

М. Й. Ядренко

**Дискретна
математика**

**Київ
«ТБіМС»
2004**

УДК 519.1

М.Й. Ядренко Дискретна математика: навчальний посібник. — К.: МП "ТВиМС", 2004. — 245 с.

В систематизованому вигляді представлено основні поняття комбінаторики, розглянуті основні методи комбінаторного аналізу, проілюстровано їх застосування на численних прикладах. Подано основні поняття та результати теорії графів. Книга є навчальним посібником для студентів університетів, які навчаються зі спеціальностей "Математика", "Статистика", "Прикладна математика", та студентів технічних та економічних університетів.

Main notions of combinatorics are presented, basic methods of combinatorial analysis are considered, their applications are illustrated on numerous examples. Basic notions and results of the theory of graphs are also given. This book presents the didactic materials for students of classical universities specializing on "Mathematics", "Statistics", "Applied Mathematics" as well as for students of engineering and economical specialties.

Mathematics Subject Classification 2000: 05A05, 05A10, 05A15; 05A19, 05C05; 05C45; 05C38

Ухвалено до видання Вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

ISBN 966-95255-6-X

©М.Й. Ядренко, 2004

ПЕРЕДМОВА ДО ПЕРШОГО ВИДАННЯ

Ця книга написана на основі лекцій з курсу "Дискретна математика", які автор впродовж останніх 15 років читав студентам першого курсу механіко-математичного факультету Національного університету імені Тараса Шевченка.

На жаль, до цього часу межі предмету "Дискретна математика" чітко не окреслені. В наукових класифікаторах (AMS classification, Mathematics Subject Classification) відсутня рубрика "Дискретна математика". Найчастіше дискретну математику означають як розділ математики, який вивчає проблеми, що стосуються скінченних множин. В першу чергу до дискретної математики зараховують комбінаторний аналіз — розділ математики, присвячений розв'язанню проблем вибору і розташування згідно з певними правилами частин деякої скінченної множини. До дискретної математики відносять різницеве числення, яке є дискретним аналогом диференціального числення, і грає важливу роль в комбінаторному аналізі та теорії графів.

В застосуваннях дискретної математики особливе місце займають задачі, пов'язані з розробкою технічних пристроїв з дискретним принципом дії, з впорядкуванням тих чи інших об'єктів або дій, побудовою складних конструкцій шляхом оптимального поєднання окремих елементів. Раціональна організація комп'ютерних алгоритмів в інформатиці, раціональне планування виробництва, оптимізація портфеля цінних паперів — все це проблеми дискретної математики. Нині спостерігається підсилений інтерес до дискретної математики як з боку математиків, так і зі сторони представників інших наук.

Основна увага в книзі зосереджена на питаннях комбінаторного аналізу. В систематизованому і доступному широкому колу читачів вигляді викладені основні питання комбінаторики, розглянуто основні методи комбінаторного аналізу, проілюстровано їх застосування на численних прикладах. Читач книги матиме можливість познайомитися з основними комбінаторними числами — числами Фібоначчі, Каталана, Стірлінга, Бернуллі, Белла. Книга містить компактний виклад основних понять та результатів теорії графів.

В кожному розділі книги подано велику кількість прикладів та

задач (з повними розв'язками). З метою заохочення читача до самостійних досліджень в книзі сформульовано декілька нерозв'язаних до цього часу проблем.

Книга є навчальним посібником для студентів університетів, які навчаються зі спеціальностей "Математика", "Статистика", "Прикладна математика", та студентів технічних і економічних університетів. Оскільки книга є підручником для студентів молодших курсів, вона не містить складних математичних конструкцій з арсеналу сучасної математики; значна частина книги доступна допитливим учням фізико-математичних шкіл та ліцеїв. Книга видана в рамках реалізації Tempus-Tacis проекту NP22012-2001 "Improvement of education in economical-statistical area in Ukraine", що фінансується ЄС. Автор користується нагодою висловити щире подяку за підтримку координатору проекту професору Д.С.Сільвестрову (Малардаленський університет, Швеція) і адміністратору проекту Е.Д.Сільвестровій (Малардаленський університет, Швеція). При написанні книги автор користувався порадами та підтримкою своїх учнів та колег — Ю.В.Козаченка, О.І.Пономаренка, Н.М.Зінченко, О.Д.Борисенка; поява книги зовсім була б неможливою без допомоги і словом і ділом з боку І.Р.Дідковського, Г.С.Багро і О.М.Ядренко — велике їм спасибі!

Автор

Київ, Квітень 2003

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ

В другому виданні зроблено багато виправлень. Щиро дякую М.М.Астаф'євій, В.В.Масол, О.І.Кльосову та М.П.Моклячуку, які уважно прочитали перше видання книжки і допомогли усунути численні огріхи.

Автор

Київ, Квітень 2004

РОЗДІЛ 1

Множини та операції з ними

Дискретна математика — рятівний круг, кинутий студентам, які потопали в морі абстракцій.

З передмови до книги Д. Кнут, Р. Грехем, О. Паташник, "Конкретная математика"

Поняття множини є первісним. Ми не даємо йому визначення. Будь яка сукупність елементів довільного роду утворює множину. Можна розглядати множину усіх натуральних чисел, множину усіх студентів певної студентської групи, множину усіх мешканців даного міста. Множина вважається означеною, якщо вказані всі її елементи. Ці елементи можуть бути вказані з допомогою деякої загальної ознаки або просто з допомогою деякого списку, в якому перераховані всі елементи множини. Останній спосіб можливий лише в тому випадку, коли множина має скінчене число елементів; такі множини називаються *скінченними*.

Наведемо основні позначення, якими будемо користуватися далі. Множини позначатимемо великими латинськими літерами, їх елементи — малими літерами. Запис

$$a \in A$$

читається: елемент a належить множині A (a є елементом множини A), а запис

$$a \notin A$$

означає: a не належить множині A (a не є елементом множини A). Кількість елементів множини A (якщо ця множина скінченна) будемо позначати $N(A)$. Оперуючи зі скінченними множинами, ми часто будемо означати множину, перераховуючи всі її елементи в фігурних дужках. Наприклад, якщо $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ то $N(A) = 5$. Зазначимо також, що в деяких книжках для кількості елементів множини A вживається ще таке позначення: $|A|$.

Підмножини. Будемо говорити, що множина A є підмножиною множини B , якщо кожен елемент a , який належить множині A , належить також і множині B . Будемо писати в цьому випадку

$$A \subset B$$

(читається: множина A є підмножиною множини B).

Приклад 1. Нехай $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді $A \subset B$.

Якщо множина A є підмножиною множини B і, разом з тим, множина B є підмножиною множини A , то будемо говорити, що множини A і B рівні і писатимемо $A = B$.

Операції над множинами. Над множинами виконують певні операції. Найголовніші з них — *об'єднання, переріз, різниця, доповнення*.

Означення 1. Об'єднанням $A \cup B$ множин A і B називається множина тих і лише тих елементів, які належать принаймні одній з множин A або B .

Приклад 2. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Тоді $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Звертаємо увагу читача, що при утворенні об'єднання множин кожен елемент враховується лише один раз.

Безпосередньо з означення операції об'єднання випливає, що ця операція задовольняє умови *комутативного* та *асоціативного* законів

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cup (B \cup C) = (B \cup A) \cup C.$$

Можна розглядати об'єднання будь-якого числа множин.

Означення 2. Об'єднанням $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ називається множина тих і лише тих елементів, які належать принаймні одній одній з множин $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Зауважимо, що операція об'єднання (додавання) множин призводить до незвичних для додавання чисел рівностей $A \cup A = A$, $A \cup A \cup \dots \cup A = A$.

Означення 3. Перерізом $A \cap B$ множин A і B називається множина тих і лише тих елементів, які належать і множині A , і множині B .

Приклад 3. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

Тоді $A \cap B = \{2, 3, 4\}$. Неважко переконатися, що операція перерізу задовольняє комутативний та асоціативний закони

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cap (B \cap C) = (B \cap A) \cap C.$$

Доведемо, що операції об'єднання і перерізу пов'язані між собою *дистрибутивним законом*.

Теорема 1. *Має місце рівність*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (1)$$

Доведення. Нехай x — довільний елемент, який належить множині $A \cap (B \cup C)$. Це означає, що $x \in A$ та $x \in B \cup C$. Таким чином, $x \in B$ або $x \in C$. Отже, $x \in A \cap B$ або $x \in A \cap C$. Тобто $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Отже, ми встановили

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Нехай тепер x — довільний елемент з множини $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Тоді x належить A і x належить B , або ж $x \in A$ та $x \in C$. В обох випадках $x \in A$ та $x \in B \cup C$. Отже,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C).$$

Отже, рівність (1) справедлива.

Зауважимо, що множина $A \cap B$ може бути неозначеною, якщо множини A і B не мають спільних елементів. Щоб запобігти цьому, будемо розглядати ще так звану *порожню множину* $\emptyset$, яка не містить жодного елемента. Тоді вважатимемо, що $A \cap B = \emptyset$, якщо A і B не мають спільних елементів.

Порожня множина грає роль нуля в операціях над множинами

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Означення 4. *Різницею $A \setminus B$ множин A і B називається множина, яка містить ті і лише ті елементи, які належать A і не належать B .*

Приклад 4. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$. Тоді $A \setminus B = \{3, 4\}$.

В багатьох ситуаціях доводиться розглядати підмножини однієї й тієї ж множини $\mathcal{U}$. Будемо називати її *універсальною множиною*.

Означення 5. Нехай $\mathcal{U}$ — універсальна множина, $A \in \mathcal{U}$. Доповненням $\bar{A}$ до множини A називається множина $\bar{A} = \mathcal{U} \setminus A$.

Приклад 5. Нехай $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Тоді $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Теорема 2. Нехай $A \subset \mathcal{U}$, $B \subset \mathcal{U}$. Тоді мають місце рівності

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad (2)$$

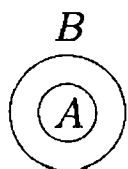
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad (3)$$

Рівності (2) і (3) називають правилами де Моргана.¹

Доведемо (2). Нехай x довільний елемент, який належить $\overline{A \cup B}$. Це означає, що $x \notin A \cup B$, тобто $x \notin A$ і $x \notin B$. Отже, $x \in \bar{A}$ і $x \in \bar{B}$, тобто $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Таким чином, $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Нехай $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Тоді $x \notin A$, $x \notin B$, і, значить, $x \notin A \cup B$, тобто $x \in \overline{A \cup B}$. Отже, $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Це й доводить рівність (2).

Рівність (3) пропонуємо довести читачеві самостійно.

Наочно операції над множинами можна ілюструвати, зображаючи множини у вигляді областей (кругів) (рис.1 — рис.5) на площині. Ці ілюстративні малюнки іноді називають діаграмами Ойлера² - Вена³.



$A \subset B$

Рис. 1



$A \cup B$

Рис. 2



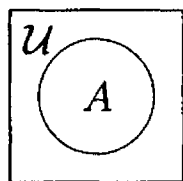
$A \cap B$

Рис. 3



$A \setminus B$

Рис. 4



$\bar{A}$
Рис. 5

¹Морган де Август (27.06.1806 - 18.03.1871) — шотландський математик, автор багатьох праць з аналізу, алгебри, математичної логіки, елементарної математики та історії математики.

²Ойлер Леонард (L. Euler, в рос. транскрипції Л. Эйлер) — видатний швейцарський математик, академік Російської академії наук, тривалий час жив в Санкт Петербурзі. Автор багатьох видатних праць з математики, механіки, фізики, астрономії.

³Венн Джон (Venn, 1834 - 1923) — англійський математик і логік. Професор Кембріджського університету.

Взаємно однозначна відповідність. Нехай задано дві множини A і B . Будемо говорити, що між цими множинами встановлена *відповідність*, якщо кожному елементу a з A відповідає деякий елемент b з B і для кожного елемента b з B існує елемент a з A , такий що b відповідає a . Відповідність називається *взаємно однозначною*, якщо кожному елементу a з A відповідає лише один елемент b з B і різним елементам множини A відповідають різні елементи множини B .

Деякі позначення числових множин. В цій книзі ми часто будемо розглядати певні числові множини. Наведемо стандартні позначення для деяких з них.

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — множина всіх цілих чисел;

$Z^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ — множина всіх натуральних чисел;

$Z_0^+ = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ — множина всіх невід'ємних цілих чисел (її елементами є всі натуральні числа і число нуль);

Z^- — множина всіх від'ємних цілих чисел;

Q — множина всіх раціональних чисел (чисел виду $\frac{m}{n}$, де $m \in Z, n \in Z^+$).

Теоретико-множинні та логічні символи. Перерахуємо деякі теоретико-множинні та логічні символи, які будемо вживати в цій книзі. Звичайно, це робить виклад більш стислим, але ми не будемо зловживати стислістю викладу. Проте зазначимо, що вживання символів допомагає при конспектуванні лекцій.

$\Rightarrow$ — тягне за собою, спричиняє;

$\Leftrightarrow$ — тоді і лише тоді;

$\forall$ — для всіх, для кожного;

$\exists$ — існує;

$\exists!$ — існує лише один;

$:=$ або $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ за означенням;

$x \in A$ — елемент x належить множині A ;

$x \notin A$ — елемент x не належить множині A .

Приклади вживання логічних символів

$$1. a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2;$$

$$2. A \subset B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \Rightarrow x \in B;$$

- 3. $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \implies n(n+1) \geq 2$;
- 4. $\exists x : x \in \mathbb{Z} \implies x^2 = 1$;
- 5. $\exists! x : x \in \mathbb{Z}^+ \implies x^2 = 1$;
- 6. $A \cap B \stackrel{\text{def}}{\iff} \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

РОЗДІЛ 2

Основний принцип комбінаторики. Правило множення

Суть математики — в конкретних прикладах і конкретних проблемах.

П. Халмош⁴

Приклади вчать не менше ніж правила. І.М. Гельфанду приписують вираз "Теорії приходять і відходять, а приклади залишаються".

В. Арнольд⁵

Людині часто доводиться мати справу з задачами, в яких треба підрахувати число всіх можливих способів здійснення певної дії.

Скількома способами п'ять покупців можуть розташуватись в черзі до каси? Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі в чемпіонаті України з футболу? Задачі такого типу звуться *комбінаторними*.

З комбінаторними обчисленнями доводиться мати справу представникам багатьох спеціальностей: вченому-хіміку при розгляді різних можливих типів зв'язку атомів в молекулах, біологу при вивченні різних послідовностей чергування амінокислот в білкових сполуках, агроному, який розглядає різні можливі способи посівів на кількох ділянках, диспетчеру при складанні графіку руху.

Комбінаторні міркування лежать в основі розв'язання багатьох задач теорії ймовірностей — важливого розділу сучасної математики, який вивчає випадкові явища. Посилений інтерес до комбінаторики останнім часом зумовлений бурхливим розвитком інформатики⁶, кібернетики, обчислювальної техніки.

У будь-якій комбінаторній задачі в тій чи іншій мірі фігурує так зване *правило множення*.

⁴П. Халмош (Paul R. Halmos) — американський математик. Російською мовою перекладено його книги "Теория меры", "Гильбертово пространство в задачах", "Конечномерные линейные пространства".

⁵В.І. Арнольд — академік Російської академії наук, професор Московського Університету.

⁶Зазначимо, що одна з найкращих навчальних книг з дискретної математики (Д. Грехем, Д. Кнут, О. Паташник, Конкретная математика, М., Мир, 1998) має підзаголовок — Основание информатики. Монументальний пошито семитомний твір (Д. Кнут, Искусство программирования для ЭВМ) розпочинається з тому, присвяченого комбінаториці та дискретній математиці.

Щоб сформулювати це правило, розпочнемо з такої задачі, яка яскраво ілюструє ситуацію.

З міста A до міста B веде n різних доріг, з міста B до міста C веде t різних шляхів. Скількома способами можна здійснити подорож з міста A в місто C ?

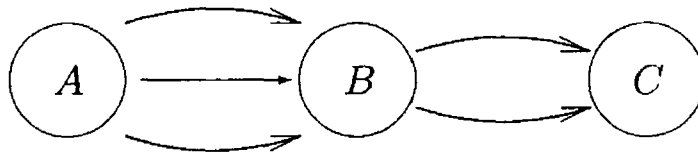


Рис. 6

Відповідь очевидна: $n \cdot t$, бо обравши один з n можливих шляхів з міста A в місто B , ми матимемо t різних продовжень подорожі з B в C .

Міркування, які були проведені при розв'язанні задачі, доводять справедливість такого простого правила, яке називають *правилом множення* або *основним принципом комбінаторики*.

Якщо деякий вибір A можна здійснити n способами, а для кожного з цих способів другий вибір B можна здійснити t способами, то вибір A і B (у вказаному порядку) можна здійснити $n \cdot t$ способами.

Задача 1. На вершину гори веде 8 доріг.

а) Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися вниз?

б) Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися вниз, якщо підйом і спуск здійснюються різними шляхами?

а) Відповідь: $8 \times 8 = 64$. б) Відповідь: $8 \times 7 = 56$.

Сформулюємо тепер правило множення в загальному вигляді. Нехай треба виконати одна за одною k дій. Якщо першу дію можна здійснити n_1 способами, другу дію (після того, як здійснена перша) — n_2 способами, третю дію (після того, як здійснені попередні дві) — n_3 способами, і так до k -тої дії, яку можна здійснити n_k способами, то загальне число способів здійснення дій дорівнює

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

Задача 2. Скільки різних дільників має число 24?

Оскільки $24 = 2^3 \cdot 3$, то кожен дільник числа 24 має вигляд $2^{i_1} \cdot 3^{i_2}$, де показник i_1 може приймати значення 0, 1, 2, 3, а показник i_2 може приймати значення 0, 1. Щоб виписати всі дільники числа 24, треба здійснити дві дії: обрати i_1 (є чотири можливості для цього), а далі обрати i_2 (є дві можливості). Отже, число усіх дільників числа 24 дорівнює $4 \times 2 = 8$.

Проаналізувавши глибоко розв'язання задачі 2, неважко переконатися в справедливості такої теореми, яку часто використовують в теорії чисел.

Теорема 1. Нехай розклад натурального числа n на прості множники має вигляд

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Тоді число усіх дільників числа n дорівнює

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Доведення. Кожен дільник числа n має вигляд

$$p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_k^{i_k},$$

де $0 \leq i_1 \leq \alpha_1, 0 \leq i_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq i_k \leq \alpha_k$.

Обрати дільник — це обрати i_1 ($\alpha_1 + 1$ можливих значень), i_2 ($\alpha_2 + 1$ можливих значень), ..., обрати i_k ($\alpha_k + 1$ можливих значень). Для завершення доведення теореми досить застосувати правило множення.

Задача 3. Скільки чотиризначних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо

- а) цифри можуть повторюватись;
- б) жодна цифра не повторюється більше одного разу.
- в) Скільки серед усіх чотиризначних чисел, утворених з цих цифр, таких, які діляться на п'ять?

Розв'язання. а) Першою цифрою може бути будь-яка з цифр, крім цифри 0. Отже, для першої цифри існує 5 можливостей. Другою, третьою і четвертою може бути будь-яка з шести цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5. Отже, загальне число чотиризначних чисел дорівнює $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3 = 1080$.

б) Першою цифрою може бути одна з п'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Якщо перша цифра обрана, то для другої є п'ять можливостей, для третьої

- чотири можливості, для четвертої — три. Таким чином, існує $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ чисел, у яких всі цифри різні.

в) Для першої цифри є 5 можливостей, для другої і третьої по 6 можливостей, а для останньої — дві можливості (або 5, або 0). Отже, число чисел, які діляться на п'ять, дорівнює $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 360$.

Декартів добуток двох множин.

Число елементів декартового добутку.

Означення 1. Декартовим добутком множин X та Y називається множина усіх впорядкованих пар (x, y) , де $x \in X, y \in Y$.

В символічному запису це означення має вигляд:

$$X \times Y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Приклад. Нехай $X = \{1, 2\}, Y = \{a, b, c\}$.

Тоді $X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$. Число елементів в множині $X \times Y$ дорівнює 6.

Теорема 2. Нехай X та Y скінченні множини, $N(X) = n, N(Y) = m$. Тоді

$$N(X \times Y) = N(X) \cdot N(Y) = n \cdot m.$$

Доведення. Нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Перепишемо всі елементи декартового добутку у вигляді таблиці з n рядків

$$\begin{array}{cccc} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \dots & (x_1, y_m) \\ (x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \dots & (x_2, y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, y_1) & (x_n, y_2) & \dots & (x_n, y_m) \end{array}.$$

В цій таблиці — m стовпців. Отже, число елементів декартового добутку дорівнює $n \cdot m$.

Число відображень множини X у множину Y . Нехай X та Y — дві множини.

Означення 1. Будемо говорити, що задано відображення $\varphi(x) : X \rightarrow Y$ множини X у множину Y , якщо кожному x з множини X поставлено у відповідність y з множини Y .

Вживають іноді й іншу термінологію: говорять, що на множині X задана функція із значеннями в множині Y .

Припустимо, що множини X та Y скінченні, $N(X) = n$, $N(Y) = m$. Скільки ж можна означити різних відображень $\varphi : X \rightarrow Y$?

Приклад. Нехай $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b\}$. Опишемо всі можливі відображення X в Y . Кожне відображення X в Y (кожна функція, означена на множині X із значеннями в Y) описується таблицею значень. У нашому випадку усіх таких таблиць 4:

X	1	2		1	2		1	2		1	2
Y	a	a		a	b		b	a		b	b

Теорема 3. Нехай X та Y скінченні множини, $N(X) = n$, $N(Y) = m$.

Тоді число усіх відображень X в Y дорівнює m^n .

Доведення. Нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Відображення задається таблицею значень функції

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
Y	y_{i_1}	y_{i_2}		y_{i_k}		y_{i_n}

У верхньому рядку цієї таблиці вписані аргументи $x_1, x_2, \dots, x_n$ функції $\varphi(x)$, а в нижньому значення $\varphi(x)$. В кожній клітинці нижнього рядка може бути будь-який елемент з множини $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Отже, в силу правила множення число усіх можливих таблиць дорівнює $\underbrace{m \times m \times \dots \times m}_{n\text{-раз}} = m^n$.

Ще декілька задач.

Задача 4. У класі вивчають 10 дисциплін. В п'ятницю шість уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на п'ятницю?

Відповідь: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

Задача 5. П'ять хлопчиків і п'ять дівчаток сідають на 10 розташованих поряд стільців, причому хлопчики сідають на місця з непарними номерами, а дівчатка — на місця з парними номерами. Скількома способами це можна зробити?

Відповідь: $5! \cdot 5! = 14400$.

✓ **Задача 6.** Скільки існує шестицифрових чисел, які не містять нуля в десятковому записі і діляться на 9?

Відповідь: $9^5 \cdot 3 = 177147$. Перші п'ять цифр обираємо довільно, а останню обираємо так, щоб сума цифр числа ділилась на 9.

Задача 7. а) У прямокутну таблицю, яка містить m рядків та n стовпців, записують числа 1 та -1 . Скільки різних таблиць утвориться при цьому?

б) Скільки серед цих таблиць таких, у яких добуток в кожному рядку і кожному стовпчику дорівнює одиниці?

Розв'язання. а) В кожній з mn клітинок ми виписуємо 1 або -1 . Тому загальне число таблиць згідно з правилом множення дорівнює 2^{mn} .

б) Всі таблиці, які мають вказану властивість, можна отримати так. Всюди, крім останнього рядка і останнього стовпця, виписуємо 1 або -1 . Отримаємо $2^{(m-1)(n-1)}$ таблиць. Нехай p — добуток всіх виписаних чисел. Тепер в кожному з перших $m - 1$ рядків на перетині з n -тим стовпцем пишемо 1 або -1 так, щоб добуток чисел в рядку дорівнював 1; позначимо через x добуток чисел, які будуть виписані в n -тому стовпці. Далі в кожному з перших $n - 1$ стовпців на перетині з m -тим рядком виписуємо 1 або -1 так, щоб добуток чисел в стовпчику дорівнював 1. Добуток чисел, які будуть вписані в m -тому рядку, позначимо через y . Зауважимо, що числа x та y мають однаковий знак, бо $px = 1$, $py = 1$, $p^2yx = 1$, $xy = 1$. Випишемо на перетині m -того рядка і n -того стовпця 1 з тим знаком, який мають x та y . Тоді добуток чисел в n -тому стовпці і m -тому рядку дорівнюватиме 1. Склали таблицю, яка має шукану властивість. Отже, число всіх таблиць, які мають вказану властивість дорівнює $2^{(m-1)(n-1)}$.

Задача 8. Кожна з вершин при основі трикутника сполучена прямими з n точками, обраними на бічній стороні, протилежній до цієї вершини. На скільки частин поділяють трикутник ці прямі? Скільки точок перетину утвориться всередині трикутника?

Розв'язання. Нехай B і C вершини при основі трикутника ABC . Прямі, які проведені з вершини B , ділять трикутник на $(n + 1)$ частин. Прямі, які проведені з вершини C , ділять кожную з цих частин на $n + 1$ частин. Тому загальне число частин дорівнює $(n + 1) \cdot (n + 1) = (n + 1)^2$. Всередині трикутника буде n^2 точок перетину.

Задача 9. Кожна з трьох вершин трикутника сполучена прямими з n точками, розташованими на бічній стороні, протилежній до цієї вершини. На скільки частин ділять ці прямі трикутник, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

Розв'язання. Нехай B і C вершини при основі трикутника ABC . Прямі, які проведені з точок B і C , ділять трикутник на $(n+1)^2$ частин. Кожна з прямих, яка виходить з вершини A , перетинається з усіма $2n$ прямими, які проведені з вершин B і C (звичайно всі точки перетину різні, бо жодні три з них не перетинаються в одній точці). Отже, кожна з прямих, які проведені з точки A , ділиться іншими прямими на $2n+1$ частин і, значить, збільшує загальне число частин на $2n+1$. Тому загальне число частин дорівнює $(n+1)^2 + n(2n+1) = 3n^2 + 3n + 1$.

Задача 10. Відстань від A до B — 999 км. Уздовж дороги стоять кілометрові стовпи, на яких зазначені відстані до A і до B :

0	999	,	1	998	,	2	997	, ..., ,	998	1	,	999	0
---	-----	---	---	-----	---	---	-----	----------	-----	---	---	-----	---

Скільки серед цих стовпів таких, на яких є тільки дві різні цифри?

Розв'язання. Сума двох чисел, записаних на одному стовпі, дорівнює 999. Тому, якщо ми розглянемо один стовп, на якому є лише дві різні цифри, то коли одна цифра є c , то другою цифрою обов'язково повинна бути цифра $9 - c$. Усіх таких стовпів, на яких є числа зображені цифрами c або $9 - c$, вісім (на кожному з перших трьох місць може стояти одна з цифр c або $9 - c$, а цифри на трьох інших місцях відновлюються автоматично). Усіх можливих пар цифр $(c, 9 - c)$ є п'ять: $(0, 9)$, $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$. Отже, число всіх стовпів, на яких є тільки дві різні цифри, дорівнює $8 \cdot 5 = 40$.

Задача 11. а) Яке найбільше число частин, на яке можуть розбити площину n прямих?

б) Скільки серед цих частин таких, які є необмеженими областями?

в) Яке найменше число, на які розбивають площину n прямих?

Розв'язання. а) Очевидно, число частин, на які розбивають площину n прямих буде найбільшим, якщо жодні три прямі не перетинаються в одній точці.

Будемо проводити прямі послідовно і уважно стежити, на скільки збільшується число частин. На початку маємо одну частину. Після проведення першої прямої число частин збільшиться на одиницю.

Проведемо другу пряму так, щоб вона перетиналася з першою прямою. Точка перетину цієї прямої ділить її на дві частини - промені, кожен з яких межує з новими частинами. Отже, після проведення другої прямої число частин збільшується на 2.

Припустимо, що вже проведено $n - 1$ пряму так, що жодні не перетинаються в одній точці. Проведемо наступну пряму. Наступна пряма перетне кожен з проведених раніше прямих, причому всі точки перетину будуть різними. Тому вони поділять нову пряму на $n - 2$ відрізки і дві півпрямі. Кожний з відрізків і кожна з двох півпрямих поділять певну область на дві частини. Отже, після проведення n -ої прямої загальне число частин збільшиться на n . Отже, загальне число частин дорівнює $1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = 1 + \frac{n(n + 1)}{2}$.

б) Межами необмежених частин є напівпрямі, а їх число дорівнює $2n$. Отже, число необмежених частин дорівнює $2n$.

в) Найменше число частин буде тоді, коли прямі паралельні. Воно дорівнює $s_n = n + 1$.

Зауваження. Перевірте, що три прямі можуть розділити площину на 4, 6 або 7 частин (відсутнє число 5); чотири прямі можуть розділити площину на 5, 8, 9, 10 і 11 частин (відсутні числа 6, 7).

Нерозв'язана проблема 1. Нехай $n + 1 < k < 1 + \frac{n(n + 1)}{2}$. Для яких k n прямих можуть розітнути площину на k частин?

Задача 12. На площині проведено n кіл так, що кожні два з них перетинаються і жодні три не мають спільної точки. На скільки частин ділять площину ці кола?

Розв'язання. Будемо проводити кола послідовно і стежити, на скільки збільшується числа частин. Перше коло ділить площину на дві частини. Проведемо друге коло, його периметр при перетині з першим ділиться на дві частини, кожна з яких входить до межі нової частини; таким чином, число частин збільшиться на 2. Якщо вже проведено $n - 1$ коло, то при проведенні n -ого кола число частин збільшиться на $2(n - 1)$. Отже, загальне число частин, на які ділять площину n кіл, побудованих за вказаними в умові задачі правилами, дорівнює $2 + 2 + 2 \cdot 2 + \dots + 2(n - 1) = 2 + 2\{1 + 2 + \dots + (n - 1)\} = 2 + 2 \frac{n(n - 1)}{2} = n^2 - n + 2$.

РОЗДІЛ 3

Основи комбінаторики

На наших очах відбувається включення комбінаторики в русло сучасної математики; цей процес визначається, по-перше, різким оновленням її апарату, до якого поступово підключаються різноманітні теорії і методи з інших областей математики, і по-друге не менш різким розширенням областей застосувань і предмету комбінаторики. Важлива, але не єдина роль в цих змінах належить зміні статусу дискретної математики у зв'язку з появою інформатики, комп'юторики, – ці зміни підсилили інтерес математиків до комбінаторики.

А.М. Вершик⁷

Число підмножин n -елементної множини. Нагадаємо, якщо кожен елемент x , який належить множині A , належить також і множині B , то множина A називається підмножиною множини B ; позначається це так: $A \subset B$.

Поставимо таке питання. Нехай множина X містить n елементів, $N(X) = n$. Скільки різних підмножин має множина X ? Домовимося вважати, що порожня множина $\emptyset$ є підмножиною будь-якої множини.

Приклад 1. Двохелементна множина $X = \{a, b\}$ має такі підмножини: $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{\emptyset\}$. Число всіх підмножин цієї множини дорівнює $4 = 2^2$.

Приклад 2. Трьохелементна множина $X = \{a, b, c\}$ має такі підмножини: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{\emptyset\}$. Число усіх підмножин дорівнює, таким чином, $8 = 2^3$.

⁷А.М. Вершик — відомий російський математик, професор Санкт-Петербурзького університету. Цитату взято з передмови до книги Р. Стенли, Перечислительная комбинаторика, М., Мир, 1990.

Теорема 1. Число усіх підмножин множини X , яка містить n елементів, дорівнює 2^n .

Наведемо декілька доведень цієї важливої теореми.

Перше доведення. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ містить n елементів. Позначимо через q_n число усіх підмножин множини X . Зафіксуємо деякий елемент з X , наприклад, x_1 . Розіб'ємо всі підмножини множини X на два класи K_1 і K_2 . До класу K_1 віднесемо ті підмножини, які містять в собі елемент x_1 , а до класу K_2 підмножини, які не містять x_1 . Клас K_2 — це клас усіх підмножин множини $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Число множин в цьому класі дорівнює q_{n-1} . Очевидно, число підмножин в класі K_1 також дорівнює q_{n-1} , бо кожна підмножина з класу K_1 одержується приєднанням x_1 до деякої множини з класу K_2 . Тому

$$q_n = 2 \cdot q_{n-1}. \quad (1)$$

Повторюючи рівність (1) $(n-1)$ раз, отримаємо $q_n = 2^{n-1} \cdot q_1$. Але множина, що складається з одного елементу, має дві підмножини. Тому $q_1 = 2$. Отже, $q_n = 2^n$.

Друге доведення. Нехай $A \subset X$. Поставимо у відповідність A набір з нулів та одиниць за таким правилом: на k -тому місці цього набору пишемо 1, якщо елемент x_k належить множині A , і нуль, якщо елемент x_k не належить множині A . Отже, кожній підмножині відповідає свій набір нулів та одиниць. Наприклад, порожній підмножині відповідатиме набір складений з n нулів; підмножині $\{x_1, x_n\}$, що містить два елементи з X , відповідатиме набір $(1, 0, \dots, 1)$. Відповідність між підмножинами та наборами з нулів та одиниць є взаємно однозначною. Число всіх можливих наборів, які можна скласти з нулів та одиниць, дорівнює, згідно з правилом множення,

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n\text{-раз}} = 2^n.$$

Тому й число усіх підмножин дорівнює 2^n .

Третє доведення. Поставимо у відповідність кожній підмножині A множини X функцію

$$\phi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A \\ 0, & \text{якщо } x \notin A, \end{cases}$$

означену на множині X із значеннями в множині $\{0, 1\}$. Відображення $\phi_A(x) : X \rightarrow \{0, 1\}$ називають *індикатором*. Число усіх таких відображень згідно з теоремою 3 розділу 2 дорівнює 2^n .

Множину усіх підмножин множини X називають булеаном множини на честь англійського математика Джорджа Буля (1815-1864). Позначають булеан так: 2^X . Ми встановили таким чином, що $N(2^X) = 2^n$.

Задача 1. Скільки є підмножин множини $X = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, які містять принаймні одне парне число?

Розв'язання. Число всіх підмножин множини X дорівнює 2^{2n} . Число підмножин, які не містять жодного парного числа — це число підмножин множини $\{1, 3, \dots, 2n - 1\}$, тобто 2^n . Отже, відповідь

$$2^{2n} - 2^n = 2^n(2^n - 1).$$

Число k -елементних підмножин множини X . Скільки серед всіх підмножин множини X є k -елементних підмножин (підмножин, які містять k елементів)?

Позначимо через C_n^k число k -елементних підмножин множини, яка містить n елементів. Без обчислень можна зазначити, що $C_n^1 = n$, $C_n^k = C_n^{n-k}$ (кожній k -елементній підмножині ми можемо поставити у відповідність її доповнення, і ця відповідність буде взаємно однозначною відповідністю). Розглядаючи уважно приклади 1 та 2, приходимо до висновку $C_2^1 = 2$, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$.

Теорема 2. Число всіх k -елементних підмножин множини, що складається з n елементів, дорівнює

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Зазначимо, що символ $n!$ (читається n -факторіал) позначає добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ всіх натуральних чисел від 1 до n включно. Зручно вважати (ми переконаємося далі, з яких причин), що $0! = 1$.

Доведення. Щоб побудувати k -елементну підмножину множини X треба до $(k-1)$ -елементної підмножини додати один з $n-(k-1)$ елементів, які не входять в цю підмножину. Оскільки число $(k-1)$ -елементних підмножин дорівнює C_n^{k-1} , і кожну з них можна перетворити в k -елементну $n-k+1$ способом, то таким чином, ми дістанемо $(n-k+1)C_n^{k-1}$ підмножин. Але не всі вони будуть різними,

бо кожен k -елементну підмножину можна побудувати k способами: додаванням кожного з її елементів. Тому обчислене нами число в k раз більше, ніж число k -елементних підмножин. Отже,

$$kC_n^k = (n - k + 1)C_n^{k-1},$$

звідки отримуємо рекурентне співвідношення

$$C_n^k = \frac{(n - k + 1)}{k} C_n^{k-1}. \quad (2)$$

Повторимо (проітеруємо) це співвідношення

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{(n - k + 1)}{k} C_n^{k-1} = \frac{(n - k + 1)}{k} \frac{(n - k + 2)}{k - 1} C_n^{k-2} = \dots = \\ &= \frac{(n - k + 1)}{k} \frac{(n - k + 2)}{k - 1} \dots \frac{(n - k + (k - 1))}{k - (k - 2)} C_n^1 = \\ &= \frac{(n - k + 1)(n - k + 2) \dots (n - 1)n}{k(k - 1) \dots 2 \cdot 1}. \end{aligned}$$

Домноживши чисельника і знаменника на $(n - k)!$, отримаємо

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}. \quad (3)$$

Числа C_n^k називаються *біноміальними коефіцієнтами*. Пояснення цієї назви буде дано в наступному параграфі. Довільна k -елементна підмножина n -елементної множини називається *комбінацією елементів з n по k* .

В підручниках з комбінаторики, які не вживають теоретико-множинної термінології, дають таке означення.

Комбінація з n по k — група k предметів з даних n предметів, причому порядок розміщення предметів в групі не є істотним.

Задача 2. Скількома способами з 10 студентів можна обрати делегацію, яка складається з трьох студентів?

Шукане число способів дорівнює числу трьохелементних підмножин в множині з 10 елементів:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Задача 3. Скількома способами з п'яти книг можна обрати три книги?

Шукане число способів дорівнює числу трьохелементних підмножин в множині з п'яти елементів:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10.$$

Задача 4. В скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n -кутника, якщо відомо, що жодні три з них в одній точці не перетинаються.

Зазначимо, що кожній точці перетину відповідає чотири вершини n -кутника, а кожним чотирьом вершинам n -кутника відповідає одна точка перетину (точка перетину діагоналей чотирикутника з вершинами в даних чотирьох точках). Тому число всіх точок перетину дорівнює

$$C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}.$$

Задача 5. Довести, використовуючи лише комбінаторні міркування (тобто не використовуючи (3)), що

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \quad (4)$$

Розв'язання. Нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Зафіксуємо який-небудь елемент, наприклад x_1 . Розіб'ємо всі k -елементні підмножини на два класи K_1 і K_2 . До K_1 віднесемо ті k -елементні підмножини, які містять в собі елемент x_1 ; до K_2 віднесемо ті k -елементні підмножини, які не містять x_1 . Число підмножин, які входять до K_2 , дорівнює C_{n-1}^k , бо кожна така множина є k -елементною підмножиною $(n-1)$ -елементної множини $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Число підмножин, які входять до K_1 , дорівнює C_{n-1}^{k-1} , бо, викинувши з кожної такої множини x_1 , одержимо $(k-1)$ -елементну підмножину множини $\{x_2, \dots, x_n\}$. Отже, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Задача 6. Довести рівність

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n. \quad (5)$$

Розв'язання. Оскільки C_n^k — число k -елементних підмножин множини, яка містить n елементів, то сума, яка стоїть в лівій ча-

стині рівності (5), являє собою число усіх підмножин n -елементної множини ($C_n^0 = 1$ відповідає порожній множині).

Задача 7. Міжнародна комісія складається з 9 осіб. Матеріали комісії зберігаються в сейфі. Скільки замків повинен мати сейф, скільки ключів до них треба виготовити і як їх розподілити серед членів комісії, щоб доступ до сейфу був можливий тоді і тільки тоді, коли збереться не менше 6 членів комісії?

Розглянемо задачу також у випадку, коли комісія складається з n осіб, а сейф можна відкрити, коли збереться не менше m членів комісії.

Розв'язання. Які б $(m - 1)$ членів комісії не зібрались, є замок, який вони не можуть відкрити, але ключ до цього замка повинен бути у кожного з $n - (m - 1) = n - m + 1$ інших членів комісії. Тому число замків C_n^{m-1} , а ключів $C_n^{m-1} \cdot (n - m + 1)$.

Розглянемо випадок $n = 3, m = 2$. Повинно бути C_3^1 — замки, а ключів $C_3^1 \cdot (3 - 2 + 1) = 6$. Позначимо замки літерами A, B, C , ключі до них (до кожного замка — два!) a, a, b, b, c, c . Схему роздачі ключів пояснимо з допомогою таблиці

Номер члена комісії	Замок, який він не може відкрити	Ключі, які є в члена комісії
Перший	A	b, c
Другий	B	a, c
Третій	C	a, b

Задача 8. В опуклому n -кутнику проведено всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин поділиться при цьому многокутник?

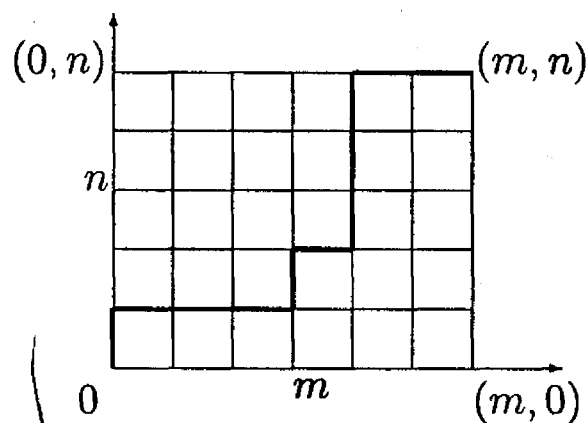
Розв'язання. Будемо проводити діагоналі послідовно і уважно стежити, на скільки збільшується при цьому число частин. На початку маємо одну частину. Проведемо першу діагональ, число частин збільшиться на одиницю. Проведемо другу діагональ так, щоб вона перетнула першу. Утвориться 4 частини, тобто число частин збільшиться на 2. Уважне спостереження показує, що число частин збільшується при кожному проведенні на число діагоналей та число точок перетину, які при цьому з'являються. Отже, число частин, на

які поділиться многокутник дорівнює

$$1 + (\text{число точок перетину}) + (\text{число діагоналей}) =$$

$$= 1 + C_n^4 + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

Геометрична інтерпретація C_n^k . Розглянемо прямокутну сітку квадратів розмірами $m \times n$ ("шахове місто", яке складається з $m \times n$ прямокутних кварталів, поділених $n-1$ "горизонтальними" і $m-1$ "вертикальними" вулицями (рис. 7)). Яке число різних найкоротших доріг на цій сітці, які ведуть з лівого нижнього кута (точки $(0,0)$) в правий верхній кут (точку (m,n))?



(Рис. 7)

Відзначимо, що кожен найкоротший шлях з точки $(0,0)$ в точку (m,n) складається з $m+n$ відрізків, причому серед них є m горизонтальних і n вертикальних відрізків. Обравши вертикальні відрізки, ми повністю визначаємо шлях. Тому загальне число шляхів дорівнює числу способів, якими з $m+n$ відрізків можна вибрати n вертикальних відрізків, тобто C_{m+n}^n .

Можна було розглядати вибір не n вертикальних, а m горизонтальних відрізків, і ми отримали б тоді відповідь C_{m+n}^m . Таким чином, ми встановили рівність $C_{m+n}^n = C_{m+n}^m$, в справедливості якої неважко переконатися, використовуючи рівність (3), і довели таке твердження.

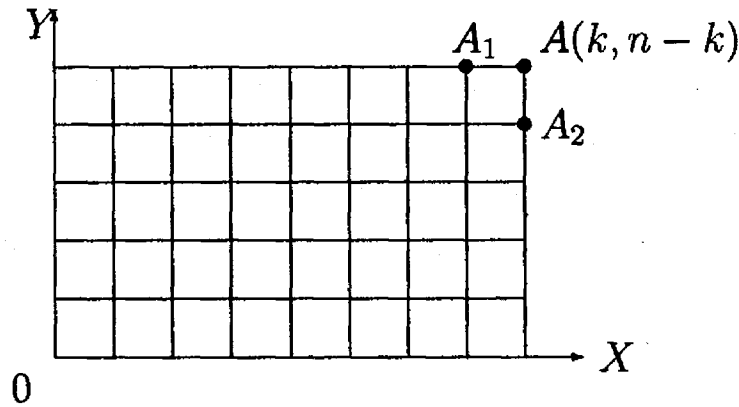
Теорема 3. Число найкоротших шляхів з точки $(0,0)$ в точку (m,n) дорівнює

$$C_{m+n}^m = C_{m+n}^n.$$

Дамо ще одне ("геометричне") доведення рівності

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Число найкоротших шляхів з точки $(0, 0)$ в точку $A = (k, n - k)$ дорівнює $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$ (рис. 8). Всі такі шляхи можна розбити на



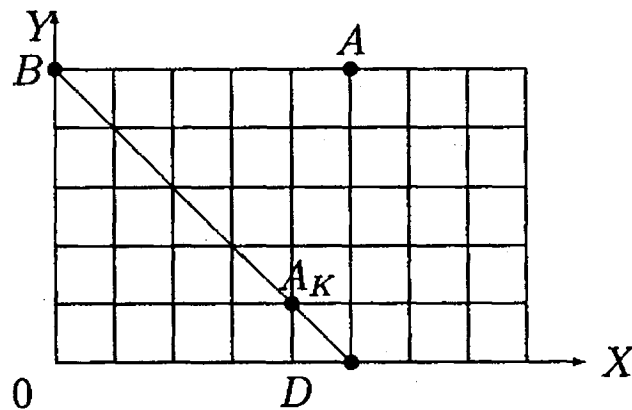
(Рис. 8)

дві групи: шляхи, які проходять через точку $A_1 = (k - 1, n - k)$ (їх число дорівнює $C_{k-1+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$) і шляхи, які проходять через точку $A_2 = (k, n - k - 1)$ (число їх дорівнює $C_{k+(n-k-1)}^k = C_{n-1}^k$).

Задача 9. Довести тотожність

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n. \quad (6)$$

Розв'язання. Підрахуємо число найкоротших шляхів з точки $(0, 0)$ в точку $(n, n) = A$. З однієї сторони це число дорівнює C_{2n}^n . З іншої сторони кожен такий шлях проходить через одну і тільки одну з точок $A_k = (k, n - k)$, $(0 \leq k \leq n)$, які лежать на діагоналі BD (рис. 9). Число шляхів з точки $(0, 0)$ в точку A_k дорівнює



(Рис. 9)

$C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$, а число шляхів з точки A_k в точку A дорівнює $C_{(n-k)+k}^k = C_n^k$. Тому число шляхів з точки $(0, 0)$ в точку A дорівнює $C_n^k \times C_n^k = (C_n^k)^2$. Додавши число шляхів, які проходять через кожен з точок A_k $k = 0, 1, \dots, n$ отримаємо загальну кількість шляхів з точки $(0, 0)$ в точку $A = (n, n)$, тобто C_{2n}^n . Отже, має місце (6).

Впорядковані множини. Перестановки та розміщення.

Означення 1. Множина A називається впорядкованою, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певне число (номер елемента) від 1 до n , де n число елементів множини, так що різним елементам відповідають різні числа.

Кожну скінченну множину можна перетворити у впорядковану, якщо, наприклад, переписати всі елементи множини в деякий список, а потім поставити у відповідність кожному елементу номер місця, на якому він стоїть у списку.

Теорема 4. Множину, яка містить n елементів, можна впорядкувати

$$P_n = n!$$

способами.

Доведення. Нехай є множина A , яка містить n елементів. Будемо послідовно вибирати елементи множини A і розташовувати їх у певному порядку на n місцях. На перше місце можна поставити будь-який з n елементів. Після того, як заповнено перше місце, на друге місце можна поставити будь-який з $(n - 1)$ елементів, які залишились, і так далі. За правилом множення всі n місць можна заповнити способами $n(n - 1) \dots 2 \cdot 1$. Отже, множину A , яка містить n елементів можна впорядкувати $n!$ способами.

Різні впорядкування певної множини називають *перестановками* цієї множини.

Задача 10. Скількома способами можна розташувати на полиці 4 книги?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу способів упорядкування множини, що містить 4 елементи, тобто $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$.

Задача 11. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

Розв'язання. Парні числа можна розставити на місцях з парними номерами (таких місць n) $n!$ способами; кожному способу розташування парних чисел на місцях з парними номерами відповідає $n!$ способів розташування непарних чисел на місцях з непарними номерами. Тому загальне число перестановок вказаного типу згідно з правилом множення дорівнює $(n!) \times (n!) = (n!)^2$.

Задача 12. Скількома способами можна розташувати на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не могли бити одна одну?

Розв'язання. При вказаному розташуванні тур на кожній вертикалі і в кожній горизонталі лише одна тура. Нехай a_1 — номер вертикалі, в якій стоїть тура з першої горизонталі, a_2 — номер вертикалі, в якій стоїть тура з другої горизонталі, ..., a_8 — номер вертикалі, в якій стоїть тура з останньої горизонталі. Тоді $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ є деяка перестановка чисел $1, 2, \dots, 8$. Серед чисел $a_1, a_2, \dots, a_8$ немає жодної пари рівних, бо тоді дві тури потрапили б в одну вертикаль. Отже, кожному розташуванню тур, при яких жодна тура не б'є іншу, відповідає певна перестановка чисел $1, 2, \dots, 8$. Навпаки, кожній перестановці чисел відповідає таке розташування тур, при якому вони не б'ють одна одну. Отже, число шуканих розташувань тур дорівнює $8! = 40320$.

Впорядковані підмножини даної множини (розміщення). Нехай множина A містить n елементів. Скільки різних впорядкованих k -елементних підмножин можна утворити з її елементів?

Приклад 1. Перерахуємо усі двохелементні впорядковані підмножини трьохелементної множини $\{a, b, c\}$: $\{a, b\}$, $\{b, a\}$, $\{a, c\}$, $\{c, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, b\}$.

Означення. Впорядковані k -елементні підмножини називають розміщеннями з n по k .

В підручниках з комбінаторики, які не використовують термінологію з теорії множин, дають таке означення розміщень.

Розміщення з n по k — це групи по k предметів із даних n предметів, причому порядок предметів в групі є істотним.

В прикладі ми перерахували всі розміщення з n по k .

Теорема 5. Число розміщень з n по k дорівнює

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1). \quad (7)$$

Доведення. Будемо конструювати k -елементну підмножину шляхом послідовного вибору елементів: перший елемент може бути обраний n способами, другий — $(n - 1)$ способами, після того як уже обрано $(k - 1)$ елементів, наступний k -ий елемент може бути обраний $n - (k - 1) = n - k + 1$ способами. Тому згідно з правилом множення $A_n^k = n(n - 1) \dots (n - k + 1)$.

Зазначимо, що в англomовній літературі для числа розміщень з n по k вживається таке позначення

$$(n)_k = n(n - 1) \dots (n - k + 1).$$

Теорема 6. *Має місце співвідношення між числом розміщень A_n^k із n по k і числом комбінацій C_n^k з n по k*

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!. \quad (8)$$

Доведення. Розглянемо всі k -елементні підмножини множини A (їх число позначаємо C_n^k). Кожну з них упорядкуємо (це можна зробити $k!$ способами). Тоді ми одержимо всі k -елементні впорядковані підмножини. Отже, $A_n^k = C_n^k \cdot k!$.

Таким чином, ми отримали ще одне зовсім коротке доведення формули для C_n^k :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Задача 13. Скількома способами можна розсадити чотирьох учнів на 25 місцях?

Шукане число способів дорівнює числу розміщень з 25 по 4: $A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$

Задача 14. Студенту треба скласти 4 екзамени впродовж 8 днів. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу 4-елементних впорядкованих підмножин (дні складання екзаменів) множини з 8 елементів, тобто $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ способів. Якщо студент хоче складати останній екзамен на восьмий день, то число способів дорівнює $4 \cdot A_7^3 = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$.

РОЗДІЛ 4

Біном Ньютона та біноміальні тотожності

Існують буквально тисячі тотожностей, які містять біноміальні коефіцієнти, і впродовж віків багато людей їх відкривають. Проте таких співвідношень настільки багато, що, коли хто-небудь відкриває нову тотожність, це вже нікого не хвилює, хіба що тільки самого автора! Для того щоб вміло користуватися формулами при аналізі алгоритмів, обов'язковою умовою є вільне оперування з біноміальними коефіцієнтами, тому в цьому пункті ми спробуємо пояснити просто і зрозуміло, як з ними оперувати. Марк Твен пробував одного разу звести всі анекдоти до дюжини основних типів (про дочку фермера, про тещу і т.д.); ми ж спробуємо сконцентрувати тисячі тотожностей в один невеликий набір основних операцій, з допомогою яких ми можемо розв'язати майже будь-яку задачу відносно біноміальних коефіцієнтів.

Д. Кнут. Искусство программирования для ЭВМ, с. 85

Біном Ньютона. Відомо, що

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (1)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (2)$$

Як розкрити дужки при обчисленні виразу $(a + b)^n$, коли натуральне число $n > 3$? Відповідь на це питання дає така теорема.

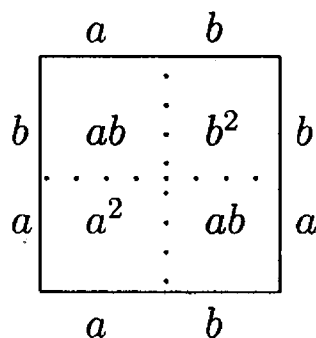
Теорема 1. Має місце рівність

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4)$$

Цю теорему називають біноміальною теоремою, а числа C_n^k – біноміальними коефіцієнтами. Рівність (3) часто називають біномом Ньютона (1643-1727), хоча ця назва історично не є справедливою. Формулу (1) знали ще математики древнього Вавилону. Древньогрецькі математики придумали для неї красиву геометричну інтерпретацію.



