Методичні вказівки
для підготовки до національного мультипредметного тесту
блоку математика з розділу «Рівняння і нерівності»
для слухачів підготовчих курсів

Частина 3

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Методичні вказівки
для підготовки до національного мультипредметного тесту блоку математика з розділу «Рівняння і нерівності» для слухачів підготовчих курсів

Частина 3

Вінниця
ВНТУ
2025

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 10 від 22.05.2025 р.)

Рецензенти:
В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор
М. В. Лисий, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Методичні вказівки для підготовки до національного мультипредметного тесту блоку математика з розділу «Рівняння і нерівності» для слухачів підготовчих курсів. Частина 3 [Електронний ресурс] / уклад.: Г. Г. Кашканова, А. А. Коломієць, Н. Б. Дубова. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – (PDF, 92 с.)

В методичних вказівках подано довідковий теоретичний матеріал з розділу «Рівняння і нерівності», приведено зразки розв'язання типових прикладів, завдання для самостійного розв'язування, тематичні та контрольні тести. Навчальний матеріал узгоджено з Програмою зовнішнього незалежного оцінювання результатів вивчення математики, отриманих на основі повної загальної середньої освіти. Він призначений для повторення основних теоретичних положень, відпрацювання навичок розв'язування завдань даного розділу при підготовці до національного мультипредметного тесту блоку математика.

Методичні вказівки адресовано слухачам підготовчих курсів.

ЗМІСТ

ДОВІДКОВИЙ ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

1 АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ

1.1 Основні поняття

Рівнянням називають рівність, у якій невідомі числа позначені буквами. Рівняння можна записати у вигляді $f(x)=g(x)$.

Якщо рівняння з однією змінною записати як $P(x)=0$, *де* $P(x)$ – многочлен стандартного виду, тоді степінь цього многочлена є степенем рівняння.

Рівняння називають *рівносильними,* якщо множини їх розв'язків співпадають, тобто вони мають однакові корені або обидва рівняння не мають коренів (розв'язків).

Наприклад,

1) Рівняння $x+1=7$ і $x+4=10$ – рівносильні, оскільки мають однакові корені x=6 ;

2) рівняння $x^2=-4$ і $3x^2+5=0$ – рівносильні, оскільки вони не мають розв'язку;

3) рівняння $x-8-1=0$ і $x^2=81$ - не рівносильні, оскільки перше рівняння має один корінь x=9, а друге – два кореня x=9 і x=-9.

Область допустимих значень рівняння (ОДЗ) – це множина значень змінної, при яких вирази в обох частинах рівняння визначені.

Наприклад, для рівняння $\dfrac{x}{x-2}=x$ ОДЗ знайдемо з умови, що знаменник не дорівнює нулю, тобто $x-2\neq 0, \quad x\neq 2$ або $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

1.2 Лінійні рівняння

Лінійним називають рівняння вигляду $ax=b$, де x – змінна, a, b –відомі числа.

Якщо:

1) $a\neq 0$, то $x=-\dfrac{b}{a}$ – єдиний розв'язок даного рівняння;

2) $a=0,\ b\neq 0$ – рівняння коренів не має;

3) $a=0,\ b=0$ – рівняння має безліч розв'язків (коренями є всі дійсні числа).

Приклад 1. Розв’язати рівняння:

$a)\ 2x-2(x-3)=10$

$2x-2x+6=10$

$0x=4-$ *коренів не має*;

$б)\ 2x+2(x-3)=10$

$2x+2x-6=10$

$4x=16$

$x=4-$ *один корінь*;

$в)\ 2x-2(x-5)=10$

$2x-2x+10=10$

$0x=0-$ *безліч коренів* (*розв'язків*).

Приклад 2. Різниця квадратів двох послідовних чисел, які діляться на 7 дорівнює 931. Знайти ці числа.

Розв’язання. Позначимо перше шукане число x, тоді друге число буде $x+7$. Запишемо різницю квадратів цих послідовних чисел і отримаємо рівняння $(x+7)^2-x^2=931,\quad x^2+14x+49-x^2=931\quad 14x=882\quad x=63.$ Отже, перше число дорівнює 63, тоді друге – 70.

Відповідь: 63; 70

1.3 Дробово-раціональні рівняння

1) Розглянемо рівняння $u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)=0$, де $u_1(x),\quad u_2(x),\ldots,\quad u_n(x)$ – многочлени.

Це рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} u_1(x)=0 \\ u_2(x)=0 \\ \ldots \\ u_n(x)=0 \end{array}\right.$

Приклад 3. Розв’язати рівняння: $(x-2)(x+3)(5-x)=0$

Розв’язання. Рівняння $(x-2)(x+3)(5-x)=0$ рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+3=0 \\ 5-x=0 \end{array}\right.$, тоді $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Відповідь: 2; -3; 5.

2) Розглянемо дробово-раціональне рівняння $\dfrac{u(x)}{v(x)}=0$, де $u(x),\quad v(x)$ – многочлени.

Це рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} u(x)=0 \\ v(x)\neq 0 \end{cases}$.

Приклад 4. Розв’язати рівняння: $\dfrac{x-7}{2x+9}=0$

Розв’язання. Рівняння $\frac{x-7}{2x+9}=0$ рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} x-7=0 \\ 2x+9\neq 0 \end{cases}$, з якої маємо $\begin{cases} x=7 \\ x\neq -4,5 \end{cases}$. Корінь рівняння $x=7$.

Відповідь: 7.

1.4 Квадратні рівняння

Квадратним називають рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де *x* – змінна, *a,b, c* – числа, *a ≠0*. Це *повне* квадратне рівняння.

Якщо в повному квадратному рівнянні *b=0* або *c=0* або *b=c=0*, тоді рівняння називають *неповним.*

1. $ax^2=0$, *a ≠0,* тоді $x^2=0,\quad x=0$ – *один розв’язок;*
2. $ax^2+bx=0$, $\quad x(ax+b)=0,\quad x_1=0,\ ax+b=0,\quad x_2=-\frac{b}{a}$ – два розв’язки;
3. $ax^2+c=0$, $x^2=-\frac{c}{a},\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, маємо два випадки:

   а) якщо $-\frac{c}{a}>0$. то $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

   б) якщо $-\frac{c}{a}<0$,– розв’язку не має.

Приклад 5. Розв’язати рівняння: $3x^2-5x=0$

Розв’язання. Маємо $3x^2-5x=0$, винесемо за дужки *x*, отримаємо $x(3x-5)=0\to x=0,\quad 3x-5=0,\ 3x=5,\ x=\frac{5}{3}$

Відповідь: $0,\frac{5}{3}$.

Приклад 6. Розв’язати рівняння: $3x^2-7=0$

Розв’язання. $3x^2-7=0,\quad 3x^2=7,\quad x^2=\frac{7}{3},\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ – два розв’язки.

Відповідь: $\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $3x^2 + 8 = 0$

Розв'язання. $3x^2 + 8 = 0, \quad 3x^2 = -8, \quad x^2 = -\dfrac{8}{3} < 0$ – рівняння розв'язку не має.

Відповідь: $\varnothing$.

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де $D = b^2 - 4ac$ - його дискримінант. Кількість коренів квадратного рівняння залежить від знаку його дискримінанта. Розглянемо можливі випадки:

а) *D> 0* – рівняння має два розв'язки: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

б) *D<0* – рівняння не має розв'язку;

в) *D=0,* – рівняння має один розв'язок $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Якщо *b=2к* – парне число , тоді корені квадратного рівняння $ax^2 + 2kx + c = 0$ можна обчислити за формулою $x_{1,2} = \dfrac{-\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - ac}}{a}$

Приклад 8. Розв'язати рівняння:

1) $2x^2 - 5x - 3 = 0;$

Розв'язання. 1) Маємо $a = 2, b = -5, c = -3$. Обчислимо дискримінант $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49, \sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$, тоді

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 7}{4}, \quad x_1 = \frac{5+7}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{5-7}{4} = 0,5$$

Відповідь: 3; 0,5.

2) $3x^2 - 2x - 8 = 0$

Розв'язання. 2) Маємо $a = 3, b = -2, c = -8$, оскільки коефіцієнт *b*=2*k*=-2 – парне число (*k*=-1), тоді корені рівняння можна обчислити за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - ac}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-8)}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{3} = \frac{1 \pm 5}{3},$$ тоді

$$x_1 = \frac{1+5}{3} = 2, \quad x_2 = \frac{1-5}{3} = -\frac{4}{3}$$

Відповідь: 2; $\dfrac{4}{3}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння: $3x^2-2x+8=0$

Розв'язання. Маємо $a=3, b=-2, c=8$. Обчислимо дискримінант $D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot3\cdot8=4-96=-92<0$, отже рівняння розв'язку не має.

Відповідь: $\varnothing$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння: $4x^2+4x+1=0$

Розв'язання. Маємо $a=4, b=4, c=1$. Обчислимо дискримінант $D=b^2-4ac=4^2-4\cdot4\cdot1=16-16=0$ – рівняння має один розв'язок $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2\cdot4}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

Поділимо рівняння $ax^2+bx+c=0$ на *a ≠ 0,* отримаємо *зведене* квадратне рівняння*:*

$$x^2+px+q=0\text{, де } p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a}$$

Для зведеного квадратного рівняння справедлива *теорема Вієта:* якщо x_1 та x_2 корені рівняння $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p,\quad a\quad x_1\cdot x_2=q$

Приклад 11. Знайти найбільше значення *x,* при якому значення виразів x^2-2x і $x-2$ рівні між собою

А	Б	В	Г	Д
-3	2	-1	1	3

Розв'язання. Прирівняємо вирази $x^2-2x=x-2$, отримаємо рівняння $x^2-3x+2=0$, за теоремою Вієта $x_1+x_2=3,\quad x_1\cdot x_2=2$, маємо $x_1=1, x_2=2$.

Відповідь: Б.

Приклад 12. Скласти рівняння за його коренями: $x_1=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}},\quad x_2=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

Розв'язання. Запишемо зведене квадратне рівняння $x^2+px+q=0$, використовуючи теорему Вієта, оскільки x_1 та x_2 корені рівняння, то $x_1+x_2=-p,\quad x_1\cdot x_2=q$.

Маємо $-p=x_1+x_2=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{4}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$, p=-2

$q = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2}$. Підставимо знайдені значення і отримаємо рівняння $x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ або $2x^2 - 4x + 1 = 0$.

Відповідь: $2x^2 - 4x + 1 = 0$

Приклад 13. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 6x + 4 = 0$, знайти суму квадратів його коренів.

Розв'язання. Використаємо теорему Вієта, маємо $x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 \cdot x_2 = 4$

Піднесемо перше рівняння до квадрату $\left(x_1 + x_2\right)^2 = 6^2, \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 36$

$x_1^2 + x_2^2 = 36 - 2x_1x_2 = 36 - 2 \cdot 4 = 28$.

Відповідь: 28.

Приклад 14. При якому значенні *a* для рівняння $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ виконується рівність $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$?

Розв'язання. Використавши теорему Вієта, отримаємо

$x_1 + x_2 = 3a, \quad x_1 \cdot x_2 = a^2$. Піднесемо перше рівняння до квадрату

$\left(x_1 + x_2\right)^2 = \left(3a\right)^2, \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 9a^2$, тоді

$1{,}75 + 2a^2 = 9a^2, \quad 7a^2 = 1{,}75 \quad a^2 = \frac{1{,}75}{7} = 0{,}25, \quad a = \pm 0{,}5$.

Відповідь: 0,5; -0,5.

1.5 Рівняння, які зводяться до квадратних

- **Тричленні рівняння**

Алгебраїчне рівняння виду $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ називають тричленним, якщо $n \geq 2, n \in N, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Заміна $x^n = t$, перетворює тричленне рівняння в квадратне $at^2 + bt + c = 0$.

При $n = 2$ рівняння $ax^4 + bx^2 + c = 0$ називають *біквадратним.*

Приклад 15. Розв'язати рівняння: $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$

Розв'язання. Рівняння $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$ – біквадратне, тому введемо заміну $t = x^2, \quad t > 0$ і отримаємо квадратне рівняння $3t^2 - 7t + 2 = 0$.

Обчислимо дискримінант

$D = b^2 - 4ac = \left(-7\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25, \sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$, тоді

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{7\pm5}{6},\quad t_1=\frac{7+5}{6}=2,\quad t_2=\frac{7-5}{6}=\frac{1}{3}.$$

Повертаємось до заміни $t=x^2$, $t>0$, маємо $x^2=2,\quad x=\pm\sqrt{2}$, або $x^2=\frac{1}{3},\quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Відповідь: $\pm\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Приклад 16. Розв'язати рівняння: $x^6-17x^3+16=0$

Розв'язання. Рівняння $x^6-17x^3+16=0$ заміною $t=x^3$ зведемо до квадратного рівняння $t^2-17t+16=0$. За теоремою Вієта маємо $t_1+t_2=17,\quad t_1\cdot t_2=16$, тоді $t_1=1,\quad t_2=16$

Повертаємось до заміни $t=x^3$, маємо $x^3=1,\quad x=\sqrt[3]{1}=1$, або $x^3=16,\quad x=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot2}=2\sqrt[3]{2}$

Відповідь: $1, 2\sqrt[3]{2}$.

- **Дробово-раціональне рівняння виду** $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}$

В рівнянні $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}$ можна розкрити пропорцію за умови $x+b\neq0,\quad x+d\neq0$, тоді це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}(x+a)(x+d)=(x+b)(x+d)\\ x\neq-b\\ x\neq-d\end{cases}$$

Приклад 20. Обчислити суму коренів рівняння $\frac{x-2}{2}=\frac{1,5}{x}$

Розв'язання. Рівняння $\frac{x-2}{2}=\frac{1,5}{x}$ рівносильні системі $\begin{cases}2\neq0\\ x\neq0\\ x(x-2)=2\cdot1,5\end{cases}$

Маємо $x^2-2x-3=0$, за теоремою Вієта сума коренів даного рівняння буде 2.

Відповідь: 2.

- **Зворотні рівняння**

Рівняння виду $ax^4+bx^3+cx^2+dx+m=0$ називають *зворотним,* якщо виконана умова $\frac{a}{m}=\frac{b^2}{d^2}, m\neq 0$.

Для розв'язання потрібно поділити рівняння на x^2, згрупувати перший член з останнім, а другий з четвертим.

Приклад 23. Розв'язати рівняння: $3x^4-2x^3-9x^2-4x+12=0$

Розв'язання. Поділимо рівняння на x^2, згрупуємо перший член з останнім, а другий – з четвертим.

$3x^2-2x-9-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0 \quad 3\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{2}{x}\right)=9$.

Введемо заміну, нехай $t=x+\frac{2}{x}$ піднесемо до квадрату

$t^2=\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=x^2+2x\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=x^2+4+\frac{4}{x^2}$, тоді $x^2+\frac{4}{x^2}=t^2-4$.

Отримаємо рівняння $3\left(t^2-4\right)-2t-9=0, \quad 3t^2-2t-21=0, \quad t_1=3, \quad t_2=-\frac{7}{3}$

Тоді $3=x+\frac{2}{x}$. або $-\frac{7}{3}=x+\frac{2}{x}$.

Маємо квадратні рівняння $x^2-3x+2=0, \quad x_1=1, \quad x_2=2$; або

$x+\frac{2}{x}+\frac{7}{3}=0, \quad 3x^2+7x+6=0, \quad D=49-72=-23<0$ – рівняння не має розв'язку.

Відповідь: 1, 2.

1.6 Двочленні рівняння

Двочленним рівнянням називають рівняння виду $x^n-a=0, n\in N$

Якщо $n=2k$ – *парне*, тоді при:

1) $a>0,$ рівняння має два дійсні корені $x_{1,2}=\pm\sqrt[2k]{a}$.
2) $a=0,$ рівняння має один корінь $x=0$.
3) $a<0,$ рівняння не має дійсних коренів.

Якщо $n=2k-1$ – *непарне*, то рівняння має один корінь $x=\sqrt[2k-1]{a}$.

Приклад 17. Розв'язати рівняння: $x^6-64=0$

Розв'язання. Маємо $x^6-64=0 \quad x^6=64 \quad x=\pm\sqrt[6]{64}=\pm\sqrt[6]{2^6}=\pm 2$.

Відповідь: -2, 2.

Приклад 18. Розв'язати рівняння: $x^4 = 0$

Розв'язання. Маємо $x^4 = 0 \quad x = \pm\sqrt[4]{0} = 0$

Відповідь: 0.

Приклад 19. Розв'язати рівняння: $2x^4 + 7 = 0$

Розв'язання. Маємо $2x^4 + 7 = 0, \quad 2x^4 = -7, \quad x^4 = -3{,}5 < 0$, отже рівняння розв'язку не має.

Відповідь: $\varnothing$.

Приклад 20. Розв'язати рівняння: $3x^5 + 96 = 0$

Розв'язання. Маємо

$$3x^5 + 96 = 0 \quad 3x^5 = -96 \quad x^5 = -\frac{96}{3}, \quad x^5 = -32 \quad x = \sqrt[5]{-32} = -2$$

Відповідь. -2.

1.7 Цілі раціональні рівняння вищих степенів

Рівняння виду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1} + a_n = 0, (n \in N, a_0 \neq 0)$ називають *алгебраїчним рівнянням степеня n.*

Якщо $n = 1$, то $a_0x + a_1 = 0$ - лінійне рівняння.

Якщо $n = 2$, то $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ - квадратне рівняння.

Якщо $n > 2$ – рівняння вищого степеня.

Рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1} + a_n = 0$, $a_0 \neq 1$ - *незведене,* якщо $a_0 = 1$, то рівняння називають *зведеним.*

При розв'язуванні рівнянь вищих степенів використовують теорему Безу та схему Горнера ділення многочленів.

Позначимо $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1} + a_n$, тоді для рівняння $P_n(x) = 0$ справедлива *теорема Безу:*

1) *Многочлен* $P_n(x)$ *ділиться без остачі на двочлен* $(x - a)$ *в тому і тільки в тому випадку, коли а – корінь многочлена* $P_n(x)$. Або

2) О*стача r від ділення многочлена* $P_n(x)$ *на двочлен* $(x - a)$ *дорівнює значенню цього многочлена при x=a , тобто* $P_n(a) = r$.

Якщо $P_n(x)$ - многочлен з цілими коефіцієнтами, то цілий корінь многочлена є дільником його вільного члена a_n .

Якщо нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем незведеного рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1} + a_n = 0$, то q є дільником старшого коефіцієнта a_0, а p - дільником вільного члена a_n **.**

Схема Горнера ділення многочленів

Поділити многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1} + a_n$ на двочлен $(x-a)$. Виконаємо ділення за допомогою таблиці:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a	a_0	$b_1 = a \cdot a_0 + a_1$	$b_2 = a \cdot b_1 + a_2$	$\dots$	$b_{n-1} = a \cdot b_{n-2} + a_{n-1}$	$b_n = a \cdot b_{n-1} + a_n$
	Коефіцієнти многочлена $(n-1)$ степеня					остача

Приклад 21. Розв'язати рівняння: $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0$

Розв'язання. Дільники вільного члена 18 – це числа $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18.$ Підбором знайдемо корінь цього рівняння, це число 1. Використаємо схему Горнера і поділимо ліву частину рівняння на $x-1$, маємо таблицю

	2	-9	4	21	-18
1	2	-7	-3	18	0

З цієї таблиці часткою буде многочлен $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18$. Тоді дане рівняння $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0$ запишемо як добуток множників $(x-1)(2x^3 - 7x^2 - 3x + 18) = 0$, тоді $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0$.

Коренем цього рівняння є число 2, при діленні лівої частини рівняння $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0$ на $x-2$ отримаємо таблицю

	2	-7	-3	18
2	2	-3	-9	0

Тоді рівняння $(x-1)(2x^3 - 7x^2 - 3x + 18) = 0$ буде мати вигляд $(x-1)(x-2)(2x^2 - 3x - 9) = 0$, тобто маємо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2 \\ 2x^2 - 3x - 9 = 0 \end{array}\right.$$

Коренями останнього рівняння є числа 3 і -1,5.

Відповідь: -1,5,1, 2, 3

Розглянемо рівняння виду $(x+a)^{2n}+(x+b)^{2n}=M, \quad n\in N, n>1$. Рівняння такого виду розв'язують заміною $t=x+c=x+\frac{a+b}{2}$

Приклад 22. Розв'язати рівняння: $(x+3)^4+(x+5)^4=16$

Розв'язання. Маємо $c=\frac{3+5}{2}=4$, тоді заміна $t=x+4\rightarrow x=t-4$.

Отримаємо рівняння $(t-1)^4+(t+1)^4=16$, тоді

$t^4-4t^3+6t^2-4t+1+t^4+4t^3+6t^2+4t+1=2t^4+12t^2+2=16$

$t^4+6t^2+1=8, \quad t^4+6t^2-7=0$ – біквадратне рівняння, корені якого

${t^2}_1=1, \quad {t^2}_2=-7<0$ – не задовольняє, тому маємо $t_{1,2}=\pm 1$, тоді

$x_1=t_1-4=1-4=-3, \quad x_2=t_2-4=-1-4=-5$

Відповідь: - 3, -5.

