І. Р. Арсенюк, О. М. Роїк, Г. О. Лосєв

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ

Частина 1

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. Р. Арсенюк, О. М. Роїк, Г. О. Лосєв

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ

Частина 1

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальності 7.080404 "Інтелектуальні системи прийняття рішень". Протокол № 2 від „30" вересня 2004 р.

Вінниця ВНТУ 2004

УДК 519
А 85

Рецензенти:

А. М. Пєтух, доктор технічних наук, професор
В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор
О. Н. Романюк, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

І. Р. Арсенюк, О. М. Роїк, Г. О. Лосєв
А85 **Математичні методи дослідження об'єктів та систем. Частина 1.** Навчальний посібник.– Вінниця: ВНТУ, 2004.– 96 с.

В посібнику розглянуто роль математичного моделювання у розв'язанні задач навколишнього світу. Розглянуто елементарну теорію похибок, алгебру матриць, а також основні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, їх класифікацію та порівняльний аналіз. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри та програмою дисципліни "Математичні методи дослідження об'єктів та систем"

УДК 519

© І. Р. Арсенюк, О. М. Роїк, Г. О. Лосєв, 2004

ЗМІСТ

ВСТУП

Дослідження об'єктів і явищ на їх математичних моделях на сьогоднішній день залишається дуже важливою і актуальною проблемою. Застосування і дослідження таких моделей дозволяє розв'язати досить багато різних проблем. Математичні методи дослідження об'єктів та систем досить давно і успішно застосовують майже в усіх сферах діяльності людини: у фізиці, механіці, астрономії, економіці, медицині, техніці тощо. До появи ЕОМ основні зусилля вчених були направлені на пошук розв'язків, представлених у явному вигляді. Проте у математиці часто зустрічаються задачі, розв'язок яких неможливо отримати у вигляді залежностей, що зв'язують шукані величини з вхідними. Для розв'язання таких задач намагаються знайти будь–який нескінченний процес, що збігається до шуканої відповіді. Якщо такий процес знайдено, то, виконуючи певну кількість кроків, і обриваючи обчислення ми отримаємо наближений розв'язок.

Такий підхід до розв'язування задач був відомий ще до появи ЕОМ, протей він застосовувався дуже рідко, внаслідок досить великої складності. Залучення комп'ютерної техніки суттєво розширило клас задач, що можуть бути ефективно розв'язані. Тепер досліднику, під час побудови математичної моделі не слід намагатися її максимально спростити, як це було потрібно для отримання розв'язку в явному вигляді. Його увага, перш за все, повинна бути направлена на те, щоб врахувати найсуттєвіші особливості досліджуваного об'єкта або явища. Після цього він вирішує питання щодо розробки і реалізації алгоритму розв'язання відповідної задачі на комп'ютері.

У першій частині посібника наведені основи обчислювальної математики, розглянута елементарна теорія похибок, алгебра матриць, а також методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

В другій частині посібника розглянуто такі розділи, як: методи розв'язання нелінійних рівнянь та систем нелінійних рівнянь; інтерполяція та екстраполяція; чисельне диференціювання та інтегрування, а також наближене розв'язання звичайних диференційних рівнянь.

Кожен розділ містить теоретичний матеріал, який ілюструється прикладами розв'язання багатьох задач, що найчастіше зустрічаються на практиці, контрольні питання і завдання для лабораторних занять. Такий підхід дозволяє досить ґрунтовно опанувати і засвоїти основні методи дослідження об'єктів та систем, а також навчитись їх практично реалізовувати. Крім того, в посібнику наведено список літератури, що дозволяє значно глибше вивчити теоретичні основи обчислювальної математики, та її практичне застосування.

1. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ І СИСТЕМ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

1.1. Роль математичного моделювання у розв'язанні задач навколишнього світу

Бурхливий розвиток комп'ютерної техніки сприяв широкому процесу математизації науки, техніки і господарства в цілому. Саме розробка і застосування математичних методів розв'язування прикладних задач на базі комп'ютерів є предметом сучасної прикладної математики. Математика виникла з практичних потреб людини і її розвиток сприяв загальному науково–технічному прогресу цивілізації, а потреби природознавства, техніки і практичної діяльності людей ставили перед математикою нові задачі і стимулювали її розвиток.

Ступінь розвитку суспільства визначається рівнем розвитку математичного апарату, вмінням отримати всю необхідну інформацію про досліджуваний об'єкт, можливістю описати його найсуттєвіші риси і властивості мовою математичних понять. Тобто, дуже актуальною і важливою задачею постає задача побудови математичної моделі досліджуваного об'єкта.

Математична модель (ММ) будується на основі деякого абстрагування, спрощення та ідеалізації об'єкта, а тому завжди є його наближеним описом. Але завдяки заміні реального об'єкта його ММ виникає можливість сформулювати задачу його вивчення як математичну, для розв'язування якої застосовують математичний апарат, що не залежить від природи досліджуваного об'єкта. ММ – це, як правило, різноманітні рівняння, які описують поведінку досліджуваних об'єктів і явищ [1, 4].

Вивчення реальних явищ або процесів часто приводить до потреби розв'язування диференціального рівняння або їх системи. Тому диференціальні рівняння, які виникають в результаті дослідження цих явищ чи процесів, називають диференціальними моделями. Диференціальні рівняння – окремий випадок тієї множини математичних моделей, які виникають в процесі вивчення реального світу. Математичне моделювання широко використовують у геофізиці, хімії, геології, біології, економіці, соціології, екології, медицині, психології, лінгвістиці та інших науках.

Одна й та сама диференціальна модель може описувати процеси чи явища різної природи. Так, модель, що задається рівнянням виду $y' = ky$, описує і радіоактивний розпад речовини, і зміну атмосферного тиску зі зміною висоти над земною поверхнею, і охолодження тіла внаслідок конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, і зміну струму в електричному колі з індуктивністю при розмиканні, і збільшення колонії живих організмів, що перебувають у сприятливих умовах тощо. А модель, що задається рівнянням $y'' + \omega^2 y = 0$, може описувати і коливання кулі, підвішеної до пружини, і коливання математичного маятника, і зміну заряду конденсатора, пластини якого замкнені на індуктивність, і крутильні коливання тощо. Коливання різні, а фундаментальна сутність їх однакова, тому вони описуються тією самою математичною моделлю. Отже, одна математична модель може мати багато реальних прообразів. Проте для описування різних сторін одного явища іноді виникає потреба у використанні іншої математичної моделі. Такі моделі здебільшого взаємно доповнюють одна одну [1, 4].

Слід зазначити, що вдало розроблена ММ часто дає змогу передбачити існування в природі певних явищ або об'єктів. Таких прикладів відомо досить багато і всі вони свідчать про прогнозуючу роль математики у науці, тобто математика стала однією з найважливіших інструментів пізнання матеріального світу.

1.2. Структура похибки розв'язку задачі

Побудувавши математичну модель, намагаються знайти її розв'язок. Для складних прикладних задач, як правило, не існує точного розв'язку у вигляді явних формул або скінченної послідовності арифметичних операцій, кожна з яких виконується точно. В таких випадках застосовують потужний математичний засіб розв'язування задач – чисельні методи. Найпростіші чисельні методи виникли і широко використовувалися задовго до появи ЕОМ. Але є багато прикладних задач, для яких знайти розв'язок без застосування комп'ютерів практично неможливо. Сучасні швидкодіючі обчислювальні машини стали стимулом для розробки нових чисельних методів.

Але слід пам'ятати, що застосовувати чисельні методи для розв'язування прикладних задач на базі комп'ютерів треба обережно, оскільки точність розв'зування залежить від багатьох факторів. При цьому важливішим питанням є вміння правильно оцінити похибку обчисленого розв'язку.

Похибка розв'язку задачі складається з [1]:

- похибки математичної моделі;
- неусувної похибки;
- похибки методу;
- обчислювальної похибки.

Похибка математичної моделі обумовлена тим, що модель описує явище наближено, з припущеннями і спрощеннями. І для того, щоб спростити побудову математичної моделі треба мати уявлення про точність кінцевого результату.

Неусувна похибка зумовлена похибками у вхідних даних задачі і залежить від методу розв'язування задачі. Але, щоб правильно обрати метод і визначити точність обчислень, важливо знати межі неусувної похибки.

Похибка методу пов'язана з необхідністю заміни неперервної моделі дискретною або із завершенням нескінченного ітераційного процесу після скінченної кількості ітерацій. Наприклад, нехай на відрізку *[a;b]* треба знайти розв'язок задачі Коші [1]

$$y' = f(x,y),\ y(a) = y_0 \tag{1.1}$$

Знайти чисельно розв'язок $y(x)$ в усіх точках відрізка *[a;b]* неможливо, оскільки їх безліч. Тому на відрізку *[a;b]* беруть скінченну кількість точок $(x_i = a + ih)$, $i = 0,1,...,n$, $a + nh \le b < a + (n+1)h)$ і лише в них знаходять значення $y(x)$. Початкове значення $y(a) = y_0$ нам відоме. Для знаходження інших значень $y_i = y(x_i)$ $(i = 1,2,...,n)$ диференціальне рівняння розглядають не на всьому відрізку *[a;b]*, а тільки в зазначених точках $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$.

Замінивши похідну $y'(x)$ її наближеним значенням $(y_{i+1} - y_i)/h$ дістають систему рівнянь

$$y_{i+1} - y_i = hf(x_i, y_i),\ i = 0,1,2,...,n-1. \tag{1.2}$$

Звідси послідовно знаходять $y_1, y_2, ..., y_n$.

Якщо у рівняння (1.2) замість y_i, і y_{i+1} підставити точні значення розв'язку $y(x_i)$, то рівності задовольняться лише наближено.

Похибка, що виникає під час заміни неперервної моделі дискретною, називають *похибкою дискретизації* (або *похибкою апроксимації)*.

Крім похибки дискретизації, є інший тип похибки чисельних методів. В основі багатьох методів покладено ідею ітераційного процесу, в ході якого за певним правилом будується послідовність наближень до розв'язування задачі. Якщо ця послідовність має границю, коли кількість членів послідовності наближається до нескінченності – ця границя є розв'язком даної задачі. Але на комп'ютері можна обчислити тільки скінченну кількість членів послідовності. Похибку, обумовлену обривом ітераційного процесу, називають *похибкою збіжності.* Похибку методу намагаються звести до величини, яка в кілька разів менша за похибку вхідних даних [1].

Отже, похибку чисельного методу можуть утворювати похибки дискретизації або похибки збіжності, або ж для деяких методів обидва типи похибок одночасно. Всі ці похибки, а також методи їх аналізу і регулювання розглядаються при побудові конкретних чисельних методів.

Обчислювальні похибки пов'язані з похибками округлення чисел. Будь–які обчислення виконують з певною кількістю значущих цифр. Це вносить в результат похибку округлення, яка нагромаджується в ході обчислень. Похибки округлення можуть по–різному впливати на кінцевий результат. В результаті виконання мільйонів операцій, кожна з яких вносить невелику похибку, сумарна похибка округлень може значно перевищити шуканий результат обчислень. Але в окремих операціях похибки округлень можуть мати різні знаки і частково компенсувати одна одну. Тому, якщо немає систематичних причин, випадкове нагромадження похибок округлення незначне [2, 4, 10].

Систематичною причиною нагромадження похибок є, наприклад, віднімання близьких за значеннями чисел, оскільки при малій абсолютній похибці чисел x_1 і x_2 відносна похибка $(\Delta x_1 + \Delta x_2)/|x_1 - x_2|$ результату може стати великою [4].

Обчислювальні похибки виникають і під час перетворення чисел з однієї системи числення в іншу, якщо основа однієї системи числення не є степенем основи іншої. Це може привести до того, що в новій системі числення число стане ірраціональним.

Втрата точності може виникнути і під час додавання до великого числа дуже малих чисел. Для зменшення похибки, додавати числа слід в порядку їх зростання. У машинній арифметиці комутативний і дистрибутивний закони алгебри не завжди виконуються. Обчислювальний алгоритм треба будувати так, щоб похибка округлень була значно меншою за усі інші похибки [1, 4].

1.3. Поняття стійкості та коректності

Похибки у вхідних даних задачі – неусувні. Дослідник не може їх зменшити, але повинен знати як вони впливають на точність кінцевого результату. Одні задачі мають похибку результату одного порядку з похибками вхідних даних, в інших задачах похибка результату може на кілька порядків перевищувати похибку вхідних даних. Чутливість задачі до неточностей у вхідних даних характеризується поняттям *стійкості*.

Задача є *стійкою* за вхідними даними, якщо її розв'язок безперервно залежить від вхідних даних, тобто малому прирісту Δx вхідної величини відповідає малий приріст Δy шуканого розв'язку. Іншими словами, малі похибки вхідних даних спричиняють малі похибки розв'язку задачі. Якщо ця умова не виконується – задача є *нестійкою* за вхідними даними. Це означає, що навіть незначні похибки вхідних даних можуть привести до як завгодно великих похибок розв'язку, тобто розв'язок може бути дуже викривлений. Тому застосовувати безпосередньо до таких задач чисельні методи не можна, оскільки похибки округлень при застосуванні методу будуть катастрофічно нагромаджуватись у ході обчислень.

Наведемо приклад нестійкої задачі, який належить Уілкінсону [1]. Коренями многочлена

$$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \dots \tag{1.3}$$

є числа $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \dots,\ x_{20} = 20$. Нехай один з його коренів обчислено з незначною похибкою, наприклад, коефіцієнт –210 при x^{19} замінено на коефіцієнт $-210+2^{-23}$ $(2^{-23} \approx 10^{-7})$. Тоді дещо змінений многочлен

$P(x) = P(x) - 2^{-23}x^{19}$ має такі округлені до двох десяткових (після коми) знаків корені:

$$x_1 = 1,00;\ x_2 = 2,00;\ ...;\ x_8 = 8,01;\ x_9 = 8,92;\ x_{10,11} = 10,10 \pm 0,64i;$$

$$x_{12,13} = 11,79 \pm 1,65i;...;\ x_{18,19} = 19,50 \pm 1,94i;\ x_{20} = 20,85.$$

Незначна похибка в коефіцієнті –210 даного многочлена викликала суттєво інші значення коренів (десять з них стали комплексними). Причиною цього є нестійкість задачі, оскільки корені обчислювали з точністю до 11 значущих цифр і похибка округлень незначна.

Іноді під час розв'язування стійкої за вхідними даними задачі нестійким може бути метод її розв'язування. Нехай треба обчислити інтеграли [1]

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx,\ n = 1,2,... \qquad (1.4)$$

Інтегруючи за частинами, маємо

$$\int_0^1 x^n e^{x-1} dx = x^n e^{x-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx$$

Звідси дістанемо $I_1 = \dfrac{1}{e},\ I_2 = 1 - 2I_1,\ ...,\ I_n = 1 - nI_{n-1}.$

Використавши рекурентне співвідношення, обчислимо перші дев'ять інтегралів $I_1 = 0{,}367879$, $I_2 = 0{,}264242$, $I_3 = 0{,}207274$, $I_4 = 0{,}170904$, $I_5 = 0{,}145480$, $I_6 = 0{,}127120$, $I_7 = 0{,}110160$, $I_8 = 0{,}118720$, $I_9 = 0{,}0684800$. Значення інтеграла I_9 помилкове, оскільки підінтегральна функція $x^9 e^{x-1}$ в усіх точках відрізка [0; 1] невід'ємна. Помилка зумовлена похибкою округлення значення I_1 до шести значущих цифр. Ця похибка наближено дорівнює $4{,}4 \cdot 10^{-7}$. При обчисленні I_1 вона множиться на –3 і т.д. Похибка в I_9 дорівнює $9! \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-7} \approx 0{,}1601$. Вона спотворила істинне значення I_9, яке з трьома значущими цифрами дорівнює 0,0916.

