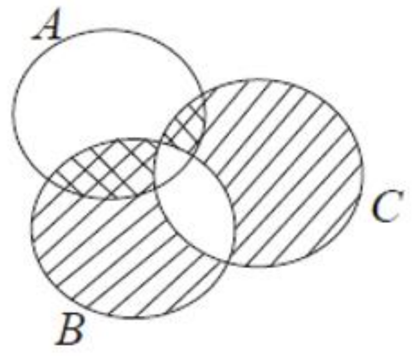
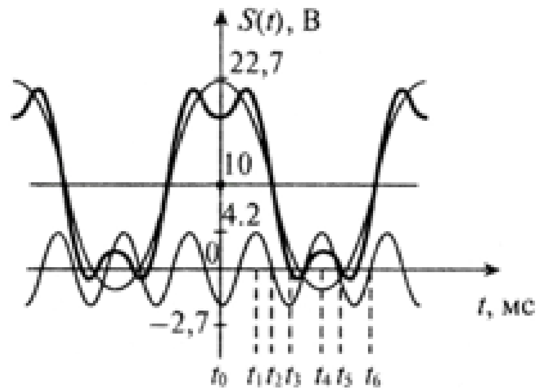
Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук

ОКРЕМІ РОЗДІЛИ СПЕЦКУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ЧАСТИНА 1



$A \cap (B + C)$



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук

ОКРЕМІ РОЗДІЛИ СПЕЦКУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. ЧАСТИНА 1

Електронний навчальний посібник
комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2023

УДК 612.623
С22

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 04.05.2023 р.)

Рецензенти:

Іванченко Є. А., доктор педагогічних наук, професор
Хом'юк І. В., доктор педагогічних наук, професор
Вотякова Л. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Сачанюк-Кавецька, Н. В.

С22 Окремі розділи спецкурсу вищої математики. Частина 1 : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2023. – 117 с.

Посібник складається з чотирьох розділів. В першому розділі розглядаються елементи теорії рядів. Зокрема числові ряди та ознаки їх збіжності, ряд Фур'є та спектри. Другий розділ присвячений елементам теорії ймовірностей. Для кращого розуміння основних понять та теорем, що наводяться в цьому розділі, детально розглянуто елементи комбінаторного аналізу та теорії множин. Третій розділ стосується дискретних джерел інформації. Розглянуто поняття джерела інформації, його характеристики. Особлива увага приділяється ентропії, її видам та способам обчислення. В четвертому розділі розглянуто канали зв'язку, їх класифікація та характеристики.

Даний посібник може бути використаний студентами, аспірантами, викладачами.

УДК 612.623

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Глибока і всебічна математична підготовка майбутніх фахівців технічного профілю у закладах вищої освіти є необхідною умовою їх якісної професійної підготовки. Це зумовлено універсальною роллю математики в моделюванні й вивченні процесів і явищ різної природи, а також впливом математики на загальний інтелектуальний розвиток особистості. Для студентів інженерних спеціальностей математика постає не стільки навчальною дисципліною, скільки професійним інструментом аналізу, організації, управління технологічними процесами. Математика є основою інженерної освіти, мовою інженерних досліджень і в діяльності інженера має допомагати вирішувати професійні задачі.

Теорія рядів є одним з основоположних розділів загального курсу вищої математики технічних університетів у зв'язку з важливістю її практичних застосувань. Теорія степеневих рядів використовується, перш за все, при складанні алгоритмів обчислення значень функцій та інтегралів, а також при наближеному інтегруванні диференціальних рівнянь. Теорія тригонометричних рядів застосовується при вивченні різноманітних періодичних процесів, які зустрічаються в природі й техніці. Основу всієї теорії рядів складає теорія числових рядів. Тема «Ряди» в курсі вищої математики є потужним інструментом вивчення функцій та обчислювальним апаратом при вирішенні прикладних задач не тільки математики, а й фізики, економіки, хімії, геодезії, архітектури, біології, екології і т. п. У більшості випадків, коли застосування традиційних математичних операцій стає складним або неможливим, можна отримати наближений розв'язок завдяки рядам. Тому вивчення цієї теми є важливим кроком математичної підготовки майбутніх фахівців.

При дослідженні багатьох явищ потрібно враховувати не тільки основні фактори, а й множину другорядних факторів, які призводять до випадкових збурень та спотворення результату. Тому інший підхід до вивчення випадкових явищ вимагає спеціальних методів дослідження таких явищ. Вивчення ймовірнісних моделей дає змогу зрозуміти різноманітні властивості випадкових явищ на абстрактному та узагальненому рівнях без експерименту.

В основу посібника покладено курс лекцій, прочитаний авторами для студентів спеціальності 141. Основний принцип, яким керувались автори при підготовці спецкурсу вищої математики для студентів технічних вишів, – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Студентам потрібні такі методи навчання, які б полегшували та прискорювали передачу знань, навчали їх прийомам самостійної діяльності, використовували б наявні технічні засоби: ноутбук, планшет, смартфон. В умовах дистанційної освіти набуває нових рис організація дослідницької діяльності студентів шляхом посилення ролі самостійної роботи. Також не потрібно забувати і про підготовку майбутніх фахівців з вищою технічною освітою до керівництва дослідницькою діяльністю в процесі навчання вищої математики, що вимагає створення ресурсів для самостійної роботи з високим ступенем інтерактивності. Освітній процес передбачає висвітлення великого обсягу навчальної інформації та потребує якісного її засвоєння. Проте інформацію, яка подається великими блоками в лінійному вигляді, досить складно запам'ятати надовго. Одним із способів активізації роботи студентів у процесі опанування навчального матеріалу математичних дисциплін є застосування структурно-логічних схем і таблиць. Зображення в графічній формі має суттєву властивість – синоптичність (від грец. synoptikos — оглядати все разом). Теоретичний матеріал, поданий у вигляді структурно-логічних схем або таблиць, дозволяє краще простежити логіку викладання окремих питань, встановити причинно-наслідкові зв'язки та структуру певних явищ тощо. Тому при написанні даного посібника автори не використовували довгих математичних викладок. Основні поняття, формули, властивості наведені в таблицях на сірому тлі. Зауваження, наслідки, алгоритми тощо подаються в таблиці на бежевому тлі. Окрім цього в посібнику наведено історичні відомості, цікаві факти та математичні фокуси. Це не тільки навчальний посібник, але й коротке керівництво до розв'язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач (зокрема і прикладного змісту), які наводяться з розв'язанням, та вправи для самостійної роботи. Задачі з розв'язанням розглядаються протягом всього викладання навчального матеріалу. Вправи для самостійної роботи розглядаються в кінці кожного розділу. Це можуть бути як типові задачі, так і тести та кросворди. Потрібно відмітити, що така структура посібника буде сприяти студентам при складанні опорних конспектів у процесі опрацювання та засвоєння теоретичного матеріалу, що стануть у пригоді як на практичних заняттях, так і при підготовці до екзамену чи заліку.

Посібник складається з чотирьох розділів. В першому розділі розглядаються елементи теорії рядів. Зокрема, числові ряди та ознаки їх збіжності, ряд Фур'є та спектри. Другий розділ присвячений елементам теорії ймовірностей. Для кращого розуміння основних понять і теорем, що наводяться в цьому розділі, детально розглянуто елементи комбінаторного аналізу та теорії множин. Третій розділ стосується дискретних джерел інформації. Розглянуто поняття джерела інформації, його характеристики. Особлива увага приділяється ентропії, її видам та способам обчислення. В четвертому розділі розглянуто канали зв'язку, їх класифікація та характеристики.

Даний посібник може бути використаний студентами, аспірантами, викладачами.

Розділ 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ РЯДІВ

1.1 Числові ряди: поняття, частинні суми, збіжні і розбіжні ряди, необхідна умова збіжності

Поняття нескінченних сум відомо вченим з Давньої Греції. Вони застосовували «метод вичерпування» при обчисленні площ фігур і поверхонь, об'ємів тіл, довжин кривих і т. п. При цьому вони розбивали фігуру або тіло (лінію) на зчисленне число частин з відомими площами або об'ємами (довжинами) і потім знаходили суму цих величин. Складовою частиною цього методу було знаходження суми нескінченної множини доданків. Подальший розвиток теорії рядів відбувався в тісному зв'язку з теорією наближеного подання функцій у вигляді многочлена. Вперше це зробив І. Ньютон (1642–1727). У 1676 р. у його листі до секретаря Лондонського Королівського Товариства з'явилася формула, яку ми знаємо як формулу бінома Н'ютона. Розвиваючи цю ідею, англійський математик Брук Тейлор (1685–1731) у 1715 р. довів, що будь-яку функцію, яка має у точці $x = 0$ похідні всіх порядків, можна подати рядом. Колін Маклорен (1698–1746) в роботі «Трактат о флюксіях» (1742) встановив, що степеневий ряд, який виражає аналітичну функцію, – єдиний, і це буде ряд Тейлора, породжений такою функцією. Як бачимо, ряди виникли у XVIII ст. як спосіб подання функцій, що допускають нескінченне диференціювання. У формулюванні поняття суми збіжного ряду значну роль відіграв французький вчений О. Л. Коші (1789–1857), саме він показав у 1826 р., що розбіжний ряд не має суми. Він також сформулював критерій збіжності рядів і достатню ознаку збіжності ряду.

У 1768 р. французький математик і філософ Ж. Л. Д'Аламбер дослідив відношення наступного члена до попереднього в біноміальному ряді і показав, що якщо це відношення за модулем менше одиниці, то ряд є збіжним. Коші у 1821 р. довів теорему, що узагальнила ознаку збіжності додатних рядів, яку тепер називають ознакою Д'Аламбера. Не менш значущими є й знакозмінні ряди, для дослідження збіжності яких використовують ознаку Г. В. Лейбніца (1646–1716). Числові ряди використовуються для дослідження функціональних рядів, серед яких найбільш потрібними в механіці та різних розділах фізики є степеневі і тригонометричні.

В 1715 р. Б. Тейлор вивів рівняння, яке описувало малі коливання струни з закріпленими кінцями – диференціальне рівняння в частинних похідних, з якого й почала свій розвиток математична фізика. Він знайшов частинний розв'язок такого рівняння, який був періодичною функцією. Л. Ейлер розвинув теорію коливань, трактуючи кожну гармоніку як просте гармонічне коливання, а суму ряду – як характеристику складного коливального руху, та отримав розклад цього руху в суму окремих гармонічних коливань. У 1748 р. Ейлер надав розв'язок одного з частинних випадків рівняння у вигляді тригонометричного ряду, а в 1753 р. Д. Бернуллі (1700–1782) запропонував вже загальний розв'язок рівняння в аналоговій формі, виходячи з того, що звук від коливання струни складається з основного тону та нескінченної множини обертонів.

Л. Ейлер вважав таку форму подання функції недостатньо загальною. У 1807 р. Ж. Б. Фур'є (1756–1830), працюючи над аналітичною теорією тепла, довів, що функції, задані на кінцевих ділянках відрізка $\left[-\pi,\pi\right]$ різними рівняннями, можна подати на будь-якому подібному відрізку тригонометричним рядом.

Нехай задана числова послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Числовим рядом називають вираз

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

де числа $a_1, a_2, \ldots$ називають його членами, a_n – загальним членом ряду.

Приклад 1.1 За заданим загальним членом ряду знайти чотири перші члени ряду, 27-й член ряду, $(n+1)$-й член ряду. Записати ряд.

а) $a_n=\dfrac{2n-1}{n^2}$, б) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Розв'язування

Щоб знайти певний член ряду, треба у формулу загального члена замість n підставити номер цього члена.

а) $a_1=\dfrac{2\cdot1-1}{1^2}=1$, $a_2=\dfrac{2\cdot2-1}{2^2}=\dfrac{3}{4}$, $a_3=\dfrac{2\cdot3-1}{3^2}=\dfrac{5}{9}$, $a_4=\dfrac{2\cdot4-1}{4^2}=\dfrac{7}{16}$,

$a_{27}=\dfrac{2\cdot27-1}{27^2}=\dfrac{53}{729}$, $a_{n+1}=\dfrac{2\cdot(n+1)-1}{(n+1)^2}=\dfrac{2n+1}{(n+1)^2}$.

Таким чином маємо ряд

$$1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\ldots+\frac{53}{729}+\ldots+\frac{2n+1}{(n+1)^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}.$$

б) Особливість цього ряду пов'язана з наявністю множника $\left(-1\right)^n$, що забезпечує чергування знаків членів ряду. Для парних значень n цей множник дорівнює +1, а для непарних -1. Отже, перед парними членами ряду стоятиме знак «плюс», а перед непарними – «мінус»:

$a_1=\dfrac{-1}{\sqrt{1}}=-1$, $a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a_3=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, $a_4=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$, $a_{27}=\dfrac{(-1)^{27}}{\sqrt{27}}=\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$, $a_{n+1}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

Таким чином маємо ряд

$$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}.$$

Приклад 1.2 Записати можливу (найпростішу) формулу загального члена ряду:

а) $\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\frac{13}{2^4}+\ldots$ б) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{11}\right)^3+\left(\frac{4}{15}\right)^4+\ldots$

в) $\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\ldots$

Розв'язування

а) Чисельники заданого ряду утворюють арифметичну прогресію з першим членом 4 і різницею 3. Знаменники членів заданого ряду утворюють геометричну прогресію з першим членом 2 і знаменником 2, тому

$$a_n=\frac{3n+1}{2^n}.$$

б) У чисельниках записані натуральні числа, починаючи з 1, а знаменники утворюють арифметичну прогресію з першим членом 3 і різницею 4. Враховуючи, що показник ступеня члена ряду відповідає його номеру, маємо

$$a_n=\left(\frac{n}{4n-1}\right)^n.$$

в) Звернемо увагу на чергування знаків членів ряду, яке можна врахувати за допомогою множника $(-1)^n$, знаменники членів ряду утворюють арифметичну прогресію з першим членом 5 і різницею 3, отже,

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+2}.$$

Суму n перших членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

називають *n-ю частинною сумою ряду.*
Коли n набуває значення 1, 2, 3, ... , одержимо послідовність частинних сум

$$S_1, S_2,\ldots, S_n\ldots$$

Приклад 1.3 Доведемо, що $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=2.$

Ця сума має фізичну інтерпретацію. Уявімо, що ви стоїте на відстані двох метрів від стіни. Далі ви робите один крок уперед, рівно на 1 метр. Наступний крок – половина попереднього. Після нього – чверть метра, одна восьма і т. д. З кожним кроком відстань між вами і стіною скорочуватиметься рівно на половину. І якщо проігнорувати очевидні фізичні обмеження для кожного наступного кроку (мова йде хоча б про розмір вашої ступні), то врешті-решт ви станете впритул до стіни. А разом відстань становитиме рівно 2 метри.

Якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум ряду, то цю границю називають сумою ряду і позначають

$$S = a_1+a_2+a_3 + ...+a_n + ...,$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Ряд, який має суму, називають *збіжним.*
У випадку, коли границя послідовності частинних сум нескінченна або не існує, ряд називають *розбіжним.*

Приклад 1.4 Суму нескінченого ряду з прикладу 1.1 можна подати геометрично. Розглянемо прямокутник зі сторонами 1 та 2. Площа цього прямокутника дорівнює 2. Поділимо його навпіл, потім одну половину – ще раз навпіл і так до нескінченності. Площа першої частини дорівнюватиме 1, другої – $\frac{1}{2}$, третьої – $\frac{1}{4}$ і т. д. І ми ніколи не переступимо за межі цього прямокутника. А сума площ усіх його частин незмінно становитиме 2 (рис. 1.1).

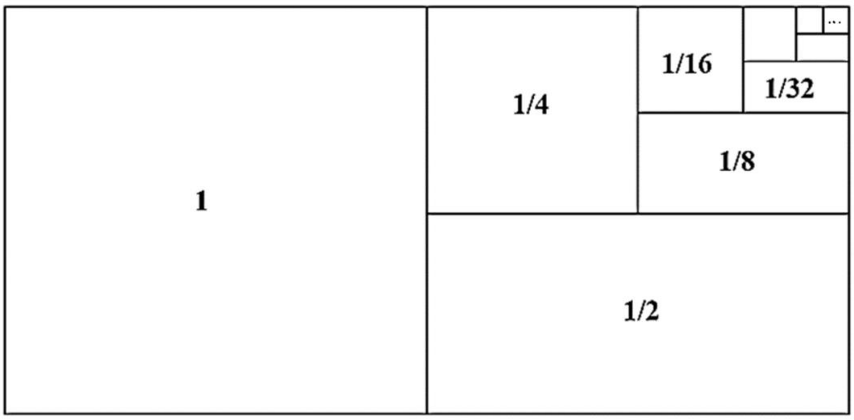


Рисунок 1.1

Приклад 1.5 Доведемо рівність $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=2$ алгебраїчним способом. Для цього знайдемо частинні суми:

$S_1=1=2-1;$

$S_2=1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2};$

$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}=2-\frac{1}{4};$

$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1\frac{7}{8}=2-\frac{1}{8};$

$S_5=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1\frac{15}{16}=2-\frac{1}{16};$

$S_6=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=1\frac{31}{32}=2-\frac{1}{32};$

…

$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}$, оскільки при $n\to\infty$, $\frac{1}{2^n}\to 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$.

Приклад 1.6 Знайти суму ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Розв'язування

Розкладемо загальний член ряду на елементарні дроби

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}.$$

Звівши одержані дроби до спільного знаменника і прирівнявши чисельники, отримаємо

$$An+A+Bn=1,$$

звідки $A+B=0,\quad A=1\to B=-1.$

Таким чином

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\right)=1.$$

НЕОБХІДНА УМОВА ЗБІЖНОСТІ РЯДУ: Якщо ряд збігається, то його загальний член a_n прямує до нуля при $n\to\infty$.
Необхідна умова збіжності ряду використовується тільки для встановлення розбіжності ряду

Приклад 1.7 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}=\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+...$

Розв'язування

Оскільки границя загального члена цього ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{100+\frac{1}{n}}=\frac{1}{100}\neq 0$$

відмінна від нуля, то цей ряд є розбіжним.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! 1) Ряд, складений з членів геометричної прогресії

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + ...+aq^{n-1} +... \qquad (a\neq 0),$$

збіжний до $\frac{a}{1-q}$ при $|q|<1$ і розбіжний при $|q|\geq 1$.

2) $1+x+x^2+x^3+...=\frac{1}{1-x}, |x|<1$.

3) $1-x+x^2-x^3+...=\frac{1}{1+x}, |x|<1$.

Знайдемо суму ряду $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$, використовуючи поняття геометричної прогресії. В нашому випадку $q=\frac{1}{2}$, тому $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

Ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

називають *гармонічним* (назва ряду походить з давньої Греції, оскільки саме тоді було помічено, що струни музичного інструмента звучать гармонійно за умови співвідношення довжин струн як 1 до $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},..$). Для нього, очевидно, виконується необхідна ознака збіжності $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, однак він є розбіжним.

Доведемо розбіжність гармонічного ряду.

Спочатку продемонструємо, що сума гармонічного ряду є дуже велике число. Для цього розділимо ряд на частини за кількістю цифр у знаменнику. Оскільки кожен із перших дев'яти членів буде більшим $\frac{1}{10}$, то

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}>\frac{9}{10}.$$

Кожен із наступних 90 членів, відповідно, буде більшим за $\frac{1}{100}$, а це означає, що

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{99}>90\cdot\frac{1}{100}=\frac{9}{10}.$$

Згідно з цим алгоритмом, ситуація з наступними 900 членами буде такою:

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{999}>900\cdot\frac{1}{1000}=\frac{9}{10}.$$

І так далі

$$\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{9999}>9000\cdot\frac{1}{10000}=\frac{9}{10}.$$

Отже, сума всіх членів ряду визначатиметься як

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+....$$

І так до нескінченності.

Цікавий факт! 1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\approx\gamma+\ln n,$ де $\gamma=0,5772155649...$ (стала Ейлера-Маскероні). Точність наближення зростає зі збільшенням значення n. У нижченаведеній таблиці продемонстровано взаємозалежність між сумою ряду та точністю апроксимації.

n	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$	$\gamma+\ln n$	Відхилення
10	2,92897	2,87980	0,04917
100	5,18738	5,18239	0,00499
1 000	7,48547	7,48497	0,00050
10 000	9,78761	9,78756	0,00005

2) Якщо розглядати лише члени з простими знаменниками, то для досить великих значень p правильною буде формула

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{p}\approx M+\ln\ln p,$$

де $M=0,2614972...$ – стала Мертенса, причому за зростанням p точність наближення зростає.

Існують способи так змінити гармонічний ряд, щоб він став збіжним. Ейлер довів, що для цього достатньо просто піднести знаменники всіх членів ряду до квадрата

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Застосувавши інтегрування, можна також довести, що при будь-якому $p>1$ ряд

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$$

збігатиметься до значення, меншого за $\frac{p}{p-1}$. Наприклад, при $p=1{,}01$ ряд буде збігатися, хоча всі його члени лише трішечки менші від членів гармонічного ряду

$$1+\frac{1}{2^{1,01}}+\frac{1}{3^{1,01}}+\frac{1}{4^{1,01}}+\ldots<101.$$

Фокус! Розглянемо довільний гармонічний ряд, із якого вилучимо всі числа з цифрою 9. Можна показати, що такий ряд не є розбіжним. Щоб довести цей факт, треба підрахувати кількість чисел без дев'яток. Почнемо, наприклад, з восьми дробів з однозначними знаменниками від 1 до $\frac{1}{8}$. Далі маємо $8\cdot 9=72$ двозначних числа без дев'яток, оскільки першою цифрою можуть бути 8 цифр, другою – 9. Аналогічно отримаємо $8\cdot 9\cdot 9=648$ тризначних чисел без дев'яток, а загалом $8\cdot 9^{n-1}$ n-значних чисел без дев'яток. Зауважимо, що найбільше однозначне число без дев'ятки – 1, двозначне – $\frac{1}{10}$, тризначне – $\frac{1}{100}$; це дасть змогу розбити наш нескінченний ряд на такі блоки:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<8;$$

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{88}<(8\cdot 9)\frac{1}{10}=8\left(\frac{9}{10}\right);$$

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{888}<\left(8\cdot 9^2\right)\frac{1}{100}=8\left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

Як бачимо, сума початкового ряду не більша за

$$8\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots\right)=8\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=80.$$

Отже, гармонічний ряд без дев’яток буде збігатися до величини, що не перевищує 80.

Секрет цього фокуса в тому, що практично всі великі числа ряду обов’язково матимуть у своєму складі цифру 9. Загалом, якщо взяти число, у якому цифри розташовані у довільному порядку, ймовірність того, що серед перших n знаків не з’явиться цифра 9, дорівнює $\left(\frac{9}{10}\right)^n$, і вона прямуватиме до нуля зі зростанням n.

Цікавий факт! Розглянемо ряд $1+x+x^2+x^3+...=\frac{1}{1-x}, |x|<1$. Виконаємо диференціювання обох частин цього ряду

$$1+2x+3x^2+4x^3+...=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Знайдемо первісну для обох сторін рівності $1-x+x^2-x^3+...=\frac{1}{1+x}, |x|<1$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...=\ln(1+x).$$

Якщо x наближається до 1, отримаємо значення, близьке до 0,693147…, а саме:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=\ln 2.$$

Якщо в геометричному ряду замінити x на $-x^2$, то для $|x|<1$ отримаємо

$$1-x^2+x^4-x^6+...=\frac{1}{1+x^2}.$$

Знайдемо первісну останньої рівності

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...=arctgx,$$

якщо припустити, що змінна наближається до 1, то матимемо співвідношення

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...=arctg1=\frac{\pi}{4}..$$

Ще один цікавий факт! $1+2+3+4+5+...=\frac{-1}{12}$. Для доведення цього твердження використаємо підхід, при якому одну й ту саму суму записують у початковому вигляді та зі зміщенням на один член.

$$S = 1-1+1-1+1-1+...$$
$$S = \quad\quad 1-1+1-1+1-...$$

Додавши ці формули отримуємо, що $2S=1 \to S=\frac{1}{2}$. Такий же результат можна отримати підставивши у формулу для нескінченої геометричної прогресії $x=-1$. Можна показати, що знакозмінна інтерпретація нескінченної суми має цікаву відповідь

$$1-2+3-4+5-6+7-8+...=\frac{1}{4}.$$

Тепер порівняємо два ряди без жодних зміщень.

$S_1 = 1+2+3+4+5+6+...$
$S_2 = 1-2+3-4+5-6+...$

Віднімаючи другий ряд від першого, отримаємо:

$$S_1 - S_2 = 4+8+12+16+...=4(1+2+3+4+...)=4S_1.$$

З останнього рівняння маємо, що $3S_1=-S_2 \to 3S_1=-\frac{1}{4} \to S_1=-\frac{1}{12}$. Але при додаванні нескінченної кількості додатних чисел сума завжди буде розбігатись до нескінченності?! Однак коли розглядаються числа на дійсній прямій, то вважали, що корінь із -1 знайти неможливо, але за допомогою комплексної площини з її власною арифметикою довели, що це не так. Фізики, що займаються вивченням теорії струн, використовують у своїх обчисленнях вираз $1+2+3+4+5+...=\frac{-1}{12}$.

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти п'ять перших і $(n+1)$-й члени ряду за формулою загального члена, записати ряд:

1.1. $a_n = \dfrac{1}{(3n+1)^3}$; 1.2. $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n^2+1}$; 1.3. $a_n = \dfrac{(-1)^n(n+2)}{3^{n+1}}$;

1.4. $a_n = \dfrac{n!}{(n-1)^2}$; 1.5. $a_n = \dfrac{n!!}{n^2-1}$; 1.6. $a_n = \dfrac{(-1)^n(n^2-1)}{3n+2}$.

2. Скласти формулу загального члена ряду:

2.1. $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{13}+\ldots$; 2.2. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\dfrac{4}{81}+\ldots$;

2.3. $\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{4}{3^4}+\dfrac{6}{3^6}+\dfrac{8}{3^8}+\ldots$; 2.4. $\dfrac{1}{1\cdot 2^2}+\dfrac{2}{3\cdot 2^3}+\dfrac{3}{5\cdot 2^4}+\dfrac{4}{7\cdot 2^5}+\ldots$

3. Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності для таких рядів:

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$; 3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n-1)}$; 3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^n$;

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}$; 3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{n}$; 3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{2n^2+n+1}{5n^2+3n+2}$.

4. Знайти суму ряду:

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-2}{\left(n^2-1\right)\left(n-2\right)}$; 4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(n-1\right)\left(n+2\right)}$;

4.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)n}$; 4.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8n-10}{\left(n-1\right)\left(n+1\right)(n-2)}$;

4.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(n^2-1\right)n}$; 4.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{9n^2-3n-2}$.

1.2 Ознаки збіжності додатних рядів та їх властивості

ПЕРША ОЗНАКА ПОРІВНЯННЯ. Якщо для членів додатних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (1.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (1.2)$$

виконуються нерівності $a_n \le b_n$ для всіх n, починаючи з деякого, то зі збіжності ряду (1.2) випливає збіжність ряду (1.1), а з розбіжності ряду (1.1) випливає розбіжність ряду (1.2).

ДРУГА ОЗНАКА ПОРІВНЯННЯ. Якщо для додатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ існує скінченна додатна границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то ці ряди збіжні або розбіжні одночасно.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! При використанні першої та другої ознак порівняння стане в пригоді узагальнений гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

який збіжний при $\alpha > 1$, і розбіжний при $\alpha \le 1$.

Приклад 1.8 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

Розв'язування

Оскільки $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ розбіжний, то розбіжний і даний ряд за першою ознакою порівняння.

Приклад1.9 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+1}$.

Розв'язування

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Оскільки $\alpha=3>1$, то даний ряд збіжний. Тоді $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^4+1}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4+1}=1\neq 0$ і за другою ознакою порівняння збіжним буде і заданий ряд.

Приклад 1.10 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{n}\right)^4$.

Розв'язування

Використаємо другу ознаку порівняння. Розглянемо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(arctg\frac{1}{n}\right)^4}{\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{arctg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^4=1,$$

за другою ознакою порівняння даний ряд також збіжний.

Приклад 1.11 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

Розв'язування

Використаємо другу ознаку порівняння. Розглянемо збіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Тоді $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-4n+5}=1$,

за другою ознакою порівняння даний ряд також збіжний.

ОЗНАКА Д'АЛАМБЕРА: Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l\geq 0$, то при $l<1$ даний ряд збіжний, а при $l>1$ – розбіжний.

Приклад 1.12 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$

Розв'язування

Оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0<1,$

то за ознакою Д'Аламбера даний ряд збіжний.

Приклад 1.13 Довести збіжність ряду $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}+...$

Доведення

Маємо $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$

Границя цього відношення дорівнює 1/2, тобто за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

Приклад 1.14 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot...\cdot(4n-3)}$.

Розв'язування

Запишемо формули загального і $(n+1)$-го членів ряду

$$a_n=\frac{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot...\cdot(4n-3)},\qquad a_{n+1}=\frac{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}{1\cdot5\cdot9\cdot...\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}.$$

Складемо відношення наступного члену до попереднього

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}{1\cdot5\cdot9\cdot...\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}}{\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot...\cdot(4n-3)}}=\frac{3n+2}{4n+1}$$

і застосуємо ознаку Д'Аламбера в граничній формі

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+1}=\frac{3}{4}<1.$$

Ряд збігається.

Приклад 1.15 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{3^n}$.

