В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник

Вища математика з Maple підтримкою. Теорія рядів

ч. 1

ЧИСЛОВІ РЯДИ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник

Вища математика з Maple підтримкою
Теорія рядів
Частина 1
ЧИСЛОВІ РЯДИ

Електронний навчальний посібник
комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2023

УДК 517
М69

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 26.10.2023 р.)

Рецензенти:
С. М. Бак, доктор фізико-математичних наук, професор
В. А. Лужецький, доктор технічних наук, професор
В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор

Михалевич, В. М.
М69 Вища математика з Maple підтримкою. Теорія рядів. Ч. 1. Числові ряди : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник. – Вінниця : ВНТУ, 2023. – 111 с.

У першій частині навчального посібника розглянуто поняття числового ряду, ознаки його збіжності, властивості. Крім теоретичних відомостей, що відповідають навчальній програмі з курсу вищої математики, розглянуто велику кількість прикладів з докладним поясненням способів їх розв’язання як традиційними методами, так і з використанням системи комп’ютерної математики Maple і, в першу чергу, авторських навчальних Maple-тренажерів. У кінці кожної теми наводяться завдання для самостійної роботи. Посібник може бути використаний для проведення практичних та лекційних занять з вищої математики, зокрема, з використанням Maple, а також для самостійного вивчення та застосування можливостей цього пакета при розв’язанні задач теорії числових рядів.

Посібник розрахований на студентів технічних, економічних та ін. спеціальностей і може бути корисним аспірантам, докторантам та викладачам.

УДК 517

ЗМІСТ

Тема 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ РЯДІВ

1.1 Поняття збіжності та суми числового ряду

Нехай задано числову послідовність $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, загальний член якої a_n є відомою функцією натурального аргументу. Складемо з членів цієї послідовності вираз $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, що формально можемо назвати *сумою нескінченної кількості доданків*. Поняття «*сума*» пов'язане тільки зі скінченним числом доданків. В той же час в математиці є безліч задач, в яких виникає потреба додавання нескінченної множини доданків.

Отже, маємо домовитися, як будемо називати вираз, що містить нескінченну кількість доданків, і, головне, що саме будемо розуміти під цим виразом.

Означення 1.1 Вираз

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.1)$$

називається *числовим рядом (рядом)*. Числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$називають *членами ряду*: a_1 – 1*-й член ряду,* a_2 – 2*-й член ряду,...,* a_n – n*-й член* або *загальний член ряду*.

Числовий ряд можна задати двома способами:

1) *за допомогою формули* n*-го члена*.

Наприклад, формула $a_n = \frac{1}{2^n}$ задає ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$

Тут $a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$; $a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ і т. д.

2) *рекурентно*, при цьому задають k перших членів ряду й формулу, що виражає (для всіх $n \geq 1$) a_{n+k} через k попередніх членів (найчастіше $k = 1$ або $k = 2$).

Стандартним прикладом такого задання є послідовність Фібоначчі. *Послідовність Фібоначчі* – це така послідовність чисел, де кожен наступний член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх членів. Саме тому перші два члени задаються окремо, а n*-й* член ряду задається рекурентно, тобто з посиланням на попередні члени послідовності.

Наприклад, рекурентна формула $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, якщо $n \geq 1$, задає числовий ряд 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + …, членами якого є числа Фібоначчі.

Сам по собі вираз (1.1) ніякого певного числового значення не має, оскільки дія додавання за своїм безпосереднім змістом пов'язана тільки зі скінченим числом доданків. Це значення має бути приписане нами.

Тому, введемо позначення:

$$S_1 = a_1;$$
$$S_2 = a_1 + a_2;$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n; \tag{1.2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Числа $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$ називаються *частинними сумами* ряду, S_n називається n-ою *частинною сумою ряду* (1.1). Компактно n-*у* частинну суму ряду можна записати так: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Це сума перших n членів ряду.

Зауважимо, що частинні суми $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$, в свою чергу, утворюють числові послідовності, проте значно складнішої конструкції.

Розглянемо границю послідовності частинних сум $\{S_n\}$ при $n \to \infty$, при цьому сума скінченного числа членів перейде в суму нескінченного числа членів, тобто перейде у вираз (1.1).

Означення 1.2 (суми ряду). Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ має скінченну границю $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то ряд (1.1) називається *збіжним*, а число S називається його сумою. Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не має границі або вона нескінченна, то ряд називається *розбіжним*. В останньому випадку кажуть, що ряд суми не має.

Приклад. Дослідити на збіжність та знайти суму ряду $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Розв'язування. Запишемо послідовність частинних сум

$$S_1 = 1,\ \ S_2 = 0,\ \ S_3 = 1,\ \ S_4 = 0, \ldots, S_{2n-1} = 1,\ \ S_{2n} = 0, \ldots$$

Ці частинні суми по черзі приймають лише два значення 1 і 0 та $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не існує, тому даний ряд розбіжний.

Геометричний ряд

Розглянемо важливий числовий ряд, який називається *геометричним рядом*, оскільки утворений з членів геометричної прогресії

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \qquad (a \neq 0). \qquad (1.3)$$

Тут a – перший член, q – знаменник прогресії.

Розглянемо n-*у* частинну суму ряду. Можливі такі випадки:

а) $|q| \neq 1$, тоді $S_n = a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ (формула суми n перших членів геометричної прогресії);

б) $q = 1$, тоді $S_n = a + a + a + \ldots + a = na$;

в) $q = -1$, тоді $S_n = \begin{cases} a, & \textit{якщо} \quad n \quad \textit{непарне}, \\ 0, & \textit{якщо} \quad n \quad \textit{парне}. \end{cases}$

Дослідимо на збіжність геометричний ряд:

а)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{1-q} - a \cdot \frac{q^n}{1-q}\right] = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \textit{якщо} \quad |q| < 1 \quad - \quad \textit{ряд} \quad \textit{збігається}, \\ \pm\infty, & \textit{якщо} \quad |q| > 1 \quad - \quad \textit{ряд} \quad \textit{розбігається}; \end{cases}$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot n = a \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty -$ *ряд розбігається*;

в) у цьому випадку послідовність $\{S_n\}$ не має ніякої границі, тобто ряд розбігається.

Отже, геометричний ряд (1.3) збіжний при $|q| < 1$ і розбіжний при $|q| \geq 1$, тобто,

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \textit{якщо} \quad |q| < 1 \quad - \quad \textit{ряд} \quad \textit{збігається}, \\ \pm\infty, & \textit{якщо} \quad |q| > 1 \quad - \quad \textit{ряд} \quad \textit{розбігається}. \end{cases}$$

За допомогою геометричного ряду легко розв’язується відома задача про прудконогого Ахіллеса, що доганяє черепаху.

Парадокс про Ахіллеса і черепаху

Розглянемо сучасний варіант парадоксу, запропонованого давньогрецьким філософом Зеноном Елейським: «*Швидконогий Ахіллес ніколи не зможе наздогнати черепаху, якщо перед початком руху черепаха буде знаходитись попереду на деякій відстані від Ахіллеса*».

Припустимо, що Ахіллес бігає у десять разів швидше за черепаху і перебуває на віддалі в 1000 метрів від черепахи. Нехай Ахіллес та черепаха одночасно починають рухатися в одному й тому самому напрямку. Тоді, за той час, за який Ахіллес пробіжить ці 1000 метрів, черепаха переміститься на 100 метрів далі. За проміжок часу, впродовж якого Ахіллес долатиме ці 100 метрів, черепаха проповзе ще 10 метрів. Після кожного такого кроку відстань між Ахіллесом і черепахою буде зменшуватися, але на будь-якому кроці черепаха залишатиметься попереду Ахіллесу (рис. 1.1). В той же час, з практичного досвіду нам відомо, що Ахіллес в такій ситуації обов'язково наздожене черепаху. Парадокс полягає в тому, що нескінченна кількість кроків здійснюється за скінчений проміжок часу.

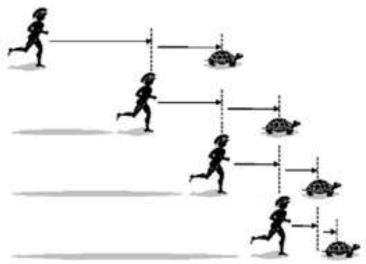


Рисунок 1.1 – Чи наздожене Ахіллес черепаху?

І цей парадокс легко розв'язується. Якщо складемо ряд, кожний член якого дорівнює довжині шляху, що долає Ахіллес на кожному кроці, отримаємо геометричний ряд

$$10^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}} + \ldots\right) = \left[S = \frac{a}{1-q},\ a = 10^3,\ q = \frac{1}{10}\right] =$$

$$= \frac{10^3}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10^4}{9} = 1111,(1).$$

Отже, Ахіллес наздожене черепаху, пробігши $1111,(1)$ метра. Цей самий результат ми дістанемо, якщо розв'язуватиме цю задачу з використанням відомої залежності: відстань дорівнює добутку швидкості пересування на час руху.

Вище ми дослідили на збіжність геометричний ряд, користуючись безпосередньо означенням збіжності та формулою для n-ої частинної суми ряду. При цьому ми не тільки отримали відповідь про умови збіжності ряду, а й знайшли формулу для суми ряду. Однак такий шлях незручний, оскільки це пов'язано зі знаходженням $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, що в багатьох випадках є непростою задачею. До того ж часто потрібно встановлювати тільки сам факт збіжності чи розбіжності ряду, а не обчислювати суму ряду.

Розглянемо схему наближеного обчислення суми збіжного числового ряду.

Означення 1.3 Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то різниця між його сумою S та частинною сумою S_n буде

$$R_n = S - S_n \tag{1.4}$$

Ця різниця називається n-*м залишком ряду*. Важливо, що залишок ряду сам по собі є нескінченним рядом

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

Залишок і є та похибка, що виникає, якщо за наближене значення суми ряду S взяти суму S_n перших n членів цього ряду.

Оскільки S є границя послідовності $\{S_n\}$, то, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Отже, абсолютний залишок $|R_n|$ може бути як завгодно малим, якщо тільки число n взяте достатньо великим.

Наприклад, сума геометричного ряду (1.3), у якого $a = 1$, $q = \dfrac{1}{2}$, дорівнює $S = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$. Тоді частинні суми та залишки будуть:

$$S_1 = a_1 = 1; \qquad R_1 = S - S_1 = 1;$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5; \qquad R_2 = S_2 - S_1 = 0,5;$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,75; \qquad R_3 = 0,25;$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1,875; \qquad R_4 = 0,125;$$

……………………………………………………………………

$$S_8 = 1.9921875; \qquad R_8 = 0.0078125.$$

……………………………………………………………………

Отже, завжди є можливість наближено обчислити суму збіжного ряду з потрібною точністю, взявши достатньо велике число перших його членів. При цьому з’являється проблема з’ясування величин похибки, що виникає. На окремих прикладах побачимо, як іноді можна оцінити величину похибки і тим самим установити, скільки потрібно брати членів ряду, щоб отримати його суму з потрібною точністю.

Звідси зрозуміло, що першою основною задачею теорії рядів є дослідження збіжності ряду. Знаходження суми збіжного ряду має другорядне значення, оскільки після того, як з’ясовано збіжність ряду, наближена сума його в більшості випадків легко може бути знайдена.

Поняття ряду фактично впроваджено для узагальнення дії додавання на випадок нескінченного числа доданків. Однак не всі властивості дії додавання справедливі для будь-яких збіжних рядів.

1.2 Основні властивості числових рядів

Розглянемо деякі елементарні властивості збіжних рядів.

Нехай дано два збіжних ряди:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.5}$$

з сумою S та

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{1.6}$$

з сумою T.

Властивість 1. Ряд, утворений з добутків усіх членів ряду (1.5) на одне й те саме число c

$$c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \ldots + c \cdot a_n + \ldots, \tag{1.7}$$

також збігається, і сума його дорівнює $c \cdot S$.

Доведення. Позначимо часткові суми рядів (1.5) та (1.7) відповідно через S_n та S'_n. Тоді $S'_n = c \cdot S_n$. Отже, сума ряду (1.7) дорівнює

$$S' = \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty}(c \cdot S_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S .$$

Властивість доведено.

Властивість 2. Ряд, утворений додаванням відповідних членів рядів (1.5) та (1.6),

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

Збігається, і його сума дорівнює $S + T$.

Доведення цієї властивості також дуже просте і спирається на теорему про границю суми.

Властивість 3. Відкидання скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність.

Доведення. Нехай S_n – часткова сума ряду (1.5), C_k – сума відкинутих членів, тобто $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = C_k$, причому $k < n$.

Тоді

$$S_n = C_k + T_{n-k},$$

де

$$T_{n-k} = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(C_k + T_{n-k}) = \lim_{n\to\infty} C_k + \lim_{n\to\infty} T_{n-k} = C_k + \lim_{n\to\infty} T_{n-k},$$

звідки одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} T_{n-k} = S - C_k = d.$$

Отже, ряд $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n + \ldots$ збігається.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ також розбіжний.

1.3 Необхідна ознака збіжності ряду

Теорема 1.1 (необхідна ознака збіжності ряду). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його загальний член прямує до нуля при нескінченному зростанні n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (1.8)$$

Доведення. Нехай числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Це означає (за означенням), що виконуватиметься рівність $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, але тоді має місце і така рівність $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, де $S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$.

Проте $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Що і треба було довести.

Наслідок (достатня ознака розбіжності ряду). Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}+1}{2^n} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \ldots + \frac{2^{n-1}+1}{2^n} + \ldots$$

Розв'язування. Використаємо необхідну ознаку збіжності

$$a_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^n};\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n-1}+1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отже, заданий ряд розбіжний.

Зрозуміло, якщо необхідна ознака збіжності ряду не виконується, відповідь на питання про збіжність ряду отримано, тобто робимо висновок, що ряд розбігається. Якщо ж необхідна ознака збіжності ряду виконується, то питання про збіжність ряду залишається відкритим. Так, наприклад, необхідна ознака збіжності виконується як для *гармонічного ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, так і для ряду обернених квадратів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Однак за допомогою іншої ознаки збіжності (буде з'ясовано далі), виявляється, що гармонічний ряд, на відміну від ряду обернених квадратів, буде розбіжним.

1.3.1 Додаткові приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{2n-3}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності рядів

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{2n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}} = \frac{5}{2} \neq 0 \cdot$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0,$ то заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+2n+5}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності рядів

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5n^2+2n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{5} \neq 0 \cdot$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^2+2}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}} = \left|\frac{1}{0}\right| = \infty \neq 0.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\left(\frac{n}{3}\right)\cdot 3} = \left(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}}_{\text{визначна границя}}\right)^3 = e^3 \neq 0.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n^2\sin\frac{1}{n^2}\right) = \begin{bmatrix} \sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2} \\ \text{при} \quad n\to\infty \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 1 \neq 0 \cdot$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot tg\,\frac{n}{n^2+1}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot tg\,\frac{n}{n^2+1}\right) = \begin{bmatrix} \alpha = \frac{n}{\left(n^2+1\right)} \to 0 \\ \text{при} \quad n\to\infty; \;\; tg\alpha \sim \alpha \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{n}{n^2+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-3}\right)^n$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{n}}{2-\frac{3}{n}}\right)^n = \left|\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}\right| = +\infty \neq 0.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n}{n+1}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності рядів

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}\neq 0.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 arctg\frac{n}{n^3+1}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot arctg\frac{n}{n^3+1}\right)=\begin{bmatrix} arctg\frac{n}{n^3+1}\sim\frac{n}{n^3+1} \\ при\ n\to\infty \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}=1\neq 0.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\begin{bmatrix} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n} \\ при\ n\to\infty \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1\neq 0.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2+n-1}{n^2+1}}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної ознаки збіжності

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2+n-1}{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1}=1\neq 0.$$

Необхідна ознака не виконується. Отже, ряд розбігається.