(Рис. 10)

Формулу (3) в XI - XII століттях знали східні математики, зокрема Омар Хайям (1048 - 1131). Детальне вивчення біноміальних коефіцієнтів провів в 1654 році французький математик Блез Паскаль (1623-1662). Заслуга Ньютона в тому, що в 1664-1665 роках він встановив, що формула (3) узагальнюється для довільного показника (дробового та від'ємного), але при цьому в правій частині з'являється нескінченне число доданків (ряд). Ряд Ньютона для $(1+x)^{\alpha}$ ми розглянемо в розділі 9 і будемо використовувати його при розв'язанні комбінаторних задач.

Доведення теореми 1. Перемножимо $(a+b)$ n раз

$\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n\text{-раз}}$, розкриваючи дужки. Тоді одержимо су-

му добутоків виду $d_1 d_2 \dots d_k \dots d_n$, в яких кожне d_k дорівнює або a або b (a , якщо з k -ої дужки взяли a ; b , якщо з k -ої дужки взяли b). Проведемо далі операцію зведення подібних членів. Розіб'ємо всі доданки на $(n+1)$ групу $B_0, B_1, \dots, B_n$, відносячи до B_k ті доданки виду $b^k a^{n-k}$, в яких b зустрічається рівно k раз, а a — $(n-k)$ раз. Число доданків в групі B_k дорівнює C_n^k (таким числом способів серед n множників $d_1, d_2, \dots, d_n$ можна вибрати k множників, які дорівнюють b). Отже,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Як ведуть себе числа C_n^k при фіксованому n і зростанні k ? Сподіваємось, що при зростанні k до середини рядка числа C_n^k зростають, а потім спадають.

Теорема 2. При $k < \frac{n-1}{2}$ $C_n^{k+1} > C_n^k$, а при $k > \frac{n-1}{2}$ $C_n^{k+1} < C_n^k$. Найбільшим серед чисел C_n^k ($k = 0, 1, \dots, n$) є число $C_n^{\frac{n}{2}}$ (якщо n парне) та $C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$ (якщо n непарне).

Доведення. Відзначимо, що

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Якщо $k < \frac{n-1}{2}$, то $\frac{n-k}{k+1} > 1$ і $C_n^{k+1} > C_n^k$. Якщо ж $k > \frac{n-1}{2}$, то $\frac{n-k}{k+1} < 1$ і $C_n^{k+1} < C_n^k$. Таким чином, при фіксованому n біноміальні коефіцієнти спочатку зростають, а потім спадають. Якщо n непарне ($n = 2m + 1$) число, то найбільших біноміальних коефіцієнтів два $C_n^m = C_n^{m+1}$; якщо ж n — парне число ($n = 2m$), то найбільшим є коефіцієнт C_{2m}^m . Радимо читачеві ще раз поглянути на трикутник Паскаля.

Найважливіші біноміальні тотожності. Існує надзвичайне розмаїття тотожностей біноміальних коефіцієнтів. Встановимо деякі тотожності, які найбільш часто використовуються і тому є найважливішими.

Теорема 3. Має місце рівність

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}. \quad (9)$$

Доведення. Рівність (9) іноді називають *правилом винесення* за знак біноміального коефіцієнта. Рівність випливає з представлення C_n^k (рівність 4) через факторіали. Маємо

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$$

Задача 1. Довести тотожність

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = n 2^{n-1}. \quad (10)$$

Розв'язання. Скористаємося правилом винесення за знак біноміального коефіцієнта. Маємо

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1}.$$

Зробимо заміну індексу, поклавши $k - 1 = r$. Матимемо

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = n \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r = n 2^{n-1}$$

(ми використали рівність (5)).

Задача 2. Довести, що

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k C_n^k = 0. \quad (11)$$

Розв'язання. Використаємо (9). Отримаємо

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} (-1)^{k-1}.$$

Після заміни індексу $k - 1 = r$, будемо мати

$$n \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r (-1)^r = 0$$

(ми використали рівність (6)).

Задача 3. Довести, що

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}. \quad (12)$$

Згідно з правилом винесення за знак біноміального коефіцієнта

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k.$$

Тому

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \times \frac{k+1}{n+1} C_{n+1}^{k+1} =$$

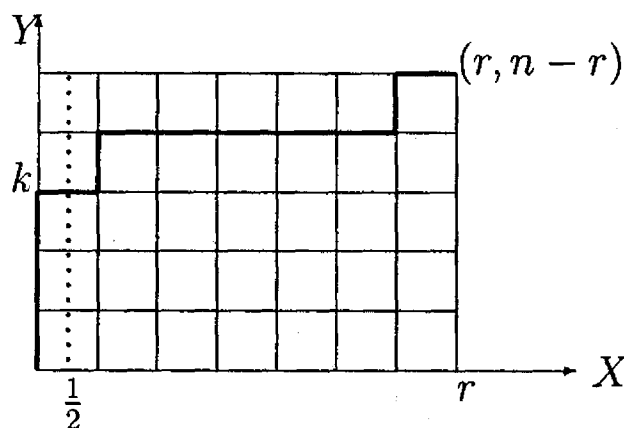
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) = \\
&= \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+1}^{n+1} - C_{n+1}^0) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}
\end{aligned}$$

(ми використали рівність (5)).

Теорема 4. *Має місце рівність*

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \dots + C_{r-1}^{r-1} = \sum_{k=0}^{n-r} C_{n-k-1}^{r-1}. \quad (13)$$

Доведення. Дамо геометричне доведення, використовуючи геометричну інтерпретацію біноміальних коефіцієнтів. Розглянемо всі найкоротші шляхи з точки $(0, 0)$ в точку $(r, n-r)$. Розіб'ємо всі ці шляхи на n класів $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$, відносячи до класу B_k ті шляхи, які перетинають пряму $x = 1/2$ в точці $(1/2, k)$, $(k = 0, 1, \dots, n-1)$. Очевидно, до класу B_k входить C_{n-k-1}^{r-1} шляхів (рис. 11). Тому



(Рис. 11)

виконується рівність (13). Якщо замінити в рівності (13) r на $r+1$, а n на $n+1$, то отримаємо рівність

$$C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_{n-1}^r + \dots + C_r^r = \sum_{k=0}^{n-r} C_{n-k}^r. \quad (14)$$

Замінивши в (14) $n-k$ на s , матимемо рівність

$$C_{n+1}^{r+1} = \sum_{s=r}^n C_s^r. \quad (15)$$

Теорема 5. Має місце рівність

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i C_m^{k-i}. \quad (16)$$

Перше доведення. Всі k -елементні підмножини множини $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m}\}$ (число їх дорівнює C_{n+m}^k) розіб'ємо на $k+1$ класів $V_0, V_1, \dots, V_k$, відносячи до класу V_i всі ті підмножини, які містять рівно i елементів з індексами не більшими, ніж n . Кожну підмножину з класу V_i можна дістати, приєднуючи до деякої i -елементної підмножини множини $\{a_1, \dots, a_n\}$ $(k-i)$ -елементну підмножину множини $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+m}\}$. Тому клас V_i містить $C_n^i C_m^{k-i}$ підмножин. Отже, виконується рівність (16). При $k = m = n$ з (16) отримуємо

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n. \quad (17).$$

Друге доведення. При доведенні використаємо таке зауваження: якщо два многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ при всіх x рівні, то коефіцієнти цих многочленів при однакових степенях співпадають. Справді, якщо $P(x) = Q(x)$ при всіх x , а коефіцієнти при деякому степені x неоднакові, то $P(x) - Q(x)$ буде многочленом з ненульовими коефіцієнтами, що має безліч коренів, а це суперечить основній теоремі алгебри.

Запишемо рівність

$$(1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^{n+m}. \quad (18)$$

Використовуючи формулу бінома Ньютона, переконуємося, що коефіцієнт при x^k в правій частині рівності дорівнює C_{n+m}^k , а коефіцієнт при x^k в лівій частині рівності має вигляд

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0.$$

Отже, рівність (16) виконується.

Рівність (16) іноді називають *композицією* (рос. термін *свертка*) *Вандермонда* за іменем французького математика Августа Вандермонда (1735-1796), який її встановив у 1772 році.

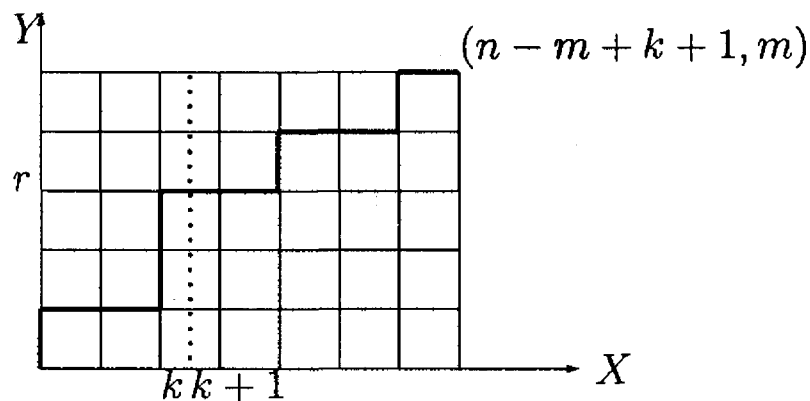
Третє доведення тотожності (16). Уявимо собі, що з групи, яка містить n чоловіків та m жінок, ми обираємо k осіб. Ми можемо

це зробити C_{n+m}^k способами (ліва частина тотожності). Всі такі компанії з k осіб можна класифікувати за кількістю чоловіків; i чоловіків з множини n чоловіків можна обрати C_n^i способами; приєднати до них групу з $(k-i)$ жінок з множини m можна C_m^{k-i} способами. Отже, число тих компаній, де є рівно i чоловіків, дорівнює $C_n^i C_m^{k-i}$ ($i = 0, 1, \dots, k$). Звідси й випливає справедливність тотожності (16).

Задача 4. Довести, що

$$C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + \dots + C_{n-m}^0 C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m. \quad (19)$$

Розв'язання. Скористаємося геометричною інтерпретацією C_n^k . Розглянемо всі найкоротші шляхи, які ведуть з точки $(0, 0)$ в точку $(n-m+k+1, m)$. Розіб'ємо всі ці шляхи на класи $L_0, L_1, \dots, L_m$, відносячи до класу L_r всі ті шляхи, які перетинають пряму $x = k + \frac{1}{2}$ в точці $(k + \frac{1}{2}, r)$ (рис. 12).



(Рис. 12)

Кожен шлях з L_r складається з трьох частин (шляху з точки $(0, 0)$ в точку (k, r) , горизонтального відрізка, який сполучає точки (k, r) і $(k+1, r)$, та шляху з точки $(k+1, r)$ в точку $(n-m+k+1, r)$). Тому загальне число шляхів, які входять до L_r , дорівнює $C_{k+r}^r C_{n-r}^{m-r}$. Загальне число шляхів з $(0, 0)$ в $(n-m+k+1, m)$ дорівнює C_{n+k+1}^m . Отже, (19) має місце.

Мала теорема Ферма. Уважно розглядаючи трикутник Паскаля, ви не могли не помітити таку цікаву обставину: якщо номер рядка n є простим числом $n = p$, то всі біноміальні коефіцієнти, крім крайніх двох, які рівні 1, діляться на p . (Перевірте це для $n = 3, n = 5, n = 7$!) Має місце таке твердження.

Теорема 6. Якщо p — просте число, то кожне з чисел $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^{p-1}$ ділиться на p .

Доведення. Нехай $1 \leq r \leq p-1$. Розглянемо

$$C_p^r = \frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{r!} = p \frac{(p-1)\dots(p-r+1)}{r!}.$$

Оскільки p — просте число і $1 \leq r \leq p-1$, то p не може ділитися на $r!$. Таким чином, $(p-1)\dots(p-r+1)$ ділиться на $r!$, а $C_p^r = p \frac{(p-1)\dots(p-r+1)}{r!}$ — ділиться на p .

З теореми 6 випливає так звана мала теорема Ферма, яка грає важливу роль в теорії чисел, алгебрі, комбінаториці. Ми розглянемо спочатку два часткових випадки цієї теореми, представлені у вигляді задач.

Задача 5. Довести, що при кожному натуральному n $n^3 - n$ ділиться на 3.

Розв'язання. Доведемо сформульоване твердження методом математичної індукції. При $n = 1$ $n^3 - n = 0$ ділиться на 3. Нехай твердження задачі справедливе при $n = k$: $k^3 - k$ ділиться на 3. Доведемо, що тоді воно справедливе і при $n = k + 1$. Маємо

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + 3k(k+1)$$

ділиться на 3, бо за припущенням індукції $k^3 - k$ ділиться на 3.

Задача 6. Довести, що при кожному натуральному n $n^5 - n$ ділиться на 5.

Розв'язання. Знову використаємо метод математичної індукції. При $n = 1$ твердження задачі справедливе: $n^5 - n = 0$ ділиться на 5. Припустимо, що при $n = k$: $k^5 - k$ ділиться на 5. Доведемо, що $(k+1)^5 - (k+1)$ ділиться на 5. Справді,

$$\begin{aligned} (k+1)^5 - (k+1) &= (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - (k+1) = \\ &= (k^5 - k) + 5k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

ділиться на 5, бо $k^5 - k$ ділиться на 5 за припущенням індукції.

Теорема 7. (Мала теорема Ферма) Якщо p просте число, то при будь-якому натуральному n число $n^p - n$ ділиться на p .

Доведення. При $n = 1$ число $n^p - n$ ділиться на p . Припустимо, що $k^p - k$ ділиться на p , і доведемо, що $(k+1)^p - (k+1)$ ділиться

$$(k+1)^p - (k+1) = k^p + \sum_{r=1}^{p-1} C_p^r k^r + 1 - (k+1) = (k^p - k) + \sum_{r=1}^{p-1} C_p^r k^r$$

ділиться на p , бо $k^p - k$ ділиться на p за припущенням індукції, а при кожному $1 \leq r \leq (p-1)$ ділиться на p в силу теореми 6. Отже, теорема 7 доведена.

Шпернерові сімейства та теорема Шпернера. Нехай X — множина, що містить n елементів.

Означення 1. Набір $\mathcal{F}$ підмножин з X будемо називати *шпернеровим сімейством*, побудованим на множині X , якщо будь-які дві множини з $\mathcal{F}$ не містять одна одну.

Приклад 1. Нехай $X = \{a, b\}$. Набір $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$ є шпернеровим сімейством, а набір $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{a, b\}$, не є шпернеровим сімейством, бо $A_1 \subset A_2$.

Приклад 2. Нехай $X = \{a, b, c\}$ — трьохелементна множина. Тоді набори підмножин:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &: \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ \mathcal{F}_2 &: \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \\ \mathcal{F}_3 &: \{a\}, \{b, c\}, \\ \mathcal{F}_4 &: \{a, b, c\}\end{aligned}$$

є шпернеровими сімействами. Ці сімейства є *максимальними шпернеровими сімействами*: до кожного з цих сімейств не можна приєднати ще одну підмножину так, щоб отримане сімейство було шпернеровим. Сімейство

$$\mathcal{F}_5 : \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

не є шпернеровим.

Має місце теорема.

Теорема 8. Нехай $\mathcal{F} : A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ — шпернерове сімейство, побудоване на n -елементній множині. Тоді

$$m \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}. \quad (20)$$

В дійсності має місце більш загальне твердження.

Теорема 9. (Ямамото-Любеля-Мешалкіна.) Якщо $\mathcal{F}$ -шпернерове сімейство

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{C_n^{N(A)}} \leq 1. \quad (21)$$

Для кожної підмножини $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ позначимо через $\rho(A)$ сукупність усіх тих перестановок чисел $\{1, 2, \dots, n\}$, початковий відрізок яких утворюють елементи A . Число цих перестановок дорівнює $N(A)(n - N(A))$. Умова Шпернера рівносильна тому, що множини $\rho(A)$, $A \in \mathcal{F}$ попарно не перетинаються. Тому

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} N(A)(n - N(A)) \leq n!$$

Звідси випливає (21). Оскільки $C_n^{N(A)} \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, то з (21) випливає (20).

Задача 7. Нехай $A_1, \dots, A_m$ різні підмножини множини X , причому $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Довести, що $m \leq 2^{n-1}$.

Розв'язання. Розглянемо сімейство підмножин

$$A_1, \dots, A_m, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m.$$

В цьому сімействі немає однакових підмножин, тому $2m \leq 2^n$, звідки $m \leq 2^{n-1}$. Межа 2^{n-1} є точною. Щоб переконатися в цьому досить зафіксувати елемент $a \in X$ і розглянути сімейство всіх підмножин X , які містять цей елемент, їх буде рівно 2^{n-1} .

Задача 8. Нехай канонічний розклад числа n на прості множники має вигляд $n = p_1 p_2 \dots p_r$, а m максимальне число дільників числа n , які не ділять один одного. Довести, що

$$m \leq C_r^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}.$$

Розв'язання. Нехай $X = \{1, 2, \dots, r\}$. Кожному дільнику числа n , який має вигляд $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}$, $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_s$, поставимо у відповідність підмножину $A_s = \{i_1, \dots, i_s\}$ множини X . Отримаємо сімейство підмножин $A_1, A_2, \dots, A_m$. Оскільки дільники не ділять один одного, то $A_i \subset A_j$, $i \neq j$ тобто $A_1, A_2, \dots, A_m$ є сімейством Шпернера і $m \leq C_r^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}$.

Відзначимо декілька нерозв'язних проблем, сформульованих знаменитим угорським математиком Полем Ердьошем.

Нерозв'язана проблема 2. Скільки різних Шпернерових сімейств можна побудувати на множині X , яка містить n елементів? Вказати оцінки для числа шпернерових сімейств знизу та зверху.

Нерозв'язана проблема 3. Яку максимальну кількість підмножин $A_1, \dots, A_k$ множини X можна вибрати так, щоб об'єднання будь-яких двох підмножин не містило третю?

Нерозв'язана проблема 4. Яку максимальну кількість підмножин $A_1, \dots, A_k$ множини X можна вибрати так, щоб об'єднання не збігалось з третьою підмножиною?

Нерозв'язана проблема 5. Яку максимальну кількість підмножин $A_1, \dots, A_k$ можна сконструювати таким чином, щоб симетрична різниця довільних двох підмножин містила принаймні r елементів? Нагадаємо, що симетричною різницею множин A та B називається об'єднання двох множин $A \setminus B$ та $B \setminus A$.

Нерозв'язана проблема 6. (Проблема Адамара) Розглянемо множину усіх квадратних $n \times n$ матриць із елементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0. \end{cases}$$

Для кожної матриці обчислимо визначник $|A|$. Чому дорівнює найбільше з чисел $\{|A|\}$?

Нерозв'язана проблема 7.

Ті ж питання для множини матриць, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ -1. \end{cases}$$

Нерозв'язана проблема 8.⁸ Довести, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (C_{2n}^n)^{-1} = \frac{17}{36} \zeta(4).$$

Тут

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, (s > 1).$$

⁸Проблему подаємо за матеріалами статті О.К. Толпиги "Колекція нерозв'язаних проблем", У світі математики, т.3, в.3 (1997).

Зауважимо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_{2n}^n)^{-1} = \frac{2\pi\sqrt{3} + 9}{27},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (C_{2n}^n)^{-1} = \frac{1}{3}\zeta(2),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} (C_{2n}^n)^{-1} = \frac{2}{3}\zeta(3).$$

Результат для $\zeta(4)$ перевірено чисельно. Автором проблеми є Альф ван дер Портен.

РОЗДІЛ 5

Перестановки та комбінації з повтореннями

*Страшні слова, коли вони мовчать,
коли вони зненацька причаїлись,
коли не знаєш, з чого їх почать,
бо всі слова були уже чиймись.
Хтось ними плакав, мучився, болів
із них почав і ними ж і завершив.
Людей мільярди, і мільярди слів,
а ти їх маєш вимовити вперше!
Все повторялось: і краса, й потвор-
ність.
Усе було: асфальти й спориші.
Поезія — це завжди неповторність,
якийсь безсмертний дотик до душі.*

Ліна Костенко

Перестановки з повтореннями. Розглянемо множину A , яка містить n елементів. Поставимо таке питання: Скількома способами можна представити множину A у вигляді об'єднання множин B_1 і B_2 таких, що $N(B_1) = k_1$, $N(B_2) = k_2$ ($B_1 \cap B_2 = \emptyset$; $k_1 + k_2 = n$)?

Множину B_1 ми можемо обрати $C_n^{k_1}$ способами; до множини B_2 зараховуємо $n - k_1 = k_2$ елементів, які залишилися після вибору B_1 . Таким чином, шукане число способів дорівнює

$$C_n^{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n - k_1)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!}.$$

Наступне питання. Скількома способами можна представити множину A у вигляді об'єднання m підмножин

$$A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m$$

так, щоб $N(B_1) = k_1$, $N(B_2) = k_2, \dots, N(B_m) = k_m$, де $k_1, k_2, \dots, k_m$ дані числа ($k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots, k_m \geq 0$; $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$)? Множини $B_1, B_2, \dots, B_m$ не повинні мати спільних елементів. Всі описані вище розбиття множини A на m груп можна побудувати так: візьмемо довільну k_1 -елементну підмножину B_1 множини A (це можна

зробити $C_n^{k_1}$ способами); з $n - k_1$ елементів, які залишились, утворимо k_2 -елементну підмножину B_2 (це можна зробити $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами) і т.д. Загальне число способів вибору m множин за правилом множення дорівнює

$$\begin{aligned} & C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdots C_{n-k_1-k_2-\cdots-k_{m-1}}^{k_m} = \\ &= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} \times \cdots \\ & \times \frac{(n-k_1-k_2-\cdots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-k_2-\cdots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \end{aligned}$$

(нагадаємо, що $0! = 1$).

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 1. Нехай $k_1, k_2, \dots, k_m$ — цілі невід'ємні числа, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Число способів, якими можна представити множину A , яка містить n елементів, у вигляді об'єднання множин, число елементів яких становить відповідно $k_1, \dots, k_m$, дорівнює

$$C_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}. \quad (1)$$

Числа $C_n(k_1, \dots, k_m)$ називаються поліноміальними коефіцієнтами. В англійській літературі вони позначаються так

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}.$$

Задача 1. Скількома способами можна розселити 8 студентів в трьох кімнатах: одномісній, трьохмісній і кімнаті на чотири місця?

Відповідь: розселення можна здійснити

$$C_8(1, 3, 4) = \frac{8!}{1!3!4!} = 280.$$

способами.

Задача 2. Скількома способами четверо юнаків можуть запросити до танцю чотирьох із шести дівчат?

Відповідь: шукане число способів дорівнює

$$C_6(1, 1, 1, 1, 2) = \frac{6!}{1!1!1!1!2!} = 360.$$

Задача 3. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви в слові *мама*?

Розв'язання. Перенумеруємо номери місць на яких стоять букви: $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Слово визначене, якщо вказані номери місць, де стоїть буква *м*, і номери місць, де стоїть буква *а*. Нехай B_1 — множина номерів тих місць, де стоїть буква *м*, B_2 — множина номерів місць, де стоїть буква *а*. Тоді $A = \{1, 2, 3, 4\} = B_1 \cup B_2$. Складемо таку таблицю, в якій будуть міститися усі можливі слова

B_1	1	2	3	4
$\{1,2\}$	<i>м</i>	<i>м</i>	<i>а</i>	<i>а</i>
$\{1,3\}$	<i>м</i>	<i>а</i>	<i>м</i>	<i>а</i>
$\{1,4\}$	<i>м</i>	<i>а</i>	<i>а</i>	<i>м</i>
$\{2,3\}$	<i>а</i>	<i>м</i>	<i>м</i>	<i>а</i>
$\{2,4\}$	<i>а</i>	<i>м</i>	<i>а</i>	<i>м</i>
$\{3,4\}$	<i>а</i>	<i>а</i>	<i>м</i>	<i>м</i>

Як бачимо, число різних слів, які можна утворити, переставляючи букви в слові *мама*, дорівнює числу представлень множини $A = \{1, 2, 3, 4\}$ у вигляді об'єднання двох множин B_1 і B_2 таких, що $N(B_1) = 2$, $N(B_2) = 2$, тобто дорівнює $\frac{4!}{2!2!} = 6$.

Розглянемо більш загальну ситуацію. Нехай маємо k_1 букв a_1 , k_2 букв a_2 , $\dots$, k_m букв a_m , $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Підрахуємо, скільки різних слів можна утворити з цих букв. Перенумеруємо місця, на яких стоять букви, числами $1, 2, \dots, n$. Кожне слово визначається множинами B_1 (номери місць, де стоїть буква a_1), B_2 (номери місць, де стоїть буква a_2), $\dots$, B_m (номери місць, де стоїть буква a_m). Тому число різних слів дорівнює числу способів, якими можна представити множину $A = \{1, 2, \dots, n\}$ у вигляді об'єднання множин $B_1, \dots, B_m$, тобто дорівнює

$$C_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}.$$

Приклад 1. Число різних слів, які дістанемо, переставляючи літери в слові *математика*, дорівнює $\frac{10!}{2!3!2!} = 151200$.

Звичайно, можна говорити не про букви, а про предмети різних типів. Твердження, сформульоване вище, можна сформулювати так.

Теорема 2. Число різних перестановок n предметів, серед яких є k_1 предметів першого типу, k_2 предметів другого типу, $\dots$, k_m предметів m -того типу, дорівнює

$$C_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Наведемо ще одне доведення цієї теореми. Позначимо через $C_n(k_1, \dots, k_m)$ число усіх перестановок описаного в умові теореми типу. Розглянемо одну перестановку і замінимо в ній однакові предмети різними. Тоді число усіх перестановок, які можна утворити з розглянутої нами перестановки, дорівнює $k_1! k_2! \dots k_m!$. Зробивши це для кожної перестановки, дістанемо $n!$ перестановок. Отже,

$$C_n(k_1, \dots, k_m) k_1! k_2! \dots k_m! = n!,$$

звідки

$$C_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Задача 4. Скільки різних сигналів можна скласти, змінюючи порядок семи прапорців: одного червоного, двох синіх, трьох зелених і одного білого?

Відповідь: шукане число сигналів дорівнює

$$C_7(1, 2, 3, 1) = \frac{7!}{1! 2! 3! 1!} = 420.$$

Комбінації з повтореннями. Комбінаціями з m по n з повтореннями будемо називати групи, що містять n предметів, причому кожен предмет належить до одного з m типів, а порядок розташування предметів в групі не є істотним.

Число усіх можливих комбінацій з m по n з повтореннями позначимо f_m^n . Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 2. Нехай типи предметів a і b , $n = 2$. Тоді комбінації з повторенням мають вигляд aa, ab, bb . Отже, безпосереднім підрахунком переконуємося, що $f_2^2 = 3$.

Приклад 3. Нехай типи предметів a і b , $n = 3$. Комбінації з повторенням мають вигляд aaa, aab, abb, bbb . Таким чином, $f_2^3 = 4$.

Приклад 4. Нехай типи предметів a, b, c ; $m = 3, n = 2$. Комбінації з трьох по два мають вигляд: aa, ab, ac, bb, bc, cc . Отже, $f_3^2 = 6$.

Приклад 5. Комбінації з трьох по чотири ($m = 3$; типи a, b, c ; $n = 4$) мають вигляд:

$aaaa \quad aaab \quad aaac \quad aabb \quad aabc$
 $aacc \quad abbb \quad abbc \quad abcc \quad accc$
 $bbbb \quad bbbc \quad bbcc \quad bccc \quad cccc$.

Таким чином, $f_3^4 = 15$.

Теорема 3. Число усіх комбінацій з m по n з повтореннями дорівнює

$$f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n. \quad (2)$$

Доведення. Кожна комбінація повністю визначається, якщо вказати, скільки предметів кожного з m типів в неї входить. Поставимо у відповідність кожній комбінації набір з нулів та одиниць, утворений за таким правилом: напишемо підряд стільки одиниць, скільки предметів першого типу входить в комбінацію, далі поставимо нуль і після нього напишемо стільки одиниць, скільки предметів другого типу містить ця комбінація і т.д. Проілюструємо алгоритм для комбінацій з прикладів 2 і 3.

Приклад 6. ($n = 3, m = 2$)

$aaa \longleftrightarrow 1110$
 $aab \longleftrightarrow 1101$
 $abb \longleftrightarrow 1011$
 $bbb \longleftrightarrow 0111$.

Приклад 7. ($n = 2, m = 3$)

$aa \longleftrightarrow 1100$
 $ab \longleftrightarrow 1010$
 $ac \longleftrightarrow 1001$
 $bb \longleftrightarrow 0110$
 $bc \longleftrightarrow 0101$
 $cc \longleftrightarrow 0011$.

Таким чином, кожній комбінації з m по n відповідає набір з n одиниць та $m - 1$ нулів і, навпаки, за кожним таким набором однозначно відновлюється комбінація. Тому число комбінацій з m по n з повтореннями дорівнює числу наборів довжини $n + m - 1$, які складаються з n одиниць та $m - 1$ нулів, тобто дорівнює $C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n$.

Приклад 6. Кості з доміно є комбінаціями з повтореннями з семи цифр 0,1,2,3,4,5,6 по 2. Число усіх таких комбінацій дорівнює

$$f_7^2 = C_{2+7-1}^2 = C_8^6 = C_8^2 = 28.$$

Розглянемо ще декілька застосувань теореми 3.

Теорема 4. Число цілих невід'ємних розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n \quad (3)$$

дорівнює $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n$.

Доведення. Існує взаємно однозначна відповідність між розв'язками рівняння (3) та комбінаціями з m предметів по n . Якщо маємо невід'ємні цілі числа $x_1, x_2, \dots, x_m$, які задовольняють рівнянню (3), то можемо утворити комбінацію з m по n , взявши x_1 предметів першого типу, x_2 предметів другого типу, ..., x_m m -того типу. Навпаки, маючи комбінацію з m предметів по n з повтореннями, дістанемо розв'язок рівняння (3) (x_1 — число предметів першого типу, x_2 — число предметів другого типу, ..., x_m — число предметів m -того типу).

Тому число цілих невід'ємних розв'язків рівняння (3) дорівнює $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n$.

Теорема 5. Число цілих додатних розв'язків рівняння

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_m &= n \\ (x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_m > 0) \end{aligned} \quad (4)$$

дорівнює C_{n-1}^{m-1} .

Доведення. Зазначимо, що $m \leq n$ є необхідною умовою існування розв'язку рівняння (4).

Відніmemo від обох частин рівняння (4) m . Отримаємо

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_m - 1) = n - m.$$

Покладемо $x_i - 1 = y_i$. Тоді $y_i \geq 0$ і $y_1, \dots, y_m$ є невід'ємними розв'язками рівняння

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m = n - m.$$

Згідно з теоремою 4 число невід'ємних розв'язків цього рівняння дорівнює $C_{(n-m)+m-1}^{m-1} = C_{n-1}^{m-1}$.

Задача 5. Скількома способами можна вибрати 3 букви з 12 букв А, А, А, Т, Т, Т, Г, Г, Г, Ц, Ц, Ц?

Розв'язання. Маємо справу з комбінаціями з повтореннями: $m = 4$ (чотири типи предметів А, Т, Г, Ц), а $n = 3$. Тому шукане число $f_4^3 = C_{3+4-1}^3 = C_6^3 = 20$.

Задача має відношення до теорії білкового коду, запропонованої американським фізиком російського походження Г. Гамовим. Букви А, Т, Г, Ц позначають нуклеотиди: аденін, тимін, гуанін, цитозин. Число трійок нуклеотидів дорівнює 20 — числу стандартних амінокислот, на які розкладається молекула білка.

Задача 6. Скільки різних часткових похідних порядку n має нескінченно диференційована функція m змінних?

Розв'язання. Часткові похідні порядку n нескінченно диференційованої функції не залежать від порядку диференціювання, а залежать лише від того, скільки раз ми диференціюємо по кожній змінній. Якщо за першою змінною диференціювати k_1 раз, за другою — k_2 раз, ..., за m -ою k_m раз ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$), то отримаємо часткову похідну

$$\frac{\partial^n f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}.$$

Тому число різних часткових похідних дорівнює числу невід'ємних розв'язків рівняння (3), тобто дорівнює $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}$.

Наприклад, функція трьох змінних має 15 різних похідних четвертого порядку.

Розміщення частинок в комірках (модель Максвелла-Больцмана і модель Бозе-Ейнштейна). Розглянемо застосування отриманих вище результатів до питань розміщення частинок в комірках. Ці питання грають важливу роль в статистичній фізиці.

Теорема 6. Нехай n частинок, які можна розрізнити, розподілені в m комірках (областях простору).

Тоді число всіх можливих розміщень частинок дорівнює m^n . Число таких розміщень, при яких у першій комірці знаходиться k_1 частинок, у другій — k_2 частинок, ..., у m -ій — k_m частинок

дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}.$$

Доведення. Перенумеруємо комірки номерами $1, 2, \dots, m$ і частинки номерами $1, 2, \dots, n$. Розташування частинок визначене, якщо кожній частинці з номером k вказано номер i_k комірки, де вона знаходиться. Таким чином, розташування частинок описується набором $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, де кожне i_k може набувати одного з m значень $1, 2, \dots, m$. Число таких наборів згідно з правилом множення дорівнює

$$\underbrace{m \cdot m \dots m}_{n \text{ раз}} = m^n.$$

Отже, число усіх можливих розміщень частинок дорівнює m^n .

Нехай B_1 — множина номерів частинок, які потрапили в першу комірку, B_2 — множина номерів частинок з другої комірки, ..., B_m — множина номерів частинок з m -ої комірки. Тоді

$$\{1, 2, \dots, n\} = \cup_{i=1}^m B_i.$$

Згідно з теоремою 1 число тих розміщень частинок, при яких у першій комірці k_1 частинок, у другій k_2 частинок, ..., у m -ій комірці k_m частинок дорівнює $C_n(k_1, \dots, k_m)$.

Розглянута нами модель розміщення частинок в статистичній фізиці називається моделлю Максвелла-Больцмана.

Наслідок 1.

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} C_n(k_1, \dots, k_m) = m^n. \quad (5)$$

Уявимо тепер, що ми розглядаємо розміщення однакових частинок.

Теорема 7. Нехай n однакових частинок розміщені в m комірках. Тоді число всіх можливих розміщень частинок дорівнює $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n$. Число тих розміщень, при яких в кожній комірці є принаймні одна частинка, дорівнює C_{n-1}^{m-1} .

Доведення. Оскільки частинки не розрізняються, число розміщень частинок визначається набором $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, де x_i — число частинок в i -ій комірці, тобто число розміщень частинок дорівнює числу невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$. Обидва твердження впливають з тверджень теорем 3 та 4 відповідно.

Модель розміщення частинок, яку ми розглянули, називається моделлю Бозе-Ейнштейна.

Поліноміальна теорема. Розглянемо питання про те, як розкривати дужки при обчисленні виразу виду $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$.

Теорема 8. (Поліноміальна теорема.) Вираз

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$$

дорівнює сумі всіх можливих доданків виду

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m},$$

де $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, тобто

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}. \quad (6)$$

Доведення. Перемножимо $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ послідовно m раз. Тоді одержимо m^n доданків виду $d_1 d_2 \dots d_m$, де кожен множник дорівнює або a_1 , або $a_2, \dots$, або a_m . Позначимо через $B(k_1, k_2, \dots, k_m)$ сукупність усіх тих доданків, де a_1 зустрічається множителем k_1 раз, a_2 зустрічається множителем k_2 раз, $\dots$, a_m зустрічається множителем k_m раз. Число таких доданків дорівнює $C_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ — числу способів представлення множини $\{1, 2, \dots, n\}$ у вигляді суми m множин так, щоб множина B_s мала k_s елементів ($k_s \geq 0$, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$); множина B_s — це множина тих i для яких $d_i = a_s$). Згідно з теоремою 1

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}.$$

Отже, має місце рівність (6).

При $m = 2$ рівність (6) набуває вигляду

$$\sum_{\substack{k_1 + k_2 = n \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{n!}{k_1!k_2!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} = (a_1 + a_2)^n. \quad (7)$$

Поклавши $k_2 = k$, $k_1 = n - k$, будемо мати

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a_1^{n-k} a_2^k.$$

Отже, формула біному Ньютона є частковим випадком поліноміальної теореми. Поклавши в (6) $a_1 = a_2 = \dots a_m = 1$ отримаємо ще одне доведення рівності (5).

Задача 7. Скільки доданків в правій частині розкладу (6)?

Число доданків дорівнює числу невід'ємних розв'язків рівняння $k_1 + k_2 + \dots k_m = n$, тобто дорівнює $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n$.

Задача 8. Записати розклад $(x + y + z)^3$.

Знайдемо всі невід'ємні розв'язки рівняння $k_1 + k_2 + k_3 = 3$ (їх число дорівнює $f_3^3 = C_{3+3-1}^2 = 10$). Складемо таку таблицю

$k_1 + k_2 + k_3$	$x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}$	$\frac{3!}{k_1!k_2!k_3!}$
(3, 0, 0)	x^3	1
(0, 3, 0)	y^3	1
(0, 0, 3)	z^3	1
(2, 1, 0)	x^2y	3
(2, 0, 1)	x^2z	3
(1, 1, 1)	xyz	6
(1, 2, 0)	xy^2	3
(1, 0, 2)	xz^2	3
(0, 2, 1)	y^2z	3
(0, 1, 2)	yz^2	3

Отже,

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz.$$

РОЗДІЛ 6

Метод включення і виключення

Вміння розв'язувати задачі є мистецтвом, яке досягається практикою, подібно до вміння плавати. Ми оволодіваємо будь-якою майстерністю з допомогою наслідування й досвіду. Навчаючись плавати, ви відтворюєте те, що роблять інші руками та ногами, тримаючи голову над водою, і ось, кінець-кінцем, ви оволодіваєте цим мистецтвом з допомогою вправ. Навчаючись розв'язанню задач, ви повинні спостерігати і наслідувати інших, аж поки не оволодієте цим мистецтвом з допомогою вправ.

Дьєрдь Пойа

Число елементів в об'єднанні декількох множин. Розпочнемо з числа елементів в об'єднанні двох множин.

Нехай треба підрахувати число $N(A_1 \cup A_2)$ елементів, які належать об'єднанню двох множин A_1 і A_2 . Розглянемо $N(A_1) + N(A_2)$. Це число, яке ми отримаємо, перелічивши всі елементи множини A_1 , а потім всі елементи множини A_2 . Але при цьому спільні елементи множини A_1 і A_2 (їх число $N(A_1 \cap A_2)$) будуть враховані двічі. Тому

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2) \quad (1)$$

З допомогою формули (1) можна дістати формулу для числа елементів в об'єднанні будь-якого числа множин. Наприклад, для трьох множин маємо:

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= N(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) = \\ &= N(A_1) - N(A_2 \cup A_3) + N(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = \\ &= N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - \\ &- N(A_2 \cap A_3) - N((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - \\
&- N(A_2 \cap A_3) - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) + \\
&+ N(A_1 \cap A_2 \cap A_3).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - \\
&- \{N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3)\} + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \quad (2)
\end{aligned}$$

Теорема 1. *Має місце рівність*

$$\begin{aligned}
N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) &= \sum_{i=1}^m N(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} N(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots + \\
&+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \\
&+ \dots + (-1)^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq m} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}). \quad (3)
\end{aligned}$$

Радимо читачеві довести формулу (3) методом математичної індукції. Ми ж розглянемо суто комбінаторне доведення рівності (3).

Нехай a — довільний елемент з об'єднання $\cup_{i=1}^m A_i$. Припустимо, що елемент a належить рівно r множинам з множин $A_1, A_2, \dots, A_m$. Елемент a враховується в правій частині (3) $C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \dots + (-1)^{r-1} C_r^r$ раз. Але,

$$\begin{aligned}
&C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \dots + (-1)^{r-1} C_r^r = \\
&= 1 - \{C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - C_r^3 + \dots + (-1)^{r-1} C_r^r\} = 1 - (1 - 1)^r = 1
\end{aligned}$$

(при $r \geq 1$ ми використали біноміальну формулу).

Таким чином, *кожен* елемент a , який входить в об'єднання множин $A_1, A_2, \dots, A_m$ в правій частині рівності (3) враховується *рівно один раз*. Це й доводить справедливність (3).

Задача 1. В науково-дослідному інституті працює 67 осіб. Серед них 47 володіють англійською мовою, 35 — німецькою мовою, а 23 співробітника знають і англійську і німецьку мови. Скільки співробітників, які не володіють жодною з цих мов?

Розв'язання. Нехай A_1 — множина співробітників, які володіють англійською мовою, A_2 — множина тих, хто володіє німецькою. Число тих, хто знає принаймні одну з цих мов, за формулою (1) дорівнює $47 + 35 - 23 = 59$. Тому не володіють жодною з цих мов $67 - 59 = 8$ співробітників.

Задача 2. Розглядаються всі перестановки n чисел $1, 2, \dots, n$. Знайти число D_n тих перестановок, у яких принаймні одне число стоїть на місці зі своїм номером.

Розв'язання. Позначимо через A_k множину тих перестановок, у яких на k -ому місці стоїть k . Тоді

$$D_n = N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n).$$

Множина $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ містить ті перестановки, у яких на місцях $i_1, i_2, \dots, i_k$ стоять числа $i_1, i_2, \dots, i_k$, а на інших $n - k$ місцях числа впорядковані довільно. Тому

$$N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n - k)!,$$

а

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = C_n^k (n - k)! = \frac{n!}{k!}.$$

З теореми 1 випливає, що

$$\begin{aligned} D_n &= N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \\ &= n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Розглянемо ще одне застосування методу виключення і включення.

Теорема 2. Нехай $N_{[m]}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ число елементів, які входять рівно в m множин з набору множин $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Тоді

$$\begin{aligned} N_{[m]}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) &= C_m^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) - \\ &- C_{m+1}^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1} \leq n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{m+1}}) + \dots + \end{aligned}$$

$$+(-1)^{n-m}C_n^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}). \quad (5)$$

Доведення. Нехай a довільний елемент, який входить в k множини з множин $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для доведення теореми досить показати, що елемент враховується в правій частині рівності (5) один раз, якщо $k = m$ і не враховується жодного разу, якщо $k \neq m$. Якщо $k < m$, то a не враховується в сумі (5) жодного разу; якщо $k = m$, то a враховується в (5) один раз, бо a входить лише в одну з множин виду $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$. Нехай тепер $k > m$. Елемент a враховується C_k^m раз в сумі

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}),$$

C_k^{m+1} в сумі

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1} \leq k} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{m+1}}),$$

C_k^k в сумі

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}),$$

в інших сумах у правій частині (5) елемент a не враховується, бо він входить лише в множин. Таким чином, елемент враховується в (5)

$$C_m^m C_k^m - C_{m+1}^m C_k^{m+1} + C_{m+2}^m C_k^{m+2} - \dots + (-1)^{k-m} C_k^m C_k^k \quad (6)$$

раз. Залишилось довести, що ця сума дорівнює нулю. Справді, оскільки

$$C_r^m C_k^r = \frac{r!}{m!(r-m)!} \cdot \frac{k!}{r!(k-r)!} = C_k^m C_{k-m}^{k-r},$$

то сума (6) дорівнює

$$C_k^m (C_{k-m}^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1} + \dots + (-1)^{k-m} C_{k-m}^0) = C_k^m (1 - 1)^{k-m} = 0.$$

Задача 3. Знайти число всіх перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, в яких рівно m чисел стоять на своїх місцях.

Розв'язання. Нехай A_i — множина тих перестановок, у яких на i -ому місці стоїть i . Тоді згідно з теоремою 2

$$\begin{aligned}
& N_{[m]}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \\
& = C_m^m C_n^m (n-m)! - C_{m+1}^m C_n^{m+1} (n-m-1)! + \dots + (-1)^{n-m} C_n^m C_n^n = \\
& = \frac{n!}{m!} \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \dots (-1)^{n-m} \frac{1}{(n-m)!} \right\}.
\end{aligned}$$

Застосування методу включення і виключення в теорії чисел. Нагадаємо деякі відомості з теорії чисел. Нехай a і b натуральні числа. *Найбільшим спільним дільником a і b* називається найбільше натуральне число, яке одночасно є дільником a і b . Позначимо найбільший спільний дільник так: (a, b) , зокрема запис $(a, b) = 1$ означатиме, що числа a і b взаємно прості.

Найменшим спільним кратним чисел a і b називається *найменше* число, яке ділиться на a і b одночасно. Найменше спільне кратне будемо позначати $[a, b]$.

Розглянемо канонічний розклад чисел a і b на прості множники:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

(не обмежуючи загальності, можна вважати набори простих множників $p_1, p_2, \dots, p_k$ однаковими для обох чисел). Тоді

$$(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \dots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}, \quad (7)$$

$$[a, b] = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2\}} \dots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}, \quad (8)$$

де символи $\min\{\alpha, \beta\}$, $\max\{\alpha, \beta\}$ позначають відповідно найменше і найбільше з чисел α і β .

Задача 4. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел $a = 120$, $b = 42$.

Розв'язання. Запишемо канонічні розклади чисел a і b на прості множники:

$$a = 120 = 2^3 3^1 5^1 7^0, \quad b = 42 = 2^1 3^1 5^0 7^1.$$

Маємо згідно з рівностями (7) і (8)

$$(a, b) = (120, 42) = 2^1 3^1 5^0 7^0 = 6,$$

$$[a, b] = 42 = 2^3 3^1 5^1 7^1 = 840.$$

Домовимося далі писати коротко $d \mid a$, якщо число d є дільником a , $d \nmid a$, якщо d не є дільником a .

Нехай x — дійсне невід'ємне число. Через $[x]$ будемо позначати *найбільше* ціле число, яке не перевищує x .

Ми будемо використовувати без доведення таке твердження з теорії чисел.

Теорема 3. *Якщо $a \mid n$, $b \mid n$, a і b взаємно прості, то $ab \mid n$.*

Задача 5. Скільки чисел серед $1, 2, 3, \dots, 99, 100$ таких, які не діляться на жодне з чисел $2, 3, 5$?

Розв'язання. Підрахуємо спершу кількість чисел, які діляться принаймні на одне з чисел $2, 3, 5$. Нехай A_1 — множина тих чисел, які діляться на 2 , A_2 — множина тих чисел, які діляться на 3 , A_3 — множина тих чисел, які діляться на 5 . Тоді

$$N(A_1) = \left[\frac{100}{2} \right] = 50, \quad N(A_2) = \left[\frac{100}{3} \right] = 33,$$

$$N(A_3) = \left[\frac{100}{5} \right] = 20, \quad N(A_1 \cap A_2) = \left[\frac{100}{2 \cdot 3} \right] = 16,$$

$$N(A_1 \cap A_3) = \left[\frac{100}{2 \cdot 5} \right] = 10, \quad N(A_2 \cap A_3) = \left[\frac{100}{3 \cdot 5} \right] = 6,$$

$$N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left[\frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] = 3.$$

Тому

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 50 + 33 + 20 - (16 + 10 + 6) + 3 = 74.$$

Відповідь: кількість чисел, які не діляться на жодне з чисел $2, 3, 5$, дорівнює $100 - 74 = 26$.

Зазначимо, що в підрахунках $N(A_1 \cap A_2)$, $N(A_1 \cap A_3)$, $N(A_2 \cap A_3)$, $N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ ми використовували теорему 3.

Теорема 4. Нехай n є натуральне число і натуральні числа $a_1, a_2, \dots, a_m$ попарно взаємно прості $(a_i, a_j) = 1$, $i \neq j$.

Тоді число цілих чисел k , таких що $0 < k \leq n$ і k не ділиться на жодне з чисел $a_1, a_2, \dots, a_m$, дорівнює

$$n - \sum_{i=1}^m \left[\frac{n}{a_i} \right] + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} \left[\frac{n}{a_{i_1} a_{i_2}} \right] - \dots + (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq m} \left[\frac{n}{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}} \right]. \quad (9)$$

Доведення. Так само, як і при розв'язанні попередньої задачі, будемо шукати кількість чисел, які не діляться на жодне з чисел $a_1, a_2, \dots, a_m$. Нехай A_i — множина тих чисел k ($k \geq 0$), які діляться на a_i . Тоді

$$N(A_i) = \left[\frac{n}{a_i} \right], \dots, N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \left[\frac{n}{a_{i_1} \dots a_{i_k}} \right].$$

Згідно з рівністю (3)

$$N\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{n}{a_i} \right] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} \left[\frac{n}{a_{i_1} a_{i_2}} \right] + \dots + (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq m} \left[\frac{n}{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}} \right].$$

Далі залишається зауважити, що кількість чисел, які не діляться на жодне з чисел $a_1, a_2, \dots, a_m$, дорівнює $n - N(\bigcup_{i=1}^m A_i)$, звідки й отримаємо рівність (9).

Задача 6. Скільки серед чисел, які не перевищують 35, таких, що не діляться ні на 3, ні на 7, ні на 8?

Розв'язання. Згідно з (9) кількість таких чисел дорівнює

$$35 - \left(\left[\frac{35}{3} \right] + \left[\frac{35}{7} \right] + \left[\frac{35}{8} \right] \right) + \left(\left[\frac{35}{3 \cdot 7} \right] + \left[\frac{35}{3 \cdot 8} \right] + \left[\frac{35}{7 \cdot 8} \right] \right) - \left[\frac{35}{3 \cdot 7 \cdot 8} \right] = 35 - (11 + 5 + 4) + (1 + 1 + 0) - 0 = 17.$$

Функція Ойлера. В теорії чисел і деяких інших розділах математики велику роль грає функція Ойлера, названа так на честь знаменитого швейцарського математика Леонарда Ойлера (1707-1783).

Функція Ойлера $\varphi(n)$, де n натуральне число, - це число таких цілих k , що $0 < k \leq n$ і $(k, n) = 1$.

Наведемо таблицьку перших значень функції $\varphi(n)$

n	$k \leq n, (k, n) = 1$	$\varphi(n)$
1	1	1
2	1	1
3	1, 2	2
4	1, 3	2
5	1, 2, 3, 4	4
6	1, 5	2
7	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
8	1, 3, 5, 7	4

Задача 7. Нехай p просте число. Чому дорівнює $\varphi(p)$?

Розв'язання. Якщо число p просте, то всі числа, що не перевищують p , є взаємно простими з p . Тому $\varphi(p) = p - 1$.

Теорема 5. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ - канонічний розклад числа на прості множники. Тоді

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right). \quad (10)$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $m = 2$. Тоді $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Взаємно простими з n будуть числа, які не діляться ні на p_1 , ні на p_2 . Покладемо в рівності (9) $a_1 = p_1$, $a_2 = p_2$. Будемо мати

$$\varphi(n) = n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2}\right) + \frac{n}{p_1 p_2} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right).$$

Це є частковим випадком рівності (10). В загальному випадку треба покласти в рівності (9) $a_1 = p_1, \dots, a_m = p_m$. Рівність (9) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^m \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} - \dots + \\
&+ (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq m} \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_m}} = \\
&= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Розглянемо деякі властивості функції Ойлера $\varphi(n)$.

Означення 1. Функція $f(n)$, яка означена на множині Z^+ натуральних чисел, називається мультиплікативною, якщо для будь-яких натуральних a і b таких, що $(a, b) = 1$

$$f(a \cdot b) = f(a)f(b). \tag{12}$$

Теорема 6. Функція Ойлера $\varphi(n)$ мультиплікативна.

Доведення. Нехай a і b взаємно прості числа. Розглянемо канонічні розклади цих чисел на прості множини

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, \quad b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}.$$

Оскільки a і b взаємно прості, то $p_i \neq q_j$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r$). Далі відзначимо, що

$$ab = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}$$

є канонічним розкладом числа на прості множники, і тому в силу теореми 5

$$\begin{aligned}
\varphi(a \cdot b) &= ab \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \times \\
&\times \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right).
\end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right), \\
\varphi(b) &= b \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a)\varphi(b),$$

тобто функція $\varphi(n)$ мультиплікативна.

Відзначимо таку властивість мультиплікативних функцій.

Теорема 7. Нехай $f(x)$ мультиплікативна функція,
 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ — канонічний розклад числа на прості множники. Тоді

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{i=1}^m \{f(1) + f(p_i) + \dots + f(p_i^{\alpha_i})\}. \quad (13)$$

У лівій частині рівності (13) стоїть сума, поширена на значення функції f для всіх дільників числа n (включаючи одиницю і саме n).

Доведення. Кожен дільник числа n має вигляд

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m},$$

де $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq \beta_m \leq \alpha_m$. В силу мультиплікативності функції f

$$f(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m}) = f(p_1^{\beta_1}) f(p_2^{\beta_2}) \dots f(p_m^{\beta_m}).$$

Сума всіх дільників

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} f(d) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} f(p_1^{\beta_1}) f(p_2^{\beta_2}) \dots f(p_m^{\beta_m}) = \\ &= \prod_{i=1}^m \{f(1) + f(p_i) + \dots + f(p_i^{\alpha_i})\}. \end{aligned}$$

Задача 10. Обчислити $\sum_{d|8} \varphi(d)$.

