І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. В. Хом'юк

Вища математика
Елементи лінійної алгебри та лінійного програмування

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Вища математика
Елементи лінійної алгебри та лінійного програмування

Навчальний посібник

Електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2025

УДК 512.64(075.8)
Х 76

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 29.02.2025 р.)

Рецензенти:
Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор
Л. А. Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент
В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор

Хом'юк, І. В.
Х76 Вища математика. Елементи лінійної алгебри та лінійного програмування : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. В. Хом'юк. – Вінниця: ВНТУ, 2025. – 151 с.

У навчальному посібнику подано теоретичні відомості з тем лінійної алгебри та лінійного програмування: системи лінійних рівнянь та їх розв'язування методом Жордана-Гаусса, знаходження опорних розв'язків, геометричний та симплексний методи розв'язування задач лінійного програмування, математичні моделі деяких економічних задач, двоїсті, транспортні, цілочисельні та дробово-лінійні задачі лінійного програмування у вигляді означень, теорем, властивостей. Розглянуті розв'язки прикладів з кожної теми, надається 30 варіантів завдань для самостійного опрацювання з кожної теми та завдань для типових розрахунків.

Розрахований на студентів технічних ЗВО усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 512.64(075.8)

Зміст

ВСТУП

Вища математика є фундаментальною складовою підготовки сучасного фахівця в багатьох галузях знань. Її роль особливо важлива у формуванні аналітичного мислення, розвитку здатності до логічного обґрунтування та прийняття оптимальних рішень. Лінійна алгебра та лінійне програмування — два важливих розділи вищої математики, які знаходять широке застосування в економіці, інженерії, комп'ютерних науках, управлінні виробництвом і багатьох інших сферах. Вони формують базові інструменти для аналізу, моделювання та розв’язання реальних задач, пов’язаних із дослідженням складних систем, оптимізацією ресурсів та прийняттям ефективних рішень.

У цьому навчальному посібнику розглянуто базові поняття, методи та алгоритми лінійної алгебри та лінійного програмування. Лінійна алгебра вивчає властивості та операції з лінійними об'єктами, такими як вектори, матриці та системи лінійних рівнянь. Її методи дозволяють описувати та аналізувати багатовимірні явища, моделювати фізичні, економічні та соціальні процеси. Лінійне програмування є окремим розділом математичного програмування, що присвячений знаходженню оптимальних рішень для задач, де цільова функція та обмеження задані у вигляді лінійних співвідношень. Цей підхід широко застосовується для оптимізації планування, логістики, управління виробництвом та фінансами.

Особливу увагу в посібнику приділено практичному застосуванню отриманих знань для розв’язання задач, що виникають у реальному житті. Матеріал посібника подано таким чином, щоб допомогти студентам не лише опанувати теоретичні основи, але й здобути навички роботи з математичними моделями та програмними засобами.

Цей навчальний посібник має на меті: ознайомити із базовими поняттями, теоремами та методами лінійної алгебри; навчити застосовувати основи лінійного програмування для розв’язання практичних задач; розвинути навички аналітичного мислення, необхідні для вирішення задач оптимізації та моделювання.

Посібник складається з теоретичних розділів, прикладів розв’язання задач і практичних завдань для самостійної роботи. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим курсом лекцій. Ці відомості підтверджуються прикладами. Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 30 варіантів завдань для самостійного опрацювання з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Навчальний посібник розрахований на студентів технічних та економічних спеціальностей, викладачів та всіх, хто бажає поглибити свої знання в галузі лінійної алгебри та лінійного програмування.

Навчальний посібник можна використовувати як для підготовки до колоквіумів, практичних занять з поданих тем, так і для типових розрахунків, контрольних домашніх робіт для студентів заочної форми навчання.

1 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Означення 1. Невиродженою системою лінійний рівнянь називають систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

при умові, якщо визначник матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ відмінний від нуля $|A| \neq 0$.

Матрицею системи називають матрицю А, яка складена з коефіцієнтів при невідомих кожного рівняння системи, а числа b_i – вільними членами системи.

Якщо до матриці системи додати стовпець вільних членів системи, то утвориться розширена матриця системи.

Систему лінійних рівнянь можна записати в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

де, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – основна матриця системи;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик відповідно невідомих і вільних членів.

Тоді система набере вигляду: $A \cdot X = B$.

Означення 2. Систему лінійних рівнянь називають сумісною, якщо вона має розв’язки (хоча б один) і несумісною якщо не має жодного розв’язку.

Означення 3. Сумісну систему лінійних рівнянь називають визначеною, якщо вона має єдиний розв’язок і невизначеною якщо має понад один розв’язок.

Означення 4. Систему лінійних рівнянь називають однорідною, якщо вільні члени всіх рівнянь дорівнюють нулю.

До основних методів розв’язування невироджених систем лінійних рівнянь належать:

1.Метод Крамера.

2.Матричний метод (за допомогою оберненої матриці).

3.Метод Жордана-Гаусса.

Розглянемо більш детально метод Жордана-Гаусса.

1.1 Метод Жордана-Гаусса

Під час розв’язування системи лінійних рівнянь методом Гаусса розглядався матричний метод з контрольним стовпцем, у результаті чого дана система рівнянь зводилась до трикутної системи. Для подальшого викладу важливо познайомитись з модифікованим методом **Жордана-Гаусса**, який дозволяє знаходити безпосередньо значення невідомих.

Розглянемо систему двох рівнянь з трьома невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2. \end{cases}$$

Перше рівняння системи поділимо на $a_{11} \neq 0$. Одержимо:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \dfrac{c_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \end{cases}$$

Після цього домножимо перше рівняння на ($-a_{21}$) і додамо до другого

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \dfrac{c_1}{a_{11}}, \\ (a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}})x_2 + (a_{23} - \dfrac{a_{13}a_{21}}{a_{11}})x_3 = c_2 - \dfrac{c_1 a_{21}}{a_{11}} \end{cases}.$$

Означення 1. Елемент a_{ij} системи за допомогою якого ми проводимо виключення невідомого зветься розв’язним елементом. Стовпець з цим елементом зветься розв’язним стовпцем, а рядок – розв’язним рядком.

Означення 2. Перетворення системи при якому:
1) розв'язний рядок ділиться на розв'язний елемент;
2) у розв'язному стовпці на місці розв'язного елемента ставиться 1, а всі інші нулі;
3) нові значення коефіцієнтів обчислюються за формулою

$$a'_{pk} = a_{pk} - \frac{a_{pj}a_{ik}}{a_{ij}}$$

називається **перетворенням однократного заміщення**.

Означення 3. Невідоме, яке входить лише в одне рівняння системи, називається базисним.

Означення 4. Невідомі системи, які не входять в базис, називаються вільними.

Означення 5. Якщо в базисному розв'язку вільні невідомі покласти рівними нулю, то одержимо розв'язок, який називається базисним.

Нехай дана довільна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

В матриці A цієї системи виберемо відмінний від нуля елемент a_{pq}. Розглянемо нову систему рівнянь

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ .... \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{2}$$

з матрицею A', коефіцієнти і вільні члени якої визначаються за формулами:

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ip} \cdot a_{qi}}{a_{qp}} \\ b'_i = b_i - \dfrac{a_{ip} \cdot b_q}{a_{qp}} \end{cases}, \text{ якщо } i \neq q.$$

Зокрема, $a_{ip} = 0$, якщо $i \neq q$. Якщо $i = q$, то приймаємо $a'_{qj} = a_{qj}, b'_q = b_q$. Таким чином, q-ті рівняння в системах (1) і (2) однакові, а коефіцієнти при x_p в усіх рівняннях системи (2), крім q-го, рівні нулю.

Слід мати на увазі, що системи (1) і (2) одночасно сумісні або несумісні. У випадку сумісності ці системи рівносильні (їх розв'язки збігаються).

Для визначення елемента $a_{ij}^{'}$ матриці $A^{'}$ доцільно використовувати «правило прямокутника».

Розглянемо чотири елементи матриці A: a_{ij} (елемент, який підлягає перетворенню), a_{qp} (розв'язний елемент) і елементи a_{ip} та a_{qj}. Для знаходження елемента $a_{i}^{'}$ слід від елемента a_{ij} відняти добуток елементів a_{ip} та a_{qj}, що розміщені в протилежних вершинах прямокутника, та поділити на розв'язний елемент a_{qp}:

$$a_{ij} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{ip}$$

$$a_{qj} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{qp}$$

Аналогічним чином можна перетворити систему (2), прийнявши за розв'язний елемент матриці $A^{'}$ елемент $a_{sr}^{'} \neq 0$, причому $s \neq q, r \neq p$. Після цього перетворення всі коефіцієнти при x_r, крім a_{sr}, перетворюються в нуль. Отримана система може бути знову перетворена і т.д. Якщо $rangA = n$ (ранг системи дорівнює числу невідомих), то після ряду перетворень прийдемо до системи рівнянь виду:

$$\begin{cases} k_1 x_1 = l_1, \\ k_2 x_2 = l_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n x_n = l_n, \end{cases}$$

з якої знаходять значення невідомих.

Рангом матриці A називається найбільший порядок мінору цієї матриці, відмінного від нуля.

Описаний метод, що оснований на послідовному виключенні невідомих, називається методом Жордана-Гаусса.

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати систему рівнянь методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо коефіцієнти, вільні члени і суми коефіцієнтів і вільних членів ($\sum$ – контрольний стовпець) у наступну таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	-3	2	6	7
1	-2	0	-1	-6	-8
0	1	1	3	16	21
2	-3	2	0	6	7

Ми взяли за розв'язний елемент коефіцієнт при x_1 у першому рівнянні. Перепишемо без змін рядок таблиці, що містить цей елемент (розв'язний рядок), а всі елементи 1-го стовпця, крім розв'язного, замінимо нулями:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	-3	2	6	7
0					
0					
0					

За правилом прямокутника заповнюємо порожні клітинки таблиці (це ж правило застосуємо і до стовпця $\sum$) :

x_4	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	-3	2	6	7
0	-3	3	-3	-12	-15
0	1	1	3	16	21
0	-5	8	-4	-6	-7

Звертаємо увагу на те, що в контрольному стовпці отримуються суми елементів відповідних рядків. Поділивши на (–3) елементи 2-го рядка, отримаємо таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	-3	2	6	7
0	1	-1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	-5	8	-4	-6	-7

Приймемо за розв'язний 2-ий елемент 2-го рядка. Перший стовпець перепишемо без змін, елементи 2-го стовпця, крім розв'язного, замінимо нулями, 2-ий (розв'язний) рядок перепишемо без змін, елементи останніх клітинок таблиці перетворимо за правилом прямокутника:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	-2	1	2	2
0	1	-1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Поділимо елементи 3-го рядка на 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	-2	1	2	2
0	1	-1	1	4	5
0	0	1	1	6	8
0	0	3	1	14	18

Перетворимо таблицю, прийнявши за розв'язний 3-й елемент 3-го стовпця:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	-2	-4	-6

Поділимо елементи 4-го рядка на (–2):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	1	2	3

Перетворимо таблицю, прийнявши за розв'язний 4-ий елемент 4-го рядка:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	0	8	9
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

В результаті перетворень система рівнянь звелась до вигляду:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 8, \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 6, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 4, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 2, \end{cases}$$

тобто $x_1 = 8,\ x_2 = 6,\ x_3 = 4,\ x_4 = 2.$ Відповідь: (8; 6; 4; 2)

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \quad = 20, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 25. \end{cases}$$

а) методом Жордана-Гаусса;

б) знайти всі базисні розв'язки.

Розв'язування

Складаємо таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1 2 3	3 1 -1	-2 1 4	1 0 -1	15 20 25
Множимо перший рядок на (–2) і додаємо до 2-го та множимо перший рядок на (–3) і додаємо до 3-го рядка. В результаті отримаємо:				
x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1 0 0	3 -5 -10	-2 5 10	1 -2 -4	15 -10 -20
Множимо 2-ий рядок на (–2) і додаємо до третього, при цьому отримаємо:				
x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1 0 0	3 -5 0	-2 5 0	1 -2 0	15 -10 0
Поділимо другий рядок таблиці на (–5).				
x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	3	-2	1	15
0	1	-1	$\frac{2}{5}$	2
0	0	0	0	0

Помножимо 2-ий рядок на (–3) і додамо до 1-го рядка, одночасно відкинемо 3-ій рядок таблиці, що містить одні нулі.				
x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	0	1	$-\frac{1}{5}$	9
0	1	-1	$\frac{2}{5}$	2

Отже, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 9, \\ x_2 - x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 2. \end{cases}$$

Приймемо x_1, x_2 за базисні невідомі; x_3, x_4 за вільні невідомі. Тоді:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + \frac{1}{5}x_4 + 9, \\ x_2 = x_3 - \frac{2}{5}x_4 + 2. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ де $c_1, c_2 \in$ R. Тоді дана система набере вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = 9 - c_1 + \frac{1}{5}c_2, \\ x_2 = 2 + c_1 - \frac{2}{5}c_2. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок системи:

$\{9 - c_1 + (1/5)c_2; 2 + c_1 - (2/5)c_2; c_1; c_2\}$.

б) Знайдемо базисні розв'язки системи.

Загальна кількість базисних розв'язків рівна: $C_4^2 = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$.

Запишемо всі можливі варіанти: $(x_1; x_2)$, $(x_1; x_3)$, $(x_1; x_4)$, $(x_4; x_2)$, $(x_4; x_3)$, $(x_2; x_3)$.

Базисні невідомі (БН)	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	0	1	-1/5	9
x_2	0	1	-1	2/5	2
x_3	1	0	1	-1/5	9
x_2	1	1	0	1/5	11
x_3	0	-1	1	-2/5	-2

x_1	1	1	0	1/5	11
x_4 x_1	0 1	5/2 ½	-5/2 ½	1 0	5 10
x_4 x_2	-5 2	0 1	-5 1	1 0	-45 20
x_4 x_3	5 2	5 1	0 1	1 0	55 20

Отже, шляхом перетворень ми отримали шість базисних розв'язків: $X^{(1)} = (9; 2; 0; 0)$, $X^{(2)} = (0; 11; 9; 0)$, $X^{(3)} = (11; 0; -2; 0)$, $X^{(4)} = (10; 0; 0; 5)$, $X^{(5)} = (0; 20; 0; -45)$, $X^{(6)} = (0; 0; 20; 55)$.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранги основної і розширеної матриць збігались.

Теорема (критерій визначеності). Для того, щоб сумісна система лінійних рівнянь була визначеною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював кількості невідомих, що входять у цю систему.

На основі цих двох теорем отримаємо алгоритм дослідження системи лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.

1) Знайти $r(A)$ та $r(\overline{A})$. Якщо $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несумісна, і алгоритм завершено. Якщо $r(A) = r(\overline{A})$, то система сумісна.

2) Якщо $r(A) = n$, де $n -$кількість невідомих, тобто число рівнянь системи дорівнюють числу невідомих, причому визначник Δ цієї системи $\Delta \neq 0$, то система визначена (має єдиний розв'язок), який знаходять за формулами Крамера, матричним методом чи методом Жордана-Гаусса.

Якщо $r(A) \neq n$, $(r < n)$, тобто число рівнянь системи менше числа невідомих, то система невизначена і має безліч розв'язків.

<u>Приклад 3.</u> Довести сумісність та знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14; \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4; \\ -x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 32. \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо розширену матрицю даної системи. Зведемо її до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ -3 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 8 & -3 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r = 2$$

Рядок, який містить лише нулі, можна відкинути. Отримаємо систему трапецієподібного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ 11x_2 - 2x_3 = 46. \end{cases}$$

Покладемо x_2 вільною змінною, а x_1, x_3 – залежними:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - x_3 + 14, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{74 - 17x_2}{2}, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}. \end{cases}$$

<u>Відповідь:</u> Система має безліч розв’язків $\left\{ \left(\dfrac{74-17x_2}{2}; x_2; \dfrac{11x_2 - 46}{2}\right), x_2 \in R \right\}$.

За допомогою методу Жордана-Гаусса можна повністю дослідити систему лінійних рівнянь: довести її сумісність або несумісність; у разі сумісності дослідити систему на визначеність; для визначених систем знайти їх єдиний розв’язок, а для невизначених – загальний.

1.2 Знаходження опорних розв’язків

У економічних задачах досить часто вимагається умова невід’ємності компонент розв’язку. Виникає задача знаходження невід’ємних базисних розв’язків.

Означення 1. Невід’ємні базисні розв’язки системи рівнянь називаються **опорними розв’язками.**

Щоб не знаходячи усі базисні розв’язки, а потім з них вибирати тільки невід’ємні, потрібно вибирати розв’язний елемент з таких умов:

1) розв’язний стовпець вибирається так, щоб в ньому виявився хоча б один додатний елемент $a_{ij} > 0$;

2) розв’язний елемент вибирається з умови, щоб відношення $\dfrac{b_i}{a_{ij}}$ було найменшим ($b_i \geq 0$, $a_{ij} > 0$).

Після вибору розв’язного елемента, подальші обчислення проводять за звичайними правилами жорданових перетворень на одному кроці. Як і при знаходженні базисних розв'язків тут також необхідно слідкувати за тим, щоб на деякому кроці не повернутися до уже попередньо знайденого опорного розв'язку.

Означення 2. Жорданові перетворення з урахуванням двох вище вказаних умов називаються симплексними перетвореннями.

Для симплексних перетворень має місце така теорема.

Теорема. Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь невід'ємні, то після симплексних перетворень вони залишаються невід'ємними.

Розглянемо на конкретному прикладі, як, маючи початковий опорний розв'язок, можна знайти всі інші опорні розв'язки системи лінійних рівнянь.

<u>Приклад.</u> Знайти всі опорні розв'язки системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad + x_5 = 5 \\ \quad x_2 - 2x_3 \quad + x_5 = 5 \\ \quad\quad x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

Розв'язування

Ця система (вільні члени якої додатні) може мати $C_5^3 = 10$ базисних розв'язків, проте лише частина з них може мати усі невід'ємні значення невідомих, тобто є опорними.

Запишемо задану систему лінійних рівнянь у вигляді таблиці

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Базисні невідомі (БН)
1	0	1	0	1	5	x_1
0	1	-2	0	1	5	x_2
0	0	$\boxed{1}$	1	-2	2	x_4

Очевидно система має початковий опорний розв'язок $X^{(0)} = (5; 5; 0; 2; 0)$.

Вибираємо за розв'язний стовпець, наприклад 3-ій, який має два додатних елементи: $a_{13} = 1$, $a_{33} = 1$. Для вибору розв'язного елемента обчислимо відношення: $\frac{b_1}{a_{13}} = \frac{5}{1} = 5;$ $\frac{b_3}{a_{33}} = \frac{2}{1} = 2.$ Найменшим виявилось відношення $\frac{b_3}{a_{33}} = 2.$ Отже, за розв'язний елементи візьмемо $a_{33} = 1$.

Проведемо жорданове перетворення з розв'язним елементом $a_{33} = 1$, отримаємо таблицю:

БН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	-1	$\boxed{3}$	3
x_2	0	1	0	2	-3	9
x_3	0	0	1	1	-2	2

Отже, опорний розв'язок: $X^{(1)}$= (3; 9; 2; 0; 0). Далі вибираємо за розв'язний стовпець 5-ий, в ньому тільки один додатний елемент $a_{15} = 3$. Його візьмемо за розв'язний елемент, замінимо його 1, в результаті перетворень (поділимо 1 рядок на 3).

БН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
	1/3	0	0	-1/3	$\boxed{1}$	1
	0	1	0	2	-3	9
	0	0	1	1	-2	2
x_2	1/3	0	0	-1/3	1	1
x_3	1	1	0	$\boxed{1}$	0	12
x_5	2/3	0	1	1/3	0	4

Новий опорний розв'язок такий: $X^{(2)} = (0; 12; 4; 0; 1)$. За розв'язний вибираємо четвертий стовпець, в ньому розв'язний елемент визначаємо з умови $\min\left\{\frac{12}{1}; \frac{4}{1/3} -\right\}$=12. За розв'язний елемент виберемо 1 на перетині 4-го стовпця і 2-го рядка. В результаті перетворень дістанемо:

БН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	2/3	1/3	0	0	1	5
x_4	1	1	0	1	0	12
x_5	1/3	-1/3	1	0	0	0
x_5	2/3	1/3	0	0	1	4
x_4	0	1	-2	0	1	5
x_1	0	2	-3	1	0	12
x_1	1	-1	3	0	0	0

$X^{(3)} = (0;12;4;0;1)$. Аналогічно знаходимо $X^{(4)} = (0;0;0;12;5)$ і $X^{(5)} = (0;0;0;12;5)$.

Отже, знайдено п'ять опорних розв'язків.

1.3 Однорідні системи лінійних рівнянь

Означення 1. Однорідною системою лінійних рівнянь називають систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Оскільки $r(A) = r(\overline{A})$, то система завжди сумісна і має тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Теорема 1. Для того, щоб система (1) мала ненульовий розв'язок необхідно і достатньо, щоб $r(A) < n$, де n-кількість невідомих.

Теорема 2. Для того, щоб однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник $\Delta = 0$.

Теорема 3. Якщо визначник Δ системи рівнянь дорівнює нулю, а серед алгебраїчних доповнень A_{ks} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ елементів k-го рядка є ненульові, то ця система має ненульовий розв'язок виду:

$$x_s = A_{ks}\ t \ (s = 1, 2, \ldots, n),$$

де t - довільний параметр.

Приклад 1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язування

$|A| = -3 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3.$

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Приклад 2. Знайти ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Обчислимо визначник цієї системи:

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}=0\cdot$$

Знайдемо алгебраїчне доповнення елементів першого рядка:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{12}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-6,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-10\cdot$$

Система однорідних рівнянь має розв'язок

$$x_1=-2t,\quad x_2=-6t,\quad x_3=-10t,$$

що залежить від довільного параметра. Узявши $s=-2t$, дістанемо іншу форму запису розв'язку

$$x_1=s,\quad x_2=3s,\quad x_3=5s,$$

де s - довільний параметр.

1.4 Завдання для самостійної роботи

Завдання1

а) Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса

б) Знайти всі базисні розв'язки системи рівнянь.

$$1.1\begin{cases}x_1-6x_2-3x_4=9,\\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=3,\\ 3x_1-5x_2-2x_3-2x_4=12.\end{cases}\qquad 1.2\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3-5x_4=4,\\ x_1+x_2-3x_3+2x_4=1,\\ 5x_1+7x_2+x_3-8x_4=9.\end{cases}$$

$$1.3\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+5x_4=8,\\ 3x_1+x_2+x_3+x_4=6,\\ -2x_1+x_2+2x_3+4x_4=2.\end{cases}\qquad 1.4\begin{cases}5x_1-x_2-2x_3+3x_4=15,\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=4,\\ 3x_1-5x_2-4x_3+x_4=7.\end{cases}$$

$$1.5\begin{cases}x_1-3x_3+2x_4=2,\\ 2x_2+x_3-3x_4=4,\\ x_1+4x_2-x_3-4x_4=10.\end{cases}\qquad 1.6\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+x_4=4,\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=6,\\ x_1-6x_2+10x_3+4x_4=6.\end{cases}$$

$$1.7\begin{cases}x_1+2x_2-4x_3-2x_4=2,\\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4=6,\\ 3x_1-x_2-3x_3-x_4=8.\end{cases}\qquad 1.8\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-3x_4=8,\\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=5,\\ 3x_1-4x_2-x_3+5x_4=2.\end{cases}$$

1.9 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

1.10 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$

1.11 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

1.12 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + 8x_4 = 4. \end{cases}$

1.13 $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = 4, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

1.14 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 8x_4 = 7. \end{cases}$

1.15 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 4x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

1.16 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20. \end{cases}$

1.17 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 15, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 25, \\ 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 10. \end{cases}$

1.18 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 20, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$

1.19 $\begin{cases} 3x_1 - x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 12. \end{cases}$

1.20 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 14. \end{cases}$

1.21 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 15, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 25. \end{cases}$

1.22 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$

1.23 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

1.24 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$

1.25 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 20, \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 10, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

1.26 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

1.27 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 7. \end{cases}$

1.28 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

1.29 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$

1.30 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 10. \end{cases}$

Завдання 2.

Знайти всі опорні (невід'ємні базисні) розв'язки системи лінійних рівнянь.

2.1 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 36, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$

2.2 $\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + 3x_4 + 5x_5 = 36, \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_5 = 21, \\ -x_2 + x_3 + x_5 = 3, \\ 4x_2 + x_4 - x_5 = 21, \\ x_2 - x_5 + x_6 = 3. \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} x_1 - 4x_4 + x_6 = 3, \\ x_3 - x_4 + x_6 = 6, \\ x_4 + x_5 = 6, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_6 = 33. \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} x_1 + 3x_4 - 2x_5 = 9, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 8, \\ x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 9. \end{cases}$

2.6 $\begin{cases} -x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ -5x_2 + x_3 - 2x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} x_1 - x_5 + x_6 = 4, \\ x_2 - 4x_5 - x_6 = 12, \\ x_3 + x_5 + x_6 = 8, \\ x_4 + x_5 - x_6 = 3. \end{cases}$

2.8 $\begin{cases} 7x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 + x_6 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 4. \end{cases}$

2.9 $\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_6 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_7 = 6. \end{cases}$

2.10 $\begin{cases} x_1 + 4x_3 + x_6 = 30, \\ x_2 - 4x_3 + 3x_6 = 12, \\ x_3 + x_4 - 2x_6 = 3, \\ 2x_3 + x_5 + 3x_6 = 30. \end{cases}$

$$2.11\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ -x_2 + 4x_4 + x_5 = 12, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_2 - x_4 + x_5 = 4. \end{cases} \qquad 2.12\ \begin{cases} x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 33, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + x_6 = 3. \end{cases}$$

$$2.13\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 30, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 30, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_6 = 12. \end{cases} \qquad 2.14\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_5 = 5, \\ 6x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_6 = 2, \\ 8x_1 - x_2 - x_3 + x_7 = 1. \end{cases}$$

$$2.15\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_7 = 8. \end{cases} \qquad 2.16\ \begin{cases} x_1 - x_5 + x_6 = 3, \\ x_2 - x_5 + 4x_6 = 21, \\ x_3 + 4x_5 - x_6 = 21, \\ x_4 + x_5 - x_6 = 3. \end{cases}$$

$$2.17\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_3 + x_6 = 5. \end{cases} \qquad 2.18\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + x_7 = 24. \end{cases}$$

$$2.19\ \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 7, \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + x_6 = 12, \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 + x_7 = 6. \end{cases} \qquad 2.20\ \begin{cases} x_2 + 3x_4 = 6, \\ x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_4 = 4, \\ x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

$$2.21\ \begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5. \end{cases} \qquad 2.22\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 31, \\ -2x_2 + x_3 + 3x_4 = 9, \\ 3x_3 - x_4 + x_5 = 21. \end{cases}$$

$$2.23\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 14, \\ x_2 + 5x_3 + x_7 = 5. \end{cases} \qquad 2.24\ \begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 2, \\ 8x_1 - x_2 - 8x_3 + x_7 = 8. \end{cases}$$

2.25 $\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 8, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_7 = 2. \end{cases}$ 2.26 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

2.27 $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 31, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 21. \end{cases}$ 2.28 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$

2.29 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ -2x_2 + x_3 - x_5 = 5, \\ 6x_2 - 5x_4 - 2x_5 + x_6 = 5. \end{cases}$ 2.30 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_4 = 32, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 16, \\ x_1 - x_2 + x_6 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_7 = 2. \end{cases}$

Запитання для самоконтролю

1. Який елемент називається розв'язним?
2. Яке перетворення називається перетворенням однократного заміщення?
3. Які невідомі називаються базисними?
4. Який розв'язок системи називається опорним?
5. Що називається рангом матриці?
6. Яких умов слід дотримуватися під час вибору розв'язного елементу?
7. Які властивості має базис?

2 Основна задача лінійного програмування

2.1 Приклади задач лінійного програмування

Розглянемо деякі із задач планування і управління, математичні моделі яких зводяться до оптимізаційних задач або до так званих задач лінійного програмування.

Визначення найкращого складу суміші. Іноді така задача називається задачею про вибір дієти. Нехай відомо вміст поживних речовин у різних продуктах харчування. Відомо також калорійність одиниці кожного виду продукту. Потрібно вибрати раціон так, щоб кожна корисна речовина, що міститься в продуктах і сумарна калорійність дієти були мінімальними.

До задач про суміші відносяться також задачі нижче наведеного типу. Бензини різних сортів отримують змішуванням різних нафтопродуктів. Задані показники якості бензину повинні витримуватись максимально точно. Але вихідні нафтопродукти мають різні технічні характеристики, і від того які нафтопродукти змішувати залежить рентабельність виробництва. У даній задачі потрібно скласти такий план змішування нафтопродуктів, який дав би змогу забезпечити максимальну рентабельність виробництва і дозволяв отримувати бензини заданих сортів у необхідних пропорціях.

Задача про оптимальний план випуску продукції. Нехай деяке підприємство випускає продукцію заданого асортименту. Затрати певного виду ресурсів на випуск одного виробу з вказаного асортименту, а також повні об'єми ресурсів є фіксованими. Прибуток, що отримують від реалізації кожного виду продукції величина постійна. Підприємству потрібно скласти такий план випуску продукції, який би був технологічно здійсненним за наявності вказаних ресурсів і в той же час приносив максимальний прибуток.

Транспортна задача. Ця задача виникає, коли мова йде про раціональне перевезення деякого однорідного продукту від виробників до споживачів. Припускається, що споживачам немає різниці звідки, з яких пунктів буде надходити продукт, головне, щоб він надходив в потрібному об'ємі. Але від того, наскільки раціонально будуть прикріплені пункти потреби до пунктів призначення, залежить об'єм транспортної роботи. У зв'язку з цим виникає задача про найбільш раціональне прикріплення до правильного напрямку перевезень вантажу, при якому потреби задовольняються, а витрати на транспортування мінімальні.

Задача розміщення. Нехай у відомих пунктах є або можуть бути розміщені підприємства, які виробляють деякий продукт. Цей продукт споживають в інших відомих пунктах. Відомі витрати на виробництво одиниці продукту і можливий максимальний об'єм виробництва в усіх пунктах виробництва, а також витрати на транспортування із пунктів виробництва в пункти споживання. Необхідно так вибрати місця розміщення нових підприємств, об'єми виробництва у них і план перевезення, щоб сумарні витрати на виробництво і транспортування всього необхідного об'єму продукту були мінімальними.

Інші види оптимізаційних задач.

