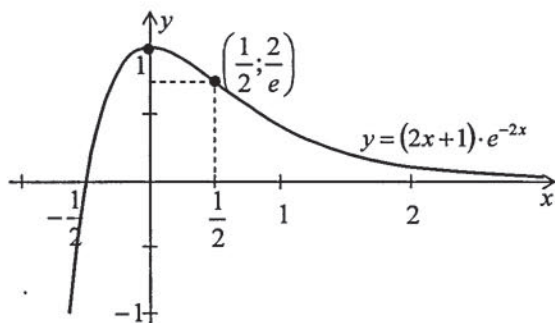


**Вища математика. Збірник завдань
для організації самостійної роботи студентів
заочної форми навчання в двох частинах
(з теоретичною підтримкою)**

Частина 1



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Вища математика. Збірник завдань
для організації самостійної роботи студентів
заочної форми навчання в двох частинах
(з теоретичною підтримкою)

Частина 1

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 51 (075.8)

ББК 22.11я73

B22

Автори:

**І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. В. Хом'юк,
М. Б. Ковальчук**

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 4 від 27.10.2016 р.)

Рецензенти:

В. Х. Касьяненко, доктор фізико-математичних наук, професор

Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор

О. А. Тінгасв, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою). Частина 1: навчальний посібник / І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. В. Хом'юк, М. Б. Ковальчук. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 199 с.

Метою даного посібника, який складається з двох частин, є допомога студенту-заочнику навчитися з найменшими витратами часу самостійно розв'язувати довільні задачі курсу «Вища математика». Основний принцип, яким керувались автори при підготовці даного посібника для студентів технічних вузів – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Істотною особливістю даного посібника є корисна систематизація та алгоритмізація теоретичного матеріалу, які використовуються при розв'язуванні відповідної контрольної роботи.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей, аспірантів, викладачів та осіб, які займаються самоосвітою.

УДК 51 (075.8)

ББК 22.11я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1: завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань	6
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2: завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань	54
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3: завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань	102
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4: завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань	156
ЛІТЕРАТУРА	198

ПЕРЕДМОВА

Основним завданням вищої професійної освіти, при врахуванні вимог і принципів Болонської декларації, є «орієнтація вищих навчальних закладів на кінцевий результат: знання, уміння та навички випускників, які повинні бути застосовані та використані на користь держави». Стратегічною метою освіти проголошується становлення компетенції студента як особистості, яка здатна до самовизначення, самоосвіти, саморегуляції, самоактуалізації, конкурентоспроможності на ринку праці. Це зовсім не означає, що роль знань будь-яким чином занижується. Однак вони з основної мети освіти перетворились в засіб розвитку особистості студента.

Із кожним днем в інженерній діяльності все більш важливе місце посідають інноваційні технології, що висувають високі вимоги не тільки до спеціальної, але й фундаментальної підготовки інженера, а тому необхідно, щоб навчання одночасно забезпечувало високу якість фундаментальних знань і готовність випускника до професійної діяльності. Для студентів інженерних спеціальностей математика постає не стільки навчальною дисципліною, скільки професійним інструментом аналізу, організації, управління технологічними процесами. Математика є основою інженерної освіти, мовою інженерних досліджень і в діяльності інженера повинна допомагати вирішувати професійні задачі. Тому випускники ВТНЗ повинні володіти математичним апаратом, необхідним для розв'язування теоретичних і практичних завдань, мати досить високий рівень розвитку логічного мислення, вміти переводити практичне завдання з професійної на математичну мову.

У системі навчання майбутнього інженера величезне значення має розбір навчальних прикладів і задач практичного змісту. На початку вивчення деякої теми це можуть бути приклади на відпрацювання певного методу, прийому або алгоритму рішення, надалі, в розвиток теми, потрібно ставити завдання узагальнювального характеру, які потребують математичної інтуїції і кмітливості. На заключному етапі дуже бажані:

а) перевірка отриманих результатів на відповідність фізичному змісту і розмірності;

б) припущення щодо можливої зміни результату при певних змінах постановки задачі або початкових умов;

в) детальний аналіз та висновки.

Бажано, щоб усе це, в міру своїх знань і здібностей, навчилися робити самі студенти.

Метою даного посібника, який складається з двох частин, є допомога студенту-заочнику навчитися з найменшими витратами часу самостійно розв'язувати довільні задачі курсу «Вища математика».

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці даного посібника для студентів технічних вузів – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки і посилення її прикладної технічної спрямованості.

В даній частині посібника розглянуто завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань контрольних робіт № 1–4 з таких тем:

- лінійна алгебра та аналітична геометрія;
- елементи математичного аналізу;
- невизначений і визначений інтеграл, функції багатьох змінних;
- диференціальні рівняння.

Істотною особливістю даного посібника є корисна систематизація та алгоритмізація теоретичного матеріалу, який використовується при розв'язуванні відповідної контрольної роботи. Посібник містить виняткову за повнотою добірку задач і прикладів.

Даний посібник дозволить студентам заочної форми навчання самостійно опанувати необхідний інженеру обсяг математичних знань. Також він може бути корисним при вибіркового вивченні окремих тем або розділів студентами як заочної, так і денної форм навчання. Велика кількість завдань та детальний розгляд прикладів розв'язування типових завдань дозволяє використовувати даний навчальний посібник як на практичних заняттях з «Вищої математики», так і для самоосвіти.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1: завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань

Лінійна алгебра

Завдання 1.1 Обчисліть визначник четвертого порядку трьома способами:

- а) розкладанням за елементами будь-якого рядка;
- б) розкладанням за елементами будь-якого стовпця;
- в) зануленням рядка або стовпця.

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$25. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$29. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Завдання 1.2 Для заданих матриць A та B знайти:

1) $D = -2B + 5A^T$

2) $C = AB, \tilde{C} = BA$

3) $\det A, \det B$

4) A^{-1} (зробити перевірку)

5) $X = ?$, якщо $2A - XB = A^T$

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Завдання 1.3 Знайти усі розв'язки системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

- а) за формулами Крамера;
 б) матричним методом;
 в) методом Гаусса;
 г) методом Жордана-Гаусса.

1.
$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

21.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_1 + 5x_2 = -2 \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

23.
$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ 7x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ 7x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

24.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 3x_3 = -2 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

25.
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 4 \\ -12x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -11x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 6x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

26.
$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} -3x_1 - 11x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 1 \\ -4x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

27.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_1 + 5x_2 = -2 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 3x_3 = -2 \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 8x_1 - 9x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 11x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 12 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} -x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - 10x_3 = 1 \\ x_1 - 11x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Завдання 1.4 Задані координати точок A, B, C, D . Потрібно:

1) перевірити, чи вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ утворюють базис і розкласти вектор $\overline{d} = \overline{BC} - 2\overline{CD}$ у цьому базисі;

2) обчислити роботу по переміщенню матеріальної точки силою $\overline{F} = \overline{AB}$ вздовж вектора $\overline{S} = \overline{AC}$;

3) знайти кут;

4) обчислити площу грані ABC ;

5) визначити довжину висоти DE піраміди $ABCD$.

1. $A(2;-1;1); B(4;-4;2); C(3;1;-2); D(5;-2;5)$.
2. $A(-1;-2;0); B(0;4;-4); C(-2;5;2); D(3;3;-2)$.
3. $A(1;2;-1); B(0;-1;1); C(-1;3;-5); D(-2;0;0)$.
4. $A(2;1;1); B(5;-3;2); C(1;3;5); D(4;-1;0)$.
5. $A(0;1;2); B(-1;-1;-1); C(2;3;3); D(2;2;-2)$.
6. $A(0;0;0); B(-3;1;-2); C(-4;2;1); D(1;3;-1)$.
7. $A(1;0;0); B(-1;-1;-3); C(2;-2;-1); D(0;-3;4)$.
8. $A(0;2;0); B(2;4;-1); C(-2;3;2); D(3;5;2)$.
9. $A(2;0;0); B(5;3;-2); C(4;1;-2); D(-1;4;-4)$.
10. $A(0;0;0); B(2;-2;3); C(1;-3;-1); D(-3;1;-2)$.
11. $A(1;1;0); B(5;4;0); C(-1;0;3); D(3;3;-1)$.
12. $A(0;2;0); B(-3;0;1); C(-3;3;3); D(2;1;4)$.
13. $A(0;0;0); B(4;1;2); C(-1;2;-1); D(3;4;-3)$.
14. $A(2;1;0); B(5;0;4); C(3;5;1); D(3;3;3)$.
15. $A(0;0;0); B(-4;-3;1); C(1;2;-2); D(3;-1;-1)$.
16. $A(0;2;1); B(3;3;-2); C(-2;4;2); D(1;6;-1)$.
17. $A(0;0;1); B(2;-3;-3); C(4;2;2); D(-3;1;1)$.
18. $A(-2;0;0); B(-6;-3;1); C(-6;-1;2); D(-4;-4;3)$.
19. $A(0;0;0); B(3;4;2); C(2;1;3); D(-1;-1;2)$.
20. $A(1;0;-2); B(5;2;-3); C(3;4;-3); D(-2;-3;0)$.

21. $A(0;0;-3)$; $B(-1;2;0)$; $C(-2;2;-2)$; $D(4;-1;-4)$.
22. $A(0;1;0)$; $B(2;0;-3)$; $C(4;-1;1)$; $D(-3;-2;-2)$.
23. $A(0;0;-1)$; $B(3;2;3)$; $C(2;3;1)$; $D(1;-1;2)$.
24. $A(-1;0;-1)$; $B(-4;3;0)$; $C(-3;2;3)$; $D(-2;2;0)$.
25. $A(2;0;-2)$; $B(-2;-2;-1)$; $C(4;3;-5)$; $D(3;4;-1)$.
26. $A(0;1;-3)$; $B(-1;2;0)$; $C(-2;1;-2)$; $D(4;-1;-5)$.
27. $A(-1;1;0)$; $B(2;4;-3)$; $C(4;0;1)$; $D(-3;2;-2)$.
28. $A(6;0;-1)$; $B(3;4;3)$; $C(0;3;1)$; $D(1;-1;2)$.
29. $A(-1;4;-1)$; $B(4;3;0)$; $C(-3;7;3)$; $D(-2;2;1)$.
30. $A(1;0;-2)$; $B(-1;-2;-1)$; $C(4;1;-5)$; $D(1;4;-1)$.

Аналітична геометрія

Завдання 1.5 Задано три точки A , B , C . Знайти:

- 1) рівняння прямої BC ;
- 2) рівняння прямої, яка проходить через точку A паралельно до прямої BC ;
- 3) кут ABC ;
- 4) рівняння та довжину медіани в трикутнику ABC , яка проведена з вершини A ;
- 5) рівняння та довжину висоти в трикутнику ABC , яка проведена з вершини A ;
- 6) знайти точку A_1 , яка симетрична точці A відносно прямої BC .

1. $A(1;2)$; $B(4;1)$; $C(-2;-2)$.
2. $A(0;2)$; $B(5;2)$; $C(-1;-1)$.
3. $A(-3;1)$; $B(0;0)$; $C(2;1)$.
4. $A(-1;-4)$; $B(0;-1)$; $C(2;0)$.
5. $A(3;4)$; $B(-4;3)$; $C(-1;2)$.
6. $A(1;4)$; $B(-3;2)$; $C(3;0)$.
7. $A(6;3)$; $B(-1;2)$; $C(8;-1)$.
8. $A(8;3)$; $B(4;1)$; $C(1;2)$.
9. $A(4;0)$; $B(-3;1)$; $C(-1;0)$.
10. $A(2;3)$; $B(-1;2)$; $C(3;0)$.
11. $A(3;3)$; $B(4;0)$; $C(0;2)$.
12. $A(6;-1)$; $B(1;1)$; $C(-1;2)$.
13. $A(3;5)$; $B(-5;-1)$; $C(1;1)$.
14. $A(0;3)$; $B(7;2)$; $C(4;1)$.
15. $A(-3;2)$; $B(4;1)$; $C(-5;-2)$.
16. $A(3;4)$; $B(1;0)$; $C(-2;1)$.
17. $A(3;-3)$; $B(3;2)$; $C(5;3)$.
18. $A(5;-2)$; $B(5;3)$; $C(-1;0)$.
19. $A(4;0)$; $B(-1;0)$; $C(1;1)$.

20. $A(6;-1); B(-3;-1); C(1;1)$.
21. $A(1;-2); B(0;3); C(3;5)$.
22. $A(1;-5); B(-1;5); C(8;-1)$.
23. $A(-2;0); B(6;-1); C(3;1)$.
24. $A(1;6); B(2;1); C(5;-1)$.
25. $A(5;4); B(0;3); C(-3;5)$.
26. $A(1;2); B(4;6); C(3;7)$.
27. $A(-1;0); B(2;4); C(1;5)$.
28. $A(4;5); B(7;9); C(8;10)$.
29. $A(-3;-2); B(0;2); C(-1;3)$.
30. $A(-4;-3); B(-1;1); C(-2;2)$.

Завдання 1.6 Задано координати точок A, B, C, D . Потрібно:

- 1) записати рівняння площини ABC ;
- 2) знайти відстань від точки D до площини ABC ;
- 3) записати рівняння прямих AB та AD й знайти кут між ними;
- 4) знайти кут між площиною ABC та прямою AD .

1. $A(3;-1;2); B(-1;0;1); C(1;7;3); D(8;5;8)$.
2. $A(3;1;4); B(-1;6;1); C(-1;1;6); D(0;4;-1)$.
3. $A(3;5;4); B(5;8;3); C(1;2;-2); D(-1;0;2)$.
4. $A(2;4;3); B(1;1;5); C(4;9;3); D(3;6;7)$.
5. $A(9;5;5); B(-3;7;1); C(5;7;8); D(6;9;2)$.
6. $A(0;7;1); B(2;-1;5); C(1;6;3); D(3;-9;8)$.
7. $A(5;5;4); B(1;-1;4); C(3;5;1); D(5;8;-1)$.
8. $A(6;1;1); B(4;6;6); C(4;2;0); D(1;2;6)$.
9. $A(7;5;3); B(9;4;4); C(4;5;7); D(7;9;6)$.
10. $A(6;8;2); B(5;4;7); C(2;4;7); D(7;3;7)$.
11. $A(4;2;5); B(0;7;1); C(0;2;7); D(1;5;0)$.
12. $A(4;4;10); B(7;10;2); C(2;8;4); D(9;6;9)$.
13. $A(4;6;5); B(6;9;4); C(2;10;10); D(7;5;9)$.
14. $A(3;5;4); B(8;7;4); C(5;10;4); D(4;7;8)$.
15. $A(10;9;6); B(2;8;2); C(9;8;9); D(7;10;3)$.
16. $A(1;8;2); B(5;2;6); C(5;7;4); D(4;10;9)$.
17. $A(6;6;5); B(4;9;5); C(4;6;11); D(6;9;3)$.
18. $A(7;2;2); B(-5;7;-7); C(5;-3;1); D(2;3;7)$.
19. $A(8;-6;4); B(10;5;-5); C(5;6;-8); D(8;10;7)$.
20. $A(1;-1;3); B(6;5;8); C(3;5;8); D(8;4;1)$.
21. $A(1;-2;7); B(4;2;10); C(2;3;5); D(5;3;7)$.
22. $A(4;2;10); B(1;2;0); C(3;5;7); D(2;-3;5)$.
23. $A(2;3;5); B(5;3;-7); C(1;2;7); D(4;2;0)$.
24. $A(5;3;7); B(-2;3;5); C(4;2;10); D(1;2;7)$.
25. $A(4;3;5); B(1;9;7); C(0;2;0); D(5;3;10)$.
26. $A(3;2;5); B(4;0;6); C(2;6;5); D(6;4;-1)$.

27. A(2;1;6); B(1;4;9); C(2;-5;8); D(5;4;2).
 28. A(2;1;7); B(3;3;6); C(2;-3;9); D(1;2;5).
 29. A(2;-1;7); B(6;3;1); C(3;2;8); D(2;-3;7).
 30. A(0;4;5); B(3;-2;1); C(4;5;6); D(3;3;2).

Завдання 1.7

- Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами 6.
- Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 25, а ексцентриситет $\frac{12}{13}$.
- Знайти півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис та довжину фокального радіуса точки $M\left(-\frac{5}{3}, 2\sqrt{5}\right)$ еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$.
- Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами 16.
- Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо мала вісь дорівнює 6, а точка $M(-2\sqrt{5}, 2)$.
- Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо точка $M(8, 12)$ належить еліпсу, а відстань від неї до лівого фокуса дорівнює 20.
- Скласти рівняння еліпса, якщо задано ексцентриситет $\frac{2}{3}$, фокус $F(2, 1)$, а рівняння відповідної директриси $x - 5 = 0$.
- Скласти рівняння еліпса, якщо задано ексцентриситет $\frac{1}{2}$, фокус $F(-4, 1)$, а рівняння відповідної директриси $y + 3 = 0$.
- Скласти рівняння еліпса, якщо осі еліпса паралельні координатним осям, точки $A(4, 0)$ та $B(0, 4)$ належать еліпсу, а точка B знаходиться на відстані $\frac{3}{\sqrt{2}}$ від одного з фокусів та на відстані 6 від відповідної директриси.
- Скласти рівняння еліпса, якщо задано фокус $F(1, 0)$, рівняння відповідної директриси $2x - y - 10 = 0$, а також відомо, що точка $A(2, -1)$ належить еліпсу.

11. Знайти координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис рівнобічної гіперболи $x^2 - y^2 = 9$ і зобразити їх на рисунку.
12. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо уявна вісь дорівнює 16, а ексцентриситет $\frac{17}{15}$.
13. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 26, а відстань між директрисами $\frac{288}{13}$.
14. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 20, а рівняння асимптот $3y = \pm 4x$.
15. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 16, а відстань між фокусами 20.
16. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо уявна вісь дорівнює 8, а ексцентриситет $\frac{5}{3}$.
17. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами дорівнює $\frac{32}{5}$, а рівняння асимптот $3y = \pm 4x$.
18. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо уявна вісь дорівнює 4 і точка $A(-7, 2\sqrt{6})$ належить гіперболі.
19. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$ і точка $A(-5, 3)$ належить гіперболі.
20. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо точка $A(7, -2\sqrt{3})$ належить гіперболі і відстань від неї до лівого фокуса дорівнює $4\sqrt{7}$.
21. На параболі $y^2 = 10x$ знайти точку B таку, що пряма, яка проходить через точку B і утворює з віссю Ox кут $\frac{\pi}{3}$.
22. На параболі $y^2 = 10x$ знайти точку B таку, що відстань від цієї точки до вершини параболи і фокуса співвідносяться як 8 : 7.

23. Скласти рівняння параболи, якщо точка $F(7, 2)$ є фокусом, а пряма $x = 5$ – директрисою.
24. Скласти рівняння параболи, якщо точка $F(2, -1)$ є фокусом, а пряма $x - y = 1$ – директрисою.
25. Скласти рівняння параболи, якщо вісь параболи паралельна осі Oy , фокус лежить на осі Ox , парабола проходить через початок координат і відсікає на осі Ox відрізок довжиною 6.
26. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(-2, 2)$ і прямої $y + 2 = 0$.
27. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(-1, 2)$ і прямої $2x - y + 5 = 0$.
28. Скласти рівняння гіперболи, якщо задано ексцентриситет $\sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ і рівняння відповідної директриси $3x - y + 3 = 0$.
29. Скласти рівняння гіперболи, якщо задано фокус $F(-2, -3)$, рівняння відповідної директриси $x + 1 = 0$, а також відомо, що точка $B(-2, -3)$ належить гіперболі.
30. Скласти рівняння сім'ї парабол, які мають спільний фокус – початок координат і симетричні відносно осі Ox .

Для розв'язання контрольної роботи № 1 [3, 9] вам знадобляться такі поняття, формули та алгоритми

1. Щоб додати дві матриці A та B однакової розмірності необхідно додати відповідні елементи даних матриць, тобто $a_{ij} + b_{ij}$, де a_{ij} – елемент матриці A , b_{ij} – елемент матриці B .

2. Для множення матриці A на число $\lambda \neq 0$ необхідно кожен елемент даної матриці помножити на λ , тобто $B = (\lambda a_{ij})$.

3. Для знаходження добутку двох матриць необхідно виконати кроки алгоритму:

а) перевіряємо узгодженість матриць (добуток матриць $A_{(m,n)} \times B_{(k,p)}$ можливий, якщо внутрішні індекси рівні ($n = k$), тобто кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B);

б) визначаємо розмірність добутку двох матриць $A_{(m,n)} \times B_{(n,p)} = C_{(m,p)}$;

в) знаходимо кожен з елементів c_{ij} , використовуючи формулу

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \quad (1.1)$$

або в загальному

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}, \text{ де } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

тобто використовується правило множення «рядок на стовпець»

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

г) сформуємо матрицю $C_{(m,p)}$.

4. Визначник другого порядку обчислюється за правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \quad (1.2)$$

де a_{11} , a_{22} , a_{21} , a_{12} – елементи визначника.

5. Правила обчислення визначників третього порядку.

Розглянемо матрицю типу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Перше правило Саррюса (або правило трикутника)

$$|A|_{3 \times 3} = a^+ - a^- = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) \quad (1.3)$$

де

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad a^+$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad a^-$$

Друге правило Саррюса

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}).$$

6. Обчислення визначників третього і вищого порядків через занулення елементів рядка чи стовпця.

Визначники третього та вищого порядків обчислюють шляхом розвинення за елементами будь-якого стовпця (формула 1.4) або рядка (формула 1.5):

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}, \quad (1.4)$$

або

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}, \quad (1.5)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \quad (1.6)$$

де M_{ij} – мінор елемента a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Зауваження! Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці A n -го порядку є визначник матриці $(n-1)$ -го порядку, який отримується шляхом вилучення з $|A|$ i -го рядка та j -го стовпця.

Наприклад, розвинення визначника третього порядку за елементами першого рядка набуває вигляду:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \quad (1.7)$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

7. Алгоритм способу занулення елементів

7.1 Обираємо стовпець (рядок), елементи якого будемо занулювати.

7.2 Якщо в цьому стовпці (рядку) є елемент рівний одиниці, то обираємо його за ключовий елемент. Якщо одиниці немає, то її завжди можна одержати, розділивши увесь стовпець (рядок) на обраний a_{kj} (a_{ik}). При цьому даний елемент виноситься як коефіцієнт перед визначником.

Запам'ятайте! Якщо ми занулюємо елементи j -го стовпця, то бу-

демо працювати з рядками

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{1j} & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & a_{k-1,j} & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{k+1,j} & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & a_{nj} & \bullet \end{vmatrix}.$$

Для занулення, наприклад,

елемента $a_{k-1,j}$ потрібно домножити k -ий рядок на $(-a_{k-1,j})$ та додати його до $(k-1)$ -го рядка. Результат виконання цієї операції записуємо на місці даного рядка. При цьому k -ий рядок переписуємо у новий визначник без змін. Аналогічним чином занулюємо решту елементів j -го стовпця.

Запам'ятайте! Якщо ми занулюємо елементи i -го рядка, то будемо

працювати із стовпчиками

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{i1} & \dots & a_{i,k-1} & 1 & a_{i,k+1} & \dots & a_{in} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$$

Для зану-

лення, наприклад, елемента $a_{k+1,j}$ потрібно домножити k -ий стовпець на $(-a_{k+1,j})$ та додати його до $(k+1)$ -го стовпця. Результат виконання цієї операції записуємо на місці даного стовпця. При цьому i -ий рядок переписуємо у новий визначник без змін. Аналогічним чином занулюємо решту елементів i -го рядка.

7.3 Розкладаємо, одержаний в результаті перетворень, визначник за елементом $a_{kj} = 1$ ($a_{ik} = 1$).

Зауваження! При обчисленні визначників методом занулення рядка або стовпця необхідно враховувати деякі властивості визначників:

- визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює нулю;
- якщо всі елементи одного рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю;
- якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цього визначника, які попередньо множаться на деяке число, то визначник не зміниться.

8. Матричний спосіб розв'язування неоднорідних лінійних систем рівнянь.

Нехай дано систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.8)$$

Розглянемо основну матрицю системи (матриця A) і матриці-стовпці невідомих (матриця X) та вільних членів (матриця B):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$

Використовуючи означення рівності матриць, систему (1.8) можна записати так:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

або

$$A \cdot X = B. \quad (1.9)$$

Звідки $X = A^{-1} \cdot B$, де $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$ – обернена матриця, причому

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ та } A_{ij} - \text{алгебраїчні доповнення.}$$

9. Розв'язування неоднорідних лінійних систем рівнянь за формулами Крамера.

Сформулюємо *правило Крамера*. Якщо основний визначник $\Delta(A)$ неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta(A)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.10)$$

$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$. Підставляючи знайдене значення у попереднє, знаходимо

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}(d_{n-1} - c_{n-1,n}) \text{ і т. д.}$$

Якщо дана система зводиться до трапецевидного типу, то вона має нескінченну кількість розв'язків. Причому при $k < n$ система має $n - k$ вільних змінних, які набувають довільних значень. Послідовно підставляючи вільні змінні у попередні рівняння, знайдемо значення решти змінних, виражених через вільні.

При виключенні змінних ми використовували елементарні операції над системами лінійних рівнянь:

- 1) додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число λ ;
- 2) перестановку рівнянь у системі;
- 3) вилучення із системи тотожності $0 \equiv 0$;
- 4) множення якого-небудь рівняння системи на дійсне число, відмінне від нуля;
- 5) перенумеравання як рівнянь, так і невідомих.

Зауваження!

1) Замість того, щоб здійснювати елементарні перетворення над системою (1.11), їх здійснюють над розширеною матрицею цієї системи:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Елементарні перетворення над системою (1.11) будуть, відповідно, перетвореннями над рядками (стовпцями) розширеної матриці цієї системи. Нехай $a_{11} \neq 0$ (цього завжди можна досягти, переставивши місцями довільні стовпці), тоді перший рядок розширеної матриці ділимо на a_{11} . На наступному етапі вилучаємо невідоме x_1 з інших $(n-1)$ рядків:

$$(A, B)^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{13} & \cdots & a^{(1)}_{1n} & b^{(1)}_1 \\ 0 & a^{(1)}_{22} & a^{(1)}_{23} & \cdots & a^{(1)}_{2n} & b^{(1)}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^{(1)}_{n2} & a^{(1)}_{n3} & \vdots & a^{(1)}_{nn} & b^{(1)}_n \end{pmatrix}$$

Оскільки при елементарних перетвореннях системи визначник розширеної матриці може змінити знак (при зміні порядку рядків чи стовпців ма-

триці) або збільшитися в одне й те ж саме число разів, то визначник новоутвореної матриці не є нулем.

Якщо в результаті перетворень деякі рядки матриці будуть однаковими, то система є *виродженою*. Якщо однаковими є лише коефіцієнти при невідомих, а вільні члени – різними, то система не має розв'язків взагалі, тобто є *несумісною*.

У результаті виконання n кроків необхідно отримати трикутну матрицю, у випадку визначеної системи, типу:

$$(A, B)^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & a^{(n)}_{12} & a^{(n)}_{13} & \dots & a^{(n)}_{1n} & b^{(n)}_1 \\ 0 & 1 & a^{(n)}_{23} & \dots & a^{(n)}_{2n} & b^{(n)}_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b^{(n)}_n \end{pmatrix}$$

Далі знову повертаємось до системи лінійних рівнянь. Знайдемо спочатку x_n із співвідношення $x_n = b^{(n)}_n$. Підставляючи x_n у попереднє рівняння знайдемо x_{n-1} . Отримані значення знайдених невідомих підставляємо у попереднє рівняння і т. д. В результаті виконання послідовності вказаних операцій ми

отримаємо матрицю $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, яка і є розв'язком системи (1.11).

2) Досить часто використовують *метод Жордана-Гаусса*, який базується на методі Гаусса, але в результаті виконання m кроків необхідно отримати діагональну матрицю:

$$(A, B)^{(m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b^{(m)}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b^{(m)}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b^{(m)}_n \end{pmatrix}$$

Звідси, $x_n = b^{(m)}_n, \dots, x_1 = b^{(m)}_1$.

Відмітимо, що у випадку, коли $a_{ij} = 0$, існує два варіанти розв'язування системи (1.11):

- якщо довільний елемент $a_{ij} \neq 0$, то в зведеній матриці (1.16) можна поміняти місцями перший та i -ий рядки і далі виконувати всі необхідні перетворення;

- якщо довільний елемент $a_{ij} \neq 0$, то в зведеній матриці (1.16) можна поміняти місцями перший та j -ий стовпці і далі знову виконувати всі необхідні перетворення. При цьому потрібно пам'ятати, що, *переставивши стовпці, ми змінили порядок відповідних невідомих в системі лінійних рівнянь*.

3) *Запам'ятайте!* Той рядок (стовпець), який ми домножаємо на деяке число, переписуємо в нову розширену матрицю без змін.

Замість того рядка (стовпця), до якого ми додаємо інший, помножений на число, записуємо результат цієї операції.

11. Проекція вектора \vec{a} на вісь l дорівнює добутку модуля вектора \vec{a} на косинус кута φ між вектором та віссю l

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi. \quad (1.17)$$

12. Якщо $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис тривимірного простору, то за формулою $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$ кожному вектору ставиться у відповідність єдина трійка чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ і кожній трійці чисел – єдиний вектор. Аналогічно, вектор на площині має дві компоненти, а на прямій – одну.

13. Два вектори $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ та $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ в прямокутній системі координат *колінеарні*, якщо їх координати пропорційні, тобто виконується умова

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (1.18)$$

14. Нехай на точку M діє сила \vec{F} , постійна за напрямком і за величиною й утворює з напрямком переміщення кут α . Тоді робота A , яка виконується при цьому силою \vec{F} на ділянці \vec{l} дорівнює

$$A = \vec{F} \cdot \vec{l} \cdot \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{l}. \quad (1.19)$$

Правило: робота постійної сили на прямолінійній ділянці дорівнює скалярному добутку сили на вектор переміщення.

15. Скалярним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} називається число, яке дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.20)$$

або в координатній формі $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$ (1.21)

де $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$

Для знаходження скалярного добутку цих векторів в координатній формі необхідно врахувати, що:

Скалярний добуток	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	1	0	0
\vec{j}	0	1	0
\vec{k}	0	0	1

Оскільки за формулою (1.20) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, то враховуючи координатне обчислення скалярного добутку, одержуємо:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (1.22)$$

Зауваження! Якщо $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$, то вектори $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ та $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ перпендикулярні.

16. Векторним добутком двох векторів $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ є вектор $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє такі умови:

1) $|\vec{p}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$; $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$;

2) $\vec{p} \perp \vec{a}$, $\vec{p} \perp \vec{b}$ – вектор \vec{p} перпендикулярний до кожного із векторів \vec{a} і \vec{b} ;

3) трійка векторів $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})$ має праву орієнтацію.

В координатній формі

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \quad (1.23)$$

або

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.24)$$

Для знаходження векторного добутку цих векторів в координатній формі враховуємо:

Векторний добуток	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	0	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	$-\vec{k}$	0	\vec{i}
\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	0

17. Векторно-скалярний (мішаний) добуток векторів дорівнює

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.25)$$

18. Рівняння прямої l , що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (1.26)$$

19. Рівняння прямої l , яка проходить через точку $M(x; y)$ або рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b \quad (1.27)$$

20. Кут між прямими.

Нехай маємо дві прямі $l_1: y = k_1x + b_1$ та $l_2: y = k_2x + b_2$, що перетинаються. Пряма l_1 утворює з додатним напрямом осі Ox кут α_1 , а пряма l_2 – кут α_2 . Тоді тангенс кута між цими прямими можна обчислити за формулою:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}. \quad (1.28)$$

Оскільки, $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$ та позначивши $\alpha_1 - \alpha_2 = \varphi$, остання формула набуває вигляду:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (1.29)$$

Зуваження! 1) $l_1 \parallel l_2$ або співпадають, тоді $k_1 = k_2 = \operatorname{tg} 0 = 0$;

2) якщо прями l_1 та l_2 перпендикулярні, то формула (1.29)

втрачає зміст, оскільки $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не існує. В цьому випадку виникає необхідність розглянути:

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1}, \quad (1.30)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0, \quad k_1 \cdot k_2 + 1 = 0, \quad k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Звідки:

$k_1 \cdot k_2 = -1$ – умова перпендикулярності двох прямих;

$k_1 = k_2$ – умова паралельності прямих.

21. Взаємне розміщення двох прямих:

Нехай маємо дві прями $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Тоді

а) прями збігаються $l_1 = l_2$, якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;

б) прями паралельні, якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

в) прями перетинаються, якщо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

22. Відстань від прямої $l: Ax + By + C = 0$ до довільної точки

$M_0(x_0; y_0)$ позначимо $|\overline{M_1M_0}| = d$, тоді

$$d = \frac{|(x_0 - x_1) \cdot A + (y_0 - y_1) \cdot B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (1.31)$$

де $C = -Ax_1 - By_1$.

23. Рівняння площини.

1) Рівняння площини σ , заданої точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним підпростором $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ та $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.32)$$

2) Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.33)$$

Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A; B; C)$, який називають вектором нормалі

$$\overline{M_0M} \cdot \vec{n} = A(x-x_0) + B(y-y_0) + (z-z_0) = 0. \quad (1.34)$$

24. Кут між площинами.

Розглянемо дві площини σ_1 і σ_2 , які задані рівняннями:

$$\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

$\varphi = \angle(\sigma_1, \sigma_2)$ – це двогранний кут, який дорівнює $\varphi = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ за властивістю сумарних кутів

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (1.35)$$

Умова паралельності двох площин ($\sigma_1 \parallel \sigma_2$).

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2, \text{ якщо } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (1.36)$$

Умова перпендикулярності двох площин

$$\sigma_1 \perp \sigma_2, \text{ якщо } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0, \text{ тобто } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (1.37)$$

25. Відстань від точки до площини.

Нехай дано площину $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$, де $\vec{n}(A, B, C)$ і точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \quad (1.38)$$

26. Відстань між паралельними площинами.

$$\sigma_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0;$$

$$\sigma_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

Нехай точка $M_1 \in \sigma_1$, тоді її координати задовольняють рівняння площини σ_1 . Одержимо,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0;$$

або

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_1.$$

Обчислимо відстань від точки M_1 до площини σ_2 :

$$d_{\sigma_2} = \left| \frac{-D_1 + D_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \quad (1.38)$$

27. Векторне і параметричне рівняння прямої

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{s}. \quad (1.39)$$

Рівняння (1.39) називають *векторним* рівнянням прямої. Воно показує, що кожному значенню параметра t відповідає радіус-вектор деякої точки M , яка лежить на цій прямій.

подамо рівняння (1.39) в координатній формі, підставивши такі значення:

$$\vec{r} = \overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

$$\vec{r}_1 = \overline{OM}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k};$$

$$\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}.$$

Маємо

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + t \cdot m\vec{i} + t \cdot n\vec{j} + t \cdot p\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + tm \\ y = y_1 + tn \\ z = z_1 + tp \end{cases} \quad (1.40)$$

Рівняння (1.40) – параметричне рівняння прямої (при зміні параметра t змінюються координати x, y, z і точка $M(x, y, z)$ переміщується вздовж прямої).

28. Канонічні рівняння прямої.

Нехай в афінній системі координат пряма l задана точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку вона проходить і напрямним вектором $\vec{p} = (k, m, n)$. Нехай $M(x, y, z)$ довільна точка прямої l . Ця точка лежить на прямій l тоді, і тільки тоді, коли $\vec{M_0M}$ і \vec{p} колінеарні. Ці вектори будуть колінеарними, коли їх координати пропорційні:

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \quad (1.41)$$

Рівняння (1.41) – канонічне рівняння прямої.
Дане рівняння – це, по суті, система трьох рівнянь:

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{m}; \quad \frac{x-x_0}{k} = \frac{z-z_0}{n}; \quad \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

з яких незалежні лише два, а третє – наслідок двох інших.

Якщо пряма задана двома точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то її напрямним вектором буде вектор $\vec{M_1M_2}$. Тоді канонічне рівняння набуває вигляду

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (1.42)$$

29. Кут між прямою і площиною.

Нехай маємо пряму l : $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ та площину $\sigma: Ax + By + Cz = 0$.

Тоді кут між прямою та площиною знаходиться за формулою

$$\sin \varphi = \left| \cos \angle(\vec{n}, \vec{s}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|},$$

або

$$\sin \varphi = \frac{|Ak + Bm + Cn|}{\sqrt{k^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1.43)$$

Зауваження!