Розв'язання. Маємо

$$\sum_{d|8} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(4) + \varphi(8) = 1 + 1 + 2 + 4 = 8.$$

Відповідь у задачі не є випадковою. Має місце така теорема.

Теорема 8.

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n. \quad (14)$$

Доведення. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа n на прості множники. Тоді згідно з теоремою 7 маємо

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \varphi(d) &= \prod_{i=1}^m \{\varphi(1) + \varphi(p_i) + \dots + \varphi(p_i^{\alpha_i})\} = \\ &= \prod_{i=1}^m \{1 + (p_i - 1) + (p_i^2 - p_i) + \dots + (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1})\} = \\ &= \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} = n. \end{aligned}$$

Функція Мебіуса. Означимо на множині натуральних чисел функцію $\mu(n)$ таким чином:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 1, \\ 0, & \text{якщо } n \text{ ділиться на квадрат простого числа,} \\ (-1)^k, & \text{якщо канонічний розклад } n \text{ має вигляд} \end{cases} \quad (15)$$

$n = p_1 p_2 \dots p_k$, де прості множники різні.

Функція, означена рівністю (15) називається функцією Мебіуса на честь німецького математика Августа Мебіуса (1790-1868).

Наведемо таблицю перших значень функції $\mu(n)$.

Таблиця $\mu(n)$

n	канонічний розклад n	$\mu(n)$
1		1
2	2	$(-1)^1 = -1$
3	3	$(-1)^1 = -1$
4	$4 = 2^2$	0
5	5	$(-1)^1 = -1$
6	$6 = 2 \cdot 3$	$(-1)^2 = 1$
7	7	$(-1)^1 = -1$
8	$8 = 2^3$	0
9	$9 = 3^2$	0
10	$10 = 2 \cdot 5$	$(-1)^2 = 1$
11	11	$(-1)^1 = -1$
12	$12 = 2^2 \cdot 3$	0

Функція Ойлера виражається через функцію Мебіуса. Запишемо, наприклад, $\varphi(60)$, використовуючи рівність (11). Маємо

$$\begin{aligned}\varphi(60) &= \frac{60}{1} - \left(\frac{60}{1} + \frac{60}{3} + \frac{60}{5} \right) + \left(\frac{60}{2 \cdot 3} + \frac{60}{2 \cdot 5} + \frac{60}{3 \cdot 5} \right) - \frac{60}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \\ &= \sum_{d|60} \mu(d) \frac{60}{d}\end{aligned}$$

(під знаком суми перераховуються всі дільники числа 60).

Уважний розгляд запису $\varphi(n)$ у вигляді рівності (11) приводить до висновку, що справедлива така теорема.

Теорема 9. *Має місце рівність*

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}, \quad (16)$$

де в правій частині перераховуються всі дільники числа n .

Задача 11. Обчислити $\sum_{d|10} \mu(d)$.

Розв'язання. Використовуючи таблицю $\mu(n)$, маємо

$$\sum_{d|10} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(5) + \mu(10) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

Теорема 10. *При $n \geq 2$ $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$.*

Доведення. Припустимо, що

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}.$$

Кожен дільник числа n має вигляд

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m}.$$

де $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Якщо хоча б для одного i $\beta_i \geq 2$, то для такого дільника $\mu(d) = 0$. Якщо $\mu(d) \neq 0$, то дільник d має вигляд $d = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$, де $\{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}\}$ деяка підмножина множини $\{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m}\}$. Число таких підмножин C_m^k , а $\mu(d)$ для відповідного дільника дорівнює $(-1)^k$. Таким чином,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - C_m^1 + C_m^2 - \dots + (-1)^m C_m^m = (1 - 1)^m = 0.$$

Теорема 11. Нехай g — функція, яка означена на множині натуральних чисел і

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d). \quad (18)$$

Тоді g може бути виражена через функцію f з допомогою співвідношення

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right). \quad (19)$$

Доведення. Зробимо спочатку таке зауваження: якщо $d | n$ і $c | \frac{n}{d}$, то $c | n$ і $d | \frac{n}{c}$. Справді, оскільки $d | n$, то існує натуральне число s таке, що $n = ds$. З того, що $c | \frac{n}{d}$, випливає, що існує натуральне t таке, що $s = \frac{n}{d} = ct$. Тому $n = dcs = c(dt)$, тобто $c | n$, $d | \frac{n}{c}$.

Розглянемо суму $\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$. Використовуючи (18), будемо мати:

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{c|\frac{n}{d}} g(c) = \\ &= \sum_{(c,d) \in S} \mu(d) g(c), \end{aligned}$$

де в подвійній сумі ведеться підсумовування по множині S пар (c, d) , для яких $d | n$ і $c | \frac{n}{d}$. Але згідно з зауваженням, зробленим вище, ця множина збігається з множиною пар (c, d) , для яких $c | n$ і $d | \frac{n}{c}$. Тому ми можемо записати подвійну суму у вигляді

$$\sum_{c|n} g(c) \left(\sum_{d|\frac{n}{c}} \mu(d) \right).$$

Сума в круглих дужках дорівнює нулеві, коли $\frac{n}{c} \geq 2$ (теорема 10). Тому остаточно маємо

$$g(n) \sum_{d|1} \mu(d) = g(n) \mu(1) = g(n),$$

що й доводить рівність (19).

Теорему 11 називають принципом обертання Дедекінда-Ліувілля на честь німецького математика Ріхарда Дедекінда (1831-1916) та французького математика Жозефа Ліувіля (1809-1882).

За теоремою 8

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Застосовуючи принцип обертання Дедекінда-Ліувілля, отримаємо звідси рівність

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Це ще одне доведення теореми 9.

РОЗДІЛ 7

Комбінаторика відображень та бінарних відношень

Вчити абстрактному, не навчивши конкретному — це гріх, який не можна вибачити.

З. Мелзяк⁹

Відображення, класифікація відображень. Розпочнемо з такого означення.

Означення 1. Нехай X та Y дві множини. Будемо говорити, що задано відображення φ множини X в множину Y , якщо кожному елементу $x, x \in X$, поставлено у відповідність елемент $y, y \in Y$.

При відображенні φ відповідність між x та y записують з допомогою рівності $y = \varphi(x)$. Самому відображенню відповідає запис $\varphi : X \rightarrow Y$.

Множина X називається *областю означення* відображення, а множина $Y = \{y : y = \varphi(x), x \in X\}$ — *областю значень* відображення φ .

Множина $\varphi^{-1}(y) = \{x : \varphi(x) = y\}$ тих $x \in X$, для яких $\varphi(x) = y$, називається *прообразом* y .

Якщо множини X та Y скінченні, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ то відображення $\varphi : X \rightarrow Y$ зручно задавати з допомогою таблиці значень

x	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
$\varphi(x)$	y_{i_1}	y_{i_2}		y_{i_k}		y_{i_n}

(1)

Задача 1. Нехай $X = \{1, 2\}$, а $Y = \{a, b\}$. Побудувати всі можливі відображення $\varphi : X \rightarrow Y$ і для кожного з них вказати прообрази $\varphi^{-1}(y)$.

Складемо таблиці значень можливих відображень:

1)

1	2
a	a

 $\varphi^{-1}(a) = \{1, 2\}, \quad \varphi^{-1}(b) = \emptyset,$

⁹З. Мелзяк (Z.A.Melzak) — сучасний американський математик, автор двохтомного трактату Companion to Concrete Mathematics. v.1, Mathematical Techniques and Various Applications, Wiley, 1973; v.2, Mathematical Ideas, Modelling and Applications, Wiley, 1976.

$$2) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \quad \varphi^{-1}(a) = \{1\}, \quad \varphi^{-1}(b) = \{2\},$$

$$3) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline b & a \\ \hline \end{array} \quad \varphi^{-1}(a) = \{2\}, \quad \varphi^{-1}(b) = \{1\},$$

$$4) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline b & b \\ \hline \end{array} \quad \varphi^{-1}(a) = \emptyset, \quad \varphi^{-1}(b) = \{1, 2\}.$$

Всього є чотири різних відображення $X = \{1, 2\}$ в $Y = \{a, b\}$.

Теорема 1. Нехай $N(X) = n$, $N(Y) = m$.

Тоді число усіх можливих відображень множини X в множину Y дорівнює m^n .

Доведення. Нехай $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Складемо всі можливі таблиці (1) відображень. Оскільки в кожній клітинці нижнього рядка таблиць (1) може стояти одне з можливих значень y , то число усіх можливих таблиць за правилом множення дорівнює

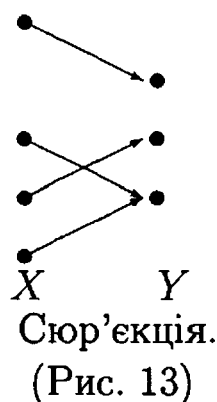
$$\underbrace{m \cdot m \dots m}_{n\text{-раз}} = m^n.$$

Означення 2. Відображення $\varphi : X \rightarrow Y$ називається *сюр'єктивним*, якщо для кожного $y \in Y$ $\varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Таким чином, якщо відображення φ сюр'єктивне, то для кожного $y \in Y$ $N(\varphi^{-1}(y)) \geq 1$. Для скінченних множин повинна виконуватися необхідна умова існування сюр'єктивних відображень:

$$N(X) \geq N(Y). \quad (2)$$

Проілюструємо поняття сюр'єктивності відображення таким рисунком:



Задача 2. Які з відображень в задачі 1 є сюр'єктивними?

Відповідь: відображення 2 і 3 — сюр'єктивні; відображення 1 і 4 — не сюр'єктивні.

Означення 3. Відображення $\varphi : X \rightarrow Y$ називається *ін'єктивним*, якщо для будь-якого $y \in Y$ його повний прообраз $\varphi^{-1}(y)$ містить не більше одного елемента. Якщо X та Y скінченні множини, то необхідна умова існування ін'єктивних відображень така:

$$N(X) \leq N(Y). \quad (3)$$

Задача 3. Нехай $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Переконатися, що відображення з таблицею значень

X	1	2	3
Y	y_1	y_2	y_4

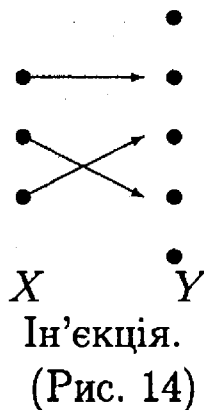
є ін'єктивним.

Розв'язання. Умова ін'єктивності виконується, бо $\varphi^{-1}(y_1) = \{1\}$, $\varphi^{-1}(y_2) = \emptyset$, $\varphi^{-1}(y_3) = \{2\}$, $\varphi^{-1}(y_4) = \{3\}$.

Задача 4. Які з відображень в задачі 1 є ін'єктивними?

Відповідь: відображення 2 і 3 — ін'єктивні, відображення 1 і 4 — не ін'єктивні.

Рисунок, який ілюструє поняття ін'єктивного відображення:



Теорема 2. Нехай $N(X) = n$, $N(Y) = m$ ($n \leq m$). Число ін'єктивних відображень множини X в Y дорівнює

$$m(m-1) \dots (m-n+1). \quad (4)$$

Доведення. Якщо відображення $\varphi : X \rightarrow Y$ ін'єктивне, то в кожній клітинці таблиці (1) кожне із значень зустрічається не більше одного разу. Тому за правилом множення число усіх можливих таблиць ін'єктивних відображень обчислюється за формулою (4).

Означення 4. Відображення $\varphi : X \rightarrow Y$ називається *бієктивним*, якщо воно є одночасно ін'єктивним, і сюр'єктивним.

Із сюр'єктивності випливає, що для кожного $y \in Y$ $N(\varphi^{-1}(y)) \geq 1$, а з ін'єктивності випливає, що $N(\varphi^{-1}(y)) \leq 1$. Таким чином, бієктивність відображення означає, що $N(\varphi^{-1}(y)) = 1$ для кожного $y \in Y$. Умова $y = \varphi(x)$ однозначно визначає єдине значення $x \in X$. Бієктивне відображення $\varphi : X \rightarrow Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між множинами X та Y . Якщо множини скінченні, це означає, що

$$N(X) = N(Y). \quad (5)$$

Задача 5. Які з відображень в задачі 1 є бієктивними?

Відповідь: відображення 2 і 3 — бієктивні, відображення 3 та 4 не є бієктивними.

Задача 6. Нехай $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Переконатися, що відображення, яке задане таблицею

X	1	2	3
Y	y_1	y_2	y_3

бієктивне.

Розв'язання. Для кожного $y \in Y$ $N(\varphi^{-1}(y)) = 1$.

Теорема 3. Нехай $N(X) = N(Y) = n$. Число бієктивних відображень множини X в множину Y дорівнює $n!$.

Це наслідок теореми 2 при $n = m$.

Скільки ж є сюр'єктивних відображень?

Теорема 4. Нехай $N(X) = n$, $N(Y) = m$, ($n \geq m$). Число $D(n, m)$ сюр'єктивних відображень дорівнює

$$D(n, m) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k (m - k)^n. \quad (6)$$

Доведення. Підрахуємо число не сюр'єктивних відображень. Позначимо через A_i множину тих відображень $\varphi : X \rightarrow Y$, в таблиці значень яких відсутнє y_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Тоді число не сюр'єктивних відображень дорівнює

$$N\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right).$$

В таблиці відображень (1), які належать до множини A_i , в кожній клітинці нижнього рядка відсутнє y_i . Тому згідно з правилом множення $N(A_i) = (m-1)^n$. З аналогічних міркувань

$$N(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = (m-2)^n,$$

$$N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_k}) = (m-k)^n.$$

Використовуючи формулу для числа елементів в об'єднанні m множин, матимемо

$$N\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = C_m^1(m-1)^n - C_m^2(m-2)^n + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^m(m-m)^n.$$

Число сюр'єктивних відображень дорівнює

$$\begin{aligned} m^n - N\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) &= m^n - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k(m-k)^n = \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{k-1} C_m^k(m-k)^n. \end{aligned}$$

Таким чином, формула (6) має місце.

Зауважимо, що для числа сюр'єктивних відображень можна вказати ще таку формулу

$$D(n, m) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=n \\ k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad (7)$$

$\left(\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}\right)$ — це число тих таблиць відображень φ , де y_1 зустрічається рівно k_1 раз, y_2 — k_2 раз, $\dots$, y_m — k_m раз). Отже, має місце рівність

$$D(n, m) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=n \\ k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} = \sum_{k=0}^m (-1)^{k-1} C_m^k(m-k)^n. \quad (8)$$

Бінарні відношення.

Означення 5. Бінарним відношенням на множині X будемо називати будь-яку підмножину декартового добутку $X \times X$. Якщо

$\rho \in X \times X$ і $(x, x') \in \rho$, то будемо писати $x\rho x'$ і говорити: елемент x перебуває у відношенні ρ з елементом x' . Якщо $(x, x') \notin \rho$, то пишемо $x\bar{\rho}x'$.

Приклад 1. Нехай $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $x\rho x'$, якщо x є дільником x' . Тоді

$$\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}.$$

Приклад 2. Нехай $X = \mathbb{Z}^+$ — множина натуральних чисел; $x\rho x'$, якщо $x \leq x'$. Тоді $(3, 7) \in \rho$, $(5, 1) \notin \rho$.

Скільки різних бінарних відношень можна означити на скінченній множині?

Теорема 5. Нехай $N(X) = n$. Число усіх бінарних відношень, які можна означити на множині X , дорівнює 2^{n^2} .

Доведення. Задати бінарне відношення на множині X — це вказати деяку підмножину ρ декартового добутку $X \times X$. Декартів добуток містить n^2 елементів. Тому число його підмножин дорівнює 2^{n^2} .

Означення 6. Бінарне відношення ρ на множині X називається *рефлексивним*, якщо для кожного $x \in X$ $x\rho x$.

Зокрема, це означає, що всі пари (x, x) , $x \in X$ належать ρ . Бінарне відношення в прикладі 1 є рефлексивним. Бінарне відношення з прикладу 2 також є рефлексивним.

Приклад 3. Нехай $X = \mathbb{Z}^+$ — множина натуральних чисел, $x\rho x'$, якщо $x < x'$. Відношення ρ не є рефлексивним.

Означення 7. Множину $D = \{(x, x) : x \in X\}$ з $X \times X$ будемо називати діагоналлю.

Якщо відношення ρ рефлексивне, то $D \subset \rho$.

Теорема 6. Нехай $N(X) = n$. Число усіх рефлексивних відношень на X дорівнює $2^{n^2-n} = 2^{n(n-1)}$.

Доведення. Кожне рефлексивне відношення ρ повністю містить діагональ D і ще деяку підмножину, складену з елементів, що знаходяться "зовні" діагоналі. Число таких елементів дорівнює $n^2 - n$. Тому число рефлексивних відношень дорівнює 2^{n^2-n} .

Означення 8. Бінарне відношення ρ називається *симетричним*, якщо з того, що $(x, x') \in \rho$ випливає, що $(x', x) \in \rho$.

Приклад 4. Нехай $X = \mathbb{Z}^+$ — множина натуральних чисел. Бінарне відношення $x\rho x'$, якщо x і x' взаємно прості числа, є симет-

ричним.

Приклад 5. Нехай $X = \mathbb{Z}^+$ — множина натуральних чисел, $x\rho x'$, якщо $x - x'$ ділиться на m (m — фіксоване число) (інший запис: $x\rho x'$, якщо $x \equiv x' \pmod{m}$). Тоді відношення ρ — симетричне.

Приклад 6. Нехай $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $x\rho x'$ — якщо $x - x'$ ділиться на 5. Тоді відношення ρ — симетричне і рефлексивне.

Теорема 7. Нехай $N(X) = n$. Число усіх симетричних бінарних відношень, які можна визначити на множині X , дорівнює $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Доведення. Будемо вважати, що $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Графік ρ симетричного відношення ($\rho \subset X \times X$) разом з кожною парою $(x, x') \in \rho$, $x \neq x'$ містить і пару (x', x) . Тому графік однозначно визначається, якщо вказати: а) які пари $(x, x) \in D \subset \rho$ він містить; б) які пари виду (x, x') , $x < x'$ він містить. Число підмножин, складених з пар виду а), дорівнює 2^n , а число підмножин складених з пар виду б) дорівнює $C_n^2 = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Тому число усіх симетричних відношень дорівнює

$$2^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Означення 9. Бінарне відношення називається *антисиметричним*, якщо з того, що $x\rho x'$, $x \neq x'$, випливає, що $(x', x) \notin \rho$.

Приклад 7. Нехай $X = \{1, 2, \dots, n\}$; $x\rho x'$, якщо $x \leq x'$. Тоді ρ — антисиметричне відношення.

Якщо ρ — антисиметричне відношення і $x\rho x'$ та $x'\rho x$, то $x = x'$.

Теорема 8. Нехай $N(X) = n$. Тоді число усіх антисиметричних відношень, які можна визначити на множині X дорівнює $2^n \cdot 3^{C_n^2}$.

Доведення. Нехай $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Для кожної пари (x, x') , $x < x'$ має місце одна з трьох можливостей

$$\begin{aligned} (x, x') \in \rho, \text{ тоді } (x', x) \notin \rho, \\ (x, x') \notin \rho, \quad (x', x) \in \rho, \\ (x, x') \notin \rho, \quad (x', x) \notin \rho. \end{aligned}$$

Графік антисиметричного відношення може містити також деяку підмножину діагоналі. Тому число усіх антисиметричних відношень дорівнює

$$2^n \cdot 3^{C_n^2} = 2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Означення 10. Бінарне відношення ρ на X називається *транзитивним*, якщо із $x\rho x'$ і $x'\rho x''$ випливає, що $x\rho x''$.

Приклад 8. Відношення ρ в прикладі 7 є транзитивним.

Означення 11. Бінарне відношення ρ на множині X називається *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Приклад 9. Відношення ρ в прикладі 6 є відношенням еквівалентності.

Будемо позначати відношення еквівалентності символом $\sim$. Тоді характеристичні властивості відношення еквівалентності записуються так:

рефлексивність: $x \sim x$,

симетричність: $x \sim x' \Rightarrow x' \sim x$,

транзитивність: $x \sim x', x' \sim x'' \Rightarrow x \sim x''$.

Важлива властивість відношення еквівалентності полягає в тому, що з його допомогою можна встановити розбиття множини X на частини, які називаються *класами еквівалентності*.

Означення 12. Нехай $x \in X$. Класом $K(x)$, породженим елементом x з допомогою відношення еквівалентності $\sim$, будемо називати множину $K(x) = \{y : y \sim x, y \in X\}$.

Теорема 9. Нехай x та x' не еквівалентні. Тоді $K(x) \cap K(x') = \emptyset$.

Доведення. Нехай $z \in X$ і таке, що $z \in K(x) \cap K(x')$. Тоді $z \sim x$, $z \sim x'$. В силу симетрії відношення $\sim$ $x \sim z$. Отже, $x \sim z$, $z \sim x'$. В силу транзитивності відношення $\sim$ $x \sim x'$, а це суперечить припущенню.

Розбиття X на класи еквівалентності будується так. Розглянемо довільний елемент $x \in X$. Побудуємо $K(x)$ — множину тих елементів, які еквівалентні x . Якщо $K(x) = X$, розбиття на класи еквівалентності складається з одного лише класу. Якщо ж існує x' , $x' \notin K(x)$, то будуємо клас $K(x')$ і т.д., поки не вичерпаємо всю множину X , і не прийдемо до розбиття множини X на класи еквівалентності.

Приклад 10. Переконайтеся, що розбиття на класи еквівалентності в прикладі 6 має вигляд

$$\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}.$$

Ясно, що кожному розбиттю множини X на множини, які не пе-

ретинаються, відповідає таке відношення еквівалентності, для якого це розбиття є розбиттям на класи еквівалентності. В цьому випадку ми оголошуємо елементи x і y еквівалентними, якщо вони належать одній і тій же множині розбиття.

Приклад 11. Нехай X — множина усіх студентів механіко-математичного факультету Київського університету, A_i — множина студентів i -ого курсу ($i=1,2,3,4,5$). Нехай $x \in X$, $y \in Y$. Будемо говорити, що $x\rho y$, якщо x та y вчаться на одному й тому ж курсі. Тоді ρ — відношення еквівалентності, а

$$X = \bigcup_{i=1}^5 A_i$$

є розбиттям X на класи еквівалентності.

Множину всіх класів еквівалентності називають фактормножиною множини X за відношенням еквівалентності $\rho : X/\rho$.

Природно поставити запитання у випадку $N(X) = n$, скільки різних відношень еквівалентності можна означити на множині X . Питання зводиться до такого: скільки існує різних розбиттів множини X на множини, які не перетинаються?

Відповідь на це питання ми дамо в розділі 14.

РОЗДІЛ 8

Формули обертання для біноміальних коефіцієнтів

В математиці слід запам'ятовувати не формули, а процес мислення.

В.П. Єрмаков¹⁰

Формули підсумовування для кратних сум. В наступному викладі нам часто доведеться мати справу з сумами виду

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{(i,k) \in \mathcal{D}} a_{ik}, \quad (1)$$

де $\mathcal{D}$ — деяка область на площині. Очевидно, в (1) мова йде про обчислення суми всіх значень функції в точках (i, k) з області $\mathcal{D}$. В (1) перераховуються всі точки області $\mathcal{D}$ з цілочисельними координатами. Такі суми називають *кратними сумами*.

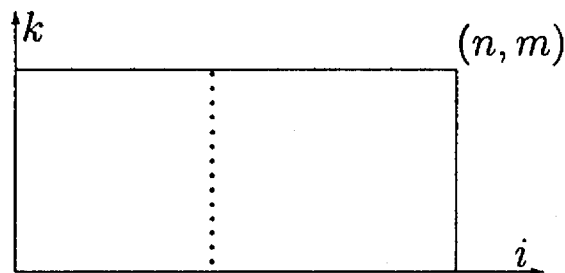
Читач повинен *добре освоїти* техніку зміни порядку підсумовування кратних сум, розглядаючи приклади деяких областей.

Приклад 1. Розпочнемо з найпростішої області $\mathcal{D}$ — прямокутника (рис. 15).

Нехай $\mathcal{D} = \{(i, k) : 0 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq m\}$. При підрахунку суми $S_{\mathcal{D}} = \sum_{(i,k) \in \mathcal{D}} a_{ik}$ можна діяти двома способами.

Перший: для кожного фіксованого i ($i = 0, 1, \dots, n$) підрахувати $\sum_{k=1}^m a_{ik}$, а потім додати всі отримані суми. Будемо мати

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^m a_{ik} \right).$$



(Рис. 15)

¹⁰В.П. Єрмаков (1845-1922) — професор Київського університету.

Другий: для k ($k = 0, 1, \dots, m$) підрахувати $\sum_{i=1}^n a_{ik}$, а потім додати всі отримані суми. Матимемо

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ik} \right).$$

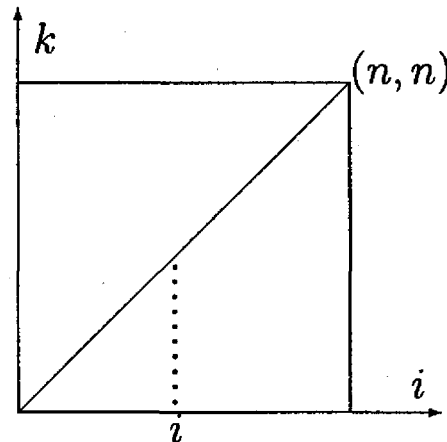
Таким чином,

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^m a_{ik} \right) = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ik} \right). \quad (2)$$

Приклад 2. Нехай в попередньому прикладі $a_{ik} = a_i \cdot b_k$. Тоді

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^m a_i b_k \right) = \sum_{i=0}^n a_i \left(\sum_{k=0}^m b_k \right) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^m b_k.$$

Приклад 3. Нехай $\mathcal{D} = \{(i, k) : 0 \leq k \leq i \leq n\}$.



(Рис. 16)

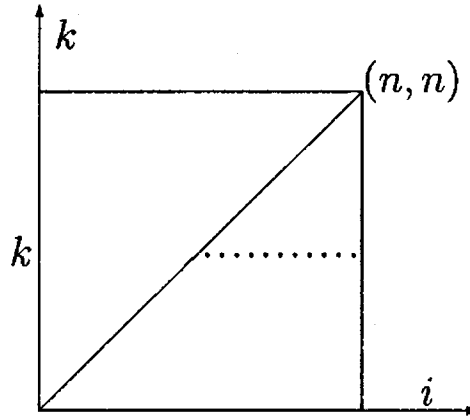
Перший спосіб підрахунку: для кожного i ($0 \leq i \leq n$) підраховуємо $\sum_{k=0}^i a_{ik}$, а потім додаємо всі отримані суми. Матимемо

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^i a_{ik} \right).$$

Другий: для кожного k ($k = 0, 1, \dots, n$) підраховуємо суму $\sum_{i=k}^n a_{ik}$,

а потім додаємо всі отримані суми. Матимемо (див. рис. 17)

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^n a_{ik} \right).$$

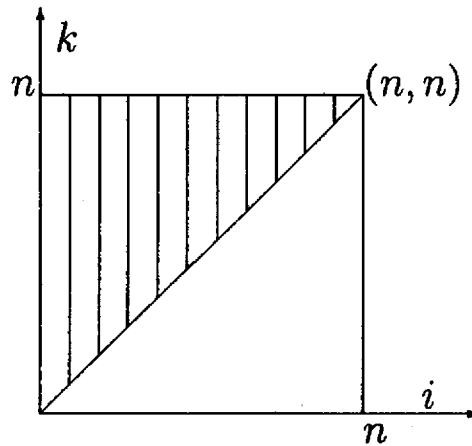


(Рис. 17)

Отже,

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^i a_{ik} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^n a_{ik} \right). \quad (3)$$

Приклад 4. Нехай $\mathcal{D} = \{(i, k) : 0 \leq i \leq k \leq n\}$.

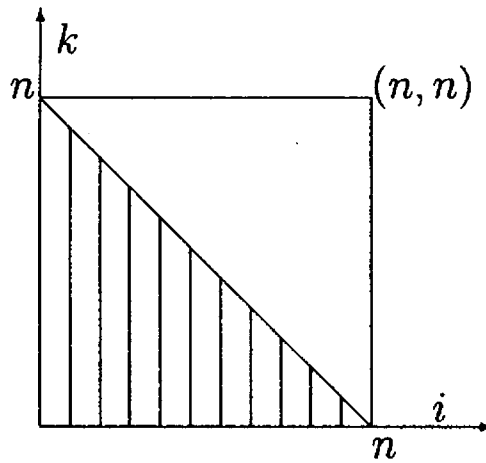


(Рис. 18)

Тоді

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i}^n a_{ik} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k a_{ik} \right).$$

Приклад 5. Нехай $\mathcal{D} = \{(i, k) : i \geq 0, k \geq 0, i + k \leq n\}$ (рис. 19).

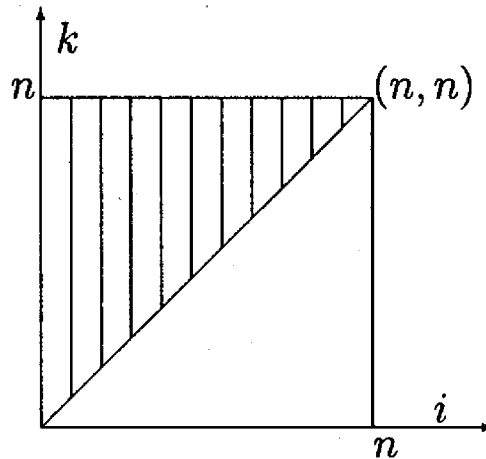


(Рис. 19)

Тоді

$$S_D = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^i a_{ik} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k a_{ik} \right).$$

Приклад 6. Нехай $a_{ik} = a_i a_k$. Обчислимо суму $S_D = \sum_{(i,k) \in D} a_i \cdot a_k$, де $D = \{(i, k) : 1 \leq i \leq k \leq n\}$ (рис. 20).



(Рис. 20)

Позначимо через $S'_D = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} a_i \cdot a_k$ (це сума по точках з цілочисельними координатами з області D , які лежать над діагоналлю $i = k$), $S''_D = \sum_{1 \leq k \leq i \leq n} a_i \cdot a_k$ (сума по точках з цілочисельними координатами, які лежать під діагоналлю). Оскільки точки (i, k) та (k, i) симетричні відносно діагоналі, то $S'_D = S''_D$. Маємо рівність

$$2S'_D + \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i a_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2.$$

Звідси

$$S'_D = \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}.$$

Остаточнo маємо

$$S_D = S'_D + \sum_{k=1}^n a_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}.$$

Приклад 7. Розглянемо подвійну суму $S = \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_k - a_i) \times (b_k - b_i)$. В силу симетрії відносно перестановки i та k

$$\sum_{1 \leq k < i \leq n} (a_i - a_k)(b_i - b_k) = \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_k - a_i)(b_k - b_i).$$

Тому суму S можна об'єднати саму з собою, використовуючи співвідношення

$$\sum_{1 \leq i < k \leq n} + \sum_{1 \leq k < i \leq n} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} - \sum_{1 \leq i = k \leq n}.$$

Отримаємо

$$2S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} (a_i - a_k)(b_i - b_k) - \sum_{1 \leq i = k \leq n} (a_i - a_k)(b_i - b_k). \quad (4)$$

Друга сума в попередній рівності перетворюється на нуль, а перша зазнає таких очевидних перетворень

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_i - a_k)(b_i - b_k) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_k b_i - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i b_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_k b_k = \\ &= n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=1}^n b_k + n \sum_{k=1}^n a_k b_k = \quad (5) \\ &= 2n \sum_{k=1}^n a_k b_k - 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \sum_{k=1}^n b_k. \end{aligned}$$

Отже, порівнюючи (4) і (5), отримуємо таку цікаву рівність

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k\right) = n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_k - a_i)(b_k - b_i). \quad (6)$$

З рівності (6) отримуємо такі важливі наслідки.

Теорема 1. (Нерівність П.Л. Чебишева для сум.) Якщо $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ та $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, то

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k\right) \leq n \sum_{k=1}^n a_k b_k. \quad (7)$$

Якщо $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ та $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, то

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k\right) \geq n \sum_{k=1}^n a_k b_k. \quad (8)$$

Теорема 2. Нехай $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ деяка перестановка множини $\{1, 2, \dots, n\}$. Тоді найбільше значення суми

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{i_k} \quad (9)$$

досягається при $b_{i_1} \leq b_{i_2} \leq \dots \leq b_{i_n}$, а найменше при $b_{i_1} \geq b_{i_2} \geq \dots \geq b_{i_n}$.

Формули обертання для біноміальних коефіцієнтів.

Теорема 3. Якщо для всіх n

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k b_k, \quad (10)$$

то

$$b_n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k a_k. \quad (11)$$

Навпаки, з представлення (11) випливає (10).

Доведення. Доведемо, що з (10) випливає (11). Використовуючи співвідношення (10) для a_k , матимемо

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \sum_{r=0}^k C_k^r (-1)^r b_r.$$

У правій частині рівності ми маємо справу з подвійною сумою по точках з цілими координатами з області $\{(k, r) : 0 \leq r \leq k \leq n\}$. Змінюючи порядок підсумування матимемо

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^n \sum_{k=r}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^k \frac{k!}{r!(k-r)!} (-1)^r b_r = \\ &= \sum_{r=0}^n b_r \frac{n!}{r!(n-r)!} (-1)^r \sum_{k=r}^n \frac{(n-r)!}{(k-r)!(n-k)!} (-1)^k. \end{aligned}$$

Зробимо заміну індексу у внутрішній сумі, поклавши $k - r = i$, $k = r + i$ (i — новий індекс). Будемо мати

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^n b_r C_n^r \left(\sum_{i=0}^{n-r} \frac{(n-r)!}{i!(n-r-i)!} (-1)^{r+i} \right) = \\ &= \sum_{r=0}^n C_n^r b_r \left(\sum_{i=0}^{n-r} C_{n-r}^i (-1)^{r+i} \right) = \sum_{r=0}^n C_n^r (-1)^r b_r (1-1)^{n-r} = b_n \end{aligned}$$

(ми використали біноміальну формулу і ту обставину, що $(1-1)^{n-r} = 0$ при $r < n$).

Те, що з (11) випливає (10) не потрібно окремо доводити, бо це випливає з симетрії формул (10) та (11).

РОЗДІЛ 9

Числові ряди, степеневі ряди, біноміальний ряд

*Життя оперує безконечно малими.
Ми всі поодинці — також малі.
Але з усмішки, з потиску рук,
з брехні, убитої наповал,
історія — найскладніша з наук —
обчислює ЗОРЯНИЙ ІНТЕГРАЛ.
Із найдрібніших зоряних крихт!
Вища математика віку:
З СУМИ БЕЗКОНЕЧНО МАЛИХ
ВИНИКАЄ БЕЗКОНЕЧНО ВЕЛИКЕ.
Ліна Костенко*

Числові ряди. Далі нам часто доведеться розглядати суми нескінченного числа доданків. В курсах математичного аналізу такі суми звуться *рядами*.

Нехай маємо нескінченну суму

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots \quad (1)$$

Часто такі суми записують також у вигляді $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Звичайно, цей вираз покищо точного смислу не має, оскільки здійснити нескінченне число додавань неможливо.

Що ж саме розуміти під сумою нескінченного числа доданків? Прийmemo таке означення.

Означення 1. Нехай

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (2)$$

Якщо існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд (1) називається збіжним і число S називається сумою цього ряду. Якщо не існує, то ряд (1) називається розбіжним. Сума S_n називається частковою сумою ряду. Отже, ряд збігається, якщо послідовність його часткових сум має скінченну границю.

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Бачимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. Отже, ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Приклад 2. Розглянемо ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots \quad (3)$$

Маємо нерівність

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

яка показує, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Таким чином, ряд (3) розбігається.

Приклад 3. Розглянемо ряд

$$1 + (-1) + 1 + \dots + (-1)^{k-1} + \dots$$

Маємо

$$S_n = 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n - \text{непарне,} \\ 0, & \text{якщо } n - \text{парне.} \end{cases}$$

Як бачимо, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує. Отже, ряд розбігається.

Приклад 4. Розглянемо ряд

$$1 + t + t^2 + \dots + t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k. \quad (4)$$

Дослідимо поведінку часткової суми ряду, коли $n \rightarrow \infty$. Маємо

$$S_n = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t},$$

якщо $t \neq 1$. При $t = 1$ $S_n = n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ і ряд розбігається. При $|t| < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-t}$. Отже, при $|t| < 1$ ряд (4) збігається і його сума дорівнює $S(t) = \frac{1}{1-t}$. При $|t| > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n = \infty$, так що ряд (4) розбігається. При $t = -1$ ряд (4) перетворюється в ряд, який було розглянуто в прикладі (3). Він розбігається. Отже, ряд (4), який іноді називають *геометричним* рядом, збігається при $t \in (-1, 1)$.

Приклад 5. Нехай $0 < \alpha < 1$. Розглянемо ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{k^\alpha} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Маємо нерівність

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} > n \cdot \frac{1}{n^\alpha} = n^{1-\alpha},$$

з якої випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Отже, ряд розбігається.

Гармонічний ряд.

Приклад 6. Розглянемо ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \quad (5)$$

Ряд (5) називається *гармонічним* рядом, його вперше розглядав знаменитий німецький математик Лейбніц (1646-1716) в 1673 році. Пояснимо причину назви гармонічного ряду. Як відомо, середнім гармонічним n чисел $a_1, \dots, a_n$ називається

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Кожен член ряду (5) є середнім гармонічним своїх сусідніх членів:

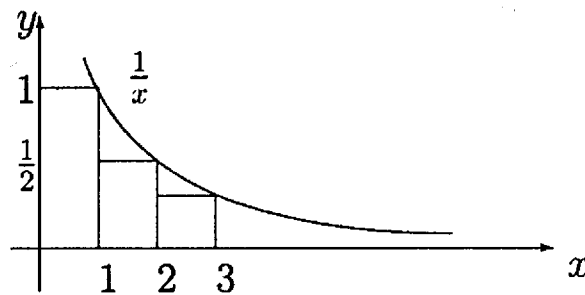
$$\frac{1}{n} = \frac{2}{\left(\frac{1}{n-1}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1}} = \frac{2}{(n-1) + (n+1)}.$$

Часткову суму ряду (5) позначимо

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \quad (6)$$

Числа H_n називаються *гармонічними числами*. Вони грають важливу роль в комбінаториці; деякі їх властивості ми будемо вивчати пізніше.

Гармонічний ряд розбігається. Щоб переконатися в цьому, розглянемо графік функції $f(x) = \frac{1}{x}$.



(Рис. 21)

Побудуємо систему прямокутників, зображених на рисунку 21, з площами $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Сума площ цих прямокутників

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ перевищує площу під графіком функції $y = \frac{1}{x}$ на відрізку $[1, n+1]$. Тому

$$H_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1). \quad (7)$$

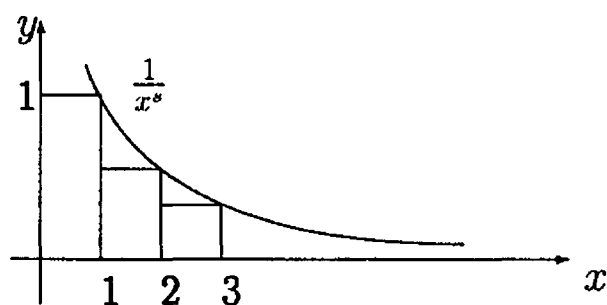
Звідси випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty$, і, таким чином, ряд (5) розбігається. Проте розбігається він дуже повільно. Ойлер, наприклад, встановив, що $H_{1000} = 7,48$, $H_{1000000} = 14,39$.

Більш точно характер росту ми охарактеризуємо пізніше, коли будемо вивчати гармонічні числа.

Приклад 7. Нехай $s > 1$. Розглянемо ряд

$$1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{k^s} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \quad (8)$$

Щоб довести збіжність цього ряду, звернемося до графіка функції $y = \frac{1}{x^s}$.



(Рис. 22)

Площа під графіком цієї функції на відрізку $[1, +\infty)$ дорівнює $\frac{1}{s-1}$. Позначимо часткову суму ряду (8)

$$H_n^{(s)} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}. \quad (9)$$

Будуючи систему прямокутників під графіком функції $y = \frac{1}{x^s}$, отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} H_n^{(s)} &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \\ &= 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}. \end{aligned}$$

Таким чином, послідовність часткових сум ряду (8) обмежена. Крім того, вона монотонно зростає. Тому існує $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^{(s)}$ і, значить, ряд (8) збігається. Його сума залежить від s і являє собою знамениту дзета-функцію Рімана

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \quad (10)$$

Як функція дійсного змінного дзета-функція була введена в 1737 році Леонардом Ойлером, який подав таке зображення $\zeta(s)$ у вигляді нескінченного добутку: перенумеруємо всі прості числа ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ і т.д.; як відомо, простих чисел нескінченно багато); тоді

$$\zeta(s) = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \quad (11)$$

Рівність (11) є однією з найважливіших властивостей дзета-функції $\zeta(s)$. Вона дає можливість встановити зв'язок дзета-функції

з багатьма іншими важливими теоретико-числовими функціями. Ось наприклад деякі з них:

$$\ln \zeta(s) = s \int_2^{+\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx,$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s},$$

де $\pi(x)$ — число простих чисел, які не перевищують x , $\mu(n)$ — функція Мебіуса (ми вже мали з нею справу!), $\tau(n)$ — число дільників числа n .

Найбільш глибокі властивості дзета-функції пов'язані з її продовженням в комплексну площину. Вперше продовження дзета-функції на всю комплексну площину став вивчати Ріман в 1876 р. Широко відома *гіпотеза Рімана* про нулі дзета-функції: "Будь-який нетривіальний нуль дзета-функції має дійсну частину рівну $\frac{1}{2}$ ". Ця гіпотеза фігурувала серед 23 проблем, про які говорив Давид Гільберт на математичному конгресі в 1900 році. До цього часу вона не підтверджена і не спростована. В травні 2000 р. Математичний Інститут Клея (Clay Mathematical Institute) опублікував перелік семи проблем; за розв'язання будь-якої з них буде присуджена нагорода в один мільйон доларів. Проблема Рімана входить до цього переліку¹¹.

Степеневі ряди. Степеневим рядом називають ряд виду

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k. \quad (12)$$

Ряд, який ми розглянули в прикладі 4, є степеневим рядом. Члени степеневого ряду залежать від параметра t . Сума степеневого ряду $S(t)$ є функцією від t . Якщо лише скінченне число коефіцієнтів a_k в рівності (12) відмінні від нуля, сума ряду (12) є многочленом. Тому

¹¹Більш детально про згадані проблеми можна довідатись з статті В.В.Некрашевича та В.І.Суцанського "Математичні проблеми ХХІ століття" (У світі математики, т.7., в.1, 2001) та Алайн Джексон "Мільйон доларів за розв'язання математичної проблеми" (У світі математики, т.7., в.4, 2001).

не дивно, що функції, які є сумами степеневих рядів, мають багато властивостей притаманних многочленам.

Множина тих t , при яких збігається ряд (12), називається *областю збіжності* ряду.

В курсах математичного аналізу доводять такі важливі властивості степеневих рядів:

1) область збіжності степеневому ряду є множина вигляду

$$\{t : |t| < R\},$$

до якої можуть додаватись точки $t = -R$ та $t = R$, або одна з цих точок;

2) степеневі ряди можна додавати та перемножати, збираючи коефіцієнти при однакових степенях t так, як це робиться при множенні многочленів;

3) якщо два степеневі ряди мають однакову суму при всіх t з області збіжності цих рядів, то коефіцієнти при відповідних степенях цих рядів рівні;

4) степеневий ряд в області збіжності можна інтегрувати та диференціювати будь-яке число раз;

5) коефіцієнти степеневому ряду однозначно відновлюються, зокрема, мають місце рівності

$$a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}, \quad (13)$$

де $S(t)$ — сума ряду (12);

6) якщо ряд (12) збігається для деякого $t = t_0$, то він збігається для всіх t таких, що $|t| < t_0$;

7) число R , про яке йде мова у властивості 1), називається *радіусом збіжності* степеневому ряду (12) і визначається формулою

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

(формула Адамара¹²).

¹²Адамар Жак (1865-1963) — видатний французький математик, член Паризької академії наук, автор фундаментальних результатів в багатьох розділах математики: теорії функцій, теорії диференціальних рівнянь, теорії чисел. Ідеї Адамара справили значний вплив на розвиток функціонального аналізу. Багато уваги приділяв питанням шкільного викладання, написав підручник з геометрії, який перекладено українською мовою (Геометрія. Частина 1, Планіметрія, "Радянська школа", 1951; Геометрія. Частина 2, Стереометрія, "Радянська школа", 1953).

Формули (13) часто використовують при побудові розкладів функцій в степеневі ряди.

Приклад 8. Доведемо, що при $|t| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^n} &= 1 + C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 + \dots + C_{n+k-1}^k t^k + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^k. \end{aligned} \quad (14)$$

Ця рівність є частковим випадком біноміальної формули, яку ми розглянемо нижче. Проте цікавим є і безпосереднє доведення. Скористаємося методом повної математичної індукції.

При $n = 1$ формула (14) має місце (приклад 4). Припустимо, що (14) має місце. Тоді

$$\frac{1}{(1-t)^{n+1}} = \frac{1}{(1-t)^n} \cdot \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} t^r.$$

Перемножимо ці ряди і зберемо коефіцієнти при відповідних степенях t . Коефіцієнт при t^k дорівнює

$$C_n^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+k-1}^k.$$

Використовуючи рівність

$$C_n^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^k,$$

яка випливає з рівності (13) із розділу 4, матимемо

$$\frac{1}{(1-t)^{n+1}} = 1 + C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 + \dots + C_{n+k-1}^k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^k t^k,$$

що й доводить рівність (14).

Приклад 9. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(t) = e^t$

Оскільки $f'(t) = f''(t) = \dots = f^{(k)}(t) = e^t$, то $f^{(k)}(0) = 1$ і згідно з (13) розклад функції $f(t) = e^t$ має вигляд

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}. \quad (15)$$

В курсах математичного аналізу встановлюють, що областю збіжності ряду (15) є вся числова вісь.

Приклад 10. Розкласти в степеневий ряд функцію $y = \ln(1+t)$. Розглянемо рівність

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^k x^k + \dots \quad (16)$$

(див. приклад 4). Степеневий ряд можна в області збіжності інтегрувати почленно. Нехай $0 < t < 1$. Проінтегруємо (16) почленно по x від 0 до t . Матимемо

$$\ln(1+t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} + \dots$$

Отже,

$$\ln(1+t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1}. \quad (17)$$

Ряд (17) збігається при $|t| < 1$.

Для нас дуже важливим в наступному викладі буде розклад в степеневий ряд функції $(1+t)^\alpha$.

Біноміальний ряд Ньютона. Формулу для $(1+t)^\alpha$, яку ми встановили, коли α є натуральним числом, можна узагальнити для будь-якого показника α . Справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай α - дійсне число і

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1). \quad (18)$$

Має місце формула

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} t^k. \quad (19)$$

Ряд в правій частині збігається на відкритому інтервалі $(-1, 1)$.

Ми не будемо доводити теорему 1. Відсилаємо читача до курсів математичного аналізу.

Ряд (19) називається біноміальним рядом Ньютона, коефіцієнти цього ряду будемо називати *біноміальними коефіцієнтами* і позначати

$$C_\alpha^k = \frac{(\alpha)_k}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}. \quad (20)$$

Зауважимо, що при $\alpha = n$

$$C_{\alpha}^k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

і $C_{\alpha}^k = 0$, коли $k > n$.

Більшість біноміальних тотожностей, які ми встановили в розділі 4, залишаються справедливими для C_{α}^k , означеними рівністю (20). Доводиться лише змінювати доведення, опираючись на більш загальну біноміальну формулу (19).

Приклад 11. Справедлива рівність

$$C_{\alpha}^k = C_{\alpha-1}^k + C_{\alpha-1}^{k-1}. \quad (21)$$

Для доведення прирівнюємо коефіцієнти при t^k в обох частинах правильної рівності

$$(1+t)^{\alpha} = (1+t)^{\alpha-1} + t(1+t)^{\alpha-1}.$$

Приклад 12. Має місце рівність

$$C_{\alpha+\beta}^m = \sum_{k=0}^m C_{\alpha}^k \cdot C_{\beta}^{m-k}. \quad (22)$$

Для доведення досить прирівняти коефіцієнти при t^m в обох частинах рівності

$$(1+t)^{\alpha+\beta} = (1+t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}.$$

Приклад 13. Має місце рівність

$$(-1)^k C_{-\alpha}^k = C_{\alpha+k-1}^k. \quad (23)$$

Справді,

$$\begin{aligned} C_{-\alpha}^k &= \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-k+1)}{k!} = \\ &= (-1)^k \frac{(\alpha)(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{k!} = (-1)^k C_{\alpha+k-1}^k. \end{aligned}$$

Звідси й випливає (23).

Приклад 14. При $|t| < 1$ виконується рівність

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha+k-1}^k t^k. \quad (24)$$

Формула (24) впливає з біноміальної формули (19), в якій t треба замінити на $-t$, а α на $-\alpha$, і прийняти потім до уваги рівність (23).

Введемо таке позначення

$$[\alpha]_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1). \quad (25)$$

Тоді рівність (24) можна записати у вигляді

$$(1 - t)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\alpha]_k}{k!} t^k. \quad (26)$$

Співвідношення Вандермонда, співвідношення Нерлунда. Вирази $(\alpha)_n = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)$ і $[\alpha]_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$ називають відповідно спадним і зростаючим факторіальними степенями.

Теорема 2. *Має місце рівність*

$$(\alpha + \beta)_n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha)_k (\beta)_{n-k}. \quad (27)$$

Доведення. Запишемо такі рівності

$$(1 + t)^{\alpha + \beta} = (1 + t)^{\alpha} \cdot (1 + t)^{\beta},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta)_k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} t^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\beta)_r}{r!} t^r.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t^n в лівій і правій частині останньої рівності, будемо мати

$$\frac{(\alpha + \beta)_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha)_k}{k!} \frac{(\beta)_{n-k}}{(n-k)!}. \quad (28)$$

Помноживши на $n!$ обидві частини (28), отримаємо рівність (27), яка називається співвідношенням Вандермонда.

Теорема 3. *Справедлива рівність*

$$[\alpha + \beta]_n = \sum_{k=0}^n C_n^k [\alpha]_k [\beta]_{n-k}. \quad (29)$$

Доведення. Розглянемо такі рівності

$$(1-t)^{-(\alpha+\beta)} = (1-t)^{-\alpha} \cdot (1-t)^{-\beta},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\alpha+\beta]_k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\alpha]_k}{k!} t^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[\beta]_r}{r!} t^r.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t^n в лівій та правій частинах рівності, матимемо

$$\frac{[\alpha+\beta]_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{[\alpha]_k}{k!} \frac{[\beta]_{n-k}}{(n-k)!}. \quad (30)$$

Помноживши обидві частини рівності (30) на $n!$, отримаємо рівність (29), яку називають співвідношенням Нерлунда.

РОЗДІЛ 10

Метод генератрис в комбінаториці

Генератриса є механізмом, який трохи нагадує торбу. Замість того, щоб нести окремо багато предметів, а це може виявитися обтяжливим, ми збираємо їх до купи, і тоді нам треба нести лише один предмет — торбу.

Дьєрдь Пойа

Генератриса числової послідовності. Ми розпочинаємо знайомство з одним з найбільш потужних методів комбінаторики — методом генератрис.

Означення 1. Генератрисою числової послідовності $\{a_n\}$ називається сума степеневого ряду

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \quad (1)$$

Зазначимо, що в російськомовній літературі замість терміну генератриса вживається термін "производящая функция".

Теорема 1. За генератрисою $A(t)$ однозначно відновлюються коефіцієнти a_n .

Це твердження впливає з тих властивостей степеневих рядів, які ми перелічили в розділі 9. Будемо називати його теоремою єдиності для генератрис.

Приклад 1. Генератрисою послідовності $a_n = 1, n \geq 0$ є функція

$$A(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, (|t| < 1). \quad (2)$$

Приклад 2. Генератрисою послідовності $a_n = (-1)^n, n \geq 0$ є функція

$$A(t) = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^k t^k + \dots = \frac{1}{1+t}, (|t| < 1). \quad (3)$$

Приклад 3. Генератрисою послідовності $a_n = \frac{1}{n!}$ є функція

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t. \quad (4)$$

Приклад 4. Генератрисою послідовності

$$C_{\alpha}^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

є функція

$$\mathcal{A}(t) = (1+t)^{\alpha}. \quad (5)$$

Приклад 5. Генератрисою послідовності $\frac{[\alpha]_k}{k!}$, де $[\alpha]_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$ є функція

$$\mathcal{A}(t) = (1-t)^{-\alpha}. \quad (6)$$

Приклад 6. Генератриса послідовності C_{n+k}^k ($k = 0, 1, \dots$) дорівнює

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^k t^k = \frac{1}{(1-t)^{n+1}} = (1-t)^{-n-1}. \quad (7)$$

Приклад 7. Нехай генератриса послідовності $\{a_n : n = 0, 1, \dots\}$ дорівнює $\mathcal{A}(t)$. Генератриса "зсуненої" на k одиниць послідовності

$$c_n = \begin{cases} 0, & n < k, \\ a_{n-k}, & n \geq k. \end{cases}$$

дорівнює $t^k \mathcal{A}(t)$. Справді,

$$\mathcal{C}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} t^n.$$

Зробимо заміну індексу підсумування, поклавши $n - k = r$. Тоді матимемо

$$\mathcal{C}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^{k+r} = t^k \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r = t^k \mathcal{A}(t).$$

Приклад 8. Нехай генератриса послідовності $\{a_n\}$ дорівнює $\mathcal{A}(t)$. Тоді генератриса $\mathcal{C}(t)$ послідовності $c_n = n \cdot a_n$ ($n = 0, 1, \dots$)

дорівнює $C(t) = tA'(t)$. Справді, диференціюючи почленно рівність (1), матимемо

$$A'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots = \frac{1}{t} C(t).$$

Отже,

$$C(t) = tA'(t). \quad (7)$$

Приклад 9. Нехай генератриса $\{a_n\}$ дорівнює $A(t)$. Тоді генератриса послідовності $(a_0, a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots)$ дорівнює $\frac{1}{2}(A(t) + A(-t))$.