Завдання для самоконтролю

Символом * позначені питання підвищеної складності.

1. Що називається числовим рядом? Що називається загальним членом ряду?

2. Що називається сумою ряду? Дати означення збіжного та розбіжного рядів. Навести приклади.

3*. Чому умову $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n)$ не можна прийняти за означення збіжності ряду? (*Відповідь. Залишок ряду R_n сам є рядом і говорити про його прямування до нуля можна тільки після того, як ми домовимся про означення збіжності ряду*.)

4. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності ряду. Наведіть приклади, які показують, що ця ознака не є достатньою.

5. Вкажіть найпростішу достатню ознаку розбіжності ряду.

6*. Чи можна змінити збіжність числового ряду відкиданням скінченного числа його членів? (*Відповідь. Не можна* – збіжність ряду залишиться тією самою.)

7*. Чи змінюється сума збіжного ряду при відкиданні скінченного числа доданків? (*Відповідь. Сума числового ряду зменшиться на суму відкинутих членів*.)

8*. Чи можна з розбіжного ряду відкиданням скінченного числа його членів отримати збіжний ряд? (*Відповідь. Не можна*.)

9. Знайти суму ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Відповідь: а) $S=1$; б) $S=\dfrac{1}{3}$; в) $S=\dfrac{1}{2}$; г) $S=\dfrac{1}{4}$.

10. Перевірити чи виконується необхідна умова збіжності для рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\pi}{n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{arctgn}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n\pi)}{2\pi}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+5}{3n-2}\right)^n$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$;

Відповідь: а), д), е), ж), к) не виконується (ряд розбіжний);
б), в), г), и) виконується.

Тема 2 ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Ми з'ясували, що необхідної ознаки не достатньо для того, щоб робити висновок про збіжність ряду у тих випадках, коли ця ознака виконується. В цій темі розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності знакододатних рядів: інтегральну ознаку Коші, .ознаки порівняння, ознаку Д'Аламбера, радикальну ознаку Коші.

Означення. Якщо члени ряду є додатними числами, то такий ряд називається знакододатним $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \geq 0$.

2.1 Інтегральна ознака Коші

Ця ознака базується на дослідженні збіжності числового ряду за допомогою невласного інтеграла.

Теорема (інтегральна ознака Коші). Якщо $f(x)$ – неперервна, монотонно спадна і додатна при $x \geq 1$ функція, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n = f(n)$, тобто, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$:

а) збігається, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, тобто, якщо він дорівнює деякій скінченній величині;

б) розбігається, якщо невласний інтеграл розбігається, тобто, $\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

Доведення. Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лінією $y = f(x)$, з основою від $x = 1$ до $x = n$ (рис. 2.1). Площа її вимірюється інтегралом

$$I_n = \int_1^n f(x)dx.$$

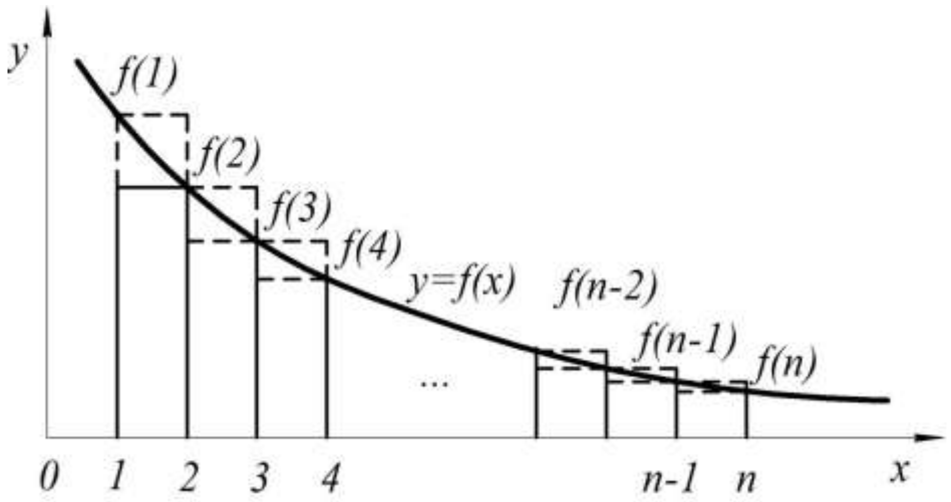


Рисунок 2.1 – Інтегральна ознака Коші

Позначимо цілі точки основи: $x=1, x=2, \ldots, x=n-1, x=n$ і розглянемо дві ступінчасті фігури. Одна з них (вписана) має площу, що дорівнює $f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=S_n-a_1$, а друга (описана) має площу, що дорівнює $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)=S_n-a_n$, де, як і раніше, $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Площа першої фігури менша за площу криволінійної трапеції, площа другої – більша, тобто маємо

$$S_n-a_1<I_n<S_n-a_n$$

Звідси отримуємо дві нерівності:

$$S_n<I_n+a_1, \tag{2.1}$$

$$S_n>I_n+a_n. \tag{2.2}$$

Оскільки функція $f(x)$ додатна, то інтеграл I_n зростає разом з n. При цьому можливі два випадки:

1) невласний інтеграл збігається, тобто $I=\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ існує, тоді $I_n<I$ і в нерівності (2.1) при будь-якому n знаходимо $S_n<I+a_1$.

Отже, послідовність частинних сум обмежена, а для ряду з додатними членами ця послідовність є і монотонно зростаюча, тому має границю. Таким чином ряд збігається;

2) інтеграл не збігається, тоді $I_n\to\infty$ при $n\to\infty$, і на підставі нерівності (2.2) робимо висновок, що S_n також нескінченно зростає, тобто, ряд розбіжний. Теорему доведено.

Зауваження. Замість $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ можна розглядати $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, де $a \geq 1$.

На практиці функцію $f(x)$ одержуємо, замінюючи у виразі загального члена ряду a_n дискретну змінну n на неперервну змінну x, причому нижня межа a дорівнює початковому значенню n для заданого ряду.

Наприклад, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Тоді $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$, $a = 2$ і будемо розглядати невласний інтеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$.

2.1.1 Додаткові приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність *узагальнений гармонічний ряд* (*ряд Діріхле*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots.$$

Розв'язання. З'ясуємо, за яких значень параметра p ряд Діріхле збігається.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

Ця функція задовольняє усі умови інтегральної ознаки Коші, тобто вона приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[1;+\infty)$, причому $a_n = f(n)$. Дослідимо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b, \quad \text{при } p=1,\\ \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^b, \quad \text{при } 0<p<1,\\ \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{(1-p)x^{p-1}}\Big|_1^b, \quad \text{при } p>1 \end{array}\right\}=$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{b\to\infty}\ln b=\infty, & \text{при } p=1,\\ \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{b^{1-p}}{1-p}-\dfrac{1}{1-p}=\infty, & \text{при } 0<p<1,\\ \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{(1-p)b^{p-1}}-\dfrac{1}{1-p}=\dfrac{1}{p-1}, & \text{при } p>1. \end{array}\right.$$

Звідси робимо висновок, що ряд Діріхле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\Rightarrow\begin{cases}\text{збіжний при } p>1,\\ \text{розбіжний при } p\le 1.\end{cases}$$

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n^2}}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

Розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{x}{2^{x^2}}$, що приймає додатні значення, неперервно і монотонно спадає на інтервалі $[1;+\infty)$, причому $f(n)=a_n$.

Дослідимо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{2^{x^2}}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{xdx}{2^{x^2}}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}x\cdot 2^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}2^{-x^2}d\left(-x^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\frac{2^{-x^2}}{\ln 2}\Bigg|_1^A=-\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2^{A^2}\ln 2}-\frac{1}{2\ln 2}\right)=\frac{1}{4\ln 2}.$$

Оскільки цей невласний інтеграл збігається, то заданий ряд також збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, що приймає додатні значення, неперервно і монотонно спадає на інтервалі $[2;+\infty)$, причому $f(n)=a_n$.

Дослідимо невласний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=\lim_{A\to+\infty}2\sqrt{\ln x}\Big|_2^A=$$

$$=2\lim_{A\to+\infty}\left(\sqrt{\ln A}-\sqrt{\ln 2}\right)=+\infty.$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то заданий ряд також розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 n}$.

Розв'язання. Застосуємо достатню інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x\ln^4 x}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2;+\infty)$, причому $f(n)=a_n$.

Невласний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{x\ln^4 x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{d(\ln x)}{\ln^4 x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\ln^{-4}x\,d(\ln x)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{\ln^{-3}x}{-3}\Big|_2^A=-\frac{1}{3}\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\ln^3 x}\Big|_2^A=-\left(\frac{1}{3}\right)\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^3 A}-\frac{1}{\ln^3 2}\right)=\frac{1}{\left(3\ln^3 2\right)}\neq\infty.$$

Звідси робимо висновок, що цей невласний інтеграл збігається, а тому заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 n}$ також збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Розв'язання. Оскільки за умовою теореми $f(n)=a_n$ і $a_n=\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$, то $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Ця функція задовольняє всі умови інтегральної ознаки Коші, тобто вона приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2;+\infty)$.

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)}=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\ln^{-2}(x+1)d\left(\ln(x+1)\right)=\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{\ln^{-1}(x+1)}{-1}\right|_2^A=-\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{1}{\ln(x+1)}\right|_2^A=$$

$$=-\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{1}{\ln(x+1)}\right|_2^A=-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(A+1)}-\frac{1}{\ln 3}\right)=\frac{1}{\ln 3}\neq\infty.$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому заданий ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ також збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\ \ n}{1+n^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\left(arctg(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2}$, зручно застосувати інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{arctg(x)}{1+x^2}$, що на інтервалі $[1;+\infty)$ задовольняє умови цієї ознаки. Дослідимо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\int_1^{A}\frac{arctg(x)}{1+x^2}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{arcrg(x)}{1+x^2}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}arctg\qquad d\left(arctg(x)\right)$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\left.\frac{1}{2}arctg^2(x)\right|_1^A\right)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{A\to\infty}\left(arctg^2(A)-arctg^2(1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(arctg^2(\infty)-arctg^2(1)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)=\frac{3\pi^2}{32}\neq\infty.$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то і заданий ряд також збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n^2}$.

Розв'язання. Необхідна ознака виконується

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot e^{-n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n^2}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n'}{\left(e^{n^2}\right)'} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{n^2}\cdot 2n} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0.$$

Далі використовуємо достатню інтегральну ознаку Коші, тому розглянемо функцію $f(x) = x\cdot e^{-x^2}$, яка на інтегралі $[1;+\infty)$ відповідає умовам цієї ознаки. Дослідимо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\int_1^{A} e^{-x^2}d\left(-x^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty} e^{-x^2}\Big|_1^A = -\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-A^2} - e^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} \neq \infty.$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то і заданий ряд також збігається.

Завдання для самоконтролю

1. Який ряд називається знакододатним?
2. У чому полягає інтегральна ознака Коші? Довести її. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, при $p>1$.
3. За допомогою інтегральної ознаки Коші дати геометричну інтерпретацію збіжності ряду. (*Відповідь: ряд збіжний, якщо площа необмеженої криволінійної трапеції (див. рис. 2.1.) має скінченне значення.*)
4. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2+1\right)\cdot arctg 2n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{\frac{1}{n}}}{n^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\cdot e^{-n^3}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(3n-1)}{(3n-1)}$.

Відповідь: *а*), в), г) – ряд розбіжний;
б), д), е) – ряд збіжний.

2.2 Ознаки порівняння

Збіжність або розбіжність ряду з додатними членами можна встановити, порівнюючи його з іншим *еталонним рядом*, про який відомо збігається він чи розбігається.

За еталонні ряди часто приймають:

- **узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхле)**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} \text{збіжний при } p > 1, \\ \text{розбіжний при } p \le 1; \end{cases}$$

- **геометричний ряд** (ряд, складений з членів геометричної прогресії)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \ge 1. \end{cases}$$

Теорема 2.1 (перша (основна) ознака порівняння)

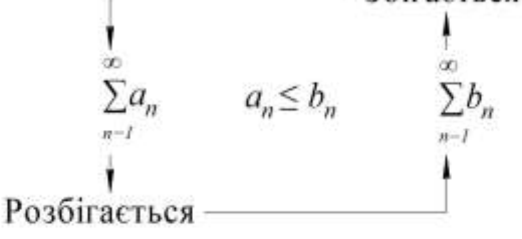
Нехай маємо два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причому $a_n \le b_n$.

Тоді:

а) зі збіжності ряду з більшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає і збіжність ряду з меншими членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) з розбіжності ряду з меншими членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає і розбіжність ряду з більшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Для кращого запам'ятовування теореми схематично можна показати її так



(*Якщо з умов теореми відомо, що збігається ряд з меншими членами* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *або розбігається ряд з більшими членами* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *то жодних висновків про збіжність іншого ряду робити не можна*).

Доведення. Доведемо спочатку першу частину. Нехай

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

За умовою ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний і, оскільки цей ряд додатний, то $T_n < T$, де $\mathrm{T} = \lim_{n\to\infty} T_n$. Із умови $a_n \le b_n$ випливає, що $S_n \le T_n < T$.

Обмеженість частинних сум S_n доведено. Внаслідок додатності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ послідовність часткових сум ще й зростаюча, отже, має границю. Це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Для доведення другої частини достатньо зауважити, що, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, його частинні суми нескінченно зростають $S_n \to \infty$. Оскільки $T_n \ge S_n$, то і $T_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Це і означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбіжний, що й треба було довести.

Отже, з розбіжності меншого ряду випливає розбіжність більшого ряду; а зі збіжності більшого ряду випливає збіжність меншого ряду.

Зауваження. Ця теорема застосовується і в тому разі, коли умову $a_n \le b_n$ задовольняють не всі члени ряду, а тільки починаючи з деякого N, тобто при $n > N$. Це випливає з третьої властивості рядів (відкидання скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$.

Розв'язання. Оскільки $a_n = \frac{1}{2^n + 1}$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n + 1} = 0$, тобто, необхідна ознака збіжності ряду виконується. Застосуємо основну ознаку порівняння, тобто даний ряд будемо порівнювати з геометричною прогресією $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, де $q = \frac{1}{2} < 1$, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, що обрали для порівняння, збіжний. Оскільки нерівність $a_n = \dfrac{1}{2^n+1} \le \dfrac{1}{2^n} = b_n$ виконується і більший ряд збіжний, то і менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+1}$ – збіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності ряду виконується $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0$. Оскільки $a_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{n+1} = b_n$ при всіх n, а менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n+1}+...$ – розбіжний (це гармонічний ряд, у якого відкинуто перший член), то і більший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ також розбіжний.

На практиці досить зручною є так звана гранична форма ознаки порівняння.

Теорема 2.2 (друга (гранична) ознака порівняння)

Нехай задано два знакододатні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причому ми знаємо як поводить себе один із рядів (збігається або розбігається). Якщо існує скінченна та відмінна від нуля границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k, \quad \left(k>0, \quad k\ne\infty\right) \tag{2.7}$$

то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються або розбігаються.

Доведення. Виберемо додатне число ε так, що $k-\varepsilon>0$, тоді з (2.7) випливають нерівності $k-\varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < k+\varepsilon,$ що виконуються при достатньо великих $n > n_0$, або нерівності

$$(k-\varepsilon)b_n < a_n < (k+\varepsilon)b_n, \quad (n>n_0). \tag{2.8}$$

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, то на підставі першої і третьої властивостей рядів збігається і ряд $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n(k+\varepsilon)$, а з другої нерівності (2.8), згідно з першою ознакою порівняння, випливає збіжність ряду $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$, а тоді й ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Навпаки, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ не збігається, то з першої нерівності (2.8) випливає, що не збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Теорему доведено.