Розв'язування

Запишемо формули загального і $(n+1)$-го членів ряду

$$a_n=\frac{(n+1)!}{3^n},\qquad a_{n+1}=\frac{(n+2)!}{3^{n+1}}.$$

Знайдемо границю відношення загального члена до попереднього

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+2)!}{3^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)!}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\cdot 3^n}{(n+1)!\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(n+2)}{(n+1)!}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+2)=\infty>1.$$

За ознакою Д'Аламбера даний ряд розбіжний.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! 1) Ознаку Д'Аламбера не можна застосовувати при $l=1$.
2) Дану ознаку доцільно застосовувати у випадку, коли в загальному члені є факторіал або нескінченний добуток.

РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ В ГРАНИЧНІЙ ФОРМІ. Якщо для додатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$, то при $l<1$ даний ряд збіжний, а при $l>1$ – розбіжний.

Приклад 1.16 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$.

Розв'язування

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

то за ознакою Коші даний ряд збіжний.

Приклад 1.17 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$.

Розв'язування

Застосуємо радикальну ознаку Коші в граничній формі

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+1}{3n^2-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{3n^2-1}=\frac{5}{3}>1.$$

Отже, ряд розбіжний.

Приклад 1.18 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Розв'язування

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1.$$

Отже, за радикальною ознакою Коші в граничній формі ряд розбіжний.

Приклад 1.19 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

Розв'язування

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1.$$

Отже, ряд розбіжний.

Приклад 1.20 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Розв'язування

Для даного ряду $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$

тому питання про його збіжність за ознакою Коші не вирішується. Зрозуміло, що цей ряд розбіжний, бо не виконується необхідна ознака збіжності:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e\neq 0.$$

ЗАПАМ'ЯТАЙ! 1) Якщо $l=1$, то питання про поводження ряду залишається відкритим. У цьому випадку, як і в ознаці Д'Аламбера, потрібно скористатися іншими, більш тоншими ознаками збіжності.

2) Радикальну ознаку Коші потрібно застосовувати у випадку, коли в загальному члені присутній вираз в n-му степені.

ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ-МАКЛОРЕНА: Якщо $f(x)$ невід'ємна і незростаюча функція на проміжку $[1;+\infty]$, то ряд

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1.3}$$

і невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx \tag{1.4}$$

або обидва збіжні, або обидва розбіжні.

Приклад 1.21 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Розв'язування

Очевидно, що члени цього ряду є значеннями функції $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ при $x=2,3,\ldots,n,\ldots$. Ця функція додатна і спадна на проміжку $[2;+\infty]$. Користуючись означенням, дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\ln x\right]_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\ln b-\ln\ln 2\right]=+\infty.$$

Оскільки цей інтеграл розбіжний, то за інтегральною ознакою Коші розбіжним є і даний ряд.

Приклад 1.22 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язування

Застосуємо інтегральну ознаку Коші-Маклорена. Функція $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ невід'ємна та незростаюча на проміжку $[1,+\infty)$. Дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=-2\lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})=-2\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^b\right)=$$

$$=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{\sqrt{b}}}-\frac{1}{e^{\sqrt{1}}}\right)=-2\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{b}}}+2\cdot\frac{1}{e}=\frac{2}{e}.$$

Оскільки невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ збіжний, то за інтегральною ознакою Коші буде збіжним і даний ряд.

Найпростіші властивості збіжних рядів

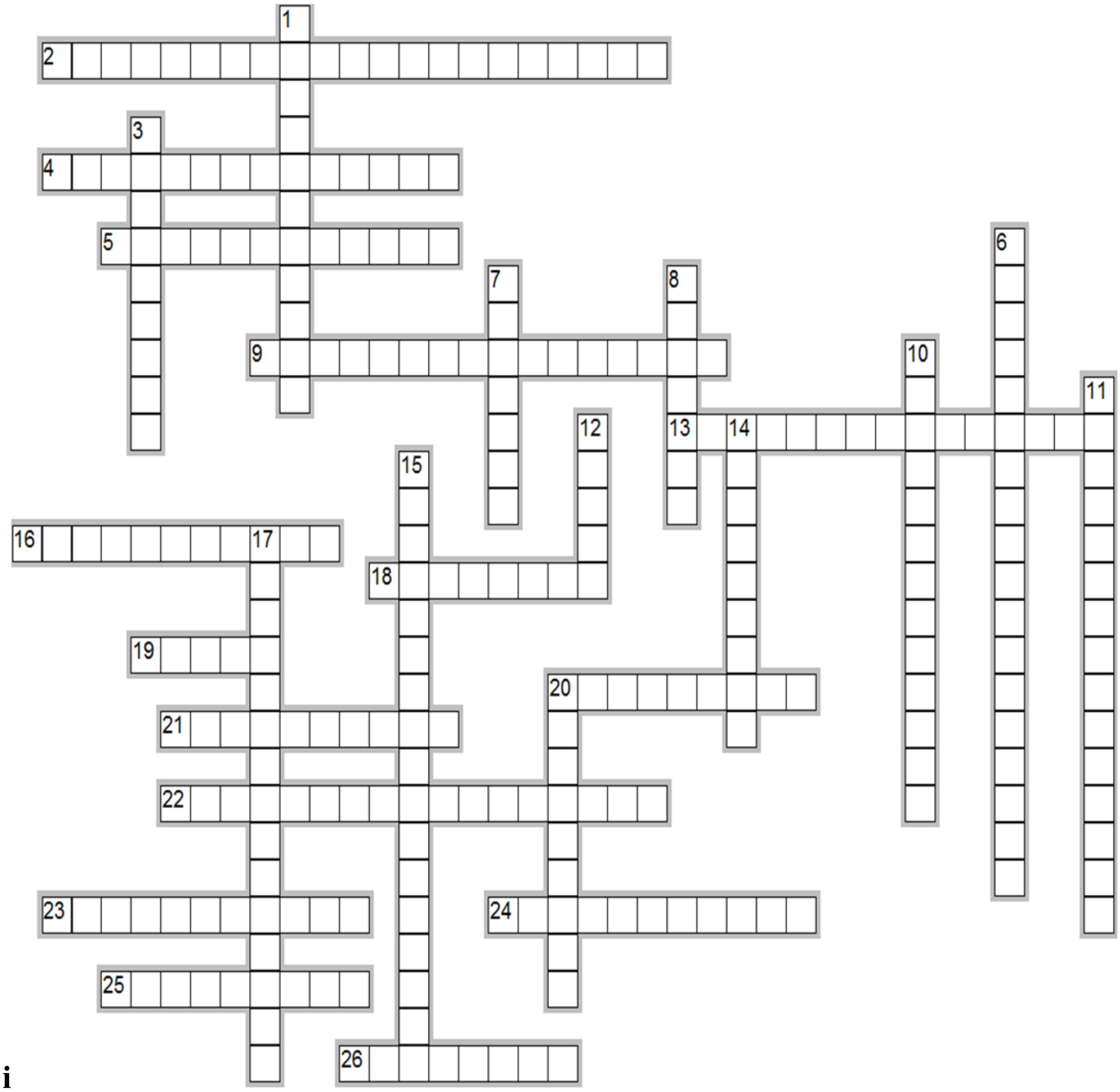
1) Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ збігається і має суму S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}ca_n$ також збігається і має суму cS.
2) Якщо ряди $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty}b_n$ збіжні і мають, відповідно, суми S і σ, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ збігається і має суму $S+\sigma$.
3) Сума збіжного і розбіжного рядів є ряд розбіжний.
4) Якщо, починаючи з деякого n, члени рядів $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty}b_n$ рівні між собою і один з цих рядів збіжний, то збіжний і другий.

Наслідок. Якщо в довільному ряді дописати, відкинути або змінити скінченне число членів, то збіжність чи розбіжність від цього не зміниться

СРС: 1) Знакозмінні ряди, ознака Лейбніца [1–3].
2) Степеневі ряди, радіус збіжності, ряд Тейлора. Застосування степеневих рядів [1–3].

Вправи для самостійної роботи

1. Розгадайте кросворд



і

По горизонталі

2. Ознака, в якій використовується невластивий інтеграл.
4. Степеневий ряд можна почленно ... у внутрішніх точках його інтервалу збіжності.
5. Якщо в довільному ряді дописати, відкинути або змінити скінченне число членів, то збіжність чи розбіжність від цього ...
9. Поняття «інтервал збіжності» стосується ...
13. ... збіжності ряду формулюється так: якщо ряд збігається, то його загальний член прямує до нуля.
16. Ряд, в якому використовується похідна функції.

18. Ряд, всі члени якого є невід`ємні числа, називають ... рядом.
19. Ряд, складений з членів геометричної прогресії збіжний, якщо значення модуля знаменника ... одиниці.
20. Якщо границя послідовності частинних сум нескінченна або не існує, то ряд називають ...
21. Сума степеневого ряду всередині інтервалу збіжності є функція ...
22. Ознака, за якою збіжність ряду з`ясовується шляхом визначення границі відношення наступного члена ряду до попереднього.
23. Степеневий ряд можна почленно ... на кожному відрізку *[a,b]*, що належить інтервалу збіжності *(-R, R)*.
24. Ознака, за якою збіжність ряду з`ясовується шляхом обчислення границі кореня *n*-го степеня з загального члена.
25. Границя послідовності *n*-их частинних сум, при n, що прямує до нескінченності.
26. Яка ознака формулюється так: якщо члени знакозмінного ряду прямують до нуля і абсолютні величини їх не зростають, то такий ряд збіжний.

По вертикалі

1. Необхідна умова збіжності використовується тільки для встановлення ... ряду
3. Ряд, складений з членів геометричної прогресії, розбіжний, якщо значення модуля знаменника ... одиницю.
6. Степеневий ряд ... на кожному відрізку, що належить інтервалу збіжності.
7. За ознакою Д`Аламбера ряд збіжний, якщо значення границі менше ...
8. Ряд, який має суму, називають ...
10. Ряди, знаки членів в яких чергуються, називають ... рядами
11. Суму перших n членів ряду називають *n*-ою ... ряду.
12. Нескінченну суму членів числової послідовності називають ...
14. Якщо для додатних рядів існує скінченна границя відношення загальних членів, то ці ряди збіжні або розбіжні ...
15. Ряд, у якого збіжним є відповідний ряд абсолютних значень членів ряду.
17. Для того, щоб додатний ряд збігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність частинних сум цього ряду була ...
20. Сума збіжного і розбіжного рядів є ряд ...

2. Дослідити на збіжність ряди

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+2)!}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{50}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2})$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot ...\cdot n^2}{2^{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)^n}$;

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n)!}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3 n}$;

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mathrm{n}+1}{3n+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot ...\cdot 14n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3n+2}}$;

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{n}$,

$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\ln(1+\frac{1}{n})$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^3+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n tg\frac{1}{5^n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}{(n+1)!}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$;

2.7. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\ln(1+\frac{1}{n^2})$ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+2}{n+1}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n\cdot n!}{5^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n+1)^n}$;

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+3}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\ln(1+\frac{1}{n+1})$,

$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{5^{2\mathrm{n}-1}}{3^{4\mathrm{n}+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$;

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^5 n}$;

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{4n+2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(5n+1)^n}$

1.3 Розвинення функцій в ряд Фур'є

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1.5)$$

називають *тригонометричним рядом,* а числа a_0, a_n, b_n – його коефіцієнтами.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! 1) Набір функцій

cos x, sinx, cos2x, sin2x, ..., cos nx, sin nx, ...

називають *основною тригонометричною системою.* Очевидно, що функції, які входять в основну тригонометричну систему, є періодичними з найменшим періодом 2π.

2) Частинна сума тригонометричного ряду (у випадку його збіжності) є також 2π-періодичною функцією.

Рядом Фур'є 2π-періодичної функції $f(x)$ на проміжку [-π;π] називають тригонометричний ряд (1.5), коефіцієнти якого обчислюються за формулами:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, \qquad (1.6)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, \quad n=1,2,... \qquad (1.7)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, \quad n=1,2,... \qquad (1.8)$$

Отже, кожній інтегрованій на відрізку [-π;π] функції *f(x)* відповідає свій ряд Фур'є. Оскільки про збіжність ряду нічого не відомо, то замість знака «=» ставлять знак «~», тобто записують

$$\mathrm{f(x)}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

ДОСТАТНЯ УМОВА РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЇ В РЯД ФУР'Є (УМОВА ДІРІХЛЕ)

Якщо функція *f(x)* періодична з періодом 2π $[-\pi;\pi]$ задовольняє умови:

1) *f(x)* кусково-неперервна на відрізку $[-\pi;\pi]$, тобто неперервна або має скінченну кількість точок розриву першого роду;
2) *f(x)* кусково-монотонна на відрізку $[-\pi;\pi]$, тобто має скінченну кількість локальних екстремумів;
3) *f(x)* обмежена на $[-\pi;\pi]$;

то її ряд Фур'є збіжний в кожній точці x_0 даного відрізка, причому для суми цього ряду виконуються рівності:

1. $S(x_0) = f(x_0), \quad x_0 \in (-\pi,\pi)$, якщо x_0 – точка неперервності *f(x)*;

2. $S(x_0) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)}{2}$, $x_0 \in (-\pi,\pi)$, якщо x_0 – точка розриву *f(x)*;

3. $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{\lim\limits_{x\to -\pi+0} f(x) + \lim\limits_{x\to \pi-0} f(x)}{2}$.

Приклад 1.23 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$.

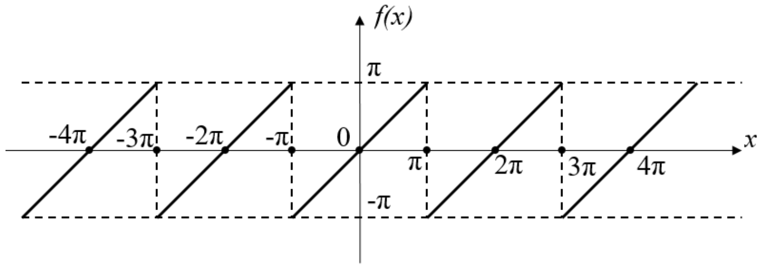


Рисунок 1.2.

Розв'язування

Функція є періодичною і на відрізку $[-\pi;\pi]$ задовольняє умови теореми Діріхле. Оскільки в кожній точці відрізка $[-\pi;\pi]$ функція є неперервною, то її ряд Фур'є, згідно з рівністю, збіжний на цьому відрізку до функції *f(x) = x,*

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right] = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n = 1, 2...,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx = \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nxdx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right] =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}, \quad n = 1, 2, ...$$

Таким чином одержуємо ряд

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

або

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + ...\right].$$

Приклад 1.24 Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = |x|, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$.

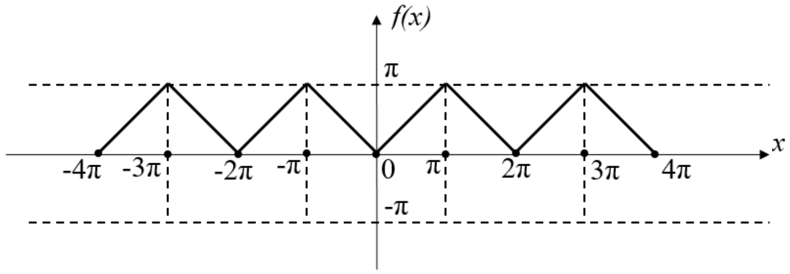


Рисунок 1.3

Розв'язування

Дана функція періодична і на відрізку [-π ; π] задовольняє умови Діріхле. Оскільки в кожній точці відрізка [-π ; π] задана функція є неперервною, то її ряд Фур'є, збіжний на цьому відрізку до функції *f(x)* = |*x*|, тобто,

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур’є*:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right] = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{-4}{\pi n^2}, & n = 2k-1 \end{cases}, \quad n = 1, 2, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nxdx = 0, \quad n = 1, 2, ...$$

Підставивши одержані значення коефіцієнтів, маємо:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

ЗАПАМ’ЯТАЙ! 1) Ряд Фур’є парної функції має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

2) Ряд Фур’є непарної функції такий:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \; b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1, 2, ...$$

Приклад 1.25 Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=x^2 \quad \textit{при} \quad -\pi < x \le \pi, \qquad f(x+2\pi)=f(x).$$

Розв'язування

Оскільки функція $f(x)=x^2$ парна, то

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right)=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{4}{n\pi}\left(\frac{x\cos nx}{n}-\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{4}{n^2} & \textit{при} \quad n \quad \textit{парному},\\ -\dfrac{4}{n^2} & \textit{при} \quad n \quad \textit{непарному}\end{array}\right.$$

Отже, ряд Фур'є даної функції такий:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots\right).$$

Оскільки функція $f(x)$ кусково-монотонна, обмежена і неперервна, то ця рівність виконується в усіх точках числової осі.

Розглянемо задачу розвинення в ряд Фур'є $2l$ - періодичної функції $f(x)$, яка задана на відрізку $[-l;l]$, де l – деяке додатне число. Тоді

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{1.9}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{1.10}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \qquad n=1,2,\ldots \tag{1.11}$$

Приклад 1.26 Знайти розвинення в ряд Фур'є періодичної функції з періодом 4 (рис. 1.4)

$$f(x)=\begin{cases}-1 \ \ при \ -2<x<0\\ 2 \ \ при \ \ 0\le x\le 2\end{cases}$$

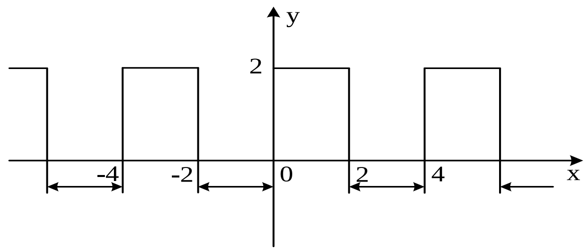


Рисунок 1.4

Розв'язування

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{2}2dx\right)=\frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-2}^{0}+2x\Big|_{0}^{2}\right)=\frac{1}{2}(-2+4)=1,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{\pi n}{2}xdx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{\pi n}{2}xdx+\int_{0}^{2}2\cos\frac{\pi n}{2}xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_{-2}^{0}+\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_{0}^{2}\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi n}{2}xdx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{\pi n}{2}xdx+\int_{0}^{2}2\sin\frac{\pi n}{2}xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_{-2}^{0}-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_{0}^{2}\right)=\frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{3}{n\pi}(1-(-1)^n)=$$

$$=\begin{cases}0,\ n=2k\\ \dfrac{6}{\pi n},\ n=2k-1\end{cases}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд, одержимо

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}x.$$

Приклад 1.27 Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію, яка задана на півперіоді $[0;2]$ рівнянням $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$, за умови довизначення функції *f(x)* на півінтервалі $[-2;0)$ непарним чином.

Розв’язування

Якщо довизначити функцію непарним чином, то одержимо періодичну функцію з періодом $T=4$ (рис. 1.5).

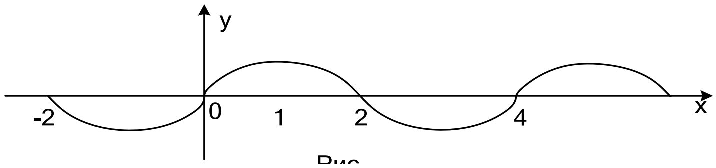


Рисунок 1.5

$$a_n=0,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{2}xdx=$$

$$=\int_0^2 (x-\frac{1}{2}x^2)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\begin{bmatrix} u=x-\frac{1}{2}x^2 & dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx \\ du=(1-x)dx & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cdot(x-\frac{1}{2}x^2)\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=1-x & dv=cos\frac{\pi nx}{2}dx \\ du=-dx & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{bmatrix}=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=-\frac{8}{n^3\pi^3}cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2=-\frac{8}{n^3\pi^3}cos\pi n+\frac{8}{n^3\pi^3}=\frac{8}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]=\begin{cases}0, n=2k\\ \frac{16}{n^3\pi^3}, n=2k-1\end{cases}.$$

Отже,

$$f(x)=\frac{16}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2}=\frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}+...\right).$$

ЗАУВАЖЕННЯ! В багатьох задачах потрібно розвинути в ряд Фур’є функцію не на відрізку $[-l;l]$, а на відрізку $[0;2l]$.

Для будь-якого періоду $T=2l$ після введення величини $\omega_n=\frac{\pi}{l}n=\frac{2\pi}{T}n,\quad n=1,2,...$ маємо:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\omega_n xdx,\quad n=0,1,2,...\quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\omega_n xdx,\quad n=1,2,...$$

Приклад 1.28 Подати рядом Фур'є періодичний сигнал з амплітудою h, періодом T_0 та тривалістю часових імпульсів τ.

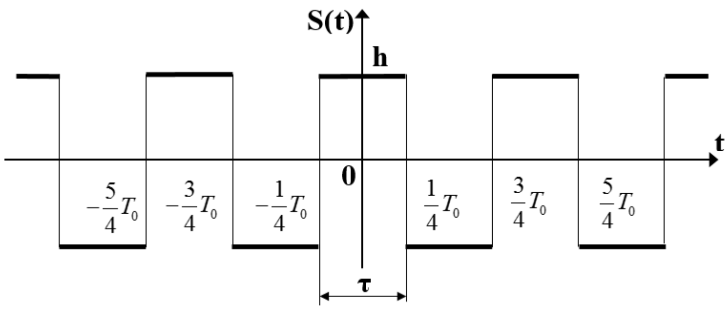


Рисунок 1.6

Розв'язування

З рисунка 1.6 випливає, що $a_0 = 0$. Запишемо вираз для визначення функції сигналу $S(t)$ на інтервалі одного періоду T_0

$$S(t) = \begin{cases} +h, & \textit{якщо} \quad 0 \le t \le \dfrac{T_0}{4} \\ -h, & \textit{якщо} \quad \dfrac{T_0}{4} \le t \le \dfrac{3T_0}{4}. \\ +h, & \textit{якщо} \quad \dfrac{3T_0}{4} \le t \le T_0 \end{cases}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T_0} = \omega_0 n, \quad \sin n\omega_0 T_0 = \sin 2\pi n = 0, \cos n\omega_0 T_0 = \cos 2\pi n = 1, \qquad (*)$$

тоді $a_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_0^{\frac{T_0}{4}} h\cos\omega_0 ntdt - \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} h\cos\omega_0 ntdt + \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{\frac{3T_0}{4}}^{T_0} h\cos\omega_0 ntdt =$

$$= \frac{2h}{T_0}\left(\frac{1}{n\omega_0}\sin n\omega_0 t\Big|_0^{\frac{T_0}{4}} - \frac{1}{n\omega_0}\sin n\omega_0 t\Big|_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} + \frac{1}{n\omega_0}\sin n\omega_0 t\Big|_{\frac{3T_0}{4}}^{T_0} \right) =$$

$$= \frac{2h}{T_0 n\omega_0}\left(\sin\frac{n\omega_0 T_0}{4} - 0 - \sin\frac{3n\omega_0 T_0}{4} + \sin\frac{n\omega_0 T_0}{4} + \sin n\omega_0 T_0 - \sin\frac{3n\omega_0 T_0}{4} \right).$$

Враховуючи рівність (*) шуканий коефіцієнт набуває вигляду:

$$a_n=\frac{2h}{T_0 n\omega_0}\left(2\sin\frac{n\omega_0 T_0}{4}-2\sin\frac{3n\omega_0 T_0}{4}\right)=\frac{4h}{2\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{4}-\sin\frac{3n2\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{2h}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{3\pi n}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad n \text{ парне}\\ \dfrac{4h}{\pi n}, & \text{якщо} \quad n=1,5,9,\ldots\\ -\dfrac{4h}{\pi n}, & \text{якщо} \quad n=3,7,\ldots\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{4}} h\sin\omega_0 nt\,dt-\frac{2}{T_0}\int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} h\sin\omega_0 nt\,dt+\frac{2}{T_0}\int_{\frac{3T_0}{4}}^{T_0} h\sin\omega_0 nt\,dt=$$

$$=\frac{2h}{T_0}\left(-\frac{1}{n\omega_0}\cos n\omega_0 t\Big|_0^{\frac{T_0}{4}}+\frac{1}{n\omega_0}\cos n\omega_0 t\Big|_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}}-\frac{1}{n\omega_0}\cos n\omega_0 t\Big|_{\frac{3T_0}{4}}^{T_0}\right)=$$

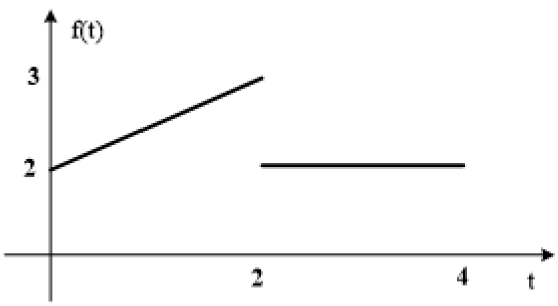
$$=-\frac{2h}{T_0 n\omega_0}\left(\cos\frac{n\omega_0 T_0}{4}-\cos 0+\cos\frac{3n\omega_0 T_0}{4}-\cos\frac{n\omega_0 T_0}{4}+\cos n\omega_0 T_0-\cos\frac{3n\omega_0 T_0}{4}\right)=$$

$$=-\frac{2h}{T_0 n\omega_0}\left(-1+\cos n\omega_0 T_0\right)=-\frac{2h}{T_0 n\omega_0}\left(-1+\cos n\omega_0 T_0\right)=-\frac{h}{\pi n}(-1+\cos 2\pi n)=0.$$

Таким чином, сигнал має тільки косинусоїдні складові:

$$S(t)=\frac{4h}{\pi}\left(\cos\frac{2\pi t}{T_0}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\cdot 2\pi t}{T_0}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\cdot 2\pi t}{T_0}-\ldots\right).$$

Приклад 1.29 Розкласти в ряд Фур’є в дійсній формі функцію *f(t),* задану графіком на відрізку *[0; 2l],*



в повний ряд Фур’є, беручи за період *T* довжину відрізка *[0; 2l].*

Розв'язування

Функція складається з двох лінійних відрізків, які проходять через точки $(0,2)$, $(2,3)$ та $(2,2)$, $(4,2)$. Очевидно, що на проміжку $[2,4]$ функція є константою $f(t)=2$. Для визначення рівняння функції на проміжку [0, 2) можна скористатись рівнянням прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{t-t_1}{t_2-t_1}=\frac{f(t)-f(t_1)}{f(t_2)-f(t_1)}.$$

В нашому випадку маємо $\frac{t-0}{2-0}=\frac{f(t)-2}{3-2}\Rightarrow f(t)=\frac{t}{2}+2$. Загалом маємо

$$f(t)=\begin{cases}\frac{t}{2}+2, & 0\le t<2\\ 2, & 2\le t\le 4\end{cases}, \qquad \omega=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є.

$$a_0=\frac{2}{4}\left(\int_0^2\left(\frac{t}{2}+2\right)dt+\int_2^4 2dt\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{t^2}{4}+2t\right)\Bigg|_0^2+2t\Big|_2^4\right)=\frac{1}{2}(1+4+8-4)=\frac{9}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^2\left(\frac{t}{2}+2\right)\cos\frac{\pi nt}{2}dt+\int_2^4 2\cos\frac{\pi nt}{2}dt\right)=\begin{vmatrix} u=\frac{t}{2}+2 & du=\frac{dt}{2}\\ dv=\cos\frac{\pi nt}{2}dt & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nt}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{t}{2}+2\right)\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nt}{2}\Bigg|_0^2-\frac{1}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nt}{2}dt\right)+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nt}{2}\Bigg|_2^4=-\frac{1}{2\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nt}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nt}{2}\Bigg|_0^2=\frac{1}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^2\left(\frac{t}{2}+2\right)\sin\frac{\pi nt}{2}dt+\int_2^4 2\sin\frac{\pi nt}{2}dt\right)=\begin{vmatrix} u=\frac{t}{2}+2 & du=\frac{dt}{2}\\ dv=\sin\frac{\pi nt}{2}dt & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nt}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{t}{2}+2\right)\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nt}{2}\Bigg|_0^2+\frac{1}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi nt}{2}dt\right)-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nt}{2}\Bigg|_2^4=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(3\cos\pi n-2\right)-\frac{2}{\pi n}\left(\cos 2\pi n-\cos\pi n\right)=-\frac{1}{\pi n}\left(3\cos\pi n-2+2-2\cos\pi n\right)=$$
$$=-\frac{1}{\pi n}\cos\pi n=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким чином, ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(t)=\frac{9}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\frac{\pi nt}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nt}{2}\right).$$

1.4 Поняття про спектри

Тригонометричні ряди Фур'є широко застосовуються в радіотехніці, механіці коливних процесів, теорії розповсюдження тепла тощо.

Розглянемо періодичну функцію $f(t)$ з періодом T, яка на відрізку $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ задовольняє умови теореми Діріхле. Тоді в точках неперервності її можна записати у вигляді ряду Фур'є

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t, \tag{1.12}$$

де $a_n=\frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos\omega_n t dt,\quad n=0,1,2,...$

$$b_n=\frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin\omega_n t dt,\quad n=1,2,...\qquad \omega_n=\frac{2\pi}{T}n.$$

ω_n називають *хвильовим числом,* а сукупність хвильових чисел прийнято називати *спектром.*

Формулу (1.12) перепишемо так

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n),$$

де $A_0=\frac{a_0}{2},\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad tg\varphi_n=\frac{a_n}{b_n}.$

Одержали подання функції $f(t)$ у вигляді суми сталої A_0 (деякого початкового зсуву, що дорівнює середньому значенню $f(t)$ на періоді) та синусоїдальних компонент (*гармонік*) з частотами $\dfrac{2\pi n}{T}$.

