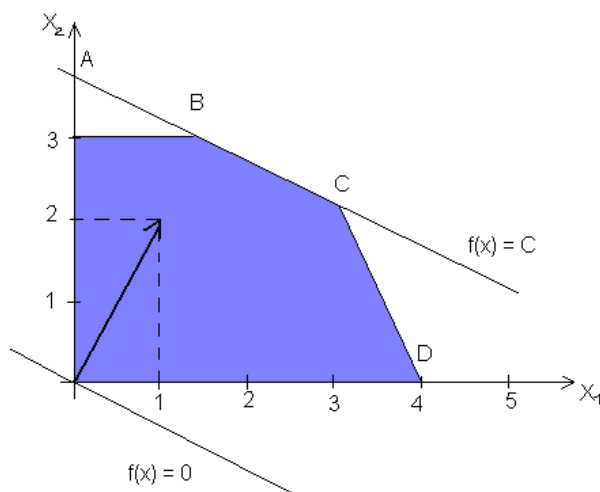
Координати точки С знайдемо розв'язуючи спільно рівняння ліній 1 і 2, що перетинаються у точці 3: $3x_1 + 2x_2 = 14$; $x_1 - 4x_2 = 0$

Відповідь: $x^* = (4, 1)$ – точка максимуму, $f(x^*) = 3$ – максимальне значення цільової функції.

Приклад 2.2. (Нескінченна множина оптимальних розв'язків):

$$\min f(x) = -x_1 - 2x_2$$

за обмежень



$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 7; \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8; \\ x_2 &\leq 3; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Як видно з рисунка зліва найвдалішим збоку антиградієнти $-f = (1, 2)$ місцем дотику лінії рівня $f(x) = c$ з допустимою множиною ОАВСД є грань ВС (тобто опуклість вершин $B = (1, 3)$ і $C = (3, 2)$). Тому будь-яка точка грані ВС є точкою мінімуму цільової функції.

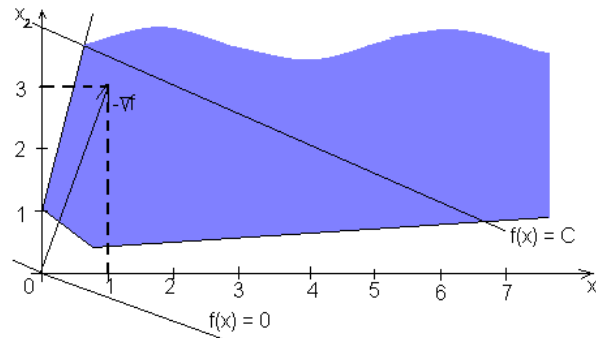
Відповідь: $x^* = \alpha(1, 3) + (1 - \alpha)(3, 2) = (3 - 2\alpha, 2 + \alpha)$ для кожного $\alpha \in [0, 1]$ - точка мінімуму, $f(x^*) = -7$ - мінімальне значення цільової функції.

Приклад 2.3. (Випадок відсутності оптимуму через необмеженість цільової функції на допустимій множині):

$$\min f(x) = -x_1 - 2x_2$$

за обмежень:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1; \\ 2x_1 - x_2 &\geq -1; \\ x_1 - 2x_2 &\leq 0; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$



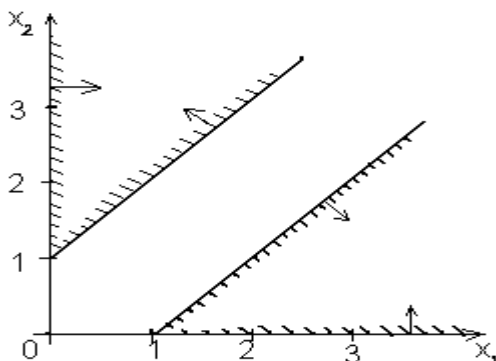
Допустима множина цієї задачі являє собою необмежений багатокутник (див. на рисунку зверху). При паралельному переносі лінії рівня $f(x) = c$ уздовж антиградієнта $-\nabla f = (1, 2)$ вона завжди перетинає допустиму множину, тобто немає найвіддаленішої точки дотику, а цільова функція нескінченно спадає.

Відповідь: Точки мінімуму немає; цільова функція не обмежена знизу.

Приклад 2.4. (Випадок відсутності оптимального розв'язку через порожнечу припустимої множини B):

$$\max f(x) = x_1 + x_2$$

за обмежень:



$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq -1; \\ -x_1 - x_2 &\leq -1; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Як показано на рисунку зліва, півплощини, що утворені першими двома нерівностями, не перетинаються і тому система несумісна, тобто немає ні однієї допустимої точки.

2.3 Змістовний опис симплекс-методу розв'язання задач ЛП

Нехай задача ЛП має оптимальний розв'язок. З геометричної точки зору це означає, що існує вершина багатокутника розв'язків, де лінійна функція досягає оптимального значення. Кожній вершині багатокутника відповідає опорний план. А кожний опорний план визначається системою m лінійно незалежних векторів, що містяться серед n векторів $A_1, A_2, \dots, A_n$ системи обмежень. Щоб знайти оптимальний план, досить розглянути лише опорні плани. Їх кількість не перевищує C_n^m . Для великих значень m і n

знайти серед них оптимальний простим перебором дуже важко. Тому необхідно мати такий аналітичний метод, що дає можливість цілеспрямовано розглядати опорні плани. Таким методом є *симплексний метод*. Виходячи з одного (початкового) опорного плану, симплексний метод забезпечує побудову нового опорного плану, що надає лінійній функції менші значення у порівнянні з попереднім планом. Цей процес продовжується поки не буде знайдено оптимальний план.

Оскільки кількість опорних планів обмежена, то обмежена і кількість розв'язків. Якщо задача не має розв'язку, то симплекс-метод встановлює цей факт у ході розв'язання задачі. Це означає, що під час обчислень можна встановити, чи є система обмежень сумісною і чи є лінійна функція обмеженою на множині планів задачі лінійного програмування.

Отже, симплекс-метод дає спосіб обчислення опорного плану, перевіряє побудований опорний план на оптимальність і визначає спосіб побудови наступного опорного плану, що буде ближчий до оптимального. Таким чином, симплекс-метод полягає в послідовному поліпшенні плану і тому його називають ще методом *послідовного поліпшення плану*.

Розв'язання задач симплексним методом складається з двох етапів: знаходження початкового опорного плану і знаходження оптимального плану. При цьому алгоритм симплексного методу застосовний лише до канонічної форми запису задачі ЛП. Тому, перед тим як розв'язувати задачу, систему обмежень необхідно спочатку привести до канонічної форми.

2.4 Знаходження початкового опорного плану

Щоб застосувати симплекс-метод для знаходження оптимального розв'язку задачі лінійного програмування, треба знайти відправну точку, тобто початковий опорний план. Якщо обмеження задачі ЛП задано у канонічному вигляді

$$AX = A_0, \quad A_0 \geq 0, \quad X \geq 0$$

і серед векторів $A_1, A_2, \dots, A_n$ є одиничний базис, то початковим опорним планом буде вектор $X = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$.

У деяких випадках одиничний базис у системі обмежень легко виділити. Наприклад, нехай маємо систему обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 & - x_4 & - 2x_6 = 6 ; \\ 2x_2 & + x_4 & + 3x_5 + x_6 = 8 ; \\ & x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 5 ; \\ x_j \geq 0, (j = 1, 2, \dots, 6) . \end{cases}$$

Якщо перше рівняння системи поділити на три, а друге – на два, то дістанемо систему:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_6 = 2; \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 4; \\ x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 5; \\ x_j \geq 0, (j = 1, 2, \dots, 6) . \end{cases}$$

Тут вектори A_1 , A_2 і A_3 утворюють одиничний базис і всі вільні члени додатні. Поклавши, що $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, знайдемо опорний план, який визначається як $X = (2, 4, 5, 0, 0, 0)$.

Якщо система (2.9) не містить у явному вигляді одиничного базису, то його в деяких випадках можна визначити методом повного виключення Гауса. Розглянемо це на прикладі такої системи обмежень.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12; \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14; \\ x_j \geq 0, (j = 1, 2, \dots, 5) . \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо метод повного виключення Гауса. Результати обчислень наведено у табл. 2.1, де головний елемент узято у рамку. З таблиці видно, що після третьої ітерації перетворень системи методом повного виключення дістали одиничний базис: A_1 , A_2 , A_5 йому відповідає план $X = (20, 6, 0, 0, 26)$.

Таблиця 2.1

Ітерація	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	Σ
1	1	2	0	3	-1	6	11
	1	3	1	4	-1	12	20
	2	0	-1	12	-1	14	26
2	1	2	0	3	-1	6	11
	0	1	1	1	0	6	9
	0	-4	-1	6	1	2	4
3	1	0	-2	1	-1	-6	-7
	0	1	1	1	0	6	9
	0	0	3	10	1	26	40
4	1	0	1	11	0	20	33
	0	1	1	1	0	6	9
	0	0	3	10	1	26	40

Якщо обмеження задачі ЛП задано у вигляді нерівностей:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n \leq A_0, \quad X \geq 0, \quad A_0 \geq 0,$$

то, додавши до лівої частини кожної нерівності за невід'ємною змінною $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, дістанемо розширену систему лінійних обмежень

$$A_1x_1 + \dots + A_nx_n + A_{n+1}x_{n+1} + \dots + A_{n+m}x_{n+m} = A_0, \quad X \geq 0, \quad A_0 \geq 0.$$

Змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ називають *додатковими змінними*. У лінійну функцію вони входять з нульовими коефіцієнтами. Отже, початкова задача лінійного програмування перетворилась у розширену: знайти оптимальне значення лінійної функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + \dots + 0 \cdot x_{n+m}$$

за обмежень (1.5.3). Додаткові вектори $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}$ утворюють одиничний базис m -вимірному векторного простору, а вектор $X = (x_1=0; \dots; x_n=0; x_{n+1}=b_1; \dots; x_{n+m}=b_{n+m})$ є опорним планом розширеної задачі.

Зазначимо, що розв'язок розширеної задачі, якщо він існує, буде також розв'язком початкової задачі. Якщо ж розширена задача розв'язку не має, то не має розв'язку і вихідна задача.

Застосовуючи симплекс-метод до розширеної задачі, поступово заміняють у системі базисних векторів додаткові вектори $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}$ векторами початкової системи обмежень. Якщо лінійна функція досягла свого екстремуму, а в системі базисних векторів є хоча б один додатковий вектор, наприклад A_{n+i} , то це означає, що i -те обмеження в початковій задачі має смисл строгої нерівності. Отже, початкова задача матиме оптимальний розв'язок (якщо його має розширена задача) і тоді, коли не всі додаткові вектори виключено із базису.

Часто, виділивши в системі обмежень одиничний базис і відповідний йому базисний розв'язок можна побачити, що знайдений розв'язок не є опорним планом системи обмежень, бо серед його змінних є і від'ємні. Для цілеспрямованого пошуку опорного плану треба від знайденого одиничного базису перейти до іншого. Для цього застосовують метод *симплексного перетворення*. Оскільки симплексні перетворення виконують над векторами $A_1, A_2, \dots, A_n, A_0$ системи обмежень, то ці вектори зведемо в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Рядки	A_0	A_1	A_2	...	A_j	...	A_n	Σ	θ
1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}		
2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
I	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
M	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}		

Нехай вектор $A_0 \geq 0$, тобто всі $b_i \geq 0$, ($i = 1, 2, \dots, m$). Цього можна досягти, помноживши рівняння з від'ємними членами на -1. Тепер у табл. 2.2 виділимо одиничний базис, не порушуючи невід'ємності компонент вектора A_0 . Зробити це можна за таким алгоритмом.

1. З неединичних векторів $A_1, A_2, \dots, A_n$ взяти той, у якого є хоча б один додатний елемент. Нехай таким вектором буде A_j . Якщо такого вектора в таблиці немає, то це означає, що система обмежень несумісна і процес симплексного перетворення завершено.

2. Знайти відношення θ_i елементів вектора A_0 до відповідних додатних елементів вектора A_j , записати їх у відповідному рядку стовпця θ і взяти з них найменше. Нехай таким буде деяке відношення $\theta = b_i / a_{ij}$. Тоді елемент a_{ij} – головний, а рядок і стовпець таблиці, на перетині яких лежить a_{ij} , відповідно головні рядок і стовпець.

3. Коефіцієнти головного рядка (крім θ_i) таблиці поділити на головний елемент і записати у відповідному рядку нової таблиці.

4. Елементи кожного наступного рядка нової таблиці дістають шляхом додавання відповідного рядка вихідної таблиці і рядка, записаного в п. 3, помноженого на таке число, щоб у головному стовпці при додаванні дістали нулі. На цьому заповнення нової таблиці завершується і перетворення нової таблиці починаються з п. 1.

Такі перетворення продовжуються доти, поки не буде виділено одиничний базис або ж не буде встановлено, що система обмежень несумісна. Стовпець Σ призначений для контролю обчислень, його елементи обчислюють так само, як і за методом повного виключення Гауса.

Приклад 2.5. Знайти початковий опорний план для системи обмежень

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 6; \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Записуємо коефіцієнти системи обмежень у табл.2.3. За головний візьмемо перший стовпець, оскільки вектор A_1 має додатні компоненти. Знайдемо відношення $\theta_1 = 6/1 = 6$ і $\theta_3 = 2$. Менше з них знаходиться у третьому рядку. Отже, головний елемент $a_{31} = 1$.

Над елементами вихідної системи виконаємо симплексні перетворення. Після першої ітерації перетворень одиничними є вектори A_1 і A_5 . Намагаючись знайти базис з векторів A_2, A_3, A_4 , візьмемо A_2 , що має додатний елемент $a_{22} = 2$, який і буде головним. Виконавши симплексні перетворення, після другої ітерації маємо одиничний базис A_1, A_2, A_5 і опорний план $X = (2; 2; 0; 0; 6)$, що йому відповідає.

прирівнюємо до нуля. З урахуванням того, що $b_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), знаходимо початковий план

$$X_0 = (x_1 = b_1; x_2 = b_2; \dots; x_m = b_m; x_{m+1} = 0; \dots; x_n = 0). \quad (2.9)$$

Йому відповідає лінійна комбінація

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = A_0, \quad (2.10)$$

у якій вектори $A_1, A_2, \dots, A_m$ лінійно незалежні. Отже, побудований початковий план є опорним, що надає значення лінійній функції

$$F(X_0) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m = f_0, \quad (2.11)$$

яке залежить тільки лише від значень m перших компонент вектора C . Оскільки оптимальний план належить до опорних, то й оптимальне значення лінійної функції залежатиме від відповідних компонент вектора C .

Розглянемо тепер, яким чином, виходячи з початкового опорного плану (2.9), можна побудувати інший опорний план, який надасть лінійній функції значення меншого, ніж попередній план. Початковий опорний план визначається базисними векторами $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Побудувати наступний опорний план, виходячи з початкового, можна завдяки переходу від базису $A_1, A_2, \dots, A_m$ до нового базису. Такий перехід здійснюється за допомогою вибору вектора, який вводять у базис, і вибору вектора, який виводять з нього. Знайдемо критерій вибору таких векторів.

Оскільки вектори $A_1, A_2, \dots, A_m$ утворюють базис m -вимірному простору, то будь-який вектор системи $A_1, A_2, \dots, A_n$ однозначно лінійно визначається через базисні

$$A_j = x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + \dots + x_{mj} A_m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

Зауважимо, що коефіцієнти x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$) є компонентами вектора A_j в базисі $A_1, A_2, \dots, A_m$. У виразі (2.12) вектора A_j відповідає єдине значення лінійної функції

$$f_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \dots + c_m x_{mj}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

де c_i ($i = 1, 2, \dots, m$) – коефіцієнти лінійної функції, що відповідають базисним векторам A_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Значення f_j знайдемо, якщо у вираз лінійної функції замість змінних підставимо відповідні коефіцієнти подання j -го вектора через базисні вектори. Нехай для деякого вектора, що не входить у базис, наприклад, A_k ($k > m$), хоча б один з коефіцієнтів x_{ik} у виразі

$$x_{1k} A_1 + x_{2k} A_2 + \dots + x_{mk} A_m = A_k \quad (2.14)$$

є додатним. Виразу (2.14) відповідає значення лінійної функції

$$c_1 x_{1k} + c_2 x_{2k} + \dots + c_m x_{mk} = f_k. \quad (2.15)$$

Задамо деяке, поки що невідоме додатне число θ . Помножимо на нього обидві частини рівностей (2.14) і (2.15) і результати віднімемо від (2.10) і (2.11) відповідно:

$$\begin{aligned} (x_1 - \theta x_{1k})A_1 + (x_2 - \theta x_{2k})A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mk})A_m + \theta A_k &= A_0, \\ (x_1 - \theta x_{1k})c_1 + (x_2 - \theta x_{2k})c_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mk})c_m &= f_0 - \theta f_k. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В останній рівності до обох частин додамо θc_k :

$$(x_1 - \theta x_{1k})c_1 + (x_2 - \theta x_{2k})c_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mk})c_m + \theta c_k = f_0 - \theta(f_k - c_k). \quad (2.17)$$

Лінійній комбінації відповідає новий план

$$X_l = (x_1 - \theta x_{1k}; x_2 - \theta x_{2k}; \dots; x_m - \theta x_{mk}; 0, \dots, \theta, \dots, 0),$$

якщо його коефіцієнти невід'ємні. Ті компоненти вектора X_l , до яких входять недодатні θx_{ik} , будуть невід'ємними, бо $\theta > 0$. Компоненти вектора X_l з додатними x_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$) будуть невід'ємними, якщо

$$\theta \leq \min_i x_i / x_{ik}, \quad (2.18)$$

де мінімум береться серед тих i , для яких $x_{ik} > 0$. Отже, під час виконання даної умови вектор X_l буде опорним планом. Опорний план не може мати $m+1$ додатних компонент. Тому в плані X_l треба хоча б одну з компонент перетворити в нуль. Це можна зробити, якщо θ вибрати так:

$$\theta = \theta_0 = \min_i x_i / x_{ik}. \quad (2.19)$$

Оскільки розглядається не вироджена задача, тобто всі її опорні плани містять рівно m додатних компонент, то мінімум в (2.19) досягатиметься для єдиного значення i . Нехай $i = l$ ($1 \leq l \leq m$). Тоді для $\theta_0 = x_l / x_{lk}$ відповідні коефіцієнти виразу (2.16) і компоненти плану X_l перетворюються в нуль. Підставивши значення θ_0 в план X_l , дістанемо лінійну комбінацію

$$x'_l A_l + \dots + x'_{l-l} A_{l-l} + x'_{l+l} A_{l+l} + \dots + x'_m A_m + x'_k A_k = A_0,$$

і відповідний їй опорний план

$$X_l = (x'_l, \dots, x'_{l-l}, 0, x'_{l+l}, \dots, x'_m, 0, \dots, x'_k, \dots, 0),$$

де

$$\begin{cases} x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, & i \neq l, \\ x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}}, & i = l. \end{cases} \quad (2.20)$$

План X_l надає лінійній функції F значення $f_0 - \theta_0(f_k - c_k)$.

Отже, дістали новий опорний план, базис якого складається з векторів $A_1, A_2, \dots, A_{l-1}, A_{l+1}, \dots, A_m, A_k$. Новий план X_l надає лінійній функції F значення $F(X_l) = f_0 - \theta_0(f_k - c_k)$, яке буде менше від $F(X_0)$, якщо $f_k - c_k > 0$. Величина різниці $f_k - c_k$ називається *оцінкою плану*. Якщо для деякого вектора A_k оцінка плану $f_k - c_k > 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна побудувати новий план X_l такий, що $F(X_l) < F(X_0)$.

План X_l побудовано завдяки заміні вектора з початкового базису новим вектором. Критерій заміни векторів сформулюємо таким чином:

- у новий базис вводять вектор A_k , для якого оцінка плану додатна;
- із старого базису виводять той вектор A_i , для якого відношення x_i / x_{ik} з додатними x_{ik} набуває найменшого значення.

Процес заміни векторів продовжують доти, поки всі оцінки плану не стануть від'ємними або нулями, або для деякої оцінки $f_j - c_j > 0$ усі x_{ij} стануть недодатними, що означає, що побудований план є оптимальним.

Якщо на деякому кроці заміни для будь-якого j оцінка $f_j - c_j > 0$ і усі $x_{ij} \leq 0$, то це означає, що лінійна функція не обмежена знизу на багатокутнику розв'язків і її значення може бути як завгодно малим. Зазначимо, що коли є кілька додатних оцінок плану, то вибирають найбільшу з них і той вектор, який відповідає цій найбільшій оцінці, вводять у новий базис.

Якщо є кілька однакових найбільших оцінок, то можна вводити в новий базис будь-який з векторів, що відповідає цим найбільшим оцінкам. Якщо для деякого вектора A_j з додатною оцінкою плану є кілька однакових найменших відношень x_i / x_{ij} , то з базису можна вивести будь-який з відповідних векторів, однак, при цьому може виникнути явище зациклювання.

Нагадаємо, що компоненти нового плану можна обчислити за формулами (2.20). Для перевірки побудованого плану на оптимальність треба знайти компоненти усіх векторів A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) у новому базисі. Їх можна обчислити за формулами:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} a_{lj}, \quad i \neq l, \quad (2.21)$$

$$a'_{ij} = a_{ij} / a_{lk}, \quad i = l. \quad (2.22)$$

Таким чином, маючи компоненти усіх векторів системи обмежень у новому базисі і обчисливши оцінки плану, можна перевірити побудований план на оптимальність. Проілюструємо сказане на прикладі.

Приклад 2.6. Знайти мінімум функції

$$F = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4$$

за такими обмеженнями:

$$\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 + x_3 = 70, \\ 2.5x_1 + 8x_2 + x_4 = 45, \\ x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Розв'язання. Відповідно загальним позначенням маємо

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4), C = (2; 3; 1; 4),$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 70 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Система обмежень містить два одиничні лінійно незалежні вектори A_3 і A_4 , які утворюють базис двовимірного векторного простору. Тоді вектори A_j ($j = 1, 2, \dots, 4$) описуються через базисні

$$\begin{aligned} A_0 &= x_3 A_3 + x_4 A_4 = 70A_3 + 45A_4, \\ A_1 &= x_{31} A_3 + x_{41} A_4 = 4A_3 + 2.5A_4, \\ A_2 &= x_{32} A_3 + x_{42} A_4 = 11A_3 + 8A_4, \\ A_3 &= x_{33} A_3 + x_{43} A_4 = 1 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4, \\ A_4 &= x_{34} A_3 + x_{44} A_4 = 0 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4. \end{aligned}$$

Поклавши у системі обмежень $x_1 = x_2 = 0$, дістанемо початковий опорний план $X_0 = (0, 0, 70, 45)$. Значення цільової функції F дорівнює $F(X_0) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 70 + 4 \cdot 45 = 250$. Знайдемо оцінки початкового опорного плану. Для цього обчислимо значення f_j ($j = 1, \dots, 4$) за формулою (2.13) як суму добутків компонент вектора A_j на компоненти вектора C , які відповідають базисним векторам

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2.5 = 14; \quad f_2 = 1 \cdot 11 + 4 \cdot 8 = 43; \\ f_3 &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1; \quad f_4 = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Тоді оцінки плану визначаються як $f_1 - c_1 = 12$, $f_2 - c_2 = 40$, $f_3 - c_3 = 0$, $f_4 - c_4 = 0$. Серед них є дві додатні. Більшою є оцінка $f_2 - c_2$, що відповідає вектору A_2 . Отже, його вводимо в базис.

Щоб визначити, який з векторів A_3 , A_4 треба вивести з базису, обчислимо відношення x_i / x_{i2} ($i = 3, 4$) для додатних x_{i2} , тобто поділимо компоненти вектора A_0 на відповідні додатні компоненти вектора A_2 : $x_3 / x_{32} = 70/11$, $x_4 / x_{42} = 45/8$. Меншим з обчислених відношень є відношення x_4 / x_{42} , яке відповідає вектору A_4 . Таким чином, замість вектора A_4

як базис вводимо вектор A_2 . Новий базис утворюють вектори A_2 і A_3 . У новому базисі вектори A_j ($j = 0, 1, \dots, 4$) мають такі вирази:

$$\begin{aligned} A_0 &= x'_{20}A_2 + x'_{30}A_3, \\ A_1 &= x'_{21}A_2 + x'_{31}A_3, \\ A_2 &= x'_{22}A_2 + x'_{32}A_3 = A_2 + 0 \cdot A_3, \\ A_3 &= x'_{23}A_2 + x'_{33}A_3 = A_3 + 0 \cdot A_2, \\ A_4 &= x'_{24}A_2 + x'_{34}A_3, \end{aligned}$$

де x'_i обчислюються за формулами (2.20), а x'_{ij} - згідно з формулами (2.21) і (2.22). Новий опорний план X_I , який визначається базисними векторами A_1 і A_2 , має вигляд $X_I = (0, x'_{21}, x'_{31}, 0)$. Обчислимо його компоненти: $x'_{21} = x_4/x_{42} = 45/8$, $x'_{31} = x_3 - (x_4/x_{42})x_{32} = 70 - (45/8) \cdot 11 = 65/8$.

Отже,

$$X_I = \left(0; \frac{45}{8}; \frac{65}{8}, 0\right), \text{ а } F(X_I) = c_2 x'_{21} + c_3 x'_{31} = \frac{3 \cdot 45}{8} + \frac{65}{8} = 25.$$

Обчислимо тепер компоненти векторів A_1 і A_4 у новому базисі:

$$\begin{aligned} x'_{21} &= \frac{x_{41}}{x_{42}} = \frac{5}{16}, \quad x'_{31} = x_{31} - \frac{x_{41}}{x_{42}}x_{32} = 4 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 11 = \frac{1}{16}, \\ x'_{24} &= \frac{x_{44}}{x_{42}} = \frac{1}{8}, \quad x'_{34} = x_{34} - \frac{x_{44}}{x_{42}}x_{32} = -\frac{1}{8} \cdot 11 = -\frac{11}{8}. \end{aligned}$$

Тепер знаходимо значення f_j ($j = 1, 2, 3, 4$):

$$f_1 = \frac{3 \cdot 5}{16} + \frac{1}{16} = 1, \quad f_2 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3,$$

$$f_3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 1; \quad f_4 = -\frac{11}{8} + \frac{3}{8} = -1.$$

Нарешті, визначимо оцінку плану X_I :

$$f_1 - c_1 = 1 - 2 = -1, \quad f_2 - c_2 = 0, \quad f_3 - c_3 = 0, \quad f_4 - c_4 = -5.$$

Усі оцінки опорного плану X_I недодатні. Це означає що побудований план є оптимальним, тобто мінімум функції $F_{min} = 25$ досягається за планом

$$X = \left(0; \frac{45}{8}; \frac{65}{8}; 0\right).$$

2.6 Застосування симплекс-таблиць

Розглянемо задачу лінійного програмування на знаходження мінімуму лінійної функції $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ за системою обмежень

$$(2.23)$$

де

$$A_1 = (1, 0, \dots, 0), A_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, A_m = (0, 0, \dots, 1),$$

$$A_{m+1} = (a_{1,m+1}, a_{2,m+1}, \dots, a_{m,m+1}),$$

$$A_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}),$$

Оскільки базис системи (2.23) – одиничний, то коефіцієнтами у виразі вектора через базисні будуть його компоненти, тобто $x_{ij} = a_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Обчислення наступного опорного плану та перевірку його оптимальності зручно виконувати, записавши умову задачі і дані, знайдені після побудови початкового опорного плану у симплексну таблицю. У першому її стовпці записано номери рядків таблиці. Стовпець базису містить базисні вектори. У стовпці C базису записано коефіцієнти даної лінійної функції, які відповідають базисним векторам. У стовпці A_0 – початковий опорний план. У цьому самому стовпці в результаті обчислень знаходять оптимальний план.

Стовпці A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) заповнено коефіцієнтами вектора A_j через базисні вектори. У $(m+1)$ -му рядку стовпця A_0 записано значення лінійної функції $F(X_0)$, якого вона набуває при початковому опорному плані, а в стовпцях A_j – значення оцінок $f_j - c_j$. Оцінки можна обчислити, якщо від добутків елементів стовпця A_j на відповідні елементи стовпця C базису відняти відповідні коефіцієнти c_j . Далі обчислення симплекс-методом слід здійснювати за таким алгоритмом.

1. Розглянути оцінку плану $(m+1)$ -го рядка. Якщо всі оцінки недодатні, то опорний план X_0 оптимальний і мінімум лінійної функції дорівнює $F(X_0)$. Якщо серед оцінок є хоча б одна додатна, то перейти до п.2.

- 47

розв'язків не обмежена знизу і задача не має оптимального розв'язку. Якщо в кожному стовпці A_j з додатними оцінками плану є хоча б один додатний коефіцієнт, то слід перейти до п.3.

Коментар. Якщо у кожному стовпці A_j , що відповідають додатним оцінкам плану, є додатні коефіцієнти, то план X_0 неоптимальний і можна побудувати новий опорний план, який надасть лінійній функції значення, менше від попереднього. Задача полягає в тому, щоб один з базисних векторів замінити новим. Вектор, який вводять у базис, вибирають в п.3, а вектор, який виводять з базису – в п.5.

3. Вибрати вектор з найбільшою додатною оцінкою. Нехай це буде вектор A_k . Перейти до п.4.

4. Обчислити відношення елементів стовпця A_0 до відповідних додатних елементів стовпця A_k , результати записати у відповідних рядках стовпця θ і перейти до п.5.

5. Серед векторів базису вибрати той, який відповідає найменшому з відношень, обчислених у п.4. Нехай це буде вектор A_l . Перейти до п.6.

Коментар. Елемент x_{lk} називається головним, рядок і стовпець, на перетині яких він міститься, називаються головними. Після визначення ведучого елемента заповнюють нову симплексну таблицю. Перші три стовпці нової таблиці відрізнятимуться від старої тільки рядком з номером l . У ньому замість елементів l, A_b, c_i будуть записані елементи l, A_k, c_k . Інші клітинки нової таблиці заповнюють згідно з пп.6 і 7.

6. Поділити елементи l -го рядка, які відповідають векторам A_j ($j = 1, 2, \dots, n$), на головний елемент і результати записати у відповідні клітинки l -го рядка нової таблиці. Перейти до п.7.

7. Для знаходження елементів i -го ($i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m+1$) рядка нової таблиці треба від елементів i -го рядка старої таблиці відняти відповідні елементи l -го рядка нової таблиці, помножені на x_{ik} ($i \neq l$). Після заповнення нової таблиці перейти до п.1.

Відзначимо, що коли у таблиці є кілька додатних оцінок плану, то під час обчислення у базис вводять вектор, якому відповідає максимальна оцінка. Завдяки такому вибору вектора можна досягти оптимального плану за мінімум ітерацій. Якщо ж є кілька рівних найбільших значень $\theta_{0j}(f_j - c_j)$, то з відповідних їм векторів вибирають той, якому відповідає $\min c_j$.

Якщо серед оцінок оптимального плану нульовими є тільки оцінки, які відповідають базисним векторам, то це означає, що оптимальний план єдиний. Якщо нульовій оцінці плану відповідає вектор, який не входить у базис, то оптимальний план не єдиний.

Задачу знаходження максимального значення лінійної функції можна розв'язати, не зводячи її до задачі мінімізації. План задачі знаходження максимуму буде оптимальним тільки тоді, коли його оцінки будуть невід'ємними. Якщо ж умова оптимальності не виконується, то під час обчи-

слень в базис вводять вектор, якому відповідає $\min[\theta_{0j}(f_j - c_j)]$, де мінімум береться серед тих j , для яких $f_j - c_j < 0$. Якщо мінімальних оцінок кілька, то в базис вводять вектор, якому відповідає $\min c_j$.

Приклад 2.6. Знайти мінімум функції $F=x_1+x_2+x_3$ за обмежень:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, 6). \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему обмежень у векторному вигляді

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_6 A_6 = A_0,$$

де $A_1 = (1, 0, 0)$; $A_2 = (0, 1, 0)$; $A_3 = (0, 0, 1)$; $A_4 = (-1, 2, 2)$; $A_5 = (0, -3, -5)$; $A_6 = (-2, 1, 6)$; $A_0 = (5, 3, 5)$.

Дана система обмежень у явному вигляді містить одиничний базис A_1, A_2, A_3 . Тому змінні x_1, x_2, x_3 - базисні, а x_4, x_5, x_6 - вільні змінні. Поклавши $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, знайдемо початковий опорний план $X_0 = (x_1=0; x_2=0; x_3=0; x_4=0; x_5=0; x_6=0)$, якому відповідає комбінація $x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = A_0$ і значення функції $F(X_0) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 13$.

Для перевірки плану X_0 на оптимальність заповнимо першу симплексну таблицю (табл. 2.4) і обчислимо значення оцінок:

$$\begin{aligned} f_4 - c_4 &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 0 = 3; \\ f_5 - c_5 &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-5) - 0 = -8; \\ f_6 - c_6 &= 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 6 - 0 = 5. \end{aligned}$$

Для базисних векторів значення оцінок нульові. Серед обчислених оцінок є дві додатні. Більша з них $f_6 - c_6 = 5$ відповідає вектору A_6 , який і введемо в базис. Для визначення вектора, який треба вивести з базису, обчислимо $\theta_{06} = \min\left(\frac{3}{1}, \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6}$. Мінімальне відношення відповідає вектору A_3

базису. Отже, його треба замінити вектором A_6 . Головним елементом у першій симплексній таблиці є число 6, яке стоїть на перетині третього рядка і стовпця A_6 . Виконаємо одну ітерацію симплексних перетворень і заповнимо другу симплекс-таблицю. Нові елементи головного рядка знайдемо, поділивши елементи ведучого рядка початкової симплекс-таблиці на головний елемент (число 6). За допомогою обчисленого рядка знайдемо елементи інших рядків другої таблиці методом симплексних перетворень: помножимо його елементи на 2 і додамо до відповідних елементів першого

рядка початкової симплекс-таблиці; відніmemo його елементи від відповідних елементів другого рядка; помножимо його на мінус 5 і додамо до четвертого рядка. В результаті дістанемо заповнену другу таблицю.

Таблиця 2.4

Ітерація	Рядок	Базис	С базису	A_0	$c_1=1$	$c_2=1$	$c_3=1$	$c_4=0$	$c_5=0$	$c_6=0$	Σ	θ
					A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	1	A_1	1	5	1	0	0	-1	0	-2	3	
	2	A_2	1	3	0	1	0	2	-3	1	4	3
	3	A_3	1	5	0	0	1	2	-5	6	9	5/6
	4	$f_i - c_i$		13	0	0	0	3	-8	5	13	
2	1	A_1	1	20/3	1	0	1/3	-1/3	-5/33	0	6	
	2	A_2	1	13/10	0	1	-1/6	5/3	-8/6	0	5/2	13/10
	3	A_3	0	5/6	0	0	1/6	1/3	-5/6	1	3/2	5/2
	4	$f_i - c_i$		53/6	0	0	-5/6	4/3	-38/6	0	11/2	
3	1	A_1	1	71/10	1	1/5	3/10	0	-21/10	0	13/2	
	2	A_2	0	13/10	0	3/5	-1/10	1	-13/10	0	3/2	
	3	A_3	0	2/5	0	-1/5	1/5	0	-2/5	1	1	
	4	$f_i - c_i$		71/10	0	-4/5	-7/10	0	-21/10	0	7/2	

Для базисних векторів значення оцінок нульові. Серед обчислених оцінок є дві додатні. Більша з них $f_6 - c_6 = 5$ відповідає вектору A_6 , який і введемо в базис. Для визначення вектора, який треба вивести з базису, обчислимо $\theta_{06} = \min\left(\frac{3}{1}, \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6}$. Мінімальне відношення відповідає вектору A_3

базису. Отже, його треба замінити вектором A_6 . Головним елементом у першій симплексній таблиці є число 6, яке стоїть на перетині третього рядка і стовпця A_6 . Виконаємо одну ітерацію симплексних перетворень і заповнимо другу симплекс-таблицю. Нові елементи головного рядка знайдемо, поділивши елементи головного рядка початкової симплекс-таблиці на головний елемент (число 6). За допомогою обчисленого рядка знайдемо елементи інших рядків другої таблиці методом симплексних перетворень: помножимо його елементи на 2 і додамо до відповідних елементів першого рядка початкової симплекс-таблиці; відніmemo його елементи від відповідних елементів другого рядка; помножимо його на мінус 5 і додамо до четвертого рядка. В результаті дістанемо заповнену другу таблицю.

Правильність проведених обчислень контролюємо за допомогою стовпця Σ , кожний елемент якого обчислюється двома способами: за допомогою симплексних перетворень та додаванням елементів відповідних рядків. У другій симплексній таблиці маємо новий опорний план

$X_1 = (20/3, 13/6, 0, 0, 0, 5/6)$, якому відповідає значення лінійної функції $F(X_1) = 53/6 < F(X_0) = 13$. У четвертому рядку таблиці маємо додатну оцінку $f_4 - c_4 = 4/3$.

Отже, вектор A_4 вводимо до базису. Знайшовши $\theta_{04} = \min\left(\frac{13}{10}; \frac{5}{2}\right) = \frac{13}{10}$,

побачимо, що вектор A_2 треба вивести із базису. Головний елемент стоїть на перетині другого рядка і стовпця A_4 . Виконаємо один крок симплексних перетворень. У результаті дістанемо план $X_2 = (71/10, 0, 0, 13/10, 2/5)$. У четвертому рядку останньої симплекс-таблиці усі оцінки не додатні. Отже, план X_2 – оптимальний. Він надав лінійній функції значення $F(X_2) = 71/10$. На основі оцінок цього плану робимо висновок, що оптимальний план є єдиним, оскільки нульові оцінки відповідають тільки базисним векторам.

Приклад 2.7. Знайти максимум лінійної функції $F = 40x_1 + 30x_2$ за обмежень

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 24, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо задачу в канонічному вигляді, додавши до лівої частини кожної з нерівностей системи обмежень по одній додатковій невід’ємній змінній. Як результат дістанемо

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 30, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 24, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_5 = 20, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, 5). \end{cases}$$

Запишемо систему у векторній формі

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_5 A_5 = A_0,$$

де $A_1 = (5, 2, 4)$; $A_2 = (6, 6, 2)$; $A_3 = (1, 0, 0)$; $A_4 = (0, 1, 0)$; $A_5 = (0, 0, 1)$; $A_0 = (30, 24, 20)$. Одиничні вектори A_3, A_4, A_5 утворюють базис і задають опорний план $X_0 = (0; 0; 30; 24; 20)$.

Значення лінійної функції $F(X_0) = 40 \cdot 0 + 30 \cdot 0 = 0$. Для перевірки плану X_0 на оптимальність складаємо симплекс-таблицю (табл. 2.5). Обчислимо значення оцінок плану $f_1 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 0$, $f_2 = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 2 = 0$, $f_1 - c_1 = -40$, $f_2 - c_2 = -30$.

Таблиця 2.5

Ітерація	Рядок	Базис	С базису		$c_1 = 1$	$c_2 = 1$	$c_3 = 1$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$		
				A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Σ	θ
1	1	A_3	0	30	5	6	1	0	0	42	6
	2	A_4	0	24	2	6	0	1	0	33	12
	3	A_5	0	20	4	2	0	0	1	27	5
	4	$f_j - c_j$		0	-40	-30	0	0	0	-70	
2	1	A_3	0	5	0	7/2	1	0	-5/4	33/4	10/7
	2	A_4	0	14	0	5	0	1	-1/2	39/2	14/5
	3	A_1	40	5	1	1/2	0	0	1/4	27/4	10
	4	$f_j - c_j$		200	0	-10	0	0	10	200	
3	1	A_3	30	10/7	0	1	2/7	0	-5/14	33/14	
	2	A_4	0	48/7	0	0	-10/7	1	9/7	54/7	
	3	A_1	40	30/7	1	0	-1/7	0	3/7	39/7	
	4	$f_j - c_j$		1500/7	0	0	20/7	0	45/7	1565/7	

Для векторів базису оцінки дорівнюють нулю. Серед обчислених оцінок дві від'ємні: $f_1 - c_1 = -40$, $f_2 - c_2 = -30$. Отже, опорний план X_0 не є оптимальним. Найменша оцінка відповідає вектору A_1 , який введемо в базис. Визначимо вектор, виключений з базису. Для цього обчислимо $\theta_{01} = \min(30/5, 24/2, 20/4)$. Найменше з відношень відповідає вектору A_5 , тому його замінюємо вектором A_1 . Головним елементом є число 4, яке стоїть на перетині третього рядка і стовпця A_1 . Складаємо другу симплекс-таблицю. Обчислимо нові значення головного рядка. Для цього елементи головного рядка поділимо на 4 і запишемо в третьому рядку другої таблиці. Тепер за допомогою цього рядка виконаємо одну ітерацію симплексних перетворень, тобто помножимо його елементи на 5 і віднімемо від першого рядка першої ітерації, потім помножимо його елементи на 2 і віднімемо від другого рядка першої ітерації, помножимо його на 40 і додамо до четвертого рядка першої ітерації. Правильність проведених обчислень контролюємо за допомогою стовпця Σ , кожний елемент якого обчислюється двома способами: за допомогою симплексних перетворень і підсумовуванням елементів відповідних рядків.

Після завершення другої ітерації дістали план $X_1 = (5; 0; 5; 14; 0)$, якому відповідає значення лінійної функції $F(X_1) = 200$. У четвертому рядку $f_2 - c_2 = -10 < 0$, тому план X_1 не є оптимальним і вектор A_2 слід ввести в базис. Обчислимо $\theta_{02} = \min(10/7, 14/5, 10) = 10/7$. Число 7/2 стоїть на перетині першого рядка і стовпця A_2 , є головним. Вектор A_3 вилючаємо з базису. Виконавши третю ітерацію симплексних перетворень, дістанемо

нову таблицю. Оскільки в четвертому рядку всі оцінки плану $X_2 = (30/7; 10/7; 0; 48/7; 0)$ невід'ємні, то опорний план X_2 - оптимальний, йому відповідає значення лінійної функції $F(X_2) = 1500/7$.

Зазначимо, що кожне число, записане в таблиці, має не тільки математичний, а й певний економічний зміст. Так, у четвертому рядку першої ітерації симплексної таблиці 5 є дві від'ємні оцінки: $f_1 - c_1 = -40$, $f_2 - c_2 = -30$. Число 40 означає, що від включення до плану виробництва одиниці продукції P_1 прибуток збільшиться на 40 у.о. Якщо включити до плану виробництва одиницю продукції P_2 , то прибуток збільшиться на 30 у.о. Тому з економічного погляду доцільніше включати до плану продукцію P_1 . Цей висновок цілком узгоджується із формальним критерієм оптимальності опорного плану симплексного методу, оскільки найменша оцінка відповідає вектору A_1 . Число $\theta_{01} = 5$ означає, що максимальна кількість продукції, яку можна включити до плану виробництва, дорівнює п'яти одиницям. При цьому сировину третього виду буде використано повністю.

