Н. В. Сачанюк-Кавецька, М.Б. Ковальчук

Збірник тестових завдань з вищої математики для систематизації та узагальнення знань (з теоретичною підримкою). Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Навчальний посібник

Вінниця

2014

УДК [512+514] (075)
ББК [22.14+22.15]я73

Автори:
Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 10 від 29 травня 2014 р.)

Рецензенти:

Сохацький Ф.М., доктор фізико-математичних наук, професор
Іванченко Є.А., доктор педагогічних наук, професор
Хом'юк І.В., доктор педагогічних наук, професор

С22 **Сачанюк-Кавецька Н.В.**
Збірник тестових завдань для систематизації та узагальнення знань з вищої математики. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навчальний посібник /Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б. – Вінниця: ВНТУ, 2014. –137с.
ISBN

У навчальному посібнику вміщено грунтовно проілюстровані теоретичні відомості та добірку тестових завдань для узагальнення та систематизації знань з лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Особливістю даного посібника є доступність викладення теоретичного матеріалу та велика кількість розв'язаних типових задач, що дозволяє активізувати самостійну роботу студентів.

Запропоновані тестові завдання можуть використовувати, як викладачі для поточного чи рубіжного контролю рівня засвоєння знань, так і студенти для самоконтролю.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК [512+514] (075)
ББК [22.14+22.15]я73

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Сьогодні в Україні йде становлення нової системи освіти, яка зорієнтована на входження в єдиний світовий освітній та інформаційний простір. Цей процес супроводжується істотними змінами в педагогічній теорії і практиці навчально-виховного процесу. Досягнення сучасної науки висувають новітні вимоги до професійної освіти інженерів. Математика настільки глибоко проникла в різні галузі науки та техніки, що інколи складно виокремити технічні знання від математичних. Тому сьогодні коректніше вести мову не про використання математики, а про взаємодію технічної та математичної наук, розвиток наукового мислення студентів.

Абстрактний характер вищої математики як навчального предмета, дедуктивний спосіб викладення матеріалу обумовлює специфіку мислення, яке називають математичним. Метою вичення вищої математики є :

- формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту, аналітичного та синтетичного мислення, відповідної математичної культури, інтуїції;
- оволодіння математичним апаратом, необхідним для вивчення загально інженерних та спеціальних дисциплін, розвиток здібностей свідомого сприйняття математичного матеріалу, характерного для спеціальності інженера;
- оволодіння основними математичними методами, необхідними для аналізу і моделювання пристроїв, процесів і явищ, пошуків оптимальних рішень з метою підвищення ефективності виробництва і вибору найкращих способів реалізації цих рішень, опрацювання і аналізу результатів експериментів;
- оволодіння вмінням самостійно працювати з математичною літературою.

Лінійна алгебра та аналітична геометрія є першим змістовим модулем дисципліни «Вища математика» для напрямів підготовки 6.050702 – «Електромеханіка» та 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології» і складається із таких тем:

- Матриці, види матриць, дії над ними.
- Визначники другого та третього порядку, їх обчислення. Визначники *n*-го порядку, їх властивості та обчислення. Поняття оберненої матриці. Алгебраїчні доповнення та мінори.
- Системи лінійних рівнянь. Матрична форма запису системи лінійних рівнянь. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь: метод Гаусса, правило Крамера, метод звичайних жорданівських виключень, матричний метод.

- Поняття вектора та їх види. Лінійні операції над векторами. Проекція вектора на вісь. Лінійно залежні та лінійно незалежні вектори. Системи координат: афінна, полярна, сферична, циліндрична.
- Скалярний добуток векторів та його властивості. Кут між векторами в координатній формі. Умова ортогональності двох векторів. Механічний зміст скалярного добутку. Напрямні косинуси.
- Векторний добуток векторів та його властивості. Мішаний добуток двох векторів. Геометричний зміст визначника третього порядку.
- Рівняння лінії на площині. Різні форми рівняння прямої на площині. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.
- Рівняння площини і прямої в просторі. Кут між площинами. Кут між прямими. Кут між прямою та площиною.
- Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола, їх геометричні властивості та рівняння. Технічні застосування геометричних властивостей кривих (використання фокальних властивостей).

В процесі навчання векторної алгебри та аналітичної геометрії основна увага приділяється формуванню знань, що розуміються як система представлень, понять, теорем та застосуванню знань до розв’язування практичних і теоретичних задач, тобто формування умінь і навичок.

Узагальнення і систематизація в процесі навчання здійснюється як під час вивчення теоретичних знань (понять, теорем, правил, дій, способів діяльності і т.п.), так і в період формування навичок і умінь.

Сучасними формами узагальнення навчального матеріалу є, зокрема, модульні технології, які забезпечують цілісність і наступність у навчанні. У нових кредитно-модульних технологіях обов’язково враховується мотивація і організація засвоєння знань. Адже цілком раціональним і доцільним є співвідношення: давати студентам стільки знань, скільки їм потрібно для успішної майбутньої професійної діяльності. Модульний контроль при цьому є останньою ланкою в навчальному процесі.

Досвід викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії і аналіз навчальної програми цього курсу, дозволили нам виділити структуру та зміст модулів, а також особливості організації навчальної діяльності студентів при навчанні в умовах модульно-рейтингової форми навчання.

Кожен модуль можна розробити за такою схемою:

1) основні теоретичні питання модуля;
2) основні типи задач;
3) основні форми контролю.

Необхідність забезпечення контролю й оцінювання не тільки результату, а й процесу навчання сприяє пошуку оперативних та об'єктивних методів контролю знань. Система оцінки і контролю повинна відповідати вимогам управління пізнавальною діяльністю студентів і виступати в ролі відповідного інструментарію для її здійснення.

Сучасна методика пропонує тест, як інструмент вимірювання рівня знань, за допомогою якого можна не тільки виявити якість навчання, але і оптимально керувати навчальним процесом. Тестування – це не модна новація, а прогресивний метод діагностики рівня навчальних досягнень Тому для узагальнюючого повторення та систематизації знань з різних тем лінійної алгебри та аналітичної геометрії доцільно використовувати тестові завдання.

Можна використовувати тестові завдання різних типів, наприклад: закритого типу, відкритого типу, на відповідність, на правильну послідовність. Зрозуміло, що комбінування традиційних та інноваційних технологій є доцільним: на одних етапах узагальнення застосувати тестування, на інших – усне опитування й контрольні роботи. Ці форми роботи взаємодоповнюють одна одну.

Особливістю даного посібника є доступність викладення теоретичного матеріалу та велика кількість розв'язаних типових задач, що дозволяє студентам денної та заочної форм навчання працювати з ним самостійно. Тестові завдання, розроблені авторами, можуть використовувати як викладачі для поточного та рубіжного контролю, так і студенти для самоконтролю рівня засвоєння знань.

В результаті опрацювання матеріалів даного посбника студенти повинні знати:

- матриці, види матриць та дії з ними;
- визначники та їх властивості;
- системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язування;
- вектори і дії над ними;
- системи координат;
- канонічні рівняння прямої і площини;
- рівняння кривих другого порядку

та вміти:

- виконувати дії з матрицями, знаходити обернену матрицю;
- обчислювати визначники довільних порядків;
- розв'язувати системи лінійних рівнянь методами Гаусса, Крамера, матричним методом;
- переходити від однієї системи координат до іншої;
- виконувати дії над векторами:
- складати канонічні рівняння прямої і площини;
- складати рівняння кривих другого порядку та визначати їх характеристики.

ЧАСТИНА 1

ТЕМА 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ ТА ВИЗНАЧНИКІВ

1.1 Поняття матриці. Види матриць

Означення 1.1 Довільна множина чисел, поданих у вигляді прямокутної таблиці, що складається з m рядків і n стовпців, називається матрицею розмірності $m \times n$.

Матриці записують так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

де a_{ij} – елемент матриці, i – номер рядка, j – номер стовпця.

Матриці для скорочення позначають однією великою буквою латинської абетки *A, B* і т.д. або $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Виділимо окремі *види* найбільш уживаних *матриць*.

1. Якщо $m = n$ то матриця називається *квадратною*, а число n називають порядком матриці.
2. Матрицю розмірності $m \times 1$ називають *вектор-стовпцем*.
3. Матрицю розмірності $1 \times n$ називають *вектор-рядком*.
4. Нехай маємо квадратну матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

елементи з однаковими індексами a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} утворюють *головну діагональ* матриці, а елементи a_{1n}, $a_{2,n-1}$, …, a_{n1} – *побічну діагональ*.

5. Матриця називається *нульовою, або нуль-матрицею*, якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Нульова матриця позначається O або *(0)*.
6. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо відмінні від нуля елементи стоять лише на головній діагоналі. Наприклад, даігональна

матриця третього порядку така: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} \neq 0, i = 1,2,..n$

7. Діагональна матриця, всі діагональні елементи якої рівні між собою, називається *скалярною* матрицею. Наприклад, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
8. Скалярна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють 1, називається *одиничною*. Позначається така матриця символом *E*.
9. Квадратна матриця в якій всі елементи, що стоять під або над головною діагоналлю дорівнюють нулю, називається *трикутною*. Наприклад,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

10. Квадратна матриця називається *симетричною*, якщо рівні її елементи, розташовані симетрично відносно головної діагоналі $a_{ij} = a_{ji}$. Можливий вигляд симетричної матриці такий:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Квадратна матриця називається *кососиметричною*, якщо $a_{ij} = -a_{ji}$ і головна діагональ складається з нулів. Можливий вигляд кососиметричної матриці такий:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.2 Слідом квадратної матриці A n-го порядку (позначення $tr(A)$ від англійсього слова “trace”) називають суму її діагональних елементів:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1.2 Операції над матрицями

<u>Порівняння матриць</u>. Дві матриці A і B називають рівними *(A=B),* якщо вони мають однакову розмірність (тобто однакову кількість рядків і однакову кількість стовпців) і їх відповідні елементи рівні.

Так, якщо $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 22 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то A=B,

якщо $a_{11}=b_{11},\ a_{12}=b_{12}, a_{21}=b_{21}, a_{22}=b_{22}$.

<u>Додавання матриць.</u> Сумою двох матриць однакової розмірності називається матриця C такої ж розмірності, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A та B, тобто $C=A+B=(a_{ij}+b_{ij})$.

Приклад 1.1 Обчислити а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+4 & 3+1 \\ 2+3 & 4+0 & 5+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}-$ не існує, оскільки дані матриці мають різну розмірність.

<u>Множення матриць на число.</u> Добутком матриці A на число $\lambda \neq 0$ називається матриця B, утворена з матриці A шляхом множення всіх її елементів на λ, тобто $B=(\lambda a_{ij})$.

Приклад 1.2 Обчислити $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 6 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 6 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -18 & -21 & -33 \\ -9 & -24 & -36 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-18+1 & 4-21+0 & 6-33+0 \\ 0-9+0 & -2-24+1 & 4-36+0 \\ 2-3+0 & 4-3+0 & 10-3+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & -17 & -27 \\ -9 & -25 & -32 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 15 & 17 & 27 \\ 9 & 25 & 32 \\ 1 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Транспонування матриць. Транспонованою матрицею щодо матриці A називається матриця A^T, яку можна отримати, замінивши в матриці A рядки стовпцями і навпаки. Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць. Добуток двох матриць існує *тільки для випадку*, коли *кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці*, тобто матриці є узгодженими. Це означає, що множення двох матриць, узагалі, не є комутативною операцією $AB \neq BA$.

Множення матриць проводиться за правилом “рядок на стовпець”. Добутком матриці A розмірністю $m \times p$ на матрицю B розмірності $p \times n$ називається матриця $C = A \cdot B$ розмірністю $m \times n$. Для того, щоб отримати елемент добутку матриць розташований в i-му рядку та j-му стовпці, необхідно додати добутки відповідних елементів i-го рядка матриці A та відповідних елементів j-го стовпця матриці B:

$$(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \dots\ \ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

або в загальному

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}, \text{ де } i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n} \qquad (1.1)$$

Алгоритм знаходження добутку матриць

1. Перевіряємо узгодженість матриць.
2. Визначаємо розмірність добутку двох матриць.
3. Знаходимо кожен з елементів c_{ij}, використовуючи формулу (1.1).
4. Формуємо матрицю C.

Приклад 1.3 Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Обчислити добутки AB та BA.

Розв'язування

Оскільки дані матриці є квадратними, то вони узгоджені і існує як добуток AB, так і добуток BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot4+(-1)\cdot1 & 1\cdot(-1)+1\cdot3+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot3+1\cdot2+(-1)\cdot5 \\ 2\cdot1+1\cdot4+0\cdot1 & 2\cdot(-1)+1\cdot3+0\cdot(-2) & 2\cdot3+1\cdot2+0\cdot5 \\ 1\cdot1+(-1)\cdot4+1\cdot1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot3+1\cdot(-2) & 1\cdot3+(-1)\cdot2+1\cdot5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \\ -2 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+(-1)\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+(-1)\cdot1+3\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot0+3\cdot1 \\ 4\cdot1+3\cdot2+2\cdot1 & 4\cdot1+3\cdot1+2\cdot(-1) & 4\cdot(-1)+3\cdot0+2\cdot1 \\ 1\cdot1+(-2)\cdot2+5\cdot1 & 1\cdot1+(-2)\cdot1+5\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot0+5\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 12 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перерахуємо ***основні властивості операцій над матрицями.***

1. $A+B=B+A$ (комутативність)
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (асоціативність)
3. $(A+B)^T=A^T+B^T$ (транспонування)
4. $A+(-A)=0$ (додавання протилежної матриці)
5. $A+0=A$ (додавання нульової матриці)
6. $(AB)C=A(BC)$ (асоціативність)
7. $A(B+C)=AB+AC$ (дистрибутивність множення відносно додавання)
8. $(AB)^T=B^TA^T$ (транспонування добутку)
9. $AE=A$ (множення матриці на одиничну матрицю)
10. $AO=O$ (множення матриці на нульову матрицю)
11. $1\cdot A=A\cdot 1=A$
12. $0\cdot A=A\cdot 0=0$ (нуль - матриця)
13. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A=(A\cdot\alpha)\cdot\beta=A\cdot(\alpha\cdot\beta)$
14. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
15. $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B$
16. $AE=EA=A$
17. $tr(E_n)=n$.
18. $tr(\lambda A)=\lambda tr(A)$.
19. $tr(A^T)=tr(A)$.
20. $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.
21. $tr(AB)=tr(BA)$.

Зокрема, якщо A – $(n\times 1)$ вектор-стовпець, $B=A^T$, то

$$tr(AA^T)=tr(A^TA),$$

де AA^T, A^TA – квадратні матриці n-го та першого порядків.

1.3 Визначники і їх властивості

<u>*Визначники другого порядку*</u>

Нехай дана матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{pmatrix}$.

Означення 1.3 Визначником (або детермінантом) другого порядку, який відповідає даній матриці A, називається число, яке одержується за формулою: $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$. Визначник позначають: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, або $\det A$, або $|A|$.

Таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \tag{1.2}$$

Числа $a_{11},\ a_{22},\ a_{21},\ a_{12}$– називаються елементами визначника.

<u>Визначники третього порядку</u>

Розглянемо матрицю виду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Означення 1.4 Визначником третього порядку, який відповідає матриці А, називається число, яке знаходять за правилом трикутника (першим правилом Саррюса):

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ & \boldsymbol{a}^{+} & \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ & \boldsymbol{a}^{-} & \end{matrix}$$

$$|A|_{3\times 3} = a^{+} - a^{-} = \left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}\right) - \\ = \left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\right). \tag{1.3}$$

Зауваження! Визначники третього порядку можна також обчислювати за допомогою другого правила Саррюса:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

Приклад 1.4 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язування

а) За першим правилом Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 4\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 3\cdot 1 = 4 + 6 - 16 - 1 = -7.$$

б) За другим правилом Саррюса:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right. = 1\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 4\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 3 = -7.$$

в) Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (4-1) - 3(0-2) + 2(0-8) = 3 + 6 - 16 = -7.$$

г) Розкладемо визначник за елементами другого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3(0-2) + 4(1-4) - (1-0) = 6 - 12 - 1 = -7.$$

Означення 1.5 Визначником матриці n-го порядку (n ≥ 2) (детермінантом) називається алгебраїчна сума $n!$ членів, кожен з яких є добутком n елементів даної матриці, взятих по одному з кожного рядка і стовпця зі знаком $(-1)^t$, де t - число інверсій в перестановці других індексів, якщо перші записані в порядку зростання. Позначається визначник матриці A: $|A|$ або $\det A$.

Зауваження! Ситуація в перестановці чисел, коли більше число стоїть перед меншим, називається *інверсією.*

Визначники третього та вищих порядків обчислюють шляхом розвинення за елементами ***будь-якого*** рядка або стовпця:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}, \qquad (1.4)$$

(формула розвинення визначника за елементами j-го стовпця);

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \qquad (1.5)$$

(формула розвинення визначника за елементами i-го рядка),

де A_{ij} – *алгебраїчне доповнення* елемента a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \tag{1.6}$$

M_{ij} – мінор елемента a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Зауваження! Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці A n-го порядку є визначник матриці $(n\text{-}1)$-го порядку, який отримується шляхом вилучення з $|A|$ i-го рядка та j-го стовпця.

Наприклад, розвинення визначника третього порядку за елементами першого рядка набуває вигляду:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{1.7}$$

Приклад 1.5 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язування

Обчислимо даний визначник шляхом розвинення його за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - d \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= a\,(2\cdot4\cdot1+3\cdot0\cdot1+(-1)\cdot3\cdot1-1\cdot4\cdot1-3\cdot0\cdot2-(-1)\cdot3\cdot1) - b\,(1\cdot4\cdot1+3\cdot0\cdot0+2\cdot3\cdot1-0\cdot4\cdot1-3\cdot0\cdot1-2\cdot3\cdot1) + c\,(1\cdot(-1)\cdot1+2\cdot0\cdot0+2\cdot1\cdot1-0\cdot(-1)\cdot1-1\cdot0\cdot1-2\cdot2\cdot1) -$
$- d\,(1\cdot(-1)\cdot3+2\cdot4\cdot0+2\cdot1\cdot3-0\cdot(-1)\cdot3-1\cdot4\cdot1-2\cdot2\cdot3) = 4a - 4b - 3c + 13d$.

Наведемо основні *властивості визначників*.

1. *(Про рівносильність рядків та стовпців)* Визначник не зміниться, якщо його рядки поміняти місцями з відповідними стовпцями. Тобто при транспонуванні матриці її визначник не змінюється: $|A| = \left|A^T\right|$.

Наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

2. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-яких два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний, зберігаючи абсолютне значення.

Наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$.

3. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює нулю.

4. Якщо всі елементи одного рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

5. Якщо усі елементи одного рядка (стовпця) визначника помножити на однакове число *k*, то визначник зросте в *k* разів.

Наслідок. Спільний множник усіх елементів будь якого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника.

6. Якщо елементи двох будь-яких рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

Зауваження! Властивості 1-5 доводяться безпосередньо з означення визначників. Властивість 6 випливає з наслідку до властивості 5.

7. Нехай є два визначники *n-го* порядку Δ_1 та Δ_2 в яких всі рядки (стовпці) однакові, окрім визначеного одного. Сума таких визначників дорівнює визначнику Δ *n-го* порядку, в якого вказаний рядок (стовпець) складається із суми відповідних елементів цього рядка (стовпця) визначників Δ_1 та Δ_2.

Наприклад,

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}=\Delta .$$

Дійсно, розвиваючи дані визначники за елементами n-го стовпця, одержимо

$$\Delta_1+\Delta_2=\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kn}+\sum_{k=1}^{n}b_{kn}A_{kn}=\sum_{k=1}^{n}(a_{kn}+b_{kn})A_{kn} .$$

8. Якщо до всіх елементів будь якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цього визначника, які попередньо множаться на деяке число, то визначник не зміниться.
9. Сума добутків елементів одного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Наприклад, нехай маємо визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Помножимо перший стовпець визначника на k та додамо його до останнього стовпця. Маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n}+ka_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}+ka_{n1} \end{vmatrix} \overset{(6),(5)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n1} \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k\cdot 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Зауваження! Восьма властивість визначників надає ще один спосіб їх обчислення – «спосіб занулення елементів рядка (стовпця)». Наведемо можливий *алгоритм способу занулення елементів:*

1. Обираємо стовпець (рядок) елементи якого будемо занулювати.
2. Якщо в цьому стовпці (рядку) є елемент рівний одиниці, то обираємо його за ключовий елемент. Якщо одиниці немає, то її завжди можна одержати, розділивши увесь стовпець (рядок) на обраний a_{kj} (a_{ik}). При цьому даний елемент виноситься як коефіцієнт перед визначником.

3. Запам'ятаймо! Якщо ми занулюємо елементи j-го стовпця, то будемо працювати з рядками $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{1j} & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & a_{k-1,j} & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{k+1,j} & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & a_{nj} & \bullet \end{vmatrix}$. Для занулення, наприклад, елемента $a_{k-1,j}$ потрібно домножити k-ий рядок на $(-a_{k-1,j})$ та додати його до $(k-1)$-го рядка. Результат виконання цієї операції записуємо на місці даного рядка. При цьому k-ий рядок переписуємо у новий визначник без змін. Аналогічним чином занулюємо решту елементів j-го стовпця.
4. Запам'ятаймо! Якщо ми занулюємо елементи i-го рядка, то будемо працювати із стовпчиками $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{i1} & \dots & a_{i,k-1} & 1 & a_{i,k+1} & \dots & a_{in} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$. Для занулення, наприклад, елемента $a_{i,k+1}$ потрібно домножити k-ий стовпець на -$a_{i,k+1}$ та додати його до $(k+1)$-го стовпця. Результат виконання цієї операції записуємо на місці даного стовпця. При цьому k-ий стовпець переписуємо у новий визначник без змін. Аналогічним чином занулюємо решту елементів i-го рядка.
5. Розкладаємо одержаний в результаті перетворень визначник за елементом $a_{kj}=1$ $(a_{ik}=1)$.

Приклад 1.6 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ методом занулення елементів рядка чи стовпця.

Розв'язування

а) Будемо занулювати, наприклад, елементи першого стовпця, оскільки в ньому вже є один нуль. Для цього домножимо перший рядок визначника на (-2) та додамо його до третього рядка. Одержаний результат записуємо у третій рядок, при цьому перші два залишаються без змін. Маємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(8)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

Одержаний новий визначник розкладемо за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7.$$

б) Будемо занулювати елементи третього рядка. Для цього домножимо другий стовпець на (-1) та додамо його до третього стовпця. Результат виконання даної операції записуємо у третій стовпець визначника, перший та другий стовпці переписуємо без змін:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(8)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі, домножаємо другий стовпець на (-2) та додаємо його до першого стовпця. Результат виконання вказаних дій записуємо до першого стовпця визначника, другий та третій стовпці залишаємо без змін. Маємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(8)}{=} \begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -8 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -(15-8) = -7.$$

1.4 Обернена матриця

Означення 1.6 Квадратна матриця називається *виродженою*, якщо її визначник дорівнює нулю, і *невиродженою* – в протилежному випадку.
Означення 1.7 Оберненою матрицею до матриці A називають таку матрицю A^{-1} для якої справедлива рівність:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \qquad (1.8)$$

Нехай маємо матрицю n-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & \dots & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 1.8 Матриця A^*, яка утворюється з транспонованої матриці алгебраїчних доповнень до елементів матриці A, називається приєднаною матрицею

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Має місце теорема.

Теорема 1.1 Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену матрицю, необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою і обернена матриця обчислюється за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$.

Доведення

Необхідність. Нехай для матриці A існує обернена матриця A^{-1}. Покажемо, що $|A| \neq 0$. Дійсно, якби $|A| = 0$, то визначник добутку дорівнював би нулю, тобто $\left|A \cdot A^{-1}\right| = |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 0$. Але це не можливо в силу рівності (1.8) із якої випливає, що $\left|A \cdot A^{-1}\right| = |E| = 1$.

Достатність. Доведемо існування оберненої матриці для будь якої невиродженої матриці A і знайдемо її вигляд. Для простоти візьмемо матрицю третього порядку.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad |A| \neq 0.$$

Покажемо, що в цьому випадку існує обернена матриця.

Нехай A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}. Розглянемо матрицю

$$B = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що матриця B є оберненою до матриці A. Обчислимо добуток $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}A_{31}}{|A|} \\ \frac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{1} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{32}}{|A|} \\ \frac{a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|A|}{|A|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|A|}{|A|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|A|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Так само показуємо, що $B \cdot A = E$

Отже,

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}$$, і відповідно, обернена матриця існує.

