І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ
З ТЕОРЕТИЧНОЮ ПІДТРИМКОЮ

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З ТЕОРЕТИЧНОЮ ПІДТРИМКОЮ

Вінниця
ВНТУ
2012

УДК 378.147
ББК 74.202.4:74.58
Х76

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 8 від 5.04.2012 р.).

Рецензенти:

О. В. Мороз, доктор економічних наук, професор

В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор

В. І. Риндюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Хом'юк, І.В.

Х76 Дослідження операцій. Збірник тестових завдань з теоретичною підтримкою : навчальний посібник / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2012. –104 с.

На сторінках посібника розглядається проблема використання математичного моделювання як засобу прийняття оптимальних рішень в реальних задачах. У навчальному посібнику на системній основі наводиться теоретичний мінімум з базових тем курсу «Дослідження операцій» та основні алгоритми розв'язування відповідних практичних задач. Наведені тестові завдання, 5 варіантів тестів по 40 завдань в кожному та запитання для самоперевірки.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 378.147
ББК 74.202.4:74.58

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасні умови виробництва продукції в різних галузях на рівні окремих підприємств, а також на вищому макроекономічному рівні супроводжується наростаючими інформаційними течіями, які надходять до економічних й управлінських органів. Різко зростає кількість операцій щодо переробки інформації, необхідної для пошуку найкращих (оптимальних) варіантів розвитку виробництва й прийняття рішень.

Пошук найкращого (оптимального) плану (варіанта) простим перебором і порівнянням всіх можливих планів стає вкрай непосильною задачею, при цьому не враховується той факт, що на складання одного варіанта плану також витрачається дуже багато часу. Для того щоб серед багатьох можливих варіантів вибрати найкращий, необхідно знати, до яких наслідків приведе кожен з них. Так виникла потреба впровадження математичних методів в економічні розрахунки. Для аналізу економічних завдань і кількісного обґрунтування можливих рішень застосовують підходи та методи теорії дослідження операцій.

Дослідження операцій – це наука про підготовку та прийняття управлінських рішень. Математичні аспекти задач, пов'язаних з оптимальним плануванням виробництва та прийняттям найкращих (оптимальних) рішень в умовах обмежених можливостей, вивчає математичне програмування. Як центральна складова теорії дослідження операцій, математичне програмування формулює оптимізаційні задачі та розробляє методи і алгоритми їх розв'язання. Теорія дослідження операцій загалом — це науковий підхід до розв'язання задач організаційного керування. Оволодіння теорією дослідження операцій дасть змогу визначати найкращі варіанти розв'язання типових економічних задач, аналізувати альтернативні варіанти, обґрунтовано приймати управлінські рішення на різних економічних рівнях. Дослідження операцій — фундаментальна дисципліна, яка знаходиться на межі математики, економіки, системного аналізу. Постановка усіх задач має економічний зміст, їх вирішення потребує системного підходу і базується на загальних методиках розв'язання екстремальних задач, що вивчаються в курсі математичного програмування.

В останнє десятиліття триває активний пошук нових атестаційних технологій: випробовуються і впроваджуються рейтингові моделі різних рівнів, комп'ютерні технології, введено зовнішнє незалежне оцінювання.

Розвиток нових технологій приводить до необхідності адаптації студентів до нових вимог: зміни термінів, форми і методики оцінювання якості знань; збільшення кількості типів екзаменаційних завдань. Все це насамперед потребує особливої форми узагальнюючого повторення.

У посібнику наведено основні опорні факти з розділів, що входять до програми дисципліни «Вища математика. Дослідження операцій»: двоїстий симплекс-метод, цілочисельне, дробово-лінійне та нелінійне програмування, задачі теорії ігор та метод множників Лагранжа. Наводяться приклади тестових завдань та приклади розв'язування типових задач з відповідних тем.

У запропонованих у посібнику тестах поряд із простими завданнями підібрано також такі, що перевіряють логіку мислення й уміння орієнтуватися в нестандартних ситуаціях. Певна кількість завдань передбачає вміння студентів стандартно використовувати програмовий матеріал – за відомими алгоритмами, зразками. Інші завдання розраховані на використання програмованого матеріалу в змінених та ускладнених ситуаціях. І нарешті є тестові завдання, які передбачають перевірку основних теоретичних положень, теорем, означень, властивостей.

Даний навчальний посібник, є продовженням «Математичного програмування. Частина 1, 2», які вивчаються студентами технічних вищих навчальних закладів на I, II та III курсах навчання. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим довідником з дослідження операцій. Ці відомості підтверджуються прикладами. Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 5 варіантів тестів по 40 завдань в кожному з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Якщо в групі більше студентів і викладач бажає видати всім різні варіанти, це можна зробити, використовуючи літери прізвища, які відповідають алфавіту, поділеному на частини з номерами від 1 до 30 або скорелювати набір випадкових чисел. Наприклад, Іванов – 2, 8, 6, 5, 1, 4, 3; Петров – 30, 1, 8, 6, 25, 4, 17 і т. д.

Навчальний посібник можна використовувати як для підготовки до колоквіумів, практичних занять з поданих тем, так і для типових розрахунків, контрольних домашніх робіт для студентів заочної форми навчання.

1 ТЕОРЕТИЧНИЙ ДОВІДНИК З ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1.1 Загальні відомості про дослідження операцій. Історія розвитку методів дослідження операцій

Під *операцією* розуміють будь-яку діяльність людини, що спрямована на досягнення якоїсь мети (у виробництві, у військовій операції, у перевезенні вантажів, у плануванні робіт, у прийнятті політичного рішення та ін.).

Припустимо, що людина приймає рішення (часто дуже важливе, бо від нього залежить її доля, доля її підприємства, доля військової операції, напрям розвитку держави). Виникає запитання: наскільки це рішення є правильним? Виникає потреба об'єктивної ***кількісної*** оцінки прийнятого рішення.

Дослідження психологів показали, що людина почуває себе невпевнено, якщо при прийнятті рішення потрібно врахувати понад 10 змінних або суперечливих факторів. Але в реальних умовах виробництва на процеси впливають сотні (а іноді й тисячі) факторів. Тому науковий підхід до кількісної оцінки прийнятого рішення за допомогою методів дослідження операцій є дуже важливим.

Дослідження операцій – це теорія використання наукових кількісних методів для прийняття найкращого рішення у різних галузях діяльності людини. Ця наука дає об'єктивні, кількісні рекомендації з управління цілеспрямованими діями людини.

Як самостійний науковий напрям дослідження операцій оформилося на початку 40-х років минулого століття. Перші публікації з досліджень операцій з'явилися у 1939-1940 рр. А на період Другої світової війни США використовували науковців, які давали поради військовим щодо прийняття рішень при аналізі та дослідженні військових операцій. Звідси і виникла назва дисципліни.

Пізніше принципи і методи дослідження операцій (ДО) стали використовуватися у цивільній сфері: у промисловості, для управління фінансами, у сільському господарстві та ін.

Метою ДО є *наукове кількісне обґрунтування рішень*, які приймаються щодо управління в господарських, військових та державних справах. У деяких випадках (наприклад, у багатьох комбінаторних задачах) отримати оптимальне рішення неможливо, і тому приймається субоптимальне (не найгірше) рішення.

Виникає питання філософського характеру: наскільки впливають методи ДО на наше життя? Відповідь на це дає скорочений перелік питань, які вирішуються за допомогою методів ДО: плани у політиці (у Канаді та США створені так би мовити «електронні уряди»), плани розвитку народного господарства (тобто ми живемо за планами, визначеними ЕОМ), розвиток військових справ та військових операцій, фінансові справи. На перший погляд, ЕОМ у цих випадках лише «дає поради», а «рішення приймає людина». Але певною мірою це самообман, бо перевірити розв'язок машини людина може, знову ж таки, лише за допомогою іншої машини. І виходить, що доля людства залежить від розв'язку машини, затвердженого людиною.

Предметом дослідження операцій є: військові операції; рішення у політиці та виробництві, сільському господарстві, фінансових справах і т. п. Ми будемо розглядати виробничі процеси у господарській діяльності людини.

Типовими класами задач дослідження операцій є:

Розподіл ресурсів. Ресурси – це гроші, матеріали, людська праця і т. п. Ресурси завжди обмежені і в різних виробах забезпечують різний прибуток. Наприклад, ми маємо матерію, з якої можна виготовити або чоловічий, або жіночий, або дитячий одяг за різними цінами та прибутками. Виникає проблема розподілу людей, матерії та інших ресурсів між виробами з метою отримання найбільшого прибутку.

Управління запасами. Із збільшенням запасів створюються умови для більш ритмічної роботи виробництва. Запас – це гарантія можливості виконання будь-якого замовлення. Якщо запасів не вистачає, то можливі значні збитки за рахунок невиконання зобов'язань. Але разом із збільшенням запасів збільшується змертвілий капітал і витрати на зберігання. Недаремно існують підприємства, які зовсім не мають складів: їх замінюють майданчики для розвантаження отриманої та відвантаження виготовленої продукції. Виникає проблема управління запасами при найменших витратах.

Задачі мережевого планування і управління розглядають співвідношення між термінами закінчення великого комплексу операцій і моментами початку всіх операцій комплексу. Потрібно знайти мінімальні тривалості комплексу операцій, оптимальні співвідношення вартості і термінів виконання.

Мережеві задачі полягають у оптимізації процесу обслуговування на мережах чи самої структури мережі.

Задачі планування і розміщення пов'язані з визначенням оптимального числа і місця розміщення нових об'єктів, з урахуванням їх взаємодії з наявними об'єктами і між собою.

Задачі дослідження конфліктних ситуацій полягають у виборі оптимальних стратегій поведінки учасників конфлікту.

Задачі масового обслуговування: розглядають питання створення та функціонування черг (на заводському конвеєрі; у залізничній касі; для літаків над аеропортом, що йдуть на посадку; клієнтів в ательє побутового обслуговування; абонентів міської телефонної станції тощо). Потрібно розв'язати проблеми якісного обслуговування при мінімальних витратах на обладнання.

Задачі складання розкладів (календарного планування) полягають у визначенні оптимальної черговості виконання операцій на різних видах устаткування чи при певному способі надання послуг.

Ремонт та заміна устаткування. Застаріле обладнання потребує витрат на ремонт і має знижену продуктивність. Потрібні розрахунки для прийняття рішення щодо термінів ремонту та заміни обладнання, які забезпечують найбільший прибуток.

Задача рюкзака: рюкзак (вантажна машина, вагон, судно, літак) має обмежену вантажопідйомність. Потрібно так заповнити рюкзак, щоб отримати максимальний прибуток.

Задачі комівояжера, створення сумішей, наймання / звільнення робітників, мережевого планування робіт, порядку обробки кількох різних деталей, комбіновані задачі та ін. – усім цим займається наука "*Математичні методи дослідження операцій*".

1.2 Основні поняття дослідження операцій

Як і кожна сформована наука, дослідження операцій має свою власну систему понять. Розглянемо основні.

При цьому під *операцією* розуміється будь-який керований захід, спрямований на досягнення мети. Результат операції залежить від способу її проведення чи організації, інакше – від вибору деяких параметрів.

Будь-який вибір набору параметрів *називається рішенням.* ***Оптимальними*** вважаються ті рішення, що в обговореному заздалегідь сенсі мають переваги над іншими. Виходячи з мети цієї теорії, можна сказати, що основним завданням дослідження операцій є знаходження оптимальних рішень у рамках обраної моделі.

*Модель **операції*** – це якомога точніший опис операції за допомогою математичного апарата.

Ефективність операції – це ступінь її пристосованості до виконання поставленої мети, що кількісно виражається у вигляді цільової функції. Вибір критерію ефективності визначає практичну цінність дослідження.

У процесі формування як стратегічних, так і тактичних рішень керівник змушений брати до уваги численні, нерідко взаємосуперечливі вимоги і опиратися на складні критерії досягнення кінцевих цілей. У цих умовах для досягнення високого рівня управління йому далеко не завжди вистачає професійних знань, власного досвіду, інтуїції й організаторських здібностей у їх традиційному розумінні. Потрібні науково обґрунтовані й точні методи прийняття рішень.

Однак зауважимо, що сам реальний процес ухвалення рішення виходить за рамки науки дослідження операцій і належить до компетенції особи (частіше групи осіб), що приймає рішення (ОПР). Неодмінна присутність людини не скасовується навіть у разі повної автоматизації системи управління.

Основною особливістю дослідження операцій є побудова математичних моделей і використання для їх аналізу математичного апарата. Це насамперед означає, що хоча б деякі дані, які фігурують у формулюванні задачі, мають мати кількісне вираження. Міркування якісного характеру є своєрідним тлом для використовуваної моделі і враховуються додатково.

Основні етапи дослідження операцій:

1. Отримання змісту задачі у вигляді текстового (технічного) завдання. Збір даних, їх аналіз. Формулювання задачі з точки зору замовника. Консультації із замовником. Виявлення факторів, які впливають на процес. Уточнення мети (варіантів мети).

2. Формалізація задачі у вигляді математичної моделі, яка складається з функції мети (показника якості або ефективності процесу) $F = F(X, У) = \max (\min)$ при обмеженнях $g_i(X,Y) \leq b_i$, де X – вектор керованих змінних (ними розпоряджається керуюча сторона); У – вектор некерованих аргументів (некеровані, невизначені, випадкові фактори); $gi(X, У)$ – функція споживання *і-го* ресурсу; b_i – величина *і-го* ресурсу (вага ресурсу, сума грошей, фонд машинного часу верстата та ін.).

За допомогою обмежень знаходять область припустимих розв'язків, а функція мети дозволяє визначити оптимальну точку в цій області. Отримати оптимальний розв'язок означає знайти такі величини *X*, при яких функція мети F досягає оптимуму при одночасному дотриманні нерівностей.

3. Розв'язання задачі виконується такими найбільш розповсюдженими методами:

• лінійного програмування, якщо $F = F(X, У)$ та $g_i(X, У)$ – лінійні функції відносно *X, У*;

• нелінійного програмування, якщо $F = F(X, У)$ та $g_i(X, У)$ – нелінійні функції відносно *X, У*;

• динамічного програмування, якщо $F = F(X, У)$ є адитивною або мультиплікативною функцією від змінних *X, У*;

• дискретного програмування, якщо на змінні – *X, У* накласти умови дискретності (наприклад, цілочисельності);

• стохастичного програмування, якщо *У* – випадкова величина, а замість функції мети $F = F (X, У)$ розглядають її математичне очікування.

4. Перевірка та корегування моделі. Перевірка виконується порівнянням поведінки моделі з фактичною поведінкою.

5. Реалізація на практиці.

Отримане на основі дослідження операцій рішення має свої особливості:

1. ***Наукове кількісне обґрунтування*** рекомендованого варіанта рішення із визначенням: найкращого способу дії повноти досягнення мети і ціни досягнутої мети, ступеня ризику.

2. ***Системний підхід:*** будь-яка задача розглядається з точки зору її впливу на критерії функціонування всієї системи.

3. ***Дорогий фізичний експеримент*** замінюється відносно дешевим математичним моделюванням, яке дає відповідь на багато запитань і дозволяє прийняти оптимальне рішення. При цьому використовується ЕОМ.

4. ***Рекомендуючий характер*** висновків із дослідження операцій: рішення приймає людина, яка повинна нести повну відповідальність за наслідки цих рішень.

Методи ДО вміщують цілий арсенал математичним засобів:

• теорію лінійного, нелінійного, дискретного (цілочисленого, бінарного, неподільного), динамічного, стохастичного програмування;

• теорію ігор;

• теорію систем масового обслуговування;

• прийняття рішень в умовах нечіткої інформації;

• теорію експертних систем;

• теорію ефективності та ін.

У принципі, будь-який розрахунок можна розглядати як дослідження операцій, бо він дозволяє прийняти обґрунтоване оптимальне рішення у багатофакторній області. Але традиційно дослідження операцій стосується більш вузького кола питань: організації взаємодій та оптимального функціонування складних систем з множиною рішень і при умовах дотримання вказаної форми математичної моделі.

1.3 Двоїстий симплекс-метод

Двоїстий симплекс-метод, як і симплекс-метод, використовується при знаходженні розв'язку задачі лінійного програмування, записаної в формі основної задачі, для якої серед векторів P_j, складених із коефіцієнтів при невідомих в системі рівнянь, є m одиничних. Разом з тим двоїстий симплекс-метод можна використовувати при розв'язуванні задачі лінійного програмування, вільні члени системи рівнянь якої можуть бути довільними числами (при розв'язуванні задачі симплекс-методом ці числа передбачалися невід'ємними).

Розглянемо задачу лінійного програмування, попередньо припустивши, що одиничними є вектори $P_1, P_2, ..., P_m$, причому задача полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.1}$$

при умовах

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_mP_m + ... + x_nP_n = P_0 \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}) \tag{1.3}$$

де $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, ...; $P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$; ...; $P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}$; $P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$

і серед чисел b_i $(i = \overline{1,m})$ є від'ємні.

В даному випадку $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (2). Однак цей розв'язок не є планом задачі (1.1)–(1.3), оскільки серед його компонент є від'ємні числа.

Означення. Розв'язок $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$ системи лінійних рівнянь (1.2), яка визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, називається псевдопланом задачі (1.1)–(1.3), якщо $\Delta_j \geq 0$ для довільного j $(j = \overline{1,n})$ (Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, оцінки).

Теорема 1. Якщо в псевдоплані $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$, що визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, є хоча б одне від'ємне число $b_i < 0$, таке, що $a_{ij} \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$, то задача (1.1) – (1.3) взагалі не має планів.

Теорема 2. Якщо в псевдоплані $X=(b_1;b_2;...;b_m;0;...;0)$, який визначається базисом $P_1,P_2,...,P_m$, є від'ємні числа $b_i<0$ такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij}<0$, то можна перейти до нового псевдоплану, при якому значення цільової функції задачі (1.1) – (1.3) не зменшиться.

Для випадку, коли в індексному рядку початкової симплекс таблиці немає від'ємних оцінок, але при цьому деякі з вільних членів системи є від'ємними був розроблений метод знаходження опорного розв'язку задач лінійного програмування, який і називається двоїстим симплекс-методом.

Таким чином, знаходження розв'язку задачі (1.1) – (1.3) двоїстим симплекс-методом включає такі етапи:

1. Знаходять псевдоплан задачі.
2. Перевіряють цей псевдоплан на оптимальність. Якщо псевдоплан оптимальний, то знайдено розв'язок задачі. В іншому випадку або встановлюють, що задача розв'язків не має, або переходять до нового псевдоплану.
3. У стовпці вільних членів вибирають від'ємне число, найбільше за абсолютною величиною. Рядок, який відповідає цьому числу приймають за розв'язний.
4. За розв'язний елемент вибирають від'ємний елемент розв'язного рядка a_{ij} для якого відношення $\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}$ є мінімальним.

1.4 Цілочисельні задачі лінійного програмування

Означення. Екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілочисельні значення, називається задачею цілочисельного програмування.

У математичній моделі задачі цілочисельного програмування як цільова функція, так і функції в системі обмежень можуть бути лінійними, нелінійними і змішаними. Обмежимося випадком, коли цільова функція і система обмежень задачі є лінійними.

Розглянемо задачі цілочисельного програмування, у яких як цільова функція, так і функції в системі обмежень є лінійними. У зв'язку з цим сформулюємо основну задачу лінійного програмування, у якій змінні можуть приймати тільки цілі значення. У загальному випадку цю задачу можна записати так: знайти максимум функції

$$F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{1.4}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=\overline{1,m}), \tag{1.5}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}),\tag{1.6}$$

$$x_j - цілі \quad (j=\overline{1,n}).\tag{1.7}$$

Якщо знайти розв'язок задачі (1.4) – (1.7) симплексним методом, то він може виявитися або цілочисельним, або дробовим (прикладом задачі лінійного програмування, розв'язок якої завжди є цілочисельним, служить транспортна задача).

У загальному ж випадку для визначення оптимального плану задачі (1.4) – (1.7) застосовуються спеціальні методи. В наш час існує декілька таких методів, з яких найбільш відомим є метод Гоморрі, в основі якого лежить описаний вище симплексний метод.

1.5 Метод Гоморрі

Знаходження розв'язку задачі цілочисельного програмування методом Гоморрі починають з визначення симплексним методом оптимального плану задачі (1.4) – (1.6) без врахування цілочисельності змінних. Після того як цей план знайдений, переглядають його компоненти. Якщо серед компонентів немає дробових чисел, то знайдений план є оптимальним планом задачі цілочисельного програмування (1.4) – (1.7). Якщо ж в оптимальному плані задачі (1.4) – (1.6) змінна x_j приймає дробове значення, то до системи рівнянь (1.5) додають нерівність

$$\sum_j f(a_{ij}^*)x_j \geq f(b_i^*)\tag{1.8}$$

і знаходять розв'язок задачі (1.4) – (1.6), (1.8).

У нерівності (1.8) a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких узяті з останньої симплекс-таблиці, а $f(a_{ij}^*)$ і $f(b_i^*)$ – дробові частини чисел (під дробовою частиною деякого числа a розуміється найменше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою). Якщо в оптимальному плані задачі (1.4) – (1.6) дробові значення приймають декілька змінних, то додаткова нерівність (1.8) визначається найбільшою дробовою частиною.

Якщо в знайденому плані задачі 1.4) – (1.6), (1.8) змінні приймають дробові значення, то знову додають одне додаткове обмеження і процес обчислень повторюють. Проводячи кінцеве число ітерацій або одержують оптимальний план задачі цілочисельного програмування (1.4) – (1.7), або встановлюють, що вона не має розв'язку.

Означення. Якщо вимога цілочисельності (1.7) відноситься лише до деяких змінних, то такі задачі називаються **частково цілочисельними**.

Їх розв'язок також знаходять послідовним розв'язуванням задач, кожну з яких отримують з попередньої за допомогою введення додаткового обмеження. У цьому випадку таке обмеження має вигляд

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \geq f(b_i^*) \tag{1.9}$$

де γ_{ij} визначаються з таких співвідношень:

1) для x_j, що можуть приймати не цілі значення,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ при \quad a_{ij}^* \geq 0, \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} \left| a_{ij}^* \right| \quad при \ a_{ij}^* < 0; \end{cases} \tag{1.10}$$

2) для x_j, що можуть приймати тільки цілочисельні значення,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}) \ при \quad f(a_{ij}^*) \leq f(b_i^*), \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} \left[1 - f(a_{ij}^*) \right] \quad при \ f(a_{ij}^*) > f(b_i^*). \end{cases} \tag{1.11}$$

З викладеного вище випливає, що процес визначення оптимального плану задачі цілочисельного програмування методом Гоморрі включає такі основні етапи:

1. Використовуючи симплексний метод, знаходять розв'язок задачі (1.4) – (1.6) без врахування вимоги цілочисельності змінних.

2. Складають додаткове обмеження для змінної, яка в оптимальному плані задачі (1.4) – (1.6) має максимальне дробове значення, а в оптимальному плані задачі (1.4) – (1.7) повинна бути цілим значенням.