Наведемо типові класи задач:

1) **управління запасами** (із збільшенням запасів збільшуються витрати на зберігання, але при цьому зменшуються втрати через можливість їх нестачі);

2) **розподілення ресурсів** (для певного набору робіт необхідно так розподілити ресурси, щоб отримати найбільший прибуток під час виконання цих робіт або мінімізувати втрати, що пов'язані із неповним забезпеченням ресурсами);

3) **ремонт і заміна обладнання** (робоче обладнання з часом зношується і має бути замінене, тому потрібно визначити найкращі строки поновленого ремонту і момент заміни обладнання модернізованим);

4) **масове обслуговування** (має місце в організаціях, що обслуговують черги замовлень або вимог, наприклад на телефонних станціях, ремонтних майстернях; тут задача полягає в тому, щоб мінімізувати сумарні очікувані втрати від несвоєчасного обслуговування замовлень);

5) **календарне планування** (дозволяє скласти такий розклад для завантажування обладнання, щоб сумарна тривалість комплексу завершуваних робіт була мінімальною);

6) **сітьове планування і управління** (має місце під час виконання важких об'єктів, які потребують значних коштів та коли необхідно узгодження строків завершення окремих комплексів робіт і моментів запуску операцій всього комплексу);

7) **вибір маршруту** (при проектуванні комунікацій або трубопроводів необхідно вибирати найкраще їх розміщення, щоб оптимізувати потоки в мережах);

8) **комбіновані задачі** (містять декілька типових задач одночасно).

Приклад. Для виготовлення трьох видів виробів A, B і C використовують токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного із типів обладнання наведені в таблиці.

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виду виробу			Загальний фонд робочого часу обладнання (год)
	A	B	C	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток	10	14	12	

Скласти математичну модель задачі, щоб прибуток від реалізації був максимальним.

Розв'язування

Припустимо, що буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду A, x_2 одиниць – виду B і x_3 одиниць – виду C. Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно затратити $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станкогодин фрезерного обладнання. Оскільки, як загальний фонд робочого часу станків даного типу не може перевищувати 120, то повинна виконуватись нерівність $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120$. Аналогічно складаємо такі обмеження:

$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120$; $x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280$;

$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240$; $4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360$.

Оскільки кількість виготовлених виробів не може бути від'ємною, то слід додати ще обмеження: $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$.

Прибуток від їх реалізації складає: $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max$.

2.2 Загальна і основні задачі лінійного програмування

Означення 1. Загальною задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,k}), \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=\overline{k+1,m}), \tag{3}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,l},\ l \le n), \tag{4}$$

де $a_{ij}, b_i, c_j -$ задані постійні величини і $k \le m.$

Означення 2. Функція (1) називається цільовою функцією (або лінійною формою) задачі (1) – (4), а умови (2) – (4) – обмеженнями даної задачі.

Означення 3. Стандартною (або симетричною) задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1) при виконанні умов (2) і (4), де $k=m$ і $l=n$.

Означення 4. Канонічною (або основною) задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1) при виконанні умов (3) і (4), де $k=0$ і $l=n.$

Означення 5. Сукупність чисел $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють обмеження задачі (2) – (4), називається допустимим розв’язком (або планом).

Означення 6. План $X^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при якому цільова функція (1) приймає своє максимальне значення, називається оптимальним.

Значення цільової функції (1) при плані X будемо позначати через $F(X).$ Відповідно, якщо $X^* -$ оптимальний план задачі, то для будь-якого X виконується нерівність $F(X) \le F(X^*)$.

Щоб перейти від одної форми запису задачі лінійного програмування до іншої, потрібно в загальному випадку, по-перше, зводити задачу мінімізації функції до задачі максимізації, по-друге, переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки, по-третє, замінювати змінні, які не задовольняють умову невід’ємності.

В тому випадку, коли потрібно знайти мінімум функції $F=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$, можна перейти до знаходження максимуму функції $F_1=-F=-c_1x_1-c_2x_2-...-c_nx_n$, оскільки $\min F=-\max(-F)$.

Обмеження нерівності вихідної задачі лінійного програмування вигляду «$\le$», можна перетворити в обмеження-рівності шляхом додавання до їх лівих частин додаткових невід'ємних невідомих, а обмеження-нерівності вигляду "≥" – в обмеження-рівності відніманням від їх лівих частин додаткових невід'ємних невідомих. Таким чином, обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i$$

перетворюється в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \ (x_{n+1} \ge 0), \quad (5)$$

а обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i$$

в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \ (x_{n+1} \ge 0), \quad (6)$$

В той же час кожне рівняння системи обмежень

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$$

можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n \le -b_i. \end{cases} \quad (7)$$

2.3 Геометричний спосіб розв'язування задач лінійного програмування

Означення 7. Множина називається опуклою, якщо разом з довільними двома точками вона містить і їх довільну опуклу комбінацію.

Означення 8. Точка X опуклої множини називається кутовою, якщо вона не може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації будь-яких двох інших різних точок даної множини.

Теорема 1. Множина планів основної задачі лінійного програмування є опуклою (якщо вона непорожня).

Означення 9. Непорожня множина планів основної задачі лінійного програмування називається многокутником розв'язків, а довільна кутова точка многокутника розв'язків – вершиною.

Теорема 2. Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план, то максимальне значення цільова функція задачі прийме в одній із вершин многокутника розв'язків. Якщо максимальне значення цільова функція задачі приймає більше ніж в одній вершині, то вона приймає його в довільній точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Нехай дано задачу лінійного програмування:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \quad (8)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \quad (9)$$

для $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ (10)

в яку входять тільки дві змінні: x_1 і x_2.

Кожна з нерівностей системи обмежень (9) і (10) визначає на координатній площині x_1Ox_2 деяку півплощину. При цьому, якщо $x_2 \leq -\frac{a_{i1}}{a_{i2}}x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}}$, то це нижня півплощина, а якщо $x_2 \geq -\frac{a_{i1}}{a_{i2}}x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}}$ - то верхня. Отже, областю допустимих розв'язків – множиною D задачі (8) – (10) є перетин (спільна частина) скінченної кількості півплощин, тобто деяка багатокутна область на площині.

Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування застосовується в основному в задачах з обмеженнями у вигляді системи нерівностей, які містять дві змінні.

Розв'язання таких задач виконується в два етапи:

перший етап – побудова області допустимих розв'язків – множини D;

другий етап – пошук в цій області оптимального розв'язку.

Для побудови області допустимих розв'язків потрібно:

1) записати рівняння граничних прямих і побудувати їх графіки;
2) виділити області розв'язків кожної з нерівностей системи обмежень (9) і (10);
3) виділити область допустимих розв'язків D.

Зауваження 1. При побудові областей допустимих розв'язків D може мати місце один із трьох варіантів: 1) опуклий многокутник; 2) необмежена опукла багатокутна область; 3) пуста множина.

В першому випадку задача не має розв'язку через те, що система обмежень несумісна в області допустимих розв'язків; в другому випадку задача завжди має оптимальний розв'язок; в третьому випадку задача може мати або не мати розв'язку. Останнє пов'язано з необмеженим зростанням ($F_{\max} \to \infty$) або спаданням ($F_{\min} \to -\infty$) функції F в області допустимих значень.

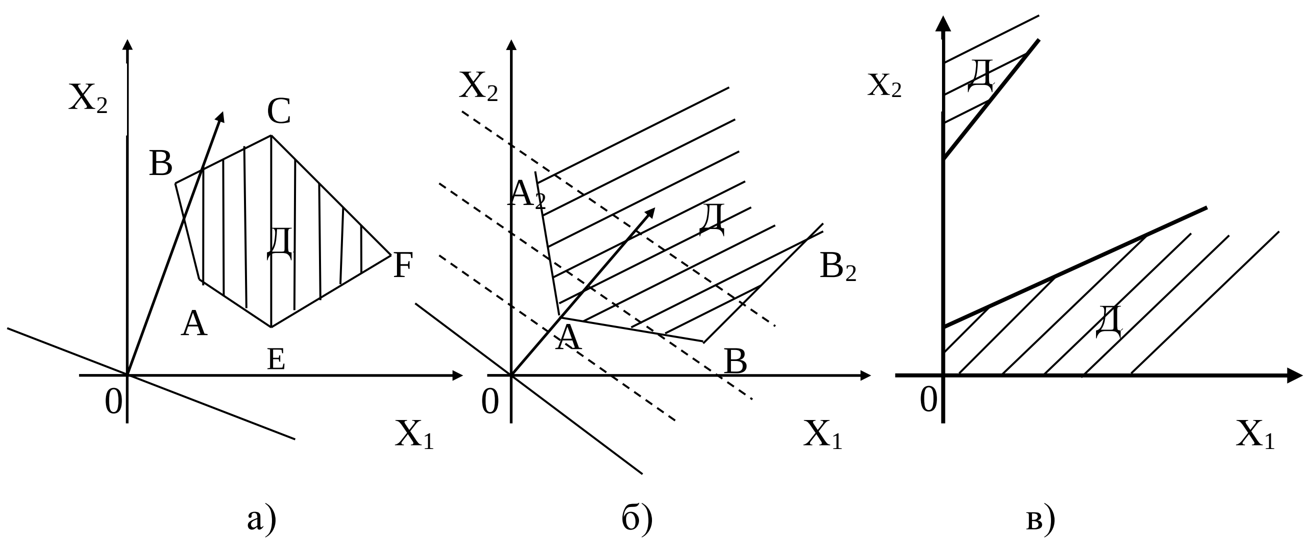

Рисунок 1 – Можливі варіанти допустимих розв'язків D

Далі необхідно перейти до другого етапу – знаходження оптимального розв'язку. Рівняння $F = c_1 x_1 + c_2 x_2$ при фіксованому значенні F визначає пряму, а при зміні F – сім'ю паралельних прямих з параметром F. Вектор $\overrightarrow{N} = \{c_1, c_2\}$, перпендикулярний до всіх цих прямих, вказує напрямок зростання параметра F. Для всіх точок, які лежать на одній з прямих, функція F приймає певне значення, тому вказані прямі звуться лініями рівня для функції F.

Для знаходження оптимального розв'язку потрібно:

1) на рисунку, де побудована область D, побудувати вектор $\overrightarrow{N} = \{c_1, c_2\}$ і лінію рівняння $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$;

2) шляхом паралельного переміщення лінії рівня у напрямку вектора $\overrightarrow{N}$ знайти спільну точку лінії рівня і області D. Це буде вершина області D з координатами $\left(x_1^*, x_2^*\right)$. При подальшому паралельному переміщенні лінії рівня вона вже не буде мати спільних точок з областю D;

3) знайти координати $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ вершини області D, як перетин двох прямих, які проходять через цю вершину;

4) обчислити максимальне значення цільової функції $F_{\max} = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*$.

Зауваження 2. Якщо лінійна функція F досягає свого екстремального значення в одній кутовій точці, що є вершиною багатокутної області, то задача має єдиний оптимальний розв'язок, якщо більше, ніж в одній точці, то задача має нескінченну кількість оптимальних розв'язків.

Зауваження 3. Для задачі мінімізації лінію рівня $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ необхідно паралельно переміщувати в напрямку, протилежному напрямку вектора $\overrightarrow{N}$.

Зауваження 4. Якщо при паралельному переміщенні лінія рівня весь час буде перетинати допустиму область D, то лінійна функція $F = c_1 x_1 + c_2 x_2$ необмежена зверху на допустимій множині і задача (8) – (10) немає оптимального розв'язку (рис. 1б).

Зауваження 5. Графічний спосіб розв'язування задач ЛП застосовується інколи у випадку якщо система обмежень задачі має більше, ніж дві змінні.

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати графічно задачу лінійного програмування: $F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$, при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \le 18, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases} \text{, для } x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язування

Будуємо область допустимих розв'язків – множину D. Процес побудови спочатку подамо у динаміці.

Розглянемо 1-шу нерівність $3x_1 + 9x_2 \le 18$. Запишемо рівняння граничної прямої l_1: $3x_1 + 9x_2 = 18$, оскільки рівняння з двома змінними в двовимірному просторі, тобто на площині, геометрично зображає пряму лінію. В системі координат на площині побудуємо пряму. Для побудови прямої l_1 досить взяти

дві точки, які належать цій прямій. Візьмемо точки перетину прямої з осями координат:
якщо $x_1 = 0,$ то $x_2 = 2$, якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 6$. Через точки (0, 2) і (6, 0) проводимо пряму l_1 (рис. 2). Пряма l_1 дану площину поділяє на дві півплощини. Нерівність $3x_1 + 9x_2 = 18 \Rightarrow x_2 \le -1/3x_2 + 3$ визначає нижню півплощину по відношенню до прямої l_1. На рис. 2, ця півплощина заштрихована.

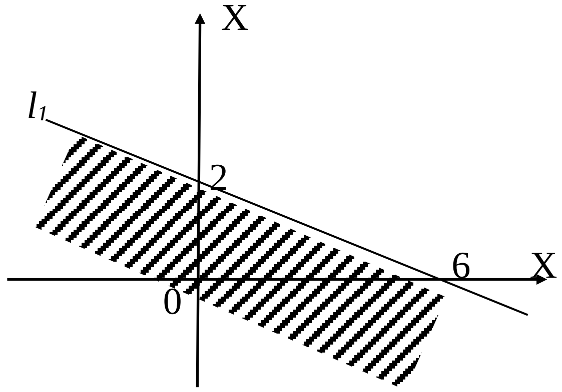

Рисунок 2 – Розв'язки нерівності 1

Аналогічно 2-га нерівність: $3x_1 + 4x_2 \le 12$ визначає граничну пряму l_2: $3x_1 + 4x_2 = 12$. Для її побудови візьмемо точки перетину з осями координат: якщо $x_1 = 0,$ то $x_2 = 3,$ якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 4$. Через точки (0, 3) і (4, 0) проводимо пряму l_2 (рис.3). Аналогічно як і для прямої l_1 визначаємо напрямок штриховки та зображаємо її на рисунку. Нерівність $x_1 \ge 0$ геометрично зображає праву півплощину відносно осі ординат Ox_2 , разом з граничною прямою $x_1 = 0$, яка збігається з віссю Ox_2. Аналогічно нерівність $x_2 \ge 0$ геометрично зображає верхню півплощину відносно осі Ox_1 разом з граничною прямою $x_2 = 0$, яка збігається з віссю Ox_1. Перетин (спільна частина) цих чотирьох півплощин визначає допустиму область D .

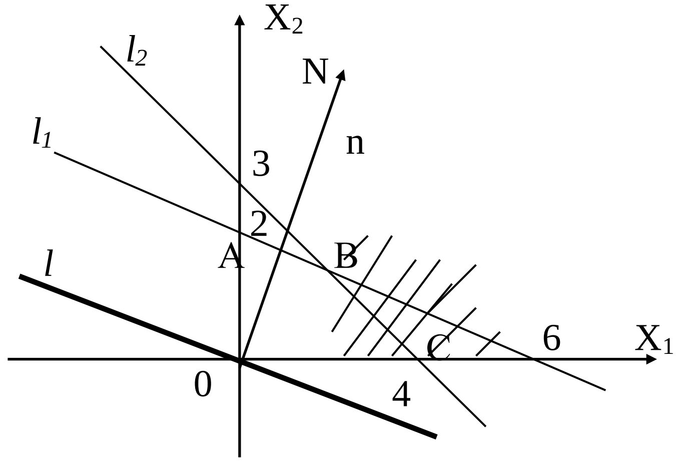

Рисунок 3 – Область допустимих розв'язків

Отже, допустимою областю D є опуклий многокутник OABC, який на рис.3 заштрихований. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, будуємо вектор $\vec{N}=\{2;5\}$, який показує напрям зростання функції $F=2x_1+5x_2$. Лініями рівня є прямі $2x_1+5x_2=c$, де $c\in$R. Надамо c значення нуля і проведемо пряму $l: 2x_1+5x_2=0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\{2;5\}$ (рис. 3).

Щоб знайти найбільше значення функції $F=2x_1+5x_2$ на многокутнику OABC, спочатку знаходимо точку, в якій це значення досягається.

Для цього умовно переміщуємо пряму l: $2x_1+5x_2=0$ паралельно самій собі по області D в напрямку вектора $\vec{N}=\{2;5\}$ до тих пір, поки вона не перестане перетинати область D. Найбільшого значення лінійна функція $F=2x_1+5x_2$ досягатиме у вершині B многокутника OABC, тобто у точці виходу прямої l з даної області.

Знайдемо координати точки B ($x_1^*;x_2^*$). Точка B лежить на перетині прямих l_1 і l_2. Для знаходження координат точки B необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}3x_1+9x_2=18,\\3x_1+4x_2=12.\end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння системи друге, отримаємо:

$5x_2=6\to x_2^*=\frac{6}{5}$. Тоді $3x_1=12-4x_2=12-4\cdot\frac{6}{5}=\frac{36}{5}$, а відповідно $x_1^*=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}$. Тобто точка B має координати $(\frac{12}{5};\frac{6}{5})$.

Отже, найбільше значення лінійної функції:

$$F_{\max}=f(B)=2\cdot\frac{12}{5}+5\cdot\frac{6}{5}=\frac{54}{5}.$$

<u>Приклад 2.</u> Знайти найбільше та найменше значення функції $F=2x_1-3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2\le 12,\\3x_1-5x_2\le 15,\\x_1-x_2\ge -2,\\2x_1+x_2\ge -6.\end{cases}$$

Розв'язування

Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $3x_1+2x_2=12$, яка проходить через точки (0;6) та (4;0);
2) l_2: $3x_1-5x_2=15$, яка проходить через точки (0;-3) та (5;0);

3) $l_3: x_1 - x_2 = -2$, яка проходить через точки (0; 2) та (-2;0);

4) l_4: $2x_1 + x_2 = -6$, яка проходить через точки (0;-6) та (-3;0).

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.4).

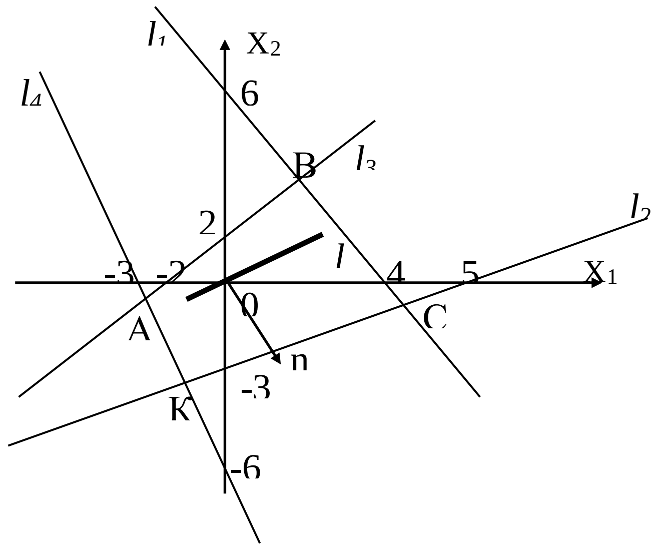

Рисунок 4 – Область допустимих розв'язків

Отже, допустимою областю D є опуклий многокутник АВСК, який на рис.4 заштрихований. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\vec{N} = \{2; -3\}$. Проведемо пряму l: $2x_1 - 5x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\vec{N}$ (рис. 4).

Умовно переміщуємо пряму l: $2x_1 - 5x_2 = 0$ паралельно самій собі по області D у напрямі вектора $\vec{N} = \{2; -3\}$ до тих пір, поки вона не перестане перетинати область D. Найбільшого значення лінійна функція $F = 2x_1 - 3x_2$ досягатиме в найбільш віддаленій вершині К многокутника АВСК, тобто у точці виходу прямої з даної області. Знайдемо координати точки К ($x_1^*; x_2^*$). Точка К лежить на перетині прямих l_4 і l_2. Для знаходження координат точки К необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 15, \\ 2x_1 + x_2 = -6. \end{cases}$$

Домножимо 2-ге рівняння системи на 5 і додамо до 1-го, отримаємо:

$13x_2 = -15 \rightarrow x_2^* = \dfrac{-15}{13}$. Тоді $x_2 = -6 - 2x_1 = -6 - 2 \cdot (-\dfrac{15}{13}) = -\dfrac{48}{13}$.

Тобто точка К має координати $(-\frac{48}{13};-\frac{15}{13})$.

Отже, найбільше значення лінійної функції:

$$F_{\max} = F(K) = 2\cdot(-\frac{48}{13}) - 3\cdot(-\frac{15}{13}) = -\frac{51}{13}.$$

Найменшого значення лінійна функція $F = 2x_1 - 3x_2$ досягатиме в найближчій вершині В многокутника АВСК, тобто у точці входу прямої l у дану область. Знайдемо координати точки В $(x_1^{'};x_2^{'})$. Точка В лежить на перетині прямих l_1 і l_3. Для знаходження координат точки В необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12, \\ x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$

Домножимо 2-ге рівняння системи на 2 і додамо до 1-го, отримаємо:

$5x_1 = 8 \to x_1^{'} = \frac{8}{5}$. Тоді $x_2^{'} = 2 + x_1 = 2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5}$. Тобто точка В має координати $(\frac{8}{5};\frac{18}{5})$.

Отже, найменше значення лінійної функції:

$$F_{\min} = F(B) = 2\cdot\frac{8}{5} - 3\cdot\frac{18}{5} = -\frac{38}{5}.$$

2.4 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.

Знайти найбільше значення лінійної форми: $F(x) = ix_1 + (i+2)x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} ix_1 + (3i)x_2 \le 5i + 1 \\ (i+4)x_1 + ix_2 \le 5i + 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(i взяти рівним номеру варіанта).

Завдання 2.

Знайти найбільше і найменше значення лінійної форми:

$$F(x) = 3x_1 + x_2$$

$$2.1\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -4, \\ -3x_1 + x_2 \ge -6, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge -12. \end{cases}$$

$$F(x) = 5x_1 + x_2$$

$$2.2\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 \le 8, \\ -2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge -6. \end{cases}$$

$$F(x) = -7x_1 + x_2$$

$$2.3\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge -2. \end{cases}$$

2.4
$$F(x) = -x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 \le 3, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 19, \\ x_1 + x_2 \ge -5. \end{cases}$$

2.5
$$F(x) = -x_1 - 3x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \ge -4, \\ 2x_1 - x_2 \ge -8, \\ -3x_1 - 4x_2 \ge -12. \end{cases}$$

2.6
$$F(x) = 7x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 \le 24, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge -30, \\ x_1 - x_2 \ge -10. \end{cases}$$

2.7
$$F(x) = 12x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge -6. \end{cases}$$

2.8
$$F(x) = -x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge -4. \end{cases}$$

2.9
$$F(x) = 7x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 \le 24, \\ 9x_1 + 9x_2 \le 45, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge -30, \\ 5x_1 - x_2 \ge -10. \end{cases}$$

2.10
$$F(x) = -x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 4x_1 - x_2 \le 10, \\ -x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -2x_1 + 2x_2 \le 6. \end{cases}$$

2.11
$$F(x) = 12x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \le 24, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge -24, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 3x_1 - 5x_2 \ge -15. \end{cases}$$

2.12
$$F(x) = x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge -2. \end{cases}$$

2.13
$$F(x) = x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge -6, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15. \end{cases}$$

2.14
$$F(x) = 3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge -6, \\ x_1 - 3x_2 \ge -9, \\ -3x_1 + 2x_2 \ge -6. \end{cases}$$

2.15
$$F(x) = 3x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 18, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ -x_1 - x_2 \le 5. \end{cases}$$

2.16
$$F(x) = 2x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ -x_1 - 5x_2 \le 6, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 4. \end{cases}$$

2.17
$$F(x) = 8x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6, \\ -2x_1 + x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \ge -8, \\ -x_1 - 2x_2 \ge -4. \end{cases}$$

2.18
$$F(x) = 4x_1 - 8x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge -10, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 15, \\ -4x_1 + 7x_2 \le 28. \end{cases}$$

2.19
$$F(x) = 4x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 10, \\ -3x_1 + x_2 \ge -6, \\ 2x_1 - x_2 \ge -4, \\ 7x_1 + 14x_2 \ge -21. \end{cases}$$

2.20
$$F(x) = -x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \\ -4x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge -2. \end{cases}$$

2.21
$$F(x) = -3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ -x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 8. \end{cases}$$

$F(x)=2x_1-2x_2$

2.22 $\begin{cases} -2x_1-x_2\le 4, \\ x_1-4x_2\le 6, \\ -x_1+x_2\le 6, \\ 5x_1+2x_2\le 10. \end{cases}$

$F(x)=x_1-3x_2$

2.23 $\begin{cases} 3x_1+4x_2\le 16, \\ 2x_1-x_2\le 6, \\ -x_1+x_2\le 6, \\ -2x_1-2x_2\le 14. \end{cases}$

$F(x)=x_1+3x_2$

2.24 $\begin{cases} 2x_1+x_2\ge -2, \\ -3x_1+x_2\ge -6, \\ 5x_1+7x_2\ge -35, \\ 4x_1+7x_2\le 28. \end{cases}$

$F(x)=-3x_1-2x_2$

2.25 $\begin{cases} 8x_1+x_2\le 8, \\ -x_1-x_2\le 2, \\ 5x_1-x_2\le 6, \\ -3x_1+x_2\le 6. \end{cases}$

$F(x)=6x_1+3x_2$

2.26 $\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 12, \\ 3x_1-x_2\le -6, \\ -2x_1+3x_2\ge -6, \\ x_1+2x_2\ge -4. \end{cases}$

$F(x)=-2x_1-4x_2$

2.27 $\begin{cases} 7x_1+3x_2\le 10, \\ 2x_1-x_2\le 6, \\ -x_1+x_2\le 5, \\ 4x_1+x_2\ge -6. \end{cases}$

$F(x)=x_1-x_2$

2.28 $\begin{cases} -x_1-x_2\le 6, \\ 5x_1-x_2\le -4, \\ x_1+3x_2\le 6, \\ -2x_1+x_2\ge 10. \end{cases}$

$F(x)=-2x_1+7x_2$

2.29 $\begin{cases} x_1+3x_2\le 6, \\ 4x_1-x_2\le 8, \\ 5x_1+7x_2\ge -35, \\ -x_1+x_2\le 6. \end{cases}$

$F(x)=2x_1-7x_2$

2.30 $\begin{cases} 7x_1-x_2\ge -14, \\ -2x_1+3x_2\ge -12, \\ x_1+3x_2\le 9, \\ 5x_1+3x_2\ge -15. \end{cases}$

Запитання для самоконтролю

1. Які задачі лінійного програмування можна розв'язувати графічним методом?

2. Яка область є розв'язком лінійної нерівності $a_1x_1+a_2x_2\le b$?

3. Яку область утворюють допустимі розв'язки задачі лінійного програмування і що вона собою являє?

4. Як знайти графічно оптимальну вершину?

5. Які можливі випадки областей допустимих розв'язків при графічному розв'язуванні задач лінійного програмування?

3 Симплекс метод розв'язування задач лінійного програмування

3.1 Поняття про симплексний метод (симплекс метод)

Розглянемо канонічну задачу лінійного програмування, у якій система лінійних рівнянь розв'язана відносно одиничного базису і всі вільні члени невід'ємні числа:

$$F=-c_0+c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4+c_5x_5+c_6x_6\to\max$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 = b_1, \\ \quad x_2 \qquad + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 == b_2, \\ \qquad x_3 \quad + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 == b_3, \\ x_j \geq \left(j = 1, 2, ..., 6 \right) \end{cases} \tag{1}$$

Запишемо цільову функцію у вигляді:

$$F - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - c_4x_4 - c_5x_5 - c_6x_6 = -c_0 \tag{2}$$

Система (1) має опорний розв'язок $X_0 = \{b_1; b_2; b_3; 0; 0; 0\}$ при якому $F_0 = -c_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.

Рівняння (1_1) помножимо на c_1, рівняння (1_2) помножимо на c_2, рівняння (1_3) помножимо на c_3 і додамо до рівняння (2). Одержимо:

$$F - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - c_4x_4 - c_5x_5 - c_6x_6 + c_1x_1 + c_1(a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6) + c_2x_2 +$$
$$+c_2(a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6) + c_3x_3 + c_3(a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6) = -c_0 + c_1b_1 + c_2b_2 +$$
$$+c_3b_3 \Rightarrow$$
$$F + x_4(c_1a_{14} + c_2a_{24} + c_3a_{34} - c_4) + x_5(c_1a_{15} + c_2a_{25} + c_3a_{35} - c_5) + x_6(c_1a_{16} +$$
$$+c_2a_{26} + c_3a_{36} - c_6) = F_0 \tag{3}$$

Коефіцієнти цього рівняння

$$a_{0k} = \sum_{i=1}^{3} c_i a_{ik} - c_k, \quad (k = 4, 5, 6) \tag{4}$$

Приєднаємо рівняння (3) до системи (1), вважаючи F базисною змінною. Складемо таблицю:

c_1	Базис	$-c_0$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
c_1	x_1	b_1	1	0	0	a_{14}	a_{15}	a_{16}	
c_2	x_2	b_2	0	1	0	a_{24}	a_{25}	a_{26}	
c_3	x_3	b_3	0	0	1	a_{34}	a_{35}	a_{36}	
	F	F_0	0	0	0	a_{ij}	a_{05}	a_{06}	

Останній рядок таблиці зветься нульовим або індексним. Оптимальний розв'язок – це один з опорних розв'язків. Будемо переходити у складеній таблиці, що зветься симплексною, від одного опорного розв'язку до іншого так, щоб цільова функція F при цьому зростала. Ці перетворення будемо виконувати доти, поки функція F не досягне найбільшого значення, притримуючись при цьому такого правила:

1) в індексному рядку знаходимо від'ємний елемент, що має найбільше абсолютне значення;

2) стовпець з цим елементом беремо за розв'язний;

3) у цьому стовпці за розв'язний беремо додатний елемент для якого відношення $\frac{b_i}{a_{ij}}$ є найменшим;

4) після цього робимо симплексне перетворення таблиці.

Теорема. Якщо після симплексного перетворення таблиці:

1) всі оцінки індексного рядка невід'ємні, то одержаний опорний розв'язок є оптимальним;

2) Якщо в індексному рядку є хоча б одна від'ємна оцінка, а в стовпці з такою оцінкою є додатні числа, то розв'язок можна покращити, зробивши наступне симплексне перетворення;

3) Якщо в індексному рядку є хоча б одна від'ємна оцінка, стовпець якої не містить додатних елементів, то задача не має оптимального розв'язку ($F \to \infty$).

Примітка. Якщо в результаті симплексних перетворень одержано оптимальний розв'язок і при цьому оцінка якої-небудь вільної змінної дорівнює нулю, то задача має безліч розв'язків (має альтернативний оптимум).