Приклад 1.7 Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(2-6) - 3(3-8) + 9 - 8 = 8,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $$A^{-1}A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8+16 & -12+12 & -4+4 \\ 10-6-4 & 15-4-3 & 5-4-1 \\ 2+18-20 & 3+12-15 & 1+12-5 \end{pmatrix} = E.$$

Приклад 1.8 Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування

Визначник цієї матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то матриця A- невироджена і існує обернена до неї матриця. Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4,\ A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Одержимо матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 2 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна звести до стандартного вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_{1j} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_{2j} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ---------------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_{nj} + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.1),$$

де a_{ij}- коефіцієнт при невідомих, i - номер рівняння, j - номер невідомого, при якому знаходиться коефіцієнт, b_1, $b_2,\ldots$, b_n вільні члени.
Означення 2.1 Система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має хоча б один розв'язок, називається *сумісною*, а система, що немає розв'язку, називається *несумісною.*
Означення 2.2 Сумісну систему називають визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, і невизначеною у протилежному випадку.
Означення 2.3 Розв'язком системи (2.1) називається сукупність значень $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, яка при підстановці в систему перетворює кожне її рівняння у тотожність.
Означення 2.4 Система (2.1) називається *неоднорідною*, якщо хоч би одне з чисел b_1, $b_2,\ldots$, b_n не дорівнюють нулю. Якщо $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, то кажуть, що система (2.1) *однорідна*.
Означення 2.5 Дві системи називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків співпадають.
Означення 2.6 Коефіцієнти системи (2.1) утворюють основну матрицю системи

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці називається основним і позначається $|A|$, або $\Delta(A)$, або Δ.

Зауваження! Якщо в деякому рівнянні немає якогось невідомого, то це означає, що відповідний коефіцієнт дорівнює нулю.

2.1 Матричний спосіб розв'язування неоднорідних лінійних систем рівнянь

Нехай дано систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Розглянемо основну матрицю системи (матриця A) і матриці-стовпці невідомих (матриця X) і вільних членів (матриця B):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ і } X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що $A\cdot X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}$.

Систему (2.2) можна записати, використовуючи означення рівності матриць так:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ або } A\cdot X=B \qquad (2.3)$$

Рівність (2.3) називають матричним рівнянням.

Якщо система (2.2) записана у формі матричного рівняння (2.3) і матриця *A* системи невироджена, то розв'язується це рівняння наступним чином.

Помножимо ліву і праву частини рівняння (2.4) на матрицю A^{-1}, обернену до матриці *A*. Маємо

$$A^{-1}\cdot(A\cdot B)=A^{-1}\cdot B,$$

$$\left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X=A^{-1}\cdot B \text{(за властивістю сполучного закону)},$$

Оскільки $A^{-1}\cdot A=E$ і $E\cdot X=X$, то одержимо розв'язок матричного рівняння у вигляді

$$X=A^{-1}\cdot B \qquad (2.4)$$

Приклад 2.1 Розв'язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1+2x_2 =10, \\ 3x_1+2x_2+x_3=23, \\ x_2+2x_3=13 \end{cases}$$

Розв'язування

В матричній формі ця система запишеться у вигляді $A\cdot X=B$. В даному випадку

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}10\\23\\13\end{pmatrix}$$

Знайдемо обернену матрицю до матриці A. Маємо

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

Розв'язок системи запишемо у вигляді (2.4), тобто $X=A^{-1}\cdot B$, або

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\23\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}.$$

Звідси, за означенням рівності матриць, випливає: $x_1=4,\ x_2=3,\ x_3=5$

2.2 Розв'язування неоднорідних лінійних систем рівнянь за формулами Крамера

Сформулюємо **<u>правило Крамера</u>:** *Якщо основний визначник* $\Delta(A)$ неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами

$$x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta(A)}\ ,\quad k=1,2,\dots,n \tag{2.5}$$

де Δ_k- допоміжний визначник, який одержується шляхом заміни k-го стовпця визначника $\Delta(A)$ стовпцем вільних членів системи.

Доведемо справедливість правила Крамера для випадку системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases} \qquad (2.6),$$

де $\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - основний визначник.

Розв'яжемо систему (2.6). Для цього помножимо почленно перше рівняння системи на алгебраїчне доповнення A_{11} елемента a_{11}, друге рівняння на A_{21} елемента a_{21} і третє рівняння на A_{31} елемента a_{31}:

Додамо ці всі рівняння і згрупуємо відносно невідомих

$$(A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+A_{31}a_{31})x+(A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}+A_{31}a_{32})y+(A_{11}a_{13}+A_{21}a_{23}+A_{31}a_{33})z=$$

$$=A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3$$

Одержимо $A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}+A_{31}a_{32}=0$, $A_{11}a_{13}+A_{21}a_{23}+A_{31}a_{33}=0$,

$A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+A_{31}a_{31}=\Delta$.

Таким чином

$$\Delta\cdot x=A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3 \tag{2.7}$$

Розглянемо визначник

$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, який одержується із визначника системи Δ, якщо в ньому коефіцієнти при x (тобто a_{11},a_{21},a_{31}) замінити вільними членами b_1,b_2,b_3. Розкладемо цей визначник за елементами першого стовпця. В цьому визначнику алгебраїчне доповнення елементів b_1,b_2,b_3 співпадають з відповідними алгебраїчними доповненнями елементів a_{11},a_{21},a_{31} визначника Δ, одержимо

$$A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3=\Delta_x \tag{2.8}$$

Порівнюючи (2.7) і (2.8) знаходимо

$$\Delta\cdot x=\Delta_x.$$

Аналогічно виводяться рівності

$$\Delta\cdot y=\Delta_y \text{ і } \Delta\cdot z=\Delta_z,$$

де $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Визначники Δ_y і Δ_z одержуються із визначника системи Δ, якщо в ньому замінити відповідно коефіцієнти при y і z вільними членами.

Отже,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \text{ де } \Delta \neq 0 \tag{2.9}$$

Приклад 2.2 Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

Розв’язування

Обчислимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$ - отже, система має розв’язок.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8, \; \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 16, \; \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 24$$

За формулами Крамера $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{24}{8} = 3$

Приклад 2.3 Розв’язати методом Крамера систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \cdot \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Розв’язування

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(2-6) - 3(3-8) + 9 - 8 = 8.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(2-6) - 3(2+4) + 6 + 4 = -16.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(2+4) - 2(3-8) - 6 - 8 = 8.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(-4-6) - 3(-6-8) + 2(9-8) = 24 \cdot$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-16}{8} = -2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{8} = 3.$$

2.3 Розв'язування неоднорідних лінійних систем методом Гаусса

У випадку, коли система лінійних неоднорідних рівнянь має велику кількість невідомих, використовувати формули Крамера незручно, оскільки вони ведуть до громіздких обчислень. Більше того, у випадку, коли визначник системи дорівнює нулю, застосування цієї формули стає неможливим. На практиці часто застосовують метод виключення невідомих, або метод Гаусса (метод послідовних виключень невідомих).

Нехай дана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{2.10}$$

Будемо перетворювати дану систему таким чином, щоб в першому рівнянні були усі змінні, в другому рівнянні – на одну змінну менше, в третьому – на дві змінні і т.д.

Для цього помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ і додамо до другого рівняння. Маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{2.11}$$

Помножимо перше рівняння на -$\frac{a_{31}}{a_{11}}$ і додамо до третього рівняння і т.д.

В результаті маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \acute{a}_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = \acute{b}_2 \\ \acute{a}_{32}x_2 + \cdots + a'_{3n}x_n = \acute{b}_3 \\ - - - - - - - - - - - \\ \acute{a}_{s2}x_2 + \cdots + \acute{a}_{sn}x_n = \acute{b}_s \end{cases} \quad (2.12)$$

Далі працюємо з другим рівнянням системи (2.12). Домножимо друге рівняння на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ і додамо до третього рівняння і т.д.

В кінцевому результаті одержимо так звану трапецевидну систему

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ - - - - - - - - - - - - \\ c_{kk}x_k + \cdots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases} \quad (2.13)$$

або систему у трикутній формі $k = n$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ - - - - - - - - - - - - \\ c_{kn}x_n = d_k \end{cases} \quad (2.14)$$

Якщо систему (2.10) можна звести до трикутної форми, то вона має єдиний розв'язок. З останнього рівняння системи (2.14) знаходимо: $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$. Підставляючи знайдене значення у попереднє знаходимо $x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(d_{n-1} - c_{n-1,n}\right)$ і т.д.

Якщо дана система зводиться до трапецевидного типу, то вона має нескінчену кількість розв'язків. Причому при $k < n$ система має $n - k$ вільних змінних, які набувають довільних значень. Послідовно підставляючи вільні змінні у попередні рівняння знайдемо значення решти змінних, виражених через вільні.

При виключенні змінних ми використовували елементарні операції над системами лінійних рівнянь:

1) додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число λ;
2) перестановку рівнянь у системі;
3) вилучення із системи тотожності $0 \equiv 0$;
4) множення якого-небудь рівняння системи на дійсне число, відмінне від нуля;
5) перенумерування як рівнянь, так і невідомих.

Спробуйте переконатись самостійно, що в результаті виконання одного із елементарних перетворень отримуємо систему, рівносильну даній.

Зауваження!

1) Замість того, щоб здійснювати елементарні перетворення над системою (2.10), їх здійснюють над розширеною матрицею цієї системи:

$$\mathbf{(A, B)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \mathrm{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & \mathrm{b}_n \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

Елементарні перетворення над системою (2.10) будуть, відповідно, перетвореннями над рядками (стовпцями) розширеної матриці цієї системи. Нехай $a_{11} \neq 0$ (цього завжди можна досягти, переставивши місцями довільні стовпці), тоді перший рядок розширеної матриці ділимо на a_{11}. На наступному етапі вилучаємо невідоме x_1 з інших $(n$-1) рядків:

$$\mathbf{(A, B)^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & a^{(1)}{}_{12} & a^{(1)}{}_{13} & \cdots & \mathrm{a}^{(1)}{}_{1n} & \mathrm{b}^{(1)}{}_1 \\ 0 & a^{(1)}{}_{22} & a^{(1)}{}_{23} & \cdots & \mathrm{a}^{(1)}{}_{2n} & \mathrm{b}^{(1)}{}_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^{(1)}{}_{n2} & a^{(1)}{}_{n3} & \vdots & a^{(1)}{}_{nn} & \mathrm{b}^{(1)}{}_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки при елементарних перетвореннях системи визначник розширеної матриці може змінити знак (при зміні порядку рядків чи стовпців матриці) або збільшитися в одне й те ж саме число разів, то визначник новоутвореної матриці не є нулем.

Якщо в результаті перетворень деякі рядки матриці будуть однаковими, то система є *виродженою*. Якщо однаковими є лише коефіцієнти при невідомих, а вільні члени – різними, то система не має розв’язків взагалі, тобто є *несумісною*.

У результаті виконання n кроків необхідно отримати трикутну матрицю, у випадку визначеної системи, виду:

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})^{(n)}=\begin{pmatrix} 1 & a^{(n)}{}_{12} & a^{(n)}{}_{13} & \cdots & \mathrm{a}^{(n)}{}_{1n} & \mathrm{b}^{(n)}{}_{1} \\ 0 & 1 & a^{(n)}{}_{23} & \cdots & \mathrm{a}^{(n)}{}_{2n} & \mathrm{b}^{(n)}{}_{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \mathrm{b}^{(n)}{}_{n} \end{pmatrix}.$$

Далі знову повертаємось до системи лінійних рівнянь. Знайдемо спочатку x_n із співвідношення $x_n=b^{(n)}{}_n$. Підставляючи x_n у попереднє рівняння знайдемо x_{n-1}. Отримані значення знайдених невідомих підставляємо у попереднє рівняння і т.д. В результаті виконання послідовності вказаних операцій ми отримаємо матрицю $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, яка і є розв’язком системи (1).

2) Досить часто використовують м**етод Жордана-Гаусса,** який базується на методі Гаусса, але в результаті виконання m кроків необхідно отримати діагональну матрицю:

$$\boldsymbol{(A, B)^{(n)}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b^{(m)}{}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b^{(m)}{}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b^{(m)}{}_n \end{pmatrix}.$$

Звідси, $x_n=b^{(m)}{}_n, \dots, x_1=b^{(m)}{}_1$.

Відмітимо, що у випадку, коли $a_{11}=0$, існує два варіанти розв’язування системи (2.10):

- якщо довільний елемент $a_{i1}\neq 0$, то в зведеній матриці (2.15) можна поміняти місцями перший та i-ий рядки і далі виконувати всі необхідні перетворення;

- якщо довільний елемент $a_{1j}\neq 0$, то в зведеній матриці (2.15) можна поміняти місцями перший та j-ий стовпці і далі знову виконувати всі необхідні перетворення. При цьому слід пам’ятати, що, *переставивши стовпці, ми змінили порядок відповідних невідомих в системі лінійних рівнянь*.

3) Запам'ятайте! Той рядок (стовпець), який ми домножаємо на деяке число, переписуємо в нову розширену матрицю без змін.

Замість того рядка (стовпця) до якого ми додаємо інший, помножений на число, записуємо результат цієї операції.

Приклад 2.4 Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса та Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}.$$

Розв'язування

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right)^{\bullet(-2)} \begin{array}{c} \\ + \\ - \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Зауваження:

1. Поміняємо місцями перший та третій стовпці зведеної матриці (при цьому змінюється порядок змінних);
2. Перший рядок переписуємо без змін;
3. Перший рядок домножимо на (-2) і додамо до другого рядка (результат запишемо у другий рядок нової зведеної матриці);
4. Від першого рядка віднімемо третій і результат запишемо у третій рядок нової зведеної матриці.

Тоді маємо:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_3 + 3x_2 + 2x_1 = 2 \Rightarrow x_3 = 3 \\ 4x_2 + x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 \\ -2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -2. \end{array}$$

Приклад розв'язування системи методом Жордана-Гаусса.

Скористаємося кінцевим результатом методу Гаусса:

$$\begin{array}{c} \\ + \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)_{:2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} - \\ \cdot 3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Зауваження:

1. Третій рядок переписуємо без змін;
2. Додамо до другого рядка третій, поділений на 2 (результат запишемо у другий рядок новоутвореної матриці);
3. До першого рядка додамо третій рядок (результат запишемо у перший рядок новоутвореної матриці);
4. Поділимо третій рядок на 2, а другий на 4;
5. Від першого рядка віднімемо другий, помножений на 3.

Звідси, $x_1 = -2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 3$.

Приклад 2.5 Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо розширену матрицю даної системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Зауваження:

1) Перший рядок переписуємо без змін.
2) Перший рядок множимо на (-2)і додаємо до другого рядка. Результат виконання даної операції записуємо замість другого рядка нової розширеної матриці.
3) Перший рядок множимо на (-3) і додаємо до третього рядка. Результат додавання записуємо замість третього рядка.
4) Множимо другий рядок нової розширеної матриці на (-1) і додаємо до третього рядка.

В результаті перетворень одержимо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -7x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_2 = 4 \end{cases}$$

Звідки, $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

Приклад 2.6 Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ 3x + 2y - 4z = 15. \\ 4x + 3y - 7z = 19 \end{cases}$$

Розв'язування

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 3 & 2 & -4 & 15 \\ 4 & 3 & -7 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 15 \\ 3 & 4 & -7 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зауваження:

1. Міняємо місцями перший та другий стовпці. При цьому змінюється порядоу змінних: y, x, z.
2. Перший рядок переписуємо без змін.Домножаємо перший рядок на (-2) та додаємо його до другого рядка. Результат записуємо замість другого рядка в нову розширену матрицю. Перший рядок домножаємо на (-3) та додаємо його до третього рядка. Результат виконання цієї операції записуємо у третів рядок нової матриці.
3. Другий рядок множимо на (-1), третій рядок ділимо на (-2).
4. другий рядо перетвореної матриці домножаєио на (-1) та додаємо до третього рядка.

В результаті одержуємо:

$$z = t,\ x = 7 - 2t,\ y = 11 + z - 2x = 11 + t - 14 + 4t = -3 + 5t;$$

де t параметр, що може набувати довільних значень.

2.4 Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай маємо однорідну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

Система (2.16) завжди сумісна, тому що розширена матриця відрізняється від основної на стовпець, який являє собою нуль-вектор.

В цьому випадку $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \cdots = \Delta_n = 0$, оскільки кожний із визначників має стовпець, всі елементи якого рівні нулю.

Якщо визначник системи (2.16) не дорівнює нулю ($\Delta \neq 0$), то ця система має єдиний тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Для того, щоб система (2.16) мала нетривіальний розв'язок, необхідно, щоб $\Delta = 0$.

Для спрощення подальших викладок будемо розглядати неоднорідну систему трьох лінійних рівнянь від трьох змінних:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \qquad (2.17)$$

Можливі такі випадки.

1) У визначнику системи $\Delta = 0$ існує принаймні один відмінних від нуля мінор другого порядку. Наприклад, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ і візьмемо ті рівняння, що містять цей мінор. Запишемо ці рівняння так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3 \end{cases}.$$

Тоді за формулою Крамера

$$\begin{vmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix} = (-a_{13}a_{22} + a_{12}a_{23})x_3 .$$

Якщо позначити $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, то $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1} x_3}{\Delta_1}$.

Аналогічно, можна показати, що $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2} x_3}{\Delta_1}$, де $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$.

Оскільки змінна x_3 може набувати довільного значення, то обираємо $x_3 = \Delta_1 \cdot t$. Тоді

$$x_1 = \Delta_{x_1} t , \quad x_2 = \Delta_{x_2} t , \quad x_3 = \Delta_1 \cdot t , \qquad (2.18)$$

де $\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$, $\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Приклад 2.7 Розв'язати однорідну систему:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}.$$

Розв'язування

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=2(6+1)-(3-2)-(-1-4)=18\neq 0.$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля, то дана система має лише тривіальний розв'язок $x=y=z=0$.

Приклад 2.8 Знайти розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ 3x+7y+3z=0 \end{cases}.$$

Розв'язування

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=(12-14)+(3-6)-(7-12)=0.$$

Оскільки визначник системи дорівнює нулю, система має нетривіальний розв'язок і $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$, то можна використати формули (2.18):

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-2+4=2,$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11}\\ a_{23} & a_{21}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-2=-3,$$

$x_1=\Delta_{x_1}t=2t$, $x_2=\Delta_{x_2}t=-3t$, $x_3=5\cdot t$.

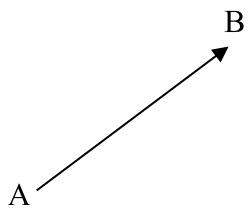
ТЕМА 3 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

3. 1 Поняття вектора. Операції над векторами

Усю сукупність величин за певними характерними властивостями поділяють на скалярні, векторні, тензорні, неархімедові і інші.

Означення 3.1 Скалярними величинами називають величини, які при вибраній одиниці виміру характеризується числом (довжина відрізка, площа фігури, маса, густина, температура і інші).

Означення 3.2 Векторними називають такі величини, для характеристики яких, окрім числового значення, необхідно вказувати ще й напрям дії (швидкість, прискорення, напруга електричного поля).



Означення 3.3 Вектором називають напрямлений відрізок прямої. Позначають вектори $\vec{a},\vec{b}$ і т.д., або $\overrightarrow{AB}$, де точка A – початок вектора, B – кінець вектора. Початок вектора називають точкою прикладання.

Означення 3.4 Довжиною вектора називається довжина напрямленого відрізка, який зображає цей вектор. Позначають довжину вектора $|\vec{a}|$ *або* $|\overrightarrow{AB}|$.

Означення 3.5 Вектор, початок якого збігається з його кінцем, називається нульовим вектором, позначають $\overrightarrow{AA}$ *або* $\vec{0}$.Нульовий вектор не визначає ніякого напряму, а його довжина вважається рівна нулю.

Означення 3.6 Вектор, довжина якого дорівнює 1, називається *одиничним вектором або ортом.*

Означення 3.7 Вектори, напрями яких співпадають називають *співнапрямленими* і позначають $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

Означення 3.8 Вектори рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають однокову довжину і співнапрямлені, тобто:

$$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow|\vec{a}|=|\vec{b}|\quad i\quad \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}. \tag{3.1}$$

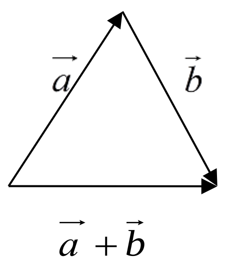
Означення 3.9 Два вектори протилежні, якщо вони мають однакову довжину, і різні напрями.
Означення 3.10 Вектори називаються колінеарними, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих.
Означення 3.11 Вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Перерахуємо ***основні операції*** над векторами.

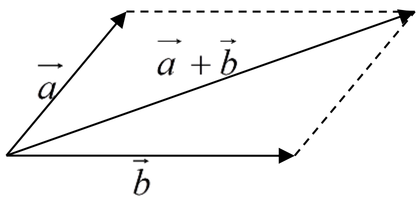
Додавання векторів

Нехай початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не співпадають. Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ цих векторів, за правилом трикутника, називають такий вектор, який початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ (рис. 3.1а).

Правило трикутника ***Правило паралелограма***



а)



б)

Рисунок 3.1

Нехай початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співпадають. Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ цих векторів називають діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах, яка має з $\vec{a}$ і $\vec{b}$ спільний початок (рис. 3.1б).

Перерахуємо в*ластивості операції додавання векторів*.

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативний закон)

Доведення:

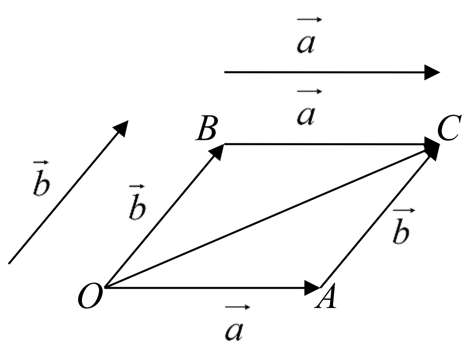


Рисунок 3.2

Відкладемо від однієї точки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 3.2).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}\\ \vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}\end{array}\right|\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

2) Операція додавання векторів асоціативна.
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

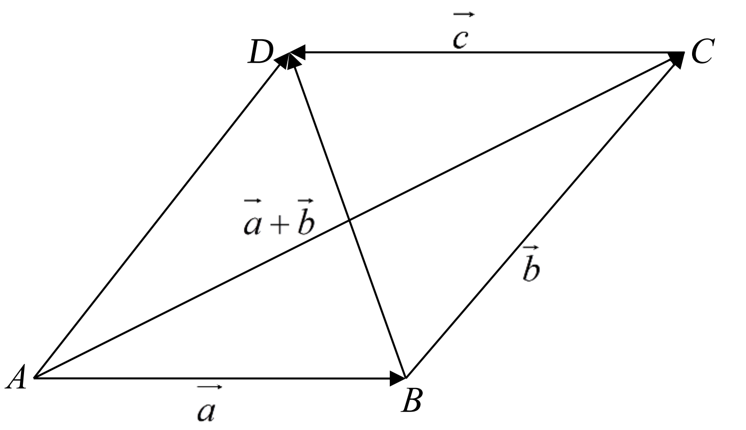


Рисунок 3.3

Доведення:

Візьмемо довільну точки A і відкладемо від неї вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 3.3)
Тоді

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}, \qquad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AD};$$
$$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD}, \qquad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AD}.$$

Отже, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3) Сумою протилежних векторів є нуль-вектор: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Доведення: Нехай $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, тоді $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, і за правилом трикутника матимемо: $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

4) Нуль-вектор є нейтральним елементом операції додавання: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$.

Доведення: Нехай $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$, тоді за правилом трикутника $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

Сума більшої кількості векторів знаходиться за правилом многокутника. З довільної точки O відкладаємо $\overrightarrow{OA}=\vec{a}_1$, з його кінця вектор $\overrightarrow{A_1A}=\vec{a}_2,....,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$ (рис. 3.4).
Вектор $\vec{c}=\overrightarrow{OA_n}$ - сума даних векторів.

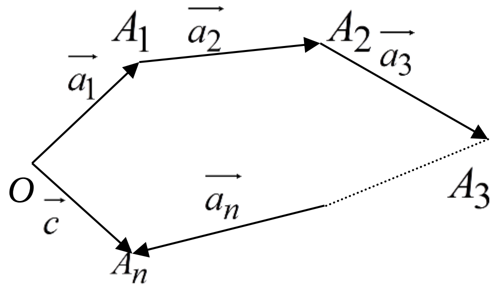


Рисунок 3.4

Віднімання векторів

Різницею $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ вектора $\overrightarrow{a}$ і вектора $\overrightarrow{b}$ називають такий вектор $\overrightarrow{c}$, який у сумі з вектором $\overrightarrow{b}$, дає вектор $\overrightarrow{a}$ (від від'ємника до зменшуваного).

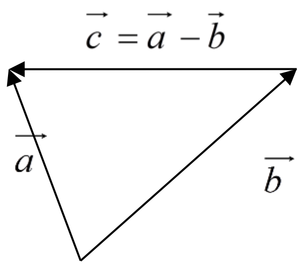


Рисунок 3.5

Множення вектора на число

Добутком вектора $\overrightarrow{a}$ на дійсне число $\alpha \neq 0$ називається вектор $\overrightarrow{p} = \alpha \overrightarrow{a}$, який задовольняє такі умови:

1) $\left|\overrightarrow{p}\right| = |\alpha| \cdot \left|\overrightarrow{a}\right|$;

2) $\overrightarrow{p} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}$, якщо $\alpha > 0$ і $\overrightarrow{p} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}$, якщо $\alpha < 0$.

Перерахуємо *властивості операції добутку вектора на число*.

1) $\alpha \cdot \overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (для будь-якого дійсного числа α і вектора $\overrightarrow{a}$)

2) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$; $\quad -1 \cdot \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$.

3) $\alpha \cdot \left(\beta \cdot \overrightarrow{a}\right) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \overrightarrow{a}$ (α і β довільні дійсні числа).