Зауваження. Співвідношення $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k \quad (k>0, \quad k\neq\infty)$ говорить про те, що загальні члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є нескінченно малими одного порядку. Це треба мати на увазі також при використанні першої ознаки порівняння, тобто підбирати для порівняння еталонний ряд, загальний член якого b_n є нескінченно малою величиною такого ж порядку, що і загальний член a_n досліджуваного ряду, тобто $a_n \sim b_n$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^2-1}$.

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності ряду виконується

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n/n^2}{3n^2/n^2-1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2/n}{3-1/n^2} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0.$$

Застосуємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки $a_n = \frac{2n}{3n^2-1} \sim \frac{2n}{3n^2} \sim \frac{1}{n} = b_n$, то порівнюємо заданий ряд із рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармонічний ряд, що, як відомо, є розбіжним)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n/\left(3n^2-1\right)}{1/n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2-1}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2/n^2}{3n^2/n^2-1/n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3-1/n^2}=\frac{2}{3}\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^2-1}$ також розбіжний.

2.2.1 Додаткові приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$.

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності виконується

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}=0.$$

Використаємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки $a_n=\frac{n}{n^2+4}\sim\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}=b_n$, то порівнюємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, що розбігається,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{n^2}}=1\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отримана границя є скінченною і відмінною від нуля. Отже, заданий ряд і ряд, що його обрали для порівняння, поводять себе однаково. Ряд, що його обрали для порівняння, розбігається, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ також розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$.

Розв'язання. Необхідна ознака виконується

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з більшим збіжними рядом. Заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$ із загальним членом $a_n=\frac{n}{n^3+4}$ будемо порівнювати зі збіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$), у якого загальний член $b_n=\frac{1}{n^2}$. Оскільки $a_n=\frac{n}{n^3+4}<\frac{1}{n^2}=b_n$, то заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$ також збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+1}$

Розв'язання. Необхідна ознака виконується,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-4n+1}=0$$

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи заданий ряд із гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний ($p=2>1$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=1\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, заданий ряд збігається, адже ряди поводять себе однаково щодо збіжності.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n\ \ +3}$.

Розв'язання. Необхідна ознака виконується

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{3}{n}}=0.\cdot$$

Оскільки $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n+3}\sim\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}=b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжними рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ($p=\frac{1}{2}\leq 1$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=1\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}$.

Розв'язання. Необхідна ознака виконується

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^6}+\frac{4}{n^6}}{\frac{4n^6}{n^6}-\frac{2n^2}{n^6}+\frac{5n}{n^6}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^6}}{4-\frac{2}{n^4}+\frac{5}{n^5}}=0.$$

Оскільки $a_n=\frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}\sim\frac{n^3}{4n^6}=\frac{1}{4n^3}\sim\frac{1}{n^3}=b_n$, застосуємо граничну ознаку порівняння з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, що збігається,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n^3+4)}{4n^6-2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+4n^2}{4n^5-2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n^3}}{4-\frac{2}{n^4}+\frac{5}{n^5}}=\frac{1}{4}\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, ці ряди поводять себе однаково щодо збіжності, оскільки ряд, що обрали для порівняння, збігається, то і заданий ряд також збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+3n^2}}$.

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності виконується

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+3)}}=\left|\frac{1}{\infty}\right|=0.$$

Оскільки $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+3n^2}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{n^3}}=\frac{1}{n}=b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+3n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}}=1\ \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, то і заданий ряд також розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{3n^5+1}}$.

Розв'язання. Необхідна ознака виконується, адже

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{3n^5+1}}=\left|\frac{1}{\infty}\right|=0.$$

Оскільки $a_n=\frac{1}{\sqrt[4]{3n^5+1}}\sim\frac{1}{\sqrt[4]{3n^5}}\sim\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}=\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}=b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ $\left(p=\frac{5}{4}>1\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{3n^5+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{n^5}{3n^5+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{1}{3+\frac{1}{n^5}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Тобто, a_n і b_n є нескінченно малі одного порядку, два ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$.

Розв'язання. Відомо, що $\lim_{\alpha\to 0}=(\frac{1}{\alpha})\ln(1+\alpha)=1$. Тому для заданого ряду можна застосувати граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, що розбігається. Крім того, $a_n=\ln(1+\frac{3}{n})$ – загальний член заданого ряду, а $b_n=\frac{1}{n}$ – загальний член ряду, що його обрали для порівняння.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}}=\begin{bmatrix}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\sim\frac{3}{n}\\ при\ n\to\infty\end{bmatrix}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}=3\cdot 1=3\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{n^2+5}$.

Розв'язання. Необхідна ознака виконується, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n}{n^2+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n^2}}\right)=\sin(0)=0.$$

Порівняємо заданий ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Застосуємо граничну ознаку $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{n}{n^2+5}\right)}{\frac{1}{n}}=1\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}$.

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Розв'язання. Необхідна ознака виконується

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)=\arcsin(0)=0.$$

Порівняємо цей ряд за граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\begin{bmatrix}\arcsin\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{n^2}\\ при\ n\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(3^n+2\right)}$.

Розв'язання. Необхідно ознака виконується, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(3^n+2\right)}=\left|\frac{1}{\infty}\right|=0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння зі збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, оскільки цей ряд складений з членів геометричної прогресії зі знаменником $q=\frac{1}{3}<1$.

Справедлива нерівність

$$a_n=\frac{1}{n\left(3^n+2\right)}\le\frac{1}{3^n+2}\le\frac{1}{3^n}=b_n,$$

Тобто, члени заданого ряду не перевищують відповідних членів збіжного еталонного ряду. Отже, заданий ряд збігається.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте та доведіть теореми про ознаки порівняння двох знакододатних рядів.

2. Які ви знаєте ряди, що їх найчастіше використовують під час застосування ознак порівняння?
3. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{2^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n\left(n+1\right)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3}{5n^6+n^2-4n+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+6\right)}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\left(2n\right)}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4n}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+3n}$.

Відповідь: а), в), д), е), к) – ряд збіжний.
б), г), ж), и) – ряд розбіжний.

2.3 Ознака Д'Аламбера

Ця достатня ознака в своїй основі має порівняння даного числового ряду з відповідним геометричним рядом.

Теорема. Якщо для ряду з додатними членами

існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q,$ то:

1) при $q<1$ заданий ряд збігається;

2) при $q>1$ заданий ряд розбігається;

3) при $q=1$ не можна зробити висновок збігається ряд чи розбігається; у цьому випадку необхідно застосовувати іншу ознаку.

Доведення. 1. Нехай $q<1$. Виберемо число l, що задовольняє систему нерівностей $q<l<1$ (рис. 2.2).

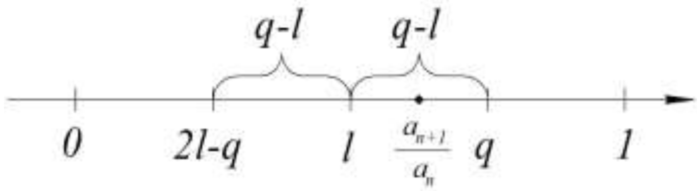


Рисунок 2.2 – Ілюстрація доведення ознаки Д'Аламбера

З виразу $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ та означення границі випливає, що існує натуральне число $n\geq N$ таке, що для всіх значень $n\geq N$ матиме місце нерівність $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q$, тобто послідовність значень $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, починаючи з деякого значення N, належатиме інтервалу $\left(2l-q;q\right)$.

Записуючи нерівність $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q$ для різних значень n, починаючи з номера N, дістанемо

$$a_{N+1}<q\cdot a_N,$$
$$a_{N+2}<q\cdot a_{N+1}<q^2\cdot a_N,$$
$$a_{N+3}<q\cdot a_{N+2}<q^3\cdot a_N,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Звідси випливає, що члени ряду $a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+...,$ що є N-м залишком заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, менші за відповідні члени збіжного геометричного ряду зі знаменником $q,\quad 0<q<1,\ q\cdot a_N+q^2\cdot a_N+q^3\cdot a_N+...$

Отже, на підставі першої ознаки порівняння N-й залишок збігається, але тоді збігається і заданий ряд.

2). Нехай $q>1$ (зокрема, $q=\infty$). Тоді з рівності $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ випливає, що, починаючи з деякого номера N, для всіх $n\geq N$ виконуватиметься нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1,$ або $a_{n+1}>a_n$ для всіх $n\geq N$. Але це означає, що члени ряду зростають, починаючи з номера $N+1,$ і тому загальний член ряду не прямує до нуля, тобто необхідна ознака збіжності ряду не виконується.

Отже, ряд розбігається. Теорема доведена.

Зауваження 1. Щоб не натрапити на останній випадок невизначеності теореми ($q=1$), ознаку Д'Аламбера застосовують до таких рядів, загальний член яких має в своєму складі факторіал або показникову функцію від n, наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^{3n+1}}$ або $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{(3n-1)!}$.

Зауваження 2. Член a_{n+1} отримуємо з a_n, замінюючи n на $n+1$. Наприклад, якщо $a_n=\frac{n^3}{2^{3n+1}}$, то $a_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{2^{3(n+1)+1}}=\frac{(n+1)^3}{2^{3n+4}}$;

якщо $a_n=\frac{4n-3}{(3n-1)!}$, то $a_{n+1}=\frac{4(n+1)-3}{(3(n+1)-1)!}=\frac{4n+1}{(3n+2)!}$.

2.3.1 Додаткові приклади розв'язування задач

Приклад. Дослідити збіжність ряду Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Розв'язання. Тут

$$a_n=\frac{1}{n^p},\quad a_{n+1}\frac{1}{(n+1)^p},\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1.$$

Отже, ознака Д'Аламбера не дає відповіді на питання про збіжність ряду Діріхле, що говорить про слабку чутливість цієї ознаки.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$.

Розв'язання. У загальний член цього ряду входить показникова функція 2^n, тому доцільно застосовувати достатню ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{2^n}{n},\quad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1},\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}\cdot n}{2^n(n+1)}=\frac{2\cdot n}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}2\frac{n}{n+1}=2=q>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5^n}$.

Розв'язання. У загальний член цього ряду входить показникова функція 5^n, тому доцільно застосувати ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{3n+2}{5^n};\quad a_{n+1}=\frac{3(n+1)+2}{5^{n+1}}=\frac{3n+5}{5^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+5)\cdot 5^n}{5^{n+1}(3n+2)}=\left[5^{n+1}=5\cdot 5^n\right]=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{3n+2}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{5}<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+2}$.

Розв'язання. Загальний член цього ряду містить факторіал $n!$, тому застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{n!}{n^2+2};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^2+2};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n^2+2)}{\left((n+1)^2+2\right)n!}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n^2+2)}{\left((n+1)^2+2\right)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2)(n+1)\cdot n!}{\left((n+1)^2+2\right)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+2)}{\left((n+1)^2+2\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+2n+2}{n^2+2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=\left|\frac{1}{0}\right|=\infty>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n)!}$.

Розв'язання. У загальний член цього ряду входить факторіал $(2n)!$, тому застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{n^2}{(2n)!};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(2(n+1))!}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot(2n)!}{(2n+2)!\ \cdot n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n)!\ \cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}=1\cdot 0=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Розв'язання. У загальний член цього ряду входить факторіал, тому застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{n^n}{n!};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\ \cdot n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+1)^n\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2\cdot 6^n}}$.

Розв'язання. Перепишемо загальний член цього ряду у вигляді $a_n=\dfrac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2}\cdot 6^{\frac{n}{3}}}$. Оскільки до його складу входить показникова функція $6^{\frac{n}{3}}$, то доречно застосувати ознаку Д'Аламбера

$$a_{n+1}=\frac{5(n+1)+1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}\cdot 6^{\frac{(n+1)}{3}}};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+6)\sqrt[3]{n^2}\cdot 6^{\frac{n}{3}}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}\cdot 6^{\frac{(n+1)}{3}}(5n+1)}=$$

$$=\frac{1}{6^{\frac{1}{3}}}\lim_{n\to\infty}\frac{5n+6}{5n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+2n+1}}=\frac{1}{6^{\frac{1}{3}}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{6}{n}}{5+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\frac{1}{6^{\frac{1}{3}}}\cdot 1\cdot\sqrt[3]{1}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 5^n}{2^{n-2}}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Д'Аламбера, оскільки загальний член ряду містить показникові функції 5^n і 4^{n-2}

$$a_n=\frac{n\cdot 5^n}{2^{n-2}}=\frac{n\cdot 5^n}{2^n\cdot 2^{-2}}=n\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n\cdot 2^2=4\cdot n\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n;\qquad a_{n+1}=4\cdot(n+1)\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{4\cdot n\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n}=\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^6}{3^{n+1}}$.

Розв'язання. До загального члена ряду входить показникова функція 3^{n+1}, тому застосуємо достатню ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{n^6}{3^{n+1}};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^6}{3^{n+2}};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^6\,3^{n+1}}{3^{n+2}\cdot n^6}=\left[3^{n+2}=3\cdot 3^{n+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^6=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^6=\frac{1}{3}\cdot 1^6=\frac{1}{3}<1.$$

Отже, ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 4^{n-1}}{n^2+3}$..

Розв'язання. Скористаємося ознакою Д'Аламбера, оскільки загальний член ряду містить показникову функцію 4^{n-1}

$$a_n=\frac{(n+1)\cdot 4^{n-1}}{n^2+3};\quad a_{n+1}=\frac{(n+2)\cdot 4^{(n+1)-1}}{(n+1)^2+3}=\frac{(n+2)\cdot 4^n}{(n+1)^2+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 4^n\cdot(n^2+3)}{\left((n+1)^2+3\right)\cdot(n+1)\cdot 4^{n-1}}=\left[4^n=4\cdot 4^{n-1}\right]=$$

$$=4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}=4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{3}{n^2}}=4\cdot 1\cdot 1=4>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\frac{1}{3^n}$.

Розв'язання. У загальному члені ряду є показникова функція 3^n, тому доречно застосувати достатню ознаку Д'Аламбера. Запишемо загальний член заданого ряду та наступний:

$$a_n=n\cdot\sin\left(\frac{1}{3^n}\right);\qquad a_{n+1}=(n+1)\cdot\sin\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\sin\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{n\cdot\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sin\frac{1}{3^{n+1}}\sim\frac{1}{3^{n+1}}\\ \sin\frac{1}{3^n}\sim\frac{1}{3^n}\\ \textit{при } n\to\infty\end{array}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n\left(2n-1\right)}$.

