Г. Г. Кашканова, А. А. Коломієць

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Електронний навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2025

УДК 517.9(075.8)
К31

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 30.05.2024 р.)

Рецензенти:
Бак С. М., доктор фізико-математичних наук, професор
Годованюк Т. Л., доктор педагогічних наук, професор
Джеджула О. М., доктор педагогічних наук, професор

Кашканова, Г. Г.
К31 Вища математика. Диференціальні рівняння : навчальний посібник [Електронний ресурс] / Г. Г. Кашканова, А. А. Коломієць. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – 75 с.

В навчальному посібнику подано теоретичні відомості з теорії диференціальних рівнянь, методи і алгоритми, які використовуються під час розв'язування диференціальних рівнянь першого і вищих порядків та в процесі розв'язування найпростіших лінійних систем диференціальних рівнянь. Розглянуті методи проілюстровано конкретними прикладами. Наведено варіанти завдань для самостійної роботи здобувачів, питання для самоконтролю.

Навчальний посібник призначено для здобувачів усіх спеціальностей.

УДК 517.9(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальні рівняння (ДР) – це рівняння, які містять функцію та її похідні. Вони є потужним інструментом для моделювання різних явищ у природі, інженерії, економіці та інших галузях науки.

Диференціальні рівняння широко використовуються в механіці для опису руху тіл. Наприклад, другий закон Ньютона можна записати у вигляді диференціального рівняння, яке є моделлю залежності між силою, масою тіла та прискоренням. В теорії електромагнетизму такі диференціальні рівняння, як рівняння Максвелла, описують поведінку електричних і магнітних полів у просторі та часі. У економіці диференціальні рівняння можуть використовуватися для моделювання зростання та розвитку економіки, змін інфляції, прогнозування появи і розвитку ринкових трендів тощо.

Внесок Леонарда Ейлера і Готфріда Вільгельма Лейбніца в розвиток диференціальних рівнянь був неоціненним. Розробивши теорію диференціальних рівнянь і методи їх розв'язання Леонард Ейлер і Готфрід Вільгельм Лейбніц, розширили можливості аналізу складних процесів.

Найбільшого розвитку диференціальні рівняння набули на початку ХХ століття, стали важливим інструментом для фізиків, інженерів, біологів, економістів й інших науковців. Із зростанням інтересу до різноманітних наукових дисциплін, диференціальні рівняння стали невід'ємною частиною аналізу та моделювання складних систем.

1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1 Основні поняття

Означення. ***Диференціальним рівнянням*** називають рівняння, що зв'язує незалежну змінну *x*, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', ..., y^{(n)}$, тобто рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Означення. ***Порядком диференціального рівняння*** називають порядок найвищої похідної, що входить в це рівняння.

Наприклад, рівняння $y' + \frac{2}{x} y = \sin x$, $y''y + xy = 0$, $y'''x = yy'$ є, відповідно, ріняннями першого, другого та третього порядків

В частинних випадках в рівняння (1) можуть не входити *x, y* та окремі похідні порядку, нижчого за n.

Розглянемо *задачу.*

З деякої висоти кинуто тіло, маса якого m. Знайти закон, за яким буде змінюватись швидкість V падіння цього тіла, якщо на нього, крім сили тяжіння, діє гальмівна сила опору повітря пропорційна швидкості.

Розв'язування. За другим законом Ньютона

$$F=ma, \quad F = m\frac{dv}{dt},$$

де $\frac{dv}{dt} = a$ (прискорення),

F – сила, що діє на тіло в напрямку руху.

Сила $F = mg - kv$ (сила тяжіння мінус сила опору), тоді маємо диференціальне рівняння першого порядку $m\frac{dv}{dt} = mg - kv \to \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v.$

Означення. ***Розв'язком*** або *інтегралом диференціального рівняння* називають будь-яку функцію $y = f(x)$, яка, при підстановці її в рівняння, перетворює це рівняння у тотожність.

Приклад 1. Показати, що функція $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ є розв'язком рівняння $y'' - 2y' + y = 0$.

Розв'язування

Маємо

$$y' = (C_1 + C_2 x)e^x + C_2 e^x,$$

$$y'' = C_1 e^x + 2C_2 e^x + C_2 x e^x,$$

тоді

$$y'' - 2y' + y = C_1 e^x + 2C_2 e^x + C_2 x e^x - 2C_1 e^x - 2C_2 x e^x - 2C_2 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x = 0.$$

Графік розв'язку диференціального рівняння називають *інтегральною кривою.*

Диференціальне рівняння, отримане в результаті дослідження деякого реального явища, називають *диференціальною моделлю* цього явища. Існують різні типи диференціальних моделей. Будемо розглядати лише ті моделі, які описуються так званими звичайними диференціальними рівняннями. Характерною особливістю цих рівнянь є те, що невідомі функції в цих рівняннях залежать лише від однієї змінної.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) називають такий його розв'язок $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, який містить таку кількість довільних незалежних сталих, яка збігається з порядком цього диференціального рівняння.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння задано в неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, то його називають *загальним інтегралом*.

Означення. Розв'язок диференціального рівняння називають *частинним*, якщо його одержано з загального, надаючи певних значень довільним сталим, що входять в загальний розв'язок.

1.2 Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд $F(x, y, y') = 0.$

В більш простих випадках це рівняння можна розв'язати відносно похідної $y' = f(x, y)$, його загальний розв'язок у = φ(*x*, с), де с – довільна стала.

Геометрично загальний розв'язок є сукупністю інтегральних кривих, тобто ліній, що відповідають різним значенням константи у загальному розв'язку.

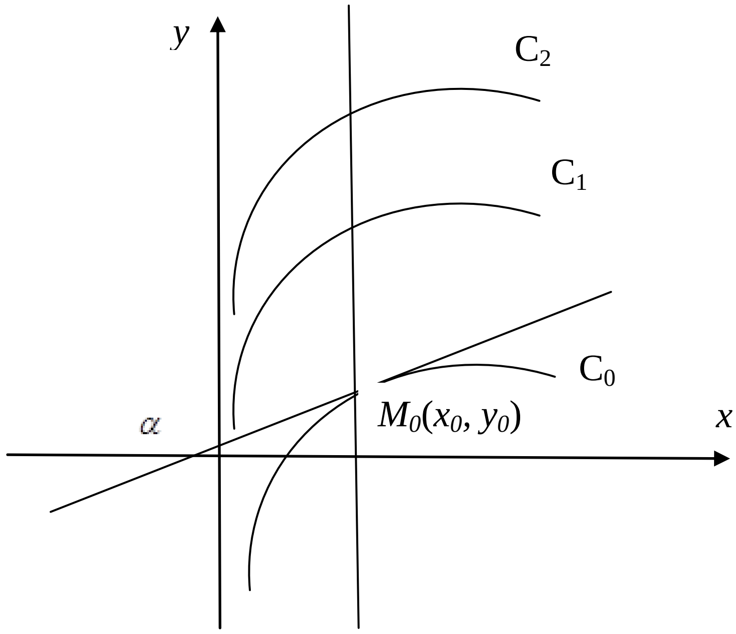

Рисунок 1 – Схематичне зображення інтегральних кривих

Інтегральні криві мають ту властивість, що в кожній точці нахил дотичної задовольняє умову $tg\alpha = f(x, y)$. Вказуючи напрям дотичної одиничним вектором, що проходить через задану точку, отримаємо поле напрямів. Геометричне місце точок, у яких дотичні до інтегральних кривих мають постійний напрямок, називають *ізоклінами*. Якщо задати точку, через яку проходить інтегральна крива, то вона відповідає частинному розв'язку диференціального рівняння. Аналітично ця вимога зводиться до початкової умови $y_0 = \varphi(x_0, C)$ або $y(x_0) = y_0$. З цієї умови визначають сталу C та відповідний частинний розв'язок.

Теорема (*Існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння*). Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в області D площини *xoy,* яка містить точку, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x, C)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Диференціальні рівняння є математичним апаратом, за допомогою якого вивчають процеси, що відбуваються в природі. Якщо умови задачі повністю визначають процес, то він має проходити однозначно, тобто, диференціальне рівняння має єдиний розв'язок. Загальний розв'язок не дає повної відповіді щодо опису процесу. Тому задають початкові умови і розглядають задачу Коші.

Задача Коші: знайти розв'язок y = φ(x) диференціального рівняння $y' = f(x, y)$), який задовольняє задану початкову умову $y_0 = y(x_0)$.

Геометрично це означає, що потрібно відшукати інтегральну криву диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$. Задачу Коші називають початковою задачею.

1.3 Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними

1) Диференціальні рівняння з *відокремленими змінними*. Так називають рівняння *вигляду* $M(x)dx + N(y)dy = 0$

Метод розв'язування – *інтегрування:* $\int M(x)dx = -\int N(x)dy$.

Приклад 2. Записати загальний розв'язок рівняння $xdx + ydy = 0$.

Розв'язування

$ydy = -xdx$

$\int ydy = -\int xdx$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$x^2 + y^2 = c^2$ – інтегральні криві (рис. 2), концентричні кола з центрами в т. O(0;0) , радіус R = $\sqrt{C^2}$ = C.

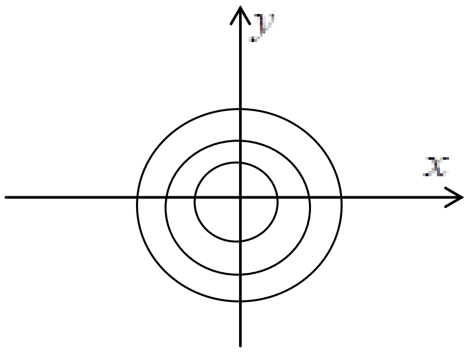

Рисунок 2 – Схематичне зображення інтегральних кривих

2) Диференціальні рівняння з *відокремлюваними змінними*. Так називають рівняння вигляду $y' = f_1(x) f_2(y)$, або $M_1(x)N_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$. Розглянемо диференціальне рівняння

а) $y' = f_1(x) f_2(y)$ де $(f_2(y) \neq 0)$, права частина – добуток функції, що залежить тільки від *x*, на функцію, яка залежить від y. Запишемо дане рівняння як $\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)$ і розділимо змінні. Для цього домножимо дане рівняння на вираз $\left|\frac{dx}{f_2(y)}\right.$, отримаємо

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx\to\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C.$$

б) $M_1(x)N_1(x)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$. Поділимо це рівняння на $M_2(x)N_1(y)$.

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0.$$

Приклад 3. Записати загальний розв’зок диференціального рівняння $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0.$

Розв’язування

$$(1+x)ydx=(y-1)xdy\left|\frac{1}{xy}\right.$$

$$\frac{(1+x)}{x}dx=\frac{(y-1)}{y}dy$$

$$(1+\frac{1}{x})dx=(1-\frac{1}{y})dy$$

$$x+\ln|x|+C=y-\ln|y|$$

$$\ln|xy|+x-y=C.$$

Приклад 4. Визначити криву, яка проходить через точку (-1; 4) і має властивість: її піднормаль в будь-якій точці, приймає одне і те саме значення, що дорівнює 4 (рис. 3).

Розв’язування

MT – дотична до кривої в т. M (x;y), MN – нормаль, PN – піднормаль, $\angle MTP=\alpha$, $\angle MNP=90^\circ-\alpha$.

1) З ΔPMN маємо

$$MP=y;\ \frac{MP}{PN}=tg\left(90^\circ-\alpha\right)=ctg\alpha;\ PN=\frac{MP}{ctg\alpha}=MP\cdot tg\alpha=y\cdot tg\alpha=y\cdot y'.$$

Враховуючи умову маємо: $y\cdot y'=4$.

$$y\cdot\frac{dy}{dx}=4;\ ydy=4dx.$$

$$\frac{y^2}{2} = 4x + C \qquad y^2 = 8x + C_1.$$

Визначимо C_1, якщо $x_0 = -1$, то $y_0 = 4$.

$16 + 8 = C_1$ $C_1 = 24$; $y^2 = 8x + 24$ – це парабола з віссю симетрії *ox.*

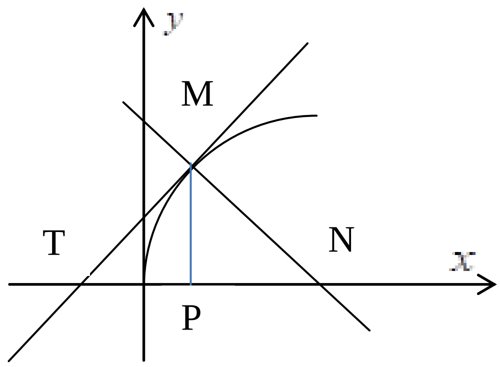

Рисунок 3 – Рисунок до прикладу 4

1.4 Однорідні та лінійні диференціальні рівняння

1) Однорідні диференціальні рівняння.

Поняття однорідного диференціального рівняння першого порядку пов'язано з поняттям однорідної функції.

Означення. Функцію $f(x, y)$ називають *однорідною функцією n-го виміру* відносно змінних x та y, якщо для будь-якого k справедлива тотожність $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$.

Наприклад

1. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ – функція першого виміру, оскільки

$$f(kx, ky) = \sqrt[3]{(kx)^3 + (ky)^3} = k\sqrt[3]{x^3 + y^3} = kf(x, y),$$

2. $f(x, y) = xy - y^2$ – функція другого виміру, оскільки

$$f(kx, ky) = kx \cdot ky - k^2 y^2 = k^2 (xy - y^2) = k^2 f(x, y),$$

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ – функція нульового виміру, оскільки

$$f(kx, ky) = \frac{k^2 (x^2 - y^2)}{k^2 xy} = k^0 f(x, y).$$

Означення. Рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

називають однорідним відносно *x* та *y*, якщо функція *f(x,y)* – однорідна функція нульового виміру.

Розв'язування однорідного рівняння. З умови *f(kx,ky) = f(x,y),* нехай $k = \frac{1}{x}$, тоді $f(x, y) = f(1, \frac{y}{x})$, тобто, однорідна функція нульового виміру залежить лише від відношення аргументів. Рівняння (2) в цьому випадку має вигляд

$$y' = f(1, \frac{y}{x}). \tag{3}$$

Зробимо заміну $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + u'x$. Підставляючи ці значення в (3) маємо: $u + u'x = f(1, u),\quad u' = \frac{f(1, u) - u}{x},\quad \frac{du}{dx} = \frac{f(1, u) - u}{x},\ \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$

.Інтегруючи останню рівність отримуємо $\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$

Якщо підставити після інтегрування замість *u* відношення $\frac{y}{x}$, знайдемо інтеграл рівняння (3).

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$, яке задовольняє початкову умову *y(1) = 1.*

Розв'язування. Нехай $u = \frac{y}{x},\quad y' = u'x + u,\quad u'x + u = u + e^u,$

тоді $\frac{du}{dx} x = e^u,\quad e^{-u} du = \frac{dx}{x},\quad -e^{-u} = \ln x + \ln C,\quad e^{-u} = \ln \frac{C}{x},\quad -u = \ln \left| \ln \frac{C}{x} \right|,$

$y = -x \ln \left| \ln \frac{c}{x} \right|$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Знайдемо константу C, використовуючи початкову умову *y(1)=1.* Маємо $1 = -\ln(\ln C) \Rightarrow \ln C = e^{-1} \Rightarrow C = e^{e^{-1}}$.

Частинний розв'язок

$$y = -x \ln(\ln \frac{C}{x}) = -x \ln(\ln e^{e^{-1}} - \ln x) = -x \ln(e^{-1} - \ln x).$$

Рівняння вигляду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ буде однорідним в тому випадку, коли функції *M(x,y) та N(x,y)* будуть функціями одного і того ж виміру.

Приклад 6. Розв'язати рівняння *(x + y)dx + xdy = 0.*

Розв'язування. M(x,y) = x + y, N(x,y) = x – функції першого виміру, отже, рівняння однорідне. Введемо підстановку $u = \dfrac{y}{x}$, $y = ux$, $y' = u'x + u$,

тоді $xdy = -(x+y)dx \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$

$$u'x + u = -\frac{x+ux}{x} \qquad u'x + u = -1 - u \qquad u'x = -1 - 2u$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{(1+2u)}{x} \qquad \frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln|1+2u| = -\ln x + \ln C$$

$$\ln\left|1 + 2\frac{y}{x}\right| = 2\ln\frac{C}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2y}{x} + 1 = \frac{C}{x^2}$$

$$2y = (\frac{C}{x^2} - 1)x \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{C - x^2}{2x}$$

1.5 Диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних

Рівняння вигляду $y' = \dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$ можна звести до однорідного. Розглянемо два випадки.

1) Нехай $\dfrac{a_1}{a} \neq \dfrac{b_1}{b}$. В цьому випадку рівняння розв'язують підстановкою $x = x_1 + h, y = y_1 + k.$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{x + y - 3}{x - y - 1}$.