4) Операція множення вектора на число дистрибутивна відносно додавання векторів, тобто:

$$\alpha\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \alpha \cdot \overrightarrow{b},$$

для $\vec{a}, \vec{b}$ і $\alpha \in R$.

5) Операція множення вектора на число дистрибутивна відносно додавання чисел, тобто:

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a},$$

для будь-якого вектора $\vec{a}$ і чисел $\alpha, \beta \in R$.

Проекція вектора на напрямлену вісь

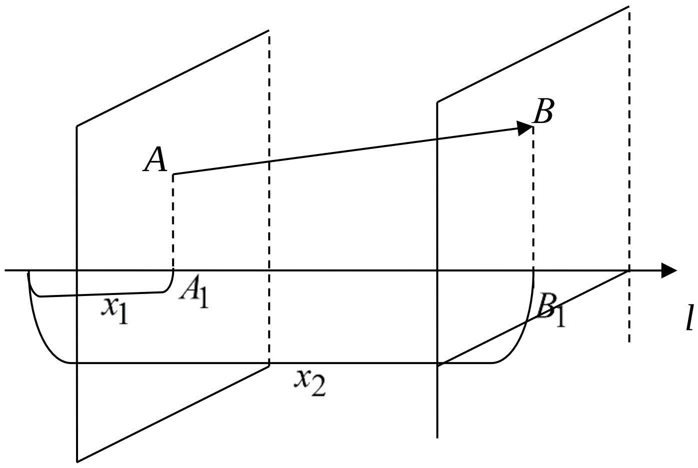


Рисунок 3.6

Нехай l – деяка напрямлена вісь, $\overrightarrow{AB}$- довільний вектор в просторі, точка A_1 проекція точки A на вісь l, точка B_1 проекція точки B на вісь l. Нехай точка A_1 має координату x_1, точка B_1 має координату x_2.

Різниця x_1-x_2 між координатами проекції кінця і початку вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається проекцією вектора на цю вісь.

$\varphi < 90^{\circ}$ | $90^{\circ} < \varphi < 180^{\circ}$

$np_l \overrightarrow{AB}$ - додатна | $np_l \overrightarrow{AB}$ - від'ємна

а) | б)

Рисунок 3.7

Має місце теорема.

Теорема 3.1 Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором та віссю l.

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \qquad (3.2)$$

Доведення: Проекція вектора $x_1 - x_2$ не змінюється при будь-якому його паралельному переносі, оскільки при цьому x_1 і x_2 змінюються на одне і те ж число.

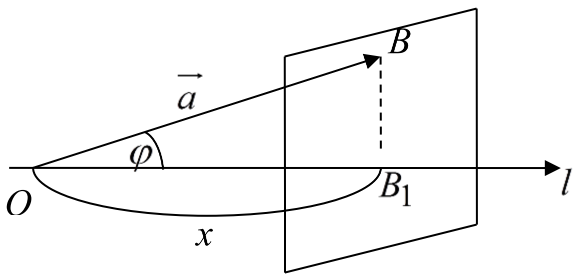


Рисунок 3.8

Тому достатньо розглянути випадок, коли початок вектора співпадає з початком O вісі l (рис. 3.8).

Оскільки координата початку дорівнює нулю, то

$$np_l \vec{a} = x - 0 = x$$

де x - координата проекції кінця вектора.

За означенням косинуса

$$\cos\varphi = \frac{x}{|a|},$$

звідки

$$x = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$$

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi,$$ (те, що треба було довести).

Перерахуємо *властивості провекції вектора на напрямлену вісь.*

1) Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі проекцій доданків на ту ж вісь.

2) Якщо вектор $\vec{a}$ множимо на число λ, то його проекцію також множимо на це число:

$$np_l (\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot np_l \vec{a}$$

Дійсно, нехай $\lambda > 0$, тоді за теоремою 3.1:

$$np_l(\lambda\overrightarrow{a}) = \left|\lambda\overrightarrow{a}\right| \cdot \cos\varphi = \lambda\left|\vec{a}\right|\cos\varphi = \lambda \cdot np_l\vec{a}\,.$$

Якщо $\lambda < 0$, тоді за теоремою 3.1:

$$np_l(\lambda\overrightarrow{a}) = \left|\lambda\overrightarrow{a}\right| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -\lambda\left|\vec{a}\right|(-\cos\varphi) = \lambda \cdot np_l\vec{a}\,.$$

Зауваження!

1) Множення вектора на число та додавання векторів називають *лінійними операціями* над векторами.

2) Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то довільний вектор $\vec{b}$, колінеарний даному вектору можна подати так:

$$\vec{b} = \pm\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}\,. \qquad (3.3)$$

Знак «+» обирається, коли вектори співнапрямлені і « – » – в протилежному випадку.

3) Застосовуючи лінійні операції можна складати вирази виду: $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_k\overrightarrow{a_k}$, які називають *лінійними комбінаціями.*

4) Якщо вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ колінеарні, то довільна їх лінійна комбінація їм колінеарна.

Означення 3.15 Множину векторів, замкнуту відносно лінійних операцій, називають *векторним простором.*

3.2 Лінійна залежність векторів. Базис

Означення 3.12 Кажуть, що вектор $\vec{b}$ розкладають за векторами $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$, якщо знайдуться такі коефіцієнти $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, що:

$$\vec{b} = \beta_1\overrightarrow{a_1} + \beta_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \beta_k\overrightarrow{a_k}\,. \qquad (3.4)$$

Зауваження! Нульовий вектор розкладається за довільною системою векторів, оскільки достатньо, щоб $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \ldots, \beta_k = 0$. Така лінійна комбінація називається *тривіальною.*

Означення 3.13 Систему векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ називають *лінійно незалежною*, якщо нульовий вектор розкладається за нею єдиним чином.

Інакше кажучи, система векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ лінійно незалежна якщо рівність (3.5)

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0} \qquad (3.5)$$

виконується лише за умови $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$.

Означення 3.14 Систему векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ називають *лінійно залежною,* якщо нульовий вектор розкладається за нею не єдиним чином, тобто знайдеться принаймні одне таке число $\alpha_k \neq 0$, $1 < k < n$, що виконується рівність (3.5).

Розгленемо ***властивості*** лінійно-залежних та лінійно-незалежних систем векторів.

1) Якщо серед векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ є нульовий, то така система лінійно залежна.

Дійсно, розглянемо лінійну комбінацію, в яку $\vec{0}$ входить з коефіцієнтом 1, а решта векторів – з нульовими коефіцієнтами. Ця лінійна комбінація нетривіальна і дорівнює $\vec{0}$.

2) Система, що містить один вектор, лінійно залежна, якщо цей вектор нульовий.

3) Якщо до лінійно залежної системи $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ додати довільні вектори $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2},...,\overrightarrow{b_s}$, то одержана система векторів буде лінійно залежною.

Дійсно, якщо до даної нетривіальної лінійної комбінації, яка дорівнює $\vec{0}$, додати вектори $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2},...,\overrightarrow{b_s}$ з нульовими коефіцієнтами, то нова лінійна комбінація також буде дорівнювати $\vec{0}$.

З даної властивості випливає така властивість:

4) Якщо в системі векторів якась її частина лінійно залежна, то вся система обов'язково лінійно залежна.

*Зауваження!*Довільна частина лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна.

5) Якщо вектор $\vec{x}$ розкладається за системою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$, то цей розклад єдиний тоді і тільки тоді, коли система лінійно незалежна.

Дійсно, нехай маємо два розвинення $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$ та $\vec{x} = \beta_1\overrightarrow{a_1} + \beta_2\overrightarrow{a_2} + ... + \beta_n\overrightarrow{a_n}$. Віднімаючи їх почленно отримаємо

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overrightarrow{a_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overrightarrow{a_2} + ... + (\alpha_n - \beta_n)\overrightarrow{a_n} = \vec{0}.$$

Якщо вектори лінійно незалежні, то $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, … , $\alpha_n - \beta_n = 0$, тобто обидва розвинення співпадають.

З іншого боку, якщо вектори лінійно залежні, то існує їх нетривіальна лінійна комбінація, рівна нульовому вектору:

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}.$$

Ми можемо додати її до існуючого розвинення $\vec{x}=\beta_1\overrightarrow{a_1}+\beta_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{a_n}$ та одержати новий розклад вектора за тими ж векторами: $(\alpha_1+\beta_1)\overrightarrow{a_1}+(\alpha_2+\beta_2)\overrightarrow{a_2}+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)\overrightarrow{a_n}=\vec{x}$.

6) Система з $k>1$ векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один із її векторів є лінійною комбінацією інших.

Доведення

Необхідність Нехай система векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ лінійно залежна. Тобто існують такі коефіцієнти $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, серед яких принаймні $\alpha_k\neq 0$, для яких виконується рівність (3.5). В цьому випадку

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\ldots+\alpha_{k-1}\overrightarrow{a_{k-1}}+\alpha_k\overline{a_k}+\alpha_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0},$$

звідки

$$\overline{a_k}=-\frac{1}{\alpha_k}\left(\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\ldots+\alpha_{k-1}\overrightarrow{a_{k-1}}+\alpha_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}\right).$$

Тобто, вектор $\overrightarrow{a_k}$ є лінійною комбінацією решти векторів системи.

Достатність Неха один із векторів системи є лінійною комбінацією решти векторів:

$$\overline{a_k}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\ldots+\alpha_{k-1}\overrightarrow{a_{k-1}}+\alpha_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n},$$

Звідки

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\ldots+\alpha_{k-1}\overrightarrow{a_{k-1}}+(-1)\overrightarrow{a_k}+\alpha_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\bar{0}.$$

З станньої рівності випливає, що система векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ лінійно залежна, оскільки існують такі коефіцієнти $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, серед яких $\alpha_k=-1\neq 0$, для яких виконується рівність (3.5).

7) а) Система з двох векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.

б) Система з трьох векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні.

в) Будь-які чотири вектори лінійно залежні.

Доведення

Доведемо, наприклад, пункти а) та б).

а) Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні. Якщо $\vec{a}=\vec{0}$, то за властивістю (1) лінійно залежних та лінійно незалежних векторів, $\vec{a}$ та $\vec{b}$ лінійно залежні.

Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$, тоді за зауваженням 2 п.3.1 $\vec{b} = \pm \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$. Таким чином, у будь-якому випадку довільні два колінеарні вектори лінійно залежні.

б) Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ компланарні і жоден із них не дорівнює нуль-вектору (інакше система буде одразу лінійно залежною). Якщо $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, то за пунктом а) вони лінійно залежні, тоді за властивістю (3) лінійно залежних та лінійно незалежних векторів, лінійно залежними будуть $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

Нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні. Розкладемо вектор $\vec{c}$ за даними векторами. Для цього цього перемістимо початки всіх векторів в одну точку O (рис. 3.9) та проведемо через кінець C вектора $\vec{c}$ пряму, паралельну вектору, до перетину в точці P з прямою, на якій лежить вектор $\vec{a}$.

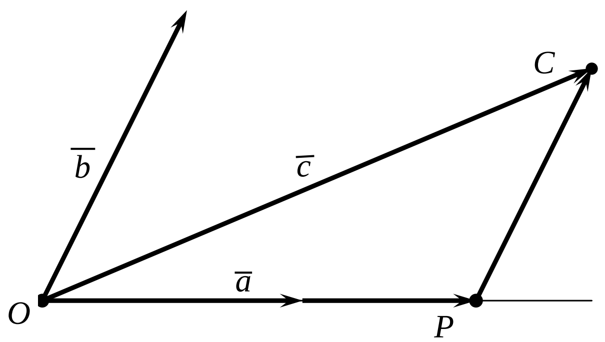


Рисунок 3.9

Тепер $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$, причому вектори $\overrightarrow{OP}$ та $\overrightarrow{PC}$ колінеарні векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відповідно. За зауваженням 2 п.3.1 знайдуться такі числа α, β, що $\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{a}$ та $\overrightarrow{PC} = \beta\vec{b}$. Таким чином $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ лінійно залежні.

З іншого боку, якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ лінійно залежні, то один із них розкладається за іншими двома, а одже їм компланарний.

Означення 3.16 Базисом векторного простору називається впорядкова система векторів, яка задовольняє умови:

1) ця система векторів лінійно незалежна;
2) будь-який інший вектор із даного простору є лінійною комбінацією даної системи векторів.

Означення 3.17 Розмірністю векторного простору називають число векторів базису, тобто максимальну кількість лінійно незалежних векторів.

З (2) та (7) властивостей лінійно залежних та лінійно незалежних векторів випливає, що
- в нульовому просторі базису не існує;
- в одновимірному просторі (на прямій лінії) базис складається з одного ненульового вектора;
- в двовимірному просторі (на площині) базис – впорядкована пара неколінеарних векторів;
- в тривимірному просторі базис – впорядкована трійка некомпланарних векторів.

Вимога впорядкованості означає, що, наприклад, у випадку площини ($\vec{a}$, $\vec{b}$) та ($\vec{b}$, $\vec{a}$) – два різні базиси.

Оскільки вектори базису лінійно незалежні, коефіцієнти розвинення за векторами базису для кожного вектору простору визначені однозначно. Вони називаються *компонентами* або *координатами вектора* в цьому базисі.

Таким чином, якщо $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$ – базис тривимірного простору, то за формулою $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}$ кожному вектору співставляється єдина трійка чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ і кожній трійці чисел – єдиний вектор. Аналогічно, вектор на площині має дві компоненти, а на прямій – одну.

Позначають координати вектора так: $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ або $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Визначимо лінійні операції над векторами в коодинатній формі.

Означення 3.18 При множенні вектора на число всі його компоненти множать на це число. При додаванні векторів додають їх відповідні компоненти.

Дійсно, якщо $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}$, то

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}) = \lambda\alpha_1\vec{e_1} + \lambda\alpha_2\vec{e_2} + \lambda\alpha_3\vec{e_3}.$$

Якщо $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}$ і $\vec{b} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(\alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}\right) + \left(\beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3}\right) =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e_3}.$$

Для одновимірного та двовимірного просторів доведення відрізняється лише кількістю доданків.

Приклад 3.1 Вектор $\vec{a}$ має координати $(2,-5)$ в базисі $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$. Знайти координати вектора в базисі $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$, якщо $\vec{e_1}' = 3\vec{e_1} - 2\vec{e_2}$, $\vec{e_2}' = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$.

Розв'язування

Оскільки вектор $\vec{a}$ має координати $(2,-5)$ в базисі $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, то:

$$\vec{a} = 2\vec{e_1} - 5\vec{e_2}. \qquad (*)$$

Виразимо вектори $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, як лінійну комбінацію векторів $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$:

$$\vec{e_1}=\frac{1}{5}\left(\vec{e_1}'+\vec{e_2}'\right),\ \vec{e_2}=-\frac{1}{5}\left(\vec{e_1}'-\frac{3}{2}\vec{e_2}'\right).$$

Підставимо одержані вирази у лінійну комбінацію (*):

$$\vec{a}=2\frac{1}{5}\left(\vec{e_1}'+\vec{e_2}'\right)-5\left(-\frac{1}{5}\left(\vec{e_1}'-\frac{3}{2}\vec{e_2}'\right)\right)=\left(\frac{2}{5}+1\right)\vec{e_1}'+\left(\frac{2}{5}-\frac{15}{2}\right)\vec{e_2}'=\frac{7}{5}\vec{e_1}'-\frac{71}{10}\vec{e_2}'.$$

Таким чином, в базисі $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$ вектор $\vec{a}$ має координати $\left(\frac{7}{5},-\frac{71}{10}\right)$.

3.3 Системи координат

Означення 3.19 Системою координат у векторному просторі називають сукупність базису та точки O – початку усіх базисних векторів. Цю точку називають *початком координат*.

Означення 3.20 Радіус-вектором точки M простору по відношенню до точки O називають вектор $\overrightarrow{OM}$. *Координатами точки в довільній системі координат є координати її радіус-вектора.*

1) Афінна система координат у просторі та на площині

Розглянемо впорядковану трійку базисних векторів $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ у тривимірному просторі. Відкладемо їх від деякої фіксованої точки O.

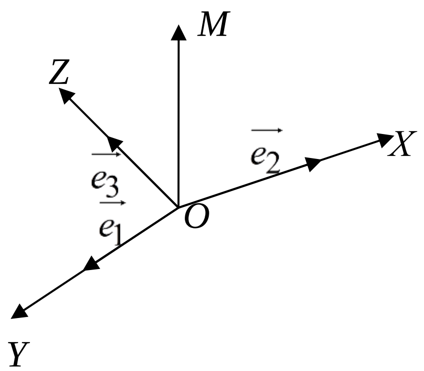


Рисунок 3.10

Утворену геометричну систему будемо називати афінною системою координат у просторі.

Точка O- початок координат;

$\left.\begin{matrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{matrix}\right\}$ - координатні вектори або базисні вектори, які утворюють між собою довільний кут.

Прямі, що проходять через початок координат у напрямі базисних векторів називають *осями координат Ox, Oy, Oz*, площини, які проходять через вісі координат, називають *координатними площинами.*

Афінну систему координат позначають $O\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ або *OXYZ*. Нехай $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$- деякий базис простору, $\overrightarrow{OM}$ – радіус- вектор деякої точки простору M. Тоді існують єдині числа a_1,a_2,a_3 такі, що $\overrightarrow{OM} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} + a_3 \cdot \vec{e_3}$. Позначають координати точки: $M(a_1,a_2,a_3)$.

Базисні вектори в самому базисі мають координати $\vec{e_1}(1,0,0), \vec{e_2}(0,1,0), \vec{e_3}(0,0,1)$.

Площинний базис складається з двох не колінеарних векторів $\vec{e_1},\vec{e_2}$ і для довільного радіус-вектора точки M : $\overrightarrow{OM} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2}$
Базисні вектори мають координати: $\vec{e_1}(1,0), \vec{e_2}(0,1)$.

Відмітимо, що базис (a_1,a_2,a_3) буде *правим,* якщо поворот від $\vec{a}_1$ до $\vec{a_2}$ по найкоротшому шляху здійснюється проти руху годинникової стрілки, якщо дивити з кінця вектора $\vec{a_3}$.

Базис (a_1,a_2,a_3) буде *лівим,* якщо поворот від $\vec{a}_1$ до $\vec{a_2}$ по найкоротшому шляху здійснюється за рухом годинникової стрілки, якщо дивити з кінця вектора $\vec{a_3}$.

Розглянемо дві точки A та B, координати яких в афінній системі координат (x_1,y_1,z_1) та (x_2,y_2,z_2). Поставимо собі задачу знайти компоненти вектора $\overrightarrow{AB}$. Очевидно, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 3.11).

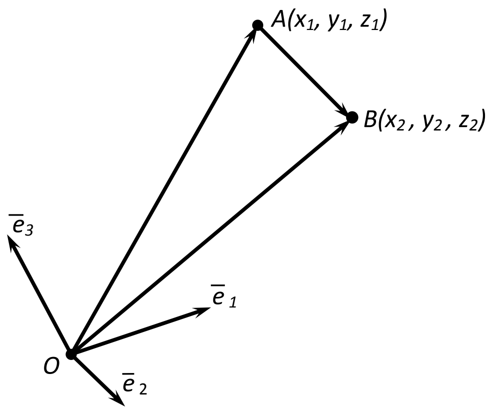


Рисунок 3.11

Оскільки координати радіус-векторів даних точок, такі ж як і самих точок, то з означення 3.18 випливає:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}. \tag{3.6}$$

Ми вивели таке правило: *щоб знайти координати вектора потрібно від координат його кінця відняти координати його початку.*

Якщо $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1\}$, то

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (\,y_2 - y_1)^2 + (\,z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (3.7)$$

2) Ортонормований базис (прямокутна система координат)

Окремим випадком афінної системи координат є прямокутна система, відома усім ще зі школи. Прямокутна система координат складається з точки початку та ортонормованого базису.

Базис векторного простору називають *ортонормованим*, якщо всі вектори цього базису одиничні (їх називають *ортами*) і взаємно перпендикулярні.

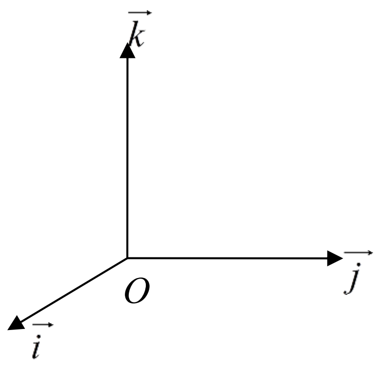


Рисунок 3.12

Вектори ортонормованого базису позначають $\vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k}$ (рис. 3.12). Згідно з означенням ці вектори задовольняють умови:

1) $\left|\vec{i}\,\right| = \left|\vec{j}\,\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$

2) $\vec{i} \perp \vec{j}\,, \quad \vec{i} \perp \vec{k}\,, \quad \vec{j} \perp \vec{k}$

Для прямокутної системи є деякі властивості, відмінні від афінної системи координат.

Напрямні косинуси

Відмітимо, що напрям довільного вектора $\bar{a}$ в прямокутній системі координат визначається кутами $\alpha, \beta, \gamma,$ які вектор утворює з осями координат (рис. 3.13). Косинуси цих кутів $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називають *напрямними косинусами вектора*.

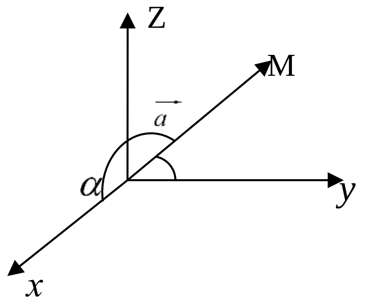


Рисунок 3.13

Нехай дано вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.Тоді

$$a_x = np_{Ox}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha$$
$$a_y = np_{Oy}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta$$
$$a_z = np_{Oz}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$
$$\cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad (3.8)$$
$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Умова колінеарності векторів

Нехай маємо два вектори в прямокутній системі координат

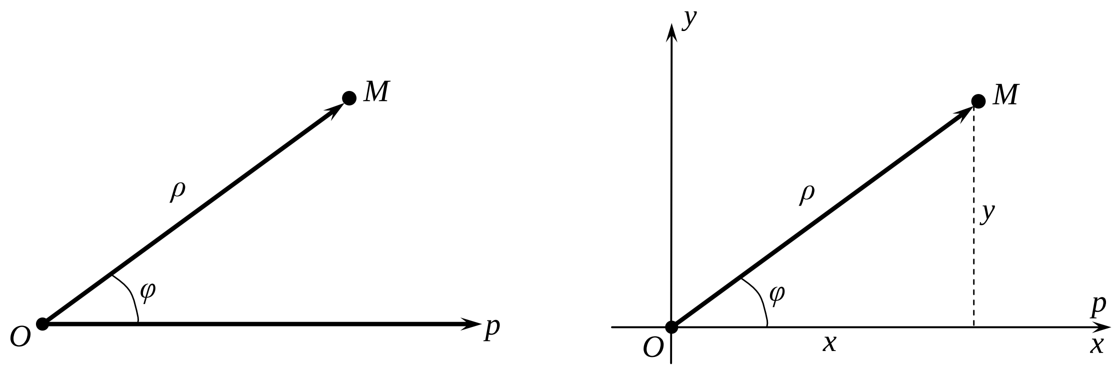
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{та} \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Для того, щоб ці вектори були колінеарними необхідно і достатньо, щоб їх координати були пропорційними

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (3.9)$$

3) Полярна система координат

Дана система складається з точки, яка називається *полюсом*, і променя $O\rho$, який виходить з полюса і називається *полярною віссю* (рис. 3.14а).



а) б)

Рисунок 3.14

Розглянемо полярну систему координат і візьмемо на площині довільну точку (рис. 3.14б). Нехай $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ – відстань від точки O до точки M і $\varphi = \left(O\rho, \overrightarrow{OM}\right)$ – кут, на який треба повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\overrightarrow{OM}$.

Полярними координатами точки $M(\rho, \varphi)$. Число ρ називають *полярним радіусом,* φ *– полярним кутом.* Очевидно, що полярний радіус може набувати довільних значень, а $\varphi \in [0, 2\pi]$. Іноді розглядають полярні кути більші 2π, а також від'ємні кути, тобто таку, що відкладаються від полярної осі за годинниковою стрілкою.

Виразимо декартові координати точки M через полярні. Вважатимемо, що початок прямокутної системи збігається з полюсом, а вісь Ox – з полярною віссю. Якщо в декартовій системі точка має координати (x, y) і полярні координати (ρ, φ), то

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, \tag{3.10}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = arctg\,\frac{y}{x}. \tag{3.11}$$

Формули (3.10) називають формулами переходу від полярних координат до декартових, а формули (3.11) – формулами переходу від декартових до полярних координат.