Розв'язання. У загальному члені ряду є показникова функція 3^n і факторіал $n!$, тому можемо застосувати ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{n!}{3^n\cdot\left(2n-1\right)};\qquad a_{n+1}=\frac{\left(n+1\right)!}{3^{n+1}\cdot\left(2\left(n+1\right)-1\right)}=\frac{\left(n+1\right)!}{3^{n+1}\cdot\left(2n+1\right)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)!\ \cdot 3^n\cdot\left(2n-1\right)}{3^{n+1}\cdot\left(2n+1\right)\cdot n!}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\left(2n-1\right)}{2n+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{3}\cdot\left|\frac{2}{0}\right|=\frac{1}{3}\cdot\infty=\infty>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 9^{n-1}}{\left(2n-3\right)!}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Д'Аламбера, оскільки загальний член ряду містить показникову функцію 9^{n-1} і факторіал $\left(2n-3\right)!$,

$$a_n=\frac{n\cdot 9^{n-1}}{\left(2n-3\right)!};\qquad a_{n+1}=\frac{\left(n+1\right)\cdot 9^{\left(n+1\right)-1}}{\left(2\left(n+1\right)-3\right)!}=\frac{\left(n+1\right)\cdot 9^n}{\left(2n-1\right)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\cdot 9^n\cdot\left(2n-3\right)!}{\left(2n-1\right)!\ \cdot n\cdot 9^{n-1}}=9\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\left(2n-3\right)!}{n\left(2n-3\right)!\left(2n-2\right)\left(2n-1\right)}=$$

$$=9\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2n-2\right)\left(2n-1\right)}=9\cdot 1\cdot 0=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot arcctg\frac{n}{3^n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду містить показникову функцію 3^n, тому застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$a_n=n^2\cdot arcctg\left(\frac{n}{3^n}\right);\qquad a_{n+1}=\left(n+1\right)^2\cdot arcctg\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot arcctg\left(\frac{(n+1)}{3^{n+1}}\right)}{n^2\cdot arcctg\left(\frac{n}{3^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\left(\frac{(n+1)}{3^{n+1}}\right)}{arctg\left(\frac{n}{3^n}\right)}.$$

За допомогою правила Лопіталя знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n\ln 3}=0.$

За першою визначною границею $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{arctg\alpha}{\alpha}=1$, тобто $arctg\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$. Тоді $arctg\frac{n}{3^n}\sim\frac{n}{3^n}$ при $\alpha=\frac{n}{3^n}\to 0$ і $arctg\frac{n+1}{3^{n+1}}\sim\frac{n+1}{3^{n+1}}$ при $\alpha=\frac{(n+1)}{3^{n+1}}\to 0$. Еквівалентні нескінченно малі у відношенні замінюються одна на іншу.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{arctg\left(\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)\right)}{arctg\left(\frac{n}{3^n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}.$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1.$ Заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{(n+3)!}.$

Розв'язання. У загальному члені ряду є факторіал $(n+3)!$, а також показникова функція 5^{2n-1}, тому застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{5^{2n-1}}{(n+3)!};\ a_{n+1}=\frac{5^{2(n+1)-1}}{((n+1)+3)!}=\frac{5^{2n+1}}{(n+4)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{2n+1}(n+3)!}{(n+4)!\ \cdot 5^{2n-1}}=25\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!}{(n+4)(n+3)!}=25\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+4}=$$

$$=25\cdot\left|\frac{1}{\infty}\right|=25\cdot 0=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{e^{2n}}.$

Розв'язання. У загальному члені ряду є показникова функція e^{2n}, тому застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{n+1}{e^{2n}}; \qquad a_{n+1}=\frac{n+2}{e^{2(n+1)}}=\frac{n+2}{e^{2n+2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot e^{2n}}{e^{2n+2}\cdot(n+1)}=\frac{1}{e^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{e^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{e^2}<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Д'Аламбера, оскільки в загальному члені заданого ряду є факторіал,

$$a_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=\frac{1}{n!}; \qquad a_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!};,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\ \cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\left|\frac{1}{\infty}\right|=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$a_n=\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)},$$

$$a_{n+1}=\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2(n+1)+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3(n+1)-1)}=\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)\cdot\left[2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\right]}{\left[2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)\right]\cdot\left(3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте та доведіть ознаку Д'Аламбера.

2. До яких рядів зручно застосовувати ознаку Д'Аламбера?

3. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 2^{n+2}}{(4n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{(n+1)!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)\sin\frac{\pi}{4^n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+3)!}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{e^{n+2}}$.

***Відповідь**:* а), г), д), е), к) – ряд збіжний.
б), в), ж), и) – ряд розбіжний.

2.4 Радикальна ознака Коші

Ця ознака є достатньою і базується, як і ознака Д'Аламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним геометричним рядом.

Теорема. Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$ то:

1) при $q<1$ ряд збігається;
2) при $q>1$ ряд розбігається;
3) при $q=1$ не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду, тому потрібно застосувати іншу ознаку.

Доведення. 1) Нехай $q<1$. Виберемо число l, що задовольняє співвідношення $q<l<1$.

Починаючи з деякого номера $n>N$ матиме місце співвідношення $\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<l-q,$ звідки випливає, що $\sqrt[n]{a_n}<l$ або $a_n<l^n$ для всіх $n>N$.

За цих умов залишок ряду $\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$ є збіжним рядом $a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+\ldots,$ оскільки його члени менші за відповідні члени збіжного геометричного ряду ($l<1$) $l^{N+1}+l^{N+2}+l^{N+3}+\ldots$

Отже, збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

2) Випадок розбіжності досліджується аналогічно. Нехай $q>1$, тобто, починаючи з деякого номера $n>N$, будемо мати $\sqrt[n]{a_n}>1$, або $a_n>1$.

Але якщо всі члени заданого ряду, починаючи з a_N, більші одиниці, то ряд розбігається, оскільки його загальний член не прямує до нуля.

Теорему доведено.

Зауваження. Радикальну ознаку Коші зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n, з яких досить просто добувається корінь n-го порядку. Наприклад, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^{n+2}\dfrac{n}{n^2-3}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}\dfrac{2n}{n+3}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+5}{3n-2}\right)^n$.

2.4.1 Додаткові приклади розв'язування задач

Приклад. Дослідити на збіжність ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$

Розв'язання. Використовуємо радикальну ознаку Коші. Для цього спочатку знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n^p}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n^p}=-\lim_{n\to\infty}\frac{p\cdot\ln n}{n}=0,$$

звідки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, тобто, у цьому випадку радикальна ознака Коші, як і ознака Д'Аламбера, не дає відповіді на питання про збіжність чи розбіжність ряду Діріхле.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Заданий ряд є рядом з додатними членами. Його загальний член є степенем з показником n^2 виразу $1+\dfrac{1}{n}$, тому застосовуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$$

Отже, заданий ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$

Розв'язання. Загальний член знакододатного ряду є степенем з показником n виразу $\frac{n}{2n+1}$, тому застосовуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{5n+1}\right)^n$.

Розв'язання. Загальний член ряду є дробом $\frac{(2n-3)}{(5n+1)}$ в n-му степені, тому використовуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{5n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n}}=\frac{2}{5}<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{n^2+1}$.

Розв'язання. Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin\frac{\pi}{n^2+1}$, тому скористаємося радикальною ознакою Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n\frac{\pi}{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\frac{\pi}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\sin 0=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{n^2+1}{n^3-4}\right)^{n+1}$.

Розв'язання. Загальний член ряду є степенем з показником n+1 виразу $arctg\,\frac{n^2+1}{n^3-4}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(arctg\,\frac{n^2+1}{n^3-4}\right)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(arctg\,\frac{n^2+1}{n^3-4}\right)^{\frac{(n+1)}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(arctg\,\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{2}{n^3}}\right)^{1+\frac{1}{n}}=arctg\,0=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду є n-м степенем виразу $\arcsin\frac{n+3}{n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n+3}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{n-2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду є $(n-2)$-м степенем виразу $\frac{5n+6}{2n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{\frac{n-2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+\frac{6}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^{1-\frac{2}{n}}=\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}>1$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+1)^n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n=\frac{2^{n+2}}{(n+1)^n}=\frac{2^n\cdot 2^2}{(n+1)^n}=4\cdot\left(\frac{2}{n+1}\right)^n$.

Таким чином a_n містить у вигляді множника *n*-ий степінь дробу $\frac{2}{n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4\cdot\left(\frac{2}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}4^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=1\cdot 0=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2-3}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n=\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2-3}$ містить степінь з показником $2n^2-3$, що залежить від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2-3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{\frac{2n^2-3}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{-3}\cdot\left(\left(\frac{-3}{3n+2}\right)\cdot\frac{2n^2-3}{n}\right)}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-9}{3n^2+2n}}==e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6-\frac{9}{n^2}}{3+\frac{2}{n}}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{3n^2+1}$.

Розв'язання. Показник степеня $3n^2+1$ у загальному члені даного ряду залежить від *n*, тому можемо застосувати радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{3n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{\frac{(3n^2+1)}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(2n-4)}{(n^2+4)}\right)^{\frac{n^2+4}{2n-4}\cdot\left(\left(\frac{2n-4}{n^2+4}\right)\cdot\frac{3n^2+1}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-4}{n}\cdot\frac{3n^2+1}{n^2+4}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{4}{n}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}}=e^{2\cdot 3}=e^6>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n\dfrac{n^2}{n+1}.$

Розв'язання. Загальний член ряду містить степінь з показником *n*, що залежить від *n*, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^n\frac{n^2}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\left|\ln\frac{1}{0}=\ln\infty\right|=\infty>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(\ln\left(n+1\right)\right)^{2n}}.$

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n=\dfrac{1}{\ln^{2n}\left(n+1\right)}$ містить степінь з показником $2n$, що залежать від *n*, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^{2n}\left(n+1\right)}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln^{\frac{2n}{n}}\left(n+1\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln^2\left(n+1\right)}=\left|\frac{1}{\infty}\right|=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{\left(arctg\,\dfrac{n}{n+4}\right)^{n-3}}.$

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n=\dfrac{4^n}{arctg^{n-3}\left(\dfrac{n}{n+4}\right)}$ містить степені з показниками n та $n-3$, що залежать від *n*, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n}{arctg^{n-3}\left(\dfrac{n}{n+4}\right)}}=\frac{4}{\lim\limits_{n\to\infty}arctg^{\left(\frac{n-3}{n}\right)}\left(\dfrac{n}{n+4}\right)}=$$

$$=\frac{4}{\lim\limits_{n\to\infty} arctg^{1-\frac{3}{n}}\frac{1}{1+\frac{4}{n}}}=\frac{4}{arctg1}=\frac{4}{\frac{\pi}{4}}=\frac{16}{\pi}>1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg^{n+1}\frac{n+3}{n^2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду містить степінь з показником $n+1$, що залежить від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{tg^{n+1}\frac{n+3}{n^2}}=\lim_{n\to\infty} ctg^{\frac{n+1}{n}}\frac{n+3}{n^2}=\lim_{n\to\infty} tg^{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=tg0=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+5}\right)^{3n-1}$.

Розв'язання. Загальний член ряду має показник степеня $3n+1$, що залежить від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+5}\right)^{3n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+5}\right)^{\frac{3n-1}{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}\right)^{3-\frac{1}{n}}=\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)^3=\left(\frac{\pi}{6}\right)^3<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{3n^2+1}$.

Розв'язання. У загальному члені ряду показники степенів n та $3n^2+1$ залежать від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{3n^2+1}}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{\frac{\left(3n^2+1\right)}{n}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-6}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-6}\cdot\left(\left(\frac{-6}{n+3}\right)\cdot\frac{3n^2+1}{n}\right)}=\frac{1}{2}e^{-6\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+3n}}=\frac{1}{2}e^{-6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}}=\frac{1}{2}e^{-6\cdot3}=\frac{1}{3}e^{-18}<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n\frac{1}{n}}{5^{n+2}}$.

Розв'язання. У загальному члені ряду показники степенів n та n+2, тому застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin^n\frac{1}{n}}{5^{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{5^{\frac{(n+2)}{n}}}=\begin{bmatrix}\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}\\ при\ n\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{5^{1+\frac{2}{n}}}=\frac{0}{5}=0<1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте та доведіть радикальну ознаку Коші.
2. Коли зручно використовувати радикальну ознаку Коші?
3. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{5n-3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+6}\right)^{n+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg^n\frac{n^2}{n^3+3}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n^2-3}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$.

Відповідь: а), б), в), г), ж), и) – ряд збіжний;
д), е), к) – ряд розбіжний.

Тема 3 ЧИСЛОВІ РЯДИ З ДОВІЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ

3.1 Знакопочережні ряди

Всі достатні ознаки збіжності ми розглядали відносно рядів з додатними членами. Тепер розглянемо ряди, для яких спостерігається чергування знаків.

Означення. *Знакопочережним* називають ряд, знаки членів якого йдуть один за одним почергово, тобто якщо будь-які два сусідні члени цього ряду мають протилежні знаки. Ряд, знаки членів якого йдуть один за одним почергово, можна записати так:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

або

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots - (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ – додатні числа.

Основне питання для рядів, зокрема і для знакопочережних, – це питання збіжності.

Теорема (ознака Лейбніца). Знакопочережний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \qquad (a_n > 0) \tag{3.1}$$

збігається, якщо виконуються умови:

$$1)\ a_1 > a_2 > a_3 > \ldots \tag{3.2}$$

$$2)\ \lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{3.3}$$

При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого члена, тобто, $0 < S < a_1$.

(*Це єдина умова за якою перевіряють на збіжність чи розбіжність знакопочережний ряд*)

Доведення. Розглянемо частинну суму $n = 2m$ парної кількості перших членів ряду (3.1)

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2m-1} - a_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

З умови (3.2) випливає, що вираз в кожних дужках додатний. Тобто, сума S_{2m} додатна ($S_{2m} > 0$) і зростає зі збільшенням m. Запишемо тепер цю суму інакше

$$S_{2m} = a_1 - \left(a_2 - a_3\right) - \left(a_4 - a_5\right) - \ldots - \left(a_{2m-2} - a_{2m-1}\right) - a_{2m}.$$

Згідно з умовою (3.2) кожен з виразів у дужках додатний. Тому в результаті віднімання цих дужок від a_1 дістанемо число, менше за a_1, тобто $S_{2m} < a_1$.

Отже, ми встановили, що послідовність $\left\{S_{2m}\right\}$ при зростанні m зростає і обмежена зверху. Звідси випливає, що вона має границю $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S,$ причому $0 < S < a_1$. Однак збіжність ряду ще не доведено, оскільки ми довели тільки те, що послідовність парних частинних сум прямує до числа S. Ще потрібно довести, що для послідовності «непарних» частинних сум число S також є границею.

Розглянемо частинні суми $n = 2m + 1$ непарної кількості перших членів ряду (3.1) $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$

Оскільки, згідно з умовою (3.3), $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$, то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}\left(S_{2m+1} + a_{2m+1}\right) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

Отже, доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ як при парному n, так і при непарному n, тобто ряд (3.1) збігається.

Означення. Знакопочережний ряд, для якого виконується ознака Лейбніца, називається *рядом Лейбніца* або *рядом лейбніцевого типу*.

Для такого ряду легко оцінити абсолютну похибку, яку отримуємо, якщо його суму замінити частинною сумою S_n. При цій заміні ми відкидаємо всі члени ряду, починаючи з a_{n+1}. Але залишок ряду також є рядом Лейбніца

$$R_n = \pm\left(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots\right),$$

сума якого за абсолютною величною менша за перший член цього ряду, тобто менша за a_{n+1}.

Наслідок. Абсолютна похибка, яку матимемо при заміні суми збіжного ряду S його частинною сумою S_n, не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів ряду, тобто $\left|S - S_n\right| = \left|R_n\right| \le a_{n+1}.$

На рис. 3.1 геометрично зображено кілька перших членів послідовності частинних сум, що, наближаючись до своєї границі S, будуть по черзі то більші, то менші за S.

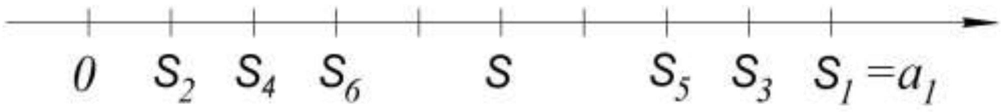


Рисунок 3.1 – Послідовність частинних сум

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Приклад. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)^3}=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}-\frac{1}{8^3}+\frac{1}{10^3}-\ldots$ збіжний і знайти його суму з точністю до 0,01.

Розв'язання. Даний ряд збігається, оскільки виконуються умови ознаки Лейбніца:

1) $$\frac{1}{2^3}>\frac{1}{4^3}>\frac{1}{6^3}>\ldots;$$

2) $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^3}=0,$$

і має певну суму S. Для того, щоб обчислити цю суму з точністю до 0,01, потрібно взяти стільки його членів, щоб перший з наступних членів був за модулем менший від 0,01. Тоді весь залишок ряду, починаючи з цього члена, буде менший від 0,01. Маємо:

$$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=0{,}125>0{,}01; \qquad \frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}=0{,}0156>0{,}01; \qquad \frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}=0{,}0046<0{,}01.$$

Отже, щоб знайти суму даного ряду з точністю до 0,01, достатньо залишити перші два члени ряду, а решту відкинути. Таким чином,

$$S\approx S_2=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}=\frac{1}{8}-\frac{1}{64}\approx 0{,}1094.$$

3.2 Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжності

Означення. Ряд, що має нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів, називається *знакозмінним рядом*.