1) Якщо пряма l паралельна площині σ , то $\sin \varphi = 0$ і

$$Ak + Bm + Cn = 0. \quad (1.44)$$

2) Якщо пряма l перпендикулярна площині σ , то $\vec{p} \parallel \vec{n}$ і

$$\frac{A}{k} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \quad (1.45)$$

30. Точка перетину прямої і площини.

Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка перетину прямої і площини, яка знаходиться так: рівняння прямої зводиться до параметричного вигляду $x = x_0 + kt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$. Підставивши одержані рівняння в рівняння площини, визначаємо значення параметра t_1 , який відповідає точці M_1 :

$$t_1 = -\frac{D + Ax_0 + By_0 + Cz_0}{Ak + Bm + Cn},$$

звідки

$$x_1 = x_0 + kt_1, \quad y_1 = y_0 + mt_1, \quad z_1 = z_0 + nt_1. \quad (1.46)$$

31. Еліпс.

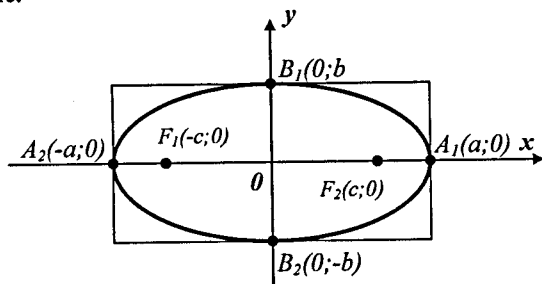


Рисунок 1.1

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.47)$$

де $c^2 = a^2 - b^2$.

Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε , яка називається *ексцентриситетом еліпса* і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad (1.48)$$

причому $0 \leq \varepsilon < 1$, оскільки $0 \leq c < a$. З формул (1.48) і (1.47) отримаємо

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Прямі $x = \pm a$ називаються *директрисами еліпса*.

32. Гіпербола.

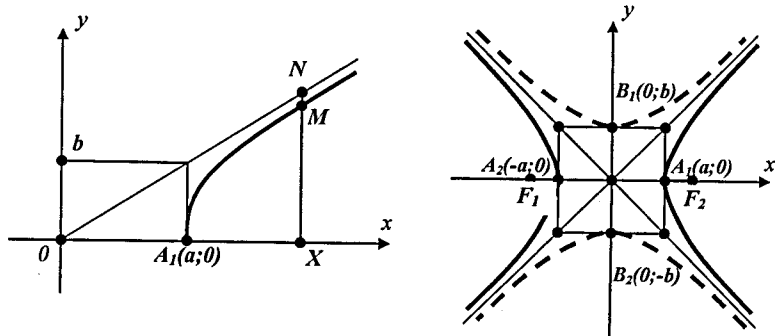


Рисунок 1.2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.49)$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (1.50)$$

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти:

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Ексцентриситет гіперболи визначається як відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Враховуючи формулу (1.50), одержуємо, що

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \quad (1.51)$$

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, де a – дійсна піввісь гіперболи, а ε – її ексцентриситет, називаються *директрисами гіперболи*.

33. Парабола.

$$y^2 = 2px. \quad (1.52)$$

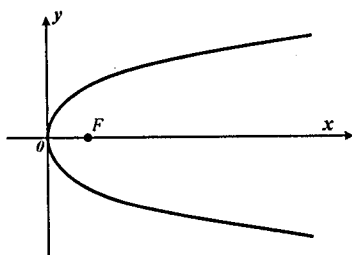


Рисунок 1.3

Рівняння (1.52) називається *канонічним рівнянням параболі*. Якщо парабола симетрична відносно осі абсцис, вершина міститься в початку координат, але вітки напрямлені у від'ємну сторону осі, то її рівняння має вигляд $y^2 = -2px$. Аналогічно, рівняння $x^2 = -2py$ визначає параболу, вітки якої напрямлені у від'ємну сторону осі ординат.

Якщо вершину параболі $y^2 = \pm 2px$ помістити в точку $O(x_0, y_0)$, то її рівняння матиме вигляд

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0). \quad (1.53)$$

Ця парабола симетрична відносно прямої $y = y_0$.

Якщо вершину параболі $x^2 = \pm 2py$ помістити в точку $O(x_0, y_0)$, то її рівняння матиме вигляд

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0). \quad (1.54)$$

Ця парабола симетрична відносно прямої $x = x_0$.

Приклади розв'язання типових завдань контрольної роботи № 1

Приклад 1. Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ трьома способами:

- а)* розкладанням за елементами будь-якого рядка;
- б)* розкладанням за елементами будь-якого стовпця;
- в)* зануленням рядка або стовпця.

Розв'язування

Розкладемо визначник за елементами другого рядка, використовуючи формулу (1.5):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(2 \cdot 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2) + (1 \cdot 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) +$$

$$+ 3 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot 2) - (1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot (-1) -$$

$$- 3 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 2) = 26.$$

Розкладемо визначник за елементами четвертого стовпця, використовуючи формулу (1.4):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 2) - (1 \cdot 1 \cdot 2 +$$

$$+ 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 2) - 2(1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 3 +$$

$$+ 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4) = 26.$$

Оскільки в четвертому стовпці даного визначника є нуль та одиниця, то занулимо елементи саме цього стовпця. В новий визначник перший та другий рядок переписуємо без змін. Замість третього та четвертого рядків запишемо результати виконання таких операцій:

- до третього рядка поелементно додаємо другий рядок;
- другий рядок домножаємо на два та додаємо до четвертого рядка.

Маємо:

$$\left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right|.$$

Одержаний визначник розкладаємо за елементами четвертого стовпця:

$$\left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 3 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right| = - \left(-14 + 4 - 16 \right) = 26$$

Приклади до розв'язання завдання 1.2.

Приклад 1. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Обчислити

добутки AB та BA .

Розв'язування

Оскільки дані матриці є квадратними, то вони узгоджені й існує як добуток AB , так і добуток BA .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \\ -2 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 12 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(2-6) - 3(3-8) + 9 - 8 = 8,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1}A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8+16 & -12+12 & -4+4 \\ 10-6-4 & 15-4-3 & 5-4-1 \\ 2+18-20 & 3+12-15 & 1+12-5 \end{pmatrix} = E.$$

Приклади до розв'язання завдання 1.3.

Приклад 1. Розв'язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Розв'язування

В матричній формі ця система запишеться у вигляді $A \cdot X = B$. В даному випадку

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю до матриці A . Маємо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи запишемо у вигляді (1.11), тобто $X = A^{-1} \cdot B$, або

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Звідси, за означенням рівності матриць, випливає:

$$x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 5.$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

Розв'язування

Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Отже, система має розв'язок.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 24.$$

За формулами Крамера $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{24}{8} = 3$.

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса та Жордана-Гаусса

Метод Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язування

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array} \right)^{*(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right).$$

Зауваження!

1. Поміняємо місцями перший та третій стовпці зведеної матриці (при цьому змінюється порядок змінних).
2. Перший рядок переписуємо без змін.
3. Перший рядок множимо на (-2) і додаємо до другого рядка (результат запишемо у другий рядок нової зведеної матриці).

4. Від першого рядка віднімемо третій і результат запишемо у третій рядок нової зведеної матриці.

Тоді маємо:

$$x_3 + 3x_2 + 2x_1 = 2 \Rightarrow x_3 = 3,$$

$$4x_2 + x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 1,$$

$$-2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -2.$$

Метод Жордана-Гаусса

Скористаємося кінцевим результатом методу Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \cdot 3 \sim \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Зауваження!

1. Третій рядок переписуємо без змін.
 2. Додамо до другого рядка третій, поділений на 2 (результат запишемо у другий рядок новоутвореної матриці).
 3. До першого рядка додамо третій рядок (результат запишемо у перший рядок новоутвореної матриці).
 4. Поділимо третій рядок на 2, а другий на 4.
 5. Від першого рядка віднімемо другий, помножений на 3.
- Звідси, $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 11, \\ 3x + 2y - 4z = 15, \\ 4x + 3y - 7z = 19. \end{cases}$$

Розв'язування

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 3 & 2 & -4 & 15 \\ 4 & 3 & -7 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 15 \\ 3 & 4 & -7 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження!

1. Міняємо місцями перший та другий стовпці. При цьому змінюється порядок змінних: x, y, z .
2. Перший рядок переписуємо без змін. Домножаємо перший рядок на (-2) та додаємо його до другого рядка. Результат записуємо замість другого рядка в нову розширену матрицю. Перший рядок домножаємо на (-3) та додаємо його до третього рядка. Результат виконання цієї операції записуємо у третій рядок нової матриці.
3. Другий рядок множимо на (-1) , третій рядок ділимо на (-2) .
4. Другий рядок перетвореної матриці домножаємо на (-1) та додаємо до третього рядка.

В результаті одержуємо:

$$z = t, \quad x = 7 - 2t, \quad y = 11 + z - 2x = 11 + t - 14 + 4t = -3 + 5t;$$

де t – параметр, що може набувати довільних значень.

Приклади до розв'язання завдання 1.4.

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів \vec{a} та \vec{b} , якщо $\vec{a} = \vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язування

Використаємо основні властивості скалярного добутку:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{m} + 5\vec{n}) \cdot (\vec{m} + 2\vec{n}) = \vec{m} \cdot \vec{m} + \vec{m} \cdot 2\vec{n} + 5\vec{n} \cdot \vec{m} + 5\vec{n} \cdot 2\vec{n} = \vec{m}^2 + 7\vec{m} \cdot \vec{n} + 10\vec{n}^2 = \\ &= |\vec{m}|^2 + 7|\vec{m}||\vec{n}|\cos\angle(\vec{m}, \vec{n}) + 10|\vec{n}|^2 = 2^2 + 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + 10 \cdot 2^2 = 44 + 14\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, із переміщення матеріальної точки M з точки $A(-1, 0, 1)$ в точку $B(1, 2, 3)$.

Розв'язування

Для обчислення роботи використаємо формули (1.19). Знайдемо спочатку координати вектора переміщення:

$$\vec{i} = \overline{AB} = \{1 - (-1), 2 - 0, 3 - 1\} = \{2, 2, 2\}.$$

Тоді

$$A = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 12.$$

Приклад 3. Знайти косинус кута між векторами $\overline{A_1A_4}$ та $\overline{A_2A_3}$, якщо $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(-1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$.

Розв'язування

Знайдемо координати векторів $\overline{A_1A_4}$ та $\overline{A_2A_3}$

$$\overline{A_1A_4} = \{0 - 3, 4 - 1, -1 - 4\} = \{-3, 3, -5\},$$

$$\overline{A_2A_3} = \{-1 - (-1), 1 - 6, 6 - 1\} = \{0, -5, 5\}$$

та їх довжини

$$|\overline{A_1A_4}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 9 + 25} = \sqrt{43},$$

$$|\overline{A_2A_3}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}.$$

Тоді за формулою (1.22) маємо:

$$\cos \angle(\overline{A_1A_4}, \overline{A_2A_3}) = \frac{(-3) \cdot 0 + 3 \cdot (-5) + (-5) \cdot 5}{\sqrt{43} \cdot \sqrt{50}} = -\frac{40}{\sqrt{2150}} \approx -0,87.$$

Приклад 4. Знайти проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} , якщо $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Розв'язування

За формулою (1.17) одержимо

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22.$$

Приклад 5. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} та \vec{b} за умови, що $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язування

З властивостей векторного добутку маємо:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{m} - 2\vec{n}) \times (3\vec{m} + 4\vec{n}) = \vec{m} \times 3\vec{m} + \vec{m} \times 4\vec{n} - 2\vec{n} \times 3\vec{m} - 2\vec{n} \times 4\vec{n} = \\ &= 3\vec{m} \times \vec{m} + 4\vec{m} \times \vec{n} + 6\vec{m} \times \vec{n} - 8\vec{n} \times \vec{n} = 10\vec{m} \times \vec{n}.\end{aligned}$$

Звідки

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |10\vec{m} \times \vec{n}| = 10|\vec{m}||\vec{n}|\sin \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ (кв. од).}$$

Приклад 6. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(2, 4, 0)$, $B(0, -4, 1)$, $C(-1, 1, 2)$.

Розв'язування

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах \overline{AB} і \overline{AC} . Оскільки $\overline{AB} = \{-2, -8, 1\}$, $\overline{AC} = \{-3, -3, 2\}$ і за формулою (3.20)

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -8 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + \vec{j} - 18\vec{k}.$$

Тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-13)^2 + 1^2 + (-18)^2} = \frac{\sqrt{494}}{2} \approx 11 \text{ (кв. од).}$$

Приклад 7. Знайти момент сили $\vec{F} = \{1, -2, 4\}$, прикладеної до точки $A(3, 2, -1)$ відносно початку координат.

Розв'язування

Момент сили будемо обчислювати за формулою:

$$\vec{z} = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 13\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Приклад 8. Довести, що чотири точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,-1)$, $D(2,1,3)$ лежать в одній площині.

Розв'язування

Точки A , B , C та D лежать в одній площині, якщо вектори

$$\overline{AB} = (-1, -1, 6),$$

$$\overline{AC} = (-2, 0, -2),$$

$$\overline{AD} = (1, -1, 4).$$

компланарні. Знайдемо їх мішаний добуток

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

За четвертою властивістю мішаного добутку дані вектори компланарні.

Приклад 9. Дано вектори $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(-1,3,2)$, $\vec{c}(7,-3,5)$, $\vec{d}(6,10,17)$. Перевірити, чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} та \vec{c} базис і знайти координати вектора \vec{d} .

Розв'язування

Обчислимо мішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} та \vec{c} . Маємо

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -17 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -17 & -16 \end{vmatrix} = -80 + 85 = 5 \neq 0.$$

Оскільки мішаний добуток даних векторів відмінний від нуля, то вони утворюють базис. Знайдемо координати вектора \vec{d} в цьому базисі $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. З означення рівності векторів маємо систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 7\gamma = 6 \\ 2\alpha + 3\beta - 3\gamma = 10. \\ 3\alpha + 2\beta + 5\gamma = 17 \end{cases}$$

Розв'язавши одержану систему методом Гауса, знаходимо

$$\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 1.$$

Приклад 10. Задані вершини тетраедра $A(1,2,3)$, $B(9,6,4)$, $C(3,0,4)$, $D(5,2,6)$. Переконайтесь, що висота тетраедра, опущена з вершини D , дорівнює $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Розв'язування

За шостою властивістю мішаного добутку маємо, що

$$V = \frac{1}{6} |\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}|.$$

Оскільки $\overline{AB} = \{8, 4, 1\}$, $\overline{AC} = \{2, -2, 1\}$, $\overline{AD} = \{4, 0, 3\}$, то

$$V = \frac{1}{6} |\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}| = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}(-48) = 8.$$

З іншого боку, об'єм тетраедра обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} h_D.$$

Оскільки

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} - 24\vec{k},$$

$$S_{\text{основи}} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-24)^2} = \frac{\sqrt{648}}{2} = 9\sqrt{2},$$

$$\text{звідки } h_D = \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Приклади до розв'язання завдань 1.5 та 1.6.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1, 2, -1)$ та $B(1, 4, 1)$ паралельно осі Ox .

Розв'язування

Площина, яка паралельна осі Ox , визначається рівнянням типу $Bu + Cz + D = 0$. Оскільки шукана площина проходить через задані в умові точки, то їх координати повинні задовольняти це рівняння. Маємо

$$\begin{cases} 2B - C = -D, \\ 4B + C = -D. \end{cases}$$

Звідки знаходимо, що $B = -\frac{1}{3}D$, $C = \frac{1}{3}D$. Таким чином, рівняння шуканої площини

$$-\frac{1}{3}Du + \frac{1}{3}Dz + D = 0 \text{ або } -u + z + 3 = 0.$$

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин $\sigma_1: 9x + 5y + 7z - 21 = 0$ і $\sigma_2: 4x + 2y + 3z + 15 = 0$.

Розв'язування

Площина σ_1 має нормальний вектор $\vec{n}_1(9, 5, 7)$, площина σ_2 має нормальний вектор $\vec{n}_2(4, 2, 3)$. Нормальний вектор шуканої площини \vec{n} перпендикулярний обом нормальним векторам, тому

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Тоді рівняння шуканої площини

$$(x - 0) \cdot 1 + (y - 0) \cdot 1 + (z - 0) \cdot (-2) = 0$$

або

$$x + y - 2z = 0.$$

Приклад 3. Дано вершини тетраедра $A_1(4,6,5)$, $A_2(6,9,4)$, $A_3(2,10,10)$ та $A_4(7,5,9)$. Знайти: рівняння ребра A_1A_2 ; рівняння грані $A_1A_2A_3$; кут між ребром A_1A_2 та гранню $A_1A_2A_3$; рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ та його довжину.

Розв'язування

Оскільки напрямним вектором прямої A_1A_2 є вектор $\overline{A_1A_2} = \{2, 3, -1\}$, то за формулою (1.41) маємо:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-5}{-1}.$$

Рівняння грані $A_1A_2A_3$ – це рівняння площини, що проходить через три точки. Оскільки $\overline{A_1A_2} = \{2, 3, -1\}$, $\overline{A_1A_3} = \{-2, 4, 5\}$, то за формулою (1.33):

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-6 & z-5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідки

$$19(x-4) - 8(y-6) + 14(z-5) = 0$$

або

$$19x - 8y + 14z - 98 = 0.$$

Оскільки напрямний вектор прямої $\overline{A_1A_2} = \{2, 3, -1\}$, а нормальний вектор площини $\vec{n}(19, -8, 14)$, то за формулою (1.43):

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 19 + 1 \cdot 8 + 14 \cdot 4|}{\sqrt{19^2 + (-8)^2 + 14^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{121}{\sqrt{26} \sqrt{621}} \approx 0,97;$$

$$\varphi \approx 88^\circ.$$

Для висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ напрямним вектором є вектор нормалі грані. Тому:

$$\frac{x-7}{19} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-9}{14}.$$

Довжина цієї висоти є відстанню від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$. За формулою (1.38) маємо

$$d_{A_4} = \left| \frac{19 \cdot 7 - 8 \cdot 5 + 14 \cdot 9 - 98}{\sqrt{621}} \right| = \frac{121}{\sqrt{621}} \approx 4,86.$$

Приклад 4. Знайти відстань від точки $M_0(-1, 2, 1)$ до прямої

$l: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}$. Система координат прямокутна декартова.

Розв'язування

Знайдемо рівняння площини σ , що проходить через точку M_0 і перпендикулярна до l . Напрямний вектор $\vec{p}(-1, 2, 1)$ є нормальним вектором площини σ . Тому її рівняння:

$$\begin{aligned} -(x+1) + 2(y-2) + (z-1) &= 0, \\ x - 2y - z + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Знайдемо координати точки N – перетину прямої та площини. Для цього складемо і розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = zt \\ z = t - z \\ x - 2y - z + 6 \end{cases}, \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = 3 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Отже координати точки $N(-\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2})$.

$M_0N \perp l$, тому що M_0N лежить у площині σ , а $\sigma \perp l$. Тому відстанню від точки M_0 до прямої l є довжина відрізка M_0N . Знайдемо її:

$$d = M_0N = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2 + (3 - 2)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Приклад 5. Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2, 1, -1)$ паралельно вектору $\vec{p}(1, -2, 3)$.

Розв'язування

За формулою (1.40) маємо

$$\begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$$

Приклад 6. Дано координати трьох вершин трапеції $A(-3, -2)$, $B(4, -1)$, $C(1, 3)$, діагоналі якої взаємно перпендикулярні. Знайти координати четвертої вершини трапеції (точка D).

Розв'язування

Припустимо, що AD та BC – основи трапеції. Складемо рівняння основи BC (за формулою (1.26)):

$$\frac{x-4}{1-4} = \frac{y+1}{3+1},$$

звідки $4x + 3y - 13 = 0$.

Оскільки основа AD паралельна BC , то її рівняння набуває вигляду $4x + 3y + C = 0$. Для знаходження коефіцієнта C , скористаємось координатами вершини A , які задовольняють наведене рівняння. Маємо: $4(-3) + 3(-2) + C = 0$, звідки $C = 18$. Таким чином, рівняння основи AD : $4x + 3y + 18 = 0$.

Складемо рівняння діагоналі AC :

$$\frac{x+3}{1+3} = \frac{y+2}{3+2} \text{ або } 5x - 4y + 7 = 0.$$

За умовою задачі, вектор нормалі $\vec{n}(5, -4)$ є напрямним вектором діагоналі BD . Тому за формулою (1.26) маємо:

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{-4} \text{ або } 4x + 5y - 11 = 0.$$

Координати точки D знайдемо як координати точки перетину основи AD та діагоналі BD . Для їх знаходження одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 18 = 0, \\ 4x + 5y - 11 = 0. \end{cases}$$

Звідки $y = \frac{29}{2}$, $x = -\frac{123}{8}$, тобто $D\left(\frac{29}{2}, -\frac{123}{8}\right)$.

Приклад 7. Дано рівняння двох сторін трикутника $5x - 4y + 15 = 0$, $4x + y - 9 = 0$ та точку $P(0, 2)$ – точку перетину його медіан. Скласти рівняння третьої сторони.

Розв'язування

Для спрощення подальших міркувань будемо вважати, що стороні BC відповідає рівняння $5x - 4y + 15 = 0$, а стороні AC : $4x + y - 9 = 0$.

Знайдемо координати вершини C :

$$\begin{cases} 5x - 4y + 15 = 0, \\ 4x + y - 9 = 0. \end{cases}$$

Звідки $C(1, 5)$. Нехай $K(x_k, y_k)$ – основа медіани, опущеної із вершини $C(1, 5)$ на сторону AB . Для знаходження її координат використовуємо властивість медіани (точка $P(0, 2)$ ділить кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини):

$$\frac{x_C + \lambda x_k}{1 + \lambda} = x_P, \quad \frac{y_C + \lambda y_k}{1 + \lambda} = y_P.$$

Оскільки $\lambda = \frac{2}{1} = 2$, то

$$\frac{1 + 2x_k}{3} = 0, \quad \frac{5 + 2y_k}{3} = 2$$

і $K\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Знайдемо координати вершин A та B , використовуючи властивість медіани ($AK = KB$) та той факт, що координати вершини A задовольняють рівняння $4x + y - 9 = 0$, а координати вершини B – рівняння $5x - 4y + 15 = 0$. Маємо систему:

$$\begin{cases} x_A + x_B = -1 \\ y_A + y_B = 1 \\ 4x_A + y_A - 9 = 0 \\ 5x_B - 4y_B + 15 = 0 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} x_A = 2 \\ x_B = -3 \\ y_A = 1 \\ y_B = 0 \end{cases}.$$

Таким чином, $A(2, 1)$ і $B(-3, 0)$. За формулою (1.26) рівняння сторони AB таке:

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-1}{-1} \text{ або } x-5y+3=0.$$

Приклад 8. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(5, -1, -3)$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$

Розв'язування

За умовою задачі напрямний вектор \vec{p} заданої прямої буде напрямним вектором шуканої прямої. Знайдемо його координати за формулою (4.17):

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & -1 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \vec{p}(2, 6, -22).$$

Тоді за формулою (1.41) одержуємо рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{-22} \text{ або } \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}.$$

Приклад 9. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-4, 0, 2)$ перпендикулярно до прямих

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4} \text{ та } \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}.$$

Розв'язування

За умовою задачі напрямними векторами заданих прямих є вектори $\vec{p}_1(2, 3, 4)$ та $\vec{p}_2(3, 2, 2)$. Оскільки шукана пряма перпендикулярна до двох заданих прямих, то її напрямний вектор такий:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Тоді за формулою (1.41) одержуємо:

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{-5}.$$

Приклад 10. Довести перпендикулярність прямих

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Умовою перпендикулярності двох прямих є перпендикулярність їх напрямних векторів. Знайдемо напрямні вектори заданих прямих. Маємо

$$\vec{p}_1(2, 3, -6) \quad \text{та} \quad \vec{p}_2 \left(\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right) = \vec{p}_2(-9, -6, -6).$$

Обчислимо скалярний добуток знайдених векторів

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 2 \cdot (-9) + 3 \cdot (-6) + (-6) \cdot (-6) = 0.$$

Оскільки скалярний добуток векторів \vec{p}_1 та \vec{p}_2 дорівнює нулю, то вони, а отже і задані прямі, перпендикулярні.

Приклади до розв'язання завдання 1.7.

Приклад 1. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстані від яких до точки $A(2,0)$ та прямої $2x + 5 = 0$ співвідносяться як 4:5.

Розв'язування

Нехай точка $M(x, y)$ належить шуканій лінії. Тоді відстань від цієї точки до $A(2,0)$ визначається як $|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, а відстань від цієї точки до заданої прямої $d(M, l) = \frac{|2x+5|}{2}$. За умовою задачі

$$\frac{2\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{|2x+5|} = \frac{4}{5}.$$

Звідки,

$$25(x^2 - 4x + 4 + y^2) = 4(4x^2 + 20x + 25),$$

$$9x^2 - 180x + 25y^2 = 0,$$

$$(x-10)^2 + \frac{25}{9}y^2 = 900,$$

$$\frac{(x-10)^2}{100} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1.$$

Отже, шукане геометричне місце точок – еліпс, з центром в точці $O(10, 0)$, малою піввіссю $b = \frac{3}{2}$ та великою піввіссю $a = 10$.

Приклад 2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{12}{13}$.

Розв'язування

З рівностей $c^2 = a^2 - b^2$, $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ і $\varepsilon = \frac{c}{a}$ знайдемо велику піввісь:

$$a = \sqrt{\frac{b^2}{1 - \varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{25}{1 - \frac{144}{169}}} = \sqrt{169} = 13.$$

Таким чином рівняння шуканого еліпса

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Приклад 3. Знайти точки еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, відстань від яких до правого фокуса дорівнює 14.

Розв'язування

Знайдемо половину фокальної відстані із співвідношення:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 36 = 64.$$

Тоді правий фокус має координати $F_2(8,0)$.

Нехай шукані точки еліпса мають координати (x, y) . За умовою задачі складаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1, \\ (x-8)^2 + y^2 = 196. \end{cases}$$

З першого рівняння системи виражаємо y^2 та підставляємо в друге рівняння. В результаті маємо

$$(x-8)^2 + 36 - \frac{36}{100}x^2 = 196.$$

Виконавши необхідні перетворення, одержуємо:

$$x^2 - 25x - 150 = 0, \quad x_1 = 30, \quad x_2 = -5.$$

Точка $x_1 = 30$ не належить даному еліпсу, оскільки його права вершина $A_2(10,0)$. Підставивши $x_2 = -5$ в рівняння еліпса, знаходимо координати шуканих точок $(-5, 3\sqrt{3})$ та $(-5, -3\sqrt{3})$.

Приклад 4. Фокуси гіперболи збігаються з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = 2$.

Розв'язування

Знайдемо половину фокальної відстані еліпса

$$b^2 = a^2 - c^2, \text{ звідки } c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, |c| = 4.$$

З умови задачі $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{2} = 2$. Уявну піввісь гіперболи знаходимо із співвідношення:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12.$$

Отже, рівняння шуканої гіперболи таке:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2: завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань

Елементи математичного аналізу

Завдання 2.1 Знайти границі функцій.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 3x^2 - 4}{\sqrt{9x^6 + 4x}}, \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{4-x^2} \right), \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x}{x^3 + x^2 - x - 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{5x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\operatorname{tg} 5x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 5^{2x}}{3x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+2) - \ln x], \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 2x} \right).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x+1} - 2x \right), \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{x+1}{3x-3}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}, \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln x - \ln(x+1)], \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}{3x^4 - 2} \right), \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{x^2 - 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin x}{3 \sin 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \ln \frac{2x+3}{2x+1} \right), \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{3x}{x-2}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x+3} - x \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-4} \right)^{1-x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x - 2} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{3x^2} \right), \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 - 8} + x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x}}{\ln(1+2x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{3x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) \ln \frac{x}{x+1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x - 2} - \sqrt{x^2 - 4} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{x}{3x+3}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{\operatorname{arctg}^2 2x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-8}+x}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)[\ln 3x - \ln(3x+1)], \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x-1}{4x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{3x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\ln(1+2x)}, \lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{x}{3x+3}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2+3x+1}), \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x+1}{\sqrt{4x^4+5x^3}}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}, \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{2x}{x-2}}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-x}}{x-2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x/3)}{2x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x, \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right), \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x-2) - \ln x], \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4+x+3}{x^4-12x+1}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2+3x} - \sqrt{2x^2+x+1}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{2x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{3x^2}, \lim_{x \rightarrow -2} (3+x)^{\frac{3x}{x+2}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32x^5-x^8}}{e^{5x}-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)[\ln(2x+1) - \ln x], \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{3x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x} \right)^{2x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{9x^2-x+3}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x-1}{5x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{6x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{x-1}{x+1}}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x^2+2x-1} - \sqrt{3x^2+x+2}), \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x - \ln(4x-3)],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg} 3x}{\ln(1-2x)}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{x^3-8}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4-3x^2}{3x^4+1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{5x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{5x^2-x+2} - \sqrt{5x^2+2x-1}), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{5x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{3x}, \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{3x+2}{x-1}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{2x}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)[\ln(x+1) - \ln x], \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{4x}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^3 - x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 2} - \sqrt{x^2 + 3x}), \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}, \lim_{x \rightarrow 3} (4+x)^{\frac{x-2}{x+3}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x - 2}}{x+5}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{2x+1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{e^{3x} - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+1)[\ln(x-1) - \ln(x+2)].$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x\right), \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + x}), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{5x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\sqrt{2-x} - 1}, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{3x+2}{x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1+3x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)[\ln(x-1) - \ln(x+1)], \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{-4x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 5}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1}{4x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 2x + 5}), \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{3x-3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}, \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x^3} - \frac{1}{x-1}\right), \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{3x+4}{x-1}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{7x} - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+2)[\ln(2x) - \ln(2x-1)], \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x-1}\right)^{3x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{4x^3 + 3x^2 + 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{5x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 1}), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16x^4 - x^8}}{e^{8x} - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{2x-4}, \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{2x-3}{x}}, \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 5x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+1)[\ln(4x) - \ln(4x+1)],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right)^{x^2}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2x}{4x + 3}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2^x - 1}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x - 1}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 2x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x}, \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{5x-3}{x-2}}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 4x + 5},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{e^{\sin x} - 1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(2x-3) - \ln(x+1)].$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 7}{2x^5 + 3x^4 + 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{2x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x - 2}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{\sqrt{x - 1} - 1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 1}{8x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{4x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{x + 1} \right)^{2x - 1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(3x + 5) - \ln 3x],$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right), \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 3x + 1}{2x^5 + 3x^4 + 1}, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x + 4}{x^3 + 1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\ln(x - 3) - \ln x], \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{5 - x} - 2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 2x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 2} \right)^{x - 3}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x)}{5x}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x + 2)}{4 - x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x}).$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{2x + \sqrt[3]{x}}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^3 + x^2 - 2x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3) [\ln 5x - \ln(4x + 3)], \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 10x}{\sin^2 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10 - x} - 3}{2x - 2}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{-\frac{1}{\cos x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin 3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt[3]{x^4}}{x - \sqrt[3]{x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^{x + 3}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 5} - \sqrt{x}).$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)^2 (3 - 7x)^2}{(2x - 1)^4}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x - 6}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) [\ln(2x - 1) - \ln x],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sqrt{x + 4} - 2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3 \sin^2 x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x + 1} \right)^{5x}, \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{2}{\sin x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\operatorname{arctg} 3x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 3}).$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{3x+5}, \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-50}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3x+2)-\ln x],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}, \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x^2)}{5x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+2x^2}{\sin^2(x/4)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2}-1}{1-\cos x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x-1}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2-1}).$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^2 x}{5x^3+2}, \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{4}{4-x^2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x^2 - \ln(x-1)], \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{\sin 4x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x-1}{3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x}-1}{\arcsin 2x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{2x-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2+4x}).$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x-2}{x^3-8}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)[\ln(4x-1)-\ln x],$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-\sqrt{3x}}{x-3}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{\sin 3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 6x}-1}{2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\operatorname{tg} x}, \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{3}{x-1}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+8}-x).$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+2}}{4x+1}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+x-12}{x^2+4x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (6x-1)[\ln x - \ln(x-2)], \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-e^x}{\sin 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1-3x}{4x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2^x-1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+6\sqrt{x}} - \sqrt{x}).$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-15}{x^2+3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{3x}, a > 0, a \neq 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-5x)}{6x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{3\sin^2 2x}, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-\sqrt{x+9}}{2x^2+x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+4)[\ln x - \ln(2x-3)],$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{2x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+8x}-x).$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 2}{\sqrt{4x^8 + 2x^2 + 4}}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 16x}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{3 \operatorname{tg}^2 x}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{e^{x-1} - 1}, \lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{2}{x-3}}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(5x-3) - \ln x],$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x}\right)^{2x+1}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-3}).$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x + 1}{3x^3 + 2x - 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 3x}{2x^2 - 9x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)[\ln x - \ln(6x-1)], \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{e^{x^2} - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{1 - \cos x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2-5}), \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{3^x - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{2-x}, \lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{3}{x+1}}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 1}{\sqrt{x^4 - x + 2}}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-5}), \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3+x)^{\frac{5}{x+2}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 3x + \sin 7x}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2x - 2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln(3x+2)],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{\operatorname{tg} 4x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{x-1}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}, \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 6x}), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{3 \sin^2 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{x^3 - 1}, \lim_{x \rightarrow -3} (4+x)^{\frac{6}{x+3}}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin \sqrt{x}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x-4) - \ln(x+1)].$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 3}}{x + 2}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 6}), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{\sin^2 3x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{x^3 - 8}, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{3x+6}{x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{x(x-1)}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(7x+3) - \ln x],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{8^x - 1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{x+4}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2+2x}{3x+1} \right), \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{x^2-3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 7x}{2x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\operatorname{arctg} x^2}, \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi-x}{\operatorname{tg} 2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-5x)}{6^x-1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x - \ln(8x+2)],$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{3x}, \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+8x} - \sqrt{x^2-8}).$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+x}-1}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+6\sqrt{x}} - x), \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 8x}{2\sin^2 x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{\operatorname{arctg} x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2}-1}{2x^2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x-4) - \ln(x+3)],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi \sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{x-1}.$$

Завдання 2.2 Дослідити функцію на неперервність, визначити характер її точок розриву.

$$1. \quad y = \frac{-6}{(x+3)^2}; \quad y = e^{\frac{x}{x+2}}; \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}; \quad y = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$

$$2. \quad y = \frac{3}{(x+1)^3}; \quad y = 2^{\frac{2x}{3-x}}; \quad y = \frac{x^2-9}{x-3}; \quad y = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1. \end{cases}$$

$$3. \quad y = \frac{5}{(x-2)^4}; \quad y = 3^{\frac{1}{2x+1}}; \quad y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x} + 3; \quad y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ x-3, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. \quad y = \frac{2}{x-1}; \quad y = e^{\frac{x+1}{x-2}}; \quad y = \frac{x^2-4}{x+2}; \quad y = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

5. $y = \frac{-2}{(x-3)^2}$; $y = 4^{\frac{2x}{x-1}}$; $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$; $y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$
6. $y = \frac{3}{(x-3)^3}$; $y = 5^{\frac{2x+1}{x-3}}$; $y = \operatorname{arcctg} \frac{2}{x-1}$; $y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$
7. $y = \frac{4}{(x+1)^5}$; $y = 2^{\frac{1}{2^{2x+2}}}$; $y = \frac{x^2 + x - 6}{x+2}$; $y = \begin{cases} -(x+1), & x \leq 0, \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$
8. $y = \frac{-3}{(x+5)^2}$; $y = 3^{\frac{1}{2-2x}}$; $y = \operatorname{arctg} \frac{3}{x+1}$; $y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \pi/4, \\ 2, & x > \pi/4. \end{cases}$
9. $y = \frac{-2}{x-4}$; $y = e^{\frac{1}{6^{3-x}}}$; $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x+4}$; $y = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$
10. $y = \frac{-3}{(x+3)^3}$; $y = 6^{\frac{4+x}{3-x}}$; $y = \frac{x^3 - 1}{x-1} + 2$; $y = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$
11. $y = \frac{1}{(x-5)^4}$; $y = 2^{\frac{1}{4-2x}}$; $y = \operatorname{arcctg} \frac{2}{x-2}$; $y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ 0.5x, & 0 < x \leq 2, \\ 3, & x > 2. \end{cases}$
12. $y = \frac{2}{(x-4)^5}$; $y = 5^{\frac{1+2x}{1-x}}$; $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x+2}$; $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ -2x+3, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$
13. $y = \frac{4}{x+2}$; $y = 4^{\frac{1}{3-3x}}$; $y = \frac{x^3 - 1}{x-1}$; $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$