3. Використовуючи двоїстий симплекс-метод, знаходять розв'язок задачі, що виходить із задачі (1.4) – (1.6) у результаті приєднання додаткового обмеження.

4. У разі потреби складають ще одне додаткове обмеження і продовжують ітераційний процес до одержання оптимального плану задачі (1.4) – (1.7) чи встановлення, що вона не має розв'язку.

1.6 Метод гілок та меж

В основі комбінаторних методів є перебір можливих варіантів розв'язків поставленої задачі. Кожен з них характеризується певною послідовністю перебору варіантів та правилами виключення, що дають змогу ще в процесі розв'язування задачі виявити неоптимальні варіанти без попередньої їх перевірки, Відносна ефективність різних методів залежить від того, наскільки кожен з них уможливлює скорочення необхідного процесу перебору варіантів у результаті застосування правила виключення,

Розглянемо один із комбінаторних методів, для розв'язування задач цілочисельного програмування ефективнішим за метод Гоморрі є метод гілок і меж. Спочатку, як і в разі методу Гоморрі, симплексним методом розв'язується послаблена (без умов цілочисельності) задача, потім вводиться правило перебору.

Нехай потрібно знайти x_j – цілочислову змінну, значення якої $x_j = x_j'$ в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Очевидно, що в деякому околі даної точки також не існує цілочислових значень, тому відповідний проміжок можна виключити з множини допустимих планів задачі в подальшому розгляді. Таким проміжком є інтервал між найближчими до x_j' цілочисловими значеннями.

Тобто допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей вигляду:

$$x_j \le \left[x_j'\right] \text{ або } x_j \ge \left[x_j'\right] + 1 \qquad (1.12)$$

Дописавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві, не пов'язані між собою, задачі. Тобто, початкову задачу цілочисельного програмування поділимо на дві задачі з урахуванням умов цілочисельності змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими, Це означає, що симплекс-методом розв'язуватимемо дві такі задачі:

Перша задача за умов:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \text{ за умов}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \ (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \ ; \quad j = (\overline{1,n})$$

x_j – цілі числа, $x_j \le \left[x_j'\right]$ де x_j' – дробова компонента розв'язку задачі.

Друга задача:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \text{ за умов:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \quad i = (\overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 ; \quad j = (\overline{1,n})$$

x_j – цілі числа, $x_j \ge \left[x_j'\right] + 1$

Наведені задачі спочатку послаблюємо, тобто розв'язуємо з відкиданням обмежень. Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисельності, то ці плани є розв'язками задачі. Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для дальшого розгалуження вибираємо розв'язок задачі з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки – з меншим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий останній план – оптимальний.

Розв'язування цілочислових задач методом гілок і меж можна значно прискорити. Очевидно, що кожна наступна задача, яку отримують в процесі розв'язування відрізняється від попередньої лише одним обмеженням. Тому за послідовного розв'язування задач немає сенсу розв'язувати їх симплексним методом спочатку. Досить буде почергово приєднати нові обмеження до останньої симплекс-таблиці попередньої задачі та вилучити (в разі необхідності) непотрібні «старі» обмеження.

Геометрично введення додаткових лінійних обмежень в систему обмежень початкової задачі означає проведення гіперплощин (прямих), що розтинають багатогранник (багатокутник) допустимих планів відповідної задачі лінійного програмування у такий спосіб, що уможливлюється включення в план найближчої цілої точки цього багатокутника

Опишемо алгоритм методу гілок та меж.

1.Симплексним методом розв'язують задачу (без вимог цілочисельності змінних).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей розв'язок є оптимальним планом задачі цілочислового програмування.

Якщо цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна, то задача також не має розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирають одну з нецілочислових змінних x_j і визначають її цілу частину $\left[x_j'\right]$. Записують два обмеження, що відтинають нецілочислові розв'язки: $x_j \le \left[x_j'\right]$ та $x_j \ge \left[x_j'\right]+1$

3. Кожну з одержаних нерівностей приєднують до обмежень початкової задачі. В результаті отримують дві нові цілочислові задачі лінійного програмування.

4. У будь-якій послідовності розв'язують обидві задачі. У разі, коли отримано цілочисловий розв'язок хоча б однієї із задач, значення цільової функції цієї задачі зіставляють з початковим значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа е, то процес розв'язування може бути закінчено, У разі, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком початкової зіставляється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочислові розв'язки, то для дальшого гілкування вибирають ту задачу, для якої здобуто краще значення цільової функції і здійснюють перехід до кроку 2.

1.7 Задачі дробово-лінійного програмування

Загальна задача дробово-лінійного програмування полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{F_1}{F_2} \tag{1.13}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{1.14}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{1.15}$$

де c_j, d_j, b_i, a_{ij} – деякі постійні числа, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$ і $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$ в області невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь (1.14). При цьому будемо вважати, що $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$ (така умова не порушить сутності задачі, оскільки в тому випадку, якщо ця величина від'ємна, знак мінус можна віднести до чисельника).

Як і у випадку основної задачі лінійного програмування, своє максимальне значення цільова функція задачі (1.13) – (1.15) приймає в одній із вершин многокутника розв'язків, що визначається системою обмежень (1.14) і (1.15) (при умові, що задача має оптимальний план). Якщо максимальне значення цільова функція (1.13) задачі приймає більше ніж в одній вершині многокутника розв'язків, то вона досягає його також в довільній точці, що є випуклою комбінацією даних вершин.

Розглянемо задачу, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \tag{1.16}$$

при умовах

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{1.17}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{1.18}$$

Будемо вважати, що $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$.

Щоб знайти розв'язок задачі (1.16)–(1.18) спочатку знаходимо многокутник розв'язків, що визначається обмеженнями (1.17) і (1.18). Припускаючи, що цей многокутник не пустий, покладемо значення функції рівним деякому числу h, так що пряма

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} = h, \tag{1.19}$$

яка проходить через початок координат, має спільні точки з многокутником розв'язків. Обертаючи побудовану пряму (1.19) навколо початку координат в напрямку руху годинникової стрілки, або визначають вершину (вершини), в якій (яких) функція (1.16) приймає максимальне значення, або встановлюють необмеженість функції на множині планів задачі.

Процес знаходження розв'язку задачі (1.16)–(1.18) включає такі етапи:

1. У системі обмежень задачі змінюють знаки нерівностей на знаки точних рівностей і будують прямі, що визначаються цими рівностями.
2. Знаходять півплощини, що визначаються кожною із нерівностей обмежень задачі.
3. Знаходять многокутник розв'язків задачі.
4. Будують пряму (1.19), рівняння якої отримують, якщо покласти значення цільової функції (1.16) рівним деякому постійному числу.
5. Визначають точку максимуму або встановлюють, що задача розв'язків не має.
6. Знаходять значення цільової функції в точці максимуму.

Шляхом певної заміни цільову функцію в задачах дробово-лінійного програмування можна звести до лінійного вигляду, в результаті чого ми прийдемо до звичайних задач лінійного програмування.

Нехай задана задача дробово-лінійного програмування

$$F = \frac{b_1x_1 + b_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} \to \max\,(\text{чи}\min) \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2, \end{cases} \tag{1.21}$$

$$x_j \geq 0. \tag{1.22}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0 \tag{1.23}$$

Нехай

$$d_1x_1 + d_2x_2 = \frac{1}{y_2}, \quad x_1 = \frac{y_1}{y_2}.$$

Тоді $d_2x_2 = \frac{1}{y_2} - d_1x_1 = \frac{1}{y_2} - \frac{d_1y_1}{y_2}; \quad x_2 = \frac{1-d_1y_1}{d_2y_2}.$

Враховуючи наведену заміну цільова функція набере вигляду:

$$F = \frac{b_1\frac{y_1}{y_2} + b_2\frac{1-d_1y_1}{d_2y_2}}{\frac{1}{y_2}} = b_1y_1 + \frac{b_2}{d_2}(1-d_1y_1) -$$ цільова функція стає лінійною функцією.

1.8 Задачі теорії ігор і лінійне програмування

Задача теорії ігор полягає у виборі такої лінії поведінки даного гравця, відхилення від якої може лише зменшити його виграш.

Означення 1. Ситуація називається ***конфліктною,*** якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких повністю або частково протилежні.

Означення 2. ***Гра*** — це дійсний чи формальний конфлікт, у якому присутні принаймні два учасники (гравці), кожний з яких прагне до досягнення власних цілей.

Означення 3. Припустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення деякої мети, називаються ***правилами гри.***

Означення 4. Кількісна оцінка результатів гри називається ***платежем.***

Означення 5. Гра називається ***парною,*** якщо в ній беруть участь тільки дві сторони (дві особи).

Означення 6. Парна гра називається ***грою з нульовою сумою,*** якщо сума платежів дорівнює нулю, тобто якщо програш одного гравця дорівнює виграшу другого.

Означення 7. Однозначний опис вибору гравця в кожній з можливих ситуацій, при якій він повинен зробити особистий хід, називається ***стратегією*** гравця.

Означення 8. Стратегія гравця називається ***оптимальною,*** якщо при багатократному повторенні гри вона забезпечує гравцю максимально можливий середній виграш (або, це те саме, що мінімально можливий середній програш).

Нехай є два гравці, один із яких може вибрати i-ту стратегію з m своїх можливих стратегій $(i = \overline{1,m})$, а другий, не знаючи вибору першого, вибирає

j-ту стратегію з n своїх можливих стратегій $j=(\overline{1,n})$. У результаті перший гравець виграє величину a_{ij}, а другий програє цю величину.

З чисел a_{ij} складемо матрицю

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рядки матриці A відповідають стратегіям першого гравця, а стовпці – стратегіям другого. Ці стратегії називаються ***чистими.***

Означення 9. Матриця A називається ***платіжною*** (або ***матрицею гри).***

Означення 10. Гру, що визначається матрицею A, яка має m рядків і n стовпців, називають *кінцевою грою розмірності* $m \times n$.

Означення 11. Число $\alpha = \max\limits_i(\min\limits_j a_{ij})$ називається ***нижньою ціною гри*** або максиміном, а відповідна йому стратегія (рядок) – максимінною.

Означення 12. Число $\beta = \min\limits_j(\max\limits_i a_{ij})$ називається *верхньою ціною гри* або мінімаксом, а відповідна йому стратегія гравця (стовпець) – мінімаксною.

Теорема 1. Нижня ціна гри завжди не перевищує верхньої ціни гри.

Означення 13. Якщо $\alpha = \beta = v$, то число v називається ***ціною гри.***

Означення 14. Гра, для якої $\alpha = \beta$, називається ***грою із сідловою точкою.***

Для гри із сідловою точкою знаходження розв'язку полягає у виборі максимінної і мінімаксної стратегій, що є оптимальними.

Якщо гра, задана матрицею, не має сідлової точки, то для знаходження її розв'язку використовуються змішані стратегії.

Означення 15. Вектор, кожна з компонентів якого показує відносну частоту використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається ***змішаною стратегією*** даного гравця.

З даного означення безпосередньо випливає, що сума компонентів вказаного вектора дорівнює одиниці, а самі компоненти невід'ємні. Зазвичай змішану стратегію першого гравця позначають як вектор $U=(u_1,u_2,\dots,u_m)$, а другого гравця – як вектор $Z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$, де $u_i \ge 0$ $(i=\overline{1,m})$, $z_j \ge 0$,

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1, \sum_{j=1}^{n} z_j = 1 \tag{1.24}$$

Якщо U^* – оптимальна стратегія першого гравця, а Z^* – оптимальна стратегія другого гравця, то число

$$v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* z_j^* \tag{1.25}$$

є ціною гри.

Визначення оптимальних стратегій і ціни гри і складає процес знаходження розв'язку гри.

Теорема 2. Усяка матрична гра з нульовою сумою має розв'язок в змішаних стратегіях.

Теорема 3. Для того щоб число v було ціною гри, а U^* і Z^* – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \geq v \quad (j = \overline{1,n}) \text{ і } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j^* \leq v \quad (i = \overline{1,m}) \tag{1.26}$$

Якщо теорема 2 дає відповідь на запитання про існування розв'язку гри, то наступна теорема дає відповідь на запитання, як знайти цей розв'язок для ігор 2×2, $2 \times n$, $n \times 2$, приклади яких наведені нижче.

Теорема 4. Якщо один із гравців застосовує оптимальну змішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри v незалежно від того, з якими частотами буде застосовувати другий гравець стратегії, що ввійшли в оптимальну (у тому числі і чисті стратегії).

Узагальнюючи викладені вище результати знаходження розв'язку гри 2×2, можна вказати основні етапи знаходження розв'язку гри $2 \times n$ чи $n \times 2$.

1. Будують прямі, що відповідають стратегіям другого (першого) гравця.
2. Визначають нижню (верхню) границю виграшу.
3. Знаходять дві стратегії другого (першого) гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з максимальною (мінімальною) ординатою.
4. Визначають ціну гри й оптимальні стратегії.

1.9 Алгебраїчний метод розв'язування ігор

Нехай матрична гра з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

не має сідлової точки. Тоді змішані стратегії гравців $U = (u_1; u_2)$, $Z = (z_1; z_2)$ та ціну гри v можна обчислити за формулами:

$$u_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \quad u_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}};$$

$$z_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \quad z_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \qquad (1.27)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

1.10 Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування

Розглянемо гру $m \times n$, що визначається матрицею

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Відповідно до теореми 3, для оптимальної стратегії першого гравця $U^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_m^*)$ і ціни гри v виконується нерівність $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \ge v \; (j = \overline{1,n})$.

Припустимо для визначеності, що $v > 0$. Це завжди може бути досягнуто завдяки тому, що шляхом додавання до всіх елементів матриці A одного і того сталого числа С не приводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки лише збільшує ціну гри на С.

Розділивши тепер обидві частини останньої нерівності на v, одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{u_i^*}{v} \ge 1 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Покладемо $u_i^* / v = y_i^*$, тоді

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* \ge 1 \quad (j = \overline{1,n}); \quad y_i^* \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}).$$

Використовуючи введене позначення, перепишемо умову $\sum_{i=1}^{m} u_i^* = 1$ у вигляді $\sum_{i=1}^{m} y_i^* = 1/v$.

Оскільки перший гравець прагне одержати максимальний виграш, то він повинний забезпечити мінімум величині $1/v$. З врахуванням цього,, визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до знаходження мінімального значення функції $F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$ при умовах $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \; (j = \overline{1,n}); \; y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$.

Аналогічні міркування показують, що визначення оптимальної стратегії другого гравця зводиться до знаходження максимального значення функції $F = \sum_{j=1}^{n} x_j$ при умовах $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \; (i = \overline{1,m}); \; x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$. Тут $x_j = z_j / v$.

Таким чином, щоб знайти розв'язок даної гри, що визначається матрицею A, потрібно скласти таку пару двоїстих задач і знайти їхній розв'язок.

Пряма задача: знайти максимальне значення функції $F = \sum_{j=1}^{n} x_j$ при умовах $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \; (i = \overline{1,m}); \; x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$.

Двоїста задача: знайти мінімальне значення функції $F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$ при умовах $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \; (j = \overline{1,n}); \; y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$.

Використовуючи розв'язок пари двоїстих задач, одержуємо формули для визначення стратегій і ціни гри:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = v y_i^*; \quad z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = v x_j^*;$$

$$v = \frac{1}{\sum^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum^{m} y_i^*}; \quad (i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}).$$

Отже, процес знаходження розв'язку гри з використанням методів лінійного програмування включає такі етапи:

1. Складають пари двоїстих задач лінійного програмування, еквівалентних даній матричній грі.

2. Визначають оптимальні плани пари двоїстих задач.

3. Використовуючи співвідношення між планами пари двоїстих задач і оптимальними стратегіями і ціною гри, знаходять розв'язок гри.

Як було показано, що для всякої матричної гри можна записати симетричну пару двоїстих задач. Справедливо і протилежне: для всякої симетричної пари двоїстих задач можна записати матричну гру.

Нехай задана симетрична пара двоїстих задач:

пряма задача: $F = CX$, $AX \leq B$, $X \geq 0$;

двоїста задача: $F^* = BY$, $YA^T \ge C, Y \ge 0$. Тоді цій симетричній парі двоїстих задач можна поставити у відповідність гру, що визначається матрицею

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{pmatrix}$$

де індекс Т означає операцію транспонування.

Слід зазначити, що якщо кожна матрична гра має оптимальні стратегії, то не всяка задача лінійного програмування має розв'язок.

1.11 Економічна та математична постановка задачі нелінійного програмування

Досить детально розглянута в розділах, присвячених лінійному програмуванню, задача пошуку оптимальних обсягів виробництва ґрунтується на допущеннях про лінійність зв'язку між витратами ресурсів і обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою та попитом тощо. Але такі зв'язки насправді є нелінійними, тому точніші математичні моделі доцільно формулювати в термінах нелінійного програмування.

Нехай для деякої виробничої системи необхідно визначити план випуску продукції за умови найкращого способу використання її ресурсів. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, норми витрат кожного ресурсу на одиницю продукції та ціни реалізації одиниці виготовленої продукції. Критерії оптимальності можуть бути різними, наприклад, максимізація виручки від реалізації продукції. Така умова подається лінійною залежністю загальної виручки від обсягів проданого товару та цін на одиницю продукції.

Однак загальновідомим є факт, що за умов ринкової конкуренції питання реалізації продукції є досить складним. Обсяг збуту продукції визначається передусім її ціною, отже, як цільову функцію доцільно брати максимізацію не всієї виготовленої, а лише реалізованої продукції. Необхідно визначати також і оптимальний рівень ціни на одиницю продукції, за якої обсяг збуту був би максимальним. Для цього її потрібно ввести в задачу як невідому величину, а обмеження задачі мають враховувати зв'язки між ціною, рекламою та обсягами збуту продукції. Цільова функція в такому разі буде виражена добутком двох невідомих величин: оптимальної ціни одиниці продукції на оптимальний обсяг відповідного виду продукції, тобто буде нелінійною. Отже, маємо задачу нелінійного програмування.

Також добре відома транспортна задача стає нелінійною, якщо вартість перевезення одиниці товару залежить від загального обсягу перевезеного за маршрутом товару. Тобто, коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, що в лінійній моделі були сталими величинами, залежатимуть від значень невідомих (отже, самі стають невідомими), що знову приводить до нелінійності у функціоналі.

І нарешті, будь-яка задача стає нелінійною, якщо в математичній моделі необхідно враховувати умови невизначеності та ризик. Як показник ризику часто використовують дисперсію, тому для врахування обмеженості ризику потрібно вводити нелінійну функцію в систему обмежень, а мінімізація ризику певного процесу досягається дослідженням математичної моделі з нелінійною цільовою функцією.

У загальному вигляді задача нелінійного програмування полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.28}$$

за умови, що її змінні задовольняють співвідношення

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i & (i = \overline{1,k}), \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i & (i = \overline{k+1,m}), \end{cases} \tag{1.29}$$

де f і g_i – деякі відомі нелінійні функції n змінних;

b_i – задані числа.

Тут маємо на увазі, що в результаті розв'язування задачі буде визначена точка $X^* = (x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*)$, координати якої задовольняють співвідношення (1.29) і така, що для довільної іншої точки $X = (x_1; x_2; ...; x_n)$, яка задовольняє умови (1.29), виконується нерівність $f(x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*) \ge f(x_1; x_2; ...; x_n)$ $\left[f(x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*) \le f(x_1; x_2; ...; x_n)\right]$

Якщо f і g_i – лінійні функції, то задача (1.28), (1.29) є задачею лінійного програмування.

Співвідношення (1.29) утворять систему обмежень і містять у собі умови невід'ємності змінних, якщо такі умови є. Умови невід'ємності змінних можуть бути задані і безпосередньо. В евклідовому просторі E_n система обмежень (1.29) визначає область допустимих розв'язків задачі. На відміну від задачі лінійного програмування вона не завжди є опуклою.

Якщо визначена область допустимих розв'язків, то знаходження розв'язку задачі (1.28), (1.29) зводиться до визначення такої точки цієї області, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня: $f(x_1; x_2; ...; x_n) = h$. Зазначена точка може знаходитися як на границі області допустимих розв'язків, так і усередині її.

1.12 Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

Геометрично цільова функція (1.28) визначає деяку поверхню, а обмеження (1.29) – допустиму підмножину n-вимірного евклідового простору. Знаходження оптимального розв'язку задачі нелінійного програмування зводиться до відшукання точки з допустимої підмножини, в якій досягається поверхня найвищого (найнижчого) рівня.

Якщо цільова функція неперервна, а допустима множина розв'язків замкнена, непуста і обмежена, то глобальний максимум (мінімум) задачі існує.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, що містять систему лінійних обмежень та нелінійну цільову функцію. В цьому разі область допустимих розв'язків є опуклою, непустою, замкненою, тобто обмеженою.

Процес знаходження розв'язку задачі нелінійного програмування (1.28), (1.29) з використанням її геометричної інтерпретації включає такі етапи:

1. Знаходять область допустимих розв'язків задачі, що визначається співвідношеннями (1.29) (якщо вона порожня, то задача не має розв'язку).

2. Будують гіперповерхню $f(x_1;x_2;...;x_n)=h$..

3. Визначають гіперповерхню найвищого (найнижчого) рівня чи встановлюють, що задача не має розв'язку через необмеженість функції (1.28) зверху (знизу) на множині допустимих розв'язків.

4. Знаходять точку області допустимих розв'язків, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня, і визначають у ній значення функції (1.28).

Наведемо основні особливості задач нелінійного програмування, що зумовлюють необхідність застосування відповідних методів їх розв'язання.

1.13 Основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

Часто задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, що призводить до значних похибок. Наприклад, як правило, собівартість продукції y визначають за формулою: $y=a+\frac{b}{x}$, де x – обсяг виробництва. Ввівши заміну: $z=\frac{1}{x}$, маємо: $y=a+bz$, тобто приходимо до лінійної функції. За такої заміни похибок не допускають. Однак якщо функцією собівартості буде $y=-ax^2+bx+c$, то використання замість неї деякої лінійної функції $y=d+kx$ невиправдане, що видно з рис. 1.

У точках x_1 і x_3 величина собівартості для двох цих функцій однакова. Однак у всіх інших точках ці значення відрізняються, причому у точці x_2 значною мірою, тобто на величину:

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - kx_2 = -ax_2^2 + (b-k)x_2 + (c-d).$$

Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею. Зведення нелінійної задачі до лінійної дає змогу отримати симплексним методом розв'язок, близький до розв'язку початкової нелінійної задачі. Однак з вище розглянутого прикладу бачимо, що при побудові наближених лінійних задач можна отримати надто неточний розв'язок, який непридатний для використання.

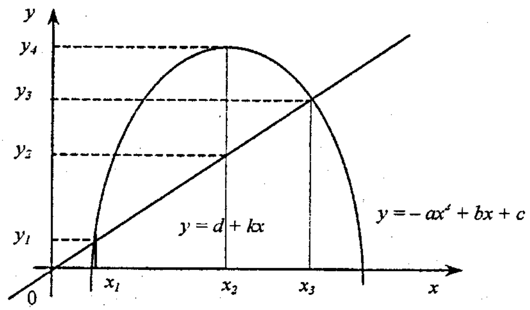

Рисунок 1 – Геометрична інтерпретація задачі

Навіть питання щодо існування розв'язку задачі нелінійного програмування потребує окремого дослідження.