Розв'язування. Використаємо підстановку $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, тоді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{x_1 + h + y_1 + k - 3}{x_1 + h - y_1 - k - 1}$. Із системи $\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$ маємо $h=2$, $k=1$. І отримаємо однорідне рівняння $\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$, тому його розв'язуємо підстановкою $\dfrac{y_1}{x_1} = u$, $y_1 = ux_1$, $y_1' = u'x + u$, яка зводить його до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x_1+u=\frac{x_1(1+u)}{x_1(1-u)} \qquad u'x=\frac{1+u}{1-u}-u=\frac{u+1-u+u^2}{1-u}$$

$$u'x_1=\frac{1+u^2}{1-u^2} \qquad \frac{(1-u)du}{1+u^2}=\frac{dx_1}{x_1} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right|=\ln(x_1+C)$$

$$\operatorname{arctg}u=\ln x_1c\sqrt{1+u^2} \qquad \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}=\ln\frac{x_1C}{x_1}\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}.$$

2) Нехай $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda.$ Рівняння розв'язують підстановкою $z = ax + by$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$.

Розв'язування. З умови *а=2, в=1,* тоді $z=2x+y \quad y=z-2x \quad y'=z'-2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-1}{2(2x+y)+5} \quad \Rightarrow \quad z'-2=\frac{z-1}{2z+5} \quad \Rightarrow \quad z'=\frac{z-1+4z+10}{2z+5}$$

$$z'=\frac{5z+9}{2z+5} \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{5z+9}{2z+5} \qquad \frac{2z+5}{5z+9}dz=dx$$

$$\frac{2(z+\frac{5}{2})}{5(z+\frac{9}{5})}dz=x+C \qquad \frac{2}{5}\left(\frac{z+\frac{9}{5}-\frac{9}{5}+\frac{5}{2}}{z+\frac{9}{2}}\right)dz=x+C$$

$$\frac{2}{5}\left(1+\frac{\frac{7}{10}}{z+\frac{9}{5}}\right)dz=x+C \qquad \frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln\left|z+\frac{9}{5}\right|=x+C$$

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\ln\left|2x+y+\frac{9}{5}\right|=x+C$$

1.6 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, лінійне відносно невідомої функції та її похідної

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x). \tag{4}$$

Розв'яжемо рівняння (4) методом Бернуллі. Для цього шукану функцію y подамо у вигляді добутку двох множників $y = u \cdot v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Тоді $y' = u'v + v'u$, а рівняння (4) запишеться у вигляді

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x) \qquad (5)$$

$u'v + u(v' + P(x) \cdot v) = Q(x)$. Оскільки u та v довільні функції, то виберемо v так, що (5) набуде вигляду $V' + P(x)V = 0$. Тоді дане рівняння розіб'ється на два рівняння $\begin{cases} v' + P(x) \cdot v = 0 \\ u' \cdot v = Q(x) \end{cases}$.

Розв'язуючи ці рівняння знайдемо u та v.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $xy' + 2y = x^2$.

Розв'язування. Це лінійне рівняння $xy' + 2y = x^2 \Rightarrow y' + \frac{2}{x} y = x$ розв'язуємо підстановкою $y = uv$ $\quad y' = u'v + v'u$ $\quad u'v + v'u + \frac{2}{x} \cdot u \cdot v = x$

$u'v + u(v' + \frac{2}{x} v) = x.$ Вираз в дужках прирівняємо до нуля. Отримуємо два рівняння:

1. $\quad v' + \frac{2}{x} v = 0 \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x} v \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x} \quad \ln v = \ln \frac{1}{x^2} \quad v = \frac{1}{x^2}$

2. $\quad u'v = x \quad u' \cdot \frac{1}{x^2} = x \quad u' = x^3 \quad u = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

$$y = \frac{1}{x^2}(\frac{x^4}{4} + C) = \frac{x^4}{4} + \frac{C}{x^2}$$

У задачах зустрічаються лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами вигляду $y' + ay = b$, які розв'язуються підстановкою $y = uv$ або відокремлюючи змінні.

Приклад 10. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0, -2)$, таку, що кутовий коефіцієнт дотичної в довільній її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на 3.

Розв'язування. Кутовий коефіцієнт дотичної $k = tg\alpha = y'.$ Тоді з умови задачі маємо рівняння $y' = y + 3 \quad \frac{dy}{dx} = y + 3 \quad \frac{dy}{y+3} = dx.$

Проінтегруємо його і отримаємо рівняння шуканої кривої

$$y = e^{x+C} - 3.$$

Оскільки ця крива проходить через точку $M_0(0, -2)$, маємо початкову умову $y(x_0) = y_0$, тобто, $y(0) = -2$, з якої визначимо сталу *C,* маємо $-2 = e^C - 3$, тоді *C = 0.* Рівняння цієї кривої $y = e^x - 3$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $y' - ytgx = \sin x$.

Розв'язування. Це лінійне рівняння, позначимо $y = uv$. $y' = u'v + v'u$, отримаємо $u'v + v'u - uvtgx = \sin x$, $u'v + u(v' - vtgx) = \sin x$.

Розіб'ємо отримане рівняння на два рівняння:

1. $v' - vtgx = 0$ $\dfrac{dv}{dx} = vtgx$ $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{\sin x}{\cos x}dx$ $\ln v = -\ln|\cos x|$ $v = \dfrac{1}{\cos x}$

2. $u'v = \sin x$, підставимо значення *v*, тоді $\dfrac{u'}{\cos x} = \sin x$ $du = \sin x \cos x dx$

$du = \dfrac{1}{2} 2\sin x \cos x dx$, $u = -\dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

Загальний розв'язок рівняння $y = (-\dfrac{1}{4}\cos 2x + C)\dfrac{1}{\cos x}$.

1.7 Рівняння Бернуллі

Означення. Рівнянням Бернуллі називають диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n, \qquad (6)$$

де $n \neq 0$ та $n \neq 1$ (при $n = 0$ це лінійне рівняння).

Його, як і лінійне рівняння, можна проінтегрувати за допомогою підстановки *y* = *uv*, або звести до лінійного підстановкою $z = y^{1-n}$. Тоді $y' = \dfrac{z' \cdot y^n}{1-n}$, звідки $z' = (1-n)y^{-n}y'$, а $y'\dfrac{1}{y^n} = \dfrac{z'}{1-n}$ розділимо (6) на y^n, отримаємо $y'\dfrac{1}{y^n} + P(x)\dfrac{1}{y^{n-1}} = Q(x)$ $\dfrac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$ $\dfrac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$.

Маємо лінійне рівняння, яке розв'язується методом Бернуллі.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2}{y}$.

Розв'язування. Подане рівняння – рівняння Бернуллі.

Позначимо $y = u \cdot v, \ \ y' = u'v + v'u$

$$u'v + v'u - \frac{u \cdot v}{x} = \frac{x^2}{u \cdot v} \qquad u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = \frac{x^2}{u \cdot v}.$$

Розіб'ємо це рівняння на два рівняння:

1. $v' - \dfrac{v}{x} = 0 \qquad v' = \dfrac{v}{x} \qquad \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v}{x} \qquad \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x} \qquad v = x$

2. $u'v = \dfrac{x^2}{u \cdot v} \qquad u' = \dfrac{x^2}{u \cdot v^2} \qquad u' = \dfrac{x^2}{u \cdot x^2} \qquad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{u} \qquad udu = dx$

$$\frac{u^2}{2} = x + C \qquad u = \sqrt{2(x + C)} \qquad y = x\sqrt{2(x + C)}$$

Розглянуті найпростіші типи і методи розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку, які допускають розв'язки в квадратурах (тобто такі, що інтегруються в кінцевому вигляді), подамо у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1 – Типи і методи розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку

Ч.ч.	*Тип (вигляд) рівняння*	*Метод розв'язування*
1.	Найпростіші $y' = f(x)$ $M(x)dx + N(y)dy = 0$	Проінтегрувати
2.	З відокремлюваними змінними $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	Відокремити змінні і проінтегрувати Замінити y' на $\dfrac{dy}{dx}$, відокремити змінні і про інтегрувати
3.	Однорідні $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right); \quad y' = f(x, y),$ де $f(x, y)$ – функція нульового виміру $f(\kappa x; \kappa y) = f(x, y)$	Використати підстановку $y = u x, \ \ y' = u'x + u$
4.	Лінійні $y' + p(x)y = Q(x)$	Використати підстановку $y = u \cdot v \ \ y' = u'v + v'u$
5.	Рівняння Бернуллі $y' + p(x)y = y^n Q(x)$ де $n \neq 0$ і $n \neq 1$	Використати підстановку $y = u \cdot v$ $y' = u'v + v'u,$ або $z = y^{1-n}$ $z' = \dfrac{1-n}{y^n} \cdot y'$

2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

2.1 Диференціальні рівняння другого порядку

Загальний вигляд диференціальних рівнянь другого порядку, розв'язаного відносно старшої похідної,

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{7}$$

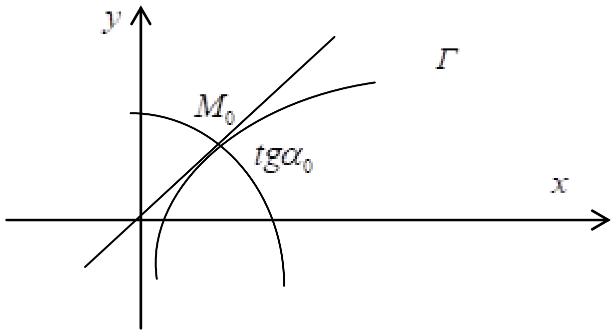

Рисунок 4 – Пучок кривих

Загальний розв'язок цього рівняння

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \tag{8}$$

має дві незалежні довільні сталі C_1 та C_2. Геометрично (8) є деякою сукупністю інтегральних кривих, яка залежить від параметрів C_1 та C_2. В загальному, через кожну точку площини Oxy проходить пучок інтегральних кривих. Тому для того, щоб серед них виділити одну криву Г потрібно вказати т. M_0, через яку проходить шукана крива Г, вказати напрямок, в якому ця крива проходить через т. M_0. Для цього задають точку, де α – кут, утворений дотичною до цієї кривої в т. M_0 з додатним напрямком осі Ox. Переходимо до початкових умов

$$y_0 = y(x_0),\ y_0' = y'(x_0), \tag{9}$$

використовуючи (8), маємо

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y_0' &= \varphi'(x_0, C_1, C_2) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Із цієї системи знаходимо C_1, C_2, тобто, розв'зуємо *задачу Коші*: знайти частинний розв'язок $y=\varphi(x_0)$, що задовольняє рівняння (7) та початкові умови (9).

Оскільки розв'язок конкретної фізичної задачі має бути однозначним, то, як правило, разом з диференціальними рівняннями наводяться ті чи інші початкові умови.

Наприклад, основне рівняння динаміки записується диференціальним рівнянням другого порядку. Нехай матеріальна точка масою m рухається вздовж осі Ox під дією змінної сили F, якщо a – прискорення цієї точки, то, згідно з законом Ньютона, $F = ma$.

В загальному випадку сила F залежить від часу t, координати x та швидкості цієї точки $\frac{dx}{dt}$, тобто, $F=F(t,x,\frac{dx}{dt})$, але прискорення $a=\frac{d^2x}{dt^2}$, тоді $m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t,x,\frac{dx}{dt})$. Щоб повністю описати рух точки, потрібно додатково задати початкове її положення та початкову швидкість $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=x'_0$, тобто, початкові умови.

2.2 Типи диференціальних рівнянь другого порядку, що інтегруються

В загальному випадку диференціальне рівняня другого порядку може бути і не розв'язаним в кінцевому вигляді. Розглянемо деякі найпростіші випадки, коли рівняння розв'язують застосуванням операцій невизначеного інтеграла.

Диференціальне рівняння вигляду $y^n = f(x)$ розв'язують інтегруванням n разів. Розв'язок має n сталих C_i $i=1,\overline{n}$.

Нехай $y''=f(x)$, інтегруючи, маємо $y'=\int f(x)dx+C_1=F(x)$. Інтегруючи ще раз отримаємо $y=\int F(x)dx+C_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $y''=\sin 3x$, яке задовольняє початкові умови $y_0=0$, $y'_0=1$.

Розв'язування. Маємо $y'=\int \sin 3x dx=-\frac{1}{3}\cos 3x+C_1=-\frac{1}{3}\cos 3x+C_1$, тоді $y=-\frac{1}{3}\int \cos 3x dx+\int C_1 dx=-\frac{1}{9}\sin 3x+C_1x+C_2$.

Використовуючи початкові умови визначимо C_1 та C_2.

1). Рівняння вигляду $y'' = f(y)$ (явно не містить змінної x) розв'язують заміною $y' = p = p(y)$, тоді $y'' = (p(y))' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'$.

Цією підстановкою згадане рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $y'' = y^{-3}$.

Розв'язування. Рівняння не містить змінної x *і* y', нехай $y' = p(y)$, тоді $y'' = p \cdot p'$, маємо рівняння першого порядку $p \cdot p' = y^{-3}$ $\quad p' = \frac{1}{py^3}$,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{py^3} \qquad pdp = y^{-3}dy \to \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2} \qquad p^2 = C_1 - y^2$$

$$p = \pm\frac{\sqrt{C_1y^2 - 1}}{y} \to \frac{dy}{dt} = \pm\frac{\sqrt{C_1y^2 - 1}}{y} \to \frac{ydy}{\sqrt{C_1y^2 - 1}} = \pm dx$$

$$\frac{1}{2}2C_1y(C_1y^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}dy = \pm C_1dx$$

$$\sqrt{C_1y^2 - 1} = \pm(C_1x + C_2) \to C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$$

2) Рівняння вигляду $y'' = f(y')$ (явно не містить змінної x *та* y) розв'язують заміною $y' = p(x),\ y'' = \frac{dp}{dx},\ y'' = p'$, яка зводить це рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 15. Розв'язати рівняння $2y'y'' = 1$, яке задовольняє початкові умови $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

Розв'язування. Рівняння не містить змінних x і y, нехай $y' = p(x)$, $y'' = p'$, отримаємо рівняння першого порядку $2pp' = 1$ $\qquad p' = \frac{1}{2p}$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2p} \to 2pdp = dx$$

$$p^2 = x + C_1$$

Для визначення C_1 використаємо початкову умову $y'(1) = 1$. Маємо $p(1) = 1 \to 1 = 1 + C_1$ $\qquad C_1 = 0$, тоді $\quad p^2 = x \qquad p = \sqrt{x}$;

$p=\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$ $\quad dy=x^{\frac{1}{2}}dx$ $\quad y=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{3}+C_2$. Знайдемо C_2 з умови $y(1)=0$. Маємо $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_{x=1}+C_2=0$ $\quad -\dfrac{2}{3}=C_2$, тоді частинний розв’язок $y=\dfrac{2}{3}(x\sqrt{x}-1)$.

3) Нехай права частина рівняння явно не містить *x,* тобто, рівняння має вигляд $y''=f(y,y')$. Вводимо заміну $y'=p(y)$, тоді $y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\cdot p'$, отримаємо диференціальне рівняння першого порядку $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$, де роль незалежної змінної відіграє *y*.

Приклад 16. Розв’язати рівняння $y''=\dfrac{y'}{y}$.

Розв’язування. Рівняння не містить змінної *x*. Нехай $y'=p(y)$

$$y''=p\cdot p'\to p\cdot p'=\frac{p^2}{y}\qquad p(p'-\frac{p}{y})=0$$

а) $p=0$ $\quad y'=0$ $y=const$

б) $\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{p}{y}$ $\quad \dfrac{dp}{p}=\dfrac{dy}{y}$ $\quad \ln p=\ln yc$ $\quad p=cy$

$p=\dfrac{dy}{dx}=ey$ $\quad \dfrac{dy}{y}=cdx$ $\quad \ln y=cx+C_1$ $\quad y=e^{xc+C_1}=C_1e^{cx}$.

4) Нехай права частина рівняння явно не містить у, тобто рівняння вигляду $y''=f(x,y')$ розв’язують заміною $y'=p(x),\, y''=p'(x)$.

Отримаємо рівняння першого порядку $p'=f(x,p)$.

Приклад 17. Розв’язати рівняння $xy''=2x-y'$, яке задовольняє початкові умови $y(1)=\dfrac{1}{2}, y'(1)=1$.

Розв’язування. Рівняння не містить змінної *y*, нехай $y'=p$ $\quad y''=p'$. Тоді $xp'=2x-p$ $\quad p'=\dfrac{2x-p}{x}$ – однорідне рівняння.

Введемо заміну $\dfrac{p}{x}=u$ $\quad p=ux$ $\quad p'=u'x+ux$ $\quad y'=p(y)$.

Тоді $y''=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\cdot p'$.

$u' = \frac{2(1-u)}{x}$ $\frac{du}{dx} = \frac{2(1-u)}{x}$ $\frac{du}{1-u} = 2\frac{dx}{x}$ $\frac{du}{u-1} = -2\frac{dx}{x}$, інтегруючи, маємо $\ln|u-1| = -2\ln|x| + \ln C$, тоді $u - 1 = \frac{C}{x^2}$. Повернемось до заміни і отримаємо $\frac{p}{x} = 1 + \frac{C}{x^2}$ $p = x + \frac{C}{x}$.

З початкових умов знайдемо C *і* C_1 $y'(1) = 1$ $1 = 1 + \frac{C}{1} \to C = 0$ $p = y' - x$ $dy = xdx$ $y = \frac{x^2}{2} + C_1$. Знайдемо C_1: $y(1) = \frac{1}{2}$, тоді $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_1$ і $C_1 = 0$.

Частинний розв’язок рівняння – $y = \frac{x^2}{2}$.

Розглянуті випадки розв’язування диференціальних рівнянь, які допускають зниження порядку, подамо у вигляді таблиці 2.

Таблиця 2 – Типи і методи розв’язання диференціальних рівнянь вищих порядків , які допускають зниження порядку

Ч.ч.	Тип (вигляд) рівняння	Метод розв’язування
1	$y^{(n)} = f(x)$	Послідовно проінтегрувати n разів. Відповідь має n сталих C_i, $i = 1, n$.
2	Диференціальне рівняння не містить явно шукану функцію y: $F(x; y'; y'') = 0$, $F(y', y'') = 0$.	Використати підстановку $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ і звести до диференціального рівняння першого порядку.
3	Диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну x: $F(y, y', y'') = 0$ $F(y, y'') = 0$	Використати підстановку $y' = p(y)$ $y'' = p(y) \cdot p'(y)$ і звести до диференціального рівняння першого порядку.

3 ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ТА ВИЩИХ ПОРЯДКІВ (Л.О.Д.Р.)

3.1 Означення та основні властивості л.о.д.р.

Означення. Диференціальне рівняння n-го порядку називають лінійним, якщо воно першого степеня відносно шуканої функції y та її похідних $y', y'', ..., y^n (y^{(n)} \neq 0),$ тобто рівняння вигляду $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{n-1} + ... + a_{n-1} y + a_n y = f(x),$ де a_i – функції чи сталі, $a_0 \neq 0$ для всіх x, для яких розглядають рівняння, $i = 0, 1, ... n$. Якщо $f(x) \equiv 0,$ то лінійне рівняння називають *однорідним*. Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називають *неоднорідним або рівнянням з правою частиною.*

Основні властивості лінійних однорідних рівнянь.

Теорема. Якщо y_1 та y_2 – два частинні розв'язки лінійного рівняння другого порядку

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{11}$$

то $y_1 + y_2$ теж розв'язок цього рівняння.

Доведення. З умови y_1 – розв'язок (11), тоді $y_1'' + a_1 y' + a_2 y_1 = 0$ і y_2 розв'язок (11), отже, $y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$. Додамо останні дві рівності, тоді

$y_1'' + y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_1 + a_2 y_2 = 0,$

$y_1'' + y_2'' + a_1 (y_1' + y_2') + a_2 (y_1 + y_2) = 0,$

як бачимо, $y_1 + y_2$ – розв'язок рівняння (11).

Теорема. Якщо y_1 – розв'язок диференціального рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (11) і $C = const$, то Cy_1 також розв'язок цього рівняння.

Доведення. Оскільки Cy_1 розв'язок рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то $Cy_1'' + a_1 Cy_1' + a_2 Cy_1 = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = 0.$

Означення. Два розв'язки рівняння (11) y_1 та y_2 називають лінійно незалежними на відрізку $[a, b]$, якщо їх відношення на цьому відрізку не є сталою величиною, тобто, $\frac{y_1}{y_2} \neq const$. В протилежному випадку розв'язки називають лінійно залежними, тобто, існує число λ, що $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, тоді $y_1 = \lambda y_2$.

Систему лінійно незалежних розв'язків рівняння (11) називають *фундаментальною системою розв'язків.*

Приклад 18. Розв'язками диференціального рівняння $y'' - y = 0$ є функції $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$. Функції e^x та e^{-x} – лінійно незалежні $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq const$, а функції e^x та $3e^x$ – лінійно залежні, оскільки $\frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3} = const$.

Означення. Якщо y_1 та y_2 – функції від *x*, то визначник W(y_1, y_2)= $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ називають *визначником Вронського або вронскіаном* для цих функцій.

Теорема. Якщо функції y_1 та y_2 лінійно залежні на [*a*,*b*], то визначник Вронського на цьому проміжку тотожно дорівнює нулю.

Доведення. Оскільки функції y_1 та y_2 лінійно залежні, то $y_2 = \lambda y_1$, $\lambda = const$

Визначник Вронського $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_2 \\ y_1' & \lambda y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$

Теорема: Якщо розв'язки y_1 та y_2 рівняння (11) є лінійно незалежними на [*a*, *b*], то визначник Вронського W, складений для цих розв'язків, не перетворюється в нуль ні в одній з точок вказаного проміжку.

Теорема. Якщо y_1 та y_2 – два лінійно незалежні розв'язки рівняння (11), то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1, C_2 довільні сталі, його загальний розв'язок.

Доведення. Із попередніх теорем випливає, що $C_1 y_1 + C_2 y_2$ є розв'язком рівняння (11) для будь-яких C_1, C_2.

Тепер покажемо, що для будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0$, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0$ можна підібрати такі значення C_1, C_2, щоб відповідний частинний розв'язок $C_1 y_1 + C_2 y_2$ задовольняв початкові умови.

Підставимо початкові умови в загальний розв'язок $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, маємо:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' \end{cases}.$$

З цієї системи можна визначити C_1 та C_2, оскільки її визначник $\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} \neq 0$ як визначник Вронського, складений для незалежних розв'язків y_1 та y_2.

Якщо частинні розв'язки y_1 та y_2 лінійно залежні, то розв'язок $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ не буде загальним, тому що $y_2 = \alpha y_1$ тоді $y = C_1 y_1 + c_2 \lambda y_1 = c y_1$, де $C = C_1 + \lambda C_2$. Розв'язок має тільки одну сталу С і не є загальним.

3.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (12)$$

де $p, q - const$

Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння достатньо знайти два лінійно незалежних його частинних розв'язки. Частинні розв'язки запишемо у вигляді $y = e^{kx}$, де k = const, тоді $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$. Якщо підставити їх в (12), отримаємо $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0,$ то $k^2 + pk + q = 0$, якщо k буде задовольняти це рівняння, то e^{kx} буде розв'язком (12).

Рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (13)$$

називають *характеристичним рівнянням* рівняння (12). Рівняння (13) має два корені k_1 та k_2, де $k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ і $k_2 = -\frac{p^2}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Можливі такі випадки:

1) $k_1 \neq k_2$ – дійсні різні числа;
2) $k_1 = k_2$ – дійсні рівні числа;
3) k_1, k_2 – комплексні числа.

Розглянемо кожен із випадків окремо.

1) *Корені* характеристичного *рівняння дійсні різні числа* $k_1 \neq k_2$.

В цьому випадку частинними розв'язками будуть $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$.

Ці розв'язки лінійно незалежні $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)} \neq const$, тоді загальний розв'язок $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Приклад 19. Розв'язати рівняння $y'' + y' - 2y = 0.$

Розв'язування. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння $y'' + y' - 2y = 0 \rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \quad k_1 = -2 \qquad k_2 = 1 \qquad y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$

За коренями характеристичного рівняння запишемо його загальний розв'язок.

2) *Корені характеристичного рівняння дійсні рівні числа* $k_1 = k_2$.

Один частинний розв'язок $y_1 = e^{k_1 x}$. Потрібно знайти другий частинний розв'язок, лінійно незалежний з першим (функція $e^{k_2 x} \equiv e^{k_1 x}$ і не може бути другим *частинним* розв'язком.). Будемо шукати y_2 в вигляді $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$. Знайдемо *u* (*x*). *Маємо*

$$y_2' = u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u' + k_1u)$$

$$y_2'' = u''e^{k_1x} + k_1e^{k_1x}u' + u'k_1e^{k_1x} + k_1{}^2ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u'' + 2k_1u' + k^2{}_{11}u)$$

Тоді $y'' + py + qy = 0 \rightarrow$
$e^{k_1x}(u'' + 2k_1u' + k_1{}^2u + pu' + pk_1u + qu) \; = e^{k_1x}(u'' + u'(2k_1 + p) + u(k_1^2 + pk + q)) = 0.$

Оскільки k_1 – корінь характеристичного рівняння, то $k_1{}^2 + pk_1 + q = 0,$ $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2},$ то $2k_1 + p = 0,$ тоді $e^{k_1x}u'' = 0$ $\; u'' = 0 \rightarrow u' = A \quad u = Ax + B$, в цьому випадку можна вважати *A = 1 B = 0*, тоді *u = x* і $y_2 = xe^{k_1x} \rightarrow \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1x}}{xe^{k_1x}} = x \neq const$ лінійно незалежні і $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$ $y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}.$

Приклад 20. Розв’язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Розв’язання. Складемо і розв’яжемо характеристичне рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0 \;\; \rightarrow k^2 - 4k + 4 = 0 \qquad (k-2)^2 = 0 \quad k_{1.2} = 2 \qquad y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$

За коренями характеристичного рівняння запишемо його загальний розв’язок.

Задамо початкові умови *y(0) = 1,* $y'(0) = 0$ і обчислимо $C_1, C_2.$ Маємо $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} \quad y(0) = C_1 = 1 \;\; y'(0) = 2C_1 + C_2 = 0 \;\; C_2 = -2C_1 = -2.$

Тоді частинний розв’язок заданого рівняння $y = e^{2x} - 2xe^{2x}.$

3) *Корені характеристичного рівняння комплексні* $k_1 = \alpha + i\beta,\; k_2 = \alpha - i\beta,$ де $\alpha = -\dfrac{p}{2},\; \beta = \sqrt{\dfrac{p^2}{4} + q}.$

Частинні розв’язки $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x},$ $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x},$ $y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$ $y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$ – це комплексні функції дійсного аргумента *x*. В загальному випадку, якщо функція $y = u(x) + iv(x)$ задовольняє рівняння (12), то це рівняння задовольняють дійсні функції *u(x)* та *v(x)*. Частинними розв’язками рівняння (12) будуть дійсні функції $\overline{y_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ - *u(x)* та $\overline{y_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$ - *v(x)*. Вони лінійно незалежні, і загальний розв’язок рівняння (12) в цьому випадку записують у вигляді

$$y = C_1\overline{y}_1 + C_2\overline{y_2} = = e^{2x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Приклад 20. Розв'язати рівняння $y'' + 2y + 5 = 0.$

Розв’язування. Складемо і розв’яжемо характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0 \qquad k_1 = -1 + 2i \qquad k_2 = -1 - 2i$ Отримаємо загальний розвязок диференціального рівняння:

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x),\;\; \alpha = -1,\;\; \beta = 2$$

Структуру фундаментальної системи розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку подамо таблицею 3.

Таблиця 3 – Структура фундаментальної системи розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

Ч.ч.	Корені характеристичного рівняння	Частинні розв'язки	Загальний розв'язок
1	$\kappa_1 \neq \kappa_2$ – дійсні числа	$y_1 = e^{\kappa_1 x}$ $y_2 = e^{\kappa_2 x}$	$y = c_1 e^{\kappa_1 x} + c_2 e^{\kappa_2 x}$
2	$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ – дійсні числа	$y_1 = e^{\kappa x}$ $y_2 = e^{\kappa x}$	$y = c_1 e^{\kappa x} + x c_2 e^{\kappa x}$
3	$\kappa_{1,2} = \lambda \pm \beta i$ – прості спряжені комплексні корені	$y_1 = e^{\lambda x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\lambda x} \sin \beta x$	$y = e^{\lambda x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.

3.3 Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо Лінійні однорідне диференціальне рівняння *n-го* порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y^1 + a_n y = 0. \qquad (14)$$

Теорема. Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ є лінійно незалежними розв'язками (14), то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ – його загальний розв'язок, $C_i = const$, $i = \overline{1, n}$.

Алгоритм розв'язування рівняння (14)

Скласти характеристичне рівняння $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

Знайти його корені $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

За характером коренів записати частинні розв'язки:

а) кожному дійсному однократному кореню k відповідає частинний розв'язок e^{kx},

б) кожній парі комплесних спряжених коренів $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ відповідає два частинних розв'язки $e^{\alpha x} \cos \beta x$ та $e^{\alpha x} \sin \beta x$,

в) кожному дійсному кореню кратності r відповідає r лінійно-незалежних частинних розв'язків: $e^{kx}, xe^{kxx}, ..., x^{r-1} e^{kx}$.

Знаючи $y_1, y_2, ..., y_n$ записати загальний розв'язок $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$

Приклад 21. Розв'язати рівняння $y^{IV} - y = 0$.

Розв'язування. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння $y^{IV} - y = 0 \quad k^4 - 1 = 0 \quad k = \pm 1 \quad k = \pm i$.

За коренями характеристичного рівняння запишемо його загальний розв'язок $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

4 НЕОДНОРІДНІ ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4.1 Неоднорідні лінійні рівняння другого порядку з довільними коефіцієнтами

Розглянемо неоднорідне лінійне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{15}$$

де a_1, a_2 – довільні. Структура загального розв'язку рівняння (15) визначається нижчевказаною теоремою.

Теорема. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (15) дорівнює сумі будь-якого частинного розв'язку цього рівняння $y_{ч.н.}$ та загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (12), тобто, $y = \overline{y} + y_{ч.н}$.

Таким чином, якщо відомий загальний розв'язок $\bar{y}$ рівняння (12), то основна задача при інтегруванні рівняння (15) полягає у знаходженні будь-якого його частинного розв'язку $y_{ч.н}$. Розглянемо загальний метод знаходження $y_{ч.н}$.

4.2 Метод варіації довільних сталих (Метод Лагранжа)

Запишемо загальний розв'язок рівняння (12)

$$y = yc_1 y_1 + c_2 y_2 = 0. \tag{16}$$

Будемо шукати частинний розв'язок $y_{ч.н.}$ для рівняння (15) в формі (16), розглядаючи c_1 та c_2 поки як невідомі функції від *x*. Продиференціюємо (16), отримаємо $y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$. Підберемо шукані функції c_1 та c_2 так, щоб $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$, тоді $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$.

Продиференціюємо цей вираз, отримаємо $y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1''$

$y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$

Підставимо y, y', y'' в рівняння (15), маємо

$c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x),$

$c_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + c_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x),$

звідки $c_1' \, y_1' \, + c_2' \, y_2' \, = f(x)$. Таким чином, (16) є розв'язком (15), якщо функції c_1 та c_2 задовольняють систему $\begin{cases} c_1' \, y_1 + c_2' \, y_2 = 0 \\ c_1' \, y_1' \, + c_2' \, y_2' \, = f(x) \end{cases}$.

Визначник цієї системи не дорівнює нулю (як визначник Вронського для лінійних незалежних розв'язків y_1 та y_2), тому розв'яжемо систему та знайдемо $c_1' = f_1(x)$ та $c_2' = f_2(x)$, тоді $c_1 = \int f_1(x)dx + \overline{c}_1$ $c_2 = \int f_2(x)dx + \overline{c}_2$, c_1 та c_2 – константи інтегрування. Підставляючи ці значення в (16) знаходимо загальний розв'язок рівняння (15).

Приклад 22. Розв'язати рівняння $y'' - \dfrac{y'}{x} = x.$

Розв'язування. 1) Розв`яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$

$y'' = \dfrac{y'}{x}$ $\quad y' = p, \quad y'' = p' \quad p' = \dfrac{dp}{dx} \quad \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p}{x}$, інтегруючи, маємо:

$$\ln p = \ln c_1 x \quad p = c_1 x \quad \to \quad y' = c_1 x \to y = \frac{c_1 x^2}{2} + c_2$$

$$y = c_1 x^2 + c_2, \quad \text{де} \quad c_1 = \frac{c_1}{2} \quad \text{тобто}, \quad y_1 = x^2, \quad y_2 = 1.$$

2) Запишемо систему, з якої визначимо c_1 і c_2

$$\begin{cases} c_1' \, x \, + c_2' \, \cdot 1 = 0 \\ 2c_1' \, x + c_2' \, \cdot 0 = x \to c_1' \, = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad c_2' \, = -\frac{1}{2} x^2$$

$$3)\, c_1(x) = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x + \overline{c}_1 \qquad c_2(x) = -\frac{1}{2}\int x^2 dx = -\frac{x^3}{6} + \overline{c}_2$$

Теорема. Частинний розв'язок рівняння $y'' \, + a_1 y' \, + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)$ дорівнює сумі

$$y_{ч.н.} = y_{1.ч.н.} + y_{2.ч.н.}\,,$$

де $y_{1.чн.}$ та $y_{2.чн.}$ є, відповідно, частинними розв'язками рівнянь $y'' \, + a_1 y' + a_2 y = f_1(x)$ та $y'' \, + a_1 y' \, + a_2 y = f_2(x)$.

4.3 Неоднорідні лінійні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{17}$$

де p, q – дійсні числа.

Для рівнянь зі сталими коефіцієнтами частинний розв'язок інколи можна знайти не використовуючи метод варіації.

Розглянемо два випадки для рівняння (17).

1) Нехай права частина рівняння (17) – це добуток показникової функції на многочлен, тобто, $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n.

Тоді *можливі* частинні випадки:

а) <u>число α не є коренем характеристичного рівняння</u> $k^2 + pk + q = 0$.

В цьому випадку частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = Q_n(x)e^{\alpha x}$.

Приклад 23. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 3y = x$.

Розв'язування. Структура загального розв'язку $y = \bar{y} + y_{ч.н}$, де права частина це $f(x) = P_1(x)e^x$.

1) Знайдемо розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння.

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \qquad k^2 + 4k + 3 = 0 \qquad k_1 = -3 \qquad k_2 = -1 \qquad \bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$$

2) Знайдемо частинний розв'язок $y_{ч.н}$ цього диференціального рівняння

$$\alpha = 0 \neq k_1 \neq k_2 \Rightarrow y_{ч.н} = Ax + B \qquad y'_{ч.н} = A \qquad y''_{ч.н} = 0$$

$$4A + 3Ax + 3B = x \qquad \begin{cases} 3A = 1 \\ 4A + 3B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = -\dfrac{4}{9} \end{cases} \qquad y_{ч.н} = \frac{x}{3} - \frac{4}{9}$$

Загальний розв'язок $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{9}$.

$$y'' + 9y = (x^2 + 1) \cdot e^{3x}$$

Приклад 24. Розв'язати рівняння $f(x) = P(x) \cdot e^{3x}$

$$y = \bar{y} + y_{ч.н}$$

Розв'язання. Структура загального розв'язку $y = \bar{y} + y_{ч.н}$.

1) Знайдемо розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння

$$y'' + 9 = 0 \qquad k^2 + 9 = 0 \qquad k_{1,2} = \pm 3i \qquad \bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

2) Знайдемо частинний розв'язок $y_{ч.н}$ цього диференціального рівняння $\alpha = 3 \neq k_1 \neq k_2$ (характеристичне число не збігається з коренями характеристичного рівняння).

$$y_{ч.н} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

$$y'_{ч.н} = 3e^{3x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{3x}(2Ax + B) =$$

$$= e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 3C + 2Ax + B) = e^{3x}(3Ax^2 + x(3B + 2A) + (B + 3C))$$

$y''_{ч.н} = e^{3x}(3Ax^2 + x(3B+2A) + (B+3C) + e^{3x}(6A+3B+2A)) =$

$= e^{3x}(9Ax^2 + x(9B+6A) + 3B + 9C + 6Ax + 3B + 2A) =$

$= e^{3x}(9Ax^2 + x(9B+12A) + 6B + 9C + 2A + e^{3x}(9Ax^2 + 9Bx + 9C) = (x^2+1)e^{3x})$

Скорочуючи на e^{3x} та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x маємо:

$$\begin{cases} 18A = 1 \\ 12A + 18B = 0 \\ 2A + 6B + 18C = 1 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{18}, B = -\frac{1}{27}, C = \frac{5}{81}$$

Частинний розв'язок $y_{ч.н} = \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}$.

Загальний розв'язок $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}$.

б) Число α простий (однократний) корінь характеристичного рівняння, тоді $y_{ч.н.} = xQ_n(x)\cdot e^{\alpha x}$.

Приклад 25. Розв'язати рівняння $y'' - 7y' + 6 = (x-2)^2 e^x$.

Розв'язування. Структура загального розв'язку $y = \overline{y} + y_{ч.н}$, $f(x) = P_1(x)e^x$

1) Знайдемо розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння

$y'' - 7y' + 6 = 0 \qquad k^2 - 7k + 6 = 0 \qquad k_1 = 1 \;\; k_2 = 6 \qquad \overline{y} = C_1e^x + C_2e^{6x}$

2) Знайдемо частинний розв'язок $y_{ч.н}$ вказаного диференціального рівняння $\alpha = 1 \neq k_2$, але $\alpha = 1 = k$.

$y_{ч.н} = x(Ax+B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$

$y'_{ч.н} = (2Ax+B)e^x + e^x(Ax^2+Bx) = e^x(Ax^2 + x(B+2A) + B)$

$y''_{ч.н} = e^x(Ax^2 + x(B+2A) + B) + e^x(2Ax + 2A + B)$

$(Ax^2 + x(B+4A) + 2A + 2B) - 7(Ax^2 + x(B+2A) + B) + 6(Ax^2 + Bx) = (x-2)$

$$-10Ax - 5B + 2A = x - 2 \rightarrow \begin{cases} -10A = 1 \\ 2A - 5B = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{10} \\ B = \frac{9}{25} \end{cases} \qquad y_{ч.н} = (-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x)e^x$$

Загальний розв'язок $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + (-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x)e^x$

в) Число α – двократний корінь характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{ч.н} = x^2Q(x)e^{\alpha x}$

Приклад 26. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

Роз'язування. Структура загального розв'язку $y=\bar{y}+y_{ч.н}$, де права частина $f(x)=P_0(x)e^{-1x}$.

1) Знайдемо розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння

$k^2+2k+1=0 \quad (k+1)^2=0 \quad k_{1,2}=-1$ – *корінь характеристичного рівняння*

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$$

2) Знайдемо частинний розв'язок $y_{ч.н}$ цього диференціального рівняння $\alpha=-1=k_1=k_2$ – двократний корінь

$y_{ч.н}=x^2Ae^{-x} \quad y'_{ч.н}=(2Ax-Ax^2)e^{-x} \quad y''_{ч.н}=(2A-4Ax+Ax^2)e^{-x}$

$(2A-4Ax+Ax^2)+2(2Ax-Ax^2)+Ax^2=1 \qquad 2A=1 \qquad A=\frac{1}{2} \qquad y_{чн}=\frac{1}{2}x^2e^{-x}$

Загальний розв'язок $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}$

Задамо початкові умови $y(0)=1, y'(0)=0$, знайдемо C_1, C_2

$y(0)=C_1=1 \quad y'=-C_1e^{-x}+C_2e^{-x}-C_2xe^{-x}+xe^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-x} \qquad y'(0)=-C_1+C_2$

$$\begin{cases} C_1=1 \\ -C_1+C_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=1 \end{cases} \qquad y=e^{-x}+xe^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

Нехай *права частина рівняння* $y''+py'+gy=f(x)$ $f(x)=e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x)$, *де P(x) та Q(x) – многочлени, тоді форма частинного розв'язку визначається так:*

а) Якщо число $\alpha+\beta i$ не корінь характеристичного рівняння, то $y_{ч.н}=y^{\alpha(x)}(U(x)\cos\beta x+V(x)\sin\beta x)$, де *U(x) та V(x)* – многочлени, степінь яких дорівнює найвищому степеню многочленів *P(x) та Q(x).*

б) Якщо число $\alpha+\beta i$ корінь характеристичного рівняння, то $y_{ч.н}=xe^{\alpha(x)}(U(x)\cos\beta x+V(x)\sin\beta(x))$.

Вказані форми $y_{ч.н}$ зберігаються і в тому випадку, коли в правій частині рівняння один із многочленів $P(x)\equiv 0$ або $Q(x)\equiv 0$, тобто права частина, має вигляд $P(x)e^{\alpha(x)}\cos\beta x$ або $Q(x)e^{\alpha(x)}\sin\beta x$.

Розглянемо важливий частинний випадок. Нехай права частина $f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x$, де *M, N – const.*

Тоді, якщо число βi не корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок вказаного рівняння запишеться у вигляді

$y_{чн} = A\cos\beta x + B\sin\beta x,$ якщо βi корінь характеристичного рівняння, тоді $y_{чн} = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$

Приклад 27. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x,$ яке задовольняє початкові умови $y(0) = y'(0) = 0.$

Розв'язання. Структура загального розв'язку $y = \bar{y} + y_{ч.н}$

1) Знайдемо розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$

$$k^2 + 2k + 5 = 0 \qquad \begin{array}{l} k_{1,2} = -1 \pm 2i - \textit{корені характеристичного рівняння} \\ \bar{y} = e^{-x}(c_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \end{array}$$

2) Знайдемо частинний розв'язок $y_{ч.н}$ вказаного диференціального рівняння, характеристичне число: $\alpha + \beta i = 0 + i$ не є коренем характеристичного рівняння.

$$y_{ч.н} = A\cos x + B\sin x \qquad y'_{ч.н} = -A\sin x + B\cos x \qquad y''_{ч.н} = -A\cos x - B\sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = 2\cos x \qquad \begin{cases} 4A + 2B = 2 \\ -2A + 4B = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{2}{5}, \qquad B = \frac{1}{5}$$

$$y_{ч.н} = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x \qquad y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

$$y' = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) - \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x$$

Використаємо початкові умови і визначимо C_1 *і* C_2.

$$\begin{array}{lll} y(0) = 0 \to & 0 = C_1 + \dfrac{2}{5} & C_1 = -\dfrac{2}{5} \\ y'(0) = 0 \to & 0 = -C_1 & C_2 = \dfrac{1}{2}C_1 \end{array} \qquad C_2 - \frac{1}{5}$$

Загальний розв'язок $\quad y = e^{-x}(-\frac{2}{5}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$

Приклад 28. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = \cos 2x.$

Структура загального розв'язку $y = \bar{y} + y_{ч.н}$

1) Знайдемо частинний розв'язок $y_{ч.н}$ цього диференціального рівняння

$$\begin{array}{ll} y'' + 4y = 0 & k = \pm 2 \\ k^2 + 4 = 0 & \bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \end{array}$$

2) Розв’язок рівняння (17) можна знайти методом невизначених коефіцієнтів, якщо права частина має вигляд згідно з таблицею 4.

Знайдемо частинний розв’язок $y_{ч.н}$ наведеного диференціального рівняння $\alpha+\beta i=2i=k_1$ (корінь характеристичного рівняння збігається з характеристичним числом) $y_{ч.н}=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

$$y'_{ч.н}=2x(-A\sin 2x+B\cos 2x)+(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

$$y''_{ч.н}=-4x(-A\cos 2x-B\sin 2x)+4(-A\sin 2x+B\cos 2x)$$

$$-4x(-A\cos 2x-B\sin 2x)+4(-A\sin 2x+Bcis\,2x)+4x(A\cos 2x+B\sin 2x)=\cos 2x$$

Прирівнюючи коефіцієнти, що знаходяться біля функцій cos 2x та sin 2x, отримаємо $\begin{cases} B=\dfrac{1}{4} \\ A=0 \end{cases}.$

Загальний розв’язок $y_{ч.н}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x.$

Таблиця 4 – Структура частинного розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

Ч.ч.	Вигляд правої частини диференціального рівняння $f(x)$	Корені характеристичного рівняння $\kappa_1\kappa_2$	Вигляд частинного розв’язку $y_{ч.н}$
1	$f(x)=a\,e^{\lambda x}$, де $a-const$	а) $\kappa_1\neq\kappa_2\neq\lambda$ б) $\kappa_1=\lambda$ або $\kappa_2=\lambda$ в) $\kappa_1=\kappa_2=\lambda$	а) $y_{ч.н}=Ae^{\lambda x}$ б) $y_{ч.н}=Axe^{\lambda x}$ в) $y_{ч.н}=Ax^2e^{\lambda x}$
2	$f(x)=axe^{\lambda x}$ або $f(x)=(ax+b)e^{\lambda x}$, де $a,b-const$	а) $\kappa_1\neq\kappa_2\neq\lambda$ б) $\kappa_1\neq\lambda$ або $\kappa_2=\lambda$ в) $\kappa_1=\kappa_2=\lambda$	а) $y_{ч.н}=(Ax+B)e^{\lambda x}$ б) $y_{ч.н}=(Ax+B)x\,e^{\lambda x}$ в) $y_{ч.н}=(Ax+B)x^2\,e^{\lambda x}$
3	$f(x)=ax^2e^{\lambda x}$ або $f(x)=(ax^2+bx)e^{\lambda x}$ або $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{\lambda x}$	а) $\kappa_1\neq\kappa_2\neq\lambda$ б) $\kappa_1\neq\lambda$ або $\kappa_2=\lambda$ в) $\kappa_1=\kappa_2=\lambda$	а) $y_{ч.н}=(Ax^2+Bx+C)e^{\lambda x}$ б) $y_{ч.н}=(Ax^2+Bx+C)xe^{\lambda x}$ в) $y_{ч.н}=(Ax^2+Bx+C)x^2e^{\lambda x}$
4	$f(x)=a\cos\beta x\,e^{\lambda x}$ $f(x)=b\sin\beta x\,e^{\lambda x}$ $f(x)=(a\cos\beta x+b\sin\beta x)e^{\lambda x}$	а) $\kappa_1\neq\kappa_2\neq\lambda+i\beta$ б) $\kappa_1\neq\lambda+i\beta$ або $\kappa_2\neq\lambda+i\beta$	а) $y_{ч.н}=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\lambda x}$ б) $y_{ч.н}=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)xe^{\lambda x}$

Якщо $e^{\alpha x}$ відсутнє в $f(x)$ то його не записують і в $y_{ч.н.}$.

Приклад 29. Розв'язати рівняння $y'' - y = 3e^{2x}\cos x.$

Розв'язування. Структура загального розв'язку $y = \overline{y} + y_{ч.н}$.

Права частина $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$ $\qquad f(x) = e^{2x}(M\cos x + N\sin x)$ $M = 3$; $N = 0$.

1) Знайдемо розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння

$y'' - y = 0 \qquad k^2 - 1 = 0 \qquad k = \pm 1 \qquad \overline{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

2) Знайдемо частинний розв'язок $y_{ч.н}$ цього диференціального рівняння, характеристичне число $\alpha + \beta i = 2 + i$ – не є коренем характеристичного рівняння.

$y_{ч.н} = e^{2x}(A\cos x + B\sin x) \qquad y'_{ч.н} = 2e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + e^{2x}(-A\sin x + B\cos x)$

$y''_{ч.н} = 4e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + 2e^{2x}(-A\sin x + B\cos x) + e^{2x}(-A\cos x - B\sin x)$

$(2A + 4B)e^{2x}\cos x + (-4A + 2B)e^{2x}\sin x = 3e^{2x}\cos x \qquad \begin{cases} 2A + 4B = 3 \\ -4A + 2B = 0 \end{cases}$

$A = \dfrac{3}{10} \qquad B = \dfrac{3}{5} \qquad y_{ч.н} = e^{2x}(0.3\cos x + 0.6\sin x)$

Загальний розв'язок $\qquad y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + e^{2x}(0.3\cos x + 0.6\sin x)$

5 СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

5.1 Фазовий простір

При вивченні закону руху матеріальної точки з масою m використовують векторну форму запису рівнянь. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон руху матеріальної точки в просторі R^3, де t – час. Це означає, що в момент часу t точка має радіус-вектор $\bar{r}(t)$ або (що те ж саме) координати $(x(t), y(t), z(t))$. Якщо точка маси m рухається під дією сили (вектора) $\vec{F}(t, \bar{r}, \bar{r}')$, то за законом Ньютона та механічним змістом другої похідної функція $\bar{r}(t)$ задовольняє рівняння

$$m\bar{r}^{n} = F(t, r, \bar{r}). \tag{18}$$

Це векторне рівняння еквівалентне системі трьох скалярних рівнянь

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X(t, x, y, z, x^{|}, y^{|}z^{|}) \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y(t, x, y, z, x^{|}, y^{|}z^{|}) \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z(t, x, y, z, x^{|}, y^{|}z^{|}) \end{cases}, \tag{19}$$

де X,Y,Z – проєкції вектора $\vec{F}$ на осі ox, oy, oz, відповідно, $r^n = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2}; \dfrac{d^2y}{dt^2}; \dfrac{d^2z}{dt^2}\right)$ – прискорення. Якщо вважати невідомими не лише координати точки $r(x, y, z)$, але й проєкції швидкості $\bar{r}' = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = (x, y, z)$, то отримаємо систему з шести рівнянь першого порядку.

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \\ z' = w \\ m\dfrac{du}{dt} = X(t, x, y, z, u, v, w) \\ m\dfrac{dv}{dt} = Y(t, x, y, z, u, v, w) \\ m\dfrac{dw}{dt} = Z(t, x, z, u, v, w) \end{cases}. \tag{20}$$

Якщо швидкість $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ вважати невідомою векторною функцією, то векторне рівняння (18) можна записати у вигляді системи двох векторних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V} \\ m\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}(t,\bar{r},\bar{V}) \end{cases} \qquad \bar{V}(u,v,w)$$

Якщо розглянути вектор, у якого буде шість координат,

$$\bar{R}(t) = (x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),$$

то система (20) або рівняння (18) еквівалентні одному векторному рівнянню першого порядку

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{\Phi}(t,x,y,z,u,v,w) \tag{21}$$

в шестивимірному просторі.

Шестивимірний простір точок (x, y, z, x', y', z') у фізиці називають *фазовим*, а криву $\bar{R}(t)$, що є розв'язком системи рівнянь (20), називають *фазовою траєкторією.*

Фазовий простір – це простір стану руху точки по кривій. Перші три координати $\bar{r}(t)$ характеризують положення точки в тривимірному просторі $\bar{R}(t)$, а останні три координати характеризують її швидкість $r'(t)$.

Наведена термінологія дає так звану кінематичну інтерпретацію системи диференціальних рівнянь. Систему (20) або, що те ж саме, (21) називають *динамічною системою*. Для виділення однієї траєкторії потрібно задати початкові умови ,$\bar{R}(t_0) = \bar{R}_0 = (x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0')$, які визначають початкове положення точки та початкову швидкість, тобто, крива $\bar{R}(t)$ має проходити через точку R_0 шестивимірного простору.

5.2 Системи звичайних диференціальних рівнянь. Метод виключення

Розглянемо систему диференціальних рівнянь 1-го порядку.

Її можна розв'язати методом виключення, якщо якобіан системи не дорівнює нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

де $y_1, y_2, ..., y_n$ – шукані функції,

x – аргумент.

Систему, в лівих частинах якої стоять похідні першого порядку, а праві частини не містять похідних, називають *нормальною.* Якщо функції f_n не залежать явно від «x», то систему називають *автономною нормальною системою.* Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \phi(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \psi(x, y, z) \end{cases} . \qquad (22),$$

Її розв’язування зводиться до розв’язування диференціального рівняння 2-го порядку.

Для цього продиференціюємо перше рівняння за x.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} \qquad \begin{matrix} y = y(x), \\ z = z(x), \end{matrix}$$

де z, $\dfrac{dy}{dx}$ та $\dfrac{dz}{dx}$ замінюємо з системи, тоді наведене диференціальне рівняння буде мати вигляд $\dfrac{d^2y}{dx^2} = F(x, y, z).$

Задача Коші для системи диференціальних рівнянь

Знайти розв’язок $y(x)$ та $z(x)$, який при $x = x_0$ приймав би задані значення $\begin{matrix} y = y(x_0) = y_0 \\ z = z(x_0) = z_0. \end{matrix}$

Загальний розв’язок систем містить сталі C_1 та C_2. Деколи замість явного запису розв’язків обмежуються їх неявним виглядом

$$C_1F_1(x, y, z), \quad C_2 = F_2(x, y, z).$$

Ці співвідношення називають першими інтегралами системами. Для нормальної системи (22) справедлива теорема існування.

Теорема. Нехай функції φ(x, y, z) та ψ(x, y, z) неперервні та мають неперервні частинні похідні по y та z на області w точок (x, y z), і нехай задана довільна точка (x_0, y_0, z_0) є w, тоді існує інтервал (a, b) і визначені на ньому неперервно диференційовні функції $Y=Y(X)$, $Z=Z(X)$, які задовольняють систему (22) та початкові умови $Y(X_0)=Y_0$, $Z(X_0)=Z_0$.

Приклад 30. Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ Z(0) = 0 \end{array}$$

1) Диференціюємо за «*x*» перше рівняння системи

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

2) Підставимо в це рівняння значення з першого рівняння системи

$y' = x + y + z \quad z' = 2x - 4y - 3z$, маємо $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + x + y + z - 4y - 3z + 2x$,

$$z = \frac{dy}{dx} - x - y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x - 3y - 2z + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x - 3y - 2\left(\frac{dy}{dx} - x - y\right) + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1$$

із першого рівняння системи:

$y'' + 2y' + y = 5x + 1$, загальний розв'язок $\quad y = \bar{y} + y_{ч.н}$

1. $\quad \bar{y} - ?$ $\qquad y'' + 2y' + y = 0$, характеристичне рівняння

$k^2 + 2k + 1 = 0$, $k_{1,2} = -1$

$\bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

2. $y_{чн} - ?$ $\qquad y_{чн} = Ax + B$, $y_{чн}{}' = A$, $y''_{чн} = 0$

$2Ax + Ax + B = 5x + 1 \to \{A = 5, B = -9$

$y_{чн} = 5x - 9$, $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 5x - 9$

$z = y' - x - y = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} + 5 - x - c_1 e^{-x} - c_2 x e^{-x} - 5x + 9$

$z = (c_2 - 2c_1 - 2c_2 x)e^{-x} - 6x + 14$

$Y(0)=1 \to \quad c_1 - 9 = 1 \quad c_1 = 10$,

$Z(0)=0 \to \quad c_2 - 2c_1 + 14 = 0 \quad c_2 = 6$

Відповідь: $\begin{cases} y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9 \\ z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14 \end{cases}$

Приклад 31. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y + z \qquad \frac{dy}{dt} = x + z \qquad \frac{dz}{dt} = x + y$$

1) Диференціюємо за змінною *t* перше рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = x + z + x + y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z \qquad \text{але } y + z = \frac{dx}{dt} \text{ тому}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0 \qquad x'' - x' - 2x = 0$$

$$k^2 - k - 2 = 0$$

$$k_1 = -1$$

$$k_2 = 2$$

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

2) Із першого рівняння:

$$y = \frac{dx}{dt} - z = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - z$$

3) Підставляємо *x* та *y* в третє рівняння системи:

$$\frac{dz}{dt} = x + y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - z$$

$$\frac{dz}{dt} + z = 3c_2 e^{2t} \qquad z' + z = 3c_2 e^{2t} \text{ - лінійне}$$

$$z = u \cdot v \qquad z' = u'v + v'u$$

$$u'v + v'u + uv = 3c_2 e^{2t}$$

1. $v' + v = 0$ 1. $\frac{dv}{dt} = -v$ $\frac{dv}{v} = -dx$ $\ln v = -t$ $v = e^{-t}$

2. $u'v = 3c_2 e^{2t}$ 2. $u'e^{-t} = 3c^2 e^{2t}$ $u' = 3c_2 e^{2t+t}$ $u = c_2 e^{3t} + c_3$

$$z = uv = e^{-t}(c_3 + c_2 e^{3t}) = c_3 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

4) $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

$$y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t} - c_2 e^{2t} = c_2 e^{2t} - c_1 e^{-t} - c_3 e^{-t}$$

$$z = c_3 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ y = c_2 e^{2t} - c_1 e^{-t} - c_3 e^{-t} \\ z = c_3 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{cases}$

5.3 Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (23)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ &\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dx_n}{dt} = a_{n11}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\}, \qquad (23)$$

де a – const; t – аргумент $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ – шукані функції.

Систему (23) називають *системою лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*

Цю систему можна розв’язати методом виключення, звівши до одного рівняння *n-го* порядку.

Розглянемо інший метод розв’язування систем такого типу. Будемо шукати частинні роз’язки системи у вигляді

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \ldots, x_n = \alpha_n e^{kt}. \qquad (24)$$

Визначимо сталі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ та k так, щоб функції (24) були розв’язками системи (23).

Підставимо їх в систему (23)

$$\left.\begin{aligned} &k\alpha_1 e^{kt} = \left(\alpha_{11}\alpha_1 + \alpha_{12}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{1n}\alpha_n\right)e^{kt} \\ &k\alpha_2 e^{kt} = \left(\alpha_{21}\alpha_1 + \alpha_{22}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n}\alpha_n\right)e^{kt} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &k\alpha_n e^{kt} = \left(\alpha_{n1}\alpha_1 + \alpha_{n2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{nn}\alpha_n\right)e^{kt} \end{aligned}\right\}.$$

Скоротимо на e^{kt} та запишемо систему відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ \alpha_n$.

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - k)\alpha_1 + \alpha_{12}\alpha_1 + \ldots + \alpha_{1n}\alpha_n = 0 \\ \alpha_{21}\alpha_1 + (\alpha_{22} - k)\alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\alpha_1 + \alpha_{n2}\alpha_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - k)\alpha_n = 0 \end{cases}. \qquad (25)$$

Система однорідна, складаємо її визначник

$$\Delta(k)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-k & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-k & \cdots & \alpha_{1n}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots. & \cdots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-k\end{vmatrix}. \qquad (26)$$

Якщо $\Delta(k)\neq 0$, то система (23) має тільки нульові розв'язки $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, тоді формули (24) дають тривіальні розв'язки системи (23)

$$x_1(t)=x_2(t)=\ldots=x_n(t)=0$$

Таким чином ненульові розв'язки системи (23) отримують при таких значеннях *k*, які перетворюють визначник (26) в нуль.

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}-k & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-k & \cdots & \alpha_{1n}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots. & \cdots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-k\end{vmatrix}=0$$

Розкриваючи визначник, отримаємо рівняння *n-го* порядку відносно *k*. Це рівняння називають *характеристичним рівнянням системи* (23), його корені називають *коренями характеристичного рівняння*. Система (23) в матричній формі матиме вигляд $(A-KE)\overline{\alpha}=\overline{0}$ або $A\overline{\alpha}=KE\overline{\alpha}.$

Розглянемо випадок, коли *корені характеристичного рівняння дійсні і різні: $k_1, k_2, \ldots, k_n$.*

Для кожного кореня k_i запишемо систему (23) та визначимо коефіцієнти $\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},...\alpha_n^{(i)}$. Тоді розв'язок системи (23):

для кореня k_1

$$x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^{k_1t}, x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^{k_1t},..., x_n^{(1)}=\alpha_n^{(1)}e^{k_1t}$$

для кореня k_2:

$$x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{k_2t}, x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{k_2t},..., x_n^{(2)}=\alpha_n^{(2)}e^{k_2t} \quad z$$

$$-----------------------$$

для кореня k_n :

$$x_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}e^{k_nt}, x_2\alpha_2^{(n)}e^{k_nt},..., x_n^{(n)}=\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}$$

Загальним розв'язком системи (23) буде система функцій

$$\begin{cases}x_1=c_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1t}+c_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2t}+\ldots+c_n\alpha_1^{(n)}e^{k_nt}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n=c_1\alpha_n^{(1)}e^{k_1t}+c_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2t}+\ldots+c_n\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}\end{cases}.$$

Приклад 32. Розв'язати систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$.

1) Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2\text{-}k & 2 \\ 1 & 3\text{-}k \end{vmatrix} = 0 \qquad k^2 - 5k + 4 = 0, \quad k_1 = 1 \quad k_2 = 4$$

2) Розв'язки шукаємо у вигляді:

$$x^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^t \quad x^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{4t} \quad y^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^t \qquad y^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{4t}$$

3) Складаємо систему для кореня $k_1=1$ та визначаємо $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$,

$$\left.\begin{aligned} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} = -2\alpha_2^{(1)} \end{aligned}$$

якщо $\alpha_2^{(1)} = 1$, то $\alpha_1^{(1)} = -2$; тоді $x^{(1)}=-2e^t$, $y^{(1)} = e^t$.

4) Складаємо систему для кореня $k_2=4$ та визначаємо $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$

$$(2-4)\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \quad -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \quad \alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} \quad \alpha_1^{(2)} = 1$$

$$\alpha_2^{(2)} = 1 \quad x^{(2)} = e^{4t} \qquad y^{(2)} = e^{4t}$$

5) Загальний розв'язок $\begin{aligned} x(t) = C_1 e^{4t} - 2C_2 e^t. \\ y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^t \end{aligned}$

6 ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Диференціальне рівняння задачі складають за її умовою. Залежно від умови воно записується або як відношення між диференціалами змінних величин, або як відношення, що містить похідні невідомої функції. При цьому використовують геометричний та фізичний зміст похідної, а також відомі закони фізики, хімії, механіки та різні математичні знання.

Вичерпних правил для складання диференціальних рівнянь немає. Але в багатьох випадках можна скористатись таблицею 5.

Таблиця 5 – Правила складання диференціальних рівнянь

Геометричні задачі	Фізичні задачі
1. Зробити схематичний рисунок і ввести позначення, виходячи з детального розбору умови задачі. 2. Відділити умови, які мають місце в довільній точці шуканого геометричного місця, від умов, які мають місце лише в окремих точках.	1. Визначити яку з величин взяти за незалежну змінну *t*, а яку – за шукану функцію *f*(*t*). 2. Встановити закон, за яким відбувається розглядуваний процес.

Розглянемо важливі задачі з різних галузей науки і техніки, які приводять до диференціальних рівнянь.

Оптика

Нехай потрібно визначити форму осесиметричного дзеркала, яке збирає промені, паралельні його осі, в одну точку. Використаємо відомий закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює кутові його відбиття. Нехай $y - f(x) = 0$ – рівняння осьового перерізу дзеркала. Фокус дзеркала помістимо в початок координат (рис. 5). Тоді маємо

$$y' = \frac{MK}{AK};\ MK = y;\ AK = AO + OK = AO + x;\ AO = OM = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

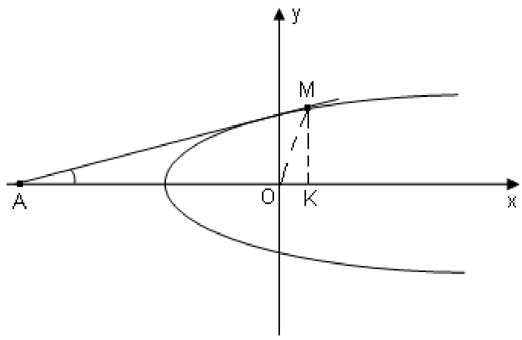

Рисунок 5

Отже, остаточно маємо диференціальне рівняння $y' = \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$, яке містить незалежну змінну *x*, залежну від неї змінну *y* та похідну y' шуканої функції *y*. Таким чином, маємо динамічну модель задачі. Вона не дає нам відповіді про залежність, потрібно з динамічної моделі виключенням «зайвої» змінної y' побудувати кінематичну модель задачі. У цьому випадку це легко здійснити, ще не знаючи методів інтегрування диференціальних рівнянь.

Неважко перевірити, що дане диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Отже, позначивши $U = \sqrt{x^2 + y^2}$, дістанемо відоме з інтегрального числення елементарне рівняння $U' = 1$, внаслідок інтегрування якого маємо $U = \sqrt{x^2 + y^2} = x + C$, де C – довільна стала. Таким чином дістаємо кінематичну модель задачі $y^2 = 2Cx + x^2$. Як бачимо, шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання.

Атомна фізика

Нехай маємо радіоактивну речовину масою m_0 з періодом напіврозпаду *T* (за відрізок часу *T* в результаті розпаду залишається $\dfrac{m_0}{2}$ речовини). Треба визначити залежність маси речовини від часу t_0. Нехай $m(t)$ – маса речовини в момент часу *t*. Для складання динамічної моделі задачі використовуємо закон радіоактивного розпаду, згідно з яким швидкість розпаду в момент часу *t* пропорційна наявній масі речовини в цей самий момент часу.

Отже, матимемо динамічну модель задачі у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{dm}{dt} = -km,,$$

де k – коефіцієнт пропорційності (знак «-» у рівнянні взято для позначення розпаду, а не розкладання), він одночасно визначається періодом напіврозпаду речовини $k = \dfrac{1}{T}\ln 2$. При цьому відомо, що на початку спостереження, тобто, при $t = t_0$ маса речовини дорівнюватиме m_0. Проінтегрувавши рівняння з урахуванням величин m_0, T, дістанемо кінематичну модель задачі

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t-t_0}{T}}.$$

Біологія

Нехай треба знайти залежність площі S молодого листка вікторії-регії, що має форму круга, від часу t.

Відомо, що швидкість зміни площі S в момент часу t пропорційна площі листка, довжині його обводу та косинусу кута між сонячним променем, шо падає на листок, і вертикаллю до листка. Отже, на основі цих відомостей легко матимемо динамічну модель задачі (k – коефіцієнт пропорційності)

$$S' = kS^{3/2}\cos\varphi(t),$$
$$\varphi(t) = at + b \geq 0, \quad a, b - const,\ \varphi \leq \pi\ .$$

Безпосередньою підстановкою неважко переконатись, що відповідна кінематична модель задачі має вигляд

$$S(t) = (C + \frac{k}{2a}\sin(at + b))^{-2}$$

де C – довільна стала.

Електротехніка

Нехай треба знайти залежність сили струму i від часу t в контурі, який складається з електрорушійної сили ε_0, опору R та індуктивності L (рис. 6), де R, ε_0, L – сталі.

Згідно з законом Ома

$$\varepsilon_0 = R_i + L\frac{di}{dt}.$$

Це і є динамічна модель задачі. Відповідна їй кінематична модель, як легко переконатися безпосередньою підстановкою, має вигляд

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\varepsilon_0}{R},$$

де C – довільна стала.

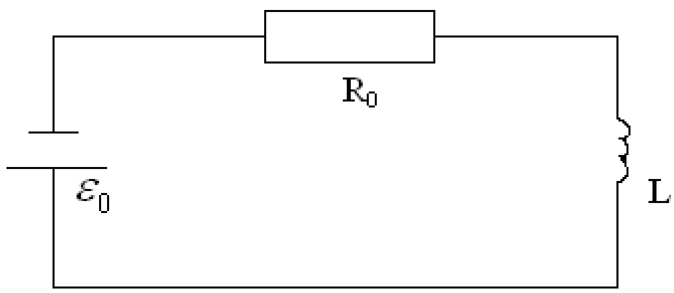

Рисунок 6

Охорона праці

Розглянемо вентиляцію виробничого приміщення об’ємом $V, м^3$, в якому технологічний процес супроводжується рівномірним накопиченням шкідливих виділень у кількості Z одиниць на годину. Обмін повітря за одну годину складає $M, м^3/г$, причому приточне повітря містить шкідливі виділення в концентрації μ на $1 м^3$. Знайти концентрацію Z (на $1 м^3$) виділень в приміщенні через t годин після початку роботи, якщо початкове значення цієї концентрації Z_0 (залишок забруднень від роботи попереднього дня).

Розв'язання.

За короткий проміжок часу dt концентрація Z збільшилась на dz. Загальна кількість виділень – Vdz. Вони складаються з виділень, які принесло приточне повітря μMdt, і виділень технологічних процесів zdt, не враховуючи кількість шкідливих виділень, які були у вилученому з приміщення за проміжок dt повітрі. Нехтуючи зміною концентрації Z за нескінченно малий проміжок часу, вважаємо, що ця кількість дорівнює $ZMdt$.

Отже, основне рівняння вентиляції

$$Vdz = M\mu dt + Zdt - Mzdt. \tag{27}$$

Рівняння (27) можна зобразити у вигляді

$$\frac{Vdz}{M\mu + Z - Mz} = dt.$$

Інтегруючи це рівняння, маємо

$$\frac{-V}{M}\int \frac{d(M\mu + Z - Mz)}{M\mu + Z - Mz} = \int dt + C_1,$$

або

$$\ln(M\mu + Z - Mz) = \frac{-M}{V}(t + C_1).$$

Звідси, загальний розв'язок

$$M\mu + Z - Mz = Ce^{\frac{-M}{V}t}. \tag{28}$$

Початкові умови: при $t = 0$, $z = z_0$ звідки

$$C = M\mu + Z - Mz_0.$$

Знайдену сталу інтегрування підставляємо в рівняння (28), звідки одержуємо

$$Z = (\mu + \frac{Z}{M})(1 - e^{\frac{-M}{V}t}) + z_0 e^{\frac{-M}{V}t}.$$

Техніка

Знайти рівняння кривої залізничної колії, яка переходить плавно від прямого напрямку до кругового, якщо довжина перехідної кривої *l*, а радіус колового шляху ***r*.**

Розв'язування.

Кривизна перехідної кривої $\frac{1}{R}$ рівномірно змінюється від нуля до $\frac{1}{r}$.

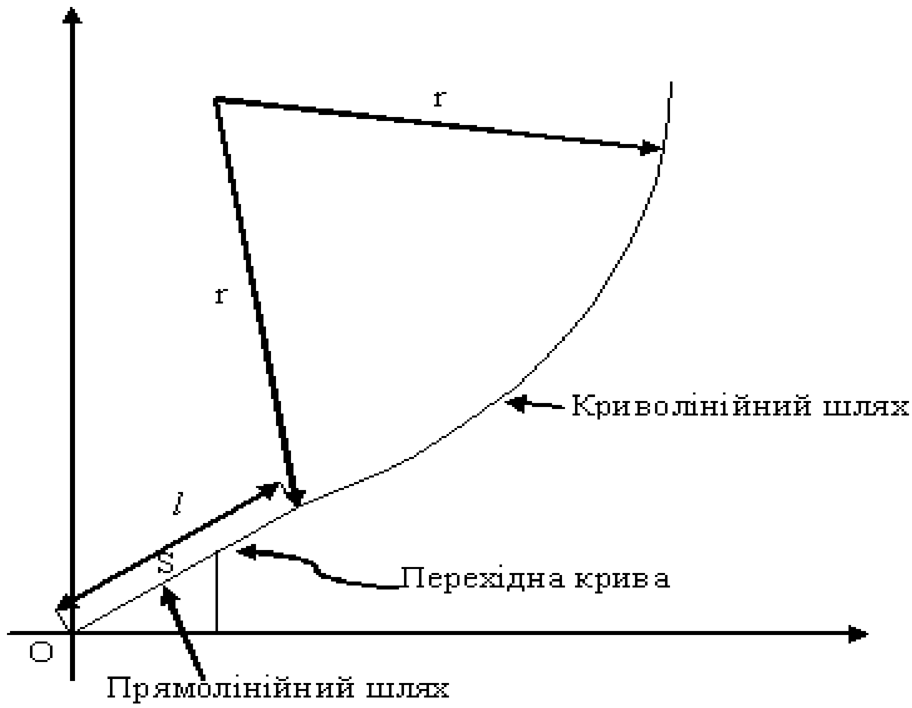

Рисунок 7

Отже, $\frac{1}{R} = kS$, де k – коефіцієнт пропорційності, S – довжина дуги від початку перехідної кривої до точки $M(x; y)$.

Коефіцієнт *k* знаходять з умови при $S = l$ $\frac{1}{R} = \frac{1}{r}$, звідки $\frac{1}{r} = kl$ і $k = \frac{1}{rl}$.

Отримуємо $\frac{1}{R} = \frac{S}{rl}$.

Перехідна крива по всій довжині *l* незначно відхиляється від осі абсцис, тому величину *S* можна замінити абсцисою *x* точки *M***.** Отже, кутовий коефіцієнт дотичної $\frac{dy}{dx}$ в точці *M* буде дуже малим, тому в диференціальній формулі кривизни $\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ величиною y'^2 можна знехтувати.

Таким чином, нехай $S=x$ і $\frac{1}{R}=y''$. Спрощене диференціальне рівняння перехідної кривої $\frac{x}{rl}=y''$. Загальний розв’язок цього рівняння

$$y=\frac{x^3}{6rl}+C_1x+C_2.$$

Початкові умови: при $x=0$, $y=0$, $y'=0$ звідки $C_1=0$, $C_2=0$.
Підставляючи ці значення в загальний розв’язок, знаходимо шукане рівняння перехідної кривої

$$y={x^3}/{6rl}.$$

Геометрія

Знайти криву, для якої сума довжин відрізка дотичної і піддотичної пропорційні добутку координат точки дотику.

Зауваження. В багатьох геометричних задачах потрібно знати, як знаходять дотичну, нормаль та інші характеристики певної лінії, певної кривої, тому нагадаємо, як визначаються деякі характеристики.

Використовуючи геометричне тлумачення похідної, запишемо такі формули для знаходження відрізків дотичної α, нормалі n, піддотичної $S\alpha$ і під нормалі Sn.

$$\alpha=\left|\frac{y}{y_1'}\sqrt{1+y'^2}\right|;\ n=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|;\ S\alpha=\left|\frac{y}{y_1'}\right|;\ Sn=|yy'|.$$

Розв’язання

Зробимо схематичний рисунок і позначимо рівняння шуканої лінії $y=f(x)$, координати точки дотику $M(x;y)$ коефіцієнт пропорційності (початкові умови в задачі відсутні) *k*.

Виходячи з геометричного тлумачення похідної $y'(x)=tg\alpha$, з прямокутного трикутника ΔMPT знаходимо довжину відрізка піддотичної: $TP={y}/{tg\alpha}=\frac{y}{y'}$ і довжину відрізка $TM=\sqrt{y^2(\frac{y}{y'})^2}$.

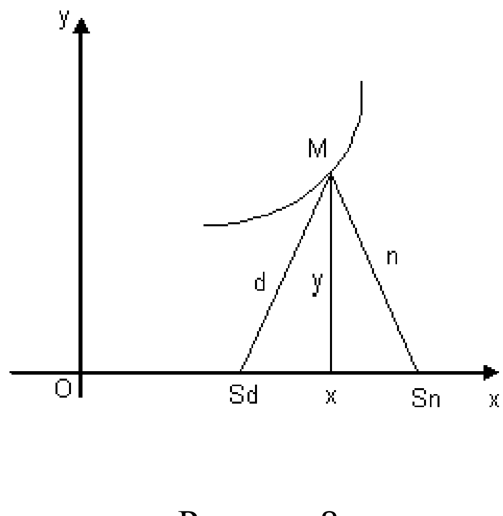

Рисунок 8

Згідно з умовою задачі

$TP + TM = kxy \ \ (kxy > 0)$

чи $\dfrac{y}{y'} + \sqrt{y^2 + y^2 / y'^2} = kxy$.

Розв'язавши одержане рівняння відносно похідної y' маємо $y' = \dfrac{2kx}{k^2x^2 - 1}$.

Проінтегрувавши, одержимо шукане «сімейство» інтегральних кривих

$$y = \int \frac{2kx}{k^2x^2 - 1}dx = \frac{1}{k}\ln\left|k^2x^2 - 1\right| + C.$$

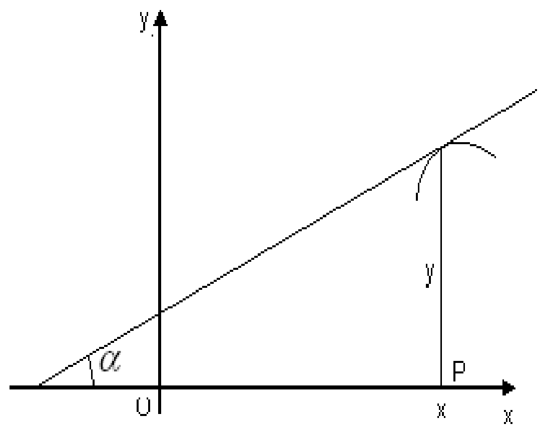

Рисунок 9

7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ВИВЧЕНОГО МАТЕРІАЛУ

7.1 Теоретичні питання для самоперевірки

1. Означення диференціального рівняння першого порядку, його загального і частинного розвязку.

2. Теорема існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння, задача Коші для диференціального рівняння порядку та її геометричний зміст.

3. Типи диференціальних рівнянь першого порядку і методи їх розв'язування.

4 Поняття диференціального рівняння другого порядку, його загального і частинного розв'язків, задача Коші.

5. Типи і методи розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку, які інтегруються.

6. Означення і основні властивості диференціальних рівнянь другого порядку.

7. Методи розв'язування однорідних диференціальних рівнянь другого і n-го порядків зі сталими коефіцієнтами.

8. Метод варіації довільних сталих для неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку з довільними коефіцієнтами.

9. Методи розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною.

10. Поняття фазового простору для систем диференціальних рівнянь.

11. Поняття про системи звичайних диференціальних рівнянь, метод виключення.

12. Методи розв'язування системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

7.2 Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$
2. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+y^2} = xy$
3. $(1+y^2)dx = xydy$
4. $e^x + e^y(1+e^y)y' = 0$
5. $\frac{y'}{y} = 1 - tgx$
6. $y - y' = y^2 + xy'$
7. $x\sqrt{9+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$
8. $2xyy' = y^2 - 1$
9. $x(y^2-1)dx + (yx^2 - y)dy = 0$
10. $y' + \sin\frac{x-y}{3} = \sin\frac{x+y}{3}$
11. $\frac{x}{y}dx = \sqrt{1+x^2}\ln ydy$
12. $\sqrt{6+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$
13. $x\sqrt{9+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$
14. $yy'\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} = 1$
15. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$
16. $(x^2y + x^2)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0$
17. $(1+u)vdu + (1-v)udv = 0$
18. $3(x^2y + y)dy = \sqrt{2+y^2}dx$
19. $xy'\cos y + \sin y = 0$
20. $2x\sqrt{1+y^2}dx + ydy = 0$
21. $e^{2x} + e^x = y'\sin y$
22. $y' = 3y - 1$
23. $2chydx = \sqrt{x+1}dy$
24. $y' - \frac{y}{x} = yctgx$
25. $y' + ytgx = \frac{y}{x}$
26. $2xyy' = y^2 - 1$
27. $xy'\ln x - y = y\ln x$
28. $xdy = (y + y^3)dx$
29. $y'\sin x = y\ln y$
30. $y'tgx = y\ln y$

Завдання 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $xdy = y\ln\frac{y}{x}dx$
2. $xdy = (y + \sqrt{x^2+y^2})dx$
3. $2xydy + (x^2+y^2)dx = 0$
4. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$
5. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$
6. $xdy = ydx + ydy$
7. $y^2 + x^2y' = xy$
8. $(x-y)dx + xdy = 0$
9. $x^2y' = 3xy + 2y^2$
10. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$
11. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$
12. $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$
13. $x^2y' = y^2 + xy$

14. $y - xy' = x + yy'$

15. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$

16. $xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$

17. $(xy' - y) arctg\frac{y}{x} = x$

18. $x^2 dy = (y^2 - 2x^2)dx$

19. $y^2 + x^2 y' = xyy'$

20. $xy' - y = xtg\,\frac{y}{x}$

21. $ydx + (2x + y)dy = 0$

22. $y' = \frac{x-y}{x-2y}$

23. $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

24. $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$

25. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$

26. $xy' = y + x(1 + e^{\frac{x}{y}})$

27. $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$

28. $xyy' + x^2 - 3y^2 = 0$

29. $xy' - 3\sqrt{x^2 + y^2} = y$

30. $x^2 y' + y^2 = 2xy$

Завдання 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову.

1. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$, $\quad y(0) = 1$

2. $y' + \frac{2y}{x} = e^{-x^2} / x$, $\quad y(1) = e^3$

3. $xy'1 + y = \ln x + 1$, $\quad y(1) = 2$

4. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$, $\quad y(1) = e$

5. $y' - ytgx = 1/\cos x$, $\quad y(1) = 3$

6. $xy' + 2y = x^2$,

$y(1) = \frac{5}{4}$

7. $y' = \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$, $\quad y(0) = 2$

8. $y' + 2xy = x\sin xe^{-x^2}$, $\quad y(0) = -2$

9. $xy' - \frac{y}{1+x} = x$, $\quad y(0) = -1$

10. $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$, $\quad y(0) = -2$

11. $y'\cos x + y = 1 - \sin x$, $\quad y(0) = 2$

12. $y' + 2y = x^2 = x^2 + 2x$, $\quad y(0) = 2$

13. $x\ln xy' - y = 3\ln x - 1$, $\quad y(e) = 3$

14. $xy' - y = x^2\cos x$, $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

15. $y' - \frac{y}{xknx} = x\ln x$, $\quad y(e) = \frac{1}{2}e^2$

16. $y' + \frac{y}{1+x} = x^2$, $\quad y(0) = 3$

17. $y' - 2y = x^2 - x$, $\quad y(0) = -1$

18. $y' + y = \cos x$, $\quad y(0) = 2$

19. $y' + x^2 y = x^2$, $\quad y(0) = 4$

20. $y' + xy = x$ $\quad y(0) = -3$

21. $y'(1 + x^2) - xy = \sqrt{1 + x^2}$, $\quad y(0) = 4$

22. $xy' = 2x\ln x - y$, $\quad y(1) = 5$

23. $y' - y = xe^{3x}$, $\quad y(0) = -3$

24. $y' - \frac{y}{x} = xe^x$, $\quad y(1) = 7e$

25. $y' + y = x + 1$, $\quad y(0) = -5$

26. $y' - \frac{y}{x} = \ln^2 x$, $\quad y(1) = 4$

27. $y' - y = (x-3)e^{2x}$, $\quad y(0) = 4$

28. $y' + 3y = xe^{4x}$, $\quad y(0) = -3$

29. $y' + \frac{y}{x} = -\frac{2\ln x}{x}$, $\quad y(1) = 2$

30. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x$, $\quad y(1) = e$

Завдання 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y' + 2xy = 2x^3y^3$
2. $xy' + y = y^2 \ln x$
3. $3y^2y' + y^3 + x = 0$
4. $y' - 2xy = 2x^3y^2$
5. $y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$
6. $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$
7. $y' - y = xy^2$
8. $xy' - y = y^2$
9. $xy' + y = xy^2$
10. $y' = \dfrac{1}{2}y\cos x + \dfrac{\sin 2x}{y}$
11. $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{2y}$
12. $y' = xy + y^2x^3$
13. $xy' + y = 2y^2 \ln x$
14. $8xy' - 12y - (5x^2 + 3)y^3 = 0$
15. $2(y' + y) = xy^2$
16. $y' + y = xy^2$
17. $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2$
18. $y' - ytgx = -\dfrac{2}{3}y^4 \sin x$
19. $xy' + y = xy^2$
20. $(1-x^2)y' - xy = xy^2$
21. $3y^2y' - y^3 - x - 1 = 0$
22. $(y\ln x - 2)y = xy'$
23. $(1-x^2)y' - xy = 2xy^3$
24. $3y^2y' - 2y^3 - x = 2$
25. $y' + 2xy = 2x^2y^2$