<u>Приклад 1.</u>

Знайти найбільше значення лінійної функції $F = 7x_1 + 5x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 \qquad \le 13, \\ \qquad 3x_2 \qquad \le 5, \\ 3x_1 \qquad\qquad \le 18, \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо систему обмежень до рівностей. Для цього в друге обмеження додамо балансну змінну $x_4 \ge 0$, у третє – $3x_5 \ge 0$, у четверте – $3x_6 \ge 0$. У результаті отримаємо:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 19, \\ 2x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad = 13, \\ \qquad x_2 \qquad + x_5 \ = 5, \\ x_1 \qquad\qquad + x_6 = 18. \end{cases}$$

$x_j \ge 0$, j =1,2, 3,4, 5,6.

Складаємо симплексні таблиці і робимо їх перетворення.

c_i	Базис	0	7	5	0	0	0	0	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	19	2	3	1	0	0	0	19/2
0	x_4	13	2	1	0	1	0	0	13/2
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	
0	x_6	6	1	0	0	0	0	1	6-min
	F	0	-7	-5	0	0	0	0	
0	x_3	7	0	3	1	0	0	-2	7/3
0	x_4	1	0	1	0	1	0	-2	1-min
0	x_5	5	0	1	0	0	1	1	5
7	x_1	6	1	0	0	0	0	1	
	F	42	0	-5	0	0	0	7	
0	x_3	4	0	0	1	-3	0	4	1-min
5	x_2	1	0	1	0	1	0	-2	4/3
0	x_5	4	0	0	0	-1	1	3	6
7	x_1	6	1	0	0	0	0	1	
	F	47	0	0	0	5	0	-3	
0	x_6	1	0	0	¼	-3/4	0	1	
5	x_2	3	0	1	½	-1/2	0	0	
0	x_5	1	0	0	-3/4	5/4	1	0	
7	x_1	5	1	0	-1/4	¾	0	0	
	F	50	0	0	¾	11/4	0	0	

В індексному рядку немає від'ємних оцінок, тому ми одержали оптимальний розв'язок задачі: $F_{\max} = 50, \quad X_{опт} = \{5; 3; 0; 0; 1; 1\}$.

Відповідь: $F_{\max} = 50$.

Приклад 2.

Дослідити дану функцію $F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to \max$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3,4,5). \end{cases}$$

Розв'язування

Складемо симплексну таблицю:

c_i	Базис	0	2	1	-1	1	-1	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_3	5	1	1	1	0	0	5
1	x_4	9	2	1	0	1	0	9
-1	x_5	7	1	2	0	0	1	(7/2)-min
	F	-3	-2	-3	0	0	0	
-1	x_3	3/2	½	0	1	0	-1/2	3-min
1	x_4	11/2	3/2	0	0	1	-1/2	11/3
1	x_2	7/2	½	1	0	0	½	7
	F	15/2	-1/2	0	0	0	3/2	
2	x_1	3	1	0	2	0	-1	
1	x_1	1	0	0	-3	1	1	
1	x_2	2	0	1	-1	0	1	
	F	9	0	0	1	0	1	

У індексному рядку немає від'ємних чисел, тому ми одержали оптимальний розв'язок: $F_{\max} = 9,\ X_{опт} = \{3;\, 2;\, 0;\, 1;\, 0\}$.

Відповідь: $F_{\max} = 9,\ X_{опт} = \{3;\, 2;\, 0;\, 1;\, 0\}$.

3.2 Метод штучного базису (М-метод)

Нехай задана канонічна задача лінійного програмування:

$$F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., 4), \\ b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2). \end{cases} \tag{1}$$

Система обмежень цієї задачі не зведена до одиничного базису. В систему обмежень (1) введемо дві змінні $x_5 \geq 0$ і $x_6 \geq 0$, що звуться штучним базисом і розглянемо задачу лінійного програмування:

$$T = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 - M(x_5 + x_6) \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + x_5 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \ + x_6 = b_2, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., 6) \end{cases} \tag{2}$$

де M – деяке достатньо велике стале число.

Задача (2), на відміну від задачі (1) має початковий опорний розв'язок $Y_{опт} = \{0; 0; 0; 0; b_1; b_2\}$.

Розглянемо довільний опорний розв'язок задачі (2):

$Y = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \beta_5; \beta_6\}$.

Якщо в ньому покласти $\beta_5 = \beta_6 = 0$, то $X = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4\}$ буде опорним розв'язком задачі (1). Навпаки, якщо $X = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4\}$ – опорний розв'язок задачі (1), то $Y = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; 0; 0\}$ – розв'язок задачі (2). Тому розв'язки X і Y звуться відповідними.

Теорема.

1. Якщо в оптимальному розв'язку M – задачі (2) $Y_{опт} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \beta_5; \beta_6\}$ штучні змінні дорівнюють нулю ($\beta_5 = \beta_6 = 0$), то відповідний розв'язок $X = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4\}$ задачі (1) є оптимальним розв'язком останньої.

2. Якщо в оптимальному розв'язку M-задачі (2) хоча б одна штучна змінна відмінна від нуля, то система обмежень (1) несумісна.

3. Якщо M-задача (2) не має оптимального розв'язку, то не має оптимального розв'язку і початкова задача (1).

<u>Приклад.</u> Розв'язати задачу лінійного програмування:

$F = 6x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \geq 12, \\ x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо задачу до канонічної форми:

$F = 6x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 \qquad\qquad = 12, \\ x_1 - 5x_2 \qquad + x_4 \qquad = 5, \\ 9x_1 + 10x_2 \qquad + x_5 = 90, \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, ..., 5). \end{cases}$$

Ввівши в перше рівняння штучну змінну $x_6 \geq 0$, одержимо M - задачу:

$$F = 6x_1 + x_2 - Mx_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 12, \\ x_1 - 5x_2 \qquad + x_4 \qquad = 5, \\ 9x_1 + 10x_2 \qquad + x_5 \quad = 90, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

Складаємо для останньої задачі симплексну таблицю і шляхом перетворень останньої виключаємо штучну змінну з базису. При цьому у таблиці записуємо два індексні рядки – перший, що відповідає цільовій функції F, і другий, що відповідає штучній змінній. Перетворення таблиці починаємо з оцінок другого індексного рядка.

c_i	Базис	0	6	1	0	0	0	$-M$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-M$	x_6	12	4	-3	-1	0	0	1	3-min
0	x_4	5	1	-5	0	1	0	0	5
0	x_5	90	9	10	0	0	1	0	10
	T	0	-6	-1	0	0	0	0	
M		-12	-4	3	1	0	0	0	
6	x_1	3	1	-3/4	-1/4	0	0		
0	x_4	2	0	-17/4	¼	1	0		
0	x_5	63	0	67/4	9/4	0	1		
	T	18	0	-11/2	-3/2	0	0		
6	x_1	390/67	1	0	-10/67	0	3/67		
0	x_4	1205/67	0	0	55/67	1	17/67		1205/55-min
1	x_2	252/67	0	1	9/67	0	4/67		252/9
	T	2592/67	0	0	-51/67	0	22/67		
6	x_1	100/11	1	0	0	2/11	1/11		
0	x_3	241/11	0	0	1	65/11	17/55		
1	x_2	9/11	0	1	0	-9/55	1/55		
	T	609/11	0	0	0	51/55	31/55		

В індексному рядку немає від'ємних оцінок. Тому ми знайшли оптимальний розв'язок M - задачі:

$$T_{\max} = \frac{609}{11}; \quad Y_{опт} = \left\{\frac{100}{11}; \frac{9}{11}; \frac{241}{11}; 0; 0; 0\right\}.$$

Оскільки у цьому розв'язку штучна змінна $x_6 = 0$, то оптимальний розв'язок канонічної задачі ЛП:

$$F_{\max} = \frac{609}{11}; \quad X_{опт} = \left\{\frac{100}{11}; \frac{9}{11}; \frac{241}{11}; 0; 0;\right\}.$$

Тоді розв'язок початкової задачі:

$$F_{\max} = \frac{609}{11}; \quad X_{опт} = \left\{\frac{100}{11}; \frac{9}{11}\right\}.$$

3.3 Поняття про вироджений розв'язок

При розгляді симплексного методу, припускалось, що $b_i > 0$ як у вихідній системі так і у системах, що отримані після чергових ітерацій. Якщо ж у деяких рівняннях вільні члени $b_i = 0$, то у відповідному цій системі опорному розв'язку базисні невідомі, відносно яких ці рівняння розв'язані, приймають нульові значення.

Означення. Опорний розв'язок, у якому хоча б один із базисних невідомих приймає нульове значення, називається виродженим розв'язком, а задача лінійного програмування, яка має хоча б один вироджений розв'язок – виродженою задачею.

Використовуючи в цьому випадку послідовні ітерації, ми можемо повернутися до набору базисних і вільних невідомих, що вже зустрічалися, тобто з'являється так зване зациклювання в схемі підрахунку. Щоб запобігти йому доцільно використовувати таке правило.

Правило. Якщо на будь-якому етапі підрахунку виникає невизначеність у виборі розв'язного рядка, тобто виявилось декілька рівних мінімальних відношень $\frac{b_i}{a_{ip}}$, то слід вибирати той рядок, для якого відношення елементів наступного стовпця до розв'язного є найменшим. Якщо при цьому знову виявляться рівні мінімальні відношення, то складають відношення елементів наступного стовпця, і так до тих пір, поки розв'язний рядок не визначиться однозначно.

<u>Приклад 1.</u>

Знайти максимум функції $F = x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_j > 0, \ j = 1, 2.$

Розв'язування

$F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = 1,2,3,4,5.$

Складаємо M-задачу

$T = x_1 + x_2 - Mx_6 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5,6.$

Розв’яжемо останню задачу шляхом симплексних перетворень.

c_i	Базис	0	1	1	0	0	0	$-M$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_6	10	1	2	1	0	0	0	5
$-M$	x_3	2	1	2	0	-1	0	1	1-min
0	x_5	10	2	1	0	0	1	0	10
	T	0	-1	-1	0	0	0	0	
M		-2	-1	-2	0	1	0	0	
0	x_3	8	0	0	1	1	0		
1	x_2	1	½	1	0	-1/2	0	2-min	
0	x_5	9	3/2	0	0	½	1	6	
	T	1	-1/2	0	0	-1/2	0		
0	x_1	8	0	0	1	1	0		
1	x_5	2	1	2	0	-1	0		
0	x_3	6	0	-3	0	2	1	3-min	
	T	2	0	1	0	-1	0		
0	x_1	5	0	3/2	1	0	-1/2	10/3-min	
1	x_3	5	1	½	0	0	½	10	
0	x_4	3	0	-3/2	0	1	½		
	T	5	0	-1/2	0	0	½		
1	x_1	10/3	0	1	2/3	0	-1/3		
1	x_2	10/3	1	0	-1/3	0	2/3		
0	x_4	8	0	0	1	1	0		
	T	20/3	0	0	1/3	0	1/3		

В індексному рядку немає від’ємних чисел. Тому ми одержали оптимальний розв’язок M - задачі: $T_{\max} = \dfrac{20}{3}$; $\quad Y_{опт} = \left\{\dfrac{10}{3}; \dfrac{10}{3}; 0; 8; 0; 0\right\}$.

Тоді оптимальний розв’язок початкової задачі:

$$F_{\max} = \frac{20}{3}; \quad X_{опт} = \left\{\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right\}.$$

3.4 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.

Шляхом перетворення симплекс-таблиць, розв’язати задачі лінійного програмування (для всіх задач вважати $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$)

1.1. $$F = x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 9. \end{cases}$$

1.2 $$F = 4x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_2 \le 8. \end{cases}$$

1.3 $$F = 3x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5. \end{cases}$$

1.4 $$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

1.5 $$F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 + x_2 \le 24. \end{cases}$$

1.6 $$F = x_1 - 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 10, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 8, \\ x_2 \le 4. \end{cases}$$

1.7 $$F = 8x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 4x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$$

1.8 $$F = 12x_1 - x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ x_2 - 3x_3 \le 4. \end{cases}$$

1.9 $$F = 5x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 22, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 \le 4, \\ x_2 + x_3 \le 18. \end{cases}$$

1.10 $$F = -x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \le 12, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \le 16, \\ x_3 \le 6. \end{cases}$$

1.11 $$F = 5x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \le 10, \\ x_2 \le 13. \end{cases}$$

1.12 $$F = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$$

1.13 $$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 4, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \le 1. \end{cases}$$

1.14 $$F = 7x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_2 \le 3. \end{cases}$$

1.15 $$F = x_1 - x_2 \to \max \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 14, \\ \quad x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 8. \end{cases}$$

1.16 $$F = 5x_1 - x_2 + 4x_3 \to \max \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 \le 20, \\ \quad x_3 \le 8. \end{cases}$$

1.17 $$F = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max \quad \begin{cases} 6x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 6x_2 \le 12, \\ \quad x_2 \le 2. \end{cases}$$

1.18 $$F = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \le 20, \\ \quad x_2 \le 4. \end{cases}$$

1.19 $$F = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max \quad \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1. \end{cases}$$

1.20 $$F = x_1 - 3x_3 \to \max \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \le 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 20, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 \le 16. \end{cases}$$

1.21 $$F = x_1 + x_2 \to \max \quad \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \le 42, \\ x_1 \le 8, \\ \quad x_2 \le 5. \end{cases}$$

1.22 $$F = 5x_1 + x_2 \to \max \quad \begin{cases} x_1 \le 8, \\ \quad x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 48. \end{cases}$$

1.23 $$F = 4x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 12, \\ x_1 \le 4. \end{cases}$$

1.24 $$F = 16x_1 - x_2 + x_3 \to \max \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 14, \\ 5x_1 - x_3 \le 10, \\ \quad x_2 \le 12. \end{cases}$$

1.25 $$F = x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max \quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 \le 16, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \le 20, \\ \quad x_2 \le 4. \end{cases}$$

1.26 $$F = -7x_1 + x_2 + 8x_3 \to \max \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 25, \\ 5x_1 - x_3 \le 26, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20. \end{cases}$$

1.27 $F = x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 5x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

1.28 $F = 5x_1 - x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le 12, \\ -x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 40. \end{cases}$$

1.29 $F = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 \le 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 45, \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 \le 20. \end{cases}$$

1.30 $F = 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 \le 14. \end{cases}$$

<u>Завдання 2.</u>

Методом штучного базису знайти найменше значення лінійної форми $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, $x_i \ge 0$, $i = 1, 2, ..., n$ при заданих обмеженнях:

2.1 $F = -x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

2.2 $F = -6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 7x_4 = 10, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 10. \end{cases}$$

2.3 $F = -3x_1 - x_3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ - 2x_3 \le 8. \end{cases}$$

2.4 $F = -x_1 + x_3 - 2x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 22. \end{cases}$$

2.5 $F = -2x_1 + 3x_2 - x_3$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 \le 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 8. \end{cases}$$

2.6 $F = -4x_1 + x_2 - x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 \le 8. \end{cases}$$

2.7 $F = 5x_1 - x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6. \end{cases}$$

2.8 $F = -x_1 + 3x_2 - x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 16, \\ 8x_1 + x_2 - x_3 \le 5. \end{cases}$$

2.9 $F = -2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 30, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12. \end{cases}$$

2.10 $F = -8x_1 + 3x_2 - 6x_3$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 12, \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

2.11
$$F = -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

2.12
$$F = -5x_1 + 3x_2 - x_4$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 \ge 18. \end{cases}$$

2.13
$$F = -12x_1 - x_2 + 4x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ 8x_1 + x_2 \ge 15. \end{cases}$$

2.14
$$F = 12x_1 - x_2 + 13x_3$$
$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 = 12, \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 15. \end{cases}$$

2.15
$$F = -x_1 - x_2 + 5x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12. \end{cases}$$

2.16
$$F = x_1 - 2x_3 4x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 12, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 18. \end{cases}$$

2.17
$$F = -x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 30, \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 12. \end{cases}$$

2.18
$$F = 7x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 = 15, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_2 \le 6 \end{cases}$$

2.19
$$F = 7x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 \ge 12, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 \ge 8, \\ -x_2 + x_3 \le 12 \end{cases}$$

2.20
$$F = x_1 - 2x_2 - 4x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 \ge 6, \\ x_2 + x_3 \ge 8. \end{cases}$$

2. 21
$$F = -5x_1 + 3x_2 - 7x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \le 18. \end{cases}$$

2.22
$$F = -2x_1 + 3x_2 - 7x_3$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 \ge -8, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 6. \end{cases}$$

2.23
$$F = 3x_1 - 5x_2 - 8x_3$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 12, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 18. \end{cases}$$

2.24
$$F = -4x_1 - x_2 - 7x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 16, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 \ge 2. \end{cases}$$

2.25
$$F = x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4$$
$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_3 \ge 18. \end{cases}$$

2.26
$$F = -x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 5, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 \ge 12. \end{cases}$$

2.27 $F = -16x_1 + x_2 - x_3$

$$\begin{cases} -8x_1 - x_2 + x_3 = 18, \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 25. \end{cases}$$

2.28 $F = -x_1 + 5x_2 - 6x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 12, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 8. \end{cases}$$

2.29 $F = -5x_1 + x_4$

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 25, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq 30. \end{cases}$$

2.30 $F = -2x_1 - x_2 - x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 6, \\ \quad x_2 - 2x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

Запитання для самоперевірки

1. До яких методів розв'язування задач лінійного програмування належить симплекс метод та на чому він оснований?
2. Сформулювати основну теорему симплекс-методу.
3. Коли використовується метод штучного базису?
4. Який розв'язок називається виродженим?
5. Якого правила слід дотримуватися, щоб запобігти зациклюванню у схемі підрахунку?

4 Математичні моделі деяких економічних задач

Розглянемо на конкретних прикладах моделі деяких економічних задач.

Задача 1.

Столярний цех меблевого комбінату може виготовити 400 стільців або 100 столів. Але оздоблювально-фарбувальний цех цього комбінату в змозі обробити не більше 250 од. (столів або стільців). Прибуток від реалізації одного стільця 18 грн., стола – 54 грн. Скласти програму виробництва, яка б забезпечила максимальний прибуток.

Розв'язування

Складемо математичну модель даної задачі.

Нехай x_1 – кількість стільців;

x_2 – кількість столів. Тоді система обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{400} + \dfrac{x_2}{100} \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 250 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Відповідно до умови цільова функція визначається співвідношенням:

$F = 18x_1 + 54x_2 \rightarrow \max$

Задача 2.

Для встановлення торговельного павільйону потрібно бруски довжиною 5м, розпиляти на менші бруски розмірами: 1,5 м; 2,4 м; 3,2 м; в кількостях 15 шт. першого розміру, 20 шт. – другого і більше 30 шт. – третього, щоб величина відходів була мінімальною.

Деталі (бруски)	Способи розпилюванння			
	I	II	III	IV
1,5 м 2,4 м 3,2 м	3 0 0	1 1 0	1 0 1	0 2 0
Відходи	0,5	1,1	0,3	0,2

Розв'язування

Нехай x_1 – брусків, що розпиляли I способом

x_2 – брусків, що розпиляли II способом

x_3 – брусків, що розпиляли III способом

x_4 – брусків, що розпиляли IV способом.

деталей, довжиною 1,5 м :
деталей довжиною 2,4 м :
деталей довжиною 3,2 м :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_2 + 2x_4 = 20 \\ x_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4.$$

Тоді цільова функція має вигляд: $F = 0,5x_1 + 1,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \rightarrow \min$

Задача 3.

Для виготовлення коктейлів А і В використовуються соки С і D. Порція (0,2 л.) коктеля А складається із 40% соку С і 60% соку D, а коктейля В – із 60% соку С і 40% соку D. Ціна А – 68 коп., В – 72 коп. за порцію. При якій кількості коктейлів А, В буде отримано максимальний прибуток якщо соку С маємо 100 л., соку D –160 л.

Розв'язування

Нехай x_1 – кількість порцій А,

x_2 – кількість порцій В.

Тоді соку С маємо
соку D маємо

$$\begin{cases} (0,4x_1 + 0,6x_2) \cdot 0,2 = 100 \\ (0,6x_1 + 0,4x_2) \cdot 0,2 = 160 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2.$$

Відповідно цільова функція дорівнює $F = 68x_1 + 72x_2 \rightarrow \max$

Задача 4.

Фермер Петренко має земельну ділянку 150 га. Від тогорічного врожаю він залишив великі запаси картоплі, насіння кукурудзи, пшениці і трав на посадку. Він хоче розподілити свої 150 га між цими чотирма культурами так, щоб отримати максимальний прибуток. Однак фермер Петренко займається ще й іншою роботою, тому він може присвятити роботі на земельній ділянці не більше 50 годин в тиждень протягом тих 10 тижнів, які необхідні для посіву, вирощування, збору врожаю.

За таблицею скласти план, що вказує скільки кілограмів насіння кожної культури має засіяти фермер, щоб отримати максимальний прибуток.

Види насіння	Га/ кг насіння	Заг. К-ть годин/ кг насіння	Прибуток/ кг насіння
Картопля	0,1	0,6	4
Кукурудза	0,2	0,5	6
Пшениця	0,3	0,4	6
Трави	0,4	0,3	5

Розв'язування

Нехай $y_i, i = 1,2,3,4$ – кількість кілограм насіння (картоплі, кукурудзи, пшениці і трав), яке фермер повинен засіяти

$$\begin{cases} 0,1y_1 + 0,2y_2 + 0,3y_3 + 0,4y_4 \le 150, \\ 0,6y_1 + 0,5y_2 + 0,4y_3 + 0,3y_4 \le 500, \end{cases}$$

$y_i \ge 0.$

Тоді $F(y) = 4y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 5y_4 \to \max$

Задача 5.

Фермер має в своєму розпорядженні 100 га землі, фіксовану кількість (найманих робітників):160 людино-годин найманої праці і 1100грн для проведення капіталовкладень. Він хоче виростити два врожаї: пшениці або картоплі, які дають прибуток 120грн/га і 40грн/га відповідно. Затрати (висівання, вирощування, і т. д.) складають 20грн/га для пшениці та 10грн/га для картоплі. Затрати праці, необхідні на вирощування врожаю складають 4 людино-години/га і 1 людино-година/га відповідно (пшениця, картопля). Фермера цікавить скільки гектарів пшениці і скільки гектарів картоплі йому необхідно засадити, щоб прибуток був максимальним.

Розв'язування

Нехай y_1 – кількість гектарів, які планується відвести під картоплю,

y_2 – кількість гектарів, які планується відвести під пшеницю.

Тоді:

Обмеження по площі:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \le 100 \\ y_1 + 4y_2 \le 160 \\ 10y_1 + 20y_2 \le 1100 \end{cases}$$

Обмеження по праці : $y_1, y_2 \geq 0$
Обмеження по затратах(грн):

Відповідно до умови задачі $F = 40y_1 + 120y_2 \to \max$

<u>Задача 6.</u>

Дієтолог повинна скласти для одного з своїх пацієнтів меню ланча, включаючи в нього хліб (не більше 2,5 скибок), масло, молоко (не більше 2-х склянок) так, щоб пацієнт отримав за кожним ланчем не менше ніж, 13 од. вітаміну А і 10 од. вітаміну В. Вміст вітамінів у вказаних продуктах подано в таблиці.

Вітаміни	Хліб	Масло	Молоко
А В	2 од. / скибка 2 од. / скибка	4 од. / порція 10 од / порція	2 од. / порція 3 од. / порція

В яких кількостях потрібно дієтологу включити дані продукти в меню ланча, щоб при мінімальних затратах задовольнити потреби свого пацієнта, якщо відомо, що скибка хліба коштує 2 центи, порція масла – 2 центи, склянка молока – 10 центів.

Розв'язування

Нехай $y_1 -$ кількість хліба,

$y_2 -$кількість масла,

$y_3 -$кількість молока.

Тоді за умовою задачі система обмежень набуде вигляду:

вітамін А :
вітамін В :
молоко :
хліб :

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 13 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 10 \\ y_3 \geq 2 \\ y_1 \leq \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$y_j \geq 0, \quad j = 1,2,3.$

Оскільки витрати на ланч пацієнта мають бути мінімальними, то
$F(y) = 2y_1 + 2y_2 + 10y_3 \to \min$

<u>Задача 7.</u>

Скласти раціон відгодівлі худоби. При відгодівлі кожна тварина щоденно має отримати не менше 90 од. поживної речовини S_1, не менше 8 од. поживної речовини S_2, не менше 12 од. поживної речовини S_3 . Для складання раціону використовую два види корму. Кількість одиниць поживної речовини в 1 кг. Корму та вартість 1 кг. Корму приведені в таблиці.

Поживні речовини	Кількість одиниць поживної речовин в 1 кг корму	
	Корм I	Корм II
S_1 S_1 S_1	3 1 1	1 2 6
Вартість 1 кг корму (грн)	4	6

Скласти денний раціон потрібної поживності з мінімальними вартісними затратами.

Розв'язування

Нехай x_1 – кількість кілограмів 1-го виду корму,

x_2 – кількість кілограмів 2-го виду корму.

Тоді система обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Оскільки затрати на відгодівлю мають бути мінімальними, то $F(x) = 4x_1 + 6x_2 \to min$

4.1 Завдання для самостійної роботи

Завдання.

Скласти математичну модель економічної задачі і розв'язати її симплекс-методом.

№ 1. Для виготовлення двох видів продукції $П_1$ і $П_2$ потрібно використати 4 види сировини S_1, S_2, S_3, S_4. Запаси кожного виду сировини на підприємстві обмежені. При цьому запаси і кількість кожного виду сировини, необхідні для виробництва (в ум. Од.) кожного виду продукції зазначені в таблиці, а також прибуток (у грошових одиницях) підприємства від реалізації однієї одиниці кожного виду продукції.

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції	
		$П_1$	$П_2$
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Прибуток від реалізації одиниці продукції		7	5

Визначити оптимальний план випуску продукції, тобто такий план, який дав би максимальний прибуток від її реалізації.

№ 2. Промкомбінат для виготовлення двох видів різних виробів використовує 3 види сировини. На виробництво однієї одиниці виробу А витрачається сировини I виду 12 одиниць, II виду – 4 одиниці і III – 3 одиниці. На виробництво однієї одиниці виробу В використовується сировина I виду в кількості 3 одиниці, II – 5 одиниць і III – 14 одиниць. Сировини I виду комбінат має 264 одиниці, II – 136 одиниць і III – 266 одиниць. Прибуток від реалізації одного виробу А складає 6 додаткових одиниць, а одного виробу В – 4 одиниці. Скласти план виробництва виробів, які забезпечують максимальний прибуток від їх реалізації.

№ 3. Для виробництва двох видів виробів кондитерська фабрика використовує 3 види автоматів. На виробництво одного виробу А фабрика використовує автомат I виду протягом 3 годин, II виду – 4 години і III виду – 5 годин. На виготовлення одного виробу В фабрика використовує автомат I виду протягом 6 годин, II виду – 3 години і III виду – 2 години. На виробництво всіх виробів фабрика може використовувати автомат I виду не більше , ніж 102 години, II виду – не більше ніж 91 годину і III виду не більше 105 годин. Прибуток від реалізації виробу А складає 7 грн., а виробу В – 9 грн. Скласти план виробництва кондитерської фабрики, який забезпечив би максимальний прибуток від реалізації виробів А і В.

№ 4. Задача на складання раціону. При відгодівлі кожна тварина повинна щоденно отримати не менше 8 од. поживної речовини S_1, не менше 12 од. речовини S_2 і не менше 9 од. Речовини S_3 . Для складання раціону використовують 2 види корму. Склад кількості одиниць поживних речовин в кг кожного виду корму і вартість 1 кг корму приведені в таблиці.

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму	
	Корм 1	Корм 2
S_1	2	1
S_2	6	1
S_3	1	3
Вартість 1 кг корму (в грн.)	18	12

Необхідно скласти даний раціон потрібної поживності, причому затрати на нього повинні бути мінімальні.

№ 5. Для виготовлення виробів А і В є 200 кг металу. На виготовлення одного виробу А витрачається 2 кг металу, а виробу В – 4 кг. Скласти план виробництва, який забезпечував би найбільшу виручку від продажу виробів, якщо відпускна вартість одного виробу А становить 3 грн., а виробу В – 2 грн., причому виробів А потрібно виготовити не більше 80, а виробів В – не більше 40.

№ 6. Виробнича потужність складального цеху становить 120 виробів типу А і 360 виробів типу В за добу. Технічний контроль пропускає за добу 200 виробів того чи іншого типу (байдуже). Вартість виробу типу А у 4 рази вища, ніж виробу типу В. Потрібно скласти оптимальний план випуску готової продукції, тобто такий план, щоб прибуток від реалізації цієї продукції був максимальним.

№ 7. Столярний цех меблевого комбінату протягом робочого дня може виготовити 400 стільців або 100 столів. Але оздоблювально-фарбувальний цех цього комбінату може обробити не більше 250 одиниць (столів або стільців). Прибуток від реалізації одного стола становить 54 грн, а стільця 18 грн. Скласти оптимальний план добового виробництва столів і стільців за цих умов, який забезпечив би максимальний прибуток.

№ 8. Підприємство випускає продукцію двох видів $П_1$, $П_2$, використовуючи три види сировини C_1, C_2, C_3, запас якої обмежений. Витрати сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції $П_1$, $П_2$, прибуток підприємства від продажу одиниці готової продукції кожного виду наведені в таблиці.

Вид сировини	Запаси сировини	Кількість одиниць сировини, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції.	
		$П_1$	$П_2$
C_1	36	4	6
C_2	14	1	2
C_3	12	3	2
Прибуток від реалізації одиниці продукції.		5	4

Скільки одиниць продукції кожного виду необхідно виробити, щоб прибуток підприємства був максимальним?

№ 9. Для відгодівлі тварин використовують два види корму $К_1$, $К_2$, вартість 1 кг корму $К_1$ – 5 грн., а корму $К_2$ – 2 грн. У кожному кілограмі корму $К_1$ міститься 5 од. поживної речовини А, 2,5 од. поживної речовини Б і 1 од. поживної речовини С, а в кожному кілограмі корму $К_2$ міститься відповідно 3 од. речовини А, 3 од. речовини Б і 1,3 од. речовини С. Яку кількість корму кожного виду потрібно витрачати щоденно, щоб затрати на відгодівлю були мінімальними, якщо добовий раціон передбачає поживних одиниць типу А не менше 225 од., типу Б – не менше 150 од., типу С – не менше 80 од.?