Розглянемо основні труднощі розв'язування нелінійних задач.

1. Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'язок універсальним методом — симплексним. При цьому не існує проблеми стосовно доведення існування такого розв'язку, тобто в результаті застосування алгоритму симплексного методу завжди отримують один з таких варіантів відповіді:

а) отримали оптимальний розв'язок;

б) умови задачі суперечливі, тобто розв'язку не існує;

в) цільова функція необмежена, тобто розв'язку також не існує.

Для задач нелінійного програмування ***не існує універсального методу*** розв'язання, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування. Для кожного специфічного методу необхідно доводити існування розв'язку задачі та його єдиність, що також є досить складною математичною задачею.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але в такому разі існують труднощі обчислювального характеру, тобто навіть для сучасних ЕОМ такі алгоритми є досить трудомісткими, тому здебільшого для розв'язування нелінійних задач виправданим є застосування наближених методів.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній (або кількох одночасно) з вершин багатогранника допустимих розв'язків задачі. Однак у задачах нелінійного програмування існують ***кілька локальних оптимумів***, що потребує пошуку серед них глобального.

На рис. 2 маємо на відрізку, що зображений, локальні оптимуми у точках $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$, глобальний – у точках x_3 та x_6.

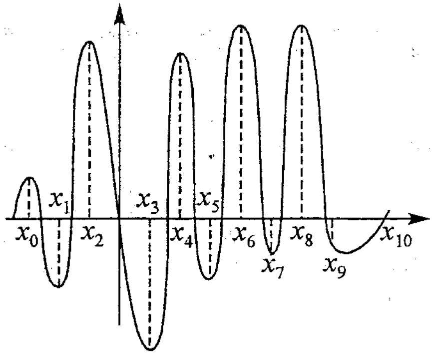

Рисунок 2 – Геометрична інтерпретація задачі

Більшість наближених методів уможливлюють, як правило, знаходження локального оптимуму. Можна, звичайно, користуючись простим способом, визначити всі локальні оптимуми, а потім їх зіставленням знайти глобальний. Однак для практичних розрахунків такий метод є неефективним. Часто глобальний оптимум наближені методи «не уловлюють». Наприклад, у разі, коли глобальний оптимум знаходиться досить близько біля локального. Якщо відрізок $[x_0, x_{10}]$ поділити на десять підвідрізків і глобальний оптимум попаде у відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ (рис. 2), а зліва від x_i та справа від x_{i+1} крива $y = f(x)$ буде зростати, то глобальний оптимум буде пропущеним.

3. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною точкою багатогранника допустимих планів. Для нелінійних задач точка, яка визначає ***оптимальний план***, може бути як граничною, так і знаходитися ***всередині допустимої області розв'язків*** (планів), що було проілюстровано в прикладі 8.1.

4. Доведено, що множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою. У разі, коли система обмежень задачі є нелінійною, вона може визначати ***множину допустимих розв'язків як неопуклу***, або навіть складатися з довільних, не пов'язаних між собою частин.

Одним з найпоширеніших прикладів зазначеної особливості є задачі цілочислового програмування (розглянуті в підрозділі 1.6). Нагадаємо, що вимога цілочисловості змінних задачі приводить до множини допустимих розв'язків, утвореної окремими точками, що зумовлює розглянуті вище ускладнення відшукання розв'язків такого типу задач.

Кожна із зазначених особливостей задач потребує застосування специфічних методів пошуку розв'язку, тому безперечно найскладнішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких поєднується кілька або всі згадані особливості.

1.14 Класичний метод оптимізації. Умовний та безумовний екстремуми функції

Як уже згадувалось, для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тобто до них необхідно застосовувати широке коло різних методів і обчислювальних алгоритмів. Вони в основному базуються на застосуванні диференціального числення і залежать від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи розв'язування задач нелінійного програмування бувають прямі та непрямі. За допомогою прямих методів знаходження оптимальних планів здійснюють у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) значення цільової функції. Типовим представником цієї групи методів є градієнтні. Методика застосування непрямих методів передбачає зведення задачі до такої, оптимум якої слід знаходити простішими методами. Серед непрямих найкраще розробленими є методи розв'язування задач квадратичного програмування.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких система обмежень складається лише з рівнянь.

У теорії дослідження функцій задача на відшукання екстремальних значень не містить ніяких додаткових умов щодо змінних і такі задачі належать до задач відшукання ***безумовного екстремуму*** функції. Локальний та глобальний екстремуми тоді визначаються з необхідних та достатніх умов існування екстремуму функції.

Нагадаємо, що необхідна умова існування локального екстремуму функції двох змінних формулюється так: для того, щоб точка (x_1^0, x_2^0) була точкою локального екстремуму, необхідно, щоб функція $f(x_1, x_2)$ була неперервною і диференційовною в околі цієї точки і перші частинні похідні за змінними x_1 та x_2 у цій точці дорівнювали нулю:

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = 0 .$$

Точка (x_1^0, x_2^0) називається критичною.

Достатня умова існування локального екстремуму функції двох змінних формулюється так: для того, щоб критична точка (x_1^0, x_2^0) була точкою локального екстремуму, достатньо, щоб функція $f(x_1, x_2)$ була визначена в околі критичної точки (x_1^0, x_2^0) та мала в цій точці неперервні частинні похідні другого порядку.

Тоді, якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 > 0,$$

то в точці (x_1^0, x_2^0) функція $f(x_1, x_2)$ має екстремум, причому, якщо

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} < 0,$$

тоді (x_1^0, x_2^0) — точка локального максимуму функції $f(x_1, x_2)$, а якщо

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} > 0,$$

тоді (x_1^0, x_2^0) — точка локального мінімуму функції $f(x_1, x_2)$.

У разі, якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 < 0,$$

то в точці (x_1^0, x_2^0) функція $f(x_1, x_2)$ екстремуму не має.

Якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 = 0,$$

то питання про існування екстремуму залишається відкритим.

Якщо задача полягає у відшуканні локального чи глобального екстремуму деякої функції за умови, що на змінні такої функції накладаються додаткові обмеження, то маємо задачу пошуку ***умовного екстремуму*** функції. Термін «умовний» означає, що змінні задачі мають задовольняти деякі умови.

Розглянемо таку задачу для випадку двох змінних:

$$\text{знайти } \max(\min)\ f(x_1, x_2) \tag{1.30}$$

$$\text{за умови, що } q(x_1, x_2) = b. \tag{1.31}$$

Найпростіший спосіб розв'язання задачі такого вигляду полягає в тому, що спочатку з обмеження (1.31) знаходять вираз однієї змінної через іншу. Приміром, визначають x_2 через x_1. Отриманий вираз вигляду

$x_2 = g(x_1)$ підставляють у функцію (1.30), що після цього стає функцією однієї змінної $f(x_1, g(x_1))$, і далі знаходять її безумовний екстремум.

Якщо деяка точка x_1^* є точкою екстремуму функції $f(x_1, g(x_1))$, то точка $X^*(x_1^*, x_2^* = g(x_1^*))$ є точкою умовного екстремуму функції (1.30) за умови (1.31).

Однак не завжди вдається відшукати аналітичний вираз однієї змінної через іншу. Часто це досить важко здійснити або неможливо. Також іноді складно узагальнити даний спосіб для функції n змінних, на які накладено m обмежень. Тому описана досить проста ідея зведення задачі відшукання умовного екстремуму функції кількох змінних до задачі на безумовний екстремум функції однієї змінної не може бути використана як основа універсального методу розв'язування задач на умовний екстремум. Цікавий метод розв'язування задач типу (1.30), (1.31) запропонував Лагранж.

1.15 Метод множників Лагранжа

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою, яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Після такого перетворення дальше розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто, від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Розглянемо окремий випадок загальної задачі нелінійного програмування (1.30), (1.31), припускаючи, що система обмежень (1.31) містить тільки рівняння, відсутні умови невід'ємності змінних і $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функції, неперервні разом зі своїми частинними похідними

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \quad (\min); \tag{1.32}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \quad (i = \overline{1, m}). \tag{1.33}$$

У курсі математичного аналізу задачу (1.32), (1.33) називають задачею на умовний екстремум або класичною задачею оптимізації.

Щоб знайти розв'язок цієї задачі, вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, які називають ***множниками Лагранжа***, складають функцію Лагранжа

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\right] \tag{1.34}$$

знаходять частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x_j}(j=\overline{1,n})$ і $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(i=\overline{1,m})$ і розглядають систему $n+m$ рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j=\overline{1,n}); \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (i=\overline{1,m}) \end{cases} \tag{1.35}$$

з $n+m$ невідомими $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Довільний розв'язок системи рівнянь (1.35) визначає точку $X = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, у якій може мати місце екстремум функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Отже, розв'язавши систему рівнянь (1.35), одержують усі точки, у яких функція (1.32) може мати екстремальні значення. Подальше дослідження знайдених точок проводять так само, як і у випадку безумовного екстремуму.

Таким чином, визначення екстремальних точок задачі (1.32), (1.33) методом множників Лагранжа включає такі етапи:

1. Складають функцію Лагранжа.

2. Знаходять частинні похідні від функції Лагранжа за змінними x_j і λ_i і прирівнюють їх до нуля.

3. Розв'язуючи систему рівнянь (1.35), знаходять точки, у яких цільова функція задачі може мати екстремум.

4. Серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, у яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції (1.32) у цих точках.

У випадку функції $z = f(x,y)$ при рівнянні зв'язку $\varphi(x,y)=0$ функція Лагранжа має вигляд

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$.

Система рівнянь (1.35) складається із трьох рівнянь:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x,y) = 0.$

Нехай $P_0(x_0, y_0)$, λ – довільний розв'язок цієї системи і

$$\Delta = -\begin{pmatrix} 0 & \varphi'_x(P_0) & \varphi'_y(P_0) \\ \varphi'_x(P_0) & F''_{xx}(P_0,\lambda) & F''_{xy}(P_0,\lambda) \\ \varphi'_y(P_0) & F''_{xy}(P_0,\lambda) & F''_{yy}(P_0,\lambda) \end{pmatrix}$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x,y)$ має в точці $P_0(x_0, y_0)$ умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – то умовний мінімум.

1.16 Запитання для самоперевірки

1. Що таке модель?
2. Для чого потрібна модель?
3. Які є прийоми моделювання?
4. Що є об'єктом дослідження математичного моделювання в економіці?
5. Що таке математична модель?
6. Класифікація математичних моделей у економіці.
7. Навести приклади економічних моделей.
8. Що таке операція?
9. Що таке дослідження операцій?
10. Що є предметом дослідження операцій?
11. Назвіть типові класи задач дослідження операцій.
12. Що таке модель операції?
13. Що таке ефективність операції?
14. Назвіть основні етапи дослідження операцій?
15. Які ви знаєте методи дослідження операцій?
16. Коли використовується двоїстий симплекс-метод?
17. Який розв'язок називається псевдорозв'язком задачі лінійного програмування?
18. Коли при двоїстому симплекс-методі задача лінійного програмування немає розв'язку?
19. В чому полягає теорема про розв'язок задачі лінійного програмування двоїстим симплекс-методом?
20. Як вибирається розв'язний рядок та розв'язний елемент при двоїстому симплекс-методі?
21. Сформулювати етапи знаходження розв'язку задачі лінійного програмування двоїстим симплекс-методом.
22. Яка задача називається задачею цілочисельного програмування?
23. Сформулювати задачу цілочисельного програмування?
24. В чому полягає геометричний метод розв'язування задач цілочисельного програмування?
25. Який вигляд має нерівність Гоморрі?
26. Що називається дробовою частиною деякого числа? Чому дорівнює дробова частина чисел: 1/2 і (-1/2) ?
27. Які задачі лінійного програмування називаються частково цілочисельними?
28. Який вигляд додаткого обмеження для частково цілочисельних задач?
29. Які етапи знаходження оптимального розв'язку задач цілочисельного програмування включає в себе метод Гоморрі?
30. Яка задача називається задачею дробово-лінійного програмування?
31. Які етапи знаходження розв'язку задачі дробово-лінійного програмування геометричним методом?

32. Які випадки можна отримати при розв'язуванні задач дробово-лінійного програмування графічним методом?
33. Формули переходу від задач дробово-лінійного програмування до задач лінійного програмування?
34. Яка ситуація називається конфліктною?
35. Що таке гра, правила гри, парна гра та гра з нульовою сумою?
36. Що таке стратегія гравця та яка стратегія називається оптимальною?
37. Що називають платіжною матрицею, верхньою та нижньою ціною?
38. Яка гра називається грою із сідловою точкою?
39. Що називають змішаною стратегією гравця?
40. Яка гра завжди має розв'язок у змішаних стратегіях?
41. Необхідна і достатня умова існування ціни гри.
42. Етапи знаходження розв'язку гри $2\times n$ чи $n\times 2$.
43. Для яких ігор можна використовувати алгебраїчний метод знаходження розв'язку?
44. Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування?
45. Які етапи знаходження розв'язку гри з використанням методів лінійного програмування?
46. Яка задача називається задачею нелінійного програмування?
47. Що таке гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня?
48. Яким способом можна знайти розв'язок задачі нелінійного програмування?
49. Етапи знаходження розв'язку задач нелінійного програмування.
50. Яку задачу називають задачею на умовний екстремум або класичною задачею оптимізації?
51. Що таке множники та функція Лагранжа?
52. Які етапи визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа?
53. Функція Лагранжа для випадку двох змінних.

2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1

Використовуючи двоїстий симплекс-метод, розв'язати задачу лінійного програмування :

$$f = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \ge 24, \\ \qquad\qquad\qquad x_i \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо початкову задачу лінійного програмування у формі основної задачі: знайти найменше значення цільової функції

$$f = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 - x_6 = 24, \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Помноживши перше і друге рівняння системи обмежень останньої задачі на (- 1), перейдемо до задачі :

$$f = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -1{,}5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -18, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = -24, \\ x_i \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Оскільки серед вільних членів останньої системи обмежень є від'ємні числа, то розв'язувати задачу (1) звичайним симплексним методом ми не можемо.

Після цього складаємо симплексну таблицю для задачі (1):

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_5	-1,5	-3	1	-1	1	0	-18
x_6	-3	-2	0	1	0	1	-24
Δ_j	5	6	1	1	0	0	0

У цій таблиці всі елементи Δ_i індексного рядка – невід'ємні числа. З цієї таблиці видно, що задача (1) має псевдоплан X_1= { 0; 0; 0; 0; -18; -24 }. Оскільки у стовпці вільних членів є два від'ємних числа, а в індексному рядку від'ємних чисел немає, то відповідно до алгоритму двоїстого симплекс-методу переходимо до нової симплексної таблиці. (У даному випадку це можливо, оскільки у рядках базисів x_5 і x_6 є від'ємні числа. Якщо б їх не було, то задача не мала б розв'язку.) Розв'язний рядок визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом, яке стоїть у стовпці вільних членів. У даному випадку таким числом є (-24). Таким чином, виключаємо з базису змінну x_6. Щоб визначити, яку змінну необхідно ввести у базис, знаходимо $\min\limits_j\left(-\Delta_j/a_{2j}\right)$, де $a_{2j}<0$. Маємо :

$$\min_j \frac{-\Delta_j}{a_{2j}} = \min\left\{\frac{-5}{-3};\ \frac{-6}{-2}\right\} = \frac{5}{3}.$$

Тому вводимо в базис змінну x_1.

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_5	0	-2	1	-3/2	1	-1/2	-6
x_1	1	2/3	0	-1/3	0	-1/3	8
Δ_j	0	8/3	1	8/3	0	5/3	-40

Оскільки у стовпці вільних членів стоїть від'ємне число (- 6), то розглянемо елементи першого рядка. Серед них є три від'ємні числа: - 2; - 3/2; - 1/2. Якщо б такі числа були відсутні, то задача не мала б розв'язку. Знаходимо:

$$\min_j \frac{-\Delta_j}{a_{1j}} = \min\left\{\frac{-8/3}{-2};\frac{-8/3}{-3/2};\frac{-5/3}{-1/2}\right\} = \frac{-8/3}{-2} = \frac{4}{3}.$$

Тому за розв'язний елемент беремо (- 2) і переходимо до нової симплексної таблиці:

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	0	1	-1/2	3/4	-1/2	1/4	3
x_1	1	0	1/3	-5/6	1/3	-1/2	6
Δ_j	0	0	7/3	2/3	4/3	1	-48

Як видно з останньої таблиці, ми знайшли оптимальний розв'язок задачі (1). Цим розв'язком є:

$$X^*_{опт} = \{\ 6;\ 3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\ \},\ \textit{при якому}\ \ F_{\max} = -48.$$

Тоді оптимальним розв'язком початкової задачі буде :

$$X_{опт} = \{\ 6;\ 3;\ 0;\ 0\ \},\ \textit{при якому}\ \ f_{\min} = -\ F_{\max} = 48.$$

Приклад 2. Методом Гоморрі знайти максимальне значення функції

$$F = 2x_1 + 3x_2 \qquad (1)$$

при умовах

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 30, \\ x_2 \qquad + x_4 \quad = 3, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \qquad (3)$$

$$x_j - цілі \quad (j=\overline{1,4}). \qquad (4)$$

Дати геометричну інтерпретацію розв'язку задачі.

Розв'язування

Для визначення оптимального плану задачі (1)–(4) спочатку знаходимо оптимальний план задачі (1)–(3). Зведемо задачу до стандартного вигляду: $f=-F=-2x_1-3x_2 \to \min$. Складаємо симплексну таблицю для задачі (1)–(3).

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_{ij}
x_3	6	5	1	0	30	30/5
x_4	0	1	0	1	3	3/1
f	-2	-3	0	0	0	
$X^{(1)}=(0;0;30;3)$						
x_3	6	0	1	-5	15	
x_2	0	1	0	1	3	
f	-2	0	0	3	9	
$X^{(2)}=(0;3;15;0)$						
x_1	1	0	1/6	-5/6	5/2	
x_2	0	1	0	1	3	
f	0	0	1/3	4/3	14	
$X^{(3)}=(\frac{5}{2};3;0;0)$						

Як видно із таблиці, знайдений оптимальний план $X^{(3)} = (5/2;\ 3;\ 0;\ 0)$ задачі (1)–(3) не є оптимальним планом задачі (1)–(4), оскільки компонента x_1 має дробове значення. Складемо додаткове обмеження для змінної x_1. З останньої симплекс-таблиці маємо

$$x_1+(1/6)x_3-(5/6)x_4=5/2.$$

Таким чином, до системи обмежень задачі (1)–(3) додаємо нерівність Гоморрі, яка має вигляд:

$$f(1)x_1+f(1/6)x_3+f(-5/6)x_4 \geq f(5/2), \text{ або } x_4$$

$$(1/6)x_3+(1/6)x_4 \geq 1/2, \text{ тобто}$$

$$x_3+x_4 \geq 3.$$

Останнє обмеження зводиться до вигляду

$$-x_3 - x_4 + x_5 = -3. \qquad (5)$$

Знаходимо тепер максимальне значення функції (1) при виконанні умов (2), (3) і (5).

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1/6	-5/6	0	5/2
x_2	0	1	0	1	0	3
x_5	0	0	-1	-1	1	-3
f	0	0	1/3	4/3	0	14

Оскільки в стовпці вектора b_i є від'ємне значення, а в рядку f від'ємних значень немає, то відповідно до алгоритму двоїстого симплекс-методу перейдемо до нового кроку перетворень. (В даному випадку це можна зробити, оскільки в рядку вектора x_5 є від'ємні значення. Якщо б вони були відсутні, то задача не мала б розв'язку.) Вектор, що виключається із базису, визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом, яке знаходиться у стовпці b_i. В даному випадку це число (–3). Відповідно із базису виключаємо вектор x_5. Щоб визначити, який вектор слід ввести у базис, знаходимо $\min\limits_j(-\Delta_j / a_{3j})$, $\ddot{a}\mathring{a}\, a_{3j} < 0$. Маємо $\min((-\frac{1}{3})/(-1);(-\frac{4}{3})/(-1)) = \frac{1}{3}$. Отже, у базис вводять вектор x_3. Переходимо до нової симплекс-таблиці.

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1/6	-5/6	0	5/2
x_2	0	1	0	1	0	3
–	0	0	1	1	-1	3
f	0	0	1/3	4/3	0	14
Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	-1	1/6	2
x_2	0	1	0	1	0	3
x_5	0	0	1	1	-1	3
f	0	0	0	1	1/3	13

Як видно з останньої симплекс-таблиці, вихідна задача цілочисельного програмування має оптимальний план X*=(2; 3; 3; 0). При цьому плані значення цільової функції дорівнює $F_{\max}$=13. Дамо геометричну інтерпретацію розв'язку задачі. Областю припустимих розв'язків задачі (1)–(3) є многокутник OABC (рис. 3). З рис.3 видно, що максимальне значення цільова функція приймає в точці B (5/2; 3), тобто що $X = (5/2; 3; 0; 0)$ є оптимальним планом.

Оскільки X = (5/2; 3; 0; 0) не є оптимальним планом задачі (1)–(4) (число 5/2 – дробове), то вводиться додаткове обмеження $x_3 + x_4 \geq 3$. Виключаючи із нього x_3 та x_4, підставляючи замість них відповідні значення із рівнянь системи обмежень отримаємо $x_1 + x_2 \leq 5$. Цій нерівності відповідає півплощина, обмежена прямою $l_5 : x_1 + x_2 = 5$, що відтинає від многокутника OABC трикутник MBC.

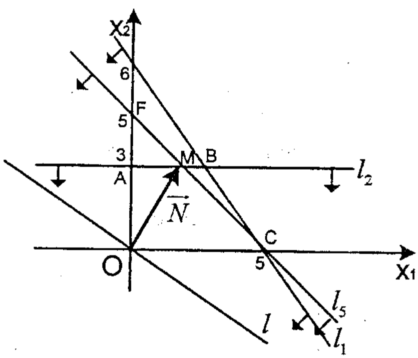

Рисунок 3 – Область допустимих розв'язків

Як видно з рис. 3, областю припустимих розв'язків отриманої задачі є многокутник OAMC. У точці M (2; 3) цього многокутника цільова функція даної задачі приймає максимальне значення. Оскільки координати точки M – цілі числа і невідомі x_3, x_4 приймають цілі значення при підстановці в рівняння (2) значень $x_1 = 2$ і $x_2 = 3$, то $X^* = (2; 3; 0; 0)$ є оптимальним планом задачі (1) – (4). Це й випливає із останньої симплекс-таблиці.