В акустиці першу гармоніку $A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$ називають *основним тоном*, а частоту $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}$ називають *основною частотою*. Тембр звучання різних музичних інструментів створюють тони, які відповідають більш високим (кратним ω_1) частотам, ніж основна, їх називають *обертонами*.

Числа A_n та φ_n називають, відповідно, *амплітудою* та *фазою* n-ої гармоніки. Сукупність величин A_n утворюють *амплітудний спектр*, а сукупність φ_n – *фазовий спектр*. Амплітудний і фазовий спектри називають *частотним спектром*. Геометрично амплітудний і фазовий спектри зображають на координатній площині в системах (ω_n, A_n) і (ω_n,φ_n), коли по осі абсцис відкладають значення частот ω_n, а по осі ординат – відповідні їм значення A_n та φ_n. Точки з координатами $(0,\omega_n)$ та (ω_n, A_n) (або (ω_n,φ_n)) з'єднуємо прямолінійними відрізками, таким чином дістанемо так звані *лінійні спектри*. Досить часто одержані дискретні точки з'єднують пунктирною обвідною лінією.

Між періодичними функціями та їх частотними спектрами існує взаємно однозначна відповідність: періодична функція повністю визначається своїм частотним спектром і навпаки, за частотним спектром функції можна визначити періодичну функцію.

Приклад 1.30 Знайти частотні спектри функції $f(x)=\begin{cases}1, 0\le x<\pi\\ -1, \pi<x<2\pi\end{cases}, \quad T=2\pi.$

Розв'язування

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dx-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left(\pi-0-2\pi+\pi\right)=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\left(\sin nx\Big|_0^{\pi}-\sin nx\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=\frac{1}{n\pi}\left(2sin\pi n-\sin 2\pi n\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\left(\cos nx\Big|_0^{\pi}-\cos nx\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=-\frac{2}{n\pi}\left(\cos\pi n-1\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, n=2k\\ \dfrac{4}{\pi n}, \quad n=2k-1, k\in N\end{cases}.$$

Таким чином, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n|$, $tg\varphi_n = \dfrac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \varphi_n = 0$.

Графік амплітудного частотного спектра зображено на рис. 1.7:

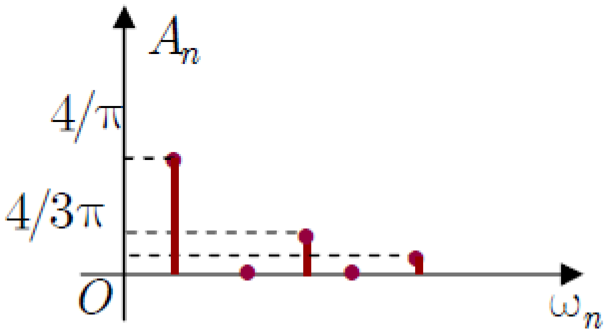


Рисунок 1.7

Приклад 1.31 Зобразити амплітудний та фазовий спектри періодичного сигналу з прикладу 1.28.

Розв'язування

Оскільки $a_n = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad n \textit{ парне} \\ \dfrac{4h}{\pi n}, & \textit{якщо} \quad n = 1,5,9,\dots \\ -\dfrac{4h}{\pi n}, & \textit{якщо} \quad n = 3,7,\dots \end{cases}$, $a_0 = b_n = 0$,

то $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n|$, $\varphi_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \textit{якщо} \quad n = 1,5,9,\dots \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \textit{якщо} \quad n = 3,7,\dots \end{cases}$.

Графік амплітудного спектра зображено на рис. 1.8, а фазового – на рис. 1.9.

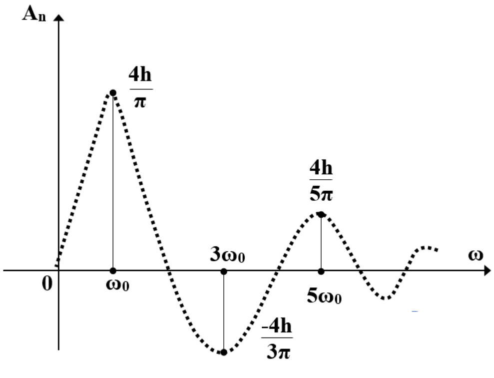


Рисунок 1.8

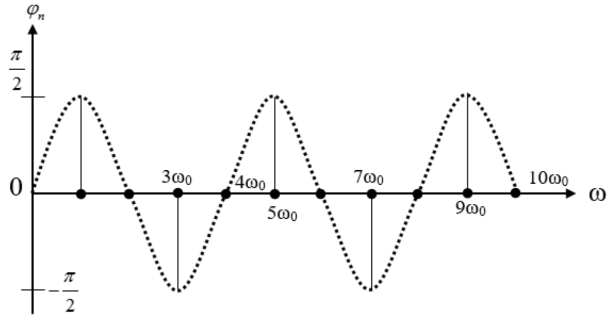


Рисунок 1.9

Зауваження! Пунктиром показано обвідну цих спектрів.

Приклад 1.32 Побудувати амплітудний спектр послідовності прямокутних імпульсів з амплітудою A, тривалістю τ та періодом повторювання $T=2\tau$ (меандр) (рис. 1.10)

$$S(t)=\begin{cases}0, & -\tau\le t<-\dfrac{\tau}{2},\\ A, & -\dfrac{\tau}{2}\le t\le\dfrac{\tau}{2},\\ 0, & \dfrac{\tau}{2}<t\le\tau\end{cases}$$

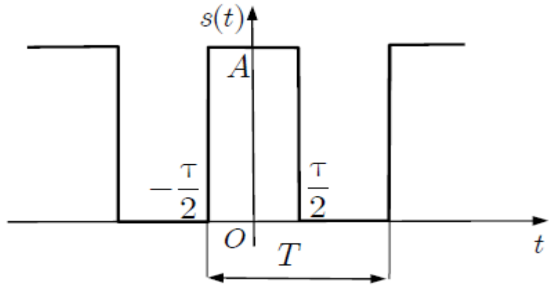


Рисунок 1.10

Розв'язування

Подаємо даний сигнал рядом Фур'є

$$a_0=\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Adt=A;$$

$$a_n=\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}A\cos\left(\frac{\pi n}{\tau}t\right)dt=\frac{A}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{\tau}t\right)\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{A}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n\tau}{2\tau}+\sin\frac{\pi n\tau}{2\tau}\right)=\frac{2A}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}=$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{2A}{\pi n}(-1)^n, & n=2k-1\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}A\sin\left(\frac{\pi n}{\tau}t\right)dt=-\frac{A}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{\tau}t\right)\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=-\frac{A}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\cos\frac{\pi n}{2}\right)=0.$$

Таким чином, сигнал набуває вигляду:

$$S(t)\approx\frac{A}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi nt}{\tau},$$

де амплітуда $A_n=\left|\dfrac{2A}{\pi n}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right|=\dfrac{2A}{\pi n}$ для непарних n. Якщо вздовж осі абсцис відкладати номери хвильових чисел, то маємо такий амплітудний спектр (рис. 1.11):

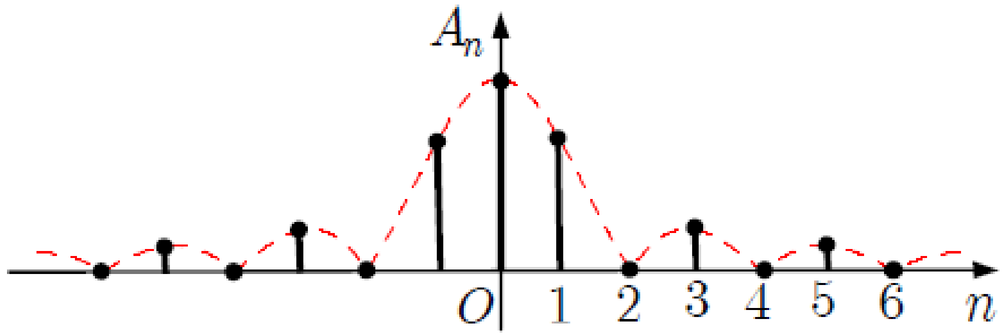


Рисунок 1.11

Послідовність прямокутних імпульсів погано підходить для зображення рядом Фур'є – вона містить стрибки, а сума будь-якої кількості гармонік із довільними амплітудами завжди буде неперервною функцією. Тому поведінка ряду Фур'є в околах розривів є особливо цікавою. На графіках рис. 1.12 добре видно, що в околі точки розриву підсумовування ряду Фур'є дає похилу ділянку, причому крутизна нахилу зростає з кількістю доданків. У точках розриву ряд Фур'є збігається до півсуми лівого та правого граничних значень. На прилеглих до розриву ділянках сума ряду Фур'є дає помітні пульсації, причому амплітуда пульсацій не зменшується зі зростанням кількості доданків – пульсації лише стискаються вздовж горизонталі, наближаючись до точки розриву. Це явище, притаманне рядам Фур'є для будь-яких сигналів із розривами 1-го роду, називають ефектом Гібса.

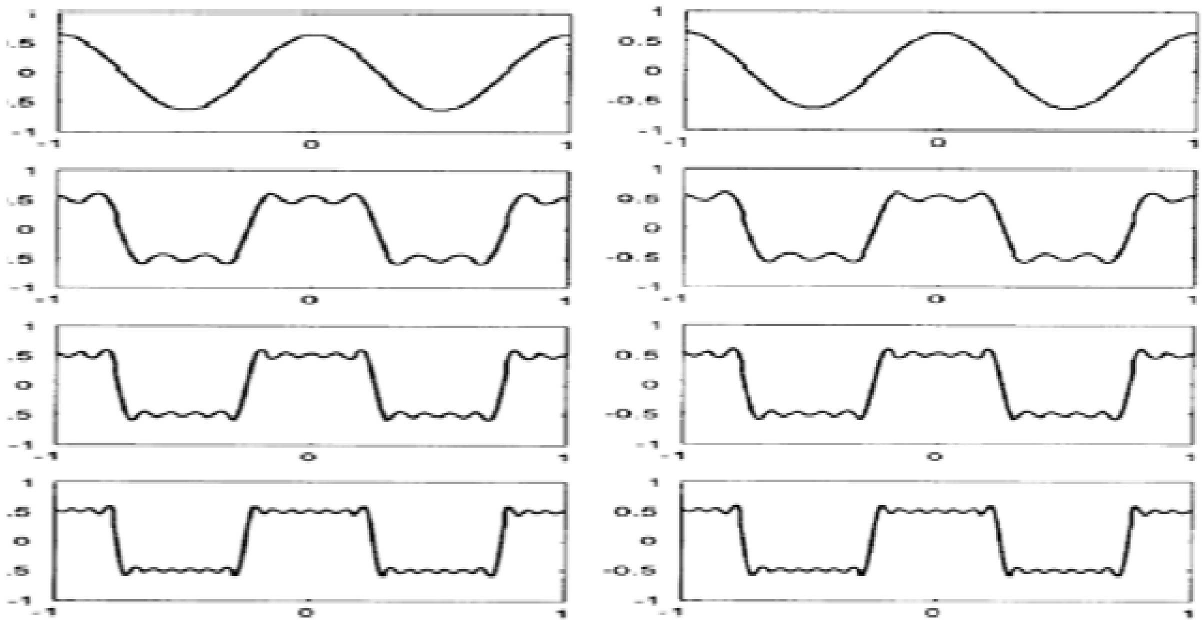


Рисунок 1.12

ЗАПАМ'ЯТАЙ! Більш зручно будувати амплітудний та фазовий спектри, використовуючи комплексну форму ряду Фур'є

КОМПЛЕКСНА ФОРМА РЯДУ ФУР'Є

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega nx}, \quad \omega=\frac{2\pi}{T}, \quad c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jn\omega x}dx, \; j^2=-1$$

*ЗАПАМ'ЯТАЙ! П*ри побудові амплітудних спектрів обчислюють модуль комплексних чисел c_k, а при побудові фазового спектра – аргументи.

Приклад 1.33 Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі періодичну функцію *f(x)*, яка задана графіком (рис. 1.13). Побудувати її амплітудний і фазовий спектри.

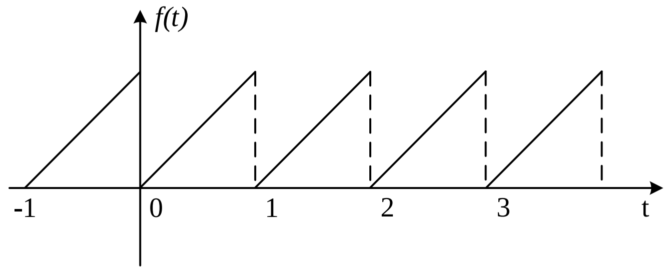


Рис. 7
Рисунок 1.13

Розв'язування

В нашому випадку T=1 – період функції, $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi$ – основна частота.

Складемо рівняння заданої функції на одному періоді. Оскільки функція лінійна і проходить через точки $(0,0)$ та $(1,1)$, то можна скористатись рівнянням прямої, що проходить через дві точки,

$$\frac{t-t_1}{t_2-t_1}=\frac{f(t)-f(t_1)}{f(t_2)-f(t_1)}.$$

В нашому випадку маємо $\frac{t-0}{1-0}=\frac{f(t)-0}{1-0} \Rightarrow f(t)=t.$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є

$$c_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1=\frac{1}{2},$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega t}dt = \int_0^1 te^{-jn\omega t}dt = \left| \begin{matrix} u = t & dv = e^{-jn\omega t}dt \\ du = dt & v = -\dfrac{1}{jn\omega}e^{-in\omega t} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{jn\omega}te^{-jn\omega t}\Big|_0^1 + \frac{1}{jn\omega}\int_0^1 e^{-jn\omega t}dt =$$

$$= -\frac{1}{jn\omega}e^{-jn\omega t} + \frac{1}{n^2\omega^2}e^{-jn\omega t}\Big|_0^1 = -\frac{1}{in\omega}e^{-jn\omega} - \frac{1}{n^2\omega^2}(e^{-jn\omega} - 1) = -\frac{1}{jn2\pi} = \frac{j}{2n\pi},$$

$n = \pm 1,\ \pm 2,...$ оскільки $\omega = 2\pi$ і $e^{-j2n\pi} = \cos 2\pi n - j\sin 2\pi n = 1$. Таким чином, розвинення даної функції в ряд Фур'є таке

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{j}{2n\pi}e^{jn2\pi t} .$$

Для побудови амплітудного і фазового спектрів врахуємо, що

$$A_0 = |c_0| = \frac{1}{2}, \qquad A_n = |c_n| = \frac{1}{2n\pi}, \qquad \varphi_0 = \arg c_0 = 0,$$

$$\varphi_n = \arg c_n = \arg\frac{j}{2n\pi} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & n > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & n < 0, \end{cases} \qquad n = \pm 1, \pm 2, ...$$

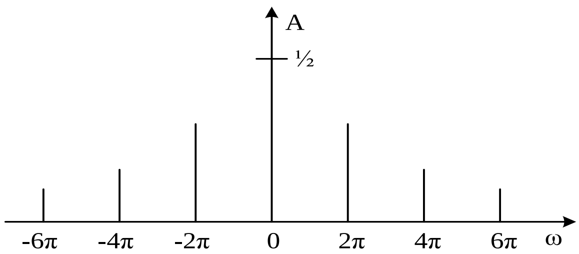


Рисунок 1.14

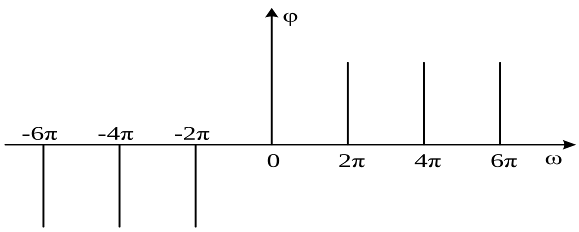


Рисунок 1.15

Амплітудний і фазовий спектри мають вигляд, наведений, відповідно, на рис. 1.14 та 1.15.

Приклад 1.34 Розкласти в ряд Фур'є в комплексній і дійсній формах періодичну функцію, задану графіком (рис. 1.16). Побудувати амплітудний і фазовий спектри.

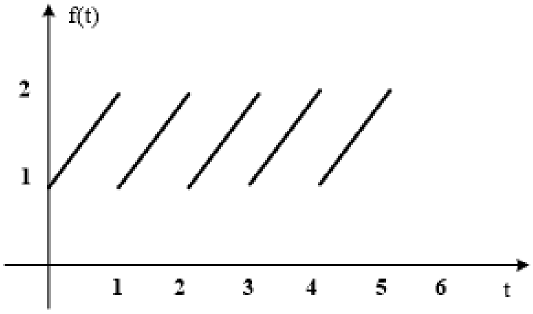


Рисунок 1.16

Розв'язування

В нашому випадку T=1 – період функції, $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi$ – основна частота. Складемо рівняння функції, яка проходить через точки $(0,1)$ та $(1,2)$:

$$\frac{t-0}{1-0}=\frac{f(t)-1}{2-1}\Rightarrow f(t)=t+1.$$

а) Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є в дійсній формі

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\omega nx dx,\quad n=0\Rightarrow a_0=2\int_0^1(t+1)dt=2\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^1=3;$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\omega nx dx\Rightarrow a_n=2\int_0^1(t+1)\cos 2\pi nt dt=\begin{vmatrix} u=t+1 & du=dt \\ dv=\cos 2\pi nt dt & v=\dfrac{1}{2\pi n}\sin 2\pi nt \end{vmatrix}=$$

$$=2(t+1)\frac{1}{2\pi n}\sin 2\pi nt\Bigg|_0^1-\frac{1}{\pi n}\int_0^1\sin 2\pi nt dt=\frac{1}{2\pi^2 n^2}\cos 2\pi nt\Bigg|_0^1=\frac{1}{2\pi^2 n^2}\left(\cos 2\pi n-1\right)=0;$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\omega nx dx\Rightarrow b_n=2\int_0^1(t+1)\sin 2\pi nt dt=\begin{vmatrix} u=t+1 & du=dt \\ dv=\sin 2\pi nt dt & v=-\dfrac{1}{2\pi n}\cos 2\pi nt \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{t+1}{\pi n}\cos 2\pi nt\Bigg|_0^1+\frac{1}{\pi n}\int_0^1\cos 2\pi nt dt=-\frac{2}{\pi n}+\frac{1}{\pi n}+\frac{1}{2\pi^2 n^2}\sin 2\pi nt\Bigg|_0^1=-\frac{1}{\pi n}.$$

Таким чином,

$$f(t)=\frac{3}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2\pi nt.$$

б) Знайдемо коефіцієнти комплексної форми ряду Фур'є. Оскільки $c_n=\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-jn\omega t}dt$, то $c_0=\int\limits_0^1(t+1)dt=\left.\frac{t^2}{2}+t\right|_0^1=\frac{3}{2}$;

$$c_n=\int\limits_0^1(t+1)e^{-j2\pi nt}dt=\begin{vmatrix} u=t+1 & du=dt \\ dv=e^{-j2\pi nt}dt & v=-\frac{1}{2\pi nj}e^{-j2\pi nt}=\frac{j}{2\pi n}e^{-j2\pi nt}\end{vmatrix}=$$

$$=\left.\frac{(t+1)j}{2\pi n}e^{-2\pi ntj}\right|_0^1-\frac{j}{2\pi n}\int\limits_0^1 e^{-2\pi ntj}dt=\frac{j}{2\pi n}\left(2e^{-2\pi nj}-1\right)+\left.\frac{1}{4\pi^2n^2}e^{-2\pi ntj}\right|_0^1.$$

Оскільки $e^{-2\pi nj}=1$, то маємо

$$c_n=\frac{j}{2\pi n}(2-1)+\frac{1}{4\pi^2n^2}(1-1)=\frac{j}{2\pi n}.$$

Таким чином, ряд Фур'є в комплексній формі набуває вигляду

$$f(t)=\frac{3}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{j}{2n\pi}e^{jn\omega t}.$$

Оскільки $A_0=|c_0|=\frac{3}{2}$, $A_n=|c_n|=\frac{1}{2n\pi}$, $\varphi_0=\arg c_0=0$,

$$\varphi_n=\arg c_n=\arg\frac{j}{2n\pi}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & n<0,\end{cases}\qquad n=\pm1,\pm2,...$$

то фазовий спектр аналогічний фазовому спектру з прикладу 1.32 (див. рис. 1.15). Амплітудний спектр даної функції зображено на рис. 1.17.

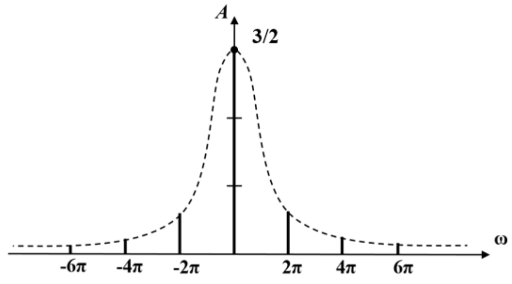


Рисунок 1.17

Приклад 1.35 Знайти частотний спектр комплексних амплітуд сигналу у вигляді періодичної послідовності імпульсів з амплітудою $U = 10B$, періодом $T_0 = 10мс$ та тривалістю $\tau = 5мс$.

Розв'язування

а) Підставимо задані значення у формулу для визначення частотного спектра амплітуд:

$$c_n = \frac{2}{5}\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} 10e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{4j}{n\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\Bigg|_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} = \left|\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{5}\right| = \frac{4j}{n\frac{\pi}{5}}\left(e^{-jn\frac{\pi}{5}\frac{5}{2}} - e^{jn\frac{\pi}{5}\frac{5}{2}}\right).$$

ЗАПАМ'ЯТАЙ!
ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА: $e^{\varphi j} = \cos\varphi + j\sin\varphi,\ e^{-\varphi j} = \cos\varphi - j\sin\varphi$

Таким чином,

$$c_n = \frac{20j}{n\pi}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - j\sin\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2} - j\sin\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{-40j^2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} = 20\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\frac{\pi n}{2}},$$

де n – номер гармонік.

б) Визначимо конкретні значення c_n, враховуючи, що для

$$n = 1, 2, 3, 4, ...\quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin\pi = 0, \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \sin 2\pi = 0, ...$$

Тоді амплітуди гармонік будуть такими:

$$c_0 = 0B;\quad c_1 = 20\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{40}{\pi} \approx 12,7B;\quad c_2 = 20\frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0B;$$

$$c_3 = 20\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-40}{3\pi} \approx -4,2B;\quad c_4 = 20\frac{\sin\frac{4\pi}{2}}{\frac{4\pi}{2}} = \frac{0}{2\pi} = 0B;$$

$$c_5 = 20\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{\frac{5\pi}{2}} = \frac{40}{5\pi} \approx 2,55B.$$

в) Визначимо частоту ω_0: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{10 \cdot 10^{-3}} = 628\,рад/с$ або $f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{10^{-2}} = 100\,Гц$. Частотний спектр комплексних амплітуд сигналу у вигляді періодичної послідовності імпульсів наведено на рис. 1.18.

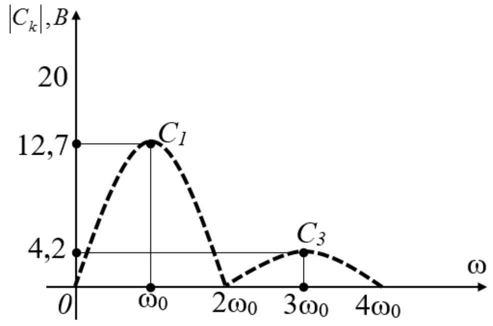


Рисунок 1.18

Приклад 1.36 Відновити вихідний сигнал за його спектром, використовуючи постійну складову, першу, другу, третю та четверту гармоніки зі значеннями комплексних амплітуд 12,7 *В*; 0 *В; -4,2 В; 0 В* відповідно. При $T_0 = 10мс$ частота першої (основної) гармоніки $f_0 = 100\,Гц$. Підсумовування членів ряду Фур'є при відновленні виконати графічним способом. Оцінити якість відновлення вихідного сигналу: а) при використанні тільки постійної складової та першої гармоніки, б) при використанні постійної складової і всіх чотирьох заданих гармонік.

Розв'язування

Запишемо ряд Фур'є в загальному вигляді

$$S(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega_0 + \varphi_n),$$

де φ_n – початкова фаза n-ої гармоніки.

При відновленні вихідного сигналу за постійною складовою отримуємо $S(t) = S_0 = 10B$ (рис. 1.19).

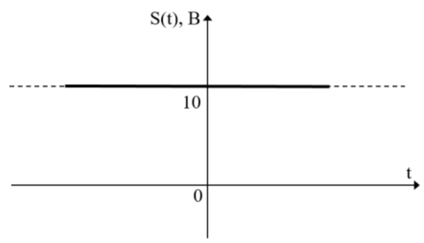


Рисунок 1.19

При відновленні вихідного сигналу за сумою гармонік з амплітудами S_0 та S_1 отримуємо

$$S_1(t) = S_0 + S_1\cos(\omega_0 t) = 10 + 12,7\cos(200\pi t),$$

при цьому $n = 1$, а $\varphi_n = 0$ і визначає положення 0 на осі t.

При $t_0 = 0мс$ $\quad S(t) = S_0 + S_1 = 10 + 12,7 = 22,7;\left(\cos 0^o = 1\right);$

при $t_1 = \pm 2,5мс$ $\quad S(t) = 10 + 12,7\cos\left(200\pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}\right) = 10 + 12,7\cos\frac{\pi}{2} = 10B;$

при $t_2 = \pm 5мс$ $\quad S(t) = S_0 + S_1\cos\pi = S_0 - S_1 = 10 - 12,7 = -2,7B.$

Побудуємо графік відновленого вихідного сигналу (рис. 1.20).

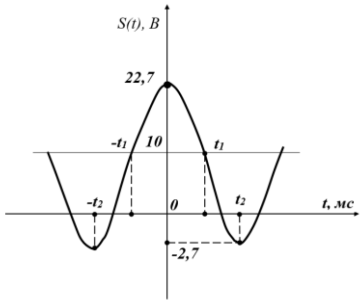


Рисунок 1.20

Для відновлення вихідного сигналу за сумою гармонік з амплітудами S_0, S_1 та S_3 окремо побудуємо графіки гармонічних сигналів (рис. 1.21, а): $S_1(t) = 12,7\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)B;$ $S_3(t) = -4,2\cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}t\right)B$ та постійною складовою $S_0 = 10B$, а потім підсумуємо їх (рис. 1.21, б).

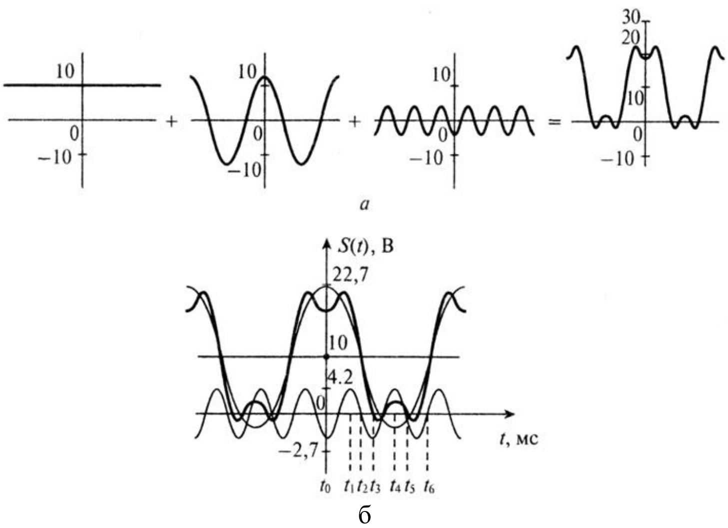


Рисунок 1.21

Визначимо значення відновленого сигналу в характерних точках:

при $t_0 = 0$ $\quad S(t_0) = 10 = 12,7\cos 0 - 4,2\cos 0 = 18,5B;$

$$S(t_1) = 10 + 12,7\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{6}\right) - 4,2\cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{6}\right) =$$

при $t_1 = \dfrac{T_0}{6}$

$$= 10 + 12,7\cos\frac{\pi}{3} - 4,2\cos\pi = 20,55B;$$

$$S(t_2) = 10 + 12,7\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{4}\right) - 4,2\cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{4}\right) =$$

при $t_2 = \dfrac{T_0}{4}$

$$= 10 + 12,7\cdot 0 - 4,2\cdot 0 = 10B;$$

$$S(t_3) = 10 + 12,7\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{3}\right) - 4,2\cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{3}\right) =$$

при $t_3 = \dfrac{T_0}{3}$

$$10 + 12,7\cdot(-0,5) - 4,2\cdot 1 = -0,55B;$$

$$S(t_4) = 10 + 12,7\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2}\right) - 4,2\cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2}\right) =$$

при $t_4 = \dfrac{T_0}{2}$

$$= 10 + 12,7\cdot(-1) - 4,2\cdot(-1) = 1,5B;$$

$$S(t_5) = 10 + 12,7\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{2T_0}{3}\right) - 4,2\cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{2T_0}{3}\right) =$$

при $t_5 = \dfrac{T_0}{2} + \dfrac{T_0}{6}$

$$= 10 + 12,7\cdot(-0,5) - 4,2\cdot 1 = -0,55B;$$

$$S(t_6) = 10 + 12,7\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{3T_0}{4}\right) - 4,2\cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{3T_0}{4}\right) =$$

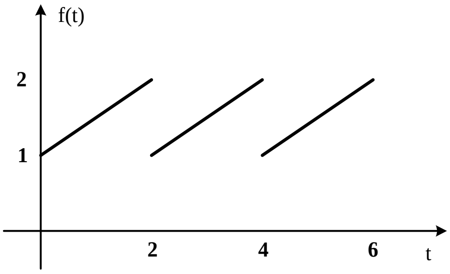
при $t_6 = \dfrac{T_0}{2} + \dfrac{T_0}{4}$

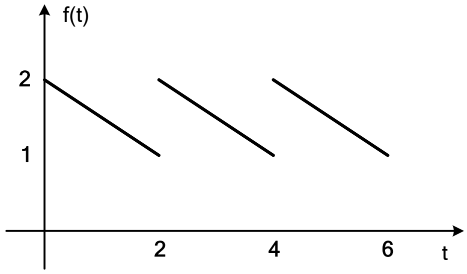
$$= 10 + 12,7\cdot 0 - 4,2\cdot 0 = 10B.$$

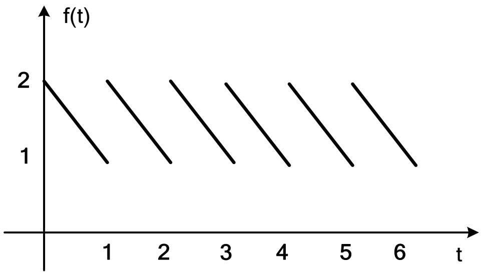
На підставі розв’язку даної задачі можна зробити висновок: чим більше число гармонік використовується для відновлення сигналу, тим кращий результат. При використанні десяти гармонік сигнал приймає вихідний вигляд.