Приклад 10. Нехай генератриса $\{a_n\}$ дорівнює $A(t)$. Тоді генератриса послідовності $(a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n+1}, \dots)$ дорівнює $\frac{1}{2}(A(t) - A(-t))$.

Приклад 11. Нехай генератриса $\{a_n\}$ дорівнює $A(t)$. Тоді генератриса послідовності $\{c^n a_n\}$ дорівнює $A(ct)$.

Означення 2. Композицією послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ називається послідовність $\{c_n\}$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (8)$$

Зазначимо, що в російськомовній математичній літературі замість терміну "композиція" вживається термін "свертка". Те, що послідовність $\{c_n\}$ є композицією послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, позначають так: $\{a_n\} * \{b_n\}$.

Теорема 2. Нехай генератриса послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ дорівнюють відповідно $A(t)$ і $B(t)$, а послідовність $\{c_n\}$ є композицією послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$. Тоді генератриса $\{c_n\}$ дорівнює

$$A(t) \cdot B(t).$$

Доведення. Знайдемо коефіцієнт при t^n в добутку двох рядів

$$A(t)B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} b_r t^r.$$

Він дорівнює $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = c_n$. Таким чином, $A(t) \cdot B(t)$ є генератрисою композиції послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$.

Приклад 12. Композицією послідовності $\{a_n\}$ і послідовності, тотожно рівної одиниці ($b_n \equiv 1$ для всіх натуральних n), є послідовність $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Справді, $\sum_{k=0}^n a_k \cdot 1 = \sum_{k=0}^n a_k = s_n$. Тому, якщо генератриса $\{a_n\}$ дорівнює $\mathcal{A}(t)$, то генератриса послідовності $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ дорівнює

$$\frac{\mathcal{A}(t)}{1-t}$$

(нагадаємо, що генератриса послідовності, тотожно рівної одиниці, дорівнює $\frac{1}{(1-t)}$).

Приклад 13. Знайдемо послідовність $\{a_n\}$ таку, що $a_0 = 1$ і $\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = 1$ для всіх натуральних n . Ми шукаємо послідовність $\{a_n\}$, композиція якої з самою собою є послідовністю, складеною з самих лише одиниць. Якщо генератриса послідовності $\{a_n\}$ дорівнює $\mathcal{A}(t)$, то $\mathcal{A}^2(t) = \frac{1}{1-t}$, звідки $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t)}}$.

З біноміальної теореми для $\alpha = \frac{-1}{2}$ випливає, що

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n C_{\frac{-1}{2}}^n = (-1)^n \frac{\left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-3}{2}\right) \left(\frac{-5}{2}\right) \dots \left(\frac{-2n-1}{2}\right)}{n!} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Запровадивши скорочене позначення

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) = (2n-1)!!,$$

будемо мати

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

Ідея застосування методу генератрис така: нехай треба знайти всі члени послідовності a_n . За допомогою рекурентного співвідношення для a_n , чи, можливо, виходячи з комбінаторних міркувань, обчислюють генератрису $\mathcal{A}(t)$. Розкладаючи потім $\mathcal{A}(t)$ в ряд і знаходячи

коефіцієнти при t^n , тим самим знаходять a_n . Істотним при цьому є використання теореми єдиності для генератрис.

Чесť відкриття генератрис поділяють Ніколя Бернуллі (1728 р.) та англійський математик Дж. Стірлінг (1730 р.) Починаючи з 1741 року, Леонард Ойлер систематично використовував генератрис в своїх дослідженнях з теорії чисел. Знаменитий французький математик П'єр Лаплас розвинув метод генератрис в своїй класичній роботі "Аналітична теорія ймовірностей" (1812 р.).

Проілюструємо застосування методу генератрис на прикладі комбінацій з повтореннями.

Приклад 14. (Комбінації з повторенням.)

Нагадаємо, що комбінаціями з m по n з повтореннями називаються групи, які містять n предметів, причому кожен предмет є одного з m типів і порядок предметів в групі не є істотним. Нехай f_m^n — число комбінацій з m по n . Всі комбінації з m по n можна розділити на два класи: ті, які не містять предметів першого типу (їх число дорівнює f_{m-1}^n), і ті, які містять принаймні один предмет першого типу (їх число дорівнює f_m^{n-1}), бо кожна така комбінація одержується приєднанням до предмета першого типу деякої комбінації із $m-1$ по n . Тому

$$f_m^n = f_{m-1}^n + f_m^{n-1}. \quad (9)$$

Зазначимо, що $f_1^n = 1$, а для того, щоб рівність (9) була справедливою при $m = 1$, будемо вважати, що $f_0^n = 1$.

Нехай $A_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_m^n t^n$. Помноживши рівність (9) на t^n і розглянувши суму по всіх n від нуля до нескінченності, будемо мати

$$A_m(t) = A_{m-1}(t) + tA_m(t),$$

звідки отримуємо

$$A_m(t) = \frac{1}{1-t} A_{m-1}(t). \quad (10)$$

З рівності (10) випливає, що

$$A_m(t) = \frac{1}{1-t} A_{m-1}(t) = \frac{1}{(1-t)^2} A_{m-2}(t) = \dots \frac{1}{(1-t)^{m-1}} A_1(t).$$

Але

$$\mathcal{A}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

Отже,

$$\mathcal{A}_m(t) = \frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m-1}^m t^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_m^n t^n.$$

Таким чином,

$$f_m^n = C_{n+m-1}^m.$$

Розглянемо ще один приклад застосування методу генератрис до розв'язання комбінаторної задачі.

Приклад 15. На колі взято $2n$ точок. Скількома способами можна сполучити попарно ці точки n хордами, які не перетинаються всередині кола?

Позначимо через a_n число способів, якими можна розбити на пари $2n$ точок, взятих на колі, так щоб хорди, які сполучають ці пари точок, не перетиналися. Позначимо точки буквами в такому порядку, як вони розташовані на колі: $A_1, A_2, \dots, A_n$. Точку A_1 можна сполучити лише з однією з точок $A_2, A_4, \dots, A_{2n}$, бо в протилежному випадку по кожному боку від хорди, що виходить з A_1 , буде розташоване непарне число точок і, значить, при попарному сполученні точок між собою принаймні одна хорда перетинає хорду, яка виходить з A_1 .

Підрахуємо, скільки існує різних способів сполучення точок, при яких A_1 сполучена з A_{2k} . По одну сторону від $A_1 A_{2k}$ розташовано $2k-2$ точок, їх можна сполучити a_{k-1} способами. Комбінуючи кожен з a_{k-1} способів сполучення точок $A_2, \dots, A_{2k-1}$ з кожним з a_{n-k} способів сполучення точок $A_{2k+1}, \dots, A_{2n}$, дістанемо, що число таких способів попарного сполучення, при яких A_1 сполучена з A_{2k} , дорівнює $a_{k-1}a_{n-k}$. Але k може набувати значень $1, 2, \dots, n$ і тому

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}a_1 + \dots + a_{n-k}a_{k-1} + \dots + a_1a_{n-2} + a_{n-1}. \quad (11)$$

Покладемо $a_0 = 1$ і розглянемо генератрису

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

послідовності $\{a_n\}$. Тоді (11) перепишеться у вигляді

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_{n-2} a_1 + \dots + a_{n-k} a_{k-1} + \dots + a_1 a_{n-2} + a_{n-1} a_0 \quad (12)$$

$(n \geq 1)$.

Помножимо обидві частини рівності (12) на t^n і розглянемо суму по n . Матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = t \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} (a_0 a_{n-1} + a_{n-2} a_1 + \dots + a_{n-k} a_{k-1} + \dots + a_{n-1} a_0).$$

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = \mathcal{A}(t) - 1$ то, застосовуючи теорему 2 розділу 9, отримаємо рівність

$$\mathcal{A}(t) - 1 = t \mathcal{A}^2(t) \quad (13)$$

(в правій частині (12) фігурує композиція $\{a_n\} * \{a_n\}$).

Розв'язуючи квадратне рівняння (13) відносно $\mathcal{A}(t)$, будемо мати

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4t}}{2t}. \quad (14)$$

Оскільки $\mathcal{A}(0) = a_0 = 1$, то в формулі (14) треба обрати знак $-$. Зауважимо також, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4t}}{2t} = \infty.$$

Це ще один аргумент на користь знака $-$ в (14). Отже, генератриса послідовності $\{a_n\}$ дорівнює

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}. \quad (15)$$

Тепер залишається знайти коефіцієнти при t^n в розкладі в степеневий ряд функції (15). Для цього використаємо біноміальний розклад при $\alpha = \frac{1}{2}$ (теорема 1 з розділу 9). Будемо мати

$$\begin{aligned} (1 - 4t)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} (-1)^k 4^k t^k = \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^k \cdot \frac{1}{2k - 1} t^k. \end{aligned}$$

Звідси згідно (15)

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^k \cdot \frac{1}{2k-1} \cdot t^{k-1}.$$

Зробимо заміну індексу підсумування, поклавши $k - 1 = n$. Тоді матимемо

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+2}^{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot t^n.$$

Отже,

$$a_n = \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n. \quad (16)$$

Іноді генератрису можна знайти, не користуючись рекурентними співвідношеннями, а виходячи з деяких комбінаторних міркувань. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 16. (Генератриса для числа комбінацій) Нехай a_1, a_2, a_3 — деякі числа. Розглянемо добуток

$$(1 + a_1 t)(1 + a_2 t)(1 + a_3 t).$$

Перемноживши та зібравши коефіцієнти при однакових степенях t , будемо мати

$$\begin{aligned} (1 + a_1 t)(1 + a_2 t)(1 + a_3 t) &= \\ &= 1 + (a_1 + a_2 + a_3)t + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)t^2 + a_1 a_2 a_3 t^3 = \quad (17) \\ &= 1 + \mathcal{A}_1 t + \mathcal{A}_2 t^2 + \mathcal{A}_3 t^3. \end{aligned}$$

Відзначимо, що число доданків в кожному коефіцієнті $\mathcal{A}_r$ дорівнює числу комбінацій із трьох по r . Наприклад, виписавши відповідні індекси при a_i в кожному доданку $\mathcal{A}_2$

$$(1, 2), (1, 3), (2, 3),$$

дістанемо всі комбінації із трьох чисел $\{1, 2, 3\}$ по 2. Покладемо в рівності (17) $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Тоді коефіцієнт при t^r дорівнюватиме числу комбінацій з трьох по r . Отже, $(1 + t)^3$ є генератрисою для числа комбінацій із трьох предметів.

Ясно, що всі наші міркування зберігають силу при розгляді добутку

$$(1 + a_1 t)(1 + a_2 t) \dots (1 + a_n t),$$

і тому $(1 + t)^n$ є генератрисою числа комбінацій із n предметів.

Приклад 17. Розглянемо комбінації з повтореннями з трьох предметів (нехай це будуть числа 1, 2, 3), причому встановимо обмеження: 1 і 2 можуть зустрічатись не більш двох раз, а 3 — не більш одного разу.

Розглянемо добуток

$$\begin{aligned} & (1 + a_1t + a_1^2t^2)(1 + a_2t + a_2^2t^2)(1 + a_3t) = \\ & = 1 + t(a_1 + a_2 + a_3) + t^2(a_1^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_2^2) + \\ & \quad + t^3(a_1^2a_2 + a_1^2a_3 + a_1a_2^2 + a_2^2a_3 + a_1a_2a_3) + \\ & \quad + t^4(a_1^2a_2^2 + a_1^2a_2a_3 + a_1a_2^2a_3) + t^5a_1^2a_2^2a_3 = \\ & = 1 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3 + A_4t^4 + A_5t^5. \end{aligned} \tag{18}$$

Знову ж, число доданків в кожному коефіцієнті A_r дорівнює числу всіх можливих комбінацій з трьох предметів при вказаних вище обмеженнях. Наприклад, виписавши відповідні індекси в кожному доданку A_3 , дістанемо всі можливі комбінації з трьох чисел 1,2,3 по 3: 112, 113, 122, 223, 123. Тому при $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ кожен коефіцієнт A_r дорівнює числу відповідних комбінацій. Таким чином, генератриса числа всіх комбінацій із вказаними обмеженнями дорівнює

$$(1 + t + t^2)(1 + t + t^2)(1 + t) = (1 + t + t^2)^2(1 + t).$$

Приклади, які ми розглянули, дають уявлення про те, як написати генератрису при наявності інших обмежень.

Приклад 18. Для числа комбінацій з необмеженим повторенням предметів одного з m типів і без обмежень на число появ будь-якого предмету генератриса числа комбінацій дорівнює

$$A(t) = (1 + t + t^2 + \dots)^m = \frac{1}{(1 - t)^m}.$$

Знову прийшли іншим шляхом до результату прикладу 14.

Приклад 19. Для числа комбінацій з необмеженими повтореннями предметів m типів і додатковою умовою обов'язкової наявності предмету кожного типу принаймні один раз генератриса дорівнює

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) &= (t + t^2 + \dots)^m = \frac{t^m}{(1-t)^m} = \\ &= t^m \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m-1}^m t^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m-1}^m t^{n+m} \end{aligned}$$

(ми використали результат прикладу 14). Зробимо заміну індексу підсумування, поклавши $n + m = r$. Матимемо

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{r=m}^{\infty} C_{r-1}^{m-1} t^r.$$

Отже, число комбінацій із вказаними обмеженнями дорівнює C_{r-1}^{m-1} .

Приклад 20. Генератриса числа комбінацій з необмеженими повтореннями предметів m типів (приклад 19), але з додатковою умовою, що кожен предмет присутній парне число раз, дорівнює

$$(1 + t^2 + t^4 + \dots)^m = \frac{1}{(1-t^2)^m} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{m+r-1}^r t^{2r}.$$

Приклад 21. Нехай A_n - число цілих невід'ємних розв'язків $x_1, x_2, \dots, x_r$ рівняння

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_r x_r = n \quad (19)$$

де $k_1, k_2, \dots, k_r$ дані натуральні числа. Позначимо через $\mathcal{A}(t)$ генератрису A_n . Тоді

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{(1-t^{k_1})(1-t^{k_2}) \dots (1-t^{k_r})} \quad (20)$$

Справді, запишемо r рівностей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t^{k_1}} &= 1 + t^{k_1} + t^{2k_1} + \dots \\ \frac{1}{1-t^{k_2}} &= 1 + t^{k_2} + t^{2k_2} + \dots \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{1-t^{k_r}} &= 1 + t^{k_r} + t^{2k_r} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Якщо перемножити ці рівності почленно, то показники при степенях t матимуть вигляд $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_rx_r$, де всі x_i набувають цілих невід'ємних значень. Число всіх можливих представлень n у вигляді (19) якраз і буде коефіцієнтом при t^n в тому розкладі, який ми дістанемо після перемноження всіх рівностей (21).

Результат задачі 21 може бути використаний при розгляді задач, пов'язаних з розміром монет.

Експоненційна генератриса Іноді буває так, що генератриса послідовності $\{a_n\}$ є складною, а в той же час послідовність $\left\{\frac{a_n}{n!}\right\}$ має просту генератрису, і набагато простіше мати справу з генератрисою цієї послідовності.

Означення 3. Експоненційною генератрисою послідовності $\{a_n\}$ називається сума степеневого ряду

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{t^n}{n!}. \quad (22)$$

Приклад 22. Експоненційною генератрисою послідовності $a_n \equiv 1$ ($n = 0, 1, \dots$) є функція

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Прикметник "експоненційна" є природнім саме тому, що експоненційна функція є експоненційною генератрисою послідовності $(1, 1, \dots)$.

Приклад 23. Функція $(1+t)^n$ є генератрисою для числа розміщень з n по k , оскільки

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^n n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{t^k}{k!}.$$

Приклад 24. Нехай $A(t)$ — експоненційна генератриса послідовності $\{a_n\}$. Тоді $tA(t)$ є експоненційною генератрисою послідовності $(0, a_0, 2a_1, \dots, na_{n-1}, \dots) = \{na_{n-1}\}$.

Справді,

$$tA(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{t^{n+1}}{n!}.$$

Зробимо заміну індексу підсумування, поклавши $n + 1 = k$. Матимемо

$$t\mathcal{A}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \cdot \frac{t^k}{(k-1)!} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k a_{k-1} \cdot \frac{t^k}{k!}.$$

Приклад 25. Нехай $\mathcal{A}(t)$ експоненційна генератриса послідовності $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Тоді $\mathcal{A}'(t)$ є експоненційною генератрисою послідовності $(a_1, a_2, \dots)$. Справді,

$$\mathcal{A}'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Зробимо заміну індексу, поклавши $n - 1 = k$. Будемо мати

$$\mathcal{A}'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{t^k}{k!}.$$

Означення 4. Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ дві послідовності. Біноміальною композицією цих послідовностей називається послідовність

$$c_n = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k b_{n-k}. \quad (23)$$

Теорема 3. Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ послідовності з експоненційними генератрисами $\mathcal{A}(t)$ і $\mathcal{B}(t)$ відповідно. Тоді експоненційна генератриса біноміальної композиції цих послідовностей дорівнює $\mathcal{A}(t)\mathcal{B}(t)$.

Справді,

$$\mathcal{A}(t)\mathcal{B}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} b_r \frac{t^r}{r!}.$$

Зберемо коефіцієнти при t^n . Матимемо

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \right) t^n = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k} \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

де c_n визначається рівністю (23).

Приклад 26. Знайдемо експоненційну генератрису послідовності $\{a_n\}$, визначеної таким чином: $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ при $n \geq 2$. Нехай

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) &= 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = \\ &= 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{Нехай } J(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \frac{t^n}{n!} \quad \text{і} \quad H(t) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_{n-2} \frac{t^n}{n!}.$$

$$\text{Тоді } J'(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \mathcal{A}(t) - 1,$$

$$H'(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \frac{t^{n-1}}{(n-2)!} = t\mathcal{A}(t).$$

Диференціюючи обидві частини (24), матимемо

$$\mathcal{A}'(t) = (1+t)\mathcal{A}(t).$$

Звідки

$$[\ln \mathcal{A}(t)]' = 1 + t.$$

Інтегруючи це диференціальне рівняння з використанням умови $\mathcal{A}(0) = 1$, отримаємо

$$\mathcal{A}(t) = \exp \left\{ t + \frac{1}{2}t^2 \right\}. \quad (25)$$

Генератриси і формули обертання. З допомогою генератрис можна отримувати формули обертання для біноміальних коефіцієнтів.

Теорема 4. Нехай для всіх натуральних n

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{\alpha}^k b_{n-k}. \quad (26)$$

Тоді

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{\alpha+k-1}^k a_{n-k}. \quad (27)$$

Доведення. Припустимо, що генератриси $\mathcal{A}(t)$ і $\mathcal{B}(t)$ послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ пов'язані співвідношенням

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)(1-t)^\alpha. \quad (28)$$

Тоді, прирівнюючи коефіцієнти при t^n в обох частинах рівності (28), будемо мати рівність (26). Але з (28) випливає, що

$$\mathcal{B}(t) = \mathcal{A}(t)(1-t)^{-\alpha}. \quad (29)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t^n в обох частинах рівності (29), отримаємо (27). Зазначимо, як випливає з доведення, рівності (26) і (27) є взаємно оберненими.

Теорема 5. *Нехай*

$$b_n = \sum_{k=0}^n C_n^k a_{n-k}. \quad (30)$$

Тоді

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k b_{n-k}. \quad (31)$$

Доведення. Припустимо, що експоненційні генератриси послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad \mathcal{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$$

пов'язані співвідношенням

$$\mathcal{B}(t) = e^t \mathcal{A}(t). \quad (32)$$

Тоді, прирівнюючи коефіцієнти при t^n в обох частинах рівності (32), отримаємо рівність (30). Але, якщо має місце (32), то

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)e^{-t}. \quad (33)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t^n в обох частинах рівності (33), отримаємо рівність (31). Як видно з доведення, формули (30) і (31) є взаємно оберненими.

РОЗДІЛ 11

Числа Фібоначчі

Геометрія володіє двома коштовностями: одна з них – це теорема Піфагора, а інша – поділ відрізка в середньому і крайньому відношенні. Першу можна порівняти з мірою золота, друга ж нагадує дорогоцінний діамант.

Йоган Кеплер (1571-1630)

Задача Фібоначчі про кроликів Найбільш яскравою демонстрацією ефективності застосування методу генератрис є знаходження формули для загального члена послідовності

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots \quad (1)$$

в якій кожен натуральний член, починаючи з другого, є сумою двох попередніх.

Числа цієї послідовності називаються числами Фібоначчі, на честь італійського математика Леонардо Пізанського (1180–1240), відомого під прізвиськом Фібоначчі (Fibonacci, або filius Bonacci – син Боначчі). Леонардо народився в Пізі, освіту здобув в Алжирі, засвоївши під керівництвом арабських вчителів арифметику і алгебру арабів. У торговельних справах Леонардо багато подорожував. Під час подорожей в Північну Африку, Єгипет, Сирію, Візантію він ґрунтовно познайомився з арабською і грецькою математикою. Праці класиків античної науки були відомі тоді, в основному, з арабських перекладів.

Фібоначчі, безперечно, був найвидатнішим європейським математиком епохи, яка передувала Відродженню. За його книгами "Книга абаку"(1202 р., 1228 р.), "Практика геометрії"(1220 р.), "Книга квадратів"(1225 р.) навчалось багато європейських математиків впродовж декількох століть мало що не до часів Декарта і Ойлера. "Книга абаку" була присвячена не лише практиці розрахунку, але й питанням теоретичної арифметики. Зокрема, за цією книгою Європа познайомилась з арабськими (точніше індійськими) цифрами й сучасною системою запису чисел.

З ініціативи Фібоначчі стали проводитися математичні турніри (щось подібне до сучасних шкільних математичних боїв). Пізніше такі змагання між математиками стали популярні саме в Італії. В будові всіх згаданих вище книг Леонардо явно відчувається їх походження від математичних турнірів. Основну роль в них грають числові задачі, подані з розв'язаннями і коментарями.

Зокрема, в "Книзі абаку" Леонардо формулює знамениту задачу про кроликів, яка приводить до вивчення послідовності (1). Сьогодні, безперечно, назвали б цю задачу задачею олімпіадного типу.

Початок формулювання задачі подамо в дослівному перекладі.

"Дехто помістив пару кроликів у деякому місці, обгородженому з усіх сторін стіною, щоб дізнатись, скільки пар кроликів народиться при цьому впродовж року. Природа кроликів така, що через місяць пара кроликів народжує на світ іншу пару, а народжують кролики після другого місяця від свого народження."

Звичайно Фібоначчі припускав, що кролі живуть вічно, і експеримент розпочинається з новонародженої пари кролів. На другому місяці залишається все ще одна пара. На третьому місяці їх стане дві, на четвертому — 3, на п'ятому — 5. Якщо позначити число пар кроликів, які є на n -тому місяці через F_n , то $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ і загальне правило для обчислення F_n буде таким:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n > 1). \quad (2)$$

Фібоначчі в "Книзі абаку"(1228 р.) вказав перші чотирнадцять членів послідовності F_n . Чотири століття пізніше (1608 р.) Йоган Кеплер чітко сформулював закономірність (2).

Наведемо декілька перших чисел послідовності Фібоначчі:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Наше найближче завдання — вказати формулу для обчислення загального члена послідовності Фібоначчі F_n .

Загальний член послідовності Фібоначчі. Будемо шукати генератрису послідовності $\{F_n\}$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n.$$

Вважатимемо, що $F_0 = 0$. Залишемо рівності

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

Помножимо першу рівність на t^0 , другу — на t , третю — на t^2 , четверту — на t^n і розглянемо суму по всіх n від 0 до нескінченності. Тоді будемо мати

$$F(t) = t + t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} t^n + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} t^n.$$

Відзначимо, що

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} t^n &= F_2 t^3 + F_3 t^4 + \dots = t(F(t) - t), \\ \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} t^n &= F_1 t^3 + F_2 t^4 + \dots = t^2 F(t). \end{aligned}$$

Таким чином, маємо рівняння для знаходження невідомої функції $F(t)$

$$\begin{aligned} F(t) &= t + t^2 + t(F(t) - t) + t^2 F(t), \\ F(t) &= t + tF(t) + t^2 F(t). \end{aligned} \tag{4}$$

З (4) випливає, що

$$F(t) = \frac{-t}{t^2 + t - 1}. \tag{5}$$

Якщо розкладемо функцію (5) в степеневий ряд, то коефіцієнт при t^n це і є F_n , яке ми шукаємо. Спочатку розкладемо дробово-раціональну функцію (5) на прості дроби.

Нехай t_1 і t_2 — корені квадратного рівняння $t^2 + t - 1 = 0$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \tag{6}$$

Відзначимо, що $t_2 - t_1 = \sqrt{5}$, $t_1 t_2 = -1$. Маємо

$$F(t) = \frac{-t}{(t - t_1)(t - t_2)}. \quad (7)$$

Будемо шукати розклад $F(t)$ у вигляді

$$F(t) = \frac{A}{t - t_1} + \frac{B}{t - t_2}, \quad (8)$$

де A і B поки що невизначені коефіцієнти. Для знаходження A помножимо обидві частини рівності (8) на $(t - t_1)$. Матимемо

$$-\frac{t}{t - t_2} = A + \frac{B(t - t_1)}{t - t_2}.$$

Поклавши в цій рівності $t = t_1$, отримаємо

$$A = \frac{-t_1}{t_1 - t_2} = \frac{t_1}{\sqrt{5}}.$$

Аналогічним шляхом, множення (8) на $(t - t_2)$ і підстановки $t = t_2$, отримаємо

$$B = \frac{-t_2}{t_1 - t_2} = \frac{t_2}{\sqrt{5}}$$

(нагадаємо, що $t_2 - t_1 = \sqrt{5}$). Отже,

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{t_1}{t - t_1} - \frac{t_2}{t - t_2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{t}{t_1}} - \frac{1}{1 - \frac{t}{t_2}} \right\}. \quad (9)$$

Будемо вважати, що $|t| < \min\{|t_1|, |t_2|\}$. Тоді, використовуючи геометричний ряд $\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, отримаємо

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t_2^n} - \frac{1}{t_1^n} \right) t^n. \quad (10)$$

Отже,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t_2^n} - \frac{1}{t_1^n} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{t_1^n - t_2^n}{(t_1 t_2)^n} \right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - (-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}} \left\{ \left((-1)^n \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - (-1)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}.
\end{aligned}$$

Сформулюємо отриманий результат.

Теорема 1. *Має місце рівність*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}. \quad (11)$$

Проконтролюємо правильність наших обчислень, поклавши в (11) $n = 0, n = 1, n = 2$. Матимемо $F_0 = 0$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right\} = 1,$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \right) - \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \right) \right\} = 1.$$

Формула (11) вперше була опублікована Даніелем Бернуллі (1700–1782) в 1728 році, але про неї забули, і вона була перевідкрита французьким математиком Жаком Біне (1786–1856) в 1843 році.

Формулу (11) називають формулою Біне.

Властивості чисел Фібоначчі. Числа Фібоначчі мають багато чудових властивостей. Ми сформулюємо деякі з них у формі задач або у формі теорем.

Задача 1. Довести, що

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1. \quad (12)$$

Залишемо рівності

$$F_1 = F_3 - F_2,$$

$$F_2 = F_4 - F_3,$$

.....

$$\begin{aligned}F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n, \\F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}.\end{aligned}$$

Додавши почленно всі ці рівності отримаємо рівність (12).

Задача 2. Довести, що

$$\sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n}. \quad (13)$$

Запишемо рівності

$$\begin{aligned}F_1 &= F_2, \\F_3 &= F_4 - F_2, \\&\dots\dots\dots \\F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}.\end{aligned}$$

Додаючи почленно ці рівності, отримаємо (13).

Задача 3. Довести, що

$$\sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1. \quad (14)$$

Розглянемо рівності

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1, \quad (15)$$

$$F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}. \quad (16)$$

Віднімаючи від (15) рівність (16), матимемо

$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n} - 1 = F_{2n+1} - 1.$$

Задача 4. Довести, що

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}. \quad (17)$$

Зауважимо, що

$$F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k (F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k^2.$$

Запишемо рівності

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_1 F_2, \\ F_2^2 &= F_2 F_3 - F_1 F_2, \\ &\dots\dots\dots \\ F_n^2 &= F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n. \end{aligned}$$

Додаючи почленно ці рівності, отримаємо (17).

Теорема 2. *Має місце рівність*

$$F_{n+k} = F_{n-1} F_k + F_n F_{k+1}. \quad (18)$$

Доведення. Проведемо доведення методом математичної індукції. При $k = 1$ твердження (18) справедливе, бо $F_{n+1} = F_{n-1} F_1 + F_n F_2 = F_{n-1} + F_n$. При $k = 2$ твердження задачі також має місце, бо $F_{n+2} = F_{n-1} F_2 + F_n F_3 = F_{n-1} + 2F_n = F_{n+1} + F_n$.

Таким чином, є підстави для проведення індуктивного доведення. Індуктивний перехід здійснимо дещо своєрідно: припустимо, що теорема справедлива при $k = m$ та $k = m + 1$, і доведемо, що (18) має місце при $k = m + 2$. Отже, припускаємо, що

$$\begin{aligned} F_{n+m} &= F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}, \\ F_{n+m+1} &= F_{n-1} F_{m+1} + F_n F_{m+2}. \end{aligned}$$

Додамо почленно ці рівності. Будемо мати

$$\begin{aligned} F_{n+m} + F_{n+m+1} &= F_{n+m+2} = \\ &= F_{n-1} (F_m + F_{m+1}) + F_n (F_{m+1} + F_{m+2}) = F_{n-1} F_{m+2} + F_n F_{m+3}. \end{aligned}$$

Таким чином, рівність (18) має місце і при $k = m + 2$.

Теорема 2 має цікаві наслідки. Покладемо в рівності (18) $k = n$. Тоді матимемо

$$F_{2n} = F_{n-1} F_n + F_n F_{n+1} = F_n F_{n+2}.$$

Отже, F_{2n} ділиться на F_n .

Поклавши в (18) $k = 2n$, отримаємо $F_{3n} = F_{n-1} F_{2n} + F_n F_{2n+1}$. Це означає, що F_{3n} ділиться на F_n , бо ми тільки що довели, що F_{2n} ділиться на F_n .

Теорема 3. *При будь-яких натуральних k і n F_{kn} ділиться на F_n .*

Доведіть це методом математичної індукції, використовуючи рівність (18).

Теорема 4. *Має місце співвідношення*

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \quad (19)$$

Рівність (19) можна встановити методом математичної індукції. Подамо інше доведення. Має місце матрична рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

яка легко доводиться методом математичної індукції. Розглянемо визначник в обох частинах рівності (20) і, користуючись теоремою про визначник добутку матриць, отримаємо (19).

Співвідношення (19) іноді називають формулою Касіні, на честь французького математика Жана-Домініка Касіні, який встановив його в 1680 році. Правда, Йоган Кеплер знав його ще в 1608 році.

Теорема 5. *Сусідні числа послідовності Фібоначчі взаємно прості.* Справді, нехай d — спільний дільник чисел F_{n+1} і F_{n-1} . З рівності $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, випливає, що d є дільником F_n , а це суперечить рівності (19).

Числа Фібоначчі та біноміальні коефіцієнти. Існує цікавий зв'язок між числами Фібоначчі та біноміальними коефіцієнтами.

Розглянемо трикутник Паскаля, записаний дещо в іншій формі, ніж це ми робили раніше.

Номер діагоналі	трикутник Паскаля	Сума чисел на діагоналі
1	1	$F_1 = 1$
2	1 1	$F_2 = 1$
3	1 2 1	$F_3 = 2$
4	1 3 3 1	$F_4 = 3$
5	1 4 6 4 1	$F_5 = 5$
6	1 5 10 10 5 1	$F_6 = 8$
7	1 6 15 20 15 6 1	$F_7 = 13$
8	1 7 21 35 35 21 7 1	$F_8 = 21$
9	1 8 28 56 70 56 28 8 1	$F_9 = 34$

Ми бачимо, що сума чисел на кожній висхідній діагоналі, вказаній в таблиці стрілками, дорівнює відповідному числу Фібоначчі.

Позначимо через T_k суму елементів на k -ій висхідній діагоналі. Досить довести, що $T_{n-2} + T_{n-1} = T_n$. Сума чисел на $(n-2)$ -й висхідній діагоналі дорівнює

$$C_{n-3}^0 + C_{n-4}^1 + C_{n-5}^2 + \dots = T_{n-2},$$

а на $(n-1)$ -й висхідній діагоналі дорівнює

$$C_{n-2}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2 + \dots = T_{n-1}.$$

Додавши ці рівності, та використавши основну біноміальну тотожність $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, одержимо

$$\begin{aligned} C_{n-2}^0 + (C_{n-3}^0 + C_{n-3}^1) + (C_{n-4}^1 + C_{n-4}^2) + \dots = \\ = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \dots, \end{aligned}$$

тобто суму чисел, які лежать на n -ій висхідній діагоналі. Таким чином, $T_n = T_{n-2} + T_{n-1}$, звідси випливає, що $T_n = F_n$.

Підсумуємо результати наших досліджень.

Теорема 6. Сума чисел на n -ій висхідній діагоналі трикутника Паскаля дорівнює F_n . Сума всіх чисел трикутника Паскаля, які лежать вище n -ої висхідної діагоналі, включаючи числа самої діагоналі, дорівнює $F_{n+2} - 1$.

Фібоначієві системи числення. Одна з найбільш цікавих і важливих властивостей чисел Фібоначчі полягає в тому, що з їх допомогою можна побудувати спеціальну систему числення — *Фібоначієву систему числення*.

Будемо записувати коротко: $j \gg k$, якщо $j > k + 2$.

Теорема 7. Будь-яке натуральне число n має єдине представлення виду

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r}, \quad (21)$$

$$\text{де } k_1 \gg k_2 \gg \dots \gg k_r. \quad (22)$$

Розпочнемо з такої леми, яка формулює більш загальне твердження.

Лема 1. Нехай для нескінченної послідовності чисел $1, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ при кожному k виконується рівність

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}. \quad (23)$$

Тоді кожне натуральне число n може бути записане у вигляді суми деякого числа з чисел з цієї послідовності.

Доведення. Доведемо, що кожне натуральне n , яке задовольняє нерівності

$$n \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}, \quad (24)$$

можна представити у вигляді деякого числа з чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$. Для $k = 1$ це твердження справедливе, якщо $n < 1 + 1$, то $n = 1$ і $n = a_1$ є шуканим представленням.

Припустимо, що твердження справедливе при $k = N$ і доведемо його справедливості для $k = N + 1$. Досить розглянути випадок

$$1 + a_1 + a_2 + \dots + a_N \leq n < 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1}, \quad (25)$$

бо для $n < 1 + a_1 + \dots + a_N$ твердження справедливе за припущенням індукції. З умови (23) маємо

$$0 \leq 1 + a_1 + \dots + a_N - a_{N+1} \leq n - a_{N+1} < 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Якщо $n - a_{N+1} = 0$, то твердження леми справедливе, бо $n = a_{N+1}$. Якщо ж $n - a_{N+1} > 0$, то на підставі припущення індукції $n - a_{N+1}$ можна представити у вигляді суми чисел $a_1, a_2, \dots, a_N$, і тоді n матиме вигляд суми цих чисел і a_{N+1} . Лема доведена.

Для доведення теореми досить застосувати до послідовності Фібоначчі $F_1 = 1, F_2, \dots, F_k, \dots$ лему. Умови леми виконані: $F_1 = 1$, $F_k < 1 + F_1 + \dots + F_{k-1} = F_{k+1} - 1$ (використано рівність (12)).

Для побудови зображення числа у вигляді (21) в ролі F_{k_1} вибирається найбільше число Фібоначчі, яке не перевищує n ; потім в ролі F_{k_2} вибирається найбільше число Фібоначчі, яке не перевищує $n - F_{k_1}$, і так далі. Якщо $k_1 = k$, то з нерівності $F_{k_2} \leq n - F_{k_1} < F_{k_1}$ випливає $k \gg k_2$. Оскільки k_1 обирається однозначно, то представлення (21) для кожного n є єдиним.

Наприклад, представлення одного мільйона є таким:

$$1000000 = 832040 + 121393 + 46368 + 144 + 55 = F_{30} + F_{26} + F_{24} + F_{12} + F_{10}.$$

Будь-яка система однозначного представлення чисел може бути системою числення. Теорема 7 приводить нас до фібоначієвої системи числення. Будь-яке натуральне число n можна представити у вигляді набору нулів та одиниць, поклавши

$$n = (b_m b_{m-1} \dots b_2) \iff n = \sum_{k=2}^m b_k F_k.$$

Ця система числення нагадує двійкову систему числення, за винятком того, що в ній ніколи не зустрічаються дві одиниці підряд. Подамо для прикладу зображення перших десяти чисел в фібоначчівій системі числення

$$\begin{aligned} 1 &= (000001)_F & 2 &= (000010)_F & 3 &= (000100)_F \\ 4 &= (000101)_F & 5 &= (001000)_F & 6 &= (001001)_F \\ 7 &= (001010)_F & 8 &= (010000)_F & 9 &= (010001)_F \\ & & 10 &= (010010)_F. \end{aligned}$$

Числа Фібоначчі і золотий переріз. Природно виникає питання про границю відношення чисел Фібоначчі при зростанні n . Має місце таке твердження.

Теорема 8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (26)$$

Доведення. Справді, з формули Біне випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \\ &= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ і тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n = 0,$$

отримуємо (26).

Число $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ грає дуже важливу роль як в математиці, так і в світі мистецтв (живопису, архітектурі, скульптурі, музиці, поезії), де ще з античних часів воно розглядалося як естетично найбільш сприятливе. В багатьох книгах для цього числа вживається позначення φ на честь знаменитого грецького скульптора Фідія, який свідомо користувався ним в своїх скульптурах.

В математиці число φ з'являється при розв'язанні здавалося б зовсім різних проблем. Як зазначає в одній зі своїх книг відомий американський популяризатор математики Мартін Гарднер, "число φ має майже такий універсальний характер, як і число π ".

Щоб з'ясувати геометричний смисл числа φ , з'ясуємо питання про поділ відрізка в середньому і крайньому відношенні.

Розглянемо відрізок AB . Будемо говорити, що точка C ділить відрізок в середньому і крайньому відношенні, якщо довжина більшої частини відрізка так відноситься до довжини меншої частини відрізка, як довжина всього відрізка до довжини більшої частини: якщо ми позначимо



(Рис. 23)

$AC = a$, $CB = b$ (рис. 23), то сформульована умова означає, що

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a},$$

звідки $a^2 = ab + b^2$. Поділивши обидві частини цієї рівності на b^2 , будемо мати

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1.$$

Позначимо $\frac{a}{b} = x$. Тоді

$$x^2 = x + 1 \tag{27}$$

Додатній корінь (а саме він нам потрібен!) рівняння дорівнює

$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Таким чином, ми прийшли до числа φ .

Говорять ще, що точка C здійснює золотий переріз відрізка AB , а відношення $\frac{AC}{CB} = \varphi$ називають відношенням золотого перерізу.

Число φ є ірраціональним числом, бо, як відомо, $\sqrt{5}$ є ірраціональним числом; його наближене значення

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033989 \dots$$

Зазначимо, що $\frac{1}{\varphi} = 0,618033989 \dots$. Число φ є єдиним додатнім чис-

лом, яке переходить в обернене при відніманні одиниці: $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

Число φ допускає такі цікаві представлення:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

та

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

На початку епохи Відродження математики, художники, архітектори та скульптори були надзвичайно захоплені вивченням і використанням пропорції золотого перерізу.

В 1509 році знаменитий італійський математик Лука Пачолі (1454 - 1519) опублікував трактат "Про божественну пропорцію", в якому було описано багато чудових властивостей золотої пропорції в різних геометричних плоских та просторових фігурах. Книга була ілюстрована другом Луки Пачолі знаменитим італійським вченим та художником Леонардо да Вінчі (1452 - 1519), який використовував золотий переріз в композиції своїх картин. Німецький художник і математик Альбрехт Дюрер (1471 - 1527) на основі книги Луки Пачолі став досліджувати пропорції людського тіла і використовував їх у своїх картинах. Його книга носить назву "Про пропорції людського тіла, знайдені і описані Альбрехтом Дюрером з Нюрнберга на користь всім, хто любить таку науку". Статистичні

дослідження підтверджують наявність пропорцій золотого перерізу у багатьох людей. Деякі з них такі: відношення росту людини до відстані від підлоги до її пупа наближено дорівнює φ ; таким же є відношення довжини ліктя до довжини кисті.

Числа Фібоначчі в сучасних дослідженнях. Числа Фібоначчі інтенсивно досліджувалися в XX столітті. Цьому сприяли нові проблеми комбінаторики, інформатики. Числа Фібоначчі з успіхом використовуються при сортуванні та обробці інформації, генеруванні випадкових чисел, дослідженні проблем штучного інтелекту.

З 1963 року в США регулярно виходить журнал "Fibonacci Quarterly", де публікуються статті, присвячені виключно числам Фібоначчі.

Інтерес до вивчення чисел Фібоначчі посилювався після появи в 1970 році роботи молодого ленінградського математика Юрія Матіясевича, в якій він поставив останню крапку в розв'язанні десятої проблеми Гільберта, встановивши, що не існує алгоритму, який дозволяє встановити, чи має задане поліноміальне діофантове рівняння з багатьма змінними і раціональними коефіцієнтами розв'язки в цілих числах. Істотну роль у роботі Ю. Матіясевича зіграло використання деяких властивостей чисел Фібоначчі.

Сформулюємо для прикладу одну з лем Ю. Матіясевича.

Лема. Число Фібоначчі F_m ділиться на F_n^2 тоді і лише тоді, коли m кратне nF_n .

Радимо читачеві довести це самостійно. Для цього цілком досить знання розглянутих вище властивостей чисел Фібоначчі.

Незважаючи на те, що історія чисел Фібоначчі нараховує більше восьмисот років, є ряд проблем, відповіді на які не відомі до цього часу. Ось деякі з них.

Нерозв'язана проблема 9. Кількість простих чисел серед чисел Фібоначчі скінченна чи нескінченна?

Ще деякі задачі, пов'язані з числами Фібоначчі.

Задача 5. Знайти число підмножин множини $\{1, 2, \dots, n\}$, які не містять жодної пари послідовних чисел.

Розв'язання. Число шуканих підмножин позначимо a_n . Заува-

жимо, що $a_1 = 2$ (маємо дві підмножини, які не містять двох послідовних чисел $\emptyset, \{1\}$), $a_2 = 3$, бо серед підмножин множини маємо три підмножини, які не містять послідовних чисел $\emptyset, \{1\}, \{2\}$. Якщо $n = 3$, то серед підмножин множини $\{1, 2, 3\}$ є п'ять підмножин, жодна з яких не містить двох послідовних чисел. Це підмножини $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}$. Отже, $a_3 = 5$.

Встановимо рекурентне співвідношення для a_n . Розглянемо множину $\{1, 2, \dots, n, n+1, n+2\}$. Всі її підмножини, які не містять двох послідовних чисел (їх число, згідно з нашими позначеннями, дорівнює a_{n+2}), поділимо на два класи. До першого класу віднесемо підмножини, які не містять $n+2$. Число підмножин у першому класі дорівнює a_{n+1} . Кожна з підмножин другого класу, звичайно, не містить $n+1$. Вилучивши з кожної підмножини другого класу $n+2$, одержимо підмножини множини $\{1, 2, \dots, n\}$, жодна з яких не містить двох послідовних чисел. Таким чином, число множин, які ми віднесли до другого класу, дорівнює a_n . Отже, отримуємо рекурентне співвідношення

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$$

з якого випливає $a_3 = 5 = F_5$, $a_4 = 8 = F_6$ і взагалі, $a_n = F_{n+2}$.

Задача 6. Знайти число розкладів числа n на частини, які перевищують 1.

Розв'язання. Позначимо через a_n шукане число. Очевидно, $a_2 = 1$ (маємо один розклад $2 = 2$), $a_3 = 1$ (теж маємо лише один розклад $3 = 3$), $a_4 = 2$ (в цьому випадку маємо два розклади $4 = 2+2$, $4 = 4$). Встановимо рекурентне співвідношення для a_n . Розглянемо розклад

$$n+1 = b_1 + b_2 + \dots + b_k, b_i \geq 2 \quad (28)$$

Серед a_{n+1} розкладів (28) є a_{n-1} таких, де $b_1 = 2$, a_{n-2} таких, де $b_1 = 3, \dots, a_1$ таких, де $b_1 = n$; 1 розклад, де $b_1 = n+1$. Тому

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_1 + 1. \quad (29)$$

Згідно з (29) $a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_1 + 1 = a_n$. Тому

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

З цього співвідношення маємо $a_4 = 2 = F_3$, $a_5 = 3 = F_4$ і, взагалі, $a_n = F_{n-1}$.

Задача 7. Знайти число розкладів натурального числа n на частини, які рівні 1 або 2.

Розв'язання. Позначимо шукане число розкладів через a_n . Знайдемо, що $a_1 = 1$ (маємо один розклад $1=1$), $a_2 = 2$ (маємо два розклади $2 = 1 + 1, 2 = 2$), $a_3 = 3$ (маємо три розклади $3 = 1 + 1 + 1, 3 = 1 + 2, 3 = 2 + 1$). Розглянемо розклад

$$n + 1 = b_1 + b_2 + \dots + b_k, 1 \leq b_i \leq 2.$$

Число таких розкладів, в яких $b_1 = 1$ дорівнює a_n , а число тих розкладів, де $b_1 = 2$, дорівнює a_{n-1} . Таким чином, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Отже, $a_3 = 3 = F_4, a_4 = 5 = F_5, \dots, a_n = F_{n+1}$.

Задача 8. Знайти число розкладів числа n на непарні доданки.

Розв'язання. Нехай a_n шукане число. Тоді $a_1 = 1$ (маємо один розклад $1 = 1$), $a_2 = 1$ (маємо лише один розклад $2 = 1 + 1$), $a_3 = 2$ (маємо два розклади $3 = 3, 3 = 1 + 1 + 1$). Розглянемо розклад

$$n + 1 = b_1 + b_2 + \dots + b_k, \quad b_i - \text{непарні числа.}$$

Число b_1 може приймати значення $\{1, 3, \dots, n\}$, якщо n непарне, і $\{1, 3, \dots, n + 1\}$, якщо n парне. Тому

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-2} + \dots + a_2 + 1 \quad (n \text{ парне}),$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-2} + \dots + a_1 \quad (n \text{ непарне}).$$

Звідси випливає, що

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Таким чином, $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2 = F_3$, і, взагалі, $a_n = F_n$.

РОЗДІЛ 12

Числа Каталана

Математичні поняття мертві і нерухомі в своїх означеннях і наповнюються життям в математичних доведеннях. Ці доведення є основним змістом математики, саме в них таїна і краса математики: нема нічого більш прекрасного, ніж просте і ясне доведення нетривіального положення.

А.В. Скороход

Числа Каталана, які ми будемо вивчати в цьому параграфі, менш відомі, ніж числа Фібоначчі, але їм притаманна та ж сама особливість виникати при розгляді різних комбінаторних задач, здавалось би на перший погляд зовсім далеких одна від одної.

Задача про підрахунок числа $2n$ -вимірних векторів з спеціальними властивостями. Будемо розглядати множину $2n$ -вимірних векторів виду

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n-1}, \varepsilon_{2n}), \quad (1)$$

де кожна компонента ε_i набуває двох значень: 1 або -1

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 \\ -1. \end{cases} \quad (2)$$

Поставимо перед собою декілька питань.

Задача 1. Скільки є таких векторів?

Відповідь: 2^{2n} . Це випливає з правила множення.

Задача 2. Скільки серед них таких векторів, для яких

$$\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0. \quad (3)$$

Відповідь: C_{2n}^n , бо такі вектори містять n компонент рівних 1 і n компонент рівних -1 .

Задача 3. Скільки серед векторів (1) таких, що для кожного k ($k = 1, 2, \dots, 2n - 1$)

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \geq 0 \quad (4)$$

і $\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0$. Число таких векторів позначимо C_n .

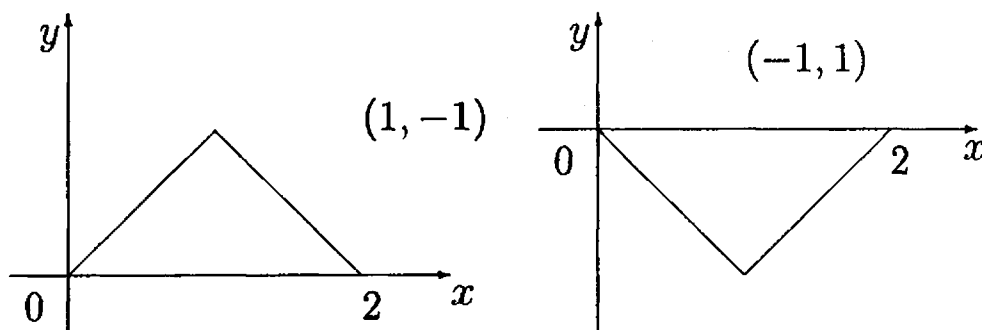
Означення 1. $2n$ -вимірні вектори $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n})$, які задовольняють умови (2), (3), (4), будемо називати *векторами Каталана*, а число таких векторів називається *числом Каталана*.

Такі числа вперше розглядав знаменитий Леонард Ойлер. Назва числа Каталана зроблена на честь бельгійського математика Ежена Каталана (1814-1894).

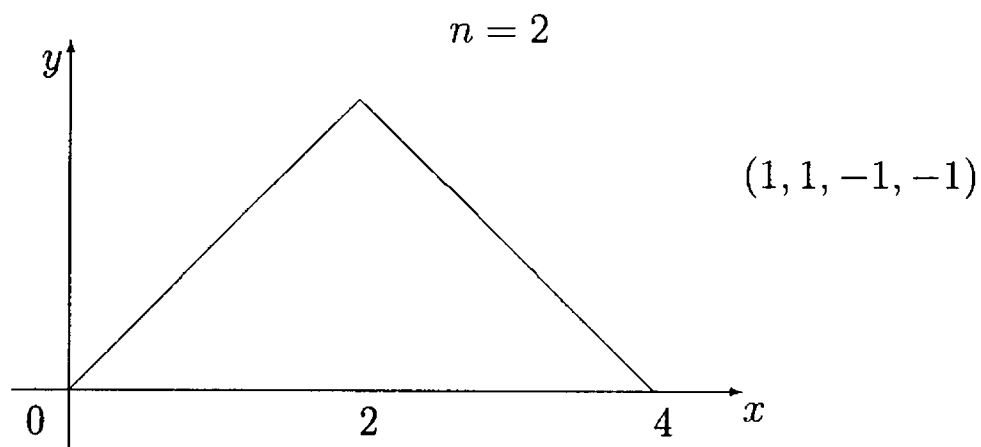
Наше найближче завдання — знайти формулу для обчислення C_n .

Поставимо у відповідність кожному вектору (1) геометричну траєкторію на папері в клітинку: якщо $\varepsilon_i = 1$ на i -ій ділянці траєкторії, траєкторія йде вгору і вправо, якщо $\varepsilon_i = -1$ на i -ій ділянці траєкторії, траєкторія йде вниз і вправо. Траєкторії, для яких виконані умови (3) і (4), будемо називати траєкторіями Каталана. Побудуємо для $n = 1$ та $n = 2$ траєкторії, які задовольняють умову (3) (рис. 24 — рис. 30).