Знакопочережний ряд є окремим випадком знакозмінного ряду.

Приклади знакозмінних рядів:

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\cos 2n}{n^2}\right);$$

$$в)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\left(-1\right)^n}{n+3}; \qquad г)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\cos^3 n.$$

Розглянемо довільний знакозмінний ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{3.4}$$

де числа a_i можуть бути як додатними, так і від'ємними. Одночасно розглянемо ряд, утворений з модулів його членів,

$$\left|a_1\right|+\left|a_2\right|+\ldots+\left|a_n\right|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|. \tag{3.5}$$

Для знакозмінного ряду наведемо тільки одну важливу ознаку збіжності.

Теорема (достатня ознака збіжності). Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Доведення. Нехай S_n і σ_n – суми n перших членів рядів відповідно (3.4) та (3.5).

Нехай S_n' – сума всіх додатних, S_n'' – сума абсолютних величин всіх від'ємних членів серед перших n членів ряду (3.4).

Тоді $S_n=S_n'-S_n''$, $\qquad \sigma_n=S_n'+S_n''$.

За умовою σ_n має границю σ, S_n' та S_n'' – додатні зростаючі величини, менші за σ. Отже, вони мають границі S' і S''. Із співвідношення $S_n=S_n'-S_n''$ випливає, що й S_n має границю, і ця границя дорівнює $S'-S''$, тобто знакозмінний ряд (3.4) збігається.

Доведена ознака показує, що при дослідженні на збіжність знакозмінного ряду можна використовувати ознаки збіжності ряду з додатними членами.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2},$$

де α – будь-яке дійсне число.

Розв'язання. Одночасно з заданим рядом, розглянемо ряд з модулів членів цього ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\cdot\alpha}{n^2}\right|=\frac{|\sin\alpha|}{1^2}+\frac{|\sin 2\alpha|}{2^2}+\ldots+\frac{|\sin n\cdot\alpha|}{n^2}+\ldots \tag{3.6}$$

та ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{3.7}$$

Оскільки $\dfrac{|\sin n\cdot\alpha|}{n^2}\le\dfrac{1}{n^2}$, а ряд (3.7) збіжний як узагальнений гармонічний ряд, то ряд (3.6) також збіжний за першою ознакою порівняння. Отже, заданий знакозмінний ряд також збігається.

Зауваження. Доведена теорема стверджує лише достатню умову збіжності знакозмінного ряду і не є необхідною умовою збіжності. Адже є такі знакозмінні ряди, які збігаються, а ряди, утворені з модулів їх членів, розбігаються. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ збігається за ознакою Лейбніца, а гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, утворений з модулів його членів, як відомо, розбігається.

У зв'язку з цим усі збіжні ряди можна розділити на абсолютно збіжні і умовно збіжні.

Означення (абсолютна та умовна збіжності). Знакозмінний ряд називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд, утворений з абсолютних величин його членів, збігається.

Якщо знакозмінний ряд збігається, а ряд, утворений з абсолютних величин його членів, не збігається, то заданий ряд називається *неабсолютно* або *умовно збіжним*.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ умовно збіжний.

Для дослідження знакозмінного ряду на абсолютну та умовну збіжності зручно використовувати нижченаведений алгоритм.

Алгоритм дослідження знакозмінного ряду на абсолютну та умовну збіжності

1. Перевіряємо на збіжність чи розбіжність за теоремою Лейбніца. Якщо умови теореми не виконуються, то робимо висновок, що знакозмінний ряд розбіжний. Якщо теорема виконується, то перевіряємо збіжність: вона буде абсолютною чи умовною.

2. Записати відповідний знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

3. Дослідити $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ за ознаками знакододатних рядів.

4. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – збіжний, то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ – збіжний абсолютно. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ – розбіжний, то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ – умовно збіжний.

Отже, знакозмінний ряд може бути розбіжним, збіжний умовно чи абсолютно.

Зауваження. Зазначене розмежування абсолютної та умовної збіжностей рядів досить істотне. Основні властивості і властивості абсолютно збіжних рядів такі самі, як і властивості скінченних сум. Для умовно збіжних рядів деякі звичайні властивості скінченних сум не справджуються. Наприклад, абсолютно збіжні ряди мають, як і звичайні скінченні суми, переставну властивість: будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки членів абсолютно збіжного ряду, також залишається абсолютно збіжним і має ту саму суму, що і заданий ряд.

Умовно збіжні ряди переставної властивості не мають, тому що від перестановки їхніх членів може змінитися сума ряду і навіть утворитися розбіжний ряд.

Приклад. Показати, що сума умовно збіжного ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ залежить від порядку його членів.

Розв'язування. Заданий умовно збіжний ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, і нехай сума цього ряду S.

Переставимо члени цього ряду так, щоб після кожного додатного члена стояли два, не записані раніше, від'ємні члени ряду:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$$

Згрупувавши члени цього ряду, матимемо:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\frac{S}{2}.$$

В результаті ми отримали, що від перестановки членів заданого умовно збіжного ряду його сума зменшилась вдвічі, тобто змінилась.

Зауваження. Разом з тим, будь-які перестановки скінченного числа членів допускаються в будь-яких рядах; вони не позначаються на сумі ряду.

3.2.1 Додаткові приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+3}$.

Розв'язування. Застосуємо ознаку Лейбніца, щоб перевірити, чи збігається знакозмінний ряд.

Перша умова ознаки Лейбніца теж виконується, а саме:

$$a_1=\frac{1}{4};\qquad a_2=\frac{1}{7};\qquad a_3=\frac{1}{12};\ldots \text{ маємо } \frac{1}{4}>\frac{1}{7}>\frac{1}{12}>\ldots$$

Друга умова ознаки Лейбніца теж виконується:

$$a_n=\frac{1}{n^2+3};\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=\left|\frac{0}{1}\right|=0.$$

Отже, заданий знакозмінний ряд збігається, а далі перевіряємо: буде ця збіжність абсолютною чи умовною.

Складемо ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$. Для дослідження скористаємось достатньою ознакою збіжності знакододатних рядів, а саме: основною ознакою порівняння. Порівняємо заданий ряд із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$a_n=\frac{1}{n^2+3}<\frac{1}{n^2}=b_n\,.$$

За основною ознакою порівняння ряд з модулів збігається. Отже, заданий знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+1}$.

Розв'язування. Застосуємо ознаку Лейбніца, щоб перевірити чи збігається знакозмінний ряд

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Одна з умов ознаки Лейбніца не виконується, то робимо висновок, що знакозмінний ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+2)}$.

Розв'язування. Застосуємо ознаку Лейбніца, щоб перевірити чи збігається знакозмінний ряд.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\left|\frac{0}{1}\right|=0.$$

Отже, виконується друга умова ознаки Лейбніца. Перша умова ознаки Лейбніца теж виконується

$$a_1=\frac{3}{3}=1;\ a_2=\frac{5}{8};\ a_3=\frac{7}{15};\dots\ \text{маємо}\ 1>\frac{5}{8}>\frac{7}{15}>\dots$$

Тому заданий ряд збігається. Далі перевіряємо: буде ця збіжність абсолютною чи умовною.

Досліджуємо ряд, складений з модулів членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+2)}$. Застосуємо граничну ознаку порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, що розбігається,

$$a_n=\frac{2n+1}{n(n+2)};\ b_n=\frac{1}{n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\left|\frac{2}{1}\right|=2 \quad \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, ряд з модулів розбігається.

Оскільки ряд з його абсолютних величин розбігається, то заданий ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити на умовну та абсолютну збіжності знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$

Розв'язання. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) члени за абсолютною величиною монотонно спадають, бо

$$1>\frac{\sqrt{2}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{5}>\ldots.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{0}{2}=0.$

Обидві умови ознаки Лейбніца виконуються, отже, заданий ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Розглянемо ряд, складений з його абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$.

Цей ряд можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, що розбігається,

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{(2n-1)}; \qquad b_n=\frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

За граничною ознакою порівняння цей ряд розбігається. Отже, заданий знакозмінний ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\cdot 4^n}$

Розв'язання. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) члени за абсолютною величиною монотонно спадають, оскільки

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{64} > \frac{1}{9\cdot 4^3} > \ldots.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\cdot 4^n} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0.$

Обидві умови ознаки Лейбніца виконуються, отже, заданий ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 4^n}$, складений з абсолютних величин заданого знакозмінного ряду. Дослідимо його на збіжність, застосовуючи ознаку Д'Аламбера.

$$a_n = \frac{1}{n^2\cdot 4^n};\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2\cdot 4^{n+1}};\text{А}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 4^n}{(n+1)^2\cdot 4^{n+1}} = \left[4^{n+1} = 4^n\cdot 4\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1.$$

Ряд з абсолютних величин збігається, отже, заданий знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{5n-1}}$

Розв'язання. Дослідимо заданий ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) члени за абсолютною величиною монотонно спадають, бо $a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; $a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; $a_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{14}}$ … маємо $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5n-1}} = 0$;

Умови ознаки Лейбніца виконуються, отже, заданий ряд збіжний. Дослідимо збігається він умовно чи абсолютно.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5n-1}}$, складений з абсолютних величин заданого знакозмінного ряду.

Його можна порівняти з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, тоді за граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{5n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{5n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{5-\frac{1}{n}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \quad \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$

Отже, ряд з модулів розбігається, тоді заданий ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{n^2}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца. Почнемо з другої умови, яка стверджує, що $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|.$$

Безпосередня підстановка граничного значення $n = \infty$ привела нас до невизначеності вигляду $\frac{\infty}{\infty}$. Щоб розкрити цю невизначеність, розглянемо функцію $\frac{3^x}{x^2}$, яка збігається з заданою $\frac{3^n}{n^2}$ на множині цілих додатних чисел та скористаємося правилом Лопіталя, причому, в разі потреби, зробимо це кілька разів. Отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3^x\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3^x \ln 3}{2x} \right) = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3^x \ln 3\right)'}{\left(2x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x \ln^2 3}{2} = +\infty.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty} = \frac{3^n}{n^2} = \infty \neq 0$, а це означає, що друга умова ознаки Лейбніца не виконується, тому заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{2\pi}{n+3}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $a_n = \left| (-1)^n \sin \frac{2\pi}{n+3} \right| = \sin \frac{2\pi}{n+3}$;

$$a_1=\sin\frac{2\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}=1; \qquad a_2=\sin\frac{2\pi}{5}\approx 0,95;$$

$a_3=\sin\frac{2\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,87;\ \ldots$ Маємо $a_1>a_2>a_3>\ldots$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{2\pi}{n+3}=|\sin 0|=0$.

Отже, обидві ознаки Лейбніца виконуються, тому заданий знакозмінний ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Ряд з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n+1}$ можна порівняти з гармонічним розбіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ($b_n=\frac{1}{n}$ – загальний член). За граничною ознакою порівняння

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin\pi}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\begin{bmatrix}\sin\pi\sim\pi\\ при\ n\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\cdot n}{n+1}=\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\pi \quad \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}..$$

Отже, ряд з модулів розбігається, тому заданий ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$

Розв'язання. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $a_2=\frac{1}{2\ln 2}; a_3=\frac{1}{3\ln 3},\ldots$. Функція $\ln x$ є зростаючою, а $\frac{1}{\ln x}$ – спадною, тому перша умова ознаки Лейбніца виконується $a_2>a_3>\ldots\ldots$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=\left|\frac{1}{\infty}\right|=0$.

Отже, заданий ряд збігається. Перевіримо, збігається він абсолютно чи умовно. Для цього дослідимо ряд з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ за допомогою інтегральної ознаки Коші. Розглянемо відповідну функцію $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, що на інтервалі $[2,\infty)$ приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає, причому $f(n)=|a_n|$. Дослідимо невласний інтеграл

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{A\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\ln(\ln A) - \ln\ln 2 = \infty.$$

Оскільки невласний інтеграл розбігається, то ряд з абсолютних величин також розбігається, а отже, заданий знакозмінний ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

Розв'язання. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $a_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

$a_1 = \frac{1}{(2\ln 2)}$; $a_2 = \frac{1}{(3\ln 3)}$; $a_3 = \frac{1}{(4\ln 4)}$; … $\quad a_1 > a_2 > a_3 \ldots$.

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0$.

Умови ознаки Лейбніца виконуються, тому заданий ряд збігається. Маємо дослідити його на абсолютну чи умовну збіжність.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Розглянемо відповідну функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, що на інтервалі $[1,\infty)$ відповідає умовам цієї ознаки.

Дослідимо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{A\to\infty}\ln(\ln(x+1))\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty}\ln(\ln(A+1)) - \ln\ln 2 = \infty.$$

Невласний інтеграл розбігається, тому ряд з абсолютних величин також розбігається, отже, заданий знакозмінний ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arc}tg^n \dfrac{\pi n}{3^n}$

Розв'язання. Дослідимо на абсолютну збіжність заданий ряд, застосовуючи радикальну ознаку Коші до ряду з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc}tg^{\pi}\left(\dfrac{\pi n}{3^n}\right)$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\operatorname{arc}tg^n\left(\dfrac{\pi n}{3^n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arc}tg\left(\dfrac{\pi n}{3^n}\right) =$

$$= \operatorname{arc}tg\left(\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3^n}\right)\right) = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \left[\begin{array}{l} \textit{розкривати цю невизначеність} \\ \textit{будемо за правилом Лопіталя} \end{array}\right] =$$

$$= \operatorname{arc}tg\left(\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3^n}\right)'\right) = \operatorname{arc}tg\left(\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n\ln 3}\right) = \operatorname{arc}tg\pi\cdot 0 = 0 < 1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд з абсолютних величин збігається, отже, заданий знакопочережний ряд збігається абсолютно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{4n}{5n-1}\right)^{n+3}$.

Розв'язання. Перевіримо збіжність ряду з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n}{5n-1}\right)^{n+3}$ за радикальною ознакою Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n}{5n-1}\right)^{n+3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{5n-1}\right)^{\frac{(n+3)}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5-\frac{1}{n}}\right)^{1+\frac{3}{n}} = \frac{4}{5} < 1.$$

Ряд з абсолютних величин збігається, а тому заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n^2-4}{n^2+1}\right)^{n^2+2}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца, розпочнемо з другої, яка стверджує, що послідовність, складена з модулів членів заданого ряду, прямує до нуля.

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-4}{n^2+1}\right)^{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1-5}{n^2+1}\right)^{n^2+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n^2+1}\right)\right)^{\left[-\frac{n^2+1}{5}\right]\cdot\left(-\frac{5}{n^2+1}\right)\cdot\left(n^2+2\right)} =$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{\left(n^2+1\right)}\right)^{-\frac{\left(n^2+1\right)}{5}}\right)^{-5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+1}}=e^{-5}\neq 0.$$

Ця умова не виконується, отже, заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2\sin\frac{n}{2n^3+1}$

Розв'язання. Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбніца

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n^2\sin\frac{n}{2n^3+1}=\left[\begin{array}{l}\sin\frac{n}{2n^3+1}\sim\frac{n}{2n^3+1}\\ \textit{при } n\to\infty\end{array}\right]=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{n}{2n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2n^3+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Ознака Лейбніца не виконується, отже, заданий знакозмінний ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}$

Розв'язання. Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}$ з абсолютних величин заданого знакозмінного ряду. Оскільки загальний член ряду містить показникову функцію 3^{n-1} і факторіал $(2n-3)!$, то застосуємо ознаку Д'Аламбера.

$$|a_{n+1}|=\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1-1}}{(2(n+1)-3)!}=\frac{(n+1)\cdot 3^n}{(2n-1)!};\qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n\cdot(2n-3)!}{(2n-1)!\cdot n\cdot 3^{n-1}}=$$

$$=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-3)!}{n\cdot(2n-3)!(2n-2)(2n-1)}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n-2)(2n-1)}=3\cdot 0=0<1.$$

Ряд з модулів збігається, а тому знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$

Розв'язання. Дослідимо збіжність ряду з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n-2)}.$$

Для дослідження скористаємось достатньою ознакою збіжності знакододатних рядів, а саме: ознакою Д'Аламбера.

$$a_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot\big(2(n+1)-1\big)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot\big(3(n+1)-2\big)}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\big(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)\big)\cdot\big(1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n-2)\big)}{\big(1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)\big)\cdot\big(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\big)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}<1$$

Оскільки ряд з модулів збігається, то заданий знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Завдання для самоперевірки

Символом * позначені питання підвищеної складності.