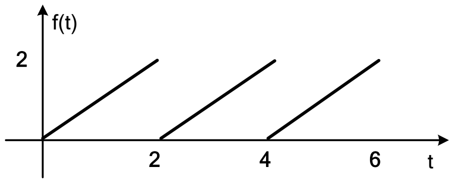
Вправи для самостійної роботи

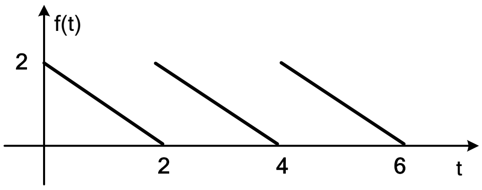
а) Розкласти в ряд Фур’є в комплексній і дійсній формах періодичну функцію, задану графіком. Побудувати амплітудний і фазовий спектри.

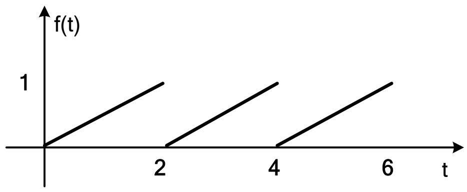
1. 

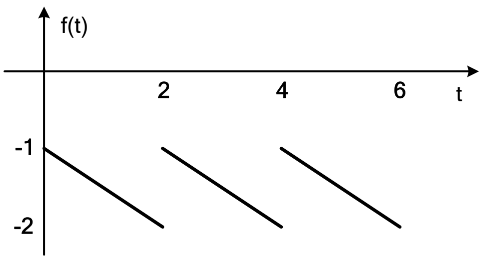
2. 

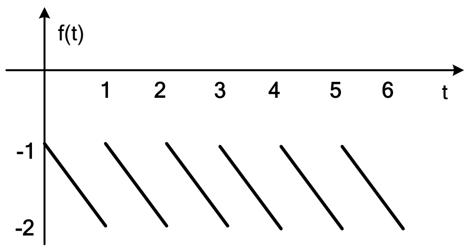
3. 

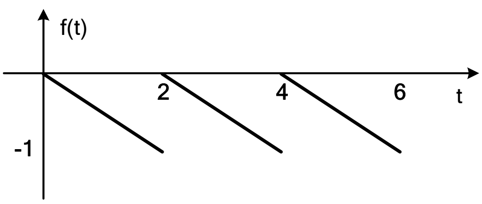
4. 

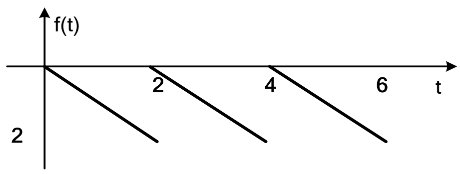
5. 

6. 

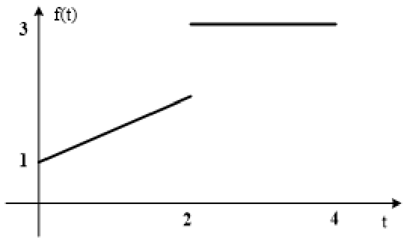
7. 

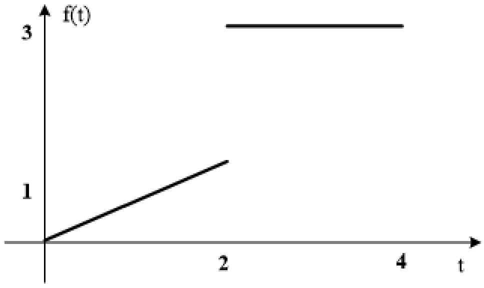
8. 

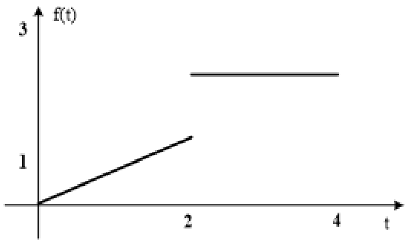
9. 

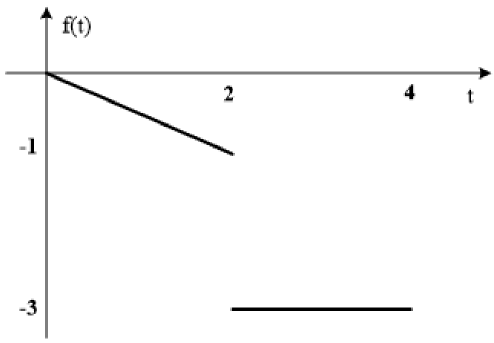
10. 

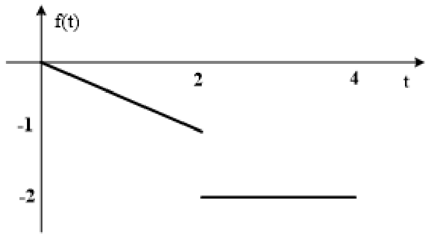
б) Розкласти в ряд Фур'є в дійсній формі функцію *f(t)*, задану графіком на відрізку *[0; 2l]*.

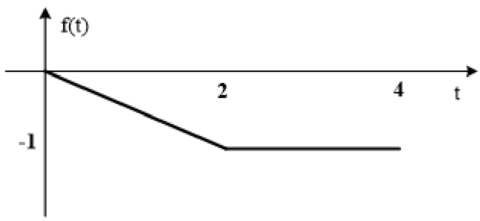
1.


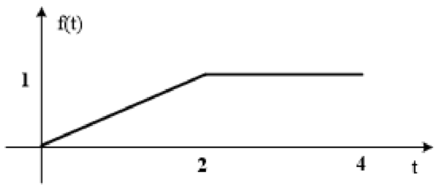
2.


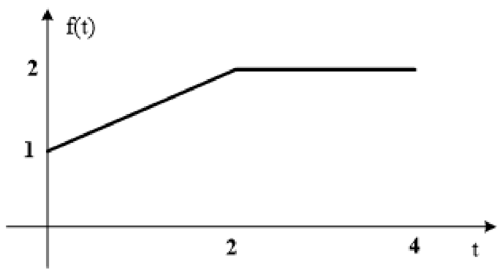
3.


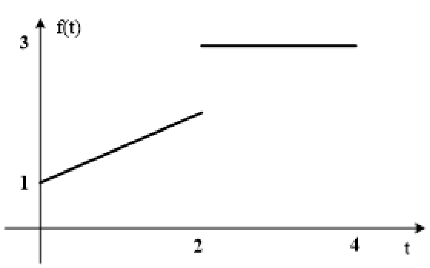
4.


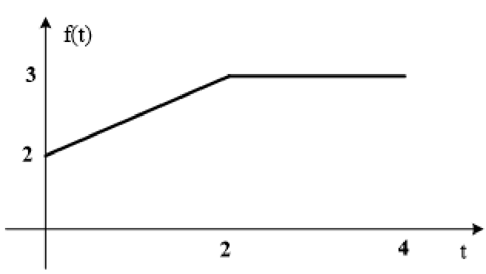
5.


6.


7.


8.


9.


10.


в) Розв’язати задачі

1. Знайти амплітудно-частотний спектр імпульсного сигналу з амплітудою h, періодом T_0 та тривалістю τ.

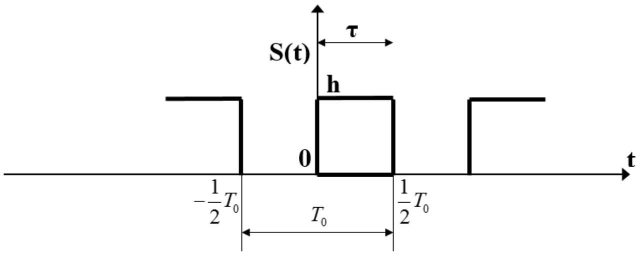


Рисунок 1.22

2. Знайти амплітудно-частотний спектр періодичного сигналу та вираз для визначення цього сигналу.

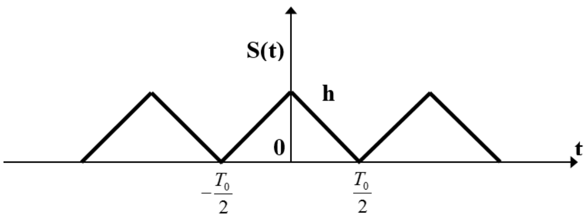


Рисунок 1.23

3. Знайти амплітудно-частотний спектр періодичного сигналу, що являє собою відрізки косинусоїди. Записати вираз для визначення цього сигналу.

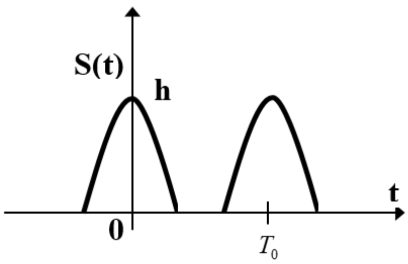


Рисунок 1.24

4. Вихідний сигнал описується функцією $S(t)$ (рис. 1.25). Побудувати графіки сигналів, що описуються функціями $S(-t), S\left(\frac{t}{4}\right), S(3-t), S\left(\frac{t}{4}+1\right), S\left(\frac{t+1}{4}\right).$

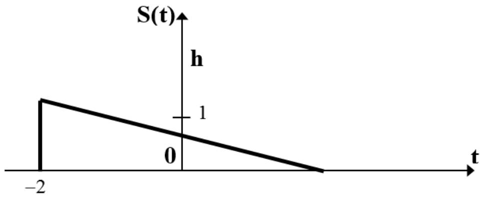


Рисунок 1.25

Розділ 2 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1 Елементи комбінаторного аналізу

ЗАПАМ'ЯТАЙ! Комбінаторика вивчає способи вибору елементів деякої скінченої множини на основі певних умов.

ПРАВИЛО СУМИ	
Класичне формулювання	***Формулювання в термінах теорії множин***
Якщо якийсь елемент множини A можна вибрати n способами, а елемент множини B – способами, то вибір елемента з множини A або з множини B можна зробити $n+m$ способами.	Якщо множина A складається з n елементів, а множина B – з m елементів, то вибрати елемент із множини A або з множини B можна $n+m$ способами.

Приклад 2.1 У коробці 7 кольорових пастелей та 12 фломастерів. Скількома способами можна вибрати одну пастель або один фломастер.
Розв'язування. Одну пастель із 7 можна вибрати 7-ма способами, а один фломастер –12 способами. За правилом суми один предмет можна вибрати 7+12=19 способами.

ПРАВИЛО ДОБУТКУ	
Класичне формулювання	***Формулювання в термінах теорії множин***
Якщо якийсь елемент множини A можна вибрати n способами, а елемент множини B – m способами, то пару елементів із множин A і B можна вибрати $m\cdot n$ способами. Зрозуміло, що в таких задачах порядок розташування елементів не важливий.	Якщо множина A складається з n елементів, а множина B – з m елементів, то можна скласти рівно $n\cdot m$ пар вигляду (a_i, b_j), вважаючи, що $(a_i, b_j) = (b_j, a_i),\ i = 1,...,n;\ j = 1,...,m.$

Приклад 2.2 У коробці 7 кольорових пастелей та 12 фломастерів. Скількома способами можна вибрати пару, яка складається з однієї пастелі і одного фломастера.

Розв'язування

Одну пастель із 7 можна вибрати 7-ма способами, а один фломастер –12 способами. За правилом добутку вибрати пару, яка складається з однієї пастелі і одного фломастера можна $7\cdot 12 = 84$ способами.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! Нехай потрібно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 і так далі до k-ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Приклад 2.3 Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо: а) цифри можуть повторюватися;
б) ні одна з цифр не повторюється двічі;
в) цифри непарні і можуть повторюватися.

Розв'язування

а) Першою цифрою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5, оскільки 0 не може бути першою цифрою, бо в такому випадку число не буде тризначним. Якщо перша цифра вибрана, то друга цифра, як і третя, може бути вибрана шістьома способами. Отже, загальне число тризначних чисел $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$.

б) Першою цифрою може бути одна з п'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, оскільки 0 не може бути першою цифрою. Якщо перша цифра вибрана, то другою може бути теж одна з п'яти цифр (тут уже враховується 0), а третя може бути вибрана чотирма способами з чотирьох цифр, що залишилися. Отже, загальна кількість таких тризначних чисел $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

в) Першою цифрою може бути одна з трьох цифр: 1, 3, 5. Друга та третя цифри теж можуть бути однією з цих трьох цифр. Таким чином, загальна кількість таких чисел дорівнює $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Приклад 2.4 В групі 15 студентів і 5 студенток. Скількома способами з цієї групи можна вибрати: а) одну студентку;
б) одного студента або одну студентку;
в) одного студента і одну студентку.

Розв'язування

а) Із 5 студенток одну можна вибрати 5 способами.

б) За правилом суми одну студентку і одного студента можна вибрати 15+5=20 способами.

в) За правилом добутку пари «хлопець і дівчина» можна вибрати $15 \cdot 5 = 75$ способами.

Приклад 2.5 З пункту *A* міста Вінниці в пункт *B* можна доїхати трьома видами транспорту: тролейбусом (Т), автобусом (А) та трамваєм (Тр), а з пункту *B* в пункт *C* – лише двома видами транспорту: тролейбусом (Т) та трамваєм (Тр). Скількома способами можна доїхати з пункту *A* в пункт *C*?

Розв'язування

За правилом добутку маємо $3 \cdot 2 = 6$ способів.

Приклад 2.6 Скількома способами з 6 конвертів, 3 марок та 7 листівок можна вибрати два предмети з різними назвами.

Розв'язування

Марку і конверт можна вибрати $6\cdot3=18$ способами, марку і листівку – $7\cdot3=21$ способом, а конверт і листівку – $6\cdot7=42$ способами. Будь-яку з пар з правилом додавання можна обрати 18+21+42=81 способом.

Приклад 2.7 Монету кидають тричі. Скільки різних послідовностей орлів або решок можна при цьому одержати?

Розв'язування

Складатимемо різні «трійки» результатів підкидання монети. Кожний елемент цієї «трійки» вибираємо з двоелементної множини {орел, решка}. За правилом множення маємо 2·2·2 = 2^3 = 8 послідовностей.

КОМБІНАЦІЇ

Комбінацією (без повторень) називається довільна k-елементна підмножина n-елементної множини. Кількість різних комбінацій становить

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Читають: число комбінацій з n по k.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! а) У комбінації в обраних підмножинах порядок елементів неважливий.

б) Основні властивості числа комбінацій:

формула симетрії $C_{n+m}^n=C_{n+m}^m$;

формула додавання $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$;

$C_n^0=C_n^n=1$;

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$.

Приклад 2.8 Збірна команда університету з волейболу налічує 15 осіб. Скільки різних варіантів має розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру?

Розв'язування

Кількість гравців волейбольної команди дорівнює шести. Значить, кількість всіх можливих варіантів – це кількість різних підмножин, які складаються з шести елементів у множині з 15-ти елементів. Таким чином, маємо

$$C_{15}^6=\frac{15!}{6!9!}=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=5\cdot7\cdot11\cdot13=5005.$$

Приклад 2.9 Рота складається з 3 офіцерів, 6 сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна виділити з них загін, що складається з офіцера, 2 сержантів і 20 рядових?

Розв'язування

Офіцерів обираємо $C_3^1 = 3$ способами, сержантів $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ способами, а рядових – $C_{60}^{20} = \frac{60!}{20!(60-20)!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot ... \cdot 41}{20!}$.

За правилом добутку маємо $C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20} = 83836890116110$.

Приклад 2.10 Шаховий гурток відвідують 3 дівчинки і 8 хлопчиків. Для участі в змаганнях потрібно скласти команду з чотирьох членів, до якої обов'язково має входити хоча б одна дівчинка. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язування

«Хоча б одна» означає одна, дві або три дівчинки. Якщо до команди увійде одна дівчинка, то її можна вибрати $C_3^1 = 3$ способами, то хлопчиків можна вибрати $C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ способами. Якщо до команди увійде дві дівчинки, то їх можна обрати $C_3^2 = 3$ пособами, а хлопчиків – $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 28$. Якщо до команди увійде три дівчинки, то такий спосіб формування дівочого складу передбачає один варіант, а одного хлопчика обираємо $C_8^1 = \frac{8!}{1!7!} = \frac{8}{1} = 8$ способами. Загалом, за правилом додавання існує

$$C_3^1 \cdot C_8^3 + C_3^2 \cdot C_8^2 + C_3^3 \cdot C_8^1 = 3 \cdot 56 + 3 \cdot 28 + 1 \cdot 8 = 260$$

способів формування команди на змагання за заданих умов.

КОМБІНАЦІЯ З ПОВТОРЕННЯМИ з n елементів по k елементів може містити будь-який елемент скільки завгодно разів від 1 до p включно або не містити його зовсім.

Позначення: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^n$.

Приклад 2.11 У відділенні зв'язку продаються марки 8 видів. Скількома способами можна купити в ньому 12 марок?

Розв'язування

Оскільки листівки можуть бути однаковими, то маємо комбінацію з повтореннями

$$\overline{C_8^{12}} = C_{8+12-1}^{12} = C_{19}^{12} = \frac{19!}{12!7!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 50388.$$

Приклад 2.12 Скільки існує трикутників, довжини сторін яких набувають одного зі значень: 4, 5, 6, 7, 8?

Розв'язування

$$\overline{C_5^3} = C_{3+5-1}^3 = C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

РОЗМІЩЕННЯ

Нехай дано множину $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Кожну її впорядковану підмножину, що складається з m різних елементів, називають ***розміщенням*** із n елементів по m елементів.

Позначення: A_n^m. Число розміщень обчислюють за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}; \qquad A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

ЗАПАМ'ЯТАЙ! Друга формула застосовується у випадку, якщо можна знайти результат, а перша формула – якщо результат важко обчислити через великі числа або у випадку використання в задачі літерних змінних.

Приклад 2.13 У коробці 12 кольорових олівців. Будемо вибирати і складати по три олівці, враховуючи порядок їх черги. Впорядковані підмножини, що відрізняються порядком черги олівців, вважаємо різними. Такий вибір і є розміщенням із 12 елементів по 3, і таких можливостей вибору буде $A_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.

Приклад 2.14 В групі 20 осіб. Скількома способами можна вибрати старосту і його заступника?

Розв'язування

Тут важливо, хто з двох обраних буде старостою, а хто – його заступником. Маємо розміщення з 20 по 2:

$$A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380.$$

Приклад 2.15 Студенту потрібно скласти три іспити протягом семи днів. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язування

Шукана кількість способів дорівнює кількості триелементних упорядкованих підмножин множини з 7 елементів, тобто, існує $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ способів.

Якщо відомо, що останній іспит буде складатись сьомого дня, то число способів становить $3 \cdot A_5^2 = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.

РОЗМІЩЕННЯ З ПОВТОРЕННЯМИ

Розміщенням із повтореннями з n елементів по m елементів називається кожна його впорядкована підмножина, що складається з m елементів, у якій елементи можуть повторюватися.

Позначення: $\overline{A_n^m} = n^m$.

Приклад 2.16 На потік прийшло троє студентів. Скількома способами їх можуть зарахувати, якщо на потоці 5 груп?

Розв'язування

Кожен зі студентів може потрапити в будь-яку групу. Тобто, для кожного студента існує 5 можливостей. Разом маємо $\overline{A_5^3} = 5^3 = 125$.

Приклад 2.17 На першому поверсі в ліфт сіло 10 осіб. Ліфт піднімається до 6 поверху, і на кожному поверсі можуть виходити люди. Скількома способами можуть бути розподілені пасажири на поверхах?

Розв'язування

Перший пасажир може вийти на 2, 3, ..., 6-му поверхах. Усього 5 способів. Так само для другого, третього і решти пасажирів є по 5 способів розподілу. Тоді маємо всього $\overline{A_5^{10}} = 5^{10}$ способів.

Приклад 2.18 Групі з 10 туристів (4 дітей і 6 дорослих) запропонували відвідати 5 музеїв, причому до двох із них дітей не пускають. Скільки існує способів розподілу туристів по музеях?

Розв'язування

Діти можуть відвідати тільки 3 музеї з запропонованих, для них існує 3^4 способів, а дорослі – всі 5, для них – 5^6 способів. Усього маємо $3^4 \cdot 5^6 = 81 \cdot 15625 = 1265625$ способів.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Упорядковані множини, які відрізняються одна від одної лише порядком своїх елементів (тобто можуть бути одержані з однієї і тієї ж множини лише переставлянням її елементів), називаються *перестановками*. Загальна кількість перестановок n-елементної множини A позначається P_n і обчислюється за формулою $P_n = n!$

Приклад 2.19 Скількома способами можна розставити 5 томів зібрання творів Івана Франка так, щоб: а) перший том стояв ліворуч;
б) перший том стояв з краю;
в) перший і другий томи стояли поруч;
г) перший і другий томи стояли ліворуч;
д) перший і другий томи не стояли поруч?

Розв'язування

а) Якщо перший том стоїть ліворуч, то переставляти будемо чотири, що залишилися, $P_4 = 4! = 24$;

б) перший том може стояти ліворуч або праворуч. За правилом суми маємо $P_4 + P_4 = 48$;

в) об'єднаємо перший і другий томи в один. Тоді переставляти будемо 5-2+1=4 книги $P_4 = 4! = 24$ способами, при цьому перший і другий томи можна переставляти $P_2 = 2! = 2$ способами. За правилом добутку маємо $P_4 \cdot P_2 = 24 \cdot 2 = 48$;

г) перший і другий томи, об'єднані в один, будемо переставляти між собою $P_2 = 2! = 2$ способами, але в загальній перестановці трьох книг, що залишилися, вони участі брати не будуть. Таким чином маємо $P_3 \cdot P_2 = 6 \cdot 2 = 12$;

д) з усіх перестановок п'яти книг виключимо ті, у яких перший і другий томи стоять поруч. Тоді одержимо $P_5 - P_4 \cdot P_2 = 120 - 48 = 72$.

ПЕРЕСТАНОВКИ З ПОВТОРЕННЯМИ

Кількість різних перестановок, які можна побудувати з n елементів, серед яких знаходиться k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, …, k_m елементів m-го типу, дорівнює

$$\overline{P}_{k_1, k_2, \ldots, k_m, n} = C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}.$$

Приклад 2.20 Скільки «слів» довжиною 8 можна скласти з букв «а» та «б» таких, щоб кількість букв «а» в цих словах не перевищувала три.

Розв'язування

Такими «словами» будуть всі «слова», які не мають жодної «а», всі «слова», які мають одну, дві та три букви «а». Тобто загальна кількість таких слів становить

$$C_8(0,8) + C_8(1,7) + C_8(2,6) + C_8(3,5) = \frac{8!}{0!8!} + \frac{8!}{1!7!} + \frac{8!}{2!6!} + \frac{8!}{3!5!} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93.$$

Приклад 2.21 Скількома способами можна переставити букви слів: а) «телефон», б) «колобок»?

Розв'язування

а) У слові «телефон» 2 букви «е», тоді кількість перестановок $\overline{P}_{2,7}=\dfrac{7!}{2!}=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=2520$;

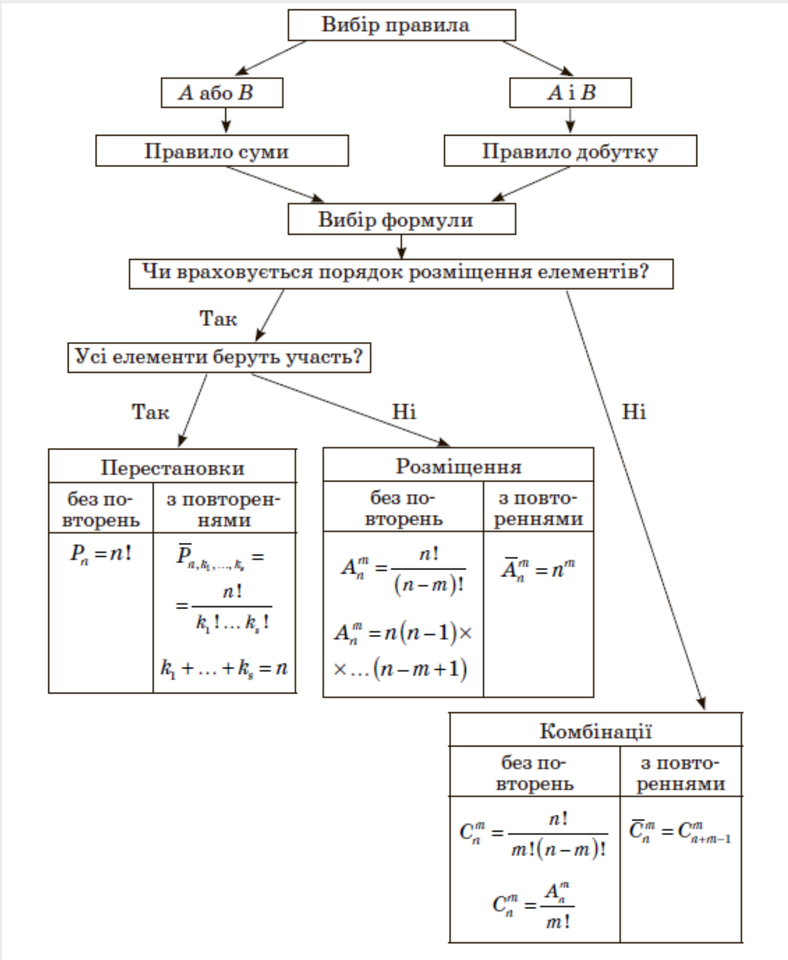
б) із 7 букв слова «колобок» 2 літери «к» і 3 «о», тому $\overline{P}_{2,3,7}=\dfrac{7!}{2!3!}=\dfrac{4\cdot5\cdot6\cdot7}{2}=420$.

Приклад 2.22 Шестицифровий телефонний номер складається з двох трійок, трьох четвірок та одиниці абонент забув. Скільки йому потрібно зробити спроб, щоб напевне додзвонитися?

Розв'язування

$$\overline{P}_{2,3,1,6}=\frac{6!}{2!3!1!}=\frac{4\cdot5\cdot6}{2}=60 \text{ (спроб).}$$

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ



Приклад 2.23 Розв'язати рівняння: а) $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \dfrac{24}{23}$;

б) $7A_{x+1}^{x-1} + 14P_{x-1} = 30P_x$; в) $C_x^2 + C_x^3 = 15(x-1)$.

Розв'язування

а) Запишемо за означенням кількість розміщень без повторень та число комбінацій $A_x^4 = \dfrac{x!}{(x-4)!} = (x-3)(x-2)(x-1)x$; $A_{x+1}^3 = \dfrac{(x+1)!}{(x-2)!} = (x-1)x(x+1)$;

$C_x^{x-4} = \dfrac{x!}{(x-4)!(x-x+4)!} = \dfrac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{24}$.

Таким чином, маємо $\dfrac{24(x-3)(x-2)(x-1)x}{24(x-1)x(x+1) - (x-3)(x-2)(x-1)x} = \dfrac{24}{23}$.

Після відповідних скорочень та скориставшись правилом пропорції знаходимо

$$23(x-3)(x-2) = 24(x+1) - (x-3)(x-2).$$

Провівши алгебраїчні перетворення одержуємо $24x^2 - 144x + 120 = 0$, або $x^2 - 6x + 5 = 0$. Звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

б) $7A_{x+1}^{x-1} + 14P_{x-1} = 30P_x \Rightarrow 7\dfrac{(x+1)!}{(x+1-x+1)!} + 14(x-1)! = 30x! \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{7}{2}(x-1)!x(x+1) + 14(x-1)! = 30(x-1)!x \Rightarrow 7x^2 + 7x + 28 = 60x \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x^2 - 53x + 28 = 0$, $\sqrt{D} = \sqrt{53^2 - 4\cdot 7\cdot 28} = 45 \Rightarrow x_1 = \dfrac{53-45}{14} = \dfrac{4}{7}$, $x_2 = \dfrac{53+45}{14} = 7$.

в) $C_x^2 + C_x^3 = 15(x-1) \Rightarrow \dfrac{x!}{2!(x-2)!} + \dfrac{x!}{3!(x-3)!} = 15(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)x}{2} + \dfrac{(x-2)(x-1)x}{6} = 15(x-1) \Rightarrow 3x + x^2 - 2x = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x - 90 = 0$, $\sqrt{D} = \sqrt{1+360} = 19$, $x_1 = \dfrac{-1-19}{2} = -10$, $x_2 = \dfrac{-1+19}{2} = 9$.