1.8 Рівняння, що містять знак модуля

При розв'язуванні рівнянь з модулем найчастіше розглядають наступні типи рівнянь, які розв'язуються відповідними методами.

1). Найпростіше рівняння з модулем $|f(x)|=a$ рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array}\right.$ якщо $a\geq 0$, якщо $a<0$, то рівняння коренів не має.

Приклад 23. Розв'язати рівняння: $|3x+2|=7$

Розв'язання. Маємо $|3x+2|=7\leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3x+2=7 \\ 3x+2=-7 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{3} \\ x=-3 \end{array}\right.$

Відповідь.- 3, 5.

Приклад 24. Розв'язати рівняння: $|2x-5|=-1$

Розв'язання. Оскільки права частина рівняння $a=-1<0$, то рівняння коренів не має.

Відповідь: $\varnothing$.

2) Рівняння $|f(x)|=g(x)$ рівносильне системі $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \\ g(x)\geq 0 \end{array}\right.$, яка отримана з врахуванням означення модуля функції:

$|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0. \end{cases}$ і ОДЗ рівняння $g(x) \geq 0$.

Приклад 25. Розв'язати рівняння: $|x-1| = 2x-5$

Розв'язання. Маємо систему:

$$\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-1 = 2x-5 \\ x-1 = -(2x-5) \end{array}\right. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x \geq 5 \\ \left[\begin{array}{l} 5-1 = 2x-x \to \\ x+2x = 5+1 \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} x \geq 2{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases}$$, значення $x = 2 < 2{,}5$ не задовольняє ОДЗ.

Відповідь: 4.

3) Рівняння $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$ або такі рівняння розв'язують піднесенням обох його частин до квадрату.

Приклад 26. Розв'язати рівняння: $|x-3| = |x+7|$

А	Б	В	Г	Д
1	-2	3	4	5

Розв'язання. Піднесемо ліву і праву частини рівняння до квадрату, отримаємо рівність: $(x-3)^2 = (x+7)^2$. Розкриємо дужки

$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 14x + 49$, $-6x + 9 = 14x + 49$, $\quad 20x = -40$, $\quad x - -2$

Відповідь .Б.

Приклад 27.Знайдіть суму коренів рівняння $|2x-3| = |x-3|$

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	-1

Розв'язання. Розглянемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} 2x-3 = x-3 \\ 2x-3 = -(x-3) \end{array}\right., \left[\begin{array}{l} 2x-x = -3+3 \\ 2x+x = 3+3 \end{array}\right., \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Сума коренів рівняння 0+2=2

Відповідь: В

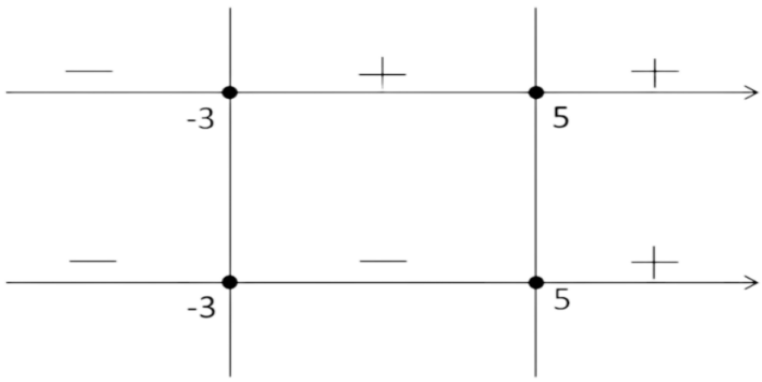
4) Рівняння, яке містить декілька модулів, розв'язують методом інтервалів. Для цього потрібно:

- знайти нулі всіх підмодульних виразів, враховуючи ОДЗ;
- розбити ОДЗ на інтервали нулями підмодульних функцій;
- знайти розв'язки на кожному інтервалі і об'єднати їх.

Приклад 28. Розв'язати рівняння: $|x+3|+|x-5|=20$

Розв'язання. Знайдемо нулі всіх підмодульних виразів, враховуючи ОДЗ $x \in (-\infty;+\infty)$, маємо $x+3=0, \quad x=-3; \quad x-5=0, \quad x=5$

Розіб'ємо ОДЗ на інтервали нулями підмодульних функцій, і визначимо знаки модулів на кожному із інтервалів:



Знайдемо розв'язки рівняння на кожному інтервалі.

1) $x \in (-\infty,-3]$, знімаємо модулі і отримаємо рівняння $-(x+3)-(x-5)=20$ $-x-3-x+5=20, \quad -2x=18, \quad x=-9$, – корінь рівняння, оскільки $-9 \in (-\infty,-3]$.

2) $x \in (-3,5]$, знімаємо модулі і отримаємо рівняння $(x+3)-(x-5)=20$ $x+3-x+5=20, \quad 8=20$, рівність не правильна, тому на цьому проміжку рівняння розв'язку не має.

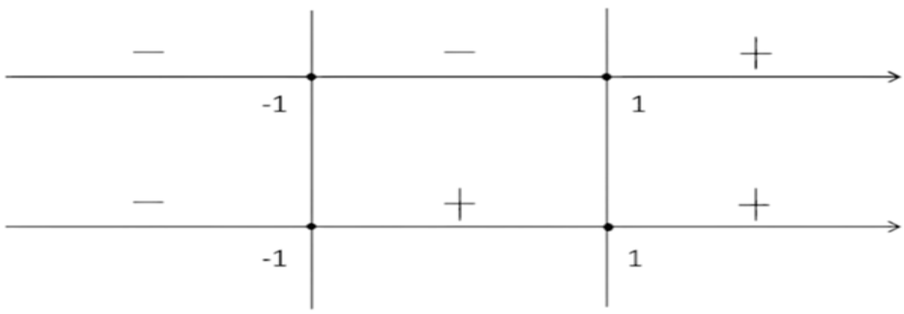
3) $x \in (5,+\infty)$, знімаємо модулі і отримаємо рівняння $(x+3)+(x-5)=20$ $x+3+x-5=20, \quad 2x=22, \quad x=11$ – корінь рівняння, оскільки $11 \in (5,\infty)$.

Відповідь: -9, 11.

Приклад 29. Розв'язати рівняння: $|x-1|+|x+1|=2$ [-1; 1]

Розв'язання. Знайдемо нулі всіх підмодульних виразів, враховуючи ОДЗ $x \in (-\infty;+\infty)$, маємо $x-1=0, \quad x=1; \quad x+1=0, \quad x=-1$

Розіб'ємо ОДЗ на інтервали нулями підмодульних функцій, і визначимо знаки модулів на кожному із інтервалів:



Знайдемо розв'язки рівняння на кожному інтервалі.

1) $x \in (-\infty, -1)$, знімаємо модулі і отримаємо рівняння $-(x-1)-(x+1)=2$
$-x+1-x-1=2, \quad -2x=2, \quad x=-1,$ – не корінь рівняння, оскільки $-1 \notin (-\infty, -1)$, на цьому проміжку рівняння розв'язку не має.

2) $x \in [-1,1]$, знімаємо модулі і отримаємо рівняння $-(x-1)+(x+1)=2$
$-x+1+x+1=2, \quad 2=2$, рівність правильна, тому розв'язком є весь проміжок, тобто $x \in [-1,1]$.

3) $x \in (1, +\infty)$, знімаємо модулі і отримаємо рівняння $(x-1)+(x+1)=2$
$x-1+x+1=2, \quad 2x=2, \quad x=1$ – не корінь рівняння, оскільки $1 \notin (1, +\infty)$.

Відповідь. $x \in [-1,1]$.

1.9 Завдання для самостійної роботи

Тест 1 (Рівняння)

1. Чому дорівнює корінь рівняння $x - 0,25x = 24$

А	Б	В	Г	Д
18	32	16	12	40

2. В одній корзині яблук утричі більше, ніж у другій. Коли з першої корзини перекласти в другу 10 яблук, то в обох корзинах яблук стане порівну. Скільки яблук спочатку було у першій корзині ?

А	Б	В	Г	Д
10	20	30	40	24

3. Яке із запропонованих рівнянь має безліч розв'язків

А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*
$12x=0$	$0x=12$	$0x=0$	$\frac{0}{x}=0$	$-12x=-12$

4. Розв'яжіть рівняння $\frac{x-1}{2x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=\frac{8x-1}{4x^2-1}$

А	Б	В	Г	Д
$1,5;\ 0,5$	$-1,5;-0,5$	$1,5$	$0,5$	$-0,5$

5. Чому дорівнює сума коренів рівняння $x^2 - 7x + 3 = 0$

А	Б	В	Г	Д
-7	7	3	-3	-4

6. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

А	Б	В	Г	Д
2	1	2;1	$\pm 1;-2$	± 1

7. Розв'яжіть рівняння $x^3-2x+1=0$

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$	$-1\pm\sqrt{5}$	$1;\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

8. Розв'яжіть рівняння $x^3-5x^2-2x+24=0$

А	Б	В	Г	Д
-2;4;3	-4;2;3	1;2;-3	4;-1;2	-2;3

9. Розв'яжіть рівняння $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$

А	Б	В	Г	Д
$-2-\sqrt{3}$	2;-4	$-2\pm\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$	-2;-4

10. Розв'яжіть рівняння $x^3-4x^2+x+6=0$

А	Б	В	Г	Д
-1	2	2;3	-1;2	-1;2;3

11. Скільки дійсних коренів має рівняння $x^3-x^2-3x=0$

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

12. При якому значенні а рівняння $\left(a^2-9\right)x=a-3$ не має розв`язків?

А	Б	В	Г	Д
3;-3	3	-3	0	1

13. Розв'яжіть рівняння $x^4-6x^2+5=0$

А	Б	В	Г	Д
-1;1	$1;\sqrt{5}$	$-1;1;\sqrt{5}$	1;	$1;-1;\sqrt{5};-\sqrt{5}$

14. Знайти суму коренів рівняння $\frac{1}{x(x-2)}-\frac{1}{(x-1)^2}=0$

А	Б	В	Г	Д
1	2	3,5	7	-2

15. Складіть квадратне рівняння корені якого у 2 рази менші за відповідні корені рівняння $3x^2-12x+4$

А	Б	В	Г	Д
$1,5x^2-6x+2=0$	$1,5x^2+6x-2=0$	$3x^2+6x+1=0$	$3x^2-6x-1=0$	$3x^2-6x+1=0$

16. Розв'яжіть рівняння $\left(x^2+5x\right)^2-4\left(x^2+5x\right)-12=0$

А	Б	В	Г	Д
-6;1	6;1	$-6;1;\frac{5+\sqrt{17}}{2}$	$-6;1;\frac{5-\sqrt{17}}{2}$	$-6;1;\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

17. .Знайдіть суму коренів рівняння $|2x-3|=|x-3|$

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	-1

18. Розв’яжіть рівняння $|3-x|-|x+2|=5$

А	Б	В	Г	Д
3	-2	-2; 3	1:5	$(-\infty;-2]$

19. Яке з наведених рівнянь рівносильне рівнянню $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=1$

А	Б	В	Г	Д
$2x=1$	$x^2-3x=0$	$\|x\|=1$	$\|x\|=-1$	$\|x\|=0$

20. Установіть відповідність між квадратними рівнями (1–4) та добутком їхніх коренів (А-Д)

Вираз	*Значення*
1. $x^2+6x-7=0$	**А** -7
2. $x^2-6x+7=0$	**Б** -6
3. $x^2+7x-6=0$	**В** 6
4. $x^2-7x+6=0$	**Г** 7
	Д $\varnothing$

21. Розв’яжіть рівняння $\frac{9(x+12)}{x}-\frac{8x}{x+12}=6$

22. Складіть рівняння за його коренями $x_1=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

2. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ

2.1 Лінійне рівняння з двома змінними

Лінійне рівняння з двома змінними має вигляд $ax + by = c$, де x і y – змінні, a, b, c – деякі числа.

Розв'язком рівняння з двома змінними називають пару значень змінних, які перетворюють це рівняння в правильну рівність.

Рівняння з двома змінними, у яких розв'язки співпадають або вони не мають розв'язків – *рівносильні.*

Розглянемо рівняння $5x+2y = 12$, виразимо з цього рівняння одну змінну через другу, наприклад, y через x. Маємо $2y = –5x + 12$, $y= –2{,}5x + 6$. Рівняння $5x+2y = 12$ і $y= –2{,}5x + 6$ – рівносильні.

Приклад 29. Розв'язати рівняння: $5x+2y = 12$.
Розв'язання. Для розв'язання цього рівняння достатньо взяти довільне значення x і обчислити за формулою $y = –2{,}5x + 6$ відповідне йому значення y. Нехай $x = 2$, тоді $y = –2{,}5 *2+6=1$; при $x = 0{,}4$, $y = –2{,}5* 0{,}4 +6=5$. Пари чисел (2; 1), (0,4; 5) – розв'язки даного рівняння. Це рівняння має безліч розв'язків. *Відповідь:* Безліч розв'язків

Розв'яжіть самостійно наступні завдання:

1. Пари значень змінних x і y подано в таблиці

x	5	4	3	1	0	4	5
y	0	3	4	3	5	3	0

Які з них є розв'язками рівняння а) $2x + y = –5$; б) $x + 3y = –5$?

2. Складіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел: а) $x = 2$, $y = 4{,}5$; б) $x = –1$, $y = 2$.

3. З рівняння $4x + 3y = 12$ виразити: а) y через x; б) x через y.

4. Із рівняння виразити змінну y через x і, користуючись виведеною формулою, знайти три будь-яких розв'язки рівняння:

а) $x + y = 27$; б) $2x – y = 4{,}5$.

в)$3x + 2y = 12$; г) $5y – 2x = 1$.

2.2 Системи лінійних рівнянь з двома невідомими

- **Основні поняття**

Кілька рівнянь з двома (або більше) невідомими утворюють *систему рівнянь*, якщо ставиться задача знайти множину спільних розв’язків цих рівнянь.

Розв’язком системи називають сукупність значень невідомих, які входять в систему і перетворюють кожне рівняння системи в рівність. *Розв’язати систему рівнянь* – означає знайти всі її розв’язки або довести, що розв’язків немає.

Дві системи називають *рівносильними*, якщо вони мають одну і ту ж множину розв’язків або не мають розв’язків.

Якщо система рівнянь має розв’язок, то її називають с*умісною*, якщо ні – *несумісною*. Систему рівнянь називають *визначеною*, якщо вона має скінченне число розв’язків, і *невизначеною*, якщо – нескінченну множину розв’язків.

- Розглянемо систему лінійних рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

За загальним виглядом, не розв’язуючи систему, можна визначити кількість її розв’язків. Система визначає розташування двох прямих на площині, які є графіками заданих лінійними рівняннями з двома невідомими. Розглянемо випадки:

1. Якщо виконується співвідношення $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, тоді прямі, що є графіками рівнянь системи, перетинаються в одній точці і координати точки перетину прямих будуть єдиним розв’язком системи.
2. Якщо $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ – прямі, що є графіком рівнянь, паралельні і система не має розв’язку.
3. Якщо $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ – прямі, що є графіком рівнянь, збігаються і система має безліч розв’язків.

Приклад 30. При якому значенні k система $\begin{cases} (k-2)x + 230y = 11{,}5 \\ 2x + (k+1)y = -1 \end{cases}$ має безліч розв’язків, не має розв’язку?

Розв’язання. Система має безліч розв’язків, якщо виконується рівність $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$. Для даної системи маємо рівність $\dfrac{k-2}{2} = \dfrac{230}{k+1} = \dfrac{11{,}5}{-1}$.

З рівності $\frac{k-2}{2}=\frac{230}{k+1}$ за правилом пропорції знайдемо значення k:
$(k-2)(k+1)=230\cdot 2,\quad k^2+k-2k-2=460,\quad k^2-k-462=0\quad k_1=-21,\quad k_2=22$
Перевіримо чи виконується при знайдених значеннях k рівність $\frac{k-2}{2}=\frac{230}{k+1}=\frac{11,5}{-1}$. При $k_1=-21$ маємо $\frac{-21-2}{2}=\frac{230}{-21+1}=\frac{11,5}{-1},\quad -\frac{23}{2}=-\frac{23}{2}=-\frac{23}{2}$ – рівність правильна, отже система має безліч розв'язків.

При $k_2=22$ маємо $\frac{22-2}{2}=\frac{230}{22+1}=\frac{11,5}{-1}$ тобто виконується співвідношення $\frac{20}{2}=\frac{230}{23}\neq-\frac{23}{2}$ і система не має розв'язку.

Відповідь: При $k_1=-21$ система має безліч розв'язків;
при $k_2=22$ – не має розв'язку.

2.3 Методи розв'язування систем рівнянь з двома невідомими

Основні методи розв'язування систем *лінійних рівнянь* з двома невідомими:

1) метод підстановки;
2) метод алгебраїчного додавання;
3) метод порівняння;
3) графічний метод.

Розглянемо на прикладах методи розв'язування систем рівнянь. Оскільки графічний метод є наближеним, якщо розв'язки не цілі числа, тому його не будемо розглядати.

1) *Метод підстановки.* Потрібно вибрати рівняння системи і виразити з цього рівняння одне невідоме через друге, наприклад, y через x і підставити це значення в друге рівняння.

Приклад 31. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}3x+y=7,\\-5x+2y=3.\end{cases}$

Розв'язання. З рівняння $3x+y=7$ знайдемо $y=7-3x$ і підставимо це значення в рівняння $-5x+2y=3$, отримаємо систему $\begin{cases}y=7-3x\\-5x+2(7-3x)=3\end{cases}$, $\begin{cases}y=7-3x\\-5x+14-6x=3\end{cases}$, $\begin{cases}y=7-3x\\11x=11\end{cases}$, $\begin{cases}y=7-3\cdot 1\\x=1\end{cases}$, $\begin{cases}y=4\\x=1\end{cases}$

Відповідь: $(1;4)$.

2.) *Метод алгебраїчного додавання.* Потрібно перетворити рівняння системи так, щоб коефіцієнти біля одного із невідомих були протилежними числами. При додаванні цих рівнянь отримаємо рівняння з одним невідомим, з якого і знайдемо його значення. Повертаючись до системи, обчислимо значення другого невідомого.

Приклад 32. Розв'язати систему: $\begin{cases} 2x+7y=8 \\ 10x-3y=2 \end{cases}$

Розв'язання. Помножимо перше рівняння системи на -5, отримаємо систему $\begin{cases} -10x-35y=-40 \\ 10x-3y=2 \end{cases}$. додамо перше рівняння системи до другого, отримаємо $-10x-35y+10x-3y=-40+(-2), \quad -38y=-38, \quad y=1.$

Повернемось до системи $\begin{cases} y=1 \\ 2x+7y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} y=1 \\ 2x+7\cdot 1=8 \end{cases}$, $\begin{cases} y=1 \\ x=0,5 \end{cases}$.

Відповідь. $(0,5;1)$.

3) *Порівняння.* Потрібно виразити із першого і другого рівняння системи одне із невідомих і прирівняти ці значення.

Приклад 33. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x=14+y \\ 2x+y=11 \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо y із першого і другого рівняння системи і прирівняємо ці значення, отримаємо

$\begin{cases} y=3x-14 \\ y=11-2x \end{cases}$, $\quad 3x-14=11-2x, \quad 5x=25, \quad x=5.$

Повернемось до системи $\begin{cases} x=5 \\ 2\cdot 5+y=11 \end{cases}$, $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$.

Відповідь. $(5;1)$.

При розв'язуванні систем *нелінійних рівнянь* з двома невідомими, крім розглянутих методів, використовують методи заміни, віднімання, множення, ділення, однорідності та симетричності рівнянь системи.

4). *Системи однорідних* рівнянь (всі члени рівнянь мають невідомі в одному і тому ж степені). Розв'язують заміною $x=ty$.

Приклад 34. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1 \\ 3x^2-xy+3y^2=13 \end{cases}$

Розв’язання. Нехай $x = ty$. Підставимо це значення в обидва рівняння системи: $\begin{cases} t^2y^2 - 3ty \cdot y + y^2 = -1 \\ 3t^2y^2 - ty \cdot y + 3y^2 = 13 \end{cases}$, винесемо за дужки y^2 і поділимо перше рівняння системи на друге, отримаємо $\frac{y^2\left(t^2 - 3t + 1\right)}{y^2\left(3t^2 - t + 3\right)} = -\frac{1}{13}$. Скоротимо на y^2, маємо $\frac{\left(t^2 - 3t + 1\right)}{\left(3t^2 - t + 3\right)} = -\frac{1}{13}$, $\quad 13\left(t^2 - 3t + 1\right) = -\left(3t^2 - t + 3\right)$.