1. Сформулюйте та доведіть ознаку Лейбніца. До якого ряду вона застосовується?

2. Сформулюйте означення знакозмінного числового ряду (ряду з довільними членами).

3. Наведіть достатню ознаку збіжності ряду з довільними членами. Доведіть її.

4. Який ряд називається абсолютно збіжним? Який ряд називається умовно збіжним? Навести приклади вказаних збіжностей.

5*. Подивитись уважно доведення достатньої ознаки збіжності ряду з довільними членами. Чому аналогічними міркуваннями не можна довести збіжність знакододатного ряду (3.5) з умови про збіжність знакозмінного ряду (3.4)? (*Відповідь: Сума $S_n=S_n'-S_n''$ може мати границю S і тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty}S_n'=\infty$ та $\lim\limits_{n\to\infty}S_n''=\infty.$*)

5. Дослідити на збіжність знакозмінні ряди і встановити характер збіжності (абсолютна чи умовна):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n-2}{3n-1};$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+n+1};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(2n+1)};$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!};$ д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)};$ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2};$

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{2n^2+n-1};$ и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n^2+7)}{3n^2+2n-5};$ к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n};$

Відповідь: а), и) – ряд розбіжний; б), д), ж) – ряд умовно збіжний.
в), г), е), к) – ряд абсолютно збіжний.

Тема 4 Використання системи комп'ютерної математики Maple при розв'язанні типових задач теорії числових рядів

4.1 Обчислення суми скінченного числа доданків

Для обчислення суми скінченного числа доданків в Maple призначені стандартні команди **sum** та **add**:

```
sum(k,k=1..10^2);
add(k,k=1..10^2);
```

$$5050$$

$$5050$$

```
sum(1./k^2,k=1..10);
add(1/k^2,k=1..10);
evalf(%);
```

$$1.549767731$$

$$\frac{1968329}{1270080}$$

$$1.549767731$$

Під час обчислення суми перших десяти доданків – квадратів обернених послідовних натуральних чисел в записі команди **sum** використано запис одного з чисел у вигляді десяткового дробу: «1.», що призвело до видачі результату обчислення також у вигляді десяткового дробу. В загальному випадку для переведення числового виразу в десятковий дріб призначена стандартна команда **evalf**. Символ **%** означає посилання на останній результат; передостанньому результату та тому, що перед ним, Maple присвоює імена **%%** та **%%%** відповідно.

Як видно, основний синтаксис виклику команд **sum** та **add** абсолютно однаковий. Проте в цих командах існують суттєві відмінності.

Основне призначення команди **add –** обчислення суми послідовності чисел. Її основна перевага, порівняно з командою **sum,** – у меншій тривалості обчислень для багатьох подібних випадків.

В контексті ознайомлення з числовими рядами значно більш цікавою є команда **sum**. В цій команді передбачено застосування алгоритмів знаходження аналітичних формул. Проілюструємо це на прикладах. Знайдемо суму арифметичної прогресії

```
sum(a[1]+d*(k-1),k=1..n);
```

$$a_1\,(n+1)+\frac{d\,(n+1)^2}{2}-\frac{3\,d\,(n+1)}{2}-a_1+d$$

Ми отримали аналітичну формулу для обчислення суми перших n членів арифметичної прогресії. На жаль, вигляд цієї формули не збігається з загальновідомими формулами

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+d\cdot(k-1)\right)=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n\,.$$

Застосування команди **simplify** для спрощення виразу в цьому випадку суттєво наближає вигляд аналітичного виразу до загальновідомого

```
sum(a[1]+d*(k-1),k=1..n);
simplify(%);
```

$$a_1\,n+\frac{d\,n^2}{2}-\frac{d\,n}{2}\,,$$

однак необхідно здійснити деякі перетворення, хоча й елементарні, для отримання загальноприйнятого вигляду формули. Подібні ситуації, під час використання стандартних команд Maple для розв’язання типових задач вищої математики, зустрічаються доволі часто. В той же час додаткові можливості, що породжуються використанням СКМ Maple, незіставні з деякими її недоліками, іноді доволі суттєвими.

Знайдемо суму n перших членів геометричної прогресії

```
sum(a[1]*q^(k-1),k=1..n);
Sum(a[1]*q^(k-1),k=1..n)=simplify(%);
```

$$\frac{a_1\,q^{(n+1)}}{q\,(q-1)}-\frac{a_1}{q-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_1\,q^{(k-1)}=\frac{a_1\,(q^n-1)}{q-1}$$

Неактивна форма запису команди **Sum** (з великої букви) використовується для виведення символьного запису знака суми. Звернемо увагу, що отримана формула справедлива тільки за умови $q\neq 1$, однак Maple про це не повідомляє.

Отже, навіть при заданні числових значень першого члена a_1 і знаменника q геометричної прогресії, під час використання команди **sum**, спочатку відбувається пошук аналітичного вигляду для суми перших n членів геометричної прогресії і тільки після цього за цією формулою обчислюється відповідний результат. Якщо для деякого n-го члена аналітичний вираз для суми перших n членів знайти не вдається, то необхідна сума визначається шляхом обчислення величини кожного доданка. Однак пошук зазначеного аналітичного вигляду в деяких випадках може забирати доволі багато часу. В той же час, практично для всіх задач, що зустрічатимуться в цьому посібнику, вказаний недолік команди **sum** буде непомітним.

В підрозділі 1.1 досліджено границю $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Обчислимо відповідні границі за допомогою СКМ Maple

```
Limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-1),n=infinity)=limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-1),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}.$$

В правій частині рівності Maple замість значення границі вивела той самий вихідний вираз, що й отримано за допомогою використання неактивної форми запису команди **Limit**. Це означає, що система не може обчислити задану гранцю. В цьому випадку це відбулось тому, що ми сформулювали задачу недостатньо чітко для системи. Якщо ми вкажемо межі зміни знаменника прогресії, Maple зможе впоратися з завданням. Дійсно,

```
Limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-1),n=infinity),(q>=0 and q<1)
=limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-1),n=infinity) assuming
q>=0,q<1;
Limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-1),n=infinity),(q>=-1 and
q<0)=limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-1),n=infinity) assuming
q>-1,q<=0;
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}, (0 \le q \ \mathbf{and} q < 1) = -\frac{a_1}{q-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}, (\text{-}1 \le q \ \mathbf{and} q < 0) = -\frac{a_1}{q-1}$$

```
Limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-
1),n=infinity),(q>1,a[1]>0)=limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-
1),n=infinity) assuming q>1,a[1]>0;
```

```
> Limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-1),n=infinity),(q<-1,a[1]>0)=limit(1/(q-1)*a[1]*(q^n-1),n=infinity) assuming q<-1,a[1]>0;
```

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(q^n-1)}{q-1},(1<q,0<a_1)=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(q^n-1)}{q-1},(q<-1,0<a_1)=\mathit{undefined}$$

В обох випадках при $q<-1$ або $q>1$ відповідної границі не існує. Проте в першому випадку система видала результат, що дорівнює ∞, а в другому зазначила *undefined* (не існує). Варто замислитись – в чому різниця?

4.2 Обчислення суми ряду за допомогою команди *sum*

В багатьох випадках сума ряду може бути безпосередньо обчислена за допомогою використання стандартної команди **sum**

```
u:=n->1/n^2:
Sum(u(n),n=1..infinity) =sum(u(n),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

```
u:=n->(2*n+1)/2^n:
Sum(u(n),n=1..infinity) =sum(u(n),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}=5$$

У цих випадках ми маємо справу зі збіжними числовими рядами. Тобто, за допомогою використання команди **sum** ми не тільки отримали позитивну відповідь про збіжність досліджених рядів, а й отримали значення суми для кожного ряду.

Іноді в подібних випадках система може знаходити доволі складні символьні вирази суми ряду

```
u:=n->q^n*cos(n*alpha):
Sum(u(n),n=1..infinity) =sum(u(n),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos(n\alpha)=-\frac{q(q-\cos(\alpha))}{-2q\cos(\alpha)+1+q^2}$$

В деяких інших випадках можемо отримати такі результати:

```
u:=n->1/n:
Sum(u(n),n=1..infinity) =sum(u(n),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

```
u:=n->(5*n+1)/(2*n-3):
Sum(u(n),n=1..infinity) =sum(u(n),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\,n+1}{2\,n-3} = \infty$$

Очевидно, що ці результати свідчать про розбіжність відповідних числових рядів.

Зазначимо, що, не зважаючи на продемонстровані вагомі можливості стандартної команди **sum**, нас цікавитиме використання цієї команди тільки для можливості перевірки результатів дослідження збіжності *деяких* числових рядів, яку ми будемо проводити за допомогою ознак збіжності. Це пов’язано з тим, що закладені в основу цієї команди методи залишаються прихованими від користувача. До того ж наша головна задача – навчитись досліджувати числові ряди на збіжність. А це задача набагато простіша, ніж знаходити суму ряду в символьному вигляді.

Крім цього потрібно зазначити, що використання команди **sum** далеко не для всіх рядів дає відповідь на питання про збіжність ряду. Розглянемо два випадки, відповідно, збіжного та розбіжного числових рядів

```
u:=n->1/((n+1)*ln(n+1)^2):
Sum(u(n),n=1..infinity) =sum(u(n),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2}$$

```
u:=n->1/((n+1)*ln(n+1)):
Sum(u(n),n=1..infinity) =sum(u(n),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

В обох випадках в правій частині рівностей замість конкретного результату система повторила символьний запис заданого прикладу. Це означає, що в подібних випадках Maple просто не може знайти суму ряду.

В той же час Maple може допомогти як у дослідженні збіжності числових рядів за допомогою ознак збіжності, так і в наближеному обчисленні сум збіжних рядів. «Наближене обчислення суми збіжного ряду» означає насправді обчислення суми з як завгодно наперед заданою точністю. Ми розглянемо це в подальшому в окремих випадках.

4.3 Необхідна ознака збіжності ряду

В підрозділі 1.3 ми познайомилися з необхідною ознакою збіжності, що полягає в обчисленні границі n-го члена ряду. В цьому ж підрозділі ми розглянули обчислення вказаних границь для деяких числових рядів.

За допомогою Maple цю роботу можна спростити або перевірити.

```
u:=n->(2^(n-1)+1)/2^n:
Limit(u(n),n=infinity)=limit(u(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n-1)}+1}{2^n}=\frac{1}{2}$$

```
u:=n->(5*n+1)/(2*n-3):
Limit(u(n),n=infinity)=limit(u(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\,n+1}{2\,n-3}=\frac{5}{2}$$

В обох випадках під час обчислення границі ми отримали ті самі результати, що були отримані нами в підрозділі 1.3.

В багатьох випадках ми можемо перекласти технічну роботу з обчислення границь на СКМ Maple, що дозволить нам зосередитись на сутності дослідження збіжності числових рядів за допомогою необхідної ознаки збіжності.

Складемо відповідну процедуру в Maple і дамо їй назву **divergenceTest**, пам’ятаючи, що необхідна ознака збіжності насправді є достатньою ознакою розбіжності числового ряду.

```
# Процедура для перевірки збіжності числового ряду за необхідною ознакою
 DivergenceTest:= proc(u) local n,q;
```

```
   if nargs=1 then
    printf(`\n------------------------------------`);
    printf(`\nТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.`);
    printf(`\nДостатня ознака розбіжності числового
ряду:\n`);
    printf(`Якщо `);
    print(Limit(a(n),n=infinity)<>0);
    printf(`то ряд `);
    print(Sum(a[n],n=1..infinity));
    printf(`розбігається.`);

    printf(`\nЯкщо `);
    print(Limit(a[n],n=infinity)=0);
    printf(`то питання про збіжність ряду `);
    print(Sum(a[n],n=1..infinity));
    printf(`залишається відкритим. Для дослідження
збіжності ряду в цьому випадку необхідно застосувати
інші ознаки збіжності`);
    printf(`\n------------------------------------`);
   end if;
printf(`\nДля дослідження на збіжність заданого
ряду\n`);
print(Sum(u(n),n=1..infinity));
printf(`\nзастосуємо необхідну ознаку збіжності.\n`);
printf(`\nОскільки\n`);
   q:=limit(u(n),n=infinity
   if type(evalf(q),extended_numeric)  then
     if evalf(q)<>0 then
print(Limit(u(n),n=infinity)=q,q<>0);printf(`ряд -
розбіжний.`)
     else
      print(Limit(u(n),n=infinity)=q);
      printf(`питання про збіжність ряду залишається
відкритим: необхідно застосувати іншу ознаку
збіжності.`)
     end if
   end if
end proc;
```

Дослідимо числові ряди на збіжність за допомогою створеної процедури.

```
DivergenceTest(n->n/(n+1));
```

```
------------------------------------
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.
Достатня ознака розбіжності числового ряду:
Якщо
```

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}(n) \neq 0$$

```
то ряд
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

```
розбігається.
Якщо
```

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

```
то питання про збіжність ряду
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

```
залишається відкритим. Для дослідження збіжності ряду
в цьому випадку необхідно застосувати інші ознаки
збіжності
------------------------------------
Для дослідження на збіжність заданого ряду
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

```
застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,\ 1 \neq 0$$

```
ряд - розбіжний.
```

```
DivergenceTest(n->n/(n^2+1));
```

```
------------------------------------
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.
Достатня ознака розбіжності числового ряду:
Якщо
```

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{a}(n) \neq 0$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

розбігається.
Якщо

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

то питання про збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

залишається відкритим. Для дослідження збіжності ряду в цьому випадку необхідно застосувати інші ознаки збіжності

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

питання про збіжність ряду залишається відкритим: необхідно застосувати іншу ознаку збіжності.

Процедура створена так, що при передачі більше одного аргумента, стислі теоретичні відомості не виводяться, а тільки результати дослідження конкретного ряду, що переданий своїм n-им членом як перший аргумент процедури.

```
DivergenceTest(n->n/(n+1),0);
```

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\ 1\neq 0$$

ряд - розбіжний.

Такий варіант використання процедури доцільний після багаторазового її використання з одним аргументом, тобто після багаторазового перегляду стислих теоретичних відомостей. В такій ситуації подальше виведення стислих теоретичних відомостей стає зайвим і створює елементи інформаційної надлишковості.

За допомогою створеної процедури можна дослідити на збіжність деяку сукупність числових рядів, що задані списком їх n-их членів.

