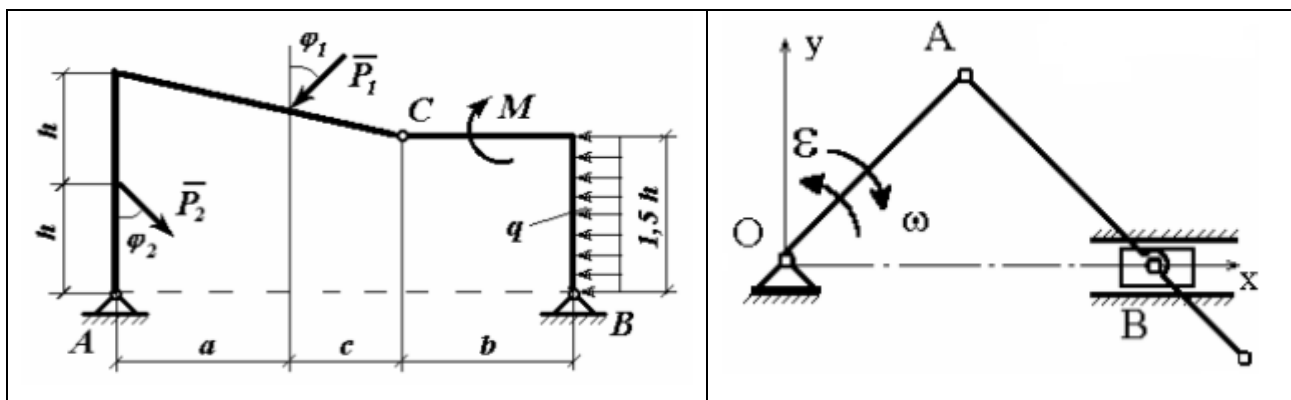


**Збірник завдань для самостійної
роботи з теоретичної механіки.
Статика. Кінематика**



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А.А. Видмиш, В.О. Приятельчук, В.О. Федотов

**Збірник завдань для самостійної роботи
з теоретичної механіки.
Статика. Кінематика**

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як збірник завдань для студентів напряму підготовки 0507 – “Електромеханіка”

Вінниця ВНТУ 2008

**УДК 531 (075)
П 77**

Рецензенти :

О.В. Садовой, доктор технічних наук, професор
І.О. Сивак, доктор технічних наук, професор
В.І. Савуляк, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Видмиш А.А., Приятельчук В.О., Федотов В.О.

П77 Збірник завдань для самостійної роботи з теоретичної механіки. Статика. Кінематика. Збірник завдань. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 128 с.

В збірнику наведені чотири завдання з статички тіла, три завдання з кінематики точки, три завдання з кінематики тіла, причому, шість із них виконується з використанням ПЕОМ. Кожне завдання має триста варіантів з прикладом виконання. Для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 531 (075)

© А. Видмиш, В. Приятельчук, В. Федотов, 2008

Зміст

1	Порядок та основні вимоги до виконання роботи.....	4
2	Розрахунково-графічні та контрольні завдання.....	5
2.1	Статика твердого тіла.....	5
C.1	Визначення реакцій в'язей твердого тіла.....	5
C1.1	Приклад виконання завдання.....	5
C.2	Розрахунок та дослідження збірної конструкції.....	14
C2.1	Приклад виконання завдання.....	25
C.3	Плоска довільна система сил з врахуванням сил тертя.....	30
C3.1	Приклад виконання завдання.....	30
C.4	Розрахунок реакцій в'язей просторової конструкції.....	45
C4.1	Приклад виконання завдання.....	51
2.2	Кінематика точки.....	54
K.1	Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями її руху.....	54
K1.1	Приклад виконання завдання.....	54
K.2	Кінематичне дослідження руху точки простого механізму.....	66
K2.1	Приклади виконання завдання.....	66
2.3	Кінематика твердого тіла.....	87
K.3	Визначення швидкостей і прискорення точок твердого тіла при поступальному та обертальному русі.....	87
K3.1	Приклад виконання завдання.....	93
K.4	Кінематичний аналіз плоского механізму.....	95
K4.1	Приклад виконання завдання.....	95
K.5	Кінематичні характеристики тіла та його точок при сферичному русі.....	105
K5.1	Приклад виконання завдання.....	105
2.4	Складний рух точки.....	116
K.6	Знаходження швидкості та прискорення точки в складному русі.....	116
K6.1	Приклад виконання завдання.....	122
	Література.....	127

1 Порядок та основні вимоги до виконання роботи

З розділів “Статика” і “Кінематика” студенти виконують одну розрахунково-графічну роботу. Студенти заочної форми навчання вибирають варіант схеми (рисунок) за двома останніми цифрами залікової книжки (шифр) з таблиці 1, а дані для розрахунку – за останньою цифрою шифру з таблиць, що наведені в завданнях. Варіанти завдання для студентів денної форми навчання вказує викладач.

Таблиця 1

Варіант	Шифр
1	01, 31, 61, 91
2	02, 32, 62, 92
...	
29	29, 59, 89, –
30	30, 60, 90, 00

Студенти денної форми навчання оформляють розрахунково-графічне завдання у відповідності до діючих стандартів ЄСКД (2.105-95 або ДСТУ 3008-95).

Студенти заочної форми навчання виконують завдання в зошитах. На титульній сторінці зошита вказується номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, шифр, факультет, група і домашня адреса.

Розв’язання кожної задачі потрібно починати на розвороті зошита (з лівої сторінки), так, щоб розрахункова схема та формули, складені за нею, знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і наводиться коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові схеми (рисунок) виконуються за допомогою креслярських приладів. Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями. На кожній сторінці залишають поля для зауважень рецензента. Якщо робота висилається на повторну перевірку (при виконанні її у другому зошиті) обов’язково прикладається незарахована робота.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити роботу. Графік захисту планується деканатом.

2 Розрахунково-графічні та контрольні завдання

2.1 Статика твердого тіла

С.1 Визначення реакцій в'язей твердого тіла

Плоска рама (рис. С1.1 – С1.5) знаходиться під дією сил F_1 , F_2 і пари сил з моментом M . Напрямок сил визначається кутами β і φ , а геометричні розміри параметрами a , b , c , d , і h .

Рама закріплена до нерухомої основи за допомогою плоского шарніра А, а в точці В - тонким стержнем.

Дані для розрахунків знаходяться в таблиці С1.1, де сили мають розмірність в Н, момент – в Н·м, розміри в метрах, кути в градусах.

Для заданої конструкції рами, при умові її рівноваги, знайти опорні реакції, побудувати графіки залежностей цих реакцій від змінного кута, який помічений в таблиці 3.1 зірочкою (*). Вказати значення змінного кута з точністю до одного градуса, при якому модулі опорних реакцій мають найбільші і найменші значення.

Таблиця С1.1

Варіант	F_1	F_2	M	a	b	c	d	h	φ	β
1	15	20	64	6	3	4	2	3	*	30
2	18	12	24	5	8	3	3	2	60	*
3	10	16	36	4	3	6	2	3	*	45
4	20	15	40	3	2	6	8	1	15	*
5	14	22	48	9	5	3	2	4	*	20
6	16	20	76	5	7	4	2	3	75	*
7	12	10	32	4	6	8	3	2	*	45
8	20	16	22	8	4	6	4	2	30	*
9	14	15	38	4	7	5	2	6	*	15
0	10	18	80	3	3	8	5	6	20	*

С1.1 Приклад виконання завдання

Плоска рама, що зображена на рис. С1.6, знаходиться в рівновазі під дією сил $F_1=10$ Н, $F_2=20$ Н і пари сил з моментом $M=60$ кН. Кут $\varphi=30^\circ$, кут $\gamma=0^\circ-360^\circ$. Розміри мають значення: $a=5$ м, $b=8$ м, $c=3$ м. Опорами рами є: в точці А - нерухомий плоский шарнір, в точці В - рухома опора.

Знайти реакції опор А і В, а також побудувати графіки залежностей цих реакцій від значення змінного кута. Вказати при яких кутах γ реакції мають екстремальне значення.

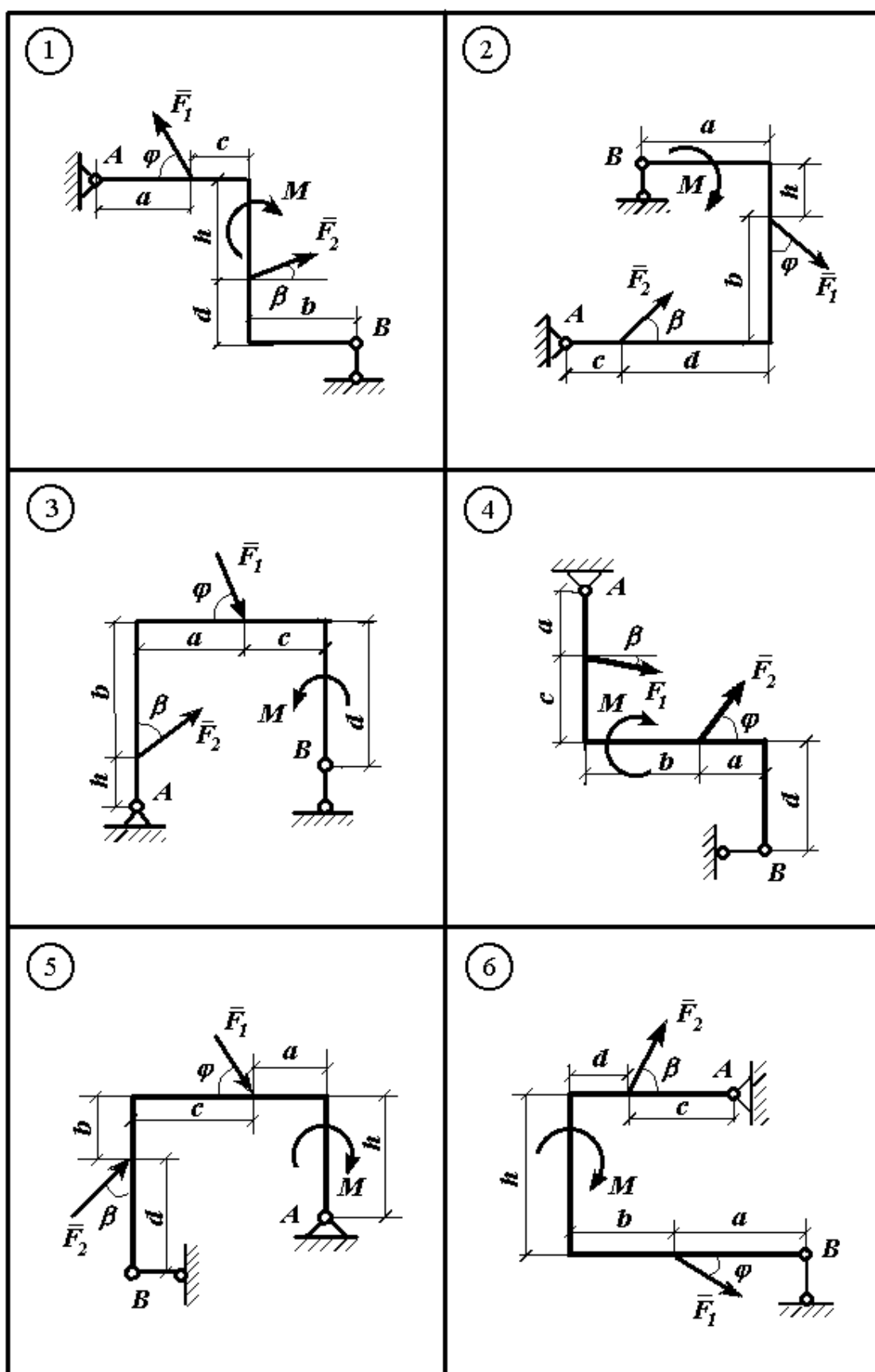


Рисунок С1.1

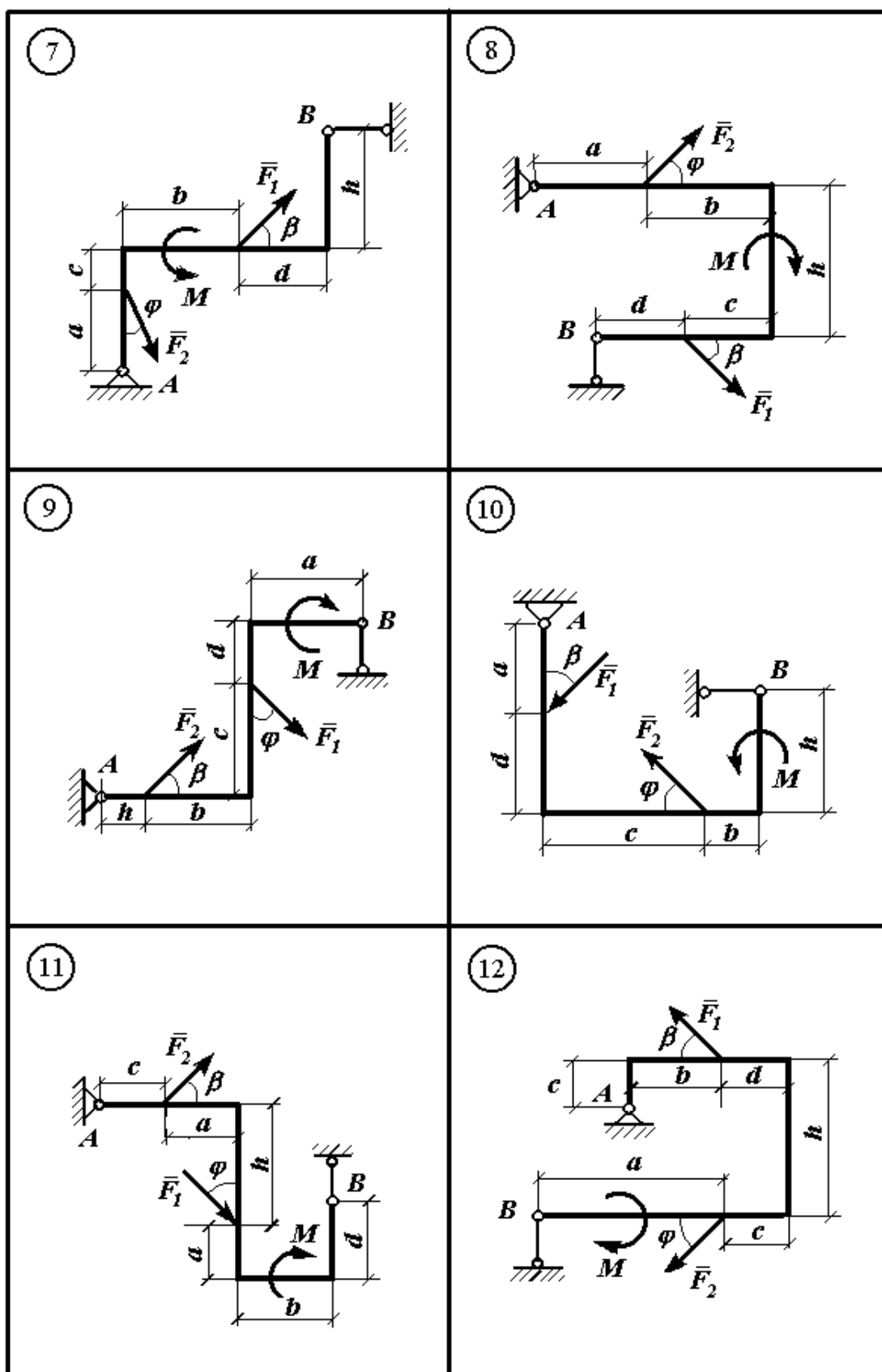


Рисунок С1.2

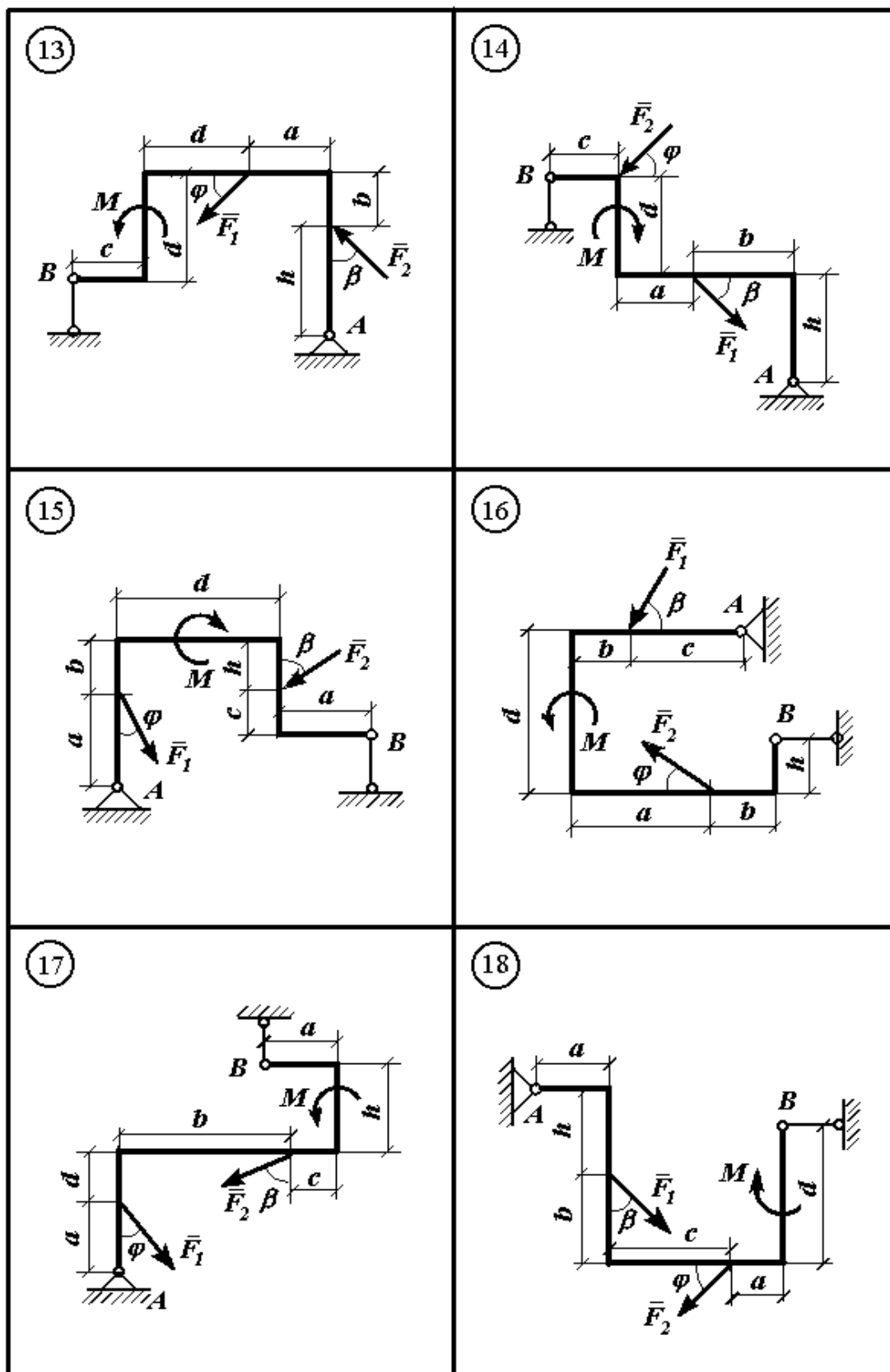


Рисунок С1.3

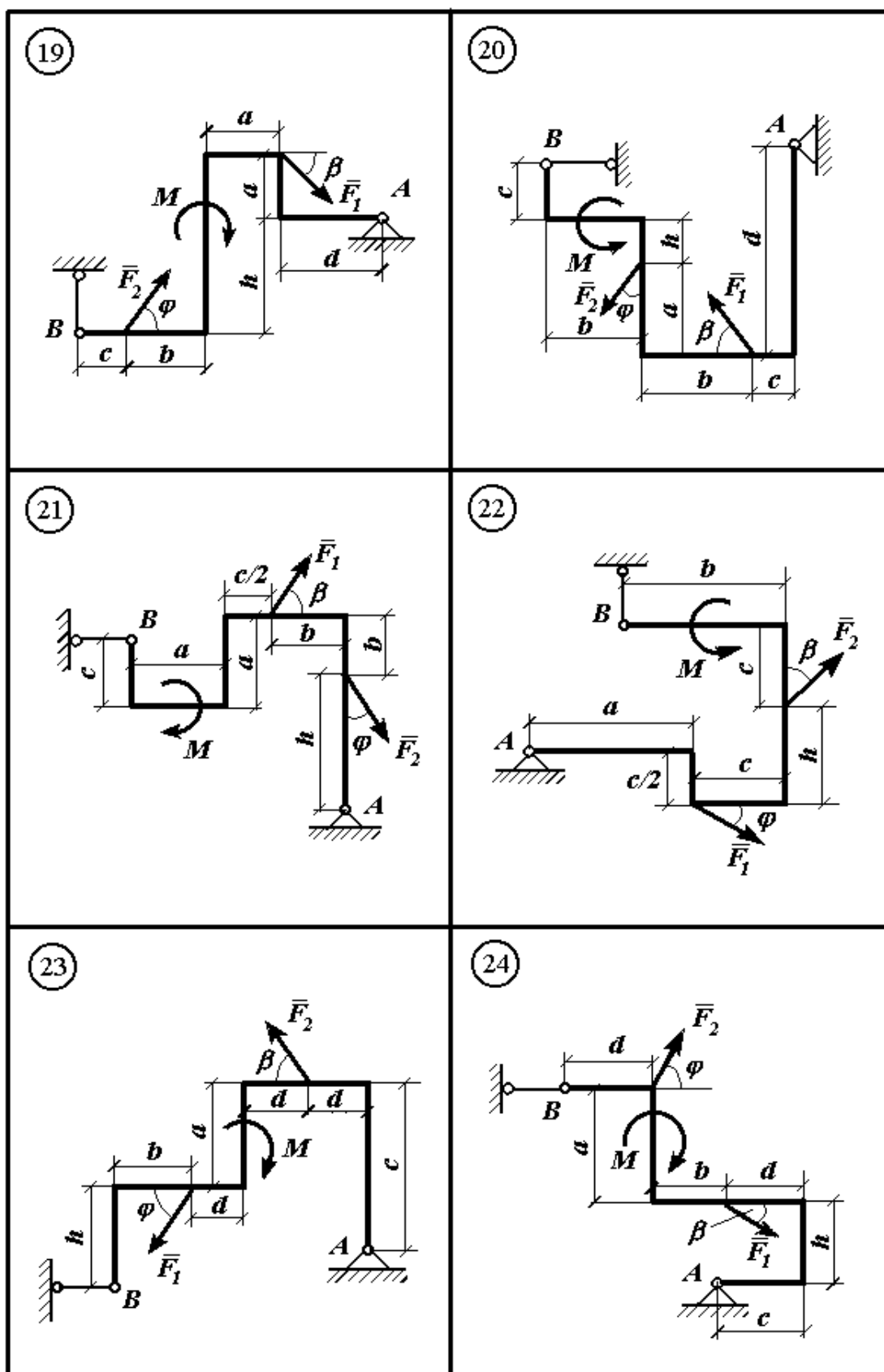


Рисунок С1.4

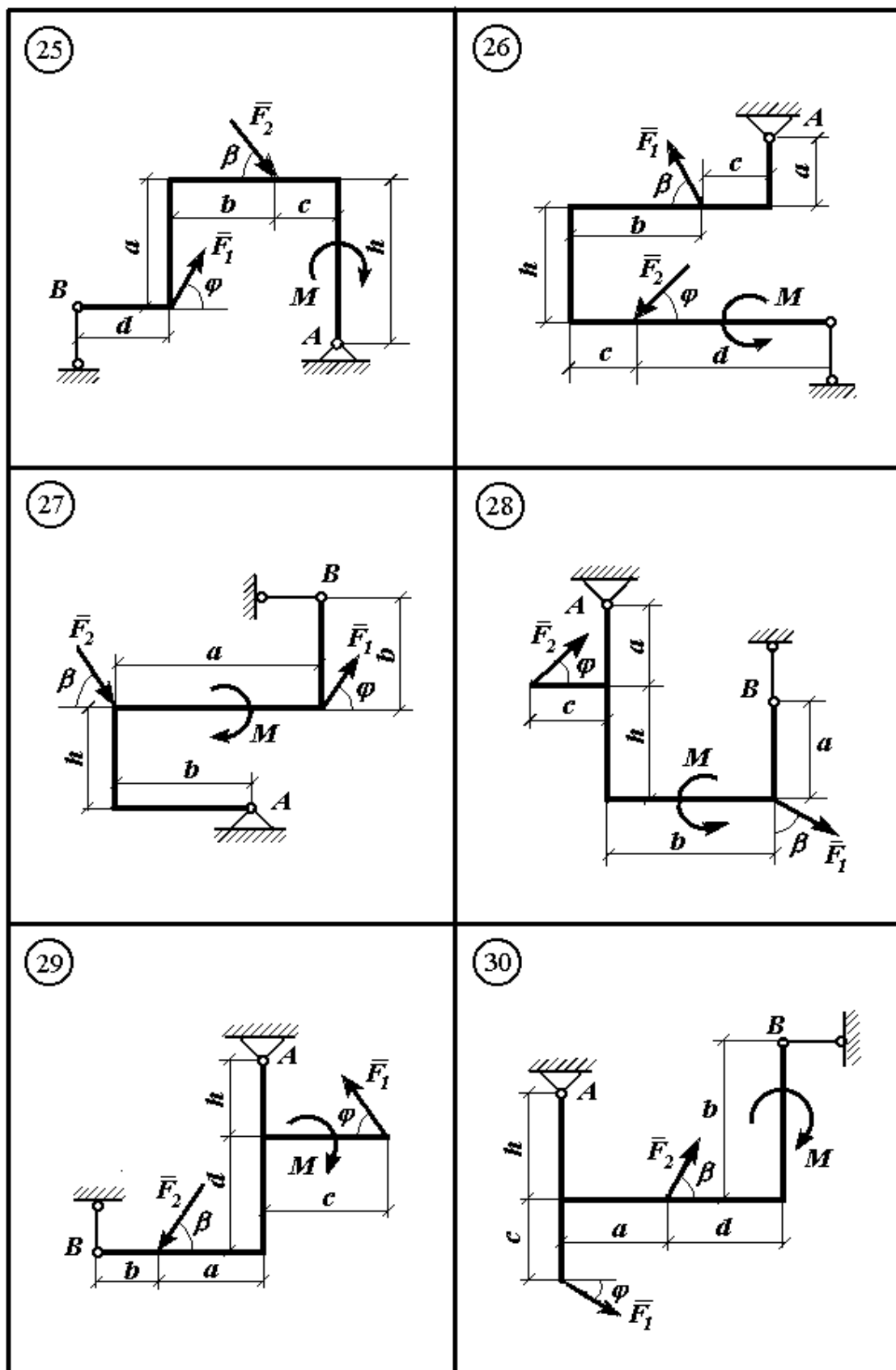


Рисунок С1.5

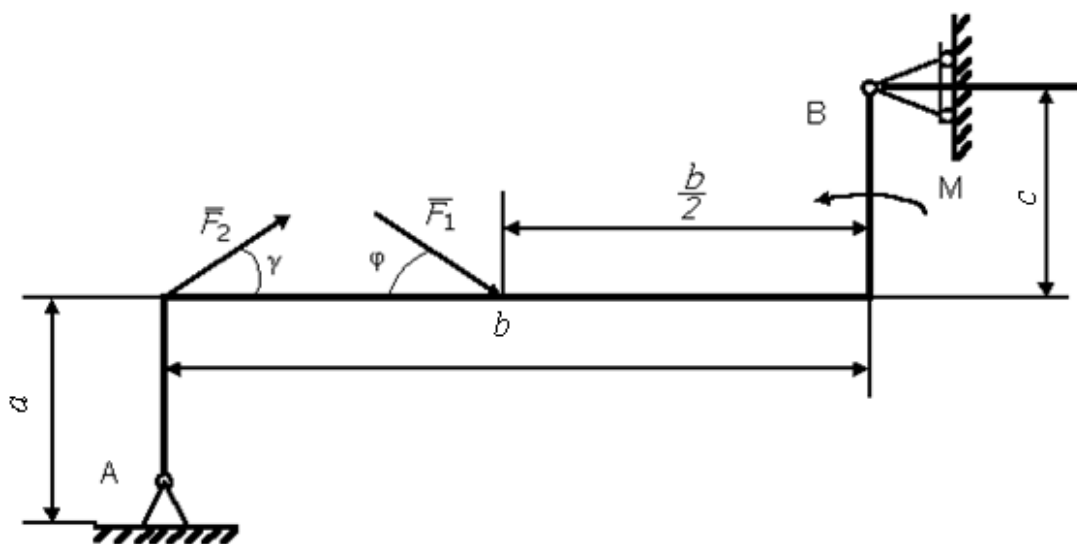


Рисунок С1.6

Розв'язання. Розташовуємо задану раму в системі координат з початком в точці А, як показано на рис. С1.7. Вказуємо реакції, що виникають в опорах. В точці А реакцію розкладаємо на складові X_A і Y_A , а в точці В реакція R_B направлена перпендикулярно до опорної площини.

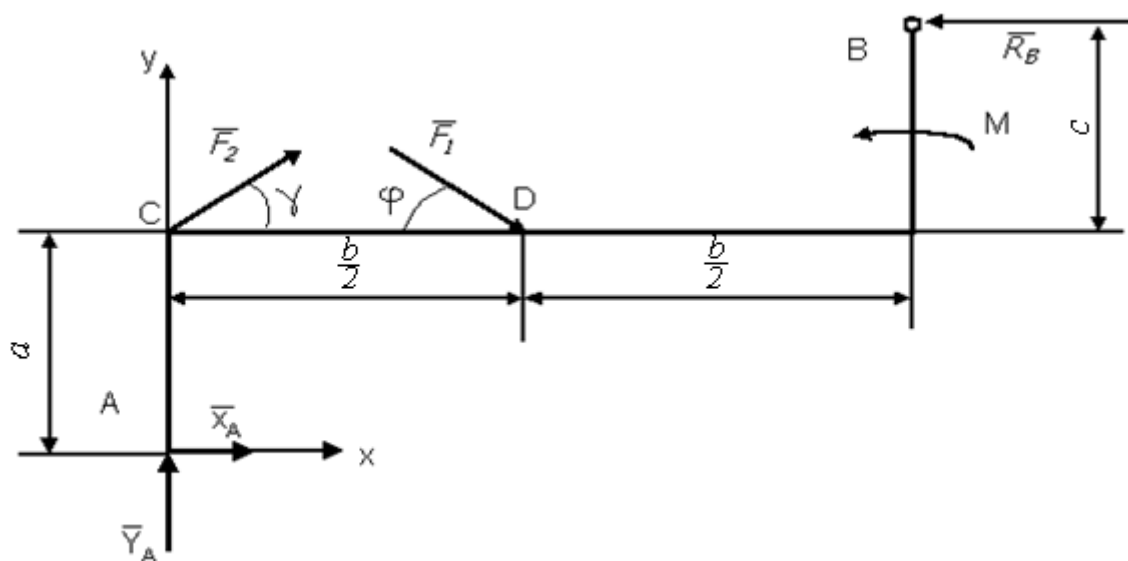


Рисунок С1.7

Складаємо рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_{Ai} = 0,$$

$$\sum X_i = X_A + F_2 \cos \gamma + F_1 \cos \varphi - R_B = 0, \quad (C1.1)$$

$$\Sigma Y_i = Y_A + F_2 \sin \gamma - F_1 \sin \varphi = 0, \quad (C1.2)$$

$$\Sigma M_{Ai} = -F_2 a \cos \gamma - F_1 a \cos \varphi - F_1 (b/2) \sin \varphi + M + R_B (a + c) = 0. \quad (C1.3)$$

З рівняння (C1.2) знаходимо Y_A

$$Y_A = F_1 \sin \varphi - F_2 \sin \gamma. \quad (C1.4)$$

З рівняння (C1.3) визначаємо R_B

$$R_B = (F_2 a \cos \gamma + F_1 a \cos \varphi + F_1 (b/2) \sin \varphi - M) / (a + c). \quad (C1.5)$$

З рівняння (C1.1) знаходимо X_A

$$X_A = R_B - F_2 \cos \gamma - F_1 \cos \varphi. \quad (C1.6)$$

Модуль реакції в точці А знайдемо за формулою:

$$R_A^2 = X_A^2 + Y_A^2. \quad (C1.7)$$

Виконаємо перевірку. Задача розв'язана правильно, якщо виконується умова:

$$\Sigma M_{Di} = 0.$$

Складемо це рівняння, користуючись рисунком C1.7.

$$\Sigma M_{Di} = -Y_A b/2 + X_A a - F_2 b/2 \sin \gamma + M + R_B c. \quad (C1.8)$$

За формулами (C1.4) - (C1.8) проводимо розрахунок в ППП Mathcad. Далі наводиться роздрук розрахунку і деякі результати розрахунків.

$$\pi = 3.14$$

$$a = 5$$

$$F1 = 10$$

$$b = 8$$

$$F2 = 20$$

$$c = 3$$

$$M = 60$$

$$\phi := 30 \cdot \frac{6.28}{360}$$

$$\gamma := 0,01 \cdot \frac{6.28}{360} \dots 360 \cdot \frac{6.28}{360}$$

$$Ya(\gamma) := F1 \cdot \sin(\phi) - F2 \cdot \sin(\gamma)$$

$$Rb(\gamma) := \frac{\left[F2 \cdot a \cdot \cos(\gamma) + F1 \cdot a \cdot \cos(\phi) + F1 \cdot \left(\frac{b}{2} \right) \cdot \sin(\phi) - M \right]}{a + c}$$

$$Xa(\gamma) := Rb(\gamma) - F2 \cdot \cos(\gamma) - F1 \cdot \cos(\phi)$$

$$Ra(\gamma) := \sqrt{Xa(\gamma)^2 + Ya(\gamma)^2}$$

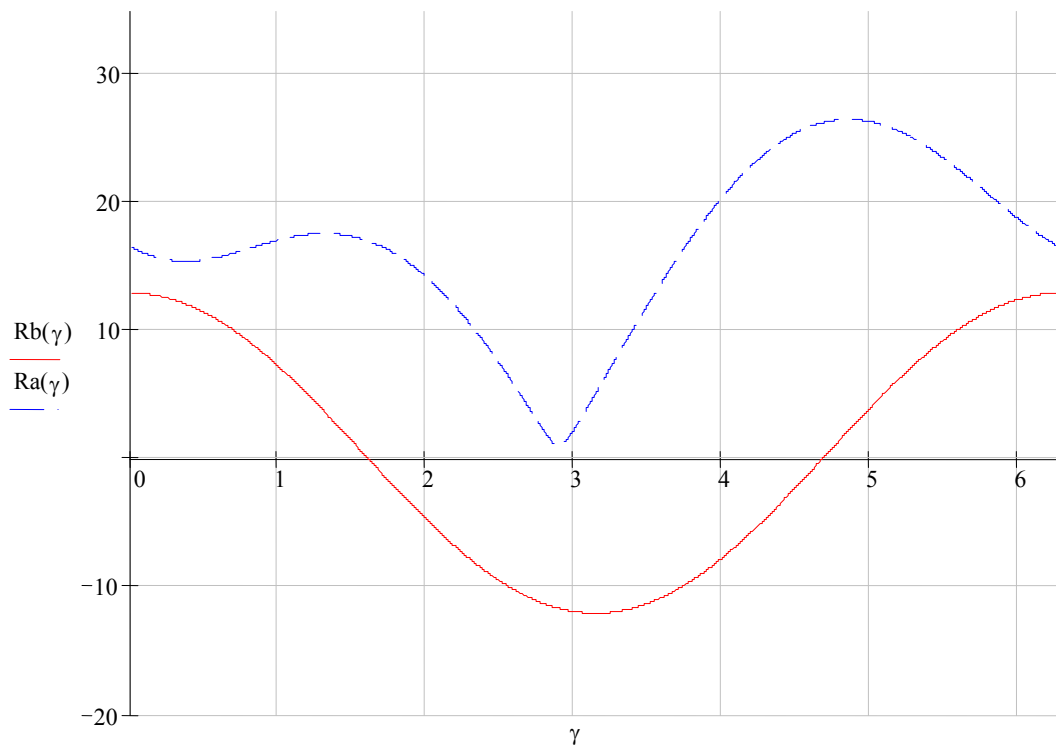


Рисунок С1.8

Аналіз показує, що:

$$\begin{aligned} R_A &= R_{A \max} = 26,487 \text{ Н} && \text{при } \gamma = 248^\circ, \\ R_A &= R_{A \min} = 0,983 \text{ Н} && \text{при } \gamma = 166^\circ, \\ R_B &= R_{B \max} = 12,910 \text{ Н} && \text{при } \gamma = 0^\circ, \\ R_B &= R_{B \min} = -12,087 \text{ Н} && \text{при } \gamma = 180^\circ. \end{aligned}$$

С.2 Розрахунок та дослідження збірної конструкції

Плоска рама (рис. С2.1- С2.10) складається з двох частин, які з'єднані шарніром С. На раму діють сили P_1 і P_2 і пара сил з моментом M . До окремих частин рами прикладене розподілене навантаження інтенсивністю q . Геометричні розміри рами визначаються параметрами a , b , c , h , а кути φ_1 і φ_2 вказують напрямок дії сил P_1 і P_2 .

За даними розмірами і силовими навантаженнями знайти:

- а) опорні реакції рами і вказати їх залежність від змінного кута;
- б) побудувати графіки залежностей опорних реакцій від змінного кута;
- в) визначити з точністю до 1 градуса значення змінного кута, при якому вертикальні складові опорних реакцій рівні між собою;
- г) визначити максимальне і мінімальне значення реакції опор А і В в залежності від змінного кута.

Значення силових навантажень розмірів і кутів взяти з таблиці С2.1. де кут, помічений зірочкою (*) змінюється від 0^0 до 360^0 .