№ 10. Цех випускає трансформатори (ТР) двох видів. На один ТР І виду витрачається 5 кг трансформаторного заліза і 3 кг дроту, а на один ТР ІІ виду – 3 кг залізу і 2 кг дроту. Від реалізації одного ТР І виду цех одержує прибуток в 12 ум. Од., а від реалізації одного ТР ІІ виду – 10 ум. Од. Скільки трансформаторів кожного виду повинен випускати цех, щоб одержати найбільшу суму прибутку, якщо цех має 480 кг заліза і 300 кг дроту ?

№ 11. Цех хлібобулочних виробів за 1 робочий день може виготовити 3000 виробів А або 1000 виробів В. Однак, торговельна мережа (за встановленим опитуванням) щоденно може реалізувати 2000 виробів обох видів. Роздрібна ціна виробу А – 66 коп. за штуку, а виробу В – 46 коп. Скласти оптимальну програму виробництва хлібобулочних виробів, якщо треба випускати не менше 100 виробів кожного виду.

№ 12. Сталь повинна містити 3 легувальних елементів А, В, С. Для її виробництва використовується шихта двох видів. Вартість однієї тонни шихти, вміст елементів для кожного виду і необхідна кількість їх для виробництва 100 т сталі подані у таблиці.

Вид шихти	Вартість 1 тонни шихти	Легувальні елементи		
		A	B	C
I II	3 2	3 1	2 1	1 1
Необхідна кількість легувальних елементів		9	8	6

Визначити найбільші затрати для виробництва сталі даної марки.

№ 13. Із 253 одиниць деякого матеріалу майстерня може виготовити вироби А і вироби В. На виготовлення одного виробу А потрібно 7 одиниць матеріалу, а на виготовлення одного виробу В – 4 одиниці матеріалу. Прибуток від реалізації одного виробу А складає 10 грн., а одного виробу В – 8 грн. Виробів А повинно виготовлятися не менше трьох, виробів В – не менше двох. Знайти таку програму виробництва, яка забезпечила б максимальний прибуток.

№ 14. Для нормального функціонування технологічного процесу в одному з цехів, який виготовляє фруктові води, необхідні хімічні речовини M_1, M_2, M_3, денна норма яких повинна бути не менша 48, 60, 80 вагових одиниць відповідно. Ці речовини містяться в сумішах N_1 , N_2 , N_3 . Вміст кожної речовини (M_1, M_2, M_3) в кожній з сумішей (N_1, N_2 , N_3) , а також ціна 1л суміші приведені в таблиці.

Види хімічних речовин	Мінімальна потреба	Склад хімічних речовин в сумішах		
		N_1	N_2	N_3
M_1	48	1	0	2
M_2	60	2	3	0
M_3	80	0	2	4
Ціна суміші		2	3	4

Визначити оптимальний набір сумішей N_1, N_2, N_3, які задовольняють потреби цеху в необхідному об'ємі речовин M_1, M_2, M_3.

№ 15. На звірофермі можна вирощувати чорнобурих лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовується три види кормів. Кількість корму кожного виду, який повинні одержувати щоденно лисиці і песці, приведені в таблиці. В ній же зазначені загальна кількість корму кожного виду, який може бути використаний звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця.

Вид корму	Кількість од. корму, який щоденно повинні одержувати		Загальна кількість корму
	Лисиця	Песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації 1 шкурки (ум . од.)	16	12	

Визначити скільки лисиць і песців слід вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальним.

№ 16. Для виробництва двох видів виробів A і B використовують три типи технічного обладнання. При виробництві одиниці виробу A використовується обладнання I типу протягом 9 годин, обладнання II типу 6 годин, III типу – 4 години. На виробництво одного виробу B обладнання I типу використовується 6 годин, II типу 12 годин і III типу 10 годин. На виробництво всіх виробів підприємство може використовувати обладнання I типу не більше ніж 168 год., II не більше ніж 192 год., III – не більше 164 годин. Прибуток від реалізації одиниці готового виробу A складає 14 грн., а виробу B – 18 грн. Скласти план виробництва виробів A і B, який забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

№ 17. На меблевій фабриці із стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів в кількостях, що відповідно рівні 24, 31 і 18 шт. Кожний лист фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість заготовок, що одержують при двох способах розкроювання приведені в таблиці. В ній же зазначена величина відходів, які одержують при розкроюванні одного листа фанери цими способами.

Вид заготовки	Кількість заготовок (шт.) при розкроюванні за способом	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина відходів (см^3)	12	16

Визначити скільки листів фанери і яким способом слід розкроїти так, щоб було одержано не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних відходах.

№ 18. Для виробництва двох видів виробів А і В використовується токарне, фрезерне і шліфувальне обладнання. Норми затрат часу для кожного із типів обладнання на один виріб даного виду приведені в таблиці. В ній же зазначений загальний фонд робочого часу для кожного із типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу.

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виробу		Загальний фонд корисного часу робочого обладнання (год.)
	А	В	
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток від реалізації	14	18	

Скласти план випуску виробів А і В, який забезпечив би максимальний прибуток від їх реалізації.

№ 19. Спеціалізовані господарства, які вирощують овочі, для підживлення посівів використовують комбіновані добрива трьох видів B_1, B_2, B_3. Для підживлення посівів на 1 га необхідно внести 24 одиниці хімічної речовини A_1, 30 одиниць хімічної речовини A_2, 15 одиниць хімічної речовини A_3. Склад необхідних хімічних речовин в одиниці комбінованих добрив і ціна одиниці ваги кожного добрива приведені в таблиці.

Хімічні речовини	Норма внесення речовин на 1 га	Склад хімічних речовин на одиницю ваги добрива		
		B_1	B_2	B_3
A_1	24	1	4	3
A_2	30	2	5	3
A_3	15	0	3	2
Ціна одиниці ваги добрива		5	2	4

Яка мінімальна вартість оптимальної кількості хімічної речовини вноситься на 1 га посіву ?

№ 20. Підприємство має ресурси в умовних одиницях : обладнання 100 од., енергія 80 од.; виробляє 4 види продукції $П_i$ (i = 1, 2, 3, 4). Затрати на виробництво кожного виду продукції та доходи від її реалізації приведені в таблиці.

Продукція	Ресурси і затрати на од. продукції		Прибуток
	Обладнання	Енергія	
$П_1$	2	2	1
$П_2$	3	3	4
$П_3$	4	1	3
$П_4$	5	1	5

Визначити план випуску для кожного виду продукції, який би давав найбільший доход.

№ 21. Для виготовлення кожного з двох хлібобулочних виробів використовується 2 види тіста, яке готують заздалегідь. На один виріб $П_1$ витрачається 0,1 кг тіста І виду і 0,15 кг тіста ІІ виду, а на виріб $П_2$ – 0,2 кг тіста І виду і 0,1 кг тіста ІІ виду. Ціна одного виробу $П_1$ – 32 коп., а $П_2$ – 58 коп. Тіста І виду заготовлено 60 кг, а ІІ – 40 кг. Потрібно визначити таку програму виробництва, яка забезпечила б максимальний прибуток.

№ 22. Для пошиття брюк та курток є 120 м тканини. На пошиття однієї пари брюк витрачається 2 м тканини, а на пошиття однієї куртки – 3 м тканини. Ціна брюк – 36 грн., а куртки 60 грн. Визначити оптимальний план виробництва, який забезпечував би максимальний прибуток, якщо кількість брюк не повинна перевищувати 36, а кількість курток – 24.

№ 23. Для визначення строків відгодівлі піддослідній тварині необхідно давати щоденно не менше 15 одиниць речовини A_1 і не менше 15 одиниць речовини A_2. Не маючи цих речовин в чистому вигляді, вирішили придбати речовину B_1 по 1 грн. або B_2 по 3 грн. за 1 кг, причому кожний кг B_1 містить 1 одиницю речовини A_1 і 5 одиниць A_2, а 1 кг B_2 - 5 одиниць A_1 і 1 одиницю A_2. Визначити оптимальну кількість речовини B_1 і B_2 в щоденному раціоні.

№24. Для виготовлення виробів двох видів є 100 кг металу. На виготовлення одного виробу I виду використовується 2 кг металу, а на вироби II виду – 4 кг. Скласти план виробництва, що забезпечує отримання найбільшого прибутку від продажу виробів, якщо вартість одного виробу I виду складає 3 грн., а виробу II виду – 2 грн., причому виробів I виду потрібно виготовити не більше 40, а виробів II виду – не більше 20.

№ 25. Виробнича потужність складального цеху становить 120 виробів А і 360 виробів В на добу. Технічний контроль пропускає за добу 200 виробів того чи іншого типу (не має різниці). Вироби типу А в 4 рази дорожчі виробів типу В. Потрібно спланувати випуск готової продукції так, щоб підприємству був забезпечений найбільший прибуток.

№ 26. Для відгодівлі тварин використовується два види кормів; вартість 1 кг корму I виду – 5 грн., а корму II виду – 2 грн. У кожному кілограмі корму I виду міститься 5 од. поживної речовини А, 2,5 од. поживної речовини Б і 1 од. поживної речовини В, а у кожному кілограмі корму II виду відповідно 3; 3 і 1,3 од. Яку кількість корму кожного виду необхідно використовувати щоденно, щоб витрати на відгодівлю були мінімальними, якщо добовий раціон передбачає споживання речовин типу А не менше 225 од., типу Б – не менше 150 од. і типу В – не менше 80 од?

№ 27. Продукцією міського молокозаводу є молоко, кефір і сметана. На виробництво 1 т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 т молока. При цьому витрати робочого часу на розливання 1 т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-год. На розфасовці 1 т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Всього для виробництва молочної продукції завод може використати 130 000 кг молока. Основне обладнання може бути задіяне протягом 21,4 машино-год, а автомати для розфасовки сметани – протягом 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру і сметани відповідно рівні 30, 22 і 136 грн. Завод повинен щоденно виробляти не менше 100 т молока. На виробництво іншої продукції немає ніяких обмежень. Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості щоденно треба виготовляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

№28. Для виготовлення виробів двох видів склад може відпустити металу не більше 80 кг, причому на виріб I виду використовується 2 кг, а на виріб II виду – 1 кг металу. Необхідно спланувати виробництво так, щоб був забезпечений найбільший прибуток, якщо виробів I виду потрібно виготовити не більше 30 шт., а виробів II виду не більше 40 шт., причому один виріб I виду коштує 5 грн., а II виду – 3 грн.

№ 29. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі А, В і С використовує три види основної сировини: цукор, патоку і фруктове пюре. Норми використання сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду наведені у таблиці. У таблиці також вказана кількість сировини кожного виду, яка може використовуватись фабрикою, а також наведений прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми використання сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	А	В	С	
Цукор Патока Фруктове пюре	0,8 0,4 -	0,5 0,4 0,1	0,6 0,3 0,1	800 600 120
Прибуток від реалізації 1 т продукції (грн.)	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, що забезпечить максимальний прибуток від її реалізації.

№ 30. На швейній фабриці для виготовлення чотирьох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми використання тканини всіх артикулів на пошиття одного виробу наведені у таблиці. У ній також вказана загальна кількість тканини кожного артикулу і ціна одного виробу даного виду. Визначити, скільки виробів кожного виду повинна випустити фабрика, щоб вартість виготовленої продукції була мінімальною.

Артикул тканини	Норми використання тканини (м) на один виріб виду				Загальна кількість тканини (м)
	1	2	3	4	
I II III	1 - 4	- 1 2	2 3 _	1 2 4	180 210 800
Ціна одного виробу (грн.)	9	6	4	7	

5 Двоїсті задачі лінійного програмування

5.1 Поняття про двоїстість у лінійному програмуванні

З кожною задачею лінійного програмування можна поєднати деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають двоїстою або спряженою. Первісну задачу називають вихідною. Дамо означення двоїстої задачі по відношенню до загальної задачі лінійного програмування, яка полягає в знаходженні максимального значення функції

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + ... + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,l}, \quad l \le n). \tag{3}$$

Означення 1. Задача, яка полягає в знаходженні мінімального значення функції

$$F^*(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min \tag{4}$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + ... + a_{ml}y_l \ge c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + ... + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m = c_m, \end{cases} \tag{5}$$

$$y_i \ge 0 \qquad (i = \overline{1,k}, \quad k \le m), \tag{6}$$

називається двоїстою по відношенню до задачі (1) – (3).

Означення 2. Задачі (1) – (3) і (4) – (6) утворюють пару задач, яку називають в лінійному програмуванні двоїстою парою.

Порівнюючи дві сформульовані задачі, можна помітити, що між ними існує зв'язок. Наведемо правила, за якими складається двоїста задача по відношенню до вихідної задачі:

1. Цільова функція вихідної задачі (1) – (3) задається на максимум, а цільова функція двоїстої (4) – (6) – на мінімум.

2. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

яка складена із коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень (2) вихідної задачі (1) – (3), і аналогічна матриця

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

в двоїстій задачі (4) – (6) отримується шляхом транспонування, тобто заміною рядків стовпцями, а стовпців – рядками.

3. Кількість змінних у двоїстій задачі (4) – (6) дорівнює кількості співвідношень в системі (2) вихідної задачі (1) – (3), а кількість обмежень в системі (5) двоїстої задачі – кількості змінних у вихідній задачі.

4. Коефіцієнти при невідомих в цільовій функції (4) двоїстої задачі (4) – (6) є вільними членами в системі (2) вихідної задачі (1) – (3), а вільними членами в співвідношеннях системи (5) двоїстої задачі – коефіцієнти при невідомих у цільовій функції (1) вихідної задачі.

5. Якщо змінна x_j вихідної задачі (1) – (3) може приймати лише додатні значення, то $j-$е обмеження в системі (5) двоїстої задачі (4) – (6) є нерівністю вигляду «$\geq$». Якщо ж змінна x_j може приймати як додатні , так і від'ємні значення, то $j-$е обмеження в системі (5) має вид рівняння. Аналогічні зв'язки існують між обмеженнями (2) вихідної задачі (1) – (3) і змінними двоїстої задачі (4) – (6). Якщо $i-$е співвідношення в системі (2) вихідної задачі є нерівністю, то $i-$а змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$. В іншому випадку змінна y_i може приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Зауваження 1:

1. Застосовуючи правила побудови двоїстих задач до задачі (4)-(6), дістанемо вихідну задачу (1) – (3).
2. Аналогічні правила побудови двоїстої задачі можна записати для вихідної задачі мінімізації.

Двоїсті пари задач зазвичай поділяють на симетричні і несиметричні. В симетричній парі двоїстих задач обмеження (2) прямої задачі і співвідношення (5) двоїстої задачі є нерівностями виду «$\leq$». Таким чином, змінні обох задач можуть приймати лише невід'ємні значення.

Зауваження 2: Несиметричні останні дві пари називаються тому, що мають обмеження у вихідних задачах виду «=».

Наведемо приклади пар двоїстих задач.

Несиметричні задачі

1. *Вихідна задача*

$$F_{\min} = \vec{C}\vec{X},$$
$$A\vec{X} = \vec{B},$$
$$\vec{X} \geq 0.$$

Двоїста задача

$$F^*_{\max} = \vec{W}\vec{B},$$
$$\vec{W}A \leq \vec{C}.$$

2. ***Вихідна задача***

$$F_{\max} = \vec{C}\vec{X},$$
$$A\vec{X} = \vec{B},$$
$$\vec{X} \geq 0.$$

Двоїста задача

$$F^{*}{}_{\min} = \vec{W}\vec{B},$$
$$\vec{W}A \geq \vec{C}.$$

Симетричні задачі

1. ***Вихідна задача***

$$F_{\min} = \vec{C}\vec{X},$$
$$A\vec{X} \geq \vec{B},$$
$$\vec{X} \geq 0.$$

Двоїста задача

$$F^{*}{}_{\max} = \vec{W}\vec{B},$$
$$\vec{W}A \leq \vec{C},$$
$$\vec{W} \geq 0.$$

2. ***Вихідна задача***

$$F_{\max} = \vec{C}\vec{X},$$
$$A\vec{X} \leq \vec{B},$$
$$\vec{X} \geq 0.$$

Двоїста задача

$$F^{*}{}_{\min} = \vec{W}\vec{B},$$
$$\vec{W}A \geq \vec{C},$$
$$\vec{W} \geq 0.$$

Найпростішими властивостями взаємно двоїстих задач є такі:

1. Якщо X – деякий план вихідної задачі (1) – (3), а Y – довільний план двоїстої задачі (4) – (6), то $F(X) = F^{*}(Y)$.
2. Якщо X і Y - допустимі розв'язки відповідно прямої і двоїстої задач, і $F(X) = F^{*}(Y)$, то X і Y - оптимальні розв'язки цих задач.

Приклад. Побудувати задачу, двоїсту до вихідної:

$$F(x) = 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 5 \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

Розв'язування

Щоб побудувати двоїсту задачу, вихідну необхідно звести до стандартного вигляду. Для цього помножимо обидві частини першого обмеження на (-1), дістанемо:

$$F(x) = 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 \le -3 \\ -x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 5 \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad x_2 \ge 0 \qquad , \; x_3 \ge 0$$

Тоді двоїста задача матиме вигляд:

$F^*(x) = -3y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 2y_4 \to \min;$

$$\begin{cases} -4y_1 - y_2 + 6y_3 - 2y_4 = 4 \\ 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 3y_4 \ge -3 \\ -5y_1 - 6y_2 + 2y_3 - 2y_4 \ge 4 \end{cases}$$

$y_1 \ge 0, y_3 \ge 0 \quad y_2, y_4$ – довільні

Вихідна задача має кількість обмежень m = 4, тому двоїста задача має 4 змінні: y_1, y_2, y_3, y_4. Кількість змінних вихідної задачі m =3, тому двоїста задача має 3 обмеження. Змінна x_1 вихідної задачі не обмежена за знаком, тому перше обмеження двоїстої задачі має вигляд рівності, друге та четверте обмеження вихідної задачі мають вигляд рівності, отже, змінні y_2 та y_4 двоїстої задачі не обмежені за знаком.

5.2 Основні теореми двоїстості в лінійному програмуванні

Розглянемо пару двоїстих задач, яку утворено з основної задачі лінійного програмування і двоїстої до неї.

Вихідна задача: знайти максимум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{10}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{11}$$

Двоїста задача: знайти мінімум функції

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{12}$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = \overline{1,n}). \tag{13}$$

Кожна із задач двоїстої пари (9) – (11) і (12), (13) є самостійною задачею лінійного програмування і може бути розв’язана незалежно одна від одної.

Існують залежності між розв'язками прямої і двоїстої задач, які можна задати у вигляді теорем.

Теорема 1 (перша теорема двоїстості). Якщо одна із пари двоїстих задач (9) – (11) і (12), (13) має оптимальний план, то і друга має оптимальний план, причому значення цільових функцій на оптимальних планах збігаються, тобто $F_{\max} = F^{*}_{\min}$.

Якщо ж цільова функція однієї із пари двоїстих задач не обмежена (для вихідної (9) – (11) – зверху, для двоїстої (12), (13)– знизу), то друга задача взагалі не має планів.

Теорема 2 (друга теорема двоїстості). Для того щоб допустимі плани X^{*} і Y^{*} пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно і достатньо виконання умов:

$$X^{*}_{j}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^{*}_{i} - c_{j}) = 0 \ (j = \overline{1,n}); \tag{14}$$

$$Y^{*}_{i}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^{*}_{j} - b_{i}) = 0 \ (i = \overline{1,m}); \tag{15}$$

Теорема 3. Якщо в разі підстановки компонентів оптимального плану в систему обмежень вихідної задачі $i-$те обмеження перетворюється на нерівність, то $i-$та компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо $i-$та компонента оптимального плану двоїстої задачі додатна, то $i-$те обмеження вихідної задачі задовольняє її оптимальний розв'язок як строга нерівність.

Умови (14), (15) дають можливість за оптимальним планом (розв'язком) однієї із взаємно двоїстих задач знайти оптимальний план другої задачі.

Використовуючи другу теорему двоїстості сформулюємо критерій оптимальності для допустимого розв'язку задачі лінійного програмування.

Критерій оптимальності. Нехай X^{*} – допустимий розв'язок задачі (9) – (11). Вектор X^{*} є оптимальним розв'язком цієї задачі тоді і тільки тоді, коли серед розв'язків системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{i} - c_{j} = 0, \text{ якщо } x^{*}_{j} \neq 0 \tag{16}$$

$$y_{i} = 0, \text{ якщо } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^{*}_{j} > b_{i} \tag{17}$$

існує хоч би один допустимий розв'язок задачі (12), (13), двоїстої до задачі (9) – (11).

5.3 Розв'язання двоїстих задач

Сформульовані теореми двоїстості дають можливість отримати розв'язок однієї задачі, знаючи оптимальний розв'язок двоїстої до неї задачі. Якщо вихідна та двоїста задачі мають дві змінних, то під час їх розв'язування зручно використовувати графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Приклад 1. Для даної задачі лінійного програмування скласти двоїсту та знайти розв'язок задач геометричним методом

$$F = 2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + 4x_2 \le 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Знайдемо розв'язок вихідної задачі. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $x_1 + x_2 = 3$, яка проходить через точки (0;3) та (3;0);

2) l_2: $x_1 + 4x_2 = 9$, яка проходить через точки (0;9/4) та (9;0);

3) $l_3 : x_1 = 0$;

4) l_4: $x_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.1).

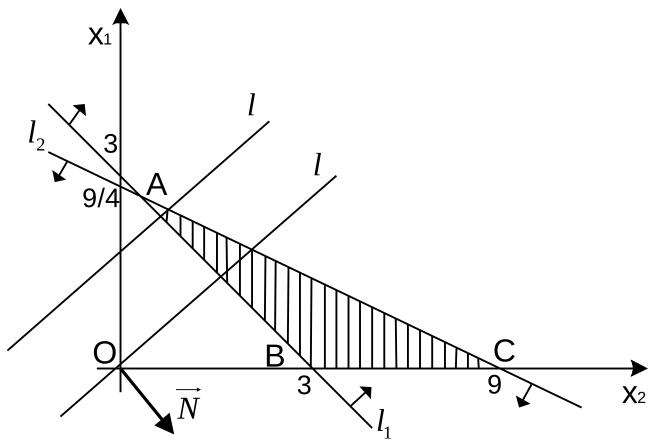

Рисунок 1 – Область допустимих розв'язків вихідної задачі

Отже, допустимою областю D є трикутник АВС, який зображено на рис.1. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\vec{N} = \{2; -1\}$. Проведемо пряму l: $2x_1 - x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\vec{N}$ (рис. 1).

Умовно переміщуємо пряму l: $2x_1 - x_2 = 0$ паралельно самій собі по області D у напрямі вектора $\vec{N} = \{2; -1\}$ до тих пір, поки вона не почне перетинати область D. Найменшого значення лінійна функція $F = 2x_1 - x_2$ досягатиме в найближчій вершині А многокутника АВС, тобто у точці входу прямої l у дану область. Знайдемо координати точки А ($x_1^*; x_2^*$). Точка А лежить на перетині прямих l_1 і l_2. Для знаходження координат точки А необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + 4x_2 = 9. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння перше, в результаті чого отримаємо:

$3x_2 = 6$ або $x_2^* = 2$. Тоді $x_1^* = 3 - x_2 = 3 - 2 = 1$. Тобто точка А має координати $(1; 2)$.

Отже, найменше значення лінійної функції:

$F_{\min} = F(A) = 2 \cdot 1 - 2 = 0.$

Складемо задачу двоїсту до даної. Для цього помножимо обидві частини другого обмеження на (-1), дістанемо:

$$F = 2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ -x_1 - 4x_2 \geq -9, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді двоїста задача матиме вигляд:

$$F^*(x) = 3y_1 - 9y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \leq 2 \\ y_1 - 4y_2 \leq -1 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для знаходження області допустимих розв'язків множини D_1 побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $y_1 - y_2 = 2$, яка проходить через точки (0;-2) та (2;0);

2) l_2: $y_1 - 4y_2 = -1$, яка проходить через точки (0;1/4) та (-1;0);

3) $l_3 : y_1 = 0$;

4) l_4: $y_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D_1 (рис.2).

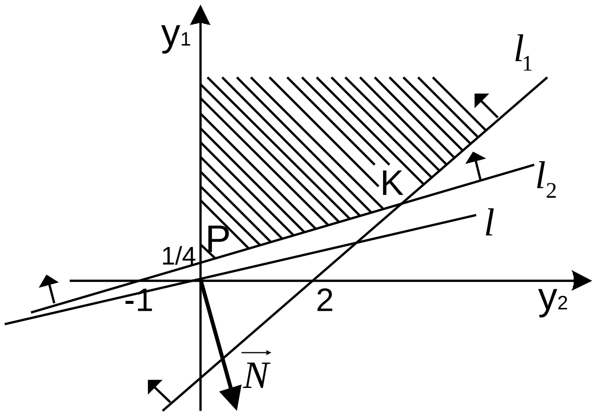

Рисунок 2 – Область допустимих розв'язків двоїстої задачі

Отже, допустимою областю D_1 є необмежена область, яка зображена на рис.2. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\vec{N}=\{3;-9\}$. Проведемо пряму l: $3y_1-9y_2=0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\vec{N}$ (рис. 1).

Умовно переміщуємо пряму l: $3y_1-9y_2=0$ паралельно самій собі по області D_1 у напрямі вектора $\vec{N}=\{3;-9\}$ до тих пір, поки вона не перестане перетинати область D_1. Найбільшого значення лінійна функція $F=3y_1-9y_2$ досягатиме в найбільш віддаленій вершині К області допустимих розв'язків, тобто у точці виходу прямої l з даної області. Знайдемо координати точки К ($y_1^*;y_2^*$). Точка К лежить на перетині прямих l_1 і l_2. Для знаходження координат точки К необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1-y_2=2 \\ y_1-4y_2=-1. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння перше, в результаті чого отримаємо: $3y_2=3$ або $y_2^*=1$. Тоді $y_1^*=2+y_2=2+1=3$. Тобто точка К має координати (3;1).

Отже, найбільше значення лінійної функції: $F_{\min}^*=F(K)=3\cdot3-9\cdot1=0.$

Таким чином, значення цільових функцій прямої і двоїстої задач при їх оптимальних планах рівні між собою, тобто $F_{\max}=F_{\min}^*$.

Розглянемо на прикладі процес одержання розв'язку вихідної задачі на основі оптимального розв'язку двоїстої задачі.

Приклад 2. Розв'язати пряму задачу лінійного програмування, використовуючи перехід до двоїстої задачі та графічний метод розв'язання одержаної двоїстої задачі:

$$F(x)=2x_1+x_2+x_3-x_4\rightarrow\max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 \le 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,4})$$

Розв'язання

Побудуємо двоїсту задачу до даної. Вона має вигляд:

$$F^*(y) = y_1 + 3y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 2, \\ -y_1 + y_2 \ge 1, \\ y_1 \qquad \ge 1 \\ y_2 \ge -1 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0$$

Знайдемо розв'язок двоїстої задачі, скориставшись графічним методом. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $y_1 + 2y_2 = 2$, яка проходить через точки (0;1) та (2;0);

2) l_2: $-y_1 + y_2 = 1$, яка проходить через точки (0;1) та (-1;0);

3) $l_3 : y_1 = 1$;

4) l_4: $y_2 = -1$;

5) $l_5 : y_1 = 0$;

6) $l_6 : y_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.3).

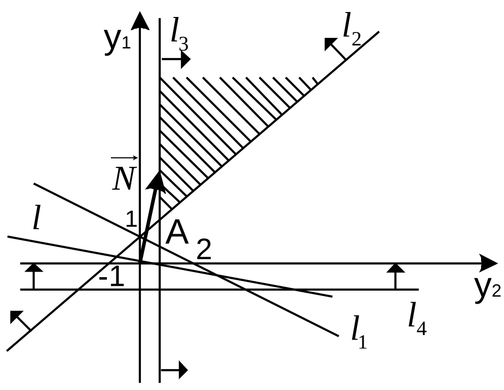

Рисунок 3 – Область допустимих розв'язків

Отже, допустимою областю D є необмежена область, яка зображена на рис.3. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\overrightarrow{N} = \{1; 3\}$. Проведемо пряму l: $y_1 + 3y_2 = 0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N}$ (рис.

3). Найменшого значення лінійна функція $F^* = y_1 + 3y_2$ досягатиме в найближчій вершині А області D. Знайдемо координати точки А ($y_1^*; y_2^*$). Точка А лежить на перетині прямих l_3 і l_2. Для знаходження координат точки А необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ -y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Тобто, точка А має координати $(1; 2)$ і $F^*_{\min} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$.

Знайдемо розв'язок вихідної задачі на основі оптимального плану двоїстої до неї задачі.

Підставимо в обмеження двоїстої задачі значення змінних $y_1^* = 1, y_2^* = 2$ в оптимальному плані:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 \geq 2, \\ -1 + 2 \geq 1, \\ \quad 1 \geq 1, \\ 1 \geq -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 > 2, \\ 1 = 1, \\ 1 = 1, \\ 1 > -1. \end{cases}$$

Використовуючи другу теорему двоїстості змінні вихідної задачі x_1 та x_4 рівні нулю, оскільки перше і четверте обмеження перетворилися у строгі нерівності при підставленні оптимального плану двоїстої задачі ($x_1^* = 0, x_4^* = 0$).

Оскільки змінні y_1 та y_2 в оптимальному плані мають додатні значення ($y_1^* = 1 > 0, y_2^* = 2 > 0$), то відповідні їм обмеження вихідної задачі при підставленні в них її оптимального плану перетворюються у рівності.

Враховуючи те, що $x_1 = 0$ та $x_4 = 0$, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 = 3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_3 = 4. \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Оптимальний план вихідної задачі буде $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (0; 3; 4; 0)$. Тоді $F_{\max} = 2 \cdot 0 + 3 + 4 - 0 = 7$.

5.4 Економічна інтерпретація двоїстих задач в ЛП

Двоїсті задачі відіграють велику роль в економічному аналізі результатів розрахунків. Пояснимо це на прикладі використання ресурсів.

Підприємство, що має m видів ресурсів у кількості b_i одиниць $(i = 1, 2, ..., m)$, виробляє n видів продукції. Для виробництва однієї одиниці продукції витрачається a_{ij} одиниць $i-$го ресурсу, вартість одиниці продукції становить c_j. Треба скласти план випуску продукції, який забезпечив би максимальний прибуток.

Позначимо через $x_j\ (j=1,2,...,n)$ кількість одиниць $j-$ї продукції. Тоді вихідну задачу формулюють так.