```
L:=[n->n^2/(5*n^2+2*n+5),n->sqrt(n/(2*n+1)),n->n^3/(n^2+2),n->(n/(n+3))^n,n->n^2*sin(1/n^2),n->n*tan(n/(n^2+1)),n->((3*n+2)/(2*n-3))^n,n->arcsin(n/(n+1)),n->n^2*arctan(n/(n^3+1)),n->n*ln((n+1)/n),n->((n^2+n-1)/(n^2+1))^(1/3),n->((3*n+2)/(4*n-3))^n,n->n^2*sin(1/n^3),n->n*tan(1/(n^2+1))];
for an in L do
 printf(`\n----------------------------------------
`);
printf(`\n-----------------------------------------
`);
DivergenceTest(an,0);
end do:
```

$$L:=\left[n\to\frac{n^2}{5\,n^2+2\,n+5},\ n\to\sqrt{\frac{n}{2\,n+1}},\ n\to\frac{n^3}{n^2+2},\right.$$

$$n\to\left(\frac{n}{n+3}\right)^n,\ n\to n^2\sin\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n\to n\tan\left(\frac{n}{n^2+1}\right),$$

$$n\to\left(\frac{3\,n+2}{2\,n-3}\right)^n,\ n\to\arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right),\ n\to n^2\arctan\left(\frac{n}{n^3+1}\right),$$

$$n\to n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right),\ n\to\left(\frac{n^2+n-1}{n^2+1}\right)^{(1/3)},\ n\to\left(\frac{3\,n+2}{4\,n-3}\right)^n,$$

$$\left.n\to n^2\sin\left(\frac{1}{n^3}\right),\ n\to n\tan\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right]$$

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5\,n^2+2\,n+5}$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5\,n^2+2\,n+5} = \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2\,n+1}}$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2\,n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+2}$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+2} = \infty, \infty \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^n$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^n = \mathbf{e}^{(-3)}, \mathbf{e}^{(-3)} \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1, 1 \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} n \tan\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = 1, 1 \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\,n+2}{2\,n-3}\right)^n$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3\,n+2}{2\,n-3}\right)^n = \infty, \infty \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctan\left(\frac{n}{n^3+1}\right)$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \arctan\left(\frac{n}{n^3+1}\right) = 1, 1 \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1, 1 \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n-1}{n^2+1}\right)^{(1/3)}$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+n-1}{n^2+1}\right)^{(1/3)} = 1, 1 \neq 0$$

ряд - розбіжний.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\,n+2}{4\,n-3}\right)^n$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3\,n+2}{4\,n-3}\right)^n = 0$$

питання про збіжність ряду залишається відкритим:
необхідно застосувати іншу ознаку збіжності.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0$$

питання про збіжність ряду залишається відкритим:
необхідно застосувати іншу ознаку збіжності.

Для дослідження на збіжність заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$$

застосуємо необхідну ознаку збіжності.
Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} n \tan\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$$

питання про збіжність ряду залишається відкритим:
необхідно застосувати іншу ознаку збіжності.

4.4 Інтегральна ознака Коші

В підрозділі 1.4 ми познайомилися з інтегральною ознакою Коші, що полягає в обчисленні невласного інтеграла від функції, що задовольняє умови відповідної теореми.

Складемо відповідну процедуру в Maple і дамо їй назву **IntegralTest**.

```
# Процедура для перевірки збіжності числового ряду за
інтегральною ознакою Коші
IntegralTest:= proc(u,n1) local n,q;
   printf(`\nДослідимо на збіжність числовий ряд\n`);
print(Sum(u(n),n=1..infinity));
printf(`Оскільки \n`);
print(a(n)=u(n),f(x)=u(x));
printf(`тобто \n`);
print(f(n)=a[n]);
printf(`і функція f(x) при x>1 приймає додатні
значення, неперервна і монотонно спадає, тобто
задовольняє усі умови інтегральної ознаки Коші,
обчислимо невласний інтеграл\n`);
 q:=int(u(x),x=n1..infinity):
print(Int(u(x),x=n1..infinity)=q);
printf(`Оскільки `);
if q=infinity or q=undefined then
 printf(`невласний інтеграл виявився розбіжним,
розбіжним є і заданий ряд.`);
else
 printf(`невласний інтеграл виявився збіжним, отже, і
заданий ряд також є збіжним.`);
end if
end proc;
```

Другим параметром процедури задаємо нижню межу інтеграла

```
IntegralTest(n->1/((n+1)*ln(n+1)^2),1);
```

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2}$$

Оскільки

$$a(n) = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2},\ f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)^2}$$

тобто

$$f(n) = a_n$$

і функція f(x) при x>1 приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає, тобто задовольняє усі умови інтегральної ознаки Коші, обчислимо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{\ln(2)}$$

Оскільки невласний інтеграл виявився збіжним, отже, і заданий ряд також є збіжним.

За допомогою створеної процедури можна дослідити на збіжність деяку сукупність числових рядів, що задані списком залежностей їх загальних членів від індексу підсумовування.

```
L:=[n->1/(n*sqrt(ln(n))),n->1/(n*(ln(n))^4),n->1/(n*(ln(n))^(1/4)),n->arctan(n)/(1+n^2),n->n*exp(-n^2)];
for an in L do
 printf(`\n---------------------------------------------
`);
printf(`\n---------------------------------------------
`);
IntegralTest(an,2);
end do:
```

$$L := \left[n \to \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}},\ n \to \frac{1}{n\ln(n)^4},\ n \to \frac{1}{n\ln(n)^{(1/4)}},\ n \to \frac{\arctan(n)}{n^2+1},\ n \to n\,\mathbf{e}^{(-n^2)} \right]$$

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$$

Оскільки

$$a(n)=\frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}},\ f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

тобто

$$f(n)=a_n$$

і функція f(x) при x>1 приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає, тобто задовольняє усі умови інтегральної ознаки Коші, обчислимо невласний інтеграл

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\,dx=\infty$$

Оскільки невласний інтеграл виявився розбіжним, розбіжним є і заданий ряд.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)^4}$$

Оскільки

$$a(n)=\frac{1}{n\ln(n)^4},\ f(x)=\frac{1}{x\ln(x)^4}$$

тобто

$$f(n)=a_n$$

і функція f(x) при x>1 приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає, тобто задовольняє усі умови інтегральної ознаки Коші, обчислимо невласний інтеграл

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^4}\,dx=\frac{1}{3}\,\frac{1}{\ln(2)^3}$$

Оскільки невласний інтеграл виявився збіжним, отже, і заданий ряд також є збіжним.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^{(1/4)}}$$

Оскільки

$$a(n) = \frac{1}{n \ln(n)^{(1/4)}}, \ f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^{(1/4)}}$$

тобто

$$f(n) = a_n$$

і функція f(x) при x>1 приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає, тобто задовольняє усі умови інтегральної ознаки Коші, обчислимо невласний інтеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)^{(1/4)}}\, dx = \infty$$

Оскільки невласний інтеграл виявився розбіжним, розбіжним є і заданий ряд.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1}$$

Оскільки

$$a(n) = \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1}, \ f(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1}$$

тобто

$$f(n) = a_n$$

і функція f(x) при x>1 приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає, тобто задовольняє усі умови інтегральної ознаки Коші, обчислимо невласний інтеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1}\, dx = -\frac{1}{2} \arctan(2)^2 + \frac{\pi^2}{8}$$

Оскільки невласний інтеграл виявився збіжним, отже, і заданий ряд також є збіжним.

```
----------------------------------------
Дослідимо на збіжність числовий ряд
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbf{e}^{(-n^2)}$$

```
Оскільки
```

$$a(n) = n\,\mathbf{e}^{(-n^2)},\ f(x) = x\,\mathbf{e}^{(-x^2)}$$

```
тобто
```

$$f(n) = a_n$$

```
і функція f(x) при x>1 приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає, тобто задовольняє усі умови інтегральної ознаки Коші, обчислимо невласний інтеграл
```

$$\int_2^{\infty} x\,\mathbf{e}^{(-x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-4)}$$

```
Оскільки невласний інтеграл виявився збіжним, отже, і заданий ряд також є збіжним.
```

4.5 Ознака Д'Аламбера

З ознакою Д'Аламбера ми познайомилися в підрозділі 2.3. Ця ознака базується на обчисленні границі $q = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Складемо відповідну процедуру в Maple і дамо їй назву **DAlembertsTest**.

```
# Процедура для перевірки збіжності числового ряду за ознакою Д'Аламбера
DAlembertsTest:= proc(u) local n,q;
   printf(`\nДослідимо на збіжність числовий ряд\n`);
print(Sum(u(n),n=1..infinity));
printf(`Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення \n`);
q:=limit(u(n+1)/u(n),n=infinity):
print(Limit(a(n+1)/a(n),n=infinity)=Limit([u(n+1)]/[u(n)],n=infinity));
print(Limit([u(n+1)]/[u(n)],n=infinity)=Limit(u(n+1)/u(n),n=infinity));
```

```
if evalf(q)<1 then
 print(Limit(u(n+1)/u(n),n=infinity)=q,q<1);
 printf(`отже, заданий ряд - збіжний.\n`)
elif evalf(q)>1 then
  print(Limit(u(n+1)/u(n),n=infinity)=q,q>1);
 printf(`отже, заданий ряд - розбіжний.\n`)
else
 print(Limit(u(n+1)/u(n),n=infinity)=q);
 printf(`\n Отже, ознака Д'Аламбера не дає відповіді
на питання про збіжність заданого ряду. Необхідно
застосувати іншу ознаку збіжності.`)
end if
end proc:
DAlembertsTest(n->1/2^n);
```

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{a}(n+1)}{\mathrm{a}(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left[\frac{1}{2^{(n+1)}}\right]}{\left[\frac{1}{2^n}\right]}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left[\frac{1}{2^{(n+1)}}\right]}{\left[\frac{1}{2^n}\right]} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^{(n+1)}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^{(n+1)}} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

За допомогою створеної процедури можна дослідити на збіжність деяку сукупність числових рядів, що задані списком залежностей їх загальних членів від індексу підсумовування.

```
L:=[n->1/n!,n->2^n/n,n->1/n^1,n->1/n^2,n-
>(3*n+2)/5^n,n->n!/(n^2+2),n->n^2/(2*n)!,n-
>n*5^n/4^(n-2),n->n^4/3^(n+1),n->((n+1)*2^(n-
```

```
1))/(n^2+3),n->n*arcsin(1/3^n),n->n!/(10^n*(2*n-
1)),n->n*3^(n-1)/(2*n-3)!,n->n^2*arctan(n/3^n),n-
>5^(2*n-1)/(n+1)!,n->(n+1)/exp(n),n->(3*n-1)/n!,n-
>(2*n+1)!/(3*n-1)!,n->(5*n+1)/(n^2*4^n)^(1/3)];
for an in L do
 printf(`\n-------------------------------------------
`);
printf(`\n--------------------------------------------
`);
DAlembertsTest(an);
end do:
```

$$L := \left[n \to \frac{1}{n!}, n \to \frac{2^n}{n}, n \to \frac{1}{n}, n \to \frac{1}{n^2}, n \to \frac{3\,n+2}{5^n}, n \to \frac{n!}{n^2+2}, n \to \frac{n^2}{(2\,n)!}, n \to \frac{n\,5^n}{4^{(n-2)}}, n \to \frac{n^4}{3^{(n+1)}}, n \to \frac{(n+1)\,2^{(n-1)}}{n^2+3}, n \to n \arcsin\left(\frac{1}{3^n}\right), n \to \frac{n!}{10^n\,(2\,n-1)}, n \to \frac{n\,3^{(n-1)}}{(2\,n-3)!}, n \to n^2 \arctan\left(\frac{n}{3^n}\right), n \to \frac{5^{(2\,n-1)}}{(n+1)!}, n \to \frac{n+1}{\mathrm{e}^n}, n \to \frac{3\,n-1}{n!}, n \to \frac{(2\,n+1)!}{(3\,n-1)!}, n \to \frac{5\,n+1}{(n^2\,4^n)^{(1/3)}} \right]$$

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{a}(n+1)}{\mathrm{a}(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left[\frac{1}{(n+1)!}\right]}{\left[\frac{1}{n!}\right]}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left[\frac{1}{(n+1)!}\right]}{\left[\frac{1}{n!}\right]} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = 0,\ 0 < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{2^{(n+1)}}{n+1}\right]}{\left[\frac{2^n}{n}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{2^{(n+1)}}{n+1}\right]}{\left[\frac{2^n}{n}\right]} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)}\,n}{(n+1)\,2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)}\,n}{(n+1)\,2^n} = 2,\ 1 < 2$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{1}{n+1}\right]}{\left[\frac{1}{n}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{1}{n+1}\right]}{\left[\dfrac{1}{n}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Отже, ознака Д'Аламбера не дає відповіді на питання про збіжність заданого ряду. Необхідно застосувати іншу ознаку збіжності.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{a(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]}{\left[\dfrac{1}{n^2}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]}{\left[\dfrac{1}{n^2}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