4) Циліндрична та сферична системи координат

Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ замість перших двох координат взяти полярні координати ρ, φ, а третю координату z залишити без змін, то дістанемо *циліндричну систему координат* (рис. 3.15). Для циліндричних координат ρ, φ, z згідно з рис. 3.15 маємо:

$$
\begin{aligned}
&x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,\\
&0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho < \infty, -\infty < z < \infty, \\
&J = \rho,\ dx\,dy\,dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

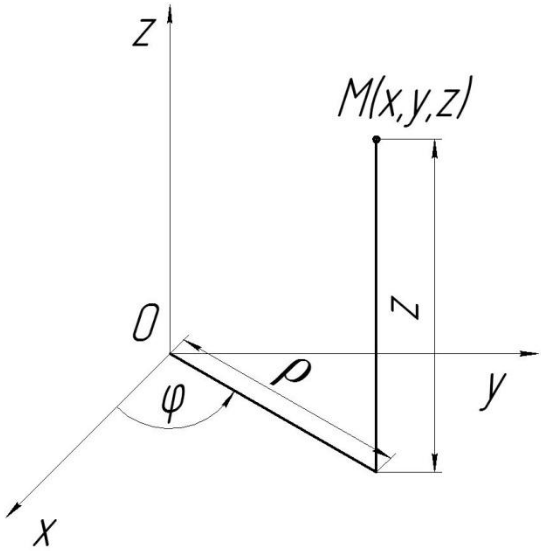


Рисунок 3.15

Для *сферичних координат* (r - радіус-вектор, φ - довгота, θ- широта, $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$) (рис. 3.16) отримуємо:

$$
\begin{aligned}
&x = \rho\cos\varphi\cos\psi;\\
&y = \rho\sin\varphi\cos\psi;\\
&z = \rho\sin\psi;\\
&|J| = \rho^2\cos\psi,\\
&dxdydz = \rho^2\cos\psi d\rho d\varphi d\psi.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,\\
&0 \le r \le \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\\
&J = r^2\sin\theta,\ dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta.
\end{aligned} \tag{3.13$'$}
$$

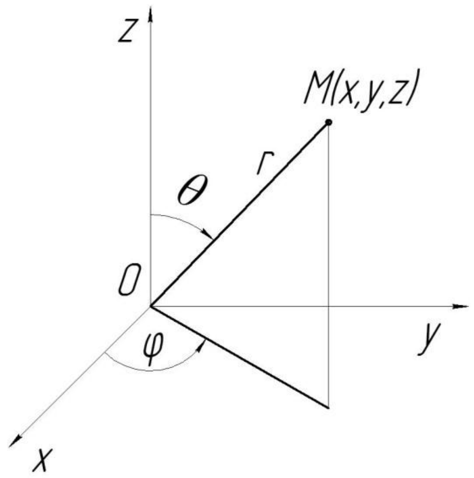


Рисунок 3.16

В узагальнених сферичних координатах

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi,\ y = br\sin\theta\sin\varphi,\ z = cr\cos\theta,$$
$$0 \le r \le \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi, \tag{3.14}$$
$$J = abcr^2\sin\theta,\ dx\,dy\,dz = abcr^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

3.4 Скалярний добуток векторів

Означення 3.21 Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \quad \varphi = \angle(\vec{a},\vec{b}). \tag{3.15}$$

Розглянемо фізичну задачу, розв'язання якої приводити до скалярного добутку векторів.

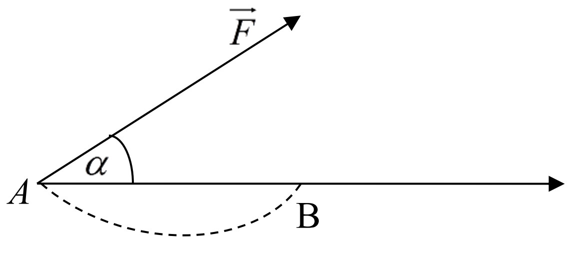


Рисунок 3.17

Нехай матеріальна точка *M* рухається по прямій від точки *A* до точки *B*, проходячи при цьому шлях $\vec{l}$.

Нехай на точку *M* діє сила $\vec{F}$, постійна за напрямком і по величині і утворює з напрямом переміщення кут α. З фізики відомо, що робота *A,* яка виконується при цьому силою $\vec{F}$ на ділянці $\vec{l}$ дорівнює

$$A=\vec{F}\cdot\vec{l}\cdot\cos\alpha=\vec{F}\cdot\vec{l}. \qquad (3.16)$$

Правило: Робота постійної сили на прямолінійній ділянці дорівнює скалярному добутку сили на вектор переміщення.

Сформулюємо ***властивості скалярного добутку.***

1) Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного з векторів на проекцію на нього другого вектора.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b};\; np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|};\quad np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|};$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (3.17)$$

2) Переставна властивість:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Дійсно, за означенням скалярного добутку

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cos(\vec{b},\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

3) Сполучна властивість:

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

Дійсно, за першою властивістю маємо

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

4) Дистрибутивна властивість

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}.$$

Доведення.

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{c}\right|\cdot np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\left|\vec{c}\right|\cdot(np_{\vec{c}}\vec{a}+np_{\vec{c}}\vec{b})=$$
$$=\left|\vec{c}\right|\cdot np_{\vec{c}}\vec{a}+\left|\vec{c}\right|\cdot np_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

5) Два вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

6) Скалярний квадрат:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0=\left|\vec{a}\right|^2$$

Отже,

$$\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2; \qquad \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \left|\vec{a}\right|.$$

Приклад 3.2 У рівнобедреному трикутнику ABC кут при вершині C дорівнює 30°. Знайти кут між медіанами AA_1, BB_1 проведеними до бічних сторін.

Розв'язування

Введемо вектори $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{Cb} = \vec{b}$, $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = a$,

$$\overrightarrow{CA_1} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}}{\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BB_1}\right|}\right| = \left|\frac{(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})}{\sqrt{(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})^2\cdot(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})^2}}\right| =$$

$$= \frac{\left|\frac{1}{4}\vec{a}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}\vec{b}^2 - \vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2}\sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2}} =$$

$$= \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + a^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + a^2}} = \frac{5\sqrt{3} - 8}{10 - 4\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3} - 10}{26}.$$

Звідси, $\varphi = \arccos\dfrac{9\sqrt{3} - 10}{26}$.

Приклад 3.3 Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\left|\vec{m}\right| = 2$, $\left|\vec{n}\right| = 2$, $\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язування

Використаємо основні властивості скалярного добутку:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\vec{m} + 5\vec{n}\right)\left(\vec{m} + 2\vec{n}\right) = \vec{m}\cdot\vec{m} + \vec{m}\cdot 2\vec{n} + 5\vec{n}\cdot\vec{m} + 5\vec{n}\cdot 2\vec{n} = \vec{m}^{\,2} + 7\vec{m}\cdot\vec{n} + 10\vec{n}^{\,2} =$$

$$=\left|\vec{m}\right|^2+7\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\angle\left(\vec{m},\vec{n}\right)+10\left|\vec{n}\right|^2=2^2+7\cdot2\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{4}+10\cdot2^2=44+14\sqrt{2}\,.$$

Подання скалярного добутку в координатній формі

Нехай дано два вектора

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\,, \qquad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\,.$$

Для знаходження скалярного добутку цих векторів в координатній формі скористаємося такою таблицею:

Скалярний добуток	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Звідки маємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+$$
$$+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}=$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Отже,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (3.18)$$

Оскільки за формулою (3.15) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi,\quad \varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})$, то враховуючи координатне обчислення скалярного добутку одержуємо:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\,. \qquad (3.19)$$

Зауваження! Якщо $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$, то вектори $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ та $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ перпендикулярні.

Приклад 3.4 Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ по переміщенню матеріальної точки M з точки $A(-1,0,1)$ в точку $B(1,2,3)$.

Розв'язування

Для обчислення роботи використаємо формули (3.16) та (3.18). Знайдемо спочатку координати вектора переміщення:

$$\vec{l} = \overrightarrow{AB} = \{1-(-1), 2-0, 3-1\} = \{2, 2, 2\}.$$

Тоді

$$A = 2\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 = 12.$$

Приклад 3.5 Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{A_1A_4}$ та $\overrightarrow{A_2A_3}$, якщо $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(-1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$.

Розв'язування

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_4}$ та $\overrightarrow{A_2A_3}$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{0-3,\ 4-1,\ -1-4\} = \{-3, 3, -5\},$$

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \{-1-(-1),\ 1-6,\ 6-1\} = \{0, -5, 5\}.$$

та їх довжини

$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+9+25} = \sqrt{43},$$

$$\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| = \sqrt{0^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}.$$

Тоді за формулою (3.19) маємо:

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_2A_3}\right) = \frac{(-3)\cdot 0 + 3\cdot(-5) + (-5)\cdot 5}{\sqrt{43}\cdot\sqrt{50}} = -\frac{40}{\sqrt{2150}} \approx -0{,}87.$$

Приклад 3.6 Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Розв'язування

Маємо

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + (-3)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}22$$

3.5 Векторний добуток

Поняття векторного добутку виникло з поняття *моменту сили*.

Нехай є деяке тверде тіло, яке має нерухому точку O. В будь-якій точці M прикладено силу $\vec{F}$. На тіло буде діяти момент сили $\vec{z}$ відносно нерухомої точки, перпендикулярний до поверхні тіла. Введемо вектор $\overrightarrow{OM}$ поворот якого проти годинникової стрілки опише силу $\vec{F}$. Позначають момент сили $\vec{z} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$ або $\vec{z} = \left[\overrightarrow{OM}, \vec{F}\right]$.

Означення 3.22 Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє такі умови:

1) $\left|\vec{p}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi; \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$;

2) $\vec{p} \perp \vec{a}$, $\vec{p} \perp \vec{b}$ - вектор $\vec{p}$ перпендикулярний до кожного із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

3)Трійка векторів ($\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{p}$) має праву орієнтацію.

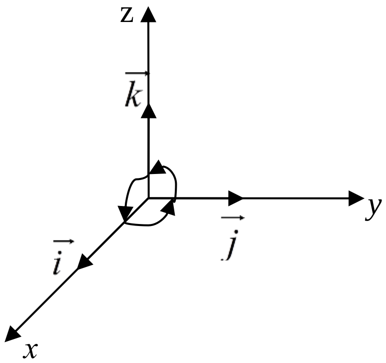
Розглянемо ***властивості векторного добутку.***

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $\alpha \cdot \vec{a} \times \beta \cdot \vec{b} = \alpha \cdot \beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ скалярні множники можна виносити за знак векторного добутку;
3. Дистрибутивний закон: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
4. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$;
5. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S$ паралелограма, який побудований на даних векторах $\vec{a}$ і $\vec{в}$, як на сторонах.
6. Векторний добуток дорівнює нуль-вектору, тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Зокрема $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

З’ясуємо, як обчислювати векторний добуток векторів, які задані координатами в ортонормованому базисі (рис. 3.18).

Нехай дано два вектора

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} , \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$



Векторний добуток	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Рисунок 3.18

Вектор $\vec{i}\times\vec{j}$ розміщуються на прямій, яка перпендикулярна до площини векторів $\vec{i}$ і $\vec{j}$, тобто на осі *Oz*. Напрямлений цей вектор в сторону додатного напряму осі *Oz*, оскільки при цьому поворот вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ по найкоротшому шляху буде видно із кінця вектора $\vec{i}\times\vec{j}$, який здійснюється проти руху годинникової стрілки. Звідси випливає, що вектор співпадає з вектором $\vec{k}$.

Розглянемо тепер векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+$$
$$+a_xb_X\vec{k}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_yb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_y\vec{k}\times\vec{j}+$$
$$+a_xb_x\vec{i}\times\vec{k}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}=$$
$$=a_yb_x(-\vec{k})+a_zb_x\cdot\vec{j}+a_xb_y\cdot\vec{k}+a_zb_y\cdot(-\vec{i})+a_xb_z\cdot(-\vec{j})+a_yb_z\cdot\vec{i}=$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\cdot\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\cdot\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\cdot\vec{k}$$

Таким чином,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

(розклад за елементом 1-го рядка)

або

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (3.20)$$

Вище було показано, що поняття векторного добутку виникло з поняття моменту сили. Наведемо ще можливі варіанти прикладів, в яких використовується це поняття.

1) Швидкість $\vec{v}$ точки P твердого тіла, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі l, визначається за формулою Ейлера
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$
2) Якщо електрон, заряд якого дорівнює e, рухається зі швидкістю $\vec{v}$ в магнітному полі сталої напруги $\vec{H}$, то на електрон діє сила $\vec{F}$, яка визначається за формулою
$$\vec{F} = \frac{e}{c}\left(\vec{v} \times \vec{H}\right),$$

де c – швидкість світла.

Приклад 3.7 Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ за умови, що $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, $\left|\vec{m}\right| = 1$, $\left|\vec{n}\right| = 2$, $\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язування

З властивостей векторного добутку маємо:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\vec{m} - 2\vec{n}\right) \times \left(3\vec{m} + 4\vec{n}\right) = \vec{m} \times 3\vec{m} + \vec{m} \times 4\vec{n} - 2\vec{n} \times 3\vec{m} - 2\vec{n} \times 4\vec{n} =$$
$$= 3\vec{m} \times \vec{m} + 4\vec{m} \times \vec{n} + 6\vec{m} \times \vec{n} - 8\vec{n} \times \vec{n} = 10\vec{m} \times \vec{n}.$$

Звідки
$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|10\vec{m} \times \vec{n}\right| = 10\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right| \sin\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) = 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 20\frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ (кв.од).}$$

Приклад 3.8 Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(2, 4, 0)$, $B(0, -4, 1)$, $C(-1, 1, 2)$.

Розв'язування

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \{-2, -8, 1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-3, -3, 2\}$ то за формулою (3.20)
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -8 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + \vec{j} - 18\vec{k}.$$

Тоді

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-13)^2+1^2+(-18)^2}=\frac{\sqrt{494}}{2}\approx 11 \text{ (кв.од).}$$

Приклад 3.9 Знайти момент сили $\vec{F}=\{1,-2,4\}$, прикладеної до точки $A(3,2,-1)$ відносно початку координат.

Розв'язування

Момент сили будемо обчислювати за формулою:

$$\vec{z}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=6\vec{i}-13\vec{j}-8\vec{k}.$$

3.6 Мішаний (векторно-скалярний) добуток векторів

Означення 3.23 Мішаним (потрійним) добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ називають об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятого із знаком «+» при додатній (правій) орієнтації векторів, із знаком «–» при від'ємній (лівій) орієнтації. Позначають мішаний добуток $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$.

Знайдемо вираз для мішаного добутку в координатній формі. За вище виведеним

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}.$$

Оскільки

$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k},$$

то за формулою обчислення скалярного добутку одержимо:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot c_z$$

останній вираз є розкладом визначника

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \qquad (3.21)$$

за елементами третього рядка.

Сформулюємо, ***властивості мішаного добутку.***

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак. Наприклад,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = -\vec{c}\,(\vec{b}\times\vec{a}).$$

2. При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\vec{b}.$$

3. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Дійсно, з другої властивості і комутативності скалярного добутку маємо

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\vec{a} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}).$$

У зв'язку з цим мішані добутки $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ та $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ скорочено позначають так: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

4. Вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

5. Якщо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ від'ємний то ці вектори утворюють ліву трійку, якщо додатній – праву.

6. Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Приклад 3.10 Довести, що чотири точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,-1)$, $D(2,1,3)$ лежать в одній площині.

Розв'язування

Точки A, B, C та D лежать в одні площині, якщо вектори

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,6)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2,0,-2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1,-1,4)$$

компланарні. Знайдемо їх мішаний добуток

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0-2+12-0-2-8=0$$

За четвертою властивістю мішаного добутку дані вектори компланарні.

Приклад 3.11 Дано вектори $\vec{a}(1{,}2{,}3)$, $\vec{b}(-1{,}3{,}2)$, $\vec{c}(7,-3{,}5)$, $\vec{d}(6{,}10{,}17)$. Перевірити, чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і знайти координати вектора $\vec{d}$.

Розв'язування

Обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Маємо

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -17 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -17 & -16 \end{vmatrix} = -80 + 85 = 5 \neq 0.$$

Оскільки мішаний добуток даних векторів відмінний від нуля, то вони утворюють базис. Знайдемо координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. З означення рівності векторів маємо систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 7\gamma = 6 \\ 2\alpha + 3\beta - 3\gamma = 10 \\ 3\alpha + 2\beta + 5\gamma = 17 \end{cases}.$$

Розв'язавши одержану систему методом Гаусса, знаходимо

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ \gamma = 1.$$

Приклад 3.12 Задані вершини тетраедра $A(1,2,3)$, $B(9,6,4)$, $C(3,0,4)$, $D(5,2,6)$. Переконайтесь, що висота тетраедра, опущена з вершини D, дорівнює $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Розв'язування

За шостою властивістю мішаного добутку маємо, що

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|.$$

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \{8, 4, 1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2, -2, 1\}$, $\overrightarrow{AD} = \{4, 0, 3\}$, то

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right| = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}(-48) = 8.$$

З іншого боку, об'єм тетраедра обчислюється за формулою: $V = \frac{1}{3}S_{основи}h_D$. Оскільки

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=6\vec{i}-6\vec{j}-24\vec{k},$$

$$S_{основи}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-6)^2+(-24)^2}=\frac{\sqrt{648}}{2}=9\sqrt{2},$$

то $8=\frac{1}{3}9\sqrt{2}\cdot h_D$. Звідки $h_D=\frac{8}{3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

ТЕМА 4. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

4.1 Пряма на площині

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ і має напрямний вектор $\vec{p}(p_1,p_2)$

Означення 4.1 Вектор $\vec{p}$ називають напрямним вектором прямої l, якщо він колінеарний будь-якому вектору, що лежить на цій прямій.

Оберемо довільну точку $M(x,y)$, яка належить прямій l. Тоді за означенням 4.1 маємо, що $\vec{p}\parallel\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0)$. За умовою колінеарності векторів (3.9) маємо

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}, \tag{4.1}$$

Рівняння прямої l, що проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$

В якості напрямного вектора прямої обираємо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1)$. Якщо точка $M(x,y)$ належить прямій l, то $\overrightarrow{M_1M_2}\parallel\overrightarrow{M_1M}(x-x_1,y-y_1)$. За умовою колінеарності векторів маємо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{4.2}$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

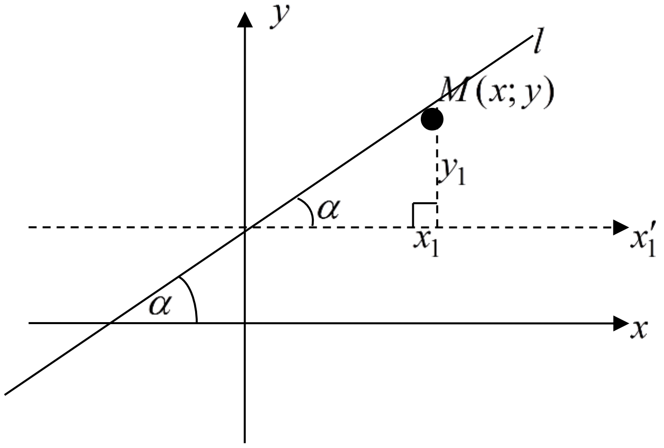


Рисунок 4.1

В системі координат Oxy точка M має координати $(x_1; y_1)$ (рис. 4.1). Причому $x_1 = x$, $y_1 = y - b$.
З прямокутного трикутника

$tg\alpha = \dfrac{y_1}{x_1}$, $y_1 = x_1 tg\alpha$, $y - b = xtg\alpha$

$y = tg\alpha \cdot x + b$.

Нехай $tg\alpha = k$, тоді

$$y = kx + b \qquad (4.3)$$

рівняння прямої l, яка проходить через точку $M(x; y)$.

Розглянемо ч*астинні випадки* розташування прямої l.
1) Пряма l паралельна осі абсцис, тоді $\angle\alpha = 0$, відповідно $tg\alpha = 0$. Одержимо $y = b$ - рівняння такої прямої.
2) Нехай пряма l на вісі Oy відтинає відрізок $b = 0$, тоді $y = kx$ - рівняння прямої, яка проходить через початок координат.
Рівняння прямої $l \parallel Oy$ не є геометричним випадком рівняння $y = kx + b$, оскільки $k = \dfrac{\pi}{2}$ не існує, одержимо $x = a$.

Кут між прямими

Нехай маємо дві прямі l_1: $y = k_1 x + b_1$ та l_2: $y = k_2 x + b_2$, що перетинаються. Пряма l_1 утворює з додатним напрямом осі Ox кут α_1, а пряма l_2 – кут α_2. Тоді тангенс кута між цими прямим можна обчислити за формулою:

$$tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1 \cdot tg\,\alpha_2}.$$

Оскільки, $tg\,\alpha_1 = k_1$, $tg\,\alpha_2 = k_2$ та позначивши $\alpha_1 - \alpha_2 = \varphi$, остання формула набуває вигляду:

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (4.4)$$

Зауваження! 1) $l_1 \| l_2$ або співпадають тоді, $k_1 = k_2 = tg\,0 = 0$;

2) якщо прямі l_1 та l_2 перпендикулярні, то формула 4.2, втрачає зміст, оскільки $tg\dfrac{\pi}{2}$ не існує. В цьому випадку виникає необхідність розглянути:

$$ctg\,y = ctg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}{tg\alpha_2 - tg\alpha_1} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1},$$

$$ctg\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0, \; k_1 \cdot k_2 + 1 = 0, \quad k_1 \cdot k_2 = -1.$$

4.2 Загальне рівняння прямої і його частинні випадки. Взаємне розташування двох прямих

Розглянемо рівняння прямої 4.1 у такій формі:

$$p_2(x - x_0) - p_1(y - y_0) = 0,$$

$$p_2x - p_1y - p_2x_0 + p_1y_0 = 0.$$

Позначимо $A = p_2$, $B = -p_1$, $C = p_1y_0 - p_2x_0$, тоді останнє рівняння набуває вигляду:

$$Ax + By + C = 0. \tag{4.5}$$

Означення 4.2 Рівняння (4.5) називають загальним рівнянням прямої з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$ та вектором нормалі $\vec{n}(A, B)$.

Зауваження! Вектором нормалі прямої l називають вектор, перпендикулярний даній прямій.

Із вигляду загального рівняння прямої в окремих випадках зробити висновок про особливості цієї прямої. А саме:

1) $B = 0$, $x = -\dfrac{C}{A}$ – пряма паралельна осі Oy.

2) $A = 0$, $By + C = 0$, $y = -\dfrac{C}{B}$ – пряма паралельна осі Ox.

3) $y = 0$ – рівняння осі Ox.

4) $x = 0$ – рівняння осі Oy.

Має місце лема.

Лема 4.1 Нехай маємо дві прямі $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тоді

а) прямі співпадають $l_1 = l_2$, якщо $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

б) прямі паралельні, якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

в) прямі перетинаються, якщо $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

Доведення

Доведемо, наприклад, твердження а).

За означенням 4.2 дані прямі мають напрямні вектори $\vec{p}_1\left(-B_1, A_1\right)$ та $\vec{p}_2\left(-B_2, A_2\right)$ відповідно. Якщо ці прямі співпадають $l_1=l_2=l$, то їх напрямні вектори колінеарні, тобто існує таке число λ, що $\overrightarrow{a_1}=\lambda\overrightarrow{a_2}$. З умови рівності векторів в координатній формі

$$A_1=\lambda A_2,\ B_1=\lambda B_2. \qquad (*)$$

Нехай точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ належить прямій l, тоді $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$ та $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$. Підставимо рівності (*) у першу рівність

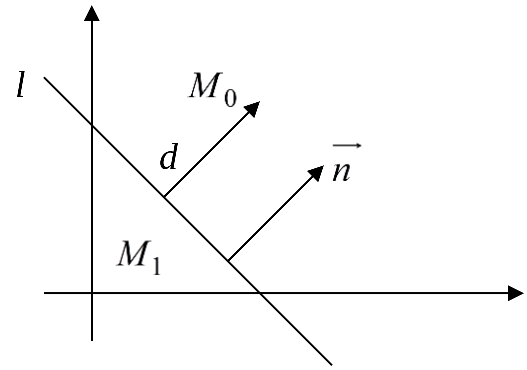
$$\lambda A_2x_0+\lambda B_2y_0=-C_1,$$

$$\lambda(A_2x_0+B_2y_0)=-C_1.$$

Звідки $C_1=\lambda C_2$. Таким чином, ми одержали

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\lambda.$$

4.3 Відстань від точки до прямої



Нехай маємо деяку пряму $l:\quad Ax+By+C=0$ і довільну точку $M_0(x_0;y_0)$. Точка M_1- основа перпендикуляра до прямої l, опущеного з точки M_0 $\overrightarrow{M_1M_0}\perp l$, $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1;y_0-y_1)$

Рисунок 4.2

Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M_0}$ і $\vec{n}$, де $\vec{n}$ - нормальний вектор прямої і має координати $\vec{n}=(A;B)$. Оскільки $\overrightarrow{M_1M_0}\perp l,\ \vec{n}\perp l$ то $\overrightarrow{M_1M_0}\parallel\vec{n}$.

Тоді

$$\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\cos\angle(\overrightarrow{M_1M_0},\overrightarrow{n}) \Rightarrow \angle(\overrightarrow{M_1M_0},\overrightarrow{n}) = 0 \text{ або } \angle(\overrightarrow{M_1M_0},\overrightarrow{n}) = \pi$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot(\pm 1)$$

Позначимо $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = d$, тоді

$$d = \frac{\left|(x_0 - x_1)\cdot A + (y_0 - y_1)\cdot B\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{4.6}$$

де $C = -Ax_1 - By_1$

4.4 Рівняння площини

Означення 4.3 Напрямним підпростором площини σ називають множину всіх векторів, паралельних цій площині.