Таблиця С2.1

Варіант	P_1	P_2	M	q	A	b	c	h	φ_1	φ_2
	кН		кН·м	кН / м	м				Град.	
1	6	4	10	1,4	4	4	3	2	30	*
2	3	2	12	1,7	5	3	3	1	*	45
3	5	6	8	1,2	4	3	4	5	60	*
4	4	7	14	1,5	3	6	2	3	*	75
5	3	6	10	1,3	6	2	3	4	15	*
6	6	5	16	1,4	2	2	4	3	*	30
7	8	2	14	1,8	4	4	2	3	45	*
8	4	3	12	1,2	3	5	2	1	*	60
9	7	6	8	1,4	5	3	4	2	75	*
0	5	3	11	1,6	4	6	4	3	*	15

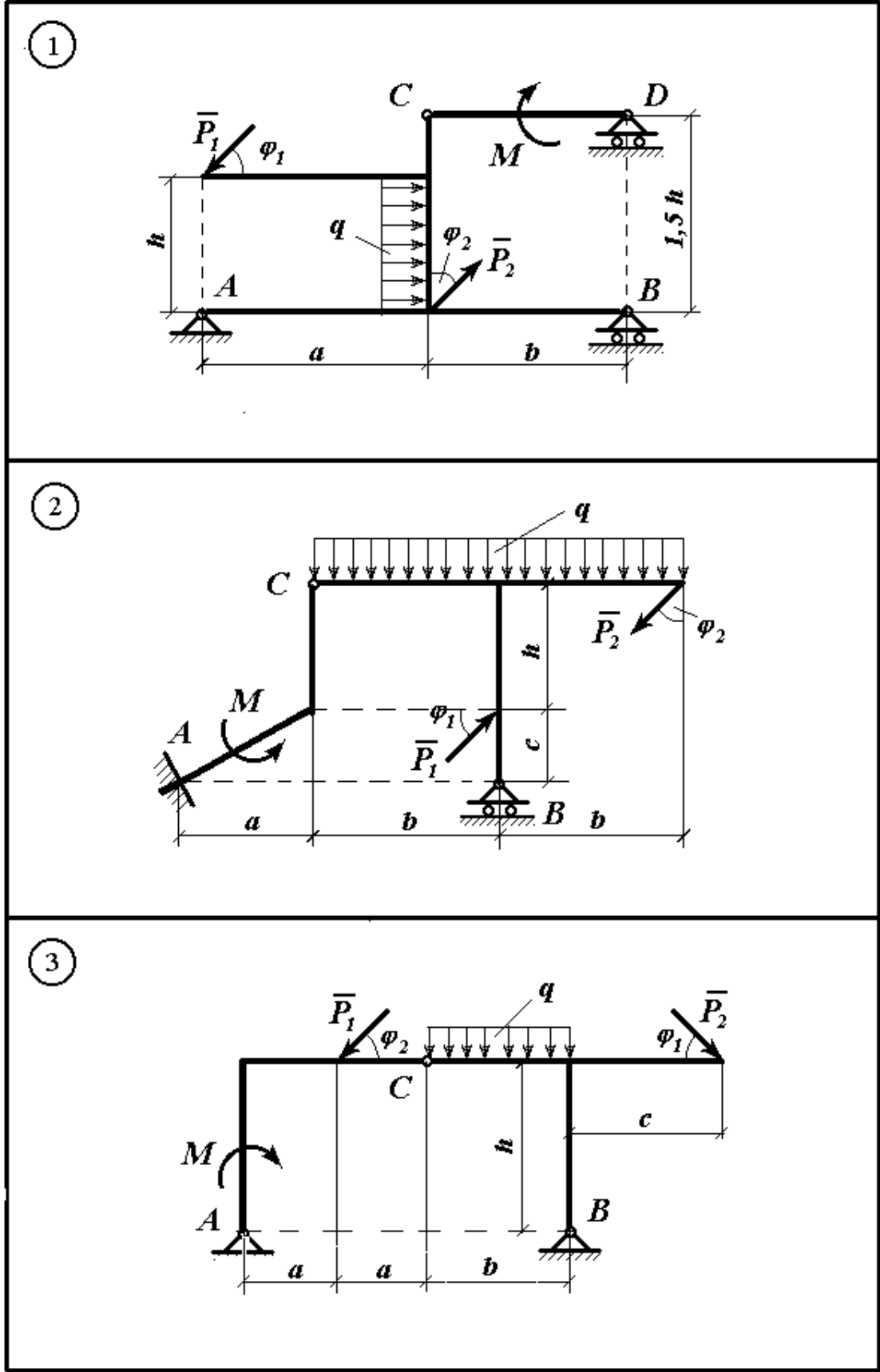
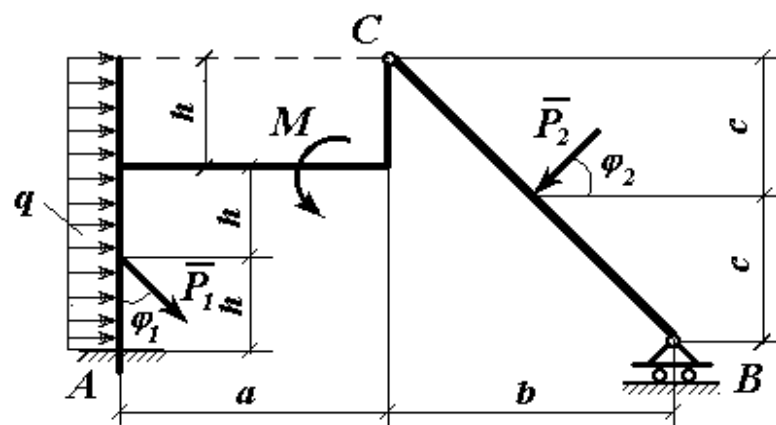
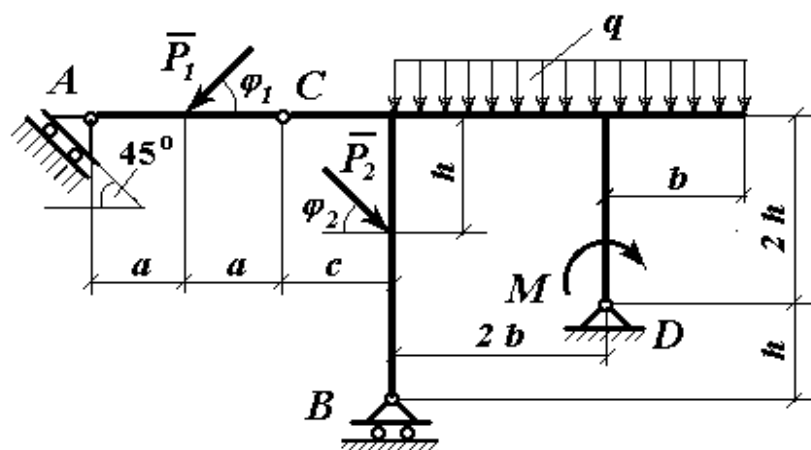


Рисунок С2.1

4



5



6

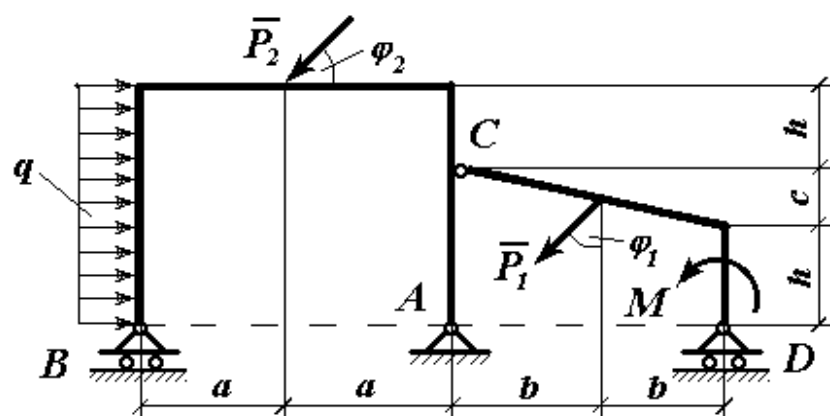


Рисунок С2.2

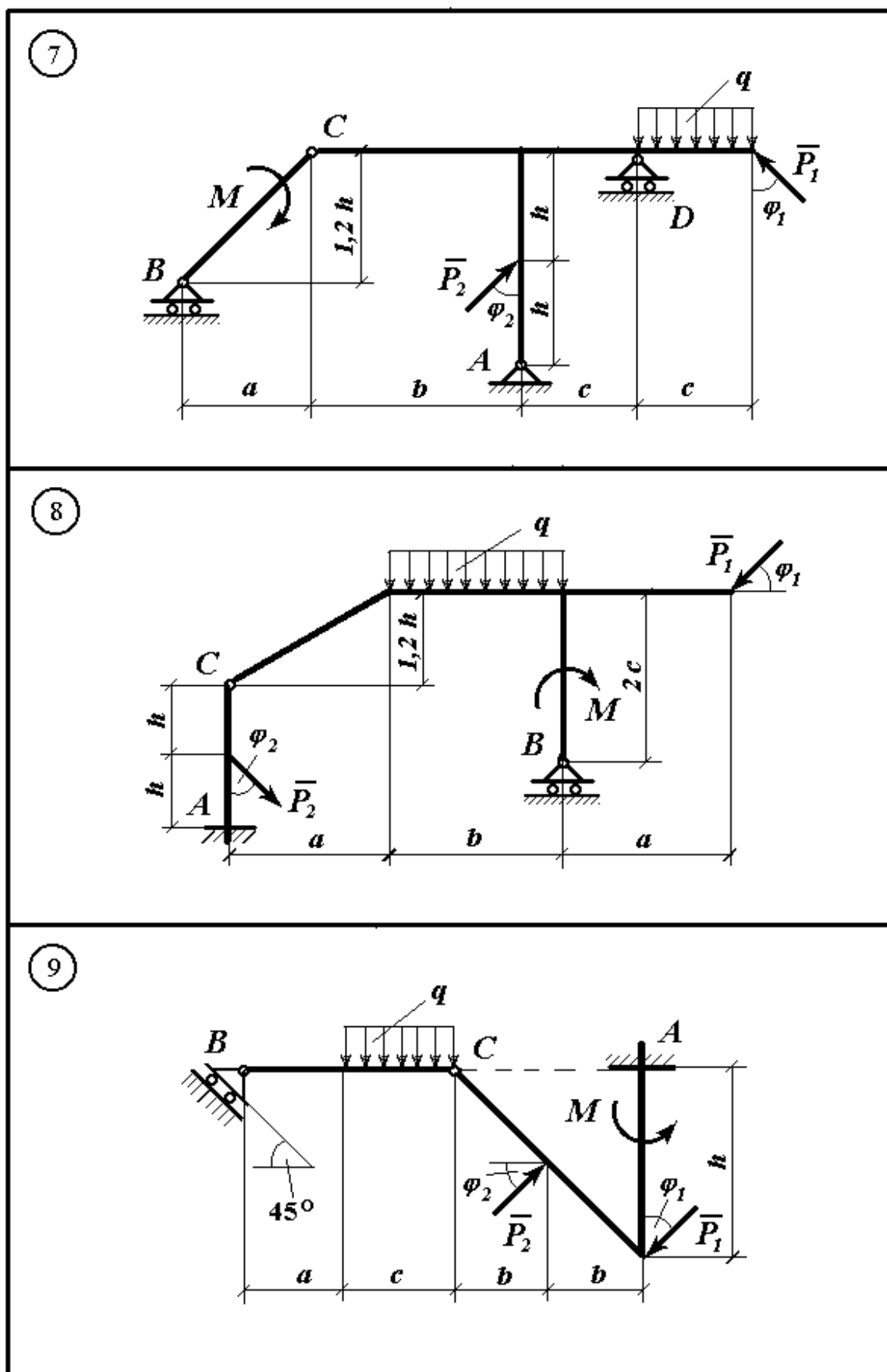
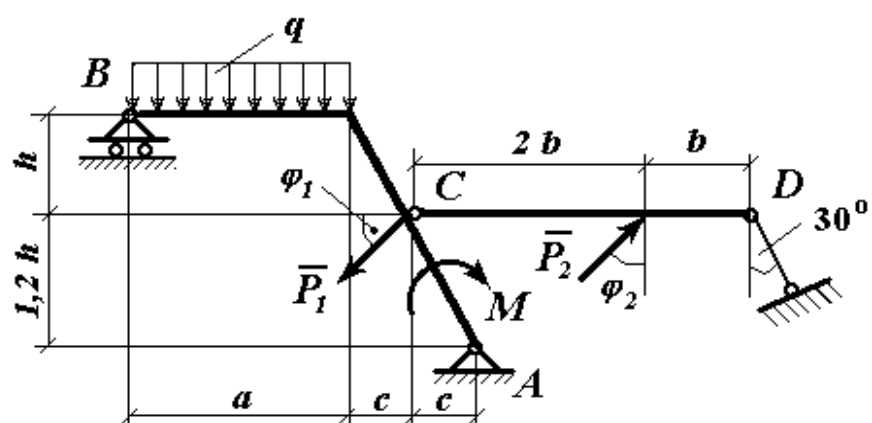
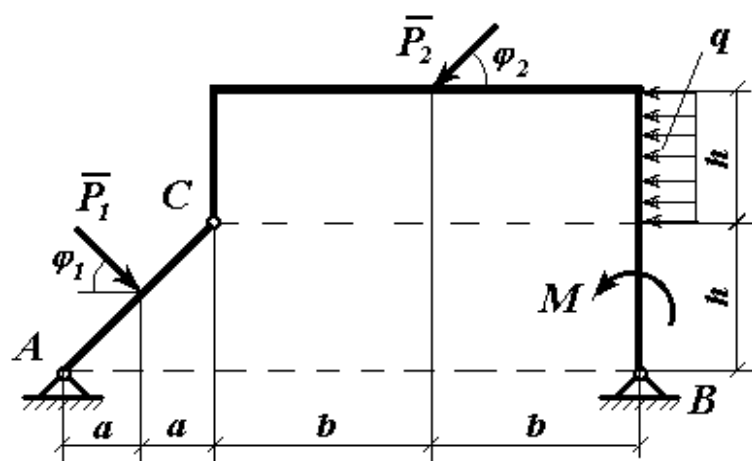


Рисунок С2.3

10



11



12

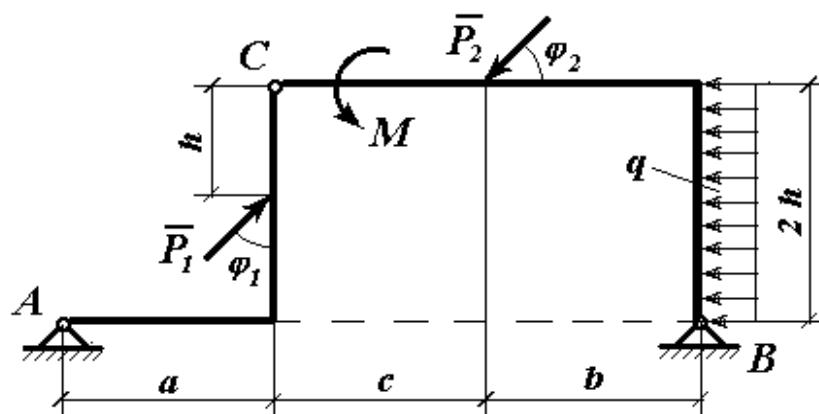
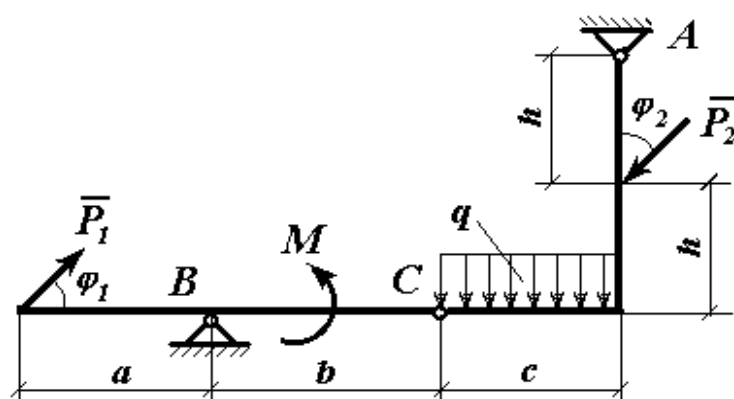
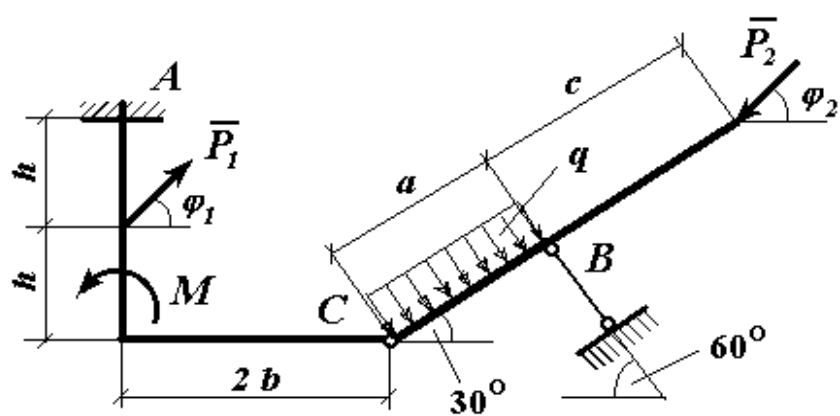


Рисунок С2.4

13



14



15

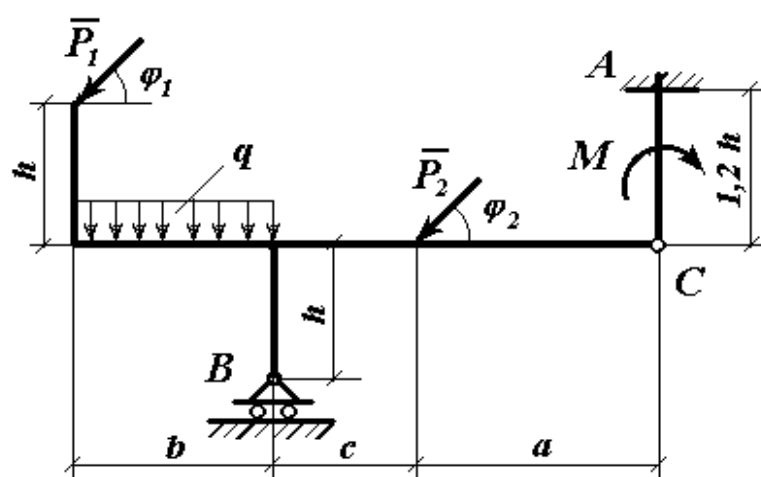
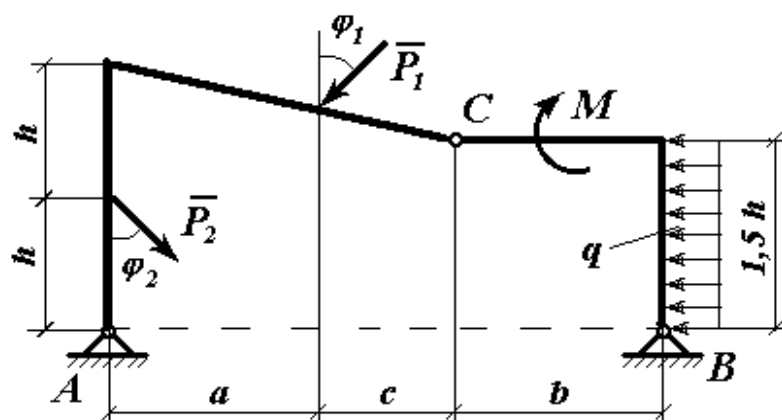
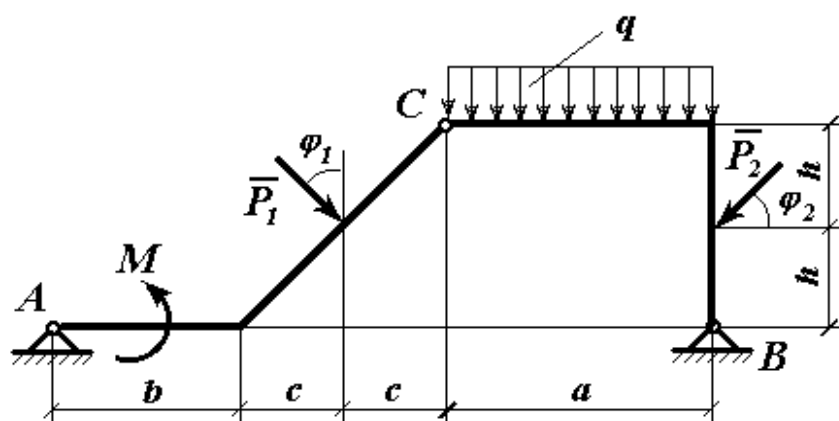


Рисунок С2.5

16



17



18

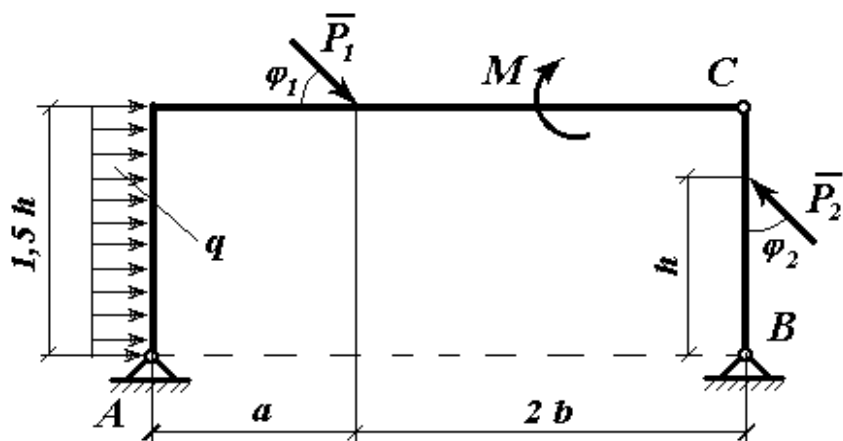
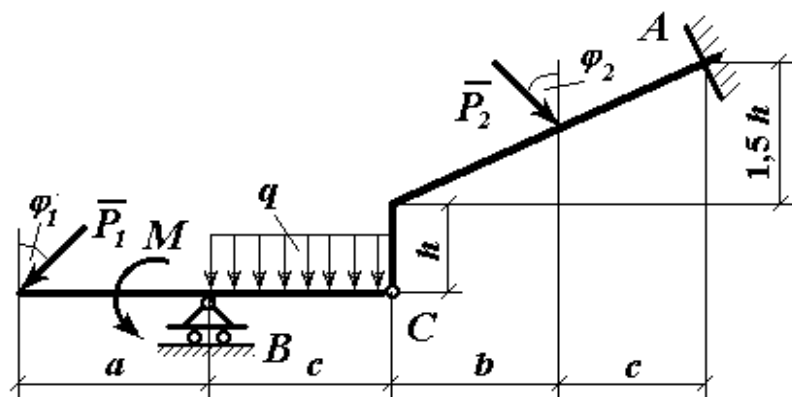
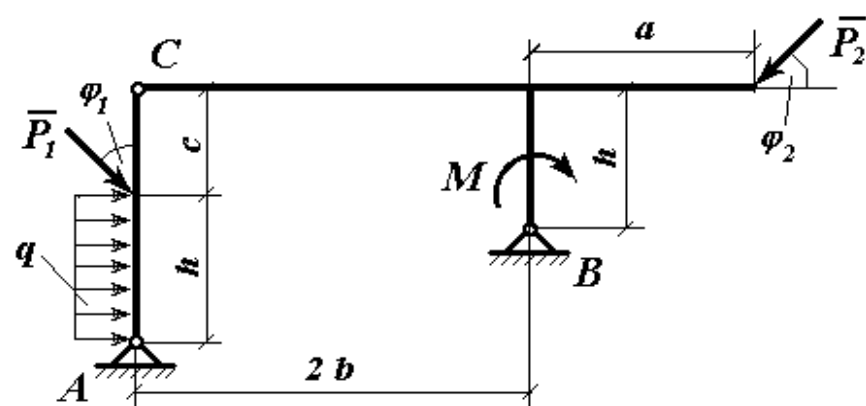


Рисунок С2.6

19



20



21

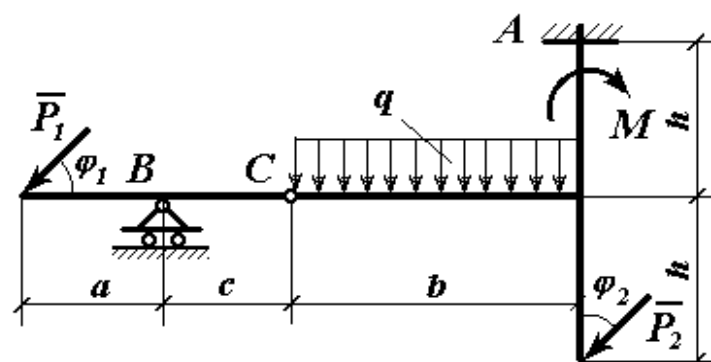
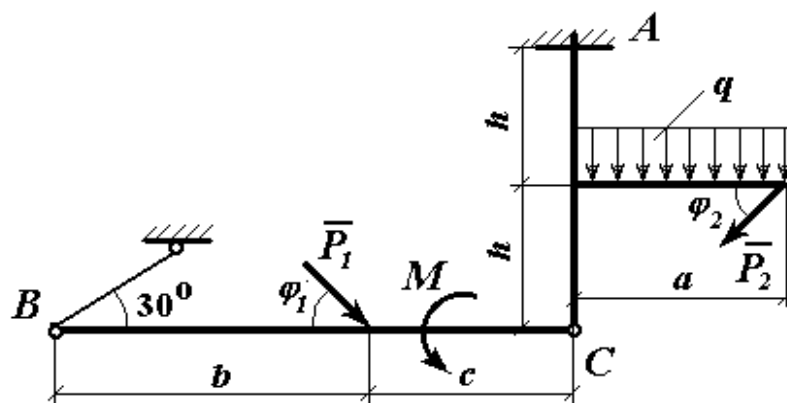
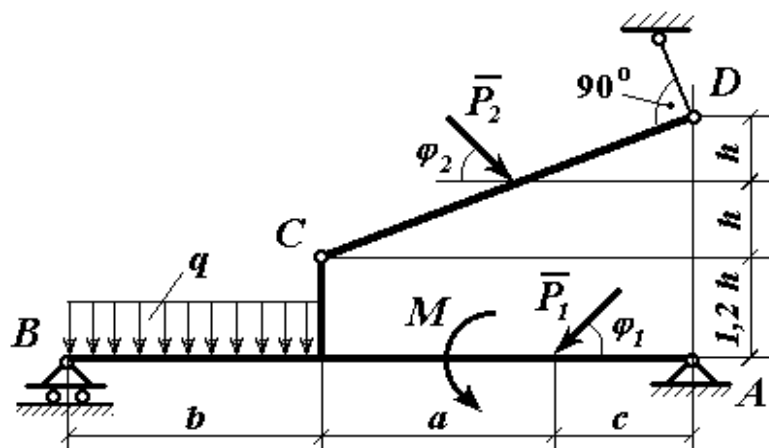


Рисунок С2.7

22



23



24

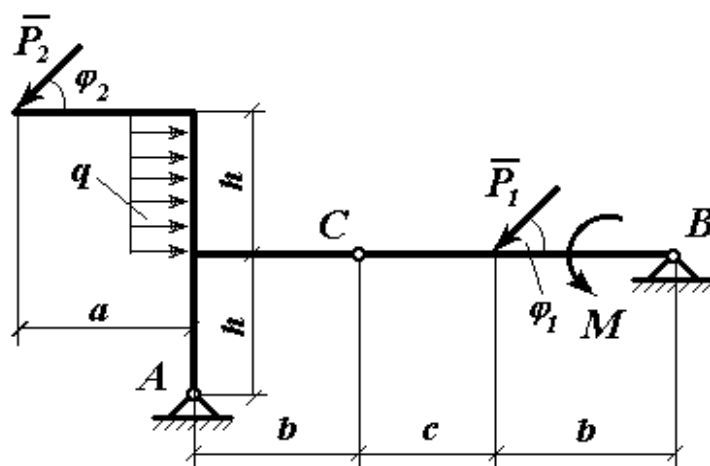
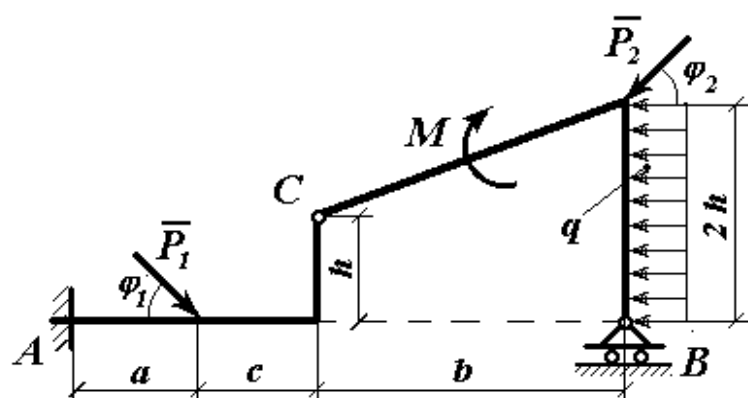
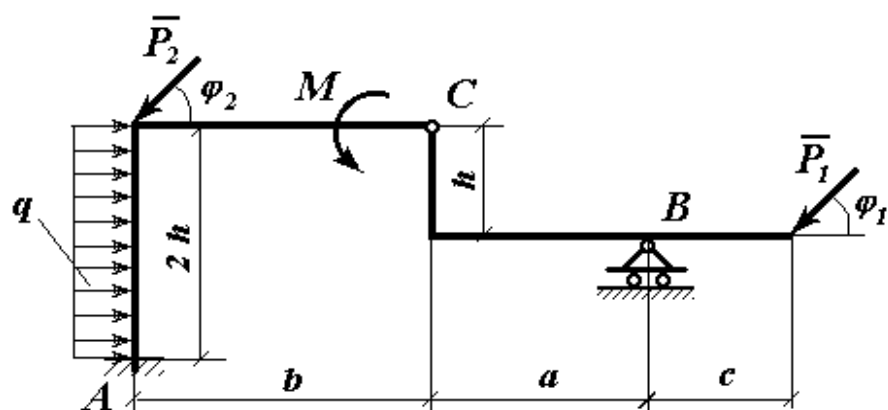


Рисунок С2.8

25



26



27

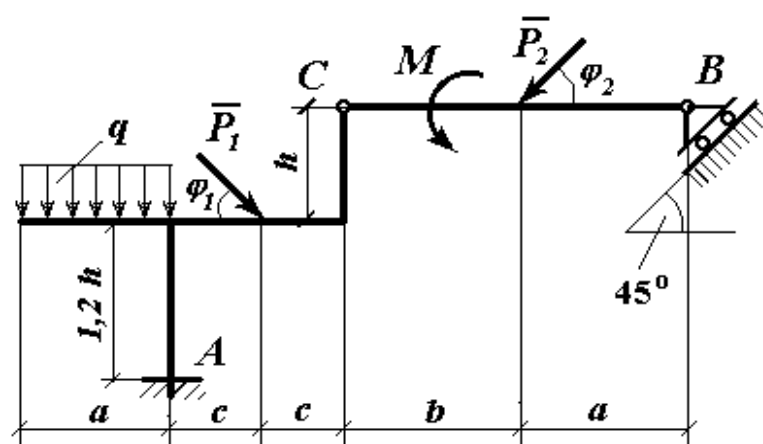
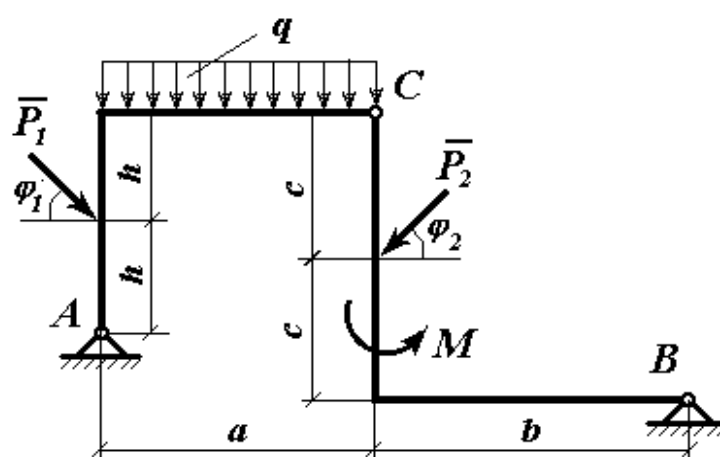
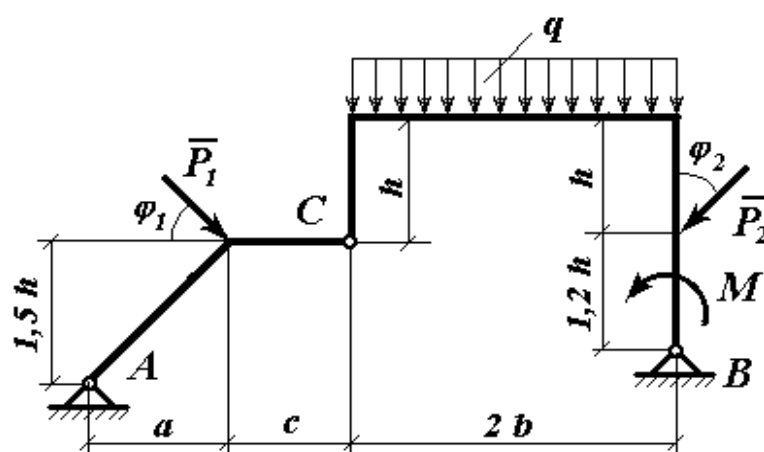


Рисунок С2.9

28



29



30

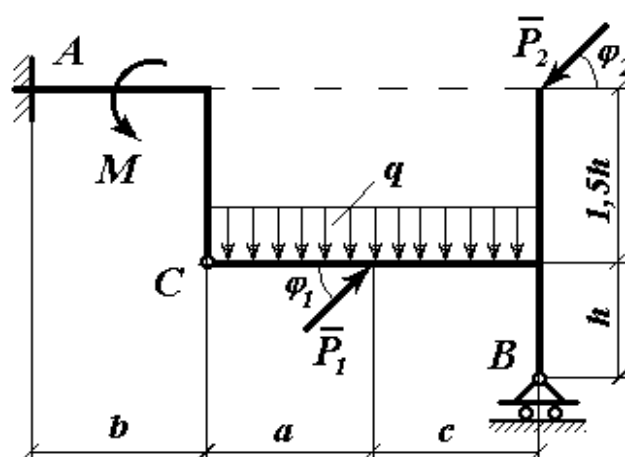


Рисунок С2.10

С2.1 Приклад виконання завдання

Дано: Плоска рама, що складається з двох частин, з'єднаних шарніром С, зображена на рис. С2.11.

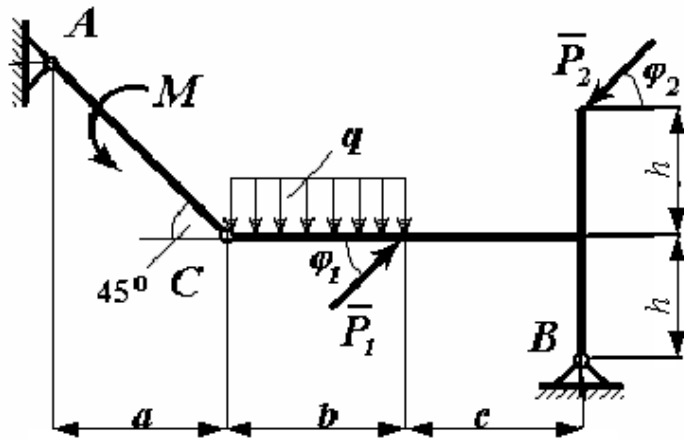


Рисунок С2.11

Величини силових навантажень, розміри і кути мають значення: $P_1 = 9 \text{ кН}$, $P_2 = 4 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН м}$, $q = 0,5 \text{ кН / м}$, $a = 7 \text{ м}$, $b = 4 \text{ м}$, $c = 3 \text{ м}$, $h = 2 \text{ м}$, $\varphi_1 = 15^\circ$. Кут φ_2 є змінним, $\varphi_2 = 0^\circ - 360^\circ$. Знайти опорні реакції R_A і R_B згідно з пунктами 1 - 4 завдання.

Розв'язання. На рис. С2.12 зображаємо раму в плоскій системі координат з навантаженнями і реакціями в опорах.

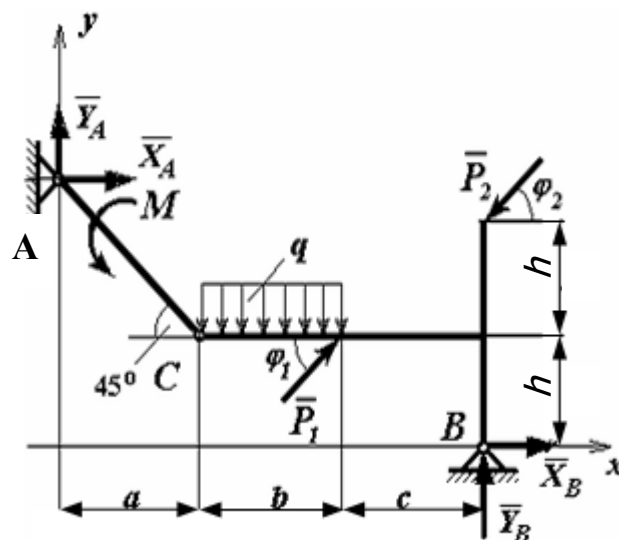


Рисунок С2.12

Обидві опори рами є нерухомими шарнірами, тому реакції R_A і R_B показуємо у вигляді складових X_A, Y_A і X_B, Y_B .

Складаємо рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_{ci} = 0.$$

Згідно з рисунком C2.12 вони запишуться:

$$\sum X_i = X_A + P_1 \cos \varphi_1 - P_2 \cos \varphi_2 + X_B = 0, \quad (C2.1)$$

$$\sum Y_i = Y_A - q b + P_1 \sin \varphi_1 - P_2 \sin \varphi_2 + Y_B = 0, \quad (C2.2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{ci} = & -Y_A a - X_A \operatorname{tg} a + M - q b^2 / 2 + P_1 \sin \varphi_1 b + \\ & + Y_B (b + c) + X_B h + P_2 \cos \varphi_2 h - P_2 \sin \varphi_2 (b + c) = 0. \end{aligned} \quad (C2.3)$$

Ці три рівняння розв'язати неможливо, оскільки в них є чотири невідомих. Використаємо їх для перевірки розв'язку. Поставлену задачу розв'яжемо методом розчленування. Розглядаємо раму по частинах, роз'єднавши її по шарніру С. Частина АС збірної конструкції, зображена на рис. C2.13.

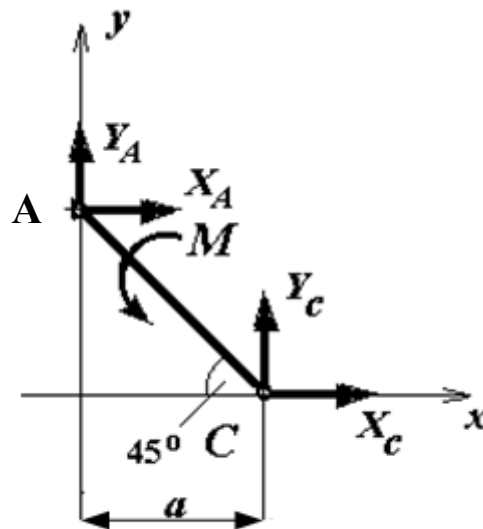


Рисунок C2.13

$$\sum X_i = X_A + X_C = 0, \quad (C2.4)$$

$$\sum Y_i = Y_A + Y_C = 0, \quad (C2.5)$$

$$\Sigma M_{Ai} = M + Y_C a + X_C a \operatorname{tg} 45^\circ = 0. \quad (C2.6)$$

Розв'язання цих рівнянь також неможливе, бо в них 4 невідомих.

Розглядаємо частину СВ, що зображена на рис. C2.14. Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q приводимо до зосередженої сили Q , яка дорівнює:

$$Q = q b = 0,5 \text{ кН/м} \cdot 4 \text{ м} = 2 \text{ кН}.$$

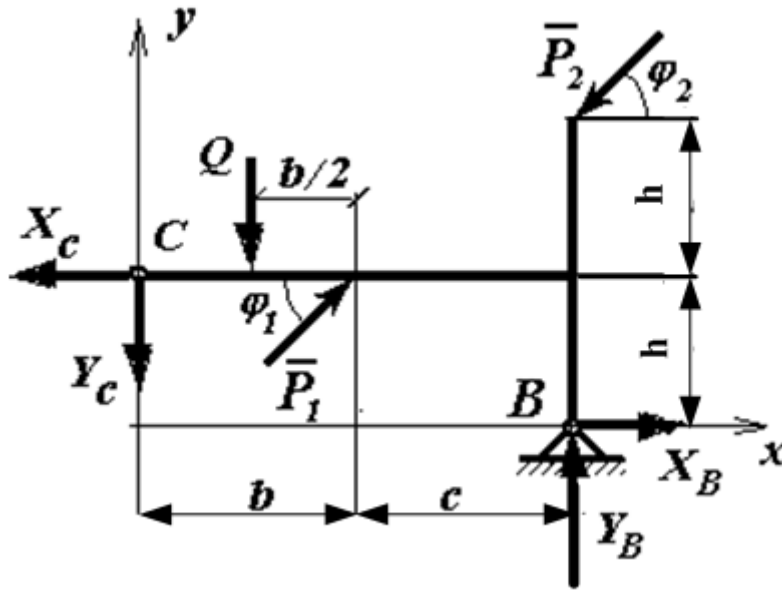


Рисунок C2.14

$$\Sigma X_i = -X_C + P_1 \cos \varphi_1 + X_B - P_2 \cos \varphi_2 = 0, \quad (C2.7)$$

$$\Sigma Y_i = -Y_C - Q + P_1 \sin \varphi_1 + Y_B - P_2 \sin \varphi_2 = 0, \quad (C2.8)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Bi} = & Y_C (b + c) + X_C h + Q (c + b/2) - P_1 \sin \varphi_1 c - \\ & - P_1 \cos \varphi_1 h + P_2 \cos \varphi_2 2h = 0. \end{aligned} \quad (C2.9)$$

Рівняння (C2.6) і (C2.9) розв'язуємо як систему, звідки знаходимо

$$X_C = (K_1 + M(b + c)/a) / (h - (b + c) \operatorname{tg} 45^\circ), \quad (C2.10)$$

$$Y_C = -M/a - X_C \operatorname{tg} 45^\circ, \quad (C2.11)$$

де позначено:

$$K_1 = P_1 (c \sin \varphi_1 + h \cos \varphi_1) - 2 P_2 h \cos \varphi_2 - Q (c + b/2).$$

Тоді з рівнянь (C2.4), (C2.5) і (C2.7), (C2.8) знаходимо складові реакцій R_A і R_B

$$X_A = -X_C, \quad (C2.12)$$

$$Y_A = -Y_C, \quad (C2.13)$$

$$X_B = X_C - P_1 \cos \varphi_1 + P_2 \cos \varphi_2, \quad (C2.14)$$

$$Y_B = Y_C + Q - P_1 \sin \varphi_1 + P_2 \sin \varphi_2. \quad (C2.15)$$

Модулі реакцій R_A і R_B будуть рівні:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}. \quad (C2.16)$$

Перевірка. Опорні реакції знайдені правильно, якщо виконуються аналітичні умови рівноваги для довільної плоскої системи сил, тобто, рівняння (C2.1) - (C2.3).

За формулами (C2.10) - (C2.16), а для перевірки за (C2.1) - (C2.3), проводимо розрахунок в ППП Matchcad і виконуємо розрахунки на EOM.

$$\pi=3.14$$

$$a=7$$

$$P1=90$$

$$b=4$$

$$P2=8$$

$$c=3$$

$$M=10$$

$$Q=2$$

$$H=2$$

$$\phi := 15 \cdot \frac{6.28}{360}$$

$$\gamma := 0, 1 \cdot \frac{6.28}{360} .. 360 \cdot \frac{6.28}{360}$$

$$K1(\gamma) := P1 \cdot (c \cdot \sin(\phi) + H \cdot \cos(\phi)) - 2P2 \cdot H \cdot \cos(\gamma) - Q \cdot \left(c + \frac{b}{2} \right)$$

$$XC(\gamma) := \frac{\left[K1(\gamma) + M \cdot \frac{(b+c)}{a} \right]}{[H - (b+c)\tan(45)]}$$

$$YC(\gamma) := -\frac{M}{a} - XC(\gamma) \tan(45)$$

$$XA(\gamma) := -XC(\gamma)$$

$$YA(\gamma) := -YC(\gamma)$$

$$XB(\gamma) := XC(\gamma) - P1 \cdot \cos(\phi) + P2 \cdot \cos(\gamma)$$

$$YB(\gamma) := YC(\gamma) + Q - P1 \cdot \sin(\phi) + P2 \cdot \sin(\gamma)$$

$$RA(\gamma) := \sqrt{(XA(\gamma))^2 + (YA(\gamma))^2}$$

$$RB(\gamma) := \sqrt{(XB(\gamma))^2 + (YB(\gamma))^2}$$

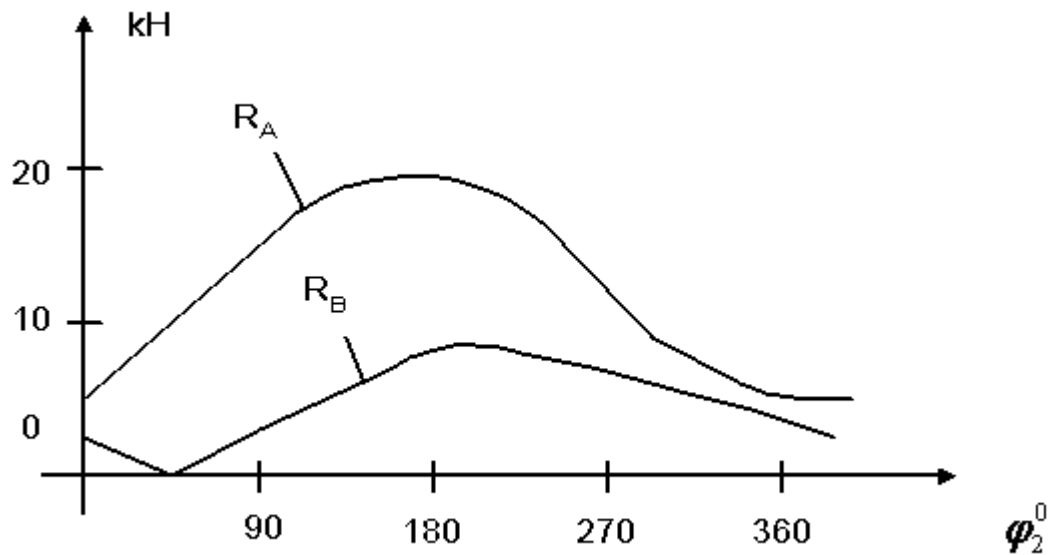


Рисунок С2.15

З рисунка С2.15 находимо:

$R_{Amin} = 5 \text{ кН}$, при $\alpha = 0$, $R_{Amax} = 19,2 \text{ кН}$, при $\alpha = 172^\circ$,

$R_{Bmin} = 0$, при $\alpha = 45^\circ$, $R_{Bmax} = 8 \text{ кН}$, при $\alpha = 198^\circ$.

