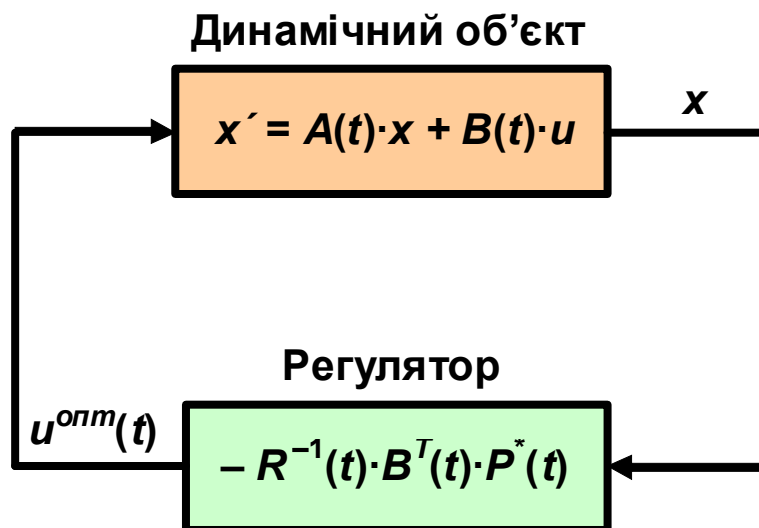


Б. І. Мокін, О. Б. Мокін

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.
МЕТОДОЛОГІЯ ТА ПРАКТИКА
ОПТИМІЗАЦІЇ



Вінниця, 2013

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Б. І. Мокін, О. Б. Мокін

**ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.
МЕТОДОЛОГІЯ ТА ПРАКТИКА
ОПТИМІЗАЦІЇ**

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2013

УДК 681.513.5:62-83

ББК 32.965

М74

Автори:

Б. І. Мокін, О. Б. Мокін

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Лист № 1/11-16754 від 26.10.2012 р.

Рецензенти:

В. Я. Данилов, доктор технічних наук, професор (НТУУ «КПІ»)

С. Т. Толмачов, доктор технічних наук, професор (КНУ)

Мокін, Б. І.

М74 Теорія автоматичного керування. Методологія та практика оптимізації : навчальний посібник / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 210 с.

ISBN

В навчальному посібнику головна увага приділена викладенню математичних методів оптимізації динамічних об'єктів, які можна віднести до класу детермінованих безперервних з зосередженими параметрами.

Навчальний посібник рекомендується для студентів, які навчаються за напрямком «Електромеханіка» спеціальностей «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод» та «Електричні системи і комплекси транспортних засобів» для поглибленого вивчення дисципліни «Теорія автоматичного керування» у розділі «Оптимальні системи автоматичного керування».

УДК 681.513.5:62-83

ББК 32.965

ISBN

© Б. Мокін, О. Мокін, 2013

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
Частина перша. МЕТОДОЛОГІЯ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	9
РОЗДІЛ 1 СУТЬ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	10
1.1 Функція	10
1.2 Функціонал	12
1.3 Екстремум функції	14
1.4 Критерії та обмеження в інженерних задачах оптимізації.....	20
1.5 Завдання для самоперевірки	26
РОЗДІЛ 2 ОПТИМІЗАЦІЯ НА ОСНОВІ КЛАСИЧНИХ МЕТОДІВ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ЗА ВІДСУТНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ	28
2.1 Рівняння Ейлера.....	28
2.2 Достатні умови існування екстремуму функціонала на екстремалі	33
2.3 Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення для пошуку екстремалей з рухомими кінцями.....	38
2.4 Задачі, що приводять до екстремалей зі зломами.....	41
2.5 Пошук екстремалей в задачах, критеріями оптимізації яких є функціонали, що пов'язують між собою декілька невідомих функцій та їх перших похідних	45
2.6 Пошук екстремалей в задачах, критеріями оптимізації яких є функціонали, що залежать від старших похідних невідомої функції	48
2.7 Завдання для самоперевірки	50
РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ.....	51
3.1 Метод невизначених множників Лагранжа як найбільш загальний для розв'язання задач на умовний екстремум.....	51
3.2 Ізопериметрична задача оптимізації	57
3.3 Задача Майєра.....	60
3.4 Пошук екстремалей в задачах оптимізації з обмеженнями у вигляді нерівностей.....	62
3.5 Завдання для самоперевірки	67
РОЗДІЛ 4 ОПТИМІЗАЦІЯ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ	68
4.1 Математична модель динамічного об'єкта	68
4.2 Приклади постановок задач оптимального керування динамічними об'єктами	71
4.2.1 Постановка задачі оптимізації динамічного об'єкта за швидкодією.....	71
4.2.2 Постановка задачі оптимізації за витратами палива для забезпечення руху динамічного об'єкта	72

4.2.3 Постановка задачі оптимізації за мінімумом суми квадратів відхилень координат динамічного об'єкта від їх значень у заданому режимі.....	72
4.2.4 Постановка задачі мінімізації затрат енергії на керування динамічним об'єктом	73
4.2.5 Постановка задачі оптимального керування кінцевим станом динамічного об'єкта	74
4.2.6 Можливості використання в задачах оптимізації більш складних критеріальних функціоналів.....	74
4.3 Синтез оптимального за швидкодією керування лінійним динамічним об'єктом	75
4.4 Синтез законів оптимального керування динамічними об'єктами на основі принципу максимуму Понтрягіна.....	79
4.5 Суть принципу оптимальності Беллмана та динамічного програмування і аналіз області його застосування в задачах оптимізації динамічних об'єктів	85
4.5.1 Суть принципу оптимальності Беллмана.....	85
4.5.2 Динамічне програмування в задачах оптимізації безперервних динамічних об'єктів.....	91
4.5.3 Синтез оптимального керування для лінійних динамічних об'єктів за квадратичним критерієм оцінювання якості з використанням динамічного програмування (<i>задача Калмана</i>)	96
4.6 Завдання для самоперевірки	101
РОЗДІЛ 5 МЕТРИЧНІ, БАНАХОВІ І ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ ТА ДЕЯКІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	103
5.1 Метричні простори.....	103
5.2 Банаховий та гільбертовий простори	108
5.3 Елементи теорії операторів.....	111
5.4 Ортонормовані підмножини у гільбертових просторах та апроксимація безперервних функцій в них	119
5.4.1 Ортонормовані підмножини у гільбертових просторах	119
5.4.2 Апроксимація безперервних функцій в гільбертових просторах на основі ортогональних послідовностей	121
5.4.3 Методика Грама–Шмідта побудови систем ортонормованих послідовностей в гільбертових просторах.....	124
5.5 Оптимізація динамічних об'єктів з використанням ортонормованих послідовностей в гільбертових просторах	129
5.6 Завдання для самоперевірки	131
Частина друга. ПРАКТИКА ОПТИМІЗАЦІЇ	134
РОЗДІЛ 6 ПРИКЛАДИ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА ЗА ВІДСУТНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ НА КООРДИНАТИ, ЩО ОПТИМІЗУЮТЬСЯ	134

6.1 Оптимізація електропривода повороту платформи екскаватора.....	134
6.2 Оптимізація електропривода з моментом навантаження, залежним від часу.....	145
6.3 Оптимізація електропривода з моментом навантаження, залежним від кутової швидкості обертання вала ротора	149
6.4 Оптимізація електроприводів з магнітним потоком, залежним від струму якоря	152
РОЗДІЛ 7 ПРИКЛАДИ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА ЗА НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ НА КООРДИНАТИ, ЩО ОПТИМІЗУЮТЬСЯ.....	159
7.1 Вплив обмежень за вхідною та вихідною координатами динамічного об'єкта на закони оптимального керування ним	159
7.2 Квазіоптимізація вихідної координати динамічного об'єкта, що обумовлюється необхідністю виконання об'єктом робочої програми .	165
7.3 Квазіоптимізація вихідної координати динамічного об'єкта за умови виконання об'єктом робочої програми та дотримання графіка руху	171
РОЗДІЛ 8 ПРИКЛАДИ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ МЕТОДАМИ ЛАГРАНЖА, ПОНТРЯГІНА І БЕЛЛМАНА	175
8.1 Синтез оптимального керування динамічним об'єктом методом Лагранжа.....	175
8.2 Синтез оптимального керування динамічним об'єктом за допомогою принципу максимуму Понтрягіна	183
8.3 Синтез оптимального керування динамічним об'єктом за допомогою динамічного програмування Беллмана	185
РОЗДІЛ 9 ПРИКЛАДИ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДА РІТЦА ТА ЙОГО МОДИФІКАЦІЙ.....	189
9.1 Приклад оптимізації динамічного об'єкта методом Рітца	189
9.2 Оптимізація транспортних електроприводів з моментами навантаження, залежними від дорожніх умов	192
9.3 Синтез математичних моделей оптимального руху завантажених багатомасових колійних електричних транспортних засобів на прямолінійному відрізку колії, прокладеної на горизонтальній площині.....	195
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	206
УКРАЇНСЬКО-АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК ОСНОВНИХ ТЕРМІНІВ.....	209

ВСТУП

Як відомо, кожний об'єкт, який перебуває у певному стані, після прикладення до нього зовнішнього впливу переходить в інший стан. В деяких об'єктах цей перехід здійснюється миттєво – такі об'єкти називають статичними. В переважній же більшості об'єктів цей перехід тією чи іншою мірою розтягується у часі, тобто супроводжується перехідними процесами – такі об'єкти називають динамічними. Оскільки внаслідок перехідних процесів в динамічних об'єктах витрачається непродуктивно певна кількість різних видів енергії і витрачається додатковий час на досягнення наступного стану, то надзвичайно велику роль для людства відіграє оптимізація їх режимів роботи та синтез систем оптимального керування цими режимами.

Під оптимізацією режимів роботи динамічних об'єктів ми будемо розуміти процес пошуку таких значень параметрів їх функціонування, що забезпечують досягнення залежно від характеру задачі максимуму або мінімуму якогось вибраного нами показника, який інтегрально характеризує ефективність функціонування динамічного об'єкта і який прийнято називати критерієм оптимізації. Значення параметрів функціонування динамічного об'єкта, які доставляють оптимум критерію оптимізації, прийнято теж називати оптимальними, а методи пошуку цих оптимальних значень називають методами оптимізації, ідеологія і алгоритми яких у сукупності та послідовності застосування складають суть методології оптимізації.

Досить часто ці оптимальні значення знаходяться всередині діапазонів фізично допустимих значень параметрів функціонування динамічних об'єктів. Але не менше випадків, коли теоретичний оптимум може бути досягнутий лише за межами фізично допустимих значень параметрів функціонування динамічних об'єктів, що унеможлиблює його практичну реалізацію. В цих випадках задачу безумовної оптимізації переводять до розряду задач оптимізації в умовах наявності обмежень, для розв'язання якої методи оптимізації удосконалюють так, щоб їх алгоритми враховували появу цих обмежень.

На сьогодні вченими різних країн розроблено велику кількість методів оптимізації:

- як для об'єктів керування із зосередженими параметрами, так і з розподіленими;
- як для детермінованих об'єктів керування, так і для стохастичних;
- як для безперервних об'єктів керування, так і для дискретних.

Реальні динамічні об'єкти керування залежно від своєї структури та характеру навантаження можуть бути віднесеними до будь-якого класу об'єктів із перерахованих вище.

Прикладом безперервного об'єкта є електропривод, виконаний за системою «генератор – двигун», а дискретного – тиристорний електропривод. Автоматизований електропривод насоса, який по трубі качає рідину чи газ до споживача при наявності зворотного зв'язку лише за своїми власними режимними параметрами є прикладом об'єкта із зосередженими параметрами, а той же автоматизований електропривод при введенні зворотного зв'язку за тиском рідини чи газу на кінці труби (у споживача), якщо ця труба є достатньо довгою, вже стає об'єктом з розподіленими параметрами.

Детермінованим об'єктом можна вважати будь-який електропривод, який працює на сталі навантаження за наявності завад, сумарна потужність яких на порядок менша потужності електродвигуна. Це може бути, наприклад, електропривод насоса, який закачує воду в резервуар.

Але автоматизований електропривод похилого конвеєра, який піднімає кускову залізну руду із шахти на поверхню, вже не може розглядатись як детермінований об'єкт, оскільки момент навантаження на валі електродвигуна має стохастичний характер і є порівнянним із його обертальним моментом.

В цьому навчальному посібнику ми розглянемо лише методологію оптимізації режимів роботи безперервних детермінованих об'єктів із зосередженими параметрами як при відсутності обмежень, так і за їх наявності та застосування цієї методології до синтезу систем оптимального керування динамічними об'єктами, які можуть бути віднесені до вказаного класу.

Оптимізація режимів роботи дискретних та стохастичних динамічних об'єктів і методологія синтезу систем оптимального керування ними буде нами розглянута в окремому навчальному посібнику.

При викладенні матеріалу авторами були використані в тій чи іншій мірі всі, наведені в бібліографії, літературні джерела, але, фактично, в основу даного навчального посібника нами покладено наш же навчальний посібник «Оптимізація електроприводів», опублікований у 2004 році з грифом університету, в якому було багато почерпнуто з книги Юрія Петровича Петрова [12], яка є бібліографічною рідкістю. Багато із викладених в цій книзі результатів, незважаючи на те, що з моменту їх отримання пройшло вже 50 років, не втратили актуальності та практичної цінності і сьогодні. Зазначимо, що, використовуючи як ілюстрації приклади розв'язання задач оптимізації із книги Ю. П. Петрова, ми одночасно ще в навчальному посібнику «Оптимізація електроприводів» виправили всі неточності, що допущені при викладенні цих прикладів у зазначеній книзі, серед яких виявились і такі, що мають принциповий характер.

Що ж стосується відмінностей даного нашого навчального посібника від нашого ж навчального посібника «Оптимізація електроприводів», то вони полягають у першу чергу в іншому структуруванні навчального матеріалу, обумовленому тим, що новий навчальний посібник орієнтовано на поглиблене вивчення дисципліни «Теорія автоматичного керування» в частині її застосування до розв'язання задач синтезу систем оптимального керування динамічними об'єктами, а також у деякому скороченні одних розділів і розширенні інших, що було підказано практикою використання цього навчального посібника в процесі підготовки спеціалістів і магістрів в галузі електромеханіки. Крім того, друга частина навчального посібника, що присвячена розв'язанню практичних задач оптимізації, доповнена двома розділами, в яких викладено нові результати, отримані авторами в напрямку оптимізації режимів роботи конкретних динамічних об'єктів після 2004 року.

Частина перша. МЕТОДОЛОГІЯ ОПТИМІЗАЦІЇ

У першій частині навчального посібника ми викладемо методологію оптимізації динамічних об'єктів, розуміючи під методологією сукупність методів оптимізації, методик визначення областей застосування цих методів та алгоритмів їх реалізації при розв'язанні оптимізаційних задач.

Розпочинаючи викладення методології оптимізації, ми нагадаємо спочатку деякі поняття з диференціального числення, функціонального аналізу та теорії оптимізації, такі як: функція і функціонал, екстремуми функції та функціонала, класифікація екстремумів, приклади критеріїв та задач оптимізації.

Потім ми викладемо методи пошуку функцій, що доставляють екстремум деяким функціоналам у відсутності обмежень, тобто введемо у варіаційне числення, яке задає теоретичне підґрунтя процесам оптимізації динамічних об'єктів на основі рівняння Ейлера.

Далі викладемо методи пошуку функцій, що доставляють екстремум функціоналам при наявності обмежень, тобто адаптуємо класичне варіаційне числення до розв'язання прикладних задач оптимізації динамічних об'єктів з застосуванням методу і алгоритмів Лагранжа.

Після цього розглянемо методи оптимізації, метою яких є синтез математичних моделей оптимального керування динамічними об'єктами. Розглянемо алгоритми синтезу оптимального керування шляхом зведення задачі до ізопериметричної та з використанням принципу максимуму Понтрягіна. Покажемо, також, як розв'язувати задачі синтезу оптимального керування за допомогою динамічного програмування Беллмана та методу Калмана.

Далі ми введемо потрібні нам в подальшому поняття метричного, банахового та гільбертового просторів. Розкриємо їх властивості та властивості операторів. Введемо ортонормовані базиси в гільбертовому просторі та розкриємо процедуру апроксимації функцій з їх використанням.

Завершимо викладення методології оптимізації ми алгоритмами розв'язання задач оптимізації з використанням ортонормованих послідовностей в гільбертових просторах на основі методу Рітца.

Слід зазначити, що, оскільки в навчальний посібник з будь-якої навчальної дисципліни автори зобов'язані включати лише ті, уже апробовані, теоретичні засади, які включені до затвердженої міністерством навчальної програми цієї дисципліни, то у першу частину нашого навчального посібника ми також включили лише ті відомі методи і алгоритми оптимізації, які запропоновані не нами, а почерпнуті із літературних джерел, наведених у списку використаної літератури. Авторською є лише методика викладення цього теоретичного матеріалу за критерієм доступності його для інженерів, що засвоїли лише втузівський курс вищої математики.

РОЗДІЛ 1

СУТЬ ОПТИМІЗАЦІЇ

В цьому розділі ми нагадаємо деякі поняття з диференціального числення, функціонального аналізу та теорії оптимізації, такі як: функція і функціонал, екстремуми функції та функціонала, класифікація екстремумів, приклади критеріїв та задач оптимізації.

1.1 Функція

З курсу математики відомо, що *функція* – це закон, за яким одній числовій множині ставиться у відповідність інша числова множина.

Графічно це виглядає так, як показано на рис. 1.1.

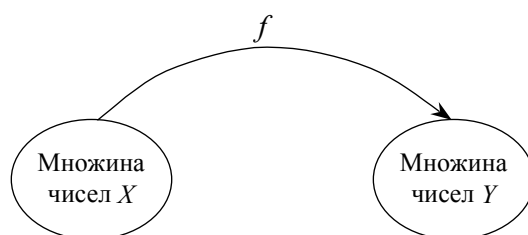


Рисунок 1.1 – Графічна інтерпретація поняття функції

При цьому множину X називають областю задання функції, а множину Y – областю значень цієї функції.

Умовно функцію найчастіше записують так

$$y = f(x), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (1.1)$$

або так

$$y = y(x), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (1.2)$$

де \in – символ належності елемента до множини.

Якщо кожному числу $x \in X$ функція f задає у відповідність лише одне число $y \in Y$, то така функція називається *однозначною*, а якщо кожному числу $x \in X$ функція f задає у відповідність два або більше чисел $y \in Y$, то така функція називається *багатозначною*.

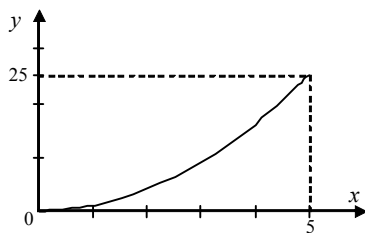
Функцію можна задавати таблично, графіком або однією чи декількома формулами. Приклади наведені на рис. 1.2.

В теорії функцій подано багато класів функцій і їх властивостей, але ми зупинимось лише на деяких із них, які нам будуть потрібні при розгляді задач оптимізації.

Функція, графік якої не має розривів, відноситься до класу *безперервних*, а безперервна функція, графік якої не містить зломів, а тому має безперервну першу похідну, відноситься до класу *гладких* (рис. 1.3, а).

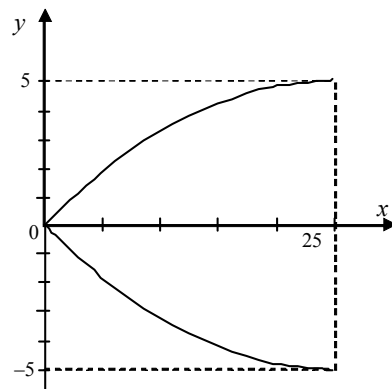
Безперервна функція, графік якої має зломи, а тому її похідна – розриви 1-го роду, відноситься до класу *кусково-гладких* (рис. 1.3, б).

X	0	1	2	3	4	5
Y	0	1	4	9	16	25



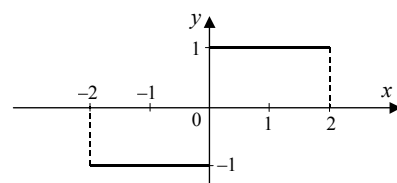
$$y = x^2, \quad x \in [0, 5]$$

X	0	1	4	9	16	25
Y	0	1	2	3	4	5
	0	-1	-2	-3	-4	-5



$$y = \pm\sqrt{x}, \quad x \in [0, 25]$$

X	-2	-1	0	1	2
Y	-1	-1	-1	1	1



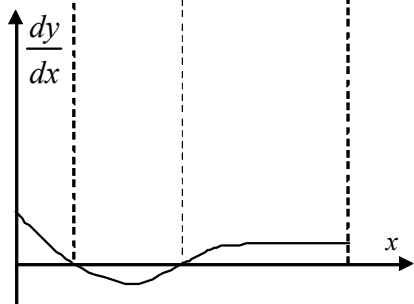
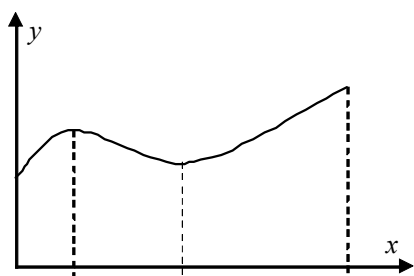
$$y = \begin{cases} -1, & x \in [-2, 0], \\ +1, & x \in (0, 2]. \end{cases}$$

а) таблично

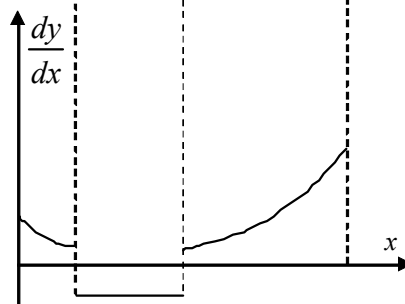
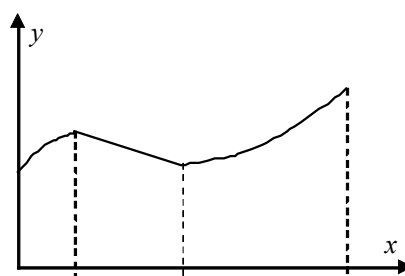
б) графічно

в) формульно

Рисунок 1.2 – Приклади задання функції



а) гладка



б) кусково-гладка

Рисунок 1.3 – Приклади безперервних функцій

Саме на гладких та кусково-гладких функціях працюють класичні методи оптимізації, яким буде присвячено цей навчальний посібник.

1.2 Функціонал

З курсу математики відомо, що *функціонал* – це закон, за яким множині функцій ставиться у відповідність множина чисел.

Графічно це виглядає так, як показано на рис. 1.4.

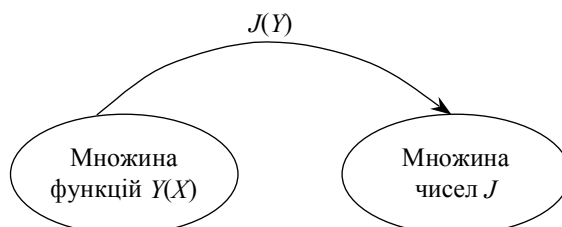


Рисунок 1.4 – Графічна інтерпретація поняття функціонала

При цьому множину $Y(X)$ називають областю задання функціонала, а множину J – областю його значень.

Умовно функціонал найчастіше записують так

$$J_y = J(y(x), x), \quad x \in X, \quad y(x) \in Y(X), \quad J_y \in J. \quad (1.3)$$

В задачах оптимізації нас цікавитиме лише один клас функціоналів, який задається визначенням інтегралом, наприклад,

$$J_y = \int_a^b y(x) dx \quad (1.4)$$

або

$$J_y^f = \int_a^b f(x, y) dx, \quad (1.5)$$

або

$$J_y^F = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1.6)$$

де $f(x, y)$ – математичний вираз, який є конструкцією з незалежної змінної x та її функції $y(x)$, а $F(x, y, y')$ – математичний вираз, який є конструкцією з незалежної змінної x , її функції $y(x)$ та першої похідної $y'(x)$ від цієї функції; при цьому відрізок $[a, b]$ є областю задання функції $y(x)$, тобто $x \in [a, b]$.

На рис. 1.5 показано дві криві, які з'єднують точки площини $(0, 0)$ та $(1, 1)$.

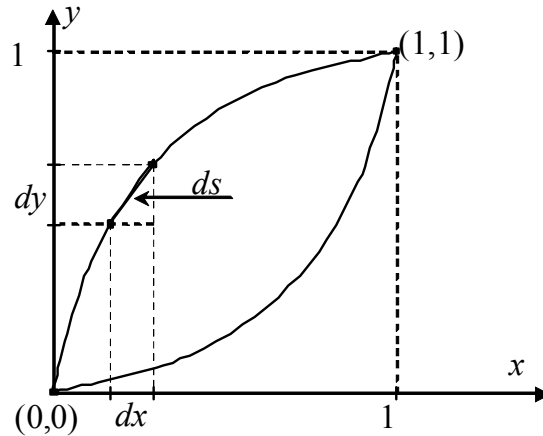


Рисунок 1.5 – Графічна інтерпретація побудови функціонала

Побудуємо формулу, за допомогою якої можна знайти довжину такої кривої.

З прямокутного трикутника зі сторонами dx і dy (рис. 1.5) знайдемо, що нескінченно малий елемент ds довжини L кривої, який є гіпотенузою цього трикутника, дорівнює

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx, \quad (1.7)$$

а сама довжина кривої L визначається інтегралом

$$L = \int_0^1 ds \quad (1.8)$$

або

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (1.9)$$

У виразі (1.9):

$$\begin{cases} [a, b] = [0; 1]; & x \in [0; 1]; \\ F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}; \\ J_y^F = L. \end{cases} \quad (1.10)$$

Як другий приклад функціонала можна навести інтеграл

$$S = \int_0^T V dt, \quad (1.11)$$

в якому S – це шлях, пройдений автомобілем за час T зі швидкістю V .

У цьому випадку:

$$\begin{cases} [a, b] = [0; T]; & t \in [0; T]; \\ y(x) = V(t); \\ J_y = S. \end{cases} \quad (1.12)$$

Як третій приклад функціонала наведемо вираз, за допомогою якого знаходяться втрати активної електричної потужності ΔP на опорі R обмотки якоря електродвигуна, по якій тече струм $I(t)$. Цей вираз має вигляд

$$\Delta P = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) R dt. \quad (1.13)$$

У цьому випадку:

$$\begin{cases} [a, b] = [0; T]; & t \in [0; T]; \\ f(x, y) = I^2(t) R; \\ J_y^f = \Delta P. \end{cases} \quad (1.14)$$

Неважко навести інші приклади функціоналів, за допомогою яких множині функцій можна поставити у відповідність множину чисел.

1.3 Екстремум функції

Розглянемо дві функції $f_1(x)$, $f_2(x)$, задані графіками в області $x \in (-\infty, \infty)$ (рис. 1.6).

Нагадаємо, що для побудови графіка першої похідної від функції, заданої графічно, необхідно в кожній точці графіка функції визначити тангенс кута нахилу до осі x дотичної до цього графіка, проведеної в даній точці. Аналогічно, з використанням графіка першої похідної, будується графік другої похідної цієї функції.

З цих графіків видно, що як у випадку мінімуму функції $f_1(x)$ в точці x_{01} , так і у випадку максимуму функції $f_2(x)$ в точці x_{02} , перші похідні $f_1'(x)$, $f_2'(x)$ в цих точках дорівнюють нулю. Тож цілком зрозумілим є той факт, що значення x_{01} і x_{02} необхідно знаходити шляхом розв'язання рівнянь

$$\begin{cases} f_1'(x) = 0, \\ f_2'(x) = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

І як розпізнати, де матимемо максимум, а де – мінімум, теж легко бачити з графіків, наведених на рис. 1.6.

Зрозуміло, що якщо

$$f_1''(x_{01}) > 0, \quad (1.16)$$

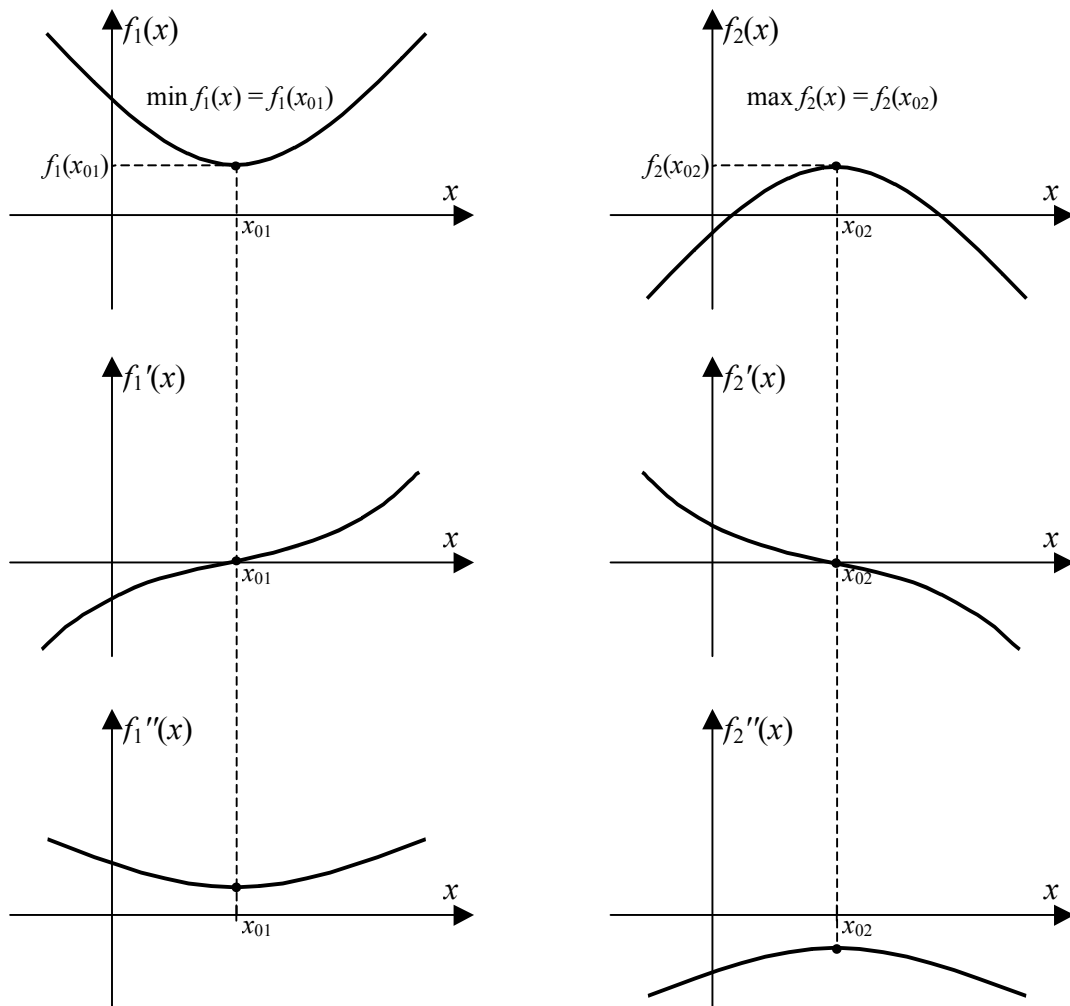
то в точці x_{01} має місце мінімум функції $f_1(x)$, а якщо

$$f_2''(x_{02}) < 0, \quad (1.17)$$

то в точці x_{02} має місце максимум функції $f_2(x)$.

Рівняння (1.15) задають необхідні умови існування екстремуму функції однієї змінної, а нерівності (1.16), (1.17) – достатні.

Виникає запитання: «А чи завжди при виконанні умов (1.15) має місце екстремум функції однієї змінної?»



а) мінімум

б) максимум

Рисунок 1.6 – Графічна інтерпретація умов існування екстремуму функції однієї незалежної змінної

Виявляється, що не завжди. Це легко бачити з графіків функції $f_3(x)$ та її першої похідної $f_3'(x)$, наведених на рис. 1.7. З цих графіків видно, що в точці x_{03} , незважаючи на виконання необхідних умов екстремуму, тобто незважаючи на те, що

$$f_3'(x_{03}) = 0, \quad (1.18)$$

маємо і не максимум, і не мінімум функції, а її перегин.

Отже, умовою того, що в точці x_{03} маємо перегин функції, як видно з графіка другої похідної $f_3''(x)$, наведеного теж на рис. 1.7, є

$$f_3''(x_{03}) = 0. \quad (1.19)$$

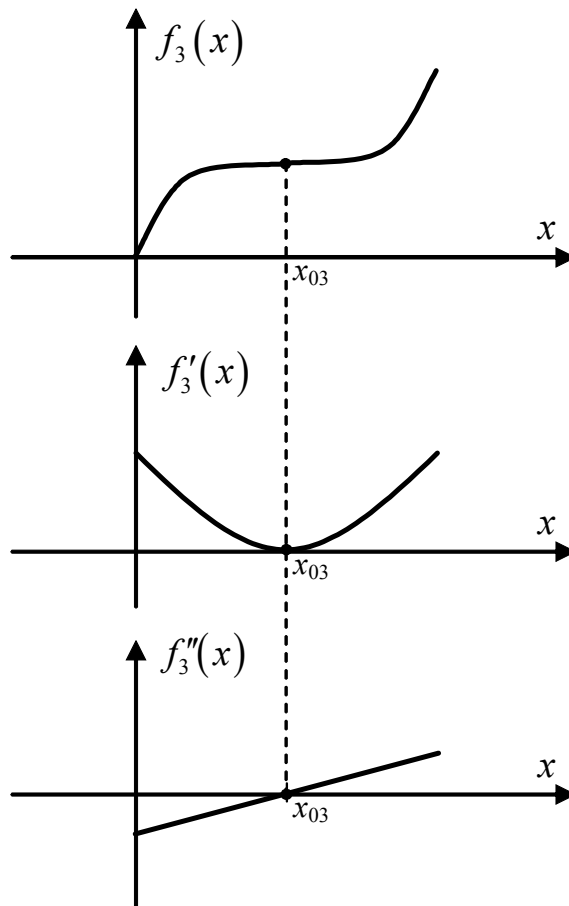


Рисунок 1.7 – Графічна інтерпретація умов відсутності екстремуму функції однієї незалежної змінної в точці, для якої виконуються необхідні умови його існування

На завершення цього підрозділу розглянемо ще один графік, наведений на рис. 1.8.

З цього графіка видно, що в області значень $x \in [a, b]$ функція має дві точки мінімуму ($f_4(x_{01}), f_4(x_{03})$) і дві точки максимуму ($f_4(x_{02}), f_4(x_{04})$). При цьому значення функції $f_4(x)$ в точці x_{01} є меншим за значення цієї ж функції в точці x_{03} , а значення функції $f_4(x)$ в точці x_{02} є більшим за її значення в точці x_{04} .

В зв'язку з такою можливістю максимуми та мінімуми функції поділяють на глобальні та локальні. Зрозуміло, що в точці глобального мінімуму

функція має найменше значення в області її задання, а в точці глобального максимуму функція має найбільше значення в цій області.

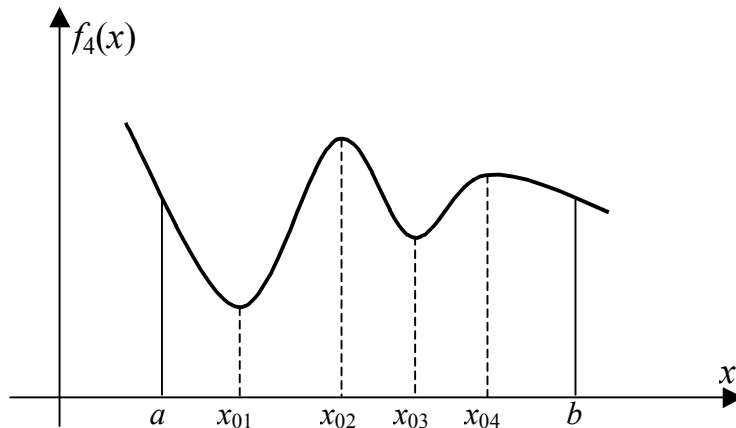


Рисунок 1.8 – Графік функції однієї змінної, яка має декілька мінімумів і максимумів

Тож, досліджуючи функцію на екстремум, слід не забувати дослідити її у всіх кореневих точках, отримуваних з рівняння необхідних умов екстремуму, інакше є небезпека зупинитись на локальному екстремумі і пропустити глобальний.

А тепер розглянемо функцію $f_{12}(x_1, x_2)$ двох незалежних змінних x_1 та x_2 , де $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [c, d]$.

Зрозуміло, що такою функцією можна описати поверхню гори, яка піднялася над площиною землі, обмеженою прямокутником зі сторонами “ ab ” та “ cd ” (рис. 1.9).

На цьому ж рисунку показані графіки функцій однієї незалежної змінної $f_1(x_1, e)$ та $f_2(g, x_2)$, які є лініями перерізу поверхні гори з площинами, паралельними координатним площинам, за умови, що ці площини проходять на площині землі через точку з координатами (g, e) . Як бачимо, в функціях $f_1(x_1, e)$, $f_2(g, x_2)$ одна із змінних перетворилась на параметр, який після того, як ми його задали чисельно, перетворюється на коефіцієнт. Після цього функція двох незалежних змінних стає функцією лише однієї незалежної змінної.

Задамося питанням: «Як знайти найвищу точку гори?»

З математичної точки зору це означає, що необхідно знайти максимум функції $f_{12}(x_1, x_2)$.

Зрозуміло, що для того, щоб знайти цей максимум, необхідно спочатку знайти його координати на площині x_1x_2 (див. рис. 1.9 – точка (g, e)).

Ми вже знаємо, як знайти координату точки максимуму для функції однієї незалежної змінної: треба взяти похідну від цієї функції, прирівняти цю похідну нулю і знайти корінь (чи корені) отриманого рівняння.

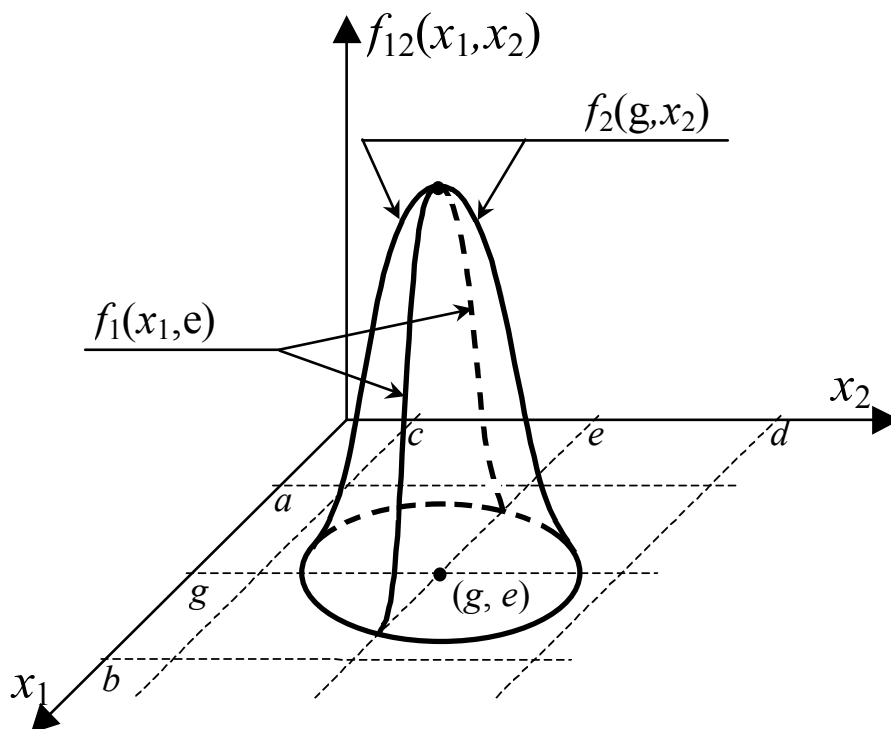


Рисунок 1.9 – Графічна інтерпретація функції $f_{12}(x_1, x_2)$ двох незалежних змінних x_1 і x_2 , $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [c, d]$

З викладеного вище сам собою напрашується спосіб пошуку координат точки максимуму функції $f_{12}(x_1, x_2)$ двох незалежних змінних x_1 , x_2 – треба взяти перші частинні похідні від цієї функції за кожною із незалежних змінних, вважаючи другу незалежну змінну в цьому процесі параметром, прирівняти отримані перші частинні похідні нулю і сумісно розв'язати отриману систему двох рівнянь з двома невідомими. Цей розв'язок і дасть нам чисельне значення координат точки максимуму функції.

Формально цю умову можна записати так:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial f_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

⇓

$$\begin{cases} x_1 = g, \quad x_2 = e; \\ \downarrow \\ f_{12}(g, e) = \max_{\substack{[a, b] \\ [c, d]}} f_{12}(x_1, x_2). \end{cases} \quad (1.21)$$

Але цілком зрозуміло, що функцією $f_{12}(x_1, x_2)$ може описуватись не лише поверхня гори над площиною землі, але і поверхня провалля під площиною землі.

Тож, із системи рівнянь (1.21) не зрозуміло, що саме ми знайшли, розв'язавши їх, координати точки максимуму чи точки мінімуму.

Узагальнюючи викладки, які ми наводили щодо характеру екстремуму функції однієї незалежної змінної, на функцію двох незалежних змінних, можна стверджувати: для того, щоб розв'язок системи рівнянь (1.20) задавав координати точки максимуму функції $f_{12}(x_1, x_2)$ достатньо сумісного виконання системи нерівностей відносно других частинних похідних цієї функції такого характеру –

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=g, x_2=e} < 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right|_{x_1=g, x_2=e} < 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

а для того, щоб цей розв'язок задавав координати точки мінімуму функції $f_{12}(x_1, x_2)$, достатньо сумісного виконання системи нерівностей відносно других частинних похідних цієї функції такого характеру –

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=g, x_2=e} > 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right|_{x_1=g, x_2=e} > 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Якщо в умовах (1.22) або (1.23) одна з других частинних похідних дорівнює нулю, то точка $x_1 = g$, $x_2 = e$ лежить на прямій, по якій відбувається перегин поверхні, що описується функцією $f_{12}(x_1, x_2)$.

Якщо в умовах (1.22) або (1.23) обидві другі частинні похідні дорівнюють нулю, то точка $x_1 = g$, $x_2 = e$ лежить на плоскій ділянці поверхні, яка має місце на якійсь ділянці гори.

Якщо ж в умовах (1.22) або (1.23) одна друга частинна похідна більша за нуль, а інша – менша за нуль, то точка $x_1 = g$, $x_2 = e$ є сідловою – це нижня точка перевалу між двома горами або верхня точка перевалу між двома проваллями.

Завершуючи цей підрозділ, відзначимо, що якщо функція має більше двох незалежних змінних, то необхідні умови існування екстремуму відрі-

знятимуться від (1.20) лише більшою кількістю аналогічних рівнянь. Але достатні умови вже не можуть обмежуватись виконанням нерівностей (1.22), (1.23). Необхідно, щоб виконувались і ще деякі більш складні умови.

1.4 Критерії та обмеження в інженерних задачах оптимізації

Дієслово «оптимізувати» є спорідненим слову «оптиміст», а це особа бадьора, впевнена у благополучному кінці, життєрадісна – так запевняє словник. Іменник «оптимум» пояснюється як «найкращий рівень, розмір, кількість» і т. ін. Прикметник «оптимальний» визначається як «найбільш сприятливий» або «найкращий», наприклад, варіант, що приводить при заданих умовах до бажаного результату.

Зрозуміло, що якщо мова йде про щось найкраще, то необхідно домовитись про критерій, за допомогою якого ми встановлюємо цю «найкращість».

Серед факторів, які визначають критерій оптимальності роботи об'єкта, часто розглядають такі, як продуктивність, затрати, швидкодія, надійність, точність, прибуток, якість і т. ін.

Неможливо побудувати систему керування, у якої всі показники мали б оптимальні значення, оскільки умови досягнення цих значень дуже часто входять у протиріччя. А тому на практиці як критерій оптимальності вибирають критеріальну функцію (або функціонал), які залежать лише від одного чи кількох найбільш важливих факторів, а всі інші фактори враховують у вигляді обмежень.

Наприклад, при мінімізації вартості об'єкта, що проектується, ми змушені будемо враховувати обмеження за продуктивністю, точністю та надійністю.

Критеріальну функцію (чи функціонал), як правило, будують, виходячи з чотирьох принципів.

1. *Принцип однозначності.* За цим принципом як критеріальну функцію (чи функціонал) вибирають таку, яка однозначно визначає мету.

2. *Принцип відповідності.* За цим принципом як критеріальну функцію (чи функціонал) вибирають таку, оптимізація складових якої завжди приводить до заданої мети.

3. *Принцип керованості.* За цим принципом до критеріальної функції (чи функціонала) обов'язково повинні входити ті змінні, на які може впливати керівник, оператор чи регулятор. Критеріальні функції (чи функціонали), складені зі змінних, якими не можна керувати, нікому не потрібні, оскільки ніякої користі не принесуть.

4. *Принцип придатної форми.* За цим принципом як критеріальну функцію (чи функціонал) вибирають такі форми, що досягають екстремальних значень і не мають розривів або зон неоднозначності.

Однією з найбільш розповсюджених форм, яка використовується як критеріальна функція, є квадратична форма виду –

$$F = \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot (x_i^* - x_i)^2, \quad (1.24)$$

де ψ_i – вагові коефіцієнти,

x_i – фактичне значення i -ої змінної стану,

x_i^* – бажане значення i -ої змінної стану.

Мінімізуючи цю функцію, ми домагаємось того, щоб процес йшов з найменшими відхиленнями від бажаних усталених значень змінних стану. Якщо ж ми хочемо мінімізувати ці відхилення і в динаміці, то мінімізувати вже треба не функцію (1.24), а функціонал

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot (x_i^*(t) - x_i(t))^2 \cdot e^{-\alpha \cdot (t-t_0)} dt, \quad (1.25)$$

в якому експонента використана для того, щоб зменшити вплив більш далеких значень змінних стану.

При оптимізації реальних об'єктів завжди мають місце обмеження як на змінні стану $x_i, i = \overline{1, n}$, так і на керування $u_k, k = \overline{1, m}$ – ці обмеження визначають область допустимих значень всіх координат об'єкта.

Як правило, обмеження негативно впливають на оптимізацію, погіршуючи умови її досягнення. Але існують задачі, в яких взагалі неможливо досягти оптимуму, не маючи обмежень. Це задачі лінійного програмування, критеріальні функції в яких є лінійними формами, що задають гіперплощини.

Розрізняють обмеження *жорсткі* і *нежорсткі*.

Жорсткі – це коли їх не можна переступати. Наприклад, коли можливий вибух в об'єкті чи його вихід з ладу або коли реальна фізична величина, скажімо кількість чогось, набуває від'ємного значення, позбавляючи оптимальний розв'язок сенсу.

Нежорсткі обмеження можна порушувати, але чим більше це порушення, тим гіршою буде якість процесів у об'єкті.

Для попередження значних переходів нежорстких обмежень змінними керування $u_k, k = \overline{1, m}$ у критеріальні функції вводять додатково функції штрафів F_u , які можуть мати вигляд

$$F_{ui} = \psi_k \cdot \left(\frac{u_k}{R_k} \right)^{M_k} \quad (1.26)$$

або

$$F_{ui} = \psi_k \cdot \exp[M_k \cdot (u_k - R_k)], \quad (1.27)$$

де ψ_k , M_k – константи, а R_k – числове значення нежорсткого обмеження.

Обмеження на змінні стану x_i , $i = \overline{1, n}$ і керування u_k , $k = \overline{1, m}$ можуть задаватись у вигляді

$$\begin{aligned} u_{kн} \leq u_k \leq u_{kв}, \quad k = \overline{1, m}, \\ x_{iн} \leq x_i \leq x_{iв}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

де $u_{кн}$, $x_{ін}$, $u_{кв}$, $x_{ів}$ – відповідно нижні допустимі та верхні допустимі значення керувань та змінних стану, а також у вигляді

$$S_n \leq S(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_m) \leq S_в, \quad (1.29)$$

де S – функція, що пов'язує змінні стану з керуваннями, а S_n і $S_в$ – її нижнє та верхнє числові значення.

Процес оптимізації зводиться до пошуку таких значень змінних керування, які доставляють оптимум критеріальній функції (чи функціоналу).

Розглянемо такий приклад. Нехай підприємство, що виробляє електричну енергію, має в своєму складі n електростанцій, частина з яких є тепловими, частина – гідравлічними, а частина – атомними. Нехай це підприємство, назвемо його ПВЕЕ, забезпечує активною електричною потужністю економічний район з максимальною кількістю її споживання P_{\max} .

Зрозуміло, що в деякі години доби і в деякі дні споживачі потребують активної потужності менше, ніж P_{\max} .

Зрозумілим є і те, що собівартість активної електричної потужності, виготовленої на електростанціях різних типів, теж є різною – найменшою вона є на ГЕС, найвищою на АЕС. І навіть на однотипних електростанціях може бути різною залежно від потужності турбін, сортності палива і способів його доставки на станцію.

Нехай ПВЕЕ необхідно забезпечити споживачів потрібною їм кількістю активної електричної потужності при мінімумі власних затрат підприємства на її вироблення.

В цьому випадку як критерій оптимізації можна взяти лінійну функцію $C = f(P_1, \dots, P_n)$ від n незалежних змінних P_i –

$$C = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \dots + c_i P_i + \dots + c_n P_n, \quad (1.30)$$

в якій P_i – кількість активної потужності, що надходить від i -ої електростанції в район споживання, а c_i – собівартість вироблення одиниці активної електричної потужності на цій електростанції. В цьому випадку C – це та сума затрат, в яку обійдеться ПВЕЕ постачання споживачам виробленої підприємством активної електричної потужності.

Мінімізуючи ці затрати, підприємство буде виготовляти активну електричну потужність оптимальним способом.

Але при розв'язанні цієї задачі оптимізації доведеться врахувати цілий ряд умов.

По-перше, жодна з незалежних змінних $P_i, i = \overline{1, n}$ не може стати меншою нуля, адже в іншому разі електростанція перестає бути генератором активної електричної потужності, а стає її споживачем, чого допускати на звичайних ЕС без гідроакумуляції не можна.

Цю умову можна записати так

$$P_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.31)$$

По-друге, жодна з електростанцій не може передати в район споживання активної електричної потужності більше, ніж можуть виробити її турбо- чи гідрогенератори, тобто

$$P_i \leq P_{i\max}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.32)$$

І по-третє, всі разом електростанції не повинні передавати в район споживання активної електричної потужності більше, ніж цей район в даний час може спожити. Тобто, якщо споживачам потрібна активна електрична потужність P_{cn} , то повинна виконуватись рівність

$$\sum_{i=1}^n P_i = P_{cn}. \quad (1.33)$$

В даній задачі критерієм оптимізації є функція (1.30), співвідношення (1.31), (1.32) і (1.33) задають обмеження, а сама задача може бути сформульована так: знайти такі значення незалежних змінних $P_i, i = \overline{1, n}$, які за умови дотримання обмежень (1.31), (1.32), (1.33) доставляють мінімум функції (1.30).

Це ми розглянули приклад задачі оптимізації, в якій як критерій виступає функція багатьох змінних.

А тепер розглянемо приклад, коли критерієм оптимізації є функціонал.

Як і Юрій Петрович Петров, для ілюстрації цього класу задач оптимізації розглянемо електропривод повороту платформи екскаватора, який реалізується з використанням електродвигуна постійного струму з незалеж-

ним збудженням. Цей електропривод здійснює поворот платформи на певний кут α (від місця забору ґрунту в ківш екскаватора до місця висипання цього ґрунту з ковша екскаватора в кузов самоскиду). Під час забору і висипання ґрунту платформа екскаватора повинна бути нерухомою, тож початкове і кінцеве значення кутової швидкості $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ повороту платформи дорівнюють нулю.

Якщо поворот платформи на кут α електроприводом здійснюється за час T , то можна записати, що

$$\alpha = \int_0^T \omega dt. \quad (1.34)$$

Із теорії електропривода відомо, що

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{ED} - M_G, \quad (1.35)$$

де J – момент інерції електропривода, який враховує не лише момент інерції електродвигуна, але і приведений до вала електродвигуна момент інерції механізму, що приводиться у рух цим електродвигуном; M_G – гальмівний момент, створюваний навантаженням, а M_{ED} – обертальний момент електродвигуна, який пов'язаний зі струмом $I_{я}$ його якоря відомим співвідношенням

$$M_{ED} = k_m I_{я}. \quad (1.36)$$

В підрозділі 1.2 ми вже наводили формулу, за якою можна знайти втрати ΔP активної електричної потужності на опорі R якоря електродвигуна – це формула (1.13). Для зручності перепишемо її ще раз –

$$\Delta P = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) R dt. \quad (1.37)$$

Звичайно, при роботі екскаватора, який набирає в ківш значний об'єм ґрунту, момент M_G навантаження теж набуває суттєвих значень.

З рівняння динаміки електропривода (1.35) випливає, що для забезпечення рівноваги моментів на валі електродвигуна при суттєвих значеннях моменту навантаження M_G такими ж суттєвими повинні бути і значення обертального моменту M_{ED} електродвигуна, що, в свою чергу, як це видно з співвідношення (1.36), викликає появу суттєвих значень струму якоря $I_{я}$.

Але, як випливає з виразу (1.37), суттєві значення струму якоря $I_{\text{я}}$ викликають значні втрати активної електричної потужності ΔP на опорі обмотки якоря.

Тож постає задача: знайти значення зміни в часі t кутової швидкості $\omega(t)$ вала електродвигуна та струму в його якорі $I_{\text{я}}(t)$, які забезпечували б поворот платформи екскаватора за час T на кут α при мінімумі втрат активної потужності ΔP на опорі R обмотки якоря. Тобто необхідно знайти такі функції $\omega(t)$, $I_{\text{я}}(t)$, які, реалізуючи програму роботи (1.34), доставляють мінімум функціоналу (1.37) при виконанні обмежень (1.35) і (1.36). В разі їх існування такі функції називають *екстремалами*. Оскільки у наведеній в цьому підрозділі першій задачі оптимізації мінімізувати необхідно було функцію при наявності обмежень, заданих алгебраїчними виразами, а у другій задачі – функціонал при обмеженнях, серед яких є і диференціальне рівняння, то цілком зрозуміло, що одним і тим же методом ці задачі оптимізації розв'язати неможливо. Тут потрібні різні методи.

В теорії оптимізації розроблено дуже багато методів розв'язання конкретних задач і, як правило, всі підручники з цієї теорії після понятійного вступу починаються з класифікації цих методів.

Ми в цьому навчальному посібнику відмовимося від такої традиції, оскільки, на наш погляд, вивчення класифікації методів, суті яких ще не знаєш, є марною тратою часу.

Займаючись конкретно задачею оптимізації динамічних об'єктів, ми будемо обґрунтовувати і вводити послідовно лише ті методи оптимізації, які нам будуть потрібні саме для розв'язання цієї задачі.

А цей підрозділ ми завершимо класифікацією екстремумів функціоналів, які в задачах оптимізації динамічних об'єктів відіграють ключову роль при виборі критеріїв оптимізації.

Для того, щоб легше було зрозуміти подальший матеріал, розглянемо таку задачу: нехай з одного боку високої і розлогої гори має місце діюча електростанція, а з протилежного боку гори прийнято рішення збудувати завод, оскільки там розкинулось невелике містечко.