1) Рівняння площини σ, заданої точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та напрямним підпростором $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ та $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

Оберемо довільну точку $M(x, y, z) \in \sigma$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ та $\vec{b}$ компланарні, тобто $\overrightarrow{M_0M}\vec{a}\vec{b} = 0$ або

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.7}$$

2) Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$

Оберемо довільну точку $M(x, y, z) \in \sigma$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ та $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ компланарні, тобто $\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0$ або

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.8}$$

3) Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;B;C)$, який називають вектором нормалі

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)\in\sigma$ побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$ (рис. 4.3).

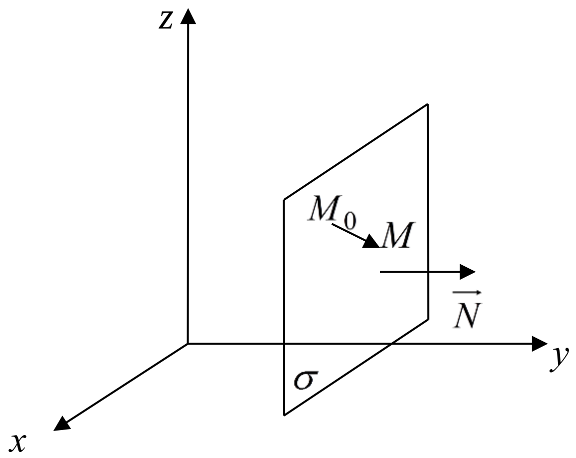


Рисунок 4.3

Зрозуміло, що в даному випадку скалярний добуток $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$. Оскільки

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_0M}&=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}\\ \vec{n}&=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}\end{aligned},$$

то в координатній формі маємо

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+(z-z_0)=0. \qquad (4.9)$$

Координати будь-якої точки $M(x;y)$ площини σ задовольняють рівняння (4.9). Координати точок, що лежать поза площиною σ не задовольняють цьому рівнянню, оскільки $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}\neq 0$

Отже, рівняння (4.9) – рівняння площини, яка проходить через точку з координатами $(x_0;y_0;z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(A;B;C)$. Якщо змінювати значення A,B,C, то одержимо пучок площин, які проходять через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

4) Загальне рівняння площини і його частинні випадки.

Якщо в рівнянні (4.9) розкрити дужки та позначити $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, то дане рівняння набуває вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.10}$$

де (A, B, C) координати вектора нормалі.

Розглянемо *частинні випадки загального рівняння площини.*

– Вільний член дорівнює нулю:
$D = 0, \quad Ax + By + Cz = 0$ - площина проходить через початок координат.

– Один із коефіцієнтів при поточних координатах дорівнює нулю:

$$A = 0, \quad By + Cz + D = 0 \parallel Ox$$
$$B = 0, \quad Ax + Cz + D = 0 \parallel Oy$$
$$C = 0, \quad Ax + By + D = 0 \parallel Oz$$

Зауваження! Площина паралельна тій вісі, координата якої відсутня.
– Коефіцієнт при поточних координатах і вільний член дорівнюють нулю:

$A = D = 0, \quad By + Cz = 0$ - площина проходить через початок координат і вісь *Ox*.
$B = D = 0, \quad Ax + Cz = 0$ - площина проходить через початок координат і вісь *Oy*.
$C = D = 0, \quad Ax + By = 0$ - площина проходить через початок координат і вісь *Oz*.

– Два коефіцієнти при поточних координатах дорівнюють нулю:

$A = B = 0, \quad Cz + D = 0 \parallel Ox \text{ і } Oy$, тобто дана площина паралельна площині *Oxy*,
$A = C = 0, \quad By + D = 0 \parallel Ox \text{ і } Oz$, тобто дана площина паралельна площині *Oxz*,
$B = C = 0, \quad Ax + D = 0 \parallel Oy \text{ і } Oz$, тобто дана площина паралельна площині *Oyz*.
– Два коефіцієнти при поточних координатах і вільний член дорівнюють нулю:
$A = B = D = 0, \; Cz = 0$, або $z = 0$ - рівняння площини *Oxy*,
$A = C = D = 0, \quad By = 0$, або $y = 0$ - рівняння площини *Oxz*,
$B = C = D = 0, \quad Ax = 0$, або $x = 0$ - рівняння площини *Oyz*.

4.5 Взаємне розташування площин

Перетин площин. Кут між площинами

Розглянемо дві площини σ_1 і σ_2, які задані рівняннями:

$\sigma_1: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\sigma_2: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\varphi = \angle(\sigma_1, \sigma_2)$- це двогранний кут, який дорівнює $\varphi = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ за властивістю сумарних кутів.

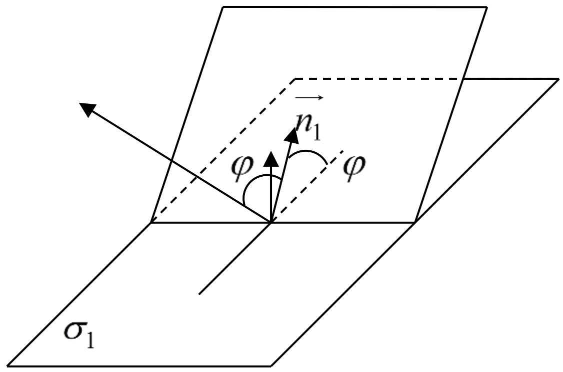


Рисунок 4.4

Використовуючи властивість скалярного добутку векторів знайдемо кут φ.

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = |\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}| \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}.$$

Оскільки, $\vec{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ $\quad \vec{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$, то

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (4.11)$$

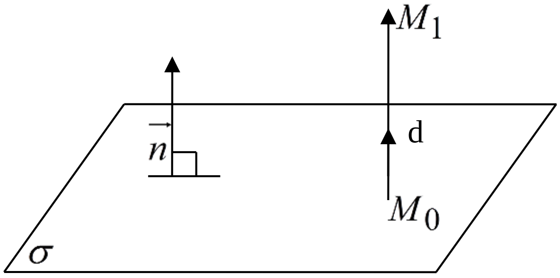
Умова паралельності двох площин $(\sigma_1 \| \sigma_2)$.

$$\vec{N_1} \parallel \vec{N_2}, \text{ якщо } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (4.12)$$

Умова перпендикулярності двох площин

$$\sigma_1 \perp \sigma_2, \text{ якщо } \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0, \text{ тобто } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (4.13)$$

Відстань від точки до площини



Нехай дано площину
$\sigma: \ Ax + By + Cz + D = 0$, де $\vec{n}(A, B, C)$
і точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 4.5).
$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{n}$
$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = \left|M_0M\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n})$,

Рисунок 4.5

$$d = \left|\frac{\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n}}{\vec{n}}\right|, \quad \cos\angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 1;$$

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \qquad (4.14)$$

Відстань між паралельними площинами

$\sigma_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\sigma_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Нехай точка $M_1 \in \sigma_1$, тоді її координати задовольняють рівняння площини σ_1. Одержимо,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$$

або

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_1.$$

Обчислимо, відстань від точки M_1 до площини σ_2:

$$d = \left|\frac{-D_1 + D_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|, \text{ якщо } \ Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_1, \text{ то}$$

$$d_{\sigma_2} = \left|\frac{-D_1 + D_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| = \left|\frac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \qquad (4.15)$$

4.6 Пряма в просторі

Загальне рівняння прямої

Розглянемо систему двох рівнянь першого порядку

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.16}$$

Кожне з цих рівнянь визначає площину. Якщо коефіцієнти при поточних координатах, непропорційні, то система (4.16) визначає пряму L, як лінію перетину двох площин, тобто як геометричне місце точок простору, які задовольняють рівнянням системи (4.16). Ця система є *загальним рівнянням прямої в просторі*, причому її *напрямний вектор* має координати

$$\vec{s}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right). \tag{4.17}$$

Векторні і параметричні рівняння прямої

Пряму в просторі можуть визначати довільна фіксована точка M_1 і напрямний вектор $\vec{s}$, який паралельний даній прямій та координати якого називають *напрямними коефіцієнтами прямої*.

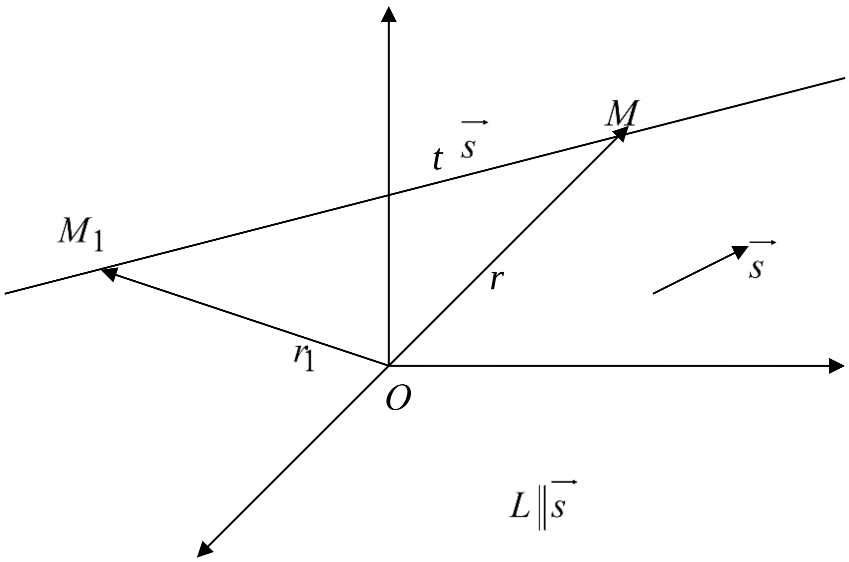


Рисунок 4.6

Нехай в ортонормованому базисі пряма L задана точкою $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і нормальним вектором $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$, ($m, n, p$ – напрямні коефіцієнти). Розглянемо, довільну точку $M(x, y, z) \in L$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}, \qquad (4.18)$$

де $\overrightarrow{OM}$ - радіус-вектор точки M.

Зрозуміло, що

$\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{M_1M} = t \cdot \overrightarrow{s}$,

де t - скалярний множник, який називають *параметром*, оскільки його значення залежить від положення точки M на прямій $\overrightarrow{r_1} + t\overrightarrow{s} = \overrightarrow{v}$.

Нехай $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{r_1} \\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} \end{array}\right\}$, підставимо ці значення в рівність (4.18). Одержимо,

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + t\overrightarrow{s}. \qquad (4.19)$$

Рівняння (4.19) називають *векторним* рівнянням прямої. Воно показує, що кожному значенню параметра t відповідає радіус вектор деякої точки M, яка лежить на цій прямій.

Подамо рівняння (4.19) в координатній формі, підставивши такі значення:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OM_1} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{s} = m\overrightarrow{i} + n\overrightarrow{j} + p\overrightarrow{k}$$

Маємо

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k} + t \cdot m\overrightarrow{i} + t \cdot n\overrightarrow{j} + t \cdot p\overrightarrow{k}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + tm \\ y = y_1 + tn \\ z = z_1 + tp \end{cases}. \qquad (4.20)$$

Рівняння (4.20) – параметричне рівняння прямої (при зміні параметра t змінюються координати x, y, z, і точка $M(x, y, z)$ переміщуються вздовж прямої).

Канонічні рівняння прямої

Нехай в афінній системі координат пряма l задана точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку вона проходить і напрямним вектором $\overrightarrow{p} = (k, m, n)$. Нехай $M(x, y, z)$ довільна точка прямої l. Ця точка лежить на прямій l тоді, і тільки тоді коли $\overrightarrow{M_0M}$ і $\overrightarrow{p}$ колінеарні. Ці вектори будуть колінеарними, коли їх координати пропорційні:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (4.21)$$

Рівняння (4.21) – канонічне рівняння прямої
Дане рівняння це, по суті, система трьох рівнянь:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}\ ;\ \frac{x-x_0}{k}=\frac{z-z_0}{n};\ \ \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

з яких незалежних лише два, а третє – наслідок двох інших.

Якщо пряма задана двома точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то її напрямним вектором буде вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тоді канонічне рівняння набуває вигляду

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4.22)$$

4.7 Взаємне розташування прямої і площини

Кут між прямою і площиною.

Нехай маємо пряму l: $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ та площину $\sigma: Ax+By+Cz=0$. Координати напрямного вектора прямої $\vec{p}(k,m,n)$, а координати вектора нормалі площини $\vec{n}(A,B,C)$. Нехай φ – кут між прямою та площиною. Розглянемо два можливі випадки.

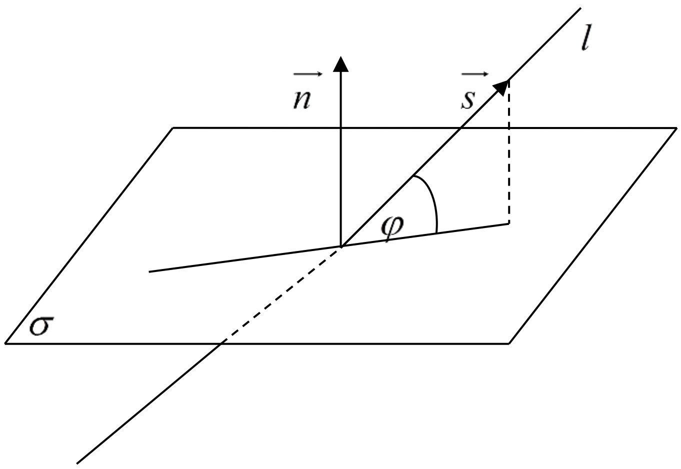


Рисунок 4.7

Перший випадок (рис. 4.7). $\begin{gathered}\varphi+\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})=\dfrac{\pi}{2}\\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}-\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})\end{gathered}$.

З поняття скалярного добутку відомо, що $\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|}$.

Тоді

$\sin\varphi=\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})\right]=\left|\cos\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})\right|$, бо кут $\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})$ гострий.

Другий випадок (рис. 4.8)

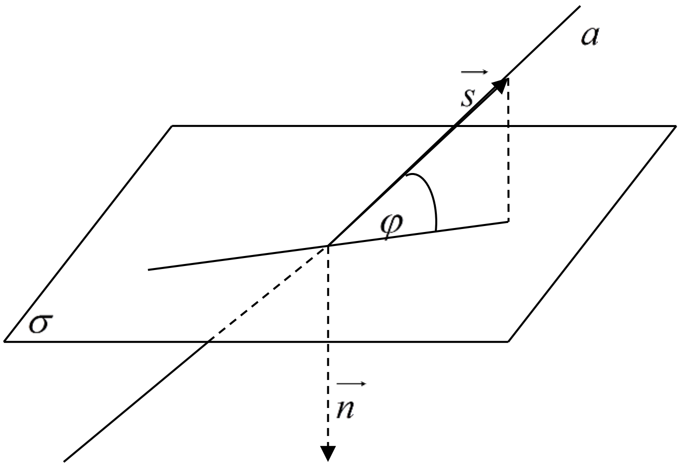


Рисунок 4.8

$\begin{gathered}\varphi+\dfrac{\pi}{2}=\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})\\ \varphi=\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})-\dfrac{\pi}{2}\end{gathered}$. Тоді

$\sin\varphi=\sin\left[\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})-\dfrac{\pi}{2}\right]=-\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})\right]=-\cos\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})=\left|\cos\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})\right|$,

оскільки кут $\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})$ тупий. В обох випадках:

$$\sin\varphi=\left|\cos\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{s})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{s}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{s}\right|},$$

або

$$\sin\varphi = \frac{|Ak + Bm + Cn|}{\sqrt{k^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (4.23)$$

Зауваження! 1) Якщо пряма l паралельна площині σ, то $\sin\varphi = 0$ і

$$Ak + Bm + Cn = 0. \qquad (4.24)$$

2) Якщо пряма l перпендикулярна площині σ, то $\vec{p} \parallel \vec{n}$ і

$$\frac{A}{k} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \qquad (4.25)$$

Точка перетину прямої і площини

Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка перетину прямої і площини знаходиться так: рівняння прямої зводиться до параметричного виду $x = x_0 + kt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$. Підставивши одержані рівняння в рівняння площини, визначаємо значення параметра t_1, який відповідає точці M_1:

$$t_1 = -\frac{D + Ax_0 + By_0 + Cz_0}{Ak + Bm + Cn},$$

звідки

$$x_1 = x_0 + kt_1, \quad y_1 = y_0 + mt_1, \quad z_1 = z_0 + nt_1.$$

4.8 Приклади розв'язування задач аналітичної геометрії

Основні задачі на складання рівнянь площини

Більшість задач на складання рівняння площини зводиться до однієї з наступних основних задач.

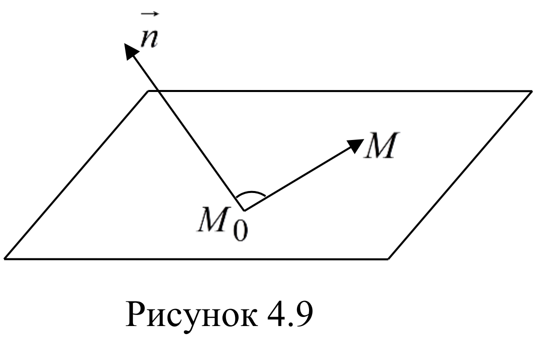


Рисунок 4.9

1) Скласти рівняння площини, яка проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$.

Розв'язування. Нехай $M(x, y, z)$- довільна точка площини. За умовою, вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярний до вектора $\vec{n}$. Відповідно, скалярний добуток, тобто $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.Записується ця умова в координатах

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$$

2) Скласти рівняння площини, яка проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно до двох даних (не колінеарних) векторів $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ (рис. 4.10).

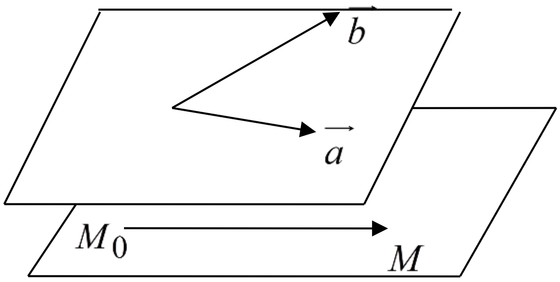


Рисунок 4.10

Розв'язування. Візьмемо довільну точку площини $M(x, y, z)$. Вектори $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть компланарні, оскільки вони розміщені в паралельних площинах. Відповідно їх мішаний добуток $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Записати цю умову в координатах, одержимо рівняння шуканої площини у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

Обчислюємо цей визначник розклавши за елементами першого рядка

$$(x-x_0)(a_yb_z-a_zb_y)-(y-y_0)(a_xb_z-a_zb_x)+(z-z_0)(a_xb_y-a_yb_x)=0.$$

3) Скласти рівняння площини, яка проходить через дві дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, паралельно даному вектору $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ ($\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{a}$ не колінеарні).

Розв'язування. Нехай $M(x, y, z)$ - довільна точка площини. Тоді вектори

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z),$$

$$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$$

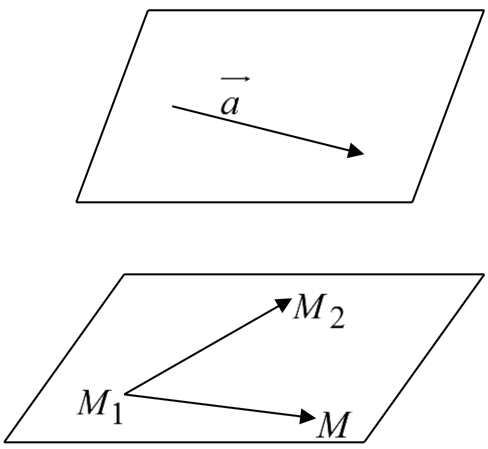


Рисунок 4.11

розміщені в паралельних площинах, і відповідно компланарні (рис. 4.11). Прирівнюючи до нуля мішаний добуток цих векторів, одержимо шукане рівняння у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0 \ .$$

4) Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 4.12).

Розв'язування. Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ площини і з'єднаємо одну із даних точок, наприклад, M_1, з точками $M_0\, M_2\, M_3$.Вектори $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ компланарні, і тому їх мішаний добуток дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

5) Скласти рівняння площини, рівновіддаленої від точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і перпендикулярної до відрізка, який їх з'єднує.

Розв'язування. Шукана площина ділить заданий відрізок точкою $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ навпіл і перпендикулярна до нього. Отже, нормальний вектор вектор площини $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Таким чином, рівняння площини таке

$$(x_2-x_1)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+(y_2-y_1)\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)+(z_2-z_1)\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)=0 .$$

6) Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ паралельно площині $Ax+By+Cz+D=0$.

Розв'язування. Оскільки площини паралельні, то нормальний вектор заданої площини є нормальним вектором і для шуканої площини. Тобто шукане рівняння

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 .$$

7) Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно до двох площин $\begin{matrix} \sigma_1: & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \sigma_2: & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{matrix}$.

Розв'язування. Площина σ_1 має нормальний вектор $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$, площина σ_2 має нормальний вектор $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$. За умовою задачі нормальний вектор шуканої площини $\vec{n}$ перпендикулярний обом нормальним векторам, тому $\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$. Після визначення нормального вектора наша задача зводиться до першого випадку.

8) З точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на координатні площини опущені перпендикуляри. Знайти рівняння площини, що проходить через їх основи.
Розв'язування. Основами перпендикулярів, опущених з точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ є точки $A(0, y_1, z_1)$, $B(x_1, 0, z_1)$, $C(x_1, y_1, 0)$. Таким чином, потрібно скласти рівняння площини, що проходить через три точки (випадок 4).

Приклад 4.1 Скласти рівння площини, яка проходить через точки $A(1, 2, -1)$ та $B(1, 4, 1)$ паралельно осі Ox.

Розв'язування. За викладеним вище, площина паралельна осі Ox визначається рівнянням виду $By + Cz + D = 0$. Оскільки шукана площина проходить через задані в умові точки, то їх координати повинні задавольняти це рівняння. Маємо

$$\begin{cases} 2B - C = -D \\ 4B + C = -D \end{cases}.$$

Звідки знаходимо, що $B = -\frac{1}{3}D$, $C = \frac{1}{3}D$. Таким чином, рівняння шуканої площини

$$-\frac{1}{3}Dy + \frac{1}{3}Dz + D = 0 \text{ або } -y + z + 3 = 0.$$

Приклад 4.2 Скласти рівняння площини, яка проходить через через початок координат та перпендикулярно площинам $9x + 5y + 7z - 21 = 0$ і $4x + 2y + 3z + 15 = 0$.

Розв'язування. Площина σ_1 має нормальний вектор $\overrightarrow{n_1}(9,5,7)$, площина σ_2 має нормальний вектор $\overrightarrow{n_2}(4,2,3)$. Нормальний вектор шуканої площини $\vec{n}$ перпендикулярний обом нормальним векторам, тому

$$\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Тоді рівняння шуканої площини

$$(x-0)\cdot 1 + (y-0)\cdot 1 + (z-0)\cdot(-2) = 0$$

або

$$x + y - 2z = 0.$$

Приклад 4.3 Дано вершини тетраедра $A_1(4,6,5)$, $A_2(6,9,4)$, $A_3(2,10,10)$ та $A_4(7,5,9)$. Знайти: а) рівняння ребра A_1A_2; б) рівняння грані $A_1A_2A_3$; в) кут між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$; г) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ та його довжину.

Розв'язування

а) Оскільки напрямним вектором прямої A_1A_2 є вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = \{2, 3, -1\}$, то за формулою (4.21) маємо:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-5}{-1}.$$

б) Рівняння грані $A_1A_2A_3$ – це рівняння площини, що проходить через три точки. Оскільки $\overrightarrow{A_1A_2} = \{2, 3, -1\}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \{-2, 4, 5\}$, то за формулою (4.8):

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-6 & z-5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідки $19(x-4) - 8(y-6) + 14(z-5) = 0$ або

$$19x - 8y + 14z - 98 = 0.$$

в) Оскільки напрямний вектор прямої $\overline{A_1A_4} = \{3, -1, 4\}$, а нормальний вектор площини $\vec{n}(19, -8, 14)$, то за формулою (4.23):

$$\sin\varphi = \frac{|3\cdot 19 + 1\cdot 8 + 14\cdot 4|}{\sqrt{19^2 + (-8)^2 + 14^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{121}{\sqrt{26}\sqrt{621}} \approx 0{,}97;$$

$$\varphi \approx 88^0$$

г) Для висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ напрямним вектором є вектор нормалі грані. Тому:

$$\frac{x-7}{19} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-9}{14}.$$

Довжина цієї висоти є відстанню від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$. За формулою (4.14) маємо

$$d_{A_4} = \left|\frac{19\cdot 7 - 8\cdot 5 + 14\cdot 9 - 98}{\sqrt{621}}\right| = \frac{121}{\sqrt{621}} \approx 4{,}86.$$

Приклад 4.4 Знайти відстань від точки $M_0(-1,2,1)$ до прямої $l:\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}$ система координат прямокутна, декартова.