Знайти невід'ємний розв'язок системи обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0 \quad (j=1,2,...,n), \end{cases}$$

який перетворює лінійну функцію $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ у максимум. Оцінимо ресурси, необхідні для виготовлення продукції. За одиницю вартості ресурсів візьмемо одиницю вартості виготовленої продукції. Позначимо через $y_i(i=1,2,...,m)$ вартість одиниці $i-$го ресурсу. Тоді вартість усіх витрачених ресурсів, що йдуть на виготовлення одиниці $j-$ї продукції, дорівнюватиме $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m \quad (j=1,2,...,n)$. Вартість витрачених ресурсів не може бути меншою за вартість кінцевого продукту, тому виконується нерівність $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m \ge c_j \quad (j=1,2,...,n)$. Вартість усіх ресурсів, що є в наявності, дорівнюватиме $b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$. Отже, двоїсту задачу можна сформулювати так. Знайти невід'ємний розв'язок системи обмежень

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \\ x_i \ge 0 \quad (i=1,2,...,m), \end{cases}$$

який перетворює в мінімум функцію $F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$.

Розглянуті вихідну та двоїсту задачі можна інтерпретувати економічно так.

Вихідна задача. Скільки і якої продукції $x_j\ (j=1,2,...,n)$ треба виробити, щоб при заданих вартостях $c_j\ (j=1,2,...,n)$ одиниці продукції і розмірах наявних ресурсів $b_i\,(i=1,2,...,m)$ максимізувати прибуток підприємства.

Двоїста задача. Якою повинна бути ціна одиниці кожного з ресурсів, щоб при заданих кількостях ресурсів b_i та величинах вартості одиниці продукції c_j мінімізувати загальну вартість витрат.

Змінні y_i називають оцінками або обліковими неявними цінами.

5.5 Двоїстий симплекс-метод

Двоїстий симплекс-метод, як і симплекс-метод, використовується при знаходженні розв'язку задачі лінійного програмування, записаної в формі основної задачі, для якої серед векторів P_j, складених із коефіцієнтів при невідомих в системі рівнянь, є m одиничних. Разом з тим двоїстий симплекс-метод можна використовувати при розв'язуванні задачі лінійного програмування, вільні члени системи рівнянь якої можуть бути довільними числами (при розв'язуванні задачі симплекс-методом ці числа передбачалися невід'ємними).

Розглянемо задачу лінійного програмування, попередньо припустивши, що одиничними є вектори $P_1, P_2, ..., P_m$, причому задача полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1}$$

при умовах

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_mP_m + ... + x_nP_n = P_0 \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}) \tag{3}$$

де $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ...; P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}; \quad ...; \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$

і серед чисел b_i $(i = \overline{1,m})$ є від'ємні.

В даному випадку $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (2). Однак цей розв'язок не є планом задачі (1)-(3), оскільки серед його компонент є від'ємні числа.

Означення. Розв'язок $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$ системи лінійних рівнянь (2), яка визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, називається псевдопланом задачі (1)-(3), якщо $\Delta_j \geq 0$ для довільного j $(j = \overline{1,n})$. (Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, оцінки).

Теорема 1. Якщо в псевдоплані $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$, що визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, є хоча б одне від'ємне число $b_i < 0$, таке, що $a_{ij} \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$, то задача (1)-(3) взагалі не має планів.

Теорема 2. Якщо в псевдоплані $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$, який визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, є від'ємні числа $b_i < 0$ такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij} < 0$, то можна перейти до нового псевдоплану, при якому значення цільової функції задачі (1)-(3) не зменшиться.

Розглянемо задачу лінійного програмування

$$F = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge c_2, \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Перейдемо від нерівностей до рівностей, шляхом введення невід'ємних балансових змінних.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} = c_2, \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Помножимо рівняння системи на (-1):

$$\begin{cases} -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n + x_{n+1} = -c_1, \\ -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - ... - a_{2n}x_n + x_{n+2} = -c_2, \\ \end{cases}$$

Тоді $X = (0;0;...,0;-c_1;-c_2)$ розв'язок системи . Цей розв'язок задовольняє всі умови, крім того, що $x_i \ge 0$, ми отримали псевдоплан даної задачі.

Для випадку, коли в індексному рядку початкової симплекс таблиці немає від'ємних оцінок, але при цьому деякі з вільних членів системи є від'ємними був розроблений метод знаходження опорного розв'язку задач лінійного програмування, який і називається двоїстим симплекс-методом.

Таким чином, знаходження розв'язку задачі (1)-(3) двоїстим симплекс-методом включає такі етапи:

1. Знаходять псевдоплан задачі.
2. Перевіряють цей псевдоплан на оптимальність. Якщо псевдоплан оптимальний, то знайдено розв'язок задачі. В іншому випадку або встановлюють, що задача розв'язків не має, або переходять до нового псевдоплану.
3. У стовпці вільних членів вибирають від'ємне число, найбільше за абсолютною величиною. Рядок, який відповідає цьому числу приймають за розв'язний.
4. За розв'язний елемент вибирають від'ємний елемент розв'язного рядка a_{ij} для якого відношення $\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}$ є мінімальним.

Приклад

Використовуючи двоїстий симплекс-метод, розв'язати задачу лінійного програмування :

$$f = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \ge 24, \\ \qquad\qquad x_i \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо початкову задачу лінійного програмування у формі основної задачі: знайти найбільше значення цільової функції

$$F = -5x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \qquad = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad - x_6 = 24, \\ \qquad\qquad x_i \ge 0 \end{cases}$$

Помноживши перше і друге рівняння системи обмежень останньої задачі на (- 1), перейдемо до задачі:

$$F = -5x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -1{,}5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \qquad = -18, \\ -3x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 \qquad + x_6 = -24, \\ \qquad\qquad x_i \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

Оскільки серед вільних членів останньої системи обмежень є від'ємні числа, то розв'язувати задачу (1) звичайним симплексним методом ми не можемо. Складемо для задачі (1) двоїсту задачу:

$$f^* = -18y_1 - 24y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -1{,}5y_1 - 3y_2 \ge -5, \\ -3y_1 - 2y_2 \ge -6, \\ y_1 \qquad \ge -1, \\ -y_1 + \ y_2 \ge -1, \\ y_1 \qquad \ge 0, \\ \qquad y_2 \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

Після цього складаємо симплексну таблицю для задачі (1):

b_i	Базис	0	-5	-6	-1	-1	0	0
		c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	-18	-1,5	-3	1	-1	1	0
0	x_6	-24	$\boxed{-3}$	-2	0	1	0	1
	f_1^*	0	5	6	1	1	0	0

У цій таблиці всі елементи Δ_i індексного рядка – невід'ємні числа. Тому планом двоїстої задачі (2) є Y_1= { 0; 0 }, при якому $f_1^* = 0$. Крім того, з цієї таблиці видно, що задача (1) має псевдоплан X_1= { 0; 0; 0; 0; -18; -24 }. Оскільки у стовпчику вільних членів є два від'ємних числа, а в індексному рядку від'ємних чисел немає, то у відповідності до алгоритму двоїстого симплекс – методу переходимо до нової симплексної таблиці. (У даному випадку це можливо, оскільки у рядках базисів x_5 і x_6 є від'ємні числа. Якщо б їх не було, то задача не мала б розв'язку.) Розв'язувальний рядок визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом, яке стоїть у стовпчику вільних членів. У даному випадку таким числом є (-24). Таким чином, виключаємо з базису змінну x_6 . Щоб визначити, яку змінну необхідно ввести у базис, знаходимо $\min_j\left(-\Delta_j / a_{2j}\right)$, де $a_{2j} < 0$. Маємо :

$$\min_j \frac{-\Delta_j}{a_{2j}} = \min\left\{\frac{-5}{-3};\ \frac{-6}{-2}\right\} = \frac{5}{3}\ .$$

Тому вводимо в базис змінну x_1.

B_i	Базис	0	-5	-6	-1	-1	0	0
		c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	-6	0	$\boxed{-2}$	1	-3,5	1	-0,5
-5	x_1	8	1	2 / 3	0	-1 / 3	0	-1/3
	f_2^*	-40	0	8 / 3	1	8 / 3	0	5/3

Із цієї таблиці видно, що ми одержали новий план двоїстої задачі $Y_2 = \left\{0;\ \frac{5}{3}\right\}$, *при якому* $f_2^* = -40$. Таким чином, за допомогою алгоритму двоїстого симплекс – методу ми зробили перехід від одного плану двоїстої задачі до іншого.

Оскільки у стовпчику вільних членів стоїть від'ємне число (- 6), то розглянемо елементи першого рядка. Серед них є три від'ємні числа: - 2; - 3,5; - 0,5. Якщо б такі числа були відсутні, то задача не мала б розв'язку. Знаходимо:

$$\min_j \frac{-\Delta_j}{a_{1j}} = \min\left\{\frac{-8/3}{-2}; \frac{-8/3}{-3/2}; \frac{-5/3}{-1/2}\right\} = \frac{-8/3}{-2} = \frac{4}{3}.$$

Тому за розв'язний елемент беремо (- 2) і переходимо до нової симплексної таблиці:

b_i	Базис	0	-5	-6	-1	-1	0	0
		c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-6	x_2	3	0	1	-1 / 2	3 / 4	-1 / 2	1 / 4
-5	x_1	6	1	0	1 / 3	-5 / 6	1 / 3	-1 / 2
	f^*	- 48	0	0	7 / 3	2 / 3	4 / 3	1

Як видно з останньої таблиці, ми знайшли оптимальні розв'язки прямої задачі (1) і двоїстої задачі (2). Цими розв'язками є:

$$X^*_{опт} = \{ 6;\ 3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0 \}\ \ i\ \ Y^*_{опт} = \left\{ \frac{4}{3};\ 1 \right\},\ при\ \ яких\ \ F_{\max} = f^*_{\min} = -48.$$

Тоді оптимальним розв'язком початкової задачі буде:

$$X_{опт} = \{ 6;\ 3;\ 0;\ 0 \},\ при\ \ якому\ \ f_{\min} = -\ F_{\max} = 48.$$

5.6 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.

Скласти пару двоїстих задач, маючи вихідну задачу лінійного програмування.

1.1.
$$F = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 12, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 \qquad\ + x_3 \ge 19, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.2.
$$F = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 9, \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 18, \\ 2x_1 \qquad\ + x_3 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.3.
$$F = 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_3 \qquad \le 17, \\ 5x_1 \qquad + 2x_2 \ge 8, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.4.
$$F = 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 7, \\ 4x_1 + 9x_2 \qquad = 12, \\ \qquad 2x_2 \ + 2x_3 \le 17, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.5.
$$F = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge 13, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.6.
$$F = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7, \\ 9x_1 + 3x_3 \qquad = 13, \\ x_1 \qquad + 2x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.7.
$$F = 2x_1 + x_2 + 7x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 8, \\ x_1 + 9x_2 + 5x_3 \ge 11, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.8.
$$F = 7x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 19, \\ x_1 \qquad + 5x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.9.
$$F = x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 \le 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.10.
$$F = -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 \ge 13, \\ -4x_1 + 7x_3 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.11.
$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14, \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 9, \\ 9x_1 + 6x_2 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.12.
$$F = 9x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 21, \\ 2x_1 - 4x_2 \ge 23, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.13.
$$F = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 = 13, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \le 8, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \ge 19, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.14.
$$F = x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 \le 27, \\ 4x_2 + x_3 \ge 32, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.15.
$$F = x_1 + x_2 + 9x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 11, \\ 2x_1 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 \ge 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.16.
$$F = 3x_1 + x_2 + 7x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 6, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.17.
$$F = x_1 - 6x_2 + 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_3 \ge 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 19, \\ 4x_2 - x_3 \le 11, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.18.
$$f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5, \\ 2x_1 + 4x_3 - 5x_4 = 3, \\ -3x_2 + x_3 + x_4 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.19.
$$F = x_1 - 4x_2 + 7x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 \ge 13, \\ x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.20.
$$F = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ge 7, \\ x_1 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 \le 11, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.21.
$$F=-x_1+2x_2+6x_3\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2-4x_3\ge 13,\\ 2x_2=9,\\ x_3\le 2,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_3\ge 0.$$

1.22.
$$f=x_1-2x_2+3x_3-x_4\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3-3x_4\le 5,\\ x_1+2x_2-x_3+x_4\le 3,\\ 3x_2-x_3+2x_4=6,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

1.23.
$$F=-2x_1+3x_2+4x_3\to\max$$
$$\begin{cases}x_1+7x_2+2x_3\ge 13,\\ x_1+2x_2=8,\\ 2x_1+4x_3\le 5,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

1.24.
$$F=7x_1-11x_2+28x_3-4x_4\to\max$$
$$\begin{cases}-2x_1+3x_2-x_3+x_4=-2,\\ 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4\le 7,\\ x_1+x_2+2x_3\ge 3,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_3\ge 0.$$

1.25.
$$F=-2x_1+4x_2-2x_3\to\min$$
$$\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3\ge 7,\\ x_1+5x_3\le 19,\\ 2x_1-3x_2+5x_3=18,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_3\ge 0.$$

1.26.
$$F=-3x_1+2x_2-4x_4\to\min$$
$$\begin{cases}2x_1-4x_2-2x_3+x_4=8,\\ 2x_1+x_2-4x_3=5,\\ -x_1+7x_2-3x_4\ge 9,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_3\ge 0.$$

1.27.
$$F=4x_1+x_3\to\min$$
$$\begin{cases}-x_1+4x_2+5x_3\le 7,\\ 3x_2-5x_3\ge 4,\\ 3x_1-x_2-4x_3=2,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_3\ge 0.$$

1.28.
$$F=3x_1-4x_3+x_4\to\min$$
$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3-5x_4=7,\\ 2x_1-4x_2-x_3+7x_4\le 3,\\ 3x_2+x_3-4x_4=1,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

1.29.
$$f=-2x_1+x_2\to\max$$
$$\begin{cases}-3x_1+5x_2-7x_3=8,\\ 2x_1-x_2+2x_3\le 3,\\ -4x_1+3x_2-x_3\ge 4,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_3\ge 0.$$

1.30.
$$F=-x_1+4x_2+x_3-5x_4+x_5\to\max$$
$$\begin{cases}-x_1-3x_2+4x_4+5x_5=7,\\ 2x_1-3x_2+5x_3-x_4-x_5\ge 9,\\ -3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

Завдання 2

Для даної задачі лінійного програмування скласти двоїсту та знайти розв’язок задач геометричним методом

2.1.
$$F=x_1+4x_2\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1+4x_2\le 7,\\ 10x_1+3x_2\le 15,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

2.2.
$$F=2x_1+3x_2\to\max$$
$$\begin{cases}x_1+4x_2\le 14,\\ 2x_1+3x_2\le 12,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

$F = x_1 + 2x_2 \to \max$

2.3. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ -x_1 + 3x_2 \le 8, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = 3x_1 + 5x_2 \to \min$

2.4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 3x_2 \ge 8, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = x_1 + x_2 \to \max$

2.5. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

2.6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = x_1 + 2x_2 \to \max$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1 + x_2 \le 7, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$

2.8. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$F = x_1 + 3x_2 \to \max$

2.9. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = x_1 + 2x_2 \to \max$

2.10. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 9, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$

2.11. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$

2.12. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

2.13. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = x_1 + 2x_2 \to \max$

2.14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = x_1 + x_2 \to \max$

2.15 $\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \le 75, \\ 12x_1 + 7x_2 \le 55, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$F = 2x_1 + x_2 \to \max$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.17. $F = 2x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.18. $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.19. $F = 2x_1 + 7x_2 \to \min$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 16, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.20. $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.21. $F = 2x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.22. $F = 4x_1 + 8x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 3, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.23. $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 30, \\ 2x_1 - 2x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.24. $F = 5x_1 + 10x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 7x_2 \le 30, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.25. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.26. $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 10x_1 - 6x_2 \le 50, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.27. $F = 5x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 15, \\ 5x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.28. $F = 12x_1 + 15x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.29. $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2.30. $F = 5x_1 + 6x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 24, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Завдання 3

На виготовлення двох видів продукції – $П_1$ і $П_2$ витрачається три види ресурсів A_1, A_2, A_3. Запаси ресурсів, норми їх затрат і прибуток від реалізації одиниці продукції задані в таблиці. За допомогою симплекс- методу знайти такий план виробництва, який забезпечував би найбільший прибуток. Скласти двоїсту задачу до вихідної і виписати її оптимальний план з останньої симплекс-таблиці розв'язаної задачі. Розкрити її економічний зміст.

варіант	Затрати ресурсів на одиницю продукції						Наявність ресурсів			Прибуток	
	A_1		A_2		A_3		A_1	A_2	A_3	$П_1$	$П_2$
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$					
1	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8
2	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24
4	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12
5	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8
6	14	15	1	2	9	5	400	49	220	21	18
7	11	6	1	2	15	14	324	60	500	10	7
8	2	1	1	5	4	15	48	100	225	12	9
9	3	8	7	2	1	1	187	143	29	10	6
10	2	7	1	1	6	1	126	30	120	20	15
11	9	4	3	2	2	2	175	65	60	15	10
12	2	3	2	2	3	2	80	58	75	10	12
13	5	2	2	3	1	8	125	83	152	12	10
14	3	2	4	1	7	8	65	70	235	30	20
15	2	2	7	2	3	8	58	143	197	15	21
16	1	1	12	5	1	4	37	360	100	12	9
17	2	1	2	5	3	4	34	105	91	9	7
18	4	7	5	14	2	1	196	350	68	15	30
19	14	15	2	1	6	11	500	60	324	14	10
20	14	3	2	2	2	13	280	62	260	15	18
21	3	2	2	2	2	3	75	58	80	15	18
22	5	2	4	3	3	6	98	84	91	18	10
23	1	2	4	1	2	15	51	120	300	6	9
24	2	5	4	3	2	4	80	91	68	15	12
25	18	15	5	11	13	4	591	335	379	12	22
26	14	3	5	4	1	4	266	136	88	8	12
27	3	2	2	2	2	3	99	74	101	14	12
28	3	4	7	2	2	15	113	161	285	9	15
29	3	6	4	3	10	4	102	91	210	18	15
30	3	2	1	1	2	5	273	100	380	10	8

Завдання 4

Розв'язати задану пряму задачу лінійного програмування, використовуючи перехід до двоїстої задачі та графічний метод розв'язання одержаної двоїстої задачі.

4.1.
$$F = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.2.
$$F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

4.3.
$$F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 10, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.4.
$$F = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.5.
$$F = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

4.6.
$$F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.7.
$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

4.8.
$$F = 2x_1 + x_2 + 7x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.9.
$$F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.10.
$$F = 4x_1 + 30x_2 + 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.11.
$$F = -x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 22, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.12.
$$F = -2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 \le 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 8, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.13. $$F = -x_1 + 5x_2 - 6x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 12, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.14. $$F = -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 \geq -8, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 6, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.15. $$F = 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 12, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 18, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.16. $$F = -4x_1 - x_2 - 7x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 16, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 \geq 2, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.17. $$F = 2x_1 - x_2 - x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 36, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.18. $$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.19. $$F = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 \leq 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 45, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.20. $$F = 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}).$$

4.21. $$f = 7x_1 + 15x_2 + 6x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.22. $$F = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.23. $$f = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

4.24. $$F = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 14, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$f = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \to \min$$

4.25. $$\begin{cases} 3x_1 + x_4 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \ge 18, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

$$F = x_1 - 5x_2 \to \max$$

4.26. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 10, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$f = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min$$

4.27. $$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 3x_4 \ge 12, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

$$F = 12x_1 - x_2 + x_3 \to \max$$

4.28. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$f = 8x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 14x_4 \to \min$$

4.29. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 14, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 \ge 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

$$F = 5x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$$

4.30. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 22, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 \le 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

Запитання для самоперевірки

1. Що являє собою двоїста задача лінійного програмування?
2. В чому відмінність симетричних задач двоїстої пари від несиметричних?
3. Які варіанти розв'язків можуть мати місце при дослідженні пари двоїстих задач?
4. Сформулюйте основні теореми про двоїсті задачі ЛП.
5. Сформулюйте критерій оптимальності.
6. Як за розв'язком вихідної задачі, знайти розв'язок двоїстої задачі і навпаки?
7. Дайте економічну інтерпретацію задачі, двоїстої до задачі про використання ресурсів.
8. Які найпростіші властивості взаємно двоїстих задач?

6 Транспортна задача

6.1 Постановка задачі

Загальна постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезення деякого однорідного вантажу із m пунктів відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$ у n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$. При цьому в якості критерію оптимальності зазвичай беруть або мінімальну вартість перевезень всього вантажу, або мінімальний час його доставки. Розглянемо транспортну задачу, як критерій оптимальності якої взята мінімальна вартість перевезення всього вантажу. Позначимо через c_{ij} тарифи перевезення одиниці вантажу із i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення, через a_i – запаси вантажу в i -му пункті відправлення, через b_j – потреби у вантажі в j -му пункті призначення, а через x_{ij} – кількість одиниць вантажу, що перевозять із i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \ (j= 1, n), \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i \ \ (i= 1, m), \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (j= 1, n; i= 1, m). \qquad (4)$$

Означення 1. Довільний невід'ємний розв'язок систем лінійних рівнянь (2) і (3), що визначається матрицею $X=(x_{ij}^*)$ $(j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m})$ називається планом транспортної задачі.

Означення 2. План $X=(x_{ij}^*)$ $(j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m})$, при якому функція (1) приймає своє мінімальне значення, називається оптимальним планом транспортної задачі.

Очевидно, загальна кількість вантажу у постачальників дорівнює $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а загальна потреба у вантажі в пунктах призначеннях рівна $\sum_{j=1}^{n} b_j$ одиниць. Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення рівна запасу вантажу в пунктах відправлення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \qquad (5)$$

то модель такої транспортної задачі називається закритою. Якщо ж дана умова не виконується, то модель транспортної задачі називається відкритою.

Теорема 1. Для того, щоб транспортна задача мала розв'язок необхідно і достатньо, щоб запаси вантажу в пунктах відправлення були рівні потребам у вантажі в пунктах призначення, тобто щоб виконувалась рівність (5).

У випадку переважання запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний (n+1)-й пункт призначення з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{in+1} = 0$ $(i = \overline{1, m})$. Отримана задача є транспортною задачею, для якої виконується рівність (5).

Аналогічно, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводиться (m +1)- й пункт відправлення із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1j} = 0$ $(j = \overline{1, n})$. Цим задача зводиться до звичайної транспортної задачі, із оптимального плану якої отримується оптимальний план вихідної задачі. В подальшому будемо розглядати закриту модель транспортної задачі.

6.2 Методи розв'язування транспортної задачі

Для визначення опорного плану існує декілька методів. Розглянемо три з них: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента і метод апроксимації Фотеля. Сутність цих методів полягає в тому, що опорний план знаходять послідовно за n+m-1 кроків, на кожному із яких у таблиці умов задачі заповнюють одну клітинку, яку називають заповненою. Заповнення однієї із клітинок показує: або забезпечення потреби у вантажі одного із пунктів призначення (того, в стовпці якого знаходиться заповнена клітинка), або вивезення вантажу із одного із пунктів відправлення (із того, в рядку якого знаходиться заповнена клітинка).

Метод північно-західного кута. При знаходженні опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута на кожному кроці розглядають перший із пунктів відправлення, що залишився і перший із пунктів призначення , що залишився. Заповнення клітинок таблиці умов починається із лівої верхньої клітинки для невідомого x_{11}("північно-західний кут") і закінчується клітинкою для невідомого x_{mn}, тобто іде як би по діагоналі таблиці.

Метод мінімального елемента. У методі північно-західного кута на кожному кроці потреба першого із пунктів призначення, що залишилися, задовольнялася за рахунок запасів першого із пунктів відправлення, що залишився. Очевидно, вибір пунктів призначення і відправлення доцільно проводити, орієнтуючись на тарифи перевезення, а саме: на кожному кроці слід вибрати будь-яку клітинку, яка відповідає мінімальному тарифу (якщо таких клітинок декілька, то слід вибрати довільну із них), і розглядати пункти призначення і відправлення, відповідні вибраній клітинці. Сутність методу мінімального елемента і полягає у виборі клітинки з мінімальним тарифом.

Слід відмітити, що цей метод, як правило, дозволяє знайти опорний план транспортної задачі, при якому загальна вартість перевезень вантажу менша, ніж загальна вартість перевезення при плані, що знайдений для даної задачі за допомогою методу північно-західного кута.

Метод апроксимації Фогеля. При визначенні оптимального плану транспортної задачі методом апроксимації Фогеля на кожній ітерації по всіх стовпцях і по всіх рядках знаходять різницю між двома записаними в них мінімальними тарифами. Ці різниці записують в спеціально відведені для цього рядки та стовпці в таблиці умови задачі. Серед вказаних різниць вибирають мінімальну. У рядку (або стовпці), якому дана різниця відповідає, визначають мінімальний тариф. Клітинку, в якій він записаний, заповнюють на даній ітерації. Якщо мінімальний тариф однаковий для декількох клітинок даного рядка (стовпця), то для заповнення вибирають клітинку, яка розміщена в стовпці (рядку), що відповідає найбільшій різниці між двома мінімальними тарифами, що знаходяться в даному стовпці (рядку).

6.3 Визначення оптимального плану транспортної задачі

Для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблено декілька методів. Однак найбільш часто використовують метод потенціалів і метод диференціальних рент. Зупинимося на розгляді *методу потенціалів.*

Теорема 2. Якщо для деякого опорного плану X= (x_{ij}^*) $(j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m})$, транспортної задачі існують такі числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$, що $\beta_j-\alpha_i=c_{ij}$ при

$$x_{ij}\ge 0 \tag{7}$$

$$\beta_j-\alpha_i\le c_{ij} \text{ при } x_{ij}=0 \tag{8}$$

для всіх $j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m}$, то $X^*=(x_{ij}^*)$ – оптимальний план транспортної задачі.

Означення 3. Числа α_i,β_j $(j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m})$ називаються потенціалами відповідно пунктів призначення і пунктів відправлення.

Процес знаходження розв'язку транспортної задачі методом потенціалів включає такі етапи:

1. Знаходять опорний план. При цьому число заповнених клітинок повинно бути рівним n+m-1.

2. Знаходять потенціали β_j,α_i відповідно пунктів призначення і відправлення. Ці числа знаходять із системи рівнянь

$$\beta_j-\alpha_i=c_{ij} \tag{9}$$

де c_{ij} –тарифи, що знаходяться у заповнених клітинках таблиці умов транспортної задачі. Оскільки число заповнених клітинок дорівнює n+m-1, то система (9) з n+m невідомими містить n+m-1 рівнянь. Оскільки число невідомих перевищує на одиницю число рівнянь, одне із невідомих можна прийняти рівним довільному числу, наприклад $\alpha_1=0$, і знайти послідовно із рівнянь (9) значення решти невідомих.

3. Для кожної вільної клітинки визначають число α_{ij} за формулою:

$$\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij} \tag{10}$$

Якщо серед чисел α_{ij} немає додатних, то отриманий оптимальний план транспортної задачі; якщо ж вони присутні, то переходять до нового опорного плану.

4. Серед додатних чисел α_{ij} вибирають максимальне, будують для вільної клітинки, якій воно відповідає, цикл перерахунку і виконують зсув по циклу перерахунку.

Означення 4. Циклом у таблиці умов транспортної задачі називається ламана лінія, вершини якої розміщені в заповнених клітинках таблиці, а ланцюги – вздовж рядків і стовпців, причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно два ланцюги, один з яких знаходиться в рядку, а інший – в стовпці.

Якщо ламана, яка утворює цикл, перетинається, то точки самоперетину не є вершинами. При правильній побудові опорного плану для довільної вільної клітинки можна побудувати лише один цикл. Після того як для вибраної вільної клітинки він побудований, слід перейти до нового опорного плану. Для цього слід перемістити вантажі в межах клітинок, пов'язаних з даною вільною клітинкою. Це переміщення виконують за такими правилами:

1) кожній із клітинок, які пов'язані циклом з даною вільною клітинкою, приписують певний знак, причому вільній клітинці – знак плюс, а всім останнім клітинкам – по-черзі знаки мінус і плюс (будемо називати ці клітинки мінусовими і плюсовими);

2) в дану вільну клітинку переносять менше із чисел x_{ij}, що знаходяться в мінусових клітинках. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розташовані в плюсових клітинках, і віднімають від чисел, що знаходяться в мінусових клітинках. Клітинка, яка була раніше вільною, стає заповненою, а мінусова клітинка, в якій знаходилось мінімальне із чисел x_{ij}, вважається вільною.

В результаті вказаних раніше переміщень вантажів в межах клітинок, що пов'язані циклом з даною вільною клітинкою, визначають новий опорний план транспортної задачі.

Описаний перехід від одного опорного плану транспортної задачі до другого її опорного плану називається зсувом за циклом перерахунку.

5. Отриманий опорний план перевіряють на оптимальність, тобто знову повторюють всі дії, починаючи з етапу 2.

Приклад 1. Чотири підприємства даного економічного району для виготовлення продукції використовують три види сировини. Потреби кожного з підприємств : 120, 50, 190, 110 од., сировина розташована в трьох місцях і її запаси – 160, 140, 170 од., на кожне з підприємств сировина може завозитись з довільної бази. Тарифи перевезень задаються матрицею С:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Скласти план перевезень, що мінімізує витрати на перевезення.

Розв'язування

Будемо шукати опорний план за методом *північно-західного кута*.

За цим методом послідовно (починаючи з лівого верхнього кута x_{11}) заповнюється таблиця перевезень задовольняючи повністю або потреби (виключаємо стовпчик) або повністю використовуючи повний запас A_i (виключаємо відповідний рядок) і переходячи до сусіднього елемента таблиці (зміщуємось вправо і вниз). За *m+n-1* крок отримуємо оптимальний план, причому на останньому кроці запас дорівнює потребі.