Розкриємо дужки і отримаємо рівняння, з якого визначимо значення *t:*

$13t^2 - 39t + 13 = -3t^2 + t - 3, \quad 16t^2 - 40t + 16 = 0 \quad 2t^2 - 5t + 2 = 0, \quad t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$

Повернемось до заміни $x = ty$.

Маємо:

1) $t = 2, \quad x = 2y$, підставимо $t = 2$ в перше рівняння системи, отримаємо $y^2\left(2^2 - 3 \cdot 2 + 1\right) = -1, \quad -y^2 = -1, \quad y^2 = 1, \quad y_{1,2} = \pm 1,$ тоді $x_{1,2} = 2y = \pm 2$.

2) $t = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{y}{2}$, підставимо $t = \frac{1}{2}$ в перше рівняння системи, отримаємо $y^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = -1, \quad -\frac{1}{4}y^2 = -1, \quad y^2 = 4, \quad y_{3,4} = \pm 2$,

тоді $x_{3,4} = \frac{y}{2} = \pm 1$. Розв’язками є наступні пари значень x і y : (2;1), (-2;-1), (1;2), (-1;-2).

Відповідь: (2;1), (-2;-1), (1;2), (-1;-2).

5) *Симетричні системи* рівнянь (рівняння не міняються при будь-якій перестановці невідомих).

Система з двома невідомими, наприклад, (x, y) розв’язується заміною:

$$\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$$

Приклад 35. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

Розв’язання. Введемо заміну: $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$.

Обчислимо значення x^2+y^2, для цього піднесемо до квадрату $(x+y)^2=u^2$, $x^2+2xy+y^2=u^2 \to x^2+y^2=u^2-2xy=u^2-2v$, тобто $x^2+y^2=u^2-2v$.

Тоді система набуде вигляду:

$\begin{cases} u^2-2v=13 \\ v=6 \end{cases}$, $\begin{cases} v=6 \\ u^2-12=13 \end{cases}$, $\begin{cases} v=6 \\ u^2=25 \end{cases}$, $\begin{cases} v=6 \\ u=\pm 5 \end{cases}$.

Ця система рівносильна сукупності систем $\begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases}$ або $\begin{cases} u=-5 \\ v=6 \end{cases}$.

Повернемось до заміни:

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$, розв'язками цієї системи є пари чисел (2;3), (3;2);

2) $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases}$ – для цієї системи розв'язками є пари чисел (-3;-2); (-2;-3).

Відповідь: (2;3); (3;2); (-3;-2); (-2;-3).

2.4 Завдання для самостійної роботи

Тест 2 (Системи рівнянь)

1. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=6 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	безліч

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$	$(-2;1)$	$(-11;2)$	$(1;-2)$	$(-1;2)$

3. При якому значенні *а* прямі $4x+3y=8$ і $2x+y=a$ перетинаються в точці, що лежить на осі абсцис?

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	7

4. При якому значенні параметра *а* система $\begin{cases} x+ay=a \\ ax+9y=a+6 \end{cases}$ не має розв'язків ?

А	Б	В	Г	Д
2	4	6	$x\in R$	-3

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y^2=4 \\ x-y=2 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(3;1)$	$(0;2)$	$(0;-2)$	$(3;1),(0;-2)$	$\varnothing$

6. Знайти розв'язки системи $\begin{cases} x+xy=-2 \\ x-xy=4 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(1; –3)	(–1; 3)	(1; 3)	(–1; –3)	(–3; 1)

7. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{y}{2}=4 \\ \frac{x}{5}+\frac{2}{y}=\frac{4}{3} \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(5;6)$	$(6;5)$	$(5;6),\left(2;\frac{5}{3}\right)$	$(5;6),\left(\frac{5}{3};2\right)$	$\varnothing$

8. Указати пару, яка є розв'язком рівняння $x+y=-2$.

А	Б	В	Г	Д
(–1; 1)	(3; –1)	(–3; –1)	(–3; 1)	(0;2)

9. Знайти розв'язок системи $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+3y=24 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(20;22)$	$(6;4)$	$(4;6)$	$(-2;-6)$	$(-6;-4)$

10. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-1;-3)(1;3)$	$(-3;-1)(3;1)$	$(\pm1;\pm3)(\pm3;\pm1)$	$(\pm1;3)(\pm3;1)$	$(-3;1)(1;-3)$

11. Знайти розв'язок системи $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x^2-4xy+y^2=2x+2y \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(2;2,5)$	$(-2;-2,5)$	$(-2;2,5)$	$(2;-2,5)$	$(2,5;2)$

12. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(3;4)$	$(4;3)$	$(3;4),(4;3)$	$(-4;-3)$	$(3;3)(4;4)$

13. Знайти суму розв'язків системи $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	-2	-3

14. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{5x}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{y}{2} \\ \dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{3} \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(3;4)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{15};3\right)$	$\left(2\frac{2}{15};10\right)$

15. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} (a+1)x-3y-4=0 \\ 2x-ay-3=0 \end{cases}$ не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
-3;2	-2;3	-5;1	-6;1	6;-1

16. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} ax-(a+1)y=6 \\ 7ax-28y=6(a+4) \end{cases}$ має безліч розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
2	3	-8;3	-8	6

17. Не виконуючи побудов, вкажіть в якій точці перетинаються прямі $3x-5y=93$ і $5x-4y=103$

А	Б	В	Г	Д
(10; 12)	(16; 4)	(14; 26)	(–12; 11)	(11; –12)

18. Установіть відповідність між системами рівнянь (1–3) та кількістю її коренів (А-В)

1. $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 6x-4y=22 \end{cases}$	А) один
2. $\begin{cases} 5x+y=6 \\ 3x-2y=15 \end{cases}$	Б) безліч
3. $\begin{cases} 7x-6y=21 \\ 21x-18y=7 \end{cases}$	В) нуль
	Г) два

19. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{y}=3 \\ \dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{y}=4 \end{cases}$

20. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{3}{8} \end{cases}$

21. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} 6x+ay=36 \\ x-y=1 \end{cases}$ має розв'язок у якого $x>-1$?

22. При яких значеннях параметра m система $\begin{cases} 2x+my=2 \\ 5x-4y=1 \end{cases}$ має розв'язок $x<0,\ \ y<0$?

2.5 Контрольний тест

Тест 3 (Рівняння, системи рівнянь)

1. Яке із запропонованих рівнянь рівносильне рівнянню $-3x=-12$

А	Б	В	Г	Д
$3x=-12$	$x+3=7$	$0.5x=2$	$x-2=6$	$0x=6$

2. При якому значенні x значення виразу $x+3$ дорівнює числу -1,8

А	Б	В	Г	Д
4,8	-4,8	1,2	-1,2	0,8

3. Розв'яжіть рівняння $2,5(x-2)=5-2,5x$

А	Б	В	Г	Д
2	4	6	$x\in R$	$\varnothing$

4. При якому значенні параметра b рівняння $b(b+1)\,x=b(b+2)$ не має розв'язків ?

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	$\varnothing$

5. Яке із вказаних рівнянь не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$x^2-3=0$	$x^2+2x-3=0$	$x^2+3=0$	$x^2+3x=0$	$x^2+3x-7=0$

6. Один із коренів $ax^2-3x-81=0$ дорівнює 3. Знайти інший корінь.

А	Б	В	Г	Д
-3	-2	3	2	4

7. Чому дорівнює добуток, сума коренів рівняння $x^2+2x-13=0$?

А	Б	В	Г	Д
-13;-2	13;-2	-13;2	2;13	-2;-13

8. Рівняння $x^2+3x-7=0$ має корені $x_1,\ x_2$. Знайдіть $x_1^2x_2+x_2^2x_1$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{21}{4}$	$\frac{21}{4}$	21	-21	Інша відповідь

9. Розв'яжіть рівняння $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$

А	Б	В	Г	Д
$-2-\sqrt{3}$	2;-4	$-2\pm\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$	-2;-4

10. Розв'яжіть рівняння $x^4-37x^2+36=0$

А	Б	В	Г	Д
-6;-1;6;36	-3;1;3;36	36;1	1;6;36	-1;1;-6;36

11. При якому значенні параметра a рівняння $(a^2-16)x=a+4$ має безліч розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
0	4	-4	4;-4	Інша відповідь

12. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\frac{x+3}{2}-\frac{y-2}{3}=2\\ \frac{x-1}{4}+\frac{y+1}{3}=4\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(10; 12)	(6; 4)	(-5;8)	(3; 4)	(5;8)

13. Розв'яжіть рівняння $x^3+2x^2+\frac{3}{x(x-2)}=8x+\frac{3}{x(x-2)}$

А	Б	В	Г	Д
0; 2; -4	0; 4	2; 4	$\varnothing$	-4

14. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x-y=1\\ (x^3-y^3)=7\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(1;-2)(-2;1)$	(-1;-2)	$(-1;-2)(2;1)$	(2;1)	$(1;-2)(2;-1)$

15. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6}\\ x+y=5\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(1;2)(2;1)$	(3;2)	$(3;2)(2;3)$	(2;3)	$(-2;-3)(-3;-2)$

16. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=8 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(4;2)(5;4)$	$(4;2)$	$(1;8)(8;1)$	$(8;1)$	$(1;8)$

17. Установіть відповідність між кожним рівнянням (1–4) та кількістю його коренів (А-Д) на відрізку $[-3;3]$

Вираз	Значення
1 $\dfrac{x^3-x}{x+1}=0$. **2.** $x^3-2x^2-3x=0$ **3.** $4(x+1)=2x$ **4.** $x^2+x+6=0$	**А** 4 **Б** 1 **В** **2** **Г** 3 **Д** 0

18. При якому значенні параметра a для рівняння $x^2+ax+35=0$ сума квадратів його коренів дорівнює 74 ?

19. При яких значеннях параметра a система не має розв’язків?

$$\begin{cases} 4x-ay+a+1=0 \\ (a+6)x+2y-a-3=0 \end{cases}$$

20. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} x+ay=1 \\ ax-3ay=2a+3 \end{cases}$ має безліч розв’язків?

21. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2+3xy+y^2=-1 \end{cases}$

22. Розв’яжіть рівняння $\dfrac{x^2-2x-6}{x}-\dfrac{3x}{x^2-2x-6}=2$

3. НЕРІВНОСТІ

3.1 Числові нерівності

Нерівність –це сукупність двох виразів, з'єднаних одним із знаків нерівності: $>(\geq)$ або $<(\leq)$. Знаки >, < – це знаки строгої, а $\geq,\leq$ – нестрогої нерівності.

Нерівності $a>b, c>d$ або $a<b, c<d$ одного змісту, $a>b, c<d$ або $a<b, c>d$ – протилежного.

*Властивості (справедливі для знаків строгої і нестрогої нерівності)***:**

1) Якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$; аналогічно, якщо $a>b, b>c$, то $a>c$.

2) Якщо $a<b$ і с – довільне число, то $a+c<b+c$.

3) Якщо $a<b$ і $c>0$, то $ac<bc$, якщо $a<b$ і $c<0$, то $ac>bc$.

Наслідок: якщо $a>0$ і $b>0$ і $a>b$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ (знак – протилежний)

4) Нерівності одного змісту можна почленно додавати $(a>b)+(c>d)=(a+c)>(b+d)$

5) Нерівності протилежного змісту можна почленно віднімати, залишаючи знак нерівності, від якої віднімають $(a>b)-(c<d)=(a-c)>(b-d)$

6) Якщо $a<b$ і $c<d, a>0, b>0, c>0, d>0,$ то $ac<bd$

Наслідок: якщо $a<b$ і $a>0, b>0,$ то $a^n<b^n, n\in N.$

Приклад 36. Оцінити площу S прямокутника , якщо його сторони $3<a<8$ і $2<b<3{,}5$

А	Б	В	Г	Д
$5<S<29$	$6<S<28$	$7\leq S\leq 27$	$10\leq S\leq 23$	$6\leq S\leq 28$

Розв'язання. Оцінимо площу прямокутника, використовуючи формулу $S=a\cdot b$, де $3<a<8$ і $2<b<3{,}5$. За властивістю 6). Маємо $3\cdot 2<a\cdot b<8\cdot 3{,}5$ тобто $6<S<28$.

Відповідь: Б

3.2 Нерівності зі змінними

Нерівність, в якій невідомі числа позначено буквами, називають *нерівністю зі змінними або функціональною*.

Розглянемо нерівності з однією змінною.

Розв'язком нерівності називають будь-яке значення змінної, при якому початкова нерівність зі змінною перетворюється в правильну числову нерівність. Розв'язати нерівність – це значить знайти всі її розв'язки або довести, що їх не має.

Нерівності, що мають один і той же розв'язок або не мають розв'язку, називають *рівносильними.*

При розв'язуванні нерівностей знаходять ОДЗ. Множини розв'язків нерівності позначають на числових осях: для строгих нерівностей (знаків >, <) число позначається «виколотою» точкою ○ та круглою дужкою (.
Для нестрогих (знаків $\geq, \leq$) – «зафарбованою» точкою ● і квадратною дужкою [.

Наприклад, покажемо розв'язки нерівності $x \geq 5$ на числовій осі

тобто $x \in [5, +\infty)$.

5

Властивості:

1. $f(x) > g(x) \leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$
2. $f(x) > g(x) \leftrightarrow f(x) \pm \varphi(x) > g(x) \pm \varphi(x)$
3. $f(x) > g(x) \leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x), \quad \varphi(x) > 0,$

$f(x) > g(x) \leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) < g(x) \cdot \varphi(x), \quad \varphi(x) < 0,$ де функція $\varphi(x)$ визначена для всіх *x* із ОДЗ заданої нерівності.

4. Нерівність $f(x) \cdot g(x) > 0$ рівносильна сукупності систем нерівностей $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

5. Нерівність $f(x) \cdot g(x) < 0$ рівносильна сукупності систем нерівностей $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Не можна скорочувати обидві частини нерівності на вираз, знак якого не досліджений.

3.3 Лінійні нерівності

Нерівність вигляду $ax > b, \quad ax < b$ або $ax \geq b, \quad ax \leq b$, де $a \neq 0$ називають *лінійною.*

Якщо *a>0,* то нерівність $ax > b \leftrightarrow x > \frac{b}{a}, \quad x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right);$

якщо якщо *a<0,* то нерівність $ax > b \leftrightarrow x < \frac{b}{a}, \quad x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$

якщо $a=0$, то нерівність набуває вигляду $0 \cdot x > b$, тоді ця нерівність, при $b<0$ – правильна для всіх $x \in R$, тобто має розв'язок $x \in (-\infty, +\infty)$, при $b \geq 0$ – не має розв'язку.

Нерівність, яка *зводиться до лінійної* має вигляд $ax+b>0$ де $a \neq 0$.

Приклад 37. Розв'язати нерівність: а) $2x>8$ б) $-3x \leq 15$

Розв'язання. а) $2x>8$, то $x > \frac{8}{2}, \quad x>4, \quad x \in (4, +\infty)$.

Відповідь: $x \in (4, +\infty)$.

б) $-3x \leq 15$, то $x \geq -\frac{15}{3}, \quad x \geq -5, \quad x \in [-5, +\infty)$.

Відповідь: $x \in [-5, +\infty)$.

Приклад 38. Розв'язати нерівність: $2x+3<x-8$

Розв'язання. Маємо $2x+3<x-8, \quad 2x-x<-8-3, \quad x<-11$

Відповідь: $(-\infty, -11)$

Приклад 39. Розв'язати нерівність: $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<2x+1$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<2x+1, \quad \frac{3x-2x}{6}-2x-1<0, \quad \frac{x-12x-6}{6}<0, \quad \frac{-11x-6}{6}<0.$$

Оскільки знаменник 6>0, то нерівність виконається , якщо чисельник

$$-11x-6<0, \quad -11x<6, \quad x>-\frac{6}{11}$$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{6}{11}, +\infty\right)$

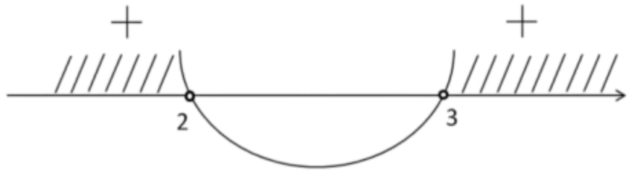
3.4 Квадратні нерівності

Нерівність вигляду $ax^2+bx+c>0$ (або $<0, \leq 0, \geq 0$), де x – змінна, a, b, c – числа, $a \neq 0$ називають *квадратною.*

Квадратні нерівності розв'язують графічно, для цього будують графік лівої частини нерівності – параболу $y=ax^2+bx+c$. Якщо a>0, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо a<0 – вниз. Корені квадратного тричлена є точками , в яких парабола перетинає вісь *ox*.

Приклад 40. Розв’язати нерівність: $x^2-5x+6>0$

Розв’язання. Парабола $y=x^2-5x+6,\quad a=1>0$ вітками вгору. Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю *ox*: $x^2-5x+6=0$. За теоремою Вієта $x_1=2,\quad x_3=3$ тому, точки в яких парабола перетинає вісь *ox* $x=2,\quad x=3$



Отже, $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

Відповідь: $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

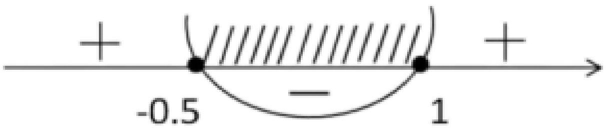
Приклад 41 Розв’язати нерівність: $2x^2-x-1\le 0$

Розв’язання. Парабола $y=2x^2-x-1,\quad a=2>0$ вітками вгору.

Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю *ox*: $2x^2-x-1=0$.

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9,\quad \sqrt{D}=\sqrt{9}=3,$

$x_1=\frac{1-3}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$ Точки, в яких парабола перетинає вісь *ox* $x=-\frac{1}{2}=-0,5,\quad x=1$



Отже, $x\in(-0,5;1)$

Відповідь: $x\in(-0,5;1)$

Якщо $D<0,\quad a>0$, то нерівність $ax^2+bx+c>0$ має розв’язок $x\in(-\infty;+\infty)$, оскільки парабола $y=ax^2+bx+c$ вітками вгору вісь *ox* не перетинає і набуває тільки додатних значень на всій числовій осі.

Якщо $D<0,\quad a<0$, то нерівність $ax^2+bx+c>0$ - не має розв’язку, оскільки парабола вітками вниз вісь *ox* не перетинає і набуває тільки від’ємних значень на всій числовій осі.

Приклад 42. Розв'язати нерівність: $x^2-3x+10\ge 0$

Розв'язання. Оскільки $D=9-4\cdot 1\cdot 10=-31<0,\quad a=1>0$, то парабола $y=x^2-3x+10$ вітками вгору вісь *ох* не перетинає і набуває тільки додатних значень на всій числовій осі, тобто нерівність $x^2-3x+10\ge 0$ виконується для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

Відповідь: $x\in(-\infty;+\infty)$

Приклад 43. Розв'язати нерівність $-x^2+2x-7\ge 0$

Розв'язання. Оскільки $D=4-4\cdot(-1)\cdot(-7)=-24<0,\quad a=-1<0$, то парабола $y=x^2-3x+10$ вітками вниз вісь *ох* не перетинає і набуває тільки від'ємних значень на всій числовій осі, тобто нерівність $-x^2+2x-7\ge 0$ не виконується для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

Відповідь: $\varnothing$

3.5 Метод інтервалів

Методом інтервалів доцільно розв'язувати нерівності – многочлени $P_n(x)>0$ та дробово-раціональні нерівності $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$ (або $<0;\le 0;\ge 0$), де $P_n(x),\quad Q_m(x)$ - многочлени степенів *n*,*m*.

Алгоритм розв'язування

1. Знайти корені чисельника і знаменника лівої частини нерівності $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$ або корені многочлена для нерівності $P_n(x)>0$ з умови $P_n(x)=0,\quad Q_m(x)=0$.
2. Знайдені значення нанести на одну числову вісь. Позначені корені розбивають вісь на інтервали. Корені знаменника завжди зображують «виколотою» точкою, таким чином із множини розв'язків вилучають числа, що не належать ОДЗ нерівності.
3. На кожному із інтервалів визначити знак нерівності, якого набуває ліва частина нерівності.
4. Побудувати криву знаків для лівої частини нерівності, починаючи з крайнього правого або лівого інтервалу.
5. На отриманому рисунку штрихами відмітити розв'язки нерівності і записати відповідь.

Розв'язуючи нерівності цим методом, використовують теорему про кратність коренів.

Кратність коренів – це кількість однакових коренів многочленів. Кратність коренів може виникнути при розв'язуванні квадратного рівняння, у якого дискримінант дорівнює нулю, тоді рівняння має один корінь $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ кратності 2 або рівняння вигляду $\left(ax+b\right)^n = 0, n \in N$, яке має один корінь $x = -\dfrac{b}{a}$ кратності *n*.