Розв'язування

1) Знайдемо рівняння площини σ, що проходить через точку M_0 і перпендикулярно до l. Напрямний вектор $\vec{p}\,(-1,2,1)$ є нормальним вектором площини σ. Тому її рівняння:

$$\begin{aligned}&-(x+1)+2(y-2)+(z-1)=0\\&x-2y-z+6=0\end{aligned}.$$

2) Знайдемо координати точки N – перетину прямої та площини. Для цього складемо і розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x=-t+1\\ y=zt\\ z=t-z\\ x-2y-z+6\end{cases},\quad \begin{cases} t=3/2\\ x=-\dfrac{1}{2}\\ y=3\\ z=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Отже координати точки $N(-\frac{1}{2},3,-\frac{1}{2})$

3) $M_0N \perp l$ бо M_0N лежить у площині σ, а $\sigma \perp l$. Тому відстанню від точки M_0 до прямої l є довжина відрізка M_0N. Знайдемо її:

$$d = M_0N = \sqrt{(-\frac{1}{2}+1)^2 + (3-2)^2 + (-\frac{1}{2}-1)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Приклад 4.5. Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить черех точку $M(-2,1,-1)$ паралельно вектору $\vec{p}(1,-2,3)$.

Розв'язування

За формулою (4.20) маємо

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}.$$

Приклад 4.6 Дано координати трьох вершин трапеції $A(-3,-2)$, $B(4,-1)$, $C(1,3)$, діагоналі якої взаємно перпендикулярні. Знайти координати четвертої вершини трапеції (точка D).

Розв'язування. Припустимо, що AD та BC – основи трапеції. Складемо рівняння основи BC (за формулою (4.2)):

$$\frac{x-4}{1-4} = \frac{y+1}{3+1},$$

звідки $4x + 3y - 13 = 0$.

Оскільки основа AD паралельна BC, то її рівняння набуває вигляду: $4x + 3y + C = 0$. Для знаходження коефіцієнта C, скористаємось координатами вершини A, які задовольняють наведене рівняння. Маємо: $4(-3) + 3(-2) + C = 0$, звідки $C = 18$. Таким чином, рівняння основи AD: $4x + 3y + 18 = 0$.

Складемо рівняння діагоналі AC:

$$\frac{x+3}{1+3} = \frac{y+2}{3+2}, \text{ або } 5x - 4y + 7 = 0.$$

За умовою задачі, вектор нормалі $\vec{n}(5,-4)$ є напрямним вектором діагонаді BD. Тому за формулою (4.1) маємо:

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{-4}, \text{ або } 4x + 5y - 11 = 0.$$

Координати точки D знайдемо як координати точки перетину основи AD та діагоналі BD. Для їх знаходження одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 18 = 0 \\ 4x + 5y - 11 = 0 \end{cases}.$$

Звідки $y = \dfrac{29}{2}$, $x = -\dfrac{123}{8}$, тобто $D\left(\dfrac{29}{2}, -\dfrac{123}{8}\right)$.

Приклад 4.7 Дано рівняння двох сторін трикутника $5x - 4y + 15 = 0$, $4x + y - 9 = 0$ та точку $P(0,2)$ – точку перетину його медіан. Скласти рівняння третьої сторони.

Розв'язування. Для спрощення подальших міркувань будемо вважати, що стороні BC відповідає рівняння $5x - 4y + 15 = 0$, а стороні AC: $4x + y - 9 = 0$.

Знайдемо координати вершини C:

$$\begin{cases} 5x-4y+15=0 \\ 4x+y-9=0 \end{cases}.$$

Звідки $C(1,5)$. Нехай $K(x_k, y_k)$ – основа медіани, опущеної із вершини $C(1,5)$ на сторону AB. Для знаходження її координат використовуємо той фактор, що точка $P(0,2)$ ділить кожну медіану у відношенні $2:1$ рахуючи від вершини:

$$\frac{x_C+\lambda x_k}{1+\lambda}=x_P, \ \frac{y_C+\lambda y_k}{1+\lambda}=y_P.$$

Оскільки $\lambda=\frac{2}{1}=2$, то

$$\frac{1+2x_k}{3}=0, \ \frac{5+2y_k}{3}=2$$

і $K\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Знайдемо координати вершин A та B, використовуючи властивість медіани $(AK=KB)$ та той факт, що координати вершини A задавольняють рівняння $4x+y-9=0$, а координати вершини B – $5x-4y+15=0$. Маємо систему:

$$\begin{cases} x_A+x_B=-1 \\ y_A+y_B=1 \\ 4x_A+y_A-9=0 \\ 5x_B-4y_B+15=0 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} x_A=2 \\ x_B=-3 \\ y_A=1 \\ y_B=0 \end{cases}.$$

Таким чином, $A(2,1)$ і $B(-3,0)$. За формулою (4.2) рівняння сторони AB таке:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-1}{-1}, \text{ або } x-5y+3=0.$$

Приклад 4.8 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(5,-1,-3)$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x+3y+z-6=0 \\ 4x-5y-z+2=0 \end{cases}$.

Розв'язування. За умовою задачі напрямний вектор $\vec{p}$ заданої прямої буде напрямним вектором шуканої прямої. Знайдемо його координати за формулою (4.17):

$$\vec{p}\left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\right)=\vec{p}(2,\ 6,-22).$$

Тоді за формулою (4.21) одержуємо рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+3}{-22}, \text{ або } \frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-11}.$$

Приклад 4.9 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-4, 0, 2)$ перпендикулярно до прямих

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4} \text{ та } \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}.$$

Розв'язування

За умовою задачі напрямними векторами заданих прямих є вектори $\overrightarrow{p_1}(2, 3, 4)$ та $\overrightarrow{p_2}(3, 2, 2)$. Оскільки шукана пряма перпендикулярна до двох заданих прямих, то її напрямний вектор такий:

$$\vec{p}=\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}+8\vec{j}-5\vec{k}.$$

Тоді за формулою (4.21) одержуємо:

$$\frac{x+4}{-2}=\frac{y}{8}=\frac{z-2}{-5}.$$

Приклад 4.10 Довести перпендикулярність прямих

$$\begin{cases}x=2t+1,\\ y=3t-2,\\ z=-6t+1\end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases}2x+y-4z+2=0,\\ 4x-y-5z+4=0.\end{cases}$$

Розв'язування

Умовою перпендикулярності двох прямих є перпендикулярність їх напрямних векторів. Знайдемо напрямні вектори заданих прямих, використовуючи формули (4.16) – (4.17) та (4.20). Маємо

$$\overrightarrow{p_1}(2, 3, -6) \text{ та } \vec{p}_2\left(\begin{vmatrix}1 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-4 & 2\\ -5 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}\right)=\vec{p}_2(-9, -6, -6).$$

Обчислимо скалярний добуток знайдених векторів

$$\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}=2\cdot(-9)+3\cdot(-6)+(-6)\cdot(-6)=0.$$

Оскільки скалярний добуток векторів $\overrightarrow{p_1}$ та $\overrightarrow{p_2}$ дорівнює нулю, то вони, а отже і задані прямі, перпендикулярні.

ТЕМА 5. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Найпростішою кривою другого порядку, відомою ще зі школи є коло $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ з цетром в точці $O(a,b)$ радіуса R властивості цієї кривої пригадайте самостійно. Розглянемо ряд інших кривих.

5.1 Еліпс

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є величина стала і більша від відстані між фокусами. Щоб вивести рівняння еліпса, візьмемо на площині дві точки F_1 *і* F_2 — фокуси еліпса і розмістимо прямокутну систему координат так, щоб вісь *Ox* проходила через фокуси, а

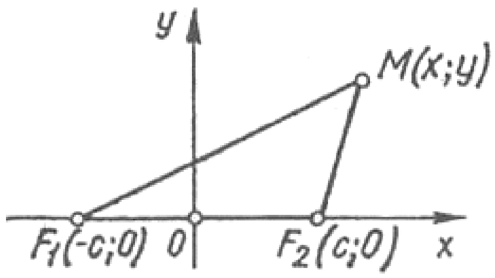


Рисунок 5.1

початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 5.1).

Позначимо відстань між фокусами, яку називають фокальною, через $2c$: F_1F_2:= 2с, а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів - через *2a.* Тоді фокуси мають такі координати: F_1(-с; 0) і F_2(c; 0). За означенням $2a > 2c$, тобто $a>c$.

Нехай $M\ (x;\ y)$ — довільна точка площини. Ця точка лежить на еліпсі тоді, коли $F_1M + F_2M = 2a$ або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (5.1)$$

Це, по суті, і є *рівняння еліпса.* Щоб спростити його, перенесемо один радикал у праву частину, піднесемо обидві частини до квадрата і зведемо подібні. Матимемо

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx\,.$$

Піднісши обидві частини цього рівняння ще раз до квадрата та спростивши вираз, дістанемо $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Оскільки $a > c$, то a^2 — $c^2 > 0$, тому можна позначити

$$a^2-c^2=b^2 \qquad (5.2)$$

Тоді рівняння (5.1) набуде вигляду

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (5.3)$$

Рівняння (5.3) називається *канонічним рівнянням еліпса.*

Встановимо деякі *властивості* і дослідимо форму еліпса.

1. Рівняння *(5.3)* містить змінні x та y лише в парних степенях, тому, якщо точка $(x;\ y)$ належить еліпсу, то йому також належать точки $(-x;\ y)$, $(x;\ -y)$ і $(-x;\ -y)$. Тому еліпс симетричний відносно осей *Ox* та *Oy,* а також відносно точки $O(0;\ 0)$, яку називають *центром еліпса.* Отже, для встановлення форми еліпса достатньо дослідити ту його частину, яка розміщена в одному, наприклад в першому, координатному куті.

2. В першому координатному куті $x \geq 0$, $y \geq 0$, тому з рівності (5.3) маємо

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,, \qquad (5.4)$$

звідки випливає, що точки A_1 $(a;\ 0)$ та B_1 $(0;\ b)$ належать еліпсу, причому, якщо x збільшується від 0 до a, то y зменшується від b до 0. Крім того, не існує точок еліпса, у яких $x>a$, бо вираз (5.4) при $x>a$ не має змісту. Таким чином, частина еліпса, розміщена в першому координатному куті, має форму дуги A_1B_1 (рис. 5.2).

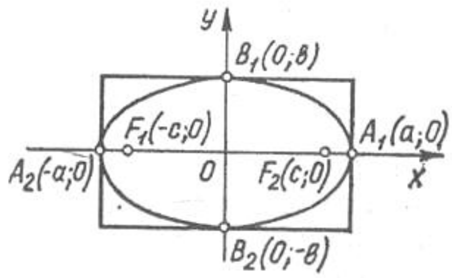


Рисунок 5.2

Відобразивши цю дугу симетрично відносно осей *Ox* та *Oy,* дістанемо весь еліпс. Він вміщується в прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$.

Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в точках перетину його з осями *Ox* і *Oy*.

Еліпс перетинає осі координат в точках $A_1(a;\ 0)$, $A_2\ (-a;\ 0)$, $B_1\ (0;\ b)$, $B_2\ (0;\ -b)$.

Ці точки називаються *вершинами еліпса.*

Величини $A_1A_2 = 2a$ та $B_1B_2 = 2b$ називаються відповідно *великою* та *малою осями еліпса.*

Таким чином, з властивостей 1 і 2 випливає, що всякий еліпс має *дві взаємно перпендикулярні осі симетрії (головні осі еліпса)* і *центр симетрії (центр еліпса).* Точки, в яких еліпс перетинає головні осі, обмежують на головних осях відрізки довжинами $2a$ і $2b$, які називаються *великою і малою осями еліпса,* а числа a та b- *великою* і *малою півосями еліпса.* Весь еліпс вміщується в прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$. Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в його вершинах.

3. Якщо $a=b$, то рівняння (5.3) набирає вигляду

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

тобто дістаємо *рівняння кола.* Отже, коло є окремим випадком еліпса. З формули (5.2) випливає, що при $a=b$ значення $c = 0$, тобто коло — це еліпс, у якого фокуси збігаються з його центром.

Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною $\boldsymbol{\varepsilon}$, яка називається *ексцентриситетом еліпса* і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (5.5)$$

причому $0 \le \varepsilon < 1$, оскільки $0 \le c < a$. З формул (5.2) і (5.5) дістаємо

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отже, якщо $\varepsilon = 0$, то $b=a$, тобто еліпс перетворюється в коло; якщо ε наближається до одиниці, то відношення осей b/a зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі *Ox*.

4. Нехай $M(x;\ y)$ - довільна точка еліпса з фокусами F_1 і F_2 (рис. 5.3).

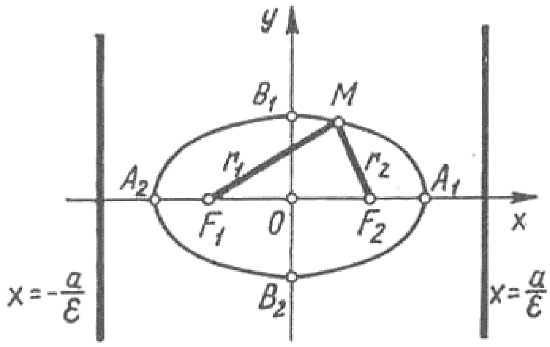


Рисунок 5.3

Відстані $F_1M=r_1$ і $F_2M=r_2$ називаються фокальними радіусами точки M. Очевидно, $r_1+r_2=2a$. Прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* еліпса.

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon\,. \tag{5.6}$$

Приклад 5.1 Скласти рівняння геометричного місця точок відстані від яких до точки $A(2,0)$ та прямої $2x+5=0$ відносяться як 4:5.

Розв'язування. Нехай точка $M(x,y)$ належить шуканій лінії. Тоді відстань від ціє точки то $A(2,0)$ визначається, як $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$, а відстань від цієї точки до заданої прямої $d(M,l)=\frac{|2x+5|}{2}$. За умовою задачі

$$\frac{2\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|2x+5|}=\frac{4}{5}\,.$$

Звідки,

$$25(x^2-4x+4+y^2)=4(4x^2+20x+25),$$

$$9x^2-180x+25y^2=0,$$

$$(x-10)^2+\frac{25}{9}y^2=900,$$

$$\frac{(x-10)^2}{100}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1\,.$$

Отже, шукане геометричне місце точок – еліпс, з центром в точці $O(10, 0)$, малою піввіссю $b = \frac{3}{2}$ та великою піввіссю $a = 10$.

Приклад 5.2 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{12}{13}$.

Розв'язування

З рівностей 5.2 та 5.5 знайдемо велику піввісь:

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-\varepsilon^2).$$

Звідки $a = \sqrt{\frac{b^2}{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{25}{1-\frac{144}{169}}} = \sqrt{169} = 13$. Таким чином рівняння шуканого еліпса

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Приклад 5.3 Знайти точки еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, відстань від яких до правого фокуса дорівнює 14.

Розв'язування

Знайдемо половину фокальної відстані із співвідношення:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 36 = 64.$$

Тоді правий фокус має координати $F_2(8,0)$.

Нехай шукані точки еліпса мають координати (x, y). За умовою задачі скдадаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1, \\ (x-8)^2 + y^2 = 196. \end{cases}$$

З першого рівняння системи виражаємо y^2 та підставляємо в друге рівняння. В результаті маємо

$$(x-8)^2 + 36 - \frac{36}{100}x^2 = 196.$$

Виконавши необхідні перетворення, одержуємо:

$$x^2 - 25x - 150 = 0, \quad x_1 = 30, \qquad x_2 = -5.$$

Точка $x_1 = 30$ не належить даному еліпсу, оскільки його права вершина $A_2(10{,}0)$. Підставивши $x_2 = -5$ в рівняння еліпса знаходимо координати шуканих точок $\left(-5, 3\sqrt{3}\right)$ та $\left(-5, -3\sqrt{3}\right)$.

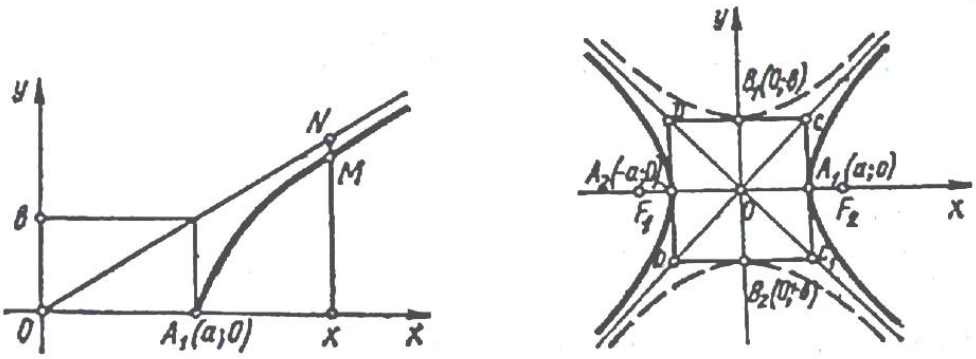
5.2 Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються *фокусами*, є величина стала і менша відстані між фокусами.

Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними – через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів – через $2a$. За означенням $a < c$. Щоб вивести рівняння гіперболи, візьмемо на площині прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат поділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 5.4а).

Точка $M\ (x;\ y)$ площини лежить на гіперболі тоді і лише тоді, коли $|\ MF_1 - MF_2\ | = 2a$ або

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$



а) б)

Рисунок 5.4

Виконавши ті самі перетворення, що й при виведенні рівняння еліпса, дістанемо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.7}$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{5.8}$$

Встановимо деякі властивості і дослідимо форму гіперболи.

1. Гіпербола симетрична осям *Ox, Oy* і початку координат.

2. Для частини гіперболи, яка лежить у першому координатному куті, з рівняння (5.7) дістанемо

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,. \tag{5.9}$$

З рівності (5.9) випливає, що $x \geq a$.

Точка $A_1(a,0)$ належить гіперболі і є точкою перетину гіперболи з віссю *Ox*. Гіпербола не перетинає вісь *Oy*. Якщо $x > a$, то $y > 0$, причому якщо x збільшується, то y також збільшується, тобто якщо $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.

Пряма

$$y = \frac{b}{a}x \tag{5.10}$$

називається асимптотою гіперболи, оскільки

$$k = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a},$$

$$b_0 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0\,.$$

Таким чином, частина гіперболи, розміщена у першому координатному куті, має вигляд дуги, яка показана на рис. 5.4а. Відобразивши цю дугу симетрично відносно координатних осей, дістанемо вигляд всієї гіперболи.

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Осі симетрії називаються *осями* гіперболи, а точка перетину осей - її *центром*. Вісь *Ox* перетинає гіперболу в двох точках $A_1\,(a\,;\,0)$ і $A_2(-a\,;\,0)$, які називаються *вершинами* гіперболи. Ця вісь називається *дійсною віссю* гіперболи, а вісь, яка не має спільних точок з гіперболою – *уявною віссю*.

Дійсною віссю називається також відрізок A_1A_2, який сполучає вершини гіперболи і його довжину $A_1A_2 = 2a$. Відрізок B_1B_2, який сполучає точки $B_1\,(0;\,b)$ і $B_2\,(0;\,-\,b)$, а також його довжину, називають уявною віссю. Величини a і b відповідно називаються *дійсною і уявною півосями гіперболи.*

Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$ називаються *основним прямокутником гіперболи.*

При побудові гіперболи (5.7) доцільно спочатку побудувати основний прямокутник C_1D_1DC (рис. 5. 4б), провести прямі, що проходять через протилежні вершини цього прямокутника – асимптоти гіперболи і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи.

Рівняння

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \tag{5.11}$$

також визначає гіперболу, яка називається спряженою до гіперболи (5.7). Гіпербола (5.11) показана на рис. 5.4б штриховою лінією. Вершини цієї гіперболи лежить в точках $B_1\,(0;\,b)$ і $B_2\,(0;-b)$, а її асимптоти збігаються з асимптотами гіперболи (5.7).

Гіпербола з рівними півосями $a=b$ називається *рівносторонньою*, її канонічне рівняння має вигляд

$$x^2-y^2=a^2. \tag{5.12}$$

Основним прямокутником рівносторонньої гіперболи є квадрат із стороною $2a$, а її асимптотами – бісектриси координатних кутів.

3. Ексцентриситет гіперболи визначається як відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Оскільки $c>a$, то $\varepsilon>1$. Враховуючи формулу (5.8) одержуємо, що

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}.$$

Отже, ексцентриситет гіперболи характеризує її форму: чим більший ексцентриситет, тим більше відношення $\frac{b}{a}$, тобто тим більше основний прямокутник розтягується в напрямку осі *Oy*, а гіпербола відхиляється від осі *Ox*. Чим ближче ексцентриситет до одиниці, тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі *Ox*, а гіпербола наближається до цієї осі.

4. Прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, де a –дійсна піввісь гіперболи, а ε – її ексцентриситет, називаються *директрисами гіперболи*. Директриси гіперболи мають ту саму властивість, що й директриси еліпса.

Приклад 5.4 З'ясувати, яку криву задано рівнянням $\rho=\dfrac{4}{2-3\cos\varphi}$ в полярній системі.

Розв'язування

З п. 3.3 відомо, що $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Таким чином,

$$2\sqrt{x^2+y^2}-3x=4, \qquad \text{або } \sqrt{x^2+y^2}=\frac{3}{2}x+2.$$

Піднесемо одержану рівність до квадрату за умови, що $\frac{3}{2}x+2\geq 0$. Маємо

$$x^2+y^2=4+6x+\frac{9}{4}x^2,$$

$$\frac{5}{4}\left(x+\frac{6}{5}\right)^2-y^2=\frac{16}{5},$$

$$\frac{\left(x+\frac{6}{5}\right)^2}{\frac{64}{25}}-\frac{y^2}{\frac{16}{5}}=1.$$

Ми одержали рівняння гіперболи, з центром в точці $O\left(-\frac{6}{5},0\right)$, з дійсною піввіссю $a=\frac{8}{5}$ та уявною піввіссю $b=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Приклад 5.5 Фокуси гіперболи співпадають з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon=2$.

Розв'язування. Знайдемо половину фокальної відстані еліпса

$$b^2=a^2-c^2, \text{ звідки } c^2=a^2-b^2=25-9=16, \ |c|=4.$$

З умови задачі $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $a=\frac{c}{\varepsilon}=\frac{4}{2}=2$. Уявну піввісь гіперболи знаходимо із співвідношення:

$$b^2=c^2-a^2=16-4=12.$$

Отже, рівняння шуканої гіперболи таке:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$$

Приклад 5.6 Через лівий фокус гіперболи $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ проведений перпендикуляр до її дійсної осі. Визначити відстані від фокусів до точок перетину цього перпендикуляра з гіперболою.

Розв'язування. Оскільки $c^2=a^2+b^2=169$, то фокуси гіперболи мають координати $F_1(-13,0)$ (лівий фокус) та $F_2(13,0)$.

Рівняння прямої, що проходить через лівий фокус перпендикулярно до дійсної осі таке:

$$x=-13.$$

Знайдемо точки перетину цієї прямої з гіперболою:

$$\frac{169}{144}-1=\frac{y^2}{25}, \text{ звідки } y=\pm\frac{25}{12}=\pm 2\frac{1}{12}.$$

Маємо дві точки перетину: $A_1\left(-13, 2\frac{1}{12}\right)$ та $A_2\left(-13, -2\frac{1}{12}\right)$. Оскільки ці точки симетричні відносно осі Ox, то достатньо визначити відстань від фокусів до точки $A_1\left(-13, 2\frac{1}{12}\right)$. Зрозуміло, що відстань від цієї точки до фокуса $F_1(-13, 0)$ дорівнює $2\frac{1}{12}$. Визначимо відстань до другого фокуса $\left|\overrightarrow{AF_2}\right|=\sqrt{26^2+\left(-\frac{25}{12}\right)^2}=\frac{313}{12}=26\frac{1}{12}$.

Приклад 5.7 Задано рівняння рівносторонньої гіперболи $x^2-y^2=8$. Знайти співфокусний еліпс, що проходить через точку $A(4, 6)$.

Розв'язування. З умови задачі $c^2=8+8=16$, для малої півосі еліпса маємо $b^2=a^2-16$. Таким чином, шукане рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1.$$

Для знаходження квадрата великої півосі використаємо той факт, що еліпс проходить через точку $A(4, 6)$, а отже її координати задовольняють наведене вище рівняння. Тобто,

$$\frac{16(a^2-16)+36a^2-a^2(a^2-16)}{a^2(a^2-16)}=0.$$

Звідки

$$16(a^2-16)+36a^2-a^2(a^2-16)=0,$$

або

$$a^4-68a^2+256=0,\ a^2=64.$$

Отже, шукане рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1.$$

5.3 Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яка називається фокусом, і від даної прямої, яка називається директрисою і не проходить через фокус.

Знайдемо рівняння параболи. Нехай на площині задані фокус F і директриса, причому відстань фокуса від директриси дорівнює p. Візьмемо прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокус, перпендикулярно до директриси, а вісь Oy ділила відстань між фокусом F і директрисою навпіл (рис. 5.5). Тоді фокус має координати $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, а рівняння директриси має вигляд $x = \frac{p}{2}$.

Нехай $M(x;\ y)$ — довільна точка площини, а відрізки MB і MF— відстані цієї точки від директриси і фокуса. Точка M тоді лежить на параболі, коли MB = MF або

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Це і є рівняння параболи. Щоб спростити його, піднесемо обидві частини одержаної рівності до квадрата:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

тобто

$$y^2 = 2px. \qquad (5.13)$$

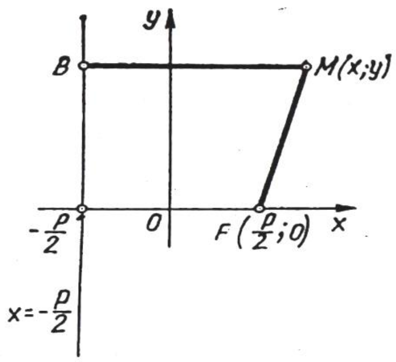


Рисунок 5.5

Рівняння (5.13) називається *канонічним рівнянням параболи.* Параболу, задану рівнянням (5.13) зображено на рис. 5.6. Спробуйте самостійно переконатись у правильності її побудови.