14. $y = \frac{-1}{(x-4)^2}$; $y = 3^{\frac{3x}{2-x}}$; $y = \operatorname{arctg} \frac{3}{x+2}$; $y = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ 2-x^2, & -1 < x \leq 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$
15. $y = \frac{3}{(x+4)^3}$; $y = e^{\frac{1+2x}{3-x}}$; $y = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$; $y = \begin{cases} x-3, & x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x \leq 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$
16. $y = \frac{-6}{(x+1)^4}$; $y = 2^{\frac{1+x}{3-x}}$; $y = \frac{x^3+8}{x+2}$; $y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$
17. $y = \frac{5}{(x-1)^5}$; $y = 7^{\frac{1-x}{x-2}}$; $y = \frac{x^2+3x-4}{x+4}$; $y = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$
18. $y = \frac{2+x}{(x-6)^2}$; $y = 9^{\frac{1+2x}{1-x}}$; $y = \frac{x^3+1}{x+1}$; $y = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$
19. $y = \frac{6+x}{(x-3)^2}$; $y = e^{\frac{1}{8-4x}}$; $y = \frac{x^2+3x-10}{x-2}$; $y = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$
20. $y = \frac{7}{(x+1)^3}$; $y = 4^{\frac{1}{2x+2}}$; $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}$; $y = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x \leq \pi, \\ x, & x > \pi. \end{cases}$
21. $y = \frac{4-x}{(x+5)^2}$; $y = 7^{\frac{4x}{x+1}}$; $y = \frac{x^3-8}{x-2}$; $y = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \pi/2, \\ x, & x \geq \pi/2. \end{cases}$
22. $y = \frac{3}{(x+6)^3}$; $y = 10^{\frac{4-x}{x+2}}$; $y = \frac{x^2-x-12}{x+3}$; $y = \begin{cases} 3x+1, & x < 0, \\ x^2+1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$

23. $y = \frac{-7+x}{(x-2)^4}$; $y = 9^{\frac{1+3x}{x-3}}$; $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{1-x}$; $y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$
24. $y = \frac{6}{(x-4)^5}$; $y = 3^{\frac{5-x}{1-x}}$; $y = \frac{x^3-x}{x-1}$; $y = \begin{cases} 2, & x \leq -\pi/4, \\ \operatorname{tg} x, & -\pi/4 < x < 0, \\ 3x, & x \geq 0. \end{cases}$
25. $y = \frac{-2-x}{(x+1)^2}$; $y = 6^{\frac{1}{2x+2}}$; $y = \frac{x^2-3x+2}{x-2}$; $y = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \sqrt{x+2}, & -2 \leq x < 2, \\ x+1, & x \geq 2. \end{cases}$
26. $y = \frac{3x+3}{x-2}$; $y = 2^{\frac{2x}{3-x}}$; $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x+3}$; $y = \begin{cases} -0.5x, & x < -2, \\ x^2+1, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & x \geq 1. \end{cases}$
27. $y = \frac{2x}{(x-7)^2}$; $y = 5^{\frac{1}{4-2x}}$; $y = \frac{\sin(x-1)}{x-1}$; $y = \begin{cases} x-2, & x < -1, \\ -x^2, & -1 \leq x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$
28. $y = \frac{-3}{(2x+6)^3}$; $y = 4^{\frac{3x}{3+x}}$; $y = \frac{x^3-4x}{x-2}$; $y = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ -\cos x, & 0 < x \leq \pi, \\ 3, & x > \pi. \end{cases}$
29. $y = \frac{-5}{(x+7)^4}$; $y = 3^{\frac{x+1}{8-x}}$; $y = \frac{x^2-5x-6}{x+1}$; $y = \begin{cases} -0.5x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 2, & x > \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$
30. $y = \frac{4x}{(x-1)^2}$; $y = 6^{\frac{-3}{4+4x}}$; $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-3}$; $y = \begin{cases} 2, & x \leq -1, \\ 3-x^2, & -1 < x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$

Завдання 2.3 Знайти похідні функцій.

$$1. y = 3xe^{-3x^2} + 2; y = \frac{5x}{\sin 3x+2}; y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}; y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}); y = 2xe^{\sin 5x};$$

$$y = \sin(\ln(1 + e^{\sqrt{x}})); y = \operatorname{arctg}^3 5x; y = \cos^4(1 + \sqrt{x}); y = x^{\operatorname{tg} x}; x \sin 2y + y^2 = 4.$$

$$2. y = (4 - x^2)e^{\sqrt{x}} + \pi; y = \frac{1-3x^2}{\cos 5x+4}; y = \frac{\sqrt[3]{1-3x^2}}{5x+4}; y = \ln(x + \frac{1}{x+4});$$

$$y = (3 + x^5) \cdot e^{\sin x}; y = \operatorname{arctg}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x\right)\right); y = \arcsin^4(1 - x); y = \sin^3(e^x + 3);$$

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}; \cos(x + y) = \sqrt[3]{y}.$$

$$3. y = x^2 2^{-x} + 5; y = \frac{7x}{\sin 5x+2}; y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2+3}; y = \ln(3x - \sqrt{1-x}); y = 3x \cdot e^{\cos 4x};$$

$$y = \sin \ln(1 - 3^2); y = \arcsin^5 3x; y = \sin^8(1 + \sqrt[3]{x}); y = x^{\sin x}; x \sin 2y = y^3.$$

$$4. y = 5x^3 \cdot 3^{2-x} + 4; y = \frac{3-x}{\sin 2x-4}; y = \frac{\sqrt{1-2x^3}}{4-x}; y = \ln(\sqrt[3]{1-x^2} + 3);$$

$$y = x^2 e^{-\cos 3x}; y = \ln \sin(4 + e^{-x}); y = \operatorname{arctg}^5(1 - 3x); y = x^{\cos(1-x)}; y = \cos^3(1 - e^{3x});$$

$$y = x \operatorname{tg}(xy) - e^{-y} = 0.$$

$$5. y = (1 - 4x)e^{-x^3} + \ln 2; y = \frac{\arcsin(1 - 5x^2)}{1-x}; y = (1 - x^2) \cdot 2^{\cos(1+x)};$$

$$y = \sin \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right); y = \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x - x^2}}; y = \ln \frac{1}{x^2 + \sqrt{x} + 3}; y = \arccos^3 7x;$$

$$y = \sin^5(e^x + x); y = (x + 7)^{\cos x}; \cos(x + y) + \frac{x}{y} = 3.$$

$$6. y = (x + 4)e^{1-x^2} + \sqrt{2}; y = \frac{3x+1}{\arcsin(1-x)}; y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{3-x^3}; y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1-x}};$$

$$y = (3 + x^2) \cdot e^{\arccos 2x}; y = \operatorname{arctg}\left(\ln\left(e^{\frac{1}{x}} + 5\right)\right); y = \sin^3(1 - e^{2x}); y = (x + \sin x)^x;$$

$$y = \cos(1 - y) + \frac{x^3}{y} = 10.$$

$$7. y = (x-1)\arccos x + \ln 2; y = \frac{\cos(1-x)+5}{x^4}; y = \frac{\sqrt{x^5+4}}{3x+2}; y = x^3 e^{\arctg 3x};$$

$$y = \ln(x^2 - \sqrt[3]{1-x}); y = \ln \arctg \sqrt[5]{x}; y = \sin^8 3x; y = \ln^7(9x) - e^{-x}; y = x^{\ln(1-e^x)};$$

$$y^3 e^{xy} + \cos x = 3.$$

$$8. y = x^2 4^{1-x^2} + \pi; y = \frac{1+3x^2}{1+3\cos 5x}; y = \frac{5-x}{\sqrt{1-3x^3}}; y = x^3 e^{\arctg 3x};$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{5-x} + x^2); y = \cos \operatorname{tg}(\sqrt{x} - x^2); y = \arcsin^5(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}); y = \arctg^3(1-x);$$

$$y = (1-x)^{\cos 3x}; x \arccos y + y^2 = 3.$$

$$9. y = x^4 e^{1-\sqrt{x}} + 4; y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(1+x)^3}; y = \frac{\cos(1-5x)}{4+x^2}; y = \ln(\sqrt[3]{4+x^2} + 1); y = x^5 2^{\operatorname{tg} x};$$

$$y = \arccos(\ln(e^{-x} + x)); y = \arctg^7(1-x); y = (\arcsin x)^{-x^2}; y = \sin^8(1+2\sqrt{x});$$

$$y\sqrt{x} + \cos(3x+y) = 4.$$

$$10. y = 3x \cdot e^{-3+2x^3} + 2; y = \frac{5x}{\sin 3x+2}; y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}; y = \ln(x + \sqrt{x^2+1});$$

$$y = 2x e^{\sin 5x}; y = \sin \ln(1 + e^{\sqrt{x}}); y = \arctg^3 5x; y = \cos^4(1 + \sqrt{x}); y = x^{\operatorname{tg} 3x};$$

$$x \sin 2y + y^2 = 4.$$

$$11. y = 3x^5 4^{-7x}; y = \frac{\arctg(5-x)}{1+x^4}; y = \frac{1-3x}{\sqrt[3]{(2x+4)^3}}; y = \ln(x + e^{-x^3});$$

$$y = 2^{\ln 3x}(1-3x^2); y = \arctg(\ln(e^{2x}-4)); y = \arcsin^3(1 - \frac{1}{x}); y = \cos^6(1-x);$$

$$(3\sin x)^{\sqrt{x}} = y; y \ln x - x \ln y = x + y.$$

$$12. y = 2x^5 e^{1-7x}; y = \frac{1-7x^2}{\arccos 3x+4}; y = \frac{\sqrt{3-4x^2}}{1-5x}; y = \ln \frac{1}{4 + \sqrt[3]{4+2x}};$$

$$y = 5^{\cos 4x}(1+4x^3); y = \cos^3(4 + e^{\sqrt{x}}); y = x^6 \cdot 2^{\operatorname{tg} x}; y = \operatorname{arctg}(\ln(1 + 4e^{4x-5}));$$

$$y = (\sqrt{x})^{\sin(1-x)}; y = \ln(x+y) + x^2.$$

$$13. y = 4^{3-x}(1-7x^3) + e^2; y = \frac{2x+7}{\cos(5-x^2)}; y = \frac{\sqrt{2x-x^3}}{x-7}; y = \ln\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

$$y = (4x-7)e^{\sin(1-x)}; y = \arcsin \ln(2^{\sqrt{1-x}} + 4); y = \operatorname{tg}^7(1-3x^2); y = \sin^5(1-e^{-x});$$

$$y = x^{\operatorname{arctg} 5x}; y = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln \frac{x}{y} = e^2.$$

$$14. y = (1-3x) \cdot 4^{2x} + 7; y = \frac{3+2x}{\sin(1-x)}; y = \frac{\sqrt[3]{4-5x}}{x^3+4}; y = x^2 e^{\sin(1-2x)};$$

$$y = \ln(\sqrt[4]{1-x} + 4x); y = \arccos^2(1+3x); y = \operatorname{tg} \ln(1-e^{x^2}); y = \operatorname{arctg}^3(3^{\sqrt{x}} + x);$$

$$y = (4-7x^3)^{\ln x}; \cos(x+y^2) + xy = 3.$$

$$15. y = (x-1)^2 e^{x^3} + 7; y = \frac{\arcsin 5x+3}{1-7x^3}; y = \frac{1+\sqrt[3]{x-x^2}}{1+4x^3}; y = \ln\left(\frac{1}{x+4} + \sqrt{x}\right);$$

$$y = 3^{\sin 8x}(4+7x^4); y = \cos^5(x^2-7x); y = \ln^7(e^{\sqrt[3]{x}} + x); y = \ln \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x} + x);$$

$$y = (\sqrt{x}+1)^{2x^2+3}; \arcsin(x+y) = \frac{y}{x}.$$

$$16. y = (\sqrt{x}+3)e^{x^2} + 7; y = \frac{(3x-4)^2}{\sqrt{x}+7}; y = \frac{1+\sqrt[3]{x-x^2}}{1+4x^3}; y = \ln(\sqrt[3]{1-x^3}+2);$$

$$y = x^3 3^{\operatorname{arctg} 5x}; y = \arcsin \ln(e^{\sqrt{x}} + 3x); y = \operatorname{arctg}^6(5-3x); y = \sin^6(e^{\sqrt[3]{x}} + x);$$

$$y = (\arcsin x)^{\sqrt{x}}; xy + \ln(x+5y) = 3.$$

$$17. y = 2x^3 4^{1-x^8}; y = \frac{\operatorname{arctg}(5x-3x^3)}{\sqrt{x}+4}; y = \frac{5-3x^2}{\sqrt{3x^3+4}}; y = x^5 2^{\ln(1-9x)};$$

$$y = \ln(x+3^{-\sqrt{x}+4}); y = \arccos\left(\ln\left(e^{-\sqrt{x^2+4}}\right)\right); y = \sin^7(3-8x);$$

$$y = \arcsin^4(1+x^2); y = (5\operatorname{tg} x)^{1-\sqrt{x}}; \cos(x^2-y) + \frac{3x+1}{y} = 4.$$

$$18. y = \sqrt[3]{x^2} e^{1-3x^3}; y = \frac{x-7x^2}{\sqrt{x^2-4x}}; y = \frac{\sin(3x-4x^2)}{5+x^3}; y = \operatorname{tg}^7(3-7x);$$

$$y = \ln\left(\sqrt[3]{1-2x^2} + 1\right); y = x^4 2^{\arcsin \sqrt{x}}; y = \operatorname{arctg} \ln\left(e^{\sqrt[3]{x^2-x}} + 3\right); y = \sin^4(e^{-x^3} + x^2);$$

$$y = (\arccos x)^{\sqrt{x}}; \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2} = 3.$$

$$19. y = (2 - 7x^2) \cdot 3^{-3x} + \sqrt{2}; y = \frac{1 - 5x}{\cos(3 - 2x^3)}; y = \frac{1 - 4x^4}{\sqrt[3]{5 - x}}; y = (1 - 4x^2)^{\sqrt{x}};$$

$$y = \ln(3x - \sqrt[3]{x^2}); y = (3x - 4)e^{\sin 4x}; y = \arccos^5(1 - 4x^2); y = \operatorname{arctg}^4(e^{5x} + 3);$$

$$y = \operatorname{tg} \ln(5^{\sqrt{x}} + 4); \cos(x^3 - y) + \frac{y}{x} = 1.$$

$$20. y = (1 + 7x) \cdot e^{3x+x^2} + 7; y = \frac{\arcsin(1 - 7x)}{\sqrt{1 - x^2}}; y = \frac{\sqrt{x + 4}}{x^5 + 4x^3}; 7 = \ln(x + \sqrt[3]{1 - x});$$

$$y = (4 - x^3) \cdot 3^{\sin(1 - 3x)}; y = \ln\left(\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x}\right); y = \operatorname{arctg}^2 3x; y = \sin^3\left(e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

$$y = (\cos x)^{1 - \sqrt{x}}; \ln(x^3 - y^3) = x.$$

$$21. y = (1 - x^2) \cdot 2^{1 - \sqrt{x}} + 4; y = \frac{1 - 7x}{1 - 2 \sin x}; y = \frac{\sqrt[3]{1 - x^2}}{3 - 4x}; y = x^4 e^{\cos 5x};$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{1 - 4x} + x); y = \sin \operatorname{arctg}(\sqrt{x} + 4); y = \operatorname{arctg}^5(1 - x); y = \ln^7\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right);$$

$$y = (1 - 4x^2)^{\sin 3x}; x^3 \arccos y - y^4 = \sqrt{e}.$$

$$22. y = (5 - 3x)3^{x^2} + 7; y = \frac{\sin(5x - x^2)}{1 - x}; y = \frac{5x + 4}{\sqrt[3]{x} + 4x}; y = \cos^3(e^{\sqrt{x}} + 4);$$

$$y = \ln(5x - \sqrt[3]{x^2 - 7x}); y = \ln \sin(5 - e^{-\sqrt{x}}); y = x^5 e^{\operatorname{arctg} x}; y = \arccos^7(1 - 5x);$$

$$y = (\sqrt{x})^{\ln x}; \frac{x}{y^2} + \operatorname{arctg} x y = 1.$$

$$23. y = 5xe^{x^2+4} + \pi; y = \frac{\operatorname{arctg}(5 - x)}{x^2 + 4}; y = \frac{15 + x^3}{\sqrt{x - 7x^2}}; y = \ln \frac{x}{1 - \sqrt[3]{x}};$$

$$y = \arccos(\ln(7 - \sqrt[3]{x})); y = x^4 2^{\cos \sqrt{x}}; y = \operatorname{arcctg}^4 5x; y = \sin^9(3 - e^{\sqrt{x}});$$

$$y = (x + \cos 3x)^{x^2}; \sin(x - y) + x^3 y = 3.$$

$$24. y = (1 - x^3)e^{5x} + 7; y = \frac{\operatorname{tg}(1 - 3x)}{x^3 + 4}; y = \frac{\cos \sqrt{x} + 4}{\sqrt[3]{x} + x}; y = \sin^7(1 - x^2);$$

$$y = x^7 7^{\arcsin 5x}; y = \ln \frac{x}{\sqrt[6]{1 + 5x - x}}; y = \ln \cos\left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right); y = \ln^4(1 + e^{5x});$$

$$y = \left(\operatorname{arctg}(1 - \sqrt{x})\right)^x; x^3 e^{x+y} - y = 4.$$

$$25. y = (5x - 4)e^{\frac{1}{\sqrt{x}+3}}; y = \frac{(2x+4)^5}{\sqrt[4]{x^3}}; y = \frac{5+4x^3}{\operatorname{tg}(1-7x)}; y = x^3 5^{\cos(1-x)};$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{1-x^2} - x); y = \arcsin \ln\left(e^{1-5x} - \frac{1}{x}\right); y = \cos^7(e^{\sqrt{x}} + 3x);$$

$$y = \sin^9(1+3^{\sqrt{x}}); y = [\cos(1-x)]^x; \sqrt{y}x - \sin(5y-x) = 0.$$

$$26. y = (3+2x^2) \cdot e^{\sqrt{3-x}} + 4; y = \frac{4-5x}{\cos 3x-7}; y = \frac{\sqrt[3]{4-7x}}{3x^2+7}; y = (4-x^3)e^{\sin(2+4x)};$$

$$y = \ln\left(5x - \frac{1}{1-x}\right); y = \sin \ln(1-2^{5x}); y = \arcsin^3(2+3x); y = \sin^4(e^{3x}-1);$$

$$y = (\operatorname{tg} x)^{3-\sqrt{x}}; \cos(x+y) + \sqrt[4]{y} = 0.$$

$$27. y = x^7 2^{5x} + 7\pi; y = \frac{4x^2}{\cos(1-x)+4}; y = \frac{\sqrt{1-8x}}{x^3+1}; y = \ln(7x + \sqrt[3]{x^2});$$

$$y = 4xe^{\cos 9x}; y = \cos \ln(1-3^x); y = \arcsin^3(1-7x); y = \sin^4(1-5x^2);$$

$$y = (4-5x)^{\sin 2x}; y^2 \sin 5x + xy = 4.$$

$$28. y = 3x^5 3^{-x^2} - \pi^3; y = \frac{5-2x}{\sin 3x-1}; y = \frac{\sqrt{1-3x^2}}{3-2x}; y = 3x^3 \cos^4 x;$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{1-5x^2} - x); y = \ln \sin(5-e^{3x}); y = \operatorname{arctg}^3(1+4x); y = \cos^5(4+e^{2x});$$

$$y = x^{\cos(5-2x)}; (x+1) \cdot \operatorname{tg}(y^2 x) + e^4 = 0.$$

$$29. y = (3-2x)e^{-x^3} + \sqrt{3}; y = \frac{\arcsin(3+4x^2)}{1+3x}; y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}}; y = \frac{3x^3+4}{\sqrt{2x+x^2}};$$

$$y = (1-5x^2) \cdot 2^{\cos(1-x)}; y = \sin \ln\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right); y = \arcsin^3(e^{-x} + 2x); y = (1-x)^{\cos 3x};$$

$$\cos(x-y) + \frac{y^3}{x} = 3.$$

$$30. y = (3+2x) \cdot 5^{1-x^2} + 4; y = \frac{\sin(1-7x)}{5-x^2}; y = \frac{\sqrt[3]{1+5x}}{3x^2-2}; y = \ln(5x - \sqrt[3]{x^2});$$

$$y = x^4 \cdot e^{\arcsin 2x}; y = \ln \cos(3-e^{\sqrt{x}}); y = (\operatorname{tg} 3x)^{x^2}; y = \arccos^8 5x;$$

$$y = \sin^4\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right); \frac{x}{y^2} + \operatorname{arctg}(x+y) = \pi^2.$$

Завдання 2.4 Провести повне дослідження функцій і накреслити їх графіки.

1. $y = \frac{x+1}{x^3}$; $y = xe^{-x} + 1$.
2. $y = \frac{x^2}{x-1}$; $y = (2+x)e^x - 1$.
3. $y = \frac{x^3}{x^3-2}$; $y = (x-1)e^{-2x} + 2$.
4. $y = \frac{-x}{x^3-1}$; $y = (3x-1)e^{2x} - 3$.
5. $y = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2$; $y = (2x+1)e^{2x} + 1$.
6. $y = \frac{3x^3}{x^3+6}$; $y = 2xe^x - 1$.
7. $y = \frac{x^2+1}{2x+3}$; $y = (3-x)e^{-x} + 3$.
8. $y = \frac{x^3}{x^2+2x+3}$; $y = (3x+1)e^{-x} + 2$.
9. $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$; $y = (1-x)e^{-x} + 1$.
10. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$; $y = (2x+1)e^x - 1$.
11. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$; $y = (1-3x)e^{2x} + 2$.
12. $y = \frac{x^3}{x^2+1}$; $y = 3xe^{-x} + 1$.
13. $y = \frac{-x^2}{(x-2)^2}$; $y = (5x-2)e^{-x} + 3$.
14. $y = \frac{x}{x^3-2}$; $y = (2x-1)e^{2x} + 3$.

15. $y = \frac{4x^3}{x^3-1}$; $y = (4-2x)e^x - 2.$
16. $y = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x}$; $y = (x+3)e^{-2x} + 1.$
17. $y = \frac{x+3}{x^3}$; $y = -xe^x + 2.$
18. $y = \frac{4x^3+5}{x}$; $y = (2x+5)e^{2x} + 1.$
19. $y = \frac{x^2}{x^3+1}$; $y = (1-x)e^x + 1.$
20. $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$; $y = (x+1)e^{-x} + 3.$
21. $y = \frac{x}{2-x^3}$; $y = (2x+3)e^x + 2.$
22. $y = \frac{x}{x^2-4}$; $y = (x-3)e^{-2x} + 4.$
23. $y = \frac{4x^3}{x^3-1}$; $y = 2xe^{-x} - 1.$
24. $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$; $y = (2x-1)e^{-x} - 2.$
25. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$; $y = (x-2)e^{2x} - 3.$
26. $y = \frac{-x}{x^3+3}$; $y = (2x-3)e^{-3x} + 1.$
27. $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$; $y = -xe^{2x} + 2.$
28. $y = \frac{x}{x^3-4}$; $y = (5-2x)e^{-x} + 3.$
29. $y = \frac{x-2}{(x+1)^2}$; $y = (2x+4)e^x - 1.$
30. $y = \frac{x}{x^2-4x+3}$; $y = (2x-3)e^x - 1.$

Для розв'язання контрольної роботи № 2 [1, 5, 9] вам знадобляться такі поняття, формули та алгоритми

1. Границя сталого дорівнює сталому, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = k, \text{ де } k = \text{const.} \quad (2.1)$$

2. Границя суми функцій $x_n + y_n$ дорівнює сумі границь функцій доданків, тобто:

$$\text{якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b. \quad (2.2)$$

3. Границя добутку дорівнює добутку границь,

$$\text{якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b. \quad (2.3)$$

4. Сталий множник можна виносити за знак границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (2.4)$$

або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^k. \quad (2.5)$$

5. Границя частки двох послідовностей дорівнює частці границь цих послідовностей, якщо границя знаменника не дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \text{ де } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0. \quad (2.6)$$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$, де $a = \text{const.}$ (2.7)

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a x_n = \log_a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, де $a = \text{const.}$ (2.8)

8. Перша важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.9)$$

9. Друга важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad e = 2,71828\dots \quad (2.10)$$

10. Якщо функція $f(x)$ є нескінченно малою функцією, тобто $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то для неї справедлива таблиця еквівалентності.

Таблиця еквівалентних н. м. функцій ($\alpha(x) \rightarrow 0$).

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x),$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x),$
$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x),$
$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x),$	$\sqrt{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{2} \alpha(x),$
$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$	$(1 + \alpha(x))^p - 1 \sim p \cdot \alpha(x),$
$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \ln a \cdot \alpha(x),$	$\ln \cos \alpha(x) \sim -\frac{1}{2} \alpha^2(x).$

11. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці x_0* , якщо вона має в цій точці границю, яка дорівнює значенню функції в точці x_0 , тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.11)$$

12. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0 , а функція $f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $f(\varphi(x)) = F(x)$ неперервна в точці x_0 .

13. Точки розриву функції та їх класифікація.

13.1 Означення: якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 не є неперервною, то точка $x = x_0$ називається *точкою розриву* функції (discontinuity point).

Зауваження! Елементарна функція не може мати розривів у внутрішніх точках своєї області визначення.

13.2 Точки розриву першого роду.

Означення: точка $x = x_0$ називається *точкою розриву* функції $y = f(x)$ *першого роду*, якщо існують скінченні односторонні границі при $x \rightarrow x_0$, але вони не рівні між собою.

$$x_0 \text{ - т. р. I-го роду} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = b_1, & \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = b_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

13.3 Точки розриву другого роду.

Означення: точка $x = x_0$ називається *точкою розриву* функції $y = f(x)$ *другого роду*, якщо хоч би одна з односторонніх границь (зліва чи справа) при $x \rightarrow x_0$ не існує (зокрема, дорівнює нескінченності).

13.4 Точки усувного розриву.

Означення: точка $x = x_0$ називається *точкою усувного розриву* функції $y = f(x)$, якщо в цій точці виконується умова $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = b$, але або $b \neq f(a)$, або $f(a)$ не існує.

14. Правило диференціювання: якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні в точці x , то справедливі формули для похідних суми, добутку та частки цих функцій:

$$1) (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x);$$

$$2) (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x);$$

$$3) \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}, \text{ при } v(x) \neq 0.$$

Зуваження! Сталій множник при диференціюванні виноситься за знак похідної, тобто:

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x), \text{ де } c = \text{const}.$$

15. Похідна складеної функції.

Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці u і функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x , то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ також має похідну в точці x , причому

$$y'_x = (f[\varphi(x)])' = f'(u) \cdot \varphi'(x) \quad (2.13)$$

або скорочено

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (2.13^*)$$

16. Таблица похідних основних елементарних функцій:

- 1) $(const)' = 0;$
- 2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1},$ $(\forall n \in N \text{ або } \forall n \in R \text{ при } x > 0);$
- 3) $(a^x)' = a^x \ln a,$ $(\forall a > 0, a \neq 1);$
- 4) $(e^x)' = e^x;$
- 5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$ $((\forall a > 0, a \neq 1) \cap \forall x > 0);$
- 6) $(\ln x)' = \frac{1}{x},$ $(\forall x > 0);$
- 7) $(\sin x)' = \cos x;$
- 8) $(\cos x)' = -\sin x;$
- 9) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z);$
- 10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$ $(x \neq \pi k, k \in Z);$
- 11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $(|x| < 1);$
- 12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $(|x| < 1);$
- 13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
- 14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$
- 15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$
- 16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$
- 17) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$
- 18) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$ $(x \neq 0).$

17. Логарифмічне диференціювання.

Для функції типу $y = u(x)^{v(x)}$ отримаємо

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} u'(x) \right]$$

або

$$\left(u(x)^{v(x)} \right)' = u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x). \quad (2.14)$$

18. Диференціал функції.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0 , то вираз $f'(x_0) \cdot \Delta x$ називається *диференціалом* функції в цій точці і позначається символом $dy(x_0)$, тобто

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (2.15)$$

Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом, тобто

$$dx = \Delta x.$$

Для будь-якої диференційованої в точці x функції $y = f(x)$ формулу (2.15) можна записати так:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Звідки отримаємо, що

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad (2.16)$$

тобто похідну можна розглядати як відношення двох диференціалів.

19. Застосування диференціала в наближених обчисленнях:

При малих Δx має місце наближена рівність:

$$\Delta y \approx dy, \text{ тобто } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Звідки

$$f(x_1) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (2.17)$$

20. Диференціювання функцій, заданих параметрично.

Нехай функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ параметрично задають функцію $y = y(x)$, причому $x(t)$ і $y(t)$ – функції диференційовні за змінною t і $x'(t) \neq 0$.

Похідну y'_x від функції y за змінною x знаходимо, диференціюючи $x = x(t)$ і $y = y(t)$ за змінною t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t) \cdot dt}{x'(t) \cdot dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \text{ тобто}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad (x'_t \neq 0). \quad (2.18)$$

21. Похідні вищих порядків від функцій, заданих параметрично.

Якщо функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ параметрично задають функцію $y = y(x)$, то похідні $y'_x = \frac{dy}{dx}$, $y''_x = \frac{d^2y}{dx^2}$ можна послідовно обчислити за формулами:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \text{ і т. д.}$$

Так, для похідної другого порядку має місце формула:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}. \quad (2.19)$$

22. Загальна схема дослідження функції.

Приведемо схему, за якою доцільно досліджувати графік функції.

22.1 Знайти область визначення, перевірити функцію на парність, непарність, періодичність.

22.2 Визначити область неперервності та точки розриву.

22.3 Знайти асимптоти графіка функції.

Пряма $y = kx + b$ є *похилою асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, де

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (2.20)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx). \quad (2.21)$$

Зауваження! Формули (2.20), (2.21) мають місце у випадку $x \rightarrow -\infty$.

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо справедлива хоча б одна рівність

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty \text{ або } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$$

22.4 Дослідити функцію на монотонність (знайти критичні точки першого роду, визначити проміжки зростання і спадання функції, знайти точки локального екстремуму).

Схема дослідження функції на монотонність

22.4.1 З'ясовують область визначення заданої функції $y = f(x)$.

22.4.2 Шукають першу похідну функції $y = f(x)$.

22.4.3 Прирівнюють першу похідну до нуля і знаходять корені рівняння $f'(x) = 0$ та точки, в яких похідна не існує.

22.4.4 Наносять одержані розв'язки рівняння $f'(x) = 0$ (зафарбовані точки) та точки, в яких похідна не існує («виколоти» точки) на числову вісь. Ці точки розбивають числову вісь на числові проміжки.

22.4.5 Досліджують знак похідної на кожному числовому проміжку. З цією метою з кожного проміжку вибирають довільне значення (точку) та з'ясовують знак похідної в цій точці.

Зауваження!

1. Для того, щоб диференційовна на проміжку X функція $f(x)$ не спадала (не зростала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб її похідна в усіх точках цього проміжку була не від'ємна (не додатна), тобто $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

2. Якщо при переході значень аргументу x функції $f(x)$ через критичну точку x_0 її похідна змінює знак, то критична точка є точкою локального екстремуму, причому:

3. а) при зміні знака з «плюса» на «мінус» точка x_0 є точкою локального максимуму;

б) при зміні знака з «мінуса» на «плюс» – точкою локального мінімуму.

22.4.6 За одержаними результатами формуємо відповідь.

22.5 Знайти точки перегину, проміжки опуклості і вгнутості.

Схема дослідження функції на опуклість

22.5.1 З'ясовують область визначення заданої функції $y = f(x)$.

22.5.2 Шукають другу похідну функції $y = f(x)$.

22.5.3 Прирівнюють другу похідну до нуля і знаходять корені рівняння $f''(x) = 0$ та точки, в яких похідна не існує.

22.5.4 Наносять одержані розв'язки рівняння $f''(x) = 0$ (зафарбовані точки) та точки, в яких похідна не існує («виколоті» точки) на числову вісь. Ці точки розбивають числову вісь на числові проміжки.

22.5.5. Досліджують знак другої похідної на кожному числовому проміжку. З цією метою з кожного проміжку вибирають довільне значення (точку) та з'ясовують знак другої похідної в цій точці.

✓ Якщо функція $f(x)$ має неперервну другу похідну на проміжку X , то за умови $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) $\forall x \in X$ графік – опуклий (вгнутий);

✓ Точка, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої $f(x)$ від вгнутої, називається *точкою перегину*.

22.5.6 За одержаними результатами формуємо відповідь.

22.6 Знайти точки перетину графіка з віссю ординат; точки перетину з віссю абсцис (якщо це можливо); інші контрольні точки.

22.7 За одержаними результатами побудувати ескіз графіка функції.

23. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.

Звідси зрозуміло, що для знаходження найбільшого M і найменшого m значень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ потрібно:

1) знайти критичні точки, які належать відрізку $[a; b]$;

2) обчислити значення функції в цих критичних точках і в точках a та b ;

3) з усіх отриманих значень вибрати найбільше $M = \max_{x \in [a; b]} f(x) = f(x_1)$ і

найменше $m = \min_{x \in [a; b]} f(x) = f(x_2)$ та відмітити точки, в яких ці значення досягаються.

Приклади до розв'язання завдання 2.1.

1. Безпосереднє обчислення границь шляхом підстановки граничного значення та використання основних теорем про границю.

Приклад 1.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x + 3}{x + 7} = \frac{2^3 - 2 \cdot 2 + 3}{2 + 7} = \frac{7}{9}.$$

Приклад 2.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{4^{x+1}} = 4^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x+1}} = 4^{\frac{2 \cdot 2}{2+1}} = 4^{\frac{4}{3}}.$$

Приклад 3.
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Запам'ятай добре! 1. Якщо при підстановці граничного значення одержуємо різницю або частку нескінченно великих, то кажуть, що ми маємо *невизначеність* (ambiguity, uncertainty) типу $[\infty - \infty]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

2. Відношення нескінченно малих величин називають невідомістю типу $\left[\frac{0}{0} \right]$, а добуток нескінченно малої на нескінченно велику називається невідомістю типу $[0 \cdot \infty]$.

2. Розкриття невідомостей типу $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, якщо під знаком границі стоїть

дробово-раціональна функція (fractional rational function) $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де

$$P_m(x) = p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \dots + p_1 x + p_0,$$

$$Q_n(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_1 x + q_0, (x \rightarrow \infty).$$

а) якщо $m > n$, то
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \infty.$$

б) якщо $m < n$, то
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0.$$

в) якщо $m = n$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_m}{q_m}$,

оскільки $p_m x^m + \dots + p_1 x + p_0 \sim p_m x^m$, $q_m x^m + \dots + q_1 x + q_0 \sim q_m x^m$ і

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_m x^m}{q_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_m}{q_m} = \frac{p_m}{q_m}.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 7}{3x^3 - 4} = \left| \begin{array}{l} x^3 - 5x^2 - 7 \sim x^3, \quad x \rightarrow \infty \\ 3x^3 - 4 \sim 3x^3, \quad x \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{8x^2 + x + 3}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{8x^2 + x + 3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 7}{3x^2 - 4} = \infty.$

Приклад 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 7}{3x^2 - 4} = 0.$

Приклад 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3} = \ln 1 = 0.$

3. Розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, якщо під знаком границі стоїть

вираз типу $\frac{f_1(\sqrt[m]{P_l(x)}, P_r(x))}{f_2(\sqrt[n]{P_k(x)}, P_s(x))} \quad (x \rightarrow \infty).$

Як правило, при розкритті таких невизначеностей кожен многочлен під знаком границі заміняють на еквівалентний ($p_m x^m + \dots + p_1 x + p_0 \sim p_m x^m$) та, виконавши необхідні скорочення, обчислюють цю границю.

Приклад 9.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 5) \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1}}{\sqrt{9x^4 + 2x - 2}} = \left| \begin{array}{l} 6x - 5 \sim 6x, \quad x \rightarrow \infty \\ x^3 + 3x^2 + 1 \sim x^3, \quad x \rightarrow \infty \\ 9x^4 + 2x - 2 \sim 9x^4, \quad x \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x \cdot \sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{9x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x \cdot x}{3x^2} = 2.$$

Приклад 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 8x + 5}{2x - 3} - 2x \right) = [\infty - \infty].$

Розв'язування

Тут ми маємо невизначеність типу $[\infty - \infty]$. Перейдемо до невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Для цього зведемо до спільного знаменника вирази, дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 8x + 5 - 4x^2 + 6x}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x + 5}{2x - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left[\frac{14x + 5 \sim 14x, x \rightarrow \infty}{2x - 3 \sim 2x, x \rightarrow \infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x}{2x} = 7.$$

4. Розкриття невизначеностей типу $[\infty - \infty]$ з ірраціональними виразами під знаком границі ($x \rightarrow \infty$).