Вправи для самостійної роботи

а) Дайте відповіді на запитання тесту.

1. Скількома способами можна скласти розклад одного навчального дня з 5 уроків?

Можливі варіанти відповідей

1) 30 2) 100 3) 120 4) 5

2. В групі 32 студенти. Скількома способами можна сформувати команду з 4-х осіб для участі в олімпіаді з дискретної математики?

Можливі варіанти відповідей

1) 128 2) 35960 3) 36 4) 46788

3. Скільки існує різних двозначних чисел, в записі яких можна використовувати числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не повторюються?

Можливі варіанти відповідей

1) 10 2) 60 3) 20 4) 30

4. Обчислити $6!-5!$

Можливі варіанти відповідей

1) 600 2) 300 3) 1 4) 1000

5. Число різних комбінацій без повторень обчислюється за формулою …

Можливі варіанти відповідей

1) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n+k)!}$ 2) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 3) $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ 4) $C_n^k = \dfrac{k!}{(n-k)!}$

6. Скільки різних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Можливі варіанти відповідей

1) 100 2) 30 3) 5 4) 120

7. У студентів є помідори, огірки та цибуля. Скільки різних салатів можна приготувати, якщо в кожен салат має входити 2 різних види овочів?

Можливі варіанти відповідей

1) 3 2) 6 3) 2 4) 1

8. Скількома способами з 9 навчальних предметів можна скласти розклад навчального дня з 6 різних уроків?

Можливі варіанти відповідей

1) 10000 2) 60480 3) 56 4) 39450

9. Нехай потрібно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 і так далі до k-ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій можна виконати

Можливі варіанти відповідей

1) $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)\, n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами; 2) $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами
3) $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами; 4) $(n_1 - n_2 - \ldots - n_k)\, n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами;

10. Яка з перерахованих властивостей не є властивістю біноміальних коефіцієнтів?

Можливі варіанти відповідей

1) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 3^n$ 2) $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$
3) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ 4) $C_n^0 = C_n^n = 1$

11. Скількома способами можна розмістити 4 книги на книжковій поличці?

Можливі варіанти відповідей

1) 24 2) 4 3) 16 4) 20

12. Скільки діагоналей має опуклий семикутник?

Можливі варіанти відповідей

1) 30 2) 21 3) 14 4) 7

13. В футбольній команді 11 осіб. Потрібно обрати капітана та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

Можливі варіанти відповідей

1) 22 2) 11 3) 150 4) 110

14. Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – деякі такі натуральні числа, що $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Кількість способів, якими можна побудувати розбиття n-елементної множини A на класи $A_1, A_2, \ldots, A_m$, число елементів $k_1, k_2, \ldots, k_m$ яких відповідно становить …

Можливі варіанти відповідей

1) $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{(n-k_1)!(n-k_2)!\ldots(n-k_m)!}$

2) $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{k_1!k_2!\ldots k_m!}{n!}$

3) $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$

4) $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{(n+k_1)!(n+k_2)!\ldots(n+k_m)!}$

15. Скількома способами може утворитись черга до білетної каси з 5 осіб?

Можливі варіанти відповідей

1) 5 2) 120 3) 25 4) 100

16. Скількома способами з 25 студентів групи можна вибрати чотирьох для участі у святковому концерті?

Можливі варіанти відповідей

1) 12650 2) 100 3) 75 4) 10000

17. Скільки існує тризначних чисел, усі цифри яких непарні та різні?

Можливі варіанти відповідей

1) 120 2) 30 3) 50 4) 60

18. П'ятий член розвинення $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^n$ не залежить від x. Знайти n.

Можливі варіанти відповідей

1) 5 2) 12 3) 16 4) 20

19. Кількість упорядкованих k-елементних підмножин n-елементної множини A, всі k елементів якої різні, становить …

Можливі варіанти відповідей

1) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n+k)!}$ 2) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ 3) $A_n^k = \dfrac{(n-k)!}{n!}$ 4) $A_n^k = n^k$

20. Скільки існує варіантів розміщення 6 гостей на 6 стільцях?

Можливі варіанти відповідей

1) 36 2) 180 3) 720 4) 300

21. Аня вирішила зварити компот із фруктів 2-х видів. Скільки різних варіантів (за поєднанням фруктів) компоту може зварити Аня, якщо в неї є 7 видів фруктів?

Можливі варіанти відповідей

1) 14 2) 10 3) 21 4) 30

22. Скільки існує звичайних дробів, чисельник і знаменник яких прості різні числа не більші за 20?

Можливі варіанти відповідей

1) 80 2) 56 3) 20 4) 60

23. Збірна команда університету з волейболу налічує 15 осіб. Скільки різних варіантів має розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру?

Можливі варіанти відповідей

1) 5000 2) 5005 3) 6000 4) 7005

24. Число різних комбінацій без повторень обчислюється за формулою …

Можливі варіанти відповідей

1) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$ 2) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 3) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ 4) $C_n^k = \frac{k!}{(n-k)!}$

25. Скількома способами можна за допомогою літер A, B, C, D можна позначити вершини чотирикутника?

Можливі варіанти відповідей

1) 12 2) 20 3) 24 4) 4

26. На поличці стоять 12 книжок. Потрібно взяти 5 книг. Скількома способами можна їх вибрати?

Можливі варіанти відповідей

1) 792 2) 17 3) 60 4) 300

27. У 12-поверховому будинку на першому поверсі у ліфт сідають 9 осіб. Відомо, що вони виходять групами по 2, 3 та 4 особи на різних поверхах. Скількома способами вони можуть це зробити, якщо на другому поверсі ліфт не зупиняється?

Можливі варіанти відповідей

1) 100 2) 720 3) 300 4) 60

28. Скільки «слів» довжини 8 можна скласти з букв «а» та «б» таких, щоб кількість букв «а» в цих словах не перевищувала три.

Можливі варіанти відповідей

1) 83 2) 73 3) 93 4) 53

29. В кошику лежать яблуко, апельсин, грейпфрут та манго. Скількома способами 4 дівчинки можуть поділити фрукти (одній дівчинці один фрукт)?

Можливі варіанти відповідей

1) 4 2) 24 3) 20 4) 16

30. На площині так розташовані 25 точок, що три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

Можливі варіанти відповідей

1) 75 2) 100 3) 2300 4) 3000

31. В тенісному турнірі беруть участь 10 спортсменів. Скількома способами тенісисти можуть завоювати золото, срібло та бронзу?

Можливі варіанти відповідей

1) 600 2) 100 3) 300 4) 720

32. Студенту потрібно скласти три іспити протягом семи днів. Скількома способами це можна зробити?

Можливі варіанти відповідей

1) 210 2) 100 3) 7 4) 120

33. Яка з перерахованих властивостей не є властивістю біноміальних коефіцієнтів?

Можливі варіанти відповідей

1) $C_{n+m}^{n} = C_{n+m}^{m}$ 2) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 3^n$

3) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ 4) $C_n^0 = C_n^n = 1$

34. Розкладіть на прості множники число 30. Скількома способами можна записати у вигляді добутку простих множників це число?

Можливі варіанти відповідей

1) 6 2) 12 3) 30 4) 3

35. Скільки можна скласти із простих дільників числа 2730 складних чисел, що мають тільки два простих дільники?

Можливі варіанти відповідей

1) 300 2) 10 3) 150 4) 15

36. На площині задано 8 точок, причому будь-які три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує векторів з початком та кінцем у будь-яких двох точках?

Можливі варіанти відповідей

1) 18 2) 28 3) 64 4) 56

37. Обчисліть $7! - 5!$

Можливі варіанти відповідей

1) 3920 2) 120 3) 4920 4) 4020

38. Число різних комбінацій без повторень обчислюється за формулою …

Можливі варіанти відповідей

1) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$ 2) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 3) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ 4) $C_n^k = \frac{k!}{(n-k)!}$

39. Скількома способами можна закрасити 6 клітинок так, щоб 2 клітинки були зафарбовані червоним кольором, а 4 інших – білим, чорним, зеленим та синім? (кожна своїм кольором).

Можливі варіанти відповідей

1) 120 2) 360 3) 180 4) 500

40. Скількома способами можна групу з 17 студентів розділити на 2 підгрупи так, щоб в одній підгрупі було 5, а в іншій – 12 студентів.

Можливі варіанти відповідей

1) 60 2) 85 3) 6188 4) 6000

41. На площині дано 10 точок, жодні три не лежать на одній прямій. Скільки існує різних променів з початком в будь-якій з даних точок, що проходять через будь-яку іншу із заданих точок?

Можливі варіанти відповідей

1) 720 2) 360 3) 500 4) 100

42. Обчисліть: $6! - 4!$

Можливі варіанти відповідей

1) 596 2)696 3) 720 4) 496

43. Кількість упорядкованих k-елементних підмножин n-елементної множини A, всі k елементів якої різні, становить …

Можливі варіанти відповідей

1) $A_n^k = \frac{n!}{(n+k)!}$ 2) $A_n^k = \frac{(n-k)!}{n!}$ 3) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ 4) $A_n^k = n^k$

44. Скількома способами можна зафарбувати 6 клітинок таким чином, щоб 3 клітинки були червоними, а решта 3 зафарбовані (кожна своїм кольором) білим, чорним та зеленим?

Можливі варіанти відповідей

1) 180 2) 300 3)120 4) 240

45. Скількома способами зі 10 гравців волейбольної команди можна обрати стартову шістку?

Можливі варіанти відповідей

1) 210 2) 60 3) 30 4) 240

46. На змагання з легкої атлетики приїхала команда з 12 спортсменок. Скількома способами тренер може визначити, хто з них переможе у естафеті 4 по 100 на першому, другому, третьому та четвертому етапах?

Можливі варіанти відповідей

1)1200 2)8800 3)11880 4) 3000

47. Розв’яжіть рівняння $(5! - 4!)x = 192$.

Можливі варіанти відповідей

1) 2 2) -2 3) 3 4) 1

б) Розв'язати рівняння.

. $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$	9. $A_x^5 = 336C_{x-2}^{x-5}$
2. $C_{x+8}^{x+3} = 3A_{x+6}^3$	10. $A_x^3 + A_x^2 = \frac{9}{5}A_{x+1}^2$
$A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$	11. $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$
$A_{x+1}^6 \cdot P_{x-5} = 72P_{x-1}$	12. $3C_{2x}^{x-1} = 5C_{2x-1}^x$
$A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$	13. $C_{x-1}^3 + C_{x-1}^2 = 7(x-2)$
$P_{x+3} = 720P_{x-5} \cdot A_x^5$	14. $A_x^4 \cdot P_{x-4} = 42P_{x-2}$
$P_{x+2} = 210P_3 \cdot A_{x-1}^{x-4}$	15. $C_{x+4}^{x+1} - C_{x+3}^x = 15(x-2)$
$17C_{2x-1}^x = 9C_{2x}^{x-1}$	16. $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$

2.2 Елементи теорії множин

МНОЖИНОЮ є сукупність визначених об'єктів, різних між собою, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю.

Якщо a один з об'єктів множини A, то говорять, що a – елемент множини A, або a належить A. Якщо елемент a належить множині A, то пишуть $a \in A$. Якщо a не є елементом множини A, то пишуть $a \notin A$.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! ***Способи задання множин:***

– ***перерахуванням,*** тобто списком всіх своїх елементів. Такий спосіб задання прийнятний тільки для скінченних множин. Позначення списку – у фігурних дужках.

– ***описом характеристичних властивостей,*** які мають мати елементи множини. Так, множина A, що складається з таких елементів x, які мають властивість $P(x)$, позначимо в такий спосіб: $A = \{x | P(x)\}$.

Приклад 1 Задати різними способами елементи множини букв у слові «СВЯТО».

Розв'язування

Дану множину можна задати перерахуванням: $A = \{C, B, Я, T, O\}$ та описом характеристичної властивості $A = \{x | \textit{буква в слові} \text{ "СВЯТО"}\}$.

Приклад 2 Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних 3 і менших 21.

Розв'язування

Дану множину можна задати перерахуванням: $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ та описом характеристичної властивості $A=\{x|\ x\in N, \textit{кратне}\ 3\ i\ x<21\}$.

Приклад 3 Опишіть множину $\{\textit{червень, липень, серпень}\}$ за допомогою характеристичної властивості.

Розв'язування

$A=\{x|\ \textit{літній місяць}\}$.

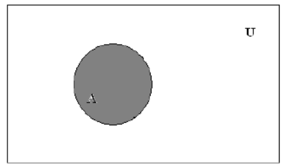
1) Множина *A* називається *підмножиною* (або *включенням*) множини *B* ($A\subseteq B$), якщо кожен елемент множини *A* є елементом множини *B*, тобто, якщо $x\in A$, то $x\in B$.
Якщо $A\subseteq B$ і $A\neq B$, то *A* називається строгою підмножиною і позначається $A\subset B$.

2) Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається скінченною, у протилежному випадку – нескінченною. Кількість елементів у скінченній множині *A* називається потужністю множини *A* і позначається $|A|$.

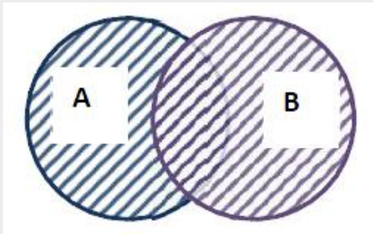
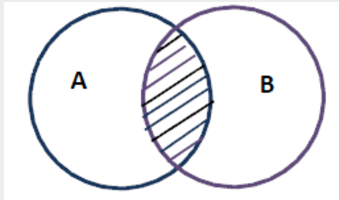
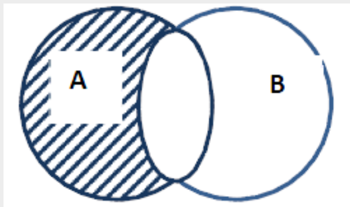
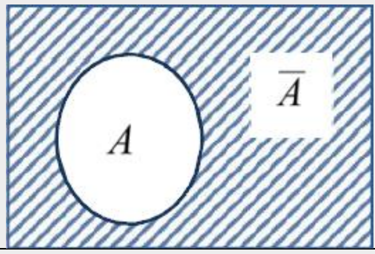
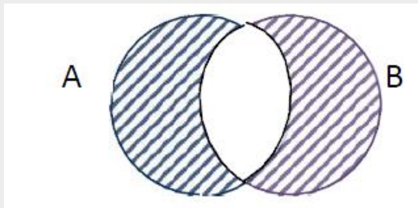
3) Множина, що не містить елементів, називається порожньою множиною і позначається $\varnothing$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини..
Універсальною множиною (універсумом) називається множина, що містить всі елементи з деякою заданою властивістю. Позначається така множина через U.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! Потрібно розрізняти поняття належності елементів множини і включення! Так, наприклад, якщо множина $A=\{1,2,6,13,21\}$, то $2\in A, 6\in A$, але $\{2,6\}\notin A$, у той час як $\{2,6\}\subseteq A$.

Для графічної ілюстрації операцій над множинами даної універсальної множини *U* використовують діаграми Венна. Діаграма Венна – це зображення множини у вигляді геометричної множини, наприклад, кола. При цьому універсальну множину зображують у вигляді прямокутника



A

ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ		
Назва і позначення	***Означення***	***Геометрична ілюстрація***
Об'єднання, $A \cup B$ $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$	Об'єднанням множин *A* і *B* називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній з цих множин.	
Перетин, $A \cap B$ $A \cap B = \{x \mid x \in A \; i \; x \in B\}$	Перетином множин *A* і *B* називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать і множині *A*, і множині *B* .	
Різниця, $A - B$ $A - B = \{x \mid x \in A \; i \; x \notin B\}$	Різницею множин *A* і *B* називається множина, що складається з усіх елементів множини *A*, які не належать *B* .	
Доповнення, $\overline{A}$ $\overline{A} = U - A = \{x \mid x \in U \; i \; x \notin A\}$	Доповненням множини *A* називається множина, що складається з усіх елементів універсальної множини, які не належать *A*.	
Симетрична різниця, $A + B$ або $A \Delta B$ $A + B = (A - B) \cup (B - A)$ $A + B = \{x \mid x \in A \cup B \; i \; x \notin A\}$	Симетричною різницею множин *A* і *B* називається множина, що складається з об'єднання всіх елементів, що належать множині *A* і не містяться в *B*, і елементів, що належать множині *B* і не містяться в *A*.	

Приклад 4 Нехай $A = \{2,3,5,6,7\}$, $B = \{1,2,3,7,9\}$. Знайти всі можливі результати операцій над множинами.

Розв'язування

За означенням операцій над множинами маємо

$A \cup B = \{1,2,3,5,6,7,9\}$; $A \cap B = \{2,3,7\}$; $A - B = \{5,6\}$; $B - A = \{1,9\}$

$A + B = (A - B) \cup (B - A) = \{1,5,6,9\}$.

Приклад 5 Задано множини $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{2,4,6,8,10\}$, $C=\{1,2,5,6,9,10\}$. Визначити такі множини: $A+B$, $B\cap C$, $A\cup(C-B)$.

Розв'язування

За означенням операцій на множинами маємо:

$A+B=\{1,3,5,7,8,10\}$, $B\cap C=\{2,6,10\}$, $C-B=\{1,5,9\}$,
$A\cup(C-B)=\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$.

Приклад 6 Нехай *A* = [2, 8), *B* = (-1, 5); *C* = [0,10]. Знайти $A\cup B,\ B\cap C, C-A, B+C, \overline{B}$.

Розв'язування

Зобразимо задані множини на числовій осі

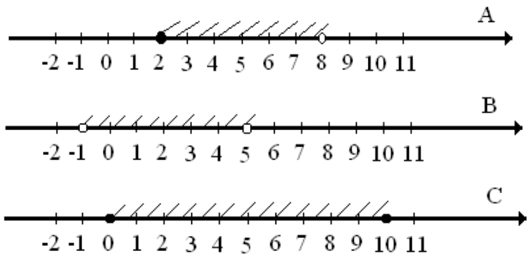
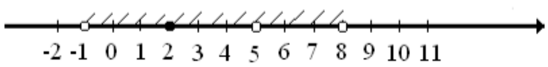
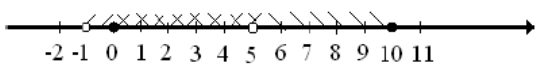


Рисунок 2.1

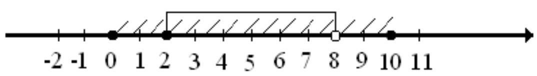
Тоді шукані множини будуть мати вигляд (рис. 2.2).



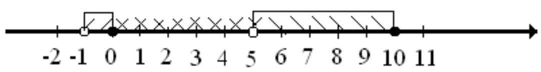
$A\cup B=(-1,8)$;



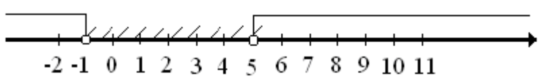
$B\cap C=[0,5)$;



$C-A=[0,2)\cup[8,10]$;



$B+C=(-1,0)\cup[5,10]$;



$\overline{B}=(-\infty,-1]\cup[5,\infty)$.

Рисунок 2.2

Приклад 7 Для наведеної множини $A \cap (B + C)$ побудувати діаграму Венна, на якій штриховкою показати область, що зображує множину.

Розв'язування

Побудуємо спочатку $B + C$, а потім шукану множину $A \cap (B + C)$.

а) $B + C$ б) $A \cap (B + C)$

Рисунок 2.3

Приклад 8 За допомогою операцій над множинами описати множину, що відповідає зафарбованій частині діаграми Венна (рис. 2.4)

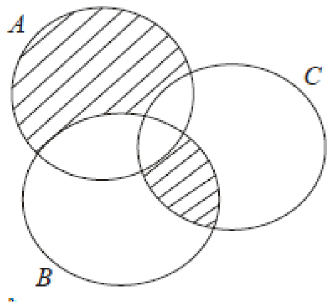


Рисунок 2.4

Розв'язування

За означенням операцій над множинами маємо $A + (B \cap C)$.

Потрібно ЗАПАМ'ЯТАТИ основні властивості операцій над множинами!!!

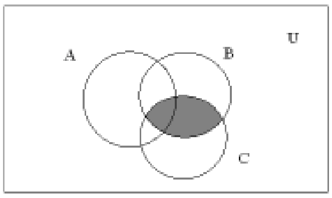
закони ідемпотентності $A \cup A = A \cap A = A$;
подвійне доповнення $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$;
закони де Моргана $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
властивості комутативності $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
властивості асоціативності $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
властивості дистрибутивності $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
властивості тотожності $A \cup \varnothing = A$, $A \cap U = A$;
властивості доповнення $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Пріоритет операцій $\overline{A}$; 2. $A \cap B$ або $A \cup B$; 3. $A - B$; 4. $A + B$.

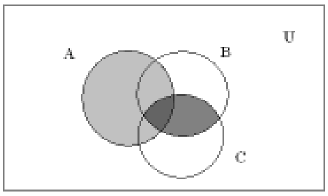
Приклад 9 Доведіть властивість асоціативності операції перетину.

Розв'язування

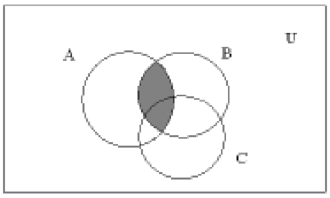
Доведемо цю властивість, скориставшись діаграмами Венна (рис. 2.5).



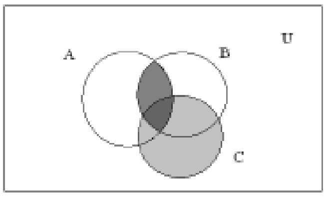
$B \cap C$



$A \cap (B \cap C)$



$A \cap B$



$(A \cap B) \cap C$

Рисунок 2.5

Вправи для самостійної роботи

а) Виконайте завдання

1. Задати різними способами множину обласних центрів України	6. Опишіть множину $\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$ за допомогою характеристичної властивості
2.Задати різними способами множину днів тижня	7. Опишіть множину $\{\textit{грудень}, \textit{січень}, \textit{лютий}\}$ за допомогою характеристичної властивості
3.Перелічити елементи множини $\{x \mid x \quad \textit{ціле} \quad і \quad x^3 < 100\}$	8. Опишіть множину $\{1,5,25,125,625,3125\}$ за допомогою характеристичної властивості
4.Перелічіть елементи множини $\{x \mid x - \textit{улюблені свята вашої родини}\}$	9. Опишіть множину $\{1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37\}$ за допомогою характеристичної властивості
5.Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних 7, які не перевищують 50	10. Опишіть множину $\{\textit{Андрій}, \textit{Любомир}, \textit{Сергій}, \textit{Денис}\}$ за допомогою характеристичної властивості

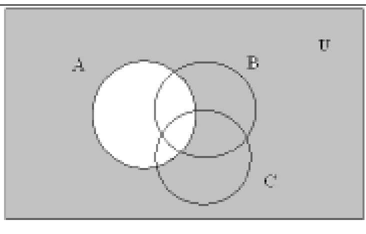
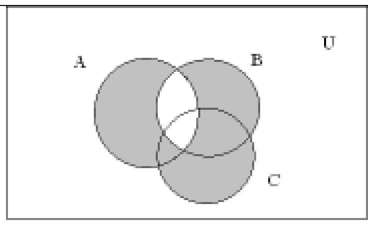
б) Для заданих множин визначте результати вказаних операцій

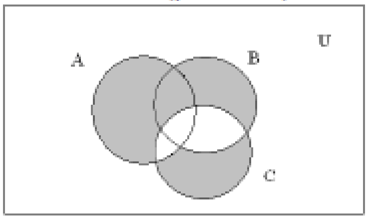
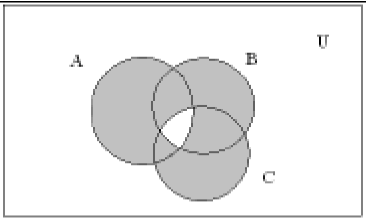
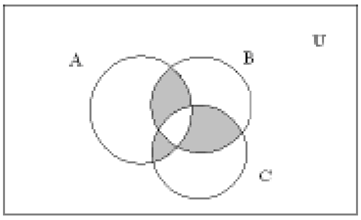
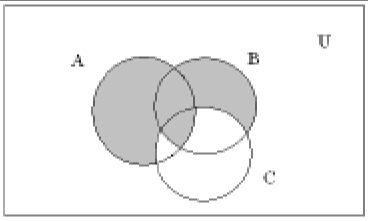
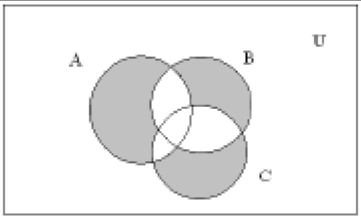
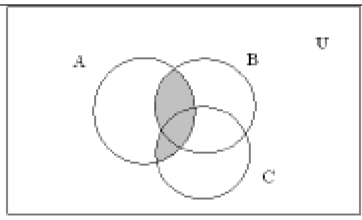
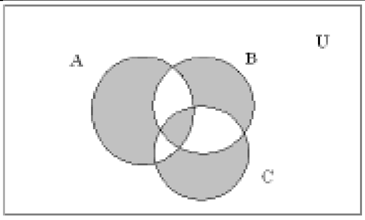
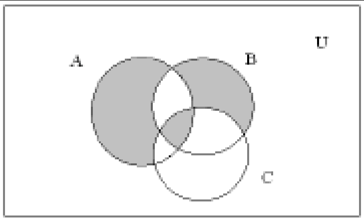
1. $A=\{1,4,8\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{0,3,4,8\}$ Визначити множини: $A-B$, $A\cup C$, $A+B$, $(A\cap B)\cup(B-C)$.
2. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$ Визначити множини: $A\cap B$, $B\cup C$, $A-C$, $A\cup(B\cap C)$.
3. $A=\{1,2,7,8,9\}$, $B=\{1,2,3,5,7\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$. Визначити множини: $A\cap C$, $B-C$, $A+C$, $\overline{A}\cap(B\cup C)$.
4. $A=\{2,3,4,5,6\}$, $B=\{0,1,3,5,7,9\}$, $C=\{0,2,4,6,8\}$. Визначити множини: $A-B$, $\overline{A}\cup C$, $A+B$, $(A\cap B)\cup(\overline{B}-C)$.
5. $A=\{1,3,4,8\}$, $B=\{1,2,5,9,11\}$, $C=\{0,3,4,8\}$ Визначити множини: $\overline{A}\cap B$, $\overline{B}\cup\overline{C}$, $\overline{A}-C$, $A\cup(\overline{B}\cap C)$.
6. A = [0, 6), B = [1, 7), C = [2, 8]. Визначити множини: $C-B$, $A+C$, $\overline{B}\cap\overline{C}$, $\overline{(A\cap B)}$.
7. A = (3, 7), B = (1,5], C = [4, 8]. Визначити множини: A- B, B +C , $\overline{(A\cup B)}$, $\overline{A}\cap(B\cup C)$.
8. A = (5, 8), B = [2, 6), C = (4, 7]. Визначити множини: $\overline{(A\cap C)}$, A-B, $B\cup C$, $(A\cap B)-\overline{C}$.
9. A = (3, 8), B = [0, 9), C = (2, 5]. Визначити множини: $A\cap B$, $A+C$, $A\cup(B\cap C)$, $\overline{A}\cap\overline{B}$.
10. A = [0, 9), B = [2, 5), C = [1,11]. Визначити множини: $B\cup C$, $A-C$, $A+B$, $(A\cup B)-C$

в) Для кожної з наведених нижче множин використайте діаграми Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображують задані множини

1. $B-\overline{A}$	2. $(A\cup B)-(A\cap B)$
3. $B-(A\cap B)$	4. $A-(B\cap C)$
5. $(A\cap B)+C$	6. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

г) Опишіть множини, що відповідають зафарбованій частині кожної діаграми Венна

 1.	 6.

2. 	7. 
3. 	8. 
4. 	9. 
5. 	10. 

2.3 Основні поняття теорії ймовірностей

Випадковою будемо називати подію, що при неодноразовому проведенні одного і того ж випробування кожен раз відбувається по-різному.

Позначають події великими літерами латинської абетки.

Наприклад, випробування – підкидання монети. Тоді можливими подіями будуть A= «Випав герб» та B = «Випала решка».

Ймовірністю випадкової події називається числова міра ступеня об'єктивної можливості події (частота події). Позначається ймовірність $p(A)$, $p(B), \ldots$, а значення ймовірності належать відрізку [0, 1].

Дві несумісні події, з яких одна обов'язково має відбутись, називають **протилежними.** Подію, протилежну події A, будемо позначати $\overline{A}$ (подію $\overline{A}$ називають іноді **антиподією** події A)

ЗАПАМ'ЯТАЙ! 1) Для подій вводяться відношення та операції, аналогічні операціям над множинами.

2) При додаванні подій використовується лінгвістичний сполучник «або» чи словосполучення «хоча б», «один з».

3) При множенні подій використовується лінгвістичний сполучник «і» чи слово «одночасно».

4) Більш детально про види подій можна прочитати в [4, 7].

Приклад 10 Три стрільці стріляють по мішені. Подія A= «У мішені два влучення», подія B= «У мішені не менше, ніж два влучення». Запишіть простір елементарних подій та події $\overline{A} \cap \overline{B}, A \cap \overline{B}, \overline{A+B}, \overline{A} \cap B.$

Розв'язування

Опишемо всі елементарні події даного випробування:

ω_1 = «Влучив перший стрілок»;

$\overline{\omega_1}$ = «Перший стрілок промахнувся»;

ω_2 = «Влучив другий стрілок»;

$\overline{\omega_2}$ = «Другий стрілок промахнувся»;

ω_3 = «Влучив третій стрілок»;

$\overline{\omega_3}$ = «Третій стрілок промахнувся».

