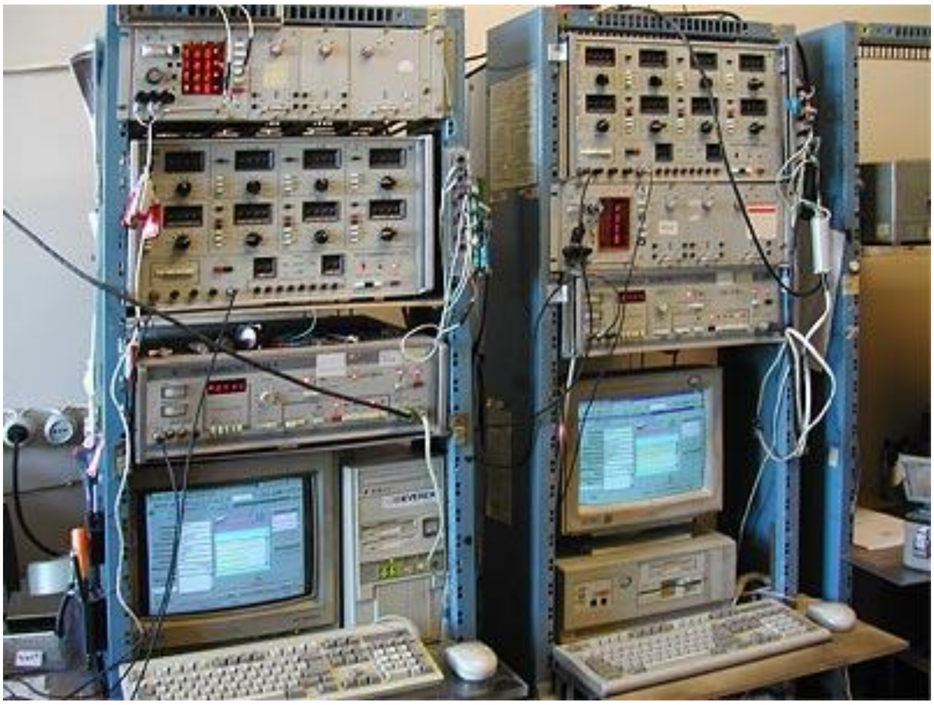
О. М. Васілевський
О. Г. Ігнатенко

НОРМУВАННЯ ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ



Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

О. М. Васілевський, О. Г. Ігнатенко

НОРМУВАННЯ ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2013

УДК 621.3
ББК 30.10
В19

Рекомендовано до видання Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів технічних спеціальностей. Лист № 1/11-10881 від 22.11.11 р.

Рецензенти:
Є. Т. Володарський, доктор технічних наук, професор
В. П. Кваснiков, доктор технічних наук, професор
П. Г. Столярчук, доктор технічних наук, професор

Васілевський О. М.
В19 Нормування показників надійності технічних засобів : навчальний посібник / О. М. Васілевський, О. Г. Ігнатенко. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 160 с.

В навчальному посібнику розглянуто фундаментальні основи теорії надійності, методи розрахунку показників експлуатаційної надійності, метрологічної надійності та надійності програмного забезпечення, а також методи підвищення надійності технічних засобів. Навчальний посібник розроблений згідно з планом кафедри та програмою дисципліни "Нормування показників надійності технічних засобів" для студентів технічних спеціальностей, а також аспірантів, які навчаються за спеціальностями 05.11.13, 05.13.05, 05.02.01 та 05.11.08.

УДК 621.3
ББК 30.10

ЗМІСТ

В С Т У П

Враховуючи значимість сучасних технічних засобів (ТЗ) в людській діяльності, вимоги до їх надійності постійно підвищуються. Це пов'язано з тим, що від правильної роботи ТЗ залежать хід виконання технологічних процесів, достовірність отримання результатів вимірювань і обробки даних, і т.п. Питанням підвищення надійності ТЗ на всіх етапах їх проектування та виробництва приділяється найбільша увага.

Проблема забезпечення заданого рівня надійності ТЗ залежить не тільки від того наскільки глибоко розроблена теорія надійності та інженерні методи, але і від того, наскільки вдало вирішені питання організації робіт із забезпечення надійності.

Забезпечення необхідного рівня надійності ТЗ потребує вирішення спеціального комплексу інженерних задач. Однією із перших яких є нормування показників надійності ТЗ (результат якого - чіткі кількісні вимоги до виробу), що впливає на весь процес створення ТЗ.

Таким чином, вище викладене є першою причиною необхідності нормування показників надійності ТЗ різного призначення при проектуванні.

Другою причиною, яка потребує нормування надійності, є підвищення складності ТЗ, апаратури їх обслуговування, умов їх експлуатації і відповідальності задач, які на них покладаються.

Недостатня надійність ТЗ призводить до збільшення долі експлуатаційних витрат порівняно з загальними витратами на проектування, виробництво і використання цих засобів. При цьому вартість експлуатації ТЗ може в багато разів перевищити вартість їх розробки і виготовлення. Крім того, відмови ТЗ призводять до різного роду наслідків: втрати важливої інформації, простою спряжених з ТЗ інших приладів і систем, до аварій тощо. Таким чином, третьою причиною підвищення ролі нормування надійності ТЗ в сучасних умовах є економічний фактор.

Нормування вимог до надійності необхідне як для самого ТЗ та його складових частин, так і для планів випробувань, для точності і достовірності вихідних даних, формулювання критеріїв відмов, пошкоджень та граничних станів, для методів контролю надійності на всіх етапах життєвого циклу ТЗ.

Тому знання основних питань нормування показників надійності ТЗ є нині необхідною умовою для успішної роботи в галузі автоматизації технологічних процесів і особливо це відноситься до майбутніх спеціалістів, які будуть займатися розробкою засобів вимірювальної техніки та комп'ютеризованих систем управління і автоматики.

Розділ 1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

1.1 Загальні положення теорії надійності

Для нормативного забезпечення методів, заходів та засобів вимірювання, спрямованих на досягнення необхідного рівня надійності, використовується система стандартів «Надійність у техніці». Ця система відповідно до міжнародного стандарту ІСО 8402-86, державних стандартів ДСТУ 2860-94 «Надійність техніки. Терміни та визначення» та ДСТУ 3004-95 «Надійність техніки. Методи оцінки показників надійності за експериментальними даними» забезпечує ефективність організаційно-технічних, конструкторсько-технологічних і експлуатаційних заходів, спрямованих на досягнення необхідного рівня надійності технічних засобів (ТЗ).

Аналізом і дослідженням цих питань займається наука, яка називається **теорією надійності (theory of dependability)**, основною задачею якої є вивчення закономірностей виникнення відмов. Ця наука базується на теорії ймовірності і математичної статистики, тому всі розрахунки надійності ТЗ носять ймовірнісний та статистичний характер.

При проектуванні **технічний засіб (hardware)** має відповідати всім технічним вимогам. Ці вимоги можна розділити на:

- головні, що забезпечують виконання заданих функцій;
- допоміжні, що пов’язані зі зручністю використання, загальним виглядом та ін.

З точки зору теорії надійності будь-який ТЗ можна охарактеризувати його властивостями, технічним станом та можливістю відновлення після втрати роботоздатності. При цьому найважливішою комплексною властивістю ТЗ є його надійність.

Надійністю (dependability) називається властивість ТЗ виконувати задані функції, зберігаючи в часі значення встановлених експлуатаційних показників в заданих межах, що відповідають заданим режимам та умовам використання, технічного обслуговування, збереження і транспортування.

Надійність включає в себе такі властивості: безвідмовність, довговічність, збереженість та ремонтопридатність.

Нормування надійності (dependability specification) – це встановлення у нормативно-технічній та (або) конструкторській (проектній) документації кількісних і якісних вимог до надійності ТЗ.

Розглянемо основні терміни та визначення, що використовуються в теорії надійності згідно з міжнародним стандартом ІСО 8402-86 та ДСТУ 2860-94 «Надійність техніки. Терміни та визначення».

Працездатність (up state) ТЗ – стан технічного засобу, при якому він здатний виконувати задані функції з параметрами, встановленими вимогами нормативно-технічної та конструкторсько-технологічної документації.

Відмова (failure) – подія, що вказує на порушення працездатності ТЗ.

Критерій відмови (failure criterion) – ознака, за якою оцінюється надійність різних ТЗ.

Безвідмовність (reliability) – властивість ТЗ безупинно зберігати роботоздатний стан протягом деякого часу.

Напрацювання (наробіток) (operating time) – тривалість роботи ТЗ в годиннах, циклах, календарних днях та ін.

Напрацювання до відмови (operating time to failure) – напрацювання ТЗ від початку його експлуатації до виникнення першої відмови.

Напрацювання між відмовами (operating time between failures) – напрацювання ТЗ від завершення відновлення його працездатного стану після відмови до виникнення наступної відмови.

Граничний стан (limiting state) – стан ТЗ, при якому його подальше застосування за призначенням стає неприпустимим чи недоцільним.

Довговічність (durability) – властивість ТЗ зберігати роботоздатний стан до настання граничного стану при встановленій системі технічного обслуговування і ремонтів.

Ремонтопридатність (maintainability) – властивість ТЗ, яка полягає в можливості попередження і виявлення причин виникнення відмов, підтримання і відновлення роботоздатного стану шляхом проведення технічного обслуговування і ремонтів.

Збережуваність (storabilily) – властивість ТЗ зберігати значення показників безвідмовності, довговічності і ремонтопридатності протягом експлуатації, зберігання та транспортування.

Ресурс (useful life) – напрацювання ТЗ від початку його експлуатації чи відновлення після ремонту до переходу в граничний стан.

Термін експлуатації (term operation) ТЗ – календарна тривалість від початку експлуатації ТЗ чи відновлення після ремонту до переходу в граничний стан.

Середній час відновлення (mean time to recovery) – це математичне сподівання часу відновлення роботоздатного стану.

Конструктивно всі ТЗ можна розділити на невідновлювані та відновлювані. **Невідновлюваними (non-repairable)** називають такі ТЗ, що у процесі виконання своїх функцій не можуть ремонтуватися, а **відновлювані (repairable)** – ремонтуються. З огляду на цю властивість окремо розраховують і нормують показники надійності для відновлюваних та невідновлюваних ТЗ.

Показник надійності (dependability index) – це кількісна характеристика однієї або декількох властивостей, що визначають надійність ТЗ.

Метрологічна справність (metrology good condition) технічного засобу – це стан ТЗ, що визначає відповідність його нормованих метрологічних характеристик встановленим вимогам.

Метрологічна надійність (metrology dependability) ТЗ – це надійність ТЗ в частині збереження його метрологічної справності.

Метрологічна відмова (metrology failure) ТЗ – це відмова ТЗ, що полягає у втраті його метрологічної справності.

Нестабільність (instability) метрологічної характеристики ТЗ – це зміна метрологічної характеристики ТЗ за встановлений інтервал часу.

Довірчі межі (confiding limits) нестабільності метрологічної характеристики ТЗ – це верхня і нижня межі інтервалу, що охоплює нестабільність метрологічної характеристики ТЗ з деякою довірчою вірогідністю.

Вірогідність (authenticity) метрологічної справності ТЗ – це вірогідність того, що в заданий момент часу ТЗ виявиться метрологічно справним.

Середній час (середнє напрацювання - mean operating time) до метрологічної відмови ТЗ – це математичне сподівання календарного часу експлуатації (напрацювання) ТЗ до першої метрологічної відмови.

Напрацювання на метрологічну відмову ТЗ – це відношення сумарного напрацювання ТЗ в стані метрологічної справності на заданий період експлуатації до математичного сподівання числа його метрологічних відмов за цей період.

Інтенсивність (intensity) метрологічних відмов ТЗ – це умовна щільність вірогідності метрологічної відмови ТЗ, яка визначається для даного моменту часу за умови, що до цього моменту відмови не відбулося.

1.2 Показники надійності невідновлюваних ТЗ

Основними нормованими показниками надійності невідновлюваних ТЗ можуть бути такі показники:

– ймовірність безвідмовної роботи, $P(t)$;
– ймовірність відмови, $Q(t)$;
– частота відмов, $a(t)$;
– інтенсивність відмов, $\lambda(t)$;
– середнє напрацювання до першої відмови, $T_{ср}$.

Оскільки час настання відмови T є величина випадкова, то $Q(t)$ – це ймовірність того, що випадкова величина T набуде значення, менше або рівне t (інтегральна функція (integral function) розподілу відмов), де t – час, за який визначається показник надійності (dependability index). Тобто

ймовірністю відмови (probability failure) називається ймовірність того, що за певних умов експлуатації в заданому інтервалі часу виникне хоча б одна відмова

$$Q(t) = P(T \le t). \tag{1.1}$$

Ймовірністю безвідмовної роботи (probability reliability work), P(t) називається ймовірність того, що за певних умов експлуатації в заданому інтервалі часу або у межах заданого напрацювання t не відбудеться жодної відмови

$$P(t) = P(T > t). \tag{1.2}$$

Оскільки безвідмовна робота і відмова є подіями неспільними і протилежними, то між ними справедливе таке співвідношення

$$P(t) + Q(t) = 1. \tag{1.3}$$

Оскільки Q(t) є законом розподілу випадкової величини (відмов), то залежність між можливими значеннями безперервної випадкової величини T та ймовірностями влучення в їх межі називається **щільністю ймовірності (density probability)**.

Вважаючи, що в момент ввімкнення ТЗ роботоздатний, тобто P(0) = 1, функція P(t) монотонно спадає від 1 до 0 так, як це показано на рис. 1.1. При цьому абсолютно зрозумілим є те, що $P(\infty) = 0$, тобто будь-який ТЗ при $t \to \infty$ з часом відмовить.

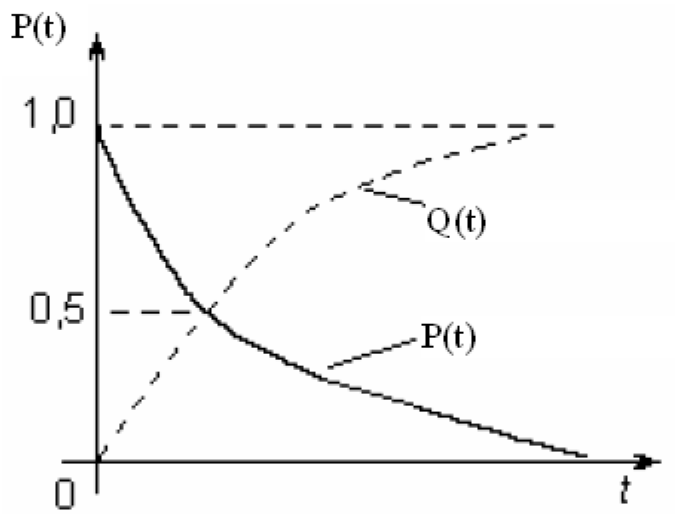


Рисунок 1.1 – Характеристики зміни ймовірності безвідмовної роботи та ймовірності відмови

На практиці використовують статичні імовірнісні характеристики, які визначають за експериментальними даними. При цьому допускається, що в досліді використовуються однакові події і випробування проводяться в однакових умовах.

Частота відмов (failure rate), a(t) є щільністю ймовірності часу роботи ТЗ до першої відмови

$$a(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{-dP(t)}{dt}. \quad (1.4)$$

Наступною важливою характеристикою є **інтенсивність відмов (intensity failure)** $\lambda(t)$, під якою розуміють ймовірність відмови в одиницю часу за умови, що до цього моменту відмови не виникало.

Інтенсивність відмов є показником безвідмовності неремонтованих і невідновлюваних об'єктів. Визначається відношенням частоти відмов a(t) до ймовірності безвідмовної роботи на даний момент часу t

$$\lambda(t)=\frac{a(t)}{P(t)}=\frac{a(t)}{1-\int_0^t a(t)dt}=-\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{dP(t)}{dt}. \quad (1.5)$$

Звідки $$\frac{dP(t)}{P(t)}=-\lambda(t)dt. \quad (1.6)$$

Із формул (1.5) і (1.6) слідує, що:

$$P(t)=e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \quad (1.7)$$

Це формула зв'язку основних показників надійності ТЗ, що не відновлюються.

Якщо λ = const, $P(t)=e^{-\lambda t}$.

При t = 0 значення $\lambda(t)$ = a(0).

Формула зв'язку показує, що всі показники надійності P(t), Q(t), a(t) і $\lambda(t)$ рівноправні в тому сенсі, що, знаючи один із них, можна визначити інші.

Середня інтенсивність відмов (mean intensity failure) – середнє значення інтенсивності відмов у заданому інтервалі часу.

$$\bar{\lambda}(t_1,t_2)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt. \quad (1.8)$$

Середнім напрацюванням до першої відмови (mean operating time to first failure), $T_{ср}$ називається математичне сподівання (момент першого порядку) M[t] часу роботи ТЗ до відмови. Математичне сподівання, тобто $T_{ср}$, обчислюється за частотою відмов (щільність розподілу часу безвідмовної роботи) так

$$M[t]=T_{ср}=\int_{-\infty}^{+\infty} ta(t)dt, \quad (1.9)$$

оскільки $t>0$ і $P(0)=1$, а $P(\infty)=0$, то $T_{ср}=\int_0^{+\infty} P(t)dt$.

Величина $T_{ср}$ – параметр функції P(t), який в багатьох випадках дозволяє відновити всю функцію.

Інколи середній час безвідмовної роботи $T_{ср}$ є прийнятною характеристикою для порівняння ТЗ за показниками безвідмовності.

Момент другого порядку розраховується за формулою

$$M_2[t] = \int_0^{+\infty} t^2 a(t)dt = -\int_0^{+\infty} t^2 dP(t). \tag{1.10}$$

З врахуванням того, що P(t) = 1 при t = 0, а $\lim\limits_{t \to \infty} t^2 P(t) = 0$, остаточно отримаємо

$$M_2[t] = \int_0^{+\infty} P(t)dt^2 = 2\int_0^{+\infty} tP(t)dt. \tag{1.11}$$

З виразу (1.11) із врахуванням (1.9) можна знайди дисперсію часу σ_T^2 безвідмовної роботи ТЗ за формулою

$$\sigma_T^2 = M_2[t] - T_{ср}^2 = 2\int_0^{+\infty} tP(t)dt - \left[\int_0^{+\infty} P(t)dt\right]^2. \tag{1.12}$$

Приклад 1.1. Інтенсивність відмов ТЗ залежить від часу і виражається функцією $\lambda(t) = k^2 t \big/ (1+kt)$. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи, частоту відмов і середнє напрацювання до першої відмови.

Розв'язування:

Ймовірність безвідмовної роботи розрахуємо за формулою (1.7). Вона після відповідних математичних перетворень набуде вигляду: $P(t) = e^{-kt}(1+kt)$.

Частота відмов визначається шляхом підстановки P(t) у формулу (1.5), яка після перетворень набуде вигляду: $a(t) = k^2 t e^{-kt}$.

Відповідно до формули (1.9) середнє напрацювання до першої відмови буде дорівнювати: $T_{ср} = 2 \big/ k$.

Статистичні оцінки (statistical estimations) показників надійності невідновлюваних ТЗ розраховуються за такими формулами.

Статистична оцінка ймовірності відмови визначається за формулою

$$\bar{Q}(t) = \frac{n(t)}{N_0}, \tag{1.13}$$

де $n(t)$ – кількість ТЗ, що відмовили за час t;

N_0 – загальна кількість ТЗ, що підлягають випробуванням.

Статистична оцінка ймовірності безвідмовної роботи буде дорівнювати

$$\bar{P}(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0} = \frac{N_t}{N_0}, \tag{1.14}$$

де N_t – кількість ТЗ, що залишилися справними на кінець часу випробовування.

Статистична оцінка частоти відмов (щільності відмов) визначається за формулою

$$\overline{a}(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t}, \qquad (1.15)$$

де $n(\Delta t)$ – кількість ТЗ, що відмовили в інтервалі часу від $t - \Delta t/2$ до $t + \Delta t/2$;

$\Delta t = (t_{з+1} - t_з)$ – інтервал часу;

$t_з$ – час початку і-го інтервалу;

$t_{з+1}$ – час кінця і-го інтервалу.

Статистична оцінка інтенсивності відмов визначається за формулою

$$\overline{\lambda}(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{ñð} \cdot \Delta t}, \qquad (1.16)$$

де $N_{ñð} = (N_з + N_{з+1})/2$ – середня кількість працездатних ТЗ, що працюють в інтервалі часу Δt;

$N_з$ – кількість працездатних ТЗ на початку інтервалу часу Δt;

$N_{з+1}$ – кількість працездатних ТЗ в кінці інтервалу часу Δt.

Знаючи моменти виходу з ладу всіх ТЗ, за якими ведеться спостереження, можна дати статистичну оцінку середнього напрацювання до першої відмови

$$\overline{T}_{cp} = \left(\sum_{i=1}^{N_i} t_i\right) / N_0, \qquad (1.17)$$

де t_i – час безвідмовної роботи і-го зразка ТЗ.

Маючи дані про кількість ТЗ, що вийшли з ладу в кожному і-тому інтервалі часу, статистичну оцінку середнього напрацювання до першої відмови можна визначити з рівняння

$$\overline{T}_{cp} \approx \left(\sum_{i=1}^{m} n_i t_{cpi}\right) \Big/ N_0, \qquad (1.18)$$

де $t_{ñðз} = (t_{з+1} - t_з)/2$, $m = t_k / \Delta t$;

$t_з$ – час початку і-го інтервалу, $t_{з+1}$ - час кінця і-го інтервалу;

t_k – час, протягом якого вийшли із ладу всі ТЗ;

$\Delta t = (t_{з+1} - t_з)$ – інтервал часу.

Приклад 1.2. На випробування поставлено $N_0 = 1000$ ТЗ. За час $t = 3000$ год. відмовило $n(t) = 200$ ТЗ, а за інтервал часу $\Delta t = 100$ год. відмовило ще $n(\Delta t) = 100$ ТЗ. Необхідно визначити статистичну оцінку основних показників надійності $\overline{P}(3000)$, $\overline{P}(3100)$, $\overline{P}(3050)$, $\overline{a}(3050)$, $\overline{\lambda}(3050)$.

Розв'язування:

За формулою (1.14) визначимо:

для $t_п$ = 3000 (початок інтервалу)

$$\overline{P}(3000)=\frac{N_0-n(t)}{N_0}=\frac{N_0-n(3000)}{N_0}=\frac{400-200}{400}=0,5;$$

для $t_п$ = 3100 (кінець інтервалу)

$$\overline{P}(3100)=\frac{N_0-n(3100)}{N_0}=\frac{400-300}{400}=0,25.$$

Визначимо середню кількість ТЗ, що справно працюють в інтервалі Δt

$$N_{\text{ñð}}=(N_з+N_{з+1})/2=(200+100)/2=150.$$

Кількість ТЗ, що відмовили за час t = 3050 год.

$$n(3050)=N_0-N_{ср}=400-150=250.$$

Тоді

$$\overline{P}(3050)=\frac{N_0-n(3050)}{N_0}=\frac{400-250}{400}=0,375.$$

За формулами (1.15) і (1.16) знаходимо оцінку частоти та інтенсивності відмов:

$$\overline{a}(3050)=\frac{n(\Delta t)}{N_0\cdot\Delta t}=\frac{100}{400\cdot100}=2,5\cdot10^{-3}(\text{ãîä}^{-1});$$

$$\overline{\lambda}(3050)=\frac{n(\Delta t)}{N_{ср}\cdot\Delta t}=\frac{100}{150\cdot100}\approx6,7\cdot10^{-3}(\text{ãîä}^{-1}).$$

Перевіримо формулу $\overline{\lambda}(t)=\overline{a}(t)/\overline{P}(t)$

$$\overline{\lambda}(3050)=\frac{\overline{a}(3050)}{\overline{P}(3050)}=\frac{0,0025}{0,375}\approx6,7\cdot10^{-3}(\text{ãîä}^{-1}).$$

Приклад 1.3. На випробування поставлено 6 однотипних виробів. Отримані наступні значення часу безвідмовної роботи i-го виробу: t_1 = 280 год; t_2 = 350 год; t_3 = 400 год; t_4 = 320 год; t_5 = 380 год; t_6 = 330 год. Визначити статистичну оцінку середнього напрацювання відмови партії виробів $\overline{T}_{\text{ñð}}$.

Розв'язування:

$$\overline{T}_{\text{ñð}}=\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_з}t_i=\frac{280+350+400+320+380+330}{6}=\frac{2060}{6}=343,3\text{ãîä}.$$

Приклад 1.4. В результаті спостереження за N_0= 20 зразками ТЗ отримані дані до першої відмови всіх зразків і зведені в таблицю.

Треба визначити середній наробіток до відмови $\overline{T}_{\text{ñð}}$

$$\overline{T}_{\text{ñð}}=\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{m}n_i t_{\text{ñð}.i},$$

де n_i – кількість виробів, які відмовили на i-му інтервалі часу;

$t_{ср.i}$ = $(t_{i-1}+t_i)/2$ – середини часових інтервалів;

m – кількість інтервалів часу.

Δt_i , год.	n_i
0-5	3
5-10	5
10-15	8
15-20	4

Розв'язування:

$$t_{ср.1} = 2{,}5; \quad t_{ср.2} = 7{,}5; \quad t_{ср.3} = 12{,}5; \quad t_{ср.4} = 17{,}5.$$

$$\overline{T}_{ñð} = \frac{3\cdot 2{,}5 + 5\cdot 7{,}5 + 8\cdot 12{,}5 + 4\cdot 17{,}5}{20} = 10{,}75\text{ãî ä}.$$

1.3 Показники надійності відновлюваних ТЗ

Найчастіше нормованими показниками надійності відновлюваних ТЗ є параметр потоку відмов ω(t), середнє напрацювання до відмови $t_{ср}$, ймовірність відновлення працездатності ТЗ протягом часу t $P_в(t)$, інтенсивність відновлення μ(t) та ін.

Для відновлюваних ТЗ існує зацікавленість у вивченні послідовності випадкових подій, що являють собою повторюваність відмов, які виникають в результаті багаторазових відновлень.

Послідовність відмов називається **потоком відмов (stream failure)**.

Виділимо деякий інтервал часу від моменту включення t = 0 до деякого поточного значення часу t. Зробимо припущення, що на цьому інтервалі часу (0; t) виникло V_t відмов. Причому V_t – являє собою дискретну випадкову величину.

Позначимо через $F_n(t)$ – ймовірність того, що на інтервалі (0; t) виникло не менше n відмов, тобто

$$F_n(t) = P(V_t \geq n). \tag{1.19}$$

З виразу (1.19) отримаємо формулу для визначення ймовірності появи n відмов на інтервалі (0; t)

$$P(V_t = n) = P(V_t \geq n) - P(V_t \geq n+1) = F_n(t) - F_{n+1}(t). \tag{1.20}$$

1.3.1 Ведуча функція потоку відмов (функція відновлення).

Найважливішою характеристикою потоку відмов є математичне сподівання кількості відмов на інтервалі (0; t). Ця характеристика називається **ведучою функцією потоку відмов (leading function failures flow)**. Позначимо цю функцію через H(t)

$$H(t) = M(V_t). \tag{1.21}$$

У зв'язку з тим, що після кожної відмови відбувається відновлення, то H(t) являє собою також і середню кількість відновлень на інтервалі (0;t).

Середня кількість відмов в інтервалі часу (t_1; t_2) буде дорівнювати

$$M(V_{t2} - V_{t1}) = M(V_{t2}) - M(V_{t1}) = H(t_2) - H(t_1). \qquad (1.22)$$

За означенням середнього значення дискретної випадкової величини (математичного сподівання) маємо

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(V_t = n). \qquad (1.23)$$

Підставляючи вираз (1.20) у вираз (1.23) і розділивши суму на два доданки, отримаємо

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nF_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} nF_{n+1}(t). \qquad (1.24)$$

В першій сумі виразу (1.24) член при n = 0 буде дорівнювати нулю і ним можна знехтувати. У другій сумі індекс підсумовування замінимо на m=n+1. Тоді вираз (1.24) набуде вигляду

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nF_n(t) - \sum_{m=1}^{\infty} (m-1)F_m(t). \qquad (1.25)$$

Об'єднуючи суми рівняння (1.25), отримаємо кінцевий вираз для **ведучої функції потоку відмов**

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \qquad (1.26)$$

1.3.2 Інтенсивність потоку відмов (intensity flow failure). Тепер знайдемо середню кількість відмов на інтервалі (t_1; t_2), віднесену до тривалості цього інтервалу (t_2-t_1). Відповідно до виразу (1.22) це відношення буде дорівнювати $[H(t_2) - H(t_1)]/(t_2 - t_1)$.

Межа такого відношення називається інтенсивністю потоку відмов і позначається через $\omega_{ІПВ}$

$$\omega_{ІПВ}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(t+\Delta t) - H(t)}{\Delta t} = \frac{dH(t)}{dt}. \qquad (1.27)$$

З виразів (1.26) і (1.27) випливає, що

$$\omega_{ІПВ}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dF_n(t)}{dt}. \qquad (1.28)$$

1.3.3 Функція розподілу потоку відмов (function distribution flow failure). Розглянемо зв'язок функції розподілу кількості відмов $F_n(t)$ з показником безвідмовності та відновлюваності ТЗ, тобто з щільністю розподілу напрацювання до відмови та з щільністю розподілу часу відновлення.

При цьому існує два припущення:

1. Потік відмов і потік відновлень кожний окремо та разом являють собою послідовність незалежних подій;
2. На інтервалі відновлення відмови не виникають.

Через T_k позначимо випадковий інтервал часу моменту виникнення k-ої відмови після першого ввімкнення ТЗ. В цьому випадку

$$\varepsilon = T_k - T_{k-1}, \qquad (1.29)$$

де ε – інтервал часу між відмовами, що складається з інтервалу відновлення η_k та інтервалу безвідмовної роботи φ_k:

$$T_0 = \eta_1 = 0;\ T_1 = \varepsilon_1 = \varphi_1 .$$

Момент n-ої відмови буде дорівнювати сумі інтервалів між відмовами

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k . \qquad (1.30)$$

Подія, полягаюча в тому, що на інтервалі часу (0; t) з'явиться мінімум n відмов, еквівалентна події, при якій момент n-ої відмови передує моменту часу t.

Відповідно

$$F_n(t) = P(V_t \ge n) = P(T_n < t),$$

або

$$F_n(t) = P\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k < t\right). \qquad (1.31)$$

Оскільки випадкові величини $\varepsilon_1 - \varepsilon_n$ незалежні, то визначення функції $F_n(t)$ зводиться до задачі про розподіл суми скінченного числа незалежних величин. Як правило для вирішення подібних задач використовують метод характеристичних функцій.

Позначимо через $\omega_{\varepsilon k}(t)$ – щільність розподілу випадкової величини ε_k. При цьому характеристичною функцією $\Theta_{\varepsilon k}(jv)$ випадкової величини називається перетворення Фур'є її щільності розподілу, тобто

$$\Theta_{\varepsilon k}(jv) = \int_{0}^{\infty} \omega_{\varepsilon k}(t) e^{jvt} dt . \qquad (1.32)$$

Щільність розподілу отримується із характеристичної функції шляхом зворотного перетворення Фур'є

$$\omega_{\varepsilon k}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{\varepsilon k}(jv) e^{-jvt} dt . \qquad (1.33)$$

З виразу (1.33) випливає, що характеристична функція випадкової величини ε_k є середнє значення від $e^{jv\varepsilon_k}$. Але тоді для суми незалежних випадкових величин отримуємо:

$$\sum\nolimits_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k ,$$

$$\Theta_{\sum_n}(jv) = M\left\{ e^{jv\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k} \right\} = \prod_{k=1}^{n} M\left(e^{jv\varepsilon_k}\right),$$

або

$$\Theta_{\sum_n}(jv) = \prod_{k=1}^{n} \Theta_{\varepsilon k}(jv) . \qquad (1.34)$$

З рівняння (1.34) випливає, що характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку характеристичних функцій доданків.

Щільність розподілу вказаної суми знаходиться оберненим перетворенням Фур'є

$$W_{\sum_n}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\Theta_{\varepsilon k}(jv)e^{jvt}dt. \quad (1.35)$$

Оскільки $\varepsilon_k = \eta_k + \varphi_k$ і ці доданки незалежні, то

$$\Theta_{\varepsilon k}(jv) = \Theta_{\eta k}(jv)\Theta_{\varphi k}(jv), \quad (1.36)$$

де $\Theta_{\eta k}(jv)$ і $\Theta_{\varphi k}(jv)$ – відповідно характеристичні функції відновлення та безвідмовної роботи.

Розраховуючи ці функції за допомогою перетворення Фур'є від щільності розподілу часу відновлення $\omega_{\eta k}(t)$ і щільності розподілу напрацювання до відмови $\omega_{\varphi k}(t)$:

$$\Theta_{\eta k}(jv) = \int_0^{\infty}\omega_{\eta k}(t)e^{jvt}dt, \quad (1.37)$$

$$\Theta_{\varphi k}(jv) = \int_0^{\infty}\omega_{\varphi k}(t)e^{jvt}dt. \quad (1.38)$$

Об'єднуючи вирази (1.31), (1.33), (1.35) - (1.38) отримаємо шукану залежність функції $F_n(t)$ від характеристики відновлення і безвідмовності

$$F_n(t) = \int_0^{\infty}W_{\sum_n}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\int_0^{\infty}\omega_{\eta k}(x)e^{jvx}dx\int_0^{\infty}\omega_{\varphi k}(y)e^{jvy}dy\right]e^{-jvt}dvdt. \quad (1.39)$$

У випадку однорідних потоків відмов і потоків відновлень функції розподілу $\omega(t)$ та $\omega_в(t)$ не залежать від номеру інтервалу. Тому в рівнянні (1.39) добуток можна замінити n-ою степеню виразу, поміщеному в квадратні дужки, тобто

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\omega_в(x)e^{jvx}dx\int_0^{\infty}\omega(y)e^{jvy}dy\right]^n e^{-jvt}dvdt. \quad (1.40)$$

Якщо відновлення відбувається миттєво, то $\omega_в(t) = \delta(x)$, і відповідно рівняння (1.40) набуває вигляду

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\omega(y)e^{jvy}dy\right]^n e^{-jvt}dvdt. \quad (1.41)$$

1.3.4 Статистичною оцінкою **параметра потоку відмов (parameter of stream failure)** називається відношення кількості відмовлених ТЗ за одиницю часу до загальної кількості ТЗ, що підлягають дослідженню, за умови, що всі ТЗ, які вийшли з ладу, замінюються справними

$$\bar{\omega}(t) = n(\Delta t)/(N\cdot\Delta t), \quad (1.42)$$

де $n(\Delta t)$ – кількість відмовлених ТЗ в інтервалі часу від $t-\Delta t/2$ до $t+\Delta t/2$;

N – загальна кількість ТЗ, що підлягають випробуванням;

Δt – інтервал часу.

1.3.5 Середнім напрацюванням до відмови (mean operating time to failure) відновлюваного ТЗ називається середнє значення часу між сусідніми відмовами.

Для **одного** ТЗ статистична оцінка середнього напрацювання до відмови буде дорівнювати

$$\bar{T}_{ср} = \sum_{і=1}^{n} t_і / n, \qquad (1.43)$$

де t_i – час справної роботи ТЗ між (i – 1)-ою та i-ою відмовами;

n – число відмов за час t.

Для **N** ТЗ, за якими ведеться спостереження в момент часу t, статистична оцінка середнього напрацювання до відмови визначається за формулою

$$\bar{T}_{ср} = \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} t_{іj}\right) / \sum_{j=1}^{N} n_j, \qquad (1.44)$$

де t_{ij} – час справної роботи j-го ТЗ між (i – 1)-ою та i-ою відмовами;

n_j – число відмов j-го ТЗ за час t.

1.3.6 Ймовірність відновлення працездатного стану (probability restoration operability state), $P_в(t)$ – ймовірність відновлення працездатного стану ТЗ протягом заданого часу t

$$P_в(t) = N_{ві} / N_{в0}, \qquad (1.45)$$

де $N_{вi}$ і $N_{в0}$ – відповідно кількість ТЗ, відновлених протягом інтервалу (0, t) та тих, що потребують відновлення при t = 0.

1.3.7 Інтенсивність відновлення (intensity restoration), $\mu(t)$ – умовна густина ймовірності відновлення працездатності ТЗ, визначена для одного моменту часу, за умовою, що до цього моменту відновлення не завершилося

$$\mu(t) = \frac{\Delta n_в}{N_в \Delta t} = \frac{1}{\bar{T}_в}, \qquad (1.46)$$

де $\Delta n_в$ – кількість ТЗ, відновлених протягом інтервалу Δt;

$N_в$ – кількість ТЗ, які потребують відновлення по завершенні часу Δt;

$\bar{T}_в$ – середній час відновлення.

Параметри відновлення працездатного стану зв'язані співвідношеннями

$$P_в(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \mu(t)dt\right], \qquad (1.47)$$

$$\bar{T}_{\hat{a}}(t) = \int_0^{\infty} 1 - P_{\hat{a}}(t)\,dt. \qquad (1.48)$$

1.3.8 Коефіцієнт відновлення ресурсу (coefficient of restitution resource), η(t) рівний відношенню середнього ресурсу відремонтованих ТЗ $t_{від}$ до середнього ресурсу нових ТЗ (до першого ремонту) $t_{нов}$, який повинен бути не менше 80 %.

$$\eta(t) = t_{\hat{a}^3\ddot{a}} \,/\, t_{\acute{\imath}\hat{\imath}\hat{a}}. \qquad (1.49)$$

Приклад 1.5. При експлуатації N = 300 відновлюваних приладів спостерігались відмови 30 приладів протягом напрацювання (0, 1000) год. Потрібно знайти параметр потоку відмов.

Розв'язування:

За формулою (1.42) знаходимо

$$\bar{\omega}(t) = n(\Delta t)/(N \cdot \Delta t) = 30/(300 \cdot 1000) = 1 \cdot 10^{-4}(\tilde{a}\hat{\imath}\ddot{a}^{-1}).$$

Приклад 1.6. Напрацювання до першої заміни деталі ТЗ $\bar{T}_{\tilde{n}\eth}$ = 58 год., середньоквадратичне відхилення σ = 10 год, коефіцієнт відновлення ресурсу η = 0,6. Визначити можливе число замін при роботі ТЗ 150 годин. Прийняти нормальний закон розподілу.

Розв'язування:

Визначаємо за формулою (1.26) F_1, F_2, і т.д. для нормального закону

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{O}\left(\frac{t - n \cdot \eta \cdot \bar{T}_{\tilde{n}\eth}}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\right);$$

$$F_1 = \hat{O}_1(150) = \hat{O}\left(\frac{150 - 1 \cdot 0,6 \cdot 58}{10 \cdot \sqrt{1}}\right) = \hat{O}(11,52) = 1;$$

$$F_2 = \hat{O}_2(150) = \hat{O}\left(\frac{150 - 2 \cdot 0,6 \cdot 58}{10 \cdot \sqrt{2}}\right) = \hat{O}(5,7) = 1;$$

$$F_3 = 0,995; \quad F_4 = 0,69; \quad F_5 = 0,136; \quad F_6 = 0,007.$$

З огляду на те, що значення F_6 мале, подальші розрахунки для F_7 і інших можна не проводити. Таким чином, при роботі ТЗ 150 годин можливе число замін деталі буде дорівнювати

$$H(150) = \sum_{n=1}^{6} F_n(150) = 3,83 \approx 4.$$

Приклад 1.7. Протягом деякого періоду часу проводилося спостереження за роботою одного відновлюваного ТЗ. За весь період спостереження було зареєстровано 15 відмов. До початку спостереження ТЗ пропрацював 258 год., до кінця спостереження напрацювання ТЗ склало 1233 год. Потрібно визначити середнє напрацювання до відмови $\bar{T}_{\tilde{n}\eth}$.

Розв'язування:

Напрацювання ТЗ за період, що спостерігається, дорівнює

$$t = t_2 - t_1 = 1233 - 258 = 975 \text{ год.}$$

Взявши $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 975$ год. за формулою (1.43) знаходимо середнє напрацювання до відмови: $\bar{T}_{ñð} = (\sum\limits_{з=1}^{n} t_з)/n = 975/15 = 65$ год.

Приклад 1.8. Проводилося спостереження за роботою трьох однакових відновлюваних ТЗ. За період спостереження було зафіксовано по першому ТЗ 6 відмов, по другому – 11 відмов і по третьому – 8 відмов. Напрацювання першого ТЗ склало 181 год., другого – 329 год. і третього – 245 год. Потрібно визначити середнє напрацювання ТЗ до відмови.

Розв'язування:

Сумарне напрацювання трьох ТЗ визначається так:

$$t_\Sigma = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} t_{ij} = 181 + 329 + 245 = 755 \text{ год.}$$

Сумарна кількість відмов за виразом:

$$n_\Sigma = \sum_{j=1}^{N} n_j = 6 + 11 + 8 = 25 \text{ відмов.}$$

Середнє напрацювання до відмови згідно з формулою (1.44):

$$\bar{T}_{ñð} = (\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} t_{зj}) / \sum_{j=1}^{N} n_j = t_\Sigma / n_\Sigma = 755/25 = 30,2 \text{ год.}$$

1.4 Комплексні показники надійності

Зазвичай **комплексні показники надійності (integrated indicators of dependability)** використовуються для сумісної оцінки властивостей безвідмовності і ремонтопридатності відновлюваних ТЗ.

1.4.1 Коефіцієнтом готовності (coefficient readiness) називається відно-шення часу справної роботи до суми часу справної роботи і вимушених простоїв ТЗ, взятих за один і той самий календарний термін.

Відповідно до визначення статистична оцінка коефіцієнта готовності буде дорівнювати

$$\bar{K}_Г = t_р / (t_р + t_п), \tag{1.50}$$

де $t_р = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{рi}$ – сумарний час справної роботи ТЗ;

$t_п = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{пi}$ – сумарний час вимушеного простою ТЗ;

$t_{рi}$ – час роботи ТЗ між (i – 1)-ою та i-ою відмовами;

$t_{пi}$ – час вимушеного простою після i-ої відмови;

n – число відмов (ремонтів) ТЗ.

Ймовірнісне визначення коефіцієнта готовності можна отримати переходячи від $t_р$ і $t_п$ до їхніх математичних сподівань

$$K_Г = \frac{\bar{T}_{ср}}{\bar{T}_{ср} + \bar{T}_в} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \qquad (1.51)$$

де $\bar{T}_в$ – середній час відновлення.

Коефіцієнт готовності не є функцією часу роботи ТЗ. Якщо інтенсивність відмов $\lambda = const$ і інтенсивність відновлення $\mu = const$, то ймовірність застати ТЗ у справному стані в будь-який момент часу t визначається за формулами (**функції готовності – function readiness**)

$$P_Г(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \qquad (1.52)$$

або

$$P_Г(t) = K_Г + (1 - K_Г)e^{-t/K_Г t_В}. \qquad (1.53)$$

1.4.2 Коефіцієнтом оперативної готовності (coefficient operational readiness) називається ймовірність того, що за винятком тих запланованих періодів протягом яких використання за призначенням не передбачено, ТЗ у довільний момент часу виявиться у працездатному стані і надалі виконуватиме потрібні функції протягом заданого інтервалу часу

$$K_{ОГ} = K_Г \cdot P_Г(t), \qquad (1.54)$$

де $K_Г$ – коефіцієнт готовності;

$P_Г(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи в момент часу t.

1.4.3 Коефіцієнтом вимушеного простою (coefficient forced down-time) називається відношення вимушеного простою до суми часу справної роботи і вимушених простоїв ТЗ, взятих за той самий календарний термін.

Статистична оцінка коефіцієнта вимушеного простою буде дорівнювати

$$\bar{K}_П = t_п / (t_р + t_п), \qquad (1.55)$$

а ймовірнісне значення визначається за формулою

$$K_П = \frac{\bar{T}_в}{\bar{T}_{ср} + \bar{T}_в}. \qquad (1.56)$$

Між коефіцієнтом готовності і коефіцієнтом вимушеного простою існує така залежність

$$K_Г = 1 - K_П. \qquad (1.57)$$

Приклад 1.9. Технічний засіб має середнє напрацювання до відмови $\bar{T}_{ср} = 65$ год. і середній час відновлення $\bar{T}_в = 1{,}25$ год. Визначіть коефіцієнт готовності ТЗ.

Розв'язування:

За формулою (1.51) маємо:

$$K_{Г} = \frac{\bar{T}_{ср}}{\bar{T}_{ср} + \bar{T}_{в}} = \frac{65}{65 + 1,25} = 0,98.$$

Приклад 1.10. Відомо, що інтенсивність відмов ТЗ $\lambda = 0,02 \text{год}^{-1}$, а середній час відновлення $\bar{T}_{в} = 10$ год. Потрібно визначити коефіцієнт і функцію готовності ТЗ.

Розв'язування:

Середнє напрацювання до першої відмови буде дорівнювати:

$$\bar{T}_{ср} = 1/\lambda = 1/0,02 = 50 \text{ год.}$$

Коефіцієнт готовності визначаємо за формулою (1.51):

$$K_{Г} = \frac{\bar{T}_{ср}}{\bar{T}_{ср} + \bar{T}_{в}} = \frac{50}{50 + 10} = 0,83.$$

Функцію готовності визначаємо за формулою (1.53):

$$P_{Г}(t) = K_{Г} + (1 - K_{Г})e^{-t/K_{Г}t_{в}} = 0,83 + (1 - 0,83)e^{-t/0,83 \cdot 10} = 0,83 + 0,17e^{-0,12t}.$$

Приклад 1.11. ТЗ за час роботи (8 год.) характеризується ймовірністю безвідмовної роботи $P(8) = 0,992612$. Для коефіцієтна готовності $K_{Г} = 0,9$ необхідно визначити ймовірність виконання задачі.

Розв'язування:

Згідно визначення ймовірність виконання задачі є коефіцієнтом оперативної готовності

$$K_{ОГ} = K_{Г} \cdot P_{Г}(t) = 0,9 \cdot 0,992612 = 0,8933.$$

1.5 Показники довговічності та збереженості

1.5.1 Календарний термін від початку експлуатації ТЗ до переходу в граничний стан називають **терміном роботи (useful life)** ТЗ. Якщо термін роботи ТЗ – це випадкова величина (позначимо її t_p), то показник довговічності може визначатися як середній термін роботи (математичне сподівання $T_{ср}$)

$$t_p = M_1[T_{ср}], \qquad (1.58)$$

або **гама-відсотковий термін роботи (gamma-percentile useful life)** t_γ, що визначається співвідношенням

$$P\{t_p > t_\gamma\} = \frac{\gamma}{100}. \qquad (1.59)$$

Таким чином, t_γ – це календарний термін від початку експлуатації ТЗ, протягом якого ТЗ не досягне граничного стану із заданою ймовірністю γ (вираженою у відсотках).

1.5.2 Як показник довговічності можна використати також і ресурс ТЗ. Ресурсом ТЗ називають напрацювання засобу до граничного стану, при досягненні якого подальша експлуатація припиняється.

