

О. М. Васілевський

В. Ю. Кучерук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

U_A	U_B	V_{eff}
		U_c
		U_p
$v_{eff} = \frac{U_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N U_i^4(y)/v_i}$		

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

О. М. Васілевський,
В. Ю. Кучерук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2012

УДК 621.317: 389.14
ББК 30.10
В19

Рецензенти:

Ю. М. Туз, доктор технічних наук, професор

Ю. В. Куц, доктор технічних наук, професор

А. С. Зенкін, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології». Лист № 1/11-10881 від 22.11.11 р.

Васілевський, О. М.

В19 Основи теорії невизначеності вимірювань : навчальний посібник /
О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 171 с.
ISBN

У навчальному посібнику викладено основні положення міжнародного підходу до оцінювання якості вимірювань. Навчальний посібник містить послідовний виклад основ теорії невизначеності вимірювань, алгоритмів оцінювання невизначеностей, порядку додавання та форм подання невизначеностей вимірювань. Посібник відповідає вимогам державних стандартів України та навчальним програмам дисциплін «Основи теорії невизначеності вимірювань» та «Опрацювання результатів вимірювань, контролю та діагностика на основі теорії невизначеності вимірювань» і призначений для студентів напряму підготовки «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології», здобувачів та аспірантів спеціальностей 05.11.08, 05.11.13, 05.13.05, 05.02.01.

УДК 621.317: 389.14
ББК 30.10

ISBN

© О. Васілевський, В. Кучерук, 2012

З М І С Т

ВСТУП	6
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ У ВИМІРЮВАННЯХ.....	8
1.1 Поняття невизначеності вимірювання	8
1.2 Систематизація невизначеностей вимірювання	11
1.3 Способи оцінювання стандартних невизначеностей	12
1.3.1 Оцінювання невизначеності за типом А	13
1.3.2 Оцінювання невизначеності за типом В	15
1.4 Форми подання складових невизначеностей	18
1.4.1 Форма подання стандартної невизначеності	20
1.4.2 Форма подання комбінованої невизначеності при некорельованих вхідних величинах	22
1.4.3 Форма подання комбінованої невизначеності при корельованих вхідних величинах	25
1.4.4 Форма подання розширеної невизначеності	28
1.4.5 Форма подання відносних невизначеностей	30
1.4.6 Критерій перевірки наявності кореляції між парами результатів вимірювань	31
Контрольні запитання	32
2 ВИДИ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ У ВИМІРЮВАННЯХ	33
2.1 Класифікація видів невизначеностей	33
2.1.1 Інструментальні невизначеності	33
2.1.2 Методичні невизначеності	34
2.1.3 Суб'єктивні невизначеності	35
2.2 Сфера застосування суб'єктивних вимірювань	37
2.3 Принцип невизначеності Гейзенберга.....	38
2.4 Принцип доповнюваності і співвідношення невизначеностей	39
2.5 Принцип суперпозиції	41
2.6 Критерій нікчемної невизначеності	42
Контрольні запитання	43
3 СПОСОБИ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ НА ОСНОВІ КОНЦЕПЦІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ	44
3.1 Опрацювання результатів прямих вимірювань	44
3.1.1 Опрацювання результатів прямих вимірювань з одноразовими спостереженнями	44
3.1.2 Опрацювання результатів прямих вимірювань із багаторазовими спостереженнями	46
3.1.3 Опрацювання груп прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями	48
3.2 Опрацювання результатів опосередкованих вимірювань	53
3.2.1 Оцінювання некорельованих вхідних величин	54

3.2.2 Оцінювання корельованих вхідних величин	56
3.3 Опрацювання результатів сумісних вимірювань	57
3.4 Опрацювання результатів сукупних вимірювань	65
Контрольні запитання	68
4 ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАДИ ВИРАЖЕННЯ КОМПОНЕНТІВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ	69
4.1 Практичні рекомендації щодо вираження компонентів невизначеності	69
4.1.1 Випадковість та повторність спостережень	69
4.1.2 Кореляції	70
4.1.3 Необхідність оцінювання за типом В	72
4.1.4 Математично детерміновані розподіли	72
4.1.5 Запозичені вхідні значення	73
4.1.6 Вимірювані вхідні величини	74
4.1.7 Невизначеність зразка	77
4.2 Узагальнений алгоритм оцінювання та вираження невизначеностей вимірювань	78
4.3 Порівняльний аналіз двох підходів щодо вираження характеристик точності вимірювань.....	81
4.3.1 Методика перерахунку характеристик похибок в характеристики невизначеності вимірювань.....	87
4.3.2 Методика перерахунку характеристик невизначеності в характеристики похибки.....	90
4.4 Приклади опрацювання невизначеностей результатів вимірювань	91
4.4.1 Калібрування кінцевої міри довжини	91
4.4.2 Вимірювання активного і реактивного опорів	97
4.4.3 Калібрування термометра	102
4.4.4 Вимірювання активності	106
4.4.5 Вимірювання сили електричного струму	110
4.4.6 Багаторазові вимірювання частоти синусоїдального сигналу ...	115
4.4.7 Калібрування декількох груп спостережень еталона напруги ...	118
4.4.8 Опрацювання результатів вимірювань при вимірювальному контролі несинхронності обертання кутових швидкостей	121
4.4.9 Оцінювання невизначеності вимірювального каналу активності іонів	126
4.4.10 Оцінювання невизначеності комп'ютерно-вимірювальної системи контролю якості електроенергії	130
4.4.11 Оцінювання невизначеності вимірювання моменту інерції ротора за амплітудою крутильних коливань.....	136
4.5 Рекомендації щодо складання звіту про невизначеність	141

Контрольні запитання	143
5 ВИРАЖЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИНАМІЧНИХ	
ВИМІРЮВАНЬ	144
5.1 Динамічні характеристики засобів вимірювальної техніки.....	144
5.2 Форма представлення динамічної невизначеності вимірювань...	148
5.3 Приклад оцінки динамічної невизначеності при вимірюванні віброприскорення.....	149
5.4 Невизначеність відновлення сигналів під час динамічних вимірювань.....	153
Контрольні запитання	157
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	158
ДОДАТКИ.....	160
Додаток А. Значення коефіцієнта $t_p(v)$ для випадкової величини, що має розподіл Стюдента з v степенями вільності.....	161
Додаток Б. Квантиль F-розподілу при $p = 0,95$	162
Додаток В. Деякі перетворення Лапласа.....	163
Додаток Г. Зв'язок між динамічними характеристиками засобів вимірювальної техніки.....	164
Додаток Д. Таблиця інтегралів і їх перетворень.....	165
Додаток Е. Варіанти контрольних завдань.....	166
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	169

ВСТУП

При складанні звіту про результат вимірювання фізичної величини (physical size) необхідно подати кількісне зазначення якості результату так, щоб можна було правильно оцінити його надійність (reliability). Без такого зазначення результату вимірювань не можна порівняти ні між собою, ні з довідковими величинами, поданими у специфікації чи стандарті. Тому необхідно, щоб була легкоздійсненна, зрозуміла і загальноприйнята методика опрацювання результатів вимірювань на основі теорії невизначеності у вимірюваннях.

Поняття невизначеності як кількісної характеристики є порівняно новим у вимірюваннях, хоча похибка та аналіз похибки давно використовуються в метрології. На сьогоднішній день загальновизнано, що, коли вже оцінені всі відомі й допустимі компоненти похибки і внесені відповідні поправки, все ще залишається невизначеність відносно істинності встановленого результату, тобто сумніви у тому, наскільки добре результат вимірювання відображає значення вимірюваної величини (measuring size).

Так само як практично універсальне використання Міжнародної системи одиниць (SI) внесло узгодженість у всі наукові і технологічні вимірювання, так і всесвітня узгодженість в оцінюванні та вираженні невизначеності вимірювання повинна забезпечити належне розуміння і правильне використання широкого спектра результатів вимірювань в науці, техніці, торгівлі, промисловості. В еру світового ринку визначальним є те, щоб метод оцінювання і вираження невизначеності був однаковим у цілому світі, в результаті чого вимірювання, проведені в різних країнах, можна було легко порівняти.

Ідеальний метод оцінювання і визначення невизначеності результату вимірювання повинен бути універсальним: придатним для всіх видів вимірювань і для всіх типів вхідних даних, що використовуються у вимірюваннях.

Величина, яка безпосередньо використовується для вираження невизначеності, повинна бути внутрішньо узгоджена: безпосередньо виведена з компонентів, які її утворюють, а також не повинна залежати від групування цих компонентів і від їх розкладу на субкомпоненти; повинна бути можливість прямого використання невизначеності одного результату як компонента оцінювання невизначеності іншого, в якому використовується перший результат.

Далі, у багатьох галузях промисловості і торгівлі, а також у сферах здоров'я і безпеки часто необхідно подавати результат вимірювання з інтервалом, у якому, можливо, знаходиться більша частина розподілу значень, які обґрунтовано можуть характеризувати кількісно вимірювану величину. Таким чином, ідеальний метод оцінювання і визначення

невизначеності повинен забезпечувати такий інтервал, зокрема, інтервал з ймовірністю охоплення або рівнем довіри, які реально відповідають йому.

Цей навчальний посібник базується на методах, наведених у Рекомендації INC I (1980) «Вираження експериментальних невизначеностей» робочої групи з встановлення невизначеностей, яку скликало Міжнародне бюро мір і вагів (МБМВ) у відповідь на запит Міжнародного комітету мір і вагів (МКМВ).

Невизначеність результату вимірювання у загальному випадку складається з кількох компонентів, які можна згрупувати у дві категорії, залежно від способу оцінювання їх числового значення: тип А – компоненти, оцінені статистичними методами; тип В – компоненти, оцінені іншими способами.

Між поділом на категорії А та В і поділом на «випадкові» і «систематичні» невизначеності, які раніше використовувалися, не завжди існує проста відповідність. Вираз «систематична невизначеність» (systematic uncertainty) може бути незрозумілим, його потрібно уникати.

Кожний детальний звіт про невизначеності повинен містити повний перелік компонентів і для кожного з них – метод, який використовувався при одержанні його числового значення.

Компоненти категорії А характеризуються оціненими дисперсіями S_i^2 (або оціненими «стандартними відхиленнями» S_i) і числом степенів вільності. У випадку необхідності слід зазначати коваріації.

Компоненти категорії В повинні характеризуватися величинами U_j^2 , які можна розглядати як наближення до відповідних дисперсій, існування яких допускається. Величини U_j^2 можна розглядати як дисперсії, а U_j – як стандартні відхилення. При необхідності, коваріації повинні розглядатися аналогічно.

Комбінована невизначеність повинна характеризуватися числовим значенням, одержаним при застосуванні звичайного методу для складання дисперсій. Комбінована невизначеність і її компоненти повинні виражатися у формі «стандартних відхилень».

Якщо в окремих випадках для одержання загальної невизначеності комбіновану невизначеність необхідно множити на коефіцієнт, то коефіцієнт множення повинен бути завжди зазначений.

З огляду на те, що Рекомендації INC I на сьогоднішній день є фактично стандартом вираження якості вимірювань у міжнародній практиці, необхідно впровадження їх положень в державні нормативні документи, а також вивчення їх у програмах вузів при підготовці бакалаврів та магістрів з метрології.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ У ВИМІРЮВАННЯХ

1.1 Поняття невизначеності вимірювання

Слово невизначеність (uncertainty) означає сумнів, і, таким чином, у широкому сенсі «невизначеність вимірювання» означає сумнів щодо вірогідності результату вимірювання. Формальне означення терміна «невизначеність вимірювання» (uncertainty measuring) таке: **невизначеність вимірювання – параметр, пов'язаний з результатом вимірювання, який характеризує дисперсію значень, що можуть бути достатньо обґрунтовано приписані вимірюваній величині [1, 5].**

Невизначеність (непевність) результату вимірювання відображає відсутність точного знання значення вимірюваної величини. Результат вимірювання (measuring result) після внесення поправки на відомі систематичні ефекти залишається лише оцінкою значення вимірюваної величини через невизначеності внаслідок випадкових ефектів і неточної поправки результату на систематичні ефекти.

Результат вимірювання (після внесення поправки) може бути максимально близьким до значення вимірюваної величини (і тому мати дуже малу похибку), навіть якщо він має велику невизначеність. Таким чином, невизначеність результату вимірювання не можна плутати з невідомою похибкою, що залишилась.

Оскільки точні значення складової похибки результату вимірювання невідомі і непізнавані, то невизначеності, пов'язані з випадковими і систематичними ефектами, що призводять до похибки, можуть бути оцінені. Але, навіть якщо оцінені невизначеності незначні, немає ніякої гарантії, що похибка (fault) результату вимірювання буде незначною, тому що при визначенні поправки або в оцінюванні неповноти знання якийсь систематичний ефект може не враховуватися, оскільки він не був розпізнаний. Таким чином, невизначеність результату вимірювання необов'язково є вказанням на правдоподібність того, що результат вимірювання близький до значення вимірюваної величини; це просто оцінювання близькості результату вимірювання до найкращого значення, що відповідає наявним на цей час знанням.

Невизначеність (непевність) вимірювання, отже, виражає той факт, що для даної вимірюваної величини і для даного результату її вимірювання немає єдиного значення, а є нескінченне число значень, розсіяних навколо результату, який узгоджується з усіма спостереженнями та даними, а також зі знанням фізичного світу, який з різним ступенем упевненості може бути приписаний вимірюваній величині.

На рис. 1.1 наведено ілюстрацію значення невизначеності вимірювання. З цього рисунка видно, чому основна увага сконцентрована на невизначеності, а не на похибці [2, 5].

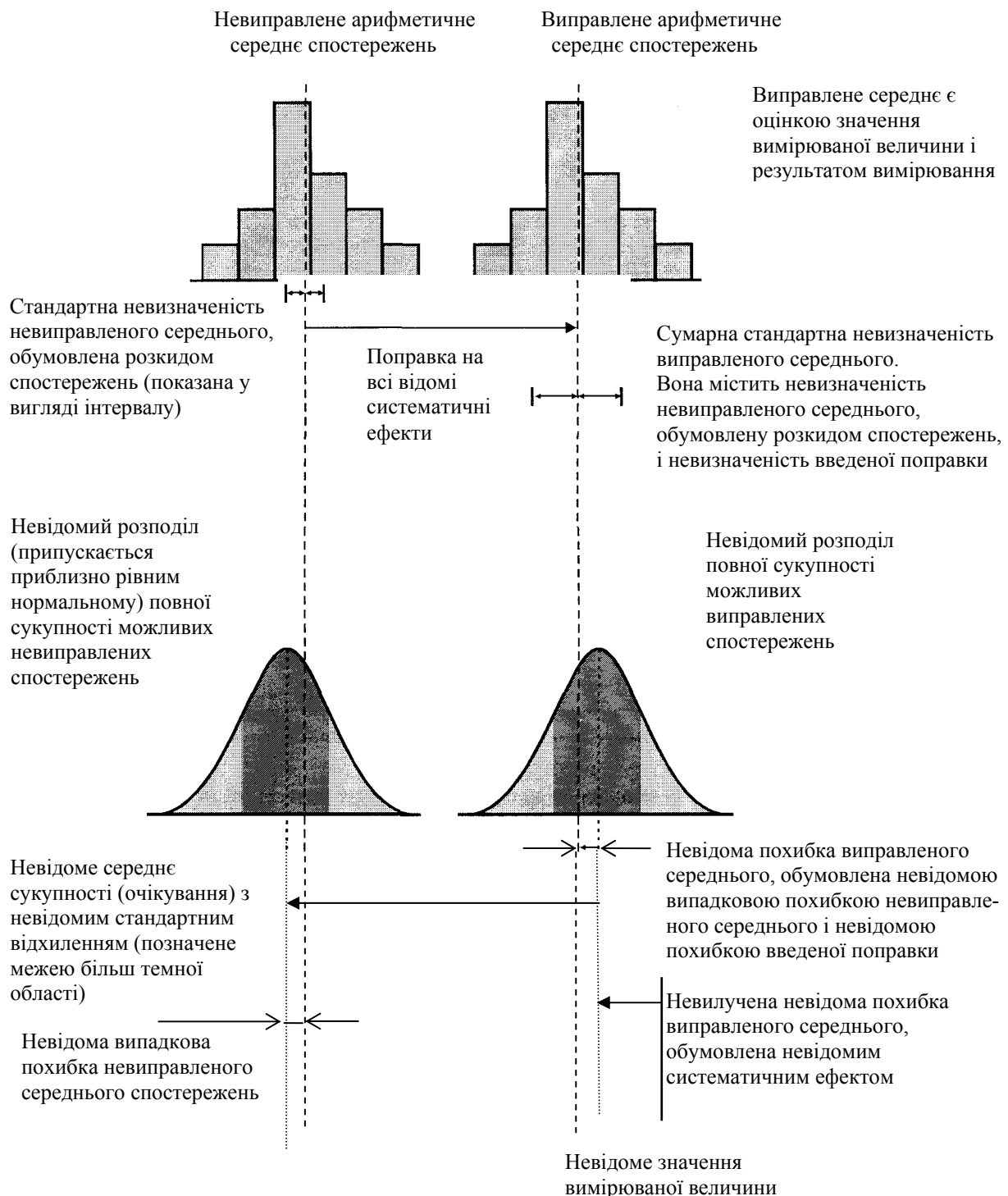


Рисунок 1.1 – Графічна ілюстрація значення невизначеності вимірювання

Точне значення похибки результату вимірювання, як правило, невідомо. Усе, що можна зробити – це оцінити значення вхідних величин, враховуючи поправки на відомі систематичні ефекти разом із їхніми стандартними невизначеностями (оціненими стандартними відхиленнями), обумовленими як невідомими розподілами ймовірностей, вибірки для яких одержують шляхом повторних спостережень, так і суб'єктивними або апріорними розподілами, заснованими на всій наявній інформації; а потім розрахувати результат вимірювання за допомогою оцінених значень вхідних величин і сумарної стандартної невизначеності цього результату; за допомогою стандартних невизначеностей у випадку, якщо є тверда впевненість у тому, що всі ці операції були виконані правильно і всі значимі систематичні ефекти були враховані. Можна припустити, що результат вимірювання є надійною оцінкою вимірюваної величини і що його сумарна стандартна невизначеність є надійною мірою її можливої похибки.

На практиці існує багато можливих джерел невизначеностей (непевностей) при вимірюваннях, зокрема такі:

- а) неповне визначення вимірюваної величини;
- б) неточна реалізація визначення вимірюваної величини;
- в) вибірка, що не відображається, – отримане значення може не відображати вимірювану величину;
- г) неточні відомості про вплив навколишнього середовища на вимірювання або недосконале вимірювання умов навколишнього середовища;
- д) суб'єктивна систематична похибка оператора при знятті показань з аналогових приладів (analog devices);
- е) кінцева роздільна здатність приладу або поріг чутливості (threshold of sensitiveness);
- ж) неточні значення, приписані еталонам, що використовуються при вимірюванні, стандартним зразкам речовин (standard standards of matters) і матеріалів;
- и) неточні значення констант і інших параметрів, які були отримані із зовнішніх джерел і використовуються в алгоритмі опрацювання даних;
- к) апроксимації і припущення, що використовуються у методі вимірювання і вимірювальній процедурі;
- л) зміни в повторних спостереженнях вимірюваної величини при явно однакових умовах.

Ці джерела необов'язково є незалежними, і деякі з джерел від (а) до (к) можуть вносити вклад у джерело (л). Звичайно, невідомий систематичний ефект не може бути внесений в оцінку невизначеності результату вимірювання, але він вносить вклад у його похибку.

Введення поняття «невизначеність вимірювання» є вимушеною мірою, необхідною для одноманітного і спрощеного оцінювання достовірності

вимірювання (evaluation of measuring authenticity), оскільки її визначення здійснюється на основі одержуваних результатів вимірювання, відомих умов вимірювань і характеристик використовуваної апаратури, а не на невідомому дійсному значенні вимірюваної величини.

1.2 Систематизація невизначеностей вимірювання

Невизначеності (непевності) вимірювання можна систематизувати за такими ознаками: за *способами оцінювання* та за *формами подання* (рис. 1.2) [1, 5, 7].

Всі невизначеності (непевності) **за способами оцінювання** поділяються на тип А і тип В. Метою поділу на тип А та В є показ двох різних способів оцінювання компонентів невизначеності, і він використовується тільки для зручності обговорення; він не призначений для показу того факту, що існує розходження в природі цих компонентів, що є результатом даних двох типів оцінювання. Обидва типи оцінювання базуються на розподілах ймовірностей, і компоненти невизначеності кожного типу кількісно визначаються дисперсією або стандартним відхиленням.

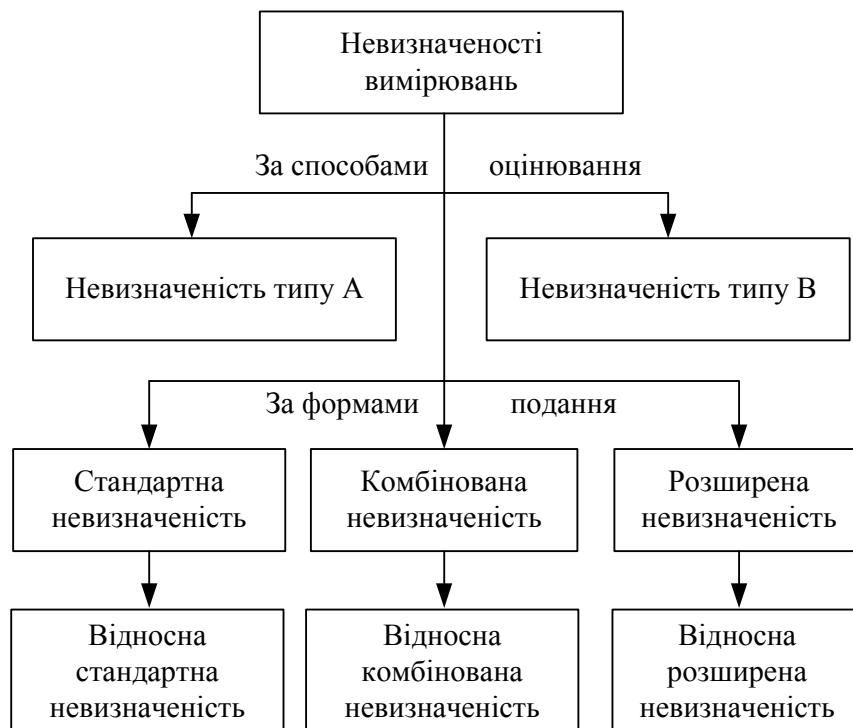


Рисунок 1.2 – Систематизація невизначеностей вимірювання

За типом А оцінюються невизначеності, що підлягають повторним вимірюванням до яких можна застосувати статистичні методи.

За типом В оцінюються невизначеності до яких статистичні методи застосувати не можливо. В таких випадках використовують інші відомі способи.

Що стосується систематизації невизначеностей **за формами подання**, то вони поділяються на стандартні, комбіновані, розширені, відносні стандартні, відносні комбіновані та відносні розширені.

Стандартна невизначеність – невизначеність (непевність), що виражається як стандартне (середньоквадратичне) відхилення.

Комбінована невизначеність – стандартна невизначеність (непевність), що отримується шляхом підсумовування всіх складових стандартних невизначеностей, пов'язаних з вимірюваною величиною.

Розширена невизначеність – інтервал навколо результату вимірювання, в межах якого ймовірно розташована більшість розподілу значень, які з достатнім обґрунтуванням можуть бути приписані вимірюваній величині.

Відносна стандартна невизначеність – відношення стандартної невизначеності до оцінки вимірюваної величини.

Відносна комбінована невизначеність – відношення комбінованої невизначеності до оцінки вихідної величини.

Відносна розширена невизначеність – відношення розширеної невизначеності до оцінки вихідної величини.

1.3 Способи оцінювання стандартних невизначеностей

Оцінка невизначеності, що характеризує точність методу вимірювання називається апіорною, її визначають:

а) під час розроблення методики вимірювання з метою регламентування приписаної невизначеності в усіх, передбачених методикою, умовах вимірювання;

б) при відсутності методики або приписаного значення невизначеності – перед вимірюванням, для оцінки можливої невизначеності.

На підставі усієї наявної інформації про причини і джерела невизначеностей обчислюють окремі складові невизначеностей за типом В, комбіновану невизначеність та розширену невизначеність. Підґрунтям апіорного оцінювання невизначеності є теорія ймовірності, яка дозволяє досліджувати і описувати закони розподілу випадкових величин.

Оцінка невизначеності для конкретних результатів вимірювання є апостеріорною, її визначають безпосередньо після вимірювання, за конкретних умов, за визначеною методикою із застосуванням конкретних типів засобів вимірювальної техніки (ЗВТ). Підґрунтям апостеріорного оцінювання невизначеності є методи математичної статистики, які можна

використати для оцінки міри розсіювання результатів багатократних спостережень.

1.3.1 Оцінювання невизначеності за типом А. Експериментальну дисперсію, яка характеризує складову невизначеності, отриману в результаті оцінювання за типом А, знаходять із рядів повторних спостережень, і вона є статистичною оцінкою дисперсії. Експериментальне стандартне відхилення отримують як позитивний квадратний корінь з дисперсії, позначають як u_A і для зручності називають стандартною невизначеністю типу А [1, 5].

Оцінка компонентів стандартної невизначеності за типом А заснована на розподілах частоті. Тому для оцінювання стандартної невизначеності за типом А необхідно провести n незалежних спостережень вимірюваної величини q в умовах повторюваності.

У більшості випадків найкращою доступною оцінкою математичного сподівання чи очікуваного значення μ_q величини q , що змінюється випадковим чином, є середнє арифметичне або середнє значення $\bar{q}$ із n спостережень

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k. \quad (1.1)$$

Експериментальне стандартне відхилення (standard deviation), що характеризує змінність значень q_k , або, точніше, їхню дисперсію σ^2 щодо середнього значення $\bar{q}$, розраховують за формулою [2]

$$u_A(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n-1}}. \quad (1.2)$$

Оскільки за результат багаторазових вимірювань приймають середнє значення $\bar{q}$, то важливо оцінити його дисперсію.

Найкраща оцінка $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ дисперсії середнього значення $u_A^2(\bar{q})$ виражається як

$$u_A^2(\bar{q}) = \frac{u_A^2(q_k)}{n}. \quad (1.3)$$

Експериментальна дисперсія середнього $u_A^2(\bar{q})$ і експериментальне стандартне відхилення середнього значення $u_A(\bar{q})$, що дорівнює позитивному квадратному кореню з оцінки дисперсії $u_A^2(\bar{q})$, кількісно визначають, наскільки добре $\bar{q}$ оцінює очікування μ_k величини q .

З урахуванням виразів (1.2) та (1.3) експериментальне стандартне відхилення середнього значення $u_A(\bar{q})$ розраховується за формулою [2]

$$u_A(\bar{q}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n(n-1)}}. \quad (1.4)$$

Для зменшення стандартної невизначеності результату вимірювання доцільно виконувати вимірювання з багатократними спостереженнями. Кількість спостережень n доцільно збільшувати до тих пір, поки $\bar{q}$ буде давати надійну оцінку очікування μ_q випадкової змінної q і щоб $u_A^2(\bar{q})$ забезпечувала надійну оцінку дисперсії $\sigma^2(\bar{q})$.

Стандартне відхилення оцінки стандартного відхилення середнього арифметичного $\sigma(u_A(\bar{q}))$ для нормального закону розподілу q визначається виразом [1, 4]

$$\sigma[u_A(\bar{q})] = \sigma(\bar{q}) \sqrt{1 - \frac{2\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}}, \quad (1.5)$$

де $\Gamma(z)$ – Гамма-функція, що описується виразом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{при } z > 0. \quad (1.6)$$

Одержана з виразу (1.5) залежність відношення стандартного відхилення експериментального стандартного відхилення середнього арифметичного $u_A(\bar{q})$ до стандартного відхилення $\sigma(\bar{q})$ від числа спостережень приблизно описується виразом [1]

$$\frac{\sigma[u_A(\bar{q})]}{\sigma(\bar{q})} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (1.7)$$

Якщо визнається можливість існування такого відхилення і його величина передбачається і може бути значною, то його можна описати за допомогою розподілу ймовірностей простого виду, заснованого на знанні, яке привело до висновку, що воно може існувати і бути значним. Таким чином, якщо імовірність розглядається як ступінь впевненості, що подія відбудеться, внесок такого систематичного ефекту може бути врахований у сумарній стандартній невизначеності результату вимірювання шляхом

оцінювання його як стандартної невизначеності апіорного розподілу ймовірностей і розгляду її таким же чином, як і будь-якої іншої стандартної невизначеності вхідної величини.

Наприклад: специфікація конкретної вимірювальної процедури потребує, щоб визначена вхідна величина була розрахована з конкретного розкладання в степеневий ряд, члени вищого порядку якого відомі неточно. Систематичний ефект, обумовлений неможливістю точно оцінити члени, веде до невідомого постійного відхилення, яке не можна експериментально визначити шляхом повторення процедури. Таким чином, невизначеність, пов'язану з цим ефектом, не можна оцінити і врахувати у невизначеності кінцевого результату вимірювання, якщо дотримуватися частотної інтерпретації імовірності. Однак тлумачення імовірності на основі ступеня впевненості дозволяє оцінити невизначеність, що характеризує ефект, із апіорного розподілу ймовірностей (отриманого з наявного знання про неточно відомі члени) і внести її в розрахунок сумарної стандартної невизначеності результату вимірювання подібно будь-якій іншій невизначеності.

На більш низьких рівнях перевірної схеми, коли часто передбачається, що дані еталонів порівняння точно відомі, тому що вони були повірені національними лабораторіями первинних еталонів, невизначеність результату калібрування може містити лише одну стандартну невизначеність типу А, оцінену із згрупованого експериментального стандартного відхилення, що характеризує вимірювання.

1.3.2 Оцінювання невизначеності за типом В. Для оцінювання x_i вхідної величини X_i , яка не була отримана в результаті повторних спостережень, пов'язані з ними оцінені дисперсія $u^2(x_i)$ або стандартна невизначеність $u(x_i)$ визначаються на базі наукового судження, що базується на всій доступній інформації про можливу змінність X_i . Тобто, стандартну невизначеність типу В одержують з передбачуваної функції щільності вірогідності, заснованої на ступені впевненості в тому, що подія обов'язково відбудеться (ця вірогідність часто називається суб'єктивною вірогідністю).

Фонд інформації може містити [2, 5]:

- дані про вигляд розподілу ймовірностей;
- невизначеності констант і довідкових даних;
- специфікація виробника, дані, що наводяться у свідченнях про повірку, калібрування чи в інших сертифікатах;
- дані, отримані в результаті досвіду, або загальні знання про поведінку і властивості відповідних матеріалів та засобів вимірювальної техніки (ЗВТ);
- дані попередніх вимірювань.

Правильне використання фонду доступної інформації для оцінювання стандартної невизначеності за типом В вимагає інтуїції, заснованої на досвіді та загальних знаннях, і є майстерністю, яка приходить з практикою. Слід визнати, що оцінка стандартної невизначеності за типом В може бути такою ж надійною, як і оцінка за типом А, особливо у вимірювальній ситуації, коли оцінювання за типом А ґрунтується на невеликій кількості статистично незалежних спостережень.

Якщо оцінка x_i береться зі специфікації виробника, свідоцтва про повірку, довідника або іншого джерела та її невизначеність дається як деяке кратне стандартного відхилення, то стандартну невизначеність $u(x_i)$ можна прийняти рівною зазначеному значенню, поділеному на множник, і оцінена дисперсія $u^2(x_i)$ буде дорівнювати квадрату цієї частки.

Наприклад: свідоцтво про калібрування підтверджує, що напруга U_s зразкового засобу вимірювання з номінальним значенням 0,1 В складає 100007 мкВ і що невизначеність цього значення дорівнює 0,1 мкВ на рівні трьох стандартних відхилень. Тоді стандартна невизначеність зразкового засобу вимірювання напруги дорівнює $u(U_s) = (0,1 \text{ мкВ})/3 = 33,33 \text{ нВ}$. Оцінена дисперсія є $u^2(U_s) = (33,33 \text{ нВ})^2 = 1110,89 \text{ нВ}^2$.

Наведена невизначеність величини x_i необов'язково дається у вигляді кратного стандартного відхилення. Замість цього можна зустріти, що згадана невизначеність визначає інтервал, довірчий рівень якого складає 90, 95, 99 або 99,73%. Якщо не зазначене інше, то можна припустити, що використовувався нормальний розподіл для обчислення згаданої невизначеності, і стандартну невизначеність для x_i одержують діленням наведеної невизначеності на відповідний коефіцієнт для нормального розподілу. Коефіцієнти, що відповідають вищевказаним трьом рівням довіри, дорівнюють: 1,64; 1,96; 2,58 і 3.

Наприклад: свідоцтво про калібрування підтверджує, що опір еталонного резистора R_s із номінальним значенням 100 Ом складає 100,000125 Ом $\pm$ 235 мкОм при 25°C і що згадана невизначеність 235 мкОм визначає інтервал, що складає 99,73% довірчого рівня. Стандартну невизначеність резистора можна прийняти як $u(R_s) = (235 \text{ мкОм})/3 = 78,33 \text{ мкОм}$. Оцінена дисперсія буде дорівнювати $u^2(R_s) = (78,33 \text{ мкОм})^2 = 6,14 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}^2$.

Розглянемо випадок, коли, опираючись на доступну інформацію, можна підтверджувати, що існує можливість, п'ятдесят-на-п'ятдесят, того, що значення вхідної величини X_i знаходиться в інтервалі від α_- до α_+ (іншими словами, можливість того, що X_i знаходиться в цьому інтервалі, складає 0,5 або 50 відсотків). Якщо можна припустити, що розподіл можливих значень X_i приблизно нормальний, то найкращу оцінку x_i величини X_i можна прийняти як середню точку цього інтервалу. Далі, якщо половина ширини цього інтервалу позначається як $\alpha = (\alpha_+ - \alpha_-)/2$, то можна прийняти $u(x_i) = 1,48\alpha$, тому що для нормального розподілу зі

сподіванням μ і стандартним відхиленням σ інтервал $\mu \pm \sigma/1,48$ охоплює приблизно 50% розподілу.

Якщо, базуючись на наявній інформації, можна стверджувати, що є приблизно 2 із 3 шансів, що значення X_i знаходиться в інтервалі від α_- до α_+ , то, іншими словами, імовірність того, що X_i знаходиться в цьому інтервалі, складає біля 0,67. Тоді з достатньою підставою можна прийняти $u(x_i) = \alpha$, тому що для нормального розподілу зі сподіванням μ і стандартним відхиленням σ інтервал $\mu \pm \sigma$ охоплює приблизно 68,3 відсотка розподілу.

В інших випадках можна оцінити лише межі (верхню і нижню) для X_i , зокрема, стверджувати, що імовірність того, що значення X_i знаходиться в інтервалі від α_- до α_+ для всіх практичних цілей, дорівнює одиниці і імовірність того, що X_i перебуває за межами цього інтервалу, дорівнює нулю. Якщо немає конкретних відомостей про можливі значення X_i всередині інтервалу, то можна тільки припустити, що з однаковою імовірністю X_i може знаходитися в будь-якому місці в його межах (рівномірний або прямокутний розподіл можливих значень). Тоді x_i , сподівання або очікуване значення X_i є середньою точкою інтервалу, $x_i = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$, із відповідною дисперсією

$$u^2(x_i) = (\alpha_+ - \alpha_-)^2/12. \quad (1.8)$$

Якщо різницю між границями $\alpha_+ - \alpha_-$ позначити як 2α , тоді з рівняння (1.9) отримуємо

$$u^2(x_i) = \alpha^2/3. \quad (1.9)$$

Коли компонент невизначеності, отриманий таким чином, дає значний внесок у невизначеність результату вимірювання, має сенс одержати додаткові дані для її подальшого визначення.

Наприклад: у специфікаціях виробника для цифрового вольтметра вказується, що в інтервалі від року до двох років після калібрування приладу його похибка в діапазоні 1 В дорівнює показу, помноженому на $14 \cdot 10^{-6}$, плюс діапазон, помножений на $2 \cdot 10^{-6}$. Припустимо, що прилад використовується через 20 місяців після калібрування для вимірювання різниці потенціалів V в діапазоні 1 В та встановлено, що середнє арифметичне ряду незалежних повторних спостережень V дорівнює $\bar{V} = 0,928571$ В при стандартній невизначеності $u(\bar{V}) = 12$ мкВ, обчислений за типом А. Оцінку за типом В стандартної невизначеності, пов'язаної зі специфікаціями виробника, можна одержати в припущенні, що зазначена похибка дає симетричні границі адитивної поправки до $\bar{V}$, $\Delta \bar{V}$ сподівання, рівного нулю, і при рівній імовірності перебування в будь-

якому місці в інтервалі. Півширина α симетричного прямокутного розподілу можливих значень $\bar{V}$ тоді дорівнює $\alpha = (14 \cdot 10^{-6}) \cdot (0,928571 \text{ В}) + (2 \cdot 10^{-6}) \cdot (1 \text{ В}) = 15 \text{ мкВ}$, і з рівняння (1.9) $u^2(\Delta \bar{V}) = 75 \text{ мкВ}^2$, а $u(\Delta \bar{V}) = 8,7 \text{ мкВ}$. Оцінка значення вимірюваної величини V , для простоти позначена тим же самим символом V , виражається як $V = \bar{V} + \Delta \bar{V} = 0,928571 \text{ В}$. Сумарну стандартну невизначеність цієї оцінки одержують як суму стандартної невизначеності $\bar{V}$, що дорівнює 12 мкВ , обчисленої за типом А, зі стандартною невизначеністю $\Delta \bar{V}$, що дорівнює $8,7 \text{ мкВ}$, обчисленою за типом В. Сумарна дисперсія, пов'язана з V , визначається як $u_c^2(V) = u^2(\bar{V}) + u^2(\Delta \bar{V}) = 2,19 \cdot 10^{-12} \text{ В}^2$, а сумарна стандартна невизначеність $u_c(V) = 15 \text{ мкВ}$.

При оцінюванні складових невизначеностей важливо не вести повторного підрахунку складової невизначеності. Якщо компонент невизначеності, що виникає від конкретного ефекту, оцінюється за типом В, то він повинен бути внесений як незалежний компонент невизначеності при обчисленні комбінованої невизначеності результату вимірювання тільки до того ступеня, щоб ефект не вносив вклад у виявлену змінність спостережень. Це пояснюється тим, що невизначеність, обумовлена тією частиною ефекту, що вносить вклад у спостережувану змінність, вже врахована у компоненті невизначеності, отриманому зі статистичного аналізу спостережень.

1.4 Форми подання складових невизначеностей

Вимірювана величина Y функціонально залежить від цілого ряду вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, це можуть бути як безпосередньо вимірювані величини, так і величини, що впливають на результат вимірювання (фізичні параметри навколишнього середовища, напруга живлення, параметри зовнішніх полів). Цей зв'язок виражається за допомогою рівняння вимірювання (equalization of measuring), яке, в загальному випадку, має такий вигляд

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N). \quad (1.10)$$

Самі вхідні величини $X_1, X_2, \dots, X_N$, від яких залежить вихідна величина Y , можна розглядати як вимірювані величини, і вони самі можуть залежати від інших величин, враховуючи поправки і поправкові коефіцієнти на систематичні ефекти, що веде до складної функціональної залежності f , яка ніколи не може бути записана точно. Крім того, f можна визначити експериментально, або вона може існувати тільки як алгоритм, що повинний бути реалізований чисельно. Функцію f варто інтерпретувати як функцію, що містить кожну величину, враховуючи всі поправки і

поправкові коефіцієнти, що можуть внести значну складову в результат вимірювання.

Таким чином, якщо дані показують, що f не моделює вимірювання до ступеня, обумовленого необхідною точністю результату вимірювання, то додаткові вхідні величини повинні бути внесені в f для усунення неадекватності. Це може вимагати введення вхідної величини для відображення неповного знання явища, що впливає на вимірювану величину. Проте рівняння (1.10) може бути настільки елементарним як $Y = X_1 - X_2$. Воно відображає моделі, наприклад, порівняння двох визначень однієї і тієї ж величини X .

Набір вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$ можна розділити на такі категорії:

- величини, чий значення і невизначеності визначаються безпосередньо у вимірюванні. Ці значення і невизначеності можна одержати, наприклад, у результаті одного спостереження, повторних спостережень або висновку, заснованого на досвіді. Вони можуть вимагати визначення поправок до показань приладу і поправок на такі впливні величини, як навколишня температура, атмосферний тиск і вологість;

- величини, чий значення і невизначеності вносяться у вимірювання із зовнішніх джерел, такі, як величини, пов'язані з атестованими еталонами, стандартними зразками речовин і матеріалів або стандартними довідковими даними.

Оцінку вимірюваної величини Y , позначену y , одержують із рівняння (1.10), використовуючи вхідні оцінки $x_1, x_2, \dots, x_N$ для N значень величин $X_1, X_2, \dots, X_N$. Таким чином, вихідна оцінка y , яка є результатом вимірювання, виражається таким чином

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (1.11)$$

У деяких випадках оцінку y можна одержати з

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}). \quad (1.12)$$

Таким чином, y береться як середнє арифметичне (middle arithmetic) або як середнє значення n незалежних визначень Y_k величини Y ; при цьому кожне визначення має одну невизначеність і кожне засновано на повному наборі спостережуваних значень N вхідних величин X_i , отриманих у той же самий час. Цьому способу усереднення замість: $y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$, де $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k}$ – є середнім арифметичним окремих спостережень $X_{i,k}$, можна віддати перевагу, коли f є нелінійною функцією

вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$, але два підходи є ідентичними, якщо f є лінійною функцією.

1.4.1 Форма подання стандартної невизначеності. Вихідними даними для визначення стандартної невизначеності типу А є результати багаторозових вимірювань. Стандартну невизначеність типу А одноразового вимірювання визначають за формулою (1.2). А стандартну невизначеність типу А середнього значення визначають за формулою (1.4).

Складові стандартної невизначеності типу В, як правило визначають на основі інформації про верхні і нижні границі $[\alpha_-; \alpha_+]$ передбачуваного (априорно визначеного) закону розподілу чи через інтервал U , що має заданий довірчий рівень p .

Для визначення стандартної невизначеності типу В потрібно взяти позитивний квадратний корінь з добутку довірчого рівня кожного значення та квадрата відхилення цього значення і всі добутки такого виду додати. Таким чином, загальний вигляд формули для обчислення стандартної невизначеності типу В при дискретних даних має вигляд

$$u_B(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 p_i}. \quad (1.13)$$

Для неперервної вхідної величини X стандартна невизначеність (непевність) типу В обчислюється за формулою

$$u_B(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \right)^2 p(x) dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx}. \quad (1.14)$$

Якщо для значення величини X_i можна оцінити верхню та нижню границю $[\alpha_-; \alpha_+]$, то стандартні невизначеності типу В, в припущенні про можливий вигляд закону розподілу, можна визначити за формулами [1, 2, 5]:

а) для трикутного закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{24}}; \quad (1.15)$$

б) для трапецеїдального закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{[\alpha_+ - \alpha_-] \sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{24}}, \quad (1.16)$$

де β – параметр, який визначається таким відношенням

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (1.17)$$

де $\lambda_1 = \frac{(\alpha_{1+} - \alpha_{1-}) - (\alpha_{2+} - \alpha_{2-})}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2}$, $\alpha_+ = \alpha_{1+} + \alpha_{2+}$, $\alpha_- = \alpha_{1-} + \alpha_{2-}$ (рис. 1.3).

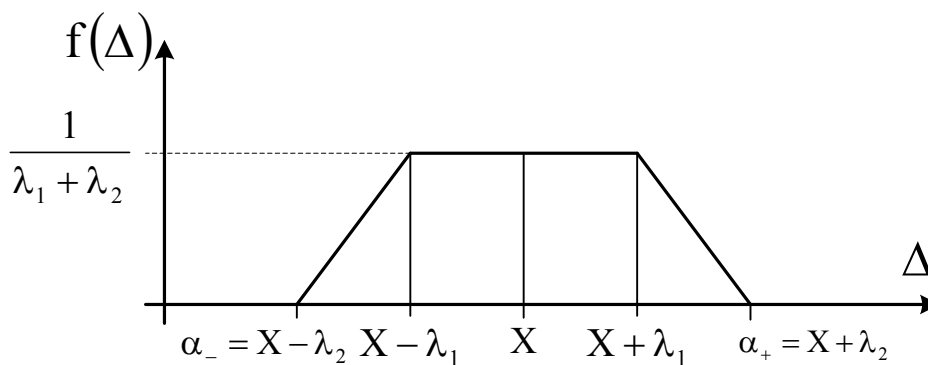


Рисунок 1.3 – Трапецеїдальна функція розподілу ймовірності

При зміні β від 0 до 1 трапецеїдальне розподілення змінюється від трикутного до рівномірного;

в) для експоненціального закону розподілу

$$u_B(X_i) = \sqrt{\frac{(\alpha_+ - x)(x - \alpha_-) - (\alpha_+ - 2x + \alpha_-)}{\lambda}}, \quad (1.18)$$

де x – очікуване значення;

λ – параметр розподілу;

г) для арксинусного закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{8}}; \quad (1.19)$$

д) для рівномірного закону розподілу (even law of distributing)

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{12}}. \quad (1.20)$$

Для заданих інтервалів U_p з відомим рівнем довіри p , в припущенні нормального закону розподілу, невизначеність типу В визначається за формулою

$$u_B(X_i) = \frac{U_p}{k_p}, \quad (1.21)$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для нормального закону розподілу, дорівнює 1,64; 1,96; 2,58 і 3 для довірчих рівнів 0,9; 0,95; 0,99 і 0,9973.

Для симетричних границь $\pm \alpha_i$ стандартну невизначеність типу В при відсутності інформації про закон розподілу вхідної величини X_i визначають за формулою

$$u_B(X_i) = \frac{2\alpha_i}{\sqrt{12}} = \frac{\alpha_i}{\sqrt{3}}. \quad (1.22)$$

Рівняння для визначення стандартної невизначеності зчитування показів з аналогової шкали засобу вимірювання, в припущенні про рівномірний закон розподілу, має вигляд

$$u_B(X_i) = \frac{\left(x + \frac{C}{4}\right) - \left(x - \frac{C}{4}\right)}{\sqrt{12}} = \frac{C}{4\sqrt{3}}, \quad (1.23)$$

де x – виміряне значення величини;

C – ціна поділки шкали засобу вимірювання.

Якщо шкала нерівномірна, то стандартну невизначеність визначають окремо для кожного діапазону, для якого визначена ціна поділки.

1.4.2 Форма подання комбінованої невизначеності при некорельованих вхідних величинах. Стандартна невизначеність оцінки у вимірюваної величини Y і, отже, результату вимірювання, утворюється шляхом відповідного підсумовування стандартних невизначеностей вхідних оцінок $x_1, x_2, \dots, x_N$. Така стандартна невизначеність оцінки у позначається як $u_c(y)$ і називається комбінованою.

Кожну вхідну оцінку x_i і пов'язану з нею стандартну невизначеність $u_c(x_i)$ одержують з розподілу можливих значень вхідної величини X_i . Цей розподіл вірогідності, як уже було сказано, може бути заснований на рядах спостережень $X_{i,k}$ величин X_i , або він може бути апріорним розподілом.

Результати вимірювань вважаються некорельованими, коли всі вхідні величини є незалежними.