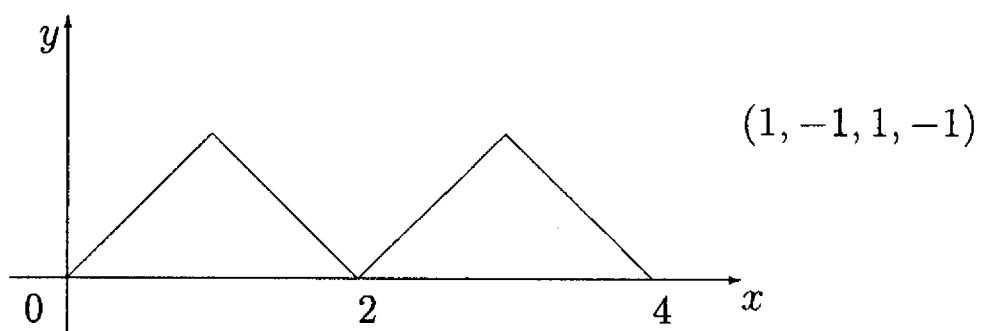
$n = 1$



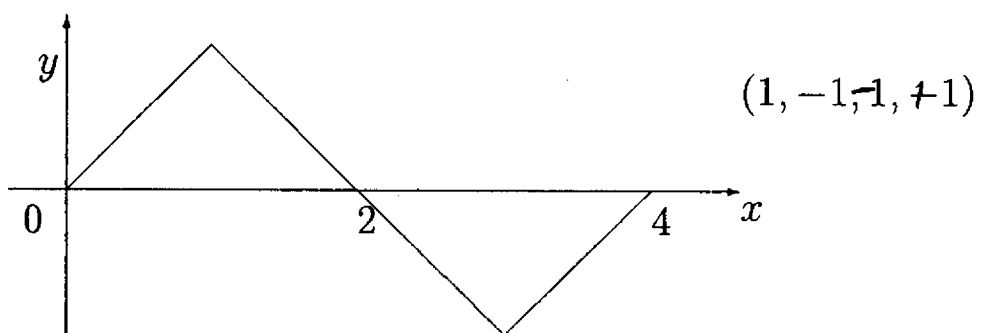
(Рис. 24)



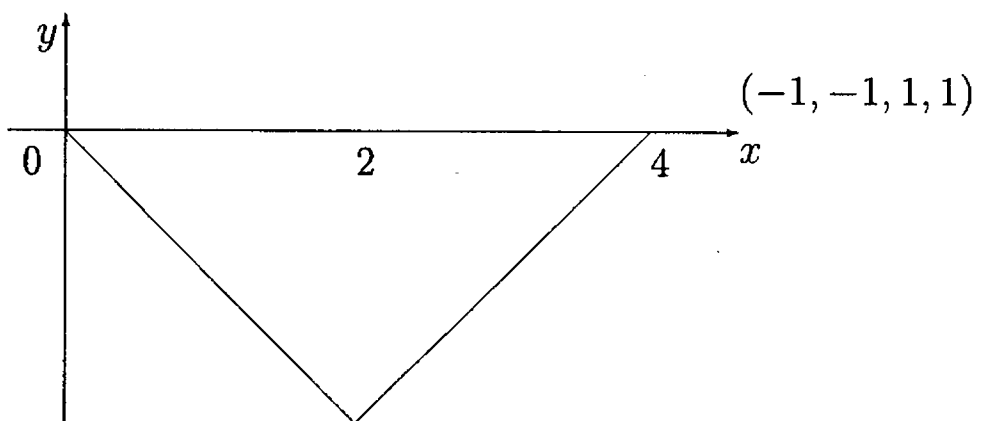
(Рис. 25)



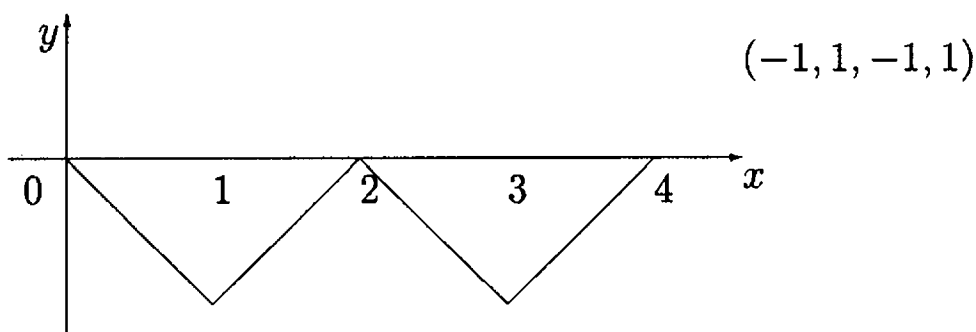
(Рис. 26)



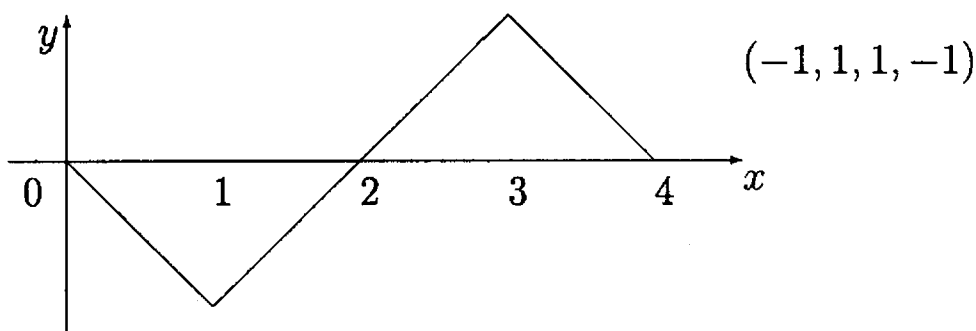
(Рис. 27)



(Рис. 28)



(Рис. 29)



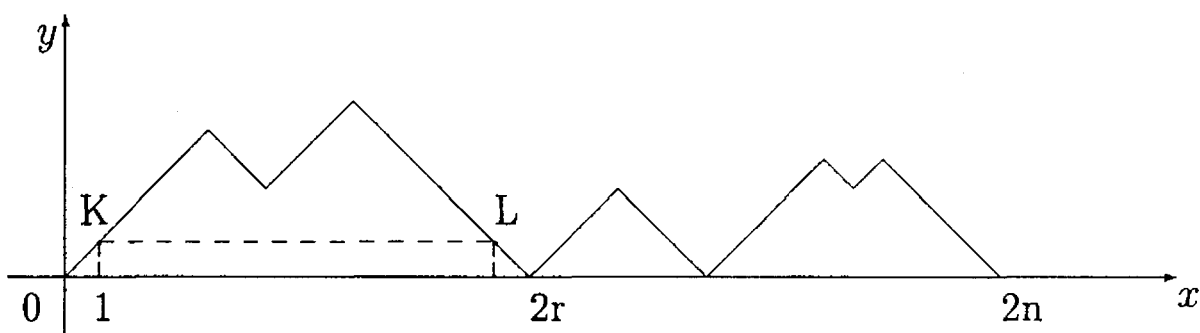
(Рис. 30)

Ми бачимо, що при $n = 1$ є дві траєкторії, які задовольняють умову (3), серед них лише одна є траєкторією Каталана. При $n = 2$ число всіх траєкторій, які задовольняють умову (3), дорівнює $C_4^2 = 6$; серед цих траєкторій лише дві є траєкторіями Каталана. Отже, $C_1 = 1, C_2 = 2$.

Наголосимо ще раз: а) траєкторія Каталана розпочинається в точці $(0, 0)$; б) закінчується в точці $(2n, 0)$, в) не перетинає пряму $y = -1$.

Складемо рекурентне співвідношення для C_n .

Розглянемо траєкторію Каталана з довжиною $2n$. Нехай $2r$ — абсциса точки, де траєкторія вперше дотикається осі OX . Ця траєкторія обов'язково проходить через точку $K(1, 1)$ і $L(2r - 1, 1)$ і не перетинає пряму $y = 0$. Ділянка траєкторії, що сполучає K і L , є траєкторією Каталана по відношенню до прямої $y = 1$. Тому число траєкторій Каталана, які вперше дотикаються до осі OX в точці $(2r, 0)$, дорівнює $C_{r-1}C_{n-r}$ (рис. 31) бо число траєкторій Каталана,



(Рис. 31)

які сполучають $(2r, 0)$ і $(2n, 0)$, дорівнює C_{n-r} . Покладемо $C_0 = 1$ (тоді можемо вважати, що число траєкторій, які *вперше* досягають осі в точці $(2n, 0)$ дорівнює $C_n = C_{n-1}C_0$). Таким чином,

$$C_n = \sum_{r=1}^n C_{r-1}C_{n-r}, \quad (n \geq 1) \quad (5)$$

$$C_0 = 1. \quad (6)$$

Позначимо через $C(t)$ генератрису шуканої послідовності

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n. \quad (7)$$

Помножимо обидві частини рівності (5) на t^n , а рівності (6) на t^0 , і розглянемо суму по n від нуля до нескінченності. Будемо мати

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} t^n \left(\sum_{r=1}^n C_{r-1}C_{n-r} \right) + 1 = \\ &= t \sum_{n=0}^{\infty} t^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) + 1 = \\ &= 1 + tC^2(t) \end{aligned} \quad (8)$$

(ми зробили заміну індексу $r-1 = i$ в сумі $\sum_{r=1}^n C_{r-1}C_{n-r}$ та використали теорему 2 з розділу 10 про генератрису композиції).

Отже, отримали квадратне рівняння для функції $C(t)$

$$tC^2(t) - C(t) + 1 = 0,$$

звідки

$$C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}. \quad (9)$$

Але при $t = 0$ $C(t) = C_0 = 1$. Тому в (9) треба обрати перед радикалом знак '-'. Тепер залишається знайти коефіцієнт при t^n в розкладі функції

$$C(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}. \quad (10)$$

Але ми вже робили це при розгляді прикладу 15 з розділу 10, використовуючи біноміальний ряд з показником $\alpha = \frac{1}{2}$, і встановили, що

$$\frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} C_{2n}^n t^n. \quad (11)$$

Отже, має місце теорема.

Теорема 1.

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n. \quad (12)$$

Задача про число розстановок дужок при виконанні бінарної операції. Розглянемо систему елементів: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Позначимо через Q_n число усіх способів розставити $n - 1$ пар дужок в цій системі для виконання бінарної операції над кожною з пар отриманих виразів. Розглянемо приклади таких розстановок для $n = 2, n = 3$ та $n = 4$.

Якщо $n = 2$, $Q_2 = 1$, бо маємо лише один спосіб розстановки дужок: (x_1, x_2) . Якщо $n = 3$, $Q_3 = 2$, бо можливих розстановок дві:

$$\begin{aligned} &(x_1, (x_2, x_3)); \\ &((x_1, x_2)x_3). \end{aligned}$$

Якщо $n = 4$, $Q_4 = 5$, бо є 5 можливих розстановок

$$\begin{aligned} &(x_1, (x_2, (x_3, x_4))); \\ &(x_1, ((x_2, x_3), x_4)); \\ &((x_1, x_2), (x_3, x_4)); \\ &(((x_1, x_2), x_3), x_4); \\ &((x_1, (x_2, x_3)), x_4). \end{aligned} \quad (13)$$

Зазначимо, що зовнішня дужка об'єднує два вирази, кожен з яких містить k і $n-k$ елементів ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Наприклад, у перших двох розстановках (13) $k = 1$, в третій розстановці $k = 2$, в четвертій та п'ятій $k = 3$.

Звідси випливає рекурентне співвідношення

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n-1} Q_k Q_{n-k}. \quad (14)$$

Покладемо також $Q_1 = 1$.

Порівняймо уважно співвідношення (14) та співвідношення (5) і (6), які визначають числа Каталана C_n . Якщо в (5) зробити заміну індексу $r-1 = k$, то будемо мати рівність

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k+1}. \quad (15)$$

З порівняння (14) і (15) випливає, що $Q_n = C_{n-1}$.

Теорема 2. *Має місце рівність*

$$Q_n = C_{n-1} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}. \quad (16)$$

Задача Ойлера про розбиття багатокутників на трикутники. Підрахуємо число способів T_n розбиття опуклого $(n+2)$ -кутника з поміченими вершинами на трикутники діагоналями, які не перетинаються. Очевидно, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$ (див рис.). Перенумеруємо вершини $(n+2)$ -кутника числами $1, 2, \dots, n, n+1, n+2$. Ребро, суміжне з i -ою та $(i+1)$ -ою вершинами позначимо $(i, i+1)$. Нехай при деякому розбитті s є номер вершини трикутника, протилежної до сторони $(n+2, 1)$. Якщо $s = 2$ або $s = n+1$, то число відповідних розбиттів дорівнює T_{n-1} . Для $1 \leq s \leq n$ число розбиттів дорівнює добутку числа розбиттів s -кутника на число розбиттів $(n-s+3)$ -кутника, тобто дорівнює $T_{s-2} T_{n-s+1}$. Якщо покладемо $T_0 = 1$, то отримаємо

$$T_n = \sum_{s=0}^{n-1} T_s T_{n-s-1}. \quad (17)$$

Порівнюючи рекурентне співвідношення (17) із співвідношенням (5), в якому зроблено заміну індексу $r - 1 = s$, прийдемо до висновку $T_n = C_n$.

Метод траєкторій розв'язання комбінаторних задач. Для багатьох комбінаторних задач можна вказати таку геометричну інтерпретацію, яка зводить задачу до підрахунку числа шляхів (траєкторій), що мають певну властивість. В цьому і полягає *метод траєкторій*. Ми вже користувалися ним при доведенні деяких біноміальних тотожностей та при розгляді чисел Каталана на початку цього розділу.

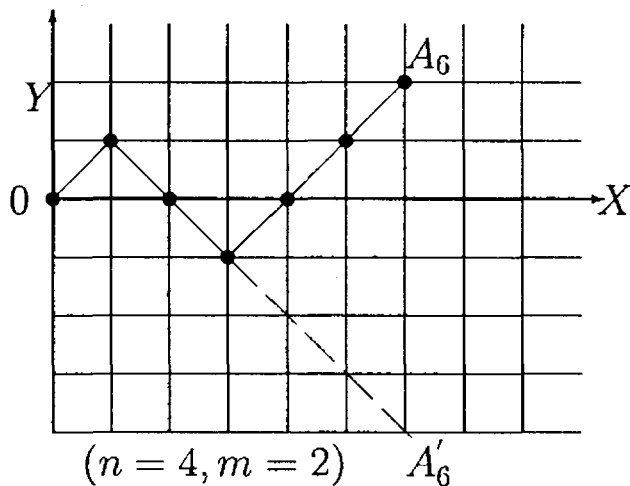
Термін "метод траєкторій" запровадив Б.В.Гнеденко та його учні студенти Київського університету В.С.Корольок та В.С.Михалевич, які успішно використовували в 1954-1956 році метод траєкторій при знаходженні точних формул для статистичних критеріїв типу Колмогорова-Смірнова. Ці роботи мали значний науковий резонанс і покликали за собою велику кількість робіт інших математиків. Відомий американський математик Віллі Феллер (1906-1970) в 1963 році включив до другого видання першого тому своєї книги спеціальний розділ про метод траєкторій.

Задача 4. Біля каси зібрались $m + n$ осіб, причому n з них мають монети вартістю 50 копійок, а інші m мають лише одну гривню. На початку в касі нема грошей. Білет коштує 50 копійок. Скільки всього є способів такого розташування $m + n$ покупців в чергу до каси, при якому жодному покупцеві не доведеться чекати здачі ($m \leq n$)?

Припустимо, що покупці певним способом розташовані в чергу до каси. Нехай ε_i дорівнює 1, якщо i -й покупець має 50 коп., $\varepsilon_i = -1$, якщо i -й покупець має гривню. Розглянемо суму

$$S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k. \quad (18)$$

Очевидно, S_k є різниця між кількістю монет 50 коп. і кількістю купюр розміром 1 гривня, які подані до каси першими k покупцями.



(Рис. 32)

Розглянемо систему координат XOY . Побудуємо в ній точки $A_k(k, S_k)$ ($k = 1, 2, \dots, m+n$) і розглянемо також ламану лінію, яка сполучає точку $O(0,0)$ з точкою $A_{m+n}(n+m, n-m)$ і проходить через точки $A_1, A_2, \dots, A_{m+n-1}$ (рис. 32). Будемо називати таку ламану траєкторією, яка відповідає даному способу розташування покупців у черзі. Кожна траєкторія містить $m+n$ відрізків, n з яких піднімаються вгору, а m опускаються вниз. Якщо вказати номери тих відрізків, які піднімаються вгору, то траєкторія буде визначена повністю.

Отже, загальне число траєкторій дорівнює C_{m+n}^n . Траєкторії, що відповідають тим способам розташування покупців, при яких жоден покупець не чекає здачі, не перетинають пряму $y = -1$. Справді, якщо для якогось k $S_{k-1} = 0$, $S_k = -1$, то це означає, що перші $k-1$ покупців подали до каси однакову кількість монет 50 копійок і купюр 1 гривня, а k -й покупець вимушений чекати здачу.

Знайдемо число траєкторій, які перетинають пряму $y = -1$. Поставимо у відповідність кожній траєкторії T , яка перетинає або дотикається до прямої $y = -1$, нову траєкторію T' за таким правилом: до першої точки дотику з прямою $y = -1$ траєкторія T' збігається з T , а далі є симетричним образом траєкторії T відносно прямої $y = -1$ (на рис. 32 траєкторія позначена пунктирною лінією). Всі траєкторії T' закінчуються в точці $A'_{m+n}(n+m, m-n-2)$, яка є симетричним образом точки A_{m+n} відносно прямої $y = -1$. Встановлена відповідність є взаємно однозначною. Тому число траєк-

торій, що перетинають пряму $y = -1$, дорівнює числу ламаних, які сполучають точки O і A'_{m+n} . Це число легко підрахувати: якщо така траєкторія містить y відрізків, які йдуть вниз, і x відрізків, які йдуть вгору, то

$$x + y = m + n, \quad (19)$$

$$y - x = n + m - 2.$$

З (19) випливає, що $y = n + 1$. Таким чином, число траєкторій, які перетинають $y = -1$, дорівнює C_{m+n}^{n+1} . Шукане число траєкторій дорівнює

$$C_{m+n}^n - C_{m+n}^{n+1} = C_{m+n}^n \frac{n+1-m}{n+1} \quad (20)$$

Якщо $m = n$, отримуємо такий результат: число траєкторій, які сполучають точку $(0, 0)$ з точкою $(2n, 0)$ дорівнює

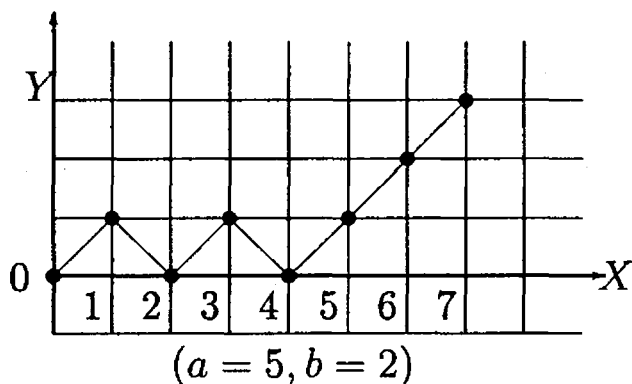
$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Це нове доведення теореми 1.

Задача 5. (Задача про балотування.)

Кандидат A зібрав на виборах a голосів, а кандидат B — b голосів, де $a > b$. Виборці голосували послідовно. Скільки існує таких способів подачі голосів, при яких A завжди буде попереду від B за кількістю поданих за нього голосів?

Нехай ε_i дорівнює 1, якщо i -й голос подано за A , $\varepsilon_i = -1$, якщо i -й голос подано за B . Позначимо $S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k$ і розглянемо в системі координат XOY ламану лінію, яка сполучає точки O , $(1, S_1), \dots, (k, S_k), \dots, (a+b, S_{a+b})$ (рис. 33). Очевидно, $S_{a+b} = a - b$.



(Рис. 33)

Кожному способу подачі голосів відповідає траєкторія, яка сполучає точки O і $(a+b, a-b)$. Траєкторія містить $a+b$ відрізків, причому a з них йдуть вгору. Тому загальне число траєкторій дорівнює C_{a+b}^a . Кандидат A завжди буде попереду від B , якщо відповідна траєкторія проходить через точку $(1, 1)$ (пеший голос повинен бути за A) і не перетинає вісь OX . Число таких траєкторій може бути підраховане за формулою (20), в якій треба покласти $n = a - 1$, $m = b$. Отже, шукане число способів подачі голосів дорівнює

$$C_{a+b-1}^{a-1} \frac{a-1+1-b}{a-1+1} = \frac{a-b}{a+b} C_{a+b}^a.$$

Задачу про балотування в розглядав в 1878 році Уїтворт, автор однієї з перших монографій з комбінаторики, та французький математик Жозеф Бертран (1822-1900) в 1887 році.

РОЗДІЛ 13

Різницевий оператор

*Гарні математики бачать аналогії між теоремами та теоріями, а кращі математики — аналогії між аналогіями.*¹³
Гамов Георгій¹⁴

Властивості різницевого оператора. Коли одній функції ставиться у відповідність за певним правилом інша функція, то математики говорять, що задано оператор. Оператори оперують з функціями, утворюючи нові функції.

Наприклад, в диференціальному численні важливу роль грає оператор D взяття похідної, який означено так:

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x). \quad (1)$$

Він означений на множині тих функцій, для яких існує границя (1). Такі функції називають диференційованими.

Для функцій дискретного аргументу аналогом поняття похідної є поняття *різницевого оператора*.

Означення 1. Припустимо, що функція $f(x)$ така, що її область визначення разом з точкою x містить і точку $x+1$. Операція переходу від $f(x)$ до $f(x+1) - f(x)$ називається різницеvim оператором:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \quad (2)$$

З (2) випливають такі властивості оператора Δ .

Теорема 1. Оператор Δ однорідний: якщо c константа, то

$$\Delta(cf(x)) = c\Delta f(x). \quad (3)$$

Доведення. Маємо

$$\Delta(cf(x)) = cf(x+1) - cf(x) = c(f(x+1) - f(x)) = c\Delta f(x).$$

Теорема 2. Оператор Δ є адитивним оператором, тобто

$$\Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x). \quad (4)$$

¹³Цитується за книгою: С. Улам, Приключения математика, РХД, Москва, Ижевск, 2001.

¹⁴Георгій Гамов (1904-1968) — американський фізик теоретик. Народився в Одесі, з 1934 року працював в США. Розробив теорію α розпаду, зробив перші розрахунки генетичного коду.

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned}\Delta(f(x) + g(x)) &= (f(x+1) + g(x+1)) - (f(x) + g(x)) = \\ &= \Delta f(x) + \Delta g(x).\end{aligned}$$

З теорем 1 та 2 випливає наступна властивість.

Теорема 3. *Оператор Δ є лінійним оператором, тобто для будь-яких констант c_1 та c_2*

$$\Delta(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \Delta f(x) + c_2 \Delta g(x). \quad (5)$$

Приклад 1. $\Delta(ax + b) = a$.

Справді, $\Delta(ax + b) = (a(x+1) + b) - (ax + b) = a$.

Приклад 2. $\Delta(x^2) = 2x + 1$.

Дійсно, $\Delta(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$.

Приклад 3. $\Delta(2^x) = 2^{x+1} - 2^x = 2^x$.

Приклад 4. $\Delta \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x(x+1)}$.

Поряд з різницеvim оператором введемо *оператор зсуву* E , поклавши

$$Ef(x) = f(x+1), \quad (6)$$

та одиничний оператор I , поклавши

$$If(x) = f(x). \quad (7)$$

Тоді

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = Ef(x) - If(x) \quad (8)$$

Символічно можна записати, що $\Delta = E - I$.

Нехай $u(x)$ та $v(x)$ дві функції. Як діє оператор Δ на добуток цих функцій?

Теорема 4. *Має місце рівність*

$$\Delta(uv) = u\Delta v + Ev\Delta u. \quad (9)$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned}\Delta(u(x)v(x)) &= u(x+1)v(x+1) - v(x)u(x) = \\ &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1) + u(x)v(x+1) - u(x)v(x) = \\ &= v(x+1)[u(x+1) - u(x)] + u(x)[v(x+1) - v(x)] = \\ &= u\Delta v + Ev\Delta u.\end{aligned}$$

Степені різницевого оператора. Індуктивно, з допомогою рівності $\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x))$, означимо оператор Δ^n , дія якого полягає в n -кратному застосуванні оператора Δ .

Приклад 5. Маємо за означенням

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+1) - f(x)) = \\ &= (f(x+2) - f(x+1)) - (f(x+1) - f(x)) = \\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x).\end{aligned}$$

Приклад 6. Знову ж за означенням, використовуючи результат прикладу 5, маємо

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(x) &= \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta(f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)) = \\ &= (f(x+3) - 2f(x+2) + f(x+1)) - (f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)) = \\ &= f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x).\end{aligned}$$

Теорема 5. *Справедлива така формула*

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(x+n-k). \quad (10)$$

Доведення. В справедливості формули (10) при $n = 2$ та $n = 3$ ми тільки що переконалися. Припустимо, що формула (10) справедлива при $n = r - 1$, і доведемо її справедливість при $n = r$.

Запишемо (10) при $n = r - 1$

$$\Delta^{r-1} f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k C_{r-1}^k f(x+r-1-k),$$

і застосуємо до обох частин рівності оператор Δ . Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}\Delta^r f(x) &= \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k C_{r-1}^k f(x+r-k) - \\ &\quad - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j C_{r-1}^j f(x+r-j-1).\end{aligned}$$

В другій сумі зробимо заміну індексу, поклавши $k = j + 1$. Будемо мати

$$\Delta^r f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k C_{r-1}^k f(x+r-k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^r (-1)^k C_{r-1}^{k-1} f(x + r - k).$$

Об'єднавши обидві суми та використавши основне рекурентне співвідношення для біноміальних коефіцієнтів, отримаємо (10) при $n = r$. Таким чином, рівність (10) доведена.

Зауважимо, що в символічному численні операторів з операторами можна оперувати як з числами. Тому, наприклад, з рівності $E - I = \Delta$ маємо

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k E^{n-k} I^k. \quad (11)$$

Застосовуючи символічну операторну рівність (11) до функції $f(x)$ отримаємо (10).

Рівність $E^n = (\Delta + I)^n$ у застосуванні до функції $f(x)$ дає таке співвідношення

$$E^n f(x) = f(x + n) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k f(x). \quad (12)$$

Приклад 7. Розглянемо функцію $f(x) = x^n$.

Нехай $m \leq n$. Розглянемо $\Delta^m(x^n)$. Тоді згідно з (10)

$$\Delta^m(x^n) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k (x + m - k)^n.$$

Поклавши в цій рівності $x = 0$,

$$\Delta^m 0^n = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k (m - k)^n. \quad (13)$$

Згідно з теоремою 4 розділу 7 це є число сюр'єктивних відображень множини X , що містить n елементів, в множину Y , яка містить m елементів. Числа (13) називаються *числами Моргана*.

Розглянемо ще одне застосування формули (10). Нехай $(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1)$. Вважаємо, що $(x)_0 = 1$.

Теорема 6. *Має місце співвідношення*

$$\Delta^k(x)_n = (n)_k(x)_{n-k} \quad (14)$$

при $k \leq n$; $\Delta^k(x)_n = 0$ при $k > n$.

Нехай $k = 1$, тоді

$$\begin{aligned}\Delta(x(x-1)\dots(x-n+1)) &= (x+1)x(x-1)\dots(x-(n-2)) - \\ &\quad - x(x-1)\dots(x-(n-1)) = \\ &= x(x-1)\dots(x-(n-2)) \times ((x+1) - (x-(n-1))) = \\ &= n(x)_{n-2} = (n)_1(x)_{n-1}.\end{aligned}$$

Продовжуючи далі, маємо

$$\Delta^2(x)_n = \Delta(n(x)_{n-1}) = n\Delta(x)_{n-1} = n(n-1)(x)_{n-2} = (n)_2(x)_{n-2}.$$

Припустимо, що $\Delta^{k-1}(x)_n = (n)_{k-1}(x)_{n-(k-1)}$. Тоді

$$\Delta^k(x)_n = \Delta((n)_{k-1}(x)_{n-(k-1)}) = (n)_{k-1}(n-k+1)(x)_{n-k} = (n)_k(x)_{n-k}.$$

Отже, формула (14) має місце.

Приклад 8. Нехай $(x)_4 = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

Тоді

$$\begin{aligned}\Delta(x)_4 &= 4(x)_3 = 4x(x-1)(x-2) \\ \Delta^2(x)_4 &= (4)_2(x)_2 = 4 \cdot 3x(x-1) = 12x(x-1) \\ \Delta^3(x)_4 &= (4)_3(x)_1 = 4 \cdot 3 \cdot 2x = 4!x \\ \Delta^4(x)_4 &= (4)_4(x)_0 = 4! \\ \Delta^k(x)_4 &= 0 \quad \text{при } k > 4.\end{aligned}$$

Приклад 9. Маємо

$$\Delta^n(x)_n = (n)_n(x)_0 = n! \quad (15)$$

Антирізницький оператор, обчислення сум значень функції.

Означення 2. Антирізницевою функцією для функції $\varphi(x)$ будемо називати таку функцію $f(x)$, що

$$\Delta f(x) = \varphi(x). \quad (16)$$

Будемо позначати її $\Delta^{-1}\varphi(x)$. Оператор переходу від функції $\varphi(x)$ до $f(x) = \Delta^{-1}\varphi(x)$ називається антирізницьким оператором. Зазначимо, що антирізниця функція є аналогом первісної функції в інтегральному численні. Як і первісна функція, антирізниця функція визначається неоднозначно.

Теорема 7. Якщо $f(x)$ антирізницева функція для $\varphi(x)$, а $C(x)$ періодична функція з періодом 1, то функція $f(x) + C(x)$ також є антирізницевою функцією для $\varphi(x)$.

Доведення. Нехай $f(x)$ антирізницева функція для $\varphi(x)$. Це означає, що $\Delta f(x) = \varphi(x)$. Розглянемо $\Delta(f(x) + C(x))$. Маємо

$$\begin{aligned}\Delta(f(x) + C(x)) &= (f(x+1) + C(x+1)) - (f(x) + C(x)) = \\ &= (f(x+1) - f(x)) + (C(x+1) - C(x)) = \Delta f(x) = \varphi(x),\end{aligned}$$

бо за умовою $C(x+1) = C(x)$. Отже, $f(x) + C(x)$ - антирізницева функція для $\varphi(x)$.

Наведемо таблицю антирізничевих функцій. Вона є дискретним аналогом таблиці первісних функцій в інтегральному численні.

Таблиця антирізничевих функцій.

	$\varphi(x)$	$\Delta^{-1}\varphi(x)$
1	2^x	2^x
2	a^x	$\frac{a^x}{a-1}$
3	$(x)_k$	$\frac{(x)_{k+1}}{k+1}$
4	$\cos(x)$	$\frac{\sin(x - \frac{1}{2})}{2 \sin(1/2)}$
5	$\operatorname{arctg} \frac{1}{1+x+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

Радимо читачеві перевірити справедливості усіх клітинок таблиці. Зазначимо, наприклад, що справедливості (3) випливає з того, що згідно з рівністю (14)

$$\Delta(x)_k = k(x)_{k-1}.$$

Тому

$$\Delta \frac{(x)_{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \Delta(x)_{k+1} = \frac{1}{k+1} (k+1)(x)_k = (x)_k.$$

Справедливість (5) випливає з відомої рівності

$$\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x+x^2}.$$

Теорема 8. Нехай $f(x)$ - антирізницева функція для функції $\varphi(x)$. Тоді

$$\sum_{k=m}^{n-1} \varphi(k) = f(n) - f(m). \quad (17)$$

Доведення. Запишемо рівність

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x).$$

Покладемо в ній $k = m, m+1, \dots, n-1$. Матимемо

$$\begin{aligned} f(m+1) - f(m) &= \varphi(m) \\ f(m+2) - f(m+1) &= \varphi(m+1) \\ &\dots\dots\dots \\ f(n) - f(n-1) &= \varphi(n-1). \end{aligned}$$

Додавши почленно всі ці рівності, отримаємо рівність (17). Рівність (17) є дискретним аналогом формули Ньютона-Лейбніца в інтегральному численні. Там, де це буде потрібно для скорочення запису, ми будемо писати її в такому вигляді

$$\sum_{k=m}^{n-1} \varphi(k) = f(x) \Big|_m^n. \quad (18)$$

Приклад 10. Застосовуючи (17), маємо

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^k}{a-1} \Big|_0^n = \frac{a^n - 1}{a-1}.$$

Приклад 11. Обчислимо суму

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2.$$

Оскільки $x^2 = x(x-1) + x$, то антирізницева функція для функції $\varphi(x) = x^2$ дорівнює $\frac{1}{3}(x)_3 + \frac{1}{2}(x)_2$. Використовуючи формулу (17),

матимемо

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \left(\frac{1}{3}(x)_3 + \frac{1}{2}(x)_2 \right) \Big|_1^n = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

Пізніше ми вкажемо загальну формулу для обчислення суми степенів чисел натурального ряду.

Приклад 12.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\alpha \left(x + k + \frac{1}{2} \right) \right) &= \frac{\sin \alpha(x+k)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \Big|_0^n = \\ &= \frac{\sin \alpha(x+n) - \sin \alpha x}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Якщо покласти в цій рівності $x = -1/2$, то отримаємо рівність

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos(n-1)\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{(n-1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Перетворення Абеля. Перетворення Абеля є дискретним аналогом формули інтегрування частинами в інтегральному численні.

Теорема 9. Нехай $\mathcal{U}(k) = \sum_{i=1}^k u(i)$. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n-1} u(k+1)v(k+1) &= \mathcal{U}(n)v(n) - \mathcal{U}(m)v(m) \\ &\quad - \sum_{k=m}^{n-1} \mathcal{U}(k)\Delta v(k). \end{aligned} \quad (19)$$

Рівність (19) можна переписати в символічному вигляді ще так

$$\sum_{k=m}^{n-1} u(k+1)v(k+1) = \mathcal{U}(k)v(k) \Big|_m^n - \sum_{k=m}^{n-1} \mathcal{U}(k)\Delta v(k). \quad (20)$$

Тепер вона ще більше нагадує формулу інтегрування частинами.

Доведення. Використовуючи теорему 4, маємо

$$\Delta(\mathcal{U}(k)v(k)) = v(k+1)\Delta\mathcal{U}(k) + \mathcal{U}(k)\Delta v(k).$$

Але $\Delta \mathcal{U}(k) = \mathcal{U}(k+1) - \mathcal{U}(k) = u(k)$,
і тому отримуємо рівність

$$u(k+1)v(k+1) = \Delta(\mathcal{U}(k)v(k)) - \mathcal{U}(k)\Delta v(k). \quad (21)$$

Покладаючи в рівності (21) $k = m, m+1, \dots, n-1$ і підсумовуючи отримані рівності, отримаємо (19).

Приклад 13. Обчислимо суму

$$\sum_{k=1}^{n-1} k2^k.$$

В нашому випадку $u_k = 2^k$, $v(k) = k-1$, $\mathcal{U}(k) = 2^k - 1$. Підставляючи в рівність (20),

$$\sum_{k=1}^{n-1} k2^k = (2^n - 1)(n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) = (n-2)2^n + 2.$$

Різницеві рівняння. Надалі $y(x)$ є невідома функція, а аргумент набуває цілих невід'ємних значень. Ми розглянемо деякі рівняння для невідомої функції, які містять різницевий оператор Δ .

Означення 3. Рівняння виду

$$\Delta y(x) - g(x)y(x) = 0, \quad (22)$$

де $y(x)$ невідома функція, а $g(x)$ відома функція, називається лінійним однорідним різницевим рівнянням першого порядку.

Порядок різницевого рівняння визначається степенем різницевого оператора.

Означення 4. Загальний розв'язок рівняння (22) — це функція $y(x, C)$, яка залежить від константи C і при довільному значенні C є розв'язком рівняння (22), і така, що кожен розв'язок рівняння (22) збігається з $y(x, C)$ при певному виборі константи C .

Теорема 10. Загальний розв'язок рівняння (22) має вигляд

$$y(x) = C \prod_{k=0}^{x-1} (g(k) + 1). \quad (23)$$

Доведення. Запишемо рівняння (22) у вигляді

$$y(x+1) - y(x) - g(x)y(x) = 0,$$

звідки

$$y(x+1) = y(x)(g(x)+1). \quad (24)$$

Якщо покладемо $y(0) = C$, то

$$y(1) = C(g(0)+1),$$

$$y(2) = C(g(0)+1)(g(1)+1)$$

і т.д. повторюючи рівність (24), прийдемо до висновку, що має місце (23). Неважко й перевірити, що кожна функція виду (23) є розв'язком рівняння (22).

Розглянемо стисло основні факти з теорії однорідних лінійних різницевих рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Такі рівняння можна подати у вигляді

$$\Delta^2 y(x) + a\Delta y(x) + by(x) = 0. \quad (25)$$

Розглянемо оператор $L(\Delta) = \Delta^2 + a\Delta + b$. Це лінійний оператор, бо Δ^2 та Δ - лінійні оператори. В операторному вигляді рівняння (25) запишеться у вигляді $L(\Delta)y(x) = 0$. Загальний розв'язок цього рівняння $y(x, C_1, C_2)$ залежить від двох параметрів C_1 та C_2 .

Теорема 11. *Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки рівняння (25), то $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ є розв'язком рівняння (25) при будь-яких значеннях констант C_1 та C_2 .*

Доведення. Маємо

$$L(\Delta)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)) = C_1L(\Delta)y_1(x) + C_2L(\Delta)y_2(x) = 0,$$

бо $L(\Delta)y_1(x) = 0$, $L(\Delta)y_2(x) = 0$.

Теорема 12. *Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ такі, що*

$$\det \begin{pmatrix} y_{10} & y_{11} \\ y_{20} & y_{21} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (26)$$

де $y_{10} = y_1(0)$, $y_{11} = y_1(1)$, $y_{20} = y_2(0)$, $y_{21} = y_2(1)$, то функція $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ є загальним розв'язком рівняння (25).

Доведення. Дійсно, нехай $y(0) = a_0$, $y(1) = a_1$. Тоді з системи

$$C_1y_{10} + C_2y_{20} = a_0$$

$$C_1y_{11} + C_2y_{21} = a_1$$

отримаємо

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & y_{20} \\ a_1 & y_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{10} & y_{11} \\ y_{20} & y_{21} \end{vmatrix}}, \quad C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{10} & a_0 \\ y_{20} & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{10} & y_{11} \\ y_{20} & y_{21} \end{vmatrix}}.$$

Перепишемо рівняння (25) у вигляді

$$y(x+2) + py(x+1) + qy(x) = 0, \quad (27)$$

де $p = a - 2$, $q = a + b + 1$.

Будемо шукати розв'язки рівняння (27) у вигляді деякої показникової функції λ^x . Підставляючи її в (27), матимемо

$$\lambda^{x+2} + p\lambda^{x+1} + q\lambda^x = 0.$$

Скорочуючи на λ^x , приходимо до рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (28)$$

Означення 5. Рівняння (28) називається характеристичним рівнянням для рівняння (27). Загальний розв'язок рівняння (27) залежить від характеру коренів характеристичного рівняння (28). Тут ми спостерігаємо повну аналогію з теорією однорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами.

Випадок перший: корені рівняння (28) дійсні та різні. Позначимо їх λ_1 та λ_2 . Функції $y_1(x) = \lambda_1^x$, $y_2(x) = \lambda_2^x$ є розв'язками рівняння (27). Перевіримо, що для них виконуються умови теореми 12. Маємо: $y_{10} = y_1(0) = 1$, $y_{11} = y_1(1) = \lambda_1$, $y_{20} = y_2(0) = 1$, $y_{21} = y_2(1) = \lambda_2$,

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Отже, функція $y(x) = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$ є загальним розв'язком рівняння (27).

Випадок другий: корені рівняння (28) дійсні та однакові: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Один корінь дає розв'язок $y_1(x) = \lambda^x$. Перевіримо, що функція $y_2(x) = x\lambda^x$ також є розв'язком рівняння (27). Справді,

$$\begin{aligned} (x+2)\lambda^{(x+2)} + p(x+1)\lambda^{(x+1)} + q\lambda^x &= \lambda^x((x+2)\lambda^2 + p(x+1)\lambda + q) = \\ &= \lambda^x(x(\lambda^2 + p\lambda + q) + \lambda(2\lambda + p)) = 0, \end{aligned}$$

бо λ — корінь характеристичного рівняння, і за теоремою Вієта $\lambda + \lambda = -p$.

Перевіримо умови теореми 12. Маємо $y_{10} = y_1(0) = 1$, $y_{11} = y_1(1) = \lambda$, $y_{20} = y_2(0) = 0$, $y_{21} = y_2(1) = \lambda$,
Таким чином,

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \neq 0.$$

Отже, в цьому випадку загальним розв'язком рівняння (27) буде функція

$$y(x) = \lambda^x (C_1 x + C_2).$$

Випадок третій: корені характеристичного рівняння (28) комплексні і різні. Нехай один з коренів $\alpha + i\beta$, тоді другий буде спряженим до нього, тобто, $\alpha - i\beta$. Комплекснозначна функція $(\alpha + i\beta)^x$ є розв'язком рівняння (27), і з лінійності оператора $L(\Delta)$ випливає, що дійсна та уявна частина цієї функції будуть розв'язками рівняння (27). Нехай $\alpha + i\beta = \rho e^{i\varphi}$. Тоді

$$(\alpha + i\beta)^x = \rho^x \cos \varphi x + i \rho^x \sin \varphi x.$$

Таким чином, функції $y_1 = \rho^x \cos \varphi x$ та $y_2 = \rho^x \sin \varphi x$ будуть дійсними розв'язками рівняння (27).

Умови теореми 12 виконані. Справді, $y_{10} = y_1(0) = 1$, $y_{11} = y_1(1) = \rho \cos \varphi$, $y_{20} = y_2(0) = 0$, $y_{21} = y_2(1) = \rho \sin \varphi$, тому

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho \cos \varphi \\ 0 & \rho \sin \varphi \end{vmatrix} = \rho \sin \varphi \neq 0.$$

Отже, функція

$$y(x) = \rho^x (C_1 \rho \cos \varphi + C_2 \rho \sin \varphi)$$

є загальним розв'язком рівняння (27).

Приклад 14. (Числа Фібоначчі)

Розглянемо послідовність

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \dots$$

Різницеве рівняння для F_n записується так

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

його корені

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y_n = F_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Беручи до уваги початкові умови $y_0 = 0, y_1 = 1$, складемо систему для знаходження C_1 та C_2 :

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1,$$

з якої випливає

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Отже,

$$y_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}.$$

Таким чином, ми ще раз отримали формулу Біне, яка розглядалася в розділі 11.

Приклад 15. Розглянемо послідовність, визначену рекурентним співвідношенням

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad (29)$$

з початковими умовами $y_0 = 2, y_1 = 1$.

Загальний розв'язок різницевого рівняння (29) має вигляд

$$y_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

і, враховуючи початкові умови, отримаємо

$$y_n = L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (30)$$

Члени послідовності L_n називаються *числами Люка*, на честь відомого французького математика Едуарда Люка (1842 - 1891), автора знаменитого чотиритомного трактату з розважальної математики.¹⁵

Подано декілька чисел з послідовності Люка:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Люка багато зробив в XIX столітті для популяризації чисел Фібоначчі, йому належить і термін "число Фібоначчі".

Приклад 16. Знайдемо загальний член послідовності, яка задовольняє рекурентні співвідношенням

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0, y_0 = 1, y_1 = 6.$$

В даному випадку характеристичне рівняння має кратний корінь $\lambda = 3$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y_n = 3^n(C_1n + C_2)$$

і, враховуючи початкові умови, прийдемо до висновку, що

$$y_n = (n + 1)3^n.$$

Приклад 17. Знайдемо загальний член послідовності, яка задана рекурентним співвідношенням

$$y_{n+2} + y_n = 0, y_0 = y_1 = 1.$$

Характеристичне рівняння має комплексні корені

$$\lambda_1 = i = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}, \quad \lambda_2 = -i$$

Тому загальний розв'язок різницевого рівняння має вигляд

$$y_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Беручи до уваги початкові умови, отримаємо

$$y_n = \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Теорія неоднорідних різницевого рівнянь теж має багато аналогій з теорією диференціальних рівнянь.¹⁶

¹⁵Edouard Lukas, *Recreation mathematiques*, Gautier-Villars, Paris, 1891-1894 (Є російський переклад: Люка Э., *Математические развлечения*, СПб, 1883).

¹⁶Більш детально з теорією різницевого рівнянь можна познайомитися за підручниками з різницевого числення. Відзначимо серед них, зокрема: Гельфонд А.О., *Исчисление конечных разностей*, М., Наука, 1967, Марков А.А., *Числення скінченних різниць*, Харків 1936.

РОЗДІЛ 14

Числа Стірлінга першого та другого роду

Деякі послідовності чисел виникають в математиці настільки часто, що їх впізнають з першого погляду і наділяють власними назвами.

З книги Д. Кнут, Р. Грехем, О. Паташник
"Конкретная математика"

Числа Стірлінга, названі так на честь шотландського математика Джеймса Стірлінга (1692-1770), грають винятково важливу роль в комбінаториці, алгебрі та теорії ймовірностей.

Числа Стірлінга першого роду. Нехай

$$(x)_n = x(x-1) \dots (x-n+1). \quad (1)$$

Покладемо також за означенням $(x)_0 = 1$. Зауважимо, що $(x)_n$ є многочленом n -ого степеня.

Означення 1. Розкриємо дужки в (1) і запишемо у вигляді многочлена:

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k. \quad (2)$$

Коефіцієнти $s(n, k)$ при степенях x в розкладі (2) називаються числами Стірлінга першого роду.

Приклад 1. $(x)_1 = x$. Тому

$$s(1, 0) = 0, s(1, 1) = 1.$$

Приклад 2. $(x)_2 = x(x-1) = -x + x^2$. Тому

$$s(2, 0) = 0, s(2, 1) = -1, s(2, 2) = 1.$$

Приклад 3. $(x)_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Отже,

$$s(3, 0) = 0, s(3, 1) = 2, s(3, 2) = -3, s(3, 3) = 1.$$

Приклад 4. Для кожного натурального n

$$s(n, 0) = 0, s(n, n) = 1.$$

Справді, вільний член в розкладі (2) дорівнює нулеві, а коефіцієнт при x^n дорівнює одиниці.

Встановимо рекурентне співвідношення, яке виражає $s(n+1, k)$ через числа $s(n, r)$.

Теорема 1. *Має місце співвідношення*

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k) \quad (3)$$

при $1 \leq k \leq n$; $s(n+1, n+1) = 1$.

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} (x)_{n+1} &= (x)_n(x-n) = (x-n) \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k = \\ &= \sum_{k=0}^n s(n, k)x^{k+1} - n \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k. \end{aligned}$$

У першій сумі виконаємо заміну індексу, поклавши $k+1 = r$. Будемо мати

$$(x)_{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} s(n, r-1)x^r - n \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k.$$

Отже,

$$\begin{aligned} (x)_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (s(n+1, k) - ns(n, k))x^k + s(n, n)x^n. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^k в лівій і правій частинах рівності, отримаємо (3). Теорема 1 описує алгоритм побудови "трикутника чисел Стірлінга першого роду". Його можна сформулювати так: щоб обчислити число $s(n+1, k)$ з номером k в $(n+1)$ -ому рядку, треба від числа з номером $(k-1)$ в n -ому рядку відняти число з номером k , помножене на n .

Приклад 5. Числа в третьому рядку ми вже знаємо: $s(3, 0) = 0$, $s(3, 1) = 2$, $s(3, 2) = -3$, $s(3, 3) = 1$. Згідно з описаним алгоритмом

$$s(4, k) = s(3, k-1) - 3s(3, k).$$

Маємо

$$k = 1 \quad s(4, 1) = -3 \cdot 2 = -6;$$

$$k = 2 \quad s(4, 2) = s(3, 1) - 3s(3, 2) = 2 + 9 = 11;$$

$$k = 3 \quad s(4, 3) = s(3, 2) - 3s(3, 3) = -3 - 3 = -6.$$

Радимо читачеві заповнити сьомий рядок трикутника чисел Стірлінга першого роду.

Таблиця чисел Стірлінга першого роду

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	
1	1						
2	-1	1					
3	2	-3	1				
4	-6	11	-6	1			
5	24	-50	35	-10	1		
6	-120	274	-225	85	-15	1	

Числа Стірлінга другого роду. Позначимо через $\mathcal{P}_n$ сукупність усіх многочленів, степінь яких не перевищує n .

Очевидно $\mathcal{P}_n$ — лінійний простір відносно операції додавання і множення на дійсні числа. Розглянемо систему многочленів з $\mathcal{P}_n$:

$$(x)_0 = 1, (x)_1, \dots, (x)_n. \quad (4)$$

Неважко перевірити, що система многочленів (4) лінійно незалежна і є базисом в $\mathcal{P}_n$.

Означення 2. Розкладемо многочлен x^n за системою многочленів

$$(x)_0, (x)_1, \dots, (x)_n:$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_k. \quad (5)$$

Коефіцієнти в розкладі (5) називаються *числами Стірлінга другого роду*.

Приклад 6. Нехай $n = 1$. Оскільки $x = (x)_1$, то $S(1, 1) = 1$.

Приклад 7. Нехай $n = 2$. Маємо

$$x^2 = x(x - 1) + x = (x)_2 + (x)_1.$$

Таким чином, $S(2, 0) = 0, S(2, 1) = 1, S(2, 2) = 1$.

Приклад 8. Нехай $n = 3$. Маємо

$$\begin{aligned} x^3 &= x \cdot x^2 = x \{ (x)_2 + (x)_1 \} = \\ &= x(x-1)(x-2) + 2x(x-1) + x(x-1) + x = \\ &= (x)_3 + 3(x)_2 + (x)_1. \end{aligned}$$

Таким чином, $S(3, 0) = 0$, $S(3, 1) = 1$, $S(3, 2) = 3$, $S(3, 3) = 1$.

Приклад 9. $S(n, n) = 1$, $S(n, k) = 0$ при $k > n$. Все це випливає з (5).

Встановимо рекурентне співвідношення для $S(n, k)$.

Теорема 2. *Має місце співвідношення*

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k). \quad (6)$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1, k)(x)_k = x \cdot x^n = x \cdot \sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_k = \\ &= \sum_{k=0}^n S(n, k) \{ (x)_k(x-k) + k(x)_k \} = \\ &= \sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_{k+1} + \sum_{k=0}^n S(n, k) k(x)_k. \end{aligned}$$

Проведемо в першій сумі заміну індексу, поклавши $k+1 = r$. Будемо мати

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \sum_{k=0}^n S(n+1, k)(x)_k = \sum_{r=1}^{n+1} S(n, r-1)(x)_r + \\ &+ \sum_{k=0}^n S(n, k) k(x)_k = (x)_{n+1} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \{ S(n, k-1) + kS(n, k) \} (x)_k. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $(x)_k$ в лівій та правій частинах рівності, отримуємо (6).

Рівність (6) формулює алгоритм побудови "трикутника чисел Стірлінга другого роду": щоб отримати число з номером k в $n+1$ -ому рядку, треба до числа з номером $k-1$ в n -ому рядку додати число з номером k , помножене на k .

Приклад 10. Знайдемо числа четвертого рядка. Ми вже знаємо числа третього рядка:

$$S(3, 0) = 0, S(1, 1) = 1, S(3, 2) = 3, S(3, 3) = 1.$$

Тому

$$S(4, 0) = 0, S(4, 1) = 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$S(4, 2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

$$S(4, 3) = 3 + 3 \cdot 1 = 6$$

$$S(4, 4) = 1.$$

Радимо читачеві самотійно побудувати п'ятий і шостий рядок таблиці чисел Стірлінга другого роду.

Таблиця чисел Стірлінга другого роду

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	

Властивість ортогональності чисел Стірлінга. Справедливе таке твердження.

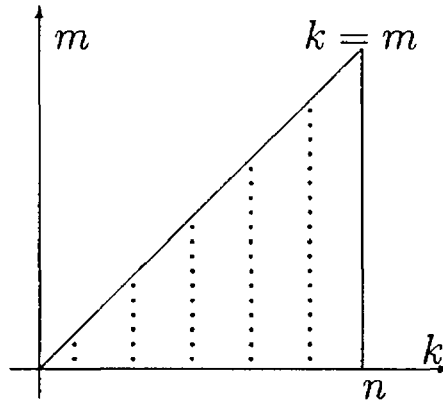
Теорема 3. *Має місце рівність*

$$\sum_{k=m}^n s(n, k) S(k, m) = \delta_n^m = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (7)$$

Доведення. Згідно з означенням чисел Стірлінга першого та другого роду маємо

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k = \sum_{k=0}^n s(n, k) \left(\sum_{m=0}^k S(k, m) (x)_m \right).$$

Подвійна сума поширюється на всі точки (k, m) з області, зображеної на рисунку 34.



(Рис. 34)

Змінимо порядок підсумування. Будемо мати

$$\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k s(n, k) S(k, m) (x)_m = \sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n s(n, k) S(k, m) (x)_m.$$

Отже,

$$(x)_n = \sum_{m=0}^n (s(n, k) S(k, m)) (x)_m.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $(x)_m$ в лівій та правій частинах рівності, отримаємо (7).

Формули обертання, в яких беруть участь числа Стірлінга. В розділі 8 та розділі 10 ми вже мали справу з різними формулами обертання. Формули обертання, в яких фігурують числа Стірлінга, є особливо простими.