Середній ресурс (average resource) – це математичне сподівання ресурсу

$$\overline{T}_{ð} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_{pi}, \tag{1.60}$$

де N – кількість спостережуваних ТЗ даного типу;

t_{pi} – термін роботи і - го ТЗ.

1.5.3 При цьому довговічність ТЗ зазвичай характеризують напрацюванням засобу, протягом якого він не досягне граничного стану із заданою ймовірністю γ.

Таке напрацювання називають **гама-відсотковим ресурсом (gamma-percentile resource)**. Для визначення цього ресурсу потрібно знати функцію розподілу ресурсу.

Значення гамма-відсоткового ресурсу вибирають із ряду: 1000, 2000, 4000, 5000, 6500, 8000, 10000, 13000, 15000, 20000, 25000, 30000, 40000, 50000, 65000, 80000, 100000 годин при гамі рівній 90, 95, 98 %.

1.5.4 Терміном збереженості (storability time) називається період зберігання засобу в певних умовах, протягом якого зберігаються початкові показники його якості.

– математичне сподівання терміну збереженості ТЗ

$$\overline{T}_{ç} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_{çi}, \tag{1.61}$$

де $t_{зi}$ – термін збереженості і - го ТЗ.

1.5.5 Інколи збереженість характеризують періодом зберігання, протягом якого ТЗ зберігає встановлені показники із заданою ймовірністю γ. Такий період зберігання називається **гама-відсотковим терміном збереженості (gamma-percentile storability time)**. Для його визначення потрібно знати функцію розподілу терміну збереженості.

Значення гамма-відсоткового терміну збереженості вибирають із ряду: 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 років при гамі рівній 90, 95, 98 %.

1.6 Структурна надійність технічних засобів

Структурною надійністю (structural dependability) ТЗ називається результуюча надійність при заданій структурі і відомих значеннях надійності всіх блоків і елементів, що входять до складу ТЗ. Розподіл ТЗ на блоки і елементи здійснюється на базі єдності функціонування і фізичних процесів, що відбуваються при його роботі.

Якщо відмова ТЗ настає при відмові одного з його елементів, то такий ТЗ має **основне з'єднання (primary connection)** елементів. При розрахунку надійності таких ТЗ відмова елемента є подією випадковою і незалежною, а ймовірність безвідмовної роботи ТЗ протягом часу t дорівнює добуткові ймовірностей його елементів протягом того ж часу:

$$P(t) = p(t_1)p(t_2)...p(t_N) = \prod_{i=1}^{N} p_i(t), \qquad (1.62)$$

або

$$P(t) = \exp(-\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \lambda_i(t)dt). \qquad (1.63)$$

При експоненційному законі розподілу відмов, тобто для нормального (звичайного) періоду роботи ТЗ:

$$P(t) = e^{-\lambda t} = e^{-t/T_{cp}}, \quad a(t) = \lambda e^{\lambda t}, \; T_{cp} = 1/\lambda, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i, \qquad (1.64)$$

де λ_i – інтенсивність відмов i-го елемента.

При розрахунку високонадійних ТЗ з достатньою для практики точністю можна користуватися наближеними формулами:

$$P(t) \approx 1 - t\sum_{i=1}^{r} N_i\lambda_i = 1 - \lambda t, \; \lambda = \sum_{i=1}^{r} N_i\lambda_i, \quad T = 1/\left(\sum_{i=1}^{r} N_i\lambda_i\right) = 1/\lambda, \; a(t) \approx \lambda(1-\lambda t), \qquad (1.65)$$

$$p_1(t)p_2(t)...p_N(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i(t), \; p_i^N(t) = 1 - Nq_i(t), \; \sqrt[N]{p_i(t)} = 1 - q_i(t)/N, \qquad (1.66)$$

де r – число типів елементів;

$q_i(t)$ – ймовірність відмов i-го елемента.

Одним з методів підвищення надійності є **резервування (redundancy)**. **Резервованим з'єднанням (backup connection)** ТЗ називається таке з'єднання, при якому відмова настає тільки після відмови основного блоку чи елементів і всіх резервних блоків і елементів.

Основним параметром резервування є його кратність m, тобто відношення кількості резервних елементів до кількості основних елементів. Розрізняють резервування з цілою і дробовою кратністю. При резервуванні з цілою кратністю величина m – ціле число, а при резервуванні з дробовою кратністю m – дробове число.

За способом ввімкнення резервування поділяється на постійне і резервування заміщенням. **Постійне резервування (continuous redundancy)** – резервування, при якому резервні елементи підключені до основних протягом усього часу роботи і знаходяться в однаковому з ними режимі. **Резервування заміщенням (standby redundancy)** – резервування, при якому резервні елементи заміщають основні після їхньої відмови.

При включенні резерву за способом заміщення резервні елементи до моменту включення в роботу можуть знаходитися в трьох станах:

– навантаженому резерві;

– полегшеному резерві;

– ненавантаженому резерві.

Якщо елементи резервних блоків мають відмови типу «обрив» або «коротке замикання», то ймовірність безвідмовної роботи потрібно обчислювати, підсумовуючи ймовірності всіх сприятливих (не призводячих до відмови) гіпотез:

$$P(t)=\sum_{j=1}^{k}p_j(t)\,, \tag{1.67}$$

де $p_j(t)$ – ймовірність j-ої сприятливої гіпотези, обчисленої з врахуванням двох видів відмов;

k – кількість сприятливих гіпотез.

Для елементів складної системи справедливі вирази:

$$p(t)=\exp[-\int_0^t\lambda(t)dt], \quad q_0+q_{кз}=1, \tag{1.68}$$

де $\lambda(t)$ – інтенсивність відмов елемента;

q_0, $q_{кз}$ – ймовірність виникнення «обриву» і «короткого замикання» відповідно.

При експоненційному законі розподілу відмов справедливі вирази:

$$p(t)=e^{-\lambda t},\ q_0=\lambda_0/(\lambda_0+\lambda_{кз})\,,\ q_{кз}=\lambda_{кз}/(\lambda_0+\lambda_{кз})\,, \tag{1.69}$$

де λ_0, $\lambda_{кз}$ – інтенсивність відмов елемента за «обривом» та «коротким замиканням».

Приклад 1.12. ТЗ складається з двох пристроїв. Ймовірності безвідмовної роботи кожного з них протягом часу t = 100 год. дорівнюють: $P_1(100)$ = 0,95; $P_2(100)$ = 0,97. Справедливий експоненціальний закон розподілу відмов. Необхідно знайти середнє напрацювання до першої відмови ТЗ.

Розв'язування:

Знайдемо ймовірність безвідмовної роботи ТЗ по формулі (1.62)

$$P_{ÒÇ}(100)=P_1(100)\cdot P_2(100)=0,95\cdot 0,97=0,92$$

Знайдемо інтенсивність відмов ТЗ, скориставшись формулою (1.64)

$$P_{ÒÇ}(100)=0,92=e^{\lambda_{ÒÇ}t}=e^{\lambda_{ÒÇ}100},$$

$$\lambda_{ÒÇ}\cdot 100\approx 0,083 \quad \text{або} \quad \lambda_{ÒÇ}\approx 0,83\cdot 10^{-3}\,\text{ãî ä}^{-1}.$$

Тоді

$$T_{ñð}=\frac{1}{\lambda_{ÒÇ}}=\frac{1}{0,83\cdot 10^{-3}}=1200\,\text{ãî ä}.$$

1.7 Оцінка показників надійності за статистичною інформацією про відмови при експлуатації та випробуваннях

При оцінюванні показників надійності ТЗ за статистичною інформацією про відмови при експлуатації визначається закон розподілу (distributing law) відмов і його параметри. За знайденим законом розраховується будь-яка характеристика надійності ТЗ.

Методика визначення закону розподілу містить у собі такі етапи: підготовка отриманих даних, побудова гістограми та перевірка відповідності закону розподілу з використанням одного з критеріїв згоди (Колмогорова, Пірсона, Стьюдента, Фішера чи ін.).

Етап І. Отримана інформація систематизується в порядку зростання часу спостереження, що розбивається на однакові інтервали часу (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Вихідні дані для визначення закону розподілу відмов

Δt_i	$n(\Delta t_i)$	$P(t)=1-n(t)/N_0$	$a(t)=n(\Delta t_i)/N_0\Delta t_i$	$\lambda(t)=n(\Delta t_i)/N_{ср}\Delta t_i$
1	2	3	4	5

Етап ІІ. За даними табл. 1.1 будується гістограма необхідного показника надійності та апроксимується кривою, за виглядом якої орієнтовно установлюється закон розподілу відмов шляхом порівняння із відповідними теоретичними кривими (рис. 1.2).

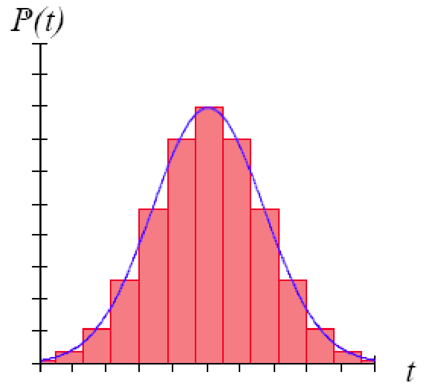


Рисунок 1.2 – Експериментальна гістограма показника надійності

Етап ІІІ. Перевірка відповідності прийнятого закону розподілу відмов здійснюється за критеріями згоди, найбільш поширеними є критерії Пірсона і Колмогорова.

За критерієм Пірсона обчислюють ймовірність вигляду:

$$P(\chi^2 \le \Delta < \infty) = \int_{\chi^2}^{\infty} k_r(u)du; \tag{1.70}$$

$$k_r(u) = \frac{u^{(r/2)-1} e^{-u/2}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}, \tag{1.71}$$

де $r = k-1$ – кількість ступенів вільності розподілу;

Δ – міра розбіжності;

χ^2 – функція щільності розподілу:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)}{np_i}, \qquad (1.72)$$

де n – загальна кількість ТЗ, що випробовується;

$p_i = {}^{n_i}\!/_{n}$ – частота i-го інтервалу статистичного ряду;

k – число інтервалів статистичного ряду.

Якщо ймовірність $P(\chi^2 \le \Delta < 0.1) \ge 0.1$, то експериментальний розподіл відповідає теоретичному.

За критерієм Колмогорова відповідність теоретичного і експериментального розподілів перевіряється виконанням умови

$$D\sqrt{k} \le 1, \qquad (1.73)$$

де D – найбільше відхилення теоретичної кривої розподілу від експериментальної;

k – загальна кількість експериментальних точок.

Приклад 1.13. У результаті досліду отримано такий варіаційний ряд часу справної роботи ТЗ в годинах: 2; 3; 3; 5; 6; 7; 8; 8; 9; 9; 13; 15; 16; 17; 18; 20; 21; 25; 28; 35; 37; 53; 56; 69; 77; 86; 98; 119.

Потрібно встановити закон розподілу часу безвідмовної роботи.

Розв'язування:

Загальна кількість відмов $\sum n_i = 28$.

Заповнюємо табл. 1.2 за формою табл. 1.1.

Таблиця 1.2 – Статистичні дані про відмови

Δt_i, год	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
$n(\Delta t_i)$	16	5	2	2	2	1
$\lambda(\Delta t_i)$, ${}^{1}\!/_{год}$	0,0400	0,0263	0,0167	0,0250	0,0500	-

Будуємо гістограму $\lambda(\Delta t)$, що подана на рис. 1.3.

Рисунок 1.3 – Гістограма статистичних даних про відмови

Знаходимо середнє значення $\lambda_{ср}$ і найбільше відхилення D:

$$\lambda_{ñð} = \frac{0,0400 + 0,0263 + 0,0167 + 0,0250 + 0,5000}{5} = 0,0316 \text{ãî ä}^{-1};$$

$$D = \lambda_{max} - \lambda_{ñð} = 0,0500 - 0,0316 = 0,0184 \text{ãî ä}^{-1}.$$

Перевіряємо експериментальний розподіл на відповідність запропонованому експонентному розподілові за критерієм згоди Колмогорова (1.73):

$$D\sqrt{k} = 0,0184\sqrt{28} = 0,097 < 1.$$

Відповідно до критерію вважаємо, що закон розподілу відмов експоненційний.

У результаті досліджень одержують точкові та інтервальні оцінки (довірчі інтервали). При інтервальних оцінках визначається, який інтервал оцінок із заданою довірчою ймовірністю α накриває математичне очікування параметра θ, що оцінюється

$$\alpha = P(\theta_н \le \theta \le \theta_В) , \tag{1.74}$$

де $\theta_н$, $\theta_В$ – нижня і верхня довірчі межі параметра θ.

Ймовірність того, що значення θ вийде з інтервалу $[\theta_н, \theta_В]$, називають **рівнем значущості** β

$$\beta = P(\theta_н \le \theta \le \theta_В) = 1 - \alpha . \tag{1.75}$$

Часто встановлюють одну з меж інтервалу: нижню або верхню з довірчими ймовірностями α_1 або α_2, відповідно (односторонній довірчий інтервал):

$$\alpha_1 = P(\theta \ge \theta_н); \tag{1.76}$$

$$\alpha_2 = P(\theta \le \theta_В); \tag{1.77}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - 1. \tag{1.78}$$

Для різних законів розподілу відмов складають різні плани випробувань. При проведенні випробувань найбільш часто застосовуються такі закони розподілу: експоненційний, нормальний, біноміальний і гама-розподіл. Оцінки показників надійності розраховуються за формулами, наведеними у табл. 1.3 для різних законів розподілу відповідно до планів випробувань, що позначаються за допомогою трьох букв:

- перша буква n означає об’єм вибірки;
- друга буква Б або В означає плани без відновлення або з відновленням вибірки;
- третя буква n, t_0 або d.

Плани випробувань та інтервальні оцінки показників надійності згідно з цими планами наведені в табл. 1.3.

Плани, що закінчуються при відмові всіх зразків вибірки, позначаються буквою n; плани, що закінчуються через заданий час, позначаються буквою t_0; плани, що закінчуються після появи встановленої кількості відмов, позначаються буквою d; t_d – час від початку випробувань до d-ої відмови; t_Σ – сумарне напрацювання.

Таблиця 1.3 – Плани випробувань та інтервальні оцінки

Плани випробувань	Сумарне напрацювання, t_Σ	Оцінка інтенсивності відмов, $\overline{\lambda}$	Нижня межа, $\lambda_н$	Верхня межа, $\lambda_В$
[nБn]	$\sum_{i=1}^{n} t_i$	$\frac{n}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(1-\alpha_1)(2n)}}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(\alpha_2)(2n)}}{2t_\Sigma}$
$[nБt_0]$ $d \neq 0$	$\sum_{i=1}^{d} t_i + (n-d)t_0$	$\frac{d}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(1-\alpha_1)(2d)}}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(\alpha_2)(2d)}}{2t_\Sigma}$
$[nБt_0]$ $d = 0$	nt_0	-	0	$\frac{r_0}{t_\Sigma}$
[nБd]	$\sum_{i=1}^{d} t_i + (n-d)t_0$	$\frac{d-1}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(1-\alpha)(2d)}}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(\alpha_2)(2d)}}{2t_\Sigma}$
$[nBt_0]$	nt_0	$\frac{d}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(1-\alpha)(2d)}}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(\alpha_2)(2d+2)}}{2t_\Sigma}$
[nBd]	nt_d	$\frac{d-1}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(1-\alpha)(2d)}}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(\alpha_2)(2d)}}{2t_\Sigma}$

Значення квантилів χ^2 розподілів вибираються з довідникових таблиць залежно від заданої довірчої ймовірності та числа ступенів вільності. Значення коефіцієнта r_0 для довірчої ймовірності $\alpha = 0.8 \div 0.999$ наведені в табл. 1.4.

Таблиця 1.4 – Значення коефіцієнта r_0

α	0.999	0.990	0.975	0.950	0.900	0.800
r_0	6.910	4.600	3.690	3.000	2.300	1.610

Експоненційний розподіл використовується для оцінки раптових відмов. Інтервальні оцінки показників безвідмовності розраховуються за формулами:

$$P_н(t) = \exp(-\lambda_В t) = \exp(-t/T_н); \tag{1.79}$$

$$P_В(t) = \exp(-\lambda_н t) = \exp(-t/T_В); \tag{1.80}$$

$$T_н = 1/\lambda_В; \quad T_В = 1/\lambda_н. \tag{1.81}$$

Нормальний закон розподілу відмов використовується для оцінки поступових відмов. Щільність нормального розподілу для випадкової величини T в інтервалі $[-\infty; +\infty]$ дорівнює

$$a(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-T)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{1.82}$$

Оскільки випадкова величина T лежить в інтервалі [0; +∞], то для оцінки показників надійності береться усічений нормальний розподіл із щільністю розподілу

$$a(t)=\frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-T_1)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{1.83}$$

де c – нормувальний множник, що визначається з виразу:

$$c\int_0^{\infty} f(t)dt=1; \tag{1.84}$$

$$c=\frac{1}{F\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)}=\frac{1}{\left[0.5+\Phi_0\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)\right]}, \tag{1.85}$$

де $F\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)$ – інтегральна функція нормального розподілу;

$\Phi_0\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)$ – центрована і нормована функція Лапласа.

Середнє напрацювання до відмови і параметр T_1 усіченого нормального розподілу пов'язані залежністю

$$T=T_1+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi F\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)}}e^{-T_1^2/2\sigma^2}. \tag{1.86}$$

При випробуванні вибірки об'ємом в n виробів з напрацюванням $t_1, t_2 ... t_n$ параметри розподілу T та σ оцінюються за формулами:

$$\overline{T}=\sum_{з=1}^{n} t_i/n \quad ; \tag{1.87}$$

$$\overline{\sigma}=S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{T})^2}\ ; \tag{1.88}$$

$$T_н=\overline{T}-t_{\alpha_1(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}}\ ; \tag{1.89}$$

$$T_В=\overline{T}-t_{\alpha_2(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{1.90}$$

де $t_{\alpha(n-1)}$ – квантиль розподілу Стьюдента для ймовірності α або рівня значимості $\beta=1-\alpha$ і числа ступенів вільності $f=n-1$.

Нижня та верхня межі СКВ визначаються з виразів:

$$\sigma_н=S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(1-\beta/2)(n-1)}}}\ ; \tag{1.91}$$

$$\sigma_В=S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(\beta/2)(n-1)}}}, \tag{1.92}$$

де $\chi^2_{(1-\beta/2)(n-1)}$ – квантиль Хі-квадрат розподілу при ймовірності $p = 1-\beta/2$ і числі ступенів вільності: $k = n-1$;

$\chi^2_{(\beta/2)(n-1)}$ – те ж для ймовірності $p = \beta/2$.

Якщо час безвідмовної роботи ТЗ має нормальний розподіл, то оцінка ймовірності безвідмовної роботи за час t визначається за формулою

$$\overline{P}(t) = 1 - \left[\Phi_0\left(\frac{t-\overline{T}}{S}\right) + \Phi_0\left(\frac{\overline{T}}{S}\right)\right], \tag{1.93}$$

де $\Phi_0(z)$ – центрована і нормована функція Лапласа.

Оскільки функція $\Phi_0(z)$ непарна, тобто , те $\Phi_0(-z) = -\Phi_0(z)$, то

$$P_н(t) \approx P(t) - u_\alpha \overline{\sigma}, \tag{1.94}$$

де u_α – квантиль нормального розподілу (при $T = 0$ і $\sigma = 1$);

$\overline{\sigma}$ – оцінка стандартного відхилення $\overline{P}(t)$:

$$\overline{\sigma} = k\sqrt{\frac{1}{n}\left[1 + 0{,}5\left(\frac{t-\overline{T}}{S}\right)^2\right]}; \tag{1.95}$$

$$k = 0{,}4\exp\left[-0{,}5\left(\frac{t-\overline{T}}{S}\right)^2\right]. \tag{1.96}$$

Якщо при випробуваннях не реєструється напрацювання ТЗ, а реєструються тільки відмови, то оцінки ймовірності безвідмовної роботи та ймовірності відмови будуть визначатись за формулами:

$$\overline{P} = (n-d)/n, \ \ \overline{Q} = d/n, \tag{1.97}$$

де $\overline{P}$ і $\overline{Q}$ – оцінки ймовірності безвідмовної роботи та ймовірності відмов, відповідно;

n – об'єм вибірки;

d – кількість зареєстрованих відмов.

Довірчі межі ймовірності відмови визначаються за формулами:

$$Q_н = \frac{\chi^2_{(1-\alpha_1)(2d)}}{2n - d + 1 + 0{,}5\chi^2_{(1-\alpha_1)(2d)}}; \tag{1.98}$$

$$Q_В = \frac{\chi^2_{(\alpha_2)(2d+2)}}{2n - d + 0{,}5\chi^2_{(\alpha_2)(2d+2)}}, \tag{1.99}$$

де $\chi^2_{(1-\alpha_1)()2d}$ – квантиль Хі-квадрат розподілу з $k = 2d$ ступенями вільності для ймовірності α_1;

$\chi^2_{(\alpha_2)(2d+2)}$ – квантиль Хі-квадрат розподілу з $k = 2(d+1)$ ступенями вільності для ймовірності α_2.

Якщо число відмов $d = 0$, то

$$\overline{Q} \approx 1/(n+1), \ Q_н = 0, \ Q_В = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha_2}. \tag{1.100}$$

Об’єм вибірки n при проведенні випробувань для оцінки Q з абсолютною похибкою Δ при довірчій ймовірності α розраховується за рівнянням

$$n = \frac{u_{\alpha}^{2}}{\Delta^{2}} Q_0 (1 - Q), \qquad (1.101)$$

де u_{α} – квантиль нормального розподілу для $p = \alpha$;

Q_0 – орієнтовне значення ймовірності відмови.

1.8 Випробування на надійність

Випробування на надійність поділяються на визначальні та контрольні.

1.8.1 Визначальні випробування (determining testing) ТЗ на надійність проводяться з метою визначення фактичних кількісних показників надійності для одного з варіантів випробувань, що відповідають заданим умовам застосування.

Визначальні випробування проводяться після освоєння знову розроблених або модернізованих ТЗ на зразках, виготовлених уже за технологією, що відповідає передбачуваному виду (серійному або масовому) виробництва. При визначальних випробуваннях виконується також перевірка закону розподілу відмов для даного виду ТЗ.

Результати визначальних випробувань служать підставою для оцінки відповідності фактичних показників надійності ТЗ вимогам технічних умов (ТУ).

1.8.2 Контрольні випробування (control testing) ТЗ на надійність прово-дяться з метою контролю відповідності кількісних показників надійності відповідним стандартам або ТУ. Ці випробування проводяться періодично в терміни, передбачені стандартами або технічними умовами на даний ТЗ.

Оскільки контроль надійності виконується на основі випробувань вибірки, то при прийнятті рішень можливі два види помилок:

- *помилка першого роду*, коли добра партія бракується;
- *помилка другого роду*, коли погана партія приймається за добру.

Ймовірність помилки першого роду називається ризиком виробника і позначається буквою α. Ймовірність помилки другого роду називається ризиком споживача і позначається буквою β. Дуже часто беруть $\alpha = \beta = 0.2$.

Існує три основних статистичних методи контролю надійності:

– метод одноразової вибірки (одиночний контроль);

– метод дворазової вибірки (подвійний контроль);

– метод послідовного аналізу.

Сукупність умов випробувань контрольованих ТЗ і правил прийняття рішень називається **планом контролю (control plan)**. Під сукупністю умов випробувань розуміються умови приймання і бракування, задані значення α і β, встановлений об'єм випробувань тощо. Правила прийняття рішень визначаються методами контролю. Через те що число сполучень різних умов випробувань і правил прийняття рішень може бути значущим, то і кількість різних планів досить велика.

Метод одноразової вибірки полягає в тому, що з контрольованої партії об'ємом N береться одна випадкова вибірка обсягом n ТЗ. Виходячи з N, n, α і β, встановлюються оціночні нормативи (приймальний і бракувальний рівні) A_0 і A_1. Якщо вибіркове значення контрольованого параметра менше або дорівнює A_0, то партія приймається, якщо більше або дорівнює A_1, то партія бракується.

Коли обсяг партії $N > 500$ при випробуваннях відновлюваних ТЗ або коли $n < 0{,}1N$, то використовують біноміальний закон розподілу відмов, відповідно до якого:

$$1-\alpha=\sum_{d=0}^{A_0}\binom{d}{n}q_0^d(1-q_0)^{n-d}; \qquad (1.102)$$

$$\beta=\sum_{d=0}^{A_1=1}\binom{d}{n}q_z^d(1-q_z)^{n-d}, \qquad (1.103)$$

де $\binom{d}{n}$ – число поєднань із n елементів по d (d – встановлена кількість відмов).

Послідовний метод контролю не передбачає попереднього визначення об'єму вибірки. Інформація про надійність ТЗ, що випробовуються, накопичується при послідовно зростаючому обсязі випробувань. На кожнім етапі випробувань z_m із заздалегідь визначеними оціночними нормативами:

$$A=(1-\beta)/\alpha; \qquad (1.104)$$

$$B=\beta/(1-\alpha). \qquad (1.105)$$

При цьому можуть бути прийняті три рішення:

- якщо $z_m \le B$ – партія приймається;
- якщо $z_m \ge A$ – партія бракується;
- якщо $B < z_m < A$ – випробування продовжуються.

При послідовному методі контролю можливі два способи контролю: контроль числа дефектних ТЗ і контроль за напрацюванням.

При контролі числа дефектних ТЗ для малосерійної партії ($N \le 150$), що складається з N ТЗ, відношення правдоподібності z_m буде дорівнювати

$$z_m = \frac{\binom{d}{D_1}\binom{m-d_m}{N-D_1}}{\binom{d_m}{D_0}\binom{m-d_m}{N-D_0}}, \tag{1.106}$$

де d_m – число дефектних ТЗ у вибірці об'ємом m ТЗ;

D_0 – число дефектних ТЗ у партії високої надійності;

D_1 – число дефектних ТЗ у партії низької надійності.

Для визначених значень $d_m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ розраховуються приймальні $m_{пр}$ і бракувальні $m_{бр}$ об'єми випробувань:

$$m_{пр} \geq N\left\{1-\left[\frac{\binom{D_0-d_m}{D_1-d_m}B}{\binom{D_0}{D_1}}\right]^{\frac{1}{D_1-D_0}}\right\}; \tag{1.107}$$

$$m_{бр} \leq N\left\{1-\left[\frac{\binom{D_0-d_m}{D_1-d_m}A}{\binom{D_0}{D_1}}\right]^{\frac{1}{D_1-D_0}}\right\}, \tag{1.108}$$

і будується графік (план) випробувань (рис. 1.4).

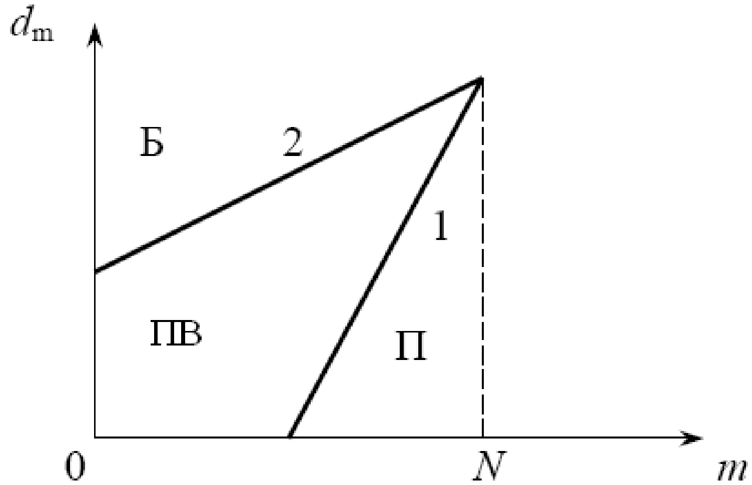


Рисунок 1.4 – Графік випробувань для малосерійної партії

На графіку (рис. 1.4) прийняті такі позначення:

П – область приймання, що лежить нижче лінії 1;

Б – область бракування, що лежить вище лінії 2;

ПВ – область продовження випробувань, що лежить між лініями 1 та 2.

Графік контролю надійності будується за трьома характеристичними точками:

$$d_m = 0; \quad m = N[1 - B^{1/(D_1 - D_0)}]; \tag{1.109}$$

$$d_m = D_1; \quad m = N\{1 - [A/(\tfrac{D_0}{D_1})^{1/(D_1 - D_0)}]\}; \tag{1.110}$$

$$d_m = (D_0 + D_1/2); \quad m = N. \tag{1.111}$$

Для контролю надійності великих партій ($N \geq 1000$) і відновлюваних ТЗ користуються біноміальними планами

$$z_m = \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{d_m} \left(\frac{1-q_1}{1-q_0}\right)^{m-d_m}, \tag{1.112}$$

де q_0 – ймовірність відмови в кожному одиночному випробуванні для партії з високою надійністю;

q_1 – ймовірність відмови в кожному одиночному випробуванні для партії з низькою надійністю.

Приймальні і бракувальні числа дефектних ТЗ для m випробувань визначаються з умов:

$$d_{пр} \leq h_1 + ms, \; d_{бр} \leq h_2 + ms, \tag{1.113}$$

де

$$h_1 = \lg B \Big/ \left(\lg\frac{q_1}{q_0} + \lg\frac{1-q_0}{1-q_1}\right); \tag{1.114}$$

$$h_2 = \lg A \Big/ \left(\lg\frac{q_1}{q_0} + \lg\frac{1-q_0}{1-q_1}\right); \tag{1.115}$$

$$s = \lg\frac{1-q_0}{1-q_1} \Big/ \left(\lg\frac{q_1}{q_0} + \lg\frac{1-q_0}{1-q_1}\right). \tag{1.116}$$

План випробувань поданий на рис. 1.5 і побудований за трьома характеристичними точками:

$$d_m = 0; \; m_0 = -h_1/s; \tag{1.117}$$

$$d_m = h_1; \; m = 0; \tag{1.118}$$

$$d_m = h_2; \; m = 0. \tag{1.119}$$

При $q_1 \leq 0.1$ можна використовувати розподіл Пуассона, тоді:

$$z_m = \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{d_m} e^{-\frac{q_1 - q_0}{m}}; \tag{1.120}$$

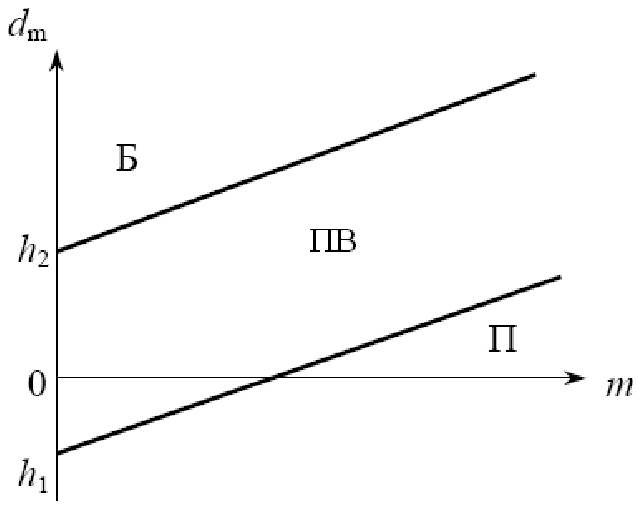


Рисунок 1.5 – Графік випробувань для великих партій

$$h_1 = \frac{\lg B}{\lg\left(\frac{q_1}{q_0}\right)}; \tag{1.121}$$

$$h_2 = \frac{\lg A}{\lg\left(\frac{q_1}{q_0}\right)}; \tag{1.122}$$

$$s = \frac{0{,}4343(q_1 - q_0)}{\lg\left(\frac{q_1}{q_0}\right)}. \tag{1.123}$$

Контроль за напрацюванням при експоненційному розподілі відмов здійснюється відповідно до правил (t_Σ – сумарна кількість напрацювань усіх ТЗ, що підлягають випробуваням):

- при $t_\Sigma \geq h_1 + d_m s$ – партія приймається;
- при $t_\Sigma \geq h_2 + d_m s$ – партія бракується;
- при $h_2 + d_m s < t_\Sigma < h_1 + d_m s$ – випробування продовжуються.

Коефіцієнти h_1, h_2 та s визначаються за формулами:

$$h_1 = -2{,}303 \lg\ B\ / (\lambda_1 - \lambda_0); \tag{1.124}$$

$$h_2 = -2{,}303 \lg\ A\ / (\lambda_1 - \lambda_0); \tag{1.125}$$

$$s = 2{,}303 \lg\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) / (\lambda_1 - \lambda_0), \tag{1.126}$$

де λ_0 – інтенсивність відмов надійної партії;

λ_1 – інтенсивність відмов ненадійної партії.

План випробувань, побудований за трьома характеристичними точкам при експоненційному розподілі відмов, показаний на рис. 1.6.

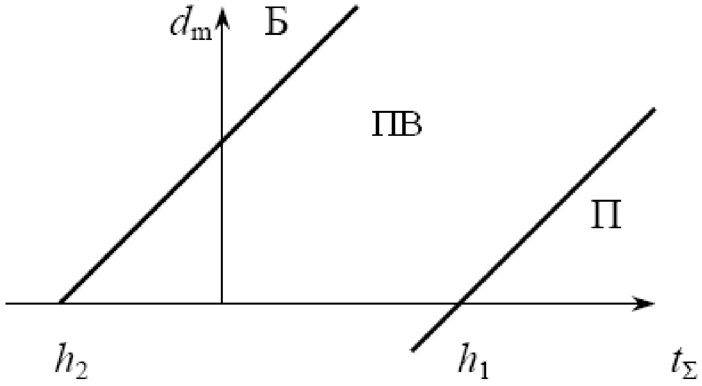


Рисунок 1.6 – Графік випробувань при експоненційному розподілі відмов

Характеристичні точки плану такі:

$$d_m = -h_2/s;\quad t_\Sigma = 0; \tag{1.127}$$

$$d_m = 0;\quad t_\Sigma = h_2; \tag{1.128}$$

$$d_m = 0;\quad t_\Sigma = h_1. \tag{1.129}$$

При нормальному розподілі відмов і відомому середньому квадратичному відхиленні контроль за напрацюванням здійснюється відповідно до правил:

- при $t_\Sigma \geq h_1 + sm$ – партія приймається;
- при $t_\Sigma \leq h_2 + sm$ – партія бракується;
- при $h_1 + sm > t_\Sigma > h_2 + sm$ – випробування продовжуються.

При нормальному розподілі відмов значення t_Σ, h_1, h_2 та s визначаються за формулами:

$$t_\Sigma = \sum_{i=1}^{m} t_i; \tag{1.130}$$

$$h_1 = -2{,}303\frac{\sigma^2 \lg B}{T_0 - T_1}; \tag{1.131}$$

$$h_2 = -2{,}303\frac{\sigma^2 \lg A}{T_0 - T_1}; \tag{1.132}$$

$$s = (T_0 + T_1)/2, \tag{1.133}$$

де T_0 – середнє напрацювання до відмови в партії з високою надійністю;

T_1 – середнє напрацювання до відмови в партії з низькою надійністю.

Характеристичні точки плану такі:

$$m = -h_2/s;\quad t_\Sigma = 0; \tag{1.134}$$

$$m = 0;\quad t_\Sigma = h_2; \tag{1.135}$$

$$m = 0;\quad t_\Sigma = h_1. \tag{1.136}$$

1.9 Нормування показників метрологічної надійності

Основними показниками, що можуть використовуються для розрахунку характеристик метрологічної надійності є:

- ймовірність безвідмовної роботи;
- інтенсивність метрологічних відмов;
- середній час до першої метрологічної відмови;
- параметр потоку відмов (метрологічних);
- напрацювання до першої метрологічної відмови.

Ймовірністю безвідмовної роботи називається ймовірність того, що за певний проміжок часу в ЗВТ не відбудеться відмови. Вона визначається виразом

$$P(t) \approx \frac{N(t)}{N_0}, \tag{1.137}$$

де N(t) – кількість працюючих ЗВТ в кінці проміжку часу;

N_0 – кількість працюючих ЗВ на початку проміжку часу.

Інтенсивністю відмов називають ймовірність відмови ЗВТ, що не ремонтується за одиницю часу при умові, що відмова до кінця цього часу не виникла. Вона може бути визначена за такою формулою

$$\lambda(t) \cong \frac{\Delta n}{N(t)\Delta t}, \tag{1.138}$$

де Δn – кількість ЗВТ, що відмовили за час Δt;

Δt – проміжок часу;

N(t) – кількість справних ЗВТ в кінці проміжку часу.

Середнім напрацюванням до першої відмови $T_{ср}$ є середнє значення напрацювань ЗВТ в партії до першої відмови. Воно визначається виразом

$$T_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{n}, \tag{1.139}$$

де T_i – час роботи i-го ЗВТ до першої відмови;

n – кількість ЗВТ в партії для якої визначається $T_{ср}$.

Параметром потоку відмов ω(t) називається середня кількість відмов ЗВТ, що ремонтуються за одиницю часу для моменту часу, який розглядається. Він визначається за формулою

$$\omega(t) = \frac{\Delta n}{N_0 \Delta t}, \tag{1.140}$$

де N_0 – кількість працюючих ЗВТ в проміжку часу Δt;

Δn – кількість ЗВТ, які відмовили за проміжок часу Δt.

Необхідно врахувати, що при визначенні величини ω(t) ЗВТ, що відмовляють протягом часу Δt, ремонтуються.

В цьому випадку N_0 = N(t).

Напрацюванням на відмову Т називається середнє значення напрацювання ЗВТ, що ремонтуються між відмовами

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_{cp_i}}{n}, \tag{1.141}$$

де $T_{cp\,i}$ – середнє значення напрацювання до відмови і-го ЗВТ;

n – кількість ЗВТ в партії, що досліджується.

Значення $T_{cp\,i}$ визначається за такою формулою

$$T_{cp_i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} T_{ij}}{m}, \tag{1.142}$$

де T_{ij} – середній час роботи і-го ЗВТ між j-м та (j+1)-ою відмовами;

m – число відмов і-го ЗВТ.

Для характеристики безвідмовності як придатних до ремонту, так і непридатних до ремонту ЗВТ використовують показник, який називають умовним середнім напрацюванням до першої відмови T^*_{cp}.

Умовним середнім напрацюванням до першої відмови називають середнє напрацювання до відмови за умови, що ЗВТ пропрацювавши заданий період роботи (ресурс), замінюється новим.

Приклад 1.14. При випробуваннях ЗВТ на початку проміжку часу працювало N_0 = 1000 ЗВТ. Через інтервал часу, що дорівнює 240 год., відмовило 50 ЗВТ. Визначіть ймовірність безвідмовної роботи ЗВТ.

Розв'язування:

Кількість справних ЗВТ в кінці проміжку часу складає:

$$N(t) = 1000 - 50 = 950.$$

Отже, ймовірність безвідмовної роботи буде дорівнювати:

$$P(t) = \frac{N(t)}{N_0} = \frac{950}{1000} = 0{,}95.$$

Приклад 1.15. Після деякого проміжку часу роботи ЗВТ справними залишалося 1000 ЗВТ. За проміжок часу $\Delta t = 100$ год. вийшло з ладу 75 ЗВТ. Визначіть інтенсивність відмов.

Розв'язування:

Інтенсивність відмов для даного прикладу визначається за формулою (1.138) і складає

$$\lambda(t) = \frac{75}{1000 \cdot 100} = 0{,}75 \cdot 10^{-3} (\text{ãî ä}^{-1}).$$

Інтенсивність відмов, що розраховується за даною формулою, визначається експериментально в процесі випробувань ЗВТ на надійність, що потребує значного часу досліджень. На практиці інтенсивність відмов можна прогнозувати. Для більшості серійно виготовлюваних елементів ТЗ існують спеціальні таблиці, в яких зазначаються інтенсивності відмов за одиницю часу.

Знаючи інтенсивність відмов кожного з елементів λ_i, що входять до складу ЗВТ, можна визначити інтенсивність відмови ЗВТ в цілому за формулою

$$\lambda_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i , \qquad (1.143)$$

де n – загальна кількість типів елементів, що входять до складу ЗВТ;

m – кількість елементів і-го типу.

Ймовірність безвідмовної роботи ЗВТ в цьому випадку розраховується за формулою

$$P(t) = e^{-\int_{0}^{n} \lambda_{\Sigma}(t)\,dt} . \qquad (1.144)$$

Середній час безвідмовної роботи, що називається напрацюванням до відмови, буде визначатися так

$$T_{cp} = \int_{0}^{\infty} P(t)dt . \qquad (1.145)$$

Інтенсивність відмови $\lambda_{\Sigma}(t)$, ймовірність безвідмовної роботи P(t) і напрацювання до відмови T_{cp} є показниками, які найчастіше використовуються для визначення метрологічної надійності.

Оскільки випадкова відмова може відбутися в будь-який момент часу, незалежно від того, скільки часу пропрацював ЗВТ, то інтенсивність раптової відмови не залежить від часу, тобто $\lambda_{\Sigma}(t) = \lambda_{\Sigma} = \text{const}$.

Тому, коли мова іде про раптові відмови, то ймовірність безвідмовної роботи ЗВТ визначається простішою залежністю

$$P(t) = e^{-\lambda_{\Sigma} t} . \qquad (1.146)$$

Напрацювання до відмови в цьому випадку розраховується за формулою

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda_{\Sigma}} . \qquad (1.147)$$

Приклад 1.15. ЗВТ складається з трьох блоків, середній час безвідмовної роботи яких дорівнює: t_1 = 160 год.; t_2 = 320 год.; t_3 = 600 год.

Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи всього ЗВТ.

Розв'язування:

Інтенсивність відмов кожного блока визначиться за формулою

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_1} = \frac{1}{160};\ \lambda_1 = \frac{1}{t_1} = \frac{1}{320};\ \lambda_1 = \frac{1}{t_1} = \frac{1}{600}.$$

Тоді, інтенсивність відмови ЗВТ в цілому

$$\lambda_{\Sigma} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{600} \approx 0,011(\text{ãî ä}^{-1}).$$

На основі формули (1.147) одержимо:

$$T_{ср} = \frac{1}{\lambda_{\Sigma}} = \frac{1}{0,011} \approx 91\text{ãî ä.}$$

1.9.1 Метрологічною відмовою (metrological failure) називають вихід метрологічних характеристик ЗВТ за межі встановлених норм. Метрологічна надійність ЗВТ встановлюється експериментальним шляхом, в ході випробувань ЗВТ на метрологічну надійність. Для випробувань відбирається n ЗВТ конкретного типу. У кожного конкретного екземпляра ЗВТ визначаються індивідуальні значення метрологічних характеристик, а потім закони розподілу цих значень та їх числові характеристики. Для більшості ЗВТ сумарний закон розподілу ймовірності досліджуваної метрологічної характеристики є нормальним. Оцінку середнього значення ймовірності можна визначити за формулою

$$\bar{q}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} q_i}{n_1}. \tag{1.148}$$

Її дисперсія оцінюється за формулою

$$S_{q_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (q_i - \bar{q}_1)^2}{n_1 - 1}. \tag{1.149}$$

При правильному нормуванні середнє арифметичне значення має збігатися з номінальним значення досліджуваної метрологічної характеристики, а максимальні та мінімальні межі, в яких повинна знаходитись конкретна метрологічна характеристики будь-якого ЗВТ даного типу, встановлюються симетричними номінальному значенню.

На практиці часто використовують спрощену методику визначення міжповірного інтервалу (МПІ), який визначається за формулою:

$$T_{МПІ} = \frac{\ln(1 - P_{М.відм}(t))}{\ln P_{М}(t)}, \tag{1.150}$$

де $P_М(t)$ – метрологічна вірогідність безвідмовної роботи;

$P_{М.відм}(t)$ – вірогідність метрологічної відмови за час між повірками, що визначається за встановленими довідниковими значеннями (табл. 1.5).

Як показує досвід, в матеріалах розробників ЗВТ, поданих на випробування з метою затвердження типу, часто відсутня достовірна інформація про нестабільність засобу вимірювання, що необхідна для обґрунтованого присвоєння первинного міжповірного інтервалу (МПІ) ЗВТ. У цих випадках для його орієнтовної оцінки можна скористатися нормованими значеннями показників надійності, що вказані в технічних умовах (ТУ) на засіб вимірювальної техніки.

Таблиця 1.5 – Значення допустимих ймовірностей метрологічної відмови

Для ЗВТ, що використовуються при:	Значення допустимої ймовірності метрологічної відмови
технічних вимірюваннях	0,2 … 0,1
передачі інформації про розмір одиниці	0,15 … 0,005
особливо важливих та відповідальних вимірюваннях	0,003 … 0,001

1.9.2 Метрологічна ймовірність безвідмовної роботи (metrological probability reliability work). Якщо вдається визначити, хоча б орієнтовно, середню частку q метрологічних відмов в загальному потоці відмов ЗВТ, то оцінюють вірогідність роботи ЗВТ без метрологічних відмов $P_м(t)$ за час (напрацювання) t за формулою

$$P_M(t)=1-q\,[1-P(t)], \qquad (1.151)$$

де P(t) – вірогідність безвідмовної роботи ЗВТ (технічна) за час напрацювання t.

Якщо середню частку метрологічних відмов q визначити не вдається, то беруть $P_M(t) = P(t)$.

На підставі матеріалів, наданих на випробування, визначають СКВ σ_0 розподілу похибки градуювання ЗВТ при випуску з виробництва, межу Δ_H допустимої похибки (нестабільності) ЗВТ, що пронормована в технічних умовах (ТУ), межу Δ_E допустимої похибки (нестабільності) ЗВТ в реальних умовах експлуатації (відповідно до вимог державної (міждержавної) повірної схеми).

Встановлюють відповідно до критеріїв значення вірогідності метрологічної справності $P_{м.с.}$ чи довірчої вірогідності P.

Як критерії при встановленні МПІ слід вибирати показники метрологічної надійності або стабільності ЗВТ. Вид критерію визначається способом повірки ЗВТ.

При повірці, що полягає у встановленні дійсних значень ЗВТ або його градуюванні, критерієм є межа допустимих значень довірчих меж нестабільності ЗВТ за МПІ при заданій довірчій вірогідності P.

При повірці, що полягає у визначенні придатності до застосування ЗВТ за критерієм стабільності (із забракуванням екземплярів, зміна дійсних значень або градуювальної характеристики яких за МПІ перевищує встановлену межу допустимої нестабільності) та подальшому встановленні його дійсного значення. В такому випадку показником метрологічної надійності є межа допустимих значень вірогідності метрологічної справності ЗВТ в момент повірки $P_{м.с.}$.

При повірці, що полягає у визначенні придатності до застосування ЗВТ за критерієм точності (із забракуванням екземплярів, дійсні значення характеристик похибок яких перевищують встановлені межі допустимих значень), показником метрологічної надійності також є вірогідність метрологічної справності $P_{м.с.}$.