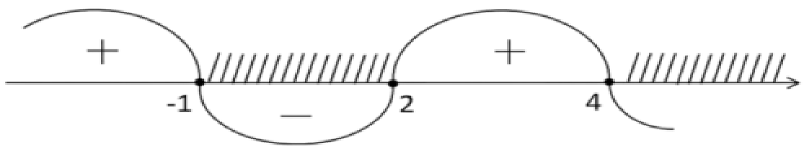
Теорема. Якщо корінь многочленів $P_n\left(x\right),\quad Q_m\left(x\right)$ непарної кратності, то крива знаків змінює свій знак при переході через даний корінь і перетинає числову вісь. Якщо корінь многочленів $P_n\left(x\right),\quad Q_m\left(x\right)$ парної кратності, то крива знаків не змінює свій знак при переході через даний корінь і не перетинає числову вісь (дотикається).

Розглянемо випадок, коли многочлени $P_n\left(x\right),\quad Q_m\left(x\right)$ розкладаються на лінійні множники.

Приклад 44. Розв'язати нерівність $\left(2-x\right)\left(x+1\right)\left(x-4\right) \le 0$

Розв'язання. Многочлен в лівій частині нерівності розкладено на множники. Знайдемо корені цього многочлена з умови $\left[\begin{array}{l} 2-x=0 \\ x+1=0 \\ x-4=0 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$

На числову вісь нанесемо ці корені



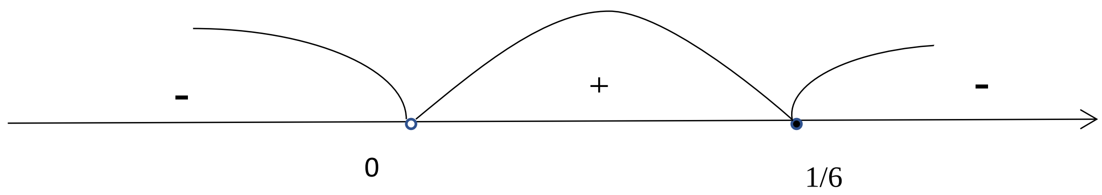
В проміжку, праворуч від найбільшого з них *x*=4, визначимо знак нерівності (-)(+)(+)=(-), далі при переході через корені *x=2* і *x*=-1, оскільки всі множники – лінійні, то знаки нерівності будуть чергуватись. Запишемо відповідь $x \in \left[-1,2\right] \cup \left[4,+\infty\right)$

Відповідь: $x \in \left[-1,2\right] \cup \left[4,+\infty\right)$

Приклад 45. Розв'язати нерівність $\dfrac{1}{2x} - 3 \ge 0,$

Розв'язання. Зведемо нерівність до стандартного вигляду $\dfrac{1}{2x} - 3 \ge 0$. Приведемо ліву частину цієї нерівності до спільного знаменника і знайдемо корені чисельника і знаменника $\frac{1-6x}{2x} \ge 0$, $\left[\begin{array}{l} 1-6x=0 \\ 2x=0 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} 6x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{6} \\ x=0 \end{array}\right.$

Знайдені значення нанесемо на числову вісь, зображуючи корені знаменника «виколотою» точкою, а чисельника – «зафарбованою». На кожному із інтервалів визначимо знак нерівності, якого набуває її ліва частина.



Нерівність виконується, якщо $x \in \left(0; \frac{1}{6}\right]$

Відповідь: $x \in \left(0; \frac{1}{6}\right]$

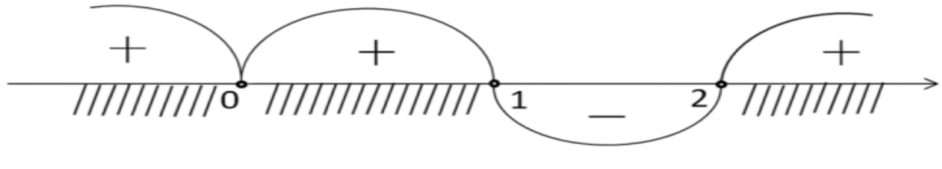
Якщо у розкладі многочленів $P_n(x)$, $Q_m(x)$ крім лінійних множників є ще множники в інших степенях, застосовують *узагальнений метод інтервалів*.

Застосування узагальненого методу інтервалів розглянемо на прикладах.

Приклад 46. Розв'язати нерівність $x^2(x-1)^3(x-2)^5 > 0$

Розв'язання. Знайдемо корені многочлена з умови

$\left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ (x-1)^3=0 \\ (x-2)^5=0 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x=x_1=x_2=0 \\ x-1=0,\ x=x_{1,2,3}=1 \\ x-2=0,\ x=x_{1,2,3,4,5}=2 \end{array}\right.$, маємо корені x=0 – кратності 2; x=1 – кратності 3; x=2 – кратності 5. На числову вісь нанесемо числа 0, 1, 2.



В проміжку праворуч від найбільшого з них числа 2 визначаємо знак нерівності (+), потім рухаючись справа наліво, при переході через число 2 змінюємо знак, оскільки корінь x=2 – кратності 5 (непарної); при переході через число 1 змінюємо знак, оскільки корінь x=1 – кратності 3 (непарної), і зберігаємо знак при переході через число 0, оскільки корінь x=0 – кратності 2 (парної). Нерівність виконується, якщо $x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (2, +\infty)$

Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (2, +\infty)$

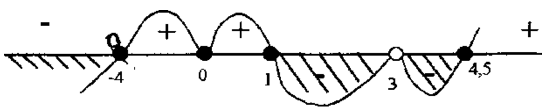
Приклад 47.Розв'язати нерівність $\frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4} \le 0$

Розв'язання. Знайдемо корені чисельника з умови $x^2(2x-9)(x-1)^3 = 0$

$x^2 = 0, x = 0$ – корінь кратності 2; $2x-9=0, 2x=9, x=4{,}5$ – корінь кратності 1 (простий корінь); $(x-1)^3 = 0, x-1=0, x=1$ корінь кратності 3.

Знайдемо корені знаменника $(x+4)^5(2x-6)^4 = 0$, маємо $(x+4)^5 = 0, x+4=0, x=-4$ корінь кратності 5;$(2x-6)^4 = 0, 2x-6=0, x=3$ – корінь кратності 4

Всі корені нанесемо на числову вісь, визначимо знаки нерівності на кожному проміжку і запишемо відповідь.



Відповідь: $x \in (-\infty; -4) \cup \{0\} \cup [1;3) \cup (3;4{,}5]$

3.6 Системи нерівностей

Якщо ставиться задача знайти множину спільних розв'язків двох або декількох нерівностей, то говорять, що потрібно *розв'язати систему нерівностей* $\begin{cases} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \end{cases}$

Значення змінної, при якому кожна із нерівностей системи перетворюється в правильну числову нерівність, називається розв'язком *системи нерівностей.*

Множина розв'язків системи нерівностей – це *перетин* множин розв'язків нерівностей, що входять в систему.

Приклад 48. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{2}>\dfrac{x}{6} \\ x+\dfrac{1}{2}>\dfrac{x}{3} \end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{2}>\dfrac{x}{6} \\ x+\dfrac{1}{2}>\dfrac{x}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} 4x-3>x \\ 6x+3>2x \end{cases}$, $\begin{cases} 3x>3 \\ 4x>-3 \end{cases}$, $\begin{cases} x>1 \\ x>-\dfrac{3}{4} \end{cases}$, $x>1$

Відповідь. $x\in(1,+\infty)$

Якщо ставиться задача знайти ті значення змінної, кожне з яких задовольняє *хоча б одній* із цих нерівностей, то говорять, що потрібно *розв'язати сукупність нерівностей* $\left[\begin{array}{l} f_1(x)>g_1(x) \\ f_2(x)>g_2(x) \end{array}\right.$

Розв'язок сукупності нерівностей – це *об'єднання* розв'язків нерівностей, що входять в сукупність

Приклад 49.Розв'язати сукупність нерівностей $\left[\begin{array}{l} 2x+1\geq 3 \\ 5x+6\leq 1 \end{array}\right.$

Розв'язання. $\left[\begin{array}{l} 2x+1\geq 3 \\ 5x+6\leq 1 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} 2x\geq 2 \\ 5x\leq -5 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\leq -1 \end{array}\right.$, розв'язком є об'єднання проміжків $x\in(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$

Відповідь. $x\in(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$

3.7 Нерівності з модулем

При розв'язуванні нерівностей з модулем розглядають три типи нерівностей:

1) з одним модулем;
2) з декількома модулями;
3) з модулем усередині модуля.

1) Нерівності з одним модулем

1. *Найпростіші нерівності*. Для них можливі наступні випадки в залежності від числа, що стоїть в правій частині нерівності:

	нерівність	$a<0$	$a=0$	$a>0$
1.	$\lvert x\rvert > a$	$x\in R$	$x<0$, $x>0$	$x<-a$, $x>a$
2.	$\lvert x\rvert < a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$a<x<a$
3.	$\lvert x\rvert \ge a$	$x\in R$	$x\in R$	$x\le -a$, $x\ge a$
4.	$\lvert x\rvert \le a$	$\varnothing$	$x=0$	$a\le x\le a$

Приклад 50. Нерівність $|x| \le 2$ запишіть у вигляді подвійної.

А	Б	В	Г	Д
$-2<x<2$	$-2\le x<2$	$-2\le x\le 2$	$-2<x\le 2$	$0\le x\le 2$

Розв'язання. Оскільки в правій частині нерівності $a = 2 > 0$, то маємо випадок 4. таблиці, тобто $-2 \le x \le 2$.

Відповідь: В

Приклад 51. Нерівність $-5 < x < 5$ запишіть як нерівність з модулем

А	Б	В	Г	Д
$\lvert x\rvert \le 5$	$\lvert x\rvert < 5$	$\lvert x\rvert \ge 5$	$\lvert x\rvert > 5$	$\lvert x\rvert > -5$

Розв'язання. Маємо випадок 2. таблиці, тобто, подвійна нерівність $-5 < x < 5$ запишеться з модулем в вигляді $|x| < 5$.

Відповідь: Б

2. *Нерівності вигляду* $|f(x)| < a$. Розглянемо випадки:

а) $a > 0$, тоді нерівність $|f(x)| < a$ рівносильна нерівності $-a < f(x) < a$;

б) $a \le 0$, тоді нерівність $|f(x)| < a$ – розв'язку не має.

Приклад 52. Розв'язати нерівність $|x-1| < 3$

Розв'язання. нерівність $|x-1| < 3$ рівносильна нерівності

$-3 < x-1 < 3, \quad -2 < x < 4$

Відповідь. $x \in (-2, 4)$

Приклад 53. Розв'язати нерівність $|2x-9| < -3$

Розв'язання. Нерівність не має розв'язку, оскільки $a = -3 < 0$.

Відповідь: $\varnothing$

3. *Нерівності вигляду* $\left|f(x)\right| > a$. Розглянемо випадки:

а) $a > 0$, тоді нерівність $\left|f(x)\right| > a$ рівносильна сукупності нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right.;$$

б) $a < 0$, тоді розв'язком нерівності $\left|f(x)\right| > a$ буде ОДЗ функції $f(x)$;

в) $a = 0$, то розв'язком нерівності буде множина значень *x,* для яких $f(x) \neq 0$.

Приклад 54. Розв'язати нерівність $\left|x+2\right| > 3$

Розв'язання. $\left|x+2\right| > 3 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 > 3 \\ x+2 < -3 \end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -5 \end{array}\right.$

Відповідь: $x \in (-\infty,-5) \cup (1,+\infty)$

Приклад 55. Розв'язати нерівність $\left|3x-5\right| > -2$

Розв'язання. Розв'язком нерівності $\left|3x-5\right| > -2$ буде ОДЗ функції $f(x) = 3x-5$; $x \in (-\infty,+\infty)$.

Відповідь. $x \in (-\infty,+\infty)$

Приклад 56. Розв'язати нерівність $\left|x^2-x-2\right| > 0$

Розв'язання. Розв'язком нерівності $\left|x^2-x-2\right| > 0$ буде множина значень *x*, для яких $x^2-x-2 \neq 0,\quad x_1 \neq -1, x_2 \neq 2$

Відповідь. $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,2) \cup (2,+\infty)$

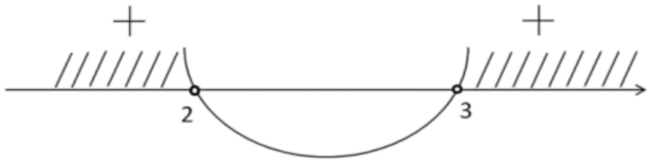
5. *Нерівність вигляду* $\left|f(x)\right| < g(x)$ рівносильна системі нерівностей $\left|f(x)\right| < g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{array}\right.$

Приклад 58. Розв'язати нерівність $\left|x-6\right| < x^2-5x+9$

Розв'язання. Дана нерівність $\left|x-6\right| < x^2-5x+9$ рівносильна системі нерівностей $\left\{\begin{array}{l} x-6 < x^2-5x+9 \\ x-6 > -x^2+5x-9 \end{array}\right.,\ \left\{\begin{array}{l} x^2-6x+15 > 0 \\ x^2-4x+3 > 0 \end{array}\right.$

Нерівність $x^2-6x+15 > 0$ виконується на всій числовій осі ($x \in (-\infty,+\infty)$), оскільки графіком лівої частини нерівності є парабола $y = x^2-6x+15$ вітками вгору ($a=1>0$), яка не перетинає вісь *ox*, дискримінант $D=(-6)^2-4\cdot1\cdot15=36-60=-24<0$).

Розв'яжемо нерівність $x^2-4x+3>0$. Знайдемо корені квадратного тричлена $x^2-4x+3=0,\quad x_1=1,\quad x_2=3,$



$x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

Знайдемо перетин розв'язків нерівностей системи

$\begin{cases}x^2-6x+15>0\\x^2-4x+3>0\end{cases},\quad \begin{cases}x\in(-\infty,+\infty)\\x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)\end{cases}$, розв'язком даної системи буде

$x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

Відповідь. $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

2) Нерівності з декількома модулями

6. *Нерівності вигляду* $|f(x)|<|g(x)|$ або $|f(x)|>|g(x)|$ розв'язують *піднесенням до квадрату обох частин нерівності*:

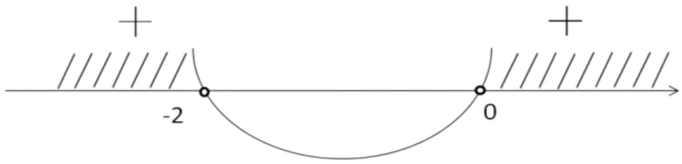
$|f(x)|<|g(x)|\leftrightarrow(f(x))^2<(g(x))^2$ або $|f(x)|>|g(x)|\leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$

Приклад 59. Розв'язати нерівність $|2x-1|<|3x+1|$

Розв'язання. Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності, отримаємо

$(2x-1)^2<(3x+1)^2,\quad 4x^2-4x+1<9x^2+6x+1,\quad 5x^2+10x>0,\quad 5x(x+2)>0$

Корені квадратного тричлена $x_1=0,\quad x+2=0,\quad x_2=-2$



,

маємо розв'язок нерівності $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

Відповідь: $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

7. *Метод інтервалів.*

- Знайти нулі (корені) кожного модуля.
- Отримані корені нанести на числові осі і визначити знаки кожного модуля на отриманих інтервалах.
- Розкрити модулі і розв'язати нерівність на кожному інтервалі.
- Об'єднати отримані множини розв'язків і записати відповідь.

Приклад 60. Розв'язати нерівність $|x-3|+|x+2|-x>5$

Розв'язання. Нанесемо на числові прямі корені кожного модуля. Це точки $x=-2, \quad x=3$.

-	-	+
-	+	+
2	3	

Числова пряма розбивається цими точками на три проміжки:

1) Розглянемо інтервал $x \in (-\infty,-2)$. Розкриваємо модулі, враховуючи, що вони обидва на цьому інтервалі від'ємні, отримаємо нерівність $-x+3-x-2-x>5, \quad -3x>4, \quad x<-\frac{4}{3}$. Знайдемо перетин множини розв'язків нерівності на даному інтервалі з множиною значень самого інтервалу $\begin{cases} x \in (-\infty,-2) \\ x \in \left(-\infty,-\frac{4}{3}\right) \end{cases} \to x \in (-\infty,-2)$ – це множина розв'язків нерівності на даному інтервалі.

2) Розглянемо проміжок $x \in [-2,3]$. Розкриваємо модулі, враховуючи, що перший модуль на цьому інтервалі від'ємний, а другий – додатний, маємо нерівність $-x+3+x+2-x>5, \quad -x>0, \quad x<0$. Знайдемо перетин множини розв'язків нерівності на даному інтервалі з множиною значень самого інтервалу $\begin{cases} x \in [-2,3] \\ x \in (-\infty,0) \end{cases} \to x \in [-2,0)$– це множина розв'язків нерівності на даному інтервалі.

3) Розглянемо інтервал $x \in (3,+\infty)$. Розкриваємо модулі, враховуючи, що вони обидва на цьому інтервалі додатні, отримаємо нерівність $x-3+x+2-x>5, \quad x>6$. Знайдемо перетин множини розв'язків нерівності на даному інтервалі з множиною значень самого інтервалу $\begin{cases} x \in (3,+\infty) \\ x \in (6,+\infty) \end{cases} \to x \in (6,+\infty)$ – це множина розв'язків нерівності на даному інтервалі.

4) Об’єднаємо отримані множини розв’язків і запишемо розв’язок нерівності $\left[\begin{array}{l} x\in(-\infty,-2) \\ x\in[-2,0) \\ x\in(6,+\infty) \end{array}\right. \to x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$.

Відповідь. $x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$

3) Нерівності з модулем усередині іншого модуля

При розв’язуванні нерівності з модулем усередині іншого модуля порядок розкриття модулів – не істотний, але для зменшення кількості логічних кроків розв’язування доцільніше спочатку розкрити зовнішні модулі.

Приклад 61. Яке із чисел не належить множині розв’язків нерівності $\left||x-2|-2\right|\geq 3$

А	Б	В	Г	Д
-5	-3	3	7	12

Розв’язання. Розкриємо зовнішній модуль і отримаємо сукупність нерівностей $\left[\begin{array}{l} |x-2|-2\geq 3 \\ |x-2|-2\leq -3 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} |x-2|\geq 5 \\ |x-2|\leq -1 \end{array}\right.$.

Розв’яжемо першу нерівність сукупності $|x-2|\geq 5 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2\geq 5 \\ x-2\leq -5 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x\geq 7 \\ x\leq -3 \end{array}\right.$,

отже, $x\in(-\infty,-3]\cup[7,+\infty)$

Розв’яжемо другу нерівність сукупності $|x-2|\leq -1$. Оскільки права частина нерівності дорівнює -1<0, а ліва – невід’ємна, то нерівність розв’язку не має. Об’єднаємо розв’язки сукупності нерівностей і отримаємо її розв’язок $x\in(-\infty,-3]\cup[7,+\infty)$, число $3\notin(-\infty,-3]\cup[7,+\infty)$.

Відповідь: В

3.8 Завдання для самостійної роботи

Тест 4 (Нерівності)

1. Якщо *x*>*y*,то правильним є твердження

А		Б	В	Г	Д
$-3,4x>-3,4y$		$-3,4x\geq -3,4y$	$-3,4x=-3,4y$	$-3,4x<-3,4y$	$-3,4x\leq -3,4y$

2. Скільки цілих розв’язків має нерівність $(x-1)(x+2)\leq 0$

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

3. Розв'язати нерівність $\frac{x-5}{x} \geq \frac{1}{x}$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0)$	$(-\infty;0)\cup(6;\infty)$	$(6;\infty)$	$(0;6)$	$(-6;0)$

4. Якщо $x<y$,то хибним є твердження

А	Б	В	Г	Д
$5x>5y$	$-3,4x>-3,4y$	$3+x<3+y$	$3,4x<3,4y$	$-3,4+x<-3,4+y$

5. Оцінити периметр Р рівнобедреного трикутника з бічною стороною *a* і основою *b*, якщо $3<a<8$, $2<b<5$

А	Б	В	Г	Д
$5<P<29$	$8<P<21$	$8\leq P\leq 21$	$10\leq P\leq 23$	$6\leq P\leq 28$

6. Скільки цілих розв'язків має нерівність $(x+1)(x-2)\leq 0$

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

7. Розв'язати нерівність $\frac{3x-5}{x+1}\leq 1$

А	Б	В	Г	Д
$(1,5;2)$	$[1,5;2]$	$(2;\infty)$	$[1,5;2)$	$(-1;3]$

8. Які з наведених нерівностей рівносильні?

А	Б	В	Г	Д
$3x+2>0$ $і$ $3x>-2$	$3x\leq 6$ $і$ $x\geq 2$	$-2x\geq 6$ $і$ $x\geq -3$	$(x+1)^2>0$ $і$ $x+1>0$	$3x+2>0$ $і$ $3x<-2$

9. Розв'язком нерівності $3x-1>-1+6x$ є множина чисел із проміжку:

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;1)$	$(-\infty;2)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;9)$	$(0;\infty)$

10. Яка із поданих нерівностей не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$0x\geq -5$	$0x<-5$	$0x\geq x$	$0x\leq 0$	$0\leq x^2$

11. Розв'язком якої із поданих нерівностей є множина всіх дійсних чисел?

А	Б	В	Г	Д
$0x<-3$	$0x\geq 3$	$0x>-3$	$0x\leq 0$	$0x>0$

12. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{12x-3x^2}$

А	Б	В	Г	Д
$(0;4)$	$[0;4]$	$(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$	$(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$	$[3;4]$

13. Яке із чисел належить множині розв'язків нерівності $2\frac{1}{3}<\frac{x}{3}<3\frac{2}{3}$?

А	Б	В	Г	Д
5	6	7	10	12

14. Оцінити периметр P квадрата зі стороною $1,2 < x < 1,5$

А	Б	В	Г	Д
$3,6 < P < 4,5$	$2,4 < P < 3$	$4,8 < P < 6$	$6 < P < 7,5$	$0,48 < P < 0,15$

15. Який із виразів має зміст при $x \geq -2$?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x+2}$	$\sqrt{-x-2}$	$\sqrt{2-x}$	$\sqrt{x-2}$	$\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

16. Яке із чисел належить множині розв'язків нерівності $x^2 < 4$?

А	Б	В	Г	Д
-3	2	-1	4	5

17. Визначити найменший розв'язок нерівності $(x^2-9)\sqrt{x-2} \geq 0$

А	Б	В	Г	Д
-3	2	1	3	визначити неможливо

18. Визначити на проміжку $(-5;5)$ кількість цілих розв'язків нерівності

$x^2+7x+6 \leq 0$

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

19. Розв'язати нерівність $-2 < \dfrac{7-2x}{3} < 5$

А	Б	В	Г	Д
$-6,5 \leq x < -4$	$-6,5 < x \leq -4$	$-4 < x < 6,5$	$-4 \leq x \leq 6,5$	$-4 < x \leq 6,5$

20. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А-Д)

Нерівність	*Розв'язок*
1 $\dfrac{2x+1}{7} \geq 1.$	А $(-\infty;-1) \cup (5;6)$
2. $x \geq x$	Б $x \in R$
3. $(x-1)^2 < 16$	В $[3;\infty)$
4. $(x-5)(x+1)(6-x) > 0$	Г $(-3;5)$
	Д $(5;6)$

21. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$

22. Розв'язати нерівність $\dfrac{x(x-2)(x-6)^2}{(x+5)(x+1)^4} \geq 0$

Тест 5 (Системи нерівностей, нерівності з модулем)

1. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 15-3x \geq 0 \\ 8x-32 < 0 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$x > 4$	$x < 4$	$x \le 6$	$x \ge 6$	$x > 10$

2. Знайти довжину проміжку, який є розв'язком системи

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2} - \frac{3x-5}{4} \le \frac{2x+1}{6} \\ 5x+4 \le 2x+10 \end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
8	10	5	7	3

3. Знайти ОДЗ функції $y = \sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-3}$

А	Б	В	Г	Д
$[1,5;\infty)$	$[-2,5;1,5]$	$(-\infty;-2,5)$	$(-\infty;1,5)$	$(1,5;\infty)$

4. При яких значення параметра *m* нерівність $(m^2-3)x^2 - 2(m+1)x + 9 < 0$ справджується при довільному x ?

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$-5 < m < 2$	$8 \le m \le 12$	$-1 < m < 2$	$m \le 10$

5. На якому із проміжків виконується сукупність нерівностей $\left[\begin{array}{l} 5x+6 \le 1 \\ 2x+1 \ge 3 \end{array}\right.$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;1)$	$(-\infty;-1)$	$(-\infty;-1] \cup [1;\infty)$	$\varnothing$	$[-1;1]$

6. Скільки цілих розв'язків має нерівність $4 \le x^2 \le 9$

А	Б	В	Г	Д
1	2	0	4	6

7. Розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases}$ є проміжок

А	Б	В	Г	Д
$(-2;-1)$	$[-1;2]$	$(-1;4)$	$(1;4)$	$(-1;2)$

8. Вказати інтервал, який є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} 1 < 2x-1 < 9 \\ -1 \le 1-x \le 4 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(1;2)$	$(1;2]$	$(-1;2)$	$(0;1)$	$\varnothing$

9. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} \le 0 \\ \dfrac{9}{x^2} \ge 1 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-3;0)\cup(0;2)$	$(-3;2)$	$(0;2)$	$(-3;0)$	$(2;\infty)$

10. Розв'язати сукупність нерівностей $\left[\begin{array}{l} 1 < 3x-2 \le 4 \\ -3 \le 4x+5 < 1 \end{array}\right.$

А	Б	В	Г	Д
$(-2;-1)$	$(1;2]$	$(-2;-1)\cup(1;2]$	$(-2;1)$	$(-2;2)$

11. Розв'язати сукупність нерівностей $\left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 1 \end{array}\right.$

А	Б	В	Г	Д
$x \ge 2$	$1 \le x \le 2$	$\varnothing$	$x < 1$	$x \in R$

12. Скільки цілих розв'язків має нерівність $|x-1| < 2$

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	0

13. Розв'язати нерівність $-1 < |2x-1| < 7$

А	Б	В	Г	Д
$(-5;3)$	$(-4;3)$	$(-3;4)$	$(3;4)$	$(3;5)$

14. Скільки цілих розв'язків має система нерівностей $\begin{cases} |x-2| < 5 \\ \dfrac{x^2+4x+4}{x+1} \ge 0 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
4	5	6	7	0

15. Розв'язати нерівність $|x+3| \le |x|$

А	Б	В	Г	Д
$[-1,5;+\infty)$	$[1;8)$	$(-\infty;-1,5]$	$(-\infty;1]$	$[-1,5;1]$

16. При якому значенні *m* рівняння $(m-3)x^2-2(m-4)x+7m-6=0$ має корені ?

17. Розв'язати нерівність $(x-1)\sqrt{x^2-5x+6} > 0$

18. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} < \dfrac{2}{x+1} \\ \dfrac{2}{x-3} > \dfrac{3}{x-2} \end{cases}$

19. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{x+4} < 3 \\ |x-2| < 5 \end{cases}$

20. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} (x-1)(x-3)(x-6) > 0 \\ (x-2)(x-4)(x-5) < 0 \end{cases}$

21. Розв'язати нерівність $|2x-1| < |3x+1|$

22. Розв'язати нерівність $|x-1| + |x+1| < 4$

4. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

4. 1 Ірраціональні рівняння

Ірраціональним називають рівняння, в якому невідоме входить під знак кореня (радикала) або є основою степеня з раціональним показником. Наприклад, рівняння $\sqrt{2x+1}=x-3$; $(x+1)^{\frac{1}{3}}=2$ – ірраціональні.

Основні методи розв'язування:

- піднесення до відповідного степеня;
- метод введення нових змінних;
- штучні методи.

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені, тому перевірка знайдених коренів обов'язкова і є складовою частиною розв'язування, бажано також знаходити ОДЗ.

Види ірраціональних рівнянь та методи їхнього розв'язання.

1) Ірраціональні рівняння, при розв'язуванні яких *основні методи не застосовуються.*
Розв'язання таких рівнянь розглянемо на прикладах.

▪ Рівняння має корені непарних степенів, які можна спростити за формулою $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}=x$.

Приклад 62. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[7]{(x-1)^7}=5$

Розв'язання. Спростимо ліву частину рівняння $\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[7]{(x-1)^7}=5$. Маємо $\sqrt[3]{x^3}=x$, $\sqrt[7]{(x-1)^7}=x-1$ і отримаємо рівняння $x+x-1=5,\quad 2x=6,\quad x=3$.

Відповідь: 3

▪ У рівнянні коефіцієнти біля невідомих – протилежні числа, в цьому випадку доцільно зайти ОДЗ.

Приклад 63. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x}=7$
Розв'язання. Знайдемо ОДЗ для коренів в лівій частині рівняння: $\begin{cases} x-5\ge 0 \\ 3-x\ge 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x\ge 5 \\ x\le 3 \end{cases}$ – система розв'язку не має, тоді і дане рівняння не має розв'язку.

Відповідь: $\varnothing$

- В рівнянні зліва – сума коренів парних степенів, справа – від’ємне число.

Приклад 64. Розв’язати рівняння $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-5}=-1$

Розв’язання. Оскільки зліва – сума квадратних коренів набуває невід’ємних значень, а справа – від’ємне число, то рівність не виконується для всіх *x* із ОДЗ, тобто рівняння розв’язку не має.

Відповідь.$\varnothing$

- В рівнянні зліва – сума коренів парних степенів, справа – нуль.

Приклад 65. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x+1}=0$

Розв’язання. Оскільки обидва доданки набувають тільки невід’ємних значень, то рівність виконується, якщо

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-x-2}=0\\ \sqrt{x+1=0}\end{cases},\quad \begin{cases}x^2-x-2=0\\ x+1=0\end{cases},\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right. \to x=-1\\ x=-1\end{cases}$$

Відповідь: -1

- Підкореневі вирази – повні квадрати.

Приклад 66. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=4$

Розв’язання. Оскільки $x^2+2x+1=(x+1)^2$, $\quad x^2-4x+4=(x-2)^2$, то це рівняння рівносильне рівнянню $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=4,\quad |x+1|+|x-2|=4$, яке розв’язуємо методом інтервалів і маємо розв’язок $x=-1{,}5$. $x=2{,}5$.

Відповідь: -1,5; 2,5

2) Метод *піднесення* обох частин початкового рівняння *до відповідного степеня*

- Рівняння $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ рівносильне системам $\begin{cases}f(x)\geq 0\\ f(x)=g(x)\end{cases}$ або $\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)=g(x)\end{cases}$. З наведених двох систем вибирають ту, де простіше розв’язати нерівність $f(x)\geq 0$ чи $g(x)\geq 0$. Оскільки перевірка є обов’язковою складовою частиною розв’язку, то нерівності $f(x)\geq 0$ і $g(x)\geq 0$, які є ОДЗ можна не розв’язувати, але виконати перевірку.

Приклад 67. Розв’язати рівняння $2\sqrt{x+2}=\sqrt{3x+15}$

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату $\left(2\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{3x+15}\right)^2 \to 4\left(x+2\right)=3x+15,\quad 4x+8=3x+15,\quad x=7$.

Перевірка: x=7, підставимо в дане рівняння, маємо $2\sqrt{7+2}=\sqrt{3\cdot 7+15},\quad 2\sqrt{9}=\sqrt{36},\quad 6=6$– рівність правильна, отже x=7 є коренем даного рівняння.

Відповідь: 7

- Рівняння $\sqrt{f\left(x\right)}=g\left(x\right)$ рівносильне системі $\begin{cases} g\left(x\right)\ge 0 \\ f\left(x\right)=\left(g\left(x\right)\right)^2 \end{cases}$.

Нерівність $g\left(x\right)\ge 0$ (ОДЗ) можна не розв’язувати, але виконати перевірку.

Приклад 68. Розв’язати рівняння $\sqrt{8-x}+x=2$

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння $\sqrt{8-x}=2-x$ до квадрату

$\left(\sqrt{8-x}\right)^2=\left(2-x\right)^2 \to 8-x=4-4x+x^2,\quad x^2-3x-4=0,\quad x_1=-1,\quad x_2=4$.

Перевірка: Підставимо в дане рівняння $\sqrt{8-x}+x=2$ корінь $x_1=-1$, отримаємо $\sqrt{8-\left(-1\right)}+\left(-1\right)=2,\quad \sqrt{9}-1=2,\quad 2=2$ –. рівність правильна, отже, $x_1=-1$ є коренем даного рівняння.

Підставимо в дане рівняння $\sqrt{8-x}+x=2$ корінь $x_2=4$, маємо $\sqrt{8-4}+4=2,\quad \sqrt{4}+4=2,\quad 6=2$, але 6≠2 –. рівність не виконується, тому $x_2=4$ не є коренем рівняння, це сторонній корінь, його відкидаємо.

Відповідь:-1.

- Рівняння виду $\sqrt[3]{f\left(x\right)}\pm\sqrt[3]{g\left(x\right)}=h\left(x\right)$ розв’язують піднесенням обох частин рівняння до куба за формулою $\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)^3=a\pm b\pm 3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)$

Приклад 69. Розв’язати рівняння $\left(8x+4\right)^{\frac{1}{3}}-\left(8x-4\right)^{\frac{1}{3}}=2$

Розв’язання. Піднесемо до куба обидві частини рівняння $\left(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}\right)^3=2^3$, отримаємо рівняння:

$8x+4-8x+4-3\sqrt[3]{\left(8x+4\right)\left(8x-4\right)}\left(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}\right)=8$

Оскільки $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$, тоді отримаємо рівняння $8-3\sqrt[3]{(8x+4)(8x-4)}\cdot 2=8,\quad -6\sqrt[3]{(8x+4)(8x-4)}=0,\quad \sqrt[3]{(8x+4)(8x-4)}=0$

$(8x+4)(8x-4)=0$, тоді $8x-4=0 \quad x_1=\dfrac{1}{2}$ або $8x+4=0 \quad x_2=-\dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $-\frac{1}{2};\frac{1}{2}$

3) Метод *введення нових змінних (метод заміни)* розглянемо на прикладі.

Приклад 70. Розв'язати рівняння $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x^2+11}=t>0 \to x^2+11=t^2$, отримаємо рівняння $t^2+t-42=0 \to t_1=-7,\quad t_2=6$. Оскільки $t_1=-7<0$ – сторонній корінь і, повертаючись до заміни, маємо рівняння $\sqrt{x^2+11}=6,\quad x^2+11=36,\quad x^2=25,\quad x=\pm 5$. Перевірка не обов'язкова.

Відповідь: -5; 5

4) Штучні методи. (*Множення на спряжений вираз*)

Приклад 71. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=8$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}=t$ – вираз спряжений до $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}$, і знайдемо добуток даного рівняння і спряженого виразу, отримаємо $\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}\right)\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}\right)=8t$. Спростимо ліву частину і отримаємо рівняння, з якого знайдемо значення *t*: $x+4-20-x=8t,\quad 8t=-16,\quad t=-2.$ Підставимо знайдене значення t в спряжений вираз і отримаємо систему $\begin{cases}\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=8\\ \sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}=-2\end{cases}$. Розв'яжемо систему способом додавання, маємо $2\sqrt{x+4}=6,\quad \sqrt{x+4}=3,\quad x+4=9,\quad x=5$

Перевірка. Значення $x=5$ підставляємо в дане рівняння $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=8$, маємо $\sqrt{5+4}+\sqrt{5+20}=8,\quad \sqrt{9}+\sqrt{25}=8,\quad 3+5=8,\quad 8=8$

*Відповідь:*5

5) Теорема про *добуток* $\sqrt{f(x)}\cdot g(x)=0$

Це рівняння рівносильне сукупності систем

$\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)=0\end{cases}$ або $\begin{cases}f(x)=0\\ x\in D(g)\end{cases}$

Приклад 72. Знайти добуток коренів рівняння $(x-1)\sqrt{2x-1}=0$

Розв'язання. Рівняння рівносильне сукупності систем

$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x-1=0 \end{cases}$ або $\begin{cases} 2x-1=0 \\ x\in R \end{cases}$. Розв'яжемо сукупність цих систем:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x-1=0 \end{cases}, \begin{cases} 2x>1 \\ x=1 \end{cases}, \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases} \to x=1 \text{ або } \begin{cases} 2x-1=0 \\ x\in R \end{cases}, \begin{cases} 2x=1 \\ x\in R \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x\in R \end{cases} \to x=\frac{1}{2}$$

Обчислимо добуток коренів і запишемо відповідь. Маємо $1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$

4.2 Ірраціональні нерівності

При розв'язуванні ірраціональних нерівностей використовують ті ж прийоми, що і при розв'язуванні ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин нерівності до однакового натурального степеня, введення нових змінних, відокремлення радикалу.

• Піднесення обох частин нерівності до *непарного степеня* зі збереженням знака нерівності є *рівносильне* перетворення, тобто:

• $\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x) \leftrightarrow f(x)>g^{2n+1}(x)$ і $\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x) \leftrightarrow f(x)<g^{2n+1}(x)$;

• $\sqrt[2n+1]{f(x)}\geq g(x) \leftrightarrow f(x)\geq g^{2n+1}(x)$ і $\sqrt[2n+1]{f(x)}\leq g(x) \leftrightarrow f(x)\leq g^{2n+1}(x)$.

Приклад 73. Розв'язати нерівність: $\sqrt[3]{2x+1}>3$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини нерівності до кубу і отримаємо рівносильні нерівності:

$$\sqrt[3]{2x+1}>3 \quad \leftrightarrow \quad 2x+1>3^3 \quad \leftrightarrow \quad 2x>26 \quad \leftrightarrow \quad x>13, \quad x\in(13;+\infty)$$

Відповідь: $x\in(13;+\infty)$

• Піднесення обох частин нерівності до *парного степеня* зі збереженням знака нерівності є рівносильне перетворення, якщо обидві частини нерівності визначені на деякій множині X та набувають лише невід'ємних значень. При розв'язуванні ірраціональних нерівностей використовують наступні теореми.

1) Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$.

2) Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g(x) \end{cases}$

Приклад 74. Розв'язати нерівність $\sqrt{4x+7} > \sqrt{3x-8}$

Розв'язання. Нерівність $\sqrt{4x+7} > \sqrt{3x-8}$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} 4x+7 > 3x-8 \\ 3x-8 \ge 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x > -15 \\ x \ge \dfrac{8}{3} \end{cases} \to x \ge \frac{8}{3} \leftrightarrow x \in \left[\frac{8}{3}, +\infty\right).$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$

3) Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

4) Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) \le g(x) \end{cases}$

Приклад 75. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} \le \sqrt{2-x}$

Розв'язання. Нерівність $\sqrt{x+1} \le \sqrt{2-x}$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x+1 \le 2-x \end{cases}, \quad \begin{cases} x \ge -1 \\ 2x \le 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \ge -1 \\ x \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \to x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right].$$

Відповідь: $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$

5) Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \ge 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}.$$

6) Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \\ f(x) \le g^2(x) \end{cases}$.

Приклад 76. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+6} < x-6$

Розв'язання. Нерівність $\sqrt{x+6} < x-6$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} x-6>0 \\ x+6 \ge 0 \\ x+6<(x-6)^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x>6 \\ x \ge -6 \\ x+6<x^2-12x+36 \end{cases}, \quad \begin{cases} x>6 \\ x^2-13x+30>0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x>6 \\ \left[\begin{array}{l} x>10 \to x>10 \leftrightarrow x \in (10,+\infty) \\ x<3 \end{array}\right. \end{cases}$$

Відповідь: $x(10,+\infty)$

Приклад 77. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+1} \le 3$.

Розв'язання. Область визначення лівої частини нерівності $2x+1 \ge 0$. Початкова нерівність еквівалентна такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 0, \\ \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \le 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ 2x+1 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 4.$$

Відповідь: $x \in \left[-\frac{1}{2};4\right]$

Приклад 78. Розв'язати нерівність: $\sqrt{x+6} < -3$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x+6} \ge 0$, то початкова нерівність не виконується при жодних значеннях *x*.

Відповідь: $\varnothing$.

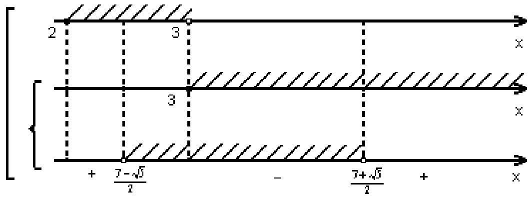
7) Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності систем нерівностей $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$.

8) Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ рівносильна сукупності систем нерівностей $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g^2(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$.

Приклад 79. Розв'язати нерівність: $\sqrt{x-2} > x-3$.

Розв'язання. Нерівність $\sqrt{x-2} > x-3$ рівносильна сукупності систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3<0,\\ x-2\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\ge 0,\\ x-2>(x-3)^2,\\ x-2\ge 0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<3,\\ x\ge 2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ x^2-7x+11<0,\\ x\ge 2.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[2;3);\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ \left(x-\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$



Розв'язком є проміжок $\left[2,\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Відповідь: $x\in\left[2,\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$

Приклад 80 Розв'язати нерівність $\sqrt{x-5} \ge -3$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x-5} \ge 0$, то початкова нерівність виконується для всіх x з області визначення функції $f(x)=\sqrt{x-5}$. Область визначення знайдемо з умови $x-5\ge 0, \quad x\ge 5$.