Теорема 4. *Справедливі взаємно обернені формули*

$$a_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) b_k \iff b_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) a_k. \quad (8)$$

Доведення. Припустимо для всіх цілих невід'ємних n

$$b_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) a_k.$$

Розглянемо суму

$$\sum_{k=0}^n s(n, k) b_k = \sum_{k=0}^n s(n, k) \left(\sum_{m=0}^k S(k, m) a_m \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k s(n, k) S(k, m) a_m.$$

Змінімо порядок підсумування. Матимемо

$$\sum_{m=0}^n a_m \left(\sum_{k=m}^n s(n, k) S(k, m) \right) = \sum_{m=0}^n a_m \delta_n^m = a_n$$

(ми використали властивість ортогональності чисел Стірлінга). Таким чином,

$$a_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) b_k.$$

Припустимо, що для всіх цілих невід'ємних n

$$a_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) b_k.$$

Розглянемо $\sum_{k=0}^n S(n, k) a_k$. Маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S(n, k) a_k &= \sum_{k=0}^n S(n, k) \left(\sum_{m=0}^k s(k, m) b_m \right) = \\ \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n S(n, k) s(k, m) b_m &= \sum_{m=0}^n b_m \left(\sum_{k=m}^n S(n, k) s(k, m) \right) = \\ &= \sum_{m=0}^n b_m \delta_m^n = b_n. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Явна формула для чисел Стірлінга другого роду.

Теорема 5. *Має місце така формула*

$$S(n, r) = \frac{\Delta^r 0^n}{r!} = \frac{\sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i (r-i)^n}{r!}. \quad (9)$$

Доведення. Нагадаємо, що згідно з теоремою 5 розділу 13

$$\Delta^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k C_r^k f(x+r-k). \quad (10)$$

В ролі $f(x)$ в цій рівності візьмемо x^n . Матимемо

$$\Delta^r x^n = \begin{cases} \sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i (x+r-i)^n & r \leq n \\ 0, & r > n. \end{cases} \quad (11)$$

Покладемо в (11) $x = 0$. Будемо мати

$$\Delta^r 0^n = \begin{cases} \sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i (r-i)^n & r \leq n \\ 0, & r > n. \end{cases} \quad (12)$$

Нагадаємо також, що

$$\Delta^r (x)_n = (n)_r (x)_{n-r} \quad (13)$$

(теорема 6 з розділу 13).

Згідно з означенням $S(n, k)$

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) (x)_k.$$

Застосуємо оператор Δ^r до обох частин цієї рівності. Будемо мати

$$\Delta^r (x)^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) (k)_r (x)_{k-r}.$$

Поклавши в цій рівності $x = 0$ і взявши до уваги $(r)_r = r!$, отримаємо (9).

Комбінаторний смисл чисел Стірлінга другого роду. Розглянемо множину X , яка містить n елементів. Позначимо через $T_{n,k}$ число розбиттів цієї множини на k непорожніх множин.

Приклад 11. Нехай $X = \{1, 2\}$. Тоді $T_{2,1} = 1$, бо є лише одне розбиття на одну множину (сама множина). Є лише одне розбиття на дві множини: $X = \{1\} \cup \{2\}$. Тому $T_{2,2} = 1$.

Приклад 12. Нехай $X = \{1, 2, 3\}$. Тоді $T_{3,1} = 1$ (є лише одне розбиття на одну множину — сама множина). Розбиттів на дві множини є три: $\{1, 2\} \cup \{3\}$, $\{1, 3\} \cup \{2\}$, $\{2, 3\} \cup \{1\}$; тому $T_{3,2} = 3$. Є одне розбиття на три множини: $X = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$, тому $T_{3,3} = 1$.

Приклад 13. Нехай $N(X) = n$. Тоді

$$\begin{aligned} T_{n,n} &= 1, \quad T_{n,1} = 1, \quad T_{n,2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k - 2 \right) = 2^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Теорема 6. *Має місце рекурентне співвідношення*

$$T_{n,k} = T_{n-1,k-1} + kT_{n-1,k}. \quad (14)$$

Доведення. Зафіксуємо елемент $a \in X$. Всі розбиття множини X на k множин поділимо на два класи:

перший клас містить ті розбиття, в яких фігурує одноелементна підмножина $\{a\}$ (їх число дорівнює, очевидно, $T_{n-1,k-1}$);

другий клас містить ті розбиття, в яких елемент a входить до якоїсь підмножини (ці розбиття можна отримати так: розглянути розбиття множини $X \setminus \{a\}$ на k множин і потім включити a в якусь із множин, тому число розбиттів другого класу дорівнює $kT_{n-1,k}$). Отже, має місце рекурентне співвідношення (14).

Продовжуючи далі, звернемо увагу на те, що рекурентне співвідношення (14) збігається з рекурентним співвідношенням (6), якщо це останнє записати у вигляді

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k). \quad (15)$$

Уявімо собі, що ми побудуємо "трикутник чисел $T_{n,k}$ ", виписуючи в n -ому рядку числа $T_{n,k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Другий і третій рядки цього трикутника співпадають, відповідно, з другим і третім рядком "трикутника чисел $S(n, k)$ ". Тому з (14) і (15) випливає, що для всіх n і k $T_{n,k} = S(n, k)$.

Отже, ми встановили таке важливе твердження.

Теорема 7. *Число Стірлінга другого роду $S(n, k)$ — це число розбиттів множини, що містить n елементів, на k множин.*

Числа Бела.

Означення 3. Число усіх розбиттів множини, яка містить n еле-

ментів,

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) \quad (16)$$

називається *числом Бела*.

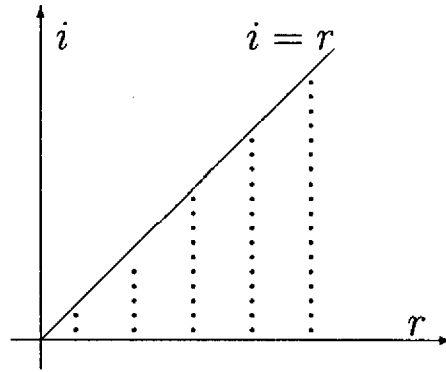
Теорема 8. *Має місце формула*

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!}. \quad (17)$$

Доведення. Оскільки $\Delta^r 0^n = 0$ при $r > n$, то в силу (9) матимемо

$$B_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Delta^r 0^n}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i (r-i)^n \right).$$

Подвійна сума поширена по точках (r, i) з цілочисельними координатами області, зображеної на рисунку 35.



(Рис. 35)

Змінимо порядок підсумування. Матимемо

$$B_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum_{r=i}^{\infty} \frac{(r-i)^n}{(r-i)!} \right).$$

Зробимо заміну індексу у внутрішній сумі, поклавши $r - i = j$.

Будемо мати

$$B_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{j^n}{j!}.$$

Поклавши $t = -1$ в розкладі $e^t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}$, отримаємо рівність

$$\frac{1}{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Отже,

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!}.$$

Формулу (17) називають формулою Добінського.

Подаємо невелику таблицю чисел Бела. Цю таблицю легко отримати, підсумовуючи числа в кожному рядку "трикутника чисел Стірлінга"

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

Експоненційна генератриса для чисел $S(n, k)$ при фіксованому k .

Теорема 9. Експоненційна генератриса $S(n, k)$ при фіксованому k має вигляд

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{[e^t - 1]^k}{k!}. \quad (18)$$

Доведення. Зазначимо, що

$$\Delta(e^{tx}) = e^{t(x+1)} - e^{tx} = e^{tx}(e^t - 1)$$

і значить

$$\Delta^r(e^{tx}) = [e^t - 1]^r e^{tx}. \quad (19)$$

Запишемо рівність

$$e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^n S(n, k) (x)_k \right). \quad (20)$$

Застосуємо до обох частин рівності (20) оператор Δ^r по x . Матимемо

$$[e^t - 1]^r e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n S(n, k) (k)_r (x)_{k-r} \quad (21)$$

(ми використали рівність $\Delta^r(x)_k = (k)_r (x)_{k-r}$). Покладаючи в (21) $x = 0$ і використовуючи те, що $S(n, k) = 0$ при $n < k$, $(r)_r = r!$, будемо мати

$$\frac{[e^t - 1]^r}{r!} = \sum_{n=r}^{\infty} S(n, r) \frac{t^n}{n!}.$$

Таким чином, теорема 9 доведена.

Експоненційна генератриса для чисел $s(n, k)$ при фіксованому k .

Теорема 10. *Має місце рівність*

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{\ln^k(1+t)}{k!}. \quad (22)$$

Доведення. Використовуючи біноміальний розклад

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (x)_n,$$

запишемо рівність

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^n s(n, k) x^k \right).$$

Змінивши порядок підсумування, матимемо

$$(1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n!} s(n, k) \right). \quad (23)$$

З іншого боку

$$(1+t)^x = e^{x \ln(1+t)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{\ln^k(1+t)}{k!}. \quad (24)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^k в рівностях (23) і (24), отримаємо (22). Теорема доведена.

Експоненційна генератриса чисел Бела.

Теорема 11. *Експоненційна генератриса чисел Бела B_n дорівнює*

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \exp \{e^t - 1\}. \quad (25)$$

Доведення. Маємо

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n S(n, k). \quad (26)$$

Змінивши порядок підсумування в правій частині рівності (26), будемо мати

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^n}{n!} S(n, k) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t - 1)^k}{k!} = \exp \{e^t - 1\} \end{aligned}$$

(при цьому ми використали рівність (18)).

РОЗДІЛ 15

Числа Бернуллі, формула Ойлера-Маклорена

Слава і популярність Ойлера є не лише наслідком незрівнянної сили його генія. Їх викликала надзвичайна широта наукових інтересів

М.П. Кравчук¹⁷

Ми приступаємо до знайомства з числами Бернуллі, які грають надзвичайно важливу роль в комбінаториці, аналізі, алгебрі.

Їх відкрив Якоб І. Бернуллі (1654-1705), розглядаючи проблему підсумування сум степенів чисел натурального ряду.

Знаменита робота Якоба Бернуллі "Ars conjectandi" ("Мистецтво передбачень") була видана його племінником Ніколя Бернуллі. В ній містилися відомості про числа, які ми будемо розглядати в цьому розділі. В четвертому розділі цієї роботи була вперше сформульована теорема про закон великих чисел, яку тепер називають теоремою Бернуллі. Назву числа Бернуллі запропонували Муавр і Ойлер.

Многочлени Апеля.

Означення 1. Многочленами Апеля, породженими послідовністю $\{a_n, n \geq 0\}$, називається послідовність многочленів

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k x^{n-k}. \quad (1)$$

Послідовність многочленів (1) ввів до розгляду французький математик Поль Апель (1855-1930).

Приклад 1. Нехай $a_n \equiv 1$ для всіх n . Тоді

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} = (1+x)^n.$$

Приклад 2. Нехай $a_n = (-1)^n, n \geq 0$. Тоді

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n-k} = (x-1)^n.$$

¹⁷М.П. Кравчук (1892-1942) — видатний український математик, академік Національної академії наук.

Приклад 3. Нехай $a_n = n$. Тоді

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n(x) &= \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} x^{n-k} = \\ &= n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{n-k}\end{aligned}$$

(ми застосували правило винесення за знак біноміального коефіцієнта). Зробимо далі заміну індексу, поклавши $k - 1 = r$. Будемо мати

$$\mathcal{A}_n(x) = n \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r x^{(n-1)-r} = n(1+x)^{n-1}.$$

Теорема 1. *Послідовність $\{\mathcal{A}_n(x)\}$ має таку властивість*

$$\mathcal{A}'_n(x) = n\mathcal{A}_{n-1}(x). \quad (2)$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a_k (n-k) x^{n-k-1} = \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} a_k x^{(n-1)-k} = \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a_k x^{(n-1)-k} = n\mathcal{A}_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Теорема 2. *Нехай $F(t)$ — експоненційна генератриса $\{a_n\}$*

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad (3)$$

$F(t, x)$ — експоненційна генератриса послідовності многочленів Апеля, породженої послідовністю $\{a_n\}$,

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (4)$$

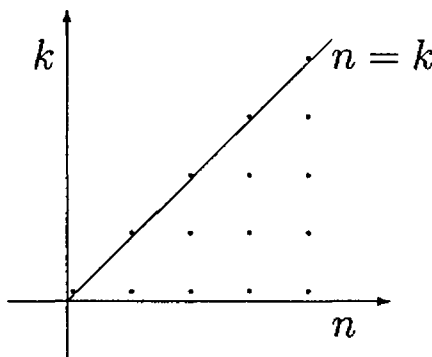
Тоді

$$F(t, x) = e^{tx} F(t). \quad (5)$$

Доведення. Маємо

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k x^{n-k} \frac{t^n}{n!}.$$

Сума в правій частині рівності поширена по всіх точках (n, k) з області, зображеної на рисунку 36.



(Рис. 36)

Змінюючи порядок підсумування в подвійній сумі, матимемо

$$F(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k a_k x^{n-k} \frac{t^n}{n!}.$$

Зробимо заміну індексу, поклавши $n - k = r$. Матимемо

$$F(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} x^r t^r \right) = F(t) e^{xt}.$$

Теорема 3. Нехай

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!},$$

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Відомо, що $F(t, x) = e^{xt} F(t)$.

Тоді — $\{\mathcal{A}_n(x)\}$ послідовність многочленів Апеля, породжена послідовністю $\{a_n\}$.

Доведення. Припустимо, що $\{\mathcal{A}_n(x)\}$ є послідовністю многочленів Апеля для якоїсь послідовності $\{b_n\}$, експоненційну генератрису якої позначимо $F_b(t)$. Тоді згідно з теоремою 2

$F(t, x) = e^{xt} F_b(t)$. Але за умовою теореми

$$F(t, x) = e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = e^{xt} F_b(t).$$

Отже,

$$F_b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

Звідси випливає, що для всіх n $a_n = b_n$.

Числа Бернуллі

Означення 2. Послідовність B_n чисел Бернуллі — послідовність, експоненційна генератриса якої дорівнює

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}. \quad (6)$$

Знайдемо декілька перших чисел Бернуллі, використовуючи рівність (6). Переходячи до границі в обох частинах рівності при $t \rightarrow 0$, матимемо $B_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$. Перепишемо рівність (6) в такому вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \left(\frac{t}{e^t - 1} - 1 \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{t^{n-1}}{n!}, \\ \frac{t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{t^{n-1}}{n!}. \end{aligned}$$

Переходячи до границі в обох частинах останньої рівності з використанням правила Лопіталя, матимемо $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Многочлени Бернуллі

Означення 3. Послідовність многочленів Апеля, породжена послідовністю чисел Бернуллі $\{B_n\}$, називається послідовністю многочленів Бернуллі.

Таким чином, многочлен Бернуллі степеня n має вигляд

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k x^{n-k}. \quad (7)$$

Приклад 4. Згідно з (7)

$$B_0(x) = 1, \quad (8)$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Теорема 4. При $n \geq 2$ виконується рівність

$$B_n(1) = B_n. \quad (10)$$

Доведення. Згідно з теоремою 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{tx} \frac{t}{e^t - 1}. \quad (11)$$

Покладемо в (11) $x = 1$. Будемо мати

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1) \frac{t^n}{n!} &= e^t \frac{t}{e^t - 1} = \frac{(e^t - 1)t + t}{e^t - 1} = \\ &= t + \frac{t}{e^t - 1} = t + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (12)$$

Порівнюючи коефіцієнти при t^n в лівій та правій частинах рівності (12), отримуємо, що при всіх $n \geq 2$ $B_n(1) = B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k$. Отже, ми встановили таке твердження.

Теорема 5. При $n \geq 2$ має місце рекурентне співвідношення

$$B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k. \quad (13)$$

Іноді співвідношення (13) приймають за означення чисел Бернуллі.

Використаємо (13) для знаходження ще декількох чисел Бернуллі та многочленів Бернуллі.

Приклад 5. Покладемо в (13) $n = 3$. Матимемо

$$B_3 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 + B_3$$

звідки

$$1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 3B_2 = 0,$$

$$B_2 = \frac{1}{6}.$$

Многочлен $B_2(x)$ дорівнює

$$B_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}.$$

Приклад 6. Покладемо в (13) $n = 4$. Матимемо рівність

$$B_4 = B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 + B_4$$

звідки

$$1 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \frac{1}{6} + 4B_3 = 0, \quad B_3 = 0$$

Отже, $B_3 = 0$, а

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Теорема 6. *Всі числа Бернуллі з непарними номерами n ($n \geq 3$) дорівнюють нулеві.*

Доведення. Розглянемо функцію

$$\psi(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{1}{2}t = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Неважко переконатися, що функція $\psi(t)$ парна, тобто при всіх t $\psi(-t) = \psi(t)$. Звідси й випливає твердження теореми.

Приклад 7. Покладемо в (13) $n = 5$. Будемо мати рівність

$$B_5 = B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 + B_5,$$

$$1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 5B_4 = 0.$$

Звідси $B_4 = -\frac{1}{30}$. Многочлен $B_4(x)$ має вигляд

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

Приклад 8. Покладемо в (13) $n = 7$. Матимемо

$$B_7 = B_0 + 7B_1 + 21B_2 + 35B_3 + 35B_4 + 21B_5 + 7B_6 + B_7,$$

$$1 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) + 21\left(\frac{1}{6}\right) + 35\left(-\frac{1}{30}\right) + 7B_6 = 0.$$

Звідси

$$B_6 = \frac{1}{42}.$$

Подамо таблицю перших десяти чисел Бернуллі

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Основна властивість многочленів Бернуллі.

Теорема 7. При всіх цілих невід'ємних n виконується рівність

$$\Delta B_n(x) = nx^{n-1}. \quad (14)$$

Доведення. Радимо читачеві перевірити співвідношення (14) шляхом безпосереднього обчислення різницевого оператора від $B_n(x)$. Ми ж використаємо для доведення експоненційну генератрису послідовності $\{B_n(x)\}$.

Згідно з теоремою 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} e^{tx}. \quad (15)$$

Застосуємо до обох частин рівності (15) оператор Δ , враховуючи, що $\Delta e^{tx} = e^{tx}(e^t - 1)$. Будемо мати

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} e^{tx} (e^t - 1) = te^{tx}.$$

Таким чином,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta B_n(x) \frac{t^n}{n!} = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{t^{k+1}}{k!}.$$

У правій частині цієї рівності проведемо заміну індексу підсумування, поклавши $k + 1 = n$. Матимемо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \frac{t^n}{(n-1)!}. \quad (16)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t , отримаємо рівність

$$\frac{\Delta B_n(x)}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Звідси й випливає (14).

Сума степенів чисел натурального ряду. Розглянемо суму

$$S_n^{(m)} = 1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m + n^m. \quad (17)$$

Ми знаємо, що

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (18)$$

Приклад 9. Обчислимо S_n^2 .

Розглянемо для цього рівність

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1. \quad (19)$$

Покладемо в (19) $k = 1, 2, \dots, n$ послідовно і випишемо отримані рівності

$$\begin{aligned} 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1. \end{aligned}$$

Додавши почленно ці рівності, матимемо

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n^{(2)} + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n,$$

звідки отримаємо рівність

$$S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (20)$$

Встановимо загальну формулу.

Теорема 8. Має місце рівність

$$S_n^{(m)} = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1}. \quad (21)$$

Доведення. Запишемо рівність

$$\Delta B_{m+1}(x) = (m+1)x^m,$$

яка впливає з рівності (14). Покладемо в ній послідовно $x = 1, 2, \dots, (n-1), n$

$$B_{m+1}(2) - B_{m+1}(1) = (m+1) \cdot 1^m$$

$$B_{m+1}(3) - B_{m+1}(2) = (m+1) \cdot 2^m$$

.....

$$B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(n) = (m+1) \cdot n^m.$$

Додавши почленно всі ці рівності, отримаємо

$$B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(1) = (m+1)(1^m + 2^m + \dots + n^m).$$

Оскільки $B_{m+1}(1) = B_{m+1}$, звідси випливає (21).

Приклад 10. Застосуємо формулу (21) до обчислення $S_n^{(3)}$. Нехай $m = 3$

$$S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{B_4(n+1) - B_4}{4}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} B_4(n+1) &= \sum_{k=0}^4 C_4^k B_k(n+1)^{4-k} = \\ &= (n+1)^4 + 4 \left(-\frac{1}{2}\right) (n+1)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) (n+1)^2 + B_4. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} S_n^{(3)} &= \frac{(n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2[(n+1)^2 - 2(n+1) + 1]}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \end{aligned}$$

Гіперболічні функції та числа Бернуллі. Гіперболічні функції означаються так:

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (23)$$

(гіперболічний синус),

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad (24)$$

(гіперболічний косинус),

$$\operatorname{th} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \quad (25)$$

(гіперболічний тангенс),

$$\operatorname{cth} t = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \quad (26)$$

(гіперболічний котангенс).

Нагадаємо про зв'язок між тригонометричними функціями та показниковою функцією в комплексній площині.

Теорема 9. *Має місце формула Ойлера*

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}. \quad (27)$$

Доведення. Поняття границі послідовності можна ввести звичайним способом і для послідовності комплексних чисел.

Згідно з формулою Муавра

$$\left(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n} \right)^n = \cos x + i \sin x.$$

Перейдемо до границі в лівій частині рівності, коли $n \rightarrow \infty$. Матимемо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\cos \frac{x}{n} - 1 \right) + i \sin \frac{x}{n} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = e^{ix}. \end{aligned}$$

Таким чином, має місце рівність (27). Покладемо в ній замість x $-x$. Матимемо

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (28)$$

Додаючи (а потім віднімаючи) почленно рівності (27) і (28), отримаємо так звані формули Ойлера

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (29)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (30)$$

які виражають тригонометричні функції через показникову функцію чисто уявного аргументу. Формули (29) і (30) пов'язують тригонометричні та гіперболічні функції

$$\cos x = \operatorname{ch} ix, \quad (31)$$

$$\sin x = \frac{1}{i} \operatorname{sh} ix, \quad (32)$$

$$\operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} ix, \quad (33)$$

$$\operatorname{ctg} x = i \operatorname{cth} ix. \quad (34)$$

Теорема 10. *Має місце співвідношення*

$$t(\operatorname{cth} t - 1) = \frac{2t}{e^{2t} - 1}. \quad (35)$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} t(\operatorname{cth} t - 1) &= t \left(\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} - 1 \right) = t \frac{2e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \\ &= \frac{2t}{e^{2t} - 1}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що питання областей збіжності степеневих рядів, які будуть розглядатися нижче, легко розв'язувати з допомогою формули Адамара. Ми не будемо кожного разу проводити відповідні дослідження, а будемо вказувати лише області збіжності.

Теорема 11. *Функція $\operatorname{cth} t$ (гіперболічний котангенс) має таке представлення при $0 < |t| < \pi$*

$$\operatorname{cth} t = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{2^{2k}}{(2k)!} t^{2k-1} \quad (36)$$

Доведення. З рівності (35) випливає, що

$$\operatorname{cth} t = 1 + \frac{1}{t} \frac{2t}{e^{2t} - 1}.$$

Використовуючи означення чисел Бернуллі (рівність (6)), будемо мати

$$\operatorname{cth} t = 1 + \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2t)^n}{n!} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{t} + \left(-\frac{1}{2}\right)(2t)\frac{1}{t} + \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{2^n t^n}{n!} = \\
&= \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{2^{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}
\end{aligned} \tag{37}$$

(ми поклали $n = 2k$, враховуючи, що числа Бернуллі з непарними номерами дорівнюють нулеві).

З (36) можна отримати представлення функції $\operatorname{ctg} t$.

Теорема 12. *Функція $\operatorname{ctg} t$ при $0 < |t| < \pi$ має представлення*

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_{2k} \frac{2^{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}. \tag{38}$$

Доведення. Використовуючи рівності (34) і (36), отримаємо

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} t &= i \operatorname{cth} it = i \left\{ \frac{1}{it} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{2^{2k}}{(2k)!} i^{2k-1} t^{2k-1} \right\} = \\
&= \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}.
\end{aligned}$$

Теорема 13. *Має місце рівність*

$$\operatorname{th} t = 2 \operatorname{cth} 2t - \operatorname{cth} t. \tag{39}$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned}
&2 \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{e^{2t} - e^{-2t}} - \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \\
&= \frac{1}{e^t - e^{-t}} \left\{ \frac{2e^{2t} + 2e^{-2t} - (e^t + e^{-t})^2}{e^t + e^{-t}} \right\} = \\
&= \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{e^{2t} - e^{-2t}} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \operatorname{th} t.
\end{aligned}$$

Теорема 14. *При $|t| < \frac{\pi}{2}$ має місце рівність*

$$\operatorname{th} t = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!} t^{2k-1}. \tag{40}$$

Доведення. Використаємо рівність (39) та представлення (36) для $\text{cth } t$. Матимемо

$$\begin{aligned}\text{th } t &= 2 \left\{ \frac{1}{2t} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{2^{2k}}{(2k)!} (2t)^{2k-1} \right\} - \frac{1}{t} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} t^{2k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!} t^{2k-1}.\end{aligned}$$

Теорема 15. При $|t| < \frac{\pi}{2}$ має місце рівність

$$\text{tg } t = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!} (-1)^{k+1} t^{2k-1}. \quad (41)$$

Доведення. Використовуючи рівності $\text{tg } t = -i \text{th}(it)$ та (40), отримуємо (41).

З числами Бернуллі пов'язані й інші корисні розклади в степеневі ряди.

Наприклад, почленно інтегруючи (41), отримуємо при $|x| < \frac{\pi}{2}$ рівність

$$\ln \cos x = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} \frac{x^{2n}}{2n}. \quad (42)$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\left(\ln \frac{\sin x}{x} \right)' &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (x \text{ctg } x - 1) = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1},\end{aligned} \quad (43)$$

то, інтегруючи почленно цю рівність, отримуємо при $|x| < \pi$

$$\ln \frac{\sin x}{x} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n}. \quad (44)$$

Відзначимо без доведення встановлену Ойлером рівність, яка пов'язує числа Бернуллі з дзета-функцією Рімана:

$$\zeta(2n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_n, \quad (45)$$

де $\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ - дзета-функція Рімана. Зокрема,

$$\zeta(2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (46)$$

Фундаментальні дослідження чисел Бернуллі провели російські математики В. Імшенецький (1832-1892), М. Сонін (1849-1915), український математик Г. Вороний (1868-1908). Числа Бернуллі набули особливого значення в дослідженнях німецького математика Е. Кумера (1810-1893), пов'язаних з великою теоремою Ферма. Комбінаторні результати, пов'язані з числами Бернуллі, грають важливу роль в деяких сучасних топологічних дослідженнях (див. наприклад, В. И. Арнольд, *"Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера, групп Кокстера"*, *Успехи матем. наук*, т. 47, в.1, 1982, 3-45).

Формула Ойлера-Маклорена. Припустимо, що нам треба обчислити суму значень функції $\varphi(x)$

$$\sum_{j=m}^{n-1} \varphi(j).$$

Ми вже зазначали в розділі 13, що якщо нам вдасться відшукати функцію $f(x)$ таку, що $\Delta f(x) = \varphi(x)$ (таку функцію в розділі 13 ми називали антирізницевою функцією для функції $\varphi(x)$), то

$$\sum_{j=m}^{n-1} \varphi(j) = f(n) - f(m) = f(x) \Big|_m^n. \quad (47)$$

Як же знаходити антирізницеву функцію $f(x)$ і суму $\sum_{j=m}^{n-1} \varphi(j)$? Відповідь на це питання дає *формула Ойлера-Маклорена*, яку ми зараз встановимо.

Нагадаємо деякі позначення, які ми ввели в розділі 13. Оператор Δ переводить функцію $f(x)$ в функцію $f(x+1) - f(x)$, оператор D — оператор диференціювання — $Df(x) = f'(x)$, оператор I — одиничний оператор, який діє за правилом $If(x) = f(x)$.

Наведемо спочатку послідовність міркувань, які проводив Ойлер; їх можна розглядати як евристичне доведення формули, яку значно пізніше стали називати формулою Ойлера-Маклорена.

Розглянемо формулу Тейлора

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(\Delta x) + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n + \dots$$

Покладемо в ній $\Delta x = 1$ і перепишемо в такому вигляді

$$f(x + 1) - f(x) = \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \dots \right\} - f(x). \quad (47)$$

Ойлер в своїх міркуваннях вільно поводився з операторами як з числами. Рівність (47), вживаючи символи операторів, можна переписати так

$$\Delta f(x) = \left\{ \mathbf{I}f(x) + \frac{Df(x)}{1!} + \frac{D^2f(x)}{2!} + \dots + \frac{D^n f(x)}{n!} + \dots \right\} - f(x),$$

$$\Delta f(x) = (e^D - \mathbf{I})f(x).$$

Остання рівність виконується для кожної функції, і це означає, що різницевий оператор Δ є тотожним з оператором $e^D - \mathbf{I}$.

Отже, якщо для даної функції $\varphi(x)$ треба знайти функцію таку, що $\Delta f(x) = \varphi(x)$, то

$$f(x) = \Delta^{-1}\varphi = \frac{\mathbf{I}}{e^D - \mathbf{I}}\varphi(x). \quad (48)$$

Застосуємо до обох частин рівності (48) оператор D , будемо мати

$$\begin{aligned} Df(x) = f'(x) &= \frac{D}{e^D - \mathbf{I}}\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} D^k \varphi(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \varphi^{(k)}(x) \end{aligned} \quad (49)$$

(нагадаємо, що $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$; крім того, ми вважаємо $D^0 = 1$).

Проінтегруємо обидві частини рівності (49) по x від m до n . Мати-

$$f(n) - f(m) = \int_m^n \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \{ \varphi^{(k-1)}(n) - \varphi^{(k-1)}(m) \}. \quad (50)$$

Отже,

$$\sum_{j=m}^{n-1} \varphi(j) = \int_m^n \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \{ \varphi^{(k-1)}(n) - \varphi^{(k-1)}(m) \} \quad (51)$$

(вважаємо, що $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x)$).

Це і є формула Ойлера-Маклорена. Наше "доведення" не є строгим; ми ніде не цікавилися обґрунтуванням можливості відповідних операцій та збіжністю нескінченних рядів, які при цьому виникають. Залишилося, наприклад, відкритим питання про збіжність ряду в правій частині рівності (51). Зауважимо, якщо $\varphi(x)$ многочлен, то в правій частині рівності (51) буде фігурувати скінченна сума, і формулу (51) можна вважати справедливою. Леонард Ойлер опублікував формулу в 1732 році, трохи пізніше (1742 р.) її відкрив шотландський математик Колін Маклорен, професор Едінбурзького університету.

Встановимо тепер формулу Ойлера-Маклорена з залишковим членом.

Теорема 16. *Якщо функція $\varphi(x)$ має похідні до l -того порядку включно, то*

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{n-1} \varphi(j) = & \int_m^n \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^l \frac{B_k}{k!} \varphi^{(k-1)}(x) \Big|_m^n + \\ & + (-1)^{l+1} \int_m^n \frac{B_l(\{x\})}{l!} \varphi^{(l)}(x) dx. \end{aligned} \quad (52)$$

Доведення. Досить довести (чому, ми пізніше пояснимо детальніше) формулу (52) при $m = 0, n = 1, l = 1$. В цьому випадку вона має вигляд

$$\varphi(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \frac{1}{2} [\varphi(1) - \varphi(0)] + \int_0^1 \frac{B_1(x)}{1!} \varphi'(x) dx. \quad (53)$$

Рівність (54) справді, має місце, бо $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ і

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi(x) dx - \frac{1}{2}[\varphi(1) - \varphi(0)] + \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) d\varphi(x) = \\ &= \int_0^1 \varphi(x) dx - \frac{1}{2}[\varphi(1) - \varphi(0)] + (x - \frac{1}{2}) \varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) dx = \\ &= \int_0^1 \varphi(x) dx - \frac{1}{2}[\varphi(1) - \varphi(0)] + \frac{1}{2}[\varphi(1) + \varphi(0)] - \int_0^1 \varphi(x) dx = \varphi(0). \end{aligned}$$

Доведемо далі, що

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_0^1 \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^l \frac{B_k}{k!} \varphi^{(k-1)}(x) \Big|_0^1 + \\ &+ (-1)^{l+1} \int_0^1 \frac{B_l(x)}{l!} \varphi^{(l)}(x) dx. \end{aligned} \quad (55)$$

Будемо доводити (55) методом математичної індукції. При $l = 1$ формула (55) має місце (рівність (54)). Припустимо, що (55) справедлива, і доведемо, що

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_0^1 \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^{l+1} \frac{B_k}{k!} \varphi^{(k-1)}(x) \Big|_0^1 + \\ &+ (-1)^{l+2} \int_0^1 \frac{B_{l+1}(x)}{(l+1)!} \varphi^{(l+1)}(x) dx. \end{aligned} \quad (56)$$

Перепишемо цю рівність в такому вигляді

$$\begin{aligned} & \varphi(0) - \left\{ \int_0^1 \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^l \frac{B_k}{k!} \varphi^{(k-1)}(x) \Big|_0^1 \right\} = \\ &= \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \varphi^{(l)}(x) \Big|_0^1 + (-1)^l \int_0^1 \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \varphi^{(l+1)}(x) dx. \end{aligned}$$

Згідно з припущенням індукції ліва частина цієї рівності дорівнює

$$(-1)^{l+1} \int_0^1 \frac{B_l(x)}{l!} \varphi^{(l)}(x) dx.$$

Отже, нам потрібно довести рівність

$$\begin{aligned} (-1)^{l+1} \int_0^1 \frac{B_l(x)}{l!} \varphi^{(l)}(x) dx &= \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \varphi^{(l)}(x) \Big|_0^1 + \\ &+ (-1)^l \int_0^1 \frac{B_{l+1}(x)}{(l+1)!} \varphi^{(l+1)}(x) dx. \end{aligned} \quad (57)$$

Проінтегрувавши частинами в правій частині, матимемо

$$\begin{aligned} (-1)^{l+1} \int_0^1 \frac{B_l(x)}{l!} \varphi^{(l)}(x) dx &= \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \varphi^{(l)}(x) \Big|_0^1 + (-1)^l \frac{B_{l+1}(x)}{(l+1)!} \varphi^{(l)}(x) \Big|_0^1 + \\ &+ (-1)^{l+1} \int_0^1 \frac{B_l(x)}{l!} \varphi^{(l)}(x) dx \end{aligned}$$

звідки

$$[B_{l+1} + (-1)^l B_{l+1}] [\varphi^{(l)}(1) - \varphi^{(l)}(0)] = 0.$$

Ця остання рівність виконується: якщо l парне число, то $B_{l+1} = 0$ (числа Бернуллі з непарними номерами дорівнюють нулеві), якщо l — непарне, то $B_{l+1} - B_{l+1} = 0$. При інтегруванні частинами ми використали властивість многочленів Бернуллі

$$B'_{l+1}(x) = (l+1)B_l(x),$$

яка випливає з того, що $B_l(x)$ — послідовність многочленів Апеля.

Таким чином, рівність (55) доведено. Замінімо в (55) $\varphi(x)$ на $\varphi(x+1)$. Будемо мати

$$\varphi(1) = \int_0^1 \varphi(x+1) dx + \sum_{k=1}^l \frac{B_k}{k!} \varphi^{(k-1)}(x+1) \Big|_0^1 +$$

$$+(-1)^{l+1} \int_0^1 \frac{B_l(x+1)}{l!} \varphi^{(l)}(x+1) dx. \quad (58)$$

Зробимо заміну $x+1 = z$. Формулу перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi(1) = & \int_1^2 \varphi(z) dz + \sum_{k=1}^l \frac{B_k}{k!} \varphi^{(k-1)}(z) \Big|_1^2 + \\ & +(-1)^{l+1} \int_1^2 \frac{B_l(z)}{l!} \varphi^{(l)}(z) dz. \end{aligned} \quad (59)$$

Загальна формула (53) отримується як сума рівностей такого типу; наприклад,

$$\begin{aligned} \varphi(0) + \varphi(1) = & \int_0^2 \varphi(z) dz + \sum_{k=1}^l \frac{B_k}{k!} \varphi^{(k-1)}(z) \Big|_0^2 + \\ & +(-1)^{l+1} \int_0^2 \frac{B_l(z)}{l!} \varphi^{(l)}(z) dz. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $B_{2k+1} = 0$ при $k \geq 1$ та $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x)$, формулу (53) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{n-1} \varphi(j) = & \int_m^n \varphi(x) dx - \frac{1}{2}[\varphi(n) - \varphi(m)] + \sum_{k=1}^l \frac{B_{2k}}{2k!} \varphi^{(2k-1)}(x) \Big|_m^n + \\ & +(-1)^{2l+1} \int_m^n \frac{B_{2l}(x)}{2l!} \varphi^{(2l)}(x) dx. \end{aligned} \quad (60)$$

Нехай

$$R_{2l} = (-1)^{2l+1} \int_m^n \frac{B_{2l}(x)}{2l!} \varphi^{(2l)}(x) dx. \quad (61)$$

Наведемо без доведення такий результат про поведінку залишкового члена в (60).

Теорема 17. Якщо $\varphi^{(2l)}(x) \geq 0$ при $m \leq x \leq n$ то

$$|R_{2l}| \leq \left| \frac{B_{2l}}{2l!} \varphi^{(2l-1)}(x) \right|_m^n \quad (62)$$

(це означає, що залишковий член R_{2l} обмежений величиною останнього члена в розкладі (60) (члена, який стоїть безпосередньо перед залишковим членом)).

Теорема 18. Нехай відомо, що $\varphi^{(2l+2)}(x) \geq 0$, $\varphi^{(2l+4)}(x) \geq 0$ при $m \leq x \leq n$. Тоді

$$R_{2l} = \theta_l \frac{B_{2l+2}}{(2l+2)!} \varphi^{(2l+1)}(x) \Big|_m^n \quad (63)$$

при деякому θ_l ($0 < \theta_l < 1$).

Формула Стірлінга для $n!$ Дослідимо асимптотичну поведінку $n!$, використовуючи формулу Ойлера-Маклорена. Розглянемо

$$\ln(n-1)! = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(x), \text{ де } \varphi(x) = \ln x. \text{ Зазначимо, що}$$

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{x^k} \cdot (-1)^{k-1},$$

$$\int_1^n \varphi(x) dx = \int_1^n \ln x dx = x \ln x \Big|_1^n - \int_1^n dx = n \ln n - (n-1).$$

Співвідношення (60) в даному випадку ($m=1$, $\varphi(x) = \ln x$) набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k = n \ln n - n - \frac{1}{2} \ln n + \sigma + \sum_{k=1}^l \frac{B_{2k}}{(2k-1)2k} \frac{1}{n^{2k-1}} + R_{2l}. \quad (64)$$

В константу σ ми включили результат нижньої підстановки.

Покладемо в (64) $l=1$ і використаємо теорему 17 та оцінку (62). Будемо мати

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k = n \ln n - n - \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{12n} + \sigma + R_2, \quad (65)$$

де $|R_2| < \frac{1}{12n}$. Хоча $\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, ми маємо право застосувати теорему 17, бо можна замість $\ln(n-1)!$ розглянути $-\ln(n-1)!$, тобто

замість $\varphi(x) = \ln(x)$ можна розглядати $\varphi(x) = -\ln x$. Додавши до обох частин рівності (65) $\ln n$, будемо мати

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{12n} + R_2 + \sigma.$$

Звідси випливає, що

$$n! = an^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\sigma_n}{12n}}, \quad (66)$$

де $|\theta_n| < 1$ (константа $a = e^\sigma$ покищо невизначена, ми знайдемо її пізніше).

Подано ще одне доведення формули Стірлінга, яке не опирається на формулу Ойлера-Маклорена.

Лема 1. При $|x| < 1$ має місце рівність

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots \right). \quad (67)$$

Доведення. Проінтегруємо почленно ряд

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \dots + t^k + \dots$$

Будемо мати

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

звідки

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}. \quad (68)$$

Підставляючи в (68) $-x$ замість x , отримаємо рівність

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}. \quad (69)$$

Віднімаючи від (69) ряд (68), отримаємо рівність (67).

Лема 2. Мають місце нерівності

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}. \quad (70)$$

Доведення. Покладемо в рівності (67) $x = \frac{1}{2n+1}$. Будемо мати

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} + \dots \right) < \\ &< \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{12n(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Таким чином, права частина нерівностей (70) доведена. Ліва частина (70) очевидна, бо

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots > 1.$$

Як наслідок з нерівностей (70) отримаємо важливі для нас нерівності

$$e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}. \quad (71)$$

Лема 3. Нехай

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}.$$

Тоді послідовність $\{a_n\}$ монотонно спадає, а послідовність $\left\{ a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}} \right\}$ монотонно зростає.

Доведення. Зазначимо, що

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{-n-1} (n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1.$$

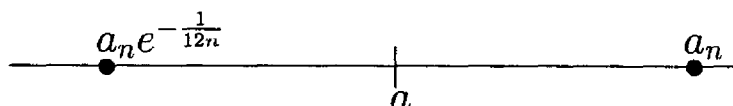
Це означає, що $a_{n+1} < a_n$, послідовність $\{a_n\}$ монотонно спадає існує $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Продовжуючи далі, маємо

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < \frac{1}{e} e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} = e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}},$$

звідки

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Таким чином, маємо картину, зображену на рисунку 37.



(Рис. 37)

Звідси випливає, що

$$a_n = \frac{n!}{e^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}} = a e^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

де $0 < \theta_n < 1$. Таким чином,

$$n! = a e^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta_n}{12n}}. \quad (72)$$

Константу a ми поки що не знаємо. Для знаходження a доведемо дві такі леми.

Лема 4. *Мають місце рівності*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3}.$$

Нехай $(2n)!! = 2 \cdot 4 \dots (2n-2)2n$, $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \dots (2n+1)$. Тоді попередні рівності можна записати в скороченому вигляді так

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}, \quad (73)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \quad (74)$$

Доведення леми. Позначимо через J_m інтеграл

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx$$

Інтегруючи частинами, матимемо

$$\begin{aligned} J_m &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \, d(\cos x) = - \sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\ &+ (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx = \\ &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо співвідношення

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m,$$

звідки випливає рекурентна рівність

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}. \quad (75)$$

Послідовно застосовуючи цю рівність, приходимо або до $J_0 = \frac{\pi}{2}$ (при

парному n), або до $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$.

Таким чином, отримуємо або (73), або (74) в залежності від парності n .

Лема 5. *Справедлива рівність*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}. \quad (76)$$

Рівність (76) називають формулою Валіса (Wallis, 1616-1703).

Доведення леми. Зазначимо, що при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ виконуються нерівності

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

Проінтегруємо ці нерівності в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx.$$

Звідси в силу (73) і (74)

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

або

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n} \quad (77)$$

Різниця між крайніми частинами в цій нерівності дорівнює

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2.$$

З (77) випливає, що ця різниця не перевищує $\frac{1}{2n} \frac{\pi}{2}$, і, значить, прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Звідси й випливає (76).

Повернемося тепер до знаходження константи a у формулі (72). Обчислимо a , використовуючи (72). Матимемо

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right] = \frac{a^2}{4}.$$

Отже, $a = \sqrt{2\pi}$. Сформулюємо отриманий результат.

Теорема 19. *Має місце рівність*

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad (78)$$

де $0 < \theta_n < 1$.

РОЗДІЛ 16

Комбінаторика в теорії груп і підстановок

Не треба забувати, що існують узагальнення двох родів: малоцінні і повноцінні. Перші — узагальнення шляхом розрідження, інші — шляхом згущення. Розрідити — значить, наколотивши води, зробити ріденьку юшечку, згустити — значить скласти корисний, поживний екстракт. Сполучення понять, мало пов'язаних одне з одним для звичайного представлення, в одне об'ємне є згущенням. Так згущає, наприклад, теорія груп міркування, які раніше, будучи розсіяними в алгебрі, теорії чисел, геометрії, аналізі, виглядали зовсім різними. Навести приклади узагальнень шляхом розрідження ще легше, але ми не хочемо наживати собі ворогів.

Г.Поліа, Г.Сеге "Задачи и теоремы из анализа"(з передмови)

Поняття групи є одним із основних в сучасній математиці. Теорія груп вивчає в найбільш загальній формі операції, які найчастіше зустрічаються в математиці (прикладами таких операцій є додавання і множення чисел, додавання векторів, послідовне виконання перетворень і т. п.). Теорія груп вивчає не довільні операції, а лише ті, що мають певні властивості, які формуються в означенні групи.

Означення групи та приклади груп

Означення 1. Нехай G — довільна непорожня множина. Будемо говорити, що на G задана бінарна операція $*$, якщо будь-яким двом елементам x та y з G поставлено у відповідність деякий третій елемент z із G (ми будемо позначати його $z = x * y$).

Означення 2. Будемо називати $\mathcal{G}$ групою відносно операції $*$, якщо виконуються такі властивості:

1) для будь-яких x, y, z із $\mathcal{G}$

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad (1)$$

2) в $\mathcal{G}$ існує елемент e такий, що

$$x * e = e * x = x \quad (2)$$

для всіх $x \in \mathcal{G}$ (елемент e часто називають одиницею групи або нейтральним елементом);

3) для кожного $x \in \mathcal{G}$ існує такий елемент x' , що

$$x * x' = x' * x = e \quad (3)$$

(елемент x' називають оберненим до елемента x , його іноді позначають x^{-1}).

Означення 3. Якщо для будь-яких x та y з $\mathcal{G}$ $x * y = y * x$, то група $\mathcal{G}$ називається комутативною або абельовою.

Зазначимо, що замість $*$ для позначення операції в залежності від ситуації можуть вживатися інші позначення: $+$, $\cdot$, $\times$. Наведемо декілька прикладів груп.

Приклад 1. Нехай Z — множина цілих чисел з операцією, яка є звичайним додаванням. Виконуються властивості 1-3, роль нейтрального елемента грає 0, протилежним до m числом є $-m$. Множина N всіх парних чисел в свою чергу є групою відносно операції додавання. В цьому випадку говорять, що N є підгрупою в Z .

Приклад 2. Множина $M = \{1, -1, i, -i\}$ з операцією множення комплексних чисел є групою. Таблиця, яка зображає результати всіх операцій в групі, називається таблицею Келі (Cayley Arthur, 1821-1859). Для групи M таблиця Келі має такий вигляд

	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Нейтральним елементом є одиниця. Симетричні елементи визначаються рівностями $(-1)' = -1$, $(i)' = -i$, $(-i)' = i$.

Приклад 3. Множина $\mathcal{G}$ усіх матриць виду

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

з операцією множення, де $\alpha \in R$, утворює абельову групу. Справді,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

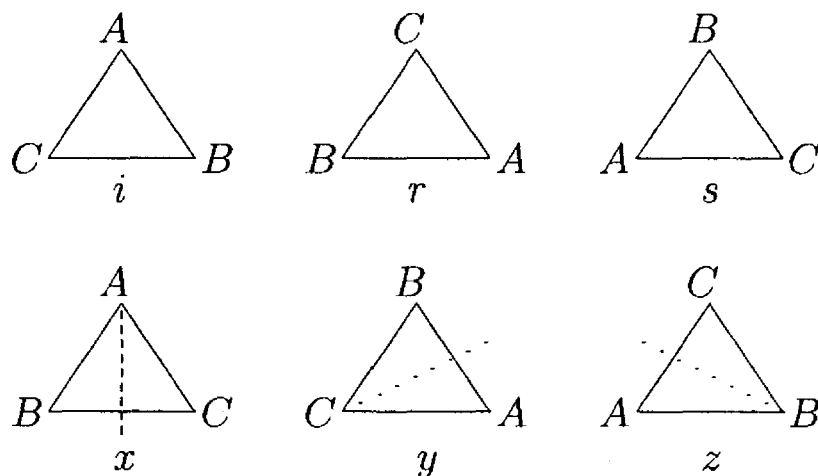
нейтральним елементом є одинична матриця, й симетричним елементом для матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є матриця

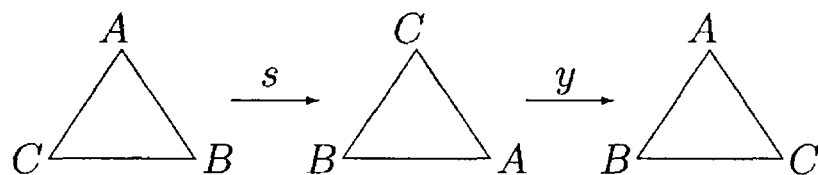
$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Розглянемо рівносторонній трикутник ABC і множину обертань i, r, s цього трикутника за годинниковою стрілкою на $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ відносно центра та множину x, y, z симетричних відображень відносно осей (рис. 38).



(Рис. 38)

Добуток $y * s$ означає, що до трикутника ABC спочатку застосовується перетворення s , а потім перетворення y (рис. 39).



(Рис. 39)

Сукупність перетворень $\{i, r, s, x, y, z\}$ трикутника ABC в себе утворює групу. Нейтральним елементом є перетворення i .

Таблиця Келі для цієї групи має вигляд

	i	r	s	x	y	z
i	i	r	s	x	y	z
r	r	s	i	y	z	x
s	s	i	r	z	x	y
x	x	z	y	i	s	r
y	y	x	z	r	i	s
z	z	y	x	s	r	i

Суміжні класи, теорема Лагранжа.

Означення 3. Якщо група $\mathcal{G}$ скінченна, то $N(\mathcal{G})$ називається порядком групи.

Означення 4. Сукупність H елементів групи $\mathcal{G}$, замкнена відносно операції групи $\mathcal{G}$ і така, що з $g \in H$ випливає, що $g^{-1} \in H$, називається підгрупою.

Приклад 5. У прикладі 2 множина $H = \{1, -1\}$ є підгрупою групи $\mathcal{M}$; множина $\{-i, i, -1\}$ не є підгрупою.

Приклад 6. У прикладі 4 перетворення $\{i, r, s\}$ утворюють підгрупу.

Означення 5. Нехай H — підгрупа групи $\mathcal{G}$. Лівий клас суміжності gH групи $\mathcal{G}$ по підгрупі H — це множина елементів виду gh , де h пробігає всі елементи підгрупи H , а g є фіксованим елементом із $\mathcal{G}$, який називають представником класу суміжності.

Приклад 7. Нехай $\mathcal{G} = \mathcal{M} = \{1, -1, i, -i\}$ а $H = \{1, -1\}$. Тоді

$$\begin{aligned} 1 \cdot H &= \{1, -1\}, \\ (-1) \cdot H &= \{1, -1\}, \\ i \cdot H &= \{i, -i\}, \\ (-i) \cdot H &= \{i, -i\}. \end{aligned}$$

Ми бачимо, $\mathcal{G} = \{1, -1\} \cup \{i, -i\}$.

Приклад 8. Розглянемо приклад 4: $\mathcal{G}$ - група перетворень трикутника, H — підгрупа $\{i, x\}$. Тоді

$$\begin{aligned} iH &= \{ii, ix\} = \{i, x\}, \\ sH &= \{si, sx\} = \{s, z\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}yH &= \{yi, yx\} = \{y, r\}, \\rH &= \{ri, rx\} = \{r, y\}, \\xH &= \{xi, xx\} = \{x, i\}, \\zH &= \{zi, zx\} = \{z, s\}.\end{aligned}$$

Ми бачимо, що $\mathcal{G} = \{i, x\} \cup \{s, z\} \cup \{r, y\}$.

Задача 1. Нехай x, y, z, a, b, c — елементи групи $\mathcal{G}$. Тоді

$$xy = xz \Rightarrow y = z \text{ (ліве скорочення),}$$

$$ax = bx \Rightarrow a = b \text{ (праве скорочення)}$$

Розв'язання. Оскільки $\mathcal{G}$ група, існує обернений елемент x^{-1} . Помножимо на нього обидві частини рівності $xy = xz$. Отримаємо ланцюжок рівностей, враховуючи властивості 1-3:

$$x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$$

$$(x^{-1}x)y = (x^{-1}x)z \text{ (згідно з 1),}$$

$$ey = ez \text{ (згідно з 3),}$$

$$y = z \text{ (згідно з 2)}$$

Аналогічно доводять праве скорочення.

Задача 2. Нехай a і b — елементи групи $\mathcal{G}$. Тоді рівняння $ax = b$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Якщо рівняння має два розв'язки x та $\bar{x}$, то $ax = a\bar{x} = b$

Застосовуючи правило лівого скорочення (задача 1), матимемо $x = \bar{x}$. Очевидно, $x = a^{-1}b$ є розв'язком, бо $a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b$.

Теорема 1. Нехай $\mathcal{G}$ група, H — підгрупа в $\mathcal{G}$. Якщо $g_1 \in \mathcal{G}$, $g_2 \in \mathcal{G}$, то ліві класи суміжності g_1H і g_2H або збігаються, або не перетинаються.

Доведення. Нехай ліві класи суміжності g_1H і g_2H мають спільний елемент x . Це означає, що $x = g_1h_1$, де h_1 — деякий елемент H , $x = g_2h_2$ при деякому h_2 з H . З рівності $g_1h_1 = g_2h_2$ маємо $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$. Нехай y довільний елемент з класу g_1H . Тоді $y = g_1h$, де $h \in H$, $y = g_2h_2h_1^{-1}h = g_2(h_2h_1^{-1}h)$. Оскільки $h_2h_1^{-1}h \in H$, то $y \in g_2H$. Отже, $g_1H \subset g_2H$. Аналогічно можна встановити, що $g_2H \subset g_1H$. Таким чином, $g_1H = g_2H$.