Для електроживлення заводу необхідно навколо гори від електростанції протягнути потужну лінію електропередачі напругою 110 кВ.

ЛЕП можна збудувати як з лівого боку від гори, так і з правого, як по підосві гори, так і використовуючи її схили на різній висоті для зменшення довжини лінії.

Але чим вище по схилу гори буде встановлена опора ЛЕП, тим більш затратним буде її будівництво. Тож, зменшення кількості опор може не компенсувати збільшення вартості фундаментів та монтажу цих опор.

Таким чином, виходячи із затрат, існує оптимальний варіант побудови ЛЕП як на множині варіантів з лівого боку від гори, так і з правого.

Зрозуміло, що один із цих двох оптимальних варіантів побудови ЛЕП виявиться найбільш оптимальним, оскільки затрати на його реалізацію виявляться найменшими із усіх можливих. Нехай це буде варіант побудови ЛЕП зліва від гори. Про нього ми будемо говорити, що він задає абсолютний екстремум, в той час як оптимальний варіант побудови ЛЕП на множині варіантів з правого боку від гори задаватиме відносний екстремум.

В свою чергу серед відносних екстремумів розрізняють сильний і слабкий.

Для уніфікації підходів домовились вважати, що на екстремалі $f_e(x)$ досягається сильний мінімум функціонала, якщо його значення на цій кривій у заданому діапазоні $[a, b]$ значень аргументу x є меншим, ніж на усіх інших кривих $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ даного класу функцій, відстань нульового порядку

$$\Delta_0 = \max |f_e(x) - f_i(x)|, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.38)$$

до яких мала. Якщо ж відносний мінімум функціонала досягається на екстремалі, відстань першого порядку

$$\Delta_1 = \max |f'_e(x) - f'_i(x)|, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.39)$$

від якої до усіх інших кривих даного класу функцій є малою, то на цій екстремалі має місце слабкий екстремум.

Зауважимо, що у виразі (1.39) символами $f'_e(x)$, $f'_i(x)$ позначені перші похідні від функцій $f_e(x)$, $f_i(x)$.

Зрозуміло, що абсолютний мінімум є в той же час і відносним, а сильний відносний мінімум є в той же час і слабким.

А тому, якщо якась умова повинна виконуватись відносно слабого відносного мінімуму, то вона повинна бути справедливою і для сильного відносного мінімуму, і для абсолютного.

Аналогічні твердження можна сформулювати як стосовно максимумів, так і екстремумів взагалі.

1.5 Завдання для самоперевірки

1. Розкрийте поняття «функція» та способи її задання.
2. Дайте означення безперервної, гладкої та кусково-гладкої функцій.

3. Розкрийте поняття «функціонал» і наведіть приклади його задання.
4. Дайте графічну інтерпретацію умов існування екстремуму функції однієї незалежної змінної.
5. Як знайти координату точки екстремуму для функції однієї незалежної змінної?
6. Як розрізнити, де в точці екстремуму має місце мінімум функції однієї незалежної змінної, а де – максимум?
7. Які умови існування екстремуму функції однієї незалежної змінної є необхідними, а які – достатніми?
8. Як визначити відсутність екстремуму в точці, для якої необхідні умови існування екстремуму функції однієї незалежної змінної виконуються?
9. Що собою являють локальний та глобальний екстремуми функції?
10. Дайте графічну інтерпретацію функції двох незалежних змінних.
11. Як знайти координати точки екстремуму для функції двох незалежних змінних?
12. Як розпізнати, де в точці екстремуму має місце мінімум функції двох незалежних змінних, а де – максимум?
13. Які умови існування екстремуму функції двох незалежних змінних є необхідними, а які – достатніми?
14. Як визначити відсутність екстремуму в точці, для якої необхідні умови існування екстремуму функції двох незалежних змінних виконуються?
15. Що собою являє критерій оптимізації? Наведіть приклад, коли критерієм оптимізації процесу є функція, а коли – функціонал.
16. Наведіть приклади обмежень, які виникають при розв'язанні задачі оптимізації, і їх математичні моделі.
17. Сформулюйте змістовно і математично задачу оптимізації для електропривода повороту платформи екскаватора.
18. Як змістовно відрізнити абсолютний та відносний екстремуми функціонала? Наведіть приклад.
19. Як визначити відстань нульового і першого порядку між двома функціями?
20. Коли на екстремалі досягається сильний відносний екстремум функціонала? Коли досягається слабкий відносний екстремум?
21. Який послідовний логічний зв'язок між слабким, сильним та абсолютним екстремумами функціонала? Чи зберігається логічна послідовність у зворотному напрямку?

РОЗДІЛ 2

ОПТИМІЗАЦІЯ НА ОСНОВІ КЛАСИЧНИХ МЕТОДІВ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ЗА ВІДСУТНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ

В цьому розділі викладено методи пошуку функцій, що доставляють екстремум деяким функціоналам за відсутності обмежень. Ці методи вводять в суть варіаційного числення, яке задає теоретичне підґрунтя процесам оптимізації динамічних об'єктів.

2.1 Рівняння Ейлера

Нехай ми маємо функціонал

$$J_y^F = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (2.1)$$

Визначимо, які умови повинна задовольняти функція $y = y(x)$, щоб на ній мав місце слабкий відносний мінімум функціонала (2.1).

Для пошуку умов припустимо, що цей мінімум на функції $y = y(x)$ досягається.

Це припущення дає нам право вважати, що значення функціонала (2.1) на будь-якій іншій функції, наприклад, $y_\eta(x) = y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$, де α – число, а $\eta(x)$ – довільна гладка функція, для якої

$$\eta(a) = \eta(b) = 0, \quad (2.2)$$

не буде меншим, ніж на функції $y = y(x)$, тобто

$$\Delta J_y^F = \int_a^b (x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx = J_y^F(\alpha) - J_y^F \geq 0. \quad (2.3)$$

Оскільки визначений інтеграл після інтегрування і підстановки границь перетворюється на число, то значення приросту функціонала, який задається різницею (2.3) визначених інтегралів, залежатиме лише від значення параметра α , тобто цей приріст стає неперервною функцією, в якій незалежною змінною виступає α –

$$\Delta J_y^F = \Delta J_y^F(\alpha) = J_y^F(\alpha) - J_y^F. \quad (2.4)$$

Як відомо з курсу математичного аналізу, неперервну функцію в околі будь-якого значення її аргументу, в тому числі нульового, можна розкласти в ряд Тейлора. Для функції (2.4) в околі точки $\alpha = 0$ цей ряд матиме вигляд:

$$\Delta J_y^F(\alpha) = \alpha \cdot \frac{dJ_y^F(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\alpha^2}{2!} \cdot \frac{d^2 J_y^F(\alpha)}{d\alpha^2} + \frac{\alpha^3}{3!} \cdot \frac{d^3 J_y^F(\alpha)}{d\alpha^3} + \dots \quad (2.5)$$

Перший і другий члени ряду (2.5), тобто $\alpha \cdot \frac{dJ_y^F(\alpha)}{d\alpha}$ і $\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{d^2 J_y^F(\alpha)}{d\alpha^2}$, називають відповідно першою та другою *варіаціями функціонала* J_y^F і позначають δJ_y^F та $\delta^2 J_y^F$.

Оскільки в другу варіацію $\delta^2 J_y^F$ незалежна змінна α входить в квадраті, то при значеннях α , близьких до нуля, друга варіація стає набагато меншою за першу варіацію δJ_y^F , в яку α входить в першому степені. А це, в свою чергу, дає нам право вважати, що в околі точки $\alpha = 0$

$$\Delta J_y^F(\alpha) \approx \delta J_y^F. \quad (2.6)$$

З виразів (2.3), (2.4), (2.5) та (2.6) випливає, що

$$\alpha \cdot \frac{dJ_y^F(\alpha)}{d\alpha} \geq 0. \quad (2.7)$$

Зрозуміло, що для довільних значень α (як більших, так і менших за нуль) вираз (2.7) в околі точки $\alpha = 0$ виконується лише в одному випадку, коли

$$\frac{dJ_y^F(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad (2.8)$$

або

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\int_a^b F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx \right) = 0. \quad (2.9)$$

Оскільки операції диференціювання та інтегрування є лінійними, то їх можна міняти місцями, тобто (2.9) можна переписати і так:

$$\int_a^b \frac{d}{d\alpha} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx = 0. \quad (2.10)$$

Беручи похідну по α в підінтегральному виразі (2.10) за правилом диференціювання складної функції, будемо мати:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{d(y + \alpha\eta)}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{d(y' + \alpha\eta')}{d\alpha} \right) dx = 0 \quad (2.11)$$

або

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \right) dx = 0. \quad (2.12)$$

Вираз (2.12) є незручним для аналізування, оскільки до його першої складової входить сама функція $\eta(x)$, а до другої – її похідна $\eta'(x)$. Спробуємо позбутись похідної $\eta'(x)$, взявши інтеграл від другої складової в разі частинами. Для спрощення записів будемо в подальшому частинні похідні позначати так:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = F_x, \frac{\partial F}{\partial y} = F_y, \frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = F_{y'x}, \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} = F_{y'y}, \frac{\partial^2 F}{\partial (\partial y')^2} = F_{y'y'}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Нехай в другій складовій частині інтеграла в рівнянні (2.12), тобто в інтегралі

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' dx = \int_a^b F_{y'} \cdot \eta' dx \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} u = F_{y'}, \\ dv = \eta' dx. \end{cases} \quad (2.15)$$

Тоді

$$\begin{cases} du = \frac{d}{dx} F_{y'} dx, \\ v = \int \frac{d\eta}{dx} dx = \int d\eta = \eta. \end{cases} \quad (2.16)$$

Виходячи з того, що

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad (2.17)$$

відносно інтеграла (2.14), з врахуванням (2.15) та (2.16), матимемо

$$\int_a^b F_{y'} \cdot \eta' dx = (F_{y'} \cdot \eta) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \cdot \eta dx. \quad (2.18)$$

Беручи до уваги умову (2.2), з (2.18), після підстановки границь у вираз $(F_{y'} \cdot \eta) \Big|_a^b$, будемо мати

$$\int_a^b F_{y'} \cdot \eta' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \cdot \eta dx. \quad (2.19)$$

Враховуючи (2.19), рівняння (2.12) можна переписати так:

$$\int_a^b \left(F_y \cdot \eta - \frac{d}{dx} F_{y'} \cdot \eta \right) dx = 0 \quad (2.20)$$

або

$$\int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \cdot \eta dx = 0. \quad (2.21)$$

Проаналізуємо отримане інтегральне рівняння (2.21). В ньому на гладку функцію $\eta(x)$ накладена лише одна умова (2.2). В усьому іншому ця функція може бути довільною, в тому числі і такою, як показано на рис. 2.1.

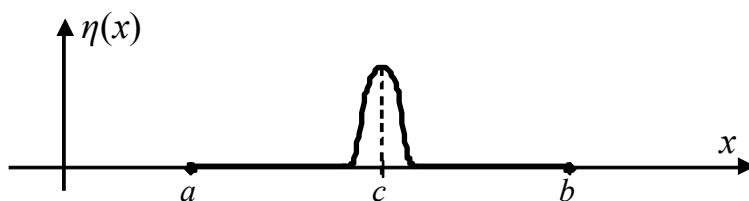


Рисунок 2.1 – Графік функції $\eta(x)$

Якщо ми будемо «гладкий» імпульс, зображений на графіку функції $\eta(x)$ на рис. 2.1 в околі точки $x=c$, переміщувати вліво або вправо по графіку аж до околів точок $x=a$ або $x=b$, то, зрозуміло, що рівняння (2.21) може задовольнитись лише в одному випадку, коли вираз, який стоїть в дужках, буде дорівнювати нулю, тобто

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (2.22)$$

Це і є відоме *рівняння Ейлера*, яке він вивів в 1744 році шляхом перетворення функціонала у функцію багатьох змінних з подальшою її мінімізацією і яке в класичному варіаційному численні може бути отримано з використанням леми Лагранжа.

На наш погляд запропонований евристичний спосіб отримання рівняння Ейлера є більш простим для розуміння, хоча, звичайно, поступається класичним в строгості.

Резюмуючи все викладене вище, можна стверджувати, що для того, щоб функція $y(x)$ доставляла слабкий відносний мінімум функціоналу (2.1), їй необхідно бути розв'язком рівняння Ейлера (2.22). В цьому випадку функція $y(x)$ називається *екстремаллю функціонала*.

На використанні рівняння Ейлера в різних інтерпретаціях власне і базується варіаційне числення.

Розпишемо рівняння Ейлера, використавши формулу повної похідної від функції трьох змінних при диференціюванні складової $\frac{d}{dx}F_{y'}$. Отримаємо:

$$F_y - \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} - \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0, \quad (2.23)$$

або

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0. \quad (2.24)$$

З (2.24) видно, що рівняння Ейлера є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку, для якого не існує єдиного способу розв'язання.

Важливим є випадок, коли функція $F(\bullet)$ у функціоналі (2.1) явно не залежить від x , тобто

$$F(x, y, y') = F(y, y'). \quad (2.25)$$

В цьому випадку замість повного рівняння (2.24) матимемо укорочене –

$$F_y - F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0, \quad (2.26)$$

яке множенням на y' легко перетворюється у рівняння

$$\frac{d}{dx}(F - y' \cdot F_{y'}) = 0. \quad (2.27)$$

В свою чергу, з рівняння (2.27) випливає, що

$$F - y' \cdot F_{y'} = C, \quad (2.28)$$

де C – константа.

Отриманий у такий спосіб вираз (2.28) називають *першим інтегралом рівняння Ейлера*. Він є диференціальним рівнянням першого порядку, яке явно не залежить від x , а тому може бути завжди проінтегрованим.

Як буде показано далі, перший інтеграл рівняння Ейлера фігуруватиме і в багатьох інших цікавих співвідношеннях варіаційного числення.

В деяких задачах оптимізації рівняння Ейлера, яке є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку, зручно подавати у вигляді системи двох диференціальних рівнянь першого порядку, для отримання якої вводиться нова змінна

$$p = F_{y'}. \quad (2.29)$$

Підставляючи (2.29) у (2.22), отримаємо

$$F_y = \frac{dp}{dx}. \quad (2.30)$$

Введемо функцію H , яка задає перший інтеграл рівняння Ейлера, тобто

$$H = F - y' \cdot F_{y'}. \quad (2.31)$$

Підставивши (2.29) у (2.31), отримаємо

$$H = F - y' \cdot p. \quad (2.32)$$

Диференціюючи функцію H за y і за p , отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y} = F_{y'}, \\ \frac{\partial H}{\partial p} = -y', \end{cases} \quad (2.33)$$

Враховуючи те, що $y' = \frac{dy}{dx}$, та рівність (2.30), систему рівнянь (2.33) можна переписати так:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{dp}{dx}, \\ \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{dy}{dx}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Система рівнянь (2.34) є іншою формою подання рівняння Ейлера (2.22), яку математики назвали *канонічною*.

В цій системі одні математики канонічними називають змінні H та p , а інші – y та p .

Завершимо цей підрозділ реплікою про те, що задачу пошуку екстремалі $y(x)$, яка доставляє екстремум функціоналу (2.1) і є кривою, зацмленою на кінцях, в класичному варіаційному численні прийнято називати *найпростішою*.

2.2 Достатні умови існування екстремуму функціонала на екстремалі

Бути розв'язком рівняння Ейлера для екстремалі $y(x)$ є умовою, необхідною для того, щоб на ній досягався мінімум чи максимум функціонала (2.1). Але, як і у випадку екстремуму функції, необхідні умови екстремуму функціонала обов'язково потрібно доповнити умовами достатніми, за допомогою яких розпізнаються як ті функції, що доставляють конкретно максимум чи мінімум функціоналу, так і ті, на яких, незважаючи на виконання необхідних умов, функціонал екстремуму не досягає.

Для визначення достатніх умов екстремуму функціонала (2.1) повернемо знову до розкладу в ряд Тейлора (2.5) приросту функціонала $\Delta J_y^F(\alpha)$.

Як уже встановлено в попередньому підрозділі, в околі точки $\alpha = 0$ за рахунок виконання умови (2.8) перша варіація $\delta J_y^F(\alpha)$ наближається до нуля, тому приріст функціонала визначається другою варіацією $\delta^2 J_y^F(\alpha)$, оскільки інші члени ряду Тейлора наближаються до нуля швидше за другу варіацію за рахунок більш високих, але близьких до нуля, степенів α .

Зрозуміло, що у випадку мінімуму функціонала і приріст функціонала $\Delta J_y^F(\alpha)$ в околі точки $\alpha = 0$, і його друга варіація $\delta^2 J_y^F(\alpha)$ не будуть меншими нуля, оскільки в точці мінімуму значення цього функціонала є найменшим і будь-яке зміщення з цієї точки $\alpha = 0$ або не приведе до зміни значення функціонала, або приведе до приросту його значення.

Тож, евристично мінімум функціонала (2.1) досягається на екстремалі $y(x)$, для якої справедливим є вираз

$$\delta^2 J_y^F(\alpha) \geq 0, \quad (2.35)$$

де, нагадаємо –

$$\delta^2 J_y^F(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \frac{d^2 J_y^F}{d\alpha^2}. \quad (2.36)$$

Розмірковуючи за аналогією, прийдемо до висновку, що максимум функціонала (2.1) досягається на екстремалі $y(x)$, для якої справедливим є вираз

$$\delta^2 J_y^F(\alpha) \leq 0. \quad (2.37)$$

Оскільки у вирази (2.35), (2.37), згідно з виразом (2.36), α входить в квадраті, то знаки цих нерівностей визначаються виключно знаками другої похідної від приросту функціонала, яку можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_y^F}{d\alpha^2} &= \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\int_a^b F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx \right) = \\ &= \int_a^b \frac{d^2}{d\alpha^2} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx = \\ &= \int_a^b \left(F_{yy} \eta^2 + (F_{yy'} + F_{y'y}) \cdot \eta\eta' + F_{y'y'} (\eta')^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Для того, щоб і в середньому члені в правій частині виразу (2.38) отримати квадрат функції η , що полегшить аналізування виразу (2.38) в цілому, візьмемо частинами інтеграл від цього середнього члена. Після підста-

новки значення отриманого інтегруванням частинами інтеграла в вираз (2.38), отримаємо

$$\frac{d^2 J_y^F(\alpha)}{d\alpha^2} = \int_a^b \left(\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) \eta^2 + F_{y'y'} (\eta')^2 \right) dx. \quad (2.39)$$

Нагадаємо, що допоміжна функція $\eta(x)$ є довільною, а тому й можна взяти її такою, як показано на рис. 2.2.

При такому виборі $\eta(x)$ матимемо чисельно близькі до нуля значення $(\eta)^2$ і в сотні разів більші значення $(\eta')^2$. А тому знак виразу (2.39) буде повністю визначатись знаком коефіцієнта при $(\eta')^2$, тобто знаком при $F_{y'y'}$.

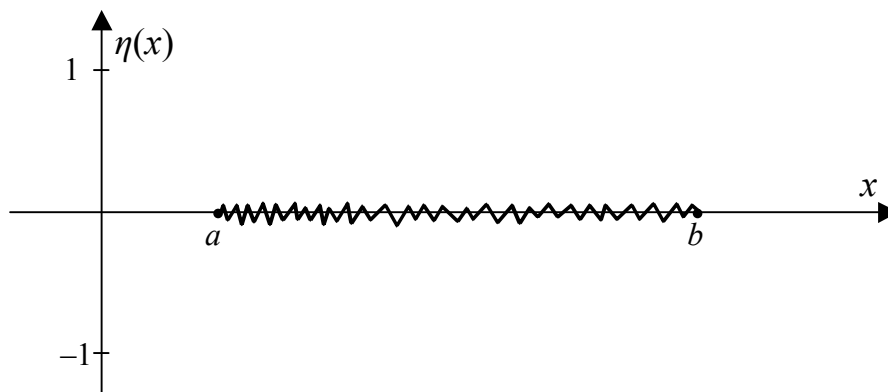


Рисунок 2.2 – Графік допоміжної функції $\eta(x)$ для виразу (2.33)

Виходячи з виразів (2.35), (2.37) і всього викладеного вище, можна стверджувати, що на екстремалі $y(x)$ в межах $x \in [a, b]$ досягається мінімум функціонала (2.1), якщо для всіх $x \in [a, b]$ маємо

$$F_{y'y'} \geq 0, \quad (2.40)$$

і максимум, якщо –

$$F_{y'y'} \leq 0. \quad (2.41)$$

Умови (2.40), (2.41) є достатніми умовами досягнення на екстремалі $y(x)$ в межах $x \in [a, b]$ екстремуму функціонала (2.1).

Ці умови часто називають *умовами Лежандра* за іменем математика, який їх вивів.

Для продовження аналізування достатніх умов досягнення на екстремалі $y(x)$ в межах $x \in [a, b]$ екстремуму функціонала (2.1) повернемося до розгорнутого запису рівняння Ейлера (2.24). Цей вираз можна переписати і так –

$$y'' = \frac{F_y - F_{y'x} - F_{y'y} \cdot y'}{F_{y'y'}}. \quad (2.42)$$

З виразу (2.42) випливає, що функція $y(x)$ для того, щоб претендувати на роль екстремалі, повинна в області $x \in [a, b]$ мати другу похідну y'' , а її перша похідна y' повинна задовольняти в деяких випадках ще й додаткові умови.

Із (2.42) зрозуміло, що при

$$F_{y'y'} > 0 \quad (2.43)$$

для мінімуму функціонала (2.1) та при

$$F_{y'y'} < 0 \quad (2.44)$$

для його максимуму, на першу похідну y' в області $x \in [a, b]$ крім того, що вона повинна в цій області існувати, ніяких інших умов накладати не потрібно.

Але якщо в окремих точках області $x \in [a, b]$

$$F_{y'y'} = 0, \quad (2.45)$$

то необхідно, щоб в цих же точках перша похідна y' чисельно збігалася із значенням виразу $\frac{F_y - F_{y'x}}{F_{y'y}}$, тобто щоб в цих точках виконувалась рівність

$$y' = \frac{F_y - F_{y'x}}{F_{y'y}}, \quad (2.46)$$

що впливає з необхідності мати, для забезпечення існування в області $x \in [a, b]$ другої похідної y'' , крім виконання умови (2.45) ще й виконання умови

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y} \cdot y' = 0. \quad (2.47)$$

Зрозуміло, що якщо рівність (2.45) виконується для всіх точок області $x \in [a, b]$, то для всіх точок цієї області повинна виконуватись і рівність (2.47).

Слід зазначити, що якщо рівність (2.45) виконується для всіх точок області $x \in [a, b]$, то це означає, що підінтегральна функція $F(x, y, y')$ у функціоналі (2.1) залежить від першої похідної лінійно, тобто що цей функціонал має вигляд

$$J_y^F = \int_a^b (M(x, y) + N(x, y) \cdot y') dx. \quad (2.48)$$

Функціонали такого виду називають *виродженими*.

Для них рівняння Ейлера не є диференціальним, тому що –

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} &= \frac{\partial M}{\partial y} + y' \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{d}{dx} (N(x, y)) = \\ &= \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot y' - \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

З виразу (2.49) випливає, що рівняння Ейлера для вироджених функціоналів не містить похідних від екстремалі $y(x)$.

Розкриваючи в функціоналі (2.48) зовнішні дужки, його можна записати у вигляді –

$$J_y^F = \int_a^b M dx + N dy, \quad (2.50)$$

тобто він перетворюється на інтеграл від повного диференціала.

А, як відомо, значення такого інтеграла не залежить від шляху інтегрування, тобто його значення на всіх функціях $y(x)$, на яких задається функціонал (2.50), є однаковими, що в нашому випадку в свою чергу означає, що екстремум такого функціонала досягається на будь-якій функції з області його задання.

В разі, якщо функціонал (2.1) не є виродженим, тобто його не можна подати у вигляді (2.48), а умова (2.45) виконується, то це означає, як буде показано далі, що екстремум функціонала не може бути досягнутим в класі гладких функцій. В цьому випадку його треба шукати в класі кусково-гладких функцій, графіки яких мають зломи.

Примітка: математики віднайшли приклади задач оптимізації, для яких недостатньо виконання умов Лежандра для підтвердження того, що мінімум чи максимум функціонала (2.1) досягається саме на отриманій з рівняння Ейлера екстремалі $y(x)$.

Для узагальнення і на такі задачі методик пошуку достатніх умов досягнення мінімуму чи максимуму на екстремалі $y(x)$ математиками було введено поняття поля екстремалей і побудовано диференціальне рівняння Якобі, за розв'язком якого можна робити висновок про стан виконання достатніх умов існування екстремуму функціонала (2.1).

З виведенням рівняння Якобі та його аналізом можна ознайомитись в будь-якому достатньо повному підручнику з варіаційного числення.

Ми ж у нашому навчальному посібнику вирішили не приділяти уваги умовам Якобі тому, що в задачах оптимізації динамічних об'єктів умов Лежандра цілком досить для перевірки того, виконуються чи не виконуються достатні умови існування екстремуму на екстремалі $y(x)$, отриманій з рівняння Ейлера.

2.3 Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення для пошуку екстремалей з рухомими кінцями

Всі викладки, що наведені в попередніх підрозділах, стосувалися задач пошуку екстремуму функціоналів в класі функцій, графіки яких защемлені на кінцях.

Але існує досить багато задач оптимізації, в яких екстремалі необхідно шукати в класі функцій, кінці графіків яких є рухомими.

Це, наприклад, задача оптимізації форми залізничної колії на поворотах, оскільки залізничні рейки мають рухомі кінці, або задача оптимізації електропривода повороту стріли екскаватора, обидва кінці якої можуть займати різні точки простору залежно від маси ґрунту, набраного у ківш.

Математично така задача формулюється так: серед кривих, кінці яких можуть рухатись по двох інших кривих – позначимо їх $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ (рис. 2.3), знайти криву $y(x)$, що доставляє мінімум функціоналу (2.1).

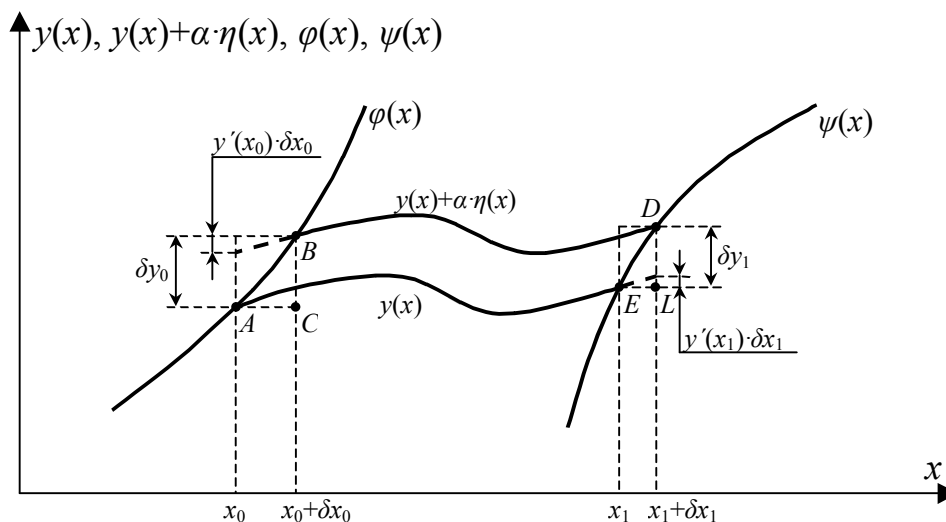


Рисунок 2.3 – Графічна інтерпретація задачі мінімізації функціоналу в області функцій з рухомими по кривих $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ кінцями

Для розв'язання цієї задачі необхідно спочатку ввести у вираз для першої варіації функціоналу не лише складову, що викликана варіацією екстремалі $y(x)$, як це вже зроблено раніше, але і другу складову, обумовлену варіаціями кінців екстремалі вздовж функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$.

Зрозуміло, що приріст функціоналу $\Delta J_y^F(\alpha)$ при переході від функції $y(x)$ до $y(x) + \alpha\eta(x)$ може бути поданий так (див. рис. 2.3) –

$$\begin{aligned} \Delta J_y^F(\alpha) &= J_y^F(y + \alpha\eta) - J_y^F(y) = \\ &= \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Виділяючи як області інтегрування $[x_0, x_0 + \delta x_0]$, $[x_0, x_1]$, $(x_1, x_1 + \delta x_1]$ і пам'ятаючи, що операція інтегрування є лінійною, інтеграли в правій частині виразу (2.51) можна записати і так:

$$\begin{aligned} J_y^F(\alpha) &= \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') - F(x, y, y')) dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx - \int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Зрозуміло, що перша варіація δJ приросту функціонала $\Delta J_y^F(\alpha)$ (2.52) буде мати три складових $\delta J^{(x_0, x_1)}$, $\delta J^{(x_1, x_1 + \delta x_1)}$, $\delta J^{(x_0, x_0 + \delta x_0)}$, тобто

$$\delta J = \delta J^{(x_0, x_1)} + \delta J^{(x_1, x_1 + \delta x_1)} - \delta J^{(x_0, x_0 + \delta x_0)}. \quad (2.53)$$

Розкладаючи в ряд Тейлора перший інтеграл у виразі (2.52) так, як це зроблено в підрозділі 2.1, для першої складової $\delta J^{(x_0, x_1)}$ першої варіації δJ отримаємо після інтегрування частинами:

$$\delta J^{(x_0, x_1)} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \cdot \eta dx + (F_{y'} \cdot \eta) \Big|_{x_0}^{x_1}. \quad (2.54)$$

Звертаємо увагу на те, що в співвідношенні (2.19) член $(F_{y'} \cdot \eta) \Big|_a^b$ випав. Це було обумовлено тим, що на функцію $\eta(x)$ ми накладали умови (2.2). Оскільки в задачі, яку ми розглядаємо зараз, умови (2.2) знято, то і в (2.54) цей член зберігається.

Оскільки інтервали δx_0 і δx_1 малі, то визначені інтеграли (другий і третій у виразі (2.51)) на них можна наближено подати за формулою прямокутників, тобто

$$\int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx \approx F \Big|_{x_1} \cdot \delta x_1, \quad (2.55)$$

$$\int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx \approx F \Big|_{x_0} \cdot \delta x_0. \quad (2.56)$$

Але ж праві частини у виразах (2.55) і (2.56) це і є перші варіації функціоналів, що стоять в лівих частинах виразів. Тому з врахуванням (2.54), (2.55), (2.56) ми можемо (2.53) записати так

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \cdot \eta dx + F_{y'} \cdot \eta(x_1) - F_{y'} \cdot \eta(x_0) + F|_{x_1} \cdot \delta x_1 - F|_{x_0} \cdot \delta x_0. \quad (2.57)$$

А тепер звернемося до рис. 2.3. З наведених на ньому графіків і допоміжних побудов видно, що при $\alpha = 1$ (для спрощення і без втрати змістовності) мають місце співвідношення:

$$\delta y_0 = y' \cdot \delta x_0 + \eta(x_0), \quad (2.58)$$

$$\delta y_1 = y' \cdot \delta x_1 + \eta(x_1). \quad (2.59)$$

Вирази (2.58) і (2.59) можна переписати і так:

$$\eta(x_0) = \delta y_0 - y' \cdot \delta x_0, \quad (2.60)$$

$$\eta(x_1) = \delta y_1 - y' \cdot \delta x_1. \quad (2.61)$$

Підставляючи (2.60) і (2.61) в (2.57), отримаємо:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \cdot \eta dx + (F - y' \cdot F_{y'})|_{x_1} \cdot \delta x_1 - (F - y' \cdot F_{y'})|_{x_0} \cdot \delta x_0 + F_{y'}|_{x_1} \cdot \delta y_1 - F_{y'}|_{x_0} \cdot \delta y_0. \quad (2.62)$$

Це і є вираз для першої варіації функціонала в задачі пошуку екстремалей з рухомими кінцями.

Припустимо, що ми розв'язали задачу і знайшли екстремаль, яка доставляє мінімум функціоналу (2.1).

В цьому випадку інтегральний член, який містить в собі рівняння Ейлера, у виразі (2.57) дорівнюватиме нулю, а перша варіація δJ функціонала складатиме

$$\delta J = (F - y' \cdot F_{y'})|_{x_1} \cdot \delta x_1 - (F - y' \cdot F_{y'})|_{x_0} \cdot \delta x_0 + F_{y'}|_{x_1} \cdot \delta y_1 - F_{y'}|_{x_0} \cdot \delta y_0. \quad (2.63)$$

Знову повернемося до рис. 2.3. При малих δx_0 , δx_1 фігури ABC і EDL можна вважати прямокутними трикутниками, із яких:

$$\begin{cases} \delta y_0 = \varphi'(x) \cdot \delta x_0, \\ \delta y_1 = \psi'(x) \cdot \delta x_1. \end{cases} \quad (2.64)$$

Підставляючи (2.64) у (2.63), отримаємо:

$$\delta J = \left(F - (y' - \psi') \cdot F_{y'} \right) \Big|_{x_1} \cdot \delta x_1 - \left(F - (y' - \varphi') \cdot F_{y'} \right) \Big|_{x_0} \cdot \delta x_0. \quad (2.65)$$

Як нам уже відомо із попереднього матеріалу, на екстремалі перша варіація функціонала повинна дорівнювати нулю, тобто повинна виконуватись умова

$$\delta J = 0. \quad (2.66)$$

А виконання цієї умови, в свою чергу, може задовольнятися лише за умови, що нульовими стають значення коефіцієнтів при δx_0 і δx_1 у співвідношенні (2.65), тобто що

$$\begin{cases} \left(F - (y' - \psi') \cdot F_{y'} \right) \Big|_{x_1} = 0, \\ \left(F - (y' - \varphi') \cdot F_{y'} \right) \Big|_{x_0} = 0, \end{cases} \quad (2.67)$$

або в канонічних змінних –

$$\begin{cases} \left(H + \psi' \cdot p \right) \Big|_{x_1} = 0, \\ \left(H + \varphi' \cdot p \right) \Big|_{x_0} = 0. \end{cases} \quad (2.68)$$

Умови, що задаються виразами (2.67) або (2.68), математики називають *умовами трансверсальності*.

Вони дозволяють знайти точки перетину екстремалі $y(x)$, яка є розв'язком рівняння Ейлера, з лініями $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, котрі задають закони зміни рухомих кінців цієї екстремалі.

Оскільки рівняння Ейлера є диференціальним рівнянням другого порядку, то його загальний розв'язок, який задає множину екстремалей, містить дві довільні сталі.

Для конкретизації екстремалі ці сталі визначаються із рівнянь (2.67) або (2.68), кількість яких повинна дорівнювати кількості шуканих сталих.

2.4 Задачі, що приводять до екстремалей зі зломами

Розглянемо функціонал

$$J = \int_1^3 y^4 (2 + y')^2 dx. \quad (2.69)$$

Оскільки в цей функціонал функція $y(x)$ і функція від її похідної $(2 + y')$ входять у парних степенях, то функціонал ніколи не може мати від'ємних значень. Тож найменшим його значенням може бути лише нуль.

Нульові значення функціонала (2.69), як легко бачити, досягаються або на функції

$$y = 0, \quad (2.70)$$

або на функції, яка є розв'язком рівняння

$$2 + y' = 0, \quad (2.71)$$

що утворюється від прирівняння нулю виразу, який стоїть у дужках.

Розв'язком рівняння (2.71) є функція

$$y(x) = -2x + C, \quad (2.72)$$

що задає сімейство прямих ліній.

Нам уже відомо, що функції, які доставляють функціоналу мінімум, називаються екстремалами. Тож для функціонала (2.69) екстремалами є функції (2.70) і функції (2.72).

Нехай для екстремали задані граничні умови у вигляді

$$\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(3) = -2. \end{cases} \quad (2.73)$$

Зрозуміло, що для екстремали (2.70) перша умова з (2.73) може бути виконана, а друга – ні.

Для екстремали (2.72) перша умова може бути виконана лише на прямій

$$y(x) = -2x + 2, \quad (2.74)$$

а друга – на прямій

$$y(x) = -2x + 4, \quad (2.75)$$

тобто ні в класі функцій (2.70), ні в класі функцій (2.72) немає жодної такої функції, графік якої проходив би через точки, що задані умовами (2.73).

Якщо функцію (2.75), значення константи C в якій отримано з другої граничної умови (2.73), прирівняти нулю

$$-2x + 4 = 0, \quad (2.76)$$

то знайдемо, що її графік перетинає вісь x в точці $x_0 = 2$ (рис. 2.4).

Тож із викладеного вище випливає, що екстремаллю функціонала (2.69) є функція

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [1, 2], \\ -2x + 4 & \text{при } x \in [2, 3], \end{cases} \quad (2.77)$$

графік якої зображено на рис. 2.4.

Як бачимо, графік цієї функції має злом в точці $x_0 = 2$, а сама функція відноситься до класу кусково-гладких на відрізку $x \in [1, 3]$. Легко переко-
натись, що для неї на всьому відрізку значень $x \in [1, 3]$ виконується умова (2.45), а умова (2.47) виконується лише для точок $x \in [1, 2]$.

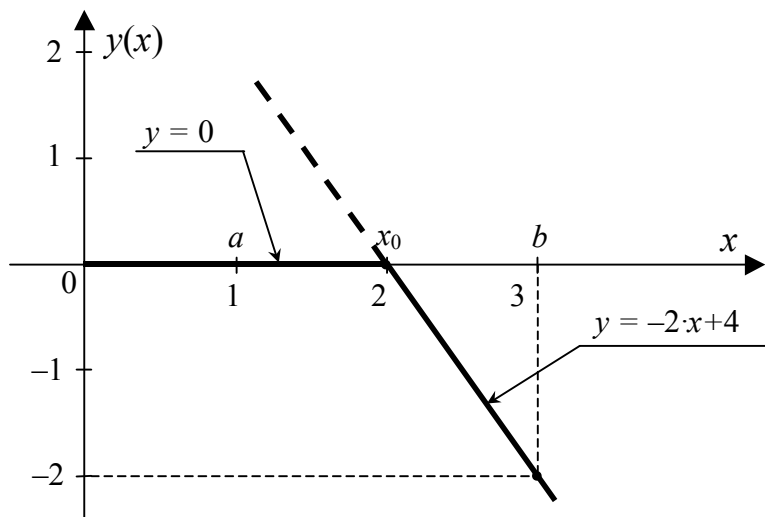


Рисунок 2.4 – Графік екстремалі функціонала (2.69)
в області $x \in [a, b]$, де $a=1$, $b=3$

Оскільки рівняння Ейлера, як ми встановили раніше, є диференціальним рівнянням другого порядку, то його розв'язок повинен містити дві сталі, значення яких визначається або із заданих граничних умов для задач з нерухомим кінцями екстремалей, або із заданих умов трансверсальності, якщо ці кінці є рухомими. І в першому, і в другому випадках для визначення конкретних значень двох сталих необхідно було мати два рівняння.

Якщо ж екстремум функціонала досягається на кривій із точкою злому, то двох рівнянь для визначення сталих уже буде недостатньо, оскільки їх значення для екстремалі на ділянці до точки злому і після цієї точки будуть різними, адже різними є рівняння, які задають екстремаль на цих ділянках.

Зрозуміло, що для визначення сталих у розв'язку рівняння Ейлера для екстремалей з однією точкою злому $x_0 \in [a, b]$ необхідно мати чотири рівняння. Два з них будуть задаватись граничними умовами, тобто значеннями екстремалі в точках $x = a$ і $x = b$ –

$$\begin{cases} y(a) = y_a, \\ y(b) = y_b, \end{cases} \quad (2.78)$$

а два інших необхідно визначити в точці злому x_0 при наближенні до неї по екстремалі з лівого боку, тобто з боку $(x_0 - 0)$, та з правого боку, тобто з боку $(x_0 + 0)$.

Для отримання цих додаткових рівнянь в загальному вигляді для функціонала (2.1) при наявності однієї точки злому x_0 екстремалі $y(x)$ подамо функціонал (2.1) у вигляді

$$J = \int_a^{x_0} F(x, y, y') dx + \int_{x_0}^b F(x, y, y') dx. \quad (2.79)$$

Зрозуміло, що перша варіація δJ функціонала J в цьому випадку дорівнюватиме сумі перших варіацій δJ_1 і δJ_2 від кожного з інтегралів, що входять до (2.79), тобто

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2. \quad (2.80)$$

В загальному вигляді кожна з цих варіацій δJ_1 , δJ_2 може бути записана згідно з виразом (2.62). Але, якщо в областях значень $x \in [a, x_0]$, $x \in [x_0, b]$ функція $y(x)$ є екстремаллю функціонала (2.1), то інтегральні члени для кожної зі складових варіацій δJ_1 , δJ_2 дорівнюватимуть нулю. Тому в точці злому x_0 ці варіації можна записати так:

$$\delta J_1 = \left(F - y'F_{y'} \right) \Big|_{x_0-0} \cdot \delta x_0 + F_{y'} \Big|_{x_0-0} \cdot \delta y_0; \quad (2.81)$$

$$\delta J_2 = \left(F - y'F_{y'} \right) \Big|_{x_0+0} \cdot (-\delta x_0) + F_{y'} \Big|_{x_0+0} \cdot (-\delta y_0). \quad (2.82)$$

В виразах (2.81), (2.82) варіаціями аргументу δx_0 і функції δy_0 ми встановили знак «+» при їх прирості зліва направо та знизу вгору, а знак «-» в разі приросту справа наліво та зверху вниз в околі точки x_0 .

Як ми вже встановили в попередніх підрозділах, на екстремалі виконується умова

$$\delta J = 0, \quad (2.83)$$

що для екстремалі зі зломом виглядатиме так:

$$\delta J_1 + \delta J_2 = 0. \quad (2.84)$$

Підставляючи (2.81) і (2.82) у (2.84), матимемо:

$$\begin{aligned} & \left(\left(F - y'F_{y'} \right) \Big|_{x_0-0} - \left(F - y'F_{y'} \right) \Big|_{x_0+0} \right) \cdot \delta x_0 + \\ & + \left(F_{y'} \Big|_{x_0-0} - F_{y'} \Big|_{x_0+0} \right) \cdot \delta y_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

При довільних δx_0 і δy_0 рівність (2.85) виконується лише за умови рівності нулю коефіцієнтів, які стоять перед δx_0 і δy_0 , тобто за умови, що

$$\begin{cases} (F - y'F_{y'})|_{x_0-0} = (F - y'F_{y'})|_{x_0+0}, \\ F_{y'}|_{x_0-0} = F_{y'}|_{x_0+0} \end{cases} \quad (2.86)$$

або при застосуванні канонічних змінних H , p –

$$\begin{cases} H|_{x_0-0} = H|_{x_0+0}, \\ p|_{x_0-0} = p|_{x_0+0}. \end{cases} \quad (2.87)$$

Умови (2.86) чи (2.87) називають умовами Вейєрштрасса–Ердмана. Вони і задають ті додаткові рівняння, які необхідно мати для однозначного визначення екстремалі $y(x)$, отриманої шляхом розв’язання рівняння Ейлера, зліва і справа від точки злому $x_0 \in [a, b]$.

Введенням цих умов ми розширили клас функцій, на яких може досягатись екстремум функціонала (2.1).

Якщо в попередніх підрозділах ми шукали екстремалі лише в класі гладких функцій, графіками яких є плавні криві, то тепер ми зможемо розв’язувати задачу мінімізації функціонала в більш широкому класі – класі кусково-гладких функцій, графіками яких є неперервні криві, що містять точки злому між плавними складовими графіка.

2.5 Пошук екстремалей в задачах, критеріями оптимізації яких є функціонали, що пов’язують між собою декілька невідомих функцій та їх перших похідних

Розглянемо задачу пошуку екстремуму функціонала

$$J = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx, \quad (2.88)$$

який пов’язує множину функцій

$$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}, \quad (2.89)$$

що задає поверхню в n -вимірному просторі, та множину

$$\{y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x)\} \quad (2.90)$$

перших похідних цих функцій у цьому ж просторі.

Зрозуміло, що якщо екстремум функціонала (2.88) існує, то його екстремалі знаходяться в множині (2.89).

Метод пошуку екстремалей функціонала (2.88) побудуємо у такий спосіб: задамо варіацію лише функції $y_1(x)$, а всі інші функції від $y_2(x)$ до $y_n(x)$ включно та їх похідні зафіксуємо, перетворивши їх у такий спосіб на константи –

Той, кого зацікавить виведення умов Лежандра для функціонала (2.88), може ознайомитись з його алгоритмом в будь-якому повному підручнику з варіаційного числення.

2.6 Пошук екстремалей в задачах, критеріями оптимізації яких є функціонали, що залежать від старших похідних невідомої функції

Нехай функціонал, мінімум чи максимум якому доставляє екстремаль $y(x)$, має вигляд

$$J = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx, \quad (2.102)$$

тобто він пов'язує між собою не лише функцію $y(x)$ та її похідну $y'(x)$, як у випадку (2.1), але і старші похідні $y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$.

Ще Ейлер в першій половині вісімнадцятого сторіччя довів, що функція $y(x)$ буде екстремаллю функціонала (2.102) в тому випадку, якщо вона є розв'язком рівняння

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (2.103)$$

Ейлер отримав це рівняння шляхом математичної індукції.

Він спочатку розглянув задачу пошуку функції, яка доставляє мінімум функціоналу (2.1) – цей процес нами детально описаний у попередніх підрозділах. Потім Ейлер розглянув функціонал

$$J = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx, \quad (2.104)$$

для якого, йдучи тим же шляхом з виділенням першої варіації, прирівнянням її нулю і взяттям другої частини інтеграла частинами, отримав умову, що функція $y(x)$ є екстремаллю, якщо вона є розв'язком рівняння

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0. \quad (2.105)$$

Після цього Ейлер зробив висновок, що екстремум функціоналу (2.102) доставлятиме функція, яка є розв'язком рівняння (2.103). Розглянувши декілька прикладів він переконався, що це так. А строге доведення того, що екстремаллю функціонала (2.102) є функція $y(x)$, яка задовольняє рівняння (2.103), здійснив Пуассон – ось чому це рівняння і увійшло у варіаційне числення з подвійною назвою.

Для функціонала (2.104) рівняння (2.103), яке скорочується до (2.105), є диференціальним рівнянням четвертого порядку. Його розв'язком буде

функція $y(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$, яка містить чотири довільні сталі C_1, C_2, C_3, C_4 , для визначення яких необхідно мати чотири рівняння. Такими рівняннями будуть граничні умови:

$$\begin{cases} y(a, C_1, C_2, C_3, C_4) = A_1, \\ y'(a, C_1, C_2, C_3, C_4) = A_2, \\ y(b, C_1, C_2, C_3, C_4) = B_1, \\ y'(b, C_1, C_2, C_3, C_4) = B_2. \end{cases} \quad (2.106)$$

Зрозуміло, що необхідною умовою екстремуму функціонала (2.102), в якому старшою похідною від невідомої функції $y(x)$ є похідна третього порядку $y'''(x)$, буде умова, щоб ця функція задовольняла рівняння (2.103), яке в цьому випадку матиме шостий порядок. Шість довільних сталих цієї екстремалі необхідно буде знаходити з граничних умов типу (2.106) з тією різницею, що рівнянь уже буде шість і задаватимуть вони на границях не лише значення самої екстремалі та її першої похідної, як це було у випадку мінімізації функціонала (2.104), але й її другої похідної, тобто система рівнянь (2.106) доповниться ще рівняннями

$$\begin{cases} y''(a, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = A_3, \\ y''(b, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = B_3. \end{cases} \quad (2.107)$$

Ну і, звичайно, у всіх рівняннях (2.106) для цього випадку додадуться довільні сталі C_5 і C_6 .

Дуже простими для цієї задачі виявились умови Лежандра, за якими мінімум функціонала (2.102) на екстремалі $y(x)$ відрізняють від максимуму. Вони є настільки простими, що в навчальному посібнику для інженерів цю простоту не варто, на думку авторів посібника, затьмарювати громіздкими доведеннями.

Тож, для того, щоб екстремаль $y(x)$ доставляла мінімум функціоналу (2.102), достатньо виконання умови

$$F_{y^{(n)}y^{(n)}} \geq 0, \quad (2.108)$$

а для максимуму –

$$F_{y^{(n)}y^{(n)}} \leq 0. \quad (2.109)$$

З виведенням умов (2.108), (2.109) за бажанням можна ознайомитись в будь-якому повному підручнику з варіаційного числення, призначеному для студентів університетів математичних спеціальностей.

2.7 Завдання для самоперевірки

1. Виведіть рівняння Ейлера. Дайте його інтерпретацію.
2. Отримайте рівняння Ейлера у вигляді нелінійного диференціального рівняння другого порядку.
3. Отримайте перший інтеграл рівняння Ейлера. Дайте його інтерпретацію.
4. Виведіть рівняння Ейлера у канонічній формі.
5. Якими є достатні умови існування екстремуму функціонала в найпростішій задачі варіаційного числення? Як їх вивести і як з їх допомогою розрізнити максимум і мінімум функціонала?
6. Як відрізнити мінімум від максимуму функціонала, якщо $F_{y'y'} = 0$?
7. Які функціонали є виродженими і що можна сказати про їх екстремалі?
8. Виведіть співвідношення для першої варіації функціонала з рухомими кінцями.
9. Отримайте умови трансверсальності. Поясніть, для чого вони потрібні.
10. Наведіть приклад задачі мінімізації функціонала, для якої $F_{y'y'} = 0$, а екстремаль має злом графіка.
11. Виведіть умови Вейерштрасса–Ердмана. Поясніть для чого вони потрібні.
12. Виведіть необхідні умови існування екстремуму функціонала, який пов'язує декілька невідомих функцій та їх перших похідних.
13. Якими є достатні умови існування екстремуму функціонала, що пов'язує декілька невідомих функцій та їх перших похідних?
14. Виведіть евристично (за Ейлером) рівняння Ейлера–Пуассона. Дайте його інтерпретацію.
15. Якими є достатні умови існування екстремуму функціонала, який пов'язує екстремаль з її старшими похідними? Як розрізнити максимум та мінімум функціонала в цьому випадку?

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

В цьому розділі викладено методи пошуку функцій, що доставляють екстремум функціоналам за наявності обмежень. Ці методи адаптують класичне варіаційне числення до розв'язання прикладних задач оптимізації динамічних об'єктів.

3.1 Метод невизначених множників Лагранжа як найбільш загальний для розв'язання задач на умовний екстремум

Нехай дано функціонал

$$J = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx \quad (3.1)$$

і необхідно знайти такі функції

$$y(x), z(x), \quad (3.2)$$

які доставляють екстремум функціоналу (3.1) за умови, що

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad (3.3)$$

тобто за умови, що всі точки кривої (3.2) лежать на поверхні (3.3).

Спробуємо знайти необхідні умови існування екстремуму функціонала (3.1) за наявності обмеження (3.3).

Припустимо, що ми знайшли такі функції $y(x)$ і $z(x)$, які доставляють екстремум, наприклад, мінімум, функціоналу (3.1).

Додамо до функцій $y(x)$ і $z(x)$ варіації δy і δz , які задовольняють вимоги

$$\begin{cases} \delta y > 0 & \text{для } x \in [x_1, x_2], \\ \delta y = 0 & \text{для } x \notin [x_1, x_2], \\ \delta z > 0 & \text{для } x \in [x_1, x_2], \\ \delta z = 0 & \text{для } x \notin [x_1, x_2], \\ [x_1, x_2] \subset [a, b], \end{cases} \quad (3.4)$$

і знайдемо першу варіацію δJ функціонала (3.1) при переході від кривої на поверхні (3.3), що описується функціями $y(x)$, $z(x)$, до кривої на цій же поверхні, що описується функціями

$$\begin{cases} y(x) + \delta y, \\ z(x) + \delta z. \end{cases} \quad (3.5)$$

Зрозуміло, що

$$\delta J = \delta J_y + \delta J_z, \quad (3.6)$$

тобто перша варіація δJ функціонала (3.1) дорівнюватиме сумі першої варіації δJ_y цього ж функціонала за координатою y при незмінній координаті z , та першої варіації δJ_z за координатою z при незмінній координаті y .

Очевидно, що в точці (x_0, y_0, z_0) мінімуму функціонала (3.1) справедливим буде співвідношення

$$\delta J = 0. \quad (3.7)$$

А це можливо в силу незалежності y і z одне від одного лише за умови, що:

$$\begin{cases} \delta J_y = 0, \\ \delta J_z = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Але, як ми вже переконались при виведенні рівняння Ейлера, перші варіації δJ_y і δJ_z можна подати у вигляді:

$$\delta J_y = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \cdot \delta y \cdot dx, \quad (3.9)$$

$$\delta J_z = \int_a^b \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) \cdot \delta z \cdot dx. \quad (3.10)$$

Тож, підставляючи (3.9) і (3.10) у співвідношення (3.6), матимемо:

$$\delta J = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \cdot \delta y \cdot dx + \int_a^b \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) \cdot \delta z \cdot dx = 0. \quad (3.11)$$

Нехай $[x_1, x_2]$ – це малий окіл за координатою x точки (x_0, y_0, z_0) , в якій досягається мінімум функціонала (3.1), і $x_0 \in [x_1, x_2]$.

Тоді вирази

$$\sigma_1 = \int_{x_1}^{x_2} \delta y \cdot dx, \quad (3.12)$$

$$\sigma_2 = \int_{x_1}^{x_2} \delta z \cdot dx \quad (3.13)$$

здаватимуть малі прямокутні площинки σ_1 , σ_2 на координатних площин-

нах (x, y) , (x, z) в околі точки x_0 зі сторонами dx , δy та dx , δz , а вирази (3.9), (3.10) задаватимуть об'єми призми з основами dx , δy та dx , δz , які знаходяться під поверхнями:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}, \quad (3.14)$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}. \quad (3.15)$$

Але ми знаємо, що об'єм прямокутної призми з малою прямокутною площиною в основі можна знайти перемноженням площі основи на висоту цієї призми, що дає нам право переписати вираз (3.11) у вигляді:

$$\delta J = \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \Big|_{x_0} \cdot \sigma_1 + \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) \Big|_{x_0} \cdot \sigma_2 = 0. \quad (3.16)$$

Як ми вже відзначали, крива, що описується функціями (3.5), теж лежить на поверхні (3.3), тому для неї теж є справедливою рівність (3.3), яка набуває в цьому випадку вигляду

$$\varphi(x, y + \delta y, z + \delta z) = 0. \quad (3.17)$$

Проінтегруємо рівняння (3.3), (3.17) в області $x \in [x_1, x_2]$. Зрозуміло, що в результаті інтегрування ми отримаємо

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y + \delta y, z + \delta z) dx = 0, \quad (3.18)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y, z) dx = 0. \quad (3.19)$$

Відніmemo рівняння (3.19) від (3.18). Отримаємо

$$\int_{x_1}^{x_2} (\varphi(x, y + \delta y, z + \delta z) - \varphi(x, y, z)) dx = 0. \quad (3.20)$$

Формально під інтегралом у рівнянні (3.20) стоїть приріст $\Delta\varphi$ функції $\varphi(x, y, z)$, тобто

$$\Delta\varphi = \varphi(x, y + \delta y, z + \delta z) - \varphi(x, y, z), \quad (3.21)$$

який вона отримує при переході від точки поверхні з координатами (x, y, z) до точки цієї ж поверхні з координатами $(x, y + \delta y, z + \delta z)$.