Приклад 3. Вважаючи, що $x_1, x_2 \geq 0$, x_1, x_2 – цілі, розв'язати задачу цілочисельного лінійного програмування методом гілок та меж.

$$F = -72x_1 + 11x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \geq 24, \\ x_1 + 4x_2 \leq 8 \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо задачу до канонічного вигляду: $f=-F=72x_1-11x_2\to\min$

$$\begin{cases}8x_1+3x_2-x_3=24,\\ x_1+4x_2+x_4=8\end{cases}\quad x_i\ge 0,\quad i=\overline{1,4}$$

Складемо початкову симплекс-таблицю:

Б.Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
	8	3	-1	0	24	*(-1)
	1	4	0	1	8	
Δ_j	72	-11	0	0	0	
x_3	-8	-3	1	0	-24	
x_4	1	[redacted]	0	1	8	*1/4
Δ_j	72	-11	0	0	0	
	-8	-3	1	0	-24	
	1/4	[redacted]	0	1/4	2	*3 *11
Δ_j	72	-11	0	0	0	
x_3	[redacted]	0	1	3/4	-18	*(-4/29)
x_2	1/4	1	0	1/4	2	
Δ_j	299/4	0	0	11/4	22	
	1	0	-4/29	-3/29	72/29	*(-1/4) *(-299/4)
	1/4	1	0	1/4	2	
Δ_j	299/4	0	0	11/4	22	
x_1	1	0	-4/29	-3/29	72/29	
x_2	0	1	1/29	8/29	40/29	
Δ_j	0	0	299/29	304/29	-4777/29	

$x_1=\{72/29;40/29;0;0\}$

Як бачимо, розв'язки не є цілочисловим. Цілі значення x_j мають задовольнити одну з нерівностей:

$x_j\le\left[x_j'\right]$ або $x_j\ge\left[x_j'\right]+1$

Тобто, $x_1\le[72/29]=2$

$x_1\ge[72/29]+1=2+1=3.$

$x_2\le[40/29]=1$

$x_2\ge[40/29]+1=1+1=2.$

Отже, розв'яжемо такі задачі:

1) $f = -F = 72x_1 - 11x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - x_3 = 24, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 8, \qquad x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5} \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю:

Б. Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
	8	3	-1	0	0	24
	1	4	0	1	0	8
	1	0	0	0	1	2
Δ_j	72	-11	0	0	0	0
x_3	-8	-3	1	0	0	-24
x_4	1	[redacted]	0	1	0	8
x_5	1	0	0	0	1	2
Δ_j	72	-11	0	0	0	0
x_3	[redacted]	0	1	3/4	0	-18
x_2	1/4	1	0	1/4	0	2
x_5	1	0	0	0	1	2
Δ_j	299/4	0	0	11/4	0	22
x_1	1	0	-4/29	-3/29	0	72/29
x_2	0	1	1/29	8/29	0	160/116
x_5	0	0	4/29	3/29	1	-14/29
Δ_j	0	0	299/29	304/29	0	-4744/29

Розв'язків немає, оскільки всі $\Delta_j \ge 0$.

2) $f = -F = 72x_1 - 11x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - x_3 = 24, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 8, \qquad x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5} \\ x_1 - x_5 = 3 \end{cases}$$

Отже, $x_3 = 3$.

Складемо симплекс-таблицю:

Б.Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
	8	3	-1	0	0	24
	1	4	0	1	0	8
	1	0	0	0	-1	3
Δ_j	72	-11	0	0	0	0
x_3	-8	-3	1	0	0	-24
x_4	1	[redacted]	0	1	0	8
x_5	-1	0	0	0	1	-3
Δ_j	72	-11	0	0	0	0
x_3	[redacted]	0	1	3/4	0	-18
x_2	1/4	1	0	1/4	0	2
x_5	-1	0	0	0	1	-3
Δ_j	299/4	0	0	11/4	0	22
x_1	1	0	-4/29	-3/29	0	72/29
x_2	0	1	1/29	8/29	0	160/116
x_5	0	0	[redacted]	-3/29	1	-15/29
Δ_j	0	0	299/29	304/29	0	-4744/29
x_1	1	0	0	0	-1	3
x_2	0	1	0	1/4	1/4	5/4
x_3	0	0	1	3/4	-29/4	15/4
Δ_j	0	0	0	11/4	299/4	-809/4

3) $f = -F = 72x_1 - 11x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - x_3 = 24, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 8, \qquad x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5} \\ x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю:

Б. Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
-	8	3	-1	0	0	24
x_4	1	4	0	1	0	8
x_5	0	[redacted]	0	0	1	1
Δ_j	72	-11	0	0	0	0
x_3	-8	-3	1	0	0	-24
x_4	1	4	0	1	0	8
x_5	0	[redacted]	0	0	1	1
Δ_j	72	-11	0	0	0	0
x_3	[redacted]	0	1	0	3	-21
x_4	1	0	0	1	-4	4
x_2	0	1	0	0	1	1
Δ_j	72	0	0	0	11	11
x_1	1	0	-1/8	0	-3/8	21/8
x_4	0	0	1/8	1	-29/8	11/8
x_2	0	1	0	0	1	1
Δ_j	0	0	9	0	38	-178

$x_2 = 1$.

Немає сенсу складати 4-ту симплекс-таблицю, оскільки розв'язки задачі знайдені.

$x = \{3;1\}$, т. т. $F = -72x_1 + 11x_2 = -72 \cdot 3 + 11 \cdot 1 = -205$.

Приклад 4. Розв'язати геометричним методом задачу дробово-лінійного програмування

$$F = \frac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min \qquad (1)$$

при умовах

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \ge 27, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (3)$$

Розв'язування

Щоб знайти розв'язок задачі перш за все побудуємо многокутник розв'язків. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $3x_1+9x_2=27$, яка проходить через точки (0;3) та (9;0);
2) l_2: $2x_1+x_2=6$, яка проходить через точки (0;6) та (3;0);
3) l_3: $5x_1+6x_2=30$, яка проходить через точки (0;5) та (6;0);
4) $l_4: x_1=0$;
5) l_5: $x_2=0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис. 4).

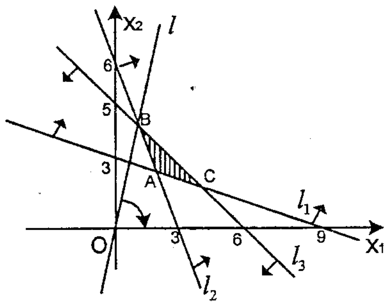

Рисунок 4 – Область допустимих розв'язків

Як видно із рис. 4 ним є трикутник ABC. Значить функція (8) приймає мінімальне значення в одній із точок: B, C або A. Щоб зобразити цільову функцію, покладемо її як лінійну функцію аргументу x_1, розв'язавши відносно x_2:

$$F(x_1+x_2)=4x_1+3x_2,$$
$$Fx_2-3x_2=4x_1-Fx_1,$$
$$x_2(F-3)=(4-F)x_1,$$
$$x_2=\frac{(4-F)}{(F-3)}x_1.$$

Одержане рівняння є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $k=\frac{4-F}{F-3}$. Розглядаючи k як функцію від F, знайдемо її похідну:

$$k'=\frac{-(F-3)-(4-F)}{(F-3)^2}=\frac{-F+3-4+F}{(F-3)^2}=-\frac{1}{(F-3)^2}.$$

А це означає, що функція $k = \frac{4-F}{F-3}$ є монотонно спадною, тобто із збільшенням F величина k зменшується, що відповідає обертанню прямої навколо точки О за годинниковою стрілкою. Звідси випливає, що найменшого значення функція F набуває у вершині В, координати якої є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на (-6) і додамо до другого, в результаті чого отримаємо:

$-7x_1 = -6$ або $x_1^* = \frac{6}{7}$. Тоді $x_2^* = 6 - 2 \cdot \frac{6}{7} = 6 - \frac{12}{7} = \frac{30}{7}$. Тобто, точка В має координати $(\frac{6}{7}; \frac{30}{7})$.

Отже, найменше значення лінійної функції:

$$F_{\min} = F(B) = \frac{4 \cdot \frac{6}{7} + 3 \cdot \frac{30}{7}}{\frac{6}{7} + \frac{30}{7}} = \frac{57}{18} \approx 3{,}16.$$

Практично знайти точку мінімуму можна простіше. Оскільки область допустимих розв'язків є випуклий многокутник, то як відомо екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин В або С. Знайдемо координати цих точок: $B(\frac{6}{7}; \frac{30}{7})$, $C(4; \frac{5}{3})$. Значення функції в цих точках відповідно дорівнюють: $F(B) = \frac{57}{18}$, $F(C) = \frac{63}{17}$. Оскільки $F(B) < F(C)$, то можна стверджувати, що в точці В цільова функція приймає мінімальне значення. Одночасно з цим відмітимо, що в точці С функція приймає максимальне значення.

Приклад 5. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування шляхом переходу до задачі лінійного програмування:

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 13, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \le 13, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

Розв'язування

Нехай $x_1 + x_2 = \frac{1}{y_2}$; $x_1 = \frac{y_1}{y_2}$; $x_2 = \frac{1}{y_2} - x_1 = \frac{1}{y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{1-y_1}{y_2}$.

Тоді $F = \dfrac{2 \cdot \frac{y_1}{y_2} + 3 \cdot \frac{1-y_1}{y_2}}{\frac{1}{y_2}} = 2y_1 + 3 - 3y_1 = -y_1 + 3 \to \min$

Перетворимо систему обмежень:

$$\begin{cases} \frac{y_1}{y_2} + 4 \cdot \frac{1-y_1}{y_2} \le 13, \\ \frac{y_1}{y_2} + \frac{1-y_1}{y_2} \ge 4, \\ 4 \cdot \frac{y_1}{y_2} + \frac{1-y_1}{y_2} \le 13, \\ y_j \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 4 - 4y_1 \le 13y_2, \\ y_1 + 1 - y_1 \ge 4y_2, \\ 4y_1 + 1 - y_1 \le 13y_2, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13y_2 + 3y_1 \ge 4, \\ 4y_2 \le 1, \\ 3y_1 - 13y_2 \le -1, \\ y_j \ge 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 13y_2 + 3y_1 \ge 4, \\ 4y_2 \le 1, \\ -3y_1 + 13y_2 \ge 1, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

Зведемо задачу до основного вигляду:

$$F = -y_1 + 3 \to \min$$

$$\begin{cases} 13y_2 + 3y_1 - y_3 = 4, \\ 4y_2 + y_4 = 1, \\ -3y_1 + 13y_2 - y_5 = 1, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

Введемо штучні змінні, в результаті чого отримаємо:

$$\begin{cases} 13y_2 + 3y_1 - y_3 + y_6 = 4, \\ 4y_2 + y_4 = 1, \\ -3y_1 + 13y_2 - y_5 + y_7 = 1, \\ y_j \geq 0. \end{cases}$$

$$F = -y_1 + 3 + M(y_6 + y_7) \to \min$$

Складаємо таблицю симплексних перетворень.

Б.Н	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b_i
y_6	3	13	-1	0	0	1	0	4
y_4	0	4	0	1	0	0	0	1
y_7	-3	13	0	0	-1	0	1	1
оцінки	-1	0	0	0	0	M	M	-3
оцінки	-1-3M	-13M	M	0	0	0	M	-3-4M
оцінки	-1	-26M	M	0	M	0	0	-3-5M
$Y^{(1)} = (0;0;0;1;0;4;1)$								
	3	13	-1	0	0	1	0	4
	0	4	0	1	0	0	0	1
	-3/13	1	0	0	-1/13	0	1/13	1/13
оцінки	-1	-26M	M	0	M	0	0	-3-5M
y_4	6	0	-1	0	1	1		3
y_2	12/13	0	0	1	4/13	0		9/13
y_6	-3/13	1	0	0	-1/13	0		1/13
оцінки	-1-6M	0	M	0	-M	0		-3-3M
$Y^{(2)} = (0;1/13;0;9/13;0;3;0)$								
	1	0	-1/6	0	1/6	1/6		1/2
	12/13	0	0	1	4/13	0		9/13
	-3/13	1	0	0	-1/13	0		1/13
оцінки	-1-6M	0	M	0	-M	0		-3-3M
y_1	1	0	-1/6	0	1/6			1/2
y_4	0	0	2/13	1	2/13			3/13
y_2	0	1	-1/26	0	-11/26			5/26
оцінки	0	0	-1/6	0	1/6			-5/2
$Y^{(3)} = (1/2;5/26;0;3/13;0;0;0)$								
	1	0	-1/6	0	1/6			1/2
	0	0	1	13/2	1			3/2
	0	1	-1/26	0	-11/26			5/26
оцінки	0	0	-1/6	0	1/6			-5/2
y_1	1	0	0	13/12	1/3			3/4
y_2	0	0	1	13/2	1			3/2
y_3	0	1	0	1/4	-5/13			1/4
оцінки	0	0	0	13/12	1/3			-9/4
$Y^{(4)} = (3/4;1/4;3/2;0;0;0;0)$								

$Y_{\text{опт}} = (3/4; 1/4; 3/2)$. Тоді $x_1 = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{4} = 3$; $\quad x_2 = \dfrac{1}{y_2} - x_1 = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} - 3 = 1.$

Отже, $X_{\text{гід}} = (3;1)$ і $F_{\min} = \dfrac{9}{4}$.

Приклад 6. Використовуючи алгебраїчний метод знайти розв'язок гри, що визначається матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування

Насамперед перевіримо наявність сідлової точки в даній матриці. Для цього знайдемо мінімальні елементи в кожному з рядків (1 і 2) і максимальні елементи в кожному зі стовпців (6 і 9). Виходить, нижня ціна гри $\alpha = \max(1;2) = 2$, а верхня ціна гри $\beta = \min(6;9) = 6$. Оскільки $\alpha = 2 \neq \beta = 6$, то розв'язком гри є змішані оптимальні стратегії, а ціна гри v знаходиться в межах $2 \le v \le 6$.

Використовуючи алгебраїчний метод знайдемо змішані стратегії гравців та ціну гри. За формулами:

$$u_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{2-6}{1-9-6+2} = \frac{1}{3};$$

$$u_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{1-9}{1-9-6+2} = \frac{2}{3};$$

$$z_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{2-9}{1-9-6+2} = \frac{7}{12};$$

$$z_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{1-6}{1-9-6+2} = \frac{5}{12};$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{1 \cdot 2 - 9 \cdot 6}{1-9-6+2} = \frac{13}{3}.$$

Тоді змішані стратегії гравців $U = (\frac{1}{3};\frac{2}{3})$, $Z = (\frac{7}{12};\frac{5}{12})$ і ціна гри $v = \dfrac{13}{3}$.

Приклад 7. Знайти розв'язок гри, що задана матрицею $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, і дати геометричну інтерпретацію цього розв'язку.

Розв'язування

Насамперед перевіримо наявність сідлової точки в даній матриці. Для цього знайдемо мінімальні елементи в кожному з рядків (3 і 4) і максимальні елементи в кожному зі стовпців (6 і 8). Виходить, нижня ціна гри $\alpha = \max(3;4) = 4$, а верхня ціна гри $\beta = \min(6;8) = 6$. Оскільки $\alpha = 4 \neq \beta = 6$, то розв'язком гри є змішані оптимальні стратегії, а ціна гри v знаходиться в межах $4 \le v \le 6$.

Припустимо, що для гравця A стратегія задається вектором $U=(u_1;u_2)$. Тоді на підставі теореми 4 при застосуванні гравцем B чистої стратегії B_1 чи B_2 гравець A одержить середній виграш, що дорівнює ціні гри, тобто

$$3u_1^*+6u_2^*=v \quad (\textit{при стратегії } B_1),$$

$$8u_1^*+4u_2^*=v \quad (\textit{при стратегії } B_2).$$

Крім двох записаних рівнянь відносно u_1^* і u_2^* додамо рівняння, що пов'язує частоти u_1^* і u_2^*: $u_1^*+u_2^*=1$. Розв'язуємо отриману систему трьох рівнянь із трьома невідомими методом Крамера:

$$\begin{cases}3u_1^*+6u_2^*-v=0,\\ 8u_1^*+4u_2^*-v=0,\\ u_1^*+u_2^*=1.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&6&-1\\8&4&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&6&-1\\5&-2&0\\1&1&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}5&-2\\1&1\end{vmatrix}=-(5+2)=-7;$$

$$\Delta_{u_1^*}=\begin{vmatrix}0&6&-1\\0&4&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&-1\\4&-1\end{vmatrix}=-6+4=-2;$$

$$\Delta_{u_2^*}=\begin{vmatrix}3&0&-1\\8&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&-1\\8&-1\end{vmatrix}=-(-3+8)=-5;$$

$$\Delta_v=\begin{vmatrix}3&6&0\\8&4&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&6\\8&4\end{vmatrix}=12-48=-36.$$

Обчислимо $u_1^*=\dfrac{\Delta_{u_1^*}}{\Delta}=\dfrac{2}{7}$; $u_2^*=\dfrac{\Delta_{u_2^*}}{\Delta}=\dfrac{5}{7}$; $v=\dfrac{\Delta_v}{\Delta}=\dfrac{36}{7}$.

Знайдемо тепер оптимальну стратегію для гравця B. Нехай стратегія для даного гравця задається вектором $Z=(z_1,z_2)$. Тоді

$$\begin{cases}3z_1^*+8z_2^*=36/7,\\ 6z_1^*+4z_2^*=36/7,\\ z_1^*+z_2^*=1.\end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, що складена з будь-яких двох рівнянь, узятих з останньої системи, одержимо $z_1^*=3/7$, $z_2^*=4/7$. Отже, розв'язком гри є змішані стратегії $U^*=(2/7;\ 5/7)$ і $Z^*=(3/7;\ 4/7)$, а ціна гри $v=36/7$.

Дамо тепер геометричну інтерпретацію розв'язку даної гри. Для цього на площині uOz введемо систему координат і на осі Ou відкладемо відрізок одиничної довжини A_1A_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію $U=(u_1;u_2)=(u_1,1-u_1)$ (рис. 5). Зокрема, точці $A_1(0;1)$ відповідає стратегія A_1, точці A_2 (1; 0) – стратегія A_2 і т. д.

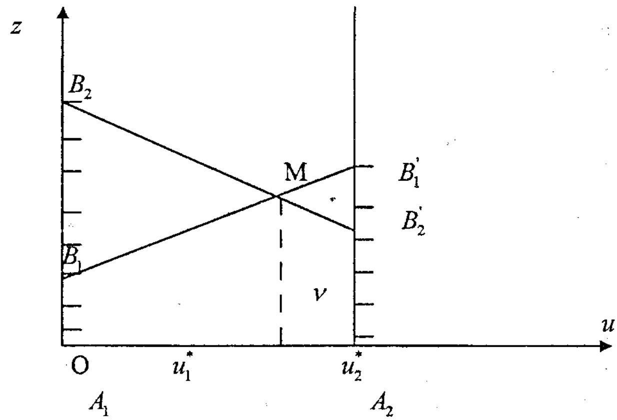

Рисунок 5 – Геометрична інтерпретація задачі

У точках A_1 і A_2 поставимо перпендикуляри і на отриманих прямих будемо відкладати виграш гравців. На першому перпендикулярі (у даному випадку він збігається з віссю Oz) відкладемо виграш гравця A при стратегії A_1, а на другому – при стратегії A_2. Якщо гравець A застосовує стратегію A_1, то його виграш при стратегії B_1 гравця B дорівнює 3, а при стратегії B_2 він дорівнює 8. Числам 3 і 8 на осі Oz відповідають точки B_1 і B_2.

Якщо ж гравець A застосовує стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 гравця B дорівнює 6, а при стратегії B_2 він дорівнює 4. Ці два числа визначають дві точки B_1' і B_2' на перпендикулярі, що поставлений у точці A_2. З'єднуючи між собою точки B_1 і B_1', B_2 і B_2', одержимо дві прямі, відстань до яких від осі Ou визначає середній виграш при будь-якому сполученні відповідних стратегій. Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізка B_1B_1' до осі Ou визначає середній виграш v_1 при будь-якому сполученні стратегій A_1 і A_2 (з частотами u_1 і u_2) і стратегії B_1 гравця B. Ця відстань дорівнює $3u_1+6u_2=v_1$. Аналогічно, середній виграш при застосуванні стратегії B_2 визначається ординатами точок, що належать відрізку B_2B_2'.

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній B_1MB_2', визначають мінімальний виграш гравця A при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці M; отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $U^* = (u_1^*; u_2^*)$, а її ордината дорівнює ціні гри v. Координати точки M знаходимо як координати точки перетинання прямих B_1B_1' і B_2B_2'. Відповідні три рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 3u_1^* + 6u_2^* = v, \\ 8u_1^* + 4u_2^* = v, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему рівнянь, одержуємо $u_1^* = 2/7; u_2^* = 5/7; v = 36/7$. Аналогічно знаходиться оптимальна стратегія для гравця B. Для її визначення маємо рівняння

$$\begin{cases} 6z_1^* + 4z_2^* = 36/7, \\ z_1^* + z_2^* = 1, \end{cases}$$

або $z_1^* = 3/7, z_2^* = 4/7$.

Отже, розв'язком гри є змішані стратегії U^* = (2/7; 5/7) і Z^* = (3/7; 4/7), а ціна гри v = 36/7. До такого висновку ми прийшли і вище.

Приклад 8. Знайти розв'язок гри, що визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язування

Складемо двоїсту пару задач лінійного програмування: пряма задача: знайти максимум функції $F = x_1 + x_2 + x_3$ при умовах

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1, \\ \qquad 2x_2 + 3x_3 \le 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 1, \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0; \end{cases}$$

двоїста задача: знайти мінімум функції $F^* = y_1 + y_2 + y_3$

при умовах

$$\begin{cases} 2y_1 \qquad + y_3 \geq 1, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1, \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Знаходимо оптимальні плани прямої і двоїстої задач.

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4 x_5 x_6	2 0 1	1 2 1	4 3 2	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1 1 1
Δ_j	-1	-1	-1	0	0	0	0
$X^{(1)} = (0;0;0;1;1;1)$							
x_1 x_5 x_6	1 0 0	1/2 2 1/2	2 3 0	1/2 0 -1/2	0 1 0	0 0 1	1/2 1 1/2
Δ_j	0	-1/2	1	1/2	0	0	1/2
$X^{(2)} = (1/2;0;0;0;1;1/2)$							
x_1 x_2 x_6	1 0 0	0 1 0	5/4 3/2 -3/4	1/2 0 -1/2	-1/4 1/2 -1/4	0 0 1	1/4 1/2 1/4
Δ_j	0	0	7/4	1/2	1/4	0	3/4
$X^{(3)} = (1/4;1/2;0;0;0;1/4)$							

З таблиці видно, що вихідна задача має оптимальний план $X^* = (1/4;1/2;0)$, двоїста задача – оптимальний план $Y^* = (1/2;1/4;0)$. Отже, ціна гри $v = \dfrac{1}{(1/4)+(1/2)} = \dfrac{4}{3}$, а оптимальні стратегії гравців

$$u_1^* = v \cdot y_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}; \quad u_2^* = v \cdot y_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3};$$

$$z_1^* = v \cdot x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}; \quad z_2^* = v \cdot x_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Отже, $U^* = (2/3;1/3;0)$; $Z^* = (1/3;2/3;0)$.