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y'' + y'tgx = \sin 2x$
2. $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$
3. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$
4. $x^2y'' + xy' = 1$
5. $y'' = \dfrac{y}{x} + x$
6. $y'' - 2ctgxy' = \sin^3 x$
7. $y''(x^2+1) = 2xy'$
8. $xy'' - y' = x^2e^x$
9. $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$
10. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$
11. $x^2y'' = (y')^2$
12. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$
13. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$
14. $y'' = y'e^x$
15. $x^4y'' + (xy' - y')^3 = 0$
16. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$
17. $x^2y'y'' - (y' - xy')^2 = 0$
18. $y'' + 2y' = e^x(y')^2$
19. $y'' = 1 + \dfrac{x(y'-x)}{1-x^2}$
20. $y'' - 2y' = e^x(y')^2$
21. $y' - xy'' + (y')^2 = 0$
22. $(x^2+1)y'' = xy'$
23. $y'y'' = \dfrac{\ln x}{x}$
24. $(1+\sin x)y'' = y'\cos x$
25. $(1+x^2y'') - 2xy' = x^3$
26. $y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' = 2x$
27. $x^2y'' + xy' = \sqrt{x}$
28. $(x+1)y'' + y' = x+1$
29. $xy'' + y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

30. $2xy'' = y' + 1$

Завдання 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

1. $yy'' - yy'\ln y = (y')^2$
2. $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$
3. $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)(y')^2 = 0$
4. $yy'' - (y')^2 = y'$
5. $y'y'' = \sqrt{1+(y')^2}$
6. $yy'' - (y')^2 = yy'$
7. $(y')^2 + 2yy'' = 0$
8. $yy'' + yy'\ln y = (y')^2$
9. $2yy'' = 3(y')^2 = 4y^4$
10. $y'' = \sqrt{1+(y')^2}$
11. $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$
12. $yy'' - (y')^2 = y^2y'$
13. $2(y')^2 = y''(y-1)$
14. $y'' = y' + 1$
15. $(y'')^2 = y'$
16. $yy'' + (y')^2 = 1$
17. $4y''\sqrt{y} = 1$
18. $y'' + 32y^3 = 0$
19. $y'' + 50\sin^3 y\cos y = 0$
20. $y'' = \dfrac{3}{y}$
21. $y'' = \dfrac{1}{y^2}$
22. $y'' = \dfrac{-1}{y^3}$
23. $4y^3y'' = y^4 - 16$
24. $y''y^3 + 4 = 0$
25. $y'' = 8y^3$
26. $yy'' - (y')^2 = y^4$
27. $y'' = \sqrt{4-(y')^2}$
28. $2y(y')^3 + y'' = 0$
29. $(y''x + y')y' = x^3$
30. $y''\sin y = 2(y')^2\cos y$

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y''' - \dfrac{y'''}{x} = 0$
2. $y''' = 2(y''+3)ctgx$
3. $y''' = (y''-3)ctgx$
4. $y'''(x-1) - y'' = 0$
5. $2xy'''y'' = (y'')^2 + 1$
6. $2xy''' = y''$
7. $xy^{IV} = y'''$
8. $2xy'''y'' - 4 = (y'')^2$
9. $x^2y''' = (y'')^3$
10. $y''' = (y'')^3$
11. $y'''x\ln x = y''$
12. $y'''tgx = 2y''$
13. $xy''' + 2y'' = 0$
14. $x^3y''' + x^2y'' = 1$
15. $xy''' + y'' = 1$
16. $x^{IV} - y''' = 1$
17. $x^2y''' + xy'' = 1$
18. $y''' = -\dfrac{1}{2}(y'')^3$
19. $(y''')^2 = 4y''$
20. $xy''' + y'' = 1 + x$
21. $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$
22. $y''' = (y'')^2$

23. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$

24. $(1+\sin x)y''' = y''\cos x$

25. $y''' + y'' + x = 0$

26 $xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$

27 $(x+1)y''' + y'' = x+1$

28 $y''' = (y''+1)ctgx$

29 $y'''tgx = y'' + 5$

30 $(x+2)y''' = y''$

Завдання 8. Знайти частнний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову.

1. $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$;

   $y(0) = \frac{1}{9}, \qquad y'(0) = \frac{8}{9}$.

2. $y'' - 4y' + 5y = 2xe^{x}$;

   $y(0) = 2, \qquad y'(0) = 3$.

3. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$;

   $y(0) = 3, \qquad y'(0) = 9$.

4. $y'' - 3y' + 2y = (3-4x)e^{x}$;

   $y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$.

5. $y'' + 6y' + 9y = (1-x)e^{-3x}$;

   $y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$.

6. $y'' - 5y' = -5x^2 + 2x$;

   $y(0) = 1, \qquad y'(0) = 5$.

7. $y'' + 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{2x}$;

   $y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1$.

8. $2y'' - y' = x - 4$;

   $y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$.

9. $y'' - 2y' = (x-2)e^{x}$;

   $y(0) = -2, \qquad y'(0) = 4$

10. $y'' - 5y' + 4y = 4xe^{2x}$;

    $y(0) = -2, \qquad y'(0) = -1$.

11. $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}$;

    $y(0) = -2 \qquad y'(0) = -1$

12. $y'' + y = 3e^{-x}$;

    $y(0) = 5 \qquad y'(0) = -1$

13. $y'' - 4y' - 5y = 3xe^{2x}$;

    $y(0) = 2, \qquad y'(0) = 3$.

14. $y'' - y' = 2(1-x)$;

    $y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$.

15. $y'' + 2y' + y = 2e^{-2x}$;

    $y(0) = 2, \qquad y'(0) = -2$.

16. $y'' - y' = 3xe^{-x}$;

    $y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1$.

17. $y'' + y = 5e^{x}$;

    $y(0) = 3, \qquad y'(0) = -2$.

18. $y'' - y = (2-x)e^{x}$;

    $y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1$.

19. $y'' + 4y = 3xe^{-x}$;

    $y(0) = -1, \qquad y'(0) = 2$.

20. $y'' - 2y' = 3e^{2x}$;

    $y(0) = 0, \qquad y'(0) = -3$.

21. $y'' + 4y = 8e^{-2x}$;

    $y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1$.

22. $y'' - 5y' + 6y = 3xe^{-3x}$;

    $y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0$.

23. $y'' + 2y' = (1-x)e^{-2x}$;

    $y(0) = 1, \qquad y'(0) = -5$.

24. $y'' + y = (3-x)e^{x}$;

    $y(0) = 0, \qquad y'(0) = -3$.

25. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$;

    $y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$.

26. $y'' - 6y' + 9y = (12x-7)e^{-x}$;

    $y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1$.

27. $y'' - 5y' + 6y - (1-2x)e^{2x}$;

$y(0) = -1, \qquad y'(0) = -2$.

28. $y'' - 4y' + 13y = 26x - 5$;

$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$.

Завдання 9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння .

1. $y'' + 6y' + 13y = 2\cos 2x$
2. $y'' + y = 2\cos 4x - 3\sin 4x$
3. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$
4. $y'' - 4y' + 4y = \cos 2x$
5. $y'' + 4y = -8\sin 2x$
6. $y'' - 2y' + 5y = -2\cos x$
7. $y'' + 4y' = \sin 3x$
8. $y'' - 2y' + 10y = \sin x$
9. $2y'' + 5y' = 29\cos x$
10. $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x$
11. $y'' - y = 4\cos x - \sin x$
12. $y'' + y = 6\sin 2x$
13. $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$
14. $y'' - 5y' + 6y = 13cox3x$
15. $y'' + 9y = 3\cos x$
16. $y'' + 3y' + 2y = 2\cos 2x$
17. $y'' + y = 4\cos 3x$
18. $y'' - y = 2\sin x - 3\cos x$
19. $y'' - 4y' + 8y = 3\sin 2x$
20. $y'' - 4y = 3\sin 2x$
21. $y'' + 9y' = 2\cos x$
22. $y'' + 2y' + 8y = 8\sin 2x$
23. $y'' + 2y' + 10y = 5\sin x$
24. $y'' + 3y' + 2y = 5\sin 2x$
25. $y'' - 6y' + 9y = -\cos 3x$
26. $y'' - 9y = \sin 3x$
27. $y'' + 2y' + y = 4\cos x$
28. $y'' + 4y' + 8y = 3\sin 2x$

29. $y'' - 2y' + y = 16e^{x}$;

$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2$.

30. $y'' - 4y' = 16x^2 - 1$;

$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 3$.

29. $y'' + 9y = 12\sin x$

30. $y'' + y = -4\cos 2x$

Завдання 10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y'' + 4y = 3xe^{2x} - 2\cos 2x$
2. $y'' + 2y' + y = 3chx - x$
3. $y'' - y' = 1 - x + 2\cos 3x$
4. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} - \cos 2x$
5. $y'' + y' - 6y = xe^{2x} - 4x$
6. $y'' - 2y' - 3y = x^2 + 3 - 4e^x$
7. $y'' - 2y' + y = 4e^x - 3\sin x$
8. $y'' + y = 3\cos - e^{-x}$
9. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$
10. $y'' - 4y' + 4y = 3e^x - \cos 2x$
11. $y'' + y = 3\sin x - 2e^{-x}$
12. $y'' - 3y' = 2x - 5\sin 3x$
13. $y'' + 4 = xe^{2x} - 2\cos x$
14. $y'' - y = 2shx - x + 3$
15. $y'' - 3y' + 2y = (3x - 1)e^{2x} + 2x^2$
16. $y'' - y = 4\sin x - 8xe^x$
17. $y'' + 4y = 4\sin 2x + x^2 - 4$
18. $y'' - 2y' + y = (1 - x)e^x - 2\sin x$
19. $y'' - 4y = \cos 2x - xe^{2x}$
20. $y'' - y' = x^2 - 1 + 3\sin x$
21. $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$
22. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x - xe^x$
23. $y'' - 2y' - 8y = (x - 1)e^x - 8\cos 2x$
24. $y'' - y' = 2x - 1 + 3\cos x$
25. $y'' - 4y = (3x + 1)e^{2x} - 2\sin 2x$
26. $y'' - 4y' + 4y = 2ch2x$
27. $y'' - 3y' = 3ch3x + 2x$
28. $y'' - 4y' = 16sh4x$
29. $y'' + 4y = 4e^{2x} - 8\sin 2x$
30. $y'' + 2y' + 17y = x^2 - 5x + 3e^{-x}$

Завдання 11. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом варіації довільних сталих.

1. $y'' + y = ctgx$
2. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}\ln x$
3. $y'' - y' = e^{2x}\cos(e^x)$
4. $y'' + y = \dfrac{2}{\cos x}$
5. $y'' - y = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$
6. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$
7. $y'' + y = tg^2 x$
8. $y'' + 4y = \dfrac{3}{\cos 2x}$
9. $y'' + y = tgx$
10. $y'' - 2y' + y = \dfrac{3e^x}{x}$
11. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$
12. $y'' + y = -\dfrac{1}{\sin x}$
13. $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^2}e^x$
14. $y'' + 2y' + y = \dfrac{3e^{-x}}{x}$
15. $y'' - y' = e^{2x}\sin(e^x)$
16. $y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$
17. $y'' - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$
18. $y'' + 4y = 8ctg\,2x$
19. $y'' - 6y + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{2x}}$
20. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$

21 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^x}$

22. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

23. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 + 3}}$

24. $y'' + y' = \dfrac{e^{x}}{2 + e^{x}}$

25. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$

26. $y'' - y' = \dfrac{e^{x}}{1 + e^{x}}$

27. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$

28. $y'' + y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$

29. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{\sqrt{4 - x^2}}$

30. $y'' + y = \dfrac{4}{\sin^3 x}$

Завдання 12. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

1. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 - x$
2. $y''' - y'' = 4 - x^2$
3. $y^{IV} - y'' = 6x + 5$
4. $y''' + y'' = 6x^2 - 2x + 3$
5. $y''' - 13y'' + 12y' = 2x - 1$
6. $y''' - 3y'' + 2y' = xe^{x}$
7. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x^2 - 1$
8. $y^{IV} - y''' = 2x - 3$
9. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = 3e^{-2x}$
10. $y^{IV} + y''' = x^2 - 4$
11. $y''' - 2y'' = 3e^{2x}$
12. $y''' - 2y'' = x^2 - 3x + 2$
13. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + 2x + 1$
14. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$
15. $3y''' - y'' = 5x$
16. $y^{IV} + y'' = 2x - x^2$

17. $y^{IV} - 9y'' = 3x^2 - 1$

18. $y''' - 4y' = 13e^{2x}$

19. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$

20. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2e^{x}$

21. $y''' - 4y'' = 2e^{4x}$

22. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x^2 - 3$

23. $y''' - 4y'' = 3x^2 - x$

24. $y''' + 2y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$

25. $y''' - 4y'' + 3y' = -4e^{x}$

26. $y''' + 6y'' + 9y' = (8x - 1)e^{x}$

27. $y''' + y'' - 6y' = (1 - x)e^{2x}$

28. $y''' + y'' - y' - y = 2x^2 + 3x - 1$

29. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = xe^{-x}$

30. $y''' - 3y'' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$

Завдання13. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \sin t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + x. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y + e^{-t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t} + e^{-t}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y - 2e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 4y - 4e^{-t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 5y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y - 5t + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + t - 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y + 40e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + 9e^{-t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 1 - t^2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 3y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^{t}. \end{cases}$

13 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + t^2 - 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x + t^2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x + t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y + e^{3t}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^{t}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 5\sin 2t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 10x - 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - 5y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - 5y - t + 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + 3t - 5. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x + 2t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y + 2\cos t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 10x - 4y + 4e^{2t}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y - \sin 2t. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y + 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y - t + 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2x + e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6 - 3y + 3e^{2t}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + 4e^{-t}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y + 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y - t^2. \end{cases}$

Завдання 14. Розв’язати геометричну задачу.

1. Знайти лінію, де будь-яка дотична перетинається з віссю абсцис в точці, однаково віддаленій від точки дотику і початку координат.

2. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (2, 4), якщо відрізок, який відсікає на осі абсцис дотична, проведена в будь-якій точці лінії, дорівнює кубу абсциси точки дотику.

3. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (2, -1), якщо кутовий коефіцієнт будь-якої її дотичної пропорційний квадрату ординати точки дотику, а коефіцієнт пропорційності дорівнює 3.

4. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1, 2), якщо відрізок, який відтинав її, дотична на осі ординат, дорівнює абсцисі точки дотику.

5. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1, 2), якщо добуток кутового коефіцієнта дотичної в будь-якій її точці на суму координат точки дотику дорівнює подвоєній ординаті цієї точки.

6. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1, 2), якщо коефіцієнт її дотичної $(K = 3)$.

7. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1, 3), якщо площа трикутника, утвореного будь-якою її дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, дорівнює 2.

8. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1, 1), якщо відстань від початку координат до будь-якої точки її дотичної дорівнює абсцисі точки дотику.

9. Знайти рівняння лінії, для якої квадрат довжини відрізка, що відтинається на осі ординат будь-якою її дотичною, дорівнює добутку координат точки дотику.

10. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1, 3), якщо кутовий коефіцієнт її дотичної в 2 рази менший кутового коефіцієнта радіуса-вектора точки дотику.

11. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (4, 3), якщо будь-яка її піддотична дорівнює середньому арифметичному координат точки дотику.

12. Знайти рівняння лінії, для якої відношення відрізка, що відтинається нормаллю на осі абсцис, до радіуса-вектора точки дотику є величина стала, яка дорівнює 4.

13. Знайти рівняння лінії, для якої відношення довжини відрізка, що відтинається дотичною на осі ординат, до довжини відрізка, що відтинається нормаллю на осі абсцис, є величина постійна, яка дорівнює 5.

14. Знайти лінію, для якої трикутник, утворений віссю ординат, дотичною і радіусом-вектором точки перетину, – рівнобедрений.

15. Знайти лінію, що проходить через точку (1, 1), якщо відстань будь-якої її дотичної від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

16. Знайти лінію, яка проходить через точку (1, 2), якщо площа трикутника, утвореного її дотичною, віссю абсцис і ординатою точки дотику, дорівнює 5.

17. Знайти лінію, яка проходить через точку (0, 1), якщо її піддотична дорівнює сумі координат точки дотику.

18. Знайти лінію, для якої будь-яка дотична перетинається з віссю ординат в точці, рівновіддаленій від точки дотику і від початку координат.

19. Знайти лінію, яка проходить через точку (1, 2), якщо будь-яка її дотична перетинає пряму $y=1$ в точці з абсцисою, рівною подвоєній абсцисі точки дотику.

20. Знайти лінію, яка проходить через точку (1, -1), якщо довжина відрізка, що відтинається на осі абсцис її дотичною, дорівнює добутку координат точки дотику.