Нагадаємо, що в околі точки $x_0 \in [x_1, x_2]$ приріст функції дорівнює її першій варіації, тобто

$$\Delta\varphi = \delta\varphi. \quad (3.22)$$

Але

$$\delta\varphi = \varphi_y \cdot \delta y + \varphi_z \cdot \delta z. \quad (3.23)$$

Тож, з врахуванням (3.21), (3.22), (3.23) рівняння (3.20) можна переписати так:

$$\int_{x_1}^{x_2} (\varphi_y \cdot \delta y + \varphi_z \cdot \delta z) dx = 0, \quad (3.24)$$

або

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_y \cdot \delta y \cdot dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_z \cdot \delta z \cdot dx = 0. \quad (3.25)$$

З врахуванням виразів (3.12), (3.13) об'єми прямокутних призм, що задаються інтегралами у виразі (3.25), можна записати так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_y \cdot \delta y \cdot dx \approx \varphi_y|_{x_0} \cdot \sigma_1, \\ \int_{x_1}^{x_2} \varphi_z \cdot \delta z \cdot dx \approx \varphi_z|_{x_0} \cdot \sigma_2. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Підставляючи (3.26) у (3.25), в околі точки $x_0 \in [x_1, x_2]$ матимемо:

$$\varphi_y \cdot \sigma_1 = -\varphi_z \cdot \sigma_2, \quad (3.27)$$

звідки

$$\sigma_2 = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z} \cdot \sigma_1. \quad (3.28)$$

Підставляючи (3.28) у (3.16), в околі точки $x_0 \in [x_1, x_2]$ матимемо:

$$\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \cdot \sigma_1 - \frac{\varphi_y}{\varphi_z} \cdot \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) \cdot \sigma_1 = 0. \quad (3.29)$$

З рівняння (3.29) випливає, що

$$\frac{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}}{\varphi_y} = \frac{F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}}{\varphi_z}. \quad (3.30)$$

Оскільки всі операції до отримання співвідношень (3.30) ми проводили з використанням операції інтегрування по координаті x , то кожне співвід-

ношення у виразі (3.30) ми можемо прирівняти до невідомої нам функції $\lambda(x)$, тобто

$$\begin{cases} \frac{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}}{\varphi_y} = \lambda(x), \\ \frac{F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}}{\varphi_z} = \lambda(x). \end{cases} \quad (3.31)$$

В свою чергу, співвідношення (3.31) можна переписати так:

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \lambda(x) \cdot \varphi_y = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \lambda(x) \cdot \varphi_z = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Після всіх цих викладок ми можемо стверджувати, що для того, щоб функції (3.2) доставляли екстремум функціоналу (3.1) при наявності обмежень (3.3), необхідно, щоб вони були розв'язком рівнянь (3.32).

Виходячи з (3.31), формально, у співвідношеннях (3.32) необхідно було б поставити знак “мінус” при членах $\lambda(x) \varphi_y$, $\lambda(x) \varphi_z$, але, оскільки функція $\lambda(x)$ є поки що невизначеною, то при ній можна ставити будь-який знак. Нам зручно поставити “плюс” з такої причини: сконструюємо функцію

$$L = F(x, y, z, y', z') + \lambda(x) \cdot \varphi(x, y, z). \quad (3.33)$$

В точці (x_0, y_0, z_0) мінімуму функціонала (3.1) справедливим є вираз (3.3), тож зрозуміло, що в цій точці

$$L = F. \quad (3.34)$$

А тому ми маємо право від пошуку необхідних умов існування мінімуму функціонала J (3.1) перейти до пошуку умов існування мінімуму функціонала J^L , де

$$J^L = \int_a^b L dx = \int_a^b (F + \lambda(x) \cdot \varphi(x, y, z)) dx. \quad (3.35)$$

Цей перехід дозволяє перевести задачу пошуку умовного екстремуму функціонала (3.1) в задачу пошуку безумовного екстремуму функціонала (3.35), яку ми вже розв'язувати вміємо, оскільки знаємо, що за відсутності обмежень мінімум функціонала досягається на функціях, які є розв'язком системи рівнянь Ейлера, отриманої з підінтегральної функції кількох змінних цього функціонала.

Для нашого випадку ця система матиме вигляд:

$$\begin{cases} L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} = 0, \\ L_z - \frac{d}{dx} L_{z'} = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Знаходячи L_y , L_z , $L_{y'}$, $L_{z'}$, бачимо, що система (3.36) тотожна системі (3.32).

Але два рівняння системи (3.36) або, що одне й те ж, системи (3.32) не дозволяють однозначно знайти три невідомі функції

$$y(x), z(x), \lambda(x). \quad (3.37)$$

Тож, їх треба доповнити третім рівнянням, як таке, зрозуміло, доцільно взяти рівняння обмеження (3.3). В цьому випадку система визначальних рівнянь є замкнутою і такою, що дає однозначний розв'язок задачі пошуку умовного екстремуму.

Функцію $\lambda(x)$ Лагранж, який її вперше ввів, назвав невизначеним множником, а тому у варіаційному численні метод пошуку розв'язку задачі на умовний екстремум увійшов під назвою *методу невизначених множників Лагранжа*.

Зауваження: після того, як введенням функції L (3.33) ми перевели задачу на умовний екстремум у розряд найпростішої задачі варіаційного числення, для неї стають справедливими і введені нами раніше умови трансверсальності для екстремалей з рухомими кінцями, і умови Вейерштрасса–Ердмана для екстремалей зі зломами, і достатні умови Лежандра, за допомогою яких мінімум відрізняють від максимуму, і необхідні умови існування екстремуму для функціоналів, які залежать від старших похідних. Потрібно лише не забувати у співвідношеннях, якими ці умови визначаються, замість функції F та її похідних підставляти функцію L та її похідні. При цьому, якщо J має вигляд (2.88), а обмеження є аналогом (3.3), тобто

$$\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad (3.38)$$

то функція L за структурою буде подібною до (3.33), тобто матиме вигляд

$$L = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) + \lambda(x) \cdot \varphi(x, y_1, \dots, y_n). \quad (3.39)$$

Але якщо як обмеження виступає система рівнянь

$$\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n) = C_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad m \leq n, \quad (3.40)$$

то як L потрібно брати функцію

$$L = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \cdot (\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n) - C_j). \quad (3.41)$$

В цьому випадку систему рівнянь Ейлера (2.99), в яких замість $F_{y_i}, F_{y'_i}, i = \overline{1, n}$ беруться $L_{y_i}, L_{y'_i}, i = \overline{1, n}$, необхідно розв'язувати разом з (3.40), оскільки потрібно знайти не лише n екстремалей $y_i(x)$, але й m невизначених множників Лагранжа $\lambda_j(x)$.

3.2 Ізопериметрична задача оптимізації

В 1732 році Леонардом Ейлером було здійснено перший підхід до розв'язання задачі оптимізації, яка дістала назву *ізопериметричної*. В 1744 році ним же був опублікований розв'язок цієї задачі в найбільш загальному вигляді.

Формулювалась ізопериметрична задача оптимізації так: серед кривих однакової довжини, або, що одне й те ж, однакового периметра, знайти криву, яка обмежує найбільшу площу.

Математично це можна записати так: знайти криву $y(x)$, яка доставляє екстремум функціоналу

$$J^F = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (3.42)$$

яким оцінюється площа заданої фігури, за умови, що інший функціонал

$$J^K = \int_a^b K(x, y, y') dx, \quad (3.43)$$

яким задається довжина периметра цієї фігури, має сталі значення J_0^K , тобто

$$\int_a^b K(x, y, y') dx = J_0^K. \quad (3.44)$$

Розв'язував цю задачу Ейлер надзвичайно складним шляхом, який сьогодні може бути цікавим лише фахівцям з історії математики.

Ми наведемо розв'язок ізопериметричної задачі, який було отримано Лагранжем через 15 років у набагато простіший спосіб за допомогою його методу невизначених множників.

Суть розв'язку Лагранжа така: якщо у функціоналі (3.43) відпустити верхню границю, то отримаємо інтеграл зі змінною верхньою границею, тобто

$$\psi(x) = \int_a^x K(x, y, y') dx, \quad (3.45)$$

похідна від якого $\psi'(x)$ дорівнюватиме підінтегральній функції, тобто

$$\psi'(x) = K(x, y, y'). \quad (3.46)$$

Рівняння (3.46) можна розглядати як обмеження виду (3.40) при $j = 1$.

З урахуванням цього обмеження, виходячи із (3.41), функцію Лагранжа для ізопериметричної задачі можна записати таким чином:

$$L = F(x, y, y') + \lambda(x) \cdot (\psi'(x) - K(x, y, y')). \quad (3.47)$$

Тепер ми можемо ізопериметричну задачу переформулювати так: знайти функції $y(x)$ та $\psi(x)$, які доставляють мінімум функціоналу

$$J^L = \int_a^b L(x, y, \psi, y', \psi') dx. \quad (3.48)$$

Згідно з методом невизначених множників Лагранжа рівняння Ейлера для функціонала (3.48) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} = 0, \\ L_\psi - \frac{d}{dx} L_{\psi'} = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Підставляючи (3.47) в (3.49), отримаємо:

$$\begin{cases} F_y - \lambda(x) \cdot K_y - \frac{d}{dx} (F_{y'} - \lambda(x) \cdot K_{y'}) = 0, \\ -\frac{d}{dx} \lambda(x) = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

З другого рівняння системи (3.50) знайдемо, що

$$-\lambda(x) = C_1. \quad (3.51)$$

Підставляючи (3.51) в перше рівняння системи (3.50), отримаємо рівняння

$$F_y + C_1 \cdot K_y - \frac{d}{dx} (F_{y'} + C_1 \cdot K_{y'}) = 0, \quad (3.52)$$

яке в загальному вигляді є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Розв'язок цього рівняння $y(x, C_1, C_2, C_3)$ залежатиме від трьох сталих C_1, C_2, C_3 , наявність двох із яких (C_2, C_3) обумовлена другим порядком диференціального рівняння, а третьої (C_1) – підстановкою (3.51).

Для їх визначення, крім умови (3.44), яка після підстановки в функцію $K(x, y, y')$ загального розв'язку $y(x, C_1, C_2, C_3)$ та інтегрування результату підстановки по x в межах від a до b перетворюється на рівняння

$$Q(C_1, C_2, C_3) = J_0^K, \quad (3.53)$$

відносно невідомих C_1, C_2, C_3 , необхідно доповнити задачу ще двома граничними умовами, які матимуть вигляд

$$\begin{cases} y(a, C_1, C_2, C_3) = y_a, \\ y(b, C_1, C_2, C_3) = y_b. \end{cases} \quad (3.54)$$

Розв'язавши систему трьох рівнянь (3.53), (3.54) з трьома невідомими C_1, C_2, C_3 , ми знайдемо ті їх значення

$$\{C_1^*, C_2^*, C_3^*\}, \quad (3.55)$$

які, будучи підставленими у загальний розв'язок $y(x, C_1, C_2, C_3)$ рівняння (3.52), перетворюють його в екстремаль

$$y(C_1^*, C_2^*, C_3^*), \quad (3.56)$$

що доставляє екстремум функціоналу (3.42) при наявності обмеження (3.44), а тому є розв'язком ізопериметричної задачі оптимізації.

Мінімум від максимуму функціоналу (3.42) на екстремалі (3.56) відрізняють, розглядаючи умови Лежандра для функції L .

Нагадаємо, що якщо

$$L_{y'y'} > 0, \quad (3.57)$$

то екстремаль (3.56) доставляє мінімум функціоналу (3.42), а якщо

$$L_{y'y'} < 0, \quad (3.58)$$

то максимум.

В п'ятому розділі ми покажемо, як за допомогою алгоритму розв'язання ізопериметричної задачі можна оптимізувати різноманітні динамічні об'єкти.

Зауваження: при розгляді ізопериметричної задачі ми мінімізували функціонал (3.42), використавши функціонал (3.43) як обмеження (3.44). Але, мабуть можна було зробити і навпаки – мінімізувати функціонал (3.43), а функціонал (3.42) використати як обмеження. Зрозуміло, що хід розв'язування такої задачі не змінився б, змінилось би лише її змістовне трактування, оскільки при такій постановці задачі нам довелося би шукати криву найменшого периметра, що обмежує задану площу.

Тож можна стверджувати, що функції $F(x, y, y')$ і $K(x, y, y')$ в функції Лагранжа є *рівноправними*. Цей факт в математиці знайшов відображення в

які задані умовами задачі.

При інших заданих нами значеннях C_{m+1}, \dots, C_n отримаємо іншу систему функцій (3.62), яка теж задовольнятиме систему рівнянь (3.59).

Але можна поставити дещо іншу задачу, а саме: в умовах дії обмежень, які задаються системою рівнянь (3.59), знайти такі значення функцій $y_{m+1}(x), \dots, y_n(x)$, котрі на границі області їх задання досягали б екстремального значення.

Саме таку задачу оптимізації поставив Майєр і вказав на шлях її розв'язання, тому вона і отримала назву *задачі Майєра*.

Для її розв'язання вводять $(n - m)$ нових змінних

$$\begin{cases} y'_{m+1} = u_1, \\ y'_{m+2} = u_2, \\ \dots\dots\dots \\ y'_n = u_{n-m}, \end{cases} \quad (3.64)$$

формують функціонал

$$J = \int_a^b (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-m}) dx \quad (3.65)$$

і знаходять $(n - m)$ екстремалей, які доставляють екстремум цьому функціоналу в умовах дії обмежень, заданих системою рівнянь (3.59).

Функція Лагранжа для цієї задачі матиме вигляд:

$$L = (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-m}) + \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j(x) \cdot \varphi_j(\bullet), \quad (3.66)$$

де $(n - m)$ функцій $\varphi_j(\bullet)$, $j = \overline{1, n - m}$, беруться із системи рівнянь (3.59).

Зрозуміло, що шукані екстремалі повинні задовольняти систему рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$\begin{cases} L_{u_1} - \frac{d}{dx} L_{u'_1} = 0, \\ L_{u_2} - \frac{d}{dx} L_{u'_2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ L_{u_{n-m}} - \frac{d}{dx} L_{u'_{n-m}} = 0. \end{cases} \quad (3.67)$$

Система (3.67) після спрощення набуває вигляду:

$$\begin{cases} 1 + \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j(x) \cdot \varphi_{ju_1}(\bullet) = 0, \\ 1 + \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j(x) \cdot \varphi_{ju_2}(\bullet) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ 1 + \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j(x) \cdot \varphi_{ju_{n-m}}(\bullet) = 0. \end{cases} \quad (3.68)$$

Для однозначного розв'язку задачі Майєра необхідно визначити n функцій $y_i(x)$ та $(n-m)$ невизначених множників Лагранжа $\lambda_j(x)$, для чого потрібно мати $(2n-m)$ рівнянь. Рівнянь у трьох системах (3.59), (3.64) та (3.68) якраз і є $(2n-m)$. Тож, розв'язуючи всі ці три системи рівнянь разом, отримуємо розв'язок задачі Майєра.

3.4 Пошук екстремалей в задачах оптимізації з обмеженнями у вигляді нерівностей

В попередніх підрозділах цього розділу ми розв'язували задачу оптимізації за умови, що обмеження мали вигляд одного або системи рівнянь, якими задавалась якась поверхня. Це означало, що крива екстремалі повинна була лежати на цій поверхні.

Але ж при розв'язанні конкретних задач оптимізації може трапитись випадок, коли екстремаль необхідно шукати не серед кривих, які лежать на обмежувальній поверхні, а серед кривих, які проходять через область, що обмежується деякою поверхнею.

В цьому випадку обмеження вже задаватимуться не рівнянням чи системою рівнянь, а нерівністю або системою нерівностей.

Для побудови алгоритму розв'язування цього класу задач оптимізації розглянемо спочатку таку задачу: знайти екстремум функціонала

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (3.69)$$

за умови, що функція $y(x)$, котра доставлятиме екстремум функціоналу (3.69), задовольнятиме нерівність

$$y(x) \geq \varphi(x), \quad (3.70)$$

де $\varphi(x)$ – довільна крива, наприклад така, як показано на рис. 3.1.

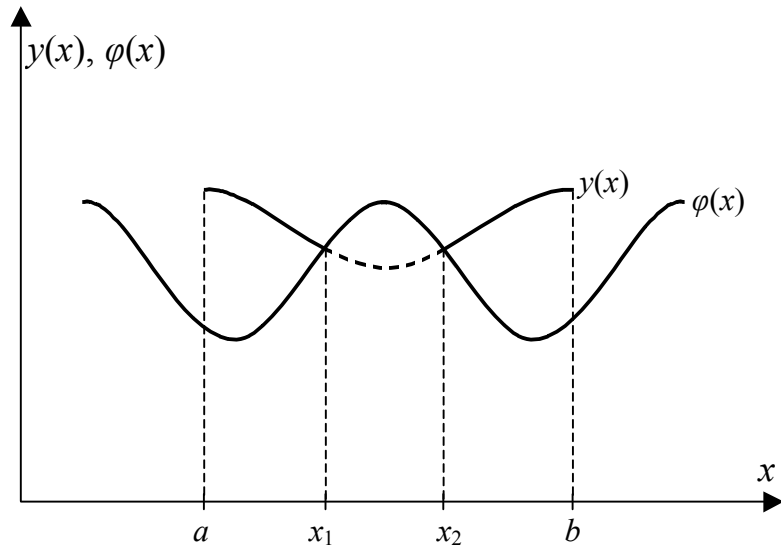


Рисунок 3.1 – Графічна інтерпретація обмеження в формі нерівності

З рис. 3.1 бачимо, що за відсутності обмеження (3.70) екстремаллю $y(x)$ була б частина синусоїди в межах від $x = a$ до $x = b$ з ділянкою від x_1 до x_2 , показаною пунктирною лінією, включно.

Але за наявності обмеження (3.70) екстремум функціонала (3.69) може бути досягнутим лише на складеній кривій:

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x), & x \in [a, x_1], \\ \varphi(x), & x \in (x_1, x_2), \\ y(x), & x \in [x_2, b]. \end{cases} \quad (3.71)$$

Зрозуміло, що функцію $y^*(x)$, яка задається виразом (3.71), не можна отримати із рівняння Ейлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (3.72)$$

для функціонала (3.69), оскільки виведення цього рівняння базувалось на варіації функції $y(x)$ в будь-якому напрямку зміни δy , а з рис. 3.1 видно, що на ділянці $x \in (x_1, x_2)$ варіація функції $y(x)$ може бути лише односторонньою, що входить в протиріччя з умовою виведення рівняння Ейлера.

Вихід із цієї ситуації можна знайти, якщо здійснити заміну змінних у такий спосіб.

Нехай

$$z^2 = y - \varphi, \quad (3.73)$$

звідки

$$y = z^2 + \varphi. \quad (3.74)$$

Продиференціювавши (3.74), отримаємо

$$y' = 2z \cdot z' + \varphi'. \quad (3.75)$$

В нових змінних (x, z) функціонал (3.69) набуде вигляду

$$J = \int_a^b F(x, z^2 + \varphi, 2z \cdot z' + \varphi') dx. \quad (3.76)$$

Введенням функції $z(x)$ замість $y(x)$ ми зняли обмеження (3.70) у вигляді нерівності, оскільки для функції $z(x)$ воно виконується завжди.

Але у такий спосіб задачу оптимізації з обмеженням звели до найпростішої задачі варіаційного числення – пошуку екстремуму функціонала (3.76) у відкритій області.

Як ми вже знаємо з попереднього, необхідні умови існування екстремуму функціонала (3.76) задаються рівнянням Ейлера

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0. \quad (3.77)$$

З врахуванням (3.74) і (3.75) для $F_z, F_{z'}$ знайдемо, що

$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial z} = F_y \cdot 2z + F_{y'} \cdot 2z', \quad (3.78)$$

$$F_{z'} = \frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial z'} = F_{y'} \cdot 2z, \quad (3.79)$$

$$\frac{d}{dx} F_{z'} = \frac{d}{dx} (F_{y'} \cdot 2z) = 2z' \cdot F_{y'} + 2z \cdot \frac{d}{dx} F_{y'}. \quad (3.80)$$

Підставляючи (3.78), (3.80) у (3.77), отримаємо

$$2z \cdot F_y + 2z' \cdot F_{y'} - 2z' \cdot F_{y'} - 2z \cdot \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (3.81)$$

або

$$2z \cdot \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) = 0. \quad (3.82)$$

З рівняння (3.82) отримуємо два нових рівняння:

$$z = 0, \quad (3.83)$$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (3.84)$$

Розв'язком рівняння (3.83) є функція

$$y(x) = \varphi(x), \quad x \in (x_1, x_2), \quad (3.85)$$

яка є середньою складовою функції $y^*(x)$, заданої виразом (3.71), а розв'язком рівняння (3.84) є відрізки екстремалі $y(x)$, які є крайніми складовими функції $y^*(x)$.

Цими викладками ми довели, що екстремум функціонала (3.69) за обмежень (3.70) досягається на складеній кривій, однією частиною якої є екстремаль, а другою – крива, яка є границею області обмеження.

Таким чином, щоб знайти загальний розв'язок поставленої на початку цього підрозділу задачі оптимізації, необхідно:

- 1) скласти рівняння Ейлера (3.84) для функціонала (3.69);
- 2) розв'язати отримане рівняння Ейлера і знайти екстремаль $y(x)$;
- 3) знайти точки перетину x_1, x_2 екстремалі $y(x)$ з функцією обмеження $\varphi(x)$, скориставшись рівнянням (3.85);
- 4) скласти функцію $y^*(x)$, яка задає загальний розв'язок задачі оптимізації, за виразом (3.71).

Для конкретизації загального розв'язку $y^*(x)$ задачі оптимізації необхідно знайти дві сталі C_1, C_2 , які з'являються в екстремалі $y(x)$ в результаті подвійного інтегрування рівняння Ейлера. Зрозуміло, що якщо екстремаль $y(x)$ в інтервалі (x_1, x_2) не має точки злому, то для визначення сталей C_1, C_2 буде достатньо двох рівнянь граничних умов, тобто

$$\begin{cases} y(a) = y_a, \\ y(b) = y_b. \end{cases} \quad (3.86)$$

Якщо ж в інтервалі (x_1, x_2) екстремаль $y(x)$ має точку злому, то тоді її сталі C_1, C_2 на початковій ділянці $[a, x_1]$ і на кінцевій ділянці $[x_2, b]$ матимуть різні значення, тобто фактично треба знаходити не дві сталі C_1, C_2 , а чотири – C_1, C_2, C_3, C_4 .

Тож для загального випадку, крім рівнянь (3.86), потрібно мати ще два додаткових рівняння, оскільки лише за допомогою чотирьох рівнянь можна визначити всі чотири сталі інтегрування, які увійдуть у функцію $y^*(x)$.

Для виведення цих додаткових рівнянь припустимо спочатку, що

$$x_2 = b, \quad (3.87)$$

тобто що функція $y^*(x)$, яка доставляє екстремум функціоналу (3.69) за умови (3.70), має лише дві верхні складові у виразі (3.71).

В цьому випадку функціонал (3.69) можна переписати так:

$$J = \int_a^{x_1} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^b F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx. \quad (3.88)$$

Оскільки в точці x_1 маємо точку переходу від $y(x)$ до $\varphi(x)$, то в разі надання варіації цій точці, тобто переходу від x_1 до $x_1 + \delta x_1$, матимемо і варіації складових функціоналів, що входять у вираз (3.88).

Для першого з цих функціоналів функція $y(x)$ є екстремаллю, а функція $\varphi(x)$ є рівнянням кривої, по якій “ковзає” кінець екстремалі. Для другого з цих функціоналів навпаки – екстремаллю є $\varphi(x)$, а $y(x)$ – це рівняння кривої, по якій “ковзає” кінець екстремалі.

Тож справедливою буде рівність, що випливає з умов трансверсальності:

$$\left(F(x, y, y') - (y' - \varphi') \cdot F_{y'} \right) \Big|_{x_1} = \left(F(x, \varphi, \varphi') - (\varphi' - y') \cdot F_{\varphi'} \right) \Big|_{x_1}, \quad (3.89)$$

з якої випливає, що

$$\begin{cases} F(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = F(x_1, \varphi(x_1), \varphi'(x_1)), \\ (y'(x_1) - \varphi'(x_1)) \cdot F_{y'} \Big|_{x_1} = (\varphi'(x_1) - y'(x_1)) \cdot F_{\varphi'} \Big|_{x_1}. \end{cases} \quad (3.90)$$

Обидва рівняння системи (3.90) можуть задовольнятися лише за умови, що:

$$\begin{cases} y(x_1) = \varphi(x_1), \\ y'(x_1) = \varphi'(x_1). \end{cases} \quad (3.91)$$

Проробивши аналогічні викладки для точки x_2 , можна отримати аналогічні рівняння:

$$\begin{cases} y(x_2) = \varphi(x_2), \\ y'(x_2) = \varphi'(x_2). \end{cases} \quad (3.92)$$

Цих шести рівнянь, що задаються виразами (3.86), (3.91), (3.92), достатньо для того, щоб знайти і граничні точки x_1 , x_2 , і сталі інтегрування C_1 , C_2 , C_3 , C_4 .

3.5 Завдання для самоперевірки

1. В чому відмінність пошуку умовного екстремуму від безумовного?
2. Сформулюйте задачу Лагранжа і алгоритм її розв'язання з використанням невизначених множників.
3. Доведіть, що задачу мінімізації функціонала за наявності обмежень можна трансформувати у найпростішу задачу варіаційного числення відносно функціонала, в який ці обмеження введені з використанням невизначених множників Лагранжа.
4. Запишіть алгоритм Лагранжа для функціонала, що залежить від старших похідних, в умовах обмежень, визначених одним рівнянням, а також системою рівнянь.
5. Як формулюється ізопериметрична задача оптимізації і чому вона називається ізопериметричною?
6. Побудуйте алгоритм розв'язання ізопериметричної задачі оптимізації.
7. Як відрізнити мінімум функціонала від максимуму в задачі на умовний екстремум?
8. Сформулюйте задачу Майєра. В чому її особливість?
9. Як звести задачу Майєра до задачі Лагранжа?
10. Побудуйте алгоритм розв'язання задачі Майєра з використанням невизначених множників Лагранжа.
11. В чому суть принципу взаємності в ізопериметричній задачі?
12. Що собою являє екстремаль в задачі оптимізації з обмеженнями у вигляді нерівностей?
13. Як перевести задачу на умовний екстремум при обмеженнях у вигляді нерівностей в задачу на безумовний екстремум?
14. Як скласти рівняння для визначення точок припасування функцій і сталих інтегрування в задачі оптимізації з обмеженнями у вигляді нерівностей? Скільки потрібно таких рівнянь і чому?

РОЗДІЛ 4 ОПТИМІЗАЦІЯ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

В цьому розділі викладено методи оптимізації, метою яких є синтез математичних моделей оптимального керування динамічними об'єктами. Наведено приклади постановок найбільш поширених задач цього класу. Розглянуто задачу синтезу оптимального керування шляхом зведення її до ізопериметричної та з використанням принципу максимуму Понтрягіна. Показано як для розв'язання задач оптимального керування можна використати динамічне програмування Беллмана.

4.1 Математична модель динамічного об'єкта

Як відомо з курсу ідентифікації, будь-який динамічний об'єкт в просторі змінних його стану $x_i, i = \overline{1, n}$ можна описати системою диференціальних рівнянь 1-го порядку виду

$$x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; u_1, \dots, u_k, \dots, u_m), \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}, \quad (4.1)$$

де

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad i = \overline{1, n} - \quad (4.2)$$

похідні від змінних стану x_i динамічного об'єкта, а

$$u_k, k = \overline{1, m} - \quad (4.3)$$

керувальні сигнали, які подаються на вхід динамічного об'єкта для зміни його стану в потрібному напрямку (як правило, їх називають просто керуваннями); $f_i(\bullet, \bullet), i = \overline{1, n}$ – функції, які пов'язують між собою змінні стану $x_i, i = \overline{1, n}$ та керування $u_k, k = \overline{1, m}$ в кожний момент часу t для визначення похідних $x'_i, i = \overline{1, n}$ від змінних стану.

Систему диференціальних рівнянь (4.1) в матричній формі можна записати так:

$$x' = f(x, u, t), \quad (4.4)$$

де x', x, f – матриці-стовпці розмірності $[n \times 1]$ виду

$$x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

u – матриця-стовпець розмірності $[m \times 1]$ виду

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

T – символ транспонування, а t – скаляр.

Реакціями динамічного об'єкта на керування $u_k, k = \overline{1, m}$ є вихідні сигнали $y_j, j = \overline{1, r}$, які залежать також і від станів об'єкта $x_i, i = \overline{1, n}$, тобто

$$y_j = g_j(t, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; u_1, \dots, u_k, \dots, u_m), \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, r}, \quad (4.7)$$

де $g_j, j = \overline{1, r}$, – функції, які пов'язують між собою змінні стану $x_i, i = \overline{1, n}$ та керування $u_k, k = \overline{1, m}$ в кожний момент часу t для визначення вихідних сигналів $y_j, j = \overline{1, r}$ об'єкта.

В матричній формі систему рівнянь (4.7) можна записати так:

$$y = g(x, u, t), \quad (4.8)$$

де x і u мають вигляд матриць-стовпців розмірності $[n \times 1]$ та $[m \times 1]$, показаних у (4.5), (4.6), а y і g є матрицями-стовпцями розмірності $[r \times 1]$ виду:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_r \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Математичну модель динамічного об'єкта, виражену матричними рівняннями (4.4), (4.8), можна для наочності показати у вигляді структурної схеми, зображеної на рис. 4.1, де символом $\frac{1}{p}$ позначено оператор інтегрування.

Якщо динамічний об'єкт керований, то керування не дозволяють його змінним стану суттєво відхилитись від значень, заданих режимом роботи. Тож, якщо в рівняннях (4.4), (4.8) за x взяти відхилення координат об'єкта від їх значень в заданому режимі, то отримаємо рівняння збуреного руху, в початковому стані якого, тобто при $t = 0$, значення координат $x_i, i = \overline{1, n}$ не є рівними нулю, тобто

$$x_i(0) \neq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.10)$$

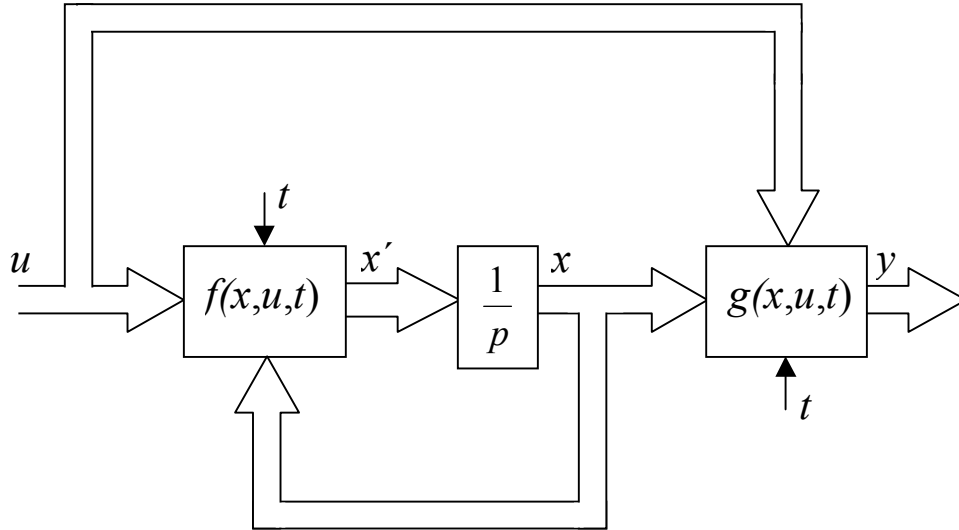


Рисунок 4.1 – Структурна схема математичної моделі динамічного об’єкта, заданої матричними рівняннями (4.4), (4.8)

А задача керування і полягає в тому, щоб через деякий час t_k повернути збурений об’єкт у заданий режим, тобто звести всі його змінні стану до значення

$$x_i(t_k) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.11)$$

Розкладаючи функції $f_i, i = \overline{1, n}$ і $g_j, j = \overline{1, m}$ у степеневі ряди і залишаючи лише лінійні члени розкладу, що допустимо, оскільки керування не дозволяють координатам x суттєво відхилитись від заданого режиму, рівняння (4.4), (4.8) можна лінеаризувати, тобто подати їх у вигляді:

$$\begin{cases} x' = A \cdot x + B \cdot u, \\ y = C \cdot x + D \cdot u, \end{cases} \quad (4.12)$$

де $A(n \times n), B(n \times m), C(r \times n), D(r \times m)$ – матриці лінійних коефіцієнтів, що визначаються розкладом функцій $f_i, i = \overline{1, n}$, $g_j, j = \overline{1, m}$ у степеневі ряди за степенями x та u і мають вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & c_{r3} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r1} & d_{r2} & d_{r3} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Для прикладу запишемо матричні рівняння (4.12) у звичайному вигляді для випадку одного керування, тобто коли $m = 1$:

$$\begin{cases} x'_i = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot x_l + b_{i1} \cdot u_1, & i = \overline{1, n}, \\ y_j = \sum_{s=1}^r c_{js} \cdot x_s + d_{j1} \cdot u_1, & j = \overline{1, r}. \end{cases} \quad (4.14)$$

4.2 Приклади постановок задач оптимального керування динамічними об'єктами

Будемо розглядати в цьому підрозділі клас задач оптимального керування, який характеризується тим, що:

- 1) динамічний об'єкт описується математично моделлю (4.4);
- 2) час початку процесу t_1 , початковий стан $x(t_1) = x^{(1)}$ і кінцевий стан $x(t_2) = x^{(2)}$ є заданими, а кінцевий час t_2 може бути як заданим, так і довільним;
- 3) критерій оптимізації задається у вигляді

$$J = F(x^{(1)}, x^{(2)}, t_1, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt, \quad (4.15)$$

одна із складових якого може дорівнювати нулю;

- 4) на керування u і змінні стану x можуть бути накладені обмеження.

За цих умов метою оптимізації є синтез такої функції керування $u(t)$, яка здатна перевести об'єкт зі стану $x^{(1)}$ у стан $x^{(2)}$ та одночасно забезпечити оптимум (мінімум чи максимум) критеріального функціонала (4.15).

4.2.1 Постановка задачі оптимізації динамічного об'єкта за швидкодією

Нехай задано динамічний об'єкт, математична модель якого в просторі змінних стану має вигляд (4.4). Нехай задано, що в початковий момент часу t_1 об'єкт знаходиться в стані $x^{(1)}$. Відомим є також кінцевий стан об'єкта $x^{(2)}$, в який він переходить в момент часу t_2 під дією керування $u(t)$, яке має обмеження

$$u_k(t) \leq U, \quad k = \overline{1, m}. \quad (4.16)$$

Завдання: перевести динамічний об'єкт зі стану $x^{(1)}$ у стан $x^{(2)}$ за найкоротший час

$$\tilde{t} = t_2 - t_1. \quad (4.17)$$

Зрозуміло, що для цієї задачі критерієм оптимізації є функціонал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt, \quad (4.18)$$

з якого випливає вираз (4.17) і який, в свою чергу, отримаємо із загальної форми (4.15) за умови, що

$$\begin{cases} F = 0, \\ L = 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

Слід зазначити, що для електромеханічних об'єктів, які використовуються, наприклад, у комплексах протиракетної оборони, ця задача є однією з найактуальніших.

4.2.2 Постановка задачі оптимізації за витратами палива для забезпечення руху динамічного об'єкта

Нехай задано динамічний об'єкт (ракета, літак, автомобіль), математична модель якого в просторі змінних стану має вигляд (4.4). Нехай задані як початковий $x^{(1)}$, так і кінцевий $x^{(2)}$ стани об'єкта, а також початковий t_1 і кінцевий t_2 моменти часу, в які ці стани об'єкта мають місце. Нехай керуваннями цього об'єкта буде тяга двигуна $u(t)$, яка залежить від витрат палива, а тому мають місце обмеження виду (4.16).

Завдання: перевести динамічний об'єкт зі стану $x^{(1)}$, який він мав у момент часу t_1 , у стан $x^{(2)}$ у заданий момент часу t_2 , витративши на це мінімум палива.

В цьому випадку критерієм оптимізації буде функціонал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^m |u_k(t)| dt, \quad (4.20)$$

який отримаємо із (4.15) за умови, що

$$\begin{cases} F = 0, \\ L = \sum_{k=1}^m |u_k(t)| dt. \end{cases} \quad (4.21)$$

4.2.3 Постановка задачі оптимізації за мінімумом суми квадратів відхилень координат динамічного об'єкта від їх значень у заданому режимі

Нехай задано динамічний об'єкт, математична модель якого у просторі змінних стану має вигляд (4.4). Нехай вектор змінних стану $x(t)$ задає від-

хилення координат об'єкта від їх значень в заданому режимі. Тоді якість перехідного процесу в межах від моменту часу t_1 до t_2 можна оцінити за допомогою функціонала

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 dt, \quad (4.22)$$

який можна переписати і так –

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n (x^T \cdot x) dt, \quad (4.23)$$

де x^T – вектор-рядок, на який перетворюється вектор-стовпець x внаслідок транспонування.

Мінімізуючи критерій (4.23), ми знайдемо умови, за яких зі збуреного стану $x^{(1)}$ у момент t_1 динамічний об'єкт прийде в момент t_2 у стан, що характеризується близькими до нуля значеннями змінних стану x , які задають відхилення координат.

В узагальненому випадку критерій (4.23) має вигляд

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n (x^T Q x) dt, \quad (4.24)$$

де Q – симетрична додатно визначена матриця розмірності $[n \times n]$.

З критерію (4.24) критерій (4.23) можна отримати, якщо матрицю Q визначити як діагональну з одиничними елементами на головній діагоналі.

У цій задачі характерним є те, що керування об'єкта визначаються через змінні стану, входячи у такий спосіб безпосередньо в критерій.

4.2.4 Постановка задачі мінімізації затрат енергії на керування динамічним об'єктом

Нехай керуваннями $u_k, k = \overline{1, m}$ динамічного об'єкта є струми в керувальних контурах (наприклад, в силових і керувальних обмотках магнітного підсилювача, в обмотці збудження генератора, в якірних обмотках генератора та електродвигуна системи автоматизованого електропривода, включеного за схемою «Г–Д»), котрі мають активні опори $r_k, k = \overline{1, m}$.

Втрати електричної потужності ΔP на здійснення процесу керування можна в цьому випадку визначити як

$$\Delta P = \sum_{k=1}^m u_k^2 \cdot r_k = u^T R u, \quad (4.25)$$

де R – матриця активних опорів керувальних контурів розмірності $[m \times m]$.

Зрозуміло, що затрати активної електричної енергії за відрізок часу $(t_2 - t_1)$, витраченої на процес керування, можна знайти за допомогою функціонала

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^m u_k^2(t) \cdot r_k dt = \int_{t_1}^{t_2} (u^T R u) dt. \quad (4.26)$$

Мінімізуючи функціонал (4.26), ми знайдемо такі значення керувань $u_k, k = \overline{1, m}$ із області (4.16), які дозволяють здійснювати процес керування динамічним об'єктом, що задається математичною моделлю (4.4), з мінімальними затратами енергії.

4.2.5 Постановка задачі оптимального керування кінцевим станом динамічного об'єкта

Нехай потрібно зенітну ракету комплексу протиракетної оборони, яка описується моделлю (4.4), привести в точку простору з координатами $x^{(2)}$, в якій у момент t_2 знаходиться ворожа балістична ракета, модель якої також можна задати у вигляді (4.4).

В цьому випадку критерієм оптимізації можна взяти функцію

$$F = F(x_2, t_2), \quad (4.27)$$

яку отримуємо із (4.15) за умови, що $L = 0$.

Якщо евклідові координати кінцевого стану обох ракет позначити як

$$\{x_{31}^{(2)}, x_{32}^{(2)}, x_{33}^{(2)}, x_{\delta 1}^{(2)}, x_{\delta 2}^{(2)}, x_{\delta 3}^{(2)}\}, \quad (4.28)$$

то критеріальну функцію (4.27) можна записати у вигляді

$$F = \sum_{i=1}^3 (x_{3i}^{(2)}(t_2) - x_{\delta i}^{(2)}(t_2))^2. \quad (4.29)$$

Мінімізуючи відстань між ракетами в момент часу t_2 , яка задається функцією (4.29), ми отримуємо алгоритм оптимального керування кінцевим станом динамічного об'єкта.

4.2.6 Можливості використання в задачах оптимізації більш складних критеріальних функціоналів

Досить часто задачу оптимізації динамічного об'єкта з моделлю (4.4) за швидкодією необхідно розв'язувати в умовах мінімуму витрат палива.

В цьому випадку критеріальний функціонал доводиться формувати у вигляді

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^m |u_k(t)| + 1 \right) dt, \quad (4.30)$$

що об'єднує функціонали (4.18) та (4.20).

А якщо ми побажаємо мінімізувати квадрат сумарної похибки динамічного об'єкта в умовах мінімуму витрат енергії на процес керування, то як критеріальний функціонал доведеться взяти функціонал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (4.31)$$

який є симбіозом критеріїв (4.24) та (4.26).

Ми сподіваємось, що наведених прикладів досить для того, щоб зрозуміти, як формулюються задачі оптимізації керування динамічними об'єктами, і які функціонали та функції можуть використовуватись в цих задачах як критерії оптимізації.

4.3 Синтез оптимального за швидкодією керування лінійним динамічним об'єктом

Припустимо, що в задачі керування динамічним об'єктом виконуються умови, що привели до співвідношень (4.10), (4.11).

Математичну модель такого об'єкта, як показано в підрозділі 4.1, можна записати у вигляді (4.12), (4.13).

Нехай поставлена задача привести об'єкт у стан (4.11) за найкоротший час, тобто оптимізувати його за критерієм (4.18) за умови, що на змінні керування $u_k, k = \overline{1, m}$, накладено обмеження (4.16), які шляхом нормування (ділення на максимальне значення) можна привести до вигляду

$$|u_k| \leq 1, \quad k = \overline{1, m}. \quad (4.32)$$

Для спрощення викладок розглянемо випадок, коли має місце лише одне керування $u_1(t)$, тобто коли система керування в просторі змінних стану описується математично моделлю (4.14).

Зауважимо, що процеси в об'єкті фактично описуються лише першим рівнянням моделі (4.14), а друге рівняння – це модель спостерігача, який хоче спостерігати за поведінкою вихідних координат динамічного об'єкта при зміні керувань.

Порівнюючи постановку даної задачі з задачею Лагранжа, бачимо, що у нас є все для того, щоб застосувати його метод невизначених множників.

Зрозуміло, що для отримання рівнянь Ейлера, розв'язки яких мінімізують критерій Лагранжа

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(x, x', u, u', \lambda, t) dt, \quad (4.33)$$

виходячи з обмежень (4.14), основного критерію (4.18) і граничних умов (4.10), (4.11), функцію Лагранжа необхідно взяти у вигляді

$$L(x, x', u, u', \lambda, t) = 1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot \left(x'_i - \sum_{l=1}^n a_{il} x_l - b_{i1} u_1 \right). \quad (4.34)$$

Рівняння Ейлера для системи з функцією Лагранжа (4.34) матимуть вигляд

$$\begin{cases} L_{u_1} - \frac{d}{dt} L_{u'_1} = 0, \\ L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x'_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.35)$$

Оскільки функція Лагранжа L явно від u'_1 не залежить, то перше рівняння системи (4.35) перетворюється на рівняння

$$L_{u_1} = 0. \quad (4.36)$$

Взявши частинну похідну за u_1 від (4.34), отримаємо

$$L_{u_1} = \frac{\partial L}{\partial u_1} = - \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot b_{i1}. \quad (4.37)$$

Підставляючи (4.37) в (4.36), матимемо

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_{i1} = 0. \quad (4.38)$$

З викладеного вище випливає, що екстремалі для поставленої задачі можуть існувати лише в одному окремому випадку – коли невизначені множники Лагранжа $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ пов'язані між собою лінійним рівнянням (4.38).

А це, в свою чергу, означає, що оптимум (мінімум чи максимум) функціонала (4.33) в усіх інших випадках досягається лише на граничних значеннях керувань, тобто при

$$|u_1| = 1. \quad (4.39)$$

При цьому цілком зрозуміло, що якщо динамічний об'єкт описується диференціальним рівнянням першого порядку, а тому перехідний процес його змінної стану має аперіодичний характер, то для досягнення екстремуму функціонала (4.33) досить встановити лише одне значення керування

$$u_1(t) = +1 \quad (4.40)$$

або

$$u_1(t) = -1. \quad (4.41)$$

Якщо ж динамічний об'єкт описується двома диференціальними рівняннями 1-го порядку, тобто його математична модель має другий поряд-

док, то зрозуміло, що після подачі в динамічний об'єкт керування у вигляді (4.40) і виходу координати $x(t)$ за усталене значення, обов'язково треба переключити це керування на реалізацію на другому етапі перехідного процесу закону (4.41), тобто для об'єкта 2-го порядку треба здійснити одне переключення керування з (4.40) на (4.41), щоб з максимальною швидкістю перевести об'єкт із заданого початкового стану $x^{(1)}$ у заданий кінцевий стан $x^{(2)}$.

Відомий радянський учений в області автоматичного керування професор Фельдбаум довів, що для переведення динамічного об'єкта n -го порядку з одного заданого стану в інший з максимальною швидкістю у разі, якщо всі корені його характеристичного рівняння є дійсними, необхідно здійснити не більше ніж $(n-1)$ переключень керування з (4.40) на (4.41) (або навпаки).

Зрозуміло, що в точках $t_i, i = \overline{1, n-1}$ переключення функція $u_1(t)$ зазнає розривів 1-го роду, тобто вона є кусково-безперервною. Нагадаємо, що класичне варіаційне числення працює лише з функціями гладкими, а в окремих випадках – з кусково-гладкими.

Цією задачею ми розширюємо клас функцій, які використовуються при оптимізації, до кусково-безперервних.

Для конкретизації керування $u_1(t)$ фактично необхідно лише побудувати алгоритм знаходження координат $t_i, i = \overline{1, n-1}$ точок його переключення з (4.40) на (4.41) (або навпаки).

Для побудови цього алгоритму змінимо постановку задачі так, щоб вона стала ізопериметричною.

Для цього обмеження (4.39) замінимо еквівалентною йому умовою

$$\int_{t_1}^{t_2} u_1^{2q} dt = t_2 - t_1 = T, \quad q \rightarrow \infty. \quad (4.42)$$

Зрозуміло, що (4.42) буде виконуватись лише за умови (4.39), оскільки якщо

$$|u_1| > 1, \quad (4.43)$$

то при $q \rightarrow \infty$

$$\int_{t_1}^{t_2} u_1^{2q} dt \rightarrow \infty, \quad (4.44)$$

а якщо

$$|u_1| < 1, \quad (4.45)$$

то при $q \rightarrow \infty$

$$\int_{t_1}^{t_2} u_1^{2q} dt \rightarrow 0. \quad (4.46)$$

Заміна обмеження (4.39) функціоналом (4.42) дозволяє нам задачу оптимізації сформулювати так: знайти таке керування $u_1(t)$ динамічним об'єктом з моделлю (4.12), яке забезпечує мінімум функціонала (4.18) за умови, що має місце функціональне співвідношення (4.42) – а це вже задача ізопериметрична з обмеженнями, заданими моделлю (4.12), для якої функцію Лагранжа можна записати у вигляді:

$$L(x, x', u, u', \lambda, t) = 1 + \lambda_0 u^{2q} + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot \left(x'_i - \sum_{l=1}^n a_{il} x_l - b_{i1} u_1 \right). \quad (4.47)$$

І хоча первинні рівняння Ейлера в загальному вигляді для функції Лагранжа (4.47) будуть мати такий же вигляд (4.35), що і для функції Лагранжа (4.34), вони після взяття частинних похідних будуть мати дещо інший вигляд, а саме:

$$2 \cdot q \cdot \lambda_0 \cdot u^{2q-1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot b_{i1} = 0, \quad (4.48)$$

$$\lambda'_i + \sum_{l=1}^n \lambda_l(t) \cdot a_{il} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.49)$$

в чому легко переконатись, порівнявши (4.38) з (4.48), які отримуємо із (4.36).

З рівняння (4.48) маємо

$$u_1(t) = \sqrt[2q-1]{\frac{1}{2q\lambda_0} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot b_{i1}}. \quad (4.50)$$

З попередніх викладок ми вже знаємо, що графік керування $u_1(t)$ має вигляд, наведений на рис. 4.2, обумовлений послідовно змінюючими одне одного співвідношеннями (4.40), (4.41).

Тож, за допомогою співвідношення (4.50) ми визначаємо не поточне значення $u_1(t)$, а лише його знак “+” чи “-”, оскільки поточне значення і в першому випадку, і в другому буде дорівнювати одиниці.

Зрозуміло, що знак кореня непарного порядку (а $(2q-1)$ при будь-якому значенні q буде непарним числом) збігається зі знаком підкореневого виразу. Тож, закон керування (4.50) з врахуванням (4.40) і (4.41) можна переписати так

$$u_1(t) = 1 \cdot \text{sign} \left[\frac{1}{2q\lambda_0} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot b_{i1} \right], \quad (4.51)$$

де символ «sign» означає “знак” і задає знак «+» на відрізку значень t , наприклад, $t \in [t_0, t_1]$, для якого

$$\frac{1}{2q\lambda_0} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot b_{i1} > 0, \quad (4.52)$$

і знак «-» на відрізку значень t , наприклад, $t \in [t_1, t_2)$, для якого

$$\frac{1}{2q\lambda_0} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot b_{i1} < 0. \quad (4.53)$$

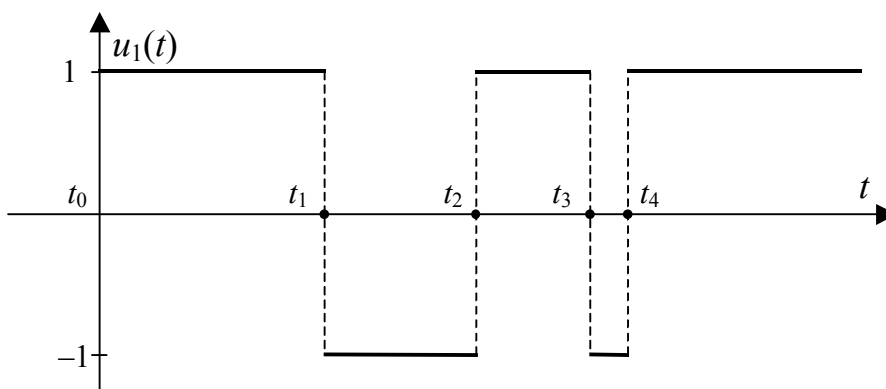


Рисунок 4.2 – Графік оптимального керування $u_1(t)$ динамічним об'єктом 5-го порядку

Оскільки $2q\lambda_0$ завжди є числом, що більше нуля, і фактично відіграє роль нормувального множника, то знак “+” чи “-” в законі керування (4.51) визначається виключно знаком співвідношення

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot b_{i1}. \quad (4.54)$$

Розв’язавши систему n лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку (4.49), знайдемо n функцій $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, підставивши які в співвідношення (4.54), знайдемо всі точки t_i , $i = \overline{1, n-1}$, в яких керування $u_1(t)$ (4.51) змінює знак з «+» на «-» або з «-» на «+».

Реалізуючи цей закон керування, ми переведемо динамічний об'єкт, який описується математичною моделлю (4.12), зі стану $x^{(1)}$ у стан $x^{(2)}$ за найкоротший час T .

4.4 Синтез законів оптимального керування динамічними об'єктами на основі принципу максимуму Понтрягіна

Розглянемо таку задачу: нехай маємо динамічний об'єкт, математичною моделлю якого є система диференціальних рівнянь n -го порядку, яку в векторно-матричній формі у загальному вигляді можна записати так

$$x' = f(x, u, t). \quad (4.55)$$

Це може бути, наприклад, і модель, що задана першим рівнянням системи (4.12).

Початкові умови для системи (4.55) задамо у вигляді

$$x(t_1) = x^{(1)}. \quad (4.56)$$

Це можуть бути, наприклад, умови, що задані співвідношеннями (4.10).

Необхідно знайти таку векторну m -вимірну функцію керування $u(t)$ за умови, що

$$|u_k| \leq 1, \quad k = \overline{1, m}, \quad (4.57)$$

яка б переводила динамічний об'єкт за час

$$T = t_2 - t_1 \quad (4.58)$$

зі стану (4.56) у стан

$$x(t_2) = x^{(2)} \quad (4.59)$$

за умови, що деякий функціонал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} f_0(x, u, t) dt \quad (4.60)$$

на цьому ж відрізку часу досягає мінімуму.

Нагадаємо, що в задачах максимальної швидкодії

$$f_0(x, u, t) = 1. \quad (4.61)$$

Зазначимо також, що кінцевий стан (4.59) може бути і таким, як визначено у співвідношеннях (4.11) – це по-перше, а по-друге, що значення частини змінних стану, наприклад, x_1, \dots, x_m , в кінцевому стані можуть бути заданими, тобто

$$\begin{cases} x_1(t_2) = s_1, \\ x_2(t_2) = s_2, \\ \vdots \\ x_m(t_2) = s_m, \end{cases} \quad (4.62)$$

а значення іншої частини змінних стану, наприклад, $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, можуть бути довільними. При цьому значення m може бути і таким, що дорівнює нулю – тобто всі n змінних стану в кінцевому стані динамічного об'єкта є довільними.

Що ми робили в попередньому підрозділі, приступаючи до розв'язання аналогічної задачі?

Ми починали зі складання функції Лагранжа $L(x, u, t)$ для того, щоб від мінімізації критерію (4.60) перейти до мінімізації критерію

$$J^* = \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt, \quad (4.63)$$

тобто щоб від задачі Ейлера перейти до задачі Лагранжа.

Зрозуміло, що функція Лагранжа у векторно-матричному вигляді для нашого випадку буде такою:

$$L(x, u, t) = f_0(x, u, t) + \lambda^T \cdot (x' - f(x, u, t)). \quad (4.64)$$

Якщо до системи n рівнянь (4.55) додати ще одне

$$x'_0 = f_0(x, u, t), \quad (4.65)$$

яке отримаємо із (4.60), відпустивши верхню границю і взявши похідну від цього критеріального функціонала, то функцію Лагранжа (4.64) можна переписати у вигляді

$$L(x, u, t) = \psi^T \cdot x' - \psi^T \cdot f(x, u, t), \quad (4.66)$$

де векторна функція $f(x, u, t)$ уже має розмірність $[(n+1) \times 1]$ і включає в себе $f_0(x, u, t)$, а множники $\psi_i(t)$, $i = \overline{0, n}$ – це ті ж $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, до яких додано λ_0 , яке дорівнює одиниці, що і в функції Лагранжа (4.64), але позначені так, як їх позначав Понтрягін.

Нагадаємо, що в задачах оптимізації з обмеженнями від мінімізації первинного функціонала (4.60) переходять до мінімізації функціонала

$$J^* = \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt, \quad (4.67)$$

при якій рівняння Ейлера складаються відносно функції Лагранжа.