Приклад 9. Побудувати гру, що визначається даною парою двоїстих задач: пряма задача:

$$F = x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0;$$

двоїста задача:

$$F^* = 4y_1 + 9y_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \ge 1, \\ y_1 + 3y_2 \ge 3, \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Розв'язування

Тут

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad B^T = (4 \quad 9); \quad C = (1;3), \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, вихідній симетричній парі двоїстих задач можна поставити у відповідність матричну гру, що визначається матрицею

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -9 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Приклад 10. Знайти найбільше та найменше значення цільової функції для даної задачі нелінійного програмування

$$F = -x_1^2 + 16x_1 + x_2 - 3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 11x_2 \le 33, \\ 4x_1 - 5x_2 \ge 20, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування

1. Оскільки число невідомих задачі дорівнює двом, то розв'язок задачі можна знайти, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Для цього перш за все побудуємо многокутник розв'язків задачі. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $3x_1 + 11x_2 = 33$, яка проходить через точки (0;3) та (11;0);

2) l_2: $4x_1 - 5x_2 = 20$, яка проходить через точки (0;-4) та (5;0);

3) $l_3: x_1 = 0$;

4) l_4: $x_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис. 6).

Отже, допустимою областю D є трикутник ВСК, який зображено на рис. 6.

2. Надамо цільовій функції F деяке стале значення h:

$$-x_1^2 + 16x_1 + x_2 - 3 = h,$$

$$x_2 = x_1^2 - 16x_1 + 3 + h,$$

$$x_2 = (x_1 - 8)^2 - 64 + 3 + h = (x_1 - 8)^2 - 61 + h.$$

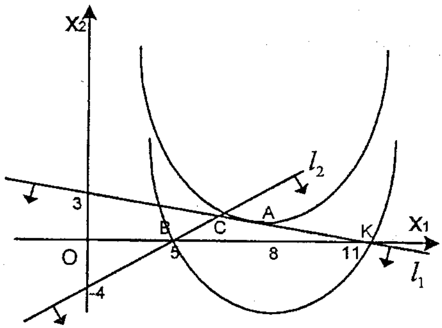

Рисунок 6 – Область допустимих розв'язків

3. Найбільшого значення функція F набуває у точці A, яка є точкою дотику прямої l_1 і параболи. Координати точки A є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 = x_1^2 - 16x_1 + 3 + h \\ 3x_1 + 11x_2 = 33. \end{cases}$$

$$3x_1 + 11(x_1^2 - 16x_1 + 3 + h) = 33$$

$$3x_1 + 11(x_1^2 - 16x_1 + 3 + h) = 33$$

$$11x_1^2 - 173x_1 + 33 + 11h = 33$$

$$11x_1^2 - 173x_1 + 11h = 0$$

$$x_1 = \frac{173 \pm \sqrt{173^2 - 4 \cdot 11 \cdot h}}{22}; \quad 173^2 - 4 \cdot 11 \cdot h = 0.$$

$$x_1 = \frac{173}{22}.$$

Тоді $3 \cdot \frac{173}{22} + 11x_2 = 33$, $x_2 = \frac{207}{242}$. Отже, точка A має координати: $x_1 = \frac{173}{22}$; $x_2 = \frac{207}{242}$. Тоді $F_{\max} = F(A) = h = \frac{173^2}{4 \cdot 121} = \frac{29929}{484}$.

4. Знайдемо координати точок B і K: $B(5;0)$ і $K(11;0)$

$F(B) = -25 + 80 - 3 = 52,$

$F(K) = -121 + 176 - 3 = 52.$

$F_{\min} = 52 \quad \textit{в т.} B \quad \textit{і} \quad \textit{т.} K.$

Приклад 11. Знайти мінімальне і максимальне значення функції:

$F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

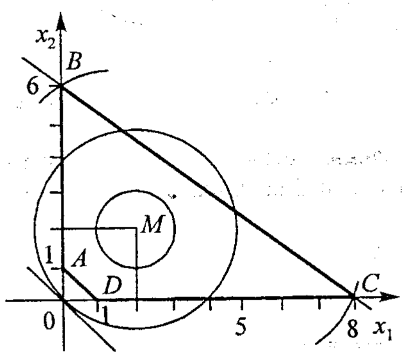

Рисунок 7 – Область допустимих розв’язків

Розв’язання

Область допустимих розв’язків утворює чотирикутник $ABCD$ (рис. 7). Геометрично цільова функція являє собою коло з центром у точці $M(2; 2)$, квадрат радіуса якого $R^2 = Z$. Це означає, що її значення буде збільшуватися (зменшуватися) зі збільшенням (зменшенням) радіуса кола. Проведемо з точки M кола різних радіусів. Функція F має два локальних максимуми: точки B (0; 6) і C (8; 0). Обчислимо значення функціонала в цих точках:

$$F(B)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2=(0-2)^2+(6-2)^2=4+16=20,$$

$$F(C)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2=(8-2)^2+(0-2)^2=36+4=40.$$

Оскільки $F(C)>F(B)$, то точка C (8; 0) є точкою глобального максимуму.

Очевидно, що найменший радіус $R=0$, тоді:

$R^2=0=Z=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=2$. Тобто точка M є точкою мінімуму, оскільки їй відповідає найменше можливе значення цільової функції.

Зазначимо, що в даному разі точка, яка відповідає оптимальному плану задачі (мінімальному значенню функціонала), знаходиться всередині багатокутника допустимих розв'язків, що в задачах лінійного програмування неможливо.

Приклад 12.Знайти мінімальне значення функції: $F=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2$ за умов:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 8, \\ x_1+x_2 \ge 12, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

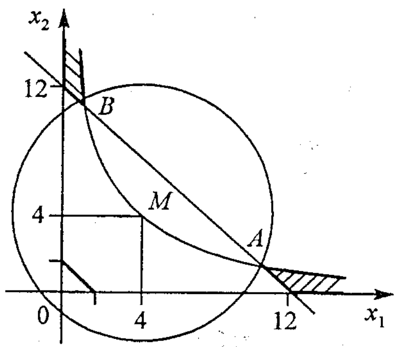

Рисунок 8 – Область допустимих розв'язків

Розв'язування

У даному прикладі множина допустимих розв'язків складається з двох окремих частин, необмежених зверху (рис. 8). Цільова функція аналогічно попередньому випадку є колом з центром у точці M(4; 4). Функція F має два локальних мінімуми: в точці $A\,(x_1 \approx 11{,}29; x_2 \approx 0{,}71)$, і в точці $B\,(x_1 \approx 0{,}71; x_2 \approx 11{,}29)$.

Значення функціонала в цих точках однакове і дорівнює:

$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 64$.

Отже, маємо два альтернативні оптимальні плани.

Даний приклад ілюструє ще одну особливість задач нелінійного програмування: на відміну від задач лінійного програмування багатогранник допустимих розв'язків задачі нелінійного програмування не обов'язково буде опуклою множиною.

Приклад 13. Знайти умовний екстремум функції $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Розв'язування

Складемо функцію Лагранжа:

$$F(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Маємо $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y, \quad \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5.$

Система прийме вигляд

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Система має два розв'язки: $x_1 = -1,\ y_1 = -2,\ \lambda_1 = \dfrac{1}{2};\ x_2 = 1,\ y_2 = 2,\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Дослідимо дані точки на екстремум. Для цього обчислимо:

$\varphi_x' = 2x,\ \varphi_y' = 2y,\ \varphi_x'(-1,-2) = -2,\ \varphi_y'(-1,-2) = -4,\ F_{xx}'' = 1,\ F_{yy}'' = 1,\ F_{xy}'' = 0$ якщо $\lambda = \dfrac{1}{2}$; тоді відповідно,

$\Delta = -\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 20 > 0,$ тобто функція має умовний мінімум в точці $P_1(-1,-2)$. Аналогічно для точки $P_2(1,2)$ $\Delta = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -20 < 0,$

тобто, $P_2(1,2)$ - точка умовного максимуму.

3 ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

ВАРІАНТ № 1

1.Розв'язний рядок при двоїстому симплекс-методі вибирають за:
а) найбільшим за абсолютною величиною від'ємним вільним членом системи обмежень;
б) найменшим за абсолютною величиною від'ємним вільним членом системи обмежень;
в) найбільшим додатним вільним членом системи обмежень;
г) найменшим за додатним вільним членом системи обмежень;
д) жодна відповідь неправильна.

2. За умов даної задачі скласти функцію Лагранжа та знайти частинні похідні: $F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2 \to \min$ при обмеженні: $2x_1+3x_2=10$.

а)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1+3x_2),$$
$$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2$$

б)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2-\lambda(2x_1+3x_2),$$
$$F'_{x_1}=(2x_1-1)-2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2$$

в)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1-3x_2),$$
$$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+\lambda,$$
$$F'_{x_2}=(3x_2-2)+\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2$$

г)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(10-2x_1-3x_2),$$
$$F'_{x_1}=(2x_1-1)-2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)-3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=10-2x_1-3x_2$$

д) інша відповідь.

3. Знаходження розв'язку задачі цілочисельного програмування методом Гоморрі починають з:
а) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі;
б) визначення двоїстим симплекс-методом оптимального розв'язку задачі;

в) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі без врахування умови цілочисельності змінних;
г) інша відповідь.

4. Під час зведення задач дробово-лінійного програмування до задач лінійного програмування використовують заміну:
а) $x_1 = y_1 / y_2$, знаменник цільової функції, якщо він додатний, покладають рівним $1 / y_2$;
б) $x_1 = y_2 / y_1$, знаменник цільової функції, якщо він додатний, покладають рівним $1 / y_1$;
в) $x_1 = y_1 / y_2$, знаменник цільової функції покладають рівним $1 / y_2$;
г) $x_1 = y_1 - y_2$, знаменник цільової функції покладають рівним $1 / y_2$;
д) жодної правильної відповіді.

5.Число α називається нижньою ціною гри або максіміном, якщо:
а) $\alpha = \max\limits_j \left(\min\limits_i a_{ij} \right)$; б) $\alpha = \max\limits_i \left(\min\limits_j a_{ij} \right)$; в) $\alpha = \min\limits_i \left(\max\limits_j a_{ij} \right)$;
г) $\alpha = \min\limits_i \left(\min\limits_j a_{ij} \right)$; д) інша відповідь.

6. Гра називається грою із сідловою точкою, якщо:
а) $\alpha < \beta$; б) $\alpha > \beta$; в) $\alpha = \beta$; г) $\alpha \geq \beta$; д) інша відповідь.

7. Визначте і допишіть якої операції не вистачає у алгоритмі розв'язування задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа:
- складемо функцію Лагранжа;
- знайдемо змінні x_1, x_2;
- знайдемо λ;
- розрахуємо оптимальну функцію мети;
- перевіримо рівняння обмеження;
- дослідження на min і max.

8. Ознакою відсутності розв'язку задачі ЦП є:
а) наявність в таблиці хоча б 1 рядка із цілими вільними членами a_{ij} і дробовими значеннями b_i;
б) відсутність в таблиці хоча б 1 рядка із цілими вільними членами a_{ij} і дробовими значеннями b_i;
в) немає правильної відповіді;
г) наявність в таблиці хоча б 1 рядка із дробовими вільними членами a_{ij} і дробовими значеннями b_i;

9. Визначити базисні невідомі та записати початковий псевдорозв'язок, знайти розв'язний рядок та розв'язний елемент

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
	1	-12	0	-5	0	-8
	0	4	1	8	0	-6
	0	-1	0	-2	1	-7
Δ_j	0	2	0	4	12	34

а) x_1, x_2, x_3, $X=(-8;-6;-7)$; другий рядок, $a_{23}=1$;

б) x_1, x_4, x_3, $X=(-6;-8;0;-7;0)$; перший рядок, $a_{14}=-5$;

в) x_1, x_3, x_5, $X=(-8;0;-6;0;-7)$; перший рядок, $a_{12}=-12$;

г) жодної правильної відповіді

10. Скласти нерівність Гоморрі для даного рядка симплекс-таблиці:

$$0x_1+1x_2-\frac{2}{5}x_3-\frac{1}{4}x_4=\frac{15}{2}$$

а) $\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4\geq\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4\leq\frac{1}{2}$;

б) $\frac{2}{5}x_3+\frac{2}{4}x_4\geq\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4\geq-\frac{1}{2}$; д) інша відповідь.

11.Знайти максимальне та мінімальне значення функції:

$Z=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$

за умов:

$$\begin{cases} x_1+x_2\geq 1; \\ 3x_1+4x_2\leq 24. \end{cases}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$

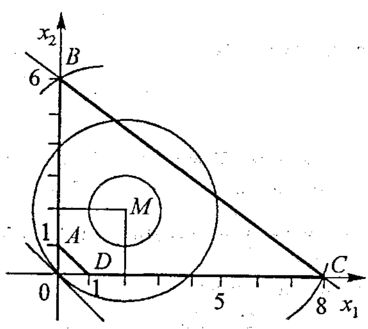

Рисунок 9 – Геометрична інтерпретація задачі

а) $F_{\max}=40$, $F_{\min}=0$; б) $F_{\max}=45$, $F_{\min}=10$; в) $F_{\max}=0$, $F_{\min}=-40$; г) жодної правильної відповіді; д) $F_{\max}=0$, $F_{\min}=-30$.

12. Скласти математичну модель задачі: Фермеру для удобрення земельної ділянки необхідно придбати 107 кг добрив. Він може купити добрива в упаковках по 35 кг вартістю 14 ум. од. або по 24 кг вартістю 12 ум. од. Метою фермера є закупівля не менше, ніж 107 кг добрив з мінімальними витратами. Причому потрібно купувати або цілу упаковку, або не купувати її зовсім, бо частину упаковки придбати неможливо.

а) $\min F = 14x_1 + 12x_2$;
$35x_1 + 24x_2 \le 107$;
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2$ – цілі числа.

б) $\max F = 14x_1 + 12x_2$;
$35x_1 + 24x_2 \le 107$;
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2$ – цілі числа.

в) $\min F = 14x_1 + 12x_2$
$35x_1 + 24x_2 \ge 107$;
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2$ – цілі числа;

г) $\min F = 14x_1 + 12x_2$
$35x_1 + 24x_2 \ge 107$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

13. Вкажіть методи, які використовуються при розв'язанні задач цілочисельного програмування:
а) метод множників Лагранжа;
б) метод гілок та меж;
в) метод Фогеля;
г) метод потенціалів;
д) метод Гоморрі.

14. Кількість множників Лагранжа повинна дорівнювати...
а) кількості рівнянь обмежень;
б) кількості рівнянь обмежень + цільова функція;
в) сумі рівнянь обмежень та часткових похідних від них;
г) кількості часткових похідних від рівнянь обмежень + цільова функція.

15. Для заданої платіжної матриці $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ визначити нижню чисту ціну гри.
а) 2; б) 1; в) -5; г) -1; д) жодної правильної відповіді.

16. Нехай цільова функція задачі дробово-лінійного програмування задана рівнянням $\max\ Z = \dfrac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2}$. Визначити кутовий коефіцієнт нахилу прямої, що виражає цільову функцію:

а) $k(Z) = \dfrac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}$ б) $k(Z) = -\dfrac{c_2 - Zd_1}{c_1 - Zd_2}$ в) $k(Z) = -\dfrac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}$

г) $k(Z) = -\dfrac{c_1 - Zd_2}{c_2 - Zd_1}$ д) жодної правильної відповіді

17. Цільова функція задачі дробово-лінійного програмування має вигляд : $F = \frac{-x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to \max$. Звести її до лінійного вигляду.

а) $F = y_1 - 2$; б) $F = -3y_1 - 2$;

в) $F = -3y_1 + 2$; г) жодної правильної відповіді

18. Теорія гри – це:

а) розділ сучасної математики, яка вивчає математичні моделі так званих конфліктних ситуацій;

б) ситуації, при яких інтереси учасників протилежні;

в) ситуації, при яких інтереси учасників не збігаються, хоча і не протилежні;

г) правильні відповіді: а), б), в).

19. Яка задача може бути розв'язана методом Жордана-Гаусса:

а) задача лінійного програмування;

б) задача нелінійного програмування;

в) задача квадратичного програмування;

г) задача геометричного програмування.

20. У задачах нелінійного програмування розв'язок шукають:

а) на вершинах множини допустимих розв'язків;

б) на всій множині допустимих розв'язків;

в) тільки на границі допустимої області.

21. Матрична гра завжди має розв'язок:

а) якщо кожний із гравців дотримується лише чистої стратегії;

б) якщо кожний із гравців вибирає різні стратегії;

в) у разі послідовних поступок гравців.

22. Чи завжди можна знайти цілочислове рішення задачі лінійного програмування?

а) так;

б) ні

23. Вважаючи, що $x_1, x_2 \geq 0 \; i \; x_1, x_2 - цілі$, звести задачу цілочисельного програмування до канонічного вигляду

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

а) $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$, $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$

б) $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$, $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$

в) $F = -4x_1 - 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$

$F = -4x_1 - 3x_2 \to \min$ $\quad$ $F = -4x_1 - 3x_2 \to \min$

г) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$ $\quad$ д) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 15 \end{cases}$

24. Знайти нижню та верхню границю виграшу гри, що визначається даною матрицею $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

а) 5 і 9; б) 6 і 9; в) 5 і 6; г) 6 і 6; д) інша відповідь.

25. Скласти пару двоїстих задач, що відповідає даній матричній грі, яка визначається матрицею $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$F = x_1 + x_2 \to \max$ $\quad$ $f = y_1 + y_2 \to \min$

а) $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \le 1, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 8y_1 + 5y_2 \ge 1, \\ 4y_1 + 6y_2 \ge 1, \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

$F = x_1 + x_2 \to \max$ $\quad$ $f = y_1 - y_2 \to \min$

б) $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \ge 1, \\ 5x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 8y_1 + 5y_2 \ge 1, \\ 4y_1 + 6y_2 \ge 1, \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

$F = x_1 + x_2 \to \max$ $\quad$ $f = y_1 + y_2 \to \min$

в) $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \ge 1, \\ 5x_1 + 6x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 8y_1 + 5y_2 = 1, \\ 4y_1 + 6y_2 = 1, \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

$F = x_1 - x_2 \to \max$ $\quad$ $f = y_1 + y_2 \to \min$

г) $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \le 1, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 8y_1 + 5y_2 \ge 1, \\ 4y_1 + 6y_2 \ge 1, \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

д) інша відповідь.

26. Розв'язок гри знаходиться геометричним методом, якщо матриця гри має розмірність:

а) 2×2; б) 3×3; в) 5×3; г) 3×4; д) інша відповідь.

27. Дослідження – це піддавати науковому:

а) вивченню;

б) аналізу;

в) дослідженню причини чого-небудь;

г) правильні відповіді: а), б), в).

28. Застосування методів дослідження операцій передбачає:

а) побудову економічних та математичних моделей для задач прийняття рішень в складних ситуаціях, або в умовах невизначеності;

б) вивчення взаємозв'язків, які визначають потім ухвалення рішень, та установлення критеріїв ефективності, що дозволяють оцінювати перевагу того або іншого варіанта дії;

в) правильні відповіді: а) і б).

29. Модель операцій це:

а) досить точний опис операції за допомогою математичного апарату (різноманітного роду функцій, управління, систем управління і т. д.)

б) умовний образ будь-якого об'єкта, приблизно відображаючи цей об'єкт на папері;

в) приблизне відображення об'єкта у вигляді макета.

30. При двоїстому симплекс-методі можна перейти до нового псевдорозв'язку, якщо:

а) у псевдорозв'язку, що визначається базисом, є від'ємні числа $b_i > 0$, такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij} < 0$;

б) у псевдорозв'язку, що визначається базисом, є від'ємні числа $b_i < 0$, такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij} < 0$;

в) у псевдорозв'язку, що визначається базисом, є від'ємні числа $b_i > 0$, такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij} > 0$.

31. Дробовою частиною числа a називається:

а) найменше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;

б) найбільше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;

в) найменше від'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;

г)жодної правильної відповіді.

32. Якщо в оптимальному розв'язку задачі дробові значення приймають декілька змінних, то нерівність Гоморрі визначається:

а) найменшою дробовою частиною;

б) найбільшою дробовою частиною;

в) не має значення.

33. Знайти точку, що є розв'язком задачі ЦП, зображеної на рисунку:

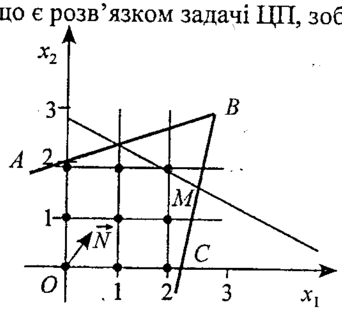

Рисунок 10 – Геометрична інтерпретація задачі

а) $x_1 = 1;\ x_2 = 2$; б) $x_1 = 2;\ x_2 = 2$; в) $x_1 = 2;\ x_2 = 1$; г) $x_1 = 1;\ x_2 = 1$;
д) інша відповідь.

34. Розв'язний елемент при двоїстому симплекс-методі вибирають за:

а) $\min\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – від'ємні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–»;

б) $\max\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – від'ємні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–»;

в) $\min\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – додатні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–».

35. Якщо $x_1 + x_2 = 4, 3x_1 + 5x_2 = 18$, то за методом множників Лагранжа:

а) $\lambda_1 = x_1 + x_2 - 4, \quad \lambda_2 = 3x_1 + 5x_2 - 18$;

б) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 - 4, \quad \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18$;

в) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 + 4, \quad \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18$;

г) правильної відповіді немає.

36. Алгебраїчний метод розв'язування ігор використовується:

а) для гри з платіжною матрицею, яка не має сідлової точки;

б) для гри з платіжною матрицею, яка має сідлову точку;

в) для гри з довільною матрицею.

37. Використовуючи метод множників Лагранжа, знайти точку, в якій досягається екстремум функції:

$$F = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{при} \quad x_1 + x_2 = 1$$

а) $x = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,5 \end{pmatrix}$; б) $x = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$; в) $x = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$; г) $x = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \end{pmatrix}$;

д) інша відповідь.

38. Чи існує універсальний метод розв'язання задач нелінійного програмування?

а) так;

б) ні.

39. Скільки мінімальних значень має функція: $Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$

при умовах $\begin{cases} x_1 x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 12. \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

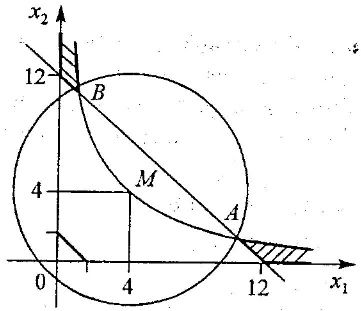

Рисунок 11 – Геометрична інтерпретація задачі

а) одне мінімальне значення; б) два мінімальних значення; в) безліч; г) жодного.

40. Напишіть формулу функції Лагранжа.

а) $F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]$

б) $F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[b_i+g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]$

в) $F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)-\sum\lambda_i\left[b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]$

г) $F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]$

д) інша відповідь.

ВАРІАНТ № 2

1. Розв'язний елемент при двоїстому симплекс-методі вибирають за:

а) $\min\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – від'ємні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–»;

б) $\max\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – від'ємні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–»;

в) $\min\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – додатні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–».