Тоді повна група подій:

$$\Omega = \left\{\omega_1\omega_2\omega_3, \overline{\omega_1}\omega_2\omega_3, \omega_1\overline{\omega_2}\omega_3, \omega_1\omega_2\overline{\omega_3}, \ \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\omega_3, \overline{\omega_1}\omega_2\overline{\omega_3}, \omega_1\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3}, \ \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3}\right\}.$$

Таким чином, враховуючи поле подій, можемо описати всі запропоновані події:

A= $\left\{ \overline{\omega_1}\omega_2\omega_3, \omega_1\overline{\omega_2}\omega_3, \omega_1\omega_2\overline{\omega_3}\right\}$;

B= $\left\{\omega_1\omega_2\omega_3, \ \overline{\omega_1}\omega_2\omega_3, \omega_1\overline{\omega_2}\omega_3, \omega_1\omega_2\overline{\omega_3}\right\}$;

$\overline{A} = \left\{\omega_1\omega_2\omega_3, \ \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\omega_3, \overline{\omega_1}\omega_2\overline{\omega_3}, \omega_1\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3}, \ \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3}\right\}$;

$\overline{B} = \left\{ \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\omega_3, \overline{\omega_1}\omega_2\overline{\omega_3}, \omega_1\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3}, \ \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3}\right\}$;

$\overline{A} \cap \overline{B} = \left\{\overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\omega_3, \overline{\omega_1}\omega_2\overline{\omega_3}, \omega_1\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3}, \ \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3}\right\} = \overline{A+B}$, оскільки за законами де Моргана маємо $\overline{A+B} = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

$A \cap \overline{B} = \varnothing$; $\quad \overline{A} \cap B = \left\{\omega_1\omega_2\omega_3\right\}$.

Приклад 11 Подія A = «Подання декларації про доходи з 9-ої до 11-ої години». Подія B = «Робочий день інспектора закінчився о 18.00». Записати, у чому полягають події: $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A}B, A\overline{B}, AB, \overline{AB}, \overline{A}+\overline{B}, \overline{A+B}.$

Розв'язування

Опишемо спочатку антиподії заданих подій:

$\overline{A} =$ « Подання декларації після 11-ої години»;

$\overline{B} =$ «Робочий день інспектора не закінчується о 18.00».

Тоді $\overline{A}B =$ «Декларацію подано з 11-ої до 18-ої»;

$AB =$ «Декларацію подано з 9-ої до 11-ої і робочий день інспектора закінчується о 18.00»

За законами де Моргана $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} =$ « Або декларацію подано після 11-ої, або робочий день інспектора не закінчується о 18.00»;

$\overline{AB} = \overline{A+B} =$ «Декларацію подано після 11-ої і робочий день інспектора не закінчується о 18.00».

КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Ймовірність події А дорівнює відношенню числа сприятливих цій події випадків до загального числа випадків, тобто,

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де $p(A)$ – ймовірність події *А;*

m – кількість сприятливих події *А* випадків;

n – загальна кількість випадків.

Приклад 12 Знайти ймовірність того, що при підкиданні двох гральних кубиків на верхніх гранях з'явиться кількість очок, сума яких менша 8.

Розв'язування

Очевидно, що повна група подій складається з 36 пар:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6 \\ 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6 \\ 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6 \\ 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6 \\ 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6 \\ 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6 \end{matrix}\right\}$$, тобто, загальна кількість випадків $n = 36$.

Виберемо з повної групи подій пари, сума яких менша 8. Таких пар $m = 21$ – кількість сприятливих випадків.

Якщо позначити, що *А*= «При підкиданні двох гральних кубиків на верхніх гранях з'явиться кількість очок, сума яких менша 8», то, згідно з класичним означенням, $p(A) = \frac{21}{36} \approx 0,58$.

Приклад 13 Диспетчерові фірми таксі надійшло одночасно 15 заявок від трьох готелів «Україна», «Київ», «Франція». Два замовлення від готелю «України», три – від готелю «Київ», інші – від готелю «Франція». Яка ймовірність того, що будь-які два замовлення надійшли від одного готелю.

Розв'язування

А= «Довільні два замовлення надійшли з одного готелю»

Загальна кількість варіантів $n = C_{15}^2 = \frac{15!}{2!13!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$, кількість сприятливих випадків $m = C_2^2 + C_3^2 + C_{10}^2 = \frac{2!}{2!0!} + \frac{3!}{2!1!} + \frac{10!}{2!8!} = 1 + 3 + 45 = 49$.

Таким чином, $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{49}{105} \approx 0,47$.

Приклад 14 Студент прийшов на іспит, але знає лише 12 питань з 39 питань програми. Екзаменатор ставить студентові 5 питань. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для одержання позитивної оцінки він має відповісти не менше ніж на три питання.

Розв'язування

A = «Студент складе іспит» (мається на увазі, що студент відповість не менше ніж на три запитання з п'яти). Тоді загальна кількість випадків $n = C_{39}^{5} = \frac{39!}{5!34!} = 575757$. Кількість сприятливих випадків

$$m = C_{12}^{3}C_{27}^{2} + C_{12}^{4}C_{27}^{1} + C_{12}^{5}C_{27}^{0} = \frac{12!}{3!27!}\cdot\frac{27!}{2!25!} + \frac{12!}{4!8!}\cdot\frac{27!}{1!26!} + \frac{12!}{5!7!}\cdot\frac{27!}{0!27!} = 91377.$$

Отже, ймовірність події *A* дорівнює: $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{91377}{575757} \approx 0{,}159.$

Приклад 15 Маємо 9 квитків вартістю по 10 гривень, 8 квитків вартістю по 30 гривень, 17 квитків вартістю по 50 гривень. Знайти ймовірність того, що три навмання взяті квитки коштують 70 гривень.

Розв'язування

A= «Три навмання взяті квитки коштують 70 гривень».

Загальна кількість випадків $n = C_{34}^{3} = \frac{34!}{3!31!} = 5984$. Можливі варіанти вартості 10 + 10 + 50, 30 + 30 + 10, тому кількість сприятливих випадків

$$m = C_{9}^{2}C_{17}^{1} + C_{8}^{2}C_{9}^{1} = \frac{9!}{2!7!}\cdot\frac{17!}{1!16!} + \frac{8!}{2!6!}\cdot\frac{9!}{1!8!} = 864.$$

Таким чином, $p(A) = \frac{864}{5984} \approx 0{,}144.$

ГЕОМЕТРИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Геометричною ймовірністю події *A* називається відношення міри сприятливої цій події області до міри всієї області, тобто

$$p(A) = \frac{mes\, g}{mes\, G}.$$

Зауваження! Область, на яку розповсюджується поняття геометричної ймовірності, може бути одновимірною (пряма, відрізок), двовимірною (площина) та тривимірною (деяке тіло в просторі). Тоді міри таких областей – довжина, площа, об'єм.

Приклад 16 Дві особи – A та B вирішили зустрітися в певному місці, домовившись тільки про те, що кожен прийде туди в довільний момент часу з 11-ї до 12-ї години та буде чекати протягом 30 хвилин. Якщо партнер до того часу не надійшов або встиг залишити домовлене місце, зустріч не відбудеться. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язування

Позначимо моменти надходження в певне місце осіб A та B відповідно через x та y. В прямокутній системі координат візьмемо за початок відліку 11-у годину, а за мірило вимірювання – 1 годину. За умовою $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Цим нерівностям задовольняють координати будь-якої точки, що належать квадрату $OKLM$ зі стороною, рівною 1 (рис. 2.6).

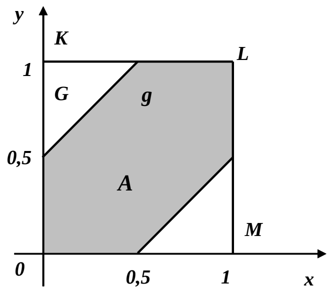


Рисунок 2.6

Нехай подія C = «Зустріч двох осіб» відбудеться, якщо різниця x та y не перевищує 0,5 години (за абсолютною величиною), тобто $|y - x| \le 0,5$. Розв'язком останньої нерівності є смуга $x - 0,5 \le y \le x + 0,5$, яка всередині квадрата на рисунку 2.1 є заштрихованою областю g.

Тоді

$$p(C) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1 - 2 \cdot 0,5^3}{1^2} = 0,75,$$

оскільки площа області g дорівнює площі квадрата G без суми площ двох кутових (незаштрихованих) трикутників.

Приклад 17 Два морських пасажирських катери A і B приймає один причал порту. Вони підходять незалежно один від одного протягом двох годин. Катеру A для того, щоб висадити та взяти пасажирів, потрібно 30 хвилин, а катеру B – 15 хвилин. Яка ймовірність того, що жоден катер не буде чекати на звільнення причалу, якщо один причал не може прийняти два катери одночасно.

Розв'язування

Позначимо час підходу катера A через y, а катера – B через x. При цьому, $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, \quad 15хв = 0,25год, \quad 30хв = 0,5год.$

Знайдемо ймовірність антиподії $\overline{D}=$ «Катери чекають в черзі». У випадку, коли до причалу перший підійшов катер A, тоді подія $\overline{D}$ відбудеться за умови: $y-x<0,5$. У випадку, коли до причалу першим підійшов катер B, подія $\overline{D}$ відбудеться за умови: $x-y<0,25$. Маємо дві нерівності, що визначають сприятливу події $\overline{D}$ область (рис. 2.7), $\begin{cases} y<0,5+x \\ y>x-0,25 \end{cases}$.

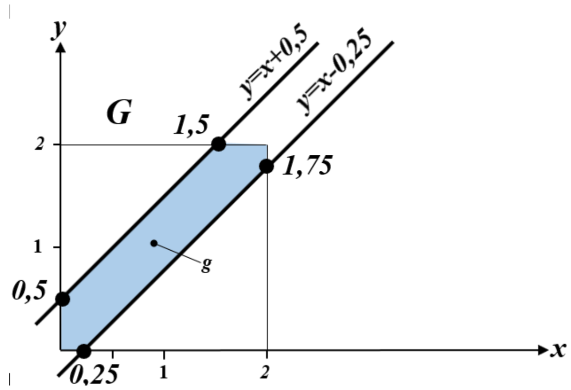


Рисунок 2.7

Таким чином, $p(\overline{D})=\dfrac{S_g}{S_G}=\dfrac{2^2-\frac{1}{2}1,5^2-\frac{1}{2}1,75^2}{2^2}=\dfrac{1,34375}{4}\approx 0,336.$

Тоді $D=$ «Жоден катер не чекає черги» і $p(D)=1-p(\overline{D})=1-0,336=0,664$.

Вправи для самостійної роботи

а) Розв’яжіть задачі на побудову простору елементарних подій

1. Монету кидають тричі. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Подія А= «Решка випала рівно 2 рази». Побудувати множину Ω елементарних подій та описати подію А.	2. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, що відповідають кількості очок, які випали кожного разу. Подія А= «Обидва рази випала кількість очок, менша 3». Побудувати множину елементарних подій Ω на основі опису експерименту і підмножину, яка відповідає події А.
3. Монету кидають 4 рази. Результат спостережень – поява герба (Г) або решки (Р) на верхній стороні монети. Події: А= «Решка випала принаймні 2 рази підряд». В= «Герб випав не раніше, ніж при другому підкиданні». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.	4. Гральний кубик підкидають двічі. Результат спостережень – пара чисел, які відповідають кількості очок, що випали на верхній грані першого і другого разу. Події: А= «Жодного разу не випало число 5», В= «Обидва рази випала кількість очок, менша 5». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати події А і В.

б) Розв'яжіть задачі, користуючись класичним чи геометричним означенням ймовірності.

1. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що: а) сума кількості очок не перевищуватиме 3; б) добуток кількості очок не перевищуватиме 3; в) добуток кількості очок ділитиметься на 3.

2. Дехто купив картку спортлото і відмітив у ній 6 із наявних 49 номерів, після чого в тиражі розігрується 6 «виграшних» номерів із 49. Знайти ймовірність таких подій: A= «Правильно вгадані 3 виграшних номери з 6»; B= «Правильно вгадані всі 6 номерів».

3. Є вироби 4-х сортів, причому кількість виробів I сорту дорівнює 1, II – 2, III – 3, IV – 5. Для контролю навмання беруть 7 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 1 виріб I сорту, 1 – II, 2 – III і 3 – IV.

4. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{1}{4}$.

5. Моменти початку двох подій навмання розподілені в проміжку часу від T_1 = 900 хвилин до T_2 = 1100 хвилин. Одна з подій триває 10 хв, друга – 20 хв. Знайти ймовірність того, що: а) події «перекриваються» в часі; б) «не перекриваються».

6. Серед 10 лотерейних білетів є 2 виграшних. Навмання взяли 6 білетів. Знайти ймовірність того, що: 1) серед них немає виграшних; 2) один виграшний.

7. У крузі радіуса R = 12 навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що вона потрапить в одну з двох фігур, які не перетинаються і площі яких дорівнюють S_1 = 2,37 та S_2 = 3,52.

8. У ліфт 10-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 5 пасажирів. Кожен із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі вийдуть на різних поверхах; б) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж самому поверсі; в) всі пасажири вийдуть на 8-му поверсі; г) на одному з поверхів вийде 2 пасажири, а на іншому – 3.

9. Серед дев'яти лотерейних білетів є 2 виграшних. Навмання беруть 4 білети. Знайти ймовірність того, що серед них: а) один виграшний; б) немає виграшних.

10. Є вироби трьох сортів, причому кількість виробів I сорту дорівнює 3, II – 2, III – 4. Для контролю навмання беруть 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 2 вироби I сорту , 2 – II і 1 – III сорту.

11. На площині проведені паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють: в першому випадку 2 см; в другому – 10 см. На площину кидають навмання круг радіусом 3 см. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної з прямих ліній?

12. Моменти початку двох подій навмання розподілені в проміжку часу від T_1 = 900 хвилин до T_2 = 930 хвилин. Одна з подій триває 10 хв, друга також 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що: а) події «перекриваються» в часі; б) «не перекриваються».

13. Студент забув останні три цифри потрібного телефону, але він пам'ятає, що всі три цифри різні, тому набирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що цифри набрано правильно.

14. Серед 25 студентів групи, в якій є 10 дівчат, розігрують 5 квитків на концерт. Визначити ймовірність того, що квитки виграють дві дівчини.

15. В урні 15 червоних, 9 синіх та 6 зелених куль однакового розміру. Навмання беруть 6 куль. Яка ймовірність того, що будуть взяті: 1 зелена, 2 синіх та 3 червоних кулі?

2.4 Основні теореми теорії ймовірностей

1. Ймовірність суми скінченного числа несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій. (Наслідок! *1)* Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1. *2)* Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.)
2. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, знайдену за умови, що перша подія відбулась, тобто, $p(AB) = p(A)\cdot p_A(B) = p(B)\cdot p_B(A)$.
3. Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку, тобто, $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.
4. **ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ** Якщо подія A може відбутись тільки за умови появи однієї з подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків кожної з гіпотез на відповідні умовні ймовірності події A: $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)$.
5. **ФОРМУЛА БАЙЄСА** $p_A(H_i) = \dfrac{p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)}$.

ЗАУВАЖЕННЯ! 1) *Умовна ймовірність* – ймовірність події B, знайденої за умови, що подія A відбулась. Позначається умовна ймовірність $p_A(B)$, або $p(B|A)$.

2) Дві події називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої.

3) При появі події A, тобто у міру надходження нової інформації, ми можемо перевіряти та коригувати висунуті до випробування гіпотези. Байєсовський підхід дає змогу коригувати управлінські рішення в економіці, оцінки невідомих параметрів розподілу ознак, що вивчаються в статистичному аналізі і т. п.

Приклад 18 Ділянка електричного кола має вигляд:

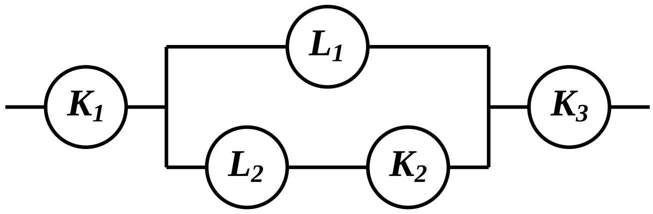


Рисунок 2.8

Надійність кожного елемента вказана в таблиці.

Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2
Надійність	0,5	0,6	0,4	0,9	0,8

Визначити надійність даної системи.

Розв'язування

Зрозуміло, що надійність даної системи можна обчислити за формулою

$$p = p(K_1)\cdot\left[1-(1-p(L_1))(1-p(L_2)P(K_2))\right]\cdot p(K_3).$$

Таким чином, маємо

$$p = 0,5\cdot\left[1-0,1\cdot(1-0,8\cdot 0,6)\right]\cdot 0,4 = 0,5\cdot 0,948\cdot 0,4 = 0,1896.$$

Приклад 19 До торгової фірми надійшли телевізори від трьох постачальників у співвідношенні 1:4:5. Практика показує, що телевізори, які надходять від 1-го, 2-го та 3-го постачальників, не потребують ремонту протягом гарантійного терміну відповідно у 98, 88 та 92% випадків. 1) Знайти ймовірність того, що одержаний телевізор не потребує ремонту протягом гарантійного терміну; 2) Проданий телевізор потребував ремонту протягом гарантійного терміну. Від якого постачальника ймовірніше за все надійшов цей телевізор?

Розв'язування

1) Позначимо події:

H_i= «Телевізор надійшов до торгової фірми від i-го постачальника», $i=1,2,3$;

A= «Телевізор не потребує ремонту протягом гарантійного терміну».

За умовою

$$p(H_1)=\frac{1}{1+4+5}=0{,}1;\quad p_{H_1}(A)=0{,}98;$$

$$p(H_2)=\frac{4}{1+4+5}=0{,}4;\quad p_{H_2}(A)=0{,}88;$$

$$p(H_3)=\frac{5}{1+4+5}=0{,}5;\quad p_{H_3}(A)=0{,}92.$$

За формулою повної ймовірності

$$p(A)=0{,}1\cdot 0{,}98+0{,}4\cdot 0{,}88+0{,}5\cdot 0{,}92=0{,}91.$$

2) Подія $\overline{A}$= «Телевізор потребує ремонту протягом гарантійного терміну»; $p(\overline{A})=1-p(A)=1-0{,}91=0{,}09$.

За умовою

$$p_{H_1}(\overline{A})=1-0{,}98=0{,}02;\ p_{H_2}(\overline{A})=1-0{,}88=0{,}12;\ p_{H_3}(\overline{A})=1-0{,}92=0{,}08.$$

За формулою Байєса

$$p_{\overline{A}}(H_1)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}02}{0{,}09}=0{,}022;\quad p_{\overline{A}}(H_2)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}12}{0{,}09}=0{,}533;$$

$$p_{\overline{A}}(H_3)=\frac{0{,}5\cdot 0{,}08}{0{,}09}=0{,}444.$$

Таким чином, після появи події $\overline{A}$ ймовірність гіпотези H_2 збільшилась з $p(H_2)=0{,}4$ до максимальної $p_{\overline{A}}(H_2)=0{,}533$.

Якщо раніше найбільш ймовірною була гіпотеза H_3, то у світлі нової інформації (поява події $\overline{A}$) найбільш ймовірною стала гіпотеза H_2 – телевізор надійшов від другого постачальника.

Приклад 20 Два мисливці, незалежно один від одного, стріляли по мішені, роблячи по одному пострілу. Ймовірність влучного пострілу для першого мисливця дорівнює 0,8; для другого – 0,4. Після стрільби в мішені виявлено одну пробоїну. Яка ймовірність того, що вона належить: а) 1-му мисливцю; б) 2-му мисливцю?

Розв'язування

Позначимо події:

H_1= «Обидва мисливці промахнулись»;

H_2= «Обидва мисливці влучили в мішень»;
H_3= «1-ий мисливець влучив в мішень, а 2-ий промахнувся»;
H_4= «2-ий мисливець влучив в мішень, а 1-ий промахнувся»;
A= «В мішені одна пробоїна (одне влучення)».

Знайдемо ймовірності гіпотез та умовні ймовірності події A для цих гіпотез:

$$p(H_1) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,12; \quad p_{H_1}(A) = 0; \; p(H_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32; \quad p_{H_2}(A) = 0;$$

$$p(H_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48; \quad p_{H_3}(A) = 1; \; p(H_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08; \quad p_{H_4}(A) = 1.$$

Тепер за формулою Байєса

$$p_A(H_3) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,12 \cdot 0 + 0,32 \cdot 0 + 0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{6}{7} = 0,857;$$

$$p_A(H_4) = \frac{0,08 \cdot 1}{0,12 \cdot 0 + 0,32 \cdot 0 + 0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{1}{7} = 0,143,$$

Тобто, в шість разів більш ймовірно, що в мішень влучив 1-ий мисливець.

Приклад 21 До торговельної фірми під реалізацію надійшли касові апарати від трьох виробників у відношення 1:4:5. Імовірність того, що касові апарати від 1, 2 і 3-го виробників не потребують обслуговування протягом гарантійного строку, відповідно дорівнює 98,08%, 88,8%, 92,8%. Знайти ймовірність того, що:
а) довільний касовий апарат не потребуватиме обслуговування протягом гарантійного строку;
б) довільний касовий апарат потребуватиме обслуговування протягом гарантійного строку. Від якого виробника випуск бракованого касового апарату є найімовірнішим?

Розв'язування

Сформулюємо гіпотези:
H_1= «Касовий апарат надійшов від 1-го виробника»;
H_2= «Касовий апарат надійшов від 2-го виробника»;
H_3= «Касовий апарат надійшов від 3-го виробника».

Тоді, ймовірність цих гіпотез становить:

$$p(H_1) = \frac{1}{1+4+5} = 0,1; \quad p(H_2) = \frac{4}{1+4+5} = 0,4; \quad p(H_3) = \frac{5}{1+4+5} = 0,5.$$

Позначимо подію A= «Касовий апарат не потребує обслуговування», тоді за умовою: $p_{H_1}(A) = 0,9808; \quad p_{H_2}(A) = 0,888; \quad p_{H_3}(A) = 0,928.$

а) За формулою повної ймовірності маємо

$$p(A) = 0,1 \cdot 0,9808 + 0,4 \cdot 0,888 + 0,5 \cdot 0,928 = 0,91728.$$

б) $\overline{A}$= «Касовий апарат потребує обслуговування». тоді

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,91728 = 0,08272.$$

За теоремою Байєса маємо

$$p_{\overline{A}}(H_1) = \frac{0,1 \cdot (1 - 0,9808)}{0,08272} \approx 0,0232;$$

$$p_{\overline{A}}(H_2) = \frac{0,4 \cdot (1 - 0,888)}{0,08272} \approx 0,542;$$

$$p_{\overline{A}}(H_3) = \frac{0,5 \cdot (1 - 0,928)}{0,08272} \approx 0,435.$$

З проведених розрахунків зрозуміло, що, найімовірніше, касовий апарат, який потребує додаткового обслуговування, надійшов від другого виробника.

Приклад 22 Для участі у студентських спортивних змаганнях усіх бажаючих розподілили на три групи. У першу групу відібрано 9 студентів, в другу – 8, у третю – 5 студентів. Ймовірності вийти до фіналу для одного студента дорівнюють 0,9; 0,8; 0,2. Знайти ймовірність виходу до фіналу для навмання вибраного учасника змагань. До якої з трьох груп він найімовірніше належить?

Розв'язування

Сформулюємо гіпотези:

$H_1 =$ «Студент належить до першої групи»,
$H_2 =$ «Студент належить до другої групи»,
$H_3 =$ «Студент належить до третьої групи».

Відповідно ймовірності гіпотез становлять: $p(H_1) = \frac{9}{22} \approx 0,41$; $p(H_2) = \frac{8}{22} \approx 0,36$; $p(H_3) = \frac{5}{22} \approx 0,23$.

Подія $A =$ «Студент вийшов до фіналу», зрозуміло, що в цьому випадку

$$p_{H_1}(A) = 0,9; \qquad p_{H_2}(A) = 0,8; \qquad p_{H_3}(A) = 0,2.$$

За формулою повної ймовірності маємо

$$p(A) = 0,41 \cdot 0,9 + 0,36 \cdot 0,8 + 0,23 \cdot 0,2 = 0,703.$$

Для того, щоб з'ясувати до якої групи найімовірніше належить студент, скористаємось формулою Байєса:

$$p_A(H_1)=\frac{0,41\cdot 0,9}{0,703}\approx 0,525; \quad p_A(H_2)=\frac{0,36\cdot 0,8}{0,703}\approx 0,41;$$

$$p_A(H_3)=\frac{0,23\cdot 0,2}{0,703}\approx 0,065.$$

З результатів обрахунку випливає, що найімовірніше студент, який вийшов у фінал, належить першій групі.

Приклад 23 Три робітники виготовляють однотипні деталі. Показники їх продуктивності співвідносяться як 5:4:6. Імовірність допустити брак при виготовленні однієї деталі для кожного з робітників відповідно дорівнює 0,18; 0,24 та 0,01. Усі деталі, виготовлені робітниками, складаються в один контейнер. Яка ймовірність того, що:

а) одна навмання взята деталь виявиться бракованою;

б) браковану деталь виготовив другий робітник.

Розв'язування

В нашому випадку гіпотези такі:

$H_1 =$ «Деталь виготовлено першим робітником»,

$H_2 =$ «Деталь виготовлено другим робітником»,

$H_3 =$ «Деталь виготовлено третім робітником»

і їх ймовірності становлять $p(H_1)=\dfrac{5}{5+4+6}\approx 0,33$; $p(H_2)=\dfrac{4}{15}\approx 0,27$; $p(H_3)=\dfrac{6}{15}\approx 0,4$.

Подія $A=$ «Обрана деталь бракована». В цьому випадку

$$p_{H_1}(A)=0,18; \quad p_{H_2}(A)=0,24; \quad p_{H_3}(A)=0,01. \text{ Тоді}$$

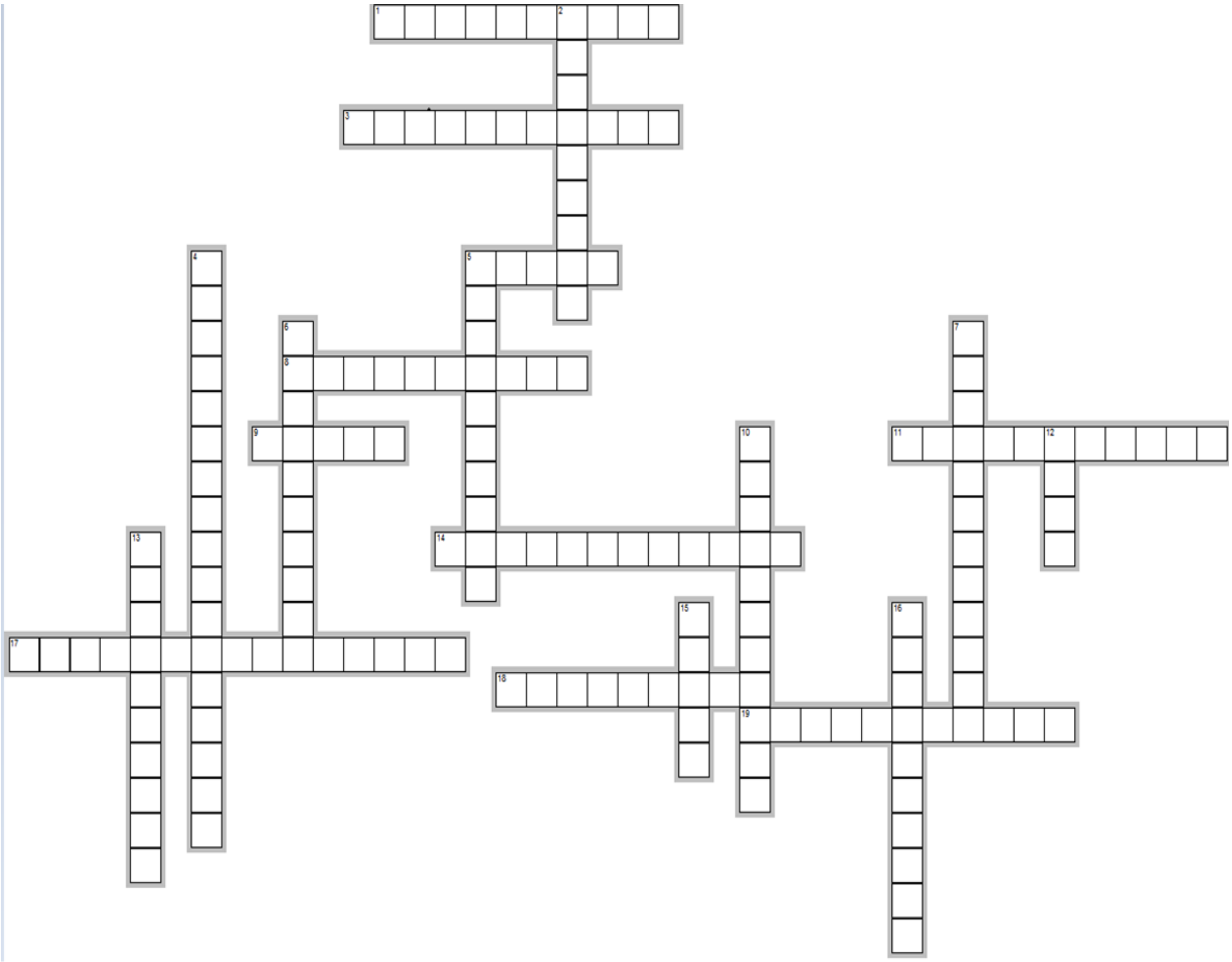
а) $p(A)=0,18\cdot 0,33+0,24\cdot 0,27+0,01\cdot 0,4=0,1282$.