Якщо підставити (4.66) у (4.67), то отримаємо

$$J^* = \int_{t_1}^{t_2} (\psi^T \cdot x' - \psi^T \cdot f(x, u, t)) dt. \quad (4.68)$$

Дивлячись на функціонал (4.68), бачимо, що він досягає мінімуму при максимумі складової $\psi^T \cdot f(x, u, t)$.

Ця функція

$$H(x, u, t, \psi) = \psi^T \cdot f(x, u, t) \quad (4.69)$$

називається гамільтоніаном.

Таким чином, знайшовши таке керування $u(t)$ динамічним об'єктом, за якого гамільтоніан $H(x, u, t, \psi)$ досягає максимуму, тобто виконується умова

$$H(x, u_{opt}, t, \psi) = \max_{u(t)=u_{opt}} H(x, u, t, \psi), \quad (4.70)$$

і при цьому динамічний об'єкт буде переведено зі стану $x^{(1)}$ у $x^{(2)}$, ми розв'яжемо задачу оптимального керування цим об'єктом за критерієм мінімуму функціонала (4.60) при наявності обмежень у вигляді (4.55).

Саме тому, що професор Понтрягін перевів задачу пошуку мінімуму критеріального функціонала в задачу пошуку максимуму гамільтоніана, він і назвав свій метод пошуку *принципом максимуму*.

Звертаємо увагу на те, що при досягненні кінцевого стану $x^{(2)}$ динамічний об'єкт досягає усталеного стану, в якому

$$x' = 0. \quad (4.71)$$

Це означає, згідно з (4.55), що і

$$f(x^{(2)}, u_{opt}, t) = 0. \quad (4.72)$$

Але з виразів (4.72) та (4.69) випливає, що

$$H(x^{(2)}, u_{opt}, t_2, \psi) = 0, \quad (4.73)$$

тобто гамільтоніан в кінцевому стані динамічного об'єкта дорівнює нулю.

Для того, щоб отримати визначальні співвідношення принципу максимуму Понтрягіна, покладемо, що нам уже відомий вектор $u(t)$ оптимального керування, і що, приклавши це керування до динамічного об'єкта, ми отримаємо оптимальну траєкторію його руху.

Зрозуміло, що в цьому випадку виконується співвідношення (4.70).

Але це, в свою чергу, означає, що вздовж оптимальної траєкторії будуть виконуватись співвідношення:

$$H(x, u_{opt}, t, \psi) = H(x, t, \psi), \quad (4.74)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4.75)$$

Беручи повну похідну за t від $H(x, t, \psi)$, матимемо:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \cdot \frac{d\psi_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4.76)$$

Легко бачити, що із (4.76) отримати (4.75) можна лише за умови взаємного скорочення сум у рівнянні (4.76).

Але це, в свою чергу, можливо лише за умови, що

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{d\psi_i}{dt}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = \frac{dx_i}{dt}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (4.78)$$

Підставляючи (4.69) у (4.78), пересвідчуємось, що умова (4.78) виконується – фактично це інша форма запису (через гамільтоніан) математичної моделі динамічного об'єкта, що оптимізується, у формі (4.55), (4.65).

Тож, для отримання максимуму гамільтоніана $H(x, u, t, \psi)$ нам потрібно вибрати множники $\psi_i(t)$, $i = \overline{0, n}$ такими, щоб вони задовольняли співвідношення (4.77), тобто фактично розв'язати систему рівнянь (4.77) відносно цих множників.

Ми з'ясували, чому професор Понтрягін назвав свій метод оптимізації динамічних об'єктів принципом максимуму та за яких умов цей принцип виконується, якщо має місце рух динамічного об'єкта по оптимальній траєкторії, обумовленій подачею оптимального керування.

Тож залишилось лише з'ясувати – а як же сформулювати оптимальне керування $u(t)$?

Розглянемо перше рівняння системи (4.74) для $i = 0$. Воно матиме вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial x_0} = -\frac{d\psi_0}{dt}. \quad (4.79)$$

Із (4.65), (4.66), (4.68) та (4.69) видно, що гамільтоніан $H(x, u, t, \psi)$ не залежить від x_0 , а тому

$$\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0. \quad (4.80)$$

Підставляючи (4.80) у (4.79), отримаємо

$$-\psi'_0 = 0. \quad (4.81)$$

Тож $\psi_0(t)$ – це константа зі знаком «мінус». Як правило, її беруть рівною «мінус» одиниці, тобто

$$\psi_0 = -1. \quad (4.82)$$

Визначившись із ψ_0 , далі вектор $\psi(t)$ будемо розглядати виключно таким, що містить у собі лише n складових, тобто

$$\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)\}. \quad (4.83)$$

А далі замість загальної векторно-матричної моделі динамічного об'єкта у вигляді (4.4), (4.55) використаємо лінійну модель, що задається першим матричним рівнянням системи (4.12), тобто рівнянням

$$x' = A \cdot x + B \cdot u, \quad (4.84)$$

в якому матриці A, B, x', x, u задаються виразами (4.5), (4.6), (4.13).

Нагадаємо, що для задачі оптимальної швидкодії (див. (4.61)) –

$$f_0(x, u, t) = 1.$$

Для зручності ми повторили співвідношення (4.61).

Підставляючи (4.82), (4.61), (4.83) і (4.84) у (4.69), гамільтоніан для лінійного динамічного об'єкта n -го порядку отримаємо у вигляді

$$H = -1 + \psi^T (Ax + Bu) \quad (4.85)$$

або

$$H = -1 + \psi^T Ax + \psi^T Bu. \quad (4.86)$$

З (4.86) бачимо, що від керування $u(t)$ в H залежить лише член $\psi^T Bu$. Розпишемо його –

$$\psi^T Bu = \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k. \quad (4.87)$$

Змінивши порядок знаходження сум, (4.87) можна записати і так –

$$\psi^T Bu = \sum_{k=1}^m u_k \sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i. \quad (4.88)$$

Оскільки на оптимальній траєкторії руху гамільтоніан H згідно з принципом максимуму Понтрягіна повинен мати максимальне значення, а від керування $u(t)$ в H залежить лише член $\psi^T Bu$, то керування $u(t)$ необхідно вибирати таким, щоб цей член – $\psi^T Bu$ теж отримав максимальне значення. А він буде тоді мати максимальне значення, коли всі члени суми в (4.88) матимуть однакові знаки. Це ж, в свою чергу, з врахуванням (4.57) можливо лише за умови, що

$$u_k = 1 \cdot \text{sign} \sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i, \quad k = \overline{1, m} \quad (4.89)$$

або у векторній формі –

$$u = \text{sign} [B^T \psi]. \quad (4.90)$$

Тож, як і в попередньому підрозділі, ми отримали закон керування (4.90), який для $k=1$ збігається з (4.51) і має графік, зображений на рис. 4.1, що є ще одним підтвердженням справедливості принципу максимуму Понтрягіна.

На завершення викладок з принципу максимуму звернемо увагу на таке.

Якщо підставити в систему рівнянь (4.77), записану в матрично-векторній формі, гамільтоніан (4.86), то отримаємо матрично-векторне рівняння

$$\psi' = -A^T \psi. \quad (4.91)$$

Якщо в рівнянні моделі об'єкта (4.84) покласти $u=0$, то отримаємо матрично-векторне рівняння вільного руху динамічного об'єкта у вигляді

$$x' = A \cdot x. \quad (4.92)$$

Порівнюючи рівняння (4.92) і (4.91), бачимо, що вони є спряженими. А тому і вектор ψ , який по суті є вектором невизначених множників Лагранжа для динамічного об'єкта з моделлю (4.92), прийнято називати спряженим вектором (до вектора змінних стану x).

4.5 Суть принципу оптимальності Беллмана та динамічного програмування і аналіз області його застосування в задачах оптимізації динамічних об'єктів

4.5.1 Суть принципу оптимальності Беллмана

Розглянемо для простоти викладок одновимірну задачу оптимізації з такою постановкою: нехай задано динамічний об'єкт, рух якого описується одним диференціальним рівнянням 1-го порядку виду

$$x' = f(x, u). \quad (4.93)$$

з початковою умовою

$$x(0) = x_0, \quad (4.94)$$

де $x(t)$ – змінна стану, що змінюється з часом t , а $u(t)$ – керування, на яке накладено обмеження

$$|u| \leq 1. \quad (4.95)$$

Нехай задано також функціонал

$$J = \int_0^T F(x, u) dt, \quad (4.96)$$

в якому функція $F(\bullet)$ пов'язує змінну стану $x(t)$ та керування $u(t)$ цього ж динамічного об'єкта.

Необхідно знайти таке керування $u(t)$, яке переводить динамічний об'єкт за час T зі стану $x(0)$ у стан $x(T)$ за умови мінімуму функціонала (4.96).

Для розв'язання задачі перейдемо до дискретної форми розрахункових співвідношень.

Виберемо число N і знайдемо крок дискретизації Δt часу t –

$$\Delta t = \frac{T}{N}. \quad (4.97)$$

Дискретний час позначимо $t_n, n = \overline{0, N}$, а значення змінної стану $x(t)$ та керування $u(t)$ в момент часу t_n позначимо x_n та u_n .

Можливі значення $u(t)$ в межах обмеження (4.95), тобто на відріжку значень

$$u \in [-1, 1], \quad (4.98)$$

задамо у вигляді множини

$$u^{(\varepsilon)} = \{u^{(-p)}, u^{(-p+1)}, \dots, u^{(-1)}, u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(p-1)}, u^{(p)}\}, \quad (4.99)$$

яку отримаємо, квантуючи $u(t)$ за рівнем з вибраним кроком

$$\Delta u = \frac{1}{p}. \quad (4.100)$$

Тепер ми можемо записати дискретні аналоги виразів (4.93) та (4.96). Вони матимуть вигляд:

для (4.93) –

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f(x_n, u_n), \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (4.101)$$

або

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n, u_n) \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (4.102)$$

або

$$x_{n+1} = g(x_n, u_n), \quad n = \overline{0, N}, \quad (4.103)$$

де

$$g(x_n, u_n) = x_n + f(x_n, u_n) \cdot \Delta t; \quad (4.104)$$

для (4.96) –

$$J_N = \sum_{n=0}^{N-1} F(x_n, u_n) \cdot \Delta t. \quad (4.105)$$

Розглянемо спочатку варіант розв'язання задачі, коли весь відрізок часу $[0, T]$ долається за один крок, тобто за умови, що

$$\begin{cases} N = 1, \\ \Delta t = T. \end{cases} \quad (4.106)$$

Для цього випадку із (4.103) і (4.105) матимемо:

$$x_1 = g(x_0, u_0), \quad (4.107)$$

$$J_1(x_0) = F(x_0, u_0) \cdot \Delta t. \quad (4.108)$$

Підставляючи у (4.108) початкове значення x_0 із (4.94) та послідовно всі значення u_0 із множини можливих його значень (4.99), отримаємо множину значень критерію (4.108) –

$$J_1^{(\varepsilon)}(x_0) = \{J_1^{(-p)}(x_0), J_1^{(-p+1)}(x_0), \dots, J_1^{(0)}(x_0), \dots, J_1^{(p-1)}(x_0), J_1^{(p)}(x_0)\}. \quad (4.109)$$

Те значення $u_0^{(\varepsilon)}$, що відповідає мінімальному члену множини (4.109), і буде оптимальним керуванням u_0^{omm} , за допомогою якого динамічний об'єкт за час $\Delta t = T$ переводиться зі стану x_0 у стан $x(T)$. Це можна записати так:

$$J_1^{omm}(x_0) = \min_{u_0 \in u^{(\varepsilon)}} [F(x_0, u_0) \cdot \Delta t]. \quad (4.110)$$

Кінцеве значення $x(T)$ можна знайти, скориставшись співвідношенням (4.107).

Зрозуміло, що

$$x(T) = x_1^{omm} = g(x_0, u_0^{omm}). \quad (4.111)$$

Тепер розглянемо варіант розв'язання задачі, коли відрізок $[0, T]$ долається за два кроки, тобто за умови, що

$$\begin{cases} N = 2, \\ \Delta t = \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (4.112)$$

В цьому випадку із (4.105) матимемо критеріальний вираз вигляду

$$J_2 = F(x_0, u_0) \cdot \Delta t + F(x_1, u_1) \cdot \Delta t, \quad (4.113)$$

для мінімізації якого треба вибрати два значення керування u_0 і u_1 .

Висуємо гіпотезу, що оптимальна послідовність керувань $\{u_0^{onm}, u_1^{onm}\}$ для двокрокового процесу повинна бути такою, щоб незалежно від того, як за допомогою u_0 було досягнуто стану x_1 , вибір u_1^{onm} , тепер уже відносно x_1 , повинен здійснюватись оптимально.

Цю гіпотезу вперше сформулював в п'ятидесяті роки минулого століття професор Беллман, і з того часу вона носить назву *принципу оптимальності Беллмана*.

На основі цього принципу двокрокову задачу оптимізації розв'язують так.

Підставляючи в рівняння (4.107) початкове значення x_0 та всі можливі значення u_0 із множини (4.99), отримаємо множину значень

$$x_1^{(\varepsilon)} = g(x_0, u_0^{(\varepsilon)}), \quad (4.114)$$

в якій, як і в (4.99), буде $(2p + 1)$ елементів

$$x_1^{(\varepsilon)} = \{x_1^{(-p)}, x_1^{(-p+1)}, \dots, x_1^{(0)}, \dots, x_1^{(p-1)}, x_1^{(p)}\}. \quad (4.115)$$

Для кожного значення x_1 із множини $x_1^{(\varepsilon)}$ за формулою (4.108), в якій замість x_0 , u_0 підставляємо x_1 та почергово значення u_1 із множини можливих його значень (4.99), тобто за формулою

$$J_1^{(x_1)} = F(x_1, u_1) \cdot \Delta t \quad (4.116)$$

знаходимо множину значень критерію (4.116) у вигляді (4.109), тобто

$$J_1^{(\varepsilon)}(x_1) = \{J_1^{(-p)}(x_1), J_1^{(-p+1)}(x_1), \dots, J_1^{(0)}(x_1), \dots, J_1^{(p-1)}(x_1), J_1^{(p)}(x_1)\}. \quad (4.117)$$

Те значення u_1 із $u_1^{(\varepsilon)}$, яке задає мінімальний член $J_1^{onm}(x_1)$ множини (4.117), і буде оптимальним керуванням $u_1^{onm}(x_1)$, за допомогою якого динамічний об'єкт переводиться зі стану x_1 у кінцевий стан.

Оскільки станів x_1 , згідно з (4.115), маємо $(2p + 1)$, то і оптимальних пар

$$\{u_1^{onm}(x_1), J_1^{onm}(x_1)\} = \{u_1^{onm}(g(x_0, u_0)), J_1^{onm}(g(x_0, u_0))\} \quad (4.118)$$

теж матимемо $(2p + 1)$.

Тепер ми вже маємо право на другому кроці, який фактично робиться назад, замість критерію оптимізації (4.113) використовувати критерій

$$J_2(x_0) = F(x_0, u_0) \cdot \Delta t + J_1^{onm}(x_1) = F(x_0, u_0) \cdot \Delta t + J_1^{onm}(g(x_0, u_0)). \quad (4.119)$$

На другому кроці ми повинні знайти таке значення u_0 із множини $u^{(\varepsilon)}$ (4.99), яке переводить динамічний об'єкт зі стану x_0 у той стан x_1 із множини $x_1^{(\varepsilon)}$ (4.115), для якого критерій J_2 (4.119) матиме мінімальне значення.

Математично це записується так:

$$J_2^{onm}(x_0) = \min_{u_0 \in u^{(\varepsilon)}} [F(x_0, u_0) \cdot \Delta t + J_1^{onm}(g(x_0, u_0))]. \quad (4.120)$$

А практично – необхідно, підставляючи кожне конкретне значення u_0 із $u^{(\varepsilon)}$ в перший член критерію (4.119) і в рівняння (4.114) для визначення відповідного цьому значенню керування u_0 стану об'єкта x_1 із множини (4.115), обчислити за формулою (4.119) для цього u_0 значення критерію J_2 , взявши при цьому обчисленні за $J_1^{onm}(g(x_0, u_0))$ те його значення, яке відповідає знайденому x_1 .

Перебравши всі значення u_0 із $u^{(\varepsilon)}$, ми за викладеною вище процедурою побудуємо послідовність значень критерію (4.119) у вигляді

$$J_2^{(\varepsilon)}(x_0) = \{ J_2^{(-p)}(x_0), J_2^{(-p+1)}(x_0), \dots, J_2^{(0)}(x_0), \dots, J_2^{(p-1)}(x_0), J_2^{(p)}(x_0) \}. \quad (4.121)$$

Ті значення керувань u_0 із $u^{(\varepsilon)}$ та u_1 із $u_1^{(\varepsilon)}$, які задають мінімальний член $J_2^{onm}(x_0)$ множини (4.121), і задають оптимальний закон керування

$$u(t) = \{ u_0^{onm}, u_1^{onm} \}, \quad (4.122)$$

за допомогою якого динамічний об'єкт за два кроки переводиться із заданого стану x_0 у кінцевий стан з використанням проміжного стану x_1 .

В разі, якщо динамічний об'єкт повинен бути переведений з початкового стану x_0 у кінцевий $x(T)$ за три кроки, тобто при $N = 3$, пошук оптимальної послідовності керувань

$$u(t) = \{ u_0^{onm}(x_0), u_1^{onm}(x_0), u_2^{onm}(x_0) \}, \quad (4.123)$$

здійснюється з кінця в початок у тій же послідовності. Тобто спочатку на першому кроці знаходяться всі пари вигляду (4.118), які визначають оптимальні переходи об'єкта в кінцевий стан із можливих станів x_2 . Потім за двокроковою процедурою знаходяться усі пари $\{ u_1^{onm}, u_2^{onm} \}$, за допомогою

яких динамічний об'єкт оптимально переводиться із можливих станів x_1 у кінцевий стан $x(T)$. А на третьому кроці реалізується процедура пошуку послідовності $\{u_0^{onm}, u_1^{onm}, u_2^{onm}\}$ шляхом мінімізації критерію

$$\begin{aligned} J_3(x_0) &= \min_{u_0 \in u^{(\varepsilon)}} \left[F(x_0, u_0) \cdot \Delta t + J_2^{onm}(x_1) \right] = \\ &= \min_{u_0 \in u^{(\varepsilon)}} \left[F(x_0, u_0) \cdot \Delta t + J_2^{onm}(g(x_0, u_0)) \right], \end{aligned} \quad (4.124)$$

за допомогою якої динамічний об'єкт переводиться оптимально з початкового стану x_0 у кінцевий стан $x(T)$, і яка здійснюється за тією ж схемою, що і на другому кроці, але з використанням уже отриманих значень $J_2^{onm}(x_1)$.

Узагальнюючи принцип оптимальності Беллмана на N -кроковий процес керування, можна стверджувати, що оптимальна послідовність керувань для N -крокового процесу

$$u(t) = \{u_0^{onm}, u_1^{onm}, \dots, u_{N-1}^{onm}\} \quad (4.125)$$

повинна бути такою, щоб незалежно від значення u_0^{onm} , а тому і незалежно від значення $x_1(u_0^{onm})$, вибір усіх інших значень послідовності (4.125), тобто

$$\{u_1^{onm}, u_2^{onm}, \dots, u_{N-1}^{onm}\}, \quad (4.126)$$

здійснювався оптимально відносно стану $x_1(u_0^{onm})$.

Тобто послідовність (4.125) при N -кроковій оптимізації необхідно знаходити рекурентним процесом, з використанням критерію

$$J_N^{onm}(x_0) = \min_{u_0 \in u^{(\varepsilon)}} \left[F(x_0, u_0) \cdot \Delta t + J_{N-1}^{onm}(g(x_0, u_0)) \right]. \quad (4.127)$$

При $N=1$ ми із (4.127) отримуємо (4.110), при $N=2$ – (4.120), при $N=3$ – (4.124).

За допомогою вищевикладеної процедури можна знайти оптимальну послідовність (4.125) керувань $u(t)$ для будь-якого цілого числа N .

Випишемо цю процедуру покроково.

1. Використовуючи модель динамічного об'єкта (в нашому випадку це (4.103)), початкові умови (у нашому випадку це (4.94)) та множину можливих значень керування $u(t)$ на кожному кроці (у нашому випадку це (4.99)), знайдемо множини можливих станів динамічного об'єкта $x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}, \dots, x_N^{(\varepsilon)}$.

2. Розглядаючи кожне значення x_{N-1} із множини можливих значень $x_{N-1}^{(\varepsilon)}$ як початковий стан об'єкта, розв'язуємо однокрокову задачу оптимізації при переході із станів $x_{N-1}^{(\varepsilon)}$ до кожного кінцевого стану $x_N^{(\varepsilon)}$. В результаті отримаємо множину пар $\{u_{N-1}^{onm}(x_{N-1}), J_1^{onm}(x_{N-1})\}$.

3. Розглядаючи кожне значення x_{N-2} із множини можливих значень $x_{N-2}^{(\varepsilon)}$ як початковий стан об'єкта, розв'язуємо двокрокову задачу оптимізації при переході із станів $x_{N-2}^{(\varepsilon)}$ до кожного кінцевого стану $x_N^{(\varepsilon)}$. При цьому використовуємо отриману на попередньому етапі множину значень $J_1^{onm}(x_{N-1})$. В результаті отримаємо множину трійок $\{u_{N-2}^{onm}(x_{N-2}), u_{N-1}^{onm}(x_{N-1}), J_2^{onm}(x_{N-2}, x_{N-1})\}$.

4. Розглядаючи кожне значення x_{N-3} із множини можливих значень $x_{N-3}^{(\varepsilon)}$ як початковий стан об'єкта, розв'язуємо трикрокову задачу оптимізації при переході із станів $x_{N-3}^{(\varepsilon)}$ до кожного кінцевого стану $x_N^{(\varepsilon)}$. При цьому використовуємо отриману на попередньому етапі множину значень $J_2^{onm}(x_{N-2}, x_{N-1})$. В результаті отримаємо множину четвірок $\{u_{N-3}^{onm}(x_{N-3}), u_{N-2}^{onm}(x_{N-2}), u_{N-1}^{onm}(x_{N-1}), J_3^{onm}(x_{N-3}, x_{N-2}, x_{N-1})\}$.

5. Продовжуючи процес аж до початкового стану x_0 , на останньому етапі отримаємо єдину послідовність $\{u_0^{onm}(x_0), u_1^{onm}(x_1), \dots, u_{N-1}^{onm}(x_{N-1})\}$, яка доставляє єдине оптимальне значення критерію $J_N^{onm}(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ і тим самим розв'язує задачу оптимального переведення динамічного об'єкта за N кроків зі стану x_0 у стан x_N .

При цьому як проміжний результат ми отримуємо і оптимальну траєкторію руху динамічного об'єкта $\{x_0, x_1^{onm}, x_2^{onm}, \dots, x_{N-1}^{onm}, x_N\}$.

Виписана N -крокова процедура пошуку оптимальних керувань динамічного об'єкта, яка фактично задає програму цього пошуку, була названа Беллманом *динамічним програмуванням*.

4.5.2 Динамічне програмування в задачах оптимізації безперервних динамічних об'єктів

А тепер встановимо, як виглядатимуть основні розрахункові співвідношення динамічного програмування в задачах оптимізації безперервних динамічних об'єктів.

Зрозуміло, що принцип оптимальності Беллмана для безперервних динамічних об'єктів виконується завжди – для цього досить згадати, що будь-який відрізок екстремалі теж є екстремаллю на заданому відрізку часу.

Розглянемо таку задачу: нехай дано динамічний об'єкт, рух у часі якого описується векторним диференціальним рівнянням у просторі змінних стану x , що має вигляд

$$x' = f(x, u, t), \quad (4.128)$$

в якому x , x' , f – вектори розмірності $[n \times 1]$, u – вектор розмірності $[m \times 1]$, а t – скаляр.

Нехай в початковий момент часу t_1 динамічний об'єкт знаходиться у стані

$$x(t_1) = x_1, \quad (4.129)$$

де x_1 – вектор розмірності $[n \times 1]$.

Задано показник якості функціонування цього об'єкта на відрізку часу $[t_1, t_2]$, який пов'язує між собою змінні стану динамічного об'єкта та керування $u(t)$, у вигляді функціонала

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, u, t) dt, \quad (4.130)$$

в якому підінтегральна функція $F(\bullet)$ є неперервною за аргументом t .

На вектор керування $u(t)$ накладається обмеження, що, по-перше, він є елементом множини векторних функцій $\Omega(t)$, тобто

$$u(t) \in \Omega(t), \quad (4.131)$$

а по-друге, що кожна його компонента $u_k(t)$, $k = \overline{1, m}$ є обмеженою, тобто

$$|u_k(t)| \leq v_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (4.132)$$

де

$$v_k \in V, \quad k = \overline{1, m}, \quad (4.133)$$

а V – евклідовий простір розмірності m .

Необхідно знайти таке керування $u(t)$, яке переведе даний динамічний об'єкт з початкового стану $x(t_1)$ у кінцевий стан $x(t_2)$, в загальному випадку невідомий, за умови досягнення критерієм J на відрізку часу $[t_1, t_2]$ мінімального значення.

Зауважимо, що оскільки рух об'єкта починається в заданий момент часу t_1 із заданого стану x_1 , які пов'язані між собою співвідношенням

(4.129), то і оптимальне значення критерію оптимізації J (4.130) на відрізку $t \in [t_1, t_2]$ є функцією від x_1 та t_1 , тобто

$$J^{onm} = J^{onm}(x_1, t_1). \quad (4.134)$$

Зрозуміло, що для різних початкових точок x_1 векторного простору X , в якому задається рух динамічного об'єкта, оптимальне значення критерію (4.134) буде різним.

Позначимо $x(u, t)$ траєкторію руху динамічного об'єкта з моделлю (4.128), починаючи зі стартової точки x_1 у момент t_1 , під дією керування $u(t)$.

Процес мінімізації критерію (4.130) з врахуванням зауваження (4.134) запишемо у вигляді

$$J^{onm}(x_1, t_1) = \min_{\substack{u(t) \in \Omega(t) \\ t \in [t_1, t_2]}} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(x(u, t), u, t) dt \right]. \quad (4.135)$$

Для моменту часу $t = t^*$, де

$$t_1 < t^* < t_2, \quad (4.136)$$

співвідношення (4.135) можна переписати так:

$$J^{onm}(x_1, t_1) = \min_{\substack{u(t) \in \Omega(t) \\ t \in [t_1, t_2]}} \left[\int_{t_1}^{t^*} F(x(u, t), u, t) dt + \int_{t^*}^{t_2} F(x(u, t), u, t) dt \right]. \quad (4.137)$$

Принцип оптимальності Беллмана для неперервних динамічних об'єктів можна переформулювати так: якщо керування $u(t)$ є оптимальним на відрізку $t \in [t_1, t_2]$, тобто якщо

$$u(t) = u^{onm}(t), \quad (4.138)$$

то для будь-якого t^* , що задовольняє умову (4.136), незалежно від того, які значення набувало $u^{onm}(t)$ на відрізку часу $[t_1, t^*]$, а це означає, що і незалежно від того, якого значення набуває $x^{onm}(t^*)$, керування $u(t)$ повинно залишатись оптимальним відносно стану $x^{onm}(t^*)$ і на інтервалі часу $t \in [t^*, t_2]$.

Згідно з принципом оптимальності критеріальне співвідношення (4.137) можна записати і так:

$$J^{onm}(x_1, t_1) = \min_{\substack{u(t) \in \Omega(t) \\ t \in [t_1, t^*]}} \left[\int_{t_1}^{t^*} F(x(u, t), u, t) dt + J^{onm}(x(t^*), t^*) \right], \quad (4.139)$$

де $x(t^*)$ – кінцевий стан, обумовлений дією керування $u(t)$ на відріжку часу $t \in [t_1, t^*]$.

Зрозуміло, що при виконанні (4.138) і на інтервалі $t \in [t_1, t^*]$ вираз (4.139) і буде задавати найменше значення критерію, а тому справедливим буде вираз:

$$J^{onm}(x_1, t_1) = \int_{t_1}^{t^*} F(x(u^{onm}, t), u^{onm}(t), t) dt + J^{onm}(x(t^*), t^*). \quad (4.140)$$

Перенісши у (4.140) $J^{onm}(x(t^*), t^*)$ в ліву частину рівності і поділивши обидві частини цієї рівності на $(t^* - t_1)$, отримаємо

$$\frac{J^{onm}(x(t^*), t^*) - J^{onm}(x_1, t_1)}{t^* - t_1} = \frac{1}{t^* - t_1} \int_{t_1}^{t^*} F(x(u^{onm}, t), u^{onm}(t), t) dt. \quad (4.141)$$

Здійснюючи в (4.141) граничний перехід при $t^* \rightarrow t_1$, отримаємо

$$\lim_{t^* \rightarrow t_1} \left[\frac{J^{onm}(x(t^*), t^*) - J^{onm}(x_1, t_1)}{t^* - t_1} \right] = F(x_1, u^{onm}(t_1), t_1) \quad (4.142)$$

або

$$-\left[\frac{dJ^{onm}}{dt} \right]_{u^{onm}, t_1} = F(x_1, u^{onm}(t_1), t_1). \quad (4.143)$$

Рівняння (4.143) можна записати і так:

$$\left[\frac{dJ^{onm}}{dt} \right]_{u^{onm}, t_1} + F(x_1, u^{onm}(t_1), t_1) = 0. \quad (4.144)$$

Якщо в рівнянні (4.144) замість оптимального керування $u^{onm}(t)$ використати будь-яке інше $u(t)$, то зрозуміло, що

$$\left[\frac{dJ^{onm}}{dt} \right]_{u, t_1} + F(x_1, u(t_1), t_1) \geq 0. \quad (4.145)$$

Тож, рівняння (4.144) з врахуванням (4.145) можна переписати і в такому вигляді

$$\min_{u(t_1) \in \Omega(t_1)} \left\{ \left[\frac{dJ^{onm}}{dt} \right]_{u, t_1} + F(x_1, u(t_1), t_1) \right\} = 0. \quad (4.146)$$

Оскільки, згідно з принципом оптимальності для безперервних динамічних об'єктів, кожен відрізок екстремалі також є екстремаллю, то за початковий момент часу в (4.146) можна взяти будь-яке значення $t \in [t_1, t_2]$. Це дає право записати рівняння (4.146) у вигляді

$$\min_{u(t) \in \Omega(t)} \left\{ \left[\frac{dJ^{onm}}{dt} \right]_{u, t} + F(x, u(t), t) \right\} = 0. \quad (4.147)$$

Це і є відоме *функціональне рівняння Беллмана*, яке задає необхідні умови оптимальності. Тобто щоб керування $u(t)$ забезпечувало оптимальну за критерієм (4.130) траєкторію руху динамічного об'єкта з моделлю (4.128) з початкового стану $x(t_1)$ у кінцевий стан $x(t_2)$ необхідно, щоб функція $u(t)$ була розв'язком рівняння (4.147).

Повну похідну $\frac{dJ^{onm}}{dt}$ можна записати так

$$\frac{dJ^{onm}}{dt} = \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial J^{onm}}{\partial t} \quad (4.148)$$

або (з врахуванням (4.128))

$$\frac{dJ^{onm}}{dt} = \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T \cdot f(x, u, t) + \frac{\partial J^{onm}}{\partial t}. \quad (4.149)$$

Підставляючи (4.149) у (4.147), отримаємо

$$\min_{u(t) \in \Omega(t)} \left\{ \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T \cdot f(x, u, t) + \frac{\partial J^{onm}}{\partial t} + F(x(u, t), u, t) \right\} = 0. \quad (4.150)$$

Оскільки частинна похідна $\frac{\partial J^{onm}}{\partial t}$ береться за часом вздовж оптимальної траєкторії руху динамічного об'єкта, обумовленої дією оптимального керування $u^{onm}(t)$, то вона уже явно від $u(t)$ не залежить, а тому її можна вивести з-під знаку мінімізації в рівнянні (4.150). З врахуванням цього зауваження це рівняння можна переписати і так

$$-\frac{\partial J^{onm}}{\partial t} = \min_{u(t) \in \Omega(t)} \left\{ F(x(u,t), u, t) + \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T \cdot f(x, u, t) \right\}. \quad (4.151)$$

Рівняння (4.151) є матрично-векторним диференціальним рівнянням в частинних похідних, яке включає в себе ще й операцію мінімізації.

Два важливих зауваження.

1. Якщо ми у якийсь спосіб знайшли оптимальне керування $u^{onm}(t)$, то, підставляючи його в (4.151), ми цим самим перетворюємо співвідношення (4.151) на рівняння

$$-\frac{\partial J^{onm}}{\partial t} = F(x(u^{onm}, t), u^{onm}, t) + \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T \cdot f(x^{onm}(t), u^{onm}(t), t), \quad (4.152)$$

з граничною умовою –

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} J^{onm}(x_1, t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x^{onm}, u^{onm}, t) dt = 0. \quad (4.152^*)$$

З рівнянь (4.152), (4.152^{*}) завжди можна знайти $J^{onm}(x, t)$.

2. Якщо $F(\bullet)$ і $f(\bullet)$ мають частинні похідні за u , то, оскільки мінімум функції досягається в точці простору, в якій похідна від цієї функції дорівнює нулю, оптимальне керування $u^{onm}(t)$ ми можемо знайти, беручи похідну за u від виразу, який стоїть у фігурних дужках співвідношення (4.151), прирівнюючи цю похідну нулю і розв'язуючи рівняння, яке отримали відносно u , тобто розв'язуючи рівняння

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J^{onm}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial u} \right\}_{u=u^{onm}(t)} = 0, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (4.153)$$

4.5.3 Синтез оптимального керування для лінійних динамічних об'єктів за квадратичним критерієм оцінювання якості з використанням динамічного програмування (задача Калмана)

Нехай дано лінійний в загальному випадку нестационарний динамічний об'єкт з математичною моделлю

$$x' = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_1) = x_1, \quad (4.154)$$

де x – вектор змінних стану розмірності $[n \times 1]$, u – вектор керувань розмірності $[m \times 1]$, $A(t)$ – квадратна матриця розмірності $[n \times n]$, члени якої можуть бути функціями часу t , $B(t)$ – прямокутна матриця розмірності $[n \times m]$, члени якої теж можуть бути функціями часу, x_1 – вектор початко-

вих умов розмірності $[n \times 1]$.

Нехай дано також функціонал

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x^T(t) \cdot Q(t) \cdot x(t) + u^T(t) \cdot R(t) \cdot u(t)) dt, \quad (4.155)$$

в якому $Q(t)$ – симетрична матриця розмірності $[n \times n]$, $R(t)$ – симетрична матриця розмірності $[m \times m]$, причому обидві ці матриці є додатно визначеними і кожен їх член може бути двічі продиференційованим, а крім того, існує матриця $R^{-1}(t)$, яка є оберненою до $R(t)$.

Треба знайти такий вектор управління $u^{opt}(t)$ розмірності $[m \times 1]$, який переводить заданий моделлю (4.154) динамічний об'єкт з початкового стану x_1 у деякий кінцевий, не обов'язково визначений, стан $x(t_2)$ і при цьому забезпечує мінімум функціоналу (4.155).

Цей вектор $u^{opt}(t)$ будемо називати оптимальним керуванням для вищезгаданого динамічного об'єкта.

Для знаходження $u^{opt}(t)$ згідно з методом динамічного програмування необхідно розв'язати рівняння Беллмана (4.151), поклавши в ньому, згідно з умовами (4.154) і (4.155), що

$$F(x(u,t), u, t) = \frac{1}{2} [x^T(t) \cdot Q(t) \cdot x(t) + u^T(t) \cdot R(t) \cdot u(t)], \quad (4.156)$$

$$f(x, u, t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t). \quad (4.157)$$

Як ми пам'ятаємо, для того, щоб знайти $u^{opt}(t)$, яке мінімізує вираз, що стоїть у правій частині (4.151), необхідно від виразу у фігурних дужках взяти частинну похідну за u , прирівняти її нулю і знайти розв'язок отриманого векторно-матричного рівняння.

Виконаємо ці дії.

Спочатку формально візьмемо частинну похідну від виразу, що стоїть у правій частині (4.151), і прирівняємо нулю:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial J^{opt}}{\partial x} \right)^T \cdot f(x, u, t) \right] \right\}_{u=u^{opt}} = 0. \quad (4.158)$$

Тепер, використовуючи (4.156) і (4.157), знайдемо частинні похідні, що входять у (4.158):

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2} (x^T Q(t) \cdot x + u^T R(t) \cdot u) \right] = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2} u^T R(t) \cdot u \right] = R(t) \cdot u. \quad (4.159)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T \cdot f(x, u, t) \right] &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T \cdot (A(t) \cdot x + B(t) \cdot u) \right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T A(t) \cdot x + \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T B(t) \cdot u \right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T B(t) \cdot u \right] = B^T(t) \cdot \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right). \tag{4.160}
\end{aligned}$$

Підставляючи (4.159) і (4.160) у (4.158), отримаємо:

$$\left[R(t) \cdot u + B^T(t) \cdot \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right) \right]_{u=u^{onm}} = 0 \tag{4.161}$$

або

$$R(t) \cdot u^{onm} = -B^T(t) \cdot \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right). \tag{4.162}$$

Визначивши обернену матрицю $R^{-1}(t)$ і домноживши на неї зліва обидві частини рівняння (4.162), отримаємо

$$R^{-1}(t) \cdot R(t) \cdot u^{onm} = -R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right), \tag{4.163}$$

звідки маємо

$$u^{onm}(t) = -R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot \left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right). \tag{4.164}$$

Ми отримали загальну формулу (4.164) для вектора оптимального керування лінійним динамічним об'єктом. Щоб його конкретизувати, необхідно використати рівняння Беллмана (4.152), в яке підставити (4.164) і оптимальне значення функціонала J^{onm} , який використано як критерій оптимізації.

Уточнимо задачу – будемо шукати $u^{onm}(t)$ в функції від змінних стану x , тобто синтезуватимемо оптимальне керування динамічним об'єктом зі зворотним зв'язком з виходу на вхід.

Але збережемо для нього квадратичну форму, тобто приймемо, що

$$J^{onm}(x, t) = \frac{1}{2} x^T P(t) \cdot x, \tag{4.165}$$

де $P(t)$ – поки що невідома симетрична матриця розмірності $[n \times n]$.

Нагадаємо, що коли ми мінімізуємо квадратичну форму (4.165), то фактично мінімізуємо квадрат відхилення змінних стану від їх значень, що задають оптимальну траєкторію руху динамічного об'єкта.

Знайдемо $\frac{\partial J^{omn}}{\partial x}$ для (4.165). Легко бачити, що в цьому випадку

$$\frac{\partial J^{omn}}{\partial x} = P(t) \cdot x. \quad (4.166)$$

Нагадаємо, що на оптимальній траєкторії, тобто при підстановці в рівняння Беллмана (4.152) $u^{omn}(t)$ –

$$\frac{\partial J^{omn}}{\partial t} = \frac{d J^{omn}}{d t}. \quad (4.167)$$

Підставляючи (4.166) у (4.164), матимемо

$$u^{omn}(t) = -R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t) \cdot x. \quad (4.168)$$

Запишемо рівняння Беллмана (4.152) з врахуванням співвідношень (4.156), (4.157), (4.165), (4.167), (4.168). Воно матиме вигляд

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \frac{d P}{d t} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot (x^T \cdot Q(t) \cdot x + \\ & + (-R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t) \cdot x)^T \cdot R(t) \cdot (-R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t) \cdot x)) + \\ & + (P(t) \cdot x)^T \cdot (A(t) \cdot x + B(t) \cdot (-R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t) \cdot x)) \end{aligned} \quad (4.169)$$

або

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} x^T \frac{d P}{d t} x = \frac{1}{2} x^T Q(t) x + \\ & + \frac{1}{2} x^T \cdot P^T(t) \cdot B(t) \cdot (R^{-1}(t))^T R(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t) \cdot x + \\ & + x^T \cdot P^T(t) \cdot A(t) \cdot x - x^T \cdot P^T(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t) \cdot x, \end{aligned} \quad (4.170)$$

або

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \frac{d P}{d t} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot Q(t) \cdot x + \\ & + \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot P^T(t) \cdot B(t) \cdot (R^{-1}(t))^T \cdot B^T(t) \cdot P(t) \cdot x + \\ & + \frac{1}{2} x^T \cdot 2P^T(t) \cdot A(t) \cdot x - \frac{1}{2} x^T \cdot 2P^T(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t) \cdot x, \end{aligned} \quad (4.171)$$

або

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \left(-\frac{dP}{dt} \right) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot (Q(t)) \cdot x + \\ & + \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \left(P^T(t) \cdot B(t) \cdot (R^{-1}(t))^T \cdot B^T(t) \cdot P(t) \right) \cdot x + \\ & + \frac{1}{2} x^T \cdot (2P^T(t) \cdot A(t)) \cdot x - \frac{1}{2} x^T \cdot (2P^T(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t)) \cdot x. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Із (4.172) за умови, що

$$x \neq 0, \quad (4.173)$$

випливає –

$$\begin{aligned} -\frac{dP}{dt} &= Q(t) + P^T(t) \cdot B(t) \cdot (R^{-1}(t))^T \cdot B^T(t) \cdot P(t) + \\ &+ 2P^T(t) \cdot A(t) - 2P^T(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t). \end{aligned} \quad (4.174)$$

Враховуючи, що для симетричних матриць $P(t)$, $R(t)$

$$\begin{cases} P^T(t) = P(t), \\ (R^{-1}(t))^T = R^{-1}(t), \end{cases} \quad (4.175)$$

рівняння (4.174) можна переписати так:

$$-\frac{dP}{dt} = -P(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P(t) + 2P(t) \cdot A(t) + Q(t). \quad (4.176)$$

Рівняння (4.174), (4.176) називається *рівнянням Ріккати*.

Воно інтегрується у зворотному часі, а тому початковою умовою для нього є

$$P(t_2) = P_2. \quad (4.177)$$

Якщо динамічний об'єкт приводиться в кінцевому стані до початку координат, то і

$$P(t_2) = 0. \quad (4.178)$$

Знайшовши розв'язок $P^*(t)$ рівняння Ріккати та підставивши його у (4.168), отримаємо оптимальне керування

$$u^{opt}(t) = -R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot P^*(t) \cdot x(t), \quad (4.179)$$

яке забезпечує і мінімум функціоналу (4.155), і мінімум критерію (4.165), і є векторною функцією від змінних стану x керованого динамічного об'єкта.

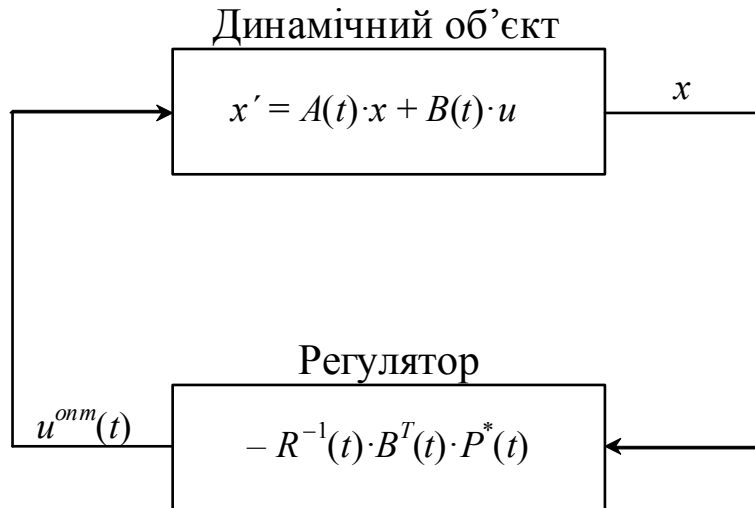


Рисунок 4.3 – Структурна схема оптимального керування лінійним динамічним об'єктом за квадратичним критерієм оптимізації

Фактично, рівняння (4.179) задає модель регулятора, який виробляє керування $u^{opt}(t)$ в функції від стану динамічного об'єкта x , заданого моделлю (4.154).

Структурна схема такого оптимального керування матиме вигляд, наведений на рис. 4.3.

4.6 Завдання для самоперевірки

1. Як виглядає математична модель динамічного об'єкта в просторі змінних стану в загальному вигляді і на структурній схемі?
2. За яких умов динамічний об'єкт можна описувати лінійною моделлю в просторі змінних стану?
3. Як, виходячи з загальної моделі динамічного об'єкта в просторі змінних стану, отримати її лінійну модель?
4. Поставте задачу оптимізації динамічного об'єкта за швидкодією.
5. Поставте задачу оптимізації динамічного об'єкта за витратами палива для забезпечення її руху.
6. Поставте задачу оптимізації за мінімумом суми квадратів відхилень координат руху динамічного об'єкта.
7. Поставте задачу оптимізації за критерієм мінімуму затрат енергії на керування динамічним об'єктом.
8. Поставте задачу оптимального керування кінцевим станом динамічного об'єкта.

9. Які функціонали ви знаєте, що використовуються як критерії оптимізації?
10. Як звести задачу синтезу оптимального за швидкістю керування динамічним об'єктом до ізопериметричної?
11. Як знайти і як виглядає графік оптимального керування лінійним динамічним об'єктом в задачі максимальної швидкодії?
12. Поясніть суть теореми інтервалів Фельдбаума.
13. Поставте задачу синтезу оптимального керування динамічним об'єктом з використанням гамільтоніана.
14. В чому полягає суть принципу максимуму Понтрягіна?
15. Виведіть основні рівняння принципу максимуму Понтрягіна, записані відносно гамільтоніана.
16. Здійсніть синтез оптимального керування лінійним динамічним об'єктом за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.
17. Поясніть суть принципу оптимальності Беллмана на прикладі дискретного динамічного об'єкта.
18. Запишіть дискретний алгоритм динамічного програмування як узагальнення принципу оптимальності Беллмана.
19. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана для безперервних динамічних об'єктів.
20. Виведіть функціональне рівняння Беллмана для реалізації динамічного програмування.
21. Шляхом аналізування функціонального рівняння Беллмана побудуйте алгоритм оптимізації динамічного об'єкта методом динамічного програмування.
22. Поставте задачу Калмана (задачу синтезу оптимального керування лінійним динамічним об'єктом за квадратичним критерієм оцінки якості руху).
23. За допомогою рівняння Беллмана розв'яжіть задачу Калмана.
24. Для чого потрібне і який вигляд має рівняння Ріккаті?
25. Який вигляд має структурна схема оптимального керування лінійним динамічним об'єктом, синтезованого Калманом?

РОЗДІЛ 5

МЕТРИЧНІ, БАНАХОВІ І ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ ТА ДЕЯКІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ

В цьому розділі ми введемо потрібні нам в подальшому поняття метричного, банахового та гільбертового просторів. Розкриємо їх властивості та властивості операторів. Введемо ортонормовані базиси в гільбертовому просторі та розкриємо процедуру апроксимації функцій з їх використанням. Покажемо як розв'язувати задачі оптимізації з використанням ортонормованих послідовностей в гільбертових просторах.

5.1 Метричні простори

Множина

$$\Omega = \{x, y, z, \dots, u, v, \dots\} \quad (5.1)$$

елементів якоїсь природи називається *метричним простором*, якщо кожній упорядкованій парі елементів $x, y \in \Omega$ поставлено у відповідність невід'ємне число $\rho(x, y)$, яке називають *метрикою простору* Ω , якщо вона задовольняє три аксіоми метрики:

1) аксіому тотожності –

$$\rho(x, y) = 0 \quad (5.2)$$

тоді і лише тоді, коли

$$x = y; \quad (5.3)$$

2) аксіому симетрії –

$$\rho(x, y) = \rho(y, x); \quad (5.4)$$

3) аксіому трикутника –

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z). \quad (5.5)$$

Розглядаючи ці аксіоми, бачимо, що метрика $\rho(x, y)$ простору Ω задає відстань між елементами x, y цього простору.

Елементи простору називають *точками*.

Приклади.

1. Для тривимірного, звичного для нас, евклідового простору E_3 відстань між точками $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ і $y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $x, y \in E_3$, визначається формулою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}. \quad (5.6)$$

2. Для множини $C[0, 1]$ безперервних функцій $x(t), y(t), \dots$, заданих на відрізку $t \in [0, 1]$, відстань між елементами $x(t)$ і $y(t)$ задається формулою

$$\rho(x, y) = \max_t |x(t) - y(t)|. \quad (5.7)$$

Якщо X – довільний метричний простір, то кажуть, що послідовність

$$\{x_n\} \subset X \quad (5.8)$$

збігається до точки $x_0 \in X$, якщо при $n \rightarrow \infty$

$$\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, \quad (5.9)$$

або в іншому записі –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0. \quad (5.10)$$

Про послідовність $\{x_n\}$, яка збігається до деякої границі x_0 , кажуть, що вона є обмеженою.

Сукупність точок x метричного простору X таких, що

$$\rho(x, a) < r, \quad (5.11)$$

де a – фіксована точка в X , r – фіксоване дійсне число, називають *відкритою кулею* радіуса r з центром в точці a і позначають $S(a, r)$, а таких, що

$$\rho(x, a) \leq r - \quad (5.12)$$

замкнутою кулею і позначають $\overset{\circ}{S}(a, r)$.

Приклади.

1. В просторі E_3 відкрита куля $S(a, r)$ – це звичайна куля радіуса r з центром в точці a з декартовими координатами $\{a_1, a_2, a_3\}$.

2. В просторі $C[0, 1]$ замкнута куля $\overset{\circ}{S}(x_0, r)$ – це сукупність усіх функцій $x(t)$, графіки яких (рис. 5.1) не виходять зі смуги $2r$, обмеженої кривими $x_0(t) - r, x_0(t) + r$.

Точку $b \in X$ називають точкою множини $M \subset X$, якщо будь-який окіл точки b містить хоча б одну точку множини M , що відрізняється від b . Нагадаємо, що запис $b \in X$ означає, що b є точкою простору X , а запис $M \subset X$ означає, що множина M є підмножиною простору X , тобто що X містить в собі і множину M .

Під околом якоїсь точки простору розуміють відкриту кулю з центром у цій точці.

Сукупність усіх граничних точок множини M називають похідною множиною множини M і позначають M' .

Якщо множина M містить в собі і всі свої граничні точки, то вона є замкнутою.

Операцію об'єднання множини M із похідною множиною M' –

$$\overset{\circ}{M} = M \cup M' \quad (5.13)$$

називають *замиканням множини M* .

Зауважимо, що множина натуральних чисел N хоч і нескінченна, але є замкнутою, оскільки N' є пустою множиною \emptyset , а тому

$$\overset{\circ}{N} = N \cup N' = N \cup \emptyset = N. \quad (5.14)$$

Кожну точку множини M метричного простору X , яка не є граничною, називають *ізолюваною*.

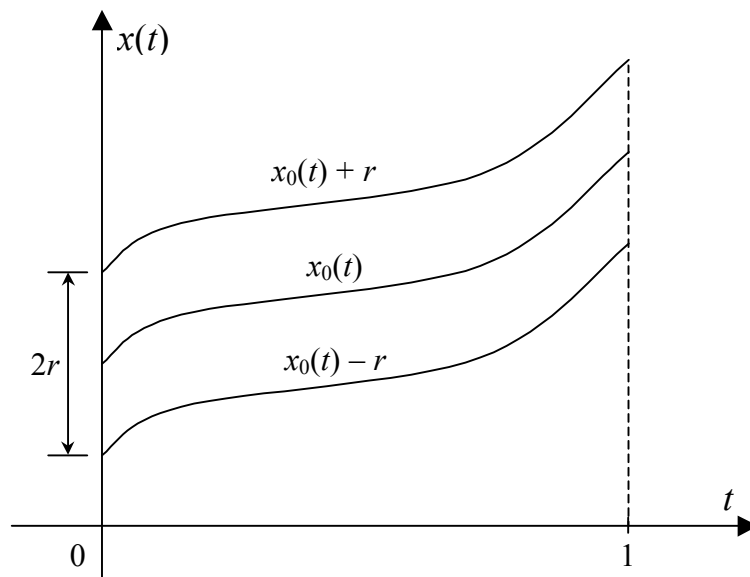


Рисунок 5.1 – Приклад замкнутої кулі $\overset{\circ}{S}(x_0, r)$ в метричному просторі $C[0, 1]$

Якщо множина M замкнута і не містить ізолюваних точок, тобто

$$M = M', \quad (5.15)$$

то вона називається *досконалою*.

Приклад: сфера – це замкнута множина точок, рівновіддалених від центра.

Множину P метричного простору X називають *щільною* в множині $M \subset X$, якщо

$$\overset{\circ}{P} \supset M. \quad (5.16)$$

Множину P , яка є щільною в самому просторі X , називають *всюди щільною*.

Приклад: множина раціональних чисел на числовій осі.

Метричний простір X називають *сепарабельним*, якщо в ньому існує зліченна, всюди щільна множина.

Приклад: числова вісь, простір $C[0,1]$.

Множину $N \subset X$ називають *ніде не щільною*, якщо в будь-якій кулі $S(a, r)$ простору X знайдеться друга куля

$$S(a^*, r^*) \subset S(a, r), \quad (5.17)$$

яка не містить жодної точки множини N .

Приклад: множина N натуральних чисел.

Нехай дано метричний простір X , і нехай має місце послідовність точок $\{x_n\}$ в цьому просторі, яка збігається до точки $x_0 \in X$. Тоді при $n \rightarrow \infty$ маємо

$$\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0. \quad (5.18)$$

Але тоді при $n \rightarrow \infty$ і

$$\rho(x_{n+p}, x_0) \rightarrow 0, \quad (5.19)$$

для будь-якого $\rho > 0$.

Наслідком (5.18) і (5.19) в силу нерівності трикутника для метрики є

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \rightarrow 0. \quad (5.20)$$

Якщо ж для якоїсь послідовності $\{x_n\} \subset X$ виконується умова (5.20), то її називають *фундаментальною послідовністю* або послідовністю, що збігається в собі, або *послідовністю Коші*.

Якщо в метричному просторі X будь-яка послідовність $\{x_n\} \subset X$, що збігається в собі, збігається і до деякої граничної точки x_0 , яка є елементом цього ж простору, тобто $x_0 \in X$, то цей простір X називають *повним*.

Приклад повного простору: простір $C[0,1]$.

Приклад неповного простору: простір дійсних багаточленів

$$p_n(t) = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + a_1 \cdot t + a_0, \quad (5.21)$$

визначених на відрізку $t \in [0, 1]$ з метрикою

$$\rho(p_n, q_m) = \max_t |p_n(t) - q_m(t)|. \quad (5.22)$$

Для підтвердження нагадаємо, що послідовність $\{p_n(t)\}$, де

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot t^k, \quad (5.23)$$

відноситься до класу (5.22), рівномірно збігається в собі, але не має грани-

ці у просторі багаточленів, оскільки її границею –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) = e^t \quad (5.24)$$

є трансцендентна функція e^t , яка не є точкою в просторі дійсних багаточленів.

Множину $M \subset X$ називають *компактною*, якщо із будь-якої послідовності $\{x_n\} \subset M$ елементів цієї множини можна виділити збіжну підпослідовність

$$\{x_{n_i}\} \subset M. \quad (5.25)$$

Якщо граничні точки x_{0_i} для всіх $\{x_{n_i}\}$ належать множині M , тобто $x_{0_i} \in M$, то множину M називають *компактною в собі*.

Зрозуміло, що множина компактна в собі, якщо вона просто компактна і замкнута.

Якщо весь метричний простір X є множиною компактною в собі, то його називають *компактом*.