2. Дослідження операцій – це наука, яка займається:

а) аналізом політичної ефективності військових операцій;

б) вивченням правильності виконання медичних операцій;
в) з'ясуванням законності фінансових операцій;
г) науковим обґрунтуванням прийняття управлінських рішень.

3. Якщо $x_1 + x_2 = 4, 3x_1 + 5x_2 = 18$, то за методом множників Лагранжа:

а) $\lambda_1 = x_1 + x_2 - 4, \quad \lambda_2 = 3x_1 + 5x_2 - 18;$

б) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 - 4, \quad \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18;$

в) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 + 4, \quad \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18;$

г) правильної відповіді немає.

4.Число β називається верхньою ціною гри або мінімаксом, якщо:

а) $\beta = \min\limits_j\left(\max\limits_i a_{ij}\right)$; б) $\beta = \min\limits_i\left(\max\limits_j a_{ij}\right)$; в) $\beta = \max\limits_j\left(\min\limits_i a_{ij}\right)$; г) $\beta = \min\limits_j\left(\min\limits_i a_{ij}\right)$; д) інша відповідь.

5.Чи використовується метод Гоморрі при розв'язуванні задач НЛП?
а) так;
б) ні.

6.Чи існує універсальний метод розв'язання задач нелінійного програмування?
а) так;
б) ні.

7. Визначити базисні невідомі та записати початковий псевдорозв'язок, знайти розв'язний рядок та розв'язний елемент

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
	1	-1	0	0	-6	-1
	0	-4	1	0	-2	6
	0	-7	0	1	1	-7
Δ_j	0	3	0	0	9	14

а) x_1, x_2, x_3, X =(-7;6;-1;0); другий рядок, $a_{23} = 1$;
б) x_1, x_3, x_4, X =(-1;0;6;-7;0); третій рядок, $a_{32} = -7$;
в) x_1, x_3, x_5, X =(6;0;-1;0;-7); перший рядок, $a_{15} = -6$;
г) жодної правильної відповіді

8. У чому полягає основна ідея методу множників Лагранжа:
а) у переході від задачі на умовний екстремум до задачі відшукання безумовного екстремуму деякої побудованої функції Лагранжа;
б) необхідно щоб існував вектор;
в) щоб існували обмеження, які б визначали точку мінімуму.

9. Скільки мінімальних значень має функція: $Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$

при умовах $\begin{cases} x_1 x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 12. \end{cases}$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

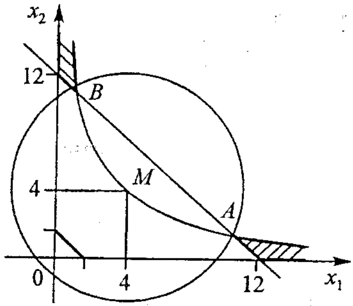

Рисунок 12– Геометрична інтерпретація задачі

а) одне мінімальне значення; б) два мінімальних значення; в) безліч; г) жодного.

10. Скласти математичну модель задачі: Сільськогосподарське підприємство планує відкрити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн і можливість придбати устаткування двох типів: А і В. Техніко-економічну інформацію стосовно одиниці кожного виду устаткування подано в табл.:

Показник	Устаткування		Ресурс
	А	В	
Вартість, тис. грн	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн/рік	350	150	—

а) $\max Z = 350x_1 + 150x_2$,
$25x_1 + 10x_2 \le 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$,

б) $\max Z = 350x_1 + 150x_2$,
$25x_1 + 10x_2 \le 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, x_1 і x_2 — цілі числа.

в) $\min Z = 350x_1 + 150x_2$
$25x_1 + 10x_2 \ge 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$, x_1, x_2 — цілі числа;

г) $\max Z = 350x_1 + 150x_2$
$25x_1 + 10x_2 \ge 100$
$40x_1 + 20x_2 \ge 190$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

11. Скласти нерівність Гоморрі для даного рядка симплекс-таблиці:

$$1x_1 + 0x_2 - \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{4}x_4 = \frac{5}{2}$$

а) $\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4\geq\frac{1}{2}$; б) $-\frac{2}{5}x_3+\frac{2}{4}x_4\leq\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4\leq\frac{1}{2}$; г) $\frac{4}{5}x_3+\frac{1}{4}x_4\geq\frac{1}{2}$;

д) жодної правильної відповіді

12. Виберіть слова, яких не вистачає у визначенні: базисний розв'язок згідно з методом Жордана-Гаусса – це розв'язок, при якому ... змінні ...

а) базисні; б) небазисні; в) дорівнюють нулю; г) більше нуля; д) менше нуля; е) правильні відповіді б) і в).

13.Напишіть формулу функції Лагранжа.

а) $F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]$;

б) $F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[b_i+g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]$;

в) $F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)-\sum\lambda_i\left[b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]$;

г) $F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]$;

д) інша відповідь.

14. Використовуючи метод множників Лагранжа, знайти точку, в якій досягається екстремум функції:

$$F=x_1^2+x_2^2 \quad \text{при} \quad x_1+x_2=1$$

а) $x=\begin{pmatrix}0,25\\0,5\end{pmatrix}$; б) $x=\begin{pmatrix}0,5\\0,5\end{pmatrix}$; в) $x=\begin{pmatrix}0,5\\0,75\end{pmatrix}$; г) $x=\begin{pmatrix}0,5\\0,4\end{pmatrix}$.

15. Математична модель у дослідженні операцій – це:
а) рівняння чи система рівнянь, що описує залежність між наявними ресурсами і кінцевим результатом економічної діяльності;
б) спрощена копія реальної ситуації;
в) цільова функція і система обмежень.

16. Оптимальними є розв'язки:
а) які на ту, чи іншу думку переважають над іншими;
б) які мають більший прибуток;
в) які мають менші витрати

17. Процес управління переміщенням функції мети в оптимум – ознака задач:
а) лінійного програмування;
б) нелінійного програмування;
в) динамічного програмування;

г) цілочисельного програмування;
д) квадратичного програмування.

18. Нехай цільова функція задачі дробово-лінійного програмування задана рівнянням $F = \frac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min$. Визначити кутовий коефіцієнт нахилу прямої, що виражає цільову функцію:

а) $k(F) = \frac{4+F}{F-3}$; б) $k(F) = \frac{4-F}{F-3}$; в) $k(F) = \frac{4+F}{F+3}$; г) $k(F) = \frac{4+F}{3-F}$

19. Цільова функція задачі дробово-лінійного програмування має вигляд : $F = \frac{-2x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$. Звести її до лінійного вигляду.

а) $F = y_1 - 2$; б) $F = -\frac{7}{2}y_1 + \frac{3}{2}$; в) $F = \frac{-7y_1 + 3}{2}$; г) правильні відповіді б) і в).

20. Метод множників Лагранжа:
а) визначає двоїсті змінні;
б) дає розв'язок двоїстої нелінійної задачі;
в) дає змогу перейти до задачі безумовної оптимізації.

21. Метод Лагранжа застосовується для
а) ЗНП з обмеженнями типу $\geq$;
б) ЗНП без обмежень;
в) ЗНП із лінійними обмеженнями ;
г) ЗНП із обмеженнями будь-якого типу

22. При розв'язуванні задачі (max) двоїстим симплексом-методом для початкового значення цільової функції $Z_п$ і кінцевого значення $Z_к$ виконується співвідношення
а) $Z_п > Z_к$; б) $Z_п < Z_к$; в) $Z_п = Z_к$; г) $Z_п \leq Z_к$; д) жодної правильної відповіді.

23. Вважаючи, що $x_1, x_2 \geq 0$ *і* x_1, x_2 – *цілі*, звести задачу цілочисельного програмування до канонічного вигляду
$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \leq 11, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 17 \end{cases}$$

а) $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 = 17 \end{cases}$; б) $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 17 \end{cases}$; в) $F = -3x_1 - 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 17 \end{cases}$;

$F=-3x_1-2x_2\to\min$ $\quad$ $F=-3x_1-2x_2\to\min$

г) $\begin{cases}x_1+6x_2-x_3=11,\\5x_1+3x_2+x_4=17\end{cases}$; д) $\begin{cases}x_1+6x_2-x_3=11,\\5x_1+3x_2-x_4=17\end{cases}$.

24. Знайти нижню та верхню границю виграшу гри, що визначається даною матрицею $A=\begin{pmatrix}6 & 9\\10 & 7\end{pmatrix}$

а) 7 і 10; б) 6 і 7; в) 10 і 9; г) 7 і 9; д) інша відповідь.

25. Скласти пару двоїстих задач, що відповідає даній матричній грі, яка визначається матрицею $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\4 & 8\end{pmatrix}$

а) $F=x_1+x_2\to\min$ $\begin{cases}5x_1+3x_2\ge 1,\\4x_1+8x_2\le 1,\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$ $\quad$ $f=y_1+y_2\to\max$ $\begin{cases}5y_1+4y_2\ge 1,\\3y_1+8y_2\le 1,\\y_1,y_2\ge 0\end{cases}$

б) $F=x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}5x_1+3x_2\le 1,\\4x_1+8x_2\le 1,\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$ $\quad$ $f=y_1+y_2\to\min$ $\begin{cases}5y_1+4y_2\ge 1,\\3y_1+8y_2\ge 1,\\y_1,y_2\ge 0\end{cases}$

в) $F=x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}5x_1+3x_2=1,\\4x_1+8x_2\le 1,\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$ $\quad$ $f=y_1+y_2\to\min$ $\begin{cases}5y_1+4y_2\ge 1,\\3y_1+8y_2=1,\\y_1,y_2\ge 0\end{cases}$

г) $F=x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}5x_1+3x_2\ge 1,\\4x_1+8x_2\ge 1,\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$ $\quad$ $f=y_1+y_2\to\min$ $\begin{cases}5y_1+4y_2\le 1,\\3y_1+8y_2\le 1,\\y_1,y_2\ge 0\end{cases}$

26. Розв'язок гри знаходиться геометричним методом, якщо матриця гри має розмірність:
а) 4×4; б) 3×3; в) 5×3; г) $2\times n$; д) інша відповідь.

27. Операція – це:
а) будь-який управлінський захід, спрямований на досягнення цілі;
б) управлінська діяльність на виконання чого-небудь;
в) частка виробничої функції;
г) для лікаря, котрий розрізає, видаляє будь-який орган, щоб вилікувати людину.

28. Предметом дисципліни «Дослідження операцій» є :
а) вивчення будь-яких операцій в економіці;
б) моделі та методи системного аналізу, способи дослідження і оптимізації операцій;
в) аналіз операцій, які проводять менеджери підприємств

29. Ефективність операцій це:
а) ступінь її пристосованості до виконання завдання – кількісно передається у вигляді критерію ефективності – цільової функції;

б) прибуток від реалізації виробленої продукції, яку необхідно максимізувати;

в) сумарні витрати на перевезення й прийняття рішень в економіці;

г) облік всіх факторів, які впливають на розв'язок задач, взаємодія системи з навколишнім середовищем;

д) правильні відповіді а) і б).

30. За умов даної задачі скласти функцію Лагранжа та знайти частинні похідні: $F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2 \to \min$ при обмеженні: $2x_1+3x_2=10$.

а)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1+3x_2),$$
$$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2;$$

б)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2-\lambda(2x_1+3x_2),$$
$$F'_{x_1}=(2x_1-1)-2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2;$$

в)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1-3x_2),$$
$$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+\lambda,$$
$$F'_{x_2}=(3x_2-2)+\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2;$$

г)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1+3x_2),$$
$$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2;$$

д) інша відповідь.

31. Знайти точку, що є розв'язком задачі ЦП, зображеної на рисунку:

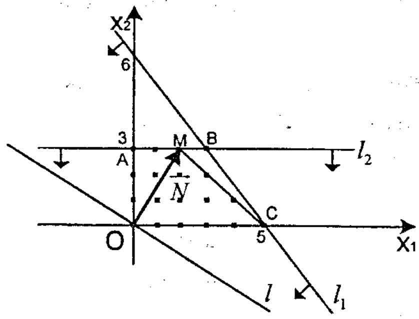

Рисунок 13 – Геометрична інтерпретація задачі

а) $x_1 = 1;\ x_2 = 2$; б) $x_1 = 2;\ x_2 = 2$; в) $x_1 = 2;\ x_2 = 3$; г) $x_1 = 1;\ x_2 = 1$; д) інша відповідь

32. Парна гра називається грою з нульовою сумою, якщо:
а) сума платежів дорівнює нулю;
б) якщо програш одного гравця дорівнює програшу другого;
в) якщо виграш одного гравця дорівнює виграшу другого;
г) якщо програш одного гравця дорівнює виграшу другого;
д) правильні відповіді а) і г).

33. Знайти мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при умовах

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases} \qquad x_1, x_2 \ge 0.$$

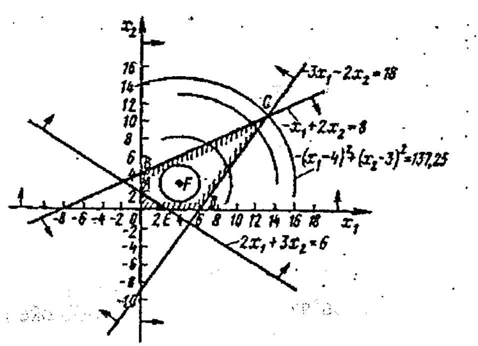

Рисунок 14 – Геометрична інтерпретація задачі а) (3;4), $F_{\min}=2$; б) (4;3), $F_{\min}=0$; в) (3;3), $F_{\min}=1$; г) (4;4), $F_{\min}=1$; д) інша відповідь.

34. Загальна цілочислова задача лінійного програмування записується так:

а) $\max(\min)\ F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$;

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\begin{Bmatrix}\le\\=\\\ge\end{Bmatrix}b_i\ \left(i=\overline{1,m}\right);$$

$x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,n}\right)$;

б) $\max(\min)\ F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$;

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\begin{Bmatrix}\le\\ \\\ge\end{Bmatrix}b_i\ \left(i=\overline{1,m}\right);$$

$x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,n}\right)$; x_j – цілі.

в) $\max\ F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\begin{Bmatrix}\le\\=\\\ge\end{Bmatrix}b_i;$$

x_j – цілі числа $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

г) $\max(\min)\ F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\begin{Bmatrix}\le\\=\\\ge\end{Bmatrix}b_i\ \left(i=\overline{1,m}\right);$$

$x_j\le 0$; x_j — цілі числа $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

д) інша відповідь

35. Дробовою частиною числа a називається:
а) найменше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;
б) найбільше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;
в) найменше від'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою.

36. Знаходження розв'язку задачі цілочисельного програмування методом Гоморрі починають з:
а) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі;
б) визначення двоїстим симплекс-методом оптимального розв'язку задачі;
в) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі без врахування умови цілочисельності змінних.

37. Для заданої платіжної матриці $\begin{pmatrix}4&2&3\\6&1&-1\\9&-2&-5\end{pmatrix}$ визначити нижню чисту ціну гри.
а) 2; б) 1; в) -5; г) -1; д) інша відповідь.

38. Знайти точку, що є розв'язком задачі ЦП, зображеної на рисунку:

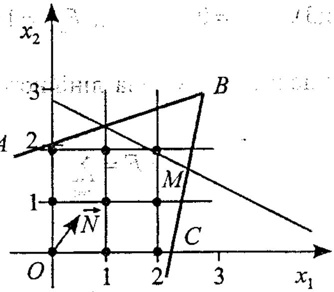

Рисунок 14 – Геометрична інтерпретація задачі

а) $x_1 = 1;\ x_2 = 2$; в) $x_1 = 2;\ x_2 = 1$; б) $x_1 = 2;\ x_2 = 2$; г) $x_1 = 1;\ x_2 = 1$; д) інша відповідь.

39. Нерівність Гоморрі має вигляд:

а) $f\left(a_{ij}^*\right)x_j \geq f\left(b_i^*\right)$, де a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці, $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_i^*\right)$ – дробові частини відповідних чисел;

б) $\sum_j f\left(a_{ij}^*\right)x_j \geq f\left(b_i^*\right)$, де a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці, $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_i^*\right)$ – дробові частини відповідних чисел;

в) $\sum_j f\left(a_{ij}^*\right)x_j \leq f\left(b_i^*\right)$, де a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці, $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_i^*\right)$ – дробові частини відповідних чисел.

40. Якщо в оптимальному розв'язку задачі дробові значення приймають декілька змінних, то нерівність Гоморрі визначається:

а) найменшою дробовою частиною;

б) найбільшою дробовою частиною;

в) не має значення.

ВАРІАНТ № 3

1. Псевдорозв'язок – це:

а) розв'язок системи лінійних рівнянь, що визначається базисом, для якого $\Delta_j \geq 0$, а серед компонентів даного розв'язку є тільки додатні числа;

б) розв'язок системи лінійних рівнянь, що визначається базисом, для якого $\Delta_j \leq 0$, а серед компонентів даного розв'язку є від'ємні числа;

в) розв'язок системи лінійних рівнянь, що визначається базисом, для якого $\Delta_j \geq 0$, а серед компонентів даного розв'язку є від'ємні числа.

2. Задачею цілочисельного програмування називається:
а) екстремальна задача, змінні якої приймають довільні значення;
б) екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілі значення;
в) екстремальна задача, змінні якої приймають лише додатні значення.

3. Виберіть правильну відповідь.
Якими методами розв'язуються задачі нелінійного програмування:
а) методом потенціалів;
б) симплекс-методом;
в) методом відсікаючих площин;
г) методом множників Лагранжа.

4. Використовуючи розв'язок пари двоїстих задач, розв'язок гри можна знайти за формулами $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$:

а) $u_i^* = y_i^* / \sum_{j=1}^{n} y_j^* = \nu y_i^*;\ z_j^* = x_j^* / \sum_{i=1}^{m} x_i^* = \nu x_j^*;\ \nu = 1 / \sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1 / \sum_{i=1}^{m} y_i^*;$

б) $u_i^* = y_i^* / \sum_{j=1}^{n} y_j^* = \nu y_i^*;\ z_j^* = x_j^* / \sum_{i=1}^{m} x_i^* = \nu x_j^*;\ \nu = 1 / \sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1 / \sum_{j=1}^{m} y_j^*;$

в) $u_i^* = y_i^* / \sum_{i=1}^{m} y_i^* = \nu y_i^*;\ z_j^* = x_j^* / \sum_{j=1}^{n} x_j^* = \nu x_j^*;\ \nu = 1 / \sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1 / \sum_{i=1}^{m} y_i^*.$

5. Для розв'язування яких задач ДО використовується метод множників Лагранжа?
а) тільки задач ЛП;
б) тільки задач НЛП;
в) тільки задач динамічного програмування;
г) задач всіх перелічених типів.

6. Визначити базисні невідомі та записати початковий псевдорозв'язок, знайти розв'язний рядок та розв'язний елемент

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
	-1	-1	0	0	1	2
	9	-4	1	0	0	7
	-2	-7	0	1	0	-7
Δ_j	0	5	0	0	0	10

а) x_1, x_2, x_3, $X=(-7;2;7;0;0)$; другий рядок, $a_{22}=-4$;
б) x_1, x_3, x_4, $X=(7;0;2;-7;0)$; перший рядок, $a_{11}=-1$;
в) x_5, x_3, x_4, $X=(0;0;7;-7;2)$; третій рядок, $a_{31}=-2$;
г) жодної правильної відповіді

7. Скласти нерівність Гоморрі для даного рядка симплекс-таблиці:

$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 1x_3 + 0x_4 = \frac{3}{2}$

а) $\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \geq \frac{1}{2}$;   б) $-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq \frac{1}{2}$;   в) $\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \leq \frac{1}{2}$;   г) $1x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}$;

д) жодної правильної відповіді

8. Нехай цільова функція задачі дробово-лінійного програмування задана рівнянням $\max\ Z = \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2}$. Визначити кутовий коефіцієнт нахилу прямої, що виражає цільову функцію:

а) $k(Z) = \frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}$;   б) $k(Z) = -\frac{c_2 - Zd_1}{c_1 - Zd_2}$;   в) $k(Z) = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}$;

г) $k(Z) = -\frac{c_1 - Zd_2}{c_2 - Zd_1}$; д) жодної правильної відповіді

9. Знайти точку, що є розв'язком задачі ЦП, зображеної на рисунку:

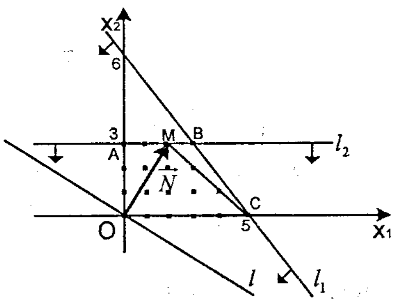

Рисунок 15 – Геометрична інтерпретація задачі

а) $x_1 = 1;\ x_2 = 2$;   в) $x_1 = 2;\ x_2 = 3$;

б) $x_1 = 2;\ x_2 = 2$;   г) $x_1 = 1;\ x_2 = 1$

10. Парна гра називається грою з нульовою сумою, якщо:

а) сума платежів дорівнює нулю;

б) якщо програш одного гравця дорівнює програшу другого;

в) якщо виграш одного гравця дорівнює виграшу другого;

г) якщо програш одного гравця дорівнює виграшу другого;

д) правильні відповіді а) і г).

11. Чи є наявність в таблиці хоча б одного рядка з дробовими величинами a_{ij} та вільним дробовим членом b_i при розв'язанні задач цілочисельного програмування ознакою відсутності розв'язку задачі?

а) так;   б) ні

12. Який метод розв'язання прямої задачі автоматично надає розв'язок для двоїстої задачі?
а) метод намірів і реалізацій;
б) симплекс-метод;
в) графоаналітичний метод;
г) метод множників Лагранжа.

13. Цільова функція задачі дробово-лінійного програмування має вигляд : $F = \dfrac{-2x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to \max$. Звести її до лінійного вигляду.
а) $F = -3y_1 - 1$; б) $F = -3y_1 + 1$; в) $F = 3y_1 + 1$; г) правильні відповіді б) і в).

14. Кількісна оцінка результатів гри називається:
а) програшем; б) виграшем; в) платежем; г) мінімаксом.

15. Для заданої платіжної матриці $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ визначити нижню чисту ціну гри.
а) 2; б)1; в)5; г)-2; д) інша відповідь.

16. Дослідження операцій – це :
а) наукова дисципліна, яка займається розробкою та практичним застосуванням методів найбільш ефективного управління різними організаційними системами;
б) застосування математичних методів у виробничому, транспортному та економічному процесах;
в) знайти оптимальну величину (розмір).

17. Стратегія – це:
а) спосіб застосування засобів та ресурсів, спрямованих на досягнення мети операції;
б) загальний, всебічний план досягнення цілі;
в) правильні відповіді: а) і б).

18. Чи використовується метод Гоморрі при розв'язуванні задач НЛП?
а) так;
б) ні.