С.3 Плоска довільна система сил з врахуванням сил тертя

Визначити мінімальне значення сили $\bar{F}$ і реакції в'язей матеріальної системи (рис. С3.1 – С3.10), що знаходиться в стані критичної рівноваги. Необхідні для розрахунку дані наведені в табл. С3.1 (f – коефіцієнт тертя ковзання між східчастим шківом 1 і гальмівною колодкою тіла ОВ; P_1 та P_2 вага відповідно тіл 1 та 2). Вагою тіла ОВ знехтувати в варіантах 1, 9, 11, 28 – похила поверхня гладенька, а в варіантах 2, 5, 19, 26 – шорстка.

Таблиця С3.1

Варіант	P_1 , кН	P_2 , кН	$l=OB$, м	$l_1=OA$, м	R_1 , м	r_1 , м	f
1	0,1	1,1	0,6	0,15	0,2	0,17	0,3
2	0,15	1,2	0,65	0,18	0,21	0,18	0,31
3	0,2	1,3	0,7	0,2	0,22	0,16	0,32
4	0,25	1,4	0,75	0,21	0,23	0,19	0,4
5	0,3	1,5	0,8	0,25	0,25	0,2	0,41
6	0,1	0,9	0,5	0,1	0,17	0,13	0,25
7	0,15	1,0	0,55	0,15	0,18	0,14	0,26
8	0,2	1,1	0,65	0,2	0,19	0,15	0,27
9	0,25	1,2	0,7	0,21	0,26	0,2	0,28
0	0,3	1,4	0,75	0,25	0,27	0,22	0,29

С3.1 Приклад виконання завдання

На рис. С3.11 наведена схема механізму для підйому вантажа 2 вагою $P_2 = 3$ кН по шорсткій похилій площині ($\alpha = 30^\circ$). Знайти мінімальне значення сили F , при якій матеріальна система знаходиться у спокої, та реакції в'язей. Вага східчастого блока 1 - $P_1 = 0,1$ кН; його розміри - $R_1 = 0,4$ м; $r_1 = 0,3$ м. Коефіцієнт тертя між штоком ОВ і тілом 1 - $f = 0,35$. Вагою штока ОВ знехтувати. При розрахунках прийняти: $OB = 0,5$ м; $OA = 0,2$ м; $a = 0,8 \cdot AB$; $\beta = 15^\circ$.

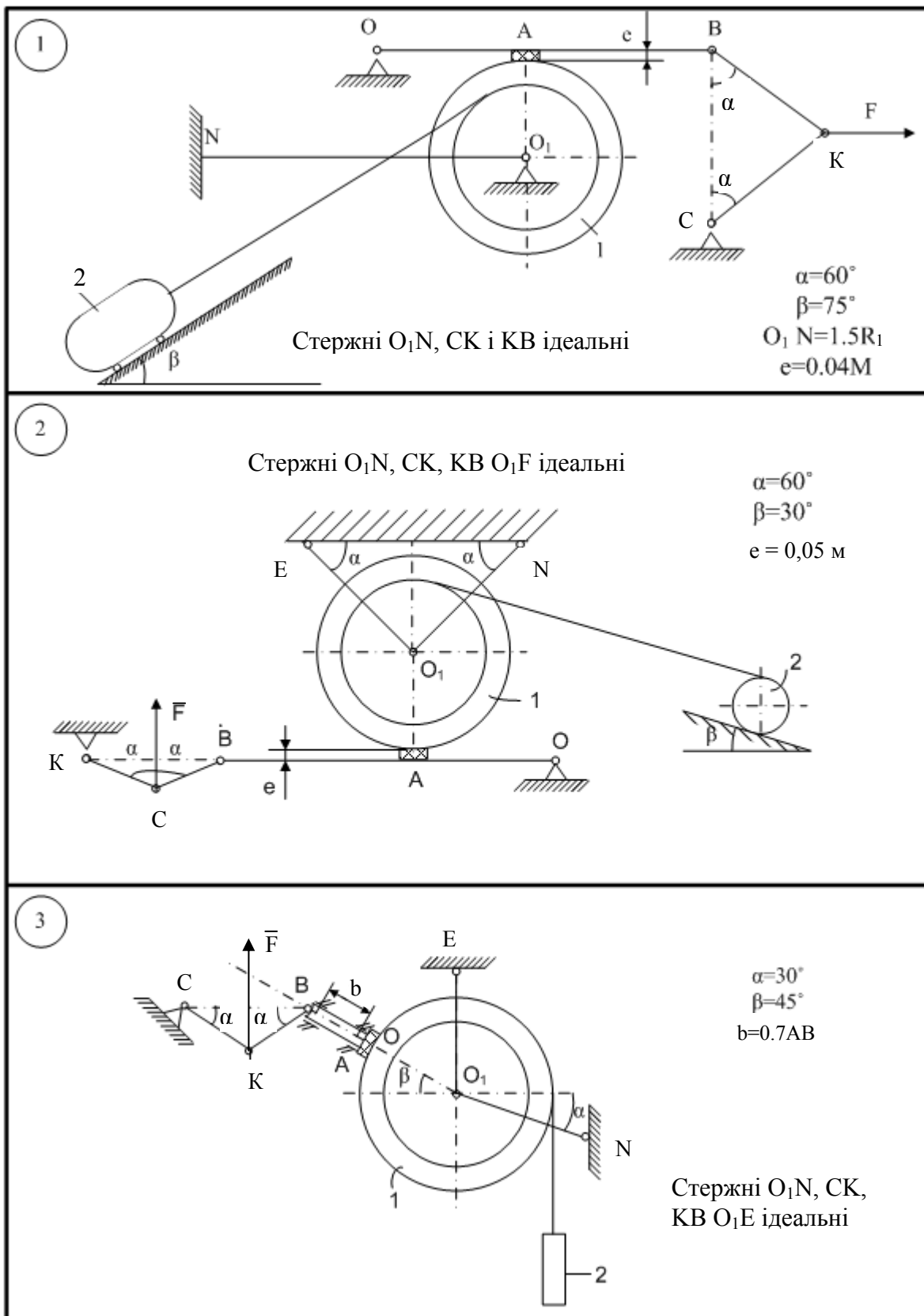


Рисунок С3.1

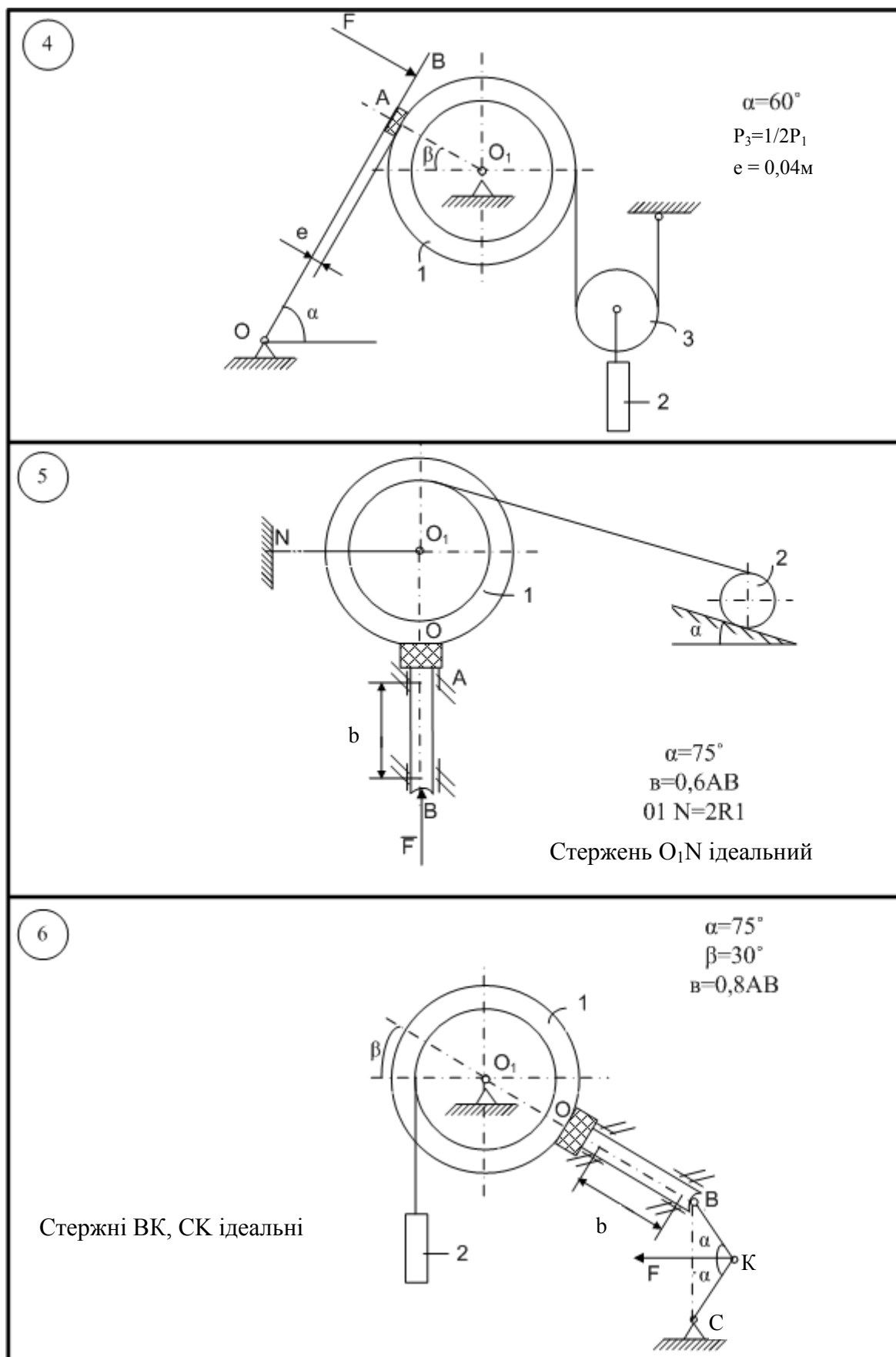


Рисунок С3.2

7

Стержень O_1N ідеальний

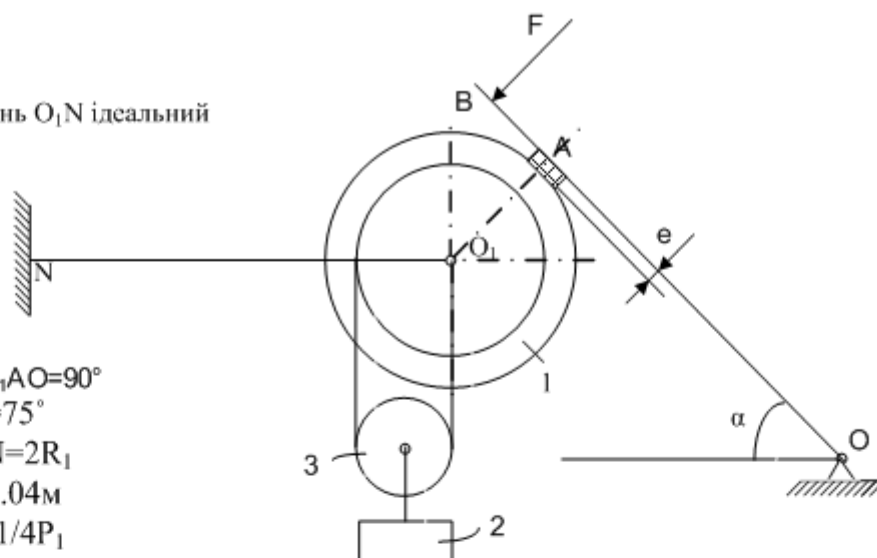
$$\angle O_1AO = 90^\circ$$

$$\alpha = 75^\circ$$

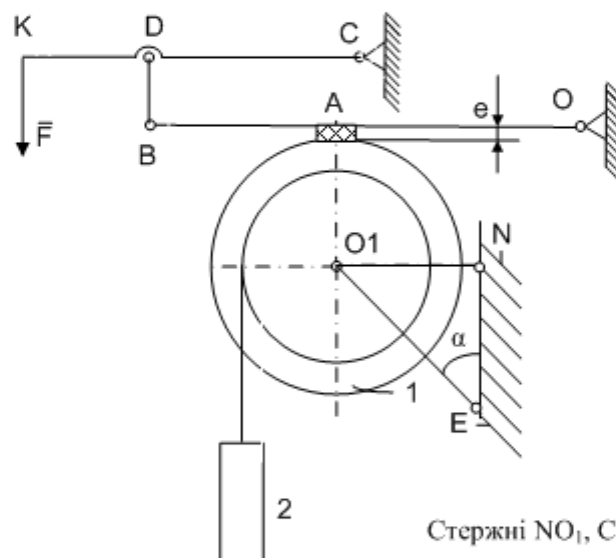
$$O_1N = 2R_1$$

$$e = 0.04 \text{ м}$$

$$P_3 = 1/4 P_1$$



8



$$\alpha = 60^\circ$$

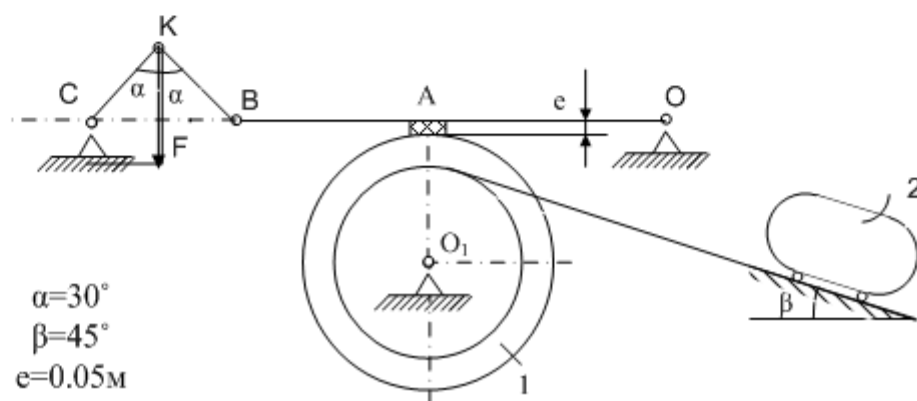
$$e = 0.03 \text{ м}$$

$$CD = OA$$

$$KD = 2CD$$

Стержни NO_1 , CK , DB і EO_1 ідеальні

9



$$\alpha = 30^\circ$$

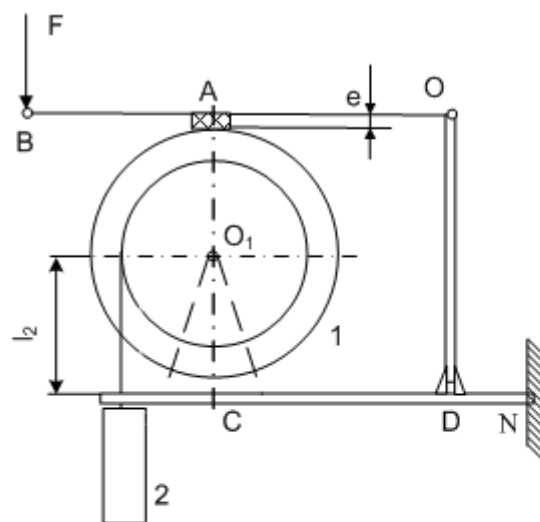
$$\beta = 45^\circ$$

$$e = 0.05 \text{ м}$$

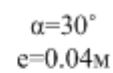
Стержни CK і KB ідеальні

Рисунок С3.3

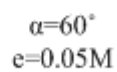
10



11



12

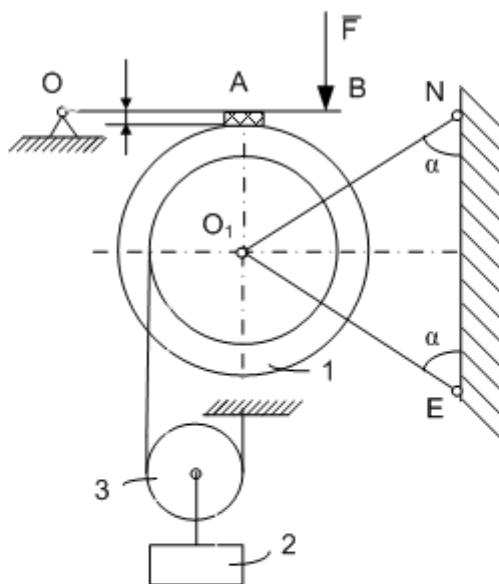


2

Рисунок С3.4

13

Стержні O_1N і O_1E ідеальні



$$\alpha = 60^\circ$$

$$e = 0.02M$$

$$P_3 = 1/2P_1$$

$$2P_3 = r_1$$

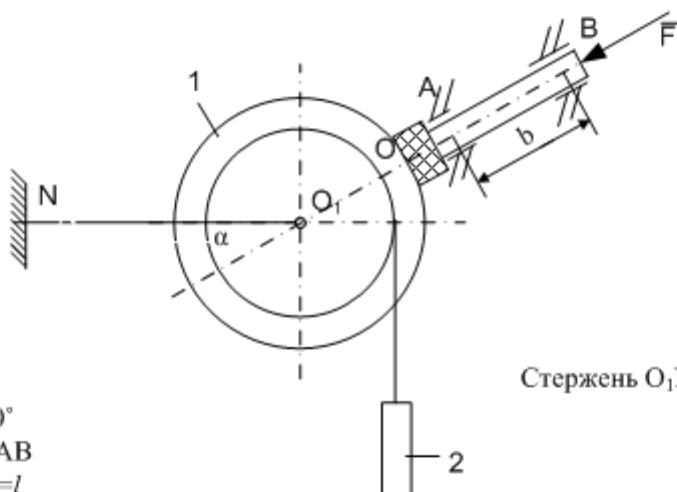
14

$$\alpha = 30^\circ$$

$$b = 0.7AB$$

$$O_1N = l$$

Стержень O_1N ідеальний



15

Стержні BK і CK ідеальні

$$\alpha = 75^\circ$$

$$e = 0.04M$$

$$AB = CD$$

$$OA = NC$$

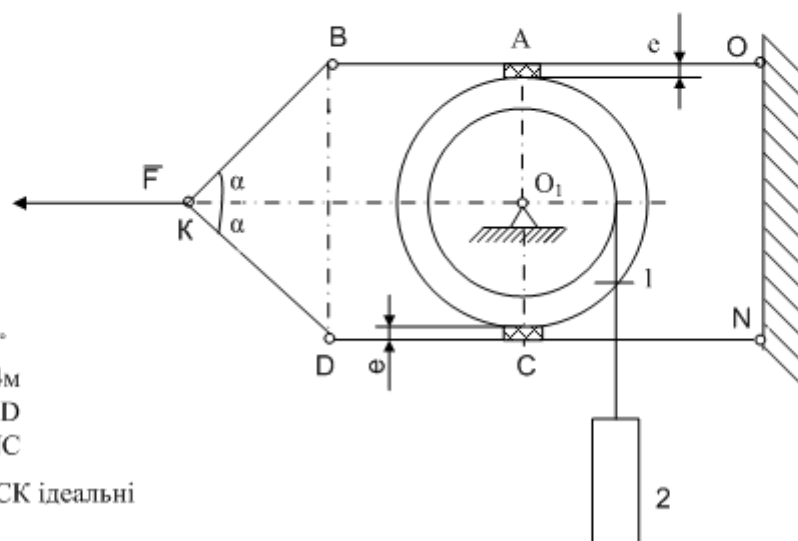
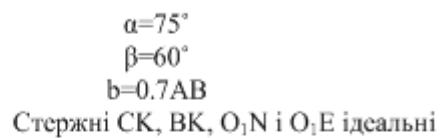
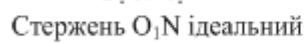


Рисунок С3.5

16



17



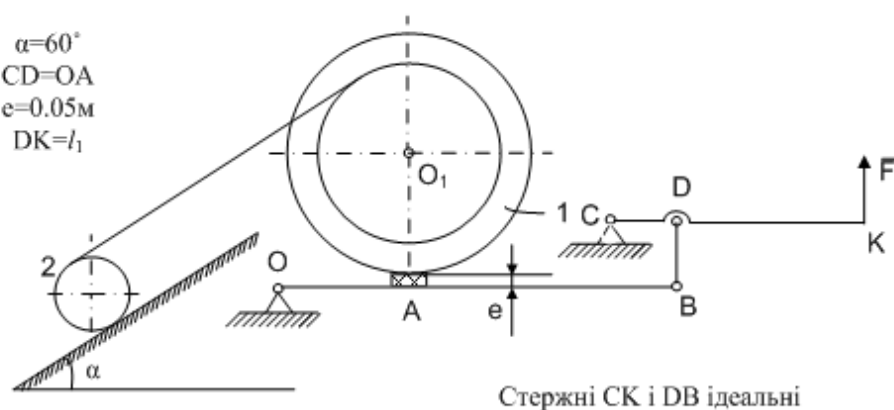
18



Рисунок С3.6

19

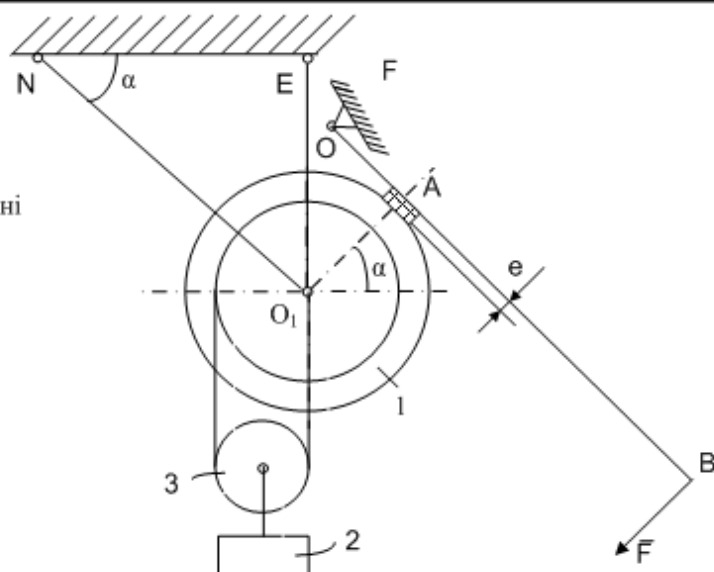
$\alpha=60^\circ$
 $CD=OA$
 $e=0.05M$
 $DK=l_1$



20

Стержні O_1N і O_1E ідеальні

$\alpha=30^\circ$
 $e=0.02M$
 $P_3=1/2P_1$



21

$\alpha=60^\circ$
 $e=0.01M$
 $O_1M=OA$
 $NM=l_1$

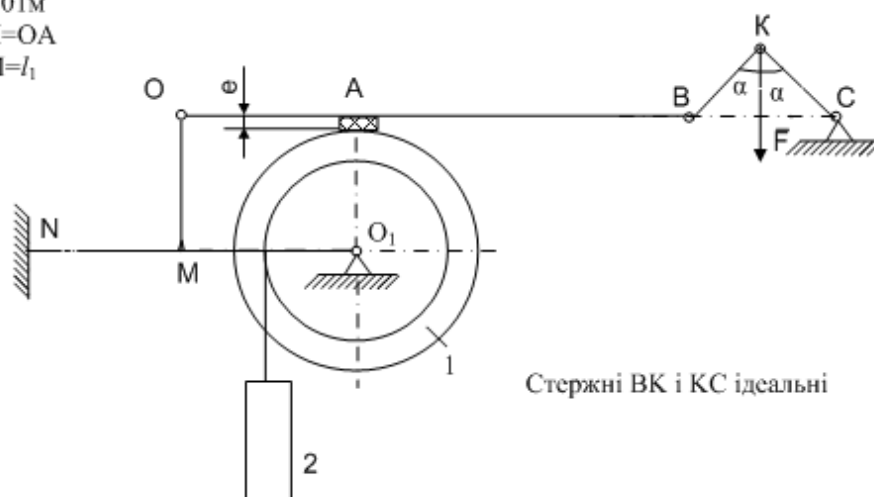
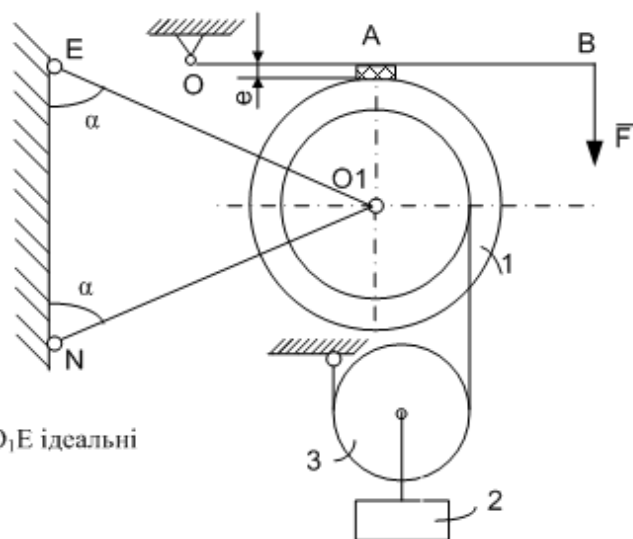


Рисунок С3.7

22



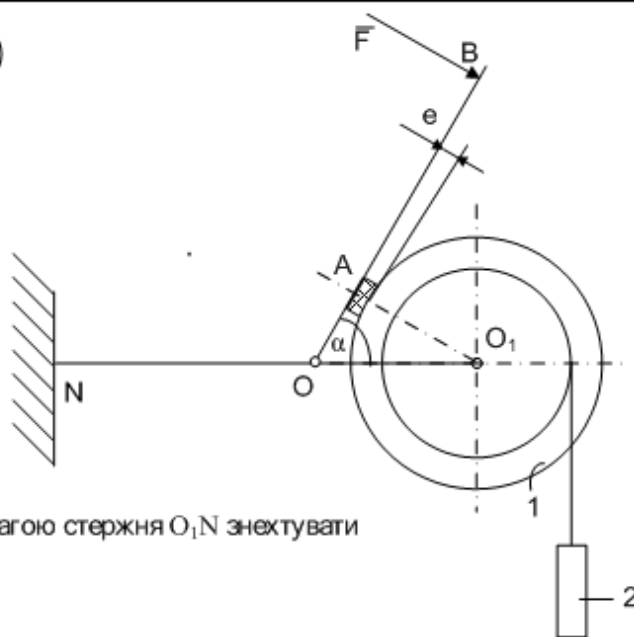
Стержні O_1N і O_1E ідеальні

$$\alpha = 60^\circ$$

$$e = 0.05M$$

$$P_3 = P_1$$

23



Вагою стержня O_1N знехтувати

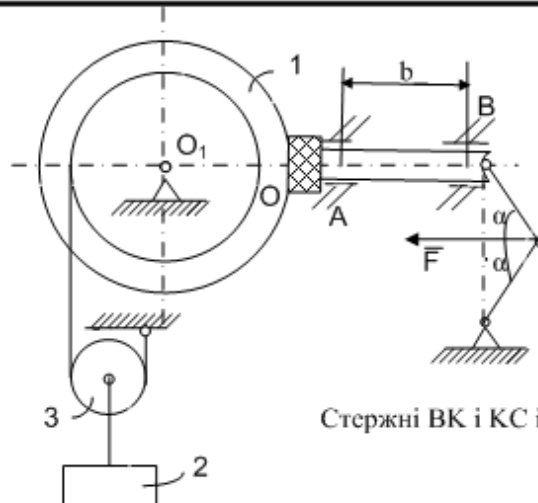
$$e = 0.04M$$

$$ON = l_1$$

$$\angle O_1AO = 90^\circ$$

$$OA \neq l_1$$

24



$$\alpha = 15^\circ$$

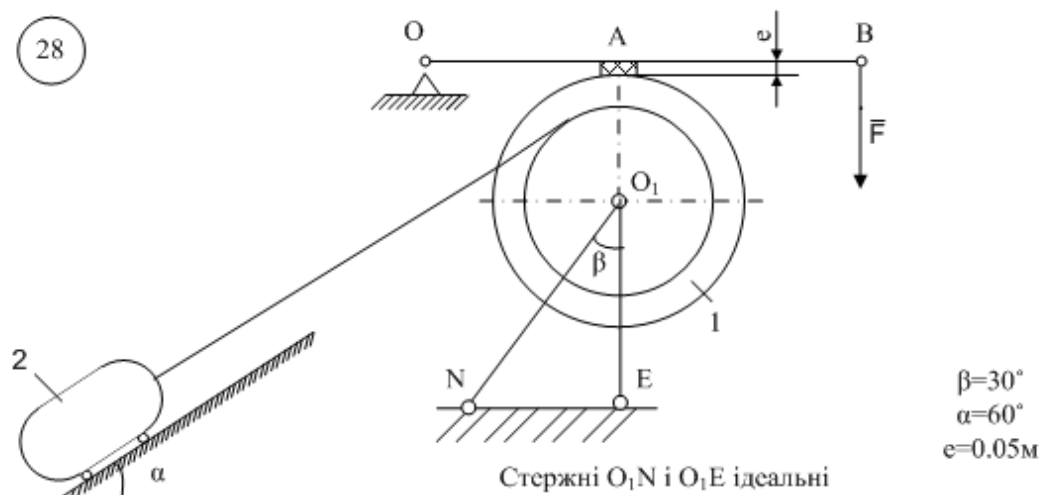
$$b = 0.6AB$$

$$P_3 = 1/2P_1$$

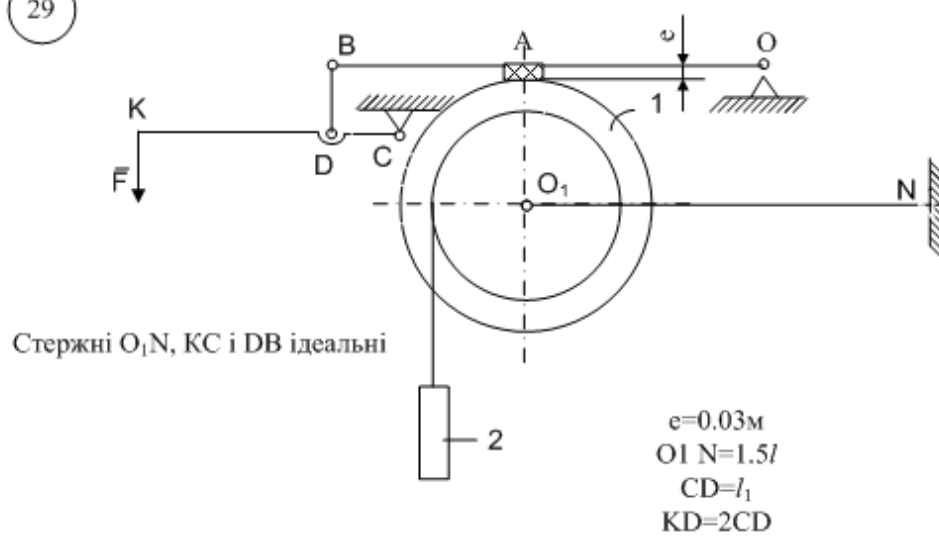
Стержні BK і KC ідеальні

Рисунок С3.8

28



29



30

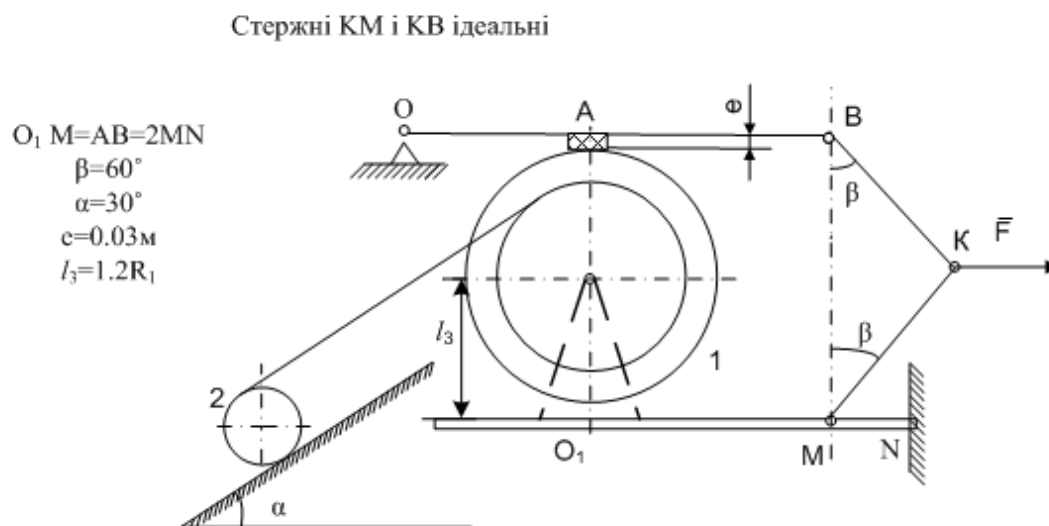


Рисунок С3.10

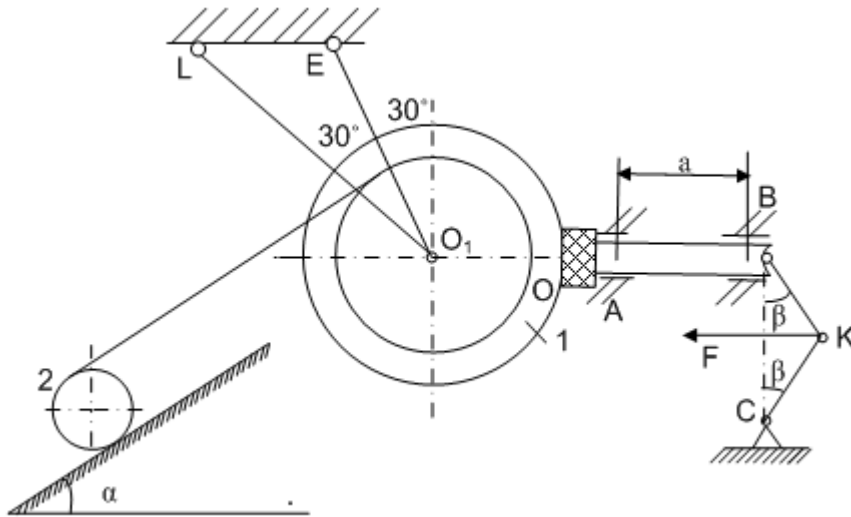


Рисунок С3.11

Розв’язання. Розглянемо критичну рівновагу матеріальної системи (рис. С3.11). При такій рівновазі сила $\vec{F}$ буде мати мінімальне значення. Знайдемо силу, що діє на шток ОВ, розглянувши рівновагу вузла К (рис. С3.12).

Для збіжної системи сил (рис. С3.12) запишемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_x = 0; N_C \cdot \sin \beta + N_B \cdot \sin \beta - F = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; N_C \cdot \cos \beta - N_B \cdot \cos \beta = 0$$

Звідки

$$N_C = N_B = \frac{F}{2 \cdot \sin \beta} \quad (C3.1)$$

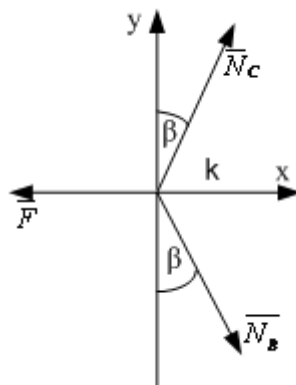


Рисунок С3.12

Якщо матеріальна система знаходиться у спокої, тоді буде знаходитися у рівновазі і кожне тіло цієї системи.

Розглянемо врівноважену систему сил, що прикладена до тіла 2 (рис. С3.13): вага тіла P_2 , реакція троса S_2 , реакції шорсткої поверхні $\bar{N}_2$ і $\bar{F}_{mp.2}$.

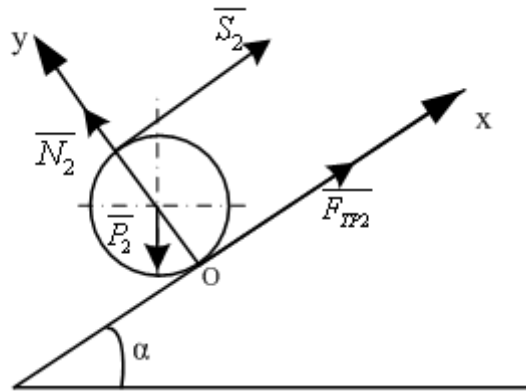


Рисунок С3.13

Для врівноваженої плоскої системи сил $\{\bar{N}_2, \bar{S}_2, \bar{P}_2, \bar{F}_{mp.2}\} \sim 0$ запишемо рівняння рівноваги.

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; S_2 + F_{mp.2} - P_2 \cdot \sin \alpha = 0, \\ \Sigma F_y &= 0; N_2 - P_2 \cdot \cos \alpha = 0, \\ \Sigma m_D \bar{F} &= 0; -S_2 \cdot 2R_2 + P_2 \cdot R_2 \cdot \sin \alpha = 0.\end{aligned}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned}N_2 &= P_2 \cdot \cos \alpha = 3000 \cdot \cos 30^\circ = 2598H, \\ S_2 &= \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 3000 \cdot \sin 30^\circ = 750H, \\ F_{mp.2} &= P_2 \cdot \sin \alpha - S_2 = 3000 \cdot \sin 30^\circ - 750 = 750H.\end{aligned}$$

Тіло 1 (рис. С3.14) знаходиться у спокої під дією врівноваженої системи сил: ваги тіла P_1 , реакції троса $\bar{S}'_2$, реакцій ідеальних стержнів $\bar{N}_E$ і $\bar{N}_L$, реакцій гальмівного штока $\bar{N}_0$ і $\bar{F}_{mp.0}$. Сила тертя $\bar{F}_{mp.0}$ направлена по дотичній до поверхні у точці дотику тіла 1 і штока ОВ в сторону, протилежну можливому русі тіла 1. За аксіомою дії та протидії - $S'_2 = S_2 = 750H$. При критичній рівновазі виконується умова:

$$F_{mp.0} = f \cdot N_0 \quad (C3.2)$$

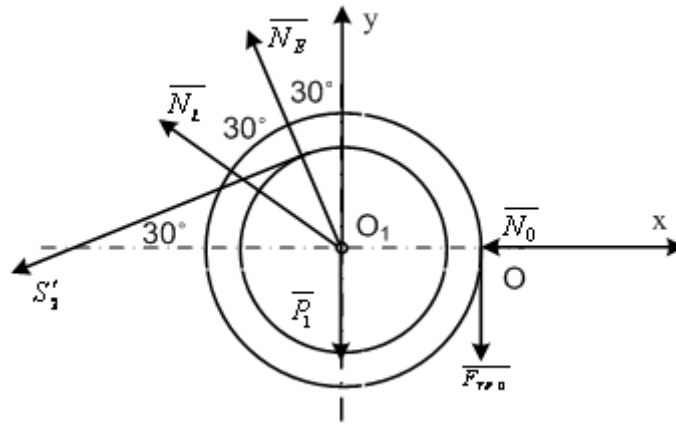


Рисунок С3.14

Складемо рівняння рівноваги для плоскої врівноваженої системи сил $\{\bar{S}_2, \bar{N}_L, \bar{N}_E, \bar{P}_1, \bar{N}_0, \bar{F}_{mp,0}\} \sim 0$.

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; -S'_2 \cdot \cos 30^\circ - N_L \cdot \cos 30^\circ - N_E \cdot \sin 30^\circ - N_0 = 0, \\ \Sigma F_y &= 0; -S'_2 \cdot \sin 30^\circ + N_L \cdot \sin 30^\circ + N_E \cdot \cos 30^\circ - P_1 - F_{mp,0} = 0, \\ \Sigma m_{O_1} \bar{F} &= 0; S'_2 \cdot r_1 - F_{mp,0} \cdot R_1 = 0.\end{aligned}$$

Розв'язуючи отримані рівняння з врахуванням (С3.2), маємо:

$$\begin{aligned}F_{mp,0} &= S'_2 \cdot \frac{r_1}{R_1} = 750 \cdot \frac{0,3}{0,4} = 562,5H, \\ N_0 &= \frac{F_{mp,0}}{f} = \frac{562,5}{0,35} = 1607,1H, \\ N_E &= \frac{P_1 + F_{mp,0} + 2 \cdot S'_2 \cdot \sin 30^\circ + N_0 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{\cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \\ &= \frac{100 + 562,5 + 2 \cdot 750 \cdot 0,5 + 1607,1 \cdot 0,5774}{0,866 - 0,5 \cdot 0,5774} = 4054,1H \\ N_L &= -\frac{1}{\cos 30^\circ} \cdot (N_0 + N_E \cdot \sin 30^\circ + S'_2 \cdot \cos 30^\circ) = \\ &= -\frac{1}{0,866} \cdot (1607,1 - 4054,1 \cdot 0,5 + 750 \cdot 0,866) = - - 4946,5H.\end{aligned}$$

Від'ємний знак реакції в'язі N_L означає, що стержень O_1L стискається, а не розтягується, як було прийнято попередньо.