Приклад: відрізок $[0, 1]$ є компактна в собі множина на числовій осі.

Встановлення властивості компактності множини є задачею непростою, а тому для різних просторів розроблені *ознаки компактності*.

Наприклад, для метричного простору $C[0, 1]$ має місце критерій *компактності Арчела*, який формулюється так: для того, щоб множина функцій

$$Q = \{x(t)\} \subset C[0, 1] \quad (5.26)$$

була компактною, необхідно і достатньо, щоб функції $x(t)$ цієї множини Q були рівномірно обмежені та рівностепенено безперервні.

При цьому функції $x(t)$ є рівномірно обмеженими, якщо виконується умова

$$\begin{cases} |x(t)| \leq K, \\ K > 0, \\ \forall x(t) \in Q, \end{cases} \quad (5.27)$$

і є рівностепенено безперервними, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$\begin{aligned} & |x(t^*) - x(t^{**})| < \varepsilon \\ & \text{при} \\ & |t^* - t^{**}| < \delta \end{aligned} \quad (5.28)$$

одразу для всіх $x(t) \in Q$ незалежно від знаходження точок t^* , t^{**} на $[0, 1]$.
Нагадаємо, що символ \forall означає «для будь-якого».

Завершимо цей підрозділ ми *теоремою Вейєрштрасса*, яку наведемо без доведення: функція $f(x)$, яка є безперервною на компактній в собі множині Q метричного простору X , є обмеженою на множині Q і досягає на цій множині своєї точної верхньої та точної нижньої границь.

5.2 Банаховий та гільбертовий простори

В попередньому підрозділі ми вже встановили, що метричний простір X є повним, якщо будь-яка його фундаментальна послідовність збігається до елемента цього ж простору.

Метричний простір X називається *лінійним*, якщо на ньому визначені операції додавання і множення на скаляр, котрі задовольняють такі умови:

$$1) \quad x^* + x^{**} = x^{**} + x^*, \quad \forall x^*, x^{**} \in X; \quad (5.29)$$

$$2) \quad (x^* + x^{**}) + x^{***} = x^* + (x^{**} + x^{***}), \quad \forall x^*, x^{**}, x^{***} \in X; \quad (5.30)$$

$$3) \quad x + 0 = x, \quad \forall x \in X, 0 \in X, \quad (5.31)$$

де елемент 0 є нулем множини X ;

4) для $\forall x^* \in X$ знайдеться $x^{**} \in X$ такий, що

$$x^* + x^{**} = 0, \quad (5.32)$$

де елемент x^{**} є елементом, протилежним елементу x^* ;

$$5) \quad 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in X; \quad (5.33)$$

$$6) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x, \quad \forall x \in X \text{ і } \forall \alpha, \beta; \quad (5.34)$$

$$7) \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \quad \forall x \in X \text{ і } \forall \alpha, \beta; \quad (5.35)$$

$$8) \quad \alpha \cdot (x^* + x^{**}) = \alpha \cdot x^* + \alpha \cdot x^{**}, \quad \forall x^*, x^{**} \in X \text{ і } \forall \alpha. \quad (5.36)$$

Лінійний метричний простір X називається *нормованим*, якщо $\forall x \in X$ може бути поставлене у відповідність деяке невід'ємне число $\|x\|$, яке називається *нормою* і яке задовольняє такі умови:

1) $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$x = 0; \quad (5.37)$$

$$2) \quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \alpha - \text{скаляр}; \quad (5.38)$$

$$3) \quad \|x^* + x^{**}\| \leq \|x^*\| + \|x^{**}\|, \quad \forall x^*, x^{**} \in X. \quad (5.39)$$

Нескладно переконатись в тому, що норма $\|x\|$ – це відстань від елемента x до нульового елемента множини X .

Приклади норм:

1) для простору $C[0, 1]$ –

$$\|x(t)\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \quad (5.40)$$

або

$$\|x(t)\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|; \quad (5.41)$$

2) для евклідового простору E_n розмірності n –

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (5.42)$$

де $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x \in E_n$.

Зрозуміло, що для будь-якого лінійного нормованого простору X є справедливим співвідношення

$$\|x^* - x^{**}\| = \rho(x^*, x^{**}), \quad (5.43)$$

де $x^*, x^{**} \in X$.

Повний лінійний нормований простір називається *банаховим* (за прізвищем математика, який досліджував цей простір) і позначається як В-простір.

Зрозуміло, що простори $C[0,1]$ і E_n є банаховими.

Відзначимо, що норма в В-просторі може бути введена по-різному, аби лише відповідала умовам (5.37), (5.38), (5.39).

Наприклад, в просторі безперервних на відрізку $t \in [0,1]$ функцій $x(t)$ норму можна ввести не лише у вигляді (5.40), але й у вигляді

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt. \quad (5.44)$$

Такий В-простір називають *простором Лебега* і позначають $L[0,1]$, щоб відрізнити від простору $C[0,1]$ тих же функцій, але з нормою (5.40).

Для простору E_n як норму можна використовувати не лише співвідношення (5.42), але і більш загальне

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 0. \quad (5.45)$$

Зрозуміло, що (5.42) збігається з (5.45) лише для $p = 2$.

Банахів простір зі скалярним добутком елементів називають *гільбертовим простором* (за прізвищем математика, який його вивчав) і позначають як Н-простір.

Н-простір може бути скінченновимірним і нескінченновимірним.

Скалярний добуток елементів $f, g \in H$ записують у вигляді (f, g) або $\langle f, g \rangle$, а для комплексних елементів (f, \bar{g}) або $\langle f, \bar{g} \rangle$, де \bar{g} – спряжене до g комплексне число. Скалярний добуток повинен задовольняти такі умови:

$$1) \quad \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \quad (5.46)$$

а для комплексних елементів –

$$\langle f, \bar{g} \rangle = \langle g, \bar{f} \rangle; \quad (5.47)$$

$$2) \quad \langle \alpha \cdot f, g \rangle = \alpha \cdot \langle f, g \rangle, \quad (5.48)$$

де α – скаляр; а для комплексних елементів –

$$\langle \alpha \cdot f, \bar{g} \rangle = \alpha \cdot \langle g, \bar{f} \rangle; \quad (5.49)$$

$$3) \quad \langle f, \alpha \cdot g \rangle = \alpha \cdot \langle f, g \rangle, \quad (5.50)$$

де α – скаляр; а для комплексних елементів –

$$\langle f, \overline{\alpha \cdot g} \rangle = \bar{\alpha} \cdot \langle g, \bar{f} \rangle; \quad (5.51)$$

$$4) \quad \langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle; \quad (5.52)$$

$$5) \quad \langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle; \quad (5.53)$$

$$6) \quad \langle f, f \rangle > 0, \text{ якщо } f \neq 0. \quad (5.54)$$

З визначення норми випливає, що для Н-простору –

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}. \quad (5.55)$$

Найчастіше Н-простір розглядають в двох реалізаціях.

1. Простір l_2 всіх злічених упорядкованих послідовностей $x \in l_2$, де

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \quad (5.56)$$

таких, що мають властивість

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty. \quad (5.57)$$

Для елементів $x^*, x^{**} \in l_2$:

$$а) \quad \rho(x^*, x^{**}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^* - x_i^{**})^2}; \quad (5.58)$$

$$б) \quad \|x^*\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^*)^2}; \quad (5.59)$$

$$в) \quad \|x^* - x^{**}\| = \rho(x^*, x^{**}); \quad (5.60)$$

$$\text{г) } \langle x^*, x^{**} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \cdot x_i^{**}; \quad (5.61)$$

$$\text{д) } \|x^*\| = \sqrt{\langle x^*, x^* \rangle}. \quad (5.62)$$

З цих співвідношень випливає, що l_2 -простір – це узагальнення E_n -простору при $n \rightarrow \infty$.

l_2 -простір інколи називають *координатним гільбертовим простором*.

2. Простір $L_2[a, b]$ функцій $f(t)$ з інтегрованим квадратом, тобто для яких

$$\int_a^b f^2(t) dt < \infty. \quad (5.63)$$

Для $f(t), g(t) \in L_2[a, b]$ є справедливими такі співвідношення:

$$\text{а) } \rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt}; \quad (5.64)$$

$$\text{б) } \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}; \quad (5.65)$$

$$\text{в) } \|f - g\| = \rho(f, g); \quad (5.66)$$

$$\text{г) } \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt. \quad (5.67)$$

Окремо випишемо дві знамениті нерівності:
нерівність Коші–Мінковського –

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|; \quad (5.68)$$

нерівність Буняковського–Шварца –

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \quad (5.69)$$

Їх доведення можна знайти в підручниках з функціонального аналізу, наведених у списку використаної літератури.

5.3 Елементи теорії операторів

В попередніх розділах ми вже встановили, що функція задає закон, за яким кожному елементу із однієї числової множини ставиться у відповідність якийсь елемент із іншої або цієї ж самої числової множини, а функціонал задає закон, за яким кожному елементу із множини функцій ставиться у відповідність якийсь елемент із множини чисел.

Тож виникає питання: «А чи не можна знайти закон, за яким кожному елементу із множини функцій ставиться у відповідність якийсь елемент із іншої або цієї ж самої множини функцій?»

Відповідь на це питання позитивна, а математичне поняття, яке характеризує такий закон, назвали *оператором*.

Наприклад, між множиною безперервних на $[a, b]$ функцій $f(t), t \in [a, b]$ і множиною похідних від цих функцій існує однозначна відповідність, яка задається оператором диференціювання $D = \frac{d}{dt}$.

Встановимо деякі найбільш вживані характеристики та властивості операторів.

Оператор A , який здійснює перетворення множини X у множину Y , називається *лінійним*, якщо він, по-перше, є адитивним, тобто для нього виконується співвідношення

$$A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \quad (5.70)$$

а по-друге, є безперервним, тобто для нього виконується співвідношення

$$A \cdot x_n \rightarrow A \cdot x_0, \quad (5.71)$$

якщо $x_n \rightarrow x_0, \quad \forall x_0, x_n \in X$.

Для лінійного оператора A справедливо те, що:

$$1) \quad A \cdot 0 = 0, \quad 0 \in X; \quad (5.72)$$

$$2) \quad A(-x) = -A \cdot x, \quad \forall x \in X; \quad (5.73)$$

$$3) \quad A \cdot (t \cdot x) = t \cdot A \cdot x, \quad \forall x \in X, t - \text{скаляр}. \quad (5.74)$$

Якщо для оператора виконується співвідношення (5.74), то його називають *однорідним*.

Однією із найважливіших властивостей оператора є його обмеженість на одиничній кулі $S[0, 1] \subset X$, для якої виконується

$$\|x\| \leq 1, \quad x \in S. \quad (5.75)$$

Обмеженість лінійного оператора A задають у такий спосіб.

Нехай існує така константа K , що

$$\|A \cdot x\| \leq K \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X. \quad (5.76)$$

Число

$$K_0 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A \cdot x\| \quad (5.77)$$

називають нормою оператора A і позначають

$$K_0 = \|A\|. \quad (5.78)$$

Нагадаємо, що символ «sup» означає «верхню границю» виразу, який стоїть з правого боку від цього символу. Під символом вказують множину елементів, на які діє оператор A .

З нерівності трикутника для норми випливає, що для $\forall x \in S$ справедливо

$$\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|. \quad (5.79)$$

А тому можна стверджувати, що множина лінійних операторів A , які перетворюють множину X у множину Y , що символічно позначається як

$$A: (X \rightarrow Y) \quad (5.80)$$

або

$$A \in (X \rightarrow Y), \quad (5.81)$$

є лінійним нормованим простором $(X \rightarrow Y)$.

Із співвідношень (5.76) ÷ (5.79) випливає, що для норми оператора виконується

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|}. \quad (5.82)$$

Дуже важлива теорема: якщо адитивний і однорідний оператор є обмеженим, то він є безперервним, а тому лінійним.

Доведення.

Нехай $x_n \rightarrow x_0$, $\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$.

Тоді в силу адитивності та обмеженості –

$$\|A \cdot x_n - A \cdot x_0\| = \|A \cdot (x_n - x_0)\| \leq K \cdot \|x_n - x_0\|. \quad (5.83)$$

Але із того, що $x_n \rightarrow x_0$, випливає, що

$$\|x_n - x_0\| = 0. \quad (5.84)$$

Підставляючи (5.84) у (5.83) отримаємо, що

$$\|A \cdot x_n - A \cdot x_0\| = 0. \quad (5.85)$$

Співвідношення (5.85) – це записана через норму властивість (5.71), яка визначає безперервність оператора.

Але, якщо оператор A є безперервним і адитивним, то він лінійний за визначенням.

Часто математики оперують поняттям «цілком безперервного оператора», задаючи його так: лінійний оператор A , який перетворює деякий банаховий простір X у банаховий простір Y , називається цілком безперервним, якщо він перетворює будь-яку обмежену множину $G \subset X$ у компакту множину $M \subset Y$.

Слід зауважити, що це формулювання теж відповідає співвідношенню (5.71) і є лише іншим словесно-понятійним трактуванням введеного раніше поняття безперервності.

Але для гільбертового простору поняття «цілком неперервного оператора» можна ввести і з використанням скалярного добутку. Тобто в H -просторі це такий лінійний оператор A із множини $(X \rightarrow Y)$, для якого із того, що $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$, випливає, що

$$\langle A \cdot x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle A \cdot x_0, y_0 \rangle. \quad (5.86)$$

Завдяки наявності скалярного добутку в H -просторі виділяють спеціальний клас лінійних операторів, які називають *симетризувальними*. При цьому оператор $A \in (H \rightarrow H)$ називається симетризувальним, якщо для $\forall x, y \in H$

$$\langle A \cdot x, y \rangle = \langle x, A \cdot y \rangle. \quad (5.87)$$

Розглянемо $\langle Ax, y \rangle$ за умови, що x є змінним елементом, а y – фіксованим елементом у H -просторі, тобто покладемо, що

$$\{x\} \subset H, \quad y \in H. \quad (5.88)$$

За умови (5.88) скалярний добуток $\langle Ax, y \rangle$ є лінійним функціоналом від x , тобто маємо

$$F_y(x) = \langle A \cdot x, y \rangle. \quad (5.89)$$

Змінюючи елементи $y \in H$, ми будемо отримувати різні значення функціонала (5.89), які формально можна позначити символом y^* , тобто

$$y^* = F_y(x), \quad (5.90)$$

де $y^* \in H$.

Але, з іншого боку, формально можна записати, що

$$y^* = A^* y, \quad (5.91)$$

де A^* – це лінійний оператор, який перетворює елементи $y \in H$ у елементи $y^* \in H$. Цей оператор A^* називають спряженим до оператора A .

Оскільки для елементів x і y^* теж можна визначити скалярний добуток як $\langle x, y^* \rangle$, то справедливим буде і співвідношення

$$\langle x, y^* \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad (5.92)$$

яке отримаємо підстановкою у $\langle x, y^* \rangle$ співвідношення (5.91).

Але, якщо A є оператором симетризувальним, то із співставлення виразів (5.87) і (5.92) випливає, що

$$A = A^*, \quad (5.93)$$

тобто симетризувальний оператор A збігається зі своїм спряженим A^* . В зв'язку з цим симетризувальні оператори ще називають *самоспряженими*.

Оператор A , для якого

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = I, \quad (5.94)$$

де I – одиничний оператор, тобто такий, що

$$I \cdot x = x, \quad (5.95)$$

називають *унітарним*.

Нехай задано оператор $A \in (X \rightarrow Y)$.

Оператор $A^{-1} \in (Y \rightarrow X)$, який задовольняє рівняння

$$\begin{cases} A^{-1} \cdot (A \cdot x) = x, \quad \forall x \in X, \\ A \cdot (A^{-1} \cdot y) = y, \quad \forall y \in Y. \end{cases} \quad (5.96)$$

називають *оберненим* до оператора A . Зрозуміло, що рівняння (5.96) можуть задовольнятись лише за умови, що

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I. \quad (5.97)$$

Зауважимо, що під добутком будь-яких операторів ми розуміємо їх послідовне застосування до елемента, що стоїть з правого боку від них.

Після введення оберненого оператора A^{-1} зрозуміло, що для розв'язання рівняння

$$A \cdot x = y \quad (5.98)$$

необхідно знайти A^{-1} , оскільки:

$$\begin{aligned} A^{-1}(A \cdot x) &= A^{-1}y \\ \Downarrow \\ (A^{-1}A) \cdot x &= A^{-1}y \\ \Downarrow \\ I \cdot x &= A^{-1}y \\ \Downarrow \\ x &= A^{-1}y. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Виникає питання: «А як же розв'язати рівняння

$$A \cdot x - \lambda \cdot x = y, \quad (5.100)$$

$$A \cdot x - \lambda \cdot x = 0, \quad (5.101)$$

де $x \in X$, $y \in Y$, $A \in (X \rightarrow Y)$, а λ – скаляр?»

Перепишемо (5.100), (5.101) так:

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot x = y, \quad (5.102)$$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0. \quad (5.103)$$

Нехай існує оператор R_λ , обернений до $(A - \lambda \cdot I)$, тобто

$$R_\lambda = (A - \lambda \cdot I)^{-1}. \quad (5.104)$$

В цьому випадку, домножуючи рівняння (5.102) зліва на R_λ , отримаємо

$$x = (A - \lambda \cdot I)^{-1} \cdot y. \quad (5.105)$$

Рівняння (5.105) і буде розв'язком рівняння (5.102).

Обернений оператор R_λ , який визначається співвідношенням (5.104), називають *резольвентою* оператора A або *розв'язувальним* оператором для рівняння (5.102).

Зрозуміло, що розв'язком рівняння (5.103) буде рівняння

$$x = (A - \lambda \cdot I)^{-1} \cdot 0 = 0. \quad (5.106)$$

Ті значення параметра λ , які дозволяють мати резольвенту R_λ , називають *регулярними* значеннями оператора A . Всі інші значення параметра λ , які не є регулярними, складають спектр оператора A .

Як виявили дослідження математиків, існують такі значення λ , за яких однорідне рівняння (5.101) має розв'язок, відмінний від нульового, тобто для них не виконується (5.106). Такі значення λ називають *характеристичними числами* або *власними значеннями* оператора A . Зрозуміло, що вони є точками спектра цього оператора.

Але слід зауважити, що до складу спектра оператора A можуть входити значення λ , які не є його характеристичними числами, тобто потужність спектра оператора є більшою потужності множини його характеристичних чисел.

Для пошуку розв'язків багатьох неоднорідних операторних рівнянь класу (5.100) корисною є теорема: нехай $A \in (X \rightarrow X)$, де $X \in \mathbb{B}$ -простір. Нехай також існує деякий параметр μ , який задовольняє умову

$$|\mu| < \frac{1}{\|A\|}. \quad (5.107)$$

За цих умов оператор $(I - \mu A)$ має обернений оператор R_μ і при цьому

$$R_\mu = (I - \mu \cdot A)^{-1} = I + \mu \cdot A + \mu^2 \cdot A^2 + \mu^3 \cdot A^3 + \dots. \quad (5.108)$$

Зрозуміло, що R_μ є теж резольвентою оператора A , унормованого до λ .

Доводиться (5.108) розкладенням R_μ у степеневий ряд в околі точки $\mu = 0$.

Наведемо без доведення деякі властивості резольвенти.

1. Для множини D регулярних точок оператора A –

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) \cdot R_\lambda \cdot R_\mu, \quad \forall \lambda, \mu \in D. \quad (5.109)$$

З рівняння (5.109) шляхом граничного переходу $\lambda \rightarrow \mu$ отримаємо

$$\frac{d^k R_\lambda}{d\lambda^k} = k! \cdot R_\lambda^{k+1}. \quad (5.110)$$

2. Якщо оператор A є обмеженим, то весь його спектр лежить у крузі

$$\|\lambda\| \leq \|A\|, \quad (5.111)$$

а за межами цього круга, тобто при

$$\|\lambda\| > \|A\| \quad (5.112)$$

резольвенту R_λ можна розкласти у збіжний за нормою оператора ряд

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \cdot \left(I + \frac{1}{\lambda} \cdot A + \frac{1}{\lambda^2} \cdot A^2 + \dots \right). \quad (5.113)$$

3. Радіус найменшого круга r_A з центром у початку координат, який містить весь спектр оператора A , а тому називається *спектральним радіусом*, можна визначити за формулою Гельфанда

$$r_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}. \quad (5.114)$$

З (5.114) випливає, що

$$r_A \leq \|A\|. \quad (5.115)$$

4. Нехай λ є спільною регулярною точкою двох замкнених лінійних операторів A і B . Якщо $D_B \supset D_A$, то

$$R_\lambda^B - R_\lambda^A = R_\lambda^B \cdot (A - B) \cdot R_\lambda^A. \quad (5.116)$$

Повернемося до рівняння (5.100) або, що одне і те ж, до рівняння (5.102). Стосовно нього можна зробити два твердження.

1. Рівняння (5.100) називають таким, що має однозначний розв'язок, якщо відповідне йому однорідне рівняння

$$A \cdot x = 0 \quad (5.117)$$

має лише нульовий розв'язок.

2. Рівняння (5.100) називають таким, що має коректний розв'язок, якщо для $\forall x \in X$ виконується співвідношення

$$\|x\| \leq K \cdot \|A \cdot x\|, \quad A \in (X \rightarrow X). \quad (5.118)$$

З першого твердження випливає, що для оператора $A \in D_A$ існує лівий обернений оператор A^{-1} .

З другого твердження випливає, що оператор A^{-1} є обмеженим, а тому розв'язок рівняння (5.100) безперервно залежить від правої частини.

Завершимо вступ до теорії операторів ми характеристикою поняття групи операторів.

Під групою $u(t)$ операторів A розуміють таку їх сукупність, якій притаманні властивості:

$$1) \quad u(0) = I; \quad (5.119)$$

$$2) \quad \begin{aligned} u(t + \tau) &= u(t) \cdot u(\tau), \\ -\infty < t, \tau < \infty; \end{aligned} \quad (5.120)$$

$$3) \quad \frac{du}{dt} = A \cdot u. \quad (5.121)$$

Зрозуміло, що ці три властивості мають лише ті оператори A , які є обмеженими і задовольняють співвідношення

$$u(t) = e^{t \cdot A}. \quad (5.122)$$

З (5.122) випливає, що

$$A = \frac{\ln u(t)}{t}. \quad (5.123)$$

З (5.119), (5.121) та (5.122) випливає, що оператор A можна визначити як похідну від групи $u(t)$ при $t = 0$.

Тому оператор A називають *породжуючим* оператором для групи $u(t)$ або, що одне і те ж, *інфінітезимальним*.

Розкладаючи експоненту в (5.122) у степеневий ряд, отримаємо

$$u(t) = 1 + t \cdot A + \frac{t^2}{2!} \cdot A^2 + \frac{t^3}{3!} \cdot A^3 + \dots, \quad (5.124)$$

тобто група $u(t)$ може бути заданою не лише через експоненту (5.122), а і у вигляді степеневого ряду (5.124).

5.4 Ортонормовані підмножини у гільбертових просторах та апроксимація безперервних функцій в них

5.4.1 Ортонормовані підмножини у гільбертових просторах

Розглянемо функціональний гільбертовий простір $H[a, b]$, такий, що $x(t), y(t) \in H[a, b]$, $t \in [a, b]$.

Нехай скалярний добуток $\langle x, y \rangle$ функцій $x(t)$ і $y(t)$ дорівнює нулю, тобто

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \cdot y(t) dt = 0. \quad (5.125)$$

Якщо для функцій $x(t), y(t) \in H[a, b]$ виконується умова (5.125), то про них кажуть, що вони є *ортogonalними* на $[a, b]$.

Слід зауважити, що для комплексних елементів x , у гільбертового простору H скалярний добуток $\langle x, y \rangle$ має вигляд

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \cdot \overline{y(t)} dt, \quad (5.126)$$

де символом $\overline{y(t)}$ позначена комплексна функція, спряжена до $y(t)$.

Зрозуміло, що для комплексних елементів H -простору при перемноженні суттєву роль відіграє порядок запису співмножників у їх скалярному добутку, але якщо ці елементи є ортогональними, то порядок запису значення не має, тобто в цьому випадку для них виконується умова

$$\int_a^b x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \int_a^b \overline{x(t)} \cdot y(t) dt = 0. \quad (5.127)$$

Нехай ми маємо в гільбертовому просторі $H[a, b]$ скінченновимірну чи нескінченну послідовність функцій $\{\varphi_k(t)\}$, таких, що

$$\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b], \quad t \in [a, b]. \quad (5.128)$$

Якщо для цієї послідовності $\{\varphi_k(t)\}$ виконується умова

$$\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \int_a^b \varphi_k(t) \cdot \varphi_m(t) dt = 0, \quad k \neq m, \quad (5.129)$$

то цю послідовність називають *ортogonalною*.

Якщо для ортогональної послідовності $\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$ виконується умова

$$\int_a^b \varphi_k^2(t) dt = 1, \quad (5.130)$$

то цю послідовність називають *ортонормованою*.

Послідовність $\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$ називають ортогональною з вагою $w(t)$, якщо існує така функція $w(t) \in H[a, b]$, яка забезпечує умову

$$\int_a^b \varphi_k(t) \cdot \varphi_m(t) \cdot w(t) dt = 0, \quad k \neq m. \quad (5.131)$$

Зрозуміло, що послідовність $\{\sqrt{w(t)} \cdot \varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$ є просто ортогональною.

Підмножина ортогональних функцій $\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$ є повною в H -просторі, якщо в ньому не існує відмінної від нуля функції, що була б ортогональною до якоїсь із функцій цієї послідовності.

Послідовність функцій $\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$ називають *замкнутою* в H -просторі, якщо для $\forall f(t) \in H[a, b]$ і для $\forall \varepsilon > 0$ можна побудувати лінійну комбінацію із функцій $\varphi_k(t)$, взятих з вагою λ_k , таку, щоб виконувалась умова

$$\|f(t) - \lambda_1 \cdot \varphi_1(t) - \lambda_2 \cdot \varphi_2(t) - \dots - \lambda_k \cdot \varphi_k(t) - \dots\| < \varepsilon. \quad (5.132)$$

Це означає, що з похибкою, котра не перевищує ε , функцію $f(t) \in H[a, b]$ на відрізку $[a, b]$ можна подати у вигляді

$$f(t) \cong \sum_{k=1}^N \lambda_k \cdot \varphi_k(t), \quad (5.133)$$

де N може бути як кінцевим цілим числом, так і нескінченністю.

В теорії гільбертових просторів існує поняття *спряженого простору*. Воно введено у такий спосіб: H -простір $L_{p^*}[1 \leq p^* < \infty)$ вважається спряженим до H -простору $L_p[1 \leq p < \infty)$, якщо виконується умова

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1. \quad (5.134)$$

Математиками встановлено, що кожна послідовність $\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$, яка є замкнутою в просторі

$$H[a, b] = L_p[1 \leq p < \infty), \quad (5.135)$$

одночасно буде повною у спряженому до нього просторі $L_{p^*}[1 \leq p^* < \infty)$. І

навпаки, кожна послідовність $\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$, яка є повною в просторі (5.135), одночасно буде замкнутою в спряженому до нього просторі $L_{p^*} [1 \leq p^* < \infty)$.

Звертаємо увагу на те, що в найбільш вживаному варіанті Н-простору, яким є $L_2[a, b]$ – це простір функцій, інтегрованих зі своїм квадратом (див. (5.63)), – поняття замкнутості та повноти збігаються, оскільки при $p = 2$, згідно з умовою (5.134), $p^* = 2$, тобто простір L_{p^*} , спряжений до L_p , для L_2 збігається з самим L_2 .

5.4.2 Апроксимація безперервних функцій в гільбертових просторах на основі ортогональних послідовностей

Під *апроксимацією* безперервних функцій будемо розуміти процес знаходження у вибраному просторі аналітичного опису функції, заданої елементами якоїсь множини, котра може і не бути підмножиною вибраного простору. Наприклад, апроксимація багаточленом функції, заданої таблично.

Нехай $\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$, $t \in [a, b]$ – деяка повна послідовність ортонормованих функцій, яка є замкнутою у цьому просторі.

Нехай $H[a, b] = L[a, b]$ – це Н-простір функцій $f(t) \in L[a, b]$, для яких виконується умова

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty, \quad (5.136)$$

а метрика $\rho(f_1, f_2)$ задається співвідношенням

$$\rho(f_1, f_2) = \int_a^b |f_1(t) - f_2(t)| dt. \quad (5.137)$$

Припустимо, що ряд

$$\sum_k \lambda_k \cdot \varphi_k(t), \quad (5.138)$$

де λ_k – деякий, поки що невідомий нам скаляр, збігається рівномірно до деякої функції $f(t) \in L[a, b]$. Це означає, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує таке m , що для $\forall t \in [a, b]$ і $\forall n \geq m$ виконується співвідношення

$$\int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \lambda_k \cdot \varphi_k(t) \right| dt < \varepsilon, \quad (5.139)$$

із якого при $n \rightarrow \infty$ випливає, що

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot \varphi_k(t). \quad (5.140)$$

Для визначення вагових коефіцієнтів $\lambda_k, k = \overline{0, \infty}$ домножимо обидві частини рівняння (5.140) на $\varphi_j(t)$ і проінтегруємо результат в межах від « a » до « b ». В результаті отримаємо –

$$\int_a^b f(t) \cdot \varphi_j(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot \int_a^b \varphi_k(t) \cdot \varphi_j(t) dt. \quad (5.141)$$

Оскільки $\{\varphi_k(t)\} \subset L[a, b]$ є послідовністю ортонормованою, то для неї виконуються співвідношення (5.129) і (5.130). З врахуванням цього із (5.141) маємо

$$\lambda_j = \int_a^b f(t) \cdot \varphi_j(t) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.142)$$

Вагові коефіцієнти λ_j називають *коефіцієнтами Фур'є*, а їх повну послідовність $\{\lambda_j\}$ називають *спектром Фур'є* розкладу функції $f(t) \in L[a, b]$ за ортонормованою системою функцій $\{\varphi_j(t)\} \subset L[a, b]$.

Вимога (5.139) рівномірної збіжності ряду (5.138) до функції $f(t)$ є так званою «сильною вимогою збіжності».

Але виявляється, що в Н-просторі $L_2[a, b]$ сильна збіжність еквівалентна «збіжності в середньому», яка є більш слабкою вимогою і може бути записаною у вигляді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{k=0}^n \lambda_k \cdot \varphi_k(t) \right]^2 dt = 0. \quad (5.143)$$

Розглянемо процес апроксимації функції $f(t) \in L_2[a, b]$ в Н-просторі $L_2[a, b]$ за допомогою ортонормованої послідовності $\{\varphi_k(t)\} \subset L_2[a, b]$.

Задачу апроксимації можна звести в цьому випадку до такого підбору коефіцієнтів C_k часткової суми

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n C_k \cdot \varphi_k(t) \quad (5.144)$$

в Н-просторі $L_2[a, b]$, щоб ця сума наближалась до функції $f(t) \in L_2[a, b]$ з похибкою, що не перевищує задану, тобто щоб

$$\|f(t) - S_n(t)\| = \sqrt{\int_a^b [f(t) - S_n(t)]^2 dt} \rightarrow \min_{C_k}. \quad (5.145)$$

Але, щоб знайти \min_{C_k} виразу (5.145), треба розв'язати систему рівнянь

$$\frac{\partial E}{\partial C_k} = 0, \quad k = \overline{0, n}, \quad (5.146)$$

де

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b [f(t) - S_n(t)]^2 dt = \\ &= \int_a^b f^2(t) dt - 2 \cdot \int_a^b f(t) \cdot S_n(t) dt + \int_a^b [S_n(t)]^2 dt. \end{aligned} \quad (5.147)$$

Підставляючи (5.144) у (5.147), матимемо:

$$E = \int_a^b f^2(t) dt - 2 \cdot \sum_{k=0}^n C_k \cdot \int_a^b f(t) \cdot \varphi_k(t) dt + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n C_k \cdot \varphi_k(t) \right)^2 dt. \quad (5.148)$$

З врахуванням (5.130) і (5.142) співвідношення (5.148) можна переписати так:

$$E = \int_a^b f^2(t) dt - 2 \cdot \sum_{k=0}^n C_k \cdot \lambda_k + \sum_{k=0}^n C_k^2. \quad (5.149)$$

Підставляючи (5.149) у систему рівнянь (5.146), отримаємо:

$$-2 \cdot \lambda_k + 2 \cdot C_k = 0, \quad k = \overline{0, n}. \quad (5.150)$$

З рівнянь (5.150) випливає, що

$$C_k = \lambda_k. \quad (5.151)$$

Тож, щоб часткова сума $S_n(t)$ апроксимувала функцію $f(t)$ з заданою точністю, необхідно як коефіцієнти C_k вибирати коефіцієнти Фур'є λ_k функції $f(t)$.

Підставляючи (5.151) у (5.149), матимемо:

$$E = \int_a^b f^2(t) dt - \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 \geq 0. \quad (5.152)$$

Зрозуміло, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E = 0. \quad (5.153)$$

З (5.152), (5.153) випливає, що

$$\int_a^b f^2(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2. \quad (5.154)$$

$\varphi_j(t)$ буде дорівнювати нулю лише в тому випадку, коли його доповнити ваговою функцією $w(t) \in H[a, b]$, тобто поклавши, що

$$\int_a^b \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t) \cdot w(t) dt = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.158)$$

де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (5.159)$$

символ Кронекера.

На першому кроці методики Грама–Шмідта покладемо, що

$$\varphi_1(t) = \frac{f_1(t)}{\sqrt{\int_a^b f_1^2(t) \cdot w(t) dt}}. \quad (5.160)$$

Підставляючи (5.160) у співвідношення (5.158) при $i = j = 1$, бачимо, що, задаючи $\varphi_1(t)$ у вигляді (5.160), ми одразу отримуємо перший член послідовності $\{\varphi_k(t)\}$ у нормованому вигляді.

На другому кроці методики Грама–Шмідта задамо функцію

$$\psi_2(t) = a_{21} \cdot \varphi_1(t) + f_2(t), \quad (5.161)$$

до якої висуватимемо вимоги, щоб вона була ортогональною до $\varphi_1(t)$. В цьому випадку буде справедливим рівняння

$$\int_a^b \psi_2(t) \cdot \varphi_1(t) \cdot w(t) dt = 0, \quad (5.162)$$

підставляючи в яке (5.161), отримаємо:

$$a_{21} \cdot \int_a^b \varphi_1^2(t) \cdot w(t) dt + \int_a^b f_2(t) \cdot \varphi_1(t) \cdot w(t) dt = 0. \quad (5.163)$$

З врахуванням того, що

$$\int_a^b \varphi_1^2(t) \cdot w(t) dt = 1, \quad (5.164)$$

із (5.163) матимемо:

$$a_{21} = - \int_a^b f_2(t) \cdot \varphi_1(t) \cdot w(t) dt. \quad (5.165)$$

Підставляючи (5.165) у (5.161), отримуємо функцію $\psi_2(t)$, яка буде ортогональною до $\varphi_1(t)$.

Для отримання ортонормованої функції $\varphi_2(t)$, яка стане другим членом послідовності $\{\varphi_k(t)\}$, пов'яжемо функцію $\varphi_2(t)$ з функцією $\psi_2(t)$ у такий спосіб –

$$\varphi_2(t) = \frac{\psi_2(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_2^2(t) \cdot w(t) dt}}. \quad (5.166)$$

Підставляючи (5.166) у (5.158) при $i=1, j=2$ та при $i=2, j=2$, легко переконатись, що функція $\varphi_2(t)$, якщо вона задовольняє умови (5.161), (5.165) і (5.166), буде і ортогональною до $\varphi_1(t)$, і нормованою.

Узагальнюючи, можна стверджувати, що для кроку з номером k справедливими будуть співвідношення:

$$\begin{aligned} \psi_k(t) = a_{k1} \cdot \varphi_1(t) + a_{k2} \cdot \varphi_2(t) + \dots + a_{k(k-1)} \cdot \varphi_{k-1}(t) + \\ + f_k(t), \quad k = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (5.167)$$

$$a_{kj} = -\int_a^b f_k(t) \cdot \varphi_j(t) \cdot w(t) dt, \quad k = \overline{2, n}, \quad (5.168)$$

$$\varphi_k = \frac{\psi_k(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_k^2(t) \cdot w(t) dt}}, \quad k = \overline{2, n}. \quad (5.169)$$

Як бачимо із наведених кроків, процедура Грама–Шмідта є рекурентною, тобто кожний наступний член послідовності $\{\varphi_k(t)\}$ знаходиться з використанням інформації, отриманої на попередніх кроках.

Різними математиками для базових функцій

$$f_k(t) = t^k, \quad k = \overline{0, n} \quad (5.170)$$

отримано різноманітні системи ортонормованих поліномів для різних функцій ваги та інтервалів ортогоналізації. Тому немає необхідності кожний раз, коли необхідно апроксимувати функцію $f(t) \in H[a, b]$ за допомогою ортонормованої послідовності $\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$, самому будувати цю послідовність. Достатньо вибрати одну із тих, що побудовані іншими, скориставшись довідником з вищої математики чи посібником з математичної теорії обробки результатів експериментів.

Наведемо приклади інтервалів ортогоналізації, вагових функцій і нормувальних множників найбільш розповсюджених систем ортогональних поліномів (табл. 5.1).

Таблиця 5.1 – Приклади інтервалів ортогоналізації, вагових функцій і нормувальних множників найбільш розповсюджених систем ортогональних поліномів

Поліноми	Інтервал ортогоналізації	Вагова функція $W(t)$	Нормувальний множник
Лежандра $P_k(t)$	$t \in [-1, 1]$	1	$\int_{-1}^1 (P_k(t))^2 dt = \frac{2}{2k+1}$
Чебишова I $T_k(t)$	$t \in [-1, 1]$	$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\int_{-1}^1 (T_k(t))^2 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k \neq 0 \\ \pi, & k = 0 \end{cases}$
Чебишова II $U_k(t)$	$t \in [-1, 1]$	$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$	$\int_{-1}^1 (U_k(t))^2 (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$
Лагерра $L_k(t)$	$t \in [0, \infty)$	e^{-t}	$\int_0^{\infty} (L_k(t))^2 e^{-t} dt = 1$
Лагерра приєднані $L_k^{(i)}(t)$	$t \in [0, \infty)$	$t^i \cdot e^{-t}$	$\int_0^{\infty} (L_k^{(i)}(t))^2 t^i e^{-t} dt = \frac{(k+i)!}{k!}$
Ерміта $H_k(t)$	$t \in (-\infty, \infty)$	e^{-t^2}	$\int_{-\infty}^{\infty} (H_k(t))^2 e^{-t^2} dt = 2^k \cdot k! \cdot \sqrt{\pi}$

Таким чином, для того, щоб здійснити апроксимацію функції $f(t) \in H[a, b]$, $t \in [a, b]$ за допомогою ортонормованої системи поліномів $\{\varphi_k(t)\} \subset H[a, b]$, необхідно, виходячи із інтервалу ортогоналізації $[a, b]$ та зручності вагової функції $w(t)$, вибрати ту чи іншу ортонормовану систему поліномів з довідника та знайти співвідношення для загального члена вибраної системи, розкриваючи яке для $k = 1, 2, 3, \dots, n$, отримати таку кількість її членів, якої достатньо для забезпечення заданої точності апроксимації.

Для прикладу наведемо перші три члени кількох ортонормованих послідовностей із наведених в таблиці 5.1:

– для поліномів Лежандра:

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = t, P_2(t) = \frac{1}{2} \cdot (3t^2 - 1); \quad (5.171)$$

– для поліномів Чебишова:

$$T_0(t) = 1, T_1(t) = t, T_2(t) = 2t^2 - 1; \quad (5.172)$$

$$U_0(t) = 1, U_1(t) = 2t, U_2(t) = 4t^2 - 1; \quad (5.173)$$

– для поліномів Лагерра:

$$L_0(t) = 1, L_1(t) = 1 - t, L_2(t) = 1 - 2t + \frac{t^2}{2}. \quad (5.174)$$

Зауважимо, що всі системи ортонормованих поліномів із числа наведених у таблиці 5.1 мають дві спільні властивості:

- 1) всі вони отримані, виходячи із базових функцій (5.170);
- 2) всі вони є розв'язками гіпергеометричного диференціального рівняння 2-го порядку, яке має вигляд

$$t \cdot (t - 1) \cdot y'' + [\xi - (\eta + \nu + 1) \cdot t] \cdot y' - \eta \cdot \nu \cdot y = 0. \quad (5.175)$$

Гаусс знайшов розв'язок рівняння (5.175) у вигляді ряду

$$y(t) = 1 + \frac{\eta \cdot \nu}{\xi} \cdot \frac{t}{1!} + \frac{\eta \cdot (\eta + 1) \cdot \nu \cdot (\nu + 1)}{\xi \cdot (\xi + 1)} \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (5.176)$$

Залежно від значень коефіцієнтів η, ν, ξ і відрізка $[a, b]$, на якому знаходиться розв'язок, із ряду (5.176) можна отримати всі ортонормовані поліноми із числа наведених у таблиці 5.1.

Крім того, можна ще отримати функції Якобі–Каутца і функції Куммера. Але ці функції, в свою чергу, виражаються через такі спеціальні функції, як гамма-функції і функції Бесселя, тому, аби не ускладнювати викладки, ми їх вирішили в цьому навчальному посібнику не наводити.

На завершення цього підрозділу наведемо деякі міркування стосовно вибору кількості членів в ортонормованих рядах (5.144) при апроксимації функцій $f(t) \in H[a, b]$ частковими сумами $S_n(t)$.

В прикладному аналізі функції $f(t)$, які необхідно апроксимувати, як правило, отримують шляхом вимірювань. А тому замість функції $f(t)$ ми маємо справу з функціями

$$f^*(t) = f(t) + h(t), \quad (5.177)$$

в яких $h(t)$ – «шум» вимірювань.

Тож, ортонормований ряд, яким ми будемо апроксимувати $f^*(t)$, матиме дві складові: регулярну і шумову. Коефіцієнти λ_k регулярної складової при $k \rightarrow \infty$ будуть зменшуватись до нуля, а коефіцієнти шумової складової, починаючи з деякого значення k при подальшому збільшенні $k \rightarrow \infty$ практично перестають змінюватись.

Важливою задачею є визначення такого значення $k = n$ в частковій сумі $S_n(t)$, завдяки якому можна відкинути «високочастотну» частину спектра Фур'є функції $f^*(t)$, що обумовлена наявністю в цій функції шумової складової $h(t)$.

Доведено, що якщо функція $f(t)$ є абсолютно безперервною (тобто $f(t) \in C[a, b]$ і має обмежену похідну), то порядок спадання її коефіцієнтів Фур'є λ_k є функцією, оберненою до номера коефіцієнта, тобто $O\left(\frac{1}{k}\right)$.

Тож, в околі коефіцієнта Фур'є λ_k , для якого наведене вище твердження порушується, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot \varphi_k(t)$ можна обривати, перетворюючи його на часткову суму $S_n(t)$, що відображає лише регулярну складову функції $f(t)$, яка апроксимується цим рядом.

5.5 Оптимізація динамічних об'єктів з використанням ортонормованих послідовностей в гільбертових просторах

Ми вже знаємо, як здійснювати оптимізацію динамічних об'єктів шляхом розв'язання рівнянь Ейлера чи Ейлера–Лагранжа, а також за допомогою принципу максимуму Понтрягіна чи динамічного програмування.

Але поряд з цими методами існує ще один клас методів оптимізації динамічних об'єктів, за допомогою яких оптимізація здійснюється з використанням процедури прямої мінімізації критерію оптимальності за умови, що екстремаль задається частковою сумою $S_n(t)$ (5.144), в якій як функції

$\varphi_k(t)$ вибираються члени ортонормованої послідовності із числа тих, що розглянуті в попередньому підрозділі.

Методи цього класу називають *прямими методами* оптимізації або *наближеними*.

Одним із найбільш популярних методів в цьому класі є *метод Рітца*, запропонований на початку ХХ століття.

Суть методу Рітца така.

Нехай потрібно знайти екстремаль $y(x)$, яка мінімізує функціонал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (5.178)$$

за умови, що на границях області $[a, b]$ маємо:

$$\begin{cases} y(a) = y_a, \\ y(b) = y_b \end{cases} \quad (5.179)$$

та мають місце обмеження вигляду

$$g(x, y, y') = 0 \quad (5.180)$$

або

$$\int_a^b K(x, y, y') dx = J_0. \quad (5.181)$$

Будемо шукати екстремаль $y(x)$ у вигляді

$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k \cdot \varphi_k(x), \quad (5.182)$$

де $\varphi_k(x)$ – відомі ортонормовані поліноми із числа тих, що розглянуті в попередньому підрозділі, наприклад, поліноми Лежандра чи Чебишова, які ми свідомо вибрали, виходячи із зручності їх використання для розв'язання нашої задачі.

Вибором (5.182) ми, фактично, зводимо задачу оптимізації до задачі визначення коефіцієнтів $C_k, k = \overline{1, n}$. Підставляючи (5.182) у рівняння граничних умов (5.179), ми на першому етапі розв'язання задачі скорочуємо на два кількість невідомих коефіцієнтів $C_k, k = \overline{1, n}$, які нам потрібно знайти, щоб однозначно визначити екстремаль (5.182), котра доставляє мінімум функціоналу (5.178).

Це нам вдається зробити на першому етапі тому, що за допомогою двох рівнянь (5.179) можна два коефіцієнти, наприклад, C_1 і C_2 , виразити через інші коефіцієнти $C_k, k = \overline{3, n}$.

Після цього шукана екстремаль (5.182) вже матиме вигляд

$$y = f_1(x, C_3, C_4, \dots, C_n). \quad (5.183)$$

Підставляючи (5.183) у (5.180) чи у (5.181), ми отримуємо на другому етапі рівняння, за допомогою якого можна виключити ще один коефіцієнт C_k , наприклад C_3 , виразивши його через інші коефіцієнти $C_k, k = \overline{4, n}$.

Після цього шукана екстремаль (5.183) вже матиме вигляд

$$y = f_2(x, C_4, \dots, C_n). \quad (5.184)$$

Підставляючи (5.184) у функціонал (5.178), обраховуючи функцію $F(x, y, y')$ і беручи інтеграл, ми на третьому етапі отримуємо функцію

$$J(y) = f_3(C_4, \dots, C_n), \quad (5.185)$$

яка вже не містить в собі змінної x і буде функцією виключно коефіцієнтів $C_k, k = \overline{4, n}$.

Для пошуку оптимальних значень цих коефіцієнтів використовуємо на четвертому етапі стандартну методику пошуку екстремуму функції ($n - 3$) змінних $C_k, k = \overline{4, n}$.

Для цього візьмемо частинні похідні $\frac{\partial J(y)}{\partial C_k}, k = \overline{4, n}$ від (5.185), прирівняємо їх нулю:

$$\frac{\partial f_3(C_4, \dots, C_n)}{\partial C_k} = 0, \quad k = \overline{4, n}, \quad (5.186)$$

і розв'яжемо отриману систему алгебраїчних рівнянь (5.186) відносно $C_k, k = \overline{4, n}$.

Знайдені значення коефіцієнтів $C_k, k = \overline{4, n}$ підставляємо у функцію (5.184). Це і буде екстремаль $y(x)$, яка в умовах дії обмежень (5.180) чи (5.181) та граничних умов (5.179) доставляє мінімум функціоналу (5.178).

5.6 Завдання для самоперевірки

1. Що собою являє метричний простір?

2. Що таке метрика простору і які умови вона повинна задовольняти? Наведіть приклади метрик.
3. Як виглядає відкрита куля в метричному просторі $C[0,1]$?
4. Які множини є повними і замкнутими?
5. Які множини є досконалыми? Наведіть приклад.
6. Дайте означення фундаментальної послідовності в метричному просторі.
7. Який метричний простір є повним? Наведіть приклади повного і неповного метричних просторів.
8. Що таке компактна множина, множина компактна в собі, компакт?
9. Як визначається лінійний метричний простір?
10. Що таке норма простору? Наведіть приклади норм.
11. Дайте означення банахового простору.
12. Дайте означення гільбертового простору. Наведіть приклади гільбертових просторів та співвідношень, за допомогою яких записуються скалярні добутки в цих просторах.
13. Які умови повинен задовольняти скалярний добуток у гільбертовому просторі?
14. Як пов'язані між собою метрика і норма, норма і скалярний добуток в гільбертовому просторі?
15. Дайте означення оператора. Наведіть приклади.
16. Який оператор є лінійним? Які властивості лінійного оператора ви знаєте?
17. Що таке норма оператора? Запишіть нерівність трикутника для норми оператора.
18. Що таке «цілком безперервний оператор»? Як можна визначити цілком безперервний оператор в гільбертовому просторі?
19. Який лінійний оператор є симетризуювальним?
20. Що собою являє спряжений і самоспряжений оператори?
21. Який оператор називають унітарним?
22. Як визначити обернений оператор?
23. Що є резольвентою неоднорідного операторного рівняння?
24. Які значення оператора є регулярними, а які складають його спектр?
25. Що собою являють характеристичні числа або власні значення оператора?

26. Чи входять характеристичні числа оператора до множини його регулярних значень?
27. Як можна виразити резольвенту через ряд за степенями оператора?
28. Які властивості резольвенти оператора ви знаєте?
29. За яких умов неоднорідне операторне рівняння має коректний розв'язок?
30. Що розуміють під групою операторів, і які властивості такої групи ви знаєте?
31. Що собою являє ортонормована послідовність функцій в гільбертовому просторі?
32. Яка ортогональна послідовність в гільбертовому просторі є повною? Яка є замкнутою? В якій реалізації гільбертового простору повнота і замкнутість ортогональної послідовності є еквівалентами?
33. Що таке спряжений гільбертовий простір?
34. Дайте означення процесу апроксимації функції.
35. Як апроксимувати безперервну функцію в просторі $L[a, b]$?
36. Як апроксимувати безперервну функцію в просторі $L_2[a, b]$?
37. Виведіть рівність Парсеваля. Дайте її геометричну інтерпретацію.
38. Що собою являє спектр Фур'є безперервної функції в гільбертовому просторі?
39. Для чого використовується методика Грама–Шмідта?
40. Як побудувати ортогональну послідовність в гільбертовому просторі? Наведіть конкретну процедуру, знайшовши перших два члени послідовності.
41. Які ортогональні послідовності на базі степеневих функцій ви знаєте?
42. Що собою являє гіпергеометричне диференціальне рівняння і його розв'язок? Що встановив Гаусс, аналізуючи цей розв'язок?
43. Як відсікти шумову складову при апроксимації функції в гільбертовому просторі?
44. В чому суть прямих методів оптимізації? Суть методу Рітца?
45. В якому вигляді відшуковується екстремаль в методі Рітца? Які ортонормовані послідовності використовуються в цьому методі?
46. Розкрийте суть етапів розв'язання задачі оптимізації методом Рітца.

Частина друга. ПРАКТИКА ОПТИМІЗАЦІЇ

В другій частині навчального посібника наведено приклади розв'язання задач оптимізації конкретних динамічних об'єктів за допомогою викладених у попередніх розділах методів Лагранжа, Понтрягіна, Беллмана, Рітца і його модифікацій.

Крім прикладів, почерпнутих із джерел, наведених у списку використаної літератури, у цій частині навчального посібника викладено також результати розв'язання задач оптимізації конкретних динамічних об'єктів, отримані авторами цього навчального посібника і уже апробовані шляхом опублікування в наукових журналах

РОЗДІЛ 6

ПРИКЛАДИ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА ЗА ВІДСУТНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ НА КООРДИНАТИ, ЩО ОПТИМІЗУЮТЬСЯ

У цьому розділі ми наведемо кілька прикладів розв'язання задачі оптимізації конкретних динамічних об'єктів методом Лагранжа за відсутності обмежень на координати, що оптимізуються. Оскільки даний навчальний посібник розраховано у першу чергу на студентів, що спеціалізуються у галузі електромеханіки, та спеціалістів і магістрів електромеханіки, то як динамічні об'єкти, що оптимізуються, вибрано реальні електромеханічні об'єкти, що приводяться в рух за допомогою електроприводів.

6.1 Оптимізація електропривода повороту платформи екскаватора

Відомо, що за допомогою електроприводів стріла екскаватора може повертатись «вліво-вправо» і «вниз-вверх».

Для того, щоб повертатись «вліво-вправо», стрілу садять на платформу, і електропривод повертає навколо осі саме платформу, яка і задає стрілі поворот «вліво-вправо».

Електроприводи повороту платформи «вліво-вправо» і стріли «вниз-вверх» є автономними, тому їх можна розглядати незалежно один від одного.

Розглянемо електропривод повороту платформи екскаватора. Для простоти викладення будемо вважати, що вал електродвигуна безпосередньо зв'язаний з платформою (без редуктора).

Зрозуміло, що кутова швидкість повороту платформи в початковий і кінцевий моменти часу при виконанні кожного конкретного повороту повинна дорівнювати нулю, оскільки в початковій точці ківш екскаватора забирає ґрунт із ями, а в кінцевій точці вивантажує набраний ґрунт у самоскид.

Для підвищення продуктивності екскаватора бажано повертати платформу якнайшвидше, але при цьому не допускаючи таких значень струму якоря електродвигуна, які призводили б до невиправдано великих втрат електроенергії в обмотці якоря і її перегріву.

Нехай електропривод повороту платформи реалізовано на основі електродвигуна постійного струму з незалежним збудженням.

Тоді, як відомо з курсу основ електропривода, для нього будуть справедливими такі співвідношення:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{ED} - M_G, \quad (6.1)$$

$$\omega(0) = \omega(T) = 0, \quad (6.2)$$

$$M_{ED} = k_M \cdot I_Y, \quad (6.3)$$

$$\Delta E = \int_0^T I_Y^2 \cdot R_Y dt, \quad (6.4)$$

в яких:

I_Y – струм якоря електродвигуна;

M_{ED} – обертальний момент на його валі;

ω – кутова швидкість обертання вала;

J – момент інерції махових мас, які приводить в рух електродвигун, приведений до його вала;

R_Y – активний опір обмотки якоря електродвигуна;

ΔE – втрати електричної енергії в обмотці, що обумовлені проходженням струму I_Y по активному опору R_Y протягом відрізка часу T ;

k_M – коефіцієнт пропорційності між струмом якоря I_Y і створюваним ним обертальним моментом M_{ED} на валі електродвигуна, який залежить від обмоткових параметрів та магнітного потоку електродвигуна і легко знаходиться за його паспортними даними;

T – відрізок часу t , який витрачається на здійснення повороту платформи від початкової точки до кінцевої;

M_G – гальмівний момент, створюваний на валі електродвигуна робочим навантаженням, для переборення якого і необхідний обертальний момент M_{ED} .

Зрозуміло, що для повноти характеристики електропривода повороту платформи екскаватора рівняння (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) необхідно доповнити ще і рівнянням

$$\alpha = \int_0^T \omega dt, \quad (6.5)$$

яке задає кут α повороту платформи за час T .

Задачу оптимізації для електропривода, який характеризується співвідношеннями (6.1) ÷ (6.5), можна сформулювати так: знайти такі закони зміни струму якоря $I_{\text{я}}(t)$ електродвигуна і кутової швидкості $\omega(t)$ обертання його вала, які при заданому значенні інтеграла (6.5) доставляють мінімум критеріальному функціоналу (6.4) в умовах дії обмежень (6.1), (6.2). При цьому обмеження на самі значення струму якоря і кутової швидкості обертання вала не накладаються.