19. Знайти максимальне значення функції $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ при умовах

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

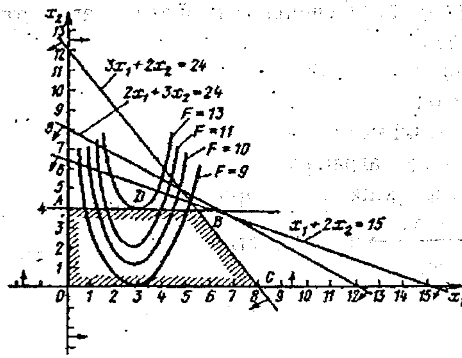

Рисунок 16 – Геометрична інтерпретація задачі

а) (3;4), $F_{\max}=13$; б) (4;3), $F_{\max}=31$; в) (3;3), $F_{\max}=12$; г) (4;4), $F_{\max}=12$; д) інша відповідь.

20. Під оптимальним рішенням при дослідженні операцій розуміють:

а) рішення, що приймає особа, яка відповідає за його наслідки;

б) оптимальне значення цільової функції на множині допустимих розв'язків;

в) оптимальний вибір засобів для досягнення поставленої мети.

21. Використовуючи метод множників Лагранжа, знайти точку, в якій досягається екстремум функції:

$$F = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{при} \quad x_1 + x_2 = 1$$

а) $x=\begin{pmatrix}0,25\\0,5\end{pmatrix}$; б) $x=\begin{pmatrix}0,5\\0,5\end{pmatrix}$; в) $x=\begin{pmatrix}0,5\\0,75\end{pmatrix}$; г) $x=\begin{pmatrix}0,5\\0,4\end{pmatrix}$; д) інша відповідь.

22. Під час розв'язування задачі лінійного програмування двоїстим симплексом-методом задача не має розв'язку, якщо розв'язний рядок містить

а) тільки додатні елементи;

б) тільки від'ємні елементи;

в) усі невід'ємні елементи;

г) усі недодатні елементи;

23. Вважаючи, що $x_1, x_2 \geq 0$ *і* x_1, x_2 *– цілі*, звести задачу цілочисельного програмування до канонічного вигляду

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 \leq 10, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 18 \end{cases}$$

$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$ $\quad$ $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$ $\quad$ $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

а) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 = 10, \\ 5x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + x_3 = 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 18 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - x_3 = 10, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 = 18 \end{cases}$

$F = -4x_1 - 3x_2 \to \min$ $\quad$ $F = -4x_1 - 3x_2 \to \min$

г) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + x_3 = 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 18 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + x_3 = 10, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 = 18. \end{cases}$

24. Знайти нижню та верхню границю виграшу гри, що визначається даною матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

а) 3 і4; б) 6 і 7; в) 4 і 6; г) 3 і 7; д) інша відповідь.

25. Скласти пару двоїстих задач, що відповідає даній матричній грі, яка визначається матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

а) $F = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ 3x_1 + 6x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f = y_1 + y_2 \to \min$ $\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \le 1, \\ 2y_1 + 6y_2 \le 1, \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

б) $F = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 6x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f = y_1 + y_2 \to \min$ $\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \ge 1, \\ 2y_1 + 6y_2 \le 1, \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

в) $F = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f = y_1 + y_2 \to \min$ $\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \le 1, \\ 2y_1 + 6y_2 = 1, \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

г) $F = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f = y_1 + y_2 \to \min$ $\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 = 1, \\ 2y_1 + 6y_2 = 1, \\ y_1, y_2 \ge 0. \end{cases}$

д) інша відповідь.

26. Розв'язок гри знаходиться геометричним методом, якщо матриця гри має розмірність:

а) 4×4; б) 3×3; в) $n \times 2$; г) $3 \times n$; д) інша відповідь.

27. Основною метою «Дослідження операцій» є:

а) навчити застосовувати математику у виробничих операціях;

б) кількісне обґрунтування ухвалених рішень з питань організації управління;

в) формування теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів;

г) правильні відповіді: б), в), г).

28. Рішенням є:

а) будь-який визначений вибір параметрів;

б) отриманий результат;

в) відповідь на поставлене завдання.

29. Основні етапи дослідження операцій це:

а) постановка проблеми;

б) пошук оптимальних рішень;
в) прийняття і реалізація рішення;
г) правильні відповіді: а) і в).

30. Якщо $x_1+x_2=4, 3x_1+5x_2=18$, то за методом множників Лагранжа:
а) $\lambda_1=x_1+x_2-4, \quad \lambda_2=3x_1+5x_2-18;$
б) $\lambda_1=-x_1-x_2-4, \quad \lambda_2=-3x_1-5x_2+18;$
в) $\lambda_1=-x_1-x_2+4, \quad \lambda_2=-3x_1-5x_2+18;$
г) правильної відповіді немає.

31. За умов даної задачі скласти функцію Лагранжа та знайти частинні похідні: $F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2 \to \min$ при обмеженні: $2x_1+3x_2=10$.

а)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1+3x_2),$$
$$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2;$$

б)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2-\lambda(2x_1+3x_2),$$
$$F'_{x_1}=(2x_1-1)-2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2;$$

в)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(10-2x_1-3x_2),$$
$$F'_{x_1}=4(2x_1-1)-2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=(3x_2-2)-3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=10-2x_1-3x_2;$$

г)
$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1+3x_2),$$
$$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2.$$

д) інша відповідь.

32. Розв'язний елемент при двоїстому симплекс-методі вибирають за:
а) $\min\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – від'ємні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–»;

б) $\max\left\{\dfrac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – від'ємні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–»;

в) $\min\left\{\dfrac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$ де a_{ij} – додатні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–».

33. Дробовою частиною числа a називається:

а) найменше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;

б) найбільше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;

в) найменше від'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою.

34. Загальна цілочислова задача лінійного програмування записується так:

а) $\max(\min)\ F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$;

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\begin{Bmatrix}\le\\=\\\ge\end{Bmatrix}b_i\ \left(i=\overline{1,m}\right);$$

$x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,n}\right)$;

x_j – цілі числа $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

б) $\max(\min)\ F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$;

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\begin{Bmatrix}\le\\ \\\ge\end{Bmatrix}b_i\ \left(i=\overline{1,m}\right);$$

$x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,n}\right)$;

в) $\max\ F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\begin{Bmatrix}\le\\=\\\ge\end{Bmatrix}b_i;$$

$x_j\le 0\ \left(j=\overline{1,n}\right)$;

x_j – цілі.

г) $\max(\min)\ F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\begin{Bmatrix}\le\\=\\\ge\end{Bmatrix}b_i\ \left(i=\overline{1,m}\right);$$

x_j – цілі числа $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

д) інша відповідь

35. Скласти математичну модель задачі: Сільськогосподарське підприємство планує відкрити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн і можливість придбати устаткування двох типів: А і В. Техніко-економічну інформацію стосовно одиниці кожного виду устаткування подано в табл.:

Показник	Устаткування		Ресурс
	A	B	
Вартість, тис. грн	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн/рік	350	150	—

а) $\max Z = 350x_1 + 150x_2$,
$25x_1 + 10x_2 \le 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$,

б) $\max Z = 350x_1 + 150x_2$,
$25x_1 + 10x_2 \le 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, x_1 і x_2 – цілі числа.

в) $\min Z = 350x_1 + 150x_2$
$25x_1 + 10x_2 \ge 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, x_1, x_2 – цілі числа;

г) $\max Z = 350x_1 + 150x_2$
$25x_1 + 10x_2 \ge 100$
$40x_1 + 20x_2 \ge 190$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

36. Знайти точку, що є розв'язком задачі ЦП, зображеної на рисунку:

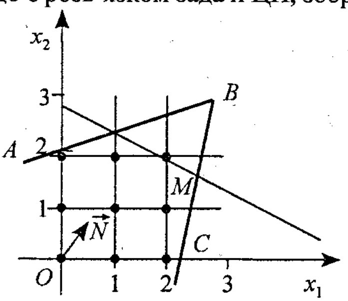

Рисунок 17 – Геометрична інтерпретація задачі

а) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; в) $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; б) $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; г) $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; д) інша відповідь.

37. Знаходження розв'язку задачі цілочисельного програмування методом Гоморрі починають з:
а) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі;
б) визначення двоїстим симплекс-методом оптимального розв'язку задачі;
в) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі без врахування умови цілочисельності змінних.

38. Число β називається верхньою ціною гри або мінімаксом, якщо:

а) $\beta = \min\limits_j\left(\max\limits_i a_{ij}\right)$; б) $\beta = \min\limits_i\left(\max\limits_j a_{ij}\right)$; в) $\beta = \max\limits_j\left(\min\limits_i a_{ij}\right)$;

г) $\beta = \min\limits_j\left(\min\limits_i a_{ij}\right)$; д) інша відповідь.

39. Нерівність Гоморрі має вигляд:

а) $f\left(a_{ij}^*\right)x_j \ge f\left(b_i^*\right)$, де a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці, $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_i^*\right)$ – дробові частини відповідних чисел;

б) $\sum\limits_j f\left(a_{ij}^*\right)x_j \ge f\left(b_i^*\right)$, де a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці, $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_i^*\right)$ – дробові частини відповідних чисел;

в) $\sum\limits_j f\left(a_{ij}^*\right)x_j \le f\left(b_i^*\right)$, де a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці, $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_i^*\right)$ – дробові частини відповідних чисел.

40. У чому полягає основна ідея методу множників Лагранжа:

а) у переході від задачі на умовний екстремум до задачі відшукання безумовного екстремуму деякої побудованої функції Лагранжа;

б) необхідно щоб існував вектор;

в) щоб існували обмеження, які б визначали точку мінімуму.

ВАРІАНТ № 4

1.Задача при двоїстому симплекс-методі не має розв'язків, якщо:

а) у псевдорозв'язку, що визначається базисом, є хоча б одне від'ємне число $b_i > 0$, таке, що $a_{ij} \ge 0$;

б) у псевдорозв'язку, що визначається базисом, є хоча б одне від'ємне число $b_i < 0$, таке, що $a_{ij} \ge 0$;

в) у псевдорозв'язку, що визначається базисом, є хоча б одне від'ємне число $b_i < 0$, таке, що $a_{ij} < 0$.

2. Нерівність Гоморрі має вигляд:

а) $f\left(a_{ij}^*\right)x_j \ge f\left(b_i^*\right)$, де a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці, $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_i^*\right)$ – дробові частини відповідних чисел;

б) $\sum\limits_j f\left(a_{ij}^*\right)x_j \ge f\left(b_i^*\right)$, де a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці, $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_i^*\right)$ – дробові частини відповідних чисел;

в) $\sum_j f\left(a_{ij}^*\right)x_j \le f\left(b_i^*\right)$, де a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці, $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_i^*\right)$ – дробові частини відповідних чисел.

3. За умов даної задачі скласти функцію Лагранжа та знайти частинні похідні: $F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2 \to \min$ при обмеженні: $2x_1+3x_2=10$.

$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1+3x_2),$$

а) $$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2$$

$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2-\lambda(2x_1+3x_2),$$

б) $$F'_{x_1}=(2x_1-1)-2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2$$

$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1-3x_2),$$

в) $$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+\lambda,$$
$$F'_{x_2}=(3x_2-2)+\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2$$

$$F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1+3x_2),$$

г) $$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+2\lambda,$$
$$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$$
$$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2$$

д) інша відповідь.

4. Алгебраїчний метод розв'язування ігор використовується:
а) для гри з платіжною матрицею, яка не має сідлової точки;
б) для гри з платіжною матрицею, яка має сідлову точку;
в) для гри з довільною матрицею.

5. З економічної точки зору множник Лагранжа інтерпретували:
а) реальні ціни ресурсів;
б) неявні ціни ресурсів;
в) ціни кінцевої продукції;
г) ціни проміжного продукту.

6. Визначити базисні невідомі та записати початковий псевдорозв'язок, знайти розв'язний рядок та розв'язний елемент

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
	-1	1	0	0	-11	-4
	9	0	1	0	8	-8
	-2	0	0	1	-7	-1
Δ_j	0	0	0	0	0	19

а) x_1, x_2, x_3, X =(-4;-8;-1;0;0); другий рядок, $a_{23}=1$;

б) x_1, x_3, x_4, X =(-8;0;-1;-4;0); перший рядок, $a_{11}=-1$;

в) x_5, x_3, x_4, X =(0;0;-8;-4;-1); третій рядок, $a_{31}=-2$;

г) задача розв'язків не має; д) інша відповідь.

7. Загальна цілочислова задача лінійного програмування записується так:

а) $\max(\min)\, F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$;
за умов:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right);$$
$x_j \ge 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right)$;
x_j – цілі числа $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

б) $\max(\min)\, F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$;
за умов:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{Bmatrix} \le \\ \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right);$$
$x_j \ge 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right)$;
x_j – цілі.

в) $\max\ F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
за умов:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i;$$
$x_j \le 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right)$;

г) $\max(\min)\, F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

за умов:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{Bmatrix} \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right);$$
$x_j \ge 0$; x_j – цілі числа $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

8. Скласти нерівність Гоморрі для даного рядка симплекс-таблиці:
$$\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+1x_3+0x_4=\frac{3}{2}$$

а) $\frac{3}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2 \ge \frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2 \le \frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4 \le \frac{1}{2}$;

г) $\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2 \ge \frac{1}{2}$; д) жодної правильної відповіді

9. Нехай цільова функція задачі дробово-лінійного програмування задана рівнянням $F=\frac{4x_1+3x_2}{x_1+x_2} \to \min$. Визначити кутовий коефіцієнт нахилу прямої, що виражає цільову функцію:

а) $k(F)=\frac{4+F}{F-3}$; б) $k(F)=\frac{4-F}{F-3}$; в) $k(F)=\frac{4+F}{F+3}$; г) $k(F)=-\frac{4-F}{F-3}$

д) жодної правильної відповіді

10. Вкажіть іншу назву методу Гоморрі:
а) метод потенціалів;
б) симплекс-метод;
в) метод Жордана-Гаусса;
г) метод відсікаючих площин.

11. Застосування методів дослідження операцій передбачає:
а) побудову економічних та математичних моделей для задач прийняття-рішень в складних ситуаціях, або в умовах невизначеності;
б) вивчення взаємозв'язків, які визначають потім ухвалення рішень, та установлення критеріїв ефективності, що дозволяють оцінювати перевагу того або іншого варіанта дії;
в) правильні відповіді: а) і б).

12. Дайте відповідь «так» (а) або «ні» (б) на питання: чи дійсно множники Лагранжа інтерпретуються як неявні або тіньові ціни ресурсів, які визначаються обмеженнями?

13. Якщо серед рівнянь обмежень є дробові значення базисних змінних, то вибирають серед них те значення, яке має найбільшу дробову частину?(Так (а),Ні (б))

14. Чи правильне твердження (так (а) чи ні(б)): Математична модель задачі нелінійного програмування має вигляд $f(x_1,x_2,...,x_n) \to \max(\min)$ за умови, що її змінні задовольняють співвідношення

$$\begin{cases} g_i(x_1,x_2,...,x_n) \le b_i \quad (i=\overline{1,k}), \\ g_i(x_1,x_2,...,x_n) = b_i \quad (i=\overline{k+1,m}), \end{cases}$$

15. Оптимальним називається такий план виробництва:
а) який є найкращим із позицій досягнення максимального або мінімального рівня конкретного техніко-економічного критерію оцінки використання виробничого потенціалу та ресурсів, що є в наявності;
б) за яким оцінюється міра ефективності плану;

в) правильні відповіді: а) і б).

16. Цільова функція задачі дробово-лінійного програмування має вигляд : $F=\dfrac{-3x_1+4x_2}{x_1+x_2}\to \max$. .Звести її до лінійного вигляду.

а) $F=7y_1+4$; б) $F=-7y_1-4$; в) $F=y_1-4$; г) $F=-7y_1+4$; д) інша відповідь.

17. Для заданої платіжної матриці $\begin{pmatrix} 5 & 22 & 3 \\ 14 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ визначити нижню чисту ціну гри.

а) 22; б) 1; в) 14; г) 3; д) інша відповідь.

18. Знайти мінімальне значення функції $F=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2$ при умовах

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \ge 6, \\ 3x_1-2x_2 \le 18, \\ -x_1+2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

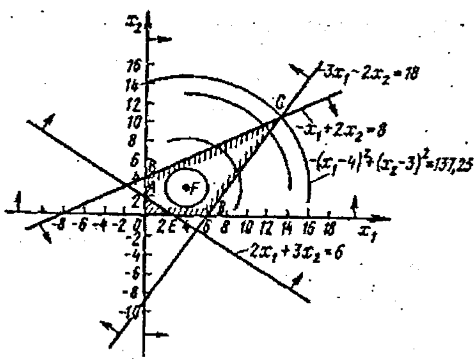

Рисунок 18 – Геометрична інтерпретація задачі

а) (3;4), $F_{\min}=2$; б) (4;3), $F_{\min}=0$; в) (3;3), $F_{\min}=1$; г) (4;4), $F_{\min}=1$; д) інша відповідь.

19. Якщо у функції мети змінити знаки коефіцієнтів на протилежні:

а) функція мети стає рівною нулю;

б) функція мети змінює своє спрямування (максимізація - мінімізація);

в) стає рівною нескінченності.

20. Якщо гравець дотримується максимінної стратегії, його виграш завжди буде:
а) меншим;
б) не меншим;
в) більшим;
г) не більшим за максимінне значення.

21. Графічний метод розв'язування задачі лінійного програмування застосуємо, якщо задача містить
а) 2 змінних;
б) більш двох змінних;
в) 2 або 3 змінних;
г) зводиться до двох або трьох змінних.

22. При розв'язуванні задачі двоїстим симплексом-методом спочатку вибирають розв'язний рядок, а потім розв'язний стовпець:
а)так; б) ні.

23. Вважаючи, що $x_1, x_2 \geq 0 \; i \; x_1, x_2 - \text{цілі}$, звести задачу цілочисельного програмування до канонічного вигляду

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases}$$

а) $F = 3x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 4, \\ 3x_1 + x_2 = 14 \end{cases}$

б) $F = 3x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 14 \end{cases}$

в) $F = -3x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 14 \end{cases}$

г) $F = 3x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 14 \end{cases}$

д) $F = -3x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 14 \end{cases}$

24. Знайти нижню та верхню границю виграшу гри, що визначається даною матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

а) 5 і 8; б) 5 і 6; в) 6 і 8; г) 5 і 9; д) інша відповідь.

25. Скласти пару двоїстих задач, що відповідає даній матричній грі, яка визначається матрицею $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$F = x_1 + x_2 \to \max$ $f = y_1 + y_2 \to \min$ $F = x_1 + x_2 \to \min$ $f = y_1 + y_2 \to \max$

а) $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ 5x_1 + 6x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8y_1 + 5y_2 \leq 1, \\ 2y_1 + 6y_2 \leq 1, \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ 5x_1 + 6x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8y_1 + 5y_2 = 1, \\ 2y_1 + 6y_2 \leq 1, \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$

$F = x_1 + x_2 \to \max$ $f = y_1 + y_2 \to \min$ $F = x_1 + x_2 \to \min$ $f = y_1 + y_2 \to \max$

в) $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8y_1 + 5y_2 \leq 1, \\ 2y_1 + 6y_2 \leq 1, \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ 5x_1 + 6x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8y_1 + 5y_2 = 1, \\ 2y_1 + 6y_2 = 1, \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$

д) інша відповідь

26. Розв'язок гри знаходиться геометричним методом, якщо матриця гри має розмірність:

а) 4×4; б) 3×3; в) 5×3; г) $n \times 2$; д) інша відповідь.

27. В дисципліні «Дослідження операцій» реалізовується:

а) ідея вивчення курсу вищої математики;

б) ідея математичного моделювання технологічних, транспортних та економічних процесів;

в) ідея озброєння студента математичними знаннями.

28. Оптимальними є рішення:

а) які на ту, чи іншу думку переважають над іншими;

б) які мають більший прибуток;

в) які мають менші витрати.

29. Економіко-математичне моделювання – це:

а) опис економічних процесів і явищ у вигляді економіко-математичних моделей;

б) реалізація економіко-математичної моделі на ПЕОМ, тобто «штучний експеримент» або «машинна імітація»;

в) правильні відповіді а) і б).

30. Якщо $x_1 + x_2 = 4, 3x_1 + 5x_2 = 18$, то за методом множників Лагранжа:

а) $\lambda_1 = x_1 + x_2 - 4, \quad \lambda_2 = 3x_1 + 5x_2 - 18$;

б) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 - 4, \quad \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18$;

в) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 + 4, \quad \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18$;

г) правильної відповіді немає.

31. Знайти точку, що є розв'язком задачі ЦП, зображеної на рисунку:

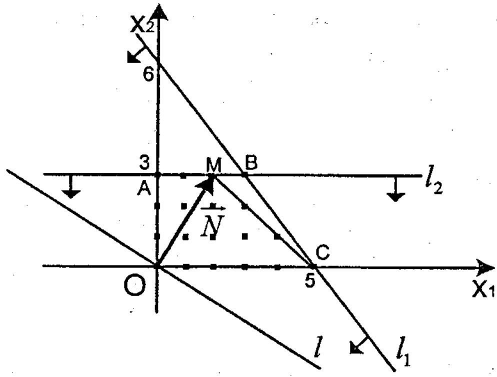

Рисунок 18 – Геометрична інтерпретація задачі

а) $x_1 = 1;\ x_2 = 2$; в) $x_1 = 2;\ x_2 = 3$; б) $x_1 = 2;\ x_2 = 2$; г) $x_1 = 1;\ x_2 = 1$; д) інша відповідь

32. Використовуючи метод множників Лагранжа, знайти точку в якій досягається екстремум функції:

$$F = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{при} \quad x_1 + x_2 = 1$$

а) $x = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ б) $x = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ в) $x = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$ г) $x = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ д) інша відповідь.

33. Розв'язний елемент при двоїстому симплекс-методі вибирають за:

а) $\min\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – від'ємні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–»;

б) $\max\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – від'ємні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–»;

в) $\min\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}\right\}$, де a_{ij} – додатні елементи розв'язного рядка, Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, взяті зі знаком «–».

34. Дробовою частиною числа a називається:

а) найменше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;
б) найбільше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;
в) найменше від'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою.

35. Скласти математичну модель задачі: Сільськогосподарське підприємство планує відкрити сушильний цех на виробничій площі 190 $м^2$, маючи для цього 100 тис. грн і можливість придбати устаткування двох типів:

А і В. Техніко-економічну інформацію стосовно одиниці кожного виду устаткування подано в табл.:

Показник	Устаткування		Ресурс
	А	В	
Вартість, тис. грн	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн/рік	350	150	—

а) $\max Z = 350x_1 + 150x_2$,
$25x_1 + 10x_2 \le 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$,

б) $\max Z = 350x_1 + 150x_2$,
$25x_1 + 10x_2 \le 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, x_1 і x_2 – цілі числа.

в) $\min Z = 350x_1 + 150x_2$
$25x_1 + 10x_2 \ge 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, x_1, x_2 – цілі числа;

г) $\max Z = 350x_1 + 150x_2$
$25x_1 + 10x_2 \ge 100$
$40x_1 + 20x_2 \ge 190$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

36. Знаходження розв'язку задачі цілочисельного програмування методом Гоморрі починають з:
а) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі;
б) визначення двоїстим симплекс-методом оптимального розв'язку задачі;
в) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі без врахування умови цілочисельності змінних.