Для розкриття таких невизначеностей потрібно домножити та поділити вираз, що стоїть під знаком границі, на спряжений до нього. Виконавши необхідні перетворення, обчислюємо дану границю.

Приклад 11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 - 5x + 3} \right) = [\infty - \infty].$

Розв'язування

Домножимо вираз, що стоїть під знаком границі, на спряжений до нього:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x - 1) - (x^2 - 5x + 3)}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 - 5x + 3}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x - 4}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 - 5x + 3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{2|x|} = \frac{8}{2} = 4. \end{aligned}$$

Приклад 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 5} \right) = [\infty - \infty].$

Розв'язування

Множимо і ділимо вираз, що стоїть в дужках на вираз, спряжений до нього:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3) - (x^2 - 5)}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 - 5}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 - 5}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= 8 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = 8 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2|x|} = 0. \end{aligned}$$

5. Розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0} \right]$ при $x \rightarrow a$, коли під знаком границі стоїть відношення многочленів.

Для розкриття таких невизначеностей потрібно виділити в чисельнику та знаменнику дробу, що знаходиться під знаком границі, множник $(x - a)$. Виконавши необхідні скорочення, обчислюємо дану границю.

Приклад 13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{9x^2 - 8x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

Розв'язування

Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$. Оскільки при $x = 1$ многочлени, що стоять в чисельнику і знаменнику перетворюються на нуль, то вони розкладаються на множники, серед яких обов'язково присутній множник $(x - 1)$.

В чисельнику виконаємо ділення $x^3 + x^2 + x - 3$ на $(x - 1)$ в стовпчик:

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + x - 3 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 2x^2 + x - 3 \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ 3x - 3 \\ \underline{3x - 3} \\ 0 \end{array} \quad , \text{ тоді } x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 3).$$

Оскільки добуток коренів знаменника $-\frac{1}{9}$, один з них $x = 1$, то другий $x = -\frac{1}{9}$. Отже, $9x^2 - 8x - 1$ розкладається на множники:

$$9(x - 1) \left(x + \frac{1}{9} \right) = (x - 1)(9x + 1).$$

Маємо $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 3)}{(x - 1)(9x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{9x + 1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Приклад 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 4} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

Розв'язування

Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$. Оскільки при $x=1$ многочлени, що сто-

ять в чисельнику і знаменнику перетворюються на нуль, то вони розкладаються на множники, серед яких обов'язково присутній множник $(x-1)$.

В чисельнику виконаємо ділення $x^3 + 2x^2 - x - 2$ на $(x-1)$ в стовпчик:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad | \quad x-1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 3x^2 - x - 2 \\ \underline{3x^2 - 3x} \\ 2x - 2 \\ \underline{2x - 2} \\ 0 \end{array} \quad , \text{ тоді } x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1) \cdot (x^2 + 3x + 2).$$

Оскільки добуток коренів знаменника -4 , один з них $x=1$, то другий $x=-4$. Отже $x^2 + 3x - 4$ розкладається на множники: $(x-1)(x+4)$.

$$\text{Маємо } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x + 2)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x+4} = \frac{6}{5}.$$

6. Розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0} \right]$ при $x \rightarrow a$ з використанням таблиці еквівалентних величин.

Приклад 15.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x} = \left| \begin{array}{l} 1 - \cos 4x = 2 \sin^2 2x \sim 2(2x)^2 = 8x^2, x \rightarrow 0 \\ \sin 2x \sim 2x, x \rightarrow 0 \\ \operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{2x \cdot x} = \frac{8}{2} = 4.$$

Приклад 16.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\ln(1-3x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} 5^x - 1 \sim x \cdot \ln 5, x \rightarrow 0 \\ \ln(1-3x) \sim -3x, x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln 5}{-3x} = -\frac{\ln 5}{3}.$$

Приклад 17. Довести, що при $x \rightarrow 0$ н. м. $e^{3x} - e^{2x}$ і $\sin 2x - \sin x$ будуть еквівалентними.

Розв'язування

Знайдемо границю відношення цих функцій.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 2x - \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}(e^x - 1)}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left. \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 0 \\ e^x - 1 \sim x, \\ \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}, \\ \cos \frac{3x}{2} \rightarrow 0, \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} \cdot x}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 1} = 1.$$

Отже, за означенням ці величини еквівалентні.

Запам'ятай добре! В тих випадках, коли потрібно розкрити невизначеність типу, $[0 \cdot \infty]$, їх зводять шляхом елементарних перетворень до невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, які розкривають, використовуючи таблицю еквівалентностей.

Приклад 18. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+3) \cdot [\ln(x+1) - \ln(x-2)] = [\infty \cdot 0].$

Розв'язування

Перейдемо до іншої невизначеності. Для цього використаємо властивості логарифмічної функції:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3)[\ln(x+1) - \ln(x-2)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+3) \cdot \ln \frac{(x+1)}{(x-2)} \right] = [\infty \cdot 0] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+3) \ln \left(1 + \frac{3}{x-2} \right) \right] = \left| \ln \left(1 + \frac{3}{x-2} \right) \sim \frac{3}{x-2}, x \rightarrow +\infty \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+3) \cdot \frac{3}{x-2} \right] = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x-2} = \left| \begin{array}{l} x+3 \sim x, x \rightarrow \infty \\ x-2 \sim x, x \rightarrow \infty \end{array} \right| = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 3. \end{aligned}$$

Приклад 19. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = [0 \cdot \infty].$

Розв'язування

Перетворимо невизначеність $[0 \cdot \infty]$ в невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ (це завжди

можна зробити), після чого приведемо границю до типу, коли можливе застосування еквівалентних перетворень.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(1-x)} = \\ &= \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(1-x) \sim \frac{\pi}{2}(1-x), 1-x \rightarrow 0 \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Приклад 20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{\sin 3(x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язування

Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Оскільки при $x=1$ многочлен в чисельнику перетворюється на нуль ($x=1$ – корінь чисельника), то він розкладається на множники, один з яких $(x-1)$. За теоремою Вієта – другий корінь $x=-5$. Тому $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x-(-5))$. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{\sin 3(x-1)} = \left| \sin 3(x-1) \sim 3(x-1), x \rightarrow 1 \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{3} = 2.$$

Приклад 21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-5) \cdot [\ln(3x-2) - \ln(x+1)] = [\infty \cdot (\infty - \infty)].$

Розв'язування

Перейдемо до іншої невизначеності. Для цього використаємо властивості логарифмічної функції:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x-5) \cdot \ln \frac{3x-2}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x-5) \cdot \ln \frac{3(x+1)-5}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x-5) \cdot \ln \left(3 - \frac{5}{x+1} \right) \right]$$

Оскільки $\ln\left(3 - \frac{5}{x+1}\right) \rightarrow \ln 3$ при $x \rightarrow +\infty$, то невизначеності в останній границі немає і

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-5) \cdot [\ln(3x-2) - \ln(x+1)] = +\infty \cdot \ln 3 = +\infty.$$

7. Розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \rightarrow a$ з ірраціональними виразами під знаком границі.

Для розкриття таких невизначеностей потрібно домножити і поділити вираз, що стоїть під знаком границі на спряжений до виразу, який містить ірраціональність. Виконавши необхідні перетворення, обчислюємо дану границю.

Приклад 22. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{5-2x}-3}{3x^3+6x^2-5x-10} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язування

Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\sqrt{5-2x}+3$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{5-2x}-3)(\sqrt{5-2x}+3)}{(3x^3+6x^2-5x-10)(\sqrt{5-2x}+3)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(5-2x)^2-3^2}{(3x^3+6x^2-5x-10)(\sqrt{5-2x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x-4}{(3x^3+6x^2-5x-10)(\sqrt{5-2x}+3)} = \left[\frac{0}{0}\right]. \end{aligned}$$

Оскільки при $x = -2$ многочлен $3x^3+6x^2-5x-10$ в знаменнику перетворюється на нуль, то знаменник ділиться на різницю $(x - (-2))$ без остачі. Виконаємо ділення $3x^3+6x^2-5x-10$ на $x+2$ в стовпчик:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+6x^2-5x-10 & x+2 \\ \hline 3x^3+6x^2 & 3x^2-5 \\ \hline -5x-10 & \\ -5x-10 & \\ \hline 0 & \end{array}, \text{ тоді } 3x^3+6x^2-5x-10 = (x+2) \cdot (3x^2-5).$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2(x+2)}{(x+2)(3x^2-5)(\sqrt{5-2x+3})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2}{(3x^2-5)(\sqrt{5-2x+3})} = \frac{-2}{7 \cdot (3+3)} = -\frac{1}{21}.$$

Приклад 23. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+7} - \sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13} - \sqrt{x+22}} = \left[\frac{0}{0} \right].$

Розв'язування

Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику та знаменнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $(\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13} + \sqrt{x+22})$.

Маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+7} - \sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13} - \sqrt{x+22}} &= \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{3x+7} - \sqrt{2x+10})(\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13} + \sqrt{x+22})}{(\sqrt{4x+13} - \sqrt{x+22})(\sqrt{4x+13} + \sqrt{x+22})(\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+10})} &= \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x+7-2x-10)(\sqrt{4x+13} + \sqrt{x+22})}{(4x+13-x-22)(\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+10})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{4x+13} + \sqrt{x+22})}{(3x-9)(\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+10})} &= \\ = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x+13} + \sqrt{x+22}}{\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+10}} = \frac{1}{3} \frac{5+5}{4+4} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

8. Розкриття невизначеності типу $[1^\infty]$ з використанням другої важливої границі

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e, \quad (*)$$

тут $\alpha(x)$ довільна н. м. функція $\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \right\}$.

Приклад 24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^x = [1^\infty]$

Розв'язування

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2-2}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+2} \right)^x = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x) = \frac{-2}{x+2}, \quad \alpha(x) \rightarrow 0 \\ \text{при } x \rightarrow \infty; x = -2 \frac{1+\alpha(x)}{\alpha(x)} \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (1+\alpha(x))^{-2 \frac{1+\alpha(x)}{\alpha(x)}} = \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \left((1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right)^{-2-2\alpha(x)} = \\ &= \left[\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right]^{\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (-2-2\alpha(x))} = e^{-2}. \end{aligned}$$

Приклад 25. $\lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{2x}{x-2}} = [1^\infty]$.

Розв'язування

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{2x}{x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} e^{\ln(5-2x) \frac{2x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{2x}{x-2} \ln(5-2x)} = e^{4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(1+(4-2x))}{x-2}} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (4-2x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 2 \\ \ln(1+(4-2x)) \sim 4-2x \end{array} \right\} = e^{4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-2x}{x-2}} = e^{4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{x-2}} = e^{-8}. \end{aligned}$$

Приклади до розв'язання завдання 2.2.

Приклад 1. Дослідити на розрив функцію $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Розв'язування

Оскільки $f(1)$ не існує, то $x=1$ – точка розриву функції.

Обчислимо границі зліва і справа в точці $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x+1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x+1) = 2.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$, то точка $x=1$ є точкою усувного розриву.

Отже маємо: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Схематичний графік зображено на рисунку 2.1.

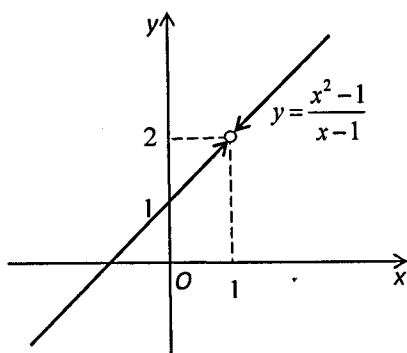


Рисунок 2.1

Приклад 2. Дослідити функцію $f(x) = \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$ і визначити рід точок розриву, якщо вони є. Зробити схематичний рисунок.

Розв'язування

Дана функція визначена для всіх $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x = 1$ – точка розриву функції.

Обчислимо односторонні границі в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 2, \text{ (оскільки } x \rightarrow 1-0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = \left[\frac{2}{\infty} \right] = 0, \text{ (оскільки } \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow +\infty).$$

Оскільки границі $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ існують, проте $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$, то точка $x = 1$ є точкою розриву першого роду.

В точці $x = 1$ функція має стрибок, що дорівнює різниці

$$f(1+0) - f(1-0) = 0 - 2 = -2.$$

Для схематичної побудови графіка функції знайдемо її границю при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 1, \text{ (оскільки } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 1).$$

А це означає, що пряма $y = 1$ є горизонтальною асимптотою.

Схематичний графік даної функції зображено на рисунку 2.2.

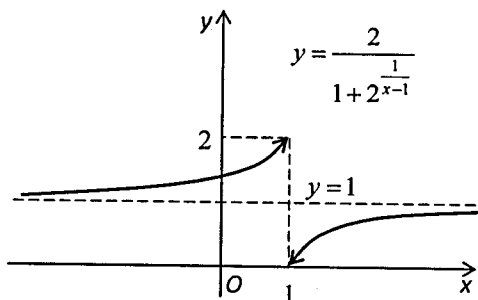


Рисунок 2.2

Приклад 3. Дослідити задану функцію на неперервність і визначити рід точок розриву, якщо вони є. Зробити схематичний рисунок.

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, & x < -1, \\ 1-x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$$

Розв'язування

Маємо неелементарну функцію, що неперервна на кожному з інтервалів: $(-\infty, -1)$, $[-1, 1]$, $(1, +\infty)$. Очевидно, що вона може бути розривною лише в точках $x = -1$, $x = 1$, в яких змінюється аналітичний вираз, який задає функцію. Перевіримо умови неперервності в цих точках.

1) Розглянемо точку $x = -1$.

Функція визначена в цій точці і $f(-1) = 1 - (-1)^2 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (-x-2) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (1-x^2) = 0.$$

Отже, існують односторонні границі функції в точці $x = -1$, але вони не рівні між собою. А це означає, що дана точка є точкою розриву першого роду.

2) Розглянемо точку $x = 1$.

Функція визначена в цій точці і $f(1) = 1 - 1^2 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (1 - x^2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x - 1) = 0.$$

Отже, існують односторонні границі функції в точці $x = 1$, вони рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці:

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$. Це означає, що в даній точці функція неперервна.

Зробимо схематичний рисунок (рис. 2.3).

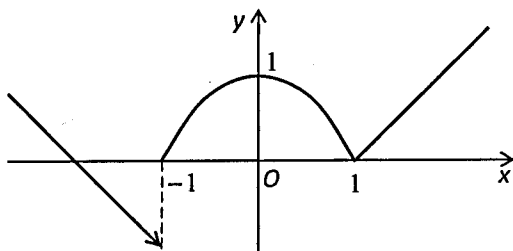


Рисунок 2.3

Приклади до розв'язання завдання 2.3.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \cos^5 3x$.

Розв'язування

За формулою (2.13), приймаючи $y = u^5$, $u = \cos 3x$, маємо:

$$y' = (u^5)' (\cos 3x)' = 5u^4 ((-\sin 3x) \cdot 3) = 5 \cos^4 3x \cdot (-3 \sin 3x) = -15 \cos^4 3x \cdot \sin 3x.$$

Приклад 2. Знайти похідну $y = x^{\sin x}$.

Розв'язування

Застосуємо формулу (2.14).

Логарифмуючи рівність, дістанемо:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x.$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності за змінною x , матимемо

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' \text{ або } \frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x,$$

звідки

$$y' = y \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right).$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = e^{x^3} \cdot \operatorname{ctg}^5 x \cdot \arcsin x$.

Розв'язування

Логарифмуючи обидві частини рівності, дістанемо

$$\ln y = x^3 \ln e + 5 \ln(\operatorname{ctg} x) + \ln(\arcsin x).$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = (x^3)' + 5(\ln(\operatorname{ctg} x))' + (\ln(\arcsin x))',$$

або

$$\frac{1}{y} y' = 3x^2 + 5 \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x} \right) + \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Звідки

$$y' = e^{x^3} \cdot \operatorname{ctg}^5 x \cdot \arcsin x \left(3x^2 + \frac{5}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} \right).$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{(2x-1)^6(3x+5)^2}$

Розв'язування

Логарифмуючи обидві частини рівності, дістанемо

$$\ln y = \ln \sqrt{x^2+3} - \ln(2x-1)^6 - \ln(3x+5)^2;$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x^2+3) - 6 \ln(2x-1) - 2 \ln(3x+5).$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = \frac{1}{2} (\ln(x^2+3))' - 6(\ln(2x-1))' - 2(\ln(3x+5))',$$

або

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+3} 2x - 6 \frac{1}{2x-1} 2 - 2 \frac{1}{3x+5} 3 = \frac{x}{x^2+3} - \frac{12}{2x-1} - \frac{6}{3x+5},$$

звідки

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+3}}{(2x-1)^6(3x+5)^2} \left(\frac{x}{x^2+3} - \frac{12}{2x-1} - \frac{6}{3x+5} \right).$$

Приклад 5. Знайти похідну функції, заданої неявно

$$3y^2 + 2xy + \cos y = 0.$$

Розв'язування

Знаходимо похідну за змінною x , пам'ятаючи, що $y(x)$ є функцією від x , тому $(y(x))' = y'$

$$3 \cdot 2y \cdot y' + 2(1 \cdot y + x \cdot y') + (-\sin y) \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно y' , отримаємо:

$$y'(6y + 2x - \sin y) = -2y,$$

звідки

$$y' = \frac{2y}{\sin y - 6y - 2x}.$$

Приклад 6. Знайти диференціал функції $y = \sqrt[3]{(2 + \cos x)^2}$.

Розв'язування

Перший спосіб. Знаходимо похідну від заданої функції:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt[3]{(2 + \cos x)^2} \right)' = \left((2 + \cos x)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} (2 + \cos x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2 + \cos x)' = \\ &= \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \cos x}} (-\sin x); \end{aligned}$$

$$dy = -\frac{2 \sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \cos x}} dx.$$

Другий спосіб. Знаходимо диференціал, використовуючи формулу (2.15):

$$dy = \frac{2}{3} (2 + \cos x)^{-\frac{1}{3}} \cdot d(2 + \cos x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \cos x}} (-\sin x \cdot dx) = -\frac{2 \sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \cos x}} dx.$$

Приклад 7. Знайти похідну y'_0 функції $y = f(x)$, заданої параметрично: $x = 8 \cos t$, $y = 4 \sin t$ в точці $M_0(4\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

Розв'язування

Знаходимо похідні x'_t та y'_t : $x'_t = -8 \sin t$, $y'_t = 4 \cos t$. За формулою (2.18) маємо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4 \cos t}{-8 \sin t} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} t.$$

Обчислимо значення параметра t в точці $M_0(4\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

$$\left. \begin{aligned} 8 \cos t = 4\sqrt{2} &\Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4 \sin t = 2\sqrt{2} &\Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, $t = \frac{\pi}{4}$ і

$$y'_0 = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 8. Знайти похідну другого порядку від функції

$$y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

Розв'язування

Знаходимо спочатку y' , за формулою $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot (x + \sqrt{a^2 + x^2})' = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \end{aligned}$$

Знаходимо похідну від отриманої функції:

$$\begin{aligned} (y')' = y'' &= \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)' = \left((a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (a^2 + x^2)' = \\ &= -\frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}, \end{aligned}$$

тобто

$$y'' = \frac{-x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$$

Приклад 9. Знайти похідну y'' функції $y = f(x)$, заданої параметрично:
 $x = 8 \cos t$, $y = 4 \sin t$.

Розв'язування

$$y'_t = 4 \cos t; \quad x'_t = -8 \sin t; \quad y''_t = -4 \sin t; \quad x''_t = -8 \cos t.$$

За формулою (2.19)

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{8 \sin t \cdot 4 \sin t + 8 \cos t \cdot 4 \cos t}{(-8 \sin t)^3} = -\frac{32}{8^3 \sin^3 t} = -\frac{1}{16 \sin^3 t}.$$

Приклади до розв'язання завдання 2.4.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ на монотонність.

Розв'язування

Областю визначення даної функції є множина дійсних чисел. Обчислимо похідну даної функції: $y' = x^2 - 2x - 3$. Зрозуміло, що похідна дорівнює нулю, при $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. За методом інтервалів знайдемо проміжки знакосталості $y'(x)$.

На проміжках $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$ — $y' > 0$, тому дана функція тут зростає. На проміжку $(-1; 3)$ — $y' < 0$, тому функція спадає на цьому проміжку.

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 1$ на відріжку $[-2; 1]$.

Розв'язування

Знаходимо похідну:

$$f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 15x^2.$$

Прирівнюємо її до нуля:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 + 20x^3 + 15x^2 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо критичні точки: $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 0$, причому $x_1 = -3 \notin [-2; 1]$. Обчислимо значення функції в критичних точках x_2 і x_3 , а також на кінцях відрізка $a = -2, b = 1$.

$$f(x_2) = f(-1) = -2; \quad f(x_3) = f(0) = -1; \quad f(a) = f(-2) = 7; \quad f(b) = f(1) = 10.$$

$$\text{Отже, } \max_{x \in [-2; 1]} f(x) = f(1) = 10, \quad \min_{x \in [-2; 1]} f(x) = f(-1) = -2.$$

Відмітимо, що у випадку, коли неперервна функція має на відрізку лише одну точку локального максимуму (мінімуму), то можна стверджувати, що це і є точка глобального максимуму (мінімуму).

Приклад 3. Для графіка функції $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$ знайти точки перегину і проміжки опуклості та вгнутості.

Розв'язування

1. Областю визначення функції є множина дійсних чисел.
2. Знаходимо другу похідну:

$$y' = 6x^2 - 6x, \quad y'' = 12x - 6.$$

3. Зрозуміло, що $y'' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

4. Досліджуємо знаки другої похідної ліворуч і праворуч від точки $x = \frac{1}{2}$. Якщо $x < \frac{1}{2}$, то $y'' < 0$ і крива – опукла; якщо $x > \frac{1}{2}$, то $y'' > 0$ і крива – вгнута.

5. Отже, точка з абсцисою $x = \frac{1}{2}$ є точкою перегину, ордината точки перегину $y_0 = f(x_0) = \frac{3}{2}$, тобто $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ – точка перегину.

На проміжку $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ крива – опукла, а на проміжку $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ – вгнута.

Приклад 4. Знайти похилу асимптоту для функції $y = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$.

Розв'язування

Рівняння асимптоти шукатимемо у вигляді $y = kx + b$. Знаходимо невідомі коефіцієнти за формулами (2.20), (2.21)

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{x \cdot (x-2)} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x-2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x + 1}{x-2} = 4.$$

Отже, пряма $y = 2x + 4$ є похилою асимптотою як при $x \rightarrow +\infty$, так і при $x \rightarrow -\infty$.

Приклад 5. Знайти вертикальні асимптоти функції $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$.

Розв'язування

Областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел, за винятком точок $x = 1$ і $x = -1$. Отже, точками розриву можуть бути лише ці дві точки. Досліджуючи на розрив, впевнюємось, що $x = 1$ і $x = -1$ – точки розриву другого роду типу «нескінчений стрибок».

Отже, прямі $x = 1$ і $x = -1$ – вертикальні асимптоти.

Приклад 6. Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік, якщо $y = (2x + 1) \cdot e^{-2x}$.

Розв'язування

1. Функція визначена на всій числовій осі. Функція не є парною, оскільки $f(-x) \neq f(x)$; не є непарною, оскільки $f(-x) \neq -f(x)$. Функція не є періодичною.

2. Функція неперервна на всій числовій осі.

3. а) Оскільки функція є неперервною, вертикальних асимптот немає;

б) шукаємо похилі асимптоти у вигляді $y = k_{1,2}x + b_{1,2}$. Тут k_1, b_1 відповідають випадку $x \rightarrow -\infty$, а k_2, b_2 – випадку $x \rightarrow +\infty$. Знайдемо невідомі коефіцієнти $k_{1,2}, b_{1,2}$ за формулами (3.24), (3.25).

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + 1) \cdot e^{-2x}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Отже, похилої асимптоти при $x \rightarrow -\infty$ (зліва) не існує.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1) \cdot e^{-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x \cdot e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right],$$

за правилом Лопіталя:

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{2x} + 2xe^{2x}} = 0;$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x+1) \cdot e^{-2x} - 0) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right],$$

за правилом Лопіталя:

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2e^{2x}} = 0.$$

Отже, $y=0$ – похила асимптота при $x \rightarrow +\infty$ (права горизонтальна асимптота).

4. Для визначення інтервалів монотонності та локальних екстремумів спочатку обчислимо похідну

$$y' = ((2x+1) \cdot e^{-2x})' = 2e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot (2x+1) = -4x \cdot e^{-2x}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y' .

Рівняння $y' = 0 \Rightarrow -4x \cdot e^{-2x} = 0$ має єдиний корінь $x = 0$ (єдина критична точка). За методом інтервалів отримуємо, що $y' > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ – на цьому інтервалі функція зростає і $y' < 0$ при $x \in (0; +\infty)$ – тут функція спадає. Так як при переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак з «+» на «-», то $x = 0$ є точкою локального максимуму, $y(0) = 1$.

5. Визначимо інтервали опуклості (вгнутості) і точки перегину.

Для цього обчислимо спочатку y'' :

$$y'' = (-4x \cdot e^{-2x})' = -4(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = 4(2x-1)e^{-2x}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y'' .

Рівняння $y'' = 0 \Rightarrow 4(2x-1) \cdot e^{-2x} = 0$ має єдиний корінь $x = \frac{1}{2}$. За методом інтервалів отримуємо, що при $x \in (-\infty; 1/2)$, $y'' < 0$ – тому на цьому інтервалі графік функції – опуклий; при $x \in (1/2; +\infty)$, $y'' > 0$ – графік – вгнутий.

Оскільки при переході через точку $x = \frac{1}{2}$ друга похідна змінює знак, то $x = \frac{1}{2}$ є абсцисою точки перегину; $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$. Точка перегину $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{e}\right)$.

6. Знайдемо точки перетину графіка з координатними осями.

Графік функції перетинає вісь абсцис, якщо

$$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

отже маємо точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Графік перетинає вісь ординат, якщо $x = 0 \Rightarrow y = 1$, маємо точку $(0; 1)$.

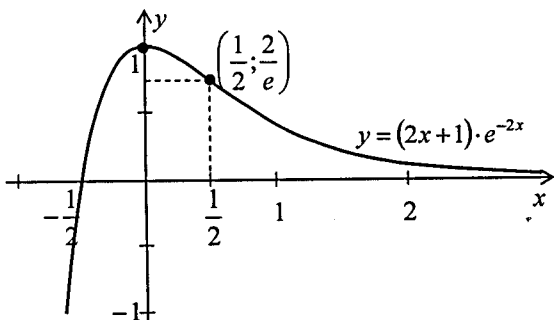


Рисунок 2.4

7. За результатами дослідження, будемо ескіз графіка даної функції (рис. 2.4).

Приклад 7. Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік,

якщо $y = \frac{-x^3}{2(x+2)^2}$.

Розв'язування

1. Функція визначена для всіх $x \neq -2$. Функція не є парною, оскільки $f(-x) \neq f(x)$; не є непарною, оскільки $f(-x) \neq -f(x)$. Функція не є періодичною.
2. Функція неперервна на кожному з інтервалів $x \in (-\infty; -2)$, $x \in (-2; \infty)$. В точці $x = -2$ функція має розрив.

Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{-x^3}{2(x+2)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{-x^3}{2(x+2)^2} = +\infty,$$

то точка $x = -2$ є точкою розриву другого роду типу «нескінчений стрибок».

3. а) Враховуючи пункт 2, робимо висновок, що пряма $x = -2$ є вертикальною асимптотою;

б) шукаємо похилі асимптоти у вигляді $y = k_{1,2}x + b_{1,2}$. Тут k_1, b_1 відповідають випадку $x \rightarrow -\infty$, а k_2, b_2 – випадку $x \rightarrow +\infty$. Знайдемо невідомі коефіцієнти $k_{1,2}, b_{1,2}$ за формулами (2.20), (2.21).

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3}{2(x+2)^2 x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{(x+2)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2};$$

$$b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^3}{2(x+2)^2} + \frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^3}{(x+2)^2} + x \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3 + x(x+2)^2}{(x+2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{4}{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x}{(x+2)^2} = \left| \frac{x^2 + x \sim x^2}{(x+2)^2 \sim x^2} \right| = 2.$$

Отже, пряма $y = -\frac{1}{2}x + 2$ є похилою асимптотою як при $x \rightarrow +\infty$, так і при $x \rightarrow -\infty$.

Знайдемо точку перетину графіка (якщо це можливо) з похилою асимптотою:

$$-\frac{1}{2}x + 2 = \frac{-x^3}{2(x+2)^2} \Leftrightarrow \frac{3x+4}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}, f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

Маємо точку перетину $\left(-\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

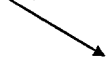
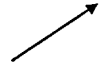
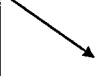
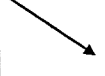
4. Визначимо інтервали монотонності та точки локального екстремуму. Спочатку обчислимо похідну

$$y' = \left(\frac{-x^3}{2(x+2)^2} \right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2(x+2)^2 - x^3 \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y' за методом інтервалів.

Рівняння $y' = 0 \Rightarrow x^2(x+6) = 0$ має корені $x = 0$ та $x = -6$ (критичні точки першого роду). Похідна не існує в точці $x = -2$, але оскільки ця точка не належить області визначення, то вона не є критичною (у ній не може бути екстремуму).

За методом інтервалів складаємо таблицю зміни знаків похідної.

x	$(-\infty; -6)$	-6	$(-6; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	не існує	$-$	0	$-$
y		min 6,75		не існує			

У точці $x = -6$ функція має локальний мінімум, оскільки при переході значень аргументу через неї похідна змінює знак з « $-$ » на « $+$ », $y(-6) = 6,75$.

У точці $x = 0$ функція не має локального екстремуму.

5. Визначимо інтервали опуклості (вгнутої) і точки перегину.

Для цього обчислимо спочатку другу похідну y'' :




$$y'' = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3} \right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + 6x^2}{(x+2)^3} \right)' =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(3x^2 + 12x)(x+2)^3 - (x^3 + 6x^2) \cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3x \cdot 8}{(x+2)^4} = \frac{-12x}{(x+2)^4}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y'' .

Похідна дорівнює нулю при $x = 0$ (критична точка другого роду) і не існує при $x = -2$ (проте $x = -2$ не є критичною точкою оскільки функція в ній не існує).

За методом інтервалів складаємо таблицю зміни знаків похідної.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	$+$	не існує	$+$	0	$-$
y		не існує		перегин	

При $x \in (-\infty; -2)$, $x \in (-2; 0)$ $y'' > 0$, тому на цих інтервалах графік функції – вгнутий; при $x \in (0; +\infty)$ $y'' < 0$ – тут графік опуклий.

Оскільки при переході значень аргументу через точку $x = 0$ друга похідна змінює знак, то $x = 0$ є абсцисою точки перегину; $y(0) = 0$. Отже, точка перегину $(0; 0)$.

6. Точка перетину графіка з віссю абсцис (ординат) $(0; 0)$ вже знайдена.

7. За результатами дослідження, будуємо ескіз графіка даної функції (рис. 2.5).

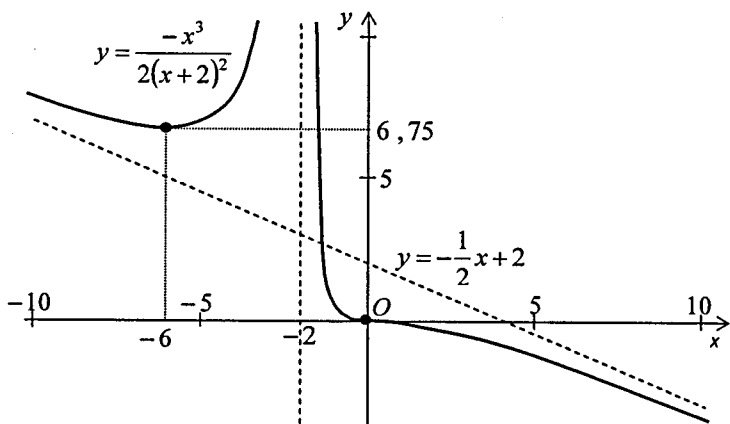


Рисунок 2.5

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3: завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань

Функції багатьох змінних

Завдання 3.1 Довести тотожність:

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, де $z = \arctg \frac{y}{x}$.
- $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, де $z = \ln(1 + \cos xy)$.
- $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, де $z = \cos x + y \sin x$.
- $\frac{2}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, де $z = \frac{y}{x-y}$.
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y}$, де $z = xe^{xy}$.
- $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, де $z = \arctg(x + ay) + e^{x-ay}$.

7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y^3} - \frac{2}{y} \frac{\partial z}{\partial x}$, де $z = \frac{x}{y^2}$.
8. $z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz^2$, де $z = e^{x^2 y}$.
9. $\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{y^2}$, де $z = y \arcsin \frac{1}{x^2 + y^2}$.
10. $\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4}{y^2 - x^2}$, де $z = \ln(x^2 - y^2)$.
11. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, де $z = \sin(ax - y) + \cos(ax + y)$.
12. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, де $z = \ln(1 + \cos(x^2 + y^2))$.
13. $\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, де $z = e^{\sin xy}$.
14. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{y} + \frac{\partial z}{\partial y}$, де $z = \frac{x^2}{y}$.
15. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{y} \frac{\partial z}{\partial x}$, де $z = \frac{x - y}{x + y}$.
16. $(x + y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, де $z = \frac{1}{xy}$.
17. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y}$, де $z = x \arctg(x + y)$.
18. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \sin e^{-y}$, де $z = e^{-y}(\sin x - x \cos x)$.
19. $\frac{x}{2y - x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, де $z = \ln xy + \frac{x^2 + y^2}{xy}$.
20. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, де $z = e^{2x + y^2}$.
21. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y}$, де $z = x \sin(x + y)$.
22. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, де $z = x^3 + x^2 y + y^3$.
23. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \frac{\partial z}{\partial x}$, де $z = \ln(x^2 + y^2)$.
24. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, де $z = ye^{\frac{x}{y}}$.

25. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, де $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.
26. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$, де $z = (x + y)e^x$.
27. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y}$, де $z = x \ln(x + y)$.
28. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x^2} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, де $z = x \operatorname{arctg} y$.
29. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, де $z = \frac{1}{x - y}$.
30. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}$, де $z = e^{-x} \cos(x + y)$.

Завдання 3.2 Обчислити $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо:

- $z = \sqrt[3]{u} \cdot e^v$, $u = x^2 + y^2$, $v = \sqrt{x} - \sqrt{y}$.
- $z = e^{u^2 v}$, $u = \sin(x + y)$, $v = \operatorname{ctg}(x - y)$.
- $z = u^v$, $u = xy - y^2$, $v = \frac{x}{y}$.
- $z = \ln(1 - u^2 - v^2)$, $u = \sqrt{xy}$, $v = x^2 - 3y$.
- $z = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$, $u = x^2 - y^2$, $v = xy^2$.
- $z = 2^{-(u^2 + v^2)}$, $u = x^2 y$, $v = 3x + 5y$.
- $z = \ln \sin \frac{u}{v}$, $u = \sqrt{x - 2y}$, $v = xy - y^2$.
- $z = u \cdot \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$, $u = 2x - y$, $v = xy$.
- $z = u \ln(1 + \sin v)$, $u = 3x - y^2$, $v = \sqrt[3]{xy}$.
- $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = \sin(x - y)$, $v = \cos(x + y)$.
- $z = \sqrt{3 + e^{-uv}}$, $u = \ln(x - y)$, $v = \ln(x + y)$.
- $z = 3 \sin u \cdot \sin v$, $u = e^{xy}$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $z = 2 \cos^2(1 - e^{uv})$, $u = x - y^2$, $v = y \sqrt{x}$.
- $z = u \cdot \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$, $u = x^2 + y^2$, $v = x - y$.