Означення 6. Множину усіх лівих класів суміжності групи $\mathcal{G}$ відносно підгрупи H будемо позначати $\mathcal{G}/H$.

Припустимо, що група $\mathcal{G}$ скінченна, тоді підгрупа H скінченна. Нехай $H = \{h_1, \dots, h_m\}$. Тоді $gH = \{gh_1, \dots, gh_m\}$, причому всі елементи gh_i різні, бо якщо $gh_i = gh_j$, то з правила лівого скорочення випливає, що $h_i = h_j$. Таким чином, $N(H) = N(gH)$. Отже, маємо таке твердження.

Теорема 2. *Якщо група $\mathcal{G}$ скінченна, а H підгрупа $\mathcal{G}$, то*

$$N(\mathcal{G}) = N(H)N(\mathcal{G}/H).$$

Теорема 3. (Теорема Лагранжа) *Якщо $\mathcal{G}$ скінченна група порядку n , а H підгрупа $\mathcal{G}$ порядку m , то число m є дільником числа n .*

Група підстановок. Розглянемо множину всіх бієктивних перетворень множини $X = \{1, 2, \dots, n\}$ в себе. Ці перетворення називаються підстановками степеня n . Множина всіх підстановок утворює групу відносно операції послідовного здійснення перетворень. Ця група називається симетричною групою степеня n і позначається S_n .

Приклад 9. Якщо $X = \{1, 2, 3\}$, то група S_3 складається з шести підстановок

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо, наприклад,

$$s_2 \cdot s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = s_4;$$

$$s_1 \cdot s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = s_3;$$

$$s_3 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = s_5;$$

$$s_1^{-1} = s_1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e.$$

Таблиця Келі для групи S_3 має вигляд

	e	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
e	e	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	s_1	e	s_4	s_5	s_2	s_3
s_2	s_2	s_5	e	s_4	s_3	s_1
s_3	s_3	s_4	s_5	e	s_1	s_2
s_4	s_4	s_3	s_1	s_2	s_5	e
s_5	s_5	s_2	s_3	s_1	e	s_4

Орбіти і цикли підстановок. Нехай підстановка s діє на множині $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Означимо на множині X бінарне відношення таким чином.

Означення 7. Нехай $x \in X$, $x' \in \tilde{X}$. Будемо вважати, що $x \sim x'$, якщо існує таке j , що $x' = s^j(x)$.

Перевіримо, що це відношення є рефлексивним, симетричним і транзитивним. Справді, $x \sim x$, $x = e(x)$. З $x \sim x'$ випливає $x \sim x$, оскільки з $x' = s^j(x)$ випливає, що $x' = s^{-j}(x')$. Виконується й властивість транзитивності: якщо $x \sim x'$, $x \sim x''$, то $x \sim x''$, бо з рівності $x' = s^i(x)$, $x'' = s^j(x')$ випливає, що $x'' = s^{i+j}(x)$. Отже, відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності.

Розглянемо розбиття X на класи еквівалентності за цим відношенням

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_k, \quad X_i \cap X_j = \emptyset (i \neq j). \quad (4)$$

Означення 8. Блоки розбиття (4) називаються *орбітами* або *класами транзитивності* підстановки $s \in S$.

Очевидно, $s(X_1) = X_1, \dots, s(X_k) = X_k$ і звуження підстановки s на орбіти $X_1, \dots, X_k$ є знову підстановками.

Означення 9. Звуження s_i підстановки s на орбіту X_i називається *циклом* цієї підстановки.

Він є підстановкою степеня $N(X_i)$, яка діє на множині X_i . Її можна записати у вигляді циклу з довжиною $l_i = N(X_i)$

$$(x, s_i(x), s_i^2(x), \dots, s_i^{l_i-1}(x)),$$

з урахуванням того, що $s_i^{l_i}(x) = x (1 \leq i \leq k)$.

Це дозволяє розкласти підстановку s на цикли

$$(x_1, s_1(x_1), \dots, s_1^{l_1-1}(x_1)) \dots (x_k, s_k(x_k), \dots, s_k^{l_k-1}(x_k)).$$

Якщо підстановки $s_1, s_2, \dots, s_k$ доозначити до підстановок степеня n , покладаючи $s_i(x) = x$ при $x \in X \setminus X_i$, то цей запис можна розглядати як розклад підстановки s у вигляді добутку незалежних циклів

$$s = s_1 s_2 \dots s_k.$$

Оскільки орбіти $X_1, X_2, \dots, X_k$ не мають спільних елементів, то добуток не залежить від порядку співмножників. Зазначимо також, що запис циклу

$$s_i = (x, s_i(x), \dots, s_i^{l_i-1}(x))$$

є однозначним з точністю до циклічного зсуву

$$(s_i^v(x), s_i^{v+1}(x), \dots, s_i^{v+l_i-1}(x)), \quad 0 \leq v \leq l_i - 1.$$

Приклад 10. Розглянемо цикли для підстановок з S_3

$$s_0 = e(x) : \quad \text{три цикли } (1), (2), (3);$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} : \quad \text{два цикли } (1, 2), (3);$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} : \quad \text{два цикли } (1, 3), (2);$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} : \quad \text{два цикли } (1), (2, 3);$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} : \quad \text{один цикл } (1, 2, 3);$$

$$s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} : \quad \text{один цикл } (1, 2, 3).$$

Таким чином, можна записати рівності

$$s_0 = (1)(2)(3); s_1 = (1, 2)(3); s_2 = (1, 3)(2); \\ s_3 = (1)(2, 3); s_4 = (1, 2, 3); s_5 = (1, 2, 3).$$

Приклад 11. Підстановка із S_7

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

має цикли $(1), (237), (546)$. Отже, $s = (1)(237)(564)$.

Означення 10. Підстановка $s \in S_n$ має порядок p , якщо $s^p = e$ і p є найменшим серед чисел, які мають цю властивість.

Теорема 4. Порядок p підстановки s дорівнює найменшому спільному кратному довжин циклів, які входять в розклад підстановки s .

Справді, якщо розклад підстановки s має вигляд $s = s_1 s_2 \dots s_k$, то $s^p = s_1^p s_2^p \dots s_k^p$. Оскільки $s_i^{l_i} (i = 1, 2, \dots, k)$, то p збігається з найменшим спільним кратним чисел $l_1, l_2, \dots, l_k$.

Цикл з довжиною 2 називається *транспозицією* і позначається $\tau(x, y)$. Кожен цикл можна представити у вигляді добутку транспозицій, наприклад, так

$$(x_1, x_2, \dots, x_i) = (x_1, x_2)(x_1, x_3) \dots (x_1, x_{i-1})(x_1, x_i).$$

Означення 11. Підстановка $s \in S$ належить *цикловому класу* $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, якщо вона містить α_1 циклів з довжиною 1, α_2 циклів з довжиною 2, $\dots$, α_j циклів з довжиною j , $\dots$, α_n циклів з довжиною n ($1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \dots + n \cdot \alpha_n = n$).

Нехай $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — число підстановок в цикловому класі $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$.

Теорема 5.

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{n!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}. \quad (5)$$

Доведення. Розглянемо розклад підстановки $s \in S_n$ з циклового класу $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$ у вигляді добутку незалежних циклів

$$s = (x_1)(x_2) \dots (x_{\alpha_1})(y_1, z_1)(y_2, z_2) \dots (y_{\alpha_2}, z_{\alpha_2}) \dots$$

Шляхом усіх можливих перестановок при збереженні дужок можна отримати будь-яку іншу підстановку з цього класу. Перестановки,

які здійснюють циклічні зсуви елементів всередині дужок, і перестановки, які переводять повністю елементи з однієї дужки в іншу дужку з такою ж кількістю елементів, очевидно, не дають нових підстановок. Число таких підстановок дорівнює $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}$. Помноживши цю величину на число різних підстановок у цикловому класі $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, отримаємо число всіх перестановок. Таким чином,

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! = n!, \quad (6)$$

звідки й випливає (5).

Очевидно,

$$\sum_{1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \dots + n \cdot \alpha_n = n} C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = n!,$$

де в утворенні суми беруть участь всі невід'ємні цілі розв'язки рівняння $1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \dots + n \cdot \alpha_n = n$. Враховуючи (6), отримуємо звідси рівність

$$\sum_{1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \dots + n \cdot \alpha_n = n} \frac{1}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} = 1. \quad (7)$$

Нехай $C(n, k)$ число підстановок степеня n , які мають k циклів. З теореми 5 випливає така теорема.

Теорема 6. *Маємо рівність*

$$C(n, k) = \sum_{\substack{1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \dots + n \cdot \alpha_n = n \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k \\ \alpha_i \geq 0}} \frac{n!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}. \quad (8)$$

Встановимо рекурентне співвідношення для $C(n, k)$.

Теорема 7. *Має місце співвідношення*

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + (n-1)C(n-1, k) \quad (9)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Доведення. Покладемо $C(0, 0) = 1$, $C(n, 0) = 0$ при $n > 0$, $C(n, k) = 0$ при $k > n$ або при n , або при k від'ємних. Тоді це співвідношення можна поширити на всі цілі значення n та k .

Для доведення (9) зафіксуємо деякий елемент $x \in X$ і розіб'ємо множину всіх підстановок з k циклами на два класи. До першого

класу віднесемо ті підстановки, в яких елемент x входить до одного елементного циклу; число підстановок в цьому класі дорівнює $C(n-1, k-1)$. До другого класу віднесемо всі інші підстановки з k циклами, тобто ті, в яких фіксований елемент x входить до неоднорічного циклу; число таких підстановок дорівнює $(n-1)C(n-1, k)$.

Отже, має місце (9).

Розглянемо генератрису $C(n, k)$:

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^n C(n, k)x^k. \quad (10)$$

Помноживши обидві частини рівності (9) на x^k і розглянувши суму по k від 1 до n , матимемо

$$C_n(x) = (n+x-1)C_{n-1}(x) \quad (n=1, 2, \dots).$$

Повторюючи це співвідношення багаторазово і враховуючи, що $C_0(x) = 1$, отримаємо таке твердження.

Теорема 8.

$$C_n(x) = x(x+1) \dots (x+n-1). \quad (11)$$

Розглянемо рівність

$$(x)_n = x(x-1) \dots (x-n+1) = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k, \quad (12)$$

яка визначає числа Стірлінга $s(n, k)$ першого роду. Заміняючи в (12) x на $-x$, отримаємо

$$C(n, k) = (-1)^{n+k} s(n, k). \quad (13)$$

Ми встановили комбінаторний смисл чисел Стірлінга першого роду: $|s(n, k)|$ — це число підстановок з k циклами елементів n -елементної множини. З рівностей (13) та (9) випливає таке рекурентне співвідношення для $s(n, k)$, яке ми встановлювали в розділі 14 раніше:

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k). \quad (14)$$

РОЗДІЛ 17

Теорія графів

Існує декілька причин зростання інтересу до теорії графів. Безсумнівним є той факт, що теорія графів застосовується в таких областях, як фізика, хімія, теорія зв'язку, проектування обчислювальних машин, електротехніка, машинобудування, архітектура, дослідження операцій, генетика, психологія, соціологія, антропологія і лінгвістика. Ця теорія тісно пов'язана також і з багатьма розділами математики, серед яких — теорія груп, теорія матриць, числовий аналіз, теорія ймовірностей, топологія і комбінаторний аналіз.

Ф.Харарі ¹⁸ „Теория графов“

Основні означення і поняття теорії графів. Наочно граф можна уявляти як геометричну конфігурацію, яка складається з точок (вершин) і ребер (ліній або відрізків, які сполучають деякі точки).

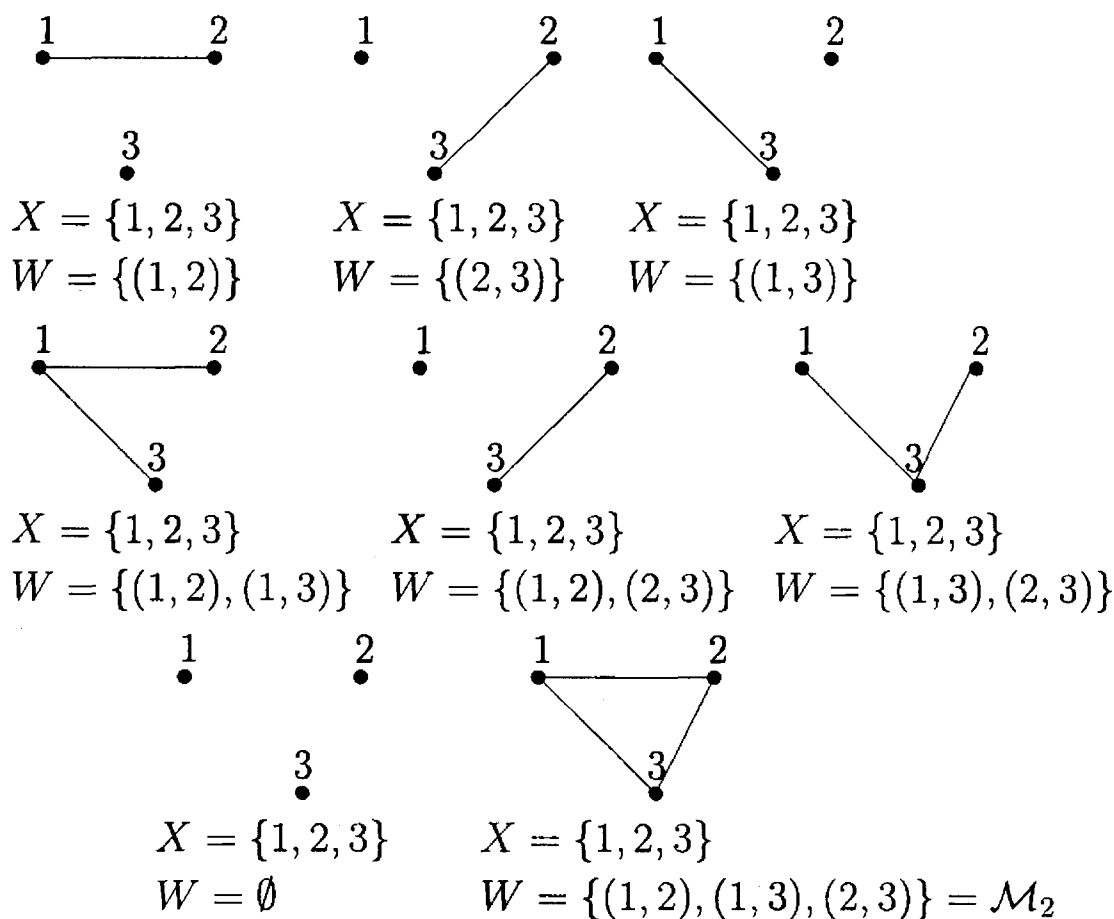
Дамо формальне означення графа.

Нехай $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ - деяка скінченна множина (множина вершин), M_2 - множина всіх неупорядкованих пар елементів з X , $M_2 = \{(x_i, x_j) : x_i \in X, x_j \in X, i \neq j\}$.

Означення 1. Граф $G(X, W)$ — пара множин $X, W \subset M_2$. Множина X — це множина вершин, множина W — це множина ребер. Якщо $(x_i, x_j) \in W$, то ми говоримо, що ребро (x_i, x_j) сполучає вершину x_i з вершиною x_j ; інша термінологія - ребро (x_i, x_j) і вершини x_i та x_j інцидентні.

Приклад 1. Нехай $X = \{1, 2, 3\}$. Побудуємо всі графи з множиною вершин X . В цьому випадку $M_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Маємо 8 графів:

¹⁸ Американський математик, автор книг "Graph Theory" (рос. переклад "Теория графов", Мир, М., 1973), "Graphical Enumeration" (рос. переклад "Перечисления графов", Мир, 1977).



(Рис. 40)

Означення 2. Граф $\Gamma(X, W)$ називається повним, якщо $W = \mathcal{M}_2$.

Якщо множина X містить n вершин, то, очевидно, число ребер повного графа дорівнює C_n^2 .

Означення 3. Граф називається порожнім, якщо $W = \emptyset$.

Природно виникає питання: скільки є різних графів з множиною вершин X , якщо $N(X) = n$.

Теорема 1. Число усіх різних графів з n вершинами дорівнює

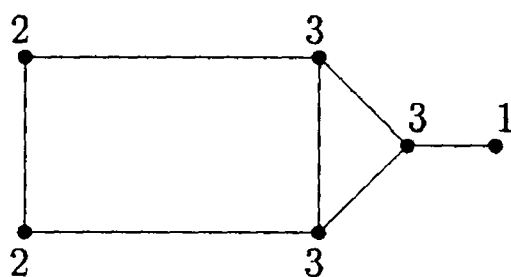
$$2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Справді, граф $\Gamma(X, W)$ повністю визначено, якщо вказано множину W , яка є підмножиною $\mathcal{M}_2$. Множина $\mathcal{M}_2$ містить C_n^2 елементів, тому число усіх її підмножин дорівнює $2^{C_n^2}$.

Означення 4. Вершини x_i та x_j графа $\Gamma(X, W)$ інцидентні, якщо $(x_i, x_j) \in W$.

Означення 5. Степенем $d(x_i)$ вершини x_i графа $\Gamma(X, W)$ називається число вершин x_j , які інцидентні вершині x_i (число відрізків які виходять з вершини x_i).

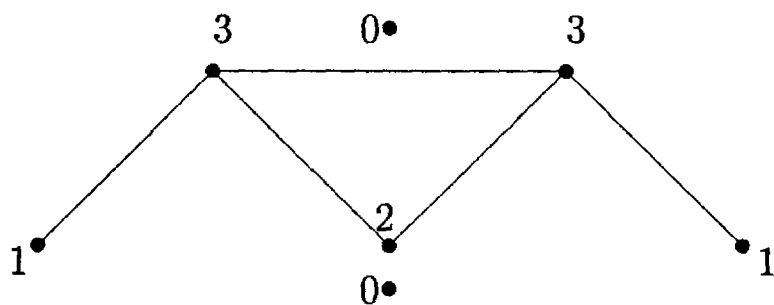
Приклад 2. На малюнку 41 вказано степені вершин графа.



(Рис. 41)

Означення 6. Якщо $d(x_i) = 1$, то вершина x_i називається *кінцевою* вершиною графа $\Gamma(X, W)$. Якщо $d(x_i) = 0$, то вершина x_i називається *ізолюваною*.

Задача 1. Вкажіть кінцеві та ізолювані вершини графа, зображеного на малюнку, поданому нижче:



(Рис. 42)

Лема про рукостискання. Нехай $\Gamma(X, W)$ граф з множиною вершин $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тоді

$$\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2N(W) \quad (1)$$

Доведення. Зауважимо, що кожне ребро графа в сумі $\sum_{i=1}^n d(x_i)$ враховується двічі, і тому справедлива рівність (1).

Назва леми пов'язана з такою інтерпретацією: якщо n осіб потиснуть один одному руки, то загальне число рукостискань є парним числом.

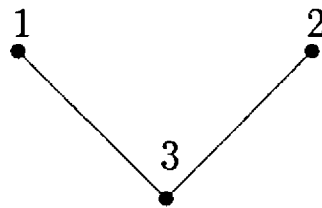
З рівності (1) випливає таке твердження: число вершин непарного степеня в графі $\Gamma(X, W)$ обов'язково є парним числом.

Розглянемо граф $\Gamma(X, W)$. Нехай

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in W, \\ 0, & (x_i, x_j) \notin W. \end{cases}$$

Означення 7. Матриця $A = (a_{ij})$ називається матрицею суміжності (інцидентності) графа $\Gamma(X, W)$.

Задача 2. Записати матрицю суміжності графа $\Gamma(X, W)$, зображеного на рисунку 43



$$X = \{1, 2, 3\}.$$

(Рис. 43)

Відповідь:

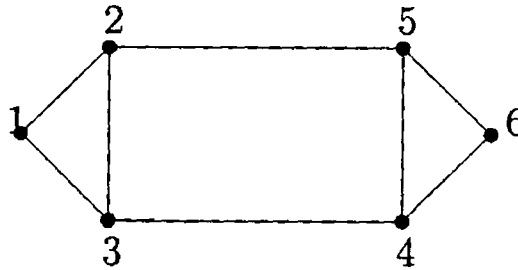
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця суміжності графа $\Gamma(X, W)$ — це симетрична матриця, елементи якої дорівнюють нулеві або одиниці (діагональні елементи дорівнюють нулеві) і така, що сума чисел в будь-якому рядку і будь-якому стовпці дорівнює степеню відповідної вершини.

Означення 8. Послідовність ребер $(x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, (x_{i_{l-2}}, x_{i_{l-1}}), (x_{i_{l-1}}, x_{i_l})$, в якій сусідні ребра інцидентні одній і тій же вершині називають *ланцюгом*. Ланцюг називається *простим*, якщо всі вершини, належні йому (крім, можливо, першої і останньої), різні; число ребер у цьому випадку називають довжиною ланцюга.

Якщо $x_{i_1} = x_{i_l}$, то ланцюг називається циклом. Цикл, в якому всі вершини різні, називається *простим*.

Задача 3. Вказати ланцюги, які ведуть з вершини 1 до вершини 6 в графі, зображеному на рис. 44.



(Рис. 44)

Відповідь:

$(1, 3), (3, 4), (4, 6)$ — простий ланцюг,

$(1, 2), (2, 5), (5, 6)$ — простий ланцюг,

$(1, 3), (3, 4), (4, 6), (6, 5), (5, 2), (2, 1)$ — простий цикл.

Означення 9. Граф $\Gamma(X', W')$ є *підграфом* графа $\Gamma(X, W)$, якщо $X' \subset X, W' \subset W$. Якщо $X' = X$, то підграф $\Gamma(X', W')$ називається *остовним підграфом*.

Означення 10. Граф $\Gamma(X, W)$ є *сумою* графів $\Gamma(X_1, W_1), \dots, \Gamma(X_k, W_k)$, якщо

$$X = \bigcup_{i=1}^k X_i, \quad W = \bigcup_{i=1}^k W_i$$

ця сума називається *прямою*, якщо $X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j$.

Означення 11. Граф $\Gamma(X, W)$ називається *зв'язним*, якщо *будь-які* дві вершини x_i та x_j ($x_i \in X, x_j \in X$) сполучені ланцюгом з початком в x_i і кінцем в x_j . З симетрії випливає, що в цьому випадку і вершина x_j сполучена з вершиною x_i .

Теорема 2. *Кожен граф є прямою сумою зв'язних графів.*

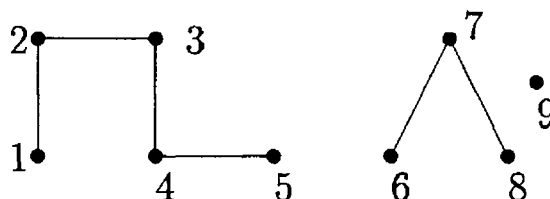
Доведення. На множині вершин X графа $\Gamma(X, W)$ визначимо відношення $x_i \rho x_j$, якщо x_i сполучається з x_j . Відношення ρ є відношенням еквівалентності. Позначимо через $X_i = \{x : x \rho x_i\}$. Тоді $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$, ($X_i \cap X_j = \emptyset$) і є розбиття X на класи еквівалентності. Графи $\Gamma(X_i, W_i)$ є зв'язними графами і

$$\Gamma(X, W) = \bigcup_{i=1}^k \Gamma(X_i, W_i) \quad (2)$$

є *прямою сумою зв'язних графів*.

Ці графи називаються *компонентами зв'язності*.

Задача 4. Знайти компоненти зв'язності графа, зображеного на рис. 45.



(Рис. 45)

Відповідь: граф складається з трьох компонент зв'язності:

$$X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, X_2 = \{6, 7, 8\}, X_3 = \{9\}.$$

Оцінки для числа ребер з k компонентами зв'язності.

Теорема 3. Нехай $\Gamma(X, W)$ граф, який складається з n вершин, m ребер і k компонент зв'язності. Тоді виконуються нерівності

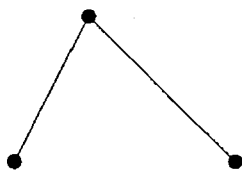
$$n - k \leq m \leq C_{n-k+1}^2. \quad (3)$$

Перше, ніж наводити доведення теореми 3 перевіримо її справедливості на декількох прикладах.

Приклад 3. Розглянемо порожній граф з трьома вершинами. Маємо $n = 3$, $m = 0$, $k = 3$. Нерівність (3) приймає вигляд $3 - 3 \leq 0 \leq 0$.

Приклад 4. Нехай $\Gamma(X, W)$ — повний граф з трьома вершинами. Тоді $n = 3$, $m = 3$, $k = 1$. Нерівність (3) запишеться у вигляді $3 - 1 < 3 \leq C_3^2 = 3$.

Приклад 5. Розглянемо граф, зображений на рис. 41б в цьому випадку $n = 3$, $m = 2$, $k = 1$. Нерівність (3) приймає вигляд $3 - 1 \leq 2 < C_3^2 = 3$.



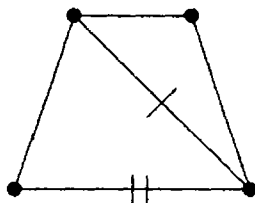
(Рис. 46)

Повернемося до доведення теореми 3.

Доведення теореми 3. Доведемо спочатку нерівність $n - k \leq m$. Будемо доводити індукцією за числом ребер. Припустимо, що нерівність справедлива для всіх графів з числом ребер $m - 1$.

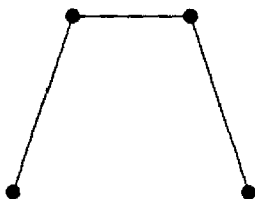
Нехай $\Gamma(X, W)$ граф з n вершинами, m ребрами і k компонентами зв'язності. Викреслимо максимальне можливе число ребер так, щоб не змінювалося число компонент зв'язності. Число ребер в отриманому графі позначимо m_0 .

Розглянемо для прикладу граф, зображений на рис. 47.



(Рис. 47)

В ньому $n = 4$, $m = 5$, $k = 1$. Викресливши два ребра, отримаємо граф з $n = 4$, $k = 1$, $m_0 = 3$. Викреслити далі яке-небудь ребро, не порушуючи зв'язності, вже не можна.



(Рис. 48)

Повернемося до графа, отриманого з $\Gamma(X, W)$. Викресливши в ньому ще одне ребро, ми отримаємо граф з числом компонент зв'язності на одиницю більшим. В силу індуктивного припущення, справедливого, бо $m_0 - 1 \leq m - 1$, маємо $n - (k + 1) \leq m_0 - 1$, звідки $n - k \leq m_0 \leq m$.

Для доведення верхньої оцінки в нерівності (3) замінимо кожну компоненту повним графом. Нехай C_i та C_j два повних графи, отриманих з компонент зв'язності X_i та X_j , а n_i та n_j число ребер в цих компонентах ($n_i \geq n_j > 1$). Замінимо C_i на повний граф, додавши одну вершину, а C_j замінимо на повний граф, віднявши одну вершину. Тоді загальне число вершин не зміниться, а число ребер збільшиться на додатню величину

$$\frac{1}{2}\{(n_i+1)n_i - n_i(n_i-1)\} - \frac{1}{2}\{n_j(n_j-1) - (n_j-1)(n_j-2)\} = n_i - n_j + 1.$$

Отже, для того, щоб число ребер у графі $\Gamma(X, W)$ було максимально можливим (при фіксованих n і k), граф $\Gamma(X, W)$ повинен складатись

із $(k-1)$ ізольованих вершин і повного графа з $n-k+1$ вершинами. Звідси й випливає нерівність (3).

З нерівності (3) випливає такий наслідок.

Наслідок. *Будь-який граф з n вершинами і більше ніж $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребрами є зв'язним.*

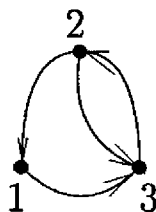
Справді, якщо граф з n вершинами має дві компоненти зв'язності, то максимальне число ребер не перевищує C_{n-1}^2 .

Орієнтовані графи, графи з петлями, графи з паралельними дугами. Розглядають і інші види графів.

Означення 12. Нехай $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ множина вершин, $\widetilde{M}_2$ — множина впорядкованих пар елементів з X (будемо називати їх дугами). Орієнтованим графом $\Gamma(X, W)$ називатимемо пару множин (X, W) , де $W \subset \widetilde{M}_2$.

Дуга (x, x') називається дугою з x в x' .

Приклад 6. На рис. 49 зображено орієнтований граф $X = \{1, 2, 3\}$, $W = \{(2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3)\}$.



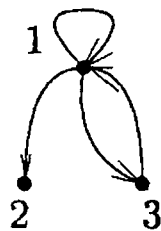
(Рис. 49)

Теорема 4. *Число усіх орієнтованих графів з n вершинами дорівнює $2^{n(n-1)}$.*

Доведення. Справді, число впорядкованих пар елементів з X дорівнює $n(n-1)$, тому число всіх можливих множин дуг дорівнює $2^{n(n-1)}$.

Означення 13. Нехай $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множина вершин. Орієнтованим графом з петлями будемо називати пару множин (X, W) , де $W \subset X \times X$.

Приклад 7. На рис. 50 зображено орієнтований граф з петлями, в якому $X = \{1, 2, 3\}$, $W = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$.



(Рис. 50)

Теорема 5. Число орієнтованих графів з петлями, які мають n вершин, дорівнює 2^{n^2} .

Доведення. Справді, число різних множин W (підмножин множини $X \times X$) дорівнює 2^{n^2} .

Якщо розглядається одночасно декілька типів графів, то графи, які описуються означенням 1, будемо називати *простими графами*.

Якщо в означенні 1 до множини M_2 неупорядкованих пар приєднати ще множину всіх пар виду (x_i, x_i) , то відповідний граф називається *простим графом з петлями*.

Теорема 6. Число всіх простих графів з n вершинами і петлями дорівнює

$$2^n 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{C_{n+1}^2}.$$

Надалі, якщо не обумовлене протилежне, ми будемо розглядати прості графи.

Ойлерові графи. Теорія графів — одна з небагатьох математичних дисциплін, дата народження якої може бути встановлена абсолютно точно.

Перша робота з теорії графів належить Леонарду Ойлеру. Вона з'явилася в публікаціях Санкт-Петербурзької Академії наук у 1736 році.

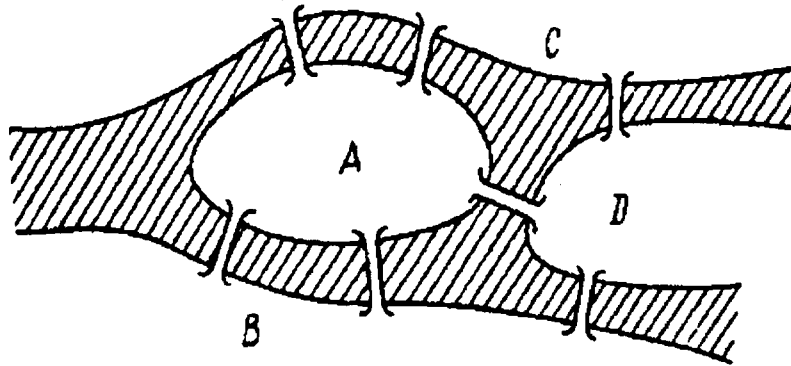
Праця Ойлера розпочиналася з розгляду однієї ломоголовки — так званої "задачі про кенігзберзькі мости".

Місто Кенігзберг (нині Калінінград) розташоване на берегах річки Прегель і двох островах. Різні частини міста сполучені сімома мостами. Щонеділі жителі міста любили здійснювати прогулянки по місту.

Ойлер поставив питання: чи можна здійснити прогулянку, вийшовши з дому і повернувшись до нього, таку, щоб по кожному мосту

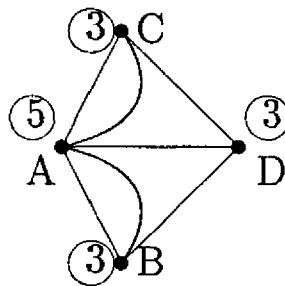
пройти рівно один раз.

Сформулюємо задачу, як задачу теорії графів. Схематична карта міста зображена на рисунку 51.



(Рис. 51)

Чотири частини міста зображені літерами A, B, C, D . Оскільки нас цікавлять лише переходи через мости, ми можемо вважати A, B, C, D вершинами графа, ребра якого відповідають мостам. Цей граф зображено на рисунку 52.



(Рис. 52)

Ойлер зауважив, що цей граф не являє єдиного циклу; з якої б вершини ми не почали б обхід, ми не можемо обійти весь граф і повернутись назад, не проходячи жодного ребра двічі. Якби такий цикл існував, то з кожної вершини виходило б стільки ребер, скільки в неї входить, інакше кажучи степінь кожної вершини був би парним числом. Таким чином, відповідь на питання Ойлера — негативна.

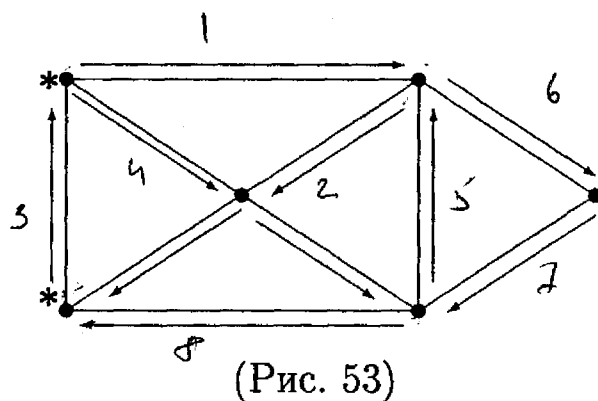
Виклавши розв'язання задачі про кенігзберзькі мости, Ойлер у своїй праці поставив питання: на яких графах можна знайти цикл, який містить всі ребра графа, при чому кожне ребро зустрічається в циклі рівно один раз?

Дамо строгі означення.

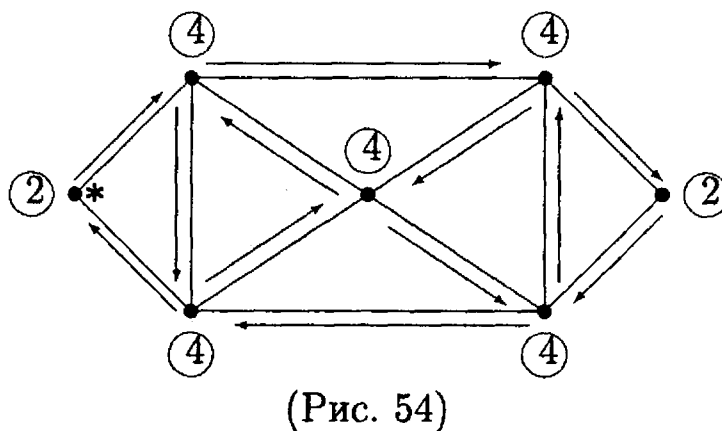
Означення 14. Зв'язний граф називається *ойлеровим графом*, якщо існує замкнений ланцюг, який проходить через кожне ребро. Такий ланцюг будемо називати *ойлеровим ланцюгом*, або *ойлеровим циклом*.

Означення 15. Граф називається *напівойлеровим*, якщо існує ланцюг, який проходить через кожне його ребро рівно один раз.

Приклад 8. На рисунку 53 зображено напівойлерів граф, * зірочкою відзначено початок і кінець ланцюга, який проходить через кожне ребро рівно один раз.

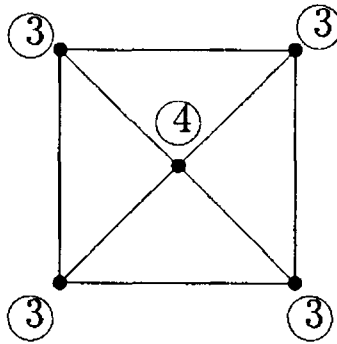


Приклад 9. На рисунку 54 зображено ойлерів граф і ойлерів ланцюг; цифрами в кружечках вказано степені вершин.



Зірочкою відзначено початок і кінець ланцюга.

Приклад 10. На рисунку 55 зображено приклад неойлерового графа.



(Рис. 55)

Які ж необхідні і достатні умови, щоб граф був ойлеровим? Доведемо лему, яка далі буде грати істотну роль.

Лема 2. *Якщо степінь кожної вершини графа $\Gamma(X, W)$ не менший двох, то граф містить цикл.*

Доведення. Якщо в графі є петлі або кратні дуги, то твердження леми очевидне. Тому надалі будемо припускати, що $\Gamma(X, W)$ є простим графом. Нехай x — довільна вершина графа $\Gamma(X, W)$. Побудуємо по індукції маршрут

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots,$$

обираючи вершину x_1 , суміжну з x_0 , а при $i \geq 1$ обираючи вершину x_{i+1} , суміжну з x_i і відмінну від x_{i-1} (існування такої вершини випливає з умови леми). Оскільки $\Gamma(X, W)$ має скінченне число вершин, то врешті-решт ми прийдемо до вершини x_0 , з якої вийшли. Отримали цикл $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_0$.

Теорема 7. *Для зв'язного графа $\Gamma(X, W)$ наступні умови еквівалентні:*

- 1) $\Gamma(X, W)$ — ойлерів граф;
- 2) *кожна вершина $\Gamma(X, W)$ має парний степінь;*
- 3) *множину ребер графа $\Gamma(X, W)$ можна розбити на прості цикли.*

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) Нехай C — ойлерів цикл графа $\Gamma(X, W)$. Будемо рухатись по циклу C . Проходження кожної вершини збільшує її степінь на 2, і оскільки кожне ребро входить в C рівно один раз, то будь-яка вершина має парний степінь.

2) $\Rightarrow$ 3) Оскільки Γ — зв'язний граф, степінь кожної вершини дорівнює принаймні 2; тому в силу леми 2 $\Gamma(X, W)$ містить простий цикл C . Виключимо ребра циклу C , отримаємо остовний під-

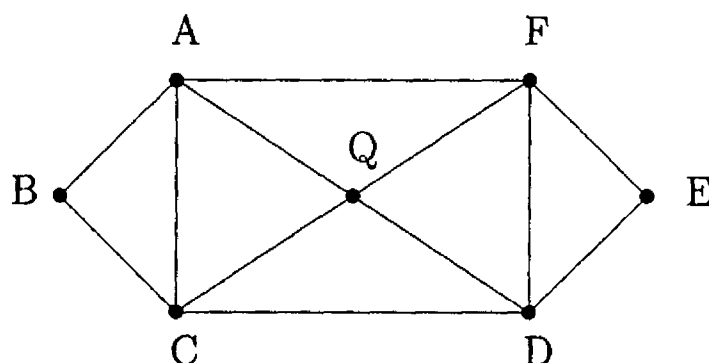
граф $\Gamma(X, W_1)$, в якому кожна вершина має парний степінь. Якщо в $\Gamma(X, W_1)$ немає ребер, то (3) доведено. В протилежному випадку застосуємо проведені вище міркування до $\Gamma(X, W_1)$, отримаємо граф $\Gamma(X, W_2)$, в якому степені всіх вершин є парними і т.д. Одночасно з порожнім графом $\Gamma(X, W_n)$, ($W_n = \emptyset$) отримаємо розбиття множини ребер на n простих циклів.

3) $\Rightarrow$ 1) Нехай множину ребер можна розбити на прості цикли. Нехай C_1 — один з простих циклів. Якщо $\Gamma(X, W)$ складається тільки з цього циклу, то $\Gamma(X, W)$ — ойлерів граф. У протилежному випадку існує інший простий цикл, який має вершину v , спільну з C_1 . Ланцюг, який розпочинається з v і складається з циклу C_1 і наступного за ним циклу C_2 , є замкненим ланцюгом, який містить всі ребра графа $\Gamma(X, W)$, кожне один раз. Отже, $\Gamma(X, W)$ — ойлерів граф.

З теореми 7 випливає наступна теорема.

Теорема 8. *Зв'язний граф є ойлеровим тоді і тільки тоді, коли кожна його вершина має парний степінь.*

Приклад 11. Граф, зображений на рис. 56 є ойлеровим.



(Рис. 56)

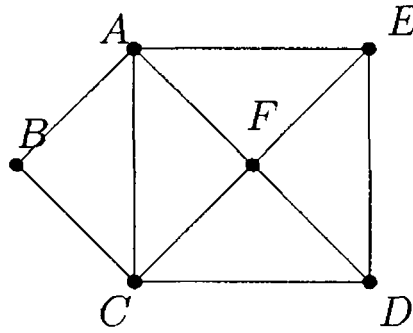
Множина ребер цього графа є об'єднанням двох простих циклів $AB \rightarrow BC \rightarrow CQ \rightarrow QD \rightarrow DE \rightarrow EF \rightarrow FQ \rightarrow QA$ і $AC \rightarrow CD \rightarrow DF \rightarrow FA$.

Теорема 9. *Зв'язний граф є напівойлеровим тоді і тільки тоді, коли в ньому не більше двох вершин непарного степеня.*

Якщо граф має дві вершини з непарними степенями, то для будь-якого напівойлерового ланцюга одна з цих вершин буде початковою, а друга — кінцевою. Для доведення досить сполучити відрізком вершини з непарними степенями.

Зауважимо, що згідно з лемою про рукостискання число вершин непарного степеня є парним.

Приклад 12. Граф, зображений на рис. 57 є напівойлеровим.



(Рис. 57)

Ось один з можливих варіантів обходу $EA \rightarrow AB \rightarrow BC \rightarrow CD \rightarrow DF \rightarrow FC \rightarrow CA \rightarrow AF \rightarrow FE \rightarrow ED$.

Початковою точкою маршруту є точка E , а кінцевою точкою є точка D .

Спробуємо для довільного графа вказати найменше число ланцюгів таких, що жодні два з них не мають спільних ребер і всі вони повністю накривають разом весь граф. Очевидно, якщо на графі є таке сімейство ланцюгів, то кожна вершина непарного степеня повинна бути або початковою, або кінцевою вершиною якогось ланцюга. Загальне число вершин з непарним степенем згідно з лемою про рукостискання є парним, скажімо, рівним $2k$. Таким чином, кожне сімейство ланцюгів, які накривають граф, повинно містити принаймні k ланцюгів.

Доведемо, що існування $2k$ вершин з непарним степенем є і достатньою умовою існування ланцюгів, які накривають граф.

Теорема 10. *На будь-якому зв'язному графі з $2k$ вершинами непарного степеня існує сімейство ланцюгів, які в сукупності містять всі ребра графа рівно один раз кожне.*

Доведення. Позначимо вершини з непарними степенями

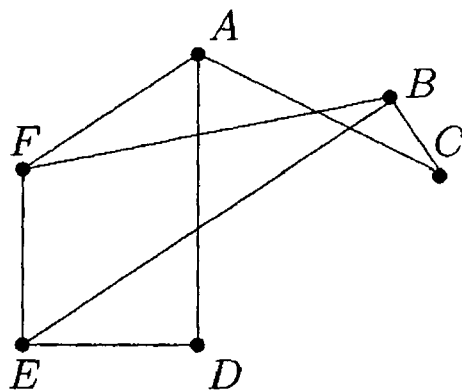
$$A_1, A_2, \dots, A_k; B_1, B_2, \dots, B_k.$$

Якщо ми додамо до нашого графа ребра

$$A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_kB_k,$$

то всі вершини отриманого графа будуть парними і на ньому знайдеться ойлерів цикл $\mathcal{P}$. При відкиданні доданих ребер цикл $\mathcal{P}$ розпадеться на k окремих ланцюгів, які містять всі ребра графа.

Приклад 13. Граф, зображений на рис. 58 має чотири вершини

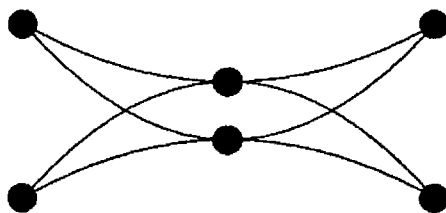


(Рис. 58)

з непарним степенем A, B, E, F і накривається двома ланцюгами $EBFA$ і $BCAFED$.

В розважальній математиці ось уже впродовж декількох століть розглядаються задачі, які можна сформулювати як задачі пошуку певних маршрутів в графах, зокрема, пошуку ойлерових циклів. Ось приклад однієї з таких задач.

Приклад 14. За одним разом (тобто розчерком) викреслити фігуру, подану нижче:



(Рис. 59)

Граф на рисунку 59 називається шаблею Магомета.

Більшість збірників математичних задач з розважальної математики містять задачі про лабіринти.¹⁹ Лабіринт складається з коридорів та їх перехресть. Отже, він може бути зображений графом, в якому ребра відповідають коридорам, а вершини — перехрестям.

В термінах графів *задача про лабіринт* може бути сформульована так: визначити метод пошуку такого ланцюга в графі, який розпочинається з вершини a_0 і напевне досягає іншої даної вершини a_1 (виходу). Щоб не було нескінченного блукання циклічними

¹⁹ Див., наприклад, Ліо Кі, Ломиголови (Ігри без партнера), К. ТВіМС, 1996; Е. Люкас, Математические развлечения, СПб, 1883; Е.И. Игнатъев, В царстве смекалки, Петроград, 1923; Е.И. Игнатъев, В царстве смекалки, М., "Наука", 1978.

маршрутами, необхідно мати можливість запам'ятовувати пройдені вершини та ребра.

Ойлеровим графом повинен бути і план огляду будь-якої виставки, і вздовж приміщень виставки потрібно розставити покажчики обходу таким шляхом, щоб кожен експонат був оглянутий рівно один раз.

Припустимо, що експонати розташовані з обох сторін шляху, який проходить територією виставки. Виявляється, що тоді, яким би не був відповідний граф (аби лишень він був зв'язний), можна провести відвідувача так, щоб кожний шлях був пройдений двічі — по одному разу в кожному напрямі.

Теорема 11. *У зв'язному графі існує орієнтований цикл, який проходить через ребро по одному разу в кожному з двох напрямів.*

Доведення. Сформулюємо загальне правило побудови ланцюга, який проходить вздовж усіх ребер графа рівно по одному разу в кожному напрямі. Розпочнемо з довільної вершини A_0 і пройдемо вздовж A_0A_1 , відзначивши це ребро маленькою стрілкою в точці A_1 , яка показує вибраний напрям. Потім переходимо послідовно до інших вершин. Одні й ті ж вершини можна відвідувати й декілька раз. Кожного разу, потрапивши в якусь вершину, ми будемо ставити на відповідному ребрі стрілку, яка вказує напрям прибуття. Крім того, потрапляючи в якусь вершину вперше, ми як-небудь відзначимо вхідне ребро, щоб потім його можна було відрізнити від інших.

Виходячи з вершини, ми завжди будемо обирати ще невикористаний напрям: або ребро, по якому ми зовсім не проходили, або ребро помічене стрілкою, яка вказує на те, що ми по ньому прибули. Домовимось також, що тільки тоді, коли у нас немає вибору, ми використаємо для виходу ребро, яким вперше прийшли в цю вершину.

Будемо продовжувати шлях до тих пір, поки це взагалі можливо. В кожній вершині є однакове число можливостей для входу і для виходу. Тому рух може закінчитися лише в точці A_0 . Залишається перевірити, що у всіх вершинах всі ребра будуть пройдені в обох напрямках.

Для точки A_0 це ясно — всі ребра, які виходять, будуть використані, оскільки в протилежному випадку ми могли б рухатися далі; тому і всі ребра, які входять, також будуть використані, бо їх чис-

ло дорівнює числу ребер, які виходять. Зокрема, ребро A_0A_1 буде пройдено в обох напрямках. Але це означає, що всі ребра, які інцидентні A_1 , також будуть пройдені в обох напрямках, бо перше ребро, яке входить в A_1 , ребро A_0A_1 , за умовою, повинно використовуватися для виходу лише в останню чергу. Теж саме міркування можна застосувати до наступного ребра A_1A_2 і наступної вершини A_2 і т.д.

Отже, в усіх вершинах, які будуть досягнуті, всі ребра виявляться пройденими в обох напрямках. Оскільки наш граф є зв'язним, це означає, що він буде повністю обійденим.

Зауважимо, що описаний метод обходу графа може бути використаний для розв'язання задач, пов'язаних з пошуками маршрутів виходу з лабіринтів.

Гамільтонові графи.

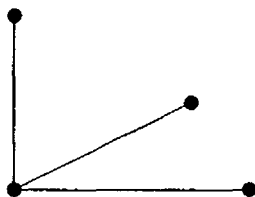
Означення 16. Зв'язний граф називається *гамільтоновим графом*, якщо існує замкнений ланцюг, який проходить через кожную вершину графа рівно один раз. Такий ланцюг будемо називати гамільтоновим ланцюгом, або гамільтоновим циклом.

Означення 17. Зв'язний граф називається *напівгамільтоновим*, якщо існує ланцюг, який проходить через кожную його вершину рівно один раз.

Назва *гамільтонів граф* виникла у зв'язку з тим, що в 1859 році відомий ірландський математик сер Вільям Гамільтон²⁰ випустив до продажу своєрідну іграшкову ломоголовку. Її основною частиною був правильний додекаедр, зроблений з дерева. Це один з так званих правильних многогранників: його гранями є 12 правильних п'ятикутників, у кожній з його вершин сходиться три ребра. Кожна з вершин гамільтонового додекаедра була позначена назвою одного з великих міст Земної кулі — Брюсель, Кантон, Делі, Лондон і т. д. Задача полягала в знаходженні шляху вздовж ребер додекаедра, який проходить через кожне місто рівно один раз. Гамільтонів цикл на додекаедрі не покриває, звичайно, всіх ребер додекаедра, бо в кожній вершині він проходить рівно по двох ребрах.

Приклад 15. Граф, зображений на рис. 60

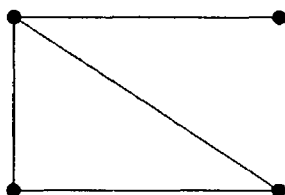
²⁰Гамільтон Вільям (1805-1865) — ірландський математик і астроном — один з творців теорії векторного числення, теорії комплексних чисел та теорії кватерніонів.



(Рис. 60)

не є гамільтоновим.

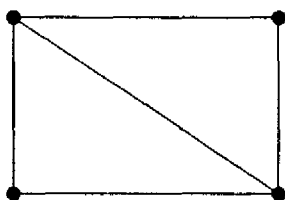
Приклад 16. Граф, зображений на рис. 61



(Рис. 61)

є напівгамільтоновим.

Приклад 17. Граф, зображений на рис. 62



(Рис. 62)

є гамільтоновим.

Не дивлячись на подібність в означеннях ойлерових та гамільтонових графів, відповідні теорії для цих класів графів диже відрізняються.

Нерозв'язана проблема 10. Встановити критерій гамільтоновості графа.

Це одна з головних нерозв'язаних задач теорії графів!

До теорії гамільтонових графів відноситься і *задача про бродячого торговця*, або *задача про комівояжера*. В задачі про бродячого торговця мова йде про деякий район, та торговця, який повинен відвідати певну кількість міст цього району. Відстані між містами відомі, і треба знайти найкоротший шлях, який проходить через усі міста і закінчується в початковому пункті.

Міста можна зображати вершинами деякого графа, в якому кожній парі вершин приписана відстань $\mu(a, b)$. Мова йде про пошук

гамільтонового циклу $\mathcal{P}$, для якого сума $\sum_{(a,b) \in \mathcal{P}} \mu(a,b)$ є мінімальною.

Оскільки розглядається скінченне число вершин, то задача може бути розв'язана (при невеликій кількості вершин) шляхом простого перебору. Ефективних алгоритмів для розв'язання цієї задачі не створено, хоча цій проблемі присвячено багато досліджень, і існує надзвичайно багата література.

Нерозв'язана проблема 11. Розробити ефективний алгоритм розв'язання задачі про комівояжера.

Тут є багато результатів і конкретних досягнень. Наприклад, в США знайдена найкоротша циклічна авіалінія, яка проходить через всі головні міста США. Проте пошуки ефективних алгоритмів тривають.

Встановлено різні достатні умови гамільтоновості графа. Сформулюємо дві з них.

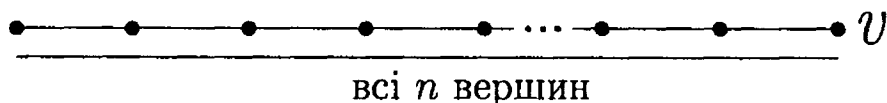
Теорема 12. (О. Оре, 1960) *Якщо для будь-якої пари u і v несуміжних вершин графа $\Gamma(X, W)$ з n вершинами ($n \geq 3$) має місце нерівність*

$$d(u) + d(v) \geq n, \quad (4)$$

то граф $\Gamma(X, W)$ гамільтонів.

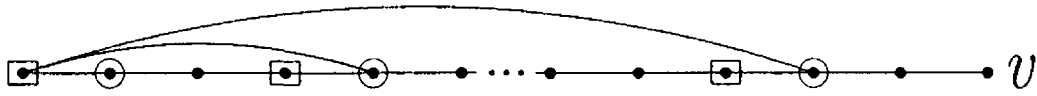
Нагадаємо, що $d(u)$ — степінь вершини u , тобто число ребер, які виходять з вершини u .