Пункти відправлення	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	120 [7]	40 [8]	[1]	[2]	160
A_2	[4]	10 [5]	130 [9]	[8]	140
A_3	[9]	[2]	60 [3]	110 [6]	170
Потреби	120	50	190	110	470

Отримаємо опорний план $X_1 = \begin{bmatrix} 120 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 110 \end{bmatrix}$

При цьому опорному плані значення цільової функції:

$$F(x_1) = 120 \cdot 7 + 40 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 130 \cdot 9 + 60 \cdot 3 + 110 \cdot 6 = 3220$$

Приклад 2. Використовуючи метод апроксимації Фогеля знайти опорний план та перевірити його на оптимальність методом потенціалів:

Пункти відправлення	Пункти призначення			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	7	1	60
A_2	1	3	4	50
A_3	6	5	2	20
Потреби	40	20	70	130

Розв'язування

Таблиця 2

Пункти відправлення	Пункти призначення			Запаси	Різниці по рядках		
	B_1	B_2	B_3				
A_1	_ 4	_ 7	1 60	60	3	_	_
A_2	2 40	3 10	_ 4	50	1	1	1
A_3	_ 6	5 10	2 10	20	3	3	3
Потреби	40	20	70	130			
Різниці по стовпцях	2	2	1				
	4	2	2				
	_	2	2				

Для кожного рядка і стовпця таблиці умов знайдемо різниці між двома мінімальними тарифами, що записані в даному рядку або стовпцю, і помістимо їх у відповідний додатковий стовпець або додатковий рядок таблиці 2. Так, у рядку A_1 мінімальний тариф дорівнює 1, а наступний за ним дорівнює 4, різниця між ними $4 - 1 = 3$. Так само різниця між мінімальними елементами в стовпці B_1 рівна $4 - 2 = 2$. Обчисливши всі різниці, бачимо, що найбільша із них відповідає рядку A_1 та рядку A_3. Для заповнення вибираємо рядок, що містить мінімальний тариф. Порівнюючи тарифи даних рядків знаходимо, що мінімальний тариф записаний у клітинці, яка знаходиться на перетині рядка A_1 та стовпця B_3. Таким чином, цю клітинку слід заповнити. Заповнюючи її, тим самим вважаємо, що запаси пункту A_1 повністю вичерпані, а потреби в пункті B_3 стали рівними $70 - 60 = 10$ од. Виключимо із розгляду рядок A_1. Після цього визначимо наступну клітинку для заповнення. Знову знайдемо різниці між двома мінімальними тарифами, що залишилися в кожному із рядків і стовпців і запишемо їх у другий додатковий рядок і стовпець таблиці 2. Як видно із цієї таблиці, найбільша вказана різниця відповідає стовпцю B_1. Мінімальний тариф у цьому стовпці записаний у клітинці, що знаходиться на перетині її з рядком A_2. Відповідно заповнюємо цю клітинку. Помістивши в неї число 40, тим самим вважаємо, що задовольнимо потреби пункту B_1. Тому, виключимо із розгляду стовпець B_1 і будемо рахувати запаси пункту A_2: $50 - 40 = 10$ од. Продовжуючи ітераційний процес, послідовно заповнюємо клітинки, що знаходяться на перетині рядка A_2 і стовпця B_2, рядка A_3 і стовпця B_3, рядка A_3 і стовпця B_2. В результаті отримаємо опорний план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 40 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

При цьому плані загальна вартість перевезень така:

$$F(x) = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 240$$

Перевіримо знайдений план на оптимальність методом потенціалів.

Знайдемо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення. Для визначення потенціалів отримаємо систему:

$$\beta_3 - \alpha_1 = 1,$$
$$\beta_1 - \alpha_2 = 2,$$
$$\beta_2 - \alpha_2 = 3,$$
$$\beta_2 - \alpha_3 = 5,$$
$$\beta_3 - \alpha_3 = 2,$$

яка містить п’ять рівнянь з шістьма невідомими. Покладаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_3 = 1, \alpha_3 = -1, \beta_2 = 4, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1.$

Для кожної вільної клітинки обчислимо число $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$: $\alpha_{11} = -3, \alpha_{12} = -3, \alpha_{23} = -6, \alpha_{31} = -4.$ Оскільки серед знайдених чисел немає додатних, то знайдений план є оптимальним.

6.4 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. ***Закрита модель транспортної задачі.***
Мінімізувати транспортні витрати на доставку вантажів від постачальників $A_1, A_2, ..., A_m$ до споживачів $B_1, B_2, ..., B_n$ якщо задані обсяги поставок $a_1, a_2, ..., a_m$ і потреб $b_1, b_2, ..., b_n$ $(\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j)$, а також тарифи c_{ij} на доставку одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача. Визначити початковий план трьома способами: а) методом північно-західного кута; б) методом мінімального елемента; в) методом апроксимації Фотеля.

1.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 60	B_3, 40
A_1, 15	1	2	3
A_2, 45	4	3	5
A_3, 60	4	3	6

1.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 45	B_3, 50
A_1, 25	4	2	3
A_2, 40	4	7	9
A_3, 65	1	2	7

1.3

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 30	B_3, 35
A_1, 35	5	2	4
A_2, 20	3	6	9
A_3, 35	4	5	1

1.4

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 40	B_3, 10
A_1, 30	2	9	6
A_2, 10	7	3	5
A_3, 25	5	4	8

1.5

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 30	B_2, 55	B_3, 35
A_1, 25	7	6	5
A_2, 55	6	2	4
A_3, 40	3	1	5

1.6

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 50	B_3, 10
A_1, 10	5	1	4
A_2, 25	6	9	3
A_3, 45	2	6	8

1.7

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 10	B_3, 70
A_1, 50	3	5	2
A_2, 85	4	6	1
A_3, 20	8	9	7

1.8

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 30	B_3, 70
A_1, 20	6	9	4
A_2, 60	3	1	5
A_3, 45	7	1	4

1.9

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 45	B_3, 50
A_1, 25	1	4	6
A_2, 40	9	3	2
A_3, 65	7	9	5

1.10

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 75	B_3, 25
A_1, 55	8	3	9
A_2, 20	4	7	2
A_3, 40	1	5	6

1.11

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 40	B_2, 15	B_3, 65
A_1, 25	5	1	4
A_2, 55	6	9	3
A_3, 40	2	6	8

1.12

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 25	B_3, 55
A_1, 50	2	9	6
A_2, 85	7	3	5
A_3, 20	4	4	1

1.13

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1,55	B_2, 15	B_3, 10
A_1, 10	7	6	5
A_2, 25	6	2	4
A_3, 45	3	1	5

1.14

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 10	B_3, 10
A_1, 30	6	9	4
A_2, 10	1	7	5
A_3, 25	8	5	7

1.15

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 35	B_3, 85
A_1, 25	4	2	3
A_2, 40	5	4	3
A_3, 65	5	7	4

1.16

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 40	B_3, 25
A_1, 65	10	5	8
A_2, 15	6	9	5
A_3, 20	2	4	7

1.17

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 65	B_3, 20
A_1, 20	4	6	9
A_2, 85	4	5	7
A_3, 15	6	8	4

1.18

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 75	B_3, 30
A_1, 50	2	5	3
A_2, 40	6	8	5
A_3, 25	9	6	4

1.19

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 10	B_3, 55
A_1, 35	7	1	6
A_2, 40	1	5	9
A_3, 15	4	5	7

1.20

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 85	B_2, 30	B_3, 30
A_1, 25	2	5	8
A_2, 50	4	6	5
A_3, 70	7	5	3

1.21

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 15	B_3, 55
A_1, 55	8	2	4
A_2, 45	6	5	3
A_3, 25	1	5	7

1.22

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 20	B_3, 35
A_1, 25	2	4	2
A_2, 30	3	6	8
A_3, 10	8	4	4

1.23

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 80	B_2, 15	B_3, 45
A_1, 50	9	5	6
A_2, 65	3	4	6
A_3, 25	4	2	1

1.24

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 30	B_3, 65
A_1, 60	7	4	6
A_2, 75	8	4	2
A_3, 20	6	7	5

1.25

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 25	B_3, 55
A_1, 40	8	5	4
A_2, 80	6	8	5
A_3, 25	2	5	1

1.26

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 40	B_3, 20
A_1, 20	3	5	2
A_2, 10	4	6	1
A_3, 55	8	9	7

1.27

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 10	B_3, 40
A_1, 55	6	9	4
A_2, 15	3	1	7
A_3, 25	6	8	2

1.28

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 55	B_3, 35
A_1, 85	4	2	3
A_2, 30	5	4	3
A_3, 50	5	7	1

1.29

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 35	B_3, 30
A_1, 25	5	8	6
A_2, 75	9	3	2
A_3, 10	3	7	1

1.30

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 70	B_2, 10	B_3, 25
A_1, 10	4	6	9
A_2, 65	8	4	7
A_3, 30	6	5	5

Завдання 2 ***Відкрита модель транспортної задачі***

Мінімізувати транспортні витрати на доставку вантажів від постачальників $A_1, A_2, ..., A_m$ до споживачів $B_1, B_2, ..., B_n$ якщо задані обсяги поставок $a_1, a_2, ..., a_m$ і потреб $b_1, b_2, ..., b_n$ $(\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j)$, а також тарифи c_{ij} на доставку одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача, використавши метод апроксимації Фотеля.

2.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 55	B_2, 25	B_3, 35
A_1, 40	2	5	8
A_2, 45	4	6	5
A_3, 25	3	1	5

2.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 55	B_2, 75	B_3, 25
A_1, 15	8	2	4
A_2, 10	6	5	3
A_3, 65	7	5	9

2.3

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 65	B_3, 50
, 85	7	4	6
A_2, 35	8	4	2
A_3, 20	6	7	5

2.4

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 45	B_3, 60
A_1, 40	3	8	5
A_2, 15	1	5	4
A_3, 50	2	3	5

2.5

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 85	B_2, 30	B_3, 40
A_1, 55	3	6	8
A_2, 10	5	1	3
A_3, 35	2	1	7

2.6

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 40	B_2, 15	B_3, 55
A_1, 55	9	1	2
A_2, 35	4	7	3
A_3, 65	6	7	2

2.7

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 50	B_2, 70	B_3, 65
A_1, 85	4	5	7
A_2, 75	9	3	9
A_3, 45	6	4	2

2.8

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 25	B_3, 60
A_1, 25	6	8	5
A_2, 35	9	6	4
A_3, 30	5	2	8

2.9

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 15	B_3, 50
A_1, 10	5	9	8
A_2, 30	3	5	6
A_3, 40	4	5	4

2.10

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 20	B_3, 10
A_1, 40	10	6	5
A_2, 15	7	5	3
A_3, 25	8	4	1

2.11

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 20	B_3, 15
A_1, 15	6	5	3
A_2, 10	3	3	1
A_3, 55	5	9	6

2.12

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 80	B_2, 25	B_3, 30
A_1, 85	3	6	8
A_2, 25	8	4	4
A_3, 10	2	2	5

2.13

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 55	B_3, 65
A_1, 40	4	7	5
A_2, 30	1	5	2
A_3, 30	3	4	2

2.14

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 35	B_3, 65
A_1, 40	8	4	2
A_2, 40	6	1	3
A_3, 25	6	9	5

2.15

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 50	B_2, 40	B_3, 45
A_1, 50	6	8	5
A_2, 35	2	1	3
A_3, 65	5	6	5

2.16

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 10	B_3, 15
A_1, 45	4	6	1
A_2, 15	8	9	7
A_3, 20	5	3	9

2.17

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 30	B_3, 45
A_1, 30	3	1	5
A_2, 25	6	8	5
A_3, 50	7	1	5

2.18

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 25	B_3, 40
A_1, 65	5	4	3
A_2, 30	5	7	4
A_3, 35	3	6	3

2.19

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 30	B_2, 50	B_3, 55
A_1, 75	9	1	2
A_2, 60	4	7	3
A_3, 25	6	8	8

2.20

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 35	B_3, 40
A_1, 80	1	6	5
A_2, 40	6	2	4
A_3, 55	3	1	5

2.21

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 70	B_2, 15	B_3, 30
A_1, 75	3	1	1
A_2, 25	7	9	4
A_3, 35	2	4	10

2.22

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 40	B_2, 65	B_3, 75
A_1, 85	2	2	6
A_2, 50	5	9	5
A_3, 25	1	2	3

2.23

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 80	B_2, 35	B_3, 45
A_1, 70	7	8	2
A_2, 55	3	2	1
A_3, 25	5	8	4

2.24

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 70	B_2, 50	B_3, 45
A_1, 65	4	4	8
A_2, 55	2	1	3
A_3, 25	6	5	4

2.25

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 50	B_3, 15
A_1, 15	7	5	3
A_2, 10	1	3	3
A_3, 50	2	2	8

2.26

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 50	B_3, 35
A_1, 55	8	1	1
A_2, 60	9	7	6
A_3, 15	6	4	2

2.27

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 55	B_3, 75
A_1, 40	9	2	2
A_2, 40	1	4	6
A_3, 25	6	7	5

2.28

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 60	B_3, 15
A_1, 25	8	8	3
A_2, 35	1	2	3
A_3, 30	7	8	9

2.29

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 60	B_3, 20
A_1, 40	8	4	2
A_2, 15	3	1	1
A_3, 50	7	6	8

2.30

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 60	B_2, 65	B_3, 40
A_1, 45	1	2	4
A_2, 50	4	9	1
A_3, 25	3	5	10

Запитання до самоперевірки

1. Що називається планом транспортної задачі ?
2. Який план називається оптимальним планом транспортної задачі?
3. Яка необхідна умова існування розв'язку транспортної задачі?
4. Які методи існують для визначення початого плану транспортної задачі? Охарактеризувати їх.
5. Що таке потенціали пунктів відправлення і призначення?
6. Назвати етапи знаходження розв'язку транспортної задачі методом потенціалів.
7. Що таке цикл у таблиці умов транспортної задачі?

За якими правилами здійснюють переміщення у транспортній таблиці?

7 Цілочисельні задачі лінійного програмування

7.1 Економічна і геометрична інтерпретація задачі цілочисельного програмування

Означення. Екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілочисельні значення, називається задачею цілочисельного програмування.

У математичній моделі задачі цілочисельного програмування як цільова функція, так і функції в системі обмежень можуть бути лінійними, нелінійними і змішаними. Обмежимося випадком, коли цільова функція і система обмежень задачі є лінійними.

Приклад. Для обладнання нової виробничої дільниці виділено 30 тис. грн.. Підприємство може замовити обладнання двох типів. Комплект обладнання I виду коштує 6000грн., а II виду – 5000грн. Придбання одного комплекту обладнання I виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 2 од., а одного комплекту обладнання II виду – на 3 од. Обладнання II виду треба розмістити на площі, не більшій ніж 3 м^2 .Визначити такий набір додаткового обладнання, який дасть можливість максимально збільшити випуск продукції.

Розв'язування

Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 комплектів обладнання І виду і x_2 комплектів обладнання ІІ виду. Тоді змінні x_1 і x_2 повинні задовольняти такі нерівності:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 30, \\ x_2 \le 3, \end{cases} \tag{1}$$

Якщо підприємство придбає вказану кількість обладнання, то загальне збільшення випуску продукції складе

$$F = 2x_1 + 3x_2 \tag{2}$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 і x_2 можуть приймати лише цілі невід'ємні значення, тобто

$$x_1, x_2 \ge 0, \tag{3}$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі} \tag{4}$$

Таким чином, приходимо до такої математичної задачі: знайти максимальне значення лінійної функції (2) при виконанні умов (1), (3) і (4). Оскільки невідомі можуть приймати тільки цілі значення, то дана задача є задачею цілочисельного програмування. Оскільки число невідомих задачі дорівнює двом, то розв'язок задачі можна знайти, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Для цього перш за все побудуємо многокутник розв'язків задачі, яка полягає у визначені максимального значення лінійної функції (2) при виконанні умов (1) і (3) без врахування цілочисельності розв'язків (4).

Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $6x_1 + 5x_2 = 30$, яка проходить через точки (0;6) та (5;0);

2) l_2: $x_2 = 3$;

3) $l_3 : x_1 = 0$;

4) l_4: $x_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.1).

Отже, допустимою областю D є многокутник OABC, який зображено на рис.1. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\vec{N} = \{2; 3\}$. Проведемо пряму l: $2x_1 + 3x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\vec{N}$ (рис. 1).

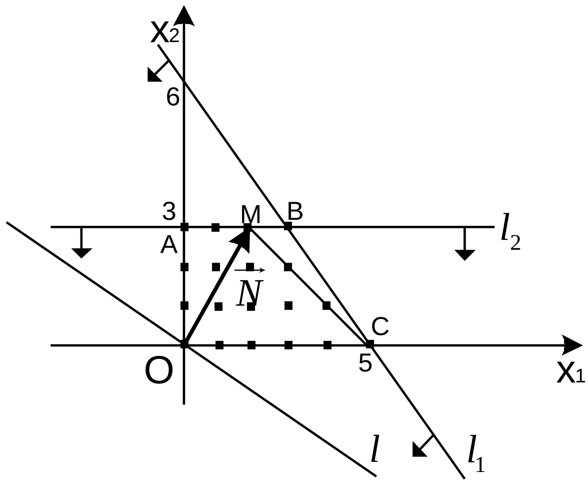

Рисунок 1 – Область допустимих розв'язків

Умовно переміщуємо пряму l: $2x_1+3x_2=0$ паралельно самій собі по області D у напрямі вектора $\vec{N}=\{2;3\}$ до тих пір, поки вона не почне перетинати область D. Найбільшого значення лінійна функція $F=2x_1+3x_2$ досягатиме в найбільш віддаленій вершині В многокутника ОАВС, тобто у точці виходу прямої l з даної області. Знайдемо координати точки В ($x_1^*;x_2^*$). Точка В лежить на перетині прямих l_1 і l_2. Для знаходження координат точки В необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1+5x_2=30, \\ x_2=3. \end{cases}$$

Підставимо x_2 в перше рівняння, в результаті чого отримаємо:

$6x_1=15$ або $x_1^*=\frac{5}{2}$. Тобто точка В має координати ($\frac{5}{2}$;3).

Отже, найбільше значення лінійної функції:

$$F_{\min}=F(B)=2\cdot\frac{5}{2}+3\cdot 3=14.$$

Оскільки одна із знайдених координат дробова, то знайдений розв'язок не є розв'язком задачі цілочисельного програмування.

Координати всіх точок побудованого многокутника розв'язків $OABC$ задовольняють систему лінійних нерівностей і умову невід'ємності розв'язків. Разом з тим умову цілочисельності змінних задовольняють координати 18 точок, що відмічені на рис.1.

Щоб знайти точку, координати якої визначають розв'язок вихідної задачі, замінимо многокутник $OABC$ многокутником $OAMC$, який містить всі допустимі точки з цілими координатами. Отже, якщо знайти точку максимуму даної функції на многокутнику $OAMC$, то координати цієї точки і визначають оптимальний план.

Переміщуючи побудовану пряму $l:\ 2x_1 + 3x_2 = 0$ в напрямку вектора $\overrightarrow{N}$ до тих пір, поки вона не пройде через останню точку даного многокутника $OAMC$. Координати цієї точки і визначають оптимальний план, а значення цільової функції в ній є максимальним.

В даному випадку шуканою є точка $M(2;3)$, в якій цільова функція приймає максимальне значення $F_{\max} = 13$.

7.2 Визначення оптимального плану задачі цілочисельного програмування

Розглянемо задачі цілочисельного програмування, у яких як цільова функція, так і функції в системі обмежень є лінійними. У зв'язку з цим сформулюємо основну задачу лінійного програмування, у якій змінні можуть приймати тільки цілі значення. У загальному випадку цю задачу можна записати так: знайти максимум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{6}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{7}$$

$$x_j - цілі \quad (j = \overline{1,n}). \tag{8}$$

Якщо знайти розв'язок задачі (5) – (8) симплексним методом, то він може виявитися або цілочисельним, або дробовим (прикладом задачі лінійного програмування, розв'язок якої завжди є цілочисельним, служить транспортна задача).

У загальному ж випадку для визначення оптимального плану задачі (5) – (8) застосовуються спеціальні методи. В даний час існує декілька таких методів, з яких найбільш відомим є метод Гоморі, в основі якого лежить описаний вище симплексний метод.

7.3 Метод Гоморі

Знаходження розв'язку задачі цілочисельного програмування методом Гоморі починають з визначення симплексним методом оптимального плану задачі (5) – (7) без врахування цілочисельності змінних. Після того як цей план знайдений, переглядають його компоненти. Якщо серед компонентів немає дробових чисел, то знайдений план є оптимальним планом задачі цілочисельного програмування (5) – (8). Якщо ж в оптимальному плані задачі (5) – (7) змінна x_j приймає дробове значення, то до системи рівнянь (6) додають нерівність

$$\sum_j f(a_{ij}^*)x_j \geq f(b_i^*) \qquad (9)$$

і знаходять розв'язок задачі (5) – (7), (9).

У нерівності (9) a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких узяті з останньої симплекс-таблиці, а $f(a_{ij}^*)$ і $f(b_i^*)$ – дробові частини чисел (під дробовою частиною деякого числа a розуміється найменше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою). Якщо в оптимальному плані задачі (5) – (7) дробові значення приймають декілька змінних, то додаткова нерівність (9) визначається найбільшою дробовою частиною.

Якщо в знайденому плані задачі (5) – (7), (9) змінні приймають дробові значення, то знову додають одне додаткове обмеження і процес обчислень повторюють. Проводячи кінцеве число ітерацій або одержують оптимальний план задачі цілочисельного програмування (5) – (8), або встановлюють, що вона не має розв'язку.

Означення. Якщо вимога цілочисельності (8) відноситься лише до деяких змінних, то такі задачі називаються **частково цілочисельними**.

Їх розв'язок також знаходять послідовним розв'язуванням задач, кожну з яких отримують з попередньої за допомогою введення додаткового обмеження. У цьому випадку таке обмеження має вигляд

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \geq f(b_i^*) \qquad (10)$$

де γ_{ij} визначаються з таких співвідношень:

1) для x_j, що можуть приймати не цілі значення,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ \textit{при} \quad a_{ij}^* \geq 0, \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)}\left|a_{ij}^*\right| \quad \textit{при} \ a_{ij}^* < 0; \end{cases} \qquad (11)$$

2) для x_j, що можуть приймати тільки цілочисельні значення,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}) \ \textit{при} \quad f(a_{ij}^*) \leq f(b_i^*), \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)}\left[1 - f(a_{ij}^*)\right] \quad \textit{при} \ f(a_{ij}^*) > f(b_i^*). \end{cases} \qquad (12)$$

З викладеного вище випливає, що процес визначення оптимального плану задачі цілочисельного програмування методом Гоморі включає такі основні етапи:

1. Використовуючи симплексний метод, знаходять розв'язок задачі (5) – (7) без врахування вимоги цілочисельності змінних.

2. Складають додаткове обмеження для змінної, яка в оптимальному плані задачі (5) – (7) має максимальне дробове значення, а в оптимальному плані задачі (5) – (8) повинна бути цілим значенням.

3. Використовуючи двоїстий симплекс-метод, знаходять розв'язок задачі, що виходить із задачі (5) – (7) у результаті приєднання додаткового обмеження.

4. У разі потреби складають ще одне додаткове обмеження і продовжують ітераційний процес до одержання оптимального плану задачі (5) – (8) чи встановлення, що вона не має розв'язку.

Приклад. Методом Гоморі знайти максимальне значення функції

$$F = 2x_1 + 3x_2 \qquad (13)$$

при умовах

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + x_3 = 30, \\ x_2 + x_4 = 3, \end{cases} \qquad (14)$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,4}), \qquad (15)$$

$$x_j - \textit{цілі} \quad (j = \overline{1,4}). \qquad (16)$$

Дати геометричну інтерпретацію розв'язку задачі.

Розв'язування

Для визначення оптимального плану задачі (13) – (16) спочатку знаходимо оптимальний план задачі (13) – (15). Зведемо задачу до стандартного вигляду: $f = -F = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$

Таблиця 1

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
x_3 x_4	6 0	5 1	1 0	0 1	30 3	30/5 3/1
f	-2	-3	0	0	0	
$X^{(1)} = (0;0;30;3)$						
x_3 x_2	6 0	0 1	1 0	-5 1	15 3	
f	-2	0	0	3	9	
$X^{(2)} = (0;3;15;0)$						
x_1 x_2	1 0	0 1	1/6 0	-5/6 1	5/2 3	
f	0	0	1/3	4/3	14	
$X^{(3)} = (\frac{5}{2};3;0;0)$						

Як видно із табл. 1, знайдений оптимальний план $X^{(3)} = (5/2; 3; 0; 0)$ задачі (13) – (15) не є оптимальним планом задачі (13) – (16), оскільки компонента x_1 має дробове значення. Складемо додаткове обмеження для змінної x_1. З останньої симплекс-таблиці (табл.1) маємо $x_1 + (1/6)x_3 - (5/6)x_4 = 5/2.$

Таким чином, до системи обмежень задачі (13) – (15) додаємо нерівність

$f(1)x_1 + f(1/6)x_3 + f(-5/6)x_4 \geq f(5/2),$ або

$(1/6)x_3 + (1/6)x_4 \geq 1/2,$ тобто $x_3 + x_4 \geq 3.$

Останнє обмеження зводиться до вигляду $-x_3 - x_4 + x_5 = -3$ (17). Знаходимо тепер максимальне значення функції (13) при виконанні умов (14), (15) і (17).

Таблиця2

Б.Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1/6	-5/6	0	5/2
x_2	0	1	0	1	0	3
x_5	0	0	-1	-1	1	-3
f	0	0	1/3	4/3	0	14

Оскільки в стовпці вектора b_i є від'ємне значення, а в рядку f від'ємних значень немає, то у відповідності із алгоритмом двоїстого симплекс-методу перейдемо до нового кроку перетворень. (В даному випадку це можливо зробити, оскільки в рядку вектора x_5 є від'ємні значення. Якщо б вони були відсутні, то задача не мала б розв'язку.) Вектор, що виключається із базису, визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом, яке знаходиться у стовпці b_i. В даному випадку це число (–3). Відповідно із базису виключаємо вектор x_5. Щоб визначити, який вектор слід ввести у базис, знаходимо $\min\limits_j(-\Delta_j / a_{3j}),\quad де\, a_{3j} < 0.$ Маємо $\min((-\dfrac{1}{3})/(-1); (-\dfrac{4}{3})/(-1)) = \dfrac{1}{3}.$ Отже, у базис вводять вектор x_3. Переходимо до нової симплекс-таблиці.

Б.Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1/6	-5/6	0	5/2
x_2	0	1	0	1	0	3
	0	0	1	1	-1	3
f	0	0	1/3	4/3	0	14
Б.Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	-1	1/6	2
x_2	0	1	0	1	0	3
x_5	0	0	1	1	-1	3
f	0	0	0	1	1/3	13

З таблиці 2 видно, що вихідна задача цілочисельного програмування має оптимальний план $X^*=(2;3;3;0)$. При цьому плані значення цільової функції дорівнює $F_{\max}=13$. Дамо геометричну інтерпретацію розв’язку задачі. Областю припустимих розв’язків задачі (13) – (15) є многокутник ОАВС (рис. 2). З рис.2 видно, що максимальне значення цільова функція приймає в точці В (5/2; 3), тобто що X = (5/2; 3; 0; 0) є оптимальним планом. Це безпосередньо видно і з табл.1. Оскільки Х = (5/2; 3; 0; 0) не є оптимальним планом задачі (13) – (16) (число 5/2 -дробове), то вводиться додаткове обмеження $x_3+x_4\geq 3$. Виключаючи із нього x_3 та x_4, підставляючи замість них відповідні значення із рівнянь системи обмежень отримаємо $x_1+x_2\leq 5$. Цій нерівності відповідає півплощина, обмежена прямою $l_5: x_1+x_2=5$, що відтинає від многокутника ОАВС трикутник МВС.

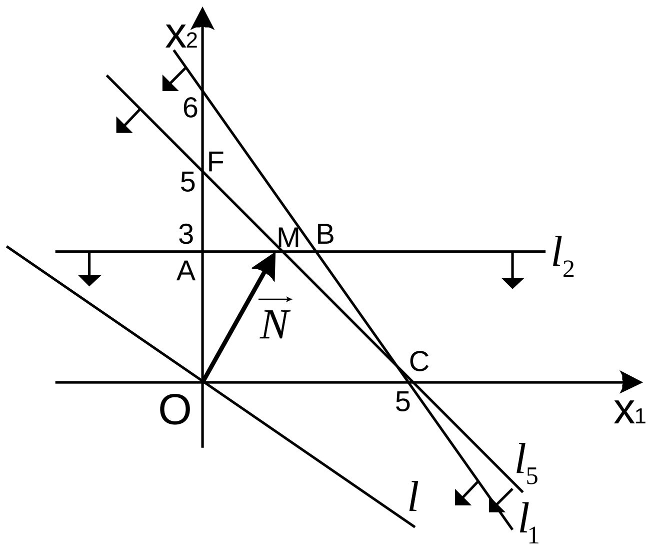

Рисунок 2 – Область допустимих розв’язків

Як видно з рис. 2, областю припустимих розв’язків отриманої задачі є многокутник ОАМС. У точці М (2; 3) цього многокутника цільова функція даної задачі приймає максимальне значення. Оскільки координати точки М – цілі числа і невідомі x_3, x_4 приймають цілі значення при підстановці в рівняння (14) значень $x_1=2$ і $x_2=3$, то X^* = (2; 3; 0; 0) є оптимальним планом задачі (13) – (16). Це й випливає із таблиці 2.

7.4 Завдання для самостійної роботи

Завдання. Вважаючи, що $x_1, x_2 \geq 0$ *і* x_1, x_2 – цілі, розв’язати задачу цілочисельного лінійного програмування:

а) геометричним методом;

б) методом Гоморі.

Варіанти :

№ 1 - 2
$$F = -72x_1 + 11x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \ge 24, \\ x_1 + 4x_2 \le 8. \end{cases}$$

№ 3 - 4
$$F = 6x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 7, \\ 4x_1 + x_2 \le 14. \end{cases}$$

№ 5 - 6
$$F = 15x_1 - 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 9, \\ 9x_1 - 4x_2 \le 24. \end{cases}$$

№ 7 - 8
$$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 28, \\ 2x_1 + 7x_2 \le 28. \end{cases}$$

№ 9 - 10
$$F = 13x_1 + 60x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 + 8x_2 \le 10. \end{cases}$$

№ 11 - 12
$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 - x_2 \ge 4. \end{cases}$$

№ 13 - 14
$$F = -6x_1 + 11x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 2. \end{cases}$$

№ 15 - 16
$$F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 12. \end{cases}$$

№ 17 - 18
$$F = -2x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6. \end{cases}$$

№ 19 - 20
$$F = -5x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -7, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 17, \\ 7x_1 - 2x_2 \le 28. \end{cases}$$

№ 21 - 22
$$F = 5x_1 + 7x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 \le 8. \end{cases}$$

№ 23 - 24
$$F = -2x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \ge 35, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 35. \end{cases}$$

№ 25 - 26
$$F = 6x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 8x_1 + 3x_2 \le 24. \end{cases}$$

№ 27 - 28
$$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 3. \end{cases}$$

№ 29 - 30
$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 8. \end{cases}$$

Відповіді :

№ 1-2 $X=\{3;1\}$, $F_{\max}=-205.$ **№ 3-4** $X=\{2;6\}$, $F_{\max}=18.$
№ 5-6 $X=\{4;3\}$, $F_{\max}=45.$ **№ 7-8** $X=\{6;2\}$, $F_{\max}=24.$
№ 9-10 $X=\{2;1\}$, $F_{\max}=86.$ **№ 11-12** $X=\{2;2\}$, $F_{\max}=0.$
№ 13-14 $X=\{2;2\}$, $F_{\max}=10.$ **№ 15 -16** $X=\{3;3\}$, $F_{\max}=21.$
№ 17-18 $X=\{2;3\}$, $F_{\max}=8.$ **№ 19-20** $X=\{0;5\}$, $F_{\max}=20.$
№ 21-22 $X=\{2;2\}$, $F_{\max}=24.$ **№ 23-24** $X=\{4;2\}$, $F_{\max}=-4.$
№ 25-26 $X=\{2;2\}$, $F_{\max}=20.$ **№ 27-28** $X=\{2;1\}$, $F_{\max}=-5.$

Запитання до самоперевірки

1. Яка задача називається задачею цілочисельного програмування?
2. Сформулювати задачу цілочисельного програмування?
3. В чому полягає геометричний метод розв’язування задач цілочисельного програмування?
4. Який вигляд має нерівність Гоморі?
5. Що називається дробовою частиною деякого числа? Чому дорівнює дробова частина чисел: 1/2 і (-1/2) ?
6. Які задачі лінійного програмування називаються частково цілочисельними?
7. Який вигляд додаткого обмеження для частково цілочисельних задач?
8. Які етапи знаходження оптимального розв’язку задач цілочисельного програмування включає в себе метод Гоморі?