Введемо тепер поняття *коректності* задачі. Задача є *коректно поставленою,* якщо для будь–яких вхідних даних з деякого класу існує єдиний і стійкий за вхідними даними її розв'язок [1]. Наведена вище задача обчислення коренів многочлена (1.3) є некоректно поставленою, а обчислення інтегралів (1.4) – коректно поставленою задачею. Прикладом некоректно поставленої задачі є також задача чисельного диференціювання функцій.

Для розв'язування некоректно поставлених задач застосовувати класичні чисельні методи не слід, оскільки похибки округлень при розрахунках можуть катастрофічно зростати і призвести до результату, далекого від шуканого розв'язку. Для розв'язування некоректно поставлених задач використовують так звані методи регуляризації, які замінюють дану задачу коректно поставленою [1, 12].

1.4. Основні етапи розв'язання прикладних математичних задач

Метод математичного моделювання – ефективний засіб дослідження реальних об'єктів та явищ. Але з їх ускладненням ускладнюються й математичні моделі, розрахунки яких вимагають величезної обчислювальної роботи. Це стримувало використання моделей в науці й техніці, оскільки математичні задачі розв'язували вручну. Застосування швидкодіючих та потужних комп'ютерів для розв'язування складних прикладних задач сформувало новий спосіб проведення теоретичних досліджень на базі математичних моделей – *обчислювальний* (або математичний) *експеримент.* Його основою є математичне моделювання, теоретичною базою – прикладна математика, технічною – комп'ютер.

Поняття розв'язання задачі за допомогою комп'ютера містить в собі набагато більше ніж просто обчислення на комп'ютері. Обчислювальний експеримент складається з восьми основних етапів (рис. 1.1.)

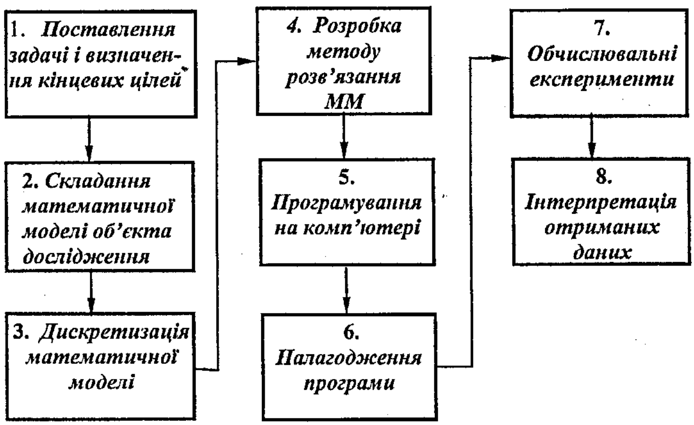


Рис.1.1. Технологічний ланцюг розв'язання прикладних математичних задач

1. *Поставлення задачі і визначення кінцевих цілей* – найважливіший етап розв'язання задачі. На ньому реалізується вибір загального підходу до розв'язання, визначаються основні критерії, яким повинна задовольняти розроблювана система і наводиться формальний математичний опис задачі. На цьому етапі необхідне глибоке поняття задачі.

2. *Складання математичної моделі об'єкта дослідження.* Для цього вивчають суть досліджуваного явища або процесу, з'ясовують його склад, закономірності, особливості і взаємозв'язки окремих його частин. Виділяють основні і другорядні фактори. Другорядними на початковому етапі досліджень нехтують, а основні – записують у вигляді математичних формул. Одночасно встановлюють межі застосування побудованої

моделі, оскільки жодна математична модель неадекватна реальності. У прикладних задачах побудова математичної моделі (ММ)– один з найскладніших і найвідповідальніших етапів обчислювального експерименту, оскільки вимагає поєднання математичних і спеціальних знань. Тому над її створенням працюють спільно математики і спеціалісти тієї галузі, до якої належить досліджуваний об'єкт.

Після побудови ММ приступають до її теоретичного аналізу: досліджують, чи коректно поставлено задачу, чи має вона розв'язок, єдиний він чи ні тощо. Часто розв'язувати складні прикладні задачі починають і без вичерпного аналізу їх математичних властивостей, оскільки для такого аналізу можна затратити час, який перевищує відведений для розв'язування прикладної задачі термін.

3. *Дискретизація ММ* – викликана конструктивними особливостями цифрових комп'ютерів, що мають обмежену розрядну сітку і пам'ять. Перехід від континуальної до дискретної ММ полягає у заміні функцій безперервного аргументу функціями дискретного аргументу. При цьому, наприклад, інтеграл змінюється кінцевою сумою, похідні – різницевим відношенням тощо. Внаслідок цього дістають систему з більшою кількістю рівнянь з більшою кількістю змінних.

4. *Розробка методу розв'язання ММ.* Як правило, прикладні задачі описуються моделями, розв'язання яких не можна знайти у вигляді аналітичних формул. Тоді з відомих чисельних методів вибирають найбільш ефективний або розробляють новий метод розв'язання моделі та записують у вигляді алгоритму. Оскільки для однієї задачі можна скласти, як правило, декілька алгоритмів слід визначити критерії оцінювання їх якості. Оцінюючи ефективність чисельного методу, враховують такі його якості, як універсальність, простота організації обчислень, контроль точності, швидкості збіжності та стійкості обчислювального процесу.

5. *Програмування на комп'ютері.* На цьому етапі складають програму для реалізації розробленого алгоритму або використовують стандартні пакети прикладних програм, що призначені для розв'язування певного класу математичних задач.

6. *Налагодження програми.* Тут виконують тестування програми з метою виявлення помилок. Для тестової задачі підбирають такі вхідні дані, які дозволять надійно судити про достовірність розвитку.

7. *Обчислювальні експерименти.* Використовуючи налагоджену програму виконують повномасштабні виробничі розрахунки на комп'ютері. Тут також передбачається дослідження поведінки об'єкта дослідження (ОД) в умовах, де натурні експерименти ще не проводились або зовсім неможливі.

8. *Інтерпретація отриманих даних.* Отримані результати розрахунків всебічно аналізуються, внаслідок цього або отримується повна відповідність для розв'язуваної задачі, або виявляються деякі особливості

поведінки ОД, що потребують нових комп'ютерних експериментів. При цьому часто виникає необхідність зміни у поставленні задачі, що приводить до повного повторення усіх вищевказаних етапів розв'язування задачі.

Таким чином результат будь–якого обчислювального експерименту складає триада: "*модель–метод–програма*". З розгляду ланцюга розв'язування задач на комп'ютері можна зробити такі висновки:

– комп'ютер сам задач не розв'язує, а лише виконує наперед задану послідовність обчислень;

– використання комп'ютера не звільняє дослідника від всебічного і скурпульозного осмислення своєї роботи та глибокого вивчення ОД.

1.5. Контрольні питання

1. Поясніть роль математичного моделювання на сучасному етапі розвитку суспільства.
2. Наведіть та коротко охарактеризуйте структуру похибки розв'язку задачі.
3. Наведіть і дайте стислу характеристику основних етапів розв'язання прикладних математичних задач.
4. Дайте означення поняття стійкості задачі. Наведіть відповідні приклади.
5. Дайте означення поняття коректності задачі. Наведіть приклади коректно та некоректно поставлених задач.
6. Наведіть та охарактеризуйте основні етапи розв'язання прикладних математичних задач.
7. Поясніть які з етапів розв'язання прикладних математичних задач можна виконувати на комп'ютері, а які потребують творчого підходу.

2. ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ ПОХИБОК

2.1. Джерела і класифікація похибок

Розв'язання більшості практичних задач з визначеним ступенем умовності можна представити у вигляді двох послідовних етапів [4]:

– математичний опис проблеми, що розглядається;

– розв'язання сформульованої математичної задачі.

На першому етапі зустрічаються два характерних джерела похибки. По–перше, реальні процеси не завжди можна описати математично, а спрощення, дозволяють отримати лише більш–менш ідеалізовані моделі. По–друге, вхідні параметри, отримані, як правило, з експерименту, неточні, що дозволяє отримати лише приблизний результат.

Згідно з цим сумарна похибка математичної моделі і початкових даних об'єднується у похибку вихідної інформації. Якщо мати на увазі незалежність цієї похибки від другого етапу розв'язання задачі, її часто називають *неусувною похибкою.*

Отримання точного розв'язку математичної задачі (другий етап) незалежно від того, чи будується воно вручну або на комп'ютері, як правило, неможливо. Так, наприклад, лише для дуже обмеженого класу диференціальних рівнянь можна отримати точний розв'язок. Тому в практичних розрахунках використовуються методи отримання наближених розв'язків – в першу чергу чисельних.

Така вимушена заміна точного розв'язку наближеним і породжує *похибку методу* або, як її часто називають, *похибку апроксимації.*

У процесі розв'язання задачі виконується округлення вхідних даних, проміжних і кінцевих результатів. Ці похибки, а також похибки, які з'являються в результаті виконання арифметичних операцій над наближеними числами, в тій чи іншій мірі переносяться на результат розв'язку і утворюють так звану *обчислювальну похибку* (або похибку округлення).

У зв'язку зі сказаним під час поставлення задачі або вказують потрібну точність розв'язку (тобто задають похибку, максимально допустиму в процесі усіх розрахунків), або лише обмежуються потребами підрахунку сумарної похибки результату. Тому при роботі з наближеними числами необхідно вміти розв'язувати такі задачі [4]:

– давати математичні характеристики точності наближених чисел;

– знаючи ступінь точності вихідних даних, оцінювати ступінь точності результату;

– вибирати вихідні дані з таким ступенем точності, щоб забезпечити задану точність результату;

– оптимальним чином будувати процес розв'язання, щоб не виконувати розрахунків, які не впливають на точні цифри результату.

2.2. Абсолютна та відносна похибки

Нехай A – точне число, а a – його приблизне значення. Якщо $a<A$, то кажуть, що число a є *наближеним значенням числа A з недостачею,* якщо $a>A$ – *наближеним значенням з надлишком.*

Різницю $A–a$ називають *помилкою* (або *похибкою*). Як правило, величину похибки $A–a$ і навіть її знак виявити неможливо, оскільки невідомо число A. Тому замість самої похибки використовується верхня межа її абсолютної величини.

Абсолютною похибкою наближеного числа a називається величина Δ_a, яка задовольняє нерівність

$$\Delta_a \geq |A-a|. \tag{2.1}$$

Абсолютна похибка – це верхня межа відхилення точного числа A від наближеного:

$$a-\Delta_a \leq A \leq a+\Delta_a. \tag{2.2}$$

Нерівність (2.2) часто записують так:

$$A = a \pm \Delta_a. \qquad (2.3)$$

Як абсолютну похибку приймають по можливості найменше число. Абсолютна похибка відображає лише кількісну сторону похибки, тобто не показує, добре чи погано виконані вимірювання або розрахунки. Для того, щоб оцінити якість виконаних розрахунків чи вимірювань, вводять поняття відносної похибки.

Відносною похибкою наближеного числа a називається величина δ_a, яка задовольняє нерівність

$$\delta_a \geq \left|(A - a)/a\right|, \; a \neq 0. \qquad (2.4)$$

Зокрема, в якості відносної похибки можна прийняти

$$\delta_a = \Delta_a / |a|, \; a \neq 0, \qquad (2.5)$$

а відношення (2.3) представити в вигляді

$$A = a \cdot \left(1 \pm \delta_a\right). \qquad (2.6)$$

2.3. Правильні значущі цифри

Під час розв'язування задач часто ставиться умова: отримати результат з точністю до 0,1; 0,001 тощо. Може скластись враження, що точність розрахунків визначається числом десяткових знаків після коми. Однак це неправильно. Точність розрахунків визначається числом цифр результату, які заслуговують довіри [4].

Значущими цифрами числа називаються всі його цифри, крім нулів, розташованих лівіше першої відмінної від нуля цифри. Нулі в кінці числа – завжди значущі цифри (в протилежному випадку їх не пишуть).

Приклад 1. Числа 0,001604 і 30,500 мають відповідно 4 і 5 значущих цифр.

При написанні цілих чисел можуть зустрічатися деякі точності. Так, якщо ми хочемо показати, що у числа 400 000 останніх три нуля незначущі, то дане число потрібно записати у вигляді двох співмножників: $400 \cdot 10^3$ або $40,0 \cdot 10^4$, або $0,400 \cdot 10^6$. Остання форма запису називається *нормалізованою* і є переважною. В цьому випадку говорять, що 400 є *мантиса* числа, а 6 – його *порядок*.

Нагадаємо, що кожне додатне число, може бути представлене у вигляді $a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots$.

Цифра α_n наближеного числа a називається *правильною значущою цифрою* (або просто *вірною*), якщо виконується нерівність

$$|A - a| \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1}, \qquad (2.7)$$

тобто, якщо абсолютна величина різниці $|A - a|$ не більше 1/2 десяткового розряду, в якому стоїть α_n.

Оскільки завжди замість $|A - a|$ розглядається абсолютна похибка Δ_a

то нерівність (2.7) часто записують так:

$$\Delta_a \le 0,5 \cdot 10^{m-n+1}, \qquad (2.8)$$

оскільки при виконанні цієї нерівності виконується і нерівність (2.7).

З іншого боку, якщо задано число n правильних знаків наближеного числа a, то за абсолютну похибку можна взяти

$$\Delta_a = 0,5 \cdot 10^{m-n+1} \qquad (2.9)$$

Якщо нерівність (2.8) не виконується, то цифра α_n – *сумнівна.* Якщо цифра α_n правильна – то всі попередні (зліва від неї) цифри – теж правильні.

Приклад 2. Число $a = 23,10$ отримано округленням деякого точного числа. Скільки правильних цифр містить число a?

При округленні чисел за правилом парної цифри абсолютна похибка не може перевищити половини одиниці останнього розряду, що залишаємо. Це означає, що у округленого числа, всі цифри, що залишилися, є правильними. В даному випадку, всі чотири цифри правильні, а похибка $\Delta_a = 0,005.$

Приклад 3. Число $a = 23,071937$ містить п'ять правильних цифр. Визначити його абсолютну похибку.

Скористаємося формулою (2.9). Тут m=1, n=5 отже, за абсолютну похибку можна прийняти $\Delta_a = 0,5 \cdot 10^{1-5+1} = 0,0005$.

Приклад 4. Абсолютна похибка числа a=705,1978 складає $\Delta_a = 0,3.$ Визначити, які цифри числа a є правильними і округлити число a, залишивши лише правильні цифри.

Скористаємося формулою (2.8). Тут m=2, $\Delta_a = 0,3$, а n визначають з нерівності $0,3 \le 0,5 \cdot 10^{3-n}$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що найбільше n, яке задовольняє цю нерівність, дорівнює 3 і цифра 5 є правильною: $0,3 < 0,5 \cdot 10^{2-3+1}$, а цифра 1 – сумнівною: $0,3 > 0,5 \cdot 10^{2-4+1}$.

Звідси випливає, що число a=705,1978 має три правильні цифри. Округляємо його до трьох цифр: a_1 =705. При цьому сумарна похибка дорівнює сумі вхідної похибки і похибки округлення: $\Delta_a = 0,3 + 0,2 = 0,5$, так що можна записати: $A = 705 \pm 0,5.$

В останній час частіше використовують поняття правильних значущих цифр в широкому розумінні. Це розуміння зв'язано з найпростішим правилом округлення.