Після завершення другої ітерації у колонці A_0 дістали опорний план $X_1 = (5; 0; 5; 14; 0)$. Згідно з цим планом виробляється 5 одиниць продукції P_1 і залишається невикористаною 5 одиниць сировини S_1 і 14 одиниць сировини S_2 . Прибуток від реалізації виробленої продукції становить 200 у.о. В результаті симплексних перетворень змінилася не тільки колонка A_0 , а й інші колонки таблиці. Їх економічний зміст став ще складнішим. Розглянемо, наприклад, колонку A_2 . Число S в третьому рядку показує, на скільки одиниць треба зменшити виробництво продукції P_1 , якщо запланувати випуск продукції P_2 . Числа $7/2$ і 5 у першому і другому рядках колонки A_2 означають, скільки треба витратити одиниць сировини S_1 і S_2 , відповідно, якщо запланувати виготовлення одиниці продукції P_2 . Число 10 у четвертому рядку означає, що прибуток, який буде одержано від реалізації одиниці продукції P_2 , становитиме 10 у.о. Інакше кажучи, включення до плану виробництва одиниці продукції P_2 зумовлює зменшення випуску продукції P_1 на S одиниць і додаткові затрати $7/2$ одиниць сировини S_1 і 5 одиниць сировини S_2 , а загальний прибуток від реалізації продукції відповідно до нового плану зросте на 10 у.о. Дещо інший економічний зміст мають числа, записані в колонці A_5 . Число $1/4$ в третьому рядку цієї колонки означає, що збільшення обсягу сировини S_3 на 1 одиницю дасть змогу збільшити випуск продукції P_2 на $1/4$ одиниці. Одночасно треба буде додатково взяти $5/4$ одиниці сировини S_1 і $1/2$ одиниці сировини S_2 . Збільшення випуску продукції P_2 на $1/4$ одиниці забезпечить збільшення прибутку на 10 у.о. З економічного аналізу даних таблиці після другої ітерації випливає, що план X_1 не є оптимальним. Це видно і з четвертого рядка симплекс-таблиці, оскільки у колонці A_2 – від'ємна оцінка плану.

Після третьої ітерації знайшли оптимальний план $X_2 = (30/7, 10/7, 0, 48/7, 0)$ випуску продукції, який включає виробництво $30/7$ одиниць продукції P_1 і $10/7$ одиниць продукції P_2 . При такому плані випуску продукції

буде повністю використано сировину першого і третього видів і залишиться невикористаною 48/7 одиниць сировини другого виду. Прибуток від реалізації запланованої продукції становитиме 1500/7 у.о.

2.7 Метод штучної бази

Для отримання системи в канонічному вигляді, що має допустимий базисний розв'язок, існує також і спеціальний метод. Спочатку задача ЛП зводиться до стандартної форми, у якій усі змінні додатні. Потім для кожного обмеження перевіряється існування відповідної базисної змінної. Якщо її немає, то вводиться нова *штучна* змінна, що відіграє роль базисної для даного обмеження. Після перевірки усіх обмежень отримується система у канонічному вигляді і з'являється можливість заповнити початкову симплексну таблицю. Оскільки введені змінні не мають відношення до суті задачі ЛП у вихідній постановці, то необхідно досягти перетворення в нуль штучних змінних. Це можна зробити за допомогою двохетапного симплекс-методу.

Етап 1. Розглядається штучна цільова функція, що дорівнює сумі штучних змінних, яка мінімізується за допомогою симплекс-методу. Іншими словами, здійснюється виключення штучних змінних. Якщо мінімальне значення допоміжної задачі дорівнює нулю, то всі штучні змінні перетворюються в нуль і отримується допустимий базисний розв'язок початкової задачі. Далі реалізується етап 2. Якщо мінімальне значення допоміжної задачі позитивне, то принаймні одна з штучних змінних також позитивна, що свідчить про суперечливість початкової задачі, і обчислення припиняються.

Етап 2. Допустимий базисний розв'язок, що знайдений на першому етапі, поліпшується щодо цільової функції вихідної задачі на основі симплекс-методу, тобто оптимальна таблиця першого етапу стає початковою таблицею другого і змінюється цільова функція.

Зауваження до симплекс-методу

1. Якщо у головному стовпці немає жодного строго додатного елемента, то задача не має оптимального розв'язку, а цільова функція не обмежена знизу (у задачі на мінімум) або не обмежена зверху (у задачі на максимум).

2. Якщо в останній таблиці оцінка будь-якої небазисної змінної дорівнює нулю, то задача має нескінченну множину оптимальних розв'язків.

3. Послаблені змінні зі знаком « + », що вводяться для канонізації нерівностей можна використовувати як базисні.

4. Допустимий базисний розв'язок, в якому одна або кілька базисних змінних дорівнюють нулю, називається виродженим. Поява такого розв'язку може призвести до зациклення. Для виходу із зациклення під час визначення головного рядка замість елементів слід перебирати елементи

стовпчиків до тих пір поки головний рядок не буде визначений однозначно.

2.8 Двоїсті (спряжені) задачі лінійного програмування

Модель пари двоїстих задач у загальній формі. В загальному випадку для кожної задачі ЛП у загальній формі запису можна поставити у відповідність двоїсту (спряжену) для неї задачу (табл.2.6, 2.7).

Таблиця 2.6

Вихідна задача ЛП	Спряжена задача ЛП
$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, l$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = l + 1$ $x_j \geq 0, j = 1, s, s < n.$	$\sum_{i=1}^m b_i \lambda_i \rightarrow \min,$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i \geq c_j, j = 1, s$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i = c_j, j = s + 1, n$ $\lambda_i \geq 0, i = 1, l.$

Таблиця 2.7

Моделі спряжених задач			
Симетричні моделі		Несиметричні моделі	
Вихідна	Спряжена	Вихідна	Спряжена
$CX \rightarrow \max,$ $AX \leq b,$ $X \geq 0.$	$\lambda b \rightarrow \min,$ $\lambda A \geq C,$ $\lambda \geq 0.$	$CX \rightarrow \max,$ $AX = b,$ $X \geq 0.$	$\lambda b \rightarrow \min,$ $\lambda A \geq C.$
$CX \rightarrow \min,$ $AX \geq b,$ $X \geq 0$	$\lambda b \rightarrow \max,$ $\lambda A \leq C$ $\lambda \geq 0.$	$CX \rightarrow \min$ $AX = b,$ $X \geq 0$	$\lambda b \rightarrow \max,$ $\lambda A \leq C.$

Правила формування двоїстих задач формулюються таким чином.

1. Одна з двох спряжених задач є задачею пошуку максимуму лінійної форми, а друга – мінімуму лінійної форми.

2. Матрицю обмежень спряженої задачі визначають шляхом транспонування матриці вихідної задачі.

3. Коефіцієнти лінійної форми спряженої задачі є вільними членами системи обмежень вихідної задачі.

4. Вільні члени системи обмежень спряженої задачі є коефіцієнтами лінійної форми вихідної задачі.

5. Кожній змінній прямої задачі відповідає одне обмеження спряженої задачі, причому якщо j -а змінна невід'ємна, то j -им обмеженням спря-

женої задачі буде нерівність із знаком $\geq$ (не менше) і навпаки; змінним, які не мають обмеження на знак, відповідають обмеження рівності.

6. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає одна змінна спряженої задачі, причому якщо i -е обмеження нерівністю типу $\leq$ (не більше), то i -а змінна спряженої задачі – невід’ємна; обмеженням у вигляді рівностей відповідають змінні без обмеження на знак.

У загальному випадку розрізняють симетричні і несиметричні двоїсті задачі, відповідні моделі яких наведено у табл. 2.7.

Основні теореми двоїстості. Властивості основної теореми двоїстості можна описати у вигляді таблиці (табл. 2.8).

Таблиця 2.8

Двоїста задача	Пряма задача	
		Немає планів
Має плани	$\max F(x) = \min G(\lambda)$	$\min G(\lambda) \rightarrow -\infty$
Немає планів	$\max F(x) \rightarrow \infty$	Можливо

Друга теорема двоїстості надає властивості оптимальних планів парі спряжених задач (умови доповняльної нежорсткості):

$$\lambda_i^* (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*) = 0, i = 1, m,$$

$$(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i^*) x_j^* = 0, j = 1, n.$$

Розв’язавши одну з пари симетричних задач, можна за значеннями в $(m+1)$ -му рядку кінцевої симплекс-таблиці визначити значення змінних оптимального плану другої задачі. Оптимальні значення змінних двоїстої задачі знаходять із співвідношень: $\lambda_j^* = \Delta_{n+1}^{np}$; $i = 1, m$.

Наприклад, у задачі:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max; \\ x_1 - x_2 &\leq 2; \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6; \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

розв’язок якої наведено у таблиці нижче, з останньої таблиці знаходимо, що $\lambda_1^* = \Delta_{2+1}^{np} = \Delta_3^{np} = 0$, а $\lambda_2^* = \Delta_{2+2}^{np} = \Delta_4^{np} = 4$. Аналогічно з індексного рядка кінцевої таблиці, що відповідає оптимальному плану двоїстої задачі, маємо, що $x_j^* = -\Delta_{m+j}^{nod}$, $j = 1, n$.

Якщо розглядати несиметричні задачі, то співвідношення для визначення змінних оптимального плану двоїстої задачі набуде вигляду $\lambda^* = c^* A_x^{-1}$, де A_x^{-1} – матриця, обернена до матриці векторів останнього

базису. Коли ж вихідна задача зведена до одиничного базису, обчислення оберненої матриці не потрібне, бо A^{-1}_x містить колонки кінцевої таблиці на місці колонок одиничних векторів початкової таблиці.

I	B	C	X	3	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	2	1	-1	1	0
2	P_4	0	6	2	1	0	0
$m+1$		0		-3	-2	0	0
I	B	C	X	3	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	3	2	1	-1	1	0
2	P_4	0	2	0	3	-2	1
$m+1$		6		0	-5	3	0
I	B	C	X	3	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	3	8/3	1	0	1	1/3
2	P_4	2	2/3	0	1	-2/3	1/3
$m+1$		6		0	0	-1/3	5/3
I	B	C	X	3	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	8	3	0	1	1
2	P_4	2	6	2	1	0	2
$m+1$		6		1	0	0	3

Приклад 2.8. Сформулюємо задачу, двоїсту до такої задачі:

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \rightarrow \max;$$

$$2x_1 - x_2 \leq 1;$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \geq 4;$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 0;$$

$$x_1 - x_3 - 2x_5 \geq 3;$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Перепишемо систему обмежень у вигляді

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \rightarrow \max,$$

$$2x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq -4,$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$-x_1 + x_3 - 2x_5 \leq -3,$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Тоді двоїста задача набуде вигляду:

$$\begin{aligned}\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_4 &\rightarrow \min, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 &\geq 1, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -5, \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 &\geq 2, \\ \lambda_2 - \lambda_4 &= -1, \\ \lambda_2 - 2\lambda_4 &= 7, \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_4 &\geq 0.\end{aligned}$$

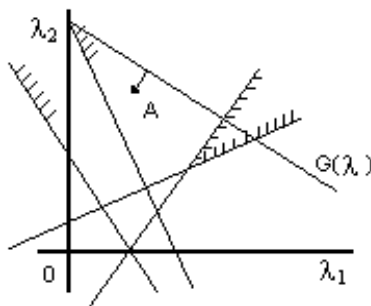
Приклад 2.9. Розв'язати ЗЛП за допомогою геометричної інтерпретації двоїстої задачі:

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 &\rightarrow \max; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 5; \\ x_j \geq 0, j = 1, 4.\end{aligned}$$

Двоїста до неї задача має вигляд:

$$\begin{aligned}3\lambda_1 + 5\lambda_2 &\rightarrow \min; \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &\geq 3; \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 &\geq 4; \\ \lambda_1 - \lambda_2 &\geq; \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &\geq 6,\end{aligned}$$

а її геометрична інтерпретація зображена на рисунку нижче.



Пряма рівняння $G(\lambda)$ досягає найменшого значення в точці A , де $\lambda_1^* = 7/2$, $\lambda_2^* = 5/2$. Тоді $G(\lambda^*) = 23$ унаслідок основної теореми $F(X^*) = 23$.

Знайдемо оптимальний план прямої задачі, розглядаючи умови доповняльної нежорсткості:

$$x_1(3 - 2\lambda_1 - \lambda_2) = C,$$

$$x_2(4 + \lambda_1 - 3\lambda_2) = 0,$$

$$x_3(1 - \lambda_1 + \lambda_2) = 0,$$

$$x_4(6 - 3\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

З оптимального плану спряженої задачі маємо, що в другому та третьому співвідношеннях виконується рівність, тоді $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$, у той час як $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ оскільки в першому та четвертому співвідношеннях рівність не виконується.

З другої групи умов доповняльної нежорсткості маємо

$$\lambda_1(3 - 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4) = 0,$$

$$\lambda_2(5 - x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4) = 0.$$

Оптимальні значення змінних вихідної задачі знайдемо з рівнянь

$$3 + x_2 - x_3 = 0,$$

$$5 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Тобто, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$. Оптимальний план вихідної задачі $X^* = (0, 4, 7, 0)$; $L(X^*) = 23$.

Приклад 2.10. Критерій оптимальності плану ЗЛП. Перевірити, чи буде план $X = (0, 1, 0, 3)$ оптимальним для нижченаведеної задачі ЛП.

$$x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max,$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 1,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 4.$$

Сформулюємо двоїсту задачу:

$$\lambda_1 + \lambda_2 \rightarrow \min,$$

$$3\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1,$$

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 4,$$

$$\lambda_1 \geq 1, \lambda_2 \geq -1,$$

Як наслідок другої теореми двоїстості маємо з умов додатності змінних x_2 та x_4 , що друге та четверте обмеження двоїстої задачі мають виконуватися як рівності, тобто: $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 4$, $\lambda_2 = -1$. Розв'язок цієї системи рівнянь $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Він задовольняє також перше й третє обмеження-нерівності двоїстої задачі. Умови ж другої теореми повністю задовольняються, що свідчить про оптимальність плану X .

3 ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ (Т-ЗАДАЧІ)

3.1 Математична структура Т-задач

Припустимо, що деякий однорідний продукт (вантаж), який зосереджено у m постачальників, по a_i одиниць у кожного ($i = \overline{1, m}$), потрібно перевезти n споживачам у кількості не менше як b_j одиниць кожному ($j = \overline{1, n}$). Відома вартість перевезення одиниці вантажу від i -го постачальника до j -го споживача c_{ij} . Необхідно знайти такий план перевезень продукції від постачальників до споживачів, за яким загальні витрати Z на транспортування були б мінімальними.

Для побудови математичної моделі такої задачі введемо матрицю плану перевезень $X = (x_{ij})$, елементи якої означають обсяг перевезень продукції від i -го постачальника до j -го споживача. Тоді для загальних транспортних витрат для обсягу продукції, що вивозиться від кожного постачальника і для обсягу продукції, яка надходить до кожного із споживачів можна записати такі вирази:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min; & \sum_i x_{ij} &\geq b_j, j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, i = \overline{1, m}; & x_{i,j} &\geq 0, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Наведена система формул описує математичну модель класичної транспортної задачі. Згідно з економічним змістом транспортної задачі значення всіх сталих коефіцієнтів моделі, а саме запаси продукції у постачальників, потреби в продукції кожного споживача і транспортні витрати не можуть бути від'ємними, тобто

$$a_i \geq 0, b_j \geq 0, c_{ij} \geq 0, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}.$$

За такими припущеннями Т-задача завжди має розв'язок за умови, що загальний обсяг продукції у постачальників не менший від загальної потреби споживачів (теорема про розв'язність транспортної задачі):

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j.$$

Транспортна задача називається закритою, коли виконується балансова умова $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ і, у відповідності з вищевказаною теоремою, завжди має розв'язок. В інших випадках транспортну задачу називають відкритою, при цьому можливі такі два випадки.

1. Загальний запас продукції в постачальників перевищує загальні потреби з боку споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_j^n b_j.$$

У даному випадку, якщо ввести до розгляду додаткового $(n+1)$ -го фіктивного споживача з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_j^n b_j$$

одиниць продукції, то відкрита транспортна задача перетвориться на закриту. При цьому питомі вартості перевезень за фіктивними маршрутами вважають такими, що дорівнюють нулю.

2. Загальний запас продукції в постачальників менший від загальних потреб з боку споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_j^n b_j.$$

У таких випадках може виникати інша задача: як оптимальним чином перевезти наявну продукцію (можливо і недостатню для задоволення потреб). Така нова задача може бути розв'язана введенням фіктивного $(m+1)$ постачальника із запасом продукції a_{m+1} . При цьому, питомі вартості перевезень за фіктивними маршрутами вважаються рівними нулю, а обсяги перевезень $x_{m+1,j}$ за цими маршрутами розглядаються для відповідних споживачів як недопостачання продукції через її дефіцит. Умови транспортної задачі, зазвичай, записуються у табличному вигляді, як це показано у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Пункти відправлення (ПВ)	Пункти доставки (ПД)					Запаси a_i
	B_1	...	B_k	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1k} x_{1k}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_l	c_{l1} x_{l1}	...	c_{lk} x_{lk}	...	c_{ln} x_{ln}	a_L
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mk} x_{mk}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби b_j	B_1	...	b_k	...	b_n	a

3.2 Визначення початкового опорного плану Т-задачі

Розв'язання Т-задачі починається з побудови опорного плану. Опорний план містить не більше ніж $m+n-1$ (значення рангу системи обмежень Т-задачі) додатних компонент: не вироджений план містить $m+n-1$, а вироджений план – менше ніж $m+n-1$. Є кілька простих способів знаходження початкового опорного плану Т-задачі, серед яких найпоширенішими є діагональний метод північно-західного кута, метод мінімальної вартості і метод подвійних позначок.

Метод північно-західного кута. Назва методу пов'язана із тим, що на кожному кроці процедури алгоритму першою заповнюється клітинка лівого верхнього кута незаповненої частини таблиці. Алгоритм заповнення може бути описаний таким чином.

1. Знаходимо x_{11} початкового плану, що дорівнює меншому з чисел a_1, b_1 , тобто $x_{11} = \min(a_1, b_1)$, а всі інші елементи першого стовпця (якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$), або першого рядка (якщо $a_1 < b_1$ то $x_{11} = a_1$), або і першого стовпця і першого рядка (якщо $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$) матриці перевезень покладемо такими, що дорівнюють нулю. Визначимо $a^{(1)}_1 = a_1 - x_{11}$, $b^{(1)}_1 = b_1 - x_{11}$.

2. Далі розглянемо незаповнену частину таблиці після k ітерацій, тобто ту частину, що містить ще не визначені елементи матриці перевезень. Нехай її верхній лівий елемент є $x_{\lambda\mu}$ ($\lambda + \mu = k + 2$). Виконаємо $(k+1)$ ітерацію. Повторимо всі кроки першої ітерації, тобто знайдемо

$$x_{\lambda\mu} = \min(a_{\lambda}^{(k)}, b_{\mu}^{(k)}),$$

$$a_{\lambda}^{(k)} = a_{\lambda} - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j},$$

$$b_{\mu}^{(k)} = b_{\mu} - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}.$$

Якщо $a_{\lambda}^{(k)} < b_{\mu}^{(k)}$ то заповнюємо нулями λ -й рядок, починаючи з $(\mu+1)$ -го елемента. Якщо ж $a_{\lambda}^{(k)} > b_{\mu}^{(k)}$ то заповнюємо нулями μ -й стовпець. Коли ж $x_{\lambda\mu} = a_{\lambda}^{(k)} = b_{\mu}^{(k)}$, то нулями заповнюються як λ -й рядок, так і μ -й стовпець. Обчислюємо $a_{\lambda}^{(k+1)} = a_{\lambda}^k - x_{\lambda\mu}$, $b_{\mu}^{(k+1)} = b_{\mu}^k - x_{\lambda\mu}$. На цьому $(k+1)$ ітерація закінчується.

Через обмеженість числа елементів a_i , $i=1, m$ та b_j , $j=1, n$ описаний алгоритм скінченний. Так, наприклад, для задачі, вихідні дані якої задані в табл. 3.2, початковий опорний план, побудований методом північно-західного кута, ілюструється у табл. 3.3.

Метод мінімальної вартості. Метод полягає в тому, що на першому кроці всі клітинки транспортної таблиці, де наведені елементи матриці вартостей, нумерують, починаючи з найменшого в порядку їх зростання (цифри в дужках). На другому кроці заповнюємо клітинку перевезеннями,

починаючи з клітинки з найменшою цифрою, потім заповнюємо клітинку, яка має найменший номер після другого кроку і т.д. При цьому для відповідних вибраних клітинок правила заповнення рядків і стовпців аналогічні методу північно-західного кута.

Таблиця 3.2

ПВ	ПД				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	4	2	3	50
A_2	1	5	6	2	50
A_3	3	8	7	6	100
b_j	90	80	20	10	200

Таблиця 3.3

ПВ	ПД				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	50				50
A_2	40	10			50
A_3		70	20	10	100
b_j	90	80	20	10	200

Опорний план Т-задачі для попереднього прикладу, і який побудовано методом мінімальної вартості, наведено у табл. 3.4.

Таблиця 3.4

ПВ	ПД				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	(10)7	(6)4 20	(3)2 20	(4)3 10	50
A_2	(1)1 50	(7)5	(8)6	(2)2	50
A_3	(5)3 40	(12)8 60	(11)7	(9)6	100
b_j	90	80	20	10	200

Метод подвійних позначок. Суть методу полягає в тому, що на першому кроці в кожному рядку транспортної таблиці позначають зірочкою найменший елемент c_{ij} , а потім позначають зірочкою найменший елемент у кожному стовпці цієї таблиці. Таким чином, маємо клітинки з двома позначками, з однією позначкою та без позначок.

На другому кроці знаходимо перевезення для однієї із клітинок з двома позначками, потім, якщо їх вже не вистачає, для клітинок із однією позначкою, а на останніх кроках для клітинок, які мають найменшу вартість.

У табл. 3.5 наведено опорний план, що побудований за вищенаведе-

ним методом подвійних позначок.

Таблиця 3.5

ПВ	ПД				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	* 4 30	** 2 20	3	50
A_2	** 1 50	5	6	* 2	50
A_3	* 3 40	8 50	7	6 10	100
b_j	90	80	20	10	200

Слід відзначити, що методи мінімальної вартості та подвійних позначок є модифікацією діагонального методу і в більшості випадків дають ближчий до оптимального початковий план.

3.3 Властивості опорних планів Т-задач

Ланцюгом називають будь-яку послідовність клітинок таблиці Т-задачі, якщо кожна пара клітинок міститься або в одному рядку, або ж в одному стовпці таблиці так, що жодні три чи більше клітинок послідовності не є клітинками одного рядка або одного стовпця. Ланцюг, перша та остання клітинки якого знаходяться в одному рядку або в одному стовпці, утворюють цикл.

Сукупність усіх базисних клітинок та однієї вільної клітинки транспортної задачі завжди утворює цикл. Позначимо приєднану небазисну клітинку знаком «+», наступну в утвореному циклі (базисну клітинку) – знаком «-», третю – знаком «+» тощо. Оскільки число клітинок циклу парне, то він розпадається на два півцикли з однаковою кількістю клітинок – від’ємний півцикл, утворений клітинками із знаком «-», і додатний, утворений клітинками із знаком «+».

Серед базисних клітинок від’ємного півциклу виберемо ту, яка містить найменше перевезення θ . Якщо тепер змінити величини перевезень у клітинках циклу на цю величину (в усіх додатних клітинках перевезення збільшити перевезення на значення θ , а в усіх від’ємних клітинках зменшити перевезення на значення θ), то у результаті дістанемо новий опорний план. Йому буде відповідати і нове значення загальної вартості перевезень.

Метод викреслювання. Метод застосовується під час побудови циклу. На кожному кроці методу в транспортній таблиці викреслюється або рядок, або стовпець, які в подальшому ігноруються. Викреслювати належить рядки (стовпці), які мають тільки одну базисну клітинку. Невикрес-

лені клітинки транспортної таблиці утворюють цикл.

3.4 Розв'язання Т-задач методом потенціалів

Метод потенціалів ґрунтується на розв'язанні двоїстої до транспортної задачі, яка має вигляд

$$\sum_{i=1}^m a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j \rightarrow \max$$

для системи обмежень

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}, \quad i=1, m, \quad j=1, n,$$

де α_i – потенціали постачальників, β_j – потенціали споживачів.

Таким чином, для того щоб деякий опорний план транспортної задачі був оптимальним, необхідна і достатня його потенціальність, тобто, щоб він задовольняв такі умови.

1. Для базисних клітинок, де $x_{ij} > 0$, $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$.
2. Для небазисних клітинок, де $x_{ij} = 0$, $\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}$.

При цьому, якою б не була система чисел-потенціалів (α_i, β_j) , що задовольняє умови потенціальності плану, для кожної небазисної клітинки вартість циклу визначається рівнянням

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j) = c_{ij} - \bar{c}_{ij}.$$

Алгоритм методу потенціалів

1. Знаходимо опорний план транспортної задачі, який би задовольняв першу умову потенціальності плану для базисних клітинок, загальна кількість яких $m+n-1$, тобто $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$.

2. Утворена система рівнянь містить $m+n$ невідомих α_i , $i = \overline{1, m}$, та β_j , $j = \overline{1, n}$. Оскільки рівнянь на одне менше ніж змінних, то значення однієї із незалежних змінних обираємо довільно (наприклад, беремо, що воно дорівнює нулю) і знаходимо розв'язок системи.

3. Перевіряємо, чи задовольняє знайдена система потенціалів другу умову потенціальності для усіх небазисних клітинок. Якщо так, то план, що розглядається, є потенціальним, отже, оптимальний план знайдено.

4. Якщо існують небазисні клітинки, де умови потенціальності порушуються, то ознакою змінної, яку слід ввести в базис, є максимум порушення умови потенціальності (за модулем). Тобто, в базис вводиться та клітинка, де виконується $\min(-\gamma_{ij}) = \min(c_{ij} - \bar{c}_{ij})$. Ця клітинка разом з базисними утворює цикл, за яким треба перемістити найменше перевезення θ з від'ємного півциклу.

5. Для нового опорного плану знову проводимо перевірку на потенціальність згідно із кроками 1-3.

6. Кроки 1-5 повторюємо поки не дістанемо оптимальний план.

Зауваження 3.1. Розв'язок транспортної задачі при цілочислових значеннях запасів і потреб завжди буде цілочисловим.

Зауваження 3.2. Скінченність алгоритму методу потенціалів випливає із його монотонності і скінченності числа опорних планів задачі.

Зауваження 3.3. Якщо маємо відкриту транспортну задачу, то для її розв'язування існує метод фіктивних пунктів, за допомогою якого задача формально зводиться до закритої, що дає змогу розв'язати її методом потенціалів.

Для задачі з перевищенням суми запасів над сумою потреб вводиться фіктивний пункт доставки $B_{\phi}=B_{n+1}$ з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j,$$

при цьому усі величини $c_{i,n+1}=0$, $i = \overline{1, m}$.

Якщо є задача з перевищенням потреб над запасами, то аналогічно, вводячи фіктивний пункт відправлення $A_{\phi}=A_{m+1}$ з фіктивним запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i,$$

і, поклавши $c_{m+1,j}=0$, $j = \overline{1, n}$ приходимо до закритої транспортної задачі.

Зауваження 3.4. Якщо маємо вироджений опорний план, то для розв'язування транспортної задачі методом потенціалів слід деякі вільні клітинки таблиці вважати за базиси, щоб загальна кількість базисних клітинок була $m+n-1$. Для цього вводяться в ці клітинки значення перевезень $\eta, 2\eta, \dots$, де $\eta = 0$ в оптимальному плані.

Зауваження 3.5. Для кожної небазисної клітинки транспортної таблиці завжди існує цикл (тільки один), одна клітинка якого небазисна, а всі інші – базисні.

Зауваження 3.6. Якщо в кінцевій таблиці транспортної задачі можна знайти небазисну клітинку, ціна циклу для якої дорівнює нулю, то це свідчить про те, що транспортна задача має ще один оптимальний розв'язок з тією самою загальною вартістю перевезень. Формули за якими знаходимо новий план, як і раніше, мають вигляд:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \Theta & \text{- для клітинок від'ємного півциклу;} \\ x_{ij} + \Theta & \text{- для клітинок додатного півциклу;} \\ x_{ij} & \text{- для клітинок, які не входять у цикл.} \end{cases}$$

Приклад 3.1. Знайти методом потенціалів оптимальний план перевезень для транспортної задачі, початковий опорний план якої, поєднаний з матрицею вартостей перевезень та запасів і потреб, наведено в табл. 3.5. Складемо систему рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(0)} + \beta_2^{(0)} &= 4, & \alpha_1^{(0)} + \beta_3^{(0)} &= 2, \\ \alpha_2^{(0)} + \beta_1^{(0)} &= 1, & \alpha_3^{(0)} + \beta_1^{(0)} &= 3, \\ \alpha_3^{(0)} + \beta_2^{(0)} &= 8, & \alpha_3^{(0)} + \beta_4^{(0)} &= 6. \end{aligned}$$

Поклавши $\alpha_3^{(0)} = 0$, дістанемо розв'язок:

$$\alpha_1^{(0)} = -4, \alpha_2^{(0)} = -2, \beta_1^{(0)} = 3, \beta_2^{(0)} = 8, \beta_3^{(0)} = 6, \beta_4^{(0)} = 6.$$

Перевіряємо, чи задовольняє знайдений розв'язок умови потенціальності для небазисних клітинок таблиці. Для цього порівнюємо відповідні суми потенціалів з елементами матриці вартостей перевезень:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(0)} + \beta_1^{(0)} &= -1 < 7, & \alpha_2^{(0)} + \beta_3^{(0)} &= 4 < 6, \\ \alpha_2^{(0)} + \beta_4^{(0)} &= 2 < 3, & \alpha_2^{(0)} + \beta_4^{(0)} &= 4 > 2, \\ \alpha_2^{(0)} + \beta_2^{(0)} &= 6 > 5, & \alpha_3^{(0)} + \beta_3^{(0)} &= 6 < 7. \end{aligned}$$

Найбільшу невідповідність (за модулем) дає клітинка таблиці (3.4):

$$\gamma_{24} = C_{24} - (\alpha_2^{(0)} + \beta_4^{(0)}) = 2 - 4 = -2.$$

Отже, її треба ввести в базис. Складемо цикл із клітинок (2,4), (3,4), (3,1), (2,1) і визначимо $\theta = 10$ (табл. 3.6). Знайдемо нові значення перевезень циклу: $x_{21} = 50 - 10 = 40$, $x_{42} = 0 + 10 = 10$, $x_{31} = 40 + 10 = 50$, $x_{33} = 10 - 10 = 0$.

Таблиця 3.6

ПВ	ПД				a_i	$\alpha_i^{(0)}$
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	- 1 7	4 4 30	2 2 20	2 3	50	- 4
A_2	1 (-) 1 50	6 5	4 6	4 (+) 2	50	- 2
A_3	3 (+) 3 40	8 8 50	6 7	6 (-) 6 10	100	0
b_i	90	80	20	10	200	
$\beta_i^{(0)}$	3	8	6	6		

Новий опорний план, де клітинка (2,4) буде базисною, а клітинка (3,4) – вільною, наведено у табл. 3.7.

Знаходимо нову систему чисел-потенціалів $\alpha_i^{(1)}$ і $\beta_j^{(1)}$. Їх нові значення записані у табл. 3.7. Як легко побачити, умову потенціальності порушено тільки в одній клітинці (2,2), де

$$\alpha_2^{(1)} + \beta_2^{(1)} = -2 + 8 = 6 > 5.$$

Складаємо цикл із клітинок (2,2), (3,2), (3,1), (2,1) і визначаємо $\theta = 40$. Змінюючи на цю величину значення перевезень у клітинках визначеного циклу, отримаємо опорний план, що наведений у табл. 3.8. А знайшовши нові значення потенціалів $\alpha_i^{(2)}$ і $\beta_j^{(2)}$, записуємо їх в табл. 3.8, де наведено оптимальний план, у чому легко переконатися, перевібивши його на умови потенціальності.

Таблиця 3.7

ПВ	ПД				a_i	$\alpha_i^{(0)}$
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	- 1 7	4 4 30	2 2 20	0 3	50	- 4
A_2	1 (-) 1 40	6 (+) 5	4 6	2 2 10	50	- 2
A_3	3 (+) 3 50	8 (-) 8 50	6 7	4 6	100	0
b_j	90	80	20	10	200	
$\beta_j^{(0)}$	3	8	6	4		

Таблиця 3.8

ПВ	ПД				a_i	$\alpha_i^{(0)}$
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	- 1 7	4 4 30	2 2 20	1 3	50	4
A_2	0 1	5 5 40	3 6	2 2 10	50	5
A_3	3 3 90	8 8 10	6 7	5 6	100	8
b_j	90	80	20	10	200	
$\beta_j^{(0)}$	-5	0	-2	-3		

Зауваження до методу потенціалів:

1. Систему потенціалів однозначно можна обчислити тільки для невикористаного ОП, при цьому одному з потенціалів потрібно дати довільне значення (зазвичай, нульове), оскільки в системі обмежень закритої Т-задачі є одне лінійно залежне обмеження.

2. У випадку виродженого ОП слід ввести фіктивні перевезення з таким розрахунком, щоб однозначно обчислити всі потенціали.

3. Цикл завжди існує та єдиний для кожної вільної клітинки таблиці (для невикористаного ОП).

4. Якщо для якоїсь вільної клітинки ($x_{ij} = 0$) оптимального ОП у співвідношеннях досягається строга рівність, то це говорить про не єдиничність оптимального ОП.

Залежно від змістовного трактування чисел c_{ij} транспортна задача може бути поставлена на мінімізацію сумарної відстані або часу пробігу, або транспортування, на мінімізацію витрати пального.

3.5 Т-задачі з обмеженими пропускними здатностями

Постановка Т-задачі з обмеженими пропускними здатностями (ТЗО). У пункті P_i ($i=1, \dots, m$) виробляється a_i одиниць деякого продукту, а в пункті Q_j ($j=1, \dots, n$) споживається b_j одиниць того ж продукту. Транспортні витрати на перевезення одиниці продукту з пункту P_i в пункт Q_j становлять c_{ij} одиниць. Комунікація $P_i Q_j$ має пропускну здатність r_{ij} . Вважаючи, що сумарний об'єм виробництва дорівнює сумарному об'єму споживання, потрібно скласти план перевезень продукту, що мінімізує сумарні транспортні витрати. Математична модель ТЗО має вигляд:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= c_{11}x_{11} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min, \\ x_{i1} + \dots + x_{in} &= a_i, i=1, \dots, m, \\ x_{1j} + \dots + x_{mj} &= b_j, j=1, \dots, n, \\ 0 \leq x_{ij} &\leq r_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n, \\ a_1 + \dots + a_m &= b_1 + \dots + b_n. \end{aligned}$$

Остання умова визначає **збалансовану** ТЗО.

Крім векторів перевезень $\mathbf{x}$, виробництва-споживання $\mathbf{b}$, комунікацій A_{ij} та транспортних витрат $\mathbf{c}$, визначення яких наведені при формулюванні звичайної збалансованої транспортної задачі, введемо вектор обмежень пропускних здатностей комунікацій

$$\mathbf{r} = (r_{11}, \dots, r_{1n}, \dots, r_{m1}, \dots, r_{mn}).$$

Поряд з векторами $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{r}$ будемо також розглядати і матриці $\mathbf{X} = \|x_{ij}\|$, $\mathbf{C} = \|c_{ij}\|$, $\mathbf{R} = \|r_{ij}\|$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$.

Основні означення

Допустимий розв'язок ТЗО $x = \|x_{ij}\|$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, є **базисним**, якщо його перевезенням x_{ij} , які задовольняють умову $0 < x_{ij} < r_{ij}$, відповідає система лінійно незалежних векторів комунікацій A_{ij} .

Послідовність різних комунікацій $P_{i_1} Q_{j_1}, P_{i_2} Q_{j_1}, P_{i_2} Q_{j_2}, \dots, P_{i_s} Q_{j_s}$, називається **маршрутом**, що зв'язує пункти P_{i_1} і Q_{j_s} .

Маршрут, до якого додана комунікація $P_{i_1} Q_{j_s}$, називається **замкненим маршрутом (циклом)**.

Комунікація $P_i Q_j$ називається **основною комунікацією** розв'язку x , якщо для цього розв'язку $0 < x_{ij} < r_{ij}$.

Аналогічні означення справедливі і для клітинок Т-таблиці.

Властивості ТЗО та основні теореми

1. Ранг складеної з векторів A_{ij} матриці A обмежень транспортної задачі дорівнює $m+n-1$, звідки випливає, що допустимий базисний розв'язок задачі (якщо він існує) має не більше $m+n-1$ перевезень x_{ij} , які задовольняють умову $0 < x_{ij} < r_{ij}$.

2. Розв'язок ТЗО є базисним, якщо з його основних комунікацій неможливо скласти замкнений маршрут (цикл).

3. Допустимий базисний розв'язок (ДБР) $x = (x_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$ оптимальний тоді і тільки тоді, коли існують потенціали u_i, v_j такі, що

$$\begin{aligned} v_j - u_i &= c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} - \text{базисне перевезення,} \\ v_j - u_i &\leq c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} = 0, \text{ небазисне перевезення,} \\ v_j - u_i &\geq c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} = r_{ij}, \text{ небазисне перевезення.} \end{aligned}$$

Метод пошуку вихідного ДБР. Вихідний ДБР ТЗО (на відміну від ТЗ без обмежень), якщо він існує, знаходиться суттєво складніше. Його пошук здійснюється за два етапи.

Перший етап (попередній) нагадує метод мінімального елемента в ТЗ без обмежень і в загальному випадку не дає допустимого розв'язку.

Другий етап містить ряд ітерацій методу потенціалів, який застосовується до деякої *розширеної* ТЗО, побудованої за результатами першого етапу.

Вихідний ДБР ТЗО. I етап. На множині невикреслених клітинок транспортної таблиці знаходять клітинку (i_1, j_1) з мінімальними транспортними витратами $c_{i_1 j_1}$.

$$\text{Припускають } x_{i_1 j_1} = \min \{a_{i_1}, b_{j_1}, r_{i_1 j_1}\}.$$

Якщо $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$, то викреслюють i_1 -й рядок транспортної таблиці.

Якщо $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$, то викреслюють j_1 -й стовпець Т-таблиці.

Якщо $x_{i_l j_l} = r_{i_l j_l} (r_{i_l j_l} < a_{i_l}, r_{i_l j_l} < b_{j_l})$, то викреслюють тільки клітинку (i_l, j_l) транспортної таблиці.

Якщо $x_{i_l j_l} = a_{i_l} = b_{j_l}$, то у довільну, не викреслену на попередніх кроках клітинку, яка лежить або в i_l – у рядку або в j_l – у стовпчику, заносять нульове базисне перевезення.

Після заповнення клітинки у всіх випадках величини a_{i_l} та b_{j_l} зменшуються на $x_{i_l j_l}$. Вищевказані дії виконують доти, поки не будуть викреслені всі клітинки транспортної таблиці.

Вихідний ДБР ТЗО. II етап. Нехай $X = \|x_{ij}\|, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$, - матриця перевезень, що побудована на першому етапі. Покладемо

$$\begin{aligned} x_{i, n+1} &= a_i - (x_{i1} + \dots + x_{in}), \quad i=1, \dots, m, \\ x_{m+1, j} &= b_j - (x_{1j} + \dots + x_{mj}), \quad j=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Позначимо $\omega = x_{1, n+1} + \dots + x_{m, n+1} = x_{m+1, 1} + \dots + x_{m+1, n}$.

Якщо $\omega = 0$, то x – вихідний ДБР.

Якщо $\omega > 0$, то вихідна ТЗ розширюється за рахунок фіктивних пунктів виробництва P_{m+1} та споживання Q_{n+1} з $a_{m+1} = b_{n+1} = \omega$, де

$$\begin{aligned} c_{i, n+1} &= M, \quad r_{i, n+1} = \infty, \quad i=1, \dots, m, \\ c_{m+1, j} &= M, \quad r_{m+1, j} = \infty, \quad j=1, \dots, n, \\ c_{m+1, n+1} &= 0, \quad r_{m+1, n+1} = \infty, \end{aligned}$$

де M – досить велике додатне число, ∞ – нескінченність.

Нерозподілені на першому етапі залишки продукту (як за об'ємами виробництва, так і за об'ємами споживання) розподіляються по фіктивних пунктах P_{m+1} та Q_{n+1} . Відповідні заповнені клітинки вважаються базисними (оскільки пропускні здатності відповідних їм комунікацій необмежені) і приєднуються до сукупності базисних клітинок заповнених на першому етапі. Якщо після цього загальна кількість базисних клітинок не рівна $(m+1) + (n+1) - 1$, то множину базисних клітинок доповнюють до цього числа за рахунок незаповнених клітинок або заповнених до пропускної здатності, але так, щоб розширена множина базисних клітинок не містила циклів. Розширена ТЗ розв'язується методом потенціалів.

Якщо в оптимальному розв'язку $x_{m+1, n+1}^* = \omega$ то, відкидаючи фіктивні пункти, отримаємо вихідний ДБР, інакше, ТЗО не має розв'язків.

Потенціали. Потенціали рядків $u_i, i=1, \dots, m$, та колонок $v_j, j=1, \dots, n$, визначаються як розв'язок системи $v_j - u_i = c_{ij}$, де i та j приймають такі

значення, що клітинки (i, j) – базисні.

Вказана система містить $m+n-1$ рівнянь (за числом базисних клітинок) та $m+n$ змінних. Тому одна із змінних задається довільно ($u_1 = 0$).

Оцінки. Оцінки Δ_{ij} змінних x_{ij} для всіх небазисних клітинок обчислюються за формулою $\Delta_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i$ (оцінки базисних змінних – нульові). Поточний ДБР $X = \|x_{ij}\|$, $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$, оптимальний, коли

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= 0, \text{ якщо } x_{ij} - \text{ базисне перевезення,} \\ \Delta_{ij} &\geq 0, \text{ якщо } x_{ij} = 0, \text{ небазисне перевезення,} \\ \Delta_{ij} &\leq 0, \text{ якщо } x_{ij} = r_{ij}, \text{ небазисне перевезення.} \end{aligned}$$

Цикл. Метод викреслювання. Під час побудови циклу застосовується метод викреслювання. На кожному кроці методу в транспортній таблиці викреслюється або рядок, або стовпець, які в подальшому ігноруються. Викреслюванню підлягають рядки (стовпці), що містять тільки одну базисну клітинку. Невикреслені клітинки транспортної таблиці утворюють цикл.

Новий ДБР. Серед всіх клітинок (i, j) , для яких не виконується критерій оптимальності, обирають клітинку, що відповідає найбільшій за модулем оцінці Δ_{ij} . Позначимо таку клітинку через (i_0, j_0) .

Нехай клітинка (i_0, j_0) , для якої $x_{i_0 j_0} = 0, \Delta_{i_0 j_0} < 0$, приєднується до сукупності базисних клітинок. Знаходиться цикл, що утворюється цими клітинками. Цикл розбивається на додатний (C^+) та від'ємний (C^-) півцикли, клітинки яких чергуються одна з одною, причому клітинка (i_0, j_0) відноситься до додатного півциклу. Обчислюються величини

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \min \{x_{ij}\} && \text{за } C^-, \\ \theta_2 &= \min \{r_{ij} - x_{ij}\} && \text{за } C^+, \\ \theta &= \min \{\theta_1, \theta_2\}. \end{aligned}$$

Далі збільшують на значення θ перевезення x_{ij} в клітинках півциклу C^+ і зменшують їх на те ж значення в клітинках C^- .

Для клітинки (i_0, j_0) такої, що $x_{i_0 j_0} = r_{i_0 j_0}, \Delta_{i_0 j_0} > 0$, різниця полягає у тому, що вона відноситься до від'ємного півциклу.

У результаті виконання вказаних процедур клітинка (i_0, j_0) вводиться до множини базисних, а клітинка, пов'язана з θ , стає небазисною. Якщо θ досягається на клітинці (i_0, j_0) , то множина базисних клітинок не змінюється після перерозподілу перевезень вздовж циклу на сталу θ і новий ДБР матиме ту ж саму систему потенціалів і ті ж самі оцінки, що і попередній. Тому у цьому випадку після обчислення нового ДБР безпосередньо пере-

ходять до перевірки його на оптимальність.