В припущенні про симетричність закону розподілу похибок оцінити міжповірочний інтервал T_1 можна за формулою

$$T_1 = t\frac{\ln\left(\dfrac{\Delta_E}{\lambda_P\sigma_0}\right)}{\ln\left(\dfrac{\Delta_H}{\lambda_{P_{MC}(t)}\sigma_0}\right)}, \qquad (1.152)$$

де λ_P – коефіцієнт нормального розподілу, що відповідає ймовірності P(t) або $P_M(t)$;

$\lambda_{P_{MC}(t)}$ – коефіцієнт нормального розподілу, що відповідає вірогідності метрологічної справності $P_{М.С.}$.

Прийнявши припущення про те, що випадковий процес зміни в часі похибки ЗВТ полягає в лінійній зміні середнього значення похибки (за сукупністю ЗВТ даного типу) при незмінному СКВ розподілу похибки σ, оцінка МПІ T_2 визначається за формулою

$$T_2 = t\frac{\Delta_E - \lambda_P\sigma_0}{\Delta_H - \lambda_{P_{MC}(t)}\sigma_0}. \qquad (1.153)$$

За знайденими МПІ T_1 і T_2 встановлюють кінцевий міжповірний інтервал ЗВТ T = min[T_1, T_2].

Приклад 1.16. Нормують $P_м(t) = 0{,}95$ за напрацювання t = 1000 год. Середнє завантаження ТЗ – 80 год. в місяць. СКВ $\sigma_0 = 0{,}2\Delta_н$, а $\Delta_E = 0{,}8\Delta_н$. Визначіть МПІ T за умови, що $P_{м.с.}(T) = 0{,}90$.

Розв'язування:

При інтенсивності експлуатації ЗВТ 80 год. в місяць і напрацюванні 1000 год. календарний строк експлуатації складає 1 рік. Квантилі нормального розподілу відповідно до довідникових даних складають $\lambda_{0,95}$ = = 2, $\lambda_{0,90}$ = 1,645. Підставивши ці дані в рівняння (1.152) та (1.153), отримаємо:

$$T_1 = 1\frac{\ln\left(\dfrac{0{,}8\Delta_H}{1{,}645\cdot 0{,}2\Delta_H}\right)}{\ln\left(\dfrac{\Delta_{\text{í}}}{2\cdot 0{,}2\Delta_H}\right)} = 0{,}97 \cong 1\,\text{рік};$$

$$T_2 = 1\frac{(0{,}8 - 1{,}645\cdot 0{,}2)\Delta_H}{(1 - 2\cdot 0{,}2)\Delta_{\text{í}}} = 0{,}8\ \text{року}.$$

Отже, МПІ T приймаємо рівним T = min[1; 0,8] = 0,8 року, що відповідає 10-ти місяцям.

1.9.3 Середній час до першої метрологічної відмови (mean time to first failure metrological). Якщо вдається визначити, хоча б приблизно, середню долю q метрологічних відмов в загальному потоці відмов ЗВТ даного типу, то оцінюють середній час (середнє напрацювання) до першої метрологічної відмови $T_{ср.м}$

$$T_{ср.м} = \frac{1}{q}\left[T_{ср.в} - T_{ср.в}(1-q)\right], \qquad (1.154)$$

де $T_{ср.в}$ – середній час ТЗ до першої раптової відмови (визначається структурним розрахунком надійності ТЗ за даними про інтенсивність відмов його елеметрів).

Якщо q невідомо, то приймають $T_{ср.м} = T_{ср}$.

На підставі матеріалів, наданих на випробування, визначають СКВ σ_0 розподілу похибки градуювання ЗВТ при випуску з виробництва, межу Δ_H допустимої похибки (нестабільності) ЗВТ, що пронормована в ТУ, межу Δ_E допустимої похибки (нестабільності) ЗВТ в реальних умовах його експлуатації.

Для оцінки МПІ T_1 приймають припущення про симетричність розподілу похибки ЗВТ відносно нуля і МПІ розраховується за формулою

$$T_1 = T_{ср.м}\frac{\ln\left(\dfrac{\Delta_E}{\lambda_P\sigma_0}\right)}{\ln\left(\dfrac{\Delta_H}{\sigma_0}+0.635\right)}. \qquad (1.155)$$

Потім в припущені про лінійний випадковий процес оцінюється МПІ T_2 за формулою

$$T_2 = T_{ср.м}\frac{\Delta_E - \lambda_P\sigma_0}{\Delta_H}. \qquad (1.156)$$

Кінцевий МПІ береться рівним $T = \min[T_1, T_2]$.

Приклад 1.17. Нормується $T_{ср.м} = 3500$ год. Середнє завантаження ТЗ -7 год. на добу. Відомо, що СВК $\sigma_0 = 0{,}3\Delta_н$, $\Delta_E = \Delta_н$. Визначіть МПІ Т з умови, що $P_{м.с.}(T) = 0{,}90$.

Розв'язування:

При інтенсивності експлуатації ТЗ 7 год. на добу і напрацюванні 3500 год. календарний строк експлуатації складає 2 роки. Квантиль нормального розподілу $\lambda_{0,90} = 1{,}645$.

Тому, при підстановці даних в рівняння (1.155) і (1.156) отримаємо:

$$T_1 = 2\frac{\ln\left(\dfrac{\Delta_H}{1{,}645\cdot 0{,}3\Delta_H}\right)}{\ln\left(\dfrac{\Delta_í}{0{,}3\Delta_H}+0{,}635\right)} = 1{,}03 \text{ року};$$

$$T_2 = 2\frac{\Delta_H - 1{,}645\cdot 0{,}3\Delta_H}{\Delta_í} = 1 \text{ рік}.$$

Отже, беремо МПІ $T = \min[T_1, T_2] = 1$ рік.

1.10 Надійність програмного забезпечення

Дослідження в області програмної надійності знаходяться на початковому етапі свого розвитку.

Доцільно виділити дві сторони програмного забезпечення об'єкта: **програмну надійність об'єкта (software dependability object)** – властивість об'єкта, виконувати задані функції, обумовлені якістю програмного забезпечення; **надійність програмного забезпечення (dependability of software)** – властивість програмного забезпечення виконувати висунуті до нього вимоги.

Програмна надійність ТЗ виявляється при спільній роботі апаратури і програми. Вона характеризує здатність ТЗ виконувати задані функції при умові, що програма буде знаходитися в тому або іншому стані.

Надійність програмного забезпечення характеризує якісний стан програми. Її іноді називають правильністю програми, коректністю програми, надійністю програми.

Програмна надійність об'єкта – це те, що цікавить користувача програми. Для її забезпечення необхідно, щоб програма була правильною, коректною, надійною, тобто щоб вона не містила помилок. Може виявитись, що деякі з помилок зовсім не виявляться при роботі об'єкта або, навпаки, при роботі об'єкта виявляться додаткові помилки програми. Проте очевидно, що необхідною умовою надійної роботи об'єкта є коректність програм, тобто відсутність в них помилок.

Програмна надійність стає особливо актуальною, коли програми є самостійним продуктом. В цьому випадку вони виготовляються, перевіряються і піддаються випробуванням так само, як звичайні об'єкти.

1.10.1 Порівняльні характеристики програмних і апаратних відмов

Програмні відмови ТЗ і апаратні відмови мають багато спільного, але й багато в чому відрізняються. Спільне в них таке:

а) невиконання об'єктом заданих функцій;

б) проміжки часу до відмов і проміжки часу усунення відмов носять випадковий характер;

в) методи обробки статистичних даних про відмови однакові, а тому статистичні оцінки показників надійності апаратної та програмної, отримані за наслідками випробувань і експлуатації, можуть бути однаковими в своїй назві: середнє напрацювання об'єкта на програмну відмову, інтенсивність програмних відмов об'єкта та ін. Можливі і об'єднані (комплексні) оцінки: середнє напрацювання об'єкта на програмну і апаратну відмову та ін.

Разом з тим відмови програмні відрізняються від відмов апаратних:

а) відмова апаратна залежить або від часу, або від об'єму виконаної роботи, а відмова програмна – від тієї функції, яку виконує ТЗ під управлінням програми (точніше, від того, з якою вірогідністю програма вийде на таку ділянку, що містить помилку);

б) виявлення і усунення апаратної відмови (заміною елемента, що відмовив, справним) не означає, що така ж відмова не повториться при подальшій роботі ТЗ, а виявлення і усунення відмови програмного забезпечення означає, що така відмова надалі не повториться;

в) програмна відмова, що виявляється при автономній перевірці програми, може переходити в розряд недіючих, якщо стан апаратури робить її нечутливою до даного виду програмної відмови. Наприклад, якщо в програмі помилково не передбачений програмний захист від апаратного збою, то це програмна відмова, але якщо при цьому в апаратурі не виникає збою, то відмова програмна стає недіючою;

г) прогнозувати виникнення апаратних відмов порівняно легко, а прогнозувати виникнення окремих програмних відмов важко, а часто і неможливо. Для окремих програмних відмов важко передбачати час, коли вони стають такими, що діють, а коли – недіючими;

д) апаратні відмови доцільно підрозділяти на раптові і поступові, тобто відмови, різні за своєю фізичною природою, за законами розподілу часу до відмови, за методами боротьби щодо зниження їх вірогідності. Програмні ж відмови немає сенсу ділити на раптові і поступові. Вони виникають раптово, як тільки програма переходить на таку ділянку, яка містить помилку. В той же час вони за природою своєю не збігаються з раптовими апаратними відмовами. Вірогідність їх виникнення не пов'язана з тривалістю роботи ТЗ, а пов'язана з умовною вірогідністю того, що програма містить помилку в даній частині програми, і вірогідністю того, що ТЗ працюватиме під управлінням цієї частини програми.

1.10.2 Перевірка і випробування програм

Випробування програм на надійність і випробування ТЗ на надійність їх програмного забезпечення – обов'язкові етапи при перевірці надійності програмно-апаратних систем.

Випробування з метою перевірки надійності програм здійснюються за допомогою спеціальних програм (тестування) і спеціальних (імітаційних) стендів. Перевіряється при цьому ступінь відпрацювання програми і її відповідність заданим вимогам.

Випробування з метою перевірки надійності ТЗ, що працюють під управлінням програмного забезпечення, здійснюються при спільній роботі програми і ТЗ. Перевіряються при цьому і ступінь відпрацювання програми відповідно до заданих вимог, і коректність цих вимог, і узгодженість взаємодій програми і апаратури.

Ступінь відпрацювання програми може перевірятися різними методами. Чим вища вимога до вірогідності перевірки, тим складніший метод перевірки.

Розглянемо один з найбільш простих методів. В процесі перевірки коректності програми фіксуються інтервали часу виявлення помилок в програмі. Результати перевірки обробляються при таких припущеннях:

а) помилки програми незалежні. Кожного разу після виявлення вони усуваються і надалі не виявляються;

б) інтенсивність помилок зменшується в процесі їх виявлення і усунення (тобто ступінчасто, як показано на рисунку 1.7).

Статистична інтенсивність програмних помилок визначається так само, як інтенсивність апаратних відмов за формулою:

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{\Delta n(t)}{\Delta t n(t)}, \tag{1.157}$$

де n(t) – кількість ідентичних програм, які не відмовили до моменту часу t;

Δn(t) – кількість ідентичних відмовивших програм на інтервалі часу (t, t+Δt).

Виявлення і усунення помилок проводиться до тих пір, поки значення $\lambda(t_n)$ буде меншим заданого значення. Задане значення $\tilde{\lambda}(t_n)$ призначається з урахуванням вимог до надійності ТЗ. Орієнтовно можна виходити з того, що інтенсивність програмних помилок, що призводять до відмови, на етапі налагоджувальних випробувань повинна бути не більша інтенсивності апаратних відмов.

Положення про те, що при створенні програмного забезпечення великих систем можливе виникнення помилок і що виявлення програмних помилок – надзвичайно важка задача, не тільки не повинно обеззброювати розробників систем, а навпаки, повинно орієнтувати їх на максимальне зосередження сил для ліквідації програмних відмов.

Вплив програмних помилок на надійність ТЗ повинно безперервно зменшуватися з кожним новим етапом освоєння програм (розробка – відлагодження – дослідницька експлуатація – нормальна експлуатація) так, щоб на етапі нормальної експлуатації об'єкта програмна надійність його була на рівні заданих вимог.

1.10.3 Основні проблеми дослідження надійності програмного забезпечення

У складному програмно-керованому технічному засобі будь-якого типу можна виділити дві основні, відносно незалежні частини:

1. Сукупність автономно, паралельно працюючих технічних схем і засобів – **апаратна частина**.

2. Сукупність програм, орієнтованих на рішення конкретного комплексу завдань, які є математичним забезпеченням ТЗ, утворюють **програмну частину** (операційна система і робочі програми користувачів).

При загальному аналізі характеристик ТЗ (його надійності) потрібно враховувати, що якщо апаратна частина жорстко задана, незмінна і її надійність може бути забезпечена на необхідному рівні, то програмна частина у кожному окремому випадку може мати ряд модифікацій, є достатньо гнучкою, змінною частиною ТЗ і в забезпеченні сукупної надійності засобу визначає найбільшу кількість помилок.

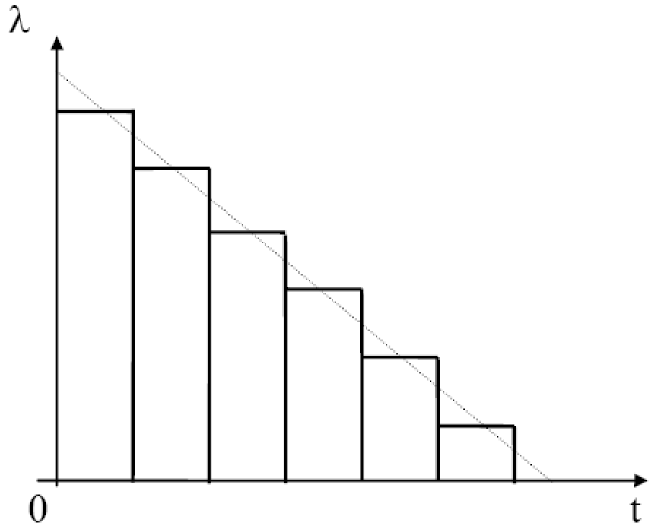


Рисунок 1.7 – Характеристика зміни інтенсивності помилок програмного забезпечення

До основних проблем дослідження надійності програмного забезпечення (ПЗ) відноситься:

1. Розробка методів оцінювання і прогнозування надійності ПЗ на основі сукупності кількісних показників і характеристик, ідентичних показникам апаратної надійності.

2. Визначення чинників, що впливають на досягнення заданого рівня надійності ПЗ.

3. Розробка методів, що забезпечують досягнення заданого рівня надійності ПЗ.

4. Вдосконалення методів підвищення надійності ПЗ в процесі проектування і експлуатації.

Ефективний спосіб підвищення надійності ПЗ – використання методів структурного проектування програм, оскільки залежно від структури ПЗ наслідки окремих помилок можуть бути легко виявлені, локалізовані і виправлені на деякій невеликій ділянці програми або розповсюдитися на інші рівні та модулі ПЗ.

1.10.4 Критерії оцінки надійності програмних засобів

Всі існуючі показники надійності програмних засобів можна розбити на дві великі групи:

а) кількісні показники надійності ПЗ;

б) якісні показники надійності ПЗ.

Не розглядаючи якісні характеристики надійності, які достатньо детально досліджені в [11 – 13], зупинимося детальніше на можливості використання кількісних показників для оцінки і прогнозування надійності ПЗ.

Найзручніше як кількісні показники використовувати статистичні (ймовірнісні) критерії добре розробленої теорії надійності електронної апаратури. Слід враховувати, що оцінювання надійності ПЗ на основі статистичної теорії надійності апаратури можливе в межах деяких обмежень, що враховують специфіку ПЗ як певного виду продукту людської праці.

Можна виділити такі характеристики і кількісні показники надійності ПЗ:

1. **Безвідмовність (reliability).** Кажучи про безвідмовність ПЗ, що характеризує здатність ПЗ виконувати задані функції в заданих умовах експлуатації ТЗ, вважатимемо, що відмова програми – це результат прояву прихованої помилки. Слід мати на увазі, що вхідні дані і дані, створювані програмою, не є елементами ПЗ, оскільки їх надійність пов'язана з роботою зовнішніх пристроїв і апаратної частини ТЗ. Тільки константи, що вводяться програмістом, вважаються частиною ПЗ.

Для невідновлюваних в ході експлуатації програм узагальненою характеристикою надійності (безвідмовності) є вірогідність безвідмовної роботи P(t), яка характеризує вірогідність того, що за час t відмови не відбудеться:

$$P(t) = P(T \geq t) = 1 - q(t), \tag{1.158}$$

де T – час роботи ПЗ до відмови або напрацювання ПЗ до відмови (T – випадкова величина);

q(t) – вірогідність відмови ПЗ.

З (1.158) можна визначити функцію інтенсивності відмов ПЗ за формулою

$$\lambda(t) = -\frac{d \ln P(t)}{dt}. \tag{1.159}$$

Середній час напрацювання до настання відмови (середній час безвідмовної роботи) визначається як математичне сподівання часового інтервалу між двома послідовними порушеннями роботоздатності ПЗ:

$$m_t = \int_0^\infty P(t)\,dt. \tag{1.160}$$

Для експоненціального закону розподілу відмов:

$$P(t) = e^{-\lambda t}; \quad m_t = \frac{1}{\lambda}. \tag{1.161}$$

Оскільки програми мають явно виражені виробничі цикли роботи, то напрацювання програми може бути виражене або через календарний час, або через машинний час, або через кількість відпрацьованих операторів, вирішених задач та ін.

Один із способів оцінювання m_t - спостереження за поведінкою програми у певний часовий період. Тоді величину середнього часу між відмовами (збоями) ПЗ можна визначити так:

$$m_t = \frac{1}{\lambda} = \frac{H}{n - r}, \tag{1.162}$$

де n – загальна кількість прогонів ПЗ;

r – кількість прогонів ПЗ без помилок;

H – загальна кількість годин успішного прогону програми, що визначається за формулою:

$$H = \sum_{i=1}^{r} T_i - \sum_{j=1}^{n} t_j, \tag{1.163}$$

де T_i – час безперервного прогону в годинах безпомилкової роботи ПЗ;

t_j – час прогону в годинах до прояви помилки ПЗ;

k = n – r – кількість прогонів з помилками.

Вважаючи кількість помилок постійним, можна обчислити інтенсивність відмов ПЗ, зведену до однієї години роботи λ^1, і середній час між сусідніми відмовами ПЗ:

$$\lambda^1 = \frac{n - r}{H} = \frac{1}{H}; \tag{1.164}$$

$$m^1{}_t = \frac{1}{\lambda^1} = \frac{H}{k}. \tag{1.165}$$

Класифікуючи відмови ПЗ за видами відмов – апаратні, програмні, оператора та ін. можна визначити частинні (зважені) інтенсивності відмов за відповідними видами помилок – $\lambda^1_{ап}$, $\lambda^1_{пр}$, $\lambda^1_{оп}$ та ін., а загальна надійність визначається як сума цих інтенсивностей. Такий підхід може значно полегшити збір статистичних даних відповіднх видів відмов на основі незалежного аналізу програмних засобів різних типів.

У випадку, якщо в ході експлуатації можливе коректування ПЗ або відновлення програми після відмови, викликаної дією перешкод (збоїв) від непрограмних джерел, а час відновлення достатньо малий порівняно з часом між відмовами чи збоями, то узагальненою характеристикою безвідмовності ПЗ є інтенсивність потоку відмов в часі ω(t):

$$\omega(t) = \frac{dH(t)}{dt}; \tag{1.166}$$

$$T_\omega = \frac{t}{H(t)}, \tag{1.167}$$

де H(t) – середнє число відмов за час t;

T_ω – середній час напрацювання між двома відмовами.

Для програм, час коректування яких приблизно дорівнює часові між відмовами, узагальненою характеристикою безвідмовності є функція коефіцієнта готовності $K_Г(t)$, залежного від часу. Показник готовності характеризує вірогідність застати ТЗ в заданий момент часу в роботоздатному стані.

2. **Стійкість (stability)**. Стійкість ПЗ визначає здатність ТЗ виконувати задані функції в умовах дії перешкод (помилок, збоїв, відмов), що виникають в непрограмних джерелах (технічне забезпечення, початкові дані). При оцінюванні стійкості ПЗ повинні бути задані параметри навколишнього середовища, по відношенню до якого оцінюється стійкість програм.

Показники стійкості – це показники безвідмовності, але з використанням умовних вірогідностей. Умовою, при якій обчислюється вірогідність, є відмова (збій) в програмі або апаратурі.

Для невідновлюваних (некоректовних) програм узагальненим показником стійкості служить умова вірогідності безвідмовної роботи:

$$P_y(t) = P\{T \geq t\}P(A), \tag{1.168}$$

де P(A) – вірогідність помилки (збою) програми або відмови апаратури.

Безвідмовність і стійкість – динамічні характеристики, тобто вони характеризують надійність ПЗ в процесі його роботи.

3. **Коректовність (correctness)**. Цей показник надійності ПЗ аналогічний до показника ремонтопридатності ТЗ, він характеризує пристосованість ПЗ до пошуку і усунення помилок і внесення в нього змін в ході експлуатації. Він використовується для характеристики відновлюваних в ході експлуатації програм. Показники коректовності: час коректування T_k, вірогідність коректування програми за заданий час $P_k(t)$, коефіцієнт готовності $K_г$, параметр потоку коректувань $\omega_k(t)$.

4. **Захищеність і довговічність (security and durability)**. Додатковими характеристиками надійності ПЗ є показник захищеності від сторонніх втручань в роботу ПЗ і
показник довговічності, що характеризує властивості програм уникати морального старіння при тривалому використанні. Захищеність характеризується вірогідністю внесення спотворень при сторонньому втручанні, а довговічність – часом відмови ПЗ унаслідок морального старіння.

Залежно від умов застосування ПЗ можна виділити три режими його роботи:

а) програма не коректується, і будь-яка відмова є повною, тобто після відмови ПЗ не відновлюється. Основні показники надійності для цього режиму роботи програм – безвідмовність, стійкість (firmness) і захищеність (protected);

б) програма не коректується, проте після відмови ПЗ технічний засіб продовжує функціонувати правильно. Основні показники надійності – безвідмовність, стійкість, захищеність і довговічність;

в) після кожної відмови ПЗ коректується, відлагоджується і лише після цього знову здається в експлуатацію. Основні показники надійності – безвідмовність, стійкість, коректуємість, захищеність, а також втрати часу.

Приклад 1.18. Проведено n = 100 прогонів ПЗ. Всі прогони почалися в момент часу $t = 0$ (тобто на декількох комп'ютерах паралельно). За інтервал часу $\Delta t = 50$ год. зафіксовано $n(\Delta t) = 15$ відмов. Визначити ймовірність безвідмовної роботи і частоту відмов.

Розв’язування:

Ймовірність безвідмовної роботи ПЗ визначимо за формулою

$$P(t) = \frac{N_0 - n(\Delta t)}{N_0} = \frac{100-15}{100} = 0,85.$$

Частота відмов буде дорівнювати

$$a(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_0 \Delta t} = \frac{15}{100 \cdot 50} = 3,0 \cdot 10^{-3} (\text{год}^{-1}).$$

1.10.5 Математичні моделі надійності комплексів програм

Математичні моделі дозволяють оцінювати характеристики помилок в програмах і прогнозувати їх надійність при проектуванні і експлуатації. Моделі мають ймовірнісний характер, і достовірність прогнозів залежить від точності початкових даних і глибини прогнозування за часом. Ці математичні моделі призначені для оцінки:

- показників надійності комплексів програм в процесі відлагодження;
- кількості помилок, що залишилися невиявленими;
- часу, необхідного для виявлення наступної помилки в функціонуючій програмі;
- часу, необхідного для виявлення всіх помилок із заданою вірогідністю.

Використання моделей дозволяє ефективно і цілеспрямовано проводити відлагодження і випробування комплексів програм, допомагає приймати раціональне рішення про час припинення налагоджувальних робіт.

В даний час запропонований ряд математичних моделей, основними з яких є:

- експоненціальна модель зміни помилок залежно від часу відлагодження;
- модель, що враховує дискретно понижувальну частоту появи помилок як лінійну функцію часу тестування і випробувань;

- модель, що базується на розподілі Вейбулла;
- модель, заснована на дискретному гіпергеометричному розподілі.

При обґрунтуванні математичних моделей висуваються деякі гіпотези про характер проявів помилок в комплексі програм. Найбільш обґрунтованими є припущення, на яких базується перша експоненціальна модель зміни помилок в процесі відлагодження і які полягають в такому:

а) будь-які помилки в програмі є незалежними і виявляються у випадкові моменти часу;

б) час роботи між помилками визначається середнім часом виконання команди на ЕОМ і середнім числом команд, що виконуються між помилками. Це означає, що інтенсивність прояву помилок при реальному функціонуванні програми залежить від середньої швидкодії ЕОМ;

в) помилка, що є причиною спотворення результатів, фіксується і виправляється після завершення тестування або взагалі не виявляється.

З цих властивостей виходить, що за нормальних умов експлуатації кількість помилок, що виявляються в деякому інтервалі часу, розподілені за законом Пуассона. А тривалість безперервної роботи між спотвореннями розподілена експоненціально.

Припустимо, що на початку відлагодження комплексу програм при $\tau = 0$ в ній містилося N_0 помилок. Після відлагодження за інтервал часу τ залишилося n_0 помилок і усунено n помилок $(n_0 + n = N_0)$. При цьому час τ відповідає тривалості виконання програм на обчислювальному засобі для виявлення помилок і не враховує простоїв ТЗ, необхідних для аналізування результатів і проведення коректувань.

Інтенсивність виявлення помилок в програмі $dn/d\tau$ і абсолютна кількість усунених помилок пов'язані рівнянням:

$$\frac{dn}{d\tau} + bn = bN_0, \tag{1.169}$$

де b – коефіцієнт пропорційності.

Якщо припустити, що на початку відлагодження при $\tau = 0$ помилки відсутні, то розв’язок рівняння (1.169) має вигляд:

$$n = N_0 \left[1 - \exp(-b\tau)\right]. \tag{1.170}$$

Кількість помилок, що залишилися, в комплексі програм

$$n_0 = N_0 - n = N_0 \exp(-b\tau),$$

пропорційна інтенсивності виявлення $dn/d\tau$ з точністю до коефіцієнта b.

Час безвідмовної роботи програм до відмови T або напрацювання на відмову, який розглядається як знайдене спотворення програм, даних чи обчислювального процесу, що порушують роботоздатність, дорівнює величині, зворотній інтенсивності виявлення відмов (помилок):

$$T = \frac{1}{dn/d\tau} = \frac{1}{bN_0} \exp(b\tau). \tag{1.171}$$

Якщо врахувати, що до початку тестування в комплексі програм містилося N_0 помилок і цьому відповідало напрацювання до відмови T_0, то функцію напрацювання до відмови від тривалості перевірок можна записати в такому вигляді:

$$T = T_0 \exp\left(\frac{\tau}{N_0 T_0}\right). \qquad (1.172)$$

Якщо відомі моменти виявлення помилок t_i і кожного разу в ці моменти виявляється і достовірно усувається одна помилка, то, використовуючи метод максимальної правдоподібності, можна отримати рівняння для визначення значення початкової кількості помилок N_0:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N_0 - (i-1)} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} t_i}{N_0 \sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n} (i-1)\, t_i}, \qquad (1.173)$$

а також вираз для розрахунку коефіцієнта пропорційності

$$b = \frac{n}{N_0 \sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n} (i-1)\, t_i}. \qquad (1.174)$$

В результаті можна розрахувати кількість помилок, що залишилися в програмі, і середнє напрацювання до відмови $T_{ср} = 1/\lambda$, тобто отримати оцінку часу до виявлення наступної помилки.

В процесі відлагодження і випробувань програм для підвищення напрацювання до відмови від T_1 до T_2 необхідно виявити і усунути Δn помилок. Величина Δn визначається співвідношенням:

$$\Delta n = N_0 T_0 \left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right]. \qquad (1.175)$$

Вираз для визначення затрат часу $\Delta\tau$ на проведення відлагодження, що дозволяє усунути Δn помилок і відповідно підвищити напрацювання до відмови від значення T_1 до T_2 має вигляд:

$$\Delta\tau = \frac{N_0 T_0}{b} \ln (T_2 / T_1). \qquad (1.176)$$

Друга модель побудована на припущеннях, що час до наступної відмови розподілений експоненціально, а інтенсивність відмов програми пропорційна кількості помилок, що залишилися в програмі.

Згідно з цим припущенням ймовірність безвідмовної роботи програми як функція часу t_i дорівнює

$$P(t_i) = e^{-\lambda_i t_i}, \qquad (1.177)$$

де інтенсивність відмов

$$\lambda_i = b\left[N_0 - (i-1)\right]. \qquad (1.178)$$

Тут b – коефіцієнт пропорційності;

N_0 – початкове число помилок в програмі.

В (1.177) відлік часу починається від моменту останньої (і - 1)-ї відмови програми.

Для оцінки напрацювання до відмови виходить вираз, який відповідає розподілу Релея:

$$P(t_i) = \exp\left\{-b\left[N_0 - (i-1)\right]\frac{t_i^2}{2}\right\}, \qquad (1.179)$$

де $P(t_i) = P(T \geq t_i)$.

З урахуванням рівняння (1.179) щільність розподілу часу напрацювання до відмови описується виразом:

$$a(t_i) = -P'(t_i) = b\left[N_0 - (i-1)\right]\exp\left\{-b\left[N_0 - (i-1)\right]\frac{t_i^2}{2}\right\}. \qquad (1.180)$$

Використавши функцію максимальної правдоподібності, отримаємо оцінку для загальної кількості помилок N_0 і коефіцієнта b:

$$N_0 = \left[\frac{2n}{b} + \sum_{i=1}^{n}(i-1)t_i^2\right]\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}; \qquad (1.181)$$

$$b = \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{N_0 - (i-1)}\right]\frac{1}{\sum_{n=1}^{n} t_i^2}. \qquad (1.182)$$

Особливістю третьої моделі є облік ступінчастого характеру зміни надійності при усуненні чергової помилки. Як головна розглядається функція розподілу часу напрацювання до відмови P(t). Якщо помилки не усуваються, то інтенсивність відмов є постійною, що приводить до експоненціальної моделі розподілу:

$$P(t) = \exp(-\lambda t).$$

Звідси щільність розподілу напрацювання до відмови визначається за виразом:

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

де t > 0, λ > 0 і 1/λ – середній час напрацювання до відмови, тобто $T_{ср} = 1/\lambda$.

Для апроксимації зміни інтенсивності від часу при виявленні і усуненні помилок використовується функція такого вигляду:

$$\lambda(t) = \lambda k t^{k-1}.$$

Якщо 0 < k < 1, то інтенсивність відмов знижується при налагодженні або в процесі експлуатації. При такому вигляді функції λ(t) щільність функції розподілу напрацювання до відмови описується двопараметричним розподілом Вейбулла, який детальніше буде розглянуто далі.

Приклад 1.19. При налагодженні програмного модуля відмови наступали в такий час: t1 = 10 год.; t2 = 20 год.; t3 = 25 год. Визначити середній час до наступної (четвертої) відмови програми та ймовірність її відсутності.

Розв'язування:

Запишемо формулу

$$P(t_4) = e^{-\lambda_4 t_4};$$

$$\lambda(t_4) = b\left[N_0 - (4-1)\right],$$

де b – коефіцієнт пропорційності;

N_0 – початкове число помилок в програмі.

Запишемо нелінійне рівняння для одержання значення N_0 методом перебору:

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n} t_i}{N_0\sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n}(i-1)t_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{N_0 - i + 1}.$$

Для N_0 = 3 і n = 3:

$$\frac{3(10+20+25)}{3(10+20+25)-(0+20+50)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1,$$

$$198 = 209.$$

Для N_0 = 4 рівність дасть $396 = 390$;

для N_0 = 5 рівність дасть $1980 = 1927$.

Найкращим чином підходить N_0 = 4.

Визначимо b для N_0 = 4:

$$b = \frac{n}{N_0\sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n}(i-1)t_i},$$

$$b = \frac{3}{4(10+20+25)-(0+20+50)} = 0,02.$$

Визначимо λ_4:

$$\lambda_4 = b\left[N_0 - (i-1)\right] = 0,02(4-4+1) = 0,02(\text{ãî ä}^{-1}).$$

Отже, середній час до наступної відмови складе:

$$t_4 = \frac{1}{\lambda_4} = \frac{1}{0,02} = 50\text{âî ä.}$$

Тоді, підставляючи знайдені значення λ_4 і t_4 в формулу для $P\ t_4$, отримаємо ймовірність відсутності четвертого відмови:

$$P\ \ t_4\ = e^{-0,02\cdot 50} = e^{-1} \approx 0,368.$$

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення надійності та основних властивостей надійності ТЗ.
2. Перерахуйте основні терміни, що використовуються в теорії надійності відповідно до ГОСТу.
3. Перерахуйте основні показники метрологічної надійності засобів вимірювальної техніки.
4. Перерахуйте основні показники надійності невідновлюваних ТЗ.
5. Які показники надійності відновлюваних ТЗ найчастіше нормуються?
6. Наведіть вираз, за яким розраховується середнє напрацювання до першої відмови.
7. Наведіть вирази для визначення статистичних оцінок показників надійності невідновлюваних ТЗ.
8. Наведіть вирази, за якими розраховуються ймовірнісні оцінк и коефіцієнта готовності та коефіцієнта вимушеного простою.
9. В чому основні відмінності показників довговічності і збережності?
10. Наведіть методику нормування показників метрологічної надійності.
11. Які характеристики надійності спільні, а які відмінні між програмними і апаратними показниками надійності?
12. Перерахуйте основні проблем дослідження надійності програмного забезпечення.
13. Які Ви знаєте кількісні показники надійності програмного забезпечення?
14. Наведіть математичні моделі для оцінювання надійності комплексів програм.
15. Як розраховується середній час до першої відмови при оцінюванні показників метрологічної надійності?
16. Як розраховують вірогідність безвідмовної роботи при оцінюванні показників метрологічної надійності?
17. Наведіть аналітичний вираз для визначення функції інтенсивності відмов програмного забезпечення.

Розділ 2 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ В ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

Для вирішення завдань з оцінки надійності і прогнозування працездатності ТЗ необхідно мати математичну модель, яка представлена аналітичними виразами одного з показників P(t), a(t) і λ(t). Основний шлях для отримання моделі полягає у проведенні випробувань, обчисленні статистичних оцінок та їх апроксимації аналітичними функціями. У цьому розділі будуть розглянуті моделі, що використовуються в теорії надійності ТЗ.

2.1 Залежність інтенсивності відмов від часу роботи ТЗ

З'ясуємо, як змінюється безвідмовність ТЗ при їх експлуатації, що дозволить класифікувати моделі і визначити можливості їх застосування. Досвід експлуатації показує, що зміна інтенсивності відмов λ(t) переважної більшості ТЗ описується U - подібною кривою (рис.2.1). Криву (рис. 2.1) можна умовно розділити на три найбільш характерних періоди роботи:

1) припрацювання (1);
2) нормальна експлуатація (2);
3) старіння чи знос (3).

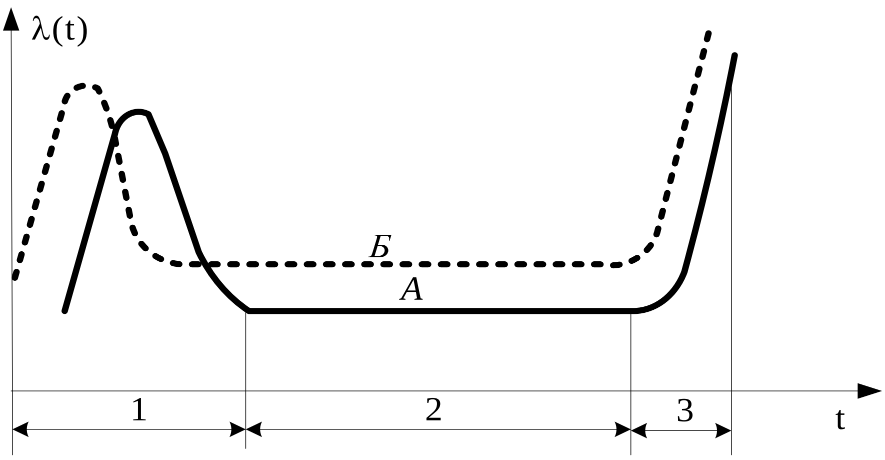


Рисунок 2.1 – Залежність інтенсивності відмов від часу роботи ТЗ

Період припрацювання характеризується високою інтенсивністю відмов, викликаних відхиленням від вимог конструкторсько-технологічної документації, що розподіляються за законом розподілу Вейбулла й усуваються за рахунок введення технологічного припрацювання («технологічного прогону»). Як видно з рис. 2.1 інтенсивність відмов на першому періоді монотонно зменшується.

Період нормальної експлуатації характеризується мінімальною і постійною інтенсивностями відмов. Ці відмови називаються **раптовими**, носять випадковий характер і розподіляються як правило за експоненціальним законом розподілу. Тут інтенсивність відмов залишається приблизно однаковою (див. рис. 2.1).

Період старіння або зносу характеризується різким збільшенням інтенсивності **зносових** відмов, що розподіляються за нормальним законом розподілу (законом Гаусса). На третьому періоді, як видно з рис. 2.1, інтенсивність відмов постійно зростає.

Збільшення жорсткості режиму експлуатації викликає переміщення кривої інтенсивності відмов вгору по осі ординат і вліво по осі абсцис (крива Б на рисунку 2.1). Це пов'язано з тим, що більш жорсткий режим експлуатації прискорює вихід з ладу ТЗ в період припрацювання і час припрацювання скорочується, крім того, більш жорсткий режим експлуатації викликає ріст інтенсивності відмов на всіх ділянках кривої.

На практиці за результатами розрахунків значень функцій P(t) і a(t) в моменти контролю справності ТЗ, що випробовуються, будуються гістограми вказаних функцій. Потім проводять згладжувальну криву та підбирають теоретичний закон розподілу (доцільно підбирати за критерієм Колмогорова або за критеріями хі-квадрат Пірсона, Неймана та ін.), який найбільш точно описував би експериментально отриману криву, визначають параметри цього закону. В подальшому знайдений закон використовують при розрахунках.

Виходячи з вище викладеного розглянемо детальніше найчастіше використовувані для розрахунку надійності ТЗ закони розподілу.

2.2 Розподіл Вейбулла

Розподіл Вейбулла (distribution of Veybulla) – двопараметричний закон розподілу випадкового напрацювання до відмови з параметрами: λ_0, що визначає масштаб, і k, що визначає асиметрію.

Розподіл Вейбулла широко використовується для визначення показників надійності ТЗ, при дослідженні їх міцності і довговічності. Ним описується інтенсивність відмов на всьому проміжку експлуатації ТЗ (див.п.2.1). Вказані три види залежностей інтенсивностей відмов від часу можна одержати, використовуючи для ймовірнісної оцінки напрацювання до відмови двопараметричний розподіл Вейбулла.

Показники надійності при такому законі розподілу будуть визначатися так:

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t^k}; \qquad (2.1)$$

$$a(t) = -P'(t) = \lambda_0 k t^{k-1} e^{-\lambda_0 t^k}; \qquad (2.2)$$

$$\lambda(t)=\frac{a(t)}{P(t)}=\lambda_0 k t^{k-1}; \qquad (2.3)$$

$$T_{cp}=\int_0^\infty P(t)dt=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}{\lambda_0^{1/k}}, \qquad (2.4)$$

де $\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)$ – гамма-функція.

Гамма-функція визначається за виразом

$$\Gamma(X)=\int_0^\infty t^{X-1}e^{-t}dt. \qquad (2.5)$$

Значення гамма-функції наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Значення гамма-функції

X	Γ(X)	X	Γ(X)	X	Γ(X)	X	Γ(X)	X	Γ(X)
1,00	1,0000	1,20	0,9182	1,40	0,8873	1,60	0,8935	1,80	0,9314
1,01	0,9943	1,21	0,9156	1,41	0,8868	1,61	0,8947	1,81	0,9341
1,02	0,9888	1,22	0,9131	1,42	0,8864	1,62	0,8959	1,82	0,9368
1,03	0,9835	1,23	0,9108	1,43	0,8860	1,63	0,8972	1,83	0,9397
1,04	0,9781	1,24	0,9030	1,44	0,8858	1,64	0,8986	1,84	0,9426
1,05	0,9735	1,25	0,9064	1,45	0,8857	1,65	0,9001	1,85	0,9456
1,06	0,9687	1,26	0,9044	1,46	0,8856	1,66	0,9017	1,86	0,9187
1,07	0,9642	1,27	0,9025	1,47	0,8856	1,67	0,9033	1,87	0,9518
1,08	0,9597	1,28	0,9007	1,48	0,8857	1,68	0,9050	1,88	0,9551
1,09	0,9555	1,29	0,8990	1,49	0,8859	1,69	0,9068	1,89	0,9584
1,10	0,9514	1,30	0,8975	1,50	0,8862	1,70	0,9086	1,90	0,9618
1,11	0,9474	1,31	0,8960	1,51	0,8866	1,71	0,9106	1,91	0,9652
1,12	0,9436	1,32	0,8946	1,52	0,8870	1,72	0,9126	1,92	0,9688
1,13	0,9399	1,33	0,8934	1,53	0,8876	1,73	0,9147	1,93	0,9724
1,14	0,9364	1,34	0,8922	1,54	0,8882	1,74	0,9168	1,94	0,9761
1,15	0,9330	1,35	0,8912	1,55	0,8889	1,75	0,9191	1,95	0,9799
1,16	0,9298	1,36	0,8902	1,56	0,8896	1,76	0,9214	1,96	0,9837
1,17	0,9267	1,37	0,8893	1,57	0,8905	1,77	0,9238	1,97	0,9877
1,18	0,9237	1,38	0,8885	1,58	0,8914	1,78	0,9262	1,98	0,9917
1,19	0,9209	1,39	0,8879	1,59	0,8924	1,79	0,9288	1,99	0,9959

Характеристика зміни ймовірності безвідмовної роботи, що залежить від часу напрацювання при перерозподілі відмов за законом Вейбулла, подана на рис. 2.2.

Дисперсія часу безвідмовної роботи для розподілу Вейбулла з урахуванням рівняння (1.12) описується виразом

$$\sigma_T^2=\lambda_0^{-\frac{2}{k}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{k}+1\right)\right]. \qquad (2.6)$$

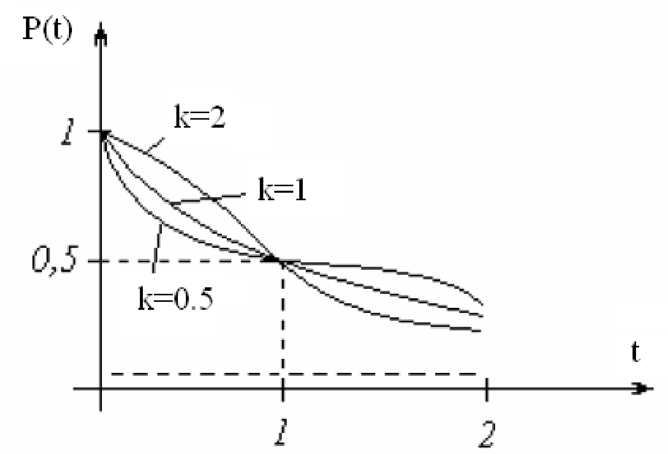


Рисунок 2.2 – Характеристика зміни ймовірності безвідмовної роботи для розподілу Вейбулла при k=2, k=1 та k=0.5

Отже, інтенсивність відмов $\lambda(t)$, що розподілена за законом Вейбулла, при k < 1 – монотонно зменшується, при k >1 – монотонно збільшується і при k = 1 – λ = const (рис. 2.3).

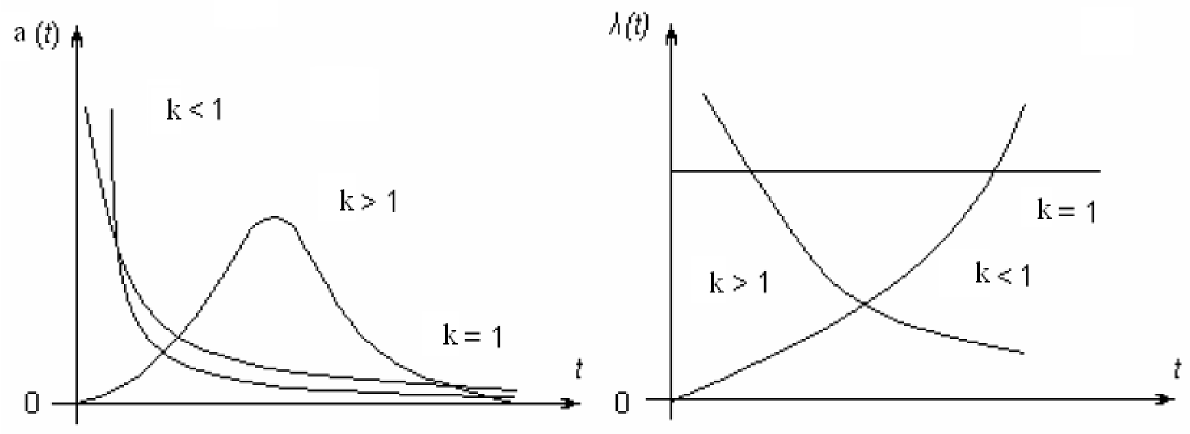


Рисунок 2.3 – Характеристики зміни частоти та інтенсивності відмов, що розподілені за законом Вейбулла

Приклад 2.1. Час безвідмовної роботи виробу підлягає закону Вейбулла з параметрами k = 1,5 і $\lambda_0 = 10^{-4}$ год$^{-1}$. Визначити кількісні характеристики надійності виробу P(t), a(t), λ(t) і $T_{ср}$ для t = 100 год$^{-1}$.

Розв'язування:

Ймовірність безвідмовної роботи

$$P(100) = e^{-10^{-4} 100^{1,5}} = 0,9.$$

Частота відмов

$$a(100) = 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 100^{1,5-1} \cdot P(100) = 1,35 \cdot 10^{-3} (\text{ãî ä}^{-1}).$$

Інтенсивність відмов

$$\lambda(100) = \lambda k(100)^{k-1} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ (год}^{-1}).$$

або

$$\lambda(100) = a(100)/P(100) = 1{,}35\cdot10^{-3}/0{,}9 = 1{,}5\cdot10^{-3}\ (\text{год}^{-1}).$$

Для розрахунку $T_{ср}$ скористаємося формулою (2.4) для розподілу Вейбулла

$$T_{ср} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}{\lambda_0^{1/k}} = (10^{-4})^{-0,67}\Gamma(1{,}67).$$

Знайшовши з довідникової таблиці 2.1 значення гамма-функції Г(1.67) = 0,9033 і провівши нескладні розрахунки, отримаємо $T_{ср}$ = 418 год.