37. Знайти точку, що є розв'язком задачі ЦП, зображеної на рисунку:

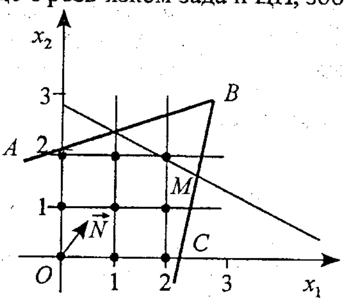

Рисунок 20 – Геометрична інтерпретація задачі

а) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; б) $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; в) $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; г) $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; д) інша відповідь.

38. Число β називається верхньою ціною гри або мінімаксом, якщо:
а) $\beta = \min\limits_j \left(\max\limits_i a_{ij} \right)$; б) $\beta = \min\limits_i \left(\max\limits_j a_{ij} \right)$; в) $\beta = \max\limits_j \left(\min\limits_i a_{ij} \right)$.

39. У чому полягає основна ідея методу множників Лагранжа:

а) у переході від задачі на умовний екстремум до задачі відшукання безумовного екстремуму деякої побудованої функції Лагранжа;
б) необхідно щоб існував вектор;
в) щоб існували обмеження, які б визначали точку мінімуму в області допустимих розв'зків.

40. Якщо в оптимальному розв'язку задачі дробові значення приймають декілька змінних, то нерівність Гоморрі визначається:
а) найменшою дробовою частиною;
б) найбільшою дробовою частиною;
в) немає значення.

ВАРІАНТ № 5

1. При двоїстому симплекс-методі можна перейти до нового псевдорозв'язку, якщо:
а) у псевдорозв'язку, що визначається базисом, є від'ємні числа $b_i > 0$, такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij} < 0$;
б) у псевдорозв'язку, що визначається базисом, є від'ємні числа $b_i < 0$, такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij} < 0$;
в) у псевдорозв'язку, що визначається базисом, є від'ємні числа $b_i > 0$, такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij} > 0$.

2. Дробовою частиною числа a називається:
а) найменше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;
б) найбільше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою;
в) найменше від'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою.

3. Якщо в оптимальному розв'язку задачі дробові значення приймають декілька змінних, то нерівність Гоморрі визначається:
а) найменшою дробовою частиною;
б) найбільшою дробовою частиною;
в) не має значення.

4. Під час розв'язування задач дробово-лінійного програмування геометричним методом необхідно:
а) побудувати область допустимих розв'язків, що визначається обмеженнями системи та вектором нормалі;
б) побудувати вектор нормалі та рівняння прямої, що проходить через початок координат, поклавши значення цільової функції, рівним деякому числу h;
в) побудувати область допустимих розв'язків, що визначається обмеженнями системи, знайти рівняння прямої, що проходить через початок координат, поклавши значення цільової функції, рівним деякому числу h.

5. Для того, щоб число v було ціною гри, а U^* і Z^* – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності:

а) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* \geq v \quad \left(j=\overline{1,n}\right) \quad i \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}z_i^* \geq v \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$;

б) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* \geq v \quad \left(j=\overline{1,n}\right) \quad i \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}z_i^* \leq v \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$;

в) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* \leq v \quad \left(j=\overline{1,n}\right) \quad i \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}z_i^* \leq v \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$.

6. Вкажіть іншу назву метода Гоморрі:
а) метод потенціалів;
б) симплекс-метод;
в) метод Жордана-Гаусса;
г) метод відсікаючих площин.

7. Множники Лагранжа характеризують:
а) неявні (тіньові) ціни ресурсів, які визначаються обмеженнями;
б) реальні ціни ресурсів, які визначаються обмеженнями;
в) собівартість ресурсів.

8. Визначити базисні невідомі та записати початковий псевдорозв'язок, знайти розв'язний рядок та розв'язний елемент

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
	-12	1	0	0	-11	-4
	6	0	1	0	8	-1
	-8	0	0	1	-7	-1
Δ_j	5	0	0	0	8	9

а) x_1, x_2, x_3, $X=(-4;-1;-1;0;0)$; другий рядок, $a_{23}=1$;
б) жодної правильної відповіді;
в) x_5, x_3, x_4, $X=(0;0;-1;-4;-1)$; третій рядок, $a_{31}=-8$;
г) задача розв'язків не має.

9. Знайти точку, що є розв'язком задачі ЦП, зображеної на рисунку:

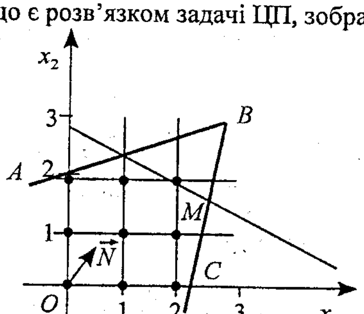

Рисунок 21 – Геометрична інтерпретація задачі

а) $x_1=1$; $x_2=2$; б) $x_1=2$; $x_2=2$; в) $x_1=2$; $x_2=1$; г) $x_1=1$; $x_2=1$.

10. Скласти нерівність Гоморрі для даного рядка симплекс-таблиці:

$\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + 1x_3 + 0x_4 = \frac{2}{3}$

а) $\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \geq \frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq -\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \leq \frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \geq \frac{2}{3}$;

д) жодної правильної відповіді.

11. Визначте правильний взаємозв'язок між формами моделі лінійного програмування.

а) стандартну форму можна перетворити тільки у канонічну форму;
б) стандартну форму можна перетворити тільки у загальну форму;
в) канонічну форму можна перетворити тільки у загальну;
г) усі форми є еквівалентними.

12. Графічний метод розв'язування задачі лінійного програмування застосуємо, якщо задача містить
а) 2 змінних;
б) більше двох змінних;
в) 2 або 3 змінних;
г) зводиться до двох або трьох змінних.

13. Чи правильне твердження (так (а) чи ні(б)): Математична модель задачі нелінійного програмування має вигляд $f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$ за умови, що її змінні задовольняють співвідношення

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i & (i = \overline{1,k}), \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i & (i = \overline{k+1, m}). \end{cases}$$

14. Нехай цільова функція задачі дробово-лінійного програмування задана рівнянням $F = \frac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min$. Визначити кутовий коефіцієнт нахилу прямої, що виражає цільову функцію:

а) $k(F) = \frac{4+F}{F-3}$ б) $k(F) = \frac{4-F}{F-3}$ в) $k(F) = \frac{4+F}{F+3}$

15. Цільова функція задачі дробово-лінійного програмування має вигляд : $F = \frac{-2x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$. Звести її до лінійного вигляду.

а) $F = y_1 - 2$; б) $F = -\frac{7}{2}y_1 + \frac{3}{2}$; в) $F = \frac{-7y_1 + 3}{2}$; г) правильні відповіді б) і в)

16. Для заданої платіжної матриці $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \\ 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ визначити нижню ціну гри.

а) - 2; б) 7; в) -5; г) 2; д) інша відповідь.

17. Предметом дисципліни «Дослідження операцій» є :

а) вивчення будь-яких операцій в економіці;

б) моделі та методи системного аналізу, способи дослідження і оптимізації операцій;

в) аналіз операцій, які проводять менеджери підприємств.

18. Суть гри полягає у тому, що:

а) кожен з учасників приймає таке рішення (тобто, вибирає стратегію дій), яке, як він вважає, забезпечує йому найбільший виграш або найменший програш;

б) гравцю ясно, що результати залежать не тільки від нього, але і від дій партнера (чи партнерів);

в) гравець приймає рішення в умовах невизначеності;

г) правильні відповіді а), б), в).

19. Який метод розв'язання прямої задачі автоматично надає розв'язок для двоїстої задачі?

а) метод намірів і реалізацій;

б) симплекс-метод;

в) графоаналітичний метод;

г) метод множників Лагранжа.

20. Математична теорія конфліктних ситуацій – це:

а) математичне програмування; б) теорія ігор;

в) регресійний аналіз; г) теорія графів.

21. Область припустимих значень не замкнута зверху. Цільова функція $F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$. Задача:

а) має єдиний розв'язок;

б) має безліч розв'язків;

в) не має розв'язків.

22. При розв'язанні задачі двоїстим симплекс-методом ведучий рядок вибирають по елементах стовпця b_i.

а) так; б) ні.

23. Вважаючи, що $x_1, x_2 \geq 0$ ³ $x_1, x_2 -$ ö³ё³, звести задачу цілочисельного програмування до канонічного вигляду

$F = 4x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 9, \\ 3x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$F=4x_1+6x_2\to\max$ $\quad F=-4x_1-6x_2\to\min$ $\quad F=-4x_1-6x_2\to\min$

а) $\begin{cases}x_1+5x_2\le 9,\\ 3x_1+x_2=10\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=9,\\ 3x_1+x_2+x_4=10\end{cases}$ в) $\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=9,\\ 3x_1+x_2+x_4=10\end{cases}$

$F=-4x_1+6x_2\to\min$ $\quad F=4x_1-6x_2\to\min$

г) $\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=9,\\ 3x_1+x_2+x_4=10\end{cases}$ д) $\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=9,\\ 3x_1+x_2-x_4=10.\end{cases}$

24. Знайти нижню та верхню границю виграшу гри, що визначається даною матрицею $A=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 11 & 6\end{pmatrix}$

а) 1 і 6; б) 1 і 9; в) 6 і 11; г) 6 і 9; д) інша відповідь.

25. Скласти пару двоїстих задач, що відповідає даній матричній грі, яка визначається матрицею $A=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

$F=x_1+x_2\to\max$ $\quad f=y_1+y_2\to\min$ $\quad F=x_1+x_2\to\max$ $\quad f=y_1+y_2\to\min$

а) $\begin{cases}7x_1+2x_2\ge 1,\\ 3x_1+5x_2\ge 1,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}7y_1+3y_2\le 1,\\ 2y_1+5y_2\le 1,\\ y_1,y_2\ge 0\end{cases}$ б) $\begin{cases}7x_1+2x_2\le 1,\\ 3x_1+5x_2\le 1,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}7y_1+3y_2\ge 1,\\ 2y_1+5y_2\ge 1,\\ y_1,y_2\ge 0.\end{cases}$

$F=x_1+x_2\to\max$ $\quad f=y_1+y_2\to\min$ $\quad F=x_1+x_2\to\max$ $\quad f=y_1-y_2\to\min$

в) $\begin{cases}7x_1+2x_2=1,\\ 3x_1+5x_2\ge 1,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}7y_1+3y_2\le 1,\\ 2y_1+5y_2=1,\\ y_1,y_2\ge 0\end{cases}$ г) $\begin{cases}7x_1+2x_2=1,\\ 3x_1+5x_2=1,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}7y_1+3y_2\le 1,\\ 2y_1+5y_2\le 1,\\ y_1,y_2\ge 0.\end{cases}$

д) інша відповідь.

26. Розв'язок гри знаходиться геометричним методом, якщо матриця гри має розмірність:

а) 4×4; б) 2×2; в) 5×3; г) $4\times n$; д) інша відповідь.

27. Дослідження операцій це :

а) наукова дисципліна, яка займається розробкою та практичним застосуванням методів найбільш ефективного управління різними організаційними системами;

б) застосування математичних методів у виробничому, транспортному та економічному процесах;

в) знайти оптимальну величину (розмір).

28. Алгоритм це:

а) математичний термін, котрий несе в собі загальні якості алгоритмів;

б) система операцій (напр., обчислень), яка після послідовного їх виконання приводить до вирішення поставленої задачі;

в) система правил застосовувати до вихідних моделі.

29. Стратегія – це:

а) спосіб застосування засобів та ресурсів, спрямованих на досягнення мети операції;
б) загальний, всебічний план досягнення цілі;
в) правильні відповіді а) і б).

30. Знаходження розв'язку задачі цілочисельного програмування методом Гоморрі починають з:
а) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі;
б) визначення двоїстим симплекс-методом оптимального розв'язку задачі;
в) визначення симплексним методом оптимального розв'язку задачі без врахування умови цілочисельності змінних.

31. Під час зведення задач дробово-лінійного програмування до задач лінійного програмування використовують заміну:
а) $x_1 = y_1 / y_2$, знаменник цільової функції, якщо він додатний, покладають рівним $1 / y_2$;
б) $x_1 = y_2 / y_1$, знаменник цільової функції, якщо він додатний, покладають рівним $1 / y_1$;
в) $x_1 = y_1 / y_2$, знаменник цільової функції покладають рівним $1 / y_2$.

32. Число α називається нижньою ціною гри або максиміном, якщо:
а) $\alpha = \max\limits_j \left(\min\limits_i a_{ij} \right)$; б) $\alpha = \max\limits_i \left(\min\limits_j a_{ij} \right)$; в) $\alpha = \min\limits_i \left(\max\limits_j a_{ij} \right)$;
г) $\alpha = \min\limits_i \left(\min\limits_j a_{ij} \right)$; д) інша відповідь.

33. За умов даної задачі скласти функцію Лагранжа та знайти частинні похідні: $F = (2x_1 - 1)^2 + (3x_2 - 2)^2 \to \min$ при обмеженні:
$2x_1 + 3x_2 = 10$.

а)
$$F = (2x_1 - 1)^2 + (3x_2 - 2)^2 + \lambda(2x_1 + 3x_2),$$
$$F'_{x_1} = 4(2x_1 - 1) + 2\lambda,$$
$$F'_{x_2} = 6(3x_2 - 2) + 3\lambda,$$
$$F'_\lambda = 2x_1 + 3x_2.$$

б)
$$F = (2x_1 - 1)^2 + (3x_2 - 2)^2 - \lambda(2x_1 + 3x_2),$$
$$F'_{x_1} = (2x_1 - 1) - 2\lambda,$$
$$F'_{x_2} = 6(3x_2 - 2) + 3\lambda,$$
$$F'_\lambda = 2x_1 + 3x_2.$$

в) $F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1-3x_2),$

$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+\lambda,$

$F'_{x_2}=(3x_2-2)+\lambda,$

$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2.$

г) $F=(2x_1-1)^2+(3x_2-2)^2+\lambda(2x_1+3x_2),$

$F'_{x_1}=4(2x_1-1)+2\lambda,$

$F'_{x_2}=6(3x_2-2)+3\lambda,$

$F'_{\lambda}=2x_1+3x_2.$

д) інша відповідь.

34. Знайти максимальне та мінімальне значення функції: $Z=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$ за умов:

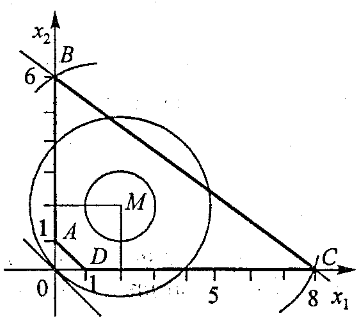

Рисунок 22 – Геометрична інтерпретація задачі

$$\begin{cases} x_1+x_2\geq 1; \\ 3x_1+4x_2\leq 24. \end{cases}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$

а) $F_{max}=40,\quad F_{min}=0$; б) $F_{max}=45,\quad F_{min}=10$; в) $F_{max}=0,\quad F_{min}=-40$; г) $F_{max}=35,\quad F_{min}=10$; д) інша відповідь.

35. Скласти математичну модель задачі: Фермеру для удобрення земельної ділянки необхідно придбати 107 кг добрив. Він може купити добрива в упаковках по 35 кг вартістю 14 ум. од. або по 24 кг вартістю 12 ум. од. Метою фермера є закупівля не менше, ніж 107 кг добрив з мінімальними витратами. Причому потрібно купувати або цілу упаковку, або не купувати її зовсім, бо частину упаковки придбати неможливо.

а) $\min F=14x_1+12x_2$

$35x_1+24x_2\leq 107$;

б) $\max F=14x_1+12x_2$

$35x_1+24x_2\leq 107$;

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1, x_2$ – цілі числа.

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1, x_2$ – цілі числа.

в) $\min F = 14x_1 + 12x_2$

$35x_1 + 24x_2 \geq 107$;

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1, x_2$ – цілі числа;

г) $\min F = 14x_1 + 12x_2$

$35x_1 + 24x_2 \geq 107$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

д) інша відповідь

36. Якщо $x_1 + x_2 = 4, 3x_1 + 5x_2 = 18$, то за методом множників Лагранжа:

а) $\lambda_1 = x_1 + x_2 - 4, \quad \lambda_2 = 3x_1 + 5x_2 - 18$;

б) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 - 4, \quad \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18$;

в) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 + 4, \quad \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18$;

г) правильної відповіді немає.

37. Ознакою відсутності розв'язку задачі ЦП є:

а) наявність в таблиці хоча б 1 рядка із цілими вільними членами a_{ij} і дробовими значеннями b_i;

б) відсутність в таблиці хоча б 1 рядка із цілими вільними членами a_{ij} і дробовими значеннями b_i;

в) немає правильної відповіді.

38. Алгебраїчний метод розв'язування ігор використовується:

а) для гри з платіжною матрицею, яка не має сідлової точки;

б) для гри з платіжною матрицею, яка має сідлову точку;

в) для гри з довільною матрицею.

39. Чи існує універсальний метод розв'язання задач нелінійного програмування?

а) так; б) ні.

40. Кількість множників Лагранжа повинна дорівнювати...

а) кількості рівнянь обмежень;

б) кількості рівнянь обмежень + цільова функція;

в) сумі рівнянь обмежень та часткових похідних від них;

г) кількості часткових похідних від рівнянь обмежень + цільова функція.

ВІДПОВІДІ

Номер	В1	В2	В3	В4	В5
1.	а	а	в	в	б
2.	г	г	б	б	а
3.	в	в	г	д	б
4.	а	а	в	а	в
5.	а	б	б	б	б
6.	в	б	в	д	г
7.		б	д	а	а
8.	а	а	в	г	б
9.	в	б	в	б	б
10.	а	б	д	г	г
11.	а	г	б	в	а
12.	в	е	б	а	а
13.	б, д	г	б	а	а
14.	а	б	в	а	б
15.	а	в	г	в	г
16.	в	а	а	г	г
17.	в	а	в	г	б
18.	г	б	б	б	г
19.	а	г	а	б	б
20.	б	в	б	б	б
21.	б	г	б	а	в
22.	б	г	а, в	а	а
23.	в	в	г	в	б
24.	в	г	в	в	г
25.	а	б	д	д	б
26.	а	г	в	г	б
27.	г	а	г	б	а
28.	в	б	в	а	б
29.	а	а	г	в	в
30.	б	д	в	в	в
31.	а	в	в	в	а
32.	б	д	а	б	а
33.	б	б	а	а	д
34.	а	а	а	а	а
35.	в	а	б	б	в
36.	а	в	б	в	в
37.	б	а	в	б	б
38.	б	б	б	б	а
39	б	б	б	а	б
40.	г	б	а	б	а

Література

1. Калихман И. Л. Линейная алгебра и математическое программирование / Калихман И. Л. – М. : Высшая школа, 1967. – 138 с.
2. Карпелевич Ф. М. Элементы линейной алгебры и линейного программирования / Ф. М. Карпелевич, Л. Е. Садовский. – М. : Наука, 1967. – 205 с.
3. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование / Кузнецов Ю. Н., Козубов В. И., Волощенко А. Б. – М. : Высшая школа, 1980. – 160 с.
4. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / Акулич И. Л. – М. : Высшая школа, 1986. – 317 с.
5. Новіков В. В. Лінійне і нелінійне програмування : навч. посіб. / В. В. Новіков, С.А. Яценко. – МВО Укр. – К. : НМК ВО, 1992. – 225 с.
6. Терехов Л. Л. Экономико-математические методы / Терехов Л. Л. – М. : Статистика, 1972. – 345 с.
7. Балашевич В.А. Основы математического программирования / Балашевич В. А. – Мн. : Высш. шк., 1985. – 218 с.
8. Кігель В. Г. Елементи лінійного, цілочисельного лінійного і нелінійного програмування : навч. посіб. / Кігель В. Г. – К. : ІСДО, 1995. – 165 с.
9. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування : навч. посіб. / Гетманцев В. Д. – К. : Либідь, 2001. – 368 с.
10. Мину Мишель. Математическое программирование : теория и алгоритмы / Мишель Мину. – М. : Наука, 1990. – 213 с.
11. Худли Дж. Нелинейное и динамическое программирование / Дж. Худли. – М. : Мир, 1967. – 178 с.
12. Карандаев И. С. Решение двойственных задач в оптимальном планировании / Карандаев И. С. – М. : Статистика, 1976. – 325 с.
13. Гольштейн Е. Г. Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1969. – 118 с.
14. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій / Зайченко Ю. П. – К. : ЗАТ «Віпол», 2000. – 688 с.
15. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.
16. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология / Вентцель Е. С. – М. : Наука, 1988. – 208 с.
17. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: навч. посіб. / Кутковецький В. Я. – К. : ТОВ Видавничий дім «Професіонал», 2004. – 350 с.
18. Катренко А. В. Дослідження операцій: підручник / Катренко А. В.– Львів : Магнолія Плюс, 2004. – 549 с.
19. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М.; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 407 с.

20. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Збірник задач / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – К. : «Вища школа», 1990. – 308 с.
21. Салманов О. Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel / Салманов О. Н. – Спб. : БХВ – Петербург, 2003. – 464 с.

ГЛОСАРІЙ

базис – base
базисний розв'язок – base decision
вектор нормалі – normal vector
геометричний метод – geometrical method
гіперповерхня – hypersurface
гра – game
двоїстий симплекс метод – ambivalent simplex is a method
дробова частина – fractional part
дробово-лінійне програмування – fractionally-linear programming
змішана стратегія – mixed strategy
кутовий коефіцієнт – angular coefficient
максимін – maximin
математичне програмування – mathematical programming
метод гілок та меж – method of branches and scopes
метод Гоморрі – the Gomori method
метод множників – method of the multipliers
мінімакс – minimax
нелінійне програмування – nonlinear programing
опорний розв'язок – supporting decision
оптимальна стратегія – optimum strategy
оптимальний розв'язок – optimum decision
парна гра – even game
похідна – derivative
правила гри – rules of game
псевдорозв'язок – pseudodecision
розв'язний рядок – deciding row
розв'язний елемент – deciding element
симплекс-метод – simplex-method
сідлова точка – point saddle
стратегія – strategy
тестові завдання – test question
тестовий контроль – test control
умовний екстремум – conditional екстремум
функція – function
ціла частина – whole part
цілочисельний розв'язок – integer decision
цільова функція – having a special purpose function
ціна гри – cost of game
частинні похідні – derivative parts

Навчальне видання

Ірина Володимирівна Хом'юк
Віктор Вікторович Хом'юк

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З ТЕОРЕТИЧНОЮ ПІДТРИМКОЮ

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна
Коректор З. Поліщук
Оригінал-макет підготовлено І. Хом'юк

Підписано до друку 12.07.2012 р.
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 6,5.
Наклад 100 прим. Зам. № 2012-158.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.