Алгоритм методу потенціалів:

- а) будується вихідний ДБР;
 - б) далі метод складається з однотипних кроків, на кожному з яких:
 - 1) обчислюються потенціали $u_i, i=1, \dots, m$, та $v_j, j=1, \dots, n$;
 - 2) обчислюються оцінки Δ_{ij} змінних $x_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$;
 - 3) аналізуються знайдені оцінки Δ_{ij} . Якщо оцінка $\Delta_{ij} \geq 0$ для $x_{ij} = 0$ та $\Delta_{ij} \leq 0$ для $x_{ij} = r_{ij}$, то поточний ДБР є оптимальним. Інакше, переходять до покращання поточного ДБР (п. п. 4 та 5);
 - 4) будується цикл;
 - 5) знаходиться новий ДБР.
- Крок закінчено. Перехід до пункту 1.

3.6 Задача про оптимальні призначення

Постановка задачі про призначення. Знайти вектор (матрицю) $X = (x_{ij}, i, j = 1, \dots, n)$, що мінімізує цільову функцію:

$$L(X) = c_{11}x_{11} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{n1}x_{n1} + \dots + c_{nn}x_{nn}$$

і задовольняє систему обмежень:

$$\begin{aligned}x_{i1} + \dots + x_{in} &= 1, \quad i = 1, \dots, n, \\x_{1j} + \dots + x_{nj} &= 1, \quad j = 1, \dots, n, \\x_{ij} &= 0 \text{ або } 1, \quad i, j = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

де c_{ij} – витрати, пов'язані з використанням i -го виконавця для виконання j -ї роботи ($i, j = 1, \dots, n$). Елементи c_{ij} утворюють матрицю витрат C .

Наведена задача може бути розв'язана *угорським методом*, що ґрунтується на тому факті, що віднімання числа $a_i, i = 1, \dots, n$, від кожного елемента i -го рядка та числа $b_j, j = 1, \dots, n$, від кожного елемента j -го стовпця матриці витрат C не змінює множини оптимальних призначень, тобто вказані дії перетворюють матрицю витрат C в еквівалентну їй матрицю, яку також називають матрицею витрат.

Алгоритм угорського методу

1. В матриці C віднімаємо від кожного елемента i -го рядка мінімальний елемент цього рядка ($i = 1, \dots, n$).
2. Від кожного елемента j -го стовпця перетвореної матриці витрат віднімаємо його мінімальний елемент ($j = 1, \dots, n$). В результаті виконання двох пунктів кожний рядок та кожний стовпець матриці витрат мають

принаймні один нуль.

3. Проглядаємо послідовно рядки матриці витрат, починаючи з першого. Якщо рядок має лише один непозначений 0, позначаємо його позначкою * та закреслюємо (за допомогою позначки ^) решту нулів у цьому ж стовпці. Нуль вважається позначеним, якщо він має позначку *. Повторюємо ці дії поки кожний рядок не буде мати непозначених нулів або буде мати їх принаймні два.

4. Дії п. 3 повторюємо для всіх стовпців матриці витрат.

5. Дії п. п. 3 та 4 повторюємо послідовно (якщо необхідно) поки не трапиться один з трьох можливих випадків:

1) кожний рядок має призначення (має 0 з позначкою *);
2) є принаймні два непозначених нулі в деяких рядках і деяких стовпцях матриці витрат;

3) немає непозначених нулів і повне призначення ще не отримане (число нулів з позначкою * менше n).

6. У випадку 1 задача розв'язана: x_{ij} , що відповідають 0 *, дорівнюють 1, решта – 0, кінець. У випадку 2 довільно вибираємо один з непозначених нулів, позначаємо його позначкою *, закреслюємо решту нулів в тому ж рядку і в тому ж стовпчику і повертаємося до п. 3. У випадку 3 переходимо до п. 7.

7. Позначаємо позначкою # рядки, для яких не отримане призначення (в яких немає нуля*). Такі рядки вважаємо *позначеними*, решту – *непозначеними*. Аналогічно називаються і стовпчики матриці витрат.

8. Позначаємо позначкою # ще не позначені стовпчики, які мають закреслений 0 (позначений позначкою ^) у позначених рядках.

9. Позначаємо позначкою # ще не позначені рядки, які мають призначення (тобто 0*) у позначених стовпцях.

10. Повторюємо дії пунктів 8 і 9 доти, доки більше не можна буде позначити жодного рядка та стовпця матриці витрат.

11. Викреслюємо (за допомогою позначки &) непозначені рядки і позначені стовпчики матриці витрат.

12. Знаходимо мінімальний невикреслений елемент матриці витрат, віднімаємо його від елементів кожного з невикреслених рядків, додаємо до елементів всіх викреслених стовпчиків і переходимо до п. 3. При цьому позначки елементів матриці витрат (* та ^) втрачають свою силу.

Зауваження

1. Якщо у задачі (3.1) – (3.4) цільову функцію (3.1) треба максимізувати, то для її розв'язання можна застосувати угорський метод, змінивши матрицю C на $-C$.

2. За означенням у задачі (3.1) – (3.4) матриця витрат квадратна. Якщо це не так, то вона перетворюється до такої додаванням необхідного числа додаткових рядків або стовпчиків з відповідними елементами $c_{ij} = 0$.

У першому випадку роботи, що отримали призначення в додаткових рядках, залишаються без виконавців. У другому – виконавці, що отримали призначення в додаткових стовпцях, залишаються без роботи.

Задача про призначення може бути розв’язана також і методом Мака.

Алгоритм методу Мака

1. Позначаємо мінімальний елемент рядка позначкою *. Якщо мінімальних елементів декілька, позначаємо будь-який з них.

2. Дії п. 1 повторюємо для всіх рядків матриці витрат.

3. Якщо рядок має ще один мінімальний елемент, проглядаємо стовпець, до якого цей елемент належить. Можливі випадки:

1) стовпець не має позначених елементів;

2) стовпець має принаймні один позначений елемент.

4. У випадку 1 позначаємо мінімальний елемент рядка позначкою *. Всі інші позначки в цьому рядку знімаються.

У випадку 2 позначаємо мінімальний елемент рядка позначкою ^, якщо елемент цього рядка з позначкою * не є єдиним позначеним елементом у своєму стовпці.

5. Дії п. п. 3 та 4 повторюємо послідовно для всіх рядків, що мають більше одного мінімального елемента.

6. Якщо кожний стовпець матриці витрат має елемент з позначкою *, тоді задача про оптимальні призначення розв’язана. Інакше переходимо до наступного пункту.

7. Позначаємо (позначкою &) стовпці, що мають більше одного позначеного елемента. Вони утворюють множину **B**, інші стовпці матриці витрат утворюють множину **A**.

8. Проглядаємо послідовно рядки матриці, починаючи з першого, і знаходимо рядок, в якому елемент з позначкою * належить множині **B**.

9. Знаходимо для рядка мінімальну різницю між елементами множини **A** і елементом з позначкою *.

10. Дії п. п. 8 та 9 повторюємо послідовно для всіх рядків, що мають властивості, які вказані в п. 8.

11. Вибираємо найменшу з мінімальних різниць.

12. Додаємо це число до кожного елемента множини **B**.

13. Повертаємось до п. 3.

Зауваження до методу Мака аналогічні угорському методу.

3.7 Задача про максимальний потік. Метод Форда-Фалкерсона

Постановка задачі про максимальний потік в мережі. В мережі, що задається графом (I, U) , де I – множина вершин, U – множина дуг з визна-

ченою на ній функцією пропускних здатностей r_{ij} ((i,j) – дуга з U), зафіксовані дві вершини – i_1 та i_n .

Вершина i_1 (джерело) має інтенсивність d , вершина i_n (стік) – інтенсивність – d , всі інші вершини *нейтральні*. Треба знайти максимальну інтенсивність джерела d , при якій мережа допускає потік. Потік, що відповідає такому максимальному значенню інтенсивності d^* , називається *максимальним потоком*, а саме значення d^* – *величиною цього потоку*.

Алгоритм Форда-Фалкерсона застосовується для побудови максимального потоку в мережі із заданої початкової вершини-джерела в задану кінцеву вершину-стік.

Будемо вважати, що вершиною-джерелом є l -а вершина, вершиною-стоком – вершина з номером n .

Вхідні дані

Для роботи алгоритму необхідно задати таку інформацію:

1. Число вершин мережі.
2. Матрицю суміжностей C , елементи якої c_{ij} визначаються співвідношеннями:
 $c_{ij} = 1$, якщо існує дуга (i,j) ;
 $c_{ij} = 0$, якщо дуга (i,j) відсутня.
3. Величини r_{ij} пропускних здатностей дуг (i,j) .
4. Початковий потік на мережі, тобто величини x_{ij} , що задовольняють умови:

а)
$$0 \leq x_{ij} \leq r_{ij};$$

б) для довільної вершини (крім першої і останньої) потік, що входить у вершину, дорівнює потоку, що виходить з неї.

Виклад алгоритму Форда-Фалкерсона

Алгоритм складається з послідовних ітерацій, які проводяться до тих пір, поки не буде виконуватись ознака оптимальності.

На кожній ітерації можна виділити два етапи.

Етап 1 (етап виставлення позначок).

1. В кожний момент часу кожна вершина може знаходитись в одному з трьох положень:

- а) непозначена;
- б) позначена, але не проглянута;
- в) позначена і проглянута.

Загальний вигляд позначки j -ї вершини: $[i+, \theta_j]$, або $[i-, \theta_j]$, де i – номер деякої позначеної вершини, при прогляданні якої була позначена вершина j . Вершина 1 завжди позначена та має позначку $[1+, \theta_1]$, де θ_1 рівне $+\infty$ (нескінченності).

2. Проглядання довільної позначеної вершини j полягає у такому:

а) довільна непозначена вершина k , для якої існує дуга (j, k) і має місце нерівність $x_{jk} < r_{jk}$, отримує позначку вигляду $[j+, \theta_k]$, де

$$\theta_k = \min \{ \theta_j, r_{jk} - x_{jk} \};$$

б) довільна непозначена вершина k , для якої існує дуга (k, j) і має місце умова $x_{kj} > 0$, отримує позначку вигляду $[j-, \theta_k]$, де

$$\theta_k = \min \{ \theta_j, x_{kj} \}.$$

3. Виставлення позначок закінчується в одному з двох випадків:

- а) вершина з номером n позначена;
- б) умова а) не виконується, але жодної вершини більше позначити не можна.

В першому випадку переходимо до етапу зміни потоку. У другому – до визначення мінімального розрізу мережі і максимального потоку.

Етап 2 (етап зміни потоку).

Потік в мережі змінюється на величину θ_n відповідно до правила. Якщо вершина n має позначку $[k+, \theta_n]$, де k – номер деякої вершини, то $x_{kn} = x_{kn} + \theta_n$. Якщо позначка має вигляд $[k-, \theta_n]$, то $x_{nk} = x_{nk} - \theta_n$. Переходимо до вершини з номером k . Якщо позначка вершини k має вигляд $[j+, \theta_k]$, то $x_{jk} = x_{jk} + \theta_n$; якщо вона дорівнює $[j-, \theta_k]$, то $x_{kj} = x_{kj} - \theta_n$. Подібні дії продовжуємо доти, поки не буде досягнута початкова вершина. В цьому випадку всі старі позначки витираємо і повертаємось до першого етапу.

В результаті роботи за алгоритмом визначаються *мінімальний розріз мережі* і, як наслідок, *максимальний потік*. Мінімальний розріз визначається сукупністю дуг, що виходять з множини позначених вершин і заходять у множину непозначених.

Величина максимального потоку дорівнює сумарній пропускній здатності мінімального розрізу.

3.8 Задача про найкоротший шлях в мережі. Метод Мінті

Постановка задачі про найкоротший шлях в мережі

В мережі, що задається графом (I, U) , де I – множина вершин, U –

множина дуг з визначеною на ній функцією вартості c_{ij} ((i,j) – дуга з U), для фіксованих i_l та i_s знайти шлях

$$L = ((i_l, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{s-1}, i_s))$$

з вершини i_l у вершину i_s , довжина якого

$$C(L) = c_{i_l i_2} + c_{i_2 i_3} + \dots + c_{i_{s-1} i_s}$$

найменша.

Алгоритм методу Мінті. Методом Мінті розв'язується задача побудови дерева найкоротших шляхів в мережі з коренем у фіксованій вершині i_l .

Алгоритм складається із скінченного числа кроків, на кожному з яких позначаються вершини мережі і виділяються деякі її дуги.

Нехай P_r – множина вершин, позначених на кроці r , а I_r – множина вершин, позначених за r кроків.

Крок 0. Корінь дерева (вершина i_l) позначається сталою величиною $h_l = 0$; $i_l(h_l) = i_l(0)$. Після нульового кроку $P_0 = \{i_l(0)\}$, $I_0 = \{i_l(0)\}$.

Нехай виконано r кроків, при яких побудована множина

$$I_r = \{i_l(0), \dots, i_k(h_k), \dots\}$$

позначених вершин $i_k(h_k)$, кожній з яких поставлене у відповідність число h_k (чисельно рівне довжині найкоротшого шляху із вершини i_l у вершину i_k).

Крок $r+1$. Будується переріз мережі, який породжується множиною позначених вершин I_r і визначається множина $J_r = \{\dots, i_m, \dots\}$ непозначених вершин i_m мережі, в які заходять дуги перерізу. Для кожної дуги (i_k, i_m) перерізу обчислюють суму $h_k + c_{i_k i_m}$ і позначають ті з дуг, для яких ця сума мінімальна. Потім, виділяють позначені дуги так, щоб в кожную непозначену вершину множини J_r , в яку заходять позначені дуги перерізу, заходила б тільки одна виділена дуга. Після виділення дуг позначають вершини – кінці виділених дуг. Величина позначки рівна мінімальній із сум $h_k + c_{i_k i_m}$, обчислених для всіх дуг перерізу. Об'єднуючи множину I_r з множиною P_{r+1} вершин, позначених на $(r+1)$ – у кроці, отримують множину I_{r+1} вершин, позначених за $(r+1)$ кроків. Переходять до наступного кроку, якщо існує переріз, що породжується множиною I_{r+1} .

Описаний процес продовжують до тих пір, поки можливе розширення множини позначених вершин. Якщо деяка вершина i_n мережі залишилась непозначеною після закінчення процедури Мінті, то шляху, що починається у вершині i_l і закінчується у вершині i_n , не існує.

4 ДИСКРЕТНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Під час розв'язання задач ЛП часто висувається вимога дискретності (цілочисельності) змінних, що входять у розв'язок. Множиною планів такої задачі буде система точок із цілочисловими координатами, що належать опуклому багатокутнику допустимих розв'язків відповідної недискретної задачі. Якби можна було визначити гіперплощини, що проходять через зовнішні точки такої системи точок цілочислової задачі, причому так, щоб зовнішні точки цієї системи потрапили до нового опуклого багатокутника, то задачу можна було б розв'язати за допомогою звичайного симплекс-методу. У цьому випадку всі крайні точки опуклого багатокутника були б цілочисловими і розв'язок можна було б знайти за скінчене число кроків. Ця ідея послідовного відсікання частин вихідного багатокутника планів, що не містять допустимих цілочислових планів, покладена в основу методів Гоморі, які реалізуються за рахунок побудови додаткових обмежень-нерівностей, які визначають відсічні гіперплощини. Ці обмеження мають задовольняти дві умови: відсікання, яке полягає у тому, що вони не повинні задовольняти план недискретної задачі; правильності відсікання, що полягає у тому, що вони мають задовольняти всі цілочислові плани задачі.

Існує також широкий клас досить універсальних методів, основою яких є пошук оптимуму на дискретній множині планів задачі, на кожному кроці якого виключається з розгляду значна кількість неоптимальних планів. Такі методи мають назву гілок і границь. Їх суть полягає в тому, що множину планів задачі розбивають на ряд підмножин, для кожної з яких знаходять оцінку цільової функції. Процедура повторюють до тих пір, поки не знаходять підмножину, що містить оптимальний план.

4.1 Задача дискретного ЛП. Метод Гоморі-1

Постановка задачі дискретного ЛП (ДЗЛП). Необхідно знайти вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, що мінімізує цільову функцію

$$L(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (4.1)$$

і задовольняє систему обмежень

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{10}, \\ &\dots, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= a_{m0}, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$x_j \text{ — цілі} \quad (4.4)$$

Виклад методу Гоморі-1. Розв'язується ЗЛП (4.1)-(4.3), яку отримують з вихідної задачі ДЗЛП (4.1)-(4.4) відкиданням умови дискретності

змінних (4.4). Якщо оптимальний розв'язок ЗЛП – дискретний, то він буде і розв'язком вихідної ДЗЛП. Якщо ж отриманий розв'язок задачі не дискретний, то від розв'язаної ЗЛП переходять до нової ЗЛП, що отримується додаванням додаткового лінійного обмеження, яке задовольняє дискретні розв'язки вихідної ДЗЛП і яке не задовольняє отриманий недискретний розв'язок ЗЛП. Це додаткове лінійне обмеження визначає деяку відсічну площину і називається *правильним відсіканням*. Приєднання нових правильних відсікань до вихідної ЗЛП здійснюється до тих пір, поки на деякому кроці не буде отримано дискретний розв'язок ЗЛП, який, як очевидно, буде оптимальним розв'язком вихідної ДЗЛП. В методі Гоморі-1 правильне відсікання будується таким чином.

Нехай на останній ітерації симплекс-методу під час розв'язання допоміжної ЗЛП непрямі обмеження цієї задачі набули вигляду:

$$x_i + a'_{i,m+1}x_{m+1} + \dots + a'_{i,n}x_n = a'_{i0}, \quad i=1, \dots, m,$$

і розв'язком допоміжної ЗЛП є вектор $x = (a'_{10}, \dots, a'_{m0}, 0, \dots, 0)$.

Нехай існує номер r такий, що a'_{r0} – дріб, і, як завжди, $\{z\}$ – дробова частина z . Тоді правильне відсікання за методом Гоморі-1 задається такою нерівністю:

$$\{a'_{r,m+1}\}x_{m+1} + \dots + \{a'_{r,n}\}x_n \geq \{a'_{r0}\}.$$

Алгоритм методу Гоморі-1

1. Розв'язуємо допоміжну ЗЛП (4.1)–(4.3). Нехай $x(0)$ – її оптимальний розв'язок. Якщо оптимальний розв'язок не існує, то вихідна ДЗЛП також не має оптимального розв'язку.

2. Нехай на s -й ітерації маємо розв'язок допоміжної ЗЛП, що має M обмежень і N змінних, $x(s)$ – її оптимальний розв'язок.

Будемо вважати, що $x(s)$ визначається канонічними обмеженнями останньої ітерації, тобто:

$$x_i + b_{i,M+1}x_{M+1} + \dots + b_{i,N}x_N = b_{i0}, \quad i=1, \dots, M,$$

звідки $x(s) = (b_{10}, \dots, b_{M0}, 0, \dots, 0)$.

3. Якщо b_{i0} ($i=1, \dots, M$) – цілі, то – кінець, $x(s)$ є оптимальним розв'язком вихідної ДЗЛП. Якщо існує хоча б одне i таке, що b_{i0} – дріб, то перехід до пункту 4.

4. Знаходимо $r = \min \{i\}$ за всіма i такими, що b_{i0} – дріб та будуємо додаткове обмеження

$$x_{N+1} - \{b_{r,M+1}\}x_{M+1} - \dots - \{b_{r,N}\}x_N = -\{b_{r0}\},$$

де $x_{N+1} \geq 0$ – додаткова змінна.

5. Розширюємо симплекс-таблицю $(M+1)$ -им рядком (додаткове об-

меження) та $(N+1)$ -им стовпцем, що відповідає додатковій змінній x_{N+1} .

6. Розв'язуємо розширену таким чином ЗЛП двоїтим симплекс-методом і переходимо до пункту 2 із заміною s на $s+1$. Якщо при цьому на деякій ітерації одна з додаткових змінних задачі повторно стає базисною, то виключаються з подальшого розгляду відповідні їй рядок і стовпець.

Приклад 4.1. Розв'язати цілочислову ЗЛП методом Гоморі-1:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max, \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30, \\ x_2 &\leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \text{ де } x_1, x_2 - \text{цілі.} \end{aligned}$$

Відкидаючи умови цілочисельності змінних, на попередньому кроці знаходимо розв'язок задачі звичайним симплекс-методом (див. табл. 4.1).

Таблиця 4.1

i	B	C	X	1	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	30	6	5	1	0
2	P_4	0	3	0	1	0	1
$m+1$			0	-1	-1	0	0
1	P_1	1	5	1	5/6	1/6	0
2	P_4	0	3	0	1	0	1
$m+1$			5	0	-1/6	1/6	0
1	P_1	1	5/2	1	0	1/6	-5/6
2	P_2	1	3	0	1	0	1
$m+1$			11/2	0	0	1/6	1/6

Таблиця 4.2

i	B	C	X	1	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	1	5/2	1	0	1/6	-5/6	0
2	P_2	1	3	0	1	0	1	0
3	P_5	0	-1/2	0	0	-1/6	-1/6	1
$m+1$			11/2	0	0	1/6	1/6	0

Таблиця 4.3

i	B	C	X	1	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	1	2	1	0	0	-1	1
2	P_2	1	3	0	1	0	1	0
3	P_5	0	3	0	0	1	1	-6
$m+1$			5	0	0	0	0	1

Оскільки в оптимальному розв'язку змінна x_1 дробова, то виконаємо загальний крок алгоритму. Запишемо додаткове обмеження. Для цього знайдемо, що

$$\begin{aligned}\left[\frac{5}{2}\right] &= 2, \quad \text{modi} \quad \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{1}{6}\right] &= 0, \quad \text{modi} \quad \left\{\frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}, \\ \left[-\frac{5}{6}\right] &= -1, \quad \text{modi} \quad \left\{-\frac{5}{6}\right\} = -\frac{5}{6} + 1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Додаткове обмеження має вигляд: $\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$. Зведемо його до канонічної форми запису: $-\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 + x_5 \geq -\frac{1}{2}$ і внесемо в останню симплекс-таблицю. Маючи табл. 4.2, і виконуючи один крок двоїстого симплекс-методу, приходимо до завершальної табл. 4.3.

Розв'язок вихідної задачі дістаємо у вигляді $X^* = (2, 3)$, $L(X^*) = 5$.

4.2 Задача частково дискретного ЛП. Метод Гоморі-2

Постановка частково дискретної задачі ЛП (ЧДЗЛП). Знайти вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$, що мінімізує цільову функцію

$$L(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (4.5)$$

і задовольняє систему обмежень

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{10}, \\ \dots\dots\dots, & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= a_{m0},\end{aligned} \quad (4.6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \quad (4.7)$$

$$x_j \text{ — цілі, } j=1, \dots, p, \quad (p \leq n). \quad (4.8)$$

Виклад методу Гоморі-2. Метод Гоморі-2, як і метод Гоморі-1, є одним із методів відсікання і його суть.

Розв'язується допоміжна ЗЛП (4.5) – (4.7), яку отримують з вихідної ЗЛП (4.5) – (4.8) відкиданням умови дискретності змінних (4.8). Якщо її розв'язок задовольняє умову (4.8), то він же є і розв'язком вихідної ЧДЗЛП. Інакше, від розв'язаної ЗЛП переходять до нової допоміжної ЗЛП приєднанням лінійного обмеження, яке задовольняє дискретні (у розумінні умов (4.8)) розв'язки вихідної ЧДЗЛП, але не задовольняє отриманий неди-

скретний розв'язок вихідної ЗЛП. Це додаткове обмеження визначає деяку відсічну площину і називається *правильним відсіканням*. Приєднання нових правильних відсікань здійснюється до тих пір, поки на деякому кроці не буде отримано дискретний (у розумінні умов (4.8) розв'язок допоміжної задачі, який і є оптимальним розв'язком вихідної ЧДЗЛП. В методі Гоморі-2 правильне відсікання будується таким чином.

Нехай на останній ітерації симплекс-методу під час розв'язування допоміжної ЗЛП її непрямі обмеження набули вигляду:

$$x_i + Q_{i,m+1}x_{m+1} + \dots + Q_{i,n}x_n = Q_{i0}, \quad i=1, \dots, m,$$

і розв'язком допоміжної ЗЛП є вектор $\mathbf{x} = (Q_{10}, \dots, Q_{m0}, 0, \dots, 0)$.

Нехай існує номер r ($r \leq p$) такий, що Q_{r0} – не ціле, і $\{z\}$ – дробова частина z . Тоді правильне відсікання методу Гоморі-2 має вигляд:

$$x_{n+1} - D_{r,m+1}x_{m+1} - \dots - D_{r,n}x_n = -\{Q_{r0}\}, \quad (4.9)$$

де $x_{n+1} \geq 0$ – додаткова змінна, та

$$D_{rj} = \begin{cases} \{Q_{rj}\}, & \text{при } j \leq p, \{Q_{rj}\} \leq \{Q_{r0}\}, \\ \{Q_{r0}\}(1 - \{Q_{rj}\}) / (1 - \{Q_{r0}\}), & \text{при } j \leq p, \{Q_{rj}\} > \{Q_{r0}\}, \\ Q_{rj}, & \text{при } j > p, Q_{rj} \geq 0, \\ \{Q_{r0}\}(-Q_{rj}) / (1 - \{Q_{r0}\}), & \text{при } j > p, Q_{rj} < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Алгоритм методу Гоморі-2

1. Розв'язуємо допоміжну ЗЛП (4.5) – (4.7). Нехай $\mathbf{x}(0)$ – її оптимальний розв'язок. Якщо ця задача не має розв'язку, то вихідна ЧДЗЛП також не має розв'язку.

2. Нехай на s -й ітерації розв'язана допоміжна ЗЛП, що має M обмежень і N змінних, $\mathbf{x}(s)$ – її оптимальний розв'язок. Припустимо, що $\mathbf{x}(s)$ визначається канонічними обмеженнями останньої ітерації, а саме:

$$x_i + Q_{i,M+1}x_{M+1} + \dots + Q_{i,N}x_N = Q_{i0}, \quad i=1, \dots, M,$$

звідки випливає, що $\mathbf{x}(s) = (Q_{10}, \dots, Q_{M0}, 0, \dots, 0)$.

3. Якщо Q_{i0} ($i=1, \dots, p$) – цілі, то кінець: $\mathbf{x}(s)$ є оптимальним розв'язком вихідної ЧДЗЛП. Якщо існує хоча б одне i таке, що Q_{i0} – не ціле ($i=1, \dots, p$), то переходимо до пункту 4.

4. Знаходимо $r = \min \{i\}$ за всіма i ($i=1, \dots, p$) таких, що Q_{i0} – не ціле і будуємо додаткове обмеження за формулами (4.9), (4.10) при $m = M$ та $n = N$.

5. Розширюємо таблицю за рахунок $(M+1)$ -го рядка (додаткове обмеження) та $(N+1)$ -го стовпця, що відповідає додатковій змінній x_{N+1} .

6. Розв'язуємо розширену ЗЛП за допомогою двоїстого симплекс-методу (ДСМ) і переходимо до пункту 2 з заміною s на $s+1$, M на $M+1$, N на $N+1$. Якщо на деякій ітерації ДСМ одна з додаткових змінних задачі знову стає базисною, то з подальшого розгляду виключаються відповідні їй рядок та стовпець і при переході до пункту 2 замінюється лише s на $s+1$.

4.3 Задача дискретного ЛП. Метод Гоморі-3

Постановка задачі дискретного програмування (ДЗЛП). Знайти вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, що мінімізує цільову функцію

$$L(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (4.11)$$

і задовольняє систему обмежень

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{10}, \\ \dots\dots\dots, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= a_{m0}, \\ x_j &\geq 0, j=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$x_j - \text{цілі}, j=1, \dots, n. \quad (4.14)$$

Виклад методу Гоморі-3. Суть методу.

Нехай обмеження (4.12) ЗЛП (4.11) – (4.13) приведені до майже канонічного вигляду:

$$x_i + \alpha_{i,m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha_{in} x_n = \alpha_{i0}, \quad i=1, \dots, m, \quad (4.15)$$

де α_{ij} , $i=1, \dots, m$, $j=0, m+1, \dots, n$, – цілі та симплекс-різниці $\Delta_j \geq 0$, $j=1, \dots, n$.

Якщо $\alpha_{i0} \geq 0$, $i=1, \dots, m$, то обмеження (4.15) визначають оптимальний розв'язок ДЗЛП (4.11) – (4.14), інакше, визначається деякий дискретний майже допустимий базисний розв'язок (МДБР) вихідної ЗЛП. Можна було б вибрати один з індексів i , для якого $\alpha_{i0} < 0$, та виконати ітерацію двоїстого симплекс-методу. Проте в цьому випадку дискретність нових параметрів була б порушена через необхідність ділення на головний елемент перетворення. Цього можна уникнути лише тоді, коли головний елемент дорівнює -1 . Виявляється, що можна побудувати додаткове обмеження, яке задовольняє всі дискретні розв'язки ДЗЛП і яке разом з тим визначає головний рядок перетворення, що має головний елемент -1 . Будується воно за l -м обмеженням системи (4.15), для якого α_{l0} мінімальне серед від'ємних α_{i0} , і має вигляд:

$$x_{n+1} + \alpha_{m+1, m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha_{m+1, n} x_n = \alpha_{m+1, 0},$$

де $x_{n+1} \geq 0$ – додаткова змінна,

$$\alpha_{m+1, j} = [\alpha_{lj}/\alpha], j=0, m+1, \dots, n,$$

$$\alpha = \max \{ -\alpha_{lj} \}, j=m+1, \dots, n.$$

Отже, симплекс-таблиця розширюється за рахунок $(m+1)$ -го рядка з елементами $\alpha_{m+1, j}$ ($\alpha_{m+1, j} = 0$, де $j=1, \dots, m$) та одиничного стовпця A_{n+1} , що відповідає додатковій змінній x_{n+1} . Потім, виконується ітерація двоїстого симплекс-методу з $(m+1)$ -им головним рядком.

Алгоритм методу Гоморі-3.

1. Зводимо вихідну ЗЛП (4.11) – (4.13) до майже канонічної ЗЛП (МКЗЛП) з цілочисловими коефіцієнтами, що визначає дискретний МДБР $x(0)$, для якого $\Delta_j \geq 0, j=1, \dots, n$.

2. Нехай на s -й ітерації отримана повністю дискретна МКЗЛП

$$x_i + \alpha_{i, M+1} x_{M+1} + \dots + \alpha_{iN} x_N = \alpha_{i0}, i=1, \dots, M,$$

що визначає дискретний N -вимірний МДБР $x(s) = (\alpha_{10}, \dots, \alpha_{M0}, 0, \dots, 0)$.

3. Якщо $\alpha_{i0} \geq 0, i=1, \dots, M$, то кінець: $x(s)$ – оптимальний розв'язок ДЗЛП.

4. Якщо для деякого i такого, що $\alpha_{i0} < 0, \alpha_{ij} \geq 0, j=1, \dots, N$, то кінець: вихідна ДЗЛП не має допустимих розв'язків. Якщо таких i немає, то переходимо до пункту 5.

5. Знаходимо $l = \operatorname{argmin} \{ \alpha_{i0} \}$, де $i: \alpha_{i0} < 0$. Визначаємо $\alpha = \max \{ -\alpha_{lj} \}, j=M+1, \dots, N$, і будуємо додаткове обмеження

$$x_{N+1} + \alpha_{M+1, M+1} x_{M+1} + \dots + \alpha_{M+1, N} x_N = \alpha_{M+1, 0},$$

де $x_{N+1} \geq 0$ – додаткова змінна, $\alpha_{M+1, j}$ – ціла частина відношення $\alpha_{lj}/\alpha, j=0, M+1, \dots, N$.

6. Розширюємо таблицю за рахунок $(M+1)$ -го рядка (додаткове обмеження) та $(N+1)$ -го стовпця, що відповідає додатковій змінній x_{N+1} .

7. Знаходимо $k = \operatorname{argmin} \{ \Delta_j \}$, де $j: \alpha_{M+1, j} < 0$. Переходимо до нового цілочислового МДБР $x(s+1)$, виконуючи симплекс-перетворення з головним рядком $M+1$ та стовпцем k . Якщо k – індекс однієї з додаткових змінних, то переходимо до п. 8, інакше – до п. 3, замінюючи M на $M+1, N$ на $N+1, s$ на $s+1$.

8. Виключаємо з подальшого розгляду (викреслюємо) k -й стовпець та

$$x_{n+1} - D_{r,m+1} x_{m+1} - \dots - D_{rn} x_n = - (Q_{r0} - X_{rt}), \quad (4.20)$$

де $x_{n+1} \geq 0$ – додаткова змінна,

$$D_{rj} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_j \text{ – базисна змінна,} \\ Q_{rj}, & \text{якщо } Q_{rj} \geq 0, \\ (-Q_{rj})(Q_{r0} - X_{rt}) / (X_{rt+1} - Q_{r0}), & \text{якщо } Q_{rj} < 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Алгоритм методу Дальтона-Ллевеліна

1. Розв'язуємо допоміжну ЗЛП (4.16) – (4.18). Нехай $\mathbf{x}(0)$ – її оптимальний розв'язок. Якщо ця задача не має розв'язку, то вихідна ЧДЗЛП також не має розв'язку.

2. Нехай на s -й ітерації розв'язана допоміжна ЗЛП, що має M обмежень та N змінних, $\mathbf{x}(s)$ – її оптимальний розв'язок.

Припустимо, що $\mathbf{x}(s)$ визначається за канонічними обмеженнями останньої ітерації, а саме:

$$x_i + Q_{i,M+1} x_{M+1} + \dots + Q_{iN} x_N = Q_{i0}, \quad i = 1, \dots, M,$$

звідки випливає, що $\mathbf{x}(s) = (Q_{10}, \dots, Q_{M0}, 0, \dots, 0)$.

3. Якщо Q_{i0} ($i = 1, \dots, p$) задовольняє умову (4.19), то кінець: $\mathbf{x}(s)$ є розв'язком вихідної ЧДЗЛП.

4. Знаходимо $r = \min \{i\}$ за всіма i ($i = 1, \dots, p$) такими, що для деякого t ($t = 1, \dots, n_{i-1}$) $X_{it} < Q_{i0} < X_{i,t+1}$, і будуємо додаткове обмеження за формулами (4.20) – (4.21) при $m = M$ та $n = N$.

5. Розширюємо таблицю за рахунок $(M+1)$ -го рядка (додаткове обмеження) та $(N+1)$ -го стовпця, що відповідає додатковій змінній x_{N+1} .

6. Розв'язуємо розширену ЗЛП за допомогою двоїстого симплекс-методу (ДСМ) і переходимо до пункту 2 із заміною s на $s+1$, M на $M+1$, N на $N+1$. Якщо на деякій ітерації ДСМ одна з додаткових змінних задачі знову стає базисною, то з подальшого розгляду виключаються відповідні їй рядок та стовпець і під час переходу до пункту 2 замінюється лише s на $s+1$.

4.5 Задача дискретного ЛП. Метод гілок і границь

Постановка задачі дискретного ЛП (ДЗЛП). Необхідно знайти вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, що мінімізує цільову функцію

$$L(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (4.22)$$

і задовольняє систему обмежень

всіх гілок r на k -му кроці виконуються співвідношення $L[\mathbf{x}(k;l)] = \xi(k;l) \leq \xi(k;r)$, то $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(k;l)$ – оптимальний розв’язок ДЗЛП.

5. Розгалуження здійснюється по недискретній компоненті $x_j(k;r)$ (з мінімальним j) розв’язку $\mathbf{x}(k;r)$, що відповідає перспективній гілці $k;r$ (якщо таких гілок декілька, то вибирається гілка з мінімальним r), додаванням до $D(k;r)$ однієї з підмножин $x_j \leq [x_j(k;r)]$ або $x_j \geq [x_j(k;r)] + 1$.

Іншими словами, як і в методі Гоморі, процес починається з розв’язання вихідної задачі. Якщо план X^* не задовольняє умову цілочисельності, то значення цільової функції $\xi = L(X)$ дає верхню оцінку шуканого розв’язку на множині планів G . Якщо деяка базисна змінна $\{x_l\}$ – дробова, то в цілочисловому плані її слід зменшити до $\{x_l\}$ або збільшити до $\{x_l\} + 1$. Тобто, вихідна множина G_0 розбивається на дві підмножини

$$G_1^{(1)} = \{X | X \in G_0, x_l \leq [x_l]\}, \quad G_1^{(2)} = \{X | X \in G_0, x_l \geq [x_l] + 1\}.$$

Знаходимо розв’язки та оцінки на цих підмножинах. Якщо розв’язки на $G^{(1)}$, та $G^{(2)}$, цілочислові, то оптимальним буде той, в якого оцінка ξ більша. Якщо ж, припустимо, що на множині $G^{(1)}$ маємо цілочисловий розв’язок, а на $G^{(2)}$ – дробовий, але $\xi(G^{(2)}) > \xi(G^{(1)})$, то продовжуємо розбивати підмножину $G^{(2)}$, оскільки на наступному кроці знайдемо цілочисловий план, оцінка якого буде більша від оцінки $\xi(G^{(1)})$. Цей процес продовжується до цілочислового розв’язку з максимальною оцінкою.

Приклад 4.2. Розв’язати методом гілок і границь задачі ЛП:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 7, \\ 4x_1 - 5x_2 &\leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0; \text{ де } -x_1, x_2 - \text{цілі.} \end{aligned}$$

Використовуючи геометричну інтерпретацію, на попередньому кроці знаходимо розв’язок вихідної ЗЛП без умов цілочисельності змінних на множині планів задачі G_0 (рис. 4.1, а). Верхня оцінка $\xi(G_0) = 7$, оптимальний план $X_0^* = (0, 7/2)$. Оскільки змінна x_2 – дробова, то у цілочисловому розв’язку її слід зменшити до $7/2 = 3$ або збільшити до $7/2 + 1 = 4$. На першому кроці множина G_0 розбивається на дві підмножини $G^{(1)}$ та $G^{(2)}$, де:

$$G_1^{(1)} = \{X : X \in G_0 \cap x_2 \leq 3\}; \quad G_1^{(2)} = \{X : X \in G_0 \cap x_2 \geq 4\}.$$

Розв’язавши дві задачі ЛП на підмножинах $G^{(1)}$ та $G^{(2)}$ (рис. 4.1, б), знайдемо: $X^{(1)} = (1/2, 3)$; $\xi(G^{(1)}) = 13/2$; $G^{(2)} = \emptyset$; $\xi(G^{(2)}) = -\infty$.

Розіб’ємо підмножину $G^{(1)}$ на $G^{(1)}_1$ та $G^{(1)}_2$ (рис. 4.1, в), де

$$G_1^{(1)} = \{X : X \in G^{(1)} \cap x_2 \leq 0\}; \quad G_1^{(2)} = \{X : X \in G^{(1)} \cap x_2 \geq 1\}.$$

Розв'язуючи отримані таким чином ЗЛП дістаємо: $X^{(1)}_2 = (0,3)$; $\xi(G^{(1)}_2) = 6$; $X^{(2)}_2 = (1,5/2)$; $\xi(G^{(2)}_2) = 6$.

Оскільки на $G^{(2)}_2$ змінна x_2 – дробова, то розбиваємо $G^{(2)}_2$ на підмножини (рис. 4.1, г):

$$G^{(1)}_{31} = \{X : X \in G^{(2)}_2 \cap x_2 \leq 2\}; \quad G^{(2)}_{31} = \{X : X \in G^{(2)}_2 \cap x_2 \geq 3\}.$$

З рис. 4.1,г дістаємо, що: $X^{(1)}_3 = (3/2, 2)$; $\xi(G^{(1)}_3) = 11/2 < \xi(G^{(1)}_2)$. $G^{(2)}_3 = \emptyset$. На цьому розв'язування цілочислової ЗЛП закінчено й тому робимо висновок, що $X^* = (0,3)$, $L(X^*) = 6$.

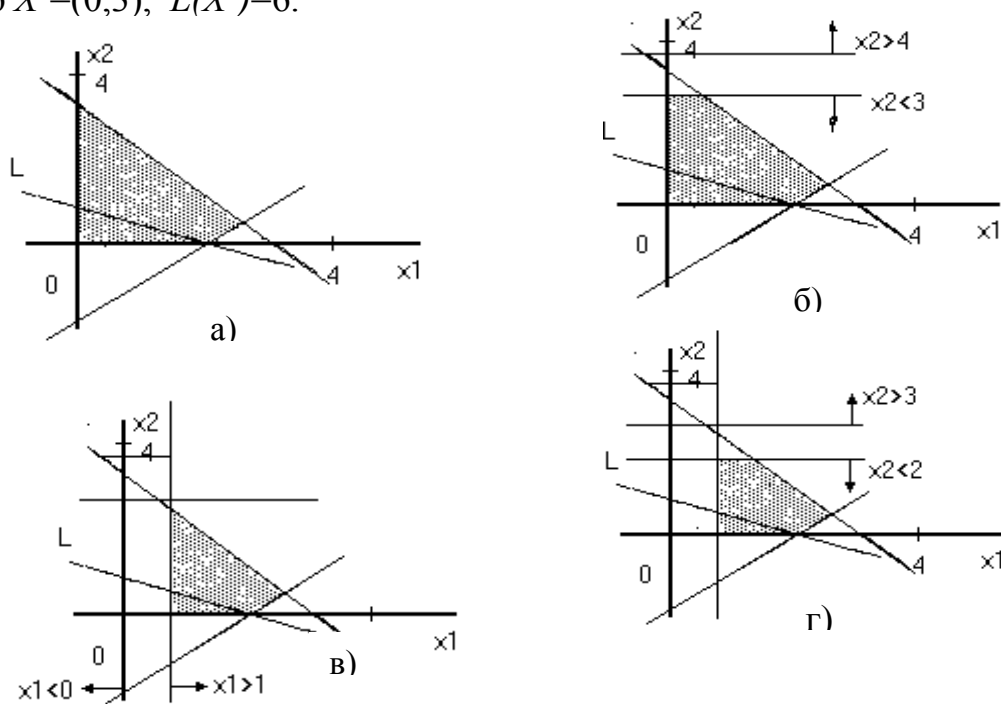


Рисунок 4.1

На рис. 4.1,в-г дано геометричну інтерпретацію розв'язання вихідної задачі, а на рис. 4.2 – дерево розв'язків.

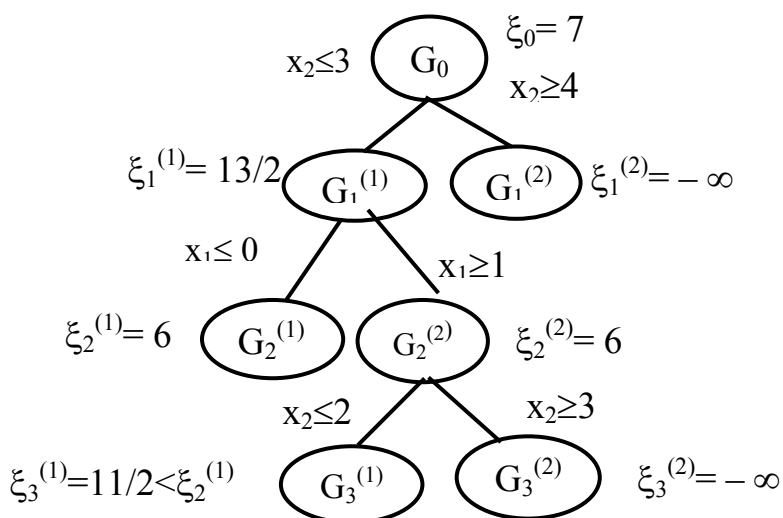


Рисунок 4.2

5 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. БЕЗУМОВНА ОДНОПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ

5.1 Загальні відомості

Незважаючи на те, що безумовна оптимізація функції однієї змінної є найпростішим типом оптимізаційних задач, вона займає центральне місце в теорії оптимізації як з теоретичної, так і з практичної точок зору. Це пов'язано з тим, що задачі однопараметричної оптимізації найчастіше зустрічаються в інженерній практиці і, крім того, знаходять своє застосування під час реалізації більш складних ітеративних процедур багатопараметричної оптимізації.