8 Задачі дробово-лінійного програмування

8.1 Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування

Загальна задача дробово-лінійного програмування полягає у визначенні максимального значення функції

$$F=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}=\frac{F_1}{F_2} \qquad (1)$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=\overline{1,m}), \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{3}$$

де c_j, d_j, b_i, a_{ij} – деякі постійні числа, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$ і $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$ в області невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь (2). При цьому будемо вважати, що $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$ (така умова не порушить сутності задачі, оскільки в тому випадку, якщо ця величина від'ємна, знак мінус можна віднести до чисельника).

Як і у випадку основної задачі лінійного програмування, своє максимальне значення цільова функція задачі (1)-(3) приймає в одній із вершин многокутника розв'язків, що визначається системою обмежень (2) і (3) (при умові, що задача має оптимальний план). Якщо максимальне значення цільова функція задачі (1) приймає більш ніж в одній вершині многокутника розв'язків, то вона досягає його також в довільній точці, що є випуклою комбінацією даних вершин.

Розглянемо задачу, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \tag{4}$$

при умовах

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{6}$$

Будемо вважати, що $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$.

Щоб знайти розв'язок задачі (4)-(6) спочатку знаходимо многокутник розв'язків, що визначається обмеженнями (5) і (6). Припускаючи, що цей многокутник не пустий, покладемо значення функції рівним деякому числу h, так що пряма

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = h, \tag{7}$$

яка проходить через початок координат, має спільні точки з многокутником розв'язків. Обертаючи побудовану пряму (7) навколо початку координат в напрямку руху годинникової стрілки, або визначають вершину (вершини), в якій (яких) функція (4) приймає максимальне значення, або встановлюють необмеженість функції на множині планів задачі.

Процес знаходження розв'язку задачі (4)-(6) включає такі етапи:

1. У системі обмежень задачі змінюють знаки нерівностей на знаки точних рівностей і будують прямі, що визначаються цими рівностями.

2. Знаходять півплощини, що визначаються кожною із нерівностей обмежень задачі.

3. Знаходять многокутник розв'язків задачі.

4. Будують пряму (7), рівняння якої отримують, якщо покласти значення цільової функції (4) рівним деякому постійному числу.

5. Визначають точку максимуму або встановлюють, що задача розв'язків не має.

6. Знаходять значення цільової функції в точці максимуму.

Приклад. Розв'язати геометричним методом задачу дробово-лінійного програмування

$$F = \frac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min \tag{8}$$

при умовах

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \ge 27, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases} \tag{9}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{10}$$

Розв'язування

Щоб знайти розв'язок задачі перш за все побудуємо многокутник розв'язків. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $3x_1 + 9x_2 = 27$, яка проходить через точки (0;3) та (9;0);

2) l_2: $2x_1 + x_2 = 6$, яка проходить через точки (0;6) та (3;0);

3) l_3: $5x_1 + 6x_2 = 30$, яка проходить через точки (0;5) та (6;0);

4) $l_4 : x_1 = 0$;

5) l_5: $x_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.3).

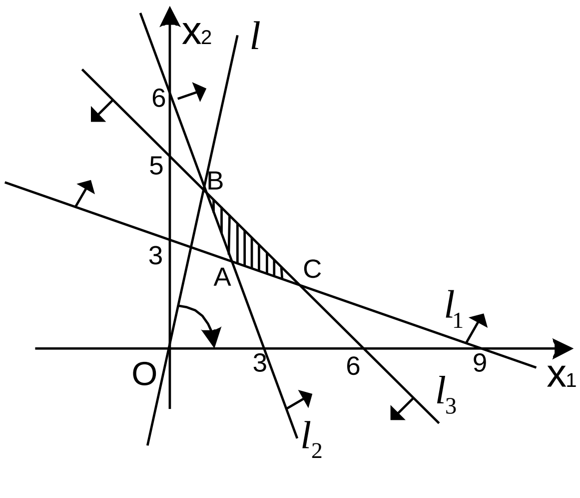

Рисунок 3 – Область допустимих розв'язків

Як видно із рис.3 ним є трикутник ABC. Значить функція (8) приймає мінімальне значення в одній із точок: B, C або A. Щоб зобразити цільову функцію, покладемо її як лінійну функцію аргументу x_1, розв'язавши відносно x_2:

$$F(x_1 + x_2) = 4x_1 + 3x_2,$$

$$Fx_2 - 3x_2 = 4x_1 - Fx_1,$$

$$x_2(F-3) = (4-F)x_1,$$

$$x_2 = \frac{(4-F)}{(F-3)}x_1.$$

Одержане рівняння є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $k = \dfrac{4-F}{F-3}$.

Розглядаючи k, як функцію від F, знайдемо її похідну:

$$k^{'} = \frac{-(F-3)-(4-F)}{(F-3)^2} = \frac{-F+3-4+F}{(F-3)^2} = -\frac{1}{(F-3)^2}.$$

А це означає, що функція $k = \dfrac{4-F}{F-3}$ є монотонно спадною, тобто із збільшенням F величина k зменшується, що відповідає обертанню прямої навколо точки O за годинниковою стрілкою. Звідси випливає, що найменшого значення функція F набуває у вершині B, координати якої є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на (-6) і додамо до другого, в результаті чого отримаємо:

$-7x_1 = -6$ або $x_1^* = \dfrac{6}{7}$. Тоді $x_2^* = 6 - 2\cdot\dfrac{6}{7} = 6 - \dfrac{12}{7} = \dfrac{30}{7}$. Тобто точка B має координати $(\dfrac{6}{7};\dfrac{30}{7})$.

Отже, найменше значення лінійної функції:

$$F_{\min} = F(B) = \frac{4\cdot\frac{6}{7} + 3\cdot\frac{30}{7}}{\frac{6}{7}+\frac{30}{7}} = \frac{57}{18} \approx 3{,}16.$$

Практично знайти точку мінімуму можна простіше. Оскільки область допустимих розв'язків є випуклий многокутник, то як відомо екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин B або C. Знайдемо координати цих точок: $B(\dfrac{6}{7};\dfrac{30}{7})$, $C(4;\dfrac{5}{3})$. Значення функції в цих точках відповідно дорівнюють: $F(B)=\frac{57}{18}$, $F(C)=\frac{63}{17}$. Оскільки $F(B)<F(C)$, то можна стверджувати, що в точці В цільова функція приймає мінімальне значення. Одночасно з цим відмітимо, що в точці С функція приймає максимальне значення.

При розв'язування задач дробово-лінійного програмування графічним методом можуть бути різні випадки:

1) Многогранник розв'язків обмежений, максимум і мінімум досягаються в його кутових точках.

2) Многогранник розв'язків не обмежений, але існують кутові точки, в яких цільова функція задачі приймає відповідно максимальне і мінімальне значення.

3) Многогранник розв'язків не обмежений, і один із екстремумів досягається. Наприклад, мінімум досягається в одній із вершин многогранника розв'язків і функція має так званий асимптотичний максимум.

4) Многогранник розв'язків не обмежений, а максимум і мінімум є асимптотичними.

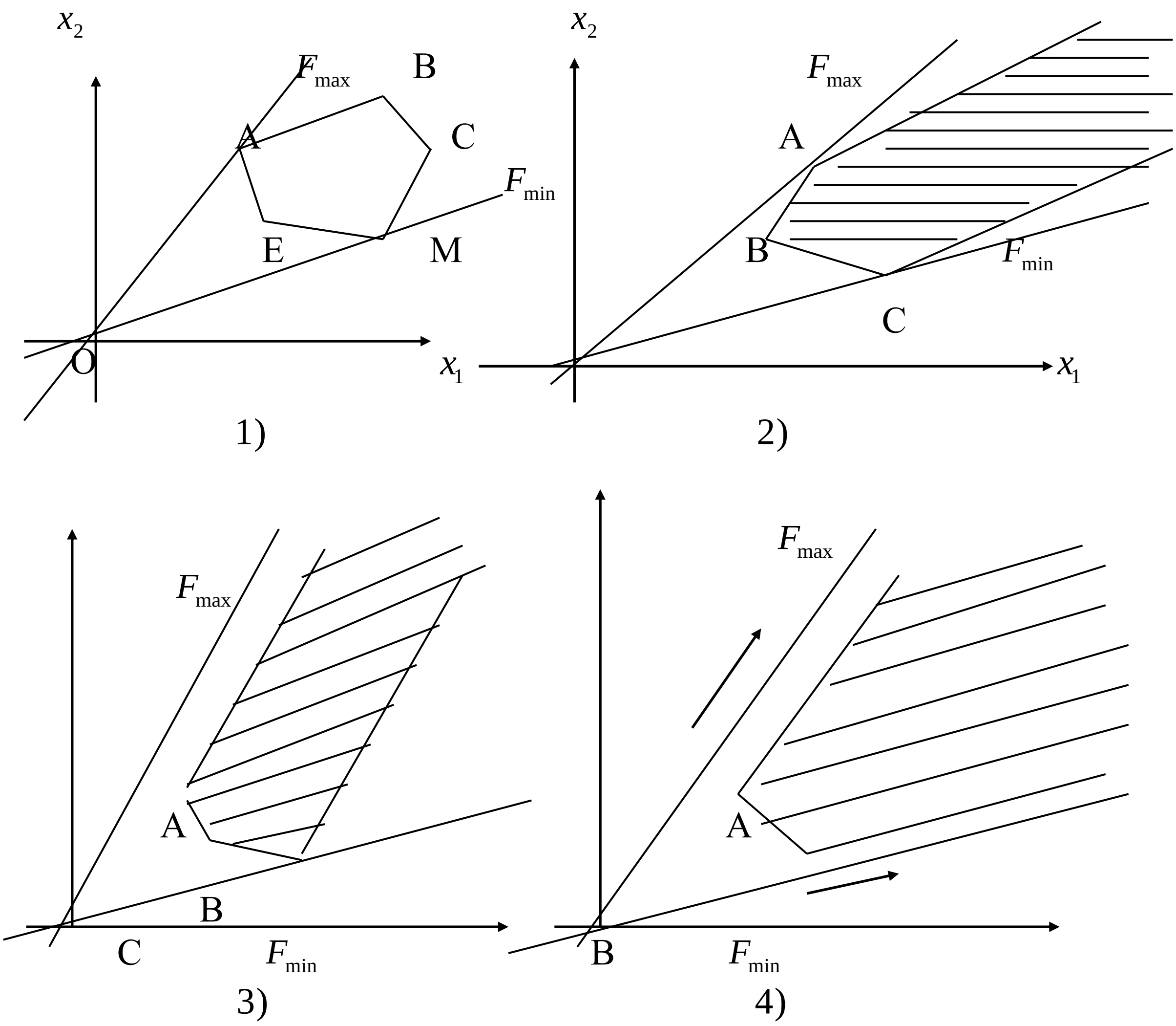

Рисунок 4 – Області допустимих розв'язків

8.2 Зведення задач дробово-лінійного програмування до задач лінійного програмування

Шляхом певної заміни цільову функцію в задачах дробово-лінійного програмування можна звести до лінійного вигляду, в результаті чого ми прийдемо до звичайних задач лінійного програмування.

Нехай задана задача дробово-лінійного програмування

$$F = \frac{b_1x_1 + b_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} \to \max \text{ (чи } \min) \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0. \tag{3}$$

Нехай

$$d_1x_1 + d_2x_2 = \frac{1}{y_2}, x_1 = \frac{y_1}{y_2}.$$

Тоді $d_2x_2 = \frac{1}{y_2} - d_1x_1 = \frac{1}{y_2} - \frac{d_1y_1}{y_2}; \quad x_2 = \frac{1 - d_1y_1}{d_2y_2}$.

Враховуючи наведену заміну цільова функція набере вигляду:

$F = \dfrac{b_1\dfrac{y_1}{y_2} + b_2\dfrac{1-d_1y_1}{d_2y_2}}{\dfrac{1}{y_2}} = b_1y_1 + \dfrac{b_2}{d_2}(1 - d_1y_1) -$ цільова функція стає лінійною функцією.

Приклад 1. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування шляхом переходу до задачі лінійного програмування:

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 13, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \le 13, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

Розв'язування

Нехай $x_1 + x_2 = \frac{1}{y_2}; \quad x_1 = \frac{y_1}{y_2}; \quad x_2 = \frac{1}{y_2} - x_1 = \frac{1}{y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{1 - y_1}{y_2}$.

Тоді $F = \dfrac{2 \cdot \dfrac{y_1}{y_2} + 3 \cdot \dfrac{1 - y_1}{y_2}}{\dfrac{1}{y_2}} = 2y_1 + 3 - 3y_1 = -y_1 + 3 \to \min$

Перетворимо систему обмежень:

$$\begin{cases} \dfrac{y_1}{y_2} + 4 \cdot \dfrac{1 - y_1}{y_2} \le 13, \\ \dfrac{y_1}{y_2} + \dfrac{1 - y_1}{y_2} \ge 4, \\ 4 \cdot \dfrac{y_1}{y_2} + \dfrac{1 - y_1}{y_2} \le 13, \\ y_j \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 4 - 4y_1 \le 13y_2, \\ y_1 + 1 - y_1 \ge 4y_2, \\ 4y_1 + 1 - y_1 \le 13y_2, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13y_2 + 3y_1 \ge 4, \\ 4y_2 \le 1, \\ 3y_1 - 13y_2 \le -1, \\ y_j \ge 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 13y_2 + 3y_1 \ge 4, \\ 4y_2 \le 1, \\ -3y_1 + 13y_2 \ge 1, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

Зведемо задачу до основного вигляду:

$F = -y_1 + 3 \to \min$

$$\begin{cases} 13y_2 + 3y_1 - y_3 = 4, \\ 4y_2 + y_4 = 1, \\ -3y_1 + 13y_2 - y_5 = 1, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

Введемо штучні змінні, в результаті чого отримаємо:

$$\begin{cases} 13y_2 + 3y_1 - y_3 + y_6 = 4, \\ 4y_2 + y_4 = 1, \\ -3y_1 + 13y_2 - y_5 + y_7 = 1, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

$F = -y_1 + 3 + M(y_6 + y_7) \to \min$

Складаємо таблицю симплексних перетворень.

БН	y_1	y_2	l_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b_i
y_4 y_6 y_7	3 0 -3	13 4 13	-1 0 0	0 1 0	0 0 -1	1 0 0	0 0 1	4 1 1
оцінки	-1	0	0	0	0	M	M	-3
оцінки	-1-3M	-13M	M	0	0	0	M	-3-4M
оцінки	-1	-26M	M	0	M	0	0	-3-5M
$Y^{(1)}=(0;0;0;1;0;4;1)$								
	3 0 -3/13	13 4 1	-1 0 0	0 1 0	0 0 -1/13	1 0 0	0 0 1/13	4 1 1/13
оцінки	-1	-26M	M	0	M	0	0	-3-5M
y_4 y_2 y_6	6 12/13 -3/13	0 0 1	-1 0 0	0 1 0	1 4/13 -1/13	1 0 0		3 9/13 1/13
оцінки	-1-6M	0	M	0	-M	0		-3-3M
$Y^{(2)}=(0;1/13;0;9/13;0;3;0)$								
	1 12/13 -3/13	0 0 1	-1/6 0 0	0 1 0	1/6 4/13 -1/13	1/6 0 0		1/2 9/13 1/13
оцінки	-1-6M	0	M	0	-M	0		-3-3M
y_1 y_2 y_4	1 0 0	0 0 1	-1/6 2/13 -1/26	0 1 0	1/6 2/13 -11/26			1/2 3/13 5/26
оцінки	0	0	-1/6	0	1/6			-5/2
$Y^{(3)}=(1/2;5/26;0;3/13;0;0;0)$								
	1 0 0	0 0 1	-1/6 1 -1/26	0 13/2 0	1/6 1 -11/26			1/2 3/2 5/26
оцінки	0	0	-1/6	0	1/6			-5/2
y_1 y_2 y_3	1 0 0	0 0 1	0 1 0	13/12 13/2 1/4	1/3 1 -5/13			3/4 3/2 1/4
оцінки	0	0	0	13/12	1/3			-9/4
$Y^{(4)}=(3/4;1/4;3/2;0;0;0;0)$								

$Y_{опт}=(3/4;1/4;3/2)$. Тоді $x_1=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{3}{4}:\dfrac{1}{4}=3;\quad x_2=\dfrac{1}{y_2}-x_1=\dfrac{1}{\frac{1}{4}}-3=1.$

Отже, $X_{опт}=(3;1)$ і $F_{\min}=\dfrac{9}{4}.$

8.3 Завдання для самостійної роботи

Завдання. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування вважаючи, що $x_j \ge 0$:

а) геометричним методом;

б) шляхом переходу до задачі лінійного програмування.

Варіанти:

№1-2

$$F = \frac{-x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 7x_2 \le 91, \\ 5x_1 - 3x_2 \ge 8. \end{cases}$$

№3-4

$$F = \frac{-4x_1 + 2x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 13x_1 + 8x_2 \le 92, \\ 6x_1 + 12x_2 \ge 74. \end{cases}$$

№5-6

$$F = \frac{x_1 + 2x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 7x_2 \le 91, \\ 5x_1 - 3x_2 \ge 11. \end{cases}$$

№7-8

$$F = \frac{-3x_1 + 4x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \le 88, \\ 7x_1 + 10x_2 \ge 75. \end{cases}$$

№9-10

$$F = \frac{-2x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \le 92, \\ 6x_1 - 2x_2 \ge 23. \end{cases}$$

№11-12

$$F = \frac{-2x_1 + 3x_2}{x_1 - 5x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \le 90, \\ 7x_1 + 8x_2 \ge 77. \end{cases}$$

№13-14

$$F = \frac{-2x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \le 90, \\ 5x_1 - 2x_2 \ge 10. \end{cases}$$

№15-16

$$F = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \le 90, \\ 7x_1 + 11x_2 \ge 77. \end{cases}$$

№17-18

$$F = \frac{2x_1 - 7x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 13x_1 + 8x_2 \le 94, \\ 6x_1 + 12x_2 \ge 72. \end{cases}$$

№19-20

$$F = \frac{x_1 + 4x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 \le 96, \\ 7x_1 - 3x_2 \ge 9. \end{cases}$$

№21-22

$$F = \frac{x_1 - 5x_2}{x_1 - 4x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 15x_1 + 7x_2 \le 91, \\ 3x_1 + 11x_2 \ge 69. \end{cases}$$

№23-24

$$F = \frac{2x_1 + 5x_2}{x_1 - 2x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 \le 95, \\ 8x_1 - 3x_2 \ge 10. \end{cases}$$

№25-26
$$F=\frac{-2x_1+3x_2}{x_1-2x_2}\to\max$$
$$\begin{cases}11x_1+7x_2\le 91,\\3x_1+11x_2\ge 69.\end{cases}$$

№27-28
$$F=\frac{-x_1+3x_2}{x_1-2x_2}\to\max$$
$$\begin{cases}12x_1+7x_2\le 94,\\8x_1-5x_2\ge 11.\end{cases}$$

№29-30
$$F=\frac{-3x_1+4x_2}{x_1+x_2}\to\max$$
$$\begin{cases}12x_1+5x_2\le 99,\\8x_1-5x_2\ge 8.\end{cases}$$

Відповіді:

№1-2 $X_{опт}=x_1\approx 4,838;\quad x_2\approx 5,397,\quad F_{\max}\approx 0,582.$

№3-4 $X_{опт}=x_1\approx 4,741;\quad x_2\approx 3,796,\quad F_{\max}\approx 1,71.$

№5-6 $X_{опт}=x_1\approx 5,147;\quad x_2\approx 4,912,\quad F_{\max}\approx -1,561.$

№7-8 $X_{опт}=x_1\approx 4,362;\quad x_2\approx 4,702,\quad F_{\max}\approx -0,524.$

№9-10 $X_{опт}=x_1\approx 5,145;\quad x_2\approx 3,934,\quad F_{\max}\approx 0,116.$

№11-12 $X_{опт}=x_1\approx 1,080;\quad x_2\approx 8,680,\quad F_{\max}\approx -0,564.$

№13-14 $X_{опт}=x_1\approx 4,154;\quad x_2\approx 5,385,\quad F_{\max}\approx 0,386.$

№15-16 $X_{опт}=x_1\approx 6,319;\quad x_2\approx 2,979,\quad F_{\max}\approx 3,691.$

№17-18 $X_{опт}=x_1\approx 5,111;\quad x_2\approx 3,444,\quad F_{\max}\approx 2,660.$

№19-20 $X_{опт}=x_1\approx 4,129;\quad x_2\approx 6,635,\quad F_{\max}\approx -1,944.$

№21-22 $X_{опт}=x_1\approx 3,597;\quad x_2\approx 5,292,\quad F_{\max}\approx 1,301.$

№23-24 $X_{опт}=x_1\approx 3,859;\quad x_2\approx 6,957,\quad F_{\max}\approx -4,227.$

№25-26 $X_{опт}=x_1\approx 5,180;\quad x_2\approx 4,860,\quad F_{\max}\approx -0,930.$

№27-28 $X_{опт}=x_1\approx 4,716;\quad x_2\approx 5,245,\quad F_{\max}\approx -1,895.$

№29-30 $X_{опт}=x_1\approx 5,350;\quad x_2\approx 6,960,\quad F_{\max}\approx 0,958.$

Запитання до самоперевірки

1. Яка задача називається задачею дробово-лінійного програмування?
2. Які етапи знаходження розв’язку задачі дробово-лінійного програмування геометричним методом?
3. Які випадки можна отримати при розв’язуванні задач дробово-лінійного програмування графічним методом?
4. Формули переходу від задач дробово-лінійного програмування до задач лінійного програмування?

9 Завдання для типових розрахунків та приклади їх розв'язування

Завдання №1
Вважаючи, що $x_i \geq 0$, розв'язати задачу лінійного програмування:
а) за допомогою перетворень симплексних таблиць;
б) за допомогою програми «Пошук рішень» в таблицях Excel.
Варіанти:

№1.
$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10. \end{cases}$$

№2.
$$F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36. \end{cases}$$

№3.
$$F = 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 42, \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_4 + x_6 = 125. \end{cases}$$

№4.
$$F = 8x_1 + 7x_4 + x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25. \end{cases}$$

№5.
$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 - 2x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32. \end{cases}$$

№6.

$$F = 3x_1 + 2x_2 - 5x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_5 + x_6 = 32, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24. \end{cases}$$

№7.

$$F = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 36, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 16, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 24. \end{cases}$$

№8.

$$F = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118. \end{cases}$$

№9.

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320. \end{cases}$$

№10.

$$F = -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + 8x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 60, \\ 7x_1 - 17x_2 + 26x_3 + 31x_4 - 35x_5 + 6x_6 = 420. \end{cases}$$

№11.

$$F = 5x_1 - x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 5x_5 + x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 36, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 30. \end{cases}$$

№12.

$$F = -5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 8x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 60, \\ 7x_1 - 16x_2 + 25x_3 + 31x_4 - 10x_5 + 6x_6 = 420. \end{cases}$$

№13.

$$F = -9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 6x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 80, \\ 6x_1 - 16x_2 + 27x_3 + 33x_4 - 10x_5 + 6x_6 = 420. \end{cases}$$

№14.
$$F = -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 8x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 8x_5 + x_6 = 62, \\ 7x_1 - 17x_2 + 26x_3 + 31x_4 - 35x_5 + 6x_6 = 440. \end{cases}$$

№15.
$$F = 3x_1 + 2x_3 + x_5 - 4x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 30, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 54. \end{cases}$$

№16.
$$F = 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 26, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 8. \end{cases}$$

№17.
$$F = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_6 = 16, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_6 = 25, \\ x_1 + 5x_3 + x_5 - 4x_6 = 32. \end{cases}$$

№18.
$$F = 4x_1 + 3x_2 - 5x_4 + x_5 + 2x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 24, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 45, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 36. \end{cases}$$

№19.
$$F = x_1 + 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 24, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25. \end{cases}$$

№20.
$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32. \end{cases}$$

№21.
$$F = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 52, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 24, \\ -2x_1 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 36. \end{cases}$$

№22.
$$F = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 42, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 24, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 36. \end{cases}$$

№23.
$$F = 5x_1 + x_3 + 3x_4 - 7x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 132, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 + x_5 = 48, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 100. \end{cases}$$

№24.
$$F = x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 9x_4 - 5x_5 + x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_4 + x_5 - x_6 = 186, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 66, \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 + x_6 = 81. \end{cases}$$

№25.
$$F = 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 28, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 24, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 12. \end{cases}$$

№26.
$$F = 5x_1 + 2x_2 + x_5 - 8x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_6 = 20, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_6 = 45, \\ x_1 + 5x_3 + x_5 - 4x_6 = 38. \end{cases}$$

№27.
$$F = 8x_1 + 3x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 64, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 45, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 36. \end{cases}$$

№28. $$F = 5x_1 + 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 42, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25. \end{cases}$$

№29. $$F = 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_5 + 5x_6 = 48, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 24, \\ -8x_1 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 16. \end{cases}$$

№30. $$F = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 8x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 36, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = 64, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - 8x_5 + 3x_6 = 42. \end{cases}$$

Приклад1.

Вважаючи, що $x_i \geq 0$, розв'язати задачу лінійного програмування:
а) за допомогою перетворень симплексних таблиць;
б) за допомогою програми «Пошук рішень» в таблицях Excel.

$$F = 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 - 5x_5 + 3x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_4 + x_5 - x_6 = 88, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 136, \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 + x_6 = 76. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Розв'яжемо задачу двома способами.

1. Звичайний симплексний метод.

Спочатку за допомогою перетворень таблиць Гаусса знайдемо опорний розв'язок задачі лінійного програмування:

Базис	c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	88	1	-1	0	5	1	-1
	136	-2	3	5	2	0	2
	76	$\boxed{2}$	0	2	-4	3	1
	50	0	-1	-1	$\boxed{7}$	-1/2	-3/2
	212	0	3	7	-2	3	3
x_1	38	1	0	1	-2	3/2	1/2
x_4	50/7	0	-1/7	-1/7	1	-1/14	-3/14
	1584/7	0	19/7	47/7	0	20/7	$\boxed{18/7}$
x_1	366/7	1	-2/7	5/7	0	19/14	1/14
x_4	26	0	1/12	5/12	1	1/6	0
x_6	88	0	19/18	47/18	0	10/9	1
x_1	46	1	-13/36	19/36	0	23/18	0

Одержали опорний розв'язок $X = \{ 46;\ 0;\ 0;\ 26;\ 0;\ 88 \}$.
Знаючи опорний розв'язок, складаємо симплексну таблицю:

b_i	Базис	0	3	-1	7	9	-5	3
		c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
9	x_4	26	0	1/12	5/12	1	1/6	0
3	x_6	88	0	19/18	47/18	0	10/9	1
3	x_1	46	1	-13/36	19/36	0	23/18	0
	F	636	0	23/6	37/6	0	41/3	0

Оскільки в індексному рядку немає від'ємних чисел, то знайдений опорний розв'язок є оптимальним, тобто:

$$F_{\max} = 636 \text{ при } X = \{ 46;\ 0;\ 0;\ 26;\ 0;\ 88 \}.$$

2. Метод штучного базису

Для сформульованої задачі безпосередньо записати опорний план не можна. Тому розглянемо розширену задачу:

$$F_1 = 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 - 5x_5 + 3x_6 \; - M(x_7 + x_8 + x_9) \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 88, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_6 + x_8 = 136, \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 + x_6 + x_9 = 76, \\ x_i \ge 0, \end{cases}$$

де x_7, x_8, x_9 *– штучні змінні.*

Розширена задача лінійного програмування має опорний розв'язок:

Y = { 0; 0; 0; 0; 0; 0; 88; 136; 75 }.

Складаємо для нього симплексну таблицю (*таблиця 1*).
Оскільки у другому індексному рядку є від'ємні числа, то опорний розв'язок розширеної задачі не є оптимальним. Тому потрібно шляхом симплексних перетворень цей опорний розв'язок покращити.

Перша ітерація

Знаходимо у другому індексному рядку найбільше за абсолютною величиною від'ємне число. Це число рівне - 10. Стовпець, що містить число - 10, зветься розв'язним. Після цього знаходимо відношення вільних членів c_i до додатних елементів розв'язного стовпця і серед них вибираємо найменше значення. У розв'язному стовпці йому відповідає елемент, що зветься розв'язним елементом. Для нашого випадку розв'язним буде елемент $a_{32} = 5$. Відносно цього елемента робимо перше симплексне перетворення таблиці. В результаті замість штучної змінної x_8 базисною стає змінна x_3. Після цього стовпець із штучною змінною x_8 з таблиці вилучаємо. Оскільки у другому індексному рядку є від'ємні числа, то продовжуємо симплексні перетворення таблиці.

Друга ітерація

Найменшому за абсолютною величиною від'ємному числу (-4) другого індексного рядка відповідає розв'язний елемент $a_{53} = 3$. Відносно цього елемента робимо друге симплексне перетворення таблиці. В результаті замість штучної змінної x_9 у базис ввійде змінна x_5. Після цього стовпець з штучною змінною x_9 з таблиці вилучаємо. Оскільки у другому індексному рядку є від'ємні числа, то процес продовжуємо.