Цифра α_n наближеного числа

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots$$

є *правильною значущою цифрою в широкому розумінні*, якщо виконується нерівність

$$\Delta_a \le 1 \cdot 10^{m-n+1}, \qquad (2.10)$$

тобто, якщо абсолютна похибка числа a не перевершує одиниці десяткового розряду, в якому розташовано α_n.

2.4. Похибки арифметичних операцій

Похибки суми і різниці. Розглянемо точні числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ і їх наближені значення $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Нехай $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ – сума всіх точних чисел; $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$ – сума їх наближених значень. Поставимо задачу: при відомих абсолютних похибках $\Delta_{a1}, \Delta_{a2}, \ldots, \Delta_{an}$ всіх наближених чисел оцінити абсолютну похибку їх суми a..

Запишемо різницю $A - a = (A_1 - a_1) + (A_2 - a_2) + \ldots + (A_n - a_n)$. Перейшовши до абсолютних величин правої і лівої частин цього відношення і використовуючи властивість абсолютних величин, отримаємо $|A - a| \le |A_1 - a_1| + |A_2 - a_2| + \ldots + |A_n - a_n|$. Відповідно,

$$|A - a| \le \Delta_{a1} + \Delta_{a2} + \ldots + \Delta_{an}. \qquad (2.11)$$

і як абсолютну похибку наближеного числа a, тобто суми наближених чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, можна прийняти суму абсолютних похибок доданків:

$$\Delta_a = \Delta_{a1} + \Delta_{a2} + \ldots + \Delta_{an}. \qquad (2.12)$$

З останньої формули випливає, що абсолютна похибка алгебраїчної суми, в загальному випадку, не повинна бути менше абсолютної похибки найбільш неточного з доданків. Тому, щоб не виконувати зайвих розрахунків, не потрібно зберігати зайві знаки і в точніших доданках.

Зауваження. При великій кількості доданків (n>10) оцінка абсолютної похибки суми за формулою (2.12) виявляється дуже завищеною, оскільки завжди виконується частинна компенсація похибок різних знаків. Якщо всі доданки округлені до m–го десяткового розряду, тобто їх похибки оцінюються величиною $0{,}5 \cdot 10^{-m}$, то статистична оцінка абсолютної похибки суми обчислюється за формулою

$$\Delta_a = \sqrt{n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-m}.$$

Зауважимо, що під час віднімання близьких чисел часто виникає стан, що називається *втратою точності* [4]. Нехай x>0, y>0 і $a = x - y$, тоді $\delta_a = \Delta_a / |a| = \Delta_x + \Delta_y / |x - y|$.

Таким чином, якщо числа x і y мало відрізняються одне від одного, то навіть при малих похибках Δ_x і Δ_y величина відносної похибки різниці може виявитись значною.

Приклад 1. Нехай x=5,125, y=5,135 тут Δ_x=0,0005, Δ_y=0,0005, $\delta_x \approx \delta_y \approx 0{,}01\%$. Відносна похибка різниці $a = x - y$ складає

$$\delta_a = (0{,}0005 + 0{,}0005) / 0{,}01 \cdot 100 = 10\%.$$

Очевидно, що в результаті ділення двох наближених чисел може виникнути значна втрата точності. Щоб цього не допустити, слід спробувати так перетворити обчислювальну схему, щоб малі різниці величин обраховувались безпосередньо.

Приклад 2. Знайти різницю $a = \sqrt{6,27} - \sqrt{6,26}$ та оцінити відносну похибку результату.

Нехай $a_1 = \sqrt{6,27} = 2,504$; $\Delta_{a_1} = 0,0005$; $a_2 = \sqrt{6,25} = 2,502$; $\Delta_{a_2} = 0,0005$. Тоді $a = 2,504 - 2,502 = 0,2 \cdot 10^{-2}$;

$\Delta_a = 0,005 + 0,0005 = 0,001$, звідки $\delta_a = \dfrac{0,1 \cdot 10^{-2}}{0,2 \cdot 10^{-2}} = 0,5 = 50\%$.

Однак, змінивши обчислювальну схему, можна отримати значно кращу оцінку відносної похибки:

$$a = \sqrt{6,27} - \sqrt{6,26} = \frac{(\sqrt{6,27} - \sqrt{6,26}) \cdot (\sqrt{6,27} + \sqrt{6,26})}{(\sqrt{6,27} + \sqrt{6,26})} =$$

$$= \frac{6,27 - 6,26}{\sqrt{6,27} + \sqrt{6,26}} = \frac{0,01}{\sqrt{6,27} + \sqrt{6,26}} \approx 0,2 \cdot 10^{-2}$$

$$\delta_a = \delta \cdot (\sqrt{6,27} + \sqrt{6,26}) = (\Delta_{a1} + \Delta_{a2})/(a_1 + a_2) = 0,001/5 = 0,02\%.$$

Таким чином, при обчисленні з тими ж чотирма вірними знаками a_1 і a_2 ми отримали значно кращий результат в розумінні відносної похибки.

Похибка добутку. Розглянемо два точних числа A_1 і A_2 та їх наближені значення a_1 і a_2. Нехай $A=A_1A_2$ і $a=a_1a_2$. Поставимо задачу: оцінити відносну похибку добутку δ_a, якщо відносні похибки чисел a_1 і a_2 дорівнюють δ_{a_1} і δ_{a_2} відповідно.

Представимо A_1 і A_2 у вигляді $A_1 = a_1 + \Delta_1$, $A_2 = a_2 + \Delta_2$, де невідомі Δ_1 і Δ_2 задовольняють нерівності

$$|\Delta_1| \le |a_1|\delta_{a_1}, \quad |\Delta_2| \le |a_2|\delta_{a_2}. \tag{2.13}$$

Перемноживши праві і ліві частини цих співвідношень, отримаємо $A_1A_2 = a_1a_2 + \Delta_1 a_2 + \Delta_2 a_1 + \Delta_1\Delta_2$. Перейшовши до абсолютних величин правої і лівої частин цього співвідношення і використовуючи властивості абсолютних величин, отримаємо $|A_1A_2 - a_1a_2| \le |\Delta_2 a_1| + |\Delta_1 a_2| + |\Delta_1\Delta_2|$.

Відкинемо останній доданок правої частини, оскільки, він дуже малий і поділимо праву і ліву частину нерівності на $|a| = |a_1a_2|$. Тоді, враховуючи (2.13), маємо $|(A - a)/a| \le \delta_{a_1} + \delta_{a_2}$.

З отриманого співвідношення випливає, що як відносну похибку добутку $a=a_1a_2$ можна прийняти суму відносних похибок співмножників:

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}. \tag{2.14}$$

Нерівність (2.14) легко поширюється на добуток декількох співмножників так, що якщо $A=A_1A_2..A_n$ і $a=a_1a_2..a_n$, то можна прийняти, що

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{an} \ldots \qquad (2.15)$$

В тому випадку, коли всі співмножники, крім одного, є точними числами, з формули (2.15) випливає, що відносна похибка добутку збігається з відносною похибкою наближеного співмножника. Таким чином, якщо наближеним числом є лише значення множника a_i, то

$$\delta_a = \delta_{ai}. \qquad (2.16)$$

Зауваження. При множенні наближеного числа a на точний співмножник k відносна похибка добутку дорівнює відносній похибці наближеного числа a, а абсолютна похибка у $|k|$ разів більше абсолютної похибки наближеного числа.

Число правильних знаків добутку. Нехай даний добуток має k співмножників ($k \le 10$) $a=a_1a_2..a_к$, де $a_i \ne 0$. Кожний із співмножників містить не менше ніж n правильних цифр ($n > 1$).

Нехай кожний із співмножників має вигляд

$$a_i = \alpha_i \cdot 10^{l_i} + \beta_i \cdot 10^{l_i - 1} + \gamma_i \cdot 10^{l_i - 2} + \ldots \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \qquad (2.17)$$

де α_i – перші значущі цифри наближених співмножників, записаних у десятковій системі числення.

Для відносної похибки наближеного числа, що має n правильних знаків, використовуємо формулу

$$\delta_{a_i} = 0{,}5/(\alpha_i \cdot 10^{n-1}) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

тоді відносна похибка добутку k наближених чисел, кожне з яких має n правильних значущих цифр, дорівнює

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_{1k}} = \frac{0.5}{10^{n-1}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_k}\right). \qquad (2.18)$$

Враховуючи, що число співмножників не більше 10 ($k \le 10$), отримаємо $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_k} \le 10$ і, отже, $\delta_a \le \frac{0{,}5}{10^{n-2}}$.

Таким чином, якщо всі співмножники мають n правильних значущих цифр і число співмножників не більше десяти, то число правильних знаків добутку на одну або дві одиниці менше ніж в n. У тому випадку, коли співмножники мають різну точність, під n варто розуміти число правильних знаків найменш точного із співмножників.

Зауваження. При великому числі співмножників $(k>10)$ зручно користуватися статистичною оцінкою, яка враховує часткову компенсацію похибки різних знаків. Якщо всі числа a_i ($i= 1,\ 2,\ \ldots,\ k$) мають приблизно однакову відносну похибку δ, то відносна похибка добутку приймається рівною [4]

$$\delta_a = \sqrt{n} \cdot \delta\ . \qquad (2.19)$$

Похибка частки. Розглянемо точні числа A_1, A_2 та їх наближені значення a_1, a_2 з абсолютними похибками Δ_{a_1}, Δ_{a_2}. Поставимо задачу: оцінити відносну похибку наближеного значення частки $a=a_1/a_2$ для точного значення $A=A_1/A_2$. Нехай $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Точні значення A_1 і A_2 представимо у вигляді

$$A_1 = a_1 + \Delta_1 \text{ , } A_2 = a_2 + \Delta_2, \tag{2.20}$$

де невідомі Δ_1 і Δ_2 задовольняють нерівностям

$$|\Delta_1| \leq \Delta_{a_1}, \ |\Delta_2| \leq \Delta_{a_2}. \tag{2.21}$$

Розглянемо тепер різницю $A - a = \dfrac{a_1 + \Delta_1}{a_2 + \Delta_2} - \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{a_2\Delta_1 - a_1\Delta_1}{a_2(a_2 + \Delta_2)}$. Поділивши праву і ліву частини на a, розглянемо їх абсолютні величини: $\left|\dfrac{A-a}{a}\right| = \left|\dfrac{a_2\Delta_1 - a_1\Delta_1}{a_2(a_2+\Delta_2)}\right| = \left|\dfrac{a_2}{a_2+\Delta_2}\right|\left|\dfrac{\Delta_1}{a_1} - \dfrac{\Delta_2}{a_2}\right|$. Враховуючи, що Δ_2 мале порівняно з a_2, наближено представимо, що $a_2/(a_2+\Delta_2) \approx 1$. Тоді, використовуючи властивості абсолютних величин і нерівність (2.21), отримаємо $\left|\dfrac{A-a}{a}\right| = \left|\dfrac{\Delta_1}{a_1} - \dfrac{\Delta_2}{a_2}\right| \leq \dfrac{\Delta_{a_1}}{|a_1|} + \dfrac{\Delta_{a_2}}{|a_2|} = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}$.

Таким чином, за відносну похибку частки $a = a_1 / a_2$ можна прийняти суму відносних похибок діленого і дільника:

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}. \tag{2.22}$$

Число правильних знаків частки. Нехай наближені числа

$$a_1 = \alpha_1 \cdot 10^{l_1} + \alpha_2 \cdot 10^{l_1 - 1} + \ldots; \ a_1 = \beta_1 \cdot 10^{l_1} + \beta_2 \cdot 10^{l_1-1} + \ldots$$

мають по n правильних значущих цифр. Тоді, використовуючи рівності $\delta_{a_1} = \dfrac{0,5}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}}$ $\delta_{a_2} = \dfrac{0,5}{\beta_1 \cdot 10^{n-1}}$, знайдемо відносну похибку частки $a = \dfrac{a_1}{a_2}$:

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} = \frac{0,5}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}} + \frac{0,5}{\beta_1 \cdot 10^{n-1}} = \frac{0,5}{10^{n-1}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right). \tag{2.23}$$

Відповідно, якщо $\alpha_1 \geq 2$ і $\beta_1 \geq 2$, то частка має $n-1$ правильну значущу цифру. Якщо ж $\alpha_1 = 1$ і $\beta_1 = 1$, то частка може мати $n-2$ правильних значущих цифр.

Похибки степеня і кореня. Розглянемо наближене число a_1, яке має відносну похибку δ_{a_1}. Нехай треба оцінити похибку степеня $a = a_1^m$. Очевидно, що $a = a_1^m = \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{m-добутків}$. Отже, відносна похибка добутку може бути знайдена за формулою

$$\delta_a = \underbrace{\delta_{a_1} + \delta_{a_1} + \ldots + \delta_{a_1}}_{m-доданків} = m\delta_{a_1} \qquad (2.24)$$

В практичних розрахунках при піднесенні до степеня наближеного числа в результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх містило наближене число.

Відносна похибка числа $a = \sqrt[m]{a_1}$ в m разів менша за відносну похибку числа a_1: $\delta_a = (1/m)\cdot\delta_{a_1}$.

В практичних розрахунках під час обчислення кореня з наближеного числа в результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх містило наближене число.

2.5. Графи обчислювальних процесів

Для оцінювання загальної похибки обчислень деякої послідовності арифметичних операцій існує досить зручний спосіб обчислення похибок, заснований на графі обчислювального процесу [15].

Граф обчислювального процесу дозволяє наочно зобразити послідовність арифметичних операцій у деякому обчисленні. З його допомогою легко визначити внесок будь–якої похибки, що виникла в процесі обчислень, у загальну похибку.

Нехай вершини графу є змінні або арифметичні операції. Дуги графу вказують напрямок обчислень і вони позначені коефіцієнтами, що оцінюють поширення помилок.

Граф обчислювального процесу будується для аналізу процесу поширення відносних похибок в арифметичних виразах. Його слід читати знизу вгору в напрямку дуг графу. Спочатку виконуються операції, розташовані на будь–якому горизонтальному рівні, потім операції розташовані на більш високому рівні, і т.д. На рис. 2.1. представлені графи обчислювальних процесів основних арифметичних операцій.

Правило підрахунку загальної похибки з використанням графу обчислювального процесу таке: відносна похибка результату будь–якої операції входить в результат наступної операції, збільшуючись на коефіцієнт у стрілки, що з'єднує ці дві операції.

Як приклад розглянемо вираз $u = (x+y)\cdot z$, і задачу оцінки загальної похибки результату з урахуванням похибок округлення арифметичних операцій. Припустимо, що $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – відносні похибки округлення чисел x, y, z, при їх представленні в комп'ютері, а r_+ і r^* – відносні похибки округлення відповідно операцій додавання і множення.

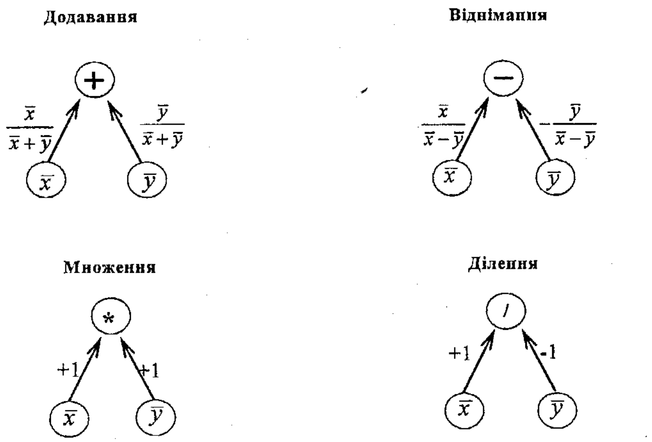


Рис. 2.1. Графи обчислювальних процесів основних арифметичних операцій

Для нашого виразу, з огляду на послідовність операцій, граф обчислювального процесу буде мати вигляд, представлений на рис. 2.2.