Отже, ознака Д'Аламбера не дає відповіді на питання про збіжність заданого ряду. Необхідно застосувати іншу ознаку збіжності.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5^n}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left[\frac{3n+5}{5^{(n+1)}}\right]}{\left[\frac{3n+2}{5^n}\right]}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left[\frac{3n+5}{5^{(n+1)}}\right]}{\left[\frac{3n+2}{5^n}\right]} = \lim_{n \to \infty} \frac{(3n+5)\,5^n}{5^{(n+1)}\,(3n+2)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(3n+5)\,5^n}{5^{(n+1)}\,(3n+2)} = \frac{1}{5}, \frac{1}{5} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^2+2}\right]}{\left[\frac{n!}{n^2+2}\right]}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^2+2}\right]}{\left[\frac{n!}{n^2+2}\right]} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!\,(n^2+2)}{((n+1)^2+2)\,n!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!\,(n^2+2)}{((n+1)^2+2)\,n!} = \infty, 1 < \infty$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{a(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{(n+1)^2}{(2n+2)!}\right]}{\left[\frac{n^2}{(2n)!}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{(n+1)^2}{(2n+2)!}\right]}{\left[\frac{n^2}{(2n)!}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)!\,n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)!\,n^2}=0,\ 0<1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,5^n}{4^{(n-2)}}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{a(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{(n+1)\,5^{(n+1)}}{4^{(n-1)}}\right]}{\left[\frac{n\,5^n}{4^{(n-2)}}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{(n+1)\,5^{(n+1)}}{4^{(n-1)}}\right]}{\left[\frac{n\,5^n}{4^{(n-2)}}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,5^{(n+1)}\,4^{(n-2)}}{4^{(n-1)}\,n\,5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,5^{(n+1)}\,4^{(n-2)}}{4^{(n-1)}\,n\,5^n}=\frac{5}{4},\ 1<\frac{5}{4}$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^{(n+1)}}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(n+1)^4}{3^{(n+2)}}\right]}{\left[\frac{n^4}{3^{(n+1)}}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(n+1)^4}{3^{(n+2)}}\right]}{\left[\frac{n^4}{3^{(n+1)}}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4\, 3^{(n+1)}}{3^{(n+2)}\, n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4\, 3^{(n+1)}}{3^{(n+2)}\, n^4} = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\, 2^{(n-1)}}{n^2+3}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(n+2)\, 2^n}{(n+1)^2+3}\right]}{\left[\frac{(n+1)\, 2^{(n-1)}}{n^2+3}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(n+2)\, 2^n}{(n+1)^2+3}\right]}{\left[\frac{(n+1)\, 2^{(n-1)}}{n^2+3}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\, 2^n\, (n^2+3)}{((n+1)^2+3)\,(n+1)\, 2^{(n-1)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\, 2^n\, (n^2+3)}{((n+1)^2+3)\,(n+1)\, 2^{(n-1)}} = 2, 1 < 2$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[(n+1)\arcsin\left(\frac{1}{3^{(n+1)}}\right)\right]}{\left[n\arcsin\left(\frac{1}{3^n}\right)\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[(n+1)\arcsin\left(\frac{1}{3^{(n+1)}}\right)\right]}{\left[n\arcsin\left(\frac{1}{3^n}\right)\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\arcsin\left(\frac{1}{3^{(n+1)}}\right)}{n\arcsin\left(\frac{1}{3^n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\arcsin\left(\frac{1}{3^{(n+1)}}\right)}{n\arcsin\left(\frac{1}{3^n}\right)} = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n (2n-1)}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(n+1)!}{10^{(n+1)}(2n+1)}\right]}{\left[\frac{n!}{10^n(2n-1)}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(n+1)!}{10^{(n+1)}(2n+1)}\right]}{\left[\frac{n!}{10^{n}(2n-1)}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,10^{n}(2n-1)}{10^{(n+1)}(2n+1)\,n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,10^{n}(2n-1)}{10^{(n+1)}(2n+1)\,n!} = \infty,\ 1 < \infty$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,3^{(n-1)}}{(2n-3)!}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(n+1)\,3^{n}}{(2n-1)!}\right]}{\left[\frac{n\,3^{(n-1)}}{(2n-3)!}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(n+1)\,3^{n}}{(2n-1)!}\right]}{\left[\frac{n\,3^{(n-1)}}{(2n-3)!}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,3^{n}\,(2n-3)!}{(2n-1)!\,n\,3^{(n-1)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,3^{n}\,(2n-3)!}{(2n-1)!\,n\,3^{(n-1)}} = 0,\ 0 < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2}\arctan\left(\frac{n}{3^{n}}\right)$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{a(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)^2\arctan\left(\frac{n+1}{3^{(n+1)}}\right)\right]}{\left[n^2\arctan\left(\frac{n}{3^n}\right)\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)^2\arctan\left(\frac{n+1}{3^{(n+1)}}\right)\right]}{\left[n^2\arctan\left(\frac{n}{3^n}\right)\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\arctan\left(\frac{n+1}{3^{(n+1)}}\right)}{n^2\arctan\left(\frac{n}{3^n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\arctan\left(\frac{n+1}{3^{(n+1)}}\right)}{n^2\arctan\left(\frac{n}{3^n}\right)}=\frac{1}{3},\frac{1}{3}<1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{(2n-1)}}{(n+1)!}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{a(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{5^{(2n+1)}}{(n+2)!}\right]}{\left[\frac{5^{(2n-1)}}{(n+1)!}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{5^{(2n+1)}}{(n+2)!}\right]}{\left[\frac{5^{(2n-1)}}{(n+1)!}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{(2n+1)}(n+1)!}{(n+2)!\,5^{(2n-1)}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{(2n+1)}(n+1)!}{(n+2)!\,5^{(2n-1)}}=0,\ 0<1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\mathbf{e}^n}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{n+2}{\mathbf{e}^{(n+1)}}\right]}{\left[\frac{n+1}{\mathbf{e}^n}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{n+2}{\mathbf{e}^{(n+1)}}\right]}{\left[\frac{n+1}{\mathbf{e}^n}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\,\mathbf{e}^n}{\mathbf{e}^{(n+1)}\,(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\,\mathbf{e}^n}{\mathbf{e}^{(n+1)}\,(n+1)} = \mathbf{e}^{(-1)}, \mathbf{e}^{(-1)} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n-1}{n!}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{3\,n+2}{(n+1)!}\right]}{\left[\frac{3\,n-1}{n!}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{3\,n+2}{(n+1)!}\right]}{\left[\frac{3\,n-1}{n!}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3\,n+2)\,n!}{(n+1)!\,(3\,n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3\,n+2)\,n!}{(n+1)!\,(3\,n-1)} = 0, 0 < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\,n+1)!}{(3\,n-1)!}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(2\,n+3)!}{(3\,n+2)!}\right]}{\left[\frac{(2\,n+1)!}{(3\,n-1)!}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(2\,n+3)!}{(3\,n+2)!}\right]}{\left[\frac{(2\,n+1)!}{(3\,n-1)!}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\,n+3)!\,(3\,n-1)!}{(3\,n+2)!\,(2\,n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2\,n+3)!\,(3\,n-1)!}{(3\,n+2)!\,(2\,n+1)!} = 0,\ 0<1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\,n+1}{(n^2\,4^n)^{(1/3)}}$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера та обчислимо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{5\,n+6}{((n+1)^2\,4^{(n+1)})^{(1/3)}}\right]}{\left[\frac{5\,n+1}{(n^2\,4^n)^{(1/3)}}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{5\,n+6}{((n+1)^2\,4^{(n+1)})^{(1/3)}}\right]}{\left[\frac{5\,n+1}{(n^2\,4^n)^{(1/3)}}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(5\,n+6)\,(n^2\,4^n)^{(1/3)}}{((n+1)^2\,4^{(n+1)})^{(1/3)}\,(5\,n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(5\,n+6)\,(n^2\,4^n)^{(1/3)}}{((n+1)^2\,4^{(n+1)})^{(1/3)}\,(5\,n+1)} = \frac{4^{(2/3)}}{4},\ \frac{4^{(2/3)}}{4} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

4.6 Радикальна ознака Коші

З радикальною ознакою Коші ми познайомилися в підрозділі 2.4. Ця ознака базується на обчисленні границі $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Складемо відповідну процедуру в Maple і дамо їй назву **CauchyRootTest**.

```
# Процедура для перевірки збіжності числового ряду за
радикальною ознакою Коші
CauchyRootTest:= proc(u) local n,q,q1;
   printf(`\nДослідимо на збіжність числовий ряд\n`);
print(Sum(u(n),n=1..infinity));
printf(`Застосуємо радикальну ознаку Коші та
обчислимо границю виразу \n`);
q:=limit(u(n)^(1/n),n=infinity):
q1:=combine(u(n)^(1/n),power)  assuming n >0:
#print(Limit(u(n)^(1/n),n=infinity)=Limit([u(n+1)]/[u
(n)],n=infinity));
print(Limit(a(n)^(1/n),n=infinity)=Limit(u(n)^(1/n),n
=infinity));

print(Limit(u(n)^(1/n),n=infinity)=Limit(q1,n=infinit
y));
if evalf(q)<1 then
 print(Limit(q1,n=infinity)=q,q<1);
 printf(`отже, заданий ряд - збіжний.\n`)
elif evalf(q)>1 then
  print(Limit(q1,n=infinity)=q,q>1);
 printf(`отже, заданий ряд - розбіжний.\n`)
else
 print(Limit(q1,n=infinity)=q);
 printf(`Отже, радикальна ознака Коші не дає
відповіді на питання про збіжність заданого ряду.
Необхідно застосувати іншу ознаку збіжності.`)
end if
end proc;
```

```
 CauchyRootTest(n->(1+1/n)^(n^2));
Дослідимо на збіжність числовий ряд
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}+1\right)^{(n^2)}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} a(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{(n^2)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{(n^2)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}+1\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}+1\right)^{n} = \mathbf{e},\ 1 < \mathbf{e}$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

За допомогою створеної процедури можна дослідити на збіжність деяку сукупність числових рядів, що задані списком залежностей їх загальних членів від індексу підсумовування.

```
L:=[n->(n/(2*n+1))^n,n->1/n^p,n->((2*n-
3)/(3*n+1))^n,n->sin(n/(n^2+1))^n,n-
>arctan((n^2+1)/(n^3-2))^(n+1),n-
>arcsin((n+3)/(n+1))^n,n->((5*n+6)/(2*n+1))^(n-2),n-
>3^(n+2)/n^n,n->((3*n-1)/(3*n+2))^(2*n^2-3),n-
>((n^2+2*n)/(n^2+4))^(3*n^2+1),n->ln(n^2/(n+1))^n,n-
>4^n/arctan(n/(n+2))^(n-3),n->tan((n+3)/n^2)^(n+1),n-
>arcsin((n+1)/(2*n+5))^(3*n-1),n-
>((5*n^2+4)/(2*n^2+n+1))^n,n->((2*n-
3)/(2*n+3))^(3*n^2+1)/3^n,n->sin(1/n)^n/5^(n+2)];
for an in L do
 printf(`\n-----------------------------------------
`);
printf(`\n-----------------------------------------
`);
CauchyRootTest(an);
end do:
```

$$L := \left[n \to \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n,\ n \to \frac{1}{n^p},\ n \to \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^n, \right.$$

$$n \to \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n,\ n \to \arctan\left(\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{(n+1)},$$

$$n \to \arcsin\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n,\ n \to \left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{(n-2)},\ n \to \frac{3^{(n+2)}}{n^n},$$

$$n \to \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{(2n^2-3)},\ n \to \left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{(3n^2+1)},$$

$$n \to \ln\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^n,\ n \to \frac{4^n}{\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n-3)}},$$

$$n \to \tan\left(\frac{n+3}{n^2}\right)^{(n+1)},\ n \to \arcsin\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^{(3n-1)},$$

$$\left. n \to \left(\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1}\right)^n,\ n \to \frac{\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{(3n^2+1)}}{3^n},\ n \to \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)^n}{5^{(n+2)}} \right]$$

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\,n+1} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{(-p)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^{(-p)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

Отже, радикальна ознака Коші не дає відповіді на питання про збіжність заданого ряду. Необхідно застосувати іншу ознаку збіжності.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\,n-3}{3\,n+1}\right)^n$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2\,n-3}{3\,n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2\,n-3}{3\,n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2\,n-3}{3\,n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}<1$$

Отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{a}(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}=0,\ 0<1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{(n+1)}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{a}(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\left(\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{(n+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\left(\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{(n+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\left(\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{(n+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\left(\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{(n+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = 0,\ 0 < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} a(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\pi}{2},\ 1 < \frac{\pi}{2}$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{(n-2)}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} a(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{(n-2)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{(n-2)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{\left(\frac{n-2}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5\,n+6}{2\,n+1}\right)^{\left(\frac{n-2}{n}\right)} = \frac{5}{2}, 1 < \frac{5}{2}$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{(n+2)}}{n^n}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{(n+2)}}{n^n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{(n+2)}}{n^n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} (9\;3^n\,n^{(-n)})^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} (9\;3^n\,n^{(-n)})^{\left(\frac{1}{n}\right)} = 0, 0 < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\,n-1}{3\,n+2}\right)^{(2\,n^2-3)}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3\,n-1}{3\,n+2}\right)^{(2\,n^2-3)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3\,n-1}{3\,n+2}\right)^{(2\,n^2-3)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3\,n-1}{3\,n+2}\right)^{(2\,n^2-3)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3\,n-1}{3\,n+2}\right)^{(2\,n^2-3)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \mathbf{e}^{(-2)}, \mathbf{e}^{(-2)} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2\,n}{n^2+4}\right)^{(3\,n^2+1)}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n^2+2\,n}{n^2+4}\right)^{(3\,n^2+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n^2+2\,n}{n^2+4}\right)^{(3\,n^2+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2\,n}{n^2+4}\right)^{\left(\frac{3\,n^2+1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2\,n}{n^2+4}\right)^{\left(\frac{3\,n^2+1}{n}\right)} = \mathbf{e}^6, 1 < \mathbf{e}^6$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^n$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \infty,\ 1<\infty$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n-3)}}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} a(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n}{\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n-3)}}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n}{\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n-3)}}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(4^n\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(-n+3)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(4^n\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(-n+3)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{16}{\pi},\ 1<\frac{16}{\pi}$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{n+3}{n^2}\right)^{(n+1)}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} a(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\tan\left(\frac{n+3}{n^2}\right)^{(n+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tan\left(\frac{n+3}{n^2}\right)^{(n+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\tan\left(\frac{n+3}{n^2}\right)^{(n+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tan\left(\frac{n+3}{n^2}\right)^{(n+1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = 0,\ 0 < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{n+1}{2\,n+5}\right)^{(3\,n-1)}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} a(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\arcsin\left(\frac{n+1}{2\,n+5}\right)^{(3\,n-1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\arcsin\left(\frac{n+1}{2\,n+5}\right)^{(3\,n-1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\arcsin\left(\frac{n+1}{2\,n+5}\right)^{(3\,n-1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\arcsin\left(\frac{n+1}{2\,n+5}\right)^{(3\,n-1)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\pi^3}{216}, \frac{\pi^3}{216} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5\,n^2+4}{2\,n^2+n+1}\right)^n$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} a(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{5\,n^2+4}{2\,n^2+n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{5\,n^2+4}{2\,n^2+n+1}\right)^n\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\,n^2+4}{2\,n^2+n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5\,n^2+4}{2\,n^2+n+1} = \frac{5}{2},\ 1 < \frac{5}{2}$$

отже, заданий ряд - розбіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2\,n-3}{2\,n+3}\right)^{(3\,n^2+1)}}{3^n}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty} a(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{2\,n-3}{2\,n+3}\right)^{(3\,n^2+1)}}{3^n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{2\,n-3}{2\,n+3}\right)^{(3\,n^2+1)}}{3^n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2\,n-3}{2\,n+3}\right)^{(3\,n^2+1)} 3^{(-n)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2\,n-3}{2\,n+3}\right)^{(3\,n^2+1)} 3^{(-n)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \mathbf{e}^{(-9-\ln(3))},\ \mathbf{e}^{(-9-\ln(3))} < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

Дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)^{n}}{5^{(n+2)}}$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислимо границю виразу

$$\lim_{n \to \infty} a(n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)^{n}}{5^{(n+2)}}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)^{n}}{5^{(n+2)}}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{25} \sin\left(\frac{1}{n}\right)^{n} 5^{(-n)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{25} \sin\left(\frac{1}{n}\right)^{n} 5^{(-n)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = 0,\ 0 < 1$$

отже, заданий ряд - збіжний.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І., Ковальчук М. Б. Теорія рядів : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2008. 138 с.
2. Литвинюк В. П. Диференціальні рівняння. Ряди : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2003. 81 с.
3. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій. (ІІ курс Ш семестр) / Уклад.: В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний, К. : НТУУ «КПІ», 2013. 108 с.
4. Математика в сучасному технічному університеті. Практикум. Частина 4. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний [та ін.]; НТУУ «КПІ». Електронні текстові дані (1 файл: 2,19 Мбайт). Київ : НТУУ «КПІ», 2015. 159 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/16627
5. Вища математика: ряди та їх застосування, теорія функцій комплексної змінної : конспект лекцій / [Н. Д. Федоренко та ін.]. К. : КНУБА, 2015. 60 с.
6. Бакун В. В. Математичний аналіз : підручник у 3-х ч. Ч. 3. Числові й функціональні ряди. Інтеграли, залежні від параметра. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 435 с.
7. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. К. : ИгнатексУкраїна, 2013. 648 с.
8. Вища математика : підручник : у 2 кн. Кн. 2 / Кулініч Г. Л. та ін. ; за ред. Г. Л. Кулініча. К. : Либідь, 2003. 368 с.
9. Числові та функціональні ряди. Ряди Фур'є. Метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання / Укладачі: М. І. Чернєй, Г. К. Новикова, Н. Л. Денисенко. К. : НТУУ «КПІ», 2016. 62 с.
10. Збірник задач з математичного аналізу. Ч. 2 / за ред. проф. Ю. К. Ру-давського. Львів : Видавництво НУ «Львівська політехніка», 2003. 232 с.
11. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навч. посіб. Ч. 3. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі.К. : Книги України ЛТД, 2009. 400 с.
12. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика : підручник. Д. : Видавництво Сталкер, 2003. 496 с.
13. Вища математика із застосуванням інформаційних технологій : підр. / Іващенко В. П., Швачич Г. Г., Коноваленков В. С., Заборова Т. М. Дніпропетровськ, 2013. 425 с.

Навчальне електронне видання
комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Володимир Маркусович Михалевич
Оксана Іванівна Тютюнник

ВИЩА МАТЕМАТИКА З MAPLE ПІДТРИМКОЮ.
ТЕОРІЯ РЯДІВ
Ч. 1
ЧИСЛОВІ РЯДИ

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *О. Тютюнник*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет виготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 07.12.2023 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2023-148.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: irvc.ed.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009