Приклад 2.2. Визначити середнє напрацювання та інтенсивність відмов для ТЗ, час безвідмовної роботи якого підпорядковується закону Вейбулла з параметрами $k = 1{,}8$; $\lambda_0 = 3\cdot10^{-4}$ год$^{-1}$ протягом часу t=300 год.

Розв'язування:

Для визначення значення $T_{ñð}$ використаємо вираз (2.4)

$$T_{ср} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}{\lambda_0^{1/k}} = (3\cdot10^{-4})^{-0,56}\Gamma(1{,}56).$$

За допомогою таблиці 2.1 знайдемо значення гамма-функції Г(1,56)=0,88964. Підставляючи значення у формулу, отримаємо $T_{ñð} \approx 83{,}5$ години.

Підставивши у формулу (2.3) параметри розподілу Вейбулла k і λ_0, визначимо інтенсивність відмов ТЗ протягом 300 годин:

$$\lambda(300) = \lambda_0 k t^{k-1} = 3\cdot10^{-4}\cdot1{,}8\cdot300^{1,8-1} = 0{,}0518(\text{ãî ä}^{-1}).$$

2.3 Експоненціальний розподіл

Експоненціальний закон розподілу (exponential distribution) – однопараметричний закон з постійною інтенсивністю відмов (λ_0 = const). Він є частковим випадком розподілу Вейбулла при k = 1.

Експоненціальний розподіл застосовується для електрорадіовиробів та складних технічних систем, що не піддаються старінню та зношуванню, яким властиві раптові відмови через приховані дефекти. Цьому закону розподілу підлягає багато явищ, наприклад тривалість телефонних розмов, час безвідмовної роботи радіоелектронних пристрої або їх окремих елементів та ін.

Випадкова величина t має експоненціальний закон розподілу (показниковий розподіл) із параметром $\lambda_0 > 0$, якщо вона неперервна та її функція розподілу ймовірностей відмов має такий вигляд:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_0 t}, t \geq 0 \\ 0, t < 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

де λ_0– інтенсивність відмов (число відмов в одиницю часу).

Тобто експоненціальний розподіл визначають одним параметром – інтенсивністю відмов λ_0, що є його значною перевагою. При цьому параметр λ_0 цього закону розподілу характеризує інтенсивність подій, яка є постійною та не залежить від часу.

Ймовірність безвідмовної роботи при експоненціальному розподілі визначається за формулою:

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t}, \tag{2.8}$$

Розкладаючи вираз для P(t) в степеневий ряд і обмежуючись першими двома членами, отримаємо наближене значення

$$P(t) = 1 - \frac{\lambda_0 \cdot t}{1!} + ... \approx 1 - \lambda_0 \cdot t. \tag{2.9}$$

Звідки

$$Q(t) = \lambda_0 \cdot t; \tag{2.10}$$

$$t = \frac{1 - P(t)}{\lambda_0}. \tag{2.11}$$

Частота відмов і середнє напрацювання до відмови при експоненціальному розподілі визначаються за формулами:

$$a(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}; \tag{2.12}$$

$$T_{cp} = {}^{1}\!/_{\lambda_0} \ . \tag{2.13}$$

Замінюючи у виразі (2.8) λ_0 на $1/T_{cp}$, отримаємо

$$P(t) = e^{\frac{-t}{T_{cp}}}. \tag{2.14}$$

Ймовірність безвідмовної роботи на інтервалі часу t = T_{cp} при експоненціальному розподілі дорівнює

$$P(T_{cp}) = e^{-1} = 0{,}368 \ .$$

Дисперсія часу безвідмовної роботи для експоненціального закону розподілу розраховується за формулою

$$\sigma_T^2 = 2\int_0^\infty te^{-\lambda_0 t}dt - \frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} = T_{cp}^2. \tag{2.15}$$

Графік зміни ймовірності безвідмовної роботи від часу при експоненціальному розподілі відмов зображено на рис. 2.4.

Знайдемо умовну ймовірність того, що для експоненціальної моделі ТЗ пропрацює безвідмовно на інтервалі часу t, після того як він безвідмовно пропрацював на інтервалі T. В цьому випадку маємо

$$P(t/T) = \frac{P(t+T)}{P(T)} = \frac{e^{-\lambda_0 (t+T)}}{e^{-\lambda_0 T}} = e^{-\lambda_0 T}. \tag{2.16}$$

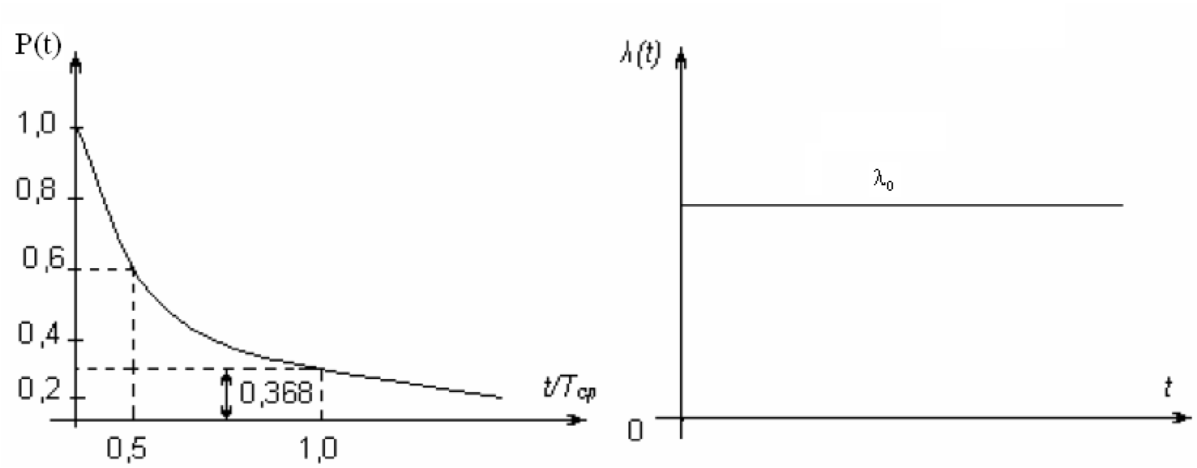


Рисунок 2.4 – Експоненціальний розподіл ймовірності безвідмовної роботи та інтенсивності відмов

Звідси випливає важливий висновок: *для експоненціального закону розподілу ймовірності безвідмовної роботи розподіл часу безвідмовної роботи не залежить від того, скільки часу ТЗ пропрацював до початку відліку від моменту першого ввімкнення.* Інші закони розподілу такої властивості не мають, оскільки в інших розподілах $\lambda_0 \neq \text{const}$, а залежить від часу.

Модель експоненціального розподілу широко використовується для апріорного аналізу надійності. При апріорному аналізі надійності необхідно проводити перевірку відповідності експоненціальної моделі результатам випробувань.

Приклад 2.3. Напрацювання ТЗ до відмови описується експоненціальним розподілом з параметром λ_0=10^{-4} год$^{-1}$. Визначити ймовірність безвідмовної роботи P(t), частоту розподілу a(t) і середній час безвідмовної роботи ТЗ $T_{ср}$ за час роботи t = 2000 год.

Розв'язування:

Відповідно до формули (2.8) отримаємо

$$P(2000) = e^{\frac{-2000}{10^4}} = 0{,}819.$$

Відповідно до формули (2.12) отримаємо

$$a(2000) = 10^{-4} e^{\frac{-2000}{10^4}} = 8{,}19 \cdot 10^{-6} \text{ (год}^{-1}\text{)}.$$

На основі формули (2.13) середнє напрацювання до відмови складає

$$T_{ср} = 1/10^{-4} = 10^4 \text{ год.}$$

Приклад 2.4. Визначити середній час безвідмовної роботи $T_{ср}$ приладу і ймовірність його безвідмовної роботи P(t) протягом 100 годин, якщо частота розподілу часу безвідмовної роботи приладу описується виразом a(t)= $2 \cdot 10^{-3} e^{-2 \cdot 10^{-3}}$.

Розв'язування:

Відомо, що для експоненціального закону розподілу частота розподілу часу безвідмовної роботи має вигляд

$$a(t) = \lambda_0 \cdot e^{-\lambda_0 t},$$

звідки за умовою випливає, що інтенсивність відмов $\lambda_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ год$^{-1}$.

Тоді, середній час напрацювання до відмови

$$T_{ср} = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = 500 \text{год}.$$

Ймовірність безвідмовної роботи за час t = 100 год.

$$P(100) = e^{-2 \cdot 10^{-3} \cdot 100} = 0{,}82$$

або за спрощеною формулою (2.9)

$$P(100) = 1 - 2 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0{,}8.$$

Приклад 2.5. Час роботи випробувальної установки і час її відновлення підлягають експоненціальному закону з параметрами: λ_0=1,2·10^{-4} год$^{-1}$, $\lambda_В$=0,3·10^{-2} год$^{-1}$ відповідно. Визначити ймовірність її безвідмовної роботи, ймовірність відмови, середній час безвідмовної роботи і середній час відновлення за два роки експлуатації.

Розв'язування:

Ймовірність безвідмовної роботи за 2 роки

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t}; \qquad P(2р.) = e^{-1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 365\ 24} = 0{,}12.$$

Ймовірність відмови

$$Q(2р.) = 1 - P(2р.) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88.$$

Середній час безвідмовної роботи

$$T_{ср} = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} = 8333 \text{год}.$$

Середній час відновлення

$$T_в = \frac{1}{\lambda_в} = \frac{1}{0{,}3 \cdot 10^{-2}} = 333 \text{год}.$$

Приклад 2.6. Згідно з важливою властивістю експоненціального розподілу вказаною вище, в радіоелектронних ТЗ при вирішенні практичних завдань інтенсивність відмов вважають постійною протягом тривалого часу.

Представимо орієнтовний розрахунок радіоелектронного приладу, який проводиться на етапі розробки, коли вже є принципова схема. Метою такого розрахунку є визначення раціонального складу елементів приладу.

Повний розрахунок надійності при врахуванні режимів роботи елементів проводиться, коли основні конструктивні проблеми вирішені, але можна ще змінити режими роботи елементів.

Вихідними даними для розрахунку є значення інтенсивності відмови всіх радіокомпонентів і елементів конструкції, які дані в довідниках розробників.

В таблиці 2.2 наведено результати орієнтовного розрахунку надійності.

Таблиця 2.2 - Результати орієнтовного розрахунку надійності

Найменування і тип елементів	Позначення на схемі	N_i	Інтенсивність відмов $\lambda \cdot 10^{-6}$ ãî ä$^{-1}$	$\lambda_i \cdot N_i$
Діоди імпульсні	VD1, VD2	2	0,600	$1{,}200 \cdot 10^{-6}$
Кнопка	SB1	1	0,035	$0{,}035 \cdot 10^{-6}$
Конденсатори керамічні	C1, C3	2	1,400	$2{,}800 \cdot 10^{-6}$
Конденсатори електролітичні	C2, C4	2	0,035	$0{,}070 \cdot 10^{-6}$
Резистори С2-23 -0,25	R1, R3-R8	7	0,040	$0{,}280 \cdot 10^{-6}$
Резистори С2-23 -1,0	R2	1	1,000	$1{,}000 \cdot 10^{-6}$
Світлодіод	HL1	1	2,157	$2{,}157 \cdot 10^{-6}$
Транзистори біполярні	VT1- VT3	3	3,000	$9{,}000 \cdot 10^{-6}$
Пайки	-	34	0,004	$0{,}136 \cdot 10^{-6}$
Провідники	-	6	0,015	$0{,}090 \cdot 10^{-6}$
Роз’єм, вилка РС4ТВ	X1	1	0,040	$0{,}040 \cdot 10^{-6}$

Звідки можна визначити сумарне значення інтенсивності відмов приладу

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot N_i \ ,$$

де m – кількість найменування видів радіокомпонентів і елементів конструкції приладу;

λ_i – величина інтенсивності відмови i-го радіокомпонента, елементу конструкції з урахуванням заданих для нього умов експлуатації: коефіцієнта електричного навантаження, температури, вологості, технічних навантажень та ін.

N_i – кількість радіокомпонентів, елементів конструкції i-го найменування.

За результатами таблиці 2.2 $\lambda_{\Sigma} = 16{,}808 \cdot 10^{-6}$ ãî ä$^{-1}$.

Середній час напрацювання на відмову визначають за формулою:

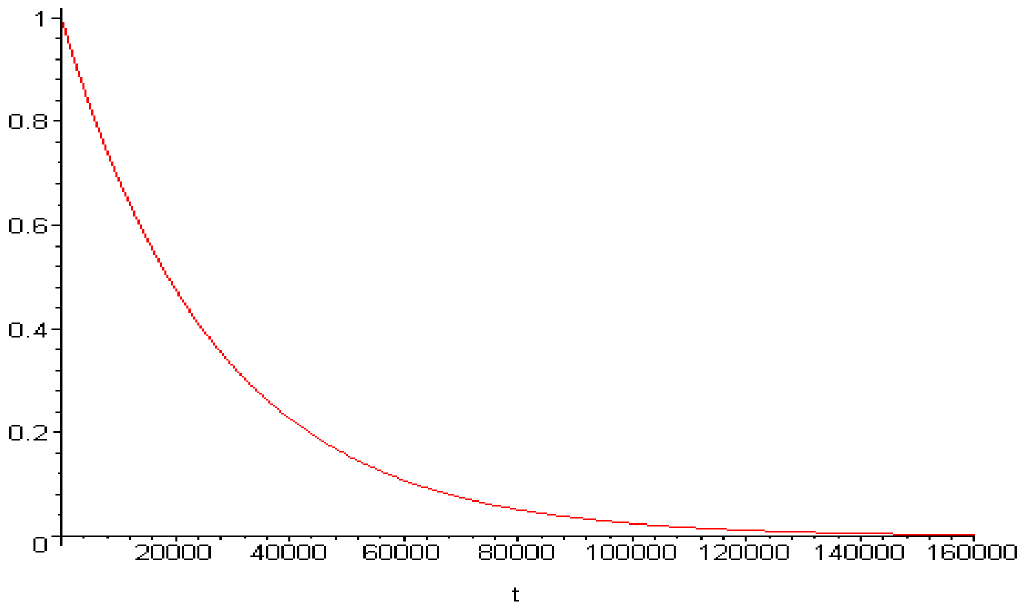
$$T_{ср} = \frac{1}{\lambda_{\Sigma}} \approx 59495\text{ãî ä.}$$

Будують графік ймовірність безвідмовної роботи за експоненціальним законом:

$$\mathbf{P(t) = e^{-\lambda_{\Sigma} \cdot t}}.$$

В залежності від часу t можна визначити ймовірність безвідмовної роботи P(t) по графіку або за формулою, наприклад

$$P(50000) = 0{,}4316.$$



2.4 Розподіл Релея

Розподіл Релея (Rayleigh distribution) зустрічається при аналізі надійності автоматичних систем і технічних засобів з резервуванням елементів. Його розглядають як окремий випадок розподілу Вейбулла з параметром k = 2.

При розподілі Релея ймовірність безвідмовної роботи на інтервалі (0; t) дорівнює

$$P(t) = e^{\frac{-t^2}{2r^2}}, \tag{2.17}$$

де r – параметр розподілу Релея, який дорівнює моді цього розподілу (рис. 2.5, а). Його не потрібно змішувати зі середньоквадратичним відхиленням σ_T.

Частота відмов (рис.2.5,б) і інтенсивність відмов (рис. 2.5,в) при розподілі Релея визначаються за формулами:

$$a(t) = -P'(t) = \frac{t}{r^2} e^{\frac{-t^2}{2r^2}}; \qquad (2.18)$$

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} = \frac{t}{r^2}. \qquad (2.19)$$

Характерним для розподілу Релея є пряма лінія графіка $\lambda(t)$, яка починається з початку координат.

Середній час безвідмовної роботи $T_{ср}$ для розподілу Релея описується виразом

$$T_{ср} = \int_0^{\infty} t a(t) dt = r\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}253r. \qquad (2.20)$$

Відповідно дисперсія часу безвідмовної роботи описується виразом

$$\sigma_T^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) r^2 = 0{,}429r^2. \qquad (2.21)$$

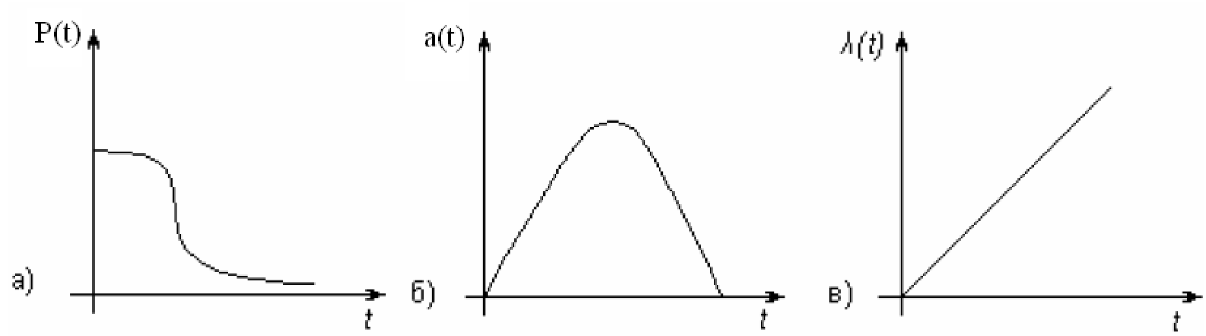


Рисунок 2.5 – Характеристики зміни ймовірності безвідмовної роботи, частоти відмов та інтенсивності відмов розподіленими за законом Релея

Приклад 2.7. Час роботи ТЗ до відмови підлягає закону розподілу Релея. Необхідно обчислити кількісні характеристики надійності ТЗ $P(t)$, $a(t)$, $\lambda(t)$, $T_{ср}$ для $t = 1000$ год, якщо параметр розподілу $r = 1000$ год.

Розв'язування:

Обчислимо ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$

$$P(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2r^2}\right);$$

$$P(1000) = \exp\left(-\frac{1000^2}{2 \cdot 1000^2}\right) = e^{-0.5} = 0{,}606.$$

Обчислимо частоту відмов $a(t)$

$$a(t) = t \cdot p(t) / r^2;$$

$$a(1000) = 1000 \cdot 0{,}606 / 1000^2 = 0{,}606 \cdot 10^{-3} \text{ (год}^{-1}\text{)}.$$

Обчислимо інтенсивність відмов

$$\lambda(t) = t / r^2;$$

$$\lambda(1000) = 1000/1000^2 = 10^{-3}\ (\text{год}^{-1}).$$

Обчислимо середній час безвідмовної роботи ТЗ

$$T_{ср} = r\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1000\cdot 1{,}253 = 1253\ \text{год}.$$

2.5 Гамма-розподіл

При **гамма-розподілі (gamma-distribution)** щільність розподілу напрацювання до відмови (частота відмов) описується виразом

$$a(t) = \frac{\lambda_0^2}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\lambda_0 t}, \tag{2.22}$$

де Γ(r) – повна гамма-функція.

В теорії надійності гамма-розподіл, як правило, використовується при цілому значенні параметра r. Якщо r = 1, то гамма-розподіл перетворюється в експоненційний розподіл. Якщо r – ціле число більше 1, то гамма-розподіл є розподілом суми незалежних випадкових величин, кожна з яких має експоненційний розподіл.

Гамма-розподіл при цілому значенні r інколи називають *розподілом Ерланга*. Для такого розподілу ймовірність безвідмовної роботи на інтервалі (0; t) описується виразом (рис. 2.6, а):

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}. \tag{2.23}$$

Частота відмов (рис. 2.6,б) в цьому випадку визначається за формулою

$$a(t) = \lambda_0 \frac{(\lambda_0 t)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda_0 t}. \tag{2.24}$$

Інтенсивність відмов (рис. 2.6, в) визначається за формулою

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{(\lambda_0 t)^{r-1}}{(r-1)! \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}}. \tag{2.25}$$

Середній час безвідмовної роботи і дисперсія часу безвідмовної роботи відповідно описуються виразами:

$$T_{ср} = \frac{r}{\lambda_0}; \tag{2.26}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{r}{\lambda_0^2}. \tag{2.27}$$

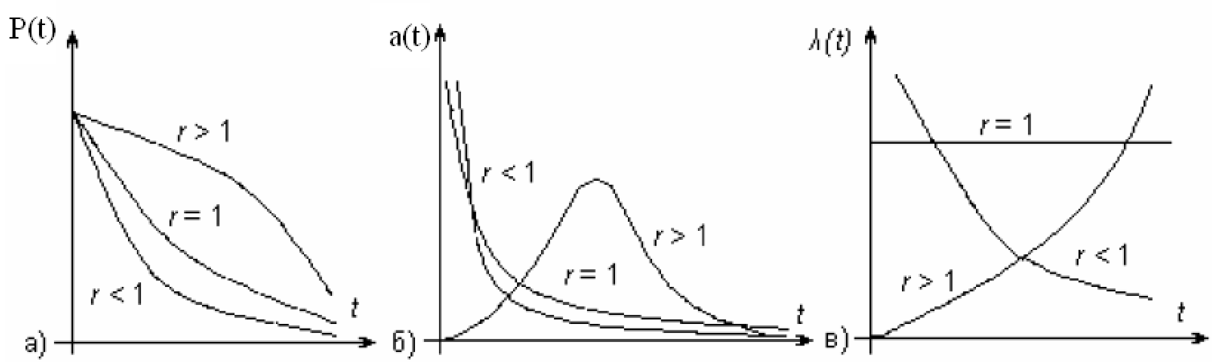


Рисунок 2.6 – Характеристики зміни гамма-розподілу: а) – ймовірність безвідмовної роботи; б) – частота відмов; в) – інтенсивність відмов

При r < 1 інтенсивність відмов монотонно спадає (що відповідає періоду припрацювання виробу), при r > 1 — зростає (що характерно для періоду зношування і старіння елементів). При r = 1 гамма-розподіл співпадає з експоненціальним розподілом, при r > 10 гамма-розподіл наближається до нормального закону

Прикладом використання гамма-розподілу є резервна система, що складається з r однакових елементів. При цьому під навантаженням знаходиться один елемент. Інші елементи почергово автоматично вмикаються в роботу після відмови працюючого елемента. При експоненціальному напрацюванні до відмови елементів їх сумарне напрацювання буде підпорядковуватися гамма-розподілу.

Приклад 2.8. Час безвідмовної роботи виробу підлягає гамма-розподілу з параметрами r = 3, $\lambda_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ год$^{-1}$. Найти ймовірність безвідмовної роботи за t = 10^4 год.

Розв'язування:

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_0 t^{\ \ i}}{i!} = e^{-\lambda_0 t}\left(1 + \lambda_0 t + \frac{\lambda_0^2 t^2}{2}\right) \approx 0{,}81.$$

2.6 Нормальний розподіл

Закон **нормального розподілу ймовірностей (normal law of distribution)** (який ще називається законом Гаусса) неперервної випадкової величини займає особливе місце серед інших законів розподілу, так як являється основним в багатьох практичних дослідженнях, ним описуються більшість випадкових подій, пов'язаних з виробничими процесами.

Взагалі розподіл випадкової величини підлягає нормальному закону, якщо вона залежить від великої кількості факторів, причому вплив кожного із них в порівнянні з усією сукупністю незначний.

Нормальний закон розподілу – це двопараметричний закон з параметрами розподілу: $T_{ср}$ – середній час безвідмовної роботи ТЗ; σ_T –

середнє квадратичне відхилення (СКВ) від середнього часу безвідмовної роботи.

Щільність розподілу напрацювання до відмови (частота відмов) або диференціальна функція при нормальному розподілі має вигляд (рис. 2.7)

$$a(t) = \frac{1}{\sigma_T \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t - T_{cp})^2}{2\sigma_T^2}}. \qquad (2.28)$$

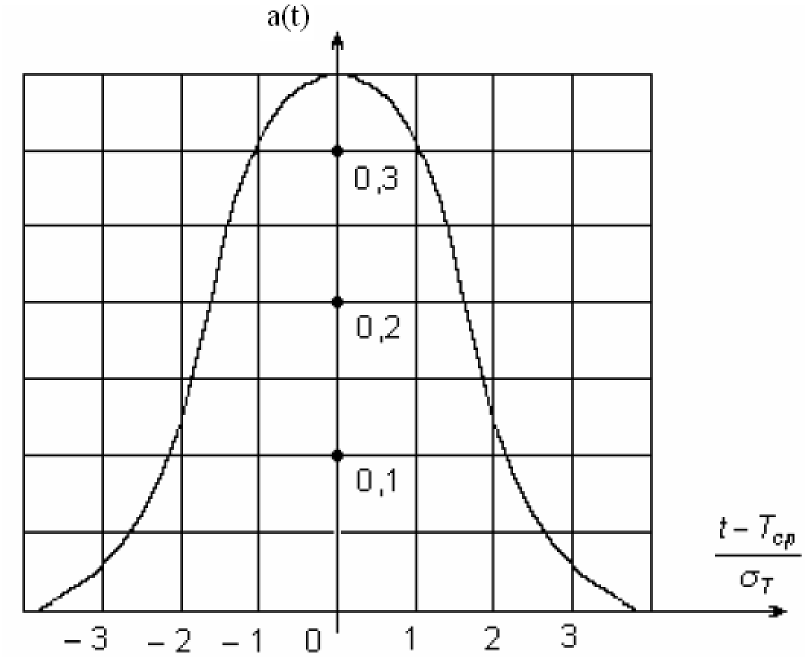


Рисунок 2.7 – Щільність розподілу напрацювання до відмови при нормальному законі розподілу

Функція a(t) досягає максимуму при $t = T_{cp}$ – значення тривалості роботи ТЗ, при якому частота відмов максимальна.

Інтегральну функцію розподілу випадкової величини (рис. 2.8) визначають через її функцію щільності a(t) таким чином:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t)dt = \frac{1}{\sigma_T \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(t - T_{cp})^2}{2\sigma_T^2}} dt + \frac{1}{\sigma_T \sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{(t - T_{cp})^2}{2\sigma_T^2}} dt. \qquad (2.29)$$

Інтеграл функції розподілу F(t) є складним, який неможливо виразити через елементарні функції. Тому для обчислення значень F(t) приходиться користуватися таблицями. Вони складені для випадку, коли $T_{cp} = 0$, а $\sigma_T = 1$. Розподіл з такими параметрами називається нормованим, а його функція розподілу

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (2.30)$$

нормованою функцією Лапласа.

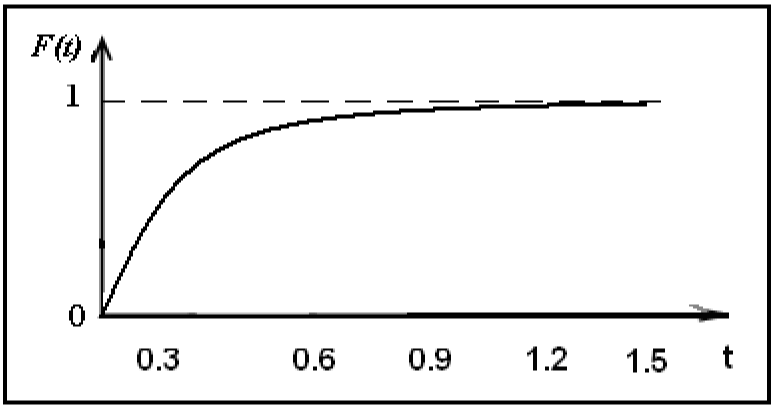


Рисунок 2.8 – Інтегральна функція розподілу випадкової величини при нормальному розподілі

Функція Лапласа має такі властивості:

1) Ф(0) = 0;

2) Ф(-t) = - Ф(t);

3) Ф(∞) = 0,5.

На практиці ймовірнісних розрахунків крім функції Лапласа, часто використовується ще одна спеціальна функція

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt, \tag{2.31}$$

яку називають функцією помилок.

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \tag{2.32}$$

Перший інтеграл у формулі (2.29) відомий в літературі як інтеграл Пуассона і його значення дорівнює 0,5. Тоді, функцію розподілу F(t) можна виразити через нормовану функцію Лапласа, якщо у формулу внести заміну z = $\frac{t - T_{\text{ñð}}}{\sigma_{\text{Ò}}}$

$$F(t) = 0,5 + \text{Ô}(z), \tag{2.33}$$

де Ф(z) – нормований інтеграл Лапласа від змінної z.

Ймовірність безвідмовної роботи визначається за формулою

$$P(t) = 1 - F(t) = 0,5 – \Phi(z). \tag{2.34}$$

Ймовірність відмови в інтервалі (t_1, t_2) визначається за формулою

$$P\ \ t_1 < t < t_2\ \ = \Phi\left(\frac{t_2 - \text{Ò}_{\text{ñð}}}{\sigma_{\text{Ò}}}\right) - \Phi\left(\frac{t_1 - \text{Ò}_{\text{ñð}}}{\sigma_{\text{Ò}}}\right). \tag{2.35}$$

Ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання не більше ніж на задану величину Δ, можна визначити за формулою

$$P\left\{\left|t-\grave{O}_{\tilde{n}\eth}\right|<\Delta\right\}=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\grave{O}}}\right). \qquad (2.36)$$

З останньої формули легко встановити правило трьох сигм, а саме, покладемо $\Delta = t\sigma_T$.

$$P\left\{\left|t-\grave{O}_{\tilde{n}\eth}\right|<3\sigma_{\grave{O}}\right\}=2\Phi(t). \qquad (2.37)$$

Якщо t = 3, тобто σ_T t = $3\sigma_T$, то

$$P\left\{\left|t-\grave{O}_{\tilde{n}\eth}\right|<3\sigma_{\grave{O}}\right\}=2\Phi(3)=0,9973. \qquad (2.38)$$

В цьому полягає сутність правила трьох сигм: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного СКВ.

Приклад 2.9. Нехай випадкові похибки вимірювання підпорядковані нормальному закону, систематична похибка вимірювального приладу дорівнює нулю, а СКВ похибки – 0,05 мм. Знайти ймовірність того, що ця похибка за абсолютною величиною буде меншою 0,15 мм.

Розв'язування:

У рівності $P\left\{\left|t-\grave{O}_{\tilde{n}\eth}\right|<\Delta\right\}=2\Phi(\Delta/\sigma_{\grave{O}})$ покладемо $T_{ср}$ = 0 (систематична похибка, тобто математичне сподівання випадкових похибок = 0); Δ= 0,15; $\sigma_{\grave{O}}$= 0,05.

$$P(|t|<0{,}15)=2\hat{O}(0{,}15/0{,}05)=2\hat{O}(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

Приклад 2.10. В результаті повірки амперметра встановлено, що 70 % похибок результатів вимірювань, проведених з його допомогою, не перевищують ±20 мА. Вважаючи, що похибки розподілені по нормальному закону з нульовим математичним сподіванням, визначити СКВ похибки.

Розв'язування:

$$P(|\Delta|<20) = 2\Phi(20/\sigma_{\grave{O}}) = 0{,}7;$$

$$\Phi(20/\sigma_{\grave{O}}) = 0{,}35.$$

Знайшовши значення функції Φ(z) по таблиці значень функції Лапласа, знаходимо значення аргументу

$$20/\sigma_{\grave{O}} = 1{,}04,$$

звідки $\sigma_{\grave{O}}$ = 19,23 мА.

Приклад 2.11. Час роботи елемента до відмови підлягає нормальному закону з параметрами $\grave{O}_{\tilde{n}\eth}$= 8000 год, σ_T = 2000 год. Необхідно обчислити кількісні характеристики надійності P(t), a(t), λ(t) для t = 10000 год.

Розв'язування:

Обчислимо ймовірність безвідмовної роботи

$$P(t) = 0{,}5 - \Phi(z), \qquad z = (t - T_{ср})/\sigma_T\,;$$

$$z = (10000\text{-}8000)/2000 = 1;\ \Phi(z) = 0{,}3413\,;$$

$$P(t) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587.$$

Обчислимо частоту відмов a(t)

$$a(t) = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T_{ср})^2}{2\sigma_T^2}}, \qquad \text{або} \qquad a(t) = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2000\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$a(1000) = 0{,}242/2000 = 12{,}1\cdot 10^{-5}\ (\text{год}^{-1}).$$

Обчислимо інтенсивність відмов λ(t)

$$\lambda(t) = a(t)\,/\,P(t);$$

$$\lambda(10000) = a(10000)\,/\,P(10000) = 12{,}1\cdot 10^{-5}\,/\,0{,}1587 = 76{,}4\cdot 10^{-5}\ (\text{год}^{-1}).$$

Приклад 2.12. На складі зберігається партія резисторів для ТЗ з номінальним значенням опору R_H = 20 кОм. При перевірці резисторів визначили, що середнє значення опорів резисторів $R_{ср}$ = 21 кОм, СКВ резисторів σ_R = 2 кОм. Визначити частку браку, якщо допустиме відхилення опору резистора не більше ніж на 15 відсотків від номіналу. Передбачається нормальний розподіл значень опорів.

Розв'язування:

Межі допуску на величину опору резисторів

$R_{min} = 0{,}85\cdot R_H = 0{,}85\cdot 20 = 17$ кОм,

$R_{max} = 1{,}15\cdot R_H = 1{,}15\cdot 20 = 23$ кОм.

Визначимо частку браку

$$Q = 1 - P(R_{min} < R < R_{max}) = 1 - \Phi\left(\frac{R_{max} - R_{ср}}{\sigma_R}\right) + \Phi\left(\frac{R_{min} - R_{ср}}{\sigma_R}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{23-21}{2}\right) + \Phi\left(\frac{17-21}{2}\right) = 1 - \Phi(1) + \Phi(-2) =$$

$$= 1 - \Phi\ 1\ - \Phi\ 2\ = 1 - 0{,}341 - 0{,}477 = 0{,}182.$$

2.7 Трикутний розподіл

Трикутний розподіл (Сімпсона) (triangular distribution) характеризує обмежену область значень випадкових величин (t_H; t_B), де t_H і t_B – межі області можливих значень випадкових величин.

Розглянемо показники надійності трикутного розподілу:

- характеристики зміни частоти відмов a(t) та інтенсивності відмов $\lambda(t)$ (рис. 2.8, а);
- характеристики зміни функції надійності P(t) (рис. 2.8, б).

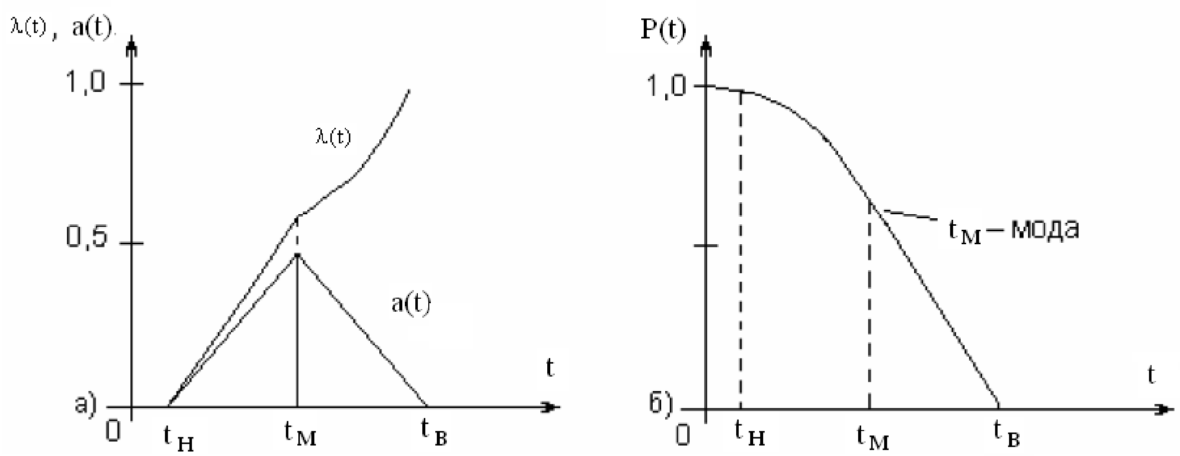


Рисунок 2.8 – Характеристики зміни показників надійності при трикутному розподілі відмов

Позначимо значення частоти відмов в точці моди через $a(t_M)=h$, тоді $h(t_B - t_M)/2=1$.

В цьому випадку частоту відмов можна записати у вигляді таких формул:

$$a(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t - t_H)}{(t_B - t_H)(t_M - t_H)} & \text{при} \quad t_H \le t \le t_M, \\ \dfrac{2(t_B - t)}{(t_B - t_H)(t_B - t_M)} & \text{при} \quad t_M \le t \le t_B. \end{cases} \tag{2.39}$$

Функція надійності P(t) буде описуватись такою системою рівнянь:

$$P(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{(t - t_H)^2}{(t_B - t_H)(t_M - t_H)} & \text{при} \quad t_H \le t \le t_M, \\ \dfrac{(t_B - t)^2}{(t_B - t_H)(t_B - t_M)} & \text{при} \quad t_M \le t \le t_B. \end{cases} \tag{2.40}$$

Інтенсивність відмов $\lambda(t)$ при цьому буде дорівнювати:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t - t_H)}{(t_B - t_H)(t_M - t_H) - (t - t_H)^2} & \text{при} \quad t_H \le t \le t_M, \\ \dfrac{2}{t_B - t} & \text{при} \quad t_M \le t \le t_B. \end{cases} \tag{2.41}$$

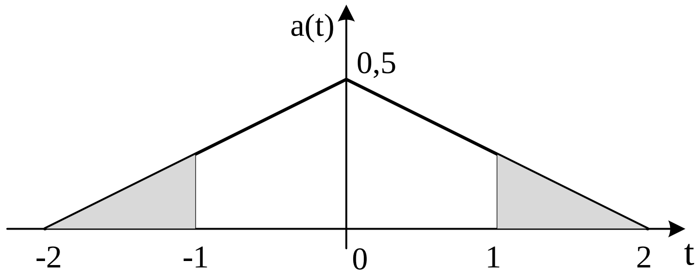
Середній час напрацювання до відмови $T_{ср}$ визначається за формулою

$$T_{ср} = \int_{t_Н}^{t_В} t a(t) dt = \frac{1}{3}(t_Н + t_М + t_В). \qquad (2.42)$$

Приклад 2.13. Випадкова похибка вимірювання довжини розподілена по трикутному закону (закону Сімпсона). Її максимальне значення дорівнює 2 мм. Математичне сподівання похибки дорівнює нулю. Визначити ймовірність попадання випадкової похибки вимірювання довжини в інтервал [-1,0; 1,0] мм.

Розв'язування:

Функція щільності ймовірності похибки вимірювання довжини, відповідно умові задачі, зображена на рисунку



Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал [-1,0; 1,0] мм чисельно дорівнює площі усіченого трикутника (на рисунку – не заштрихованого п'ятикутника), яка дорівнює 1 – 2S, де S – площа заштрихованого трикутника, тобто

$$P(t) = \int_{-1}^{1} a(t) dt = 1 - 2 \cdot \frac{1 \cdot 0,25}{2} = 0,75.$$

Приклад 2.14. Випадкова величина t підпорядкована закону Сімпсона ("Закону рівнобедреного трикутника") на ділянці від –n до n. Написати вираз щільності розподілу. Знайти ймовірність попадання випадкової величини t в інтервал (-n/2; n).

Розв'язування:

З умови випливає, що висота трикутника дорівнює 1/n, оскільки площа під графіком щільності дорівнює 1. Тому

$$a(t) = \frac{1}{n^2}(t+n), \qquad \text{ï ðè} \qquad -n \le t \le 0,$$

$$a(t) = -\frac{1}{n^2}(t+n), \qquad \text{ï ðè} \qquad 0 \le t \le n.$$

Функція щільності парна, тому математичне сподівання дорівнює 0.

$$P(-\frac{n}{2} \le t \le n) = 1 - P(-n \le t \le -\frac{n}{2}) = 1 - \frac{1}{n^2}\int_{-n}^{-\frac{n}{2}}(t+n)dt = 1 - \frac{1}{8} = 0,875.$$

2.8 Рівномірний розподіл

Розподіл по закону рівномірної ймовірності (рівномірний розподіл) (uniform distribution) – зустрічається в похибках крокових синхронних передач, при перекосі осей, ексцентриситеті, аналогоцифрових перетворювачах та ін.

Випадкова величина має неперервний рівномірний розподіл на відрізку $[b,c]$, якщо її щільність розподілу ймовірностей $a(t)$ має вигляд (рисунок …):

$$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{c-b}, t \in [b,c] \\ 0, t \notin [b,c]. \end{cases} \tag{2.43}$$

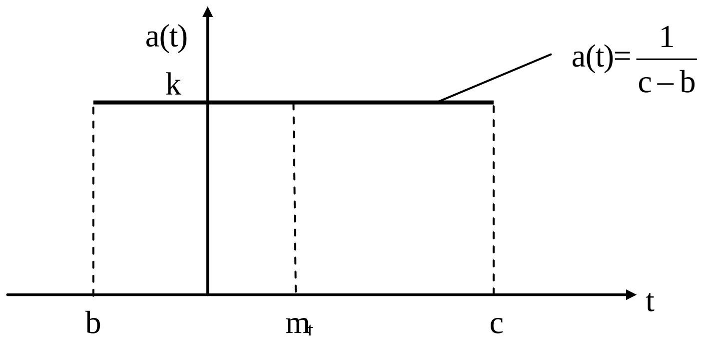


Рисунок 2.8 – Щільність розподілу ймовірностей рівномірного розподілу

Тобто розподіл ймовірностей називають рівномірним, якщо на інтервалі (b,c), якому належать всі можливі значення випадкової величини і диференціальна функція розподілу має постійне значення $a(t) = k$.

Властивості розподілу:

математичне очікування $M_t = \frac{c+b}{2};$ (2.44)

дисперсія $D_t = \frac{(c-b)^2}{12};$ (2.45)

СКВ $\sigma_t = \frac{c-b}{2\sqrt{3}};$ (2.46)

ймовірність того, що випадкова величина t попаде в інтервал $(b \le t \le c)$

$$P(b \le t \le c) = \int_b^c a(t)dt\,. \tag{2.47}$$

Приклад 2.15. Похибка вимірювання приладу розподілена рівномірно на інтервалі [5; 10]. Обчислити ймовірність того, що похибка вимірювання буде перебувати в інтервалі 6-8 од.

Розв'язування:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}, t \in [5;10], \\ 0, t \notin [5;10]; \end{cases}$$

$$P(6 \le t \le 8) = \int_6^8 a(t)dt = \int_5^6 0dt + \int_6^8 \frac{1}{5}dt = \frac{t}{5}\Big|_6^8 = 0,4.$$

Приклад 2.16. Прилади на конвеєрі рухаються в середньому з інтервалом 5 хвилин. Найти ймовірність того, що контролеру не прийдеться чекати прилад більше 2 хвилин.

Розв'язування:

Час очікування є випадковою величиною, рівномірно розподіленою в інтервалі [0, 5].

Тоді $a(t) = 1/(b+c) = 1/5;$

$$P(0<=t<=2) = \int_0^2 \frac{1}{c-b}dt = \int_0^2 \frac{1}{5}dt = 0,4.$$

2.9 Закони розподілу дискретних випадкових величин

Наведені вище розподіли характеризують неперервні випадкові величини, наприклад, час безвідмовної роботи або час відновлення.

Але в ряді випадків при розрахунку надійності ТЗ виникає необхідність оцінки дискретних випадкових величин, наприклад, кількості відмов протягом заданого інтервалу часу.

Тому розглянемо найбільш часто використовувані при розрахунках надійності розподіли дискретних випадкових величин.

2.9.1 Біномінальний розподіл

Біномінальний розподіл (binomial distribution). Для такого розподілу можливі значення випадкової величини 0, 1, 2, 3, …, n.

Ймовірність появи m сприятливих подій із загальної кількості n подій дорівнює

$$P_n(m) = C_n^m P^m Q^{n-m}; \tag{2.48}$$

де

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.49}$$

При перевірці виконання умови нормування використовується формула біному Ньютона, тому закон розподілу називають *біноміальним*

$$\sum_{m=0}^{n} P_m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P^m Q^{n-m} = (P+Q)^n = 1. \tag{2.50}$$

Функція розподілу:

$$F(t)=\begin{cases}0, t\le 0,\\ \sum_{m=0}^{n} C_n^m P^m Q^{n-m}, t\in[0,n],\\ 1, t>0.\end{cases} \qquad (2.51)$$

Математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$\mu(m) = nP; \qquad (2.52)$$

$$\sigma_T^2(m) = nPQ, \qquad (2.53)$$

де P – ймовірність здійснення події при одноразовому випробуванні;

Q = 1 – P.

Приклад 2.17. В партії 10 % нестандартних деталей. Наугад відібрані 4 деталі. Написати біномінальний закон розподілу дискретної випадкової величини m – числа нестандартних деталей серед чотирьох відібраних і побудувати криву отриманого розподілу.

Розв'язування:

Використовуємо формулу біноміального закону розподілу

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}P^m(1-P)^{n-m}, 0\le m\le n.$$

Ймовірність появи нестандартної деталі в кожному випадку рівна 0,1.

Знайдемо ймовірність того, що серед відібраних деталей:

1) взагалі немає нестандартних.

$$P_4(0)=\frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot 0,1^0\cdot 0,9^4=0,6561,$$

по визначенню 0! = 1;

2) одна нестандартна

$$P_4(1)=\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot 0,1^1\cdot 0,9^3=0,2916;$$

3) дві нестандартні деталі

$$P_4(2)=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^2=0,0486;$$

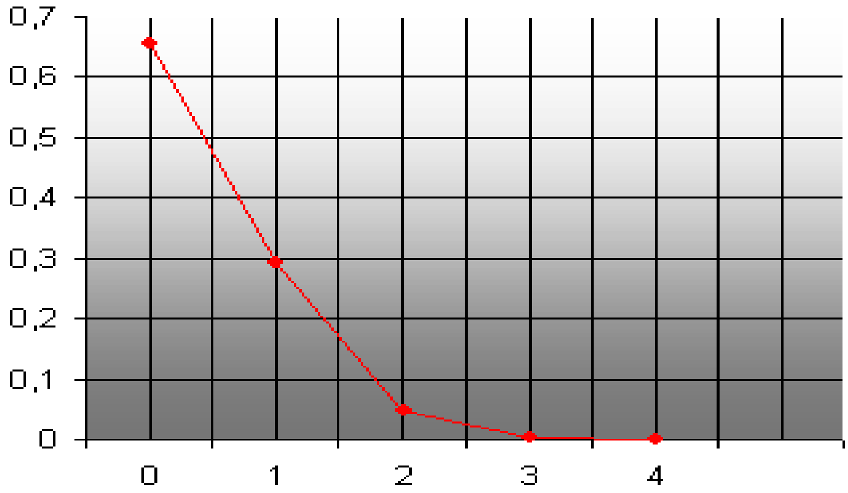
4) три нестандартні деталі

$$P_4(3)=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot 0,1^3\cdot 0,9^1=0,0036;$$

5) чотири нестандартних деталі

$$P_4(3)=\frac{4!}{4!\cdot 0!}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^0=0,0001.$$

Крива розподілу



Приклад 2.18. При перевірці 100 деталей виявлено 10 бракованих. Ймовірність появи бракованої деталі відповідно - 0,01. Визначити математичне очікування, дисперсію і середнє квадратичне відхилення числа бракованих деталей.