Комбінована стандартна невизначеність $u_c(y)$ є позитивним квадратним коренем із комбінованої дисперсії $u_c^2(y)$, яка розраховується за формулою [2]

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i), \quad (1.24)$$

де f – функція, що подана в рівнянні (1.11);

$u(x_i)$ – стандартна невизначеність, оцінена за типом А або за типом В, як було описано раніше.

Комбінована стандартна невизначеність $u_c(y)$ є оціненим стандартним відхиленням і характеризує розкид значень (variation of values), які можуть бути з достатньою підставою приписані вимірюваній величині Y .

Рівняння (1.24) одержують в результаті апроксимації рівняння вимірювання (1.10) рядом Тейлора першого порядку і воно є законом розподілу невизначеності.

При значній нелінійності моделного рівняння f у вираз (1.24) для визначення комбінованої непевності $u_c^2(y)$ повинні бути добавлені члени вищого порядку (members of higher order), розкладені в ряд Тейлора. Коли розподіл кожного X_i розташовується симетрично відносно його середнього значення, то важливими стають і члени більш високого порядку, які потрібно додати до членів рівняння (1.24) [2]

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i) u^2(x_j). \quad (1.25)$$

Наведена формула (1.25) дозволяє оцінити комбіновану стандартну невизначеність (непевність) тільки при відсутності кореляції між аргументами.

Середнє значення $\bar{Y}$ в цьому випадку визначається формулою

$$\bar{Y} \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u(x_i, x_j). \quad (1.26)$$

При опосередкованих вимірюваннях, коли випадкові аргументи незалежні, комбінована стандартна невизначеність (непевність) визначається за формулою

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)^2 [\mu_4(x_i) - u^4(x_i)] + \sum_{i < j}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u^2(x_i) u^2(x_j) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \mu_3(x_i), \quad (1.27)$$

де $\mu_3(x_i)$ і $\mu_4(x_i)$ – третій і четвертий центральні моменти розподілу аргументів відповідно.

З (1.27) видно, що при розрахунку комбінованої стандартної невизначеності в умовах значної нелінійності рівняння вимірювання потрібно враховувати форму і асиметрію розподілів аргументів. Для нормального закону розподілу результати розрахунків за формулами (1.25) і (1.27) збігаються. Але необхідно відмітити, що формула (1.25) розрахована лише на нормальний розподіл аргументів рівняння вимірювання Y .

Частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ у виразі (1.24) рівні $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ при $X_i = x_i$. Ці похідні називаються коефіцієнтами чутливості, показують, як вихідна оцінка y змінюється зі зміною значень вхідних оцінок $x_1, x_2, \dots, x_N$. Зокрема, зміна в y , викликана невеличкою зміною Δx_i у вхідній оцінці x_i , визначається формулою $(\Delta y)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (\Delta x_i)$. Якщо ця зміна утворена стандартною невизначеністю оцінки x_i , то відповідна зміна в y буде $\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i)$. Тому сумарну дисперсію $u_c^2(y)$ можна розглядати як суму членів, кожний із яких є оціненою дисперсією, пов'язаною з вихідною оцінкою y , викликаною оціненою дисперсією, пов'язаною з кожною вхідною оцінкою x_i . Це припускає запис рівняння (1.24) у вигляді

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i \cdot u(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2(y), \quad (1.28)$$

де $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $u_i(y) = |c_i| u(x_i)$.

Частинні похідні являють собою $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}$, оцінені на сподіваннях X_i . Але на практиці частинні похідні оцінюються як $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_N}$.

Коефіцієнти чутливості $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ замість того, щоб розраховуватися з

функції f іноді визначаються експериментальним шляхом за допомогою вимірювань зміни в Y , викликані зміною в обраному X_i , підтримуючи при цьому інші вхідні величини незмінними. У цьому випадку знання функції f зводиться до емпіричного розкладення в ряд Тейлора (row of Teylora) першого порядку, заснованого на вимірних коефіцієнтах чутливості.

Якщо Y має вигляд $Y=cX_1^{p_1} \cdot X_2^{p_2} \cdot \dots \cdot X_N^{p_N}$ і відомо, що степені p_i являють собою додатні або від'ємні числа, що мають малі невизначеності, то сумарну дисперсію, рівняння (1.24), можна виразити як

$$\left[\frac{u_c(y)}{y} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i} \right]^2. \quad (1.29)$$

Це рівняння має такий же вигляд, як і рівняння (1.28), але з комбінованою дисперсією $u_c^2(y)$, вираженою як відносна комбінована дисперсія (dispersion) $\left[\frac{u_c(y)}{y} \right]^2$ і оціненою дисперсією $u_c^2(x_i)$, пов'язаною з кожною вхідною оцінкою, вираженою як оцінена відносна дисперсія $\left[\frac{u(x_i)}{x_i} \right]^2$.

Комбіновані невизначеності для різних видів рівнянь вимірювань зведені в табл. 1.1.

1.4.3 Форма подання комбінованої невизначеності при корельованих вхідних величинах. Рівняння (1.24) і ті рівняння, що виведені з нього, такі як (1.25) та (1.26 – 1.28), справедливі лише в тому випадку, якщо вхідні величини X_i незалежні або некорельовані. Якщо які-небудь із X_i значною мірою корельовані, то кореляцію необхідно брати до уваги.

Коли вхідні величини корельовані (correlated entrance sizes), то вираз для комбінованої дисперсії $u_c^2(y)$, пов'язаної з результатом вимірювання, буде мати вигляд [1, 2]

$$\begin{aligned} u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j), \end{aligned} \quad (1.30)$$

де x_i і x_j – є оцінками X_i і X_j ;

$u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ є оціненою коваріацією x_i і x_j .

Таблиця 1.1 – Комбіновані невизначеності для рівнянь вимірювань різного виду

Рівняння вимірювання	Комбіновані невизначеності
$Y = X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_N$	$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u^2(x_i)}$
$Y = C_1 X_1 \pm C_2 X_2 \pm \dots \pm C_N X_N$	$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N C_i^2 u^2(x_i)}$
$Y = \prod_{i=1}^N X_i = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_N$	$u_{cb}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}},$ де $u_{cb}(y) = \frac{u_c(y)}{y}, u_b(x_i) = \frac{u(x_i)}{x_i}$
$Y = \frac{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4}{X_5 \cdot X_6 \cdot X_7 \cdot X_8}$	
$Y = X_1 / X_2 / X_3 / \dots / X_N$	
$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + X_4 \cdot X_5 \cdot X_6 + \dots + X_{N-2} \cdot X_{N-1} \cdot X_N$	$u_c^2(y) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2 (u_b^2(x_1) + u_b^2(x_2) + u_b^2(x_3)) +$ $+(x_4 \cdot x_5 \cdot x_6)^2 (u_b^2(x_4) + u_b^2(x_5) + u_b^2(x_6)) + \dots +$ $+(x_{N-2} \cdot x_{N-1} \cdot x_N)^2 (u_b^2(x_{N-2}) + u_b^2(x_{N-1}) + u_b^2(x_N)),$ де $u_b(x_N) = u(x_N)/x_N$
$Y = X^m$	$u_c(y) = m \cdot x^{m-1} u(x), u_{cb}(y) = u_c(y)/y = m u(x)/x$
$Y = \ln(X_1/X_2) = \ln X_1 - \ln X_2$	$u_{cb}(y) = \sqrt{u^2(x_1)/(x_1^2) + u^2(x_2)/(x_2^2)}$
$Y = \ln(X_1 X_2) = \ln X_1 + \ln X_2$	
$Y = (X_1 \pm X_2)(X_3 \pm X_4)$	$u_{cb}(y) = \sqrt{\frac{u^2(x_1) + u^2(x_2)}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{u^2(x_3) + u^2(x_4)}{(x_3 + x_4)^2}}$
$Y = (X_1 \pm X_2)/(X_3 \pm X_4)$	
$Y = X_1^m \pm X_2^z$	$u_c(y) = \sqrt{[m \cdot x_1^{m-1} u(x_1)]^2 + [z \cdot x_2^{z-1} u(x_2)]^2}$
$Y = X_1^m \cdot X_2^z$	$u_{cb}(y) = \sqrt{\left(m \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(z \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$
$Y = X_1^m / X_2^z$	
$Y = (X_1^m \pm X_2^z) / (X_3^k \pm X_4^p)$	$u_{cb}^2(y) = \frac{(m x_1^{m-1} u(x_1))^2 + (z x_2^{z-1} u(x_2))^2}{(x_1^m + x_2^z)^2} +$ $+\frac{(k x_3^{k-1} u(x_3))^2 + (p x_4^{p-1} u(x_4))^2}{(x_3^k + x_4^p)^2}$
$Y = (X_1^m \pm X_2^z) \cdot (X_3^k \pm X_4^p)$	

Ступінь кореляції (degree of correlation) між x_i і x_j характеризується оціненим коефіцієнтом кореляції [2, 6]

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} = \frac{\sum_{l=1}^{N_{ij}} (x_{i_l} - \bar{x}_i)(x_{j_l} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{N_{ij}} (x_{i_l} - \bar{x}_i)^2 \sum_{l=1}^{N_{ij}} (x_{j_l} - \bar{x}_j)^2}}, \quad (1.31)$$

де $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ – коефіцієнт кореляції, який може знаходитися в таких межах $-1 < r(x_i, x_j) < +1$. Якщо оцінки x_i і x_j незалежні, то $r(x_i, x_j) = 0$, і зміна однієї з них не означає очікуваної зміни іншої.

У термінах коефіцієнтів кореляції, які легше зрозуміти, ніж коваріації, вираз для комбінованої дисперсії (1.30) можна записати у вигляді

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j). \quad (1.32)$$

У випадку, коли всі вхідні оцінки корельовані з коефіцієнтами кореляції $r(x_i, x_j) = 1$, рівняння (1.30) зводиться до вигляду

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 = \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2. \quad (1.33)$$

Таким чином, комбінована невизначеність $u_c(y)$ є позитивним квадратним коренем із лінійної суми членів, що являють собою дисперсію вихідної оцінки y , викликану стандартною невизначеністю кожної вхідної оцінки x_i . Цю лінійну суму не варто плутати з загальним законом поширення похибок, хоча вони і мають схожу форму; стандартні невизначеності не є похибками.

Кореляції між вхідними величинами не можна ігнорувати, якщо вони є і значні. Пов'язані з ними коваріації слід оцінювати експериментально, змінюючи корельовані вхідні величини за типом А або використовуючи всю наявну інформацію про корельовану змінність даних величин за типом В. Правильне розуміння, що базується на минулому експерименті і загальних знаннях, особливо необхідне при оцінюванні степеня кореляції між вхідними величинами, що виникає через такі загальновпливані ефекти як температура навколишнього середовища, атмосферний тиск і вологість. На щастя, у багатьох випадках, ефекти таких впливів мають малий взаємозв'язок, так що можна припустити, що вхідні величини, зазнаючи таких впливів, некорельовані. Проте якщо не можна припустити, що вони некорельовані, самі кореляції можуть бути вилучені, якщо загальні впливи введені в рівняння вимірювання як додаткові незалежні вхідні величини [1, 2].

Кореляція між двома вхідними величинами може існувати, якщо при їх визначенні використовують один і той же ЗВТ, фізичний еталон вимірювання або довідкові дані, що мають значну невизначеність. Наприклад, якщо поправка на температуру, що необхідна для оцінювання вхідної величини X_i , отримується за допомогою деякого термометра і така ж поправка на температуру, необхідна для оцінювання вхідної величини X_j , теж отримується за допомогою цього ж термометра, то дві вхідні величини можуть бути корельовані. Проте, якщо X_i і X_j визначаються як величини без поправок, або якщо величини, які визначають калібрувальну криву термометра, внесені в рівняння вимірювання як додаткові вхідні величини з незалежними стандартними невизначеностями, кореляція між X_i і X_j усувається.

1.4.4 Форма подання розширеної невизначеності. Рекомендація INC-1 (1980) робочої групи з упорядкування звіту щодо невизначеності, що на сьогоднішній день є фактично стандартом вираження якості вимірювань у міжнародній практиці та Рекомендація 1 (МК-1981) «Оцінка експериментальних невизначеностей» і Рекомендація 1 (МК-1986) «Оцінка невизначеностей у роботах, проведених МКМВ», підтримують використання комбінованої невизначеності $u_c(y)$ у якості параметра для кількісного вираження невизначеності результату вимірювання.

Хоча комбінована невизначеність $u_c(y)$ може повсюдно використовуватися для вираження невизначеності результату вимірювання, проте у окремих випадках: у торгівлі, промисловості і регулювальних актах, а також коли справа стосується здоров'я і безпеки, доцільно додатково вказувати інтервальну міру невизначеності, що визначає інтервал для результату вимірювання. Існування такої вимоги було визнано робочою групою і призвело до появи додаткового п'ятого розділу Рекомендації INC-1 (1980) «Вираження експериментальних невизначеностей».

Додаткова міра невизначеності, що відповідає інтервальній оцінці невизначеності, називається **розширеною невизначеністю** (extended uncertainty) і позначається символом U . Розширену невизначеність одержують шляхом множення комбінованої невизначеності $u_c(y)$ на коефіцієнт охоплення (coefficient of scope) k [1, 2, 11, 13]

$$U = k u_c(y). \quad (1.34)$$

Результат вимірювання записується у вигляді $Y=y\pm U$, що означає, що найкращою оцінкою значення, що приписується величині Y , є y , і що інтервал від $y-U$ до $y+U$ містить велику частину розподілу значень, які можна з достатньою підставою приписати вимірюваній величині Y . Такий інтервал також можна представити у вигляді: $y-U \leq Y \leq y+U$ [1, 11].

Терміни «довірчий інтервал» (confidence interval) і «довірчий рівень» (level of trust) мають в статистиці спеціальні визначення і застосовуються до інтервалу, що визначається U , лише у тому випадку, коли виконані певні умови, враховуючи умову, що всі складові невизначеності, що входять в $u_c(y)$, були отримані з оцінювання за типом А. У теорії невизначеності, при розгляді U як інтервалу навколо результату вимірювання, що містить велику частину розподілу вірогідності p , є вірогідністю охоплення або довірчим рівнем для цього інтервалу [1, 11].

Значення коефіцієнта охоплення k вибирається на основі рівня довіри, що потрібен інтервалу від $y-U$ до $y+U$. Як правило коефіцієнт охоплення k знаходиться в діапазоні від 2 до 3. Проте в особливих випадках k може виходити за межі цього діапазону. Багатий досвід і повне знання способів застосування результату вимірювання може прискорити вибір потрібного значення коефіцієнта охоплення k .

В ідеальному випадку хотілося б мати можливість вибрати конкретне значення коефіцієнта охоплення k , що забезпечувало б інтервал $Y=y \pm U=y \pm k u_c(y)$, відповідало обраному рівню довіри, такому як 95 або 99%. Так само, для заданого значення k хотілося б мати можливість чітко зазначити рівень довіри, пов'язаний із цим інтервалом. Проте це нелегко здійснити на практиці, оскільки це потребує повного знання розподілу ймовірностей, що характеризуються результатом вимірювання y і його комбінованою невизначеністю $u_c(y)$. Хоча ці параметри мають велику значимість, самі по собі вони недостатні для того, щоб встановити інтервали, що мають точно відомі рівні довіри.

Якщо вимірювана величина Y є єдино нормально розподіленою величиною X , $Y=X$; і якщо як оцінка X береться середнє арифметичне $\bar{X}$ від n незалежних спостережень X_k величини з експериментальним стандартним відхиленням середнього $s(\bar{X})$, то найкращою оцінкою Y є $y = \bar{X}$ і експериментальним стандартним відхиленням цієї оцінки є $u_c(y) = s(\bar{X})$, то розширена невизначеність U , яка визначає інтервал від $y-U$ до $y+U$, що зручно записувати як $Y=y \pm U$, дорівнюватиме

$$U = k u_c(y) = t_p(v) u_c(y), \quad (1.35)$$

де $t_p(v)$ – коефіцієнт з розподілу Стюдента для ймовірності охоплення p і числа ступенів вільності $v = n-1$ [1, 11].

Число ступенів вільності v дорівнює $n-1$ для єдиної величини, оціненої середнім арифметичним із n незалежних спостережень.

У міру того, як $v \rightarrow \infty$, t -розподіл наближається до нормального і наближені значення коефіцієнта Стюдента можна розрахувати за формулою

$$t_p(v) \approx k (1+2/v)^{1/2}, \quad (1.36)$$

де k – коефіцієнт охоплення, необхідний для одержання інтервалу з рівнем довіри p для нормально розподілу.

Для того, щоб одержати точніше наближення для оцінки розширеної невизначеності, необхідно скористатися t -розподілом. Але в загальному випадку t -розподіл не буде описувати $(y-Y)/u_c(y)$, якщо $u_c^2(y)$ є сумою двох або більше оцінених компонентів дисперсії $u_i(y)=c_i^2 u^2(x_i)$, навіть якщо кожне x_i – оцінка нормально розподіленої вхідної величини X_i . Проте розподіл цієї змінної може бути апроксимований t -розподілом при числі ефективних ступенів вільності v_{eff} , отриманим з формули Велча-Саттерсвейта

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}. \quad (1.37)$$

При окремому обробленні стандартних невизначеностей за типом А і за типом В необхідно додатково до v_{eff} розрахувати і повідомляти також значення v_{effA} і v_{effB} , обчислені з рівняння (1.37) [1, 11].

При підсумовуванні невизначеностей середніх значень вхідних величин, визначуваних за типом А, число ступенів вільності v необхідно вибрати рівним $n-1$.

При підсумовуванні невизначеностей вхідних величин, що визначались за типом В, число ступенів вільності v приймається рівним нескінченності $v_i \approx \infty$.

Якщо комбінована невизначеність $u_c(y)$ оцінюється окремо за типом А $u_{c_A}(y)$ і за типом В $u_{c_B}(y)$, то згадані величини зв'язані співвідношеннями $u_c^2(y) = u_{c_A}^2(y) + u_{c_B}^2(y)$. З урахуванням цього, вираз (1.37) можна записати в такому вигляді

$$v_{\text{eff}} = (n-1) \frac{[u_{c_A}^2(y) + u_{c_B}^2(y)]^2}{u_A^4(y)}. \quad (1.38)$$

1.4.5 Форма подання відносних невизначеностей. Враховуючи те, що відносна величина – це відношення двох однорідних фізичних величин, то відносна невизначеність, аналогічно до відносної похибки – це відношення абсолютної невизначеності (стандартної, комбінованої або розширеної) до оцінки вимірюваної величини. Абсолютна (стандартна) невизначеність вимірювання – невизначеність вимірювання, що виражена

в одиницях вимірюваної величини. Вирази для визначення відносної стандартної, відносної комбінованої та відносної розширеної невизначеностей мають вигляд:

$$\tilde{u}_{A(B)} = \frac{u_{A(B)}(x)}{|x|}, \text{ при } |x| \neq 0; \quad (1.39)$$

$$\tilde{u}_c = \frac{u_c(y)}{|y|}, \text{ при } |y| \neq 0; \quad (1.40)$$

$$\tilde{U} = \frac{U}{|y|}, \text{ при } |y| \neq 0. \quad (1.41)$$

Зазначені вище відносні невизначеності можуть виражатися не тільки у відносних величинах, але й у відсотках. Для цього рівняння (1.39) – (1.41) необхідно домножити на 100%.

1.4.6 Критерій перевірки наявності кореляції між парами результатів вимірювань. При оцінюванні та вираженні невизначеностей результатів вимірювань перш за все потрібно визначити чи має місце кореляційний зв'язок між будь-якими парами результатів непрямих вимірювань. Для цього пропонується використовувати такий критерій перевірки наявності кореляційного зв'язку між результатами вимірювань

$$\frac{r(x_i, x_j)\sqrt{n}}{1 - r^2(x_i, x_j)} > t_p(v_{\text{eff}}), \quad (1.42)$$

де $t_p(v_{\text{eff}})$ – квантиль розподілу Стюдента з ефективною кількістю ступенів вільності v_{eff} і рівнем довіри p ; n – кількість узгоджених пар результатів вимірювань; $r(x_i, x_j)$ – коефіцієнт кореляції між парами вимірювань x_i та x_j , який розраховується за формулою (1.31).

Якщо нерівність (1.42) виконується, то це означає, що кореляційний зв'язок між даною парою результатів вимірювань x_i та x_j присутній, а сумарна стандартна невизначеність повинна визначатись за формулою (1.30).

Якщо ж нерівність (1.42) не виконується, то це означає, що кореляція відсутня або є незначною і сумарну чи комбіновану стандартну невизначеність потрібно розраховувати за формулою (1.24), а при значній нелінійності рівняння вимірювання за формулами (1.25, 1.27).

Контрольні запитання

1. Дайте визначення поняттю «невизначеність вимірювання».
2. На які дві категорії розділяють невизначеності за способами їх оцінювання?
3. За допомогою яких методів оцінюється невизначеність типу А?
4. В чому відмінність між невизначеністю типу А та невизначеністю типу В?
5. На основі яких даних можна визначити невизначеність типу В?
6. Яке значення є найкращою оцінкою вимірювальної величини?
7. Дайте визначення поняттю «стандартна невизначеність».
8. Що називається комбінованою невизначеністю?
9. Дайте визначення поняттю «розширена невизначеність».
10. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу А при багатократних спостереженнях.
11. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь трикутного закону розподілу.
12. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь трапецеїдального закону розподілу.
13. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь експоненціального закону розподілу.
14. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь арксинусного закону розподілу.
15. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь рівномірного закону розподілу.
16. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В при заданому інтервалі нормального закону розподілу.
17. Запишіть вираз для визначення комбінованої невизначеності при некорельованих вхідних величинах.
18. Запишіть вираз для визначення комбінованої невизначеності при корельованих вхідних величинах.
19. Наведіть критерій перевірки наявності кореляції між парами результатів вимірювань при вираженні невизначеностей.
20. Запишіть вираз для визначення коефіцієнта кореляції.
21. Дайте визначення та запишіть вираз для визначення відносної стандартної невизначеності.
22. Дайте визначення та запишіть вираз для визначення відносної комбінованої невизначеності.
23. Дайте визначення та запишіть вираз для визначення відносної розширеної невизначеності.
24. Запишіть вираз для визначення розширеної невизначеності.
25. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності зчитування показів з аналогової шкали засобу вимірювання.

2 ВИДИ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ У ВИМІРЮВАННЯХ

2.1 Класифікація видів невизначеностей

За джерелом виникнення невизначеності вимірювань поділяються на такі види: інструментальні, методичні та суб'єктивні.

2.1.1 Інструментальні невизначеності – це невизначеності, обумовлені недосконалістю технології виготовлення ЗВТ.

Причинами виникнення інструментальних невизначеностей можуть бути неточності, допущені при виготовленні та регулюванні ЗВТ, зміна параметрів елементів конструкції і схеми внаслідок старіння, тощо. Кожний ЗВТ характеризується наявною йому інструментальною невизначеністю, яка повинна враховуватися при визначенні комбінованої невизначеності результату вимірювання.

При створенні ЗВТ, на жаль, повністю не вдається позбутися реакції цього ЗВТ на зміну інших (не вимірюваних) величин. Поряд з чутливістю ЗВТ до вимірюваної величини, ЗВТ завжди реагує (хоча і в меншій мірі) на зміну умов експлуатації. У зв'язку з цим інструментальну невизначеність поділяють на основу і додаткову.

Основна інструментальна невизначеність – невизначеність ЗВТ, що виникає за нормальних умов експлуатації.

Номенклатура величин, що впливають на ЗВТ, і діапазони їх змін визначаються розробниками як нормальні умови для кожного типу ЗВТ. Нормальні умови експлуатації завжди вказуються в технічному паспорті на ЗВТ. Якщо експеримент виконується в умовах, відмінних від нормальних для даного типу ЗВТ, його реальна характеристика спотворюється сильніше, ніж за нормальних умов експлуатації. Невизначеності, які при цьому виникають, називають додатковими.

Додатковою невизначеністю називають невизначеність ЗВТ, яка виникає за умов, що відрізняються від нормальних, але таких, що входять в допустиму робочу область умов експлуатації.

Робочі умови експлуатації, так само як і нормальні, в обов'язковому порядку наводяться в технічному паспорті на ЗВТ.

Інструментальна невизначеність ЗВТ певного типу не повинна перевищувати деякого заданого значення – так звану основну гранично допустиму інструментальну невизначеність ЗВТ даного типу. Фактична основна інструментальна невизначеність кожного конкретного екземпляра ЗВТ є при цьому випадковою величиною і може набувати різних значень, інколи навіть дорівнювати нулю, але у будь-якому випадку інструментальна невизначеність не повинна перевищувати заданого граничного значення, яке можна визначити апіорно. Якщо ця умова не виконується, то такий ЗВТ має бути вилучений з вимірювального експерименту.

Таким чином, розрізняють чотири основних види складових інструментальної невизначеності ЗВТ:

- невизначеність, обумовлена неідеальністю власних властивостей ЗВТ, тобто відмінністю дійсної функції перетворення ЗВТ за нормальних умов експлуатації від номінальної функції перетворення. Така складова невизначеності називається основною інструментальною невизначеністю ЗВТ;

- невизначеність, обумовлена реакцією ЗВТ на зміну зовнішніх впливних величин та неінформативних параметрів вхідного сигналу відносно їх нормальних значень. Ця складова інструментальної невизначеності залежить як від властивостей ЗВТ, так і від зміни впливних величин та називається додатковою невизначеністю ЗВТ;

- невизначеність, обумовлена реакцією ЗВТ на швидкість (частоту) зміни вхідного сигналу. Ця складова інструментальної невизначеності залежить як від динамічних властивостей ЗВТ, так і від частотного спектру вхідного сигналу та називається динамічною невизначеністю ЗВТ;

- невизначеність, обумовлена взаємодією ЗВТ і об'єкта вимірювання. Підключення ЗВТ до об'єкта вимірювання у багатьох випадках приводить до зміни значення вимірюваної фізичної величини відносно того значення, яке мала вимірювана величина до підключення ЗВТ до об'єкта вимірювання та визначення якого є метою вимірювання. Ця складова інструментальної невизначеності залежить від властивостей ЗВТ і об'єкта вимірювання та називається невизначеністю взаємодії.

До числа інструментальних невизначеностей відноситься клас точності ЗВТ. Якщо в технічному паспорті на ЗВТ зазначений клас точності 0,5, а діапазон показів засобу вимірювання знаходиться в межах від 0 до 150 В, то це означає, що покази ЗВТ вірні з точністю до $\gamma = 0,5\%$ від усієї діючої шкали засобу вимірювання напруги. В цьому випадку основну інструментальну невизначеність ЗВТ можна розрахувати за формулою

$$u_B = \frac{\gamma U_n}{100\% \sqrt{12}}, \quad (2.1)$$

де U_n – нормоване значення напруги (150 В).

При підставленні зазначених вище числових значень у формулу (2.1) основна інструментальна невизначеність ЗВТ складатиме 0,22 В.

2.1.2 Методичні невизначеності. Методичною невизначеністю називають складову невизначеності, що виникає за рахунок недосконалості використаного методу вимірювання (рівняння вимірювання) або через неточність застосованих спрощених формул. Скажімо, при непрямому

вимірюванні площі перерізу круглого стержня прямим вимірюванням діаметра з наступним обчисленням площі $S = \pi d^2/4$ результат буде із методичною невизначеністю через обмежене число знаків і значення числа π .

Головною особливістю методичних невизначеностей є їх індивідуальність, пов'язана не тільки з використанням певного методу вимірювання або фізичного принципу, але й з конкретним втіленням цього методу вимірювання. Методична невизначеність (непевність) зазвичай не вказується в нормативній документації. Однак в ній можуть бути наведені особливості використання конкретного ЗВТ, які дозволяють зменшити або позбутися деяких складових методичної невизначеності.

Характерні причини, що приводять до появи методичних невизначеностей такі:

- вплив неінформативних параметрів об'єкта вимірювання, які можуть не враховуватися моделлю об'єкта вимірювання;
- вплив способів використання ЗВТ;
- вплив алгоритмів (рівнянь), за якими виконується обчислення результату вимірювання;
- вплив правильності вибору моделі градування ЗВТ за допомогою робочих еталонів або стандартних зразків;
- відмінність прийнятої моделі об'єкта вимірювання від моделі, якою описується властивість, що визначається шляхом вимірювання.

Розглянемо приклад прояву методичної невизначеності.

Вимірювання густини ρ пористого тіла складної форми виконується опосередкованим методом за два етапи: спочатку за допомогою важельних ваг вимірюється маса тіла m , а потім його об'єм шляхом занурення тіла в посуд з рідиною та визначення об'єму витісненої тілом рідини. Оскільки поверхня тіла є шорсткою (пористою), а рідина, що використовується в експерименті, заповнює поверхневі пори, то виміряний об'єм тіла буде дещо меншим ($V - V_{\text{пор}}$) за реальний об'єм.

Методична невизначеність в цьому випадку визначається за формулою

$$u(\Delta\rho_m) = \frac{\rho \left(\frac{V_{\text{пор}}}{V - V_{\text{пор}}} - \frac{V_{\text{пор}}}{V} \right)}{\sqrt{12}}. \quad (2.2)$$

Для зменшення цієї методичної невизначеності доцільно використати рідину, яка не має ефекту заповнення (змочування) речовини тіла.

2.1.3 Суб'єктивні невизначеності. Суб'єктивні невизначеності проявляються в результаті особливостей самого спостерігача. Наприклад, при підрахунку поділок шкали різні оператори по-різному оцінюють одне і

те саме положення стрілки. Один схильний завжди занижувати покази, інший – завищувати їх. В результаті цього виникає суб'єктивна невизначеність.

Цей вид невизначеності пов'язаний як правило з неуважністю експериментатора: використання ЗВТ без усунення зсуву нуля, неправильне визначення ціни ділення шкали, неточне визначення ціни поділки, помилки в підключенні ЗВТ, тощо. Значення суб'єктивної невизначеності залежить від кваліфікації експериментатора (оператора).

Суб'єктивна невизначеність вимірювання характерна тільки для аналогових ЗВТ. Вона має два різновиди. Першим різновидом суб'єктивної невизначеності вимірювань є невизначеність відліку, яка обумовлена округленням показів під час їх відліку оператором зі шкали аналогового ЗВТ. Вона проявляється в тому, що однаковий показ ЗВТ, який, наприклад, відповідає 54,3 поділки шкали, один оператор зчитує правильно (як 54,3), другий – як 54, третій – як 54,5 і т.д. Другим різновидом суб'єктивної невизначеності вимірювань є невизначеність паралакса, обумовлена взаємним розташуванням ока експериментатора (оператора), стрілки вказівника та шкали аналогового ЗВТ. Очевидно, такі невизначеності не можуть бути заздалегідь передбачені та вказані в технічній документації на ЗВТ.

У цифрових ЗВТ операція округлення виконується автоматично, а невизначеність, що виникає за рахунок округлення значення вимірюваної величини називається невизначеністю квантування. Вона нормується і вказується в технічній документації на ЗВТ.

Невизначеність, що виникає за рахунок округлення результату вимірювання наближено розраховують за формулою

$$u_{\text{окр}} = \frac{\Delta n_{\text{окр}}}{\sqrt{3}}, \quad (2.3)$$

де $\Delta n_{\text{окр}}$ – значущі цифри, що відкидаються під час округлення результату вимірювання.

Зменшення або виключення суб'єктивної складової невизначеності вимірювання досягають шляхом застосування спеціальних типів шкал, наприклад дзеркальних, використанням цифрового відліку та автоматизацією одержання результату вимірювання.

Таким чином, суб'єктивні невизначеності вимірювань поки що не можуть бути оцінені кількісно, а тому вони не входять у математичну модель комбінованої невизначеності вимірювань. Їх треба зменшувати або виключити, але про них слід завжди пам'ятати під час відліку оператором показів зі шкали аналогового ЗВТ.

2.2 Сфера застосування суб'єктивних вимірювань

Розвиток технологій вимірювань дозволив створити такі вимірювальні установки, які, з одного боку, все менше обмежені можливостями людських органів чуття, а з іншого – є оптимальними в ергономічному відношенні. Сфера застосування суб'єктивних вимірювань в даний час значно звузилася. Наприклад, рідко використовується слух для вимірювань в акустиці, за винятком декількох завдань: виявлення сигналу на тлі перешкод (звукова індикація), оцінка якості звучання музичних інструментів, оцінка звукової якості приміщень. Нюх використовується при оцінці та експертизі продукції в медичній, парфюмерній та харчовій промисловості. Смак використовується в органолептичних вимірюваннях (дегустація та оцінка якості харчової продукції). Проте зір все ще грає важливу роль у вимірюваннях, він дозволяє зчитувати покази аналогових ЗВТ і виконувати цілий ряд оптичних спостережень. Людське око поки перевершує за чутливістю багато оптичних детекторів. Найбільш високу чутливість має око, яке адаптоване до темноти (для цього спостерігач повинен пробути в темному приміщенні не менше 30 хвилин). Максимальна чутливість ока припадає на довжину хвилі 507 нм. Мінімальна порція енергії, яку сприймає око на цій довжині хвилі, дорівнює $2 \cdot 10^{-18}$ Дж, що відповідає приблизно п'яти квантам світла, які повинні потрапити в одне і те ж місце сітківки за одну мілісекунду. Еквівалентний за чутливістю фотокатод повинен володіти квантовим виходом близько 20%. Настільки високий квантовий вихід мають лише зразкові ЗВТ. Відносна спектральна чутливість ока, а отже, і світлове відчуття, що виникає при одному і тому ж випромінюванні, сильно відрізняється у різних людей і залежить від сили світла. Тому був прийнятий міжнародний стандарт, який визначає криву спектральної чутливості, що ідеалізується для усередненого спостерігача. Ця крива спектральної чутливості $V(\lambda)$ стандартизована для зору адаптованого до темноти та світла. Обидві функції $V(\lambda)$ нормовані в максимумі на 1 та представлені на рис. 2.1.

Для денного зору максимум припадає на довжину хвилі приблизно рівну 555 нм. Для ока, звиклого до темноти, спектральна крива чутливості зміщена у бік коротших довжин хвиль, а її форма трохи відрізняється від кривої для денного зору. Найменший кут зору, під яким можна упевнено спостерігати за дрібними об'єкти при хорошому контрасті зображення, залежить від структури сітківки ока і складає близько $2,9 \cdot 10^{-4}$ рад (1 кутова хвилина).

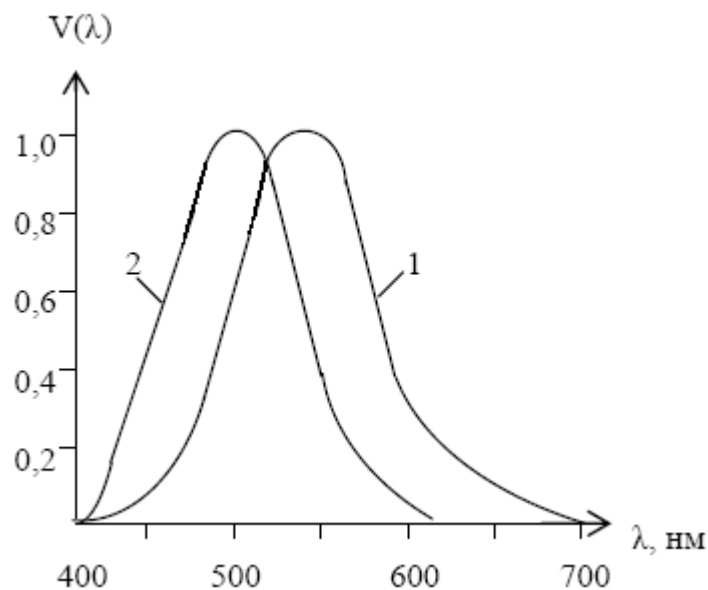


Рисунок 2.1 – Спектральна чутливість людського ока: 1 – адаптована до світла; 2 – адаптована до темноти

2.3 Принцип невизначеності Гейзенберга

Принцип невизначеності є фундаментальним положенням квантової механіки, яке стверджує, що принципово неможливо одночасно виміряти з будь-якою точністю координати та імпульси квантового об'єкта. Це твердження справедливе не тільки щодо вимірювання, а й до теоретичної побудови квантового стану системи. Неможливо побудувати такий квантовий стан, в якому система одночасно характеризувалася б точними значеннями координати та імпульсу.

Принцип невизначеності був сформульований у 1927 німецьким фізиком Вернером Гейзенбергом і став важливим етапом в з'ясуванні закономірностей атомних явищ та побудови квантової механіки.

При підвищенні точності вимірювання або збільшенні чутливості ЗВТ проявляються природні чинники, що обмежують достовірність вимірювань.

Наявність вказаних чинників обумовлює появу природної невизначеності вимірювань, що визначає потенціальну точність вимірювань.

Потенціальне обмеження цього рівня обумовлене дискретністю вимірюваних величин (наприклад, вимірювання заряду не може бути проведено точніше, ніж визначений заряд електрона) або флуктуаціями, що визначаються дискретністю речовини та енергії. Точність вимірювання на цьому рівні обмежується законами квантової механіки. Формальним віддзеркаленням виходу на квантово-механічний рівень точності вимірювань служить поява в математичному описі чинників, якими не можна нехтувати, постійної Планка ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с). Одним з таких

чинників є принцип невизначеності Гейзенберга, що накладає обмеження на граничну точність, з якою можна визначити динамічні змінні мікроскопічної системи. Згідно з цим принципом окрема величина може бути в принципі визначена з будь-якою точністю, проте дві величини, квантово-механічні оператори яких не комутують, не можна одночасно визначити як завгодно точно [1, 5].

Так, співвідношення невизначеностей для координати x і пов'язаної з нею змінної – компоненти імпульсу p_x – має вигляд:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.4)$$

де $\hbar = h/2\pi$.

Аналогічно формулюється співвідношення невизначеностей для другої пари пов'язаних величин – енергії і часу

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.5)$$

Це співвідношення пов'язує невизначеність $\Delta E = \sigma_E$ енергії атомної системи з невизначеністю $\Delta t = \sigma_t$ часу t , протягом якого вимірюється енергія.

Оскільки постійна Планка надзвичайно мала, то наведені вирази при макроскопічних вимірюваннях не мають практичного значення. Невизначеність вказаних величин лежить далеко за межами досягнутої точності експериментів.

При вимірюванні макроскопічних величин максимальна точність також обмежена статистичними флуктуаціями в околі середнього значення. Якщо флуктуації неможливо зменшити при фіксованих зовнішніх умовах, то їх, як правило, називають шумами. Причини виникнення шумів можна розділити на три групи:

- теплові коливання при ненульовій температурі;
- корпускулярна природа речовини та електрики;
- співвідношення невизначеностей квантової механіки.

2.4 Принцип доповнюваності і співвідношення невизначеностей

Принцип доповнюваності – виник на основі спроб усвідомити причину появи суперечливих наглядних образів, які доводиться пов'язувати з об'єктами мікросвіту.

У ряді експериментів електрон та інші елементарні частинки виявляють корпускулярні властивості, тобто властивості частинок. Будь-

який пристрій для детектування мікрооб'єктів завжди реєструє їх як щось ціле, локалізоване в дуже маленькій області простору.

З іншого боку, під час руху всі мікрочастинки знаходять типові хвилові властивості. Спостерігається інтерференція (накладення хвиль одної на іншу) та дифракція (обгинання хвилями перешкод) частинок на кристалічних решітках або штучно створених перешкодах. Електрон та інші частинки ведуть себе подібно до хвиль, що огинають перешкоди, і як би одночасно проходять через декілька щілин дифракційних решіток.

Таким чином, усім мікрооб'єктам властивий корпускулярно-хвильовий дуалізм. Загальна відповідь на питання про те, яким же чином поєднуються ці суперечливі властивості в одного об'єкта, була дана Нільсом Бором.

Перш за все, підкреслював Бор, потрібно ясно усвідомити, що всі прилади, які реєструють індивідуальні акти в мікросвіті, є макроскопічними і іншими бути не можуть. Наші органи чуття не сприймають мікропроцесів. Сама людина – істота макроскопічна. Звідси витікає, що поняття, якими ми користуємося для опису явищ, – це макроскопічні поняття, в термінах яких описується робота приладів. Але ці поняття не можуть бути повністю застосовані до мікрооб'єктів, оскільки їх поведінка не підкоряється законам класичної механіки.

Згідно з принципом доповнюваності Бора, для повного опису квантово-механічних явищ необхідно застосовувати два взаємовиключні (додаткові) набори класичних понять частинок і хвиль. Лише сукупність таких понять дає вичерпну інформацію про цілісність явища.

Принцип доповнюваності є результатом філософського осмислення нової незвичайної фізичної теорії – квантової механіки. Він виражає на макроскопічному рівні один з основних законів діалектики – закон єдності протилежностей.

Частковим випадком принципу доповнюваності є співвідношення невизначеності Гейзенберга.

Говорячи про частинки, ми уявляємо собі речовину, що знаходиться в даний момент у визначеному місці, яка має певну енергією та рухається із строго визначеною швидкістю. При цьому ми допускаємо, що можна абсолютно точно знати координати, імпульс та енергію частинки у будь-який момент часу. Проте, зв'язуючи частинку з хвилею, ми переходимо до образу необмеженої синусоїди, що поширюється у просторі. І поняття «довжина хвилі в конкретній точці» та «імпульс в конкретній точці» просто не можуть мати сенсу. Також не має сенсу поняття енергії частинки в даний момент часу. Справа в тому, що згідно з формулою Планка, енергія зв'язана з частотою хвилі, яка характеризує протікання в часі гармонійного коливального процесу. Твердження, що електрон лише наближено може розглядатися як матеріальна точка, означає, що його координати, імпульс та енергія можуть бути задані лише приблизно.

Кількісно це виражається співвідношенням невизначеності Гейзенберга (2.5).

Відповідно до цього співвідношення, чим точніше зафіксовано імпульс, тим більша невизначеність буде в значенні координати. Таким же чином співвідносяться енергія та час. Точність вимірювання енергії обернено пропорційна тривалості процесу вимірювання. Причина цього у взаємодії приладу з об'єктом вимірювання.

Принцип невизначеності показує, чому неможливе «падіння» електрона на ядро атома. Ядро атома має дуже малі розміри і при «падінні» електрона місце розташування останнього є визначеним з достатньою точністю. Відповідно, різко збільшується невизначеність швидкості електрона, розкид значень швидкостей стане дуже великим. У цей розкид включаються настільки великі швидкості, що електрон швидше покине атом, чим впаде на ядро.

2.5 Принцип суперпозиції

Принцип суперпозиції – один з найзагальніших законів в багатьох розділах фізики, особливо в квантовій механіці. Принцип суперпозиції (накладання) – це припущення, згідно з яким результуючий ефект є сумою ефектів, що викликаються кожним впливаючим явищем окремо. Одним з простих прикладів є правило паралелограма, відповідно до якого складаються дві сили, що впливають на тіло. Принцип суперпозиції виконується лише за умови, коли діючі явища не впливають один на одного. Зустрічний вітер гальмує рух автомашини за законом паралелограма – принцип суперпозиції в цьому випадку виконується повністю. Але якщо пісок, що піднятий вітром, погіршить роботу двигуна, то в цьому випадку принцип суперпозиції виконуватися не буде. Взагалі, в ньютонівській фізиці цей принцип не універсальний і у багатьох випадках виконується лише наближено.

У мікросвіті, навпаки, принцип суперпозиції – фундаментальний принцип, який поряд з принципом невизначеності складає основу математичного апарату квантової механіки. У квантовій теорії принцип суперпозиції позбавлений наочності, що характерна для класичної механіки, тому що у квантовій теорії складаються альтернативні виключаючі один одного стани.

У релятивістській квантовій теорії, що передбачає взаємне перетворення частинок, принцип суперпозиції має бути доповнений принципом супервідбору. Наприклад – при анігіляції електрона і позитрона принцип суперпозиції доповнюється принципом збереження електричного заряду – до і після перетворень сума зарядів має бути постійною. Оскільки заряди електрона і позитрона рівні та взаємно

протилежні, то повинна виникати незаряджена частинка, якою є фотон, що народжується в цьому процесі анігіляції.

Найбільш відомий принцип суперпозиції в електростатиці, в якій він стверджує, що напруженість електростатичного поля, яке створюється в даній точці системою зарядів, є сумою напруженостей полів окремих зарядів.

Принцип суперпозиції може приймати і інші формулювання, які повністю еквівалентні наведеним вище:

- взаємодія між двома частинками не змінюється при внесенні третьої частинки, що також взаємодіє з першими двома;
- енергія взаємодії всіх частинок в багаточастинковій системі є сумою енергій парних взаємодій між усіма можливими парами частинок. У системі немає багаточастинкових взаємодій;
- рівняння, що описує поведінку багаточастинкових системи, є лінійними за кількістю частинок.

Саме лінійність фундаментальної теорії в певній галузі науки і техніки є причиною виникнення в ній принципу суперпозиції.

У мікросвіті принцип суперпозиції – фундаментальний принцип, який поряд з принципом невизначеності складає основу математичного апарату квантової механіки.

2.6 Критерій нікчемної невизначеності

При вираженні комбінованої стандартної невизначеності розрахунки можна спростити, якщо знехтувати невизначеностями, що мають малі значення. Для цього потрібно визначити критерій нікчемної невизначеності, тобто встановити математичне правило, на основі якого можна було б нехтувати невизначеностями, що мають малі значення.

Розглянемо критерій нікчемної невизначеності на прикладі опосередкованих вимірювань. Комбінована невизначеність в найпростішому випадку визначається за формулою

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad (2.6)$$

де u_1 – стандартна невизначеність, що є більшою за значенням;

u_2 – стандартна невизначеність, що є меншою за значенням.

При округленні невизначеності як правило відкидається її друга значуща цифра. Менша за значенням стандартна невизначеність u_2 може бути відкинута в тому випадку, якщо при її врахуванні комбінована невизначеність не зміниться за значенням в першій значущій цифрі. Для цього має виконуватися умова

$$u_c - u_1 \leq 0,05u_c. \quad (2.7)$$

З формули (2.6) отримаємо:

$$u_1^2 + u_2^2 = u_c^2; \quad (2.8)$$

$$u_c^2 - u_1^2 = u_2^2. \quad (2.9)$$

Звідки, розділивши (2.9) і (2.7) отримаємо

$$u_c + u_1 \geq \frac{u_2^2}{0,05u_c}. \quad (2.10)$$

Припустивши, що $u_c \approx u_1$, отримаємо

$$u_2 \leq \sqrt{2 \cdot 0,05u_1^2} = 0,3u_1. \quad (2.11)$$

Отже, якщо менша за значенням стандартна невизначеність u_2 втрое менша за більшу за значенням стандартну невизначеність u_1 , то нею можна знехтувати. Рівняння (2.11) є критерієм нікчемної невизначеності. Групу невизначеностей можна відкидати, якщо їх сума менша за одну третю максимальної невизначеності.