Вісь симетрії параболи називається її *віссю*; точка перетину осі з параболою — *вершиною* параболи; число, яке дорівнює відстані фокуса від директриси,— *параметром* параболи. Віссю параболи, заданої рівнянням (5.13), є вісь Ox, вершиною — точка $O(0;\ 0)$ і параметром — число p. З'ясуємо вплив параметра p на форму параболи. Якщо в рівнянні (5.13) покласти $x = \frac{p}{2}$, то відповідні значення ординати $y = \pm\, p$, тобто маємо на параболі дві симетричні відносно осі Ox точки $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ і $\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

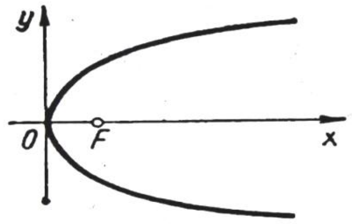


Рисунок 5.6

Відстань між цими точками дорівнює $2p$ і збільшується із збільшенням p. Отже, параметр p характеризує «ширину» області, яку обмежує парабола. Рівняння

$$x^2 = 2py \tag{5.14}$$

визначає параболу, симетричну відносно осі ординат.

Фокальний радіус точки $M(x, y)$ на параболі (5.13) знаходиться за формулою

$$r = x + \frac{p}{2}, \tag{5.15}$$

а на параболі (5.14) за формулою

$$r = y + \frac{p}{2}. \tag{5.16}$$

Якщо парабола симетрична відносно осі абсцис, вершина міститься в початку координат, але гілки напрямлені у від'ємну сторону осі, то її рівняння має вигляд $y^2 = -\,2px$. Аналогічно, рівняння $x^2 = -2py$ визначає параболу, гілки якої напрямлені у від'ємну сторону осі ординат.

Якщо вершину параболи $y^2 = \pm 2px$ помістити в точку $O(x_0, y_0)$, то її рівняння матиме вигляд

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0). \tag{5.17}$$

Ця парабола симетрична відносно прямої $y = y_0$.

Якщо вершину параболи $x^2 = \pm 2py$ помістити в точку $O(x_0, y_0)$, то її рівняння матиме вигляд

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0). \tag{5.18}$$

Ця парабола симетрична відносно прямої $x = x_0$.

Приклад 5.8 Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від точки $A(0, 2)$ та прямої $y - 4 = 0$.

Розв'язування. Нехай точка $M(x, y)$ належить шуканій лінії. Тоді відстань від цієї точки до точки $A(0, 2)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$, а відстань від цієї точки до заданої прямої дорівнює $|y - 4|$. За умовою задачі

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y - 4|,$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - 8y + 16,$$

$$y = 3 - \frac{x^2}{4}.$$

Ми одержали рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy з вершиною в точці $O(0, 3)$.

Приклад 5.9 Парабола проходить через точку $(2, 3)$ і має вершину в точці (7, 8). Скласти рівняння параболи, якщо її вісь паралельна до осі абсцис.

Розв'язування. За формулою (5.17) маємо

$$(y - 8)^2 = 2p(x - 7).$$

Значення параметра p знайдемо, використовуючи координати точки, через яку вона проходить:

$$p = \frac{(y-8)^2}{2(x-7)} = \frac{(3-8)^2}{2(2-7)} = -\frac{25}{10} = -\frac{5}{2}.$$

Підставивши знайдене значення в рівняння параболи, маємо:

$$(y - 8)^2 = -5(x - 7),$$

$$y^2 - 16y + 64 + 5x - 35 = 0,$$

$$y^2 - 16y + 5x + 29 = 0.$$

Приклад 5.10 Знайти координати вершини і скласти рівняння осі симетрії параболи $y = x^2 + 8x + 15$.

Розв'язування. Запишемо рівняння параболи у канонічному виді:

$$y+1=(x+4)^2.$$

За формулою (5.18) визначаємо, що $O(-4,-1)$, пряма $x+4=0$ її вісь симетрії.

Приклад 5.11 На параболі $y^2=16x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 6.

Розв'язування

За формулою (5.15) знаходимо:

$$r=x+\frac{p}{2},\quad 6=x+8,\quad x=2.$$

Знайдемо ординату точки, підставивши $x=2$ в рівняння параболи. Маємо $y=\pm 4\sqrt{2}$.

Ми одержали дві точки $\left(2,-4\sqrt{2}\right)$ та $\left(2,4\sqrt{2}\right)$ на параболі $y^2=16x$ фокальний радіус яких дорівнює 6.

Приклад 5.12 З'ясувати, яка лінія визначається рівнянням $x=-4+3\sqrt{y+5}$.

Розв'язування. Перепишемо рівняння параболи так:

$$x+4=3\sqrt{y+5}.$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату:

$$(x+4)^2=9(y+5).$$

Таким чином, задане рівняння визначає гілку параболи $(x+4)^2=9(y+5)$, розташовану праворуч від прямої $x+4=0$.

ЧАСТИНА 2

Тестові завдання для поточного та рубіжного контролю

1. Довільна множина чисел, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, що складається з m рядків і n стовпців називається матрицею розмірності:

а) $n \times m$; б) $m \times n$;

в) $n \times n$; г) $-m \times n$

2. Які із позначень застосовують для матриць:

а) $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{bmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$; г) $\begin{Vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{Vmatrix}$.

3. Матриці для скорочення позначають:

а) однією великою буквою;

б) однією маленькою буквою;

в) двома великими буквами;

г) двома маленькими буквами.

4.Квадратна матриця називається діагональною, якщо вона має вигляд:

а) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$;г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

5. Дві матриці називаються рівними, якщо:

а) вони мають однакову розмірність і відповідні елементи рівні;

б) вони мають не однакову розмірність;

в) вони мають однакову розмірність;

г) вони мають однакову розмірність та різні відповідні елементи.

6. Які з матриць можна додати?

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 10 & 12 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 10 & 12 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Які з матриць можна перемножити? (Якщо $m \neq n \neq p.$).

а) матриця А розмірністю $m \times n$ і матриця В розмірністю $p \times n$;

б) матриця А розмірністю $p \times n$ і матриця В розмірністю $n \times m$;

в) матриця А розмірністю $m \times p$ і матриця В розмірністю $m \times p$;

г) матриця А розмірністю $n \times p$ і матриця В розмірністю $m \times p$.

8. Результатом добутку матриці А розмірністю $p \times m$ і матриці В розмірністю $m \times n$ є матриця:

а) розмірністю $m \times m$;

б) розмірністю $n \times p$;

в) розмірністю $p \times n$;

г) розмірністю $n \times 1$.

9. Визначником, який відповідає числовій матриці є:

а) число; б) матриця; в) функція; г) вектор.

10. Визначник, який обчислюється за правилом розкладу за елементами і-го рядка (стовпця), дорівнює:

а) сумі добутків елементів і-го рядка (стовпця) на відповідні доповняльні мінори;

б) сумі попарних добутків елементів і-го рядка (стовпця) на їх алгебраїчне доповнення;

в) сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка елементів на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка;

г) сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка елементів на доповняльні мінори елементів іншого стовпця.

11. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчне доповнення відповідних елементів іншого стовпця цього визначника дорівнює:

а) від’ємному числу; б) додатному числу; в) нулю; г) одиниці.

12. Головна діагональ визначника це:

а) сукупність елементів визначника з різними індексами;

б) сукупність елементів визначника з однаковими індексами

в) довільна сукупність елементів;

г) сукупність елементів з першими однаковими індексами.

13. Алгебраїчне доповнення елемента визначника є його:

а) доповняльний мінор;

б) матриця, яка відповідає визначнику;

в) доповняльний мінор, взятий з відповідним знаком;

г) доповняльний мінор, помножений на два.

14. Зв'язок між алгебраїчним доповненням елемента і його мінором визначається за формулою:

а) $A_{ij} = (-1)^{i\text{-}j} M_{i`j}$ б) $A_{ij} = (1)^{i+j} M_{ij}$ в) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ г) $A_{ij} = (-1)^{2i\text{-}j} M_{i`j}$

15. За якою із формул можна обчислити визначник 3-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13};$

б) $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} - a_{13}M_{13};$

в) $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} - a_{13}A_{13};$

г) $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} - a_{13}A_{13}.$

16. Мінором елемента визначника n-го порядку є визначник:

а) (n-2)-го порядку; б) (n-1)-го порядку;

в) n-го порядку; г) (n-4)-го порядку.

17. Якщо рядки визначника поміняти місцями з відповідними стовпцями, то визначник:

а) не зміниться;

б) зміниться;

в) змінить знак на протилежний;

г) збільшиться в двічі.

18. Якщо у визначнику поміняти місцями довільні два рядки (стовпці) то визначник:

а) змінить знак на протилежний не зберігаючи абсолютне значення;

б) змінить знак на протилежний, зберігаючи абсолютне значення;

в) не змінить знак і збереже абсолютне значення;

г) змінить знак на протилежний, збільшивши абсолютне значення вдвічі.

19. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює:

а) нулю; б) додатному числу;

в) від'ємному числу; г) мінус одиниці.

20. Якщо усі елементи одного рядка (стовпця) визначника помножити на однакове число k, то абсолютне значення визначника:

а) не зміниться;

б) збільшиться в k разів;

в) зменшиться в k разів;

г) збільшиться в k^2 раз.

21. Спільний множник усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника:

а) можна виносити за знак визначника;

б) не можна виносити за знак визначника;

в) можна виносити за знак визначника, якщо змінити знак визначника на протилежний;

г) можна виносити за знак визначника, якщо збільшити абсолютне значення визначника вдвічі.

22. Якщо елементи двох будь-яких рядків (стовбців) визначника пропорційні, то визначник є:

а) число додатне; б) дорівнює нулю;

в) число від'ємне; г) дорівнює одиниці.

23. Якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цього визначника, що множаться на однакове число, то визначник:

а) не зміниться;

б) буде додатнім числом;

в) буде від'ємним числом;

г) буде дорівнювати нулю.

24. Оберненою матрицею до матриці A_n називається така матриця A_n^{-1}, що:

а) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$;

б) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = O$;

в) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 5$;

г) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = -5$.

25. Обернена матриця обчислюється за формулою:

а) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$;

б) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$;

в) $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$;

г) $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & -A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ A_{n1} & -A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$.

26. Додати матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 13 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 13 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

27. Помножити матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 2$

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -14 & 16 & -18 \end{pmatrix}$.

28. Транспонувати матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

29. Обчислити $2A-3B+E$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $-\begin{pmatrix} 15 & 17 & 27 \\ 9 & 25 & 32 \\ 1 & -1 & -8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 15 & 17 & 27 \\ 9 & 25 & 32 \\ 1 & -1 & -8 \end{pmatrix}$; в) $-\begin{pmatrix} 15 & 17 & 27 \\ 9 & 15 & 32 \\ 1 & -1 & -8 \end{pmatrix}$;

г) $-\begin{pmatrix} 15 & 17 & 27 \\ 9 & 15 & 22 \\ 1 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

30. Помножити матриці $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

а) 2; б) 1; в) -1; г) -2.

31. Помножити матриці $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot$

а) $\begin{pmatrix} -8 & -9 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 8 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

32. Матриці A, C мають розміри відповідно $m\times n$ та $p\times q$, та існує добуток ABC. Які розміри матриць B та ABC?

а) $B-n\times p$; $ABC-m\times q$;

б) $B-m\times p$; $ABC-n\times q$;

в) $B-n\times p$; $ABC-p\times q$;

г) $B-n\times m$; $ABC-m\times q$.

33. Обчислити $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n$.

а) $2^n\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ б) $2^{n+1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ в) $2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ г) $2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

34. Обчислити $f(A)=A^2+2A$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

35. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & \sin\varphi\end{vmatrix}$.

а) 2; б) -1; в) 1; г) -2.

36. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix}x & 2\\ x & x\end{vmatrix}=-1$.

а) $x=-1$; б) $x=2$; в) $x=0$; г) $x=1$.

37. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

а) 12; б) -13; в) 13; г) -12

38. Обчислити $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$.

а) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ в) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ г) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

39. Знайти матрицю обернену до матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$**.**

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

40. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

41. Розв’язати матричне рівняння $AX = B$.

а) $A^{-1} \cdot B$; б) $B \cdot A^{-1}$; в) O; г) E.

42. Розв’язати матричне рівняння $A(X + C) = B$.

а) $A^{-1}BC^{-1}$; б) $A^{-1}B - C$; в) $A^{-1}B + C$; г) $A^{-1}B + A^{-1}C$

43. Розв’язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

44. Вектор це:

а) впорядкований відрізок;

б) точка;

в) невпорядкований відрізок;

г) промінь.

45. Орт це:

а) напрямний відрізок;

б) вектор, довжина якого дорівнює 1;

в) відрізок, довжина якого дорівнює одиниці;

г) точка з координатами (1,1)

46. Відстань між початком та кінцем вектора називають:

а) модулем;

б) напрямком;

в) аргументом;

г) кутовим коефіцієнтом.

47. Два вектори протилежні, якщо:

а) вони мають різні напрямки;

б) вони мають однакові довжини і різні напрямки;

в) вони мають однакові напрямки і різні довжини;

г) вони мають різні напрямки та різні довжини.

48. Два вектори компланарні, якщо вони:

а) лежать в різних площинах;

б) лежать в одній площині;

в) лежать в одній площині або в паралельних площинах;

г) лежать в перпендикулярних площинах.

49. Два вектори називають колінеарними, якщо:

а) вони лежать на прямих, що перетинаються;

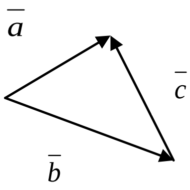
б) вони лежать на одній прямій або існує пряма, якій вони паралельні;

в) вони співпадають;

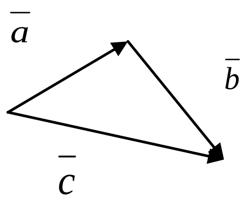
г) вони лежать на мимобіжних прямих.

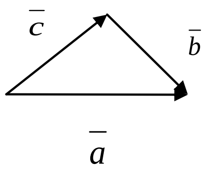
50. Вибрати малюнок, який є результатом додавання двох векторів $(\overline{c} = \overline{a} + \overline{b})$

а)



б)

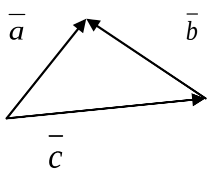




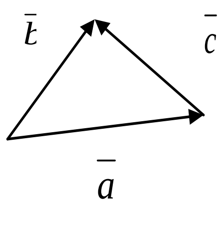
в)

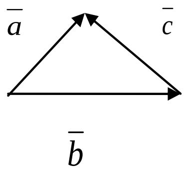
51. Вибрати малюнок, який є різницею векторів $\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}$:

а)



б)

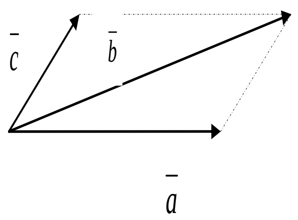




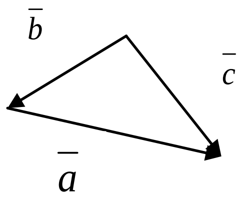
в)

52. Вибрати малюнок, який є $\bar{b} = \bar{a} + \bar{c}$:

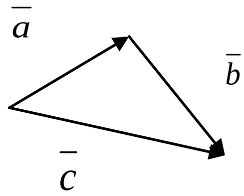
а)



б)



в)



53. Якщо помножити вектор $\bar{a}$ на число $\alpha < 0$, то вектор $\bar{b} = \alpha\bar{a}$:

а) змінить напрям на протилежний, при цьому його довжина збільшиться в $|\alpha|$ раз;

б) не змінить напрям, а його довжина збільшиться в $|\alpha|$ раз;

в) не змінить ні напрям, на довжину;

г) змінить напрям на протилежний, при цьому його довжина зменшиться в $|\alpha|$ раз.

54. Вектор $\bar{b}$ називається лінійною комбінацією векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$, якщо:

а) $\bar{b} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n}$;

б) $\bar{b} > \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n}$;

в) $\bar{b} < \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n}$;

г) $\bar{b} \le \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n}$.

55. Система векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ називається лінійно залежною, якщо:

а) $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\ \overline{a_n}=\bar{0}$ та $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$;

б) $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\ \overline{a_n}\neq\bar{0}$ та $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$;

в) $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\ \overline{a_n}=\bar{0}$ та $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=0$;

г) $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\ \overline{a_n}\neq\bar{0}$ та $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$.

56. Система векторів $\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$ називається лінійно незалежною, якщо:

а) $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\ \overline{a_n}=\bar{0}$ та $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$;

б) $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\ \overline{a_n}\neq\bar{0}$ та $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$;

в) $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\ \overline{a_n}=\bar{0}$ та $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=0$;

г) $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\ \overline{a_n}\neq\bar{0}$ та $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$.

57. Базисом називається:

а) впорядкована система лінійно залежних векторів така, що будь-який вектор за нею розкладається;

б) впорядкована система лінійно незалежних векторів така, що будь-який вектор за нею розкладається;

в) впорядкована система лінійно незалежних векторів така, що будь-який вектор за нею не розкладається;

г) впорядкована система лінійно залежних векторів така, що будь-який вектор за нею не розкладається

58. Базис $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ є ортонормованим якщо:

а) $\begin{array}{l}(\bar{i},\hat{\ }\bar{j})\\(\bar{i},\hat{\ }\bar{k})\\(\bar{j},\hat{\ }\bar{k})\end{array}$ довільні кути та $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$;

б) $(\bar{i},\hat{\bar{j}})=90^\circ$

$(\bar{i},\hat{\ }\bar{j}) = 90^\circ$

$(\bar{i},\hat{\ }\bar{j}) =$ гострий кут та $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$;

в) $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$ та $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$;

г) $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$ та $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 2$

59. Скалярним добутком векторів є:

а) число; б) вектор; в) кут; г) об'єм.

60. Скалярний добуток векторів $\bar{a}\cdot\bar{b}$ обчислюється за формулою:

а) $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$;

б) $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$;

в) $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot tg\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$;

г) $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot ctg\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$

61. Якщо в ортонормованому базисі $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ вектор $\bar{a}$ має координати (a_1, a_2, a_3), вектор $\bar{b}$ має координати (b_1, b_2, b_3), то скалярний добуток обчислюється за формулою:

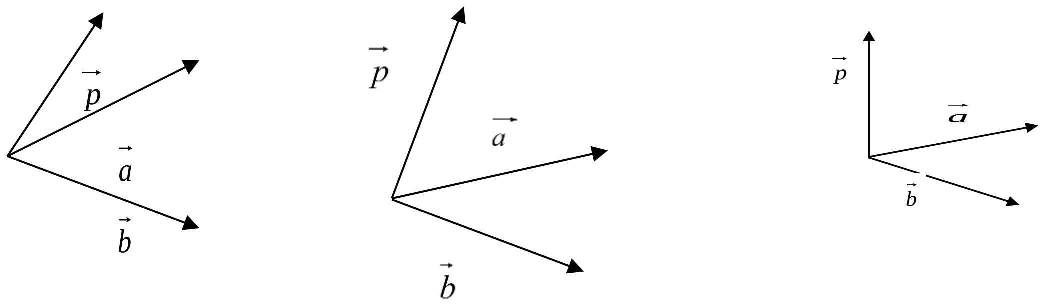
а) $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;

б) $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3$;

в) $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3$;

г) $\bar{a}\cdot\bar{b} = 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$

62. Вибрати, який із малюнків є векторним добутком векторів $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{p}$:



а) $\angle(\vec{p},\vec{b})$ -гострий, $\angle(\vec{p},\vec{a})$ - гострий

б) $\angle(\vec{p},\vec{b})$ - гострий, $\angle(\vec{p},\vec{a})$ - гострий, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$

в) $\angle(\vec{a},\vec{b})$ -довільний, $\angle(\vec{a},\vec{p}) = 90°$, $\angle(\vec{b},\vec{p}) = 90°$

63. Якщо в ортонормованому базисі $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ вектор $\bar{a}$ має координати (a_1,a_2,a_3), вектор $\bar{b}$ має координати (b_1,b_2,b_3), то векторний добуток $\bar{a}\times\bar{b}$ обчислюється за формулою:

а) $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$; б) $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$; в) $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$;

г) $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}$

64. Змішаним (потрійним) добутком векторів $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}$ називається:

а) об’єм орієнтованого паралелепіпеда, побудованого на цих векторах;

б) об’єм сфери, радіус якої дорівнює найбільшій довжині даних векторів;

в) об’єм орієнтованої піраміди, побудованої на цих векторах;

г) об’єму циліндра, висота якого дорівнює найбільшій довжини даних векторів.

65. Якщо в ортонормованому базисі $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ вектор $\bar{a}$ має координати (a_1, a_2, a_3), вектор $\bar{b}$ має координати (b_1, b_2, b_3), вектор $\bar{c}$ має координати (c_1, c_2, c_3), то змішаний добуток обчислюється за формулою:

а) $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} = \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$; б) $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$;

в) $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$; г) $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} = -\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

66. Якщо вектори a_1, a_2, a_3 лінійно незалежні, то:

а) $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} = 0$; б) $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} \neq 0$; в) $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} > 0$; г) $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} < 0$.

67. Якщо вектор $\bar{a}$ скалярно помножити на себе, то ми одержимо

а) $\bar{a}^2 = 0$; б) $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$; в) $\bar{a}^2 \neq |\bar{a}|^2$; г) $\bar{a}^2 = \bar{a}\times\bar{a}$.

68. Якщо вектор $\bar{a}$ векторно помножити на себе, то ми одержимо

а) $\bar{a}\times\bar{a} = |\bar{a}|^2$; б) $\bar{a}\times\bar{a} = \bar{a}$; в) $\bar{a}\times\bar{a} = 0$; г) $\bar{a}\times\bar{a} = -\bar{a}$.

69. Знайти координати вектора $\overline{AB}$ та його довжину, якщо $A(5, -1, 2)$, $B(1, 2, 1)$.

а) $(-4, 3, -1)$; $\sqrt{27}$ б) $(4, 3, -1)$; $\sqrt{26}$ в) $(-4, 3, -1)$; $\sqrt{26}$

г) $(-4, 3, 1)$; $\sqrt{26}$

70. Визначити початок вектора $\bar{a}(2, -3, -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1, -1, 2)$.

а) $(1,2,3)$; б) $(-1,2,3)$; в) $(-1,-2,3)$; г) $(-1,2,-3)$.

71. Знайти координати вектора $\overline{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz і його довжина $|\overline{a}|=4$, $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$, $\gamma=120^0$.

а) $(2\sqrt{2},2,2)$ б) $(2\sqrt{2},-2,-2)$ в) $(\sqrt{2},2,-2)$ г) $(2\sqrt{2},2,-2)$

72. Вектор $\overline{a}$ має координати (2,-5) в базисі $\overline{e_1},\overline{e_2}$. Знайти координати даного вектора в базисі $\overline{e_1'},\overline{e_2'}$, якщо $\overline{e_1'}=3\overline{e_1}-2\overline{e_2}$, $\overline{e_2'}=2\overline{e_1}+2\overline{e_2}$.

а) $\left(\frac{7}{5},\frac{11}{10}\right)$ б) $\left(-\frac{7}{5},-\frac{11}{10}\right)$ в) $\left(\frac{7}{5},-\frac{11}{10}\right)$ г) $\left(-\frac{7}{5},\frac{11}{10}\right)$

73. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}\cdot\overline{b}$, якщо $\overline{a}=2\overline{m}+5\overline{n}$, $\overline{b}=-\overline{m}+3\overline{n}$, $|\overline{m}|=2$, $|\overline{n}|=2$, $\angle(\overline{m},\overline{n})=\frac{\pi}{4}$.

а) $52+2\sqrt{2}$; б) $52-2\sqrt{2}$; в) $52+\sqrt{2}$; г) $51+2\sqrt{2}$.

74. Обчислити роботу, яку виконує сила $\overline{F}(2,3,-5)$, коли її точка прикладання переміщується з початку в кінець вектора $\overline{S}(-7,2,-5)$.

а) -17; б) 17; в) 16; г) 18.

75. Дано вершини трикутника $A(4,3,-2)$, $B(6,2,0)$, $C(2,-1,2)$. Визначити його зовнішній кут при вершині A.

а) $arccos\left(-\frac{4}{10}\right)$ б) $arccos\left(-\frac{2}{9}\right)$ в) $arccos\left(\frac{4}{9}\right)$ г) $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$

76. Знайти $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$, якщо $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$ $,\bar{b}=\bar{i}-2\ \bar{j}+\bar{k}$.

а) $4\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}$; в) $3\sqrt{5}$; г) $-4\sqrt{5}$.

77. Дано $\left|\bar{a}\right|=10$, $\left|\bar{b}\right|=2$ і $\bar{a}\cdot\bar{b}=12$. Обчислити $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

а) 14; б) 15; в) 16; г) 17.