У загальному випадку під час розв'язування задач оптимізації розглядається два питання. Це аналіз функції у статиці, що полягає у тому, щоб визначити, чи є дане рішення оптимальним. Для цього існують необхідні і достатні умови оптимальності. Друге питання – аналіз функції у динаміці, що пов'язане з тим, щоб знайти оптимальне рішення. З цією метою нижче розглядається ряд одновимірних методів пошуку, орієнтованих на знаходження точки оптимуму всередині деякого заданого інтервалу. Методи пошуку, які дозволяють визначити оптимум функції однієї змінної шляхом послідовного виключення інтервалів, тобто шляхом зменшення інтервалу пошуку, носять назву *методів вилучення інтервалів*. Необхідною умовою для використання методів виключення інтервалів під час розв'язування оптимізаційних задач є вимога унімодальності функції.

Означення 5.1. Функція $f(x)$ є *унімодальною* на інтервалі $a \leq x \leq b$ тоді і тільки тоді, коли вона монотонна по обидва боки від єдиної оптимальної точки $x^* \in [a, b]$. Інакше кажучи, якщо x^* є єдиною точкою мінімуму функції $f(x)$ на інтервалі $a \leq x \leq b$ і функція $f(x)$ є унімодальною тільки тоді, коли для деяких x_1 та x_2 при $x^* \leq x_1 \leq x_2$ виконується нерівність $f(x^*) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$, а при $x^* \geq x_1 \geq x_2$ виконується нерівність $f(x^*) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$.

Унімодальність функцій є виключно важливою властивістю. Фактично усі одновимірні методи пошуку, які використовуються на практиці, ґрунтуються на припущенні, що досліджувана функція у допустимому інтервалі має властивість унімодальності. Корисність цієї властивості визначається тим фактом, що для унімодальної функції $f(x)$ порівняння значень $f(x)$ у двох різних точках інтервалу пошуку дозволяє визначити, в якому із заданих двома вказаними точками підінтервалів точка оптимуму відсутня.

Теорема 5.1. Нехай функція $f(x)$ унімодальна на замкненому інтервалі $a \leq x \leq b$, а її мінімум досягається у точці x^* . Розглянемо точки x_1 та x_2 , розташовані у інтервалі таким чином, що $a < x_1 < x_2 < b$. Порівнюючи

значення функції у точках x_1 та x_2 , можна зробити такі висновки.

1. Якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то точка мінімуму $f(x)$ не лежить у інтервалі $[a, x_1]$, тобто $x^* \in [x_1, b]$.

2. Якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то точка мінімуму $f(x)$ не лежить у інтервалі $[x_2, b]$, тобто $x^* \in [a, x_1]$.

Примітка. Якщо $f(x_1) = f(x_2)$, то можна виключити обидва крайні інтервали (a, x_1) та (x_2, b) ; при цьому точка мінімуму повинна розміщуватись у інтервалі (x_1, x_2) .

Згідно з теоремою 5.1, яку ще називають *правилом виключення інтервалів*, можна реалізувати процедуру пошуку, що дозволяє знайти точку оптимуму шляхом послідовного вилучення частин початкового обмеженого інтервалу. Пошук завершується, коли підінтервал, що залишився, зменшується до достатньо малих розмірів.

Зауважимо, що правило вилучення інтервалів усуває необхідність повного перебору всіх допустимих точок. Безперечною перевагою пошукових методів такого роду є те, що вони ґрунтуються лише на обчисленні значень функції. При цьому не вимагається, щоб досліджувані функції були диференційовані; більше того, допускаються навіть випадки, коли функцію немає можливості записати у аналітичному вигляді. Єдиною вимогою є можливість визначення значень функції $f(x)$ у заданих точках x за допомогою прямих розрахунків або імітаційних експериментів.

У загальному випадку під час пошуку оптимумів можна виділити два етапи:

- *етап встановлення границь інтервалу*, що реалізує процедуру пошуку границь досить широкого інтервалу, що містить точку оптимуму;

- *етап зменшення інтервалу*, на якому реалізується скінченна послідовність перетворень початкового інтервалу із тим, щоб зменшити його довжину до заздалегідь встановленої величини.

Своєрідним індикатором важливості методів оптимізації функції однієї змінної є складність алгоритмів, які можна згрупувати таким чином:

- методи виключення інтервалів;
- методи поліноміальної апроксимації;
- методи оптимізації з використанням похідних.

5.2 Методи виключення інтервалів

Методи пошуку, що дозволяють визначити оптимум функції однієї змінної шляхом зменшення інтервалу пошуку, називаються методами виключення інтервалів. Усі методи одновимірної оптимізації ґрунтуються на припущенні, що досліджувана цільова функція у припустимій області принаймні має властивість унімодальності.

Етап встановлення границь інтервалу. Вибирається вихідна точка, а потім на основі правила виключення будується відносно широкий інтервал, що містить точку оптимуму. Для цього, зазвичай, використовується евристичний метод, наприклад, метод Свенна, де $(k+1)$ пробна точка визначається за рекурентною формулою

$$x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta, k=0,1,2...$$

де x_0 – довільно обрана початкова точка, а Δ – величина кроку, що підбирається. При цьому знак Δ визначається шляхом порівняння значень $W(x)$, $W(x_0 + |\Delta|)$ і $W(x_0 - |\Delta|)$:

- якщо $W(x_0 - |\Delta|) \geq W(x) \geq W(x_0 + |\Delta|)$, то Δ має позитивне значення;
- якщо $W(x_0 - |\Delta|) \leq W(x) \leq W(x_0 + |\Delta|)$, то Δ має негативне значення;
- якщо $W(x_0 - |\Delta|) \geq W(x) \leq W(x_0 + |\Delta|)$, то точка мінімуму лежить в інтервалі $x_0 - |\Delta|$ і $x_0 + |\Delta|$ і пошук граничних точок завершений,
- якщо $W(x_0 - |\Delta|) \leq W(x) \geq W(x_0 + |\Delta|)$, то маємо протиріччя припущенню про унімодальність.

Приклад 5.1. $W(x)=(100-x)^2$, $x_0=30$, $|\Delta|=5$.

Визначимо знак Δ :

$$\begin{aligned} W(30) &= 4900; \\ W(30+5) &= 4225; \\ W(30-5) &= 5625. \end{aligned}$$

Виконується умова $W(x_0 - |\Delta|) \geq W(x) \geq W(x_0 + |\Delta|)$, отже, Δ має позитивне значення; $x^*=30$.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 2^{0\Delta} = 35; \\ x_2 &= x_1 + 2^{1\Delta} = 45, W(45) = 3025 < W(x_1) \Rightarrow x^* > 35; \\ x_3 &= x_2 + 2^{2\Delta} = 65, W(65) = 1225 < W(x_2) \Rightarrow x^* > 45; \\ x_4 &= x_3 + 2^{3\Delta} = 105, W(105) = 25 < W(x_3) \Rightarrow x^* > 65; \\ x_5 &= x_4 + 2^{4\Delta} = 185, W(185) = 7225 > W(x_4) \Rightarrow x^* < 185. \end{aligned}$$

Шуканий інтервал $65 < x^* < 185$.

Етап зменшення інтервалу. Після того, як встановлені границі інтервалу, що містить точку оптимуму, можна застосовувати більш складну процедуру зменшення інтервалу пошуку з метою отримання уточнених оцінок координат оптимуму. Значення підінтервалу, що вилучають, на кожному кроці, залежить від розміщення пробних точок x_1 та x_2 усередині інтервалу пошуку.

Оскільки місце знаходження точки оптимуму апіорі невідоме, доцільно припустити, що розміщення пробних точок повинно забезпечувати зменшення інтервалу в одному і тому ж відношенні. Крім того, з метою підвищення ефективності алгоритму слід вимагати, щоб це відношення було максимальним (мінімаксна стратегія пошуку).

Зменшення інтервалу методом ділення навпіл

Знайти $W(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Крок 1. $x_m = (a+b)/2$; $L = b-a$; обчислити $W(x_m)$.

Крок 2. $x_1 = a + L/4$; $x_2 = b - L/4$; обчислити $W(x_1)$ і $W(x_2)$.

Крок 3. Якщо $W(x_1) < W(x_m)$, то виключити інтервал $(x_m, b]$, тобто $b = x_m$, $x_m = x_1$. Перейти до кроку 5. Якщо $W(x_1) \geq W(x_m)$, то перейти до кроку 4.

Крок 4. Якщо $W(x_2) < W(x_m)$, то виключити інтервал $[a, x_m)$, тобто $a = x_m$, $x_m = x_2$. Перейти до кроку 5. Якщо $W(x_2) \geq W(x_m)$, то виключити інтервали $[a, x_1)$ і $(x_2, b]$, тобто $a = x_1$, $b = x_2$. Перейти до кроку 5.

Крок 5. $L = b-a$. Якщо $|L| < \varepsilon$, то закінчити пошук або повернутися до кроку 2.

Зауваження

1. На кожній ітерації алгоритму виключається у точності половина інтервалу пошуку.

2. Середня точка послідовно отриманих інтервалів завжди збігається з однією із пробних точок x_1 , x_2 або x_m , знайдених на попередній ітерації. Отже, на кожній ітерації потрібно не більше двох обчислень функції.

3. Якщо проведено n обчислень значення функції, то довжина отриманого інтервалу складає $(1/2)^{n/2}$ величини початкового інтервалу.

Приклад 5.2. Мінімізувати $f(x) = (100-x)^2$ у інтервалі $60 \leq x \leq 150$.

Тут $a = 60$, $b = 150$ та $L = 150-60 = 90$. $x_m = (60+150)/2 = 105$.

Ітерація 1

$x_1 = a + (L/4) = 60 + (90/4) = 82,5$; $x_2 = b - (L/4) = 150 - (90/4) = 127,5$;
 $f(82,5) = 306,25 > f(105) = 25$; $f(127,5) = 756,25 > f(105)$.

Таким чином, виключаються інтервали $(60; 82,5)$ та $(127,5; 150)$. Довжина інтервалу пошуку зменшується з 90 до 45.

Ітерація 2

$a = 82,5$; $b = 127,5$; $x_m = 105$; $L = 127,5 - 82,5 = 45$;

$x_1 = 82,5 + (45/4) = 93,75$; $x_2 = 127,5 - (45/4) = 116,25$;
 $f(93,75) = 39,06 > f(105) = 25$; $f(116,25) = 264,06 > f(105)$.

Таким чином, інтервал невизначеності дорівнює $(93,75; 116,25)$.

Ітерація 3

$a = 93,75$; $b = 116,25$; $x_m = 105$; $L = 116,25 - 93,75 = 22,5$;

$x_1 = 99,375$; $x_2 = 110,625$; $f(x_1) = 0,39 < f(105) = 25$.

Таким чином, вилючається інтервал $(105; 116,25)$. Новий інтервал невизначеності дорівнює $(93,75; 105)$, його середня точка є 99,375 (точка x_1 на ітерації 3). Відзначимо, що за три ітерації початковий інтервал пошуку довжиною 90 зменшився до величини $(90)(1/2)^3 = 11,25$.

Як видно з алгоритму, з кожних трьох значень цільової функції W , що обчислюються в інтервалі пошуку, надалі використовується тільки два з них, а третє не дає додаткової інформації і надалі не використовується. За методом золотого перерізу цільова функція обчислюється в точках інтервалу, розташованих таким чином, щоб кожне обчислене значення цільової функції давало б нову корисну інформацію.

Зменшення інтервалу методом золотого перерізу. Із наведеного вище обговорення методу виключення інтервалів (мінімаксних стратегій пошуку) можна зробити такі висновки.

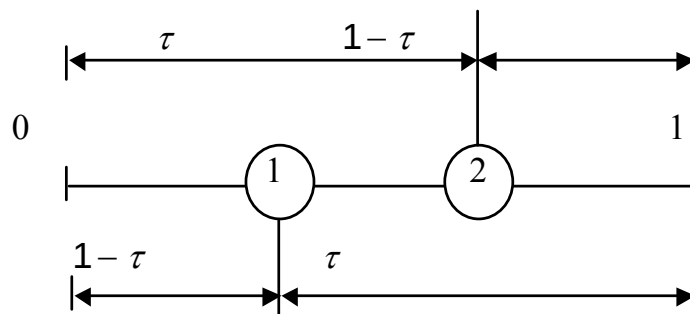
1. Якщо кількість пробних точок приймається рівною двом, то їх слід розміщувати на однакових відстанях від середини інтервалу.

2. У відповідності із загальною мінімаксною стратегією пробні точки повинні розміщуватись у інтервалі по симетричній схемі таким чином, щоб відношення довжини підінтервалу, що вилючається, до величини інтервалу пошуку залишалось постійним.

3. На кожній ітерації процедури пошуку повинно обчислюватись лише одне значення функції у отримуваній точці.

Керуючись цими висновками, розглянемо симетричне розміщення двох пробних точок на початковому інтервалі одиничної довжини, яке показано на рисунку нижче (вибір одиничного інтервалу пояснюється міркуваннями зручності).

Пробні точки віддалені від граничних точок інтервалу на відстань τ . При такому симетричному розміщенні точок довжина інтервалу, що залишається після вилучення, завжди дорівнює τ незалежно від того, яке із значень функції у пробних точках виявилось меншим. Припустимо, що вилучається правий підінтервал. На нижченаведеному рисунку показано, що підінтервал, що залишився, довжини τ містить одну пробну точку, розміщену на відстані $1 - \tau$ від лівої граничної точки.



Для того, щоб симетрія пошуку зберігалась, відстань $1 - \tau$ повинна складати τ -у частину довжини інтервалу, що дорівнює τ . При такому виборі τ наступна пробна точка розміщується на відстані, рівній τ -й частині довжини інтервалу, від правої граничної точки інтервалу. Звідси випливає, що за умови вибору τ з рівняння $1 - \tau = \tau^2$, симетрія пошуку буде зберігатися при переході до зменшеного інтервалу. Розв'язуючи це квадратне рі-

вняння, отримаємо $\tau = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$, звідки додатний розв'язок $\tau = 0,61803\dots$

Схема пошуку, за якою пробні точки ділять інтервал у цьому відношенні, відома під назвою *пошуку за допомогою методу золотого перерізу*. Зауважимо, що після перших двох обчислень значень функції кожне наступне обчислення дозволяє виключити підінтервал, величина якого складає $(1-\tau)$ -у частину від довжини інтервалу пошуку. Отже, якщо початковий інтервал має одиничну довжину, то величина інтервалу, отриманого у результаті N обчислень значень функції, рівна τ^{N-1} .

Можна показати, що пошук за допомогою методу золотого перерізу є асимптотично найбільш ефективним способом реалізації мінімаксної стратегії пошуку.

Приклад 5.3. Розглянемо задачу мінімізації функції $f(x) = (100 - x)^2$ на інтервалі $60 \leq x \leq 150$.

Для того, щоб перейти до інтервалу одиничної довжини, в задачі, що розглядається, замість змінної x підставимо змінну $\omega = (x - 60) / 90$. Виходячи з цього задача оптимізації буде мати вигляд

$$\text{знайти мінімум функції } f(\omega) = (40 - 90\omega)^2$$

$$\text{для обмежень } 0 \leq \omega \leq 1.$$

Ітерація 1. Маємо $\tau_1 = (0, 1); L_1 = 1$. Проведемо два перших обчислення значення функції $f(\omega)$:

$$\omega_1 = \tau = 0,618, f(\omega_1) = 244; \quad \omega_2 = 1 - \tau = \tau^2 = 0,382, f(\omega_2) = 31,6.$$

Виходячи з правила виключення інтервалів, оскільки $\omega_2 < \omega_1$ та $f(\omega_2) < f(\omega_1)$, інтервал $\omega \geq \omega_1$ виключається.

Ітерація 2. Маємо $\tau_2 = (0, 0,618); L_2 = 0,618 = \tau$. Наступне обчислення значення функції $f(\omega)$ проводиться при значенні змінної:

$$\omega_3 = \tau - \tau^2 = \tau(1 - \tau) = 0,236, f(\omega_3) = 352.$$

Оскільки $\omega_3 < \omega_2$, а $f(\omega_3) > f(\omega_2)$, вилучається інтервал $\omega \leq \omega_3$.

Ітерація 3. $\tau_3 = (0,236; 0,618); L_3 = 0,382 = \tau^2$. Наступне значення функції $f(\omega)$ обчислюється для точки, яка знаходиться на відстані τ помножити на довжину отриманого інтервалу від лівої граничної точки інтервалу чи на відстані $(1 - \tau)$ помножити на довжину отриманого інтервалу від правої граничної точки. Звідси:

$$\omega_4 = 0,618 - (1 - \tau)L_3 = 0,618 - \tau^2 L_3 = 0,618 - \tau^2(\tau^2) = 0,618 - \tau^4 = 0,472$$

$$f(\omega_4) = 6,15.$$

Оскільки $\omega_4 > \omega_2$, а $f(\omega_4) < f(\omega_2)$, вилучається інтервал $\omega \leq \omega_2$.

Таким чином ми отримали інтервал $0,382 \leq \omega \leq 0,618$ для змінної ω або інтервал $94,4 \leq x \leq 115,6$ для змінної x .

Якщо в процесі пошуку провести шість обчислень значень функції, то довжина отриманого інтервалу для змінної ω буде дорівнювати $\tau^{N-1} = \tau^5 = 0,09$, що відповідає інтервалу довжини 8,1 для змінної x . Для порівняння нагадаємо, що в аналогічній ситуації для методу поділу інтервалу навпіл інтервал невизначеності дорівнював би 11,25.

У загальному випадку, якщо права (XR) та ліва (XL) граничні точки інтервалу невизначеності відомі, то координати всіх наступних точок наближення згідно з методом золотого перерізу можуть бути обчислені за формулами $\omega = XR - \tau^n$ або $\omega = XL + \tau^n$ відповідно тому, який підінтервал був виключений на попередній ітерації – лівий або правий. У наведених формулах n – кількість обчислень значень функції $f(\omega)$. Пошук закінчується, коли відносна точність оптимального значення змінної досягає деякого наперед заданого значення.

Зауваження. Якщо $f(x_1) = f(x_2)$, то можна вилючити обидва крайні інтервали (a, x_1) та (x_2, b) ; при цьому точка мінімуму повинна розміщуватись у інтервалі (x_1, x_2) .

Метод випадкового пошуку. Метод випадкового пошуку застосовується для знаходження мінімуму (максимуму) довільної функції $y = F(x)$, що задана в будь-якій допустимій області D .

Довільна функція $F(x)$ задана на проміжку $[A, B]$. За допомогою давача випадкових чисел, рівномірно розподілених на проміжку $[0, 1]$, будується послідовність випадкових чисел $x\{k\}$, $k=1, \dots, N$, рівномірно розподілених на проміжку $[A, B]$. Обчислюються та порівнюються між собою значення функції $F(x)$ в точках $x\{k\}$. Мінімальне з них приймається за оцінку мінімуму функції $F(x)$ на проміжку $[A, B]$.

Якщо N прямує до нескінченності, отримана оцінка за ймовірністю прямує до глобального мінімуму функції, що розглядається.

При розв'язуванні задачі максимізації функції $F(x)$ необхідно замінити її на функцію $-F(x)$.

Метод Фібоначчі. Метод Фібоначчі (МФ) застосовується для пошуку мінімуму унімодальної функції однієї змінної $y = F(x)$, що задана на проміжку $[A, B]$.

Алгоритм методу реалізується у вигляді послідовності кроків, на кожному з яких здійснюється звуження інтервалу, що містить точку мінімуму.

На початку обчислень покладають $A\{0\} = A$, $B\{0\} = B$.

На s -у кроці визначають величини

$$\begin{aligned} L\{s\} &= B\{s\} - G\{s\} (B\{s\} - A\{s\}), \\ R\{s\} &= A\{s\} + G\{s\} (B\{s\} - A\{s\}), \end{aligned}$$

де $G\{s\} = Fi(N-s-1)/Fi(N-s)$, $s=0, \dots, N-3$, $G\{N-2\} = (1+\varepsilon)/2$ або $(1-\varepsilon)/2$, N – задане число ітерацій, $\varepsilon > 0$, $Fi(j)$ – числа Фібоначчі, що задаються рекурентним співвідношенням

$$Fi(j) = Fi(j-1) + Fi(j-2), \quad j \geq 2, \quad Fi(0) = Fi(2, 1) = 1.$$

Покладають

$$\begin{aligned} A\{s+1\} &= A\{s\}, \quad B\{s+1\} = R\{s\}, \quad \text{якщо } F(L\{s\}) \leq F(R\{s\}), \\ A\{s+1\} &= L\{s\}, \quad B\{s+1\} = B\{s\}, \quad \text{якщо } F(L\{s\}) > F(R\{s\}). \end{aligned}$$

За наближений розв'язок задачі приймають

$$x^* = (A\{N\} + B\{N\})/2, \quad y^* = F(x^*).$$

Для $M\Phi$ у випадку заздалегідь фіксованого числа ітерацій довжина кінцевого інтервалу пошуку мінімальна.

5.3 Поліноміальна апроксимація

Використання методів виключення інтервалів, що розглядалися у попередньому підрозділі, накладає єдину вимогу до досліджуваної функції: вона повинна бути унімодальною. При цьому вказані методи можна використовувати для аналізу як неперервних, так і перервних функцій, а також у випадках, коли змінні приймають дискретні значення. Структура пошуку методами виключення інтервалів базується на простому порівнянні значень функції у двох пробних точках. Крім того, при такому порівнянні до розрахунку приймається тільки відношення порядку на множині значень функції і не враховується величина різниці між значеннями функції.

У даному підрозділі розглядаються методи пошуку, що дозволяють врахувати відносні зміни значень функції і як наслідок у ряді випадків є ефективнішими, ніж методи виключення інтервалів. Однак вииграш за ефективністю досягається за рахунок введення додаткової вимоги – функції повинні бути достатньо гладкими.

Основна ідея методів пов'язана з можливістю апроксимації гладкої функції поліномом та наступного використання поліному апроксимації для оцінювання координати точки оптимуму. Необхідними умовами ефективної реалізації такого підходу є унімодальність та неперервність функції, що досліджується. Відповідно до теореми Вейерштраса [3], якщо функція неперервна на деякому інтервалі, то її з будь-яким ступенем точності можна апроксимувати поліномом достатньо високого порядку.

Таким чином, якщо функція унімодальна і знайдено поліном, який достатньо точно її апроксимує, то координату точки оптимуму функції можна оцінювати шляхом обчислення координати точки оптимуму полінома. Відповідно до теореми Вейерштраса, якість оцінювання координати точки

оптимуму, які отримуються за допомогою полінома апроксимації можна підвищити двома способами: використанням полінома більш високого порядку та звуженням інтервалу апроксимації. Другий спосіб взагалі кращий, оскільки побудова полінома апроксимації вище третього порядку є надто складною процедурою.

Найпростішим варіантом є квадратична апроксимація, яка основана на тому факті, що функція, яка має мінімум на деякому інтервалі, повинна бути хоча б квадратичною. Таким чином, під час реалізації методу оцінювання з використанням квадратичної апроксимації припускається, що в обмеженому інтервалі можна апроксимувати функцію квадратичним поліномом, а потім використовувати побудовану схему для оцінювання координати дійсного мінімуму функції.

Якщо задана послідовність точок x_1, x_2, x_3 , і відомі відповідні цим точкам значення функції f_1, f_2, f_3 , то можна визначити постійні величини a_0, a_1 і a_2 таким чином, що значення квадратичної функції

$$q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

збіжуться зі значеннями $f(x)$ у трьох вказаних точках. Перейдемо до обчислення $q(x)$ в кожній із трьох заданих точок. По-перше, оскільки $f_1 = f(x_1) = q(x_1) = a_0$, маємо $a_0 = f_1$. Далі, оскільки $f_2 = f(x_2) = q(x_2) = f_1 + a_1(x_2 - x_1)$, розв'язуючи дане рівняння отримаємо коефіцієнт $a_1 = (f_2 - f_1)/(x_2 - x_1)$.

Якщо $x = x_3$

$$f_3 = f(x_3) = q(x_3) = f_1 + (f_2 - f_1)/(x_2 - x_1) (x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Так само розв'язавши останнє рівняння щодо a_2 , отримаємо значення

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right).$$

Таким чином, за трьома заданими точками та відповідними значеннями функції можна оцінити параметри a_0, a_1 і a_2 за допомогою наведених вище формул квадратичного полінома апроксимації. Якщо точність апроксимації досліджуваної функції в інтервалі від x_1 до x_3 за допомогою квадратичного полінома є достатньо високою, то побудований поліном можна використовувати для оцінювання координати точки оптимуму. При цьому, нагадаємо, що стаціонарні точки функції однієї змінної визначаються шляхом прирівнювання до нуля її першої похідної і знаходження коренів отриманого таким чином рівняння. В даному випадку з рівняння

$$\frac{\delta q}{\delta x} = a_1 + a_2(x - x_2) + a_2(x - x_1) = 0$$

можна отримати $x = (x_2 + x_1)/2 - (a_1/2a_2)$.

Оскільки функція $f(x)$ на розглянутому інтервалі має властивість унімодалності, а квадратичний поліном апроксимації є також унімодалною функцією, то можна очікувати, що величина χ буде придатним оцінюванням координати точки дійсного оптимуму x^* .

Приклад 5.4. Розглянемо процедуру оцінювання координати точки мінімуму функції $f(x) = 2x^2 + (16/x)$ на інтервалі $1 \leq x \leq 5$. Нехай $x_1=1$, $x_3=5$, а x_2 є середньою точкою інтервалу, тобто $x_2=3$. Обчислимо відповідні значення функції: $f_1=18$; $f_2=23,33$; $f_3=53,2$.

Для того, щоб оцінити χ , необхідно знайти значення параметрів a_1 і a_2 функції апроксимації. Маємо

$$a_1 = \frac{23,33 - 18}{3 - 1} = \frac{8}{3}; \quad a_2 = \frac{1}{5 - 3} \left\{ \frac{53,2 - 18}{5 - 1} - \frac{8}{3} \right\} = \frac{46}{15}.$$

Підстановка цих значень у формулу для χ дозволяє отримати: $\chi = (3+1)/2 - (8/3)/[2(46/15)] = 1,565$. Точний мінімум досягається при $x^* = 1,5874$.

Метод послідовного оцінювання з використанням квадратичної апроксимації

Цей метод, який був розроблений Пауеллом, ґрунтований на послідовному використуванні процедури оцінювання за допомогою квадратичної апроксимації. Схема алгоритму описується таким чином. Нехай x_1 – початкова точка, Δx – обрана величина кроку по осі x .

Крок 1. Обчислити $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Крок 2. Обчислити $f(x_1)$ та $f(x_2)$.

Крок 3. Якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то $x_3 = x_1 + 2\Delta x$. Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x_3 = x_1 - \Delta x$.

Крок 4. Обчислити $f(x)$ та знайти

$F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$, $X_{\min}$ – точка x_i , яка є $F_{\min}$.

Крок 5. За трьома точками x_1, x_2, x_3 обчислити χ .

Крок 6. Перевірка щодо закінчення пошуку.

а) різниця $F_{\min} - f(\chi)$ досить мала?

б) різниця $X_{\min} - \chi$ досить мала?

Якщо обидві вимоги виконуються, закінчити пошук. В іншому випадку перейти до кроку 7.

Крок 7. Обрати «найкращу» точку ($x_{\min}$ або χ) та дві точки по обидва боки від неї. Позначити ці точки у природному порядку та перейти до кроку 4.

Відзначимо, що під час першої реалізації кроку 5 границі інтервалу,

який має точку мінімуму, встановлюються необов'язково. При цьому отримана точка χ може знаходитися за точкою x_3 . Для того, щоб виключити можливість дуже великого екстраполяційного пересування, слід провести після кроку 5 додаткову перевірку і у випадку, коли точка χ знаходиться дуже далеко від x_3 , замінимо χ точкою, координата якої обчислюється з урахуванням встановленої раніше довжини кроку.

Приклад 5.5. Мінімізувати функцію $f(x)=2x^2+(16/x)$.

Нехай початкова точка $x_1=1$ і довжина кроку $\Delta x=1$. Для перевірки відносного закінчення пошуку використовуються такі параметри збіжності:

$$\left| \frac{\text{різниця значень } x}{x} \right| \leq 3 \times 10^{-2}, \quad \left| \frac{\text{різниця значень } f}{f} \right| \leq 3 \times 10^{-3}.$$

Ітерація 1

Крок 1. $x_2 = x_1 + \Delta x = 2$.

Крок 2. $f(x_1)=18$, $f(x_2)=16$.

Крок 3. $f(x_1) > f(x_2)$, тобто слід покласти, що $x_3 = 1 + 2 = 3$.

Крок 4. $f(x_3)=23,33$; $F_{\min}=16$; $X_{\min}=x_2$.

Крок 5.

$$a_1 = \frac{16-18}{2-1} = -2; \quad a_2 = \frac{1}{3-2} \left\{ \frac{23,33-18}{3-1} - a_1 \right\} = \frac{5,33}{2} + 2 = 4,665;$$

$$\chi = \frac{1+2}{2} - \frac{(-2)}{2(4,665)} = 1,5 + \frac{1}{4,665} = 1,714; \quad f(\chi) = 15,210.$$

Крок 6. Перевірка щодо закінчення пошуку:

$$\left| \frac{16-15,210}{15,210} \right| = 0,0519 > 0,003.$$

Таким чином продовжуємо пошук.

Крок 7. Обираємо χ як «найкращу» точку, а $x_1=1$ та $x_2=2$ – як точки, що її оточують. Позначимо ці точки у природному порядку і перейдемо до ітерації 2, яка починається з кроку 4.

Ітерація 2.

Крок 4. $x_1=1$; $f_1=18$; $x_2=1,714$; $f_2=15,210=F_{\min}$; $X_{\min}=x_2$; $x_3=2$; $f_3=16$.

Крок 5.

$$a_1 = \frac{15,210-18}{1,714-1} = -3,908; \quad a_2 = \frac{1}{2-1,714} \left\{ \frac{16-18}{2-1} - (-3,908) \right\} = \frac{1,908}{0,286} = 6,671;$$

$$\chi = \frac{2,65}{2} - \frac{(-4,397)}{2(7,647)} = 1,6125; \quad f(\chi) = 15,412.$$

Крок 6. Перевірка щодо закінчення пошуку:

$$\left| \frac{15,210 - 15,142}{15,142} \right| = 0,0045 > 0,003.$$

Крок 7. Обираємо χ як «найкращу» точку, а $x_1=1$ та $x_2=1,714$ – як точки, що її оточують.

Ітерація 3.

Крок 4. $x_1=1$; $f_1=18$; $x_2=1,65$; $f_2=15,142=F_{\min}$;

$$X_{\min}=x_2; x_3=1,174; f_3=15,210.$$

Крок 5.

$$a_1 = \frac{15,142 - 18}{1,65 - 1} = -4,397; a_2 = \frac{1}{1,714 - 1,650} \left\{ \frac{15,210 - 18}{1,714 - 1} - (-4,397) \right\} = 7,647;$$

$$\chi = \frac{2,65}{2} - \frac{(-4,397)}{2(7,647)} = 1,6125; f(\chi) = 15,123.$$

Крок 6. Перевірка щодо закінчення пошуку:

$$\text{а) } \left| \frac{15,142 - 15,123}{15,123} \right| = 0,0013 > 0,003.$$

$$\text{б) } \left| \frac{1,65 - 1,6125}{1,6125} \right| = 0,023 < 0,03.$$

Таким чином пошук закінчено.

5.4 Методи оптимізації з використанням похідних

Доцільно припустити, що ефективність пошукових процедур істотно підвищиться, якщо на додаток до умови безперервності ввести вимогу диференційовності цільової функції. Необхідна умова існування оптимуму цільової функції в точці x^*

$$W'(x^*) = d/dx \big|_{x=x^*} = 0.$$

У випадку, якщо цільова функція містить члени, що включають x у третій і більш високих степенях, то отримати аналітичний розв'язок рівняння $W'(x)$ важко. У цих випадках доцільно використовувати чисельні методи знаходження коренів нелінійних рівнянь:

- метод середньої точки;
- метод хорд;
- метод дотичних;

Метод середньої точки. Метод оснований на алгоритмі виключення інтервалів, на кожній ітерації якого розглядається одна пробна точка R .

Якщо в точці R виконується нерівність $W'(R) < 0$, то внаслідок унімодальності функції точка оптимуму не може лежати лівіше точки R . Аналогічно, якщо $W'(R) > 0$, то інтервал $x > R$ можна виключити.

Нехай в інтервалі $[a, b]$ існують дві точки N і P , у яких похідні $W'(N) < 0$ і $W'(P) > 0$. Оптимальна точка x^* розташована між N і P .

Крок 1. Покласти $P = b$, $N = a$, причому $W'(a) < 0$ і $W'(b) > 0$.

Крок 2. Обчислити $R = (P+N)/2$ і $W'(R)$.

Крок 3. Якщо $W'(R) < \varepsilon$, то закінчити пошук. Інакше, якщо $W'(R) < 0$, покласти $N=R$, і перейти до кроку 2. Якщо ж $|W'(R)| > \varepsilon$, покласти $P = R$ і перейти до кроку 2.

Як впливає з логічної структури, процедура пошуку за методом середньої точки оснований на дослідженні тільки знаку похідної.

Приклад 5.6. Мінімізувати $W(x) = 2x^2 + (16/x)$ на інтервалі $1 \leq x \leq 5$.

$$W'(x) = d(x)/dx = 4x - 16/x^2.$$

Ітерація 1.

Крок 1. $N = 1$; $P = 5$; $W'(5) = 19,36$; $W'(1) = -12$.

Крок 2. $R = (5+1)/2 = 3$.

Крок 3. $W'(3) = 10,22 > 0$; покласти $P = 3$.

Ітерація 2.

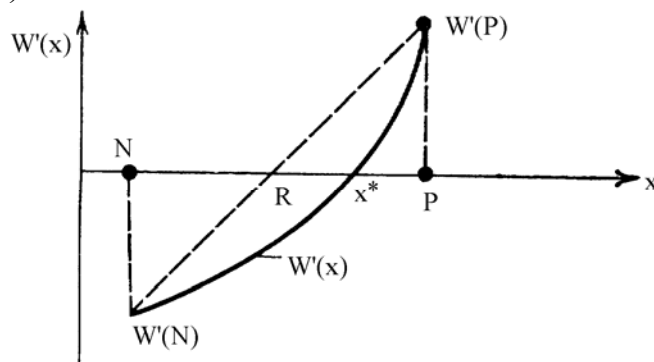
Крок 2. $R = (3+1)/2 = 2$.

Крок 3. $W'(2) = 4 > 0$; покласти $P = 2$.

Наступні аналогічні ітерації продовжуються до тих пір, поки не буде виконуватися нерівність

$$|W'(R)| \leq \varepsilon,$$

Метод хорд. Метод орієнтований на пошуку кореня рівняння $W'(x)$ в інтервалі $[a, b]$, у якому існують дві точки N і P , у яких знаки похідних різні. Алгоритм методу хорд дозволяє апроксимувати функцію $W'(x)$ «хордою» і знайти точку, у якій січна графіка $W'(x)$ перетинає вісь абсцис (див. на рисунку нижче).



Крок 1. Наступне наближення до стаціонарної точки x^* визначається за формулою $R = P W'(P) (P - N) / [W'(P) - W'(N)]$.

Крок 2. Обчислити $W'(R)$.

Крок 3. Якщо $W'(R) < \varepsilon$, то закінчити пошук. Інакше необхідно вибрати одну з точок P або N , щоб знаки похідних у цій точці і точці R були різні. Повернутися до кроку 1.

Як видно з алгоритму, метод хорд реалізований на дослідженні як знаку похідної, так і її значення. Тому цей метод ефективніший, ніж метод середньої точки.

Приклад 5.7. Мінімізувати $W(x)=2x^2+(16/x)$ в інтервалі $1 \leq x \leq 5$.

$$W'(x) = d(x)/dx = 4x - 16/x^2.$$

Ітерація 1.

Крок 1. $N=1$; $P=5$; $W'(5)=19,36$; $W'(1)=-12$.

Крок 2. $R=5-\{19,36/[(19,36+12)/4]\}=2,53$.

Крок 3. $W'(2,53)=7,62 > 0$; покласти $R=2,53$.

Ітерація 2.

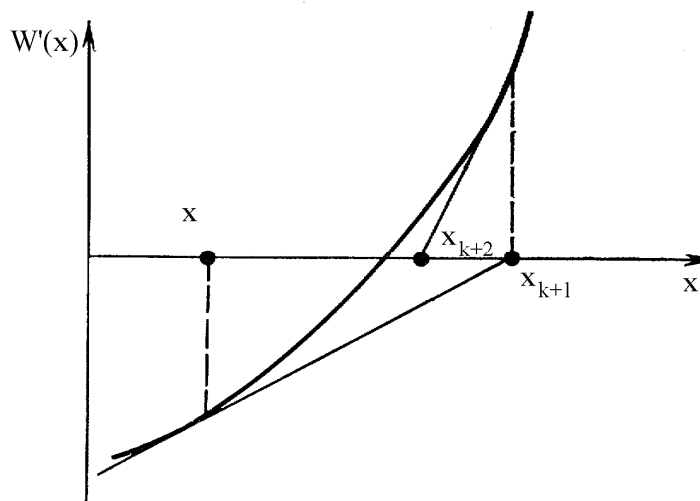
Крок 2. $R=2,53-\{7,62/[(7,62+12)/1,53]\}=1,94$.

Крок 3. $W'(1,94)=3,51 > 0$; покласти $R=1,94$.

Ітерації продовжуються поки не буде виконуватись умова $|W'(R)| \leq \tilde{\varepsilon}$.

Метод дотичних. Метод орієнтований на пошук кореня рівняння $W'(x)$ в інтервалі $[a,b]$, в якому існують дві точки N та P , у яких знаки похідних різні.

Робота алгоритму починається з точки x_0 , яка є початковим наближенням кореня рівняння $W'(x) = 0$. Далі будується лінійна апроксимація функції $W'(x)$ у точці x_1 , і точка, у якій апроксимувальна лінійна функція перетворюється в нуль, приймається як наступне наближення (див. на рисунку нижче). Якщо точка x_k прийнята як поточне наближення до оптимальної точки, то лінійна функція, що апроксимує функцію $W'(x)$ у точці x_k , записується як $W'(x, x_k) = W'(x_k) + W''(x_k)(x - x_k)$. Прирівнявши праву частину рівняння до нуля, одержимо таке наближення до шуканої точки.



Алгоритм методу дотичних

Крок 1. Наступне наближення до стаціонарної точки x^* визначається за формулою $x_{k+1} = x_k - [W'(x_k)/W''(x_k)]$.

Крок 2. Обчислити $W'(x_{k+1})$, $W''(x_{k+1})$

Крок 3. Якщо $|W'(x_{k+1})| < \varepsilon$, то закінчити пошук. Інакше необхідно повернутися до кроку 1.

Як видно з алгоритму, цільова функція $W(x)$ повинна бути двічі диференційованою.

Приклад 5.8. Мінімізувати $W(x)=2x^2+(16/x)$, поклавши $x_1=1$.

$$W'(x) = d(x)/dx = 4x - 16/x^2; \quad W''(x) = 4 + (32/x^3).$$

Ітерація 1. $x_1=1$; $W'(1) = -12$; $W''(1) = 36$; $x_2 = 1 - (-12/36) = 1,33$.

Ітерація 2. $x_2=1,33$; $W'(1,33) = -3,73$; $W''(1,33) = 17,6$;
 $x_3 = 1,33 - (-3,73/17,6) = 1,54$.

Ітерації продовжуються до тих пір, поки не буде виконуватись умова

$$|W'(x_k)| \leq \varepsilon.$$

6 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОДИ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

6.1 Класична задача математичного програмування

Класична задача математичного програмування має такий вигляд:

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \text{extrem}, \\ g_i(x_1, \dots, x_n) &= b_i, i=1, m, \quad m < n. \end{aligned}$$

У загальному випадку можливі такі підкласи задач математичного програмування:

- а) $(n = 1, m = 0)$;
- б) $(n > 1, m = 0)$; в) $(n > 1, m \neq 0)$.

Щоб класичним методом можна було відшукати екстремальні точки, функції $F(X)$ та $g(X)$ мають бути неперервними та диференційованими і мати неперервні похідні хоча б до другого порядку включно.

Стаціонарні точки функції у випадках а) і б) визначаються як розв'язок системи рівнянь $\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n}$, яка у загальному випадку може

бути нелінійною. Серед стаціонарних точок можуть бути і точки перерізу (сідлові точки) функції.

Щоб визначити тип стаціонарних точок для функції однієї змінної, треба перевірити достатні умови, якими визначаються вид екстремуму й сідлові точки. Так, для існування максимуму функції однієї змінної достатні умови мають вигляд

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} < 0, \quad k = \overline{2, n}.$$

Якщо маємо функцію двох змінних, то достатні умови існування максимуму полягають у від'ємності матриці Гессе, тобто у виконанні умов:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} < 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0.$$

В інших випадках достатні умови мають досить складний характер. Метод множників Лагранжа застосовується для знаходження умовного екстремуму, тобто екстремуму функції $F(x_1, \dots, x_n)$ на множині точок, які є розв'язками системи рівнянь вигляду $g_i(x_1, \dots, x_n) = b_i$, $i = \overline{1, m}$, $m < n$. Цю задачу замінимо простішою задачею знаходження відповідного екстремального значення так званої функції Лагранжа, яка має структуру

$$L(X, \lambda) = F(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

де $\lambda = 1, m$ - множники Лагранжа.

Необхідні умови існування екстремуму функції Лагранжа полягають у виконанні рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Розв'язання цієї системи щодо змінних X_j та λ_i дає можливість визначити позиції стаціонарної точки. Аналіз функції $F(x)$ у визначеній точці дає змогу з'ясувати вид екстремуму функції $F(x)$.

Приклад 6.1. Знайти $F(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extrem}$
за умови $g(x) = x_1^2 - x_2 + 1 = 0$.

Розв'яжемо умову $g(x) = 0$ щодо x_2 : $x_2 = x_1^2 + 1$.
Замінивши x_2 у функції мети, дістанемо функцію однієї змінної

$$F(x_1) = x_1^4 + 3x_1^2 - 2x_1 + 2.$$

Стаціонарна точка цієї функції задовольняє умову

$$dF/dx_1 = 2x_1^3 + 3x_1 - 1 = 0,$$

яка має розв'язок $x_1^* = 0,313$.

Оскільки друга похідна $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 3$ у цій точці додатна, то функція $F(x_1)$ має мінімум. При цьому $x_2^* = 1,098$, а $F(x_1^*, x_2^*) = 1,678$.

Приклад 6.2. Для розглянутої вище задачі функція Лагранжа має вигляд:

$$L(X, \lambda) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \lambda(x_1^2 - x_2 + 1).$$

Дістанемо необхідні умови екстремуму

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(\lambda + 1) - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 - x_2 + 1 = 0.$$

Розв'язання цієї системи рівнянь дає $x_1^* = 0,313$; $x_2^* = 1,098$; $\lambda^* = 2,196$. Виконаємо аналіз функції у точці $X^* = (0,313; 1,098)$ за допомогою матриці Гессе. Знайдемо

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} > 0$, тобто $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$, то матриця Гессе достатньо визначена, а тому функція $F(x)$ опукла і у точці X^* досягає мінімуму.