Контрольні запитання

1. Які види невизначеностей Ви знаєте?
2. Дайте визначення інструментальній невизначеності.
3. Які складові інструментальної невизначеності Ви знаєте?
4. Наведіть приклад визначення інструментальної невизначеності.
5. Дайте визначення методичній невизначеності.
6. Перерахуйте характерні причини, що приводять до появи методичних невизначеностей.
7. Дайте визначення динамічній невизначеності.
8. Дайте визначення невизначеності взаємодії.
9. Дайте визначення основній інструментальній невизначеності.
10. Дайте визначення додатковій інструментальній невизначеності.
11. Наведіть приклад визначення методичної невизначеності.
12. Дайте визначення суб'єктивній невизначеності.
13. Які Ви знаєте різновиди суб'єктивних невизначеностей?
14. Наведіть приклад наявності суб'єктивної невизначеності.
15. Перерахуйте шляхи зменшення або виключення складових суб'єктивних невизначеностей.
16. Сфера застосування суб'єктивних вимірювань.
17. Суть принципу невизначеності Гейзенберга.
18. Перерахуйте причини виникнення шумів.
19. Розкажіть суть принципу доповнюваності.
20. Запишіть співвідношення невизначеності Гейзенберга.
21. Розкажіть суть принципу суперпозиції.
22. Що таке невизначеність паралакса?

3 СПОСОБИ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ НА ОСНОВІ КОНЦЕПЦІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Статичні вимірювання фізичних величин можна розділити на групи залежно від способу оцінювання результату вимірювання таким чином:

- прямі вимірювання з одноразовими спостереженнями;
- прямі вимірювання з багаторазовими спостереженнями;
- опосередковані вимірювання фізичної величини з перетворенням її роду;
- сукупні вимірювання однорідних фізичних величин;
- сумісні вимірювання різнорідних фізичних величин.

Розглянемо способи опрацювання результатів вимірювань фізичних величин за групами з урахуванням концепції невизначеності.

3.1 Опрацювання результатів прямих вимірювань

Пряме вимірювання – це вимірювання однієї фізичної величини, значення якої знаходять безпосередньо без перетворення її роду та використання відомих залежностей [8].

Вимірювана величина Y приймається рівною величині X , що безпосередньо вимірюється, $Y = X$. Для реалізації прямих вимірювань фізичної величини X необхідно мати компаратор і багатозначну міру з відповідним діапазоном зміни значень, чи однозначну міру та масштабний вимірювальний перетворювач.

На практиці найпоширенішими є вимірювання з одноразовим спостереженням, які найпростіші, продуктивні та найдешевші.

3.1.1 Опрацювання результатів прямих вимірювань з одноразовими спостереженнями. Прямі одноразові вимірювання виконують один раз, і значення фізичної величини визначають за показами ЗВТ, призначеного для вимірювання цієї величини. Однак в деяких випадках прямі одноразові вимірювання повторюють декілька разів. Надлишкові вимірювання виконують для захисту від збоїв апаратури, аномальних результатів тощо, а кінцевий результат визначають за одним вимірюванням, яке вибирають з ряду проведених вимірювань. Оцінкою значення вимірюваної величини Y є безпосередньо показ ЗВТ. Тому опрацювання даних у цьому випадку полягає в аналізі складових невизначеностей вимірювання, вилученні систематичних складових невизначеностей, оцінці невилучених залишків систематичних складових невизначеностей та підсумуванні складових невизначеностей.

Таким чином, для оцінки результату прямого вимірювання з одноразовим спостереженням використовують способи оцінювання

невизначеностей типу В (див. пункт 1.3.2). Підсумовують усі складові невизначеності, що оцінені за типом В та визначають комбіновану невизначеність (див. пункти 1.4.2 або 1.4.3). У випадках коли потрібно подати інтервальну оцінку невизначеності додатково визначають розширену невизначеність (див. пункт 1.4.4).

Наприклад: проведено вимірювання за допомогою вольтметра, що має верхню межу вимірювання $V_k = 1000$ В і клас точності 0,1/0,01. В результаті вимірювання отримано показ вольтметра $V = 500,2$ В. Вимірювання здійснено при температурі навколишнього середовища $t = 26^\circ\text{C}$ та дії магнітного поля напруженістю $H = 400$ А/м. Відомо, що температурна похибка не перевищує основну на кожних 10°C відхилення температури від нормальних умов 20°C , а магнітна похибка складає половину основної інструментальної похибки ЗВТ при напруженості зовнішнього поля до 400 А/м. Необхідно оцінити невизначеність результату вимірювання напруги.

Невизначеність результату вимірювання складається з основної інструментальної невизначеності, яка визначається за класом точності вольтметра, та додаткових невизначеностей, зумовлених відхиленням температури навколишнього середовища від нормальної та наявністю зовнішнього магнітного поля.

1. Оскільки клас точності приладу нормовано сталими c та d , а саме 0,1/0,01, то основну відносну інструментальну невизначеність $\tilde{u}_{\text{ЗВТ}}$ вимірювання напруги розрахуємо за формулою

$$\tilde{u}_{\text{ЗВТ}} = \pm \left[c + d \left(\frac{V_k}{V} - 1 \right) \right] = \pm \left[0,1 + 0,01 \left(\frac{1000}{500,2} - 1 \right) \right] = \pm 0,11.$$

Основна інструментальна невизначеність вимірювання напруги буде дорівнювати

$$u_{\text{ЗВТ}} = \frac{V \tilde{u}_{\text{ЗВТ}}}{100\% \sqrt{3}} = 500,2 \frac{0,11}{1,73 \cdot 100} \approx 0,32 \text{ В}.$$

2. Оскільки нормальна температура навколишнього середовища складає 20°C , а значення температури навколишнього середовища при якому проводилось вимірювання складало $t = 26^\circ\text{C}$, то додаткова невизначеність, що зумовлена відхиленням температури буде дорівнювати

$$u_t = \frac{26 - 20}{10} u_{\text{ЗВТ}} = 0,6 u_{\text{ЗВТ}} \approx 0,19 \text{ В}.$$

3. Додаткова невизначеність, що зумовлена впливом напруженості зовнішнього магнітного поля $H=400$ А/м буде дорівнювати

$$u_H = \frac{1}{2} u_{ЗВТ} = 0,16 \text{ В.}$$

4. Комбінована стандартна невизначеність вимірювання напруги буде дорівнювати

$$u_c = \sqrt{u_{ЗВТ}^2 + u_t^2 + u_H^2} = 0,41 \text{ В.}$$

Задавшись довірчим рівнем $p=0,95$ (з урахуванням припущення про нормальність закону розподілу результату вимірювання $k_p=1,96$) знаходимо розширену невизначеність

$$U = k_p u_c = 1,96 \cdot 0,41 = 0,8 \text{ В.}$$

Отже, записуємо результат вимірювання у вигляді

$$V = 500,2 \pm 0,8 \text{ В, при } p = 0,95$$

або

$$499,4 \leq 500,2 \leq 501 \text{ В, } p = 0,95.$$

Отже, при оцінюванні результатів прямих вимірювань з одноразовим спостереженням можуть траплятися різні випадки, що залежать від кількості складових невизначеностей. Це може бути лише одна основна невизначеність або декілька складових невизначеностей. Невилучені складові систематичних невизначеностей, що залишаються після введення поправок, підсумовуються.

3.1.2 Опрацювання результатів прямих вимірювань із багаторазовими спостереженнями. Прямі багаторазові вимірювання – це вимірювання, внаслідок яких оцінку значення вимірюваної величини отримують на основі ряду результатів прямих вимірювань [8]. У загальному випадку, опрацьовуючи результати прямих вимірювань із багаторазовим спостереженням, слід виконати такі операції:

- а) вилучити систематичні складові невизначеностей;
- б) обчислити оцінку значення вимірюваної величини

$$y = \bar{y} = \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{n}, \quad (3.1)$$

де y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – результати окремих спостережень;
 в) оцінити стандартну невизначеність результату вимірювання

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2}{n-1}}; \quad (3.2)$$

г) вилучити промахи з результатів вимірювань. Для цього розраховують співвідношення:

$$s_1 = \frac{\bar{y} - y_{\min}}{u_A}; \quad (3.3)$$

$$s_2 = \frac{y_{\max} - \bar{y}}{u_A}. \quad (3.4)$$

Потім, задавшись довірчим рівнем p_d , розраховують надійність $\alpha = 1 - p_d$, і, в залежності від кількості проведених вимірювань n , з табл. 3.1 вибирають допустиму величину $s_{\text{аін}}$. Якщо розраховані значення s_1 та s_2 менші за допустиме значення $s_{\text{аін}}$, то гіпотезу про наявність аномальних результатів в ряді спостережень відкидають. Якщо ж одне із значень s_1 та s_2 більше за $s_{\text{аін}}$, то це означає, що в результатах вимірювань присутні промахи. Прوماхи вилучають з результатів вимірювань;

Таблиця 3.1 – Допустимі значення нормованих відхилень

Об'єм вибірки n	Надійність α			
	0,100	0,075	0,050	0,025
3	1,15	1,15	1,15	1,15
4	1,42	1,44	1,46	1,48
5	1,60	1,64	1,67	1,72
6	1,73	1,77	1,82	1,89
7	1,83	1,88	1,94	2,02
8	1,91	1,96	2,03	2,13
9	1,98	2,04	2,11	2,21
10	2,03	2,10	2,18	2,29
11	2,09	2,14	2,23	2,36
12	2,13	2,20	2,29	2,41
13	2,17	2,24	2,33	2,47
14	2,21	2,28	2,37	2,50
15	2,25	2,32	2,41	2,55
16	2,28	2,35	2,44	2,58
17	2,31	2,38	2,48	2,62
18	2,34	2,41	2,50	2,66
19	2,36	2,44	2,53	2,68
20	2,38	2,46	2,56	2,71

д) оцінити стандартну невизначеність середнього арифметичного

$$u_A(\bar{y}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2}{n(n-1)}}; \quad (3.5)$$

е) оцінити складові $u_i(Y)$ комбінованої невизначеності за типом В невилучених залишків систематичних невизначеностей;

ж) обчислити комбіновану невизначеність типу В

$$u_{cB}(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i^2 u_i^2(Y)}; \quad (3.6)$$

и) оцінити комбіновану невизначеність результату вимірювання

$$u_c(Y) = \sqrt{u_A^2(\bar{y}) + u_{cB}^2(Y)}; \quad (3.7)$$

к) оцінити розширену невизначеність результату вимірювання

$$U = t_p(v_{\text{eff}}) u_c(Y); \quad (3.8)$$

л) подати результат вимірювання з невизначеністю

$$Y = \bar{y} \pm U, p \quad (3.9)$$

або

$$\bar{y} - U \leq Y \leq \bar{y} + U, p. \quad (3.10)$$

Якщо вимірювання неможливо повторити, крім розширеної невизначеності з рівнем довіри $p = 0,95$ можна вказувати розширену невизначеність для рівня довіри $p = 0,99$.

Для вимірювань, що виконуються в медицині та екології (важливих для здоров'я людей) допускається замість $p = 0,99$ вибирати більший рівень довіри (0,9973 чи 0,999).

3.1.3 Опрацювання груп прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями. Якщо багаторазові вимірювання тривають довго, то необхідно враховувати той факт, що зміни параметрів ЗВТ і оточуючого середовища можуть викликати систематичні або випадкові зміни оцінки результату вимірювання та його середньоквадратичних відхилень (СКВ). Для того щоб зменшити ці зміни, вимірювання проводять у декілька серій,

причому в кожній серії знову настроюють вимірювальне обладнання та вживають заходів для стабілізації параметрів навколишнього середовища.

За наявності декількох груп прямих багаторазових вимірювань однієї фізичної величини слід упевнитися, що додаткові систематичні невизначеності відсутні і оцінки СКВ є близькими.

Якщо в декількох групах вимірювань систематичних складових невизначеностей немає (тобто різниця між середніми арифметичними значеннями допустима) та відмінність оцінок СКВ допустима, то такі групи називають групами з однаковими розсіюваннями. Це означає, що середні арифметичні значення та оцінки дисперсій у всіх групах є оцінками одного дійсного значення та однієї дисперсії.

Припустимо, що є G груп прямих багаторазових вимірювань величини Y з N спостереженнями в кожній групі. Методика опрацювання груп прямих вимірювань з багаторазовим спостереженням така.

Середні арифметичні значення кожної групи спостережень визначаються за формулою

$$\bar{y}_g = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_{gn}, \quad (3.11)$$

де y_{gn} – n -не спостереження величини Y ($n=1, 2, \dots, N$) в g -й групі ($g=1, 2, \dots, G$).

Загальне середнє арифметичне значення $\bar{y}$ одержаних групових середніх арифметичних $\bar{y}_g$, що приймається за якнайкращу оцінку вимірюваної величини Y , визначається за формулою

$$Y = \bar{y} = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \bar{y}_g = \frac{1}{GN} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N y_{gn}. \quad (3.12)$$

Внутрішньогрупова дисперсія в g -й групі визначається за формулою

$$s_g^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (y_{gn} - \bar{y}_g)^2. \quad (3.13)$$

Загальне розсіювання результатів вимірювань, тобто загальна дисперсія середніх арифметичних, визначається за формулою

$$s^2(\bar{y}_g) = \frac{1}{G-1} \sum_{g=1}^G (\bar{y}_g - \bar{y})^2. \quad (3.14)$$

Далі визначається, чи є міжгрупова складова дисперсії значною в порівнянні з внутрішньогруповою складовою.

Для цього виконують такі операції [1]:

а) визначають дві незалежні оцінки усередненої внутрішньогрупової дисперсії спостережень. Першу оцінку, позначимо як s_1^2 , отримуємо зі спостережуваних відхилень щоденних середніх арифметичних $\bar{y}_g$ (3.11). Оскільки $\bar{y}_g$ є середнє арифметичне N спостережень, його оцінена загальна дисперсія $s^2(\bar{y}_g)$ при припущенні, що міжгрупова дисперсія рівна нулю, оцінюється як $\frac{s_1^2}{N}$. Тоді з рівняння (3.13) випливає

$$s_1^2 = N s^2(\bar{y}_g) = \frac{N}{G-1} \sum_{g=1}^G (\bar{y}_g - \bar{y})^2. \quad (3.15)$$

Оцінка дисперсії (3.15) має $(G-1)$ ступенів вільності.

Друга оцінка, позначена як s_{II}^2 , є середньою оцінкою дисперсії, одержаною з G індивідуальних значень внутрішньогрупової дисперсії $s_g^2(y_{gn})$

$$s_{II}^2 = \bar{s}_g^2(y_{gn}) = \frac{\sum_{g=1}^G v_g s_g^2(y_{gn})}{\sum_{g=1}^G v_g}. \quad (3.16)$$

Оскільки структура врівноважена і всі ступені вільності $v_g = N-1$, то й вираз, що виходить в результаті для s_{II}^2 , є просто середнє арифметичне $s_g^2(y_{gn})$

$$s_{II}^2 = \bar{s}_g^2(y_{gn}) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G s_g^2(y_{gn}). \quad (3.17)$$

Таким чином, з урахуванням виразу (3.13), отримують

$$s_{II}^2 = \frac{1}{G(N-1)} \sum_{n=1}^G \sum_{n=1}^N (y_{gn} - \bar{y})^2, \quad (3.18)$$

що є оцінкою, яка має $G(N-1)$ ступенів вільності.

Оскільки оцінка s_1^2 ґрунтується на змінності середніх арифметичних, тоді як оцінка s_{II}^2 ґрунтується на змінності внутрішньогрупових

спостережень, їх відмінність показує можливу присутність міжгрупової змінності;

б) виконують порівняння значень s_I^2 і s_{II}^2 . Для цього використовують F-тест [1].

Відомо, що F-розподіл складових є розподілом імовірності відношення

$$F(v_I, v_{II}) = \frac{s_I^2(v_I)}{s_{II}^2(v_{II})} \quad (3.19)$$

двох незалежних оцінок $s_I^2(v_I)$ і $s_{II}^2(v_{II})$ дисперсії нормально розподіленої випадкової змінної. Параметри v_I , і v_{II} є відповідними ступенями вільності двох оцінок, а $0 \leq F(v_I, v_{II}) \leq \infty$. Критичні значення F для різної ймовірності (квантілі F-розподілу) внесені в таблицю розподілу Фішера для різних значень v_I і v_{II} [1, 5].

Звичайно, критичні значення F задаються для ймовірності 0,95; 0,975 або 0,99. Якщо розраховане значення $F(v_I, v_{II})$ більше, ніж критичне для заданої ймовірності ($F_{0,95}$, $F_{0,975}$ або $F_{0,99}$), то це тлумачиться як наявність міжгрупової дисперсії, оскільки $s_I^2(v_I)$ більше $s_{II}^2(v_{II})$ на статистично значущу величину.

Якщо $F(v_I, v_{II}) < F_p$, то існування міжгрупової невизначеності заперечується, оскільки різниця між s_I^2 і s_{II}^2 не розглядається як статистично значуща, оцінену дисперсію $s^2(\bar{y})$ для $\bar{y}$ слід розраховувати за загальним виразом

$$s^2(\bar{y}) = \frac{1}{GN(GN - 1)} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N (y_{gn} - \bar{y}_g)^2. \quad (3.20)$$

Це співвідношення еквівалентно виразу

$$s^2(\bar{y}) = \frac{(G - 1)s_I^2 + G(N - 1)s_{II}^2}{GN(GN - 1)}. \quad (3.21)$$

Тоді вираз (3.20) можна записати у вигляді

$$s^2(\bar{y}) = \frac{1}{GN(GN - 1)} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N [(y_{gn} - \bar{y}_g) + (\bar{y}_g - \bar{y})]^2 =$$

$$= \frac{1}{GN(GN-1)} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N [(y_{gn} - \bar{y}_g)^2 + (\bar{y}_g - \bar{y})^2 + 2(y_{gn} - \bar{y}_g)(\bar{y}_g - \bar{y})]. \quad (3.22)$$

В отриманому виразі (3.20):

$$\sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N (y_{gn} - \bar{y}_g)^2 = G(N-1)s_{II}^2;$$

$$\sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N (y_g - \bar{y})^2 = G(N-1)s_I^2;$$

$$\begin{aligned} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N 2(y_{gn} - \bar{y}_g)(\bar{y}_g - \bar{y}) &= 2 \sum_{g=1}^G (\bar{y}_g - \bar{y}) \sum_{n=1}^N (y_{gn} - \bar{y}_g) = \\ &= 2 \sum_{g=1}^G (\bar{y}_g - \bar{y})(N\bar{y}_g - N\bar{y}_g) = 0. \end{aligned}$$

З врахуванням цього й одержано вираз (3.21). Таким чином, якщо припустити, що всі поправки на систематичні ефекти враховані і всі інші складові невизначеності незначні, то результат вимірювання можна записати як

$$Y = \frac{1}{GN} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N y_{gn} = \frac{1}{G} \sum_{j=1}^G \sum_{n=1}^N \bar{y}_g = \bar{y} \quad (3.23)$$

з комбінованою стандартною невизначеністю $s^2(\bar{y})$ (3.21), що має $GN - 1$ ступенів вільності.

Розширена невизначеність груп багаторазових спостережень розраховується за формулою

$$U = t_p(v)s(\bar{y}), \quad (3.24)$$

де $t_p(v)$ – коефіцієнт Стюдента для числа ступенів вільності $v = GN - 1$ і довірчого рівня p . Для $v > 30$ замість коефіцієнта Стюдента можна брати коефіцієнт охоплення для нормального закону розподілу.

Якщо $F(v_I, v_{II}) \geq F_p$, то існування міжгрупової дисперсії приймається і передбачається, що вона випадкова. Тоді оцінена дисперсія $\bar{y}$ виходить з $s^2(\bar{y}_g)$, оскільки вона належним чином відображає як внутрішньогрупову, так і міжгрупову випадкові складові дисперсії. Вона розраховується за формулою

$$s^2(\bar{y}) = \frac{s^2(\bar{y}_g)}{G}. \quad (3.25)$$

Враховуючи рівняння (3.14), отримаємо

$$s^2(\bar{y}) = \frac{\sum_{g=1}^G (\bar{y}_g - \bar{y})^2}{G(G-1)}. \quad (3.26)$$

Оцінка дисперсії, що описується виразом (3.26) має $G - 1$ ступенів вільності.

Розширена невизначеність результату вимірювання в такому випадку розраховується за формулою (3.24), але з числом ступенів вільності $\nu = G - 1$.

3.2 Опрацювання результатів опосередкованих вимірювань

Під опосередкованими вимірюваннями розуміють непрямі вимірювання однієї величини з перетворенням її роду чи обчисленням за результатами прямих одноразових вимірювань інших фізичних величин, з якими вимірювана величини пов'язана явною функційною залежністю.

Залежність опосередковано вимірюваної величини Y від аргументів $X_1, X_2, \dots, X_N$ є відомою [8]

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N). \quad (3.27)$$

Результати вимірювання аргументів мають бути узгоджені між собою, тобто значення аргументів, що отримують в результаті прямих вимірювань, мають відповідати тому самому значенню вимірюваної величини. Невиконання цієї умови є джерелом появи методичної невизначеності.

Обробка результатів опосередкованих вимірювань зумовлена:

- формою подання результатів вимірювання аргументів;
- видом залежності рівняння перетворення.

За виглядом функціональної залежності f вони поділяються на дві основні групи – лінійні та нелінійні.

При нелінійній функціональній залежності f [2] або наявності кореляції між оцінками $x_1, x_2, \dots, x_N$ надійне оцінювання вимірюваної величини слід проводити за формулою

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}), \quad (3.28)$$

де $X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}$ – k -те спостереження ($k = 1, 2, \dots, n$) вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$.

Таким чином, у береться як середнє значення n незалежних спостережень Y_k величини Y ; при цьому кожне спостереження має одну і ту ж невизначеність і кожне засноване на повному наборі спостережуваних значень N вхідних величин X_i , одержаних в один і той самий час.

В цьому випадку стандартна невизначеність типу А результату непрямого вимірювання обчислюється за формулою

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (Y_k - y)^2}{n(n-1)}}. \quad (3.29)$$

Зазвичай на практиці оцінку у вимірюваної величини Y , одержують з простішого виразу

$$y = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N), \quad (3.30)$$

де $\bar{X}_i = \sum_{k=1}^n (p_{i,k} X_{i,k})$ є середнім арифметичним окремих спостережень $X_{i,k}$ отриманих з ймовірністю $p_{i,k}$.

В цьому випадку оцінене стандартне відхилення, пов'язане з вихідною оцінкою чи з результатом вимірювання y , називається комбінованою стандартною невизначеністю і позначається $u_c(y)$, яка складається із оціненого стандартного відхилення, пов'язаного з кожною вхідною оцінкою x_i , що називають стандартною невизначеністю і позначають $u_c(x_i)$.

Кожну вхідну оцінку x_i і пов'язану з нею стандартну невизначеність $u_c(x_i)$ отримують із розподілу можливих значень вхідної величини X_i . Цей розподіл ймовірностей, як вже було сказано, може бути оснований на рядах спостережень $X_{i,k}$ величин X_i чи він може бути апріорним розподілом. В першому випадку отримують оцінки складової стандартної невизначеності за типом А, в другому випадку – оцінки за типом В [1].

Спосіб додавання стандартних невизначеностей залежить від ступеня корельованості вхідних величин.

3.2.1 Оцінювання некорельованих вхідних величин. При відсутності кореляційного зв'язку між вхідними величинами методика опрацювання результатів непрямих вимірювань полягає в наступному.

1. Визначають оцінку вимірюваної величини Y за формулою $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, де $x_1, x_2, \dots, x_N$ – оцінки вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$, отримані за результатами одноразових чи багаторазових прямих вимірювань. В останньому випадку за оцінки беруть середнє арифметичне n спостережень X_i

$$x_i = \bar{X}_i = \sum_{n=1}^N (p_{i,n} x_{i,n}). \quad (3.31)$$

2. Знаходять стандартні невизначеності $u(x_i)$ оцінок $x_1, x_2, \dots, x_N$ вхідних величин. Вони можуть бути отримані за типом А (тільки у випадку багаторазових вимірювань $X_1, X_2, \dots, X_N$) чи за типом В (як у випадку одноразових, так і у випадку багаторазових вимірювань $X_1, X_2, \dots, X_N$), як було описано раніше.

3. Обчислюють комбіновану стандартну невизначеність оцінки вимірюваної величини y за формулою [1]

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}, \quad (3.32)$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – коефіцієнти чутливості, які розраховуються як частинні похідні

$\frac{\partial f}{\partial X_i}$ для $X_i = x_i$.

При значній нелінійності f у вираз (3.32) повинні бути внесені члени більш високого порядку розкладу в ряд Тейлора. Якщо щільність розподілу кожного X_i симетрична відносно його середнього значення, то до підкореневого виразу достатньо додати члени другого порядку

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i) u^2(x_j). \quad (3.33)$$

4. Визначають розширену невизначеність оцінки вимірюваної величини за формулою

$$U = k u_c(y), \quad (3.34)$$

де коефіцієнт охоплення k приймається рівним коефіцієнту Стюдента $t_p(v_{\text{eff}})$ для ефективного числа ступенів вільності v_{eff} , отриманого з формули Велча-Саттерсвейта [1]

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)} = \frac{\left[\sum_{i=1}^N u_i^2(y) \right]^2}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)}. \quad (3.35)$$

У виразі (3.35) $u_i(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)$, а значення ступенів вільності v_i приймається рівним ∞ , якщо $u(x_i)$ визначається за типом В, і рівним $n-1$, якщо $u(x_i)$ визначається за типом А, де n – число багаторазових вимірювань, що проводяться при отриманні оцінки $u(x_i)$.

5. Записують результати вимірювання у вигляді

$$Y = y \pm U, \quad p. \quad (3.36)$$

3.2.2 Оцінювання корельованих вхідних величин. При наявності кореляційного зв'язку між вхідними величинами методика опрацювання результатів непрямих вимірювань є такою [1].

1. Визначають оцінку вимірюваної величини за формулою $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, де $x_1, x_2, \dots, x_N$ – оцінки вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$, отримані за результатами багаторазових прямих вимірювань, як такі беруться середні арифметичні N спостережень $\bar{X}_i = \sum_{k=1}^N p_{i,k} x_{i,k}$. Для рівноточних вимірювань середнє значення розраховується за формулою $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N x_{i,k}$.

При цьому, як і в випадку незалежних непрямих вимірювань, вважається, що з числа багаторазових спостережень видалені спостереження, обтяжені грубими похибками чи промахами, а також внесені всі поправки на відомі систематичні ефекти.

2. Знаходять стандартні невизначеності $u(x_i)$ оцінок $x_1, x_2, \dots, x_N$ вхідних величин. Вони можуть бути отримані за типом А (тільки у випадку багаторазових вимірювань $X_1, X_2, \dots, X_N$) чи за типом В (як у випадку одноразових, так і у випадку багаторазових вимірювань $X_1, X_2, \dots, X_N$).

3. Розраховують значення коефіцієнтів чутливості [1]

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial X_i} \text{ при } X_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.37)$$

4. Знаходять попарні оцінки кореляційних моментів [1]

$$u(x_i, x_j) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{x}_i)(x_{j,k} - \bar{x}_j)}{n-1}. \quad (3.38)$$

5. Розраховують коефіцієнт кореляції

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}, \quad -1 < r(x_i, x_j) < 1. \quad (3.39)$$

6. Визначають оцінку дисперсії результату вимірювання

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(\bar{x}_i) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=2}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j). \quad (3.40)$$

7. Знаходять розширену невизначеність результату непрямого вимірювання $U = t_p(v_{\text{eff}})u_c$, де $t_p(v_{\text{eff}})$ – коефіцієнт Стюдента для заданого довірчого рівня p і числа ступенів вільності v_{eff} , що визначається за формулою (3.35) [1].

8. Записують результати вимірювання у вигляді

$$Y = y \pm U, \quad p \quad \text{або} \quad y - U \leq Y \leq y + U, \quad p.$$

На практиці може виникнути ситуація, коли відсутня інформація для коректного оцінювання коефіцієнтів кореляції чи коваріацій. За умови, що ця інформація не може бути одержана за допустимих затрат ресурсів та часу, приходиться вдаватися до приблизних оцінок. Так, якщо відсутня будь-яка інформація як про значення коефіцієнтів кореляції, так і про їх знак та в однаковій мірі небажана як переоцінка, так і недооцінка невизначеності, їх значення приймають рівними нулю. Проте, якщо недооцінка невизначеності є неприпустимою, замість квадратичного вдаються до лінійного підсумовування складових корельованих внесків, тобто використовують оцінки найгіршого випадку невизначеності вимірювання.

3.3 Опрацювання результатів сумісних вимірювань

Сумісне вимірювання – непряме вимірювання, в якому значення декількох одночасно вимірюваних різнорідних фізичних величин отримують шляхом розв'язання рівнянь, які пов'язують їх з іншими

фізичними величинами, що вимірюються прямо чи опосередковано. Сумісні вимірювання є різновидом вимірювання залежностей.

Сумісні вимірювання двох або більше різнорідних величин виконують для того, щоб знайти залежність між ними. Вони засновані на відомих рівняннях, що відображають зв'язки між властивостями об'єктів.

При сумісних вимірюваннях невідомі величини, що підлягають безпосередньому вимірюванню, визначаються за результатами вимірювання інших величин, які функціонально пов'язані з ними

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m, A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, Z_1, Z_2, \dots, Z_m). \quad (3.41)$$

На практиці як правило визначають залежність Y від одного аргумента, наприклад, вимірюється параметр X : $Y = f(X)$.

Прикладом сумісних вимірювань є знаходження параметрів α і β рівняння, що виражає залежність опору R від температури t

$$R = R_{20} + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2, \quad (3.42)$$

де R_{20} – опір терморезистора при 20°C ;

α , β – температурні коефіцієнти опору.

Рівняння (3.42) для вимірюваних величин α і β набуває вигляду системи з двох рівнянь, що відповідають значенням температури t_1 і t_2

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{20} + \alpha(t_1 - 20) + \beta(t_1 - 20)^2; \\ R_2 &= R_{20} + \alpha(t_2 - 20) + \beta(t_2 - 20)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Обрацювання даних у такому випадку проводять за аналогією з опосередкованим вимірюванням. Для цього знаходять β з першого рівняння системи (3.43)

$$\beta = \frac{\frac{R_1}{R_{20}} - 1 - \alpha(t_1 - 20)}{(t_1 - 20)^2}, \quad (3.44)$$

Рівняння (3.44) підставляють в друге рівняння системи (3.43) і отримують рівняння для визначення α

$$\alpha = \frac{\left(\frac{R_2}{R_{20}} - 1\right)(t_1 - 20)^2 - \left(\frac{R_1}{R_{20}} - 1\right)(t_2 - 20)^2}{(t_1 - 20)(t_2 - 20)(t_1 - t_2)} \quad (3.45)$$

за результатами вимірювань величин t_1, t_2, R_1, R_2 .

Якщо результати вимірювань величин t_1, t_2, R_1 і R_2 подано із розширеною невизначеністю $t_1 \pm U(t_1); t_2 \pm U(t_2); R_1 \pm U(R_1); R_2 \pm U(R_2)$ і відносні розширені невизначеності $\frac{U(x_i)}{x_i}$ малі, тоді можна використати правила інтервального аналізу з лінеаризацією і отримати розширену невизначеність

$$U(\alpha) = \left| \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \right| U(R_1) + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \right| U(R_2) + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \right| U(t_1) + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \right| U(t_2). \quad (3.46)$$

Якщо результат потрібно подати у вигляді комбінованої невизначеності $u_c(\alpha)$, то її можна розрахувати за умови приписування рівномірного закону розподілу за формулою

$$u_c(\alpha) = \sqrt{\frac{\left[\frac{\partial \alpha}{\partial R_1} U(R_1) \right]^2 + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial R_2} U(R_2) \right]^2 + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t_1} U(t_1) \right]^2 + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t_2} U(t_2) \right]^2}{3}}. \quad (3.47)$$

Розширену невизначеність $U(\beta)$ і комбіновану невизначеність $u_c(\beta)$ можна розрахувати за рівнянням похибки вимірювання величини β

$$\Delta(\beta) = \frac{\partial \beta}{\partial R_1} \Delta(R_1) + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Delta(\alpha) + \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \Delta(t_1), \quad (3.48)$$

$$\text{де } \Delta(\alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \Delta(R_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \Delta(R_2) + \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \Delta(t_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \Delta(t_2).$$

$$\text{Похідна } \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \frac{1}{t_1 - 20}.$$

Підставляючи $\Delta(\alpha)$ та $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$ в рівняння (3.48) отримаємо рівняння похибки величини β

$$\begin{aligned} \Delta(\beta) = & \left(\frac{\partial \beta}{\partial R_1} - \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \right) \Delta(R_1) - \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \Delta(R_2) + \\ & + \left(\frac{\partial \beta}{\partial t_1} - \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \right) \Delta(t_1) - \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \Delta(t_2). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Розширену невизначеність величини β розраховують за допомогою рівняння (3.49) з урахуванням правил інтервального аналізу

$$U(\beta) = \left| \frac{\partial \beta}{\partial R_1} - \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \right| U(R_1) + \left| \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \right| U(R_2) + \\ + \left| \frac{\partial \beta}{\partial t_1} - \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \right| U(t_1) + \left| \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \right| U(t_2). \quad (3.50)$$

Комбіновану невизначеність величини β знаходять з рівняння (3.49) за умови приписування рівномірного закону розподілу невизначеностям аргументів

$$u_c(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial R_1} - \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \right) U(R_1) \right]^2 + \left[\frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} U(R_2) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial t_1} - \frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \right) U(t_1) \right]^2 + \left(\frac{1}{(t_1 - 20)} \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} U(t_2) \right)^2 \right\}^{0,5}. \quad (3.51)$$

Результати вимірювань величин α і β з представленням комбінованої невизначеності записуються у вигляді

$$\alpha; \quad u_c(\alpha); \quad \beta; \quad u_c(\beta).$$

При представленні розширеної невизначеності результати вимірювань записуються так

$$\alpha \pm U(\alpha); \quad \beta \pm U(\beta), \quad p.$$

Найбільшого розповсюдження при опрацюванні сумісних вимірювань набув метод найменших квадратів (МНК). Суть його полягає в наступному.

При проведенні n вимірювань величини x_k і подальшому підставленні її в залежність (3.41) отримуємо систему з n рівняннями

$$Y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_m, A_1, A_2, A_3, \dots, A_m). \quad (3.52)$$

В цю систему вимірювані величини входять з похибками. Припустимо, що отримана система лінійних рівнянь $a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k = 0$, де $k = 1, 2, 3, \dots, n$, а x_1, x_2, x_3 – невідомі

сумісно вимірювані величини. Оскільки під час вимірювань завжди існують похибки, то праві частини лінійних рівнянь не будуть дорівнювати нулю. Якщо до правої частини додати деякий доданок δ_k , який називають нев'язкою (кінцевою похибкою умовних рівнянь), то отримаємо таку систему лінійних рівнянь

$$\delta_k = a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k. \quad (3.53)$$

Задача зводиться до визначення таких значень $x_1, x_2, \dots, x_n$, які б при підставленні їх в систему з n умовних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 - y_1 &= \delta_1; \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 - y_2 &= \delta_2; \\ &\dots\dots\dots \\ a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 - y_n &= \delta_n, \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

забезпечували мінімальне значення суми квадратів відхилень (нев'язок) експериментальних значень від розрахункових, тобто

$$\sum_{k=1}^n (a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k)^2 = \sum_{k=1}^n \delta_k^2 = Q = \min. \quad (3.55)$$

Під час вимірювань з однаковою ймовірністю необхідною умовою мінімуму суми (3.55) є рівність нулю частинних похідних функцій (3.55)

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_m} = 0. \quad (3.56)$$

Умови мінімуму відповідно до принципу Лежандра для системи рівнянь мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_1} &= 2 \sum_{k=1}^n (a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k) a_k = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} &= 2 \sum_{k=1}^n (a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k) b_k = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial x_3} &= 2 \sum_{k=1}^n (a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k) c_k = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

В результаті із сукупності рівнянь, отриманих з умови мінімуму, маємо систему з m рівнянь, які називаються нормальними і коефіцієнти яких залежать від коефіцієнтів усіх n умовних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} [aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 - [ay] &= 0; \\ [ab]x_1 + [bb]x_2 + [bc]x_3 - [by] &= 0; \\ [ac]x_1 + [bc]x_2 + [cc]x_3 - [cy] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

де

$$\left. \begin{aligned} [aa] &= a_1a_1 + a_2a_2 + \dots + a_na_n; \\ [ab] &= a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n; \\ [ac] &= a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Знаючи значення постійних коефіцієнтів нормальної системи рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих m , можна відомими способами розв'язання лінійних рівнянь визначити результати сумісних вимірювань, які будуть максимально наближені до своїх дійсних значень.

Для розв'язання системи лінійних нормальних рівнянь як правило використовують такі три способи: визначників, послідовного виключення невідомих (спосіб Гаусса) і матричний. При кількості нормальних рівнянь менше чотирьох середні значення сумісно вимірюваних величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, як правило розраховують за допомогою визначників:

$$\bar{x}_1 = \frac{D_{x1}}{D}, \quad \bar{x}_2 = \frac{D_{x2}}{D}, \quad \dots, \quad \bar{x}_m = \frac{D_{xm}}{D},$$

де головний визначник D при $m = 3$ дорівнює

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}, \quad (3.60)$$

а визначники D_{x1}, D_{x2}, D_{x3} розраховуються з головного визначника D шляхом заміни стовпця з коефіцієнтами при невідомому x_m на стовпець з вільними членами:

$$D_{x1} = \begin{vmatrix} [ay] & [ab] & [ac] \\ [by] & [bb] & [bc] \\ [cy] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}; \quad (3.61)$$

$$D_{x2} = \begin{vmatrix} [aa] & [ay] & [ac] \\ [ba] & [by] & [bc] \\ [ca] & [cy] & [cc] \end{vmatrix}; \quad (3.62)$$

$$D_{x3} = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ay] \\ [ba] & [bb] & [by] \\ [ca] & [cb] & [cy] \end{vmatrix}. \quad (3.63)$$

Невизначеність величин $\bar{X}_m$, знайдених як результат сумісних вимірювань, виражається такими формулами [1, 8]:

$$u(\bar{X}_1) = \sqrt{\frac{A_{11}}{D} \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k^2}{(n-m)}}; \quad (3.64)$$

$$u(\bar{X}_2) = \sqrt{\frac{A_{22}}{D} \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k^2}{(n-m)}}; \quad (3.65)$$

$$u(\bar{X}_3) = \sqrt{\frac{A_{33}}{D} \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k^2}{(n-m)}}; \quad (3.66)$$

де A_{11} , A_{22} , A_{33} – алгебраїчні доповнення (ад'юнкти) елементів діагоналі головного визначника D , які отримуються шляхом викреслення з матриці визначника n -го стовпця і m -го рядка, відповідних вимірюваній величині, що оцінюється, з наступним домноженням на $(-1)^{k+1}$. Тобто, для розрахунку ад'юнкта A_{11} , викреслюється перший стовпець та перший рядок і розв'язується такий визначник

$$A_{11} = \begin{vmatrix} [bb] & [bc] \\ [cb] & [cc] \end{vmatrix}.$$

Для визначення ад'юнкта A_{22} , викреслюється другий стовпець та другий рядок і розв'язується визначник

$$A_{22} = \begin{vmatrix} [aa] & [ac] \\ [ca] & [cc] \end{vmatrix}.$$

Для визначення ад'юнкта A_{33} , викреслюється третій стовпець та третій рядок і розв'язується визначник

$$A_{33} = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ba] & [bb] \end{vmatrix}.$$

Розширена невизначеність знаходження величин сумісних вимірювань $\bar{x}_m$ обчислюється за формулою:

$$U(\bar{x}_m) = k_p u(\bar{x}_m), \quad (3.67)$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який знаходиться з розподілу Стюдента з числом ступенів вільності $n - m$ і заданим довірчим рівнем p .

При збільшенні числа m об'єм виконаної роботи швидко зростає, і тому, на практиці, зазвичай, обмежуються поліномом не вище 3-го степеня.

При обґрунтуванні МНК в математичній статистиці передбачається, що результати вимірювань задовільняються такі умови:

- значення аргументів відомі точно;
- результати вимірювань містять лише випадкові похибки, які незалежні, мають нульове середнє значення і однакові дисперсії;
- похибки вимірюваних величин розподілені за нормальним законом.

При таких умовах МНК дає незміщені оцінки невідомих величин, що розраховуються. Але на практиці перераховані умови виконуються не завжди. Оскільки, крім випадкових складових похибок можуть бути і невиключені систематичні складові невизначеностей.

Довірчі межі для істинних значень вимірюваних величин визначають за розподілом Стюдента при числі ступенів вільності $n - m$, або за нормальним розподілом, якщо результати вимірювань можна вважати нормальними.

3.4 Опрацювання результатів сукупних вимірювань

Сукупне вимірювання – це непряме вимірювання, в якому значення декількох одночасно вимірюваних однорідних величин отримують шляхом розв’язання системи рівнянь, що пов’язують різні сполучення цих величин, які вимірюються прямо чи опосередковано [8].

Сукупні вимірювання широко використовуються в метрологічній практиці при калібруванні мір або шкал ЗВТ. Опрацювання результатів вимірювань виконується за МНК. Але його використання саме для опрацювання сукупних вимірювань має деякі особливості. Вони пов’язані перш за все з тим, що рівняння для сукупних однорідних величин $y_1, y_2, \dots, y_m$ має вигляд [1, 8]

$$x_i = \sum_{j=1}^m C_{ij} y_j, \text{ при } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.68)$$

де y_j – результат вимірювання початкових величин;

C_{ij} – відомі коефіцієнти;

x_i – результати порівняння різних комбінацій поєднання мір чи поділок шкал;

m – кількість значень величин, що підлягають визначенню;

n – кількість комбінацій (рівнянь).

Крім того, в багатьох випадках з фізичних умов вимірювань вводяться додаткові точні умови, що зв’язують шукані величини, - так званні рівняння зв’язку. За наявності рівнянь зв’язку можна виразити частину невідомих величин.

При калібруванні коефіцієнти C_{ij} набувають таких значень [1]:

а) 0 – якщо Y_j не бере участі в i -му вимірюванні;

б) 1 – якщо вимірюється сума декількох величин, в яку входить Y_j ;

в) -1 – якщо сума декількох величин порівнюється з Y_j .

Якщо число рівнянь дорівнює числу невідомих, то система (3.68) розв’язується однозначно, а дійсні значення вимірюваних величин і їх стандартні та розширені невизначеності визначаються методами оброблення опосередкованих вимірювань. Однак для зменшення невизначеностей калібрування проводиться порівняння більшого числа комбінацій, ніж кількість значень визначуваних величин. Тоді оцінювання результатів вимірювання проводиться так як при сумісних вимірюваннях. Для розв’язання системи умовних рівнянь, як правило, застосовують МНК. Цей метод витікає з принципу максимальної правдоподібності і є оптимальним за таких умов:

- результати вимірювання x містять незалежні випадкові похибки з нульовими математичними сподіваннями і однаковими дисперсіями;
- похибки мають нормальний розподіл.

При виконанні цих умов отримані оцінки будуть незміщеними і ефективними.

Систему рівнянь відносно нев'язок можна записати у вигляді [1, 8]

$$\delta_i = \sum_{j=1}^m C_{ij} y_j - x_i. \quad (3.69)$$

Сума квадратів буде дорівнювати [1, 8]

$$Q = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (C_{i1} y_1 + \dots + C_{im} y_m - x_i)^2. \quad (3.70)$$

Диференціюючи вираз (3.70) за параметрами y_j , отримаємо систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y_1} &= 2 \sum_{i=1}^n (C_{i1} y_1 + \dots + C_{im} y_m - x_i) C_{i1} \\ &\dots \\ \frac{\partial Q}{\partial y_m} &= 2 \sum_{i=1}^n (C_{i1} y_1 + \dots + C_{im} y_m - x_i) C_{im} \end{aligned} \right\}, \quad (3.71)$$

видозмінюючи яку і застосовуючи позначення Гаусса, отримуємо нормальну систему рівнянь відносно y_j :

$$\left. \begin{aligned} [xC_1] &= [C_1^2] y_1 + \dots + [C_1 C_m] y_m \\ &\dots \\ [xC_m] &= [C_1 C_m] y_1 + \dots + [C_m^2] y_m \end{aligned} \right\}. \quad (3.72)$$

Розв'язок цієї системи за допомогою визначників має вигляд:

$$y_j = \frac{D_j}{D}, \quad (3.73)$$

де D – головний визначник системи:

$$D = \begin{vmatrix} [C_1^2] & [C_1 C_2] & \dots & [C_1 C_m] \\ [C_1 C_2] & [C_2^2] & \dots & [C_2 C_m] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [C_1 C_m] & [C_2 C_m] & \dots & [C_m^2] \end{vmatrix}, \quad (3.74)$$

а визначник D_j отримується з головного шляхом заміни j -го стовпця на стовпець з вільними членами

$$D_j = \begin{vmatrix} [C_1^2] & \dots & [YC_1] & \dots & [C_1 C_m] \\ [C_1 C_2] & \dots & [YC_{21}] & \dots & [C_2 C_m] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [C_1 C_m] & \dots & [YC_{m1}] & \dots & [C_m^2] \end{vmatrix}. \quad (3.75)$$

Експериментальні стандартні відхилення y_j визначаються за формулою [1, 8]

$$u(y_j) = \sqrt{\frac{A_{jj} \sum_{i=1}^n \delta_i^2}{D \cdot n - m}}, \quad (3.76)$$

де A_{jj} – алгебраїчне доповнення головного визначника, яке отримують із останнього викреслюванням j -го стовпця та j -го рядка.

Нев'язки δ_i знаходять за формулою (3.69).

Розширені невизначеності результатів сукупних вимірювань знаходять із виразу

$$U(y_j) = t_p(v) u(y_j), \quad (3.77)$$

де $t_p(v)$ – коефіцієнт Стюдента для $v = n - m$ ступенів вільності.

Такий спосіб опрацювання експериментальних даних для сукупних вимірювань доцільно застосовувати для лінійних функцій. В інших випадках опрацювання результатів значно ускладнюється.

Контрольні запитання

1. Які Ви знаєте групи вимірювань фізичних величин?
2. Які вимірювання називаються прямими?
3. Наведіть методику оцінювання прямих вимірювань з одноразовими спостереженнями.
4. Які виконуються операції під час опрацювання прямих вимірювань з багаторазовим спостереженням?
5. Як вилучаються промахи з результатів багаторазових спостережень?
6. Наведіть приклад оцінювання невизначеності одноразових вимірювань.
7. Як визначається комбінована невизначеність результату прямих вимірювань з багаторазовим спостереженням?
8. Які вимірювання називаються опосередкованими та чим вони відрізняються від прямих вимірювань?
9. Наведіть методику опрацювання результатів опосередкованих вимірювань при відсутності кореляційних зв'язків.
10. Наведіть вираз для оцінки комбінованої невизначеності при опрацюванні результатів опосередкованих вимірювань за наявності кореляції.
11. Запишіть вираз для розрахунку внутрішньогрупової дисперсії при опрацюванні груп прямих вимірювань.
12. Які вимірювання називаються опосередкованими?
13. Дайте визначення сумісним вимірюванням.
14. Що таке нев'язки та як вони визначаються?
15. Дайте визначення сукупним вимірюванням.
16. Як розраховується коефіцієнт кореляції?
17. Наведіть вираз для розрахунку між групової дисперсії при опрацюванні груп прямих вимірювань.
18. З якою метою виконують надлишкові вимірювання при опрацюванні прямих вимірювань з одноразовим спостереженням?
19. Наведіть форму представлення результатів багаторазових вимірювань.
20. Наведіть вираз для розрахунку комбінованої стандартної невизначеності результату опосередкованого вимірювання при значній нелінійності рівняння перетворення (вимірювання).

4 ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАДИ ВИРАЖЕННЯ КОМПОНЕНТІВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

4.1 Практичні рекомендації щодо вираження компонентів невизначеності

4.1.1 Випадковість та повторність спостережень. Невизначеності, які визначаються на основі повторних спостережень, часто протиставляються тим, що оцінюються за допомогою інших способів як об'єктивні, статистично точні та ін. При цьому неправильно припускається, що їх можна оцінювати простим застосуванням статистичних формул до спостережень і що для їхніх оцінок не потрібно застосування якогось судження.

Слід, насамперед, поставити запитання: «До якого ступеня повторні спостереження є цілком незалежними повтореннями вимірювальної процедури?» Якщо всі спостереження входять в одну вибірку і якщо здійснення вибірок є частиною вимірювальної процедури, оскільки вимірювана величина є властивістю будь-якого матеріалу (на противагу властивості даного конкретного матеріалу), то тоді повторні спостереження не є незалежними; до дисперсії повторних спостережень, які входять в одну вибірку, варто додати оцінку складової дисперсії, обумовлену можливими розбіжностями між вибірками. Якщо встановлення нуля приладу є частиною вимірювальної процедури, то вона повинна проводитися як частина кожного повторення, навіть якщо є дуже малий дрейф протягом періоду проведення спостережень, тому що потенційно існує статистично обумовлена невизначеність, яка приписується встановленню нуля.

Подібним же чином, якщо знімаються дані барометра, то, в принципі, їх варто знімати при кожному повторенні вимірювань (бажано при цьому змінити його показання і дозволити йому повернутися в положення рівноваги), оскільки можуть бути зміни як у показаннях, так і в процесі їхнього зняття, навіть якщо барометричний тиск залишається постійним.

По-друге, потрібно запитати, чи є всі впливи, що передбачаються випадковими, дійсно випадковими. Чи є середні та дисперсії їхніх розподілів постійними, або, можливо, є дрейф значень невимірюваної впливної величини у період повторних спостережень? Якщо є достатня кількість спостережень, то можна розрахувати середні арифметичні результати першої і другої половини періоду та їх експериментальні стандартні відхилення і порівняти два середніх один з одним, щоб визначити, чи є розходження між ними статистично значимим і чи існує, таким чином, змінний у часі вплив.

Якщо значення величин у лініях загального забезпечення у лабораторії (напруга і частота електричної мережі, тиск і температура води, тиск азоту та ін.) є впливними величинами, то, звичайно, в їхніх коливаннях є дуже не випадковий елемент, який не можна не враховувати.

Якщо найменша значуща цифра в показаннях цифрового приладу безупинно змінюється під час спостереження під впливом «шумів», то іноді буває важко не вибрати (не усвідомлюючи) значення цього знака, яке здається кращим. Краще знайти які-небудь способи для «заморожування» показань приладу в довільний момент для записування «замороженого» показання [5, 7].

4.1.2 Кореляції. Коваріація, пов'язана з оцінками двох вхідних величин X_i і X_j , може бути прийнята рівною нулю або вважатися несуттєвою, якщо:

а) X_i і X_j – некорельовані випадкові змінні, а не фізичні величини, які передбачаються інваріантними, наприклад тому, що вони повторно, але не одночасно, вимірювалися в різних незалежних експериментах, або тому, що вони дають підсумкові величини різних оцінок, які проводилися незалежно;

б) якась з величин X_i і X_j може розглядатися як постійна;

в) наявна інформація недостатня для оцінювання коваріації, пов'язаного з оцінками X_i і X_j .

Чи є дві вхідні величини, які повторно й одночасно спостерігаються, корельованими, можна визначити за допомогою рівняння (1.23). Наприклад, якщо вплив температури на частоту генератора не компенсується або компенсується погано, а частота є вхідною величиною, якщо навколишня температура також є вхідною величиною і якщо за ними спостерігають одночасно, то може бути значна кореляція, що демонструватиметься обчисленою коваріацією частоти генератора і навколишньої температури.

На практиці вхідні величини часто є корельованими, тому що ті ж самі речовинний еталон вимірювання, вимірювальний прилад, довідкові дані або навіть метод вимірювань, що мають суттєву невизначеність, використовуються при оцінюванні їх значень. Без утрати спільності припустимо, що дві вхідні величини X_i і X_j , оцінені за допомогою x_i і x_j , залежать від множини некорельованих змінних $Q_1, Q_2, \dots, Q_L$. Таким чином, $X_1 = F(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$ і $X_2 = G(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$, хоча деякі з цих змінних можуть у дійсності з'явитися лише в одній функції. Якщо $u^2(q_l)$ являє собою оцінену дисперсію, пов'язану з оцінкою q_l змінної Q_l , то тоді оцінена дисперсія, пов'язана з x_1 , отримується з рівняння

$$u^2(x_1) = \sum (\partial F / \partial q_l)^2 u^2(q_l), \quad l = 1, \dots, L, \quad (4.1)$$

і аналогічне рівняння буде для $u^2(x_2)$. Оцінена коваріація, пов'язана з x_1 і x_2 , отримується як

$$u(x_1, x_2) = \sum (\partial F / \partial q_l) (\partial G / \partial q_l) u^2(q_l), l = 1, \dots, L. \quad (4.2)$$

Оскільки тільки ті члени, для яких $\partial F / \partial q_l \neq 0$ і $\partial G / \partial q_l \neq 0$ при заданому l , вносять свій внесок у суму, коваріація дорівнює нулю, якщо жодна зі змінних не є загальною для F і G .

Оцінений коефіцієнт кореляції $r(x_1, x_2)$, пов'язаний з двома оцінками x_1 і x_2 , визначають з $u(x_1, x_2)$ (4.2), при цьому $u(x_1)$ визначається з рівняння (4.1), а $u(x_2)$ – з аналогічного виразу. Можливо також, що оцінена коваріація, пов'язана з двома вхідними величинами, містить статистичну компоненту.

Приклад. Еталонний резистор R_s використовується в одному і тому ж вимірюванні для визначення як струму I , так і температури t . Струм визначається шляхом вимірювання цифровим вольтметром різниці потенціалів на затискачах еталонного резистора; температура визначається шляхом вимірювання за допомогою моста опору й еталонного резистора опору $R_t(t)$ каліброваного резистивного датчика температури, для якого залежність опору від температури в діапазоні $15^\circ\text{C} \leq t \leq 30^\circ\text{C}$ виражається як $t = \alpha R_t^2(t) - t_0$, де α і t_0 – відомі константи. Таким чином, струм визначається зі співвідношення $I = V_s / R_s$, а температура – зі співвідношення $t = \alpha \beta(t) R_s^2(t) - t_0$, де $\beta(t)$ – вимірюване відношення $R_t(t) / R_s$, отримане за допомогою моста [1–3].

Оскільки тільки величина R_s є загальною у виразах для I і t , з рівняння (4.2) одержуємо коваріацію для I і t

$$\begin{aligned} u(I, t) &= (\partial I / \partial R_s) (\partial t / \partial R_s) u^2(R_s) = - (V_s / R_s^2) (2\alpha \beta^2(t) R_s) u^2(R_s) = \\ &= -(2I(t+t_0) / R_s) u^2(R_s). \end{aligned}$$

Для одержання числового значення коваріації в цей вираз підставляють числові значення вимірюваних величин I і t , а також значення R_s і $u(R_s)$, наведені у свідоцтві про калібрування еталонного резистора. Одиницею для вираження $u(I, t)$, очевидно, є $\text{A } ^\circ\text{C}$, оскільки розмірність відносної дисперсії $(u(R_s) / R_s)^2$ дорівнює 1 (вона є безрозмірною величиною).

Далі, нехай величина P буде пов'язана з вхідними величинами I і t співвідношенням $P = C_0 T^2 / (T_0 + t)$, де C_0 і T_0 – відомі константи з дуже малими невизначеностями. Тоді дисперсія P виражається через дисперсії I і t та їхні коваріації як

$$u^2(P) / P^2 = 4u^2(I) / I^2 - 4u(I, t) / I(T_0 + t) + u^2(t) / (T_0 + t)^2.$$

Дисперсії $u^2(I)$ і $u^2(t)$ одержують, застосувавши рівняння (1.18) до співвідношення $I = V_s/R_s$ і $t = \alpha\beta^2(t)R_s^2 - t_0$. Результати обчислень такі:

$$u^2(I)/I^2 = u^2(V_s)/V_s^2 + u^2(R_s)/R_s^2;$$

$$u^2(t) = 4(t+t_0)^2 u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t+t_0)^2 u^2(R_s)/R_s^2,$$

де для простоти передбачається, що невизначеності констант t_0 і α також дуже малі. Ці вирази можна легко оцінити, тому що $u^2(V_s)$ і $u^2(\beta)$ можуть бути визначені, відповідно, при повторному знятті показань вольтметра і моста опорів. Звичайно, будь-які невизначеності, властиві самим приладам і використовуваним вимірювальним процедурам, повинні також бути взяті до відома, коли визначаються $u^2(V_s)$ і $u^2(\beta)$.

Необхідність введення коваріації $u(x_i, x_j)$ можна обминути, якщо вихідна множина вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$, від яких залежить вимірювана величина Y , перевизначається таким чином, щоб врахувати як додаткові незалежні вхідні величини ті величини Q_l , що є загальними для двох або більше вхідних X_i (може, необхідно провести додаткові вимірювання, щоб цілком установити співвідношення між Q_l і X_i). Водночас у деяких ситуаціях може більш зручно зберегти коваріації, ніж збільшувати число вхідних величин. Подібний процес може бути здійснений щодо коваріацій неперервних повторних спостережень, але ідентифікація прийнятних додаткових вхідних величин часто проводиться для даного випадку і є нефізичною.

4.1.3 Необхідність оцінювання за типом В. Якщо б вимірювальна лабораторія мала у своєму розпорядженні необмежений час і ресурси, то вона могла б провести вичерпні статистичні дослідження кожного мислимого джерела невизначеності, наприклад, використовуючи багато різних моделей і типів приладів, різні методи вимірювання, різні застосування методу і різні апроксимації у своїх теоретичних моделях вимірювання. Невизначеності, пов'язані з усіма цими джерелами, могли б потім бути оцінені за допомогою статистичного аналізу рядів спостережень; і невизначеність, обумовлена кожним джерелом, могла б бути охарактеризована статистично оціненим стандартним відхиленням. Іншими словами, всі компоненти невизначеності були б отримані з оцінювання за типом А. Оскільки такі дослідження практично нездійсненні, з економічної точки зору, багато складових невизначеностей повинні оцінюватися будь-якими іншими практично здійсненими способами. Саме таким є оцінювання за типом В [1, 5].

4.1.4. Математично детерміновані розподіли. Одним із джерел невизначеності цифрового приладу є дискретність його відлікового

пристрою. Наприклад, якщо навіть усі повторні показання були ідентичними, невизначеність вимірювання, приписувана повторюваності, не буде дорівнювати нулю, тому що існує діапазон вхідних сигналів приладу, який покриває відомий інтервал, при якому будуть ті ж самі показання. Якщо дискретність відлікового пристрою дорівнює δx , то значення впливу, яке викликає дане показання X , може з рівною імовірністю лежати в будь-якому місці інтервалу від $X - \delta x/2$ до $X + \delta x/2$. Вплив, таким чином, описується прямокутним розподілом ймовірностей шириною δx при дисперсії $u^2 = (\delta x)^2/12$, при цьому припускається, що стандартна невизначеність $u = 0,29\delta x$ для будь-якого показання.

Таким чином, прилад для зважування з відліковим пристроєм, у якому найменша значуща цифра відповідає 1 г, має обумовлену дискретністю пристрою дисперсію $u^2 = (1/12) \text{ г}^2$ і стандартну невизначеність $u = (1/\sqrt{12}) = 0,29 \text{ г}$.

Визначені види гістерезису можуть викликати невизначеності аналогічного виду. Показання приладу можуть поділятися на фіксовані і відомі значення в залежності від того, збільшуються чи зменшуються послідовні значення. Досвідчений оператор візьме до уваги напрямок послідовних показань і введе відповідну поправку. Проте напрямок гістерезису не завжди спостерігається: можуть існувати приховані коливання всередині приладу відносно точки рівноваги, так що показання залежить від напрямку, за яким наближаються до цієї точки. Якщо діапазон можливих показань з цієї причини дорівнює δx , то дисперсія дорівнює $u^2 = (\delta x)^2/12$, а стандартна невизначеність, обумовлена гістерезисом, $u = 0,29\delta x$.

Округлення або відсікання чисел, яке відбувається при автоматичній редукції даних комп'ютером, може також бути джерелом невизначеності. Роздивимося, наприклад, комп'ютер із довжиною слова в 16 бітів. Якщо в процесі обчислень число, що має таку довжину слова, віднімається від іншого числа, від якого воно відрізняється лише у 16-ому біті, залишається тільки один значущий біт. Таке може спостерігатися при оцінюванні погано обумовлених алгоритмів і це важко передбачити. Можна одержати емпіричне визначення невизначеності шляхом збільшення найбільш важливої для обчислень вхідної величини (часто існує одна така, що пропорційна значенню вихідної величини) за допомогою малих приростів до тих пір, поки вихідна величина не зміниться; найменша зміна вихідної величини, яка досягається таким способом, може бути прийнята як міра невизначеності; якщо вона дорівнює δx , то дисперсія $u^2 = (\delta x)^2/12$, а $u = 0,29\delta x$ [2, 3].

4.1.5 Запозичені вхідні значення. Запозиченим значенням вхідної величини є таке, що не оцінювалося в ході даного вимірювання, а було

отримано десь у результаті незалежного оцінювання. Часто таке запозичене значення супроводжується повідомленням того або іншого вигляду про його невизначеність. Наприклад, невизначеність може бути зазначена у вигляді стандартного відхилення, значення, кратного стандартному відхиленню або половині ширини інтервалу, що має зазначений довірчий рівень. У інших випадках можуть бути зазначені верхня і нижня межі або може бути не дано ніякої інформації щодо невизначеності. У останньому випадку ті, хто використовують це значення, повинні застосувати свої власні знання про можливе значення невизначеності, виходячи з природи величини, надійності джерела, невизначеностей, отриманих для таких величин на практиці, та ін.

Деякі калібровані лабораторії прийняли практику вираження невизначеності у вигляді верхньої і нижньої границь, що визначають інтервал, який має мінімальний довірчий рівень, наприклад, принаймні 95%. Це можна розглядати як приклад так званої безпечної невизначеності, її не можна перетворити в стандартну невизначеність без знання того, як вона обчислювалася. Якщо наведено достатньо інформації, то її можна повторно розрахувати, в іншому випадку повинно бути проведено незалежне оцінювання невизначеності будь-якими способами, наявними в розпорядженні.

Деякі невизначеності даються просто як максимальні межі, в яких, як кажуть, лежать усі значення величини. Звичайно передбачається, що всі значення в цих межах є рівномірними (прямокутний розподіл ймовірностей), але такий розподіл не варто припускати, якщо є підстави очікувати, що значення, близькі до меж, менш ймовірні, ніж ті, що лежать ближче до центра інтервалу. Прямокутний розподіл половини ширини a має дисперсію $a^2/3$; нормальний розподіл, для якого a є половиною ширини інтервалу з рівнем довіри 99,73% має дисперсію $a^2/9$. Розумно прийняти припущення для цих значень, наприклад, допускаючи трикутний розподіл, для якого дисперсія складає $a^2/6$ [1, 5, 7].

4.1.6 Вимірювані вхідні величини. Якщо оцінка вхідної величини отримана з одиничного спостереження за допомогою конкретного засобу вимірювання, що відкалібрований за допомогою еталона з малою невизначеністю, то невизначеність оцінки – це, в основному, невизначеність відтворення. Дисперсію повторних вимірювань за допомогою такого ЗВТ можна отримати раніше, необов'язково з точно таким же значенням показання, але з достатньо близьким до нього, щоб його можна було використовувати; при цьому можна припустити, що ця дисперсія може бути застосована до аналізованої вхідної величини. Якщо така інформація відсутня, то оцінка повинна ґрунтуватися на характері вимірювальної апаратури або ЗВТ, відомих дисперсіях інших ЗВТ аналогічної конструкції та ін.

Не всі ЗВТ надходять зі свідоцтвом про калібрування або вимірювальною характеристикою. Проте більшість вимірювальних приладів створюється відповідно до розробленого стандарту і повіряється або заводом-виробником, або незалежною повірною організацією відповідно до чинних нормативних документів. Звичайно стандарт містить метрологічні вимоги, часто у вигляді максимально допустимих похибок, яким повинний відповідати даний ЗВТ. Ця відповідність ЗВТ вимогам визначається шляхом порівняння з еталонним ЗВТ, максимальна припустима невизначеність якого звичайно вказується у стандарті. Отже, ця невизначеність є компонентом невизначеності повіреного приладу.

Якщо нічого невідомо про характеристику похибки градуовальної кривої повіреного ЗВТ, то слід припустити, що існує рівна імовірність того, що похибка має будь-яке значення в припустимих межах, тобто, прямокутний розподіл ймовірностей. Проте деякі типи ЗВТ мають такі градуовальні криві, що похибки можуть бути, наприклад, завжди позитивними в одній частині діапазону вимірювання і негативними в інших частинах. Іноді така інформація може бути витягнута з відповідних документів.

Вимірювання часто здійснюються в стандартних контрольованих умовах, які вважаються постійними протягом усіх рядів вимірювань. Наприклад, вимірювання можуть проводитися на зразках у перемішуваній масляній ванні, температура якої регулюється за допомогою термостата. Температуру ванни можна вимірювати в момент кожного вимірювання на зразку, але якщо температура ванни змінюється циклічно, то миттєва температура зразка може не відповідати температурі, що показується термометром у ванні. Розрахунок флуктуацій температури зразка, заснований на теорії теплопередачі та їхньої дисперсії, виходить за встановлені норми, але він повинен починатися з відомого або передбачуваного температурного циклу для ванни. Цей цикл можна спостерігати за допомогою високочутливої термопари та реєстратора температури, проте, у випадку їхньої відсутності, його можна приблизно вивести з даних про характер регулювання.

Відомі випадки, коли всі можливі значення величини лежать по одну сторону від одного граничного значення. Наприклад, при вимірюванні постійної вертикальної висоти h (вимірювана величина) стовпа рідини в манометрі вісь вимірювача висоти може відхилятися від вертикалі на невеличкий кут β . Відстань l , визначена за допомогою цього приладу, завжди буде більша, ніж h ; ніякі значення, менші за h , неможливі. Це обумовлено тим, що h дорівнює проекції l на вертикаль: $h = l / \cos\beta$, а всі значення $\cos\beta$ менші одиниці; ніякі значення, більші за одиницю, неможливі. Ця так звана косинусна похибка може також виявлятися в тому, що проекція $h'\cos\beta$ вимірюваної величини h' дорівнює відстані l ,

тобто $l = h' \cos \beta$, і спостережувана відстань завжди менша вимірюваної величини.

Якщо ввести нову змінну $\delta = 1 - \cos \beta$, то, вважаючи $\beta \approx 0$ або $\delta \ll 1$, як це звичайно спостерігається на практиці, одержуємо дві різні ситуації:

$$h = l_c(1 - \delta); \quad (4.3)$$

$$h = l_c(1 + \delta). \quad (4.4)$$

Тут l_c , найкраща оцінка l , є середнім арифметичним або середнім із n незалежних повторних спостережень l_k для l з оціненою дисперсією $u^2(l_c)$. Таким чином, із рівнянь (4.3) і (4.4) випливає, що для одержання оцінки h або h' необхідна оцінка поправкового коефіцієнта δ , у той час як для одержання сумарної стандартної невизначеності оцінки h або h' потрібна $u^2(\delta)$, оцінена дисперсія δ . Більш конкретно, застосування рівняння (1.18) до рівнянь (4.3) і (4.4) дає для $u_c^2(h)$ і $u_c^2(h')$ (відповідно зі знаками « $\rightarrow$ » і « $+$ »):

$$u_c^2 = (1 \pm \delta)^2 u^2(l_c) + \bar{l}^2 u^2(\delta); \quad (4.5)$$

$$u_c^2 \approx u^2(l_c) + l_c^2 u^2(\delta). \quad (4.6)$$

Для одержання оцінок очікуваного значення δ і дисперсії δ припустимо, що вісь приладу, який використовується для вимірювання висоти стовпа рідини в манометрі, обмежена фіксацією у вертикальній площині і що розподіл значень кута нахилу β біля очікуваного нульового значення є нормальним розподілом із дисперсією σ^2 . Хоча β може мати як додатні, так і від'ємні значення, $\delta = 1 - \cos \beta$ є додатним для всіх значень β . Якщо припустити, що неузгодженість осі приладу необмежена, то орієнтація осі може змінюватися в межах тілесного кута, оскільки вона може бути неузгоджена також за азимутом, але β у цьому випадку буде завжди додатним кутом.

У обмеженому або одновимірному випадку елемент імовірності $p(\beta)d\beta$ пропорційний $[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)]d\beta$; у необмеженому або двовимірному випадку елемент імовірності пропорційний $[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)]\sin\beta d\beta$. Функції щільності ймовірностей $p(\delta)$ у цих двох випадках є виразами, необхідними для визначення математичного сподівання і дисперсії δ для використання в рівняннях (4.3) і (4.5). Їх можна легко одержати з цих елементів імовірності, тому що кут β може бути невеличким, і, отже, $\delta = 1 - \cos \beta$ і $\sin \beta$ можна розкласти в ряд із членами нижчого порядку, ніж β . Це дає

$$\delta \approx \beta^2/2, \sin \beta \approx \beta = (2\delta)^{1/2} \text{ і } d\beta = d\delta(2\delta)^{1/2}.$$

Тоді функції щільності ймовірностей будуть мати такі вирази:
 - в одновимірному випадку

$$p(\delta) = \exp[(-\delta)/\sigma^2]/[\sigma(\pi\delta)^{1/2}], \quad (4.7)$$

- у двовимірному випадку

$$p(\delta) = \exp[(-\delta) / \sigma^2]/\sigma^2, \quad (4.8)$$

$$\text{де } \int_0^{\infty} p(\delta)d(\delta) = 1.$$

Рівняння (4.7) і (4.8), які показують, що найбільше імовірне значення поправки δ в обох випадках є нульовим, дають в одновимірному випадку $E(\delta) = \sigma^2/2$ і $\text{var}(\delta) = \sigma^4/2$ для математичного сподівання і дисперсії δ , а в двовимірному випадку $E(\delta) = \sigma^2$ і $\text{var}(\delta) = \sigma^4$. Тоді рівняння (4.3), (4.4) і (4.6) матимуть вигляд:

$$h = l_c [1-(d/2)u^2(\beta)], \quad (4.9)$$

$$h' = l_c [1+(d/2)u^2(\beta)], \quad (4.10)$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(l_c) + (d/2) l_c^2 u^4(\beta), \quad (4.11)$$

де d – розмірність ($d = 1$ або 2) і $u(\beta)$ – стандартна невизначеність кута β , прийнята за найкращу оцінку стандартного відхилення σ в припущенні про нормальний розподіл, яка повинна оцінюватися з урахуванням усієї наявної інформації про вимірювальний процес (оцінювання за типом В). Це приклад того випадку, коли оцінка значення вимірюваної величини залежить від невизначеності вхідної величини.

Хоча рівняння (4.9) - (4.11) специфічні для нормального розподілу, можна провести аналіз, допускаючи інші розподіли для β . Наприклад, якщо для β прийняти симетричний прямокутний розподіл із верхньою і нижньою межами $+\beta_0$ і $-\beta_0$ в одновимірному випадку і $+\beta_0$ і нуль – у двовимірному випадку, то $E(\delta) = \beta_0^2/6$ і $\text{var}(\delta) = \beta_0^2/45$ для одновимірного і $E(\delta) = \beta_0^2/4$ і $\text{var}(\delta) = \beta_0^2/48$ для двовимірного випадків [5].

4.1.7 Невизначеність зразка. Багато вимірювань пов'язано зі звіренням невідомого об'єкта з відомим еталоном, що має аналогічні характеристики, для калібрування цього невідомого об'єкта. Як приклад можна навести кінцеві міри довжини, деякі термометри, набори мас, резистори і високочисті матеріали. У більшості таких випадків методи вимірювання не особливо чутливі до вибору зразка (тобто конкретного невідомого об'єкта, який калібрується) і навпаки, нечутливі до впливу

цього вибору, підготування зразка або дії різних факторів, що впливають на навколишнє середовище, тому що невідомий об'єкт і еталон звичайно реагують однаково на вплив таких змінних величин.

У деяких ситуаціях, які зустрічаються в практиці вимірювань, вибір і підготування зразків відіграють більш важливу роль. Це часто спостерігається при хімічному аналізі природних матеріалів. На відміну від штучно створених матеріалів, які можуть забезпечити однорідність більшого ступеня, ніж це потрібно для вимірювань, природні матеріали часто бувають дуже неоднорідними. Ця неоднорідність призводить до двох додаткових компонентів невизначеності. Оцінювання першого з них потребує визначення того, наскільки адекватно обраний зразок відображає вихідний матеріал, який піддається аналізу. Оцінювання другого компонента потребує визначення того, якою мірою повторні компоненти впливають на вимірювання і наскільки адекватний для них застосований метод вимірювання.

В інших випадках ретельне планування експерименту може дозволити зробити статистичне оцінювання невизначеності, обумовленої зразком. Проте, як правило, особливо в тих випадках, коли дія впливних факторів навколишнього середовища на зразок є суттєвою, для оцінювання невизначеності необхідні майстерність і знання аналітика, отримані з практичного досвіду та всієї доступної існуючої інформації.

4.2 Узагальнений алгоритм оцінювання та вираження невизначеностей вимірювань

Основні етапи, яких необхідно дотримуватися при оцінюванні та вираженні невизначеності результату вимірювання, можна звести до єдиного алгоритму опрацювання (рис. 4.1) [5, 7], який полягає в такому.

1. Скласти математичну залежність (рівняння вимірювань) між вихідною Y і вхідними X_i ($X_1, \dots, X_N$) величинами, від яких вона залежить: $Y=f(X_1, \dots, X_N)$. Функція f повинна містити кожен величину, охоплюючи всі поправки та поправкові множники на відомі систематичні ефекти, яка може внести значну складову в невизначеність результату вимірювання, основні та додаткові абсолютні похибки ЗВТ, що використовуються при вимірюваннях. Під час складання математичної залежності необхідно дотримуватися рекомендацій, які наведені в МІ 13.002-2003 [11].

2. Визначити x_i – оцінене значення вхідної величини X_i – або на основі статистичного аналізу серії спостережень, або іншим способом (оцінювання із зовнішніх джерел, таких як величини, пов'язані з атестованими еталонами, стандартними зразками речовин і матеріалів чи стандартними довідковими даними).

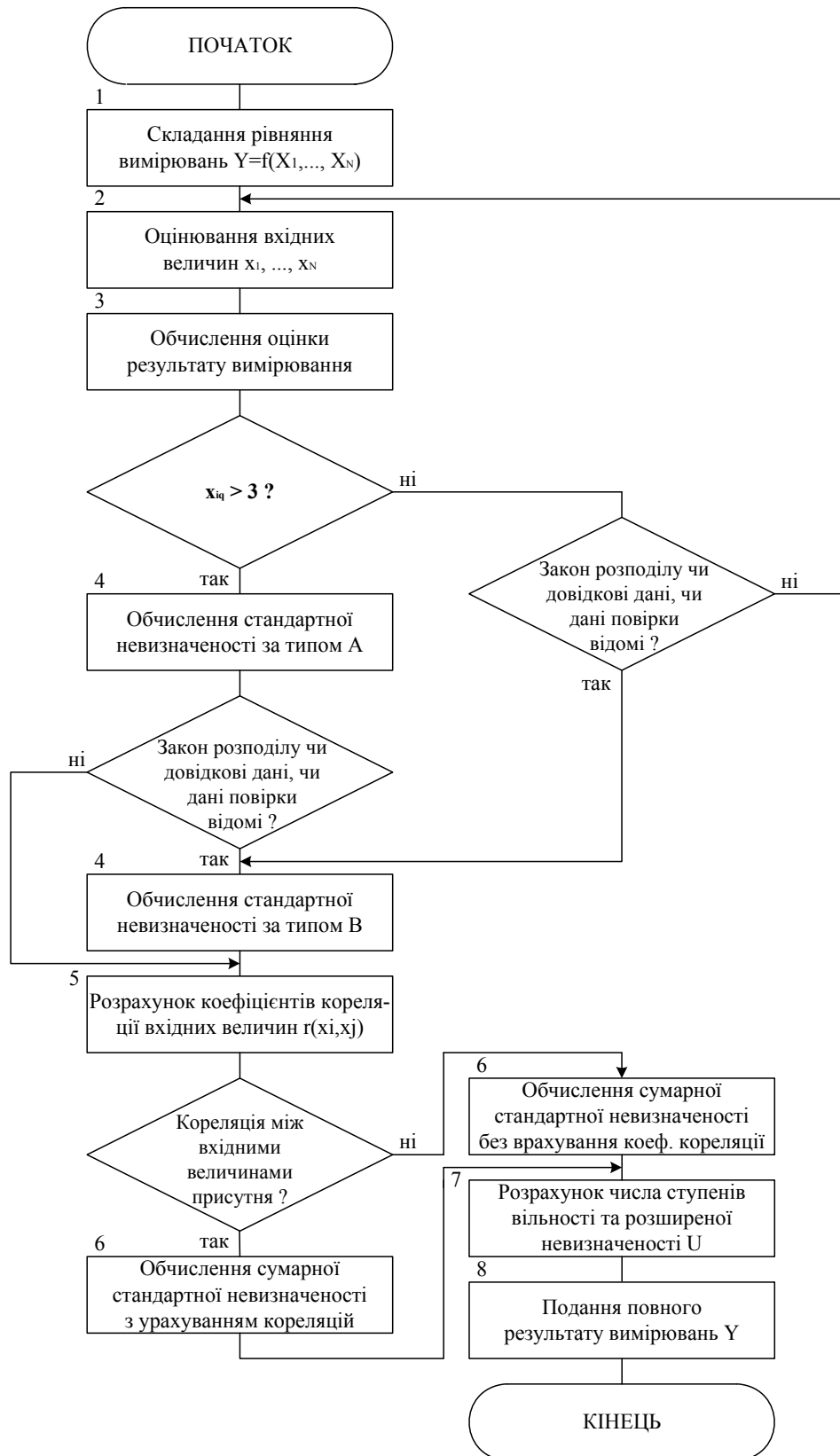


Рисунок 4.1 – Узагальнений алгоритм опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності

При проведенні багаторазових вимірювань за значення i -тої вхідної величини x_i приймають середнє арифметичне n_i результатів ряду окремих спостережень x_{iq} (див. підроз. 1.3).

В отримані значення $x_1, \dots, x_N$ вносяться поправки на відомі систематичні ефекти.

3. Обчислення оцінки результату вимірювання вихідної величини y отримують при підстановці в рівняння вимірювань оцінок вхідних величин: $y=f(x_1, \dots, x_N)$.

4. Якщо кількість спостережень i -тої вхідної величини більше трьох і невідомо ні закон розподілу ймовірності, ні довідкові дані, ні дані перевірки чи калібрування, то стандартна невизначеність $u(x_i)$ розраховується тільки за типом А (див. п. 1.3.1).

Якщо ж відомо і результати багатократних спостережень вхідної величини, і дані зовнішніх джерел (отримані іншими способами), що перераховані в пункті 2, то, крім розрахунку стандартної невизначеності типу А, необхідно проводити обчислення стандартних невизначеностей типу В.

Стандартні невизначеності типу В можна обчислювати через верхні і нижні межі $[a_-; a_+]$ припустимого закону розподілу чи проміжок U_p , що має заданий довірчий рівень p (див. п. 1.3.2).

При відсутності багаторазових спостережень та наявності інших даних (нестатистичних) розраховується лише стандартна невизначеність типу В.

5. Якщо значення яких-небудь вхідних величин (x_i, x_j) пов'язані між собою (попарно корельовані), то необхідно розрахувати коефіцієнт кореляції (див. п. 1.4.3).

6. Обчислити сумарну стандартну невизначеність $u_c(y)$ результату вимірювання y з урахуванням стандартних невизначеностей типу А і В (А або В) та коефіцієнтів кореляцій.

При відсутності кореляції між вхідними величинами сумарну стандартну невизначеність визначають за формулою (1.18).

При наявності кореляцій між вхідними величинами сумарну стандартну невизначеність обчислюють за формулою (1.24).

Якщо вклади в $u_c^2(y)$ стандартних невизначеностей оцінювалися окремо за типом А і за типом В, то, позначивши їх як $u_{cA}^2(y)$ і $u_{cB}^2(y)$ та розрахувавши окремо, отримаємо загальну сумарну стандартну невизначеність, яка пов'язана з сумарними невизначеностями типу А і В співвідношенням [5]

$$u_c^2(y) = u_{cA}^2(y) + u_{cB}^2(y). \quad (4.12)$$

7. Для розрахунку розширеної невизначеності U потрібно отримати значення коефіцієнта охоплення k_p , що створює проміжок, який відповідає

заданому довірчому рівню p . В загальному випадку коефіцієнт охоплення вибирають у відповідності з формулою [2]

$$k_p = t_p(v_{\text{eff}}), \quad (4.13)$$

де $t_p(v_{\text{eff}})$ – квантиль розподілу Стюдента з ефективним числом ступенів вільності v_{eff} і довірчою ймовірністю p .

Значення коефіцієнта $t_p(v_{\text{eff}})$, як правило, вибирається з довідкової таблиці за значенням ефективного числа ступенів вільності, що розраховується за формулою (1.30).

Розрахувавши ефективне число ступенів вільності v_{eff} та вибравши коефіцієнт охоплення k_p , отримаємо розширену невизначеність, яка обчислюється за формулою

$$U = k_p \cdot u_c(y). \quad (4.14)$$

8. Подання повного результату вимірювання містить в собі оцінку вихідної величини і приписане їй значення розширеної невизначеності з зазначенням довірчого рівня.

Значення розширеної невизначеності вказується з кількістю значущих цифр не більше двох. Результат вимірювання, як і значення вхідних величин, заокруглюють так, щоб вони відповідали своїм невизначеностям.

Таким чином, при поданні результатів вимірювань рекомендується наводити достатню кількість інформації для того, щоб можна було проаналізувати чи повторити весь процес отримання результату вимірювання і обчислення невизначеностей вимірювань, а саме:

- алгоритм отримання результату вимірювань;
- алгоритм розрахунку всіх поправок та їх невизначеностей;
- невизначеності всіх використовуваних даних та способи їх отримання;
- алгоритми обчислення сумарної та розширеної невизначеностей [5, 6].

4.3 Порівняльний аналіз двох підходів щодо вираження характеристик точності вимірювань

Метою вимірювань є отримання оцінки істинного значення вимірюваної величини. Поняття похибки вимірювання як різниці між результатом вимірювань і істинним (дійсним) значенням вимірюваної величини використовується для опису точності вимірювань в нормативних документах з метрології в галузі забезпечення єдності вимірювань.

Говорячи про оцінювання похибки, в метрологічній практиці мають на увазі оцінювання її характеристик (рис. 4.2).

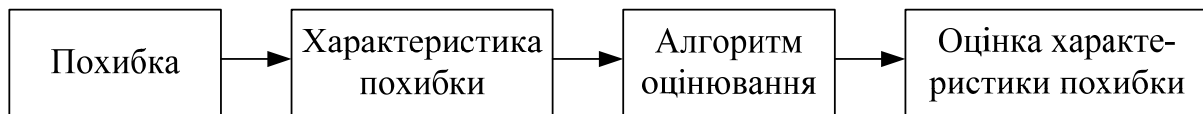


Рисунок 4.2 – Підхід, що використовується при оцінюванні характеристик похибок вимірювань

В Керівництві для вираження точності вимірювань вживається поняття невизначеності вимірювань. Невизначеність вимірювань розуміють як неповне знання значення вимірюваної величини, і для кількісного вираження цієї неповноти вводять розподіл ймовірностей можливих (обґрунтовано приписаних) значень вимірюваної величини. Таким чином, параметр цього розподілу (невизначеність) кількісно характеризує точність результату вимірювань.

Однаковими для обох підходів є такі послідовності операцій при оцінюванні характеристик похибки і невизначеності вимірювань:

- аналіз рівняння вимірювання;
- виявлення всіх джерел похибки (невизначеності) вимірювань і їх кількісне оцінювання;
- введення поправок на систематичні похибки (ефекти), які можна вилучити.

Методи обчислення невизначеності, як і методи оцінювання характеристик похибки, запозичені з математичної статистики, але при цьому використовуються різні інтерпретації закону розподілу ймовірностей випадкових величин. Окрім викладених в Керівництві з вираження невизначеності вимірювань і в чинних нормативних документах з метрології методів розрахунку невизначеності та оцінювання характеристик похибки на практиці широко використовуються й інші методи.

Розбіжності двох підходів проявляються в тлумаченні невизначеності і характеристик похибки, що засноване на різних інтерпретаціях ймовірності: частотної та суб'єктивної. Наприклад, довірчі межі похибки ($y - \Delta_p$; $y + \Delta_p$) (відкладені від результату вимірювання) покривають істинне значення вимірюваної величини з заданою довірчою ймовірністю (частотна інтерпретація ймовірності). В той же час аналогічний інтервал ($y - U_p$; $y + U_p$) тлумачиться в Керівництві з вираження невизначеності вимірювань як інтервал, який вміщує задану частку розподілу значень, які б могли бути обґрунтовано приписані вимірюваній величині (суб'єктивна інтерпретація ймовірності) [12].

В загальному випадку не існує однозначної відповідності між випадковими похибками і невизначеностями, обчисленими за типом А, а також невилученими систематичними похибками і невизначеностями,

обчисленими за типом В. Поділ на систематичні і випадкові похибки обумовлений природою їх виникнення і проявом в ході вимірювального експерименту, а поділ на невизначеності, що розраховуються за типом А і за типом В, – методами їх розрахунку.

Процедура оцінювання характеристик похибки результату вимірювань наведена в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Процедура оцінювання характеристик похибки

Таблиця 4.1 – Процедура оцінювання характеристик похибки			
Похибка	$\Delta y = y_{\text{в}} - y_i \Leftrightarrow y_{\text{в}} = y_i + \Delta y$		
Модель похибки	Δy – випадкова величина зі щільністю розподілу ймовірності $p(x, M, \sigma^2)$, де M – математичне очікування; σ^2 – дисперсія.		
Характеристики похибки	S – середньо-квадратичне відхилення	Θ – межі невилученої систематичної похибки	Δ_p – довірчі межі
Початкові дані для оцінювання характеристик похибки	1. Модель об'єкта дослідження. 2. Експериментальні дані x_{iq}, де $q = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m$. 3. Інформація про закони розподілу. 4. Відомості про джерела похибок, їх природу і характеристики складових ($S(x_i)$, Θ_i). 5. Стандартні довідкові дані та інші довідкові матеріали.		
Методи оцінювання характеристик:			
а) випадкових похибок	$S(x_{iq}) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1}}; \quad S(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{(n_i - 1)n_i}};$ $S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s^2(\bar{x}_i)}.$		
б) невилучених систематичних похибок	$\Theta(p) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \Theta_i^2},$ де $k = 1,1$ при $p = 0,95$; $k = 1,4$ при $p = 0,99$ і $m > 4$.		

Продовження таблиці 4.1

в) сумарної похибки	$\Delta_p = \frac{t_p(f_{\text{eff}})S_{\Sigma} + \Theta(p)}{S_{\Sigma} + \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\Theta_i^2}{3}}} \sqrt{S_{\Sigma}^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\Theta_i^2}{3}},$ при виконанні нерівності $0,8 \leq \frac{\Theta(p)}{S_{\Sigma}} \leq 8,0$; $\Delta_p = t_p(f_{\text{eff}})S_{\Sigma}$, при $\frac{\Theta(p)}{S_{\Sigma}} < 0,8$, тобто нехтують систематичною складовою похибки; $\Delta_p = \Theta(p)$, при $\frac{\Theta(p)}{S_{\Sigma}} > 8,0$, тобто нехтують випадковою складовою похибки; $f_{\text{eff}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S^2(\bar{x}_i)\right)^2 - \frac{2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4 S^4(\bar{x}_i)}{m+1}}{\frac{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4 S^4(\bar{x}_i)}{m+1}}.$
Форма подання характеристик похибки	$\Theta(p)$, S_{Σ}, n, f_{eff}, Δ_p.
Інтерпретація отриманих результатів	Інтервал $(-\Delta_p; +\Delta_p)$ з ймовірністю p має похибку вимірювання, що рівносильно тому, що інтервал $(y-\Delta_p; y+\Delta_p)$ з ймовірністю p має істинне значення вимірюваної величини.

Процедура оцінювання невизначеності вимірювань наведена в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Процедура оцінювання невизначеності вимірювань

Таблиця 12 Процедура оцінювання невизначеності вимірювань			
Модель невизначеності (подання знань про значення вимірюваної величини)	ε – випадкова величина зі щільністю розподілу ймовірності $p(x, y, u^2)$, де y – математичне очікування; u^2 – дисперсія.		
Невизначеність (кількісна міра)	Стандартна u	Сумарна $u_s = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2}$	Розширена $U_p = k u_s$
Початкові дані для оцінювання невизначеності	1. Модель об'єкта дослідження. 2. Експериментальні дані x_{iq}, де $q = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m$. 3. Інформація про закони розподілу. 4. Відомості про джерела невизначеності та інформація про значення невизначеності. 5. Стандартні довідкові дані та інші довідкові матеріали.		
Методи оцінювання невизначеності:			
а) за типом А	$u_{A,i} = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1}}; \quad u_A(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{(n_i - 1)n_i}}.$		
б) за типом В	$u_B(x_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{12}}.$		
в) розширеної невизначеності	$U_p = t_p(v_{\text{eff}}) \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)},$ де $v_{\text{eff}} = \frac{u_s^4}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^4 \frac{u^4(x_i)}{v_i}},$ причому $v_i = n_i - 1$ – для невизначеностей, що розраховані за типом А; $v_i = \infty$ – для невизначеностей, що розраховані за типом В.		

Продовження таблиці 4.2

	Для більшості практичних випадків можна прийняти: $U_{0,95} = 2u_s$, $U_{0,99} = 3u_s$ – для нормального закону; $U_{0,95} = 1,65u_s$, $U_{0,99} = 1,71u_s$ – для рівномірного закону.
Форма подання невизначеності	u_s , U_p , k , u_i , v_i .
Інтерпретація отриманих результатів	Інтервал $(y - U_p; y + U_p)$ містить велику частку (p) розподілу значень, які можуть бути обґрунтовано приписані вимірюваній величині.

При зіставленні оцінок характеристик похибки і невизначеностей результатів вимірювань рекомендується така схема відповідності:

СКВ, що характеризує випадкову похибку	↔	Стандартна невизначеність типу А
СКВ, що характеризує невилучену систематичну похибку	↔	Стандартна невизначеність типу В
СКВ, що характеризує сумарну похибку	↔	Комбінована стандартна невизначеність
Довірчі межі похибки	↔	Розширена невизначеність.

Якщо відсутня інформація для розрахунку невизначеності, то її оцінка $\hat{u}$ може бути отримана на основі оцінок характеристик похибки за наведеними нижче схемами (рис. 4.3 і рис. 4.4).



Рисунок 4.3 – Схема оцінювання невизначеності через довірчі межі похибки вимірювань

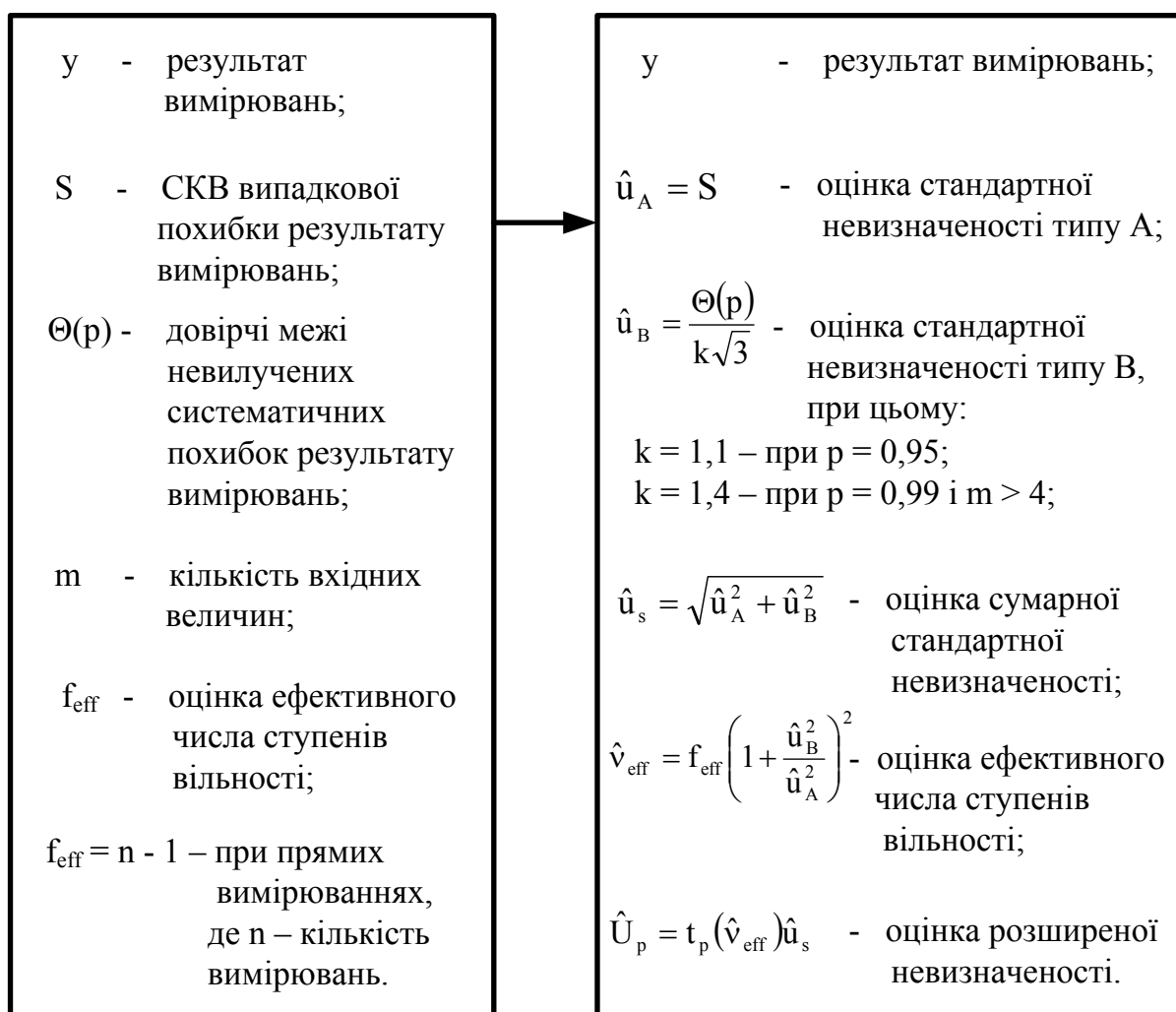


Рисунок 4.4 – Схема оцінювання невизначеності через СКВ випадкової похибки результату вимірювання і довірчі межі невилучених систематичних похибок

Схеми, що наведені на рис. 4.3 та 4.4 відповідають двом різним способам подання результатів вимірювань, прийнятих в нормативних документах з метрології. Необхідно відмітити те, що оцінки невизначеностей, що отримуються за наведеними вище двома схемами, в ряді випадків не збігаються зі значеннями невизначеностей, що розраховуються за наведеними в третьому розділі способами оцінювання.

Оцінити невизначеності типу А і типу В окремо, знаючи тільки Δ_p , неможливо.

4.3.1 Методика перерахунку характеристик похибок в характеристики невизначеності вимірювань. При зіставленні результатів вимірювань і оцінок їх достовірностей, які здійснювались різними способами, виникає задача перерахунку характеристик похибок в характеристики невизначеності та навпаки. Тому розглянемо методику перерахунку і мінімальний набір параметрів, що необхідні для здійснення такого перерахунку.

Спосіб перерахунку, що наведений на рис. 4.4, дозволяє розрахувати розширену невизначеність, використовуючи відомі характеристики випадкової та систематичної похибки для рівних рівнів довіри і довірчої ймовірності. Але довірчі межі похибок первинних та вторинних еталонів необхідно оцінювати для довірчої ймовірності 0,99. Саме у таких випадках краще скористатися формулами для взаємного перерахунку довірчої похибки і розширеної невизначеності.

Вихідними даними для перерахунку характеристик похибки в характеристики невизначеності є: довірчі межі загальної похибки вимірювання Δ_p ; довірна ймовірність P ; відношення $\gamma = \Theta(p)/S_\Sigma$ довірчих меж невилученої систематичної похибки $\Theta(p)$ до середньоквадратичної випадкової похибки S_Σ ; кількість повторюваних вимірювань n ; кількість невилучених підсумовуваних систематичних похибок m [1].

Для перерахунку довірчих меж похибки прямих одноразових вимірювань, відомих із ймовірністю 0,95 або 0,99; у розширену невизначеність з рівнем довіри 0,95 необхідно скористатися такими виразами [16]:

- для похибки із ймовірністю $P=0,95$:

$$U_{0,95} = \begin{cases} \Delta_{0,95} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } \gamma < 0,8 \\ \frac{2\Delta_{0,95}}{K[\gamma + 2]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8; \\ 2\Delta_{0,95} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3,63}}, & \text{при } \gamma > 8 \end{cases} \quad (4.15)$$

- для похибки із ймовірністю $P=0,99$ [16]:

$$U_{0,99} = \begin{cases} \frac{\Delta_{0,99}}{1,3} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3d^2}}, & \text{при } \gamma < 0,8 \\ \frac{2\Delta_{0,99}}{K[\gamma + 2,6]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3d^2}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8, \\ \frac{2\Delta_{0,99}}{d} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3d^2}}, & \text{при } \gamma > 8 \end{cases} \quad (4.16)$$

де d – корегувальний коефіцієнт, який для $P=0,99$ дорівнює 1,2 при $m=2$; 1,3 при $m=3$; 1,4 при $m=4$; 1,45 при $m>4$;

K – коефіцієнт, значення якого в залежності від P і γ наведено в табл. 4.3 [16].

Таблиця 4.3 – Значення коефіцієнта K для різних P і γ

γ	0,8	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_{0,95}$	0,76	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$K_{0,99}$	0,84	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

При перерахунку довірчих меж похибки прямих багаторазових вимірювань, відомих з вірогідністю 0,95 або 0,99; у розширену невизначеність з рівнем довіри 0,95 необхідно використати такі формули [16]:

- для похибки із ймовірністю $P=0,95$:

$$U_{0,95} = \begin{cases} \frac{\Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{\text{eff}})}{t_{0,95}(n-1)} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } \gamma < 0,8 \\ \frac{\Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{\text{eff}})}{K[\gamma + t_{0,95}(n-1)]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8; \\ \Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{\text{eff}}) \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3,63}}, & \text{при } \gamma > 8 \end{cases} \quad (4.17)$$

- для похибки із ймовірністю $P=0,99$ [16]:

$$U_{0,99} = \begin{cases} \frac{\Delta_{0,99} t_{0,99}(v_{\text{eff}})}{t_{0,99}(n-1)} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{5,88}}, & \text{при } \gamma < 0,8 \\ \frac{\Delta_{0,99} t_{0,99}(v_{\text{eff}})}{K[\gamma + t_{0,99}(n-1)]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{5,88}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8, \\ \Delta_{0,99} t_{0,99}(v_{\text{eff}}) \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{5,88}}, & \text{при } \gamma > 8 \end{cases} \quad (4.18)$$

де $t_{0,95}(v_{\text{eff}})$, $t_P(n-1)$ – коефіцієнти Стюдента, відповідно для ймовірності p , кількості ступенів вільності $(n-1)$ і ефективної кількості ступенів вільності v_{eff} , яка визначається за формулою [16]

$$v_{\text{eff}} = (n-1) \left[1 + \frac{\gamma^2}{3d^2} \right]^2. \quad (4.19)$$

Відповідно до міжнародних нормативних документів при поданні результату вимірювання як міра невизначеності може бути вказана розширена або комбінована стандартна невизначеність.

При поданні результату вимірювання розширеною невизначеністю вказуються такі характеристики:

- результат вимірювання u ;
- розширена невизначеність U_P ;

- коефіцієнт охоплення k ;
- рівень довіри p ;
- кількість стандартних невизначеностей типу В (для $p=0,99$) [1].

В такому випадку оцінки довірчих меж похибок прямих одноразових вимірювань можна отримати з формул (4.16) та (4.18).

Додатково до перерахованих характеристик для розрахунку похибок багаторазових вимірювань потрібно знати:

- кількість спостережень n ;
- ефективну кількість ступенів вільності ν_{eff} .

При цьому можна отримати [1, 13]:

- оцінку середньоквадратичного відхилення, що характеризує сумарну похибку

$$S_{\Sigma} = \frac{U_p}{k} = u_s; \quad (4.20)$$

- оцінку середньоквадратичного відхилення (СКВ) випадкової похибки

$$S = u_A = S_{\Sigma} \sqrt{\frac{n-1}{\nu_{\text{eff}}}}; \quad (4.21)$$

- оцінку СКВ, що характеризує невилучену систематичну похибку

$$S_{\Theta} = u_B = \sqrt{S_{\Sigma}^2 - S^2}; \quad (4.22)$$

- оцінку довірчих меж невилученої систематичної похибки

$$\Theta(P) = k S_{\Theta} \sqrt{3}; \quad (4.23)$$

- оцінку довірчих меж похибки

$$\Delta_p = \frac{t_p(n-1)S + \Theta(P)}{S + S_{\Theta}} S_{\Sigma}. \quad (4.24)$$

При відсутності ефективної кількості ступенів вільності її можна отримати через значення коефіцієнта охоплення k з таблиці розподілу Стюдента.

4.3.2 Методика перерахунку характеристик невизначеності в характеристики похибки. В міждержавному нормативному документі РМГ 43-2001 сказано, що оцінка невизначеності результату вимірювання може подаватися у вигляді комбінованої невизначеності або у вигляді розширеної невизначеності, якщо вимірювання стосуються здоров'я людини чи екології.

Якщо оцінка невизначеності результату вимірювання була подана у вигляді комбінованої невизначеності, то відвідо до пунктів 5.3 та 5.4 РМГ 43-2001 [13] можна перерахувати такі характеристики невизначеності в характеристики похибки:

- оцінку стандартної невизначеності типу А $u_A(\bar{x})$ в оцінку СКВ випадкової похибки $S(\bar{x})$, тобто $S(\bar{x}) = u_A(\bar{x})$;
- оцінку стандартної невизначеності типу В u_B в оцінку СКВ невиключеної систематичної похибки $\Theta(p)$, тобто $\Theta(p) = u_B$;
- оцінку комбінованої невизначеності $u_c(y)$ в оцінку СКВ, що характеризує сумарну похибку S_z , тобто $S_z = u_c(y)$.

Якщо ж оцінка невизначеності результату вимірювання була подана у вигляді розширеної невизначеності, то перераховуються такі характеристики невизначеності в характеристики похибки:

- оцінка розширеної невизначеності (непевності) U_p в оцінку довірчих меж похибки Δ_p , тобто $\Delta_p = U_p = k u_c(y)$;
- оцінка комбінованої невизначеності $u_c(y)$ в оцінку СКВ, що характеризує сумарну похибку S_z , тобто $S_z = U_p/k$.

4.4 Приклади опрацювання невизначеностей результатів вимірювань

У даному підрозділі наводяться приклади, які детально пророблені, щоб проілюструвати основні принципи оцінювання і вираження невизначеності у вимірюваннях.

4.4.1 Калібрування кінцевої міри довжини. Цей приклад показує, що навіть явно проста задача вимірювання може охоплювати тонкі аспекти оцінювання невизначеності.

Довжину кінцевої міри номінальною довжиною 50 мм визначають шляхом порівняння її з відомим еталоном тієї ж самої номінальної довжини. Прямий результат звірення цих двох кінцевих мір довжини є різниця d у їхніх довжинах:

$$d = l(1+a\Theta) - l_s(1+a_s\Theta_s), \quad (4.25)$$

де l – вимірювана величина, тобто довжина при 20°C кінцевої міри довжини, яка калібрується;

l_s – довжина еталона при 20°C, наведена в сертифікаті про калібрування;

a і a_s – коефіцієнти теплового розширення кінцевої міри довжини, яка калібрується, й еталона, відповідно;

Θ і Θ_s – відхилення температури від 20°C кінцевої міри довжини й еталона, відповідно [5].

Виходячи з рівняння (4.25), вимірювана величина визначається з рівняння

$$l = (l_s(1 + a_s\Theta_s) + d)/(1 + a\Theta) = l_s + d + l_s(a_s\Theta_s - a\Theta) + \dots \quad (4.26)$$

Якщо різницю температури між кінцевою мірою, яка калібрується, й еталоном записати у вигляді $\delta\Theta = \Theta_s - \Theta$, а різниця їхніх коефіцієнтів теплового розширення як $\delta a = a - a_s$, то рівняння (4.26) буде мати вигляд

$$l = f(l_s, d, a_s, \Theta, \delta a, \delta\Theta) = l_s + d - l_s(\delta a\Theta - a_s\delta\Theta). \quad (4.27)$$

Результати оцінювання показали, що різниці $\delta\Theta$ і δa дорівнюють нулю, але не їхній невизначеності; передбачається, що δa , a_s , $\delta\Theta$, Θ є некорельованими (якби вимірювана величина була виражена через змінні a , Θ , a_s , Θ_s , то було б необхідно врахувати кореляцію між a і a_s та Θ і Θ_s).

Таким чином, із рівняння (4.27) випливає, що оцінку значення вимірюваної величини l можна одержати з простого виразу $l_s + \bar{d}$, де l_s – довжина еталона при 20 °C, наведена в сертифікаті про калібрування, а $\bar{d}$ – оцінка середнього арифметичного з $n=5$ незалежних повторних спостережень ($\bar{d}$). Сумарну стандартну невизначеність $u_c(l)$ значення l отримують, підставивши рівняння (4.27) у рівняння (1.18), як описано нижче.

Відповідні аспекти цього прикладу, описані тут і в наступних підрозділах, підсумовані в табл. 4.4.

При передбаченні, що $\delta a = 0$ і $\delta\theta = 0$, така підстановка дає

$$u_c^2(l) = c_s^2 u^2(l_s) + c_d^2 u^2(d) + c_{as}^2 u^2(a_s) + c_\theta^2 u^2(\theta) + c_{\delta a}^2 u^2(\delta a) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta), \quad (4.28)$$

де $c_s = \partial f / \partial l_s = 1 - (\delta a\theta + a_s\delta\theta) = 1$,

$$c_d = \partial f / \partial d = 1,$$

$$c_{as} = \partial f / \partial a_s = -l_s \delta\theta = 0,$$

$$c_\theta = \partial f / \partial \theta = -l_s \delta a = 0,$$

$$c_{\delta a} = \partial f / \partial \delta a = -l_s \theta,$$

$$c_{\delta\theta} = \partial f / \partial \delta\theta = -l_s a_s,$$

і, таким чином,

$$u_c^2(l) = u^2(l_s) + u^2(d) + l_s^2 \theta^2 u^2(\delta a) + l_s^2 a_s^2 u^2(\delta\theta). \quad (4.29)$$

Невизначеність калібрування еталона, $u(l_s)$.

Сертифікат про калібрування дає розширену невизначеність еталона $U=0,075$ мкм і вказує, що це значення було отримано з використанням коефіцієнта охоплення $k=3$. Тоді стандартна невизначеність є

$$u(l_s) = (0,075 \text{ мкм})/3 = 25 \text{ нм}.$$

Невизначеність вимірюваної різниці довжин, $u(d)$.

Таблиця 4.4 – Зведена таблиця компонентів стандартної невизначеності

Компоненти стандартної невизначеності $u(x_i)$	Джерело невизначеності	Значення стандартної невизначеності $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) \equiv c_i u(x_i)$ (нм)	Ступені вільності
$u(l_s)$	Калібрування еталонної кінцевої міри	25 нм	1	25	18
$u(d)$	Вимірювана розбіжність між кінцевими мірами довжини	9,7 нм	1	9,7	25,6
$u(\bar{d})$	Повторні спостереження	5,8 нм			24
$u(d_1)$	Випадкові ефекти компаратора	3,9 нм			5
$u(d_2)$	Систематичні ефекти компаратора	6,7 нм			8
$u(a_s)$	Коефіцієнт теплового розширення еталонної кінцевої міри довжини	$1,2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$	0	0	
$u(\theta)$	Температура випробувальної ванни	$0,41 \text{ } ^\circ\text{C}$	0	0	
$u(\bar{\theta})$	Середня температура ванни	$0,2 \text{ } ^\circ\text{C}$			
$u(\Delta)$	Циклічна зміна температури у кімнаті	$0,35 \text{ } ^\circ\text{C}$			
$u(\delta a)$	Різниця коефіцієнтів розширення кінцевих мір довжини	$0,58 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$-l_s \theta$	2,9	50
$u(\delta \theta)$	Різниця температур кінцевих мір довжини	$0,029 \text{ } ^\circ\text{C}$	$l_s a_s$	16,6	2
$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1002 \text{ нм}^2$ $u_c(l) = 32 \text{ нм}$ $\nu_{\text{ef}}(l) = 16$					

Сумарне експериментальне стандартне відхилення, яке характеризує зв'язання l і l_s , визначалося зі змінності 25 незалежних повторних спостережень різниці довжин двох кінцевих мір і склало 13 нм. При зв'язаннях у цьому прикладі проводилося 5 повторних спостережень. Стандартна невизначеність, пов'язана з середнім арифметичним цих показань, складає

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = (13 \text{ нм}) / \sqrt{5} = 5,8 \text{ нм}.$$

Відповідно до свідчення про калібрування компаратора, використовуваного для зв'язання l і l_s , його невизначеність, обумовлена випадковими похибками, складає $\pm 0,01$ мкм при довірчому рівні 95% і

заснована на 6 повторних вимірюваннях; таким чином, стандартна невизначеність із використанням t-коефіцієнта $t_{95}(5) = 2,57$ для $\nu = 6-1 = 5$ ступенів вільності, буде

$$u(d_1) = (0,01 \text{ мкм})/2,57 = 3,9 \text{ нм.}$$

Невизначеність компаратора, обумовлена систематичними похибками, у сертифікаті дається рівною 0,02 мкм на рівні трьох сигм. Тому стандартну невизначеність, викликану цією причиною, можна прийняти за

$$u(d_2) = (0,02 \text{ мкм})/3 = 6,7 \text{ нм.}$$

Загальний внесок одержують із суми оцінених дисперсій

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93 \text{ нм}^2$$

або

$$u(d) = 9,7 \text{ нм.}$$

Невизначеність коефіцієнта теплового розширення, $u(a_s)$.

Коефіцієнт теплового розширення еталонної кінцевої міри довжини наводиться як $a_s = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ із невизначеністю, поданою прямокутним розподілом із межами $\pm 2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Тоді стандартна невизначеність

$$u(a_s) = (2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}.$$

Оскільки $c_{as} = \partial f / \partial a_s = - l_s \delta \theta = 0$, то ця невизначеність нічого не вносить у невизначеність l першого порядку. Однак вона вносить у неї внесок другого порядку.

Невизначеність відхилення температури кінцевої міри довжини, $u(\theta)$.

Стверджується, що температура випробувальної ванни підтримується $(19,9 \pm 0,5) \text{ }^\circ\text{C}$; при цьому температура в момент окремого спостереження не записується. Говориться, що зазначене максимальне відхилення $\Delta = 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ являє собою амплітуду приблизно циклічної зміни температури в термостатичній системі, а не невизначеність середньої температури. Значення відхилення середньої температури

$$\bar{\theta} = (19,9 - 20) \text{ }^\circ\text{C} = -0,1 \text{ }^\circ\text{C}$$

має саме стандартну невизначеність, обумовлену невизначеністю середньої температури випробувальної ванни

$$u(\bar{\theta}) = 0,2 \text{ }^\circ\text{C},$$

у той час як циклічну зміну у часі створює U-подібний (арксинусний) розподіл температур, який дає у результаті стандартну невизначеність

$$u(\Delta) = (0,5 \text{ }^{\circ}\text{C}) / \sqrt{2} = 0,35 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Відхилення температури θ можна взяти рівним $\bar{\theta}$, і стандартна невизначеність знаходиться з рівняння:

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0,165 \text{ (}^{\circ}\text{C)}^2,$$

яке дає $u(\theta) = 0,41 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Через те, що $c_0 = \partial f / \partial \theta = -l_s \delta a = 0$, ця невизначеність також не робить ніякого внеску в невизначеність l першого порядку, але вона вносить вклад у другий порядок.

Невизначеність різниці коефіцієнтів розширення, $u(\delta a)$.

Оцінені межі зміни δa такі: $\pm 1 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ із рівною імовірністю того, що δa буде мати будь-яке значення в діапазоні між цими межами. Стандартна невизначеність дорівнює

$$u(\delta a) = (1 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 0,58 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

Невизначеність різниці температур кінцевих мір довжини, $u(\delta \theta)$.

Припускають, що еталонна і випробувана кінцеві міри довжини знаходяться при одній і тій же температурі, але різниця температур з однаковою ймовірністю може мати будь-яке значення в оціненому інтервалі від $-0,05 \text{ }^{\circ}\text{C}$ до $+0,05 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Стандартна невизначеність дорівнює

$$u(\delta \theta) = (0,05 \text{ }^{\circ}\text{C}) / \sqrt{3} = 0,029 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Сумарна стандартна невизначеність.

Сумарну стандартну невизначеність $u_c(l)$ обчислюють із рівняння (4.29). Збирають окремі члени, підставляють у цей вираз і одержують

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= (25 \text{ нм})^2 + (9,7 \text{ нм})^2 + (0,05 \text{ м})^2 (-0,1 \text{ }^{\circ}\text{C})^2 (0,58 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})^2 + \\ &+ (0,05 \text{ м})^2 (11,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})^2 (0,029 \text{ }^{\circ}\text{C})^2 = (25 \text{ нм})^2 + (9,7 \text{ нм})^2 + \\ &+ (2,9 \text{ нм})^2 + (16,6 \text{ нм})^2 = 1002 \text{ нм}^2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

або $u_c(l) = 32 \text{ нм}$.

Очевидно, що основним компонентом невизначеності є невизначеність еталона $u(l_s) = 25 \text{ нм}$.

Сертифікат про калібрування еталонної кінцевої міри довжини дає $l_s = 50,000623 \text{ мм}$ як її довжину при 20°C . Середнє арифметичне $\bar{d}$ п'ятих повторних спостережень різниці довжин невідомої й еталонної

кінцевих мір складає 215 нм. Таким чином, через те, що $l = l_s + \bar{d}$, довжина l невідомої кінцевої міри довжини при 20 °С складає 50,000838 мм. Остаточний результат можна подати в такому вигляді: $l = 50,000838$ мм із сумарною стандартною невизначеністю $u_c = 32$ нм. Відповідна відносна сумарна стандартна невизначеність складає $p/l = 6,4 \cdot 10^{-7}$.

Розширена невизначеність.

Припустимо, що потрібно одержати розширену невизначеність $U_{99} = k_{99} u_c(l)$, яка забезпечує інтервал із довірчим рівнем приблизно 99%. Необхідні ступені вільності зазначені в табл. 4.4. Вони були отримані таким чином.

1. Невизначеність калібрування еталона $u(l_s)$. У сертифікаті про калібрування вказується, що число ефективних ступенів вільності сумарної стандартної невизначеності, для яких була отримана зазначена розширена невизначеність, складає $v_{\text{ef}}(l_s) = 18$.

2. Невизначеність вимірюваної різниці довжин $u(d)$. Хоча $\bar{d}$ було отримано з п'ятих повторних спостережень, тому що $u(\bar{d})$ отримано із сумарного експериментального стандартного відхилення, заснованого на 25 спостереженнях, число ступенів вільності $u(\bar{d})$ складає $v(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$. Число ступенів вільності $u(d_1)$ невизначеності, обумовленої випадковими ефектами на компараторі, складає $u(d_1) = 6 - 1 = 5$, тому що d_1 було отримано з шести повторних вимірювань. Можна припустити, що значення невизначеності $\pm 0,02$ мкм для систематичних ефектів, обумовлених компаратором, є надійним на 25% і, таким чином, число ступенів вільності $v(d_2) = 8$. Тоді число ефективних ступенів вільності $u(d)$, $v_{\text{ef}}(d)$ одержують із рівняння

$$v_{\text{ef}}(d) = [u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2 / [u^4(\bar{d})/v(\bar{d}) + u^4(d_1)/v(d_1) + u^4(d_2)/v(d_2)] = \\ = (9,7 \text{ нм})^4 / ((5,8 \text{ нм})^4/24 + (3,9 \text{ нм})^4/5 + (6,7 \text{ нм})^4/8) = 25,6.$$

3. Невизначеність різниці коефіцієнтів розширення $u(\delta\alpha)$. Оцінені границі $\pm 1 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ для змінності $\delta\alpha$ є надійними на 10%. Це дає число ступенів вільності рівним $v(\delta\alpha) = 50$.

4. Невизначеність різниці температур кінцевих мір довжини $u(d\theta)$. Передбачається, що оцінений інтервал від $-0,05^\circ\text{C}$ до $+0,05^\circ\text{C}$ для різниці температур $\delta\theta$ є надійним лише на 50%, що дає $v(\delta\theta) = 2$.

Визначення $v_{\text{ef}}(l)$ здійснюється точно таким же чином, як і обчислення $v_{\text{ef}}(d)$ у описаному вище пункті 2. Число ефективних ступенів вільності $v_{\text{ef}}(l)$ розрахуємо так

$$v_{\text{ef}}(l) = (32 \text{ нм})^4 / [(25 \text{ нм})^4/18 + (9,7 \text{ нм})^4/25,6 + \\ + (2,9 \text{ нм})^4/50 + (16,6 \text{ нм})^4/2] = 16,7.$$

Для одержання необхідної розширеної невизначеності це значення зменшується до наступного меншого цілого числа, $\nu_{\text{ef}}(l) = 16$. Потім із таблиці, яка наведена у додатку А, впливає, що $t_{99}(16) = 2,92$, і тому $U_{99} = t_{99}(16)u_c(l) = 2,92 \cdot (32 \text{ нм}) = 93 \text{ нм}$. Остаточний результат вимірювання може бути зазначений як $l = (50,000838 \pm 0,000093) \text{ мм}$, де число, що йде за символом $\pm$, є чисельне значення розширеної невизначеності, а U визначається з сумарної стандартної невизначеності $u_c = 32 \text{ нм}$ і коефіцієнта охоплення $k = 2,92$; що базується на t -розподілі для $\nu = 16$ ступенів вільності та визначає оцінений інтервал із довірчим рівнем 99%. Відповідна відносна розширена невизначеність складає $U/l = 1,9 \cdot 10^{-6}$.

Членами другого порядку є

$$l_s^2 u^2(\delta a) u^2(\theta) + l_s^2 u^2(a_s) u^2(\delta \theta),$$

але тільки перший з цих членів робить значний внесок у сумарну невизначеність $u_c(l)$

$$\begin{aligned} l_s^2 u^2(\delta a) u^2(\theta) &= (0,05 \text{ м})(0,58 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(0,41 \text{ }^\circ\text{C}) = 11,7 \text{ нм}, \\ l_s^2 u^2(a_s) u^2(\delta \theta) &= (0,05 \text{ м})(1,2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(0,029 \text{ }^\circ\text{C}) = 1,7 \text{ нм}. \end{aligned}$$

Отже, члени другого порядку збільшують $u_c(l)$ з 32 нм до 34 нм.

4.4.2 Вимірювання активного і реактивного опорів. Цей приклад демонструє опрацювання множини вимірюваних величин або вихідних величин, що визначаються одночасно при одному вимірюванні, і кореляцію їхніх оцінок. У прикладі розглядаються лише випадкові зміни спостережень; у дійсній практиці невизначеності поправок на систематичні ефекти також будуть робити вклад у невизначеність результатів вимірювання. Дані аналізуються двома різними способами, але обидва дають ті ж самі цифрові значення.

Активний R і реактивний X опори елемента кола визначають шляхом вимірювання амплітуди V різниці потенціалів на його виводах, яка змінюється синусоїдально, амплітуди I змінного струму, що проходить через нього, і кута зсуву фаз Φ змінної різниці потенціалів щодо змінного струму. Таким чином, трьома вхідними величинами є V , I і Φ , а трьома вихідними (вимірюваними величинами) є три складові імпедансу: R , X і Z . Через те, що $Z^2 = R^2 + X^2$, то є тільки дві незалежні вихідні величини [2].

Вимірювані величини, пов'язані з вхідними величинами законом Ома

$$R = (V/I)\cos\Phi; X = (V/I)\sin\Phi; Z = (V/I). \quad (4.31)$$

Передбачається, що п'ять незалежних рядів одночасних спостережень цих трьох вхідних величин V , I і Φ отримані в однакових умовах, а результати цих спостережень наведені в табл. 4.5. Тут же

наведено середні арифметичні спостереження і експериментальні стандартні відхилення цих середніх, обчислених з рівнянь (1.1) і (1.3). Середні значення беруться як найкращі оцінки математично очікуваних значень вхідних величин, а експериментальні стандартні відхилення є стандартними невизначеностями цих середніх.

Внаслідок того, що середні значення $\bar{V}$, $\bar{I}$, $\bar{\Phi}$ одержують з одночасних спостережень, вони корельовані, і ці кореляції повинні братися до уваги при обчисленні стандартних невизначеностей вимірюваних величин R , X і Z . Необхідні коефіцієнти кореляції легко одержують із рівняння (1.23), використовуючи значення $s(\bar{V}, \bar{I})$, $s(\bar{V}, \bar{\Phi})$ і $s(\bar{I}, \bar{\Phi})$. Результати внесені в табл. 4.5, де слід пам'ятати, що $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ і $r(x_i, x_i) = 1$.

Таблиця 4.5 – Значення вхідних величин V , I і Φ , отримані з п'ятих рядів спостережень

Номер ряду k	Вхідні величини		
	$V(B)$	$I(mA)$	Φ (рад)
1	5,007	19,663 19,639	1,0456
2	4,994	19,640 19,685	1,0438
3	5,005	19,678	1,0468
4	4,990		1,0428
5	4,999		1,0433
Середнє арифметичне	$\bar{V} = 4,9990$	$\bar{I} = 19,6610$	$\bar{\Phi} = 1,04446$
Експериментальне стандартне відхилення середнього	$s(\bar{V}) = 0,0032$	$s(\bar{I}) = 0,0095$	$s(\bar{\Phi}) = 0,00075$
Коефіцієнти кореляції $r(\bar{V}, \bar{I}) = -0,36$ $r(\bar{V}, \bar{\Phi}) = 0,86$ $r(\bar{I}, \bar{\Phi}) = -0,65$			

Результати аналізу даних першим способом зведені в табл. 4.6.

Значення трьох вимірюваних величин R , X і Z одержують із залежностей, даних у рівнянні (4.31), використовуючи середні значення $\bar{V}$, $\bar{I}$, $\bar{\Phi}$, наведені в табл. 4.5 для V , I і Φ . Стандартні невизначеності R , X і Z одержують із рівняння (1.24), тому що, як указувалося вище, вхідні величини $\bar{V}$, $\bar{I}$, $\bar{\Phi}$ корельовані. Як приклад розглянемо $Z = \bar{V}/\bar{I}$. При ототожненні $\bar{V}$ із x_1 , $\bar{I}$ із x_2 і f із $Z = \bar{V}/\bar{I}$ рівняння (1.24) для сумарної невизначеності Z дає:

$$u_c^2(Z) = (1/\bar{I})^2 u^2(\bar{V}) + (\bar{V}/\bar{I}^2)^2 u^2(\bar{I}) + 2(1/\bar{I})(-\bar{V}/\bar{I}^2) u(\bar{V}) u(\bar{I}) r(\bar{V}, \bar{I}) = \\ = Z^2 (u(\bar{V})/\bar{V})^2 + Z^2 (u(\bar{I})/\bar{I})^2 - 2Z^2 (u(\bar{V})/\bar{V}) (u(\bar{I})/\bar{I}) r(\bar{V}, \bar{I}), \quad (4.32)$$

або

$$u_{c,r}(Z) = u_r^2(\bar{V}) + u_r^2(\bar{I}) - 2u_r(\bar{V})u_r(\bar{I})r(\bar{V}, \bar{I}),$$

де $u(\bar{V}) = s(\bar{V})$, $u(\bar{I}) = s(\bar{I})$, а підрядковий індекс r в останньому виразі показує, що u є відносною невизначеністю.

Підставивши відповідні числові значення з табл. 4.5 у рівняння (4.32), одержуємо $u_c(Z) = 0,236 \Omega$.

Оскільки ці три вимірювані або вихідні величини залежать від тих же самих вхідних величин, то вони теж корельовані. Елементи коваріаційної матриці, яка описує цю кореляцію, можна записати у загальному випадку як:

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (4.33)$$

де $y_l = f_l(x_1, x_2, \dots, x_N)$ і $y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Рівняння (4.33) є узагальненням рівняння, коли дані у цьому виразі корельовані. Оцінені коефіцієнти кореляції вихідних величин, як зазначено в рівнянні (1.23), визначаються таким чином: $r(y_l, y_m) = u(y_l, y_m) / [u(y_l)u(y_m)]$. Слід визнати, що діагональні елементи коваріаційної матриці $u(y_l, y_l) \equiv u(y_l)$ є оцінками дисперсій вихідних величин y_l і що для $m = l$ рівняння (4.33) ідентично рівнянню (1.24).

Щоб застосувати рівняння (4.33) до цього прикладу, приймаються такі позначення:

$$y_1 = R, \quad x_1 = \bar{V}, \quad u(x_i) = s(x_i), \quad y_2 = X, \quad x_2 = \bar{I}, \quad N=3, \quad y_3 = Z, \quad x_3 = \bar{\Phi}.$$

Результати обчислень R , X і Z , оцінок їхніх дисперсій і коефіцієнтів кореляції наведено в табл. 4.6.

Таблиця 4.6 – Обчислені значення вихідних величин R , X і Z (перший спосіб)

Номер вимірюваної величини l	Співвідношення між оцінкою вимірюваної величини y_l і вхідними величинами x_i	Значення оцінки y_l , яка є результатом вимірювання	Сумарна стандартна невизначеність $u_c(y_l)$ результату вимірювання
1	$y_1 = R = (\bar{V}/\bar{I}) \cos \bar{\Phi}$	$y_1 = R = 127,732 \Omega$	$u_c(R) = 0,071 \Omega$ $u_c(R)/R = 0,06 \cdot 10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\bar{V}/\bar{I}) \sin \bar{\Phi}$	$y_2 = X = 219,847 \Omega$	$u_c(X) = 0,295 \Omega$ $u_c(X)/X = 0,13 \cdot 10^{-2}$
3	$y_3 = Z = \bar{V}/\bar{I}$	$y_3 = Z = 254,260 \Omega$	$u_c(Z) = 0,236 \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0,09 \cdot 10^{-2}$
Коефіцієнти кореляції $r(y_l, y_m)$ $r(y_1, y_2) = r(R, X) = -0,588$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = -0,485$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0,993$			

Результати аналізу даних другим способом зведені в табл. 4.7.

Таблиця 4.7 – Обчислені значення вихідних величин R, X і Z (другий спосіб)

Номер ряду k	Індивідуальні значення вимірюваних величин		
	$R=(V/I)\cos\Phi$ (Ω)	$X=(V/I)\sin\Phi$ (Ω)	$Z=V/I$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Середнє арифметичне	$y_1=\bar{R}=127,732$	$y_2=\bar{X}=219,847$	$Y_3=\bar{Z}=254,260$
Експериментальне стандартне відхилення середнього	$s(\bar{R})=0,071$	$s(\bar{X})=0,295$	$s(\bar{Z})=0,236$
Коефіцієнти кореляції $r(y_l, y_m)$ $r(y_1, y_2) = r(\bar{R}, \bar{X}) = -0,588$ $r(y_1, y_3) = r(\bar{R}, \bar{Z}) = -0,485$ $r(y_2, y_3) = r(\bar{X}, \bar{Z}) = 0,993$			

Через те, що дані були отримані у вигляді п'ятих рядів спостережень трьох вхідних величин V, I і Φ, можна обчислити значення R, X і Z із кожного ряду вхідних даних, а потім узяти середнє арифметичне цих п'ятих значень для одержання найкращих оцінок R, X і Z. Експериментальне стандартне відхилення кожного середнього значення (який є його сумарною стандартною невизначеністю) потім обчислюють із п'ятих окремих значень звичайним способом; і оцінені коваріації цих трьох середніх значень обчислюють, використовуючи рівняння (1.23) безпосередньо до п'яти окремих значень, із яких одержують кожне середнє значення. У результатах, отриманих цими двома способами, немає розбіжностей у значеннях вихідних величин, стандартних невизначеностей і оцінок коваріації, за винятком ефектів другого порядку, пов'язаних із заміною таких членів, як $\bar{V}/\bar{I}$ або $\cos\Phi$ на $\overline{V/I}$, або $\overline{\cos\Phi}$.

Щоб продемонструвати цей спосіб, у табл. 4.7 дані значення R, X і Z обчислені в кожному з п'ятих рядів спостережень. Потім середні арифметичні, стандартні невизначеності й оцінені коефіцієнти кореляції безпосередньо обчислювалися з цих окремих значень. Числові результати, отримані таким чином, незначно відрізняються від результатів, наведених у табл. 4.3.

Другий спосіб є прикладом одержання оцінки у із $\bar{Y} = (\sum Y_k)/n$, $k = 1, \dots, n$, у той час як перший спосіб є прикладом одержання у з $Y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$. Ці два способи дають однакові результати, якщо f є лінійною функцією своїх вхідних величин (за умови, що коефіцієнти кореляції, які експериментально спостерігаються, беруться до уваги, коли застосовується перший спосіб). Якщо f не є лінійною функцією, тоді результати, отримані

першим способом, будуть відрізнятися від результатів, отриманих другим способом, у залежності від ступеня нелінійності, оцінених дисперсій і коваріацій X_i . Це можна бачити з виразу

$$Y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N) + 0,5 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{X}_i \partial \bar{X}_j} u(\bar{X}_i, \bar{X}_j) + \dots, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (4.34)$$

де другий член справа є членом другого порядку при розкладанні в ряд Тейлора величини f за $\bar{X}_i$. У даному випадку перевага віддається другому способу, тому що даний спосіб дозволяє уникнути апроксимації $Y=f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ і краще відбиває використану процедуру вимірювання – те, що дані фактично були зібрані в ряди.

З іншого боку, другий спосіб буде непідходящим, якщо дані табл. 4.5 подають $n_1=5$ спостережень різниці потенціалів V , за якими ідуть $n_2=5$ спостережень струму I , потім $n_3=5$ спостережень фази Φ ; і неможливим, якщо $n_1 \neq n_2 \neq n_3$, (фактично, це погана вимірювальна процедура – проводити вимірювання таким способом, тому що різниця потенціалів на повному опорі і струм, який йде через нього, безпосередньо взаємозалежні).

Якщо дані, наведені в табл. 4.5, витлумачити наново таким чином, щоб другий спосіб виявився неприйнятним, і якщо припустити, що кореляції між величинами V , I і Φ відсутні, то коефіцієнти кореляцій не будуть значущими і їх варто встановити рівними нулю. Якщо це зробити в табл. 4.5, то рівняння (4.34) зводиться до еквівалента рівняння

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} u^2(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.35)$$

і його застосування до даних табл. 4.5 веде до змін у табл. 4.6, які показані у табл. 4.8.

Таблиця 4.8 – Зміни в табл. 4.6 за припущення, що коефіцієнти кореляції табл. 4.5 дорівнюють нулю

Сумарна стандартна невизначеність результату вимірювання $u_c(y_l)$
$u_c(R) = 0,195 \, \Omega$ $u_c(R)/R = 0,15 \cdot 10^{-2}$
$u_c(X) = 0,201 \, \Omega$ $u_c(X)/X = 0,09 \cdot 10^{-2}$
$u_c(Z) = 0,204 \, \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0,08 \cdot 10^{-2}$
Коефіцієнти кореляції $r(y_l, y_m)$ $r(y_1, y_2) = r(R, X) = 0,056$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = 0,527$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0,878$

4.4.3 Калібрування термометра. Цей приклад ілюструє використання методу найменших квадратів для одержання лінійної градуовальної кривої, а також те, як параметри апроксимації – перетинання і нахил, їх оцінені дисперсії і коваріації використовуються для одержання з кривої значень і стандартної невизначеності передбаченої поправки.

Термометр калібрується шляхом порівняння $n = 11$ показань температури t_k термометра, кожне з яких має незначну невизначеність, із відповідними відомими опорними температурами $t_{R,k}$ у діапазоні температур від 21 °C до 27 °C для одержання поправок $b_k = t_{R,k} - t_k$ у показаннях. Вимірювані поправки b_k і вимірювані температури t_k є вхідними величинами при оцінюванні. Лінійна градуовальна крива

$$b(t) = y_1 + y_2(t - t_0) \quad (4.36)$$

апроксимує вимірювані поправки і температури методом найменших квадратів. Параметри y_1 і y_2 , що є, відповідно, перетинанням і нахилом каліброваної кривої, являють собою дві вимірювані або вихідні величини, які треба визначити. Температура t_0 є зручно обраною точною опорною температурою; вона не є незалежним параметром, що треба визначати методом найменших квадратів. Після того, як знайдені y_1 і y_2 разом із їхніми оціненими дисперсіями і коваріаціями, рівняння (4.36) може бути використане для передбачення значення поправки та її стандартної невизначеності, що треба внести в показання термометра для будь-якого значення температури t [2].

Опираючись на метод найменших квадратів і при виконанні припущень, зроблених у 4.1, вихідні величини y_1 і y_2 , їхні оцінені дисперсії та коваріації одержують шляхом мінімізації суми

$$S = \sum [b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)]^2, \quad k = 1, \dots, n.$$

Це дає такі рівняння для y_1 і y_2 , їхніх експериментальних дисперсій $s(y_1)$ і $s(y_2)$ та їхнього оціненого коефіцієнта кореляції $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2) / (s(y_1)s(y_2))$, де $s(y_1, y_2)$ є їх оціненою коваріацією

$$y_1 = [(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k \theta_k)(\sum \theta_k)] / D, \quad (4.37)$$

$$y_2 = [n(\sum b_k \theta_k) - (\sum b_k)(\sum \theta_k)] / D, \quad (4.38)$$

$$s^2(y_1) = s^2 \sum \theta_k^2 / D, \quad s^2(y_2) = ns^2 / D, \quad (4.39)$$

$$r(y_1, y_2) = -\sum \theta_k / (n \sum \theta_k^2)^{1/2}, \quad (4.40)$$

$$s^2 = \sum [b_k - b(t_k)]^2 / (n-2), \quad (4.41)$$

$$D = n \sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 = n \sum (\theta_k - \bar{\theta})^2 = n \sum (t_k - \bar{t})^2, \quad (4.42)$$

де всі суми для k від 1 до n , $\theta_k = t_k - t_0$, $\bar{\theta} = (\sum \theta_k)/n$ і $\bar{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ – різниця між вимірюваною поправкою або поправкою b_k , яка спостерігається при температурі t_k , і поправкою $b(t_k)$, передбаченою апроксимувальною кривою $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ при t_k . Дисперсія s^2 є мірою загальної невизначеності апроксимації, де коефіцієнт $n - 2$ відбиває той факт, що оскільки два параметри y_1 і y_2 визначаються на основі n спостережень, то число ступенів вільності $\nu = n - 2$.

Дані, які треба апроксимувати, наведені в 2-ій і 3-ій колонках табл. 4.9. Приймаючи $t_0 = 20$ °C як опорну температуру, рівняння (4.39 - 4.41) дають

$$y_1 = -0,1712 \text{ °C}, s(y_1) = 0,0029 \text{ °C},$$

$$y_2 = 0,00218, s(y_2) = 0,00067,$$

$$r(y_1, y_2) = -0,930,$$

$$s = 0,0035 \text{ °C}.$$

Таблиця 4.9 – Дані, використовувані для одержання лінійної градуувальної кривої термометра методом найменших квадратів

Номер показання k	Показання термометра t_k , °C	Спостережувана поправка, $b_k = t_{R,k} - t_k$, °C	Передбачена поправка $b(t_k)$, °C	Різниця між поправками $b_k - b(t_k)$, °C
1	21,521	-0,171	-0,1679	-0,0031
2	22,012	-0,169	-0,1668	-0,0022
3	22,512	-0,166	-0,1657	-0,0003
4	23,003	-0,159	-0,1646	+0,0056
5	23,507	-0,164	-0,1635	-0,0005
6	23,999	-0,165	-0,1625	-0,0025
7	24,513	-0,156	-0,1614	+0,0054
8	25,002	-0,157	-0,1603	+0,0033
9	25,503	-0,159	-0,1592	+0,0002
10	26,010	-0,161	-0,1581	-0,0029
11	26,511	-0,160	-0,1570	-0,0030

Той факт, що нахил y_2 більше ніж у 3 рази перевищує його стандартну невизначеність, слугує показанням того, що потрібна градуувальна крива, а не фіксована усереднена поправка. Тоді градуувальну криву можна подати у вигляді

$$b(t) = -0,1712(29) \text{ }^{\circ}\text{C} + 0,00218(67)(t - 20 \text{ }^{\circ}\text{C}), \quad (4.43)$$

де числа в дужках являють собою чисельні значення стандартних невизначеностей, віднесені до відповідних останніх цифр зазначених результатів для перетинання і нахилу. Це рівняння дає передбачене значення поправки $b(t)$ при будь-якій температурі t , і, зокрема, значення $b(t_k)$ при $t = t_k$. Ці значення наведені в 4-ій колонці таблиці, тоді як в останній колонці наведені різниці між вимірюваними і передбаченими значеннями $b_k - b(t_k)$. Аналіз цих різниць можна використовувати для перевірки обґрунтованості лінійної моделі; існують формальні тести, але в цьому прикладі вони не розглядаються.

Вираз для сумарної стандартної невизначеності передбаченого значення поправки можна легко одержати, застосовуючи закон поширення невизначеності, рівняння (1.24), на рівняння (4.36). Відмічаючи, що $b(t) = f(y_1, y_2)$, і записавши $u(y_1) = \delta(y_1)$ і $u(y_2) = \delta(y_2)$, одержимо

$$u_c^2(b(t)) = u^2(y_1) + (t_1 - t_0)^2 u^2(y_2) + 2(t - t_0)u(y_1)u(y_2)r(y_1, y_2). \quad (4.44)$$

Оцінена дисперсія $u_c^2(b(t))$ є мінімальною при $t_{\min} = t_0 - u(y_1)r(y_1, y_2)/u(y_2)$, яка у даному випадку дорівнює $t_{\min} = 24,0085 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Як приклад використання рівняння (4.36) припустимо, що потрібна поправка на показання термометра і його невизначеність при $t = 30 \text{ }^{\circ}\text{C}$, яка перебуває за межами температурного діапазону, у якому термометр був у дійсності відкалібрований. Підстановка $t = 30 \text{ }^{\circ}\text{C}$ у рівняння (4.43) дає: $b(30^{\circ}\text{C}) = -0,1494 \text{ }^{\circ}\text{C}$, а рівняння (4.43) набуває вигляду

$$u_c^2(b(30^{\circ}\text{C})) = (0,0029^{\circ}\text{C})^2 + (10^{\circ}\text{C})^2(0,00067)^2 + \\ + 2(10^{\circ}\text{C})(0,0029^{\circ}\text{C})(0,00067)(-0,930) = 17,1 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^2,$$

або $u_c(b(30^{\circ}\text{C})) = 0,0041 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Таким чином, поправка при $30 \text{ }^{\circ}\text{C}$ дорівнює $-0,1494 \text{ }^{\circ}\text{C}$ із сумарною стандартною невизначеністю $u_c = 0,0041^{\circ}\text{C}$ і $\nu = n - 2 = 9$ ступенями вільності.

Рівняння (4.40) для коефіцієнта кореляції $r(y_1, y_2)$ означає, що, якщо t_0 вибрано таким чином, що $\sum \theta_k = \sum (t_k - t_0) = 0$, $k = 1, \dots, n$, то $r(y_1, y_2) = 0$ і y_1 і y_2 будуть некорельовані, тим самим спрощуючи обчислення стандартної невизначеності передбаченої поправки. Оскільки $\sum \theta_k = 0$, коли $t_0 = \bar{t} = (\sum t_k)/n$, $k = 1, \dots, n$, і в даному випадку $\bar{t} = 24,0085 \text{ }^{\circ}\text{C}$, то повторна апроксимація методом найменших квадратів при $t_0 \rightarrow \bar{t} = 24,0085 \text{ }^{\circ}\text{C}$ приведе до значень y_1 і y_2 , які є некорельованими (температура $\bar{t}$ є також температурою, при якій $u^2(b(t))$ мінімальна). Але повторна апроксимація не є необхідною, тому що це може бути показано рівняннями:

$$b(t) = y_1' \text{ і } y_2(t - \bar{t}), \quad (4.45)$$

$$u_c^2(b(t)) = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2), \quad (4.46)$$

$$r(y_1' \text{ і } y_2) = 0, \quad (4.47)$$

де $y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$, $\bar{t} = t_0 - s(y_1)r(y_1, y_2)/s(y_2)$, $s^2(y_1') = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]$, а при записі рівняння (4.39) були зроблені підстановки $u(y_1') = s(y_1')$ і $u(y_2) = s(y_2)$.

Застосовуючи ці залежності одержимо

$$b(t) = -0,1625(11) + 0,00218(67)(t - 24,0085 \text{ }^\circ\text{C}), \quad (4.48)$$

$$u_c^2(b(t)) = (0,0011)^2 + (t - 24,0085 \text{ }^\circ\text{C})^2(0,000067)^2. \quad (4.49)$$

Той факт, що ці вирази дають ті ж самі результати, що і рівняння (4.43) і (4.44), можна перевірити, якщо повторити обчислення $b(30^\circ\text{C})$ і $u_c^2(b(30^\circ\text{C}))$.

Підставивши $t = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ в рівняння (4.48) і (4.49), одержимо

$$b(30^\circ\text{C}) = -0,1494 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$u_c(b(30^\circ\text{C})) = 0,0041 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Оцінену коваріацію між двома передбаченими поправками $b(t_1)$ і $b(t_2)$ можна одержати з рівняння (4.40).

Метод найменших квадратів можна використовувати для апроксимації кривої більш високого порядку за точками даних; цей метод також застосовується для випадків, коли точки окремих даних мають невизначеності. Для більш докладного ознайомлення з цим питанням варто ознайомитися з [8]. Однак можна зазначити такі два випадки, де не передбачається, що вимірювані поправки b_k відомі точно.

1. Нехай кожне з n значень $t_{R,k}$ одержують із рядів m повторних показань і сумарної оцінки дисперсії для таких показань, визначеної на основі великої кількості даних, отриманих за декілька місяців, тоді кожна t_k має дуже малу невизначеність s_p^2 . Оцінена дисперсія кожного $t_{R,k}$ розраховується як $s_p^2/m = u_0^2$, і кожна спостережувана $b_k = t_{R,k} - t_k$ має ту ж саму стандартну невизначеність u_0^2 . У цих умовах (і якщо немає причин припускати некоректність лінійної моделі) u_0^2 заміняє s^2 .

2. Припустимо, що кожна t_k має дуже малу невизначеність, що поправка ε_k застосовується для кожного з n значень $t_{R,k}$ і що кожна

поправка має однакову стандартну невизначеність u_a . Тоді стандартна невизначеність кожного $b_k = t_{R,k} - t_k$ також є u_a , а $s^2(y_1)$ замінюється на $s^2(y_1) + u_a^2$ та $s^2(y_1') -$ на $s^2(y_1') + u_a^2$.

4.4.4 Вимірювання активності. Цей приклад схожий на приклад пункту 4.4.2 про одночасне вимірювання активного і реактивного опорів тим, що дані можна аналізувати двома різними способами, але кожний з них дає суттєво однаковий чисельний результат. Перший підхід ще раз демонструє необхідність узяти до уваги кореляції, які спостерігаються між вхідними величинами.

Невідома концентрація активності радону (^{222}Rn) у зразку води визначається рідинно-сцинтиляційним способом при використанні стандартного зразка радону у воді з відомою концентрацією активності. Невідому концентрацію активності одержують шляхом вимірювання трьох складових, які містять приблизно 5 г води і 12 г сцинтилятора з органічної емульсії в ампулах об'ємом 22 мл:

- джерело (а) – стандартний зразок, який складається зі стандартного розчину масою m_s із відомою концентрацією активності;
- джерело (б) – підібраний чистий зразок води, який не містить радіоактивних речовин, використовуваний для одержання фонові швидкості підрахунку;
- джерело (в) – зразок, що складається з аліквотної маси m_x із невідомою концентрацією активності.

Виконується шість циклів вимірювань трьох складових в такому порядку: стандартний зразок – чистий зразок – зразок; і кожний інтервал підрахунку T_0 з поправкою на мертвий час для кожного джерела під час усіх шести циклів складає 60 хвилин. Хоча не можна припустити, що фонові швидкості підрахунку залишається постійною протягом повного інтервалу підрахунку (65 годин). Передбачається, що розраховані числа, отримані для кожного чистого зразка, можна використовувати як представницькі для фонові швидкості підрахунку часу вимірювань стандартного зразка і зразка в тому ж самому циклі. Дані наведені в табл. 4.7, де: t_s , t_B , t_x – значення часу від моменту відліку $t = 0$ до середини інтервалів підрахунку $T_0 = 60$ хв. (із поправкою на мертвий час) для ампул, відповідно, зі стандартним зразком, чистим зразком і зразком; хоча t_B вказується для повноти картини, він не потрібний для аналізу; C_s , C_B , C_x – число імпульсів, зареєстрованих під час інтервалів підрахунку $T_0 = 60$ хв. із поправкою на мертвий час для ампул, відповідно, зі стандартним зразком, чистим зразком і зразком.

Спостережувані рахункові імпульси можна описати як:

$$C_s = C_B + \varepsilon A_s T_0 m_s e^{-\lambda t_s}, \quad (4.50)$$

$$C_x = C_B + \varepsilon A_x T_0 m_x e^{-\lambda t_x}, \quad (4.51)$$

де ε – ефективність виявлення ^{222}Rn із використанням рідкої сцинтиляції для даного складу джерела передбачена незалежною від рівня активності;

A_s – концентрація активності стандартного зразка на момент відліку $t = 0$;

A_x – вимірювана величина, яка визначається як невідома концентрація активності зразка на момент відліку $t = 0$;

m_s – маса стандартного розчину;

m_x – маса аликвотного зразка;

λ – постійна розпаду для ^{222}Rn : $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1,25894 \cdot 10^{-4} \text{ хв}^{-1}$ ($T_{1/2} = 5505,8 \text{ хв}$) [2].

Рівняння (4.50) і (4.51) показують, що для шести індивідуальних значень ні C_s , ні C_x , наведені в табл. 4.10, не можна усереднити безпосередньо через експоненціальний розпад активності стандартного зразка і невеличкі зміни фонового підрахунку від циклу до циклу. Замість цього необхідно звернутися до підрахунку з поправками на розпад і фон (або до швидкості підрахунку, обумовленої як число імпульсів, поділене на $T_0 = 60 \text{ хв}$). Це припускає об'єднання рівнянь (4.50) і (4.51) для одержання такого виразу щодо невідомої концентрації через відомі величини

$$\begin{aligned} A_x &= f(A_s, m_s, m_x, C_s, C_x, C_B, t_s, t_x, \lambda) = \\ &= A_s m_s (C_x - C_B) \exp(\lambda t_x) / [m_x (C_s - C_B) \exp(\lambda t_s)] = \\ &= A_s m_s (C_x - C_B) \exp(\lambda t_x - t_s) / m_x (C_s - C_B), \end{aligned} \quad (4.52)$$

де $(C_x - C_B) \exp(\lambda t_x)$ і $(C_s - C_B) \exp(\lambda t_s)$ є кількістю підрахунків із поправкою на фон, відповідно, для зразка і стандартного зразка на момент відліку $t = 0$ для тимчасового інтервалу $T_0 = 60 \text{ хв}$. З іншого боку, можна просто записати

$$A_x = f(A_s, m_s, m_x, R_s, R_x) = A_s m_s R_x / (R_s m_x), \quad (4.53)$$

де швидкості підрахунку R_s і R_x з поправкою на фон і розпад визначаються за формулами:

$$R_x = (C_x - C_B) \exp(\lambda t_x) / T_0, \quad (4.54)$$

$$R_s = (C_s - C_B) \exp(\lambda t_s) / T_0. \quad (4.55)$$

Таблиця 4.10 – Підраховані показники для визначення концентрації активності невідомого зразка

Цикл k	Стандартний зразок		Чистий зразок		Зразок	
	t_s (хв.)	C_s (число)	t_B (хв.)	C_B (число)	t_x (хв.)	C_x (число)
1	243,74	15380	305,56	4054	367,37	41432
2	984,53	14978	1046,10	3922	1107,66	38706
3	1723,87	14394	1785,43	4200	1846,99	35860
4	2463,17	13254	2524,73	3830	2586,28	32238
5	3217,56	12516	3279,12	3956	3340,68	29640
6	3956,83	11058	4018,38	3980	4079,94	26356

Табл. 4.11 підсумовує значення швидкостей підрахунку R_s і R_x із поправками на фон і розпад, розраховані за рівняннями (4.54) і (4.55), із використанням даних табл. 4.10 і $\lambda = 1,25894 \cdot 10^{-4} \text{ хв}^{-1}$, як зазначено вище. Слід зазначити, що відношення $R = R_x/R_s$, найбільш легко розрахувати при використанні виразу

$$(C_x - C_B) \exp(\lambda(t_x - t_s)) / (C_s - C_B).$$

Таблиця 4.11 – Розрахунок швидкостей підрахунку з поправками на розпад і фон

Цикл K	R_x (хв ⁻¹)	R_s (хв ⁻¹)	$t_x - t_s$ (хв)	$R = R_x/R_s$
1	652,46	194,65	123,63	3,3520
2	666,48	208,58	123,13	3,1953
3	665,80	211,08	123,12	3,1543
4	655,68	214,17	123,11	3,0615
5	651,87	213,92	123,12	3,0473
6	623,31	194,13	123,11	3,2107
$\bar{R}_x = 652,60, \bar{R}_s = 206,09$ $s(\bar{R}_x) = 6,42, s(\bar{R}_s) = 3,79$ $s(\bar{R}_x)/\bar{R}_x = 0,98 \cdot 10^{-2}, s(\bar{R}_s)/\bar{R}_s = 1,84 \cdot 10^{-2}$ $\bar{R}_x / \bar{R}_s = 3,167, u(\bar{R}_x/\bar{R}_s) = 0,045$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_s)/(\bar{R}_x/\bar{R}_s) = 1,42 \cdot 10^{-2}$				$\bar{R} = 3,170$ $s(\bar{R}) = 0,046$ $s(\bar{R})/\bar{R} = 1,44 \cdot 10^{-2}$
Коефіцієнт кореляції				
$r(\bar{R}_x, \bar{R}_s) = 0,646$				

Середні арифметичні $\bar{R}_s$, $\bar{R}_x$ і $\bar{R}$, а також їх експериментальні стандартні відхилення $s(\bar{R}_s)$, $s(\bar{R}_x)$ і $s(\bar{R})$ розраховуються звичайним способом. Коефіцієнт кореляції $r(\bar{R}_x, \bar{R}_s)$ розраховується з рівняння (1.23).

Через невеличку змінність значень $\bar{R}_x$ і $\bar{R}_s$ відношення середніх $\bar{R}_x/\bar{R}_s$ і стандартна невизначеність $u(\bar{R}_x/\bar{R}_s)$ цього відношення практично збігаються, відповідно, з середнім відношенням $\bar{R}$ і його експериментальним стандартним відхиленням $s(\bar{R})$, як наведено в

останньому стовпчику табл. 4.11. Однак при розрахунку стандартної невизначеності $u(\bar{R}_x/\bar{R}_s)$ необхідно враховувати кореляцію між R_x і R_s , подану коефіцієнтом кореляції $r(\bar{R}_x, \bar{R}_s)$, використовуючи рівняння (1.23).

Варто визнати, що відповідні експериментальні стандартні відхилення R_x і R_s , $\sqrt{6} s(\bar{R}_x)$ і $\sqrt{6} s(\bar{R}_s)$ показують змінність цих величин, яка від 2 до 3 разів більша, ніж змінність, яка передбачається статистикою Пуассона для процесу підрахунку; остання враховується у змінності підрахунку, і її не потрібно враховувати окремо.

Одержання невідомої концентрації активності A_x та її сумарної стандартної невизначеності $u_c(A_x)$ із рівняння (4.53) потребує знання A_s , m_s і m_x , а також їхніх стандартних невизначеностей. Вони такі:

$$A_s = 0,1368 \text{ Бк/г}, u(A_s) = 0,0018 \text{ Бк/г}, u(A_s)/A_s = 1,32 \cdot 10^{-2};$$

$$m_s = 5,0192 \text{ г}, u(m_s) = 0,005 \text{ г}, u(m_s)/m_s = 0,10 \cdot 10^{-2};$$

$$m_x = 5,0571 \text{ г}, u(m_x) = 0,0010 \text{ г}; u(m_x)/m_x = 0,02 \cdot 10^{-2}.$$

Інші можливі джерела невизначеності оцінюються як дуже малі:

- стандартні невизначеності часу розпаду: $u(t_{s,k})$ і $u(t_{x,k})$;

- стандартна невизначеність постійної розпаду ^{222}Rn : $u(\lambda) = 10^{-7} \text{ хв}^{-1}$.

(Значущою величиною є коефіцієнт розпаду $\exp(\lambda(t_x - t_s))$, який змінюється від 1,01563 для циклів $k = 4$ і 6 до 1,01570 для циклу $k = 1$. Стандартна невизначеність цих значень складає $u = 1,2 \cdot 10^{-5}$);

- невизначеність, пов'язана з можливою залежністю ефективності детектування сцинтиляційного лічильника від використовуваного джерела (стандартний зразок, чистий зразок і зразок);

- невизначеність поправки на мертвий час лічильника і поправки на залежність ефективності підрахунку від рівня активності.

Як зазначено вище, A_x і $u_c(A_x)$ можуть бути отримані двома різними шляхами з рівняння (4.53). При першому підході A_x обчислюється з середніх арифметичних $\bar{R}_x$ і $\bar{R}_s$, що дає

$$A_x = A_s m_s \bar{R}_x / (\bar{R}_s m_x) = 0,43000 \text{ Бк/г}. \quad (4.56)$$

Комбінована дисперсія $u_c^2(A_x)$ дорівнює

$$u_c^2(A_x)/A_x^2 = u^2(A_s)/A_s^2 + u^2(m_s)/m_s^2 + u^2(m_x)/m_x^2 + \\ + u^2(\bar{R}_x)/\bar{R}_x^2 + u^2(\bar{R}_s)/\bar{R}_s^2 - 2 r(\bar{R}_x, \bar{R}_s) u(\bar{R}_x)u(\bar{R}_s)/(\bar{R}_x \bar{R}_s), \quad (4.57)$$

де останні три члени дають $u^2(\bar{R}_x/\bar{R}_s)/(\bar{R}_x/\bar{R}_s)^2$ – оцінену відносну дисперсію $(\bar{R}_x/\bar{R}_s)$. Результати в табл. 4.11 показують, що $\bar{R}$ не точно дорівнює $(\bar{R}_x/\bar{R}_s)$ і що стандартна невизначеність $u^2(\bar{R}_x/\bar{R}_s)$ для $\bar{R}_x/\bar{R}_s$ не точно дорівнює стандартній невизначеності $s(\bar{R})$ для $\bar{R}$.

Підстановка значень відповідних величин у рівняння (4.56) і (4.57) дає

$$u_c(A_x)/A_x = 1,93 \cdot 10^{-2}, u_c(A_x) = 0,0084 \text{ Бк/г.}$$

Результат вимірювання тоді можна записати як: $A_x = 0,4300 \text{ Бк/г}$ із сумарною стандартною невизначеністю $u_c = 0,0083 \text{ Бк/г}$.

При другому підході, що не враховує кореляцію між $\bar{R}_x$ і $\bar{R}_s$, A_x обчислюють, використовуючи середнє арифметичне $\bar{R}$. Таким чином

$$A_x = A_s m_s / m_x = 0,0084 \text{ Бк/г.} \quad (4.58)$$

Вираз для $u_c^2(A_x)$ такий

$$u_c^2(A_x)/A_x^2 = u^2(A_s)/A_s^2 + u^2(m_s)/m_s^2 + u^2(m_x)/m_x^2 + u^2(\bar{R})/\bar{R}^2, \quad (4.59)$$

що дає $u_c(A_x)/A_x = 1,95 \cdot 10^{-2}$, $u_c(A_x) = 0,0084 \text{ Бк/г}$.

Результат вимірювання можна зазначити як: $A_x = 0,4304 \text{ Бк/г}$ із сумарною стандартною невизначеністю $u_c = 0,0084 \text{ Бк/г}$.

Ефективні ступені вільності u_c можна оцінити, використовуючи формулу Велча-Саттерсвейта.

Із двох результатів кращим є другий, тому що він не враховує заміни середнього значення відношення двох величин на відношення середніх значень цих величин; він краще відбиває використану процедуру вимірювань – дані насправді були зібрані в різні цикли.

Однак розбіжність між значеннями A_x , що утворюється при двох підходах, мала в порівнянні зі стандартною невизначеністю, приписуваною кожному з них, і розбіжністю між двома стандартними невизначеностями можна цілком знехтувати. Така відповідність показує, що два підходи еквівалентні, коли спостережувані кореляції враховані належним чином.

4.4.5 Вимірювання сили електричного струму. Схема вимірювань показана на рис. 4.5 [13].

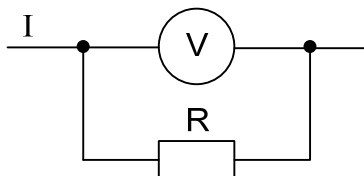


Рисунок 4.5 – Схема вимірювання сили струму

Рівняння вимірювань має вигляд

$$I = f(V, R) = \frac{V}{R}, \quad (4.60)$$

де I – сила струму,

V – напруга,

R – опір шунта.

В результаті вимірювання напруги отримані такі значення V_i в мілівольтах 100; 100,68; 100,83; 100,79; 100,64; 100,63; 100,94; 100,6; 100,68; 100,76; 100,64 при температурі $t = (23 \pm 0,05)^\circ\text{C}$.

На основі отриманих значень обчислюють середнє значення напруги за формулою

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i = 100,72 \text{ мВ.} \quad (4.61)$$

Значення опору шунта встановлено при калібруванні для $I = 10 \text{ А}$ і $t = 23,00^\circ\text{C}$ і дорівнює $R_0 = 0,010088 \text{ Ом}$.

Результат вимірювань сили струму отримують за формулою

$$I = \frac{\bar{V}}{R_0} = 9,984 \text{ А.} \quad (4.62)$$

Визначають середньоквадратичне відхилення (СКВ) середньоарифметичного значення напруги $S(\bar{V})$, яке характеризує випадкову складову похибки при вимірюваннях напруги за формулою

$$S(\bar{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2}{n(n-1)}} = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ мВ.} \quad (4.63)$$

Тоді відносне значення середньоквадратичного відхилення (СКВ) $\bar{V}$ буде дорівнювати

$$\tilde{S}(\bar{V}) = \frac{S(\bar{V})}{\bar{V}} = 0,034\%. \quad (4.64)$$

Межі невилученої систематичної похибки вольтметра визначені при його калібруванні у вигляді такого виразу (у виразах для меж похибок при рівних значеннях відхилень будемо нехтувати знаком $\pm$)

$$\theta_v = 3 \cdot 10^{-4} V + 0,02 \text{ мВ.} \quad (4.65)$$

Тоді при $V = \bar{V}$ отримуємо

$$\theta_v = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ мВ},$$

$$\tilde{\theta}_v = 0,050 \text{ \%}.$$

Межі невилученої систематичної похибки значення опору шунта, визначені при його калібруванні, дорівнюють

$$\tilde{\theta}_R = 0,070 \text{ \%}.$$

Тоді при $R = R_0$ отримуємо: $\theta_R = 7 \cdot 10^{-4} \cdot R_0 = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}.$

Межі невилученої систематичної складової похибки значення опору шунта, які обумовлені похибкою вимірювання температури, знаходимо з формули:

$$R = R_0 [1 + \alpha(t - t_0)] , \quad (4.66)$$

де R_0 – значення опору при $t = t_0$ ($t_0 = 23,00^\circ\text{C}$; $R_0 = 0,010088 \text{ Ом}$);

α – температурний коефіцієнт ($\alpha = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$).

Якщо межі вимірювання температури дорівнюють Δt , то межі відповідної складової похибки значення опору дорівнюють

$$\theta_{R,t} = \alpha \Delta t \cdot R.$$

При $\Delta t = 0,05^\circ\text{C}$ отримуємо

$$\theta_{R,t} = 3,0 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}, \quad \tilde{\theta}_{R,t} = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ \%}.$$

Цю складову похибки можна далі не враховувати, оскільки вона має мале числове значення в порівнянні з іншими складовими.

Для додавання невилучених систематичних похибок робимо припущення про рівномірний закон розподілу їх всередині меж θ_v і θ_R . Тоді СКВ сумарної невилученої систематичної складової похибки результату вимірювань сили струму визначаємо за формулою

$$S_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 \frac{\theta_v^2}{3} + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \frac{\theta_R^2}{3}}, \quad (4.67)$$

де $\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{1}{R}$, $\frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{V}{R^2}$ – коефіцієнти чутливості.

Тоді отримуємо

$$S_\theta = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \frac{\theta_v^2}{3} + \left(\frac{V}{R^2}\right)^2 \frac{\theta_R^2}{3}} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ А},$$

$$\tilde{S}_\theta = 0,05 \text{ \%}.$$

Довірчі межі сумарної невилученої систематичної складової похибки результату вимірювань сили струму при ймовірності $p = 0,95$ оцінюємо за формулою

$$\theta(0,95) = 1,1 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \theta_V^2 + \left(\frac{-V}{R^2}\right)^2 \cdot \theta_R^2} = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

$$\tilde{\theta}_{(0,95)} = 0,95\%.$$

СКВ випадкової складової похибки результату вимірювань сили струму визначаємо за формулою

$$S = \frac{\partial f}{\partial V} \cdot S(\bar{V}) = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

$$\tilde{S} = 0,034\%.$$

СКВ сумарної похибки результату вимірювань сили струму обчислюємо за формулою

$$S_\Sigma = \sqrt{S^2 + S_\theta^2} = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ A,}$$

$$\tilde{S}_\Sigma = 0,060\%.$$

Довірчі межі похибки результату вимірювань сили струму при $p = 0,95$ і числі ефективних ступенів вільності $\nu_{\text{eff}} = n - 1 = 9$ обчислюємо за формулою

$$\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95}(9)S + \theta(0,95)}{S + S_\theta} \cdot S_\Sigma = 0,012 \text{ A,}$$

$$\tilde{\Delta}_{0,95} = 0,012\%.$$

За типом А обчислюємо стандартну невизначеність, обумовлену джерелом невизначеності, що має випадковий характер.

Стандартну невизначеність напруги, обумовлену джерелом невизначеності, яке має випадковий характер, визначаємо за формулою

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2}{n(n-1)}}, \quad (4.68)$$

$$u_A(V) = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ мВ}, \quad \tilde{u}_A = 0,034\%.$$

Стандартну невизначеність сили струму, обумовлену джерелом невизначеності, яке має випадковий характер, визначаємо за формулою

$$u_A = \frac{\partial f}{\partial V} \cdot u_A(V) = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ А}, \quad (4.69)$$

$$\tilde{u}_A = 0,034\%.$$

За типом В обчислюємо стандартні невизначеності, обумовлені джерелами невизначеності, які мають систематичний характер. Закон розподілу всередині меж вважаємо рівномірним.

Межі систематичного зміщення при вимірюваннях напруги, які визначені при калібруванні вольтметра, дорівнюють $3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{V} + 0,02$. Тоді відповідну стандартну невизначеність обчислюємо за формулою

$$u_{B,V} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{V} + 0,02}{\sqrt{3}} = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ мВ}, \quad (4.70)$$

$$\tilde{u}_{B,V} = 0,029\%.$$

Межі, всередині яких лежить опір шунта, визначені при калібруванні шунта і дорівнюють $7 \cdot 10^{-4} \cdot R$. Тоді при $R = R_0$ відповідну стандартну невизначеність обчислюємо з виразу

$$u_{B,R} = \frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot R_0}{\sqrt{3}} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}, \quad \tilde{u}_{B,R} = 0,040\%.$$

Межі зміни значення опору шунта, обумовленого зміною температури, дорівнюють $\alpha \cdot \Delta t \cdot R_0$. Відповідну стандартну невизначеність отримуємо у відповідності з формулою

$$u_{B,t} = \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot R_0}{\sqrt{3}} = 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}, \quad \tilde{u}_{B,t} = 1,7 \cdot 10^{-5}\%.$$

В подальшому цією складовою можна знехтувати.

Комбіновану стандартну невизначеність, обчислену за типом В, визначаємо з формули [13]

$$u_B = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 U_{B,V}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 U_{B,R}^2} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ A}, \quad (4.71)$$

$$\tilde{u}_B = 0,050\%.$$

Косбіновану стандартну невизначеність обчислюємо так

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ A}, \quad \tilde{u}_c = 0,060\%.$$

Ефективне число ступенів вільності визначаємо за формулою

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4}{\frac{\left(\frac{1}{R} \cdot u_A\right)^4}{n-1} + \frac{\left(\frac{1}{R} \cdot u_{B,V}\right)^4}{\infty} + \frac{\left(\frac{V}{R^2} \cdot u_{B,R}\right)^4}{\infty}} = 87. \quad (4.72)$$

Коефіцієнт охоплення для такого ефективного числа ступенів вільності складає

$$k = t_{0,95}(v_{\text{eff}}) = 1,96.$$

Розширена невизначеність визначається за формулою

$$U_{0,95} = k \cdot u_c = 0,012 \text{ A}, \quad \tilde{U}_{0,95} = 0,12\%. \quad (4.73)$$

Отже, результат вимірювань запишемо у вигляді [13]

$$I = 9,984 \pm 0,012; \quad p = 0,95.$$

4.4.6 Багаторазові вимірювання частоти синусоїдального сигналу. Проводиться вимірювання з багаторазовими спостереженнями частоти синусоїдального сигналу електричної мережі загального призначення. Показання частотоміра f складають, Гц:
50,8; 49,7; 48,2; 48,8; 48,5; 49,3; 49,9; 50,4; 56,1; 51,1; 49,4; 51,6; 51,9;
50,5; 50,8; 49,9; 50,2; 50,4; 50,1; 50,3; 50,1.

Необхідно оцінити невизначеність вимірювання частоти при довірчому рівні $p=0,95$.

Складаємо специфікацію вимірювань:

- вимірювання проводилися в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря $+23^\circ\text{C}$;

- клас точності засобу вимірювання частоти складає 0,25;
- температурний коефіцієнт зміни частоти кварцевого резонатора не більше $\pm 1,5 \cdot 10^{-6}$ на 1°C .

Найкращою оцінкою багаторазових прямих рівноточних вимірювань, що дає змогу зменшити вплив випадкових складових похибки вимірювання кожного окремого спостереження, є середнє значення

$$\bar{f} = \frac{\sum_{k=1}^{20} f_k}{20} = 50,38 \text{ Гц.}$$

Стандартне відхилення результатів від середнього арифметичного складає

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (f_k - \bar{f})^2}{n-1}} = 1,6 \text{ Гц.}$$

Перевіримо крайні члени ряду результатів вимірювань на наявність промахів. Для цього розрахуємо співвідношення:

$$s_1 = \frac{\bar{f} - f_{\min}}{u_A} = 1,36;$$

$$s_2 = \frac{f_{\max} - \bar{f}}{u_A} = 3,57.$$

Оскільки довірчий рівень приймається рівним $p_d = 0,95$, то для вибору допустимого значення нормованого відхилення розрахуємо параметр α , який дорівнює $\alpha = 1 - p_d = 1 - 0,95 = 0,05$. За цим параметром і кількістю проведених вимірювань $n = 20$ з табл. 3.1 вибираємо допустиме значення нормованого відхилення для крайніх членів ряду, яке складає $s_{\text{аіі}} = 2,56$. Порівнюючи вибране допустиме значення $s_{\text{аіі}}$ з розрахованими s_1 та s_2 можна зробити такий висновок.

Оскільки параметр s_1 менший за допустиме значення $s_{\text{аіі}}$, то гіпотезу про наявність аномальних результатів в ряді спостережень відкидають. Тобто найменше значення результатів вимірювань не є аномальним. А при порівнянні допустимого значення $s_{\text{аіі}}$ з параметром s_2 видно, що $s_2 > s_{\text{аіі}}$. Це означає, що найбільше значення з ряду спостережень є промахом. Промахи потрібно вилучати з результатів спостережень. Тому

відкидаємо найбільше значення частоти 56,1 Гц з результатів вимірювань і перераховуємо середнє значення частоти та стандартне відхилення

$$\bar{f} = \frac{\sum_{k=1}^{19} f_k}{19} = 50,1 \text{ Гц};$$

$$u_{A2} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (f_k - \bar{f})^2}{n-1}} = 0,95 \text{ Гц}.$$

Після цього знову перевіряємо крайні члени ряду спостережень на наявність промахів

$$s_1 = \frac{\bar{f} - f_{\min}}{u_{A2}} = 1,99;$$

$$s_2 = \frac{f_{\max} - \bar{f}}{u_{A2}} = 1,9.$$

Для значення α і кількості проведених вимірювань $n = 19$ з табл. 3.1 вибираємо нове допустиме значення нормованого відхилення для крайніх членів ряду, яке складає $s_{\text{дп}} = 2,53$. Порівнюючи допустиме значення нормованого відхилення $s_{\text{дп}} = 2,53$ із новими розрахованими значеннями s_1 та s_2 , видно, що вони є меншими за допустиме значення нормованого відхилення, а це означає, що крайні члени ряду результатів вимірювань не містять промахів.

Отже, оскільки промахи вилучені з результатів багаторазових вимірювань, то можна оцінити стандартну невизначеність середнього значення типу A за формулою

$$u_A(\bar{f}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (f_k - \bar{f})^2}{n(n-1)}} = \frac{u_{A2}}{\sqrt{n}} = 0,22 \text{ Гц}. \quad (4.74)$$

Оцінимо складові невизначеності, що вносяться за рахунок технічних обмежень та відхилення температури оточуючого середовища від нормальних умов.

Складову інструментальної невизначеності, що вноситься засобом вимірювання частоти за рахунок обмеженої точності γ оцінимо за формулою

$$u_1 = \frac{\gamma f_{\max}}{100\% \sqrt{3}} = 0,1 \frac{51,9}{173} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ Гц.}$$

Складову невизначеності, що обумовлена зміною частоти кварцевого резонатора при відхиленні температури навколишнього середовища від нормальності $t_i = 20^\circ\text{C}$ до $t_n = 23^\circ\text{C}$, оцінимо через температурний коефіцієнт зміни частоти кварцевого резонатора ($k_t = \pm 1,5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$) за формулою

$$u_2 = \bar{f} \frac{|t_n - t_i|}{\sqrt{3}} k_t = 50,1 \frac{(23 - 20)}{\sqrt{3}} 1,5 \cdot 10^{-6} = 0,13 \cdot 10^{-3} \text{ Гц.}$$

Комбіновану стандартну невизначеність типу В результату вимірювання оцінимо за формулою

$$u_{\text{св}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(75 \cdot 10^{-3})^2 + (0,13 \cdot 10^{-3})^2} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ Гц.}$$

Як показують розрахунки комбінованої невизначеності типу В систематичною складовою невизначеності u_2 , зважаючи на її мале значення, можна знехтували.

Комбіновану стандартну невизначеність результату багаторазових спостережень частоти синусоїдального сигналу електричної мережі загального призначення розрахуємо за формулою

$$u_c = \sqrt{u_A^2(\bar{f}) + u_{\text{св}}^2} = 0,23 \text{ Гц.}$$

Задавшись довірчим рівнем $p = 0,95$ (коефіцієнт охоплення $k = 1,96$) розрахуємо розширену невизначеність за формулою

$$U = k u_c = 1,96 \cdot 0,23 = 0,45 \text{ Гц.}$$

Результат багаторазового вимірювання частоти синусоїдального сигналу електричної мережі загального призначення подамо у вигляді

$$f = 50,1 \pm 0,45 \text{ Гц, при } p = 0,95.$$

4.4.7 Калібрування декількох груп спостережень еталона напруги. Проводиться калібрування еталона вольт за допомогою стабільного джерела опорної напруги протягом декількох тижнів. У кожний з $J = 10$ днів проводяться $K = 5$ незалежних повторних

спостережень різниці потенціалів V_s . Необхідно одержати якнайкращу оцінку результату вимірювань і оцінити її невизначеність [2].

Визначаємо середні арифметичні кожної групи спостережень за формулою (3.9) (результати подані в табл. 4.12)

$$\bar{V}_j = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K V_{jk},$$

де V_{jk} – позначає k -те спостереження різниці потенціалів V_s еталона ($k=1, 2, \dots, K$) в j -ий день ($j=1, 2, \dots, J$).

Знаходимо найкращу оцінку вимірюваної величини V_s як середнє арифметичне $\bar{V}_j$

$$V_s = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \bar{V}_j = \bar{V} = 10,000097 \text{ В.}$$

Визначаємо оцінки внутрішньогрупової дисперсії $s_j^2(V_{jk})$ у кожній j -й групі за формулою (3.11)

$$s_j^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2.$$

Таблиця 4.12 – Результати експериментальних досліджень еталона напруги

День, j	1	2	3	4	5
$\bar{V}_j, \text{В}$	10,000172	10,000116	10,000013	10,000144	10,000106
$s_j^2(V_{jk})$	60	77	111	101	67
День, j	6	7	8	9	10
$\bar{V}_j, \text{В}$	10,000031	10,000006	10,000125	10,000163	10,000041
$s_j^2(V_{jk})$	93	80	73	88	86

За формулою (3.12) знаходимо експериментальну дисперсію середніх арифметичних груп

$$s^2(\bar{V}_j) = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 = (52 \text{ мкВ})^2.$$

За формулами (3.13) і (3.16) визначаємо дві незалежні оцінки усередненої внутрішньогрупової дисперсії спостережень:

$$s_1^2 = K s^2(\bar{V}_j) = \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 = (128 \text{ мкВ})^2,$$

що має $J - 1 = 9$ ступенів вільності;

$$s_{II}^2 = \bar{s}_j^2(V_{jk}) = \frac{1}{J(K-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2 = (85 \text{ мкВ})^2,$$

що має $J(K - 1) = 40$ ступенів вільності.

За формулою (3.17) обчислюємо відношення двох незалежних оцінок $s_I^2(v_I)$ і $s_{II}^2(v_{II})$

$$F(v_I, v_{II}) = \frac{s_I^2(v_I)}{s_{II}^2(v_{II})} = 2,25.$$

Критичні значення F для ймовірностей 0,95 і 0,975 і для числа ступенів вільності $v_I = 9$ і $v_{II} = 40$ знаходять за таблицею розподілу Фішера: $F_{0,95} = 2,12$; $F_{0,975} = 2,45$.

Для ймовірності 0,975 $F(v_I, v_{II}) < F_p$, тому існування міжгрупової похибки заперечується. В цьому випадку оцінену дисперсію $s^2(\bar{y})$ для $\bar{y}$ знаходимо з виразу (3.19)

$$s^2(\bar{V}) = \frac{(J-1)s_I^2 + J(K-1)s_{II}^2}{JK(JK-1)} = (13 \text{ мкВ})^2$$

з $(JK - 1) = 49$ ступенями вільності.

Розширену невизначеність результату вимірювання розраховуємо за формулою

$$U = ks(\bar{V}) = 2 \cdot 13 = 26 \text{ мкВ},$$

де $k = 2$ – коефіцієнт охоплення для нормального закону розподілу і довірчого рівня $p = 0,95$.

Для ймовірності 0,95, коли $F(v_I, v_{II}) \geq F_p$, існування міжгрупової дисперсії приймається, а оцінена дисперсія $\bar{V}$ виходить з виразу

$$s^2(\bar{V}) = \frac{s_j^2(\bar{V}_j)}{J} = \frac{(57 \text{ мкВ})^2}{10} = (325 \text{ мкВ})^2$$

і має $J - 1 = 9$ ступенів вільності.

Розширену невизначеність результату вимірювання можна розрахувати за формулою

$$U = t_p(v)s(\bar{V}) = 2,26 \cdot 18 = 40,7 \text{ мкВ},$$

де $t_p(v) = 2,26$ – коефіцієнт Стьюдента для числа ступенів вільності $v = J - 1 = 9$ і довірчого рівня $p = 0,95$.

Методи дисперсійного аналізу широко застосовуються при обробці результатів міжлабораторних випробувань. Такі випробування передбачають участь ряду незалежних, однаково компетентних лабораторій, що проводять декілька груп прямих вимірювань. Звичайно передбачається, що розбіжності між окремими результатами як усередині однієї лабораторії, так і між лабораторіями є статистичними за природою, незалежно від причин, що їх викликають. В цьому випадку кожне лабораторне середнє значення є незміщеною оцінкою результату вимірювання, а якнайкращою оцінкою результату об'єднаних спостережень вважають, звичайно, середнє лабораторних середніх значень.

4.4.8 Опрацювання результатів вимірювань при вимірювальному контролі несинхронності обертання кутових швидкостей. Рівняння вимірювання частот обертання із подальшим обчисленням несинхронності обертання між двома частотами обертання роторів взаємозв'язаних електродвигунів на заданих частотах має вигляд [12]

$$\Delta N_o = f(A_1, A_2, f_{\text{оп}}, z_m) = N_{o1} - N_{o2} = \frac{60f_{\text{оп}}}{A_1 z_m} - \frac{60f_{\text{оп}}}{A_2 z_m}, \quad (4.75)$$

де ΔN_o – несинхронність обертання роторів електродвигунів (ЕД);

N_{o1} – частота обертання ротора одного ЕД;

N_{o2} – частота обертання ротора іншого ЕД;

$f_{\text{оп}}$ – опорне значення частоти квантування (16 МГц);

A_1, A_2 – кількість імпульсів, що відповідає частотам обертання головного і допоміжного ЕД.

Під час вимірювання кількості імпульсів у відповідності з рівнянням (4.75) отримано три групи спостережень частот обертання в об/хв, по 16 значень в кожній групі, які наведено в табл. 4.13.

Вимірювання здійснювались в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря $+23^\circ\text{C}$. Експлуатаційні умови використання частотоміра від -30 до $+50^\circ\text{C}$. Відносна похибка квантування δN_o при вимірюванні частот обертання розраховується за формулою

$$\delta N_o = \frac{N_o z_m}{60f_{\text{оп}}}. \quad (4.76)$$

Відносна похибка опорної частоти внутрішнього генератора дорівнює $\pm 2,5 \cdot 10^{-7}$. Температурний коефіцієнт частоти опорного генератора не більше $\pm 1 \cdot 10^{-9}$ на 1°C .

Таблиця 4.13 – Результати вимірювання частот обертання головного та допоміжного ЕД

i	Перша група спостережень частот обертання головного і допоміжного ЕД		Друга група спостережень частот обертання головного і допоміжного ЕД		Третя група спостережень частот обертання головного і допоміжного ЕД	
	N_{o11}	N_{o21}	N_{o12}	N_{o22}	N_{o13}	N_{o23}
1	1195	1183	3005	2993	4889	4866
2	1201	1190	3011	3000	4883	4891
3	1199	1179	3008	2992	4888	4875
4	1188	1207	2999	2971	4869	4883
5	1192	1209	2987	2997	4867	4892
6	1197	1186	2995	3008	4877	4899
7	1199	1178	2998	3010	4850	4871
8	1178	1205	3006	2999	4862	4887
9	1186	1197	2993	2974	4873	4899
10	1194	1171	2996	2988	4859	4878
11	1193	1210	2989	2962	4884	4896
12	1204	1182	3000	2981	4876	4893
13	1200	1189	3012	2999	4855	4882
14	1203	1191	3005	2995	4859	4883
15	1205	1197	3007	3017	4861	4879
16	1198	1196	2994	2973	4877	4894

Проведемо оцінювання складових сумарної стандартної невизначеності за типом В невилучених залишків систематичної похибки результатів вимірювань.

Оскільки межі відносної похибки опорної частоти δ_{on} не перевищують $\pm 2,5 \cdot 10^{-7}$, то межі абсолютної похибки вимірювання частот обертання будуть дорівнювати

$$\Delta_{on} = \overline{N_o} \delta_{on} = \pm 2,5 \cdot 10^{-7} \cdot 3022,53 = \pm 7,56 \cdot 10^{-3} \text{ об/хв}, \quad (4.77)$$

$$\text{де } \overline{N_o} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \overline{N_{o_{jk}}} = 3052,53 \text{ об/хв}.$$

Стандартну невизначеність опорної частоти u_1 , при нормальному законі розподілу похибки всередині меж, визначимо за формулою

$$u_1 = \frac{|\Delta_{on}|}{k_p} = 3,86 \cdot 10^{-3} \text{ об/хв}, \quad (4.78)$$

де k_p – коефіцієнт охоплення при нормальному законі розподілу, який дорівнює 1,96 для довірчого рівня $p=0,95$.

Відносну стандартну невизначеність опорної частоти розрахуємо за формулою

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{|\overline{N_o}|} \cdot 100\% = 1,28 \cdot 10^{-4}\% . \quad (4.79)$$

Невизначеність квантування u_2 визначимо з меж відносної похибки квантування (4.76) за формулою

$$u_2 = \frac{z_M (\overline{N_o})^2}{60 f_{on} k_p} = 0,29 \text{ об/хв} . \quad (4.80)$$

Відносна невизначеність квантування у відповідності з (4.79) буде дорівнювати $\tilde{u}_2 = 9,64 \cdot 10^{-3}\% .$

Невизначеність u_3 , що обумовлена зміною опорної частоти при зміні температури навколишнього середовища від $+20^\circ\text{C}$ (температура калібрування частотоміра t_k) до $+23^\circ\text{C}$ (температура навколишнього середовища в момент вимірювань $t_{\text{вим}}$), обчислимо через температурний коефіцієнт частоти $k_t = \pm 1 \cdot 10^{-9}$ при нормальному законі розподілу за формулою

$$u_3 = \frac{|t_{\text{вим}} - t_k| \cdot k_t}{k_p} \overline{N_o} = 4,63 \cdot 10^{-5} \text{ об/хв} , \quad (4.81)$$

а відносна невизначеність, обумовлена зміною температури навколишнього середовища, буде дорівнювати $\tilde{u}_3 = 1,53 \cdot 10^{-6}\% .$

Сумарну стандартну невизначеність типу В несинхронності обертання головного та допоміжного ЕД, обумовлену джерелами невизначеностей, що мають випадковий характер при опосередкованих вимірюваннях частот обертання з врахуванням кореляційного зв'язку, розрахуємо за формулою

$$u_4^2 = c_1^2 u^2(\overline{N1_o}) + c_2^2 u^2(\overline{N2_o}) + 2c_1 c_2 u(\overline{N1_o}) u(\overline{N2_o}) r(\overline{N1_o}, \overline{N2_o}) . \quad (4.82)$$

Коефіцієнти чутливості (c_1 та c_2) з урахуванням рівняння (4.75) обчислимо за формулами

$$c_1 = \frac{\partial \Delta N_o}{\partial A_1} = -\frac{60f_{on}}{A_1^2 z_M} = -\frac{\overline{N1_o}^2 z_M}{60f_{on}}, \quad c_2 = \frac{\partial \Delta N_o}{\partial A_2} = \frac{60f_{on}}{A_2^2 z_M} = \frac{\overline{N2_o}^2 z_M}{60f_{on}}. \quad (4.83)$$

Стандартні невизначеності $[u(\overline{N1_o}), u(\overline{N2_o})]$ при вимірюванні частот обертання відповідно дорівнюють

$$u(\overline{N1_o}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (\overline{N_{o1j}} - \overline{N1_o})^2}{J(J-1)}}, \quad u(\overline{N2_o}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (\overline{N_{o2j}} - \overline{N2_o})^2}{J(J-1)}}. \quad (4.84)$$

Значення коефіцієнта кореляційного зв'язку між частотами обертання головного і допоміжного ЕД розрахуємо за формулою

$$r(\overline{N1_o}, \overline{N2_o}) = \frac{u(\overline{N1_o}, \overline{N2_o})}{u(\overline{N1_o})u(\overline{N2_o})}, \quad (4.85)$$

де $u(\overline{N1_o}, \overline{N2_o})$ – кореляційний момент, який обчислюється за формулою

$$u(\overline{N1_o}, \overline{N2_o}) = \frac{\sum_{j=1}^J (\overline{N_{o1j}} - \overline{N1_o})(\overline{N_{o2j}} - \overline{N2_o})}{J(J-1)}. \quad (4.86)$$

Для отримання числових значень кореляційного моменту та коефіцієнта кореляційного зв'язку розрахуємо середні значення частот обертання головного $\overline{N1_o}$ і допоміжного $\overline{N2_o}$ ЕД в діапазоні частот від 20 до 80 Гц за формулами

$$\overline{N1_o} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \overline{N_{o1j}} = 3022,21 \text{ об/хв}, \quad \overline{N2_o} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \overline{N_{o2j}} = 3022,85 \text{ об/хв}.$$

Підставивши середні арифметичні значення частот $\overline{N1_o}$ і $\overline{N2_o}$ у формулу (4.83) отримаємо такі числові значення коефіцієнтів чутливості: $c_1 = -0,5709 \text{ об/хв}$, а $c_2 = 0,5711 \text{ об/хв}$. Стандартна невизначеність вимірювання частот обертання головного ЕД, з врахуванням (4.84), буде дорівнювати $u(\overline{N1_o}) = 1060,88 \text{ об/хв}$, а допоміжного ЕД – $u(\overline{N2_o}) = 1066,38 \text{ об/хв}$. Значення кореляційного моменту у відповідності з (4.86) складає $u(\overline{N1_o}, \overline{N2_o}) = 1131288,29 \text{ об/хв}$. Підставивши значення кореляційного моменту і стандартних невизначеностей у формулу (4.85) отримаємо коефіцієнт кореляційного зв'язку, який дорівнює $r(\overline{N1_o}, \overline{N2_o}) = 0,999989$.

Таким чином, підставивши отримані числові значення коефіцієнтів у рівняння (4.82), отримаємо сумарну стандартну невизначеність типу В несинхронності обертання роторів ЕД, що складає $u_4 = 4,37$ об/хв. Відносна сумарна невизначеність типу В дорівнює $\tilde{u}_4 = 0,145\%$.

Сумарну стандартну невизначеність несинхронності обертання роторів ЕД розрахуємо за формулою

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} = 4,38 \text{ об/хв}, \quad (4.87)$$

а відносна сумарна невизначеність дорівнює $\tilde{u}_c = 0,145\%$.

З врахуванням того, що закон розподілу результатів вимірювань є нормальним і довірчий рівень складає $p=0,95$, знайдемо розширену невизначеність результатів опосередкованого визначення несинхронності обертання за формулою

$$U_{0,95} = t_{0,95}(v_{\text{eff}})u_c. \quad (4.88)$$

Ефективне число ступенів вільності v_{eff} визначимо зі співвідношення

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4}{\frac{u_1^4 + u_2^4 + u_3^4}{J-1} + \frac{u_4^4}{\infty}} = 104072, \quad (4.89)$$

і тоді коефіцієнт охоплення буде дорівнювати

$$t_{0,95}(v_{\text{eff}}) = t_{0,95}(\infty) = 1,96.$$

Підставивши значення коефіцієнта охоплення та сумарну стандартну невизначеність (4.87) в рівняння (4.88), отримаємо розширену невизначеність несинхронності обертання роторів головного і допоміжного ЕД, яка складає $U_{0,95} = 1,96 \cdot 4,38 = \pm 8,58$ об/хв, а відносна розширена невизначеність дорівнює $\tilde{U}_{0,95} = 0,28\%$.

Таким чином, результат вимірювання несинхронності обертання роторів ЕД запишемо у вигляді

$$0,73 \leq \Delta N_0 \leq 17,89 \text{ об/хв}, p = 0,95,$$

або

$$\Delta N_0 = \overline{\Delta N_0} \pm U_{0,95} = 9,31 \pm 8,58 \text{ об/хв}, p = 0,95.$$

4.4.9 Оцінювання невизначеності вимірювального каналу активності іонів. Модельне рівняння вимірювального каналу активності іонів складових елементів гумусу в ґрунті з іоноселективним вимірювальним перетворювачем має вигляд

$$\Delta U = U_0 + \frac{2,3RT}{n_A F} \lg(a_A + K_c (a_B)^{n_A/n_B}), \quad (4.90)$$

де ΔU – різниця потенціалів на виході вимірювального перетворювача;

U_0 – стандартний постійний потенціал чутливого елемента (електрода порівняння $U_0 = (201 \pm 3)$ мВ;

R – універсальна газова стала;

T – абсолютна температура;

F – число Фарадея;

n_A, n_B – заряди іонів А і В, відповідно;

a_A – активність іонів А, яку потрібно визначити;

a_B – активність іонів В, яка заважає визначенню іонів А;

K_c – коефіцієнт селективності (максимально можливе значення якого складає 10^{-1}).

Оскільки при контролі гумусового стану ґрунтів необхідно вимірювати вміст таких одновалентних речовин, як фторид, нітратний азот, амонійний азот, калій, то в рівнянні (4.90) відношення $\frac{2,3RT}{n_A F}$ є

сталою величиною, що відображає чутливість іоноселективних електродів відносно іонів А. Ця чутливість складає $S = 59,16$ мВ при температурі досліджуваного середовища 25°C .

Зміна активності іонів приводить до зміни різниці потенціалів. Для подальшого підсилення малих різниць потенціалів у вимірювальному каналі (ВК) активності іонів використовується вимірювальний підсилювач, який повинен мати:

- диференціальний вхід для зменшення дії синфазної завади;
- низький рівень нульового сигналу;
- великий коефіцієнт послаблення синфазної перешкоди.

Після підсилення вимірювальний сигнал надходить на вхід аналого-цифрового перетворювача (АЦП), де перетворюється на двійковий код N .

Таким чином, кінцевий варіант рівняння перетворення ВК активності іонів набуде вигляду:

$$N = [U_0 + S \lg(a_A + 0,1a_B)] \frac{K 2^m}{U_{\text{оп}}}, \quad (4.91)$$

де $U_{оп}$ – опорне значення напруги АЦП (5 В);

m – разрядність АЦП ($m=16$);

K – коефіцієнт підсилення.

З даних попередніх досліджень відомо, що межі невилучених залишків систематичних похибок такі:

- стандартний потенціал U_0 чутливого елемента складає $\theta_{U_0} = \pm 3$ мВ;

- значення абсолютної похибки вимірювання активності іонів складає $\theta_a = 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{моль}}{\text{дм}^3}$;

- максимальний температурний коефіцієнт зсуву підсилювача складає $0,25$ мВ/°С;

- температурний коефіцієнт опорної напруги аналого-цифрового перетворювача (АЦП) складає $k_t = 10^{-5}/^\circ\text{C}$;

- відхилення опорної напруги від номінального значення не перевищує $\theta_{U_{оп}} = \pm 0,02$ В.

Оскільки з довідкових даних невідомо за яким законом розподілу розподілена невизначеність чутливого елемента, приймаємо, що вона розподілена за рівномірним законом розподілу та розрахуємо її за формулою

$$u_{U_0} = \frac{\theta_{U_0}}{\sqrt{3}} \approx 1,73 \text{ мВ.} \quad (4.92)$$

Стандартну невизначеність абсолютної похибки вимірювання активності іонів в припущенні про нормальний закон розподілу похибки вимірювання всередині меж обчислимо за формулою

$$u_a = \frac{\theta_a}{k} \approx 2,55 \cdot 10^{-3} \frac{\text{ммоль}}{\text{дм}^3}, \quad (4.93)$$

де k – коефіцієнт охоплення для нормального розподілу, який дорівнює 1,96 для ймовірності 95%.

Сумарну стандартну невизначеність іонселективних електродів, обчислену за типом В, з урахуванням рівнянь (4.92) і (4.93), визначимо за формулою

$$u_{\text{ВПС}}^2 = \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial U_0} \right)^2 u_{U_0}^2 + \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial a_A} \right)^2 u_a^2 + \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial a_B} \right)^2 u_a^2, \quad (4.94)$$

де $\frac{\partial \Delta U}{\partial U_0} = 1$ – коефіцієнт чутливості стандартного потенціалу;

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial a_A} = \frac{S}{2,3(a_A + K_c a_B)} - \text{коефіцієнт чутливості активності іонів А, який}$$

для нижнього діапазону вимірювань ($D_{\min} = 10^{-6}$ моль/дм³) складає 23383,4 Вдм³/моль;

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial a_B} = \frac{K_c S}{2,3(a_A + K_c a_B)} - \text{коефіцієнт чутливості активності іонів В, що}$$

заважають визначенню вимірюваних іонів А, який для нижнього діапазону вимірювань ($D_{\min} = 10^{-6}$ моль/дм³) складає 2338,34 Вдм³/моль.

Підставивши розраховані значення коефіцієнтів чутливості в рівняння (4.94) отримаємо сумарну стандартну невизначеність іоноселективних електродів, яка складе $u_{\text{ВПС}} \approx 60$ мВ.

Оскільки вимірювання можуть проводитися при зміні температури навколишнього середовища від 5 до 40 °С, максимальна зміна температури при цьому складає $\Delta t = 35$ °С, то, враховуючи температурний коефіцієнт зсуву підсилювача 0,25 мВ/°С, напруга зміщення складе $U_{\text{см}} = 35^\circ\text{C} \cdot 0,25 \text{ мВ}/^\circ\text{C} = 8,75$ мВ. При відомому коефіцієнті підсилення $K = 10$, максимальне значення напруги зсуву буде рівним $U_{\text{смmax}} = U_{\text{см}} \cdot K = 87,5$ мВ. Враховуючи максимальне вихідне значення напруги підсилювача $U_{\text{вих}} = \pm 5$ В, його максимальну відносну похибку можна розрахувати за формулою

$$\delta_K = \frac{U_{\text{смmax}}}{2U_{\text{вих}}} = 8,75 \cdot 10^{-3}. \quad (4.95)$$

Розрахувавши максимальну відносну похибку підсилювача, стандартну невизначеність, яка вноситься підсилювачем при вимірюванні активності іонів в припущенні про нормальний закон розподілу, розрахуємо за формулою:

$$u_K = \frac{\Delta U_{\text{max}} \delta_K}{k} \approx 0,83 \text{ мВ}, \quad (4.96)$$

де ΔU_{max} – максимальна різниця потенціалів, яка відповідає максимальній активності іонів (максимальний діапазон вимірювання ВК складає $D_{\text{max}} = 0,5$ моль/дм³) при максимально можливій активності заважаючих іонів В.

Невизначеність $u_{\text{ОП}}(\Delta t)$, обумовлену змінами опорної напруги джерела при зміні температури навколишнього середовища від 20 °С

(температура калібрування джерела опорного значення напруги АЦП t_1) до 35°C (максимально можлива зміна температури досліджуваного середовища Δt), обчисленої через температурний коефіцієнт, в припущенні про рівномірний розподіл меж, розрахуємо за формулою

$$u_{\text{оп}}(\Delta t) = \frac{k_t(\Delta t - t_1)}{\sqrt{3}} U_{\text{оп}} \approx 0,43 \text{ мВ}. \quad (4.97)$$

Невизначеність $u_{\text{оп}}(\theta)$, що обумовлена відхиленням опорної напруги від номінального значення, в припущенні про рівномірний розподіл, буде рівною

$$u_{u_0} = \frac{\theta_{U_{\text{оп}}}}{\sqrt{3}} \approx 11,55 \text{ мВ}. \quad (4.98)$$

Таким чином, сумарна стандартна невизначеність джерела опорної напруги АЦП, яка складається з невизначеностей, розрахованих за формулами (4.97) і (4.98), буде рівною

$$u_{\text{опs}} = \sqrt{(u_{\text{оп}}(t))^2 + (u_{u_0})^2} \approx 11,56 \text{ мВ}. \quad (4.99)$$

Стандартну невизначеність u_h , вносиму процесом квантування напруги, що надходить на вхід АЦП, в припущенні про рівномірний закон розподілу, визначимо так

$$u_h = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{U_{\text{оп}}}{2^m \sqrt{3}} \approx 44,05 \text{ мкВ}. \quad (4.100)$$

Враховуючи розраховані за формулами (4.94), (4.96), (4.99) і (4.100) стандартні невизначеності на кожному з етапів перетворення, сумарну стандартну невизначеність ВК активності іонів обчислимо за формулою

$$u_s = \sqrt{u_{\text{ВПС}}^2 + u_K^2 + u_{\text{опs}}^2 + u_h^2} \approx 61,11 \text{ мВ}. \quad (4.101)$$

Таким чином, аналізуючи отримані результати, видно, що максимальну невизначеність має первинний іонселективний вимірювальний перетворювач.

Припустивши, що сумарний закон розподілу ВК є нормальним з довірчим рівнем не нижче 0,95, розрахуємо розширену невизначеність ВК активності іонів за формулою

$$U_{0,95} = k u_s. \quad (4.102)$$

Підставивши значення коефіцієнта охоплення k та сумарну стандартну невизначеність (4.101) в рівняння (4.102), отримаємо розширену невизначеність вимірювального каналу активності іонів, яка складає $U_{0,95} = 1,96 \cdot 61,11 = \pm 119,78$ мВ.

Отже, на підставі довідкових даних і даних попередніх досліджень, проведено оцінювання невизначеності ВК активності іонів, яка в діапазоні вимірювання від 10^{-6} до $0,5$ моль/дм³ не перевищує 62 мВ при максимальній активності заважаючих іонів В.

4.4.10 Оцінювання невизначеності комп'ютерно-вимірювальної системи контролю якості електроенергії. Для вимірювального контролю показників якості електроенергії (ЕЕ) розроблено комп'ютерно-вимірювальну систему, функціональна схема якої подана на рис. 4.6.

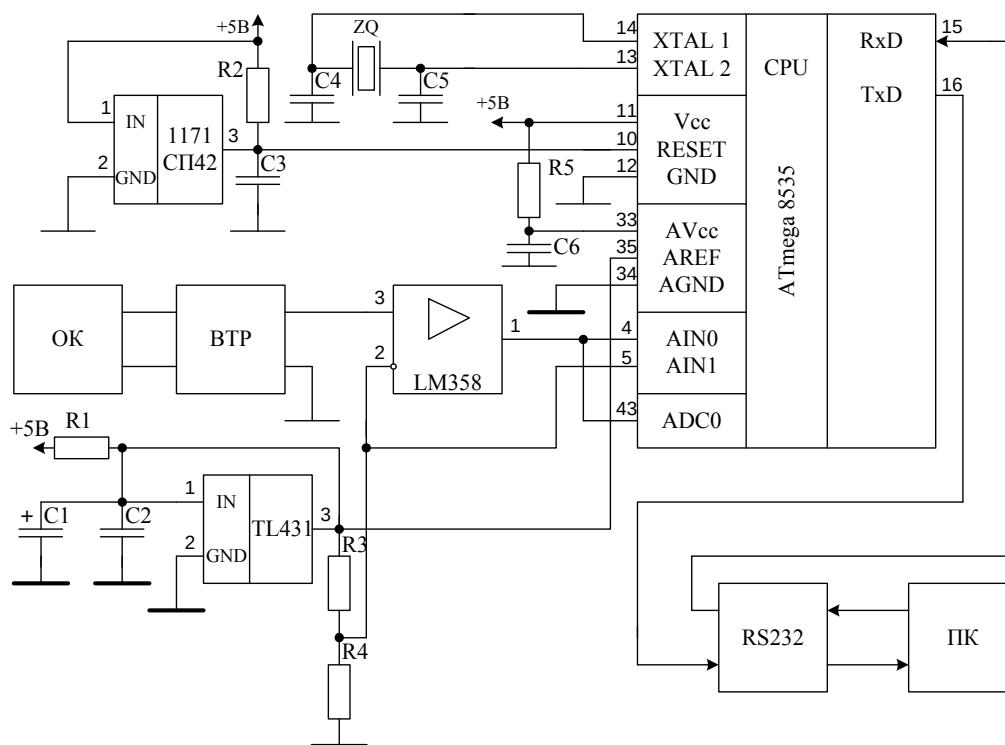


Рисунок 4.6 – Функціональна схема комп'ютерно-вимірювальної системи контролю якості електроенергії

Як видно з рис. 4.6, до складу комп'ютерно-вимірювальної системи входять: вимірювальний трансформатор (ВТР), який здійснює зниження змінної напруги електричної мережі до рівня 5 В, а також служить гальванічною розв'язкою між об'єктом контролю (ОК) і персональним комп'ютером (ПК); операційний підсилювач (ОП) типу LM358, що здійснює масштабування зниженої змінної напруги в діапазон роботи напруги АЦП, який вбудовано в мікроконтролер Atmega 8535; джерело

опорної напруги на мікросхемі типу TL431, що забезпечує стабілізацію постійної напруги +5 В; подільник постійної напруги на резисторах R3 і R4 для задання коефіцієнта масштабування; схема моніторингу скидання на мікросхемі типу 1171 СП42 для скидання мікроконтролера при зниженні постійної напруги живлення нижче рівня 4 В; послідовний інтерфейс RS232 для передавання даних до ПК, як такий може бути використана мікросхема типу ADM232LIN або MAX202E.

Для вимірювального контролю вказаних показників якості ЕЕ потрібно два вимірювальних канали (ВК). Один для вимірювання частоти змінної напруги, а другий для вимірювання миттєвих значень амплітуди змінного сигналу з подальшим усередненням. При визначенні часових параметрів послідовність перетворень у частотному ВК можна подавати у вигляді

$$\dot{O}_0 \rightarrow T_x f_0 \rightarrow N_T, \quad (4.103)$$

де T_x – період зміни напруги в електричній мережі, що після масштабування ОП подається на вхід AIN0 мікроконтролера; f_0 – частота зразкових імпульсів кварцового резонатора (ZQ); N_T – кількість імпульсів, що заповнили невідомий період T_x (рис. 4.6).

Як видно з (4.103), спочатку невідомий період синусоїди T_x ділиться на два, тобто аналоговий компаратор мікроконтролера на рівні 2,5 В формує за переднім фронтом період, який дорівнює півперіоду вимірюваної величини. Потім сформований компаратором період заповнюється імпульсами зразкової частоти f_0 , які підраховуються таймер-лічильником мікроконтролера, на виході якого формується значення у вигляді бінарного коду N_T , яке потім необхідно домножити на два. Це значення передається через послідовний порт до ПК, який зберігає виміряні значення в файл та визначає відхилення часових параметрів і виводить їх на екран монітора. Таким чином, рівняння перетворення частотного ВК буде мати вигляд

$$N_T = f_0 T_x = \frac{f_0}{f_x}. \quad (4.104)$$

Для визначення параметрів напруги використовується другий ВК, який має таку послідовність перетворень (див. рис. 4.6)

$$U_x \rightarrow \frac{U_x}{k} \rightarrow \left(\frac{U_x}{k} + \frac{U_0}{2} \right) \rightarrow \frac{\left(\frac{U_x}{k} + \frac{U_0}{2} \right)}{h} \rightarrow N_u, \quad (4.105)$$

де U_x – невідома напруга електричної мережі; k – коефіцієнт трансформації; U_0 – опорна напруга АЦП; h – крок квантування АЦП; N_u – значення напруги у бінарному коді.

З урахуванням того, що крок квантування $h=U_0/2^n$, де n – розрядність АЦП мікроконтролера, рівняння перетворення ВК миттєвих значень напруги має вигляд

$$N_u = \frac{2^n}{k \cdot U_0} \cdot U_x. \quad (4.106)$$

Оскільки дана комп'ютерно-вимірювальна система складається з двох ВК, то оцінимо складові невизначеностей окремо за частотним ВК і за ВК напруги. При вимірюванні частоти стандартна невизначеність типу В складається з невизначеності квантування періоду u_1 , невизначеності u_2 , що обумовлена зміною опорної частоти при зміні температури навколишнього середовища, та невизначеності u_3 , що обумовлена наявністю часом відгуку аналогового компаратора мікроконтролера на появу вхідного сигналу. А при вимірюванні напруги стандартна невизначеність типу В складається з невизначеності трансформації u_4 , невизначеності ОП u_5 , невизначеності квантування АЦП u_6 та невизначеності, що обумовлена похибкою, яка існує у зв'язку з наявністю зони нечутливості АЦП, що вбудований в мікроконтролер (дозволяючою здатністю лише в 10 двійкових розрядів) u_7 .

Оскільки середнє значення частоти загального призначення $\bar{f}_x$, відповідно до стандарту, складає 50 Гц, що відповідає вимірюваному періоду 20 мс, і може змінюватись в допустимих межах від 48 до 52 Гц (від 19,23 до 20,83 мс), а частота кварцового резонатора складає 8 МГц, то невизначеність квантування періоду u_1 в припущенні про рівномірний закон розподілу визначимо шляхом прирівняння зведеної похибки частотного ВК $\gamma = \Delta 100\%/f_{\text{хн}}$ до відносної похибки квантування $\delta = 100\%/N_T$ за формулою

$$u_1 = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}, \quad (4.107)$$

де $\Delta = f_{\text{хн}}/N_T = f_{\text{хн}} \bar{f}_x / f_0$ – межі невилученої систематичної похибки частотного ВК; $f_{\text{хн}}$ – нормоване значення частоти, що для даної мети складає 52 Гц; $\bar{f}_x$ – середнє значення частоти, що складає 50 Гц.

Підставляючи відомі частотні параметри у рівняння (4.107), отримаємо таке значення стандартної невизначеності квантування періоду

$$u_1 = f_{\text{хн}} \frac{\bar{f}_x}{f_0 \sqrt{3}} = 52 \frac{50}{8 \cdot 10^6 \sqrt{3}} \approx 1,88 \cdot 10^{-4} \text{ Гц.}$$

Невизначеність u_2 , що обумовлена зміною опорної частоти при зміні температури навколишнього середовища від $t_1 = 15^\circ\text{C}$ до $t_2 = 25^\circ\text{C}$, розрахуємо через температурний коефіцієнт опорної частоти $k = \pm 10^{-9}$ на 1°C при рівномірному законі розподілу за формулою

$$u_2 = \frac{k|t_2 - t_1|}{\sqrt{3}} f_{\text{х max}} = 53 \frac{|25 - 15| 10^{-9}}{1,73} \approx 0,29 \cdot 10^{-6} \text{ Гц.} \quad (4.108)$$

Невизначеність u_3 , що обумовлена наявністю певного часу відгуку аналогового компаратора мікроконтролера на появу вхідного сигналу, який відповідно до специфікації на мікроконтролер не перевищує $0,5 \text{ мкс}$, розрахуємо аналогічно рівнянню (4.107)

$$u_3 = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}} \approx 0,29 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Оскільки значення стандартних невизначеностей частотного ВК мають різну розмірність, то підсумовувати їх не можна. Тому зведемо розраховані вище невизначеності до безрозмірних величин – відносних невизначеностей:

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{\bar{f}_x} = 3,76 \cdot 10^{-6}; \quad (4.109)$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{0,29 \cdot 10^{-6}}{50} = 5,8 \cdot 10^{-9};$$

$$\tilde{u}_3 = \frac{u_3}{T_x} = \frac{0,29 \cdot 10^{-6}}{0,02} = 1,45 \cdot 10^{-5}. \quad (4.110)$$

Отже, рівняння для оцінювання відносної сумарної невизначеності частотного ВК має вигляд

$$\tilde{u}_{\text{cf}_x} = \sqrt{\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} = \sqrt{(3,76 \cdot 10^{-6})^2 + (5,8 \cdot 10^{-9})^2 + (1,45 \cdot 10^{-5})^2} \approx$$

$$\approx 1,5 \cdot 10^{-5} = 1,5 \cdot 10^{-3} \% . \quad (4.111)$$

Сумарна невизначеність вимірювання частотних параметрів розраховується за формулою

$$u_{cf_x} = \bar{f}_x \cdot \tilde{u}_{cf_x} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ Гц}. \quad (4.112)$$

Для розрахунку розширеної невизначеності необхідно вибрати коефіцієнт охоплення, який визначається через число ступенів вільності, яке для невизначеностей типу В дорівнює нескінченності, а коефіцієнт охоплення при довірчому рівні 0,95 складає 1,96. Таким чином, розширена невизначеність буде дорівнювати

$$U_f = 1,96 u_{cf_x} = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ Гц}. \quad (4.113)$$

Отже, результат вимірювання частоти мережі живлення загального призначення з урахуванням правил заокруглення потрібно подати у вигляді

$$f_x = \bar{f}_x \pm U_f = 50 \pm 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ Гц, при } p = 0,95.$$

ВК напруги характеризується такими параметрами: середнє значення змінної вхідної напруги $\bar{U}_x$, відповідно до стандарту, складає $220 \text{ В}_{-15\%}^{+10\%}$, напруга на вторинній обмотці ВТР складає 5 В, клас точності ВТР, відповідно до специфікації, складає $\gamma = 0,05$, опорна напруга АЦП мікроконтролера дорівнює $U_0 = 5 \text{ В}$, а розрядність АЦП $n = 10$.

З урахуванням наведених вище параметрів стандартну невизначеність трансформації u_4 , в припущенні про нормальний закон розподілу і довірчий рівень 0,95 (при цьому коефіцієнт охоплення $k_p = 1,96$), розрахуємо за формулою

$$u_4 = \frac{\gamma \bar{U}_x}{100\% k_p} = \frac{0,11}{1,96} \approx 0,06 \text{ В}. \quad (4.114)$$

При можливій зміні температури навколишнього середовища на $\Delta t = 10^\circ \text{C}$ та дрейфу напруги зміщення нуля ОП, який дорівнює $3 \text{ мкВ}/^\circ \text{C}$, розрахуємо напругу зміщення, яка складає $U_{зм} = 10^\circ \text{C} \cdot 3 \text{ мкВ}/^\circ \text{C} = 30 \text{ мкВ}$. При відомому коефіцієнті підсилення $K = 1$ знайдемо максимальну напругу зміщення, що дорівнює $U_{зм\max} = U_{зм} \cdot K = 30 \text{ мкВ}$. Знаючи максимальну вихідну напругу підсилювача $\Delta U_{\text{вих}} = 5 \text{ В}$, максимальна відносна похибка ОП буде рівною

$$\delta_n = \frac{U_{зм\max}}{\Delta U_{вих}} \cdot 100\% = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{5} \cdot 100\% \approx 0,6 \cdot 10^{-3}\%. \quad (4.115)$$

Знаючи максимальну відносну похибку ОП, максимальна абсолютна похибка, що вноситься ОП, дорівнюватиме

$$\Delta_{n\max} = \frac{U_x \delta_n}{100} = \frac{5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3}}{100} \approx 0,03 \cdot 10^{-3} \text{ В}. \quad (4.116)$$

Тоді стандартна невизначеність, що вноситься ОП у результат вимірювань в припущенні про нормальний закон розподілу, похибки всередині меж складає

$$u_5 = \frac{|\Delta_{n\max}|}{k_p} = \frac{0,03 \cdot 10^{-3}}{1,96} \approx 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ В}, \quad (4.117)$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для нормального закону розподілу і довірчого рівня 0,95 дорівнює 1,96.

Невизначеність квантування АЦП u_6 в припущенні про рівномірність закону розподілу визначимо за формулою

$$u_6 = \frac{kU_0}{2^n \sqrt{3}} = \frac{U_2 U_0}{U_{1\max} 2^n \sqrt{3}} = \frac{5 \cdot 5}{1,73 \cdot 242 \cdot 2^{10}} \approx 0,06 \cdot 10^{-3} \text{ В}, \quad (4.118)$$

де U_2 – максимальна напруга у вторинній обмотці ВТР (5 В), $U_{1\max}$ – максимальна напруга у первинній обмотці ВТР (220 В + 10 % = 242 В).

Відповідно до технічної документації на вбудований в мікроконтролер АЦП він має похибку, що існує у зв'язку з наявністю зони нечутливості в діапазоні вимірювання АЦП, і яка для роздільної здатності в 10 двійкових розрядів складає $\Delta_s = 5$ мВ – найменше значення, яке може бути виміряне АЦП (нижня межа діапазону вимірювання). У зв'язку з наявністю такого обмеження виникає невизначеність u_7 , що обумовлена існуванням зони нечутливості, яку розрахуємо за формулою

$$u_7 = \frac{\Delta_s}{\sqrt{12}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{3,46} = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ В}, \quad (4.119)$$

Сумарна стандартна невизначеність ВК напруги, складатиметься із чотирьох складових, що розраховані за формулами (4.114), (4.117 – 4.119) та визначається за формулою

$$u_{cU_x} = \sqrt{u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2} = \\ = \sqrt{0,06^2 + (0,02 \cdot 10^{-3})^2 + (0,06 \cdot 10^{-3})^2 + (1,45 \cdot 10^{-3})^2} \approx 0,06 \text{ В. (4.120)}$$

Розширену невизначеність розрахуємо за формулою (4.113) і для ВК напруги вона буде дорівнювати 0,12 В при довірчому рівні 0,95.

Відносне значення сумарної невизначеності ВК напруги складає $\tilde{u}_{U_x} = u_{cU_x} 100\% / \bar{U}_x = 0,06 \cdot 100\% / 220 \approx 0,03\%$.

Результат вимірювання параметрів напруги мережі живлення загального призначення з врахуванням правил заокруглення запишемо у вигляді

$$U_x = \bar{U}_x \pm U = 220 \pm 0,12 \text{ В, при } p = 0,95.$$

Отже, проведене оцінювання невизначеностей комп'ютерно-вимірювальної системи контролю якості електроенергії показало, що відносна сумарна невизначеність частотного ВК не перевищує $1,5 \cdot 10^{-3} \%$, а відносна сумарна невизначеність каналу для вимірювання напруги не перевищує 0,03%.

4.4.11 Оцінювання невизначеності вимірювання моменту інерції ротора за амплітудою крутильних коливань. Модельне рівняння для визначення моменту інерції ротора за амплітудою крутильних коливань має вигляд [27]

$$J = m \left(\frac{\varepsilon \omega_c^2}{\Omega_p^2 - \omega_c^2} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{A_\phi} \right), \quad (4.121)$$

де m – маса ротора; ε – ексцентриситет маси ротора; Ω_p – власна резонансна частота об'єкта контролю; ω_c – середнє значення кутової швидкості; A_ϕ – амплітуда крутильних коливань.

З довідкових даних знаємо, що маса ротора відома з високою точністю і складає $(0,116 \pm 0,0015)$ кг, також відомо, що відносна похибка при вимірюванні максимального ексцентриситету маси ротора, який дорівнює 158 мкм, не перевищує 5%, а власна резонансна частота конічних роторних систем з газоманітним підвісом може складати (90 ± 10) Гц.

Експериментальні значення середньоквадратичних відхилень (СКВ) похибки вимірювання кутової швидкості при багаторазових вимірюваннях та різних періодах дискретизації трьох груп спостережень такі: $\sigma_{\omega 1} = 5,52$ рад/с, $\sigma_{\omega 2} = 2,11$ рад/с та $\sigma_{\omega 3} = 1,72$ рад/с.

Оскільки ми маємо 3 групи багаторазових вимірювань по 1000 спостережень в кожній з груп, то знайдемо середнє арифметичне значення середньоквадратичних відхилень за формулою

$$\bar{\sigma}_{\omega} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_{\omega n} = \frac{5,52 + 2,11 + 1,72}{3} = 3,11 \text{ рад/с.} \quad (4.122)$$

Експериментальну невизначеність типу А 3-х груп СКВ розрахуємо за формулою

$$u_{A\omega} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\sigma_{\omega n} - \bar{\sigma}_{\omega})^2} = 2,09 \text{ рад/с.} \quad (4.123)$$

Далі визначимо чи є міжгрупова складова дисперсії значною в порівнянні з внутрішньогруповою складовою. Для цього визначимо першу оцінку, яка позначається як s_I^2 , в припущенні того, що міжгрупова дисперсія дорівнює нулю

$$s_I^2 = Ku_{A\omega}^2 = \frac{K}{N-1} \sum_{n=1}^N (\sigma_{\omega n} - \bar{\sigma}_{\omega})^2 = 4375,1 \text{ (рад/с)}^2. \quad (4.124)$$

Така оцінка має $N - 1$ ступенів вільності.

Друга оцінка позначається як s_{II}^2 , є середньою оцінкою дисперсії, отриманої з N індивідуальних значень внутрішньогрупової дисперсії. Оскільки структура врівноважена і всі ступені вільності $v_n = K - 1$, то оцінкою s_{II}^2 є середнє арифметичне $\sigma_{\omega n}^2(\sigma_{\omega k})$

$$s_{II}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_{\omega n}^2(\sigma_{\omega k}) = \frac{5,52^2 + 2,11^2 + 1,72^2}{3} = 12,65 \text{ (рад/с)}^2. \quad (4.125)$$

Друга оцінка має $N(K - 1)$ ступенів вільності.

Для порівнянь оцінок s_I^2 та s_{II}^2 використовують F-тест. Відомо, що F-розподіл складових є розподілом вірогідностей відношення

$$F(v_I, v_{II}) = \frac{s_I^2(v_I)}{s_{II}^2(v_{II})} = \frac{4375,1}{12,64} \approx 346. \quad (4.126)$$

Оскільки оцінка $s_I^2(v_I)$ є більшою за оцінку $s_{II}^2(v_{II})$, то це означає, що існує міжгрупова дисперсія і припускається, що вона випадкова. Тоді оцінена дисперсія $\bar{\sigma}_{\omega}$ отримується з $u_{A\omega}^2$, оскільки вона належним чином відображає як внутрішньогрупову, так і міжгрупову випадкові складові

дисперсії. Таким чином, стандартна невизначеність вимірювання кутових швидкостей, що оцінена за типом А, буде визначатися за виразом

$$u_{A\omega}^2(\overline{\sigma}_{\omega}) = \frac{u_{A\omega}^2}{N} \quad (4.127)$$

і з урахуванням (4.123) буде дорівнювати

$$u_{A\omega}(\overline{\sigma}_{\omega}) = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (\sigma_{\omega n} - \overline{\sigma}_{\omega})^2}{N(N-1)}} = 1,21 \text{ рад/с.} \quad (4.128)$$

З експериментальних даних відомо, що амплітудне значення крутильних коливань складає $\pm 8 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Стандартну невизначеність вимірювання крутильних коливань розрахуємо за формулою

$$u_{A\varphi}(\overline{A}_{\varphi}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_{\varphi i} - \overline{A}_{\varphi})^2}{n(n-1)}} = 7,79 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с.} \quad (4.129)$$

Стандартну невизначеність типу В, що вноситься за рахунок неточного вимірювання маси ротора, в припущенні рівномірного закону розподілу, оцінимо за формулою

$$u_{Bm} = \frac{\pm \Delta_m}{\sqrt{3}} = \frac{\pm 0,0015}{1,73} \approx \pm 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ кг.} \quad (4.130)$$

Стандартну невизначеність, що вноситься відхиленнями резонансної частоти конічних роторних систем, в припущенні про нормальний закон розподілу всередині меж, оцінимо за формулою

$$u_{B\Omega} = \frac{\theta_p}{k_p} = \frac{10}{1,96} \approx 5,1 \text{ Гц,} \quad (4.131)$$

де k_p – коефіцієнт охоплення для нормального закону розподілу, який дорівнює 1,96 для вірогідності $P=0,95$.

Стандартна невизначеність вимірювання ексцентриситету маси ротора, що оцінена за типом В, в припущенні про нормальний закон розподілу похибки всередині границь, буде дорівнювати

$$u_{B\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\max} \delta_{\varepsilon}}{k_p 100 \%} = \frac{158 \cdot 5\%}{1,96 \cdot 100 \%} \approx 4,03 \text{ мкм.} \quad (4.132)$$

Комбіновану стандартну невизначеність опосередкованого вимірювання моменту інерції ротора, з урахуванням кореляційного зв'язку між кутовою швидкістю та крутильними коливаннями, розрахуємо за формулою

$$u_s^2(J) = \left(\frac{\partial J}{\partial \omega_c} \right)^2 u_{A\omega}^2(\bar{\sigma}_{\omega}) + \left(\frac{\partial J}{\partial A_{\varphi}} \right)^2 u_{A_{\varphi}}^2(\bar{A}_{\varphi}) + \left(\frac{\partial J}{\partial m} \right)^2 u_{Bm}^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \right)^2 u_{B\varepsilon}^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega_p} \right)^2 u_{B\Omega}^2 + \\ + 2 \frac{\partial J}{\partial \omega_c} \frac{\partial J}{\partial A_{\varphi}} u_{A\omega}(\bar{\sigma}_{\omega}) u_{A_{\varphi}}(\bar{A}_{\varphi}) r(\sigma_{\omega}, A_{\varphi}), \quad (4.133)$$

де $\frac{\partial J}{\partial \omega_c} = 4 \frac{m \varepsilon^2 \omega_c^3}{(\Omega_p^2 - \omega_c^2)^2} \left(1 + \frac{1}{A_{\varphi}} \right) + 4 \frac{m \varepsilon^2 \omega_c^5}{(\Omega_p^2 - \omega_c^2)^3} \left(1 + \frac{1}{A_{\varphi}} \right)$ – коефіцієнт чутливості за кутовою швидкістю, який дорівнює $-0,467 \cdot 10^{-10}$ кг·с·м²/рад при максимальній кутовій швидкості 10 000 рад/с та максимальному значенню крутильного коливання $8 \cdot 10^{-5}$ рад/с і вказаних вище параметрах, що входять у рівняння для визначення моменту інерції;

$\frac{\partial J}{\partial A_{\varphi}} = -\frac{m \varepsilon^2 \omega_c^4}{(\Omega_p^2 - \omega_c^2)^2 A_{\varphi}^2}$ – коефіцієнт чутливості за крутильними коливаннями, який дорівнює $-0,455$ кг·с·м²/рад при аналогічних параметрах роторної системи;

$\frac{\partial J}{\partial m} = \frac{\varepsilon^2 \omega_c^4}{(\Omega_p^2 - \omega_c^2)^2} \left(1 + \frac{1}{A_{\varphi}} \right)$ – коефіцієнт чутливості за масою ротора буде дорівнювати $0,31 \cdot 10^{-3}$ м² при аналогічних параметрах роторної системи;

$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = 2 \frac{m \varepsilon \omega_c^4}{(\Omega_p^2 - \omega_c^2)^2} \left(1 + \frac{1}{A_{\varphi}} \right)$ – коефіцієнт чутливості за ексцентриситетом маси ротора буде дорівнювати $0,4612$ кг·м при аналогічних параметрах роторної системи;

$\frac{\partial J}{\partial \Omega_p} = -4 \frac{\Omega_p m \varepsilon^2 \omega_c^4}{(\Omega_p^2 - \omega_c^2)^3} \left(1 + \frac{1}{A_{\varphi}} \right)$ – коефіцієнт чутливості за ексцентриситетом маси ротора буде дорівнювати $0,83 \cdot 10^{-9}$ кг·с·м² при аналогічних параметрах роторної системи;

$r(\sigma_{\omega}, A_{\varphi})$ – коефіцієнт кореляції, який розраховується за формулою

$$r(\sigma_{\omega}, A_{\varphi}) = \frac{\sum_{k=1}^n (\sigma_{\omega k} - \bar{\sigma}_{\omega})(A_{\varphi k} - \bar{A}_{\varphi})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (\sigma_{\omega k} - \bar{\sigma}_{\omega})^2 \sum_{k=1}^n (A_{\varphi k} - \bar{A}_{\varphi})^2}} = -0,99. \quad (4.134)$$

Як видно з розрахунків, існує сильний кореляційний зв'язок між крутильними коливаннями та кутовою швидкістю ротора. Таким чином, підставляючи розраховані значення коефіцієнта кореляції та коефіцієнтів чутливості у формулу (4.133), отримаємо оцінку комбінованої невизначеності опосередкованого вимірювання моменту інерції ротора, яка складає $u_s(J) = 0,4 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Розширену невизначеність результату опосередкованого вимірювання моменту інерції визначимо за формулою

$$U = t_p(v_{\text{eff}}) u_s(J), \quad (4.135)$$

де $t_p(v_{\text{eff}})$ – коефіцієнт Стюдента для заданого рівня довіри p і числа ступенів вільності v_{eff} , що розраховується за виразом

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_s^4(J)}{\frac{\left(\frac{\partial J}{\partial A_{\varphi}}\right)^4 u(\bar{A}_{\varphi})^4 + \left(\frac{\partial J}{\partial \omega_c}\right)^4 u(\bar{\sigma}_{\omega})^4}{v_i}}, \quad (4.136)$$

де $v_i = n - 1$ для невизначеностей, визначених за типом А; $v_i = \infty$ для невизначеностей, визначених за типом В.

Підставляючи розраховані невизначеності у формулу (4.136), отримаємо таке значення кількості ступенів вільності $v_{\text{eff}} = 1638$. Коефіцієнт Стюдента при такій кількості ступенів вільності та довірчому рівні 0,95 буде дорівнювати 1,96.

Таким чином, розширена невизначеність опосередкованого вимірювання моменту інерції за амплітудою крутильних коливань на високих кутових швидкостях (до 10 000 рад/с) складає

$$U = \pm 1,96 \cdot 0,4 \cdot 10^{-5} = \pm 0,79 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \text{ при } p = 0,95.$$

Отже, на основі проведених вимірювань кутової швидкості і амплітуди крутильних коливань оцінено комбіновану невизначеність

опосередкованого вимірювання моменту інерції ротора та встановлено, що вона не перевищує $0,4 \cdot 10^{-5}$ кг·м² при ймовірності 0,95, а стандартна розширена невизначеність вимірювання моменту інерції ротора складає $\pm 0,79 \cdot 10^{-5}$ кг·м².

4.5 Рекомендації щодо складання звіту про невизначеність

В цілому, при складанні звіту за ієрархією вимірювань потрібно все більше подробиць про те, як були отримані результати вимірювання і його невизначеності. Проте на будь-якому рівні цієї ієрархії, охоплюючи комерційну і регульовальну діяльність на ринку, інженерну роботу в промисловості, калібрувальні послуги більш низького рівня, промислові дослідження і розробки, академічні дослідження, промислові первинні еталони і калібрувальні лабораторії, національні лабораторії еталонів і МБМВ, вся інформація, яка необхідна для повторного оцінювання вимірювання, повинна бути доступна для тих, кому вона може бути потрібною. Глибинна різниця полягає в тому, що на більш низьких рівнях ієрархії велика частина необхідної інформації може бути зроблена доступною у формі опублікованих звітів щодо калібрування і випробувань, специфікацій з випробувань, сертифікатів про калібрування і випробування, посібників з експлуатації, міжнародних і національних стандартів і локальних регульовальних актів.

Коли подробиці щодо вимірювання, враховуючи й те, як була оцінена невизначеність його результату, забезпечуються посиланням на існуючі документи, як це часто буває у випадку, коли результати калібрування наводяться в сертифікаті, обов'язково необхідно, щоб ці документи підтримувалися на сучасному рівні так, щоб вони відповідали безпосередньо використовуваним на даний час процедури вимірювання.

Велике число вимірювань проводиться щодня в промисловості і торгівлі без яких-небудь розгорнутих звітів щодо невизначеності. Проте більшість з них проводиться за допомогою ЗВТ, що підлягають періодичному калібруванню або узаконеній повірці. Якщо відомо, що використовувані ЗВТ відповідають їхнім специфікаціям або існуючим нормативним документам, що на них поширюються, то невизначеності їхніх показань можуть бути взяті з цих специфікацій або нормативних документів.

При складанні звіту щодо результатів вимірювань і його невизначеностей краще дати занадто багато інформації, ніж занадто мало.

Тому при складанні звітів щодо невизначеностей потрібно [2, 11]:

1) зрозуміло описати методи, що використовувалися для обчислення результату вимірювання і його невизначеності з експериментальних спостережень і вхідних даних;

2) перерахувати всі складові невизначеностей і детально описати як вони оцінювалися;

3) подати аналіз даних таким чином, щоб можна було легко додержуватись всіх його важливих етапів і в разі потреби незалежно повторити обчислення результатів, що подаються;

4) дати всі значення та методи отримання поправок і константи, що використовувалися в аналізі.

Для того, щоб перевірити наведений вище список, потрібно запитати себе: «Чи дав я достатньо інформації в достатньо зрозумілому вигляді для того, щоб мій результат можна було поліпшити в майбутньому, якщо з'явиться нова інформація або нові дані?».

Форму виразів із знаком « $\pm$ » слід, по можливості, уникати, оскільки традиційно вона використовується для вказання інтервалу, що відповідає високому рівню довіри, і, отже, може бути сплутана з розширеною невизначеністю.

Коли вказується результат вимірювання і мірою невизначеності є розширена невизначеність $U = k u_c(y)$, потрібно:

а) дати повний опис, як визначена вимірювана величина Y ;

б) зазначити результат вимірювання, як $Y = y \pm U$ і навести одиниці для y та U ;

в) використовувати відносну розширену невизначеність $U/|y|$, $|y| \neq 0$, коли це можливо;

г) дати значення k , яке використовувалось для одержання U (або дати і k , і $u_c(y)$ для зручності тих, хто використовує результат);

д) навести приблизний довірчий рівень, пов'язаний з інтервалом $y \pm U$ і зазначити, як він був визначений.

Якщо процедура вимірювання визначає одночасно більше однієї вимірюваної величини, тобто якщо вона дає значення двох або більше вихідних оцінок y_i , то, крім y_i і $u_c(y_i)$, для кожної оцінки потрібно дати елементи коваріаційної матриці $u(y_i, y_j)$ або елементи $r(y_i, y_j)$ матриці коефіцієнтів кореляції, а краще і ті, й інші.

Чисельні значення оцінки y та її стандартної невизначеності $u_c(y)$ або розширеної невизначеності U не варто давати з дуже великим числом цифр. Зазвичай, достатньо навести $u_c(y)$ і U з двома значущими цифрами, хоча в деяких випадках може необхідно зберегти додаткові цифри для того, щоб уникнути похибок округлення в наступних розрахунках.

При повідомленні остаточних результатів іноді слід округлити невизначеності в бік збільшення, а не до найближчої цифри. Наприклад, $u_c(y) = 10,47$ мкОм можна округлити до 11 мкОм. Однак здоровий глузд повинен узяти гору, і таке значення, як $u(x_i) = 28,05$ кГц варто округлити до 28 кГц. Вихідні і вхідні оцінки повинні округлятися так, щоб відповідати своїм невизначеностям, наприклад, якщо $y = 10,05762$ Ом з невизначеністю $u(y) = 21$ мОм, то числове значення y слід округлити до 10,058 Ом.

Коефіцієнти кореляції повинні даватися з точністю до третьої цифри, якщо їхні абсолютні значення близькі до одиниці.

При детальному описі того, як були отримані результати вимірювання і його невизначеність, необхідно дотримуватися рекомендацій і, таким чином:

а) дати значення кожної вхідної оцінки x_i та її стандартної невизначеності $u(x_i)$ разом з описом того, як вони були отримані;

б) дати оцінені коваріації та коефіцієнти кореляції (а краще і ті, і інші) для всіх корельованих вхідних оцінок і методи, використані для їхнього одержання;

в) зазначити ступені вільності для стандартної невизначеності кожної вхідної оцінки і те, як вони були отримані;

г) дати функціональну залежність $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_N)$, і, у випадку потреби, коефіцієнти чутливості $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Оскільки функціональна залежність f може бути надзвичайно складною, відсутньою в явному вигляді, а також може бути подана лише у вигляді комп'ютерної програми, не завжди є можливим дати f і її похідні. У цьому випадку f можна описати загальними термінами або дати відповідне посилання на використовувану програму. У таких випадках важливо, щоб було зрозуміло, як були отримані оцінка у вимірюваної величини Y і її сумарна стандартна невизначеність $u_c(y)$.

Контрольні запитання

1. В яких випадках коваріація вважатися несуттєвою та в яких випадках її обов'язково потрібно враховувати?
2. Розкажіть про необхідність оцінювання за типом В.
3. Що Ви знаєте про математично детерміновані розподіли?
4. Наведіть узагальнений алгоритм оцінювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності.
5. Розкажіть про порівняльний аналіз двох підходів щодо вираження характеристик точності вимірювань.
6. Наведіть процедуру оцінювання характеристик похибки результатів вимірювань.
7. Наведіть процедуру оцінювання невизначеностей вимірювань.
8. Наведіть рекомендовану схему відповідності при зіставленні оцінок характеристик похибки і невизначеностей результатів вимірювань.
9. Перерахуйте дії, які необхідно виконувати при складанні звітів щодо невизначеностей результатів вимірювань.
10. Перерахуйте основні рекомендації, яких необхідно дотримуватися при детальному описі того, як були отримані результати вимірювання і його невизначеності.

5 ВИРАЖЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИНАМІЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

5.1 Динамічні характеристики засобів вимірювальної техніки

Динамічні вимірювання, тобто вимірювання з використанням засобів вимірювань в динамічному режимі, отримують все більше розповсюдження в техніці та наукових дослідженнях. Ці вимірювання пов'язані, в першу чергу, з вивченням закономірностей проходження фізичних процесів в досліджуваних об'єктах. Тому роль динамічних вимірювань особливо велика, по-перше, в галузях науки, пов'язаних з дослідженням структури матерії, аналізом і синтезом нових речовин та матеріалів, вивченням об'єктів в експериментальних умовах, і, по-друге, в галузях техніки і виробництва, для яких характерне створення нових технологічних процесів і випробування нових засобів вимірювальної техніки. Крім того, передача розмірів одиниць засобам вимірювань відрізняється тим, що потрібно передати розмір одиниці не тільки вимірюваної величини, але і часу. Методи передавання розміру одиниці часу відомі і достатньо точні. Але при цьому необхідно також враховувати складову динамічної невизначеності, яка виникає при фіксації часу.

При проведенні вимірювань фізичних величин завжди виникає перехідний режим роботи засобу вимірювання, при якому сигнал на його виході суттєво змінюється в часі. Дана обставина пояснюється інерційними властивостями засобів вимірювань, оскільки вони складаються, в загальному випадку, з набору різних мас і пружин, ємностей і індуктивностей або інших інерційних елементів, які зумовлюють появу динамічної невизначеності. Крім того, в цифрових засобах вимірювання спостерігається запізнення сигналу, обумовлене кінцевим часом його перетворення в цифровий код. Це приводить до того, що рівняння перетворення засобу вимірювання, яке відображає його статику, в динамічному режимі є неприйнятним. В такому випадку переходять до диференціальних рівнянь, які описують динамічний взаємозв'язок вихідної $y(t)$ і вхідної $x(t)$ величин засобу вимірювання. При складанні диференціальних рівнянь у праву частину записують вхідні сигнали, тобто причину, що привела засіб вимірювання у дію, а в ліву частину диференціального рівняння – вихідний сигнал (реакцію засобу вимірювальної техніки)

$$a_n y^n(t) + a_{n-1} y^{n-1}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^m(t) + b_{m-1} x^{m-1}(t) + \dots + b_0 x(t), \quad (5.1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – відповідно, вхідна та вихідна величини;

m , n – порядок похідних;

a , b – коефіцієнти, що характеризують властивості засобу вимірювальної техніки.

За допомогою символу диференціювання за координатою часу ($p = \frac{d}{dt}$) рівняння (5.1) в загальному вигляді можна записати

$$y(p) = S_0 \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + 1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + 1} x(p) = S(p) x(p), \quad (5.2)$$

де $S_0 = \frac{b_0}{a_0}$ – статична чутливість, тобто чутливість до постійної вхідної величини (при $p=0$);

$S(p)$ – передатна функція засобу вимірювальної техніки (ЗВТ) або операторна чутливість.

Отже, передатна функція ЗВТ – це відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної величини

$$S(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (5.3)$$

Найхарактернішими для ЗВТ є динамічні характеристики, які описуються диференціальними рівняннями першого (табл. 5.1) і другого (табл. 5.2) порядків, а в окремих випадках третього та вищих порядків [8].

Інформація про динамічні характеристики повинна міститися в нормативно-технічних документах на ЗВТ.

Для вираження динамічної невизначеності результатів вимірювань зручною для практичного застосування є частотна характеристика ЗВТ. Частотну характеристику $S(j\omega)$ отримують шляхом заміни у виразі (5.3) передатної функції ЗВТ $S(p)$ оператора p на $j\omega$.

Для безінерційного ЗВТ (ідеальний вимірювальний перетворювач) частотна характеристика записується у вигляді

$$S(j\omega) = K, \quad (5.4)$$

де K – коефіцієнт передачі ЗВТ.

Для ЗВТ, що мають аперіодичну ланку (наприклад, вимірювальні перетворювачі температури в опір), частотна характеристика має вигляд

$$S(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}, \quad (5.5)$$

де τ – постійна часу, що визначається параметрами ЗВТ.

Для ЗВТ, що мають інтегрувальну ланку (наприклад, інтегрувальні підсилювачі) частотна характеристика має вигляд

$$S(j\omega) = \frac{K}{j\omega}. \quad (5.6)$$

Таблиця 5.1 – Диференціальні рівняння вимірювальних перетворювачів першого порядку

Найменування	Диференціальне рівняння	Позначення
Вимірювальний перетворювач кута повороту	$J \frac{d\beta(t)}{dt} + b_o l_o \beta_o(t) = H_o \psi_o(t)$	J – момент інерції; β – кут повороту; b_o – питома сила демпфірування; l_o – відстань від осі обертання до лінії дії сили демпфірування; H_o – вектор кінетичного моменту; $\psi_o(t)$ – поточне значення кута повороту об'єкта.
Вимірювальний перетворювач вологості газу	$\frac{d\varphi_r(t)}{dt} + \frac{1}{\lambda_o} \varphi_r(t) = \frac{1}{\lambda_o} \varphi_{\Pi}(t)$	$\varphi_r(t)$ – показання гігрометра; λ_o – коефіцієнт, що характеризує умови вимірювання і конструктивні особливості гігрометра; $\varphi_{\Pi}(t)$ – поточне значення відносної вологості газу (вимірювана величина).
Вимірювальний перетворювач швидкості потоку	$J \frac{d\omega(t)}{dt} + r_o \omega(t) = c_o \vartheta^2(t)$	J – момент інерції ротора; $\omega(t)$ – швидкість обертання ротора; r_o – коефіцієнт сил тертя; c_o – постійна анемометра; $\vartheta(t)$ – швидкість потоку.
Вимірювальний перетворювач температури	$\frac{dU(t)}{dt} + \frac{\alpha_k S}{mc} U(t) = \frac{\alpha_k S}{mc} \theta(t)$	U(t) – температура сенсора; S – площа поверхні сенсора; m – маса сенсора; c – питома те-плоємність матеріалу сенсора; α_k – коефіцієнт конвекційного обміну; $\theta(t)$ – вимірювана температура.
Вимірювальний перетворювач витрат	$J \frac{d\omega(t)}{dt} + DQ \omega(t) = A Q^2$	J – момент інерції крильчатки; ω – кутова швидкість обертання крильчатки; Q – об'ємні витрати; A, D – постійні коефіцієнти.
Вимірювальний перетворювач тиску	$\tau_o \frac{dP_2(t)}{dt} + P_2(t) = P_1(t);$ $\tau_o = \frac{128 \mu_o V_o l_o}{\pi d^4 P_2}.$	$P_2(t)$ – поточне значення тиску газу; $P_1(t)$ – значення тиску на вході в манометричну трубку; μ_o – коефіцієнт динамічної в'язкості газу; V_o – об'єм газу; l_o і d – довжина та діаметр трубки манометра.

Таблиця 5.2 – Диференціальні рівняння вимірювальних перетворювачів другого порядку

Найменування	Диференціальне рівняння	Позначення
Вимірювальний перетворювач прискорення тіла	$m \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx_o(t)}{dt} + c_1 x_o(t) = ma_{\text{л}}(t)$	$a_{\text{л}}(t)$ – вимірюване прискорення; $x_o(t)$ – переміщення інерційної маси m приладу; k_1, c_1 – коефіцієнти демпфірування і жорсткості пружного елемента.
Вимірювальний перетворювач кутової швидкості	$J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + b_o l_o \frac{d\varphi(t)}{dt} + c_o l_1^2 \varphi(t) = H_o \omega(t)$	$\varphi(t)$ – кут повороту; c_o – пружність протидійної пружини; l_1 – відстань від вихідної осі до лінії дії сили пружини; $\omega(t)$ – кутова швидкість (вимірювана величина).
Вимірювальний перетворювач вологості газу	$a_o T_o^2 \frac{d^2 \varphi_r(t)}{dt^2} + (a_o T_o + T_o) \frac{d\varphi_r(t)}{dt} + \varphi_r(t) = k \varphi_n(t)$	K – масштабний множник; a_o, T_o – параметри, які визначаються експериментально.
Вимірювальний перетворювач температури	$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k) \frac{dU(t)}{dt} + \beta_1 \beta_3 \alpha_k U(t) = \beta_1 \beta_3 \alpha_k \theta(t)$	$U(t)$ – показання термометра; $\beta_1 = k_o S_e / c_e$; $\beta_2 = k_o S_o / c_{o6}$; $\beta_3 = S_{o6} / c_{o6}$ c_e, c_{o6} – повні теплоємності сенсора і оболонки; k_o – коефіцієнт теплопередачі; S_e, S_{o6} – площі сенсора і оболонки.
Вимірювальний перетворювач тиску	$m \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dW(t)}{dt} + c_1 W(t) = P(t)$	M – маса мембрани; k_1 – коефіцієнт демпфірування; c_1 – жорсткість мембрани; $W(t)$ – поточне значення прогинання мембрани; $P(t)$ – вимірюваний тиск.

Для ЗВТ, що мають форсувальну ланку (наприклад, диференціальні підсилювачі), частотна характеристика має вигляд

$$S(j\omega) = K(1 + j\omega\tau). \quad (5.7)$$

Для ЗВТ, що мають ланку запізнення (наприклад, аналого-цифрові перетворювачі), частотна характеристика має вигляд

$$S(j\omega) = \exp(-j\omega\tau). \quad (5.8)$$

Для ЗВТ, що мають коливальну ланку (наприклад, електромеханічні вимірювальні перетворювачі), частотна характеристика має вигляд

$$S(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau_1 - \omega^2\tau_2^2} = \frac{K}{1 + 2j\omega\beta\tau - \omega^2\tau^2}. \quad (5.9)$$

5.2 Форма представлення динамічної невизначеності вимірювань

Динамічну невизначеність u_d вихідного сигналу, який отримують за допомогою ЗВТ з відомою частотною характеристикою, можна виразити через квадратний корінь з інтеграла від добутку квадрата модуля частотної характеристики ЗВТ і квадрата спектральної функції вхідного сигналу на всіх частотах

$$u_d = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (5.10)$$

де $|S(j\omega)|$ – модуль частотної характеристики ЗВТ, що використовується при динамічних вимірюваннях, або амплітудно-частотна характеристика ЗВТ, що визначається за формулою

$$|S(j\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad (5.11)$$

де $a(\omega)$, $b(\omega)$ – відповідно, дійсна та уявна частини частотної характеристики $S(j\omega)$;

$X(j\omega)$ – спектральна функція вхідного сигналу, яка пов'язана з вхідною функцією часу $x(t)$ виразом Лапласа

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 t} dt, \quad (5.12)$$

де ω_0 – частота вхідного сигналу.

Верхня межа інтегрування рівняння (5.12) на скінченному інтервалі часу може бути змінена на сумарний час спостереження T .

Якщо вимірюваний сигнал $x(t)$ є дискретним, то в рівнянні (5.12) знак інтегрування можна замінити на знак підсумовування, при цьому виконують такі заміни: t замінюють на nT_a , причому n змінюється від 0 до $N-1$, через T_a позначають період дискретизації, тоді $x(t)$ має вигляд $x(nT_a)$, а $e^{-j\omega_0 t}$ замінюють на $e^{-j\omega_0 nT_a}$.

Провівши такі заміни рівняння (5.12) можна записати в дискретному вигляді

$$X_d(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_a) e^{-j\omega_0 n T_a} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_a) \cos \omega_0 n T_a - j \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_a) \sin \omega_0 n T_a, \quad (5.13)$$

де $\omega_0 = \frac{2\pi}{NT_a} k$, а $k=0, 1, \dots, N-1$.

Для того, щоб дискретна спектральна функція за величиною відповідала неперервній спектральній функції, її необхідно домножити на інтервал дискретизації

$$X(j\omega) = T_a X_d(j\omega). \quad (5.14)$$

При динамічних вимірюваннях дискретних в часі сигналів рівняння для розрахунку динамічної невизначеності (5.10), з урахуванням рівнянь (5.13) і (5.14), можна записати у вигляді

$$u_d = \sqrt{\frac{T_a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT_a) e^{-j\frac{4\pi nk}{N}} A^2\left(k \frac{2\pi}{NT_a}\right)}, \quad (5.15)$$

де $A\left(k \frac{2\pi}{NT_a}\right) = A(\omega) = |S(j\omega)|$ – амплітудно-частотна характеристика ЗВТ;

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT_a}$ – відстань розташування дискретних значень частоти;

T_a – час дискретизації;

N – кількість вибірок;

NT_a – сумарний час спостереження.

5.3 Приклад оцінки динамічної невизначеності при вимірюванні віброприскорення

При вимірюванні вібропараметрів працюючих механізмів діючі на основу акселерометра механічні коливання приводять до того, що на п'єзоелемент діє динамічна сила, яка дорівнює добутку прискорення сейсмічної маси на відповідну масу. П'єзоелементи генерують електричний заряд, пропорційний діючій на нього динамічній силі. Сейсмічні маси акселерометра практично не змінюються, це значить, що електричний заряд, який виникає на електродах п'єзоелементів, пропорційний прискоренню цих мас. Оскільки амплітуда і фаза прискорення сейсмічних мас в широкому частотному діапазоні ідентичні амплітуді та фазі прискорення основи акселерометра, то загальний електричний заряд, який віддається останнім, пропорційний прискоренню

його основи і, відповідно, прискоренню механічних коливань поверхні об'єкта, на якому закріплений акселерометр.

Диференціальне рівняння, що описує динамічний взаємозв'язок вихідної і вхідної величин вимірювального каналу віброприскорення має вигляд [21]

$$m \frac{d^2 X_s(t)}{dt^2} + c \frac{dX_s(t)}{dt} + kX_s(t) = F(t), \quad (5.16)$$

де $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ – гармонічна вимушена сила коливань поверхні об'єкта (вхідна величина);

F_0 – амплітуда сили;

ω_0 – кутова частота вимушеної сили;

$X_s(t)$ – механічні коливання інерційної маси;

m – маса акселерометра;

c – параметр демпфірування;

k – еквівалентна жорсткість п'єзоелементів.

Запишемо диференціальне рівняння (5.16) в загальноживаному вигляді

$$\frac{d^2 X_s(t)}{dt^2} + 2h \frac{dX_s(t)}{dt} + h_{кр}^2 X_s(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t), \quad (5.17)$$

де $h = c/2m$ – коефіцієнт демпфірування;

$h_{кр} = \sqrt{k/m}$ – критичне значення коефіцієнта демпфірування.

Передатна функція даного засобу вимірювання буде мати вигляд [21]

$$S(p) = \frac{K_{ВП}}{m(p^2 + 2hp + h_{кр}^2)}, \quad (5.18)$$

де $K_{ВП}$ – коефіцієнт пропорційності вимірювального каналу віброприскорення.

Перейшовши до частотної області й відокремивши дійсну та уявну частини, отримаємо такий вираз модуля частотної характеристики

$$|S(j\omega)| = \frac{K_{ВП}}{m|(j\omega)^2 + 2h(j\omega) + h_{кр}^2|}. \quad (5.19)$$

Вхідний сигнал $F_0 \sin(\omega_0 t)$ відповідно до формули (5.12) має таке зображення

$$X(j\omega) = F_0 \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (j\omega)^2}, \quad (5.20)$$

де ω_0 – циклічна частота вхідного сигналу, яка для електродвигуна, що

працює на частоті 50 Гц, дорівнює 314 рад/с.

Амплітуда вимушеної гармонічної сили F_0 складає приблизно 0,1 мм, що відповідає 10^{-4} м. Маса акселерометра m складає 40 г, що відповідає $4 \cdot 10^{-2}$ кг. Параметр демпфірування s для п'єзоелектричних акселерометрів дорівнює 0,5; а еквівалентна жорсткість п'єзоелементів приймається рівною $k=2$. Коефіцієнт пропорційності $K_{ВП}$ вимірювального каналу віброприскорення дорівнює 100.

Підставивши знайдені значення модуля частотної характеристики (5.19) та зображення вхідного (вимірюваного) сигналу у рівняння для визначення динамічної невизначеності (5.10), отримаємо динамічну невизначеність вигляду

$$u_d = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{ВП}^2}{m^2 |(j\omega)^2 + 2h(j\omega) + h_{кр}^2|^2} \left| \frac{\omega_0 F_0}{\omega_0^2 + (j\omega)^2} \right|^2 d\omega}. \quad (5.21)$$

Для знаходження динамічної невизначеності (5.21) підкореневий інтеграл необхідно подати у вигляді

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{K(j\omega)K(-j\omega)} d\omega, \quad (5.22)$$

де $K(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n$;

$G(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$.

Многочлен $G(j\omega)$ містить тільки парні степені $j\omega$.

Для $n=1$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{|a_0 \cdot j\omega + a_1|^2} d\omega = \frac{b_0}{2a_0 a_1}. \quad (5.23)$$

Для $n=2$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0 \cdot (j\omega)^2 + b_1}{|a_0 \cdot (j\omega)^2 + a_1 \cdot j\omega + a_2|^2} d\omega = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1}. \quad (5.24)$$

Для $n=3$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0 \cdot (j\omega)^4 + b_1 \cdot (j\omega)^2 + b_2}{|a_0 \cdot (j\omega)^3 + a_1 \cdot (j\omega)^2 + a_2 \cdot j\omega + a_3|^2} d\omega = \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{2a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2)}. \quad (5.25)$$

Для $n=4$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0 \cdot (j\omega)^6 + b_1 \cdot (j\omega)^4 + b_2 \cdot (j\omega)^2 + b_3}{|a_0 \cdot (j\omega)^4 + a_1 \cdot (j\omega)^3 + a_2 \cdot (j\omega)^2 + a_3 \cdot j\omega + a_4|^2} d\omega =$$

$$= \frac{b_0(-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4}(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{2a_0(a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)}. \quad (5.26)$$

Підкореневий інтеграл динамічної невизначеності (5.21) можна розрахувати за допомогою інтеграла (5.26). В інтегралі (5.26) після деяких перетворень рівняння (5.21) коефіцієнти чисельника будуть такими $b_0=0$,

$$b_1=0, \quad b_2=0, \quad b_3 = \frac{K_{\text{ВП}}^2 F_0^2 \omega_0^2}{m^2}, \quad \text{а коефіцієнти знаменника такі: } a_0=1;$$

$$a_1 = 2h; \quad a_2 = h_{\text{кр}}^2 + \omega_0^2; \quad a_3 = 2h\omega_0^2; \quad a_4 = \omega_0^2 h_{\text{кр}}^2.$$

Підставляючи у праву частину виразу (5.26) значення вказаних вище коефіцієнтів та їх числові значення і взявши з них квадратний корінь, отримаємо чисельний розв'язок динамічної невизначеності (5.21), який буде рівним $0,02 \text{ м/с}^2$.

Для наочного відображення динамічної невизначеності вимірювання віброприскорення розрахуємо відносну динамічну невизначеність за формулою

$$\tilde{u}_d = \frac{u_d}{\bar{X}} 100\%, \quad (5.27)$$

де $\bar{X}$ – оцінка віброприскорення електродвигуна при статичних вимірюваннях, яка дорівнює $0,35 \text{ м/с}^2$ [22].

Підставляючи розраховане значення динамічної невизначеності та середнє значення віброприскорення електродвигуна при його роботі в статичному режимі у формулу (5.27) отримаємо відносну динамічну невизначеність, яка дорівнює $5,71\%$.

5.4 Невизначеність відновлення сигналів під час динамічних вимірювань

При вимірюванні процесів, які швидко протікають, необхідно враховувати і коригувати динамічну невизначеність (непевність) використовуваного ЗВТ. Ця невизначеність обумовлена неідеальністю динамічних властивостей використовуваних ЗВТ і пов'язана з ненульовим часом відгуку засобу вимірювання на вхідний сигнал. Однією з головних задач інформаційно-вимірювальної техніки є також і визначення вимірюваної величини $x(t)$ за вихідним сигналом ЗВТ $y(t)$.

Коригування динамічної похибки вхідного сигналу $x(t)$ передбачає розв'язання операторного рівняння динаміки

$$x(t) = B^{-1}[y(t)], \quad (5.28)$$

де $y(t)$ – вихідний сигнал вимірювального перетворювача;

B^{-1} – обернений оператор вимірювального перетворювача.

При цьому припускається, що відомі оцінки оператора B вихідного сигналу $y(t)$ та їх непевності $u[B]$ і $u[y(t)]$. Розв'язання розуміється як знаходження оцінки вхідного сигналу $x(t)$ і його непевності $u[x(t)]$. Непевність $u[B]$ – це або непевність знаходження оператора конкретного ЗВТ, або відхилення конкретного оператора від нормованого значення. Непевність $u[y(t)]$ є непевністю визначення $y(t)$, яка в загальному випадку складається з непевності реєстрації і підрахунку. Непевність $u[x(t)]$ є непевністю коригування, тобто непевністю визначення динамічної непевності. Очевидно, що коригування доцільне лише у тому випадку, коли $u[x(t)] < u[y(t)]/k$.

Компенсація динамічної визначеності (непевності), на відміну від статичної, де вводяться поправки в результат вимірювання, може бути здійснена лише шляхом складної обробки вихідного сигналу ЗВТ.

Відновлення вхідного сигналу, полягає в:

- а) отриманні вихідного сигналу ЗВТ $y(t)$ з тривалістю T ;
- б) розкладанні вимірюваного сигналу $y(t)$ в ряд Фур'є з періодом першої гармоніки вигляду

$$y(t) = \frac{m_0}{2} + \sum_{k=1}^K m_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^K n_k \sin(k\omega_0 t), \quad (5.29)$$

де $\omega_0 = 2\pi/T$;

T – тривалість вихідного сигналу $y(t)$;

m_0, m_k, n_k – коефіцієнти, які знаходяться за формулами

$$m_0 = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n, \quad (5.30)$$

$$m_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos(k\omega_0 t_n), \quad (5.31)$$

$$n_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \sin(k\omega_0 t_n); \quad (5.32)$$

в) експериментальному визначенні амплітудно-частотної $A(\omega)$ і фазочастотної $\Phi(\omega)$ характеристик ЗВТ і знаходженні дійсної та уявної частин комплексної частотної характеристики:

$$a(\omega) = A(\omega) \cos \Phi(\omega), \quad (5.33)$$

$$b(\omega) = A(\omega) \sin \Phi(\omega); \quad (5.34)$$

г) обчисленні коефіцієнтів Фур'є c_k і z_k вхідного сигналу $x(t)$ із системи рівнянь:

$$\begin{cases} c_k a(k\omega) + z_k b(k\omega) = m_k, \\ z_k a(k\omega) - c_k b(k\omega) = n_k; \end{cases} \quad (5.35)$$

$$m_0 = \frac{c_0}{a(0)}; \quad (5.36)$$

д) визначенні вхідного сигналу $x(t)$ у вигляді ряду Фур'є

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^K c_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^K z_k \sin(k\omega t). \quad (5.37)$$

Недоліком такої послідовності дій є надлишковість обчислень. Оскільки реальний вихідний сигнал $y(t)$ визначений лише на проміжку $[0; T]$, то досить припустити, що функція $y(t)$ парна і розкласти її за косинусами, або непарна – і розкласти її за синусами. Це значно скоротить об'єм підрахунків і спростить алгоритм коригування.

У реальних ЗВТ (як цифрових, так і аналогових) вихідний сигнал $y(t)$ поданий у вигляді дискретних відліків $y(t_i)$. Тому при обчисленні коефіцієнтів ряду Фур'є знак інтегрування замінюється на знак

підсумовування. Припустимо, що функція $y(t_i)$ парна і розкладемо її за косинусами, обмежившись K -ю гармонікою

$$y(t_i) = \frac{m_0}{2} + \sum_{k=1}^K m_k \cos(k\omega t). \quad (5.38)$$

Коефіцієнти m_0 та m_k розраховуються за формулами:

$$m_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N [y(t_i) T_a], \quad (5.39)$$

$$m_k = \frac{2}{N} \cos(k\omega t) \sum_{i=1}^N [y(t_i) T_a], \quad (5.40)$$

де $N = T/T_a$;

T_a – крок дискретизації сигналу.

Вхідний сигнал $x(t_i)$, розкладений в ряд Фур'є за косинусами, має аналогічний формулі (5.38) вигляд

$$x(t_i) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^K c_k \cos(k\omega t), \quad (5.41)$$

де $c_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N [x(t_i) T_a]$;

$$c_k = \frac{2}{N} \cos(k\omega t) \sum_{i=1}^N [x(t_i) T_a].$$

Коефіцієнти c_0 та c_k визначаються за формулами:

$$c_0 = \frac{m_0}{a(0)}, \quad (5.42)$$

$$c_k = \frac{m_k a(k\omega)}{a^2(k\omega) + b^2(k\omega)}. \quad (5.43)$$

Для більшості ЗВТ $\Phi(\omega) = 0$, тому формулу (5.43) можна спростити до вигляду

$$c_k = \frac{m_k}{a(k\omega)} = \frac{m_k}{A(k\omega)}. \quad (5.44)$$

Отже, відновлений сигнал можна описати виразом

$$x(t_i) = \frac{T_a \sum_{i=1}^N y(t_i)}{A(0)} + \sum_{k=1}^K \frac{2T_a \sum_{i=1}^N [y(t_i)]}{A(k\omega)} \cos^2(k\omega t). \quad (5.45)$$

При відновленні сигналу потрібно оцінювати його невизначеність. Для даної задачі вона буває двох видів: методична, пов'язана з заміною нескінченної межі підсумовування гармонік сигналу на кінцеву кількість K , та інструментальна, що викликана невизначеністю реєстрації вихідного сигналу $y(t)$ і частотних характеристик ЗВТ.

Розглянемо інструментальну невизначеність відновлення вхідного сигналу. Вимірювання вхідного сигналу ЗВТ є опосередкованим, тобто шукана величина $x(t)$ визначається на підставі результатів прямих вимірювань вихідного сигналу ЗВТ $y(t)$ і амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) ЗВТ $A(\omega)$, з якими вона функціонально пов'язана. Найчастіше величини $y(t)$ і $A(\omega)$ корельовані між собою, тому що визначаються за допомогою одного ЗВТ.

Отже, алгоритм вираження невизначеності відновлення сигналів при динамічних вимірюваннях такий:

- а) визначається оцінка вхідного сигналу за формулою (5.45);
- б) знаходимо стандартні непевності $u[y(t)]$ і $u[A(\omega)]$. Якщо вимірювання величин $y(t)$ і $A(\omega)$ багаторазові, то непевність розраховують за типом А; або за типом В, якщо вимірювання одноразові. На практиці результати вимірювання $y(t)$ частіше отримують одноразово, а АЧХ ЗВТ визначається заздалегідь при випуску з виробництва (або під час метрологічних досліджень);
- в) розраховуємо коефіцієнти чутливості:

$$\frac{\partial x(t_i)}{\partial y(t_i)} = \frac{NT_a}{A(0)} + \sum_{k=1}^K \frac{2NT_a}{A(k\omega)} \cos^2(k\omega t), \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial x(t_i)}{\partial A(\omega)} = \sum_{k=1}^K \frac{2T_a \sum_{i=1}^N [y(t_i)]}{A^2(k\omega)} \cos^2(k\omega t); \quad (5.47)$$

- г) знаходимо коефіцієнт кореляції $r[y(t), A(\omega)]$;
 д) розраховуємо квадрат комбінованої невизначеності результату вимірювання за формулою

$$u_s^2 = \left(\frac{\partial x(t_i)}{\partial y(t_i)} \right)^2 u^2[y(t)] + \left(\frac{\partial x(t_i)}{\partial A(\omega)} \right)^2 u^2[A(\omega)] + 2 \frac{\partial x(t_i)}{\partial y(t_i)} \frac{\partial x(t_i)}{\partial A(\omega)} u[y(t)] u[A(\omega)] r[y(t), A(\omega)]; \quad (5.48)$$

- е) знаходимо розширену невизначеність

$$U = t_p(v_{\text{eff}}) u_s. \quad (5.49)$$

Отже, при відновленні вимірювального сигналу рекомендується використовувати таку послідовність дій: отримати вихідні відліки ЗВТ з відомою невизначеністю $u[y(t)]$; експериментально визначити АЧХ ЗВТ і оцінити її невизначеність $u[A(\omega)]$; обчислити вхідний сигнал у ЗВТ за виразом (5.45), задавшись необхідним рівнем методичної невизначеності, тобто обмежившись необхідним числом гармонік K ; розрахувати інструментальну невизначеність відновлення сигналу, користуючись формулами (5.46) – (5.49).

Контрольні запитання

1. Які динамічні характеристики використовуються для вираження динамічної невизначеності вимірювань?
2. Наведіть вираз для розрахунку динамічної невизначеності та вирази для визначення компонент, з яких вона складається.
3. Наведіть алгоритм відновлення вхідного сигналу за допомогою вимірюного значення вихідного сигналу і експериментальної амплітудно-частотної характеристики ЗВТ при динамічних вимірюваннях.
4. Наведіть алгоритм вираження невизначеності відновлення сигналів на основі невизначеності вихідного сигналу і невизначеності амплітудно-частотної характеристики ЗВТ при динамічних вимірюваннях.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Основна література

1. Захаров И. П. Теория неопределенности в измерениях : учеб. пособие [для студ. высш. учеб. зав.] / И. П. Захаров, В. Д. Кукуш; М-во образования и науки Украины. – Харьков : Консум, 2002. – 256 с. – ISBN 966-7920-24-0.
2. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений» : МИ 2552-99. – Офиц. изд. – Санкт-Петербург : ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1999. – 27 с.
3. Методика обґрунтування рівнянь вимірювань та оцінки методичної складової похибки (невизначеності) результатів вимірювань : МІ 13.002-2003. – Офіц. вид. – Харків : ХДНДІМ, 2003. – 11 с.
4. Загальні вимоги до компетентності випробувальних та калібрувальних лабораторій : ДСТУ ISO/IEC 17025-2001. – [Чинний від 2001 – 01 – 01]. – К. : Держстандарт України, 2001. – 31 с. – (Національний стандарт України).
5. Руководство по выражению неопределенностей измерения = Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement : [научн. редактор Слаев В. А.]. – Санкт-Петербург : НПО ВНИИМ им. Д. М. Менделеева, 1999. – 134 с.
6. Васілевський О. М. Алгоритм оцінювання невизначеності у вимірюваннях при виконанні метрологічних робіт / О. М. Васілевський // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – № 3 (7). – 2006. – С. 147–151.
7. Поджаренко В. О. Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності : [навч. посібник] / В. О. Поджаренко, О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 128 с.
8. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю : [навч. посібник] / Є.Т. Володарський, В.В. Кухарчук, В.О. Поджаренко, Г.Б. Сердюк. – Вінниця : ВДТУ, 2001. – 219 С.
9. Васілевський О. М. Практикум з метрологічного нагляду за засобами вимірювання : [практикум] / О. М. Васілевський, В. О. Поджаренко. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 87 с.
10. Васілевський О. М. Елементи теорії підвищення точності вимірювання та синхронізації кутових швидкостей роторів взаємозв'язаних електромоторів : [монографія] / О. М. Васілевський, П. І. Кулаков. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 176 с. – ISBN 978-966-641-420-8.
11. Васілевський О. М. Оцінка невизначеності вихідних сигналів засобів вимірювальної техніки в динамічних режимах роботи / О. М. Васілевський // Системи обробки інформації. – Харків, 2010. – № 4 (85) . – С. 81–84.

Додаткова література

12. Guidelines for the Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibrations : Doc. 19 / Western European Calibration Cooperation, 1990. – 17 p.
13. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. ГСИ. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений» : РМГ 43-2001. – Офиц. изд. – Минск : Издательство стандартов, 2002. – 20 с.
14. Кунце Х. И. Методы физических измерений / Кунце Х. И. – М. : Мир, 1989. – 216 с.
15. Giacomo P. The expression of Experimental Uncertainties (Recommendation INC-1) / P. Giacomo // Metrologia. – 1981. – № 11. – P. 73.
16. Захаров І. П. Взаємне перерахування похибок та невизначеності вимірювань / І. П. Захаров // Стандартизація, сертифікація, якість. – 2005. №5. – С. 49-56.
17. Коцюба А. Процедура оцінювання невизначеності вимірювання випробувальної лабораторії / А. Коцюба, В. Новіков // Стандартизація, сертифікація, якість. – 2003. – № 1. – С. 39–41.
18. Сопрунюк П. М. Неопределенность результатов измерений при контроле асинхронности вращения электромеханических преобразователей / П. М. Сопрунюк, А. Н. Василевский, Ю. А. Чабанюк // Системы обработки інформації. – 2006. – Випуск 7 (56). – С. 72–75.
19. Василевский А. Н. Неопределенность измерительного канала активности ионов при контроле гумусового состояния почв с помощью ион-селективных электродов / А. Н. Василевский, В. А. Поджаренко, В. Н. Дидыч // Системы обработки інформації. – 2008. – Випуск 4 (71). – С. 85–87.
20. Васілевський О. М. Оцінювання невизначеності вимірювання моменту інерції ротора за амплітудою крутильних коливань / О. М. Васілевський, А. В. Поджаренко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – № 4. – 2009. – С. 5–9.
21. Аналіз динамічних метрологічних характеристик вимірювального перетворювача вібрації : наук. пр. IV Міжнародної науково-техн. конф. [«Метрологія та вимірювальна техніка»], (Харків, 12 – 14 жовтня 2004 р.) / Держ. комітет України з питань техн. регулювання та споживчої політики; головн. ред. Г. С. Сидоренко. – Харків : Національний наук. цент «Інститут метрології», 2004. – Т. 2. – С. 130–132.
22. Васілевський О. М. Комп'ютерно-вимірювальна система контролю якості електроенергії загального призначення та аналіз її невизначеностей / О. М. Васілевський // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – № 1 (11). – 2008. – С. 21–26.

ДОДАТКИ

Додаток А

Значення коефіцієнта $t_p(v)$ для випадкової величини, що має розподіл Стюдента з v ступенями вільності

v	$t_p(v)$			
	$p = 0,9$	$p = 0,95$	$p = 0,98$	$p = 0,99$
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,01	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,73	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,71	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,04	2,46	2,75
30	1,70	2,04	2,46	2,75
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

Додаток Б

Квантиль F-розподілу при $p = 0,95$

v_I	v_{II}													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234	236,8	238,9	240,5	241,9	245,9	248	250,1	254,3
2	18,51	19	19,16	19,25	19,3	19,33	19,35	19,37	19,38	19,4	19,43	19,45	19,46	19,5
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,7	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,0	5,96	5,86	5,8	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56	4,5	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,7	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	3,01	2,95	2,9	2,85	2,72	2,65	2,57	2,4
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,0	2,91	2,85	2,8	2,75	2,62	2,54	2,47	2,3
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,7	2,65	2,6	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,4	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,2	2,96	2,81	2,7	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,1	2,87	2,71	2,6	2,51	2,45	2,39	2,35	2,2	2,12	2,04	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,18	2,1	2,01	1,81
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,4	2,34	2,3	2,15	2,07	1,98	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,8	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,13	2,05	1,96	1,76
24	4,26	3,4	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,3	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,6	2,49	2,4	2,34	2,28	2,24	2,09	2,01	1,92	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,07	1,99	1,9	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,2	2,06	1,97	1,88	1,67
28	4,2	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,7	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,03	1,94	1,85	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
60	4,0	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,1	2,04	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,75	1,66	1,55	1,25
∞	3,84	3,0	2,6	2,37	2,21	2,1	2,01	1,94	1,88	1,83	1,67	1,57	1,46	1,0

Додаток В

Деякі перетворення Лапласа

Зображення – перехідні характеристики $S(p)$	Початкова оригінал-імпульсна характеристика
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
$\frac{p}{p-a}$	$\delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt})$
$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{(a-b)}(ae^{at} - be^{bt})$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{at}$
$\frac{1}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{at} \sin(\omega t)$
$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos(\omega t)$
$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{\cos(at) - \cos(bt)}{b^2 - a^2}$
$\frac{1}{(p-a)^n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$

Додаток Г

Зв'язок між динамічними характеристиками засобів вимірювальної техніки

Характеристика	$h(t)$	$\delta(t)$	$S(j\omega)$	$S(p)$
$h(t)$	-	$\int_0^t \delta(t) dt$	$F^{-1} \left[\frac{S(j\omega)}{j\omega} \right]$	$L^{-1} \left[\frac{S(p)}{p} \right]$
$\delta(t)$	$\frac{dh(t)}{dt}$	-	$F^{-1}[S(j\omega)]$	$L^{-1}[S(p)]$
$S(j\omega)$	$j\omega F[h(t)]$	$F[\delta(t)]$	-	$S(p) \Big _{p=j\omega}$
$S(p)$	$pL[h(t)]$	$L[\delta(t)]$	$S(j\omega) \Big _{p=j\omega}$	-

Види нелінійних функцій, що лінеаризуються

Функція	Формула	Заміна змінних при лінеаризації	Лінійна функція	Обернена функція
Степенева	$y = \alpha e^{\beta x}$	$z = \ln y$	$z = \ln \alpha + \beta x$	$y = e^z$
Дробово-лінійна	$y = \frac{1}{\alpha + \beta x}$	$z = \frac{1}{y}$	$z = \alpha + \beta x$	$y = \frac{1}{z}$
Степенева	$y = \alpha x^\beta$	$z = \ln y,$ $z_1 = \ln x$	$z = \ln \alpha + \beta z_1$	$y = e^z$
Гіперболічна	$y = \alpha + \frac{\beta}{x}$	$z = \frac{1}{x}$	$y = \alpha + \beta z$	
Дробово-лінійна	$y = \frac{x}{\alpha + \beta x}$	$z = 1/y,$ $z_1 = 1/x$	$z = \beta + \alpha z_1$	$y = \frac{1}{z}$
Логарифмічна	$y = \alpha + \beta / \ln x$	$z = 1 / \ln x$	$y = \alpha + \beta z$	
Степенева	$y = \alpha e^{\beta/x}$	$z = \ln y,$ $z_1 = 1/x$	$z = \ln \alpha + \beta z_1$	$y = e^z$
Логарифмічна	$y = \alpha + \beta \ln x$	$z = \ln x$	$y = \alpha + \beta z$	

Додаток Д

Таблиця інтегралів і їх перетворень

Інтеграл	Перетворення інтеграла
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi}{\alpha}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)}$	$\frac{\pi}{\alpha\beta(\alpha + \beta)}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)}$	$\frac{\pi}{(\alpha + \beta)}$
$\int_0^{+\infty} x^m e^{-ax} dx$	$\frac{\Gamma(m+1)}{a^{m+1}}, \Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$
$\int_0^{+\infty} x^m e^{-r^2 x^2} dx$	$\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2r^{m+1}}$
$\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-ax} dx$	$\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
$\int_0^{+\infty} x \sqrt{x} e^{-ax} dx$	$\frac{3}{4a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} dx$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2a}, a > 0$
$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx$	$\frac{\pi}{2} e^{- a }$
$\int e^{ax} dx$	$\frac{1}{a} e^{ax}$
$\int x e^{ax} dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$
$\int x^2 e^{ax} dx$	$e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$

Додаток Е

Варіанти контрольних завдань

Завдання 1

Виконайте оцінювання комбінованої та розширеної невизначеностей вимірювань величини X (табл. Е.1), яка пов'язана з вихідною величиною Y функціональними залежностями, які наведені в таблиці Е.2 (варіант завдань виберіть за порядковим номером в списку). Впливні коефіцієнти k та b мають такі межі невилучених залишків систематичної похибки: $\theta_k=0,15$ в припущенні про трикутний закон розподілу, а $U_b=0,25$ в припущенні про нормальний закон розподілу з ймовірністю P , яка задана в таблиці Е.1.

Таблиця Е.1 – Результати вимірювань величини X та їх ймовірності

Вар.	P	Дані вхідної величини X , що вимірювалась								
1	0,9	1,68	1,77	1,74	1,60	1,52	1,76	1,61	1,68	1,92
2	0,95	2,29	2,50	2,37	2,47	2,45	2,48	2,36	2,34	2,39
3	0,99	3,86	3,88	3,84	3,91	3,98	3,92	3,92	3,78	3,83
4	0,95	4,81	4,71	4,69	4,87	4,69	4,74	4,70	4,66	4,79
5	0,9	5,72	5,65	5,70	5,55	5,56	5,66	5,56	5,69	5,55
6	0,95	6,60	6,69	6,79	6,78	6,65	6,63	6,72	6,71	6,71
7	0,98	7,79	7,83	7,68	7,81	7,73	7,71	7,74	7,66	7,81
8	0,9	8,82	8,74	8,69	8,78	8,81	8,84	8,74	8,88	8,82
9	0,99	9,02	9,19	9,26	9,24	9,14	9,24	9,18	9,15	9,10
10	0,95	10,73	10,81	10,57	10,60	10,59	10,74	10,58	10,59	10,64
11	0,9	11,77	11,81	11,89	11,78	11,71	11,79	11,90	11,91	11,81
12	0,95	12,76	12,97	12,91	12,80	12,87	12,80	12,77	12,89	12,98
13	0,9	13,74	13,64	13,57	13,58	13,69	13,57	13,65	13,50	13,68
14	0,98	14,92	14,82	14,88	14,81	14,90	14,90	14,96	14,93	14,87
15	0,95	15,44	15,49	15,39	15,36	15,30	15,35	15,40	15,44	15,47
16	0,9	16,68	16,77	16,74	16,60	16,52	16,76	16,61	16,68	16,92
17	0,95	17,92	17,82	17,88	17,81	17,90	17,90	17,96	17,93	14,87
18	0,98	18,76	18,97	18,91	18,80	18,87	18,80	18,77	18,89	18,98
19	0,9	19,82	19,74	19,69	19,78	19,81	19,84	19,74	19,88	19,82
20	0,95	20,29	20,50	20,37	20,47	20,45	20,48	20,36	20,34	20,39
21	0,95	21,79	21,83	21,68	21,81	21,73	21,71	21,74	21,66	21,81
22	0,9	22,77	22,81	22,89	22,78	22,71	22,79	22,90	22,91	22,81
23	0,99	23,86	23,88	23,84	23,91	23,98	23,92	23,92	23,78	23,83
24	0,95	24,81	24,71	24,69	24,87	24,69	24,74	24,70	24,66	24,79
25	0,98	0,9	0,97	0,84	0,86	0,89	0,91	0,93	0,87	0,85
26	0,95	31,1	30,9	31,5	31,3	30,8	30,7	31,4	31,1	31,2
27	0,9	45,2	44,4	45,9	45,1	44,1	44,5	44,7	45,0	45,5
28	0,98	50,2	50,4	50,9	50,7	50,6	50,8	51,1	51,2	51,0
29	0,99	26,55	26,51	26,41	26,87	26,94	27,05	27,10	26,99	26,35
30	0,9	28,5	28,8	28,2	28,6	27,9	27,8	28,7	28,9	28,3
31	0,95	60,54	60,99	61,25	60,57	59,85	60,75	59,99	60,15	60,55
32	0,98	65,44	64,55	66,85	65,15	66,65	64,85	65,55	66,12	64,95

Продовження додатка Е

Таблиця Е.2 – Рівняння перетворень, за якими проводились вимірювання X

Варіанти	b	k	$Y=f(X, k, b)$
1	0,95	14	$Y = \sqrt{k} + X^2 / b$
2	1,25	2,5	$Y = (b/k)^3 + \sqrt{X}$
3	2,55	0,95	$Y = k^2 X^3 / b$
4	1,2	5,5	$Y = b^3 + X / \sqrt{k}$
5	3,6	4,54	$Y = k^{0,5} b^4 / \sqrt{X}$
6	2,95	3,25	$Y = k^2 / (X + \sqrt{b})$
7	4,1	8,78	$Y = k + b\sqrt{X + k}$
8	5,2	1,65	$Y = k^4 / \sqrt{X + b}$
9	6,6	2,5	$Y = \sqrt{k + X^2} / b$
10	1,66	3,25	$Y = X + b\sqrt{k + bX}$
11	0,98	1,83	$Y = \sqrt{kb} / \sqrt{X} + X$
12	5,27	9,51	$Y = k^{2/3} + (b + X) / \sqrt{X}$
13	6,05	9,05	$Y = b^3 + X^2 / (X + k)$
14	2,35	6,25	$Y = X / \sqrt{b} + (k/X)^{1,5}$
15	5,85	8,75	$Y = \sqrt[3]{X} + k^3 \sqrt{b + X}$
16	6,65	2,25	$Y = k^4 X / \sqrt{X + b}$
17	7,23	4,52	$Y = \sqrt{X + b^2} / k^2$
18	7,88	9,61	$Y = 1/b + k^2 / X^3$
19	6,54	0,85	$Y = b/X + \sqrt{k^3 X}$
20	3,22	5,5	$Y = X^2 / (b^3 + \sqrt{kX})$
21	7,05	5	$Y = X + b^3 X^4 / \sqrt{k}$
22	3,36	2,43	$Y = (X - 1) / \sqrt{k^4 + b^3 X}$
23	2,58	0,99	$Y = k^3 X^5 / \sqrt{b} - \ln k$
24	2,31	6,66	$Y = bX / (\ln X + k)$
25	0,99	0,88	$Y = b^3 \exp(2X^2/k)$
26	1,57	6,27	$Y = \sqrt[4]{k} \lg(X/(b - k))$
27	3,15	2,93	$Y = \exp(b) + \ln(X^{2-b}) / \exp(1/k)$
28	2,25	0,87	$Y = 10^{Xk \ln b^2}$
29	8,85	4,55	$Y = \exp(b) \sin(Xk)$
30	7,33	9,72	$Y = \operatorname{tg}(b/X) / \sqrt[3]{k}$
31	3,54	5,89	$Y = 2^b \cos(k/X)$
32	5,22	2,34	$Y = 2^{\ln X} / k^{3-b}$

Продовження додатка Е

Завдання 2

За допомогою наведених в четвертому розділі формул (пункт 4.3.1) здійсніть перерахунок характеристик похибок у характеристики невизначеності як для одноразових, так і для багаторазових вимірювань. Дані про характеристики похибок наведені в таблиці Е.3 (варіант завдання виберіть за порядковим номером у списку).

Таблиця Е.3 – Характеристики похибок, що підлягають перерахунку

Варіант	$\Delta_{0,95}$	$\Delta_{0,99}$	γ	n	m
1	1,5	1,0	0,7	5	2
2	2,3	1,8	0,9	10	1
3	3,1	2,6	10	20	3
4	2,7	1,05	0,5	25	4
5	2,0	0,95	0,4	30	5
6	1,8	0,9	8	45	2
7	1,4	0,85	7	50	3
8	1,2	0,8	0,9	100	4
9	0,8	0,15	0,8	15	6
10	0,5	0,09	0,4	90	2
11	0,3	0,005	0,8	25	3
12	0,1	0,002	2	35	4
13	0,05	0,045	8	29	7
14	0,03	0,0013	10	26	4
15	0,01	0,0067	0,7	18	3
16	0,07	0,035	0,9	16	2
17	1,4	0,558	3	11	1
18	1,6	0,427	16	9	9
19	3,45	0,085	0,25	8	4
20	5,05	0,075	1	44	3
21	4,32	0,0065	9	35	2
22	3,25	0,089	8	30	3
23	3,99	0,077	0,1	29	4
24	2,95	0,022	0,6	4	5
25	10,55	0,025	0,9	28	1
26	2,85	0,95	0,8	45	8
27	1,48	0,85	7	5	3
28	3,25	0,8	0,9	10	4
29	5,85	0,15	0,8	2	6
30	2,51	0,79	0,4	90	9
31	6,38	0,025	0,8	25	3
32	0,275	0,99	8,0	20	1

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Апостеріорне оцінювання, 11
Апріорне оцінювання, 11

aposteriori evaluation
apriori evaluation

В

Вимірювана величина, 18, 26, 35, 40, 92, 107
Впливні величини, 19

measuring size
vplivni sizes

Д

Дискретність вимірюваної величини, 33
Дисперсія, 15, 22, 26, 39, 49, 52, 63, 70, 73, 83, 120
Довірчий інтервал, 25
Довірчий рівень, 90
Дробовий ефект, 33

discreteness of
measurand
dispersion
confidence interval
level of trust
fractional effect

К

Коефіцієнт охоплення, 24, 45, 55, 81, 114, 120
Корельовані вхідні величини, 24, 55, 70

coefficient of scope
correlated entrance
sizes

М

Моделювання об'єктів вимірювання, 33

design of the obektiv
measuring

Н

Надійність, 5
Неадекватність моделі, 33
Невизначеність, 7, 11, 16
- вимірювання, 7, 9, 11, 15, 39, 44, 115, 124
- моделювання, 32, 33
- розширена, 11, 26, 61, 86, 114, 125, 132 – 134
- специфікації, 33 – 36, 41
- стандартна, 9, 11, 13, 19 – 21, 39, 46, 53, 63, 86
- сумарна, 11, 36, 80, 124, 134

reliability
model inadequacy
uncertainty
uncertainty measuring
uncertainty design
extended uncertainty
uncertainty of
specification
uncertainty of
standard
uncertainty of
summary

О

Опосередковані вимірювання, 52

indirect measuring

- некорельовані, 54	uncorrelated
- корельовані, 55	uncorrelated
Оцінювання достовірності вимірювання, 10, 33	evaluation of measuring authenticity

П

Поріг чутливості, 9	threshold of sensitiveness
Похибка, 7, 9, 34, 40, 83	fault
Прямі вимірювання, 42, 46, 48	direct measurements

Р

Результат вимірювання, 7, 25, 29, 46 – 48, 51, 118	measuring result
Рівномірний закон розподілу, 20, 112, 117, 128, 131	even law of distributing
Рівняння вимірювання, 18, 24, 121, 125	equalization of measuring
Розкид значень, 21, 46, 51, 86, 125, 129	variation of values
Розподіл Ст'юдента, 26	distributing of St'yudenta
Розподіл Фішера, 50	distributing of Fisher
Розширена невизначеність, 11, 26, 86, 114, 125	extended uncertainty
Ряд Тейлора, 22, 100	row of Teylora

С

Середнє арифметичне, 12, 19, 39, 47 – 50, 54, 116	middle arithmetic
Систематична невизначеність, 6, 86	systematic uncertainty
Систематична похибка вимірювання, 9, 34	systematic error of measuring
Стандартне відхилення, 11 – 14, 19, 26, 39, 47	standard deviation
Стандартні зразки речовин, 9	standard standards of matters
Ступені вільності, 30, 50, 96, 100	degrees of liberty
Ступінь кореляції, 23, 79, 80	degree of correlation
Суб'єктивні невизначеності, 32, 33, 41	subektivna uncertainty

Т

Точність вимірювання, 33, 36	measuring exactness
------------------------------	---------------------

Ф

Фізична величина, 5, 11, 33, 35, 70	physical size
-------------------------------------	---------------

Навчальне видання

Васілевський Олександр Миколайович

Кучерук Володимир Юрійович

Основи теорії невизначеності вимірювань

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна

Оригінал-макет підготовлено О. Васілевським

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. .
Наклад прим. Зам. № .

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.