15. $z = \sqrt{u^2 + v^2} - \frac{1}{uv}$, $u = \operatorname{tg}xy$, $v = \sin(x + y)$.
16. $z = \operatorname{arctg}uv$, $u = \sqrt{x - y}$, $v = e^{x^2 + y^2}$.
17. $z = \ln(1 + 2u - 3v)$, $u = e^{-xy}$, $v = \sin \frac{x}{y}$.
18. $z = \cos(e^{\sqrt{u}} + v^2)$, $u = x^3y$, $v = y \ln x$.
19. $z = 2 \operatorname{tg}(u^3 + v^3)$, $u = e^{x-y}$, $v = 2^{x+y}$.
20. $z = 3 \cos^2(2u + v)$, $u = \sqrt{xy}$, $v = x^2 - 2y$.
21. $z = \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{uv})$, $u = \ln(x + y)$, $v = e^{2x-y}$.
22. $z = 3 \sin^2(1 + e^{-uv})$, $u = y - x^2$, $v = x\sqrt{y}$.
23. $z = u^{2\ln v}$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.
24. $z = v^{\sqrt{u^2 + 3}}$, $u = \operatorname{tg}(x - y)$, $v = \sin(x^2 + y)$.
25. $z = \ln(1 + \sqrt{u^2 + v^2})$, $u = e^{-x} \sin y$, $v = e^{-x} \cos y$.
26. $z = \operatorname{tg}(1 + e^{-3u^2 \sqrt{v}})$, $u = y\sqrt{x}$, $v = x\sqrt{y}$.
27. $z = \sqrt{e^{u^2}}$, $u = x - 2y$, $v = 3x + y$.
28. $z = u^2v - 2u^3 + v^3$, $u = e^{-x} \cos y$, $v = e^{xy}$.
29. $z = \sin(1 + \ln(u^2 + v^2))$, $u = y \cos x$, $v = y \sin x$.
30. $z = \sqrt{u} + e^{2v} - uv$, $u = xy^2$, $v = \operatorname{tg}(2x - y)$.

Завдання 3.3 Знайти точки екстремуму функції:

- | | |
|---|---|
| 1. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$. | 16. $z = x^3 - y^3 + 9xy$. |
| 2. $z = x^3 + y^3 - 3xy$. | 17. $z = x^2 - 4xy - y^2 + 2x + y$. |
| 3. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$. | 18. $z = y^3 - 3x^2y + x - y$. |
| 4. $z = x^3 + y^3 - 6xy$. | 19. $z = x^2 + 2y^2 - x + y$. |
| 5. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$. | 20. $z = x^3 - 3x^2y + 3y$. |
| 6. $z = xy^2(1 - x - y)$. | 21. $z = x^2 - x + y^2$. |
| 7. $z = x^2 - 2y^2 + x - y$. | 22. $z = x^3 + y^3 + xy$. |
| 8. $z = x^3 + y^3 - 15xy$. | 23. $z = 8(x - y) - x^2 - y^2$. |
| 9. $z = x^2 + 2y^2 - 3x - y$. | 24. $z = x^3 + y^3 - 3xy$. |
| 10. $z = 3x^2 + y^2 + x - 4y$. | 25. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$. |
| 11. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$. | 26. $z = x^3 + y^3 - 4xy$. |
| 12. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$. | 27. $z = 9x^2 - 3xy + y^2 - 3x - 12y$. |

13. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$. 28. $z = 2x^2 + y^2 - 2y$.
 14. $z = x^2 - y^2 + 4xy - 2y + x$. 29. $z = 2(x - y) - x^2 - y^2$.
 15. $z = x^2 - 8y^2 + xy - 2x - y$. 30. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy$.

Завдання 3.4 Визначити найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y)$ в заданій області D :

1. $z = 3x^2 - 8xy - 4x + 6y^2 + 4y + 4$, $D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$.
2. $z = 4 - x^2 - xy - 2y^2$, $D: x \leq 1, 0 \leq y, y \leq x$.
3. $z = -3x^2 + 28xy - 7x + y^2 + y + 1$, $D: -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$.
4. $z = x^2 - x + 4y^2 + 2$, $D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$.
5. $z = 3x^2 + 4xy - 2x + 2y^2 - 4y + 9$, $D: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 0$.
6. $z = x^2 - 3xy + y^2 + 6$, $D: x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1$.
7. $z = 2x^2 - 3xy - x + y^2 + y + 4$, $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$.
8. $z = 4 - x^2 - 2y^2$, $D: x^2 + y^2 \leq 1$.
9. $z = 2xy + y^2 - x + 1$, $D: x \geq 0, y \geq 0, y \geq x + 3$.
10. $z = 2x^2 - 3xy - 5x + \frac{3}{2}y^2 + 3y + 4$, $D: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3$.
11. $z = x^2 - 3xy + y^2 - x - y + 3$, $D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.
12. $z = -x^2 + 6x + y^2 + 2$, $D: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}$.
13. $z = x^2 - 4x + 2y^2 + 2$, $D: x \leq 4, y \geq -\sqrt{x}, y \leq x$.
14. $z = 2xy - x^2 - 4y + y^2 + 5$, $D: x \leq 2, y \geq 0, y \leq 2x$.
15. $z = xy + x^2 - x - 2y + y^2 - 3$, $D: y \leq 2 - 2x, y \geq 0, y \geq 2 + 2x$.
16. $z = -3xy + x^2 - 5y + 4y^2 + x - 1$, $D: x \leq 4, y \geq 3 - x, y \leq 2$.
17. $z = 2xy - x + y^2 - \frac{3}{2}y - 5$, $D: x \leq 1, y^2 \leq x$.
18. $z = -\frac{1}{2}x^2 - xy + y^2$, $D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$.

19. $z = 1 - 3x^2 - y^2 + 8x$, $D: (x-2)^2 + y^2 \leq 4$.
20. $z = 2x^2 - 2xy + 5x + y^2 - 4y + 9$, $D: x \geq -1, y \leq 2, y \leq 2x + 2$.
21. $z = x^2 + 2xy + 6x - 3y^2 - 2y + 2$, $D: -3 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 1$.
22. $z = x^2 + 2xy - 6x - 2y + 3$, $D: y \leq 1, y \geq (x-1)^2$.
23. $z = x^2 - 2xy - 3x + 2y^2 + 4y$, $D: x \leq 2, y \geq -2, y \leq x$.
24. $z = x^2 - x - 2y + 3$, $D: y \leq 2 - 2x, y \geq 0, y \geq 2 + 2x$.
25. $z = x^2 + xy + 2x - y^2 + 6y - 1$, $D: -3 \leq x \leq -1, -1 \leq y \leq 3$.
26. $z = x^2 - 2x + y^2 - y + 4$, $D: y \leq x^2, y \leq 2 - x, y \geq 0$.
27. $z = 3x^2 - 2xy - 4x + y^2 - 1$, $D: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 3$.
28. $z = 6 - 3x^2 - y^2$, $D: x^2 + y^2 \leq 4$.
29. $z = x^2 + 3xy + x - 2y^2 - 7y - 2$, $D: -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 3$.
30. $z = x^2 - 3xy + x + 4y^2 - 5y - 1$, $D: 1 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 2$.

Невизначений та визначений інтеграл

Завдання 3.5 Обчислити інтеграли, що зводяться до табличних:

1. $\int (4+3x^2)^6 x \, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}$; $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx$; $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \, dx$;
 $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}} \, dx$; $\int e^{82x} \frac{dx}{\cos^2 2x}$; $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\arctg^2 x + 4}}$; $\int \frac{x-1}{\sin^2(5-2x+x^2)} \, dx$;
 $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+6x+7}} \, dx$.
2. $\int \frac{1}{x} \operatorname{tg}(\ln x) \, dx$; $\int \frac{2^x}{\sin^2 2^x} \, dx$; $\int \frac{x^2}{\sin(1+x^3)} \, dx$; $\int x \sin(5-2x^2) \, dx$; $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$;
 $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \, dx$; $\int e^{83x} \frac{dx}{\cos^2 3x}$; $\int \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 2x} \, dx$; $\int \frac{x+7}{x^2+5x+7} \, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x+x^2}}$.

$$3. \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}; \int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}; \int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x} dx;$$

$$\int e^x \sin e^x dx; \int \operatorname{ctg} \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \int \frac{\cos 2x}{25+\sin^2 2x} dx; \int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-3^{2x}}}; \int \frac{1}{x^2} \operatorname{tg} \frac{1}{x} dx;$$

$$\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx; \int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

$$4. \int \sin(\sqrt{x}+2) \frac{dx}{\sqrt{x}}; \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x+5)}; \int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}+5\right)}{x^2} dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(2x+5)}; \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{tg}(\sqrt[3]{x}-5) dx; \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{4-tg^2 x}}; \int \frac{\sin 3x}{\sqrt{9+\cos^2 3x}} dx;$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+x-1}; \int \frac{5x+7}{\sqrt{x^2+13x+43}} dx.$$

$$5. \int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg}(e^x)}}{1+e^{2x}} dx; \int \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}; \int (4x-5)\sin(2x^2-5x+7) dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2(\sqrt{x}+4)}; \int e^{\sin 3x} \cos 3x dx; \int \frac{x}{\cos^2(5x^2+1)} dx;$$

$$\int \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 2x} dx; \int \frac{7^x dx}{3+7^{2x}}; \int \frac{dx}{\sqrt{-2+4x+4x^2}}; \int \frac{4x-1}{x^2-5x+6} dx.$$

$$6. \int \frac{x^3 dx}{\sin^2(x^4-5)}; \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+5}}; \int \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{ctg}(\sqrt{x}-3) dx; \int \frac{2\cos^2 x \sin x}{\cos^3 x+2} dx; \int 7^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx;$$

$$\int (2x-3)\sin(x^2-3x+4) dx; \int \frac{dx}{x \cos^2(\ln x)}; \int e^{\operatorname{arctg} 2x} \frac{dx}{1+4x^2};$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x-6}; \int \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+12x+9}} dx.$$

$$7. \int \frac{(2x-5)}{\sin^2(x^2-5x+4)} dx; \int \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \operatorname{tg}(\sqrt[3]{x}+2) dx; \int \frac{x^3}{25-x^8} dx;$$

$$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+4\right)}{x^2} dx; \int \frac{\sqrt{(1+\operatorname{arctg} 3x)^5}}{1+9x^2} dx; \int \frac{1}{x} \cos(\ln x+5) dx; \int e^{2x} \operatorname{ctg}(e^{2x}+1) dx$$

$$\int \frac{10^x dx}{9+10^{2x}}; \int \frac{dx}{x^2+3x+4}; \int \frac{x-7}{\sqrt{-x^2+10x-21}} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}; \int \frac{x}{\sin(5x^2+7)} dx; \int e^{2x} \cos(e^{2x}-1) dx; \int e^{ctg 3x} \frac{dx}{\sin^2 3x};$$

$$\int \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx; \int \frac{\arcsin^5 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}; \int \frac{\cos 3x \sin 3x}{\cos^2 3x+5} dx;$$

$$\int \frac{(2x+5)}{\cos^2(x^2+5x+4)} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+6x+2}}; \int \frac{3x-4}{4x^2+4x+10} dx.$$

$$9. \int 5^x \cos(5^x+10) dx; \int (x-2)tg(x^2-4x+10) dx; \int \frac{\sin(7-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{\sin^2 2x-4}}; \int \frac{e^{\arccos x} dx}{\sqrt{1-x^2}}; \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}; \int \frac{2^x dx}{\cos^2 2^x};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(9+tg^2 x)}; \int \frac{x+4}{x^2+3x+2} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+6}}.$$

$$10. \int \frac{5^{ctg 3x} dx}{\sin^2 3x}; \int \cos 5x \cdot \sqrt[3]{\sin^7 5x} dx; \int e^{2x} ctg(e^{2x}) dx; \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1-tg^2 x}};$$

$$\int tg(3^x) \cdot 3^x dx; \int \frac{dx}{x(\ln^2 x+16)}; \int \frac{14}{\cos^2(7x-2)} dx; \int \frac{dx}{\sin^2 x(ctg x+7)};$$

$$\int \frac{2x+7}{x^2+10x+29} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x+5}}.$$

$$11. \int (4+3x^2)^{15} x dx; \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} \sin \sqrt[3]{x}} \int \frac{5x+4}{x^2+5x-6} dx$$

$$\int \frac{x^3}{4+x^8} dx; \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^{4x}}} dx; \int (1+2x) \cdot ctg(x+x^2) dx; \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{5+arctg^2 x}};$$

$$\int \sin 2x \cdot tg(\cos 2x) dx; \int \frac{(x+1)}{\sin^2(5+2x+x^2)} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+17}}.$$

$$12. \int \frac{1}{x} tg(\ln 2x) dx; \int \frac{7^x dx}{\sin^2 7^x}; \int \frac{x^2}{\sin(x^3+5)} dx; \int x \cos(3-4x^2) dx; \int \frac{e^{4x}}{4+e^{4x}} dx;$$

$$\int \frac{e^{tg 2x} dx}{\cos^2 2x}; \int x^3 \cdot ctg(x^4) dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 3x \sqrt{ctg^2 3x-9}}; \int \frac{4x-5}{4x^2+4x+10} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}.$$

$$13. \int \frac{dx}{\arcsin^3 x \cdot \sqrt{1-x^2}}; \int \frac{x}{(x^2+4)\ln(x^2+4)} dx; \int \frac{e^{\operatorname{ctg} 2x} dx}{\sin^2 2x};$$

$$\int 7^{\sin 2x} \cos 2x dx; \int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2(4+\sqrt{x})}; \int (x^2-2)\cos(x^3-6x+1) dx;$$

$$\int \frac{2}{x^3} \operatorname{tg} \frac{1}{x^2} dx; \int \frac{x+6}{x^2-4x+3} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{15+8x+x^2}}.$$

$$14. \int \frac{\sin(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{(\arcsin 2x+3) \cdot \sqrt{1-4x^2}}; \int \frac{e^{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$$

$$\int \frac{5}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}+7\right) dx; \int \sqrt{\cos^5 2x} \cdot \sin 2x dx; \int \frac{\operatorname{tg}(\sqrt[3]{x}+3)}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \int \frac{\cos 5x}{25+\sin^2 5x} dx;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{9-\operatorname{tg}^2 x}}; \int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}; \int \frac{7x+1}{x^2+8x+20} dx.$$

$$15. \int \frac{x \cdot \sqrt{\operatorname{arctg} x^2}}{x^4+1} dx; \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{3-\ln^2 x}}; \int (1-2x)\sin(x-x^2) dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2(\sqrt{x}+2)}; \int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+3)} dx; \int \frac{\ln x}{x \cdot (\ln^2 x+5)} dx;$$

$$\int \frac{\sin 3x}{4-\cos^2 3x} dx; \int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^8}} dx; \int \frac{x+6}{x^2+2x-3} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+10}}.$$

$$16. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^{2x}+3}} dx; \int \frac{5x^4+8x}{x^5+8x^2+1} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}; \int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} dx;$$

$$\int \sin 3x \cdot \operatorname{tg}(\cos 3x) dx; \int (5x-x^2)\sin\left(4+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right) dx; \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{4-\sin^2 3x}} dx;$$

$$\int e^{\operatorname{arctg} 2x} \frac{dx}{1+4x^2}; \int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}; \int \frac{3x+1}{x^2-3x+2} dx.$$

$$17. \int \frac{x^2}{\sin^2(1-2x^3)} dx; \int \frac{\operatorname{tg}(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \int \frac{\cos(\ln 3x)}{x} dx;$$

$$\int 4^x \cdot \frac{dx}{\cos^2 4^x}; \int \frac{1}{x^2} \sin\left(1+\frac{1}{x}\right) dx; \int \frac{\sqrt{(1+\operatorname{arctg} 2x)^3}}{4x^2+1} dx;$$

$$\int 5^{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x}; \int \operatorname{ctg}(e^{2x}+5) \cdot e^{2x} dx; \int \frac{2dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}; \int \frac{x-5}{x^2+5x+7} dx.$$

$$18. \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{5 - \ln^2 x}}; \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x^2})}; \int \cos(e^{3x} - 5) \cdot e^{3x} dx;$$

$$\int 5^{\operatorname{ctg} 2x} \frac{dx}{\sin^2 2x}; \int \frac{2}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx; \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 2x - 5}} dx; \int \frac{\arcsin^3 4x}{\sqrt{1 - 16x^2}} dx;$$

$$\int \frac{\sin 4x \cos 4x}{9 + \sin^2 4x} dx; \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}; \int \frac{5x - 1}{\sqrt{9 + 4x + x^2}} dx.$$

$$19. \int 3^x \cdot \cos(3^x + 2) dx; \int (x - 3) \cdot \operatorname{tg}(1 - 6x + x^2) dx;$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin^2 3x - 16}} dx; \int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \int \frac{dx}{x \cdot \sin^2(\ln 2x)};$$

$$\int \frac{16x + 3 \cos 3x}{8x^2 + \sin 3x} dx; \int \frac{\sec^2 x}{4 + \operatorname{tg}^2 x} dx; \int \frac{x}{\sin(x^2 + 5)} dx; \int \frac{2x - 3}{x^2 + 3x + 3} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{8 - 4x - x^2}}.$$

$$20. \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx; \int 7^{\operatorname{ctg} 2x} \frac{dx}{\sin^2 2x}; \int \sqrt[3]{\sin^4 2x} \cdot \cos 2x dx;$$

$$\int e^{3x} \operatorname{ctg}(e^{3x}) dx; \int \frac{\cos(\sqrt{x + 5})}{\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{\cos^2 3x \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 3x}};$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 x + 4)}; \int \frac{x}{\cos^2(x^2 + 2)} dx; \int \frac{3dx}{x^2 + 4x + 8}; \int \frac{2x + 5}{\sqrt{4 - 4x - 4x^2}} dx.$$

$$21. \int (1 + x^3)^5 x^2 dx; \int 3^x \sin(3^x) dx; \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{1 + \cos^2 2x} dx; \int \frac{x}{\cos^2 x^2} dx; \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{9 - e^{6x}}};$$

$$\int (2x - 3) \cdot \operatorname{ctg}(x^2 - 3x + 1) dx; \int \frac{dx}{(9x^2 + 1) \cdot \sqrt{1 + \arctg 3x}}; \int \sin x \cdot \operatorname{tg}(\cos x) dx;$$

$$\int \frac{4dx}{x^2 + 5x - 6}; \int \frac{2x + 5}{\sqrt{9 + 12x + 4x^2}} dx.$$

$$22. \int \frac{dx}{\sin^2 3x \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}^2 3x - 4}}; \int \frac{\operatorname{tg}(\ln 2x)}{x} dx; \int \sqrt[3]{\sin^8 3x} \cdot \cos 3x dx;$$

$$\int \frac{3^x}{\sin^2(3^x)} dx; \int \frac{\sin 4x}{4 + \cos^2 4x} dx; \int \cos(2 + 3x) dx; \int \frac{x}{\cos^2(1 - x^2)} dx; \int e^{\operatorname{tg} 2x} \frac{dx}{\cos^2 2x};$$

$$\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2 + 6x - 1}}; \int \frac{2x + 15}{x^2 + 5x + 6} dx.$$

$$23. \int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+2)} dx; \int x^3 \cos(x^4-4) dx; \int \frac{\cos 3x}{4+\sin^2 3x} dx;$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x}\right) dx; \int e^{2x} \cdot \sin e^{2x} dx;$$

$$\int 7^{\cos x} \sin x dx; \int \frac{x^3}{\sin(1+x^4)} dx; \int \frac{dx}{(2x+3) \cdot \ln(x^2+3x-1)};$$

$$\int \frac{4dx}{x^2+x-2}; \int \frac{3x-1}{\sqrt{10x+x^2+22}} dx.$$

$$24. \int \frac{dx}{(\arccos x+3) \cdot \sqrt{1-x^2}}; \int e^{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \int x^2 \cdot \operatorname{ctg}(x^3+4) dx;$$

$$\int \cos(\sqrt{x}+1) \frac{dx}{\sqrt{x}}; \int x^3 \cdot 8^{x^4} dx; \int \frac{\operatorname{tg}(\sqrt[5]{x^3+3})}{\sqrt[5]{x^2}} dx; \int \frac{\cos 4x}{4+\sin^2 4x} dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt{9-\operatorname{ctg}^2 x}}; \int \frac{3x-2}{x^2+3x+2} dx; \int \frac{5dx}{\sqrt{4x^2-4x+6}}.$$

$$25. \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^6}} dx; \int x \cdot 3^{x^2} \cdot \operatorname{tg}(3^{x^2}) dx; \int \frac{\cos 2x+1}{\sin 2x+2x+3} dx; \int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(\ln x)};$$

$$\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \int 5^{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx; \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{5-\ln^2 x}}; \int \frac{e^x \cdot \sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x}}{e^{2x}+1} dx; \int \frac{7dx}{\sqrt{5-x^2-4x}};$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2+10x+29} dx.$$

$$26. \int \frac{3^x dx}{5+3^{2x}}; \int e^{\operatorname{arctg} 3x} \frac{dx}{1+9x^2}; \int \frac{\sin 5x}{\sqrt{9-\cos^2 5x}} dx;$$

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{6x-x^2}} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}; \int (2x^3+1) \cdot \sin(x^4+2x) dx;$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{(e^{2x}+3)^2}} dx; \int \frac{x^2}{\sin^2(5+x^3)} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+20}}; \int \frac{3x+1}{x^2+5x-6} dx.$$

$$27. \int \frac{2^x dx}{9+2^{2x}}; \int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}} dx; \int \frac{\operatorname{ctg}(\ln x + 1)}{x} dx; \int e^x \cdot \cos(e^x) dx; \int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{(3+\operatorname{arctg} 2x)^3}}{4x^2+1} dx; \int \frac{dx}{x^2 \cdot \cos^2 \frac{1}{x}}; \int \frac{\operatorname{tg}(\sqrt[3]{x^3+4})}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$\int \frac{(3x+1)dx}{4x^2+4x+10}; \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

$$28. \int \frac{\cos 4x \sin 4x}{\cos^2 4x + 3} dx; \int \frac{(\arccos x)^7}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int x \cdot 6^{x^2} dx; \int \sin x \cdot \operatorname{ctg}(3-\sin x) dx;$$

$$\int \frac{7^x}{\sin^2(7^x)} dx; \int \frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin^2 x}} dx; \int \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}+2\right) \frac{dx}{x^2};$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{5-\ln^2 3x}}; \int \frac{3x+2}{x^2-4x+3} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{17+8x+x^2}}.$$

$$29. \int \frac{dx}{\cos^2 3x \cdot (4+\operatorname{tg}^2 3x)}; \int \frac{x+e^{2x}}{x^2+e^{2x}+4} dx; \int \frac{dx}{x \cdot \sin^2(\ln 5x)}; \int e^{\arccos 2x} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 2x - 25}} dx; \int x^2 \cdot \sin(x^3+1) dx; \int \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}+2\right) \frac{dx}{x^2}; \int 7^{2x} \cdot \cos(7^{2x}-1) dx;$$

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{6x-8-x^2}}; \int \frac{3x-1}{x^2+8x+20} dx.$$

$$30. \int \frac{\sin 3x}{\sin(\cos 3x)} dx; \int \frac{x+1}{\cos^2(x^2+2x)} dx; \int \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 5x+10)}; \int x \cdot 3^{x^2} \cdot \operatorname{tg} 3^{x^2} dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}; \int \cos(\sqrt[3]{x}+5) \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}};$$

$$\int e^{\ln x} \cdot \frac{dx}{x}; \int x^3 \cdot \sin(x^4+2) dx; \int \frac{3x+2}{x^2+2x-3} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+13}}.$$

Завдання 3.6 Знайти невизначений інтеграл.

$$1. \int x \sin 7x dx; \int \arccos 2x dx; \int e^x \cos 2x dx; \int \sqrt{e^x+1} dx; \int \sqrt{100-x^2} dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$$

$$2. \int x \cos 7x dx; \int \ln(x^2 + 2) dx; \int e^x \sin 2x dx; \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}; \int \frac{dx}{\sqrt{(100 + x^2)^3}};$$

$$\int \frac{\sqrt{x} - 9}{3\sqrt[4]{x + \sqrt{x}}} dx.$$

$$3. \int xe^{7x} dx; \int x \cdot \arctg 2x dx; \int e^{2x} \cos x dx; \int \sqrt{e^{2x} + 9} dx; \int \frac{x^2}{\sqrt{256 - x^2}} dx;$$

$$\int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}} dx.$$

$$4. \int x^2 \sin 7x dx; \int x^2 \ln x dx; \int e^{2x} \sin x dx; \int \sqrt{e^x - 9} dx; \int \sqrt{64 - x^2} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$5. \int x^2 \cos 7x dx; \int \arctg 2x dx; \int e^{3x} \cos x dx; \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 4}}; \int \frac{x^2}{\sqrt{81 - x^2}} dx; \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x + \sqrt{x}}}.$$

$$6. \int x^2 e^{7x} dx; \int \arcsin 2x dx; \int e^{3x} \sin x dx; \int \sqrt{e^{2x} - 3} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}; \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}} dx.$$

$$7. \int x \sin 5x dx; \int \arccos 3x dx; \int e^x \cos 3x dx; \int \sqrt{e^x - 1} dx; \int \sqrt{256 - x^2} dx;$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}.$$

$$8. \int x \cos 5x dx; \int \ln(x^2 + 3) dx; \int e^x \sin 3x dx; \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 3}}; \int \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx.$$

$$9. \int xe^{5x} dx; \int x \cdot \arctg 3x dx; \int e^{2x} \sin 2x dx; \int \sqrt{e^{2x} + 1} dx; \int \sqrt{16 - x^2} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$10. \int x^2 \sin 5x dx; \int x^3 \ln x dx; \int e^{2x} \cos 2x dx; \int \sqrt{e^x - 4} dx; \int \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$11. \int x^2 \cos 5x dx; \int \operatorname{arctg} 3x dx; \int e^{5x} \cos 3x dx; \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 2}}; \int \frac{dx}{\sqrt{(81 + x^2)^3}};$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx.$$

$$12. \int x^2 e^{5x} dx; \int \arcsin 3x dx; \int e^{2x} \sin 3x dx; \int \sqrt{e^{3x} + 1} dx; \int \sqrt{81 - x^2} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx.$$

$$13. \int x \sin 3x dx; \int \arccos 4x dx; \int e^{3x} \cos 2x dx; \int \sqrt{e^{3x} - 2} dx; \int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$14. \int x \cos 3x dx; \int \ln(x^2 + 4) dx; \int e^{3x} \sin 2x dx; \int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x} + 3}}; \int \frac{dx}{\sqrt{(36 + x^2)^3}};$$

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}.$$

$$15. \int x \cdot e^{3x} dx; \int x \cdot \operatorname{arctg} 4x dx; \int e^x \cos 4x dx; \int \sqrt{e^{2x} - 1} dx; \int \sqrt{9 - x^2} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx.$$

$$16. \int x^2 \sin 3x dx; \int x^4 \cdot \ln x dx; \int e^x \sin 4x dx; \int \sqrt{e^x - 3} dx; \int \frac{x^2}{\sqrt{49 - x^2}} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx.$$

17. $\int x^2 \cos 3x \, dx$; $\int \operatorname{arctg} 4x \, dx$; $\int e^{3x} \sin 3x \, dx$; $\int \sqrt{e^{3x} + 4} \, dx$;
 $\int \frac{dx}{\sqrt{(64+x^2)^3}}$; $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \, dx$.
18. $\int x^2 e^{3x} \, dx$; $\int \arcsin 4x \, dx$; $\int e^{3x} \cos 3x \, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 2}}$; $\int \sqrt{25 - x^2} \, dx$;
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x - \sqrt[4]{x}}}$.
19. $\int x \sin 4x \, dx$; $\int \arccos 5x \, dx$; $\int e^x \cos 5x \, dx$; $\int \sqrt{e^x - 4} \, dx$;
 $\int \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} \, dx$; $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \, dx$.
20. $\int x \cos 4x \, dx$; $\int \ln(5 + x^2) \, dx$; $\int e^x \sin 5x \, dx$; $\int \sqrt{e^x + 2} \, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$;
 $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \, dx$.
21. $\int x e^{4x} \, dx$; $\int x \cdot \operatorname{arctg} 5x \, dx$; $\int e^{2x} \cos 4x \, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 5}}$; $\int \sqrt{49 - x^2} \, dx$;
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 2\sqrt[3]{x}}}$.
22. $\int x^2 \sin 4x \, dx$; $\int x^5 \cdot \ln x \, dx$; $\int e^{2x} \sin 4x \, dx$; $\int \sqrt{e^{3x} - 1} \, dx$;
 $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} \, dx$; $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} \, dx$.
23. $\int x^2 \cos 4x \, dx$; $\int \operatorname{arctg} 5x \, dx$; $\int e^{3x} \sin 4x \, dx$; $\int \sqrt{e^x + 9} \, dx$;
 $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$; $\int \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} \, dx$.
24. $\int x^2 e^{4x} \, dx$; $\int \arcsin 5x \, dx$; $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 9}}$; $\int \sqrt{36 - x^2} \, dx$;
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 3\sqrt[4]{x}}}$.

$$25. \int x \sin 2x \, dx; \int \arccos 7x \, dx; \int e^x \cos 7x \, dx; \int \sqrt{e^{2x} + 4} \, dx;$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} \, dx; \int \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt[3]{x}}} \, dx.$$

$$26. \int x \cos 2x \, dx; \int \ln(x^2 + 7) \, dx; \int e^x \sin 7x \, dx; \int \sqrt{e^x + 3} \, dx; \int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2\sqrt[3]{x}}}.$$

$$27. \int x \cdot e^{2x} \, dx; \int x \cdot \arctg 7x \, dx; \int e^{2x} \cos 5x \, dx; \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 9}}; \int \sqrt{4-x^2} \, dx;$$

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x-2\sqrt[3]{x}}} \, dx.$$

$$28. \int x \cdot \sin 2x \, dx; \int x^7 \cdot \ln x \, dx; \int e^{2x} \sin 5x \, dx; \int \sqrt{e^{3x} - 4} \, dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(49+x^2)^3}}; \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}} \, dx.$$

$$29. \int x^2 \cdot \cos 2x \, dx; \int \arctg 6x \, dx; \int e^{3x} \sin 5x \, dx; \int \sqrt{e^x + 4} \, dx;$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, dx; \int \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x+2\sqrt[3]{x}}} \, dx.$$

$$30. \int x^2 \cdot e^{2x} \, dx; \int \arcsin 6x \, dx; \int e^{3x} \cos 8x \, dx; \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 5}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}; \int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{x+2\sqrt[3]{x}}} \, dx.$$

Завдання 3.7 Інтегрування дробово-раціональних функцій.

$$1. \int \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, dx; \int \frac{2x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^3} \, dx; \int \frac{-x^3 + x^2 - 4x + 9}{x^4 + 11x^2 + 18} \, dx.$$

$$2. \int \frac{-x^2 - 4x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} \, dx; \int \frac{-2x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3} \, dx; \int \frac{x^5 + 7x^3 + 10x + 3}{x^4 + 7x^2 + 10} \, dx.$$

$$3. \int \frac{-3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} \, dx; \int \frac{x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^3 + 1}{x^4 + x^3} \, dx; \int \frac{2x^3 - x^2 + 14x - 1}{x^4 + 8x^2 + 7} \, dx.$$

4. $\int \frac{-x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx$; $\int \frac{2x^3 - 1}{x^4 - x^3} dx$; $\int \frac{-4x}{x^4 + 6x^2 + 5} dx$.
5. $\int \frac{dx}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$; $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx$; $\int \frac{x^6 + 6x^4 + x^3 + 6x^2 + 2x - 8}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$.
6. $\int \frac{-x - 4}{x^3 - x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} dx$; $\int \frac{8}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.
7. $\int \frac{x^4 - x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{-x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3} dx$; $\int \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$.
8. $\int \frac{-x^2 + 2x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$; $\int \frac{x^3 - x - 2}{x^4 - 2x^3} dx$; $\int \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 6}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$.
9. $\int \frac{3x - 1}{x^3 - x} dx$; $\int \frac{x^6 + x^5 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3} dx$; $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.
10. $\int \frac{-x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 3x + 7}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$; $\int \frac{-x^3 + x - 1}{x^4 - x^3} dx$; $\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$.
11. $\int \frac{x^2 + 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx$; $\int \frac{-x^5 + x^4 - 11x^3 + 11x^2 - 25x + 18}{x^4 + 11x^2 + 18} dx$.
12. $\int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} dx$; $\int \frac{3x}{x^4 + 7x^2 + 10} dx$.
13. $\int \frac{-2x^3 + 5x^2 - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$; $\int \frac{-2x^2 + x + 2}{x^4 + 2x^3} dx$; $\int \frac{dx}{x^4 + 8x^2 + 7}$.
14. $\int \frac{x^2 - 4x + 1}{x^3 - x} dx$; $\int \frac{2x^2 - x + 2}{x^4 - 2x^3} dx$; $\int \frac{x^5 + x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 10x + 4}{x^4 + 6x^2 + 5} dx$.
15. $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$; $\int \frac{x^5 + 3x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 + x^3} dx$; $\int \frac{2}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$.
16. $\int \frac{x^4 - x^3 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{2x - 1}{x^4 - x^3} dx$; $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 9}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.
17. $\int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{-x^3 + 4x^2 - x + 2}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx$; $\int \frac{-x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 6x + 6}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$.
18. $\int \frac{5x^2 - 10x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$; $\int \frac{x^5 - x^4 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} dx$; $\int \frac{3x^2 + 7}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$.

19. $\int \frac{x^5 - x^2 + x - 1}{x^3 - x} dx$; $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x^4 + 2x^3} dx$; $\int \frac{-3}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.
20. $\int \frac{x^4 - x^3 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{2x - 1}{x^4 - x^3} dx$; $\int \frac{1 - x^2 - x}{x^4 - x^3} dx$; $\int \frac{3x^2 + 7}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$;
 $\int \frac{2x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^3} dx$.
21. $\int \frac{3x^2 - 2x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{x^5 + x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 + x^3} dx$; $\int \frac{14}{x^4 + 11x^2 + 18} dx$.
22. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{1 - x^2 - x}{x^4 - x^3} dx$; $\int \frac{3x^2 - 2x^3 - 4x + 15}{x^4 + 7x^2 + 10} dx$.
23. $\int \frac{4x^2 - 9x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$; $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx$; $\int \frac{3x^4 + 24x^2 - 6x + 21}{x^4 + 8x^2 + 7} dx$.
24. $\int \frac{4x^2 - 2}{x^3 - x} dx$; $\int \frac{x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} dx$; $\int \frac{-4}{x^4 + 6x^2 + 5} dx$.
25. $\int \frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 15x + 11}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$; $\int \frac{x^3 + x + 2}{x^4 + 2x^3} dx$; $\int \frac{2x}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$.
26. $\int \frac{4x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2}{x^4 - 2x^3} dx$; $\int \frac{8x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.
27. $\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$; $\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3} dx$; $\int \frac{x^5 + x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$.
28. $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$; $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx$; $\int \frac{-2x}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$.
29. $\int \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} dx$; $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} dx$; $\int \frac{-3x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.
30. $\int \frac{2x^2 - 10x + 10}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$; $\int \frac{x^3 + x - 1}{x^4 - x^3} dx$; $\int \frac{x^6 + 3x^4 + 2x^2 + x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$.

Завдання 3.8 Інтегрування тригонометричних функцій.

1. $\int \frac{dx}{1 - 2\cos x}$; $\int \frac{dx}{2 + 6\sin^2 x}$; $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^9 x} dx$; $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$; $\int \cos 4x \cos 5x dx$.

2. $\int \frac{dx}{1+2\sin x}$; $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 9\cos^2 x}$; $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$; $\int \sin^2 2x \cos^2 2x dx$;
 $\int \sin 5x \sin 6x dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; $\int \frac{dx}{1+8\cos^2 x}$; $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; $\int \sin^4 3x dx$; $\int \sin 4x \cos 2x dx$.
4. $\int \frac{dx}{3-\cos x}$; $\int \frac{dx}{2-\cos^2 x}$; $\int \sin^3 x \cos^7 x dx$; $\int \cos^6 x dx$; $\int \cos 3x \cos 6x dx$.
5. $\int \frac{\sin^5 x}{2+3\cos x} dx$; $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x} dx$; $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; $\int \sin 4x \sin 5x dx$.
6. $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$; $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$; $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; $\int \cos^6 3x dx$; $\int \sin 3x \cos 2x dx$.
7. $\int \frac{\cos^5 x}{2-\sin x} dx$; $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$; $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} dx$; $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$;
 $\int \cos 3x \cos 4x dx$.
8. $\int \frac{\sin^5 x}{2+\cos x} dx$; $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$; $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; $\int \sin 4x \sin 6x dx$.
9. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$; $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$; $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$; $\int \sin^6 3x \cos^2 3x dx$;
 $\int \sin 2x \cos 3x dx$.
10. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$; $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx$; $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx$;
 $\int \cos 5x \cos 3x dx$.
11. $\int \frac{dx}{1+3\sin x}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2}$; $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$; $\int \cos^4 x dx$; $\int \sin 3x \sin 6x dx$.
12. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$; $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} dx$; $\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx$; $\int \sin 3x \cos 5x dx$.
13. $\int \frac{\cos^5 x}{1+\sin x} dx$; $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 7\cos^2 x}$; $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$; $\int \sin^6 2x dx$;
 $\int \cos 3x \cos 2x dx$.

$$14. \int \frac{dx}{1-\sin x}; \int \frac{dx}{2-\sin^2 x}; \int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx; \int \sin^2 2x \cos^6 2x dx; \int \sin 3x \sin 5x dx.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x}; \int \frac{\cos^3 x}{1+3\sin x} dx; \int \sin^4 x \cos^5 x dx; \int \cos^4 3x dx;$$

$$\int \sin 3x \cos 4x dx.$$

$$16. \int \frac{dx}{3+2\cos x}; \int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}; \int \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x} dx; \int \sin^2 3x \cos^4 3x dx;$$

$$\int \cos 2x \cos 7x dx.$$

$$17. \int \frac{dx}{2+\sin x}; \int \frac{dx}{3+\sin^2 x}; \int \sin^6 x \cos^3 x dx; \int \sin^4 2x dx; \int \sin 3x \sin 4x dx.$$

$$18. \int \frac{dx}{\cos x - \sin x}; \int \frac{dx}{1-3\cos^2 x}; \int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx; \int \sin^4 x \cos^6 x dx; \int \sin 3x \cos 7x dx.$$

$$19. \int \frac{\cos^5 x}{2+3\sin x} dx; \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}; \int \sin^3 x \cos^2 x dx;$$

$$\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx; \int \cos 2x \cos 5x dx.$$

$$20. \int \frac{dx}{2+2\sin x}; \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 1}; \int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} dx; \int \cos^4 2x dx; \int \sin 2x \sin 4x dx.$$

$$21. \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x}; \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2}; \int \sin^2 x \cos^5 x dx; \int \sin^6 3x dx;$$

$$\int \sin 2x \cos 5x dx.$$

$$22. \int \frac{dx}{3\cos x + 2}; \int \frac{dx}{9\cos^2 x + \sin^2 x}; \int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} dx; \int \sin^2 2x \cos^4 2x dx;$$

$$\int \cos 2x \cos 5x dx.$$

$$23. \int \frac{dx}{2-\sin x}; \int \frac{dx}{2+2\sin^2 x}; \int \sin^6 x \cos^5 x dx; \int \cos^6 2x dx; \int \sin 2x \sin 6x dx.$$

$$24. \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}; \int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}; \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx; \int \sin^3 x \cos^5 x dx; \int \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$25. \int \frac{dx}{3-2\cos x}; \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x}; \int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx; \int \sin^4 x dx; \int \cos 2x \cos 4x dx.$$

$$26. \int \frac{dx}{2+3\sin x}; \int \frac{dx}{1-3\sin^2 x}; \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx; \int \sin^4 2x \cos^4 2x dx; \int \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$27. \int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}; \int \frac{\sin^3 x}{1+2\cos x} dx; \int \sin^3 x \cos^6 x dx; \int \sin^6 x dx;$$

$$\int \sin 2x \cos 6x dx.$$

$$28. \int \frac{dx}{3+\cos x}; \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}; \int \sin^3 x \cos^4 x dx; \int \sin^6 2x \cos^2 2x dx;$$

$$\int \cos 2x \cos 6x dx.$$

$$29. \int \frac{dx}{3+\sin x}; \int \frac{dx}{8\sin^2 x + 1}; \int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx; \int \sin^6 x \cos^2 x dx; \int \sin 4x \cos 3x dx.$$

$$30. \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}; \int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x}; \int \sin^5 x \cos^2 x dx; \int \sin^4 x \cos^2 x dx;$$

$$\int \sin 2x \sin 5x dx.$$

Завдання 3.9 Обчислити визначені інтеграли.

$$1. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{ctg}(x+1)}{\sin^2(x+1)} dx; \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx; \int_1^4 \frac{5}{\sqrt[3]{(3x-4)^2} + \sqrt[3]{3x-4} + 1} dx.$$

$$2. \int_0^1 \frac{x^5 + x^2}{1+x^6} dx; \int_0^2 \arcsin \frac{x}{2} dx; \int_0^5 \frac{25x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt[4]{3x+1}} dx.$$

$$3. \int_0^{1/3} \frac{18x - \operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} dx; \int_0^{\pi/6} x \cdot \cos 3x dx; \int_0^3 \frac{25x}{\sqrt{5x+1} + \sqrt[4]{5x+1}} dx.$$

$$4. \int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^3 x + 3}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int_0^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx; \int_0^5 \frac{9}{\sqrt[4]{(3x+1)^3} + 4\sqrt[4]{3x+1}} dx.$$

$$5. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x + \operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx; \int_{-4}^{-1} 3x^2 \cdot \ln(x+5) dx; \int_0^3 \frac{27x}{\sqrt[4]{(5x+1)^3} + 2\sqrt[4]{5x+1}} dx.$$

$$6. \int_0^1 \frac{x^3 + 1}{(1 + 4x + x^4)^2} dx; \int_0^1 (2x + 1) \cdot e^{-x} dx; \int_{-1}^0 \frac{7}{\sqrt[3]{(7x + 8)^2 + 3\sqrt{7x + 8}}} dx.$$

$$7. \int_{-1}^0 \frac{tg^2(x + 1)}{\cos^2(x + 1)} dx; \int_0^\pi x^2 \cdot \sin \frac{x}{2} dx; \int_0^3 \frac{9(x - 1)}{\sqrt[3]{(3x - 4)^3 + \sqrt[3]{3x - 4}}} dx.$$

$$8. \int_{-2}^{2+2i} \frac{\ln(x - 2) + 1}{x - 2} dx; \int_0^\pi x \cdot \sin \frac{x}{2} dx; \int_0^7 \frac{3}{\sqrt[3]{(x + 1)^2 + 3\sqrt{x + 1}}} dx.$$

$$9. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x + x \cos x}{(x \sin x)^2} dx; \int_0^{1/2} \operatorname{arctg} 2x dx; \int_0^1 \frac{3}{\sqrt[3]{(9x - 1)^2 + 2\sqrt[3]{9x - 1}}} dx.$$

$$10. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{1 + x^4} dx; \int_0^5 \ln(x^2 + 25) dx; \int_0^3 \frac{3}{\sqrt[3]{(3x - 8)^2 + 4\sqrt[3]{3x - 8}}} dx.$$

$$11. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{ctg} x \cdot \ln \sin x dx; \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx; \int_0^3 \frac{5x}{\sqrt[4]{(5x^2 - 4)^3 + \sqrt[4]{5x^2 - 4}}} dx.$$

$$12. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx; \int_0^{1/3} \arcsin 3x dx; \int_0^5 \frac{3}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt[3]{3x + 1}} dx.$$

$$13. \int_\pi^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx; \int_0^{\pi/4} x \cdot \cos 2x dx; \int_1^4 \frac{4x}{\sqrt[4]{(5x - 4)^2 + 3\sqrt[4]{5x - 4}}} dx.$$

$$14. \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \int_0^{0.25} \operatorname{arctg} 4x dx; \int_0^5 \frac{6}{\sqrt[4]{(3x + 1)^3 + 2\sqrt[4]{3x + 1}}} dx.$$

$$15. \int_{-1}^{\frac{\pi}{4}-1} \frac{tg(x + 1)}{\cos^2(x + 1)} dx; \int_{-2}^1 3x^2 \cdot \ln(x + 3) dx; \int_0^3 \frac{5}{\sqrt[4]{(5x + 1)^3 + \sqrt[4]{5x + 1}}} dx.$$

$$16. \int_0^e \frac{x + \ln x}{x} dx; \int_0^1 x^2 \cdot \sin 3x dx; \int_1^4 \frac{3x - 3}{\sqrt[3]{(3x - 4)^2 + \sqrt[3]{3x - 4}}} dx.$$

$$17. \int_0^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx; \int_0^1 (x + 1) \cdot e^{2x} dx; \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x + 8)^2 + 2\sqrt[3]{7x + 8}}}.$$

$$18. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx; \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin 2x dx; \int_0^7 \frac{27x}{\sqrt[3]{(x + 1)^2 + 4\sqrt[3]{x + 1}}} dx.$$

19. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx; \int_0^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx; \int_0^1 \frac{27x}{\sqrt[3]{(9x-1)^2 + 3\sqrt[3]{9x-1}}} dx.$
20. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - \operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2} dx; \int_0^3 \ln(x^2+9) dx; \int_0^3 \frac{27x}{\sqrt[3]{(3x-8)^2 + 3\sqrt[3]{3x-8}}} dx.$
21. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) dx; \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^3} dx; \int_1^2 \frac{5x}{\sqrt[4]{5x^2-4} + \sqrt{5x^2-4}} dx.$
22. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx; \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin 2x dx; \int_0^5 \frac{3x}{\sqrt[4]{3x+1} + \sqrt{3x+1}} dx.$
23. $\int_1^4 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{(\sqrt{x}+x)^2} dx; \int_0^{\pi} x \cdot \cos \frac{x}{2} dx; \int_1^4 \frac{13-5x}{\sqrt[4]{(5x-4)^3} + 3\sqrt[4]{5x-4}} dx.$
24. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx; \int_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx; \int_0^5 \frac{27x}{\sqrt[4]{(3x+1)^3} + \sqrt[4]{3x+1}} dx.$
25. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx; \int_{-1}^2 3x^2 \cdot \ln(2+x) dx; \int_0^3 \frac{15x}{\sqrt[4]{(5x+1)^3} + \sqrt[4]{5x+1}} dx.$
26. $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx; \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cdot \sin 2x dx; \int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt[3]{(3x-4)^2} - \sqrt[3]{3x-4} + 1} dx.$
27. $\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+1} dx; \int_0^1 3x^2 \cdot \arcsin x dx; \int_{-1}^0 \frac{7x+16}{\sqrt[3]{(7x+8)^2} + 2\sqrt[3]{7x+8}} dx.$
28. $\int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{x^2+1} dx; \int_{-1}^0 (2x+3) \cdot e^{-2x} dx; \int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x+1} + 1} dx.$
29. $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx; \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx; \int_0^1 \frac{4x}{\sqrt[3]{(9x-1)^2} - \sqrt[3]{9x-1} + 1} dx.$
30. $\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2} dx; \int_0^2 \ln(x^2+4) dx; \int_0^3 \frac{4x}{\sqrt[3]{(3x-8)^2} - 2\sqrt[3]{3x-8} + 4} dx.$

Завдання 3.10 Обчислити площі фігур, які обмежені заданими лініями.

$$1. y = x^2, y = 2 - x^2; \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, & \frac{\pi}{6} \leq t \leq 0; \\ y = 2 \sin^3 t, & \rho = 2 \cos 2\varphi. \end{cases}$$

$$2. y = x^2 + 4x, y = 4 + x; \begin{cases} x = 6 \cos t, & \frac{5\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}; \\ y = 6 \sin t, & \rho = 3 \sin 6\varphi. \end{cases}$$

$$3. y^2 = x^3, y = 8, x = 0; \begin{cases} x = 4(t - \sin t), & \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}; \\ y = 4(1 - \cos t), & \rho = \cos \varphi, \rho = 2 \cos \varphi. \end{cases}$$

$$4. 4y = x^2, y^2 = 4x; \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, & \frac{\pi}{4} \leq t \leq 0; \\ y = 3 \sin^3 t, & \rho = 3 \cos 2\varphi. \end{cases}$$

$$5. y = x^2, y = 8 - x^2; \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, & \frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}; \\ y = \sqrt{2} \sin t, & \rho = 2 \sin 2\varphi. \end{cases}$$

$$6. 2y = x^3, y^2 = 2x; \begin{cases} x = 2(t - \sin t), & \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{4\pi}{3}; \\ y = 2(1 - \cos t), & \rho = 2 \sin \varphi, \rho = 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

$$7. y = x^2 + 2x, y = 2 + x; \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, & \frac{\pi}{3} \leq t \leq 0; \\ y = 4 \sin^3 t, & \rho = 2 \cos 3\varphi. \end{cases}$$

$$8. y = -x^2 + 4x, y = x^2 - 4x; \begin{cases} x = 4 \cos t, & \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}; \\ y = 2 \sin t, & \rho = 3 \sin 5\varphi. \end{cases}$$

$$9. y^2 = x^3, y = 0, x = 8; \begin{cases} x = 6(t - \sin t), & \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}; \\ y = 6(1 - \cos t), & \rho = \cos \varphi, \rho = 3 \cos \varphi. \end{cases}$$

$$10. y = x^2 + 3x, y = 3 + x; \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, & \frac{\pi}{6} \leq t \leq 0; \\ y = 3 \sin^3 t, & \rho = 3 \cos 3\varphi. \end{cases}$$

$$11. 3y = x^2, y^2 = 3x; \begin{cases} x = 9 \cos t, & \frac{5\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}; \\ y = 8 \sin t, & \rho = 2 \sin 6\varphi. \end{cases}$$

$$12. y = x^2 + x, y = x + 1; \begin{cases} x = 6(t - \sin t), & \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{4\pi}{3}; \\ y = 6(1 - \cos t), & \rho = \sin \varphi, \rho = 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

13. $5y = x^2, y^2 = 5x; \begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \frac{\pi}{4} \leq t \leq 0; \rho = 2\cos 4\varphi.$
14. $y = x^2 + 5x, y = x + 5; \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t, \end{cases} \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}; \rho = 3\sin 2\varphi.$
15. $\int_0^e \frac{x + \ln x}{x} dx; \int_0^1 x^2 \cdot \sin 3x dx; \int_1^4 \frac{3x-3}{\sqrt[3]{(3x-4)^2} + \sqrt[3]{3x-4}} dx.$
16. $y = x^2 - x, y = 1 - x; \begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases} \frac{\pi}{3} \leq t \leq 0; \rho = 3\cos 4\varphi.$
17. $y = x^2, y = 50 - x^2; \begin{cases} x = 3\sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases} \frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{6}; \rho = 2\sin 3\varphi.$
18. $y = x^2 - 2x, y = x - 2; \begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{4\pi}{3}; \rho = \sin \varphi, \rho = 3\sin \varphi.$
19. $7y = x^2, y^2 = 7x; \begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \frac{\pi}{6} \leq t \leq 0; \rho = 2\cos 5\varphi.$
20. $y = x^2 - 2x, y = 2 - x; \begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases} \frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}; \rho = 3\sin 3\varphi.$
21. $y = x^2, y = 32 - x^2; \begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases} \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}; \rho = 2\cos \varphi, \rho = 4\cos \varphi.$
22. $y = x^2 - 3x, y = 3 - x; \begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \frac{\pi}{6} \leq t \leq 0; \rho = 3\cos 5\varphi.$
23. $y^2 = x^3, x = 4; \begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t, \end{cases} \frac{5\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}; \rho = 2\sin 4\varphi.$
24. $y = x^2 - 2x, y = 2x - x^2; \begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{4\pi}{3};$
 $\rho = \sin \varphi, \rho = 4\sin \varphi.$

$$25. y = x^2 - 4x, y = 4 - x; \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \frac{\pi}{4} \leq t \leq 0; \rho = 2 \cos 6\varphi.$$

$$26. y^3 = x^2, y = 4; \begin{cases} x = 4\sqrt{3} \cos t, \\ y = \sqrt{3} \sin t, \end{cases} \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}; \rho = 3 \sin 4\varphi.$$

$$27. y = x^2 - 5x, y = 5 - x; \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{3};$$

$$\rho = 2 \cos \varphi, \rho = 3 \cos \varphi.$$

$$28. y = x^2 - 4, y = 2 - x; \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \frac{\pi}{3} \leq t \leq 0; \rho = 3 \cos 6\varphi.$$

$$29. y = 4 - x^2, x = 2y - 2; \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \frac{5\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}; \rho = 2 \sin 5\varphi.$$

$$30. y = x^2 - 4, y = 2 + x; \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases} \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{4\pi}{3}; \rho = 2 \sin \varphi, \rho = 4 \sin \varphi.$$

Завдання 3.11 Обчислити довжини дуг кривих.

$$1. y = \frac{1}{2}(1 - e^x - e^{-x}), 0 \leq x \leq 3; \begin{cases} x = e'(\cos t + \sin t), \\ y = e'(\cos t - \sin t), \end{cases} \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4};$$

$$\rho = 8 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$2. y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}; \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi;$$

$$\rho = 2 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$3. y = -\sqrt{x - x^2} + \arccos \sqrt{x} + 4, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\rho = 6 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$4. y = \frac{1}{4}(3 + e^{2x} + e^{-2x}), 0 \leq x \leq 2; \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}; \rho = 8 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$5. y = e^x + 26, \ln\sqrt{8} \leq x \leq \ln\sqrt{24}; \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 3\pi;$$

$$\rho = 2\cos\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$6. y = \ln(\cos x) + 2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6};$$

$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \rho = 5\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}.$$

$$7. y = 1 - \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{3}{4}; \begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi;$$

$$\rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$$

$$8. y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), 0 \leq x \leq 1; \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \rho = 4\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$$

$$9. y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}; \begin{cases} x = e'(\cos t + \sin t) \\ y = e'(\cos t - \sin t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}.$$

$$10. y = \ln(\sin x), \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{5}{12}.$$

$$11. y = \sqrt{1 - x^2} - \arccos x + 1, 0 \leq x \leq \frac{9}{16}; \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4};$$

$$\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}.$$

$$12. y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5, \frac{1}{9} \leq x \leq 1; \begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4};$$

$$\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$$

$$13. y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4; \begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3};$$

$$\rho = 8(1 - \cos \varphi), -\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq 0.$$

$$14. y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3};$$

$$\rho = 7(1 - \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$15. y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{15}{16}; \begin{cases} x = e'(\cos t + \sin t) \\ y = e'(\cos t - \sin t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$\rho = 6(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0.$$

$$16. y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}; \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi;$$

$$\rho = 5(1 - \cos \varphi), -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0.$$

$$17. y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\rho = 4(1 - \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$18. y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}; \begin{cases} x = 2,5(t - \sin t) \\ y = 2,5(1 - \cos t) \end{cases}, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi;$$

$$\rho = 3(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0.$$

$$19. y = 1 - \ln(\cos x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}; \begin{cases} x = e'(\cos t + \sin t) \\ y = e'(\cos t - \sin t) \end{cases}, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi;$$

$$\rho = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}.$$

$$20. y = 2 + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), 0 \leq x \leq 1; \quad \begin{cases} x = 6 \cos^3 t \\ y = 6 \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}; \quad \rho = 1 - \sin \varphi,$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$21. y = \ln(1-x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \quad \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3};$$

$$\rho = 12 \cdot e^{\frac{12}{5}\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$22. y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}; \quad \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t) \\ y = 3(\sin t - t \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3};$$

$$\rho = 5 \cdot e^{\frac{5}{12}\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$23. y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t \end{cases}, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3};$$

$$\rho = \sqrt{2} \cdot e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$24. y = 2 + \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}, \frac{1}{4} \leq x \leq 1; \quad \begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, \pi \leq t \leq 2\pi;$$

$$\rho = 3e^{\frac{4\varphi}{3}}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$25. y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}; \quad \begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi;$$

$$\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$26. y = -\ln(\cos x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}; \quad \begin{cases} x = 10 \cos^3 t \\ y = 10 \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \quad \rho = 6e^{\frac{12\varphi}{5}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$27. y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}; \quad \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi;$$

$$\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$28. y = \sqrt{1-x^2} - \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{7}{9}; \quad \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2;$$

$$\rho = \sqrt{2}e^\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$29. y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2; \quad \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$30. y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}; \quad \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi; \quad \rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Завдання 3.12 Обчислити об'єми тіл.

- Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y = \frac{6}{x}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $y = \frac{1}{4}x^2$, $x = 4$, $y = 0$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 4$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $y = 4x^2$, $x = 2$, $y = 0$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y = x^3$, $y = 4x$, $x > 0$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $y = \frac{5}{x}$, $y + x = 6$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $y = 8x^2$, $x = 2$, $y = 0$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $y = 9x^2$, $x = 3$, $y = 0$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y = x^3$, $y = 9x$, $x > 0$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $y = x^2$, $x = y^2$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $2x = y^2$, $x = 2$.
- Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $y = \frac{3}{x}$, $y + x = 4$.

14. Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$.
15. Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $y = \frac{1}{3}x^2$, $x = 3$, $y = 0$.
16. Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y^2 = 5x$, $x = 5$.
17. Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $xy = 4$, $x + y = 5$.
18. Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$.
19. Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $2y = x^2$, $y^2 = 2x$.
20. Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y^3 = x$, $x = 1$.
21. Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $3y = x^2$, $y^2 = 3x$.
22. Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $3y = x^2$, $y^2 = 3x$.
23. Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $xy = 6$, $x + y = 7$.
24. Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y^3 = 2x$, $x = 4$.
25. Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $4y = x^2$, $y^2 = 4x$.
26. Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $y^2 = 3x$, $x = 3$.
27. Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $xy = 2$, $x + y = 3$.
28. Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, $y = 3$, $y = -3$.
29. Отриманих обертанням фігури навколо осі Ox : $5y = x^2$, $y^2 = 5x$.
30. Отриманих обертанням фігури навколо осі Oy : $x = y^2$, $x = 4$.

Завдання 3.13 Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

$$1. \int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx; \int_e^{\infty} \frac{\ln^6 x}{x} dx; \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}; \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \cos 3x}.$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^5 + 1}} dx; \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{\ln x}}; \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^4}}.$$

3. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}}$; $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^4}}$; $\int_0^{\pi/8} \operatorname{tg} 4x dx$.
4. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$; $\int_0^{\infty} \frac{x+3}{x^2+6x+1} dx$; $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$; $\int_1^y \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^3 x}}$.
5. $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$; $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$; $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^4}}$.
6. $\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x/2} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{3x+1}{3x^2+2x+5} dx$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln^4 x}}$; $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.
7. $\int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^6} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{\ln^5 x}{x} dx$; $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{\ln x}}$.
8. $\int_e^{\infty} \frac{x}{x \cdot \ln^2 x} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{6x+1}{3x^2+x+2} dx$; $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$; $\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos 4x}$.
9. $\int_{-\infty}^0 x^3 \cdot e^{x^2} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{\ln^2 x}}$; $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$.
10. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^5} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx$; $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1-\cos 3x}$.
11. $\int_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-x^2} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{4x-1}{2x^2-x+5} dx$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln^2 x}}$; $\int_0^5 \frac{dx}{(x-5)^4}$.
12. $\int_0^{\infty} (x^3+1)^5 \cdot x^2 dx$; $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+18}$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^3 x}}$; $\int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[3]{(32-x)^3}}$.
13. $\int_0^{\infty} x \cdot e^x dx$; $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+1}} dx$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{\ln^3 x}}$; $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$.
14. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+2)^3} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{\ln^4 x}{x} dx$; $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$.
15. $\int_0^{\infty} \frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^5 x}$; $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; $\int_0^{\pi/10} \operatorname{tg} 5x dx$.
16. $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{\ln^3 x}{x} dx$; $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$; $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}$.

17. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{1-\cos 6x}$.
18. $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^4+3} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{x-1}{x^2-2x+10} dx$; $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}}$.
19. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+10x+50}$; $\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$; $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-8)^2}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} 3x dx$.
20. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; $\int_e^{\infty} (x^2+3) \cdot x dx$; $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$.
21. $\int_0^{\infty} \frac{x+2}{x^2+4x+1} dx$; $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$; $\int_{-16}^0 \frac{dx}{\sqrt[4]{(16+x)^3}}$; $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos 2x}$.
22. $\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^5 x}}$; $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$.
23. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$; $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$; $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1+\cos 6x}$.
24. $\int_{-\infty}^0 x^4 \cdot e^{x^3} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$; $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$.
25. $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^4 x}$; $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$; $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$.
26. $\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$; $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$.
27. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$; $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{1-\cos 4x}$.
28. $\int_{-\infty}^0 x^3 \cdot e^{x^2} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{3x+1}{3x^2+2x-3} dx$; $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$; $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$.
29. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^6 x}$; $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$; $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$.
30. $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$; $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln^2 x}}$; $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x dx$.

Для розв'язання завдань контрольної роботи № 3 [2, 5, 9] вам знадобляться такі поняття, формули та алгоритми

1. Функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$ на проміжку X , якщо в кожній точці $x \in X$ виконується умова $F'(x) = f(x)$. Множину всіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку X називають невизначеним інтегралом від функції $f(x)$. Позначають так: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

2. Властивості невизначеного інтеграла:

а) $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

б) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;

в) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

г) $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$.

3. Таблиця невизначених інтегралів.

1. $\int 0 \cdot du = C$

2. $\int 1 \cdot du = \int du = u + C$

3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \quad (u \neq 0)$

5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

6. $\int e^u du = e^u + C$

7. $\int \sin u du = -\cos u + C$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

11. $\int tg u du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int ctg u du = \ln|\sin u| + C$

13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg \frac{u}{2}\right| + C$

14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

15. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$

$$8. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$17. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \quad (u \neq \pm a)$$

$$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$18. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

4. Метод заміни. Внесення функції під знак диференціала.

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

5. Метод інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$.

6. Інтеграл типу $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ та $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ зводяться до табличних шляхом виділення повного квадрату в квадратному тричлені.

7. Інтеграл типу $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$ та $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ зводяться до інтегралів типу $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ та $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ шляхом виділення в чисельнику похідної $2ax + b$ квадратного тричлена.

8. Інтеграл типу $\int \sin^n x \cos x dx$ та $\int \cos^n x \sin x dx$ легко знайти методом заміни

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int \sin^n x d(\sin x) = \begin{cases} \ln |\sin x| + C, & n = -1, \\ \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}, & n \neq -1. \end{cases}$$

9. Інтеграл типу $\int \sin^n x \cos^{2k+1} x dx$ та $\int \cos^k x \sin^{2n+1} x dx$ так само зводяться до інтегралів від многочленів методом заміни.

10. Інтеграл типу $\int \sin^{2n} x dx$ та $\int \cos^{2k} x dx$ обчислюються спрощенням підінтегральних функцій за допомогою формул пониження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

11. При знаходженні інтеграла типу

$$\int \sin(kx)\sin(mx)dx; \int \cos(kx)\cos(mx)dx; \int \sin(kx)\cos(mx)dx$$

використовуються такі тригонометричні формули:

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x);$$

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x);$$

$$\sin kx \cos mx = \frac{1}{2}(\sin(k+m)x + \sin(k-m)x).$$

12. При інтегруванні функцій $f(x)$, які є раціональними функціями від $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, ефективним є використання універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Оскільки

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \text{ то}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

і підінтегральна функція стає раціональною функцією від змінної t .

13. Якщо $f(x)$ є раціональною функцією від функцій типу $\sqrt[n_1]{x^{k_1}}, \sqrt[n_2]{x^{k_2}}, \dots, \sqrt[n_s]{x^{k_s}}$, то, використавши підстановку $x = \sqrt[n_0]{t}$, де n_0 – найменше спільне кратне чисел n_1, n_2, \dots, n_s , зведемо знаходження інтеграла від функції $f(x)$ до знаходження інтеграла від раціональної функції змінної t (раціоналізуємо інтеграл).

14. Якщо функція $f(x)$ є раціональною від функції $f_1(x) = x$ та $f_2(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, то інтеграл від функції $f(x)$ раціоналізується за допомогою однієї з підстановок, які названі на честь видатного німецького математика Л. Ейлера.

І підстановка (використовується тоді, коли $a > 0$):

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}.$$

II підстановка (використовується тоді, коли $c > 0$):

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}.$$

III підстановка (використовується тоді, коли α – один з дійсних коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$): $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$.

15. Інтеграли типу

а) $\int R(u, \sqrt{l^2 - u^2}) du$ зводяться до табличних за допомогою заміни $u = l \sin t$;

б) $\int R(u, \sqrt{l^2 + u^2}) du$ зводяться до табличних за допомогою заміни $u = l \operatorname{tg} t$;

в) $\int R(u, \sqrt{u^2 - l^2}) du$ зводяться до табличних за допомогою заміни $u = \frac{l}{\cos t}$.

16. Інтеграли типу $\int \frac{dx}{(mx + n)^r \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ зводяться до табличних інтегралів за допомогою підстановки $mx + n = \frac{1}{t}$.

17. Властивості визначеного інтеграла:

а) для будь-якого числа k : $\int_a^b k dx = k(b - a)$;

б) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$;

в) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$;

г) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$;

д) які б не були числа a, b, c має місце рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

е) якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a; b]$ та $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

ж) якщо інтегрована на проміжку $[a; b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівності $m \leq f(x) \leq M$, де $m, M = \text{const}$, відповідно \min та $\max f(x)$ на $[a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a);$$

и) якщо $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a; b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, (a \leq b).$$

18. Теорема (формула Ньютона–Лейбніца): $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

19. Метод заміни змінної інтегрування: $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$.

20. Метод інтегрування частинами: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

21. Геометричні застосування визначеного інтеграла до обчислення площ фігур:

а) на основі геометричного змісту визначеного інтеграла площа криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f(x)$, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$, вертикаллю $x = a$ та $x = b$ і віссю Ox

$$S = \int_a^b y(x) dx = \int_a^b f(x) dx; \quad (3.1)$$

б) нехай фігура обмежена знизу і зверху графіками функцій $y = f_1(x)$ $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (рис. 3.1), де $f_1(x), f_2(x)$ – дві неперервні функції. Якщо обидві функції невід'ємні, то площа S даної фігури дорівнює різниці площ криволінійних трапецій, обмежених зверху відповідно графіками функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$.

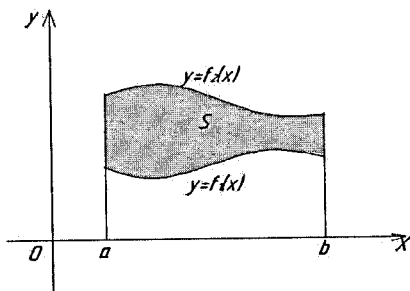


Рисунок 3.1

Отже,

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx; \quad (3.2)$$

в) для обчислення площі криволінійної трапеції у випадку, коли верхня межа задана параметричним рівнянням, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, в формулі (3.1) потрібно зробити заміну змінної,

поклавши $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$. Тоді одержимо: $S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt$;

г) якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, що задана в полярних координатах, тоді: $S = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n r^2(\xi_i) \Delta \varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$.

22. Довжина дуги плоскої кривої

а) довжина дуги кривої, що задана в прямокутній системі координат:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad (3.3)$$

б) довжина дуги, якщо крива L задана параметрично:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'_t dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt; \quad (3.4)$$

в) довжина дуги кривої у полярній системі координат:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r^2} dr. \quad (3.5)$$

23. Обчислення об'єму тіла за площею паралельних перерізів:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

24. Об'єм тіла обертання:

$$V = \int_a^b \pi \cdot x^2 dx, \text{ отже } V_{ox} = \pi \int_a^b y^2 dx; \quad V_{oy} = \pi \int_c^d x^2 dy. \quad (3.6)$$

25. При означенні інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ припускалось, що: проміжок $[a, b]$

скінченний; підінтегральна функція $f(x)$ визначена та неперервна на $[a, b]$. Такий визначений інтеграл називається власним. Якщо хоча б одна з умов порушується, інтеграл називається невласним.

26. Якщо існує скінченна границя $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, то її називають невласним інтегралом першого роду від функції $f(x)$ на інтервалі $[a; \infty)$ і позначають так:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.7)$$

При цьому кажуть, що невласний інтеграл збігається. Якщо границя не існує або нескінченна, то кажуть, що невласний інтеграл розбігається.

27. Ознаки порівняння для невласних інтегралів першого роду. Нехай для всіх $x \geq a$ виконується нерівність $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Тоді:

1) якщо інтеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$,

причому $\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} \varphi(x) dx$;

2) якщо інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ розбігається, то й інтеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ розбігається;

3) якщо при всіх $x \in [a; +\infty)$ $\varphi(x) > 0$ й існує скінченна границя

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \alpha > 0$, то інтеграли $\int_a^{\infty} f(x) dx$ і $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

28. Потрібно мати на увазі, що $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \leq 1$.

29. Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a; b)$, а при $x = b$ або не визначена, або перетворюється на нескінченність (рис. 3.2).

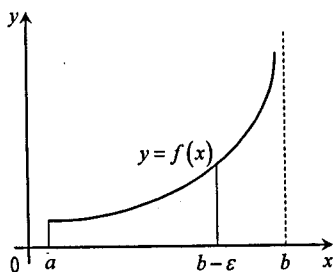


Рисунок 3.2

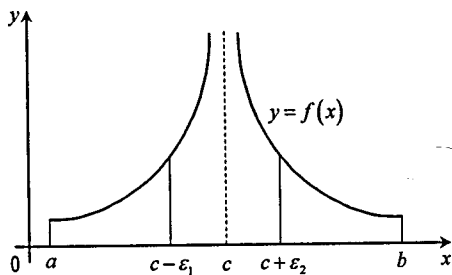


Рисунок 3.3

Невласний інтеграл другого роду визначається таким способом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (3.8)$$

Якщо існує границя, що стоїть праворуч, то невласний інтеграл називається *збіжним*, в іншому разі він називається *розбіжним*.

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці $x = a$, то за означенням

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (3.9)$$

Якщо функція $f(x)$ розривна в точці $x = c$ (рис. 3.3), то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx.$$

Якщо *обидві* границі в правій частині попередньої формули існують і скінченні, то інтеграл називають *збіжним*, інакше – *розбіжним*.

30. *Частинною похідною* функції $z=f(x,y)$ за змінною x називають границю відношення частинного приросту функції z , за цією змінною, до приросту даної змінної, коли останній прямує до 0. Позначають частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$, тому $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, при цьому змінна y та будь-яка функція від цієї змінної вважаються константами.

Аналогічним чином можна визначити частинну похідну за змінною y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}, \text{ при цьому змінна } x \text{ та будь-яка функція за цією змінною}$$

вважається константами.

31. *Частинною похідною функції багатьох змінних за однією із цих змінних* називають границю відношення відповідного частинного приросту заданої функції до приросту незалежної змінної, яка розглядається, за умови, що останній прямує до 0. При цьому решта змінних та функції від цих змінних вважаються константами.

32. Зокрема, частинні похідні другого порядку функції двох змінних (їх буде чотири) можна визначити так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right); \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right); \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right); \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right). \quad (3.13)$$

Зауважимо, що похідні (3.11) та (3.12) називають *змішаними*.

33. Якщо функція $z=f(x,y)$ та її частинні похідні до другого порядку включно визначені і неперервні в деякій точці $M(x,y)$ і її довільному околі, то змішані похідні цієї функції рівні.

34. Нехай маємо функцію $z = F(U,V)$, де $U = \varphi(x,y)$; $V = \psi(x,y)$. Функції U та V мають неперервні частинні похідні першого порядку за кожною змінною. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (3.15)$$

35. Кажуть, що функція $z = f(x,y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ має *максимум*, якщо для всіх точок, достатньо близьких до M_0 , справедлива нерівність: $f(x_0;y_0) > f(x,y)$. Функція $z = f(x,y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ має *мінімум*, якщо для всіх точок, достатньо близьких до M_0 , справедлива нерівність: $f(x_0;y_0) < f(x,y)$.

Точки максимуму та мінімуму функції двох змінних називають *точками локального екстремуму*.

36. Необхідна умова екстремуму: якщо функція $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ досягає екстремуму, то кожна частинна похідна першого порядку цієї функції в точці M_0 дорівнює нулю, тобто

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0. \quad (3.16)$$

37. Достатня умова екстремуму: нехай функція $z = f(x, y)$, визначена в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$, має неперервні частинні похідні до третього порядку включно, причому:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} = A; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} = B; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} = C.$$

Побудуємо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

1. Якщо $\Delta > 0$, то точка M_0 – точка екстремуму, причому при:

$A > 0$, M_0 – точка мінімуму,

$A < 0$, M_0 – точка максимуму.

2. Якщо $\Delta < 0$, то M_0 – не точка екстремуму.

3. Якщо $\Delta = 0$ (варіант 50/50), то для з'ясування характеру точки M_0 потрібні додаткові дослідження.

38. Екстремум функції двох змінних.

Алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум:

а) визначають стаціонарні точки, в яких функція може досягти екстремуму, розв'язавши систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

б) визначають частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

в) обчислюють значення частинних похідних в кожній стаціонарній точці, а одержані значення позначають A, B, C ;

г) складають вираз $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ та за достатньою умовою екстремуму роблять висновки стосовно характеру стаціонарних точок.

39. Для відшукування точок, в яких функція має найбільше та найменше значення, чинять так:

а) знаходять усі стаціонарні точки функції, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} .$$

та обчислюють значення функції в тих стаціонарних точках, які належать заданій області;

б) знаходять стаціонарні точки на межі області та обчислюють значення функції в цих точках;

в) серед усіх обчислених значень функції обирають максимальне та мінімальне.

Приклади розв'язання типових завдань контрольної роботи № 3.

Завдання 3.1 Довести тотожність $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, де $z = e^{2x+y^2}$.

Розв'язування

Знайдемо необхідні частинні похідні.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2e^{2x+y^2}) = 4ye^{2x+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{2x+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2ye^{2x+y^2}) = 4y^2 e^{2x+y^2}.$$

Підставивши знайдені похідні у заданий вираз, отримаємо:

$$4y^2 e^{2x+y^2} - 4y^2 e^{2x+y^2} = 0,$$

$$0=0.$$

Тотожність справедлива.

Завдання 3.2 Знайти частинні похідні першого порядку за змінними x та y , функцією $z = U^2 \ln V$, якщо $U = \frac{x}{y}$; $V = 3x - 2y$.

Розв'язування

$$\frac{\partial F}{\partial U} = 2U \ln V; \quad \frac{\partial F}{\partial V} = \frac{U^2}{V}; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 3; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -2.$$

Таким чином, за формулами (3.14) та (3.15) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2U \ln V \cdot \frac{1}{y} + 3 \frac{U^2}{V} = 2 \frac{x}{y^2} \ln(3x - 2y) + 3 \frac{x^2}{y^2(3x - 2y)}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2U \ln V \frac{x}{y^2} - 2 \frac{U^2}{V} = -2 \frac{x^2}{y^3} \ln(3x - 2y) - 2 \frac{x^2}{y^2(3x - 2y)}. \end{aligned}$$

Завдання 3.3 Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язування

1. Знайдемо частинні похідні даної функції за кожною змінною

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 3y; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 - 3x. \end{aligned}$$

2. Прирівняємо знайдені похідні до нуля та розв'яжемо одержану систему:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, & x_1 = 0; & y_2 = 1; \\ y^2 - x = 0, & y_1 = 0; & x_2 = 1. \end{cases}$$

Ми знайшли дві стаціонарні точки $M_1(0;0)$; $M_2(1;1)$ – «підозрілі» на екстремум.

3. Знаходимо відповідні частинні похідні другого порядку. Маємо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y) = 6x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3y) = -3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 3x) = 6y.$$

4. Обчислимо значення параметрів A, B, C для кожної знайденої точки та проаналізуємо одержані результати.

Для точки $M_1(0,0)$:

$$A=0; C=0; \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

Оскільки визначник Δ від'ємний, то за достатньою умовою екстремуму точка $M_1(0,0)$ не є точкою екстремуму.

Для $M_2(1,1)$:

$$A=6 \cdot 1 = 6 > 0; C=6; \Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0.$$

Оскільки визначник $\Delta > 0$ та параметр $A > 0$, то точка $M_2(1,1)$ є точкою мінімуму і $z_{\min} = z(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Завдання 3.4 Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y$ в замкнутій області \bar{D} , обмеженій параболою $y = 1 - x^2$ та віссю Ox (рис. 3.4).

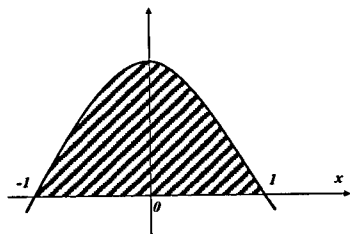


Рисунок 3.4

Розв'язування

1. Знайдемо стаціонарні точки всередині області: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2,$

$$\begin{cases} 2xy = 0, \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

Звідки $x = 0, 0 \leq y \leq 1$.

Функція має нескінченну множину стаціонарних точок $M(0, y)$, де y – довільне число інтервалу $[0; 1]$. В усіх цих точках значення даної функції одне і те ж саме та дорівнює нулю.

2. Знайдемо стаціонарні точки на межі області. На параболі $y = 1 - x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) функція $z = x^2 y$ набуває вигляду

$$z = x^2(1 - x^2) = x^2 - x^4.$$

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції:

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 4x^3.$$

Прирівнюючи знайдену похідну до нуля, маємо:

$$2x - 4x^3 = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

На параболі існує три стаціонарні точки: $M_1(0, 1)$, $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

Обчислимо значення функції в цих точках:

$$z(M_1) = 0, \quad z(M_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = z(M_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

На відрізку прямої $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$ функція $z = x^2 y$ набуває вигляду $z = 0$.

3. Серед знайдених значень функції $z = x^2 y$ в стаціонарних точках обемо максимальне та мінімальне. Маємо

$$\min z = 0, \quad \max z = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, найменше значення функції $z = x^2 y$ в області \bar{D} дорівнює нулю в точках відрізків $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$ та $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$; максимальне значення в області \bar{D} дорівнює $\frac{1}{4}$ в точках $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ та $M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, які лежать на межі області.

Завдання 3.5 Обчислити інтеграли, що зводяться до табличних:

$$1. \int \left(5x^2 + \frac{7}{x^2} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx;$$

$$2. \int \frac{dx}{2x^2 + 144}.$$

Розв'язування

$$1. \int \left(5x^2 + \frac{7}{x^2} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C;$$

$$2. \int \frac{dx}{2x^2 + 144} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{72})^2} = \frac{1}{2\sqrt{72}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{72}}\right) + C.$$

Завдання 3.6 Методи інтегрування у невизначеному інтегралі.

$$1. \int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} dx^2 = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

$$2. \int \sin(2x+6) dx = \left. \begin{array}{l} 2x+6=t \\ d(2x+6)=dt \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos(2x+6) + C.$$

$$3. \int x \sin x dx = \left. \begin{array}{l} u=x \\ du=dx \\ dv=\sin x dx \\ v=-\cos x \end{array} \right| = -x \sin x + \int \cos x dx = -x \sin x + \sin x + C.$$

$$4. \int \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u=\ln x \\ du=\frac{1}{x} dx \\ dv=dx \\ v=x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

$$\begin{aligned} 5. \int \frac{\sqrt[6]{x}+10}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx &= \left. \begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{(t+10)6t^5 dt}{t^2(t+1)} = 6 \int \frac{t^4+10t^3}{t+1} dt = \\ &= 6 \int (t^3+9t^2-9t+9-\frac{9}{t+1}) dt = 6 \left(\frac{t^4}{4} + 3t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 9t - 9 \ln|t+1| \right) + C = \left| t = \sqrt[6]{x} \right| = \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 18\sqrt{x} - 27\sqrt[3]{x} + 54\sqrt[6]{x} - 54 \ln|\sqrt[6]{x}+1| + C. \end{aligned}$$

Завдання 3.7 Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$$а) \int \frac{10x-25}{x^2-3x-4} dx; \quad б) \int \frac{x^2-4x+1}{(x+1)(x-2)^2} dx.$$

Розв'язування

$$а) \frac{10x-25}{x^2-3x-4} = \frac{10x-25}{(x+1)(x-4)} = \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{x-4}.$$

Числа B_1, B_2 знайдемо методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{10x-25}{(x+1)(x-4)} = \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{x-4} = \frac{B_1(x-4) + B_2(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{(B_1+B_2)x + (-4B_1+B_2)}{(x+1)(x-4)}.$$

Ця рівність можлива лише тоді, коли $10x-25 = (B_1+B_2)x + (-4B_1+B_2)$.

Два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх коефіцієнти при відповідних степенях x .

$$\text{Отже, } \begin{cases} B_1 + B_2 = 10, \\ -4B_1 + B_2 = -25. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо $B_1 = 7, B_2 = 3$,

$$\text{звідки } \int \frac{10x-25}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{7}{x+1} dx = 3 \ln|x-4| + 7 \ln|x+1| + C.$$

б) Зобразимо підінтегральну функцію у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4x+1}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{B_1}{x+1} + \frac{C_1}{x-2} + \frac{C_2}{(x-2)^2} = \frac{B_1(x-2)^2 + C_1(x+1)(x-2) + C_2(x+1)}{(x+1)(x-2)^2} = \\ &= \frac{(B_1+C_1)x^2 + (-4B_1-C_1+C_2)x + (4B_1-2C_1+C_2)}{(x+1)(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях x :

$$\begin{cases} B_1 + C_1 = 1, \\ -4B_1 - C_1 + C_2 = -4, \\ 4B_1 - 2C_1 + C_2 = 1. \end{cases} \text{ Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо } B_1 = \frac{2}{3};$$

$$C_1 = \frac{1}{3}; C_2 = -1.$$

Отже,

$$\int \frac{x^2 - 4x - 1}{(x+1)(x-2)^2} dx = \int \frac{\frac{2}{3}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-2} dx + \int \frac{-1}{(x-2)^2} dx = \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C.$$

Завдання 3.8 Інтегрування тригонометричних функцій.

$$\begin{aligned} 1. \int \sin^8 x \cos^5 x dx &= \int \sin^8 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^8 x (\cos^2 x)^2 d(\sin x) = \\ &= \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = |\sin x = t| = \int t^8 (1 - t^2)^2 dt = \int (t^8 - 2t^{10} + t^{12}) dt = \\ &= \frac{t^9}{9} - \frac{2t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{2\sin^{11} x}{11} + \frac{\sin^{13} x}{13} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)) dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C. \end{aligned}$$

$$3. \int \sin 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right) + C.$$

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{dx}{3 + 5\cos x} &= \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = 2 \int \frac{1}{3 + \frac{5-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{8-2t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-4} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

Завдання 3.9 Обчислити визначені інтеграли.

$$\begin{aligned}
 1. \int_6^9 \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} &= \left\{ \begin{array}{l} 2x-9=t^2; \quad \text{при } x=6 \Rightarrow t=\sqrt{3} \\ x=\frac{1}{2}(t^2+9), dx=tdt; \quad \text{при } x=9 \Rightarrow t=3 \end{array} \right\} = \\
 &= 2 \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{tdt}{(t^2+9)t} = 2 \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} \Big|_{\sqrt{3}}^3 = \frac{2}{3} \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \\
 &= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{18}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} u=x, dv=\operatorname{tg}^2 x dx = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ du=dx, v=\operatorname{tg} x - x \end{array} \right| = x(\operatorname{tg} x - x) \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x - x) dx = \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \left(\ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int_1^e x \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u=\ln x \quad dv=xdx \\ du=dx/x \quad v=\int x dx = x^2/2 \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \\
 &= \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{2} e^2 - 0 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1) = \frac{1}{4} (e^2 + 1).
 \end{aligned}$$

Завдання 3.10 Обчислити площі фігур, які обмежені заданими лініями.

1. $y = f_1(x) = x$ і $y = f_2(x) = 2 - x^2$ (рис. 3.5).

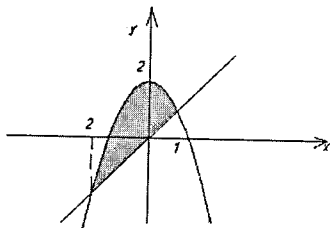


Рисунок 3.5

Розв'язування

Знайдемо абсциси точок перетину прямої $y=x$ з параболою $y=2-x^2$.

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$, одержимо $x_1 = -2, x_2 = 1$. Це є межі інтегрування. Тоді площа фігури за формулою (3.2)

$$S = \int_{-2}^1 [f_2(x) - f_1(x)] dx = \int_{-2}^1 [(2-x^2) - x] dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

2. Лінія обмежена еліпсом $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Розв'язування

Еліпс симетричний відносно осей координат, тому достатньо обчислити площу частини фігури, яка знаходиться в I чверті (рис. 3.6). Отже,

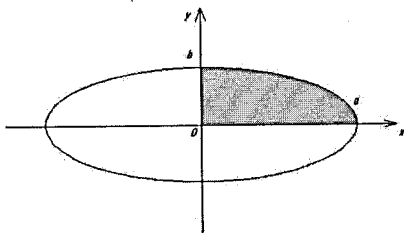


Рисунок 3.6

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (a \cos t)' dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab. \end{aligned}$$

3. Фігура обмежена кардіою $r = a(1 + \cos \varphi)$ (рис. 3.7).

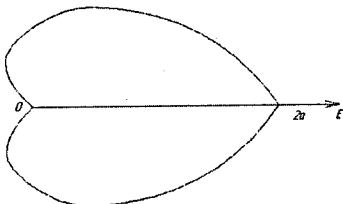


Рисунок 3.7

Розв'язування

$$S = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi + a^2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

Завдання 3.11 Обчислити довжини дуг кривих.

1. $y = 2(e^{x/4} + e^{-x/4})$ на відрізку $[0; 4]$.

Розв'язування

Перетворимо вираз під знаком кореня у формулі довжини дуги:

$$\begin{aligned} y' &= (e^{x/4} - e^{-x/4})/2, \quad 1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{x/4} - e^{-x/4})^2 = \\ &= 1 + \frac{1}{4}(e^{x/2} - 2 + e^{-x/2}) = \frac{1}{4}(e^{x/2} + 2 + e^{-x/2}) = \left[\frac{1}{2}(e^{x/4} + e^{-x/4}) \right]^2. \end{aligned}$$

Отже, за формулою (3.3) знаходимо довжину дуги:

$$l = \frac{1}{2} \int_0^4 (e^{x/4} + e^{-x/4}) dx = 2(e^{x/4} - e^{-x/4}) \Big|_0^4 = 2(e - e^{-1}).$$

2. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$).

Розв'язування

Знайдемо підінтегральну функцію (3.4) та обчислимо довжину дуги:

$$x'(t) = 2t \sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2\cos t - 2t \sin t = t^2 \cos t,$$

$$y'(t) = -2t \cos t - (2 - t^2)\sin t + 2\sin t + 2t \cos t = t^2 \sin t.$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} = t^2, \Rightarrow l = \int_0^\pi t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}.$$

3. Кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (див. рис. 3.7).

Розв'язування

Внаслідок симетрії кривої досить обчислити довжину верхньої половини кардіоїди і подвоїти результат.

За формулою (3.5) маємо:

$$l = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi =$$

$$= 4a \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Завдання 3.12 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$ і $y = 0$, $x \in [0; \pi]$.

Розв'язування

Застосовуючи формулу об'єму, одержимо:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Завдання 3.13 Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

$$1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} \Big|_1^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\operatorname{arctg} \frac{b+1}{2} - \operatorname{arctg} 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

Отже, інтеграл збігається.

$$2. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_e^b \frac{d \ln x}{\ln x} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_e^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln e)) = +\infty.$$

Інтеграл розбігається.

$$3. \text{ Дослідити збіжність інтеграла } \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Це один з інтегралів, що не беруться в елементарних функціях.

При $x \geq 1$ виконується нерівність $0 < \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$. Обчислимо інтеграл

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = e^{-1}.$$

Оскільки інтеграл $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$, причому його значення не перевищує $1/e$.

$$\begin{aligned} 4. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-x^2, \text{ при } x=0 \quad t=1 \\ dt = -2x dx, \text{ при } x=1-\varepsilon \quad t=2\varepsilon-\varepsilon^2 \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2\varepsilon-\varepsilon^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{t} \Big|_1^{2\varepsilon-\varepsilon^2} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2} - 1) = 1. \end{aligned}$$

Інтеграл збігається.

$$5. \int_1^2 \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} \right) = +\infty.$$

Інтеграл розбігається.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4: завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань

Звичайні диференціальні рівняння

Завдання 4. 1 Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1. а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$; б) $2xyy' = y^2 - 1$; в) $xy' - y = x^2$; г) $xy' + y = 3$; д) $y'''x \ln x = y$; е) $y'' = \sin x$.

2. а) $xy' = y \ln(y/x)$; б) $x^3 y' + x^2 y = 1$; в) $y dx - 2x dy = 2x^2 dy$; г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; д) $xy''' + y'' = 1$; е) $y'' = \frac{1}{x}$.

3. а) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$; б) $xy' + y = y^2$; в) $y'x \ln x = y$; г) $xy' = y - xe^x$; д) $2xy''' = y''$; е) $y'' = y'e^y$.

4. а) $xy' + y = 5$; б) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$; в) $y' - y(1+x) = x$; г) $x(y' - y) = e^x$;

д) $xy''' + y'' = x + 1$; е) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

5. а) $xy' + xe^{y/x} - y = 0$; б) $ydy + dx = e^{xdy}$; в) $(1+x^2)y' = 2xy$;

г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; д) $x^2y'' + xy' = 1$; е) $y'' = \frac{6}{x^3}$.

6. а) $x^2y' - y^2 = x^2$; б) $(x^2 + 2x + 1)y' - (x+1)y = x + 1$; в) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

г) $y' = x^2 + 2xy - 2y^2$; д) $(\operatorname{tg} x)y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$; е) $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

7. а) $xy' = y \ln(y/x)$; б) $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$; в) $(1 + e^x)yy' = e^x$;

г) $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$; д) $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$.

8. а) $(4 + 2y)dx + xdy = 0$; б) $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$; в) $ydx - 2xdy = (x+2)dy$;

г) $xy' - 2\sqrt{x^3}y = y$; д) $x^3y''' + x^2y'' = 1$; е) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

9. а) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$; б) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y$; в) $2xy' - y = 3x^2$;

г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; д) $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''$; е) $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

10. а) $(1 - x^2)y' = xy$; б) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$; в) $y'x + y = x + 1$;

г) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$; д) $y''' \operatorname{ctg} 2x = 2y''$; е) $(1 - x^2)y'' = xy'$.

11. а) $y' \cos x = (y+1) \sin x$; б) $x(y' - y) = e^x$; в) $y'x - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x}$;

г) $xy' + 2x^2\sqrt{y} = 4y$; д) $x^4y'' + x^3y' = 1$; е) $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

12. а) $\sin x \cdot y' = y \cos x + 2 \cos x$; б) $xy' + y = -xy^2$; в) $y^2 + x^2y' = xy y'$;

г) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$; д) $xy''' + 2y'' = 0$; е) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

13. а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$; б) $2xy y' = (y')^2 - 1$; в) $xy' - y = x^2$; г) $xy' + y = 3$;

д) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$; е) $xy'' + 2y' = x^3$.

14. а) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$; б) $y'x \ln x = y$; в) $xy' + y = y^2$;
 г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$; д) $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$; е) $y'' - 2y'tgx = \sin x$.
15. а) $xy' + y = 5$; б) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$; в) $y' - y(1+x) = x$;
 г) $x(y' - y) = e^x$; д) $x^5y''' + x^4y'' = 1$; е) $2yy'' + (y')^3 + (y')^4 = 0$.
16. а) $x^2y' - y^2 = x^2$; б) $(x^2 + 2x + 1)y' - (x+1)y = x+1$; в) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;
 г) $y' = x^2 + 2xy - 2y^2$; д) $xy''' + y'' + x = 0$; е) $y'' + (1/x)y' = x^2$.
17. а) $4(x^2y + y)dy + \sqrt{5+y^2}dx = 0$; б) $xy' + y\left(\ln \frac{y}{x} - 1\right) = 0$;
 в) $yx dx - 2x dy = 2xy^2 dy$; г) $x^2y' - y^2 = x^2$; д) $\text{th} x \cdot y^{IV} = y'''$;
 е) $(1+y)y'' - 5(y')^2 = 0$.
18. а) $y' = e^{x^2}x(1+y^2)$; б) $x'y + x = 4y^3$; в) $y - xy' = x \sec \frac{y}{x}$;
 г) $xy' = y - xe^x$; д) $xy''' + y'' = \sqrt{x}$; е) $y''tgy = 2(y')^2$.
19. а) $xy' = y \ln(y/x)$; б) $x^3y' + x^2y = 1$; в) $y dx - 2x dy = 2x^2 dy$;
 г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; д) $\text{tg} x \cdot y''' = y'' + 1$; е) $3yy'' + (y')^2 = 0$.
20. а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$; б) $xy y' = (y')^2 - 1$; в) $xy' - y = x^2$; г) $xy' + y = 3$;
 д) $\text{tg} 5x \quad y''' = 5y''$; е) $y'' = \cos 3x$.
21. а) $xy' + y = 5$; б) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$; в) $y' - y(1+x) = x$; г) $x(y' - y) = e^x$;
 д) $\text{th} 7x \cdot y''' = 7y''$; е) $y'' = \frac{1}{x+2}$.
22. а) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy dx = 0$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$;
 в) $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$; г) $y' + 2y = y^2 \text{tg} x$; д) $xy''' + x^2y'' = \sqrt{x}$;
 е) $y'' = y'e^y$.

23. a) $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$; б) $y' = \frac{x+y}{x-y}$; в) $y^2 dx + x(y-1) dy = 0$;

г) $xy' - 2\sqrt{x^3} y = y$; д) $(\operatorname{cth} x)y'' - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$; е) $y'' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

24. а) $y' + y = -y^2$; б) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$; в) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$;

г) $xy' = y - xe^x$; д) $(x+1)y''' + y'' = x+1$; е) $y'' = \frac{4}{x^3}$.

25. а) $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy + 3y^2 x dx$; б) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$;

в) $(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y$; г) $x^2 y' - y^2 = x^2$;

д) $(1 + \sin x)y''' = (\cos x)y''$; е) $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

26. а) $4(x^2 y + y) dy + \sqrt{5+y^2} dx = 0$; б) $y' = 2xy + x$; в) $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y$;

г) $y' - \frac{1}{x+1} y = e^x(x+1)$; д) $xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$; е) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

27. а) $(e^{2x} + 5) dy + ye^{2x} dx = 0$; б) $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$; в) $3(xy' + y) = y^2 \ln x$;

г) $y'y'' \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$; д) $-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$; е) $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

28. а) $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$; б) $y' = 2xy + x$;

в) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$; г) $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1-x^3)$; д) $\operatorname{ch} x \cdot y'' + y' = \operatorname{ch} x$;

е) $(1-x^2)y'' = xy'$.

29. а) $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$; б) $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$; в) $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$;

г) $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$; д) $x^4 y'' + x^3 y' = 4$; е) $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

30. а) $y(4 + e^x) dy - e^x dx = 0$; б) $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$; в) $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$;

г) $y' = (x^2 + 2x)2y$; д) $y'' + \frac{2x}{x^2+1} y' = 2x$; е) $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

Завдання 4.2 Знайти розв'язок задачі Коші.

1. а) $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2$, $y(0) = 1$; б) $4y^3y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. а) $xy' + y = 2y^2 \ln x$, $y(1) = \frac{1}{2}$; б) $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.
3. а) $2(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 2$; б) $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
4. а) $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2$, $y(0) = 1$; б) $y''y^3 = -64$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.
5. а) $xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x$, $y(1) = 1$;
- б) $y'' = 32 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 4$.
6. а) $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2$, $y(0) = 2$; б) $y'' = 98y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.
7. а) $3(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 3$; б) $y''y^3 + 49 = 0$, $y(3) = -7$, $y'(3) = -1$.
8. а) $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x)$, $y(0) = 1$; б) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}$.
9. а) $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3)$, $y(0) = -1$; б) $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.
10. а) $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$, $y(0) = -1$;
- б) $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
11. а) $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$; б) $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5$, $y(2) = 4$.
12. а) $y'' = 18 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 3$; б) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x$, $y(1) = e$.
13. а) $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$; б) $4y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
14. а) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{8}{x^2}$, $y(1) = 4$; б) $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.
15. а) $y' - y = 2xy^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$; б) $y''y^3 + 25 = 9$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.

16. a) $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$; б) $y'' + 18 \sin y \cos^3 x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

17. a) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 3$; б) $y'' = 8 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 2$.

18. a) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$, $y(1) = 1$; б) $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 1$.

19. a) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x}$, $y(1) = 1$; б) $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$.

20. a) $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = e^{-1}$;

б) $y'' + 32 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

21. a) $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$; б) $y'' = 50 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 5$.

22. a) $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2$, $y(0) = 1$; б) $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.

23. a) $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y(1) = 1$; б) $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.

24. a) $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$; б) $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

25. a) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(1) = \frac{1}{2}$; б) $y''y^3 = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

26. a) $y' - y \cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$; б) $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

27. a) $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -\frac{1}{2}$; б) $y''y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.

28. a) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$; б) $y'' = 2 \sin^3 y \cdot \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 1$.

29. a) $y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}$, $y(0) = 0$;

б) $y''y^3 = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

30. a) $y' - y \cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$; б) $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.

Завдання 4.3 Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.
2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.
3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
4. $y'' - 6y' + 25y = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.
5. $y'' + 6y = e^x (\cos 4x - 8 \sin 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
6. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
7. $y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.
8. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x - 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
9. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.
10. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x} \sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.
11. $y'' + 5y' + 6y = 52 \sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$.
12. $y'' + 16y = 32e^{4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
13. $y'' + 12y' = 6x^2 + 2x + 1$, $y(0) = y'(0) = 2$.
14. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7 \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.
15. $y'' - 9y' + 18y = 26 \cos x - 8 \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
16. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
17. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.
18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
19. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.
20. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
21. $y'' - 4y = 8e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -8$.
22. $y'' - 2y' + y = 4e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
23. $y'' - 2y' = (4x - 4)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
24. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
25. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
26. $y'' - 3y' + 2y = (2x + 1)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
27. $y'' + 4y' - 5y = -3x \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
28. $y'' - 6y' + 9y = x^2 e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
29. $y'' + 7y' + 10y = (3x + 1) \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
30. $y'' - 3y' + 2y = \cos x - \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Завдання 4.4 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.
2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.
3. $y''' - y' = x^2 + x$.
4. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$.
5. $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2$.
6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$.
7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x + 1$.
8. $y^V - y^{IV} = 2x + 3$.
9. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$.
10. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$.
11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$.
12. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$.
13. $7y''' - y'' = 12x$.
14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.
15. $y''' - y'' = 3x^2 - 2x + 1$.
16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$.
17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$.
18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$.
19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$.
20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$.
21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.
22. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$.
23. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$.
24. $y^{IV} + y''' = x$.
25. $y''' - y'' = 6x + 5$.
26. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$.
27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^3$.
28. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.
29. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$.
30. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$.

Завдання 4.5 Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

1.
$$\begin{cases} x' = 5x + y \\ y' = 8x + 3y \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 3x + 2 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x' = 7x + 5y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -3x + 4y \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} x' = x + 8y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$$

14. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$
15. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

Завдання 4.6 Знайти розв'язок задачі Коші методом Лагранжа.

- $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
- $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.
- $y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$.
- $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{3x}}$, $y(0) = 1 + 2 \ln 2$, $y'(0) = 6 \ln 2$.
- $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
- $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$.
- $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos \frac{x}{\pi}}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
- $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$, $y(0) = 4 \ln 4$, $y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1)$.
- $y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.
- $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}}$, $y(0) = 1 + 3 \ln 3$, $y'(0) = 10 \ln 3$.
- $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
- $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}$.
- $y'' + 9y = \frac{y}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.

15. $y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.
16. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 8 \ln 2$, $y'(0) = 14 \ln 2$.
17. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
18. $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$.
19. $y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
20. $y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$.
21. $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = \frac{1}{2}$.
22. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 3 \ln 2$, $y'(0) = 5 \ln 3$.
23. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
24. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$.
25. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
26. $y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = 1 - \ln 2$.
27. $y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
28. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 2 \ln 2$, $y'(0) = 3 \ln 2$.
29. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
30. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Завдання 4.7 Знайти розв'язок задачі.

1. Знайти криву, кожна дотична до якої відсікає на осях координат такі відрізки, що сума величин, обернених квадратам довжин цих відрізків дорівнює одиниці.

2. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(0; 5)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеної в 7 разів.
3. Знайти лінію, знаючи, що площа, яка знаходиться між осями координат, цією кривою і ординатою будь-якої точки на ній, дорівнює кубу цієї ординати.
4. Площа, обмежена кривою, осями координат і ординатою будь-якої точки кривої, дорівнює довжині відповідної дуги кривої. Знайти рівняння цієї лінії, якщо відомо, що вона проходить через точку $M(0; 1)$.
5. Записати рівняння кривої, що проходить через точку $A(5; 2)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в 3 рази більший, ніж кутовий коефіцієнт прямої, що з'єднує точку A з початком координат.
6. Знайти рівняння лінії, у якої відрізок, що відсікається дотичною в будь-якій точці кривої на осі Oy , дорівнює квадрату абсциси точки дотику.
7. Знайти рівняння лінії, знаючи, що відрізок, що відсікається дотичною від осі ординат дорівнює півсумі координат точки дотику.
8. Знайти рівняння лінії, для якої добуток абсциси будь-якої точки на величину відрізка, що відсікається нормаллю на осі ординат, дорівнює подвоєному квадрату відстані від цієї точки до початку координат.
9. Знайти лінію, для якої трикутник, утворений нормаллю з осями координат, був би рівновеликий трикутнику, утвореному віссю Ox , дотичною і нормаллю.
10. Знайти лінію, що проходить через точку $A(2; 3)$ і має таку властивість, що відрізок будь-якої її дотичної, розміщеної між координатними осями, ділиться навпіл в точці дотику.
11. Знайти лінію, для якої довжина відрізка, що відсікається на осі ординат нормаллю, проведеною в якій-небудь точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат.
12. Знайти лінію, що проходить через точку $M(2; 0)$ і має властивість, що відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має постійну довжину, що дорівнює 2.
13. Знайти всі лінії, у яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис ділиться навпіл в точці перетину з віссю ординат.
14. Знайти лінію, у якої квадрат довжини відрізка, що відсікається будь-якою дотичною від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику.
15. Знайти лінії, у яких тангенс кута між дотичною і додатним напрямом осі Ox прямо пропорційний ординаті точки дотику.
16. Знайти лінію, для якої трикутник, утворений віссю Oy , дотичною і радіус-вектором точки дотику, є рівнобедреним.

17. Знайти лінію, у якої відношення відрізка дотичної, що відсікається від осі ординат, до відрізка, який відсікається нормаллю від осі абсцис, є величина постійна, рівна k .
18. Знайти лінію, довільна дотична до якої відтинає на осі ординат відрізок, менший абсциси точки дотику на 3 одиниці.
19. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1; 0)$ і має властивість, що відрізок, який відсікається дотичною на осі Oy , дорівнює полярному радіусу точки дотику.
20. Знайти криву, для якої відрізок на осі ординат, що відсікається будь-якою дотичною, дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.
21. Знайти лінії, для яких площа трикутника утвореного віссю Ox , дотичною і радіус-вектором точки дотику, постійна і дорівнює a .
22. Знайти криву, кожна дотична до якої утворює з осями координат трикутник постійної площі $S = 2a^2$.
23. Знайти лінію, у якої довжина нормалі пропорційна квадрату ординати. Коефіцієнт пропорційності k .
24. Знайти лінію, у якої площа трапеції, утвореної осями координат, ординатою довільної точки і дотичної в цій точці, дорівнює половині квадрата абсциси.
25. Знайти лінію, для якої площа, яка обмежена віссю абсцис, лінією і двома ординатами, одна з яких постійна, а інша – змінна, дорівнює відношенню куба змінної ординати до змінної абсциси.
26. Знайти лінію, у якої нормаль (її відрізок від точки лінії до осі абсцис) є постійна величина a .
27. Знайти всі лінії, у яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис ділиться навпіл в точці перетину з віссю ординат.
28. Знайти лінію, у якої початкова ордината будь-якої дотичної на дві одиниці менша абсциси точки дотику.
29. Знайти лінію, у якої довжина полярного радіуса будь-якої її точки M дорівнює відстані між точкою перетину дотичної в точці M з віссю ординат і початком координат.
30. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(0; 5)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює ординаті цієї точки.

Завдання 4.8 Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду в кожній з областей, де зберігається тип даного рівняння.

$$1. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 13 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$2. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$3. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$4. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$5. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial U}{\partial x} - 4 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$6. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$7. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial U}{\partial x} + 3 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$8. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 10 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$9. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial x} + 10 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$10. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$11. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$12. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$13. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 7 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$14. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

15. $4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial U}{\partial x} - 8 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
16. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$
17. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
18. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 7 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$
19. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
20. $9 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial U}{\partial x} + 9 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
21. $3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial x} + 3 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
22. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
23. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial U}{\partial x} - 5 \frac{\partial U}{\partial y} + 4U = 0.$
24. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + 4U = 0.$
25. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 5 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + 4U = 0.$
26. $2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial U}{\partial x} + 4 \frac{\partial U}{\partial y} + U = 0.$
27. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$

$$28. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 10 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} - 3 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$29. 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial x} + 3 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$30. 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Завдання 4.9 В кожній області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду.

$$1. x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$2. 4y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - e^{2x} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$3. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + (2 - \cos^2 x) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$4. y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$5. (1 + x^2)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2x(1 + x^2) \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

$$6. e^{2x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2e^{x+y} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + e^{2y} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - xU = 0.$$

$$7. x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$8. x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial U}{\partial x} + ye^{\frac{y}{x}} = 0.$$

$$9. x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

10. $xy^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x^2 y \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + x^3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - y^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$
11. $x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$
12. $4y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - e^{2x} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 4y^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$
13. $y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
14. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
15. $x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$
16. $x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$
17. $-\frac{y^2}{x^3} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$
18. $x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
19. $x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
20. $4y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - e^{2x} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 4y^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$
21. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
22. $x^2 y \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$

$$23. y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$24. \frac{y^2}{x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$25. y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$26. 4y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - e^{2x} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$27. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + (2 - \cos^2 x) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$28. y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$29. x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

$$30. (1 + x^2)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (1 + y^2)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Завдання 4.10 Знайти розв'язок задачі Коші, використовуючи формулу Д'Аламбера.

$$1. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = \sin x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0.$$

$$2. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6, U(x,0) = x^2, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 4x.$$

$$3. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = x^2, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0.$$

$$4. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = x.$$

5. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin x, U(x,0) = \sin x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0.$
6. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos x.$
7. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin x, U(x,0) = 1, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 1.$
8. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = \sin x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0.$
9. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \sin x.$
10. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin 2t, U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0.$
11. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = \cos x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0.$
12. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = e^{-x}, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 4.$
13. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = \sin x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos x.$
14. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = e^{-x}, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 9.$
15. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \sin^2 x.$
16. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \sin x.$
17. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + xt, U(x,0) = x^2, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = x.$
18. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = -x.$

$$19. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + e^x, U(x,0) = \sin x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = x + \cos x.$$

$$20. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = \sin x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos x.$$

$$21. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin 2x, U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0.$$

$$22. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos^2 x.$$

$$23. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin x, U(x,0) = \sin x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0.$$

$$24. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos x.$$

$$25. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = \sin 2x, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0.$$

$$26. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6, U(x,0) = x^2, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 2x.$$

$$27. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = e^{-2x}, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 2.$$

$$28. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = e^{-x}, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 4.$$

$$29. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xt, U(x,0) = x^2, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = -x.$$

$$30. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(x,0) = x^2, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 2.$$

Для розв'язання завдань контрольної роботи № 4 [4-10] вам знадобляться такі поняття, формули та алгоритми

1. Рівняння, в яких невідомими є функції та їх похідні, називаються диференціальними рівняннями.

2. Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної шуканої функції. ДР першого порядку в загальному вигляді можна подати так:

$$F(x, y, y') = 0.$$

3. Задача знаходження частинного розв'язку $y = \varphi(x)$ ДР, що задовольняє умову: $y = y_0$ при $x = x_0$ або $y(x_0) = y_0$, називається *задачею Коші*. Умови називаються *початковими умовами*, а числа y_0, x_0 – *початковими значеннями*.

4. Функція $y = \varphi(x, c)$, що містить довільну сталу c , називається *загальним розв'язком ДР* $y' = f(x, y)$, якщо функція $y = \varphi(x, c)$ є розв'язком ДР при довільному значенні сталої c , тобто $\frac{\partial \varphi(x, c)}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, c))$ і якщо за рахунок вибору довільної сталої c можна розв'язати задачу Коші з довільними початковими умовами, тобто рівняння $y_0 = \varphi(x_0, c)$ розв'язується відносно c . Розв'язок типу $y = \varphi(x, c_0)$ називається *частинним розв'язком*.

5. ДР типу $M(x)dx + N(y)dy = 0$ називається ДР з *відокремленими змінними*. Загальний розв'язок ДР знаходимо з рівняння

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \quad C = \text{const.}$$

Розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0, y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^x M(x)dx + \int_{y_0}^y N(y)dy = 0.$$

Знаходження розв'язку ДР з відокремленими змінними зводиться до пошуку інтегралів від відомих функцій.

6. ДР типу $N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ називається ДР з *відокремлюваними змінними*, тобто таким, що зводиться до ДР з відокремленими змінними.

7. Многочлен $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$ називають *однорідним степеня n* , якщо всі члени мають один порядок n . Тобто для кожного такого члена $a_{ij}x^i y^j$ маємо $i+j = n$. Наприклад: $P(x, y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ – многочлен другого степеня.