6.2 Задача опуклого квадратичного програмування

Постановка задачі опуклого програмування (ЗОП). Знайти вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$, що мінімізує (максимізує) функцію $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$ і задовольняє систему обмежень

$$G_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

де функції $F, G_i (i = 1, \dots, m)$ – опуклі.

Таким чином, для задачі опуклого програмування цільова функція опукла, а обмеження визначають опуклу допустиму множину.

Постановка задачі опуклого квадратичного програмування. Знайти

вектор x , що мінімізує цільову функцію $F(x) = x D x^T + c x^T$ і задовольняє систему обмежень:

$$A x^T \leq b^T, \quad x \geq 0,$$

де $c = (c_1, \dots, c_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $D = \|d_{kl}\|$, $k, l = 1, \dots, n$, $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, матриця D симетрична та невід'ємно визначена.

Таким чином, для задачі опуклого квадратичного програмування (ЗОКП) цільова функція – опукло-квадратична, а обмеження – лінійні і визначають опуклу допустиму множину.

Зауважимо, що для випадку $n = 2$, $m = 1$ ЗОКП має вигляд:

$$\begin{aligned} d_{11} x_1^2 + d_{22} x_2^2 + 2 d_{12} x_1 x_2 + c_1 x_1 + c_2 x_2 &\rightarrow \min, \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\leq a_{10}; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

до того ж $D = \|d_{kl}\|$; $k, l = 1, 2$; $d_{12} = d_{21}$.

Основні твердження та теореми

Означення 6.1. Множина W називається опуклою, якщо для довільних точок $x, y \in W$, та $t \in [0, 1]$ виконується $tx + (1-t)y \in W$.

Означення 6.2. Функція $H(x)$, $x \in W \subset E^n$, де W – опукла множина, називається опуклою, якщо для довільних точок $x, y \in W$ та $t \in [0, 1]$ виконується нерівність $H(tx + (1-t)y) \leq tH(x) + (1-t)H(y)$.

Теорема 6.1. Множина $\{x : H(x) \leq 0\}$, де $H(x)$ опукла, є опуклою.

Теорема 6.2. Розріз опуклих множин є опуклою множиною.

Теорема 6.3. Квадратична функція $F(x) = x D x^T + c x^T$ опукла, якщо матриця D – невід'ємно визначена.

Теорема 6.4. Матриця D – невід'ємно визначена, якщо всі її діагональні мінори невід'ємні:

$$\det(D(k)) \geq 0, \quad D(k) = \|d_{ij}\|, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Теорема Куна-Таккера-1. Нехай допустима область

$$D = \{x \in E^n : G_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \geq 0\}$$

задачі опуклого програмування задовольняють умову Слейтера: існує $x \in D$ таке, що для всіх $i = 1, \dots, m$ $G_i(x) < 0$, тобто множина D має внутрішні точки. Тоді для того, щоб вектор x^* був оптимальним розв'язком задачі опуклого програмування, необхідно і достатньо, щоб існував вектор $u^* \geq 0$ такий, що пара (x^*, u^*) є сідловою точкою функції Лагранжа:

$$L(x, u) = F(x) + [u_1 G_1(x) + \dots + u_m G_m(x)],$$

$$x=(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad u=(u_1, \dots, u_m) \geq 0.$$

Кажуть, що точка (x^*, u^*) є *сідловою точкою* функції $L(x, u)$, якщо для всіх $x \geq 0, u \geq 0$ мають місце нерівності

$$L(x^*, u) \leq L(x^*, u^*) \leq L(x, u^*).$$

Теорема Куна-Таккера-2. Для неперервно диференційовних функцій $F(x), G_i(x), i=1, \dots, m$, теорема Куна-Таккера може бути переформульована таким чином. Вектор x^* є оптимальним розв'язком задачі опуклого програмування тоді і лише тоді, коли існує вектор $u^* \geq 0$ такий, що для пари (x^*, u^*) виконуються умови:

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, u^*) &\geq 0, \quad \nabla_x L(x^*, u^*)(x^*)^T = 0, \quad j=1, \dots, n, \\ \nabla_u L(x^*, u^*) &\leq 0, \quad \nabla_u L(x^*, u^*)(u^*)^T = 0, \quad i=1, \dots, m. \end{aligned}$$

Для задачі опуклого квадратичного програмування останні співвідношення набувають вигляду

$$\begin{aligned} c + 2xD + uA &\geq 0; \\ (c + 2xD + uA)x^T &= 0; \\ xA^T - b &\leq 0; \\ (xA^T - b)u^T &= 0; \\ x &\geq 0, \quad u \geq 0. \end{aligned}$$

Допоміжна ЗЛП для ЗОКП. Якщо ввести вектори $y=(y_1, \dots, y_n) \geq 0$ та $v=(v_1, \dots, v_m) \geq 0$, то вищенаведені співвідношення матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} c + 2xD + uA - y &= 0; \\ xA^T - b + v &= 0; \\ yx^T &= 0; \\ vu^T &= 0; \\ x &\geq 0, \quad u \geq 0, \quad y \geq 0, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

Зауважимо, що для випадку $n=2, m=1$ матимемо

$$\begin{aligned} 2d_{11}x_1 + 2d_{12}x_2 + a_{11}u - y_1 &= -c_1, \\ 2d_{12}x_1 + 2d_{22}x_2 + a_{12}u - y_2 &= -c_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v &= a_{10}, \\ x_1y_1 = 0, \quad x_2y_2 = y_2, \quad uv &= 0, \\ x_1, x_2, u, y_1, y_2, v &\geq 0. \end{aligned}$$

Наведена вище система складається з $n+m$ лінійних рівнянь щодо $2(m+n)$ невідомих x_j, y_j ($j=1, \dots, n$), u_i, v_i ($i=1, \dots, m$). Крім того повинні виконуватись такі умови: якщо $x_j > 0$, то $y_j = 0$, якщо $y_j > 0$, то $x_j = 0$, якщо $u_i > 0$, то $v_i = 0$, якщо $v_i > 0$, то $u_i = 0$.

Отже, шуканим розв'язком системи може бути довільний невід'ємний базисний її розв'язок, але такий, що змінні x_j та y_j (а також u_i та v_i) з однаковими індексами не можуть бути водночас базисними. Для відшукування такого розв'язку можна застосувати будь-який із відомих методів ЛП, зокрема, *метод штучного базису*. З цією метою запишемо досліджувану систему у вигляді

$$\begin{aligned} 2xD + uA - y &= -c; \\ xA^T + v &= b. \end{aligned}$$

Будемо вважати, що праві частини цієї системи невід'ємні: $-c \geq 0, b \geq 0$ (оскільки, в іншому випадку відповідні рівняння, їх праву і ліву частину досить помножити на -1). Згідно з методом штучного базису у кожне рівняння отриманої системи, яке не містить базисної змінної, вводимо штучну змінну. Оскільки змінні v_i ($i=1, \dots, m$) можна вважати базисними, то штучні змінні $z=(z_1, \dots, z_n) \geq 0$ вводимо тільки в перше рівняння вищенаведеної системи і розглядаємо допоміжну КЗЛП

$$\begin{aligned} Zi^T &\rightarrow \min, \\ 2xD + uA - y + z &= -c; \\ xA^T + v &= b; \\ x \geq 0, u \geq 0, y \geq 0, v \geq 0, z \geq 0, \end{aligned}$$

де $i=(1, 1, \dots, 1)$ – n -вимірний одиничний вектор.

Квадратичний симплекс-метод. Описана вище задача розв'язується симплекс-методом. Якщо знайдений допустимий розв'язок цієї задачі задовольняє умови доповнювальної нежорсткості, то він визначає оптимальний розв'язок вихідної ЗОКП. Інакше треба перейти до нового розв'язку. При цьому до базисних включається нова змінна з нульовою оцінкою.

Симплекс-метод з умовами для розв'язування допоміжної КЗЛП, побудованої на основі вихідної задачі опуклого квадратичного програмування, і називають *квадратичним симплекс-методом* (алгоритм звичайного симплекс-методу). Якщо в оптимальному розв'язку допоміжної КЗЛП всі штучні змінні z_j ($j=1, \dots, n$) приймають нульові значення, то, відкидаючи їх, отримаємо розв'язок, частина якого відповідає змінним початкової задачі опуклого квадратичного програмування, і буде її оптимальним розв'язком. Якщо ж в оптимальному розв'язку допоміжної КЗЛП значення хоча б однієї із штучних змінних відмінне від нуля, то система не має розв'язків, а, отже,

множина сідлових точок функції Лагранжа початкової задачі опуклого квадратичного програмування порожня.

6.3 Метод Франка-Вульфа розв'язання задач квадратичного програмування (ЗКП)

У матричній формі ЗКП можна записати у вигляді

$$\max F(X) = CX + \frac{1}{2} X^T DX, \quad AX \leq b, \quad X \geq 0.$$

де D – симетрична, від'ємно визначена квадратна матриця коефіцієнтів квадратичної форми.

Як відомо, із умов теореми Куна-Таккера випливає, що вектор X^* буде розв'язком ЗКП тоді й тільки тоді, коли існують такі m -вимірні вектори $\lambda \geq 0$ та $W \geq 0$ і n -вимірний вектор $V=0$, за яких виконуються умови:

$$C+DX-\lambda A+V=0; \quad b-AX-W=0; \quad V^T X=0; \quad W^T \lambda=0.$$

Дві останні умови нелінійні (умови додаткової нежорсткості). З них випливає, що меншою мірою n змінних з X та V , а також m змінних з λ та W мають перетворюватися у нуль. Звідси випливає, що для знаходження розв'язку ЗКП з від'ємно визначеною квадратичною формою досить розв'язати систему рівнянь і задовольнити умови додаткової нежорсткості.

Використовуючи метод штучного базису, формулюємо задачу:

$$\begin{aligned} \min & (M \sum_{j=1}^n u_j + M \sum_{i=1}^m y_i), \\ & DX - \lambda A + V + U = -C, \\ & AX + W + Y = b, \\ & X \geq 0; \lambda \geq 0; V \geq 0; W \geq 0; U \geq 0; Y \geq 0. \end{aligned}$$

Якщо у результаті її розв'язання вдалось вивести з базису усі штучні змінні і виконати умови додаткової нежорсткості, то знайдений базисний розв'язок буде розв'язком ЗКП. Розглянемо метод Франка-Вульфа.

Переформулюємо задачу: серед довільних базисних розв'язків системи знайти такий, який перетворює у нуль $V^T X + \lambda^T W$. Розглянемо вектор

$$Z=(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)$$

та вектор

$$\bar{Z}=(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

Тоді:

$$V^T X + W^T \lambda = \frac{1}{2} Z^T \bar{Z} \rightarrow \min,$$

$$BZ = d, \quad Z \geq 0.$$

де

$$B = \begin{bmatrix} D & A^T E & 0 \\ A & 0 & 0 & E \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}.$$

Виконаємо ряд ітерацій так, щоб опукла функція $T(Z) = Z^T Z$ мінімізувалася за таким рекурентним правилом: у результаті k -го кроку маємо довільний розв'язок Z^k , що відповідає системі обмежень задачі, а також довільний розв'язок ω^k , який задовольняє ті самі обмеження, але не обов'язково буде базисним. Йому відповідає додатне значення $T(Z)$ (на першому кроці $\omega^0 = \bar{Z}$). Починаючи з базисного розв'язку Z^k , мінімізуємо лінійну відносно Z форму $(Z^k)^T \omega^k$. Маємо послідовність базисних розв'язків $Z^0 = Z^k, Z^1, Z^2, \dots$, причому $(Z^0)^T \omega^k > (Z^1)^T \omega^k$. Обчислення закінчується, якщо

$$\text{а) } (Z^h)^T \bar{Z}^h = 0;$$

$$\text{б) } (Z^h)^T \omega^k \leq \frac{1}{2} (\omega^k)^T \bar{\omega}^k.$$

У випадку а) Z^k – розв'язок ЗКП, а у випадку б) знаходимо

$$Z^{k+1} = Z^k; \quad \omega^{k+1} = \omega^k + \mu (Z^{k+1} - \omega^k),$$

$$\mu = \min \left\{ 1, \frac{(\omega^k - Z^{k+1})^T \bar{\omega}^k}{(Z^{k+1} - \omega^k)^T (\bar{Z}^{k+1} - \bar{\omega}^k)} \right\}.$$

На кожному кроці маємо або а), або б), однак через певну кількість кроків будемо мати тільки а).

Приклад 6.3. Розв'язати ЗКП методом Франка - Вульфа:

$$10x_1 + 20x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_1 x_2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 \leq 10,$$

$$x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Матриця D має вигляд

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки знаки її мінорів змінюються спочатку « $-$ » потім « $+$ » то відповідно критерію Сільвестра цільова функція буде вгнутою.

Запишемо функцію Лагранжа квадратичної задачі

$$L(X, \lambda) = 10x_1 + 20x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + \lambda_1(10 - x_1 - x_2) + \lambda_2(4 - x_2).$$

Умови теореми Куна-Таккера мають вигляд:

$$\begin{aligned} 1. \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 10 - 4x_1 + x_2 - \lambda_1 \leq 0; & 2. \frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 &= x_1(10 - 4x_1 + x_2 - \lambda_1) = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 20 - 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0; & \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 &= x_2(20 - 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_2) = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 10 - x_1 - x_2 \geq 0; & \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \lambda_1 &= \lambda_1(10 - x_1 - x_2) = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 4 - x_2 \geq 0; & \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \lambda_2 &= \lambda_2(4 - x_2) = 0. \end{aligned}$$

Треба знайти такий розв'язок системи умови 1, який одночасно задовольняє і систему 2. Перепишемо систему 1 у вигляді:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + \lambda_1 &\geq 10, \\ -x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 &\geq 20, \\ x_1 + x_2 &\leq 10, \\ x_2 &\leq 4. \end{aligned}$$

Вводячи у цю систему обмежень невід'ємні додаткові змінні V_1, V_2, W_1, W_2 дістаємо

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + \lambda_1 - V_1 &= 10, \\ -x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - V_2 &= 20, \\ x_1 + x_2 + W_1 &= 10, \\ x_2 + W_2 &= 4. \end{aligned}$$

При цьому мають виконуватись умови додаткової нежорсткості

$$x_1 V_1 = 0, x_2 V_2 = 0, \lambda_1 W_1 = 0, \lambda_2 W_2 = 0.$$

Запишемо вектор $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)$ у вигляді:

$$Z = (x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, W_1, W_2),$$

та вектор $\bar{Z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_8)$, у вигляді

$$\bar{Z} = (v_1, v_2, w_1, w_2, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2).$$

Далі запишемо $V^T X + W^T \lambda = Z^T \bar{Z} / 2$.

Тепер задачу можна зобразити у вигляді:

$$Z^T \bar{Z} \rightarrow \min; BZ = d; Z \geq 0,$$

де

$$B = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

Для знаходження довільного базисного розв'язку використаємо метод штучних змінних. Введемо в систему обмежень штучну змінну $U_l = Z_g$ і запишемо цільову функцію $L' = Mz_g \rightarrow \min$ і початкову симплекс-таблицю у вигляді табл. 6.1.

Таблиця 6.1

i	Б	С	Z^1	0	0	0	0	0	0	0	0
				z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	Z_7	z_8
1	z_9	M	10	4	-1	1	0	-1	0	0	0
2	z_4	0	20	-1	4	1	1	0	-1	0	0
3	z_7	0	10	1	1	0	0	0	0	1	0
4	z_8	0	4	0	1	0	0	0	0	0	1
$m+2$			10	4	-1	1	0	-1	0	0	0

Зробимо крок симплексних перетворень і дістанемо табл. 6.2.

Таблиця 6.2

i	Б	С	Z^2	0	0	0	0	0	0	0	0
				z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8
1	z_1	0	5/2	1	-1/4	1/4	0	-1/4	0	0	0
2	z_4	0	45/2	0	15/4	5/4	1	-1/4	-1	0	0
3	z_7	0	15/2	0	5/4	0	0	1/4	0	1	0
4	z_8	0	4	0	1	0	0	0	0	0	1
$m+2$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Для перевірки умов додаткової нежорсткості розглянемо вектори

$$Z^2 = / \frac{5}{2}; 0; 0; \frac{45}{2}; 0; 0; \frac{15}{2}; 4 / , \quad \bar{Z}^2 = / 0; 0; \frac{15}{2}; 4; \frac{5}{2}; 0; 0; \frac{45}{2} /.$$

Оскільки $(Z^2)^T Z^2 \neq 0$ то разом з табл. 6.2 знайшли довільний розв'язок $\omega^0 = Z^0 = \bar{Z}^0$. Починаючи з нього мінімізуємо лінійну щодо Z функцію:

$$Z \bar{\omega} = \frac{15}{2}x + 4z + \frac{5}{2}z + \frac{45}{2}z \rightarrow \min.$$

Табл. 6.3 впливає безпосередньо з табл. 6.2.

Таблиця 6.3

I	Б	С	Z^1	0	0	15/2	4	5/2	0	0	45/2
				z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8
1	z_1	0	5/2	1	-1/4	1/4	0	-1/4	0	0	0
2	z_4	4	45/2	0	15/4	5/4	1	-1/4	-1	0	0
3	z_7	0	15/2	0	5/4	0	0	1/4	0	1	0
4	z_8	45/2	4	0	1	0	0	0	0	0	1
$m+1$			i	Б	С	Z^0	0	-7/2	-4	0	0

Вибравши другий стовпець і четвертий рядок головними, робимо крок симплексного виключення і переходимо до нової таблиці 6.4

Таблиця 6.4

I	Б	С	Z^1	0	0	15/2	4	5/2	0	0	45/2
				z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	Z_6	Z_7	z_8
1	z_1	0	7/2								
2	z_4	4	15/2								
3	z_7	0	5/2								
4	z_2	0	4								
$m+1$			30								

Оскільки $(Z^0)^T \bar{\omega}^0 > (Z^1)^T \bar{\omega}^0$, то перевіряємо умови додаткової нежорсткості

$$Z^1 = \left(\frac{7}{2}; 4; 0; \frac{15}{2}; 0; 0; \frac{5}{2}; 0 \right);$$

$$\bar{Z}^1 = \left(0; 0; \frac{5}{2}; 0; \frac{7}{2}; 4; 0; \frac{15}{2} \right).$$

Вони виконуються оскільки $(Z^1)^T Z^1 = 0$. Таким чином знайдемо оптимальний розв'язок ЗКП:

$$X^* = \left(\frac{7}{2}, 4 \right); F(X^*) = 62,5.$$

7 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Залежно від умов зовнішнього середовища і ступеня інформативності особи, що приймає рішення (ОПР), прийнята така класифікація задач прийняття рішень:

- а) в умовах ризику;
- б) в умовах невизначеності;
- в) в умовах конфлікту або протидії (активного супротивника).

7.1. Теорія корисності і прийняття рішень

7.1.1 Прийняття рішень в умовах ризику

Критерій очікуваного значення. Використання критерію очікуваного значення обумовлено прагненням максимізувати очікуваний прибуток (або мінімізувати очікувані витрати). Використання очікуваних величин припускає можливість багаторазового розв'язання однієї і тієї ж задачі, поки не будуть отримані досить точні розрахункові формули. Математично це виглядає таким чином.

Нехай X – випадкова величина з математичним сподіванням MX і дисперсією DX . Якщо $x_1, x_2, \dots, x_n$ – значення випадкової величини X , то їх середнє арифметичне (вибіркове середнє) значень $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ має

дисперсію $\frac{DX}{n}$. Таким чином, коли $n \rightarrow \infty$, то $\frac{DX}{n} \rightarrow 0$ і $\bar{x} \rightarrow MX$.

Іншими словами, для досить великого обсягу вибірки різниця між середнім арифметичним і математичним сподіванням прямує до нуля (гранична теорема теорії імовірності). Отже, відповідно даному критерію очікуване значення буде правильним тільки тоді, коли одне і те ж рішення приходить застосовувати досить велику кількість разів. Правильним буде і зворотне – орієнтація на сподівання для рішень, що приходить приймати невелике число раз, буде призводити до неправильних результатів.

Приклад 7.1. Потрібно прийняти рішення про те, коли необхідно проводити профілактичний ремонт ПЕОМ, щоб мінімізувати втрати через несправність. У випадку, якщо ремонт буде здійснюватись надто часто, витрати на обслуговування будуть великими при малих втратах через випадкові поломки.

Оскільки неможливо заздалегідь визначити, коли виникне несправність, необхідно знайти імовірність того, що ПЕОМ вийде з ладу в період часу t . У цьому і складається елемент «ризик».

Математично це виглядає таким чином: ПЕОМ ремонтується індивідуально, якщо вона зупинилася через поломку. Через T інтервалів часу ви-

конується профілактичний ремонт усіх n ПЕОМ. Необхідно визначити тимальне значення T , для якого мінімізуються загальні витрати на ремонт несправних ПЕОМ і проведення профілактичного ремонту в розрахунку на один інтервал часу.

Нехай p_t – імовірність виходу з ладу однієї ПЕОМ у момент t , а n_t – випадкова величина, що дорівнює числу усіх ПЕОМ, що вийшли з ладу у той же момент. Нехай далі C_1 – витрати на ремонт несправної ПЕОМ і C_2 – витрати на профілактичний ремонт однієї машини.

Застосування критерію сподіваного значення в даному випадку виправдано, якщо ПЕОМ працюють протягом досить великого періоду часу. При цьому очікувані витрати (ОВ) на один інтервал складуть

$$OB = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T},$$

де $M(n_t)$ – математичне сподівання числа вийшовших з ладу ПЕОМ у момент часу t .

Оскільки n_t характеризується біноміальним законом розподілу з параметрами (n, p_t) , то $M(n_t) = np_t$.

$$OB = \frac{n(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T},$$

при цьому необхідні умови оптимальності T^* мають вигляд:

$$OB(T^*-1) \geq OB(T^*), OB(T^*+1) \geq OB(T^*).$$

Отже, починаючи з малих значень T , обчислюють $OB(T)$, поки не будуть задоволені необхідні умови оптимальності.

Нехай $C_1 = 100$; $C_2 = 10$; $n = 50$. Значення p_t мають вигляд:

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$OB(T)$
1	0,05	0	$\frac{50(100 \cdot 0 + 10)}{1} = 500$
2	0,07	0,05	375
3	0,10	0,12	366,7
4	0,13	0,22	400
5	0,18	0,35	450

$T^* \rightarrow 3$, $OB(T^*) \rightarrow 366,7$ Отже профілактичний ремонт необхідно робити через $T^* = 3$ інтервали часу t .

7.1.2 Критерій «очікуване значення – дисперсія»

Критерій очікуваного значення можна модифікувати таким чином, щоб його можна було застосувати і для рідко повторюваних ситуацій.

Якщо x – випадкова величина з дисперсією DX , то середнє арифметичне $\bar{x}$ має дисперсію DX/n , де n – число доданків в $\bar{x}$. Отже, якщо DX зменшується, і ймовірність того, що $\bar{x}$ близьке до MX , збільшується. Таким чином, доцільно ввести критерій, у якому максимізація очікуваного значення прибутку поєднується з мінімізацією її дисперсії.

Приклад 7.2. Застосуємо критерій «очікуване значення – дисперсія» для прикладу 1. Для цього необхідно знайти дисперсію витрат за один інтервал часу, тобто дисперсію

$$v_T = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}.$$

Оскільки $n_t, t = \overline{1, T-1}$ – випадкова величина, то v_T також є випадковою величиною. Випадкова величина n_t має біноміальний розподіл з $M(n_t) = np_t$ і $D(n_t) = np_t(1-p_t)$. Отже,

$$\begin{aligned} D(v_T) &= D\left(\frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}\right) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 D\left(\sum_{t=1}^{T-1} n_t\right) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = \\ &= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 \right\} \end{aligned}$$

де $B_2 n = \text{const.}$

З наведеного прикладу випливає, що $M(v_T) = M[v(T)]$. Отже, шуканим критерієм буде мінімум виразу

$$M[v(T)] + \kappa D(v_T).$$

Зауваження. Константу « κ » можна розглядати як рівень *несхильності до ризику*, тому що « κ » визначає «ступінь можливості» дисперсії $D(v_T)$ стосовно математичного сподівання. Наприклад, якщо підприємець особливо гостро реагує на великі негативні відхилення прибутку вниз від $M[v(T)]$, то він може вибрати « κ » набагато більше 1. Це додає більшу вагу дисперсії і приводить до рішення, що зменшує імовірність великих втрат прибутку.

Для $\kappa = 1$ отримаємо задачу:

$$M[v(T)] + D[v(T)] = n \left\{ \left(\frac{C_1}{T} + \frac{C_1^2}{T^2} \right) \sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{C_1}{T} \right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 + \frac{C_2^2}{T} \right\}.$$

За даними з прикладу 7.1 можна скласти таку таблицю:

T	p_t	p_t^2	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	$M[v(T)] + D[v(T)]$
1	0,05	0,0025	0	0	500,00
2	0,07	0,0049	0,05	0,0025	6312,50
3	0,10	0,0100	0,12	0,0074	6622,22
4	0,13	0,0169	0,22	0,0174	6731,25
5	0,18	0,0324	0,35	0,0343	6764,00

З наведеної таблиці видно, що профілактичний ремонт необхідно робити протягом кожного інтервалу $T^* = 1$.

7.1.3 Критерій граничного рівня

Критерій граничного рівня не дає оптимального рішення, що максимізує, наприклад, прибуток або мінімізує витрати. Скоріше він відповідає визначенню *прийняттого* способу дій.

Приклад 7.3. Припустимо, що величина попиту x в одиницю часу (інтенсивність попиту) на деякий товар задається безперервною функцією з розподілом $f(x)$. Якщо запаси в початковий момент невеликі, надалі можливий дефіцит товару. Інакше до кінця періоду, що розглядається, запаси нереалізованого товару можуть виявитися надто великими. В обох випадках можливі втрати.

Таким чином визначити утрати від дефіциту дуже важко. Особа, що приймає рішення, може встановити необхідний рівень запасів таким чином, щоб величина *очікуваного* дефіциту не перевищувала A_1 одиниць, а величина *очікуваних* залишків не перевищувала A_2 одиниць. Іншими словами, нехай I – шуканий рівень запасів. Тоді

$$\begin{aligned} \text{очікуваний дефіцит} &= \int_I^{\infty} (x - I) f(x) dx \leq A_1, \\ \text{очікувані залишки} &= \int_0^I (I - x) f(x) dx \leq A_2. \end{aligned}$$

Для довільного вибору A_1 і A_2 зазначені умови можуть виявитися суперечливими. У цьому випадку необхідно послабити одне з обмежень, щоб забезпечити допустимість. Нехай, наприклад,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20}{x^2}, & \text{якщо } 10 \leq x \leq 20, \\ 0, & \text{якщо } x \leq 10 \text{ або } x \geq 20. \end{cases}$$

Тоді:

$$\int_I^{20} (x-I)f(x)dx = \int_I^{20} (x-I)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln \frac{20}{I} + \frac{I}{20} - 1);$$

$$\int_{10}^I (I-x)f(x)dx = \int_{10}^I (I-x)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln \frac{10}{I} + \frac{I}{10} - 1).$$

Застосування критерію граничного рівня приводить до нерівностей:

$$\ln I - \frac{I}{20} \geq \ln 20 - \frac{A_1}{20} - 1 = 1,996 - \frac{A_1}{20};$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \geq \ln 10 - \frac{A_2}{20} - 1 = 1,302 - \frac{A_2}{20}.$$

Граничні значення A_1 і A_2 повинні бути обрані так, щоб обидві нерівності виконувалися хоча б для одного значення I .

Наприклад, якщо $A_1 = 2$ і $A_2 = 4$, нерівності приймають вигляд:

$$\ln I - \frac{I}{20} \geq 1,896;$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \geq 1,102.$$

Значення I повинно знаходитися між 10 і 20, оскільки саме в цих межах змінюється попит. З таблиці видно, що обидві умови виконуються для I , з інтервалу (13, 17)

I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\ln I - I/20$	1,8	1,84	1,88	1,91	1,94	1,96	1,97	1,98	1,99	1,99	1,99
$\ln I - I/10$	1,3	1,29	1,28	1,26	1,24	1,21	1,17	1,13	1,09	1,04	0,99

Кожне з цих значень задовольняє умови задачі.

7.2 Прийняття рішень в умовах невизначеності

Припустимо, що особі, яка приймає рішення не протистоїть *розумний* супротивник. Дані, необхідні для ухвалення рішення в умовах невизначеності, звичайно, задаються у формі матриці, рядки якої відповідають можливим діям, а стовпці можливим станам системи.

Нехай, наприклад, з деякого матеріалу потрібно виготовити виріб, довговічність якого при допустимих витратах неможливо визначити. Навантаження вважаються відомими. Потрібно вирішити, які розміри повинен мати виріб з даного матеріалу. Варіанти рішення такі:

E_1 – вибір розмірів з розуміння максимальної довговічності;
 E_m – вибір розмірів з розуміння мінімальної довговічності;

E_i – проміжні рішення.

Умови, які необхідно розглянути:

F_1 – умови, що забезпечують максимальну довговічність;

F_n – умови, що забезпечують мінімальну довговічність;

F_i – проміжні умови.

Під результатом рішення $e_{ij} = e(E_i; F_j)$ тут можна розуміти оцінку, що відповідає варіантові E_i і умовам F_j і характеризує прибуток, корисність або надійність. Такий результат назовемо *корисністю рішення*. Тоді сімейство (матриця) рішень $\|e_{ij}\|$ має вигляд:

	F_1	F_2	$\dots$	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	$\dots$	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	$\dots$	e_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
E_m	e_{m1}	e_{m2}	$\dots$	e_{mn}

Щоб прийти до однозначного і по можливості найвигіднішого варіанта рішення необхідно ввести оцінку (цільову) функцію. При цьому матриця рішень $\|e_{ij}\|$ зводиться до одного стовпця. Кожному варіанту E_i приписується, таким чином, деякий результат e_{ir} , що характеризує, у цілому, усі наслідки цього рішення. Такий результат будемо надалі позначати тим же символом e_{ir} .

7.2.1 Класичні критерії прийняття рішень

Мінімаксний критерій. Правило вибору рішення за мінімаксним критерієм (Мм-критерієм) можна інтерпретувати таким чином: матриця рішень доповнюється ще одним стовпцем з найменших результатів e_{ir} кожного рядка. Необхідно вибрати ті варіанти, в рядках яких найбільші значення e_{ir} цього стовпця.

Обрані таким чином варіанти цілком виключають ризик. Це означає, що особа, яка приймає рішення, не може зіштовхнутися з гіршим результатом, ніж той, на який вона орієнтується. Ця властивість дозволяє вважати Мм-критерій одним з фундаментальних.

Застосування Мм-критерію буває виправдано, якщо ситуація, у якій приймається рішення буде така.

1. Про можливості появи зовнішніх станів F_j нічого невідомо;
2. Приходиться враховувати появу різних зовнішніх станів F_j ;
3. Рішення реалізується тільки один раз;
4. Необхідно виключити будь-який ризик.

Критерій Байєса – Лапласа. Позначимо через q_i – ймовірність появи

зовнішнього стану F_j . Відповідне правило вибору можна інтерпретувати таким чином: матриця розв'язків $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить математичне сподівання значень кожного з рядків. Вибираються ті варіанти, у рядках яких найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

При цьому передбачається, що ситуація, у якій приймається рішення, характеризується такими обставинами.

1. Ймовірність появи стану F_j відома і не залежать від часу.
2. Рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів.
3. Для малого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

Для досить великої кількості реалізацій середнє значення поступово стабілізується. Тому при повній (нескінченній) реалізації будь-який ризик практично виключений.

Таким чином критерій Байєса-Лапласа (В-Л-критерій) більш оптимістичний ніж мінімаксний критерій, однак, він потребує більшої інформативності і досить тривалої реалізації.

Критерій Севіджа

$$a_{ij} := \max_i e_{ij} - e_{ij},$$

$$e_{ir} := \max_i a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij}).$$

Величину a_{ij} можна трактувати як максимальний додатковий виграш, що досягається, якщо в стані F_j замість варіанта E_i вибрати інший, оптимальний для цього зовнішнього стану варіант. Величину a_{ij} можна інтерпретувати і як втрати (штрафи), що виникають у стані F_j при заміні оптимального для нього варіанта на варіант E_i . В останньому випадку e_{ir} є максимально можливими (за всіма зовнішніми станами F_j , $j = \overline{1, n}$) втратами у випадку вибору варіанта E_i .

Відповідному критерію Севіджа правило вибору трактується так.

1. Кожен елемент матриці розв'язків $\|e_{ij}\|$ віднімається з найбільшого результату $\max_i e_{ij}$ відповідного стовпця.
2. Різниці a_{ij} утворять матрицю залишків $\|e_{ij}\|$. Ця матриця поповнюється стовпцем найбільших різниць e_{ir} . Вибирають ті варіанти, у рядках яких найменше для цього стовпця значення.

Вимоги, що висуваються до ситуації, у якій приймається рішення, збігаються з вимогою до Мм-критерію.

З вимог, висунутих до розглянутих критеріїв, стає ясно, що внаслідок їх твердих вихідних позицій вони застосовні тільки для ідеалізованих практичних рішень. Коли можлива надто сильна ідеалізація, можна застосовувати одночасно по черзі різні критерії. Після цього серед варіантів ОПР вольовим методом вибирає остаточне рішення. Такий підхід дозволяє, по-перше, краще проникнути в усі внутрішні зв'язки проблеми прийня-

яття рішень і, по-друге, послабляє вплив суб'єктивного фактора.

Приклад 7.4. Під час роботи ЕОМ необхідно періодично припиняти оброблення інформації і перевіряти ЕОМ на наявність у ній вірусів. Призупинення в обробленні інформації приводять до визначених економічних витрат. У випадку ж якщо вірус вчасно виявлений не буде, можлива втрата і деякої частини інформації, що приведе і ще до додаткових витрат.

Варіанти рішення такі:

E_1 – повна перевірка;

E_2 – мінімальна перевірка;

E_3 – відмова від перевірки.

ЕОМ може знаходитися в таких станах:

F_1 – вірус відсутній;

F_2 – вірус є, але він не встиг пошкодити інформацію;

F_3 – є файли, які неможливо «вилікувати».

Результати, що включають витрати на пошук вірусу і його ліквідацію, а також витрати, пов'язані з відновленням інформації мають вигляд:

	F_1	F_2	F_3	ММ-критерій		Критерій В-Л	
				$e_{ir} = \min_j$	$\max_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
E_1	-20,0	-22,0	-25,0	-25,0	-25,0	-22,33	
E_2	-14,0	-23,0	-31,0	-31,0		-22,67	
E_3	0	-24,0	-40,0	-40,0		-21,33	<u>-21,33</u>

Відповідно ММ-критерію слід проводити повну перевірку. Критерій Байєса-Лапласа, у припущенні, що всі стани машини рівноймовірні. $P(F_j) = q_j = 0,33$, рекомендується відмовитися від перевірки. Матриця залишків для цього прикладу і їх оцінка (у тисячах) відповідно до критерію Севіджа має вигляд:

	F_1	F_2	F_3	Критерій Севіджа	
				$e_{ir} = \min_i a_{ij}$	$\min_i e_{ir}$
E_1	+20,0	0	0	+20,0	
E_2	+14,0	+1,0	+6,0	+14,0	<u>+14,0</u>
E_3	0	+2,0	+15,0	+15,0	

Приклад спеціально підібраний таким чином, щоб кожен критерій пропонував нове рішення. Невизначеність стану, у якому перевірка застає ЕОМ, перетворюється в неясність, якому критерієві впливати.

Оскільки різні критерії пов'язані з різними умовами, у яких приймається рішення, краще всього для порівняльної оцінки рекомендації тих або інших критеріїв отримати додаткову інформацію про саму ситуацію. Зокрема, якщо прийняте рішення відноситься до сотень машин з однаковими

параметрами, то рекомендується застосовувати критерій Байєса-Лапласа. Якщо ж кількість машин невелика, краще користуватися критеріями міні-макса або Севіджа.

7.2.2 Похідні критерії

Критерій Гурвіца. Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Гурвіц припустив оцінну функцію, що знаходиться між точкою зору крайнього оптимізму і крайнього песимізму:

$$\max_i e_{ir} = \{ C \min_j e_{ij} + (1 - C) \max_j e_{ij} \},$$

де C – ваговий множник.

Правило вибору відповідно до критерію Гурвіца, формується таким чином: матриця розв’язків $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, що містить середнє зважене найменшого і найбільшого результатів для кожного рядка. Вибираються тільки ті варіанти, у рядках яких найбільші елементи e_{ir} цього стовпця.

Для $C = 1$ критерій Гурвіца перетворюється в Мм-критерій. При $C = 0$ він перетворюється в критерій «азартного гравця» $\max_i e_{ir} = \max_i \max_j e_{ij}$, тобто ми подивимось з точки зору азартного гравця, що робить ставку на те, що «випаде» найвигідніший випадок.

У технічних додатках складно вибрати ваговий множник C , оскільки важко знайти кількісну характеристику для тих часток оптимізму і песимізму, що присутні під час ухвалення рішення. Тому найчастіше $C = 1/2$.

Критерій Гурвіца застосовується у випадку, коли :

- про імовірності появи стану F_j нічого невідомо;
- появу стану F_j необхідно враховувати;
- реалізується тільки мала кількість розв’язків;
- допускається деякий ризик.

Критерій Ходжа–Лемана. Цей критерій опирається одночасно на Мм-критерій і критерій Байєса-Лапласа. За допомогою параметра v визначається ступінь довіри до використовуваних розподілів ймовірностей. Якщо довіра велика, то домінує критерій Байєса-Лапласа, інакше – Мм-критерій, тобто ми шукаємо

$$\max_i e_{ir} = \max_i \{ v \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j + (1-v) \min_j e_{ir} \}, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (7.1)$$

Правило вибору, що відповідає критерію Ходжа-Лемана формулюється таким чином: матриця розв’язків $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, складеним із середніх зважених (з вагою $v \equiv const$) математичних сподівань і найменшим результатом кожного рядка (7.1). Відбираються ті варіанти розв’язків у рядках якого найбільше значення цього стовпця.

Для $C = 1$ критерій Ходжа-Лемана переходить у критерій Байєса-Лапласа, а для $C = 0$ стає мінімаксом.

Вибір суб'єктивний оскільки ступінь вірогідності будь-якої функції розподілу – «справа темна».

Для застосування критерію Ходжа-Лемана бажано, щоб ситуація, в якій приймається рішення, задовольняла властивості:

- ймовірності появи стану F_j невідомі, але деякі припущення про розподіл ймовірностей можливі;
- теоретично допускається нескінченне число реалізацій рішення;
- для малих чисел реалізацій допускається деякий ризик.

Критерій Гермейєра. Цей критерій орієнтований на величину втрат, тобто на від'ємні значення всіх e_{ij} . При цьому

$$\max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij} q_j.$$

Оскільки у господарських задачах переважно мають справу з цінами і витратами, умова $e_{ij} < 0$, зазвичай, виконується. У випадку ж, коли серед величин e_{ij} зустрічаються і додатні значення, то можна перейти до строго від'ємних значень за допомогою перетворення $e_{ij} - a$ для відповідним чином вибраного $a > 0$. При цьому оптимальний варіант рішення залежить від значення a .

Правило вибору відповідно критерію Гермейєра формулюється таким чином: матриця розв'язків $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявних у ній результатів на ймовірність відповідного стану F_j . Вибираються ті варіанти, в рядках яких знаходиться найбільше значення e_{ij} цього стовпця.

У деякому сенсі критерій Гермейєра узагальнює ММ-критерій: у випадку рівномірного розподілу $q_j = 1/n$, $j = \overline{1, n}$, вони стають ідентичними.

Умови його застосовності такі:

- ймовірності появи стану F_j невідомі;
- появу тих або інших станів, окремо або в комплексі, необхідно враховувати;
- допускається деякий ризик;
- рішення може реалізуватися один або кілька разів.

Якщо функція розподілу відома не дуже надійно, а числа реалізації малі, то, дотримуючись критерію Гермейєра, отримують невиправдано великий ризик.

BL (ММ) - критерій. Прагнення одержати критерії, які б краще пристосовувалися до наявної ситуації, ніж усі дотепер розглянуті, привело до побудови так званих складених критеріїв. Як приклад розглянемо критерій, отриманий шляхом об'єднання критеріїв Байєса-Лапласа і мінімакса.

Правило вибору для цього критерію формулюється таким чином: матриця розв'язків $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще трьома стовпцями. У першому з них записуються математичні сподівання кожного з рядків, у другому – різницю між опорним значенням

$$e_{i_0j_0} = \max_i \max_j e_{ij}$$

і найменшим значенням

$$\min_j e_{ij}$$

відповідного рядка. У третьому стовпці містяться різниці між найбільшим значенням

$$\max_j e_{ij}$$

кожного рядка і найбільшим значенням $\max_j e_{i_0j}$ того рядка, у якому знаходиться значення $e_{i_0j_0}$. Вибираються ті варіанти, рядки яких (при дотриманні співвідношень, що нижче наводяться між елементами другого і третього стовпців) дають найбільше математичне сподівання

$$e_{i_0j_0} - \max_j e_{ij},$$

з другого стовпця яке повинно дорівнювати деякому заздалегідь заданому рівню ризику $\varepsilon_{\text{дон}}$. Значення ж з третього стовпця повинно бути більше значення з другого стовпця.

Застосування цього критерію обумовлено такими ознаками ситуації, у якій приймається рішення:

- імовірності появи станів F_j невідомі, однак, є деяка апіорна інформація на користь будь-якого визначеного розподілу;
- необхідно враховувати появу різних станів (окремо та комплексно);
- допускається обмежений ризик;
- прийняте рішення реалізується один раз або багаторазово.

BL(MM)-критерій добре пристосований для побудови практичних розв'язків насамперед в області техніки і може вважатися досить надійним. Однак задані границі ризику $\varepsilon_{\text{дон}}$ і, відповідно, оцінок ризику ε_i не враховують ні число застосування рішень, ні іншу подібну інформацію. Вплив суб'єктивного фактора хоча й ослаблений, але не виключений цілком. При цьому, умова

$$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0j} \geq \varepsilon_i$$

істинна у тих випадках, коли рішення реалізується тільки один або деяке мале число разів. В цих умовах недостатньо орієнтуватися на ризик,

пов'язаний тільки з не вигідними зовнішніми станами і середніми значеннями. Через це, щоправда, можна понести деякі втрати у вдалих зовнішніх станах. Для великого числа реалізацій ця умова перестане бути такою важливою. Вона навіть допускає розумні альтернативи. При цьому невідомо, однак, чітких кількісних вказівок, в яких випадках цю умову слід було б опускати.

Критерій добутків

$$\max_i e_{ir} := \max_i \min_j e_{ij}.$$

Правило вибору в цьому випадку формулюється так: матриця розв'язків $\|e_{ij}\|$ доповнюється новим стовпцем, що містить добуток всіх результатів кожного рядка. Вибираються ті варіанти, у рядках яких знаходяться найбільші значення цього стовпця.

Застосування цього критерію обумовлено такими обставинами :

- ймовірності появи стану F_j невідомі;
- появу кожного зі станів F_j окремо необхідно враховувати;
- критерій застосуємо і при малому числі реалізацій розв'язків;
- деякий ризик допускається.