78. Дано вектори $\bar{a}(3,-1,2)$ і $\bar{b}(1,2,-1)$. Знайти координати вектора $\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\left(2\bar{a}-\bar{b}\right)$.

а) $(12,20,28)$ б) $(12,-20,28)$ в) $(12,20,-28)$ г) $(12,-20,-28)$

79. Обчислити площу трикутника ABC, заданого вершинами $A(4,2,3)$, $B(5,1,2)$, $C(6,5,8)$.

а) $-\frac{\sqrt{78}}{2}$ б) $\frac{\sqrt{78}}{2}$ в) $\frac{\sqrt{76}}{2}$ г) $\frac{\sqrt{78}}{3}$

80. Силу $\bar{F}(2,-4,5)$ прикладено до точки $M(4,-2,3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $C(3,2,-1)$.

а) $(4,3,4)$ б) $(-4,-3,4)$ в) $(-4,3,4)$ г) $(-4,3,-4)$

81. Об’єм піраміди дорівнює 2, три її вершини лежать у точках $A(2,1,3)$, $B(3,3,2)$; $C(1,2,4)$. Знайти координати четвертої вершини, коли відомо, що вона лежить на осі Oz.

а) $D_2(0,0,9)$; б) $D_1(0,0,1)$; в) $D_1(0,0,1)$, $D_2(0,0,9)$;

г) $D_1(0,0,-1)$, $D_2(0,0,-9)$.

82. Відрізок обмежений точками $A(3;5;2)$, $B(-3;-1;2)$ поділили точкою C у відношенні 1:5. Знайти координати цієї точки.

а) (2;2;4); б) (4;−2;2); в) (2;4;2); г) (2;1;2);

83. Відрізок обмежений точками $A(10;3;5)$, $B(-2;-9;-7)$ поділили точкою C у відношенні 2:1. Знайти координати цієї точки.

а) (2;−5;3); б) (2;−5;−3); в) (1;3;2); г) (2;−5;1).

84. Встановити вид чотирикутника *ABCD* з вершинами у точках $A(2;3)$, $B(3;5)$, $C(4;3)$, $D(3;1)$.

а) паралелограм; б) ромб; в) квадрат; г) трапеція.

85. Знайти довжину медіани трикутника *ABC* проведену з вершини C, якщо $A(-1;-7;-3)$, $B(3;5;-1)$, $C(3;3;2)$.

а) 5 ; б) 4 ; в) 7 ; г) 9 .

86. Знайти довжину висоти трикутника *ABC* з вершинами у точках $A(-1;2;4)$, $B(-3;4;1)$, $C(1;4;7)$ проведеної з вершини *A*.

а) 4; б) 6 ; в)1; г) 2

87. Обчислити об'єм піраміди з вершинами у точках $A(-2;0;-1)$, $B(0;0;-3)$, $C(1;-3;2)$, $D(1;1;1)$.

а) 7 ; б) 9 ; в) 6 ; г) 3 .

88. Напрямним вектором прямої називається вектор, який:

а) перпендикулярний цій прямій;

б) паралельний цій прямій або співпадає з нею;

в) перетинає пряму під певним кутом;

г) нульовий вектор.

89. Пряма лінія на площині, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має напрямний вектор $\overline{a}(a_1, a_2)$ задається рівнянням:

а) $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}$; б) $\frac{x+x_0}{a_1}=\frac{y+y_0}{a_2}$; в) $\frac{x-x_0}{a_1}>\frac{y-y_0}{a_2}$; г) $\frac{x-x_0}{a_1}\neq\frac{y-y_0}{a_2}$.

90. Загальним рівнянням прямої на площині є рівняння виду:

а) $Ax - By + C = 0$; б) $Ax - By - C = 0$; в) $Ax + By + C = 0$;

г) $Ax + By + C > 0$.

91. Якщо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, то її напрямний вектор має координати:

а) $(-B, A)$; б) (B, A); в) (A, B); г) $(-A, B)$.

92. Вектор називається вектором нормалі до прямої, якщо:

а) паралельний цій прямій;

б) він перпендикулярний цій прямій;

в) лежить на цій прямій;

г) перетинає цю пряму під певним кутом.

93. Якщо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, то її вектор нормалі має координати:

а) $(-B, A)$; б) (B, A); в) (A, B); г) $(A, -B)$

94. Пряма лінія на площині, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ задається рівнянням:

а) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$; б) $\dfrac{x + x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y + y_1}{y_2 - y_1}$; в) $\dfrac{x + x_1}{x_2 + x_1} = \dfrac{y + y_1}{y_2 + y_1}$;

г) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} > \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

95. Пряма $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ паралельна прямій $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, якщо:

а) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$; б) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; в) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

г) $\frac{A_1}{A_2} < \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

96. Відстань від точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямої $l: Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою:

а) $d(M_1,l) = \frac{|Ax_1 + Bx_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ б) $d(M_1,l) = \frac{|Ax_1 + Bx_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

в) $d(M_1,l) = \frac{|Ax_1 + Bx_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; г) $d(M_1,l) = \frac{|Ax_1 - Bx_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

97. Кут між прямими $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ обчислюється за формулою:

а) $tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$; б) $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$; в) $tg\varphi = \frac{k_2 + k_1}{1 + k_1k_2}$; г) $tg\varphi = \frac{k_2 + k_1}{1 - k_1k_2}$.

98. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1,3)$, паралельно до заданої прямої $x - 2y + 1 = 0$.

а) $x - 2y + 4 = 0$; б) $x - 2y + 5 = 0$; в) $2x + y - 5 = 0$; г) $x + 2y - 7 = 0$.

99. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x - 3y + 17 = 0$, $4x - y + 9 = 0$ паралельно прямій $x + 3y - 2 = 0$.

а) $x - 3y + 4 = 0$; б) $3x - y - 2 = 0$; в) $x + 3y - 14 = 0$; г) $x - 3y + 2 = 0$.

100. Знайти відстань між прямими $4x - 3y - 10 = 0$, $8x - 6y + 15 = 0$.

а) 3; б) 2; в) 6; г)3,5.

101. Знайти відстань від точки $A(-4;3)$ до прямої, що проходить через точки) $M_1\ (-1;2)\ M_2\ (3;-1)$.

а) 5; б) 1; в) 4; г) 3.

102. Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ визначається за формулою:

а) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} \equiv 0$;

в) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 1$; г) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

103. Нормальне рівняння прямої має вид:
а) $x\cos\alpha - y\sin\alpha - p = 0$; б) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$;
в) $x\sin\alpha + y\cos\alpha - p = 0$; г) $x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = 0$.

104. Пряма задана нормальним рівнянням $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Тут p - це:
а) довжина відрізка, який відтинає пряма на осі абсцис;
б) довжина відрізка, який відтинає пряма на осі ординат;
в) довжина відрізка між точками перетину прямої з координатними осями;
г) відстань від початку координат до прямої;

105. Пряма задана нормальним рівнянням $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Тут α - це:
а) кут, який утворює пряма з додатнім напрямом осі Ox;
б) кут, який утворює пряма з додатнім напрямом осі Oy;
в) кут, який утворює нормаль до прямої з додатнім напрямом осі Ox;
г) кут, який утворює нормаль до прямої з додатнім напрямом осі Oy

106. Загальне рівняння площини має вигляд:

а) $Ax + By + Cz + D \neq 0$; б) $Ax + By + Cz + D = 2$;

в) $Ax + By + Cz + D = 0$; г) $Ax + By - Cz + D = 2$.

107. Вектор нормалі до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ має координати;

а) (A, B, D);   б) (A, B, C);   в) (B, C, D);   г) $(A, -B, C)$.

108. Площина $Ax + By + Cz + D = 0$ паралельна координатній площині YOZ, якщо:

а) $B = C = 0$; б) $B = C = 2$; в) $B - C = 0$; г) $B = C = -2$.

109. Дві площини перпендикулярні, якщо їх вектори нормалі:

а) паралельні;

б) перпендикулярні;

в) співпадають;

г) перетинаються під довільним кутом.

110. Відстань між паралельними площинами $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ та $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ обчислюється за формулою:

а) $d = \dfrac{|D_2 + D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;   б) $d = \dfrac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

в) $d = \dfrac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;   г) $d = \dfrac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

111. Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і має напрямний вектор $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$ має вигляд:

а) $\dfrac{x - x_1}{p_1} = \dfrac{y - y_1}{p_2} = \dfrac{z - z_1}{p_3}$;   б) $\dfrac{x - x_1}{p_1} - \dfrac{y - y_1}{p_2} = \dfrac{z - z_1}{p_3}$;

в) $\dfrac{x - x_1}{p_1} \neq \dfrac{y - y_1}{p_2} \neq \dfrac{z - z_1}{p_3}$;   г) $\dfrac{x - x_1}{p_1} = \dfrac{y - y_1}{p_2} - \dfrac{z - z_1}{p_3}$.

112. Параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і має напрямний вектор $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$ має вигляд:

а) $\begin{cases} x = x_1 - tp_1 \\ y = y_1 - tp_2 \\ z = z_1 - tp_3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = x_1 + tp_1 \\ y = y_1 + tp_2 \\ z = z_1 + tp_3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x \neq x_1 + tp_1 \\ y \neq y_1 + tp_2 \\ z \neq z_1 + tp_3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x = x_1 + tp_1 \\ y = y_1 - tp_2 \\ z = z_1 + tp_3 \end{cases}$

113. Якщо пряма задається як перетин двох площин

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, то її напрямний вектор має координати:

а) $\overline{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$; б) $\overline{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$;

в) $\overline{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$; г) $\overline{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & -C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & -A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & -B_2 \end{vmatrix}\right)$.

114. Кут між прямою $\dfrac{x - x_1}{p_1} = \dfrac{y - y_1}{p_2} = \dfrac{z - z_1}{p_3}$ та площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою:

а) $\sin\alpha = \dfrac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$;

б) $\cos\alpha = \dfrac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$;

в) $\sin\alpha = \dfrac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$;

г) $sin\alpha = \dfrac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$.

115. Пряма $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{p_2}=\frac{z-z_1}{p_3}$ паралельна площині

$Ax+By+Cz+D=0$, якщо

а) $Ap_1+Bp_2+Cp_3>0$; б) $Ap_1+Bp_2+Cp_3=0$; в) $Ap_1+Bp_2+Cp_3<0$;

г) $Ap_1+Bp_2+Cp_3=2$.

116. Записати рівняння площини, що проходить через точку $B(-3;-2;2)$ паралельно площині YOZ.
а) $x + 3 = 0$; б) $y + 2 = 0$; в) $z - 2 = 0$; г) $y - z = 0$.

117. Обчислити об'єм піраміди, яку відтинає площина $4x - 3y + 8z - 24 = 0$ від координатного кута.
а) 48; б) 72; в) 12; г) 24.

118. Знайти відстань від точки M_0(-3; -7;6) – до площини, яка проходить через три точки M_1 (1;1;1), M_2 (2;3;1) M_3(3;2;1).
а) 9; б) 5; в) 3; г) 4.

119. Охарактеризуйте взаємне розміщення площин $2x - y + z - 4 = 0$, $4x - 2y + 2z + 1 = 0$.
а) паралельні; б) перпендикулярні; в) співпадають; г) перетинаються.

120. Яке з рівнянь задає коло з центром в точці (D,E)?

а) $(x-D)^2+(y-E)^2=R^2$; б) $(x+D)^2-(y+E)^2=R^2$;

в) $(x+D)^2=R^2$; г) $(x+D)^2-(y+E)^2=-R^2$

121. Сфера це …
а) геометричне місце точок простору, які рівновіддалені від заданої точки;
б) це точки простору, які рівновіддалені від заданої точки;
в) це точки, які розміщуються на одній лінії;
г) інша відповідь

122. Циліндричні поверхні, напрямними яких є криві другого порядку, називаються …
а) циліндричними поверхнями другого порядку;
б) поверхнями другого порядку;

в) циліндричними лініями;
г) лініями рівня

123. Яка із поверхонь не є циліндричною?
а) круговий циліндр
б) еліптичний циліндр
в) еліпс
г) куля

124. Еліпс - це:

а) геометричне місце точок площини, сума відстаней яких, до двох фіксованих точок площини, які називають фокусами, є величиною сталою і задається формулою $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

б) геометричне місце точок, які рівновіддалені від двох даних точок, що називаються фокусами і виражається формулою $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

в) це точки, сума відстаней яких від двох даних точок є величина змінна. Еліпс задається формулою $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$;

г) геометричне місце точок площини, сума відстаней яких, до двох фіксованих точок площини, які називають фокусами, є величиною сталою і задається формулою $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

125. Якими із співвідношень пов‘язані велика вісь еліпса, мала вісь еліпса і координата фокуса?

а) $c^2-a^2=b^2, \quad 2a>2c$ б) $a^2-c^2=b^2, \quad 2a>2c$

в) $b^2-c^2=a^2, \quad 2b>2c$ г) $b^2+c^2=a^2, \quad 2b>2c$

126. Вибрати властивість, яка не є властивістю еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

а) еліпс розміщується всередині прямокутника з центром у початку координат, сторони якого дорівнюють *2a* і $2b$ *;*

б) еліпс проходить через початок координат;

в) еліпс симетричний відносно координатних осей і початку координат.

г) відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і рівна ексцентриситету.

127. Ексцентриситет – це:

а) відношення половини відстані між фокусами до великої півосі еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}$;

б) відношення відстані між фокусами до малої півосі еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}$;

в) відношення половини відстані між фокусами до малої півосі еліпса і виражається формулою $\varepsilon=\frac{c}{b}$;

г) відношення половини відстані між фокусами до великої осі еліпса $\varepsilon=\frac{c}{2a}$.

128. Директриси еліпса (a - велика піввісь) - це:

а) прямі, які паралельні до його малої вісі і розміщені на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї; $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директриси.

б) прямі, які паралельні до його великої вісі і розташовані на відстані $\frac{b}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї; $y = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ рівняння директриси;

в) прямі, які паралельні до його малої вісі і розташовані на відстані $\frac{b}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї; $x = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ рівняння директриси;

г) прямі, які перпендикулярні до його малої вісі і розміщені на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї; $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директриси.

129. Яка з рівностей виражає відношення осей еліпса через ексцентриситет (*a*- велика піввісь):

а) $\frac{a^2}{b^2} = 1+\varepsilon^2$; б) $\frac{a^2}{b^2} = -1-\varepsilon^2$; в) $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$; г) $\frac{b}{a} = \sqrt{1+\varepsilon^2}$.

130. Гіпербола - це:

а) геометричне місце точок площини модуль різниці відстаней від яких до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є число стале, рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) геометричне місце точок, які рівновіддалені від двох даних точок, що називаються фокусами, рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

в) це точки, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок цієї площини є число змінне і виражається формулою $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

г) геометричне місце точок площини різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є число стале, рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$

131. Якими із співвідношень пов‘язані дійсна піввісь гіперболи a, уявна піввісь гіперболи b і координата фокуса c?

а) $c^2-a^2=b^2, \quad 2c>2a$; б) $a^2+c^2=b^2, \quad 2b>2c$;

в) $c^2=b^2-a^2, \quad 2c>2a$; г) $c^2+a^2=b^2, \quad 2c>2a$.

132. Вибрати властивість, яка не є властивістю гіперболи:

а) гіпербола не проходить через початок координат;

б) гіпербола симетрична відносно координатних осей і початку координат;

в) гіпербола розміщується в середині прямокутника з центром в початку координат сторони якого $2a$ і $2b$;

г) гіпербола має дві асимптоти: $y=\frac{b}{a}x$ та $y=-\frac{b}{a}x$.

133. Яка із рівностей виражає відношення осей гіперболи через ексцентриситет (a-дійсна піввісь):

а) $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$; б) $\frac{a^2}{b^2}=-1-\varepsilon^2$; в) $\frac{a^2}{b^2}=\sqrt{1+\varepsilon^2}$; г) $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2+1}$.

134. Директриси гіперболи це:

а) прямі, паралельні до її уявної вісі і розміщені на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї; $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директриси;

б) прямі, паралельні до її дійсної вісі і розміщені на відстані $\frac{b}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї; $y = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директриси;

в) прямі, паралельні до її уявної вісі і розміщені на відстані $\frac{b}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї; $x = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ рівняння директриси;

г) прямі, перпендикулярні до її уявної вісі і розміщені на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ по обидва боки від дійсної вісі; $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директриси.

135. Який комплект формул виражає властивості гіперболи, у якої b – дійсна піввісь?

а) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=\pm\frac{a}{b}x,\ \varepsilon=\frac{c}{b},\ y=\pm\frac{b}{\varepsilon};$

б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=\pm\frac{b}{a}x\ ,\ x=\pm\frac{a}{\varepsilon},\ \varepsilon=\frac{c}{a};$

в) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\ y=\pm\frac{b}{a}x\ ,\ x=\pm\frac{a}{\varepsilon},\ \varepsilon=\frac{c}{b};$

г) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=\pm\frac{a}{b}x,\ \varepsilon=\frac{b}{c},\ y=\pm\frac{b}{\varepsilon}.$

136. Парабола, це:

а) геометричне місце точок площини, рівновіддалених від точки, що називається фокусом, і прямої, що називається директрисою;

б) геометричне місце точок рівновіддалених від двох заданих точок;

в) геометричне місце точок сума відстаней яких від двох даних точок є величина стала;

г) геометричне місце точок площини, рівновіддалених від прямої, що називається директрисою.

137. Вибрати властивість, яка не є властивістю параболи.

а) парабола не проходить через початок координат;

б) парабола симетрична відносно вісі Ох;

в) відношення відстаней від довільної точки параболи до фокуса і директриси дорівнює одиниці;

г) $y^2 = 2px$ – канонічне рівняння параболи.

138. Задано вершини трикутника *A*(-10, -13), *B*(-2, 3) та *C*(2, 1). Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини *B* на медіану, проведену з вершини *C*.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

139. Яким із рівнянь задається конус?

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$;
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c^2}=0$; г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

140. Тривісним еліпсоїдом називається поверхня, яка задається рівнянням…

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$;
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

141. Яке із рівнянь задає однопорожнинний гіперболоїд?

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

142. Яке із рівнянь є рівнянням конуса?

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$;б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

143. Яке із рівнянь є рівнянням еліпсоїда?

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$;б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

144. Яке із рівнянь є рівнянням одно порожнинного гіперболоїда?
а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$;б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

145. Яке із рівнянь є рівнянням двопорожнинного гіперболоїда?

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;   б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;
в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

146. Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка визначається таким рівнянням…

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$, де $a>0, b>0, p>0$ – задані параметри
б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2pz$, де $a>0, b>0, p>0$ – задані параметри
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2pz}{c^2}$, де $a>0, b>0, p>0$ – задані параметри
г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2pz$, де $a>0, b>0, p>0$ – задані параметри

147. Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка визначається рівнянням…

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$, де $a>0, b>0, p>0$ – задані параметри
б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2pz$, де $a>0, b>0, p>0$ – задані параметри
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2pz}{c^2}$, де $a>0, b>0, p>0$ – задані параметри
г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$, де $a>0, b>0, p>0$ – задані параметри

148. Поверхні другого порядку- це поверхні, які в прямокутній системі координат…

а) визначаються алгебраїчним рівнянням другого порядку;
б) визначаються лінійним алгебраїчним рівнянням;
в) визначаються алгебраїчним рівнянням третього степеня;
г) інша відповідь

149. Після зведення до канонічного вигляду рівняння поверхні $2x^2 + y^2 + 4z^2 + 8x - 2z + 8z + 5 = 0$ одержимо:

а) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} + \frac{(z+1)^2}{2} = 1;$
б) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} + \frac{(z-1)^2}{2} = 1;$
в) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} + \frac{(z+1)^2}{2} = 1;$
г) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{8} + \frac{(z+1)^2}{2} = 1.$

150. Щоб побудувати еліпсоїд $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} + \frac{(z+1)^2}{2} = 1$ необхідно початок координат нової системи перенести в точку …
а) (-2; 1; -1); б) (2; -1; 1); в) (1; -2; 1); г) (2; 1;2).

151. Якщо конус обертається навколо вісі Ох, то його рівняння має вигляд:
а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$ б) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0;$
в) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$ г) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

152. Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$ та $M_3(3, 0, 1)$.
а) $x - y - 3 = 0$ б) $x + y - 3 = 0$ в) $x + y + 3 = 0$ г) $x + 2y - 3 = 0$

153. Знайдіть відстань від початку координат до площини, що проходить через три точки $M_1(1, -1, 0)$, $M_2(2, 1, -1)$ та $M_3(1, -1, -2)$.
а) $-\frac{3}{\sqrt{5}}$ б) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ в) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ г) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$

154. Обчислити висоту піраміди h_{M_1} з вершинами $M_1(0, 6, 4)$, $M_2(3, 5, 3)$, $M_3(-2, 11, -5)$ та $M_4(1, -1, 1)$.

а) 1; б) 2; в) -3; г) 3

155. Скласти рівняння лінії, сума квадратів відстаней кожної точки якої до точок $M_1(-4, 0)$, $M_2(4, 0)$ дорівнює 50.

а) $x^2 - y^2 = 9$ б) $x^2 + y^2 = 9$ в) $x^2 + y^2 = -9$ г) $x^2 + y^2 = 8$

156. Написати рівняння лінії, модуль різниці відстаней кожної з яких до точок $M_1(-2, -2)$, $M_2(2, 2)$ дорівнює 4.

а) $y = 2$ б) $xy = 1$ в) $xy = -2$ г) $xy = 2$

157. Скласти рівняння геометричного місця точок, що містяться вдвічі ближче до точки $M_1(3, 0)$, ніж до прямої $x = 12$.

а) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{27} = 1$ б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = -1$ в) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 2$ г) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

158. Знайти траєкторію точки, яка, рухаючись, залишається в півтора рази далі від точки $M(0, 6)$, ніж від прямої $y = \frac{8}{3}$.

а) $-\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ б) $-\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = -1$ в) $-\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ г) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$

КЛЮЧ ВІДПОВІДЕЙ

1	б	**18**	б	**35**	в	**52**	а	**69**	в	**86**	г	**103**	б	**120**	а	**137**	а	**154**	г
2	б	**19**	а	**36**	г	**53**	а	**70**	б	**87**	а	**104**	г	**121**	а	**138**	г	**155**	в
3	а	**20**	б	**37**	б	**54**	а	**71**	г	**88**	б	**105**	в	**122**	а	**139**	а	**156**	г
4	а	**21**	а	**38**	б	**55**	а	**72**	в	**89**	а	**106**	в	**123**	в,г	**140**	в	**157**	г
5	а	**22**	б	**39**	а	**56**	в	**73**	а	**90**	в	**107**	б	**124**	а	**141**	а	**158**	а
6	б	**23**	а	**40**	б	**57**	б	**74**	б	**91**	а	**108**	а	**125**	б	**142**	а		
7	б	**24**	а	**41**	а	**58**	в	**75**	г	**92**	б	**109**	б	**126**	б	**143**	б		
8	в	**25**	б	**42**	б	**59**	а	**76**	а	**93**	в	**110**	в	**127**	а	**144**	в		
9	а	**26**	а	**43**	а	**60**	б	**77**	в	**94**	а	**111**	а	**128**	а	**145**	а		
10	б	**27**	б	**44**	а	**61**	а	**78**	г	**95**	в	**112**	б	**129**	в	**146**	а		
11	в	**28**	г	**45**	б	**62**	в	**79**	б	**96**	б	**113**	в	**130**	а	**147**	а		
12	б	**29**	а	**46**	а	**63**	б	**80**	в	**97**	б	**114**	а	**131**	а	**148**	а		
13	в	**30**	в	**47**	б	**64**	а	**81**	в	**98**	б	**115**	б	**132**	в	**149**	а		
14	в	**31**	г	**48**	в	**65**	в	**82**	в	**99**	в	**116**	а	**133**	а	**150**	а		
15	а	**32**	а	**49**	б	**66**	а	**83**	б	**100**	г	**117**	г	**134**	а	**151**	б		
16	б	**33**	г	**50**	б	**67**	б	**84**	в	**101**	б	**118**	б	**135**	а	**152**	б		
17	а	**34**	б	**51**	в	**68**	в	**85**	б	**102**	а	**119**	а	**136**	а	**153**	в		

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах у 3-х томах /В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – Київ: Книги України ЛТД, 2009.
2. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник у 2-х томах /П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко, 3-е вид. – К: Техніка, 2008. – Ч.1. 600 с., Ч.2 – 792 с.
3. Дубовик В.П. Вища математика: Навч. посібник. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.
4. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс. /Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб.: Лань, 2002. – 960 с.
5. Вища математика. Збірник задач: У 2 ч. /За ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2004. – Ч.1. – 279 с.; 2004. – Ч.2. – 376 с.
6. Дюженкова Л.І. Вища математика. Приклади і задачі. /Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. – К.: Академія, 2003. – 624 с.
7. Пак В.В. Вища математика: Підручник /В.В. Пак, Ю.Л. Носенко – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
8. Беклемешев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. – 10-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
9. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр Ы. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1979.
10. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979.

Навчальне видання

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Ковальчук Майя Борисівна

Збірник тестових завдань з вищої математики для систематизації та узагальнення знань (з теоретичною підримкою). Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Н. Сачанюк-Кавецькою

Підписано до друку ……. р
Формат 29.7 × $42^1/_4$. Папір офісний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. …
Наклад … прим. Зам. №

Віддруковано у
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи