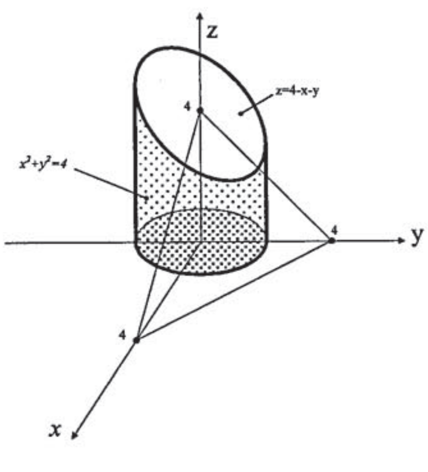
Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання (з теоретичною підтримкою) в двох частинах

Частина 2



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Вища математика.
Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання (з теоретичною підтримкою) в двох частинах

Частина 2
Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 51 (075.8)
В22

Автори:
І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. В. Хом'юк, М. Б.Ковальчук

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 4 від 27. 10. 2016 р.)

Рецензенти:
В. Х. Касьяненко, доктор фізико-математичних наук, професор
Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор
О. А. Тінгаєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент

В22 **Вища** математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 2 : навчальний посібник / Хом'юк І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Хом'юк В. В., Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 148 с.

Метою даного посібника, який складається з двох частин, є допомога студенту-заочнику навчитися з найменшими витратами часу самостійно розв'язувати довільні задачі курсу «Вища математика». Посібник структурований згідно з контрольними роботами, кожна з яких відповідає певним темам і містить перелік основних теоретичних положень та велику кількість детально розв'язаних типових завдань. В другій частині подано завдання з таких тем: кратні інтеграли, теорія поля; ряди, функція комплексної змінної; операційне числення; елементи теорії ймовірностей.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей, аспірантів, викладачів та осіб, які займаються самоосвітою.

УДК 51 (075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Основним завданням вищої професійної освіти при врахуванні вимог і принципів Болонської декларації є «орієнтація вищих навчальних закладів на кінцевий результат: знання, уміння та навички випускників, що повинні бути застосовані та використані на користь держави». Стратегічною метою освіти проголошується становлення компетенції студента як особистості, яка здатна до самовизначення, самоосвіти, саморегуляції, самоактуалізації, конкурентоспроможності на ринку праці. Це зовсім не означає, що роль знань будь-яким чином занижується. Однак вони з основної мети освіти перетворились в засіб розвитку особистості студента.

Із кожним днем в інженерній діяльності все більш важливіше місце посідають інноваційні технології, що висувають високі вимоги не тільки до спеціальної, але й фундаментальної підготовки інженера, а тому необхідно, щоб навчання одночасно забезпечувало високу якість фундаментальних знань і готовність випускника до професійної діяльності. Для студентів інженерних спеціальностей математика постає не стільки навчальною дисципліною, скільки професійним інструментом аналізу, організації, управління технологічними процесами. Математика є основою інженерної освіти, мовою інженерних досліджень і в діяльності інженера повинна допомагати вирішувати професійні задачі. Тому випускники ВТНЗ повинні володіти математичним апаратом, необхідним для розв'язування теоретичних і практичних завдань, мати досить високий рівень розвитку логічного мислення, вміти переводити практичне завдання з професійної на математичну мову.

У системі навчання майбутнього інженера величезне значення має розбір навчальних прикладів і задач практичного змісту. На початку вивчення деякої теми це можуть бути приклади на відпрацювання певного методу, прийому або алгоритму рішення, надалі, в розвиток теми, потрібно ставити завдання узагальнювального характеру, які потребують математичної інтуїції і кмітливості. На заключному етапі дуже бажані:

а) перевірка отриманих результатів на відповідність фізичному змісту і розмірності;

б) припущення щодо можливої зміни результату при певних змінах постановки задачі або початкових умов;

в) детальний аналіз та висновки.

Бажано, щоб усе це, в міру своїх знань і здібностей, навчалися робити самі студенти.

Метою даного посібника, який складається з двох частин, є допомога студенту-заочнику навчитися з найменшими витратами часу самостійно розв'язувати довільні задачі курсу «Вища математика».

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці даного посібника для студентів технічних вузів – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної технічної спрямованості.

В даній частині посібника розглянуто завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань контрольних робіт № 5 – 8 з таких тем:

- кратні інтеграли, теорія поля;
- ряди, функція комплексної змінної;
- операційне числення;
- елементи теорії ймовірностей.

Істотною особливістю даного посібника є корисна систематизація та алгоритмізація теоретичного матеріалу, який використовується для розв'язування відповідної контрольної роботи. Посібник містить винятково за повнотою добірку задач і прикладів.

Даний посібник дозволить студентам заочної форми навчання самостійно опанувати необхідний інженеру обсяг математичних знань. Також він може бути корисним при вибірковому вивченні окремих тем або розділів студентами як заочної, так і денної форм навчання. Велика кількість завдань та детальний розгляд прикладів розв'язування типових завдань дозволяє використовувати даний навчальний посібник як на практичних заняттях з «Вищої математики», так і для самоосвіти.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5 : завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань

Кратні інтеграли, теорія поля

Завдання 5.1 Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена вказаними лініями.

1. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, $D: y=x^2,\ x=y^2.$
2. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, $D: y=x^2,\ y=2x.$
3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $D: y^2=x,\ y=x.$
4. $\iint\limits_D x^2ydxdy$, $D: y=2-x,\ y=x,\ x\geq 0.$
5. $\iint\limits_D (x^3-2y)dxdy$, $D: y=x^2-1,\ x\geq 0,\ y\leq 0.$
6. $\iint\limits_D (y-x)dxdy$, $D: y=x,\ y=x^2.$
7. $\iint\limits_D (1+y)dxdy$, $D: y^2=x,\ 5y=x.$
8. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $D: y=x^2-1,\ y=-x^2+1.$
9. $\iint\limits_D x(y-1)dxdy$, $D: y=5x,\ y=x,\ x=3.$
10. $\iint\limits_D (x-2)dxdy$, $D: y=x,\ y=\frac{1}{2}x,\ x=2.$
11. $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy$, $D: y=x^2,\ y=1.$
12. $\iint\limits_D x^2ydxdy$, $D: y=2x^3,\ y=0,\ x=1.$
13. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, $D: x=y^2,\ x=1.$
17. $\iint\limits_D y(1-x)dxdy$, $D: y^3=x,\ y=x.$
18. $\iint\limits_D xy^3dxdy$, $D: y^2=1-x,\ x\geq 0.$
19. $\iint\limits_D x(y+5)dxdy$, $D: y=x+5,$ $x+y+5=0,\ x\leq 0.$
20. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, $D: y=x^2-1,\ y=3.$
21. $\iint\limits_D (x+1)\,y^2dxdy$, $D: y=3x^2,\ y=3.$
22. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, $D: y=x,\ y=0,\ x=1.$
23. $\iint\limits_D (x^3+y)dxdy$, $D: x+y=1,\ x+y=2,$ $x\leq 1,\ x\geq 0.$
24. $\iint\limits_D xy^3dxdy$, $D: y=x^3,\ y\geq 0,\ y=4x.$
25. $\iint\limits_D (x^3+3y)dxdy$, $D: x+y=1,\ y=x^2-1,$ $x\geq 0.$
26. $\iint\limits_D xydxdy$, $D: y=\sqrt{x},\ y=0,\ x+y=2.$
27. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$, $D: y=x,\ xy=1,\ y=2.$

14. $\iint\limits_D xydxdy$, $D: y=x^3, y=0, x\le 2.$

15. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $D: y=x^3, y=8, y=0,$

$x=3.$

16. $\iint\limits_D x(2x+y)dxdy$, $D: y=1-x^2, y\ge 0.$

28. $\iint\limits_D y(1+x^2)dxdy$, $D: y=x^3, y=3x.$

29. $\iint\limits_D y^2(1+2x)dxdy$, $D: x=2-y^2, x=0.$

30. $\iint\limits_D e^y dxdy$, $D: y=\ln x, y=0, x=2.$

Завдання 5.2 Обчислити подвійний інтеграл, використовуючи полярні координати.

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy.$

2. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

3. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{-\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy.$

5. $\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx.$

6. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2+y^2}dy.$

7. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}dy.$

8. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} tg(x^2+y^2)dy.$

9. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2)dy.$

16. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

17. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

18. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

19. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}ctg\sqrt{x^2+y^2}}.$

20. $\int\limits_{-3}^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2+y^2}dy.$

21. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \cos(x^2+y^2)dy.$

22. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)dy.$

23. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dy.$

24. $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2}dy.$

10. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

11. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$.

12. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2^2-x^2}}^{\sqrt{2^2-x^2}} (1+x^2+y^2)dy$.

13. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4^2-x^2}}^{\sqrt{4^2-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$.

14. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$.

15. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

25. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$.

26. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dy$.

27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

28. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

29. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)dy$.

30. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

Завдання 5.3 Обчислити за допомогою подвійного інтеграла площу плоскої області, що обмежена вказаними лініями:

1. $x = y^2,\ x = \sqrt{2-y^2}$.
2. $y = 3(x-1)^2,\ y = 0,\ x = 0$.
3. $x = 4 - y^2,\ x - y + 2 = 0$.
4. $y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 3$.
5. $y = \sqrt[3]{x},\ y = 1,\ x = 0$.
6. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2)$.
7. $y = x^2,\ y = -x$.
8. $y = 2 + tg\,x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$.
9. $xy = 1,\ x^2 = y,\ y = 2,\ x = 0$.
10. $x = \cos y,\ x \le y + 1,\ x \ge 0$.
16. $y = arctg\,3x,\ y = 0,\ x = \frac{1}{3}$.
17. $x^2 + y^2 = 5,\ y = 5 - x^2$.
18. $y = \sin x,\ y = \frac{2x}{\pi}$.
19. $y = 3^x + 1,\ x = 0, x = 2$.
20. $y = \ln x + 5,\ y = \frac{x}{4},\ x = 1,\ x = 4$.
21. $x = y^2 + 1,\ x + y = 3$.
22. $(x^2+y^2)^3 = a^2x^4$.
23. $(x^2+y^2)^3 = 2ay^3$.
24. $y = \ln x + 1,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e$.
25. $y = 2^x,\ y = 2x - x^2,\ x = 2,\ x = 0$.

11. $2y=\sqrt{x}, x+y=5, x\geq 0$.

12. $\rho^2=a^2\cos 3\varphi$.

13. $\rho=a\cos^2 2\varphi$.

14. $y=x^2+2, x\geq 0, x=2, y=x$.

15. $y=x^2+1, x+y=3$.

26. $x=y^2, y^2=4-x$.

27. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(7x^2+5y^2\right)$.

28. $y^2=4-x, y=x+2, y=2, y=-2$.

29. $y=\sqrt{2-x^2}, y=x^2$.

30. $y=-2x^2+2, y\geq -6$.

Завдання 5.4 За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити креслення.

1. $z^2=4-x, x^2+y^2=4x$.
2. $z=4-y^2, x^2+y^2=4, z\geq 0$.
3. $x^2+y^2=1, z=2-x-y, z\geq 0$.
4. $z=y^2, x\geq 0, z\geq 0, x+y=2$.
5. $y\geq 0, z\geq 0, z=x, x=\sqrt{9-y^2}$,

   $x=\sqrt{25-y^2}$.
6. $x^2+y^2=4, z=4-x-y, z\geq 0$.
7. $z\geq 0, x=x^2, x-2y+2=0, x+y=7$.
8. $x\geq 0, z\geq 0, z=y, x=4, y=\sqrt{25-x^2}$.
9. $z\geq 0, z=4-x, x=2\sqrt{y}, y=2\sqrt{x}$.
10. $y\geq 0, z\geq 0, 2x-y=0, x+y=9, z=x^2$.
11. $y\geq 0, z\geq 0, x=4, y=2x, z=x^2$.
12. $x\geq 0, z\geq 0, y=2x, y=3, z=\sqrt{y}$.
13. $y\geq 0, z\geq 0, x=3, y=2x, z=y^2$.
14. $z\geq 0, y^2=2-x, z=3x$.
15. $z\geq 0, y=\sqrt{9-x^2}, z=2y$.
16. $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y=2, z=x^2+y^2$.
17. $z\geq 0, x^2+y^2=9, z=5-x-y$.
18. $z\geq 0, z=x, x=\sqrt{4-y^2}$.
19. $y\geq 0, z\geq 0, x+y=2, z=x^2$.
20. $y\geq 0, z\geq 0, y=4, z=x, x=\sqrt{25-y^2}$.
21. $z\geq 0, x^2+y^2=9, z=y^2$.
22. $x\geq 0, z\geq 0, y\geq 0, z=1-x^2-y^2$.
23. $z\geq 0, x^2+y^2=4, z=x^2+y^2$.
24. $z\geq 0, y=2, y=x, z=x^2$.
25. $z\geq 0, y+z=2, x^2+y^2=4$.
26. $y\geq 0, z\geq 0, x-y=0, 2x+y=2, 4z=y^2$.
27. $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, 2x+y=2, z=y^2$.
28. $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, y=3-x, z=9-x^2$.
29. $z\geq 0, x=y^2, x=2y^2+1, z=1-y^2$.
30. $x\geq 0, z\geq 0, x+y=4, z=4\sqrt{y}$.

Завдання 5.5

1. Знайти похідну скалярного поля $U=x^2+y^2-3\cdot x+2\cdot y$ в точці $M_1(0;0;0)$ в напрямі, що йде від цієї точки до точки $M_2(3;4;0)$.

2. Знайти швидкість зміни скалярного поля $U = xyz$ в точці $M_1(5;1;-8)$ в напрямі, що йде від цієї точки до точки $M_2(9;4;4)$.

3. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 + y^2$ в точці $M_1 = (3;2)$ в напрямі, що утворює з віссю Ox кут $\alpha = 45°$.

4. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 - x \cdot y + y^2$ в точці $M_1(2;-1)$ в напрямі, що утворює з віссю Ox кут $\alpha = 120°$.

5. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 - 3xy - y^2$ в точці $M_1(3;1)$ в напрямі від цієї точки до точки $M_2(6;5)$.

6. Знайти похідну скалярного поля $U = arctgxy$ в точці $M_1(2;2)$ в напрямі бісектриси першого координатного кута.

7. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2y^2 - xy^3 - 3y$ в точці $M_1(2;1)$ в напрямі від цієї точки до початку координат.

8. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 + y^2 + z^2 - x + y + z + 1$ в точці $M_1(1;-2;3)$ в напрямі від цієї точки до початку координат.

9. Знайти похідну скалярного поля $U = y^2z - 2xyz + z^2$ в точці $M_1(3;1;1)$ в напрямі вектора $\vec{a}$, який утворює з осями координат кути α, β, γ, причому $\alpha = \pi/3$; $\beta = \pi/4$.

10. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 + y^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot y$ в точці $M_1(0;0;0)$ в напрямі від цієї точки до точки $M_2(3;4;0)$.

11. Знайти похідну скалярного поля $U = xy^2 + z^3 - xyz$ в точці $M_1(1;1;0)$ в напрямі, що утворює з осями координат кути відповідно $60°, 45°, 60°$.

12. Знайти похідну скалярного поля $U = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz$ в точці $M_1(1;1;1)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 8 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 8 \cdot \vec{k}$.

13. Знайти похідну скалярного поля $U = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$ в точці $M_1(1;1;1)$ в напрямі вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$.

14. Знайти похідну скалярного поля $U = x \cdot z^2 - \sqrt{x^5 \cdot y}$ в точці $M_1(2;2;4)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$.

15. Знайти похідну скалярного поля $U = \sqrt[3]{x \cdot y^2} + z^3$ в точці $M_1(1;1;1)$ в напрямі від цієї точки до точки $M_2(2;3;-1)$.

16. Знайти похідну скалярного поля $U = \ln(5 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2)$ в точці $M_1(1;1)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$.

17. Знайти похідну скалярного поля $U = 2x^3 - y^3 + z^3 + xyz$ в точці $M_1(1;1;1)$ в напрямі від цієї точки до початку координат.

18. Знайти похідну скалярного поля $U = x^3 + \sqrt{y \cdot z}$ в точці $M_1(2;1;1)$ в напрямі вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}$.

19. Знайти похідну скалярного поля $U = arctgxy^2$ в точці $M_1(2;1)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$.

20. Знайти похідну скалярного поля $U = \ln(3 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2)$ в точці $M_1(1;3)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j}$.

21. Знайти похідну скалярного поля $U = x \cdot \sqrt{y} + y \cdot \sqrt{z}$ в точці $M_1(2;4;4)$ в напрямі від цієї точки до точки $M_2(1;1;1)$.

22. Знайти похідну скалярного поля $U = arctg\frac{y}{x} + xz$ в точці $M_1(2;2;-1)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$.

23. Знайти похідну скалярного поля $U = \ln(5 \cdot x + 4 \cdot y^2)$ в точці $M_1(1;1)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j}$.

24. Знайти похідну скалярного поля $U = arctg\frac{x^2}{y}$ в точці $M_1(1;2)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 5 \cdot \vec{i} - 12 \cdot \vec{j}$.

25. Знайти похідну скалярного поля $U = \sqrt{x \cdot y} + \sqrt{4 + z^2}$ в точці $M_2(1;1;0)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}$.

26. Знайти похідну скалярного поля $U = \ln(1 + x^2 + y^2)$ в точці $M_1(1;1)$ в напрямі від цієї точки до точки $M_2(4;5)$.

27. Знайти похідну скалярного поля $U = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$ в точці $M_1(0;-3;4)$ в напрямі вектора $\vec{a} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$.

28. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 \cdot y + y^3 + z^3$ в точці $M_1(0;1;1)$ в напрямі від цієї точки до точки $M_2(2;3;2)$.

29. Знайти похідну скалярного поля $U = arctgx^2y$ в точці $M_1(1;2)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}$.

30. Знайти похідну скалярного поля $U = \ln(3 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2)$в точці $M_1(1;1)$ в напрямі вектора $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$.

Завдання 5.6

Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля U в точці M_1.

1. $U=\ln(x^2+4y^2)$,	$M_1(2;1)$.	16. $U=\sqrt{x^2+y^2}+z^2$,	$M_1(3;4;1)$.
2. $U=\sqrt{x^2+y^2}$,	$M_1(3;4)$.	17. $U=\ln(1+x^2+y^2)$,	$M_1(1;1)$.

3. $U=arctg\, xy,$ $M_1(1;1).$

4. $U=\frac{x}{y}+\sqrt{y},$ $M_1(3;1).$

5. $U=x-3y+\sqrt{3xy},$ $M_1(3;4).$

6. $U=x^2+y^2-3x+2y+1,$ $M_1(1;1).$

7. $U=arcsin\frac{x}{x+y},$ $M_1(1;1).$

8. $U=\ln\frac{y}{x},$ $M_1(1;1).$

9. $U=\ln(x^2+4y^2),$ $M_1(6;4).$

10. $U=arcsin\frac{y^2}{x},$ $M_1(2;1).$

11. $U=y-3x+\sqrt{3xy},$ $M_1(4;3).$

12. $U=\ln(3x^2=5y^2),$ $M_1(1;1).$

13. $U=2x^2y-z^2x,$ $M_1(1;1;2).$

14. $U=3x^4+2x^2y^3,$ $M_1(-1;2).$

15. $U=3x^2y^2+3y^2x,$ $M_1(1;1).$

18. $U=3x^2+2xy+y^2,$ $M_1(2;1).$

19. $U=5x^2-4xy,$ $M_1(1;2).$

20. $U=\sqrt{x^2y+z^3},$ $M_1(1;1;2).$

21. $U=arctg\frac{x}{y},$ $M_1(1;1).$

22. $U=x^2\sqrt{y}+y\sqrt{z},$ $M_1(1;1;1).$

23. $U=\sqrt{xyz},$ $M_1(1;1;1).$

24. $U=y^2\sqrt{x}+x\sqrt{z},$ $M_1(1;2;1).$

25. $U=\ln(2x^2+3yz),$ $M_1(1;1;1).$

26. $U=2x^2y-yz^2,$ $M_1(3;2;1).$

27. $U=3xy+2xz+3yz,$ $M_1(1;1;1).$

28. $U=arctg\frac{x}{y},$ $M_1(1;1).$

29. $U=\sqrt[3]{x^2+y},$ $M_1(2;2).$

30. $U=\frac{3y}{x}+\sqrt{x},$ $M_1\left(1;\frac{3}{2}\right).$

Завдання 5.7

1. Обчислити потік векторного поля $\bar{a}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$ через повну поверхню піраміди, утвореної площиною P і координатними площинами.

2. Обчислити циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контуру, який обмежує трикутник ABC, утворений при перетині площини P з координатними площинами.

1. $\vec{a}=(2x+y)\vec{i}+(2z-x)\vec{j}+(2y-z)\vec{k},$ $P:2x+y+z=2.$

2. $\vec{a}=(3x-y)\vec{i}+(z+3y)\vec{j}+(z+x)\vec{k},$ $P:3x+2y-z=6.$

3. $\vec{a}=x^2\vec{i}-z\vec{j}+y\vec{k},$ $P:2x+y+z=2.$

16. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(y+2x)\vec{k},$ $P:x+y-z=1.$

17. $\vec{a}=(3x+y)\vec{i}+(x+2z)\vec{j},$ $P:2x+y+z=2.$

18. $\vec{a}=3yz\vec{i}+(x+y^2)\vec{j}+xy\vec{k},$ $P:x+y+3z=3.$

4. $\vec{a}=2yz\vec{i}+(x^2+2y)\vec{j}+xy\vec{k}$,
$P: 3x+2y-z=6.$

5. $\vec{a}=zy^2\vec{i}+(x^2-2z)\vec{j}$,
$P: 2x-2y-z=2.$

6. $\vec{a}=x^2\vec{j}+(xy-2y)\vec{k}$,
$P: x+y-z=2.$

7. $\vec{a}=3xy\vec{i}+x\vec{k}$,
$P: x-y+z=1.$

8. $\vec{a}=x\vec{i}+xy\vec{j}+y\vec{k}$,
$P: x-y-z=2.$

9. $\vec{a}=(x+y^2)\vec{j}+(3xy+z)\vec{k}$,
$P: x-y+z=2.$

10. $\vec{a}=3z\vec{i}+x\vec{j}+2y\vec{k}$,
$P: x-y+z=1.$

11. $\vec{a}=xz\vec{j}-yz\vec{k}$,
$P: x+y-z=-1.$

12. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(3x+z)\vec{j}$,
$P: x-y-z=2.$

13. $\vec{a}=xy\vec{i}+xz\vec{k}$,
$P: x-y+z=2.$

14. $\vec{a}=2xz\vec{i}+xy\vec{j}+3z\vec{k}$,
$P: x+2y+z=4.$

15. $\vec{a}=y\vec{i}+2z\vec{j}+xz\vec{k}$,
$P: x+3y+z=3.$

19. $\vec{a}=(x^2+y)\vec{j}+(3z+xy)\vec{k}$,
$P: x-y+z=1.$

20. $\vec{a}=2xy\vec{i}+z\vec{j}+xz\vec{k}$,
$P: x+2y+z=2.$

21. $\vec{a}=(y+3z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(2y+z)\vec{k}$,
$P: x+y+2z=2.$

22. $\vec{a}=3xz\vec{j}+2yz\vec{k}$,
$P: x+y+z=2.$

23. $\vec{a}=y^2z\vec{i}+(xy+3z)\vec{k}$,
$P: 2x+y+2z=2.$

24. $\vec{a}=x^2y\vec{j}+(2xy+3z)\vec{k}$,
$P: 2x+y+2z=4.$

25. $\vec{a}=(x+2y)\vec{i}+(x-2z)\vec{j}+(2y+z)\vec{k}$,
$P: x-y+z=3.$

26. $\vec{a}=xy\vec{i}+xz\vec{j}$,
$P: x-2y+z=2.$

27. $\vec{a}=2xy\vec{i}+xz\vec{j}+3x\vec{k}$,
$P: x-y+z=1.$

28. $\vec{a}=2z^2\vec{i}+3xy\vec{j}+2\vec{k}$,
$P: x+2y+z=2.$

29. $\vec{a}=y^2\vec{i}+2xy\vec{j}+(2xy+2z)\vec{k}$,
$P: 2x+2y+z=2.$

30. $\vec{a}=2z\vec{i}+3xy\vec{j}+2x\vec{k}$,
$P: x+y+2z=2.$

Для розв'язання контрольної роботи № 5 вам знадобляться такі поняття, формули та алгоритми

1. Подвійний інтеграл від неперервної функції $f(x,y)$ по правильній області D дорівнює повторному інтегралу від цієї функції по області D, тобто

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \tag{5.1}$$

або

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{5.2}$$

Наведемо ***алгоритм зведення подвійного інтеграла до повторного.***

1. Будуємо область інтегрування.

2. Визначаємо зовнішню змінну інтегрування.

а) Якщо x – зовнішня змінна інтегрування, то:

3а. Якщо область інтегрування неправильна відносно Oy, то горизонтальними та вертикальними лініями розбиваємо її на сукупність правильних відносно Oy областей. Зауважимо, що інтеграл по неправильній області дорівнює сумі інтегралів по правильних областях, що входять в область інтегрування.

4а. Визначаємо абсциси кінців відрізка a та b, в який проектується на вісь Ox правильна відносно Oy область інтегрування.

5а. Проводимо вертикальні лінії $x=a$ та $x=b$ до перетину із областю і визначаємо верхню та нижню межі області та рівняння $y=\varphi_1(x)$ й $y=\varphi_2(x)$, якими вони описуються.

6а. Якщо верхня або нижня межа (або обидві) не визначаються однією аналітичною функцією, то розбиваємо вертикальними лініями всю область інтегрування на дві або більшу кількість областей, в кожній з яких і верхня і нижня межі визначаються однією аналітичною функцією. Зрозуміло, що в даному випадку розглядаємо подвійний інтеграл по складній області інтегрування як суму подвійних інтегралів по отриманих шляхом розбиття областях. Для кожного з одержаних інтегралів виконуємо пункти, починаючи з 4а.

7а. Подвійний інтеграл по правильній області з простою верхньою та нижньою межами обчислюється як повторний інтеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

б) Якщо y – зовнішня змінна інтегрування, то:

3б. Якщо область інтегрування неправильна відносно Ox, то горизонтальними та вертикальними лініями розбиваємо її на сукупність правильних відносно Ox областей. Далі інтеграл по неправильній області заміняємо на суму інтегралів по одержаних правильних областях.

4б. Визначаємо ординати кінців відрізка c та d, в який проектується (правильна відносно Ox!) область інтегрування на вісь Oy.

5б. Проводимо горизонтальні лінії $y=c$ та $y=d$ до перетину із областю інтегрування і визначаємо ліву та праву межі області та їх рівняння $x=\psi_1(y)$ й $x=\psi_2(y)$.

6б. Якщо ліва чи права межа (або обидві) не визначаються однією аналітичною функцією, то горизонтальними лініями розбиваємо всю область інтегрування на дві або більшу кількість областей, в кожної з яких і ліва і права межі визначаються однією аналітичною функцією. Подвійний інтеграл по складній області інтегрування розглядаємо як суму подвійних інтегралів по отриманих шляхом розбиття областях. Для кожного з одержаних інтегралів виконуємо пункти, починаючи з 4б.

7б. Подвійний інтеграл по правильній області з простою лівою та правою межами обчислюється як повторний інтеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Зауваження! Область інтегрування D називається правильною відносно осі Ox (осі Oy), якщо будь-яка пряма, що паралельна цій осі, перетинає границю L області D не більше як у двох точках.

2. Розглянемо правильну відносно Oy область D, яка проектується на вісь Ox у відрізок $[a;b]$. AB – верхня межа області, яка описується рівнянням $y=\varphi_2(x)$, AC – нижня межа $y=\varphi_1(x)$ (рис. 5.1). Тоді

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (5.3)$$

називається повторним інтегралом функції $f(x,y)$ по області D із зовнішньою змінною інтегрування x. При цьому $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ – називається внутрішнім інтегралом, а y – внутрішньою змінною інтегрування.

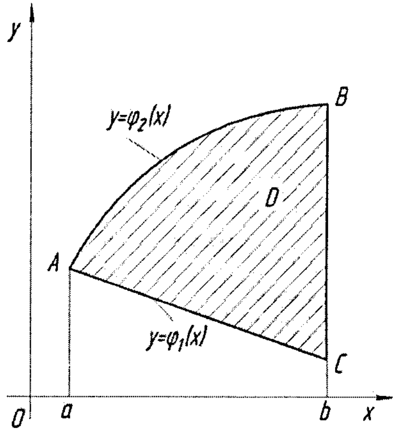


Рисунок 5.1

Розглянемо область правильну відносно Ox, яка проектується на вісь Oy у відрізок $[c,d]$. ClD – ліва межа області, яка описується рівнянням $x=\psi_1(y)$, CkD – права межа $x=\psi_2(y)$ (рис. 5.2). У цьому випадку вираз

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (5.5)$$

називається повторним інтегралом функції $f(x,y)$ по області D із зовнішньою змінною інтегрування y. При цьому $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ – внутрішній інтеграл, а x – внутрішня змінна інтегрування.

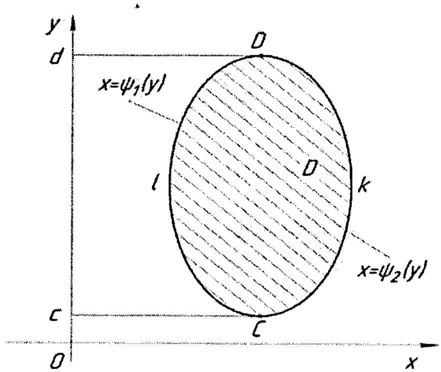


Рисунок 5.2

3. ***Алгоритм обчислення повторного інтеграла.***

Знаходимо первісну внутрішнього інтеграла за умови, що зовнішня змінна інтегрування є сталою. Замість внутрішньої змінної за формулою Ньютона-Лейбніца підставляємо межі інтегрування.

Обчислюємо визначений інтеграл від отриманого в попередньому пункті виразу за зовнішньою змінною інтегрування.

4. $\iint\limits_D dS = S_D$, де S_D − площа області інтегрування D.

5. Нехай змінні x, y зв'язані зі змінними u, v співвідношеннями

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v), \tag{5.6}$$

де $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ – неперервні та диференційовані функції, що взаємно однозначно відображають область D площини Oxy на область D' площини Ouv.

Тоді $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|J\right|dudv$,

де $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$ – визначник Якобі (якобіан) функцій $\varphi(u,v)$ та $\psi(u,v)$.

6. Прямокутні декартові (x,y) та полярні (ρ,φ) координати пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \tag{5.7}$$
$$(\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Якобіан $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$.

Формула переходу від декартових до полярних координат у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi \tag{5.8}$$

Подання подвійних інтегралів у вигляді повторних відбувається залежно від того, де знаходиться полюс O полярної системи координат відносно області інтегрування: поза, всередині чи на границі області D.

Якщо полюс O полярної системи координат знаходиться поза областю D, що обмежена променями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ та лініями AmB, AnB (їх рівняння відповідно $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$, де $\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)$ – функції задані на відрізку $[\alpha,\beta]$) (рис. 5.3), то подвійний інтеграл в полярних координатах зводиться до повторного інтеграла за правилом

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (5.9)$$

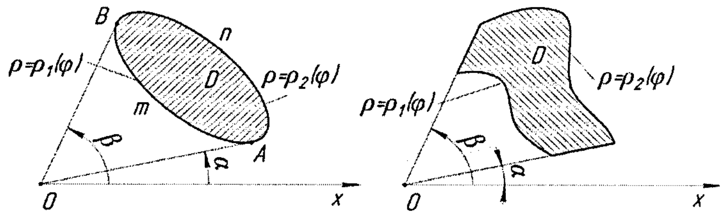


Рисунок 5.3

Якщо полюс O знаходиться всередині області D і рівняння границі області D в полярній системі координат має вигляд $\rho=\rho(\varphi)$, тоді

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (5.10)$$

Якщо полюс O знаходиться на границі області D і рівняння її границі в полярній системі координат має вигляд $\rho=\rho(\varphi)$, значення α та β визначають граничні кути променів, що перетинають область, то подвійний інтеграл подається у вигляді

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (5.11)$$

7. $$\iiint_V dv=v, \text{ де } v \text{ – об'єм області } V. \qquad (5.12)$$

8. Схему зведення потрійного інтеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ до трикратного наведено на рис. 5.4 – 5.6.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,. \tag{5.13}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\delta_1(y)}^{\delta_2(y)} dx \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,. \tag{5.14}$$

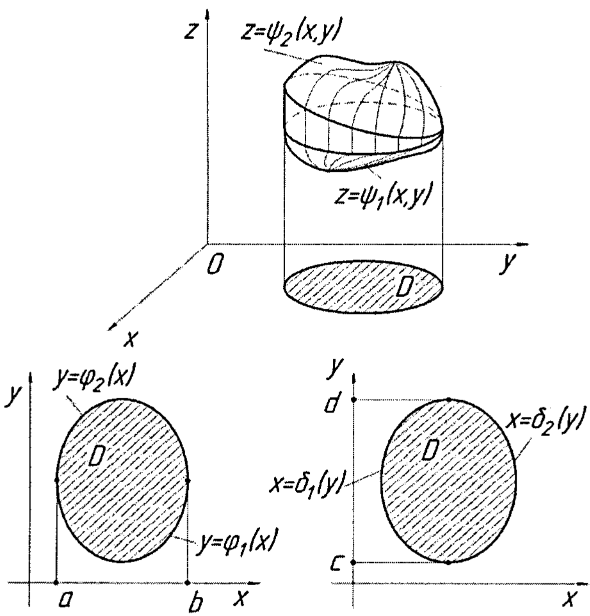


Рисунок 5.4

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dz \int\limits_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)dy. \qquad (5.15)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dz \int\limits_{\delta_1(z)}^{\delta_2(z)} dx \int\limits_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)dy. \qquad (5.16)$$

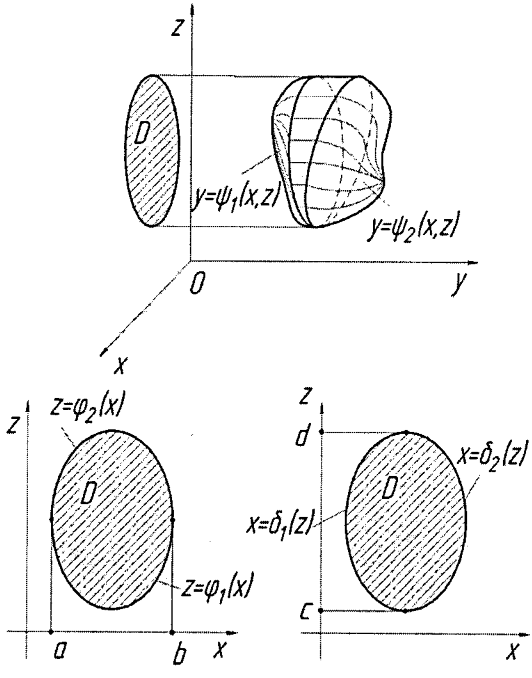
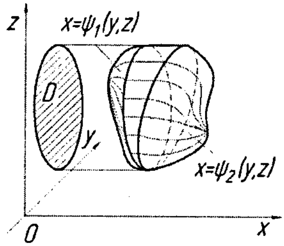


Рисунок 5.5

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dz \int\limits_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx. \qquad (5.17)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dz \int\limits_{\delta_1(z)}^{\delta_2(z)} dy \int\limits_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx. \qquad (5.18)$$



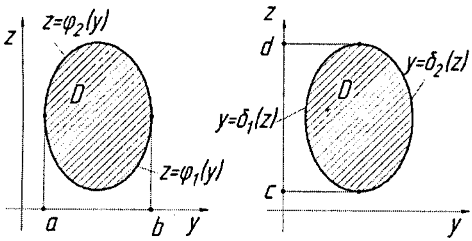


Рисунок 5.6

9. Для знаходження *похідної* скалярного поля $U: f(x,y,z)$ *у напрямі* вектора $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ потрібно:

а) знайти частинні похідні першого порядку скалярного поля за кожною змінною;

б) обчислити значення частинних похідних в заданій точці;

в) знайти напрямні косинуси вектора $\overline{a}$ за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}; \qquad (5.19)$$

г) підставити знайдені величини у формулу

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{a}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (5.20)$$

10. Для знаходження *величини* і *напряму градієнта* скалярного поля U в точці M_1 потрібно:

а) знайти координати градієнта за формулою

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overline{k}; \qquad (5.21)$$

б) обчислити довжину знайденого вектора.

11. Для знаходження *потоку векторного поля* $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ *через поверхню* $\sigma : \varphi(x, y, z) = 0$ у напрямі відповідної нормалі (зовнішньої чи внутрішньої) потрібно:
а) зобразити задану поверхню і розбити її на елементарні частини, в яких напрям нормалі залишається сталим;
б) спроектувати елементарні частини на одну з координатних площин (D_{xy}, D_{xz}, D_{yz});
в) визначити вектор нормалі до кожної елементарної частини заданої поверхні за формулою:

$$\overline{n^0} = \pm \frac{\varphi_x'\bar{i} + \varphi_y'\bar{j} + \varphi_z'\bar{k}}{\sqrt{(\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2 + (\varphi_z')^2}}. \tag{5.22}$$

Запам'ятайте! У випадку, коли частина поверхні є площиною $Ax + By + Cz = 0$, то її вектор нормалі такий $\overline{n^0}(A, B, C)$;
г) обчислити скалярний добуток векторного поля на відповідний вектор нормалі;
д) застосувати одну з формул

$$\varPi = \iint\limits_{D_{xy}} \left. \frac{\overline{a}\overline{n^0}}{\left|\cos(\overline{n^0}, \bar{k})\right|} \right|_{z=z(x,y)} dxdy,$$

$$\varPi = \iint\limits_{D_{yz}} \left. \frac{\overline{a}\overline{n^0}}{\left|\cos(\overline{n^0}, \bar{i})\right|} \right|_{x=x(y,z)} dydz, \tag{5.23}$$

$$\varPi = \iint\limits_{D_{xz}} \left. \frac{\overline{a}\overline{n^0}}{\left|\cos(\overline{n^0}, \bar{j})\right|} \right|_{y=y(x,z)} dxdz.$$

і знайти потоки по кожній елементарній частині поверхні;
е) додаємо усі знайдені потоки.

12. Для знаходження *циркуляції векторного поля* $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ *уздовж деякого замкнутого контуру* L, утвореного при перетині поверхні σ з координатними площинами потрібно:
а) зобразити заданий контур і визначити додатній напрям обходу (проти годинникової стрілки);

б) визначити рівняння елементарних частин, з яких складається межа $L = l_1 + l_2 + ... + l_n$;

в) записати вектор $\overline{dl}(dx, dy, dz)$;

г) обчислити скалярний добуток векторного поля та вектора $\overline{dl}$: $\overline{adl} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$;

д) обчислити циркуляції векторного поля уздовж кожної елементарної частини за допомогою криволінійних інтегралів

$$Ц_{l_i}(\overline{a}) = \int_{l_i} \overline{a} \cdot \overline{dl} = \int_{(M)}^{(N)} a_x dx + a_y dy + a_z dz, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (5.24)$$

Запам'ятайте! Обчислити криволінійні інтеграли можна шляхом зведення їх до визначених інтегралів, і вони мають аналогічні властивості. Нехай крива L (від точки M до точки N) задана параметричним рівнянням $x = x(t), y = y(t),\ z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, де функції $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$, $y'(t)$ і $z'(t)$. Точці M відповідає значення параметра α, а точці N – β. Тоді

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$
$$+ Z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt. \qquad (5.25)$$

Зокрема, якщо крива L (від точки M до точки N) задана рівнянням $y = f(x)$, $a \le x \le b$, де функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, то з формули (5.25) дістанемо

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_a^b (X(x, f(x)) + Y(x, f(x))f'(x))dx. \qquad (5.26)$$

е) Сформувати відповідь, додавши одержані циркуляції.

Приклади розв'язання типових завдань контрольної роботи № 5

Приклад 5.1 Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x - y)dxdy$, область D обмежена лініями $y = 3x + 1$ та $y = x^2 + 1$.

Розв'язування

Зобразимо область інтегрування (рис. 5.7) та запишемо подвійний інтеграл через повторний із зовнішнім інтегруванням за змінною x.

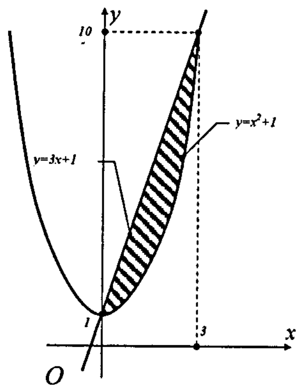


Рисунок 5.7

Знайдемо точки перетину прямої та параболи: $3x+1=x^2+1$. Звідки $x^2-3x=0$ або $x(x-3)=0$. Тому $x_1=0$ та $x_2=3$.

$$\iint_D (x-y)dxdy=\int_0^3 dx\int_{x^2+1}^{3x+1}(x-y)dy=\int_0^3\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2+1}^{3x+1}dx=$$

$$=\int_0^3\left(x(3x+1)-\frac{(3x+1)^2}{2}-x(x^2+1)+\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(\frac{1}{2}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2-3x\right)dx=\left(\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{243}{10}-\frac{153}{4}=-13{,}95.$$

Приклад 5.2 Обчислити подвійний інтеграл $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy$, використовуючи полярні координати.

Розв'язування

Зобразимо область інтегрування (рис. 5.8).

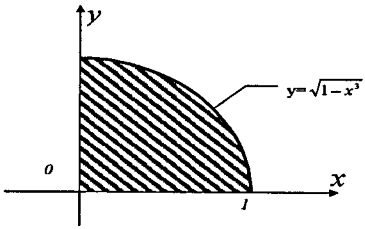


Рисунок 5.8

Перейдемо до полярної системи координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ |J| = \rho,\ x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Для чверті кола, що знаходиться у першому координатному куті $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0, 1]$, полюс знаходиться на межі області. Тому

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \ln\left(1+\rho^2\right)\rho d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \ln\left(1+\rho^2\right)d\left(\rho^2+1\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} U = \ln\left(1+\rho^2\right) & dU = \dfrac{2\rho d\rho}{1+\rho^2} \\ dV = d\left(1+\rho^2\right) & V = 1+\rho^2 \end{matrix}\right\} = \frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\left(1+\rho^2\right)\ln\left(1+\rho^2\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(1+\rho^2\right)\frac{2\rho}{1+\rho^2}d\rho\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - \rho^2\Big|_0^1) = \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1).$$

Приклад 5.3 Обчислити площу фігури, обмежену параболою $y = 3x^2 + 1$ і прямою $y = 3x + 7$ (рис. 5.9).

Розв'язування

Зобразимо дану фігуру (рис. 5.9).

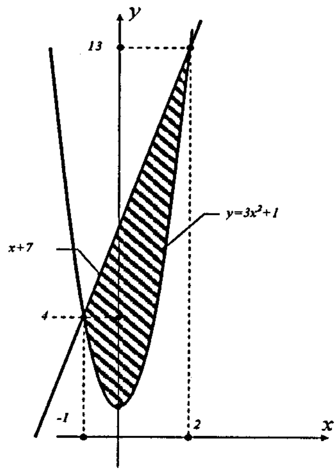


Рисунок 5.9

З геометричного змісту подвійного інтеграла випливає, що

$$S_D = \iint_D dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{3x^2+1}^{3x+7} dy = \int_{-1}^{2} \left(-3x^2 + 3x + 6\right) dx = \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{27}{2} \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад 5.4 Обчислити потрійний інтеграл $I = \iiint_V (2x + y)dxdydz$, де V обмежена поверхнями: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 1$, $z = 1 + x^2 + y^2$.

Розв'язування

За заданими поверхнями будуємо область інтегрування та визначаємо область D (рис. 5.10).

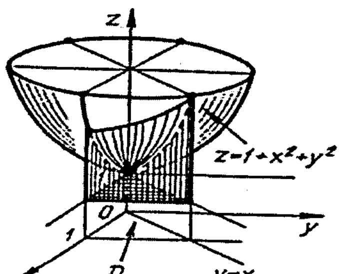


Рисунок 5.10

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_1^{1+x^2+y^2}(2x+y)dz=\int_0^1 dx\int_0^x (2x+y)z\Big|_1^{1+x^2+y^2}dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x (2x+y)(x^2+y^2)dy=\int_0^1 dx\int_0^x\left(2x^3+y^3+2x^2+x^2y\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(2x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{2}{3}xy^3+\frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_0^x dx=\int_0^1\frac{41}{12}x^4dx=\frac{41}{60}.$$

Згідно зі схемою на рис. 5.4 та формулою (5.13), отримаємо

Приклад 5.5 Обчислити *за* допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла T, обмеженого поверхнями: $z=0$, $z=4-x-y$, $x^2+y^2=4$.

Розв'язування

Побудуємо дане тіло (рис. 5.11).

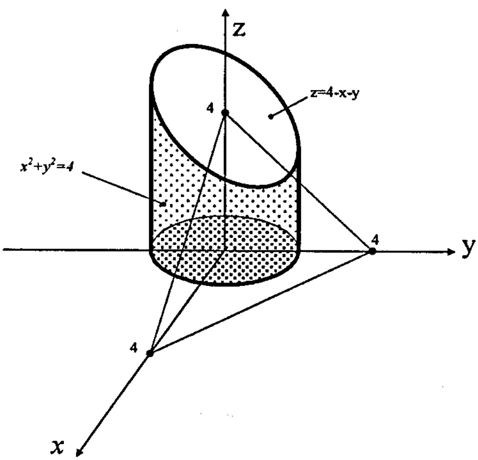


Рисунок 5.11

Проекцією даного тіла на площину XOY є коло з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює 2. З геометричного змісту потрійного інтеграла випливає, що $V=\iiint\limits_T dxdydz$.

Оскільки областю інтегрування є циліндр, то для зручності розрахунку потрібно перейти до циліндричної системи координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z,\ |J|=\rho.$$

Площина $z=0$ переходить сама в себе, площина $z=4-x-y$ переходить у $z=4-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)$. Оскільки проекцією даного тіла на площину XOY є коло з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює 2, то $\varphi\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,2]$.

Таким чином, даний потрійний інтеграл можна подати у вигляді трикратного так:

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_0^{4-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(4\rho-\rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi))d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(2\rho^2-\frac{\rho^3}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)\Bigg|_0^2d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(8-\frac{8}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)d\varphi=$$

$$=\left(8\varphi-\frac{8}{3}(-\sin\varphi+\cos\varphi)\right)\Bigg|_0^{2\pi}=16\pi+\frac{8}{3}=\frac{48\pi+8}{3}\approx 53\ \text{(куб. од).}$$

Приклад 5.6 Знайти похідну скалярного поля $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^3+y^3}+3z$ в точці $M_1(1,0,1)$ у напрямі точки $M_2(3,2,2)$.

Розв'язування

Похідну скалярного поля $f(x,y,z)$ в точці M_1 обчислимо за формулою (5.20).

Для цього знайдемо частинні похідні скалярного поля за кожною змінною та обчислимо значення цих похідних в точці M_1:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{3}\left(x^3+y^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2=\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+y^3\right)^2}},\qquad \frac{\partial f(M_1)}{\partial x}=1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{3}\left(x^3+y^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3y^2=\frac{y^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+y^3\right)^2}},\qquad \frac{\partial f(M_1)}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=3,\qquad \frac{\partial f(M_1)}{\partial z}=3.$$

Обчислимо напрямні косинуси вектора $\bar{s}=\overline{M_1M_2}\,(2,2,1)$ за формулою (5.19). Оскільки $|\bar{s}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3$, то $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

Отже, $\frac{\partial f(M_1)}{\partial s}=1\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$, тобто $\frac{\partial f(M_1)}{\partial s}=\frac{5}{3}$.

Приклад 5.7 Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля $f(M) = arctg\frac{3y}{x} + 2z^2$ в точці $M_0(1,0,1)$.

Розв'язування

Градієнт скалярного поля обчислимо за формулою (5.21). Для цього знайдемо частинні похідні скалярного поля за кожною змінною:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{9y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{3y}{x^2}\right) = \frac{-3y}{x^2+9y^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{9y^2}{x^2}} \cdot \frac{3}{x} = \frac{3x}{x^2+9y^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 4z.$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці $M_0(1,0,1)$, дістанемо:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 3, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 4.$$

Отже,

$$grad\ f(M_0) = 0\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$$

або

$$grad\ f(M_0) = 3\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Обчислимо величину градієнта скалярного поля:

$$|grad\ f(M_0)| = \sqrt{0^2+3^3+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Таким чином, найбільша швидкість зростання скалярного поля $f(M)$ в точці M_0 досягається у напрямі вектора $grad\ f(M_0) = 3\bar{j} + 4\bar{k}$ і дорівнює $|grad\ f(M_0)| = 5$.

Приклад 5.8 Дано векторне поле $\bar{a} = (2x+y)\bar{i} + (x+3z)\bar{j}$. Знайти:
1) потік векторного поля через повну поверхню піраміди, утвореної площиною P: $x+2y+z=2$ і координатними площинами;
2) циркуляцію векторного поля вздовж контуру L, що обмежує трикутник ABC, утворений при перерізі площини P з координатними площинами.

Розв'язування

Зробимо схематичний рисунок (рис. 5.12).

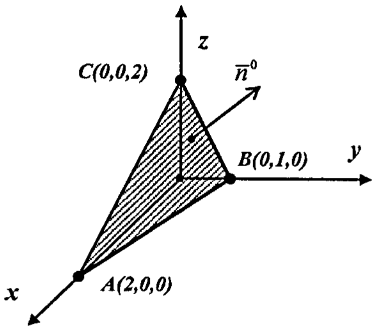


Рисунок 5.12

1. Обчислимо потік векторного поля через повну поверхню піраміди, утвореної площиною P і координатними площинами, безпосередньо:

$$П=П_1+П_2+П_3+П_4,$$

де $П_1$ – потік векторного поля через верхню сторону трикутника ABC;

$П_2$ – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OBC;

$П_3$ – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAC;

$П_4$ – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAB.

Обчислимо потік векторного поля через верхню сторону трикутника ABC, утвореного при перерізі площини $P: x+2y+z=2$ з координатними площинами безпосередньо. Оскільки поверхня трикутника ABC взаємно однозначно проектується на площину xOy в область D_{xy}, то обчислення потоку векторного поля $\overline{a}$ через дану поверхню зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy} (рис. 5.13) за формулою:

$$П_1=\iint\limits_{ABC} \overline{a}\overline{d\sigma}=\iint\limits_{ABC} \overline{a}\overline{n}^0 d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}} \left.\frac{\overline{a}\overline{n}^0}{\left|\cos(\overline{n}^0,\overline{k})\right|}\right|_{z=z(x,y)} dxdy.$$

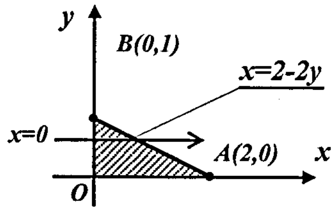


Рисунок 5.13

Знайдемо одиничний вектор нормалі до поверхні $\varphi(x,y,z)=x+2y+z-2=0$. Оскільки вектор $\overline{n^0}$ поставлений до зовнішньої сторони поверхні, то у формулі (5.22) беремо знак «плюс».

Обчислимо частинні похідні функції $\varphi(x,y,z)=x+2y+z-2$ за кожною змінною:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=1.$$

Тоді $\overline{n^0}=\dfrac{\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\bar{i}+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\bar{j}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\bar{k}$.

Обчислимо скалярний добуток векторів $\bar{a}$ та $\overline{n^0}$, заданих своїми декартовими координатами:

$$\bar{a}\overline{n^0}=(2x+y)\frac{1}{\sqrt{6}}+(x+3z)\frac{2}{\sqrt{6}}+0\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{4x+y+6z}{\sqrt{6}},$$

тобто $\bar{a}\overline{n^0}=\dfrac{4x+y+6z}{\sqrt{6}}$, при цьому $\cos(\overline{n^0},\bar{k})=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Тоді $\dfrac{dxdy}{\left|\cos(\overline{n^0},\bar{k})\right|}=\sqrt{6}dxdy.$

Отже,

$$\iint\limits_{ABC}\bar{a}\overline{n^0}d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{4x+y+6z}{\sqrt{6}}\bigg|_{z=2-x-2y}\sqrt{6}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(4x+y+12-6x-12y)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(12-2x-11y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{2-2y}(12-2x-11y)dx=$$

$$=\int_0^1(12(2-2y)-(2-2y)^2-11y(2-2y))dy=24\int_0^1(1-y)dy-4\int_0^1(1-y)^2dy-$$

$$-22\int_0^1(y-y^2)dy=-24\frac{(1-y)^2}{2}\bigg|_0^1+4\frac{(1-y)^3}{3}\bigg|_0^1-22\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1+22\frac{y^3}{3}\bigg|_0^1=7,$$

тобто $П_1 = 7$.

Обчислимо $П_2$ – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OBC. Рівняння площини OBC: $x = 0$, одиничний вектор нормалі $\overline{n_2}$ до цієї площини паралельний осі Ox, але має напрям, протилежний напряму вектора $\bar{i}$. Тому за умовою колінеарності векторів $\overline{n_2} = -\bar{i} = \{-1, 0, 0\}$. Тоді

$$П_2 = \iint_{OBC} \overline{an_2} d\sigma = \iint_{D_{yz}} \frac{\overline{an_2}}{|\cos(\overline{n_2}, \bar{i})|}\Bigg|_{x=x(y,z)} dydz,$$

причому $\cos(\overline{n_2}, \bar{i}) = -1$, $\overline{an_2} = (2x+y)\cdot(-1) + 0\cdot(x+3z) + 0\cdot 0 = -2x - y$.

Маємо (рис. 5.14):

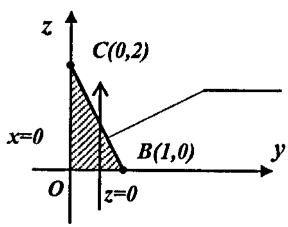


Рисунок 5.14

$$\iint_{OBC} \overline{an_2} d\sigma = \iint_{D_{yz}} (-2x - y)\Big|_{x=0} dydz = -\iint_{D_{yz}} ydydz = -\int_0^1 ydy \int_0^{2-2y} dz = -\int_0^1 yz\Big|_0^{2-2y} dy =$$

$$= \int_0^1 2y^2 dy - \int_0^1 2ydy = 2\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 - 2\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}.$$ Тобто $П_2 = -\frac{1}{3}$.

Обчислимо $П_3$ – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника AOC. Рівняння площини AOC: $y = 0$, одиничний вектор нормалі $\overline{n_3}$ до цієї площини паралельний осі Oy, але має напрям, протилежний напряму вектора $\bar{j}$, тому $\overline{n_3} = \{0, -1, 0\}$. Тоді

$$П_3 = \iint_{AOC} \overline{an_3} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \frac{\overline{an_3}}{|\cos(\overline{n_3}, \bar{j})|}\Bigg|_{y=y(x,z)} dxdz,$$

причому $\cos(\overline{n_3}, \bar{j}) = -1$, $\overline{an_3} = (2x+y)\cdot 0 + (-1)\cdot(x+3z) + 0\cdot 0 = -x - 3z$.

Маємо (рис. 5.15):

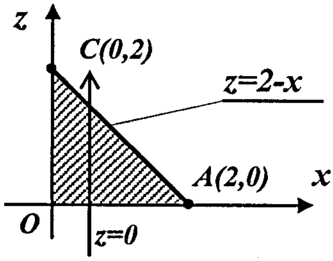


Рисунок 5.15

$$\iint\limits_{AOC} \overline{an_3}d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} (-x-3z)\Big|_{y=0} dxdz = -\iint\limits_{D_{xz}} (x+3z)dxdz = -\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (x+3z)dz =$$

$$= -\int\limits_0^2 \left(xz\Big|_0^{2-x} + 3\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_0^{2-x} \right)dx = \int\limits_0^2 \left(-2x + x^2 - \frac{3}{2}(2-x)^2 \right)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{(2-x)^3}{3}\Big|_0^2 =$$

$= -\frac{4}{3} - 4 = -\frac{16}{3}$, тобто $П_3 = -\frac{16}{3}$.

Обчислимо $П_4$ – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAB. Рівняння цієї площини: $z = 0$, одиничний вектор нормалі $\overline{n_4}$ до цієї площини паралельний осі Oz, але має напрям, протилежний напряму вектора $\overline{k}$, тому $\overline{n_4} = \{0, 0, -1\}$.

Оскільки $\overline{an_4} = (2x+y)\cdot 0 + 0\cdot(x+3z) + 0\cdot(-1) = 0$, то

$$П_4 = \iint\limits_{OAB} \overline{an_4}d\sigma = 0.$$

Таким чином, $П = 7 - \frac{1}{3} - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$.

2. Обчислимо циркуляцію векторного поля безпосередньо (рис. 5.16).

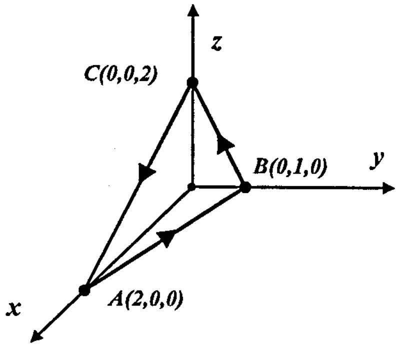


Рисунок 5.16

$$Ц(\bar{a}) = \oint\limits_{AB} \overline{adl} + \oint\limits_{BC} \overline{adl} + \oint\limits_{CA} \overline{adl},$$

де $\overline{adl} = (2x+y)dx + (x+3z)dy$.

На прямій AB $z=0,\ dz=0,\ y=1-\dfrac{x}{2},\ dy=-\dfrac{1}{2}dx,\ x\in[0,2]$. Інтегрування здійснюється від 2 до 0. Тоді

$$\oint\limits_{AB} \overline{adl} = \int\limits_2^0 \left(2x+1-\frac{x}{2}+(x+3\cdot 0)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)dx = \int\limits_2^0 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_2^0 = -2-2=-4.$$

На прямій BC $x=0,\ dx=0,\ z=2-2y,\ dz=-2dy,\ y\in[0,1]$. Інтегрування здійснюється від 1 до 0. Тоді

$$\oint\limits_{BC} \overline{adl} = \int\limits_1^0 3(2-2y)dy = \left(6y-3y^2\right)\Big|_1^0 = 3(0-2-0+1) = -3.$$

На прямій CA $y=0, dy=0, z=2-x,\quad dz=-dx,\ x\in[0,2]$. Тоді

$$\oint\limits_{CA} \overline{adl} = \int\limits_0^2 2xdx = x^2\Big|_0^2 = 4.$$

Таким чином, $Ц(\bar{a}) = \oint\limits_{AB} \overline{adl} + \oint\limits_{BC} \overline{adl} + \oint\limits_{CA} \overline{adl} = -4-3+4=-3$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 6 : завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань

Ряди, функція комплексної змінної

Завдання 6.1 Дослідити на збіжність ряди.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$,
   $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+2)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{50}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$,
   $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot9\cdot\ldots\cdot n^2}{2^{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$,
   $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(2n)!}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$,
   $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot8\cdot12\cdot\ldots\cdot14n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{3n+2}}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{n}$,
   $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\ln(1+\frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^3+3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}3^n tg\frac{1}{5^n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)!},\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{20}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+2}{n+1},$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot n!}{5^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(3n+1)^n}.$$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+3},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln(1+\frac{1}{n+1}),$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{3^{4n+1}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}.$$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n,$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n},\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}.$$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{4n+2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{\sqrt{n}},$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(5n+1)^n}.$$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2+2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n},$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln\,(n^2+5)}.$$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{2n^2+5n+1},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right),$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(n+1)!},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{(2n+3)^n}}.$$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{5^n},$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!},\qquad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n^2})$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n+1)^{3n}}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^4+2n+3}}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{\sqrt{n^3}}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(3n+4)^{3n}}$, $\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt[3]{n^2(n+1)}}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{2^n\cdot(n+1)!}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln(n^2+9)}{n^2+9}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}+4}{n^2+5n+3}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}arctg\frac{1}{2\sqrt{n}}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{16\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-5}{2n+7}\right)^n$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{60}}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n^3})$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{2n^n}}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ (3n+5)}{n^4+3n+7}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1+\ln^3(n^2+3))}{n^2+3}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{n^2+6n+2}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}2^n tg\frac{\pi}{3^n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{\sqrt[3]{n^5(n^3+1)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}})$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{2n+3}}}{\sqrt{2n+3}}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+3}{9n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2+3}\right)^{n^2}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot7\cdot10\cdot\ldots\cdot(3n+4)}{2\cdot6\cdot10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\arcsin\frac{1}{n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12n^3+3n+1}{\sqrt[3]{n^2}(n^4+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\arcsin\frac{\pi}{5^n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{n^5}}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{50}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2^n\cdot n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^5(n+1)}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{5n^2+2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{\sqrt{n}(n^2+6)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)3^n}{n\,!},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^6(n+3)}.$$

28. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+4},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\frac{\pi}{n^2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(3n+2)5^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-2n^2}.$$

29. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+11}{2n^2+3},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{3^{4n+1}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}.$$

30. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+5n+1},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)\cdot n^n}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^n.$$

Завдання 6.2 Знайти інтервал збіжності степеневого ряду і дослідити його поведінку на кінцях інтервалу збіжності.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot3^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n-2}}{(3n-2)^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n+2)2^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^n}{(n+1)\cdot n^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(2n-1)\cdot3^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3n^2(n+1)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n\cdot4^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n-2)\cdot3^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)\cdot2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n+1)\cdot5^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)\cdot3^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3n-2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n\cdot(2n+1)}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{20}\cdot x^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^3\cdot 4^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(5n-3)\cdot 5^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(n+3)\cdot 2^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n(n+1)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n(n+1)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n\cdot 3^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)x^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(n^2+1)\cdot 9^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2n\ (n+2)}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3\cdot 5^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^2\cdot(2n-1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(n+3)\cdot 3^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^n}{(n+6)^2}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n\cdot(n^2+1)}$

Завдання 6.3 Використовуючи розклад в ряд Тейлора, обчислити перші чотири відмінні від нуля члени розв'язку диференціального рівняння.

1. $y'=\cos x+y^2,\ y(0)=1.$

2. $y'=e^x+y^2,\ y(0)=0.$

3. $y'=x^2y+y^2,\ y(0)=3.$

4. $y'=xy-2e^y,\ y(0)=1.$

5. $y'=\sin x+y^2,\ y(0)=1.$

6. $y'=xy+x^2+y^2,\ y(0)=1.$

7. $y'=ye^x+2y^2,\ y(0)=\frac{1}{3}.$

8. $y'=e^{3x}+2xy^2,\ y(0)=1.$

9. $y' = x + e^y,\ y(0) = 0.$

10. $y' = y\cos x + 2\cos y,\ y(0) = 0.$

11. $y' = x + y + y^2,\ y(0) = 0{,}1.$

12. $y' = e^{\sin x} + xy,\ y(0) = 0.$

13. $y' = x^2y^2 + y\sin x,\ y(0) = \frac{1}{2}.$

14. $y' = 2x + y^2,\ y(0) = 2.$

15. $y' = e^x + xy,\ y(0) = 1.$

16. $y' = e^{\sin x} + y,\ y(0) = 0.$

17. $y' = 2e^y + xy,\ y(0) = 0.$

18. $y' = \sin x + 0{,}5y^2,\ y(0) = 1.$

19. $y' = xy - y^2 - e^x,\ y(0) = 2.$

20. $y' = xy^2 - y,\ y(0) = 2.$

21. $y' = y^2x + xy,\ y(0) = 1.$

22. $y' = y^2 + x\sin y,\ y(0) = \frac{1}{2}.$

23. $y' = y^2x^2 - \cos,\ y(0) = 0.$

24. $y' = x^2 + e^{2y},\ y(0) = 0.$

25. $y' = e^{2x} + xy,\ y(0) = 1.$

26. $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1.$

27. $y' = x^2y + y^3,\ y(0) = 0.$

28. $y' = x + 2y^2 + 3,\ y(0) = 0.$

29. $y' = e^{\sin x} + xy,\ y(0) = 0.$

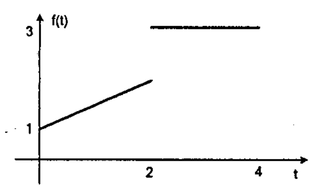
30. $y' = x + y^2,\ y(0) = 1.$

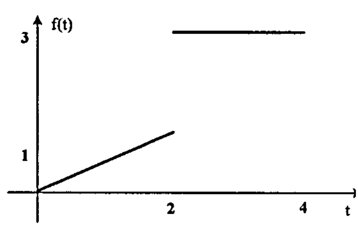
Завдання 6.4 Розкласти в ряд Фур'є в дійсній формі функцію *f(t)*, задану графіком на відрізку [0; *l*], беручи за період *T* довжину відрізка [0; *2l*] (*T=2l*):

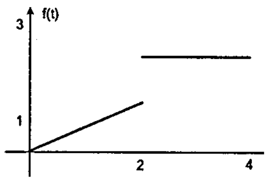
а) в повний ряд Фур'є;

б) за косинусами;

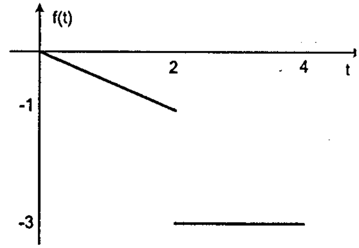
в) за синусами.

1. 

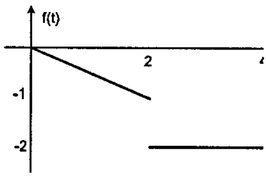
2. 



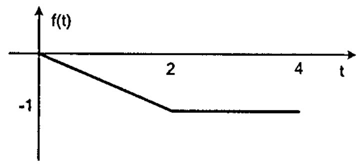
3.



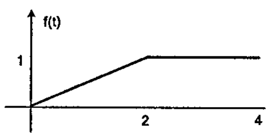
4.



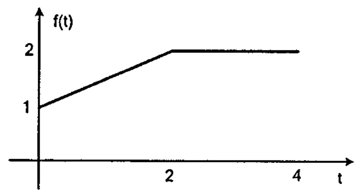
5.



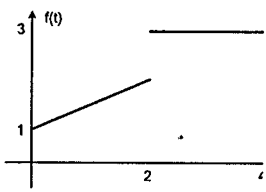
6.



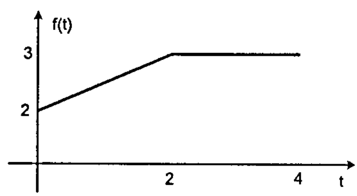
7.



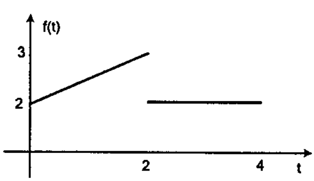
8.



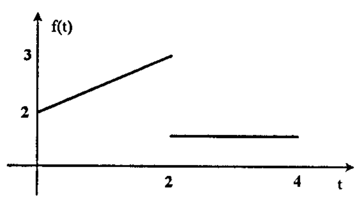
9.



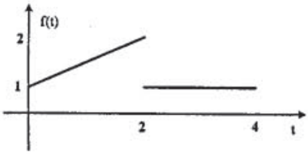
10.



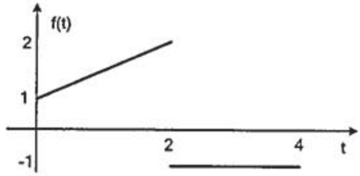
11.



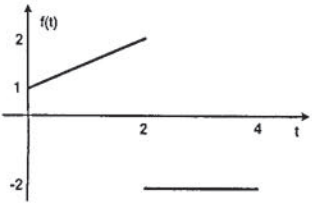
12.



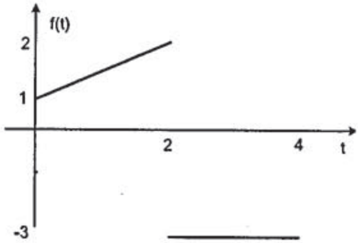
13.



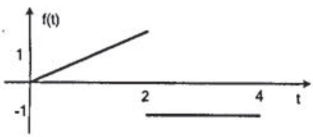
14.



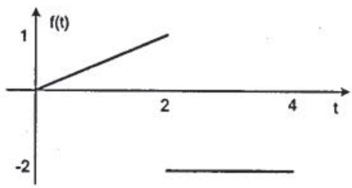
15.



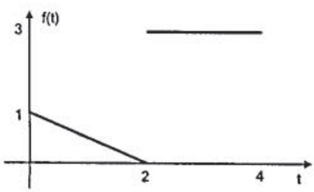
16.



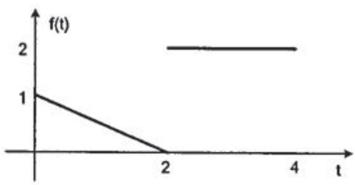
17.



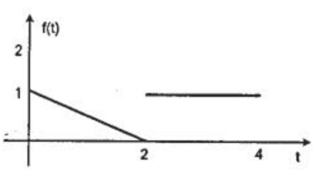
18.



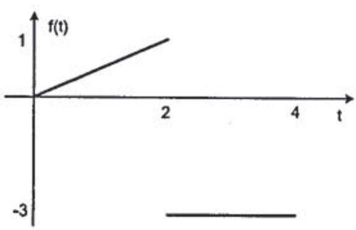
19.



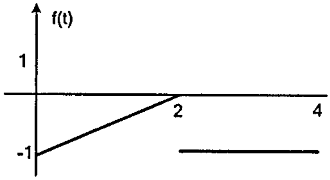
20.



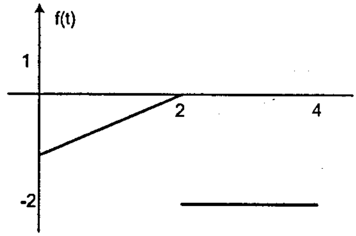
21.



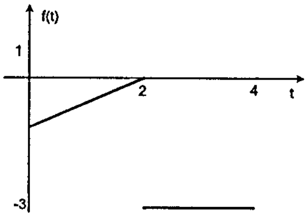
22.



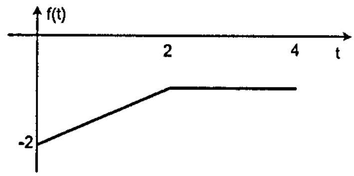
23.



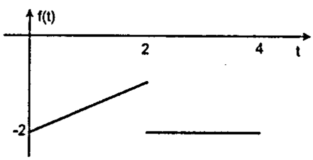
24.



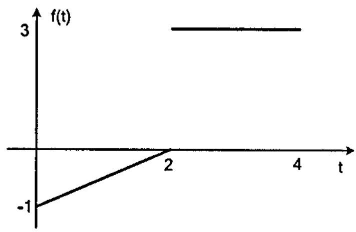
25.



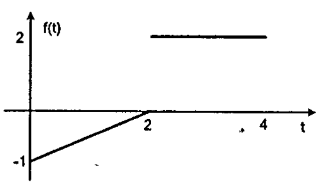
26.



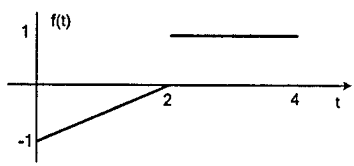
27.



28.



29.



30.

Завдання 6.5 Для заданих чисел z_1 та z_2 виконати вказані дії:

а) знайти значення z_3;

б) числа z_1 та z_2 записати в показниковій та тригонометричній формах;

в) для числа z_1 знайти всі корені степеня m;

г) число z_2 піднести до степеня k.

1. $z_1 = -3+3i, \qquad z_2 = -1+i,$

$$z_3 = \frac{z_1 z_2 - 3 + 2i}{4(2\overline{z}_1 - 5z_2)^2}, \qquad m=4, \qquad k=5.$$

2. $z_1 = 1+i, \quad z_2 = 2i,$

$$z_3 = \frac{z_1(z_2 - 4i)^2}{3\overline{z}_1 - 5z_2}, \qquad m=3, \qquad k=4.$$

3. $z_1 = -1+i, \; z_2 = -2+2i,$

$$z_3 = \frac{(5z_1 - 3z_2)(3+2i)}{\overline{z}_1 z_2 - 4 + i}, \qquad m=5, \qquad k=8.$$

4. $z_1 = -4i, \quad z_2 = -1-i,$

$$z_3 = \frac{(4z_1 + 2z_1)^2 \overline{z}_2}{3\overline{z}_1 + 5 - 4i}, \qquad m=5, \qquad k=6.$$

5. $z_1 = -2, \quad z_2 = -1+i,$

$$z_3 = \frac{5 + 4i - (3z_1 - 2z_2)^3}{z_1 \overline{z}_2 (5+3i)}, \qquad m=4, \qquad k=5.$$

6. $z_1 = 3i, \quad z_2 = 5+5i,$

$$z_3 = \frac{2z_1\overline{z}_2 - 3i}{4i(\overline{z}_1 - 5z_2)}, \qquad m=4, \qquad k=5.$$

7. $z_1 = 3-3i, \; z_2 = -i,$

$$z_3 = \frac{z_1\overline{z}_2 + 6 - 4i}{2i\overline{z}_1 - 7z_2}, \qquad m=4, \qquad k=4.$$

8. $z_1 = -5+5i, \qquad z_2 = -1+i,$

$$z_3 = \frac{7(z_1 + 3i\overline{z}_2)^2}{4\overline{z}_1 z_2 - 2 + i}, \qquad m=5, \qquad k=10.$$

9. $z_1 = 5, \qquad z_2 = -3+3i,$

$$z_3 = \frac{\overline{z}_1 + 5iz_1\overline{z}_2}{(3z_1 + 1 - 2i)^2}, \qquad m=4, \qquad k=6.$$

10. $z_1=-3, \quad z_2=5+5i,$

$$z_3=\frac{4i-(2z_1+z_2)^2}{z_1\overline{z}_2(2+3i)}, \quad m=5, \quad k=8.$$

11. $z_1=3i, \quad z_2=-2+2i,$

$$z_3=\frac{iz_1\overline{z}_2+1-2i}{5(\overline{z}_1-4z_2)^2}, \quad m=4, \quad k=5.$$

12. $z_1=1-i, \quad z_2=2+2i,$

$$z_3=\frac{(z_1z_2-4i)^2}{3i(2\overline{z}_1-5z_2)}, \quad m=3, \quad k=4.$$

13. $z_1=3+3i, \quad z_2=4,$

$$z_3=\frac{2z_1+3iz_2}{(\overline{z}_1z_2-4)^2+2i}, \quad m=4, \quad k=8.$$

14. $z_1=-4i, \quad z_2=2+2i,$

$$z_3=\frac{4z_1+5iz_1\overline{z}_2}{(2i\overline{z}_1+1-4i)^2}, \quad m=5, \quad k=6.$$

15. $z_1=3, \quad z_2=-1+i,$

$$z_3=\frac{4i(z_1+2z_2)^2}{z_1+\overline{z}_2(5+3i)}, \quad m=4, \quad k=4.$$

16. $z_1=3+3i, \quad z_2=1-i,$

$$z_3=\frac{z_1(z_2-3+2i)^2}{5i(3\overline{z}_1+45z_2)}, \quad m=4, \quad k=5.$$

17. $z_1=1-i, \quad z_2=2+2i,$

$$z_3=\frac{2z_1\overline{z}_2+3-4i}{3i(\overline{z}_1-5z_2)^2}, \quad m=4, \quad k=4.$$

18. $z_1=4+4i, \quad z_2=2-2i,$

$$z_3=\frac{(4z_1+3z_2)^2}{\overline{z}_1z_2+4+2i}, \quad m=5, \quad k=6.$$

19. $z_1 = 4i, \qquad z_2 = 3-3i,$

$$z_3 = \frac{3(z_1 + 2z_1) + \overline{z}_2}{(3\overline{z}_1 + 5)^2 - 4i}, \quad m = 4, \qquad k = 6.$$

20. $z_1 = 1, \qquad z_2 = -6+6i,$

$$z_3 = \frac{2i - (z_1 + 2z_2)^3}{z_1 + \overline{z}_2(4-3i)}, \quad m = 4, \qquad k = 5.$$

21. $z_1 = -1+i, \; z_2 = -2-2i,$

$$z_3 = \frac{z_1(2z_2 + 5)^2 + 8i}{-2i(3\overline{z}_1 + 5z_2)}, \quad m = 4, \qquad k = 5.$$

22. $z_1 = 1+i, \quad z_2 = 2,$

$$z_3 = \frac{z_1 z_2 + 4i}{(3\overline{z}_1 + 5z_2)^2}, \qquad m = 3, \qquad k = 4.$$

23. $z_1 = 3+3i, \; z_2 = -2+2i,$

$$z_3 = \frac{5i(2z_1 - 3z_2)^2}{\overline{z}_1(3z_2 - 4) + i}, \quad m = 5, \qquad k = 4.$$

24. $z_1 = -2i, \quad z_2 = 5+5i,$

$$z_3 = \frac{z_1 - 2iz_1\overline{z}_2}{3(\overline{z}_1 + 1 - 2i)^3}, \quad m = 5, \qquad k = 4.$$

25. $z_1 = -1, \quad z_2 = 2+2i,$

$$z_3 = \frac{1 + 2i + (z_1 - 2z_2)^2}{2iz_1 + \overline{z}_2(2+3i)}, \qquad m = 4, \qquad k = 5.$$

26. $z_1 = 3i, \qquad z_2 = 1-i,$

$$z_3 = \frac{z_1(z_2 - 4 + i)^2}{4i(2\overline{z}_1 - 5z_2)}, \quad m = 4, \qquad k = 5.$$

27. $z_1 = 1+i, \quad z_2 = 2-2i,$

$$z_3 = \frac{(z_1 z_2 + 4i)(2+3i)}{3\overline{z}_1 - 5z_2}, \qquad m = 4, \qquad k = 4.$$

28. $z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -2 + 2i,$

$$z_3 = \frac{(4z_1 - z_2)^2(2+3i)}{2\overline{z}_1 z_2 + 4 + 4i}, \qquad m = 5, \qquad k = 4.$$

29. $z_1 = -i, \quad z_2 = -5 - 5i,$

$$z_3 = \frac{z_1 + 2(z_1 + \overline{z}_2)^2}{\overline{z}_1 + 5z_2 - 4i}, \quad m = 5, \qquad k = 6.$$

30. $z_1 = -2i, \quad z_2 = 3 + 3i,$

$$z_3 = \frac{-2 + (4i + z_1 - z_2)^2}{z_1 \overline{z}_2 (1 + 3i)}, \qquad m = 4, \qquad k = 5.$$

Завдання 6.6 Довести, що функція аналітична на всій комплексній площині. Знайти похідну функції за теоремою Коші-Рімана.

1. $w = 2z^3 - iz + 3z^2$.
2. $w = sin(2 + iz)$.
3. $w = z^3 + 4iz^2 + 3z$.
4. $w = z^3 + iz^2$.
5. $w = (2z + i)^2$.
6. $w = e^{2zi}$.
7. $w = sh5iz$.
8. $w = 3e^{3zi}$.
9. $w = 2cos(2z + 2i)$.
10. $w = 5e^{5zi}$.
11. $w = sin(2z - i)$.
12. $w = 5e^{zi}$.
13. $w = 5z^3 + 2iz + 2z^2$.
14. $w = ch4iz$.
15. $w = 8e^{4zi+5}$.
16. $w = (5z + 2i)^2$.
17. $w = sin(5 + iz)$.
18. $w = 4e^{2z+i}$.
19. $w = (z + 1)^2$.
20. $w = sh4z$.
21. $w = sin2z$.
22. $w = 2z^3 - iz + 3z^2$.
23. $w = cos9z$.
24. $w = 2e^{2zi}$.
25. $w = sin(z - 2i)$.
26. $w = 7cos(iz)$.
27. $w = (3z - 4)^2 + z$.
28. $w = 7cos(z + 7)$.
29. $w = z^2 - 2iz + 3i$.
30. $w = 9cos(z + i)$.

Завдання 6.7 Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші та за допомогою теореми про лишки.

1. $\int_{l_i} \frac{e^{2z}}{(z-i)^2(z+1)} dz$ $\quad l_1: |z|=2; \quad l_2: |z-i|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z+1|=\frac{1}{2}; \quad l_4: |z-1|=\frac{1}{2}.$

2. $\int_{l_i} \frac{\cos(z\pi)}{(z^2+1)(z+i)^2} dz$ $\quad l_1: |z|=3; \quad l_2: |z-i|=1;$

$l_3: |z+i|=\frac{1}{2}; \quad l_4: |z-1|=\frac{1}{2}.$

3. $\int_{l_i} \frac{ch2z}{z^2(z^2+9)} dz$ $\quad l_1: |z|=4; \quad l_2: |z-i|=\frac{3}{2};$

$l_3: |z-3i|=1; \quad l_4: |z+3i|=1.$

4. $\int_{l_i} \frac{ch z}{(z+1)^2(z^2+1)} dz$ $\quad l_1: |z|=\frac{5}{2}; \quad l_2: |z+1|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z-i|=\frac{1}{2}; \quad l_4: |z+i|=\frac{1}{2}.$

5. $\int_{l_i} \frac{ch z}{z^4-1} dz$ $\quad l_1: |z|=\frac{5}{2}; \quad l_2: |z-1|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z+1|=\frac{1}{2}; \quad l_4: |z-i|=1.$

6. $\int_{l_i} \frac{e^{3z}}{z^2(z+2)} dz$ $\quad l_1: |z|=3; \quad l_2: |z+2|=1;$

$l_3: |z|=1; \quad l_4: |z-1|=\frac{1}{2}.$

7. $\int_{l_i} \frac{sh2z}{(z+1)(z-1)^2} dz$ $\quad l_1: |z|=2; \quad l_2: |z|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z-1|=\frac{3}{4}; \quad l_4: |z+1|=\frac{1}{2}.$

8. $\int_{l_i} \frac{ctg2z}{z^2(z+1)} dz$ $\quad l_1: |z|=\frac{3}{2}; \quad l_2: |z|=\frac{1}{2};$

$l_3: |z+1|=\frac{1}{4}; \quad l_4: |z-i|=0{,}3.$

9. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{iz}}{(z+1)^2(z-1)} dz$ $\qquad l_1 : |z| = 3; \qquad l_2 : |z-1| = 1;$

$l_3 : |z+1| = 1; \qquad l_4 : |z| = \frac{1}{2}.$

10. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos 2z}{(z^2+1)z^2} dz$ $\qquad l_1 : |z| = \frac{3}{2}; \qquad l_2 : |z+i| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z-1| = \frac{1}{2}; \qquad l_4 : |z-i| = \frac{1}{2}.$

11. $\int\limits_{l_i} \frac{\sin(\pi z)}{z^4-1} dz$ $\qquad l_1 : |z| = 2; \qquad l_2 : |z-i| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z+1| = \frac{1}{2}; \qquad l_4 : |z-1| = \frac{1}{2}.$

12. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{2z}}{z^2(z^2+4)} dz$ $\qquad l_1 : |z| = \frac{5}{2}; \qquad l_2 : |z| = 1;$

$l_3 : |z+2i| = \frac{1}{2}; \qquad l_4 : |z-2i| = \frac{1}{2}.$

13. $\int\limits_{l_i} \frac{\sin 2z}{(z+1)^2(z^2+9)} dz$ $\qquad l_1 : |z| = 4; \qquad l_2 : |z| = 1;$

$l_3 : |z-1| = \frac{1}{2}; \qquad l_4 : |z-i| = \frac{1}{2}.$

14. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{3z}}{z(z-1)^2} dz$ $\qquad l_1 : |z| = 2; \qquad l_2 : |z| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z-1| = \frac{1}{2}; \qquad l_4 : |z-i| = \frac{1}{2}.$

15. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos 2z}{(z+2)^2(z-1)} dz$ $\qquad l_1 : |z| = 3; \qquad l_2 : |z+2| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z| = \frac{1}{2}; \qquad l_4 : |z-1| = \frac{1}{2}.$

16. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{z}}{z^2(z^2+4)} dz$ $\qquad l_1 : |z| = 3; \qquad l_2 : |z| = \frac{3}{2};$

$l_3 : |z+2i| = \frac{1}{2}; \qquad l_4 : |z-2i| = \frac{1}{2}.$

17. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos 3z}{(z+3)^2(z-1)}dz$ $\qquad l_1: |z| = 4; \qquad l_2: |z| = 1;$

$l_3: |z-1| = \frac{3}{2}; \qquad l_4: |z+3| = 1.$

18. $\int\limits_{l_i} \frac{\sin(\pi z)}{(z-3)^2(z+1)}dz$ $\qquad l_1: |z| = \frac{7}{2}; \qquad l_2: |z-3| = 2;$

$l_3: |z| = \frac{1}{2}; \qquad l_4: |z+1| = \frac{3}{4}.$

19. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos 2z}{(z-1)(z+1)^2}dz$ $\qquad l_1: |z| = 2; \qquad l_2: |z-1| = 1;$

$l_3: |z| = \frac{1}{2}; \qquad l_4: |z+1| = 1.$

20. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{2z}}{(z^2-1)z^2}dz$ $\qquad l_1: |z| = \frac{3}{2}; \qquad l_2: |z| = \frac{3}{4};$

$l_3: |z-1| = \frac{1}{2}; \qquad l_4: |z+1| = \frac{1}{2}.$

21. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{3z}}{(z+3)z^2}dz$ $\qquad l_1: |z| = \frac{7}{2}; \qquad l_2: |z-3| = 2;$

$l_3: |z| = 1; \qquad l_4: |z+3| = 3.$

22. $\int\limits_{l_i} \frac{sh 2z}{(z+1)^2(z+i)}dz$ $\qquad l_1: |z| = 2; \qquad l_2: |z-i| = 1;$

$l_3: |z+1| = \frac{3}{4}; \qquad l_4: |z-1| = \frac{1}{2}.$

23. $\int\limits_{l_i} \frac{ch(\pi z)}{(z-1)^2(z+2)}dz$ $\qquad l_1: |z| = 3; \qquad l_2: |z-1| = 1;$

$l_3: |z| = \frac{3}{4}; \qquad l_4: |z+2| = \frac{3}{4}.$

24. $\int\limits_{l_i} \frac{tg z}{(z-1)^2(z^2+1)}dz$ $\qquad l_1: |z| = 2; \qquad l_2: |z+1| = \frac{3}{4};$

$l_3: |z| = \frac{3}{4}; \qquad l_4: |z-1| = \frac{1}{2}.$

25. $\int\limits_{l_i} \frac{\cos(\pi z)}{z^2(z+2)} dz$ $\quad l_1 : |z| = 3; \quad l_2 : |z - i| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z| = \frac{1}{2}; \quad l_4 : |z + 2| = 1.$

26. $\int\limits_{l_i} \frac{\sin 3z}{(z^2 + 2)(z - 1)} dz$ $\quad l_1 : |z| = 2; \quad l_2 : |z| = \frac{3}{4};$

$l_3 : |z - \sqrt{2}i| = \frac{1}{4}; \quad l_4 : |z - 1| = \frac{1}{2}.$

27. $\int\limits_{l_i} \frac{ch 2z}{(z^2 - 3)(z + 2)^2} dz$ $\quad l_1 : |z| = 4; \quad l_2 : |z| = 1;$

$l_3 : |z + 2| = \frac{1}{6}; \quad l_4 : |z - \sqrt{3}| = \frac{1}{6}.$

28. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{2z}}{z(z + 1)^2} dz$ $\quad l_1 : |z| = \frac{3}{2}; \quad l_2 : |z| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z + 1| = \frac{1}{4}; \quad l_4 : |z - i| = \frac{3}{4}.$

29. $\int\limits_{l_i} \frac{e^{3z}}{(z + 2)^2(z^2 + 1)} dz$ $\quad l_1 : |z| = \frac{7}{2}; \quad l_2 : |z - i| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z + 2| = \frac{3}{4}; \quad l_4 : |z| = \frac{1}{2}.$

30. $\int\limits_{l_i} \frac{tg 2z}{(z + 3)^2(z - 1)} dz$ $\quad l_1 : |z| = \frac{3}{2}; \quad l_2 : |z + i| = \frac{1}{2};$

$l_3 : |z - 1| = \frac{1}{2}; \quad l_4 : |z - i| = \frac{1}{2}.$

Завдання 6.8 Розкласти в ряд Фур'є в комплексній формі функцію *f(t)* (завдання 6.4), задану графіком на відрізку [0; l], беручи за період *T* довжину відрізка [0; 2l] ($T=2l$).

Для розв'язання контрольної роботи № 6 вам знадобляться такі поняття, формули та алгоритми

1. При дослідженні *числових рядів на збіжність* потрібно міркувати таким чином.

а). Перевіряємо необхідну умову збіжності ряду (границя загального члена дорівнює нулю, при $n \to \infty$). Якщо вона порушується – ряд розбіжний.

б). Якщо в загальному члені ряду є логарифмічна функція, відношення многочленів, тригонометричні чи обернені тригонометричні функції із нескінченно малим аргументом – використовуємо першу чи другу ознаки порівняння.

Перша ознака порівняння. Якщо для членів додатних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{6.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots. \tag{6.2}$$

виконуються нерівності $a_n \le b_n$ для всіх n, починаючи з деякого, то із збіжності ряду (6.2) випливає збіжність ряду (6.1), а із розбіжності ряду (6.1) випливає розбіжність ряду (6.2).

Друга ознака порівняння. Якщо для додатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ існує скінченна додатна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то ці ряди збіжні або розбіжні одночасно.

в). Якщо в загальному члені числового ряду є факторіал чи послідовний добуток чисел – використовуємо ознаку Д'Аламбера:

якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \ge 0, \tag{6.3}$$

то при $l < 1$ даний ряд збіжний, а при $l > 1$ – розбіжний.

г). Якщо загальний член числового ряду можна подати у вигляді $(*****)^n$, то використовуємо радикальну ознаку Коші:

якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \qquad (6.4)$$

то при $l < 1$ даний ряд збіжний, а при $l > 1$ – розбіжний.

д). Якщо у загальному члені є вираз вигляду $e^U U'$, $\frac{1}{\ln^m U}(\ln U)'$, де $U = f(n)$, використовуємо інтегральну ознаку Коші:
якщо $f(x)$ – невід'ємна і незростаюча функція на проміжку $[1;+\infty]$, то ряд

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (6.5)$$

і невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx \qquad (6.6)$$

або обидва збіжні, або обидва розбіжні.

Запам'ятайте! 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ – узагальнений гармонійний ряд, збіжний при $\alpha > 1$, розбіжний при $\alpha \le 1$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ збіжний при $|q| < 1$.

3) Серед рядів з довільними членами велике значення мають *знакозмінні ряди*, тобто ряди, *знаки членів в яких чергуються*. Вважаючи перший член додатним, знакозмінний ряд можна записати у вигляді

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n .$$

Достатні умови збіжності цих рядів дає така теорема (ознака Лейбніца). Якщо члени знакозмінного ряду прямують до нуля і абсолютні величини їх не зростають, то такий ряд збіжний.

2. При визначенні інтервалу збіжності степеневого ряду чинимо так.
а). Визначаємо радіус збіжності степеневого ряду за однією з формул:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{або} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (6.7)$$

б). Підставляємо у степеневий ряд значення $x = R$ та $x = -R$.
в). Досліджуємо одержані числові ряди на збіжність.

г). Формуємо відповідь. (Якщо хоча б на одному кінці інтервалу $(-R, R)$ заданий ряд збіжний, то цей кінець відносять до інтервалу збіжності).

3. Для обчислення перших чотирьох відмінних від нуля членів розв'язку диференціального рівняння з використанням розкладу в ряд Тейлора потрібно виконати такі дії.
а). Записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння за допомогою ряду Тейлора-Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{6.8}$$

б). Підставляємо задані значення $x = 0$ та $f(0)$ у вихідне диференціальне рівняння та знаходимо значення $f'(0)$.
в). Диференціюємо за змінною x обидві частини заданого рівняння.
г). Підставляємо $x = 0$, $f(0)$ та $f'(0)$ у одержане нове рівняння й знаходимо $f''(0)$.
д). Диференціюємо за змінною x рівняння, одержане в п. 3в.
е). Підставляємо $x = 0$, $f(0)$, $f'(0)$ та $f''(0)$ у рівняння з п. 3д й знаходимо $f'''(0)$.
ж). Формуємо відповідь: підставляємо значення $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ та $f'''(0)$ у розвинення (6.8).

4. Для розвинення функції з періодом $T = 2l$ в ряд Фур'є використовуємо такі формули.
а). Розвинення в ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{\pi kx}{l} + b_k \sin\frac{\pi kx}{l}), \tag{6.9}$$

розвинення за косинусами

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi kx}{l}, \tag{6.10}$$

розвинення за синусами

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi kx}{l}. \tag{6.11}$$

При цьому a_k та b_k називають коефіцієнтами ряду Фур'є.

б). Для знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є на відрізку $[0;2l]$ використовуємо формули:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx, \quad k = 0, 1, 2... \tag{6.12}$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx, \quad k = 1,2... \tag{6.13}$$

5. Комплексними числами в алгебраїчній формі називають числа типу $z = x + yi$, де $i^2 = -1$. Число $\bar{z} = x - yi$, називають спряженим до z.

6. Алгебраїчні дії над комплексними числами виконуються за формулами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 \pm iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2); \tag{6.14}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); \tag{6.15}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}. \tag{6.16}$$

7. Кожне комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою площини *xOy*, яка має координати *z(x, y)*, при цьому точки на осі *Ox* є дійсними числами. Вісь *Oy* називають уявною, а вісь *Ox* – дійсною віссю. На координатній площині комплексному числу *z* можна поставити у відповідність вектор $\vec{r}$ (радіус-вектор точки z), який направлений з початку координат *O* в точку.

Довжину $r = |\vec{r}|$ цього вектора, тобто відстань від точки *z* до початку координат, називають *модулем комплексного числа z* і позначають $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Кут φ, який утворює вектор $\vec{r}$ з додатнім напрямком осі *Ox*, називається *аргументом числа z* і позначається *Argz*. Для аргументу φ справедливі формули:

$$x = r \cdot cos\,\varphi, y = r\,sin\varphi; \ \frac{y}{x} = tg\varphi \ (r = |z|, \ \varphi = Argz). \tag{6.17}$$

Значення $Argz$ визначаються не однозначно, а з точністю до $2\pi k$, $k=(0;\pm1;\pm2...)$.

Якщо φ змінюється в межах $-\pi<\varphi\le\pi$ або $0\le\varphi<2\pi$, то виділяють головну частину аргументу, яка позначається $arg z$, так що $Arg\ z=arg z+2\pi k$, $k=(0;\pm1;\pm2...)$, де $arg z$ є *головним значенням* $Arg\,z$, яке визначається умовами $-\pi<arg\,z<\pi$, причому

$$arg\ z=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x>0 \\ \pi+arctg\dfrac{y}{x}, & x<0,\ \ y\ge0 \\ -\pi+arctg\ \dfrac{y}{x}, & x<0,\ \ y<0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ \ y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ \ y<0 \end{cases} \tag{6.18}$$

Виходячи з формули для x і y, одержимо *тригонометричну* та *показникову форми* комплексного числа:

$$\begin{aligned} z&=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=\\ &=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}=\\ &=|z|e^{i(arg\,z+2\pi k)}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

При цьому використали відому формулу Ейлера:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y.$$

8. Для піднесення комплексного числа до степеня n справедлива формула Муавра:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{6.20}$$

9. Корені степеня n із комплексних чисел визначаються за формулою:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right). \quad (6.21)$$

10. Основні функції комплексної змінної.

Показникова функція:

$$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y).$$

Тригонометричні функції:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$tgz=\frac{\sin z}{\cos z}, \qquad ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гіперболічні функції:

$$chz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \qquad shz=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},$$

$$thz=\frac{shz}{chz}, \qquad cthz=\frac{chz}{shz}.$$

Логарифмічна функція:

$$Lnz=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),$$

де k – довільне ціле число.

Узагальнені показникові і степеневі функції:

$$a^{z}=e^{z\ln a}, \qquad z^{\alpha}=e^{\alpha\ln z},$$

де z, a, α – довільні комплексні числа, причому $\alpha\neq 0$.

11. Для того, щоб функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ була диференційовною в точці $z=x+iy$ необхідно і достатньо, щоб:

а) дійсні функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були диференційовні в точці z;

б) в точці $z = x + iy$ виконувались умови (умови Коші-Рімана):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.22}$$

12. Якщо умови Коші-Рімана виконуються, то похідна $f'(z)$ обчислюється за однією з формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.23}$$

13. Для доведення аналітичності функції $f(z)$ на всій комплексній площині та знаходження похідної функції за теоремою Коші-Рімана потрібно дотримуватись такого *алгоритму*.

а). Функцію $f(z)$ подаємо у вигляді $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, використовуючи алгебраїчну форму комплексного числа та основні функції комплексної змінної.

б). Шукаємо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ та переконуємось, що умови Коші-Рімана виконаються для будь-яких значень комплексної площини.

в). За однією з формул (6.23) формуємо відповідь, зводячи одержану функцію до функції від змінної z.

Запам'ятайте! Для функції комплексної змінної зберігаються всі правила диференціювання функцій дійсної змінної.

Функція $f(z)$ називається аналітичною в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

14. Для обчислення інтеграла по замкнутому контуру L з підінтегральною функцією вигляду $\frac{\varphi(z)}{P_m(z)}$, де $\varphi(z)$ – аналітична функція, $P_m(z)=p_m z^m + p_{m-1}z^{n-1}+\ldots+p_1 z+p_0$ за інтегральною формулою Коші міркують так.

а). Розкладаємо знаменник підінтегральної функції на незвідні множники та знаходимо нулі знаменника.

б). Перевіряємо належність нулів знаменника області D, яка обмежена замкнутим контуром L.

в). Якщо жоден із нулів знаменника не належить області D, то інтеграл аналітичної функції по контуру L дорівнює нулю.

г). Якщо тільки один із нулів знаменника (z_0) належить області D, то для обчислення інтеграла від аналітичної функції по замкнутому контуру використовують одну із формул Коші:

$$2\pi i \cdot f(z_0) = \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \ (z_0 \in D) \tag{6.24}$$

або

$$\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \ n = 1, 2, ... \tag{6.25}$$

контур L обходять так, що область D залишається весь час зліва (додатній напрям).

Зауваження! Решту незвідних множників відносимо до аналітичної функції $\varphi(z)$. Наприклад, якщо $P_m(z) = (z - z_0)P_{m-1}(z)$, то $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{P_{m-1}(z)}$.

д). Якщо області D належить більше ніж один нуль знаменника $z_0, z_1, ..., z_k$, то кожну із цих точок обводимо колами $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_k$ настільки малих радіусів, щоб вони не перетинались. Для кожної точки $z_0, z_1, ..., z_k$ виконуємо обчислення з п. г). Одержані значення додаємо.

15. (Основна теорема про лишки) Нехай функція $f(z)$ аналітична в деякій області D за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок $z_1, z_2, ..., z_n \in D$, L – межа області D. Тоді

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[f(z), z_k]. \tag{6.26}$$

а). Лишком функції $f(z)$ в точці z_0 називають коефіцієнт ряду Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$ при $\frac{1}{z-z_0}$ і позначають $res[f(z), z_0]$.

б). Точка z_0 називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо дана функція аналітична в усіх точках околу точки z_0, окрім неї самої.

в). Ізольована особлива точка z_0 називається полюсом функції $f(z)$, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

г). Якщо точка z_0 є нулем аналітичної функції $f(z)$ кратності m, то ця точка є полюсом такої ж кратності функції $F(z) = \frac{1}{f(z)}$.

д). Точка z_0 є нулем функції $f(z)$ кратності m, якщо дану функцію можна подати у вигляді $f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$.

е). Точка z_0 є нулем функції $f(z)$ кратності m, якщо $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

16. При застосуванні основної теореми про лишки чинимо так.

а). Визначаємо ізольовані особливі точки z_k, $k = \overline{1,n}$ підінтегральної функції та їх характер. В кожній ізольованій особливій точці обчислюємо лишок функції.

б). Якщо точка z_k – простий полюс підінтегральної функції, то лишок в цій точці обчислюється так:

$$res[f(z), z_k] = \lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0). \tag{6.27}$$

в). Якщо точка z_k – простий полюс підінтегральної функції, яку можна подати у вигляді $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\psi(z_k) = 0$, $\psi'(z_k) \neq 0$, $\varphi(z_k) \neq 0$, то лишок в цій точці обчислюється так:

$$res[f(z), z_k] = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}. \tag{6.28}$$

г). Якщо z_k – полюс підінтегральної функції кратності m, то лишок в цій точці обчислюється так:

$$res[f(z), z_k] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right). \qquad (6.29)$$

д). Формуємо відповідь, додавши усі знайдені лишки та помноживши одержану суму на $2\pi i$.

17. Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $T = 2l$, то ряд Фур'є в комплексній формі запишеться так

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2k\pi}{T}x}, \qquad (6.30)$$

де $\omega = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{T}$ – хвильове число, коефіцієнти ряду обчислюють за формулою:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-jk\omega x} dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-j\frac{2k\pi}{T}x} dx. \qquad (6.31)$$

а). Сукупність хвильових чисел $\omega_k = \frac{k\pi}{l}$ називають спектром.

б). Коефіцієнти c_k, які визначаються формулами (6.31), називають комплексною амплітудою.

в). При побудові амплітудних спектрів обчислюють модуль комплексних чисел c_k, а при побудові фазового спектра – аргументи.

г). $e^{-j2k\pi} = 1$.

Приклади розв'язання типових задач контрольної роботи № 6

Приклад 6.1 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$.

Розв'язування

Необхідна умова збіжності числового ряду виконується, оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5} = 0$.

В загальному члені ряду є відношення многочленів, тому використаємо другу ознаку порівняння. Розглянемо збіжний узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-4n+5}=1,$$

і даний ряд також збіжний.

Приклад 6.2 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}=\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+\dots$

Розв'язування

Оскільки границя загального члена цього ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{100+\frac{1}{n}}=\frac{1}{100}\neq 0$$

відмінна від нуля, то цей ряд є розбіжним.

Приклад 6.3 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2\dots$$

Розв'язування

Необхідна умова збіжності числового ряду виконується, оскільки $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=0$.

Зауважуємо, що

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n<\left(\frac{n}{2n}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Оскільки кожен член даного додатного ряду менший відповідного члена збіжної геометричної прогресії із знаменником $q=\frac{1}{2}<1$, то вихідний ряд також збіжний.

Приклад 6.4 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$

Розв'язування

Необхідна умова збіжності числового ряду виконується, оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$.

Оскільки загальний член містить факторіал, застосовуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0<1.$$

Даний ряд збіжний.

Приклад 6.5 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Розв'язування

Можна переконатись, що необхідна умова збіжності числового ряду виконується.

Оскільки загальний член ряду можна подати у вигляді $\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{2}\right)^n$, застосовуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

З останнього результату випливає, що даний ряд збіжний.

Приклад 6.6 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Розв'язування

Очевидно, що члени цього ряду є значеннями функції $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ при $x=2,3,\ldots,n,\ldots$ Ця функція додатна і спадна на проміжку $[2;+\infty]$. Користуючись означенням, дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}[\ln\ln x]_2^b=\lim_{b\to+\infty}[\ln\ln b-\ln\ln 2]=+\infty.$$

Оскільки цей інтеграл розбіжний, то за інтегральною ознакою Коші розбіжним є і даний ряд.

Приклад 6.7 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язування

Оскільки у загальному члені є вираз вигляду $e^{U}U'$, то застосуємо інтегральну ознаку Коші. Функція $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ невід'ємна та незростаюча на проміжку $[\,1;\ +\infty\,)$. Дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=-2\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})=-2\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\sqrt{x}}\Big|_{1}^{b}\right)=$$

$$=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{\sqrt{b}}}-\frac{1}{e^{\sqrt{1}}}\right)=-2\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{b}}}+2\cdot\frac{1}{e}=\frac{2}{e}.$$

Оскільки невласний інтеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ збіжний, то за інтегральною ознакою Коші буде збіжним і даний ряд.

Приклад 6.8 Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\frac{x}{10}+\frac{x^2}{200}+\frac{x^3}{3000}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\ldots.$$

Розв'язування

Радіус збіжності знаходимо за першою з формул (6.7)

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 10^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 10^{n+1}},$$

тому

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^n}=10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10.$$

Отже, даний ряд збіжний для всіх значень x, що належать інтервалу $(-10;10)$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях проміжку. Підставляючи в даний ряд замість x число 10, одержимо розбіжний гармонійний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

При $x=-10$ одержуємо числовий знакозмінний ряд

$$-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots,$$

який збіжний умовно.

Таким чином, інтервалом збіжності даного степеневого ряду є півввідрізок $[-1;10)$.

Приклад 6.9 Використовуючи розвинення в ряд Тейлора-Маклорена, виписати перші чотири, відмінних від нуля, члени розвинення розв'язку диференціального рівняння $y'=x^2+xy+1$.

Розв'язування

Нехай $y(x)$ – розв'язок даного рівняння. Тоді

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (*)$$

Оскільки за умовою $y(0)=1$, знайдемо $y'(0)$, підставивши в рівняння $x=0$, $y(0)=1$. Маємо

$$y'(0)=0^2+0\cdot1+1=1.$$

Для обчислення $y''(0)$ продиференціюємо за змінною x обидві частини диференціального рівняння (*):

$$y''=2x+y+xy'. \qquad (**)$$

Підставивши в одержане рівняння $x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, одержимо:

$$y''(0)=2\cdot0+1+0\cdot1=1.$$

Диференціюючи рівняння (**) за змінною x, одержимо:

$$y'''=2+2y'+xy''.$$

Підставляючи в останнє рівняння $x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=1$, маємо

$$y'''=2+2\cdot1+0\cdot1=4.$$

Підставляючи знайдені значення $y'(0)$, $y''(0)$ та $y'''(0)$ в розвинення $y(x)$ одержимо

$$y(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!}.$$

Приклад 6.10 Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & при \ \ 0 \le x \le 1, \\ 1, & при \ \ 1 < x < 2, \end{cases}$$

беручи за період T довжину відрізка [0; 2l]·($T=2l$):
а) в повний ряд Фур'є;
б) за косинусами;
б) за синусами.

Розв'язування

В нашому випадку $T = 2$, $l = 1$. Згідно з формулами (6.12) та (6.13) маємо

$$a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + x\Big|_1^2 = \frac{3}{2},$$

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos k\pi x dx = \int_0^1 x\cos k\pi x dx + \int_1^2 \cos k\pi x dx = \left.\frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\right|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x dx + \left.\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right|_1^2 =$$

$$= \left.\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\right|_0^1 + \frac{1}{k\pi}(\sin 2k\pi - \sin k\pi) = \frac{\cos k\pi - 1}{k^2\pi^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2},$$

$$b_k = \int_0^2 f(x)\sin k\pi x dx = \int_0^1 x\sin k\pi x dx + \int_1^2 \sin k\pi x dx = -\left.\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\right|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x dx - \left.\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right|_1^2 =$$

$$= -\frac{\cos k\pi}{k\pi} + \left.\frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\right|_0^1 - \frac{\cos 2k\pi}{k\pi} + \frac{\cos k\pi}{k\pi} = -\frac{1}{k\pi}.$$

Таким чином, згідно з формулою (6.9), одержуємо таке розвинення даної функції в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\right) =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{1}{\pi}\sin \pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x - \frac{2}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{1}{3\pi}\sin \pi x - \ldots$$

За формулою (6.10) маємо:

$$f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x.$$

За формулою (6.11) маємо:

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi x.$$

Приклад 6.11 Для заданих чисел $z_1=3+3i$ та $z_2=-1-i$ виконати вказані дії:

1) знайти значення $z_3=\dfrac{4z_1+z_1z_2}{3\overline{z_1}+5-2i}$;

2) числа z_1 та z_2 записати в тригонометричній та показниковій формах;

3) для числа z_1 знайти всі корені степеня m=4;

4) число z_2 піднести до степеня $k=3$.

Розв'язування

Оскільки $z_1=3+3i$, то $\overline{z_1}=3-3i$. Для знаходження добутку $z_1\cdot z_2$ перемножимо ці числа почленно і врахуємо, що $i^2=-1$. Помножимо чисельник і знаменник дробу на $(14+11i)$ – комплексне число, спряжене до знаменника і виконаємо ділення на дійсне число

$$\frac{12-12i}{14-11i}=\frac{(12-12i)(14+11i)}{(14-11i)(14+11i)}=\frac{168+=132i-168i-132i^2}{196+154i-154i-121i^2}=\frac{300}{317}-\frac{36}{317}i.$$

Оскільки $z=x+iy=3+3i$, то $x=3$ $y=3$ $|z|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$; $x>0$ та $y>0$. Отже, $\varphi=arctg\frac{3}{3}=arctg1=\frac{\pi}{4}$.

Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа z_1

будуть: $z_1 = \sqrt{18}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ та $z_1 = \sqrt{18}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Маємо $z_2 = -1 - i$, звідки $x = -1$ та $y = -1$. Тоді

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Оскільки $x < 0$ та $y < 0$, то $\varphi = arctg\frac{y}{x} - \pi = arctg\frac{(-1)}{(-1)} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$.

Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа z_2 будуть

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4}\right) \text{ та } z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Для знаходження коренів використаємо формулу (6.21)

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j+2pk}{n} + i\sin\frac{j+2pk}{n}\right).$$

За умовою $n = m = 4$, отже,

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{18}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right), \text{ де } (k = 0,1,2,3).$$

$$\omega_1 = \sqrt[4]{18}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),\ (k = 0);$$

$$\omega_2 = \sqrt[4]{18}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right),\ (k = 1)$$

$$\omega_3 = \sqrt[4]{18}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),\ (k = 2);$$

$$\omega_4 = \sqrt[4]{18}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right),\ (k = 3).$$

Для піднесення комплексного числа z_2 до степеня $k=3$ використаємо формулу (6.20).

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\text{ де } n=k=3.$$

Тоді $z_2^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$, $r=\sqrt{2}$, $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Отже,

$$z_2^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{8}\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2-2i.$$

Приклад 6.12 Довести, що функція $f(z)=3z^3+4z$ аналітична та знайти похідну за формулою Коші-Рімана.

Розв'язування

Доведемо, що функція аналітична та знайдемо похідну за формулою обчислення похідної аналітичної функції комплексної змінної (Коші-Рімана).

Нехай $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$, тоді $f(z)=3(x+iy)^3+4(x+iy)$.

В останній рівності розкриємо дужки і виділимо дійсну та уявну частини. Одержимо

$$f(z)=3x^3-9xy^2+4x+9ix^2y-3iy^3+4iy,$$

$$u(z)=3x^3-9xy^2+4x,\ v(z)=9x^2y-3y^3+4y.$$

Для того, щоб функція $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ була аналітичною в області D, необхідно й досить, щоб існували в цій області неперервні частинні похідні від функцій $u(x;y)$ і $v(x;y)$, які задовольняють умови Коші-Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Обчислимо $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=9x^2-9y^2+4,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-18xy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=9x^2-9y^2+4,\ \frac{\partial v}{\partial x}=18xy.$$

Очевидно, що $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Умови Коші-Рімана виконуються для довільних x та y, тому функція $f(z)=3z^3+4z$ аналітична на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну за формулою $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$f'(z)=(3z^3+4z)'=9x^2-9y^2+4+18ixy=9(x^2+2\cdot xyi-y^2)+4=9z^2+4.$$

Приклад 6.13 Довести, що функція $f(z)=e^{-4z+3i}$ аналітична та знайти похідну.

Розв'язування

Оскільки $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$, то

$$e^{-4(x+iy)+3i}=e^{-4x}(\cos(3-4y)+i\sin(3-4y)).$$

Відповідно, $u=e^{-4x}\cos(3-4y)$, $v=e^{-4x}\sin(3-4y)$. Обчислимо $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-4e^{-4x}\cos(3-4y);\quad \frac{\partial u}{\partial y}=4e^{-4x}\sin(3-4y);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-4e^{-4x}\sin(3-4y);\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-4e^{-4x}\cos(3-4y).$$

Очевидно, що $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, тобто умови Коші-Рімана виконуються для довільних x та y, тому функція $f(z)=e^{-4z+3i}$ є аналітичною на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну за формулою $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$f'(z)=\left(e^{-4z+3i}\right)'=\frac{\partial}{\partial x}(e^{-4x}cos(3-4y))+i\frac{\partial}{\partial x}(e^{-4x}sin(3-4y))=$$
$$=-4e^{-4x}cos(3-4y)-i4e^{-4x}sin(3-4y)=$$
$$=-4e^{-4x}(\cos(3-4y)+i\sin(3-4y))=-4e^{-4z+3i}.$$

Приклад 6.14 Обчислити інтеграл $\oint\limits_{l_1}\frac{shz}{(z+3)(z^2+1)}dz$, якщо $l_1: \ |z|=4$;

$l_2: \ |z+1|=\frac{1}{2}$; $\quad l_3: \ |z-i|=\frac{1}{4}$; $\quad l_4: \ |z+i|=\frac{1}{2}$.

Розв'язування

Розкладемо знаменник підінтегрального дробу на незвідні множники: $(z+3)(z^2+1)=(z+3)(z+i)(z-i)$. Нулі знаменника є $z_0=-3$, $z_1=-i$, $z_2=i$.

Якщо $l_1: \ |z|=4$ – коло з центром в початку координат радіуса 4, то всі три точки належать області D, обмеженій цим колом. Тому обводимо дані точки колами $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ настільки малих радіусів, що вони не перетинаються. Тому

$$\oint\limits_{l_1}\frac{shz}{(z+3)(z^2+1)}dz=\oint\limits_{\gamma_0}\frac{\frac{shz}{z^2+1}}{z+3}dz+\oint\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{shz}{(z-i)(z+3)}}{z+i}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{shz}{(z+i)(z+3)}}{z-i}dz.$$

Позначимо $f_0(z)=\frac{shz}{z^2+1}$, $f_1(z)=\frac{shz}{(z-i)(z+3)}$, $f_2(z)=\frac{shz}{(z+i)(z+3)}$, тоді

$$\oint\limits_{l_1}\frac{shz}{(z+3)(z^2+1)}dz=2\pi i\left(f_0(z_0)+f_1(z_1)+f_2(z_2)\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{sh(-3)}{(-3)^2+1}+\frac{sh(-i)}{(-i-i)(-i+3)}+\frac{shi}{(i+i)(i+3)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{sh(-3)}{10}+\frac{sh(-i)}{(-2i)(-i+3)}+\frac{shi}{2i(i+3)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{sh(-3)}{10}-\frac{sh(-i)(3+i)}{2i\cdot 10}+\frac{(3-i)shi}{2i\cdot 10}\right)=\frac{\pi i}{5}\left(sh(-3)+\frac{1}{2}i(3+i)sh(-i)-\frac{1}{2}i(3-i)shi\right)=$$

$$=\frac{\pi i}{5}\left(-sh3-\frac{3}{2}ishi+\frac{1}{2}shi-\frac{3}{2}ishi-\frac{1}{2}shi\right)=-\frac{\pi i}{5}(sh3+3ishi).$$

Якщо l_2: $|z+1|=\frac{1}{2}$ – коло з центром в точці (-1) радіуса $\frac{1}{2}$, то жоден із нулів знаменника підінтегральної функції не належить області, обмеженій цим колом, тому:

$$\oint_{l_2}\frac{shz}{(z+3)(z^2+1)}dz=0.$$

Якщо l_3: $|z-i|=\frac{1}{4}$ – коло з центром в точці i радіуса $\frac{1}{4}$, то області, обмеженій цим колом належить єдина точка z_2. Тому,

$$\oint_{l_3}\frac{shz}{(z+3)(z^2+1)}dz=\oint_{l_3}\frac{\frac{shz}{(z+i)(z+3)}}{z-i}dz=2\pi i\cdot\frac{shi}{(i+i)(i+3)}=\frac{\pi}{10}(3-i)shi.$$

Якщо l_4: $|z+i|=\frac{1}{2}$ – коло з центром в точці i радіуса $\frac{1}{2}$. Області D обмеженій цим колом належить єдина точка z_1. Тоді,

$$\oint_{l_4}\frac{shz}{(z+3)(z^2+1)}dz=\oint_{l_4}\frac{\frac{shz}{(z-i)(z+3)}}{z+i}dz=2\pi i\cdot\frac{sh(-i)}{(-2i)(-i+3)}=\frac{\pi}{10}(3+i)shi.$$

Приклад 6.15 Обчислити інтеграл $\oint_{l_i}\frac{tg\,2z}{z^3\cdot(z+1)}dz$ за допомогою лишків.

Зробити зображення контурів l_i в комплексній площині z

$$l_1:|z|=2;\ l_2:|z|=\frac{1}{4};\ l_3:|z+i|=\frac{1}{4};\ l_4:\left|z-\frac{\pi}{4}\right|=\frac{1}{8};\ l_5:\left|z+\frac{\pi}{4}\right|=\frac{1}{8}.$$

Розв'язування

$$\oint_{l_i}\frac{tg\,2z}{z^3\cdot(z+1)}dz=\oint_{l_i}\frac{\sin 2z}{z^3\cdot(z+1)\cdot\cos 2z}dz,$$

$z_1=0,\ z_2=-i,\ z_3=\frac{\pi}{4},\ z_4=-\frac{\pi}{4}$ – особливі точки.

Визначимо типи особливих точок та обчислимо лишки в цих точках.

Для точки $z_1=0$. Оскільки,

$$\lim_{z\to 0}\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+1)}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{(tg\ 2z)'}{(z^4+i\cdot z^3)'}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{2}{cos^2 2z}}{4\cdot z^3+3\cdot i\cdot z^2}=\infty,$$

то $z_1=0$ – полюс функції.

Визначимо порядок полюса. Розглянемо функцію $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.

$$\varphi(z)=\frac{1}{\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}}=\frac{z^3\cdot(z+i)\cdot cos\ 2z}{sin2z}=\frac{(z^4+z^3\cdot i)\cdot cos\ 2z}{sin2z}.$$

Нехай $\varphi(z)=\frac{\psi(z)}{\psi_1(z)}$, де $\psi(z)=(z^4+z^3\cdot i)\cdot cos\ 2z,\ \psi_1(z)=sin\ 2z.$

Визначимо окремо порядок нуля для функцій $\psi(z)$ та $\psi_1(z)$.

$\psi(z)=(z^4+iz^3)cos2z,\quad \psi(z_1)=\psi(0)=0.$

$\psi'(z)=(4z^3+3iz^2)cos2z-(z^4+iz^3)2sin2z,\quad \psi'(0)=0.$

$\psi''(z)=(-4z^4-4z^3\cdot i+12z^2+6z\cdot i)\cdot cos\ 2z-(8z^3+6z^2\cdot i+8z^3+$
$+6z^2\cdot i)\cdot sin\ 2z,\qquad \psi''(z_1)=\psi''(0)=0.$

$\psi'''(z)=(-16z^3-12z^2\cdot i+24+6\cdot i)\cdot cos\ 2z+(8z^4+8z^3\cdot i-24z^2-$
$-12z\cdot i)\cdot sin\ 2z-(24z^2+12z\cdot i+24z+12z\cdot i)\cdot sin\ 2z-(16z^3+12z^2\cdot i+$
$+16z^3+12z^2\cdot i)\cdot cos\ 2z=(-48z^3-36z^2\cdot i+24+6\cdot i)\cdot cos\ 2z+(8z^4+$
$8z^3\cdot i-48z^2-36z\cdot i+24z)\cdot sin\ 2z,\qquad \psi'''(z_1)=\psi'''(0)=24+6\cdot i\neq 0.$

Отже, точка $z_1=0$ є нулем третього порядку для функції $\psi(z)=(z^4+iz^3)cos2z$; $\psi_1(z)=sin2z$; $\psi_1(z_1)=\psi_1(0)=0$; $\psi_1'(z)=2cos2z$; $\psi(0)=2\neq 0.$

Отже, точка $z_1=0$ є нулем першого порядку (або простим нулем) для функції $\psi_1(z)=sin\,2z$. Точка $z_1=0$ є нулем порядку $3-1=2$ для функції $\varphi(z)$, а значить і полюсом другого порядку для функції $f(z)=\dfrac{tg\,2z}{z^3\cdot(z+i)}$.

Обчислимо лишок функції в точці $z_1=0$ за формулою (6.29).

$$res\ f(0)=\frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}\cdot z^3\right]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{tg\ 2z}{z+i}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{2(z+i)}{cos^2 2z}-tg\ 2z}{(z+i)^2}=\frac{2i}{-1}=-2i.$$

Для точки $z_2=-i$: оскільки $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{tg\ 2z}{z^2\cdot(z+i)}=\infty$ то $z_2=-i$ полюс функції. Визначимо порядок полюса.

$$f(z)=\frac{tg\,2z}{z^3\cdot(z+i)}=\frac{\dfrac{tg\,2z}{z^3}}{(z+i)},$$

де $\varphi(z)=\dfrac{tg\,2z}{z^3}$ – аналітична функція в околі точки $z_2=-i$.

$\varphi(z_2)=\dfrac{tg\,2i}{(-i)^3}=itg\,2i\neq 0$. Отже, $z_2=-i$ – полюс першого порядку, оскільки $n=1$.

За формулою (6.27)

$$res\ \ f(-i)=\lim_{z\to -i}\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+1)}\cdot(z+i)=\lim_{z\to -i}\frac{tg\ 2z}{z^3}=itg2i.$$

Для точки $z_3=\dfrac{\pi}{4}$. Оскільки,

$$\lim_{z\to z_3} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{sin\ 2z}{cos\ 2z\cdot z^3\cdot(z+i)}=\infty,$$

то $z_3=\dfrac{\pi}{4}$ – полюс функції. Визначимо порядок полюса.

$$\varphi(x)=\frac{1}{f(z)}=\frac{cos\ 2z\cdot z^3\cdot(z+i)}{sin\ 2z},\ \ \varphi(\frac{\pi}{4})=\frac{cos(2\cdot\frac{\pi}{4})\cdot(\frac{\pi}{4})^3\cdot(\frac{\pi}{4}+i)}{sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}=0.$$

$$\varphi'(x)=\left[\frac{z^4+iz^3}{tg\,2z}\right]'=\left[\frac{\left(4z^3+3iz^2\right)\cdot tg\,2z-\dfrac{2}{\cos^2 2z}\cdot(z^4+iz^3)}{tg^2 2z}\right]=$$

$$=\left(\frac{4z^3+3iz^2}{tg\,2z}-\frac{2\cdot(z^4+iz^3)}{\cos 2z}\cdot\frac{\cos 2z}{\sin 2z}\right),\ \varphi'(\frac{\pi}{4})=-2\cdot(\frac{\pi}{4})^4+i\cdot(\frac{\pi}{4}^3)\neq 0.$$

Отже, $z_3=\dfrac{\pi}{4}$ – простий полюс. Обчислимо лишок функції в точці $z_3=\dfrac{\pi}{4}$ за формулою (6.28):

$$f(z)=\frac{\sin 2z}{z^3\cdot(z+i)\cdot\cos 2z}=\frac{\dfrac{\sin 2z}{z^3\cdot(z+i)}}{\cos 2z},\ \text{де}\ \varphi(z)=\frac{\sin 2z}{z^3\cdot(z+i)},\ \psi(z)=cos 2z.$$

$$\varphi(\frac{\pi}{4})\neq 0,\ \psi(\frac{\pi}{4})=cos(2\cdot\frac{\pi}{4})=0,\ \psi'(z)=-2sin2z,\ \psi'(\frac{\pi}{4})=-2\neq 0.$$

$$res\ f(z_0)=\frac{\dfrac{\sin 2z_0}{z_0^3(z_0+i)}}{(\cos 2z_0)'}=\frac{\sin 2z_0}{z_0^3(z_0+i)(-2\sin 2z_0)}=\frac{1}{(-2)z_0^3(z_0+i)}.$$

Відповідно,

$$res\, f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{(-2)\cdot\dfrac{\pi^3}{64}\cdot(\dfrac{\pi}{4}+i)}=\frac{-32}{\pi^3(\dfrac{\pi}{4}+i)}=\frac{-128}{\pi^3(\pi+4i)}.$$

Для точки $z_4=-\dfrac{\pi}{4}$. Оскільки $\lim\limits_{z\to-\frac{\pi}{4}} f(z)=\lim\limits_{z\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{tg\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}=-\infty$, то

$z_4=-\dfrac{\pi}{4}$ – полюс функції. Визначимо порядок полюса.

Точка $z_4=-\dfrac{\pi}{4}$,оскільки і точка $z_3=\dfrac{\pi}{4}$ є простим полюсом. Тому лишок в точці $z_4=-\dfrac{\pi}{4}$ можна обчислити за формулою (6.28):

$$res\ f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

$$f(z)=\frac{\dfrac{sin\ 2z}{z^3\cdot(z+i)}}{cos\ 2z},\ \varphi(z)=\frac{sin\ 2z}{z^3\cdot(z+i)},\ \psi(z)=cos\, 2z.$$

$$res\ f(z_0)=\frac{\dfrac{sin2z_0}{z_0^3(z_0+i)}}{(cos2z_0)'}=\frac{sin2z_0}{z_0^3(z_0+i)(-2sin2z_0)}=\frac{1}{(-2)z_0^3(z_0+i)},$$

$$res\, f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{(-2)\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)^3\left(-\dfrac{\pi}{4}+i\right)}=\frac{128}{\pi^3(-\pi+4i)}.$$

Обчислимо інтеграл $\oint\limits_{l_1}\frac{tg\,2z}{z^3\cdot(z+1)}dz$ за допомогою лишків.

1) Контур $l_1:|z|=2$, (рис. 6.1).

Контуром $l_1:|z|=2$ є коло з центром в точці (0,0), радіус якого дорівнює 2.

Даній області інтегрування належать всі особливі точки:

$z_1=0;\quad z_2=-i;\quad z_3=\frac{\pi}{4};\quad z_4=-\frac{\pi}{4}.$

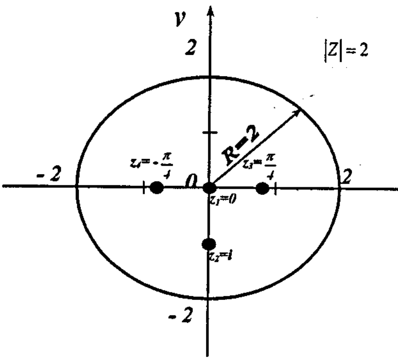


Рисунок. 6.1

$$\int\limits_{l_1}\frac{tg2z}{z^3(z+1)}dz=2\pi i(res\,f(0)+res\,f(-i)+res\,f(\frac{\pi}{4})+res\,f(-\frac{\pi}{4})).$$

$$\int\limits_{l_1}\frac{tg2z}{z^3(z+1)}dz=2\pi i\left(-2i+itg\,2i-\frac{128}{\pi^3\cdot(\pi+4i)}+\frac{128}{\pi^3\cdot(-\pi+4i)}\right)=$$

$$=4\pi+2\pi tg\,2i-\frac{512}{\pi\cdot\left(\pi^2+16\right)}.$$

2) Контур $l_2:|z|=\frac{1}{4}$, (рис. 6.2),

Контуром $l_2:|z|=\frac{1}{4}$ є коло з центром в точці (0,0), радіус якого дорівнює $\frac{1}{4}$. Даній обла-

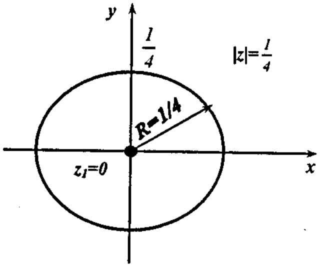


Рисунок 6.2

сті інтегрування належить лише одна особлива точка – $z_1 = 0$.

Тому $\int\limits_{l_2} \frac{tg2z}{z^3(z+1)} dz = 2\pi i \, res \, f(0) = 2\pi i \cdot (-2i) = 4\pi$.

3) Контур $l_3 : |z+i| = \frac{1}{4}$, (рис. 6.3).

Контуром $l_3 : |z+i| = \frac{1}{4}$ є коло з центром в точці $(0,-1)$ радіус якого дорівнює $\frac{1}{4}$. Даній області інтегрування належить лише одна особлива точка – $z_2 = -i$.

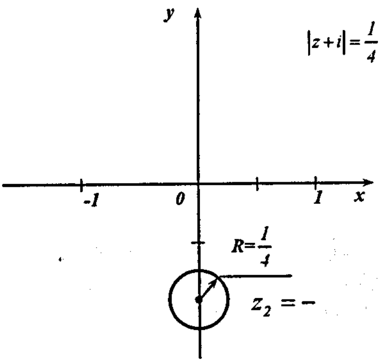


Рисунок 6.3

Тому

$$\int\limits_{l_3} \frac{tg2z}{z^3(z+1)} dz = 2\pi i \, res \, f(-i) = 2\pi i \cdot (i tg\, 2i) = -2\pi tg\, 2i.$$

4) Контур $l_4 : \left|z - \frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{8}$.

Контуром $l_4 : \left|z - \frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{8}$ є коло з центром в точці $(0, \frac{\pi}{4})$, радіус якого дорівнює $\frac{1}{8}$. Даній області інтегрування належить одна особлива точка – $z_3 = \frac{\pi}{4}$.

$$\int\limits_{l_4} \frac{tg2z}{z^3(z+1)} dz = 2\pi i \cdot res \, f(\frac{\pi}{4}) = 2\pi \cdot \frac{-128}{\pi^3 \cdot (\pi + 4i)} = \frac{-256i}{\pi^2 \cdot (\pi + 4i)}.$$

5) Контур $l_5: \left|z+\frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{8}$ є коло з центром в точці $(0, -\frac{\pi}{4})$, радіус якого дорівнює $\frac{1}{8}$. Даній області інтегрування належить одна особлива точка $z_4 = -\frac{\pi}{4}$.

$$\int_{l_5} \frac{tg2z}{z^3(z+1)}dz = 2\pi i \cdot res\, f(-\frac{\pi}{4}) = 2\pi i \cdot \frac{(-128)}{\pi^3 \cdot (-\pi + 4 \cdot i)} = \frac{-256 \cdot i}{\pi^2 \cdot (-\pi + 4 \cdot i)}.$$

Приклад 6.16 Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі періодичну функцію $f(x)$, яка задана графіком (рис. 6.4). Побудувати її амплітудний і фазовий спектри.

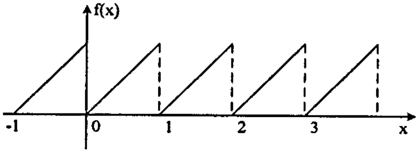


Рисунок 6.4

Розв'язування

В нашому випадку T=1 – період функції, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ – основна частота.

Скориставшись формулою (6.31) для коефіцієнтів Фур'є, матимемо

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt = \int_0^1 te^{-jk\omega t}dt = \left| \begin{matrix} u=t & dv=e^{-jk\omega t}dt \\ du=dt & v=-\frac{1}{jk\omega}e^{-ik\omega t} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{jk\omega}te^{-jk\omega t}\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{jk\omega}\int_0^1 e^{-jk\omega t}dt=-\frac{1}{jk\omega}e^{-jk\omega t}+\frac{1}{k^2\omega^2}e^{-jk\omega t}\Big|_0^1=-\frac{1}{ik\omega}e^{-jk\omega}+\frac{1}{k^2\omega^2}(e^{-jk\omega}-1)=$$

$$=-\frac{1}{jk2\pi}=\frac{j}{2k\pi}.$$

$k=\pm1,\ \pm2,\ldots$ оскільки $\omega=2\pi$ і $e^{-j2k\pi}=1$. Таким чином, розвинення даної функції в ряд Фур'є таке

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{j}{2k\pi}e^{2\pi kjx}.$$

Для побудови амплітудного і фазового спектрів врахуємо, що

$$A_0=|c_0|=\frac{1}{2},\ A_k=|c_k|=\frac{1}{2k\pi},$$

$$\varphi_0=\arg c_0=0,\ \varphi_k=\arg c_k=\arg\frac{j}{2k\pi}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & k>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & k<0,\end{cases}\qquad k=\pm1,\pm2,\ldots$$

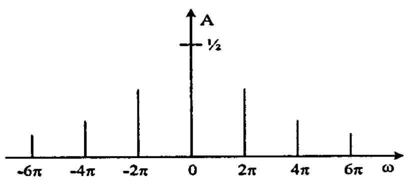


Рисунок 6.5

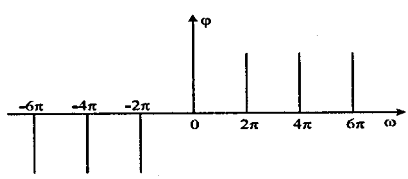


Рисунок 6.6

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7 : завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань

Операційне числення

Завдання 7.1 Чи є оригіналом функція $f(t)$?

1. $f(t)=3^t\cdot\chi(t)$;
2. $f(t)=t^3\cdot\chi(t)$;
3. $f(t)=e^{it}\cdot\chi(t)$;
4. $f(t)=e^{-t^2}\cdot\chi(t)$;
5. $f(t)=\frac{1}{(t-1)^2}\cdot\chi(t)$;
6. $f(t)=\ln t\cdot\chi(t)$;
7. $f(t)=\mathrm{tg}\,t\cdot\chi(t)$;
8. $f(t)=\frac{1}{(t-1)^2}\cdot\chi(t)$;
9. $f(t)=e^{(2+i)t}\cdot\chi(t-1)$;
10. $f(t)=\sin t\cdot\chi(t+1)$;
11. $f(t)=\frac{1}{t}\cdot\chi(t-1)$;
12. $f(t)=e^{it^2}\cdot\chi(t)$;
13. $f(t)=2^{\sqrt[3]{1+t^4}}\cdot\chi(t)$;
14. $f(t)=3^t\cdot\chi(t)$;
15. $f(t)=\ln t\cdot\chi(t)$;
16. $f(t)=t^3\cdot\chi(t)$;
17. $f(t)=e^{it}\cdot\chi(t)$;
18. $f(t)=e^{-t^2}\cdot\chi(t)$;
19. $f(t)=\mathrm{tg}\,t\cdot\chi(t)$;
20. $f(t)=\frac{1}{(t-1)^2}\cdot\chi(t)$;
21. $f(t)=\ln t\cdot\chi(t)$;
22. $f(t)=\mathrm{tg}\,t\cdot\chi(t)$;
23. $f(t)=e^{(2+i)t}\cdot\chi(t-1)$;
24. $f(t)=e^{t^2}\cdot\chi(t)$;
25. $f(t)=\frac{1}{t}\cdot\chi(t-1)$;
26. $f(t)=e^{it^2}\cdot\chi(t)$;
27. $f(t)=2^{\sqrt[3]{1+t^4}}\cdot\chi(t)$;
28. $f(t)=3^t\cdot\chi(t)$;
29. $f(t)=t^3\cdot\chi(t)$;
30. $f(t)=e^{it}\cdot\chi(t)$.

Завдання 7.2 Знайти зображення оригіналу:

1. $(t+4)\chi(t+4)-\sin^2 4t$;
2. $t\chi(t)-(t-\pi)\chi(t-\pi)+\frac{\cos 3t}{t}$;
3. $\frac{sh2t}{t}-e^{2-t}\sin 3t$;

16. $(t-\pi/3)\sin(3t-\pi)\chi(t-\pi/3)$;
17. $\frac{\cos 2t}{t}-ch(2t-1)\chi(t-1/2)$;
18. $\frac{\sin 2t}{t}+(t-3)^3\chi(t-3)$;

4. $3e^{1-t}-\dfrac{\sin^2 2t}{t}$;

5. $e^{2t-1}sh2t$;

6. $\dfrac{\sin^2 2t}{t}-\dfrac{1}{3^t}$;

7. $t\cos(t+3)\chi(t+3)-(2t-5)^2\chi(2t-5)$;

8. $\dfrac{\sin 2t}{t}+\sin 2t\cos 3t$;

9. $te^{-2t}\cos 3t+sh(t-3)\chi(t-3)$;

10. $\dfrac{\sin 2t}{t}-3sh3t-t^2$;

11. $\dfrac{\cos 2t}{t}+t^2e^{t-2}$;

12. $\dfrac{\sin 2t}{t}-e^{t-1}t^2$;

13. $\dfrac{\sin^2 2t}{t}+sh(2t+1)\chi(t+1/2)$;

14. $e^{3t}cht-t\cos 3t$;

15. $te^{2t}cos3t-\sin(t-2)\chi(t-2)$;

19. $\dfrac{\sin 2t}{t}-te^{2t}\cos 3t$;

20. $\dfrac{\sin 2t}{t}-te^{-t}sht$;

21. $\dfrac{\sin 2t}{t}+3e^{-t}$;

22. $\dfrac{\cos 2t\cdot\cos 6t}{t}-e^t\cos t$;

23. $\dfrac{\sin 2t-\sin 4t}{t}+e^{-2t+1}$;

24. $\dfrac{\cos^2 2t}{t}+2te^{t-1}$;

25. $\dfrac{\cos 2t}{t}+t^2e^{t-3}$;

26. $\dfrac{1-e^{2t}}{te^t}-e^t\cos^2 t$;

27. $\dfrac{\sin t\cdot\sin 3t}{t}+2sh4t-t^2$;

28. $\dfrac{\sin^2 2t}{t}+\dfrac{1}{2^t}$;

29. $\dfrac{\sin 2t}{t}+e^{2t}cht$;

30. $\dfrac{\sin 2t}{t}+\sin 2t\cos 3t$.

Завдання 7.3 Знайти оригінали, які відповідають зображенню:

1. $\dfrac{2p+7}{(p+1)(p^2-3p)}$;

2. $\dfrac{p}{(2p-1)(p-3)}$;

3. $\dfrac{p}{(2p+1)(p+3)}$;

4. $\dfrac{p}{(2p-1)(p^2-4)}$;

5. $\dfrac{p+1}{(p^2-4)(p^2+9)}$;

16. $\dfrac{p+3}{(p^2-4)(p-1)}$;

17. $\dfrac{p}{(2p-1)(p-3)}$;

18. $\dfrac{p}{(3p-1)(p+4)}$;

19. $\dfrac{p-3}{(2p^2-p)(p+3)}$;

20. $\dfrac{3p+1}{(p^3-1)(p-3)}$;

6. $\dfrac{p}{(3p+2)(p+4)}$;

7. $\dfrac{p^2+3}{(2p+1)(p-3)}$;

8. $\dfrac{p-1}{(2p-1)(p^2+3)}$;

9. $\dfrac{p}{(2p-1)(p^2+4)}$;

10. $\dfrac{p+5}{(3p-1)(p+4)(p^2+5)}$;

11. $\dfrac{p^2+1}{(2p-1)(p^2-3p)}$;

12. $\dfrac{p+5}{(2p^2-p)(p-3)}$;

13. $\dfrac{2p-1}{(2p^2+3p)(p-3)}$;

14. $\dfrac{3p-7}{(p^2-1)(p^2+3)}$;

15. $\dfrac{p}{(2p+1)^2(p-3)}$;

21. $\dfrac{3p+2}{(2p^2-4p)(p-3)}$;

22. $\dfrac{p+3}{(p^2-4)(p-1)}$;

23. $\dfrac{2p+7}{(p+1)(p^2-3p)}$;

24. $\dfrac{p+1}{p(p^2+4)}$;

25. $\dfrac{3p-5}{(2p-1)(p^2-3p)}$;

26. $\dfrac{p}{(2p-1)(p-3)}$;

27. $\dfrac{p+5}{(4p-1)(p+6)}$;

28. $\dfrac{3p-1}{(2p-1)(p-3)}$;

29. $\dfrac{p}{(3p-1)(p+4)}$;

30. $\dfrac{p+2}{(7p-2)(p+3)}$.

Завдання 7.4 Не обчислюючи інтеграл, знайти зображення:

1. $\int_0^t \tau \sin^2 2\tau d\tau$;

2. $\int_0^t \tau \cos^2 2\tau d\tau$;

3. $\int_0^t \tau^2 \sin^2 2\tau d\tau$;

4. $\int_0^t \tau \cos^2 2\tau d\tau$;

5. $\int_0^t \tau \sin^2 2\tau d\tau$;

6. $\int_0^t \tau^2 e^{-\tau} \sin \tau d\tau$;

16. $\int_0^t \tau \, \mathrm{s}h 2\tau d\tau$;

17. $\int_0^t \tau \sin^2 2\tau d\tau$;

18. $\int_0^t \tau e^{\tau} \sin 2\tau d\tau$;

19. $\int_0^t \tau^2 e^{2\tau} d\tau$;

20. $\int_0^t \tau^2 \sin 2\tau d\tau$;

21. $\int_0^t \tau \cos^2 2\tau d\tau$;

7. $\int_0^t \tau^2 e^{-2\tau} d\tau$;

8. $\int_0^t \tau \sin 4\tau d\tau$;

9. $\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$;

10. $\int_0^t \tau e^{\tau} \sin 2\tau d\tau$;

11. $\int_0^t \tau e^{\tau} \cos 2\tau d\tau$;

12. $\int_0^t \tau \sin 2\tau d\tau$;

13. $\int_0^t \tau e^{\tau} \cos 2\tau d\tau$;

14. $\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$;

15. $\int_0^t \tau \cdot ch 2\tau d\tau$;

22. $\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$;

23. $\int_0^t \tau \sin 2\tau d\tau$;

24. $\int_0^t \tau e^{\tau} \sin 2\tau d\tau$;

25. $\int_0^t \tau^2 e^{\tau} \sin 2\tau d\tau$;

26. $\int_0^t \tau e^{3\tau} d\tau$;

27. $\int_0^t \tau \cos^2 2\tau d\tau$;

28. $\int_0^t \tau \cdot ch 2\tau d\tau$;

29. $\int_0^t \tau^2 e^{2\tau} d\tau$;

30. $\int_0^t \tau \sin 2\tau d\tau$.

Завдання 7.5 Обчислити інтеграл:

1. $\int_0^t \sin\tau \cos(t-\tau) d\tau$;

2. $\int_0^t (t-x)^2 \cos 2x dx$;

3. $\int_0^t \sin\tau e^{\pi/2-\tau} d\tau$;

4. $\int_0^t \cos\tau \cdot \chi(t-\tau) d\tau$;

5. $\int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau) d\tau$;

6. $\int_0^t \tau \sin(t-\tau) d\tau$;

7. $\int_0^t \tau^3 \sin(t-\tau) d\tau$;

8. $\int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau) d\tau$;

16. $\int_0^t \sin\tau\, sh(t-\tau) d\tau$;

17. $\int_0^t \sin\tau e^{\pi-\tau} d\tau$;

18. $\int_0^t \sin\tau \cdot ch(t-\tau) d\tau$;

19. $\int_0^t \sin 2\tau (t-\tau)^2 d\tau$;

20. $\int_0^t \sin\tau \cos(t-\tau) d\tau$;

21. $\int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau) d\tau$;

22. $\int_0^t \cos\tau \cos(t-\tau) d\tau$;

23. $\int_0^t sh\tau \cdot sh(t-\tau) d\tau$;

9. $\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau$;

10. $\int_0^t \sin\tau e^{(t-\tau)}d\tau$;

11. $\int_0^t \sin^2\tau\sin(t-\tau)d\tau$;

12. $\int_0^t (1-2\tau)\tau\sin(t-\tau)d\tau$;

13. $\int_0^t \sin\tau(t-\tau)^3 d\tau$;

14. $\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau$;

15. $\int_0^t \cos\tau\sin(t-\tau)d\tau$;

24. $\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau$;

25. $\int_0^t \sin\tau e^{(t-\tau)}d\tau$;

26. $\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau$;

27. $\int_0^t \sin\tau e^{\pi/2-\tau}d\tau$;

28. $\int_0^t \tau(\pi-\tau)\sin(\pi-\tau)d\tau$;

29. $\int_0^t \sin\tau\, e^{\pi/2-\tau}d\tau$;

30. $\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau$.

Завдання 7.6 Знайти розв'язок задачі Коші:

1. $x''+3x'=e^t;x(0)=0;x'(0)=-1$.
2. $x^{\cdot}-x'=t-1;x(0)=-1;x'(0)=0$.
3. $x''-x=1;x(0)=-1;x'(0)=0$.
4. $x''-4x'+x=1-2e^t;x(0)=2;x'(0)=1$.
5. $x'-4x=1-t^2;x(0)=1$.
6. $x''-x'-2x=2e^t;x(0)=-1;x'(0)=1$
7. $x''-x'=te^t1;x(0)=x(0)=0$.
8. $x''+2x'=t^2+5t;x(0)=-1;x'(0)=0$.
9. $x''+2x'-x=3t-1;x(0)=-1$..
10. $x''+3x=1;x(0)=-2;x'(0)=0$.
11. $x''-x'+x=3t-1;x(0)=-1;x(0)=0$.
12. $x''+2x'-x=3t-1;x(0)=-1$.
13. $x''-x'+x=t^2-2;x(0)=-1;x(0)=0$.
14. $x''+4x'=t^2+4;x(0)=-1;x'(0)=0$.
15. $x'-x=e^t-1;x(0)=-1$.
16. $x''-x'=t^2-1;x(0)=-1;x(0)=0$.
17. $x^{\cdot}-2x'=t+1;x(0)=-2;x'(0)=0$.
18. $x''-x'=te^{2t};x(0)=x'(0)=1$.
19. $x''-x'=te^t1;x(0)=x(0)=0$.
20. $x''-x=1;x(0)=-1;x'(0)=0$.
21. $x'-3x=e^t;x(0)=1$.
22. $x'-4x=1-t^2;x(0)=1$.
23. $2x'-x=2t+3;x(0)=-1$.
24. $x''+x=1;x(0)=-1;x'(0)=0$.
25. $x''+x=\cos t;x(0)=-1;x'(0)=1$.
26. $x''-4x'=1-2e^t;x(0)=2;x'(0)=1$.
27. $x''+3x'=e^t;x(0)=0;x'(0)=-1$.
28. $x''+3x'=e^t;x(0)=0;x'(0)=-1$.
29. $x'-x=1;x(0)=-1$.
30. $x''+4x=3;x(0)=-3;x'(0)=0$.

Завдання 7.7 Розв'язати систему рівнянь:

1. $\begin{cases} x'+x-y=2t+5 \\ y'+2x'-3x=t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

2. $\begin{cases} x'+x-y=\sin t \\ y'+2x=\sin t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

3. $\begin{cases} x'-2x+y=3-4t \\ y'+x+2y=4+t \end{cases} x(0)=0; y(0)=2.$

4. $\begin{cases} y'-x=4-t \\ x'-2y=2t^2 \end{cases} x(0)=-1; y(0)=-1.$

5. $\begin{cases} x'+x-y=2 \\ y'+x+y=2t \end{cases} x(0)=0; y(0)=-1.$

6. $\begin{cases} x'+2x-y=\sin t \\ y'-x=-1 \end{cases} x(0)=1; y(0)=1.$

7. $\begin{cases} 2x-x'-y'=\sin t \\ y'+2x'-x=2t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

8. $\begin{cases} x'+2x-y=t \\ y'+2x=1-t \end{cases} x(0)=1; y(0)=1.$

9. $\begin{cases} x'+x+2y=2t \\ y'+x-y=2-t \end{cases} x(0)=0; y(0)=-1.$

10. $\begin{cases} x'+2y=\sin t \\ y'+2x=t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

11. $\begin{cases} x'+x-y=2t-3 \\ y'+2x'-y=4 \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

12. $\begin{cases} x'+x-y'=\mathrm{s}ht \\ y'+2x=t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

16. $\begin{cases} x'+x+2y=t^2 \\ y'+2x=2t-3 \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

17. $\begin{cases} x'+x-y=\sin t \\ y'+2x=\sin t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

18. $\begin{cases} x'+2x-y=2t \\ y'+2x'=t^2 \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

19. $\begin{cases} x'+x-y=t^3-2 \\ y'+2x=2t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

20. $\begin{cases} x'+2x-y=t \\ y'+2x=1-t \end{cases} x(0)=1; y(0)=1.$

21. $\begin{cases} x'+x-y'=\sin t \\ y'+2x=t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

22. $\begin{cases} x'+x-y=2 \\ y'+x+y=2t \end{cases} x(0)=0; y(0)=-1;$

23. $\begin{cases} x'+x-y=2t+5 \\ y'+2x'-3x=t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

24. $\begin{cases} x'+5x=\sin t \\ y'+2x=t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

25. $\begin{cases} x'+x-y=t^3-2 \\ y'+2x=2t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

26. $\begin{cases} x'+y'=4-t^2 \\ x'-2y=2t \end{cases} x(0)=-1; y(0)=-1.$

27. $\begin{cases} x'+y'=3t \\ y'+2x=t-3 \end{cases} x(0)=0; y(0)=1.$

13. $\begin{cases} x' + x - y = t^2 \\ y' + 2x = 2 + t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1.$

14. $\begin{cases} x' - 2x + y = 4t \\ y' + x + 2y = t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 2.$

15. $\begin{cases} x'' + x - y' = 2 + t \\ y' + 2x = \sin t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1.$

28. $\begin{cases} x' + x - y = \sin t \\ y' + 2x = \sin t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1.$

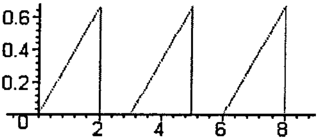
29. $\begin{cases} x' + 2x - y = \sin t \\ y' - x = -1 \end{cases} x(0) = 1; y(0) = 1.$

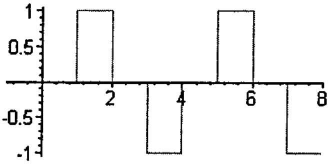
30. $\begin{cases} x' + x - y = \sin t \\ y' + 2x = \sin t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1.$

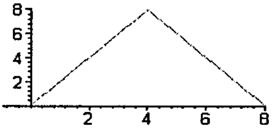
Завдання 7.8 Розв'язати інтегральне рівняння:

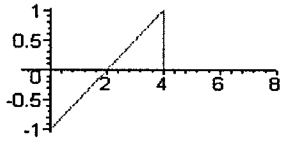
1. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = 3t^2 - 1;$
2. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \sin t;$
3. $\int_0^t \cos\tau x(t-\tau) d\tau = \sin t;$
4. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \sin t;$
5. $\int_0^t e^{2(t-u)} x(u) du = t^2 e^t;$
6. $\int_0^t ch\tau \cdot x(t-\tau) d\tau = t;$
7. $\int_0^t ch(t-\tau) x(\tau) d\tau = sht;$
8. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \sin t;$
9. $\int_0^t e^{t-\tau} \cos\tau d\tau = \sin t;$
10. $\int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau) d\tau = 1 - t;$
11. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \sin t;$
12. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \cos t;$
13. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = sht;$
14. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \sin t;$
15. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = t;$
16. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \sin^2 t;$
17. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \sin t;$
18. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = 2t^2;$
19. $\int_0^t sh(t-\tau) x(\tau) d\tau = t;$
20. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = cht;$
21. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = t^2 + 3;$
22. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = e^{3t};$
23. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = 3t^2 - 1;$
24. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \sin t;$
25. $\int_0^t (t-\tau)^2 \cdot x(\tau) d\tau = \sin t;$
26. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = cht;$
27. $\int_0^t \sin(t-\tau) x(\tau) d\tau = \sin t;$
28. $\int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = cht;$
29. $\int_0^t e^{t-\tau} \tau^3 d\tau = \sin t;$
30. $\int_0^t sh(t-\tau) x(\tau) d\tau = t.$

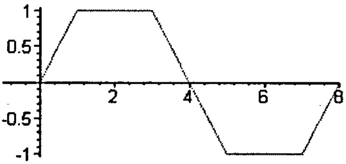
Завдання 7.9 Знайти зображення періодичної функції, що задана графіком:

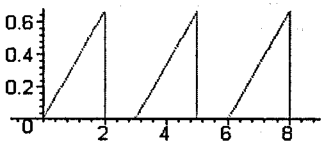
1. 

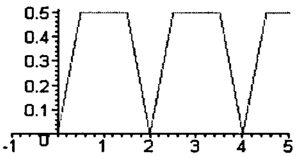
2. 

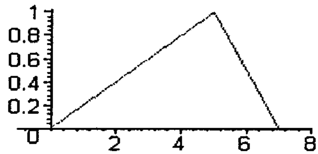
3. 

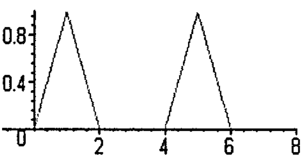
4. 

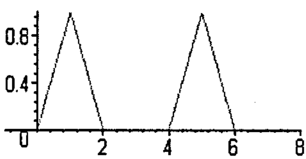
5. 

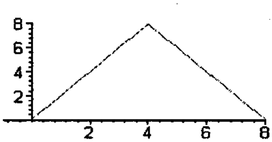
6. 

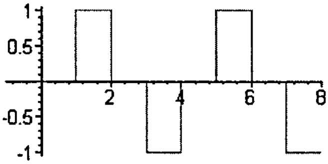
7. 

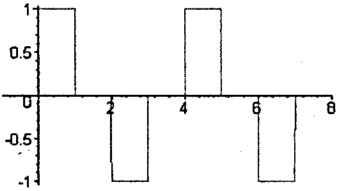
8. 

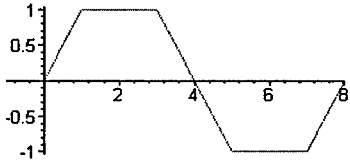
9. 

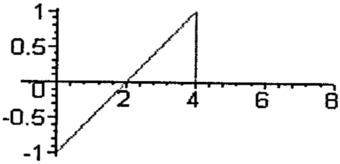
10. 

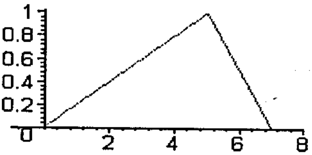
11. 

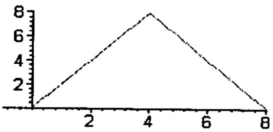
12. 

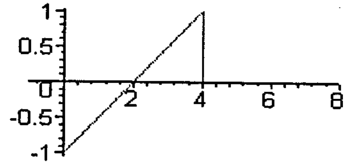
13. 

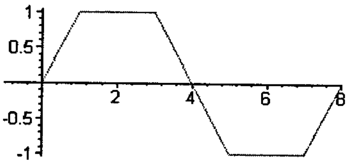
14. 

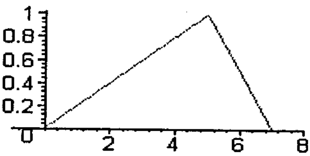
15.


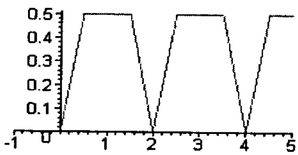
16.


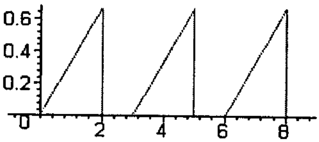
17.


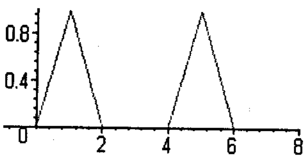
18.


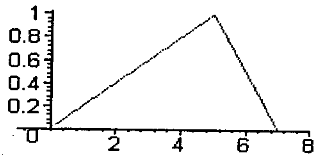
19.


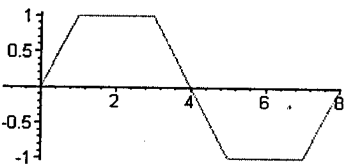
20.


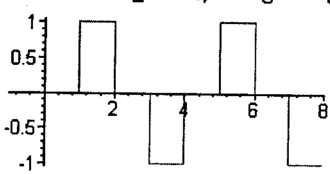
21.


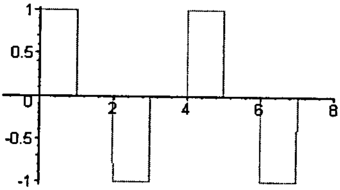
22.


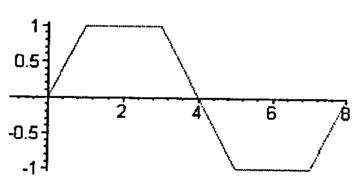
23.


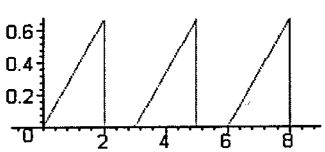
24.


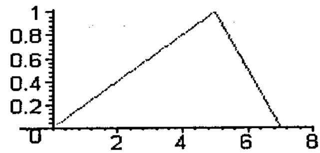
25.


26.


27.


28.


29. 

30. 

Для розв'язання завдань контрольної роботи № 7 знадобляться такі поняття, формули та алгоритми

1. Нехай функція $f(t)$ має такі властивості: 1) $f(t)\equiv 0$ при $t<0$; 2) $|f(t)|<Me^{s_0 t}$ при $t>0$, де $M>0$ і s_0 – деякі дійсні сталі; 3) на довільному скінченому відрізку $[a,b]$ додатної півосі Ot функція $f(t)$ задовольняє умови Діріхлє, тобто: а) обмежена; б) неперервна або має лише скінчене число точок розриву 1 роду; в) має скінчене число екстремумів.

Такі функції в операційному численні називають *оригіналами.*

2. Нехай $p=\alpha+\beta i$ – комплексний параметр, причому $\operatorname{Re} p=\alpha\geq s_1>s_0$. При сформульованих умовах інтеграл $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ збігається і є функцією від p:

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\overline{f}(p)\left(\text{або }\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=F(p)\right). \tag{7.1}$$

Даний інтеграл називається *інтегралом Лапласа*, а визначена ним функція комплексного аргументу p називається *перетворенням Лапласа* від функції $f(t)$, або *лапласовим зображенням* $f(t)$, або просто зображенням $f(t)$.

Той факт, що функція $\overline{f}(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$, позначають таким чином: $\overline{f}(p)=L\{f(t)\}$; $\overline{f}(p)\to f(t)$.

3. Функція

$$\eta(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<0;\\ 1 & \text{при} \quad t>0\end{cases}$$

називається функцією Хевісайда. Зображенням одиничної функції є $\eta(t)\to\dfrac{1}{p}$. При цьому зображення сталої є $C=C\eta(t)\to\dfrac{C}{p}$.

4. *Властивості перетворення Лапласа*

4а. *Властивість лінійності.* Для довільних сталих C_k, $k=\overline{1,n}$,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \to \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p), \quad \operatorname{Re} p > \max\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}.$$

4б. *Теорема подібності.* Для довільної сталої $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha\sigma_0.$$

4в. *Теорема зміщення.* Множенню оригіналу на $e^{\alpha t}$, $\alpha \in R$, відповідає зміщення аргументу зображення на α, тобто

$$e^{\alpha t} f(t) \to F(p-\alpha), \quad \operatorname{Re}(p-\alpha) > \sigma_0.$$

4г. *Теорема запізнення.* Запізненню оригіналу на τ відповідає множення зображення на $e^{-p\tau}$, тобто

$$\eta(t-\tau) f(t-\tau) \to e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

4д. *Диференціювання оригіналу.* Якщо $f(t)$ та її похідні $f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, ...$ є оригіналами, то для довільного k

$$f^{(k)}(t) \to p^k F(p) - \left(p^{k-1} f(0) + p^{k-2} f'(0) + ... + f^{(k-1)}(0)\right).$$

Зокрема, $f'(t) \to pF(p) - f(0)$, $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

4е. *Інтегрування оригіналу.*

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

4ж. *Диференціювання зображення.* Множенню оригіналу на множник t відповідає множення зображення на (–1) та диференціювання його за аргументом:

$$t^n f(t) \to (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n = 1, 2, ...$$

4и. *Інтегрування зображення.* Якщо $\dfrac{f(t)}{t}$ є оригіналом, то

$$\frac{1}{t} f(t) \to \int_p^{+\infty} F(q)dq.$$

4к. *Теорема Бореля про зображення згортки.* Згортці оригіналів

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)d\tau$$

відповідає добуток зображень, тобто $f_1 * f_2 \to F_1(p) F_2(p)$.

5. Таблиця «оригінал-зображень».

Таблиця 7.1

№	$f(t)$ при $t>0$	$\overline{f}(p)$	№	$f(t)$ при $t>0$	$\overline{f}(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	6	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	7	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	8	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
4	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	9	$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
5	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	10	$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

6. ***Знаходження оригіналу за зображенням***

При знаходженні оригіналу за зображенням в простих випадках використовують таблицю зображень основних елементарних функцій та теореми розкладу.

Друга теорема розкладу дозволяє знайти оригінал для зображення, поданого у вигляді дробово-раціональної функції від p, тобто $\overline{f}(p)=\frac{u(p)}{\upsilon(p)}$, де $u(p),\upsilon(p)$ – многочлени від p відповідно степенів m і n, причому $m<n$.

Якщо розклад $\upsilon(p)$ на прості множники має вигляд

$$\upsilon(p)=(p-p_1)^{k_1}(p-p_2)^{k_2}\ldots(p-p_r)^{k_r},\quad k_1+k_2+\ldots+k_r=n, \tag{7.2}$$

то, як відомо, функцію $\overline{f}(p)$ можна розкласти на суму елементарних дробів типу $\frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}$, де j приймає всі значення від 1 до r, а s – всі значення від 1 до k_j. Таким чином,

$$\overline{f}(p)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{s}^{k_j}\frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \tag{7.3}$$

Всі коефіцієнти даного розкладу можна визначити, крім звичайного розкладу, за такою формулою

$$A_{j,s}=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{p\to p_j}\left[\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\left(\left(p-p_j\right)^{k_j}\cdot\overline{f}(p)\right)\right]. \qquad (7.4)$$

Зауважимо, що застосовувати звичайний розклад доцільно в тих випадках, коли всі комплексні корені знаменника $\upsilon(p)$ прості і попарно спряжені.

Якщо всі корені $\upsilon(p)$ прості, тобто

$$\upsilon(p)=(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n) \quad (p\neq p_k \text{ при } j\neq k), \qquad (7.5)$$

то розклад спрощується: $\overline{f}(p)=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{A_j}{p-p_j}$, де $A_j=\frac{u(p_j)}{\upsilon'(p_j)}$. (7.6)

7. Розв'язування ЛНДР зі сталими коефіцієнтами

Для того, щоб знайти розв'язок $x(t)$ лінійного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами: $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+...+a_nx=f(t)$, яке задовольняє початкові умови $x(0)=x_0$, $x'(0)=x'_0$, ..., $x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$, потрібно, застосувавши до обох частин даного рівняння перетворення Лапласа, перейти до розв'язування операторного рівняння типу

$$\left(p^{(n)}+a_1p^{(n-1)}+...+a_n\right)X(p)+Q(p)=F(p),$$

де $X(p)$ – зображення шуканого розв'язку, $F(p)$ – зображення функції $f(t)$, а $Q(p)$ – деякий многочлен, коефіцієнти якого задовольняють початкові умови.

Перехід здійснюється за таким алгоритмом: нехай $x(t)\to X(p)$, тоді:

$$x'(t)\to pX(p)-x_0;$$
$$x''(t)\to p^2X(p)-px_0-x'_0; \qquad (7.7)$$
$$x'''(t)\to p^3X(p)-p^2x_0-px'_0-x''_0 \text{ і т. д.}$$

Приклади розв'язання типових завдань контрольної роботи № 7

Завдання 7.1 Чи є оригіналом функція $f(t)=e^{t^2}$?

Розв'язування

Дана функція не є оригіналом, оскільки нерівність $e^{t^2}<Me^{st}$ не може виконуватись ні при яких s для всіх $t>0$, оскільки

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^{t^2}}{Me^{st}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{M}e^{t(t-s)}=\infty$, що для довільного s виконується нерівність $e^{t^2}>Me^{st}$, починаючи з деякого значення t.

Завдання 7.2 Знайти зображення оригіналу $f(t)=2+t^3+t\cos 2t-3^t$.

Розв'язування

Використовуючи властивості перетворення Лапласа та таблицю 7.1 «оригінал-зображень», маємо:

$$2\to\frac{2}{p};\ t^3\to\frac{3!}{p^4};\ t\cos 2t\to\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2};\ 3^t=e^{t\ln 3}\to\frac{1}{p-\ln 3};$$

$$F(p)=\frac{2}{p}+\frac{3!}{p^4}+\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}+\frac{1}{p-\ln 3}.$$

Завдання 7.3 Знайти оригінали, що відповідають зображенню:

$$\frac{4}{(p+1)^4}+\frac{3p-1}{p^2+4p+29}+\frac{e^{-p}}{(p-2)^3}.$$

Розв'язування

Перетворимо $F(p)$ таким чином, щоб можна було використати таблицю 7.1:

$$\frac{4}{(p+1)^4}=\frac{4}{3!}\cdot\frac{3!}{(p+1)^4}\leftarrow e^{-t}\cdot t^3.$$

Перш ніж перетворювати другий доданок зображення, виділимо повний квадрат у знаменнику для того, щоб використати властивість лінійності перетворення Лапласа:

$$\frac{3p-1}{p^2+4p+29}=\frac{3p-1}{(p+2)^2+25}=\frac{3(p+2)-7}{(p+2)^2+25}\leftarrow 3e^{-2t}\cos 5t-\frac{7}{5}e^{-2t}\sin 5t.$$

Для третього доданка спочатку знайдемо оригінал функції $\dfrac{1}{(p-2)^3}\leftarrow\dfrac{1}{2}e^{2t}t^2=f(t)$, а потім використаємо теорему запізнення для оригіналу:

$$\frac{e^{-p}}{(p-2)^3} \risingdotseq f(t-1) = \frac{1}{2}e^{2(t-1)}(t-1)^2 \chi(t-1).$$

Завдання 7.4 Не обчислюючи інтеграл, знайти зображення $\int_0^t \tau \cdot e^{\tau} d\tau$.

Розв'язування

Використаємо теорему про інтегрування оригіналу: $\tau \cdot e^{\tau} \risingdotseq \frac{1}{(p-1)^2}$.

Тому,

$$\int_0^t \tau \cdot e^{\tau} d\tau \risingdotseq \frac{1}{(p-1)^2} : p = \frac{1}{p(p-1)^2}.$$

Завдання 7.5 Обчислити інтеграл $\int_0^t e^{t-\tau} \sin\tau d\tau$.

Розв'язування

Інтеграл $\int_0^t e^{t-\tau} \sin\tau d\tau$ являє собою згортку функцій $\sin\tau$ і e^{τ}. Її зображенням відповідно до теореми про згортку буде функція $F(p) = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}\right)$. За таблицею «оригінал-зображень» маємо: $f(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - \cos t - \sin t\right)$.

А тому, $\int_0^t e^{t-\tau} \sin\tau d\tau = \frac{1}{2}\left(e^t - \cos t - \sin t\right)$.

Завдання 7.6 Знайти розв'язок рівняння $x'' + 2x' + x = te^{-t}$, яке задовольняє початкові умови $x_0 = 1, \quad x'_0 = 2$.

Розв'язування

Нехай $x(t) \to X(p)$, тоді $x'(t) \to pX(p) - x_0 = pX(p) - 1$;

$$x''(t) \to p^2X(p) - px_0 - x'_0 = p^2X(p) - p - 2.$$

За таблицею зображень знаходимо $te^{-t} \to \dfrac{1}{(p+1)^2}$, а отже, операторне рівняння має відповідно такий вигляд:

$$p^2X(p)-p-2+2\left(pX(p)-1\right)+X(p)=\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Після елементарних перетворень даного рівняння знаходимо

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)^4}+\frac{3}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1}.$$

Використовуючи відповідні формули таблиці зображень основних елементарних функцій, знаходимо

$$x(t)=\frac{1}{3}t^3e^{-t}+(1+3t)e^{-t}.$$

Завдання 7.7 Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x'+y=2e^t \\ y'+x=2e^t \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1$.

Розв'язування

Нехай $x(t)\doteqdot X(p)$ і $y(t)\doteqdot Y(p)$. Враховуючи, що $e^t \doteqdot \dfrac{1}{p-1}$, отримаємо операторну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} pX(p)-1+Y(p)=\dfrac{2}{p-1} \\ pY(p)-1+X(p)=\dfrac{2}{p-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX(p)+Y(p)=\dfrac{p+1}{p-1} \\ pY(p)+X(p)=\dfrac{p+1}{p-1} \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо $X(p)=Y(p)=\dfrac{1}{p-1}$. Використовуючи таблицю «оригінал-зображень», знайдемо $x(t)=e^t$ та $y(t)=e^t$.

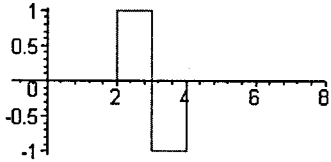
Завдання 7.8 Розв'язати інтегральне рівняння $\int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau=t$.

Розв'язування

Інтеграл являє собою згортку функцій e^t та $x(t)$. Нехай $x(t)\doteqdot X(p)$. Тоді за теоремою про згортку випишемо зображення інтеграла

$\int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau = e^t * x(t) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p-1}X(p)$. Складемо операторне рівняння $\frac{1}{p-1}X(p)=\frac{1}{p^2}$, звідки $X(p)=\frac{p-1}{p^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}$. Отже, $x(t)=1-t$.

Завдання 7.9 Знайти зображення функції, що задана графіком:



Розв'язування

Згідно з графіком функції (позначимо її через $f(t)$), маємо:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\le 2\\ 1, & 2<t\le 3\\ -1, & 3<t\le 4\\ 0, & t>4.\end{cases}$$

Тому її зображення можна знайти, використовуючи формулу перетворення Лапласа:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_2^3 e^{-pt}dt-\int_3^4 e^{-pt}dt=\frac{1}{p}\left(-e^{-3p}+e^{-2p}+e^{-4p}-e^{-3p}\right)=$$

$$=\frac{e^{-2p}}{p}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right)=\frac{\left(e^{-p}\left(1-e^{-p}\right)\right)^2}{p}=\frac{\left(e^{-p}-e^{-2p}\right)^2}{p}.$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 8: завдання, рекомендації до розв'язання та приклади розв'язування типових завдань

Елементи теорії ймовірностей

Завдання 8.1 Класичне та геометричне означення ймовірності

1. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що: а) сума кількості очок не перевищуватиме 3; б) добуток кількості очок не перевищуватиме 3; в) добуток кількості очок ділитиметься на 3.

2. Дехто купив картку спортлото і відмітив у ній 6 із наявних 49 номерів, після чого в тиражі розігрується 6 «виграшних» номерів із 49. Знайти ймовірність таких подій: а) = «правильно вгадані 3 виграшних номери із 6»; б) = «правильно вгадані всі 6 номерів».

3. Є вироби 4-х сортів, причому кількість виробів I сорту дорівнює 1, II – 2, III – 3, IV – 5. Для контролю навмання беруть 7 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 1 виріб I сорту, 1 – II, 2 – III і 3 – IV.

4. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{1}{4}$.

5. Моменти початку двох подій навмання розподілені в проміжку часу від T_1=900 хвилин до T_2=1100 хвилин. Одна із подій триває 10 хв, друга – 20 хв. Знайти ймовірність того, що: а) події «перекриваються» в часі; б) «не перекриваються».

6. Серед 10 лотерейних білетів є 2 виграшних. Навмання взяли 6 білетів. Знайти ймовірність того, що: 1) серед них немає виграшних; 2) один виграшний.

7. У крузі радіуса R=12 навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що вона потрапить до однієї із двох фігур, які не перерізаються і площі яких дорівнюють S_1=2,37 та S_2=3,52.

8. У ліфт 10-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 5 пасажирів. Кожний із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі вийдуть на різних поверхах; б) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж поверсі; в) всі пасажири вийдуть на 8-му поверсі; г) на одному із поверхів вийде 2 пасажири, а на іншому – 3.

9. Серед дев'яти лотерейних білетів є 2 виграшних. Навмання беруть 4 білети. Знайти ймовірність того, що серед них: а) один виграшний; б) немає виграшних.

10. Є вироби трьох сортів, причому кількість виробів I сорту дорівнює 3, II сорту – 2, III сорту – 4. Для контролю навмання беруть 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 2 вироби I сорту, 2 – II і 1 – III сорту.

11. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує $\frac{3}{16}$.

12. (Задача Бертрана) На колі радіуса r навмання вибираються 2 точки і з'єднуються хордою. Знайти ймовірність того, що довжина хорди перевищує величину $r\sqrt{3}$.

13. 25 екзаменаційних білетів містять по 2 питання, що не повторюються. Студент може відповісти лише на 45 питань. Яка ймовірність того, що взятий студентом екзаменаційний білет містить відомі йому питання?

14. Мале підприємство одержало 20 радіоприймачів, з яких 5 бракованих. Навмання для перевірки взяли три приймачі. Яка ймовірність того, що серед взятих приймачів будуть: а) тільки стандартні приймачі; б) тільки браковані приймачі; в) один бракований та два стандартних?

15. У ліфт 7-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 3 пасажири. Кожний із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі вийдуть на різних поверхах; б) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж поверсі; в) всі пасажири вийдуть на 4-му поверсі; г) на одному із поверхів вийде 2 пасажири, а на іншому – один.

16. В урні є 10 куль: із них 3 білих і 7 чорних. Із урни навмання виймають 2 кулі. Яка ймовірність того, що: а) обидві кулі білі;б) одна куля біла; в) обидві кулі однакового кольору.

17. На площині проведені паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють: в першому випадку 2 см; в другому – 10 см. На площину кидають навмання круг радіусом 3 см. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної із прямих ліній?

18. Моменти початку двох подій навмання розподілені в проміжку часу від T_1=900 хвилин до T_2=930 хвилин. Одна із подій триває 10 хвилин, дру-

га також 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що: а) події «перекриваються» в часі; б) «не перекриваються».

19. Студент забув останні три цифри потрібного номера телефону, але він пам'ятає, що всі три цифри різні, тому набирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що цифри набрано правильно.

20. Серед 25 студентів групи, в якій є 10 дівчат, розігрують 5 квитків на концерт. Визначити ймовірність того, що квитки виграють дві дівчини.

21. Партію з N виробів перевіряє контролер шляхом відбору навмання n виробів і визначення їх якості. Якщо серед вибраних контролером виробів немає жодного бракованого, то вся партія виробів приймається, у протилежному випадку всі вироби посилають на додаткову перевірку. Яка ймовірність того, що партія виробів, яка містить M бракованих, буде прийнята контролером?

22. В урні 15 червоних, 9 синіх та 6 зелених куль однакового розміру. Навмання беруть 6 куль. Яка ймовірність того, що будуть взяті 1 зелена, 2 сині та 3 червоних кулі?

23. Два студенти домовились зустрітись у певному місці між 17-ю та 18-ю годинами. Той, хто прийде першим, повинен чекати іншого протягом 15 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність зустрічі, якщо час приходу на місце зустрічі кожного студента незалежний і рівноможливий протягом вказаної години.

24. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{2}{7}$.

25. Є вироби 4-х сортів, причому кількість виробів I сорту дорівнює 5, II сорту – 1, III сорту – 2 і IV сорту – 2. Для контролю навмання беруть 6 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 3 вироби I сорту, 1 – II і 1 – III і 1 – IV.

26. У групі є 12 студентів, серед яких 3 відмінники. За списком навмання відібрано 7 студентів. Знайти ймовірність того, що: а) серед відібраних студентів є 2 відмінники; б) немає жодного відмінника.

27. Той, хто прийде першим, чекає другого протягом 20 хвилин, після чого йде. Чому дорівнює ймовірність зустрічі осіб за умови, що кожна з них

може прийти навмання у будь-який момент між 18-ю та 19-ю годинами, незалежно одна від одної?

28. Кидають 2 гральних кубики. Знайти ймовірність того, що: а) сума кількості очок не перевищує 6; б) добуток кількості очок не перевищує 6; в) добуток кількості очок ділиться на 6.

29. В ліфт шестиповерхового будинку сіли 5 пасажирів. Кожен незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі пасажири вийдуть на різних поверхах; б) всі пасажири вийдуть на 3-му поверсі; в) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж поверсі; г) на одному із поверхів вийде 3 пасажири, а на іншому –2.

30. В ящику є 30 однакових деталей, серед яких 6 браковані. Навмання взято 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих деталей: а) немає бракованих; б) 2 браковані деталі.

Завдання 8.2 Теореми додавання та множення ймовірностей

1. У двох партіях 71% і 47% доброякісних виробів, відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:
   а) хоч би один бракований виріб;
   б) два бракованих вироби;
   в) один бракований виріб?

2. Ймовірність того, що влучено в ціль при одному пострілі першим стрільцем, дорівнює 0,61, другим – 0,55. Перший зробив 2, а другий 3 постріли. Знайти ймовірність того, що в ціль не влучили.

3. Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень влучить тільки один із стрільців.

4. При увімкненні запалювання двигун починає працювати з ймовірністю p. Знайти ймовірність того, що двигун почне працювати при другому увімкненні запалювання.

5. В одному ящику 5 білих і 10 червоних куль, в другому – 10 білих і 5 червоних. Навмання з кожного ящика виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що:
   а) серед них одна біла й одна червона куля;
   б) хоч би одна біла куля;
   в) обидві кулі білі.

6. Ймовірність того, що влучено в ціль при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,62, другим – 0,54. Перший зробив 3, а другий 2 постріли. Знайти ймовірність того, що в ціль не влучили.

7. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб стандартний дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених виробів тільки один стандартний.

8. Над виготовленням деякого виробу працюють послідовно k робітників; якість виробу при передаванні наступному робітникові не перевіряється. Перший робітник допускає брак з ймовірністю p_1, другий – з ймовірністю p_2 і т. д. Знайти ймовірність того, що при виготовленні буде допущено брак.

9. У двох партіях 75% і 43% доброякісних виробів, відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:

а) хоч би один бракований виріб;
б) два бракованих вироби;
в) один бракований і один доброякісний виріб?

10. Ймовірність того, що в ціль влучено при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,74, другим – 0,42. Обидва стрільці зробили по 2 постріли. Знайти ймовірність того, що в ціль не влучили.

11. Ймовірність влучення в ціль першим стрільцем дорівнює p_1, а другим – p_2. Стрільці зробили постріли одночасно. Яка ймовірність того, що перший із них влучить в ціль, а другий – ні?

12. При одному циклі огляду радіолокаційною станцією, яка стежить за космічним об'єктом, об'єкт виявляється з ймовірністю p. Виявлення об'єкта у кожному циклі відбувається незалежно від інших. Знайти імовірність того, що при n циклах об'єкт буде виявлено.

13. В одному ящику 7 білих і 8 червоних куль, в другому – 9 білих і 6 червоних. Навмання з кожного ящика виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що:

а) серед них одна біла й одна червона куля;
б) хоч би одна червона куля;
в) обидві червоні кулі.

14. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Імовірність того, що формула міститься в I, II, III довіднику відповідно дорівнює

0,8; 0,6 і 0,7. Знайти ймовірність того, що формула міститься, принаймні, в двох довідниках.

15. Кожна із чотирьох незалежних подій може відбуватися з ймовірностями 0,012; 0,010; 0,006 і 0,002, відповідно. Знайти ймовірність того, що в результаті досліду відбудеться хоч би одна із подій.

16. Обчислювальна машина складається з n блоків. Надійність протягом часу Т першого блока дорівнює p_1, другого – p_2 і т. д. Блоки перестають працювати незалежно один від одного. При відмові будь-якого блока перестає працювати машина. Знайти ймовірність того, що машина перестане працювати за час Т.

17. В одному ящику 8 пофарбованих і 4 непофарбованих вироби, в другому – 10 пофарбованих та 2 непофарбованих вироби. Навмання з кожного ящика виймають по одному виробу. Знайти ймовірність того, що:

а) серед них немає пофарбованих виробів;
б) хоч би один пофарбований виріб;
в) один пофарбований і один непофарбований виріб.

18. Ймовірність того, що в ціль влучено при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,65, другим – 0,5. Перший зробив 2, а другий 4 постріли. Знайти ймовірність того, що в ціль не влучили.

19. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Імовірність того, що формула міститься в I, II, III довіднику відповідно дорівнює 0,7; 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що формула міститься тільки в одному довіднику.

20. У двох партіях 86% і 32% доброякісних виробів, відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:

а) хоч би один доброякісний виріб;
б) один доброякісний виріб;
в) два браковані вироби?

21. Знайти ймовірність того, що партія із 40 виробів, серед яких 2 браковані, буде прийнята при випробуванні, якщо умовами прийому допускається не більше одного бракованого виробу із 30.

22. Два гравці по черзі кидають монету. Вважається, що виграє той гравець, у якого раніше випаде орел. Перший кидок робить гравець А, другий – В, третій – А і т. д. Знайти ймовірність того, що:

а) виграв гравець В до 6-го кидка;
б) виграв гравець А не пізніше 6-го кидка.

23. Чотири мисливці домовились стріляти у дичину в певній послідовності. Наступний мисливець робить постріл тільки у випадку промаху попереднього. Ймовірність влучення для першого мисливця дорівнює 0,6, для другого – 0,7, для третього і четвертого – 0,8. Знайти ймовірність того, що буде зроблено:
а) один; б) два; в) три; г) чотири постріли.

24. Виготовляються деталі для приладу у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Деталь вважається придатною, якщо відхилення розміру кожного з ребер від заданого не перевищує 0,01. Ймовірність відхилень, які перевищують 0,01, становить для довжини p_1=0,06, для ширини p_2=0,04, для висоти p_3=0,1. Знайти ймовірність непридатності деталі.

25. Ймовірність того, що потрібна складальнику деталь міститься в I, II, III ящику відповідно дорівнює 0,7; 0,4 і 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь міститься тільки в одному ящику.

26. Два мисливці стріляють у вовка, причому кожен робить по два постріли. Для першого мисливця ймовірність влучення дорівнює 0,6, для другого – 0,7. Яка ймовірність влучення у вовка хоч би з одного із цих пострілів?

27. У двох партіях 75% і 33% доброякісних виробів, відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:
а) хоч би один бракований виріб;
б) два бракованих вироби;
в) один доброякісний, один бракований виріб?

28. Знайти ймовірність того, що партія із 30 виробів, серед яких 2 браковані, буде прийнята при випробуванні, якщо умовами прийому допускається не більше одного бракованого виробу з 10.

29. Є m радіолокаційних станцій, кожна з яких за один цикл огляду виявляє об'єкт з імовірністю p (незалежно від інших циклів і від інших станцій). За час Т кожна станція встигає зробити n циклів. Знайти ймовірність того, що об'єкт буде виявлений кожною із станцій.

30. У двох партіях 74% і 44% доброякісних виробів, відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них:
а) хоч би один доброякісний виріб;
б) два доброякісні вироби;
в) один доброякісний і один бракований виріб?

Завдання 8.3 Формула повної ймовірності та формула Бейєса

1. Із 1000 ламп 400 належать до першої партії, 350 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 6%, в другій – 5%, в третій – 4% бракованих ламп. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа бракована.

2. В першій урні 9 білих і 1 чорна куля, в другій – 2 білих і 6 чорних. З першої урни в другу переклали 3 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

3. До магазину надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 60%, другий – 30%, третій –10%. Серед виробів першого заводу 85%, другого 70%, третього 80% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений третім заводом.

4. Три стрільці роблять по одному пострілу в одну і ту ж мішень. Ймовірність влучень у мішень при одному пострілі для першого – 0,6; для другого – 0,4; для третього – 0,8. Яка ймовірність того, що другий стрілець промахнувся, якщо після пострілу в мішені виявилося дві пробоїни.

5. Відомо, що 92% випущених заводом виробів відповідає стандарту. Спрощена схема контролю визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,96 і нестандартну з ймовірністю 0,06. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, не відповідає стандарту.

6. В альбомі 18 чистих і 10 гашених марок. З них навмання виймаються 3 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

7. Із 1000 ламп 430 належать до першої партії, 180 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 4%, в другій – 6%, в третій – 3% бракованих ламп. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа бракована.

8. В першій урні 7 білих і 3 чорних кулі, в другій – 5 білих і 1 чорна. З першої урни в другу переклали 4 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того що вона біла.

9. В альбомі 7 чистих і 6 гашених марок. З них навмання виймаються 2 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

10. На склад надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 42%, другий – 38%, третій – 20%. Серед виробів першого заводу 80%, другого 70%, третього 85% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений другим заводом.

11. Сигнали із пунктів A і B у пункт C передаються із спотвореннями. Ймовірність спотворення з A дорівнює 0,4; із B – 0,5. Співвідношення між кількостями передач дорівнює $K_A:K_B = 5:3$. Знайти ймовірність того, що одержаний сигнал спотворений. З якого пункту, найімовірніше, передано спотворений сигнал?

12. Із 1000 магнітофонів 650 належать до першої партії, 220 – до другої, а решта – до третьої. В першій партії 3%, в другій – 6%, в третій – 5% бракованих виробів. Навмання вибирається один магнітофон. Знайти ймовірність того, що вибраний магнітофон справний.

13. В першій партії 25 стандартних виробів і 3 нестандартних, в другій – 40 стандартних виробів і 2 нестандартних. Із першої партії в другу перекладено 14 виробів. Після цього з другої партії виймається навмання 1 виріб. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб стандартний.

14. В альбомі 6 чистих і 6 гашених марок. З них навмання виймається 1 марка (яка може бути як чистою, так і гашеною), піддається спецгасінню і повертається в альбом. Після цього знов навмання виймаються 2 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки гашені.

15. Три мисливці роблять по одному пострілу в одну і ту ж саму мішень. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі для першого мисливця – 0,7; для другого – 0,6; для третього – 0,45. Яка ймовірність того, що третій мисливець не влучив, якщо після пострілу в мішені виявилося дві пробоїни.

16. До магазину надходять газові лічильники з трьох заводів, причому перший завод постачає 20%, другий – 35%, третій – 45%. Серед виробів першого заводу 80%, другого 70%, третього 90% першосортних. Купуємо один виріб, він і виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний газовий лічильник випущений першим заводом.

17. В партії із 100 виробів кількість бракованих не може перевищувати п'яти, причому всі значення (0, 1, 2, 3, 4, 5) кількості бракованих виробів однаково можливі. Відомо, що серед 10 навмання взятих виробів 9 виявились придатними. Знайти ймовірність того, що решта виробів також придатна.

18. Із 1000 електроплиток 180 належать до першої партії, 270 – до другої, а решта – до третьої. В першій партії 3%, в другій – 5%, в третій – 4% бракованих виробів. Навмання вибирається одна електроплитка. Знайти ймовірність того, що вибрана електроплитка – справна.

19. В першій урні 40 білих і 8 чорних куль, в другій – 20 білих і 4 чорних. З першої урни в другу переклали 3 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона – чорна.

20. В альбомі 7 чистих і 8 гашених марок. З них навмання виймаються 4 марки (які можуть бути як чистими, так і гашеними), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 3 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

21. До магазину надходять пилососи з трьох заводів, причому перший завод постачає 25%, другий – 45%, третій – 30%. Серед виробів першого заводу 86%, другого 60%, третього 80% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний пилосос випущений другим заводом.

22. На спостережній станції встановлено 3 радіолокатори різної конструкції. Ймовірність виявити ціль за допомогою першого радіолокатора дорівнює 0,81, другого – 0,75; третього – 0,9. Спостерігач навмання включив один радіолокатор. Яка ймовірність виявлення цілі? Яка ймовірність того, що ціль виявлена другим радіолокатором?

23. На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю 0,8 надходить суміш завади з корисним сигналом, з ймовірністю 0,2 – тільки завада. Якщо надходить корисний сигнал з завадою, то пристрій реєструє наявність деякого сигналу з ймовірністю 0,7; якщо тільки завада, то з ймовірністю 0,3. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність деякого сигналу. Знайти ймовірність того, що до його складу входить корисний сигнал.

24. Мікросхема може належати до однієї із трьох партій, причому співвідношення між кількістю мікросхем в партіях дорівнює N1:N2:N3 = 3:2:5. Ймовірність того, що мікросхема працює задану кількість годин, для кожної з партій відповідно дорівнює 0,65; 0,8 і 0,75.

Знайти ймовірність того, що мікросхема пропрацює задану кількість годин. Ймовірніше, до якої партії вона належить?

25. На склад надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 55%, другий – 25%, третій – 20%. Серед виробів першого заводу 70%, другого 80%, третього 75% першосортних. Купуємо один виріб, він виявляється першосортним. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб випущений другим заводом.

26. В альбомі 13 чистих і 11 гашених марок. З них навмання виймаються 2 марки (серед яких можуть бути як чисті, так і гашені), піддаються спецгасінню і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються 4 марки. Знайти ймовірність того, що ці марки чисті.

27. В першій урні 6 білих і 4 чорних кулі, в другій – 1 біла і 7 чорних. З першої урни в другу переклали 2 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона – біла.

28. Із 1000 ламп 360 належать до першої партії, 600 – до другої, а решта до третьої. В першій партії 4%, в другій – 3%, в третій – 5% бракованих ламп. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа – бракована.

29. Із 1000 виробів 700 належать до першої партії, 90 до другої, а решта – до третьої. В першій партії 8%, в другій – 5%, в третій – 4% бракованих виробів. Навмання вибирається один виріб. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб бракований.

30. В першій урні 3 білих і 2 чорні кулі, в другій – 4 білих і 4 чорних. З першої урни в другу переклали 2 кулі, потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

Завдання 8.4 Повторні незалежні випробування

1. Середня щільність хвороботворних мікробів в одному кубічному метрі повітря дорівнює 100. Береться на пробу 2 дм^3 повітря. Знайти ймовірність того, що в ньому буде виявлено хоча б один мікроб.

2. Зроблено п'ять незалежних пострілів. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі однакова і дорівнює p. Знайти ймовірність: а) одного, двох, трьох, чотирьох та п'яти влучень; б) ймовірність хоча б одного влучення; в) ймовірність не менше двох влучень; г) ймовірність не більше трьох влучень.

3. У родині семеро дітей. Будемо вважати, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що в родині: а) чотири хлопчики та три дівчинки; б) не більше як три хлопчики; в) принаймні, одна дівчинка.

4. Ймовірність малому підприємству бути банкротом за час t дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед шести малих підприємств за час t збережуться: а) два; б) більше двох підприємств.

5. За даними технологічного контролю в середньому 2% виготовлених на заводі годинників потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що зі 100 годинників, виготовлених на заводі, додатково відрегулювати потрібно буде не більше, ніж три годинники.

6. В середньому п'ята частина авто, що надходять в продаж, некомплектні. Знайти ймовірність того, що серед десяти авто мають некомплектність: а) три авто; б) менше трьох.

7. Проводиться залп із шести гармат по деякому об'єкту. Ймовірність влучення в об'єкт з кожної гармати дорівнює 0,6. Знайти ймовірність ліквідації об'єкта, якщо для цього необхідно не менше п'яти влучень.

8. Ймовірність того, що будь-який абонент зателефонує на комутатор протягом години дорівнює 0,02. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години зателефонують 8 абонентів?

9. Товариство складається з 700 осіб. Знайти ймовірність того, що в чотирьох з них день народження припадає на Різдво.

10. Яка ймовірність того, що в стовпчику з 300 навмання відібраних монет кількість монет, розташованих решкою догори, буде від 125 до 274?

11. Що ймовірніше виграти в рівносильного противника: а) чотири партії з п'яти чи п'ять із дев'яти; б) не менше чотирьох партій з п'яти чи не менше п'яти партій з дев'яти?

12. Деяке виробництво дає 3% браку. Яка ймовірність того, що з узятих на дослідження 3300 виробів бракованих буде не більше 51?

13. В середньому по 15% договорів страхова компанія сплачує страхову компенсацію. Знайти ймовірність того, що з десяти договорів буде пов'язано з виплатою страхової компенсації: а) чотири договори; б) менше трьох договорів.

14. Ймовірність проростання елітної моркви дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних насінин кількість пророслих буде між 1890 і 1930.

15. Прилад складається з дев'яти вузлів. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи протягом часу t) для кожного вузла дорівнює 0,8. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що за час t: а) відмовить принаймні два вузли; б) відмовлять рівно три вузли; в) відмовлять не менше, як три вузли.

16. Ймовірність проростання насіння певної рослини дорівнює 0,7. Висіяно 834 насінини. Знайти ймовірність того, що частота проростання рослини відхилиться за абсолютною величиною від ймовірності не більше, ніж на 0,03.

17. Скільки потрібно провести дослідів з підкидання монети, щоб з ймовірністю 0,83 можна було очікувати відхилення частоти випадання «герба» від теоретичної ймовірності 0,5 на абсолютну величину, меншу ніж 0,02.

18. Передбачається, що 10% нових малих підприємств припиняють свою діяльність протягом року. Яка ймовірність того, що із шести малих підприємств не більше двох протягом року припинять свою діяльність?

19. Два рівносильні супротивники грають в шахи. Що більш ймовірно: а) виграти дві партії з чотирьох чи три партії з шести; б) не менше двох партій з шести чи менше трьох партій з шести?

20. В банк доставлено 5000 пакетів грошових знаків. Ймовірність того, що пакет містить недостатню чи надлишкову кількість грошових знаків дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що при перевірці буде виявлено: а) три помилково укомплектовані пакети; б) не більше трьох помилково укомплектованих пакетів.

21. Будівельна фірма, яка займається будівництвом дач, розкидає рекламні листки по поштових скриньках. Попередній досвід роботи компанії показує, що приблизно в одному випадку з двох тисяч надходить замовлення. Знайти ймовірність того, що при розміщенні 100 000 листків кількість замовлень буде: а) 55; б) знаходитись в межах від 55 до 65.

22. В університеті навчаються 1578 студентів. Ймовірність того, що день народження студента припаде на певний день року дорівнює $\frac{1}{365}$. Знайти: а) найбільш імовірну кількість студентів, які народились 28 вересня, та ймовірність такої події; б) ймовірність того, що принаймні 5 студентів народились в один день.

23. Підручник видано тиражем 5000 примірників. Ймовірність того, що екземпляр підручника зброшурований неправильно дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що: а) тираж містить 5 бракованих книг; б) принаймні 2498 книг зброшуровані правильно.

24. Два баскетболісти роблять по 3 кидки м'ячем в корзину. Ймовірності влучення м'яча в корзину при кожному кидку дорівнюють відповідно 0,6 та 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) в обох буде однакова кількість влучень; б) у першого баскетболіста буде більше влучень, ніж у другого.

25. Відомо, що в середньому 75% усіх телевізорів, що виготовляються заводом, є продукцією першого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що у виготовленій партії виявиться: а) 8 телевізорів першого сорту, якщо партія містить 12 телевізорів; б) 130 телевізорів першого сорту, якщо партія містить 250 телевізорів?

26. Аудиторну роботу з теорії ймовірностей з першого разу вдало виконують 45% студентів. Знайти ймовірність того, що із 500 студентів роботу вдало виконають: а) 200 студентів; б) не менше 200 студентів.

27. При обстеженні статутних фондів банків встановлено, що п'ята частина банків мають статутний фонд 100 млн грн. Знайти ймовірність того, що серед 2000 банків мають статутний фонд понад 100 млн грн: а) не менше 400; б) від 400 до 500 банків включно.

28. Скільки потрібно взяти деталей, щоб найімовірніша кількість придатних деталей дорівнювала 70, якщо ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою дорівнює 0,2?

29. Ймовірність того, що пасажир на встигне до відправки потяга, дорівнює 0,01. Знайти найбільш імовірну кількість пасажирів із 800, що спізняться на потяг, та ймовірність цієї кількості.

30. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює $p = 0,9$. Знайти: а) з ймовірністю 0,9545 межі (симетричні відносно p), в яких міститься частка стандартних деталей серед 900 перевірених; б) ймовірність того, що частка нестандартних деталей серед них міститься в межах від 0,08 до 0,11.

Завдання 8.5 Дискретні випадкові величини, їх закон розподілу та числові характеристики. Функція розподілу випадкової величини

1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	0	2	4	6	8
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення x_1 дорівнює 0,5. Знайти закон розподілу x, якщо математичне сподівання $M(X)$=3,5 і середнє квадратичне відхилення $\sigma=0{,}5$.

3. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу:

$x=x_i$	0	2	3	6	7
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

4. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Імовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,8. Знайти закон розподілу X, якщо математичне сподівання $M(X)$=3,4 і дисперсія $D(X)$=0,64.

5. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	-1	1	3	5	7
p_i	0,15	0,3	0,1	0,25	0,2

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

6. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення x_1 дорівнює 0,8. Знайти закон розподілу X, якщо математичне сподівання $M(X)$=2,2 і середнє квадратичне відхилення $\sigma=0{,}4$.

7. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	-1	0	3	5
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

8. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Ймовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,4. Знайти закон розподілу X, якщо математичне сподівання $M(X)$=0,2 і дисперсія $D(X)$=0,96.

9. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	0	2	4	6	8
p_i	0,25	0,15	0,3	0,2	0,1

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

10. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Ймовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,1. Знайти закон розподілу X, якщо математичне сподівання $M(X)$=1,9 і середнє квадратичне відхилення σ=0,3.

11. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	-2	-1	0	1	2
p_i	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

12. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Імовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо математичне сподівання $M(X)$=1,4 і $D(X)$=0,24.

13. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	-1	0	1	2	4
p_i	0,1	0,3	0,2	0,25	0,15

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

14. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Імовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,1. Знайти закон розподілу X, якщо математичне сподівання $M(X)=5,8$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=0,6$.

15. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	1	2	4	5
p_i	0,35	0,1	0,3	0,25

Знайти:
а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;
б) числові характеристики випадкової величини X.

16. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення x_1 дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу X, якщо математичне сподівання $M(X)=3,1$ і дисперсія $D(X)=0,09$.

17. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	-2	0	2	4	6
p_i	0,2	0,15	0,3	0,1	0,25

Знайти:
а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;
б) числові характеристики випадкової величини X.

18. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення x_1 дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо математичне сподівання $M(X)=3,1$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=0,3$.

19. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	-3	-1	0	2	3
p_i	0,08	0,22	0,1	0,4	0,2

Знайти:
а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;
б) числові характеристики випадкової величини X.

20. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X прийме значення x_1 дорівнює 0,8. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо математичне сподівання $M(X)=3,2$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=0,4$.

21. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	0	3	4	7
p_i	0,2	0,15	0,3	0,35

Знайти:
а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;
б) числові характеристики випадкової величини X.

22. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,7. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо математичне сподівання $M(X)=3,3$ і дисперсія $D(X)=0,21$.

23. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	-2	-1	1	3	4
p_i	0,25	0,2	0,3	0,2	0,05

Знайти:
а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;
б) числові характеристики випадкової величини X.

24. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо математичне сподівання $M(X)=3,8$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=0,4$.

25. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	-4	2	6	8	10
p_i	0,2	0,35	0,1	0,3	0,05

Знайти:
а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;
б) числові характеристики випадкової величини X.

26. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Імовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу X, якщо математичне сподівання $M(X)=4,1$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=0,3$.

27. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	0	1	3	5	6
p_i	0,15	0,1	0,3	0,2	0,25

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

28. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Імовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,4. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо математичне сподівання $M(X)=2,6$ і дисперсія $D(X)=0,24$.

29. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	0	1	3	4	6
p_i	0,1	0,25	0,2	0,3	0,15

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

30. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки двох значень: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення x_1 дорівнює 0,3. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо математичне сподівання $M(X)=3,1$ і дисперсія $D(X)=0,89$.

Завдання 8.6 Неперервні випадкові величини та їх числові характеристики

1. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ A\cos\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$ Знайти: A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2})$.

Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

2. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{3}{2}\\ 2x-A, & \dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}\\ 0, & x>\dfrac{5}{2}\end{cases}$$ Знайти: A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(1<x<2)$.

Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

3. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<6\\ \dfrac{x}{2}-A, & 6\le x\le 8\\ 0, & x>8\end{cases}$$ Знайти: A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(5<x<7)$.

Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

4. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$ Знайти: коефіцієнт a, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4})$.

Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

5. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<10\\ Ax-5, & 10\le x\le 12\\ 0, & x>12\end{cases}$$ Знайти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(10<x<11)$.

Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

6. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:
$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ Ax^2, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$. Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4})$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

7. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:
$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<2 \\ A(x-2)^2, & при \quad 2\le x\le 3 \\ 0, & при \quad x>3 \end{cases}$. Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$ і побудувати її графік, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, імовірність $P(1<x<2{,}5)$.

8. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:
$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<1 \\ A(x-1)\ , & при \quad 1\le x\le 2 \\ 0, & при \quad x>2 \end{cases}$. Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(0<x<1{,}5)$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

9. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:
$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<0 \\ A\sin\frac{x}{2}, & при \quad 0\le x\le 2\pi \\ 0, & при \quad x>2\pi \end{cases}$. Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, імовірність $P(\frac{\pi}{3}<x<\pi)$; побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

10. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:
$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<1 \\ A(x-1)^2, & при \quad 1\le x\le 2 \\ 0, & при \quad x>2 \end{cases}$. Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(2<x<2{,}5)$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

11. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ A(3-x)^2, & 2\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2})$.

12. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ A(4-x)^2, & 3\le x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(-1<x<2)$.

13. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<2\\ A(x-2), & при \quad 2\le x\le 3\\ 0, & при \quad x>3\end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(2{,}3<x<2{,}7)$.

14. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}A\cos^2 x, & при \quad |x|\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & при \quad |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2})$.

15. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 0\\ A\cdot e^{-\frac{x}{2}}, & при \quad x>0\end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(1<x<3)$.

16. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 0\\ a\cos x, & при \quad 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & при \quad x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$. Знайти: коефіцієнт a, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(0<x<\frac{1}{3})$.

17. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ Ax+\frac{1}{2}, & при \quad 0\le x\le 1\\ 0, & при \quad x>1\end{cases}$$. Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(0<x<\frac{1}{2})$.

18. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ a(2-x)^2, & при \quad 1\le x\le 2\\ 0, & при \quad x>2\end{cases}$$. Знайти: коефіцієнт a, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, ймовірність $P(1<x<1{,}5)$.

19. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ A\cdot e^{-2x}, & x>0\end{cases}$$. Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(\frac{1}{2}<x<1)$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

20. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, при & x<0\\ ax\ , при & 0\le x\le 1\\ 0, при & x>1\end{cases}$$. Знайти: коефіцієнт a, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(0<x<\frac{1}{4})$.

21. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ A\cos\dfrac{x}{3}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$ Знайти: A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2})$.

Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

22. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x-A, & 1\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$ Знайти: A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(1<x<2)$.

Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

23. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{x}{3}-A, & 1\le x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases}$$ Знайти: A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(2<x<4)$.

Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

24. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax^4, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$ Знайти: коефіцієнт a, $F(x)$, математичне сподівання

$M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(\frac{1}{4}<x<1)$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

25. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ Ax\ \ +2, & 1\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$ Знайти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(0<x<1)$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

26. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax, & 0\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$ Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$,

$P(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4})$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

27. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<2 \\ A(x-2), & при \quad 2\le x\le 3 \\ 0, & при \quad x>3 \end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$ і побудувати її графік, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, імовірність $P(1<x<2)$.

28. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<1 \\ A(x-1)^2, & при \quad 1\le x\le 2 \\ 0, & при \quad x>2 \end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(0<x<1{,}5)$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

29. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<0 \\ A\sin\frac{x}{3}, & при \quad 0\le x\le 2\pi \\ 0, & при \quad x>2\pi \end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, імовірність $P(\frac{\pi}{3}<x<\pi)$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

30. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<1 \\ A(x-3)^2, & при \quad 1\le x\le 2 \\ 0, & при \quad x>2 \end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт A, $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, $P(2<x<2{,}5)$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

Завдання 8.7 Закони розподілу випадкових величин

1. Випадкові похибки вимірювання мають нормальний закон розподілу ймовірностей із середнім квадратичним відхиленням σ=20 мм і з математичним сподіванням a=0. Знайти ймовірність того, що із трьох незалежних вимірювань похибка хоч би одного не перевищуватиме за абсолютною величиною 4 мм.

2. Випадкова величина X має рівномірний розподіл із $M(X)=2$ і $D(X)=\frac{1}{3}$. Знайти щільність імовірності випадкової величини X, функцію розподілу $F(x)$ і $P(1<x<1,5)$.

3. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=10$. Імовірність попадання X в інтервал (10;20) дорівнює 0,2. Знайти ймовірність попадання X в інтервал (20;30).

4. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $M(X)=2$ і дисперсією $D(X)=3$. Знайти щільність імовірності випадкової величини X, інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і ймовірність $P(1<x<3)$.

5. Зважується деяка речовина без систематичних похибок. Випадкові похибки зважування мають нормальний закон із середнім квадратичним відхиленням $\sigma=20$ г. Знайти ймовірність того, що зважування буде здійснене з похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною 10 г.

6. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з $M(X)=5$ і $D(X)=3$. Знайти щільність ймовірності випадкової величини X, інтегральну функцію розподілу $F(x)$ та ймовірність $P(3<x<5)$.

7. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, яка розподілено нормально з математичним сподіванням 50 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менша 32 мм і не більша 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі більша 55 мм.

8. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює 0,1 А. Покази заокруглюються до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде допущена похибка, яка перевищує 0,02 А. Знайти: $f(x)$, $F(x)$ і побудувати їх графіки $M(X)$, $D(X)$.

9. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормальної розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X прийме значення, що належить інтервалу (15;25).

10. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,1. Покази приладу заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде допущена похибка більша від 0,02.

11. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X, яка має нормальний закон розподілу, при трьох випробуваннях хоч би один раз виявиться в

інтервалі (1;2), якщо математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення її відповідно дорівнюють 1,5 і 1,2.

12. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $M(X)=4$ і $D(X)=3$. Знайти щільність ймовірності випадкової величини X, інтегральну функцію $F(x)$ і $P(3<x<5)$.

13. Автомат штампує кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менша від 0,7 мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=0{,}4$ мм. Знайти, скільки буде придатних кульок серед 100 виготовлених.

14. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $M(X)=3$ і дисперсією $D(X)=\frac{4}{3}$. Знайти щільність імовірності випадкової величини X, інтегральну функцію $F(x)$ і $P(2<x<3)$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

15. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 10 і 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X прийме значення, що належить інтервалу (12;14).

16. Хвилинна стрілка електричного годинника переміщується стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від справжнього не більше, ніж на 15 с.

17. Здійснюється два незалежних вимірювання вимірювальним приладом, що має систематичну похибку +5 і середнє квадратичне відхилення 6 м. Яка ймовірність того, що вимірювані значення будуть відхилятися від справжнього не більше, ніж на 1,5 м?

18. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $M(X)=2$ і дисперсією $D(X)=\frac{1}{3}$. Знайти щільність імовірності випадкової величини X, інтегральну функцію $F(x)$ і ймовірність $P(1<x<1{,}5)$.

19. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=2{,}2$. Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (0;2,2) дорівнює 0,17. Знайти ймовірність попадання X в інтервал (5;6).

20. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,2. Покази приладу заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що під час відліку буде допущено похибку, меншу від 0,04.

21. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням a=2,2 і середнім квадратичним відхиленням 0,5. Яка ймовірність того, що при першому випробуванні випадкова величина попаде в інтервал (3;4), а при другому випробуванні – в інтервал (1;2)?

22. Хвилинна стрілка електричного годинника рухається стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від справжнього не більше, ніж на 8 с.

23. Деталі, які випускає цех, за розмірами мають нормальний закон розподілу N(5;0,9). Знайти, в яких межах буде розмір діаметра деталі, щоб імовірність невиходу за ці межі дорівнювала б 0,95.

24. Автобуси деякого маршруту йдуть точно за розкладом. Інтервал руху – 6 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, буде чекати черговий автобус менше 4-х хвилин.

25. Деталі, які випускає цех, за розмірами мають нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $M(X)=5$ і середнім квадратичним відхиленням σ=0,9. Знайти ймовірність того, що розмір діаметра навмання взятої деталі відрізняється від математичного сподівання не більше, ніж на 2 см.

26. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з $M(X)=2$ і $D(X)=\frac{1}{3}$. Знайти щільність ймовірності $f(x)$ випадкової величини X, функцію розподілу $F(x)$ і ймовірність $P(1<x<1{,}5)$.

27. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням a=6. Імовірність попадання X в інтервал (1,8; 6) дорівнює 0,3. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (6,5; 9).

28. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює 0,1 А. Покази заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що під час відліку буде допущена похибка, яка перевищує 0,02. Знайти: $f(x)$ і $F(x)$ і побудувати їх графіки, математичне сподівання й дисперсію.

29. Математичне співвідношення нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює a=3 і середнє квадратичне відхилення σ=2. Знайти щільність розподілу випадкової величини X і ймовірність $P(0<x<2)$.

30. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює 0,2 А. Покази заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що під час відліку буде допущена похибка, менша 0,03.

Для розв'язання завдань контрольної роботи № 8 вам знадобляться такі поняття, формули та алгоритми

1. *Випадковою* будемо називати подію, що при неодноразовому проведенні одного і того ж випробування кожен раз відбувається по-різному.

2. *Ймовірністю випадкової події* називається чисельна міра ступеня об'єктивної можливості події (частота події). Позначається ймовірність $p(A)$, $p(B)$, а значення ймовірності належать відрізку $[0;1]$.

3. Подія називається *елементарною* (ω), якщо її не можна розвинути на більш прості події.

4. *Множиною елементарних подій* (Ω) (повною групою подій, полем подій) називають сукупність усіх взаємно виключних подій, які охоплюють будь-яку подію для даного експерименту.

5. Події називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбуватись одночасно і *сумісними* – в протилежному випадку.

6. Дві несумісні події, з яких одна обов'язково повинна відбутись, називають *протилежними*. Подію, протилежну події A, будемо позначати $\overline{A}$ (подію $\overline{A}$ називають іноді *антиподією* події A).

7. Комбінацією (без повторень) називається довільна k-елементна підмножина n-елементної множини. Кількість різних комбінацій становить

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{8.1}$$

8. Упорядковані множини, які відрізняються одна від одної лише порядком своїх елементів (тобто можуть бути одержані з однієї і тієї ж множини лише переставлянням її елементів), називаються *перестановками.* Загальна кількість перестановок n-елементної множини A позначається P_n і обчислюється за формулою:

$$P_n = n! \tag{8.2}$$

9. Кількість різних перестановок, які можна побудувати з n елементів, серед яких знаходиться k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, …, k_m елементів m-го типу, дорівнює

$$C_n(k_1,k_2,\ldots,k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}. \tag{8.3}$$

10. Упорядкована k-елементна підмножина множини A, всі елементи якої різні, називається *розміщенням без повторень*, а будь-яка упорядкована k-елементна підмножина множини A, всі k елементів якої не обов'язково різні, називається *розміщенням з повтореннями.* Кількість розміщень без повторень:

$$A_n^k = k!\cdot C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1), \qquad (8.4)$$

а кількість розміщень з повтореннями:

$$\overline{A_n^k}' = n^k. \qquad (8.5)$$

11. Випадок називається *сприятливим події A*, якщо поява цього випадку приводить до появи події A.

12. Згідно з класичним означенням *ймовірність події A* дорівнює відношенню кількості сприятливих цій події випадків до загальної кількості випадків, тобто

$$p(A) = \frac{m}{n}, \qquad (8.6)$$

де $p(A)$ – ймовірність подій A;

m – кількість сприятливих події A випадків;

n – загальна кількість випадків.

13. *Геометричною ймовірністю* події A називається відношення міри сприятливої цій події області до міри всієї області, тобто

$$p(A) = \frac{mes\, g}{mes\, G}. \qquad (8.7)$$

Зауваження! Область, на яку розповсюджується поняття геометричної ймовірності, може бути одновимірною (пряма, відрізок), двовимірною (площина) та тривимірною (деяке тіло в просторі). Відповідно міра області – довжина, площа, об'єм.

14. Ймовірність суми скінченного числа несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B+\ldots+K) = p(A)+p(B)+\ldots+p(K). \qquad (8.8)$$

Зауваження! а) Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1.

б) Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

15. *Умовна ймовірність* – ймовірність події B, знайденої за умови, що подія A відбулась. Позначається умовна ймовірність $p_A(B)$ або $p(B|A)$.

16. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, знайдену за умови, що перша подія відбулась, тобто

$$p(AB) = p(A) \cdot p_A(B) = p(B) \cdot p_B(A). \qquad (8.9)$$

17. Дві події називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої.

18. Якщо подія A може відбутись тільки за умови появи однієї з подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків кожної з гіпотез на відповідні умовні ймовірності події A:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p_{H_i}(A). \qquad (8.10)$$

Формулу (8.10) називають *формулою повної ймовірності.*

19. *Формула Байєса:*

$$p_A(H_i) = \frac{p(H_i) \cdot p_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p_{H_i}(A)}. \qquad (8.11)$$

20. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала, то ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A з'явиться m раз в n незалежних випробуваннях дорівнює

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \qquad (8.12)$$

де $q = 1 - p$.

Формула (8.12) – формула Бернуллі.

21. Число m_0 появ події A в n випробуваннях називається *найімовірнішим*, якщо ймовірність появи цієї події $P_{m_0,n}$ принаймні не менша за ймовірності інших подій $P_{m,n}$ для довільного m,

$$np - q \le m_0 \le np + p. \qquad (8.13)$$

22. Ймовірність того, що подія A в n незалежних випробуваннях з'явиться m раз, дорівнює коефіцієнту при z^m у виразі продукувальної функції, тобто

$$\varphi_n(z) = \sum_{m=0}^{n} P_{m,n} \cdot z^m, \qquad (8.14)$$

де $\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i)z$, z – довільний параметр.

23. *Формула Пуассона:* якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні прямує до нуля ($p \to 0$) при необмеженому збільшенні кількості випробувань n ($n \to \infty$), причому добуток np прямує до сталого числа

λ ($np \to \lambda$), то ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A з'явиться m раз в n незалежних випробуваннях, задовольняє граничну рівність

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}. \tag{8.15}$$

Зауваження! а) При $\lambda = np \le 10$, то з граничної рівності (8.15) випливає *наближена формула Пуассона:*

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda). \tag{8.16}$$

б) Значення функції Пуассона $P_m(\lambda)$ табульовані (додаток А).

24. *(локальна теорема Муавра-Лапласа).* Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала та відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A з'явиться m раз в n незалежних випробуваннях при достатньо великому n, наближено дорівнює

$$P_{m,n} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{8.17}$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ – \textit{функція Гаусса}} \tag{8.18}$$

та

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{8.19}$$

Зауваження! а) Значення функції Гаусса табульовані (додаток Б).

б) Функція Гаусса парна.

в) Функція Гаусса монотонно спадна при додатних значеннях x, зокрема при $x \to \infty$, $\varphi(x) \to 0$ (можна вважати, що вже при $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$).

25. (*інтегральна теорема Муавра-Лапласа*). Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала та відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_{m,n}$ того, що число m появ події A в n незалежних випробуваннях належить відрізку $[a, b]$ при достатньо великому n, наближено дорівнює

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right], \tag{8.20}$$

де

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ –} \tag{8.21}$$

*функція (*або *інтеграл ймовірностей) Лапласа;*

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}. \tag{8.22}$$

Зауваження! а) Значення функції Лапласа табульовані (додаток В).

б) Функція Лапласа непарна.

в) Функція Лапласа монотонно зростаюча при додатних значеннях x, зокрема при $x \to \infty$, $\varphi(x) \to 0$ (можна вважати, що вже при $x > 4$ $\varphi(x) \approx 1$).

26. Число m появ події A відрізняється від добутку np не більше, ніж на $\varepsilon > 0$ (за абсолютною величиною), тобто

$$P_n(|m - np| \le \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right). \tag{8.23}$$

27. Частота $\frac{m}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності p не більше, ніж на $\Delta > 0$ (за абсолютною величиною), тобто

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \Delta\right) \approx \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \tag{8.24}$$

28. *Випадковою величиною* називається змінна, що в результаті проведення випробування залежно від випадку набуває одного з можливих значень.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина її можливих значень є зчисленою (скінченною чи нескінченною).

Під н*еперервною* випадковою величиною розуміють величину, множина можливих значень якої є деяким проміжком числової осі.

Випадкові величини будемо позначати великими літерами латинського алфавіту $X, Y, Z, \ldots$, а їх можливі значення – відповідними маленькими літерами $x, y, z, \ldots$.

29. *Законом розподілу* випадкової величини називається будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

30. *Рядом розподілу* дискретної випадкової величини є таблиця, в якій перераховані в порядку зростання усі можливі значення випадкової величини та відповідні їм ймовірності, тобто

X:

x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
p_i	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$	p_n

причому $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

31. *Добутком kX* випадкової величини X на сталу величину k називається випадкова величина, яка набуває значення kx_i з тими ж ймовірностями p_i $(i=1,2,\ldots,n)$.

m-м степенем випадкової величини X, тобто X^m, називається випадкова величина, яка набуває значення x_i^m з тими ж ймовірностями p_i $(i=1,2,\ldots,n)$.

32. *Математичним сподіванням $M(X)$* дискретної випадкової величини X називають суму добутків усіх її значень на відповідні їм ймовірності:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\,. \tag{8.25}$$

Зауваження! Властивості математичного сподівання див. [8].

33. *Дисперсією $D(X)$* випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2. \tag{8.26}$$

34. На практиці дисперсію обчислюють за формулою:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2. \tag{8.27}$$

Зауваження! Середнім квадратичним відхиленням (standard deviation) σ_x випадкової величини X називається арифметичне значення кореня квадратного з її дисперсії:

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}\,. \tag{8.28}$$

35. *Функцією розподілу (function of distribution)* випадкової величини X називається ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення меншого за x. Позначають функцію розподілу $F(x)$, так

$$F(x)=P(X<x). \tag{8.29}$$

Функцію $F(x)$ іноді називають *інтегральною функцією розподілу* або *інтегральним законом* розподілу.

36. *Щільністю ймовірності (closeness of probability)* (або просто *щільністю*) $f(x)$ неперервної випадкової величини X називається похідна її функції розподілу

$$F'(x)=f(x)\,. \tag{8.30}$$

37. ***Властивості*** щільності ймовірності неперервної випадкової величини:

37а. Щільність ймовірності – невід'ємна функція, тобто $f(x)\geq 0$.

Ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини на проміжок $[a, b]$ дорівнює визначеному інтегралу від її щільності ймовірності в межах від a до b, тобто

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{8.31}$$

37б. Функція розподілу неперервної випадкової величини знаходиться через щільність ймовірності за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{8.32}$$

37в. Невласний інтеграл у нескінченних межах від щільності ймовірності неперервної випадкової величини дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{8.33}$$

38. Числові характеристики неперервних випадкових величин обчислюють так:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{8.34}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx \tag{8.35}$$

або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2. \tag{8.36}$$

39. *Рівномірний закон розподілу.*

Неперервна випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність ймовірності така:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } a \le x \le b, \\ 0, & \text{якщо } x < a, \quad x > b, \end{cases} \tag{8.37}$$

а функція розподілу визначається за формулою:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le a,\\ (x-a)\big/(b-a), & \text{якщо} \quad a<x\le b,\\ 1, & \text{якщо} \quad x>b.\end{cases} \qquad (8.38)$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (8.39)$$

40. *Нормальний закон розподілу.*

Неперервна випадкова величина X має *нормальний закон розподілу* (закон Гаусса) з параметрами a та σ^2, якщо її щільність ймовірності така:

$$f_N(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (8.40)$$

Криву нормального закону розподілу називають *нормальною* або *гаусcовою* кривою. На рис. 8.1 наведено нормальну криву $f_N(x)$ з параметрами a та σ^2, тобто $N(a,\sigma^2)$, та графік функції розподілу випадкової величини X. Для нормального закону розподілу $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$.

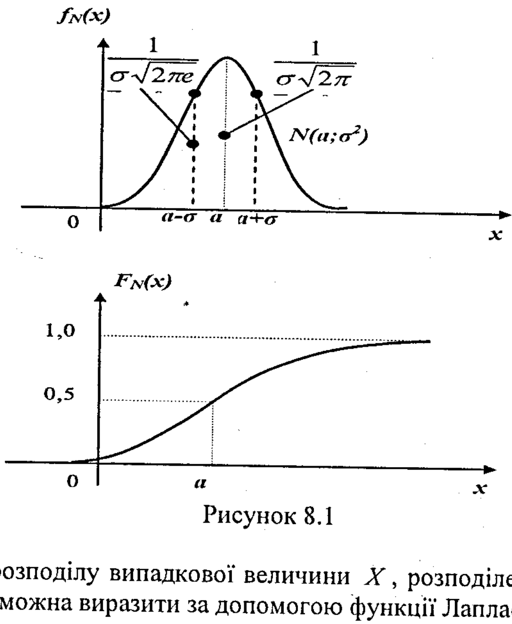


Рисунок 8.1

41. Функція розподілу випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, можна виразити за допомогою функції Лапласа $\Phi(x)$ так:

$$F_N(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{8.41}$$

42. *Властивості* нормально розподіленої випадкової величини:

42а. Ймовірність потрапляння випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом в інтервал $[x_1; x_2]$ дорівнює

$$P(x_1 \le X \le x_2)=\frac{1}{2}[\Phi(t_2)-\Phi(t_1)], \tag{8.42}$$

де $t_1=\frac{x_1-a}{\sigma}$, $t_2=\frac{x_2-a}{\sigma}$.

42б. Ймовірність того, що відхилення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, від математичного сподівання не перевищить величину $\Delta > 0$ (за абсолютною величиною) дорівнює

$$P(|X-a| \le \Delta)=\Phi(t), \tag{8.43}$$

де $t=\frac{\Delta}{\sigma}$. (8.44)

43. «*Правило трьох сигм*»: якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами a та σ^2, то практично достовірно, що її значення належать інтервалу $(a-3\sigma; a+3\sigma)$.

Приклади розв'язання типових завдань контрольної роботи № 8

Завдання 8.1 В магазині продали 21 холодильник з 25 холодильників трьох марок, що були наявні в кількості 5, 7 та 13 штук. Припускаючи, що ймовірність бути проданим для холодильника кожної марки однакова, знайти ймовірність того, що залишились нерозпроданими холодильники: а) однієї марки; б) трьох різних марок.

Розв'язування

а) Нехай A= «Залишились нерозпроданими холодильники однієї марки». Загальна кількість способів, якими можна одержати 4 (непроданих) холодильники з 25, дорівнює $n=C_{25}^4$. Кількість способів, якими можна одержати 4 холодильники першої марки з 5, дорівнює $m_1=C_5^4$; другої марки із 7 – $m_2 = C_7^4$ та третьої марки з 13 – $m_3 = C_{13}^4$. Події A за правилом додавання подій сприяють $m = m_1 + m_2 + m_1 = C_5^4 + C_7^4 + C_{13}^4$ випадків. Тому

$$p(A) = \frac{C_5^4 + C_7^4 + C_{13}^4}{C_{25}^4} = \frac{5+35+715}{12650} = \frac{755}{12650} = 0{,}06.$$

б) Нехай B = «Залишились нерозпроданими холодильники трьох різних марок». Ця подія може відбуватись за одним з трьох варіантів. За першим варіантом подія B відбудеться, якщо залишаться 1, 1, 2 холодильники відповідно 1-ї, 2-ї та 3-ї марок; за другим варіантом – 1, 2, 1 та за третім 2, 1, 1 холодильники 1-ї, 2-ї та 3-ї марок, відповідно. Згідно з умовою задачі та правилом множення подій маємо кількість випадків, сприятливих першому варіанту $m_1 = C_5^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^2$; другому варіанту – $m_2 = C_5^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{13}^1$; третьому варіанту – $m_3 = C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^1$. Загальна кількість сприятливих події B випадків дорівнює $m = m_1 + m_2 + m_3$. Таким чином,

$$p(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^2 + C_5^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{13}^1 + C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^1}{C_{25}^4} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 78 + 5 \cdot 21 \cdot 13 + 10 \cdot 7 \cdot 13}{12650} =$$

$$= \frac{5005}{12650} = 0{,}396.$$

Завдання 8.2 Ймовірність того, що студент складе перший іспит дорівнює 0,9; другий – 0,9; третій – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе: а) тільки два іспити; б) тільки один іспит; в) три іспити; г) хоча б два іспити; д) хоча б один іспит; е) тільки другий іспит.

Розв'язування

а) Позначимо незалежні події A_i = «Студент складе i-й іспит», $i = 1, 2, 3$; B = «Студент складе два іспити з трьох». Очевидно, що

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}306.$$

б) Нехай подія C = «Студент складе один іспит з трьох». Зрозуміло, що ця подія відбудеться, якщо студент складе або тільки 1-ий іспит, або тільки 2-ий іспит, або тільки 3-ий іспит, тобто

$$p(C) = p(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 +$$
$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}044.$$

в) Нехай подія D = «Студент складе три іспити», тобто $D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Тоді $p(D) = p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}648$.

г) Нехай подія E = «Студент складе хоча б два іспити». Зрозуміло, що дана подія означає, що студент складе будь-які два іспити або всі три, тобто $E = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$
і $p(E) = 0{,}306 + 0{,}648 = 0{,}954$.

д) Нехай подія F = «Студент складе хоча б один іспит». Зрозуміло, що ця подія містить подію C, подію D та подію B (сім варіантів). Однак простіше знайти ймовірність події F, якщо перейти до протилежної події $\overline{F}$ = «Студент не складе жодного іспиту». Таким чином,

$$p(F) = 1 - p(\overline{F}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}998.$$

е) Нехай подія K = «Студент складе тільки 2-ий іспит». Зрозуміло, що $K = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$ і маємо

$$p(K) = p(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}018.$$

Завдання 8.3 Два мисливці незалежно один від одного стріляли по мішені, роблячи по одному пострілу. Ймовірність влучного пострілу для першого мисливця дорівнює 0,8; для другого – 0,4. Після стрільби в мішені виявлено одну пробоїну. Яка ймовірність того, що вона належить: а) 1-му мисливцю; б) 2-му мисливцю?

Розв'язування

Позначимо події:

H_1 = «Обидва мисливці не влучили»;

H_2 = «Обидва мисливці влучили в мішень»;

H_3 = «1-ий мисливець влучив в мішень, а 2-ий – ні»;

H_4 = «2-ий мисливець влучив в мішень, а 1-ий – ні»;

A = «В мішені одна пробоїна (одне влучення)».

Знайдемо ймовірності гіпотез та умовні ймовірності події A для цих гіпотез:

$$p(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}12; \quad p_{H_1}(A) = 0;$$
$$p(H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32; \quad p_{H_2}(A) = 0;$$
$$p(H_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48; \quad p_{H_3}(A) = 1;$$
$$p(H_4) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08; \quad p_{H_4}(A) = 1.$$

Тепер за формулою Байєса

$$p_A(H_3) = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}12 \cdot 0 + 0{,}32 \cdot 0 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{6}{7} = 0{,}857;$$
$$p_A(H_4) = \frac{0{,}08 \cdot 1}{0{,}12 \cdot 0 + 0{,}32 \cdot 0 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{1}{7} = 0{,}143,$$

тобто, в шість разів більш ймовірно, що в мішень влучив 1-ий мисливець.

Завдання 8.4 Завод відправив на базу 10000 стандартних виробів. Середня кількість виробів, що псуються під час транспортування, становить 0,02 %. Знайти ймовірність того, що із 10000 виробів: 1) буде пошкоджено: а) три; б) хоча б три; 2) не буде пошкоджено: а) 9997; б) хоча б 9997.

Розв'язування

1. Ймовірність того, що виріб буде пошкоджено при транспортуванні, становить за умовою $p = 0{,}0002$. Оскільки ця ймовірність мала, $n = 10000$ – велике та $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2 \le 10$, то потрібно застосовувати формулу Пуассона (додаток А):

$$P_{3,10000} = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = P_3(2) = 0{,}1804$$

Ймовірність $P_{10000}(m \ge 3)$ може бути обчислена як сума великої кількості доданків:

$$P_{10000}(m \ge 3) = P_{3,10000} + P_{4,10000} + \ldots + P_{10000,10000}.$$

Зрозуміло, що простіше знайти цю ймовірність, використавши антиподію:

$P_{10000}(m \ge 3) = 1 - P_{10000}(m < 3) = 1 - (P_{0,10000} + P_{1,10000} + P_{2,10000}) =$
$= 1 - (0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707) = 0{,}3233.$

Необхідно відмітити, що для обчислення ймовірності $P_{10000}(m \ge 3)$ не можна застосовувати інтегральну формулу Муавра-Лапласа, оскільки не виконується основна умова її використання.

2. В даному випадку $p = 1 - 0{,}0002 = 0{,}9998$ та потрібно знайти $P_{9997,10000}$, для безпосереднього обчислення якої не можна застосувати ні формулу Пуассона (p велика), ні локальну формулу Муавра-Лапласа ($npq \approx 2 < 20$). Однак подія «не буде пошкоджено 9997 виробів з 10000» рівносильна події «буде пошкоджено 3 вироби із 10000», ймовірність якої 0,1804.

Подія «не буде пошкоджено хоча б 9997 виробів з 10000» рівносильна події «буде пошкоджено не більше трьох виробів із 10000», для якої $p = 0{,}0002$ та $P_{10000}(m \le 3) = P_{0,10000} + P_{1,10000} + P_{2,10000} + P_{3,10000} =$
$= 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 + 0{,}1804 = 0{,}8572.$

Завдання 8.5 Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

$x=x_i$	0	2	4	6	8
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X: $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

Розв'язування

Будемо задавати різноманітні значення x та знаходити для них $F(x) = P(X < x)$.

1. Якщо $x \le 0$, то зрозуміло, що $F(x) = P(X < x) = 0$.

2. Якщо $0 < x \le 2$, то $F(x) = P(X = 0) = 0{,}2$. Зрозуміло, що і $F(2) = P(X < 2) = 0{,}2$.

3. Якщо $2 < x \le 4$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$.

4. Якщо $4 < x \le 6$, то $F(x) = [P(X = 0) + P(X = 2)] + P(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$.

5. Якщо $6 < x \le 8$, то

$$F(x) = [P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4)] + P(X = 6) = 0{,}7 + 0{,}2 = 0{,}9.$$

6. Якщо $x > 8$, то

$$F(x) = [P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6)] + P(X = 8) = 0{,}9 + 0{,}1 = 1.$$

Графічно зобразимо функцію $F(x)$ (рис. 8.2). Маємо:

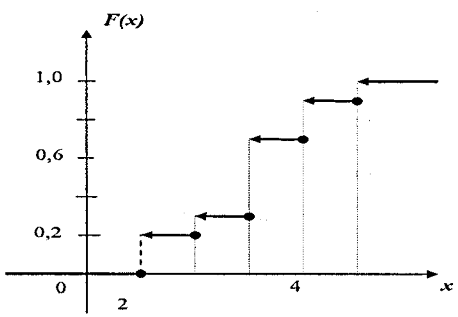


Рисунок 8. 2 – Графічне зображення функції $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x\le 0, \\ 0.2, & \textit{якщо} \quad 0<x\le 2, \\ 0.3, & \textit{якщо} \quad 2<x\le 4, \\ 0.7, & \textit{якщо} \quad 4<x\le 6, \\ 0.9, & \textit{якщо} \quad 6<x\le 8, \\ 1, & \textit{якщо} \quad x>8. \end{cases}$$

Обчислимо числові характеристики даної випадкової величини.

$M(X)=0\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}4+6\cdot 0{,}2+8\cdot 0{,}1=3{,}8$.

$M(X^2)=0^2\cdot 0{,}2+2^2\cdot 0{,}1+4^2\cdot 0{,}4+6^2\cdot 0{,}2+8^2\cdot 0{,}1=20{,}4$.

$D(X)=20{,}4-3{,}8^2=5{,}96$, $\sigma(X)=\sqrt{5{,}96}\approx 2{,}44$.

Завдання 8.6 Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ A\sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Знайти: а) коефіцієнт A; б) функцію розподілу $F(x)$, в) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини; г) ймовірність $P(0<x<\frac{\pi}{12})$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

Розв'язування

а) Коефіцієнт A знайдемо з умови $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} A\sin 2x dx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} 0\,dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} A\sin 2x dx=1, \text{ звідки}$$

$$-\frac{A}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1,\ \frac{A}{2}=1,\ A=1.$$

б) Знайдемо $F(x)$.

Якщо $x \le 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$.

Якщо $0 < x \le \frac{\pi}{4}$, то $F(x) = 0 + \int\limits_{0}^{x} 2\sin 2x dx = -\frac{2}{2}\cos 2x \Big|_0^x = 1 - \cos 2x$.

Якщо $x > \frac{\pi}{4}$, то $F(x) = 1$.

Таким чином, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ 1 - \cos 2x, & \text{якщо } 0 < x \le \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{якщо } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

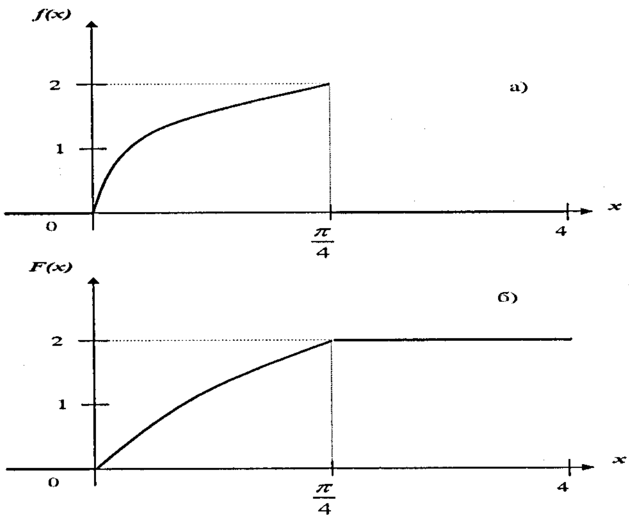


Рисунок 8.3 – Графіки щільності розподілу випадкової величини X та функції розподілу ймовірностей

в) Обчислимо математичне сподівання та дисперсію. Маємо:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2x\cdot\sin 2xdx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} 0\,dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2x\cdot\sin 2xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} U=x & dU=dx \\ dV=2\sin 2xdx & V=-\cos 2x\end{matrix}\right\}=-x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2};$$

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2x^2\cdot\sin 2xdx=\left\{\begin{matrix} U=x^2 & dU=2xdx \\ dV=2\sin 2xdx & V=-\cos 2x\end{matrix}\right\}=$$

$$=-x^2\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2x\cos 2xdx=\left\{\begin{matrix} U=x & dU=dx \\ dV=2\cos 2xdx & V=\sin 2x\end{matrix}\right\}=$$

$$=x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-1;$$

$$D(X)=\frac{\pi}{4}-1-\frac{1}{4}=\frac{\pi-5}{4}\approx -0{,}465.$$

г) Знайдемо ймовірність $P(0<x<\frac{\pi}{12})$

$$P(0\le X<\frac{\pi}{12})=\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} 2\sin 2xdx=-\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{12}}=-\cos\frac{\pi}{6}+1=1-0{,}87=0{,}13.$$

Завдання 8.7 1) Ціна поділки шкали вимірювального пристрою 0,2. Покази пристрою округлюються до найближчого цілого числа. Знайти ймовірність того, що при вимірюванні буде зроблена похибка менша 0,04.

2) Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням a=10. Імовірність попадання X в інтервал (10;20) дорівнює 0,3. Знайти ймовірність попадання X в інтервал (0;10).

Розв'язування

Нехай A – описана подія. Похибку заокруглення відліку можна розглядати, як випадкову величину X, яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми цілими поділками. Щільність рівномірного розподілу $f(x)=\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{0,2}=5$. При відліку буде зроблена похибка:

а) менша 0,04, якщо покази приладу округлені до попередньої з двох сусідніх поділок, тобто до 0, так, що випадкова величина $X\in(0;\,0,04)$ – подія A_1 або покази округлені до наступної поділки, тобто до 0,2, так, що $X\in(0,16;\,0,2)$– подія A_2. Таким чином $P(A)=P(A_1)+P(A_2)$, як сума ймовірностей несумісних подій.

Оскільки $P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)dx$, то

$$P(A)=P(0<X<0{,}04)+P(0{,}16<X<0{,}2)=$$

$$=5\int\limits_0^{0,04}dx+5\int\limits_{0,16}^{0,2}dx=5x\Big|_0^{0,04}+5x\Big|_{0,16}^{0,2}=10\cdot 0{,}04=0{,}4;$$

б) за формулою (2.19) маємо

$$P(10\le X\le 20)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right)\right]=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)=0{,}3.$$

З іншого боку

$P(0\le X\le 10)=\dfrac{1}{2}\left[\Phi\left(\dfrac{10-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{0-10}{\sigma}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{10}{\sigma}\right)=0{,}3$ (в силу непарності функції Лапласа).

ДОДАТКИ

Додаток А

Значення функції Пуассона $P_m(\lambda)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

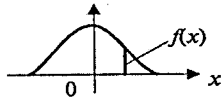
m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

m \ λ	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0.0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0 0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Додаток Б

Значення функції Гаусса

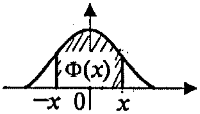
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$



Цілі та десяткові частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

Додаток В

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$



Цілі та десяткові частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6679	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7984	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9392	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9533
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9841	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9331	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9951	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,2	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,3	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,4	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,5	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,6	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

ЛІТЕРАТУРА

1. Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Функції багатьох змінних, кратні інтеграли : навчальний посібник / Сачанюк-Кавецька Н. В., Краєвський В. О., Ковальчук М. Б. – Вінниця : ФОП Долюк С. В., 2014. – 135 с.
2. Сачанюк-Кавецька Н. В. Елементи теорії поля : навчальний посібник / Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко. – Вінниця : ВНТУ, 2006. – 100 с.
3. Сачанюк-Кавецька Н. В. Теорія рядів : навчальний посібник / Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І., Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 138 с.
4. Тичинська Л. М. Теорія функцій комплексної змінної : навчальний посібник / Л. М. Тичинська, М. Б. Ковальчук, Г. О. Черноволик. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 108 с.
5. Мартыненко В. С. Операционное исчисление : учебное пособие / Мартыненко В. С. – Киев : Издательство киевского университета, 1968. – 200 с.
6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2-х т. / Пискунов Н. С. – М. : Интеграл-Пресс, 2004.
   Т. 1. – 2003. – 416 с.
   Т. 2. – 2003. – 529 с.
7. Сачанюк-Кавецька Н. В. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч. 1.: навчальний посібник / Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І., Дубова Н. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 108 с.
8. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч. 2.: навчальний посібник / [Клочко В. І., Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б., Дубова Н. Б.]. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 168 с.
9. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.
10. Овчинников П. П. Вища математика : підручник у 2-х томах / Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. – [3-є вид.] – К. : Техніка, 2008.
    Ч. 1. – 2008. – 600 с.
    Ч. 2. – 2008. – 792 с.
11. Бугров Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 2002. – 464 с.

Навчальне видання

Хом'юк Ірина Володимирівна
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Хом'юк Віктор Вікторович
Ковальчук Майя Борисівна

Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою)
Частина 2

Навчальний посібник

Редактор Є. Плетньова

Оригінал-макет підготовлено Н. В. Сачанюк-Кавецькою

Підписано до друку
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 8,55.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр.
Зам. № 2017-255.

Видавець та виготовлювач
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 59-85-32, 59-87-38.
press.vntu.edu.ua;
Email: kivc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.