8. Функцію $P(x,y)$ називають *однорідною степеня k* , якщо для всіх $\lambda > 0$ виконується рівність $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k P(x, y)$. Прикладом однорідної функції може слугувати будь-яка форма (однорідний многочлен) степеня k .

9. Розглянемо диференціальне рівняння: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Диференціальне рівняння першого порядку називається однорідним, якщо коефіцієнти $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є однорідні функції першого степеня.

10. ДР називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.1)$$

ДР (4.1) за допомогою заміни змінної $y = ux$, $\frac{y}{x} = u$ зводиться до

ДР з відокремлюваними змінними: $u'x + u = f(u)$, $x \frac{du}{dx} = f(u) - u$ і по-

шук розв'язку зводиться до обчислення інтегралів: $\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$.

11. Рівняння типу

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

можна звести до однорідного за допомогою лінійної заміни $x = x_0 + t$, $y = y_0 + t$, де x_0, y_0 – координати точки перетину прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Якщо ці прямі не перетинаються, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ і рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $a_1x + b_1y + c_1 = z$.

12. ДР типу

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (4.2)$$

де $p(x), q(x)$ – відомі функції, називається *лінійним* ДР. Якщо $q(x) \equiv 0$, то ДР називається *однорідним*. Якщо $q(x) \neq 0$, то ДР називається *неоднорідним*.

13. **Метод Бернуллі.** Розв'язок ДР (4.2) шукаємо у вигляді добутку двох функцій u та v . Підставляючи $y = uv$ у ДР, дістаємо рівняння

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x).$$

Зведемо це рівняння до системи ДР: $uv' + p(x)uv = 0$, $u'v = q(x)$.

14. **Метод Лагранжа.** Лагранж запропонував загальний метод розв'язування неоднорідних лінійних ДР. Спочатку розв'язується однорідне ДР. До загального розв'язку входить довільна стала. Потім шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді розв'язку однорідного рівняння, де довільну сталу розглядаємо як нову шукану функцію. Цей метод називається також *методом варіації довільних сталих*.

Шукаємо розв'язок неоднорідного ДР (4.2). Спочатку знайдемо розв'язок однорідного ДР $y' + p(x)y = 0$. Загальний розв'язок ДР має вигляд $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, де C – довільна стала. Шукаємо потім розв'язок неоднорідного ДР у вигляді $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, де $C(x)$ – нова шукана функція.

15. ДР типу $y' + p(x)y = q(x)y^n$ ($n \neq 0, n \neq 1$) називається *ДР Бернуллі*. Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного ДР за допомогою заміни

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}, \quad \frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x).$$

16. Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку: $y'' = f(x, y, y')$. Загальний розв'язок даного рівняння є $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, де $C_1, C_2 = \text{const}$. Геометрично це означає, що не достатньо лише точки M , залежної від C_1 , необхідно задати ще і напрямок інтегральної кривої. Цей напрямок задається тангенсом кута нахилу дотичної до кривої в точці M , з додатним напрямком Ox , тобто $y'|_M = \text{tg}x$, таким чином маємо початкові умови: $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$. Розв'язком даного рівняння за вказаних умов є задача Коші.

17. Типи рівнянь другого порядку, які допускають пониження:

1) $y'' = f(x)$, метод його розв'язку – послідовне інтегрування:

$$y' = \int f(x)dx + C; \quad y' = F(x) + C; \quad y = \int F(x)dx + Cx + C_1; \quad y = \varphi(x) + Cx + C_1,$$

де $C, C_1 = \text{const}$;

2) $y'' = f(y)$, нехай $y' = P(y)$.

Розглянемо $P(y)$ як функцію від y , тоді: $y'' = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P \frac{dP}{dy}$ таким чином рівняння має вигляд: $P \frac{dP}{dy} = f(y)$ – рівняння з відокремленими змінними.

$$\int P dP = \int f(y) dy; \quad \frac{P^2}{2} = \int f(y) dy + \frac{C_1}{2}; \quad P = \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + C_1} \quad \text{і}$$
$$P = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + C_1} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} = \pm (x + C_1);$$

3) $y'' = f(x, y)$ аналогічно $y' = P(x)$; $y'' = P'(x)$.

Отже,

а) $y'' = f(x)$ – послідовне інтегрування;

б) $y'' = f(x, y) \Rightarrow y' = P(x)$; $y'' = P'(x)$;

в) $y'' = f(y) \Rightarrow y' = P(y)$; $y'' = P \cdot P'(y)$.

18. Рівняння $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ називається лінійно однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

19. Знайдемо частинний розв'язок даного диференціального рівняння, коли $y = e^{kx}$, $k - \text{const}$, тоді:

$$y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}; \quad k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0. \quad | : e^{kx}$$

$k^2 + pk + q = 0$ – характеристичне рівняння.

Випадок 1.

$$D > 0; \quad y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = e^{k_2 x}; \quad y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Випадок 2.

$$D = 0; \quad k = k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}; \quad y_1 = y_2 = e^{-\frac{p}{2}x}; \quad y_1 = y_2 \Rightarrow (C_1 x + C_2) e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Випадок 3.

$$D < 0; \quad k_1 = \alpha + \beta \cdot i; \quad k_2 = \alpha - \beta \cdot i; \quad y_1 = e^{(\alpha + \beta \cdot i)x}; \quad y_2 = e^{(\alpha - \beta \cdot i)x},$$

тоді $y = C_1 e^{(\alpha + \beta \cdot i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta \cdot i)x}$.

Переходячи до тригонометричного вигляду:

$$y = e^{\alpha x} ((C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \sin \beta x);$$

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Отже,

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0; \quad a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0;$$

1) $D > 0$; $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) $D = 0$; $y = (C_1 x + C_2) e^{kx}$;

3) $D < 0$; $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

20. Загальний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння: $y = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$.

Випадок 1. Якщо права частина лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами має вигляд $f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$ – квазімногочлен m -го степеня і α не є коренем характеристичного рівняння, то $y_{ч.н.} = e^{\alpha x} M(x)$, де $M(x)$ – деякий многочлен n -го степеня із невідомим коефіцієнтами; якщо α є коренем характеристичного рівняння кратності k , то: $y_{ч.н.} = x^k e^{\alpha x} M(x)$.

Зуваження! Для знаходження невідомих коефіцієнтів потрібно продиференціювати двічі функцію $y_{ч.н.}$ та підставити знайдені похідні та функцію у вихідне рівняння. Прирівнюючи коефіцієнти біля невідомих в однакових степенях в лівій та правій частині рівняння, одержуємо систему для знаходження шуканих коефіцієнтів.

Випадок 2. Якщо права частина лінійного рівняння має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x)$, де $P_1(x)$ і $P_2(x)$ – многочлени n -го степеня і $z = \alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то існує частинний розв'язок: $y_{ч.н.} = e^{\alpha x} (M(x) \cos \beta x + N(x) \sin \beta x)$, $M(x)$, $N(x)$ – многочлени степеня n і якщо $z = \alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності k , то $y_{ч.н.} = x^k e^{\alpha x} (M(x) \cos \beta x + N(x) \sin \beta x)$.

Випадок 3. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, дивись випадок 1 та 2.

21. Метод Лагранжа (варіації довільної сталої). Нехай є рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$. Розв'яжемо однорідне рівняння $y'' + py' + qy = 0$. Його розв'язок $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$; припустимо, що $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, тоді: $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$.

Складемо систему:

$$\begin{cases} C_1(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0; \\ C_1'(x)y_1 + C_2(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

Розв'язавши її отримаємо $C_1(x)$ та $C_2(x)$, тобто знайдемо розв'язок рівняння в вигляді $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$.

22. Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}, \quad (4.3)$$

де x_1, x_2, \dots, x_n – невідомі функції від змінної t , називається нормальною системою. Якщо праві частини цих рівнянь є лінійними функціями відносно x_1, x_2, \dots, x_n , то система називається *лінійною*.

23. Розв'язують лінійну систему так:

а) диференціюємо перше рівняння системи за змінною t , пам'ятаючи при цьому, що x_1, x_2, \dots, x_n також є функціями від t ;

б) підставимо в одержану похідну відповідні значення із системи (4.3):

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n);$$

в) в результаті одержуємо систему

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (4.4)$$

г) знову диференціюємо перше рівняння за змінною t та підставляємо відповідні похідні і т. д. Диференціювання здійснюємо стільки разів, який порядок системи;

д) в результаті одержуємо систему типу

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (4.5)$$

е) з перших $(n-1)$ -го рівняння системи (4.5) визначимо x_2, \dots, x_n , виразивши їх через $t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}$:

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_2(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}) \\ x_3 = \varphi_3(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}) \\ \dots \dots \dots \\ x_n = \varphi_n(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}) \end{cases} \quad (4.6)$$

ж) підставимо вирази (4.6) в останнє рівняння системи (4.5). В результаті одержуємо рівняння $\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)})$. Розв'язавши дане рівняння (див. п. 20), знайдемо функцію

$$x_1 = \psi_1(t, C_1, \dots, C_{n-1}); \quad (4.7)$$

и) диференціюємо вираз (4.7) $(n-1)$ раз та, підставивши знайдені похідні у систему (4.6), знайдемо решту функцій розв'язку;

к) формуюємо відповідь.

24. Рівняння типу

$$AU''_{xx} + 2BU''_{xy} + CU''_{yy} + f(x, y, U, U'_x, U'_y) = 0. \quad (4.8)$$

називають лінійним диференціальним рівнянням другого порядку.

25. Встановити тип рівняння (4.8) можна за допомогою дискримінанта

$$\Delta = B^2 - AC. \quad (4.9)$$

Якщо $\Delta > 0$, то рівняння (4.8) є рівнянням гіперболічного типу.

Якщо $\Delta = 0$, то рівняння (4.8) є рівнянням параболічного типу.

Якщо $\Delta < 0$, то рівняння (4.8) є рівнянням еліптичного типу.

26. Для зведення рівняння (4.8) до найпростішого (канонічного) вигляду вводять заміни

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (4.10)$$

$$U'_x = U'_\xi \varphi'_x + U'_\eta \psi'_x;$$

$$U'_y = U'_\xi \varphi'_y + U'_\eta \psi'_y;$$

$$U''_{xx} = U''_{\xi\xi} (\varphi'_x)^2 + U''_{\xi\xi} \varphi''_{xx} + U''_{\eta\eta} (\psi'_x)^2 + U''_{\eta\eta} \psi''_{xx} + 2U''_{\xi\eta} \psi'_x \varphi'_x;$$

$$U''_{yy} = U''_{\xi\xi} (\varphi'_y)^2 + U''_{\xi\xi} \varphi''_{yy} + U''_{\eta\eta} (\psi'_y)^2 + U''_{\eta\eta} \psi''_{yy} + 2U''_{\xi\eta} \psi'_y \varphi'_y; \quad (4.11)$$

$$U''_{xy} = U''_{\xi\xi} \varphi'_x \varphi'_y + U''_{\xi\xi} \varphi''_{xy} + U''_{\eta\eta} \psi'_x \psi'_y + U''_{\eta\eta} \psi''_{xy} + U''_{\xi\eta} \varphi'_x \psi'_y + U''_{\xi\eta} \psi'_x \varphi'_y = \\ = U''_{\xi\xi} \varphi'_x \varphi'_y + U''_{\xi\xi} \varphi''_{xy} + U''_{\eta\eta} \psi'_x \psi'_y + U''_{\eta\eta} \psi''_{xy} + U''_{\xi\eta} (\varphi'_x \psi'_y + \varphi'_y \psi'_x).$$

27. Функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ неперервні, двічі диференційовні і якобіан переходу від змінних (x, y) до змінних (ξ, η) відмінний від нуля, тобто:

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi'_x \varphi'_y \\ \psi'_x \psi'_y \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.12)$$

28. Для зведення рівняння (4.8) до найпростішого (канонічного) вигляду чинимо так:

а) за допомогою формули (4.9) з'ясуємо тип рівняння;

б) якщо рівняння (4.8) є рівнянням гіперболічного типу, то:

– складаємо такі рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{A} \quad (4.13)$$

та

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{A}. \quad (4.14)$$

Функції $\varphi^*(x, y)$ та $\psi^*(x, y)$ є шуканими розв'язками рівнянь (4.13) та (4.14);

– знаходимо заміну $\xi = \varphi^*(x, y)$ і $\eta = \psi^*(x, y)$;

– продиференціюємо дані функції та підставимо відповідні похідні у рівності (4.11);

– підставляємо знайдені функції та змінені похідні $U'_x, U'_y, U''_{xx}, U''_{xy}, U''_{yy}$ у рівняння (4.8) одержуємо канонічне рівняння вигляду $2\bar{B}U''_{\xi\eta} + f_2(\xi, \eta, U'_\xi, U'_\eta, U) = 0$;

в) якщо рівняння (4.8) є рівнянням еліптичного типу, то:

– складаємо такі рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} - i \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}. \quad (4.15)$$

– рівняння еліптичного типу має лише уявні характеристики. Виконаємо нову заміну змінних

$$\rho = \alpha(x, y), \quad \sigma = \beta(x, y); \quad (4.16)$$

– продиференціюємо дані функції та підставимо відповідні похідні у рівності (4.11). *Запам'ятайте, в позначеннях ρ – це φ , а σ – це ψ .*

– підставляємо знайдені функції та змінені похідні $U'_x, U'_y, U''_{xx}, U''_{xy}, U''_{yy}$ у рівняння (4.8), одержуємо канонічне рівняння вигляду $U''_{\rho\rho} + U''_{\sigma\sigma} + f_2(\rho, \sigma, U, U'_\rho, U'_\sigma) = 0$;

г) якщо рівняння (4.8) є рівнянням параболічного типу, то:

– складаємо рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}; \quad (4.17)$$

– функція $\varphi^*(x, y) = C$ є загальним інтегралом рівняння (4.17), звідки $\xi = \varphi^*(x, y)$;

– інша змінна $\eta = \psi(x, y)$ вибирається довільним чином за умови, що

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi'_x \varphi'_y \\ \psi'_x \psi'_y \end{vmatrix} \neq 0 \text{ і } A(\psi'_x)^2 + 2B\psi'_x \psi'_y + C(\psi'_y)^2 = 0;$$

– продиференціюємо дані функції та підставимо відповідні похідні у рівності (4.11);

– підставляємо знайдені функції та змінені похідні U'_x , U'_y , U''_{xx} , U''_{xy} , U''_{yy} у рівняння (4.8).

29. Коливання струни описується рівнянням $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з початковими умовами $U(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, де $\varphi(x)$ – початкове відхилення струни від положення рівноваги, $\psi(x)$ – початкова швидкість точок струни. Розв'язок даного рівняння за формулою Д'Аламбера шукають так:

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (4.18)$$

30. У випадку, коли коливання струни описується рівнянням типу

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)$$

з початковими умовами $U(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, де $\varphi(x)$ – початкове відхилення струни від положення рівноваги, $\psi(x)$ – початкова швидкість точок струни, то формула Д'Аламбера записується так:

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\eta)}^{x+a(t-\eta)} f(\xi,\eta) d\xi d\eta. \quad (4.19)$$

Приклади розв'язання типових завдань контрольної роботи № 4

Завдання 4.1 Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

1. $y' = 2xy^2$.

Розв'язування

Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$ (ДР з відокремлюваними змін-

ними), $\frac{dy}{y^2} = 2x dx$, $\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx$

і знайдемо загальний розв'язок: $-\frac{1}{y} = x^2 + C$, $y = \frac{-1}{x^2 + C}$.

$$2. y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Розв'язування

Дане рівняння є однорідним диференціальним рівнянням. Застосовуючи заміну $y = ux$, дістаємо ДР

$$u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}, \quad u'x = -\frac{1 + u^2}{2u};$$

$$\frac{2udu}{1+u^2} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{2udu}{1+u^2} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln(1+u^2) = -\ln|x| + \ln 2C.$$

Остаточно знаходимо інтеграл ДР:

$$1 + u^2 = \frac{2c}{x}, \quad 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{2C}{x}, \quad x^2 + y^2 = 2Cx, \quad (x - C)^2 + y^2 = C^2.$$

$$3. xy' + y = 3x^2.$$

Розв'язування

Оскільки дане рівняння є лінійним (4.2), то спочатку відшукуємо змінну v :

$$x \frac{dv}{dx} + v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln v = -\ln x, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Потім знаходимо змінну u :

$$xu' \frac{1}{x} = 3x^2, \quad u' = 3x^2, \quad u = \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного ДР буде таким: $y = (x^3 + C) \frac{1}{x}$.

$$4. xy' - y = 2xy^2.$$

Розв'язування

Дане рівняння є ДР Бернуллі. Беручи $z = \frac{1}{y}$, приходимо до лінійного ДР

$$xz' + z = -2x, \quad (xz)' = -2x, \quad xz = -x^2 + C,$$

$$z = \frac{C - x^2}{x}, \quad y = \frac{x}{C - x^2}.$$

Розв'язок ДР можна шукати за методом Бернуллі, беручи $y = uv$. Підставляючи y , дістаємо:

$$\begin{aligned}x(u'v + uv') - uv &= 2x^2v^2; \\u(xv' - v) &= 0, \quad xv' - v = 0, \quad xv' = v.\end{aligned}$$

З першого рівняння $xv' - v = 0$ знаходимо $v = x$.

З другого рівняння при $v = x$ маємо:

$$\begin{aligned}xu'x &= 2xu^2x^3, \quad u' = 2xu^2, \quad \frac{u'}{u^2} = 2x, \\ \frac{du}{u^2} &= 2x dx, \quad \int \frac{du}{u^2} = \int 2x dx, \quad -\frac{1}{u} = x^2 - C, \quad u = \frac{1}{C - x^2}.\end{aligned}$$

Остаточо знаходимо розв'язок ДР: $y = uv, \quad y = \frac{x}{C - x^2}$.

$$5. \quad y'' = \frac{(y')^2}{y}$$

Розв'язування

$$y' = P(y); \quad y'' = P \cdot P'(y); \quad PP' = \frac{P^2}{y}; \quad P\left(P' - \frac{P}{y}\right) = 0.$$

$$a) \quad P=0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad dy=0dx; \quad y=C.$$

$$b) \quad P' - \frac{P}{y} = 0; \quad \frac{dP}{P} = \frac{dy}{y}; \quad \ln|P| = \ln|yC_1|; \quad P=yC_1; \quad \frac{dy}{dx} = yC_1; \quad \ln|y| = C_1x + C_2.$$

$$\text{Отже, } y = e^{C_1x + C_2}.$$

$$6. \quad xy'' = 2x - y'.$$

Розв'язування

$$\text{Зробимо підстановку } y' = P(x), \quad xP' = 2x - P; \quad \frac{dP}{dx} = 2 - \frac{P}{x}; \quad \frac{P}{x} = z;$$

$$P' = z + z'x; \quad z + z'x = 2 - z; \quad z'x + 2z = 2; \quad \frac{dz}{dx}x = 2 - 2z; \quad \frac{dz}{2 - 2z} = \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2} \ln|1 - z| = \ln|xC|;$$

$$1 - z = (xC)^2; \quad z = 1 - (xC)^2; \quad \frac{P}{x} = 1 - (xC)^2; \quad y = \frac{x^2}{2} - \frac{C^2x^4}{4} + C_1.$$

$$7. \quad y'' = 2 \sin x.$$

Розв'язування

Послідовно інтегруємо:

$$\int y' dx = \int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C_1; \quad y = \int (-2 \cos x + C_1) dx = -2 \sin x + C_1 x + C_2.$$

Завдання 4.2 Знайти розв'язок задачі Коші: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{x^3}$; $y(1) = 2$.

Розв'язування

$$dy = \frac{x-2}{x^3} dx = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx.$$

Інтегруємо одержану рівність:

$$\int dy = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{2dx}{x^3}; \quad y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Для знаходження константи підставимо початкову умову в одержаний розв'язок

$$y(1) = 2 = -\frac{1}{1} + 1 + C; \quad C = 2.$$

Таким чином, $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2$.

Завдання 4.3 Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$1) \quad y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$$

Розв'язування

$$y = y_{з.о.} + y_{ч.н.},$$

де

$y_{з.о.}$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$y_{ч.н.}$ – розв'язок, який відповідає правій частині рівняння.

а) $y'' - 4y' + 4y = 0$. Замінюємо дане диференціальне рівняння відповідним характеристичним

$$k^2 - 4k + 4 = 0; \quad k_{1,2} = 2, \quad y_{з.о.} = (C_1 x + C_2) e^{2x};$$

б) $y_{ч.н.} = (Ax + B) e^{2x} \cdot x^2$, оскільки $k_1 = k_2 = 2 = \alpha$;

$$y'_{ч.н.} = (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} = (3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2)e^{2x};$$

$$y''_{ч.н.} = (6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx)e^{2x} + 2(3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2)e^{2x} \cdot 2.$$

Підставимо знайдені похідні у вихідне рівняння:

$$(6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax^2 + 4Bx + 4Ax^3 + 4Bx^2) - \\ - (4Ax^2 + 8Bx + 8Ax^3 + 8Bx^2) + 4Ax^3 + 4Bx^2 = x.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів прирівнюємо коефіцієнти біля невідомих в однакових степенях. Маємо:

$$x^3: 4A + 4A - 8A = 0; \quad 0 = 0.$$

$$x^2: 12A + 4B - 12A - 8B + 4B = 0; \quad 0 = 0.$$

$$x^1: 6A + 3A + 8B - 8B = 1; \quad A = \frac{1}{6}.$$

$$x^0: 2B = 0; \quad B = 0.$$

$$\text{Отже, } y_{ч.н.} = \frac{1}{6}x^3e^{2x}.$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = (C_1x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} \quad \text{або} \quad y = \left(C_1x + C_2 + \frac{x^3}{6} \right) e^{2x}.$$

$$2) y'' + 5y' + 6y = 13\sin x.$$

Розв'язування

$$y = y_{з.о.} + y_{ч.н.},$$

де

$y_{з.о.}$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$y_{ч.н.}$ – розв'язок, який відповідає правій частині рівняння.

а) $y'' + 5y' + 6y = 0$. Замінюємо дане диференціальне рівняння відповідним характеристичним $k^2 + 5k + 6 = 0$.

Звідки $k_1 = -2$, $k_2 = -3$, $y_{з.о.} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$.

б) Оскільки $k = 3i$ не є коренем характеристичного рівняння, то

$$y_{ч.н.} = A \sin 3x + B \cos 3x.$$

Продиференціюємо одержану функцію двічі

$$y'_{ч.н.} = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x,$$

$$y''_{ч.н.} = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x$$

та підставимо значення функції та її похідних у вихідне рівняння

$$-9A \sin 3x - 9B \cos 3x + 15A \cos 3x - 15B \sin 3x + 6A \sin 3x + 6B \cos 3x = 13 \sin 3x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin 3x$ та $\cos 3x$.

$$\sin 3x: -9A - 15B + 6A = 13;$$

$$\cos 3x: -9D + 15A + 6B = 0.$$

$$\begin{cases} -3A - 15B = 13 \\ -3B + 15A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3B = 15A \\ 3A + 15B = -13 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 5A \\ 3A + 75A = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 5A \\ 78A = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -\frac{5}{6} \\ A = -\frac{13}{78} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{Отже, } y_{ч.н.} = -\frac{1}{6} \sin 3x - \frac{5}{6} \cos 3x.$$

$$\text{Таким чином, загальний розв'язок: } y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{5}{6} \cos 3x.$$

Завдання 4.4 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' - y' = x^2 + x$.

Розв'язування

$$y = y_{з.о.} + y_{ч.н.},$$

де:

$y_{з.о.}$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$y_{ч.н.}$ – розв'язок, який відповідає правій частині рівняння.

а) $y''' - y' = 0$. Замінюємо дане диференціальне рівняння відповідним характеристичним $k^3 - k = 0 \leftrightarrow k(k-1)(k+1) = 0$. Звідки $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$. Тому $y_{3.0.} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$;

б) оскільки $k_1 = 0$ є простим коренем характеристичного рівняння, то $y_{ч.н.} = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

Продиференціюємо одержану функцію тричі

$$y'_{ч.н.} = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$

$$y''_{ч.н.} = 6Ax + 2B;$$

$$y'''_{ч.н.} = 6A$$

та підставимо значення функції і її похідних у вихідне рівняння

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 + x.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів прирівнюємо коефіцієнти біля невідомих в однакових степенях. Маємо:

$$\begin{array}{ll} x^2 : -3A = 1; & A = -\frac{1}{3}; \\ x : -2B = 1; & \text{Звідки } B = -\frac{1}{2}; \\ x^0 : 6A - C = 0. & C = -2. \end{array}$$

Отже, $y_{ч.н.} = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

Таким чином, загальний розв'язок: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

Завдання 4.5 Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо запропоновану систему до одного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Для цього продиференціюємо

перше рівняння системи за t : $x'' = -7x' + y'$ і замінимо y' , скориставшись для цього другим рівнянням системи та виразимо y з першого рівняння:

$$x'' = -7x' - 2x - 5y, \quad y = x' + 7x.$$

Остаточнo $x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x)$. $x'' + 12x' + 37x = 0$ – однорідне лінійне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами.

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 12k + 27 = 0$; $k_{1,2} = -6 \pm i$.
Отже, $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ – його розв'язок. Оскільки $y = x' + 7x$,

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t);$$

$$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)).$$

Відповідь: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$;

$$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)).$$

Завдання 4.6 Знайти розв'язок ДР методом Лагранжа

$$y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$$

Розв'язування

1) $y'' - y' = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 - k = 0$, звідки $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, то загальний розв'язок рівняння такий: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2$;

2) частинний розв'язок рівняння такий: $y' = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$;

3) Складемо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Таким чином,
$$\begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' \cdot e^x = 0, \\ C_1' \cdot 0 + C_2' \cdot e^x = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}. \end{cases}$$

Із другого рівняння $C_2'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. Проінтегрувавши, отримаємо

$$C_2(x) = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arcsin e^x. \text{ Тоді } C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot e^x = -\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}. \text{ Знову}$$

проінтегрувавши маємо: $C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \sqrt{1-e^{2x}}.$

Таким чином, частинний розв'язок даного рівняння такий:
 $y^* = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cdot e^x = \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x.$ Тоді шуканий загальний

розв'язок рівняння: $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 + \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x.$

Завдання 4.7 Знайти криву, яка проходить через точку $Q(-1,4)$ таку, що піднормаль її в будь-якій точці має одне значення, яке дорівнює 4.

Розв'язування

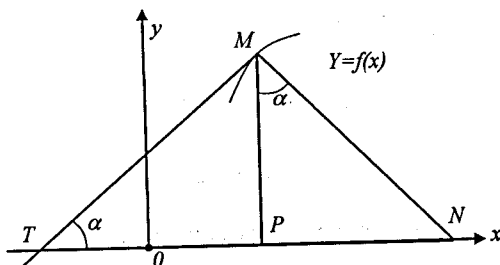


Рисунок 4.1

Нехай $y=f(x)$ – шукана крива, MT – дотична до цієї кривої в точці M , MN – нормаль. Піднормаль – PN (проекція відрізка нормалі MN на вісь Ox).

$PM=y$ і $\angle NMP = \angle MTP = \alpha$, $PN = y \operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = y' \Rightarrow PN = y \cdot y'$ за умовою

$$y \cdot y' = 4 \Rightarrow y \frac{dy}{dx} = 4; \quad y dy = 4 dx; \quad \frac{y^2}{2} = 4x + C_1; \quad y^2 = 8x + C;$$

$16 = -8 + C; C = 24 \Rightarrow y^2 = 8x + 24$ або $y^2 = 8(x+3)$ – парабола; $A(-3,0)$ – вершина параболи.

Завдання 4.9 Звести до канонічного вигляду рівняння

а) $x^2 U''_{xx} - y^2 U''_{yy} = 0$;

б) $\frac{1}{x^2} U''_{xx} + \frac{1}{y^2} U''_{yy} = 0$;

в) $x^2 U''_{xx} + 2xy U''_{xy} + y^2 U''_{yy} = 0$.

Розв'язування

а) для визначення типу рівняння складемо його дискримінант. Оскільки

$$A = x^2; \quad B = 0; \quad C = -y^2;$$

$\Delta = B^2 - AC = x^2 y^2 > 0$, то дане рівняння є рівнянням гіперболічного типу.

Диференціальні рівняння характеристик (4.13, 4.14) та їх загальні інтеграли такі:

1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \quad xy = C$, звідси $\xi = xy$;

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \quad \frac{y}{x} = C$, звідси $\eta = \frac{y}{x}$.

Згідно з (4.11) маємо

$$U''_{xx} = y^2 U''_{\xi\xi} - 2 \frac{y^2}{x^2} U''_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4} U''_{\eta\eta} + 2 \frac{y}{x^3} U'_\eta;$$

$$U''_{yy} = U''_{\xi\xi} x^2 + 2 U''_{\xi\eta} x \frac{1}{x} + U''_{\eta\eta} \frac{1}{x^2} + U'_\xi \cdot 0 + U'_\eta \cdot 0 = U''_{\xi\xi} x^2 + 2 U''_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2} U''_{\eta\eta}.$$

Підставимо знайдені похідні у наше рівняння, маємо

$$x^2 y^2 U''_{\xi\xi} - 2 y^2 U''_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^2} U''_{\eta\eta} + \frac{2y}{x} U'_\eta - y^2 x^2 U''_{\xi\xi} - 2 y^2 U''_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2} U''_{\eta\eta} = 0 \text{ або}$$

$$-4 y^2 U''_{\xi\eta} - 2 \frac{y}{x} U'_\eta = 0.$$

Поділимо останній вираз на $-4y^2$, отримаємо:

$$U''_{\xi\eta} - \frac{1}{2yx} U'_\eta = 0.$$

Оскільки $\xi = xy$, остаточно одержуємо канонічний вигляд даного рівняння

$$U''_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} U'_\eta = 0;$$

б) для визначення типу рівняння складемо його дискримінант. Оскільки

$$A = \frac{1}{x^2}; \quad B = 0; \quad C = \frac{1}{y^2};$$

$$\Delta = B^2 - AC = -\frac{1}{x^2 y^2} < 0, \text{ то дане рівняння є рівнянням еліптичного типу.}$$

Диференціальні рівняння характеристик (4.15) та їх загальні інтеграли такі:

$$1) \frac{dy}{dx} = -i \frac{x^2}{xy}; \quad \frac{dy}{dx} = -i \frac{x}{y}; \quad y^2 + ix^2 = C, \text{ звідси } \xi = y^2 + ix^2;$$

$$2) \frac{dy}{dx} = i \frac{x}{y}; \quad y^2 - ix^2 = C, \text{ звідси } \eta = y^2 - ix^2.$$

Отримані змінні комплексні, тому знаходимо остаточною заміну змінних

$$\rho = y^2, \quad \sigma = x^2.$$

Згідно з (4.11) маємо

$$U''_{xx} = U''_{\rho\rho} \cdot 0 + 2U''_{\rho\sigma} \cdot 0 + U''_{\sigma\sigma} 4x^2 + U'_\rho \cdot 0 + U'_\sigma 2 = 4x^2 U''_{\sigma\sigma} + 2U'_\sigma,$$

$$U''_{yy} = U''_{\rho\rho} 4y^2 + 2U''_{\rho\sigma} \cdot 0 + U''_{\sigma\sigma} \cdot 0 + U'_\rho 2 + U'_\sigma \cdot 0 = 4y^2 U''_{\rho\rho} + 2U'_\rho.$$

Підставимо знайдені похідні у наше рівняння, маємо

$$\frac{1}{x^2} 4x^2 U''_{\sigma\sigma} + \frac{2}{x^2} U'_\sigma + \frac{4y^2}{y^2} U''_{\rho\rho} + \frac{2}{y^2} U'_\rho = 0,$$

$$4U''_{\sigma\sigma} + 4U''_{\rho\rho} + 2\left(\frac{1}{\sigma} U'_\sigma + \frac{1}{\rho} U'_\rho\right) = 0;$$

в) для визначення типу рівняння складемо його дискримінант. Оскільки

$$A = x^2; \quad B = xy; \quad C = y^2;$$

$$\Delta = B^2 - AC = 0, \text{ то дане рівняння є рівнянням параболічного типу.}$$

Складемо згідно з (4.17) диференціальне рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{x} = c, \text{ звідки } \xi = \frac{y}{x}.$$

Рівняння для другої незалежної змінної можна взяти у вигляді $\eta = y$, оскільки за такого вибору якобіан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2}$$

відмінний від нуля в усіх точках площини Oxy , крім точок осі Ox , і $A(\psi'_x)^2 + 2B\psi'_x\psi'_y + C(\psi'_y)^2 = 0$.

Згідно з (4.11) маємо

$$U''_{xx} = \frac{y^2}{x^4} U''_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3} U''_{\xi};$$

$$U''_{yy} = \frac{1}{x^2} U''_{\xi\xi} + \frac{2}{x} U''_{\xi\eta} + U''_{\eta\eta};$$

$$U''_{xy} = -\frac{y}{x^3} U''_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2} U''_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} U''_{\xi}.$$

Підставимо знайдені похідні у наше рівняння, маємо

$$U''_{\eta\eta} = 0.$$

Завдання 4.10 Знайти розв'язок задачі Коші за формулою Д'Аламбера

а) $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ за умови, що $U(x, 0) = x^2$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos x$;

б) $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6$ за умови, що $U(x, 0) = x^2$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 4x$.

Розв'язування

а) згідно з формулою (4.18) знайдемо спочатку інтеграл

$$\int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz = \int_{x-at}^{x+at} \cos z dz = \sin z \Big|_{x-at}^{x+at} = \sin(x+at) - \sin(x-at) = 2 \cos x \sin at.$$

Тоді

$$U(x, t) = \frac{1}{2}((x-at)^2 + (x+at)^2) + \frac{1}{a} \cos x \sin at = x^2 + a^2 t^2 + \frac{1}{a} \cos x \sin at;$$

б) в даному випадку потрібно скористатись формулою (4.19). Для цього обчислимо інтеграли

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = 2 \int_{x-t}^{x+t} \xi d\xi = \xi^2 \Big|_{x-t}^{x+t} = 4xt,$$

$$\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\eta)}^{x+a(t-\eta)} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = 3 \int_0^t \int_{x-t+\eta}^{x+t-\eta} d\xi d\eta = 6 \int_0^t (t-\eta) d\eta = 6 \left(t\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) \Big|_0^t = 3t^2.$$

Оскільки $\frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} = \frac{1}{2}((x-t)^2 + (x+t)^2) = x^2 + t^2$, то

$$U(x, t) = x^2 + t^2 + 4xt + 3t^2 = (x + 2t)^2.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Абрамчук І. В. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної : навчальний посібник / Абрамчук І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 152 с.
2. Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Функції багатьох змінних, кратні інтеграли : навчальний посібник / Сачанюк-Кавецька Н. В., Краєвський В. О., Ковальчук М. Б. – Вінниця : ФОП Долюк С. В., 2014. – 135 с.
3. Сачанюк-Кавецька Н. В. Збірник тестових завдань для систематизації та узагальнення знань з вищої математики. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навчальний посібник / Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук – Вінниця : ВНТУ, 2014. – 137 с.
4. Тичинська Л. М. Теорія функцій комплексної змінної : навчальний посібник / Тичинська Л. М., Ковальчук М. Б., Черноволик Г. О. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 108 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2-х т. / Пискунов Н. С. – М. : Интеграл-Пресс, 2004.
Т. 1. – 2003. – 416 с.
Т. 2. – 2003. – 529 с.
6. Петрук В. А. Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Рівняння математичної фізики : навчальний посібник / Петрук В. А., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 157 с.
7. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.
8. Овчинников П. П. Вища математика : підручник у 2-х томах / Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. – [3-є вид.] – К. : Техніка, 2008.
Ч. 1. – 2008. – 600 с.
Ч. 2. – 2008. – 792 с.
9. Бугров Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Наука, 2002. – 464 с.

Навчальне видання

**Хом'юк Ірина Володимирівна
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Хом'юк Віктор Вікторович
Ковальчук Майя Борисівна**

**Вища математика. Збірник завдань
для організації самостійної роботи студентів
заочної форми навчання в двох частинах
(з теоретичною підтримкою)**

Частина 1

Навчальний посібник

Редактор Є. Плетньова

Оригінал-макет підготовлено Н. Сачанюк-Кавецькою

Підписано до друку 14.09.2017 р.
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 11,94.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр.
Зам. № 2017-333.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 59-85-32, 59-81-59,
press.vntu.edu.ua,
[E-mail: kivc.vntu@gmail.com](mailto:kivc.vntu@gmail.com).

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.