Критерій добутків застосовується у першу чергу для випадків, коли всі e_{ij} додатні. Якщо ця умова порушується, то слід виконати перетворення $e_{ij} + a$ з деякою константою $a > |\min_{ij} e_{ij}|$. Результат при цьому буде залежати від a . На практиці найчастіше $a := |\min_{ij} e_{ij}| + 1$.

Якщо ж ніяка константа не може бути визнана такою, що має сенс, то критерій добутків не застосовується.

Приклад 7.5

Розглянемо попередній приклад.

Побудова оптимального розв'язку для матриці розв'язків про перевірки за критерієм Гурвіца має вигляд (при $C=0,5$, у 10^3):

$\ e_{ij}\ $			$C \min_j e_{ij}$	$(1-C) \max_j e_{ij}$	e_{ir}	$\max_i e_{ir}$
-20,0	-22,0	-25,0	-12,5	-10,0	-22,5	
-14,0	-23,0	-31,0	-15,5	-7,0	-22,5	
0	-24,0	-40,0	-20,0	0	-20,0	-20,0

У даному прикладі в розв'язку є поворотна точка щодо вагового множника C : для $C = 0,57$.

Застосування критерію Ходжа-Лемана ($q = 0,33$, $\nu = 0,5$, у 10^3) :

$\sum_j e_{ij} q_j$	$\min_j e_{ij}$	$\nu \sum_j e_{ij} q_j$	$(1-\nu) \min_j e_{ij}$	e_{ir}	$\max_i e_{ir}$
-22.33	-25.0	-11.17	-12.5	-23.67	-23.67
-22.67	-31.0	-11.34	-15.5	-26.84	
-21.33	-40.0	-10.67	-20.0	-30.76	

Критерій Ходжа-Лемана рекомендує варіант E_1 (повна перевірка) – так само як і ММ-критерій. Зміна варіанта, що рекомендується, відбувається тільки *при* $C = 0,94$. Тому рівномірний розподіл станів розглянутої машини повинен розпізнаватися з дуже високою імовірністю, щоб його можна було вибрати за більшим математичним сподіванням. При цьому число реалізацій прийняття рішення завжди залишається довільним.

Критерій Гермейєра для $q_j = 0,33$ дає такий результат (в) 10^3 :

$\ e_{ij}\ $			$\ e_{ij} q_j\ $			$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j$	$\max_i e_{ir}$
-20,0	-22,0	-25,0	-6,67	-7,33	-8,33	-8,33	-8,33
-14,0	-23,0	-31,0	-4,67	-7,67	-10,33	-10,33	
0	-24,0	-40,0	0	-8,0	-13,33	-13,33	

Як оптимальний вибирається варіант E_1 . Порівняння варіантів за допомогою величин e_{ir} показує, що спосіб дії критерію Гермейєра є навіть гнучкішим, ніж у ММ-критерію.

У таблиці, що наведена нижче, розв'язок вибирається відповідно до BL(MM)-критерію при $q_1=q_2=q_3=^{1/2}$ (дані в 10^3).

$\ e_{ij}\ $			$\sum_j e_{ij} q_j$	$e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j}$
-20,0	-22,0	-25,0	-23,33	0	-20,0	0
-14,0	-23,0	-31,0	-22,67	+6,0	-14,0	+6,0
0	-24,0	-40,0	-21,33	+15,0	0	+20,0

Варіант E_3 (відмова від перевірки) приймається цим критерієм тільки тоді, коли ризик наближається до $\varepsilon_{\text{возм}} = 15 \times 10^3$. У багатьох технічних і господарських задачах припустимий ризик буває набагато нижчим, складаючи тільки незначний відсоток від загальних витрат. У подібних випадках буває особливо корисно, якщо неточне значення розподілу ймовірностей впливає не дуже сильно. Якщо при цьому виявляється неможливим встановити припустимий ризик $\varepsilon_{\text{дон}}$ заздалегідь, не залежно від прийнятого рішення, то допомогти може обчислення очікуваного ризику $\varepsilon_{\text{возм}}$. Тоді стає можливим подумати, чи виправданий подібний ризик. Таке дослідження, звичайно, дається легше.

Результати застосування критерію добутку при $a = 41 \cdot 10^3$ і $a = 200 \cdot 10^3$ мають вигляд:

	$\ e_{ij} + a\ $			$e_{ir} = \prod_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
$A=41$	+21	+19	+16	6384	6384
	+27	+18	+10	4860	
	+41	+17	+1	697	
$A=200$	+180	+178	+175	5607	
	+186	+177	+169	5563	
	+200	+176	+160	5632	5632

Умова $e_{ij} > 0$ для даної матриці не виконується. Тому до елементів матриці додається спочатку $a = 41 \cdot 10^3$, а потім $a = 200 \cdot 10^3$. Для $a = 41 \cdot 10^3$ оптимальним виявляється варіант E_1 , а для $a = 200 \cdot 10^3$ – варіант E_3 , так що залежність оптимального варіанта від a очевидна.

8 ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІГРОВИХ СИТУАЦІЯХ

8.1 Класифікація ігор

Ігри, у загальному випадку, можна класифікувати за кількома критеріями, наприклад, за кількістю гравців, кількістю стратегій, за характером взаємодії гравців, за характером виграшу, за кількістю ходів тощо.

Залежно від кількості гравців розрізняють ігри двох і n гравців. Перші з них найбільш вивчені. Ігри трьох і більше гравців менше досліджені через принципові труднощі, які виникають при цьому і технічні можливості отримання розв'язків, тобто, чим більше гравців – тим більше проблем.

За кількістю стратегій ігри поділяються на скінченні і нескінченні. Якщо у грі всі гравці мають скінченне число можливих стратегій, то вона називається **скінченною**. Якщо ж хоча б один з гравців має нескінченну кількість можливих стратегій гра називається **нескінченною**.

За характером взаємодії ігри поділяються на **безкоаліційні**, де гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції і на **коаліційні** (корпоративні), де гравці можуть вступати в коаліції.

За характером виграшів ігри поділяються на ігри з **нульовою сумою** (загальний виграш усіх гравців не змінюється, а ділиться між гравцями, при цьому, сума усіх виграшів дорівнює нулю) і на ігри з **ненульовою сумою**.

За видом функцій виграшу ігри поділяються на **матричні**, **біматричні**

ні, безперервні, опуклі, сепарабельні, типу дуелей та інші.

Матрична гра – це скінченна гра двох гравців з нульовою сумою, у якій задається виграш гравця 1 у вигляді матриці (рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії гравця 2; стовпець – номеру застосовуваної стратегії гравця 2; на перетині рядка i стовпця матриці знаходиться виграш гравця 1, що відповідає застосовуваним стратегіям). Для матричних ігор доведено, що кожна з них має розв’язок, який може бути знайдений шляхом зведення гри до задачі лінійного програмування.

Біматрична гра – це скінченна гра двох гравців з ненульовою сумою, у якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (рядок кожної матриці відповідає стратегії гравця 1, стовпець – стратегії гравця 2, а на їх перетині в першій матриці знаходиться виграш гравця 1, у другій матриці – виграш гравця 2.) Для таких ігор також розроблена відповідна теорія, однак, розв’язувати їх значно складніше.

Безперервною вважається гра, де функція виграшів кожного гравця є безперервною залежно від застосовуваних стратегій. При цьому доведено, що ігри цього класу мають розв’язок, однак, не розроблено практично прийнятних методів їх застосування.

Якщо функція виграшів є опуклою, то така гра називається **опуклою**. Для таких ігор розроблено прийнятні методи розв’язання, які полягають у відшуванні чистої оптимальної стратегії (визначеного числа) для одного гравця та імовірностей застосування чистих оптимальних стратегій іншого гравця. Така задача розв’язується порівняно легко.

8.2 Розв’язання матричних ігор у чистих стратегіях

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою може розглядатися як така абстрактна гра двох гравців.

Перший гравець має m стратегій $i = 1, 2, \dots, m$, другий має n стратегій $j = 1, 2, \dots, n$. Кожній парі стратегій (i, j) поставлено у відповідність число a_{ij} , що має сенс виграшу гравця 1 за рахунок гравця 2, якщо перший гравець прийме свою стратегію i , а 2 – свою стратегію j .

Кожен з гравців робить один хід: гравець 1 вибирає свою стратегію i ($i = \overline{1, m}$), гравець 2 – свою стратегію j ($j = \overline{1, n}$), після чого гравець 1 отримує виграш a_{ij} за рахунок гравця 2 (якщо $a_{ij} < 0$, то це значить, що гравець 1 платить другому суму програшу $|a_{ij}|$). На цьому гра закінчується.

Кожна стратегія гравця $i = \overline{1, m}$ і $j = \overline{1, n}$ часто називається чистою стратегією. Якщо розглянути нижченаведену платіжну матрицю то проведення кожної партії матричної гри з матрицею A зводиться до вибору гра-

вцем 1 i -го рядка, а гравцем 2 j -го стовпця і отримання гравцем 1 (за хунок гравця 2) виграші a_{ij} .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Головним у дослідженні ігор є поняття оптимальних стратегій гравців. У це поняття інтуїтивно вкладається такий зміст – стратегія гравця є оптимальною, якщо застосування цієї стратегії забезпечує йому найбільший гарантований виграш за будь-яких стратегій іншого гравця.

Виходячи з цих позицій, гравець 1 досліджує матрицю виграшів A таким чином: для кожного значення i ($i = \overline{1, m}$) визначається мінімальне значення виграшу залежно від застосовуваних стратегій гравця 2

$$\min_j a_{ij}, \quad (i = \overline{1, m}),$$

тобто визначається мінімальний виграш для гравця 1 за умови, що він прийме свою чисту стратегію i , потім з них відшукується така стратегія $i = i_o$, за якою цей мінімальний виграш буде максимальним, тобто знаходиться

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_o j_o} = \underline{\alpha}. \quad (8.1)$$

Означення 8.1. Число $\underline{\alpha}$, визначене за виразом (8.1) називається *нижньою чистою ціною гри* і показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі перший гравець, застосовуючи свої чисті стратегії для будь-яких дій другого гравця. Гравець 2 при оптимальному своєму поведінці повинен прагнути, по можливості, за рахунок своїх стратегій максимально зменшити виграш гравця 1. Тому для гравця 2 відшукується

$$\max_i a_{ij},$$

тобто визначається максимальний виграш гравця 1, за умови, що гравець 2 застосує свою j -ту чисту стратегію. Потім гравець 2 шукає таку $j = j_1$ стратегію, за якою гравець 1 отримує мінімальний виграш, тобто знаходить

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \overline{\alpha} \quad (8.2)$$

Означення 8.2 Число $\overline{\alpha}$, визначене за виразом (8.2), називається *чис-*

тою верхньою ціною гри і показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може собі гарантувати гравець 1. Іншими словами, застосовуючи свої чисті стратегії гравець 1 може забезпечити собі виграш не менше $\underline{\alpha}$, а гравець 2 за рахунок застосування своїх чистих стратегій може не допустити виграш гравця 1 більше, ніж $\bar{\alpha}$.

Означення 8.3. Якщо у грі з матрицею A $\underline{\alpha} = \bar{\alpha}$, то говорять, що ця гра має *сідлову точку* в чистих стратегіях і *чистій ціні* гри $v = \underline{\alpha} = \bar{\alpha}$.

Сідлова точка – це пари чистих стратегій (i_o, j_o) щодо гравців 1 і 2, за якими досягається рівність $\underline{\alpha} = \bar{\alpha}$. У це поняття вкладено такий зміст: якщо один із гравців дотримується стратегії, що відповідає сідловій точці, то інший гравець не зможе діяти краще, ніж дотримуватись стратегії, що відповідає сідловій точці. Математично це можна записати й інакше:

$$a_{ij_o} \leq a_{i_o j_o} \leq a_{i_o j}, \quad (8.3)$$

де i, j – будь-які чисті стратегії відповідно гравців 1 і 2; (i_o, j_o) – стратегії, що утворюють сідлову точку.

Таким чином, виходячи з (8.3), сідловий елемент $a_{i_o j_o}$ є мінімальним в i -ому рядку і максимальним у j -ому стовпці матриці A . Відшукування сідлової точки матриці A здійснюється таким чином: в матриці A послідовно в кожному *рядку* знаходять мінімальний елемент і перевіряють, чи є цей елемент максимальним у своєму *стовпці*. Якщо це так, то він і є сідловим елементом, а пари стратегій, що йому відповідають, утворюють сідлову точку. Пари чистих стратегій (i_o, j_o) гравців 1 і 2, що утворюють сідлову точку і сідловий елемент $a_{i_o j_o}$, називається *розв'язком гри*. При цьому i_o і j_o називаються *оптимальними чистими стратегіями* відповідно першого і другого гравців.

Приклад 8.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ \textcircled{2} & 3 & \textcircled{-2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \min_j a_{ij} \\ \parallel \\ \left. \begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \max_i \min_j a_{ij} = 2 \end{matrix}$$

$$\max_i a_{ij} = \begin{matrix} 2 & 5 & 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \min_j \max_i a_{ij} = 2 \end{matrix}$$

У наведеному прикладі сідловою точкою є пара $(i_o = 3; j_o = 1)$, за для

якої $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = 2$. При цьому, відзначимо, що хоча виграш у ситуації (3; 3) також дорівнює $2 = \underline{\alpha} = \bar{\alpha}$, відповідна їй клітинка матриці не буде сідловою точкою, оскільки цей виграш не є максимальним серед виграшів третього стовпця.

Приклад 8.2

$$\begin{array}{ccc}
 & \min_j a_{ij} & \\
 H = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow 10 \\ \rightarrow 20 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}} \right\} \max_i \min_j a_{ij} = 20 \\
 \begin{array}{c} \max_i a_{ij} \downarrow \\ \downarrow \end{array} & & \\
 & \begin{array}{c} 40 \quad 30 \\ \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \min_j \max_i a_{ij} = 30 \end{array} &
 \end{array}$$

З аналізу наведеної платіжної матриці H видно, що $\underline{\alpha} < \bar{\alpha}$, тобто дана матриця не має сідлової точки. Якщо перший гравець вибирає свою чисту максимінну стратегію $i = 2$, то другий гравець, вибравши свою мінімаксну стратегію $j = 2$, програє тільки 20. У цьому випадку першому гравцю вигідно обрати стратегію $i = 1$, тобто відхилитися від своєї чистої максимінної стратегії і виграти 30. Тоді гравцеві 2 буде вигідно обрати стратегію $j = 1$, тобто відхилитися від своєї чистої мінімаксної стратегії і програти 10. У свою чергу гравець 1 повинен обрати свою 2-у стратегію, щоб виграти 40, а гравець 2 відповість вибором 2-ї стратегії і т.д.

Якщо для i -ї та k -ї стратегій першого гравця виконується умова

$$a_{ij} \geq a_{kj}, j = 1, n,$$

то існує таке j , для якого $a_{ij} > a_{kj}$ то стратегія i домінує над стратегією k . Остання може бути виключена з аналізу платіжної матриці гри.

Для другого гравця, якщо стратегія j домінує над стратегією l , та $a_{ij} \geq a_{il}$, то існує таке i , для якого $a_{ij} > a_{il}$, стратегію j другого гравця можна вилучити при відшукуванні розв'язку гри.

Можна довести, що неефективним чистим стратегіям першого гравця відповідають ті рядки платіжної матриці, які домінуються деякою опуклою лінійною комбінацією інших рядків цієї матриці, а неефективним чистим стратегіям другого гравця відповідають ті стовпці платіжної матриці, які домінують деяку опуклу лінійну комбінацію інших стовпців цієї матриці. Отже, встановивши факти домінування, відповідні чисті стратегії гравців можна відкинути, викресливши з матриці їх стовпці та рядки. Таким чином, вдається спростити гру, особливо якщо факт домінування очевидний.

Приклад 8.3. Знайти неефективні чисті стратегії у наведеній нижче грі і спростити відповідну платіжну матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Оскільки третій рядок матриці домінує над першим то, викресливши з матриці перший рядок, маємо

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

У новій матриці третій стовпець домінує над першим. Тому, викресливши перший стовпець, отримаємо

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці перший стовпець домінує над опуклою лінійною комбінацією другого та третього стовпців, оскільки

$$4 > 1/2 \times 2 + 1/2 \times 4;$$

$$2 = 1/2 \times 4 + 1/2 \times 0;$$

$$4 = 1/2 \times 0 + 1/2 \times 8.$$

Викресливши перший стовпець, маємо $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

У свою чергу, в цій матриці опукла лінійна комбінація другого й третього рядків домінує над першим рядком, оскільки

$$2 = 1/2 \times 4 + 1/2 \times 0;$$

$$4 = 1/2 \times 0 + 1/2 \times 8.$$

Викреслимо перший рядок і отримаємо матрицю $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

Можна показати, що ціна гри з платіжною матрицею A' дорівнює ціні вихідної гри з платіжною матрицею A , а оптимальні стратегії гравців можна отримати, розв'язавши гру з матрицею A' .

8.3 Змішане розширення матричної гри

Дослідження в матричних іграх починається з пошуку її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, то пошуком цієї сідлової точки і закінчується дослідження гри. Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, то можна знайти нижню і верхню чисті ціни цієї гри, які вказують, що гравець 1 не повинен сподіватися на виграш більший, ніж верхня ціна гри, і може бути упевнений в отриманні виграшу не менше нижньої ціни гри.

Покращення розв'язків матричних ігор слід шукати у використанні таємності застосування чистих стратегій і можливості багаторазового повторення ігор у вигляді партії. Цей результат досягається шляхом застосування чистих стратегій випадково, з певною імовірністю.

Означення 8.4. *Змішаною стратегією гравця* називається повний набір ймовірностей застосування його чистих стратегій, тобто – це вектор, компонентами якого є ймовірності вибору чистих стратегій гравців.

Таким чином, якщо гравець 1 має m чистих стратегій $1, 2, \dots, m$, то його змішана стратегія x – це набір чисел $x = (x_1, \dots, x_m)$, що задовольняють співвідношення

$$x_i \geq 0, (i = 1, m), \sum_{i=1}^m x_i = 1.$$

Аналогічно для гравця 2, що має n чистих стратегій, змішана стратегія y – це набір чисел

$$y = (y_1, \dots, y_n), y_j \geq 0, (j = 1, n), \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

Оскільки застосування гравцем щораз тільки однієї чистої стратегії виключає застосування іншої, то чисті стратегії є *неспільними* подіями. Крім того, вони є єдиними можливими подіями.

Чиста стратегія – це окремий випадок змішаної стратегії. Дійсно, якщо в змішаній стратегії яка-небудь i -та чиста стратегія застосовується з ймовірністю 1, то всі інші чисті стратегії не застосовуються. І ця i -та чиста стратегія є частковим випадком змішаної стратегії. Для дотримання таємності кожен гравець застосовує свої стратегії незалежно від вибору іншого гравця.

Означення 8.5. Середній виграш гравця 1 у матричній грі з матрицею A описується у вигляді математичного сподівання його виграшів

$$E(A, x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = x A y.$$

Перший гравець має на меті за рахунок зміни своїх змішаних стратегій x максимально збільшити свій середній виграш $E(A, x, y)$, а другий – за рахунок своїх змішаних стратегій прагне зробити $E(A, x, y)$ мінімальним, тобто для розв’язання гри необхідно знайти такі x і y , при яких досягається верхня ціна гри

$$\bar{\alpha} = \min_y \max_x E(A, x, y).$$

Аналогічною повинна бути ситуація і для гравця 2, тобто нижня ціна гри повинна бути

$$\underline{\alpha} = \max_x \min_y E(A, x, y).$$

Подібно іграм, що мають сідлові точки в чистих стратегіях, вводиться таке означення: *оптимальними змішаними стратегіями* гравців 1 і 2 називаються такі набори x^0 і y^0 , відповідно до яких задовольняються рівності

$$\min_y \max_x E(A, x, y) = \max_x \min_y E(A, x, y) = E(A, x^0, y^0).$$

Величина $E(A, x^0, y^0)$ при цьому називається *ціною гри* і позначається через символ v .

Є також й інше означення оптимальних змішаних стратегій: x^0, y^0 називаються оптимальними змішаними стратегіями відповідно до гравців 1 і 2, якщо вони утворюють сідлову точку:

$$E(A, x, y^0) \leq E(A, x^0, y^0) \leq E(A, x^0, y)$$

Оптимальні змішані стратегії і ціна ігри називаються *розв’язком матричної гри*.

Основна теорема матричних ігор має вигляд:

Теорема (про мінімакс). Для матричної гри з будь-якою матрицею A існують рівні між собою величини

$$\underline{\alpha} = \max_x \min_y E(A, x, y) \text{ і } \bar{\alpha} = \min_y \max_x E(A, x, y).$$

Звідси, для того щоб $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ була оптимальною змішаною стратегією першого гравця для матричної гри з нульовою сумою α , платіжною матрицею A та ціною гри v , необхідне та достатнє виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \geq v, j=1, n; \sum_{i=1}^m x_i^* = 1, x_i^* \geq 0.$$

Для другого гравця $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ буде оптимальною змішаною

стратегією, якщо

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq v, i=1, m; \sum_{j=1}^n y_j^* = 1, y_j^* \geq 0.$$

Компонентами векторів (x^*, y^*) є ймовірності вибору чистих стратегій гравцями в змішаній стратегії.

8.4 Властивості розв'язку матричних ігор

Позначимо через $G(X, Y, A)$ гру двох осіб з нульовою сумою, у якій гравець 1 вибирає стратегію $x \in X$, гравець 2 – $y \in Y$, після чого гравець 1 отримує виграш $A = A(x, y)$ за рахунок гравця 2.

Означення 8.6. Стратегія x^1 гравця 1 *домінує (строго домінує)* над стратегією x^2 , якщо $A(x^1, y) \geq A(x^2, y)$ ($A(x^1, y) > A(x^2, y)$), $y \in Y$.

Стратегія y^1 гравця 2 *домінує (строго домінує)* над стратегією y^2 , якщо

$$A(x, y^1) \leq A(x, y^2) \quad (A(x, y^1) < A(x, y^2)), x \in X.$$

При цьому стратегії x^2 і y^2 називаються *домінованими (строго)*.

Спектром змішаної стратегії гравця у скінченній антагоністичній грі називається множина усіх його чистих стратегій, ймовірність яких відповідно до цієї стратегії позитивна.

Властивість 8.1. Якщо чиста стратегія одного з гравців знаходиться в спектрі деякої його оптимальної стратегії, то виграш цього гравця в ситуації, утвореній даною чистою стратегією і будь-якою оптимальною стратегією іншого гравця, дорівнює значенню скінченної антагоністичної гри.

Властивість 8.2. Жодна строго доміновна чиста стратегія гравця не знаходиться в спектрі його оптимальної стратегії.

Гра $G' = (X', Y', A')$ називається підгрою гри $G(X, Y, A)$, якщо $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, а матриця A' є підматрицею матриці A . Матриця A' при цьому будується таким чином. В матриці A залишаються рядки і стовпці, що відповідають стратегіям X' і Y' , а інші «викреслюються». Усі ті, що залишаються після цього в матриці A і будуть утворювати матрицю A' .

Властивість 8.3. Нехай $G = (X, Y, A)$ – скінченна антагоністична гра, а $G' = (X \setminus x', Y, A)$ – підгра гри G , а x' – чиста стратегія гравця 1 у грі G , що домінується деякою стратегією $\bar{x}$, і спектр якої не містить x' . Тоді будь-який розв'язок (x^0, y^0, v) гри G' є розв'язком гри G .

Властивість 8.4. Нехай $G = (X, Y, A)$ – скінченна антагоністична гра, а $G' = (X, Y \setminus y', A)$ – підгра гри G , а y' – чиста стратегія гравця 2 у грі G , що

домінується деякою стратегією $\bar{y}$, і спектр якої не містить y' . Тоді будь-який розв'язок гри G' є розв'язком G .

Властивість 8.5. Якщо для чистої стратегії x' гравця 1 виконуються умови властивості 2.3, а для чистої стратегії y' гравця 2 виконуються умови властивості 2.4, то будь-який розв'язок гри $G' = (X \setminus x', Y \setminus y', A)$ є розв'язком гри $G = (X, Y, A)$.

Властивість 8.6. Трійка (x^o, y^o, v) є розв'язком гри $G = (X, Y, A)$ тоді і тільки тоді, коли $(x^o, y^o, kv + a)$ є розв'язком гри $G(X, Y, kA + a)$, де a – будь-яке дійсне число, $k > 0$.

Властивість 8.7. Для того, щоб $x^o = (x_1^o, \dots, x_i^o, \dots, x_m^o)$ була оптимальною змішаною стратегією матричної гри з матрицею A і ціною гри v , необхідно і достатнє виконання таких нерівностей:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^o \geq v, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (8.4)$$

Для того, щоб $y^o = (y_1^o, \dots, y_j^o, \dots, y_n^o)$ була оптимальною змішаною стратегією гравця 2 необхідно і достатнє виконання нерівностей:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^o \leq v, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (8.5)$$

З останньої властивості випливає: щоб встановити, чи є передбачувані (x, y) і v розв'язком матричної гри, досить перевірити, чи задовольняють вони нерівності (8.4) і (8.5). З іншого боку, знайшовши ненегативні розв'язки нерівностей (8.4) і (8.5) спільно з рівняннями

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1 \quad (8.6)$$

отримаємо розв'язок матричної гри.

Таким чином, розв'язок матричної гри зводиться до пошуку ненегативних параметрів розв'язань лінійних нерівностей (8.4) (8.5) і лінійних рівнянь (8.6). Однак це вимагає великого обсягу обчислень, який зростає зі збільшенням числа чистих стратегій гравців.

Наприклад, для матриці 3×3 маємо систему з 6 нерівностей і 2 рівнянь. Тому, по-перше, слід, використовуючи властивості 8.2 і 8.3, зменшити, по можливості, число чистих стратегій. А по-друге, в усіх випадках перевірити виконання рівності $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$.

Якщо ця рівність виконується, то обидва гравці мають чисті оптимальні стратегії (гравець 1 (чисту максимінну, а гравець 2 (чисту мінімаксну). Інакше хоча б в одного гравця оптимальні стратегії будуть змішані. Для матричних ігор невеликого розміру ці розв'язки можна знайти, застосовуючи властивості 8.1 – 8.5.

Зауваження. Слід відзначити, що виключення *не строго* домінованих стратегій може призвести до втрати деяких розв'язків. Якщо ж виключаються тільки *строго* доміновані стратегії, то множина розв'язків гри не зміниться.

Приклад 8.3. Нехай $G = (X, Y, A)$, де $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, а функція виграшу A задана таким чином:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2C & C & 2C & 3C \\ 3C & 3C/2 & C & 2C \\ 2C & 2C & C & C \\ C & C & C & C/2 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

де $C > 0$.

Розв'язання. Насамперед відзначимо, що за властивістю 8.6 досить розв'язати гру $G^I = (X, Y, A^I)$, де $A^I = A/1/C$. У матричній формі гра G^I визначається матрицею виграшів

$$A^I = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Елементи четвертого рядка цієї матриці « $\leq$ » відповідним елементам третього рядка, а тому третя стратегія гравця 1 домінує над четвертою. Крім того, елементи першого стовпця матриці A^I « $\geq$ » відповідним елементам другого стовпця. Отже, друга стратегія гравця 2 домінує над його першою стратегією.

Далі, із властивості 2.5 випливає, що будь-який розв'язок гри $G^2 = (X \setminus \{4\}, Y \setminus \{1\}, A^I)$ є розв'язком гри G^I . У матричній формі гру G^2 можна описати матрицею

$$A^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Очевидно, що елементи другого рядка « $\geq$ » півсумі відповідних елементів першого і третього рядків. Крім того, елементи третього стовпця матриці A^2 « $\geq$ » відповідним елементам другого стовпця. Застосовуючи властивість 2.5 одержимо, що будь-який розв'язок гри $G^3 = (X \setminus \{4,2\}, Y \setminus \{1,4\}, A^2)$, тобто

$$A^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

є розв'язком гри G^2 , а отже і гри G^1 .

Матриця A^3 не має сідлової точки, тому що не виконується рівність

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

і, значить, гра G^3 не має розв'язку в чистих стратегіях, тобто оптимальні стратегії гравців є змішаними. Ці стратегії, у даному випадку, легко знайти з аналізу структури матриці A^3 . Оскільки матриця A^3 симетрична, можна припустити, що гравці в оптимальній стратегії використовують свої чисті стратегії з рівними ймовірностями.

Дійсно, якщо гравець 1 вибирає з рівними ймовірностями стратегії 1 і 3, то під час застосування кожної з двох чистих стратегій гравцем 2 математичне сподівання виграшу гравця 1 буде рівним

$$(1/2) \cdot 1 + (1/2) \cdot 2 = 3/2 \quad \text{або} \quad (1/2) \cdot 2 + (1/2) \cdot 1 = 3/2.$$

Аналогічно, якщо гравець 2 використовує свої чисті стратегії 2 і 3 з рівними ймовірностями, то математичне сподівання його програшу буде дорівнювати 3/2. Отже, зазначені стратегії є оптимальними в грі G^3 , а величини 3/2 – значенням гри G^3 . З попереднього випливає, що ці стратегії оптимальні також і у грі G^1 .

Таким чином, стратегія $X = (1/2, 0, 1/2, 0)$ є оптимальною стратегією гравця 1, стратегія $Y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ – оптимальною стратегією гравця 2 у грі G^1 , а значення гри G^1 дорівнює 3/2. У силу властивості 2.4 розв'язком гри G буде трійка $(X, Y, 3C/2)$.

8.5 Алгебраїчний метод розв'язання матричних ігор

Нехай задана матрична гра порядку 2×2 , що описується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Насамперед необхідно перевірити, чи є в даній грі сідлова точка. Якщо це так, то гра має розв'язок в чистих стратегіях, причому оптимальними стратегіями гравців 1 і 2 відповідно будуть чиста максимінна і чиста мінімаксна стратегії.

Якщо ж гра не має чистих стратегій, то обидва гравці мають тільки такі оптимальні стратегії, що використовують усі свої чисті стратегії з позитивними ймовірностями.

Інакше один із гравців (наприклад 1) має чисту оптимальну стратегію, а інший – тільки змішані. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що оптимальною стратегією гравця 1 є вибір з ймовірністю 1 першого рядка. Далі, з властивості 8.1 випливає, що $a_{11} = a_{12} = \nu$ і матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} \nu & \nu \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Звідси легко побачити, що для матриць такого вигляду одна із стратегій гравця 2 є домінуючою. Отже, за властивістю 2.4 цей гравець має чисту стратегію, що суперечить припущенню.

Нехай $X = (\xi, 1 - \xi)$ – змішана оптимальна стратегія гравця 1. Оскільки гравець 2 має змішану оптимальну стратегію, з властивості 2.1 отримаємо, що (див. також властивість 8.7)

$$\begin{cases} a_{11}\xi + a_{21}(1 - \xi) = \nu, \\ a_{12}\xi + a_{22}(1 - \xi) = \nu. \end{cases}$$

Звідси випливає, що при $\nu \neq 0$ стовпці матриці A не можуть бути пропорційними з коефіцієнтом, відмінним від одиниці. Якщо ж коефіцієнт пропорційності дорівнює одиниці, то матриця A приймає вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{pmatrix}$$

і гравець 1 має чисту оптимальну стратегію (він вибирає з ймовірністю 1 той з рядків, елементи якого не менші відповідних елементів іншого), що суперечить припущенню. Отже, якщо $\nu \neq 0$ і гравці мають тільки змішані оптимальні стратегії, то визначник матриці A відмінний від нуля. З цього випливає, що остання система рівнянь має єдиний розв'язок. Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$\xi = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = x_1; \quad 1 - \xi = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = x_2;$$

$$v = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Аналогічні міркування приводять нас до того, що змішана оптимальна стратегія гравця 2 $Y = (\eta, 1 - \eta)$ задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}\eta + a_{12}(1-\eta) = v; \\ a_{21}\eta + a_{22}(1-\eta) = v, \end{cases}$$

звідки

$$\eta = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = y_1; \quad 1 - \eta = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = y_2.$$

Якщо ж платіжна матриця має розмірність $m \times n$, то для того, щоб знайти розв'язок такої гри, треба відшукати такі невід'ємні $x_i, i = 1, \dots, m, y_j, j = 1, \dots, n$, які задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i &\geq v, j = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j &\leq v, i = 1, \dots, m; \sum_{j=1}^n y_j = 1. \end{aligned}$$

Замінімо всі нерівності на рівності й спробуємо розв'язати отриману систему рівнянь. Якщо всі $x_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ і $y_j \geq 0, j = 1, \dots, n$, то буде знайдено розв'язок гри. Інакше, якщо серед x_i чи y_j є хоч один недодатний елемент, це означає, що заміна всіх нерівностей рівностями не справедлива і треба тільки частину нерівностей замінити рівностями і розв'язати ту саму систему. Перебираючи послідовно всі комбінації рівностей та нерівностей і розв'язуючи їх, відшукуємо розв'язок гри. При цьому слід мати на увазі, що якщо для будь-якого $i = 1, m$ буде виконуватись нерівність

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j < v,$$

то $x_i = 0$. Якщо ж для будь-якого $j = 1, n$ буде $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i > v$, то $y_j = 0$.

Приклад 8.4. Розв'яжемо гру порядку 2×2 , що описується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки у цій грі матриця сідлової точки не має, тому шукаємо

розв'язок у змішаних стратегіях. Ймовірності використання окремих чистих стратегій обчислюються за наведеними раніше формулами:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{0-5}{1-5-2+0} = \frac{5}{6}; & x_2 &= \frac{1-2}{1-5-2+0} = \frac{1}{6}; \\y_1 &= \frac{0-2}{1-5-2+0} = \frac{1}{3}; & y_2 &= \frac{1-5}{1-5-2+0} = \frac{2}{3};\end{aligned}$$

при цьому ціна гри визначиться як

$$v = \frac{0-10}{1-5-2+0} = \frac{5}{3},$$

а змішані стратегії гравців мають вигляд $X^* = (5/6, 1/6)$, $Y^* = (1/3, 2/3)$.

Приклад 8.5. Розв'яжемо гру порядку 2×2 , що описується матрицею

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок, коли всі нерівності замінено на рівності:

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + 2x_3 &= v, & 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 &= v, \\-2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= v, & -y_1 + 4y_2 + 2y_3 &= v, \\4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= v, & 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 &= v, \\x_1 + x_2 + x_3 &= 1, & y_1 + y_2 + y_3 &= 1.\end{aligned}$$

Ці рівняння не мають такого розв'язку, щоб ймовірності x_i та y_j були невід'ємні. Замінюючи рівності на нерівності, приходимо до такої системи:

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + 2x_3 &= v, & 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 &< v, \\-2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= v, & -y_1 + 4y_2 + 2y_3 &= v, \\4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &> v, & 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 &= v, \\x_1 + x_2 + x_3 &= 1, & y_1 + y_2 + y_3 &= 1.\end{aligned}$$

З нерівностей $4x_1 + 2x_2 - 6x_3 > v$ та $3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v$ випливає, що $y_3 = 0$ та $x_1 = 0$.

Тепер вже розв'яжемо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}-x_2 + 2x_3 &= v & -y_1 + 4y_2 &= v \\4x_2 + 2x_3 &= v & 2y_1 + 2y_2 &= v \\x_2 + x_3 &= 1 & y_1 + y_2 &= 1\end{aligned}$$

Вона має такий розв'язок: $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $y_1 = 2/5$, $y_2 = 3/5$, $v = 2$. Таким чином, ціна гри дорівнює 2, оптимальна змішана стратегія першого гравця $X^* = (0, 0, 1)$, другого $Y^* = (2/5, 3/5, 0)$

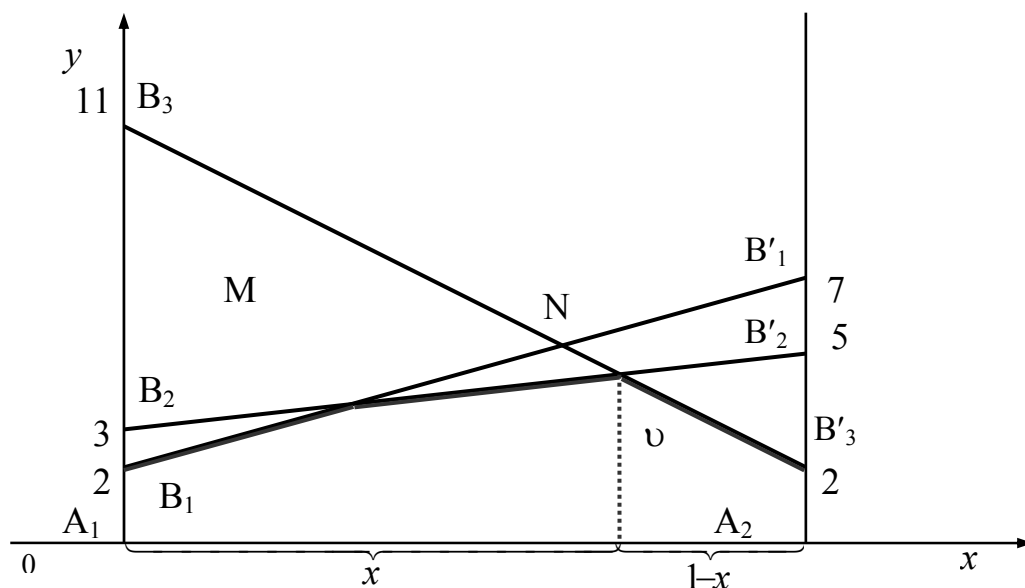
8.6 Графічний метод розв'язання ігор $2 \times n$ і $m \times 2$

Пояснимо метод на прикладах.

Приклад 8.6. Розглянемо гру, що задана платіжною матрицею:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 2 \\ B_1 \quad B_2 \quad B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ A_1 \quad A_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На площині xOy введемо систему координат і на осі Ox відкладемо відрізок одиничної довжини A_1, A_2 , кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця 1 ($x, 1-x$) (див. на наведеному нижче рисунку). Зокрема, точці $A_1 (0;0)$ відповідає стратегія A_1 , а точці $A_2 (1;0)$ – стратегія A_2 і т.д.



У точках A_1 і A_2 відновимо перпендикуляри, на яких будемо відкладати виграші гравців. На першому перпендикулярі (у даному випадку він збігається з віссю Oy) відкладемо виграш гравця 1 при стратегії A_1 , а на другому – при стратегії A_2 . Якщо гравець 1 застосує стратегію A_1 , то виграє при стратегії B_1 у гравця 2 – 2 у.о., при стратегії B_2 – 3 у.о., а при стратегії B_3 – 11 у.о.. Числам 2, 3, 11 на Oy відповідають точки B_1, B_2 і B_3 . Якщо ж гравець 1 застосує стратегію A_2 , то його виграш при стратегії B_1 дорівнює 7 у.о., при B_2 – 5 у.о., а при B_3 – 2 у.о. Ці числа визначають точки B'_1, B'_2, B'_3

на перпендикулярі, відновленому у точці A_2 .

З'єднуючи між собою точки B_1 і B'_1 , B_2 і B'_2 , B_3 і B'_3 отримаємо три прямі, відстань до яких від осі Ox визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій. Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізка $B_1B'_1$ до осі Ox визначає середній виграш v_1 при будь-якому поєднанні стратегій $A_1 A_2$ (з частотами x і $1-x$) і стратегією B_1 гравця 2. Ця відстань дорівнює

$$2x_1 + 6(1 - x_2) = v_1.$$

(Згадайте планіметрію і розгляньте трапецію $A_1 B_1 B'_1 A_2$). Таким чином, ординати точок, що належать ламаній $B_1 M N B'_3$ визначають мінімальний виграш гравця 1 при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці N . Отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $X^* = (x, 1-x)$, а її ордината дорівнює ціні гри v . Координати точки N знаходимо як точку перетинання прямих $B_2 B'_2$ і $B_3 B'_3$. Відповідні два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 3x + 5(1 - x) = v \\ 11x + 2(1 - x) = v \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{11}, v = \frac{49}{11}.$$

Отже, $X = (3/11; 9/11)$, при ціні гри $v = 49/11$. Таким чином, ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Оптимальні стратегії для гравця 2 можна знайти із системи

$$\begin{cases} 3y + 5(1 - y) = v \\ 5y + 2(1 - y) = v \end{cases} \Rightarrow y = \frac{9}{11}$$

і, отже, $Y = (0; 9/11; 2/11)$. (З рисунка видно, що стратегія B_1 не ввійде в оптимальну стратегію).

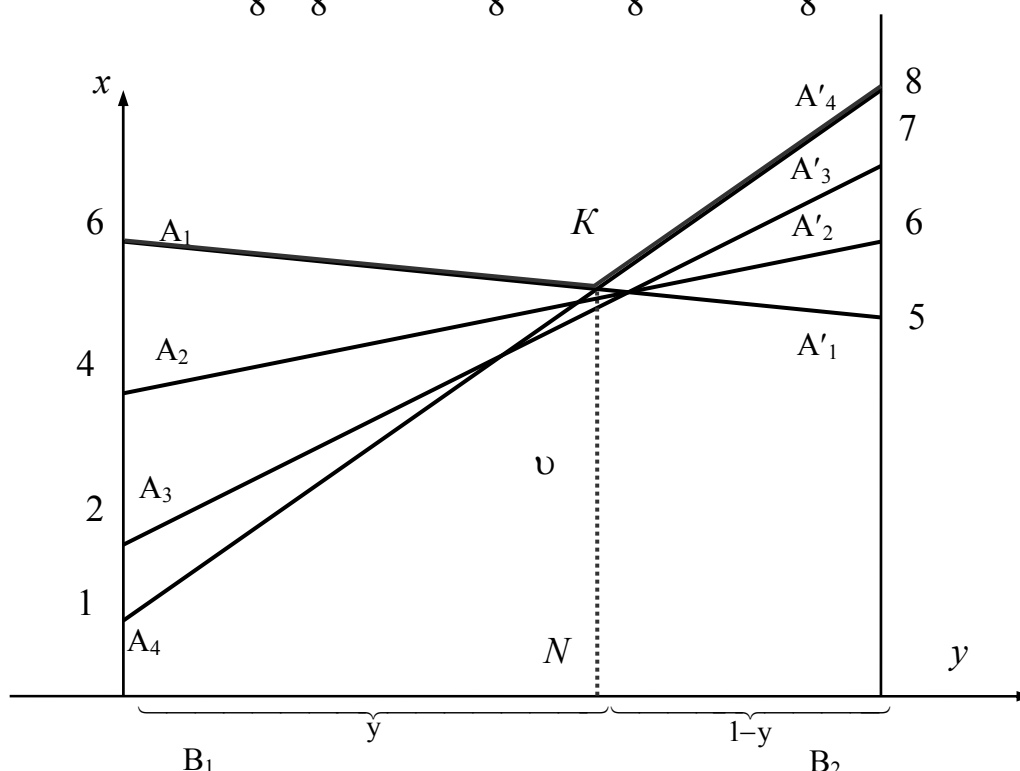
Приклад 8.7. Розв'яжемо гру, що задана матрицею

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} B_1 & B_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Розв'язання. Матриця має розмірність 2×4 . Будуємо прямі, що відповідають стратегіям гравця 1 (дивись на рисунку нижче). Ламана $A_1 K A'_4$ відповідає верхній границі виграшу гравця 1, а відрізок NK – ціні гри.

Розв'язок гри при цьому буде такий:

$$Y = (\frac{3}{8}; \frac{5}{8}); \quad X = (\frac{7}{8}; 0; 0; \frac{1}{8}); \quad \nu = \frac{43}{8}.$$



8.7 Матричний метод розв'язання ігор

Нехай треба розв'язати гру з платіжною матрицею $A = (a_{ij})_{m \times n}$ і нехай B – будь-яка квадратна підматриця матриці A , порядок якої $r \geq 2$. Тоді алгоритм матричного методу полягає у виконанні таких операцій.