Розв'язування:

Закон розподілу - біномінальний. Математичне сподівання такого вибору рівне

$$\mu(m) = n \cdot P = 100 \cdot 0{,}01 = 1.$$

Дисперсія:

$$D_t = n \cdot P \cdot Q = 100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99 = 0{,}99.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_t = \sqrt{D_t} = \sqrt{0{,}99} = 0{,}995.$$

2.9.2 Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона (Poisson distribution) названо на честь французького вченого Сімеона Дені Пуассона. Зустрічається в задачах при повторних випробовуваннях, в яких ймовірність очікуваної події дуже мала. Це закон рідкісних подій. В техніці цей розподіл використовується при визначенні числа телефонних дзвінків в одиницю часу, числа рідкісних компонентів на одиницю площі або об'єму, числа дефектів металізації на новій друкованій платі площею 10 $см^2$, числа атмосферних завад при радіоприйманні, числа поломки нових ТЗ під час їх експлуатації тощо. А також коли ми маємо справу із числом подій, що з'являються на проміжку часу. Наприклад, число поломок надійного технічного пристрою за певний період часу, наприклад, за місяць.

Можливі значення випадкової величини для такого розподілу такі: 0, 1, 2, …, n. Ймовірність появи m подій дорівнює

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \qquad (2.54)$$

Математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$\mu(m) = \lambda; \qquad (2.55)$$

$$\sigma_T^2(m) = \lambda, \qquad (2.56)$$

де λ – параметр розподілення.

Функція розподілу (рис. 2.9):

$$F(t) = \begin{cases} 0, t \le 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, t > 0 \end{cases} \qquad (2.57)$$

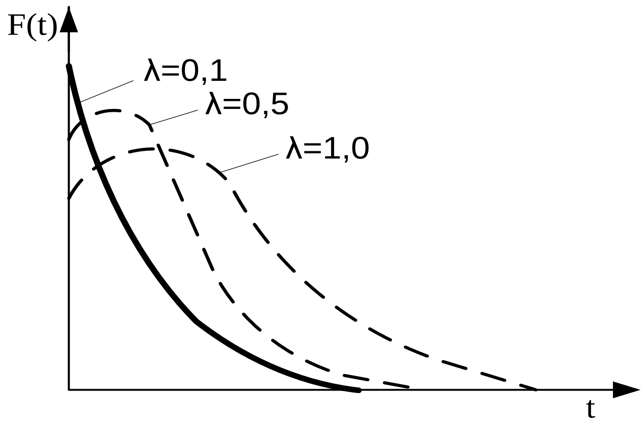


Рисунок 2.9 – Функція розподілу Пуассона

Приклад 2.19. При сходженні приладів з конвеєра, можна з ймовірністю P = 0,05 сказати, що серед них є вже такі, які потребують ремонту. Щогодини з конвеєра сходить 120 приладів. Яка ймовірність того, що у 12 з них є поломки?

Розв'язування:

Оскільки ймовірність P = 0,05 досить мала, то маємо справу з рідкісною подією. Тому для підрахування ймовірності $P_{120}(12)$ скористаємося формулою Пуассона

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Параметр $\lambda = nP = 120 \cdot 0{,}05 = 6.$

Тоді $P_{120}(12) \approx \dfrac{6^{12} \cdot e^{-6}}{12!} \approx 0{,}011$(àáî 1,1%).

2.9.3 Геометричний розподіл

Геометричний розподіл (geometric distribution). Можливі значення випадкової величини такі: 0, 1, 2, …, n. Ймовірність появи m подій дорівнює

$$P_m = PQ^{m-1}. \qquad (2.58)$$

Математичне сподівання і дисперсія відповідно будуть дорівнювати:

$$\mu\left(m\right) = 1/P, \qquad (2.59)$$

$$\sigma_T^2\left(m\right) = Q/P^2, \qquad (2.60)$$

де P – ймовірність появи події при одноразовому випробуванні;
Q = 1 – P.

Приклад 2.20. Проводяться багаторазові випробування приладу на надійність до тих пір, поки він не відмовить в роботі. Ймовірність відмови в кожному випробуванні рівна 0,1. Знайти числові характеристики випадкової величини m – числа випробувань, які треба провести.

Розв'язування:

По умові P = 0,1.

Тому $$\mu\left(m\right) = 1/0{,}1 = 10;$$

$$\sigma_T^2\left(m\right) = (1-0{,}1)0{,}1^2 = 90.$$

Питання для самоконтролю

1. Проаналізуйте три «періоди життя» ТЗ. Яким законам розподілу вони відповідають?
2. Наведіть аналітичні вирази для розрахунку основних показників надійності, що підпорядковуються розподілу Вейбулла.
3. Наведіть аналітичні вирази для розрахунку основних показників надійності, що підпорядковуються розподілу Релея.
4. Наведіть приклади використання гамма-розподілу неперервних випадкових величин.
5. Наведіть аналітичні вирази для розрахунку основних показників надійності при експоненціальному розподілі відмов.
6. Наведіть аналітичні вирази для розрахунку основних показників надійності при нормальному розподілі відмов.
7. Перерахуйте основні розподіли дискретних випадкових величин, що використовуються для розрахунку показників надійності, наведіть приклади.

Розділ 3 ЗАХОДИ ЩОДО ФОРМУВАННЯ ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ НА РІЗНИХ ЕТАПАХ ПРОЕКТУВАННЯ

3.1 Вибір і обґрунтування показників надійності

При проектуванні ТЗ необхідно виконувати низку заходів із забезпечення надійності. Основними з них є такі:

а) вибір і обґрунтування принципів технічного обслуговування;

б) вибір основного показника надійності;

в) призначення норм надійності;

г) розподіл норм надійності ТЗ по елементах.

На практиці існують такі три основних види технічного обслуговування і ремонту:

- за календарними термінами незалежно від напрацювання ТЗ;
- за виробленням встановлених заздалегідь міжремонтних ресурсів;
- за технічним станом.

Технічне обслуговування і ремонт за календарними термінами призводять до невиправданих матеріальних витрат, оскільки не враховується такий факт як використовувався об'єкт чи ні.

Технічне обслуговування і ремонт за виробленням ресурсу трохи ускладнює конструкцію об'єкта (за рахунок вимірювача напрацювання). Організація технічного обслуговування залишається тут порівняно простою. Проте економія засобів використовується не повністю.

При технічному обслуговуванні за технічним станом періодично контролюється визначальний (головний) параметр. Рішення про заміну, ремонт і технічне обслуговування приймається за результатами контролю, коли визначальний (головний) параметр характеризує наближення ТЗ до відмови або до межі допуску. При цьому значно скорочуються витрати на обслуговування, на дорогі елементи і підвищується надійність.

Що стосується принципів вибору показників надійності, то при порівнянні об'єктів за надійністю виявляється, що показники надійності (ПН) нерівнозначні.

Як приклад розглянемо дві модифікації об'єкта, що мають різні функції надійності 1 і 2 (рис. 3.1).

Протягом технічного ресурсу t_p вірогідність безвідмовної роботи дорівнює $P_1(t) > P_2(t)$. Проте значення середнього напрацювання на відмову (дорівнює площі під кривою P(t)) для першої модифікації менше, ніж для другої, тобто $T_{ср1} < T_{ср2}$

$$T_{ср} = \int_0^\infty P(t)dt\,. \qquad (3.1)$$

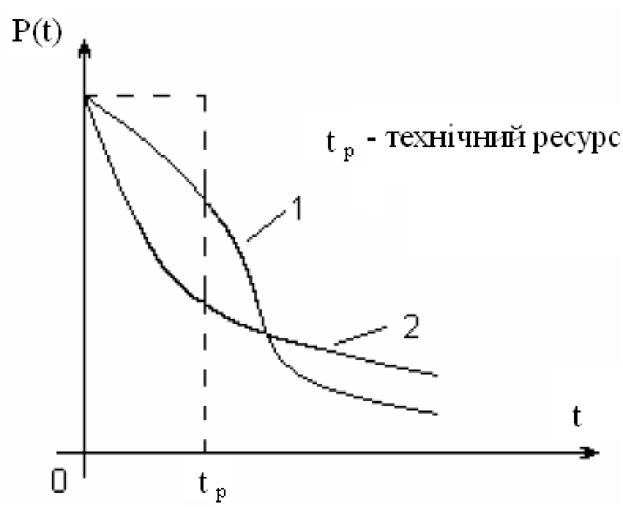


Рисунок 3.1 – Графіки функцій надійності

Тому, якщо прийняти за основу показник вірогідності безвідмовної роботи (БР) протягом ресурсу, то кращою буде перша модифікація (див. рис. 3.1). Якщо ж прийняти за основу показник середнього напрацювання на відмову, то кращою буде друга модифікація.

Звідси витікає необхідність розробки методики вибору нормованих показників надійності.

Перша така методика була описана в 1968 році в роботі «Общая методика выбора номенклатуры нормируемых показателей надежности технических устройств для включения в ГОСТ, ТУ и в систему планирования». Відповідно до цієї методики головним вважається той показник надійності, який входить у формулу середнього економічного ефекту від використання виробу.

Аналогічно була побудована методика, що опублікована в 1972 році в роботі «Методика выбора показателей для оценки надежности сложных технических систем».

Ці методики створили основи наукового підходу до нормування показників надійності. Недолік їх полягає в тому, що в них показники вибираються для ізольованих засобів і мало враховують необхідність забезпечення якості функціонування систем більш високого рівня.

Тому зараз часто використовують більш загальну методику вибору показників надійності. Вона полягає в такому:

1. Збирають відомості про систему, в яку входить досліджуваний об'єкт, і послідовно аналізують чинники, що впливають на вибір показників надійності;

2. Встановлюють призначення об'єкта. При цьому всі об'єкти діляться на три групи:

а) об'єкти, призначені для роботи в системах, ефективність яких може бути оцінена економічними показниками;

б) об'єкти, функціонування яких може бути пов'язане із забезпеченням безпеки;

в) об'єкти, для яких не можна вказати призначення систем, в яких вони будуть використані.

Розглянемо об'єкти першого типу.

Більшість вживаних показників економічної ефективності є функціями від математичного сподівання ξ і η, де: ξ – вихідний корисний ефект, а η – витрати на техобслуговування і експлуатацію.

Величини ξ і η залежать від випадкових величин: напрацювання до відмови T, часу (напрацювання) між відмовами $\tilde{T}$, часу відновлення $T_в$.

Для відновлюваних об'єктів, коли перерви в роботі допустимі, основними показниками надійності є середній час напрацювання на відмову $T_{ср}$ і середній час відновлення $T_{срв}$ або комплексний показник – коефіцієнт готовності, який залежить від двох попередніх показників.

При призначенні показників надійності систем другого типу (виходячи з умов безпеки) необхідно виділити основні чинники, що впливають на безпеку. Відповідні математичні моделі повинні враховувати випадкові процеси, що протікають при появі відмов.

Для третьої групи об'єктів, для яких не можна вказати тип системи, доцільно призначати одну будь-яку повну характеристику надійності:

- для неремонтовних засобів – функція надійності P(t) або щільність розподілу напрацювання до відмови, або інтенсивність відмов $\lambda(t)$;
- для ремонтовних засобів, але невідновлюваних в процесі застосування розраховують або вірогідність БР $P(t_1, t_2)$ на проміжку часу (t_1, t_2), або параметр потоку відмов;
- для ремонтовних відновлюваних в процесі застосування засобів показники надійності (ПН) розраховуються в календарному часі.

На практиці, якщо відомий або передбачається певний тип закону розподілу часу БР (напрацювання до відмови), то доцільно задавати:

а) при показниковому розподілі один з таких показників:

- інтенсивність відмов λ_i;
- середнє напрацювання до відмови $T_{ср}$;
- вірогідність БР $P(\Delta t)$ на заданому інтервалі часу Δt;

б) при двопараметричному законі розподілу напрацювання до відмови або між відмовами використовуються два показники, наприклад, при нормальному розподілі $T_{ср}$ та σ_T, або $P(t_1)$ та $P(t_2)$ – значення ймовірностей БР при двох значеннях інтервалу часу роботи $(0, t_1)$ та $(0, t_2)$;

в) при невідомому типі закону розподілу рекомендується задавати такі значення:

- P(t) або $\lambda(t)$;
- параметр потоку відмов $\overline{\omega}(t)$;

- інші показники надійності не менше ніж при трьох значеннях заданого напрацювання (часу).

3.2 Призначення норм надійності

Після вибору основних показників надійності необхідно задати певні значення цих показників. При цьому повинні враховуватися економічні міркування і можливості виробництва.

Спочатку знаходяться норми надійності, що відповідають можливостям виробництва. Потім вони уточнюються і вибираються заходи для підвищення надійності, найбільш вигідні економічно.

При складанні технічного завдання обґрунтувати кількісні норми (вимоги) до надійності та інших експлуатаційних властивостей зазвичай вдається лише після розгляду відповідних характеристик вже існуючих аналогів. Таким чином, необхідно мати прототип і враховувати тенденції зміни його характеристик.

Значення норм надійності прототипу необхідно корегувати із врахуванням таких чинників:

1) технічних характеристик об'єкта, що проектується;
2) технічного прогресу за час його проектування і виготовлення;
3) змін умов експлуатації;
4) лімітувальних чинників (вартість, вага, габарити та ін.);
5) значення наслідків відмов;
6) кваліфікації операторів і деяких інших специфічних для кожного засобу чинників.

3.2.1 Врахування технічних характеристик об'єкта, що проектується

Для врахування технічних характеристик об'єкта, що проектується, необхідно порівняти показники заново проектованого об'єкта з аналогічними показниками існуючих об'єктів з відомою надійністю. При цьому необхідно мати залежності ПН об'єктів даного типу від основних технічних характеристик (чутливості, потужності та ін.).

Щоб отримати такі залежності зазвичай будують графіки. У цих графіках по вертикальній осі відкладають значення ПН, а по горизонтальній осі – значення досліджуваної технічної характеристики.

Розглянемо для прикладу залежність ПН (позначимо його через z) від технічної характеристики (позначимо її значення через m) (рис. 3.2).

На рис. 3.2 у вигляді окремих точок нанесені дані для ТЗ розгядуваного типу.

Через точки графіка проводять пряму $z=a+bm$.

Параметри цієї прямої підбирають за методом найменших квадратів.

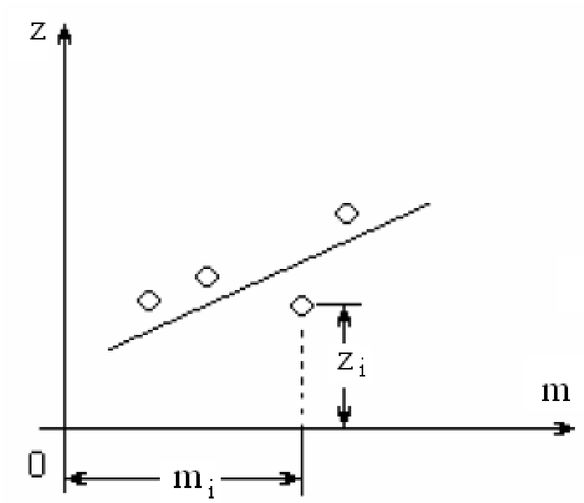


Рисунок 3.2 – Характеристика зміни показника надійності від технічної характеристики

Відповідно до методу найменших квадратів мінімізується такий вираз:

$$J=\sum_{i=1}^{k}\left(a+bm_i-z_i\right)^2=\min . \qquad (3.2)$$

Значення a та b знаходять із системи рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial a}&=\sum_{i=1}^{k}\left(a+bm_i-z_i\right)=0\\ \frac{\partial J}{\partial b}&=\sum_{i=1}^{k}\left(a+bm_i-z_i\right)m_i=0\end{aligned}\right\}. \qquad (3.3)$$

Якщо графіки будують для декількох технічних характеристик m_1, …, m_n, то аналогічно можуть бути мінімізовані суми квадратів різниць $\left(a+b_1m_{11}+...+b_nm_{ni}-z_1\right)$ і обчислені значення a, b_1, …, b_n.

Якщо апроксимувальні прямі мають значний нахил, то вони підлягають подальшому розгляду. Для цього графіки цих прямих нормалізують. При цьому значення ПН ділять на середнє значення ПН всіх даних об'єктів. Значення всіх інших показників ділять на середнє значення кожного показника.

Наприклад. Знаходимо залежність ПН P(t) від потужності об'єкта W, тоді:

$$\left.\begin{aligned}m_{i_{відн}}&=\frac{W_i}{W_{ср}}\\ z_{i_{відн}}&=\frac{P_i(t)}{P_{ср}(t)}\end{aligned}\right\}, \qquad (3.4)$$

де W_i, $W_{ср}$ – відповідно споживана потужність і середнє споживання потужності і-м об'єктом;

$P_i()$, $P_{ср}()$ – відповідно вірогідність БР і середня вірогідність БР і-го об'єкта.

Потім будуємо графіки у відносних одиницях (рис. 3.3).

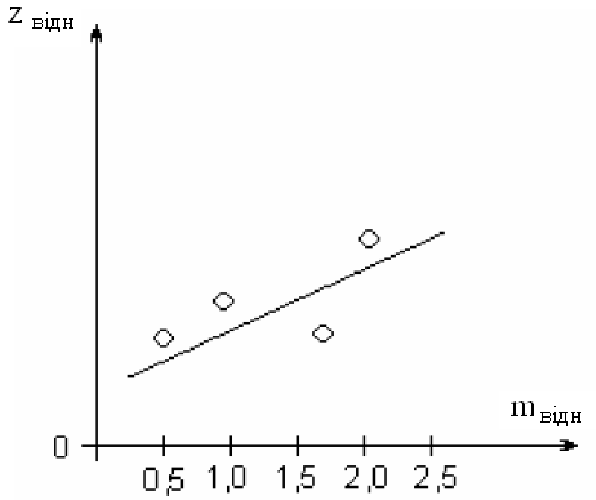


Рисунок 3.3 – Відносна характеристика зміни показника надійності від потужності об'єкту

Використовуючи такі графіки, можна приблизно оцінити вплив зміни технічних характеристик об'єкта на величину показника (норми) надійності.

В результаті розгляду одного або декількох (при декількох технічних характеристиках) таких графіків може бути знайдений коефіцієнт K_T, який враховує технічні характеристики об'єкта. Цей коефіцієнт дорівнює відношенню ПН засобу, що проектується, до ПН прототипу.

3.2.2 Врахування технічного прогресу

Між випуском об'єктів, дані про яких щодо надійності відомі, і об'єктом, який повинен бути виготовлений, до моменту його випуску зазвичай проходить декілька років. За цей час удосконалюється конструкція і технологія виготовлення як самих об'єктів, так і елементів, з яких вони виготовляються. Відповідно до цього змінюються і значення ПН. Отже, при складанні вимог до ПН засобів, що проектуються, необхідно екстраполювати зміну показника їх надійності аж до моменту виготовлення нових засобів.

Для цього необхідно знати надійність всіх аналогічних засобів, що випускались раніше. Потім будується графік, який враховує технічний прогрес за роками (рис. 3.4). За цим графіком розраховується коефіцієнт

$К_{ТП}$, що враховує технічний прогрес. Він дорівнює відношенню ПН засобу, що проектується до ПН прототипу.

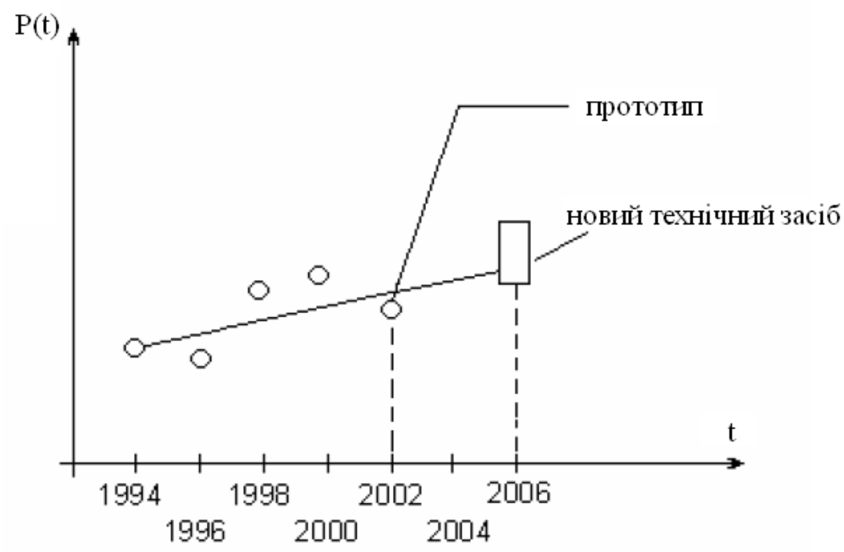


Рисунок 3.4 – Характеристика зміни технічного прогресу залежно від років випуску ТЗ

При коректуванні ПН з урахуванням вдосконалення виробництва можуть виникнути дві крайні ситуації:

а) засіб, що проектується, майже за всіма ознаками схожий з прототипом;

б) засіб, що проектується, відрізняється від прототипу принципом дії, складністю тощо.

У першому випадку екстраполювання зміни ПН за роками проводиться для засобу (об'єкта) в цілому.

У другому випадку проводитися розрахунок надійності за надійністю елементів. Від загальноприйнятого розрахунку надійності цей розрахунок відрізняється тільки екстраполюванням інтенсивностей відмов за роками випуску.

3.2.3 Врахування змін умов роботи

Проектований об'єкт і прототип зазвичай працюють в різних умовах. Тому необхідно провести перерахунок ПН прототипу на умови застосування проектованого ТЗ.

Для цього знаходять коефіцієнт умов застосування $К_У$. Він дорівнює відношенню значень ПН даного об'єкта і прототипу.

Існують чотири методи такого перерахунку:

а) метод поправкових коефіцієнтів;

б) метод, що використовує гіпотезу Н. Седякіна про ресурс надійності ТЗ;

в) метод, що використовує розрахункові графіки;

г) метод, заснований на обліку розкиду значень параметрів режимів використання ТЗ.

Ці методи були розроблені для розрахунку надійності електронних схем, але можуть бути використані для перерахунку ПН і інших об'єктів.

При використанні першого методу спочатку знаходиться значення інтенсивності відмов або параметра потоку відмов в лабораторних умовах. Потім коефіцієнт навколишнього середовища – $K_{НС}$. Цей коефіцієнт показує в скільки разів інтенсивність відмов за даних умов більша, ніж при лабораторних.

Коефіцієнт застосування $K_У$ дорівнює відношенню значень коефіцієнта $K_{НС}$ проектованого ТЗ і прототипу.

У методі, що використовує гіпотезу Седякіна, застосовується поняття «ресурс (запас) надійності» ТЗ.

За функцію ресурсу використовують вираз:

$$r(t) = -\ln P(t) = \int_0^t \lambda(t)dt. \qquad (3.5)$$

Гіпотеза полягає в тому, що вірогідність БР об'єкта у певних умовах залежить від значення виробленого у минулому ресурсу r і не залежить від того, як вироблений був цей ресурс. Цей метод в даний час використовується надзвичайно рідко, і тому детальніше розглядати його не будемо.

Метод розрахункових графіків є одним з основних методів перерахунку ПН прототипу на умови застосування проектовного об'єкта. Він заснований на використанні графічної залежності ПН від параметрів режимів роботи (температури, навантаження і ін.). Як ПН тут зазвичай використовується інтенсивність відмов λ(t) і рідше параметр потоку відмов ω(t).

Розрахункові графіки зараз складені в основному для елементів електричних схем. Як приклад розглянемо залежність інтенсивності відмов конденсаторів від навантажень, що діють.

Як видно з графіка (рис. 3.5), визначальним чинником для конденсаторів є постійна (ефективна) напруга і температура навколишнього середовища.

Інтенсивність відмов вуглецевих резисторів в основному визначається їх температурою, яка залежить від температури навколишнього середовища і потужності, що розсіюється на резисторі.

Навантаження на елемент зазвичай виражають в частках номінального навантаження. Ця відносна величина називається коефіцієнтом навантаження γ:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{для} & \text{конденсаторів} & \gamma = \dfrac{U_{роб}}{U_{ном}} \\ \text{для} & \text{резисторів} & \gamma = \dfrac{W_{роб}}{W_{ном}} \end{array}\right\}, \tag{3.6}$$

де U – напруга;

W – потужність.

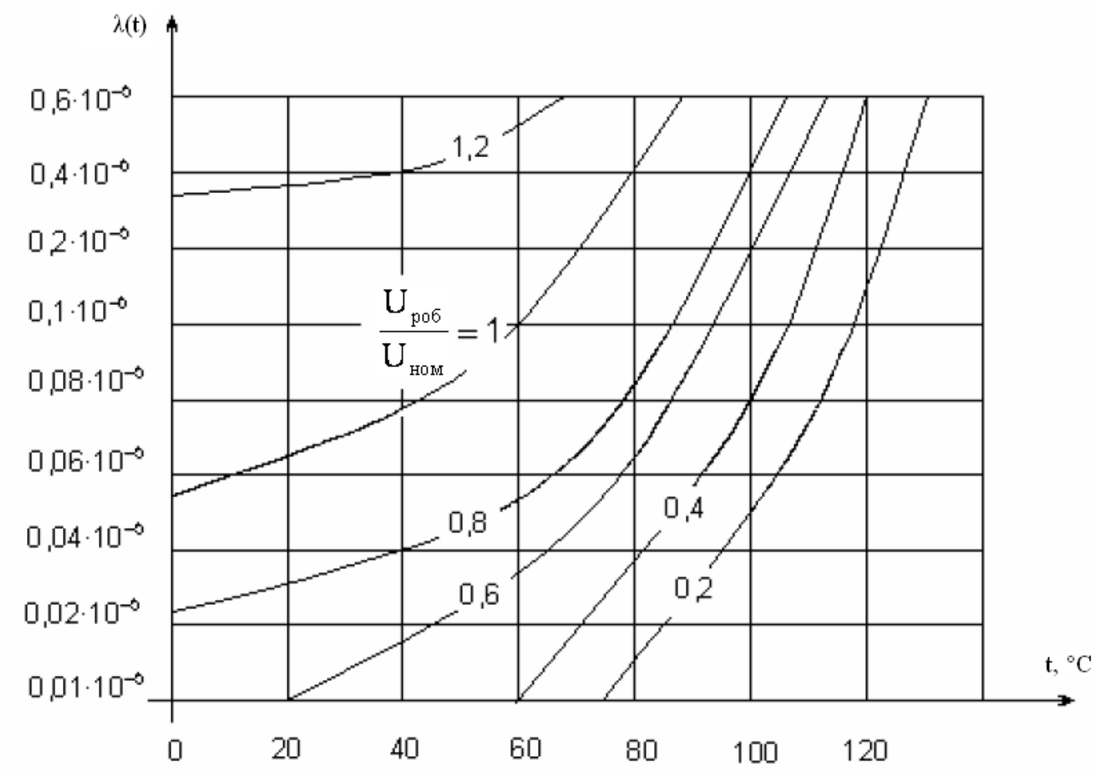


Рисунок 3.5 – Залежність зміни інтенсивності від температури

В деяких випадках замість графіків використовують експериментальні формули і правила. Наприклад, для напівпровідникових приладів значення λ(t) подвоюється при підвищенні навколишньої температури на 10 °C.

Коли розглядаються режими роботи, то зазвичай розглядають і питання про доцільність введення резервування.

У багатьох випадках по вертикальній осі в графіках замість λ(t) відкладають відносну величину

$$K_i = \frac{\lambda_i}{\lambda^*}, \tag{3.7}$$

де λ^* – інтенсивність відмов основного елемента розрахунку.

Іноді є декілька видів навантаження, які впливають на величину λ(t). В цьому випадку застосовують один з двох прийомів розрахунку:

1. Підбирають експериментальні залежності:

$$\lambda(t) = f(\lambda_0, t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{3.8}$$

де λ_0 – інтенсивність відмов за номінальних умов;

t – температура навколишнього середовища;

y_1, y_2, …, y_n – відносні навантаження різних видів;

2. Виділяють типові режими застосування, нумерують ці режими в порядку збільшення (посилення) навантажень і будують залежності λ(t) об'єкта від номера режиму роботи.

3.2.4 Уточнення норм надійності і вибір заходів щодо її підвищення

Такий чинник корегування норм надійності враховують в основному для ТЗ, ефект від експлуатації яких може бути визначений економічно.

Середній сумарний ефект Е від експлуатації об'єкта залежить від таких показників: вартості, показників надійності, економічних показників експлуатації.

До економічних показників (ЕП) експлуатації належать:

а) економічний ефект від виконання завдання;

б) середні втрати від відмови;

в) збиток в одиницю часу через вимушений простій об'єкта.

Річ у тому, що підвищення надійності ТЗ зазвичай веде до підвищенню його собівартості. В той же час експлуатація надійнішого ТЗ обходиться, як правило, багато дешевше, оскільки скорочується збиток від відмов, а також зменшуються витрати на ремонт і профілактичні роботи.

У зв'язку з цим виникає проблема призначення таких норм надійності, які забезпечували б максимальний економічний ефект.

Оскільки витрати на підвищення надійності і втрати від ненадійності об'єктів відбуваються в різний час, то необхідно розглядати зведений до певного моменту часу (зазвичай початку експлуатації) середній вихідний ефект.

Для цього складають математичну модель функціонування об'єктів. Для ТЗ, які не ремонтуються, ефект від роботи прямо пропорційний відпрацьованому часу:

$$E(t) = -(\beta_1 + \beta_2) + \gamma t\,, \tag{3.9}$$

де β_1 – собівартість ТЗ;

β_2 – витрати, пов'язані з відмовою;

γ – дохід або економічний ефект за одиницю часу функціонування;

t – час напрацювання.

Середнє значення ефекту (доходу) буде визначатися так:

$$\overline{E} = -(\beta_1 + \beta_2) + \gamma T_{ср}\,, \tag{3.10}$$

де $T_{ср}$ – середній час напрацювання на відмову.

Часто обчислення зручно проводити в календарному часі $T_{срК}$. Для переходу до календарного часу використовують коефіцієнт ν, який дорівнює частці часу використання ТЗ.

При цьому

$$T_{срК} = \frac{T_{ср}}{\nu}. \qquad (3.11)$$

Витрати через ненадійності і економічний ефект вважають розподіленими рівномірно за час (0, $T_{срК}$).

При цьому очевидно, що дохід за одиницю часу D дорівнює:

$$D = \frac{-\beta_2 + \gamma T_{ср}}{T_{срК}}. \qquad (3.12)$$

Зведений ефект з урахуванням відомого виразу $S_0 = \frac{D}{\chi}\left(1 - e^{-\chi t_р}\right)$ розраховується за формулою:

$$E_П = -\beta_1 + \frac{\gamma T_{ср} - \beta_2}{\chi T_{срК}}\left(1 - e^{\chi T_{срК}}\right) = -\beta_1 + \frac{\gamma}{\chi}\left(1 - e^{\chi T_{срК}}\right)\left(\gamma - \frac{\beta_2}{\nu T_{срК}}\right), \qquad (3.13)$$

де χ – коефіцієнт швидкості росту використаних засобів.

Аналогічні вирази отримують і для інших економічних моделей.

Вибрані значення показників надійності повинні забезпечувати максимальний ефект $E_П$.

При цьому при кожному проведеному заходу щодо зміни ПН визначається величина:

$$\Delta E_{Пi} = E_{Пi} - E_П^0, \qquad (3.14)$$

де $E_П^0$ – середній зведений ефект для деякого початкового варіанта ТЗ;

$E_{Пi}$ – середній зведений ефект для ТЗ із врахуванням того, що здійснено і-ий захід щодо підвищення надійності.

Потім здійснюється захід для забезпечення максимального приросту $\Delta E_{Пi}$. Варіант із здійсненням цього заходу береться за результат, і процес повторюється знову. Процес продовжується до тих пір, поки значення не стане негативним. За оптимальне значення ПН береться значення, яке було досягнуто на попередньому етапі обчислень.

Недоліком цього методу є те, що для його здійснення потрібна значна інформація про проектуємий ТЗ, а вона не завжди є.

3.3 Розподіл норм надійності по елементах

При розрахунку надійності ТЗ на першому етапі проектування (етап ескізного проектування) необхідно знайти значення ПН блоків і вузлів ТЗ за заданим в технічному завданні значенням ПН на весь ТЗ в цілому. При цьому вибір того або іншого способу розподілу норм надійності по блоках, функціональних вузлах і елементах багато в чому залежать від наявної у розробника інформації про ТЗ.

Існує чотири основні прийоми розподілу норм надійності:

1. За принципом рівнонадійності елементів;

2. З урахуванням даних про надійність аналогів;

3. З урахуванням перспектив вдосконалення елементів;

4. З урахуванням вартості проектування, виробництва і експлуатації елементів.

Розглянемо всі ці способи розподілу норм надійності на прикладах.

Приклад 3.1 Проектується ТЗ з трьох рівнонадійних послідовних каскадів. Ймовірність безвідмовної роботи ТЗ має складати $P_{ТЗ}(t) = 0,98$ протягом часу $t = 2000$ год.

Визначити значення $\lambda_{каск.}(t)$ для кожного каскаду.

Розв'язування:

Приймаємо експоненціальну модель розподілу ймовірності безвідмовної роботи:

$$P(t) = e^{-\lambda t} = e^{-t/T_{ср}}.$$

Оскільки ТЗ складається з трьох рівнонадійних послідовних каскадів, то ПН для ТЗ в цілому будуть пов'язані такими співвідношеннями:

$$P_{ТЗ}(t) = \left(P_{каск.}(t)\right)^3;\ \lambda_{ТЗ} = 3\lambda_{каск.};\ T_{срТЗ} = \frac{1}{3}T_{ср(каск.)};$$

$$P_{ТЗ}(t) = e^{-\lambda_{ТЗ}t_{ТЗ}} \approx 1 - \lambda_{ТЗ}t_{ТЗ} = 0,98.$$

Враховуючи останній вираз, можна розрахувати інтенсивність ТЗ в цілому:

$$\lambda_{ТЗ} = \frac{1 - P_{ТЗ}(t)}{t_{ТЗ}} = \frac{1 - 0,98}{2000} = 10^{-5}\ (\text{год}^{-1}).$$

Тому для одного каскаду

$$\lambda_{\text{êàñê.}} \le \frac{10^{-5}}{3} = 3,3 \cdot 10^{-6}\ \text{год}^{-1}.$$

Приклад 3.2

1. Проектується ТЗ, що складається з трьох блоків А1, В1, С1.

2. Задана ймовірність безвідмовної роботи всього ТЗ $P_{ТЗ}(t_1) = 0,97$ протягом часу $t_1 = 100$ год.

3. Існує прототип, що складається з блоків А0, В0, С0, кожний з яких характеризується інтенсивністю відмов відповідно:

$$\lambda_{A0} = 10^{-4}\ \text{год}^{-1};\ \lambda_{B0} = 8 \cdot 10^{-4}\ \text{год}^{-1};\ \lambda_{C0} = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{год}^{-1}.$$

Визначити норми надійності у вигляді інтенсивності відмов λ для проектованих блоків А1, В1, С1 $\Rightarrow \lambda_{A1}, \lambda_{B1}, \lambda_{C1}$.

Розв'язування:

1. Враховуючи прототип, визначимо коефіцієнт, що враховує частку відмов проектуємого ТЗ через відмови j-го блока:

$$K_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_{ТЗ}},$$

де $\lambda_{ТЗ}, \lambda_j$ – відповідно інтенсивність відмов всього ТЗ та j- го блока.

Всі коефіцієнти K_j знаходять через співвідношення інтенсивностей відмов прототипу за формулою:

$$K_j = \frac{\lambda_{j0}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ji0}},$$

де n – число елементів.

У нашому випадку:

$$K_A = \frac{\lambda_{A0}}{\lambda_{A0} + \lambda_{B0} + \lambda_{C0}} = \frac{10^{-4}}{(1+8+3)10^{-4}} = \frac{1}{12};$$

$$K_B = \frac{\lambda_{B0}}{\lambda_{A0} + \lambda_{B0} + \lambda_{C0}} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{(1+8+3)10^{-4}} = \frac{2}{3};$$

$$K_C = \frac{\lambda_{C0}}{\lambda_{A0} + \lambda_{B0} + \lambda_{C0}} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{(1+8+3)10^{-4}} = \frac{1}{4}.$$

2. Знайдемо значення $\lambda(t)$ для проектованого ТЗ з виразу:

$$P_{ТЗ}(t_1) = 1 - \lambda_{ТЗ} t_1 = 0{,}97 \Rightarrow \lambda_{ТЗ} = \frac{1 - P_{ТЗ}(t)}{t_1} = \frac{0{,}03}{100} = 3 \cdot 10^{-4}\ (\text{год}^{-1}).$$

3. Визначаємо норми надійності для блоків проектованого ТЗ:

$$\lambda_{A1} = K_A \lambda_{ТЗ} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{12} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{год}^{-1};$$

$$\lambda_{B1} = K_B \lambda_{ТЗ} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{3} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{год}^{-1};$$

$$\lambda_{C1} = K_C \lambda_{ТЗ} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{4} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{год}^{-1}.$$

Приклад 3.3

1. Проектований ТЗ складається з двох послідовних блоків А1 і В1.

2. Задана ймовірність безвідмовної роботи проектованого ТЗ складає $P_{ТЗ}(t_1)$ = 0,97 протягом часу t_1 = 100 год.

3. Дата випуску проектованого ТЗ – 2012 р.

4. Зміна інтенсивності відмов за 1997 ÷ 2007 роки для блоків А0, В0, аналогічних блокам А1 і В1, може бути за роками випуску апроксимована виразом:

$$\lambda = \lambda_{95} e^{-\nu (L-1995)},$$

де λ_{92} – інтенсивність відмови ТЗ, випущеного в 1997 році;

L – рік випуску блока.

Для блока А0: $\lambda_{A97} = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ год$^{-1}$; $\nu_A = 0{,}034$ год$^{-1}$.

Для блока В0: $\lambda_{B97} = 28 \cdot 10^{-4}$ год$^{-1}$; $\nu_B = 0{,}14$ год$^{-1}$.

Визначити норми надійності для ПН блоків А1 і В1 у вигляді інтенсивності відмов λ_{A1} і λ_{B1}.

Розв'язування:

1. Екстраполюємо значення λ блоків А0, В0 прототипу до 2012

$$\lambda_{A10} = \lambda_{A97} e^{-\nu_A\ L-1997} = 1,4 \cdot 10^{-4} e^{-0,034\ 2012-1997} = 7,6 \cdot 10^{-5} \text{(год}^{-1}\text{)};$$

$$\lambda_{B10} = \lambda_{B97} e^{-\nu_B\ L-1997} = 28 \cdot 10^{-4} e^{-0,14\ 2012-1997} = 22,7 \cdot 10^{-5} \text{(год}^{-1}\text{)}.$$

2. Аналогічно прикладу 3.2 визначимо коефіцієнт K_j і норми надійності:

$$K_{A1} = \frac{\lambda_{A10}}{\lambda_{A10} + \lambda_{B10}} = \frac{7,6 \cdot 10^{-5}}{(7,6 + 22,7)10^{-5}} = 0,25;$$

$$K_{B1} = \frac{\lambda_{B10}}{\lambda_{A10} + \lambda_{B10}} = \frac{22,7 \cdot 10^{-5}}{(7,6 + 22,7)10^{-5}} = 0,75;$$

$$\lambda_{T3} = \frac{1 - P_{T3}(t)}{t_1} = \frac{1 - 0,97}{100} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ (год}^{-1}\text{)};$$

$$\lambda_{A1} = K_{A1}\lambda_{T3} = 0,25 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1};$$

$$\lambda_{B1} = K_{B1}\lambda_{T3} = 0,75 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{год}^{-1}.$$

Приклад 3.4

1. Система складається з чотирьох послідовних елементів 1, 2, 3, 4.
2. Значення параметрів відмов ТЗ $\omega_{T3} = 10^{-5}$ год$^{-1}$.
3. Час виробництва і проектування системи t = 5 років, технічний ресурс t_p = 20 років.
4. Вкладення в одиницю часу (1 год.) проектування і виробництва елементів передбачаються постійними і для j-го елемента дорівнюють:

$$\mu_j = \frac{K_{\Gamma j}}{\omega_j} + \mu_{0j},$$

де ω_j – параметр потоку відмов j-го елемента;

μ_{0j} – витрати на одиницю часу на проектування і виробництво, що не залежать від надійності;

$K_{\Gamma j}$ – коефіцієнт готовності j-го елемента, значення якого такі:

$K_{\Gamma 1} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ (грн. · відмова)/год^2; $K_{\Gamma 2} = K_{\Gamma 3} = K_{\Gamma 4} = 3 \cdot 10^{-4}$ (грн. · відмова)/год^2;

Витрати на одиницю часу зазвичай визначають на основі досвіду проектування аналогічних елементів, але в даному прикладі вони беруться рівними нулю ($\mu_{01} = \mu_{02} = \mu_{03} = \mu_{04} = 0$).

5. Поточні експлуатаційні витрати в одиницю часу постійні та дорівнюють:

$$\nu_j = K_{Ej}\omega_j + \nu_{0j},$$

де значення $K_{E1}=4\cdot10^6$ грн/відмова; $K_{E2}=K_{E3}=K_{E4}=1{,}7\cdot10^6$ грн/відмова, а значення $\nu_{01}=\nu_{02}=\nu_{03}=\nu_{04}=0$.

6. Загальні витрати на проектування, виробництво і експлуатацію визначаються за формулою:

$$C_{TЗ}=\sum_{j=1}^{n} C_j\,,$$

де C_j – витрати на j-ий елемент;

n – число елементів в ТЗ.

Визначити значення параметра потоку відмов для кожного елементу ТЗ ω_j.

Розв'язування:

Для порівняння витрат приводимо їх до одного моменту часу – початку експлуатації. Зведені експлуатаційні витрати обчислюємо за формулою:

$$C_{Ej}=\frac{\nu_j}{\chi}\left(1-e^{-\chi t_p}\right)=\beta_{0j}+\beta_j\omega_j\,,$$

де $\beta_j=\dfrac{K_{Ej}}{\chi}\left(1-e^{-\chi t_p}\right)$, а $\beta_{0j}=\dfrac{\nu_{0j}}{\chi}\left(1-e^{-\chi t_p}\right)$.

Виробничі витрати обчислюються за аналогічною формулою:

$$C_{nj}=\frac{\mu_j}{\chi}\left(e^{\chi t}-1\right).$$

Тому виробничі витрати можна обчислити з виразу

$$C_n=\frac{1}{\chi}\left(\mu_{0j}+\frac{K_{nj}}{\omega_j}\right)\left(e^{\chi t}-1\right)=\alpha_{0j}+\frac{\alpha_j}{\omega_j}\,,$$

де $\alpha_{0j}=\dfrac{\mu_{0j}}{\chi}\left(e^{\chi t}-1\right)$; $C_n=\dfrac{K_{nj}}{\chi}\left(e^{\chi t}-1\right)$.

Таким чином, загальні витрати на ТЗ можна визначити за формулою:

$$C_{TЗ}=\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_{0j}+\alpha_{0j}\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\omega_j}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\omega_j\,.$$

Далі розділимо задане значення параметрів відмов між елементами ТЗ.

При послідовному з'єднанні елементів задані значення параметра потоку ТЗ ω_i і елементів ω_j пов'язані співвідношенням:

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j-\omega_i=0\,. \qquad (3.15)$$

Використовуючи вираз (3.15) можна знайти такі значення ω_j, при яких загальні витрати на ТЗ будуть мінімальними.

Для цього скористаємося методом невизначених множників Лагранжа. Згідно з цим методом складають функцію:

$$\Phi(\omega_1,\ldots,\omega_n,\gamma)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\omega_j}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\omega_j+\gamma\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_j-\omega_{\text{ТЗ}}\right), \qquad (3.16)$$

де γ – невизначений множник.

Далі прирівняємо до нуля частинні похідні від функції (3.16) по $\omega_1,\ldots,\omega_n$ в результаті чого отримаємо:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\omega_1}=-\dfrac{\alpha_1}{\omega_1^2}+\beta_1+\gamma=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\omega_n}=-\dfrac{\alpha_n}{\omega_n^2}+\beta_n+\gamma=0 \end{array}\right\}.$$

З цих рівнянь визначимо невизначений множник γ, який дорівнює:

$$\gamma=\frac{\alpha_1}{\omega_1^2}-\beta_1=\frac{\alpha_2}{\omega_2^2}-\beta_2=\ldots=\frac{\alpha_n}{\omega_n^2}-\beta_n .$$

Звідки отримаємо:

$$\omega_{j\text{opt}}=\sqrt{\frac{\alpha_j}{\dfrac{\alpha_1}{\omega_1^2}-\beta_1+\beta_j}} . \qquad (3.17)$$

Підставивши вираз (3.17) в (3.15), отримаємо:

$$\omega_1+\sum_{j=2}^{n}\sqrt{\frac{\alpha_j}{\dfrac{\alpha_1}{\omega_1^2}-\beta_1+\beta_j}}-\omega_{\text{ТЗ}}=0 .$$

Це рівняння легше розв'язати графічно, переписавши у вигляді:

$$A(\omega_1)=B(\omega_1),$$

де

$$\left.\begin{array}{l} A(\omega_1)=\omega_{\text{ТЗ}}-\omega_1-\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\dfrac{\alpha_1}{\omega_1^2}-\beta_1+\beta_2}} \\ B(\omega_1)=\displaystyle\sum_{j=3}^{n}\sqrt{\frac{\alpha_j}{\dfrac{\alpha_1}{\omega_1^2}-\beta_1+\beta_j}} \end{array}\right\}. \qquad (3.18)$$

Для графічного розв'язання рівняння (3.18) обчислюються і заносяться на графік значення $A(\omega_1)$ і $B(\omega_1)$.

Абсциса точки перетину кривих визначає шукане значення $\omega_{1\text{opt}}$ (рис. 3.6).

Надалі, використовуючи формулу (3.17), послідовно визначимо всі значення $\omega_{j\text{opt}}$.

Для спрощення обчислень можна переписати формулу (3.17) у вигляді

$$\left(\frac{\omega_j}{\omega_1}\right)_{\text{opt}}=\sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_1+(\beta_j-\beta_1)\omega_1^2}}=\sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_1(1+h_j)}},$$

де $h_j = \frac{\left(\alpha_j - \beta_1\right)}{\alpha_1}\omega_1^2$.