21. Знайти лінію, яка проходить через точку (1, 0), якщо довжина відрізка, що відтинається на осі ординат її дотичною, дорівнює потроєній абсцисі точки дотику.

22. Знайти лінію, яка проходить через точку (1, 4), якщо добуток кутового коефіцієнта її дотичної та різниці ординати і абсциси точки дотику дорівнює подвоєній ординаті цієї точки.

23. Знайти лінію, яка проходить через точку (1, 3), якщо кожна її дотична перетинає пряму $y=2$ в точці з абсцисою, рівною подвоєній абсцисі точки дотику.

24. Знайти лінію, яка проходить через точку (0, е), якщо її піддотична дорівнює одиниці.

25. Знайти лінію, яка проходить через точку (1, 1), якщо площа трапеції, утвореної її дотичною, ординатою точки дотику і координатними осями, дорівнює 0,5.

26. Знайти лінію, яка проходить через точку (4, 3), якщо її дотична перетинається з віссю ординат в точці, яка віддалена від початку координат на таку ж відстань, що і точка дотику від початку координат.

27. Знайти лінію, яка проходить через точку (2, 3), якщо довжина відрізка, що відтинається на осі ординат її нормаллю, дорівнює 3.

28. Знайти лінію, яка проходить через точку (0, е) якщо її піддотична дорівнює 3.

29. Знайти лінію, яка проходить через точку (1, 2), якщо кутовий коефіцієнт її дотичної дорівнює потроєному кутовому коефіцієнту радіуса-вектора точки дотику.

30. Знайти лінію, яка проходить через точку (1, 3), якщо довжина відрізка, що відтинається на осі ординат її дотичною, дорівнює абсцисі точки дотику.

Завдання 15. Розв'язати фізичну задачу.

1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю V, пропорційною квадрату часу. Знайти залежність між пройденим шляхом S, і часом $t=0$, якщо відомо, що при $t=0$, $S=2$, а в момент $t=1$, $V=3$.

2. На тіло діє сила, пропорційна часу. Крім того, воно зазнає протидії середовища з силою, пропорційною його швидкості. Знайти залежність шляху від часу.

3. Моторна лодка рухається в спокійній воді зі швидкістю $V_0 = 12 км/год$. На повній швидкості її мотор було вимкнено, і через 10 с швидкість лодки зменшилась до $V_1 = 6 км/год.$ Опір середовища пропорційний швидкості руху лодки. Знайти швидкість лодки через 1 хв після зупинки мотора.

4. Куля, що рухається зі швидкістю $V = 400 м/с$, входить в достатньо товсту стіну. Опір стіни надає кулі негативне прискорення, пропорційне квадрату її швидкості з коефіцієнтом пропорційності $K = 7 м^{-1}.$ Знайти швидкість кулі через 0,001 с після входу в стіну.

5. Температура тіла за 10 хв зменшилась від 120 до 60 °C. Температура навколишнього середовища 20 °C. Через скільки хвилин температура тіла стане рівною 30 °C, якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища?

6. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, пропорційним добутку швидкості руху на квадрат часу. Знайти залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент швидкість руху дорівнює V_0.

7. Футбольний м'яч масою 0,4 кг кинули вертикально вверх зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,48 кг при швидкості 2 м/с. Знайти час і максимальну висоту підйому м'яча.

8. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, прямо пропорційної часу руху. Знайти залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент швидкість руху дорівнює нулю.

9. Матеріальна точка масою m притягується кожним з двох центрів з силою, пропорційною відстані, з коефіцієнтом пропорційності K. Відстань між центрами дорівнює 20. В початковий момент точка знаходилась на лінії з'єднання центрів на відстані α від її середини. Початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти закон руху.

10. Знайти силу струму в момент t в полі з постійним опором R і самоіндукцію L при лінійно наростаючій ЕРС за законом $E = kt,$ якщо в початковий момент сила струму дорівнювала нулю.

11. На тіло масою $m = 1$ діє сила, пропорційна квадрату часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). На яку максимальну висоту підійметься точка?

12. Матеріальна точка масою m підкинута вертикально вверх з початковою швидкістю V_0. Сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості руху (коефіцієнт пропорційності дорівнює K). На яку максимальну висоту підійметься точка?

13. Знайти залежність температури T від часу t, якщо тіло, нагріте до 200 °C, занесене в кімнату з температурою 20 °C. Через який час тіло зовсім охолоне? (Вирахувати те, що швидкість охолодження тіла в середовищі пропорційна різниці температур тіла і середовища).

14. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, пропорційної часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює 4), який пройшов з моменту, коли швидкість дорівнювала нулю. Крім того, на точку діє сила опору середовища, пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює 3). Знайти залежність швидкості від часу.

15. Відомо, що швидкість охолодження тіла в середовищі пропорційна різниці температур тіла і середовища. Знайти залежність температури тіла T від часу t, якщо за 10 хв температура тіла знизилась від 120 до 50 °C, а температура середовища була 20 °C.

16. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, прямо пропорційної часу руху і обернено пропорційної швидкості руху. Встановити залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент часу швидкість руху дорівнювала нулю.

17. На тіло масою $m = 2$ діє сила, пропорційна добутку швидкості руху на час (коефіцієнт пропорційності дорівнює 4). В початковий момент швидкість руху дорівнювала $V = 1м/с$. Якою буде швидкість руху через 1 хв після початку руху?

18. Матеріальна точка масою $m = 2г$ без початкової швидкості поволі опускається в рідину. Опір рідини пропорційний швидкості опускання з коефіцієнтом пропорційності $K = 2г/с$. Знайти швидкість точки через 1 хв після початку опускання.

19. Матеріальна точка масою $m = 1г$ рухається прямолінійно. На неї діє в напрямку руху сила, пропорційна часу, який пройшов з моменту, коли швидкість точки дорівнювала нулю, з коефіцієнтом пропорційності $K = 4кг\frac{м}{с^3}$. Крім того, точка затримується опором середовища, пропорційним швидкості руху з коефіцієнтом пропорційності $3 г/с$. Знайти швидкість точки через 5 с після початку руху.

20. У кімнаті, де підтримується температура 20 °C, деяке тіло охололо за 20 хв від 100 до 50 °C. Знайти закон охолодження тіла. Через скільки хвилин воно набуде кімнатної температури?

21. Матеріальна точка масою *m* рухається по осі під дією відродженої сили, спрямованої до початку координат і пропорційної відстані від початку руху точки. Середовище, в якому відбувається рух, спричинює опір, пропорційний швидкості руху. Знайти закон руху.

22. Знайти силу в котушці в момент *t*, якщо опір її *R*, коефіцієнт індуктивності *L*, початковий струм $I=0$, ЕРС змінюється за законом $E=E_0 \sin t$.

23. Температура тіла за 20 хв знизилась.від 100 до 40 °C. Температура навколишнього середовища 20 °C. Через скільки хвилин температура тіла буде дорівнювати 25 °C, якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища?

24. Матеріальна точка масою *m* вільно падає під дією сили тяжіння. Початкове положення падаючої точки відносно точки відліку $y(0)=y_0$, початкова швидкість $V(0)=V_0$. Знайти закон руху, не беручи до уваги опір повітря.

25. Швидкість тіла, що рухається, збільшується обернено пропорційно пройденому шляхові. В початковий момент руху тіло знаходилось на відстані 5 м від початку відліку шляху і мало деяку швидкість. Знайти пройдений шлях і швидкість тіла через 10 с після початку руху.

26. Матеріальна точка рухається по прямій з постійним прскоренням *a*. Знайти закон руху точки.

27. Матеріальна точка масою *m* знаходиться на продовженні осі тонкого однорідного стержня масою *M*, довжиною *l* на відстані *L* від її лівого кінця. Знайти силу взаємодії стержня і точки.

28. Сталевий дріт довжиною *l* з поперечним перерізом *F* розтягується з силою, постійно зростаючою до величини *P*. Знайти роботу розтягу.

29. Знайти кількість теплоти, необхідну для нагріву 1 кг заліза від 20 до 21 °C, питома теплоємність *C* заліза показує залежність $C=0{,}1053+0{,}000142t,$ де t – температура.

30. Тіло масою *m* падає під дією сили тяжіння в середовищі, опір якого пропорційний квадрату швидкості падіння. Знайти закон руху тіла.

8 ПІДКАЗКИ ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ

Таблиця 1 – Типи і методи розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку

	Тип (вигляд) рівняння	Метод розв’язування
1.	Найпростіші $y' = f(x)$ $M(x)dx + N(y)dy = 0$	Проінтегрувати
2.	З відокремлюваними змінними $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	Відокремити змінні і проінтегрувати Замінити y' на $\frac{dy}{dx}$, відокремити змінні і проінтегрувати
3.	Однорідні $y' = f\left(\frac{y}{x}\right); \quad y' = f(x,y),$ де $f(x,y)$ – функція нульового виміру ($f(\kappa x;\kappa y)) = f(x,y)$	Використати підстановку $y = ux,\ y' = u'x + u$
4.	Лінійні $y' + p(x)y = Q(x)$	Використати підстановку $y = u \cdot v \quad y' = uv + v'u$
5.	Рівняння Бернуллі $y' + p(x)y = y^n Q(x)$ де $n \neq 0$ i $n \neq 1$	Використати підстановку $y = u \cdot v$ $y' = u'v + v'u,$ або $z = y^{1-n}$ $z' = \frac{1-n}{y^n} \cdot y'$

Таблиця 2 – Типи і методи розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку

	Тип (вигляд) рівняння	Метод розв'язування
1	$y^{(n)} = f(x)$	Послідовно проінтегрувати n разів. Відповідь має n сталих $Ci, i = 1, n.$
2	Диференціальне рівняння не містить явно шукану функцію у: $F(x; y'; y'') = 0,$ $F(y', y'') = 0.$	Використати підстановку $y' = p(x),$ $y'' = p'(x)$ і звести до диференціального рівняння першого порядку.
3	Диференціальне рівняння містить явно незалежну змінну х: $F(y, y', y'') = 0$ $F(y, y'') = 0$	Використати підстановку $y' = p(y)$ $y'' = p(y) \cdot p'(y)$ і звести до диференціального рівняння першого порядку.

Таблиця 3 – Структура фундаментальної системи розв'язку л.о.д.р. другого порядку

	Корені характеристичного рівняння	Частинні розв'язки	Загальний розв'язок
1	$\kappa_1 \neq \kappa_2$ – дійсні числа	$y_1 = e^{\kappa_1 x}$ $y_2 = e^{\kappa_2 x}$	$y = c_1 e^{\kappa_1 x} + c_2 e^{\kappa_2 x}$
2	$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ – дійсні числа	$y_1 = e^{\kappa x}$ $y_2 = e^{\kappa x}$	$y = c_1 e^{\kappa x} + x c_2 e^{\kappa x}$
3	$\kappa_{1,2} = \lambda \pm \beta i$ – прості спряжені комплексні корені	$y_1 = e^{\lambda x} \cos\beta x$ $y_2 = e^{\lambda x} \sin\beta x$	$y = e^{\lambda x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x$

Таблиця 4 – Структура частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

	Вигляд правої частини диференціального рівняння $f(x)$	Корені характеристичного рівняння $\kappa_1 \kappa_2$	Вид частинного розв'язку $y_{чн}$
1	$f(x)=ae^{\lambda x}$ де $a-const$	а) $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \lambda$ б) $\kappa_1 = \lambda$ або $\kappa_2 = \lambda$ в) $\kappa_1 = \kappa_2 = \lambda$	а) $y_{чн} = Ae^{\lambda x}$ б) $y_{чн} = Axe^{\lambda x}$ в) $y_{чн} = Ax^2e^{\lambda x}$
2	$f(x)=axe^{\lambda x}$ або $f(x)=(ax+b)e^{\lambda x}$, де $a, b-const$	а) $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \lambda$ б) $\kappa_1 \neq \lambda$ або $\kappa_2 = \lambda$ в) $\kappa_1 = \kappa_2 = \lambda$	а) $y_{чн} = (Ax+B)e^{\lambda x}$ б) $y_{чн} = (Ax+B)x\, e^{\lambda x}$ в) $y_{чн} = (Ax+B)x^2\, e^{\lambda x}$
3	$f(x)=ax^2e^{\lambda x}$ або $f(x)=(ax^2+bx)e^{\lambda x}$ або $f(x)=(ax^2+c)e^{\lambda x}$ або $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{\lambda x}$	а) $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \lambda$ б) $\kappa_1 \neq \lambda$ або $\kappa_2 = \lambda$ в) $\kappa_1 = \kappa_2 = \lambda$	а) $y_{чн} = (Ax^2+Bx+C)e^{\lambda x}$ б) $y_{чн} = (Ax^2+Bx+C)xe^{\lambda x}$ в) $y_{чн} = (Ax^2+Bx+C)x^2e^{\lambda x}$
4	$f(x)=a\cos\beta x\, e^{\lambda x}$ $f(x)=b\sin\beta x\, e^{\lambda x}$ $f(x)=(a\cos\beta x+b\sin\beta x)e^{\lambda x}$	а) $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \lambda + i\beta$ б) $\kappa_1 \neq \lambda + i\beta$ або $\kappa_2 \neq \lambda + i\beta$	а) $y_{чн} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\lambda x}$ б) $y_{чн} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)xe^{\lambda x}$

Таблиця 5 – Таблиця інтегралів

1. $\int 0dx = C$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
2'. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	11'. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
2''. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + C$	12'. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a-x}{a+x} \right\rvert + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int chxdx = shx + C$
4'. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14. $\int shxdx = chx + C$
5. $\int \cos xdx = \sin x + C$	15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$	16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$	17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg \frac{x}{2} \right\rvert + C$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$	18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	
9'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	

Таблиця 6 – Інтегрування частинами. Рекомендації щодо вибору U і dV

Вигляд інтеграла	U	dV
$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^{ax} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ a^{kx} \end{Bmatrix} dx$	$P_n(x)$	$dv = \begin{Bmatrix} e^{ax} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ a^{kx} \end{Bmatrix} dx$
$\int P_n(x)\begin{cases} \arcsin\arcsin x \\ \arccos\arccos x \\ arctg\ x \\ arcctg\ x \\ \ln\ln x \\ \log_a x \end{cases}$	$\arcsin\arcsin x$ $\arccos\arccos x$ $arctg\ x$ $arcctg\ x$ $\ln\ln x$ $\log_a x$	$dv = P_n(x)dx$
$\int e^{\propto x}\begin{Bmatrix} \cos\beta x \\ \sin\beta x \end{Bmatrix} dx$	Після двократного застосування формули інтегрування частинами у правій частині отримаємо вираз, що містить початковий інтеграл, його знаходимо як розв’язок лінійного алгебраїчного рівняння	
$\int \begin{Bmatrix} \sin(\ln\ln x) \\ \cos(\ln\ln x) \end{Bmatrix} dx$	$u = \begin{Bmatrix} \sin(lnx) \\ \cos(\ln\ln x) \end{Bmatrix}$	$dv = dx$

Таблиця 7. Правила складання диференціальних рівнянь

Геометричні задачі	Фізичні задачі
1. Зробити схематичний рисунок і ввести позначення, виходячи з детального розбору умови задачі. 2. Відділити умови, які мають місце в довільній точці шуканого геометричного місця, від умов, які мають місце лише в окремих точках.	1. Визначити яку з величин взяти за незалежну змінну t, а яку – за шукану функцію $f(t)$. 2. Встановити закон, за яким відбувається досліджуваний процес.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика: невизначений інтеграл. Практикум для дистанційного навчання : електронний навчальний посіб.ник комбінованого (локального та мережного) використання / Коломієць А. А., Крупський Я. В., Тютюнник О. І., Коцюбівська К. І. Вінниця : ВНТУ, 2021. 76 с. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/645.
2. Клочко В. І., Коломієць А. А. Вища математика. Збірник прикладних задач : збірник задач. Вінниця: ВНТУ, 2021. 105 с.
3. Клочко В. І., Коломієць А. А. Теорія ймовірностей. Частина 2. Індивідуальна та самостійна робота студентів : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2018. 72 с.
4. Петрук В. А., Прозор О. П. Вища математика з прикладними задачами. Ч. 1 : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2018. 171 с.
5. Хом'юк В. В., Хом'юк І. В. Вища математика. Частина 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : практикум. Вінниця : ВНТУ, 2017. 152 с.
6. Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 1. Вінниця : ВНТУ, 2019. 103 с.
7. Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 2. Вінниця : ВНТУ, 2022. 102 с.
8. Вища математика: спеціальні розділи : підручник. У 2-х книгах / за ред. Г. Л. Кулініча. К. : Либідь, 2019.

Електронне навчальне видання

Галина Григорівна Кашканова
Альона Анатоліївна Коломієць

Вища математика. Диференціальні рівняння

Навчальний посібник

Рукопис оформила *А. Коломієць*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет виготовила *Т. Старічек*

Підписано до видання 20.02.2025 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2025-035.
Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: irvc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.