Спочатку розглянемо операцію додавання (II рівень). Операція додавання використовує числа x і y, задані з відносними похибками δ_x і δ_y. Кожна з похибок входить у результат помноженою на відповідні коефіцієнти $\frac{x}{x+y}$ і $\frac{y}{x+y}$, тоді похибку операції додавання можна оцінити величиною $\frac{x}{x+y}\cdot\delta_x + \frac{y}{x+y}\cdot\delta_y$, до якої слід додати похибку округлення, тобто відносна похибка операції додавання буде виглядати

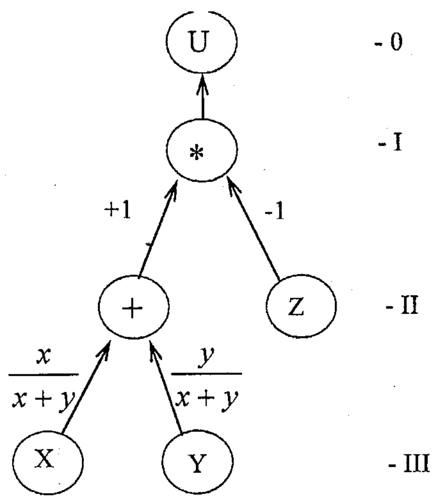


Рис. 1.3. Граф обчислювального процесу для виразу $u = (x + y)z$

$$\frac{x}{x+y}\cdot\delta_x + \frac{y}{x+y}\cdot\delta_y + r_+ .$$

Вхідні дані (числа та їх похибки) беруть участь ще в одній операції – множення (I рівень графа), куди вони передаються помножуючись на коефіцієнти +1 і +1, тоді, з урахуванням похибки округлення, маємо

$$\delta_u = +1\left(\frac{x}{x+y}\cdot\delta_x + \frac{y}{x+y}\cdot\delta_y + r_+\right) + 1\cdot\delta_z + r^*.$$

Простішим способом складання формули оцінки кінцевої похибки, є рух від кореня графу до його віток (метод зверху вниз). Така послідовність формул ілюструє ідею цього методу: $\delta_u = +1(\quad) + 1\cdot\delta_z + r^*$.

$$\delta_u = \left(\frac{x}{x+y}\cdot\delta_x + \frac{y}{x+y}\cdot\delta_y + r_+\right) + \delta_z + r^*. \qquad (2.25)$$

Оскільки природа похибок округлення і представлення чисел в комп'ютері одна – обмеженість її розрядної сітки, то для відносних похибок можна покласти $\delta_x = \delta_y = \delta_z = r^* = r_+ = \delta$. Тоді формулу (2.25) можна спростити:

$$\delta_u = \delta\left[\left(\left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| + 1\right) + 1 + 1\right] = \left|_{\text{При } x>0 \text{ та } y>0} \left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| \le 1\right| \le 4\delta \qquad (2.26)$$

Величина відносної похибки округлення методом «відкидання» молодших розрядів можна оцінити $\delta \le 10^{-t+1}$ (t – розрядність розмірної сітки комп'ютера), тоді $|\delta_u| \le 4\cdot 10^{-t+1}$.

2.6. Контрольні питання

1. Наведіть основні джерела і класифікацію похибок під час розв'язання практичних задач.
2. Дайте визначення абсолютної похибки.
3. Яку похибку називають відносною?
4. Які цифри числа називають значущими та вірними значущими? Наведіть приклад.
5. Наведіть та обґрунтуйте рівняння визначення похибок суми та різниці.
6. Наведіть та обґрунтуйте рівняння похибки добутку. Як визначити число вірних знаків добутку?
7. Наведіть та обґрунтуйте рівняння похибки частки. Визначте число вірних знаків частки.
8. Наведіть рівняння обчислення похибок степеня і кореня.
9. Поясніть, з якою метою застосовують графи обчислювальних процесів.
10. Наведіть графи обчислювальних процесів основних арифметичних операцій.
11. Наведіть граф довільного обчислювального процесу і обрахуйте загальну похибку результату.

2.7. Завдання

Задача 2.1. Дано ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (таблиця 2.1). Знайти суму ряду аналітично.

Обчислити значення часткових сум ряду $S(N)=\sum_{n=0}^{N} a_n$ і знайти значення похибок при N= 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6.

Таблиця 2.1

Варіант	a_n	Варіант	a_n	Варіант	a_n
1.	$\frac{2}{n^2+5n+6}$	11.	$\frac{60}{11(n^2+12n+35)}$	21.	$\frac{24}{7(n^2+8n+15)}$
2.	$\frac{36}{11(n^2+5n+4)}$	12.	$\frac{144}{5(n^2+6n+8)}$	22.	$\frac{36}{n^2+5n+4}$
3.	$\frac{9}{n^2+7n+12}$	13.	$\frac{36}{n^2+7n+10}$	23.	$\frac{46}{n^2+5n+6}$
4.	$\frac{48}{5(n^2+6n+8)}$	14.	$\frac{48}{n^2+8n+15}$	24.	$\frac{96}{n^2+9n+20}$
5.	$\frac{48}{5(n^2+6n+5)}$	15.	$\frac{20}{n^2+4n+3}$	25.	$\frac{60}{n^2+6n+8}$
6.	$\frac{72}{5(n^2+6n+8)}$	16.	$\frac{32}{n^2+5n+6}$	26.	$\frac{72}{n^2+7n+10}$
7.	$\frac{24}{n^2+8n+15}$	17.	$\frac{144}{n^2+18n+80}$	27.	$\frac{24}{n^2+4n+3}$
8.	$\frac{32}{n^2+9n+20}$	18.	$\frac{24}{n^2+4n+3}$	28.	$\frac{96}{n^2+8n+15}$
9.	$\frac{216}{7(n^2+8n+15)}$	19.	$\frac{180}{n^2+20n+99}$	29.	$\frac{72}{n^2+6n+8}$
10.	$\frac{84}{13(n^2+14n+48)}$	20.	$\frac{112}{15(n^2+16n+63)}$	30.	$\frac{12}{5(n^2+6n+8)}$

Порядок розв'язання задачі

1. Знайти суму ряду S аналітично як межу часткових сум ряду.
2. Використовуючи функцію $S(N)=\sum_{n=0}^{N} a_n$, обчислити значення часткових сум ряду при вказаних значеннях N.
3. Для кожного N обчислити величину абсолютної похибки $|S(N)-S|$ і

визначити кількість правильних цифр в $S(N)$.

4. Представити результати у вигляді гістограми.

Задача 2.2. Обчислити значення машинних нуля та нескінченності у режимах одинарної, подвійної і розширеної точності.

Задача 2.3. Дано квадратне рівняння $x^2 + bx + c = 0$. Передбачається, що один з коефіцієнтів рівняння (в індивідуальному варіанті в таблиці 2.2 позначений *) отриманий в результаті округлення. Зробити оцінювання похибок коренів в залежності від похибки коефіцієнта. Обчислити корені рівняння при декількох різних значеннях коефіцієнта в межах заданої точності. Порівняти отримані результати.

Таблиця 2.2

Варіант	Коефіцієнти	Варіант	Коефіцієнти	Варіант	Коефіцієнти
1.	b* = –39,6 c = –716,85	2.	b = 27,4 c* = 187,65	3.	b* = 37,4 c = 187,65
4.	b = –30,9 c* = 238,7	5.	b* = –3,29 c = 2,706	6.	b = –3,29 c* = 2,706
7.	b* = –39,6 c = –716,85	8.	b = 27,4 c* = 187,65	9.	b* = 37,4 c = 187,65
10.	b = –30,9 c* = 238,7	11.	b* = –3,29 c = 2,706	12.	b = –3,29 c* = 2,706
13.	b* = –39,6 c = –716,85	14.	b = 27,4 c* = 187,65	15.	b* = 37,4 c = 187,65
16.	b = –30,9 c* = 238,7	17.	b* = –3,29 c = 2,706	18.	b = –3,29 c* = 2,706
19.	b* = –39,6 c = –716,85	20.	b = 27,4 c* = 187,65	21.	b* = 37,4 c = 187,65
22.	b = –30,9 c* = 238,7	23.	b* = –3,29 c = 2,706	24.	b = –3,29 c* = 2,706
25.	b* = –39,6 c = –716,85	26.	b = 27,4 c* = 187,65	27.	b* = 37,4 c = 187,65
28.	b = –30,9 c* = 238,7	29.	b* = –3,29 c = 2,706	30.	b = –3,29 c* = 2,706

Задача 2.4. Скласти програму, що моделює обчислення на комп'ютері з обмеженою розрядністю *m*. Розв'язати задачу 1.1 для випадку N=10000, використовуючи цю програму. Скласти графік залежності похибки від кількості розрядів *m*=4,5,...8.

3. АЛГЕБРА МАТРИЦЬ

3.1. Визначник матриці, властивості визначника і правила його обчислення

Нехай А – довільна квадратна матриця порядку n: $A\begin{bmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\;\ldots\ldots \\ a_{n1}\,a_{n2}\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$.

З матрицею А зв'язаний визначник (детермінант), який позначається d,

$D, \det A$ *або* $|A|$ [4]: $d = D = \det A = |A| = A\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$.

Визначник матриці є число, яке обчислюється за деякими правилами, які будуть розглянуті пізніше.

У визначнику розрізняють дві діагоналі: головну і допоміжну. *Головна діагональ* так, як і в квадратній матриці, складається з елементів a_{ii}, де i=1,2, ..., n; а *допоміжна* – проходить перпендикулярно до головної із верхнього правого кута визначника в нижній лівий. Порядок визначника відповідає порядку матриці, визначником якої він є.

Якщо порядок матриці дорівнює одиниці, то визначником першого порядку, що відповідає цій матриці, називається число рівне цьому елементу.

Нехай дано квадратну матрицю другого порядку:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{bmatrix}. \qquad (3.1)$$

Визначником другого порядку, що відповідає цій матриці, називається число:

$$\det \mathrm{A} = A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (3.2)$$

Визначником третього порядку називається число

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Розглянемо тепер визначник будь–якого порядку n де $n \geq 2$. Для обчислення такого визначника необхідно ввести поняття мінора і алгебраїчного доповнення.

Мінором елементу a_{ij} визначника n–го порядку (3.1) називається визначник (n–1)–го порядку, отриманий із початкового викреслювання і–го рядка і j–го стовпця.

Мінор елемента a_{ij} позначається M_{ij}. Тут перший індекс означає номер рядка, другий – номер стовпця, які викреслюються. Наприклад, у визначнику третього порядку $d=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{bmatrix}$ мінором елемента a_{12} є визначник третього порядку $M_{ij}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням елементу a_{ij} визначника n–го порядку (3.1) називається число $A_{ij} = (-1)^{i+1} M_{ij}$.

Теорема 1. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка (стовпця) на відповідне алгебраїчне доповнення:*

$$det\, A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{bmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad (3.4)$$

$(i = 1, 2, 3 \ldots, n)$

або

$$det\, A = a_{1j}A_{j1} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1,2,3\ldots,n). \qquad (3.5)$$

Формула (3.4) називається розкладанням визначника за елементами і–го рядка, а формула (3.5) – за елементами j–го стовпця.

Теорема 2 (наслідок теореми 1). *Якщо всі елементи і–го рядка (стовпця) визначника d, крім одного, наприклад a_{ik}, дорівнюють нулю, то визначник в такому випадку дорівнює добутку елементу a_{ik} на його алгебраїчне доповнення:*

$$d = a_{ik}A_{ik}. \qquad (3.6)$$

Теорема 3. *Сума добутків елементів будь–якого рядка або стовпця визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного рядка (або стовпця) дорівнює нулю.*

Перерахуємо властивості визначника [4].

1. *Визначник не змінюється при транспонуванні:*

$$det\ A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{21}\ldots a_{n1} \\ a_{12}a_{22}\ldots a_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}a_{2n}\ldots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Це означає, що рядки і стовпці визначника рівноправні, а також те, *що визначник матриці А дорівнює визначнику транспонованої матриці* A^T.

2. *Якщо один з рядків або стовпців визначника складається з нулів, то визначник дорівнює нулю.*

3. *При перестановці двох рядків або двох стовпців визначник змінює тільки знак.*

4. *Визначник, що містить два однакових рядка або два однакових стовпця, дорівнює нулю.*

5. *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника помножити на число $k \neq 0$, то і визначник помножиться на це число.* Інакше цю властивість можна сформулювати так: *загальний множник всіх елементів деякого рядка або стовпця можна винести за знак визначника.*

6. *Визначник, який містить два пропорційних рядка є нульовим.*

7. *Якщо всі елементи і–го рядка визначника n–го порядку представлені у вигляді суми двох доданків:* $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij},\ j = 1,2,3,\ldots,n$, *то даний визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких всі рядки, крім і–го, такі ж, як і в заданому визначнику, а і–ий рядок в одному з доданків складається з елементів* b_{ij}, *а в другому – із елементів* c_{ij}.

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} = b_{21} + c_{21} & a_{22} = b_{22} + c_{22} & a_{23} = b_{23} + c_{23} & a_{2n} = b_{2n} + c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. *Якщо один з двох рядків визначника є сумою будь–яких інших рядків або сумою добутків будь–яких інших рядків визначника на число k, то визначник дорівнює нулю.* (Це випливає з властивостей 6 і 7 визначника).

9. *Визначник не зміниться, якщо до елементів одного з його рядків (стовпців) добавити відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне й те ж число.*

Приклад. Обчислити визначник $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ за допомогою елементарних перетворень.

Використовуючи елементарні перетворення визначника, перетворимо в нулі всі елементи 1–го рядка, крім $a_{11} = 1$. Для цього, залишивши 1–й стовпець без змін, помножимо всі його елементи на (–1) і додамо послідовно до 2, 3, 4–го стовпця. Отримаємо

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 12 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix}.$$

В отриманому визначнику третього порядку також обернемо в нулі всі елементи 3–го рядка, крім першого. Для цього, залишивши 1–й стовпець без змін, помножимо його послідовно на (–7), (–17) і додамо відповідно до другого і третього стовпця; отриманий визначник розкладемо за елементами 3–го рядка:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & -17 & -46 \\ 5 & -27 & -73 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -17 & -46 \\ -27 & -73 \end{vmatrix} = -1.$$

3.2. Обернена матриця

Квадратна матриця є *оберненою* по відношенню до даної квадратної матриці, якщо її множення як справа, так і зліва на дану матрицю дає одиничну матрицю [4]. Для матриці A обернена матриця позначається A^{-1}. Згідно з визначенням

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \,. \tag{3.7}$$

Квадратна матриця є *неособливою* (або *невиродженою*), якщо її визначник не дорівнює нулю. Інакше матриця *особлива (вироджена).*

Теорема. *Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену, необхідно і достатньо, щоб матриця A була неособливою.*

Знаходження оберненої матриці називається *оберненням* даної матриці. Розглянемо процес перетворення матриці. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

неособлива квадратна матриця порядку *n*, визначник якої не дорівнює нулю. Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень елементів даної матриці і потім транспонуємо її. Отримана матриця називається *союзною (чи приєднаною)* по відношенню до матриці A і позначається $\tilde{A}$.

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (3.9)$$

обчислюючи добутки $\tilde{A} \cdot A$ і $A \cdot \tilde{A}$, отримаємо

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \mathrm{d}E. \qquad (3.10)$$

Доведемо справедливість рівняння (3.10) на прикладі матриці третього порядку. $A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{bmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11}A_{12}A_{13} \\ A_{21}A_{22}A_{23} \\ A_{31}A_{32}A_{33} \end{bmatrix}$.

Тоді

$$A \cdot \tilde{A} = A \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + \\ + a_{13}A_{13} & + a_{13}A_{23} & + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + \\ + a_{23}A_{13} & + a_{23}A_{23} & + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{23} + & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + \\ + a_{33}A_{13} & + a_{23}A_{23} & + a_{33}A_{33} \end{bmatrix}$$

Відповідно до теореми 3 (підрозділ 3.1), всі елементи добутку $A \cdot \tilde{A}$, крім діагональних, дорівнюють нулю. Відповідно

$$A\tilde{A} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = dE.$$

Аналогічно можна показати, що $\tilde{A} \cdot A = dE$. Оскільки $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A$, причому $d \neq 0$, то $A(\tilde{A}/d) = (\tilde{A}/d)A = E$. З іншого боку, за визначенням оберненої матриці маємо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Зіставляючи ці рівності, отримуємо формулу для знаходження оберненої матриці: $A^{-1} = \tilde{A} / d = \begin{bmatrix} A_{11}/d & A_{21}/d & A_{31}/d \\ A_{12}/d & A_{22}/d & A_{32}/d \\ A_{13}/d & A_{23}/d & A_{33}/d \end{bmatrix}$.

В загальному вигляді для квадратної неособливої матриці n–го порядку обернена матриця обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}/d & A_{21}/d & \dots & A_{n1}/d \\ A_{12}/d & A_{22}/d & \dots & A_{n2}/d \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{13}/d & A_{23}/d & \dots & A_{33}/d \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

елементи вихідної і оберненої матриці пов'язані співвідношенням $a^{-1}_{ij} = A_{ij} / d$.

Приклад. Знайти обернену матрицю A^{-1} для матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

1) Знайдемо визначник даної матриці А: $d = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = -1$

Оскільки $d \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує.

2) Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці А:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2; \; A_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3; \; A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \; A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2; \; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

3) Складаємо союзну матрицю $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

4) Обчислюємо обернену матрицю $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{d} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Перевірка: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Якщо порядок матриці А невеликий, то вказаний метод обернення матриці потребує складної обчислювальної роботи. Існують інші методи обернення матриці, які ми розглянемо нижче.

Насамкінець зазначимо, що знаходження оберненої матриці A^{-1} має виключно важливе значення для розв'язування систем лінійних рівнянь.

3.3. Трикутні матриці

Розкладання матриці на добуток двох трикутних матриць

Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо елементи, розташовані вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. Якщо дорівнюють нулю елементи, що розміщені вище головної діагоналі, то матриця називається *нижньою трикутною*; наприклад, така матриця $T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$. Якщо ж дорівнюють нулю елементи, що розміщені нижче головної діагоналі, то матриця називається верхньою трикутною; наприклад, така матриця $T_2 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{13} & \ldots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & r_{nn} \end{bmatrix}$.

Визначник трикутної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів. Якщо $T = [t_{ij}]$ трикутна матриця, то $\det T = t_{11}t_{12}\ldots t_{nn}$.

Обернена матриця неособливої трикутної матриці є також трикутна матриця того ж розміру і структури.

Якщо квадратна матриця $A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$ має ненульові діагональні мінори (так називаються мінори визначника матриці, у яких на головних діагоналях стоять діагональні елементи матриці), іншими словами $a_{11} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, $\ldots$, $\det A \neq 0$, то її можна розкласти на добуток двох трикутних матриць (верхньої і нижньої). Це розкладання єдине, якщо діагональним елементам однієї із трикутної матриць наперед надати ненульове значення (наприклад, одиничне).

Нехай $A=CB$, де C – нижня трикутна матриця, а B – верхня трикутна матриця з діагональними елементами, що дорівнюють 1.

На прикладі матриці четвертого порядку отримаємо формули, що виражають залежність між елементами матриць A, B і C:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & a_{33} & 0 \\ c_{14} & c_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ 0 & 1 & b_{32} & b_{42} \\ 0 & 0 & 1 & b_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Виконаємо множення і порівняємо отримані елементи матриці CB відповідним елементам матриці A:

$$c_{11} = a_{11}, \tag{1}$$

$$c_{21} = a_{21}, \tag{2}$$

$$c_{31} = a_{31}, \tag{3}$$

$$c_{41} = a_{41}, \tag{4}$$

$$c_{11}b_{12} = a_{12}, \tag{5}$$

$$c_{21}b_{12} + c_{22} = a_{22}, \tag{6}$$

$$c_{31}b_{12} + c_{32} = a_{32}, \tag{7}$$

$$c_{41}b_{12} + c_{42} = a_{42}, \tag{8}$$

$$c_{11}b_{13} = a_{13}, \tag{9}$$

$$c_{21}b_{13} + c_{22}b_{23} = a_{32}, \tag{10}$$

$$c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + c_{33} = a_{32}, \tag{11}$$

$$c_{41}b_{13} + c_{42}b_{23} + c_{43} = a_{42}, \tag{12}$$

$$c_{11}b_{14} = a_{14}, \tag{13}$$

$$c_{21}b_{14} + c_{22}b_{24} = a_{24}, \tag{14}$$

$$c_{31}b_{14} + c_{32}b_{24} + c_{33}b_{34} = a_{34}, \tag{15}$$

$$c_{41}b_{14} + c_{42}b_{24} + c_{43}b_{34} = a_{44}. \tag{16}$$

З рівнянь (1) – (16) знаходимо елементи b_{ij} і $c_{ij}(i=1,2,3,4; j=1,2,3,4)$ трикутних матриць B і C в такому порядку:

I. 1–й стовпець матриці C [формули (1)– (4)]: $c_{i1} = a_{i1}, i = 1,2,3,4.$

II. 1–й рядок матриці B [формули (5), (9), (13)]: $b_{i1} = a_{1j} / c_{11}, j = 2,3,4.$

III. 2–й стовпець матриці C [формули (6),(7),(8)]: $c_{i2} = a_{i2} - c_{i1}b_{12}, i = 2,3,4.$

IV. 2–й рядок матриці B [формули (10), (14)]:
$b_{2j} = (a_{2j} - c_{21}c_{1j}) / c_{22}, j = 3,4.$

V. 3–й стовпець матриці C [формули (11),(12)]:
$c_{i23} = a_{i3} - c_{i1}b_{13} - c_{i3}b_{23}, i = 3,4.$

VI. 3–й рядок матриці B [формула (15)]: $b_{34} = (a_{34} - c_{31}b_{14} - c_{32}b_{24}) / c_{33}.$

VII. 4–й стовпець матриці C [формула (16)]:

$$c_{44} = a_{44} - c_{41}b_{41} - c_{42}b_{24} - c_{43}b_{34}.$$

Тут римські цифри вказують послідовність, в якій повинні визначатися елементи b_{ij}, c_{ij}. При даному розкладанні спочатку обчислюють значення стовпців, а потім рядків.

Аналогічно можна розкласти на добуток двох трикутних квадратну матрицю будь–якого порядку n. Вище ми вказали правило перетворення матриці на добуток двох трикутних для випадку $b_{ii} = 0$. Якщо ж $c_{ii} = 1$, то в першу ж чергу потрібно обчислити елементи рядків матриці B за формулами

$$b_{ii} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} b_{kj} \quad (i \le j), \tag{3.12}$$

а потім елементи стовпців матриці C за формулами

$$c_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{b_{ii}}^{i-1} c_{ik} b_{kj} \right) \Big/ b_{ii} \quad (i > j). \tag{3.13}$$

Матриця A була представлена в вигляді добутку BC двох трикутних матриць, де C – нижня, B – верхня трикутна матриця. Але такий порядок співмножників не є обов'язковим, таким чином можна представити матрицю A в вигляді добутку BC і отримати аналогічні формули для елементів трикутної матриці B і C.

3.4. Обернення матриць за допомогою розбиття її на клітини

Для знаходження оберненої матриці можна використовувати метод розбиття на клітини. Нехай $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ клітинна неособлива матриця n–го порядку, в якій A_{11} і A_{22} – квадратні клітини порядків p і q (де $p+q=n$). Необхідно знайти обернену матрицю $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ у якій B_{11} і B_{22} – квадратні матриці також порядків p і q.

Відповідно визначенню оберненої матриці $AA^{-1} = E_n$. В даному випадку одинична матриця також буде розбита на клітини аналогічно, іншими словами $E_n = \begin{bmatrix} E_p & 0 \\ 0 & E_p \end{bmatrix}$, де E_n і E_p – одиничні матриці відповідно порядків p і q. Тоді $AA^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p & 0 \\ 0 & E_p \end{bmatrix}$, звідки після множення отримаємо чотири матричних рівняння:

$$\begin{cases} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = E_p \\ B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} = 0 \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = E_q \end{cases} \qquad (3.13)$$

Для того, щоб знайти клітини матриці A^{-1}, потрібно розв'язати систему матричних рівнянь (3.13). Для цього використаємо спосіб виключення невідомих. Помножимо справа перше рівняння системи (3.13) на $A^{-1}{}_{11}A_{12}$ і віднімемо від результату множення друге рівняння цієї системи; отримаємо $B_{12}(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}) = B_{11}^{-1}A_{12}$. Звідси знаходимо

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1};\ B_{11} = A_{11}^{-1}B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}.$$

Аналогічно, з третього і четвертого рівняння системи (3.13) знаходимо $B_{12} = A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$; $B_{11} = A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}$. Це можливо при умові, що відповідні операції мають смисл.

Введемо такі значення:

$$X = A_{11}^{-1}A_{12};\ Y = A_{21}A_{11}^{-1};\ \theta = A_{22} - A_{21}X = A_{22} - YA_{12},$$

тоді формули для клітин матриці A^{-1} можна записати у вигляді:

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + X\theta Y; B_{12} = -X\theta^{-1};\ B_{21} = -\theta^{-1}Y; B_{22} = \theta^{-1}. \qquad (3.14)$$

Формули (3.14) справедливі при умові, що A^{-1} і θ^{-1} існують. Обчислення зручно розмістити в вигляді такої схеми:

	A_{21}	A_{22}
$X = A^{-1}{}_{11}A_{12}$	$A^{-1}{}_{11}$	A_{12}
θ^{-1}	$Y = A^{-1}{}_{11}A_{21}$	$\theta = A_{22} - YA_{12}$

Обернена матриця має вигляд $A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1}{}_{11} + X\theta^{-1}Y & -X\theta^{-1} \\ \hline -\theta^{-1}Y & \theta^{-1} \end{array}\right]$.

Приклад. За допомогою розбиття на клітини обернути матрицю

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Позначимо $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Виконуємо необхідні обчислення: $\det A_{11} = 2; A_{11}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$$X = A_{11}^{-1}A_{12} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix};$$

$$Y = A_{11}^{-1}A_{21} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\theta = A_{22} - YA_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ -3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$det\,\theta = -15; \theta^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Запишемо початкові дані і результати обчислень в таблицю

	$A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
$\theta^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\theta = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

Далі, маємо

$$X\theta^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} * \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix};$$

$$X\theta^{-1}Y = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -30 & 10 \\ -30 & -10 \end{bmatrix};$$

$$\theta^{-1}Y = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -6 & 6 \end{bmatrix};$$

$$X\theta^{-1}Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} * \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -30 & 10 \\ -30 & -10 \end{bmatrix}.$$

Для контролю добуток $X\theta^{-1}Y$ було обчислено двома способами. $X\theta^{-1}Y = (X\theta^{-1}Y)$ і $X\theta^{-1}Y = X(\theta^{-1}Y)$.

Кінцевий результат

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1}{}_{11} + X\theta^{-1}Y & -X\theta^{-1} \\ -\theta^{-1}Y & \theta^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -15 & 5 \end{bmatrix} & \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} & \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 & -10 \\ -15 & 5 & 5 & 10 \\ 6 & 14 & 2 & -14 \\ 12 & -12 & 6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Особливим випадком даного метода обернення клітинних матриць є метод послідовного каймування.

Нехай дана квадратна неособлива матриця A n–го порядку, для якої необхідно знайти обернену матрицю A^{-1}.

Складемо послідовність матриць:

$$A=[a_{11}];\ A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};\ A_3=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} & a_{13} \\ A_2 & a_{23} \\ \hline a_{31}a_{32} & a_{33} \end{array}\right];$$

$$A_4=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} & a_{14} \\ A_3 & a_{23} \\ & a_{34} \\ \hline a_{41}a_{42}a_{43} & a_{44} \end{array}\right];\ A_2^{-1}=B_2=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

$$A^{-1}{}_3=C_3=\left[\begin{array}{c|c} & c_{13} \\ C_2 & c_{23} \\ \hline c_{31}c_{32} & c_{33} \end{array}\right];\ A^{-1}{}_4=D_4=\left[\begin{array}{c|c} & d_{14} \\ D_3 & d_{24} \\ & d_{34} \\ \hline d_{42}d_{42}d_{43} & d_{44} \end{array}\right] \text{ і т.д.}$$

Кожна наступна матриця отримана з попередньої окаймуванням.

Обернена до другої з цих матриць $A^{-1}{}_2=B_2$ знаходиться безпосередньо: $A^{-1}{}_2=B_2=\begin{bmatrix} a_{22}/|A_2| & -a_{12}/|A_2| \\ -a_{21}/|A_2| & a_{11}/|A_2| \end{bmatrix}$,

де $|A_2|=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

За допомогою матриці A_2^{-1}, використавши до A_3 приведену вище схему обчислення, можна отримати A_3^{-1}, а потім за допомогою A_3^{-1} аналогічно отримати A_4^{-1} і т.д., насамкінець знайти $A_n^{-1}=A^{-1}$.