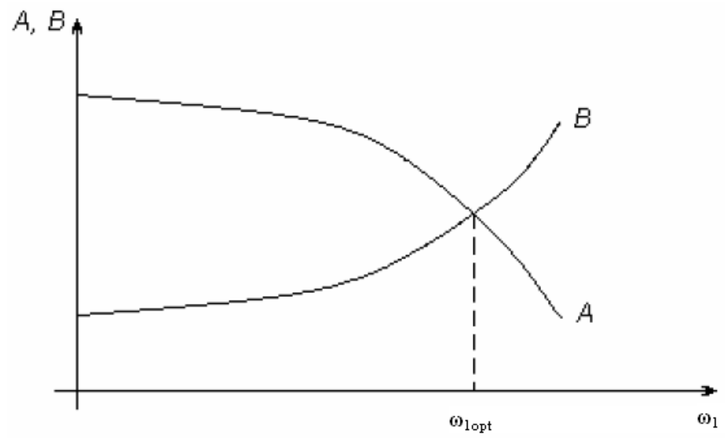


Рисунок 3.6 – Характеристики зміни параметрів A(ω₁) і B(ω₁)

Для полегшення обчислень може бути побудована номограма (рис. 3.7).

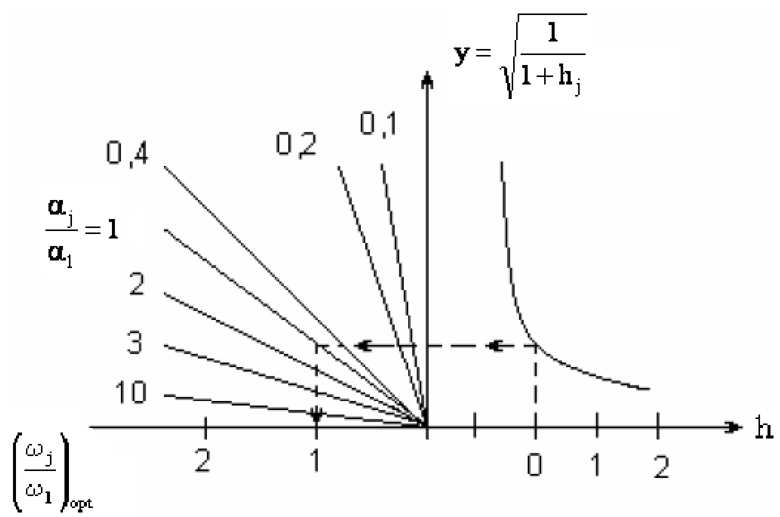


Рисунок 3.7 – Номограма для визначення оптимальних значень відношення $\left(\frac{\omega_j}{\omega_1}\right)_{opt}$

У правому квадранті розраховують значення $\sqrt{\frac{1}{1+h_j}}$, в лівому квадранті здійснюється множення на $\sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_1}}$. Хід обчислень показаний стрілками (рис. 3.7).

Вирази для $A(\omega_1)$ і $B(\omega_1)$ можна записати так:

$$\left.\begin{aligned} A(\omega_1) &= \omega_{T3} - \omega_1\left(1+\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\sqrt{\frac{1}{1+h_2}}\right) \\ B(\omega_1) &= \omega_1\sum_{j=3}^{n}\sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_1}}\sqrt{\frac{1}{1+h_j}} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.19)$$

По черзі задаючи значення ω_1, можна знаходити за номограмою значення добутку коренів і використовувати їх у формулі (3.19).

Для даного прикладу:

$$\chi = 13\cdot10^{-6}(\text{год})^{-1};$$

$$\alpha_1 = \frac{1{,}6\cdot10^{-4}}{13\cdot10^{-6}}\left(e^{8760\cdot5\cdot13\cdot10^{-6}}-1\right) = 0.955;$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{3\cdot10^{-5}}{13\cdot10^{-6}}\left(e^{8760\cdot5\cdot13\cdot10^{-6}}-1\right) = 1.78;$$

$$\beta_1 = \frac{4\cdot10^{6}}{13\cdot10^{-6}}\left(1-e^{-8760\cdot20\cdot13\cdot10^{-6}}\right) = 2.76\cdot10^{11};$$

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \frac{1{,}7\cdot10^{5}}{13\cdot10^{-6}}\left(1-e^{-8760\cdot20\cdot13\cdot10^{-6}}\right) = 1.17\cdot10^{10};$$

$$h_2 = \frac{1.17\cdot10^{10} - 2.76\cdot10^{11}}{0.955}\omega_1^2 = -2.77\cdot10^{11}\omega_1^2.$$

Використовуючи (3.19) будуємо на одних осях графіки $A(\omega_1)$ і $B(\omega_1)$.

Перетин дає $\omega_{1opt} = 1{,}43\cdot10^{-6}$ год$^{-1}$.

Визначені за допомогою номограм інші значення параметра потоку відмов складають: $\omega_{2opt} = \omega_{3opt} = \omega_{4opt} = 2{,}86\cdot10^{-6}$ год$^{-1}$.

3.4 Методи, що підтверджують виконання норм надійності

Існують декілька методів, які підтверджують задані в технічних умовах значення показників (норм) надійності.

Основними з них є такі:

1. Контрольні випробування на надійність;
2. Моделювання відмов на спеціальних стендах;
3. Ймовірнісне моделювання на ЕОМ;
4. Контрольні розрахунки надійності.

Основним методом, що підтверджує норми надійності, є метод контрольних випробувань.

Перед початком випробувань об'єкти повинні пройти припрацювання (технологічний прогін). При цьому в технічних умовах на об'єкт повинна бути програма випробувань на надійність, яка включає:

а) план випробувань;

б) вимоги до засобів випробувань;

в) спосіб обробки експериментальних даних і оформлення результатів випробувань.

У плані повинні міститися правила, які встановлюють об'єм вибірки, порядок проведення випробувань і критерії їх припинення.

Моделювання і контрольні розрахунки застосовуються в основному тоді, коли об'єкти не можуть піддаватися контрольним випробуванням. Для здійснення моделювання необхідно знати ймовірнісні характеристики напіввипадкових процесів зміни властивостей елементів ТЗ. Вони можуть бути отримані або при випробуваннях окремих деталей, або за даними експлуатації.

Контрольні розрахунки надійності зазвичай проводяться для унікальних об'єктів. Для цього за основу розрахунку беруть ПН аналогічних елементів ТЗ і при необхідності екстраполюють ці показники.

Ймовірнісне моделювання на ЕОМ проводиться у разі, коли контрольні розрахунки виходять дуже громіздкими або за рахунок допущень сильно спотворюють дійсність.

Існує також ще один метод підтвердження виконання норм надійності, а саме, метод прискорених випробувань на надійність.

Розрізняють два види прискорених випробувань: у нормальних і форсованих режимах.

У нормальних режимах складова навантажень відповідає технічним умовам для безперервних режимів роботи.

У форсованих режимах деякі види дій перевищують граничні значення, що задані в технічних умовах. Проте при цьому необхідно виявити вплив навантажень на фізичні процеси, що наближені до відмов і чітко оговорити допустимі межі навантажень. Крім того, при обґрунтуванні форсованих режимів випробувань необхідно скласти методику перерахунку ПН, отриманих при прискорених випробуваннях, на нормальні умови. При цьому найчастіше використовується коефіцієнт подібності $K_П$, який дорівнює відношенню середнього напрацювання за реальних умов і середнього напрацювання в форсованому режимі.

Тривалість випробувань у форсованому режимі може бути визначена з виразу:

$$t_ф = \frac{t_р}{K_П}, \tag{3.20}$$

де $t_р$ – заданий інтервал напрацювання ТЗ в реальних умовах;

$K_П$ – коефіцієнт подібності форсованих випробувань.

3.5 Складання логічних схем для розрахунку надійності

Розрахунок надійності ТЗ зазвичай проводиться у декілька етапів.

Перший етап полягає в описі роботи системи. На цьому етапі визначається зміст терміна «безвідмовна робота технічного засобу» (БР

ТЗ) і складається перелік властивостей справного ТЗ і розділення її на елементи.

На другому етапі проводиться класифікація відмов елементів і ТЗ. Оцінюється вплив відмови кожного елемента ТЗ на роботоздатність ТЗ в цілому.

Третій етап є основним етапом, на якому складається структурна (логічна) модель БР ТЗ.

На цьому етапі зазвичай виділяються підсистеми (блоки), в яких при відмові хоча б одного елемента відмовляє весь блок. Для кожного блока проводитися розрахунок надійності. Далі кожен блок нумерується і позначається буквою. Потім перераховуються комбінації блоків, які забезпечують БР ТЗ і, нарешті, складається логічна схема для розрахунку загальної (комбінованої) надійності ТЗ. Часто вона називається ще розрахунково-логічною схемою. Ця схема характеризує стан (роботоздатний або нероботоздатний) ТЗ залежно від стану окремих елементів (блоків).

У розрахунково-логічних схемах зазвичай застосовують три способи з'єднань елементів (чи блоків).

1. *Послідовне (основне) з'єднання* відповідає випадку, коли при відмові одного елемента відмовляє весь ТЗ в цілому (рис. 3.8).

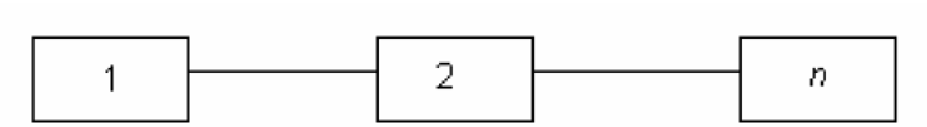


Рисунок 3.8 - Послідовне (основне) з'єднання елементів ТЗ

Напрацювання до відмови ТЗ в цьому випадку дорівнює напрацюванню до відмови того елемента, у якого вона виявилася мінімальною:

$$T_{ТЗ} \cong \min\{T_j\},\ j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3.21)$$

де n – число елементів ТЗ.

Функція надійності ТЗ при такому з'єднанні визначається за формулою:

$$P_{ТЗ}(t) = \prod_{j=1}^{n} P_j(t), \qquad (3.22)$$

де $P_j(t)$ – функція надійності j-того елемента.

У зв'язку з цим інтенсивність відмов ТЗ, що складається з n елементів дорівнює:

$$\lambda_{ТЗ} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j,\ \text{при}\ \lambda_j = \text{const}. \qquad (3.23)$$

Відповідно середнє напрацювання ТЗ до відмови обчислюється за формулою:

$$T_{ТЗср} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{T_{срj}}}, \qquad (3.24)$$

де $T_{срj}$ – середнє напрацювання до відмови j-го елемента.

У загальному випадку з врахуванням рівняння (1.61) вираз (3.22) може бути переписаний у вигляді:

$$P_{ТЗ}(t) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_j(t)dt} = e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^t \lambda_j(t)dt}. \qquad (3.25)$$

У окремому випадку, при експоненційному розподілі вірогідності БР елементів ТЗ (λ = const), маємо

$$P_{ТЗ}(t) = e^{-\lambda_{ТЗ} t} = e^{-\frac{t}{T_{ТЗср}}},$$

де $\lambda_{ТЗ}$ і $T_{ТЗср}$ визначаються згідно з (3.23) і (3.24).

Якщо всі елементи ТЗ рівнонадійні, то:

$$\lambda_{ТЗ} = \sum_{j=1}^{r} n_j \lambda_j, \qquad (3.26)$$

де n_j – число елементів j-типу;

r – число типів елементів.

При розрахунку вірогідності БР високонадійних ТЗ добуток $\lambda_{ТЗ} t << 1$, а $P_{ТЗ}(t)$ близька до одиниці. Розклавши $e^{-\lambda_{ТЗ} t}$ у ряд і обмежившись першими двома його членами, можна з високим ступенем точності визначити вірогідність $P_{ТЗ}(t)$. В цьому випадку основні ПН для ТЗ з послідовним з'єднанням елементів можна визначати за такими наближеними формулами:

$$\left.\begin{aligned} &P_{ТЗ}(t) \approx 1 - \lambda_{ТЗ} t \\ &\omega(t) = \lambda_{ТЗ}(1 - \lambda_{ТЗ} t) \end{aligned}\right\}. \qquad (3.27)$$

Вирази (3.27) використовують у випадку, якщо $P(t) \geq 0{,}9$ або навпаки, коли $\lambda \cdot t \leq 0{,}1$.

При значеннях вірогідності БР, близьких до одиниці, можна використовувати ще ряд наближених формул:

$$P_{ТЗ}(t) = \prod_{j=1}^{n} P_j(t) \approx 1 - \sum_{j=1}^{n} Q_j(t). \qquad (3.28)$$

При рівнонадійних елементах ТЗ маємо:

$$\left.\begin{aligned} &P_{ТЗ}(t) = P_j^n(t) \cong 1 - nQ_j(t) \\ &\text{або} \\ &P_j(t) = \sqrt[n]{P_{ТЗ}(t)} \cong 1 - \frac{Q_{ТЗ}}{n} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.29)$$

Приклад 3.5 Вірогідність БР ТЗ протягом часу t дорівнює $P_{ТЗ}(t)$ = 0,95. ТЗ складається з n=120 рівнонадійних елементів.

Визначіть вірогідність БР елементів ТЗ.

Розв'язування:

Оскільки значення $P_{ТЗ}(t)$ близьке до одиниці, то вірогідність БР складових елементів ТЗ $P_i(t)$ визначимо за формулою (3.29):

$$P_i\,(t)=\sqrt[n]{P_{ТЗ}(t)}=1-\frac{Q_{ТЗ}}{n}=1-\frac{0{,}05}{120}\approx 99{,}96\%\,.$$

Приклад 3.6. Нехай вимірювальна система складається з 4-х пристроїв з постійними інтенсивностями відмов $\lambda_1 = 5\cdot10^{-3}$ год$^{-1}$, $\lambda_2 = 3\cdot10^{-3}$ год$^{-1}$, $\lambda_3 = 6\cdot10^{-2}$ год$^{-1}$, $\lambda_4 = 15\cdot10^{-3}$ год$^{-1}$. Визначити ймовірність безвідмовної роботи системи протягом 2 годин.

Розв'язування:

$$\lambda_C = \sum_{i=1}^{4}\lambda_i = 0{,}005 + 0{,}003 + 0{,}06 + 0{,}015 = 0{,}083\ \text{год}^{-1};$$

$$P(2) = e^{-\lambda_C t} = e^{-0{,}083\cdot 2} = e^{-0{,}166} = 0{,}85.$$

Або за спрощеною формулою

$$P(2) = 1 - \lambda_C \cdot t = 1 - 0{,}083 \cdot 2 = 0{,}834.$$

2. *Паралельно навантажене з'єднання* відповідає випадку, коли ТЗ зберігає роботоздатність, до тих пір, поки роботоздатний хоча б один з n включених в роботу елементів (рис. 3.9).

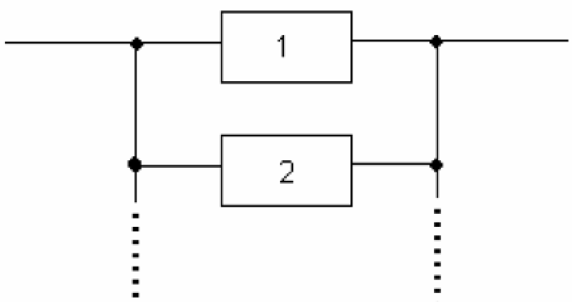


Рисунок 3.9 – Паралельне навантажене з'єднання

Напрацювання до відмови такого ТЗ дорівнює максимальному із значень напрацювань до відмови елементів:

$$T_{ТЗср} \cong \max(T_j),\ j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.30)$$

Функція ненадійності ТЗ при такому з'єднанні елементів має вигляд:

$$Q_{Т3}(t) = \prod_{j=1}^{n} Q_j(t)\,, \tag{3.31}$$

де $Q_j(t)$ – функція ненадійності j-го елемента.

Оскільки $P_{Т3}(t) = 1 - Q_{Т3}(t)$, то:

$$P_{Т3}(t) = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1 - P_j(t)\right). \tag{3.32}$$

Приклад 3.7. Обчислити ймовірність відмови системи, що складається з 5-ти паралельно з'єднаних пристроїв з ймовірностями безвідмовної роботи 0,6; 0,65; 0,5; 0,55; 0,4.

Розв'язування:

При n паралельно з'єднаних елементів системи, які мають ймовірність безвідмовної роботи протягом часу t відповідно $P_1(t)$, $P_2(t)$,…, $P_n(t)$ ймовірність безвідмовної роботи паралельного з'єднання

$$P_{Ï}(t) = 1 - Q_{ï}(t) = 1 - \prod Q_i(t) = 1 - \prod (1 - P_i(t)),$$
$$P_{ï}(t) = 1 - 0,4 \cdot 0,35 \cdot 0,5 \cdot 0,45 \cdot 0,6 = 0,9811.$$

Тоді

$$Q_{ï}(t) = 1 - P_{ï}(t) = 1 - 0,9811 = 0,019.$$

Приклад 3.8. В системі застосовано дублювання каналу управління. Інтенсивність відмов каналу $\lambda_к$ = 10^{-2} год$^{-1}$. Розрахувати ймовірність безвідмовної роботи системи $P_C(t)$, частоту відмов $a_C(t)$, інтенсивність відмов $\lambda_C(t)$, середній час безвідмовної роботи системи T_C при t = 10 год. Прийняти експоненціальний закон розподілу.

Розв'язування:

При експоненціальному законі розподілу вираз для ймовірності безвідмовної роботи елемента і системи аналогічний:

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t} \text{ і } P_C(t) = e^{-\lambda_C t};$$

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t} = e^{-0,01 \cdot 10} = e^{-0,1} \approx 0,9048.$$

Або по спрощеній формулі

$$P_i(t) \approx 1 - \lambda_з t = 1 - 0,01 \cdot 10 = 0,9.$$

Тоді

$$Q_i(t) = 1 - P_i(t) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Ймовірність безвідмовної роботи дубльованої ділянки

$$P_{Ñ}(t) = 1 - Q_з^2(t) = 1 - 0,1^2 = 0,99;$$

$$P_{\tilde{N}}(t) \approx 1 - \lambda_{\tilde{N}} t = 0,99.$$

Звідки інтенсивність відмов

$$\lambda_{\tilde{N}} = \frac{1 - Đ_{\tilde{N}}}{t} = \frac{1 - 0,99}{10} = 0,001(\text{ãî ä}^{-1}).$$

Частота відмов

$$a_C(t) = \lambda_C(t) \cdot P_C(t) = 0,001 \cdot 0,99 = 0,00099(\text{ãî ä}^{-1}).$$

Середній час безвідмовної роботи системи

$$T_C = \frac{1}{\lambda_{\tilde{N}}} = \frac{1}{0,001} = 1000\text{ãî ä}.$$

3. *Комбіноване з‘єднання елементів в системі.*

Приклад 3.9. Блок живлення системи складається з двох однотипних акумуляторних батарей з’єднаних паралельно і перетворювача напруги. Для роботи системи необхідна безвідмовна робота хоча б однієї батареї і перетворювача. Інтенсивність відмов батареї $\lambda_Б = 2 \cdot 10^{-3}$год$^{-1}$, перетворювача $\lambda_П = 5 \cdot 10^{-8}$ год$^{-1}$. Розрахувати ймовірність безвідмовної роботи протягом наробки t = 5 год.

Розв’язування:

Ймовірність безвідмовної роботи дубльованої ділянки блока живлення розраховується за формулою

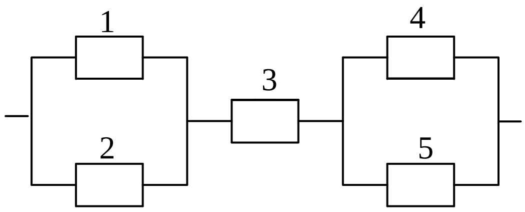
$$P_{\text{äóá}}(t) = 1 - (1 - P_{\acute{A}}(t))^2 = 1 - (1 - \text{å}^{-\lambda_{\acute{A}} t})^2,$$

$$P_{\acute{A}Æ}(t) = Đ_{\text{äóá}}(t) \cdot P_{Ï}(t) = (1 - (1 - \text{å}^{-\lambda_{\acute{A}} t})^2) \cdot e^{-\lambda_{Ï} t},$$

$$P_{\acute{A}Æ}(t) = (1 - (1 - \text{å}^{-0,002 \cdot 5})^2) \cdot e^{-5 \cdot 10^{-8} \cdot 5} = 0,9998.$$

Приклад 3.10. Зробити розрахунок надійності (P_C ,T_C , λ_C) з’єднання зображеного на рисунку, якщо елементи мають інтенсивності відмов

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,23 \cdot 10^{-3}$ год$^{-1}$, $\lambda_3 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ год$^{-1}$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 0,4 \cdot 10^{-4}$ год$^{-1}$.



Розв’язування:

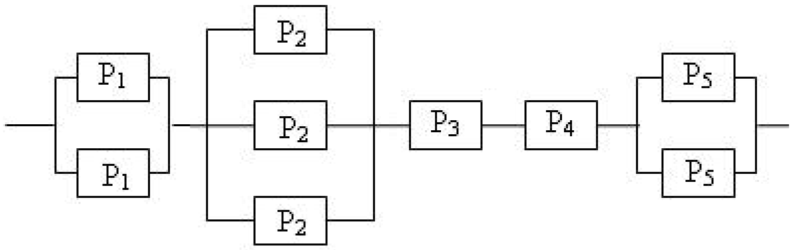
$$P_C(t) = P_{1,2}(t) \cdot P_3(t) \cdot P_{4,5}(t) = 0,9996.$$

Відомо, що $$P_C(t) = e^{-\lambda_C t} \approx 1 - \lambda_C \cdot t.$$

Звідки $$\lambda_{Ñ} = \frac{1 - Đ_{Ñ}}{t} = 0,0004(ãî\,ä^{-1}).$$

$$T_C = \frac{1}{\lambda_{Ñ}} = \frac{1}{0,0004} = 2500ãî\,ä.$$

Приклад 3.11. Визначити надійність схеми, якщо Pi - надійність і - го елемента



Розв'язування:

Для роботи схеми необхідно, щоб одночасно відбувалися наступні події:

A = {працював хоча б один з елементів P_1};

B = {працював хоча б один з елементів P_2};

C = {працював елемент P_3};

D = {працював елемент P_4};

E = {працював хоча б один з елементів P_5};

Обчислимо ймовірності цих подій:

$$P(A) = 1 - (1 - P_1)^2,$$

$$P(B) = 1 - (1 - P_2)^3,$$

$$P(C) = Đ_3,$$

$$P(D) = Đ_4,$$

$$P(E) = 1 - (1 - P_5)^2.$$

Події A, B, C, D, E - незалежні, по теоремі множення ймовірностей отримаємо:

$$P = [1 - (1 - P_1)^2][1 - (1 - P_2)^3]\,Đ_3\,Đ_4\,[1 - (1 - P_5)^2].$$

4. *Паралельне ненавантажене з'єднання* відповідає випадку коли при відмові основного елемента ТЗ включається в роботу черговий резервний елемент, що зберігає його роботоздатність (рис. 3.10).

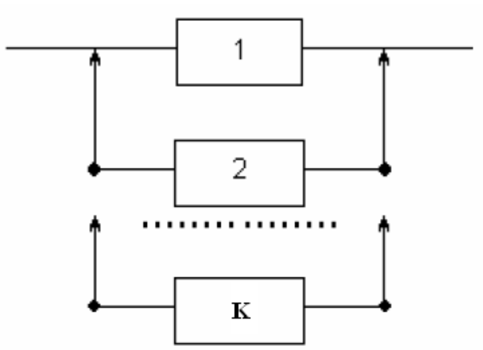


Рисунок 3.10 – Паралельне ненавантажене з'єднання

Напрацювання до відмови в такому ТЗ дорівнює сумі напрацювань до відмов елементів:

$$T_{\text{ÒÇср}} = \sum_{j=1}^{m} T_j, \ j = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.33}$$

де m – кратність резервування або кількість резервних елементів.

Ймовірність безвідмовної роботи ТЗ з ненавантаженим резервом визначається за формулою

$$P_{\text{ÒÇ}}(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^j}{j!}, \tag{3.34}$$

де λ_0 – інтенсивність відмови резервного елемента в стані роботи.

Приклад 3.12. У ТЗ ймовірність безвідмовної роботи перетворювача постійного струму в змінний протягом часу t =1000 год. дорівнює 0,95. Для підвищення надійності ТЗ в ньому є такий же перетворювач, який включається в роботу при відмові першого (режим ненавантаженого резерву). Потрібно розрахувати ймовірність безвідмовної роботи ТЗ, що складається з двох перетворювачів.

Розв'язування:

У даному випадку кратність резервування m = 1. Використовуючи формулу (3.34), отримаємо

$$P_{\text{ÒÇ}}(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^j}{j!} = e^{-\lambda_0 t}(1 + \lambda_0 t).$$

Так як для окремого перетворювача має місце експоненціальний закон надійності, то

$$P_{\text{ï}}(t) = e^{-\lambda_0 t},$$

де $P_п(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи перетворювача;

λ_0 – інтенсивність відмов перетворювача в стані роботи.

Тоді будемо мати:

$$P_{\text{ï}}(1000) = e^{-\lambda_0 1000} = 0,95.$$

Звідки

$$\lambda_0 \cdot 1000 = 0,051.$$

Тоді

$$P_{òç}(1000) = 0,95(1 + 0,051) = 0,99845.$$

При складанні логічної схеми необхідно проводити аналіз наслідків, до яких призводить відмова елемента. Особливо це необхідно проводити, якщо є декілька однакових елементів.

Наприклад, працюють два генератори потужністю W кожен. Тут можливі декілька випадків розрахунку надійності:

1) обов'язково потрібна потужність, що дорівнює 2W. В цьому випадку генератори на логічній схемі з'єднуються послідовно;

2) при відмові одного генератора відключаються маловажливі об'єкти, і навантаження на роботоздатному генераторі дорівнюватиме Р. Отже, тут генератори з'єднуються паралельно.

При розрахунку надійності в число елементів необхідно включати електричні з'єднання паянням, зваркою, стисненням, а також інші види з'єднань, наприклад, штепсельні роз'єми. На такі електричні з'єднання припадає від 10 до 50 % всіх відмов.

3.6 Вибір і уточнення значень показників надійності

Залежно від стадії проектування розрізняють три етапи вибору значень ПН.

1. Приблизний розрахунок надійності структурної схеми ТЗ. Він проводиться з метою вибору принципу побудови ТЗ. Тут визначається число елементів, при відмовах яких ТЗ виходить з ладу. Часто кількість таких елементів знаходять шляхом порівняння з аналогічними, раніше розробленими блоками. Потім розшуковують в довідникових матеріалах середні значення ПН елементів, наприклад, середні інтенсивності відмов.

2. Другий етап розрахунку надійності проводиться при підборі типів елементів і уточнень принципової схеми ТЗ. На цьому етапі визначаються умови роботи ТЗ (температура, тиск, електричне навантаження і ін.).

Для врахування навантажень як правило складаються спеціальні таблиці (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Приклад обліку навантажень елементів

Найменування елемента	Режим роботи		Інтенсивність відмов, 1/год
	t, °C	Коеф. навантаження	
Резистор	55	0,5	$9 \cdot 10^{-7}$
Конденсатор	55	0,75	$4 \cdot 10^{-7}$

На цьому етапі становить також великий інтерес використання коефіцієнтного способу розрахунку надійності. Він застосовується тоді, коли відоме достовірне значення інтенсивності відмов лише одного елемента ТЗ.

Передбачається, що при різних режимах роботи справедливим є співвідношення:

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_v} = K_j, \tag{3.35}$$

де λ_j – інтенсивність відмов j-го елемента;

λ_v – достовірно відома інтенсивність відмов одного елемента (основного елемента розрахунку).

Значення коефіцієнта K_j зазвичай знаходять шляхом аналізу даних за інтенсивністю відмов різних елементів. Оскільки ці розрахунки є наближеними, зазвичай обчислюють мінімальні і максимальні значення K_j.

Як приклад подамо значення коефіцієнтів K_j для різних елементів, взявши за основний елемент резистори (табл. 3.2).

Таблиця 3.2 – Максимальні та мінімальні значення коефіцієнту K_j для різних складових елементів ТЗ

Найменування елементів	K_{jmin}	K_{jmax}
Електровакуумні ТЗ	18,3	26,6
Конденсатори	0,33	0,61
Резистори	1	1
Напівпровідникові діоди	11,77	15,4
Потенціометри	7,2	12
Електродвигуни	17	22
Штепсельні роз'єми	10,7	15,3

Взявши до уваги допущення (3.35) і використовуючи вирази (3.22) і (3.23), можна записати:

$$P_{ТЗ}(t) = e^{-t\lambda_0 \sum\limits_{j=1}^{d} N_j K_j} \tag{3.36}$$

або

$$P_{ТЗ}(t) = e^{-t\lambda_{ТЗ}}, \tag{3.37}$$

де $\lambda_{ТЗ} = \lambda_0 \sum\limits_{j=1}^{d} N_j K_j$;

N – число елементів j-го типу;

d – число типів елементів.

Якщо замість функції надійності $P_{ТЗ}(t)$, взяти середнє напрацювання до відмови $T_{ТЗср} = 1/\lambda_{ТЗ}$, то отримані залежності можна вважати інваріантними відносно умов експлуатації ТЗ. Дійсно, при зміні умов експлуатації ТЗ змінюватиметься лише інтенсивність відмов до основного елементу розрахунку, тобто змінюватиметься лише масштаб.

При коефіцієнтному способі розрахунку для порівняння варіантів за надійністю немає потреби.

3. Третій етап розрахунку надійності проводиться після того, коли створені макети. Тут доцільно провести додаткові лабораторні випробування, в ході яких вводять грубі відмови (обриви, коротке замикання і ін.). При цьому оцінюють вплив відмови елементів на роботоздатність ТЗ і уточнюють логічну схему розрахунку надійності.

Питання для самоконтролю

1. Покажіть на прикладі, чому необхідний вибір основного ПН при розрахунку надійності ТЗ.

2. Які ПН вибираються як основні для ТЗ різних типів?

3. Перерахуйте чинники, які необхідно враховувати при призначенні норм надійності, і поясніть, яким чином проводиться це врахування.

4. Покажіть на прикладах основні способи розподілу норм надійності за елементами.

5. Проведіть аналіз основних аналітичних виразів для послідовного, паралельно навантаженого і паралельно ненавантаженого з'єднання елементів.

6. Поясніть, як здійснюється корегування норм надійності і які заходи використовуються для підвищення надійності?

7. Розкрийте суть методу перерахунку ПН, що використовує гіпотезу Н. Седякіна про ресурс надійності ТЗ.

8. Розкрийте суть методу перерахунку ПН, що використовує розрахункові графіки.

9. Перерахуйте найбільш вживані на практиці основні види технічного обслуговування і ремонту.

10. Які Ви знаєте методи, що підтверджують виконання норм надійності?

Розділ 4 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НАДІЙНОСТІ ПРОЕКТОВАНИХ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ РІЗНИХ ТИПІВ

4.1 Способи і основні етапи визначення надійності проектованих технічних засобів

Якщо існують відомості про надійність елементів ТЗ і зв'язки між елементами, то за цими даними можна визначити значення показників надійності ТЗ.

Визначення надійності ТЗ або системи в цілому переслідує такі цілі:

1. Визначити, чи досяжна задана надійність на сучасному рівні розвитку техніки;
2. Допомогти розподілити значення показників надійності (ПН) за елементами, блоками і вузлами;
3. Допомогти зробити вибір між різними конструктивними рішеннями;
4. Установити доцільність введення резервування.

Існує два шляхи визначення надійності ТЗ:

- складання математичної (логічної) моделі функціонування;
- безпосередньо за функціональною схемою ТЗ.

Загальноприйнятим на сьогоднішній день є перший шлях. Тут необхідно визначити, які стани ТЗ треба враховувати, ознаки цих станів і ін., тобто необхідно описати функціонування реального ТЗ формальною мовою подій і станів.

Найбільшого поширення одержали логічні моделі безвідмовної роботи ТЗ. При цьому вважають , що елементи можуть знаходитися в двох несумісних станах: роботоздатному і нероботоздатному. Функціональні зв'язки між елементами заміняються логічними, які характеризують стан ТЗ. Умови роботоздатності ТЗ при відмові елементів записуються за допомогою логічних співвідношень.

Вигляд логічної моделі визначає можливість одержання розрахункових формул. Для опису надійності найбільшого поширення отримали такі методи:

- метод інтегральних рівнянь;
- метод диференційних рівнянь;
- метод оцінки надійності за графом можливих станів ТЗ.

4.2 Метод інтегральних рівнянь

Цей метод можна застосовувати при розрахунку надійності будь-яких ТЗ при будь-яких розподілах часу безвідмовної роботи і часу відновлення.

Визначення ПН в цьому методі відбувається шляхом складання і вирішення інтегральних або інтеграло-диференційних рівнянь. При складанні інтегральних рівнянь звичайно виділяють нескінченно малі інтервали часу. Для цих інтервалів часу розглядають складні події, що з'являються при спільній дії декількох факторів.

Ці рівняння порівняно просто складати, але важко розв’язати. Часто розв’язок доводиться знаходити чисельними методами за допомогою ЕОМ. У зв'язку з цим метод інтегральних рівнянь у даний час не одержав широкого розповсюдження.

Як приклад застосування цього методу розглянемо розрахунок надійності невідновлюваного ТЗ із холодним резервом.

При цьому припустимо:

- індикатор відмов і перемикач абсолютно надійні;
- резервні елементи не можуть відмовити до включення їх в роботу;
- ремонт резервного ТЗ в процесі його роботи неможливий.

Такий резервований ТЗ буде безвідмовно працювати протягом часу (0; t) при двох можливих подіях:

- основний елемент не відмовив;
- основний елемент відмовив у момент $t<T$, а резервний елемент пробив безвідмовно протягом інтервалу $(T-t)$.

Позначимо ймовірність першої події $P_1(t)$. Очевидно, що ймовірність появи відмови основного елемента протягом малого інтервалу часу $(T;\quad T+dT)$ дорівнює:

$$a_1(T)dT=-P'(T)dT, \tag{4.1}$$

де $a_1(T)$– щільність ймовірності моменту і-ої відмови.

Ймовірність безвідмовної роботи ТЗ за умови, що в момент T відбулася відмова основного елемента і включився резервний, дорівнює:

$$P_2(t-T). \tag{4.2}$$

Таким чином, ймовірність здійснення другої події на інтервалі $(T;\quad T+dT)$ дорівнює

$$P_2(t-T)\cdot a_1(T)dT. \tag{4.3}$$

Інтегруючи вираз (4.3) від 0 до t, одержимо ймовірність здійснення другої події

$$\int_0^t P_2(t-T)\cdot a_1(T)dT. \tag{4.4}$$

Очевидно, що ймовірність дубльованого ТЗ з холодним резервом дорівнює сумі ймовірностей здійснення першої і другої подій

$$P(t)=P_1(t)+\int_0^t P_2(t-T)\cdot a_1(T)dT. \tag{4.5}$$

При показовому розподілі напрацювання до відмови основного і резервного елементів, що мають інтенсивність відмов λ_1 і λ_2 з виразу (4.5) маємо:

$$P(t) = e^{-\lambda_1 t} + \int_0^t e^{-\lambda_2 (t-T)} \lambda_1 e^{-\lambda_1 T} dT = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \qquad (4.6)$$

Щільність напрацювання такого ТЗ до відмови визначається за формулою

$$a(t) = -P'(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1} t + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \qquad (4.7)$$

Якщо ТЗ має один основний і (К–1) резервний елемент, то, взявши за основу вираз (4.5) можна отримати рекурентну формулу

$$P_{K_{T3}}(t) = P_{K-1}(t) + \int_0^t P_K(t-T) a_{K-1}(T) dT, \qquad (4.8)$$

де індекс (К–1) – означає, що відповідні характеристики належать до резервного ТЗ, при відмові якого включається в роботу останній, К-й, резервний елемент.

4.3 Метод диференційних рівнянь

Цей метод заснований на припущенні того, що час між відмовами і час відновлення підлягають показниковим розподілам.

При цьому параметр потоку відмов $\Omega = \lambda = 1/T_{ср}$, а інтенсивність віднови $\mu = 1/T_В$, де $T_{ср}$, $T_В$ – відповідно середній час до відмови і час відновлення.

Цей метод може застосовуватися для розрахунку надійності як відновлюваних, так і невідновлюваних ТЗ. Для використання цього методу необхідно мати математичну модель у вигляді множини станів ТЗ, в яких він може знаходитися при відмовах та відновленнях.

Для визначення ПН складають і розв’язують систему диференційних рівнянь для ймовірностей станів (рівнянь Колмогорова). Щоб при цьому гранично зменшити витрати праці на розрахунок зазвичай припускають, що:

- об'єкти, що відмовили, починають негайно відновлювати;
- відсутні обмеження на кількість відновлень;
- надійність засобів контролю ідеальна.

Математичну модель зображують у вигляді графа станів. На цьому графі кружечками зображують можливі стани ТЗ при відмовах її елементів. Стрілками зображують можливі напрямки переходів ТЗ з одного стану в інший. Біля стрілок вказують інтенсивність переходів (наприклад, λ і μ).

Зобразимо приклад такого графа на рис. 4.1.

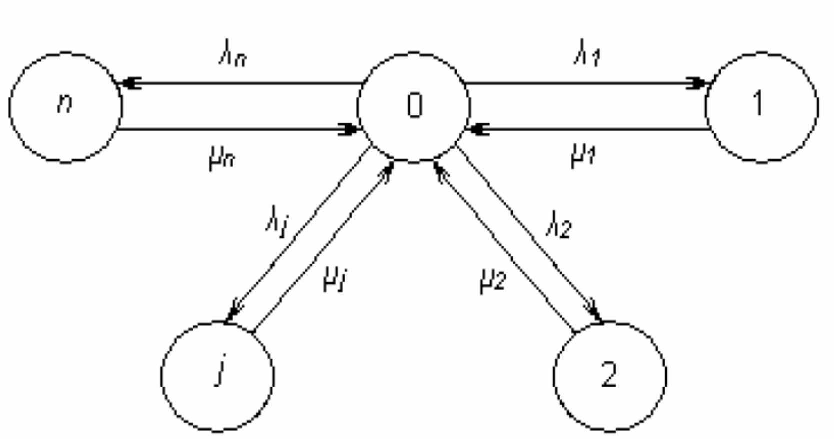


Рисунок 4.1 – Граф станів відновлюваного ТЗ

Якщо розглядається невідновлюваний ТЗ, то між станами є тільки одна стрілка.

Для визначення ймовірностей $P_j(t)$ перебування ТЗ в j-му стані в момент часу t складають за графом станів систему звичайних диференційних рівнянь.

Для цього в ліву частину кожного рівняння ставлять похідну за часом від ймовірності перебування ТЗ в j-му стані в момент часу t. Кількість членів у правій частині дорівнює кількості стрілок, що з'єднують розглянутий стан з іншим. При цьому кожен член дорівнює ймовірності переходу з одного стану в інший, а саме добуткові інтенсивності переходу (наприклад, λ_{ij}) на ймовірність того і-го стану, з якого стрілка виходить. Знак добутку береться додатним, коли стрілка входить у розглянутий стан.

Отримана система диференційних рівнянь доповнюється нормованою умовою

$$\sum_{j=0}^{n+1} P_j(t) = 1, \tag{4.9}$$

де $P_j(t)$ – ймовірність перебування ТЗ в j-му стані;

$n+1$ – кількість можливих станів.

Далі вся множина станів розбивається на дві підмножини:

а) n_1 – підмножина станів, у якому ТЗ нероботоздатний;

б) n_2 – підмножина станів, у яких ТЗ роботоздатний.

Тоді функцію готовності ТЗ можна визначити як

$$G(t) = \sum_{j=0}^{n} P_j(t), \tag{4.10}$$

де $P_j(t)$ – ймовірність перебування ТЗ в j-му роботоздатному стані.

Якщо необхідно визначити коефіцієнт готовності (або простою) розглядають сталий режим експлуатації при $t \to \infty$.

У цьому випадку всі похідні $P'_j(t)=0$ і система диференційних рівнянь переходить у систему алгебраїчних рівнянь.

Приклад 4.1. Обчислимо коефіцієнт готовності ТЗ, якщо коефіцієнт готовності кожного з n елементів ТЗ відповідно дорівнює: $K_{Г1}, K_{Г2}, \ldots K_{Гi}, \ldots K_{Гn}$.

Вважаємо, що весь ТЗ відмовляє, якщо відмовив хоча б один з його елементів.

Розв'язування:

Необхідно розглянути всі стани ТЗ. Для цього складається граф станів (див. рис. 4.1). Цей граф позначає такі стани ТЗ:

0 – всі елементи роботоздатні;

1 – перший елемент неработоздатний, інші роботоздатні;

2 – другий елемент неработоздатний, інші роботоздатні і т.д.

Ймовірність появи одночасно двох неработоздатних елементів вважаємо настільки малою, що нею можна знехтувати.

Символами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$ – позначені інтенсивності відмов, а символами $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ – позначені інтенсивності відновлення.

За графом станів складаємо систему диференційних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_1 P_0 - \mu_1 P_1(t) \\ &\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_2 P_0 - \mu_2 P_2(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_n P_0 - \mu_n P_n(t) \end{aligned}\right\} . \tag{4.11}$$

Сюди ж додають нормовану умову (4.9) $\sum_{j=0}^{n} p_j(t) = 1$.

При сталому режимі експлуатації рівняння виду (4.11) набудуть вигляду:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 P_0 - \mu_1 P_1(t) = 0 \\ &\lambda_2 P_0 - \mu_2 P_2(t) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\lambda_n P_0 - \mu_n P_n(t) = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{4.12}$$

Розв'язавши отриману систему алгебраїчних рівнянь (4.12) з врахуванням нормованої умови, отримаємо

$$K_{ГТЗ} = P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\mu_j}} . \tag{4.13}$$

Ймовірність перебування ТЗ в j-му стані дорівнюватиме

$$P_j(t) = \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot P_0. \tag{4.14}$$

Знаючи формулу $K_Г = \frac{\mu}{(\mu+\lambda)}$, маємо

$$\mu_j = \lambda_j \cdot \frac{K_{Гj}}{1-K_{Гj}}. \tag{4.15}$$

Підставивши в (4.13) вираз для μ_j з (4.15), отримаємо

$$K_{ГТЗ} = \frac{1}{1+\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{K_{Гj}-1}}. \tag{4.16}$$

Нехай $K_{Г1} = 0.6$; $K_{Г2} = 0.7$; $K_{Г3} = 0.8$.

Підставивши ці значення в (4.16), отримаємо коефіцієнт готовності ТЗ

$$K_{ГТЗ} = \frac{1}{1+(1/0.6-1)+(1/0.7-1)+(1/0.8-1)} = 0{,}43.$$

4.4 Метод оцінки надійності за графом можливих станів ТЗ

Цей метод заснований на методі диференційних рівнянь, при якому доводиться розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Структура визначників цієї системи дозволяє сформулювати правило перебування виразів для ПН безпосередньо за графом.

Таке правило для виразів стаціонарної ймовірності перебування ТЗ в j-му стані полягає в такому: проходять найкоротші шляхи (без повернення) із усіх крайніх станів у кожен стан ТЗ за напрямком стрілок і перемножують усі інтенсивності переходів.

Кожна інтенсивність переходу враховується тільки один раз. Ймовірність перебування в j-му стані для графів без кілець визначається за формулою

$$P_j(t) = \frac{\Delta_j}{\sum\limits_{i=0}^{K+1}\Delta_i}, \tag{4.17}$$

де Δ_i, Δ_j – добуток інтенсивностей переходів із усіх найкоротших станів відповідно в j-ті та i-ті при русі за найкоротшим шляхом в напрямку стрілок;

(K+1) – кількість станів ТЗ.

Найкоротшими вважаються стани, що не мають вихідних стрілок при невідновлюваному ТЗ і мають не більше однієї вихідної стрілки при відновлюваному ТЗ.

Застосовуючи це правило можна отримати формулу для $К_{ГТЗ}$ (коефіцієнта готовності ТЗ) без складання і розв'язання диференційних рівнянь.

Приклад 4.2 ТЗ складається з трьох вузлів. Відмова будь-якого вузла – відмова ТЗ. Відомі інтенсивності відмов $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ та інтенсивності відновлень μ_1,μ_2,μ_3 вузлів ТЗ. Визначіть $К_{ГТЗ}$ – коефіцієнт готовності ТЗ.

Розв'язування:

Зобразимо граф ТЗ відповідно до умови задачі (рис. 4.2). Використовуючи викладене вище правило, визначаємо за графом (рис. 4.2) коефіцієнт готовності ТЗ

$$К_{ГТЗ} = Р_{ТЗ} - \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}, \qquad (4.17, а)$$

де $\Delta_0 = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3$; $\Delta_1 = \lambda_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3$; $\Delta_2 = \mu_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_3$; $\Delta_3 = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \lambda_3$.

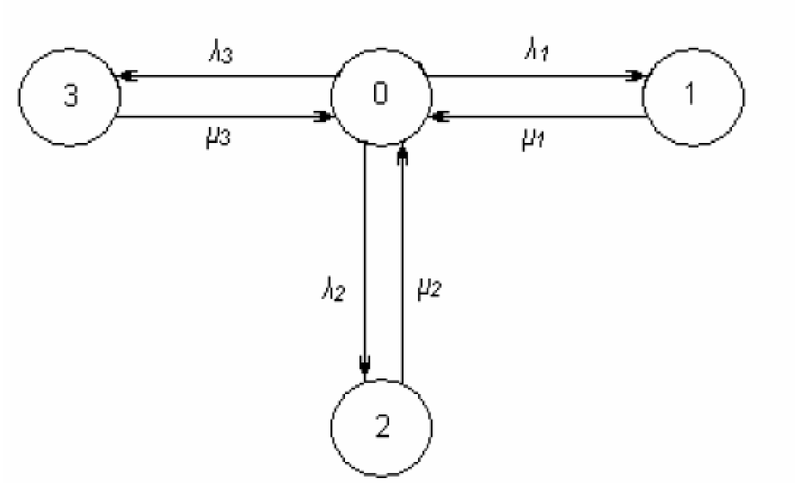


Рисунок 4.2 – Граф станів ТЗ, що заданий за умовою задачі

Підставляючи λ_i та μ_i (4.17, а) остаточно отримаємо

$$К_{ГТЗ} = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 + \lambda_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 + \mu_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_3 + \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \lambda_3} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3}}.$$

Для нестаціонарного стану знаходять вираз для перетворення Лапласа ймовірності перебування в розглянутому стані.

4.5 Розрахунок втрат продуктивності ТЗ через ненадійність елементів

Як правило в таких випадках знаходять середні втрати за одиницю часу як математичне сподівання втрат вихідного ефекту за одиницю часу

$$\overline{W} = \overline{E}_0 - \sum_{v=0}^{s} \overline{E}_v h_v \, , \qquad (4.18)$$

де $\overline{E}_0$ – середній вихідний ефект за одиницю часу для цілком роботоздатного абсолютно надійного (ідеального) ТЗ;

h_v – ймовірність перебування ТЗ в V-му стані (або доля часу перебування ТЗ в V-му стані);

s – кількість можливих станів ТЗ.