Відповідь: $x\in[5,+\infty)$

4.3. Завдання для самостійної роботи

Тест 6 (Ірраціональні рівняння та нерівності)

1. Скільки дійсних коренів має рівняння $\sqrt{-x}=-2$

А	Б	В	Г	Д
1	2	0	3	безліч

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+7}=-1$

А	Б	В	Г	Д
2	4	6	$x\in \boldsymbol{R}$	$\varnothing$

3. Якому із вказаних проміжків належать корені рівняння $x=3+\sqrt{x+9}$

А	Б	В	Г	Д
$(1;3)$	$(3;5)$	$(4;6)$	$(6;9)$	$(-6;1)$

4. Знайти добуток коренів рівняння $\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{5x-x^2-6}=0$

А	Б	В	Г	Д
4	6	12	-6	-8

5. Розв’язати рівняння $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}=-5$

А	Б	В	Г	Д
3;-1	2;	4	$\varnothing$	-2;4

6. Знайти суму коренів рівняння $(x-1)\sqrt{x-9}=0$

А	Б	В	Г	Д
10	-10	9	1	8

7. Скільки дійсних коренів має рівняння $\sqrt{x^2-17}=\sqrt{5x-21}$

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

8. Розв’язати рівняння $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$

А	Б	В	Г	Д
-1;1	0;5	1;5	2;3	$1;0;\sqrt{5}$

9. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=12$

А	Б	В	Г	Д
64	810	354	256	729

10. Розв’язати нерівність $\sqrt{x+6}<x-6$,

А	Б	В	Г	Д
$x<10$	$x>10$	$x>-10$	$x<6$	$x\geq-6$

11. Знайти найбільший цілий розв’язок нерівності $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}>0$,

А	Б	В	Г	Д
1	2	6	3	4

12. Розв’язати нерівність $\sqrt{-x}<2$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0]$	$[0;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;3)$	$(0;3)$

13. Розв’язати нерівність $\sqrt{-x}\geq x$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0]$	$[0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$[0;1)$7	$\varnothing$4

14. Розв’язати нерівність $\sqrt{x+1}>-\frac{1}{4}$,

А	Б	В	Г	Д
$x<1$	$x>-1$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	$x\geq-1$

15. Розв’язати нерівність $\sqrt{1-4x}<0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0,25)$3	$(-\infty;+\infty)$	$(0;0,25)$	$(-\infty;-0,25)$	$\varnothing$

16. Розв’язати нерівність $\sqrt{4-2x}\leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[2;+\infty)$	2	$[0;2]$	$\varnothing$	4

17. Розв’язати нерівність $(x-3)\sqrt{x} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[3;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;3]$	$(0;3)$	$(-\infty;+\infty)$

18. Розв’язати рівняння $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=\dfrac{x}{2}$.

19. Розв’язати рівняння $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}=3$.

20. Розв’язати рівняння $\sqrt{8+\sqrt{10-x}}=\sqrt{x}$.

21. Розв’язати нерівність $\sqrt{4-3x-x^2} > x+1$

22. Розв’язати нерівність $\sqrt{x-4}-\sqrt{x-3} \geq \sqrt{4-x}$.

4.4. Контрольний тест

Тест 7 (Нерівності, системи і сукупності нерівностей, ірраціональні рівняння і нерівності)

1. Розв’язати нерівність $-3x<12$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty,-4)$	$[-4,+\infty)$	$(-\infty,-4]$	$(-4,+\infty)$	$\varnothing$

2. Розв’язати нерівність $\dfrac{x-2}{x+3} \leq 0$

А	Б	В	Г	Д
$(-2,3)$	$[-3,2)$	$(-3,2]$	$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$	$[-3,2]$

3. Розв’язати нерівність $|3x-5| > -3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1;5)$	$\varnothing$	$(-\infty;2]$	$[2;3]$	$(-\infty;+\infty)$

4. Розв’язати нерівність $|5-2x|<7$

А	Б	В	Г	Д
$[-1;6]$	$[-1;12]$	$[-6;1]$	$[-6;6]$	$[-1;1]$

5. Розв’язати сукупність нерівностей $\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ 0\leq x\leq 5\end{array}\right.$

А	Б	В	Г	Д
$(-1;5]$	$(0;1)$	$[0;1)$	$(1;5]$	$(0;5]$

6. Розв’язком системи нерівностей є інтервал $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1}<1 \\ \dfrac{2}{x+1}>0 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty,-1)3$	$(-1,2)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$	$\varnothing$

7. При яких m рівняння $x^2+4mx+2m=0$ має два різних корені?

А	Б	В	Г	Д
$m\in(-\infty;0)$	$m\in(-\infty;0)\cup(1;1,5)$	$m\in(1;1,5)$	$m\in(-\infty;0)\cup(0,5;+\infty)$	$m\in(0;0,5)$

8. Розв’язати рівняння $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}=0$

А	Б	В	Г	Д
1	2	6	3	4

9. Знайти середину проміжка, який є розв’язком системи нерівностей

$$\begin{cases} -\dfrac{13}{4}+\dfrac{3x}{4}\le\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{7}{8} \\ 2\ge\dfrac{x}{4}+\dfrac{3-2x}{3} \end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
3,325	0,925	-3,25	2,325	-2,52

10. Розв’язком системи нерівностей $\begin{cases} x^2+4x-5>0 \\ x^2-2x-8<0 \end{cases}$ є проміжок

А	Б	В	Г	Д
$(-2;-1)$	$[-1;2]$	$(-1;4)$	$(1;4)$	$(-1;2)$

11. Розв’язати сукупність нерівностей $\left[\begin{array}{l} -1<2x-1<1 \\ 0<x+2<4 \end{array}\right.$

А	Б	В	Г	Д
$(0;4)$	$[-2;2]$	$(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$	$[4;+\infty)$	$(-2;2)$

12. Розв’язати рівняння $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-6}=5$

А	Б	В	Г	Д
3	$\varnothing$	6	3;6	1;3

13. Розв’язати рівняння $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}=0$

А	Б	В	Г	Д
1	2	6	3	4

14. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{4+x}+\sqrt{x+7}=\sqrt{3-2x}$

А	Б	В	Г	Д
-3;	4	3	$\varnothing$	5

15. Розв’язати нерівність $x+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2;$

А	Б	В	Г	Д
$[3;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;3]$	$(-\infty;3)$	$(-1;3)$

16. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{5x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$

А	Б	В	Г	Д
3	1	2,5	0	5

17. Розв'язати нерівність $(x-5)\sqrt{x-2} \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[5;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;2]$	$[2;3]$	$(-\infty;+\infty)$

18. Розв'язати нерівність $(x+1)\sqrt{x-3} \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;1]$	$[3;+\infty)$	$\varnothing$	-1	3

19. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-2]\cup(4;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;2]$	$[2;4]$	$(-\infty;+\infty)$

20. Розв'язати нерівність $|x-3|+|x-5| \geq 6-x$.

21. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$.

22. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 1{,}5x+1>2 \\ |x-1|<5 \\ x+2>0 \end{cases}$.

5. ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

5.1 Означення та властивості логарифма

Логарифмом додатного числа N за даною основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називають *показник степеня* x, до якого потрібно піднести основу a, щоб отримати число N, тобто за означенням $\log_a N = x, \quad a^x = N$

Приклад 81 Обчислити а) $\log_3 81$; б) $\log_2 \dfrac{1}{8}$.

Розв'язання.

а) За означенням логарифма $\log_3 81 = 4$, оскільки $3^4 = 81$;

Відповідь: 4

б) $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$, оскільки $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

Відповідь: -3

З означення маємо *основну логарифмічну тотожність* $a^{\log_a N} = N$.

Десятковий логарифм (логарифм за основою 10) позначають символом lg, а *натуральний* логарифм (логарифм за основою $e \approx 2{,}7$) позначають символом ln.

Властивості логарифмів

(Вважати числа *a, A, B*, додатними, основи – не 1)

1. Логарифмічний нуль $\log_a 1 = 0, \quad a^0 = 1$.

2. Логарифмічна одиниця $\log_a a = 1, \quad a^1 = a$.

3. Логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів співмножників $\log_a A \cdot B = \log_a A + \log_a B$.

4. Логарифм частки (дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

5. Логарифм степеня дорівнює добутку показника степеня на логарифм його основи $\log_a A^k = k \log_a A$.

Логарифми двох взаємно обернених чисел за однією основою відрізняються лише знаком $\log_a \dfrac{1}{A} = -\log_a A$.

6. Формули переходу $\log_{a^n} A = \frac{1}{n}\log_a A$. $\log_a A = \frac{\log_c A}{\log_c a}$

. $$\log_a A = \frac{\log_A A}{\log_A a} = \frac{1}{\log_A a}.$$

7. $a^{\log_c N} = N^{\log_c a}$.

8. $\log_a A^{2k} = 2k\log_a |A|$.

Приклад 82 Знайти значення виразу $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$

Розв'язання. Спростимо чисельник і знаменник, використовуючи властивості логарифмів. Маємо $\lg 72 - \lg 9 = \lg\frac{72}{9} = \lg 8 = 3\lg 2$, а $\lg 28 - \lg 7 = \lg\frac{28}{7} = \lg 4 = 2\lg 2$, тоді $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} = \frac{3\lg 2}{2\lg 2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Відповідь. 1,5

Приклад 83. Порівняти, що більше: $\log_2 3 + \log_2 7$ чи $\log_2(3+7)$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, маємо $\log_2 3 + \log_2 7 = \log_2 21$ і $\log_2(3+7) = \log_2 10$. Основа логарифма *a*=2>1, отже функція зростаюча і, оскільки підлогарифмічні вирази 21>10, тоді $\log_2 3 + \log_2 7 > \log_2(3+7)$

Приклад 84. Спростити а) $2^{\log_4 9+1}$ б) $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}$

а) Розв'язання.

$$2^{\log_4 9+1} = 2\cdot 2^{\log_{2^2} 3^2} = 2\cdot 2^{2\cdot\frac{1}{2}\log_2 3} = 2\cdot 2^{\log_2 3} = 2\cdot 3 = 6$$

Відповідь. 6

б) Розв'язання.

$$5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}} = 5^{\frac{\lg 10^3 - \lg 5}{1}\cdot\frac{1}{l\,g 25}} = 5^{\lg 200\cdot\log_{25} 10} = 5^{\lg 200\cdot\frac{1}{2}\log_5 10} =$$

$$= \left(5^{\log_5\sqrt{10}}\right)^{\lg 200} = \left(\sqrt{10}\right)^{\lg 200} = 10^{\frac{1}{2}\lg 200} = 10^{\lg\sqrt{200}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

Відповідь. $10\sqrt{2}$

Приклад 85. Знайти $\lg 56$, якщо $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$.

Розв'язання. $\lg 56 = \lg\left(2^3\cdot 7\right) = 3\lg 2 + \frac{\log_2 7}{\log_2 10} = 3a + \log_2 7\cdot\lg 2 = 3a + ab$

Приклад 86. Відомо, що $\log_2 5 = a$, $\log_2 3 = b$. Подати $\log_2 300$ через *a* і *b*.

Розв'язання. $\log_2 300 = \log_2\left(3\cdot 2^2\cdot 5^2\right) = \log_2 3 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 = b + 2a + 2$

Приклад 87. Спростити $A = \sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$

Розв'язання.

$25^{\frac{1}{\log_6 5}} = 25^{\log_5 6} = 5^{2\log_5 6} = 5^{\log_5 36} = 36;\quad 49^{\frac{1}{\log_8 7}} = 49^{\log_7 8} = 7^{2\log_7 8} = 7^{\log_7 64} = 64$;

$A = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

Відповідь. 10

Приклад 88. Знайти $\log_{30} 8$, якщо

а) $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

Розв'язання.

$$\log_{30} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 30} = \frac{\lg 2^3}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{3\lg 2}{\lg 3 + 1} = \frac{3\lg\frac{10}{5}}{\lg 3 + 1} = \frac{3\left(\lg 10 - \lg 5\right)}{\lg 3 + 1} = \frac{3\left(1-a\right)}{b+1}.$$

Відповідь. $\dfrac{3\left(1-a\right)}{b+1}$

б) $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$.

Розв'язання.

$$\log_{30} 8 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30}\frac{10}{5} = 3\left(\log_{30} 10 - \log_{30} 5\right) =$$

$$= 3\left(\log_{30}\frac{30}{3} - \log_{30} 5\right) = 3\left(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5\right) = 3\left(1 - a - b\right)$$

Відповідь: 3(1-*a*-*b*)

Прологарифмувати вираз – це виразити його логарифм через логарифми чисел, що входять до нього.

Приклад 89. Прологарифмувати за основою 2 вираз $8a^3\sqrt[7]{b^4}$

Розв'язання.

$$\log_2\left(8a^3\sqrt[7]{b^4}\right) = \log_2\left(2^3\cdot a^3\cdot b^{\frac{4}{7}}\right) = 3\log_2 2 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b = 3 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b$$

Операцію знаходження виразу, який було прологарифмовано, називають *потенціюванням*. Це операція обернена до логарифмування.

Приклад 91 Знайти *x*, якщо $\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 2$

Розв'язання. $\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 = \log_5 \frac{7\cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8}$ $x = \frac{63}{8}$

Відповідь: $\frac{63}{8}$

5.2 Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайдіть логарифм за основою a числа, поданого у вигляді степеня з основою a .

а) $3^2 = 9$; б) $3^3 = 27$; в) $3^4 = 81$; г) $3^{-1} = \frac{1}{3}$;

д) $2^{-3} = \frac{1}{8}$; е) $5^{-2} = 0,04$; є) $5^0 = 1$; ж) $9^{\frac{1}{2}} = 3$.

2. Перевірте правильність рівності

а) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; б) $\log_{0,5} 4 = -2$; в) $\log_{\sqrt{2}} = 8$; г) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$; д) $\log_{0,2} 0,008 = 3$; е) $\log_{0,2} 125 = -3$;

3. Спростіть вираз, користуючись основною логарифмічною тотожністю:

а) $2^{\log_2 7}$ б) $1,7^{\log_{1,7} 2}$ в) $\pi^{\log_{\pi} 5,2}$

4. Знайдіть число x .

а) $\log_5 x = 2$ б) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{4}$ в) $\log_7 x = -2$

д) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$ е) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$ є) $\log_{\sqrt{8}} x = \frac{2}{3}$

5. Відомо, що $\log_2 5 = a$, $\log_5 3 = b$. Подайте через a і b наступні вирази

а) $\log_5 72$ б) $\log_5 1,5$ в) $\log_5 12$ г) $\log_5 30$

6. Прологарифмувати за основою 3:

а) $9a^4\sqrt[5]{b}$ б) $\frac{b^2}{27a^7}$ в) $\left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}}$ г) $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)$

7. Обчисліть без таблиць і обчислювальних інструментів:

а) $\log_{12} 4 + \log_{12} 3$; б) $\lg 8 + \lg 125$; в) $\lg 13 - \lg 130$

г) $\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7\frac{58}{81}$. д) $\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 6,25$; е) $\log_2 7 + \log_2 \frac{7}{16}$;

8. Знайдіть *x,* якщо:

а) $\log_3 x = \log_3 1{,}5 + \log_3 8$ б) $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4$

в) $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$ г) $\log_\pi x = 3\log_\pi 4 - 2\log_7 6$

9. Знайдіть значення виразу:

а) $\dfrac{\log_3 16}{\log_3 4}$; б) $\log_2 11 - \log_2 44$; в) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$; г) $\dfrac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$.

10. Що більше

а) $\log_3 4 + \log_3 7$ чи $\log_3 (4+7)$; б) $\log_5 2 + \log_5 1{,}5$ чи $\log_5 (2 + 1{,}5)$;

Тест 8 (Означення, властивості логарифмів)

1. Обчислити $2^{\log_4 15 + 3}$

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{15}$	$\sqrt{15}$	$8\sqrt{15}$	8	15

2. Обчислити $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[8]{243}$

А	Б	В	Г	Д
2,5	5	2	4	-2,5

3. Обчислити $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \ldots \cdot \log_{10} 9$

А	Б	В	Г	Д
-2	$\log_2 10$	10	2	$\lg 2$

4. Обчислити $25^{1 - \frac{1}{4}\log_5 49}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{25}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{5}{7}$

5. Обчислити $\dfrac{4}{5}\left(1 + 9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65} 5}$

А	Б	В	Г	Д
2	1	5	4	3

6. Обчислити $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

7. Обчислити $\log_3 \log_2 \log_2 \log_2 16$

А	Б	В	Г	Д
1	3	0	2	4

8. Знайдіть x, якщо $\log_3 \log_2 \log_2 x = 1$

А	Б	В	Г	Д
243	124	256	184	286

9. Знайдіть x, якщо $\log_7 \log_3 \log_2 \log_2 x = 0$

А	Б	В	Г	Д
243	124	256	184	286

10. Обчислити $27^{\log_3 \sqrt[3]{125}}$

А	Б	В	Г	Д
5	625	225	25	125

11. Обчислити $\frac{5^{\lg 20}}{2^{\lg 5}}$

А	Б	В	Г	Д
5	10	2	$\lg 2$	$\log_2 5$

12. Обчислити $\sqrt{2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1}$

А	Б	В	Г	Д
2	4	8	16	5

13. Обчислити $\log_2 \log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

А	Б	В	Г	Д
$\log_2 7 - 3$	$\log_2 7$	3	4	0,5

14. Знайдіть значення виразу $\log_3 12 + \log_3 30 - \log_3 40$

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	-4

15. Між якими сусідніми числами знаходиться значення виразу $7^{3\log_7 \sqrt[6]{12}}$

А	Б	В	Г	Д
1 і 2	2 і 3	3 і 4	4 і 5	Інша відповідь

16. Яка з рівностей правильна ?

А	Б	В	Г	Д
$\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = 2$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = -2$	$\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = -2$

5.3 Показникові рівняння

Рівняння, яке містить змінну в показнику степеня називають *показниковим*. При розв’язуванні показникових рівнянь використовують наступні теореми.

Теорема 1. Якщо два степеня з однаковими основами рівні, причому $a > 0$ і $a \neq 1$, то показники цих степенів також рівні: $a^m = a^n$, то $m = n$.

*Теорема 2.*Якщо у рівних степенів показники рівні і відмінні від 0, то рівні і основи цих степенів: $a^m = b^m$ і $m \neq 0$, то $a = b$ де $a > 0$, $b > 0$.

Типи рівнянь і методи їх розв'язання

1. Зрівняння основ: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \leftrightarrow f(x) = g(x)$

Приклад 92. Розв'язати рівняння $2^{x^2-5x+6} = 1$

Розв'язання. $2^{x^2-5x+6} = 1 \leftrightarrow (2)^0 \leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$

Відповідь: 2, 3.

Приклад 93. Розв'язати рівняння $5^x = 125$

Розв'язання. $5^x = 125 \leftrightarrow 5^x = 5^3 \leftrightarrow x = 3.$

Відповідь: 3

Приклад 94. Розв'язати рівняння $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x^2+5x-6} = \left(\frac{6}{5}\right)^{3-5x}$

Розв'язання.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{3x^2+5x-6} = \left(\frac{6}{5}\right)^{3-5x} \leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{3x^2+5x-6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{5x-3} \leftrightarrow 3x^2 + 5x - 6 = 5x - 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

Відповідь: -1, 1.

2. Винесення спільного множника за дужки використовують для рівнянь вигляду $A_0 a^{mx+k_0} + A_1 a^{mx+k_1} + \ldots + A_n a^{mx+k_n} = M$, де x – змінна, інші букви – сталі числа.

Приклад 95. Розв'язати рівняння $3^{x+2} - 3^x = 72$

Розв'язання.

$$3^{x+2} - 3^x = 72 \leftrightarrow 3^x\left(3^{x+2-x} - 1\right) = 72 \leftrightarrow 3^x\left(3^2 - 1\right) = 72 \rightarrow 8 \cdot 3^x = 72 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3^x = 9 \rightarrow x = 2$$

Відповідь: 2

3. Рівняння вигляду $A_0a^{2x}+A_1a^{x}+A_2=0$ можна звести до квадратного рівняння заміною $a^x=t>0$.

Приклад 96. Розв’язати рівняння $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$

Розв’язання. $2^x=t>0$ $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0\to t^2-6t+8=0\to t_1=2, t_2=4$

$2^x=2\to x=1;\ 2^x=4\to x=2$

*Відповідь:*1, 2.

4. Однорідні рівняння $A_0a^{x}+A_1a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}}+A_2b^x=0$ – зводяться до квадратних рівнянь, якщо обидві частини рівняння поділити на $b^x\neq 0$ або $a^x\neq 0$, отримаємо рівняння вигляду $A_0\left(\frac{a}{b}\right)^x+A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}}+A_2=0$, яке розв’язують заміною $\left(\frac{a}{b}\right)^x=t>0$.

Приклад 96. Розв’язати рівняння $4^x+6^x=2\cdot 9^x$;

Розв’язання. $9^x\neq 0$

$$4^x+6^x=2\cdot 9^x\to\left(\frac{4}{9}\right)^x+\left(\frac{6}{9}\right)^x-2=0\to\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=t\qquad t^2+t-2=0\to t_1=-2, t_2=1$$

$t_1=-2$ – не задовольняє умові, маємо $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1\leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0\to x=0$

Відповідь: 0.