Третя ітерація

Найменшому за абсолютною величиною від'ємному числу (- 6,6) другого індексного рядка відповідає розв'язний елемент $a_{41} = 6{,}6$. Відносно цього елемента робимо третє симплексне перетворення таблиці. В результаті замість штучної змінної x_7 у базис ввійде змінна x_4. Після цього стовпець з штучною змінною x_7 з таблиці вилучаємо. Оскільки тепер штучні змінні у базис не входять, то другий індексний рядок з таблиці вилучаємо. Розглядаємо перший індексний рядок. У ньому є від'ємні числа. Тому процес симплексних перетворень продовжуємо.

Четверта ітерація

Найменшому за абсолютною величиною від'ємному числу (-10,5) першого індексного рядка відповідає розв'язний елемент $a_{13} = 0,949$. Відносно цього елемента робимо четверте симплексне перетворення таблиці. В результаті замість змінної x_5 у базис ввійде x_1. Розглядаємо перший індексний рядок. У ньому є від'ємне число. Тому процес симплексних перетворень продовжуємо.

П'ята ітерація

Найменшому за абсолютною величиною від'ємному числу (-2,36) першого індексного рядка відповідає розв'язний елемент $a_{62} = 0,383$. Відносно цього елемента робимо п'яте симплексне перетворення таблиці. У результаті замість змінної x_3 у базис ввійде x_6. Розглядаємо перший індексний рядок. У ньому немає від'ємних чисел. Тому одержаний розв'язок є оптимальним.

Оптимальний розв'язок розширеної задачі:

$$F_{1max} = 636, \quad Y = \{ 46;\ 0;\ 0;\ 26;\ 0;\ 88;\ 0;\ 0;\ 0 \}.$$

Оптимальний розв'язок початкової задачі:

$$F_{max} = 636, \quad X = \{ 46;\ 0;\ 0;\ 26;\ 88 \}.$$

б) Розв'яжемо задачу лінійного програмування за допомогою програми «Пошук рішень» в електронних таблицях Excel.

Будемо вважати, що невідомі змінні розміщені в комірках ($B$3:$G$3). Коефіцієнти цільової функції помістимо в комірки (B4:G4), а коефіцієнти системи обмежень помістимо в комірки (B5:G5). Вільні члени системи помістимо в комітки (I5:I7). За цільову приймемо комірку H4. Значення цільової функції візьмемо: = СУМА ДОБУТКІВ ($B$3:$G$3; B4:G4). Після цього виділимо комірку H4 і перетягнемо її за правий нижній кут (при цьому курсор перетвориться у чорний знак плюс) на лунки (H5:H7).

У меню «Сервіс» виберемо «Пошук рішень», а у ньому пункт «Параметри». Тут вибираємо «Невід'ємні значення». Потім повертаємося у «Пошук рішень». Тут за цільову беремо комірку H4, ставимо вимогу максимального значення цільової комірки і беремо обмеження (H5:H7) ≤ (I5:I7). Після цього натискаємо «Виконати».

Таблиця 1

		0	3	-1	7	9	-5	3	-M	-M	-M	Ci /	
b	Базис	Ci	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	/A i j	
-M	X_7	88	1	-1	0	5	1	-1	1	0	0		
-M	X_8	136	-2	3	$\boxed{5}$	2	0	2	0	1	0	27,2	min
-M	X_9	76	2	0	2	-4	3	1	0	0	1	38	
	F	0	-3	1	-7	-9	5	-3	0	0	0		
M		-300	-1	-2	-7	-3	-4	-2	0	0	0		
-M	X_7	88	1	-1	0	5	1	-1	1		0	88	
7	X_3	27,2	-0,4	0,6	1	0,4	0	0,4	0		0		
-M	X_9	21,6	2,8	-1,2	0	-4,8	$\boxed{3}$	0,2	0		1	7,2	min
	F	190,4	-5,8	5,2	0	-6,2	5	-0,2	0		0		
M		-109,6	-3,8	2,2	0	-0,2	-4	0,8	0		0		
-M	X_7	80,8	0,067	-0,6	0	$\boxed{6,6}$	0	-1,07	1			12,2	min
7	X_3	27,2	-0,4	0,6	1	0,4	0	0,4	0			68	
-5	X_5	7,2	0,933	-0,4	0	-1,6	1	0,067	0				
	F	154,4	-10,5	7,2	0	1,8	0	-0,53	0				
M		-80,8	-0,07	0,6	0	-6,6	0	1,067	0				
9	X_4	12,24	0,01	-0,09	0	1	0	-0,16				1224	
7	X_3	22,3	-0,4	0,64	1	0	0	0,465					
-5	X_5	26,79	$\boxed{0,949}$	-0,55	0	0	1	-0,19				28,2	min
	F	132,4	-10,5	7,36	0	0	0	-0,24					
9	X_4	11,96	0	-0,09	0	1	-0	-0,16					
7	X_3	33,7	0	0,4	1	0	0,43	$\boxed{0,383}$					
3	X_1	28,21	1	-0,57	0	0	1,05	-0,2					
	F	428,2	0	1,34	0	0	11	-2,36					
9	X_4	26	0	0,08	0,42	1	0,17	0					
3	X_6	88	0	1,06	2,61	0	1,11	1					
3	X_1	46	1	-0,36	0,53	0	1,28	0					
	F	636	0	3,83	6,17	0	13,7	0					

Результат обчислень приведений у таблиці Excel :

Цільова лунка - H4							
46	0	0	26	0	88		
3	-1	7	9	-5	3	636	
1	-1	0	5	1	-1	88	88
-2	3	5	2	0	2	136	136
2	0	2	-4	3	1	76	76

Одержали:

$$F_{max} = 636, \qquad X = \{ 46;\ 0;\ 0;\ 26;\ 0;\ 88 \}.$$

Завдання 2.

Для заданої задачі лінійного програмування скласти двоїсту задачу і обидві задачі розв'язати за допомогою програми «Пошук рішень» у електронних таблицях Excel, вважаючи, що $x_i \ge 0$.

Варіанти:

№ 1

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 2

$$F = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 30, \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le -50, \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 \le -18, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 3

$$F = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 280, \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 80, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 250, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 4

$$F = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \le 25, \\ -6x_1 - 5x_2 - 2x_3 \le -118, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 22, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 5

$$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 6

$$F = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \le 38, \\ -6x_1 - 5x_2 - 2x_3 \le -82, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 7

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 393, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 203{,}2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 100, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 8

$$F = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 3x_3 \le 69, \\ 4x_1 - 5x_3 \le 5, \\ -3x_1 + 2x - x_3 \le -13, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 9

$$F = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \to \min$$
$$\begin{cases} 2{,}5x_1 - 2{,}375x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 0{,}75x_5 + x_6 \ge 12, \\ 2{,}2x_1 - 0{,}125x_2 + 2x_3 + 2{,}25x_5 + 3x_6 \ge 18, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_4 - 2x_5 + 8x_6 \ge 32, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 10
$$F = x_1 + 6x_2 + 5x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 27, \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 \le 162, \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \le 9, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 11
$$F = 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 310{,}5, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 205, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 81, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 12
$$F = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20, \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \le -19, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 13
$$F = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 - 2x_6 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \le 36, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 24, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_5 - x_6 \ge 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \ge 12, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 14
$$F = 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 220, \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 90, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 260, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 15
$$F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 16
$$F = x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 228, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 246, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 17
$$F = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.$$

№ 18

$$F = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0.$$

№ 19

$$F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + 6x_6 = 32, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0.$$

№ 20

$$F = 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 20{,}7, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31{,}9, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 120{,}8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0.$$

№ 21

$$F = 8x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0.$$

№ 22

$$F = 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 8x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 41, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 8x_5 = 139, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0.$$

№23

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0.$$

№ 24

$$F = 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 8x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 29, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 63, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

№ 25

$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + 6x_6 = 32, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

№ 26

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

№ 27

$$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

№ 28

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

№ 29

$$F = x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 8, \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 \le -6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

№ 30

$$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_5 + 5x_6 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

Приклад2.

Для заданої задачі лінійного програмування

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 8, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \le -8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0$$

скласти двоїсту задачу і обидві задачі розв'язати за допомогою програми «Пошук рішень» у електронних таблицях Excel.

Розв'язування

Для заданої задачі ЛП скласти двоїсту задачу:

$$f = 8y_1 - 8y_2 - 4y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 4y_1 - y_2 - y_3 \geq 2, \\ -2y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq -1, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо початкову задачу за допомогою програми «Пошук рішень». Одержимо:

Значення невідомих:	2,4	3,2	1,2	Цільова функція	
	1	2	-1	7,6	
	-1	4	2	8	
	-1	-1	2	-8	8
	2	-1	2	4	

Таким чином, $F_{\max} = 7,6$ при $X_{опт.} = (2,4; 3,2; 1,2)$.
Після цього, використавши програму «Пошук рішень», розв'язати двоїсту задачу:

Значення невідомих:	1,1	0,9	1,5	Цільова функція	
	8	-8	4	7,6	
	-1	-1	2	1	
	4	-1	-1	2	
	-2	-2	2	-1	-1

Таким чином, $f_{\min} = 7,6$ при $Y_{опт.} = (1,1; 0,9; 1,5)$. Задача розв'язана.

<u>*Приклад 3*</u>

За допомогою електронних таблиць Excel, використовуючи двоїстий симплекс - метод, розв'язати задачу лінійного програмування:

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \qquad - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad \geq 20, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \quad \leq 24, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо систему обмежень до системи лінійних рівнянь з одиничним базисом:

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \qquad - 2x_4 + x_5 = \ 16, \\ -3x_1 - 2x_2 - \ x_3 \qquad \qquad \le -20, \quad \Rightarrow \\ - \ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \qquad \le \ 24, \\ \quad x_j \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \qquad - 2x_4 + x_5 \qquad \qquad = \ 16, \\ -3x_1 - 2x_2 - \ x_3 \qquad \qquad + x_6 \qquad = -20, \\ - \ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \qquad \qquad + x_7 = \ 24, \\ \quad x_j \ge 0. \end{cases}$$

Останню задачу розв'яжемо за допомогою електронних таблиць Excel. Розмістимо:

- шукані невідомі у комірках B2 : H2 ;
- матрицю системи рівнянь у масиві B4 :H6 ;
- вільні члени системи у комірках J4 : J6 ;
- цільову функцію у комірках B3 : H3 .

За цільову приймаємо комірку I3, яка дорівнює сумі добутків ($B$2:$H$2 ; B3:H3).

Після цього, виділивши комірку I3, помістимо стрілку курсора у її нижній правий кут (з'явиться чорний хрестик) і перетягнемо її на комірки I4:I6. Виділимо цільову комірку I3. Натиснемо курсором клавішу «Сервіс» і у меню, що з'явиться, вибираємо "Пошук рішень". У ньому вибираємо:

- цільову комірку I3 ;
- максимальне значення ;
- зміну комірок B2 : H2 ;
- обмеження I4 : I6 = J4 : J6.

Натискаємо клавішу «Параметри» і встановлюємо для збіжності «Невід'ємні значення» та знімаємо вимогу «Лінійна модель». Натиснувши клавішу ОК, повертаємось у «Пошук рішень». Запускаємо програму обчислень, натиснувши клавішу «Виконати».

Результати обчислень приведено у такій таблиці:

2,286	0	13,143	0	20,571	0	0		
2	3	-1	-1	-5	0	0	-111,429	
-2	-3	0	-2	1	0	0	16	16
-3	-2	-1	0	0	1	0	-20	-20
-1	3	2	4	0	0	1	24	24

Відповідь: $X_{опт} = \{2,286; 0; 13,143; 0; 20,571\}$, $F_{\max} = -111,429.$

Завдання 3.

За допомогою програми «Пошук рішень» розв'язати транспортну задачу для випадків закритої і відкритої моделі.

Варіанти:

1.

1.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 120	B_2, 50	B_3, 190	B_4, 110
A_1, 160	7	8	1	2
A_2, 140	4	5	9	8
A_3, 170	9	2	3	6

1.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 12	B_2, 15	B_3, 20	B_4, 35
A_1, 18	1	2	1	3
A_2, 14	4	3	1	1
A_3, 36	6	4	3	2

2.

2.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 133	B_2, 76	B_3, 194	B_4, 131
A_1, 261	1	8	4	2
A_2, 98	4	5	9	7
A_3, 175	8	2	3	6

2.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 158	B_2, 223	B_3, 315	B_4, 52
A_1, 170	1	2	2	3
A_2, 225	4	3	1	1
A_3, 340	2	4	3	10

3.

3.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 351	B_2, 185	B_3, 297	B_4, 218
A_1, 320	4	9	1	2
A_2, 517	3	4	10	7
A_3, 214	8	2	3	6

3.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 58	B_2, 28	B_3, 38	B_4, 62
A_1, 48	1	2	2	3
A_2, 37	4	3	4	1
A_3, 89	2	4	3	9

4.

4.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 53	B_2, 84	B_3, 192	B_4, 208
A_1, 94	1	4	1	2
A_2, 321	7	2	5	7
A_3, 122	4	5	3	6

4.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 40	B_2, 19	B_3, 31	B_4, 42
A_1, 35	1	2	2	3
A_2, 24	4	4	3	8
A_3, 63	2	3	4	1

5.

5.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 150	B_2, 250	B_3, 120	B_4, 180
A_1, 180	9	2	3	12
A_2, 160	3	4	8	7
A_3, 140	4	5	6	12
A_4, 220	7	1	5	6

5.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 108	B_2, 83	B_3, 136	B_4, 116
A_1, 118	1	2	2	3
A_2, 142	4	4	3	4
A_3, 163	5	3	4	12

6. **6.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 212	B_2, 340	B_3, 152	B_4, 180
A_1, 150	9	2	9	5
A_2, 260	3	4	8	7
A_3, 134	4	5	6	12
A_4, 340	7	1	5	6

6.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 118	B_2, 224	B_3, 236	B_4, 130
A_1, 276	1	2	2	3
A_2, 210	4	4	3	4
A_3, 198	5	3	4	12

7. **7.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 140	B_2, 370	B_3, 86	B_4, 214
A_1, 360	1	2	3	4
A_2, 80	6	4	8	7
A_3, 130	4	5	6	16
A_4, 240	7	3	5	6

7.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 19	B_2, 102	B_3, 84	B_4, 125
A_1, 126	3	8	2	3
A_2, 109	5	4	3	4
A_3, 78	2	3	5	2

8. **8.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 42	B_2, 36	B_3, 50	B_4, 53
A_1, 60	2	4	3	5
A_2, 25	8	5	1	6
A_3, 44	3	1	2	2
A_4, 52	5	2	4	9

8.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 142	B_2, 138	B_3, 164	B_4, 223
A_1, 240	1	2	6	3
A_2, 165	6	4	2	4
A_3, 207	2	3	3	9

9.

9.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 8	B_2, 11	B_3, 15	B_4, 49
A_1, 12	1	3	3	3
A_2, 25	3	4	1	4
A_3, 14	2	1	2	2
A_4, 32	3	2	4	1

9.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 19	B_2, 102	B_3, 84	B_4, 125
A_1, 131	3	8	2	3
A_2, 88	5	4	3	4
A_3, 109	2	3	3	2

10.

10.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 13	B_2, 21	B_3, 19	B_4, 59
A_1, 23	3	6	3	3
A_2, 32	4	4	2	4
A_3, 41	2	3	5	2
A_4, 16	5	1	4	1

10.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 142	B_2, 138	B_3, 164	B_4, 223
A_1, 249	1	2	6	3
A_2, 198	6	4	2	4
A_3, 183	2	3	3	2

11. **11.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 230	B_2, 322	B_3, 19	B_4, 59
A_1, 125	3	6	3	3
A_2, 112	4	4	2	4
A_3, 238	2	3	5	2
A_4, 155	5	1	4	1

11.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 133	B_2, 128	B_3, 154	B_4, 221
A_1, 145	7	2	6	3
A_2, 239	6	4	2	4
A_3, 216	2	3	3	2

12. **12.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 79	B_2, 63	B_3, 28	B_4, 28
A_1, 66	3	2	1	3
A_2, 55	2	4	2	4
A_3, 44	1	3	3	2
A_4, 33	4	1	4	1

12.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 106	B_2, 120	B_3, 65	B_4, 120
A_1, 136	1	2	5	3
A_2, 109	6	4	2	1
A_3, 133	5	3	3	2

13. **13.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 98	B_2, 120	B_3, 41	B_4, 132
A_1, 110	1	2	5	3
A_2, 95	6	4	2	4
A_3, 104	2	3	3	2
A_4, 82	3	1	2	6

13.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 120	B_2, 50	B_3, 190	B_4, 110
A_1, 160	7	8	1	2
A_2, 138	4	5	9	3
A_3, 158	9	2	3	6

14. **14.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 106	B_2, 120	B_3, 65	B_4, 120
A_1, 116	1	2	5	3
A_2, 99	6	4	2	1
A_3, 123	5	3	3	2
A_4, 73	3	7	4	6

14.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 127	B_2, 53	B_3, 190	B_4, 112
A_1, 153	3	8	1	2
A_2, 140	4	5	9	4
A_3, 169	8	2	3	8

15. **15.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 140	B_2, 370	B_3, 86	B_4, 214
A_1, 360	7	2	6	3
A_2, 80	6	4	2	4
A_3, 130	2	3	3	2
A_4, 240	3	7	5	6

15.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 133	B_2, 76	B_3, 194	B_4, 131
A_1, 251	1	8	4	2
A_2, 98	4	5	9	7
A_3, 172	8	2	3	8

16. **16.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 142	B_2, 138	B_3, 164	B_4, 223
A_1, 220	1	2	6	3
A_2, 160	6	4	2	4
A_3, 190	2	3	3	2
A_4, 97	3	5	5	3

16.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 138	B_2, 78	B_3, 196	B_4, 129
A_1, 257	6	9	1	2
A_2, 101	3	4	10	7
A_3, 163	8	2	3	9

17. **17.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 19	B_2, 102	B_3, 84	B_4, 125
A_1, 98	3	8	2	3
A_2, 89	5	4	3	4
A_3, 76	2	3	3	2
A_4, 67	2	2	5	3

17.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 351	B_2, 185	B_3, 297	B_4, 218
A_1, 318	4	9	1	2
A_2, 212	3	4	10	7
A_3, 514	8	2	3	6

18. **18.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 127	B_2, 53	B_3, 190	B_4, 112
A_1, 163	7	8	1	2
A_2, 140	4	5	9	7
A_3, 179	8	2	3	6

18.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 151	B_2, 185	B_3, 197	B_4, 208
A_1, 120	4	9	1	2
A_2, 190	3	4	10	7
A_3, 427	8	2	3	6

19. **19.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 138	B_2, 78	B_3, 196	B_4, 129
A_1, 267	6	9	1	2
A_2, 101	3	4	10	7
A_3, 173	8	2	3	9

19.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 53	B_2, 84	B_3, 192	B_4, 208
A_1, 94	1	4	3	2
A_2, 122	7	2	5	7
A_3, 310	4	5	3	6

20. **20.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 151	B_2, 185	B_3, 197	B_4, 208
A_1, 120	4	9	1	2
A_2, 430	3	4	10	7
A_3, 194	8	2	3	6

20.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 153	B_2, 184	B_3, 318	B_4, 138
A_1, 120	2	3	4	1
A_2, 320	7	5	2	7
A_3, 343	6	3	6	4

21. **21.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 153	B_2, 184	B_3, 318	B_4, 138
A_1, 120	2	3	4	1
A_2, 340	7	5	2	7
A_3, 333	6	3	6	4

21.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 52	B_2, 36	B_3, 73
A_1, 60	2	4	3
A_2, 25	8	5	1
A_3, 44	3	1	2
A_4, 52	5	2	4

22.

22.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 210	B_2, 340	B_3, 150	B_4, 180
A_1, 150	1	2	3	4
A_2, 260	6	4	8	7
A_3, 130	4	5	6	12
A_4, 340	7	3	5	6

22.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 49	B_2, 11	B_3, 15
A_1, 12	1	3	3
A_2, 25	3	4	1
A_3, 14	2	1	2
A_4, 32	3	2	4

23.

23.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 110	B_2, 300	B_3, 86	B_4, 114
A_1, 160	1	2	3	4
A_2, 80	6	4	8	7
A_3, 130	4	5	6	16
A_4, 240	7	3	5	6

23.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 43	B_2, 31	B_3, 25
A_1, 23	3	6	3
A_2, 32	4	4	2
A_3, 41	2	3	5
A_4, 16	5	2	4

24. **24.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 140	B_2, 370	B_3, 96	B_4, 214
A_1, 360	1	9	3	3
A_2, 80	6	4	8	7
A_3, 130	4	5	6	16
A_4, 250	7	3	5	2

24.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 230	B_2, 332	B_3, 49
A_1, 125	3	6	3
A_2, 112	4	4	2
A_3, 238	2	3	5
A_4, 155	5	2	4

25. **25.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 118	B_2, 224	B_3, 236	B_4, 130
A_1, 240	2	1	2	3
A_2, 180	4	4	3	4
A_3, 178	1	3	6	2
A_4, 110	2	2	5	10

25.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 38	B_2, 63	B_3, 79
A_1, 66	3	2	1
A_2, 55	2	4	2
A_3, 44	1	1	3
A_4, 33	4	2	4

26. **26.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 108	B_2, 83	B_3, 136	B_4, 116
A_1, 128	1	2	2	3
A_2, 95	4	4	3	4
A_3, 132	5	3	4	2
A_4, 88	2	2	5	12

26.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 128	B_2, 188	B_3, 49
A_1, 110	1	2	5
A_2, 95	6	4	2
A_3, 104	2	3	3
A_4, 82	3	1	2

27. **27.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 40	B_2, 19	B_3, 31	B_4, 42
A_1, 32	1	2	2	3
A_2, 23	4	4	3	1
A_3, 16	5	3	4	2
A_4, 61	2	2	5	8

27.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 188	B_2, 350	B_3, 135
A_1, 180	9	2	3
A_2, 160	3	4	8
A_3, 140	4	5	6
A_4, 220	7	1	5

28. **28.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 58	B_2, 28	B_3, 38	B_4, 62
A_1, 43	1	2	2	3
A_2, 34	4	3	4	1
A_3, 27	5	4	3	2
A_4, 82	2	2	5	9

28.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 270	B_2, 360	B_3, 230
A_1, 150	1	2	3
A_2, 260	6	4	8
A_3, 130	4	5	6
A_4, 340	7	3	5

29. **29.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 158	B_2, 223	B_3, 315	B_4, 52
A_1, 110	1	2	2	3
A_2, 210	4	3	1	1
A_3, 88	5	4	3	2
A_4, 340	2	2	5	9

29.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 199	B_2, 252	B_3, 394
A_1, 150	9	2	3
A_2, 260	3	4	8
A_3, 134	4	5	3
A_4, 340	7	1	5

30. **30.1**

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 15	B_2, 19	B_3, 52	B_4, 68
A_1, 18	1	2	4	3
A_2, 14	4	3	1	1
A_3, 36	6	4	3	2
A_4, 86	2	2	5	9

30.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 160	B_2, 340	B_3, 86
A_1, 160	1	2	3
A_2, 80	6	4	8
A_3, 130	4	5	6
A_4, 240	7	3	5

Приклад 4.

За допомогою програми «Пошук рішень» розв'язати транспортну задачу для випадку закритої і відкритої моделі:

Закрита модель

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 126	B_2, 245	B_3, 246	B_4, 200
A_1, 121	1	2	1	3
A_2, 215	4	3	1	1
A_3, 145	6	4	3	2
A_4, 336	2	2	5	10

Відкрита модель

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 140	B_2, 206	B_3, 420
A_1, 360	1	2	3
A_2, 80	6	4	8
A_3, 130	4	5	6
A_4, 240	7	3	5

Розв'язування

1. *Випадок закритої моделі.*

Значення запасів A_i помістимо у комірки A2:A5.

Значення потреб B_j помістимо у комірки C7:F7.

Матрицю вартості перевезень розмістимо у комірки G2:J5.

Шукану матрицю оптимального плану перевезень будемо розміщати у комірках C2:F5.

Покладемо:

B2 = $\sum$ (C2:F2), B3 = $\sum$ (C3:F3), B4 = $\sum$ (C4:F4), B5 = $\sum$ (C5:F5), C6 = $\sum$ (C2:C5), D6 = $\sum$ (D2:D5), E6 = $\sum$ (E2:E5), F6 = $\sum$ (F2:F5).

Введемо обмеження:

(A2:A5) = (B2:B5); (C6:F6) = (C7:F7); (C2:F5) – невід'ємні.

За цільову візьмемо комірку C9 як суму добутків (C2:F5; G2:J5).

Після цього, змінюючи комірки (C2:F5), за допомогою програми «Пошук рішень» знаходимо мінімальне значення цільової функції:

121	121	35	0	86	0	1	2	1	3
215	215	0	0	160	55	4	3	1	1
145	145	0	0	0	145	6	4	3	2
336	336	91	245	0	0	2	2	5	10
		126	245	246	200				
		126	245	246	200				
		1298							

Відповідь:

$$f_{\min} = 1298$$

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 86 & 0 \\ 0 & 0 & 160 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 145 \\ 91 & 245 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Випадок відкритої моделі.

Для цього випадку $\sum A_i \neq \sum B_j$. Тому в таблицю вводимо уявний пункт призначення B_4, вважаючи, що вартість перевезень вантажів до цього пункту дорівнює нулю. Застосувавши програму "Пошук рішень", одержимо:

360	360	10	0	350	0	1	2	3	0
80	80	0	36	0	44	6	4	8	0
130	130	130	0	0	0	4	5	6	0
240	240	0	170	70	0	7	3	5	0
		140	206	420	44				
		140	206	420	44				
		2584							

Відповідь:

$$f_{\min} = 2584$$

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 350 \\ 0 & 36 & 0 \\ 130 & 0 & 0 \\ 0 & 170 & 70 \end{pmatrix}$$

Приклад5.

Розв'язати задачу цілочисельного лінійного програмування за допомогою електронних таблиць Excel:

$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_j \geq 0, \\ x_j - цілі. \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо систему обмежень до системи лінійних рівнянь з одиничним базисом:

$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = \ \ 5, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_4 = -8, \\ x_j \geq 0, \\ x_j - цілі. \end{cases}$$

Розв'яжемо останню задачу за допомогою електронних таблиць Excel, використавши програму «Пошук рішень», у якій додано обмеження B2 : H2 – цілі.

Одержимо:

2	1	0	0	0	0	0		
-5	5	0	0	0	0	0	-5	
1	3	1	0	0	0	0	5	5
-3	-2	0	1	0	0	0	-8	-8
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Відповідь: $X_{опт} = \{2; 1\}, \ F_{\max} = -5.$

Приклад 6.

Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування за допомогою електронних таблиць Excel:

$$F = \frac{-3x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 \leq 95, \\ 8x_1 - 5x_2 \geq \ \ 5, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо систему обмежень до системи лінійних рівнянь з одиничним базисом:

$$F = \frac{-3x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = \ \ 95, \\ -8x_1 + 5x_2 \qquad + x_4 = -5, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

Останню задачу розв'яжемо за допомогою електронних таблиць Excel. Розмістимо:

- шукані невідомі у комірках B2 : E2;
- матрицю системи рівнянь у масиві B5 :E6;

- вільні члени системи у комірках G5 : G6;
- чисельник цільової функції у комірках B3 : E3;
- знаменник цільової функції у комірках B4 : E4.

За цільову приймаємо комірку F2 = F3 / F4 , де F3 – сума добутків ($B$2:$E$2 ;B3:E3). Оскільки на нуль ділити не можна, то за початкові значення невідомих візьмемо $x_j = 1$.

Після цього, виділивши комірку F3, помістимо стрілку курсора у нижній правий кут (з'явиться чорний хрестик) і перетягнемо її на комірки F4 : F6. Виділимо цільову комірку F2. Натиснемо курсором клавішу «Сервіс» і у меню, що з'явиться, вибираємо «Пошук рішень». У ньому вибираємо:
- цільову комірку F2;
- максимальне значення;
- зміну комірок B2 : E2;
- обмеження F5 : F6 = G5 : G6.

Натискаємо клавішу «Параметри» і встановлюємо для збіжності «Невід'ємні значення» та знімаємо вимогу «Лінійна модель». Натиснувши клавішу OK, повертаємось у «Пошук рішень». Запускаємо програму обчислень, натиснувши клавішу «Виконати».

Результати обчислень приведено у таблиці:

5	7	0	0	0,5	
-3	3	0	0	6	
1	1	0	0	12	
12	5	1	0	95	95
-8	5	0	1	-5	-5

Відповідь: $X_{опт} = \{5; 7\}, \ F_{\max} = 0,5.$

Література:

1. Вітлінський В. В. Математичне програмування / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т.О.Терещенко. – К.: КНЕУ, 2001. – 248с.
2. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування.: навч. посібник / В. Д. Гетманцев. – К.: Либідь, 2001. – 122с.
3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник. – 4-те вид., перероб. і допов. / Ю. П. Зайченко. – К., 2000. – 688 с.
4. Жильцов О. Б. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Б. Жильцов, В. Р. Кулян, О.О. Юнькова. – Київ: МАУП, 2006. – 184 с.
5. Наконечний С. І. Збірник задач з курсу «Математичне програмування». Частина 1.: навч. посібник. / С. І. Наконечний, Л. В. Гвоздецька. – К.: ІСОД, 1996. – 128 с.
6. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ: КНЕУ, 2003. – 450 с.
7. Новіков В. В. Лінійне і нелінійне програмування.: навч. посібник / В. В. Новіков, С. А. Яценко. МВО України. –К.: НМК ВО, 1992. – 150 с.
8. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. А. Носенко. – К.: «Либідь», 1996. – 135 с.
9. Роїк О.М. Математичні методи дослідження операцій / О. М. Роїк, В. І. Месюра. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 117 с.
10. Романюк Т. П. Математичне програмування: навч. посіб. / Т. П. Романюк, Т. О. Терещенко, Г. В. Присенко. – К. : ІЗМН, 1996. – 312 с.
11. Степанюк В. В. Методи математичного програмування / В. В. Степанюк. – К. : Вища школа, 1997. – 272 с.
12. Хом'юк І. В. Математичне програмування. Частина 1. : навч. посіб. / І. В. Хом'юк, В. Л. Карпенко, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2004. – 78с.
13. Хом'юк І. В. Математичне програмування. Частина 2. : навч. посіб. / І. В. Хом'юк, В. Л. Карпенко, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 98с.

Навчальне електронне видання комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Ірина Володимирівна Хом'юк
Наталія Василівна Сачанюк-Кавецька
Віктор Вікторович Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

Рукопис оформив *І. Хом'юк*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет підготував *Т. Старічек*

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк.
Наклад 50 (1-й запуск 1-21) пр. Зам. №

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.