I. Вибираємо квадратну підматрицю B матриці A і обчислюємо

$$\dot{X} = \frac{J_r adjB}{J_r adjBJ_r^T}, \quad \dot{Y} = \frac{J_r (adjB)^T}{J_r adjBJ_r^T},$$

де $J_r = /1, 1, \dots, 1/$ – одиничний вектор-рядок; $adjB$ – матриця, приєднана до B ; $(*)^T$ – індекс транспонування; $\dot{X}$ – вектор, побудований з X викресленням елементів, які відповідають рядкам, викресленим з A під час побудови B ; $\dot{Y}$ – вектор, побудований із Y викресленням елементів, які відповідають стовпцям, викресленим з A під час побудови B .

2. Якщо деякі $x_i < 0, i=1, r$ або $y_j < 0, j=1, r$, то відкидаємо підматрицю B та спробуємо аналізувати другу.

3. Якщо всі $x_i \geq 0, i=1, r$ та $y_j \geq 0, j=1, r$, то обчислюємо

$$\nu = \frac{|B|}{J_r adj B J_r^T}.$$

4. Будуємо X з $\dot{X}$ та Y з $\dot{Y}$, поширюючи ці вектори нулями на тих місцях, де ми викреслювали рядки чи стовпці під час побудови підматриці B .

5. Перевіряємо виконання співвідношень

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq \nu, j = 1, \dots, n; \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \nu, i = 1, \dots, m.$$

Якщо хоча б одне з них не виконується, відкидаємо підматриці і спробуємо аналізувати другу.

Приклад 8.8. Розв'яжемо гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця A квадратна, то її можна розглядати як підматрицю B , порядок якої $r = 3$. Тоді

$$J_r = (I \quad I \quad I), \quad adj B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 9 \\ 6 & 6 & -3 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix},$$

а розв'язок гри, обчислений за наведеними вище формулами, має вигляд

$$X = \dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \dot{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad \nu = 1.$$

З дев'яти підматриць порядку $r = 2$ лише одна має додатковий розв'язок, а саме $B_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, для якої $J_r = (I \quad I)$, $adj B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, а

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \dot{Y} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, \quad \text{звідки } X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, перший гравець має єдину оптимальну стратегію, тоді як другий – множину оптимальних стратегій:

$$Y = \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{де } \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0.$$

Виникає питання, чи можна зробити вибір між різними оптимальними стратегіями. Нехай перший гравець вибирав змішану стратегію X , а другий – чисту стратегію j . Тоді математичне сподівання виграшу першого гравця буде дорівнювати $E(X, j)$.

Змішана стратегія X домінує над змішаною стратегією X' , якщо для

кожної чистої стратегії j другого гравця $E(X, j) \geq E(X^*, j)$ та існує хоча б одна така стратегія j , для якої $E(X, j) > E(X', j)$. У такому випадку стратегія X називається найкращою, якщо вона оптимальна та жодна інша стратегія не домінує над нею. В розглянутому вище прикладі в другого гравця найкраща стратегія – це $Y = (0, 2/3, 1/3)$.

8.8. Ітеративні методи розв'язання ігор

Зведення матричних ігор до задач лінійного програмування. Припустимо, що ціна гри додатна ($v > 0$). Якщо це не так, то відповідно властивості 2.6 завжди можна підібрати таке число c , додаток якого до всіх елементів матриці виграшів дає матрицю з додатними елементами, і отже, з додатними значеннями ціни гри. При цьому оптимальні змішані стратегії обох гравців не змінюються.

Отже, нехай дана матрична гра з матрицею A порядку $m \times n$. Відповідно властивості 8.7 оптимальні змішані стратегії $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ щодо гравців 1 і 2 і ціна гри v повинні задовольняти співвідношення.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v & (j = \overline{1, \dots, n}) \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ x_i \geq 0, & (i = \overline{1, \dots, m}) \end{cases} \quad (8.7)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v & (i = \overline{1, \dots, m}) \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ y_j \geq 0, & (j = \overline{1, \dots, n}) \end{cases} \quad (8.8)$$

Розділимо всі рівняння і нерівності в (8.7) і (8.8) на v (це можна зробити, оскільки за припущенням $v > 0$) і введемо позначення :

$$\frac{x_i}{v} = p_i \quad (i = \overline{1, \dots, m}), \quad \frac{y_j}{v} = q_j \quad (j = \overline{1, \dots, n}),$$

Тоді (8.7) і (8.8) перепишеться у вигляді :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i &\geq 1, & \sum_{i=1}^m p_i &= \frac{1}{v}, & p_i &\geq 0, & (i = \overline{1, \dots, m}), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j &\leq 1, & \sum_{j=1}^n q_j &= \frac{1}{v}, & q_j &\geq 0, & (j = \overline{1, \dots, n}). \end{aligned}$$

Оскільки перший гравець прагне знайти такі значення x_i і, отже, p_i , щоб ціна гри ν була максимальною, розв'язок першої задачі зводиться до пошуку таких додатних значень p_i ($i = \overline{1, m}$), для яких

$$\sum_{i=1}^m p_i \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1. \quad (8.9)$$

Оскільки другий гравець прагне знайти такі значення y_j і, отже, q_j , щоб ціна гри ν була найменшою, розв'язок другої задачі зводиться до пошуку таких додатних значень q_j , ($j = \overline{1, n}$), для яких

$$\sum_{j=1}^n q_j \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1. \quad (8.10)$$

Формули (8.9) і (8.10) описують двоїсті одна до одної задачі лінійного програмування (ЛП). Розв'язуючи ці задачі, отримаємо значення p_i ($i = \overline{1, m}$), q_j ($j = \overline{1, n}$) і ν . Тоді змішані стратегії отримуються за виразами:

$$x_i = \nu p_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad y_j = \nu q_j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (8.11)$$

Приклад 8.9. Знайти розв'язок гри, що описується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Під час розв'язання цієї гри до кожного елемента матриці A додамо 1 і отримаємо таку матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Складемо тепер пару взаємодвоїстих задач:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 \rightarrow \min \\ p_1 + p_2 + 2p_3 \geq 1, \\ 2p_1 + p_3 \geq 1, \\ p_3 \geq 1, \\ p_1, p_2, p_3 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow \max \\ q_1 + 2q_2 \leq 1, \\ q_1 + q_3 \leq 1, \\ 2q_1 + q_2 \leq 1, \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо другу з них:

Б.п.	q ₁	q ₂	Q ₃	q ₄	q ₅	q ₆	Розв'язок	Σ	Відношення
	-1	-1	-1	0	0	0	0	-3	
q ₄	1	2	0	1	0	0	1	5	—
q ₅	1	0	1	0	1	0	1	4	1/1
q ₆	2	1	0	0	0	1	1	5	—

Б.п.	q ₁	Q ₂	q ₃	q ₄	q ₅	q ₆	Розв'язок	Σ	Відношення
	0	-1	0	0	1	0	1	1	
q ₄	1	2	0	1	0	0	1	5	1/2
q ₃	1	0	1	0	1	0	1	4	—
q ₆	2	1	0	0	0	1	1	5	1/1 = 1

Б.п.	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	q ₅	q ₆	Розв'язок	Σ	Відношення
	1/2	0	0	1/2	1	0	3/2	7/2	
q ₂	1/2	1	0	1/2	0	0	1/2	5/2	
q ₃	1	0	1	0	1	0	1	4	
q ₆	3/2	0	0	-1/2	0	1	1/2	5/2	

З оптимальної симплекс-таблиці випливає, що

$$(q_1, q_2, q_3) = (0; \frac{1}{2}; 1),$$

а із співвідношень подвійності випливає, що $(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{2}; 1; 0)$.

Отже, ціна гри з платіжною матрицею A_I дорівнює

$$\nu_1 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{q_1 + q_2 + q_3} \right),$$

а гри з платіжною матрицею A : $\nu = \nu_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.

При цьому оптимальні стратегії гравців мають вигляд:

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (\nu p_1; \nu p_2; \nu p_3) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \cdot 1; \frac{2}{3} \cdot 0 \right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0 \right),$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3) = (\nu q_1; \nu q_2; \nu q_3) = \left(\frac{2}{3} \cdot 0; \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

8.9 Метод послідовного наближення до ціни гри

Часто виникає ситуація, коли немає потреби в точному розв'язку гри, або через якісь причини не можна знайти точного значення ціни гри та оптимальних змішаних стратегій гравців. Суть методу полягає у тому, що гра в уяві розігрується кілька разів, тобто в кожній партії гри кожний партнер вибирає ту свою стратегію, яка дає йому найбільший сумарний виграш. Інакше кажучи, кожний гравець вибирає таку послідовність своїх чистих стратегій, яка забезпечує першому гравцю максимальний середній виграш, а другому – мінімальний середній програш. Після реалізації кількох партій гри обчислюється середнє значення виграшу першого гравця, програшу другого гравця, а їх середнє арифметичне береться за наближене значення ціни гри. Крім того, цей метод надає можливість визначити наближене значення оптимальних змішаних стратегій обох партнерів.

Розглянемо матричну гру двох гравців з платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Результати застосування методу зведемо в табл. 8.1:

Таблиця 8.1

Стратегія p_2	Сумарний виграш p_1			Стратегія p_2	Сумарний виграш p_1			v_1	v_2	$v = \frac{v_1 + v_2}{2}$
1	4	5	1	2	5	3	5	5/1	3/1	8/2
2	9	8	8	1	9	8	8	9/2	8/2	17/4
2	14	11	11	1	13	13	11	14/3	11/3	25/6
3	17	16	15	1	17	18	14	16/4	14/4	30/8
3	20	21	19	2	22	21	19	21/5	19/5	30/10
3	23	26	23	2	27	24	24	26/6	24/6	50/12
2	28	29	28	2	32	27	29	29/7	27/7	56/14
2	33	32	33	1	36	32	32	33/8	32/8	65/8
2	38	35	38	1	40	37	35	38/9	35/9	73/18
3	41	40	42	3	41	42	39	42/10	39/10	81/20
3	44	45	46	3	42	47	43	46/11	42/11	88/22
1	48	50	47	2	47	50	48	50/12	47/12	97/14
1	52	55	48	2	52	53	53	55/13	51/13	106/26
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	56	60	49	2	57	56	56	60/14	56/14	116/28
2	61	63	54	2	62	59	63	63/15	59/15	122/30

v_1 – найбільший сумарний виграш першого гравця за кілька партій гри, поділений на число партій;

v_2 – найменший сумарний програш другого гравця за те саме число партій гри, поділений на число партій

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Заповнюємо таблицю таким чином.

У випадку, коли другий гравець обрав свою першу стратегію, перший гравець виграє:

- 4, якщо вибере свою першу стратегію;
- 5, якщо вибере свою другу стратегію;
- 1, якщо вибере свою третю стратегію.

Ці значення запишемо в 2-5 стовпці табл. 8.1. Максимальний виграш першого гравця буде тоді, якщо він використає свою другу стратегію. При цьому другий гравець програє:

- 5, якщо вибере свою першу стратегію,
- 3, якщо вибере свою другу стратегію,
- 5, якщо вибере свою третю стратегію.

Ці дані запишемо у 6 - 9 стовпці табл. 8.1. Для другої стратегії першого гравця другий матиме найменший програш, якщо вибере свою другу стратегію. У стовпець 10 запишемо найбільший середній виграш першого гравця, який він має в першій партії гри, тобто 5/1, а у стовпець II занесемо найменший середній програш 3, який мав другий гравець у першій партії, в стовпець 12 запишемо середнє арифметичне, тобто наближене значення ціни гри: $5/1 + 3/1 : 2 = 8/2$. Якщо другий гравець використовуватиме свою другу стратегію у другій партії гри, то перший має отримати 5, 3, 5 відповідно при своїх першій, другій, третій стратегіях, а сумарний виграш його за дві партії гри буде:

- $4 + 5 = 9$ – при його першій стратегії;
- $5 + 3 = 8$ – при його другій стратегії;
- $1 + 5 = 6$ – при його третій стратегії.

Ці сумарні виграші запишемо в другий рядок табл. 8.1 (стовпці 3 – 5). З них найбільшим є 9, що відповідає першій стратегії першого гравця, тобто в цій партії йому необхідно вибрати цю свою стратегію. Другий гравець програв при цьому 4, 5, 3 відповідно при першій, другій, третій своїх стратегіях, а його сумарний програш за дві партії гри буде:

- $5 + 4 = 9$ – при його першій стратегії;
- $3 + 5 = 8$ – при його другій стратегії;
- $5 + 3 = 8$ – при його третій стратегії.

Ці сумарні програші запишемо в другий рядок табл. 8.1 (стовпці 7- 9).

Із цих програшів найменшим є 8, що відповідає другій та третій його стратегіям, тобто в третій партії гри другий гравець може використовувати будь-яку з цих двох стратегій, нехай другу. У стовпці 10 запишемо найбільший сумарний виграш першого гравця за дві партії, поділений на число партій, тобто $9/2$, у стовпець 11 – відповідно $8/2$ – найменший сумарний програш другого гравця за дві партії, поділений на число партій, а у стовпець 12 – їх середнє арифметичне – $17/4$.

Продовжуючи далі цей процес, заповнимо всю табл. 8.1 для 15 партій. Звідси можна обчислити, що наближена змішана стратегія першого гравця має вигляд $X = (5/15, 8/15, 2/15)$, другого – $Y = (4/15, 6/15, 5/15)$, а ціна гри – $v = 61/18$.

Точне значення змішаних стратегій гравців буде:

$$X^* = (0,4; \quad 0,47; \quad 0,13), Y^* = (0,13; \quad 0,47; \quad 0,4).$$

а ціна гри $v = 4,067$.

9 ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ТА ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ І ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

9.1 Побудова математичних моделей задач

9.1.1. Потрібно щонайкраще вкласти b доларів в акції трьох акціонерних підприємств (АП), не більш ніж по b_i доларів у кожне. Ціни акцій відомі: c_1, c_2, c_3 ; дивіденди складають: $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 = 0$. Відомо також, що з імовірністю p ціна акції третього АП може вирости до кінця розрахункового періоду до величини $c_3^* > c_3$. Який капітал слід вкласти в кожне АП, щоб отримати максимальний сумарний прибуток?

9.1.2. У морському порту є предмети (вантажі) n видів. Предмет j -го виду має масу a_j і цінність c_j . Потрібно завантажити корабель вантажопідйомністю b так, щоб цінність вантажу була найбільшою.

9.1.3. Під посів n культур відведено m земельних ділянок площею $a_1, \dots, a_n$ га. Середня врожайність j -ої культури на i -ділянці складає a_{ij} центнерів з га. Виторг за один центнер j -ої культури p_j у.о. Яку площу на кожній ділянці слід віднести під кожну з культур, щоб отримати максимальний виторг, якщо за планом треба зібрати не менше b_j центнерів j -ої культури?

9.1.4. Нафтопереробний завод має два сорти нафти: A – 10 од., B – 15 од. Під час переробки з нафти виходить бензин (B) і мазут (M). Є три варіанти технологічного процесу переробки: I: 1 од. A + 2 од. B дає 3 од. B + 2 од. M ; II: 2 од. A + 1 од. B дає 1 од. B + 5 од. M ; III: 2 од. A + 2 од. B дає 1 од. B + 2 од. M . Ціна мазуту – 1 долар за одиницю, ціна бензину – 10 дол. за одиницю. Знайти найвигідніший технологічний процес переробки нафти.

Відповіді:

$$9.1.1 \quad a_1x_1 + a_2x_2 + p^*x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned} \text{за обмежень: } & c_1x_1 \leq b_1, \\ & c_2x_2 \leq b_2, \\ & c_1x_1 \leq b_1, \\ & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = b, \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, 3 \dots \end{aligned}$$

де x_j – кількість акцій i -го АП;

$p^* = p(c_3^* - c_3)$ – очікуваний дохід від акцій 3-го АП.

$$9.1.2 \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max;$$
$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \leq b,$$

де x_j – кількість предметів j -го виду, що завантажуються на корабель.

$$9.1.3 \quad \sum_{j=1}^n p_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \rightarrow \max;$$
$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \geq b, \quad j = 1, \dots, n;$$
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m;$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ для всіх } i, j,$$

де x_{ij} – площа під j -ту культуру на i -ій ділянці.

$$9.1.4 \quad \begin{aligned} 32x_1 + 15x_2 + 12x_3 &\rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 10, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 &\leq 15, \\ x_j &\geq 0, j=1,2,3 \text{ (цілі)}, \end{aligned}$$

де x_i – кількість використання i -го варіанта технологічного процесу.

9.2 Розв'язання задач лінійного програмування

9.2.1. Графічним методом знайти розв'язок таких задач:

а) $x_1 + x_2 \rightarrow \max$	б) $2x_1 + x_2 \rightarrow \max$
$3x_1 - 2x_2 \leq 6,$	$-x_1 + x_2 \leq 2,$
$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$	$x_1 + 2x_2 \leq 7,$
$3x_1 + 2x_2 \leq 12;$	$4x_1 - 3x_2 \leq 6;$
$x_1 \geq 0;$	$x_1, x_2 \geq 0;$

Відповіді: а) $x^* = (2,3)$; б) $x^* = (3,2)$; в) $x^* = (1,2)$; г) $x^* = (1,-2)$.

9.2.2. Звести нижченаведені задачі до канонічної форми з діагональною матрицею обмежень.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 8x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \max, & \text{б) } x_1 + x_3 - 7x_4 + x_5 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4, & x_1 - x_2 + 6x_4 - 2x_5 = -7, \\ 7x_1 - x_3 \leq 16, & x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 24, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, & x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + 7x_5 = 32, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 & x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{array}$$

9.2.3. Розв'язати симплекс-методом наведені нижче задачі. В усіх задачах змінні є невід'ємними.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min, & 2) \quad 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5; & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \\ \\ 3) \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min, & 4) \quad 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, & 5) \quad 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, & 5x_1 + 2x_2 \geq 10, & 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; & x_1 + 3x_2 \leq 12; & x_1 - x_2 \leq 1; \\ \\ 6) \quad 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, & 7) \quad 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, & 8) \quad 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 8x_1 - 5x_2 \leq 16, & 7x_1 + 5x_2 \geq 7, & 4x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 + 3x_2 \geq 2, & 7x_1 - 5x_2 \geq 35, & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9; & x_1 - x_2 \leq 0; & 2x_1 + 2x_2 = 6; \\ \\ 9) \quad 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow \max, & 10) \quad 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15, & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80, & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 60; & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \\ \\ 11) \quad 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \min, & 12) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 4; & x_1 + 2x_2 + x_4 = 10. \end{array}$$

Відповіді:

- 1) $x^* = (7,1; 0; 0; 1,3; 0; 0,4)$, $L(x^*) = 7,1$.
- 2) $x^* = (0; 4,13; 0,25; 2,63)$, $L(x^*) = 1,25$.
- 3) Розв'язку немає ($D = \emptyset$).

- 4) $x^* = (12; 0)$, $L(x^*) = 24$.
- 5) $x^* = (1,33; 0,33)$, $L(x^*) = 9,33$.
- 6) $x^* = (0; 1,29)$, $L(x^*) = -5,14$.
- 7) Розв'язку немає (цільова функція не обмежена зверху).
- 8) $x^* = (3; 0)$, $L(x^*) = 9$.
- 9) $x^* = (4,56; 0; 2,95; 0)$, $L(x^*) = 67,21$.
- 10) $x^* = (0; 4,13; 0,25; 2,63)$, $L(x^*) = 1,25$.
- 11) $x^* = (0; 0; 0,5; 1,5; 2)$, $L(x^*) = -4,5$.
- 12) Розв'язку немає ($D = \emptyset$).

9.2.4. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачі лінійного програмування, умови яких задаються нижче. В усіх задачах змінні невід'ємні.

- 1) $6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + x_2 \geq 3$,
 $x_1 - x_2 \leq 1$,
 $-x_1 + 2x_2 \geq 1$;
- 2) $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$,
 $x_1 + 5x_2 \geq 16$,
 $3x_1 + 2x_2 \geq 12$,
 $2x_1 + 4x_2 \geq 16$;
- 3) $-6x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$,
 $2x_1 + x_2 \geq 3$,
 $x_1 - 2x_2 \leq 2$,
 $3x_1 + 2x_2 \geq 1$;
- 4) $6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + x_2 \geq 3$,
 $3x_1 + 2x_2 \geq 1$,
 $-x_1 - x_2 \geq 6$;
- 5) $7x_1 + x_2 \rightarrow \min$,
 $x_1 + x_2 \geq 3$,
 $5x_1 + x_2 \geq 5$,
 $x_1 + 5x_2 \geq 5$;
- 6) $7x_1 + 10x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + 28x_2 \geq 17$,
 $x_1 + 2x_2 \geq 3$,
 $x_1 + 17x_2 \geq 19$;
- 7) $x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$,
 $2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -3$,
 $x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_5 = -1$;
- 8) $-15x_1 - 33x_2 \rightarrow \max$,
 $3x_1 + 2x_2 \geq 6$,
 $6x_1 + x_2 \geq 6$;
- 9) $x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + x_2 \leq 18$,
 $x_1 + 2x_2 \geq 14$,
 $x_1 - 2x_2 \leq 10$;
- 10) $78x_1 + 52x_2 \rightarrow \min$,
 $6x_1 + 2x_2 \geq 9$,
 $-10x_1 + 14x_2 \geq 13$,
 $11x_1 - x_2 \geq 6$;
- 11) $5x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$,
 $x_1 + x_2 \leq 6$,
 $2x_1 + x_2 \geq 9$,
 $3x_1 + x_2 \geq 11$.

Відповіді:

- 1) $x^* = (1; 1)$, $L(x^*) = 10$.
- 2) $x^* = (2; 3)$, $L(x^*) = 13$.
- 3) $x^* = (1,5; 0)$, $L(x^*) = -9$.
- 4) Розв'язку немає ($D = \emptyset$).
- 5) $x^* = (0; 5)$, $L(x^*) = 5$.
- 6) $x^* = (0; 1,5)$, $L(x^*) = 15$.
- 7) $x^* = (0; 0; 1; 0; 3)$, $L(x^*) = 2$.
- 8) $x^* = (2; 0)$, $L(x^*) = -30$.
- 9) $x^* = (7,33; 3,33)$, $L(x^*) = 14$.
- 10) $x^* = (0,96; 1,62)$, $L(x^*) = 159,12$.
- 11) $x^* = (4,5; 0)$, $L(x^*) = 22,5$.

9.3 Розв'язання транспортних задач

9.3.1. Розв'язати методом потенціалів нижченаведені Т- задачі.

1)	a\b	25	40	50	35	45
	20	7	3	4	8	6
	60	5	7	2	3	5
	45	1	4	5	2	6
	70	3	4	2	7	8
3)	A\b	10	40	20	60	20
	30	5	1	5	2	4
	70	5	7	6	3	2
	25	1	5	4	2	6
	25	1	6	3	3	5
5)	a\b	30	90	80	20	30
	95	2	8	4	6	3
	55	3	2	5	2	6
	40	6	5	8	7	4
	60	3	4	4	2	1
7)	a\b	13	13	13	13	28
	28	8	4	6	3	1
	13	9	3	8	5	7
	19	7	3	5	9	8
	20	2	1	4	5	7
9)	a\b	10	35	15	25	35
	30	7	3	1	5	4
	25	7	5	8	3	2
	45	6	4	8	3	2
	20	3	1	7	6	2

2)	a\b	35	30	50	25	65
	50	8	6	7	3	4
	50	7	4	9	3	4
	55	6	1	4	5	2
	50	7	8	3	4	2
4)	a\b	70	40	30	60	50
	20	6	1	7	3	3
	90	7	4	4	8	4
	80	8	2	3	5	7
	60	3	4	2	8	5
6)	a\b	10	30	25	15	20
	20	9	1	5	7	1
	15	2	8	4	8	1
	45	2	3	2	8	5
	20	6	1	3	4	7
8)	a\b	11	13	26	10	10
	24	9	1	3	2	7
	12	6	9	4	1	5
	18	9	1	2	8	5
	16	3	3	9	6	8
10)	a\b	30	80	65	35	40
	60	8	2	4	9	1
	55	7	5	5	3	6
	85	9	4	6	2	7
	50	5	3	2	6	4

Відповіді: 1) $L(x^*) = 575$. 2) $L(x^*) = 710$. 3) $L(x^*) = 360$. 4) $L(x^*) = 910$.
 5) $L(x^*) = 750$. 6) $L(x^*) = 200$. 7) $L(x^*) = 209$.
 8) $L(x^*) = 184$. 9) $L(x^*) = 285$. 10) $L(x^*) = 785$.

9.3.2. Розв'язати Т-задачі з обмеженням пропускної здатності

- 1) $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 16 & 34 & 15 & 19 \\ 13 & 17 & 12 & 4 \\ 17 & 19 & 2 & 4 \end{bmatrix}$,
 $a = (74, 33, 19)$, $b = (28, 70, 15, 13)$;
- 2) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 13 & 10 & 31 & 15 \\ 20 & 28 & 7 & 22 \\ 19 & 6 & 15 & 8 \end{bmatrix}$,
 $a = (63, 72, 17)$, $b = (33, 40, 43, 36)$;
- 3) $C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 10 & 7 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 & 4 \\ 29 & 24 & 15 & 17 \\ 20 & 5 & 10 & 6 \end{bmatrix}$,
 $a = (13, 79, 34)$, $b = (49, 30, 22, 25)$;
- 4) $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 4 & 10 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 37 & 10 \\ 25 & 10 & 10 & 15 \end{bmatrix}$,

$$a = (20, 76, 54), b = (40, 30, 52, 28);$$

$$5) \quad C = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 6 & 1 \\ 8 & 10 & 9 & 2 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} 15 & 10 & 34 & 7 \\ 31 & 23 & 20 & 11 \\ 11 & 15 & 4 & 10 \end{vmatrix},$$

$$a = (64, 75, 21), b = (57, 33, 44, 26);$$

$$6) \quad C = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} 20 & 5 & 15 & 12 \\ 45 & 20 & 21 & 19 \\ 8 & 20 & 12 & 4 \end{vmatrix},$$

$$a = (42, 99, 27), b = (68, 40, 30, 30);$$

$$7) \quad C = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 10 & 3 \\ 6 & 4 & 7 & 2 \\ 8 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} 37 & 20 & 7 & 21 \\ 5 & 26 & 7 & 11 \\ 5 & 20 & 25 & 10 \end{vmatrix},$$

$$a = (78, 37, 53), b = (38, 60, 30, 40);$$

$$8) \quad C = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 9 & 3 \\ 9 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & 10 & 6 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} 16 & 30 & 21 & 30 \\ 18 & 4 & 5 & 11 \\ 30 & 4 & 29 & 15 \end{vmatrix},$$

$$a = (77, 24, 70), b = (56, 30, 40, 45);$$

$$9) \quad C = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 9 & 6 \\ 9 & 10 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} 12 & 20 & 30 & 20 \\ 25 & 4 & 3 & 2 \\ 33 & 10 & 30 & 10 \end{vmatrix},$$

$$a = (72, 29, 68), b = (65, 24, 50, 30);$$

$$10) \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 5 & 10 \\ 9 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} 10 & 26 & 23 & 8 \\ 6 & 18 & 30 & 5 \\ 9 & 2 & 25 & 3 \end{vmatrix},$$

$$a = (53, 45, 38), b = (21, 30, 75, 10).$$

Відповіді: 1) $L(x^*) = 444$. 2) $L(x^*) = 538$. 3) $L(x^*) = 413$. 4) $L(x^*) = 837$. 5) $L(x^*) = 1091$.
6) $L(x^*) = 700$. 7) $L(x^*) = 800$. 8) $L(x^*) = 885$. 9) $L(x^*) = 1134$. 10) $L(x^*) = 649$.

9.3.3. Розв'язати задачі про оптимальні призначення (угорський метод):

1)	3	4	2	8	1	7	3	2)	6	2	15	2	4	9	5
	2	3	13	9	1	6	2		12	11	1	13	8	11	13
	12	4	12	5	3	1	4		3	2	12	9	10	14	1
	5	6	1	7	11	8	6		7	1	3	4	5	6	8
	11	4	10	10	5	13	7		8	9	14	3	11	18	12
	9	6	11	12	7	1	2		1	7	5	6	15	16	2
	2	4	8	5	9	3	10		13	10	4	7	10	16	17
3)	5	17	5	12	11	6	4	4)	21	7	2	12	15	2	17
	10	9	6	10	12	16	4		23	15	24	20	12	5	11
	9	3	2	8	13	14	8		17	24	4	17	2	22	15
	13	1	7	11	7	18	19		19	7	8	1	13	14	4
	1	7	12	8	3	1	5		15	6	6	14	19	3	16
	3	11	13	9	14	20	21		23	6	5	19	15	11	19
	10	2	6	6	15	15	22		16	18	22	22	1	1	7

5)	2	4	5	10	4	6	8	6)	7	9	4	6	4	12	3
	3	6	4	13	6	7	9		2	4	4	7	8	8	5
	4	7	10	5	10	4	5		4	5	6	5	12	7	3
	6	5	12	4	7	5	4		3	6	8	4	6	6	7
	7	4	13	6	6	7	5		5	10	9	3	8	5	4
	10	8	5	2	8	9	10		6	9	5	10	9	6	7
	11	9	4	8	4	5	4		7	4	3	6	2	5	4
7)	6	7	8	9	10	12	5	8)	12	4	8	9	12	4	5
	2	3	4	8	9	16	8		6	5	10	7	3	6	8
	9	6	3	6	8	9	3		3	10	4	12	5	6	10
	5	7	6	7	10	7	8		11	12	16	5	7	8	12
	4	8	18	8	6	2	3		6	7	4	6	7	2	1
	12	9	2	10	8	4	5		12	5	7	12	9	4	5
	3	10	3	5	4	3	8		4	6	8	4	3	6	7
9)	6	3	5	4	6	7	8	10)	4	3	5	4	8	9	10
	5	2	4	3	8	9	10		7	6	2	5	12	13	4
	4	3	3	5	4	6	7		6	5	1	6	7	8	9
	7	5	3	2	1	4	5		7	4	6	10	4	7	3
	8	6	6	10	12	5	4		4	3	10	8	5	3	2
	12	7	8	7	4	8	9		3	8	12	6	3	6	12
	4	8	9	6	7	4	3		5	9	4	7	8	9	1

Відповіді: 1) $L(x^*) = 16$. 2) $L(x^*) = 24$. 3) $L(x^*) = 25$.
4) $L(x^*) = 38$. 5) $L(x^*) = 24$. 6) $L(x^*) = 25$.
7) $L(x^*) = 81$. 8) $L(x^*) = 73$. 9) $L(x^*) = 60$. 10) $L(x^*) = 68$.

9.3.4. Розв'язати методом Мака задачі про оптимальні призначення. Умови варіантів задач про оптимальні призначення такі ж як і у попередньому завданні.

9.3.5. Розв'язати методом Форда-Фалкерсона задачі про максимальний потік в мережах, що задані матрицями суміжностей C і пропускних здатностей R . У всіх задачах джерелом потоку є вершина 1, а стоком потоку – вершина 6.

1)	0	1	1	0	0	0			0	10	18	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1			0	0	0	0	14	1	
$C =$	0	1	0	1	0	0	,	$R =$	0	10	0	17	0	0	;
	0	1	0	0	1	1			0	9	0	0	22	12	
	0	0	0	0	0	1			0	0	0	0	0	18	
	0	0	0	0	0	0			0	0	0	0	0	0	
2)	0	1	1	0	0	0			0	11	33	0	0	0	
	0	0	0	1	1	0			0	0	0	14	4	0	
$C =$	0	1	0	1	1	0	,	$R =$	0	5	0	15	23	0	;
	0	0	0	0	0	1			0	0	0	0	0	23	
	0	0	0	1	0	1			0	0	0	11	0	22	
	0	0	0	0	0	0			0	0	0	0	0	0	

3) C =	0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	,	R =	0 20 21 22 0 0 0 0 5 13 14 0 0 0 0 0 12 28 0 0 12 0 11 10 0 0 0 0 0 17 0 0 0 0 0 0	;
4) C =	0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	,	R =	0 5 19 27 0 0 0 0 0 0 17 15 0 23 0 0 7 8 0 5 12 0 11 0 0 0 0 0 0 28 0 0 0 0 0 0	;
5) C =	0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	,	R =	0 24 33 6 12 0 0 0 10 15 7 0 0 0 0 11 15 17 0 0 0 0 12 26 0 0 0 0 0 25 0 0 0 0 0 0	;
6) C =	0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0	,	R =	0 19 16 8 18 0 0 0 20 1 0 0 0 0 0 0 32 42 0 0 45 0 0 2 0 0 0 31 0 20 0 0 0 0 0 0	.

Відповіді: 1) $d^* = 28$. 2) $d^* = 44$. 3) $d^* = 55$.

4) $d^* = 51$. 5) $d^* = 68$. 6) $d^* = 61$.

9.3.6. Розв'язати методом Мінті задачі про найкоротший шлях в наведених нижче мережах, кожна з яких задається числом вершин $N = 10$ і матрицею L , що описує множину дуг (кожний стовпець цієї матриці відповідає існуючій дузі мережі, при цьому, перший елемент стовпця є початок дуги, другий – кінець дуги, третій – довжина дуги):

1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	9
2	3	4	3	5	6	4	6	6	7	8	9	10	5	9	6	9	10	10
5	10	20	5	20	17	12	17	5	4	10	6	20	7	5	1	5	11	15

1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	9	9
2	3	4	5	2	7	8	3	7	9	10	5	10	6	8	9	4	9	6	10
20	12	9	20	12	20	7	20	2	10	18	10	18	1	7	16	18	17	20	8

1	1	1	2	2	2	3	4	4	4	4	5	5	6	7	7	7	8	8	9
2	3	4	3	5	6	5	3	5	7	9	6	7	8	6	8	9	9	10	10
18	20	19	8	2	11	2	7	1	6	12	9	5	12	6	15	6	16	2	4

1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7	8	9
2	3	4	4	5	6	2	4	5	7	8	7	9	10	5	9	8	10	10
15	2	20	9	20	17	13	12	15	8	5	4	3	7	7	11	5	6	4

1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	9	10
2	3	4	5	6	2	6	7	8	5	9	6	9	7	9	9	10	7	10	8
13	2	8	18	2	11	13	20	20	10	20	4	20	20	20	11	20	11	14	5

1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	7	7	8	8	9
2	3	4	5	3	6	4	6	7	10	7	8	4	8	10	9	10	7	9	10
10	18	20	20	8	15	9	7	17	12	8	10	7	15	5	10	19	20	10	2

9.4 Розв'язання задач цілочислового програмування

9.4.1. Розв'язати нижченаведені задачі методом Гоморі-1. В усіх нижченаведених задачах всі змінні невід'ємні та цілі.

- 1) $5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 4x_2 \geq 10,$
 $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 10;$
- 2) $6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + x_2 \geq 3,$
 $x_1 - x_2 \leq 1;$
- 3) $6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + x_2 \geq 3,$
 $x_1 - 2x_2 \leq 2,$
 $3x_1 + 2x_2 \geq 1;$
- 4) $x_1 + x_2 \rightarrow \min,$
 $-x_1 - x_2 + x_5 = -1,$
 $-2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2,$
 $-4x_1 + 2x_2 + x_4 = -1;$
- 5) $6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + x_2 \geq 3,$
 $x_1 - x_2 \geq 1;$
- 6) $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 2x_2 \geq 16,$
 $2x_1 + x_2 \geq 16;$
- 7) $5x_1 - 3x_2 \rightarrow \max,$
 $3x_1 + 2x_2 \geq 6,$
 $2x_1 - 3x_2 \geq -6,$
 $x_1 - x_2 \leq 4,$
- 8) $5x_2 + 7x_4 \rightarrow \min,$
 $-10x_2 + x_3 + x_4 = -16,$
 $x_1 - 3x_2 - 3x_4 = -12,$
 $-6x_2 - 2x_4 + x_5 = -17;$
- 9) $-5x_4 - 7x_5 \rightarrow \max,$
 $x_1 - x_4 - 2x_5 = -7,$
 $-x_3 + 3x_4 - 6x_5 = -3,$
 $x_2 - x_4 - 4x_5 = -11;$
- 10) $8x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$
 $x_1 - 4x_2 + x_3 = 4,$
 $-4x_1 + x_2 + x_4 = 4,$
 $x_1 + x_2 + x_5 = 6.$

Відповіді: 1) $x^* = (3; 1; 0), L(x^*) = 21.$ 2) $x^* = (1; 1), L(x^*) = 10.$

3) $x^* = (1; 1), L(x^*) = 10.$

4) $x^* = (1; 0; 0; 3; 0), L(x^*) = 1.$

5) $x^* = (2; 0), L(x^*) = 12.$

6) $x^* = (6; 5), L(x^*) = 27.$

7) $x^* = (18; 14), L(x^*) = 48.$

8) $x^* = (0; 4; 24; 0; 7), L(x^*) = 20.$

9) $x^* = (0; 0; 0; 3; 2), L(x^*) = -29.$ 10) $x^* = (5; 1; 0; 0; 0), L(x^*) = 42.$

9.4.2. Розв'язати методом Гоморі-2 задачі частково дискретного ЛП:

- | | |
|--|--|
| 1) $x_1 + 8x_2 \rightarrow \max,$
$3x_1 + x_2 \leq 9,$
$0,16x_1 + x_2 \leq 1,9,$
$x_j \geq 0, x_j - \text{ціле}, j = 1,2;$ | 2) $-6x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
$-2,9x_1 + 6x_2 \leq 17,4,$
$3x_1 - x_2 \leq 1,$
$x_j \geq 0, x_j - \text{ціле}, j = 1,2;$ |
| 3) $0,25x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
$0,5x_1 + x_2 \leq 1,75,$
$x_1 + 0,3x_2 \leq 1,5,$
$x_j \geq 0, x_j - \text{ціле}, j = 1,2;$ | 4) $-2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$
$2x_1 + x_2 \leq 19,33,$
$x_1 + 3x_2 \leq 10,$
$x_j \geq 0, x_j - \text{ціле}, j = 1,2;$ |
| 5) $x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
$2x_1 + 11x_2 \leq 38,$
$x_1 + x_2 \leq 7,$
$4x_1 - 5x_2 \leq 5,$
$x_j \geq 0, j = 1,2, x_2 - \text{ціле};$ | 6) $x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
$2x_1 + 11x_2 \leq 38,$
$x_1 + x_2 \leq 7,$
$4x_1 - 5x_2 \leq 5,$
$x_j \geq 0, j = 1,2, x_1 - \text{ціле};$ |
| 7) $x_1 \rightarrow \max,$
$x_1 + 3x_2 \leq 12,$
$3x_1 - 8x_2 \leq 24,$
$x_j \geq 0, j = 1,2, x_1 - \text{ціле};$ | 8) $-8x_1 - 6x_2 \rightarrow \min,$
$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 11,$
$4x_1 + x_2 + x_4 = 8,$
$x_j \geq 0, j = 1,2, x_1 - \text{ціле}.$ |

Відповіді: 1) $x^* = (2; 1), L(x^*) = 10.$ 2) $x^* = (1; 3), L(x^*) = -9.$
 3) $x^* = (1; 1), L(x^*) = 1,25.$ 4) $x^* = (7; 1), L(x^*) = -18.$
 5) $x^* = (3,75; 2), L(x^*) = 5,75.$ 6) $x^* = (4; 2,73), L(x^*) = 6,73.$
 7) $x^* = (9; 0,38), L(x^*) = 9.$ 8) $x^* = (1; 1,6; 0; 2,41), L(x^*) = -17,6.$

9.4.3. Розв'язати методом Гоморі-3 нижченаведені задачі дискретного ЛП. В усіх задачах всі змінні невід'ємні та цілі.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $-x_1 - 5x_2 \rightarrow \max,$
$12x_1 - 3x_2 \geq 8,$
$-3x_1 + 9x_2 \geq 8,$
$-x_1 + 3x_2 \geq 3;$ | 2) $3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$
$-3x_2 \leq 2,$
$-2x_1 + 2x_2 \leq 2,$
$2x_1 - x_2 \geq 1;$ | 3) $x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$
$x_1 + 6x_2 \geq 5,$
$-5x_1 + 19x_2 \geq 13,$
$-3x_1 + 6x_2 \geq 2;$ |
| 4) $7x_1 + 12x_2 \rightarrow \min,$
$4x_1 - 23x_2 \leq -14,$
$-12x_1 + 2x_2 \leq -9,$
$-13x_1 - x_2 \leq -10;$ | 5) $-3x_1 - 8x_2 \rightarrow \max,$
$-2x_1 + 10x_2 \geq 4,$
$-3x_1 - 5x_2 \leq -10,$
$2x_1 - x_2 \geq 2;$ | 6) $10x_1 + 7x_2 \rightarrow \min,$
$2x_1 - 12x_2 \leq -9,$
$x_1 + 4x_2 \geq 10,$
$4x_1 - 2x_2 \geq 14;$ |
| 7) $-3x_4 - 2x_5 \rightarrow \max,$
$x_1 - 5x_4 + x_5 = -15,$
$x_3 + x_4 - 8x_5 = -9,$
$x_2 - x_4 - 10x_5 = -19;$ | 8) $3x_2 + x_5 \rightarrow \min,$
$-2x_2 + x_3 - 18x_5 = -20,$
$x_1 + x_2 - 15x_5 = -7,$
$-5x_2 + x_4 + x_5 = -9.$ | |

- Відповіді: 1) $x^* = (2; 2)$, $L(x^*) = -12$. 2) $x^* = (1; 0)$, $L(x^*) = 3$.
 3) $x^* = (0; 1)$, $L(x^*) = 3$. 4) $x^* = (1; 1)$, $L(x^*) = 19$.
 5) $x^* = (2; 1)$, $L(x^*) = -14$. 6) $x^* = (5; 2)$, $L(x^*) = 64$.
 7) $x^* = (3; 5; 3; 4; 2)$, $L(x^*) = -16$. 8) $x^* = (6; 2; 2; 0; 1)$, $L(x^*) = 7$.

9.4.4. Розв'язати методом гілок та границь задачі цілочислового ЛП. В усіх задачах виконуються умови: $x_j \geq 0$, x_j – цілі, $j = 1, 2$.

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $x_1 + x_2 \rightarrow \max$,
$2x_1 + 11x_2 \leq 38$,
$x_1 + x_2 \leq 7$,
$4x_1 - 5x_2 \leq 5$; | 2) $-2x_1 - x_2 \rightarrow \min$,
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$,
$x_1 - x_2 \leq 3$,
$-x_1 + 3x_2 \leq 3$; | 3) $6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$,
$2x_1 + x_2 \geq 3$,
$x_1 - 2x_2 \leq 2$,
$3x_1 + 2x_2 \geq 1$; |
| 4) $x_1 + x_2 \rightarrow \min$,
$-x_1 - x_2 \leq -1$,
$-2x_1 + 2x_2 \leq -2$,
$-4x_1 + 2x_2 \leq -1$; | 5) $5x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$,
$-10x_1 + x_2 \leq -16$,
$-3x_1 - 3x_2 \leq -12$,
$-6x_1 - 2x_2 \leq -17$; | 6) $2x_1 - x_2 \rightarrow \max$,
$2x_1 + x_2 \leq 8$,
$x_1 + 3x_2 \geq 6$,
$3x_1 + x_2 \geq 3$; |
| 7) $x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$,
$x_1 - 3x_2 \leq -1$,
$8x_1 - x_2 \geq 6$,
$3x_1 - 11x_2 \leq -7$; | 8) $-5x_1 - 7x_2 \rightarrow \max$,
$2x_1 + x_2 \geq 3$,
$20x_1 - x_2 \geq 15$,
$x_1 - x_2 \leq -2$; | 9) $x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$,
$2x_1 + 2x_2 \geq 5$,
$x_1 - 3x_2 \leq -1$,
$x_1 - x_2 \geq 2$. |

- Відповіді: 1) $x^* = (3; 2)$ або $x^* = (2; 3)$, $L(x^*) = 5$.
 2) $x^* = (3; 1)$, $L(x^*) = -7$. 3) $x^* = (1; 1)$, $L(x^*) = 10$.
 4) $x^* = (1; 0)$, $L(x^*) = 1$. 5) $x^* = (4; 0)$, $L(x^*) = 20$.
 6) $x^* = (3; 1)$, $L(x^*) = 5$. 7) $x^* = (1; 1)$, $L(x^*) = 5$.
 8) $x^* = (1; 3)$, $L(x^*) = -26$. 9) $x^* = (4; 2)$, $L(x^*) = 8$.