5. Рівняння, які не зводяться до однієї основи $a^{f(x)}=b$ розв’язують логарифмуванням за основою *a*. Маємо $f(x)\log_a a=\log_a b\ \to\ f(x)=\log_a b$

Приклад 97. Розв’язати рівняння:

а) $2^x=3$

Розв’язання. $x=\log_2 3$.

Відповідь: $\log_2 3$

б) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}$

Розв'язання.

$$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}\leftrightarrow 2^x\left(1+2+2^2\right)=3^x\left(1+3+3^{2.}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow 7\cdot 2^x=13\cdot 3^x\rightarrow \frac{2^x}{3^x}=\frac{13}{7}\rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{13}{7}\rightarrow x=\log_{\frac{2}{3}}\frac{13}{7}$$

Відповідь. $\log_{\frac{2}{3}}\frac{13}{7}$

6. Використання монотонності функцій

Приклад 98. Розв'язати рівняння:

а) $2^x=3-x$

Розв'язання. Методом підбору знаходимо, що $x=1$ – корінь рівняння. Функція $y=2^x$ – зростаюча, а $y=3-x$ – спадна, тому цей корінь єдиний.

Відповідь: 1

б) $12^x+5^x=13^x$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $12^x\neq 0$, маємо $1+\left(\frac{5}{12}\right)^x=\left(\frac{13}{12}\right)^x$. Методом підбору знаходимо, що $x=2$ – корінь рівняння. Функція $y=1+\left(\frac{5}{12}\right)^x$ – спадна, а $y=\left(\frac{13}{12}\right)^x$ – зростаюча, тому цей корінь єдиний.

Відповідь: 2.

5.4 Завдання для самостійного розв'язування

Тест 9 (Показникові рівняння)

1. Розв'язати рівняння $7^{x-2}=\sqrt[3]{49}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

2. Розв'язати рівняння $5^{x^2-2x-1}=25$

А	Б	В	Г	Д
3	-1	2	-1;3	-3;1

3. Розв'язати рівняння $6^{x+1}+35\cdot 6^{x-1}=71.$

А	Б	В	Г	Д
1	-1	-2	2	3

4. Розв'язати рівняння $4^{x}-5\cdot 2^{x}+4=0.$

А	Б	В	Г	Д
0	0;2	1;2	0;1	2

5. Розв'язати рівняння $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}=3$

А	Б	В	Г	Д
2	1	5	0,5	3

6. Розв'язати рівняння $4^{x}-3^{x-0.5}=3^{x+0.5}+2^{2x-1}$

А	Б	В	Г	Д
1,5	2	1	2,5	0

7. Розв'язати рівняння $5^{1+x^3}-5^{1-x^3}=24$

А	Б	В	Г	Д
1,5	3	0	2	1

8. Розв'язати рівняння $5^{x^2+x+1}\cdot 2^{x^2+x+3}=4\cdot 1000^{x}$

А	Б	В	Г	Д
0,5	1	2	2,5	1,5

9. Знайдіть суму коренів рівняння $5^{x^2+x-12}=1$

А	Б	В	Г	Д
-7	-1	1	7	8

10. Якому із вказаних проміжків належить корінь рівняння $\sqrt{2^{x}}\cdot\sqrt{3^{x}}=36$

А	Б	В	Г	Д
$[-1;1]$	$[1;3]$	$[3;5]$	$[5;7]$	$[-3;-1]$

11. Знайдіть суму коренів рівняння $49^{x}-8\cdot 7^{x}+7=0$

А	Б	В	Г	Д
5	0	2	1	3

12. Якому із вказаних проміжків належать корені рівняння $3\cdot 16^{x}-2\cdot 81^{x}=5\cdot 36^{x}$

А	Б	В	Г	Д
$[-1;0]$	$[1;2]$	$[2;3]$	$[0;1]$	$[3;4]$

13. Знайдіть добуток коренів рівняння $5^{x^2+2}=\left(\frac{1}{25}\right)^{5-4x}$

А	Б	В	Г	Д
-8	8	-12	12	4

14. Вказати точку перетину графіків функцій $y=6^x$ і $y=\frac{1}{36}$

А	Б	В	Г	Д
$\left(1;\frac{1}{36}\right)$	$\left(-2;\frac{1}{36}\right)$	$\left(2;\frac{1}{36}\right)$	$(2;36)$	$(-2;36)$

15. Розв'язати рівняння $4^{x+3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-1}$

А	Б	В	Г	Д
0,5	-0,5	-1,5	$\varnothing$	$x\in R$

16. Розв'язати рівняння $3^{x+2}-4\cdot 3^{x+1}+2\cdot 3^{x}=-9$

А	Б	В	Г	Д
0,5	2	1	$\varnothing$	-1

17. Розв'язати рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{x}=\frac{27}{64}$

А	Б	В	Г	Д
3	-3	1	-1	2

18. Розв'язати рівняння $\left(\frac{2}{7}\right)^{3x+1}=\left(\frac{7}{2}\right)^{5x-3}$

19. Розв'язати рівняння $2\cdot 3^{x+1}-2\cdot 3^{2-x}=56;$

20. Розв'язати рівняння $2^{x}5^{x}=0{,}1(10^{x-1})^{5}$

21. Розв'язати рівняння $3^{x}+3^{3-x}=12;$

22. Розв'язати рівняння $4^{x}+2\times 2^{x}-15=0$

5.5 Показникові нерівності

Нерівність. яка містить змінну в показнику степеня називають *показниковою.* При розв'язуванні показникових нерівностей використовують властивості монотонності показникової функції:

- Функція $y=a^x$ зростає, якщо $a>1$, тому
$$\begin{cases} a^{f(x)}>a^{g(x)} \\ a>1 \end{cases} \leftrightarrow \quad f(x)>g(x),$$
- Функція $y=a^x$ спадає, якщо $0<a<1$, тому
$$\begin{cases} a^{f(x)}>a^{g(x)} \\ 0<a<1 \end{cases} \leftrightarrow \quad f(x)<g(x)$$
- Функція $y=a^x$ набуває лише додатних значень.

Типи показникових нерівностей і методи їх розв'язання

1. Нерівності вигляду $a^{nx} <> b^{nx} \quad (a \neq b)$, розв'язують діленням обох частин на степінь $a^{nx} \neq 0$ або $b^{nx} \neq 0$

Приклад 99. Розв'язати нерівність $5^{4x-12} > 7^{4x-12}$

Розв'язання. Поділимо на 7^{4x-12}, маємо $\left(\frac{5}{7}\right)^{4x-12} > 1$, оскільки $\frac{5}{7} < 1$, то одержимо $4x-12<0 \to 4x<12 \to x<3$

Відповідь: $x \in (-\infty;3)$

2. Нерівності вигляду $a^{f(x)} <> a^{g(x)}$ розв'язують, використовуючи властивості монотонності показникової функції.

Приклад 100. Розв'язати нерівність а) $0{,}5^{7-3x} < 4 \quad x < 3.$ б) $6^{x^2+2x} > 6^3$

а) Розв'язання.

$$0{,}5^{7-3x} < 4 \to \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \to 7-3x > -2 \to -3x > -9 \to x < 3$$

Відповідь: $x \in (-\infty;3)$

б) Розв'язання. $6^{x^2+2x} > 6^3 \to x^2+2x > 3 \to x^2+2x-3>0 \to \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$

Відповідь: $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

3. Нерівності виду $a^{f(x)} > b$, можливі випадки:

- Якщо $b \leq 0$,то $a^{f(x)} > b$ для всіх x із $D(f)$
- Якщо $b > 0$, то нерівність $a^{f(x)} > b$ потрібно логарифмувати за основою a: $f(x) > \log_a b, \quad a>1$ і $f(x) < \log_a b, \quad 0<a<1$

Приклад 101. Розв'язати нерівність а) $2^x > 3$ б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$

Розв'язання.

а) $2^x > 3 \to x > \log_2 3 \to x \in (\log_2 3, +\infty)$

Відповідь: $(\log_2 3, +\infty)$

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \to \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \to x < -3 \to x \in (-\infty, -3)$

Відповідь: $(-\infty, -3)$

4. Нерівності вигляду $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ потрібно логарифмувати за основою a:або b

Приклад 102. Розв'язати нерівність $11^{3-x} > 3^{2x-1}$

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою $a = 3 > 1$, отримаємо

$$11^{3-x} > 3^{2x-1} \to 2x - 1 < (3 - x)\log_3 11 \to 2x - 1 < 3\log_3 11 - x\log_3 11 \to$$

$$\to 2x + x\log_3 11 < 3\log_3 11 + 1 \to x(2 + \log_3 11) < 3\log_3 11 + 1 \to x < \frac{3\log_3 11 + 1}{2 + \log_3 11}$$

Відповідь: $\left(-\infty, \frac{3\log_3 11 + 1}{2 + \log_3 11}\right)$

5. Нерівності виду $A_0 a^{mx+k_0} + A_1 a^{mx+k_1} + \ldots + A_n a^{mx+k_n} <> M$ розв'язують винесенням спільного множника за дужки

Приклад 103. Розв'язати нерівність $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} < 0$

Розв'язання.

$$5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} < 0 \to \frac{5^{2x}}{5} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} < 0 \to -\frac{4}{5}5^{2x} + 5 \cdot 2^{2x} < 0 \to$$

$$\to -\frac{4}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + 5 < 0 \to \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{5}{2}\right)^2 \to 2x > 2 \to x > 1$$

Відповідь: $(1, +\infty)$

6. Нерівності виду $Aa^{2x} + Ba^x + C <> 0$ зводять до квадратних заміною $a^x = t > 0$

Приклад 104. Розв'язати нерівність

а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$

Розв'язання. $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$, введемо заміну $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, тоді $\left(\frac{1}{9}\right)^x = t^2$, отримаємо нерівність $t^2 - \frac{28}{3}t + 3 < 0$. Розв'язок цієї нерівності $\frac{1}{3} < t < 9$. Повернемось до заміни і розв'яжемо нерівність $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \to -2 < x < 1$

Відповідь: $(-2,1)$

б) $5^{2x} - 10 \cdot 5^x - 375 < 0$

Розв'язання. $5^{2x} - 10 \cdot 5^x - 375 < 0$, введемо заміну $5^x = t > 0$, отримаємо нерівність $t^2 - 10t - 375 < 0 \leftrightarrow (t+15)(t-25) < 0$. Оскільки $t > 0$, тоді $t + 15 > 0$, а $t - 25 < 0 \to 5^x < 5^2 \to x < 2$.

Відповідь: $(-\infty, 2)$

в) $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 15 > 0$, введемо заміну $2^x = t > 0$, отримаємо нерівність $t^2 - 8t + 15 > 0 \to \left[\begin{array}{l} t > 5 \\ t < 3 \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} 2^x > 5 \\ 2^x < 3 \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} x > \log_2 5 \\ x < \log_2 3 \end{array}\right.$

Відповідь: $(-\infty, \log_2 3) \cup (\log_2 3, +\infty)$

7. Однорідні нерівності $Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} <> 0$ зводять до квадратних діленням на $b^{2x} \neq 0$ або $a^{2x} \neq 0$, отримаємо нерівність вигляду $A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B\left(\frac{a}{b}\right)^x + C <> 0$, яку розв'язують заміною $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t > 0$.

Приклад 105. Розв'язати нерівність $4^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 9^x \geq 0$,

Розв'язання. Нерівність $4^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 9^x \geq 0 \leftrightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{2x} \geq 0$ діленням на $3^{2x} \neq 0$ зведеться до квадратної $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3 \geq 0$.

Введемо заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t > 0$, маємо $t^2 + 2t - 3 \geq 0 \to (t+3)(t-1) \geq 0$.

Оскільки $t > 0$, то $t + 3 > 0$ тоді, щоб виконалась нерівність потрібно щоб $t - 1 \geq 0 \to t \geq 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \to x \leq 0$.

Відповідь: $(-\infty, 0]$

5.6 Завдання для самостійного розв'язування

Тест 10 (Показникові нерівності)

1. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$

А	Б	В	Г	Д
$(-1,5;+\infty)$	$(1,5;+\infty)$	$(-\infty;1,5)$	$(-\infty;-1,5)$	$(-\infty;0,5)$

2. Розв'язати нерівність $3^{x+2}+3^{x-1}<28$

А	Б	В	Г	Д
$(-1;+\infty)$	$(1;+\infty)$	$(-\infty;1)$	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$

3. Розв'язати нерівність $25^x+25\cdot 5^x-1250>0$

А	Б	В	Г	Д
$(-2;+\infty)$	$(2;+\infty)$	$(-\infty;2)$	$(-\infty;-2)$	$(-2;2)$

4. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{16}$

А	Б	В	Г	Д
$(-4;+\infty)$	$(4;+\infty)$	$(-\infty;4)$	$(-\infty;-4)$	$(-4;4)$

5. Розв'язати нерівність $(0,2)^x \geq \frac{1}{25}$

А	Б	В	Г	Д
$x\geq -2$	$x\leq -2$	$x\leq 2$	$x\geq 2$	Інша відповідь

6. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3} \geq 3^{1-x}$

А	Б	В	Г	Д
$(-2;+\infty)$	$(7;+\infty)$	$(5;+\infty)$	$(-2;7)$	$(5;7)$

7. Розв'язати нерівність $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$;

А	Б	В	Г	Д
$x>-0,5$	$x<-0,5$	$x<0,5$	$x>0,5$	Інша відповідь

8. Укажіть найбільше ціле число , яке не є розв'язком нерівності

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \leq \frac{1}{81}$

А	Б	В	Г	Д
1	-2	3	2	Не існує

9. Розв’язати нерівність $4^{2x}\cdot 2^{3-x}<1$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-1)$	$(-\infty;1)$	$(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$	$(-1;+\infty)$	$(1;+\infty)$

10. Розв’язати нерівність $1\le 5^{x}\le 125$

А	Б	В	Г	Д
$[0;3]$	$[1;3]$	$[-1;3]$	$[0;5]$	$[-3;-1]$

11. Розв’язати нерівність $(\lg 5)^{x+2}>(\lg 5)^{-1}$

А	Б	В	Г	Д
$x<3$	$x<-3$	$x>-3$	$x>3$	Інша відповідь

12. Розв’язати нерівність $3^{x}>2$

А	Б	В	Г	Д
$x>3$	$x>2$	$x>\log_3 2$	$x<\log_3 2$	$x>\log_2 3$

13. Розв’язати нерівність $2\cdot 4^{x}-5\cdot 6^{x}+3\cdot 9^{x}<0$

А	Б	В	Г	Д
$(-2,-1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;2)$	Інша відповідь

14. Розв’язати нерівність $\sin 3\le(\sin 3)^{x-3}\le 1$

А	Б	В	Г	Д
$[-3;2]$	$[1;2]$	$[2;3]$	$[-4;-3]$	$[3;4]$

15. Розв’язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3}\ge 3^{1-x}$

А	Б	В	Г	Д
$[1,4]$	$[-3,2]$	$[-1,4]$	$[-4,1]$	$[2,3]$

16. Розв’язати нерівність $0{,}04^{x}-26\cdot(0{,}2)^{x}+25\le 0;$

17. Розв’язати нерівність. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x}<\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+3{,}75};$

18. Розв’язати нерівність $2\cdot 8^{4-5x}<\left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}.$

19. Розв’язати нерівність $4^{x}-10\cdot 2^{x}+16<0;$

20. Розв’язати нерівність $3^{\frac{x^2+1}{x+2}}>\frac{1}{3}$

21. Розв’язати нерівність $25\cdot 2^{x}-10^{x}+5^{x}>25$

22. Розв’язати нерівність $2^{\frac{x-3}{2x-5}}>16$

5.7 Логарифмічні рівняння

Рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма або в основі логарифма називають логарифмічним. При розв'язуванні знаходять область визначення та виконують перевірку. Загальних методів розв'язування не має, але існує кілька груп рівнянь, які розв'язуються елементарними способами.

Типи логарифмічних рівнянь і методи їх розв'язання

(для всіх рівнянь $a > 0,\ a \neq 1\ f(x) > 0$)

1. Рівняння вигляду $\log_a f(x) = b$. За означенням логарифма маємо рівняння $f(x) = a^b$, з якого знаходимо *x* і, враховуючи О.Д.З. $f(x) > 0$ (або виконуємо перевірку) записуємо відповідь.

Приклад 106. Розв'язати рівняння а) $\log_2 x = 5$ б) $\log_3(x-12) = 2$ в) $\log_2\left(x^2+4x+3\right) = 3$

а) Розв'язання. $\log_2 x = 5 \to \begin{cases} x > 0 \\ x = 2^5 \end{cases} \to \begin{cases} x > 0 \\ x = 32 \end{cases} \to x = 32$

Відповідь: 32

б) Розв'язання. $\log_3(x-12) = 2$, знайдемо О.Д.З. $x-12 > 0,\quad x > 12$. Розв'яжемо рівняння $x-12 = 3^2 \to x-12 = 9 \to x = 21$

Відповідь: 21

в) Розв'язання. Розв'яжемо рівняння

$\log_2\left(x^2+4x+3\right) = 3 \to x^2+4x+3 = 2^3 \to x^2+4x-5 = 0 \to x_1 = 1,\ x_2 = -5$

Виконаємо перевірку: $x_1 = 1$, тоді $\log_2\left(1^2+4\cdot 1+3\right) = \log_2 8 = 3 \to 3 = 3$. Рівність правильна, отже $x_1 = 1$ – корінь рівняння. Підставимо в рівняння $x_2 = -5$, тоді $\log_2\left((-5)^2+4\cdot(-5)+3\right) = \log_2(25-20+3) = \log_2 8 \to 3 = 3$

Рівність правильна, отже $x_2 = -5$ – корінь рівняння.

Відповідь: -5,1

2. Рівняння вигляду $\log_{\varphi(x)} f(x) = b$. За означенням логарифма маємо рівняння $f(x) = \varphi^b(x)$, з якого знаходимо *x* і, враховуючи О.Д.З. $\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1. \end{cases}$ (або виконуємо перевірку) записуємо відповідь.

Приклад 107. Розв'язати рівняння $\log_x\left(2x^2-5x-6\right) = 2$.

Розв'язання. Запишемо О.Д.З. $\begin{cases} 2x^2-5x-6>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$ і розв'яжемо рівняння

$\log_x\left(2x^2-5x-6\right)=2 \to 2x^2-5x-6=x^2 \to x^2-5x-6=0, \quad x_1=-1, x_2=6$

Значення $x_1=-1$ не задовольняє О.Д.З. – сторонній корінь. Виконаємо перевірку для $x_2=6$, маємо $\log_6\left(2\cdot 6^2-5\cdot 6-6\right)=\log_6\left(72-30-6\right)=\log_6 36=2 \to 2=2$. Рівність правильна, отже $x_2=6$ – корінь рівняння.

Відповідь: 6

3. Рівняння вигляду $\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=\varphi(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x)=\varphi(x) \\ \varphi(x)>0 \end{cases}$.

Приклад 108. Розв'язати рівняння а) $\lg\left(x^2-17\right)=\lg(x+3)$
б) $\log_5(2x+3)=\log_5(x+1)$.

а) Розв'язання. Рівняння $\lg\left(x^2-17\right)=\lg(x+3)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-17=x+3 \\ x+3>0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2-17=x+3 \\ x>-3 \end{cases} \to \begin{cases} x^2-x-20=0 \\ x>-3 \end{cases} \to \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=5 \end{array}\right. \\ x>-3 \end{cases} \to x=5$$

Відповідь: 5

б) Розв'язання. Рівняння $\log_5(2x+3)=\log_5(x+1)$ рівносильне системі $\begin{cases} 2x+3=x+1 \\ x+1>0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-2 \\ x>-1 \end{cases}$. Отже, дане рівняння коренів не має.

Відповідь: $\varnothing$

4. Рівняння вигляду $\log_a f_1(x)+\log_a f_2(x)+...+\log_a f_n(x)=\log_a \varphi(x)$.
Цей тип рівнянь замінюється на алгебраїчне рівняння потенціюванням. Деякі доданки можуть бути числами.

Приклад 109. Розв'язати рівняння $\lg(3x-1)+\lg(x-27)=3$.

Розв'язання. Знайдемо О.Д.З. $\begin{cases} 3x-11>0, \\ x-27>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>\dfrac{11}{3}, \\ x>27; \end{cases}$ отже $x>27$.

Розв'яжемо рівняння
$\lg(3x-1)(x-27)=3 \to (3x-1)(x-27)=10^3 \to 3x^2-92x-703=0 \quad x_1=-9{,}5 \; x_2=37$
Значення $x_1=-9{,}5$ не задовольняє О.Д.З. – сторонній корінь.

Відповідь: 37

5. Рівняння вигляду $A\log_a^2 f(x)+B\log_a f(x)+C=0$ заміною $\log_a f(x)=t$ зводиться до квадратного $At^2+Bt+C=0$.