Тепер розглянемо рівновагу штока ОВ (рис. С3.15). Запишемо рівняння рівноваги для плоскої врівноваженої системи сил

$$\{\bar{N}'_0, \bar{F}'_{mp,0}, \bar{N}_A, \bar{N}_1, \bar{N}'_B\} \sim 0.$$

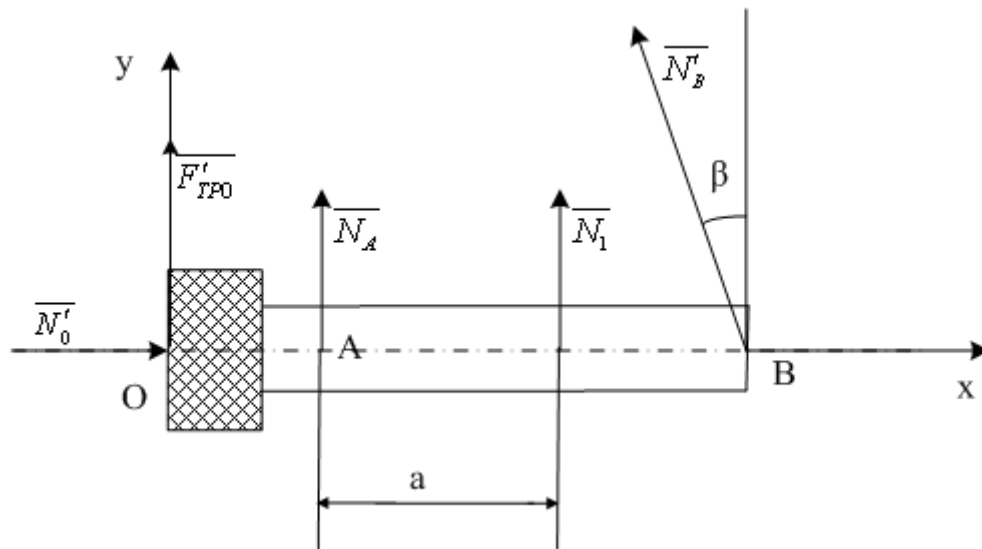


Рисунок С3.15

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; N'_0 - N'_B \cdot \sin \beta = 0, \\ \Sigma F_y &= 0; F'_{mp,0} + N_A + N_1 + N'_B \cdot \cos \beta = 0, \\ \Sigma m_A \bar{F} &= 0; -F'_{mp,0} \cdot OA + N_1 \cdot a + N'_B \cdot AB \cdot \cos \beta = 0.\end{aligned}$$

Звідки, враховуючи, що $N = N'_0$ і $F_{mp,0} = F'_{mp,0}$, знаходимо:

$$\begin{aligned}N'_B &= \frac{N'_0}{\sin \beta} = \frac{1607,1}{\sin 15^\circ} = 6209,8H, \\ N_1 &= F'_{mp,0} \cdot \frac{OA}{b} - N'_B \cdot \frac{AB}{b} \cos \beta = \\ &= 562,5 \cdot \frac{0,2}{0,8 \cdot 0,3} - 6209,4 \cdot \frac{0,3}{0,8 \cdot 0,3} \cdot \cos 15^\circ = -7028,8H, \\ N_A &= -N_1 - N'_B - F'_{mp,0} = 7028,5 - 6209,4 - 562,5 = 468,3H.\end{aligned}$$

Мінімальне значення сили F знаходимо із формули (С3.1)

$$F = 2 \cdot N_B \cdot \sin \beta = 2 \cdot 6209,8 \cdot \sin 15^\circ = 3214,2H$$

де $N_B = N'_B$.

Відповідь:

$$\begin{aligned}F &= 3214,2H; N_2 = 2598H; F_{mp,2} = 750H; \\ N_L &= -4946,5H; N_E = -4054,1H; N_A = 468,3H; \\ N_1 &= -7028,8H; N_B = 6209,8H.\end{aligned}$$

С.4 Розрахунок реакції в'язей просторової конструкції

Вал АВ (рис. С 4.1 – С 4. 5) із закріпленими на ньому шківками знаходиться в рівновазі. Знайти величину сили Р та реакції опор в точках А і В.

Дані для розрахунків наводяться в таблиці С 6.1.

Таблиця С 6.1

Варіант	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	АВ	АС	R ₁	R ₂	α
	кН	кН	кН	кН	м	м	м	м	град
1	10	2	3	8	0,3	0,1	0,2	0,3	30
2	12	3	4	9	0,32	0,12	0,3	0,35	45
3	14	4	5	7	0,34	0,14	0,4	0,45	60
4	16	5	6	6	0,36	0,16	0,25	0,2	30
5	18	6	5	5	0,38	0,18	0,35	0,3	45
6	11	7	4	4	0,4	0,1	0,45	0,4	60
7	13	6	3	5	0,42	0,12	0,3	0,25	30
8	15	5	2	6	0,44	0,14	0,4	0,3	45
9	17	4	1	7	0,46	0,16	0,2	0,25	60
0	19	3	4	8	0,48	0,18	0,3	0,2	30

Сили $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ перпендикулярні до осі Ау, а лінія дії сили $\bar{F}_4$ паралельна осі Ау. На рис. С4.1–С4.5 (вар. 3,4,6,8,10,12–15,18,21,23–27,30) ділянка троса між тілами 2 і 3 паралельна площині хz. Радіуси міл 1, відповідно R₁ та R₂.

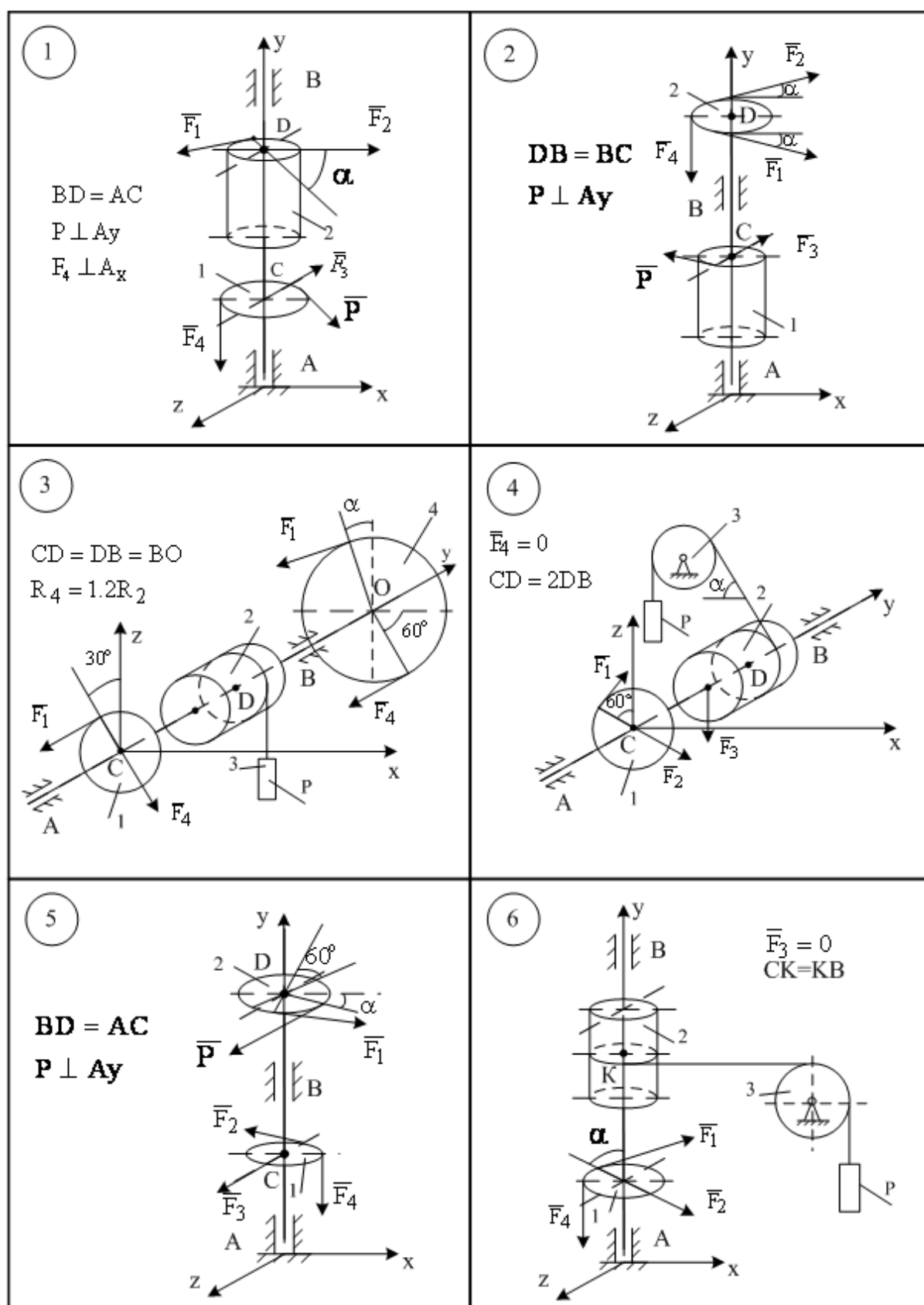


Рисунок С 4.1

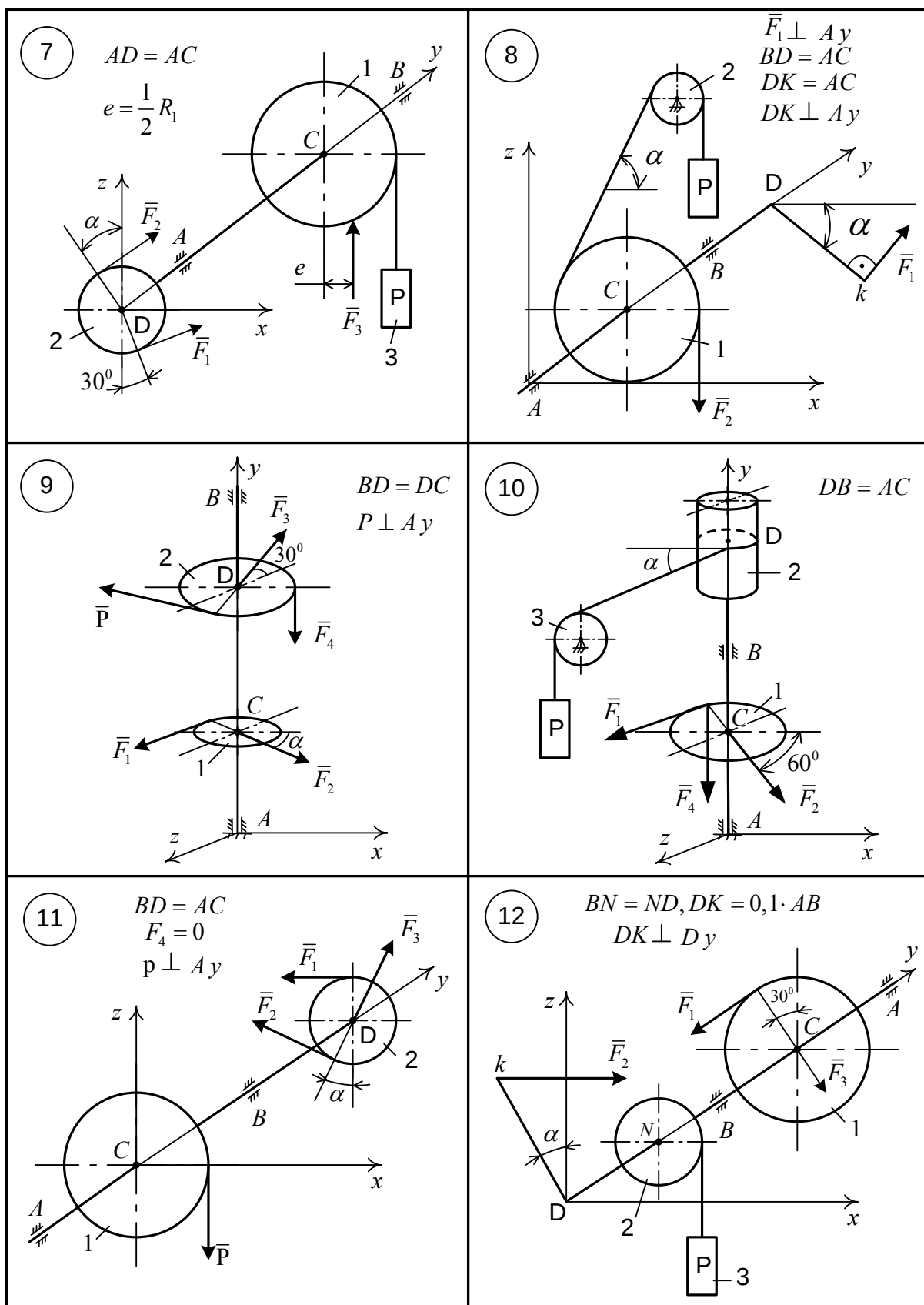


Рисунок С4.2

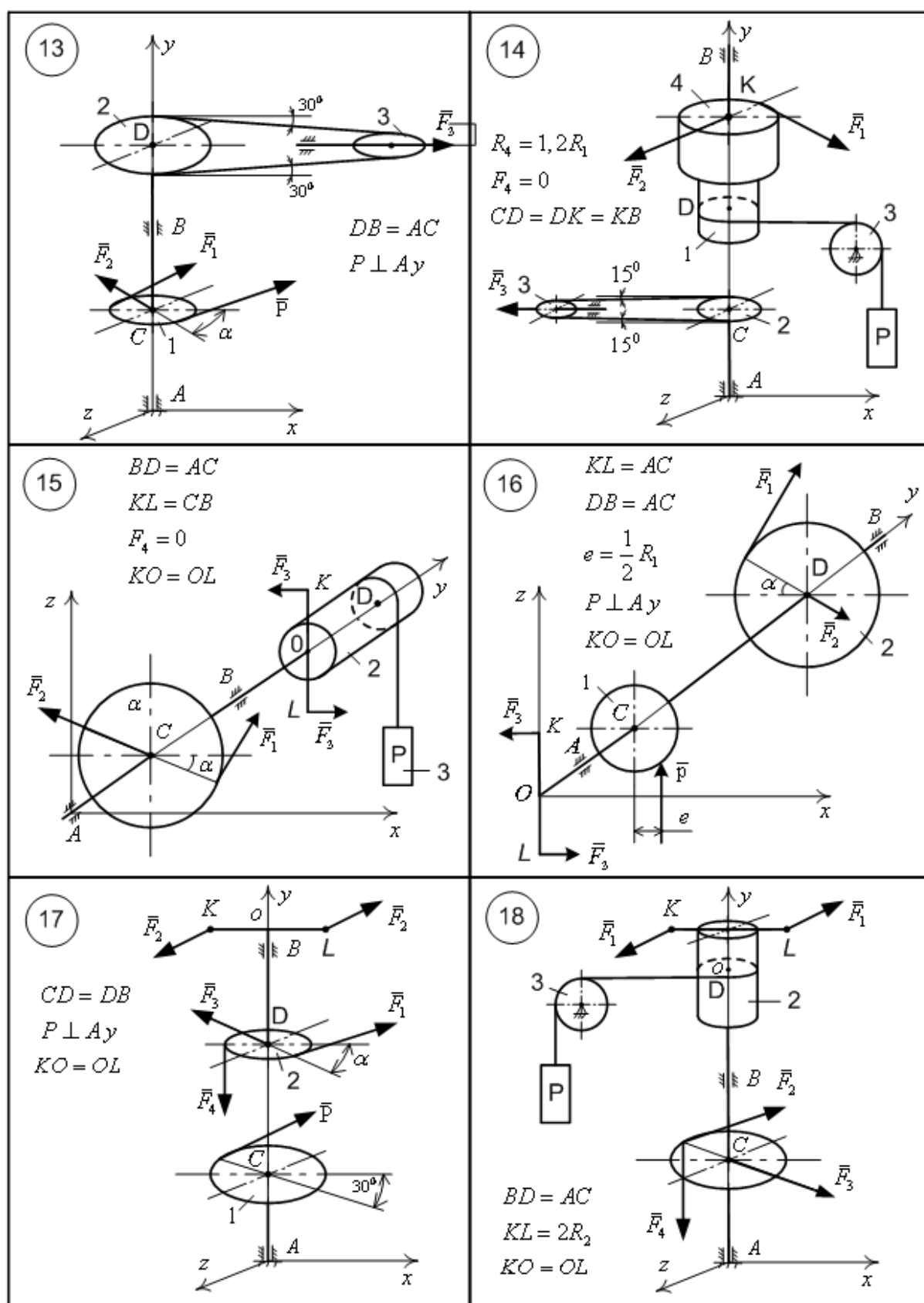


Рисунок С 4.3

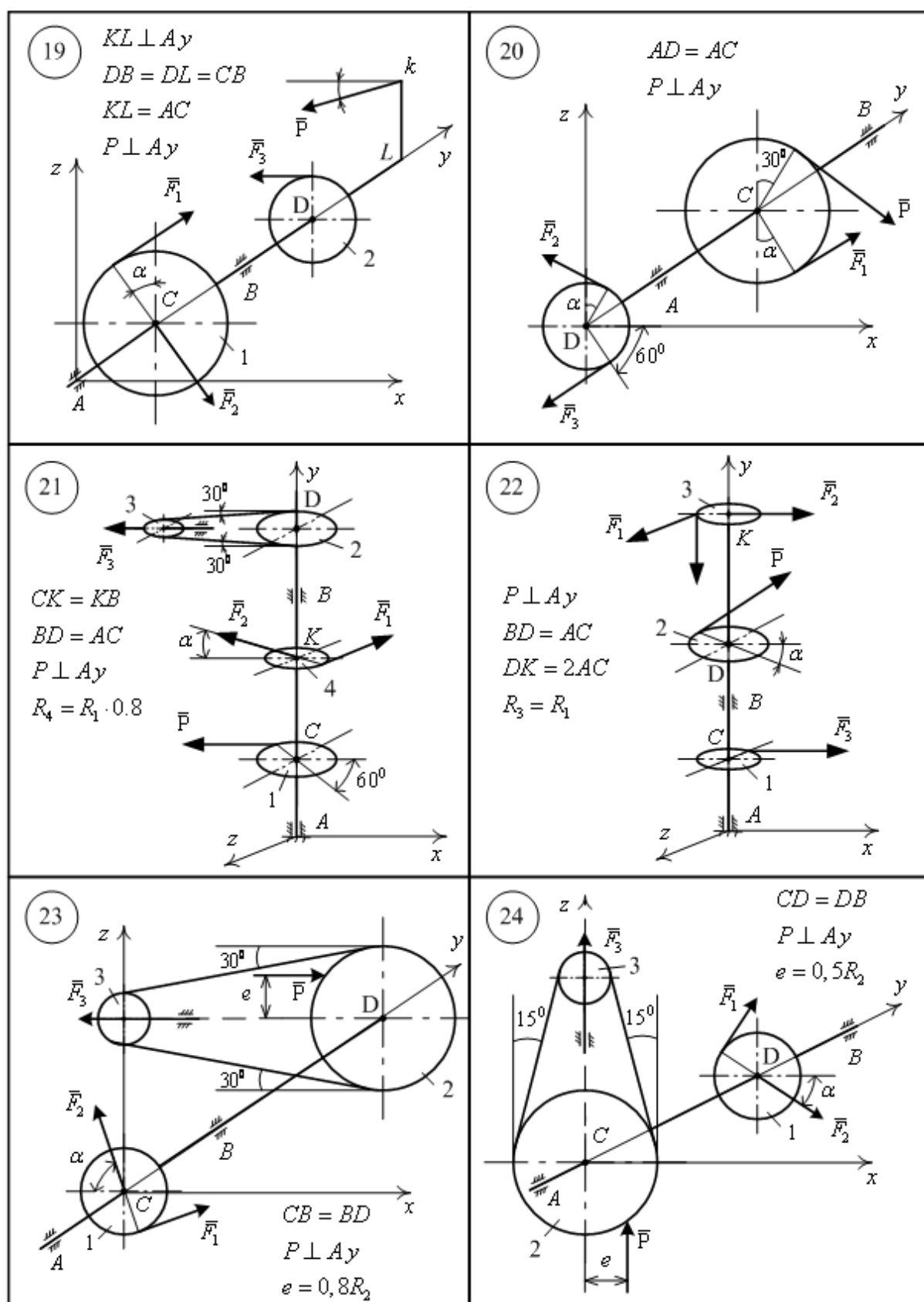


Рисунок С 4.4

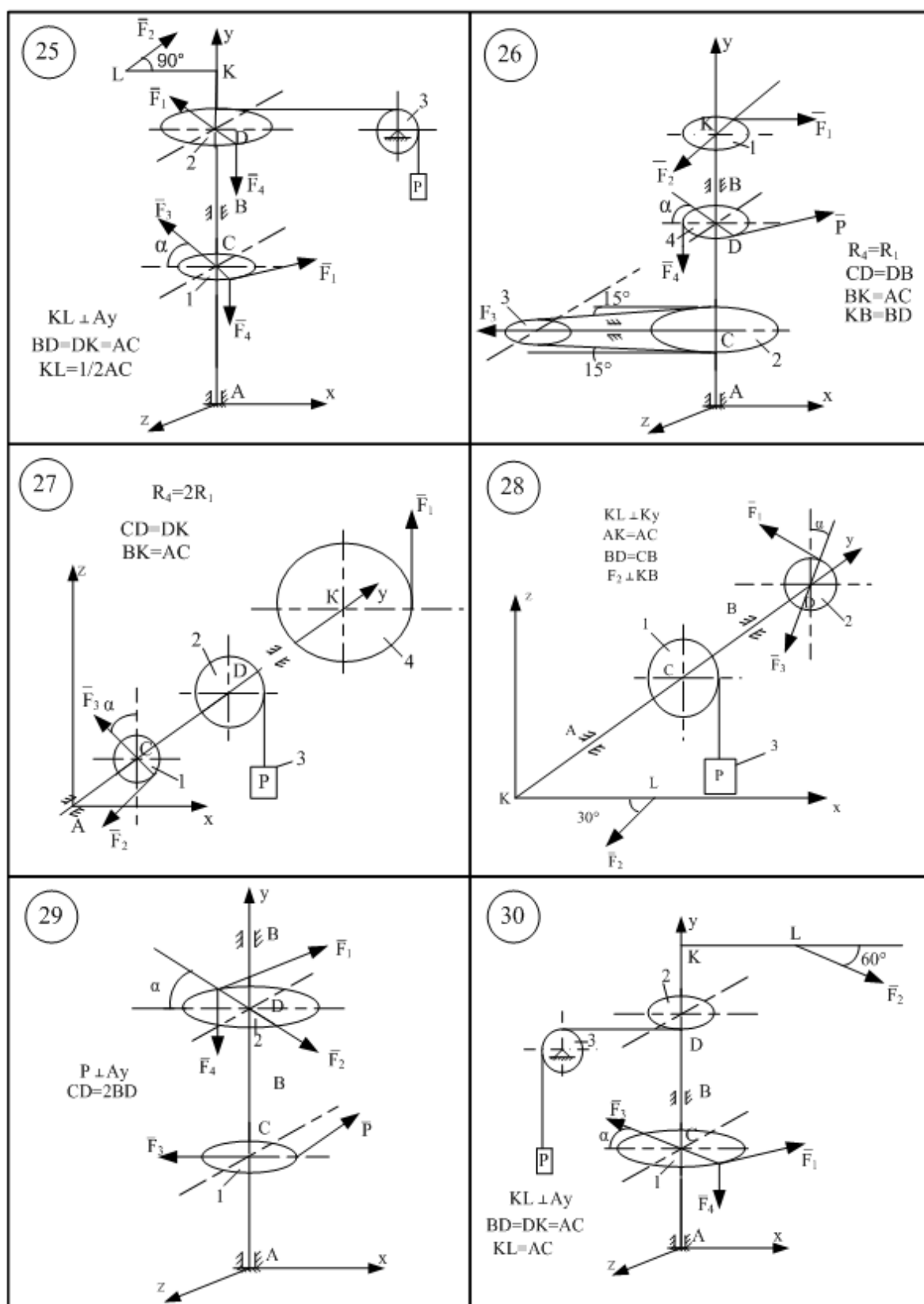


Рисунок С 4.5

С4.1 Приклад виконання завдання

На шків 2 (Рис. С4.6), що закріплений на валу AD, діють сили $F_1 = 15$ кН, $F_2 = 10$ кН, $F_3 = 8$ кН і $F_4 = 7$ кН. Причому $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_4$, перпендикулярні до осі A_z , а лінія дії сили $\vec{F}_3$ паралельна цій осі. Знайти вагу вантажу P, та реакції опор A і B при рівновазі вала з шківками 1 та 2. Якщо: $R_1 = 0,4$ м; $R_2 = 0,5$ м; $AC = 0,2$ м; $AB = 0,5$ м; $BD = 0,3$ м; $\alpha = 30^\circ$.

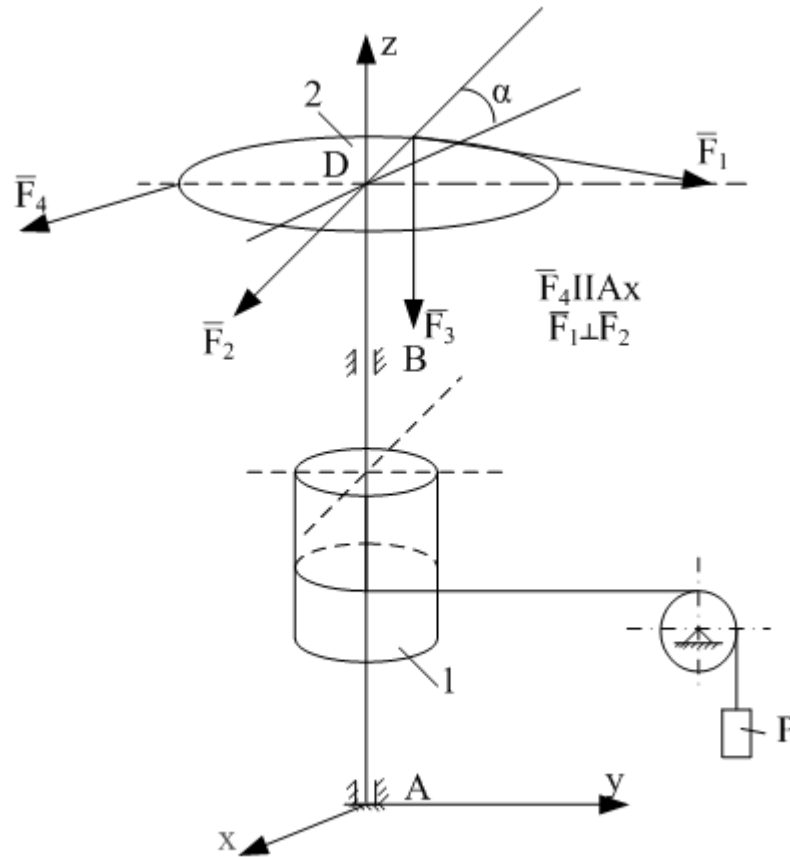


Рисунок С4.6

Розв'язання. Вал AD зі шківками 1 і 2 (Рис. С4,7) знаходиться в спокої під дією врівноваженої системи сил: активних - $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$; реакцій циліндричного шарніру в точці A - $\vec{X}_A; \vec{Y}_A$ і точці B - $\vec{X}_B; \vec{Y}_B$; реакції троса - $\vec{P}$; реакція горизонтальної поверхні в точці A - $\vec{Z}_A$.

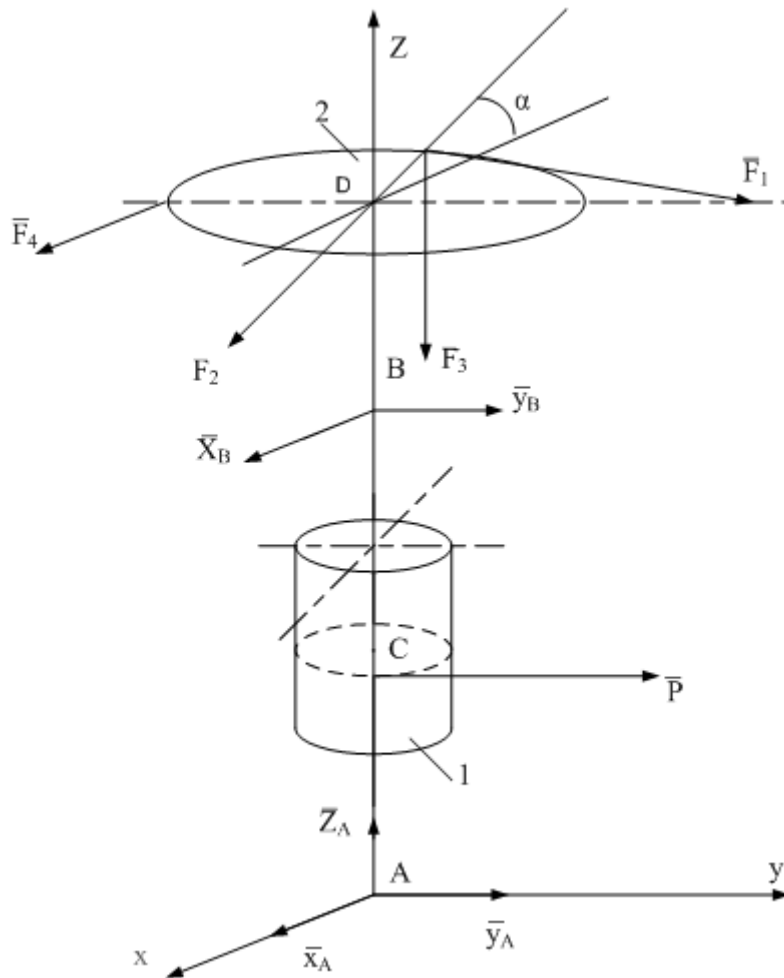


Рисунок С4.7

Для врівноваженої просторової системи сил $\{\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{P}, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4\} \sim 0$ запишемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_X = 0; X_A + X_B + F_4 + F_2 \cdot \cos \alpha - F_1 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\Sigma F_Y = 0; P + Y_A + Y_B + F_2 \cdot \sin \alpha + F_1 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\Sigma F_Z = 0; Z_A - F_3 = 0,$$

$$\Sigma M_X = 0; -P \cdot AC - Y_B \cdot AB + F_3 \cdot R_2 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot AD \cdot \sin \alpha - F_1 \cdot AD \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\Sigma M_Y = 0; X_B \cdot AB + F_4 \cdot AD + F_2 \cdot AD \cdot \cos \alpha - F_1 \cdot AD \cdot \sin \alpha - F_3 \cdot R_2 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\Sigma M_Z = 0; F_4 \cdot R_2 - F_1 \cdot R_2 + P \cdot R_1 = 0.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, маємо:

$$P = (-F_4 + F_1) \cdot \frac{R_2}{R_1} = (15 - 7) \cdot \frac{0,5}{0,4} = 10 \kappa H.$$

$$\begin{aligned} X_B &= (F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \cos \alpha - F_4) \cdot \frac{AD}{AB} + F_3 \cdot \frac{R_2}{AB} \cdot \cos \alpha = \\ &= (15 \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot \cos 30^\circ - 7) \cdot \frac{0,8}{0,5} + 8 \cdot \frac{0,5}{0,5} \cdot \cos 30^\circ = -6,2 \kappa H. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_A &= F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \cos \alpha - F_4 - X_B = \\ &= 15 \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot \cos 30^\circ - 7 + 6,2 = -2 \kappa H. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_B &= F_3 \cdot \frac{R_2}{AB} \cdot \sin \alpha - P \cdot \frac{AC}{AB} - (F_2 \cdot \sin \alpha + F_1 \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{AD}{AB} = \\ &= 8 \cdot \frac{0,5}{0,5} \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot \frac{0,2}{0,5} - (10 \cdot \sin 30^\circ + 15 \cdot \cos 30^\circ) \cdot \frac{0,8}{0,5} = -28,8 \kappa H. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_A &= -P - Y_B - F_2 \cdot \sin \alpha - F_1 \cdot \cos \alpha = \\ &= -10 + 28,8 - 10 \cdot \sin 30^\circ - 15 \cdot \cos 30^\circ = 0,8 \kappa H. \end{aligned}$$

$$Z_A = F_3 = 8 \kappa H.$$

Відповідь:

$$P = 10 \kappa H; X_B = -6,2 \kappa H; X_A = 2 \kappa H;$$

$$Y_B = -28,8 \kappa H; Y_A = 0,8 \kappa H; Z_A = 8 \kappa H.$$

2.2 Кінематика точки

К.1 Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями її руху

За заданими рівняннями руху точки знайти траєкторію, швидкість, прискорення з його складовими - дотичним і нормальним прискоренням та радіус кривини траєкторії.

Побудувати траєкторію на рисунку, вказати на ній положення точки в початковий момент руху та в момент часу $t = t_1$. На рисунку траєкторії в момент часу t_1 побудувати вектори швидкості і прискорення точки в відповідно вибраних масштабах.

Побудувати графіки залежностей швидкості від часу $V(t)$ та прискорення від часу $a(t)$.

Рівняння руху точки $x = x(t)$, $y = y(t)$ та значення моменту часу t_1 знаходяться в таблицях К1.2а і К1.2б, а значення коефіцієнтів A , B , C , D , k та ϕ в таблицях К1.1а і К1.1б за відповідними варіантами. Розмірність координат – сантиметри, часу – секунди.

Таблиця К1.1а

Варі- ант	A	B	C	D	k
1	3	2	6	4	2π
2	7	4	2	9	3π
3	4	3	6	5	8π
4	6	5	4	2	4π
5	8	4	7	6	5π
6	5	7	3	4	6π
7	3	4	7	2	2π
8	5	3	6	3	4π
9	4	5	8	6	3π
0	2	6	9	8	2π

Таблиця К1.1б

Варі- ант	A	B	C	D	ϕ
	см				рад
1	70	20	35	25	πt
2	40	10	10	15	t^2
3	50	25	10	30	$2\pi t$
4	64	16	30	18	πt^2
5	80	40	36	50	$2t$
6	55	11	20	25	$2\pi t^2$
7	65	13	18	20	$2t$
8	70	10	25	20	$3t^2$
9	75	25	30	15	$3\pi t$
0	72	24	16	18	t^3

К1.1 Приклад виконання завдання

Дано: Точка рухається в площині згідно з функціями від часу

$$x = 4t - 1, y = 2t^2 + 3 \quad (K1.1)$$

Знайти траєкторію, швидкість, прискорення, дотичне і нормальне прискорення руху точки та радіус кривини траєкторії в момент часу $t_1 = 1$ с.

Побудувати графік траєкторії, вказати інтервали руху на ній, відмітити початкове положення точки при $t=0$ і в момент $t = t_1$,

Таблиця К1.2а

Варіант	$x(t), \quad y(t), \quad \text{см}$	$t_1, \text{с}$
1	$x = -At^2 + C, \quad y = -Dt$	1
2	$x = A \cos^2(\frac{k}{3}t), \quad y = B \sin^2(\frac{k}{3}t)$	0,5
3	$x = -C \cos(\frac{k}{3}t^2), \quad y = D \sin(\frac{k}{3}t^2)$	0,3
4	$x = At + B, \quad y = -\frac{D}{t+1}$	2
5	$x = A \sin(\frac{k}{3}t), \quad y = -B \cos(\frac{k}{3}t) + C$	1
6	$x = At^2 + C, \quad y = -Bt$	2
7	$x = 3t^2 - t + C, \quad y = Dt^2 - \frac{D}{3}t - B$	1,5
8	$x = B \sin(\frac{k}{6}t^2), \quad y = A - C \cos(\frac{k}{6}t^2)$	4
9	$x = -\frac{A}{t+B}, \quad y = At + 2B$	2
10	$x = -D \cos(\frac{k}{3}t), \quad y = -C \sin(\frac{k}{3}t) - D$	1

Продовження таблиці К1.2а

Варіант	$x(t), y(t), \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$
11	$x = -At^2 + D, y = -Bt$	1,5
12	$x = B \sin^2(\frac{k}{6}t), y = -B \cos^2(\frac{k}{6}t)$	1
13	$x = D \cos(\frac{k}{3}t^2), y = -D \sin(\frac{k}{3}t^2)$	1
14	$x = -At - C, y = -\frac{A}{t+1}$	1
15	$x = D \cos(\frac{k}{3}t), y = -D \sin(\frac{k}{3}t)$	0,5
16	$x = At, y = Bt^2 - D$	1
17	$x = C \sin^2(\frac{k}{6}t) - D, y = -A \cos^2(\frac{k}{6}t)$	1
18	$x = -Dt^2 - C, y = At$	0,5
19	$x = A + B \cos(\frac{k}{3}t), y = C \sin(\frac{k}{3}t) + D$	1
20	$x = B - Ct - At^2, y = C - Ct - At^2$	1

Продовження таблиці К1.2а

Варіант	$x(t)$, $y(t)$, см	t_1 , с
21	$x = A \sin(\frac{k}{6}t^2) - B$, $y = A \cos(\frac{k}{6}t^2) + C$	2
22	$x = B t^2 - D$, $y = C t$	1
23	$x = A t^2 + t$, $y = D - B t^2 + \frac{B}{C}t$	0,5
24	$x = -D \sin(\frac{k}{6}t^2) - C$, $y = -A \cos(\frac{k}{6}t^2)$	1
25	$x = -A t$, $y = -B t^2 - C$	1
26	$x = D \sin^2(\frac{k}{4}t) + C$, $y = -D \cos^2(\frac{k}{4}t) - B$	1
27	$x = -C - B \sin(\frac{k}{3}t^2)$, $y = -B \cos(\frac{k}{3}t^2) + A$	1
28	$x = -D t^2 + A$, $y = -C t$	1,5
29	$x = A t^2 + \frac{A}{B}t - C$, $y = B t^2 + t + C$	1
30	$x = D \cos(\frac{k}{3}t^2) - A$, $y = -D \sin(\frac{k}{3}t^2) + B$	0,5

Таблиця К1.26

Варіант	$x(t), \quad y(t), \quad \text{см}$	$t_1, \text{с}$
1	$x = D \cos \varphi + \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - (C + D \sin \varphi)^2},$ $y = \frac{A-B}{C} (C + D \sin \varphi) - C$	0,4
2	$x = B \varphi - A \sin \varphi,$ $y = B - A \cos \varphi$	0,2
3	$x = (A+B) \sin \varphi - C \sin\left(\frac{A+B}{B} \varphi\right),$ $y = (A+B) \cos \varphi - C \cos\left(\frac{A+B}{B} \varphi\right)$	0,3
4	$x = (A-B) \sin \varphi + C \sin\left(\frac{A-B}{B} \varphi\right),$ $y = A - (A-B) \cos \varphi + C \cos\left(\frac{A-B}{B} \varphi\right)$	0,7
5	$x = A e^{0,1 \varphi} \sin \varphi + B,$ $y = D + C e^{0,1 \varphi} \cos \varphi$	0,6
6	$x = e^{0,2 \varphi} (A \sin \varphi + C \cos \varphi),$ $y = B + D \varphi$	0,3
7	$x = A + B \sin 2 \varphi \cos \varphi,$ $y = D + C \sin 2 \varphi \sin \varphi$	1,2
8	$x = C \varphi + B \sin \varphi + \frac{D}{A} \sqrt{A^2 - (C + B \sin \varphi)^2},$ $y = \frac{A-B}{A} (C + B \cos \varphi)$	0,5
9	$x = A (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi),$ $y = A (-1 + \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)$	0,4
10	$x = \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - (2D \sin \varphi)^2},$ $y = 2 \frac{D}{A} (A - B) \sin \varphi$	1,3

Продовження таблиці К1.26

Варіант	$x(t), y(t), \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$
11	$x = A + C \cdot \sin \varphi \cdot \cos 2\varphi,$ $y = D + B \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\varphi$	0,25
12	$x = B + \frac{D}{2A} \sqrt{4A^2 - (C + B \sin \varphi)^2},$ $y = (1 - \frac{D}{2A})(C + B \sin \varphi) - C$	0,4
13	$x = C\varphi - A \cdot \sin \varphi,$ $y = C - A \cdot \cos \varphi$	1,5
14	$x = (A - B) \sin \varphi + C \cdot \sin(\frac{A-B}{B} \varphi),$ $y = A - (A - B) \cos \varphi + C \cdot \cos(\frac{A-B}{B} \varphi)$	0,35
15	$x = A + B \varphi,$ $y = e^{0,1\varphi}(C \sin \varphi + D \cos \varphi)$	0,75
16	$x = D(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi),$ $y = D(-\varphi \sin \varphi - \cos \varphi + 1)$	0,65
17	$x = C + D \sin 4\varphi \cdot \cos 2\varphi,$ $y = B + A \sin 4\varphi \cdot \sin 2\varphi$	0,3
18	$x = \frac{D}{A} \sqrt{A^2 - (C \sin 2\varphi)^2},$ $y = \frac{C}{A}(2A - D) \sin 2\varphi$	0,4
19	$x = B + A \sin \varphi \cdot \cos 2\varphi,$ $y = D + A \sin \varphi \cdot \sin 2\varphi$	0,6
20	$x = (A + D) \sin 2\varphi - C \cdot \sin(\frac{A+D}{D} 2\varphi),$ $y = (A + D) \cos 2\varphi - C \cdot \cos(\frac{A+D}{D} 2\varphi)$	0,45

Продовження таблиці К1.26

Варіант	$x(t), \quad y(t), \quad \text{см}$	$t_1, \text{с}$
21	$x = B \cdot e^{-0.2\varphi} \cdot \cos \varphi + C,$ $y = A - D \cdot e^{-0.2\varphi} \cdot \sin \varphi$	1,5
22	$x = C + A \sin 2\varphi \cdot \cos \varphi,$ $y = D + A \sin 2\varphi \cdot \sin \varphi$	0,25
23	$x = (B - D) \cdot \sin \varphi - C \cdot \sin\left(\frac{B-D}{D} \varphi\right),$ $y = B - (B - D) \cdot \cos \varphi - C \cdot \cos\left(\frac{B-D}{D} \varphi\right)$	1,4
24	$x = \frac{C}{A} \sqrt{A^2 - (2D \sin \varphi)^2},$ $y = 2 \frac{D}{A} (A - C) \sin \varphi$	0,65
25	$x = A\varphi + C,$ $y = e^{-0.3\varphi} \cdot (D \sin \varphi - B \cos \varphi)$	0,75
26	$x = (C + D) \cdot \sin \varphi - B \cdot \sin\left(\frac{C+D}{C} \varphi\right),$ $y = (C + D) \cdot \cos \varphi - B \cdot \cos\left(\frac{C+D}{C} \varphi\right)$	0,35
27	$x = 2B\varphi - D \sin 2\varphi,$ $y = B - D \cos 2\varphi$	0,8
28	$x = A + B \cdot e^{-0.3\varphi} \sin \varphi,$ $y = C - D \cdot e^{-0.3\varphi} \cos \varphi$	0,3
29	$x = C\varphi + D \sin \varphi + \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - (C + D \cos \varphi)^2},$ $y = \left(1 - \frac{B}{A}\right) \cdot (C + D \cdot \cos \varphi)$	0,5
30	$x = D + B \cdot \sin 2\varphi \cdot \cos 4\varphi,$ $y = A + C \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin 4\varphi$	0,45

зобразити в ці моменти часу вектори швидкості і прискорення за їх складовими.