Іноді зручніше обчислювати відносні середні втрати через ненадійності

$$\frac{\overline{W}}{\overline{E}_0} = \left(1 - \sum_{v=0}^{s} \varepsilon_v h_v\right) 100\% \, , \qquad (4.19)$$

де $\varepsilon_v = \dfrac{\overline{E}_v}{\overline{E}_0}$ – коефіцієнт зниження ефекту у V-му стані.

Основні труднощі виникають при визначенні ймовірностей перебування ТЗ в різних станах. Тому в результаті попереднього аналізу необхідно сформулювати деяке правило (припущення) і дотримуватись його в ході розрахунку.

Найбільш доцільними є такі з припущень:

1. Можливий (n+1) стан ТЗ. Один стан відповідає роботоздатності всіх елементів. Інші стани відповідають нероботоздатності одного з n елементів.

Вихідний ефект відповідає тільки одному стану при роботоздатності всіх елементів: «схема одного стану»;

2. Схема аналогічна попередній, але при відмові одного елемента виникає V-ий стан, якому відповідає вихідний ефект $\overline{E}_V$: «схема одної відмови»;

3. Можливі лише такі стани ТЗ, при яких не більше двох його елементів нероботоздатні: «схема двох відмов». Загальна кількість станів $n+1+C_n^2$.

Доля часу перебування ТЗ в іншому, крім зазначених вище, стані вважається дуже малою.

Розрахунки втрат продуктивності ТЗ через ненадійність елементів доцільно проводити, переходячи послідовно від схеми одного стану до схем одного, двох і т. д. відмов елементів.

При «схемі одного стану» коефіцієнт ефективності для цього стану $\varepsilon_v = 1$, для інших станів $\varepsilon = 0$. При цьому відносні середні втрати обчислюються за формулою

$$\frac{\overline{W}}{\overline{\overline{E}}_0} = 1 - h_0, \qquad (4.20)$$

де h_0 – ймовірність того, що всі елементи роботоздатні.

Ймовірність h_0 обчислюється за значеннями коефіцієнтів готовності всіх j-х елементів $K_{Гj}$ або за формулою (4.13)

$$K_{ГТЗ} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}.$$

При схемі «одної відмови» обчислюються ймовірності перебування ТЗ в кожному V-му із (n+1) станів за формулою

$$h_v = h = \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot h_0 = \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}. \qquad (4.21)$$

При цьому

$$\frac{\overline{W}}{\overline{\overline{E}}_0} = 1 - h_0 - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j h_j) = 1 - h_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \cdot \frac{\lambda_j}{\mu_j}\right). \qquad (4.22)$$

Збільшення відносної продуктивності ТЗ при розрахунку за схемою одної відмови може бути грубо оцінено за формулою

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j \lambda_j}{\mu_j} \approx n\varepsilon_{ср1} \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)_{ср} = z_1, \qquad (4.23)$$

де $\varepsilon_{ср1}$ – орієнтовна оцінка середнього коефіцієнта ефекту для стану ТЗ, у якому не працює один елемент (інші (n-1) працюють);

$\left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)_{ср}$ – середнє значення відношення λ_j / μ_j для елементів ТЗ.

Для ТЗ з різними λ_j та μ_j обчислення значно ускладнюються.

При розрахунку за «схемою двох відмов» обчислення значно ускладнюються через різке збільшення кількості розглянутих станів. Тому часто доводиться застосовувати ЕОМ. Послідовність обчислення така ж: за графом обчислюють середні втрати за формулою (4.19).

Щоб вирішити питання про доцільність розрахунку за «схемою двох відмов» перепишемо формулу (4.19) у вигляді

$$\frac{\overline{\overline{W}}}{\overline{\overline{E}}_0}=1-h_0-\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j h_j-\sum_{v=n+1}^{S}\varepsilon_v h_v\,, \qquad (4.24)$$

де $S=C_n^1+C_n^2=n+\frac{1}{2}n(n-1)$.

У виразі (4.24) перша сума характеризує продуктивність ТЗ при одній відмові, а друга – при двох відмовах.

Питання для самоконтролю

1. Для яких законів розподілу часу безвідмовної роботи використовуються методи інтегральних та диференційних рівнянь при розрахунку надійності ТЗ?
2. Проаналізуйте переваги і недоліки методу диференційних рівнянь та методу розрахунку надійності за графом можливих станів ТЗ.
3. Покажіть (доведіть), чому при використанні методу оцінки надійності за графом можливих станів ТЗ немає необхідності у складанні та розв’язанні системи алгебраїчних рівнянь.
4. Які методи набули найбільшого поширення для опису надійності технічних засобів?
5. Проведіть порівняльний аналіз переваг і недоліків усіх трьох розглянутих методів розрахунку надійності.
6. Наведіть вираз для розрахунку відносних середніх втрат.
7. Наведіть вираз для визначення ймовірності перебування в j-му стані для графів без кілець.
8. Наведіть приклад графу станів ТЗ та поясніть як за цим графом складається система диференційних рівнянь.
9. Чому буде дорівнювати ймовірність перебування ТЗ в j-му стані при використанні методу диференційних рівнянь?
10. За яким виразом розраховується коефіцієнт готовності ТЗ в методі диференційних рівнянь?
11. Наведіть вираз для розрахунку функції готовності ТЗ в методі диференційних рівнянь та як записується при цьому нормована умова.
12. Чому дорівнює ймовірність появи відмови основного елемента протягом малого інтервалу часу при використанні методу інтегральних рівнянь?
13. Наведіть вираз для розрахунку ймовірності дубльованого ТЗ з холодним резервом.
14. Наведіть вираз для розрахунку щільності напрацювання ТЗ до відмови .
15. Якщо ТЗ має один основний і (K–1) резервний елемент, то за якою рекурентною формулою розраховується ймовірність безвідмовної роботи?

Розділ 5 МЕТОДИ ПІДВИЩЕННЯ НАДІЙНОСТІ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ

5.1 Заходи, що використовуються для підвищення надійності технічних засобів

Розглянуті в попередніх розділах питання дозволяють виділити основні напрямки робіт з підвищення надійності ТЗ. При цьому можна виділити чотири групи заходів щодо підвищення надійності ТЗ при їхньому проектуванні:

- системні;
- структурні (схемні);
- конструктивні;
- експлуатаційні.

До системних методів відносяться організаційно-економічні заходи щодо стимулювання підвищення надійності і ряд технічних заходів.

Одним із шляхів стимулювання підвищення надійності є включення у вартість ТЗ витрат на гарантійні ремонт і обслуговування. При цьому розроблювач враховує, що при підвищенні надійності зменшуються витрати на гарантійний ремонт і обслуговування, тобто прибуток стає найбільшим при певному значенні показника надійності, який перевищує максимально допустимий рівень. У цьому випадку розробники та виготовлювачі ТЗ прагнуть дізнатись цей рівень і досягти його. Отже, стимулюються точні оцінки надійності та її підвищення. Іншим шляхом стимулювання підвищення надійності є планування витрат на весь термін служби проектовного ТЗ.

Технічні заходи щодо оформлення показників надійності проектовних ТЗ необхідні при будь-якій системі взаємин замовника і розробника. До технічних заходів відносяться облік зовнішніх впливів на проектовні технічні засоби:

а) робочі (важкий ударно-вібраційний режим, температурний режим, агресивне хімічне середовище, ядерна реакція);

б) кліматичні (температура, вологість, домішки в повітрі);

в) біологічні (грибок або цвіль, комахи, гризуни).

Структурні (схемні) методи поєднують заходи щодо підвищення надійності ТЗ шляхом вдосконалювання принципів їхньої будови.

Ці методи відрізняються великою розмаїтістю й інтенсивно розвиваються. До них відносяться, наприклад, варіанти будови ТЗ, нечутливих до появи відмов, за рахунок введення надлишкових апаратурних і програмних засобів. При цьому можуть використовуватися і апаратні (наприклад, резервування) і програмні (наприклад, порівняння результатів надлишкових обчислень) засоби. У ряді випадків також можуть застосовуватися й апаратно-програмні засоби виявлення відмов елементів і відновлення ТЗ. Більш детально структурні (схемні) методи підвищення надійності будуть розглянуті далі.

До конструктивних методів відносяться заходи щодо створення та вибору елементів, вузлів або блоків ТЗ, створення сприятливих режимів роботи, вживання заходів щодо полегшення ремонтів і т. ін. При цьому звичайно виявляються більш надійними ті елементи, вузли або блоки ТЗ, що не мають деталей, тонких обмоток, ниток розжарення тощо.

Час усунення відмови можна істотно зменшити шляхом побудови ТЗ за блоко-вузловим способом. При цьому всі ТЗ розбиваються на окремі функціонально закінчені блоки, що в електронних системах з'єднуються між собою кабелями, а в механічних – зв'язуються кінематично. Блоки у свою чергу розбиваються на функціонально закінчені вузли, виконувані у вигляді легкознімних конструкцій. При такій будові ТЗ відновлення полягає в заміні несправних блоків або вузлів, що значно прискорює процес введення ТЗ у роботу. Здійснення блочно-вузлових конструкцій тісно позв'язано з уніфікацією елементів і систем, що виконується на основі відбору найбільш надійних варіантів. При цьому не тільки підвищується надійність ТЗ, але і знижується їх вартість, і спрощується виготовлення. У ряді випадків вдається створити дуже складні ТЗ з елементів двох-трьох типів.

Планування *експлуатаційних заходів* на стадії проектування ТЗ полягає в розробці системи експлуатаційного забезпечення. Проектування ТЗ при цьому повинно здійснюватися відповідно до номенклатури робіт з технічного обслуговування. Наприклад, для планування періодичного регулювання визначних параметрів ТЗ необхідно передбачити можливість контролю і прогнозування значень цих параметрів.

Як уже згадувалось, *структурні (схемні) і конструктивні методи підвищення надійності безумовно є основними для забезпечення відповідного рівня надійності розроблюваних ТЗ.*

Розглядаючи ці методи необхідно підкреслити таке.

У першу чергу надійність ТЗ досягається ***за рахунок використання високонадійних елементів***. Впровадження напівпровідникових приладів замість електровакуумних дозволило, як відомо, підвищити надійність технічних засобів більш ніж на порядок за рахунок того, що фізичні процеси в напівпровідникових приладах забезпечують їх функціонування при менших живильних напругах, розсіювальних потужностях і, відповідно, температурах.

Подальший розвиток елементної бази полягав в створенні інтегральних мікросхем (IMC). За останні 20–30 років IMC розвивалися бурхливими темпами і послідовно були створені інтегральні схеми малого, середнього і великого (BIC) ступеня інтеграції. В даний час створюються дуже великі IMC, що містять тисячі, десятки тисяч навіть сотні тисяч елементів. Технологія IMC безупинно вдосконалювалася, і це привело до того, що, незважаючи на різке збільшення числа елементів на одному кристалі, надійність окремого кристала залишалася такою ж, причому інтенсивність відмов схеми, розміщеної на кристалі, складала приблизно $10^{-6} - 10^{-8}$ год$^{-1}$.

Подальший розвиток елементів автоматики і обчислювальної техніки буде спрямований шляхом підвищення ступеня інтеграції в ІМС, використання оптичних елементів, а також впровадження нових типів друкованих плат, у тому числі багатошарових плат, контактних з'єднань тощо.

При проектуванні ТЗ необхідно особливу увагу приділяти підбору стандартизованих і уніфікованих елементів, використання яких значно підвищує надійність, тому що ці елементи відпрацьовані найкращим чином в схемному, конструктивному і технологічному відношенні.

Другим шляхом підвищення надійності є ***забезпечення оптимальних режимів роботи елементів*** і, насамперед, електричних режимів. Досвід експлуатації елементів показує, що оптимальне значення коефіцієнта навантаження, при яких інтенсивність раптових відмов найменша, знаходиться в межах 0,2 – 0,4. Крім того, встановлено, що при цих же значеннях коефіцієнта навантаження параметри елементів повільніше відхиляються від номінальних значень. При цьому велике значення має вибір коефіцієнта навантаження за тепловим, механічним і радіаційним режимом. Зазначені режими значною мірою залежать від конструкції пристроїв, а також від прийнятих технічних рішень. Природно, що це повинно враховуватися в процесі проектування.

Одним з найбільш ефективних засобів підвищення надійності є **резервування**, тобто введення надлишку. Досвід використання різних методів резервування в ТЗ показує, що постійне резервування може використовуватися до окремих елементів або схем. Для складних ТЗ звичайно застосовується резервування заміщенням, що також використовується і для окремих пристроїв. Часто, наприклад, у системах автоматичного управління використовуються *мажоритарне резервування* і *самокоригувальні коди*.

Тимчасове резервування широко використовується в засобах обчислювальної техніки. Його конкретна реалізація, наприклад, здійснюється способом подвійного – потрійного підрахунку. Наприклад, певна задача розв’язується двічі, і порівнюються отримані результати. Збіг результатів означає, що відмова і збої відсутні і можна переходити до розв’язання наступних задач. У випадку розбіжності результатів, що означає відмову або збій у роботі пристрою, потрібно розв’язання повторити.

Тимчасове резервування використовується також при тестовому контролі, тобто періодичному розв’язанні спеціальних задач з відомими відповідями. Очевидно, що в цьому випадку на підставі порівняння отриманого результату з відомим можна судити про роботоздатність пристрою. Причому, чим більше часу виділяється на тестовий контроль і чим частіше він проводиться, тим з більшою вірогідністю можна судити про роботоздатність контрольованого пристрою.

Одним із спеціальних методів підвищення надійності є використання *самонастроюваних і самоорганізуючих систем*.

Особливо важливим є принцип самоорганізації. Для його реалізації створюються, наприклад, такі системи автоматичного керування, що здатні змінювати свою структуру в процесі функціонування.

Як уже згадувалось, ефективним методом підвищення надійності є *відновлення несправних ТЗ*. Тут основним питанням є виявлення факту відмови і пошук елементів, що відмовили. Така задача може бути вирішена за допомогою діагностування ТЗ, наприклад, при використанні автоматизованих систем контролю, де як основна центральна ланка застосовується ЕОМ, що забезпечує перевірку великого числа контрольних точок протягом невеликого проміжку часу.

Свої особливості при цьому має діагностування засобів обчислювальної техніки. Тут широке застосування знаходять методи *діагностування*, засновані на використанні різних логічних співвідношень, інформаційного та алгоритмічного резерву.

В даний час у засобах обчислювальної техніки все ширше використовується *сигнатурний аналіз*, що заснований на стиску інформації і поданні її масивів у вигляді їхніх спеціальних образів – **сигнатур**.

Аналіз сигнатур при обробці різних масивів інформації дозволяє зробити висновки про працездатність засобів.

Крім того, час відновлення значно скорочується за рахунок забезпечення доступності всіх вузлів ТЗ для огляду, тобто визначається ремонтопридатність розроблювальних конструкцій.

Зокрема, наприклад, у *засобах обчислювальної техніки* прийнято *чотири конструктивних рівні:*

- ІМС і радіоелементи;
- типові елементи заміни (ТЕЗ), що являють собою друковані плати з розміщеними на них ІМС;
- рами, у яких розміщаються ТЕЗ;
- шафи, у яких кріпляться рами.

При такій конструкції засобів заміна елементів, що відмовили, здійснюється шляхом заміни ТЕЗ, а несправні ТЕЗ надходять у ремонт.

Велике значення для забезпечення надійності, як уже неодноразово згадувалося, має *якість виготовлення ТЗ*, що визначається технологічною дисципліною, організацією контролю на всіх стадіях проектування, виробництва, проведення випробувань та якістю комплектуючих і матеріалів. Тут також має велике значення якість експлуатації, прийнята система технічного обслуговування, підготовленість обслуговуючого персоналу і ряд інших факторів.

Аналіз надійності ТЗ показує, що приблизно 40–45% усіх відмов виникає в апаратурі через помилки на етапі проектування, 20% – від помилок, допущених при виробництві, 30% – від неправильної експлуатації, 5–10% – від природного зносу і старіння.

Таким чином, як видно з викладеного матеріалу, існує досить велика кількість напрямків підвищення надійності ТЗ і їхніх складових частин.

Однак із усіх перерахованих вище напрямків і шляхів необхідно підкреслити важливість, а також певну специфіку методів резервування, які розглянемо більш детально.

5.2 Основні поняття, визначення і класифікація методів резервованих ТЗ

Резервуванням (redundancy) називають метод підвищення надійності ТЗ за рахунок введення надлишку. Під *надлишком* розуміють додаткові засоби і можливості окрім мінімально необхідних для виконання ТЗ заданих функцій. Таким чином, задачею введення надлишку є забезпечення нормального функціонування ТЗ після виникнення відмов у її елементах.

Відповідно до ГОСТ 13377-75 розрізняють *три основних види резервування:*

- структурне;
- інформаційне;
- тимчасове.

Структурне резервування (або апаратне) (structural redundancy) передбачає використання надлишкових елементів ТЗ. Суть такого виду резервування полягає в тому, що в мінімально необхідний варіант ТЗ, елементи якого називають основними, вводяться додаткові елементи, вузли, пристрої або навіть замість одного ТЗ передбачається використання декількох ідентичних ТЗ. При цьому надлишкові резервні структурні елементи, вузли, пристрої тощо, призначені для виконання робочих функцій при відмові відповідних основних елементів, вузлів і пристроїв.

Інформаційне резервування (information redundancy) передбачає використання надлишкової інформації. Найпростішим прикладом реалізації такого виду резервування є багаторазова передача одного й того ж повідомлення по каналу зв'язку. Як інший приклад можна навести використання спеціальних кодів, що виявляли до виправлення помилки, (коди з повторенням і інверсією, циклічний код, код Хеммінга і т. ін.), які з'являються в результаті збоїв і відмов апаратури. Тут варто відмітити, що використання інформаційного резервування спричиняє також необхідність введення надлишкових елементів.

Тимчасове резервування (temporal redundancy) передбачає використання надлишкового (резервного) часу для відновлення технічних характеристик. У випадку застосування цього виду резервування передбачається можливість поновлення функціонування ТЗ після того, як воно було перервано в результаті відмови, шляхом його відновлення. При цьому також передбачається, що на виконання ТЗ необхідної роботи приділяється час, свідомо більший мінімально необхідного.

Перераховані види резервування можуть бути застосовані або до ТЗ у цілому, або до окремих їхніх елементів чи до груп таких елементів. У першому випадку резервування називається *загальним*, у другому – *роздільним*.

Найбільш широкого поширення в даний час одержало *структурне резервування*. ТЗ із використанням цього виду резервування можуть класифікуватися за різними ознаках, основними з яких є:

- реакція ТЗ на появу відмови;
- режим роботи резервних елементів;
- вигляд схеми резервування;
- спосіб включення резервних елементів;
- ступінь надмірності тощо.

У першу чергу різні резервовані ТЗ відрізняються один від одного реакцією на появу відмов, тобто своїми ***«динамічними» властивостями***. З цього погляду розрізняють *два методи резервування*: *активне і пасивне*.

У першому випадку структура ТЗ така, що з появою відмови вона перебудовується і відбувається відновлення роботоздатності, тобто відбувається ніби «саморемонт» ТЗ. При цьому ТЗ активно реагує на появу відмови. Звідси і назва методу резервування.

При пасивному резервуванні ТЗ відмова одного або навіть декількох елементів не впливає на його роботу. Елементи з'єднані постійно і перебудова структури не відбувається. ТЗ ніби пасивно чинить опір появі відмов елементів.

Як при активному, так і при пасивному методах резервування велике значення мають *режими роботи резерву*. Однак, якщо в першому випадку для розрахунку важливо знати навантаження на резервні елементи до появи відмови, то в другому випадку – після появи відмови.

За цією класифікаційною ознакою для активного резервування розрізняють *навантажений, полегшений і ненавантажений резерви*.

Навантажений резерв (loaded reserve) – резервний елемент знаходиться в тому ж режимі, що й основний. При цьому приймається, що характеристики надійності резервних елементів у період їхнього перебування як резервних і в період їхнього використання замість основних після відмови останніх залишаються незмінними.

Полегшений резерв (reduced reserve) – резервний елемент знаходиться в менш навантаженому режимі, ніж основний. При цьому приймається, що характеристики надійності резервних елементів у період їхнього перебування як резервних вища, ніж у період їхнього використання замість основних після їх відмови.

Ненавантажений резерв (unloaded reserve) – резервний елемент практично не несе навантаження до початку виконання ним функцій основного елемента. При цьому приймається, що такий резервний елемент, знаходячись у резерві, відмовляти не повинен, тобто має в цей період «ідеальну» надійність. У період же використання резервного елемента замість основного після відмови останнього надійність резервного елемента стає рівною надійності основного.

При відмові хоча б одного із елементів ТЗ з пасивним резервуванням може змінюватися навантаження, що сприймається елементами, які залишились роботоздатними. Саме тому, у ТЗ із пасивним резервуванням велике значення мають умови роботи елементів після появи відмови, тобто стабільність навантаження на елементи, що залишилися роботоздатними. За цією ознакою розрізняють *три види ТЗ із пасивним резервуванням:*

- *з незмінним навантаженням* (при відмові одного або декількох елементів не змінюється навантаження на елементи, що залишилися роботоздатними);
- *з перерозподілом навантаження* (при відмові хоча б одного елемента змінюється, як правило в бік збільшення, навантаження на елементи, які залишились роботоздатними);
- *з навантажуваним резервуванням* (резервуванням за навантаженням), у яких при відмові хоча б одного елемента технічний засіб виходить з ладу, але інтенсивність відмов елементів зменшена за рахунок того, що навантаження, яке повинен сприймати один елемент, сприймається декількома елементами.

При пасивному резервуванні найбільший виграш у надійності досягається в ТЗ із незмінним навантаженням, найменший – з резервуванням за навантаженням. Тут варто підкреслити, що в ТЗ з активним резервуванням відбувається порушення роботи об'єкта на час з моменту відмови основного елемента до моменту включення резервного. Таким чином, якщо така перерва в роботі ТЗ принципово неприпустима, то метод пасивного резервування є єдино можливим. І це один із найбільш суттєвих моментів, на який розроблювач ТЗ повинен звернути свою увагу при виборі між активним і пасивним методами резервування.

Обидва розглянутих вище методи реалізуються за *різними схемами резервування.* Принципового розходження між видами схем резерву немає.

Однак при цьому все-таки розрізняють резервування *загальне, автономне, окреме, одиничне, внутрішньоелементне, ковзаюче та з вибірковими схемами*.

Загальне резервування (whole system redundancy) полягає в резервуванні ТЗ в цілому і, завдяки своїй простоті, цей спосіб є найбільш відомим (рис. 5.1, а).

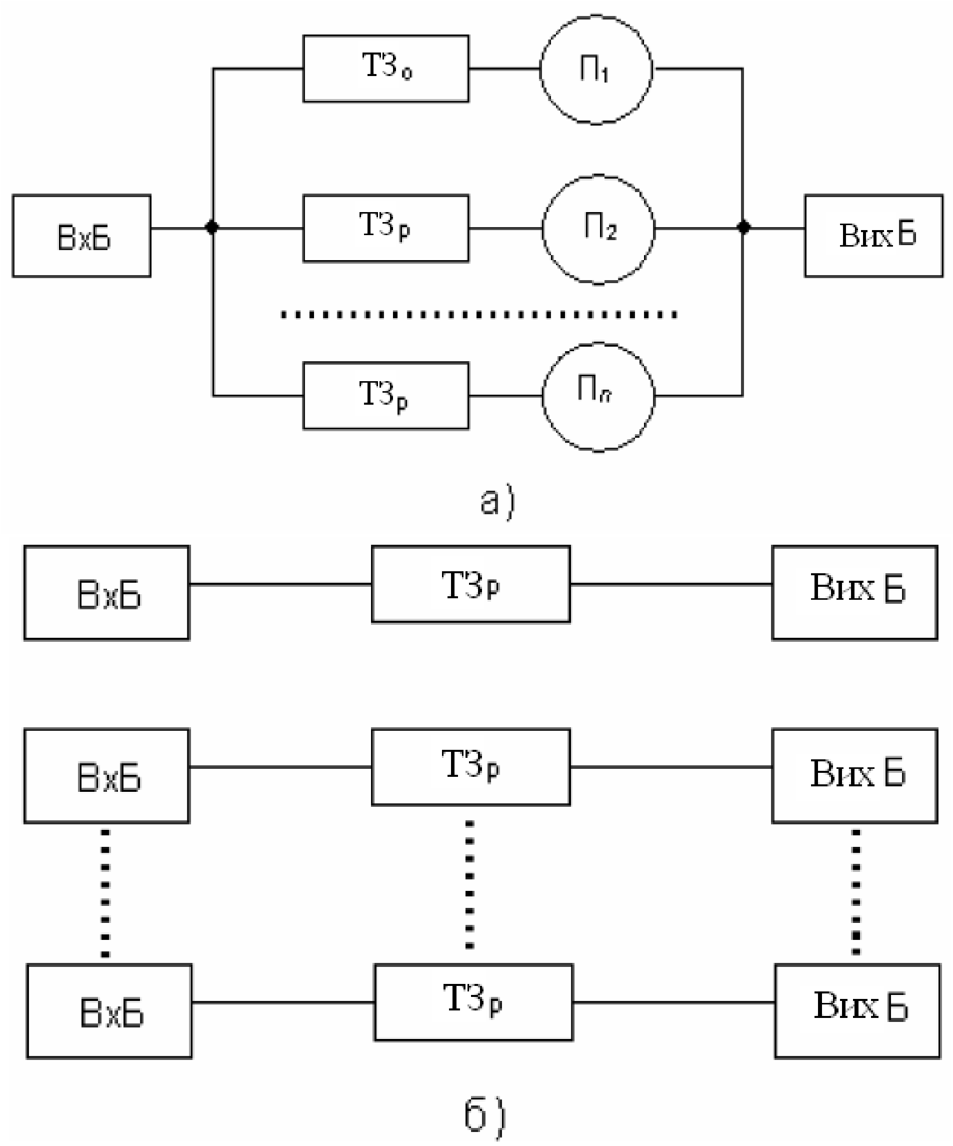


Рисунок 5.1 – Структури загального резервування: а) – схема загального активного резервування; б) – схема автономного резервування; ВхБ – вхідний блок; $ТЗ_0$ **– основні ТЗ;** $ТЗ_р$ **– резервні ТЗ;** $П_n$ **– перемикачі; ВихБ – вихідний блок**

Автономне резервування (standalone redundancy) – один з варіантів загального. Воно полягає в застосуванні декількох незалежних об'єктів, що виконують одну й ту ж саму задачу. Кожний з цих об'єктів має свій вхід і вихід і, звичайно, незалежні джерела живлення. Прикладом об'єктів з автономним резервуванням може служити сукупність засобів вимірювання, що виконують ті самі вимірювання, при цьому кожен засіб має свої вхідні датчики, перетворювачі та джерела живлення. Автономне резервування, як правило, застосовується при проведенні відповідальних експериментів у системах відповідального призначення. При цьому автономне резервування (див. рис. 5.1, б) завжди є пасивним.

Роздільне резервування (segregated redundancy) полягає в резервуванні ТЗ за окремими елементами або їхніми групами (ділянками). ТЗ з активним загальним резервуванням можна вважати частковим випадком ТЗ із окремими резервуванням при одній ділянці резервування.

Одиничне резервування (single redundancy) полягає в заміні елементів ТЗ елементарними резервованими схемами (звичайно пасивними). У складних ТЗ дуже важко знайти раціональну схему окремого резервування. Крім того, схеми резервування різних ТЗ щоразу доводиться проектувати знову, що вимагає іноді досить значних матеріальних затрат і часу. Тому одиничне резервування, при якому найпростіші схеми резерву типових елементів можуть виконуватися у вигляді готових блоків (комірок), часто виявляється зручним через простоту побудови складних резервованих ТЗ. При одиничному резервуванні не потрібно складати спеціальних схем, а можна просто ставити на місце кожного елемента у функціональній схемі ТЗ його аналог – типову резервовану комірку.

Внутрішньоелементне резервування (inside the element redundancy) полягає в резервуванні внутрішніх зв'язків елемента. Якщо при одиничному резервуванні використовуються схеми з існуючих елементів (комірок), то застосування внутрішньоелементного резервування пов'язано із зміною конструкції елемента. Прикладом використання внутрішньоелементного резервування може служити так званий *релер* - резервоване реле.

Змінне резервування (variables redundancy) застосовується в ТЗ із великою кількістю однакових елементів. Воно полягає в тому, що використовується невелике число резервних елементів, що можуть підключатися замість будь-якого з несправних елементів основного ТЗ.

При **резервуванні з вибірковою схемою (redundancy of sampling scheme)** порівнюються сигнали на виході непарного числа паралельно працюючих засобів і в зовнішнє коло видається сигнал, наявний на виході більшості засобів. Вибіркові схеми застосовуються в тих випадках, коли важко установити, відмовили чи ні окремі засоби.

За способом включення резервних елементів усі розглянуті вище схеми резервування поділяються на *схеми з постійно включеним резервом (постійне резервування) і схеми резервування заміщенням*.

Постійне резервування (continuous redundancy) – це таке резервування, при якому резервні елементи беруть участь у функціонуванні ТЗ нарівні з основними. При цьому основні і резервні елементи можуть мати загальний вхід і загальний вихід, зокрема, гальванічний зв'язок за входом і виходом, а можуть бути і автономними, тобто не мати такого зв'язку. При постійному резервуванні у випадку відмови основного елемента не потрібно спеціальних перемикальних пристроїв, що вводять у дію резервний елемент, оскільки він вводиться в дію одночасно з основним.

Резервування заміщенням (standby redundancy) – це таке резервування, при якому функції основного елемента передаються резервному тільки після відмови основного. При використанні цього виду резервування необхідні контролювальні і перемикальні пристрої для виявлення факту відмови основного елемента та переключення з основного на резервний.

Ще однією класифікаційною ознакою резервованих ТЗ є *ступінь надмірності*, що *характеризується кратністю резервування.*

Кратність резервування (redundancy ratio) – це відношення кількості резервних елементів до кількості резервованих або основних елементів ТЗ. Розрізняють *резервування з цілою і дробовою кратністю*. Резервування з цілою кратністю має місце, коли один основний елемент резервується одним і більше резервними елементами. Резервування з дробовою кратністю має місце, коли два і більше однотипних елементи резервуються одним і більше резервними елементами. Найбільш розповсюдженим варіантом резервування з дробовою кратністю є такий, коли кількість основних елементів перевищує кількість резервних. Резервування, кратність якого дорівнює одиниці, називається **дублюванням (duplication).**

Слід зазначити, що надійність ТЗ значною мірою визначається застосуванням резервування з відновленням або без нього. Резервування, при якому роботоздатність будь-якого основного і резервного елементів ТЗ у випадку виникнення відмов підлягає відновленню в процесі експлуатації засобу, називається резервуванням з відновленням. У іншому випадку має місце резервування без відновлення.

5.3 Розрахунок надійності ТЗ при структурному резервуванні

5.3.1 Загальні положення

Як відомо, при проектуванні ТЗ розроблювач реалізує в апаратурі можливість виконання проектовного засобу набору функцій, передбачених технічним завданням. При цьому очевидно, що реалізація цих функцій обмежена значеннями основних критеріїв (точність, продуктивність, надійність, вартість і т.д., закладених у технічному завданні). Таким чином, на кожному етапі проектування ТЗ необхідний розрахунок значень цих критеріїв на предмет їхньої відповідності заданим значенням у технічному завданні.

Зокрема, для розрахунку надійності проектовних ТЗ при використанні структурного резервування як правило складається *розрахунково-логічна схема резервованого засобу*. У більшості випадків елементи ТЗ у цій схемі мають паралельно-послідовне з'єднання. В колі послідовно з'єднаних елементів відмова хоча б одного з них призводить до виходу з ладу всього кола. У резервованій групі паралельно з'єднаних елементів допускається вихід з ладу певного числа елементів (залежно від кратності резервування) без порушення функціонування групи в цілому. Прикладом розрахунково-логічної схеми можуть служити структури, що зображені на рис. 5.1.

Перед тим як переходити до розгляду методів розрахунку показників надійності (ПН) ТЗ із структурним резервуванням необхідно зробити *ряд зауважень*.

1. Розрахунок надійності для схем загального резервування (див. рис. 5.1, а) можна здійснювати за розрахунково-логічною схемою одного резервованого елемента шляхом заміни послідовно з'єднаних елементів (блоків, засобів, вузлів) еквівалентними елементами, ПН яких знаходяться за відомими формулами:

$$P(t) = \prod_{i=1}^{K} P_i(t), \tag{5.1}$$

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i(t), \tag{5.2}$$

де $P_i(t)$, $\lambda_i(t)$ – відповідно, ймовірність безвідмовної роботи та інтенсивність відмов і-го елемента;

K – кількість послідовно з'єднаних елементів.

2. Для одержання ПН ТЗ в цілому при роздільному резервуванні досить визначити показники надійності резервованого елемента (блока, засобу, вузла). У цьому випадку ПН усього ТЗ одержують шляхом застосування розрахункових формул для основного з'єднання, у якому як елементи виступають резервовані групи елементів.

3. Надалі багато розрахункових формул будуть отримані в припущенні, що випадковий час до відмови елемента розподілено за експоненційним законом. Необхідно підкреслити, що це припущення багаторазово підтверджувалося експериментальним шляхом у апаратурі автоматики, побудованої на елементах електроніки і електротехніки. У тих же випадках, коли фактичний розподіл часу до відмови відрізняється від експоненційного закону, його використання дає звичайно занижені оцінки, тобто нижні границі надійності апаратури.

4. Надійність резервованих ТЗ, особливо відновлюваних, значною мірою залежить від надійності апаратури вбудованого контролю. Дійсно, апаратура контролю призначена для визначення факту відмови основної

апаратури і видачі команди пристроєві переключення на перехід до резервної апаратури. Крім того, апаратура контролю служить також для локалізації місця несправності. При розрахунках надійності резервування ТЗ надійність апаратури вбудованого контролю може бути приблизно врахована шляхом включення в розрахунково-логічну схему послідовно з резервованою групою елемента, що відповідає апаратурі вбудованого контролю.

5.3.2 Загальне резервування з постійно включеним резервом і цілою кратністю

Розрахунково-логічна схема для постійного включення резерву зображена на рис. 5.2. На рис. 5.2 основне коло складається з n елементів – $O_1, O_2, ... O_n$. Кожне з m резервованих кіл містить у собі також n елементів $P_1, P_2, ... P_n$. Для простоти міркувань будемо вважати, що основне і резервні кола мають однакову надійність. Кратність такої схеми резервування дорівнює m, U. Отже, дана схема відповідає випадку, коли відмова ТЗ настає при відмові усіх (m+1) кіл як основних, так і резервних. Будемо вважати також, що основне і резервне кола вмикаються в роботу одночасно (навантажений резерв), але використовується лише одне коло – основне. При відмові основного кола його функції без усякої перерви починає виконувати одне з резервних.

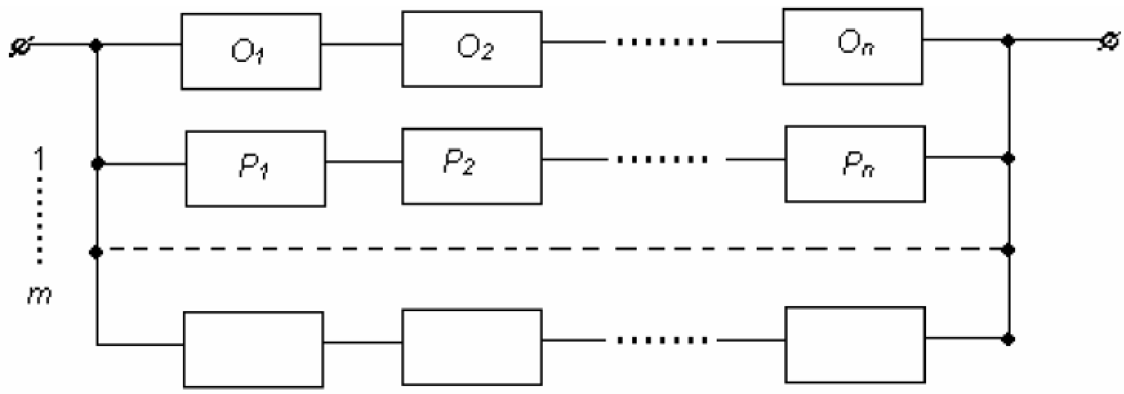


Рисунок 5.2 – Загальне резервування з постійно включеним резервом

У цьому випадку ймовірність безвідмовної роботи резервованого ТЗ буде визначатися за такою формулою

$$P_{ТЗ}(t) = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t)\right]^{m+1}, \qquad (5.3)$$

де $P_i(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи i-го елемента протягом часу t;
n – число елементів основного або будь-якого резервного кола;
m – кратність резервування.

Якщо час до відмови кожного кола резервованого ТЗ розподілено за експоненційним законом, то в цьому випадку маємо для ймовірності безвідмовної роботи таке рівняння

$$P_{ТЗ}(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^{m+1}. \tag{5.4}$$

Середнє напрацювання до відмови для експоненційного розподілу буде дорівнювати

$$\bar{T}_{ТÇ} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1} = T_{cð_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}, \tag{5.5}$$

де $\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ – інтенсивність відмов основного кола або кожного з резервних;

$\bar{T}_{cð_0}$ – середнє напрацювання до відмови основного кола або кожного з резервних.

Приклад 5.1. ТЗ має кратність загального резервування m = 5. Основне коло нерезервованої частини містить чотири рівнонадійних елемента з послідовним з'єднанням. Інтенсивність відмов одного елемента $\lambda = 0,2\cdot 10^{-3}\text{ãî ä}^{-1}$. Визначити характеристики надійності ТЗ за 1000 год.

Розв'язування:

Визначимо інтенсивність відмов основного кола по формулі

$$\lambda_o = n\cdot\lambda = 4\lambda = 4\cdot 0,2\cdot 10^{-3} = 0,8\cdot 10^{-3}(\text{ãî ä}^{-1}).$$

Ймовірність безвідмовної роботи ТЗ визначимо по формулі

$$P_{ÒÇ}(t) = 1-(1-e^{-\lambda_o t})^{m+1} = 1-(1-e^{-0,6})^{6} = 0,972.$$

Середнє напрацювання до відмови і інтенсивність відмов ТЗ відповідно будуть

$$\bar{T}_{ТÇ} = \frac{1}{\lambda_o}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1} = \frac{1}{0,8\cdot 10^{-3}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) = 3062(\text{ãî ä.}),$$

$$\lambda_{ÒÇ}(t) = \frac{\lambda_o\left(m+1\right)e^{-\lambda_o t}\left(1-e^{-\lambda_o t}\right)^{m}}{1-\left(1-e^{-\lambda_o t}\right)^{m+1}} = \frac{0,8\cdot 10^{-3}\cdot 6e^{-0,8}(1-e^{-0,8})^{5}}{1-(1-e^{-0,8})^{6}} = 0,11\cdot 10^{-3}(\text{ãî ä}^{-1}).$$

Приклад 5.2. Система з трьох послідовних пристроїв з інтенсивностями відмов $\lambda_1 = 5\cdot 10^{-2}$ год$^{-1}$, $\lambda_2 = 12\cdot 10^{-2}$ год$^{-1}$, $\lambda_3 = 16\cdot 10^{-2}$ год$^{-1}$ отримала таку ж постійно ввімкнуту резервну. У скільки разів підвищилася надійність системи в результаті резервування. Прийняти експоненціальний закон розподілу.

Розв'язування:

При експоненціальному законі розподілу вираз для ймовірності безвідмовної роботи елемента і системи аналогічний:

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t}.$$

При послідовному з’єднанні

$$P_{\text{пос}}(t)=\prod P_i(t)=\prod e^{-\lambda_i t}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)\cdot t}=e^{-\lambda_{\text{пос}} t},$$

$$\lambda_{\text{пос}}=\sum \lambda_i=0,05+0,12+0,16=0,33(\text{год}^{-1}).$$

Оскільки t = 1

$$P_{\text{пос}}(t)=e^{-\lambda_{\text{пос}}}=e^{-0,33}=0,7189.$$

Для паралельного з’єднання

$$P_{\text{Д}}(t)=1-(1-P_{\text{пос}}(t))^2=0,921,$$

$$k = P_{\text{Д}}(t) / P_{\text{пос}}(t) = 0,921 / 0,7189 = 1,28.$$

5.3.3 Роздільне резервування з постійно включеним резервом і цілою кратністю

Розрахунково-логічна схема для такого типу резервування зображена на рис. 5.3.

При роздільному резервуванні кожен елемент основного кола $О_з$ має свої резервні елементи $Р_з$ і відповідно свою кратність резервування m_i (рис. 5.3). В окремому випадку кратність резервування може бути й однаковою для всіх основних елементів. Отже, при розрахунку надійності таких резервованих ТЗ у випадку навантаженого резерву можна використовувати формули (5.3) - (5.5) для елементів основного кола, а потім, використовуючи вирази (5.1), визначати ПН ТЗ в цілому.

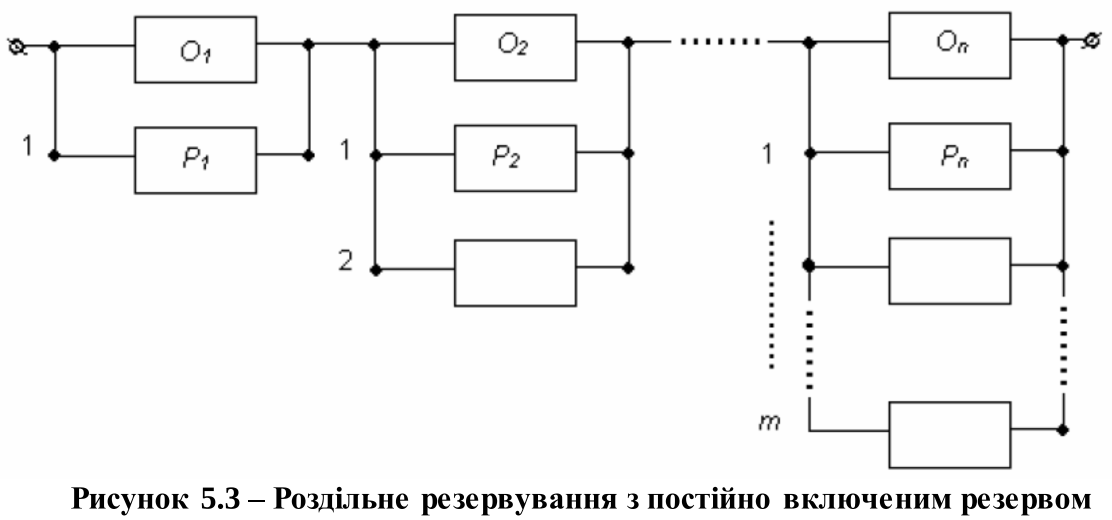


Рисунок 5.3 – Роздільне резервування з постійно включеним резервом

Враховуючи викладене, ймовірність безвідмовної роботи ТЗ із окремим резервуванням буде визначатися за формулою

$$P_{\text{ТЗ}}(t)=\prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(1-P_i(t)\right)^{m_i+1}\right]. \qquad (5.6)$$

При експоненційному розподілі ймовірність безвідмовної роботи буде дорівнювати

$$P_{ТЗ}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\left(1-e^{-\lambda_0 t}\right)^{m_i+1}\right). \qquad (5.7)$$

В окремому випадку при однаковій надійності основних і резервних елементів, а також однакової кратності резервування отримаємо

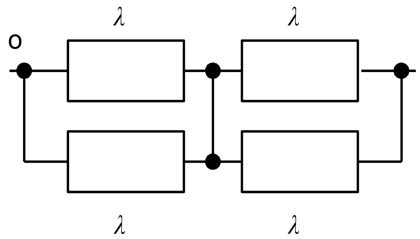
$$P_{ТЗ}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\left(1-e^{-\lambda_0 t}\right)^{m_i+1}\right)^{n}. \qquad (5.8)$$

Середнє напрацювання до відмови при цьому буде визначатися за формулою

$$\bar{T}_{тз} = \int_0^{\infty} P_{тз}(t)dt = \frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{v_i(v_i+1)\ldots(v_i+n-1)}, \qquad (5.9)$$

де $v_i = \dfrac{i+1}{m+1}$.

Приклад 5.3. Схема ТЗ наведена на рисунку:



Передбачається, що наслідок відмов відсутній і всі елементи розрахунку рівнонадійні. Інтенсивність відмов елементів $\lambda = 1{,}35\cdot 10^{-3}\,год^{-1}$. Потрібно визначити середнє напрацювання до відмови резервованого ТЗ.

Розв'язування:

У даному випадку має місце роздільне резервування рівнонадійних пристроїв з постійно включеним резервом. Число елементів нерезервованого ТЗ $n = 2$, кратність резервування $m = 1$. Для обчислення середнього напрацювання до відмови скористаємося формулою:

$$\bar{T}_{тз} = \frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{v_i(v_i+1)\ldots(v_i+n-1)} = \frac{1}{2\lambda}\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{\nu_i(\nu_i+1)}.$$

Так як

$$v_i = \frac{i+1}{m+1} = \frac{i+1}{2},$$

то $\nu_0 = \dfrac{1}{2}$, $\nu_1 = 1$.

Тоді
$$\bar{T}_{тз} = \frac{1}{2\lambda}\left[\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right] = \frac{11}{12\lambda} = \frac{11}{12\cdot 1{,}35\cdot 10^{-3}} = 680(год.).$$

5.3.4 Загальне і роздільне резервування заміщенням з цілою кратністю

При резервуванні заміщенням у випадку відмови основного кола (або елемента) вручну або автоматично за допомогою спеціального перемикача в схему ТЗ включаються резервні кола (або елементи). Відмова резервованого ТЗ при цьому настає після відмови останнього резервного кола (або елемента). Якщо припустити наявність «ідеального» («абсолютно надійного») перемикача, то розрахунок ймовірності безвідмовної роботи ТЗ можна виконати за такою рекурентною формулою

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + \int_0^t P(t-T)a_m(T)dt, \qquad (5.10)$$

де $P_{m+1}(t), P_m(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи резервованого ТЗ кратності *(m+1)* і *m*, відповідно;

$P(t-T)$ – ймовірність безвідмовної роботи основного кола (або елемента) ТЗ протягом часу $(t-T)$;

$a_m(T)$ – частота відмов резервованого ТЗ кратності *m* у момент часу Т.

Рекурентна формула (5.10) дозволяє одержувати розрахункові співвідношення для ТЗ будь-якої кратності резервування. При цьому для отримання формул розрахунку надійності необхідно виконати інтегрування в правій частині рівняння (5.10), підставивши замість $P(t-T)$ і $a_m(t)$ їхні значення відповідно до вибраного закону розподілу та станом резерву.

Розрахунково-логічні схеми загального і роздільного резервування заміщенням представлені, відповідно, на рис. 5.4, а та б.