9.5 Розв'язання задач нелінійного програмування

9.5.1 Розв'язати методами золотого перерізу, випадкового пошуку, Фібоначчі та дихотомії нижченаведені задачі одновимірної оптимізації.

- | | |
|--|-------------------------|
| 1) $F(x) = x^2 - 1 - 1 - 1 $, | $x \in [-2, 2]$; |
| 2) $F(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 + \sqrt{(4 - x^2)(1 + 2x^2)}$, | $x \in [-2, 2]$; |
| 3) $F(x) = (x+1)^2 \ln(x+1) + x \exp(-x)$, | $x \in [0, e]$; |
| 4) $F(x) = \sin(x) \sin(2x) + \arccos(x^2)$, | $x \in [-0,75, 0,75]$; |
| 5) $F(x) = \arctg(x) - \ln(x)/2$, | $x \in [0,65, 1,75]$; |
| 6) $F(x) = x + \sqrt{x} + \exp(x)x^2$, | $x \in [0, 4]$; |
| 7) $F(x) = 4x/(x^2 + 4) - [x^2(x - 2)]^{(2/5)}$, | $x \in [-2, 2]$. |

9.5.2 Розв'язати квадратичним симплекс-методом нижченаведені задачі опуклого квадратичного програмування за умови, що: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

- 1) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 6;$
- 2) $-2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 12x_2 \rightarrow \max,$
 $3x_1 + 4x_2 \leq 12;$
- 3) $2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 2x_2 \leq 1;$
- 4) $x_1^2 + 3x_2^2 - x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 4x_2 \leq 7;$
- 5) $-2x_1^2 - 3x_2^2 + 16x_1 + 24x_2 \rightarrow \max,$
 $2x_1 + x_2 \leq 4;$
- 6) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 8x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 2x_2 \leq 4;$
- 7) $-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$
 $x_1 + 2x_2 \leq 16;$
- 8) $-x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 15.$

Відповіді: 1) $x^* = (0,69; 1,54)$. 2) $x^* = (1,23; 2,07)$.
 3) $x^* = (0,29; 0,14)$. 4) $x^* = (0,5; 0,33)$. 5) $x^* = (0,57; 2,86)$.
 6) $x^* = (0,4; 1,8)$. 7) $x^* = (0,5; 1)$. 8) $x^* = (3,63; 2,58)$.

9.5.3. Знайти оптимум функцій, що задані нижче методами множників Лагранжа і квадратичним симплекс-методом.

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$
 $x_1 + x_2 = 1.$
2. $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1,$
 $x_1^2 + x_2^2 = 4.$
3. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2,$
 $x_1 - x_2 = 4.$
4. $f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2,$
 $x_1 + x_2 = 6.$
5. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2,$
 $x_1 - 2x_2 = 5.$
6. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1,$
 $-x_1 + 2x_2 = 1.$
7. $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 20x_2 + 6x_2^2,$
 $x_1 + x_2 = 200.$
8. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2,$
 $x_1 + x_2 + x_3 = 8.$
9. $f(x_1, x_2) = 6[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2],$
 $x_1 + x_2 - 7 = 0.$
10. $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 8x_2 + x_1^2 + x_2^2,$
 $x_1 + x_2 = 180.$

9.6 Розв'язання матричних ігор

9.6.1. Знайти сідлові точки і значення нижченаведених матричних ігор:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{в) } \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \\ 0 & -1/2 & 7/4 \end{bmatrix} \quad \text{д) } \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & -8 \\ -2 & -4 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Відповіді: а) (1,1), $v = 2$; б) (1,3), $v = 3$;
 в) (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), $v = 3$;
 г) (2,1), $v = 1/2$; д) (2,2), $v = 3$.

9.6.2. Визначити виграш першого гравця в ситуації (х, у):

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & x = (1/4, 3/4), y = (4/5, 1/5); \\ \text{б) } & \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} & x = (1/9, 1/9, 5/9, 2/9), y = (0, 0, 1); \end{aligned}$$

Відповіді: а) 0,55; б) 1/3.

9.6.3. Розв'язати симплексом-методом такі ігри:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} & \text{б) } & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \text{в) } & \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Відповіді: а) $x^* = (1/7, 2/7, 4/7)$, $v = 15/7$; $y^* = (1/7, 2/7, 4/7)$.
 б) $x^* = (2/5, 1/9, 22/45)$, $v = 142/5$; $y^* = (5/9, 1/5, 11/45)$.
 в) $x^* = (1/3, 2/3, 0)$, $v = 1$, $y^* =$
 $= \alpha(1/5, 3/5, 1/5) + (1 - \alpha)(0, 2/3, 1/3)$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

9.6.4. За яких умов наведена нижче матрична гра має сідлову точку у чистих стратегіях?

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Відповідь: якщо $0 < a < b < c$, то $(i^*, j^*) = (1, 1)$, $v = a$;
 якщо $0 > a > b > c$, то $(i^*, j^*) = (1, 2)$, $v = b$; і т.д.

9.7 Лабораторний практикум

Розв'язати програмним способом наведені нижче задачі.

Звіт з лабораторних робіт повинен містити варіант завдання, короткий виклад теоретичного матеріалу, алгоритм відповідних методів, текст програми, що його реалізує, і також результати виконання програми.

Лабораторна робота №1. Варіанти завдань наведено у п. 9.2.3.

Лабораторна робота №2. Варіанти завдань наведено у п.9.2.4.

Лабораторна робота №3. Варіанти завдань наведено у п.9.3.1.

Лабораторна робота №4. Варіанти завдань наведено у п.9.3.2.

Лабораторна робота №5. Варіанти завдань наведено у п.9.3.3.
Лабораторна робота №6. Варіанти завдань наведено у п. 9.3.4.
Лабораторна робота №7. Варіанти завдань наведено у п.9.3.5.
Лабораторна робота №8. Варіанти завдань наведено у п.9.3.6.
Лабораторна робота № 9. Варіанти завдань наведено у п.9.4.1.
Лабораторна робота №10. Варіанти завдань наведено у п.9.4.2.
Лабораторна робота №11. Варіанти завдань наведено у п.9.4.3.
Лабораторна робота №12. Варіанти завдань наведено у п.9.4.4.
Лабораторна робота №13. Варіанти завдань наведено у п.9.5.1.
Лабораторна робота №14. Варіанти завдань наведено у п.9.5.2.
Лабораторна робота №15. Варіанти завдань наведено у п.9.5.3.

10 КОНТРОЛЬНА РОБОТА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Умови контрольної роботи студенти отримують під час установчої сесії. Виконану та оформлену за установленною формою роботу слід направляти в деканат, де вона реєструється і видається (під розпис) викладачу. Після перевірки контрольна робота повертається студенту з позначкою на обкладинці зошита про допуск до захисту або ні з підписом викладача і датою перевірки. У першому випадку робота може бути захищена у будь-який час до екзаменаційної сесії. Робота, не допущена до захисту, підлягає переробці.

Приступати до виконання контрольної роботи слід лише після вивчення відповідного теоретичного матеріалу та отримання, у разі потреби, методичної допомоги на консультаціях.

Після одержання заліку з контрольної роботи, студент може здати іспит достроково, маючи із собою захищену контрольну роботу.

Після здачі іспиту контрольна робота залишається в екзаменатора.

10.1 Правила вибору задач контрольної роботи

Контрольна робота складається з п'яти завдань:

1. Складання математичної моделі задачі прийняття рішення.
2. Розв'язання задачі ЛП графічним методом.
3. Розв'язання задачі ЛП двофазним або симплекс-методом.
4. Розв'язання транспортної задачі методом потенціалів.
5. Розв'язання матричних ігор.

Варіанти індивідуальних задач за всіма п'ятьма завданнями визначаються відповідно табл. 10.1 за такими правилами: номер задачі першого завдання відповідає першій букві прізвища студента; номер задачі другого

завдання відповідає першій букві імені студента; номер задачі третього завдання відповідає першій букві по батькові студента; номер задачі четвертого завдання відповідає другій букві прізвища студента; номер задачі п'ятого завдання відповідає другій букві імені студента.

Наприклад, студент Іванов Юрій Олексійович повинен розв'язати такі задачі: перше завдання - «І» (задача № 9)(див. таблицю нижче); друге завдання - «Ю» (задача № 8); третє завдання - «О» (задача № 3); четверте завдання - «В» (задача № 20); п'яте завдання - «Р» (задача № 4).

Таблиця 10.1

Завдання	Номери задач																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	І	К	Л	М	Н Ю	О Х	П Ц	Р Ш	С Щ	Т Ч	У Є	Ф Я
2	Ф	У Х	Т Ц	С Ш	Р Щ	П Ч	О Э	Н Ю	М Я	Л	К	І	З	Ж	Е	Д	Г	В	Б	А
3	М	Н	О	П	Р	С Х	Т Ц	У Ш	Ф Щ	А Ч	Б Э	В Ю	Г Я	Д	Е	Ж	З	І	К	Л
4	Я	Ю	Є	Ч	Щ	Ш	Ц	Х	Ф	Т	С Г	Р Д	П Е	О	Н Ж	М З	И	А К	Б У	В
5	З У	З Т	Є С	Р	Д П	Г О	В Н	Б М	К	Ф	Х	Ц	Ш	Щ	Ч	Е	Ю	Я	І	К

Роботи, що були виконані не за своїм варіантом, до перевірки не приймаються.

10.2 Варіанти завдань контрольної роботи

Задача №1. Складання моделі задачі прийняття рішення.

1. Фірма «Лісова пилорама» зіткнулася з проблемою найраціональнішого використання ресурсів лісоматеріалів, що є в одному з лісових масивів, які їй належать. У цьому масиві є лісопильний завод і фабрика з виготовлення фанери. Тобто, лісоматеріали можна використовувати як для виробництва пиломатеріалів, так і для виготовлення фанери. Щоб отримати $2,5 \text{ м}^3$ комплектів пиломатеріалів необхідно витратити $2,5 \text{ м}^3$ ялинових і $7,5 \text{ м}^3$ піхтових лісоматеріалів. Для виготовлення 100 м^3 фанери потрібно 5 м^3 ялинових і 10 м^3 піхтових лісоматеріалів. Лісовий масив містить 80 м^3 ялинових і 180 м^3 піхтових лісоматеріалів.

Відповідно умовам постачань, протягом планованого періоду необхідно зробити принаймні 10 м^3 пиломатеріалів і 1200 м^3 фанери. Прибуток з 1 м^3 пиломатеріалів складає 16 дол., а з 100 м^3 фанери – 60 дол.

2. Фірмі треба визначити, яку кількість x_1 чистої сталі і яку кількість x_2 металобрухту слід використовувати для виготовлення (з відповідного сплаву) лиття для одного із своїх замовників. Нехай виробничі витрати в розрахунку на 1т чистої сталі дорівнюють 3 ум.од., а витрати на 1т металобрухту – 5 ум.од. Замовлення передбачає постачання не менш 5т лиття; при цьому замовник готовий купити і більшу кількість лиття, якщо фірма поставить перед ним такі умови.

Припустимо, що запаси чистої сталі обмежені і не перевищують 4т, а запаси металобрухту не перевищують 6т. Відношення ваги металобрухту до ваги чистої сталі в процесі отримання сплаву не повинне перевищувати 7:8. Виробничо-технологічні умови такі, що на процеси плавлення і лиття не може бути відведено більше 18 годин. При цьому на 1т сталі витрачається 3 години, а на 1 т металобрухту – 1 годину виробничого часу.

3. Фірма «Ласуня» випускає чотири види харчових напівфабрикатів. Кожен напівфабрикат складається з ряду інгредієнтів (таких, як крохмаль, цукор, вітаміни і т.д.). Нехай індекс i вказує на порядковий номер інгредієнта ($i = 1, 2, \dots, l$)... Позначимо через a_{ij} кількість інгредієнта i в одному кілограмі напівфабрикату j . Припустимо, що максимальна кількість інгредієнта i , на який фірма розраховує протягом найближчого місяця, дорівнює M_i .

Прибуток, що одержується з одного кілограма напівфабрикату j , позначимо через p_j . Через x_j позначимо число кілограмів напівфабрикату j , зробленого фірмою протягом найближчого місяця. Нехай за цей період повинно бути зроблено не менше 100000 кілограмів напівфабрикату 1, 125000 кілограмів напівфабрикату 2, 30000 кілограмів напівфабрикату 3 і 500000 кілограмів напівфабрикату 4.

Побудувати оптимальний план випуску продукції.

4. Фірмою «Супертранзистор» випускаються радіоприймачі трьох моделей: модель А, модель В і модель С. Кожен виріб зазначених моделей приносить прибуток у розмірі 8, 15 і 25 у.о., відповідно. Необхідно, щоб фірма випускала за тиждень не менше 100 приймачів моделі А, 150 приймачів моделі В і 75 приймачів моделі С.

Кожна модель характеризується певним часом, необхідним для виготовлення відповідних деталей, складання виробу і його упакування. Так, зокрема, у розрахунку на 10 приймачів моделі А потрібно 3 години для виготовлення відповідних деталей, 4 години на складання і 1 година на упакування. Відповідні показники в розрахунку на 10 приймачів моделі В дорівнюють 3,5; 5 і 1,5 годин, а на 10 приймачів моделі С – 5, 8 і 3. Протягом найближчого тижня фірма може витратити на виробництво радіодеталей 150 годин, на складання 200 годин і на упакування 60 годин.

Для визначення виробничого плану побудувати відповідну модель.

5. Для фірми «Нафтопродукти» треба визначити оптимальний розподіл наявної сирової нафти (різного сорту) за двома можливими технологіч-

ними процесами складання сумішей. Технологічний процес 1 характеризується такими показниками: з однієї одиниці об'єму сирової нафти A і трьох одиниць об'єму сирової нафти B виходить п'ять одиниць об'єму бензину X й дві одиниці об'єму бензину Y . Технологічний процес 2 характеризується іншими показниками: з чотирьох одиниць об'єму сирової нафти A і двох одиниць об'єму сирової нафти B виходить три одиниці об'єму бензину X і вісім одиниць об'єму бензину Y . Обсяги продукції, що випускається під час реалізації технологічних процесів 1 і 2, позначимо відповідно через x_1 і x_2 .

Максимальна кількість запасів сирової нафти A дорівнює 100 одиниць об'єму, а сирової нафти B – 150 одиниць об'єму. За умовами постачань потрібно виробити не менш 200 одиниць об'єму бензину X і 75 одиниць об'єму бензину Y . Прибутки з одиниці об'єму продукції, одержаної за допомогою технологічних процесів 1 і 2, складають p_1 і p_2 , відповідно.

6. Авіакомпанія «Небесна вантажівка», що обслуговує периферійні райони країни, має в розпорядженні 8 літаків типу 1, 15 літаків типу 2, 12 літаків типу 3, які вона може використовувати для виконання рейсів протягом найближчої доби. Вантажопідйомність (у тисячах тонн) відома: 45 для літаків типу 1, 7 для літаків типу 2 і 4 для літаків типу 3.

Авіакомпанія обслуговує міста A і B . Місту A потрібен тоннаж у 20000 т, а місту B – у 30000 т. Надлишковий тоннаж не оплачується. Кожен літак протягом дня може виконати тільки один рейс.

Витрати, пов'язані з перельотом літаків по маршруту «Центральний аеродром – пункт призначення», зазначені в наведеній нижче таблиці:

	тип 1	тип 2	тип 3
місто А	23	5	1,4
місто В	58	10	3,8

Позначимо через x_i ($i = 1, 2, 3$) число літаків i -го типу, відправлених у місто A , а через y_j ($j = 1, 2, 3$) число літаків j -го типу, відправлених у місто B . Побудувати модель оптимальних перевезень.

7. Авіакомпанії «Нічний політ» необхідно визначити, яку кількість палива для реактивних літаків варто закупити у фірм постачальників, якщо число останніх дорівнює трьом і мають місце такі вимоги та обмеження.

1. Заправка літаків здійснюється у чотирьох аеропортах.
2. Нафтові компанії констатують такі можливості постачання палива протягом найближчого місяця:
 - а) 2500000 літрів – нафтова компанія 1;
 - б) 5000000 літрів – нафтова компанія 2;
 - в) 6000000 літрів – нафтова компанія 3.
3. Авіакомпанії потрібна така кількість палива:
 - а) 1000000 літрів в аеропорту 1;

б) 2000000 літрів в аеропорту 2;

в) 3000000 літрів в аеропорту 3;

г) 4000000 літрів в аеропорту 4.

4. Вартість 1-го літра реактивного палива з урахуванням витрат, пов'язаних з доставкою, мають значення, приведені в такій таблиці:

	компанія I	компанія 2	компанія 3
аеропорт 1	12	9	10
аеропорт 2	10	11	14
аеропорт 3	8	11	13
аеропорт 4	11	13	9

Побудувати модель оптимізації управлінського рішення.

8. Служба поліції має такі мінімальні потреби в кількості поліцейських у різний час доби:

Час доби (години)	Номер періоду	Мінімальне число поліцейських, що потрібні в зазначений період
2-6	1	20
6-10	2	50
10-14	3	80
14-18	4	100
18-22	5	40
22-2	6	30

При цьому слід мати на увазі, що період 1 зразу слідує за періодом 6.

Кожен поліцейський працює вісім годин без перерви. Позначимо через x_t число поліцейських, які щодня приступають до роботи в період t . Поліцейська служба намагається скласти службовий розклад на кожну добу таким чином, щоб обійтися мінімальним числом поліцейських, але не порушуючи сформульованих вище умов (вимог).

9. Фірма «Нітротканина» робить дрібні деталі для промислових виробів і продає їх через своїх посередників-оптовиків за фіксованою поставною ціною 2,50 дол. за штуку. Число посередників-оптовиків дорівнює п'яти. Комерційні прогнози вказують на те, що обсяг місячних поставок складе: посереднику 1 – 3000 штук, посереднику 2 – 3000 штук, посереднику 3 – 10 000 штук, посереднику 4 – 5000 штук, посереднику 5 – 4000 штук. Фірма має такі виробничі потужності: завод 1 – 5000 деталей на місяць, завод 2 – 10000 деталей на місяць, завод 3 – 12500 деталей на місяць. Собівартість однієї деталі, виготовленої на заводі 1, дорівнює 1 дол., на заводі 2 – 0,90 дол., на заводі 3 – 0,80 дол. Транспортні витрати (у доларах),

пов'язані з доставкою однієї деталі в точки оптового продажу, наведені нижче:

	компанія 1	компанія 2	компанія 3	компанія 4	компанія 5
завод 1	0,05	0,07	0,10	0,15	0,15
завод 2	0,08	0,06	0,09	0,12	0,14
завод 3	0,10	0,09	0,08	0,10	0,15

Потрібно побудувати модель з метою визначення оптимальних обсягів продукції, предметів випуску на кожному заводі даної фірми, і кількості деталей, що поставляються фірмою своїм посередникам-оптовикам.

10. Авіакомпанії «Перманентний рейс» потрібно визначити, скільки стюардес треба прийняти на роботу протягом шести місяців за умови, якщо кожна з них, перш ніж приступити до виконання обов'язків, повинна пройти попередню підготовку. Потреби в кількості стюардесо-годин (с.-г.) льотного часу відомі: у січні потрібно 8000 с.-г., у лютому – 9000, у березні – 8000, у квітні – 10000, у травні – 9000, у червні – 12 000 с.-г. Підготовка стюардес на регулярних авіалініях займає один місяць. Отже, прийом на роботу повинен принаймні на один місяць випереджати введення стюардеси в роботу. Крім того, кожна стюардеса, яка навчається, повинна протягом місяця, відведеного на її підготовку, пройти 100-годинну практику безпосередньо під час польотів. Таким чином, за рахунок кожної стюардеси, яка навчається, протягом місяця звільняється 100 годин робочого часу, відведеного для вже навчених стюардес. Кожна досвідчена стюардеса протягом місяця може мати наліт до 150 годин. Авіакомпанія на початку січня вже має 60 досвідчених стюардес. Якщо ресурси с.г. перевищують місячні потреби, то стюардеси працюють у режимі нальоту менше 150 годин на один місяць. При цьому ні одну з них не знімають з роботи. Установлено також, що приблизно 10% навчених стюардес звільняються за сімейними або іншими причинами. Досвідчена стюардеса обходиться авіакомпанії в 800 дол., а стюардеса, яка навчається – у 400 дол. на місяць.

11. Фірма «Комфорт» виготовляє холодильники, газові плити і кухонні раковини. У наступному році очікується такий рівень збуту:

	квартали			
	1	2	3	4
Холодильники	2000	1500	3000	1000
газові плити	1500	1500	1000	1500
кухонні раковини	1000	3000	1500	3000

Фірма розробляє виробничий план, який задовольняв би зазначений попит. Крім того, фірмою прийнято рішення наприкінці кожного кварталу мати запаси в розмірі 1000 одиниць кожного виду продукції. На початку першого кварталу запаси відсутні. Протягом кварталу фірма може витратити не більш 8000 приведених годин (п. г.) робочого часу. На виготовлення холодильника потрібно 0,5 п. г., газової плити – 2 п.г., а кухонної раковини – 1,5 п. г. У четвертому кварталі холодильники не можуть виготовлятися, оскільки фірма планує зробити у цей час часткове переустаткування підприємства.

Припустимо, що збереження кожної одиниці продукції на складі протягом кварталу обходиться фірмі в 5 ум.од.

Для фірми треба розробити виробничий план з урахуванням поквартальних лімітів виробничого часу, орієнтуючись при цьому на повне задоволення попиту. При цьому слід забезпечити мінімум витрат, що пов'язані зі збереженням продукції на складі.

12. Фірма «Усяка всячина», що випускає бритвені леза. Фірма має два підприємства і три оптових склади, що розміщені у різних географічних пунктах. Леза на склади доставляються залізницею партіями. Випуск лез протягом одного місяця на підприємствах 1 і 2 складає $S_1=100$ і $S_2=200$, відповідно. Можливості збуту на складах 1, 2 і 3 протягом цього місяця рівні відповідно $D_1 = 150$, $D_2 = 200$ і $D_3 = 250$. Як видно, можливий збут, тобто попит, значно перевищує постачання, внаслідок чого частина потреб залишиться незадовільною.

Припустимо, що транспортні витрати на доставку одного вагона лез з підприємства i на склад j рівні t_{ij} і що прибуток від збуту цього вагона на складі j дорівнює p_j . (Фірма може продавати свої леза за різними цінами в різних пунктах країни). Побудуйте транспортну модель з цільовою функцією, тотожною прибутку.

13. Фірма «З далеким прицілом» повинна виконувати зобов'язання з постачання $D_1, D_2, \dots, D_n$ одиниць своєї продукції протягом періодів 1, 2, ..., відповідно. За умови однозмінної роботи обсяг продукції протягом періоду t складає m_t одиниць. При цьому прямі витрати на виробництво однієї одиниці рівні p_t . За рахунок понаднормових, фірма може випустити додатково e_t одиниць при прямих витратах q_t на одиницю, де $q_t > p_t$. Оскільки зобов'язання з постачання змінюються в значних межах, керівництво думає, що в окремі періоди може знадобитися створення запасів. Витрати на збереження одиниці запасу до кінця періоду t складають h_t грошових одиниць. Побудуйте транспортну модель, що дозволяє знайти програму виробництва і збереження мінімальної вартості.

14. Фірма «Мікродеталь» є власником дрібносерійного металообробного заводу. Денний портфель замовлень включає n деталей, кожна з яких може оброблятися на m різних верстатах. Нехай t_{ij} загальна тривалість об-

робки деталі i на верстаті j (включаючи час налагодження верстата). Побудуйте модель, що мінімізує загальну тривалість виконання всіх замовлень.

15. Потрібно скласти розклад занять на факультеті. Зокрема, потрібно призначити n викладачів у n груп. Раніше студенти заповнили анкети з оцінюванням викладачів, і тому відомо, у якій мірі студентам подобаються викладачі, що вели в них заняття. У деяких випадках викладач ніколи не проводив занять у деякій групі, і тому приходить оцінити, наскільки цей викладач сподобається студентам цієї групи. В інших випадках викладач не хоче або не може вести заняття в конкретній групі, так що варто виключити можливість призначення цього викладача в дану групу.

Побудувати математичну модель, щоб максимізувати ступінь задоволення студентів викладачами.

16. Фірма має запаси продуктів, якість яких погіршується при збереженні, причому погіршена якість оцінюється тижневими періодами збереження. Припустимо, що поточні запаси фірми складають чотири одиниці, занумеровані індексами $i = 1, 2, 3, 4$, термін збереження позначається символом A_i . Фірма уклала такий контракт на продаж цих продуктів. Одна партія повинна бути поставлена через t_1 тижнів з початку відліку, інша – через t_2 тижнів, третя – через t_3 тижнів і четверта – через t_4 тижнів. Прибуток, одержуваний фірмою за кожну партію, є функцією тривалості збереження з моменту постачання. Ця функція позначається як $R(A)$, де A – відповідна тривалість збереження.

Побудуйте оптимізаційну модель, що дозволяє фірмі визначити, яку партію направляти замовнику на кожну дату постачання для того, щоб максимізувати загальний прибуток.

17. Відділ стипендій і надання матеріальної допомоги студентам одного з університетів готує пропозиції щодо призначення стипендій на поточний рік. Як майбутніх стипендіатів обрано n студентів, причому студенту i передбачається призначити стипендію не менше M_i дол., $i = 1, 2, \dots, n$. У розпорядженні відділу є s різних стипендій. Стипендія j дає a_j доларів. Імовірно, що відділ буде змушений призначити окремим студентам кілька стипендій, щоб вони одержували не менше ніж по M_i дол., але керівництво відділу не має права зменшити розмір кожної стипендії нижче фіксованої суми a_j . Якщо стипендія j на розглянутий рік взагалі не призначається, то до величини a_j додаються відсотки, і ця стипендія може бути призначена в збільшеному розмірі в наступному році.

Побудуйте модель призначення стипендій, максимізуючи економію за умови, що кожен студент одержить принаймні M_i дол.

18. Адміністрація штату оголосила торги на n будівельних підрядів для n фірм. Жодна фірма не може мати більше одного контракту. З політичних розумінь чиновники адміністрації прагнуть не укласти більше N

великих контрактів з фірмами, розташованими за межами штату. Позначимо через $1, 2, \dots, s$ великі контракти, а через $1, 2, \dots, t$ – фірми, розташовані за межами штату. Метою є мінімізація загальних витрат за такою умовою.

19. Фірма постачає свої вироби в мережу ресторанів, що відпускають обіди додому. Фірма прагне забезпечити кожному власнику такого домашнього ресторану достатній прибуток. Розглядається можливість розміщення n нових точок подібного типу у великому мікрорайоні. За наявною оцінкою, розміщення ресторану в пункті j забезпечить одержання прийнятнього прибутку R_j за умови, що в радіусі 5 миль від нього аналогічна торгова точка відсутня. Прийmemo $d_{ij} = 1$, якщо пункти i і j розміщення домашніх ресторанів знаходяться в радіусі 5 миль, і $d_{ij} = 0$ у протилежному випадку. Фірма розрахувала всі можливі d_{ij} і прагне вибрати схему розміщення нових домашніх ресторанів, що забезпечує максимум загального прибутку.

20. Задача про доставку вантажів (задача про покриття). Фірма «Автопегас» повинна доставити вантажі п'ятьом своїм клієнтам протягом розглянутого дня. Клієнту A потрібно доставити вантаж вагою в 1 одиницю, клієнту B – у 2 одиниці, клієнту C – у 3 одиниці, клієнту D – у 5 одиниць і клієнту E – у 8 одиниць. Фірма має чотири машини такої вантажопідйомності: машина 1 – 2 одиниці, машина 2 – 6 одиниць, машина 3 – 8 одиниць, машина 4 – 8 одиниць. Вартість експлуатації машини j складає c_j . Припустимо, що одна машина не може доставляти вантаж обом клієнтам A і C , аналогічно одна машина не може використовуватися для доставки вантажу обом клієнтам B і D .

Побудуйте модель для визначення такого призначення автомашин для доставки всіх вантажів, за яким мінімізуються сумарні витрати.

Задача №2. Розв'язання задачі ЛП графічним способом

- | | |
|--|--|
| <p>1. $-x_1 + x_2 \leq 3,$
 $5x_1 + 3x_2 \leq 97,$
 $x_1 + 7x_2 \geq 77;$
 $f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{extr}$</p> | <p>2. $3x_1 - x_2 \geq 9,$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 50,$
 $-x_1 + 4x_2 \geq 19;$
 $f = x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{extr}$</p> |
| <p>3. $x_1 + 4x_2 \leq 53,$
 $x_1 - x_2 \leq 3,$
 $7x_1 + 3x_2 \geq 71;$
 $f = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{extr}$</p> | <p>4. $6x_1 - 5x_2 \geq 17,$
 $x_1 + 2x_2 \leq 34,$
 $-4x_1 + 9x_2 \geq 17;$
 $f = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{extr}$</p> |
| <p>5. $-3x_1 + 14x_2 \leq 78,$
 $5x_1 - 6x_2 \leq 26,$
 $x_1 + 4x_2 \geq 26;$
 $f = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \text{extr}$</p> | <p>6. $11x_1 - 3x_2 \geq 24,$
 $9x_1 + 4x_2 \leq 110,$
 $-2x_1 + 7x_2 \geq 15;$
 $f = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{extr}$</p> |

$$\begin{aligned}
7. \quad & -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\
& 3x_1 - x_2 \leq 14, \\
& 5x_1 + 2x_2 \geq 38; \\
& f = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & 2x_1 - x_2 \geq 4, \\
& x_1 + 3x_2 \leq 37, \\
& -4x_1 + 9x_2 \geq 20; \\
& f = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad & 10x_1 - x_2 \geq 57, \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 53, \\
& 6x_1 - 7x_2 \leq 15; \\
& f = 5x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & 4x_1 - x_2 \geq 6, \\
& 9x_1 + 8x_2 \leq 157, \\
& -3x_1 + 11x_2 \geq 16; \\
& f = x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\
& 5x_1 + 3x_2 \leq 97, \\
& x_1 + 7x_2 \geq 77; \\
& f = 7x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad & 3x_1 - x_2 \geq 9, \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\
& -x_1 + 4x_2 \geq 19; \\
& f = 6x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 53, \\
& x_1 - x_2 \leq 3, \\
& 7x_1 + 3x_2 \geq 71; \\
& f = x_1 + 7x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad & 6x_1 - 5x_2 \geq 17, \\
& x_1 + 2x_2 \leq 34, \\
& -4x_1 + 9x_2 \geq 17; \\
& f = x_1 + 9x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15. \quad & -3x_1 + 14x_2 \leq 78, \\
& 5x_1 - 6x_2 \leq 26, \\
& x_1 + 4x_2 \geq 26; \\
& f = x_1 + 8x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16. \quad & 11x_1 - 3x_2 \geq 24, \\
& 9x_1 + 4x_2 \leq 110, \\
& -2x_1 + 7x_2 \geq 15; \\
& f = 7x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17. \quad & -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\
& 3x_1 - x_2 \leq 14, \\
& 5x_1 + 2x_2 \geq 38; \\
& f = 3x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18. \quad & 2x_1 - x_2 \geq 4, \\
& x_1 + 3x_2 \leq 37, \\
& -4x_1 + 9x_2 \geq 20; \\
& f = x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
19. \quad & 10x_1 - x_2 \geq 57, \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 53, \\
& 6x_1 - 7x_2 \leq 15; \\
& f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
20. \quad & 4x_1 - x_2 \geq 6, \\
& 9x_1 + 8x_2 \leq 157, \\
& -3x_1 + 11x_2 \geq 16; \\
& f = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{extr}
\end{aligned}$$

Задача № 3. Розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

$$\begin{aligned}
1. \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \rightarrow \min, \\
& -2x_2 + x_4 + x_5 = -3, \\
& x_3 - 2x_4 = 2, \\
& x_1 + 3x_2 - x_4 \leq 5, \\
& x_1 + x_2 \geq -3 \\
& x_j \geq 0, j=1, \dots, 5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & -8x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 15x_4 \rightarrow \min, \\
& -x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 \leq 25, \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 10, \\
& 10x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \leq 26, \\
& x_j \geq 0, j=1, \dots, 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10 \\
& 2x_1 + 4x_3 \geq 14, \\
& 2x_2 + x_3 \geq 7, \\
& x_j \geq 0, j=1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & -2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16, \\
& x_1 + x_2 \leq 7, \\
& 3x_1 + 2x_3 \geq 18, \\
& x_j \geq 0, j=1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\
& 2x_1 + x_2 \geq 1, \\
& 2x_2 + 3x_3 \geq 4, \\
& x_j \geq 0, j=1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min, \\
& 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25, \\
& 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\
& x_j \geq 0, j=1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\
& x_1 - x_2 + x_3 \leq 2, \\
& x_j \geq 0, j=1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\
& x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\
& x_j \geq 0, j=1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\
& x_1 + x_2 - x_3 \leq 1, \\
& x_j \geq 0, j = 1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5, \\
& 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\
& 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 3, \\
& x_j \geq 0, j = 1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad & x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_5 \rightarrow \max, \\
& 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1, \\
& 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 2, \\
& 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2, \\
& x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad & 5x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\
& 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1, \\
& x_j \geq 0, j = 1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3 \rightarrow \min, \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\
& 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\
& x_j \geq 0, j = 1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min, \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\
& x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\
& x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4, \\
& x_j \geq 0, j = 1,2,3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15. \quad & 2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \rightarrow \min, \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 10, \\
& 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 4, \\
& x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16. \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3, \\
& 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 4, \\
& x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17. \quad & 5x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \max, \\
& -x_2 + 2x_3 \geq 9,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18. \quad & 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \min, \\
& 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 8, \\ x_1 - x_3 &\leq 4, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 8, \\ x_1 + 6x_2 &\geq 12, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19. \quad x_1 - x_2 - x_3 &\rightarrow \min, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq -2, \\ 3x_1 + x_3 &\leq 5, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20. \quad -x_1 - 2x_2 + x_3 &\rightarrow \min, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 &\leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Задача № 4. Розв'язання транспортної задачі методом потенціалів

1. $a_1 = 200, \quad b_1 = 90,$
 $a_2 = 150, \quad b_2 = 100,$
 $a_3 = 150, \quad b_3 = 70,$
 $b_4 = 130, \quad b_5 = 110;$
2. $a_1 = 300, \quad b_1 = 180,$
 $a_2 = 280, \quad b_2 = 140,$
 $a_3 = 220, \quad b_3 = 190,$
 $b_4 = 120, \quad b_5 = 170;$
3. $a_1 = 250, \quad b_1 = 180,$
 $a_2 = 200, \quad b_2 = 120,$
 $a_3 = 150, \quad b_3 = 90,$
 $b_4 = 105, \quad b_5 = 105;$
4. $a_1 = 400, \quad b_1 = 200,$
 $a_2 = 250, \quad b_2 = 170,$
 $a_3 = 350, \quad b_3 = 230,$
 $b_4 = 225, \quad b_5 = 175;$
5. $a_1 = 150, \quad b_1 = 160,$
 $a_2 = 200, \quad b_2 = 70,$
 $a_3 = 150, \quad b_3 = 90,$
 $b_4 = 80, \quad b_5 = 100;$
6. $a_1 = 280, \quad b_1 = 170,$
 $a_2 = 300, \quad b_2 = 120,$
 $a_3 = 220, \quad b_3 = 190,$
 $b_4 = 140, \quad b_5 = 180;$
7. $a_1 = 150, \quad b_1 = 180,$
 $a_2 = 250, \quad b_2 = 120,$
 $a_3 = 200, \quad b_3 = 90,$
 $b_4 = 105, \quad b_5 = 105;$
8. $a_1 = 250, \quad b_1 = 300,$
 $a_2 = 400, \quad b_2 = 160,$
 $a_3 = 350, \quad b_3 = 220,$
 $b_4 = 180, \quad b_5 = 140;$

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 21 & 14 & 17 \\ 14 & 8 & 15 & 11 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 12 & 20 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 21 & 9 & 10 & 16 \\ 13 & 15 & 11 & 13 & 21 \\ 19 & 26 & 12 & 17 & 20 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 21 & 10 & 15 \\ 13 & 4 & 15 & 13 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 17 & 20 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 14 & 5 & 12 & 14 & 22 \\ 20 & 17 & 13 & 18 & 21 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 20 & 7 & 11 & 16 \\ 4 & 14 & 12 & 15 & 17 \\ 15 & 22 & 11 & 12 & 19 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 28 & 12 & 7 & 18 & 7 \\ 35 & 14 & 12 & 15 & 3 \\ 30 & 16 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 15 & 11 & 6 & 13 & 8 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 15 & 35 & 20 & 7 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 16 & 19 & 40 & 15 & 25 \end{bmatrix};$$

9. $a_1 = 150,$
 $a_2 = 150,$
 $a_3 = 200,$
 $b_4 = 110,$
 $b_1 = 100,$
 $b_2 = 70,$
 $b_3 = 130,$
 $b_5 = 90;$
10. $a_1 = 280,$
 $a_2 = 220,$
 $a_3 = 300,$
 $b_4 = 120,$
 $b_1 = 190,$
 $b_2 = 140,$
 $b_3 = 180,$
 $b_5 = 170;$
11. $a_1 = 200,$
 $a_2 = 250,$
 $a_3 = 150,$
 $b_4 = 90,$
 $b_1 = 120,$
 $b_2 = 180,$
 $b_3 = 105,$
 $b_5 = 105;$
12. $a_1 = 350,$
 $a_2 = 400,$
 $a_3 = 250,$
 $b_4 = 170,$
 $b_1 = 120,$
 $b_2 = 110,$
 $b_3 = 230,$
 $b_5 = 200;$
13. $a_1 = 250,$
 $a_2 = 250,$
 $a_3 = 200,$
 $b_4 = 195,$
 $b_1 = 120,$
 $b_2 = 110,$
 $b_3 = 85,$
 $b_5 = 190;$
14. $a_1 = 250,$
 $a_2 = 180,$
 $a_3 = 270,$
 $b_4 = 150,$
 $b_1 = 160,$
 $b_2 = 120,$
 $b_3 = 100,$
 $b_5 = 170;$
15. $a_1 = 350,$
 $a_2 = 300,$
 $a_3 = 350,$
 $b_4 = 220,$
 $b_1 = 160,$
 $b_2 = 160,$
 $b_3 = 180,$
 $b_5 = 280;$
16. $a_1 = 250,$
 $a_2 = 350,$
 $a_3 = 300,$
 $b_4 = 210,$
 $b_1 = 150,$
 $b_2 = 170,$
 $b_3 = 190,$
 $b_5 = 180;$
17. $a_1 = 220,$
 $a_2 = 400,$
 $a_3 = 280,$
 $b_4 = 200,$
 $b_1 = 160,$
 $b_2 = 180,$
 $b_3 = 170,$
 $b_5 = 190;$
18. $a_1 = 160,$
 $a_2 = 400,$
 $a_3 = 240,$
 $b_4 = 180,$
 $b_1 = 170,$
 $b_2 = 190,$
 $b_3 = 140,$
 $b_5 = 120;$
19. $a_1 = 300,$
 $a_2 = 330,$
 $a_3 = 370,$
 $b_4 = 200,$
 $b_1 = 190,$
 $b_2 = 150,$
 $b_3 = 240,$
 $b_5 = 220;$
20. $a_1 = 280,$
 $a_2 = 340,$
 $a_3 = 280,$
 $b_4 = 200,$
 $b_1 = 170,$
 $b_2 = 160,$
 $b_3 = 190,$
 $b_5 = 180;$

$$C = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 14 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 13 & 18 & 17 & 8 \\ 6 & 10 & 15 & 6 & 3 \\ 24 & 21 & 9 & 16 & 17 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 16 & 4 & 11 \\ 20 & 9 & 6 & 10 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 9 & 13 & 18 \\ 6 & 5 & 14 & 4 & 14 \\ 7 & 19 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 10 & 14 & 18 \\ 17 & 6 & 4 & 11 & 9 \\ 12 & 8 & 19 & 10 & 13 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 16 & 10 & 16 \\ 13 & 12 & 18 & 12 & 20 \\ 19 & 15 & 10 & 13 & 13 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 20 & 17 & 13 & 2 & 17 \\ 6 & 10 & 9 & 4 & 15 \\ 3 & 7 & 13 & 6 & 23 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 16 & 8 & 11 \\ 21 & 10 & 8 & 15 & 23 \\ 19 & 10 & 4 & 9 & 17 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 14 & 9 \\ 15 & 11 & 6 & 17 & 11 \\ 13 & 18 & 10 & 12 & 22 \end{bmatrix};$$

Задача № 5. Розв'язання матричних ігор:

а) показати існування або відсутність чистих оптимальних стратегій;

б) виконати домінування;

в) звести матричну гру до пари двоїстих задач ЛП і розв'язати її.

Варіанти умов матричних ігор наведено нижче.

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2. A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad 3. A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad 5. A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad 6. A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 8. A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad 9. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$10. A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ -3 & 6 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad 11. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad 12. A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$13. A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad 14. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$15. A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad 16. A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$17. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 26 & -12 & -11 & -10 \end{bmatrix} \quad 18. A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$19. A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$20. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 11 & 6 & 2 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М., 1972.
2. Исследование операций. Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. Методологические основы и математические методы. – М., 1981.
3. Исследование операций. Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. Модели и применения. – М., 1981.
4. Таха Х. Введение в исследование операций. Тома I,II. – М., 1985.
5. Вентцель Е. С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. – М., 1980.
6. Дегтярев Ю. И. Исследование операций. – М., 1986.
7. Зайченко Ю. П. Исследование операций. – Киев, 1979.
8. Кузнецов Ю. Н. и др. Математическое программирование. – М., 1980.
9. Карасев А. И. и др. Математические методы и модели в планировании. – М., 1987.
10. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М., – 1986,
14. Данилов Н. Н. Игровые модели принятия решений. – Кемерово, 1982.
15. Костевич Л. С., Лапко А. А. Теория игр. Исследование операций. – Минск, 1982,
16. Ашманов С. А., Тимохов А. В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М., 1991.
18. Резниченко С. С. и др. Экономико-математические методы и моделирование. – М., 1991.
19. Грешилов А. А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях. – М., 1991.
20. Математический аппарат экономического моделирования. Под ред. Е. Г. Гольштейна. – М., 1983.

Навчальне видання

Олександр Митрофанович Роїк, Анжеліка Олексіївна Азарова,
Ігор Ростиславович Арсенюк

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ЯК ІНСТРУМЕНТАРІЙ СТРАТЕГІЧНОГО
МЕНЕДЖМЕНТУ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор О. Д. Скалоцька

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¹/₄
Друк різнографічний
Тираж прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