Приклад 2. Методом послідовного окаймування обернути матрицю

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Маємо 1) $A_2=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}; det\,A_2=-9+8=-1;\ A_2^{-1}=B_2=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}.$

2) Схема обчислень $A_3^{-1}=C_3$ має такий вигляд:

	$[a_{31}a_{32}]$	a_{33}
X	A_2^{-1}	$\begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\end{bmatrix}$
θ^{-1}	Y	θ

Виконуємо обчислення:

$$X=A_2^{-1}\begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\ 7\end{bmatrix};$$

$$Y=\begin{bmatrix}a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}A_2^{-1}=[3-5]\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 3\end{bmatrix};$$

$$\theta=a_{33}-Y\begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\end{bmatrix}=-1-\begin{bmatrix}-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}=-1+2=1;$$

$$\theta^{-1}=1; X\theta^{-1}=\begin{bmatrix}11\\ 7\end{bmatrix}\cdot 1\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11 & 33\\ -7 & 21\end{bmatrix}.$$

Заповнюємо схему

	3	–5	–1
11	2	–4	5
7	3	–3	1
1	–1	3	1

Елементи оберненої матриці $A_3^{-1}=C_3$ отримуємо після нижченаведених дій:

$$c_{33}=\theta^{-1}=1;\begin{bmatrix}c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}=-\theta^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}c_{13}\\ c_{23}\end{bmatrix}=-X\theta^{-1}=\begin{bmatrix}-11\\ -7\end{bmatrix};$$

$$C_2=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}=A_2^{-1}+X\theta^{-1}Y=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-11 & 33\\ -7 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 29\\ -5 & 18\end{bmatrix}.$$

Таким чином $A_3^{-1}=C_3=\begin{bmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}.$

3) Для обчислення $A_4^{-1}=D_4=A^{-1}$ складаємо схему:

	$[a_{41}a_{42}a_{43}]$	a_{44}
X	A_3^{-1}	$\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$
θ^{-1}	Y	θ

Виконуємо обчислення:

$$X = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 57 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\theta = 1 - \begin{bmatrix} -15 & 57 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 - 13 = -12; \theta^{-1} = \frac{-1}{12}$$

Заповнюємо схему:

	3 −1 4	1
7 4 −1	−8 29 11 −5 18 −7 1 −3 1	0 1 2
−1/12	−15 57 − 22	−12

Далі маємо:

$$d_{44} = -\frac{1}{12}; \quad \begin{bmatrix} d_{41} & d_{42} & d_{43} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -15 & 57 & -22 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} d_{14} \\ d_{24} \\ d_{34} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = A_3^{-1} + X\theta^{-1}Y = \begin{bmatrix} -8 & 29 & 11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 & 57 & -22 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -96 & 348 & -132 \\ -60 & 216 & -84 \\ 12 & -36 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 105 & -399 & 154 \\ 60 & -228 & 88 \\ -15 & 57 & -22 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 9 & -51 & 22 \\ 0 & -12 & 4 \\ -3 & 21 & 10 \end{bmatrix}.$$

Отже, $A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 9 & -51 & 22 & 7 \\ 0 & -12 & 4 & 4 \\ -3 & 21 & -10 & -1 \\ -15 & 57 & -22 & -1 \end{bmatrix}$.

Метод окаймування можна використовувати тільки в тому випадку, якщо усі проміжні матриці $A_2.A_3,....,A_n$ неособливі.

Абсолютна величина і норма матриці

Абсолютною величиною (модулем) матриці $A=\left[a_{ij}\right]$ є матриця $[A]=\left[\left|a_{ij}\right|\right]$, де всі елементи $\left[a_{ij}\right]$– модулі елементів матриці А [4].

Нехай A і B – матриці, для яких операції $A+B$ і AB мають смисл, тоді $1)\left|A+B\right|\le\left|A\right|+\left|B\right|;\ 2)\left|AB\right|\le\left|A\right|\left|B\right|;\ 3)\left|\alpha A\right|\le\left|\alpha\right|\left|B\right|$, де α –число.

Під *нормою* матриці $A=\left[a_{ij}\right]$ розуміється дійсне число $\left\|A\right\|$, що задовольняє такі умови [4]:

1) $\left\|A\right\|\ge 0$ (при чому $\left\|A\right\|$=0 тоді і тільки тоді, коли A=0);

2) $\left\|\alpha A\right\|=\left|\alpha\right|*\left\|A\right\|$, де α – число (при чому $\left\|-A\right\|=\left\|A\right\|$);

3) $\left\|A+B\right\|\le\left\|A\right\|+\left\|B\right\|;$ 4) $\left\|AB\right\|\le\left\|A\right\|*\left\|B\right\|;$ 5) $\left\|A-B\right\|\ge\left|\left\|B\right\|-\left\|A\right\|\right|$,

де A і B – матриці, для яких відповідні операції мають смисл.

Для матриці $A=\left[a_{ij}\right]$ довільного розміру розглянемо три таких легкообчислювальних норми:

1) $\left\|A\right\|_1=\max\limits_i\sum\limits_j\left|a_{ij}\right|$ – максимальна сума модулів елементів матриці по рядках;

2) $\left\|A\right\|_2=\max\limits_j\sum\limits_i\left|a_{ij}\right|$ – максимальна сума модулів елементів матриці по стовпцях;

3) $\left\|A\right\|_3=\sqrt{\sum\limits_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2}$ – квадратний корінь із суми квадратів модулів всіх елементів матриці.

3.6. Поняття рангу матриці

Нехай дана прямокутна матриця $A=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ....\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ....\ a_{2n} \\ a_{31}\ a_{32}\ ....\ a_{3n} \\ a_{m1}\ a_{m2}\ ....\ a_{mn} \end{bmatrix}$. Якщо в ній довільно вибрати k рядків і k стовпців, де $k \le \min(m, n)$, то елементи, розміщені на перетині цих рядків і стовпців, утворюють квадратну матрицю порядку k, визначник якої називається мінором k–го порядку матриці A.

Наприклад, на перетині рядків 1 і 2 із стовпцями 1 і 2 матриці A знаходиться матриця другого порядку $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, визначник якої є мінором другого порядку матриці A. Позначимо його як M_2: $M_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Рангом матриці A називається максимальний порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці [4]. Із визначення рангу матриці випливає, що якщо ранг матриці дорівнює r, то в матриці існує хоча б один мінор r–го порядку, що не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$–го і вищих порядків дорівнюють нулю. Відзначимо, що ранг нульової матриці дорівнює нулю, а ненульової матриці-рядка (або стовпця) дорівнює одиниці.

Для прямокутної матриці розміру $n \times m$ різниця між найменшим з чисел n і m і рангом матриці називається дефектом матриці. Для квадратної матриці розміром $n \times n$ дефект дорівнює $n-r$. Якщо дефект дорівнює нулю, то ранг матриці – найбільший із можливих для даного розміру.

3.7. Контрольні питання

1. Сформулюйте визначення визначника матриці.
2. Наведіть основні правила обчислення визначника матриці.
3. Перерахуйте основні властивості визначника.
4. Дайте означення оберненої матриці.
5. Яку матрицю називають особливою?
6. В якому випадку вихідна матриця має обернену матрицю?
7. Яка матриця називається союзною?
8. Як знайти обернену матрицю?
9. Наведіть визначення трикутної матриці. Яку матрицю називають верхньою трикутною, а яку нижньою трикутною?
10. Яким чином можна розбити дану матрицю на добуток двох трикутних матриць?
11. Що називають абсолютною величиною матриці?
12. Наведіть означення норми матриці. Які норми матриці Ви знаєте? Наведіть відповідні формули
13. Як знайти обернену матрицю шляхом її розбиття на клітки? В чому переваги та недоліки такого підходу?
14. Наведіть означення рангу матриці. Як обчислити ранг матриці?
15. Що називають дефектом матриці та як його обчислити?

3.8. Завдання

Задача 3.1. Дана матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. У кожний з діагональних елементів матриці A по черзі внести похибку 1%. Як змінився визначник матриці A? Вказати кількість правильних цифр і обчислити величину відносної похибки визначника в кожному випадку.

Таблиця 3.1 – Варіанти завдань до задачі 3.1

Вар.	A			Вар.	A			Вар.	A		
1.	3	2	2	2.	30	34	19	3.	1.3	1	13
	33	28	24		314	354	200		3.4	1.4	23
	360	320	270		2	8	13		5	3	1.5
4.	9	5	6	5.	–7	–7	–1	6.	3	1	13
	17	9	11		0	–2	–6		5	3	15
	7	4	5		5	6	4		11	5	40
7.	4	2	2	8.	300	34	19	9.	1.3	2	13
	33	2	24		31	354	200		3.4	2.4	23
	360	320	270		2	8	13		5	3	1.5
10.	9	5	6	11.	–7	–7	–1	12.	3	1	13
	1.7	90	11		0	–2	–6		5	3	15
	7	4	5		5	6	4		11	5	40
13.	3	2	2	14.	30	34	19	15.	1.3	1	13
	–33	2.8	24		14	54	20		34	14	23
	360	320	270		2	8	13		5	3	1.5
16.	9	5	6	17.	–7	–7	–1	18.	3	1	13
	1	8	1		0	–2	–6		5	3	15
	7	4	5		5	6	4		11	5	40
19.	3	2	2	20.	30	34	19	21.	1.3	1	13
	33	28	24		314	354	20		3.4	1.4	23
	36	32	20		2	8	13		5	3	1.5
22.	9	5	6	23.	–7	–7	–1	24.	3	1	13
	17	9	11		0	–20	–60		5	3	15
	7	4	5		5	6	4		11	5	40
25.	3	2	2	26.	30	34	19	27.	1.3	1	13
	33	2.8	2.4		31	35	10		3.4	1.4	23
	360	320	270		2	8	13		5	3	1.5
28.	9	5	6	29.	–7	–7	–1	30.	3	1	13
	17	9	11		0	–2	–6		5	3	15
	7	4	5		5	6	4		11	5	40

Задача 3.2. Знайти ранг заданої матриці А. Потім внести похибку 0.1%: а) в елемент α_{11}; б) в усі елементи матриці і знову знайти ранг. Пояснити отримані результати.

Таблиця 3.2 – Варіанти завдань до задачі 3.2

Вар.	*A*				Вар.	*A*				Вар.	*A*			
1.	1,1	0,1	0,8	1,6	2.	0,6	4,5	0,3	3	3.	1,8	4	0	1,9
	1,3	–0,3	1,2	2,1		–2,4	–12	0,9	–7		20,9	37	–25	19,2
	0,9	0,5	0,4	1,1		1,2	9	0,6	6		0,5	3	5	1,1
	–0,4	–3,8	2	1,3		–1,2	3	3,6	4		10,6	16	–20	8,9
4.	2	15	22	7	5.	1,9	9	1,6	0,1	6.	1,2	9	0,6	6
	1	14,1	18,8	2,3		11,3	23	6,8	–3,7		1,6	23	–7,2	9
	2	4	9	9		0,5	10	1,1	1,1		2	4	9	9
	–0,4	2,5	2,1	–2,4		0,9	–11	–0,6	–2,1		2	37	–15	12
7.	1,3	0,1	0,8	1,6	8.	0,6	4,5	0,3	3	9.	1,8	4	0	1,9
	1,0	–0,3	1,2	2,1		–2,4	–12	0,9	–7		20,9	37	–25	19,2
	0,9	0,5	0,4	1,1		1,2	9	0,6	6		0,5	3	5	1,1
	–0,4	–3,8	2	1,3		–1,2	3	3,6	4		10,6	16	–20	8,9
10.	2	15	22	7	11.	1,9	9	1,6	0,1	12.	1,2	9	0,6	6
	1	14,1	18,8	2,3		11,3	23	6,8	–3,7		1,6	23	–7,2	9
	2	4	9	9		0,5	10	1,1	1,1		2	4	9	9
	–0,4	2,5	2,1	–2,4		0,9	–11	–0,6	–2,1		2	37	–15	12
13.	1,1	0,1	0,8	1,6	14.	0,6	4,5	0,3	3	15.	1,8	4	0	1,9
	1,3	–0,3	1,2	2,1		–2,4	–12	0,9	–7		20,9	37	–25	19,2
	0,9	0,5	0,4	1,1		1,2	9	0,6	6		0,5	3	5	1,1
	–0,4	–3,8	2	1,3		–1,2	3	3,6	4		10,6	16	–20	8,9
16.	2	15	22	7	17.	1,9	9	1,6	0,1	18.	1,2	9	0,6	6
	1	14,1	18,8	2,3		11,3	23	6,8	–3,7		1,6	23	–7,2	9
	2	4	9	9		0,5	10	1,1	1,1		2	4	9	9
	–0,4	2,5	2,1	–2,4		0,9	–11	–0,6	–2,1		2	37	–15	12
19.	–1,1	0,1	0,8	1,6	20.	0,6	4,5	0,3	3	21.	1,8	4	0	1,9
	1,3	–0,3	1,2	2,1		–2,4	–12	0,9	–7		20,9	37	–25	19,2
	0,9	0,5	0,4	1,1		1,2	9	0,6	6		0,5	0,3	5	1,1
	–0,4	–3,8	2	1,3		–1,2	3	3,6	4		10,6	16	–20	8,9
22.	2	15	22	7	23.	1,9	9	1,6	0,1	24.	1,2	9	0,6	6
	–1	14,1	18,8	2,3		11,3	23	6,8	–3,7		1,6	23	–7,2	9
	2	8	9	9		0,5	0,3	1,1	1,1		2	4	9	9
	–0,4	2,5	2,1	–2,4		0,9	–11	–0,6	–2,1		2	37	–15	12
25.	1,1	0,1	0,8	1,6	26.	0,6	4,5	0,3	3	27.	1,8	4	0	1,9
	1,3	–0,3	1,2	2,1		–2,4	–12	0,9	–7		20,9	37	–25	19,2
	2	0,5	0,4	1,1		1,2	9	0,6	6		0,5	3	5	1,1
	–0,4	–3,8	2	1,3		–1,2	3	3,6	4		10,6	16	–20	8,9
28.	2	15	22	7	29.	1,9	9	1,6	0,1	30.	1,2	9	0,6	6
	1	14,1	18,8	2,3		11,3	23	6,8	–3,7		1,6	23	–7,2	9
	2	4	9	9		0,5	10	1,1	1,1		2	4	9	9
	–0,4	2,5	2,1	–2,4		0,9	–11	–0,6	–2,1		2	37	–15	12

Задача 3.3. Для заданої матриці А знайти обернену матрицю (якщо це можливо). Потім в елемент α_{11} внести похибку 10% і знову знайти обернену матрицю. Пояснити отримані результати.

Таблиця 3.3 – Варіанти завдань до задачі 3.3

Варіант	A	Варіант	A	Варіант	A
1.	$\begin{matrix} 2 & 16 & -6 \\ 3 & 24 & 5 \\ 1 & 8 & 11 \end{matrix}$	2.	$\begin{matrix} 2 & 4{,}4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{matrix}$	3.	$\begin{matrix} 3 & 5 & 3 \\ 9 & 15 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$
4.	$\begin{matrix} 48 & 3 & 6 \\ 32 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$	5.	$\begin{matrix} 2 & 0{,}4 & 6 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 3 \\ 2{,}3 & 1{,}2 & 4 \end{matrix}$	6.	$\begin{matrix} 5 & 5{,}5 & 5{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$
7.	$\begin{matrix} 4 & 16 & -6 \\ 5 & 24 & 5 \\ 1 & 8 & 11 \end{matrix}$	8.	$\begin{matrix} 2 & 4{,}4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{matrix}$	9.	$\begin{matrix} 3 & 5 & 3 \\ 9 & 15 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$
10.	$\begin{matrix} 49 & 3 & 6 \\ 32 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$	11.	$\begin{matrix} 3 & 0{,}4 & 6 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 3 \\ 2{,}3 & 1{,}2 & 4 \end{matrix}$	12.	$\begin{matrix} 5 & 5{,}5 & 5{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$
13.	$\begin{matrix} 6 & 16 & -6 \\ 7 & 24 & 5 \\ 1 & 8 & 11 \end{matrix}$	14.	$\begin{matrix} 2 & 4{,}4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{matrix}$	15.	$\begin{matrix} 3 & 5 & 3 \\ 9 & 15 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$
16.	$\begin{matrix} 50 & 3 & 6 \\ 32 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$	17.	$\begin{matrix} 4 & 0{,}4 & 6 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 3 \\ 2{,}3 & 1{,}2 & 4 \end{matrix}$	18.	$\begin{matrix} 5 & 5{,}5 & 5{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$
19.	$\begin{matrix} 8 & 16 & -6 \\ 9 & 24 & 5 \\ 1 & 8 & 11 \end{matrix}$	20.	$\begin{matrix} 2 & 4{,}4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{matrix}$	21.	$\begin{matrix} 3 & 5 & 3 \\ 9 & 15 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$
22.	$\begin{matrix} 51 & 3 & 6 \\ 32 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$	23.	$\begin{matrix} 5 & 0{,}4 & 6 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 3 \\ 2{,}3 & 1{,}2 & 4 \end{matrix}$	24.	$\begin{matrix} 5 & 5{,}5 & 5{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$
25.	$\begin{matrix} 10 & 16 & -6 \\ 11 & 24 & 5 \\ 1 & 8 & 11 \end{matrix}$	26.	$\begin{matrix} 2 & 4{,}4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5{,}3 & 0 \end{matrix}$	27.	$\begin{matrix} 3 & 5 & 3 \\ 9 & 15 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$
28.	$\begin{matrix} 52 & 3 & 6 \\ 32 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$	29.	$\begin{matrix} 6 & 0{,}4 & 6 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 3 \\ 2{,}3 & 1{,}2 & 4 \end{matrix}$	30.	$\begin{matrix} 5 & 5{,}5 & 5{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$

Задача 3.4. Для матриці A вирішити питання про існування оберненої матриці в таких випадках:

а) елементи матриці задані точно;

б) елементи матриці задані приблизно з відносною похибкою $\delta=\alpha\%$.