При загальному резервуванні заміщенням і навантаженим резервом (рис. 5.4, а) для підрахунку $P_{ТЗ}(t)$ і $T_{ТЗ_{ср}}$ як правило використовують вирази (5.3) - (5.5).

При ненавантаженому резерві й експоненційному законі розподілу часу безвідмовної роботи ймовірність $P_{ТЗ}(t)$ і середнє напрацювання $T_{ТЗ_{ср}}$ визначаються за такими виразами:

$$P_{ТÇ}(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}, \qquad (5.11)$$

$$T_{ТЗ_{ср}} = T_{ср_0}(m+1), \qquad (5.12)$$

де $\lambda_0, T_{ср0}$ – інтенсивність відмови і середнє напрацювання до відмови основного кола ТЗ.

При полегшеному резерві й експоненційному розподілі відповідно маємо:

$$P_{ТЗ}(t) = e^{-\lambda_0 t}\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!}(1-e^{-\lambda_i t})^i\right], \qquad (5.13)$$

$$T_{\text{ТЗ ср}} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{1+iK}, \qquad (5.14)$$

де $a_i = \prod_{j=0}^{i=1}(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1})$;

$K = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$;

λ_1 – інтенсивність відмов резервного кола до заміщення.

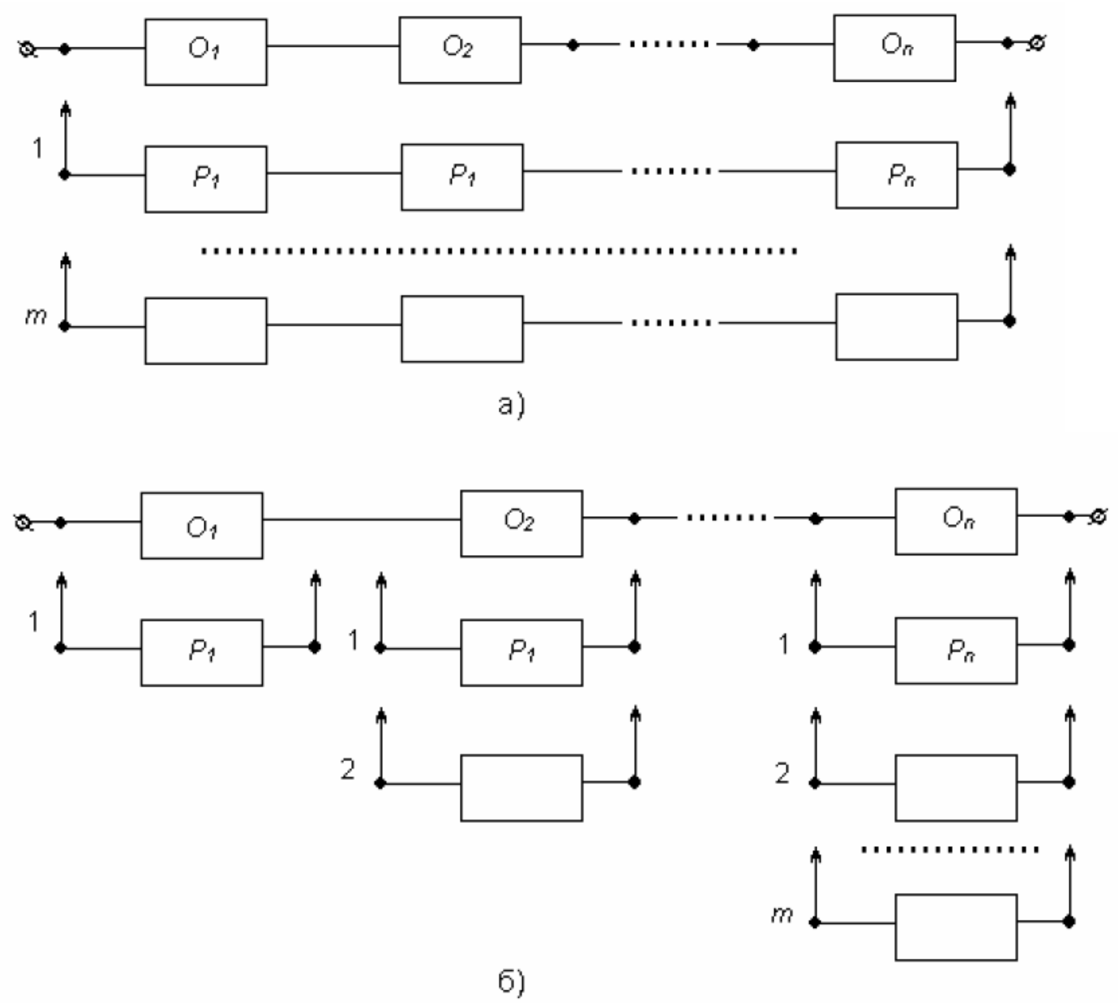


Рисунок 5.4 – Резервування заміщенням: а) – загальне; б) – роздільне

Приклад 5.4. Блок ТЗ має інтенсивність відмов $\lambda_0 = 0,4 \cdot 10^{-3}\,\text{год}^{-1}$. Його дублює такий же блок, що знаходиться до відмови основного блока в режимі очікування (у режимі полегшеного резерву). У цьому режимі інтенсивність відмов блока $\lambda_1 = 0,06 \cdot 10^{-3}\,\text{год}^{-1}$. Потрібно обчислити ймовірність безвідмовної роботи ТЗ протягом часу t = 100 год., а також середній час безвідмовної роботи $T_{\text{ТЗср}}$.

Розв'язування:

У даному випадку кратність резервування m=1. Використовуючи формулу (5.13), отримаємо

$$P_{TÇ}(t)=e^{-\lambda_0 t}\left[1+\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{i!}(1-e^{-\lambda_i t})^i\right]=e^{-\lambda_0 t}\left[1+a_1(1-e^{-\lambda_1 t})\right];$$

$$a_i=\prod_{j=0}^{i=1}\left(j+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right);\quad a_1=\prod_{j=0}^{0}\left(j+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)=\frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Тоді

$$P_{TÇ}(t)=e^{-\lambda_0 t}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}\right).$$

Після підстановки

$$P_{TÇ}(100)=e^{-0,4\cdot 10^{-3}\cdot 100}\left(1+\frac{0,4\cdot 10^{-3}}{0,06\cdot 10^{-3}}-\frac{0,4\cdot 10^{-3}}{0,06\cdot 10^{-3}}e^{-0,06\cdot 10^{-3}\cdot 100}\right)=$$

$$=e^{-0,04}\left(1+\frac{40}{6}-\frac{40}{6}e^{-0,006}\right)\approx 0,96\ 1+6,67-6,67(1-0,006)\ \approx 0,998.$$

Визначаємо $T_{TÇñð}$ за формулою (5.14). Отримаємо

$$T_{TÇñð}=\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{1+i\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}=\frac{1}{\lambda_0}\left(1+\frac{1}{1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}\right)=\frac{1}{\lambda_0}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}\right)=$$

$$=\frac{1}{0,4\cdot 10^{-3}}\left(1+\frac{0,4\cdot 10^{-3}}{0,46\cdot 10^{-3}}\right)=4668(\text{ãî ä.}).$$

У випадку окремого резервування заміщенням (див. рис. 5.4, б), як уже було сказано, кожен елемент основного кола $O_1, O_2, \ldots O_n$ має свої резервні елементи P_i і відповідно свою контактність резервування m_i, що в окремому випадку може бути й однаковою для всіх основних елементів. Отже, поєднуючи в окрему групу кожен елемент основного кола разом з своїми резервними елементами, ми отримуємо послідовне з'єднання окремих резервованих груп, що в сукупності і складають резервований ТЗ в цілому. Таким чином, розрахунок надійності кожної резервованої групи елементів можна зробити за відомими формулами загального резервування заміщенням:

- для розрахунку навантаженого резерву використовуються формули (5.3) - (5.5);
- для розрахунку ненавантаженого резерву – (5.11) та (5.12);
- для розрахунку полегшеного резерву – (5.13) та (5.14).

Для визначення ПН резервованих ТЗ в цілому розрахунок ведеться в подальшому за відомими формулами для послідовного з'єднання елементів (5.1). Звідси ймовірність безвідмовної роботи ТЗ із окремим резервуванням заміщенням може бути визначена за виразом

$$P_{ТЗ}(t)=\prod_{i=1}^{n}P_{ri}(t), \tag{5.15}$$

де $P_{ri}(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи груп, резервованих за способом заміщення елементів основного кола ТЗ i-го типу. $P_{ri}(t)$ розраховується за формулами (5.3) - (5.5) та (5.11) - (5.14).

Усі наведені вище розрахункові співвідношення були отримані, як вказувалося, для випадку «ідеального» перемикача. На практиці всі *перемикачі* безумовно *мають відмови*, при чому, будь-якого характеру. Серед них слід відзначити:

а) неспрацювання при відмові основної апаратури, у результаті чого резервний елемент не буде включений замість відмовившого основного, що призведе до відмови резервної групи;

б) помилкове спрацьовування, у результаті чого відбудеться переключення на резерв при справній основній апаратурі, що призведе до зменшення часу відмови групи в цілому;

в) відмови, що виводять з ладу резервну групу в цілому.

Ймовірність безвідмовної роботи резервної групи з урахуванням ненадійності перемикача і при зазначених вище припущеннях може бути визначена за такою формулою

$$P_{РГ}(t)=\left\{1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-P_i(t)\cdot P_{iП}(t)\right]\right\}P_{ВП}(t), \tag{5.16}$$

де $P_i(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи основного або резервного елемента;

$P_{iП}(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи сукупності елементів перемикача, що здійснюють включення i-го кола резервної групи;

$P_{ВП}(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи сукупності елементів перемикача, відмова яких призводить до відмови резервної групи в цілому.

5.3.5 Резервування з дробовою кратністю

Розрахунково-логічна схема одного з варіантів загального резервування з постійно включеним резервом і дробовою кратністю наведена на рис. 5.5.

У розглянутій схемі використовується *n* основних і *(l–n)* резервних елементів (*l* – загальна кількість основних і резервних елементів).

При цьому *(l–n)>n* і, отже, ми маємо дробову кратність резервування *m=(l–n)/n*.

На основі раніше наведених для інших видів резервування міркувань можна одержати вираз для ймовірності безвідмовної роботи і середнього напрацювання до відмови для розглянутого випадку загального резервування ТЗ із дробовою кратністю і постійно включеним резервом при експоненційному розподілі:

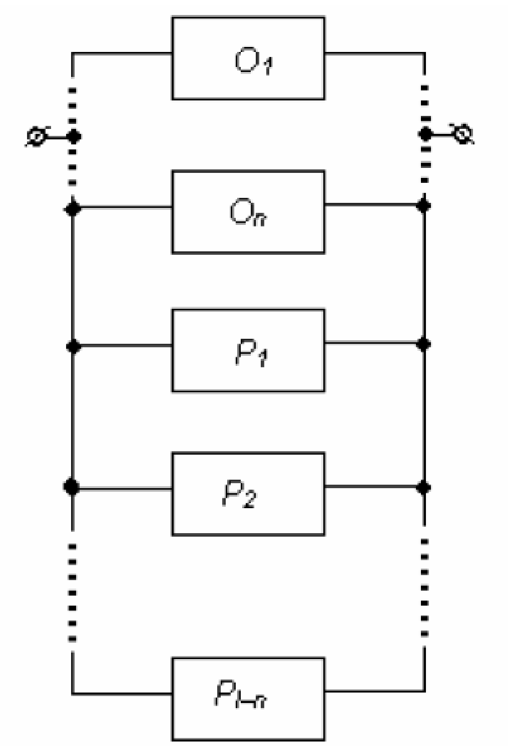


Рисунок 5.5 – Дробове резервування

$$P_{TÇ}(t)=\sum_{i=0}^{l-n} C_l^i \cdot P_0^{(l-i)}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_i^j P_0^j(t), \qquad (5.17)$$

$$T_{\text{ТЗ}_{\text{ср}}}=\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{l-n}\frac{1}{n+1}, \qquad (5.18)$$

де $P_0(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи основного або будь-якого резервного елемента.

Розглянемо тепер методи розрахунку надійності ТЗ при резервуванні заміщенням із дробовою кратністю.

Розрахунково-логічна схема для такого типу резервування при навантаженому резерві наведена на рис. 5.6.

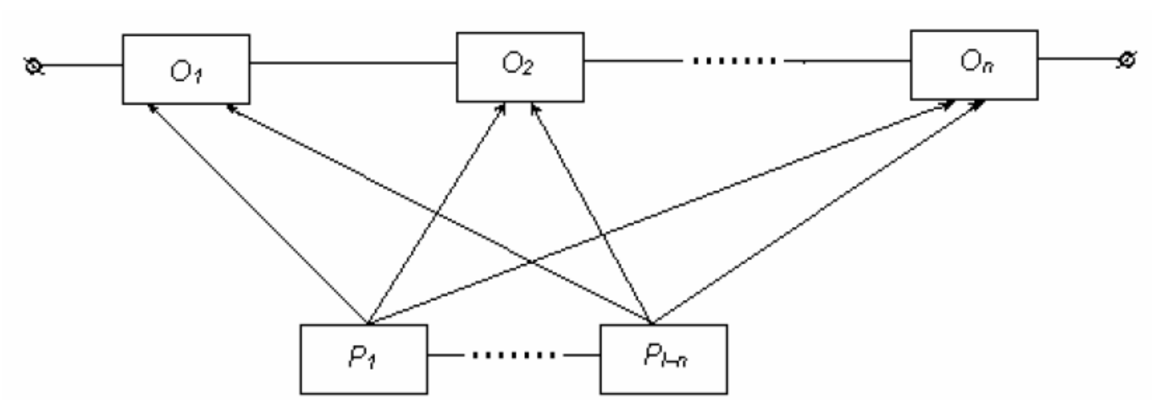


Рисунок 5.6 – Схема резервування заміщенням з дробовою кратністю

Резервований ТЗ складається з *n* основних однотипних і *(l–n)* резервних елементів, що знаходяться в навантаженому резерві *(n>(l–n))*. При відмові одного з основних елементів на його місце без перерви в роботі включається один з резервних. Причому резервні елементи також можуть відмовляти. Таких заміщень, що не порушують роботу ТЗ в цілому, може бути не більше *(l–n)*.

Середнє напрацювання до відмови такого ТЗ в припущенні абсолютно надійних перемикаючих пристроїв і рівнонадійних елементів, кожний з яких має однакову інтенсивність відмов λ_0, може бути визначене за формулою

$$T_{ТЗср} = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{l}\right), \tag{5.19}$$

де *l* – загальна кількість основних і резервних елементів ТЗ.

Ймовірність безвідмовної роботи резервованого ТЗ протягом часу t для даного випадку (див. рис. 5.6) визначається з такого виразу

$$P_{ТЗ}(t) = \sum_{i=0}^{l-n} C_l^i \left[1 - P_0(t)\right]^i \cdot \left[P_0(t)\right]^{l-i}. \tag{5.20}$$

Приклад 5.5. Для підвищення точності вимірювання деякої величини застосована схема групування приладів з п'яти по три, тобто результат вимірювання вважається вірним за показаннями середнього (третього) приладу. Потрібно знайти ймовірність безвідмовної роботи $P_{ТЗ}(t)$ і средній час безвідмовної работи $T_{ТЗср}$ такої системи, якщо інтенсивність відмов кожного приладу $\lambda_0 = 0,4 \cdot 10^{-3}$ год$^{-1}$.

Розв'язування:

У даному випадку вимірювальна система відмовляє в тому випадку, якщо відмовлять з п'яти приладів три і більше, тобто має місце загальне резервування дробової кратності, коли загальна кількість приладів l=5, число приладів, необхідних для нормальної роботи, n=3, а кратність резервування m=2/3.

Використавши формулу (5.17), отримаємо

$$P_{ТЗ}(t) = \sum_{i=0}^{l-n} C_l^i \cdot P_0^{(l-i)}(t) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j P_0^j(t) = \sum_{i=0}^{2} C_5^i \cdot P_0^{(5-i)}(t) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j P_0^j(t) =$$
$$= C_5^0 \cdot P_0^5(t) \cdot C_0^0 \cdot P_0^0(t) + C_5^1 \cdot P_0^4(t)\left[C_1^0 \cdot P_0^0(t) - C_1^1 \cdot P_0^1(t)\right] +$$
$$+ C_5^2 \cdot P_0^3(t)\left[C_2^0 \cdot P_0^0(t) - C_2^1 \cdot P_0^1(t) + C_2^2 \cdot P_0^2(t)\right].$$

Так як $C_5^0 = 1;\ C_0^0 = 1;\ C_5^1 = 5;\ C_1^0 = 1;\ C_1^1 = 1;\ C_5^2 = 10;\ C_2^0 = 1;\ C_2^1 = 2;\ C_2^2 = 1,$ то

$$P_{ТЗ}(t) = P_0^5(t) + 5P_0^4(t)\left[1 - P_0(t)\right] + 10P_0^3(t)\left[1 - 2P_0(t) + P_0^2(t)\right] =$$
$$= 6P_0^5(t) - 15P_0^4(t) + 10P_0^3(t).$$

Так як $P_0(t) = \exp(-\lambda t)$, то

$$P_{ТЗ}(t) = 6e^{-5\lambda t} - 15e^{-4\lambda t} + 10e^{-3\lambda t}.$$

Для даної задачі $\lambda t = 0,0004$. Тоді

$$P_{ТЗ}(t) = 6e^{-0,002} - 15e^{-0,0016} + 10e^{-0,0012} \approx 0,9999.$$

Середній час безвідмовної роботи ТЗ на підставі формули (5.19) буде

$$T_{ТЗср} = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = \frac{47}{60\lambda_0} = 1958 \text{ год}.$$

Розглянемо окремий випадок резервування з дробовою кратністю, а саме **мажоритарне резервування (majority redundancy)**, що часто використовується в пристроях дискретної дії.

Мажоритарним резервуванням називається загальне паралельне резервування не парної кількості елементів (мінімально трьох), які одночасно виконують одну і ту ж програму, а рішення про безвідмовність приймається по правилу два із трьох. Такі системи мають також назву системи з голосуванням. Елемент , який виконує правило 2 із 3 називається елементом голосування або елементом пріоритету.

При мажоритарному резервуванні (рис. 5.7) замість одного елемента (каналу) включається три ідентичних елементи (канали), виходи яких подаються на мажоритарний орган *М* (елемент пріоритету). Якщо всі елементи такої резервованої групи справні, то на вхід *М* надходять три однакових сигнали і такий же сигнал надходить у зовнішнє коло з виходу *М*. Якщо один із трьох резервованих елементів відмовив, то на вхід *М* надходять два однакових сигнали (істинних) і один сигнал помилковий. На виході *М* буде сигнал, що збігається з більшістю збіжних сигналів на його вході, тобто мажоритарний орган здійснює операцію визначення пріоритету або вибору за більшістю. Отже, умовою безвідмовної роботи є безвідмовна робота будь-яких двох елементів із трьох і мажоритарного органа протягом заданого часу *t*.

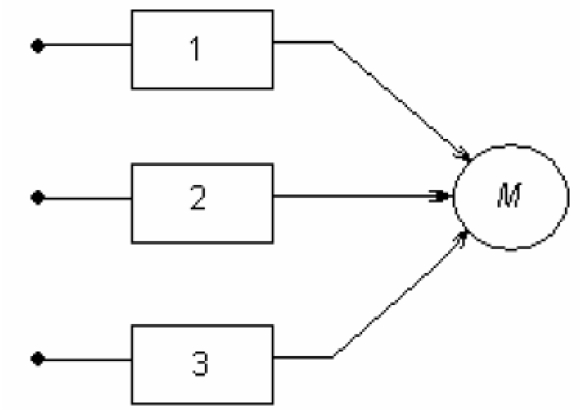


Рисунок 5.7 – Схема мажоритарного резервування

Застосовуючи вираз (5.20) для n=2 і *(l-n)*=1 з врахуванням ймовірності безвідмовної роботи протягом часу мажоритарного елемента

$P_M(t)$, отримаємо формулу для визначення ймовірності безвідмовної роботи ТЗ із мажоритарним резервуванням

$$P_{TÇ}(t) = P_M(t)\cdot\left[3P_0^2(t) - 2P_0^3(t)\right], \qquad (5.21)$$

де $P_0(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи одного основного або резервного елемента.

Приклад 5.6. Блок ТЗ із мажоритарним резервуванням працює за принципом 2 з 3-х. Визначити ймовірність безвідмовної роботи блока ТЗ, якщо P1(t) = =P2(t) = P3(t) = 0,8; $P_M(t)$ = 0,9.

Розв'язування:

$$P_{TÇ}(t) = P_M(t)\cdot\left[3P_0^2(t) - 2P_0^3(t)\right] = 0,9(3\cdot 0,8^2 - 2\cdot 0,8^3) = 0,8064.$$

У випадку ненавантаженого резерву при резервуванні з дробовою кратністю (див. рис. 5.6), відмова одного з *n* основних однотипних елементів приводить до включення на його місце одного з *(l–n)* резервних. При цьому за умовою елементи, що знаходяться в резерві, відмовляти не можуть до їх включення на місце відмовившого основного елемента. Такий вид резервування називають **ковзним (sliding redundancy).** Це таке резервування, коли всі резервні елементи можуть заміняти такі ж елементи основного кола.

Виходячи з цієї умови і з огляду на те, що в процесі нормального функціонування ТЗ у роботі знаходиться постійно *n* елементів, інтенсивність відмов кожного з яких дорівнює λ_0, середнє напрацювання до відмови та ймовірність безвідмовної роботи в цілому за час t при експоненційному розподілі можуть визначатися за такими виразами:

$$T_{TÇ_{ñð}} = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{l-n+1}{n}\right) = T_{ñð_0}\left(\frac{l-n+1}{n}\right); \qquad (5.22)$$

$$P_{TÇ}(t) = e^{-n\lambda t}\sum_{i=0}^{l-n}\frac{(n\lambda t)^i}{i!} = e^{-n\lambda t}\left[1 + n\lambda t + \frac{(n\lambda t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(n\lambda t)^{l-n}}{(l-n)!}\right], \qquad (5.23)$$

де $\lambda_0 = n\lambda$ – інтенсивність відмов нерезервованого кола ТЗ;

T_{cp_0} – середнє напрацювання до відмови нерезервованого кола ТЗ.

Якщо, наприклад, електронний блок ТЗ складається з 100 однакових модулів (n = 100) з $\lambda = 10^{-6}\,ãîä^{-1}$ і має в резерві 3 модулі, які можуть замінити будь-який з працюючих, то ймовірність безвідмовної роботи ТЗ як системи з ковзним резервуванням за 1000 годин роботи

$$P_{TÇ}(1000) = e^{-100\cdot 10^{-6}\cdot 1000}\left[1 + 100\cdot 10^{-6}\cdot 1000 + \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{6}\right] \approx 0,995.$$

5.4 Розрахунок надійності ТЗ з інформаційною надлишковістю

У засобах цифрової обчислювальної техніки, системах телемеханіки широко використовуються так звані *самокорегувальні коди*, що дозволяють автоматично виявляти і виправляти помилки в одному або декількох розрядах, які з'являються в результаті збоїв або відмови елементів. При цьому відмова або збої не порушують нормального функціонування ТЗ. Зрозуміло, що пристрої, захищені самокорегувальними кодами, мають інформаційну надлишковість.

Аналіз надійності таких засобів *з інформаційною надлишковістю* як правило проводиться двома шляхами: *наближеним і уточненим.*

При наближеному аналізі надійності ТЗ ділиться на дві частини: *захищену кодом від відмов і збоїв* та *незахищену*. Незахищена кодом частина – це сукупність елементів, для яких поява хоча б одної відмови або збою призводить до спотворення інформації на виході усього пристрою в цілому. Для захищеної частини залежно від застосовуваного коду визначається допустима кількість одночасно виправних помилок K (як правило K=1) (рис. 5.8, а).

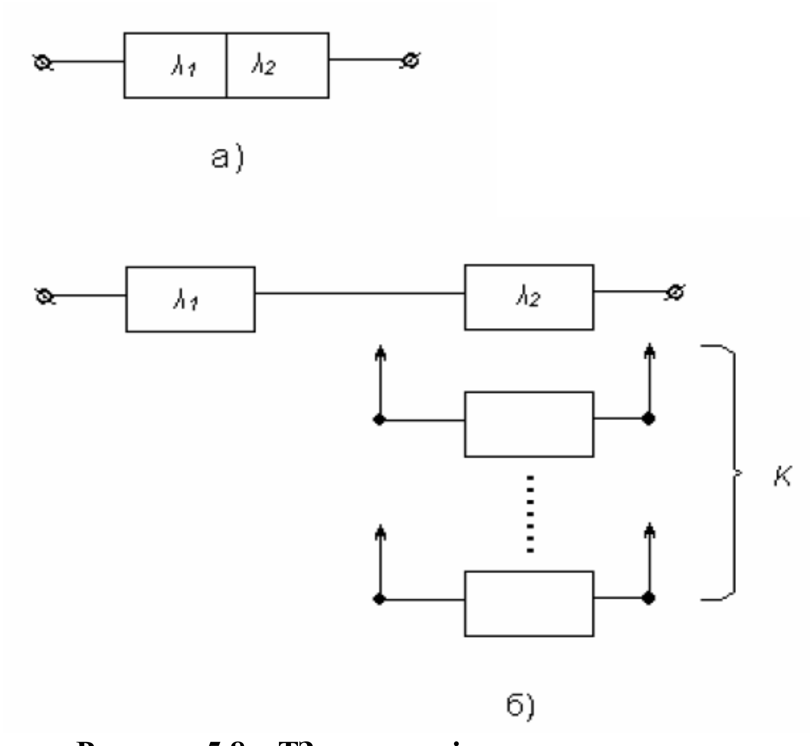


Рисунок 5.8 – ТЗ, захищені самокорегувальним кодом (наближений розрахунок надійності)

Нехай сумарна інтенсивність відмов і збоїв незахищеної частини дорівнює λ_1, а захищеної – λ_2.

Сформулюємо *умову безвідмовної роботи ТЗ* протягом часу t:

- у незахищеній частині засобу за час t не повинно відбутися жодної відмови або збою;

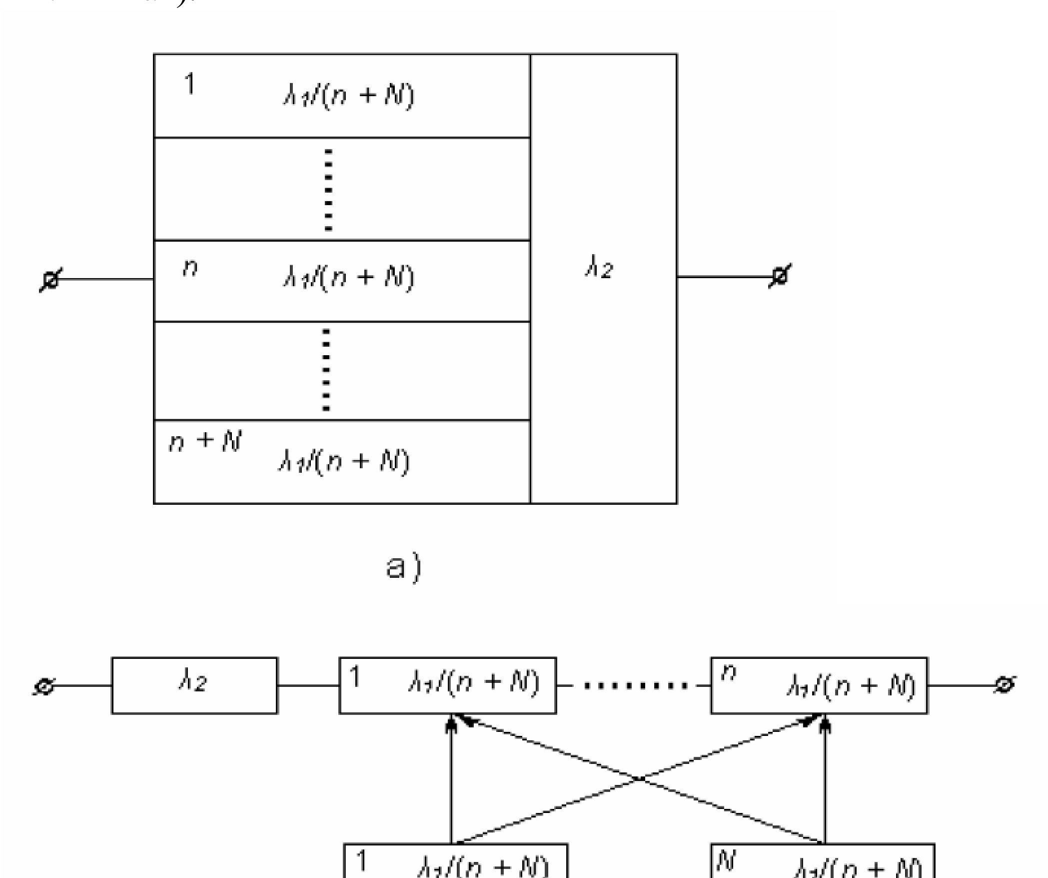
- у захищеній частині за той самий час може відбутися не більше *K* відмов і збоїв в сумі.

Ймовірність виконання цієї умови і дає ймовірність безвідмовної роботи ТЗ з інформаційною надлишковістю за час t

$$P_{ТЗ}(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda_2 \cdot t)^i}{i!} e^{-\lambda_2 \cdot t} . \qquad (5.24)$$

З умови безвідмовної роботи і виразу (5.24) випливає, що ТЗ, захищені кодом, за надійністю еквівалентні послідовному з'єднанню незахищеної частини з *K*-кратно резервованою (ненавантажений резерв) захищеною частиною з ідеально надійним перемикачем (див. рис. 5.8, б).

Уточнений аналіз надійності дозволяє врахувати структуру ТЗ, захищену самокерегувальним кодом. У ряді випадків захищена частина ТЗ може бути розбита на (n+N) незалежних лінійок або розрядів (рис. 5.9, а). При цьому роботоздатність захищеної частини забезпечується відсутністю спотворень інформації в n лінійках або, іншими словами, допускається одночасна відмова N будь-яких лінійок (або одночасна поява збою в N будь-яких лінійках).



б)

Рисунок 5.9 – ТЗ захищені самокорегувальним кодом (уточнений розрахунок надійності)

Сформулюємо умову роботоздатності ТЗ протягом часу t для цього випадку. У незахищеній частині засобу за час t не повинно відбутися жодної відмови і збою. У захищеній частині за час t можуть відмовити (з'явитися збої) не більше N лінійок з (n+N) лінійок. Звідси ймовірність безвідмовної роботи ТЗ за час t буде визначатися за таким виразом

$$P_{ТЗ}(t) = e^{-\lambda_1 t}\sum_{i=1}^{N} C^{i}_{n+N}\cdot P^{n+N-i}(t)\left[1-P(t)\right]^{i}, \qquad (5.25)$$

де $P(t) = \exp\left(-\dfrac{\lambda_2 t}{n+N}\right)$ – ймовірність безвідмовної роботи однієї лінійки захищеної частини ТЗ за час t.

З умови безвідмовної роботи і виразу (5.25) випливає, що ТЗ, захищені кодом, за надійністю еквівалентні послідовному з'єднанню незахищеної частини з резервованою групою, складеною з *n* основних і *N* резервних (навантажений резерв) лінійок, тобто групі із ковзним навантаженим резервом з абсолютно надійним перемикачем (рис. 5.9, б).

5.5 Розрахунок надійності ТЗ із тимчасовим резервуванням

Використання тимчасового резервування поряд з розглянутими вище структурною та інформаційною надлишковістю є також ефективним способом підвищення надійності ТЗ.

При наявності тимчасової надлишковості на виконання ТЗ для будь-якої роботи відводиться час, свідомо більший, ніж мінімально необхідний. В цьому випадку можливі два варіанти використання апаратури:

а) коли виконаний обсяг роботи при настанні відмови знецінюється;

б) коли може відбуватися нагромадження роботи, тобто виконаний об’єм роботи при настанні відмови не знецінюється.

Розглянемо докладніше *перший варіант*. Нехай відмова апаратури знецінює роботу, виконану нею до моменту настання відмови. В цьому випадку робота буде усе-таки виконана в повному обсязі, якщо після відмови відбудеться відновлення апаратури і залишеного часу буде досить, щоб почавши виконання роботи із самого початку завершити її в установлений час. При цьому, природно, можна допустити появу декількох відмов, після кожної з яких апаратура відновлюється і щораз робота починається з початку, і так доти, доки робота не буде усе-таки виконана в повному об’ємі або не буде вичерпаний ресурс часу.

Як характеристики надійності апаратури з тимчасовою надлишковістю доцільно вибрати таке:

- ймовірність P(t, V) виконання за заданий час t роботи об’ємом V (при чому об’єм роботи виміряється мінімально необхідною тривалістю її виконання за умови відсутності відмови апаратури, а оскільки має місце тимчасова надлишковість, то V<t);

- середній час $T_{t,V}$, що витрачається на виконання роботи об'ємом V на заданому проміжку часу t.

Для кращого розуміння викладеного розглянемо визначення зазначених характеристик на такому прикладі. Нехай робота, що повинна бути виконана на апаратурі, має об'єм (тривалість) V. При цьому інтервал V вкладається в проміжок часу t ціле число раз: $n = {}^{t}/_{V}$.

Перевірка справності апаратури відбувається наприкінці проміжку часу V. Якщо перша перевірка установить відсутність відмови, то робота вважається успішно завершеною. У іншому випадку апаратура відновлюється (для простоти будемо вважати, що миттєво і з ймовірністю P(0) = 1), включається, і робота починає виконуватися з початку, після чого випливає друга перевірка і т. д.

Відповідно до такого режиму роботи може бути побудований такий ряд розподілу:

$$\begin{array}{lllll} t_i, & V, & 2V, & \ldots, & nV; \\ P_i, & p, & (1-p)p, & \ldots, & (1-p)^{n-1}p, \end{array}$$

де t_i – можливі значення часу виконання роботи (i = 1, 2, …, n);

P_i – ймовірність виконання роботи за час t_i;

$P = P(V)$ – ймовірність безвідмовної роботи апаратури протягом проміжку часу V.

Оскільки робота може бути виконана за час V або за час 2V і т. д., причому події $t_p = t_i$ (t_p – випадковий час виконання роботи) є подіями несумісними, то, застосовуючи теорему додавання ймовірностей, отримаємо

$$P(t,V) = p + (1-p)p + \ldots + (1-p)^{n-1}p .$$

Скориставшись формулою для суми геометричної прогресії остаточно отримаємо

$$P(t,V) = 1 - (1-p)^n . \tag{5.26}$$

Тут варто підкреслити, що отриманий результат збігається з формулою для навантаженого (n–1)-кратного резерву. Однак у даному випадку необхідна надійність забезпечується не додатковим включенням резервних елементів, а за рахунок виділення додатково часу на виконання роботи одним апаратом.

Середній час, що витрачається на виконання роботи об'ємом V на заданому проміжку часу t легко може бути визначений як математичне сподівання випадкової величини t_p – випадкового часу виконання роботи – і без виведення в остаточному вигляді дорівнює

$$T_{t,V} = V \cdot \frac{1-(1-p)^n(1+np)}{p} . \tag{5.27}$$

Приклад 5.7. Нехай в результаті розрахунків надійності вимірювальної системи одержані наступні показники надійності: інтенсивність відновлення $\mu_C = 7,334\text{ãîä}^{-1}$; інтенсивність відмов $\lambda_C = 0,62 \cdot 10^{-2}\text{ãîä}^{-1}$; середнє напрацювання на відмову $T_{ср}$ = 160,619 год; коефіцієнт готовності $К_Г$ = 0,999; ймовірність безвідмовної роботи $P_C(100)$ = 0,537. Застосовуючи тимчасове резервування забезпечити наступні значення показників надійності вимірювальної системи: $T_{ср} \geq 2000$ год., $К_Г \geq 0,99$ і $P_C(t) \geq 0,95$ при t = 100 год.

Розв'язування:

Зробимо порівняння значень показників надійності $T_{ср}$, $К_Г$ і $P_C(t)$ з наведеними вимогами

$T_{ср}$ = 160,619 год. < 2000;

$К_Г$ = 0,999 > 0,99;

$P_C(100)$ = 0,537 < 0,95;

Порівнюючи їх з необхідними, бачимо, що крім коефіцієнта готовності, показники не забезпечені. Застосуємо тимчасове резервування.

Для розрахунку показників надійності використовуються наступні співвідношення:

$$T_{сð}(t^*) = \frac{\dfrac{1}{\lambda_C} + \dfrac{(1 - e^{-\mu_C t^*})}{\mu_C}}{e^{-\mu_C t^*}};\ P_C(t) = e^{-\frac{t^*}{T_{ñð}(t^*)}};\ T_{\hat{A}} = \frac{1}{\mu_C};\ K_{\tilde{A}} = \frac{T_{сð}(t^*)}{T_{сð}(t^*) + T_{\hat{A}}}.$$

Використовуючи дані співвідношення, знайдемо таке t*, щоб показники надійності відповідали нормі.

t* год.	$T_{ср}(t^*)$ год.	$P_C(t^*)$	$К_Г$
1	1691,978651	0,999409	0,999919
0,5	199,6174595	0,997498	0,999317
0,75	405,2974417	0,998151	0,999664
0,625	258,3638926	0,997584	0,999473
1,5	60094,52894	0,999975	0,999998
1,25	9741,126251	0,999872	0,999986
1,1	3349,283294	0,999672	0,999959
1,05	2370,377510	0,999557	0,999942
1,02	1933,929442	0,999473	0,999930
1,03	2068,882229	0,999502	0,999934
1,025	2000,168795	0,999488	0,999932

Отримуємо, що при t* = 1,025 год. показники надійності вже відповідають нормі. Тому застосуємо тимчасове резервування з параметром t* = 1,025 год.

Питання для самоконтролю

1. Перерахуйте основні види резервування. Дайте їх означення.
2. Які Ви знаєте основні види структурного резервування?
3. Проаналізуйте особливості пасивного і активного резервування.
4. Чим відрізняється ненавантажений резерв від постійного?
5. В чому полягає відмінність навантаженого резерву від полегшеного, резервування з цілою кратністю від резервування з дробовою кратністю?
6. Проведіть на прикладі розрахунок надійності ТЗ із ковзним резервуванням.
7. Поясніть на прикладі особливості мажоритарного резервування, його переваги та недоліки.
8. Наведіть основні відмінні риси наближеного і уточненого розрахунку надійності ТЗ з інформаційною надлишковістю.
9. Наведіть аналітичні вирази для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи і середнього напрацювання до відмови для загального резервування ТЗ із дробовою кратністю і постійно включеним резервом при експоненціальному розподілі.
10. Наведіть приклад схемної реалізації резервування заміщенням з дробовою кратністю.
11. Дайте характеристику групам заходів щодо підвищення надійності ТЗ при їхньому проектуванні.
12. Викладіть головну суть розрахунку надійності ТЗ із тимчасовим резервуванням.
13. Сформулюйте основні умови безвідмовної роботи ТЗ протягом часу t при інформаційній надлишковості.
14. Наведіть аналітичний вираз для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи резервної групи з урахуванням ненадійності перемикача при структурному резервуванні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Половко А. М. Основы теории надёжности. – М.: Наука, 1964. – 446 с.

2. Козлов В. А., Ушаков И. А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. – М.: Советское радио, 1985. – 462 с.

3. ГОСТ 27.002 – 89. «Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения». – М.: Издательство стандартов, 1989. – 20 с.

4. Матвеевский В. Р. Надежность технических средств управления: Учеб. пособие. – М.: МГИЭМ, 1993. – 92 с.

5. Матвеевский В. Р. Проектирование и надежность устройств автоматики и телемеханики: Учеб. пособие. – М.: МИЭМ, 1990. – 96 с.

6. Рудзит Я. А., Плуталов В. Н. Основы метрологии, точность и надёжность в приборостроении. – М.: Машиностроение, 1991. – 303 с.

7. Надійність техніки. Терміни та визначення: ДСТУ 2860—94. – К.: Держстандарт України, 1994. — 91 с.

8. Методи оцінки показників надійності за експериментальними даними ДСТУ 3004-95. – К.: Держстандарт України, 1995. − 123 с.

9. Васілевський О. М., Поджаренко В. О. Практикум з метрологічного нагляду за засобами вимірювань: Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 87 с.

10. Липаев В. В. Надёжность программного обеспечения АСУ. – М.: Энергоиздат, 1981. – 240 с.

11. Шураков В. В. Надёжность программного обеспечения систем обработки данных. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 271 с.

12. Садчиков П. И., Приходько Ю.Г. Методы оценки надёжности и обеспечения устойчивости функционирования программ. – М.: Знание, 1983. – 102 с.

13. Майерс Г. Надёжность программного обеспечения. – М.: Мир, 1980. – 360 с.

14. Гласс Р. Руководство по надёжному программированию. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 256 с.

15. Володарський Є. Т., Кошева Л. О. Статистична обробка даних: Навчальний посібник. – К.: НАУ, 2008. – 308 с.

16. Васюра А. С. Елементи та пристрої систем управління і автоматики: Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 1999. – 157 с.

17. Федун І. В. Основи теорії надійності та контролю якості виробів електронної техніки: Лабораторний практикум. – Вінниця: ВДТУ, 2003. – 71 с.

18. Васілевський О. М. Нормування показників метрологічної надійності / О. М. Васілевський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. - № 4. – 2011. – С. 9 – 13.

ГЛОСАРІЙ

Автономне резервування	standalone redundancy
Безвідмовність	reliability
Біномінальний розподіл	binomial distribution
Ведуча функція потоку відмов	leading function failures flow
Визначальні випробування	determining testing
Відмова	failure
Відновлювані	repairable
Вірогідність	authenticity
Внутрішньоелементне резервування	inside the element redundancy
Гамма-відсотковий ресурс	gamma-percentile resource
Гамма-відсотковий термін збереженості	gamma-percentile storability time
Гамма-відсотковий термін роботи	gamma-percentile useful life
Гамма-розподіл	gamma-distribution
Геометричний розподіл	geometric distribution
Граничний стан	limiting state
Довговічність	durability
Довірчі межі	confiding limits
Дублювання	duplication
Експоненціальний розподіл	exponential distribution
Загальне резервування	whole system redundancy
Захищеність	security
Збережуваність	storabilily
Змінне резервування	variables redundancy
Інтегральна функція	integral function
Інтенсивність	intensity
Інтенсивність відмов	intensity failure
Інтенсивність відновлення	intensity restoration
Інтенсивність потоку відмов	intensity flow failure
Інформаційне резервування	information redundancy
Ймовірність безвідмовної роботи	probability reliability work
Ймовірність відмови	probability failure
Ймовірність відновлення працездатного стану	probability restoration operability state
Ковзне резервування	sliding redundancy
Коефіцієнт відновлення ресурсу	coefficient of restitution resource

Коефіцієнтом вимушеного простою	coefficient forced down-time
Коефіцієнт готовності	coefficient readiness
Коефіцієнтом оперативної готовності	coefficient operational readiness
Комплексні показники надійності	integrated indicators of dependability
Контрольні випробування	control testing
Коректовність	correctness
Кратність резервування	redundancy ratio
Критерій відмови	failure criterion
Мажоритарне резервування	majority redundancy
Метрологічна відмова	metrology failure
Метрологічна ймовірність безвідмовної роботи	metrolo-gical probability reliability work
Метрологічна надійність	metrology dependability
Метрологічна справність	metrology good condition
Навантажений резерв	loaded reserve
Надійність	dependability
Надійність програмного забезпечення	dependability of software
Напрацювання	operating time
Напрацювання до відмови	operating time to failure
Напрацювання між відмовами	operating time between failures
Невідновлювані	non-repairable
Ненавантажений резерв	unloaded reserve
Нестабільність	instability
Нормальний закон розподілу	normal law of distributing
Нормування надійності	dependability specification
Одиничне резервування	single redundancy
Параметр потоку відмов	parameter of stream failure
План контролю	control plan
Показник надійності	dependability index
Полегшений резерв	reduced reserve
Постійне резервування	continuous redundancy
Потік відмов	stream failure
Працездатність	up state
Програмна надійність	software dependability
Резервування	redundancy
Резервування заміщенням	standby redundancy
Резервування з вибірковою схемою	redundancy of sampling scheme

Резервування постійне	continuous redundancy
Ремонтопридатність	maintainability
Ресурс	useful life
Рівномірний розподіл	uniform distribution
Роздільне резервування	segregated redundancy
Розподіл Вейбулла	distribution of Veybulla
Розподіл Пуассона	Poisson distribution
Розподіл Релея	Rayleigh distribution
Середній час відновлення	mean time to recovery
Середній ресурс	average resource
Середнє напрацювання	mean operating time
Середня інтенсивність відмов	mean intensity failure
Статистичні оцінки	statistical estimations
Структурна надійність	structural dependability
Структурне резервування	structural redundancy
Стійкість	stability
Теорія надійності	theory of dependability
Термін експлуатації	term operation
Термін збереженості	storability time
Термін роботи	useful life
Технічний засіб	hardware
Тимчасове резервування	temporal redundancy
Трикутний розподіл	triangular distribution
Функція готовності	function readiness
Функція розподілу потоку відмов	function distribution flow failure
Частота відмов	failure rate
Щільність ймовірності	density probability

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

І

Й

К

М

Н

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

БР	Безвідмовна робота
ЕОМ	Електронно-обчислювальна машина
МПІ	Міжповірочний інтервал
ПЗ	Програмне забезпечення
ПН	Показники надійності
СКВ	Середнє квадратичне відхилення
ТЗ	Технічний засіб
ТУ	Технічні умови
$a(t)$	Частота відмов
$Г(X)$	Гамма-функція
$К_Г$	Коефіцієнт готовності
$К_П$	Коефіцієнт простою
$M[t]$	Центральний момент першого порядку
$M_2[t]$	Центральний момент другого порядку
N_0	Загальна кількість випробовуваних ТЗ
$n(t)$	Кількість ТЗ, що відмовили за час t
$n(\Delta t)$	Кількість ТЗ, що відмовили в інтервалі часу від $t - \Delta t/2$ до $t + \Delta t/2$
$P(t)$	Ймовірність безвідмовної роботи
$P_Г(t)$	Функція готовності
$Q(t)$	Ймовірність відмови
$T_{ср}$	Середнє напрацювання до першої відмови
t	Час
Δt	Інтервал часу від t_{i-1} до t_i
$\lambda(t)$	Інтенсивність відмов
σ_T^2	Дисперсія часу безвідмовної роботи
$\omega(t)$	Параметр потоку відмов
μ	Інтенсивність відновлення

Навчальне видання

Васілевський Олександр Миколайович
Ігнатенко Олександр Григорович

Нормування показників надійності технічних засобів

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено О. Васілевським

Підписано до друку .
Формат 29,7х42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. .
Наклад прим. Зам. № .

Вінницький національний технічний університет,
науково-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-81-59.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.