б) Подія $B=$ «Браковану деталь виготовив другий робітник», її ймовірність шукаємо за формулою Байєса:

$$p(B)=p_A(H_2)=\frac{0,24\cdot 0,27}{0,1282}\approx 0,505.$$

Вправи для самостійної роботи

а) Розв'яжіть кросворд



По горизонталі

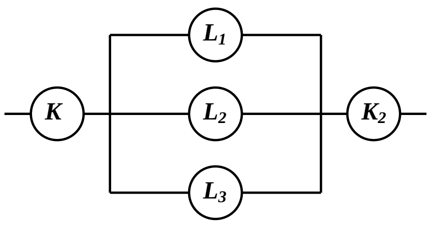
1. довільна k-елементна підмножина n-елементної множини
3. визначення ймовірності події як відношення міри сприятливої цій події області до міри усієї області
5. будь-який спостережуваний результат випробування, що його можна зафіксувати
8. ймовірність того, що з урни, в якій дві білих і три чорних кульки виймають одну білу
9. рівноможливі несумісні події, що утворюють повну групу
11. подія, яку не можна розбити на більш прості події
14. події, жодна з яких не є більш можливою інших
17. кількість способів, якими можна скласти комісію для приймання заборгованостей із 12 викладачів кафедри вищої математики
18. події, що не можуть відбуватись одночасно
19. випадок, поява якого приводить до появи події

По вертикалі

2. подія, протилежна події А
4. числові величини, які використовують при кількісному оцінюванні інформації дискретних джерел повідомлень
5. сукупність усіх взаємно виключних подій, що охоплюють будь-яку подію для даного випробування
6. ймовірність того, що при одному підкиданні монети випаде герб
7. упорядковані множини, які відрізняються одна від одної лише порядком своїх елементів
10. числова міра ступеня об'єктивної можливості події
12. ймовірність неможливої події
13. подія, яка відбувається за будь-яких обставин
15. кількість способів, якими можна розмістити 3 книги на книжковій полиці
16. дві несумісні події, з яких одна обов'язково має відбутись

б) Розв'яжіть такі задачі

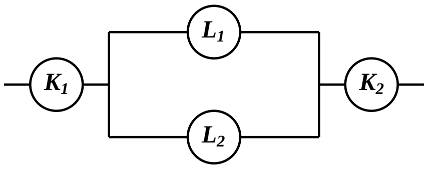
1. Ділянка електричного кола має вигляд:



Елемент	K	K_2	L_1	L_2	L_3
Ймовірність	0,6	0,5	0,4	0,7	0,5

Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T.

2. Ділянка електричного кола має вигляд:

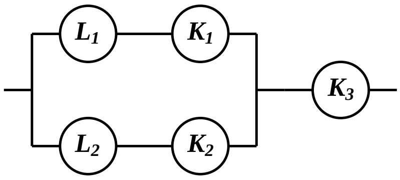


Елемент	K_1	K_2	L_1	L_2
Ймовірність	0,3	0,7	0,9	0,8

Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T.

3. Вихід із ладу за час T різних елементів – незалежні події, які мають ймовірності (табл.).

Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу T, якщо ділянка електричного кола має вигляд:



Елемент	K_1	K_2	K_3	L_1	L_2
Ймовірність	0,5	0,4	0,6	0,8	0,7

в) Розв'яжіть задачі, використовуючи формулу повної ймовірності та формулу Байєса.

1. Із 1000 ламп 400 належать до першої партії, 350 – до другої, а решта – до третьої. В першій партії 6%, в другій – 5%, в третій – 4% бракованих ламп. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа бракована.

2. В першій урні 9 білих і 1 чорна куля, в другій – 2 білих і 6 чорних. З першої урни в другу переклали 3 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

3. До магазину надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 60%, другий – 30%, третій – 10%. Серед виробів першого заводу 85%, другого 70%, третього 80% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений третім заводом.

4. Три стрільці роблять по одному пострілу в одну і ту ж саму мішень. Ймовірність влучень у мішень при одному пострілі для першого – 0,6; для другого – 0,4; для третього – 0,8. Яка ймовірність того, що другий стрілець промахнувся, якщо після пострілу в мішені виявилося дві пробоїни.

5. Відомо, що 92% випущених заводом виробів відповідає стандартові. Спрощена схема контролю визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,96 і нестандартну – з ймовірністю 0,06. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, не відповідає стандартові.

6. В альбомі 18 чистих і 10 гашених марок. З них навмання виймаються 3 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

7. Із 1000 ламп 430 належать до першої партії, 180 – до другої, а решта – до третьої. В першій партії бракованих ламп 4%, в другій – 6%, в третій – 3%. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа бракована.

8. В першій урні 7 білих і 3 чорних кулі, в другій – 5 білих і 1 чорна. З першої урни в другу переклали 4 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність що вона біла.

9. В альбомі 7 чистих і 6 гашених марок. З них навмання виймаються 2 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

10. На склад надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 42%, другий – 38%, третій – 20%. Серед виробів першого заводу першосортних 80%, другого – 70%, третього – 85%. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений другим заводом.

11. Сигнали з пунктів A і B в пункт C передаються зі спотвореннями. Ймовірність спотворення з A дорівнює 0,4; з B – 0,5. Співвідношення між числом передач дорівнює K_A:K_B = 5:3. Знайти ймовірність того, що одержаний сигнал спотворений. З якого пункту, найімовірніше, передано спотворений сигнал?

12. Із 1000 магнітофонів 650 належать до першої партії, 220 – до другої, а решта – до третьої. В першій партії 3% бракованих виробів, в другій – 6%, в третій – 5%. Навмання вибирається один магнітофон. Знайти ймовірність того, що вибраний магнітофон справний.

13. В першій партії 25 стандартних виробів і 3 нестандартних, в другій – 40 стандартних і 2 нестандартних. Із першої партії в другу перекладено 14 виробів. Після цього з другої партії виймається навмання 1 виріб. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб стандартний.

14. В альбомі 6 чистих і 6 гашених марок. З них навмання виймається 1 марка (яка може бути як чистою, так і гашеною), піддається спецгасінню і повертається в альбом. Після цього знов навмання виймаються 2 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки гашені.

15. Три мисливці роблять по одному пострілу в одну і ту ж саму мішень. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі для першого мисливця складає 0,7; для другого – 0,6; для третього – 0,45. Яка ймовірність того, що третій мисливець промахнувся, якщо після пострілу в мішені виявилося дві пробоїни.

16. До магазину надходять газові лічильники з трьох заводів, причому перший завод постачає 20%, другий – 35%, третій – 45%. Серед виробів першого заводу 80% першосортних, другого – 70%, третього – 90%. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний газовий лічильник випущений першим заводом.

17. В партії зі 100 виробів кількість бракованих не може перевищувати п'яти, причому всі значення (0, 1, 2, 3, 4, 5) числа бракованих виробів однаково можливі. Відомо, що серед 10 навмання взятих виробів 9 виявились придатними. Знайти ймовірність того, що решта виробів також придатна.

18. Із 1000 електроплиток 180 належать до першої партії, 270 – до другої, а решта – до третьої. В першій партії 3% бракованих виробів, в другій – 5%, в третій – 4%. Навмання вибирається одна електроплитка. Знайти ймовірність того, що вибрана електроплитка справна.

19. В першій урні 40 білих і 8 чорних куль, в другій – 20 білих і 4 чорних. З першої урни в другу переклали 3 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона чорна.

20. В альбомі 7 чистих і 8 гашених марок. З них навмання виймаються 4 марки (які можуть бути як чистими, так і гашеними), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

Розділ 3 ДИСКРЕТНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

3.1 Поняття дискретного джерела, первинні характеристики, поняття ентропії

Задача передавання інформації на відстань формулюється в такий спосіб: є джерело інформації (людина, комп'ютер тощо), що має деяку інформацію, яку потрібно передати віддаленому одержувачеві. Ця інформація має бути передана з заданим рівнем вірогідності з прийнятною затримкою. Для обговорення розв'язання цієї задачі розглянемо поняття: інформація, повідомлення, сигнал і канал зв'язку.

Під *інформацією* розуміють сукупність відомостей, наданих про будь-які події, явища або предмети. Для передавання або зберігання інформації використовують різні знаки (символи), що дозволяють виразити (подати) її в деякій формі. Сукупність знаків, що відображають ту або іншу інформацію, називають *повідомленням*. Передавання повідомлень на відстань здійснюється за допомогою будь-якого матеріального носія або фізичного процесу. Фізичний процес, що відображає передане повідомлення, називається *сигналом*.

У теорії електричного зв'язку під сигналом розуміють електричні коливання. *Каналом зв'язку* називається сукупність засобів для передавання електричних сигналів на відстань. Джерело інформації видає інформацію у вигляді повідомлень. Саме характеристики повідомлень значною мірою визначають побудову апаратури для їхнього передавання, тому говорять «джерело повідомлень», а не «джерело інформації».

Дискретне джерело інформації – це таке джерело, яке може виробляти (генерувати) за скінченний відрізок часу тільки скінченну множину повідомлень. Кожному такому повідомленню можна поставити у відповідність число, та передавати ці числа замість повідомлень.

Первинні характеристики дискретного джерела інформації – це алфавіт, сукупність ймовірностей появи символів алфавіту на виході дискретного джерела та тривалості символів.

Алфавіт – множина символів $X = \{x_1, x_2, ..., x_M\}$, які можуть з'явитися на виході дискретного джерела; M – потужність алфавіту (кількість різноманітних символів алфавіту).

Якщо всі ймовірності, які визначають виникнення символів на виході джерела, не залежать від часу, джерело називають стаціонарним.

Джерела називають ***джерелами з пам'яттю (марковськими джерелами)***, якщо розподіл ймовірностей виникнення чергового символу на виході дискретного джерела залежить від того, які символи були попередніми.

Будемо говорити, що ***глибина пам'яті*** марковського дискретного джерела дорівнює h, $(h \geq 0)$, якщо ймовірність появи чергового символа залежить тільки від h попередніх символів на виході цього джерела.

Кількісне оцінювання інформації пов'язане з поняттям ентропії. ***Ентропія*** є мірою невизначеності, непрогнозованості ситуації. Зменшення ентропії, яке відбулось завдяки деякому повідомленню, точно збігається з кількістю інформації, яка міститься в цьому повідомленні.

Для дискретного немарковського (без пам'яті) джерела інформації **ЕНТРОПІЯ** H визначається виразом

$$H = -\sum_{i=1}^{M} p(x_i) \cdot \log_a p(x_i)$$

і показує, яку кількість інформації в середньому дає поява одного символа на виході дискретного джерела інформації.

Властивості

1. $H \geq 0$.
2. $H_{\max} = \log_2 M$, якщо $p(x_i) = \dfrac{1}{M}, \quad i = \overline{1, M}$. Це значення збігається з кількістю двійкових комірок пам'яті, які потрібно мати, щоб зафіксувати за допомогою двійкового коду інформацію про один із M можливих станів системи, або про символ, що з'явиться на виході дискретного джерела інформації.
3. $H = 0$, якщо ймовірність появи одного з символів є одиниця (при цьому, звичайно, ймовірність появи будь-якого іншого символа буде дорівнювати нулю); в такій ситуації невизначеність відсутня.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! 1) Якщо $a = 2$, то одиниці вимірювання ентропії та кількості інформації називають ***бітами;***
2) Якщо $a = 10$, то одиниці вимірювання ентропії та кількості інформації називають ***дітами;***
3) Якщо $a = e$, то одиниці вимірювання ентропії та кількості інформації називають ***нітами.***
4) Для обчислення ентропії використовують спеціальні таблиці (див. табл. 3.1)

Таблиця 3.1 – Значення функції $-p\log_2 p$

p	$-p\log_2 p$	p	$-p\log_2 p$	p	$-p\log_2 p$
0,001	0,0099	0,270	0,5100	0,640	0,4121
0,005	0,0382	0,280	0,5142	0,650	0,4040
0,010	0,0664	0,290	0,5179	0,660	0,3957
0,015	0,0909	0,300	0,5211	0,670	0,3871
0,020	0,1129	0,310	0,5228	0,680	0,3784
0,025	0,1330	0,320	0,5260	0,690	0,3694
0,030	0,1518	0,330	0,5378	0,700	0,3602
0,035	0,1693	0,340	05292	0,710	0,3508
0,040	0,1858	0,350	0,5301	0,720	0,3412
0,045	0,2013	0,360	0,5306	0,730	0,3314
0,050	0,2161	0,370	0,5307	0,740	0,3215
0,055	0,2301	0,380	0,5304	0,750	0,3113
0,060	0,2435	0,390	0,5298	0,760	0,3009
0,065	0,2563	0,400	0,5288	0,770	0,2903
0,070	0,2686	0,410	0,5274	0,780	0,2796
0,075	0,2803	0,420	0,5256	0,790	0,2687
0,080	0,2915	0,430	0,5236	0,800	0,2575
0,085	0,3023	0,440	0,5211	0,810	0,2462
0,090	0,3127	0,450	0,5184	0,820	0,2348
0,095	0,3226	0,460	0,5153	0,830	0,2231
0,100	0,3322	0,470	0,5120	0,840	0,2113
0,110	0,3503	0,480	0,5083	0,850	0,1993
0,120	0,3671	0,490	0,5043	0,860	0,1871
0,130	0,3826	0,500	0,5000	0,870	0,1748
0,140	0,3971	0,510	0,4954	0,880	0,1623
0,150	0,4105	0,520	0,4906	0,890	0,1496
0,160	0,4230	0,530	0,4854	0,900	0,1368
0,170	0,4346	0,540	0,4800	0,910	0,1238
0,180	0,4453	0,550	0,4744	0,920	0,1107
0,190	0,4552	0,560	0,4684	0,930	0,0974
0,200	0,4644	0,570	0,4623	0,940	0,0839
0,210	0,4728	0,580	0,4558	0,950	0,0703
0,220	0,4806	0,590	0,4491	0,960	0,0565
0,230	0,4877	0,600	0,4422	0,970	0,0426
0,240	0,4941	0,610	0,4350	0,980	0,0286
0,250	0,500	0,620	0,4276	0,990	0,0140
0,260	0,5053	0,630	0,4199		

ІНТЕГРАЛЬНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОГО ДЖЕРЕЛА

Продуктивність $\overline{H}$ джерела інформації – кількість інформації, що виробляється джерелом за одиницю часу,

$$\overline{H} = \frac{H}{\tau},$$

де $\tau = \sum_{i=1}^{M} p(x_i)\tau_i$ – середня тривалість символа, τ_i – тривалість символа x_i.

Надмірність (надлишок) R дискретного джерела інформації дає відносну оцінку використання потенційних можливостей джерела з алфавітом заданої потужності M

$$R = 1 - \frac{H}{\log_2 M}.$$

Надмірність показує, яка частина букв в слові не завантажена інформацією. Надмірність призводить до збільшення часу передачі повідомлення за рахунок того, що потрібна передача додаткового числа символів. Це призводить до зайвої завантаженості каналів зв'язку. Але деяка надмірність буває корисною для забезпечення потрібної надійності зв'язку підвищенням завадостійкості передачі повідомлень.

ЗАУВАЖЕННЯ! Надмірність може приймати значення від 0 до 1. Вона дорівнює нулю, якщо $H = H_{\max}$; в цьому випадку дискретне джерело інформації буде виробляти максимально можливий інформаційний потік.

Приклад 3.1 Розподіл ймовірностей появи символів на виході немарковського джерела з алфавітом X потужності $M = 5$ є таким:

$$p(x_1) = p(x_2) = 0{,}1; \quad p(x_3) = 0{,}15; \quad p(x_4) = 0{,}2; \quad p(x_5) = 0{,}45.$$

Тривалість символів: $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 2\ мс$; $\tau_4 = 1\ мс$; $\tau_5 = 3\ мс$.

Розрахувати ентропію, продуктивність та надмірність джерела.

Розв'язування

$$H = -2\cdot 0{,}1\log_2 0{,}1 - 0{,}15\log_2 0{,}15 - 0{,}2\log_2 0{,}2 - 0{,}45\log_2 0{,}45 =$$
$$= 2\cdot 0{,}3322 + 0{,}4105 + 0{,}4644 + 0{,}5184 \approx 2{,}058\ біта$$

$$\tau = 2\cdot(0{,}1+0{,}1+0{,}15) + 1\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}45 = 2{,}25\ мс$$

$$\overline{H} = \frac{2{,}058}{2{,}25\cdot 10^{-3}} \approx 914{,}67\ біт/с, \qquad R = 1 - \frac{2{,}058}{\log_2 5} \approx 0{,}114.$$

3.2 Умовна частинна ентропія, повна умовна ентропія, сумісна ентропія, повна взаємна інформація

Розглянемо сукупність двох дискретних немарковських джерел з алфавітами $X=\{x_1,x_2,...,x_M\}$ та $Y=\{y_1,y_2,...,y_N\}$, ентропії яких позначимо, відповідно, $H(X)$ та $H(Y)$. Для спрощення будемо вважати, що всі символи мають однакові тривалості, а зміни символів на виходах обох джерел відбуваються одночасно. Якщо джерела є статистично залежними, то поява, наприклад, символа x_1 на виході першого джерела дасть розподіл умовних ймовірностей $p(y_k|x_1), k=\overline{1,N}$ виникнення символів y_k на виході другого джерела. Зрозуміло, що цей розподіл умовних ймовірностей буде відрізнятися від розподілу умовних ймовірностей $p(y_k|x_2), k=\overline{1,N}$. В такій ситуації ентропія другого джерела буде залежати від того, який символ з'явився на виході першого джерела.

Умовна частинна ентропія характеризує невизначеність символів на виході другого джерела за умови, за умови що на виході першого джерела з'явився символ x_i і обчислюється він за формулою

$$H(Y|x_i)=-\sum_{k=1}^{N} p(y_k|x_i)\cdot\log_2 p(y_k|x_i).$$

Середня або ***повна умовна ентропія***

$$H(Y|X)=-\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} p(x_i,y_k)\cdot\log_2 p(y_k|x_i),$$

де $p(x_i,y_k)=p(x_i)\cdot p(y_k|x_i)$ – ймовірність сумісної появи символів x_i та y_k на виходах відповідно першого та другого джерела. Ця ентропія характеризує в середньому невизначеність символів на виході другого джерела, якщо є можливість спостерігати за появою символів на виході першого джерела.
Сумісна ентропія $H(X,Y)$ визначається за формулою

$$H(X,Y)=-\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} p(x_i,y_k)\cdot\log_2 p(x_i,y_k).$$

ЗАПАМ'ЯТАЙ! 1) При існуванні статистичної залежності між повідомленнями джерела факт вибору одного з повідомлень зменшує або збільшує ймовірності вибору інших повідомлень до умовних ймовірностей. Відповідно змінюється й кількість інформації, що міститься в кожному з цих повідомлень.

2) Якщо джерела статистично незалежні, то

$$p(y_k | x_i) = p(y_k), \quad p(x_i, y_k) = p(x_i) \cdot p(y_k).$$

В цьому випадку

$$H(Y|X) = H(Y), \quad H(X|Y) = H(X), \quad H(X,Y) = H(X) + H(Y).$$

3) Спостерігаючи за виникненням символів на виході першого джерела, будемо мати повну інформацію про послідовність символів на виході другого джерела навіть за умов недоступності цього виходу для спостереження.

4) Для обчислення сумісної ентропії потрібно мати набір або матрицю ймовірностей сумісної появи символів

$$\begin{pmatrix} p(x_1, y_1) & p(x_2, y_1) & \ldots & p(x_M, y_1) \\ p(x_1, y_2) & p(x_2, y_2) & \ldots & p(x_M, y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(x_1, y_N) & p(x_2, y_N) & \ldots & p(x_M, y_N) \end{pmatrix}.$$

Сума елементів k-го рядка дорівнює ймовірності $p(y_k)$ появи символа y_k на виході другого джерела, а сума елементів i-го стовпця – ймовірності $p(x_i)$ появи символа x_i на виході першого джерела

$$p(y_k) = \sum_{i=1}^{M} p(x_i, y_k); \quad p(x_i) = \sum_{k=1}^{N} p(x_i, y_k).$$

Приклад 3.2 Маємо два немарковських джерела інформації з алфавітами $X = \{x_1, x_2\}$ та $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Числові значення ймовірностей сумісного виникнення символів на виходах джерел такі: $\begin{pmatrix} 0,06 & 0,54 \\ 0,03 & 0,27 \\ 0,01 & 0,09 \end{pmatrix}$. Чому дорівнює ентропія системи цих двох джерел? Яке з цих джерел має більшу надмірність? Чи є джерела статистично незалежними?

Розв'язування

Знайдемо ймовірності появи відповідних символів алфавітів X та Y:

$$p(x_1) = 0,06 + 0,03 + 0,01 = 0,1; \qquad p(x_2) = 0,54 + 0,27 + 0,09 = 0,9;$$

$$p(y_1) = 0,06 + 0,54 = 0,6; \quad p(y_2) = 0,03 + 0,27 = 0,3; \quad p(y_3) = 0,01 + 0,09 = 0,1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= -0,06\log_2 0,06 - 0,54\log_2 0,54 - 0,03\log_2 0,03 - 0,27\log_2 0,27 - \\ &-0,01\log_2 0,01 - 0,09\log_2 0,09 = 0,2435 + 0,48 + 0,1518 + 0,51 + 0,0664 + \\ &+0,3127 = 1,7644, \end{aligned}$$

оскільки $H(X) = -0,1 \cdot \log_2 0,1 - 0,9 \cdot \log_2 0,9 = 0,3322 + 0,1368 = 0,469$ біта;

$H(Y) = -0,1 \cdot \log_2 0,1 - 0,6 \cdot \log_2 0,6 - 0,3 \cdot \log_2 0,3 = 0,3322 + 0,4422 + 0,5211 = 1,2955$ біта.

Тоді надмірність джерел становить

$$R_X = 1 - \frac{0,469}{\log_2 2} = 0,531, \quad R_Y = 1 - \frac{1,2955}{\log_2 3} = 1 - 0,817 = 0,183,$$

оскільки $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$, то джерела статистично незалежні.

Спостерігаючи за виникненням символів на виході одного з джерел, в загальному випадку будемо отримувати певну кількість інформації про появу символів на виході іншого джерела. Ця інформація $I(X,Y)$ в розрахунку на один символ буде дорівнювати зменшенню ентропії іншого джерела.

Оскільки початкова або апріорна ентропія другого джерела (тобто ентропія, яка мала місце до появи символа на виході першого джерела, яке є доступним) дорівнює $H(Y)$, а залишкова або апостеріорна (після появи символа) ентропія буде $H\left(Y|X\right)$, то

$$I(X,Y) = H(Y) - H\left(Y|X\right) = H(X) - H(X|Y).$$

Приклад 3.3 Нехай маємо два немарковських дискретних джерела інформації з алфавітами $Y = \{y_1, y_2\}$ та $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Числові значення безумовних та умовних ймовірностей появи символів такі:

$$p(x_1) = 0,444 \quad p(x_2) = 0,225 \quad p(x_3) = 0,331$$

$$\begin{pmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,48 \\ 0,12 & 0,27 \\ 0,52 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Отримати числові значення ентропії системи цих двох джерел та повної взаємної інформації.

Розв'язування

Знайдемо відповідні умовні частинні ентропії:

$$H(Y|x_1) = -0,36\log_2 0,36 - 0,48\log_2 0,48 = 1,0389;$$

$$H(Y|x_2) = -0,12\log_2 0,12 - 0,27\log_2 0,27 = 0,8771;$$

$$H(Y|x_3) = -0,52\log_2 0,52 - 0,25\log_2 0,25 = 0,9906.$$

Тоді середня умовна ентропія

$$H(Y|X) = 0,444 \cdot 1,0389 + 0,225 \cdot 0,8771 + 0,331 \cdot 0,9906 \approx 0,98664\, \textit{біта}.$$

Для знаходження ймовірностей появи символів алфавіту Y знайдемо, спочатку, ймовірності сумісної появи символів.

$p(x_1, y_1) = p(x_1) \cdot p(y_1|x_1) = 0,444 \cdot 0,36 = 0,15984$;

$p(x_2, y_1) = p(x_2) \cdot p(y_1|x_2) = 0,225 \cdot 0,12 = 0,027$;

$p(x_3, y_1) = p(x_3) \cdot p(y_1|x_3) = 0,331 \cdot 0,52 = 0,17212$;

$p(x_1, y_2) = p(x_1) \cdot p(y_2|x_1) = 0,444 \cdot 0,48 = 0,21312$;

$p(x_2, y_2) = p(x_2) \cdot p(y_2|x_2) = 0,225 \cdot 0,27 = 0,06075$;

$p(x_3, y_2) = p(x_3) \cdot p(y_2|x_3) = 0,331 \cdot 0,25 = 0,08275$.

Тоді

$p(y_1) = 0,15984 + 0,027 + 0,17212 \approx 0,36$;

$p(y_2) = 0,21312 + 0,06075 + 0,08275 \approx 0,36$.

Отже, $H(Y) = -2 \cdot 0,36 \cdot \log_2 0,36 = 1,0612$, а значення повної взаємної інформації $I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = 1,0612 - 0,9866 = 0,0746$ *біта*.

Марковське дискретне джерело інформації з алфавітом $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ та глибиною пам'яті $h = 1$ описується такою матрицею умовних ймовірностей:

$$\begin{pmatrix} p(x_1|x_1) & p(x_2|x_1) & p(x_3|x_1) \\ p(x_1|x_2) & p(x_2|x_2) & p(x_3|x_2) \\ p(x_1|x_3) & p(x_2|x_3) & p(x_3|x_3) \end{pmatrix}.$$

Даній матриці відповідає така система:

$$\begin{aligned} &p(x_1) = p(x_1) \cdot p(x_1|x_1) + p(x_2) \cdot p(x_1|x_2) + p(x_3) \cdot p(x_1|x_3); \\ &p(x_2) = p(x_1) \cdot p(x_2|x_1) + p(x_2) \cdot p(x_2|x_2) + p(x_3) \cdot p(x_2|x_3); \\ &p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) = 1. \end{aligned}$$

Тоді, $H_{П_1}(X) = \sum\limits_{i=1}^{M} p(x_i) \cdot H(X|x_i)$, де $H\left(X|x_i\right) = -\sum\limits_{k=1}^{M} p\left(x_k|x_i\right) \log_2 \left(x_k|x_i\right)$.

Приклад 3.4 Марковське дискретне джерело інформації має алфавіт $X=\{x_1,x_2\}$. Статистичні зв'язки розповсюджуються тільки на суміжні символи. Числові значення умовних ймовірностей $\begin{pmatrix} p(x_1|x_1) & p(x_2|x_1) \\ p(x_1|x_2) & p(x_2|x_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,84 & 0,16 \end{pmatrix}$ та тривалості символів τ_i (в мілісекундах, *мс*) $\tau_1=3,5мс$ $\tau_2=2,0мс$. Отримати числові значення ентропії, продуктивності та надмірності джерела.

Розв'язування

З умови задачі маємо:

$$\begin{cases} p(x_1)=0,75p(x_1)+0,84p(x_2) \\ p(x_2)=0,25p(x_1)+0,16p(x_2) \\ p(x_1)+p(x_2)=1 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} -0,25p(x_1)+0,84p(x_2)=0 \\ 0,25p(x_1)-0,84p(x_2)=0 \\ p(x_1)=1-p(x_2) \end{cases},$$

$p(x_1)=0,771$ $p(x_2)=0,229$.

Тоді умовна частинна ентропія:

$H(X|x_1)=-0,75\log_2 0,75-0,25\log_2 0,25=0,8113;$

$H(X|x_2)=-0,84\log_2 0,84-0,16\log_2 0,16=0,6343,$

а отже ентропія марковського джерела

$$H_{П_1}(X)=\sum_{i=1}^{M} p(x_i)H\left(X|x_i\right)=0,771\cdot 0,8113+0,229\cdot 0,6343=0,771;$$

продуктивність $\overline{H_{П_1}}=\dfrac{0,771}{0,771\cdot 3,5+0,229\cdot 2,0}=\dfrac{0,771}{3,1565\cdot 10^{-3}}\approx 244,26\,біт/с$;

надмірність $R_{П_1}=1-\dfrac{0,771}{\log_2 2}=0,229$.

Альтернативні підходи до визначення кількості інформації

1. *Семантичний*

Тезаурусом називають словник, в якому наведено не тільки значення окремих слів, а й змістовні зв'язки між ними, деякий узагальнений довідник, що визначає рівень знань одержувача про повідомлення. При цьому повідомлення, що містять нову для одержувача інформацію, зберігають, збагачуючи тезаурус.

2. *Прагматичний підхід*

$$I = \log_2 \frac{p_1}{p_0},$$

де p_0 – початкова (до отримання відомостей) ймовірність досягнення мети;
p_1 – ймовірність досягнення мети після отримання інформації.

При цьому можливі три різні випадки:

а) Отримана інформація не змінює ймовірності, тобто $I = 0$. Таку інформацію називають порожньою.

б) Якщо ймовірність досягнення мети збільшується: $p_1 > p_0 \Rightarrow I > 0$, то прагматична інформація зросла.