Цю задачу зручно розв'язувати і потім узагальнювати результати, якщо перейти від іменованих одиниць у виразах (6.1) ÷ (6.5) до відносних, взявши за базові їх номінальні значення ω_H , M_H , I_H , пам'ятаючи, що згідно з виразом (6.3)

$$M_H = k_M \cdot I_H, \quad (6.6)$$

та доповнивши цю систему базовою величиною T_M для часу t , взявши за неї електромеханічну сталу у вигляді

$$T_M = \frac{J \cdot \omega_H}{M_H}, \quad (6.7)$$

базовою величиною α_{δ} для кута повороту у вигляді

$$\alpha_{\delta} = \omega_H \cdot T_M \quad (6.8)$$

та базовою величиною ΔE_{δ} для втрат електричної енергії у вигляді

$$\Delta E_{\delta} = I_H^2 \cdot R_{\text{я}} \cdot T_M. \quad (6.9)$$

Введемо такі позначення відносних величин:

$$\begin{cases} i = \frac{I_{\text{я}}}{I_H}, & v = \frac{\omega}{\omega_H}, & \mu = \frac{M_{\Gamma}}{M_H}, & \tau = \frac{t}{T_M}, \\ \beta = \frac{\alpha}{\alpha_{\delta}}, & e = \frac{\Delta E}{\Delta E_{\delta}}, & \tau^* = \frac{T}{T_M}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Враховуючи співвідношення (6.6) ÷ (6.10), переведемо у відносні одиниці вирази (6.1) ÷ (6.5).

Почнемо з виразу (6.1), який перепишемо, підставивши в нього (6.3), тобто записавши у вигляді –

$$J \frac{d\omega}{dt} = k_M \cdot I_{\text{я}} - M_{\Gamma}. \quad (6.11)$$

Домноживши і розділивши ліву частину (6.11) на $(\omega_H \cdot M_H)$, отримаємо:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{\omega_H \cdot M_H}{\omega_H \cdot M_H} = k_M \cdot I_{Я} - M_{Г} \quad (6.12)$$

або, перемістивши в потрібні місця ω_H і M_H , –

$$\frac{d\left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)}{d\left(\frac{t}{\frac{J \cdot \omega_H}{M_H}}\right)} = \frac{k_M \cdot I_{Я}}{M_H} - \frac{M_{Г}}{M_H}, \quad (6.13)$$

або, з врахуванням (6.7) і (6.10), –

$$\frac{dv}{d\tau} = i - \mu, \quad (6.14)$$

або

$$i = v' + \mu. \quad (6.15)$$

Тепер розглянемо вираз (6.2). Оскільки

$$\omega_H \neq 0, \quad (6.16)$$

то, розділивши на ω_H всі члени рівності (6.2) і врахувавши (6.10), отримаємо –

$$v(0) = v(\tau^*) = 0. \quad (6.17)$$

Перейдемо до розгляду виразу (6.4). Оскільки

$$I_H^2 \cdot R_{Я} \cdot T_M \neq 0, \quad (6.18)$$

то на цей добуток можна розділити обидві частини рівності (6.4). Зробивши це, отримаємо –

$$\frac{\Delta E}{I_H^2 \cdot R_{Я} \cdot T_M} = \int_0^T \frac{I_{Я}^2 \cdot R_{Я}}{I_H^2 \cdot R_{Я} \cdot T_M} dt. \quad (6.19)$$

Із (6.19), з врахуванням (6.9) і (6.10), маємо –

$$e = \int_0^{\tau^*} i^2 d\tau. \quad (6.20)$$

Підставивши (6.15) у (6.20), отримаємо –

$$e = \int_0^{\tau^*} (v' + \mu)^2 d\tau. \quad (6.21)$$

Тепер перейдемо до виразу (6.5). Оскільки

$$\omega_H \cdot T_M \neq 0, \quad (6.22)$$

то на цей добуток можна розділити обидві частини рівності (6.5). Зробивши це, отримаємо –

$$\frac{\alpha}{\omega_H \cdot T_M} = \int_0^T \frac{\omega}{\omega_H \cdot T_M} dt, \quad (6.23)$$

або, з врахуванням (6.8) і (6.10), –

$$\beta = \int_0^{\tau^*} v d\tau. \quad (6.24)$$

Проведеними перетвореннями ми звели задачу оптимізації електропривода повороту платформи екскаватора до ізопериметричної, а саме: необхідно знайти таку функцію $v(\tau)$, яка доставляє мінімум критеріальному інтегралу (6.21) при заданому значенні інтеграла (6.24).

Якщо ми знайдемо оптимальне значення $v(\tau)$, то нескладно буде із рівняння (6.15), з врахуванням граничних умов (6.17), однозначно визначити і оптимальне значення $i(\tau)$.

Для розв'язання ізопериметричної задачі оптимізації нам необхідно скласти функцію Лагранжа у вигляді (3.47).

Для наших умов (3.47) матиме вигляд –

$$L(\tau, v, v', \beta, \beta') = F(\tau, v, v') + \lambda(\tau) \cdot (\beta' - K(\tau, v, v')). \quad (6.25)$$

Із (6.21) випливає, що

$$F(\tau, v, v') = (v' + \mu)^2, \quad (6.26)$$

а із (6.24), що

$$K(\tau, v, v') = v. \quad (6.27)$$

Підставляючи (6.26) і (6.27) у (6.25), матимемо

$$L = (v' + \mu)^2 + \lambda \cdot (\beta' - v). \quad (6.28)$$

Для функції Лагранжа (6.28) рівняння Ейлера запишуться у вигляді

$$\begin{cases} L_v - \frac{d}{d\tau} L_{v'} = 0, \\ L_\beta - \frac{d}{d\tau} L_{\beta'} = 0. \end{cases} \quad (6.29)$$

Підставляючи (6.28) у (6.29), отримаємо

$$\begin{cases} -\lambda - \frac{d}{d\tau}(2 \cdot (v' + \mu)) = 0, \\ -\frac{d}{d\tau}\lambda = 0. \end{cases} \quad (6.30)$$

З другого рівняння системи (6.30) випливає, що

$$\lambda = -const = -\lambda_0, \quad (6.31)$$

а перше рівняння цієї системи, з врахуванням (6.31), перетворюється на рівняння

$$-2v'' + \lambda_0 = 0, \quad (6.32)$$

або

$$v'' = \frac{\lambda_0}{2}. \quad (6.33)$$

Двічі інтегруючи (6.33), отримаємо:

$$v' = \frac{\lambda_0}{2} \cdot \tau + C_1, \quad (6.34)$$

$$v = \frac{\lambda_0}{4} \cdot \tau^2 + C_1 \cdot \tau + C_2. \quad (6.35)$$

Для знаходження сталих інтегрування C_1 і C_2 використаємо граничні умови (6.17). Підставляючи їх у (6.35), матимемо

$$C_2 = 0, \quad (6.36)$$

$$\frac{\lambda_0}{4}(\tau^*)^2 + C_1 \cdot \tau^* + C_2 = 0. \quad (6.37)$$

Із (6.37), з врахуванням (6.36), отримаємо

$$C_1 = -\frac{\lambda_0 \cdot \tau^*}{4}. \quad (6.38)$$

Підставляючи (6.36) і (6.38) у (6.35), матимемо

$$v(\tau) = \frac{\lambda_0}{4} \cdot \tau^2 - \frac{\lambda_0 \cdot \tau^*}{4} \cdot \tau. \quad (6.39)$$

Для визначення λ_0 в рівнянні (6.39) скористаємось умовою (6.24).

Підставивши (6.39) у (6.24), знайдемо, що

$$\begin{aligned}\beta &= \int_0^{\tau^*} v(\tau) d\tau = \int_0^{\tau^*} \left(\frac{\lambda_0}{4} \cdot \tau^2 - \frac{\lambda_0 \cdot \tau^*}{4} \cdot \tau \right) d\tau = \\ &= \frac{\lambda_0}{12} \cdot (\tau^*)^3 - \frac{\lambda_0}{8} \cdot (\tau^*)^3,\end{aligned}\quad (6.40)$$

або

$$\beta = -\frac{\lambda_0}{24} \cdot (\tau^*)^3. \quad (6.41)$$

З рівняння (6.41) отримаємо

$$\lambda_0 = -\frac{24 \cdot \beta}{(\tau^*)^3}. \quad (6.42)$$

Підставивши (6.42) у (6.39), матимемо

$$v(\tau) = -\frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \tau^2 + \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \tau \quad (6.43)$$

або

$$v(\tau) = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left(\tau - \frac{\tau^2}{\tau^*} \right). \quad (6.44)$$

Диференціюючи (6.44), знайдемо, що

$$v' = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \tau}{\tau^*} \right). \quad (6.45)$$

Підставляючи (6.45) у (6.15), матимемо

$$i(\tau) = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \tau}{\tau^*} \right) + \mu. \quad (6.46)$$

Вирази (6.43), (6.46) і задають у відносних одиницях закони зміни кутової швидкості $v(\tau)$ повороту вала та струму якоря $i(\tau)$ електродвигуна, оптимальні за критерієм мінімуму втрат електричної енергії в обмотці якоря при повороті вала на заданий кут β .

На рис. 6.1 показано графіки функцій $v(\tau)$ та $i(\tau)$.

Для того, щоб переконатись, що знайдені $v(\tau)$, $i(\tau)$ доставляють саме мінімум функціоналу (6.21), перевіримо виконання умови Лежандра, яка для мінімуму в нашому випадку буде мати вигляд

$$L_{v'v'} > 0. \quad (6.47)$$

Підставляючи (6.28) у (6.47), отримаємо

$$2 > 0, \quad (6.48)$$

а це підтверджує, що знайдені $v(\tau)$, $i(\tau)$ доставляють саме мінімум функціоналу (6.21).

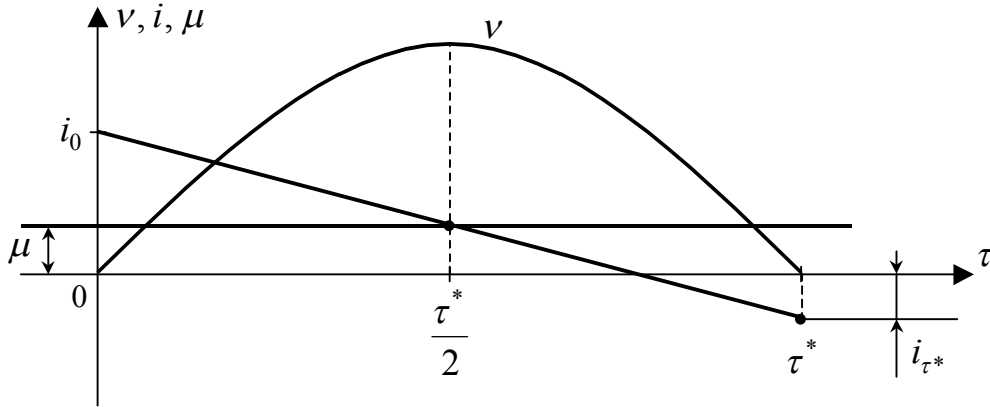


Рисунок 6.1 – Графіки функцій $v(\tau)$, $i(\tau)$, оптимальних за критерієм мінімуму втрат електричної енергії в якорі електродвигуна

На завершення цього підрозділу покажемо, як перейти від функцій $v(\tau)$, $i(\tau)$, записаних у відносних одиницях, до їх еквівалентів у іменованих одиницях.

Підставляючи у (6.46) і (6.43) значення всіх величин, з врахуванням (6.8) і (6.10), отримаємо

$$\frac{I_{Я}}{I_H} = \frac{6 \cdot \frac{\alpha}{\omega_H \cdot T_M}}{\left(\frac{T}{T_M}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \frac{t}{T_M}}{\frac{T}{T_M}}\right) + \frac{M_{\Gamma}}{M_H}, \quad (6.49)$$

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \frac{6 \cdot \frac{\alpha}{\omega_H \cdot T_M}}{\left(\frac{T}{T_M}\right)^2} \cdot \left(\frac{t}{T_M} - \frac{\left(\frac{t}{T_M}\right)^2}{\frac{T}{T_M}}\right) \quad (6.50)$$

або

$$I_{Я} = \frac{6 \cdot \alpha \cdot T_M \cdot I_H}{\omega_H \cdot T^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot t}{T}\right) + I_H \cdot \frac{M_{\Gamma}}{M_H}, \quad (6.51)$$

$$\omega = \frac{6 \cdot \alpha \cdot T_M}{T^2} \cdot \left(\frac{t}{T_M} - \frac{t^2}{T \cdot T_M} \right), \quad (6.52)$$

або, з врахуванням (6.7), –

$$I_{Я} = \frac{6 \cdot \alpha \cdot J \cdot I_H}{M_H \cdot T^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot t}{T} \right) + I_H \cdot \frac{M_{Г}}{M_H}, \quad (6.53)$$

$$\omega = \frac{6 \cdot \alpha}{T^2} \cdot \left(t - \frac{t^2}{T} \right), \quad (6.54)$$

або, з врахуванням (6.3), (6.6), –

$$I_{Я} = \frac{6 \cdot \alpha \cdot J}{k_M \cdot T^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot t}{T} \right) + I_{Г}, \quad (6.55)$$

$$\omega = \frac{6 \cdot \alpha}{T^2} \cdot \left(t - \frac{t^2}{T} \right), \quad (6.56)$$

де

$$I_{Г} = \frac{M_{Г}}{k_M} - \quad (6.57)$$

струм в якорі, обумовлений дією гальмівного моменту $M_{Г}$, що задається робочим навантаженням.

А тепер здійснимо аналіз того, як впливає на роботу електропривода відхилення керування від оптимального закону.

Для цього порівняємо втрати електричної енергії в якорі в разі, якщо струм змінюється за оптимальним законом, спадаючи від i_0 на початку робочого діапазону часу $\tau \in [0, \tau^*]$ до i_{τ^*} в кінці цього діапазону (див. рис. 6.1), та за законом, графічна інтерпретація якого показана на рис. 6.2 і який відображає керування електроприводом за принципом: максимум струму в процесі розгону і максимум струму з протилежним знаком в процесі гальмування, що дуже часто використовується в умовах експлуатації.

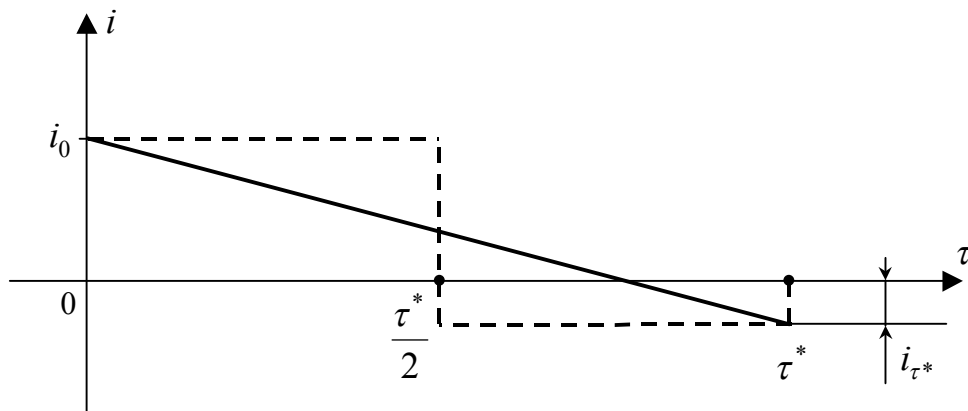


Рисунок 6.2 – Графіки оптимального закону зміни струму якоря (неперервна лінія) і «прямокутного» (штрихова лінія)

Підставляючи (6.46) у (6.20), знайдемо, що для оптимального закону зміни струму –

$$\begin{aligned}
 e_{onm} &= \int_0^{\tau^*} i_{onm}^2 d\tau = \int_0^{\tau^*} \left[\frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \tau}{\tau^*}\right) + \mu \right]^2 d\tau = \\
 &= \int_0^{\tau^*} \frac{36 \cdot \beta^2}{(\tau^*)^4} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \tau}{\tau^*}\right)^2 d\tau + \int_0^{\tau^*} \frac{12 \cdot \beta \cdot \mu}{(\tau^*)^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \tau}{\tau^*}\right) d\tau + \\
 &\quad + \int_0^{\tau^*} \mu^2 d\tau = \frac{12 \cdot \beta^2}{(\tau^*)^3} + \mu^2 \cdot \tau^*. \tag{6.58}
 \end{aligned}$$

Здійснюючи те ж саме для «прямокутного» закону зміни струму, отримаємо –

$$\begin{aligned}
 e_{np} &= \int_0^{\tau^*} i_{np}^2 d\tau = \int_0^{\frac{\tau^*}{2}} i_0^2 d\tau + \int_{\frac{\tau^*}{2}}^{\tau^*} (-i_{\tau^*})^2 d\tau = \\
 &= \int_0^{\frac{\tau^*}{2}} \left[\frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} + \mu \right]^2 d\tau + \int_{\frac{\tau^*}{2}}^{\tau^*} \left[-\frac{3 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} + \mu \right]^2 d\tau = \\
 &= \frac{45 \cdot \beta^2}{2 \cdot (\tau^*)^2} + \frac{3 \cdot \beta \cdot \mu}{\tau^*} + \mu^2 \cdot \tau^*. \tag{6.59}
 \end{aligned}$$

Знайдемо e_{onm} і e_{np} при

$$\mu = 0. \tag{6.60}$$

Підставляючи (6.60) у (6.58) і (6.59), отримаємо:

$$e_{onm} = \frac{12 \cdot \beta^2}{(\tau^*)^3}, \tag{6.61}$$

$$e_{np} = \frac{45 \cdot \beta^2}{2 \cdot (\tau^*)^3}. \tag{6.62}$$

Тож, додаткові втрати Δe електричної енергії в якорі електродвигуна за умови використання «прямокутного» керування замість оптимального, навіть за відсутності гальмівного навантаження ($\mu = 0$), складуть –

$$\Delta e \% = \left(\frac{e_{np} - e_{onm}}{e_{np}} \right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{12 \cdot \beta^2}{(\tau^*)^3}}{\frac{45 \cdot \beta^2}{2 \cdot (\tau^*)^3}} \right) \cdot 100\% =$$

$$= \left(1 - \frac{24}{45} \right) \cdot 100\% \cong 47\%. \quad (6.63)$$

Як бачимо із (6.63), таки є сенс переходити від «звичного» керування електроприводами до оптимального.

А тепер розглянемо випадок, коли реалізується закон оптимального керування, але з випадковою похибкою ε , середнє значення якої в робочому діапазоні часу $\tau \in [0, \tau^*]$ дорівнює нулю, тобто

$$\int_0^{\tau^*} \varepsilon d\tau = 0. \quad (6.64)$$

Це може мати місце, коли в елементах, які реалізують оптимальне керування, «шумлять» транзистори чи мікросхеми або накладається збурення, обумовлене електромагнітними завадами, створюваними розміщеними поряд іншими електричними машинами чи апаратами.

В цьому випадку

$$\Delta e = e_\varepsilon - e_{onm} = \int_0^{\tau^*} (i_{onm} + \varepsilon)^2 d\tau - \int_0^{\tau^*} i_{onm}^2 d\tau =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\tau^*} i_{onm} \cdot \varepsilon d\tau + \int_0^{\tau^*} \varepsilon^2 d\tau = 2 \cdot i_{onm}^* \cdot \int_0^{\tau^*} \varepsilon d\tau + \int_0^{\tau^*} \varepsilon^2 d\tau =$$

$$= \int_0^{\tau^*} \varepsilon^2 d\tau. \quad (6.65)$$

При отриманні (6.65) було використано відому теорему про середнє та співвідношення (6.64).

Із (6.65) випливає, що якщо регулятором оптимальне керування реалізується з похибкою у 10%, що у відносних одиницях задає значення

$$\varepsilon = 0,1, \quad (6.66)$$

то критерій, за яким оптимізувався процес керування, зазнає зміни лише на 1%, оскільки

$$\varepsilon^2 = (0,1)^2 = 0,01. \quad (6.67)$$

Тож, реалізуючи закон оптимального керування, можна не перейматися проблемою високої точності його реалізації параметрично – головне,

щоб адекватно відображалась форма керувального сигналу, а параметри можуть нести в собі і похибку, прийнятні розміри якої диктуються умовами роботи об'єкта, що оптимізується.

6.2 Оптимізація електропривода з моментом навантаження, залежним від часу

В попередньому підрозділі була розв'язана задача оптимізації електропривода за умови, що момент навантаження – ми його називали гальмівним, аби не плутати індексом з номінальним і позначали M_r – в циклі роботи електропривода є незмінним.

Але існує досить широкий клас механізмів, які навантажують електроприводи гальмівними моментами, що змінюються у часі за певними законами.

Досить поширеними механізмами цього класу є насоси, якими закачують різні рідини (воду, мастило, нафту, продукти нафтопереробки і т. ін.) в резервуари.

Тож цікаво з'ясувати, як зміниться закон оптимального керування електроприводом в разі, якщо його момент навантаження перестає бути константою, а починає змінюватись у часі.

Нехай, як і в попередньому підрозділі, маємо електропривод з електродвигуном незалежного збудження, динаміка якого у відносних одиницях описується рівнянням (6.15). В зв'язку з тим, що відносний момент навантаження μ в нашому випадку є функцією часу, тобто

$$\mu = \mu(\tau), \quad (6.68)$$

рівняння (6.15) матиме вигляд

$$i = v' + \mu(\tau). \quad (6.69)$$

Поставимо задачу так: знайти такі закони зміни струму i в якорі електродвигуна та кутової швидкості v обертання його вала, які доставляли б мінімум функціоналу втрат

$$e = \int_0^{\tau^*} (v' + \mu(\tau))^2 d\tau, \quad (6.70)$$

який є аналогом функціонала (6.21), що враховує (6.68), за умови, що продуктивність електропривода β , а з ним і робочого механізму, є величиною заданою і сталою, тобто за умови, що

$$\int_0^{\tau^*} v(\tau) d\tau = \beta. \quad (6.71)$$

Як бачимо, це ізопериметрична задача, функцією Лагранжа для якої є та ж функція (6.28), в якій врахована умова (6.68), тобто функція

$$L = (v' + \mu(\tau))^2 + \lambda \cdot (\beta' - v). \quad (6.72)$$

Для функції Лагранжа (6.72) рівняння Ейлера запишуться в тому ж вигляді (6.29), що й для функції Лагранжа (6.28), але підстановка в них функції Лагранжа (6.72) приводить до дещо іншого результату, а саме:

$$\begin{cases} -\lambda - \frac{d}{d\tau} [2 \cdot (v' + \mu(\tau))] = 0, \\ -\frac{d}{d\tau} \lambda = 0. \end{cases} \quad (6.73)$$

Друге рівняння в системі (6.73) є таким же, як і в системі (6.30), тому із нього випливає той же результат, що наведений у (6.31), а перше рівняння цієї системи, з врахуванням (6.31), перетворюється на рівняння

$$-2 \cdot \left(v'' + \frac{d\mu}{d\tau} \right) + \lambda_0 = 0, \quad (6.74)$$

яке можна переписати так –

$$\frac{d(v')}{d\tau} + \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{\lambda_0}{2} \quad (6.75)$$

або так –

$$\frac{d}{d\tau} (v' + \mu(\tau)) = \frac{\lambda_0}{2}. \quad (6.76)$$

Інтегруючи (6.76), отримаємо

$$v' + \mu(\tau) = \frac{\lambda_0}{2} \cdot \tau + C_1. \quad (6.77)$$

Порівнюючи (6.77) з (6.69), бачимо, що

$$i = \frac{\lambda_0}{2} \cdot \tau + C_1. \quad (6.78)$$

А з рівняння (6.77) інтегруванням знаходимо, що

$$v = \frac{\lambda_0}{4} \cdot \tau^2 + C_1 \cdot \tau - \int_0^{\tau^*} \mu(\tau) d\tau + C_2. \quad (6.79)$$

Рівняння (6.78), (6.79) задають у загальному вигляді оптимальні закони зміни струму i якоря електродвигуна та кутової швидкості v обертання його вала при виборі за критерій оптимізації втрати електричної енергії в якорі і накладені як обмеження умови незмінної продуктивності.

Для конкретизації розв'язку необхідно конкретизувати функцію $\mu(\tau)$, а також задати граничні умови для кутової швидкості.

Нехай

$$\mu(\tau) = \mu_0 + k \cdot \tau, \quad (6.80)$$

$$\begin{cases} v(0) = v_0, \\ v(\tau^*) = v_{\tau^*}, \end{cases} \quad (6.81)$$

де значення μ_0 , k , v_0 , v_{τ^*} є заданими.

Підставляючи (6.80) у (7.79), отримаємо

$$v = \frac{\lambda_0}{4} \cdot \tau^2 + C_1 \cdot \tau - \mu_0 \cdot \tau^* - \frac{k \cdot (\tau^*)^2}{2} + C_2. \quad (6.82)$$

Для конкретизації оптимальних законів зміни i та v нам потрібно знайти три невідомих величини – сталі інтегрування C_1 , C_2 та невизначений множник Лагранжа λ_0 . Два рівняння, щоб їх отримати, ми маємо – це (6.82) для граничних умов (6.81). Але потрібне ще й третє. Його знайдемо, підставивши (6.82) у (6.71). В результаті підстановки матимемо

$$\beta = \int_0^{\tau^*} \left(\frac{\lambda_0}{4} \cdot \tau^2 + C_1 \cdot \tau - \mu_0 \cdot \tau^* - \frac{k \cdot (\tau^*)^2}{2} + C_2 \right) d\tau \quad (6.83)$$

або

$$\beta = \frac{\lambda_0 \cdot (\tau^*)^3}{12} + \frac{C_1 \cdot (\tau^*)^2}{2} - \mu_0 \cdot (\tau^*)^2 - \frac{k \cdot (\tau^*)^3}{2} + C_2 \cdot \tau^*. \quad (6.84)$$

Для спрощення подальших викладок прийmemo, що в початковий момент часу електропривод «стояв» і в кінцевий момент він зупинився, тобто що

$$v(0) = v_0 = 0, \quad (6.85)$$

$$v(\tau^*) = v_{\tau^*} = 0. \quad (6.86)$$

Підставляючи (6.85) у (6.82), знайдемо

$$C_2 = \mu_0 \cdot \tau^* + \frac{k \cdot (\tau^*)^2}{2}. \quad (6.87)$$

Підставляючи (6.87) у (6.84), отримаємо

$$\lambda_0 = \frac{12}{(\tau^*)^3} \cdot \left(\beta - \frac{C_1 \cdot (\tau^*)^2}{2} + \mu_0 \cdot (\tau^*)^2 + \frac{k \cdot (\tau^*)^3}{2} - \mu_0 \cdot (\tau^*)^2 - \frac{k \cdot (\tau^*)^3}{2} \right) = \frac{12 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} - \frac{6 \cdot C_1}{\tau^*}. \quad (6.88)$$

Підставляючи (6.86), (6.87) і (6.88) у (6.82), матимемо

$$\frac{(\tau^*)^2}{4} \cdot \left(\frac{12 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} - \frac{6 \cdot C_1}{\tau^*} \right) + C_1 \cdot \tau^* - \mu_0 \cdot \tau^* - \frac{k \cdot (\tau^*)^2}{2} + \mu_0 \cdot \tau^* + \frac{k \cdot (\tau^*)^2}{2} = 0 \quad (6.89)$$

або

$$\frac{3 \cdot \beta}{\tau^*} - \frac{3 \cdot C_1 \cdot \tau^*}{2} + C_1 \cdot \tau^* = 0. \quad (6.90)$$

Із рівняння (6.90) знаходимо, що

$$C_1 = \frac{\frac{3 \cdot \beta}{\tau^*}}{\frac{3 \cdot \tau^*}{2} - \tau^*} = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2}. \quad (6.91)$$

Підставляючи (6.91) у (6.88), знайдемо, що

$$\lambda_0 = \frac{12 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} - \frac{6}{\tau^*} \cdot \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} = -\frac{24 \cdot \beta}{(\tau^*)^3}. \quad (6.92)$$

Підставляючи (6.87), (6.91) і (6.92) у (6.78) і (6.82), остаточно визначимо, що оптимальні закони зміни струму i в якорі електродвигуна і кутової швидкості ν обертання його вала для умов нашої задачі у відносних одиницях матимуть вигляд:

$$i = -\frac{12 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \tau + \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\tau}{\tau^*} \right), \quad (6.93)$$

$$\nu = -\frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \tau^2 + \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \tau = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot (\tau - \tau^2). \quad (6.94)$$

Зрозуміло, що при інших законах зміни моменту навантаження $\mu(\tau)$ у часі та інших граничних умовах закони зміни i та v теж будуть іншими, але їх теж можна знайти, скориставшись викладеною методикою.

6.3 Оптимізація електропривода з моментом навантаження, залежним від кутової швидкості обертання вала ротора

Існує досить широкий клас електроприводів, момент навантаження (гальмівний M_T) яких є функцією від кутової швидкості v обертання вала ротора, тобто для яких

$$\mu = \mu(v). \quad (6.95)$$

Це, перш за все, електроприводи вентиляторів різного призначення, які закачують кудись або відкачують звідкись повітря чи газ.

З'ясуємо, як зміниться оптимальна діаграма кутової швидкості $v(\tau)$ обертання ротора електропривода, якщо його момент навантаження перестає бути константою, а стає функцією цієї швидкості, тобто якщо виконується умова (6.95).

Нехай, як і в двох попередніх підрозділах, маємо електропривод з електродвигуном незалежного збудження, динаміка якого у відносних одиницях описується рівнянням (6.15), яке, з врахуванням умови (6.95), набуває вигляду –

$$i = v' + \mu(v). \quad (6.96)$$

Задача: знайти такі закони зміни струму i в якорі електродвигуна та кутової швидкості v обертання його вала, які доставляють мінімум функціоналу втрат

$$e = \int_0^{\tau^*} (v' + \mu(v))^2 d\tau, \quad (6.97)$$

який є аналогом функціонала (6.21), що враховує (6.95), за умови виконання програмного обмеження (6.71). При цьому, як і у попередніх прикладах розв'язання задачі оптимізації, обмеження на самі значення струму та кутової швидкості не накладатимемо.

Як і в задачах двох попередніх підрозділів, і в цьому випадку ми маємо справу з ізопериметричною задачею з функцією Лагранжа, аналогічною функції (6.28), але такою, що враховує умову (6.95), тобто з функцією

$$L = (v' + \mu(v))^2 + \lambda \cdot (\beta' - v). \quad (6.98)$$

Для функції Лагранжа (6.98) рівняння Ейлера матимуть той же вигляд (6.29), що й для функції Лагранжа (6.28), але після підстановки у (6.29) функції (6.98) вони набудуть вигляду:

$$\begin{cases} 2 \cdot (v' + \mu(v)) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial v} - \lambda - \frac{d}{d\tau} [2 \cdot (v' + \mu(v))] = 0, \\ -\frac{d}{d\tau} \lambda = 0. \end{cases} \quad (6.99)$$

З другого рівняння системи (6.99), як і у попередніх випадках, маємо

$$\lambda = -\lambda_0, \quad (6.100)$$

а із першого рівняння цієї системи, з врахуванням (6.100), –

$$-v'' + \mu(v) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\lambda_0}{2} = 0. \quad (6.101)$$

Для подальшого розв'язання задачі необхідно конкретизувати функцію $\mu(v)$.

Нехай

$$\mu(v) = \mu_0 + k \cdot v, \quad (6.102)$$

де μ_0 і k – задані величини.

Підставляючи (6.102) у (6.101), отримаємо

$$-v'' + k^2 \cdot v + k \cdot \mu_0 + \frac{\lambda_0}{2} = 0 \quad (6.103)$$

або

$$v'' - k^2 \cdot v = \frac{\lambda_0}{2} + k \cdot \mu_0. \quad (6.104)$$

Рівняння (6.104) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку, загальний розв'язок якого має вигляд

$$v = v_{\text{дин}} + v_{\text{уст}}, \quad (6.105)$$

де $v_{\text{дин}}$ є розв'язком однорідного диференціального рівняння

$$v'' - k^2 \cdot v = 0, \quad (6.106)$$

а $v_{\text{уст}}$ є усталеною складовою розв'язку, яку отримаємо із (6.104), прирівнявши похідні нулю, тобто із рівняння

$$k^2 \cdot v_{\text{уст}} = \frac{\lambda_0}{2} + k \cdot \mu_0. \quad (6.107)$$

Із (6.107) знайдемо, що

$$v_{\text{уст}} = \frac{\lambda_0}{2 \cdot k^2} + \frac{\mu_0}{k}. \quad (6.108)$$

Як відомо, загальний розв'язок рівняння (6.106) має вигляд

$$v_{\text{дин}} = C_1 \cdot e^{p_1 \tau} + C_2 \cdot e^{p_2 \tau}, \quad (6.109)$$

де p_1, p_2 – корені характеристичного рівняння для диференціального рівняння (6.106).

Це характеристичне рівняння має вигляд

$$p^2 - k^2 = 0. \quad (6.110)$$

Знайдемо його корені. Зрозуміло, що

$$p = \sqrt{k^2}. \quad (6.111)$$

Із (6.111) маємо

$$\begin{cases} p_1 = k, \\ p_2 = -k. \end{cases} \quad (6.112)$$

Підставляючи (6.112) у (6.109), а результат цієї підстановки і (6.108) у (6.105), отримаємо

$$v = \frac{\lambda_0}{2 \cdot k^2} + \frac{\mu_0}{k} + C_1 \cdot e^{k \cdot \tau} + C_2 \cdot e^{-k \cdot \tau}. \quad (6.113)$$

Підставляючи (6.113) і (6.102) у (6.96), знайдемо, що

$$i = \frac{\lambda_0}{2 \cdot k} + 2 \cdot \mu_0 + 2 \cdot C_1 \cdot k \cdot e^{k \cdot \tau}. \quad (6.114)$$

Вирази (6.113), (6.114) і задають у загальному вигляді закони оптимального керування електроприводом з моментом навантаження, який лінійно залежить від кутової швидкості обертання ротора електродвигуна. Зрозуміло, що при іншій залежності моменту навантаження від кутової швидкості іншими будуть і вирази (6.113), (6.114).

Для конкретизації отриманих законів оптимального керування, необхідно знайти числове значення констант λ_0, C_1 і C_2 .

Для цього необхідно використати граничні умови

$$\begin{cases} v(0) = v_0, \\ v(\tau^*) = v_{\tau^*} \end{cases} \quad (6.115)$$

та обмеження (6.71), у яке підставляється значення v із (6.113).

Для простоти розрахунків прийемо, що

$$\begin{cases} v(0) = 0, \\ v(\tau^*) = 0. \end{cases} \quad (6.116)$$

Підставляючи (6.113) у рівняння (6.116), отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{\lambda_0}{2 \cdot k^2} + \frac{\mu_0}{k} + C_1 + C_2 = 0, \\ \frac{\lambda_0}{2 \cdot k^2} + \frac{\mu_0}{k} + C_1 \cdot e^{k \cdot \tau^*} + C_2 \cdot e^{-k \cdot \tau^*} = 0. \end{cases} \quad (6.117)$$

А із (6.71), підставивши в нього (6.113), матимемо –

$$\frac{\lambda_0}{2 \cdot k^2} \cdot \tau^* + \frac{\mu_0}{k} \cdot \tau^* + \frac{C_1}{k} \cdot (e^{k \cdot \tau^*} - 1) - \frac{C_2}{k} \cdot (e^{-k \cdot \tau^*} - 1) = \beta. \quad (6.118)$$

Рівняння (6.117), (6.118) для зручності розв'язання варто переписати так:

$$\begin{cases} \frac{\lambda_0}{2 \cdot k^2} + C_1 + C_2 = -\frac{\mu_0}{k}, \\ \frac{\lambda_0}{2 \cdot k^2} + C_1 \cdot e^{k \cdot \tau^*} + C_2 \cdot e^{-k \cdot \tau^*} = -\frac{\mu_0}{k}, \\ \frac{\lambda_0}{2 \cdot k^2} \cdot \tau^* + \frac{C_1}{k} \cdot (e^{k \cdot \tau^*} - 1) - \frac{C_2}{k} \cdot (e^{-k \cdot \tau^*} - 1) = -\frac{\mu_0}{k} \cdot \tau^* + \beta. \end{cases} \quad (6.119)$$

Система (6.119) – це, після підстановки числових значень k , μ_0 , β , τ^* , система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими λ_0 , C_1 , C_2 , яка легко розв'язується як методом Крамера, так і будь-яким методом наближених обчислень, тому на її розв'язку ми зупинятись не будемо.

Позначимо ці розв'язки λ_0^* , C_1^* , C_2^* .

Підставивши λ_0^* , C_1^* , C_2^* у (6.113) і (6.114), ми отримаємо оптимальні закони зміни струму якоря і електродвигуна та кутової швидкості ν обертання його ротора, які забезпечують виконання програми роботи електропривода (6.71) при мінімумі втрат електричної енергії в якорі електродвигуна.

6.4 Оптимізація електроприводів з магнітним потоком, залежним від струму якоря

В усіх попередніх підрозділах цього розділу при оптимізації електроприводів ми висували вимогу, щоб в електроприводі використовувався електродвигун з незалежним збудженням. Це давало нам право вважати магнітний потік Φ обмотки збудження стабільним і не вводити його як параметр у співвідношення (6.1), (6.3). Саме завдяки цьому ми отримали рівняння динаміки електропривода у вигляді (6.15).

Але існує широкий клас електроприводів, в яких використовуються електродвигуни з послідовним збудженням. По обмотках збудження цих електродвигунів тече струм якоря, який змінюється разом із змінами мо-

менту навантаження, що призводить, в свою чергу, до зміни основного магнітного потоку електричної машини цього класу.

Як відомо з теорії електричних машин, для електродвигунів з послідовним збудженням аналогами співвідношень (6.3), (6.6) будуть вирази:

$$M_{ED} = k_D \cdot I_A \cdot \Phi, \quad (6.120)$$

$$M_H = k_D \cdot I_H \cdot \Phi_H, \quad (6.121)$$

при використанні яких та відносної одиниці

$$\phi = \frac{\Phi}{\Phi_H} \quad (6.122)$$

рівняння динаміки електропривода (6.15) набуває вигляду

$$i \cdot \phi = v' + \mu, \quad (6.123)$$

де відносний магнітний потік $\phi = \phi(i)$ є функцією відносного струму якоря.

Поставимо ту ж задачу, що і в попередніх підрозділах цього розділу: в умовах дії обмеження (6.123) знайти закон зміни струму якоря i електродвигуна, який реалізує програму роботи електропривода (6.24), тобто

$$\beta = \int_0^{\tau^*} v \, d\tau, \quad (6.24^*)$$

за умови мінімуму втрат електричної енергії в якорі, тобто за умови використання як критерій оптимізації функціонала (6.20), який для зручності перепишемо –

$$e = \int_0^{\tau^*} i^2 \, d\tau. \quad (6.20^*)$$

В цьому випадку функція Лагранжа (6.25) буде вже мати не вигляд (6.28), а більш складний –

$$L = i^2 + \lambda_0 \cdot (\beta' - v) + \lambda_1 \cdot (v' + \mu - i \cdot \phi), \quad (6.124)$$

з трьома формальними невідомими v , i , β , відносно яких рівняння Ейлера необхідно скласти у вигляді:

$$\begin{cases} L_v - \frac{d}{d\tau} L_{v'} = 0, \\ L_\beta - \frac{d}{d\tau} L_{\beta'} = 0, \\ L_i - \frac{d}{d\tau} L_{i'} = 0. \end{cases} \quad (6.125)$$

Підставляючи (6.124) у (6.125), матимемо

$$L_v - \frac{d}{d\tau} L_{v'} = -\lambda_0 + \frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0, \quad (6.126)$$

$$L_\beta - \frac{d}{d\tau} L_{\beta'} = -\frac{d\lambda_0}{d\tau} = 0, \quad (6.127)$$

$$L_i - \frac{d}{d\tau} L_{i'} = 2i + \lambda_1 \cdot \frac{d}{di} (-i \cdot \phi) = 2i - \lambda_1 \cdot \left(\phi + i \cdot \frac{d\phi}{di} \right) = 0. \quad (6.128)$$

Із (6.127) маємо –

$$\lambda_0 = \text{const} = \lambda_0^*, \quad (6.129)$$

а із (6.126) після підстановки в нього (6.129) –

$$\frac{d\lambda_1}{d\tau} = \lambda_0^*. \quad (6.130)$$

Інтегрування (6.130) дає

$$\lambda_1 = \lambda_0^* \cdot \tau + C_1. \quad (6.131)$$

Підставляючи (6.131) у (6.128), отримаємо

$$2i - (\lambda_0^* \cdot \tau + C_1) \cdot \left(\phi + i \cdot \frac{d\phi}{di} \right) = 0 \quad (6.132)$$

або

$$\frac{2i}{\phi + i \cdot \frac{d\phi}{di}} = \lambda_0^* \cdot \tau + C_1. \quad (6.133)$$

Конкретизуючи залежність

$$\phi = \phi(i) \quad (6.134)$$

і підставляючи конкретизований вираз (6.134) у (6.133), знайдемо струм i у вигляді функції від τ , в структуру якої входять невідомі параметри λ_0^* і C_1 , тобто у вигляді

$$i = i(\tau, \lambda_0^*, C_1). \quad (6.135)$$

Підставляючи (6.134) і (6.135) в рівняння (6.123), отримаємо

$$v' = \phi(i) \cdot i(\tau, \lambda_0^*, C_1) - \mu. \quad (6.136)$$

Інтегруючи (6.136), знайдемо швидкість v у вигляді

$$v = \int [\phi(i) \cdot i(\tau, \lambda_0^*, C_1) - \mu] d\tau + C_2 = v(\tau, \lambda_0^*, C_1, C_2). \quad (6.137)$$

Підставляючи (6.137) у (6.24^{*}), в якому значення τ^* і β є заданими, отримаємо

$$\beta = \int_0^{\tau^*} v(\tau, \lambda_0, C_1, C_2) d\tau = \beta(\tau^*, \lambda_0, C_1, C_2). \quad (6.138)$$

Для того, щоб конкретизувати закони (6.135) і (6.137), необхідно визначити числові значення параметрів λ_0 , C_1 , C_2 . Для цього необхідно мати три рівняння. Одне з них уже є – це (6.138).

Два інших складемо, використовуючи вираз (6.137) і задані граничні умови (6.17), або в більш загальному вигляді:

$$\begin{cases} v(\tau = 0, \lambda_0, C_1, C_2) = v_0, \\ v(\tau = \tau^*, \lambda_0, C_1, C_2) = v_{\tau^*}. \end{cases} \quad (6.139)$$

Розв'язавши систему трьох рівнянь (6.138), (6.139) відносно невідомих λ_0 , C_1 , C_2 , знайдемо їх конкретні числові значення λ_0^* , C_1^* , C_2^* , підставляючи які у вирази (6.135) і (6.137), знайдемо закони оптимального керування електроприводом, дотримання яких мінімізує втрати електричної енергії в якорі електродвигуна при виконанні електроприводом заданої робочої програми.

Покажемо, як виглядатимуть вирази (6.135) і (6.137) у випадку, коли

$$\phi(i) = \phi_0 + k_\phi \cdot i. \quad (6.140)$$

Підставляючи (6.140) у (6.133), матимемо

$$\frac{2i}{\phi_0 + k_\phi \cdot i + i \cdot k_\phi} = \lambda_0 \cdot \tau + C_1 \quad (6.141)$$

або

$$\frac{2i}{\phi_0 + 2k_\phi \cdot i} = \lambda_0 \cdot \tau + C_1. \quad (6.142)$$

Із (6.142) знайдемо, що

$$i = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot \phi_0}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi} \right). \quad (6.143)$$

Підставляючи (6.140) і (6.143) у (6.136), маємо

$$\begin{aligned} v' = & \left(\phi_0 + k_\phi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot \phi_0}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi} \right) \right) \times \\ & \times \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot \phi_0}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi} \right) - \mu \end{aligned} \quad (6.144)$$

або

$$v' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\phi_0^2 \cdot (\lambda_0 \cdot \tau + C_1)}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{k_\phi \cdot \phi_0^2 \cdot (\lambda_0 \cdot \tau + C_1)^2}{[1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi]^2} \right) - \mu. \quad (6.145)$$

Інтегруючи (6.145), маємо

$$v = \frac{\phi_0^2}{2} \cdot \int \frac{\lambda_0 \cdot \tau + C_1}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi} d\tau + \frac{k_\phi \cdot \phi_0^2}{4} \cdot \int \frac{(\lambda_0 \cdot \tau + C_1)^2}{[1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi]^2} d\tau - \int \mu d\tau + C_2 \quad (6.146)$$

або

$$v = \frac{\phi_0^2}{2k_\phi} \cdot \int \frac{(\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi} d\tau + \frac{\phi_0^2}{4k_\phi} \cdot \int \frac{[(\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi]^2}{[1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi]^2} d\tau - \mu \cdot \tau + C_2. \quad (6.147)$$

У виразі (6.147) в інтегралах зробимо заміну змінних.

Нехай

$$(\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi = \theta. \quad (6.148)$$

Тоді

$$d\theta = \lambda_0 \cdot k_\phi \cdot d\tau \quad (6.149)$$

або

$$d\tau = \frac{d\theta}{\lambda_0 \cdot k_\phi}. \quad (6.150)$$

Підставляючи (6.148) і (6.150) у (6.147), маємо

$$v = \frac{\phi_0^2}{2\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot \int \frac{\theta}{1 - \theta} d\theta + \frac{\phi_0^2}{4\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot \int \frac{\theta^2}{(1 - \theta)^2} d\theta - \mu \cdot \tau + C_2. \quad (6.151)$$

Інтегралі, що входять до (6.151), відносяться до числа типових, значення яких можна взяти із довідника з вищої математики. Зробивши це, отримаємо –

$$v = \frac{\phi_0^2}{2\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot (-\theta - \ln |1 - \theta|) + \frac{\phi_0^2}{4\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot \left(-1 + \theta + 2 \cdot \ln |1 - \theta| + \frac{1}{1 - \theta} \right) - \mu \cdot \tau + C_2. \quad (6.152)$$

Підставляючи (6.148) у (6.152), матимемо

$$\begin{aligned}
v = & \frac{\phi_0^2}{2\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot \left[-(\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi - \ln |1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi| \right] + \\
& + \frac{\phi_0^2}{4\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot \left[-1 + (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi + 2 \cdot \ln |1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi| + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi} \right] - \mu \cdot \tau + C_2
\end{aligned} \tag{6.153}$$

або

$$\begin{aligned}
v = & \frac{\phi_0^2}{4\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot \left[-1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi + \frac{1}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi} \right] - \\
& - \mu \cdot \tau + C_2.
\end{aligned} \tag{6.154}$$

Підставляючи (6.154) у (6.138), знайдемо, що

$$\begin{aligned}
\beta = & \frac{\phi_0^2}{4\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot \left[-\tau^* - \frac{1}{2} \cdot \lambda_0 \cdot (\tau^*)^2 \cdot k_\phi - C_1 \cdot \tau^* \cdot k_\phi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\tau^*} \frac{d\tau}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau + C_1) \cdot k_\phi} \right] - \frac{\mu \cdot (\tau^*)^2}{2} + C_2 \cdot \tau^*.
\end{aligned} \tag{6.155}$$

Для взяття інтегралу у виразі (6.155) знову здійснимо заміну змінних з використанням (6.148), (6.149), (6.150) та таблиці типових інтегралів. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
\beta = & \frac{\phi_0^2}{4\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot \left[-\tau^* - \frac{1}{2} \cdot \lambda_0 \cdot (\tau^*)^2 \cdot k_\phi - C_1 \cdot \tau^* \cdot k_\phi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\lambda_0 \cdot k_\phi} \cdot \ln |1 - \theta| \Bigg|_{C_1 \cdot k_\phi}^{(\lambda_0 \cdot \tau^* + C_1) \cdot k_\phi} \right] - \frac{\mu \cdot (\tau^*)^2}{2} + C_2 \cdot \tau^*
\end{aligned} \tag{6.156}$$

або

$$\begin{aligned}
\beta = & \frac{\phi_0^2}{4\lambda_0 \cdot k_\phi^2} \cdot \left\{ -\tau^* - \frac{1}{2} \cdot \lambda_0 \cdot (\tau^*)^2 \cdot k_\phi - C_1 \cdot \tau^* \cdot k_\phi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\lambda_0 \cdot k_\phi} \cdot \left[\ln |1 - (\lambda_0 \cdot \tau^* + C_1) \cdot k_\phi| - \ln |1 - C_1 \cdot k_\phi| \right] \right\} - \\
& - \frac{\mu \cdot (\tau^*)^2}{2} + C_2 \cdot \tau^*.
\end{aligned} \tag{6.157}$$

Доповнюючи рівняння (6.157), в якому відомими є β , ϕ_0 , k_ϕ , τ^* , μ , рівняннями:

$$v_0 = \frac{\phi_0^2}{4\lambda_0 \cdot k_\phi} \cdot \left[-1 - C_1 k_\phi + \frac{1}{1 - C_1 \cdot k_\phi} \right] + C_2, \quad (6.158)$$

$$v_{\tau^*} = \frac{\phi_0^2}{4\lambda_0 \cdot k_\phi} \cdot \left[-1 - (\lambda_0 \cdot \tau^* + C_1) \cdot k_\phi + \frac{1}{1 - (\lambda_0 \cdot \tau^* + C_1) \cdot k_\phi} \right] - \mu \cdot \tau^* + C_2, \quad (6.159)$$

котрі впливають із (6.154) для граничних умов (6.139), ми отримуємо систему трьох рівнянь (6.157), (6.158), (6.159) з трьома невідомими λ_0 , C_1 , C_2 , розв'язком якої є числові значення λ_0^* , C_1^* , C_2^* однойменних коефіцієнтів в законах оптимального керування електроприводом, які задаються співвідношеннями (6.143), (6.154).

На завершення цього підрозділу нагадаємо, що знайшовши значення i та v , які доставляють екстремум функціоналу (6.20*), ми зобов'язані перевірити, яке із екстремальних значень цього функціонала вони забезпечують – мінімальне чи максимальне.

Для цього знайдемо значення $L_{v'v'}$ і визначимо, якій умові Лежандра воно відповідає.

Для визначення $L_{v'v'}$ функцію Лагранжа (6.144), використавши рівняння (6.123), перепишемо в іншому вигляді, а саме

$$L = \left(\frac{v' + \mu}{\phi} \right)^2 + \lambda_0 \cdot (\beta' - v). \quad (6.160)$$

Із (6.160) знайдемо, що

$$L_{v'} = \frac{2}{\phi^2} \cdot (v' + \mu), \quad (6.161)$$

а із (6.161), що

$$L_{v'v'} = \frac{2}{\phi^2}. \quad (6.162)$$

Оскільки у підключеному до джерела електричної енергії електродвигуні для магнітного потоку завжди виконується умова

$$\phi > 0, \quad (6.163)$$

то умова

$$L_{v'v'} > 0 \quad (6.164)$$

теж завжди виконується. А це свідчить про те, що знайдені i та v завжди доставлятимуть функціоналу (6.20*) мінімум.

РОЗДІЛ 7 ПРИКЛАДИ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА ЗА НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ НА КООРДИНАТИ, ЩО ОПТИМІЗУЮТЬСЯ

У цьому розділі ми на прикладах розв'язання задачі оптимізації конкретних динамічних об'єктів методом Лагранжа за наявності обмежень на координати, що оптимізуються, покажемо, як змінюються закони оптимального руху динамічних об'єктів у цих випадках.

7.1 Вплив обмежень за вхідною та вихідною координатами динамічного об'єкта на закони оптимального керування ним

В попередніх підрозділах ми розв'язали декілька задач оптимізації динамічних об'єктів класу електроприводів з електродвигунами незалежного та послідовного збудження за умови, що області зміни кутової швидкості обертання вала та струму якоря електродвигуна забезпечують реалізацію отриманих законів оптимального керування.

Але у практиці експлуатації електроприводів дуже часто зустрічаються випадки, коли кутова швидкість обертання вала електродвигуна не повинна перевищувати заданий рівень, тобто

$$v \leq v_{\Pi} \quad (7.1)$$

або струм якоря обмежується певним його допустимим значенням, тобто

$$i \leq i_{\Pi}. \quad (7.2)$$

Порогове значення v_{Π} кутової швидкості задається в одних випадках умовами функціонування технологічного агрегата, який приводиться в рух даним електроприводом, а в інших – обмеженнями, обумовленими необхідністю не переступати границю механічної міцності якоря.

Порогове значення i_{Π} струму якоря електродвигуна постійного струму, як правило, обмежується умовами комутації цього струму на колекторі.

Проаналізуємо спочатку, як зміняться закони оптимального керування i , v , отримані нами в підрозділі 6.1, за умови існування обмеження (7.1) та умови, що графік оптимальної швидкості v (див. рис. 6.1) в якійсь області виходить за межі (7.1). На рис. 7.1 – це область між відрізками T_1 і T_2 .

В підрозділі 3.4 ми встановили, що в разі, якщо екстремаль $y(x)$ функціонала (3.69) виходить за межі області, окресленої функцією $\varphi(x)$, а тому не може бути реалізованою в області (3.70), то мінімуму цього функціонала можна досягти на складеній кривій (3.71), по краях якої мають місце

Таким чином, мінімум функціонала (6.20), який має вигляд

$$e = \int_0^{\tau^*} i^2 d\tau, \quad (6.20^*)$$

за умови виконання (6.15), (6.17) і (6.24), тобто

$$i = v' + \mu, \quad (6.15^*)$$

$$v(0) = v(\tau^*) = 0, \quad (6.17^*)$$

$$\beta = \int_0^{\tau^*} v d\tau, \quad (6.24^*)$$

та обмеження (7.1), буде досягатись на складеній функції

$$v(\tau) = \begin{cases} -\frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \tau^2 + \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \tau & \text{при } \tau \in [0, \tau_1), \\ v_{II} & \text{при } \tau \in [\tau_1, \tau_2], \\ -\frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \tau^2 + \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \tau & \text{при } \tau \in (\tau_2, \tau^*]. \end{cases} \quad (7.7)$$

Оскільки для будь-якого $\tau \in [0, \tau^*]$ повинно виконуватись співвідношення (6.15^{*}), то струм якоря i теж буде описуватись складеною функцією –

$$i(\tau) = \begin{cases} -\frac{12 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \tau + \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} + \mu & \text{при } \tau \in [0, \tau_1), \\ \mu & \text{при } \tau \in [\tau_1, \tau_2], \\ -\frac{12 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \tau + \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} + \mu & \text{при } \tau \in (\tau_2, \tau^*]. \end{cases} \quad (7.8)$$

Співвідношення (7.7), (7.8) задають ідеалізовані закони оптимального керування $v(\tau)$, $i(\tau)$ електроприводом розглянутого класу в умовах обмеження на кутову швидкість обертання ротора.

Графіки функцій, що реалізують ці закони, наведені на рис. 7.1 (жирні лінії).

Звичайно, в реальній практиці сформувавши струм якоря, графік кривої якого мав би в точках τ_1 і τ_2 вертикальні фронти, через індуктивні властивості обмотки якоря неможливо – ці фронти будуть мати певний нахил і плавно входити в наступну ділянку кривої. А завдяки цьому і зломів на

кривій швидкості в точках τ_1, τ_2 теж не буде, а будуть виконуватись умови (3.91), (3.92).