Побудувати графіки залежностей швидкості від часу $V(t)$, та прискорення від часу $a(t)$.

Розв'язання. Знайдемо траєкторію руху точки в аналітичному вигляді. Для цього із заданих рівнянь руху (K1.1) вилучаємо параметр t .

$$t = (x + 1)/4, \quad y = (x + 1)^2/8 + 3,$$

або після спрощення:

$$y = (x^2 + 2x + 25)/8, \quad (K1.2)$$

що і є траєкторією руху точки.

Знаходимо швидкість руху.

$$V_x = dx/dt = 4,$$

$$V_y = dy/dt = 4t, \quad (K1.3)$$

$$V = (V_x^2 + V_y^2)^{0.5}.$$

Знаходимо прискорення точки.

$$a_x = dV_x/dt = 0,$$

$$a_y = dV_y/dt = 4, \quad (K1.4)$$

$$a = (a_x^2 + a_y^2)^{0.5}.$$

Знаходимо дотичне, нормальне прискорення та радіус кривини траєкторії.

$$a_\tau = dV/dt = (V_x a_x + V_y a_y) / V,$$

$$a_n = (a^2 - a_\tau^2)^{0.5}, \quad (K1.5)$$

$$\rho = V^2 / a_n.$$

За формулами (K1.1), (K1.3) - (K1.5) розраховуємо значення координат x і y , швидкості V із складовими V_x та V_y , прискорення a із складовими a_x , a_y , a_τ , a_n і радіуса кривини ρ при значенні часу $t = 0$, $t =$

= 0,5с, і т. д. через кожні півсекунди до $t = 7$ с. Величини V_x , a_x , a_y і a від часу не залежать і в будь-який момент вони рівні: $V_x=4$, $a_x=0$, $a_y=4$, $a = 4$. Інші результати заносимо в таблицю К1.3.

Таблиця К1.3

t	X	Y	V _y	V	A _τ	A _n	ρ
0	-1	3	0	4,00	0,00	4,00	4
0,5	1	3,5	2	4,47	1,79	3,58	6
1	3	5	4	5,66	2,83	2,83	11
1,5	5	7,5	6	7,21	3,33	2,22	23
2	7	11	8	8,94	3,58	1,79	45
2,5	9	15,5	10	10,77	3,71	1,49	78
3	11	21	12	12,65	3,79	1,26	126
3,5	13	27,5	14	14,56	3,85	1,10	193
4	15	35	16	16,49	3,88	0,97	280
4,5	17	43,5	18	18,44	3,90	0,87	392
5	19	53	20	20,40	3,92	0,78	530
5,5	21	63,5	22	22,36	3,94	0,72	699
6	23	75	24	24,33	3,95	0,66	900
6,5	25	87,5	26	26,31	3,95	0,61	1138
7	27	101	28	28,28	3,96	0,57	1414

За одержаними результатами будемо траєкторію руху точки на рис.К1.1. Аналітичний вигляд траєкторії дає формула (К1.2), що в сукупності із зображенням дає повне уявлення про лінію, по якій рухається точка.

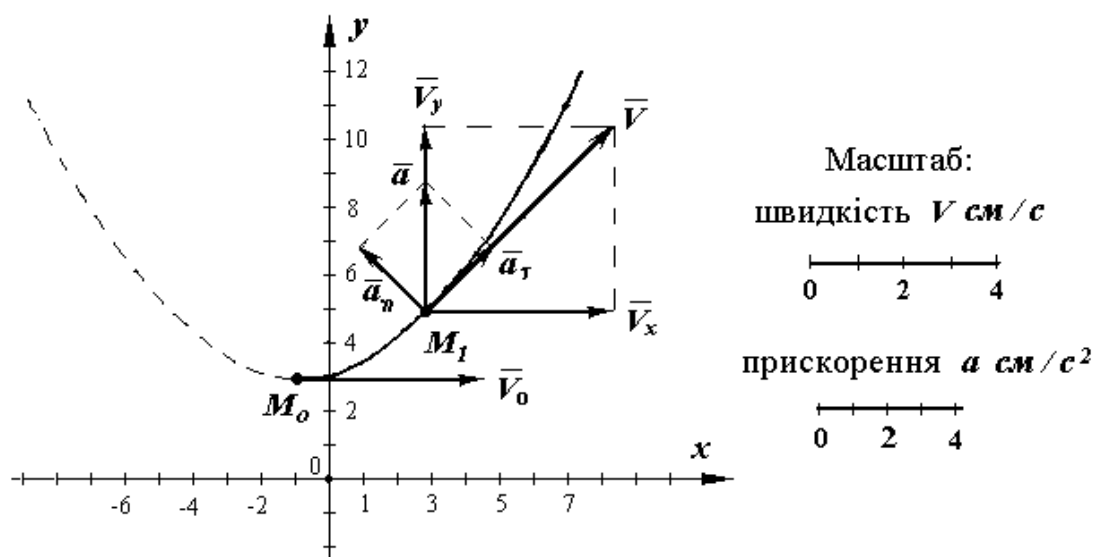


Рисунок. К1.1

Це парабола, яка є симетричною до вертикальної прямої, що проходить через точку $x = -1$ з мінімумом в точці $(-1, 3)$. Але точка M рухається тільки по правій вітці цієї параболи, тобто $x > -1$. В таблиці результатів при $t = 0$ маємо: $x = -1$, $y = 3$. Це і є початкове положення точки M на траєкторії, яке помічаємо точкою M_0 . При $t = 1$ с маємо: $x = 3$, $y = 5$. Це відповідає положенню точки M на траєкторії в момент часу 1 с, що помічаємо M_1 . Точки M_0 і M_1 показуємо на рис.К1.1.

Будуємо графіки залежностей швидкості від часу $V(t)$ та прискорення від часу $a(t)$ і показуємо їх на рисунках К1.2 і К1.3.

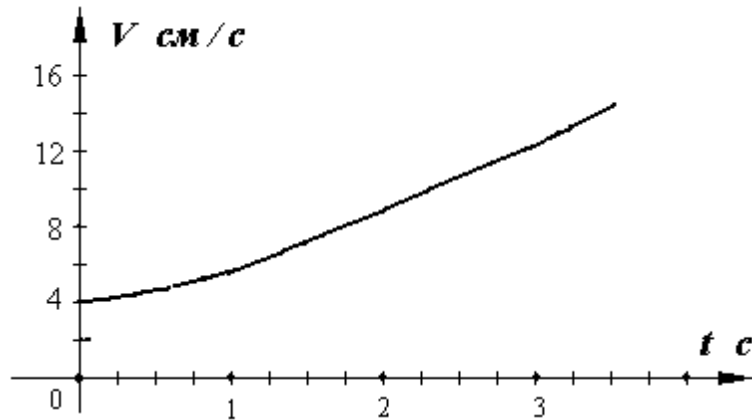


Рис. К1.2

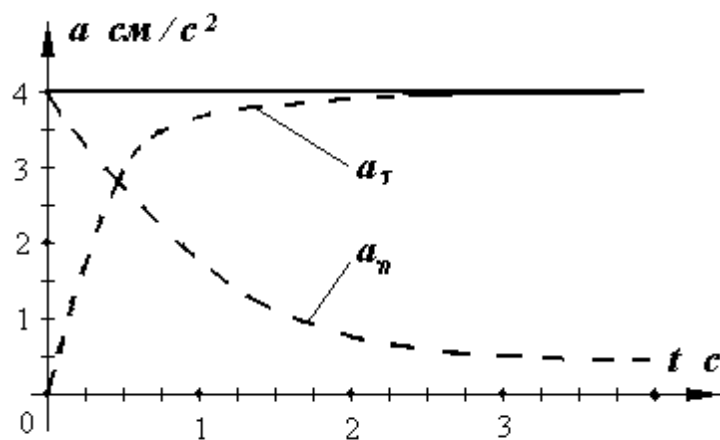


Рис. К1.3

Детальніше уявлення про характер руху точки по траєкторії будемо мати тоді, коли в точках M_0 і M_1 на рис.1.1 покажемо вектори швидкостей і прискорень. В початковий момент руху, при $t=0$, $V_x=4$, $V_y=0$, $V=4$. Це означає, що в точці M_0 швидкість рухомої точки напрямлена паралельно осі Ox . В момент часу $t = 1$ с маємо: $V_x = 4$, $V_y = 4$, $V = 5,66$. Тоді в точці M_1 на рис.К1.1 вектор швидкості складає з віссю Ox кут 45° . Вектори швидкостей в точках M_0 і M_1 будуюмо в масштабі, що наводиться на рис.

K1.1. Таким же чином, тільки у відповідному масштабі, будемо для точки M_1 вектори прискорень.

Як видно з рис.K1.2 швидкість точки на початку руху росте нелінійно. Через достатньо великий проміжок часу функція $V(t)$ стає майже лінійною, тобто точка рухається рівноприскорено.

З рис.K1.3 видно, що повне прискорення є сталою величиною, а дотичне і нормальне прискорення асимптотично наближаються до певних границь: a_τ прямує до 4, а a_n до нуля. Це означає, що десь в безмежності точка рухається рівноприскорено і прямолінійно.

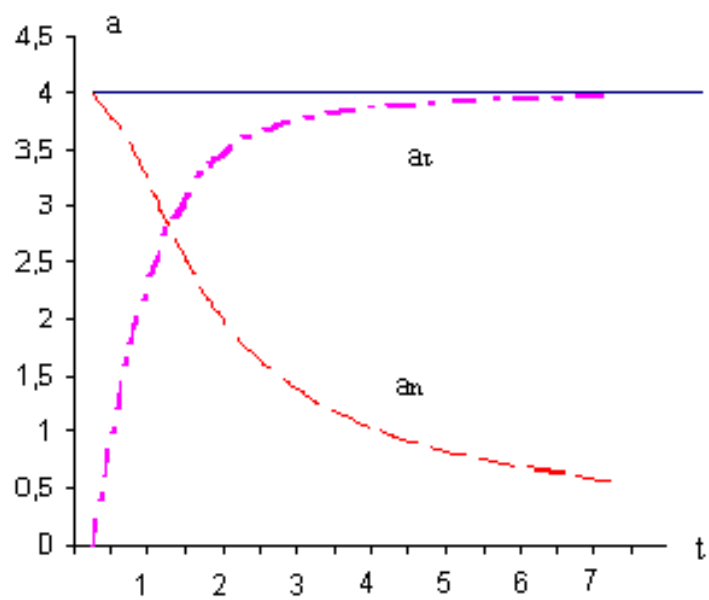
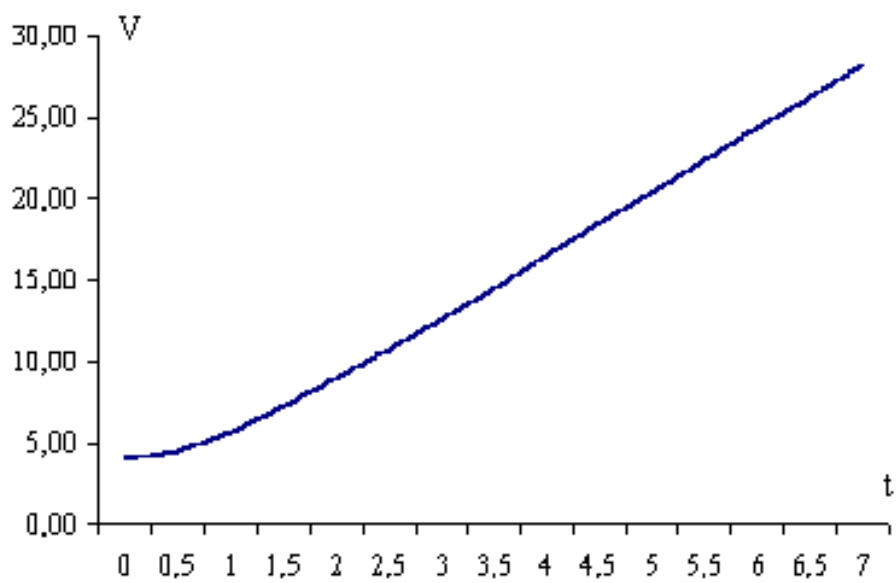
Відповідь: згідно із заданими рівняннями точка рухається по траєкторії, що є правою віткою параболи $y = (x^2 + 2x + 25) / 8$, в початковий момент часу знаходиться в точці (-1,3), в момент часу 1с в точці (1, 5) має швидкість $V = 5,66$ см/с і прискорення $a = 4$ см/с.

Порада. Одержання таблиці 1.3, побудову траєкторії, яка зображена на рис.K1.1, та графіків $a(t)$ і $V(t)$, що на рис.K1.2 і K1.3, можна автоматизувати, якщо скористатись комп'ютером. Для цього потрібно провести розрахунок в програмі Microsoft Excel.

Для розрахунку використовуємо попередньо виведені формули (K1.2 – K1.5)

t	X	Y	Vy	V	A τ	A n	ρ
0	-1	3	0	4,00	0,00	4,00	4
0,5	1	3,5	2	4,47	1,79	3,58	6
1	3	5	4	5,66	2,83	2,83	11
1,5	5	7,5	6	7,21	3,33	2,22	23
2	7	11	8	8,94	3,58	1,79	45
2,5	9	15,5	10	10,77	3,71	1,49	78
3	11	21	12	12,65	3,79	1,26	126
3,5	13	27,5	14	14,56	3,85	1,10	193
4	15	35	16	16,49	3,88	0,97	280
4,5	17	43,5	18	18,44	3,90	0,87	392
5	19	53	20	20,40	3,92	0,78	530
5,5	21	63,5	22	22,36	3,94	0,72	699
6	23	75	24	24,33	3,95	0,66	900
6,5	25	87,5	26	26,31	3,95	0,61	1138
7	27	101	28	28,28	3,96	0,57	1414

Графіки $a(t)$ і $V(t)$, будуть мати вигляд:



К2 Кінематичне дослідження руху точки плоского механізму

На рис. К2.1 – К2.15 зображені схеми плоских механізмів, які складаються з одної або з декількох ланок. На одній із ланок вказано точку М. Виконати для точки М кінематичне дослідження руху, тобто вказати для неї рівняння руху, траєкторію, швидкість, прискорення із його складовими, радіус кривини траєкторії та шлях, пройдений точкою по траєкторії в залежності від часу.

Побудувати у вибраному масштабі в плоскій системі координат xOy траєкторію руху точки М, вказати її положення на траєкторії в початковий момент руху, позначивши M_0 , та в момент часу $t = t_1$, позначивши M_1 , відкласти для точок M_0 та M_1 вектори швидкостей і прискорень за їх складовими у зручно вибраних масштабах. Виконати аналіз руху точки, вказавши при цьому графіки залежностей швидкості від часу $V = V(t)$, прискорення від часу $a = a(t)$, пройденого по траєкторії шляху від часу $S = S(t)$.

Дані для розрахунків наводяться за варіантами в тридцяти таблицях, які містяться на рис. К2.1 – К2.15. Розміри ланок задані в сантиметрах, а час в секундах.

К2.1 Приклад виконання завдання

На рис.К2.16 зображено плоский механізм, де на продовженні шатуна АВ знаходиться точка М. Кривошип ОА здійснює обертання за законом $\varphi = 2\pi t^2$. Для точки М виконати кінематичне дослідження руху так, як це вимагається в умові розрахунково-графічного завдання.

В розрахунках взяти розміри: $OA = AB = BM = 40$ см. Час t в секундах, прийняти, що $t_1 = 0,3$ с.

1

$$\begin{aligned} CB &= l \\ OA &= r \\ BM &= b \\ AC &= h \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} AB &= l \\ MB &= b \\ O_1B &= r \end{aligned}$$

Вариант	r	h	l	b	φ	t_1
1	10	20	110	15	πt	0,8
2	20	15	100	25	t^2	0,4
3	30	25	80	15	$3\pi t$	0,5
4	40	18	90	20	$2\pi t^2$	0,9
5	15	12	70	35	t^3	0,6
6	20	10	75	45	πt^3	0,5
7	60	40	120	29	$5\pi t$	0,5
8	26	11	78	40	πt^2	0,3
9	32	15	97	34	$3t^2$	0,6
0	70	20	120	60	$2t$	0,7

Вариант	r	l	b	φ	t_1
1	25	60	20	$2t^2$	0,25
2	42	85	40	$2\pi t^2$	0,50
3	28	90	60	t^3	0,60
4	38	100	10	πt^3	0,90
5	45	105	40	$5\pi t$	0,50
6	60	180	29	t^2	0,20
7	55	150	80	πt^2	0,45
8	80	200	36	$3t^2$	0,95
9	70	160	50	$2t$	0,75
0	36	90	40	$2\pi t$	0,55

Рисунок К2.1

3

$KC = OC$

4

$AB = l$
 $AM = b$

Вариант	r	R	φ	t_1	Вариант	l	b	α°	S	t_1
1	30	55	πt^2	1,00	1	50	23	32	$l \sin(2\pi t)$	0,5
2	35	60	$0,5\pi t^2$	0,50	2	60	42	43	$l \cos(\pi t)$	0,7
3	40	48	πt	0,80	3	53	25	37	$l \cos(\pi t^2)$	1,0
4	45	58	$2\pi t$	0,60	4	64	32	29	$l \sin(\pi t)$	1,5
5	50	64	πt^3	0,35	5	72	40	50	$l \cos(\pi t/2)$	1,2
6	45	55	$3\pi t$	0,65	6	90	40	48	$l \sin(\pi t/2)$	2,0
7	40	48	$5\pi t$	0,75	7	78	38	62	$l \cos(3\pi t/4)$	0,9
8	35	50	πt^2	0,25	8	85	55	34	$l \sin(3\pi t/4)$	0,7
9	30	45	t^3	0,30	9	65	30	28	$l \sin(t^3)$	0,3
0	25	35	t^4	0,70	0	70	27	59	$l \cos(t^3)$	0,2

Рисунок К2.2

5

Diagram for problem 5: A circle of radius r rolls on a horizontal surface. The center is O_1 , the contact point is O . A point M is on the circle, and a point C is on the circumference. The angle between the radius O_1C and the vertical is φ . The condition $OC = MC$ is given.

6

Diagram for problem 6: A horizontal beam of length l is pivoted at A . A vertical force S is applied at O , which is at distance s from A . A rod of length l is pivoted at B and connected to the beam at C . The angle between the rod and the vertical is α . The conditions $AB = l$, $AC = b$, and $CM = c$ are given.

Вариант	R	r	φ	t_I
1	100	25	$2\pi t^3$	0,5
2	80	60	πt^2	0,7
3	90	30	t	0,6
4	64	8	$2t^3$	0,2
5	48	32	$3\pi t^3$	0,8
6	96	24	πt^2	0,3
7	38	20	t^4	0,4
8	60	15	$2t^2$	0,4
9	84	20	πt	0,3
0	72	16	$2\pi t$	0,7

Вариант	l	b	c	α^0	S	t_I
1	49	25	5	35	$l \sin(\pi t^3)$	0,3
2	72	36	8	70	$l \cos(\pi t^3)$	0,6
3	68	38	6	26	$l \sin(2\pi t)$	0,7
4	93	43	12	32	$l \cos(2\pi t)$	0,9
5	45	20	4	44	$l \sin(t)$	1,3
6	52	38	20	61	$l \cos(t)$	0,5
7	64	28	7	23	$l \sin(t^2)$	1,1
8	85	40	9	80	$l \cos(t^3)$	0,7
9	39	12	4	28	$l \sin(\pi t^3)$	0,3
0	82	60	6	49	$l \cos(\pi t^3)$	0,4

Рисунок К2.3

7

$OD = O_1C = r,$
 $OO_1 = DC = b,$
 $AM = h,$
 $AB = l$

8

$CO_1 = CM$

Вариант

1

70

50

30

25

30

πt^2

0,5

Вариант

2

60

92

48

40

15

$2\pi t$

0,3

3

50

95

50

36

20

t^3

4

40

75

25

15

25

πt

5

60

80

30

32

$3\pi t$

0,6

6

55

63

20

36

t^2

7

70

70

50

18

t^4

0,7

8

50

85

40

22

$2t$

0,5

9

60

90

25

26

πt^3

0,8

0

72

75

30

16

$2\pi t$

0,4

Рисунок К2.4

9

$AB = l,$
 $AM = b$

10

$O_1A = r,$
 $OO_1 = h,$
 $AB = l,$
 $AM = b$

Вариант	l	b	S	t_1	Вариант	r	l	h	b	Φ	t_1
1	95	30	$l \sin(t^2)$	0,85	1	25	75	5	20	πt	0,45
2	80	50	$l \sin(2\pi t)$	0,55	2	20	80	6	22	t^2	0,65
3	60	32	$l \cos(t^2)$	0,64	3	35	85	7	24	$2\pi t$	1,20
4	70	45	$l \cos(2\pi t)$	0,45	4	40	90	8	26	$2\pi t^2$	0,75
5	90	60	$l \sin(\pi t)$	0,25	5	45	95	9	28	t^3	0,55
6	85	32	$l \cos(\pi t)$	0,62	6	50	100	10	30	πt^2	0,75
7	63	28	$l \sin(t^3)$	0,73	7	45	105	9	50	$5\pi t$	0,65
8	72	56	$l \cos(3t)$	0,52	8	40	110	8	55	$3t^2$	0,35
9	45	28	$l \sin(3\pi t)$	0,35	9	35	115	7	80	$2t$	0,45
0	75	15	$l \cos(3\pi t)$	0,65	0	30	120	6	60	$2t^3$	0,45

Рисунок К2.5

11

Diagram for problem 11: A wheel of radius r rolls on a horizontal surface. A rod of length l is pivoted at the center of the wheel (point B) and its other end (point A) is in contact with a vertical wall. A point M is on the rod. The angle between the rod and the vertical is φ . The horizontal distance from the wall to the center of the wheel is b . The vertical distance from the surface to the center of the wheel is r . The conditions are $AB = l$, $AM = b$.

12

Diagram for problem 12: A wheel of radius r rolls on a horizontal surface. A rod of length l is pivoted at the center of the wheel (point B) and its other end (point A) is in contact with a vertical wall. A point M is on the rod. The angle between the rod and the vertical is φ . The horizontal distance from the wall to the center of the wheel is b . The vertical distance from the surface to the center of the wheel is r . The condition is $OB = MB$.

Вариант	R	r	l	b	φ	t_1	Вариант	R	r	φ	t_1
1	56	30	95	25	πt^2	0,50	1	120	50	$2t$	0,3
2	45	30	100	50	t^2	1,25	2	130	35	$2\pi t^2$	0,7
3	52	20	80	36	πt	0,55	3	90	20	t^3	0,4
4	36	32	90	30	$2\pi t$	0,95	4	100	25	πt^2	0,8
5	28	24	65	20	t^3	0,25	5	160	40	$5\pi t$	0,4
6	40	35	110	50	πt^3	0,75	6	145	28	t^2	0,6
7	60	30	120	45	$5\pi t$	0,60	7	180	45	πt	0,8
8	38	28	95	65	πt^2	0,65	8	100	20	$3t^2$	0,4
9	70	60	180	30	$3t$	1,30	9	80	15	$2t$	0,5
0	50	45	150	70	$2t^2$	0,60	0	120	30	$2\pi t$	0,6

Рисунок К2.6

13

$$KC = KM$$

14

$$O_1M = h$$

$$OC = AC$$

Вариант	R	r	φ	t_1
1	50	25	πt	0,25
2	75	25	πt^2	0,50
3	64	16	$3\pi t$	0,20
4	72	36	$2\pi t^2$	0,35
5	70	35	t^3	0,90
6	80	20	πt^3	0,75
7	99	33	$5\pi t$	0,40
8	84	21	t^2	0,65
9	60	30	$3t^2$	0,45
0	90	18	$2t$	0,70

Вариант	R	h	φ	t_1
1	110	36	$2t^2$	0,55
2	100	95	$2\pi t^2$	0,35
3	120	75	$2t^3$	0,90
4	48	40	πt^3	0,70
5	160	73	$5\pi t$	0,58
6	140	90	t^2	0,60
7	120	80	πt^2	0,45
8	100	85	$3t^2$	0,75
9	96	80	t	0,64
0	120	90	$2\pi t$	0,55

Рисунок К2.7

17

$AM = l$
 $BM = b$

18

$AB = AC$,
 $OM = h$

Вариант	l	b	α°	S	t_j	Вариант	R	r	h	φ	t_j
1	80	43	30	$l \sin(\pi t)$	0,25	1	40	10	25	$2t^2$	0,50
2	85	28	45	$l \cos(t^2)$	0,50	2	45	15	20	$2\pi t^2$	0,25
3	110	35	60	$l \cos(3\pi t)$	0,40	3	48	12	24	πt^2	0,50
4	90	65	75	$l \sin(2\pi t^2)$	0,60	4	64	16	32	$3t^2$	0,90
5	95	30	35	$l \sin(t^3)$	0,75	5	90	18	30	$2t$	0,20
6	100	75	50	$l \cos(\pi t^3)$	0,80	6	55	11	25	t^2	0,40
7	120	32	65	$l \sin(5\pi t)$	0,12	7	48	8	40	t^3	0,75
8	130	46	85	$l \cos(\pi t^2)$	0,17	8	30	10	30	πt^3	0,35
9	125	64	36	$l \sin(3t^2)$	0,75	9	64	16	20	$5\pi t$	0,50
0	115	70	48	$l \cos(2t)$	0,85	0	70	14	30	$2\pi t$	0,65

Рисунок К2.9

19

20

$O_1A = R,$
 $AC = l,$
 $O_1O = h$

Варіант	R	r	r_1	Φ	t_1
1	80	10	15	$5\pi t$	0,50
2	72	18	20	πt^2	0,75
3	45	15	20	$3t^2$	1,20
4	80	16	26	$2t$	1,35
5	51	17	20	t^3	0,65
6	66	11	17	πt^3	0,35
7	48	12	18	πt	0,40
8	70	14	16	t^2	0,60
9	78	13	18	$3\pi t$	1,20
0	76	19	21	$2\pi t^2$	0,95

Варіант	R	r	l	h	Φ	t_1
1	45	15	110	70	$2t^2$	0,75
2	40	20	120	90	$2\pi t^2$	0,50
3	50	25	140	60	t^3	0,40
4	60	30	105	70	πt^3	1,30
5	65	13	170	95	$5\pi t$	0,35
6	55	25	165	80	t^2	0,65
7	45	20	125	65	πt^2	0,25
8	60	30	100	70	$3t^2$	0,45
9	85	15	130	95	$2t$	0,60
0	90	35	180	99	$3\pi t$	0,70

Рисунок К2.10

21

$OA = r,$
 $AB = l$

22

$O_1C = O_2D = r,$
 $OO_2 = O_1O_2 = CD = DA = c,$
 $AB = l, AM = b$

Варіант	r	l	r_1	R	Φ	t_1	Варіант	r	l	c	b	Φ	t_1
1	50	90	10	18	πt^2	0,70	1	10	50	30	25	$2t$	0,4
2	40	100	8	17	$5\pi t$	0,45	2	20	70	40	30	$2\pi t^2$	0,6
3	80	120	16	20	πt	0,60	3	30	90	60	40	t^3	0,9
4	60	100	15	20	$2\pi t$	0,35	4	35	65	30	20	πt	0,3
5	90	140	10	15	t^3	0,80	5	25	80	50	40	$5\pi t$	0,6
6	65	120	13	18	πt^3	0,90	6	15	60	70	35	t^2	0,4
7	84	160	21	26	t^2	0,40	7	22	72	85	25	πt^2	0,3
8	55	100	11	16	πt^2	0,85	8	23	80	45	30	$3t^2$	0,5
9	42	80	7	18	$3t$	0,75	9	28	90	30	40	$2t^3$	0,7
0	90	150	12	24	$2t^2$	0,50	0	36	85	48	45	$2\pi t$	0,8

Рисунок К2.11

23

$OD = DC = DA = r,$
 $AB = l,$
 $AM = b$

24

$OA = r, AB = l,$
 $AM = b$

Варіант	r	l	b	Φ	t_I
1	25	70	40	$5\pi t$	0,55
2	30	85	20	t^2	0,65
3	35	90	25	πt	0,40
4	40	110	30	$2\pi t$	0,75
5	35	100	60	t^3	0,80
6	30	95	70	$3\pi t$	0,70
7	32	90	30	πt^2	0,50
8	28	85	60	πt^3	0,45
9	30	80	25	$3t$	0,65
0	25	120	50	$2t^2$	0,85

Варіант	r	l	b	h	Φ	t_I
1	40	75	35	4	$2t^2$	0,5
2	35	90	40	7	$2\pi t^2$	0,7
3	28	65	20	6	t^3	1,3
4	30	100	25	5	πt^3	0,6
5	36	85	60	8	$5\pi t$	0,4
6	38	95	30	9	t^2	1,4
7	25	80	45	6	πt^2	0,6
8	30	90	38	4	$3t^2$	0,7
9	38	87	29	5	$2t$	0,3
0	25	96	43	7	$2\pi t$	0,4

Рисунок К2.12

25

$OA = r, CB = l,$
 $AC = h, CM = b$

26

$OA = r,$
 $AC = h,$
 $CB = l,$
 $CM = b$

Вариант	r	l	b	h	φ	t_1	Вариант	r	l	b	h	φ	t_1
1	43	80	20	20	πt	0,25	1	10	90	30	8	$2t^2$	0,40
2	25	75	25	10	t^2	0,30	2	15	100	60	10	$2\pi t$	0,80
3	15	60	15	17	πt	0,50	3	30	70	55	12	t^3	0,90
4	20	90	40	15	$2\pi t$	0,35	4	18	80	40	7	πt	0,65
5	18	72	20	26	t^3	0,85	5	25	75	32	9	$5\pi t$	0,55
6	12	48	15	20	πt	0,75	6	20	85	65	14	t^2	0,45
7	16	52	35	12	$5\pi t$	0,60	7	32	95	20	8	πt^2	0,50
8	30	70	40	23	πt^2	0,45	8	17	110	40	6	$3t^2$	0,40
9	35	85	50	18	$3t$	0,65	9	22	72	32	5	$2t$	0,75
0	22	65	23	16	$2t$	0,40	0	27	95	25	7	$2\pi t$	0,35

Рисунок К2.13

27

$OA = r,$
 $AC = h,$
 $CB = l,$
 $CM = b$

28

$OA = r,$
 $AB = l,$
 $AM = b$

Варіант	r	l	h	b	φ	t_1
1	50	80	20	25	πt	0,75
2	40	72	25	18	t^2	0,43
3	30	65	15	45	$3\pi t$	0,50
4	45	90	23	60	$2\pi t$	0,25
5	28	75	48	40	t^3	0,90
6	25	67	54	27	πt^3	0,60
7	32	85	39	45	$5\pi t$	0,30
8	36	90	40	28	πt^2	0,65
9	45	95	25	46	$3t$	0,35
0	37	85	60	35	$2t^2$	0,43

Варіант	r	l	b	h	φ	t_1
1	25	75	30	12	t	0,30
2	30	95	60	8	$2\pi t^2$	0,50
3	36	80	20	10	$5\pi t$	0,65
4	18	60	15	9	πt^3	0,35
5	14	72	18	11	t^3	0,95
6	15	80	60	7	$2t^2$	0,75
7	20	90	35	10	πt^2	0,60
8	25	60	30	5	$3t^2$	0,45
9	28	70	35	6	$2t$	0,40
0	40	99	80	10	$2\pi t$	0,90

Рисунок К2.14

29

$OA = R,$
 $AB = l,$
 $AM = b$

30

$OC = KC,$
 $AM = l$

Вариант	R	r	l	b	φ	t_1	Вариант	R	l	φ	t_1
1	60	10	120	30	πt	0,65	1	25	43	$2t^2$	0,65
2	50	8	100	20	t^2	0,70	2	60	80	πt	0,70
3	40	5	100	45	πt	0,85	3	40	50	t^3	0,85
4	55	11	110	40	$2\pi t$	0,90	4	28	40	πt^3	0,75
5	70	14	140	50	t^3	0,80	5	32	38	$5\pi t$	0,60
6	45	9	120	40	πt^2	0,35	6	50	70	t^2	0,45
7	60	15	100	20	$5\pi t$	0,60	7	35	60	$2\pi t$	0,70
8	42	7	110	40	πt^2	0,50	8	22	40	$3t^2$	0,25
9	60	12	140	60	$3t$	0,70	9	15	45	$2t$	0,40
0	77	7	100	10	$2t$	0,65	0	46	72	$2\pi t$	0,75

Рисунок К2.15

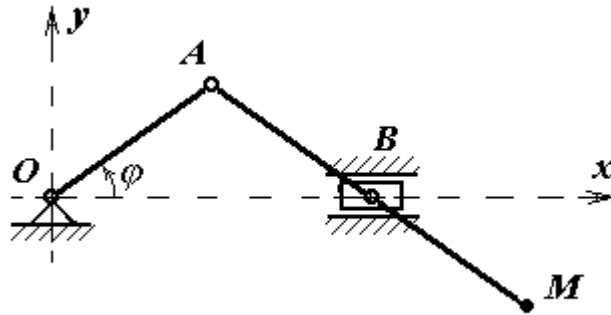


Рисунок K2.16

Розв'язання. Знайдемо координати точки М в залежності від кута φ .

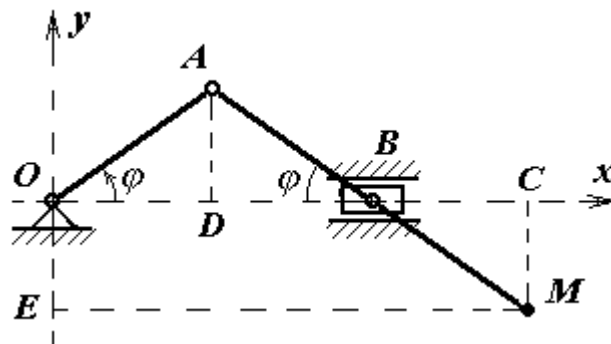


Рисунок K2.17

З рис.K2.17 видно, що $x = OD + DC$, а $y = -OE$. Трикутник OAB рівнобедрений, тому $OD = 40 \cos \varphi$, $CD = 80 \cos \varphi$, $OE = 40 \sin \varphi$. Тоді координати точки М в залежності від кута φ будуть рівні :

$$x = 120 \cos \varphi, \quad y = -40 \sin \varphi$$

Підставимо замість φ його значення від t і одержимо параметричні рівняння руху точки М.

$$x = 120 \cos 2\pi t^2, \quad (K2.1)$$

$$y = -40 \sin 2\pi t^2. \quad (K2.2)$$

Знайдемо швидкість точки М .

$$V_x = \dot{x} = -480 \pi t \sin 2\pi t^2, \quad (K2.3)$$

$$V_y = \dot{y} = -160 \pi t \cos 2\pi t^2, \quad (K2.4)$$

$$V = (V_x^2 + V_y^2)^{0.5}. \quad (K2.5)$$

Визначимо повне прискорення точки М.

$$a_x = V_x = - 480 \pi (\sin 2\pi t^2 + 4\pi t^2 \cos 2\pi t^2), \quad (K2.6)$$

$$a_y = V_y = - 160 \pi (\cos 2\pi t^2 - 4\pi t^2 \sin 2\pi t^2), \quad (K2.7)$$

$$a = (a_x^2 + a_y^2)^{0,5}. \quad (K2.8)$$

Дотичне та нормальне прискорення знайдемо за формулами

$$a_\tau = V = (V_x a_x + V_y a_y) / V, \quad (K2.9)$$

$$a_n = (a^2 - a_\tau^2)^{0,5} \quad (K2.10)$$

А коли відома швидкість і нормальне прискорення, то радіус кривини і шлях, який пройде точка по траєкторії, будуть знайдені за формулами :

$$\rho = V^2 / a_n \quad (K2.11)$$

$$S = \int V dt. \quad (K2.12)$$

За формулами (K2.1) – (K2.12) виконаємо розрахунок координат, швидкості, прискорень, радіуса кривини та пройденого шляху. Знайдемо інтервал часу, за який точка М здійснить замкнену траєкторію. Період синуса чи косинуса в параметричних рівняннях траєкторії (K2.1) і (K2.2) рівний 2π . Тому з рівності $2\pi t^2 = 2\pi$ маємо: $t = 1$ с. Для того, щоб більш детально прослідкувати за зміною характеристик візьмемо, інтервал часу від 0 до 1,5 с. При необхідності цей інтервал можна взяти і більшим.

Введемо за допомогою програми EXEL в комп'ютер значення t з кроком 0,1 с, а для підрахунку координат, швидкості, прискорень, радіуса кривини і пройденого шляху формули (K2.1) – (K2.12), де змінний параметр t виражається через його електронну адресу. Інтеграл (K2.12) є еліптичним, він не може бути знайденим в елементарних функціях, тому для його обчислення використовуємо один з найпростіших числових методів – метод прямокутників. Результати обчислень наводимо в табл. K2.1.

За результатами обчислень будуюмо траєкторію і показуємо її на рис.K2.18.

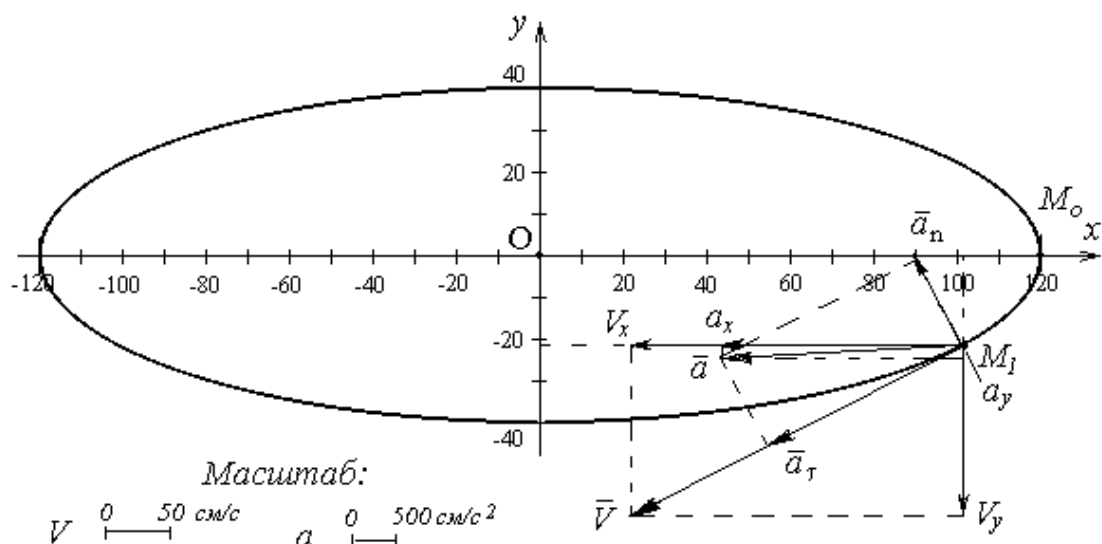


Рисунок К2.18

На траєкторії відмічаємо положення точки в початковий момент руху M_0 і в момент $t = 0,3$ с - M_1 .

Таблиця К2.1

t	x	y	Vx	Vy	V	ax	ay	a	at	an	ρ	s
0	120	0	0	0	0	-47,33	-502,4	504,6	0	504,6	0	0
0,05	120	-0,63	-1,18	-25,12	25,15	-212,9	-502,1	545,4	511,56	189	3,3454	1,2572
0,1	119,8	-2,51	-9,46	-50,14	51,03	-519,7	-497,4	719,4	585,12	418,5	6,2215	3,8085
0,15	118,8	-5,63	-31,8	-74,61	81,12	-961,9	-477,4	1074	816,63	697,3	9,4363	7,8644
0,2	116,2	-9,94	-74,9	-97,33	122,8	-1521	-423,9	1579	1263,7	946,6	15,937	14,006
0,25	110,9	-15,3	-144	-116	185	-2151	-313,3	2174	1871,9	1105	30,986	23,258
0,3	101	-21,4	-242	-127	274	-2766	-120,1	2769	2504,3	1181	63,4	36,94
0,35	86,21	-27,8	-367	-126,3	388,1	3224	176,8	3229	-3106	882,2	170,72	56,342
0,4	64,35	-33,8	-509	-107,8	520,1	-3328	582,8	3379	3135,1	1260	214,79	82,349
0,45	35,36	-38,2	-648	-66,62	651,5	-2835	1073	3031	2710,4	1357	312,77	114,93
0,5	0,096	-40	-754	-0,2	753,6	-1512	1577	2185	1511,6	1578	360,01	152,61
0,55	-38,8	-37,9	-785	89,25	789,6	774,9	1969	2116	-547,3	2044	305,05	192,09
0,6	-76,4	-30,8	-697	191,9	723,4	3929	2072	4442	-3238	3040	172,14	228,25
0,65	-106	-18,8	-460	288,4	542,6	7485	1694	7674	-5439	5414	54,38	255,38
0,7	-120	-2,57	-67,9	351	357,5	10529	700,3	10552	-1312	10470	12,204	273,26
0,75	-111	15,24	430,7	348,4	554	11776	-887,9	11809	8597,5	8096	37,905	300,95
0,8	-76,7	30,77	927,5	256,8	962,4	9899	-2785	10283	8796,8	5326	173,91	349,07
0,85	-20,9	39,39	1262	74,39	1264	4155	-4402	6053	3888,9	4639	344,26	412,26
0,9	43,89	37,23	1263	-165,4	1273	-4846	-4941	6921	-4163	5529	293,26	475,92

Продовження таблиці К2.1

t	x	y	Vx	Vy	V	ax	ay	a	at	an	ρ	s
0,95	97,98	23,09	826,7	-389,7	913,9	-14586	-3698	15047	-11617	9564	87,33	521,62
1	120	0,127	4,801	-502,4	502,4	-20866	-522,5	20873	323,09	20870	12,095	546,74
1,05	96,22	-23,9	-946	-423	1036	-19266	3755	19628	16054	11293	95,045	598,54
1,1	30,29	-38,7	-1604	-139,5	1610	-7778	7261	10641	7119,7	7908	327,91	679,06
1,15	-52,3	-36	-1560	252	1580	10533	7729	13064	-9165	9310	268,14	758,05
1,2	-111	-14,9	-674	559,5	875,6	26890	3850	27164	-18224	20144	38,059	801,83
1,25	-111	15,12	712,3	581,4	919,4	30188	-3263	30364	21324	21616	39,109	847,81
1,3	-44,8	37,11	1818	243,7	1834	14271	-9707	17259	12855	11517	292,09	939,51
1,35	52,17	36,02	1832	-294,8	1856	-14772	-10575	18167	-12904	12787	269,38	1032,3
1,4	116	10,19	537,5	-680,2	866,9	-38104	-3636	38277	-20773	32150	23,376	1075,7
1,45	96,44	-23,8	-1300	-585,5	1426	-35129	7491	35919	28957	21252	95,707	1147
1,5	0,86	-40	-2261	-5,401	2261	-1833	14194	14312	1799,1	14198	359,97	1260
1,55	-97,7	-23,2	-1358	633,7	1498	38559	9221	39646	-31043	24661	91,05	1334,9
1,6	-112	14,42	869,4	749,8	1148	48615	-5355	48909	33319	35805	36,813	1392,3

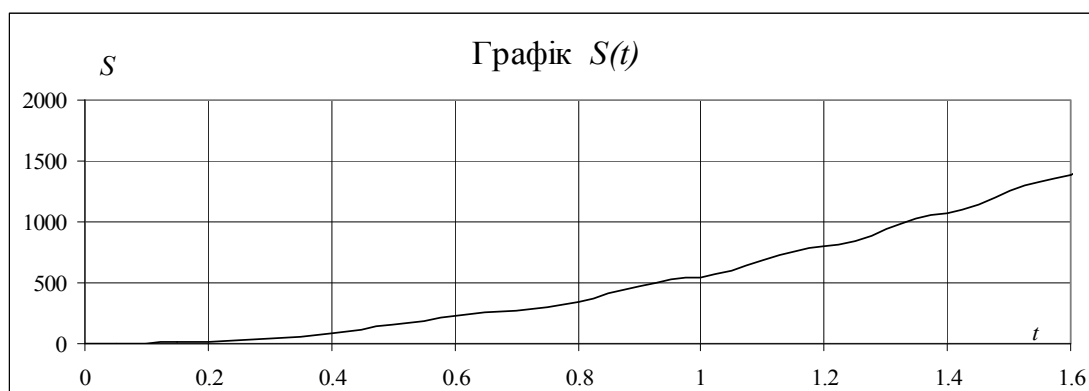


Рисунок К2.19

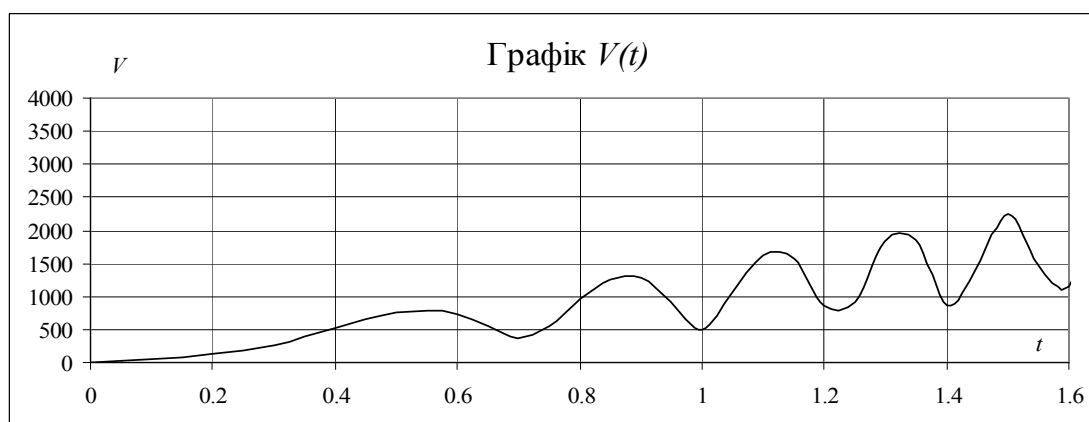


Рисунок К2.20

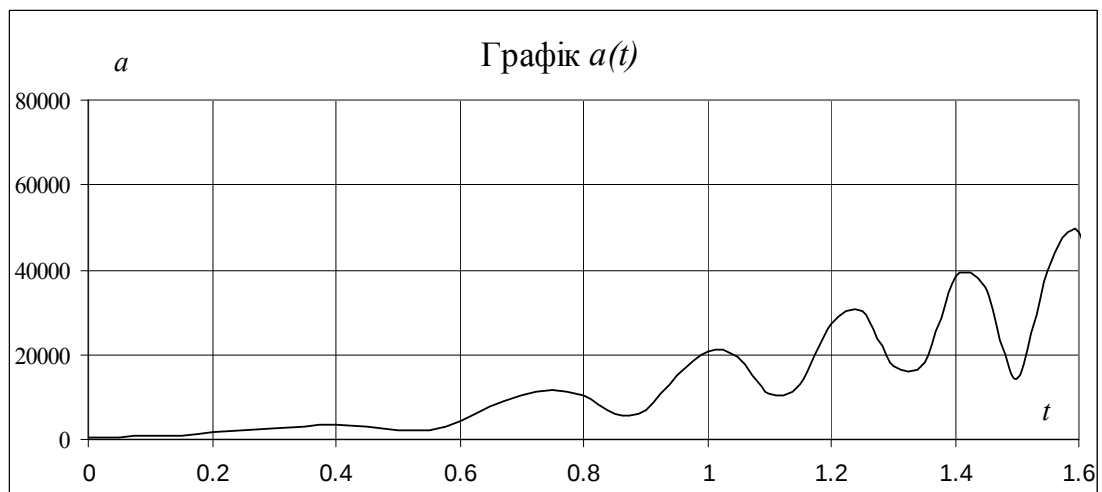


Рисунок К2.21

За даними, що наводяться в табл. К2.1, будуємо графіки залежностей $S = S(t)$ на рис.К2.19, $V = V(t)$ на рис.К2.20 і залежність $a = a(t)$ на рис.К2.21. Залежність $S(t)$ є неточною, оскільки інтеграл шляху (К2.12) визначався наближеним числовим методом, де точність залежить від кроку інтегрування. В цьому випадку вона дорівнює 0,05.

Графіки шляху, швидкості та прискорення від часу, як видно з відповідних рисунків, мають однакові масштаби по осі часу t і розташовані всі поряд один під одним. Це виконується для того, щоб було зручно аналізувати рух по траєкторії. Масштаби для осей шляху, швидкості та прискорення різні, але відповідають значенням табл.К2.1. Особливістю рис.К2.18, де побудована траєкторія руху точки М, є те, що масштаби осей Ox і Oy є однаковими.

2.3 Кінематика твердого тіла

К.3 Визначення швидкостей і прискорення точок твердого тіла при поступальному та обертальному русі

Механізм складається з трьох тіл: східчастого шківів 2, тіла 1 та шківів 3 (рис. К3.1–К3.5). Тіло 1 рухається за законом $x = f(t)$. Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість та прискорення точок А та М. Дані для розрахунку в табл. К3.1.

Таблиця К3.1

Варіант	$R_{2,м}$	$r_{2,м}$	$R_{3,м}$	$x=f(t),м$
1	0,1	0,05	0,3	$0,4t^2 + 0,3$
2	0,3	0,2	0,15	$0,5 \sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)$
3	0,4	0,3	0,1	$0,33\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)$
4	0,3	0,15	0,2	$0,6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	0,2	0,1	0,15	$0,6t^3$
6	0,3	0,15	0,2	$0,3t^2 - 0,4$
7	0,2	0,1	0,15	$0,2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)$
8	0,1	0,05	0,3	$4 \cos \frac{\pi}{3}t^2$
9	0,2	0,1	0,3	$5 \sin \pi t^2$
0	0,3	0,2	0,15	$0,7t^3 + 0,1$

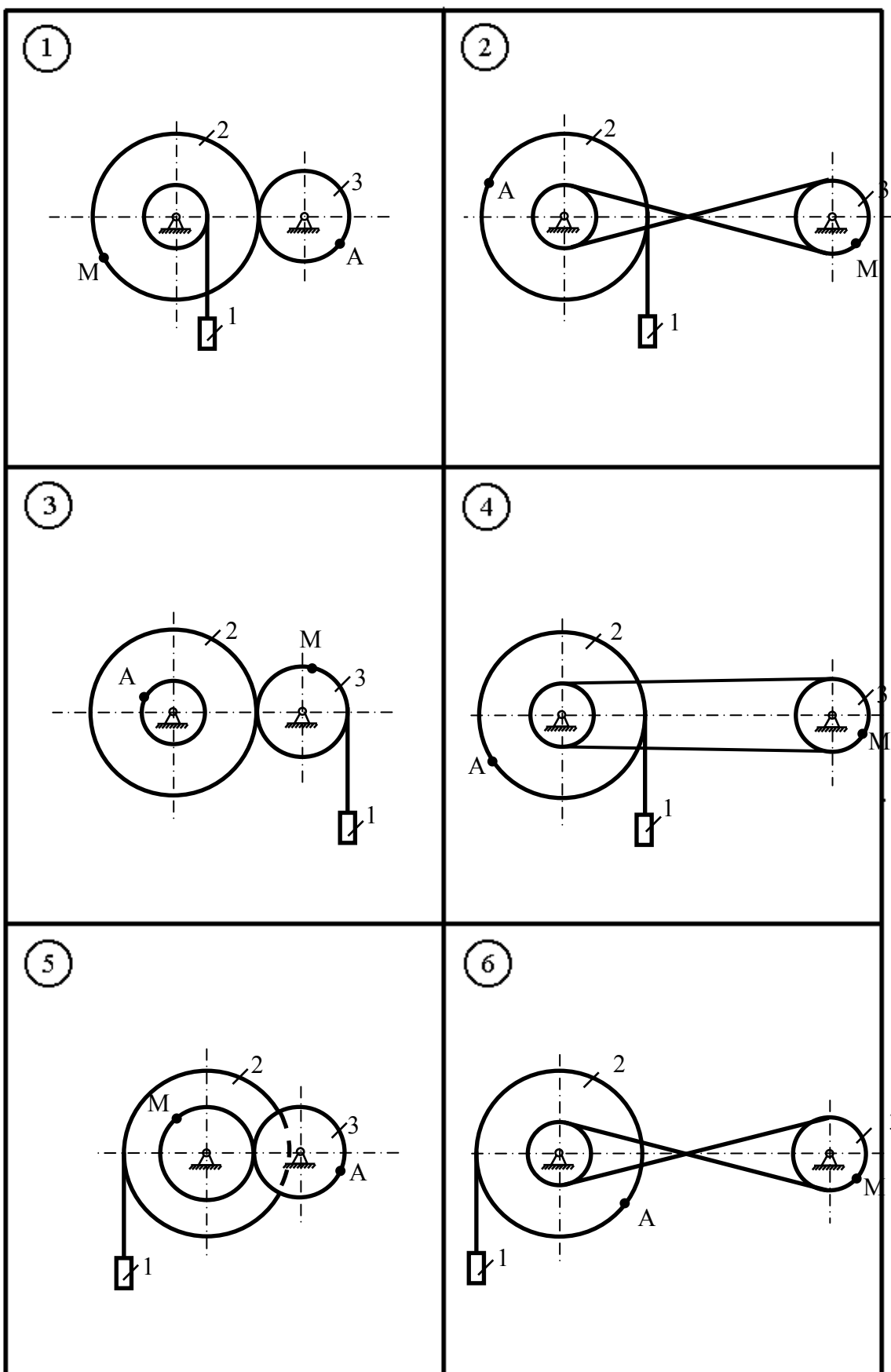


Рисунок К3.1

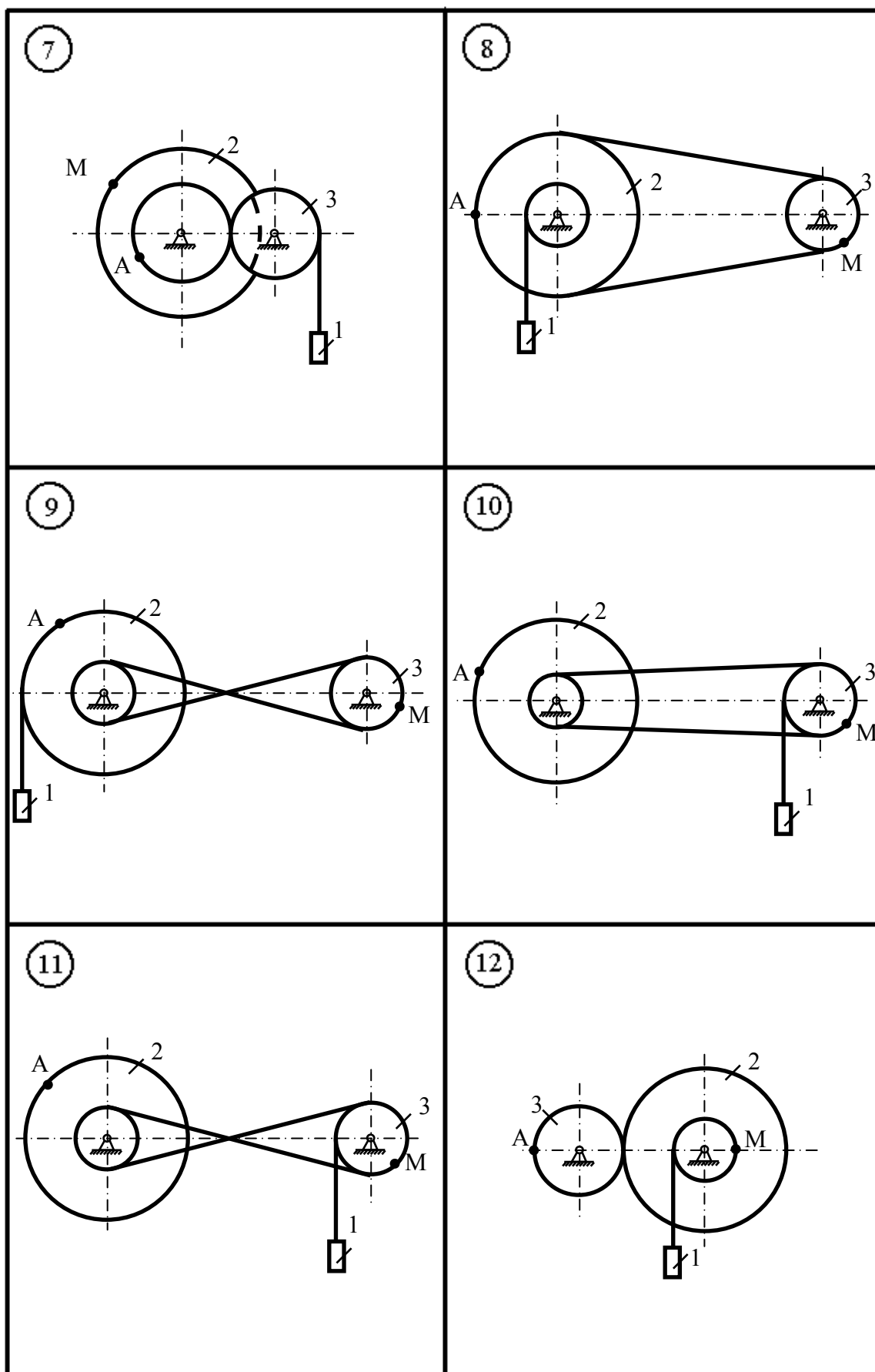


Рисунок К3.2

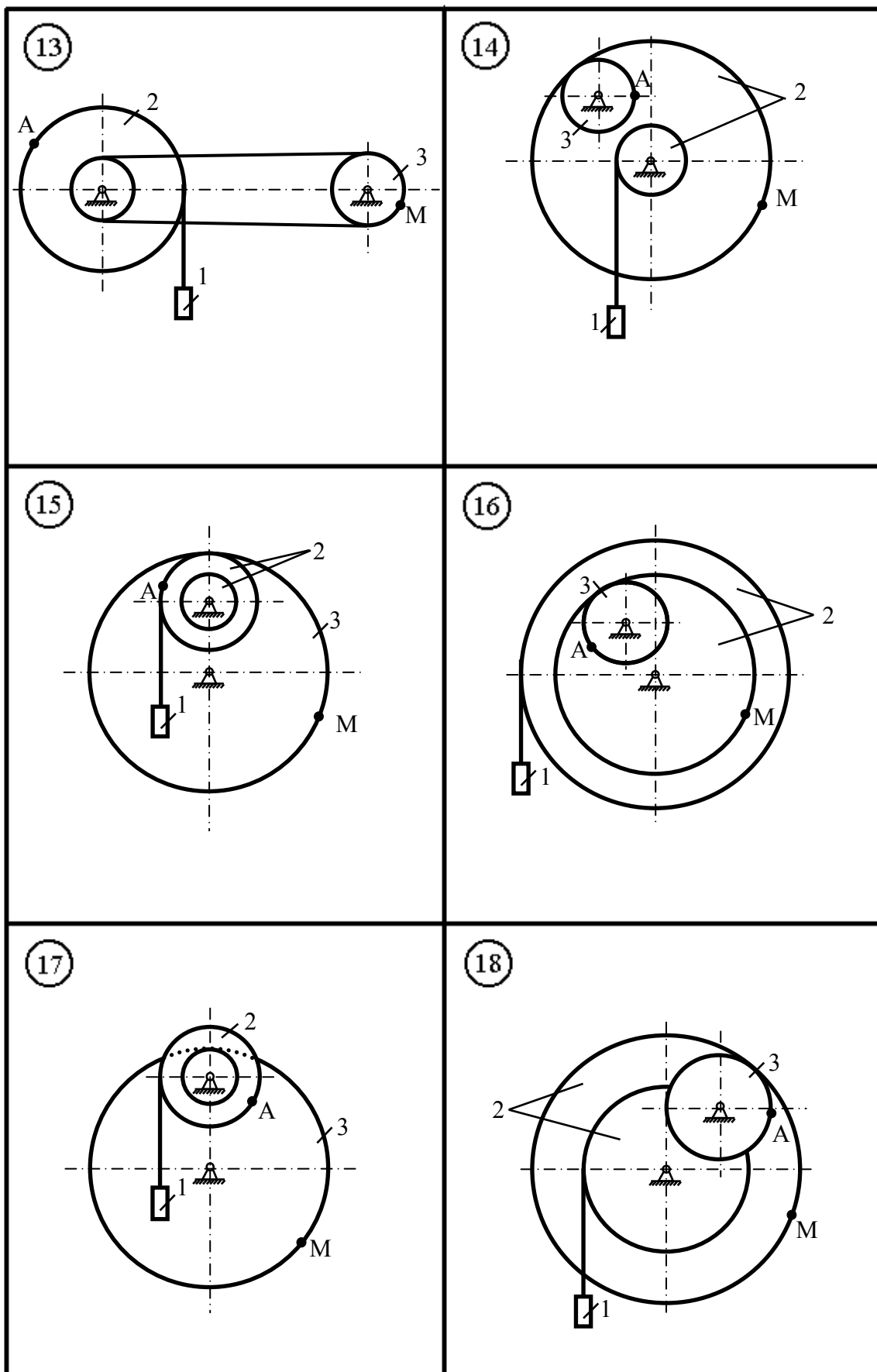


Рисунок К3.3

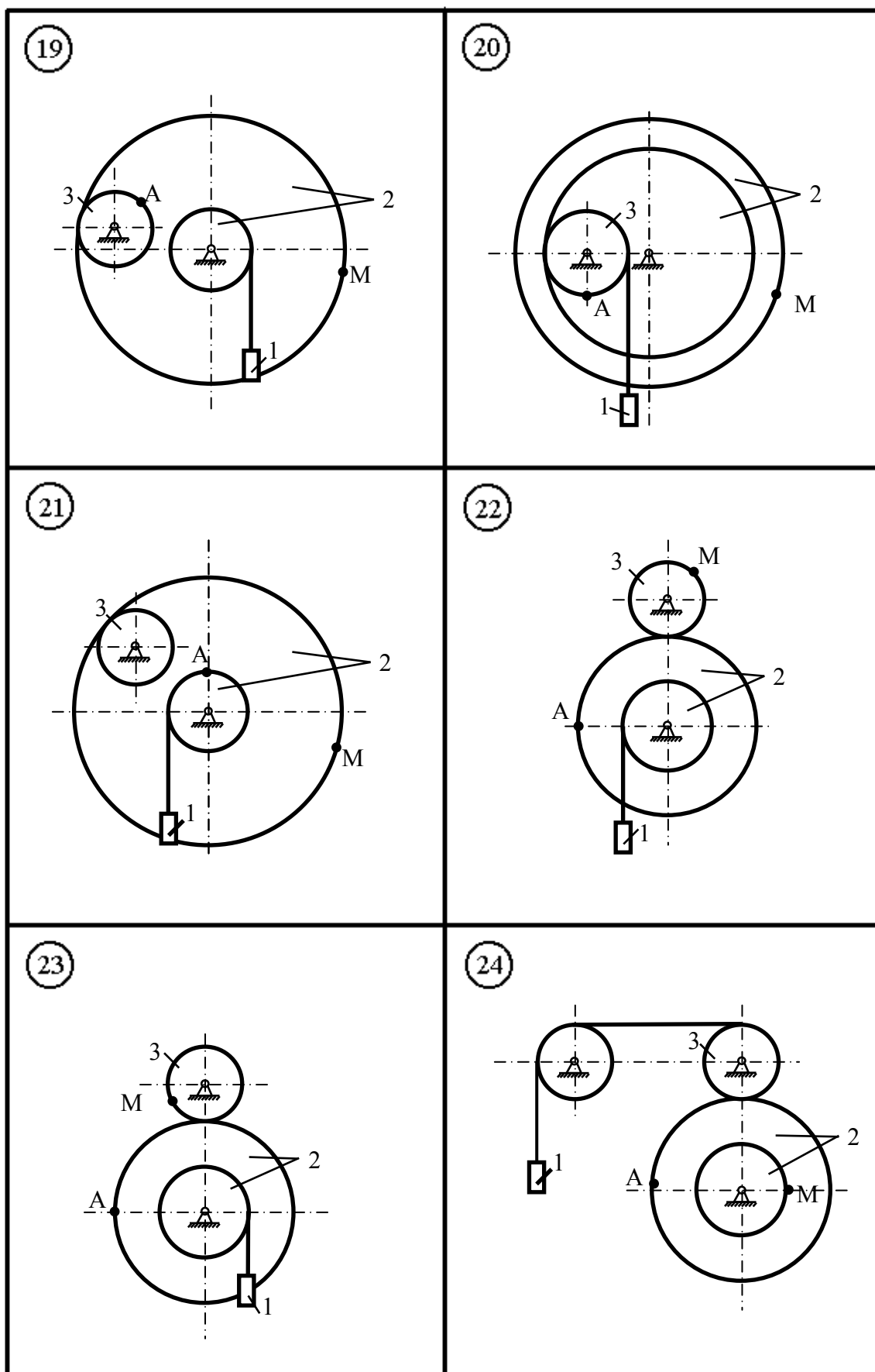


Рисунок К3.4

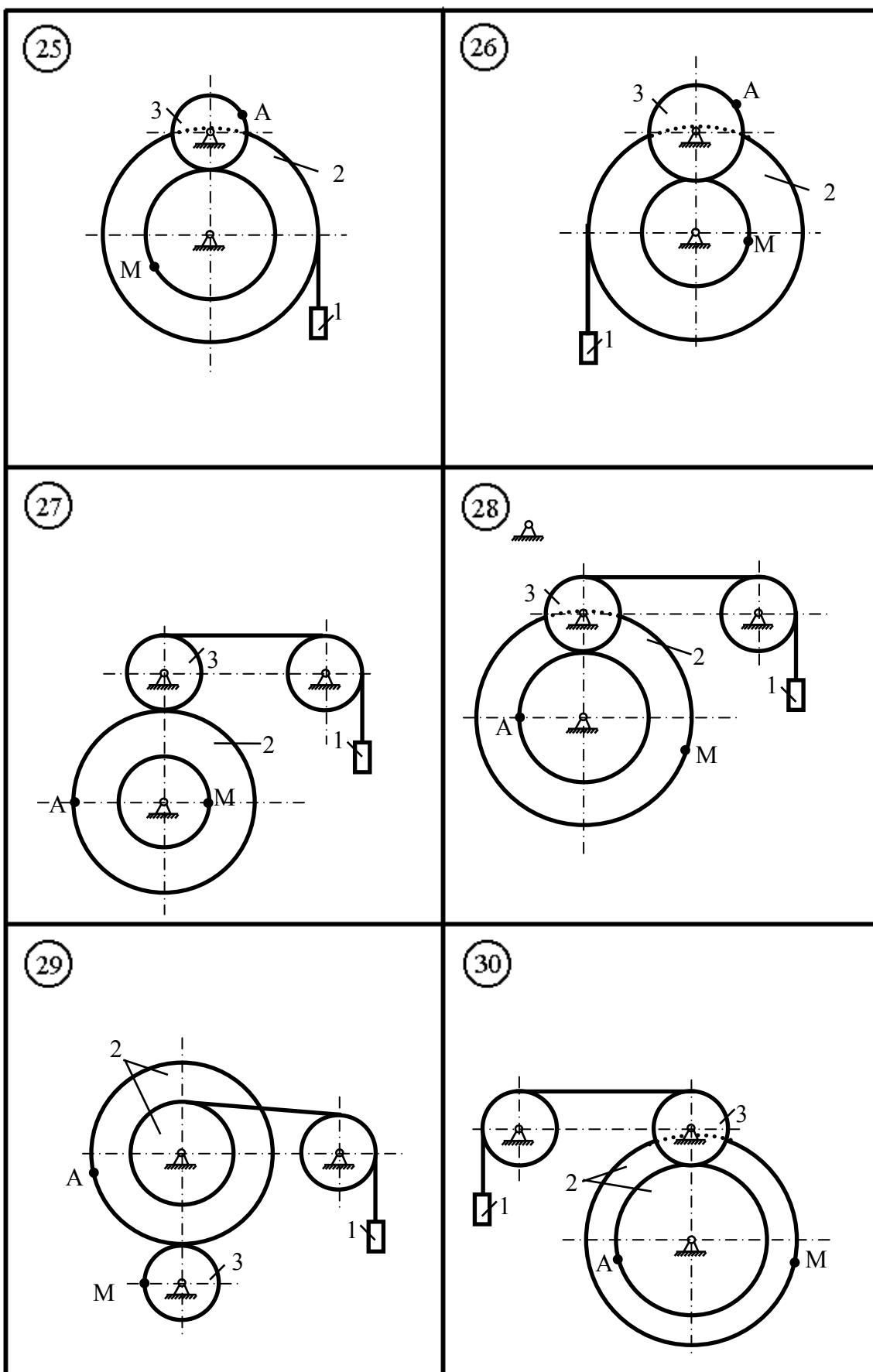


Рисунок К3.5

К3.1 Приклад виконання завдання

Для механізму (рис. К3.6) знайти швидкість і прискорення точок А і М при $t_1=1\text{с}$, якщо тіло 2 рухається за законом $\varphi_2=8t^3-3t^2$ ($R_2=0,1\text{м}$; $R_1=0,4\text{м}$; $r_1=0,15\text{м}$).

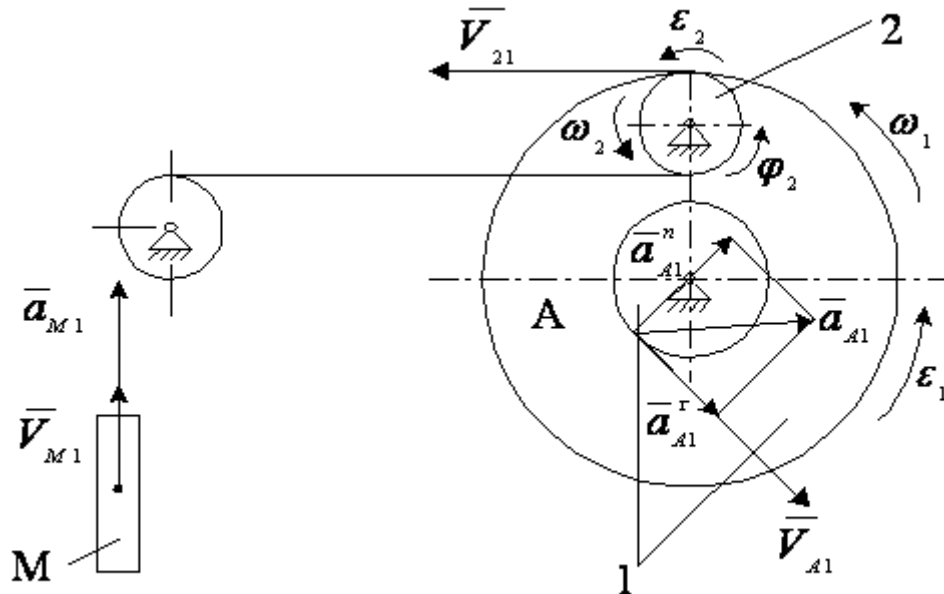


Рисунок К3.6

Розв'язання. Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення тіла 2

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = (24t^2 - 6t) \frac{1}{\text{с}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = (48t - 6) \frac{1}{\text{с}^2}$$

При $t_1=1\text{с}$

$$\omega_{21} = 24 - 6 = 18 \frac{1}{\text{с}},$$

$$\varepsilon_{21} = 48 - 6 = 42 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Знайдемо швидкість V_{21} точок контакту тіл 2 та 1

$$V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot R_1,$$

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = 0,25\omega_2.$$

Визначимо швидкість точки А

$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = 0,25 \cdot 0,15 \cdot \omega_2 = 0,0375 \cdot \omega_2.$$

Прискорення точки А:

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau},$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_1} = \omega_1^2 r_1 = 9,375 \cdot \omega_2^2 \cdot 10^{-3} \frac{\mathcal{M}}{c^2},$$

$$a_A^\tau = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot r_1 = 0,0375 \cdot \varepsilon_2 \frac{\mathcal{M}}{c^2},$$

$$\text{де } \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0,25 \cdot \varepsilon_2.$$

Величина прискорення точки А:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2}.$$

$$\text{При } t_1=1\text{с}; \quad V_{A1} = 0,0375 \cdot \omega_{21} = 0,0375 \cdot 18 = 0,675 \frac{\mathcal{M}}{c},$$

$$a_{A1}^n = 9,375 \cdot \omega_{21}^2 \cdot 10^{-3} = 9,375 \cdot 18^2 \cdot 10^{-3} = 3,038 \frac{\mathcal{M}}{c^2},$$

$$a_{A1}^\tau = 0,0375 \cdot \varepsilon_{21} = 0,0375 \cdot 42 = 1,575 \frac{\mathcal{M}}{c^2},$$

$$a_{A1} = \sqrt{3,038^2 + 1,575^2} = 3,42 \frac{\mathcal{M}}{c^2}.$$

Визначимо швидкість та прискорення тіла М, що переміщується поступально

$$V_M = V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = 0,1 \cdot \omega_2,$$

$$a_M = \frac{dV_M}{dt} = 0,1 \cdot \varepsilon_2.$$

$$\text{При } t_1=1\text{с} \quad V_{M1} = 0,1 \cdot \omega_{21} = 1,8 \frac{\mathcal{M}}{c},$$

$$a_{M1} = 0,1 \cdot \varepsilon_{21} = 4,2 \frac{\mathcal{M}}{c^2}.$$

Показуємо на рис. КЗ.6 вектори $\overline{V_{A1}}, \overline{a_{A1}^n}, \overline{a_{A1}^\tau}, \overline{a_{A1}}, \overline{V_{M1}}, \overline{a_{M1}}$

К.4 Кінематичний аналіз плоского механізму

Визначити для заданого положення механізму швидкість та прискорення точок А, В, М, кутову швидкість та кутове прискорення ланки АВ. Схеми механізмів наведено на рис. К4.1–К4.5, а дані для розрахунку наведені в табл. К4.1

К4.1 Приклад виконання завдання

Для механізму, зображеного на рис. К4.6, знайти швидкість і прискорення точок А, В, М та кутову швидкість, кутове прискорення ланок АВ і ВС. Прийняти: $OA = 0.3$ м; $OA=OB$; $BC = 0.5$ м; $AM = 0,5AB$; $\omega = 5$ с⁻¹; $\varepsilon = 3$ с⁻².

Розв’язання. Визначимо швидкості точок А, В та кутові швидкості ланок АВ і СВ.

Таблиця К4.1

Варіант	OA, м	AB, м	ω , с ⁻¹	ε , с ⁻²
1	0,1	0,6	1	2
2	0,3	0,4	1,2	3
3	0,2	0,3	1,5	2
4	0,1	0,3	1,8	3
5	0,3	0,2	1,0	2
6	0,1	0,8	1,1	3
7	0,2	0,3	1,2	2
8	0,3	0,6	1,3	3
9	0,2	0,4	1,4	2
0	0,1	0,6	1,5	3

Швидкість точки А направлена перпендикулярно до ланки OA у напрямку кутової швидкості ω .

$$V_A = \omega \cdot OA = 5 \cdot 0,3 = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

По лінії, яка перпендикулярна до ланки ВС, буде направлена швидкість точки В (лінія b-b, рис. К4.6). Тоді миттєвий центр швидкостей ланки АВ буде в точці О.

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = \frac{V_B}{BO}, \omega_{AB} = \omega = 5 \frac{1}{\text{с}}.$$

Напрямок швидкості точки В визначається напрямком кутової швидкості ω_{AB} (рис. К4.6).

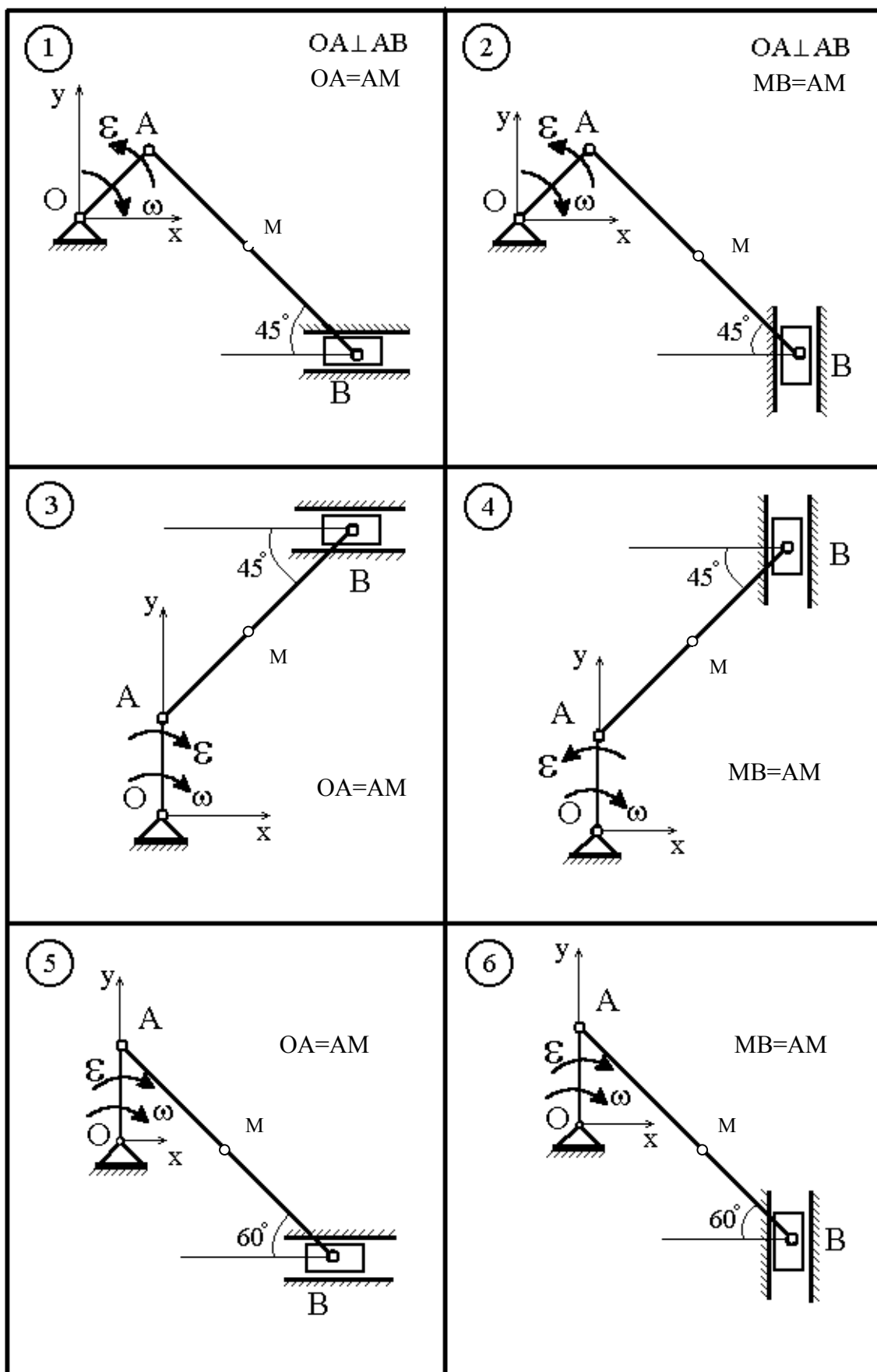


Рисунок К4.1

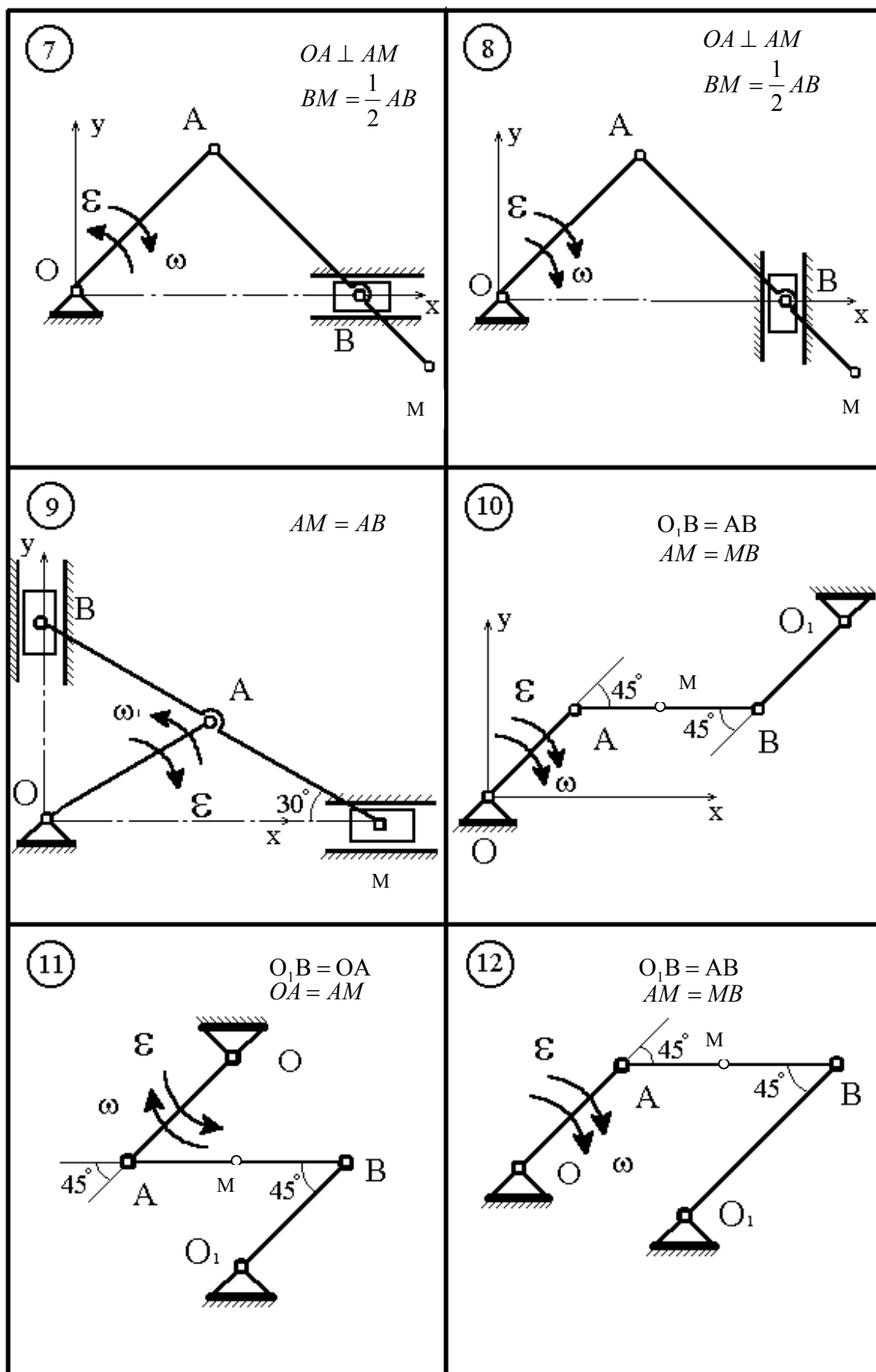


Рисунок К4.2

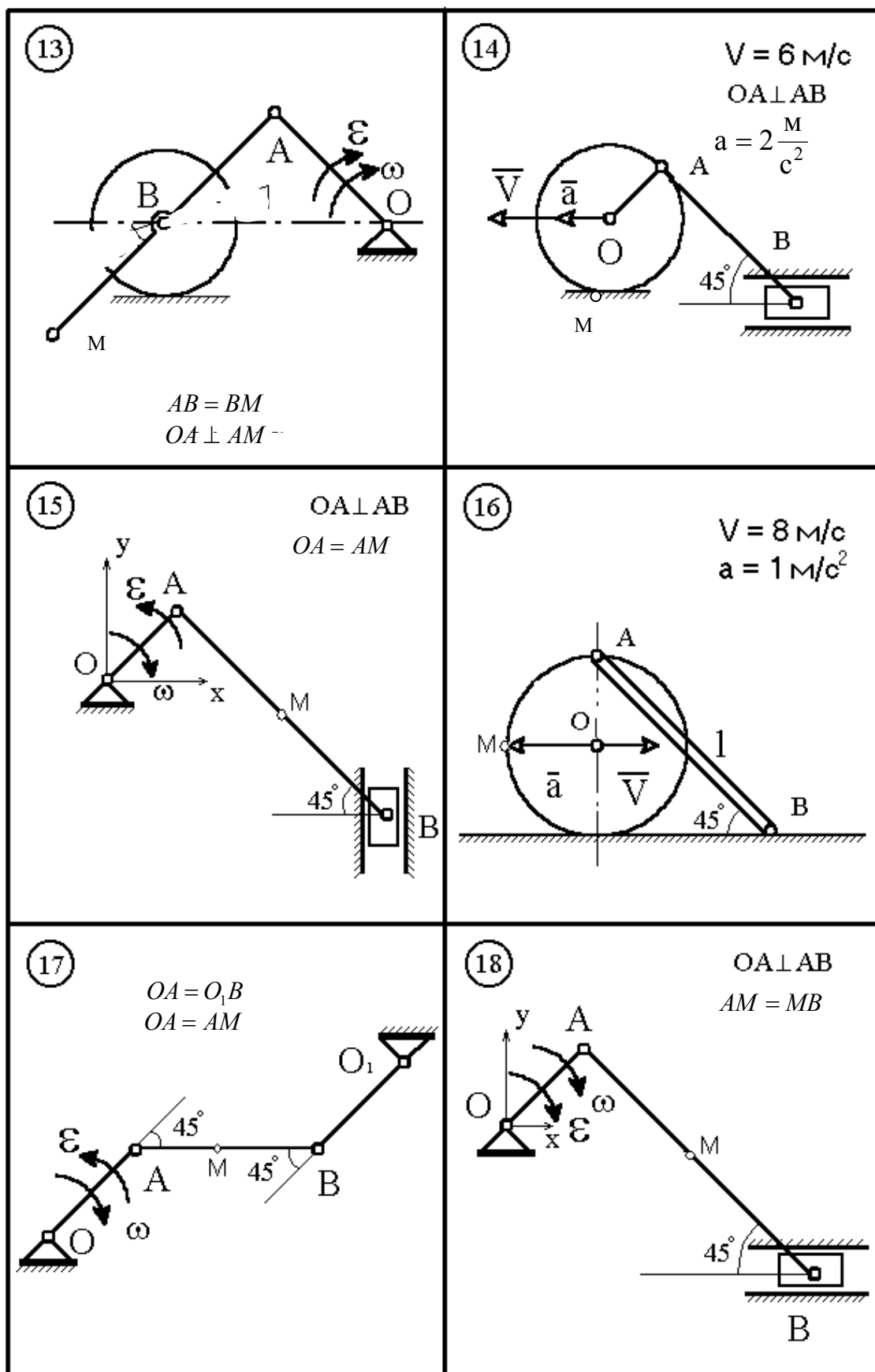


Рисунок К4.3

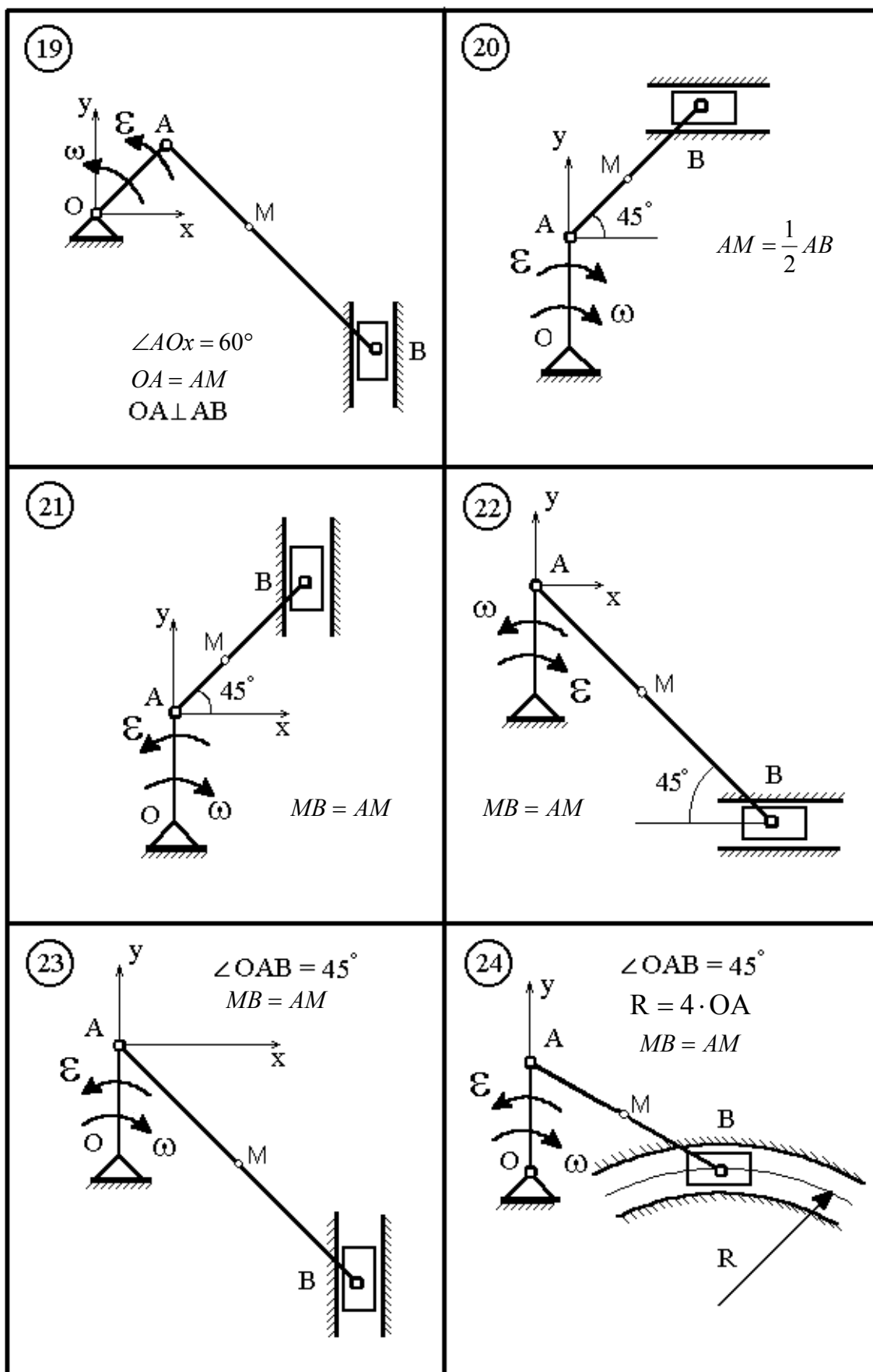


Рисунок К4.4

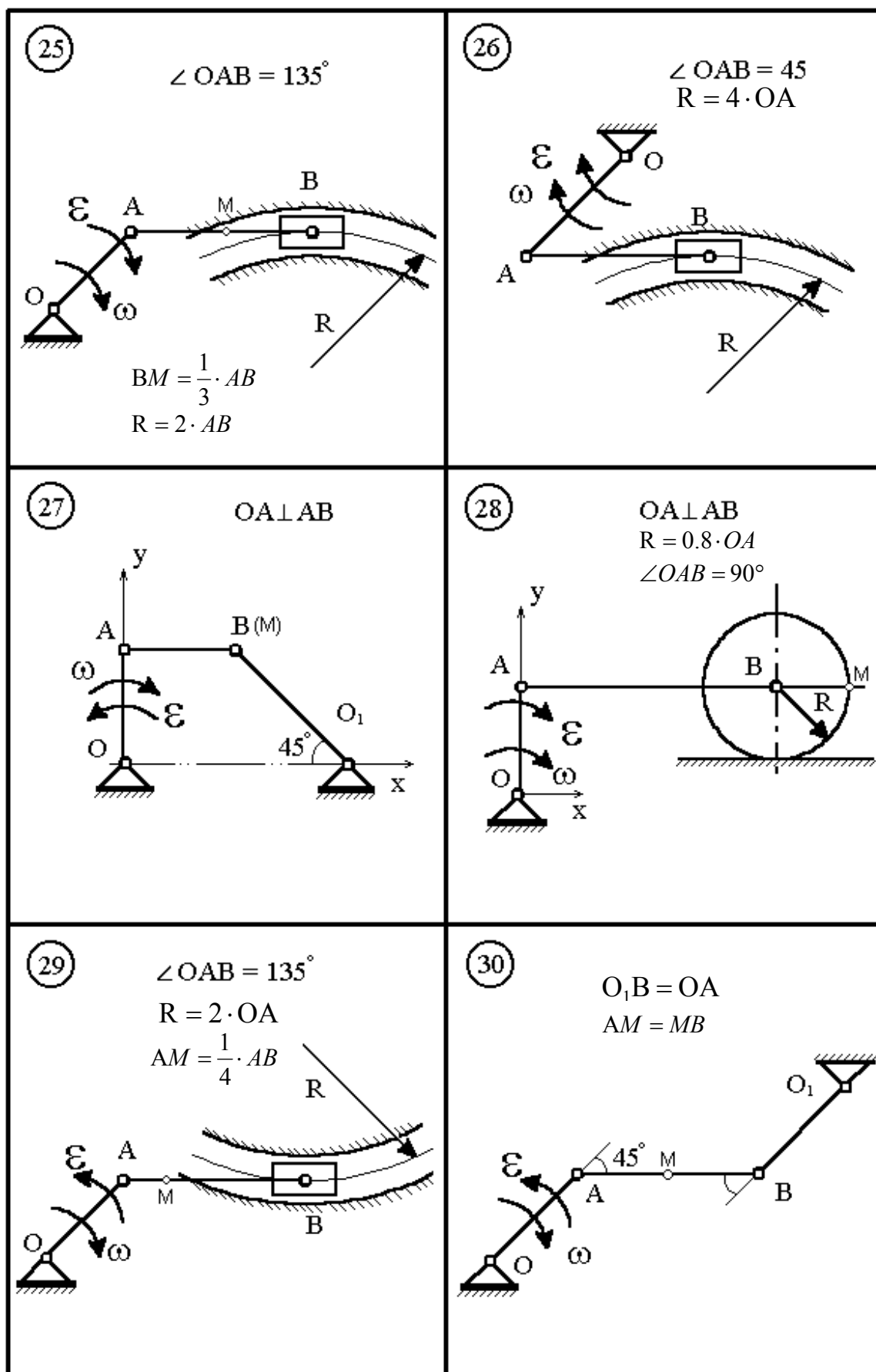


Рисунок К4.5

$$V_B = V_A = 1,5 \frac{M}{c}.$$

Швидкість точки М направлена перпендикулярно до відрізка ОМ, що з'єднує точку М з миттєвим центром швидкостей ланки АВ.

$$V_M = \omega_{AB} \cdot OM = 5 \cdot 0,3 \cdot \sin 30^\circ = 0,75 \frac{M}{c}$$

Кутова швидкість ланки ВС

$$\omega_{CB} = \frac{V_B}{BC} = \frac{1,5}{0,5} = 3 \frac{1}{c}.$$

Знайдемо тепер прискорення точок А, В та кутові прискорення ланок АВ та ВС.

Точка А належить тілу ОА, що обертається навколо нерухомої осі. Тоді:

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau},$$

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 5^2 \cdot 0,3 = 7,5 \frac{M}{c^2},$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 3 \cdot 0,3 = 0,9 \frac{M}{c^2},$$

$$a_A = \sqrt{a_A^{n^2} + a_A^{\tau^2}} = \sqrt{7,5^2 + 0,9^2} = 7,55 \frac{M}{c^2}.$$

На рисунку К4.6 $OA = OB$

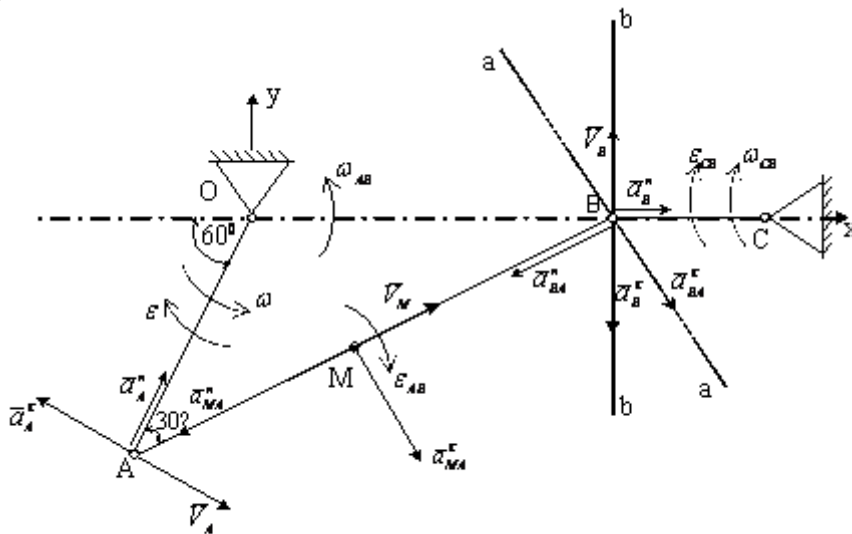


Рисунок К4.6

Прийmemo точку А за полюс. Тоді, розглядаючи рух ланки АВ, запишемо:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}, \quad (K4.1)$$

$$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau, \quad (K4.2)$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 5^2 \cdot 0,6 = 15 \frac{M}{c},$$

де $AB = 2 \cdot OA \cdot \cos 30^\circ = 0.52 \text{ м}$

Прискорення $\overline{a}_{BA}^n$ направлене по прямій АВ від точки В до полюса, а прискорення $\overline{a}_{BA}^\tau$ - перпендикулярно до прямої АВ (лінія а-а, рис. К4.6).

Оскільки точка В належить ланці ВС, то

$$\overline{a}_B = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau, \quad (K4.3)$$

$$a_B^n = \omega_{CB} \cdot BC = 3^2 \cdot 0,5 = 4,5 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення $\overline{a}_B^\tau$ направлене по прямій b-b.

Вираз (K4.1), враховуючи (K4.2) та (K4.3), запишеться:

$$\overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau. \quad (K4.4)$$

Спроекуємо векторне рівняння (K4.4) на осі ОХ та ОУ.

Вісь ОХ:

$$a_B^n = a_A^n \cdot \cos 60^\circ - a_A^\tau \cdot \sin 60^\circ - a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ + \left(\overline{a}_{BA}^\tau\right)_x. \quad (K4.5)$$

Вісь ОУ:

$$\left(\overline{a}_{BA}^\tau\right)_y = a_A^n \cdot \sin 60^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ - a_{BA}^n \cdot \sin 30^\circ + \left(\overline{a}_{BA}^\tau\right)_y. \quad (K4.6)$$

У формулах (K4.5) та (K4.6) дві невідомі величини $\overline{a}_{BA}^\tau$ та $\overline{a}_B^\tau$.

$$(\bar{a}_{BA}^{\tau})_x = a_B^n + a_B^{\tau} \cdot \sin 60^0 + a_{BA}^n \cdot \cos 30^0 - a_A^n \cdot \cos 60^0 = 4,5 + 0,9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 7,5 \cdot 0,5 = 14,52,$$

$$(\bar{a}_{BA}^{\tau})_x = a_{BA}^{\tau} \cdot \cos 60^0 = 14,52,$$

$$a_{BA}^{\tau} = \frac{14,52}{\cos 60^0} = 29,04 \frac{M}{c^2},$$

$$(\bar{a}_B^{\tau})_y = a_A^n \cdot \sin 60^0 + a_A^{\tau} \cdot \cos 60^0 - a_{BA}^n \cdot \sin 30^0 - a_{BA}^{\tau} \cdot \cos 30^0 = 7,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,9 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{2} - 29,04 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -25,70,$$

$$a_B^{\tau} = 25,7 \frac{M}{c^2}.$$

Знаходимо кутові прискорення ланок АВ та ВС.

$$\varepsilon_{BA} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{29,04}{0,52} = 55,85 \frac{1}{c^2},$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_B^{\tau}}{BC} = \frac{25,7}{0,5} = 51,4 \frac{1}{c^2}.$$

Напрямок кутових прискорень ε_{BA} та ε_{BC} визначаються напрямком векторів $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ і $\bar{a}_B^{\tau}$.

Визначення прискорення точки М.

Точка М належить ланці АВ, що переміщається плоско-паралельно. Прийемо точку А за полюс. Тоді:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA} \quad (K4.7)$$

$$\text{де } \bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^{\tau}, \quad \bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^{\tau}.$$

Знайдемо складові прискорення точки М, як прискорення точки М при обертанні ланки АВ навколо полюса з кутовою швидкістю ω_{AB} та кутовим прискоренням ε_{AB} .

$$a_{MA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AM = 5^2 \cdot 0,3 \cdot \cos 30^\circ = 6,5 \frac{M}{c^2}.$$

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AM = 55,85 \cdot 0,3 \cdot \cos 30^\circ = 14,5 \frac{M}{c^2}.$$

Із векторного рівняння (К4.7) знайдемо проекції прискорення точки М на осі х та у.

$$\begin{aligned} a_{Mx} &= a_A^n \cdot \cos 60^\circ - a_A^\tau \cdot \cos 30^\circ - a_{MA}^n \cdot \cos 30^\circ + a_{MA}^\tau \cdot \cos 60^\circ = \\ &= 7,5 \cdot 0,5 - 0,9 \cdot 0,866 - 6,5 \cdot 0,866 + 14,5 \cdot 0,5 = 4,59. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{My} &= a_A^n \cdot \sin 60^\circ + a_A^\tau \cdot \sin 30^\circ - a_{MA}^n \cdot \sin 30^\circ - a_{MA}^\tau \cdot \sin 60^\circ = \\ &= 7,5 \cdot 0,866 + 0,9 \cdot 0,5 - 6,5 \cdot 0,5 - 14,5 \cdot 0,866 = -8,86. \end{aligned}$$

Величина прискорення точки М.

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{4,59^2 + 8,86^2}.$$

$$a_M = 9,98 \frac{M}{c^2}.$$

К.5 Кінематичні характеристики тіла та його точок при сферичному русі

Тіло А котиться без ковзання по поверхні нерухомого тіла В (рис. К5.1-5.5), маючи нерухому точку О. Вісь $o\eta$ тіла А обертається навколо нерухомої осі OZ і має при заданому положенні кутову швидкість ω та прискорення ε .

Визначити кутову швидкість та кутове прискорення тіла А, швидкість та прискорення точки D тіла А для положення, показаного на рисунку. Дані для розрахунку наведені в табл. К5.1

Таблиця К5.1

Варіант	ω	ε	OC	CD
	с^{-1}	с^{-2}	м	м
1	3	1	0,35	0,10
2	4	2	0,45	0,15
3	5	3	0,55	0,20
4	2	-3	0,25	0,05
5	3	2	0,60	0,30
6	4	3	0,45	0,20
7	1	4	0,40	0,15
8	2	4	0,60	0,20
9	3	4	0,55	0,15
0	4	1	0,70	0,25

К5.1 Приклад виконання завдання

Конічна шестерня котиться без ковзання по нерухомому конічному колесу (рис. К5.6). Дано : $OC = 0,4$ м; $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon = 3 \text{ с}^{-2}$; $CD = 0,1$ м; $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

Визначити кутову швидкість і кутове прискорення шестерні А, швидкість та прискорення точки D для заданого положення тіла А.

Розв'язання: Миттєва вісь обертання $O\Omega$ тіла А, що виконує сферичний рух, проходить через точку О та точку дотику тіл А і В (рис. К5.7)

Швидкість точки С при обертанні осі $o\eta$ навколо осі OZ

$$\overline{v_c} = \overline{\omega} \times \overline{OC} \quad (\text{K5.1})$$

Якщо розглядати рух тіла А як обертальний навколо миттєвої осі $O\Omega$, то

$$\overline{v_c} = \overline{\omega_1} \times \overline{OC} \quad (\text{K5.2})$$

Виходячи з (K5.1) та (K5.2), маємо:

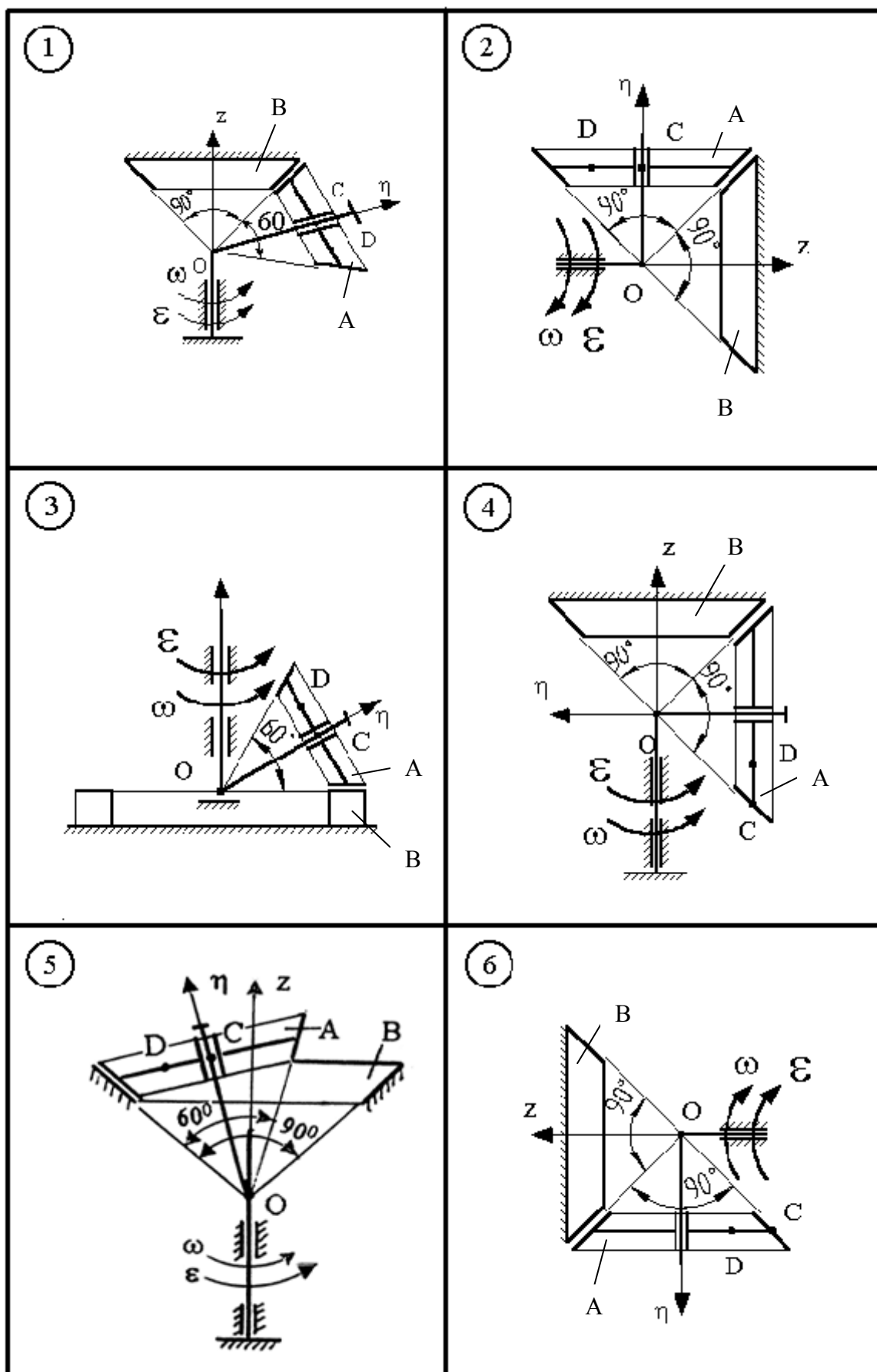


Рисунок К5.1

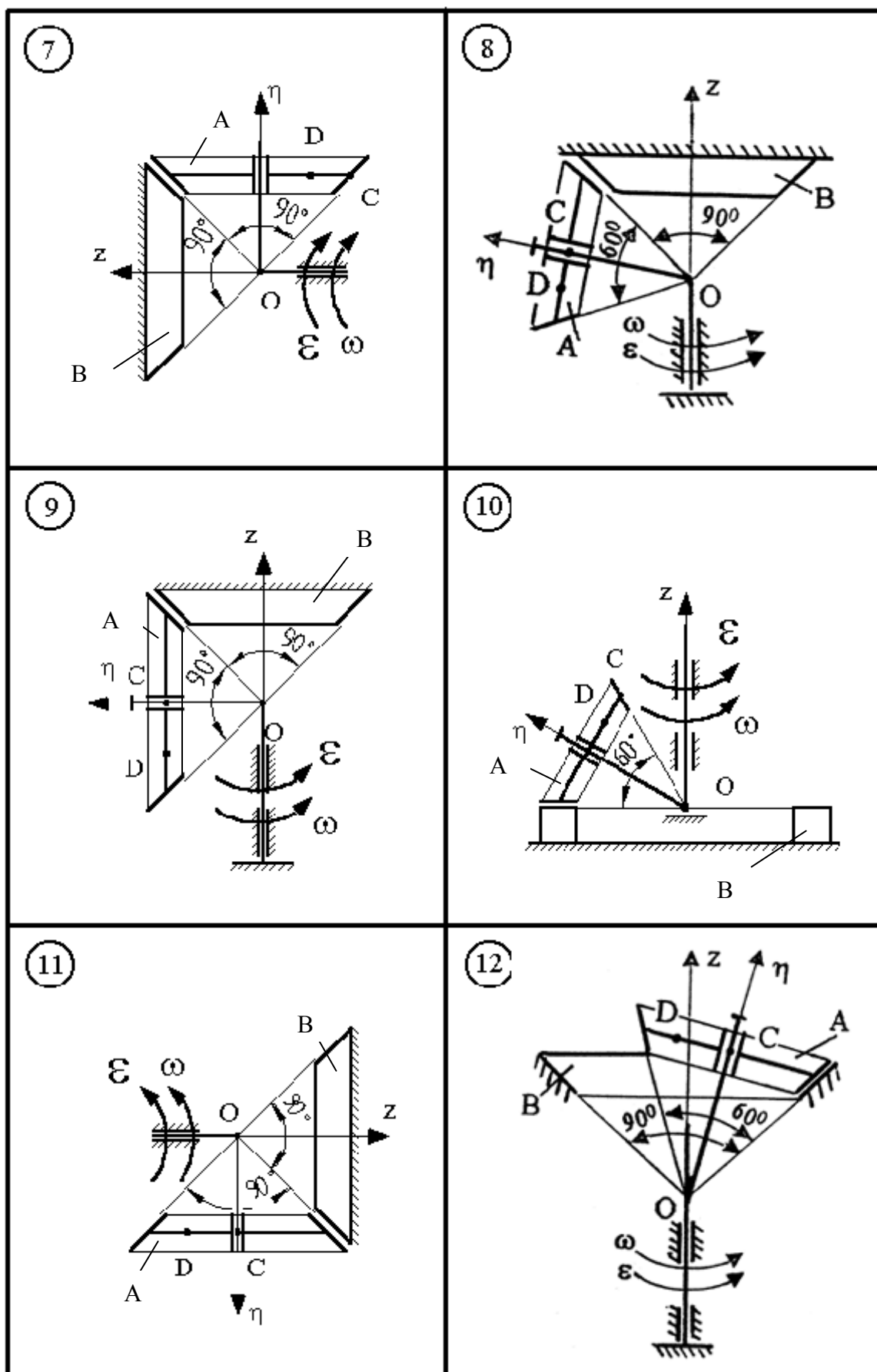


Рисунок К5.2

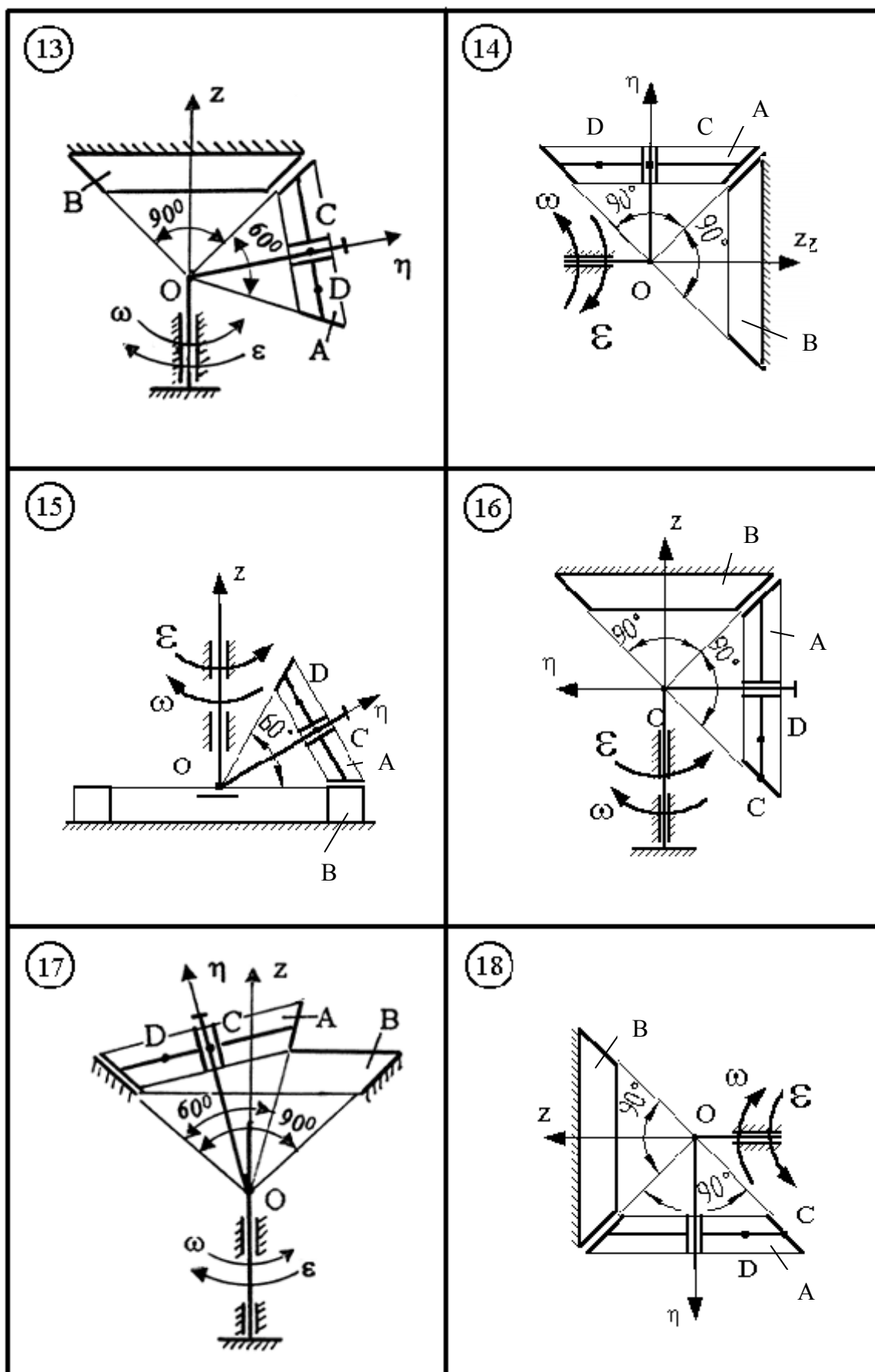


Рисунок К5.3

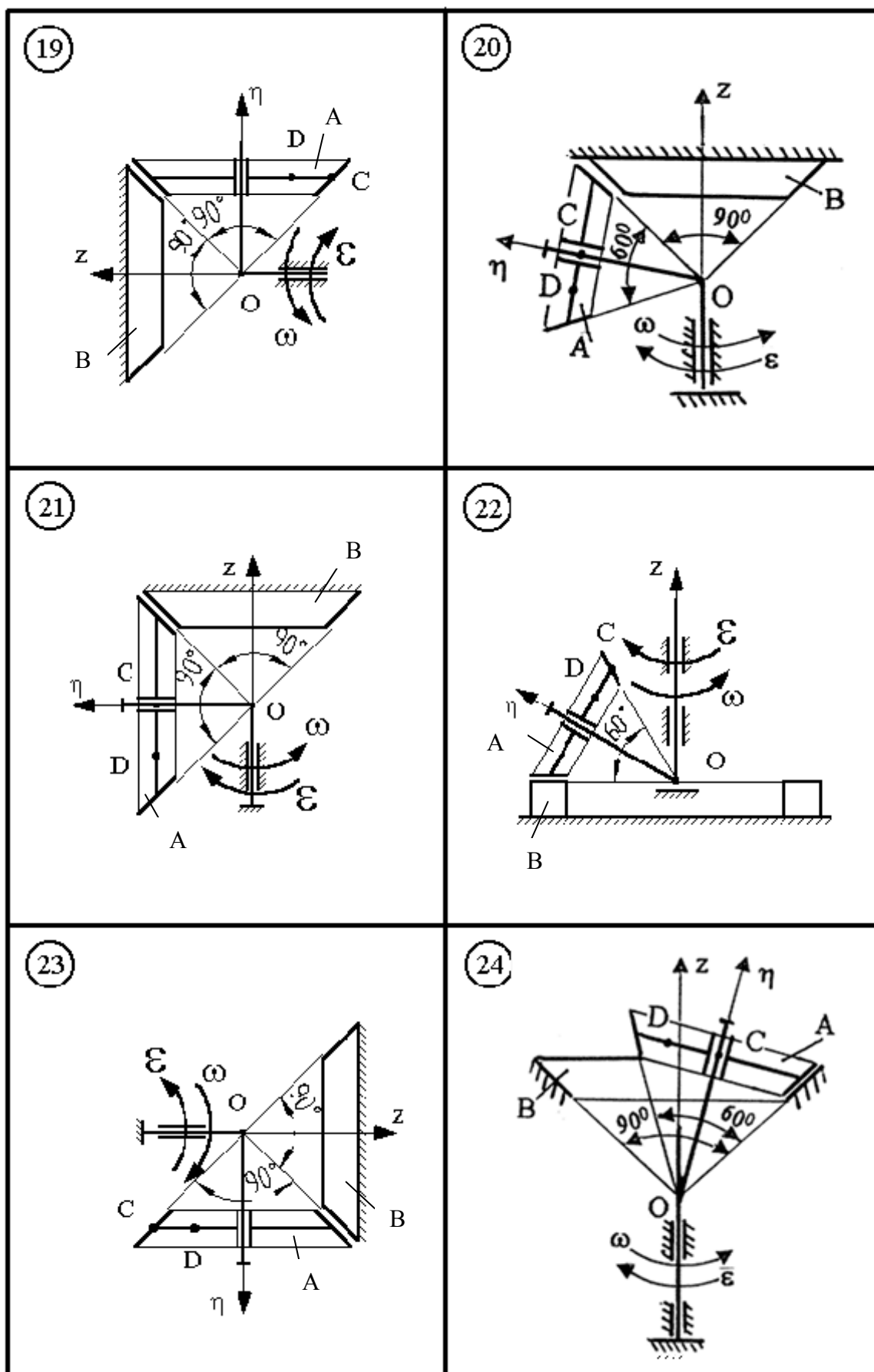


Рисунок К5.4

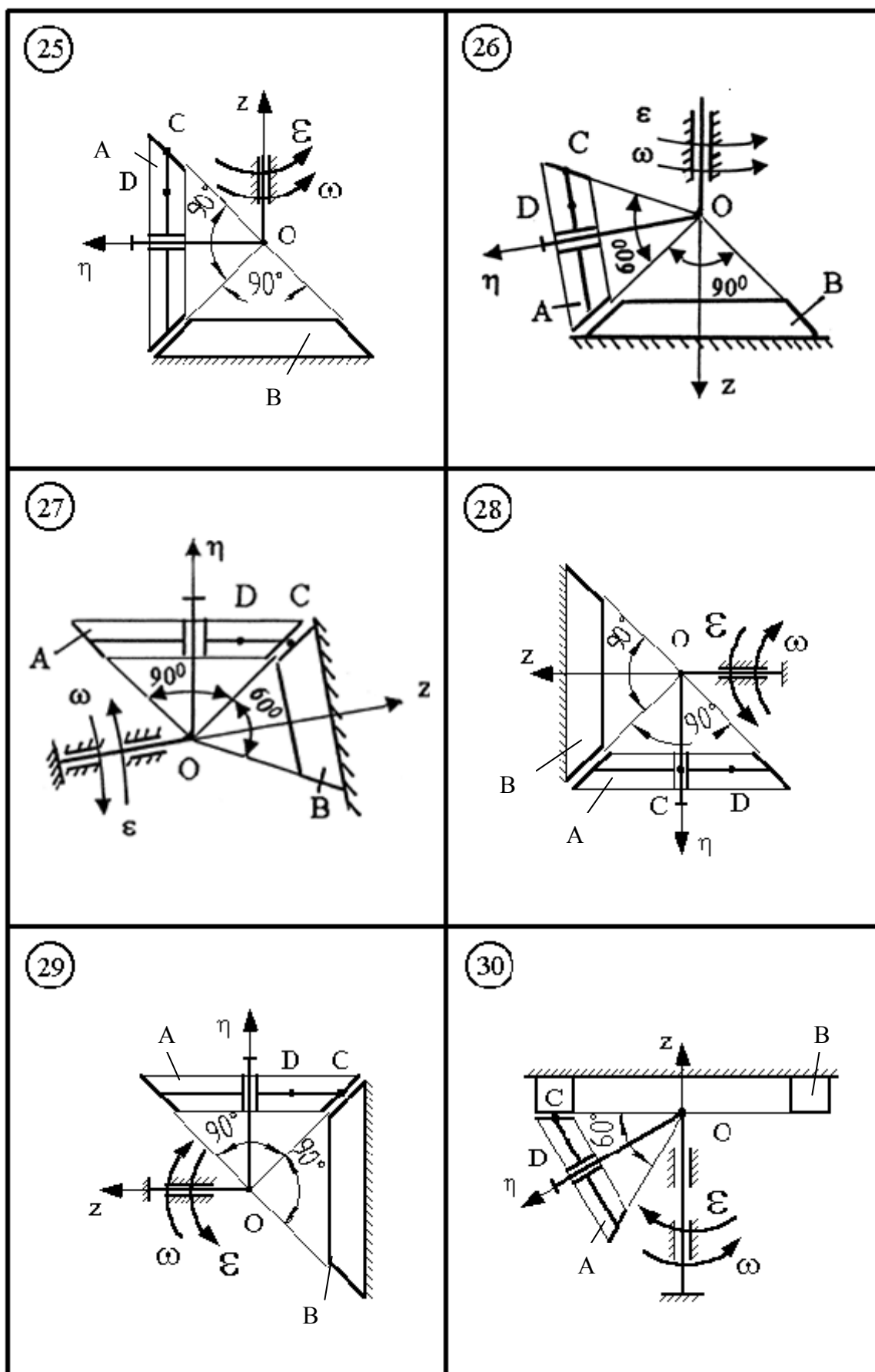


Рисунок К5.5

$$\omega \cdot OC \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \omega_1 \cdot OC \sin\frac{\beta}{2}.$$

Отже:

$$\omega_1 = \omega \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) / \sin\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad (K5.3)$$

$$\omega_1 = 2 \sin\left(\frac{90^0 + 60^0}{2}\right) / \sin\left(\frac{60^0}{2}\right) = 3,86 c^{-1}.$$

Кутове прискорення тіла А

$$\overline{\varepsilon}_1 = \frac{d\overline{\omega}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_1 \cdot \overline{k}_\Omega),$$

де $\overline{k}_\Omega$ - орт осі $O\Omega$, що змінює напрямок у просторі.
Отже,

$$\overline{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega_1}{dt} \overline{k}_\Omega + \omega_1 \frac{d\overline{k}_\Omega}{dt}, \quad (K5.4)$$

$$\text{де } \frac{d\overline{k}_\Omega}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{k}_\Omega = \omega \cdot \overline{i} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ (рис.6.7).}$$

Тепер рівняння (K5.4) набуває вигляду

$$\overline{\varepsilon}_1 = \overline{\varepsilon}'_1 + \overline{\varepsilon}''_1 \quad (K5.5)$$

$$\text{де } \overline{\varepsilon}'_1 = \varepsilon_1 \cdot \overline{k}_\Omega, \quad \overline{\varepsilon}''_1 = \omega \cdot \omega_1 \cdot \overline{k}_\Omega \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \overline{i}$$

Виходячи з (K5.3), знаходимо модуль кутового прискорення $\overline{\varepsilon}'_1$ тіла А

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) / \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\varepsilon_1 = 3 \sin(45^0 + 30^0) / \sin 30^0 = 5,80 c^{-2}.$$

Вектор $\overline{\varepsilon_1''}$ має напрямок осі x , а його модуль

$$\overline{\varepsilon_1''} = \omega \cdot \omega_1 i \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 3,86 \sin 45^0 = 5,46 c^{-2}$$

Тепер рівняння (К5.4) набуває вигляду

$$\overline{\varepsilon}_1 = \overline{\varepsilon}'_1 + \overline{\varepsilon}''_1 \quad (\text{K5.5})$$

$$\text{де } \overline{\varepsilon_1'} = \varepsilon_1 \cdot \overline{k}_\Omega, \quad \overline{\varepsilon_1''} = \omega \cdot \omega_1 \cdot \overline{k}_\Omega \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \bar{i}$$

Виходячи з (К5.3), знаходимо модуль кутового прискорення $\overline{\varepsilon}'_1$ тіла А

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) / \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\varepsilon_1 = 3 \sin(45^\circ + 30^\circ) / \sin 30^\circ = 5,80 c^{-2}.$$

Вектор $\overline{\varepsilon_1''}$ має напрямок осі x , а його модуль

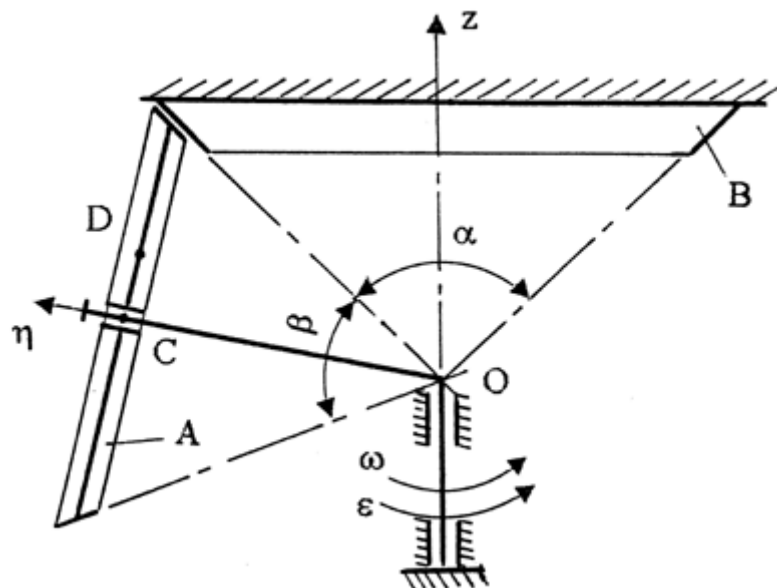


Рисунок К5.6

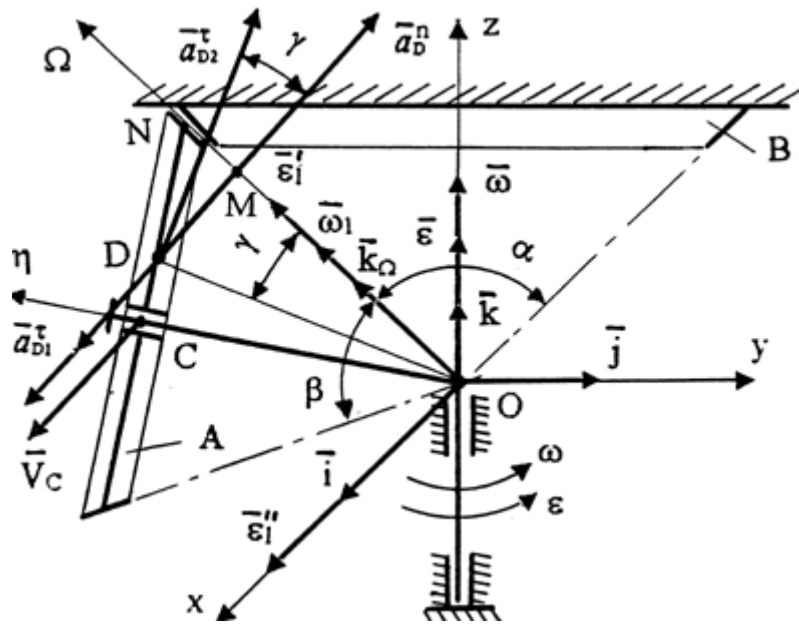


Рисунок К5.7

$$\overline{\varepsilon_1''} = \omega \cdot \omega_1 i \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 3,86 \sin 45^\circ = 5,46 c^{-2}$$

Оскільки вектори $\overline{\varepsilon_1'}$ та $\overline{\varepsilon_1''}$ взаємно перпендикулярні, тоді

$$\varepsilon = \sqrt{(\varepsilon_1')^2 + (\varepsilon_1'')^2},$$

$$\varepsilon = \sqrt{5,46^2 + 5,8^2} = 7,96 c^{-2}.$$

Швидкість точки D знаходимо, враховуючи, що тіло A обертається навколо миттєвої осі OΩ.

$$\overline{v_D} = \overline{\omega_1} \times \overline{OD}.$$

Модуль цієї швидкості

$$v_D = \omega_1 \cdot MD = 3,86 \cdot 0,11 = 0,44 \frac{m}{c},$$

$$\text{де } MD = (OC \cdot \tan 30^\circ - CD) \sin 60^\circ = (0,4 \frac{1}{\sqrt{3}} - 0,1) \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,11 m.$$

Прискорення точки D дорівнює векторній сумі нормального $\overline{a}_D^n$ і дотичного $\overline{a}_D^\tau$ прискорень:

$$\overline{a}_D = \overline{a}_D^n + \overline{a}_D^\tau \quad (\text{K5.6})$$

Нормальне прискорення

$$\overline{a}_D^n = \overline{\omega} \times \overline{v}_D \quad (\text{K5.7})$$

спрямовано перпендикулярно до миттєвої осі обертання $O\Omega$ тіла A від точки D до точки M (рис K5.7).

Модуль нормального прискорення

$$a_D^n = \omega_1^2 \cdot MD = 3,86 \cdot 0,11 = 0,42 \text{ м/с}^2$$

Дотичне прискорення

$$\overline{a}_D^\tau = \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{OM} = (\overline{\varepsilon}_1' + \overline{\varepsilon}_1'') \times \overline{OM}$$

$$\text{або } \overline{a}_D^{\text{об}} = \overline{a}_{D1}^{\text{об}} + \overline{a}_{D2}^{\text{об}}, \quad (\text{K5.8})$$

$$\text{де } \overline{a}_{D1}^\tau = \overline{\varepsilon}_1' \times \overline{OM}, \quad \overline{a}_{D2}^\tau = \overline{\varepsilon}_1'' \times \overline{OM}.$$

Модулі складових дотичного прискорення точки D

$$a_{D1}^\tau = \varepsilon_1' \cdot MD = 5,8 \cdot 0,11 = 0,64 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{D2}^\tau = \varepsilon_1'' \cdot OD \sin 90^\circ = 5,46 \cdot 0,412 = 2,25 \text{ м/с}^2,$$

$$\text{де } OD = \sqrt{OC^2 + CD^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,1^2} = 0,412 \text{ м}.$$

Оскільки напрямки векторів $\overline{\varepsilon}_1'$ та $\overline{\omega}_1$ збігаються, напрямки $\overline{a}_{D1}^\tau$ і $\overline{v}_D$ також збігаються. Вектор $\overline{a}_{D2}^\tau$ розташований в площині YOZ і спрямований перпендикулярно до OD в ту сторону, звідки поворот від вектора $\overline{\varepsilon}_1''$ до вектора $\overline{OM}$ видно проти годинникової стрілки на кут 90° (рис. K5.7).

Прискорення точки D (K5.6) знаходимо як векторну суму складових (K5.7) та (K5.8):

$$\overline{a_D} = \overline{a_D^n} + \overline{a_{D1}^\tau} + \overline{a_{D2}^\tau}$$

Модуль прискорення точки D

$$a_D = \sqrt{(a_D^n)^2 + (a_{D1}^\tau)^2 + (a_{D2}^\tau)^2 - 2a_D^n \cdot a_{D2}^\tau \cos \gamma},$$

$$a_D = \sqrt{(0,42)^2 + (0,64)^2 + (2,25)^2 - 2 \cdot 0,42 \cdot 2,25 \cdot 0,962} = 1,96 \text{ м/с}^2,$$

$$\text{де } \cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{DN^2}{OD^2} \sin^2 60^\circ} = \sqrt{1 - \frac{0,13^2}{0,412^2} \cdot \frac{3}{4}} = 0,962$$

$$DN = OC \tan 30^\circ - CD = \frac{0,4}{\sqrt{3}} - 0,1 = 0,13 \text{ м}.$$

Відповідь: $\omega_1 = 3,86 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 5,8 \text{ с}^{-2}$, $U_D = 0,44 \text{ м/с}$, $a_D = 1,96 \text{ м/с}^2$.

2.4 Складний рух точки

К.6 Знаходження швидкості та прискорення точки в складному русі

Умова завдання. На рис. К6.1 – К6.5 за варіантами від 1 до 30 показано точку M , яка рухається по тілу, що виконує переміщення. Закони руху точки і тіла в залежності від часу задані функціями, які записані біля рисунків, а числові значення коефіцієнтів наведені таблицею К6.1 за варіантами.

Визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M в складному русі для моменту часу, значення якого задано в таблиці К6.1 за варіантами.

Для бажаючих більш детально дослідити процес складного руху точки побудувати графіки залежностей $V = V(t)$ – абсолютної швидкості від часу та $a = a(t)$ – абсолютного прискорення від часу.

Таблиця К6.1

В-Т	A	B	C	D	R	k	t_l
	CM						c
1	28	12	16	12	15	2	0,5
2	14	8	12	6	12	1,5	1
3	15	4	9	2	8	1	0,4
4	10	4	8	6	6	2	0,3
5	8	5	14	10	10	1,5	2
6	16	11	6	8	14	3	0,6
7	12	2	9	5	10	1	0,5
8	7	5	12	4	8	2	0,8
9	14	10	6	5	12	1,5	1
0	9	6	5	2	4	1	0,4

Примітка. Для зручності виконання завдання рівняння руху точки M і тіла потрібно записати із врахуванням значень коефіцієнтів таблиці К6.1. Наприклад: для варіанта 15 біля рисунка вказано, що $S = A + k t^2$, $\varphi = B(1 - e^{-0,5t})$, в таблиці К6.1 значення A , B , k задано за варіантами, наприклад, за варіантом 4: $A = 10\text{см}$, $B = 4\text{см}$, $k = 2$, то рівняння руху будуть: $S = 10 + 2 t^2$, $\varphi = 8(1 - e^{-0,5t})$.

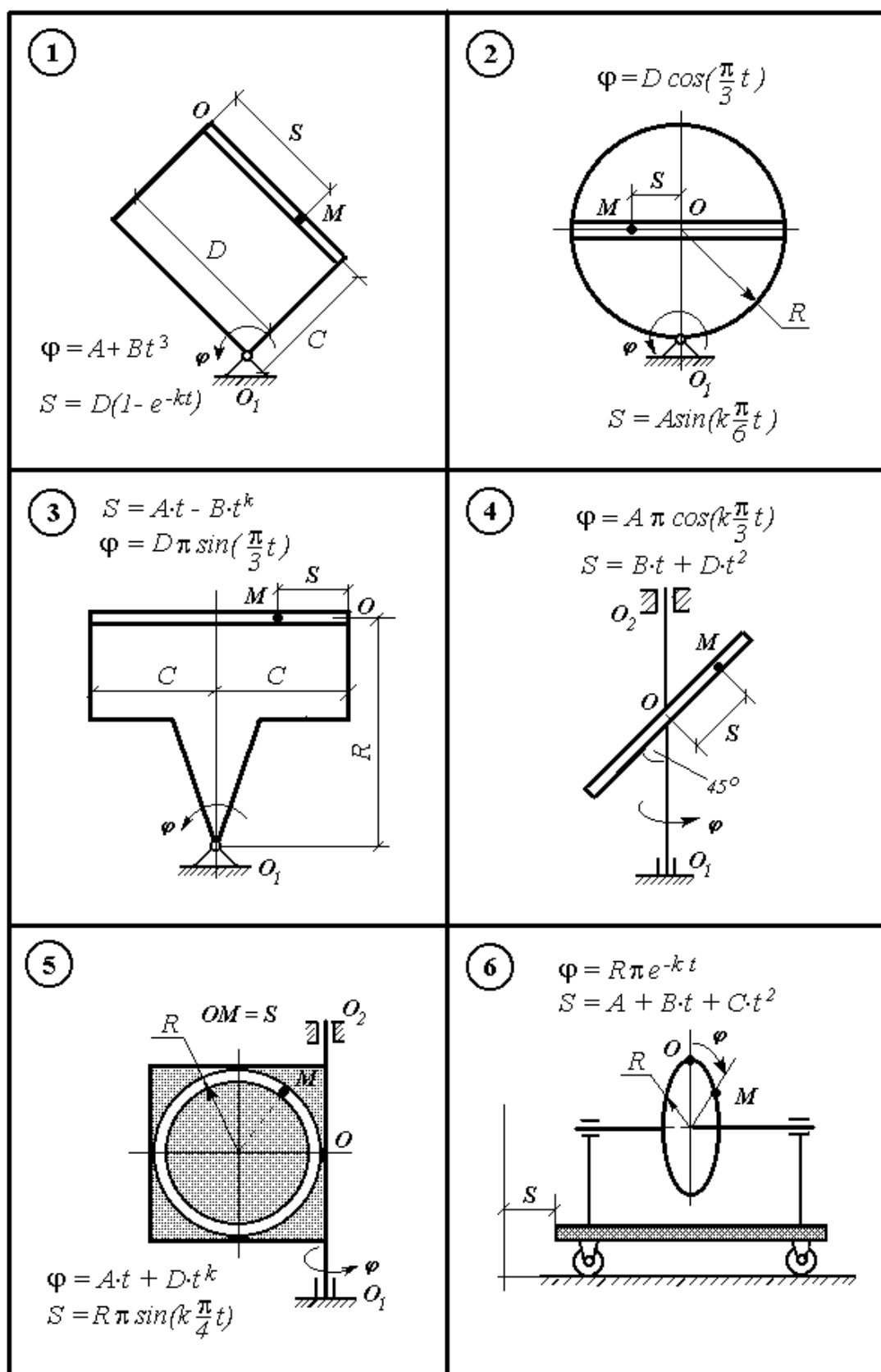


Рисунок К6.1

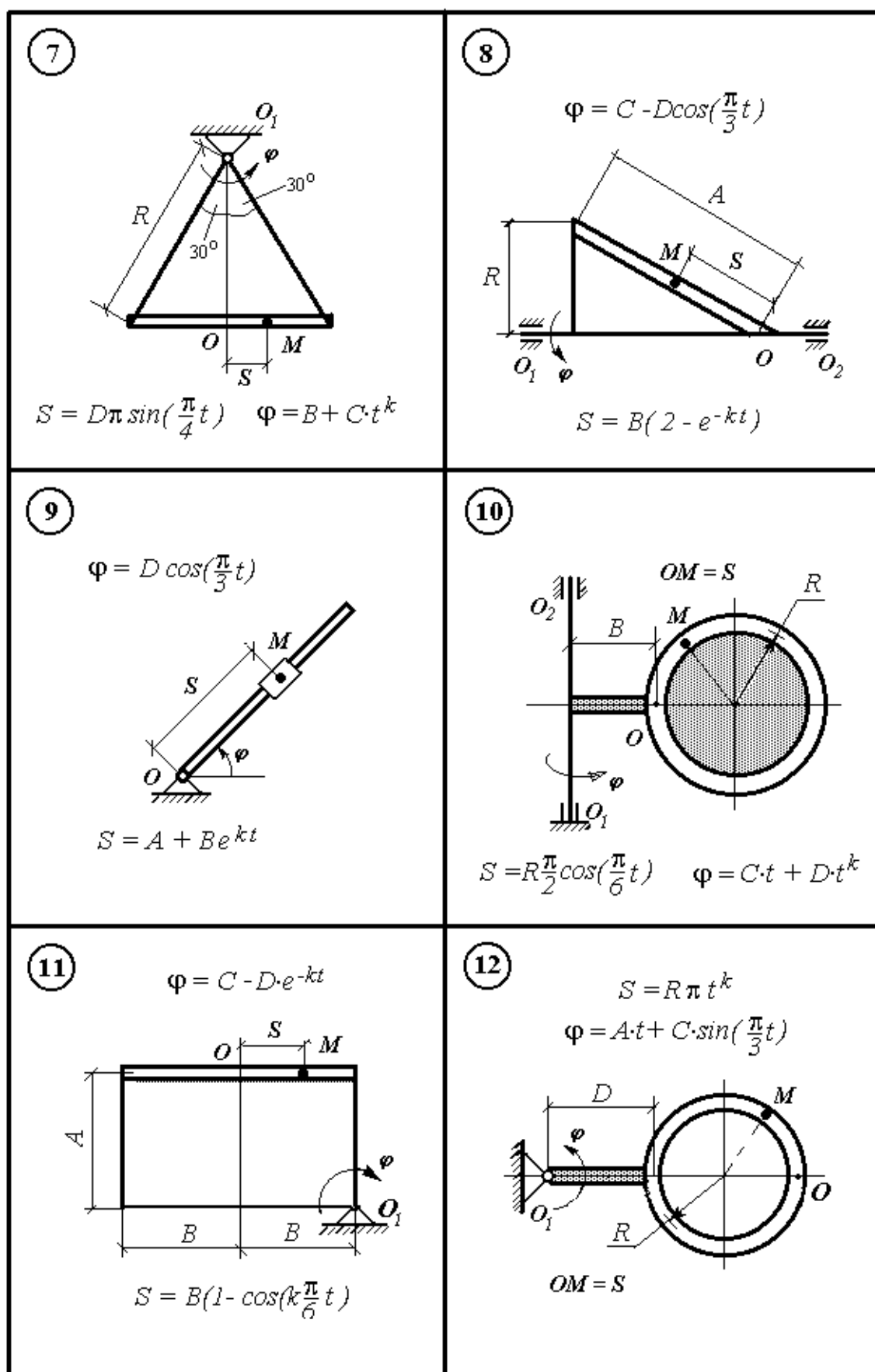


Рисунок К6.2

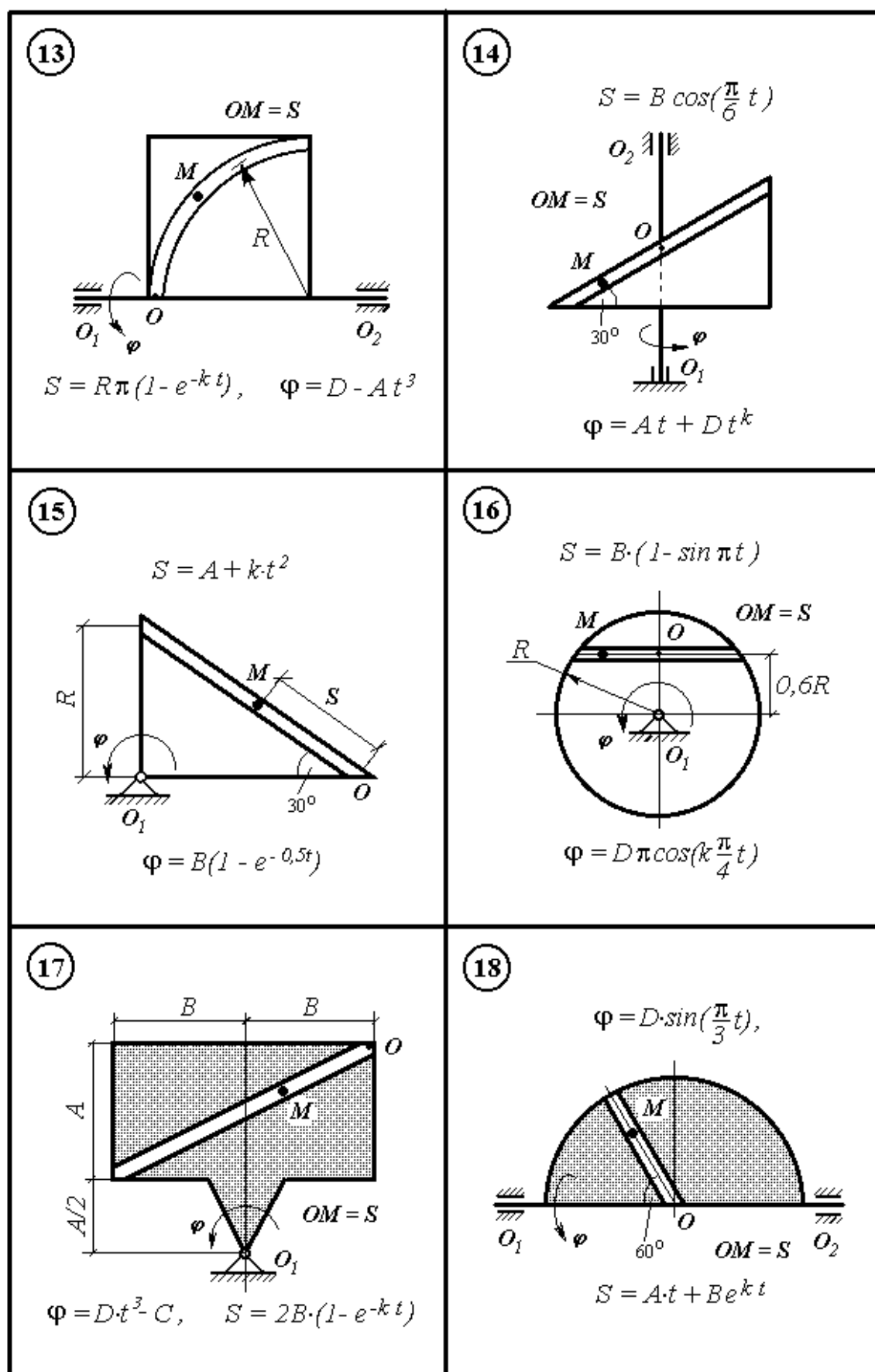


Рисунок К6.3

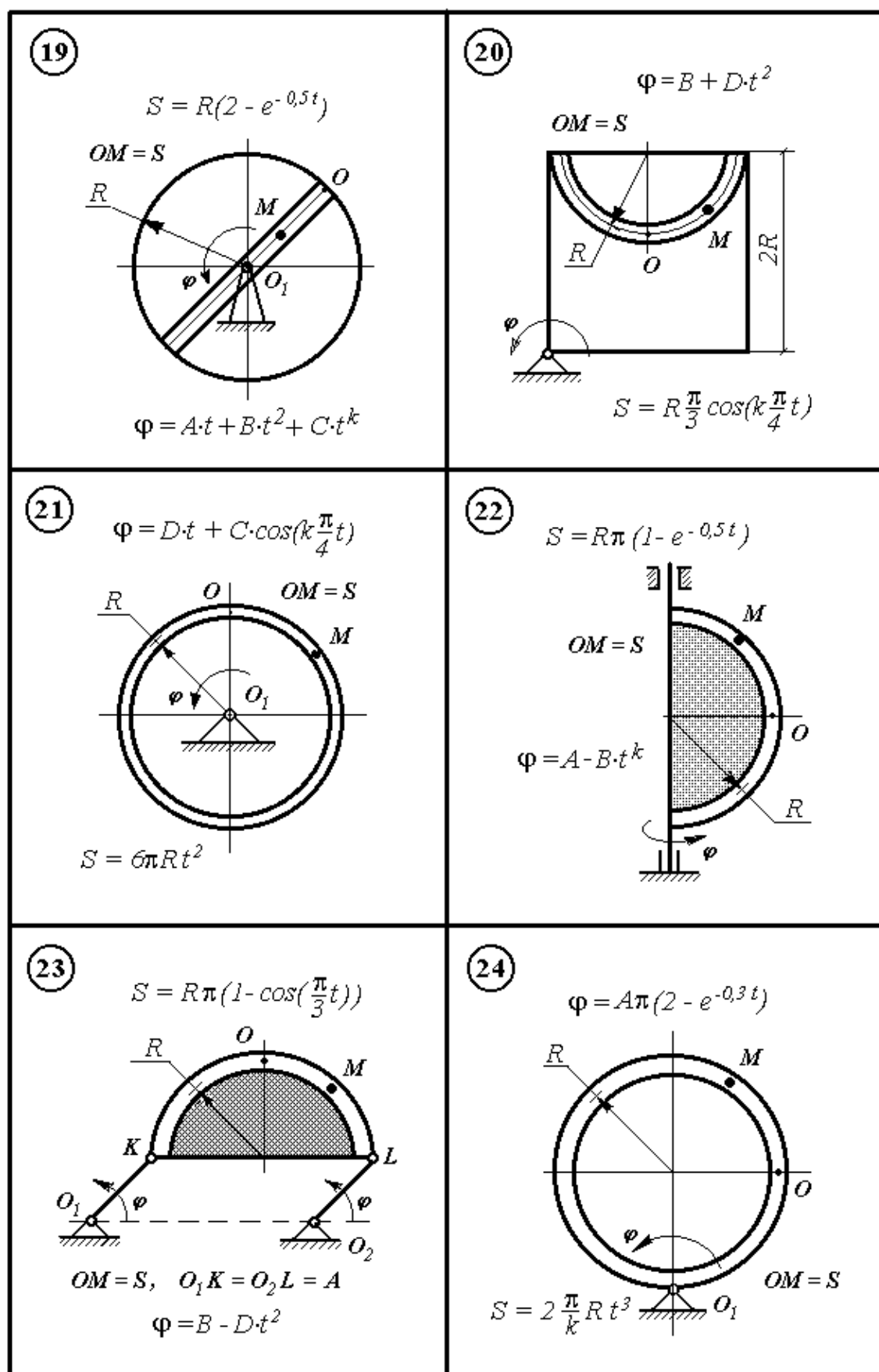


Рисунок К6.4

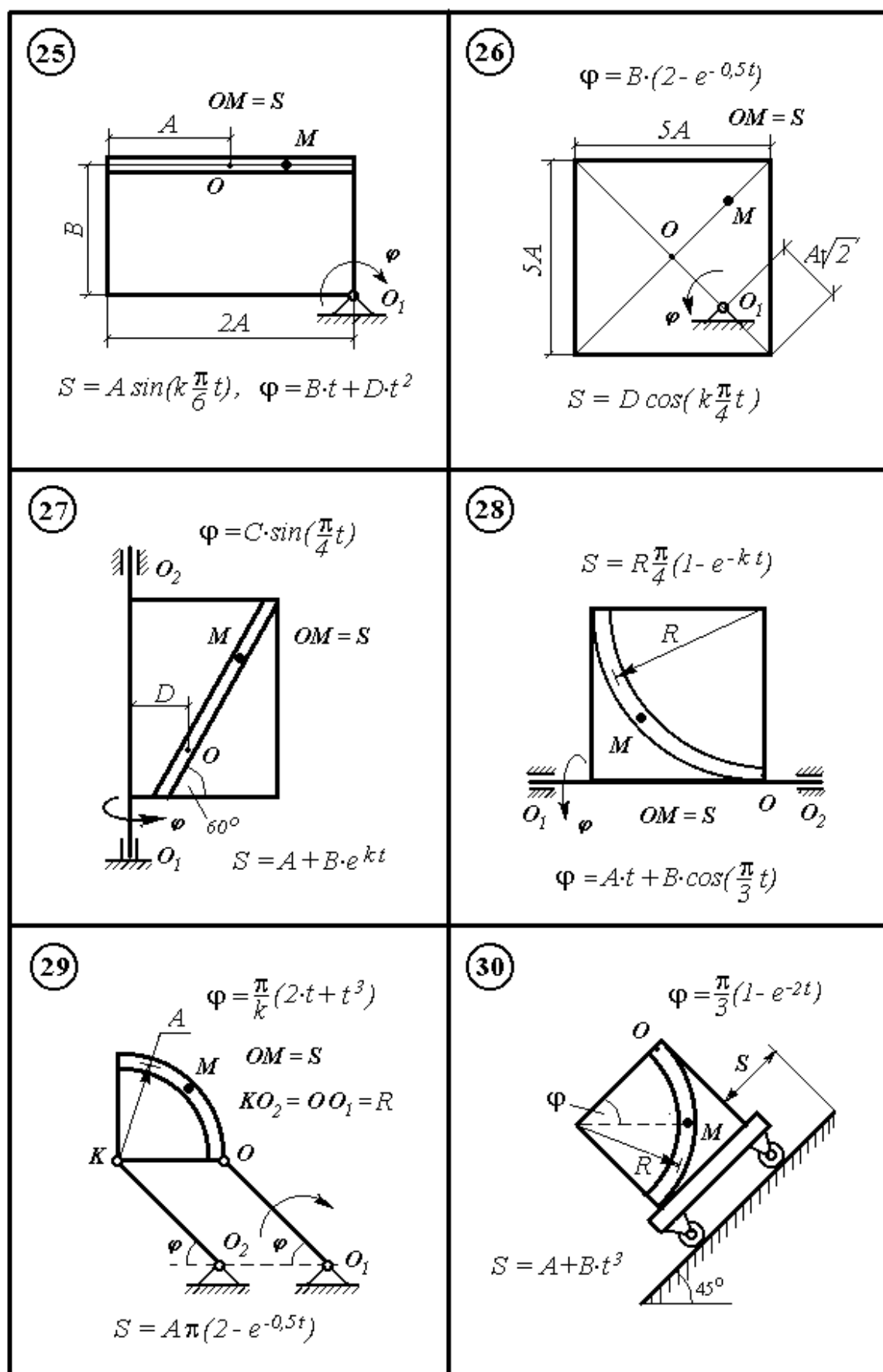


Рисунок К6.5

К6.1 Приклад виконання завдання

Точка M рухається по меридіану сфери, яка обертається навколо вертикальної осі. Сфера і точка M показані на рис. К6.6. Радіус сфери $R = 20\text{см}$. Рівняння обертового руху сфери $\varphi = 5t + 4t^2$, а рух точки по сфері задається залежністю $O_1M = S = 10\pi\sin(1 - e^{-2t})\text{см}$. Визначити абсолютну швидкість V і абсолютне прискорення a точки M для моменту часу $t = 0,3\text{с}$.

Побудувати графіки залежності $V = V(t)$ – швидкості, $a = a(t)$ – прискорення точки M при її русі по сфері, вибравши достатній для спостереження руху проміжок часу.

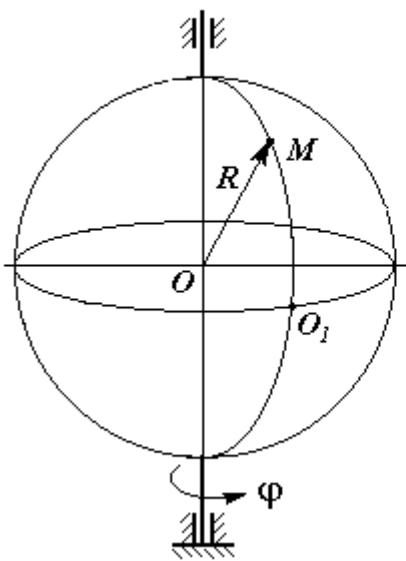


Рисунок К6.6

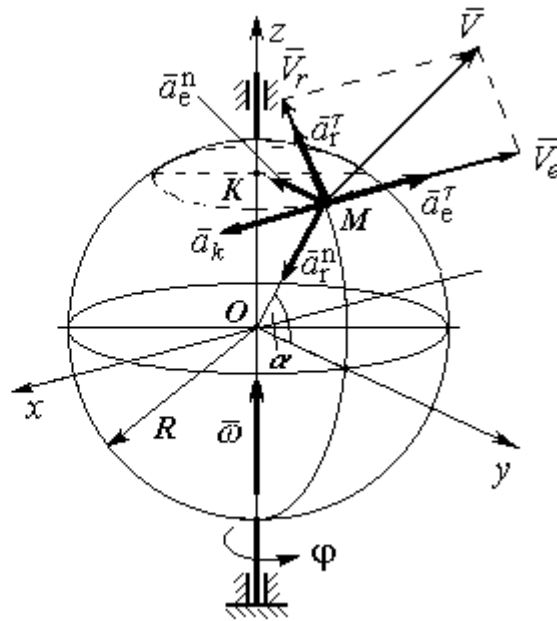


Рисунок К6.7

Розв'язання. Покажемо на рис. К6.7 систему координат xyz , в якій будемо вести відлік руху і направляти вектори. Вісь Oz направляємо по осі обертання сфери, вісь Ox - перпендикулярно до площини меридіана, а вісь Oy є перпендикулярною до осей Oz і Ox і лежить в площині меридіана. Відносний рух точки M відбувається по меридіану і задається відстанню по дузі радіуса R від точки O_1 . Переносний рух точки M - це рух точки разом із сферою при її обертанні навколо вертикальної осі. В переносному русі точка M описує дугу радіусом KM .

Визначення абсолютної швидкості. В складному русі абсолютна швидкість знайдеться геометричною сумою

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad (\text{К6.1})$$

На рис. К6.7 вектор $\vec{V}_e$ направляємо в сторону обертання сфери, що відповідає напрямку, протилежному до осі Ox , а вектор відносної

швидкості V_r по дотичній до дуги меридіана в площині yOz . В будь-який момент руху вектори $\vec{V}_e$ і $\vec{V}_r$ взаємно перпендикулярні. Знайдемо модулі цих векторів.

$$V_r = (O_1M)^V = 10\pi e^{-2t} \quad (\text{K6.2})$$

$$\vec{V}_e = \omega KM,$$

де ω і KM потрібно знайти.

$$KM = R \cos \alpha, \quad \alpha = O_1M / R = 10\pi(1-e^{-2t})/20 = \pi(1-e^{-2t})/2, \quad \omega = (\varphi) = 5t + 4t^2,$$

Тоді переносна швидкість рівна

$$V_e = 20(5t + 4t^2) \cos \alpha \quad (\text{K6.3})$$

Модуль абсолютної швидкості знайдемо за теоремою Піфагора, тому що між V_e і V_r прямий кут.

$$V = ((V_r)^2 + (V_e)^2)^{0,5} \quad (\text{K6.4})$$

Визначення абсолютного прискорення. Для знаходження прискорення точки в складному русі використовуємо теорему Коріоліса

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k \quad (\text{K6.5})$$

В нашому випадку переносний і відносний рухи відбуваються по криволінійних траєкторіях, тому переносне і відносне прискорення мають складові: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$, $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$, тоді формула (K6.5) стає більш розширеною

$$\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_k \quad (\text{K6.6})$$

На рис. K6.7 вкажемо напрямки векторів, які входять в (K6.6). Нормальні складові a_e^n і a_r^n направляємо перпендикулярно до напрямків руху і до центрів дуг. Вектор a_e^n до точки O , а a_r^n до центра K . Вектори дотичних складових $\vec{a}_e^\tau$ і $\vec{a}_r^\tau$ направляємо по дотичних до відповідних траєкторій: $\vec{a}_e^\tau$ проти осі Ox , а $\vec{a}_r^\tau$ в площині yOz , перпендикулярно до радіуса OM . Для визначення напрямку вектора прискорення Коріоліса використовуємо його формулу у векторному вигляді $a_k = 2 \vec{\omega} \times V_r$, згідно з яким вектор $\vec{a}_k$ направляється перпендикулярно до площини в якій розташовані вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_r$ у відповідності з правогвинтовою системою

відліку, тобто паралельно осі Ox . Для визначення напрямку вектора a_k можна ще скористатись правилом Жуковського.

Таблиця К6.2

t	V_r	V_e	V	A_{et}	A_{en}	A_{rt}	A_m	A_k	A_x	A_y	A_z	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	63	100	118	160	100	-126	197	0	-160	-297	-126	1E+0
0,05	57	107	121	158	99	-114	161	91	-67	-242	-136	81651
0,1	51	111	123	154	98	-103	132	167	13,9	-196	-136	56860
0,15	47	114	123	147	95	-93	108	228	81,4	-158	-128	47949
0,2	42	115	122	139	92	-84	88,6	275	136	-128	-117	48492
0,25	38	114	120	130	90	-76	72,5	309	178	-105	-104	53638
0,3	34	112	118	122	87	-69	59,4	532	210	-87	-91	60120
0,35	31	110	114	113	84	-62	48,6	346	233	-74	-78	65985
0,4	28	106	110	104	82	-56	39,8	352	248	-64	-67	70251
0,45	26	103	106	95	79	-51	32,6	352	257	-57	-57	72576
0,5	23	98	101	87	77	-46	26,7	348	261	-52	-48	73006
1	8,5	55	56	34	55	-17	3,61	216	182	-39	-7,1	34748
1,5	3,1	27	27	13	36	-6,3	0,49	106	93,4	-30	-1	9621
2	1,2	12	12	4,7	22	-2,3	0,07	48	43,6	-20	-0,1	2280
2,5	0,4	5,7	5,7	1,8	13	-0,8	0,01	21	19,3	-12	-0	510

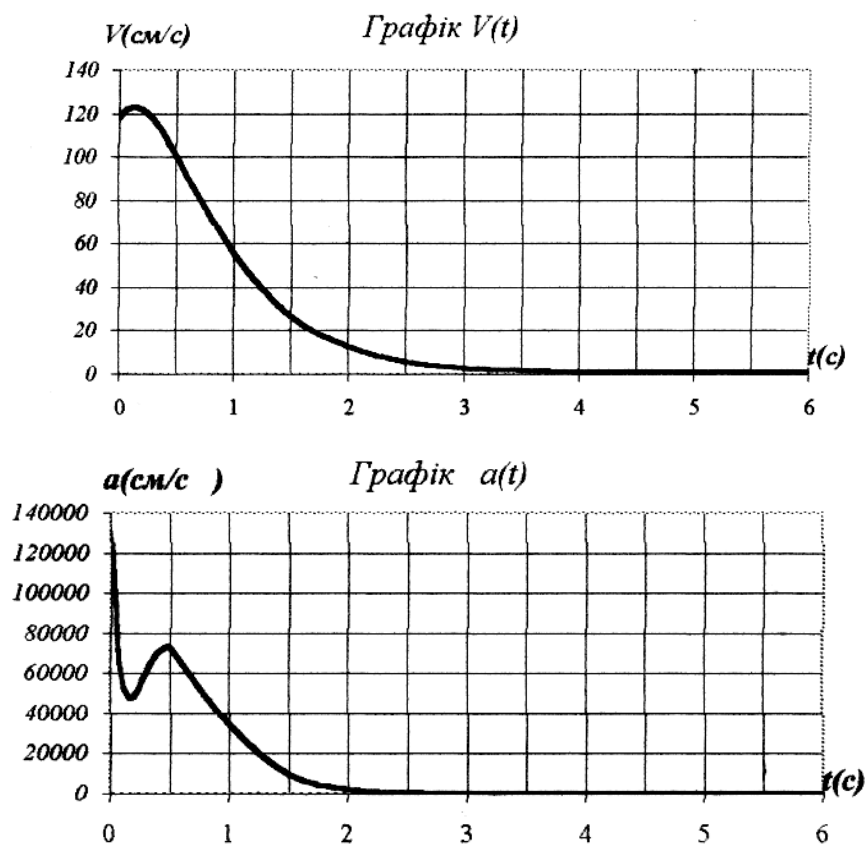


Рисунок К6.8

Знайдемо модулі вказаних векторів.

$$\bar{a}_e^n = \bar{\omega}^2 KM = (5+8t)^2 20 \cos \alpha, \quad (\text{K6.7})$$

$$\bar{a}_e^\tau = \bar{\varepsilon} KM = (\bar{\omega}) KM = 160 \cos \alpha, \quad (\text{K6.8})$$

$$\bar{a}_r^n = \bar{V}_r^2 / R = 20\pi^2 e^{-4t}, \quad (\text{K6.9})$$

$$\bar{a}_r^\tau = (\bar{V}_r)' = -40\pi e^{-2t}, \quad (\text{K6.10})$$

$$\bar{a}_k = 2 \bar{\omega} \bar{V}_r \sin \alpha = 40\pi (5+8t) e^{-2t} \sin \alpha. \quad (\text{K6.11})$$

Знайдемо проекції вектора абсолютного прискорення на координатні осі. Для цього потрібно всі вектори прискорень, які вказані на рисунку К6.7, спроектувати на певну вісь і взяти суму таких проекцій. Практично це виконується так: формулу (К6.6) проектуємо на осі Ox , Oy і Oz .

$$\bar{a}_x = \bar{a}_k - \bar{a}_e^\tau,$$

$$\bar{a}_y = -\bar{a}_e^n - \bar{a}_r^n \cos \alpha - \bar{a}_r^\tau \sin \alpha,$$

$$\bar{a}_z = \bar{a}_r^\tau \cos \alpha - \bar{a}_r^n \sin \alpha.$$

Модуль вектора абсолютного прискорення буде рівний

$$\bar{a} = ((\bar{a}_x)^2 + (\bar{a}_y)^2 + (\bar{a}_z)^2)^{0,5}. \quad (\text{K6.12})$$

Для підрахунку значення $\bar{V}$ і $\bar{a}$ при $t = t_l = 0,3$ с потрібно це значення часу підставити в відповідні формули. Швидкість визначаємо формулами (К6.2), (К6.3) і (К6.4), а прискорення - (К6.7) - (К6.12). Якщо нам потрібно провести більш детальний аналіз руху, одержати графіки $V(t)$ і $a(t)$, то вказані формули вводимо в комп'ютер.

Наведемо частину результатів і графіки $V(t)$ і $a(t)$, одержані за допомогою програми *MS Excel*. Частина числових значень знаходиться в таблиці К6.2, де величини швидкості та прискорень при значенні $t = 0,3$ с виділені курсивом, а графіки на рис. К6.8. Графіки $V(t)$ і $a(t)$ розміщені один під одним, вісь часу має одну і ту ж шкалу. Це дає можливість детальніше аналізувати рух точки. Так, наприклад, з рис. К6.8 видно, що з часом абсолютна швидкість і абсолютне прискорення зменшуються і при $t > 3$ с практично стають дуже малими. Це відбувається тому, що точка M

асимптотично наближається до осі обертання, її радіус у переносному русі (на рис. К6.8 відстань KM) наближається до нуля, а кут α до 90° .

Література

1. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики. В 2-х томах / Наука. – М.: 1979. – т.1: Статика и кинематика. – 272с.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: В 2 ч. – М.: Наука, 1967. – ч.1. – 468 с.
3. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1981. – 303 с.
4. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1974. – 528 с.
5. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: В 2т. –М.: Наука, 1972. – Т.1. – 456 с.
6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1984. – Т.1. – 352 с.
7. Методичні вказівки до дослідження кінематичного руху точки / Укладач В.О. Приятельчук. – Вінниця: ВПІ, 1992. – 32с.
8. Павловский М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. –512 с.
9. Приятельчук В.О., Риндюк В.І., Федотов В.О. Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання. Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2003. – 108 с.
10. Приятельчук В.О., Риндюк В.І., Федотов В.О. Теоретична механіка. Кінематика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 108 с.
11. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для техн. вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др.; Под ред. А.А. Яблонского. – 4-е изд. Перераб. и доп. – М.: ВШ, 1985. – 367 с.
12. Федотов В.О., Грушко О.В. Збірник завдань для самостійної роботи з технічної механіки. Збірник завдань. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 111с.
13. Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібник. – К.: Вища школа: Веселка, 1999. – 351с.

Навчальне видання

Андрій Андрійович Видмиш
Володимир Олексійович Приятельчук
Валерій Олександрович Федотов

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ**

Збірник завдань

Оригінал-макет підготовлений А.А. Видмишем

Редактор В. О. Дружиніна
Коректор З. В. Поліщук

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29.7x42 $\frac{1}{4}$
Друк різнографічний
Тираж прим.
Зам №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. др. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95