в) Якщо ймовірність зменшилася: $p_1 < 0 \Rightarrow I < 0$, це означає, що отримана інформація є негативною, тобто дезінформацією.

Зауважимо, що прагматичні та семантичні оцінки важко розмежувати, а в деяких випадках вони збігаються.

Вправи самостійної роботи

1. Отримати числові значення ентропії, продуктивності та надмірності немарковського дискретного джерела інформації з алфавітом $M = 4$. Значення ймовірностей $p(x_i)$ виникнення символів та їх тривалостей τ_i (в мілісекундах, *мс*) для різних варіантів наведені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

№	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$p(x_4)$	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
1	0,33	0,08	0,15	0,44	1,2	0,2	0,8	0,5
2	0,21	0,16	0,03	0,6	5,4	1,5	2,3	1,2
3	0,15	0,28	0,34	0,24	15	7	5	10
4	0,05	0,08	0,11	0,76	8,6	3,4	5,8	0,9
5	0,62	0,28	0,04	0,06	0,3	0,4	0,6	0,8
6	0,17	0,41	0,23	0,19	2,6	1,1	0,5	7,3
7	0,55	0,15	0,06	0,24	3,3	5,1	1,2	1,2
8	0,08	0,35	0,27	0,3	0,1	0,3	0,5	0,8
9	0,22	0,33	0,05	0,4	2,2	1,8	0,5	3
10	0,62	0,12	0,08	0,18	1,8	0,8	0,6	0,5
11	0,26	0,14	0,50	0,1	3,7	2,1	1,2	1,5
12	0,14	0,33	0,27	0,26	0,2	0,1	0,5	1,5
13	0,18	0,03	0,64	0,15	2,5	1,4	0,7	2,2
14	0,37	0,18	0,06	0,39	5	14	8	3
15	0,25	0,15	0,33	0,27	1,8	1,2	0,8	0,5
16	0,09	0,44	0,28	0,19	36	18	28	8
17	0,66	0,15	0,15	0,04	3,4	5,8	1,3	2,5
18	0,22	0,05	0,16	0,57	0,5	0,3	0,2	0,8
19	0,53	0,24	0,15	0,08	7,6	2,1	1,5	8,3
20	0,18	0,22	0,25	0,35	2,8	3,5	4,8	1,3

2. Маємо два немарковських дискретних джерела інформації з алфавітами $X = \{x_1, x_2\}$ та $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Числові значення ймовірностей $p(x_i, y_k)$ сумісного виникнення символів на виходах джерел для різних варіантів наведені в таблиці 3.3. Чому дорівнює ентропія системи двох джерел? Яке з цих джерел має найбільшу надмірність? Чи є джерела статистично незалежними?

Таблиця 3.3

№	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$p(x_1, y_3)$	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$p(x_2, y_3)$
1	0,15	0,08	0,25	0,3	0,16	0,06
2	0,12	0,04	0,24	0,18	0,06	0,36
3	0,33	0,11	0,06	0,06	0,11	0,33
4	0,05	0,08	0,11	0,36	0,25	0,15
5	0,22	0,28	0,04	0,06	0,15	0,25
6	0,17	0,21	0,23	0,12	0,08	0,19
7	0,24	0,03	0,03	0,56	0,07	0,07
8	0,08	0,08	0,3	0,12	0,12	0,3
9	0,12	0,33	0,05	0,24	0,15	0,11
10	0,09	0,18	0,18	0,11	0,22	0,22
11	0,22	0,09	0,18	0,18	0,11	0,22
12	0,14	0,28	0,08	0,26	0,14	0,1
13	0,42	0,12	0,06	0,28	0,08	0,04
14	0,03	0,18	0,26	0,26	0,12	0,15
15	0,15	0,15	0,43	0,08	0,08	0,11
16	0,21	0,08	0,28	0,15	0,12	0,16
17	0,16	0,05	0,04	0,24	0,06	0,45
18	0,02	0,05	0,43	0,02	0,33	0,15
19	0,15	0,05	0,05	0,45	0,15	0,15
20	0,06	0,03	0,01	0,54	0,27	0,09

3. Маємо два немарковських дискретних джерела інформації з алфавітами $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ та $Y = \{y_1, y_2\}$. Числові значення безумовних $p(x_i)$ та умовних $p(y_k | x_i)$ ймовірностей виникнення символів на виході джерела з алфавітом Y відомі та для різних варіантів наведені у таблиці 3.4. Отримати числове значення повної взаємної інформації $I(X, Y)$. Яке з цих джерел має більшу надмірність?

Таблиця 3. 4

№	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$\begin{pmatrix} p(y_1\|x_1) & p(y_1\|x_2) & p(y_1\|x_3) \\ p(y_2\|x_1) & p(y_2\|x_2) & p(y_2\|x_3) \end{pmatrix}^T$
1	0,37	0,594	0,036	$\begin{pmatrix} 0{,}56 & 0{,}1 & 0{,}34 \\ 0{,}36 & 0{,}62 & 0{,}02 \end{pmatrix}^T$
2	0,498	0,24	0,262	$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}33 & 0{,}3 & 0{,}37 \end{pmatrix}^T$
3	0,5	0,24	0,26	$\begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}12 & 0{,}12 \\ 0{,}24 & 0{,}36 & 0{,}4 \end{pmatrix}^T$
4	0,575	0,29	0,135	$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}55 & 0{,}2 \end{pmatrix}^T$
5	0,304	0,29	0,406	$\begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}15 & 0{,}49 \\ 0{,}16 & 0{,}65 & 0{,}19 \end{pmatrix}^T$

6	0,479	0,348	0,173	$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}19 & 0{,}41 \\ 0{,}5 & 0{,}39 & 0{,}11 \end{pmatrix}^T$
7	0,206	0,168	0,626	$\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}18 & 0{,}67 \\ 0{,}43 & 0{,}12 & 0{,}45 \end{pmatrix}^T$
8	0,266	0,466	0,268	$\begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}48 & 0{,}24 \\ 0{,}14 & 0{,}34 & 0{,}52 \end{pmatrix}^T$
9	0,424	0,136	0,44	$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}12 & 0{,}48 \\ 0{,}55 & 0{,}22 & 0{,}23 \end{pmatrix}^T$
10	0,656	0,188	0,156	$\begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}23 & 0{,}03 \\ 0{,}54 & 0{,}13 & 0{,}33 \end{pmatrix}^T$
11	0,257	0,504	0,239	$\begin{pmatrix} 0{,}17 & 0{,}33 & 0{,}5 \\ 0{,}27 & 0{,}53 & 0{,}2 \end{pmatrix}^T$
12	0,412	0,202	0,386	$\begin{pmatrix} 0{,}37 & 0{,}58 & 0{,}05 \\ 0{,}42 & 0{,}13 & 0{,}45 \end{pmatrix}^T$
13	0,181	0,449	0,37	$\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}48 & 0{,}37 \\ 0{,}25 & 0{,}38 & 0{,}37 \end{pmatrix}^T$
14	0,368	0,178	0,454	$\begin{pmatrix} 0{,}53 & 0{,}34 & 0{,}13 \\ 0{,}33 & 0{,}14 & 0{,}53 \end{pmatrix}^T$
15	0,532	0,082	0,386	$\begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}16 & 0{,}1 \\ 0{,}34 & 0{,}01 & 0{,}65 \end{pmatrix}^T$
16	0,236	0,328	0,436	$\begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}14 & 0{,}53 \\ 0{,}13 & 0{,}54 & 0{,}33 \end{pmatrix}^T$
17	0,483	0,221	0,296	$\begin{pmatrix} 0{,}27 & 0{,}15 & 0{,}58 \\ 0{,}57 & 0{,}25 & 0{,}18 \end{pmatrix}^T$
18	0,312	0,348	0,34	$\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}15 & 0{,}67 \\ 0{,}38 & 0{,}45 & 0{,}17 \end{pmatrix}^T$
19	0,168	0,286	0,546	$\begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}17 & 0{,}72 \\ 0{,}31 & 0{,}57 & 0{,}12 \end{pmatrix}^T$
20	0,444	0,225	0,331	$\begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}12 & 0{,}52 \\ 0{,}48 & 0{,}27 & 0{,}25 \end{pmatrix}^T$

4. Марковське дискретне джерело інформації має алфавіт $X = \{x_1, x_2\}$. Статистичні зв'язки розповсюджуються тільки на суміжні символи (тобто глибина пам'яті $h = 1$). Числові значення умовних ймовірностей $p(x_i | x_k)$ та тривалостей символів τ_i (в мілісекундах, *мс*) для різних варіантів наведені в таблиці 3.5. Отримати числові значення ентропії, продуктивності та надмірності джерела.

Таблиця 3.5

№	$p(x_1 \| x_1)$	$p(x_2 \| x_1)$	$p(x_1 \| x_2)$	$p(x_2 \| x_2)$	τ_1	τ_2
1	0,53	0,47	0,25	0,75	0,1	0,3
2	0,22	0,78	0,43	0,57	3,3	5,1
3	0,15	0,85	0,64	0,36	2,6	1,1
4	0,92	0,08	0,84	0,16	0,3	0,4
5	0,62	0,38	0,24	0,76	2,3	1,4
6	0,59	0,41	0,61	0,39	8,6	3,4
7	0,35	0,65	0,16	0,84	15	7
8	0,55	0,45	0,97	0,03	5,4	1,5
9	0,12	0,88	0,35	0,65	1,2	0,2
10	0,58	0,42	0,82	0,18	2,8	3,5
11	0,16	0,84	0,52	0,48	7,6	2,1
12	0,64	0,36	0,83	0,17	0,5	0,3
13	0,18	0,82	0,44	0,56	2,5	1,4
14	0,8	0,2	0,71	0,29	3,4	5,8
15	0,25	0,75	0,33	0,67	36	18
16	0,55	0,45	0,11	0,89	0,6	1,8
17	0,21	0,79	0,16	0,84	1,8	1,2
18	0,95	0,05	0,63	0,37	5	14
19	0,23	0,77	0,51	0,49	0,2	0,1
20	0,75	0,25	0,84	0,16	3,7	2,1

Технічні системи. *Канал зв'язку* – сукупність технічних засобів та фізичного середовища розповсюдження сигналу, яка забезпечує передачу повідомлень від джерела до одержувача незалежно від передачі повідомлень між іншими джерелами та одержувачами по цій лінії зв'язку.

Теорія інформації. *Канал зв'язку* – математична модель, яка описує перетворення вхідного сигналу у вихідний.

Головна класифікаційна ознака – різновиди вхідного та вихідного сигналів.

Якщо на вході та виході каналу діють неперервні сигнали, то канал називають ***аналоговим.***

Якщо на вході і виході каналу мають місце послідовності символів вхідного та вихідного алфавітів, то канал називають ***цифровим (дискретним).***

КЛАСИФІКАЦІЯ КАНАЛІВ ЗВ'ЯЗКУ

- Канал без витирання (потужності вхідного та вихідного алфавітів збігаються)
- Канал з витиранням (потужність вихідного алфавіту на одиницю більша за потужність вхідного алфавіту за рахунок додаткового символа витирання. Символ витирання з'являється тоді, коли сигнал, за допомогою якого передавався символ, був істотно спотворений. Наявність цього символа знижує ймовірність помилок, але вносить суттєву невизначеність відносно того, який символ було передано)
- Однорідний (стаціонарний) канал (умовні ймовірності появи на виході каналу в деякий момент часу символа y_k за умови, що на вході каналу в цей же момент передано символ x_i, не залежать від часу. Такі ймовірності називають *перехідними*)
- Канал без пам'яті (перехідні ймовірності не залежать від передісторії)
- Канал симетричний щодо входу (всі рядки матриці перехідних ймовірностей утворені перестановкою елементів її першого рядка)
- Канал симетричний щодо виходу (всі стовпці матриці перехідних ймовірностей утворені перестановкою елементів її першого стовпця)
- Канал симетричний в послабленому значенні (канал симетричний щодо входу і виходу)
- Канал симетричний в посиленому значенні (канал, для якого ймовірність помилки при передачі будь-якого символа не залежить від виду помилки)
- Біноміальний канал (канал без пам'яті та без витирання)

ХАРАКТЕРИСТИКИ КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ

Швидкість передачі інформації $\overline{I}$ – кількість інформації, що передається по каналу за одиницю часу,

$$\overline{I} = v_0 I\left(Y, X\right) \text{ (біт/с)}$$

Середня швидкість передачі символів v_0 – середня кількість символів, що передаються по каналу за одиницю часу (1 Бод відповідає передачі 1 символа за секунду). Як правило, час перебування символа на вході та на виході каналу є однаковим (T), тоді

$$v_0 = \frac{1}{T}.$$

Пропускна спроможність каналу C – це максимально можлива швидкість передачі інформації через цей канал (біт/с), що визначає потенційні можливості каналу: $C = v_0\left[\log_2 M + H\left(Y|x_1\right)\right]$.

Приклад 4.1 Знайти пропускну спроможність трійкового стаціонарного каналу без пам'яті, який має матрицю перехідних ймовірностей

$$\begin{pmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & p(y_3|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) & p(y_3|x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,07 & 0,03 \\ 0,03 & 0,9 & 0,07 \\ 0,07 & 0,03 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Швидкість передачі символів по каналу $v_0 = 100$ *Бод*.

Знайти середню кількість інформації, що переноситься одним символом, та швидкість передачі інформації по такому каналу від дискретного джерела з алфавітом $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, якщо ймовірності виникнення символів $p(x_1) = 0,6;\quad p(x_2) = 0,3;\quad p(x_3) = 0,1.$

Часові характеристики джерела та каналу узгоджені, тобто, тривалість кожного символа на виході джерела $\tau_i = T = \dfrac{1}{v_0} = 0,01c.$

Розв'язування

$C = v_0\left[\log_2 M + H\left(Y|x_1\right)\right] =$

$= 100 \cdot \left[1,585 - 0,9\log_2 0,9 - 0,07\log_2 0,07 - 0,03\log_2 0,03\right] = 102,8\ Біт/с.$

$H(Y|x_1) = -0,9\log_2 0,9 - 0,07\log_2 0,07 - 0,03\log_2 0,03 = 0,1368 + 0,2686 + 0,1518 = 0,557$

$H(Y|x_2) = H(Y|x_3) = 0,557$, тоді $H\left(Y|X\right) = 0,557$.

Знайдемо ймовірності появи символів на виході джерела.

$p(y_1) = 0,9 \cdot 0,6 + 0,03 \cdot 0,3 + 0,07 \cdot 0,1 = 0,556;$

$p(y_2) = 0,07 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,1 = 0,315;$

$p(y_3) = 0,03 \cdot 0,6 + 0,07 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,1 = 0,129.$

Тоді ентропія на виході $H(Y) = 1,377$ *Біт.*

Нарешті $\overline{I} = 100 \cdot (1,377 - 0,557) = 82$ *Біт/с*.

Приклад 4.2 Маємо трійковий стаціонарний канал без пам'яті та без витирання. Ймовірності $p(x_i, y_k)$ сумісного виникнення символа x_i на вході каналу та символа y_k – на його виході

$$\begin{pmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_2,y_1) & p(x_3,y_1) \\ p(x_1,y_2) & p(x_2,y_2) & p(x_3,y_2) \\ p(x_1,y_3) & p(x_2,y_3) & p(x_3,y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 & 0,02 & 0,15 \\ 0,03 & 0,26 & 0,1 \\ 0,02 & 0,04 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Знайти середню кількість $I(X,Y)$ інформації, що переноситься одним символом, швидкість $\overline{I}$ передачі інформації по каналу та пропускну спроможність C каналу. Швидкість $v_0 = 1200$ *Бод.*

Розв'язування

Знайдемо ймовірності появи відповідних символів на вході і виході каналу:

$p(x_1) = 0,18 + 0,03 + 0,02 = 0,23;$ $p(x_2) = 0,02 + 0,26 + 0,04 = 0,32;$

$p(x_3) = 0,15 + 0,1 + 0,2 = 0,45;$ $p(y_1) = 0,18 + 0,02 + 0,15 = 0,35;$

$p(y_2) = 0,03 + 0,26 + 0,1 = 0,39;$ $p(y_3) = 0,02 + 0,04 + 0,2 = 0,26.$

Для знаходження перехідних ймовірностей скористаємось рівностями:

$$p(x_i, y_i) = p(x_i) \cdot p(y_i | x_i) \Rightarrow p(y_i | x_i) = \frac{p(x_i, y_i)}{p(x_i)}, \quad i = 1,2,3:$$

$$p(y_1|x_1) = \frac{0,18}{0,23} \approx 0,78; \quad p(y_2|x_1) = \frac{0,03}{0,23} \approx 0,13; \quad p(y_3|x_1) = \frac{0,02}{0,23} \approx 0,09;$$

$$p(y_1|x_2) = \frac{0,02}{0,32} \approx 0,06; \quad p(y_2|x_2) = \frac{0,26}{0,32} \approx 0,81; \quad p(y_3|x_2) = \frac{0,04}{0,32} \approx 0,13;$$

$$p(y_1|x_3) = \frac{0,15}{0,45} \approx 0,35; \quad p(y_2|x_3) = \frac{0,1}{0,45} \approx 0,22; \quad p(y_3|x_3) = \frac{0,2}{0,45} \approx 0,44.$$

Тоді умовні частинні ентропії:

$$H(Y|x_1) = -0,78\log_2 0,78 - 0,13\log_2 0,13 - 0,09\log_2 0,09 =$$
$$= 0,2796 + 0,3826 + 0,3127 = 0,9749;$$

$$H(Y|x_2) = -0,06\log_2 0,06 - 0,81\log_2 0,81 - 0,13\log_2 0,13 =$$
$$= 0,2435 + 0,2462 + 0,3826 = 0,8723;$$

$$H(Y|x_3) = -0,35\log_2 0,35 - 0,22\log_2 0,22 - 0,44\log_2 0,44 =$$
$$= 0,5378 + 0,4806 + 0,5211 = 1,5395,$$

а повна умовна ентропія

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^{3} H(Y|x_i)\,p(x_i) = 0,9749 \cdot 0,23 + 0,8723 \cdot 0,32 + 1,5395 \cdot 0,45 = 1,1961.$$

Знайдемо ентропію на виході каналу

$$H(Y) = -0,35\log_2 0,35 - 0,39\log_2 0,39 - 0,26\log_2 0,26 =$$
$$= 0,5301 + 0,5298 + 0,5053 = 1,5652.$$

Тоді середня кількість інформації визначається так:

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = 1,5652 - 1,1961 = 0,3691 \text{ } \textit{Біт},$$

швидкість передачі інформації по каналу

$$\bar{I} = v_0 I\left(Y, X\right) = 1200 \cdot 0,3691 = 442,92 \text{ } \textit{Біт/с},$$

пропускна спроможність каналу

$$C = v_0\left[\log_2 3 + H\left(Y|x_1\right)\right] = 1200 \cdot \left[1,585 + 0,9749\right] = 3071,88 \text{ } \textit{Біт/с}.$$

Завдання 4.3 Розрахувати пропускну спроможність двійкового стаціонарного симетричного щодо входу каналу без пам’яті з витиранням. Задано ймовірності прийому двійкового символа $q = 0,84$; ймовірності помилки при його передачі по каналу $p_П = 0,01$; ймовірності витирання символа $p_B = 0,1$, а також швидкість $v_0 = 600$ *Бод* передачі символів по каналу.

Розв’язування

$$\max H(Y) = -2 \cdot \frac{q + p_П}{2}\log_2\frac{q + p_П}{2} - p_B\log_2 p_B.$$

В нашому випадку

$$\max H(Y) = -2 \cdot \frac{0,84 + 0,01}{2} \log_2 \frac{0,84 + 0,01}{2} - 0,1 \log_2 0,1 =$$
$$= 2 \cdot 0,5236 + 0,3226 = 1,3698.$$

Повна умовна ентропія $H(Y|X) = -q \log_2 q - p_П \log_2 p_П - p_В \log_2 p_В$,
а в нашому випадку

$$H(Y|X) = -0,84 \log_2 0,84 - 0,01 \log_2 0,01 - 0,1 \log_2 0,1 =$$
$$= 0,2113 + 0,0664 + 0,3322 = 0,6099.$$

Середня кількість $I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = 0,7599$, а пропускна спроможність каналу $C = v_0 I(X,Y) = 600 \cdot 0,7599 = 455,94$ *Біт/с.*

Вправи для самостійної роботи

1. Маємо трійковий стаціонарний канал без пам'яті та без витирання. Ймовірності $p(x_i, y_k)$ сумісного виникнення символа x_i на вході каналу, та символа y_k – на його виході для різних варіантів наведені в другому стовпці таблиці 4.1. Знайти середню кількість $I(X,Y)$ інформації, що переноситься одним символом, швидкість $\overline{I}$ передачі інформації по каналу та пропускну спроможність C каналу. Числові значення швидкості v_0 передачі символів по каналу (в *Бодах)* наведені в третьому стовпці таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

№ варіанта	$\begin{pmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_2,y_1) & p(x_3,y_1) \\ p(x_1,y_2) & p(x_2,y_2) & p(x_3,y_2) \\ p(x_1,y_3) & p(x_2,y_3) & p(x_3,y_3) \end{pmatrix}$	v_0, *Бод*
1	$\begin{pmatrix} 0,170 & 0,015 & 0,050 \\ 0,020 & 0,255 & 0,025 \\ 0,010 & 0,030 & 0,425 \end{pmatrix}$	500
2	$\begin{pmatrix} 0,360 & 0,016 & 0,012 \\ 0,024 & 0,360 & 0,008 \\ 0,016 & 0,024 & 0,180 \end{pmatrix}$	750
3	$\begin{pmatrix} 0,075 & 0,020 & 0,100 \\ 0,020 & 0,300 & 0,025 \\ 0,005 & 0,080 & 0,375 \end{pmatrix}$	1000
4	$\begin{pmatrix} 0,200 & 0,015 & 0,060 \\ 0,025 & 0,120 & 0,060 \\ 0,025 & 0,015 & 0,480 \end{pmatrix}$	1200
5	$\begin{pmatrix} 0,255 & 0,007 & 0,048 \\ 0,024 & 0,085 & 0,042 \\ 0,021 & 0,008 & 0,51 \end{pmatrix}$	1500
6	$\begin{pmatrix} 0,105 & 0,025 & 0,120 \\ 0,030 & 0,175 & 0,060 \\ 0,015 & 0,050 & 0,420 \end{pmatrix}$	2000
7	$\begin{pmatrix} 0,276 & 0,010 & 0,015 \\ 0,009 & 0,184 & 0,025 \\ 0,015 & 0,006 & 0,460 \end{pmatrix}$	3000
8	$\begin{pmatrix} 0,255 & 0,015 & 0,040 \\ 0,030 & 0,255 & 0,020 \\ 0,015 & 0,030 & 0,340 \end{pmatrix}$	6000
9	$\begin{pmatrix} 0,045 & 0,018 & 0,030 \\ 0,003 & 0,405 & 0,020 \\ 0,002 & 0,027 & 0,450 \end{pmatrix}$	1200

10	$\begin{pmatrix} 0{,}450 & 0{,}015 & 0{,}020 \\ 0{,}120 & 0{,}225 & 0{,}005 \\ 0{,}030 & 0{,}060 & 0{,}075 \end{pmatrix}$	2400
11	$\begin{pmatrix} 0{,}280 & 0{,}020 & 0{,}045 \\ 0{,}035 & 0{,}160 & 0{,}045 \\ 0{,}035 & 0{,}020 & 0{,}360 \end{pmatrix}$	500
12	$\begin{pmatrix} 0{,}425 & 0{,}021 & 0{,}016 \\ 0{,}040 & 0{,}255 & 0{,}014 \\ 0{,}035 & 0{,}024 & 0{,}170 \end{pmatrix}$	750
13	$\begin{pmatrix} 0{,}385 & 0{,}015 & 0{,}060 \\ 0{,}110 & 0{,}105 & 0{,}030 \\ 0{,}055 & 0{,}030 & 0{,}210 \end{pmatrix}$	1000
14	$\begin{pmatrix} 0{,}552 & 0{,}015 & 0{,}003 \\ 0{,}018 & 0{,}276 & 0{,}005 \\ 0{,}030 & 0{,}009 & 0{,}092 \end{pmatrix}$	1200
15	$\begin{pmatrix} 0{,}170 & 0{,}035 & 0{,}010 \\ 0{,}020 & 0{,}595 & 0{,}005 \\ 0{,}010 & 0{,}070 & 0{,}085 \end{pmatrix}$	1500
16	$\begin{pmatrix} 0{,}405 & 0{,}006 & 0{,}024 \\ 0{,}027 & 0{,}135 & 0{,}016 \\ 0{,}018 & 0{,}009 & 0{,}360 \end{pmatrix}$	2000
17	$\begin{pmatrix} 0{,}075 & 0{,}025 & 0{,}080 \\ 0{,}020 & 0{,}375 & 0{,}020 \\ 0{,}005 & 0{,}100 & 0{,}300 \end{pmatrix}$	3000
18	$\begin{pmatrix} 0{,}280 & 0{,}015 & 0{,}050 \\ 0{,}035 & 0{,}120 & 0{,}050 \\ 0{,}035 & 0{,}015 & 0{,}400 \end{pmatrix}$	600
19	$\begin{pmatrix} 0{,}170 & 0{,}021 & 0{,}040 \\ 0{,}016 & 0{,}255 & 0{,}035 \\ 0{,}014 & 0{,}024 & 0{,}425 \end{pmatrix}$	1200
20	$\begin{pmatrix} 0{,}245 & 0{,}035 & 0{,}060 \\ 0{,}070 & 0{,}245 & 0{,}030 \\ 0{,}035 & 0{,}070 & 0{,}210 \end{pmatrix}$	2400

2. Розрахувати пропускну спроможність двійкового стаціонарного симетричного щодо входу каналу без пам'яті з витиранням. Дано ймовірності:

- **правильного прийому двійкового символа** q**;**
- **помилки при його передачі по каналу** $p_П$**;**
- **витирання символа** $p_В$**,**

а також швидкість v_0 **передачі символів по каналу (в *Бодах)* для різних варіантів наведені в таблиці 4.2.**

Таблиця 4.2

№ варіанта	q	$p_П$	$p_В$	v_0	№ варіанта	q	$p_П$	$p_В$	v_0
1	0,90	0,02	0,08	1000	11	0,90	0,03	0,07	2000
2	0,87	0,01	0,12	1200	12	0,95	0,01	0,04	3000
3	0,95	0,01	0,04	1500	13	0,87	0,03	0,10	1600
4	0,88	0,03	0,09	2000	14	0,84	0,04	0,12	1200
5	0,83	0,03	0,14	3000	15	0,94	0,01	0,05	2400
6	0,80	0,02	0,18	1600	16	0,81	0,02	0,17	1500
7	0,92	0,02	0,06	1200	17	0,88	0,02	0,10	1750
8	0,80	0,05	0,15	2400	18	0,86	0,03	0,11	1000
9	0,91	0,01	0,08	1500	19	0,93	0,01	0,06	1200
10	0,88	0,02	0,10	1750	20	0,89	0,01	0,10	1500

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І., Ковальчук М. Б. Теорія рядів : навчальний посібник Вінниця : ВНТУ, 2018. 138 с.
2. Анпілогов Д. І., Сніжко Н. В. Ряди : навч. посібник. Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. 124 с.
3. Вища математика: Ряди та їх застосування, теорія функцій комплексної змінної : конспект лекцій / Федоренко Н. Д.та ін. К. : КНУБА, 2015. 60 с.
4. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч. 1 : навчальний посібник / Хом'юк І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б, Хом'юк В. В. Вінниця : ВНТУ, 2017. 145 с.
5. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч. 2: навчальний посібник / Хом'юк І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б., Хом'юк В. В. Вінниця : ВНТУ, 2017. 162 с.
6. Личковський Е. І., Свердан П. Л. Вища математика. Теорія наукових досліджень : підручник. Київ : Знання. 2012. 476 с.
7. Основи дискретної математики : підручник //Ю. В. Капітонова та ін. Київ : Наукова думка, 2018. 580 с.
8. James A. Anderson Discrete Mathematics with Combinatorics. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2014. 960 p.
9. Шевченко Г. В. Дискретна математика : навчально-методичний посібник. К. : ДУТ, 2015. 158 с.
10. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики : навчальний посібник / Уклад.: Ушенко Ю. О., Гавриляк М. С., Талах М. В., Дворжак В. В. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. 308 с.
11. Жураковський Ю. П., Гніліцький В. В. Теорія інформації та кодування в задачах : навчальний посібник. Житомир : ЖІТІ, 2002. 230 с.
12. Білоусова Т. П., Вигоднер І. В., Ляхович Т. П. Прикладна математика [Текст] : навч. посіб. Херсон : ОЛДІ-плюс, 2019. 157 с.
13. Гече Ф. Е. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібн. Ужгород : ПП «АУТДОР-ШАРК», 2019. 235 с.
14. Дискретна математика: конспект лекцій / Думіна О. О., Колбасіна Є. Ю., Удодова О. І., Шувалова Ю. С. Харків : УкрДАЗТ, 2014. 20 с.
15. Мастиновський Ю. В., Анпілогов Д. І. Математичні поняття, визначення, теореми і формули : (довідковий посібникЗапоріжжя : ЗНТУ, 2015. 171 с.

Навчальне електронне видання
комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Ковальчук Майя Борисівна

ОКРЕМІ РОЗДІЛИ СПЕЦКУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *Н. Сачанюк-Кавецькою*
Редактор *В. Дружиніна*
Оригінал-макет виготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 28.06.2023 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2023-066.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: irvc.ed.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.