Приклад 110. Розв'язати рівняння $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$.

Розв'язання. Знайдемо О.Д.З. $x>0$ і введемо заміну $\log_3 x=t$, маємо рівняння $t^2-t-2=0, \quad t_1=-1, \quad t_2=2$. Повернемось до заміни

$\log_3 x=-1 \to x=3^{-1}, \quad x=\dfrac{1}{3}$ або $\log_3 x=2 \to x=3^2, \quad x=9$

Відповідь: $\dfrac{1}{3}$, 9

6. Розв'язування рівнянь логарифмуванням їх обох частин. Рівняння розв'язуються логарифмуванням з наступною зміною та зведенням до алгебраїчного рівняння.

Приклад 111. Розв'язати рівняння $x^{\lg x-1}=100$.

Розв'язання. Знайдемо О.Д.З. $x>0$ і розв'яжемо рівняння $x^{\lg x-1}=100$. Прологарифмуємо обидві частини рівняння, отримаємо $\lg x^{\lg x-1}=\lg 100 \to (\lg x-1)\lg x=2 \to \lg^2 x-\lg x-2=0$. Введемо заміну $\lg x=t$, маємо рівняння $t^2-t-2=0, \quad t_1=-1, \quad t_2=2$. Повернемось до заміни $\lg x=-1 \to x=10^{-1}, \quad x=0{,}1$ або $\lg x=2 \to x=10^2, \quad x=100$

Відповідь: 0,1 100

7. Зведення до однієї основи (використання формули переходу до логарифма з новою основою $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$).

Приклад 112. Розв'язати рівняння $\log_2 x+\log_3 x=1$

Розв'язання. Знайдемо О.Д.З. $x>0$ і розв'яжемо рівняння $\log_2 x+\log_3 x=1$.

$$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 3}=1 \to \log_2 x\left(1+\frac{1}{\log_2 3}\right)=1 \to \frac{\log_2 x(1+\log_3 2)}{\log_2 3}=1 \to$$

$$\to \log_2 x(1+\log_3 2)=\log_2 3 \to \log_2 x(\log_3 3+\log_3 2)=\log_2 3 \to$$

$$\to \log_2 x\log_3(3\cdot 2)=\log_2 3 \to \log_2 x\log_3 6=\log_2 3 \to \log_2 x=\frac{\log_2 3}{\log_3 6} \to x=2^{\frac{\log_2 3}{\log_3 6}}$$

Відповідь: $2^{\frac{\log_2 3}{\log_3 6}}$

8. Використання монотонності функцій

Приклад 113. Розв'язати рівняння $\log_3(10x-1)=3-x$

Розв'язання. Підбором знаходимо $x=1$ – корінь рівняння. Функція $y=\log_3(10x-1)$ – зростаюча, а $y=3-x$ – спадна, тому із властивостей монотонності цей корінь єдиний.

Відповідь: 1

5.8. Завдання для самостійного розв'язування

Тест 11 (Логарифмічні рівняння)

1. Знайти область визначення функції $y=\lg(x^2-5x+6)$

А	Б	В	Г	Д
$(-3;-2)$	$(2;3)$	$(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$	$(-\infty;-3)\cup(-2;+\infty)$	$(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$

2. Скільки коренів має рівняння $x+3^{\log_3 x}=20$

А	Б	В	Г	Д
1	2	Більше трьох	$\varnothing$	3

3. .Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $\log_3(2x+1)=2$

А	Б	В	Г	Д
$(0;2)$	$(2;4)$	$(3;5)$	$(4;6)$	$(6;8)$

4. Розв'язати рівняння $\log_{x+1}(2x^2+1)=2$. Якщо коренів декілька, то знайдіть їх суму

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

5. Знайти добуток коренів рівняння $\log^2{}_2 x-3\log_2 x=4$

А	Б	В	Г	Д
16	8	2	3	-3

6. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння
$\log_5(x-1)+\log_5(x-2)=\log_5(x+2)$

А	Б	В	Г	Д
$(-1;1)$	$(1;3)$	$(3;5)$	$(5;7)$	$(-3;-1)$

7. Знайти корені рівняння $\log_{\frac{1}{3.}}(2x-1)=-2$

А	Б	В	Г	Д
5	3	4	2	1

8. Знайти корені рівняння $\log_4\left(x^2-1\right)=\log_4 3$

А	Б	В	Г	Д
-1;1	-2;2	-3;3	-4;4	1;1

9. Знайти корені рівняння $\log_{2008}\log_3\log_2 x=0$

А	Б	В	Г	Д
2	4	8	16	2008

10. Розв'язати рівняння $\lg\left(x-9\right)+\lg\left(x+1\right)=0$

А	Б	В	Г	Д
12	13	14	15	16

11. Знайти корені рівняння $\log^2{}_3 x-3\log_3 x+2=0$

А	Б	В	Г	Д
3;9	2;5	-2;5	$\frac{1}{3};\frac{1}{9}$	3

12. Розв'язати рівняння $\log_5\left(3x-1\right)=\log_5\left(x^2-1\right)$

А	Б	В	Г	Д
0;3	0	3	0;3;5	$\varnothing$

13. Розв'язати рівняння $\log_2\left(2^x-6\right)=x-2$

А	Б	В	Г	Д
-1	0	1	2	3

14. Розв'язати рівняння $\log_3\left(x+1\right)+\log_3\left(x+3\right)=1$, якщо є декілька коренів, то у відповідь запишіть їх суму.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

15. Розв'язати рівняння $\log_{0,3}(5+2x)=1$;

16. Розв'язати рівняння $\log_a x+\frac{1}{3}\log_a 2=\log_{a^2}3$;

17. Розв'язати рівняння $\log_a x=\log_a 12-2\log_a 2$;

18. Розв'язати рівняння $x^{\log_5 x}=125x^2$;

19. Розв'язати рівняння $\log_2 x+\dfrac{4}{\log_x 2}=5$;

20. Розв'язати рівняння $\log_a x=\log_{\sqrt{a}}2+\log_{\frac{1}{a}}3$;

21. Розв'язати рівняння $x^{\log_3 x-3}=\dfrac{1}{9}$.

22. Розв'язати рівняння $\log_2^2(x+1)-\log_{\frac{1}{4}}(x+1)=5$.

5.9 Логарифмічні нерівності

Нерівність, яка містить змінну під знаком логарифма або в його основі називають логарифмічною. При розв'язуванні таких нерівностей знаходять ОДЗ, використовують загальні властивості нерівностей, властивості логарифмів, властивість монотонності логарифмічної функції:

- Функція $y = \log_a x$ зростає, якщо $a > 1$,тому,

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \\ a > 1; \end{cases} \leftrightarrow f(x) > \varphi(x) > 0$$

- Функція $y = \log_a x$ спадає, якщо $0 < a < 1$, тому

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \\ 0 < a < 1; \end{cases} \leftrightarrow 0 < f(x) < \varphi(x)$$

Типи нерівностей та методи їх розв'язання

1. Нерівності вигляду $\log_a f(x) <> b$

Приклад 114. Розв'язати нерівності

а) $\log_2 x \le 3$

Розв'язання. $\log_2 x \le 3 \leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \le 2^3 \end{cases} \to \begin{cases} x > 0 \\ x \le 8 \end{cases} \to (0, 8]$

Відповідь: $(0, 8]$

б) $\lg(x^2 - 4x + 13) > 1;$

Розв'язання

$$\lg(x^2 - 4x + 13) > 1 \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 13 > 0 \\ x^2 - 4x + 13 > 10 \end{cases} \to x^2 - 4x + 13 > 10 \to\to x^2 - 4x + 3 > 0 \to$$

$$\to \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array} \right. \to x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

в) $\log_2 \dfrac{3x - 1}{x - 2} \ge 0$

Розв'язання

$$\log_2\frac{3x-1}{x-2}\geq 0\leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x-2}>0\\ \dfrac{3x-1}{x-2}\geq 1\end{cases}\to\frac{3x-1}{x-2}\geq 1\to\frac{3x-1}{x-2}-1\geq 0\to\frac{3x-1-x+2}{x-2}\geq 0\to$$

$$\to\frac{2x+1}{x-2}\geq 0\to\begin{cases}(2x+1)(x-2)\geq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}\to\left[\begin{array}{l}x\leq -\dfrac{1}{2}\\ x>2\end{array}\right.\to x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup(2,+\infty)$$

Відповідь: $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup(2,+\infty)$

г) $\log_3\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>0$

Розв'язання

$$\log_3\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>0\leftrightarrow\begin{cases}2x-1>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>3^0\end{cases}\to\begin{cases}2x-1>0\\ 2x-1<1\\ 2x-1<\dfrac{1}{2}\end{cases}\to\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ x<1\\ x<\dfrac{3}{4}\end{cases}\to$$

$$\to\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ x<\dfrac{3}{4}\end{cases}\to x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$$

Відповідь: $x\in(\frac{1}{2};\frac{3}{4})$.

2. Нерівності вигляду $\log_a f(x)<>\log_a\varphi(x)$ рівносильні системі нерівностей $\begin{cases}\varphi(x)>0\\ f(x)>0\\ f(x)<>\varphi(x)\end{cases}$.

Приклад 115. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(5x+10)\leq\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+6x+8\right)$.

Розв'язання. Нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(5x+10)\leq\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+6x+8\right)$ рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} 5x+10>0 \\ x^2+6x+8>0 \\ 5x+10\ge x^2+6x+8 \end{cases} \to \begin{cases} x>-2 \\ (x+2)(x+4)>0 \\ (x+2)(x-1)\le 0 \end{cases} \to \begin{cases} x>-2 \\ \left[\begin{array}{l} x>-2 \\ x<-4 \end{array}\right. \\ -2\le x\le 1 \end{cases} \to -2<x\le 1$$

Відповідь: $(-2,1]$

3. Нерівності вигляду $\log_a f_1(x)+\log_a f_2(x)+...+\log_a f_n(x) <> \log_a \varphi(x)$

Приклад 116. Розв'язати нерівність $\log_4(x+2)+\log_4(10-x)\le 2+\log_4 x$.

Розв'язання. Нерівність $\log_4(x+2)+\log_4(10-x)\ge 2+\log_4 x$ рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 10-x>0 \\ x>0 \\ \log_4(x+2)(10-x)\ge \log_4 16x \end{cases} \to \begin{cases} 0<x<10 \\ (x+2)(10-x)\ge 16x \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} 0<x<10 \\ 10x-x^2+20-2x-16x\ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0<x<10 \\ -x^2-8x+20\ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0<x<10 \\ x^2+8x-20\le 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} 0<x<10 \\ (x+10)(x-2)\le 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0<x<10 \\ -10\le x\le 2 \end{cases} \to 0<x\le 2$$

Відповідь: $(0,2]$

4. Нерівності вигляду $A\log_a^2 f(x)+B\log_a f(x)+C<>0$ заміною $\log_a f(x)=t$ зводяться до квадратної $At^2+Bt+C<>0$.

Приклад 117. Розв'язати нерівність $\lg^2 x+4\lg x-5\le 0$

Розв'язання. Для нерівності $\lg^2 x+4\lg x-5\le 0$ знайдемо О.Д.З.: $x>0$. Введемо заміну $\lg x=t$, тоді нерівність $\lg^2 x+4\lg x-5\le 0$ зведеться до квадратної $t^2+4t-5\le 0\to -5\le t\le 1$. Повертаючись до змінної *x*, отримаємо нерівність $-5\le \lg x\le 1,\quad 10^{-5}\le x\le 10,\quad x\in\left[10^{-5},10\right]$. Враховуючи О.Д.З.: $x>0$, запишемо розв'язок нерівності $\begin{cases} x>0 \\ x\in\left[10^{-5},10\right] \end{cases} \to x\in\left[10^{-5},10\right]$

Відповідь: $\left[10^{-5},10\right]$

5.10. Завдання для самостійного розв'язування

Тест 12 (Логарифмічні нерівності)

1. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > -2$

А	Б	В	Г	Д
$(-3;-2)$	$(-2;2,5)$	$(-\infty;-2)\cup(2,5;+\infty)$	$(-\infty;-3)\cup(-2;+\infty)$	$(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$

2. Розв'язати нерівність $\log_{0,5}(x^2+x) \geq -1$

А	Б	В	Г	Д
$(0;2]$	$[-4;-1)$	$[-2;-1)\cup(0;1]$	$\varnothing$	$(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$

3. Розв'язати нерівність $\log_{0,5}(x-1) \geq -2$

А	Б	В	Г	Д
$(1;5)$	$[5;+\infty)$	$(-\infty;5]$	$(1;5]$	$[1;5]$

4. Розв'язати нерівність $\log_7(5-x) > \log_7(x-1)$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;3)$	$(1;3)$	$[3;\infty)$	$(1;3]$	$[1;3)$

5. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}(x+3) > -1$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0)$	$(-3;0)$	$(-3;+\infty)$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;-3)$

6. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 0$

А	Б	В	Г	Д
$(1;2)$	$[1;2]$	$[2;+\infty)$	$(2;+\infty)$	$(1;+\infty)$

7. Розв'язати нерівність $\log_{x^2-3} 729 > 3$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-\sqrt{12})$	$(-\sqrt{12};-2.2)\cup(2;\sqrt{12})$	$(-\sqrt{12};-2,2)$	$(2;\sqrt{12})$	$(-2,2;2)$

8. Розв'язати нерівність $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$

А	Б	В	Г	Д
$(3;4)\cup(4;\infty)$	$(3;4)$	$(4;+\infty)$	$(-\infty;-3)$	$(-4;-3)$

9. Розв’язати нерівність $\log_2\left(-\frac{1}{x}\right) > 3$

А	Б	В	Г	Д
$(1;2)$	$\left(0;\frac{1}{8}\right]$	$(-2;-1]$	$\left(-\frac{1}{8};0\right)$	$\left(\frac{3}{5};\frac{8}{9}\right)$

10. Розв’язати нерівність $\lg^2 x + 2 \geq 3\lg x$

А	Б	В	Г	Д
$[3;\infty)$	$(-1;0)$	$(0;3]$	$\varnothing$	$(0,10]\cup[100,+\infty)$

11. Розв’язати нерівність $\log_{0,3}\left(x^2+2\right) \leq \log_{0,3}(5x-4)$

А	Б	В	Г	Д
$(-1;0]$	$\left[\frac{4}{5},2\right]\cup[3,+\infty)$	$[3,+\infty)$	$\left[\frac{4}{5},2\right]$	$[2,3]$

12. .Розв’язати нерівність $\log_5\frac{1}{x} \geq 3\log_{.} x + 4$

А	Б	В	Г	Д
$(-1;0)$	$(1;2)$	$(0;0.2)$	$(1;1,2)$	$\varnothing$

13. Розв’язати нерівність $\log_2 x + \log_2(x+1) \leq \log_2(2x+6)$

А	Б	В	Г	Д
$(-1;0]$	$(-1;1]$	$[2;3]$	$[3;4]$	$(0;3]$

14. Розв’язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\frac{5x-3}{x+2} > 1$

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{3}{5};\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{8}{3};\frac{3}{8}\right)$	$\left(\frac{5}{3};\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{5}{8};3\right)$	$\left(\frac{8}{9};\frac{3}{5}\right)$

15. Розв’язати нерівність $\log_{1.5}\frac{2x-8}{x-2} < 0$

16. Розв’язати нерівність $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0$

17. Розв’язати нерівність $\log_3\frac{2x-1}{x+3} > 0$

18. Розв’язати нерівність $\log_3\left(12-2x-x^2\right) > 2$

19. Розв’язати нерівність $0,3^{2-x} > 12$

20. Розв’язати нерівність $\log_2^2 x - \log_2 x \leq 6$

21. Розв’язати нерівність $\frac{\log_3 x + 2}{\log^2 x} \leq 1$

22. Розв’язати нерівність $\lg^{2+2} x - \lg_2 x > 3$

5.11. Контрольний тест

Тест 13 (Логарифм, показникові, логарифмічні рівняння і нерівності)

1. Розв'язати $0{,}125^x = 2 \cdot 4^x$

А	Б	В	Г	Д
5	0,2	-0,2	2	

2. Спростити $\log_6\left(4+\sqrt{4}\right)$

А	Б	В	Г	Д
1	2	0	0.1	6

3. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\lg x}$

А	Б	В	Г	Д
$[1,+\infty)$	$(1,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$[0,1]$

4. Якщо $\log_6 5 = a$, то $\log_{36} 25 =$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{6}a$	$0{,}25a$	a^2	$4a$	a

5. Обчислити значення виразу $\dfrac{\log_8 3}{\log_2 3}$

А	Б	В	Г	Д
9	8	-3	3	3^{-1}

6. Скільки розв'язків має рівняння $\lg x + \lg(x+1) = \lg 2$**?**

А	Б	В	Г	Д
чотири	два	один	жодного	три

7. Знайти найбільший натуральний розв'язок нерівності $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2} \geq \dfrac{1}{4}$

А	Б	В	Г	Д
8	3	4	1	2

8. Знайти корені рівняння $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{15}{10}\right)^x = 2{,}5$

А	Б	В	Г	Д
$[1,3)$	$[-5,-3]$	$(5,6)$	$(-2,0]$	$(4,5]$

9. Обчислити значення виразу $10^{3-\lg 5} - 36^{\log_6 15}$

А	Б	В	Г	Д
-25	245	425	-205	-20

10. Розв'язати нерівність $\log_{0,3}\left(|x|-5\right)>\log_{0,3}4$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$	$(-9,-5)\cup(5,9)$	$(-\infty,-9)\cup(9,+\infty)$	$(-9,9)$	$(-5,9)$

11. Розв'язати нерівність $\log_{0,5}(3x)>\log_{0,5}(x+2)$

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

12. Розв'язати рівняння $6^{|x|}=\frac{1}{3}$

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\log_6\frac{1}{3}$	$\pm\log_3 6$	$\pm\frac{1}{3}$

13. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$

А	Б	В	Г	Д
-1	-3	1	2	3

14. Розв'яжіть рівняння , якщо є декілька коренів, то у відповідь запишіть їх суму. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=-2$

А	Б	В	Г	Д
5	1	2	3	4

15. Розв'яжіть рівняння $x-\log_2|x|=0$

А	Б	В	Г	Д
чотири	три	два	один	жодного

16. Знайти суму коренів рівняння $\log_3\left(x^2-3x\right)^2-\log_3(1-2x)^2=4$

17. Обчислити $\log_{\frac{1}{3}}{}^{3}\left(9\sqrt{3}\right)$

18. Указати кількість цілих розв'язків нерівності
$\log_{\sin 2}\left(2x^2-x-3\right)\geq\log_{\sin 2}\left(x^2+17\right)$

19. Знайти найменший корінь рівняння $\log_4^2 x^2-\log_4 x^4-8=0$

20. Обчисліть $\log_{bc}a^{22}$ якщо $\log_b a=5$ і $\log_c a^2=12$

21. Розв'язати нерівність $tg2\cdot\lg\left(x^2-13x+50\right)-tg2\geq 0$

22. Розв'яжіть рівняння $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С, Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Геометрія 10-11 клас : підручник. Тернопіль : Навчальна книга-Богдан, 2005. 288 с.
2. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Освіта, 2005. 255 с.
3. Гаук М. М., Зубович Л. В. Математика. Зовнішнє незалежне оцінювання. Довідник. Завдання для тренування. Тестові завдання. Тернопіль : Навчальна книга-Богдан, 2014. 248 с.
4. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА / уклад. А. М. Капіносов [та ін.]. Тернопіль : Підручники і посібники, 2019. 512 с.
5. Математика: завдання за темами. ЗНО-онлайн. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/tema.html (дата звернення: 18.01.2025).
6. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків : Світ дитинства, 2004. 432 с.
7. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків : Світ дитинства, 2005. 392 с.
8. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої огсвіти : затв. наказом М-ва освіти і науки України від 04.12.2019 р. № 8513. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/nakaz-1513_04.12_programa_matematyka.pdf (дата звернення: 18.01.2025).
9. Тести ЗНО онлайн з предмета «Математика». ЗНО-онлайн. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/ (дата звернення: 17.01.2025).
10. Учаснику зовнішнього оцінювання : все про організацію ЗНО // Український центр оцінювання якості освіти : офіційний вебсайт. URL: https://testportal.gov.ua/uchasnyku-zovnishnogo-otsinyuvannya/ (дата звернення: 12.02.2025).
11. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Зодіак-ЕКО, 2002. 272 с.
12. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Зодіак-ЕКО, 2006. 384 с.

Електронне навчальне видання

Галина Григорівна Кашканова
Альона Анатоліївна Коломієць
Надія Борисівна Дубова

Методичні вказівки для підготовки до національного мультипредметного тесту блоку математика з розділу «Рівняння і нерівності» для слухачів підготовчих курсів Частина 3

Рукопис оформила Г. Кашканова

Редактор Н. Кравчук

Оригінал-макет виготовлено в РВВ ВНТУ

Підписано до видання 1.09.2025
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2025-124.
Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: rvv.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.