Але від цього, як ми вже показали у підрозділі 6.1, суттєвого збільшення втрат електричної енергії в якорі електродвигуна порівняно з їх теоретичним мінімумом на ідеалізованій екстремалі не спостерігатиметься.

А тепер проаналізуємо, як зміняться закони оптимального керування i, v , отримані в підрозділі 6.1, за умови існування обмеження (7.2).

Знову ж таки розпочнемо з того, що отримаємо $i(\tau), v(\tau)$ на умовах, викладених в підрозділі 6.1.

Нехай це будуть ті ж функції, які задані виразами (6.46) та (6.43) або (6.44).

Накладемо умову, що

$$i = i_{II}. \quad (7.9)$$

Це означає, що з моменту $\tau = 0$ до моменту $\tau = \tau_1$ струм якоря матиме значення, яке задається виразом (7.9).

Тож, для всіх $\tau \in [0, \tau_1]$ буде справедливим рівняння

$$i_{II} = v' + \mu, \quad (7.10)$$

яке випливає з (6.15*) та (7.9).

Перепишемо (7.10) так –

$$v' = i_{II} - \mu. \quad (7.11)$$

Інтегруючи це рівняння, знайдемо

$$v(\tau) = (i_{II} - \mu) \cdot \tau + C_1. \quad (7.12)$$

Оскільки, згідно з (6.17),

$$v(0) = 0, \quad (7.13)$$

то, підставляючи (7.13) у (7.12), маємо

$$C_1 = 0. \quad (7.14)$$

Отже, на відрізку $\tau \in [0, \tau_1]$ кутова швидкість $v(\tau)$ наростає від нуля до $v(\tau_1)$ за лінійним законом (7.12), (7.14).

Згідно з принципом оптимальності Беллмана, незалежно від того, як динамічний об'єкт опинився в точці $(\tau_1, v(\tau_1))$, починаючи з цієї точки він далі повинен рухатись по оптимальній траєкторії, якою для нашого об'єкта електропривода є вже отримана раніше крива (6.35).

Значення τ_1 знайдемо із рівняння

$$i_{II} = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \tau_1}{\tau^*}\right) + \mu, \quad (7.15)$$

яке отримаємо як співвідношення, що задає точку перетину кривих (7.9) і (6.46).

Із (7.15) маємо –

$$\tau_1 = \frac{\tau^*}{2} + \frac{(\tau^*)^3}{12 \cdot \beta} \cdot (\mu - i_{II}). \quad (7.16)$$

Підставляючи (7.16) разом із (7.14) в (7.12), знайдемо чисельне значення $v(\tau_1)$ кутової швидкості $v(\tau)$ в точці $(\tau_1, v(\tau_1))$, тобто визначимо початкові умови для кривої (6.35) у вигляді –

$$v(\tau) \Big|_{\tau=\tau_1} = v(\tau_1). \quad (7.17)$$

Саму ж конкретизовану криву (6.35) для нашої задачі знайдемо, знову інтегруючи рівняння (6.15^{*}) з граничною умовою (7.17), тобто виходячи з рівняння

$$v' = i - \mu = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \tau}{\tau^*}\right) - \mu. \quad (7.18)$$

Із цього рівняння маємо

$$v(\tau) = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \tau - \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \tau^2 - \mu \cdot \tau + C_2. \quad (7.19)$$

Підставляючи (7.16) і (7.17) у (7.19), отримуємо рівняння

$$v(\tau_1) = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left[\frac{\tau^*}{2} + \frac{(\tau^*)^3}{12 \cdot \beta} \cdot (\mu - i_{II}) \right] - \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \left[\frac{\tau^*}{2} + \frac{(\tau^*)^3}{12 \cdot \beta} \cdot (\mu - i_{II}) \right]^2 - \mu \cdot \left[\frac{\tau^*}{2} + \frac{(\tau^*)^3}{12 \cdot \beta} \cdot (\mu - i_{II}) \right] + C_2, \quad (7.20)$$

з якого легко визначається числове значення C_2^* сталої інтегрування C_2 для закону оптимального керування (7.19).

Графіки функцій $i(\tau)$, $v(\tau)$, які задають оптимальні закони керування електроприводом при обмеженні на струм якоря і які визначаються співвідношеннями (7.9), (7.12), (7.14), (7.16), (6.46), (7.19), (7.20), наведені на рис. 7.2.

Запишемо ці закони у вигляді, аналогічному (7.7), (7.8), коли накладалось обмеження на швидкість, тобто у вигляді:

$$v(\tau) = \begin{cases} (i_{II} - \mu) \cdot \tau & \text{при } \tau \in [0, \tau_1], \\ \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \tau - \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^3} \cdot \tau^2 - \mu \cdot \tau + C_2 & \text{при } \tau \in [\tau_1, \tau^*], \end{cases} \quad (7.21)$$

де τ_1 визначається співвідношенням (7.16), а C_2 – співвідношенням (7.20);

$$i(\tau) = \begin{cases} i_{II} & \text{при } \tau \in [0, \tau_1], \\ \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \tau}{\tau^*}\right) + \mu & \text{при } \tau \in [\tau_1, \tau^*]. \end{cases} \quad (7.22)$$

Звертаємо увагу на те, що від початку процесу до моменту часу τ_1 швидкість обертання вала електродвигуна наростає лінійно, переходячи в момент τ_1 в параболу, а струм якоря до моменту τ_1 підтримується незмінним і починає лінійно спадати від моменту τ_1 до кінцевого моменту часу τ^* .

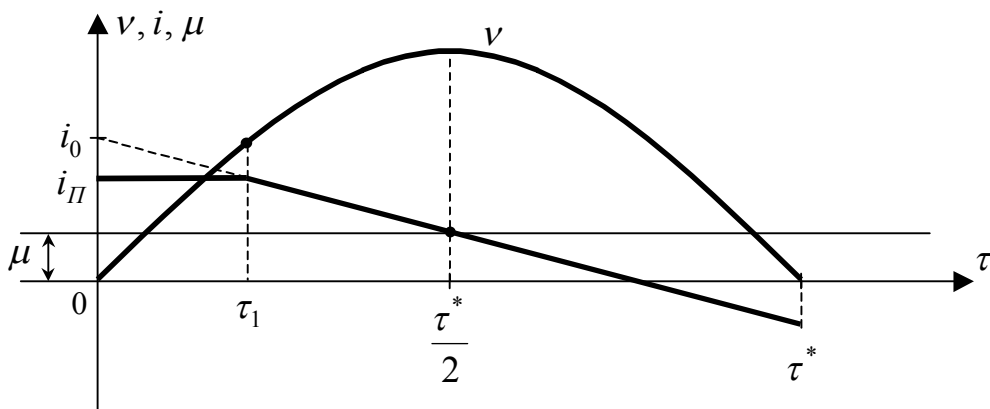


Рисунок 7.2 – Графіки функцій $v(\tau)$, $i(\tau)$, які задають оптимальні закони керування електроприводом при односторонньому обмеженні на струм якоря

На завершення підрозділу зауважимо, що на практиці можливий і випадок, показаний на рис. 7.3, коли струм якоря обмежується двосторонньо, тобто коли замість обмеження (7.2) маємо обмеження

$$|i| \leq i_{II}. \quad (7.23)$$

В цьому випадку все, що нами сказано і виведено від початку процесу до моменту τ_1 і після τ_1 , залишається в силі аж до моменту τ_2 , який визначається як момент перетину кривої (7.22) з прямою

$$i = -i_{II}, \quad (7.24)$$

тобто визначається із рівняння

$$-i_{II} = \frac{6 \cdot \beta}{(\tau^*)^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \tau_2}{\tau^*}\right) + \mu. \quad (7.25)$$

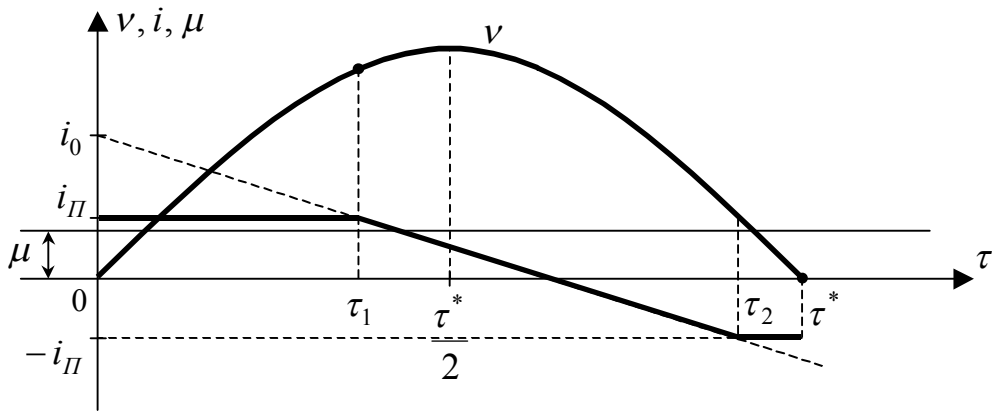


Рисунок 7.3 – Графіки функцій $v(\tau)$, $i(\tau)$, які задають оптимальні закони керування електроприводом при двосторонньому обмеженні на струм якоря

В момент τ_2 спадання швидкості з параболи переходить в лінійне, яке триває аж до τ^* , а струм якоря, який спадав лінійно, досягши значення $(-i_{\Pi})$ в момент τ_2 , далі, аж до τ^* , не змінюється.

Відрізок прямої для функції $v(\tau)$ при $\tau \in [\tau_2, \tau^*]$ визначається з того ж рівняння (6.15*), яке ми використовували при знаходженні відрізка прямої при $\tau \in [0, \tau_1]$, але в цьому випадку воно матиме вигляд не (7.10), а

$$-i_{\Pi} = v' + \mu. \quad (7.26)$$

З граничною умовою (6.17) інтегрування (7.26) приводить до функції

$$v(\tau) = -(i_{\Pi} + \mu) \cdot \tau + C_3, \quad (7.27)$$

стала інтегрування C_3 в якій обчислюється підстановкою граничної умови (6.17) у (7.27).

7.2 Квазіоптимізація вихідної координати динамічного об'єкта, що обумовлюється необхідністю виконання об'єктом робочої програми

В останньому підрозділі попереднього розділу ми оптимізували як динамічний об'єкт електропривод трамвая та отримали математичні моделі для керуючої змінної – струму якоря i електродвигунів постійного струму з послідовним збудженням електропривода трамвая та вихідної координати – кутової швидкості v обертання їх роторів, реалізація яких забезпечує мінімум втрат електроенергії електроприводом трамвая за критерієм

$$e = \int_0^{\tau_k} i^2 d\tau \quad (6.20^*)$$

під час його руху по прямолінійних ділянках маршруту від однієї зупинки

до наступної за програмою

$$\beta = \int_0^{\tau_k} v d\tau. \quad (6.24^*)$$

У цьому ж підрозділі попереднього розділу побудовано алгоритм визначення параметрів цих моделей за умови, що під час пуску електропривода в момент часу $\tau = 0$ для забезпечення зрушення з місця трамвая його робоча точка в координатах «струм збудження i – робочий магнітний потік ϕ » знаходиться на лінійній частині характеристики намагнічування електродвигуна, заданої запропонованою авторами навчального посібника в одній із їх наукових робіт математичною моделлю –

$$\phi(i) = \begin{cases} -a_2 i^2 + b_2 i, & i \in [0, i_{cn}); \\ a_1 + b_1 i, & i \in [i_{cn}, \infty), \end{cases} \quad (7.28)$$

$$i_{cn} = \frac{b_2 - b_1}{2a_2}. \quad (7.29)$$

Одразу ж зауважимо, що під час руху трамвая в разі його недозавантаження ця робоча точка переміщується на параболічну частину характеристики намагнічування та залишається на ній до зупинення трамвая в момент часу $\tau = \tau_k$.

Як нами уже показано в попередньому розділі навчального посібника, при роботі на лінійній частині характеристики намагнічування (7.28) оптимальний струм якоря i тягового електродвигуна та оптимальна кутова швидкість v обертання його вала задаються моделями:

$$i^{IP}(\tau) = \frac{a_1 \cdot (C^{IP} + \lambda_0^{IP} \tau)}{2 \cdot (1 - b_1 \cdot (C^{IP} + \lambda_0^{IP} \tau))}, \quad (7.30)$$

$$v^{IP}(\tau) = \frac{a_1^2}{4\lambda_0^{IP} \cdot b_1} \cdot \left(\frac{1}{b_1 \cdot (1 - b_1 \cdot (C^{IP} + \lambda_0^{IP} \tau))} - \frac{1}{b_1} - (C^{IP} + \lambda_0^{IP} \tau) \right) - \mu_0 \tau + C_1, \quad (7.31)$$

які ми подаємо в адаптованому до позначень формули (7.28) вигляді.

Авторами навчального посібника в одній із наукових статей, наведених в списку використаної літератури, показано, що при роботі тягових електродвигунів трамвая на параболічній частині характеристики намагнічування (7.28) моделі для оптимального струму і оптимальної кутової швидкості матимуть вигляд:

$$i^{yT}(\tau) = \frac{2}{3a_2} \cdot \left(b_2 - \frac{1}{C^{yT} + \lambda_0^{yT} \tau} \right), \quad (7.32)$$

$$v^{yT}(\tau) = \frac{4}{27a_2^2 \cdot \lambda_0^{yT}} \cdot \left(b_2^3 \cdot (C^{yT} + \lambda_0^{yT} \tau) + \frac{3b_2}{C^{yT} + \lambda_0^{yT} \tau} - \frac{1}{(C^{yT} + \lambda_0^{yT} \tau)^2} \right) - \mu_0 \tau + C_2, \quad (7.33)$$

У виразах (7.30) – (7.33) верхніми індексами «ПР» та «УГ» позначені режими роботи електропривода трамвая відповідно на умовних проміжках «пуск – розгін» та «усталений рух – гальмування».

Алгоритм визначення множини параметрів оптимальних моделей (7.30) – (7.33)

$$\Pi = \{C^{PP}, C^{yT}, \lambda_0^{PP}, \lambda_0^{yT}, C_1, C_2\}, \quad (7.34)$$

детально викладений в останньому підрозділі шостого розділу, тому тут на ньому ми зупиняємось не будемо і вважатимемо їх відомими.

Нагадаємо, що у всіх наведених вище співвідношеннях всі величини задані у відносних одиницях, тобто є безрозмірними.

Дві пари оптимальних моделей (7.30), (7.31) та (7.32), (7.33) струму якоря i та кутової швидкості обертання вала ротора v електричних двигунів системи електропривода трамвая, як показано в попередньому розділі, дійсно доставляють мінімум функціоналу (6.20). Але у випадку побудови зазначених оптимальних моделей для досить довгого трамвайного перегону між сусідніми зупинками може статися так, що графік оптимальної траєкторії для кутової швидкості перевищить номінальне значення кутової швидкості обертання вала ротора електричного двигуна системи електропривода трамвая. А цього не можна допустити, оскільки у випадку виходу електричного двигуна за номінальний режим виникатимуть проблеми з нагрівом його обмоток. Можуть виникнути також проблеми, пов'язані зі сходженням трамвая з рейок. Виходячи з цього, для повноти розв'язання варіаційної задачі оптимізації втрат електричної енергії в контурах якорів електродвигунів системи електропривода трамвая необхідно накласти обмеження на швидкість руху трамвая, тобто на кутову швидкість обертання валів роторів електродвигунів його системи електропривода у вигляді

$$\omega \leq \omega_H \quad (7.35)$$

або у відносних одиницях

$$v \leq 1. \quad (7.36)$$

Згідно з викладеною у першій частині навчального посібника методологією оптимізації в результаті пошуку екстремалей в умовах дії обмежен-

ня (7.36) отримаємо новий квазіоптимальний закон зміни кутової швидкості обертання валів роторів електродвигунів системи електропривода трамвая у вигляді

$$v_{\text{кв}}(\tau) = \begin{cases} \frac{a_1^2}{4\lambda_0^{\text{ПП}} \cdot b_1} \cdot \left(\frac{1}{b_1 \cdot (1 - b_1 \cdot (C^{\text{ПП}} + \lambda_0^{\text{ПП}} \cdot \tau))} - \frac{1}{b_1} - (C^{\text{ПП}} + \lambda_0^{\text{ПП}} \cdot \tau) \right) - \\ - \mu_0 \cdot \tau + C_1, \text{ для } \tau \in [0, \tau_1], \\ 1, \text{ для } \tau \in (\tau_1, \tau_2), \\ \frac{4}{27a_2^2 \cdot \lambda_0^{\text{ПГ}}} \cdot \left(b_2^3 \cdot (C^{\text{ПГ}} + \lambda_0^{\text{ПГ}} \cdot \tau) + \frac{3b_2}{C^{\text{ПГ}} + \lambda_0^{\text{ПГ}} \cdot \tau} - \right. \\ \left. - \frac{1}{(C^{\text{ПГ}} + \lambda_0^{\text{ПГ}} \cdot \tau)^2} \right) - \mu_0 \cdot \tau + C_2, \text{ для } \tau \in [\tau_2, \tau_k], \end{cases} \quad (7.37)$$

де τ_1 та τ_2 – відносні часові координати точок перетину обмеження (7.36) та графіків оптимальних моделей (7.31), (7.33), які можна знайти з рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{a_1^2}{4\lambda_0^{\text{ПП}} \cdot b_1} \cdot \left(\frac{1}{b_1 \cdot (1 - b_1 \cdot (C^{\text{ПП}} + \lambda_0^{\text{ПП}} \tau))} - \frac{1}{b_1} - (C^{\text{ПП}} + \lambda_0^{\text{ПП}} \tau) \right) - \\ - \mu_0 \tau + C_1 = 1, \\ \frac{4}{27a_2^2 \cdot \lambda_0^{\text{ПГ}}} \cdot \left(b_2^3 \cdot (C^{\text{ПГ}} + \lambda_0^{\text{ПГ}} \tau) + \frac{3b_2}{C^{\text{ПГ}} + \lambda_0^{\text{ПГ}} \tau} - \frac{1}{(C^{\text{ПГ}} + \lambda_0^{\text{ПГ}} \tau)^2} \right) - \\ - \mu_0 \tau + C_2 = 1. \end{cases} \quad (7.38)$$

На рис. 7.4 зображено побудований авторами навчального посібника графік квазіоптимального закону зміни кутової швидкості обертання вала ротора, заданого у загальному вигляді математичною моделлю (7.37), для електричного двигуна постійного струму послідовного збудження ТЕ022 електропривода трамвая КТ4SU при його русі між двома трамвайними зупинками, котрі знаходяться на відстані 250 метрів одна від одної і яку потрібно проїхати за 40 секунд.

Як видно з цього рисунка, математична модель (7.37) дійсно враховує обмеження (7.36), і на цьому можна було б поставити крапку, але з врахуванням обмеження за швидкістю виникла інша проблема: трамвай не доїде до зупинки, тобто не виконає в повному обсязі програму роботи (6.24), оскільки він певний час буде їхати з меншою швидкістю, ніж передбачають оптимальні закони (7.31) та (7.33).

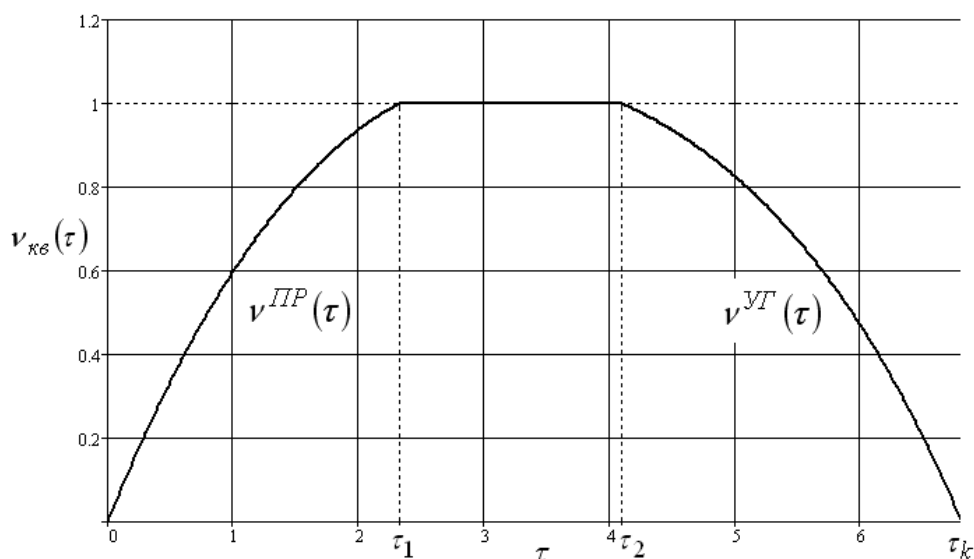


Рисунок 7.4 – Графік кватіоптимального закону зміни кутової швидкості обертання якоря електродвигуна постійного струму ТЕ022 електропривода трамвая КТ4SU при його русі між двома трамвайними зупинками, котрі знаходяться на відстані 250 метрів одна від одної і яку потрібно проїхати за 40 секунд

Авторами навчального посібника в одній із наукових статей, наведених у списку використаної літератури, було визначено, наскільки електропривод трамвая недовиконає програму роботи (6.24) для наведеного вище прикладу. Для цього спочатку було визначено β для руху трамвая за оптимальними законами (7.31) та (7.33) і $\beta_{квз}$ для кватіоптимального закону зміни кутової швидкості (7.37). При цьому виявилось, що

$$\beta = \frac{k_p \cdot l_k}{R \cdot \omega_H \cdot T_M} = 4,963, \quad (7.39)$$

де k_p – коефіцієнт передачі редуктора від осі ротора електродвигуна до осі колеса, l_k – відстань між сусідніми трамвайними зупинками в метрах, R – радіус обода колеса трамвая в метрах, ω_H – номінальна кутова швидкість обертання вала ротора електродвигуна в $\frac{рад}{с}$, а T_M – механічна стала часу в секундах, а

$$\beta_{квз} = \int_0^{\tau_1} v^{ПП}(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} 1(\tau) d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_k} v^{УГ}(\tau) d\tau = 4,924. \quad (7.40)$$

Із виразів (7.39), (7.40) випливає, що

$$\Delta\beta = \beta - \beta_{квз} = 0,039, \quad (7.41)$$

де $\Delta\beta$ – відносне недовиконання програми роботи (6.24) для даного прикладу.

Враховуючи практичну важливість виконання програми роботи (6.24), для вирішення проблеми, що виникла, пропонується таке: необхідно збі-

льшити час $(\tau_2 - \tau_1)$ руху трамвая з номінальною кутовою швидкістю обертання його електродвигунів, причому зробити це так, щоб повністю виконати програму роботи (6.24), тобто досягти рівності

$$\beta_{\text{квaz}} = \beta. \quad (7.42)$$

Із співвідношень (7.40) і (7.42) випливає, що нове збільшене значення часу τ_2 – позначимо його τ_2^* , – яке дасть змогу досягти виконання рівності (7.42), може бути знайдене як

$$\tau_2^* = \beta - \int_0^{\tau_1} v^{PP}(\tau) - \int_{\tau_2}^{\tau_k} v^{YI}(\tau) + \tau_1 = 4,114. \quad (7.43)$$

Розрахуємо приріст часу $\Delta\tau$, на який збільшиться час проходження трамваем наступної зупинки. Оскільки $\tau_2 = 4,075$, то

$$\Delta\tau = \tau_2^* - \tau_2 = 0,039. \quad (7.44)$$

Отже, уточнений квазіоптимальний закон (7.37) можна записати так :

$$v_{\text{квz}}^*(\tau) = \begin{cases} \frac{a_1^2}{4\lambda_0^{PP} \cdot b_1} \cdot \left(\frac{1}{b_1 \cdot (1 - b_1 \cdot (C^{PP} + \lambda_0^{PP} \cdot \tau))} - \frac{1}{b_1} - (C^{PP} + \lambda_0^{PP} \cdot \tau) - \mu_0 \cdot \tau + C_1, \text{ для } \tau \in [0, \tau_1], \right. \\ 1, \text{ для } \tau \in (\tau_1, \tau_2^*), \\ \left. \frac{4}{27a_2^2 \cdot \lambda_0^{PP}} \cdot (b_2^3 \cdot (C^{YI} + \lambda_0^{YI} \cdot (\tau - \Delta\tau)) + \right. \\ \left. + \frac{3b_2}{C^{YI} + \lambda_0^{YI} \cdot (\tau - \Delta\tau)} - \frac{1}{(C^{YI} + \lambda_0^{YI} \cdot (\tau - \Delta\tau))^2} - \right. \\ \left. - \mu_0 \cdot (\tau - \Delta\tau) + C_2, \text{ для } \tau \in [\tau_2^*, \tau_k + \Delta\tau]. \right. \end{cases} \quad (7.45)$$

Рухаючись за уточненим квазіоптимальним законом зміни кутової швидкості (7.45) електропривод трамвая дійсно виконає програму роботи (6.24) в повному обсязі (рис. 7.5), але слід пам'ятати, що це призведе до збільшення часу, необхідного трамваю для проходження відстані між сусідніми трамвайними зупинками. Для даного прикладу це збільшення буде незначним –

$$\Delta t = \Delta\tau \cdot T_M = 0,039 \cdot 5,881 = 0,229 \text{ с}, \quad (7.46)$$

що, практично, не потребує навіть зменшення часу, відведеного на зупинення, але при суттєво довших перегонах і більш суттєвих «зрізаннях» параболічних верхівок графіка швидкості паралельно з оптимізацією режиму руху трамваїв слід буде скоригувати сам графік їх руху.

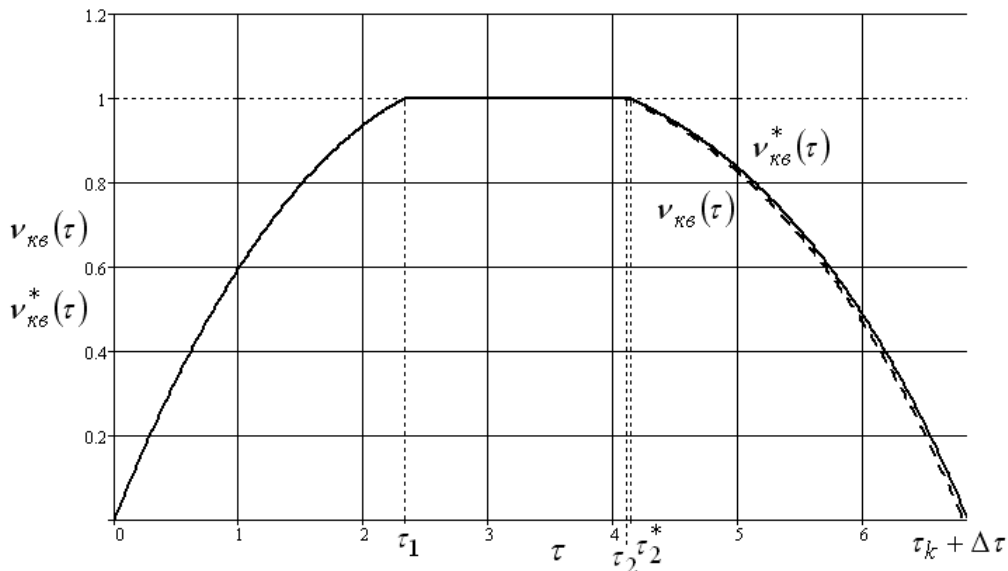


Рисунок 7.5 – Квазіоптимальний закон (зі штриховою ділянкою) (7.37) та уточнений квазіоптимальний закон (7.45) зміни кутової швидкості обертання якоря електродвигуна постійного струму ТЕ022 електропривода трамвая КТ4SU при його русі між двома трамвайними зупинками, котрі знаходяться на відстані 250 метрів одна від одної і яку потрібно проїхати за 40 секунд

7.3 Квазіоптимізація вихідної координати динамічного об'єкта за умови виконання об'єктом робочої програми та дотримання графіка руху

Легко бачити, що запропонований у попередньому підрозділі 7.2 алгоритм може бути застосований лише для побудови квазіоптимального закону зміни кутової швидкості обертання якорів електродвигунів електропривода трамвая без корекції графіку руху при його русі між трамвайними зупинками, які знаходяться на близькій відстані. У випадку ж жорсткого графіку руху трамваїв, який змінювати не дозволено, і довгих перегонів між трамвайними зупинками, запропонований у попередньому підрозділі підхід не може бути застосований.

Авторами навчального посібника в одній із своїх наукових статей, наведених у списку використаної літератури, в умовах заборони корекції графіку руху трамваїв пропонується використовувати ітераційний підхід розв'язання задачі виконання електроприводом трамвая програми роботи (6.24) при дотриманні під час руху трамвая квазіоптимального закону (7.37).

Для ілюстрації підходу, що пропонується, змінимо параметри прикладу, наведеного в попередньому підрозділі 7.2, а саме: побудуємо квазіоптимальний закон зміни кутової швидкості обертання вала ротора (7.37) для електричного двигуна постійного струму послідовного збудження ТЕ022

електропривода трамвая КТ4SU при його русі між двома трамвайними зупинками, котрі знаходяться на відстані 300 метрів одна від одної і яку потрібно проїхати за 48 секунд.

У цьому випадку квазіоптимальний закон (7.37) буде мати вигляд, наведений на рис. 7.6.

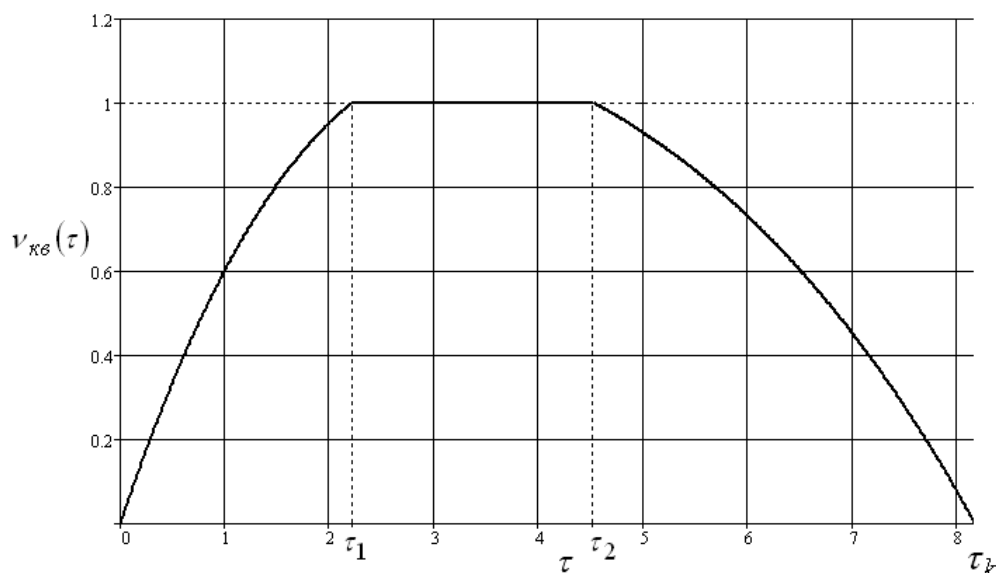


Рисунок 7.6 – Квазіоптимальний закон (7.37) зміни кутової швидкості обертання якоря електродвигуна постійного струму ТЕ022 електропривода трамвая КТ4SU при його русі між двома трамвайними зупинками, котрі знаходяться на відстані 300 метрів одна від одної і яку потрібно проїхати за 48 секунд

Користуючись алгоритмом, викладеним у попередньому підрозділі 7.2, знайдемо, що

$$\beta = \frac{k_p \cdot l_k}{R \cdot \omega_H \cdot T_M} = 5,956, \quad (7.47)$$

$$\beta_{квз} = \int_0^{\tau_1} v^{PP}(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} 1(\tau) d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_k} v^{VG}(\tau) d\tau = 5,055, \quad (7.48)$$

а

$$\Delta\beta = \beta - \beta_{квз} = 0,901, \quad (7.49)$$

де $\Delta\beta$ – величина недовиконання програми роботи (6.24) у даному випадку.

Для виконання програми роботи (6.24) пропонується зменшити час розгону трамвая до номінальної швидкості, дотримуючись оптимального закону, але з корекцією його параметрів, та час його гальмування до повної зупинки, знову ж таки, дотримуючись оптимального закону, але з корекцією його параметрів, і, відповідно, збільшити час руху трамвая в номінальному режимі роботи його електродвигунів, причому зробити це так, щоб досягти рівності

$$\beta_{\text{кваз}} = \beta. \quad (7.50)$$

Для реалізації цього підходу нами запропоновано такий ітераційний алгоритм.

1. Зафіксуємо час, за який за планом потрібно проїхати відстань між зупинками, та позначимо його $\tau_k^{\text{базове}}$ (для наведених вище умов $\tau_k^{\text{базове}} = 8,162$).

2. Запишемо вираз для знаходження $\beta_{\text{кваз}}$ у такому вигляді:

$$\beta_{\text{кваз}}^* = \int_0^{\tau_1} v^{\text{ПП}}(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} 1(\tau) d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_k} v^{\text{УГ}}(\tau) d\tau + \int_{\tau_k}^{\tau_k^{\text{базове}}} 1(\tau) d\tau, \quad (7.51)$$

Легко бачити, що при $\tau_k^{\text{базове}} = \tau_k$ вираз (7.51) буде вироджуватись у вираз (7.48), тобто матиме місце рівність $\beta_{\text{кваз}}^* = \beta_{\text{кваз}}$.

3. Зменшимо значення τ_k (наприклад, на 25%).

4. Перерахуємо параметри квазіоптимального закону (7.37), в тому числі τ_1 і τ_2 , з урахуванням нового значення τ_k та з виразу (7.51) визначимо нове значення $\beta_{\text{кваз}}^*$.

5. Продовжуємо зменшувати (збільшувати) значення τ_k до тих пір, поки не досягнемо рівності $\beta_{\text{кваз}}^* = \beta$ з заданою точністю (для наведеного вище прикладу у ППП Mathcad виконувалось округлення значень $\beta_{\text{кваз}}^*$ та β до третього знаку після коми).

6. Знаходимо різницю

$$\Delta\tau = \tau_k^{\text{базове}} - \tau_k. \quad (7.52)$$

7. Записуємо уточнений квазіоптимальний закон зміни кутової швидкості обертання валів роторів електродвигунів електропривода трамвая у вигляді

$$v_{\text{кв}}^*(\tau) = \begin{cases} \frac{a_1^2}{4\lambda_0^{\text{ПП}} \cdot b_1} \cdot \left(\frac{1}{b_1 \cdot (1 - b_1 \cdot (C^{\text{ПП}} + \lambda_0^{\text{ПП}} \cdot \tau))} - \frac{1}{b_1} - (C^{\text{ПП}} + \lambda_0^{\text{ПП}} \cdot \tau) \right) - \\ - \mu_0 \cdot \tau + C_1, \text{ для } \tau \in [0, \tau_1], \\ 1, \text{ для } \tau \in (\tau_1, \tau_2 + \Delta\tau), \\ \frac{4}{27a_2^2 \cdot \lambda_0^{\text{ПП}}} \cdot \left(b_2^3 \cdot (C^{\text{УГ}} + \lambda_0^{\text{УГ}} \cdot (\tau - \Delta\tau)) + \frac{3b_2}{C^{\text{УГ}} + \lambda_0^{\text{УГ}} \cdot (\tau - \Delta\tau)} \right) - \\ - \frac{1}{(C^{\text{УГ}} + \lambda_0^{\text{УГ}} \cdot (\tau - \Delta\tau))^2} - \mu_0 \cdot (\tau - \Delta\tau) + \\ + C_2, \text{ для } \tau \in [\tau_2 + \Delta\tau, \tau_k^{\text{базове}}]. \end{cases} \quad (7.53)$$

Графіки квазіоптимального закону (7.37) (зі штриховими ділянками) та уточненого квазіоптимального закону (7.53) зміни кутової швидкості обертання якоря електродвигуна постійного струму ТЕ022 електропривода трамвая КТ4SU при його русі між двома трамвайними зупинками, котрі знаходяться на відстані 300 метрів одна від одної і яку потрібно проїхати за 48 секунд, наведені на рис. 7.7.

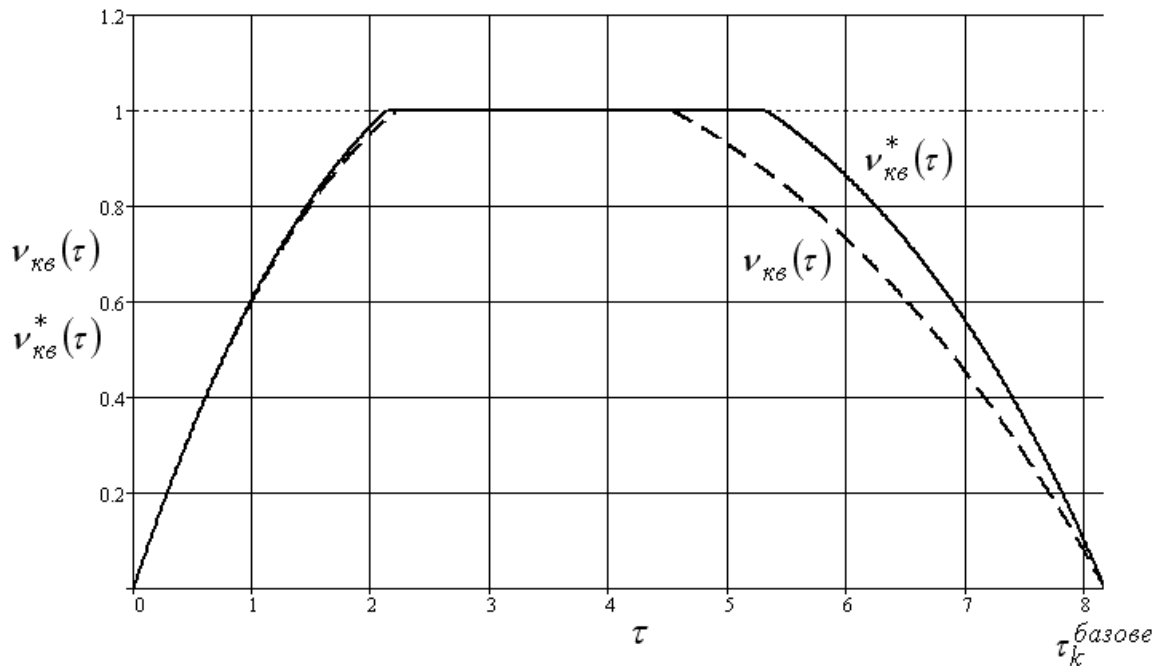


Рисунок 7.7 – Квазіоптимальний закон (зі штриховою ділянкою) (7.37) та уточнений квазіоптимальний закон (7.53) зміни кутової швидкості обертання якоря електродвигуна постійного струму ТЕ022 електропривода трамвая КТ4SU при його русі між двома трамвайними зупинками, котрі знаходяться на відстані 300 метрів одна від одної і яку потрібно проїхати за 48 секунд

Рухаючись за уточненим квазіоптимальним законом зміни кутової швидкості (7.53) електропривод трамвая дійсно виконає програму роботи (6.24) в повному обсязі, причому зробить це за визначений графіком руху час.

РОЗДІЛ 8

ПРИКЛАДИ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ МЕТОДАМИ ЛАГРАНЖА, ПОНТРЯГІНА І БЕЛЛМАНА

У цьому розділі наведено приклади розв'язання задач синтезу оптимального керування динамічними об'єктами за допомогою методу Лагранжа, принципу максимуму Понтрягіна та динамічного програмування Беллмана.

8.1 Синтез оптимального керування динамічним об'єктом методом Лагранжа

Нехай динамічним об'єктом є електрогідравлічний підсилювач, який у своїй структурі містить дві ланки: електричну і гідравлічну, вихідна величина кожної із яких є інтегралом від її вхідної величини, тобто електрогідропідсилювач (ЕГП) здійснює подвійне інтегрування сигналу, який надходить на його вхід.

Якщо позначити нормований вхідний сигнал ЕГП символом y , а нормований вихідний – символом x , то цей динамічний об'єкт можна описати диференціальним рівнянням, що має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y. \quad (8.1)$$

А в просторі змінних стану x_1, x_2 і керування u моделі (8.1) буде відповідати модель

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = u, \end{cases} \quad (8.2)$$

де

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ u = y. \end{cases} \quad (8.3)$$

Щоб була зрозумілою фізична суть змінних стану і керування, нагадаємо, що ЕГП за своєю робочою функцією є по суті дросельною заслонкою, жорстко зв'язаною з осердям соленоїда, на обмотку якого подається керуючий електричний сигнал.

Вихідною величиною ЕГП є кількість робочої рідини, що надходить по трубі, в якій встановлена ця керована заслонка.

Звичайно, електрична ланка ЕГП має свій коефіцієнт підсилення, а гідравлічна – свій, але введенням масштабних множників, якими враховують-

ся і коефіцієнти підсилення, і коефіцієнти узгодження одних фізичних величин з іншими, ми завжди диференціальні рівняння, що складені відносно змінних в іменованих одиницях, можемо звести до безрозмірних рівнянь типу (8.2) відносно нормованих змінних.

Щоб обмотка соленоїда ЕГП не згоріла, напруга, яка подається на неї і яка є вхідним сигналом підсилювача, повинна бути обмеженою. Цю вимогу після нормування вхідного сигналу можна записати у вигляді умови

$$|u| \leq 1. \quad (8.4)$$

Умову (8.4), як уже показано в підрозділі 4.3, можна замінити іншою умовою, а саме –

$$\int_0^T u^{2q} dt \leq T, \quad (8.5)$$

звідки для границі області (8.4) випливає, що

$$\int_0^T u^{2q} dt = T. \quad (8.6)$$

Поставимо задачу: знайти закон керування $u(t)$, який задовольняє обмеження (8.4) і який за найкоротший час переводить динамічний об'єкт (8.2) із початкового стану

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{1_0}, \\ x_2(0) = x_{2_0}, \end{cases} \quad (8.7)$$

у кінцевий стан

$$\begin{cases} x_1(T) = 0, \\ x_2(T) = 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

Це задача оптимальної швидкодії, критерієм оптимізації в якій, як показано у розділі 4, є функціонал

$$J = \int_0^T dt. \quad (8.9)$$

Легко бачити, що якщо обмеження (8.4) замінити еквівалентним йому на границі області функціоналом (8.6), то поставлена задача зводиться до ізопериметричної, розглянутої у підрозділі 3.2.

Для нашої задачі J^F – це функціонал (8.9), а J^K – це функціонал (8.6). Але в нашому випадку функція Лагранжа повинна враховувати не лише складові F та K , що впливають із J^F та J^K , як в (3.47), але й обмеження, що задаються рівнянням моделі динамічного об'єкта, як у (3.41), тобто функцію Лагранжа необхідно формувати і з врахуванням рівнянь (8.2).

Тож, для нашої задачі маємо:

$$L = 1 + \lambda_0 \cdot u^{2q} + \lambda_1 \cdot (x'_1 - x_2) + \lambda_2 \cdot (x'_2 - u). \quad (8.10)$$

Рівняння Ейлера для функції (8.10), оскільки маємо три змінних x_1 , x_2 , u , матимуть вигляд:

$$\begin{cases} L_{x_1} - \frac{d}{dt} L_{x'_1} = 0, \\ L_{x_2} - \frac{d}{dt} L_{x'_2} = 0, \\ L_u - \frac{d}{dt} L_{u'} = 0. \end{cases} \quad (8.11)$$

Підставляючи (8.10) у (8.11), матимемо:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} \lambda_1(t) = 0, \\ -\lambda_1(t) - \frac{d}{dt} \lambda_2(t) = 0, \\ 2q \cdot \lambda_0 \cdot u^{2q-1} - \lambda_2(t) = 0 \end{cases} \quad (8.12)$$

або

$$\begin{cases} \lambda'_1 = 0, \\ \lambda'_2 + \lambda_1 = 0, \\ u^{2q-1} = \frac{\lambda_2}{2q \cdot \lambda_0}. \end{cases} \quad (8.13)$$

З першого рівняння системи (8.13) маємо

$$\lambda_1 = C_1. \quad (8.14)$$

З другого рівняння системи (8.13), з врахуванням (8.14), маємо:

$$\lambda'_2 = -C_1, \quad (8.15)$$

або

$$d\lambda_2 = -C_1 \cdot dt, \quad (8.16)$$

звідки

$$\lambda_2(t) = -C_1 \cdot t + C_2. \quad (8.17)$$

З третього рівняння системи (8.13) маємо:

$$u = \frac{\lambda_2(t)}{\sqrt{2q \cdot \lambda_0}} = \text{sign } \lambda_2(t), \quad (8.18)$$

де

$$\text{sign} = \begin{cases} +1 & \text{при } \lambda_2(t) > 0, \\ -1 & \text{при } \lambda_2(t) < 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

Відносно справедливості виразів (8.18), (8.19) дивись підрозділ 4.3.

Аналізуючи (8.18), (8.19) разом з (8.17) на відрізку $t \in [0, T]$, бачимо, що при $t = 0$ –

$$u(0) = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } C_2, \quad (8.20)$$

а при $t = T$ –

$$u(T) = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign}(-C_1 \cdot T + C_2). \quad (8.21)$$

Тож залежно від співвідношення $\frac{C_2}{C_1}$ в момент часу

$$t_n = \frac{C_2}{C_1} \quad (8.22)$$

на відрізку $t \in [0, T]$ можливо здійснити не більше одного переключення в момент часу t_n керування $u(t)$ із значення $u = +1$ до значення $u = -1$ або навпаки (все залежить від знака C_2).

Спробуємо дати геометричну інтерпретацію отриманого висновку про необхідність не більше ніж одного переключення при оптимальному керуванні динамічним об'єктом другого порядку.

Нехай $u(t) = 1$.

Тоді замість (8.2) можемо записати

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 1. \end{cases} \quad (8.23)$$

Розділивши перше рівняння системи (8.23) на друге, отримаємо

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_2 \quad (8.24)$$

або

$$dx_1 = x_2 \cdot dx_2. \quad (8.25)$$

Інтегруючи (8.25), матимемо:

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + C_1^*. \quad (8.26)$$

Задаючи C_1^* різні значення, як додатні, так і від'ємні, отримаємо мно-
жину парабол, показаних на рис. 8.1.

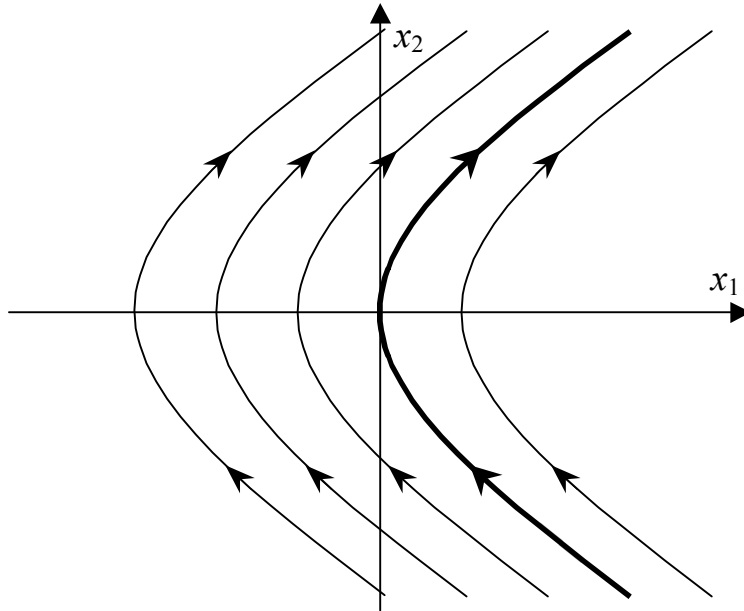


Рисунок 8.1 – Графік функції $x_1 = \frac{x_2^2}{2} + C_1^*$

Тепер нехай $u(t) = -1$.

Тоді замість (8.2) можемо записати

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -1. \end{cases} \quad (8.27)$$

Розділивши перше рівняння системи (8.27) на друге, отримаємо

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -x_2, \quad (8.28)$$

із якого маємо

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + C_1^*. \quad (8.29)$$

Задаючи C_1^* різні значення, як додатні, так і від'ємні, отримаємо мно-
жину парабол, показаних на рис. 8.2.

Дивлячись на графіки, що наведені на рис. 8.1 і на рис. 8.2, бачимо, що в початок координат $(0, 0)$ можна зайти, лише рухаючись по фазовій траєкторії, яка проходить через цю точку (на рис. 8.1 та на рис. 8.2 ці траєкторії позначені жирними лініями). Тож, якщо за рахунок початкових умов (8.7) динамічний об'єкт опинився на якійсь іншій фазовій траєкторії (див. рис. 8.3), його треба перевести переключенням на протилежне керування на фазову траєкторію, що йде в початок координат.

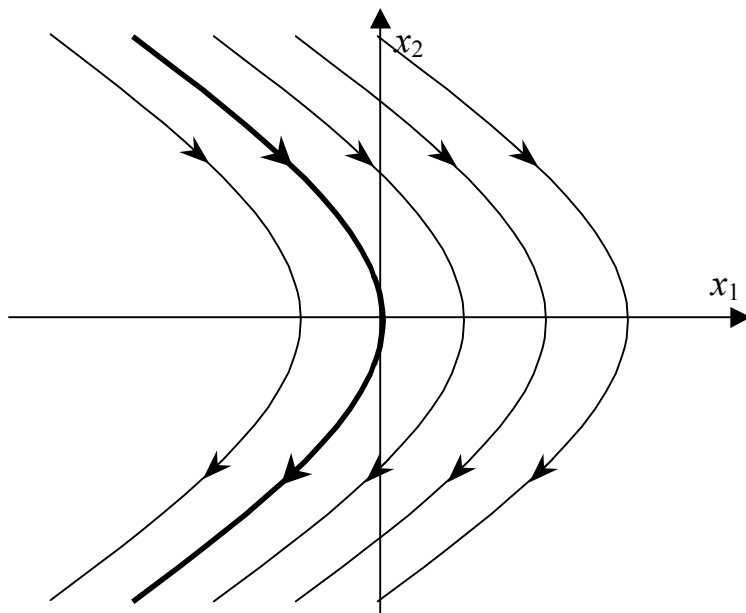


Рисунок 8.2 – Графік функції $x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + C_1^*$

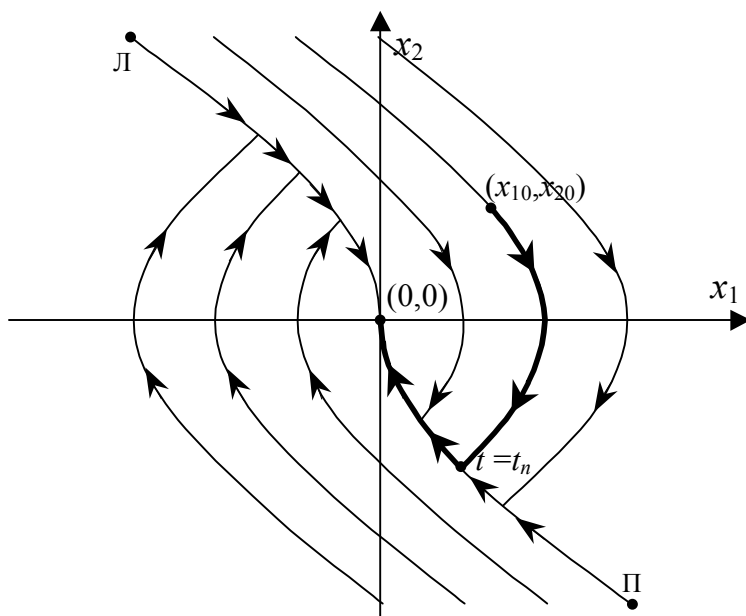


Рисунок 8.3 – Фазові траєкторії динамічного об'єкта (8.2) з переключенням керування з $u = -1$ на $u = +1$ в момент часу t_n

Зрозуміло, що якщо початкові умови (8.7) такі, що динамічний об'єкт одразу знаходиться на фазовій траєкторії, яка йде в початок координат, то переключати керування на протилежне не треба – саме під дією першого включення об'єкт і прийде у початок координат через час T .

Для поставленої задачі залишається нез'ясованим лише одне питання: «А як же знайти момент часу переключення t_n ?».

Формула (8.22) для цього непридатна, оскільки ми не знаємо значень констант C_1 і C_2 у невизначених множниках Лагранжа $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$.

Повернемося до системи рівнянь (8.27). Інтегруючи спочатку друге рівняння, а потім, з врахуванням цього результату, перше рівняння системи (8.27), матимемо:

$$\begin{cases} x_{2+1}(t) = -t + C_{1+1}, \\ x_{1+1}(t) = -\frac{t^2}{2} + C_{1+1} \cdot t + C_{2+1}. \end{cases} \quad (8.30)$$

Підставляючи початкові умови (8.7) у (8.30), матимемо:

$$\begin{cases} C_{1+1} = x_{2_0}, \\ C_{2+1} = x_{1_0}. \end{cases} \quad (8.31)$$

Із (8.30) і (8.31) маємо:

$$\begin{cases} x_{2+1}(t) = x_{2_0} - t, \\ x_{1+1}(t) = x_{1_0} + x_{2_0} \cdot t - \frac{t^2}{2}. \end{cases} \quad (8.32)$$

Із (8.32) для моменту часу $t = t_n$ знайдемо, що

$$\begin{cases} x_{2+1}(t_n) = x_{2_0} - t_n, \\ x_{1+1}(t_n) = x_{1_0} + x_{2_0} \cdot t_n - \frac{t_n^2}{2}. \end{cases} \quad (8.33)$$

Інтегруючи систему (8.23), знайдемо, що:

$$\begin{cases} x_{2-1}(\tau) = C_{1-1} + \tau, \\ x_{1-1}(\tau) = C_{2-1} + C_{1-1} \cdot \tau + \frac{\tau^2}{2}. \end{cases} \quad (8.34)$$

Фазові координати (8.34) задають траєкторію руху об'єкта від точки, в якій здійснено переключення керування з $u = -1$ на $u = +1$, до точки початку координат.

Зрозуміло, що початковими умовами в цьому випадку є $x_{2+1}(t_n)$, $x_{1+1}(t_n)$, які знаходяться з виразів (8.33).

Підставляючи в (8.34) $\tau = 0$ і $x_{1+1}(t_n)$, $x_{2+1}(t_n)$, знайдемо, що

$$\begin{cases} C_{1-1} = x_{2+1}(t_n), \\ C_{2-1} = x_{1+1}(t_n). \end{cases} \quad (8.35)$$

Після підстановки (8.35) у вигляді (8.33) в систему (8.34) матимемо:

$$\begin{cases} x_{2-1}(\tau) = x_{2_0} - t_n + \tau, \\ x_{1-1}(\tau) = x_{1_0} + x_{2_0} \cdot t_n - \frac{t_n^2}{2} + (x_{2_0} - t_n) \cdot \tau + \frac{\tau^2}{2}. \end{cases} \quad (8.36)$$

Визначимо T через τ_k і t_n . Зрозуміло, що

$$T = \tau_k + t_n, \quad (8.37)$$

де τ_k – час руху об'єкта від моменту переключення до початку координат.