Доведення. Будемо доводити від супротивного. Припустимо, що існує негамільтонів граф з n вершинами, в якому для будь-якої пари несуміжних вершин u і v виконується умова (4). Додавання до графа нових ребер не порушує умову (4). Позначимо через $\mathcal{G}$ *максимальний негамільтонів граф*, тобто такий граф, приєднання до якого нового ребра перетворює граф на гамільтонів. Очевидно, $\mathcal{G}$ не може бути повним графом, бо повний граф гамільтонів. Тому в $\mathcal{G}$ існує пара несуміжних вершин u і v . Приєднання до $\mathcal{G}$ ребра uv перетворює граф $\mathcal{G}$ на гамільтонів в силу максимальної негамільтоновості $\mathcal{G}$. Таким чином, існує гамільтонів ланцюг, який сполучає u і v , він проходить через всі вершини (рис. 63)



(Рис. 63)

Оточимо кожну з $d(u)$ вершин, які суміжні з u , кружечком, і вершину, яка лежить лівіше, квадратиком так, як зображено на рисунку, поданому нижче:



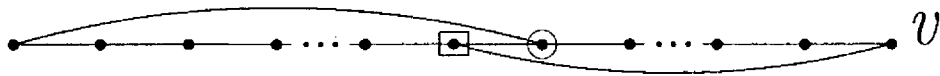
(Рис. 64)

- $d(u)$ з цих $n - 1$ вершин оточені кружечком;
- $d(u)$ з цих $n - 1$ вершин оточені квадратиком;
- $n - d(u)$ — не оточені квадратиком.

Зазначимо, що в силу умови теореми

$$d(v) \geq n - d(u) > n - d(u) - 1. \quad (5)$$

Звідси випливає, що вершина v суміжна з деякою вершиною, яка оточена квадратиком. Таким чином, виходить, що граф G має гамільтонів цикл, зображений на рис. 65.



(Рис. 65)

Отже, прийшли до суперечності. Теорема доведена.

З теореми 12 випливає наступна теорема.

Теорема 13 (Г. Дірак, 1952 р.) *Якщо для будь-якої вершини u графа $\Gamma(X, W)$ з n вершинами ($n \geq 3$) виконується нерівність $d(u) \geq \frac{n}{2}$, то граф $\Gamma(X, W)$ гамільтонів.*

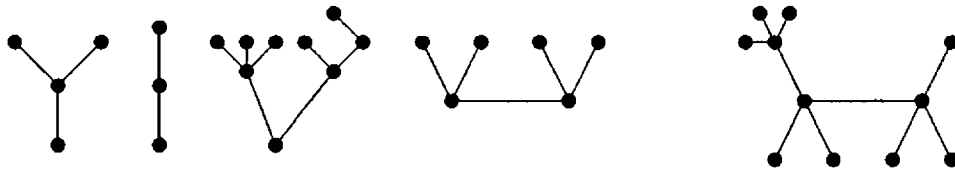
Ліси та дерева

*Сьогодні ми ходили в ліс — зелений,
у продумі він над тобою весь —
то в зламі рис, то в формі розгалужень
хрусткий, як мисль пістрявий.*

Павло Тичина

Означення 18. Лісом називається граф, який не містить циклів.
Зв'язний ліс називається деревом.

Приклад 18. На рис. 66 зображено ліс, що складається з чотирьох компонент, кожна з яких є деревом:



(Рис. 66)

Приклад 19. Прикладом дерев є так звані генеалогічні дерева (родоводи). Подамо для прикладу родовід київських князів²¹.



(Рис. 67)

Теорема 14. Нехай $\Gamma(X, W)$ граф, що має n вершин та m ребер. Тоді такі умови еквівалентні:

1. $\Gamma(X, W)$ — дерево;
2. $\Gamma(X, W)$ — зв'язний граф і $m = n - 1$;
3. $\Gamma(X, W)$ — ациклічний граф і $m = n - 1$;
4. будь-які дві вершини графа $\Gamma(X, W)$ сполучаються єдиним простим ланцюгом;
5. $\Gamma(X, W)$ — ациклічний граф, який має таку властивість: яку б пару його несуміжних вершин сполучити ребром, отриманий граф буде містити рівно один цикл.

²¹ Подаємо за книгою Михайло Грушевський "Ілюстрована історія України", Київ-Львів, 1913.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) Скористаємося індукцією по n . При $n = 1$ твердження є тривіальним. В дереві немає циклів. Викресливши одне ребро, ми отримаємо дві компоненти T_1 та T_2 , кожна з яких є деревом. Нехай T_i містить n_i вершин та m_i ребер. Тоді за припущенням індукції

$$m_i = n_i - 1. \quad (4)$$

Загальне число ребер графа дорівнює

$$m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1.$$

2) $\Rightarrow$ 3) Граф $\Gamma(X, W)$ зв'язний і $m = n - 1$. Припустимо, що граф $\Gamma(X, W)$ має цикл і нехай e — ребро цього циклу. Викреслимо ребро e . Отримаємо зв'язний граф, який має $n - 2$ ребер, а це суперечить теоремі 3. Таким чином, $\Gamma(X, W)$ ациклічний граф.

3) $\Rightarrow$ 4) Нехай k — число компонент зв'язності. Нехай компонента T_i має n_i вершин і m_i ребер. Оскільки T_i — дерево, то $m_i = n_i - 1$. Далі маємо

$$\begin{aligned} n - 1 = m &= m_1 + m_2 + \dots + m_k = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = \\ &= (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k = n - k, \end{aligned}$$

тобто $k = 1$. Таким чином, $\Gamma(X, W)$ — зв'язний граф, і тому будь-які дві вершини u і v сполучаються ланцюгом. Якби таких ланцюгів було два, то їх об'єднання становило би цикл.

4) $\Rightarrow$ 5) Нехай $\Gamma(X, W)$ циклічний граф. Візьмемо дві вершини, які належать одному циклу. Вони сполучені принаймні двома простими ланцюгами. Отже, граф $\Gamma(X, W)$ ациклічний. Нехай u і v — дві його несуміжні вершини. Приєднаємо до графа $\Gamma(X, W)$ ребро (u, v) . Тоді отримаємо цикл.

5) $\Rightarrow$ 1) Треба довести, що граф $\Gamma(X, W)$ зв'язний. Якби його вершини u і v належали різним компонентам зв'язності, то граф, отриманий приєднанням ребра (u, v) , не мав би циклів, що суперечить 5).

Означення 19. Вершина $v \in W$ називається кінцевою вершиною, якщо $d(v) = 1$.

Теорема 15. У будь-якому дереві з n вершинами, ($n \geq 2$) є принаймні дві кінцеві вершини.

Доведення. Нехай $d_1, d_2, \dots, d_n$ — степенева послідовність вершин дерева. Згідно з лемою про рукостискання

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1),$$

при чому всі $d_i > 0$. Значить, принаймні два числа з послідовності $d_1, d_2, \dots, d_n$ дорівнюють одиниці.

Наступна теорема належить Артуру Келі²², який досліджував дерева в зв'язку з структурними хімічними формулами.

Теорема 16. *Число різних дерев, які можна побудувати на n даних вершинах, дорівнює $t_n = n^{n-2}$.*

Доведення. Цю теорему Артур Келі встановив у випадку $n = 6$ в 1889 році. При доведенні ми використаємо метод, який запропонував Прюфер²³. Нехай

$$X = \{1, 2, \dots, n\} \quad (5)$$

множина вершин дерева. Для будь-якого дерева T , побудованого на X , введемо деякий символ, який характеризує його однозначно. Згідно з теоремою 15 існують кінцеві вершини в T . Позначимо через b_1 першу кінцеву вершину в послідовності (5), а через $e_1 = (a_1, b_1)$ відповідне кінцеве ребро. Викреслимо з T ребро e_1 і вершину b_1 . Отримаємо нове дерево T_1 . В T_1 розглянемо кінцеву вершину b_2 та кінцеве ребро e_2 . Викреслимо з T_1 кінцеву вершину b_2 та кінцеве ребро e_2 . Отримаємо дерево T_2 . Продовжуємо процедуру далі, поки не залишиться одне ребро: викресливши ребро $e_{n-2} = (a_{n-2}, b_{n-2})$, отримаємо одне-єдине ребро a_{n-1}, b_{n-1} , яке сполучає дві вершини, що залишились. Тоді набір

$$\sigma(T) = [a_1, a_2, \dots, a_{n-2}] \quad (6)$$

однозначно визначається за деревом T , і двом різним деревам відповідають різні набори. Кожна вершина a_i з'являється в (6) $d(a_i) - 1$ разів.

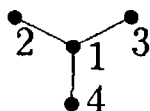
Навпаки, за набором (6) можна однозначно відновити дерево T таким чином. Знаходимо в (5) першу вершину b_1 , яка не входить в (6).

²² Артур Келі (Cauley) (1821-1895) — англійський математик. Працював в Кембріджському університеті. Основні досягнення з основ алгебраїчної геометрії, теорії груп, неевклідової геометрії.

²³ H. Prüfer "Neuer Beweis Satzes über Permutationen", Archiv der Math. und Phys., v.27, (1918), p.142-144.

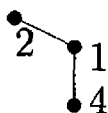
Це визначає ребро $e_1 = (a_1, b_1)$. Викреслюємо вершину a_1 з набору (6) і b_1 з (5) і продовжуємо процедуру далі, викреслюючи з наборів (6) і (5). В наборі (6) кожна вершина набуває n можливих значень $1, 2, \dots, n$. Звідси згідно з правилом множення випливає твердження теореми Келі. Набір (6) називається *кодом Прюфера* дерева T .

Приклад 20. Проілюструємо доведення теореми Келі на прикладі дерева T (рис.68 — рис.70).



(Рис. 68)

Беремо кінцеву вершину $b_1 = 3$ і кінцеве ребро $(1,3)$. Викреслимо з T вершину 3 та ребро $(1,3)$. Отримаємо дерево T_1 :



(Рис. 69)

Візьмемо кінцеву вершину $b_2 = 2$ і кінцеве ребро $(1,2)$. Викреслимо b_2 і ребро $(1,2)$. Отримаємо дерево T_2 :



(Рис. 70)

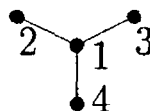
Записуємо $\sigma(T) = [1, 1]$.

Простежимо процедуру відновлення дерева T . Пишемо два набори

$$I : \sigma(T) = [1, 1]$$

$$II : \{1, 2, 3, 4\}.$$

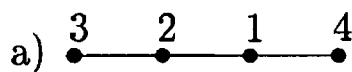
Беремо в II вершину $b_1 = 2$, якої немає в I, розглядаємо ребро $(a_1, b_1) = (1, 2)$. Викреслюємо з $\sigma(T)$ $a_1 = 1$, а II $b_1 = 2$. Обираємо $b_2 = 3$. Тоді $(a_2, b_2) = (1, 3)$. Залишилось ребро $(1, 4)$. Отже, отримали граф



(Рис. 71)

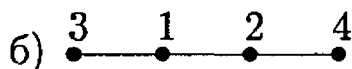
З метою ілюстрації доведення наступної теореми розглянемо такий приклад.

Приклад 21. Розглянемо на прикладі як можна утворити граф з множиною вершин $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ з степенями вершин $d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 1, d_5 = 1$. Розглянемо графи на множині вершин $\{1, 2, 3, 4\}$:



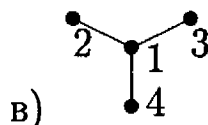
(Рис. 72)

$$d_1 = 2, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 1;$$



(Рис. 73)

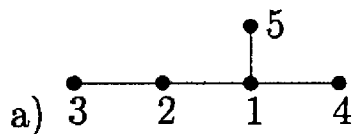
$$d_1 = 2, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 1;$$



(Рис. 74)

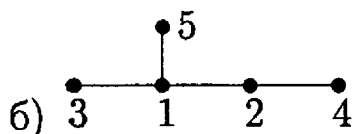
$$d_1 = 3, d_2 = 1, d_3 = 1, d_4 = 1;$$

Приєднаємо вершину 5. Отримаємо графи



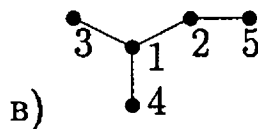
(Рис. 75)

$$d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 1, d_5 = 1;$$



(Рис. 76)

$$d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 1, d_5 = 1;$$



(Рис. 77)

$$d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 1, d_5 = 1;$$

Теорема 17. Нехай $n \geq 2$, а $d_1, d_2, \dots, d_n$ додатні числа, сума яких дорівнює $2n - 2$. Число дерев з вершинами з множини $\{1, \dots, n\}$ і степенями вершин $d_1, d_2, \dots, d_n$ дорівнює

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \dots (d_n-1)!} \quad (7)$$

Доведення. Будемо проводити доведення методом математичної індукції. При $n = 2$ теорема справедлива ($d_1 = 1, d_2 = 1$ і (7) має місце). Розглянемо множину вершин $\{1, 2, \dots, n-1\}$ і множину степенів $d_1, d_2, \dots, d_i - 1, \dots, d_{n-1}$. Маємо

$$\begin{array}{l} \text{число дерев з множиною} \\ \text{вершин } \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{і степенями вершин} \\ d_1, d_2, \dots, d_n \end{array} = \sum_{i=1}^{n-1} \begin{array}{l} \text{число дерев з множиною} \\ \text{вершин } \{1, \dots, n-1\} \\ \text{і степенями вершин} \\ d_1, \dots, d_i - 1, \dots, d_{n-1} - 1 \end{array}$$

Згідно з припущенням індукції

$$\begin{array}{l} \text{число дерев з множ.} \\ \text{вершин } \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{і степенями вершин} \\ d_1, d_2, \dots, d_n \end{array} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_i-2)! \dots (d_{n-1}-1)!} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_{n-1}-1)!(d_n-1)!} \quad (8)$$

(ми використали основну властивість поліноміальних коефіцієнтів; зазначимо також, що $d_n = 1$). Теорема 15 доведена.

Ще одне доведення теореми Келі.

Теорема 18. Число усіх дерев на множині вершин $\{1, 2, \dots, n\}$ дорівнює

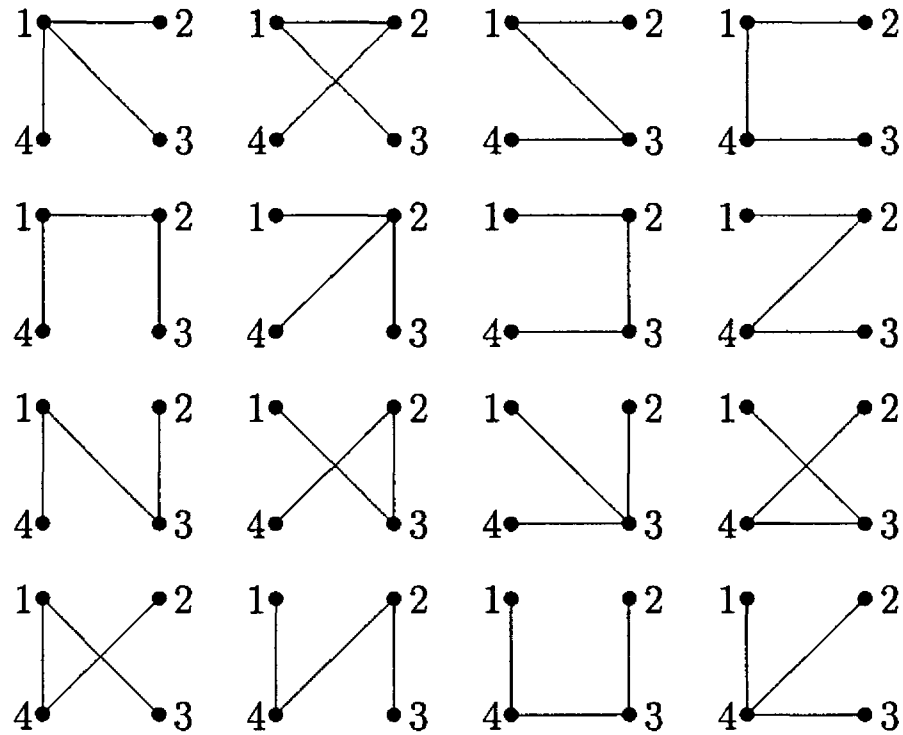
$$t_n = n^{n-2}. \quad (9)$$

Доведення. Згідно з поліноміальною теоремою

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{n-2} &= \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n = n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1! \dots k_n!} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} = \\ &= \sum_{\substack{d_1 \geq 1, \dots, d_n \geq 1 \\ (d_1-1) + \dots + (d_n-1) = n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!} a_1^{d_1-1} \dots a_n^{d_n-1}. \end{aligned}$$

Поклавши $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ і врахувавши (8), отримаємо (9).

Приклад 22. Подаємо всі $4^2 = 16$ дерев з множиною вершин $\{1, 2, 3, 4\}$:



(Рис. 78)

Коди Прюфера цих дерев:

11, 12, 13, 14,
21, 22, 23, 24,
31, 32, 33, 34,
41, 42, 43, 44.

РОЗДІЛ 18

Застосування дискретної математики в економіці, фінансах, організації виробництва

Об'єм, глибина і структурна складність сучасної математики роблять необхідним знаходження нових підходів до взаємодії математичних досліджень між різними областями і постійне покращення доступу математичних ідей до нематематиків. На даний момент, ми, математики часто маємо слабе уявлення про те, що робиться в науці і техніці, в той же час вчені-експериментатори та інженери у багатьох випадках не підозрюють про ті можливості, які дає прогрес чистої математики. Ця жахлива незбалансованість повинна бути ліквідована привнесенням інших наук у підготовку математиків і викладанням чистої математики вченим та інженерам. Потрібно багато зусиль з боку математиків для того, щоб донести основні математичні теорії та ідеї (особливо ті, які розвинені в останні десятиліття) до широкої аудиторії. Необхідно підготувати нове покоління математиків-професіоналів, здатних встановлювати взаємодію між чистою математикою і прикладними науками.

Михайло Громов²⁴

У наш час такі дисципліни як економіка, соціологія, фінансова математика і фінансова інженерія, дослідження операцій, теорія автоматичного управління, хімія широко використовують методи дискретної математики і отримані в ній результати.

²⁴ Михайло Громов — один з найбільш впливових і активних сучасних математиків. Закінчив Ленінградський університет. Нині працює в інституті вищих досліджень у Парижі. Цитату взято зі статті "Можливі напрямки розвитку математики в наступних десятиліттях", Notices, v.45, №7, 1998; укр. переклад, У світі математики, т.7, в.1, 2001, с. 3-5).

Ці результати грають важливу роль при розробці різних технічних пристроїв з дискретним принципом дії, побудові комп'ютерних алгоритмів в інформатиці, організації раціонального використання цінних паперів на ринку цінних паперів, у плануванні виробництва.

В дискретній математиці особливе місце займають задачі, пов'язані з впорядкуванням тих чи інших об'єктів чи послідовності дій, і побудовою складних конструкцій шляхом раціонального поєднання окремих елементів.

Мета цього короткого розділу — проілюструвати розмаїття застосувань дискретної математики. Виклад буде носити більш описовий характер; на відміну від попередніх розділів доведенням ми будемо приділяти менше уваги.

1. Задача про сполучення міст та задача комівояжера.

Уявимо собі, що потрібно побудувати сітку залізничних шляхів, які б сполучали n даних міст, причому так, щоб пасажир міг з кожного міста проїхати в будь-яке інше. Якщо з економічних міркувань потрібно, щоб кількість рейок була мінімальною, то ясно, що граф, вершини якого відповідають містам, а ребра залізничним коліям, повинен бути *деревом*. Задача тепер полягає в тому, щоб серед n^{n-2} дерев (згадаємо теорему Келі), які сполучають ці міста, знайти те, яке вимагає найменшої кількості рейок. Відстані між містами вважаються відомими.

Більш загальне формування задачі таке. Нехай $\Gamma(X, W)$ — зв'язний граф, і нехай кожному ребру e приписане невід'ємне дійсне число $\mu(e)$, яке називається його мірою (вагою). Необхідно знайти алгоритм побудови *остовного дерева* T , у якого сума мір $\mu(T)$ є найменшою можливою (при утворенні суми перераховуються всі ребра графа; *остовне дерево* — дерево, яке зв'язує всі вершини графа).

Один із можливих алгоритмів пошуку такого дерева називається алгоритмом Краскала (алгоритмом "найближчого сусіда"). Опишемо його. Позначимо через n число вершин графа, а через m — число ребер.

1. Обираємо довільну вершину x_1 і порівнюємо ваги всіх ребер, інцидентних цій вершині. Ребро з мінімальною вагою включаємо в шукане дерево. Позначимо через x_2 іншу вершину обраного ребра.

2. Переглядаємо всі ребра, які інцидентні вершинам x_1 та x_2 ; обираємо серед них ребро з мінімальною вагою і включаємо його в майбутнє дерево. Іншу вершину цього ребра позначимо x_3 .

3. Розглянемо тепер три вершини x_1, x_2, x_3 ; порівнюємо ваги ребер, інцидентних кожній з цих вершин, обираємо ребро з найменшою вагою і включаємо його в шукане дерево.

4. Продовжуємо процедуру далі і кожен раз при виборі нового ребра стежимо, щоб не виникав цикл з участю обраних ребер.

Теорема 1.а) *Описана процедура описує мінімальне остовне дерево.*

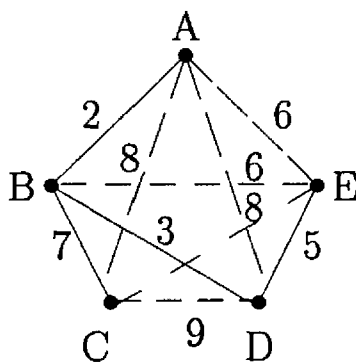
б) В процесі побудови не буде циклів²⁵.

Наскільки складним є описаний алгоритм? Під складністю алгоритму розуміють сумарне число порівнянь ваг всіх ребер, які потрібно здійснити при реалізації алгоритму. Загальне число порівнянь у нашому випадку дорівнює

$$\frac{1}{3}m^3 \left(1 - \frac{c}{m^2}\right),$$

де c деяка константа.

Приклад 1. Описаний вище алгоритм по відношенню до графа на рис. 79 (цифри біля ребер вказують ваги ребер) дає такий



(Рис. 79)

результат: $e_1 = AB, e_2 = BD, e_3 = DE, e_4 = BC$.

Побудова мінімального остовного дерева є важливою задачею, яка зустрічається в багатьох прикладних задачах. З цього питання проводилось і проводиться багато досліджень; вдалось знайти алгоритм із складністю $c \log \log m$. Існує величезна література з цих питань.²⁶

²⁵ Доведення можна знайти в книзі Н.Кристофидес, Теория графов. Алгоритмический подход, М., Мир, 1978; див. також Р.Уилсон, Введение в теорию графов, М., Мир, 1977.

²⁶ Див., наприклад, Рейнгольд Э., Нивергельд Ю., Дзо Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика, М., Мир, 1980.

Близькою до розглянутої задачі є задача про комівояжера, в якій треба знайти алгоритм для розв'язання такої проблеми. Комівояжер повинен відвідати n міст. Як він повинен рухатись, щоб побувати в кожному місті, пройшовши найкоротший шлях? Як бачимо задача зводиться до пошуку гамільтонових циклів.

Приклад 2. Найкоротшим шляхом у прикладі 1 є такий шлях: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$; його довжина дорівнює 26.

З пошуками найкоротшого дерева, яке накриває задану множину вершин $P \subset X$ графа $\Gamma(X, W)$, пов'язана так звана *задача Штейнера*.²⁷

Євклідова задача Штейнера вперше була поставлена як геометрична задача, в якій необхідно задану множину точок площини сполучити лініями так, щоб сума довжин відрізків була мінімальною.²⁸

2. Задача про планування виробництва. В ряді галузей промисловості, зокрема в хімічній та фармакологічній, виникає така задача планування виробництва. Треба виготовити n продуктів, використовуючи один єдиний тип апаратури чи реактор. Апарат (реактор) повинен бути переналагоджений (очищений) чи не повинен бути переналагоджений після того, як виготовлено продукт p_i (але до того, як почалося виробництво продукту p_j), у залежності від комбінації (p_i, p_j) . Припустимо, що ці продукти виробляються в неперервному циклі так, що після виробництва останнього з продуктів знову відновлюється в тому ж фіксованому циклі виробництво першого продукту.

Природно виникає питання, чи можна знайти циклічну послідовність виробництва продуктів $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$, яка не вимагає переналагодження апаратури.

Нехай $\Gamma(X, W)$ — орієнтований граф, вершини якого представляють продукти, а існування ребра (x_i, x_j) означає, що продукт p_j може бути виготовлений після виготовлення продукту p_i без переналагодження апаратури. Відповідь на це питання залежить від того, чи має граф $\Gamma(X, W)$ гамільтонів цикл.

²⁷ Штейнер Якоб (1796-1863) — швейцарський математик, один з творців проективної геометрії.

²⁸ Курант Р., Роббінс Г. Что такое математика, М., Наука (1970); Gilbert E.N., Polack H. "Steiner minimal trees", Journal of SIAM (Appl.Math), 16, p.1, 1968.

Достатні умови існування гамільтонових циклів ми встановили в розділі 17 (теореми Оре та Дірака).

Якщо граф $\Gamma(X, W)$ має гамільтонів цикл

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n},$$

то відповідна послідовність продуктів

$$p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n}$$

може бути виготовлена без переналагодження апаратури.

Якщо граф $\Gamma(X, W)$ немає жодного гамільтонового циклу, то ми будуємо граф $\Gamma_1(X_1, W_1)$, в якому

$$X_1 = X \cup \{y_1\},$$

$$W_1 = W \cup \{(x, y_1), x \in X\} \cup \{(y_1, x), x \in X\},$$

тобто приєднуємо до графа $\Gamma(X, W)$ фіктивну вершину y_1 разом з ребрами, які сполучають кожну з вершин з X .

Якщо граф $\Gamma_1(X_1, W_1)$ має гамільтонів цикл, то він буде мати вигляд

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}, \boxed{y_1}, x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_n},$$

що приводить до такої послідовності виробництва продуктів

$$p_{i_{r+1}}, \dots, p_{i_n}, p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$$

з єдиною операцією переналагодження після виробництва останнього продукту і початком виробництва першого продукту. Таким чином, фіктивна вершина грає роль мітки, яка вказує те місце в послідовності робіт, де необхідне переналагодження апаратури.

Якщо граф $\Gamma_1(X_1, W_1)$ не має гамільтонового циклу, будуємо граф $\Gamma_2(X_2, W_2)$, в якому

$$X_2 = X_1 \cup \{y_2\},$$

$$W_2 = W_1 \cup \{(x, y_2), x \in X\} \cup \{(y_2, x), x \in X\},$$

і аналогічно будемо діяти далі.

Теорема 2. Якщо граф $\Gamma_m(X_m, W_m)$, в якому

$$X_m = X \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \{y_i\} \right),$$

$$W_2 = W_1 \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^m \{(x, y_j), x \in X\} \bigcup \{(y_j, x), x \in X\} \right),$$

містить гамільтонів цикл, а граф $\Gamma_{m-1}(X_{m-1}, W_{m-1})$ такого циклу не містить, то число m є мінімальне число переналагоджень, і якщо гамільтонів цикл в $\Gamma_m(X_m, W_m)$ має вигляд

$$x_{i_1}, \dots, x_{i_\alpha}, \boxed{y_1}, x_{i_{\alpha+1}}, \dots, x_{i_\beta}, \boxed{y_2}, x_{i_{\beta+1}}, \dots, x_{i_\gamma}, \\ \boxed{y_3}, x_{i_{\gamma+1}}, \dots, x_{i_\delta}, \boxed{y_m}, x_{i_{\delta+1}}, \dots, x_{i_n},$$

то продукти повинні вироблятися в послідовності

$$p_{i_{\alpha+1}}, \dots, p_{i_\beta}, \text{ потім } p_{i_{\beta+1}}, \dots, p_{i_\gamma} \text{ і т.д.}$$

$$\text{потім } p_{i_{\delta+1}}, \dots, p_{i_n}, p_{i_1}, \dots, p_{i_\alpha}.$$

Доводиться теорема методом індукції.

В плануванні виробництва важливу роль грають різні алгоритми пошуку найкоротшого шляху в графі. Нехай $\Gamma(X, W)$ — граф, ребрам якого приписані ваги c_{ij} . Задача полягає в пошуку шляху від даної вершини $s \in X$ до вершини $t \in X$, яка досягається з s , з мінімальною чи максимальною сумою ваг. Ці алгоритми реалізуються в методах сітьового планування та управління (СПУ). В зарубіжній літературі ці методи називають PERT (Project Evaluation Research Task), CPM (Critical Path Method).

Задача про максимальний потік. Одна з найбільш важливих задач в прикладній теорії графів — задача про максимальний потік.

Ось приклад такої задачі. Є сітка шосейних доріг, які сполучають деякі населені пункти. Для кожного шосе відома його пропускна здатність. Необхідно вказати маршрут між будь якими заданими двома пунктами, який гарантував би максимальний транспортний потік між ними.

Потоки можуть носити різний характер. Мова може йти про інформаційні, транспортні, комунікаційні та інші потоки.

Різні варіанти задач про потоки вивчалися багатьма авторами, і з цієї проблеми існує величезна кількість робіт.²⁹

²⁹Відзначимо, наприклад, книги: Ермольєв Ю.М., Мельник И.М. Экстремальные задачи на графах, Научная думка, К., 1968; Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях, М., Мир, 1966.

Нехай $\Gamma(X, W)$ — граф, ребрам якого приписані дійсні числа, які називаються пропускними здатностями. У графі виділено дві вершини: $s \in X$, яка називається *джерелом*, та вершина $t \in X$, яка називається *стоком*. Вздовж ребер графа протікають потоки. Пропускна здатність ребра (x_i, x_j) будемо позначати через q_{ij} , а величину потоку вздовж цього ребра — через z_{ij} . Числа q_{ij} та z_{ij} будемо вважати цілими невід'ємними.

Припустимо, що для мережі існує "мережеве витікання" (для джерела) і "мережевий притік" для стоку величини V і виконуються умови

$$\sum_{x_i \in \Gamma(s)} z_{si} = \sum_{x_j \in \Gamma^{-1}(t)} z_{jt} = V$$

($\Gamma(s)$ — множина вершин, які досягаються з вершини s).

Природно дотримуватися умови $z_{ij} \leq q_{ij}$ для всіх $(x_i, x_j) \in W$.

При цих умовах треба знайти таку множину потоків по ребрах, щоб величина V була максимальною.

Нехай $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Множину ребер, які беруть початок в X_1 , а закінчуються в X_2 , будемо називати *розрізом* графа $\Gamma(X, W)$.

Мінімальний розріз — це розріз з мінімальною пропускною здатністю. Говорять, що розріз *відокремлює* вершини x_i та x_j , якщо $x_i \in X_1$, а $x_j \in X_2$.

Теорема 3. *Величина максимального потоку від джерела s до стоку t дорівнює мінімальному значенню величин розрізів, які відокремлюють s від t .*³⁰

Задача про призначення на посади та задача про одруження. Нехай є декілька вакантних посад і група осіб, які прагнуть їх обійняти, причому кожен претендент має достатню кваліфікацію для декількох, але, взагалі кажучи, не всіх посад. Питання в *задачі про призначення на посади* ставиться так: чи можна кожному з цих людей надати одну з тих посад, яку він здатен обійняти?

Сформулюємо задачу в термінах графів. Позначимо множину претендентів через M , а множину посад — через P . Побудуємо граф,

³⁰ Декілька доведень цієї теореми можна знайти в книзі Р.Уілсона Введение в теорию игр, М., Мир, 1977; числові алгоритми, основані на використанні теореми наведено в книзі Н.Кристофидес Теория графов. Алгоритмический подход, М., Мир, 1978

проводячи ребра (t, p) , які сполучають кожну людину з множини M з тією посадою, яку вона може обійняти. Отримаємо так званий *дводольний граф*. Це граф, множина вершин якого розпадається на дві множини M і P такі, що жодні дві вершини з однієї й тієї ж множини не сполучаються між собою.

Звичайно, для існування розв'язку задачі необхідно, щоб число вакантних посад було не менше від числа претендентів. Але ця умова не є достатньою.

Приклад 3. Група претендентів складається з двох теслярів, та одного теслі, який може бути і водопровідником. Є чотири вакантних посади: одна для теслі, три для водопровідників. Один з теслярів залишиться без роботи, хоча число вакантних місць є більшим, ніж число претендентів, і серед претендентів є представники обох професій.

Нехай число претендентів дорівнює N . Ясно, що для розв'язності задачі повинна виконуватися така умова.

Яку б групу з k претендентів ми не розглянули, повинно знайтися принаймні k посад, кожну з яких може обійняти принаймні один з обраних k претендентів $1 \leq k \leq n$.

Будемо називати цю умову *умовою розмаїтості*. Виявляється, що умова *розмаїтості* є й *достатньою*.

Теорема 3. *Якщо виконана умова розмаїтості, то кожен претендент отримає прийнятну для нього роботу.*

Задачі про призначення на посади можна дати іншу інтерпретацію. Розглянемо групу юнаків та дівчат. Кожен юнак знайомий з декількома дівчатами. Питання таке: при яких умовах можна одружити юнаків так, щоб кожен юнак був одружений із знайомою дівчиною?

Приклад 4. Є чотири юнаки $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ та п'ять дівчат $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$. Схему знайомств показано в таблиці

юнаки	дівчата
b_1	g_1, g_4, g_5
b_2	g_1
b_3	g_2, g_3, g_4
b_4	g_2, g_4

Схема одружень може бути такою: $b_1 \leftrightarrow g_4, b_2 \leftrightarrow g_1, b_3 \leftrightarrow g_3, b_4 \leftrightarrow g_2$.

Теорема 4. *Розв'язання задачі про одруження можливе тоді і тільки тоді, коли будь-які k юнаків знайомі в сукупності не менше, ніж з k дівчатами.*

Доведення достатності. Будемо доводити методом математичної індукції. Нехай твердження задачі справедливе, якщо число юнаків менше, ніж m (при $m = 1$ теорема справедлива).

а) Припустимо, що будь-які k юнаків ($1 \leq k < m$) в сукупності знайомі з $k + 1$ дівчиною (тобто умова розмаїтості має місце з однією "зайвою" дівчиною). Одруживши одного юнака з знайомою дівчиною, отримаємо компанію $m - 1$ юнаків, для якої виконана умова розмаїтості, тому теорема справедлива в силу припущення індукції.

б) Припустимо, що є k юнаків ($k < m$), які знайомі в сукупності з k дівчатами. За індуктивним припущенням їх можна одружити. Залишається $m - k$ неодружених юнаків, але будь-які s серед них ($1 \leq s \leq m - k$) повинні бути знайомі з s дівчатами. Якщо це не так, то ці s юнаків разом з уже обраними знайомі менше, ніж з $k + s$ дівчатами, що суперечить припущенню.

Таким чином, для компанії з $m - k$ юнаків виконана умова розмаїтості і за припущенням індукції ми можемо одружити їх, зробивши кожного щасливим.

Математичні моделі ринку цінних паперів. В цьому короткому огляді ми розглянемо деякі найпростіші елементарні математичні моделі ринку цінних паперів. Незважаючи на їх простоту, навіть примітивність, розгляд цих моделей дозволяє отримати якісно принципову картину ринку цінних паперів і дістати уявлення про проблеми, які там виникають. В математиці дуже часто початкове вивчення явища розпочинається з розгляду елементарної моделі, яка віддзеркалює основні принципові властивості реального явища.

Ринок цінних паперів. На відміну від основного ринку, де товаром є продукція, послуги чи праця, фінансовий ринок — це ринок, де товаром є гроші, цінні папери, благородні метали.

Проблеми, які виникають при математичному аналізі ринку цінних паперів відносяться до розділу математики, який називається

фінансовою математикою³¹. В фінансовій математиці широко використовуються методи теорії ймовірностей, причому деякі з них є зовсім новітніми і вимагають знайомства з сучасними результатами теорії випадкових процесів. У нашому короткому викладі ми будемо опиратися лише на інтуїтивне поняття рівноможливості³².

Основними (первинними) цінними паперами на фінансовому ринку цінних паперів є *акції* та *облігації*. *Акція* — цінний папір, який випускається акціонерними товариствами та корпораціями з метою залучення капіталу шляхом продажу акцій. Власник акції має право на участь в обговоренні діяльності акціонерного товариства (одна акція — один голос) і на отримання частки прибутку (дивідендів). Грошова сума, яка вказана на акції, називається її номінальною вартістю, а ціна, за якою акція продається на ринку, її курсом. Курс акції коливається. Він залежить від отриманого дивіденду та перспектив його зростання.

Облігація — цінний папір, наприклад, банківський рахунок, кредитний договір, боргове зобов'язання. На відміну від акцій, ціна яких хаотично змінюється, ціна облігації завжди зростає. За стабільної ситуації облігація — безризиковий актив. Крім основних цінних паперів — акцій та облігацій, на міжнародному ринку все ширше розповсюджуються так звані похідні цінні папери (деривативи). Це опціони, варанти, ваучери, ф'ючерсні та форвардні контракти.

Опціон дає право власнику цього цінного паперу придбати (продати) інші цінні папери (акції, валюту тощо) за обумовленими наперед умовами. За часом погашення опціони бувають двох типів: європейські — з фіксованою датою виконання і американські — можуть бути пред'явлені до виконання в будь-який момент часу до фіксованої дати. *Варант* — це цінний папір, що випускається компанією або фірмою, і надає його власнику право придбати вказану кількість акцій даної фірми або компанії по фіксованій ціні. Варант може бути використаний у будь-який момент часу до фіксованої дати. *Ваучер* — це цінний папір, що дає право власнику

³¹Початкові відомості про фінансову математику можна отримати з статті Є.Федорова "Гроші-гроші-гроші", У світі математики, т.8, в.1, с.9-19, 2002 р. ("Квант", 2000, №5, стр.9-12).

³²Більш досвідченим читачам можна рекомендувати книги з фінансової математики: Т.Уотшем, К.Парамоу Количественные методы в финансах, М., Финансы "ЮНИТИ", 1999., М.М.Леоненко, Ю.С.Мішура, В.М.Пархоменко, М.Й.Ядренко Теоретико-Ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці, К., 1995, Інформтехніка. Фундаментальною монографією з фінансової математики є книга А.Н.Ширяева Основы стохастической математики т.1-т.2 М., Фазис, 1998.

придбати будь-яку акцію по номінальній вартості (зазначеній на акції). *Ф'ючерс*, або ф'ючерсний контракт — це угода про купівлю або продаж деякого товару в майбутній фіксований момент часу за зазначеною наперед ціною. Ф'ючерсні контракти укладаються як на купівлю-продаж товарів чи сировини — руди, пшениці і т.п., так і на купівлю-продаж валюти. Особливістю таких контрактів є те, що вони укладаються на біржі і контрактні ціни визначаються відкритими ринковими аукціонами.

Моделі ринку цінних паперів. В залежності від того, які цінні папери є в активі ринку, ми будемо розрізняти три моделі.

A-ринок, в активі якого є одна акція, ціна якої хаотично змінюється. Найпростіший приклад — коливання курсу валюти, наприклад, євро. Припустимо, що сьогодні курс євро по відношенню до гривні A . Тоді вважатимемо, що у наступний день ("завтра") курс може прийняти одне з двох значень: $A(1 + m)$ або $A(1 + n)$, де $-1 < n < m$, причому ці варіанти не однаково можливі (це так звана модель *A*-ринку). Ми будемо говорити, що сьогодні відомий прогноз курсу валют на завтра. Післязавтра курс може бути $A(1 + m)^2$, $A(1 + m)(1 + n)$ або $A(1 + n)^2$ і так далі:

$$\begin{array}{rcl}
 & & A(1 + m)^2 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 A & \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} & \begin{array}{c} A(1 + m) \\ A(1 + n) \end{array} \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & & A(1 + m)(1 + n) \\
 & & A(1 + n)^2
 \end{array}$$

Курс валюти описується так званим біноміальним деревом. В нашій моделі точна ціна акції завтра невідома сьогодні. Вона стане визначеною лише завтра.

B-ринок — ринок облігації, ціна якої змінюється за фіксованою ставкою. Найпростіший приклад облігації — банківський рахунок. Нехай сьогодні на рахунку в банку капітал B . Відбувається щорічне нарахування процентів, з процентною ставкою r . Тоді через рік капітал становитиме $B(1 + r)$, через два роки $B(1 + r)^2$, через n років $B(1 + r)^n$.

Може бути, що проценти нараховуються частіше, ніж один раз на

рік. Тоді капітал після k років становитиме

$$T_k^{(m)} = B \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mk},$$

де m — кількість періодів нарахування впродовж одного року. Якщо відбувається неперервне дисконтування (нарахування процентів), капітал після k років буде дорівнювати

$$T_k = \lim_{m \rightarrow \infty} T_k^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} B \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mk} = e^{rk}.$$

AB-ринок — ринок з двома активами: акцією і банківським рахунком. Динаміка зміни банківського рахунку відбувається за законом $B_{k+1} = B_k(r + 1)$. Динаміка ціни акції має вигляд $A_{k+1} = A_k(1 + p)$, де p може набувати двох значень m і n (взагалі кажучи, ці два значення не є однаково можливими; надалі для спрощення будемо вважати "шанси" для p однаковими), будемо припускати, що $-1 < n < r < m$. При зроблених припущеннях модель *AB*-ринку називається моделлю Кокса-Росса-Рубінштейна. Звичайно, на реальному фінансовому ринку є велике розмаїття акцій і облігацій. Модель *AB*-ринку з двома активами і двома нерівноможливими цінами акцій непогано відображає принциповий стан реального ринку цінних паперів і допомагає розуміти його основні проблеми.

Задача гравця на ринку цінних паперів полягає в тому, щоб оптимально розміщувати свій капітал у цінні папери — активи ринку, прагнучи збільшити прибуток і мінімізувати ризик операції. Розподіл гравцем капіталу в активи ринку називають інвестиційним портфелем гравця.

Приклад 1. Розглянемо модель *AB*-ринку в момент часу, коли вартість акції становить 100 доларів. Гравець має капітал 1000 доларів і розподіляє його таким чином $1000 = 400 + 6 \times 100 = x + 100y$, поклавши на банківський рахунок 400 доларів і купивши 6 акцій. Інвестиційний портфель $(x, y) = (400, 6)$. Особливо привабливі такі стратегії управління портфелем, при яких прибуток може бути отриманий при нульових вкладеннях капіталу.

Приклад 2. Розглянемо модель *A*-ринку з одним активом — акцією. Нехай сьогодні акція коштує 100 доларів. Гравець купує опціон на купівлю трьох акцій завтра по ціні 100 доларів. Ціна опціону — це

премія C продавцеві, котру гравець виплачує в день придбання опціону. Це той капітал, яким оперує продавець, обслуговуючи опціон. Прогноз на завтра ціни акції 110:95. Якщо завтра ціна акції становитиме 110 доларів, то гравець пред'являє опціон на погашення, купує 3 акції по 100 доларів, негайно продає їх по 110 доларів. Його доход в цьому випадку становитиме $D = 3(110 - 100) = 30$ доларів, а прибуток $P = 30 - C$. Якщо ж завтра акція буде коштувати 95 доларів, то він не пред'являє опціон до погашення. Доход в цьому випадку дорівнює $D = 0$, а його прибуток від'ємний $P = 0 - C = -C$. Середній прибуток дорівнює

$$\frac{1}{2}(30 - C) + \frac{1}{2}(-C) = 15 - C.$$

Середній доход $d = 15$ доларів, середній прибуток $p = 15 - C$ доларів. Якщо ціна опціону $C > 30$, то він збитковий. Якщо $30 > C > 15$, то можна отримати прибуток у першому випадку, але в середньому опціон збитковий. Чим менша ціна опціону, тим вища для гравця прибутковість.

Мінімальна премія C продавцеві, при якій він може обслуговувати опціон, не залучаючи додатковий капітал, називається *справедливою ціною опціону*. Якою ж повинна бути справедлива ціна опціону в прикладі, який ми розглядаємо?

Нехай продавець, отримавши премію C , розподілив її таким чином: $C = x + 100y$ (x — рахунок в банку, y — кількість акцій). Завтра стане відомою ціна акції, продавець має новий капітал.

Ціна акції	Капітал
100	$C = x + 100y$
110	$x + 110y = C + 10y$
95	$x + 95y = C - 5y$

Продавець виконає опціон, якщо зуміє виплатити доход покупцеві, не ризикуючи додатковим капіталом. Для цього повинні виконуватись нерівності

$$C + 10y \geq 30,$$

$$C - 5y \geq 0,$$

$$C \geq 0, y \geq 0.$$

Неважко переконатися, що мінімальне значення C досягається при $y = 2$. Таким чином, справедлива ціна опціону $C = 10$. Стратегія продавця така: отримавши від покупця 10 доларів, бере в борг (або вкладає свої) 190 доларів і купує дві акції по 100 доларів. Якщо завтра ціна акції стане 110 доларів, то продавець опціону, реалізувавши 2 акції має дохід 220 доларів, цього досить, щоб повернути борг 190 доларів і виплатити дохід 30 доларів покупцеві. Якщо ж акція буде коштувати 95 доларів, то після продажу двох акцій у продавця буде 190 доларів на повернення боргу. Середній прибуток покупця 5 доларів, а продавця 0 — він не ризикував.

Інвестиційна ціна. Розглянемо модель AB -ринку з двома активами — банківським рахунком та акцією. Збережемо всі попередні умови і позначення. Ціна акції сьогодні a . Припустимо, що учасники ринку чекають виплати завтра (погашення опціону чи виконання умов контракту). Нехай M і N — суми, які він повинен виплатити в залежності від нової ціни акції $a(1+m)$ або $a(1+n)$ відповідно. У таких випадках говорять, що гравцеві пред'явлене *платіжне доручення*. Мінімальний капітал C , котрий гарантує виконання платіжного доручення (отримання завтра капіталу M або N в залежності від нової ціни акції відповідно) називається *інвестиційною ціною проекту*. Справедлива ціна опціону — це його інвестиційна ціна.

Нехай гравець розподілив сьогодні капітал

$$C = x + ay.$$

Тоді завтра його капітал буде

$$x(1+r) + ay(1+m) = C(1+r) + ay(m-r) = x(r-m) + C(1+m) = M$$

або

$$x(1+r) + ay(1+n) = C(1+r) + ay(n-r) = x(r-n) + C(1+n) = N.$$

З цих рівностей знаходимо

$$C = \frac{Mz + N(z-1)}{1+r}, \quad y = \frac{M-n}{a(m-n)}, \quad x = C - ya = \frac{Mq + N(1-q)}{1+r},$$

$$\text{де } z = \frac{r-n}{m-n}, \quad q = \frac{n+1}{n-m}.$$

Таким чином портфель (x, y) забезпечує стратегію, яка гарантує отримання необхідного капіталу завтра, тобто виконання платіжного доручення. Знаходження таких стратегій (їх називають *хеджами*) — одна з найважливіших задач фінансової інженерії³³.

³³ Для більш детального знайомства з фінансовою інженерією можна рекомендувати книги: Маршалл Дж., Бансал В.К. Финансовая инженерия М.: ИНФРА-М, 1998. Галиц Л. Финансовая инженерия. Методы и способы управления финансовыми рисками М.: ТВП, 1998.

Література

1. *І.І. Єжов, А.В. Скороход, М.Й. Ядренко*, Елементи комбінаторики, К., "Вища школа", 1972. (Є російський переклад: *И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко*, Элементы комбинаторики, М., "Наука", 1977.)
2. *В.Н. Сачков*, Введение в комбинаторные методы дискретной математики, М., "Наука", 1982.
3. *Р. Грехем, Д. Кнут, О. Паташник*, Конкретная математика. Основание информатики, М., "Мир", 1998.
4. *Р. Уилсон*, Введение в теорию графов, М., "Мир", 1977.
5. *О. Оре*, Графы и их применение, М., "Мир", 1965.
6. *А.Я. Оленко, М.Й. Ядренко*, Дискретна математика, Видавничий центр Київського університету, 1997.
7. *С.К. Ландо*, Лекции о производящих функциях, М., МЦ НМО, 2002.

Предметний покажчик

- Акція 235
Антирізницький оператор 140
А-ринок 236
АВ-ринок 237
Бінарне відношення 71
Біном Ньютона 30
Біноміальна композиція
Булеан 21
Варант 235
Вершина
 - графа 199
 - інцидентна 200
 - кінцева 201
Відношення 71
 - антисиметричне 73
 - бінарне 71
 - еквівалентності 73
 - рефлексивне 72
 - симетричне 72
 - транзитивне 73
Відображення 67
 - бієктивне 69
 - ін'єктивне 69
 - сюр'єктивне 68
Гамільтонів ланцюг 215
Гамільтонів цикл 215
Генератриса 95
 - числової послідовності 95
 - експоненційна 105
Гіперболічний
 - синус 171
 - косинус 171
 - котангенс 172
 - тангенс 172
Граф 199
 - гамільтонів 215
 - зв'язний 202
 - напівгамільтонів 215
 - напівойлерів 209
 - ойлерів 209
 - орієнтований 206
 - повний 200
 - порожній 200
Група 189
 - абелева 189
 - комутативна 189
 - підстановок 194
 - симетрична
Дзета-функція Рімана 87
Декартів добуток 14
Дерево 218
Задача
 - про бродячого торговця 216
 - про комівояжера 216
 - про одруження 232
 - про планування виробництва 229
 - про призначення на посади 232
 - про сполучення міст 227
 - Штейнера 229
Золотий переріз 119

- Індикатор множини 21
- Інвестиційний портфель 237
- Інвестиційна ціна 239
- Класи еквівалентності 74
- Комбінації з повтореннями 43
- Компоненти зв'язності 203
- Код Прюфера 222
- Кратні суми 76
- Ланцюг 202
 - замкнений 209
 - ойлерів 209
- Лема про рукостискання 201
- Лівий клас суміжності 191
- Ліс 218
- Матриця
 - інцидентності 202
 - суміжності 202
- Метод
 - включення і виключення 53
 - траєкторій 132
- Множина
 - впорядкована 27
 - порожня 7
 - універсальна 7
- Многочлени
 - Апеля 163
 - Бернуллі 166
- Модель Кокса-Росса-Рубінштейна 237
- Нерівність Чебишева 81
- Облігація 235
- Об'єднання множин 6
- Опціон 235
- американський 235
- європейський 235
- Перестановка 27
- Перестановка з повтореннями 43
- Переріз множин 6
- Перетворення Абеля 143
- Підгрупа 191
- Підграф 203
- Підстановка 188
- Поліноміальна теорема 51
- Порожня множина 7
- Порядок групи 191
- Правило
 - винесення 33
 - множення 11
- Пряма сума графів 203
- Ребро графа 199
- Різниця множин 7
- Різницевий оператор 136
- Розміщення 27
- Розріз графа 232
- Ряд
 - біноміальний 91
 - гармонічний 85
 - степеневий 88
- Співвідношення
 - Вандермонда 93
 - Нерлунда 93
- Степінь вершини 217
- Суміжні класи 191
- Таблиця Келі 189
- Теорема
 - Дірака Г. 218

- Келі 221
- Лагранжа 193
- Оре О. 217
- Ферма 37
- Траєкторія Каталана 126
- Трикутник Паскаля 32
- Універсальна множина 7
- Фінансова математика 227
- Фінансова інженерія 227
- Формула
 - Біне 113
 - Добінського 159
 - Стірлінга 182
 - Ойлера 172
 - Ойлера-Маклорена 176
- Функція
 - Мебіуса 63
 - мультиплікативна 61
 - Ойлера 60
- Хедж 239
- Цикл
 - ойлерів 209
 - орієнтований 214
 - простий 202
- Цикли підстановок 194
- Цикловий клас 196
- Числа
 - Бела 159
 - Бернуллі 166
 - Каталана 126
 - Моргана 139
 - Стірлінга першого роду 150
 - Стірлінга другого роду 152
 - Фібоначчі 109
- Шабля Магомета 213

Зміст

	Передмова	3
Розділ 1.	Множини та операції з ними	5
Розділ 2.	Основний принцип комбінаторики. Правило множення	11
Розділ 3.	Основи комбінаторики	19
Розділ 4.	Біном Ньютона та біноміальні коефіцієнти . .	30
Розділ 5.	Перестановки та комбінації з повтореннями .	43
Розділ 6.	Метод включення і виключення	53
Розділ 7.	Комбінаторика відображень та бінарних від- ношень	67
Розділ 8.	Формули обертання для біноміальних коефі- цієнтів	76
Розділ 9.	Числові ряди, степеневі ряди, біноміальний ряд	83
Розділ 10.	Метод генератрис в комбінаториці	95
Розділ 11.	Числа Фібоначчі	109
Розділ 12.	Числа Каталана	125
Розділ 13.	Різницевий оператор	136
Розділ 14.	Числа Стірлінга першого та другого роду . .	150
Розділ 15.	Числа Бернуллі, формула Ойлера-Маклорена	163
Розділ 16.	Комбінаторика в теорії груп підстановок . . .	188
Розділ 17.	Теорія графів	199
Розділ 18.	Застосування дискретної математики в еко- номіці, фінансах, організації виробництва . .	226
	Література	241