Згідно з кінцевими умовами руху (8.8), з рівнянь (8.36) маємо:

$$\begin{cases} 0 = x_{2_0} - t_n + \tau_k, \\ 0 = x_{1_0} + x_{2_0} \cdot t_n - \frac{t_n^2}{2} + (x_{2_0} - t_n) \cdot \tau_k + \frac{\tau_k^2}{2}. \end{cases} \quad (8.38)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (8.38) відносно t_n і τ_k , знайдемо:

$$\tau_k = \sqrt{\frac{2x_{1_0} - x_{2_0}^2}{2}}, \quad (8.39)$$

$$t_n = x_{2_0} + \sqrt{\frac{2x_{1_0} - x_{2_0}^2}{2}}. \quad (8.40)$$

Таким чином, якщо необхідно перевести динамічний об'єкт (8.2) із точки (x_{1_0}, x_{2_0}) , яка знаходиться у першому квадранті фазової площини (рис. 8.3), у початок координат, необхідно в момент $t = 0$ подати на нього керування $u = -1$, а потім в момент t_n , який визначається за формулою (8.40), переключити керування на $u = +1$. В цьому випадку об'єкт через відрізок часу τ_k , відрахування якого ведеться від моменту часу t_n і значення якого можна знайти за формулою (8.39), приїде в точку початку координат. В сумі t_n і τ_k дадуть найкоротший час T , за який даний об'єкт можна перевести із початкової точки (x_{1_0}, x_{2_0}) в точку початку координат $(0, 0)$.

Зрозуміло, що за такою ж схемою здійснюватиметься рух динамічного об'єкта з будь-якої точки фазової площини (див. рис. 8.3), яка знаходиться вище лінії переключення ЛП.

Якщо ж початкова точка руху (x_{1_0}, x_{2_0}) об'єкта знаходиться нижче лінії переключення, то спочатку на об'єкт слід подавати керування $u = +1$, а в момент t_n переключати його на $u = -1$.

В цьому випадку формули для обчислення t_n і τ_k будуть дещо відрізнятися від (8.39) і (8.40), але їх легко отримати як самостійну вправу, здійснивши всі вищевикладені кроки, але змінивши порядок використання виразів (8.23) і (8.27).

8.2 Синтез оптимального керування динамічним об'єктом за допомогою принципу максимуму Понтрягіна

А тепер розв'яжемо ту ж саму задачу, яка поставлена в попередньому підрозділі, за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.

Модель динамічного об'єкта, яка оптимізується за критерієм швидкодії (8.9) будемо розглядати у вигляді (8.2), обмеження на керування $u(t)$ – у вигляді (8.4), початковий і кінцевий стани динамічного об'єкта – у вигляді (8.7), (8.8).

Розв'язувати задачу як ізопериметричну ми починали із формування функції Лагранжа у вигляді (8.10).

Тепер же ми сформуємо гамільтоніан $H(x, u, t, \psi)$.

Підставляючи (8.2) у (4.69), отримаємо:

$$H(x, u, t, \psi) = \psi^T f(x, u, t) = \psi_0(t) \cdot 1 + \psi_1(t) \cdot x_2 + \psi_2(t) \cdot u. \quad (8.41)$$

А підставляючи (8.41) у (4.77), матимемо:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_0} = 0 = -\frac{d\psi_0}{dt}, \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 = -\frac{d\psi_1}{dt}, \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1(t) = -\frac{d\psi_2}{dt}. \end{cases} \quad (8.42)$$

З першого рівняння системи (8.42) отримаємо

$$\psi_0 = -C_0. \quad (8.43)$$

Прийнято C_0 вибрати рівним одиниці, тобто

$$\psi_0 = -1. \quad (8.44)$$

З другого рівняння системи (8.42) маємо

$$\psi_1 = -C_1, \quad (8.45)$$

а з третього –

$$\psi_2(t) = C_2 - C_1 \cdot t. \quad (8.46)$$

Оскільки впливати на $H(x, u, t, \psi)$ ми можемо лише змінюючи керування $u(t)$, а воно, згідно з висновками підрозділу 4.4, є релейним, то максимум гамільтоніана досягається, згідно з виразами (4.89), (4.90), при

$$u = \text{sign } \psi_2(t) = \text{sign} [C_2 - C_1 \cdot t]. \quad (8.47)$$

Закон керування (8.47) збігається з (8.18), але його отримання виявилось значно простішим.

Але що стосується пошуків моменту переключення t_n керування з $u = -1$ до $u = +1$ (чи навпаки), то, як і в попередньому випадку, із закону керування (8.47) він знайденим безпосередньо бути не може.

Його треба знаходити з використанням координат початкової і кінцевої точок фазового простору та моделі об'єкта за тим же алгоритмом, який викладено в попередньому підрозділі.

А тепер продемонструємо, як оптимізувати за допомогою принципу максимуму Понтрягіна той же самий динамічний об'єкт, але не за критерієм швидкодії (8.9), а за критерієм мінімуму втрат енергії на керування, які в нормованому вигляді можна задати функціоналом

$$J = \int_0^T u^2 dt. \quad (8.48)$$

В цьому випадку гамільтоніан матиме вигляд

$$H(x, u, t, \psi) = \psi_0 \cdot u^2 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot u. \quad (8.49)$$

Оскільки гамільтоніан в цьому випадку є двічі диференційовною за u функцією, то її максимум можна знайти за стандартним алгоритмом, знаходячи частинну похідну від H за u , прирівнюючи її нулю та розв'язуючи отримане рівняння відносно u :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = 2\psi_0 \cdot u + \psi_2, \\ 2\psi_0 \cdot u + \psi_2 = 0, \\ u = -\frac{\psi_2}{2\psi_0}. \end{cases} \quad (8.50)$$

Рівняння для знаходження ψ_0, ψ_1, ψ_2 , зрозуміло, і в цьому випадку будуть мати той же вигляд (8.42), що і в попередньому, а тому, підставляючи (8.43) і (8.46) у третє рівняння системи (8.50), отримаємо

$$u(t) = \frac{1}{2C_0} \cdot (C_2 - C_1 \cdot t). \quad (8.51)$$

З виразу (8.51) випливає, що в цьому випадку об'єкт оптимізується за допомогою лінійного керування, а не релейного, як у попередньому.

8.3 Синтез оптимального керування динамічним об'єктом за допомогою динамічного програмування Беллмана

Нехай динамічний об'єкт описується моделлю

$$x' = -ax + bu \quad (8.52)$$

з початковими умовами

$$x(0) = x_0. \quad (8.53)$$

Необхідно за допомогою динамічного програмування знайти керування $u(t)$, яке цей динамічний об'єкт за час T переводить із початкового стану $x(0)$ у кінцевий стан $x(T)$ за умови, що на відрізку часу $t \in [0, T]$ функціонал

$$J = \int_0^T (C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot u^2) dt \quad (8.54)$$

досягає мінімального значення. Це керування позначимо $u^{onm}(t)$.

Для знаходження $u^{onm}(t)$ необхідно розв'язати рівняння Беллмана (4.151) конкретизоване до умов сформульованої задачі.

В нашому випадку:

$$F(x(u, t), u, t) = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot u^2, \quad (8.55)$$

$$\left(\frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^T = \frac{\partial J^{onm}}{\partial x}, \quad (8.56)$$

$$f(x, u, t) = -ax + bu. \quad (8.57)$$

Підставляючи (8.55), (8.56), (8.57) у (4.151), отримаємо:

$$-\frac{\partial J^{onm}}{\partial t} = \min_{\substack{u(t) \\ t \in [0, T]}} \left[C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot u^2 + \frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \cdot (-ax + bu) \right]. \quad (8.58)$$

На керування $u(t)$ ми не накладали обмеження і до того ж функція, яка стоїть в квадратних дужках у виразі (8.58), є двічі диференційованою за u , тому її мінімум можна шукати за стандартною процедурою мінімізації функції однієї змінної – беручи похідну від неї за u , прирівнюючи цю похідну до нуля і розв'язуючи рівняння, що отримали, відносно u , тобто за алгоритмом:

$$\frac{d[\bullet]}{du} = 2C_2 \cdot u + \frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \cdot b, \quad (8.59)$$

$$2C_2 \cdot u + \frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \cdot b = 0, \quad (8.60)$$

$$u^{onm} = -\frac{b}{2C_2} \cdot \frac{\partial J^{onm}}{\partial x}. \quad (8.61)$$

Підставляючи (8.61) у (8.58), отримаємо аналог рівняння (4.152) для нашої задачі, а саме –

$$\begin{aligned} -\frac{\partial J^{onm}}{\partial t} = & \left[C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot \left(-\frac{b}{2C_2} \cdot \frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \cdot \left(-ax - \frac{b^2}{2C_2} \cdot \frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (8.62)$$

або

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^{onm}}{\partial t} + \frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \cdot \left(-ax - \frac{b^2}{2C_2} \cdot \frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right) + \\ + \left[C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot \left(-\frac{b}{2C_2} \cdot \frac{\partial J^{onm}}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.63)$$

З рівняння Беллмана ми отримали рівняння в частинних похідних (8.63) відносно функції $J^{onm}(x, t)$.

Класичний метод розв'язання цього класу рівнянь базується на розділенні незалежних змінних, тобто його розв'язок шукається у вигляді

$$J^{onm}(x, t) = p(t) \cdot r(x). \quad (8.64)$$

В зв'язку з тим, що оптимальне керування (8.61) залежить від $J^{omn}(x, t)$, доцільно і його шукати у вигляді добутку двох функцій, кожна із яких залежить лише від однієї змінної (x або t), аналогічному (8.64).

Оскільки у (8.61) функція $J^{omn}(x, t)$ диференціюється за x , то для того, щоб u^{omn} залежало від x , у виразі (8.64) функцію $r(x)$ необхідно брати принаймні хоча б у вигляді x^2 . Тобто прийемо, що

$$J^{omn}(x, t) = p(t) \cdot x^2. \quad (8.65)$$

Для (8.65) матимемо

$$\frac{\partial J^{omn}}{\partial x} = 2p(t) \cdot x, \quad (8.66)$$

$$\frac{\partial J^{omn}}{\partial t} = \frac{dp}{dt} \cdot x^2. \quad (8.67)$$

Підставляючи (8.66), (8.67) у (8.63), отримаємо:

$$\frac{dp}{dt} \cdot x^2 + 2xp \cdot \left(-ax - \frac{b^2}{C_2} \cdot xp \right) + \left[C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot \left(-\frac{b}{C_2} \cdot xp \right)^2 \right] = 0 \quad (8.68)$$

або

$$\left(\frac{dp}{dt} - 2ap - \frac{b^2}{C_2} \cdot p^2 + C_1 \right) \cdot x^2 = 0. \quad (8.69)$$

Рівняння (8.69) задовольняється або за умови

$$x \equiv 0, \quad (8.70)$$

або, якщо $x \neq 0$, за умови

$$\frac{dp}{dt} - 2ap - \frac{b^2}{C_2} \cdot p^2 + C_1 = 0. \quad (8.71)$$

Тривіальний розв'язок (8.70) для динамічного об'єкта у стані спокою нас не цікавить. Оскільки ми шукаємо керування, яке переводить динамічний об'єкт зі стану $x(0)$ у стан $x(T)$, то головною умовою знаходження u^{omn} є існування розв'язку рівняння (8.71), яке є рівнянням Ріккати для нашої задачі, загальний вигляд якого наведено у виразах (4.174), (4.176).

Граничною умовою для рівняння (8.71), що впливає із (4.152*), яка для нашої задачі має вигляд

$$\lim_{t \rightarrow T} J^{omn}(x, t) = \lim_{t \rightarrow T} p(t) \cdot x^2 = 0, \quad (8.72)$$

буде

$$p(T) = 0. \quad (8.73)$$

Для розв'язання рівняння (8.71) спочатку приведемо його до вигляду

$$\frac{dp}{\frac{b^2}{C_2} \cdot p^2 + 2ap - C_1} = dt \quad (8.74)$$

або

$$\frac{dp}{\frac{b^2}{C_2} \cdot \left(p^2 + \frac{2aC_2}{b^2} \cdot p - \frac{C_1C_2}{b^2} \right)} = dt, \quad (8.75)$$

або

$$\frac{dp}{\frac{b^2}{C_2} \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2)} = dt, \quad (8.76)$$

де p_1, p_2 – корені рівняння

$$p^2 + \frac{2aC_2}{b^2} \cdot p - \frac{C_1C_2}{b^2} = 0. \quad (8.77)$$

Конкретизуючи a, b, C_1, C_2 , знаходимо корені p_1, p_2 . Потім інтегруємо рівняння (8.76) за допомогою методу невизначених коефіцієнтів (чи скориставшись таблицею невизначених інтегралів, котрі наводяться в усіх довідниках з вищої математики) і знаходимо функцію $p(t)$.

Підставляючи знайдену функцію $p(t)$ у (8.66), а результат у (8.61), отримаємо

$$u^{omn}(t) = -\frac{b}{C_2} \cdot p(t) \cdot x. \quad (8.78)$$

Вираз (8.78) і задає оптимальне керування $u^{omn}(t)$ динамічним об'єктом (8.52), за допомогою якого цей динамічний об'єкт переводиться зі стану $x(0)$ у стан $x(T)$ за мінімуму функціонала (8.54).

РОЗДІЛ 9 ПРИКЛАДИ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДА РІТЦА ТА ЙОГО МОДИФІКАЦІЙ

В останньому розділі навчального посібника ми покажемо як розв'язувати задачі оптимізації конкретних динамічних об'єктів у гільбертовому просторі за допомогою метода Рітца та його модифікацій, у тому числі і запропонованих авторами цього посібника.

9.1 Приклад оптимізації динамічного об'єкта методом Рітца

Нехай динамічний об'єкт описується моделлю

$$x' + 2x + 1 = 0 \quad (9.1)$$

з початковою умовою

$$x(0) = 0. \quad (9.2)$$

Необхідно знайти таку функцію $x(t)$, яка на відрізку $t \in [0, 1]$ доставляє максимум функціоналу

$$J = \int_0^1 (x')^2 dt \quad (9.3)$$

за умов, що

$$\int_0^1 x dt = 1, \quad (9.4)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (9.5)$$

Згідно з методом Рітца, екстремаль функціонала (9.3) будемо шукати у вигляді, який задається виразом (5.182) при $n = 3$, тобто у вигляді

$$x(t) = \sum_{k=0}^3 C_k \cdot \varphi_k(t). \quad (9.6)$$

Виберемо як функції $\varphi_k(t)$, $k = \overline{0, 3}$ поліноми Лежандра $P_k(t)$, які для $k = \overline{0, 3}$ матимуть вигляд:

$$\begin{cases} P_0(t) = 1, \\ P_1(t) = t, \\ P_2(t) = \frac{3}{2} \cdot t^2 - \frac{3}{2}, \\ P_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^3 - \frac{3}{2} \cdot t. \end{cases} \quad (9.7)$$

Підставляючи (9.7) у (9.6), отримуємо:

$$x(t) = C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t^2 - \frac{3}{2} \right) + C_3 \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot t^3 - \frac{3}{2} \cdot t \right). \quad (9.8)$$

Таким чином, задача оптимізації зводиться до пошуку таких значень коефіцієнтів C_0, C_1, C_2, C_3 в функції (9.8), які б задовольняли умови, визначені виразами (9.1) – (9.5).

Використовуючи граничні умови (9.5), отримаємо:

$$\begin{cases} C_0 - \frac{3}{2}C_2 = 0, \\ C_0 + C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2} \right) + C_3 \left(\frac{5}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 1 \right) = 0 \end{cases} \quad (9.9)$$

або

$$\begin{cases} C_0 = \frac{3}{2}C_2, \\ C_0 + C_1 + C_3 = 0. \end{cases} \quad (9.10)$$

Підставляючи перше рівняння системи (9.10) в друге, отримаємо

$$\frac{3}{2}C_2 + C_1 + C_3 = 0. \quad (9.11)$$

З (9.11) випливає –

$$C_1 = -\frac{3}{2}C_2 - C_3. \quad (9.12)$$

Підставляючи перше рівняння системи (9.10) і рівняння (9.12) у (9.8), отримаємо –

$$x(t) = \frac{3}{2}C_2 + \left(-\frac{3}{2}C_2 - C_3 \right) \cdot t + C_2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t^2 - \frac{3}{2} \right) + C_3 \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot t^3 - \frac{3}{2} \cdot t \right) \quad (9.13)$$

або

$$x(t) = C_2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t^2 - \frac{3}{2} \cdot t \right) + C_3 \left(\frac{5}{2} \cdot t^3 - \frac{5}{2} \cdot t \right). \quad (9.14)$$

Легко пересвідчитись, що початкова умова (9.2) для (9.14) виконується. А тепер підставимо (9.14) у (9.4). Отримаємо –

$$\begin{aligned} \int_0^1 x dt &= \int_0^1 \left[C_2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t^2 - \frac{3}{2} \cdot t \right) + C_3 \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot t^3 - \frac{5}{2} \cdot t \right) \right] dt = \\ &= C_2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{3}{2} \cdot t^2 - \frac{3}{2} \cdot t \right) dt + C_3 \cdot \int_0^1 \left(\frac{5}{2} \cdot t^3 - \frac{5}{2} \cdot t \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t^3 - \frac{3}{4} \cdot t^2 \right) \Big|_0^1 + C_3 \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot t^4 - \frac{5}{4} \cdot t^2 \right) \Big|_0^1 = \\
&= -\frac{C_2}{4} - \frac{5}{8} \cdot C_3 = 1.
\end{aligned} \tag{9.15}$$

З виразу (9.15) маємо –

$$C_2 = -4 \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot C_3 + 1 \right). \tag{9.16}$$

Підставляючи (9.16) у (9.14), отримаємо:

$$x(t) = -4 \cdot \left(\frac{5}{8} C_3 + 1 \right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t^2 - \frac{3}{2} \cdot t \right) + C_3 \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot t^3 - \frac{5}{2} \cdot t \right) \tag{9.17}$$

або

$$x(t) = C_3 \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot t^3 - \frac{15}{4} \cdot t^2 + \frac{5}{4} \cdot t \right) - 6 \cdot t^2 + 6 \cdot t. \tag{9.18}$$

Рівняння (9.1) можна переписати у вигляді

$$x' = -2x + 1. \tag{9.19}$$

Підставляючи (9.18) у (9.19), отримаємо

$$x' = -2C_3 \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot t^3 - \frac{15}{4} \cdot t^2 + \frac{5}{4} \cdot t \right) - 12 \cdot t^2 + 12 \cdot t + 1. \tag{9.20}$$

Підносячи до квадрата (9.20), підставляючи цей квадрат у критеріальний функціонал (9.3), беручи інтеграл від степеневих функцій і підставляючи границі, отримаємо

$$J(C_3) = 26,5 \cdot C_3^2 + 8,8. \tag{9.21}$$

Знайдемо похідну від $J(C_3)$ і прирівняємо її нулю. Отримаємо рівняння

$$53 \cdot C_3 = 0, \tag{9.22}$$

звідки

$$C_3 = 0. \tag{9.23}$$

Підставляючи (9.23) у (9.16), знайдемо, що

$$C_2 = -4. \tag{9.24}$$

Підставляючи (9.23) і (9.24) у (9.12), знайдемо, що

$$C_1 = 6. \tag{9.25}$$

Підставляючи (9.24) в перше рівняння системи (9.10), знайдемо, що

$$C_0 = -6. \quad (9.26)$$

Підставляючи значення C_0 , C_1 , C_2 , C_3 із (9.26), (9.25), (9.24) і (9.23) у (9.8), отримаємо –

$$x(t) = -6 + 6 \cdot t - 4 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t^2 - \frac{3}{2} \right) \quad (9.27)$$

або

$$x(t) = 6 \cdot t - 6 \cdot t^2. \quad (9.28)$$

Функція $x(t)$, яка задається виразом (9.28), і є екстремаллю функціонала (9.3).

Легко пересвідчитись, що ця функція задовольняє як початкову умову (9.2), так і граничні умови (9.5).

Перевіримо, чи дійсно вона доставляє максимум, а не мінімум функціоналу (9.3).

Двічі диференціюючи $x(t)$, отримаємо:

$$x'' = -12, \quad (9.29)$$

що підтверджує факт того, що функція $x(t)$, яку ми знайшли, дійсно доставляє функціоналу (9.3) саме максимум.

9.2 Оптимізація транспортних електроприводів з моментами навантаження, залежними від дорожніх умов

У множині динамічних об'єктів дуже важливим є клас транспортних електроприводів, моменти навантаження яких є функціями від конфігурації дороги. Це, перш за все, електроприводи трамваїв, тролейбусів та залізничних електровозів.

Моменти навантаження електродвигунів цих електроприводів є різними на спусках і на підйомах доріг порівняно з їх рівнинними ділянками. Змінюються ці моменти і на поворотах, і на закругленнях порівняно з прямими перегонами дороги. Навіть для електропривода з електродвигуном незалежного збудження у цьому випадку закони оптимального керування будуть суттєво відрізнятись від тих, які ми отримали в шостому розділі для випадків сталого моменту навантаження або залежного від часу чи швидкості. І, перш за все, ця відмінність диктується тим, що в разі, якщо

$$\begin{cases} \mu = \mu(s), \\ v = \frac{ds}{d\tau}, \end{cases} \quad (9.30)$$

де s – відносний шлях, то рівняння динаміки електропривода (6.15), (6.69)

чи (6.96) перетворюється на рівняння

$$i = \frac{d^2 s}{d\tau^2} + \mu(s), \quad (9.31)$$

а критеріальний функціонал (6.21), (6.70) чи (6.97) – на критеріальний функціонал

$$e = \int_0^{\tau^*} (s'' + \mu(s))^2 d\tau. \quad (9.32)$$

В зв'язку з появою другої похідної в рівнянні динаміки (9.31) ускладнюються і граничні умови. Тепер маємо:

– при $\tau = 0$ –

$$\begin{cases} s(0) = s_0, \\ s'(0) = s'_0; \end{cases} \quad (9.33)$$

– при $\tau = \tau^*$ –

$$\begin{cases} s(\tau^*) = s_{\tau^*}, \\ s'(\tau^*) = s'_{\tau^*}. \end{cases} \quad (9.34)$$

В цьому випадку екстремаль необхідно шукати уже не із рівняння Ейлера (2.22), а із рівняння Ейлера–Пуассона (2.103), яке для нашої підінтегральної функції (9.32)

$$F = (s'' + \mu(s))^2 \quad (9.35)$$

матиме вигляд

$$F_s - \frac{d}{d\tau} F_{s'} + \frac{d^2}{d\tau^2} F_{s''} = 0, \quad (9.36)$$

або, після підстановки (9.35) у (9.36), –

$$s^{IV} + \frac{d\mu}{ds} \cdot s'' + \frac{d^2\mu}{ds^2} \cdot (s')^2 + \mu \cdot \frac{d\mu}{ds} = 0. \quad (9.37)$$

Рівняння (9.37) є нелінійним диференціальним рівнянням 4-го порядку відносно s і не може бути проінтегрованим у загальному випадку.

Найпростіше знаходити його розв'язок методом Рітца, методологію застосування якого викладено в підрозділі 5.5, а приклад використання – в попередньому підрозділі 9.1.

Але перш ніж застосовувати метод Рітца для мінімізації функціонала (9.32) в умовах дії обмеження (9.31) та граничних умов (9.33), (9.34), необхідно спочатку конкретизувати функцію $\mu(s)$ в умові (9.30).

Потім необхідно вибрати систему ортонормованих поліномів $\varphi_k(\tau)$, наприклад, як у підрозділі 9.1, поліномів Чебишова, і задати шукану екстремаль $s(\tau)$ у вигляді (5.182), тобто

$$s(\tau) = \sum_{k=0}^n C_k \cdot \varphi_k(\tau). \quad (9.38)$$

Оскільки для функції $s(\tau)$ задано чотири граничних умови (9.33), (9.34), то поліном $s(\tau)$ у (9.38) повинен бути як мінімум 6-го порядку, чотири коефіцієнти якого C_0, C_1, C_2 і C_3 знаходяться як функції коефіцієнтів C_4, C_5, C_6 – $C_0 = f_0(C_4, C_5, C_6)$, $C_1 = f_1(C_4, C_5, C_6)$, $C_2 = f_2(C_4, C_5, C_6)$, $C_3 = f_3(C_4, C_5, C_6)$, тобто із чотирьох рівнянь, що формуються із (9.38) після підстановки в це співвідношення граничних умов (9.33) і (9.34).

Ще один коефіцієнт – C_4 в функції коефіцієнтів C_5, C_6 , тобто $C_4 = f_4(C_5, C_6)$, знаходиться після підстановки $s(\tau)$, в якому C_0, C_1, C_2, C_3 виражені через C_4, C_5, C_6 , в рівняння (9.37), куди також підставляється конкретизована функція $\mu(s)$.

Ще один коефіцієнт – C_5 в функції коефіцієнта C_6 , тобто $C_5 = f_5(C_6)$ знаходиться із рівняння, яке отримаємо після підстановки $s(\tau)$, в якому C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 виражені через C_5, C_6 , в функціонал (9.32) і взяття інтеграла в ньому.

А останній коефіцієнт C_6 знаходиться із умови екстремуму

$$\frac{\partial s(\tau)}{\partial C_6} = 0. \quad (9.39)$$

уже як цілком конкретне число C_6^* .

Підставляючи C_6^* в $f_5(C_6)$, знайдемо числове значення C_5^* . Підставляючи C_5^*, C_6^* в $f_4(C_5, C_6)$, знайдемо числове значення C_4^* . А підставляючи C_4^*, C_5^*, C_6^* в $f_0(C_4, C_5, C_6)$, $f_1(C_4, C_5, C_6)$, $f_2(C_4, C_5, C_6)$, $f_3(C_4, C_5, C_6)$, знайдемо числові значення C_0^*, C_1^*, C_2^* і C_3^* коефіцієнтів C_0, C_1, C_2, C_3 .

Підставляючи знайдені $C_0^*, C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_5^*, C_6^*$ в (9.38), отримаємо функцію $s(\tau)$, яка є екстремаллю функціонала (9.32) і задовольняє всі умови поставленої задачі.

Але за допомогою цього красивого алгоритму, що рекламується багатьма дослідниками транспортних динамічних об'єктів, на жаль, задачу оптимізації конкретних транспортних електроприводів, у загальному випадку, розв'язати не вдається.

По-перше, тому, що непростою задачею виявляється відображення функцією $\mu(s)$ рельєфу місцевості, по якій прокладена залізнична колія, а $s(\tau)$ взагалі є функцією часу, в якій рельєф відкрито не проглядається, і до того ж сама ця функція залежно від її структури і масштабу часу набуває різних форм.

По-друге, тому, що не шлях $s(\tau)$ задає одну із компонент закону оптимального керування електроприводом. Цією компонентою є швидкість

$$v(\tau) = \frac{ds}{d\tau}, \quad (9.40)$$

яка є похідною від знайденої функції $s(\tau)$, точність отримання якої внаслідок високої чутливості операції диференціювання до похибок завдання функції, що диференціюється, досягти непросто.

А оскільки другою компонентою закону оптимального керування електроприводом є функція $i(\tau)$, яка знаходиться підстановкою знайдених з похибкою $\mu(s)$ і ще з більшою похибкою $s''(\tau)$ в рівняння (9.31), то стверджувати, що ця функція $i(\tau)$ задає струм якоря електродвигуна електропривода, котрий забезпечує рух електричного транспортного засобу по колії, прокладеній в даній місцевості, з мінімумом втрат електричної енергії в якорях тягових електродвигунів, достатньо проблематично.

Авторами навчального посібника запропоновано інші алгоритми розв'язання цієї оптимізаційної транспортної задачі і їй подібних, які викладені в наступних підрозділах цього розділу.

9.3 Синтез математичних моделей оптимального руху завантажених багатомасових колійних електричних транспортних засобів на прямолінійному відрізку колії, прокладеної на горизонтальній площині

У попередньому підрозділі 9.2 вказано, чому відомі алгоритми оптимізації руху електричних транспортних засобів з моментом навантаження, що залежить від рельєфу місцевості, на якій прокладена залізнична колія, навіть на основі метода Рітца не можуть бути застосовані для розв'язання конкретних практичних задач.

Авторами цього навчального посібника в ряді наукових статей, наведених в списку використаної літератури, запропоновано підхід до моделювання таких транспортних засобів, придатний для розв'язання практичних задач оптимізації їх руху. Суть цього підходу полягає в декомпозиції задачі оптимізації руху вздовж усієї траєкторії на сукупність підзадач оптимізації руху на відрізках, обмежених точками зміни рельєфу місцевості, в яких накладені умови гладкості як для траєкторії руху транспортного засобу, так і для кривої, яка є графіком швидкості руху цією траєкторією.

Як розв'язувати кожну із підзадач після декомпозиції задачі оптимізації покажемо на прикладі розв'язання підзадачі оптимізації руху транспортного засобу з електричною тягою на прямолінійному відрізку NB залізничної колії, прокладеному на горизонтальній площині, за критерієм мінімуму витрат електроенергії E у ват-секундах ($Bm \cdot c$) електровозом, на електропривод якого подається з контактної мережі напруга $U(t)$ у вольтах (B), що створює струм $I(t)$ в амперах (A) в кожній із n паралельних якірних гілок цього електропривода, тобто за критерієм мінімуму виразу

$$E = \int_{t_A}^{t_B} U(t)nI(t)dt. \quad (9.41)$$

Як перше обмеження будемо розглядати математичну модель динаміки руху електричного транспортного засобу у вигляді

$$m \frac{dV(t)}{dt} = F_T(t) - F_G(V, t), \quad (9.42)$$

де m – його загальна маса в кілограмах ($кг$), $V(t)$ – лінійна швидкість руху, яка є функцією часу, в метрах за секунду ($м/с$), $F_T(t)$ – сила тяги електровоза в ньютонках (H), а $F_G(V, t)$ – гальмівна сила, теж в ньютонках, яку, як показано в наукових роботах авторів цього навчального посібника, наведених у списку використаної літератури, можна подати у вигляді

$$F_G(V, t) = \mu_0 + \mu_1 V(t) + \mu_2 (V(t))^2. \quad (9.43)$$

А як друге обмеження розглядатимемо програму руху транспортного засобу від точки A до точки B в метрах ($м$) у вигляді

$$l_{NB} = \int_{t_N}^{t_B} V(t)dt, \quad (9.44)$$

де t_N, t_B – моменти часу в секундах ($с$), в які хвостовий вагон і електровоз транспортного засобу досягають відповідно точок N і B .

Цілком очевидно, що доповнити ці обмеження потрібно ще й граничними умовами, тобто співвідношеннями:

$$V(N) = V_N, \quad (9.45)$$

$$\frac{dV}{dt}(N) = V'_N, \quad (9.46)$$

$$V(B) = V_B, \quad (9.47)$$

$$\frac{dV}{dt}(B) = V'_B, \quad (9.48)$$

в яких V_N, V_B, V'_N, V'_B – задані числові значення швидкості (m/c) і прискорення (m/c^2) в граничних точках.

Для того, щоб результати оптимізації руху електричного транспортно-го засобу можна було узагальнити на електричний транспортний засіб будь-якої маси, доцільно при розв'язанні цієї задачі використовувати відносні величини, які формуватимемо діленням розмірної величини на базову.

Як базову величину для струму I в амперах, що споживається якорями двигунів електропривода, виберемо сумарний номінальний струм I_σ тих n якірних гілок цього електропривода, які включені паралельно під напругу контактної мережі, тобто

$$I_\sigma = nI_n. \quad (9.49)$$

Для напруги U контактної електромережі як базову величину U_σ виберемо номінальну напругу U_n мережі в вольтах.

Для тягової сили F_T як базову величину F_σ виберемо номінальну тягову силу F_T^H в ньютонках, яка створюється номінальними струмами якорів тягових двигунів електропривода.

Для лінійної швидкості V електричного транспортного засобу як базову величину V_σ виберемо номінальну лінійну швидкість V_n в метрах за секунду, яка створюється номінальною тяговою силою.

Як базову величину t_σ для часу t виберемо механічну сталу T_M електричного транспортного засобу в секундах, формула визначення якої випливає з рівняння (9.42) і має вигляд

$$T_M = \frac{mV_n}{F_T^H}, \quad (9.50)$$

звідки базове значення для сили тяги можна записати у вигляді

$$F_\sigma = F_T^H = \frac{mV_n}{T_M}. \quad (9.51)$$

Як базову величину для енергії E виберемо величину E_σ у вольт-ампер-секундах, яка визначається з виразу

$$E_\sigma = U_\sigma I_\sigma t_\sigma = U_n n I_n T_M. \quad (9.52)$$

Для подання критеріального рівняння (9.41) у відносних величинах розділимо обидві його частини на E_σ з врахуванням (9.42). Отримаємо

$$\frac{E}{E_{\sigma}} = \int_{\frac{t_N}{T_M}}^{\frac{t_B}{T_M}} \frac{U}{U_H} \frac{nI}{nI_H} \frac{dt}{T_M} \quad (9.53)$$

або

$$e = \int_{\tau_N}^{\tau_B} i d\tau, \quad (9.54)$$

де

$$e = \frac{E}{E_{\sigma}}, \quad i = \frac{I}{I_H}, \quad \tau = \frac{t}{T_M}, \quad (9.55)$$

– відповідно енергія, струм і час у відносних одиницях, а відношення

$$\frac{U}{U_H} = 1, \quad (9.56)$$

завдяки якому критеріальне співвідношення (9.41), записане у формі (9.54), обумовлене припущенням, що контактна електромережа електричного транспортного засобу є настільки потужною, що приєднання до неї системи електропривода цього транспортного засобу не викликає спаду напруги в ній, або вплив системи електропривода цього транспортного засобу на контактну мережу нівелюється компенсаційною системою.

Для подання у відносній формі рівняння динаміки електричного транспортного засобу (9.42) розділимо обидві його частини на F_{σ} з врахуванням (9.43). Отримаємо

$$\frac{dv}{d\tau} = f_T - f_{\Gamma}, \quad (9.57)$$

де

$$v = \frac{V}{V_H}, \quad f_T = \frac{F_T}{F_T^H}, \quad f_{\Gamma} = \frac{F_{\Gamma}}{F_T^H} \quad (9.58)$$

– відповідно лінійна швидкість руху електричного транспортного засобу, його сила тяги та гальмівна сила у відносних одиницях.

Для подання у відносній формі граничних умов відносно швидкостей руху розділимо обидві частини рівнянь (9.45), (9.47) на V_{σ} , яке дорівнює V_H . Отримаємо

$$v(N) = v_N, \quad (9.59)$$

$$v(B) = v_B. \quad (9.60)$$

Для подання у відносній формі граничних умов відносно прискорень розділимо обидві частини рівнянь (9.46), (9.48) на відношення $\frac{V_n}{T_M}$. Отримаємо

$$\frac{dv}{d\tau}(N) = v'_N, \quad (9.61)$$

$$\frac{dv}{d\tau}(B) = v'_B, \quad (9.62)$$

де

$$v'_N = \frac{V'_N T_M}{V_n}, \quad (9.63)$$

$$v'_B = \frac{V'_B T_M}{V_n}. \quad (9.64)$$

Тепер повернемося до виразів (9.57), (9.58).

Як відомо, в електроприводах колійних електричних транспортних засобів використовуються електродвигуни постійного струму з послідовним збудженням, обертальний момент M_O в яких є пропорційним добутку струму якоря I та магнітному потоку $\Phi(I)$, що є функцією від цього струму, оскільки магнітний потік створюється саме цим струмом в полюсах індуктора, тобто

$$M_O = k_M I \Phi(I), \quad (9.65)$$

де k_M – коефіцієнт, що залежить від конструктивних параметрів електродвигуна і є паспортною величиною.

Якщо R – це радіус колеса електричного транспортного засобу, то його сила тяги матиме вигляд

$$F_T = \frac{nM_O}{R} = \frac{k_M}{R} nI \Phi(I) = k_F nI \Phi(I). \quad (9.66)$$

Цілком очевидно, що, виходячи з виразу (9.66), базове значення сили тяги можна записати у вигляді

$$F_{\sigma} = F_T^n = k_F n I_n \Phi(I_n). \quad (9.67)$$

Із виразів (9.58), (9.66) і (9.67) маємо

$$f_T = i\varphi(i), \quad (9.68)$$

де відносний магнітний потік φ визначається із кривої намагнічування за співвідношенням

$$\varphi(i) = \frac{\Phi(I)}{\Phi(I_H)}. \quad (9.69)$$

А з виразів (9.43), (9.51), (9.58) гальмівну силу у відносній формі отримаємо у вигляді

$$f_T = f_0 + f_1 v + f_2 v^2, \quad (9.70)$$

де

$$f_0 = \frac{\mu_0}{F_T^H}, \quad f_1 = \frac{\mu_1 T_M}{m}, \quad f_2 = \frac{\mu_2 T_M V_H}{m}. \quad (9.71)$$

Підставляючи вирази (9.68) і (9.70) в (9.57), отримаємо

$$\frac{dv}{d\tau} = i\varphi(i) - f_0 - f_1 v - f_2 v^2. \quad (9.72)$$

Залишилось перетворити у відносні одиниці лише програму руху електричного транспортного засобу по відрізку колії NB . Для цього розділимо обидві частини рівняння (9.44) на добуток $V_H \cdot T_M$. В результаті отримаємо

$$s_{NB} = \int_{\tau_N}^{\tau_B} v d\tau, \quad (9.73)$$

де

$$s_{NB} = \frac{l_{NB}}{V_H T_M} \quad (9.74)$$

– відносна довжина відрізка колії від точки N до точки B .

З використанням відносних величин наша підзадача оптимізації набуває такого формулювання: знайти оптимальні за критерієм мінімуму витрат відносної енергії (9.54) закони зміни у відносному часі τ для відносної лінійної швидкості руху v електричного транспортного засобу та відносного струму i якірних кіл його тягового електропривода на відносному прямолінійному горизонтальному відрізку колії s_{NB} , по якому цей транспортний засіб, динаміка якого описується у відносних величинах моделлю (9.72) з відносними граничними умовами (9.59) – (9.62), рухається за програмою (9.73).

У підрозділі 7.2 сьомого розділу цього навчального посібника показано, що крива намагнічування $\Phi(I)$ тягового електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням найбільш точно і просто у відносних одиницях подається моделлю (7.28).

Для випадку повної завантаженості електричного транспортного засобу, який розглядається у цьому підрозділі, з моделі (7.28) в подальшому

будемо використовувати лише лінійний відрізок, тобто задаватимемо $\phi(i)$ у вигляді

$$\phi(i) = a_1 + b_1 i. \quad (9.75)$$

Перейдемо безпосередньо до розв'язання задачі оптимізації, тобто до синтезу математичних моделей для $i(\tau)$, $v(\tau)$.

Виходячи з наведеної у частині першій нашого навчального посібника методології оптимізації та співвідношень (9.54), (9.72), (9.73), функція Лагранжа для даної задачі матиме вигляд

$$L = i + \lambda_0 (s' - v) + \lambda_1 (v' - i\phi(i) + f_0 + f_1 v + f_2 v^2), \quad (9.76)$$

а рівняння Ейлера –

$$L_i - \frac{d}{d\tau} L_{i'} = 0, \quad (9.77)$$

$$L_s - \frac{d}{d\tau} L_{s'} = 0, \quad (9.78)$$

$$L_v - \frac{d}{d\tau} L_{v'} = 0. \quad (9.79)$$

Підставляючи функцію Лагранжа (9.76) в рівняння (9.77) – (9.79) і знаходячи відповідні частинні похідні та виконуючи диференціювання за відносним часом, матимемо:

$$1 - \lambda_1 \left(\phi(i) + i \frac{d\phi}{di} \right) = 0, \quad (9.80)$$

$$-\frac{d\lambda_0}{d\tau} = 0, \quad (9.81)$$

$$-\lambda_0 + \lambda_1 (f_1 + 2f_2 v) - \frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0. \quad (9.82)$$

Із рівняння (9.81) знайдемо, що

$$\lambda_0 = -C_0. \quad (9.83)$$

Підставляючи значення множника Лагранжа λ_0 із (9.83) у рівняння (9.82), зведемо це рівняння до вигляду

$$\frac{d\lambda_1}{C_0 + \lambda_1 (f_1 + 2f_2 v)} = d\tau. \quad (9.84)$$

Інтегруючи рівняння (9.84), матимемо

$$\frac{1}{f_1 + 2f_2v} \ln(C_0 + \lambda_1(f_1 + 2f_2v)) = \tau + C_1 \quad (9.85)$$

або

$$\lambda_1 = \frac{1}{f_1 + 2f_2v} \left(e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)} - C_0 \right). \quad (9.86)$$

Підставляючи значення λ_1 із виразу (9.86) в рівняння (9.80), отримаємо

$$\varphi(i) + i \frac{d\varphi}{di} = \frac{f_1 + 2f_2v}{e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)} - C_0}. \quad (9.87)$$

А підстановка значення $\varphi(i)$ з виразу (9.75) у (9.87) приводить до співвідношення

$$a_1 + 2b_1i = \frac{f_1 + 2f_2v}{e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)} - C_0}, \quad (9.88)$$

з якого

$$i = \frac{1}{2b_1} \left(\frac{f_1 + 2f_2v}{e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)} - C_0} - a_1 \right). \quad (9.89)$$

У виразі (9.89) a_1, b_1, f_1, f_2 попередньо визначені коефіцієнти, а C_0, C_1 – невідомі параметри математичної моделі оптимального струму, які визначатимуться в процесі подальшого розв'язання задачі оптимізації. Із цього виразу впливає також, що оптимальний струм якірних кіл електропривода транспортного засобу трансцендентно залежить від лінійної швидкості його руху, тож тепер перейдемо до побудови математичної моделі для неї.

У одній із наукових робіт авторів цього навчального посібника, наведеній в списку використаної літератури, для побудови оптимальних законів руху динамічних об'єктів з моментом навантаженням, що залежить від їхньої лінійної швидкості, пропонується використовувати ортогональні системи функцій з орієнтацією на системи ортогональних поліномів типу Лагерра –

$$L_k(\tau) = \frac{1}{k!} e^\tau \frac{d^k}{d\tau^k} (\tau^k e^{-\tau}) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!i!} \tau^i, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (9.90)$$

тобто пропонується задавати лінійну швидкість v електричного транспортного засобу на часовому відрізку – в даному випадку $[\tau_N, \tau_B]$, за який транспортний засіб долає відрізок шляху – у даному випадку NB , у вигляді

$$v(\tau) = \sum_{k=0}^n g_k L_k(\tau), \quad (9.91)$$

де

$$g_k = \int_{\tau_N}^{\tau_B} v(\tau) L_k(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (9.92)$$

Оскільки функція $v(\tau)$ є невідомою, то коефіцієнти g_k , які називають коефіцієнтами Фур'є цієї функції, у виразі (9.91) в задачі оптимізації потрібно знаходити не з виразу (9.92), а з системи рівнянь, складеної відносно них як невідомих величин. Її складання розпочнемо з відповіді на питання, що це за рівняння, і скільки їх у системі повинно бути.

Спочатку встановимо, скільки рівнянь повинно бути в системі визначення коефіцієнтів Фур'є для виразу (9.91). Очевидно, що рівнянь у системі повинно бути стільки, скільки коефіцієнтів для виразу (9.91) потрібно визначити. Але потрібно не забувати, що є ще два невідомі коефіцієнти C_0, C_1 , поява яких обумовлена розв'язанням задачі оптимізації з використанням рівнянь Ейлера. Тож крім рівнянь, в яких як невідомі величини виступають коефіцієнти Фур'є g_k функції $v(\tau)$, необхідно мати ще два рівняння додатково, в яких як невідомі виступають ще й коефіцієнти C_0, C_1 .

Оскільки електричні транспортні засоби мають значну масу, то можна стверджувати, що їх лінійна швидкість $v(\tau)$ не може змінюватись у часі стрибкоподібно, а є гладкою функцією, тобто є функцією неперервною з неперервною першою похідною. Це дає право використовувати в математичній моделі лінійної швидкості (9.91) лише кілька ортогональних поліномів Лагерра, перші п'ять з яких згідно з виразом (9.90) мають вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(\tau) = 1, \\ L_1(\tau) = 1 - \tau, \\ L_2(\tau) = 1 - 2\tau + \frac{\tau^2}{2}, \\ L_3(\tau) = 1 - 3\tau + \frac{3}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3, \\ L_4(\tau) = 1 - 4\tau + 3\tau^2 - \frac{2}{3}\tau^3 + \frac{1}{24}\tau^4, \end{array} \right. \quad (9.93)$$

яким відповідають п'ять коефіцієнтів Фур'є – g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 . Для їх визначення потрібно мати систему з 5 рівнянь, в яких вони виступатимуть невідомими.

І ці шукані 5 рівнянь знаходяться дуже просто – підстановкою виразу (9.93) в рівняння граничних умов (9.59) – (9.62) та рівняння програми руху (9.73), в результаті чого матимемо:

$$v_N = \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N), \quad (9.94)$$

$$v_B = \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B), \quad (9.95)$$

$$v'_N = \sum_{k=0}^4 g_k L'_k(\tau_N), \quad (9.96)$$

$$v'_B = \sum_{k=0}^4 g_k L'_k(\tau_B), \quad (9.97)$$

$$s_{NB} = \int_{\tau_N}^{\tau_B} \left(\sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau) \right) d\tau. \quad (9.98)$$

Вирази (9.94) – (9.98) – це система п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими, яка легко розв'язується, наприклад, методом Гаусса, тож до наступного етапу розв'язання поставленої задачі переходимо, вже маючи математичну модель лінійної швидкості у вигляді (9.91), в яку підставляємо отримані в результаті розв'язання системи рівнянь (9.94) – (9.98) числові значення коефіцієнтів Фур'є, множину яких позначимо

$$\{g_0^*, g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*\}. \quad (9.99)$$

Тепер перейдемо до заключного етапу розв'язання задачі оптимізації – визначення числових значень коефіцієнтів C_0, C_1 , для чого необхідно мати два рівняння, в яких ці коефіцієнти виступатимуть як невідомі. Ці рівняння сконструюємо, використовуючи вирази (9.72), (9.75), (9.89), (9.91), (9.61) і (9.62), в результаті чого отримаємо :

$$\frac{1}{4b_1} \left(\frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N)}{e^{(\tau_N+C_1)} \left(f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) \right) - C_0} - a_1 \right)^2 + \frac{a_1}{2b_1} \cdot \left(\frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N)}{e^{(\tau_N+C_1)} \left(f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) \right) - C_0} - a_1 \right) - f_0 -$$

$$-f_1 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) - f_2 \left(\sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) \right)^2 - v'_N = 0, \quad (9.100)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4b_1} \left(\frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B)}{e^{(\tau_B+C_1) \left(f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) \right) - C_0}} - a_1 \right)^2 + \\ & + \frac{a_1}{2b_1} \left(\frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B)}{e^{(\tau_B+C_1) \left(f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) \right) - C_0}} - a_1 \right) - f_0 - \\ & - f_1 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) - f_2 \left(\sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) \right)^2 - v'_B = 0 \end{aligned} \quad (9.101)$$

– систему двох рівнянь з двома невідомими C_0, C_1 , розв'язуючи яку одним із стандартних методів послідовних наближень, знайдемо множину числових значень цих невідомих

$$\{C_0^*, C_1^*\}. \quad (9.102)$$

Підставляючи множини (9.99) та (9.102) у вирази (9.91) і (9.89), отримаємо оптимальні математичні моделі для $v(\tau), i(\tau)$.

Завершимо викладення цього матеріалу ми зауваженням, що в разі, коли множина граничних умов буде меншою за рахунок фіксації лише граничних значень швидкості, або в разі обмеження допустимого значення швидкості на маршруті, розглянута задача розв'язуватиметься уже за іншими модифікаціями методу Рітца, котрі матимуть відмінності і від тієї модифікації, що використана у підрозділі 9.1, і від тієї модифікації, що використана у підрозділі 9.2, і від тієї модифікації, що використана у даному підрозділі. З цими модифікаціями можна ознайомитись у наукових роботах авторів даного навчального посібника, присвячених розв'язанню задач оптимізації розглянутого класу динамічних об'єктів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андреев В. П. Основы электропривода / В. П. Андреев, Ю. А. Сабинин. – Москва : Госэнергоиздат, 1963. – 772 с.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Беллман Р. – Москва : Наука, 1976. – 351 с.
3. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – Москва : Мир, 1972. – 544 с.
4. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – Москва : Наука, 1967. – 608 с.
5. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – Москва : изд-во МГУ, 1974. – 374 с.
6. Вольдек А. И. Электрические машины : учебник для студентов высш. техн. учебн. заведений / Вольдек А. И. – 3-е изд., перераб. – Ленинград : Энергия, 1978. – 832 с.
7. Директор С. Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер. – Москва : Мир, 1974. – 464 с.
8. Квакернак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернак, Р. Сиван. – Москва : Мир, 1977. – 650 с.
9. Кузин Л. Т. Основы кибернетики : в 2 т. / Кузин Л. Т. – Москва : Энергия, 1973. – Т.1 : Математические основы кибернетики. – 1973. – 502 с.
10. Макаров И. М. Дополнительные главы математического анализа / Макаров И. М. – Москва : Просвещение, 1968. – 288 с.
11. Мокин Б. И. Математические модели квазиоптимального движения электропривода трамвая с учетом ограничений на скорость, ускорение и рывок / Б. И. Мокин, А. Б. Мокин // Тематический вып. сбор. науч. трудов Днепродзержинского государственного техн. ун-та: «Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика». – 2007. – С. 388-390.
12. Мокін Б. І. Ідентифікація параметрів моделей та оптимізація режимів системи електропривода трамвая з тяговими електродвигунами постійного струму : монографія / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 92 с.
13. Мокін Б. І. Квазіоптимальний закон зміни кутової швидкості обертання вала ротора електродвигуна постійного струму послідовного збудження системи електропривода трамвая в режимі сталого навантаження / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2007. – № 2. – С. 29–33.
14. Мокін Б. І. Математичні моделі в задачі оптимізації електропривода трамвая в номінальному режимі та в режимі перевантаження за критері-

єм мінімуму витрат електроенергії / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Матеріали міжнародної науково-технічної конференції “Електромеханічні системи, методи моделювання та оптимізації” (м. Кременчук). Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук : КДПУ, 2008. – Випуск 3/2008 (50) частина 1. – С. 142–144.

15. Мокін Б. І. Математичні моделі руху транспортних засобів, оптимальні за критерієм мінімуму витрат енергії, з урахуванням рельєфу / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2007. – № 3. – С. 28–33.

16. Мокін Б. І. Математичні моделі руху транспортних засобів, оптимальні за критерієм мінімуму витрат енергії, з урахуванням рельєфу / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2007. – № 3. – С. 28–33.

17. Мокін Б. І. Мінімізація витрат електроенергії електроприводом трамвая при його сталому недовантаженні / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків : НТУ «ХПІ». – 2008. – № 30. – С. 483–485.

18. Мокін Б. І. Модифікація квазіоптимального закону зміни кутової швидкості обертання вала ротора електродвигуна постійного струму послідовного збудження системи електропривода трамвая в режимі сталого навантаження / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2007. – № 3. – С. 46–49.

19. Мокін Б. І. Оптимізація електроприводів : навчальний посібник / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : УНІВЕРСУМ, 2004. – 250 с.

20. Мокін Б. І. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів. Частина 1. Ідентифікація електромеханічних процесів в лінійних детермінованих системах з зосередженими параметрами : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін. – Вінниця : «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1998. – 153 с.

21. Мокін О. Б. Адаптація математичного методу обробки даних в задачі моделювання оптимального руху електричного транспортного засобу до умов обмеження на швидкість / О. Б. Мокін // Реєстрація, зберігання та обробка даних. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 62–70.

22. Мокін О. Б. Відносні моделі руху електричного транспортного засобу по горизонтальному прямолінійному відрізьку колії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 2. – С. 20–24.

23. Мокін О. Б. Метод визначення структури математичної моделі електричного транспортного засобу з різнопрофільними вагонами, що руха-

ються прямолінійною горизонтальною колією / О. Б. Мокін // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2010. – № 2. – С. 24–29.

24. Мокін О. Б. Оптимізація режиму руху завантаженого електричного транспортного засобу на прямолінійному відрізку колії, прокладеній на горизонтальній площині / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Кременчуцького державного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук : КДПУ, 2010. – № 3/2010 (62), частина 2. – С. 162–165.

25. Мокін О. Б. Оптимізація режиму руху порожнього електричного транспортного засобу на прямолінійному горизонтальному відрізку колії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків : НТУ «ХПІ». – 2010. – №28. – С. 266–269.

26. Мокін О. Б. Оптимізація руху порожнього електричного транспортного засобу по прямолінійній горизонтальній колії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 3. – С. 28–33.

27. Мокін О. Б. Оптимізація руху порожнього електричного транспортного засобу на спусках і підйомах / О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 6. – С. 58–62.

28. Мокін О. Б. Особливості моделювання руху електричних транспортних засобів з врахуванням залежності навантаження від рельєфу місцевості [Електронний ресурс] / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Наукові праці ВНТУ. – 2010. – №1. – С. 1–6. – Режим доступу до журн.: www.nbuuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2010_1/2010-1.files/uk/10abmlor_ua.pdf.

29. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Петров Ю. П. – Москва – Ленинград : Энергия, 1965. – 220 с.

30. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа / Соболев В. И. – Москва : Наука, 1968. – 288 с.

31. Степанюк В. В. Методи математичного програмування / Степанюк В. В. – Київ : Вища школа, 1984. – 272 с.

32. Сю Д. Современная теория автоматического управления и ее применение / Д. Сю, А. Мейер. – Москва : Машиностроение, 1972. – 544 с.

33. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математики / Фильчаков П. Ф. – Киев : Наукова думка, 1974. – 743 с.

34. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Цлаф Л. Я. – Москва : Наука, 1966. – 176 с.

35. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Эльсгольц Л. Э. – Москва : Наука, 1965. – 424 с.

36. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Янг Л. – Москва : Мир, 1974. – 488 с.

УКРАЇНСЬКО-АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК ОСНОВНИХ ТЕРМІНІВ

- абсолютний екстремум – absolute extremum
банаховий простір – Banach space
варіаційне числення – calculus of variations
варіація – variation
відносний екстремум – relative extremum
гільбертовий простір – Hilbert space
динамічна система – dynamic system
динамічне програмування – dynamic programming
задача Майєра – Mayer problem
закон управління – control law
ізопериметрична задача – isoperimetric problem
критерій – criterion
локальний екстремум – local extremum
метод Рітца – Ritz method
методика Грама–Шмідта – Gram-Schmidt procedure
невизначені множники Лагранжа – Lagrange multipliers
оптимізація – optimization
задача Калмана – Kalman problem
ортогональні поліноми – orthogonal polynomials
ортонормовані послідовності – orthonormal sequences
принцип максимуму – maximum principle
рівняння Ейлера – Euler's equation
умови Лежандра – Legendre condition
умови трансверсальності – transversality conditions
умовний екстремум – conditional extremum
функціонал – functional
функція – function
характеристика намагнічування – magnetization characteristic

Навчальне видання

Мокін Борис Іванович
Мокін Олександр Борисович

**ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.
МЕТОДОЛОГІЯ ТА ПРАКТИКА
ОПТИМІЗАЦІЇ**

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено О. Мокіним

Підписано до друку _____
Формат 29.7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. _____
Наклад 300 (1-й запуск 1-100) прим. Зам. № 2013-_____

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.