Таблиця 3.4 – Варіанти завдань до задачі 3.4

Вар.	A	α	β	Вар.	A	α	β
1.	$\begin{matrix} 31 & 27 & 22 \\ 32{,}2 & 28{,}2 & 24 \\ 36 & 32 & 27 \end{matrix}$	0,1	0,4	2.	$\begin{matrix} 30 & 34 & 19 \\ 31{,}4 & 35{,}4 & 20 \\ 24 & 28 & 13 \end{matrix}$	0,4	0,1
3.	$\begin{matrix} 3 & 1 & 13 \\ 13{,}4 & 11{,}4 & 23 \\ 5 & 3 & 15 \end{matrix}$	0,05	0,1	4.	$\begin{matrix} 9 & 5 & 6 \\ 13{,}5 & 9{,}5 & 11 \\ 8 & 4 & 5 \end{matrix}$	0,1	0,5

Продовження Таблиці 3.4

Вар.	*A*	α	β	Вар.	*A*	α	β
5.	–7 –8 –10 28,6 27,6 25 7 6 4	0,1	0,2	6.	–3 –1 –13 26,8 22,4 46 5 3 15	0,1	0,1
7.	31 27 22 32,2 28,2 24 36 32 27	0,1	0,4	8.	30 34 19 3,4 35,4 20 24 28 13	0,1	0,1
9.	3 1 13 13,4 11,4 23 5 3 15	0,1	0,2	10.	9 5 6 13 9 12 8 4 5	0,1	0,3
11.	–7 –8 –10 28,6 27,6 25 7 6 4	0,1	0,2	12.	–3 –1 –13 2,8 22,4 46 5 3 15	0,1	0,2
13.	31 27 22 2,2 82 24 36 32 27	0,15	0,4	14.	3 3,4 19 31,4 35,4 20 24 28 13	0,05	0,1
15.	3 1 13 13,4 11,4 23 5 3 15	0,05	0,3	16.	9 5 6 13,5 9,5 11 8 4 5	0,1	0,5
17.	–7 –8 –10 28,6 27,6 25 7 6 4	0,1	0,25	18.	–3 –1 –13 26,8 22,4 46 5 3 15	0,1	0,3
19.	31 2,7 22 2,2 82 24 36 32 27	0,15	0,4	20.	3 3,4 19 31,4 35,4 20 24 28 13	0,05	0,1
21.	3 1 13 13,4 11,4 23 5 3 15	0,05	0,3	22.	9 5 6 13,5 9,5 11 8 4 5	0,1	0,5
23.	–7 –8 –10 28,6 27,6 25 7 6 4	0,1	0,25	24.	–3 –1 –13 26,8 22,4 46 5 3 15	0,1	0,15
15.	31 2,7 22 2,2 82 24 36 32 27	0,5	0,4	26.	3 3,4 19 31,4 35,4 20 24 28 13	0,05	0,1
27.	3 1 13 13,4 11,4 23 5 3 15	0,08	0,3	28.	9 5 6 13,5 9,5 11 8 4 5	0,1	0,5
29.	–7 –8 –10 28,6 27,6 25 7 6 4	0,25	0,25	30.	–3 –1 –13 26,8 22 46 5 3 15	0,1	0,25

4. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

У загальному вигляді система *m лінійних рівнянь* з *n невідомими* записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються *невідомими* системи; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – коефіцієнтами при невідомих системи. Коефіцієнт при невідомому x_{ij} в *i–тому* рівнянні позначається через a_{ij}, де індекс i вказує номер рівняння, у якому знаходиться даний коефіцієнт, а індекс j – номер невідомого, при якому знаходиться даний коефіцієнт. Числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ називаються вільними членами системи [1 – 4].

Коротко система (4.1) може бути записана так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.1'}$$

Розв'язком системи лінійних рівнянь (4.1) є будь–яка сукупність чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, котра при підстановці на місце невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у рівняння даної системи, перетворює всі ці рівняння у тотожності.

Система лінійних рівнянь (4.1) є *сумісною*, якщо вона має розв'язок, в протилежному випадку вона є *несумісною* (або *суперечливою*). Сумісна система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) може мати один або кілька розв'язків і називається *визначеною*, якщо має один єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо має більше одного розв'язку [1-5].

Дві СЛАР з тим самим числом невідомих є *еквівалентними*, якщо вони або обидві несумісні, або сумісні і мають той самий розв'язок.

Елементарними перетвореннями СЛАР називаються такі три типи перетворень: 1) перестановка двох рівнянь системи; 2) множення обох частин рівняння системи на будь–яке відмінне від нуля число; 3) додавання (віднімання) до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на будь–яке число.

Елементарні перетворення над будь-якою СЛАР переводять її в еквівалентну. Виконання елементарних перетворень рівнозначне вираженню одного невідомого через інші. Система, у якій вільні члени $b_1, b_2, \ldots, b_m$ дорівнюють нулю, називається однорідною.

Звернемо увагу на ще одне важливе питання. У процесі вирішення різних питань техніки, економіки тощо доводиться розв'язувати СЛАР. У таких системах коефіцієнти і вільні члени є наближеними, що приводить до появи додаткових, неусувних похибок, котрі слід враховувати як у процесі обчислень, так і в остаточному округленні результату [1].

Коефіцієнти СЛАР, які виникають під час обробки результатів, містять помилки спостережень. Якщо СЛАР записати у пам'ять комп'ютера навіть точно, то обчислення приводить до похибок округлення. Проте, якщо матриця системи (4.1) майже вироджена – можна сподіватись, що малі зміни в коефіцієнтах і (або) вільних членах також призведуть до значних змін у її розв'язку.

Якщо малі збурення коефіцієнтів і (або) вільних членах СЛАР дуже збурюють її розв'язок – то таку систему називають *погано обумовленою* [1]. Якщо ж розв'язок збурюється незначно – СЛАР називають *добре обумовленою.*

Ознакою поганої обумовленості СЛАР є її майже виродженість (коли значення визначника системи наближається до нуля).

4.1. Теорема Кронекера – Капеллі

Нехай дана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.2}$$

Для встановлення умови сумісності цієї системи необхідно ввести поняття матриці системи і розширеної матриці системи.

Матрицею системи (4.2) називається матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих цієї системи:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Якщо приєднати до матриці A стовпець вільних членів – отримаємо розширену матрицю $\bar{A}$ системи (4.2):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}b_m \end{bmatrix}.$$

З визначення матриці системи A і розширеної матриці $\bar{A}$ зрозуміло, що їх ранги $r(\bar{A})$ і $r(A)$ або рівні між собою, або ранг $r(\bar{A})$ на одиницю більший, ніж $r(A)$.

Питання про сумісність системи (4.1) вирішується за допомогою **теореми Кронекера–Капеллі**: *система лінійних рівнянь (4.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці $\bar{A}$ дорівнює рангові матриці A, тобто коли $r(\bar{A}) = r(A)$.*

Наслідок 1. Якщо система (4.2) сумісна і ранг матриці системи $r(A)=r$ дорівнює числу невідомих n, то система має єдиний розв'язок.

Наслідок 2. Якщо система (4.2) сумісна і ранг матриці системи $r(A)=r$ менший за число невідомих n, то система має незліченну кількість рішень.

4.2. Розв'язання довільних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} - \tag{4.3}$$

довільна СЛАР, де число рівнянь системи не дорівнює числу n невідомих ($m \neq n$). Припустимо, що система (4.3) сумісна, тобто $r(A)=r(\bar{A})=r$, і $r \leq min\{m, n\}$. Тоді в матрицях A і $\bar{A}$ даної системи знайдуться r лінійно незалежних рядки, а інші $m - r$ рядків будуть їх лінійними комбінаціями. Перестановкою рівнянь можна дійти до того, що ці r лінійно незалежних рядків займуть перші r місць.

Звідси випливає, що кожне з останніх $m - r$ рівнянь системи (4.3) можна представити як суму перших r рівнянь (які називаються *лінійно незалежними* або *базисними*), взятих з деякими коефіцієнтами. Тоді система (4.3) еквівалентна такій системі r рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{4.4}$$

Припустимо, що мінор r–го порядку, складений з коефіцієнтів при перших r невідомих, відмінний від нуля: $M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$

тобто є базисним мінором. Тоді невідомі, коефіцієнти при яких складають базисний мінор, називаються *базисними невідомими*, а інші $n-r$ – вільними невідомими.

У кожному з рівнянь системи (4.4) перенесемо в праву частину всі члени з вільними невідомими $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Тоді одержимо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - a_{1,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - a_{2,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - a_{r,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}, \quad (4.5)$$

яка містить r рівнянь з r базисними невідомими. Оскільки визначник системи (4.5) є базисним мінором $M_r \neq 0$, то система (4.5) має єдиний розв'язок відносно базисних невідомих $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, який можна знайти за формулами Крамера (див. розділ 4.3.1). Якщо вільним невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ призначити довільні числові значення $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$, одержимо загальний розв'язок вихідної системи (4.3).

Приклад. Розв'язати систему трьох рівнянь з чотирма невідомими

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases} \quad (*)$$

Досліджуємо систему на сумісність. Складемо матриці A и $\bar{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Визначимо ранги цих матриць, застосовуючи елементарні перетворення:

а) 1–й і 2–й стовпці пропорційні, один з них (2–й) відкидаємо;

б) 1–й стовпець помножимо на 1/3;

в) 1–й стовпець послідовно помножимо на (–5) і (–4) і додамо відповідно до 2–го і 3–го стовпців;

г) в отриманій матриці два стовпці (2–й і 3–й) пропорційні; один з них (3–й) відкинемо, а 2–й помножимо на–1/6;

д) 1–ий рядок послідовно помножимо на (–2) і (–3) і додамо відповідно до 2–го і 3–го рядків;

е) 2–ій рядок помножимо на (–2), додамо до 3–го і відкинемо отриманий нульовий рядок.

Маємо:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{а)} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{б} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{в)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -5 \\ 3 & -12 & -10 \end{bmatrix} \underset{\sim}{г)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{д)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{е)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що ранг останньої матриці дорівнює 2: $r(A) = 2$.
Матрицю $\bar{A}$ перетворимо аналогічним чином:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -5 & -1 \\ 3 & -12 & -10 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, $r(\bar{A}) = 2$. Оскільки, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, то дана система сумісна. Оскільки ранг системи дорівнює 2, максимальний порядок мінору, відмінного від нуля, дорівнює 2 і система має два базисних невідомих. Знайдемо будь-який відмінний від нуля мінор другого порядку. Таким, наприклад, є мінор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, утворений коефіцієнтами при невідомих x_3 і x_4. Отже, невідомі x_3 і x_4 можна вважати базисними, а невідомі x_1 і x_2 – вільними. Система (*) еквівалентна такій:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases} \qquad (**)$$

Переносимо вільні невідомі в праву частину:

$$\begin{cases} 5x_3 + 4x_4 = 2 - 3x_1 + 2x_2, \\ 4x_2 + 3x_4 = 3 - 6x_1 + 4x_2. \end{cases} \qquad (***)$$

Розв'язуємо систему (4.5) за формулами Крамера [3, 4]:

$$d = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 16 = -1;$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 - 3x_1 + 2x_2 & 4 \\ 3 - 6x_1 + 4x_2 & 3 \end{vmatrix} = 3(2 - 3x_1 + 2x_2) - 4(3 - 6x_1 + 4x_2) = -6 + 15x_1 - 10x_2;$$

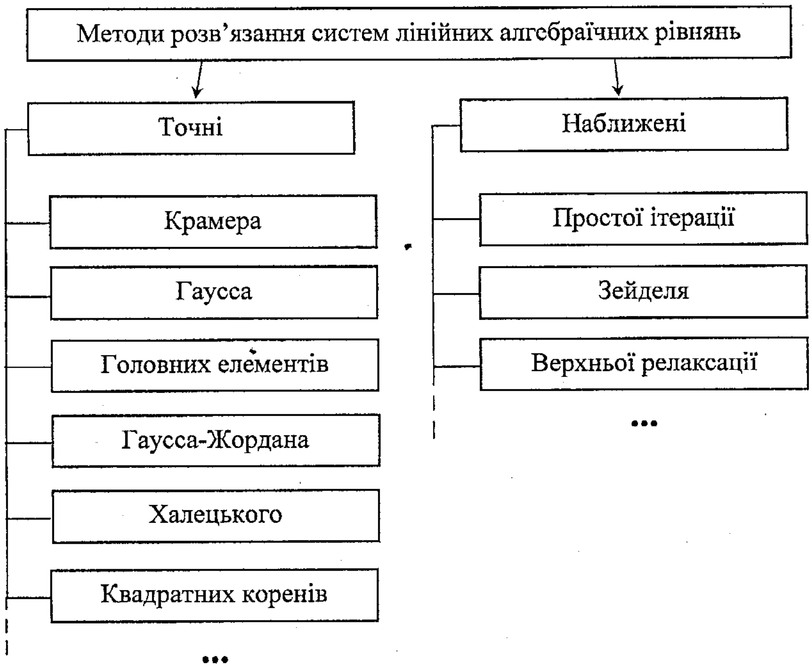
$$d_4 = \begin{vmatrix} 5 & 2 - 3x_1 + 2x_2 \\ 4 & 3 - 6x_1 + 4x_2 \end{vmatrix} = 5(3 - 6x_1 + 4x_2) - 4(2 - 3x_1 + 2x_2) = 7 + -18x_1 + 12x_2;$$

$$x_3 = d_3 / d = 6 - 15x_1 + 10x_3, \;\; x_4 = d_4 / d = -7 + 18x_1 - 12x_2.$$

Отриманий розв'язок, в якому базисні невідомі x_3 і x_4 виражені через вільні x_1 і x_2, є загальним розв'язком системи (*). Підставивши в нього довільні значення для вільних невідомих, одержуємо різні окремі розв'язки. Наприклад, якщо $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, то $x_3 = 6$, $x_4 = -7$; якщо $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, то $x_3 = 11$, $x_4 = 13$ тощо. Набори чисел (0, 0, 6, –7) (1, 2, 11, 13) тощо є окремими розв'язками системи (*).

4.3. Класифікація методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь та їх порівняльні характеристики

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь ділять на дві групи: *точні* та *ітераційні* [1 – 4].



Точними називають такі методи, які дозволяють знайти точний розв'язок СЛАР за допомогою виконання скінченної кількості арифметичних операцій у припущенні, що всі обчислення виконуються точно (без округлень), а коефіцієнти і вільні члени системи – точні числа. Проте на практиці всі обчислення виконуються з обмеженою кількістю десяткових розрядів, а ірраціональні коефіцієнти і вільні члени (якщо такі є) замінюються раціональними числами. Тому в процесі обчислень вдаються до округлень, а це означає, що розв'язки, котрі обчислюються за точними методами, є наближеними числами з певними похибками (похибками округлень).

До точних методів розв'язання СЛАР відносять: правило Крамера, метод Гаусса, метод головних елементів метод Гаусса–Жордана, схему Халецького, метод квадратних коренів тощо.

Метод Крамера має велике теоретичне значення, проте на практиці його застосовують дуже рідко, оскільки він дуже трудомісткий і під час розв'язання системи з великою кількість невідомих потребує дуже багато машинного часу.

Метод Гаусса потребує виконання $2/3n^3+O(n^2)$ арифметичних операцій (n – кількість невідомих) і займає n^2 комірок пам'яті. Його застосовують для розв'язання СЛАР з щільно заповненою матрицею.

Метод Гаусса-Жордана дозволяє послідовно виключити невідомі з усіх рівнянь системи крім одного і привести матрицю коефіцієнтів розв'язку але, порівняно з методом Гаусса, супроводжується збільшенням обсягу обчислень.

Якщо будь-який елемент провідного рядка дорівнює нулю, застосування методу Гаусса недоцільне. Такої складності можна запобігти, якщо змінити порядок, в якому розташовані рівняння системи. Максимальна точність досягається у випадку, коли провідний елемент має найбільше значення. Вибір за таким правилом головного елементу і покладено в основу методу головних елементів.

В багатьох випадках виникає необхідність розв'язання СЛАР, в якій матриця коефіцієнтів є незмінною, а стовпець вільних членів є змінним. Тоді доцільно застосовувати обчислення за схемою Халецького. В такому випадку один раз обчислюються значення елементів трикутних матриць і багатократно розв'язуються нижня і верхня трикутні системи, котрі потребують виконання n^2 операцій множення і ділення.

Якщо матриця коефіцієнтів системи симетрична – доцільно застосовувати метод квадратних коренів, який потребує вдвічі меншої кількості комірок пам'яті і арифметичних операцій – відповідно $n/2\cdot(n+1)$ $1/3n^2+O(n)$.

Застосування точних методів для розв'язування СЛАР з велокою кількістю невідомих досить громіздке. Крім того, кількість невідомих може бути така велика, що коефіцієнти системи не завжди можна розташувати в оперативній пам'яті комп'ютера. Тоді системи розв'язують за допомогою ітераційних методів [1].

Ітераційними називають такі методи, які дозволяють знайти наближений розв'язок СЛАР із заздалегідь указаною точністю шляхом виконання скінченої кількості арифметичних операцій, хоч самі обчислення можуть виконуватися без округлень, а коефіцієнти і вільні члени системи бути точними числами. Розв'язуючи СЛАР ітераційними методами, крім похибок округлення, слід враховувати також і похибку методу.

До ітераційних методів розв'язання СЛАР відносять: метод простої ітерації (або метод ітерації), метод Зейделя, метод верхньої релаксації тощо.

Далі детальніше розглянемо теоретичні та практичні питання розв'язання СЛАР точними та ітераційними методами.

4.4. Точні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

4.4.1. Метод Крамера

Нехай дана система лінійних рівнянь, у якій число рівнянь дорівнює числу невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} , \qquad (4.6)$$

де $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – відповідно матриця системи, стовпець вільних членів і стовпець невідомих.

Припустимо, що визначник системи $d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$

Якщо тепер замінити послідовно у визначнику d стовпці коефіцієнтів при невідомих x_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ стовпцем вільних членів b_i то вийдуть відповідно визначники

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}; \; d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{2,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$d_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}; \; d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

Теорема Крамера. Система n лінійних рівнянь з n невідомими, визначник якої відмінний від нуля, завжди сумісна і має єдиний розв'язок, що обчислюється за формулами:

$$x_1 = d_1 / d; \; x_2 = d_2 / d; \dots; x_{n-1} = d_{n-1} / d; x_n = d_n / d. \qquad (4.7)$$

Формули (4.7) називаються формулами Крамера.

Приклад. Розв'язати за формулами Крамера систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

1) Обчислюємо визначник системи: $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6.$

2) Обчислюємо визначники, складені з коефіцієнтів при невідомих x_1, x_2, x_3:

$$d_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6;\ d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12;\ d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

3) Використовуючи формули Крамера (4.7), знаходимо розв'язок системи: $x_1 = d_1/d = 6/6 = 1$; $x_2 = d_2/d = 12/6 = 2$; $x_3 = -12/6 = -2$.

Зазначимо, що розв'язання СЛАР за формулами Крамера дуже громіздке, тому на практиці системи, зазвичай, розв'язують іншими методами, які будуть розглянуті нижче.

4.4.2. Метод Гаусса

Метод послідовного виключення невідомих або метод Гаусса розв'язання системи (4.1.) полягає в такому [1 – 4].

Припускаючи, що $a_{11} \neq 0$ (це завжди можна зробити за рахунок нумерації рівнянь), множимо перше рівняння на $-a_{21}/a_{11}$ і додаємо до другого. Одержуємо рівняння, у якому коефіцієнт при x_1 дорівнює нулю. Помноживши перше рівняння на $-a_{31}/a_{11}$ і додавши до третього, одержуємо рівняння, що також не містить x_1. Аналогічним шляхом можна перетворити всі інші рівняння, у результаті чого виходить еквівалентна вихідній система рівнянь

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array}\right\}. \qquad (4.8)$$

де $a'_{ki}, b'_k (i = 2,3,\ldots,m; k = 2,\ldots,n)$ – деякі нові коефіцієнти.

Припускаючи, що $a'_{22} \neq 0$, і залишаючи незмінними перші два рівняння системи (4.8), перетворимо її так, щоб у кожному з інших рівнянь коефіцієнт при x_2 дорівнював нулю. Після кінцевого числа перетворень систему (4.8) можна привести до одного з таких виглядів:

$$\left.\begin{array}{r} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = d_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{nn}x_n = d_n \end{array}\right\}, \text{ де } c_{kk} \neq 0\ (k = 1,2,\ldots,n); \qquad (4.9)$$

$$\left.\begin{array}{r} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{array}\right\}, \text{ де } k < n; \qquad (4.10)$$

$$\left.\begin{array}{r} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0x_n = d_k \end{array}\right\}, \text{ де } k \leq n,\ d_k \neq 0. \qquad (4.11)$$

Система (4.9) має єдиний розв'язок; значення x_n знаходять з останнього рівняння цієї системи, значення x_{n-1} – з передостаннього, значення x_1 – з першого.

Система (4.10) має нескінченну множину рішень. З останнього рівняння можна виразити одне з невідомих (наприклад, x_k) через інші $n - k$ невідомих $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, що входять у це рівняння. З передостаннього рівняння виразиться x_{k-1}, з першого рівняння визначиться x_1 через ті ж невідомі. В отриманих формулах невідомі $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ можуть приймати будь–які значення.

Система (4.11) несумісна, оскільки ніякі значення невідомих не можуть задовольнити її останньому рівнянню.

Зауваження 1. Розв'язуючи СЛАР методом Гаусса, перетворення роблять не над рівняннями, а над матрицями, складеними з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів. Так, системі (4.1) відповідає матриця

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right], \qquad (4.12)$$

системі (4.9) – «трикутна» матриця

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{array}\right], \tag{4.13}$$

системі (4.10) – «трапецієподібна» матриця

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \hline 0 & 0 & c_{kk} & \dots & c_{kn} & d_k \end{array}\right], \tag{4.14}$$

системі (4.11) – матриця

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_k \end{array}\right], \tag{4.15}$$

яка містить рядок, в якому дорівнюють нулю всі елементи, за винятком одного, що відповідає вільному члену. Вертикальною рискою відділений стовпець, складений з вільних членів.

Приклад 1. Розв'язати СЛАР $\left.\begin{array}{r} x_1+6x_2 \;\; +x_3=5 \\ 3x_1-4x_2-2x_3=8 \\ 5x_1+2x_2+3x_3=3 \end{array}\right\}.$

Складемо матрицю з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -2 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right].$$

Помноживши перший рядок на (–3) і додавши до другого рядка, одержуємо матрицю $A_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & -22 & -5 & -7 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right].$

Помноживши перший рядок на (–5) і додавши до третього рядка, одержуємо матрицю $A_2=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & -22 & -5 & -7 \\ 0 & -28 & -2 & -22 \end{array}\right].$

Помноживши другий рядок матриці A_2 на $-\frac{28}{22}=-\frac{14}{11}$ і додавши до третього рядка, одержуємо матрицю

$$A_3=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & -22 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & \dfrac{48}{11} & -\dfrac{144}{11} \end{array}\right],$$ якій відповідає система рівнянь

$$\left.\begin{array}{r} x_1+6x_2+\ x_3= \quad 5 \\ 22x_2+5x_3= \quad 7 \\ 44/11x_3=-144/11 \end{array}\right\}.$$

Розв'язавши систему, знаходимо: x_3=–3, x_2=1, x_1=2. Отже, вихідна система має той же розв'язок: x_1=2, x_2=1, x_3= –3.

4.4.3. Метод головних елементів

Задачі і приклади попереднього параграфа розв'язуються порівняно просто. У випадку, коли коефіцієнтами системи рівнянь є дробові числа або числа, досить великі за абсолютною величиною, обчислення ускладнюються. Щоб спростити їх і мати можливість контролювати обчислення, застосовують трохи видозмінений метод Гаусса.

Нехай дана СЛАР у матричному вигляді

$$Ax=b, \tag{4.16}$$

де

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Метод Гаусса з вибором головного елементу полягає в такому. У системі (4.16) вибирають спочатку рівняння, у якому міститься найбільший за абсолютною величиною коефіцієнт системи (головний елемент), і ділять дане рівняння на цей коефіцієнт. Після цього так само, як і в найпростішій схемі методу Гаусса, виключають з інших рівнянь ту невідому, при якій був найбільший коефіцієнт в обраному рівнянні (для зручності головний елемент можна розташувати в перший рядок і перший стовпець матриці, над якою проводяться відповідні перетворення). Далі, залишаючи незмінним рівняння з головним елементом шукають найбільший за абсолютною величиною коефіцієнт в інших рівняннях (новий головний елемент), ділять на нього рівняння, у якому він знаходиться, і виключають з інших рівнянь відповідну невідому тощо, поки не залишиться одне рівняння з одним невідомим, тобто поки система (4.16) не буде приведена до діагонального вигляду.

Щоб не зробити помилок, можна застосовують контрольні обчислення. Для цього діють таким чином. Роблять заміну

$$y = x + e, \tag{4.18}$$

де

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

тобто

$$y_i = x_i + 1 \left(i = 1, 2, \ldots, n \right), \tag{4.20}$$

в результаті чого приходять до нової системи

$$Ay = Ax + Ae = b + Ae = \sigma; \quad Ay = \sigma, \tag{4.21}$$

де

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix}, \quad \sigma_i = b_i + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}. \tag{4.22}$$

Одночасно розв'язуючи системи (4.16), (4.21), приводять їх до діагонального вигляду, всі обчислення заносять у таблицю, контролюють їх за допомогою чисел контрольного стовпця як показано в прикладі.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} 0{,}6x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}28x_3 = 0 \\ x_1 + \ 0{,}6x_2 + 0{,}35x_3 = 1 \\ 0{,}52x_1 + 0{,}75x_2 + \ 0{,}6x_3 = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Застосовуємо схему з вибором головного елементу (у даному випадку головним елементом є коефіцієнт 1,28). Складемо таблицю, у якій i означає номер рядка (у першому вертикальному стовпці), k – номер невідомої (в останньому рядку), b – вектор, координати якого складені з вільних членів системи, σ – вектор, координати якого дорівнюють сумам усіх коефіцієнтів і вільних членів відповідних рівнянь (кожен елемент останнього стовпця дорівнює сумі чисел, що стоять у відповідному рядку: 1,28+0,21+0,6+0=2,09) (табл. 4.1.).

Таблиця 4.1.

i	A			b	σ
1	1,28	0,21	0,6	0	2,09
2	0,35	0,6	1	1	2,95
3	0,6	0,75	0,52	0	1,87
k	3	2	1		

Перше рівняння ділимо на *1,28* (головний елемент) і виключаємо x_3 із двох інших рівнянь (табл.4.2.). У табл. 4.2. останній стовпець Σ служить для контролю обчислень (його члени дорівнюють сумам елементів другого, третього, четвертого і п'ятого стовпців: $1 + 0,164 + 0,469 + 0 = 1,633$).

Елементи передостаннього стовпця σ отримані в результаті перетворень над матрицею системи (4.16.), наприклад, $1,663 = 2,09 / 1,28$. Оскільки значення елементів двох останніх стовпців збігаються (їх елементи виходять за різними діями), обчислення зроблені правильно.

Розглядаємо два рівняння, що залишилися, вони не містять x_3; у матриці, що складена з їхніх коефіцієнтів, вибираємо новий головний елемент (він дорівнює *0,836*), ділимо на нього друге рівняння і виключаємо x_1 з останнього рівняння (табл. 4.3).

Таблиця 4.2

i	A			$\bar{b}$	$\bar{\sigma}$	Σ
1	1	0,164	0,469	0	1,633	1,633
2	0	0,543	0,836	1	2,379	2,379
3	0	0,652	0,239	0	0,890	0,891
k	3	2	1			

Таблиця 4.3

i	A		$\bar{b}$	$\bar{\sigma}$	Σ
2	0,836	0,543	1	2,379	
3	0,239	0,652	0	0,891	
k	1	2			
2	1	0,650	1,196	2,846	2,846
3	0	0,497	–0,286	0,210	0,211

Отже, вихідна система і відповідна їй система (4.21) приведені до діагонального вигляду, причому

$$\left.\begin{aligned} x_3 + 0,164x_2 + 0,469x_1 &= 0 \\ 0,650x_2 + x_1 &= 1,196 \\ 0,497x_2 &= -0,286 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y_3 + 0,164y_2 + 0,469y_1 &= 1,633 \\ 0,650y_2 + y_1 &= 2,846 \\ 0,497y_2 &= 0,210 \end{aligned}\right\}$$

Розв'язавши ці системи, знаходимо: $x_2 = -0,575$, $x_1 = 1,570$, $x_3 = -0,642$; $y_2 = 0,423$, $y_1 = 2,571$, $y_3 = 0,358$. Отже, вихідна система має розв'язок: $x_1 = 1,570$, $x_2 = -0,575$, $x_3 = -0,642$;

4.4.4. Метод Гаусса–Жордана

Нехай є система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (n та m – довільні). Метод послідовного виключення невідомих з усіх рівнянь системи, крім одного, називають методом Гаусса–Жордана. Цей метод також є деякою модифікацією розглянутого методу Гаусса [3].

Нехай у вихідній системі $a_{ij} \neq 0$ (називатимемо його далі розв'язувальним елементом. Виключимо з усіх рівнянь системи, крім i–го, невідоме x_j. Для цього виконаємо такі операції:

1) поділимо i–те рівняння на a_{ij} :

$$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 + \frac{a_{i2}}{a_{ij}}x_2 + \ldots + 1 \cdot x_j + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n = \frac{b_i}{a_{ij}}; \tag{4.23}$$

2) рівняння (4.23) помножимо на коефіцієнт a_{kj} ($k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$):

$$\frac{a_{ij}a_{i1}}{a_{ij}}x_1 + \frac{a_{ij}a_{i2}}{a_{ij}}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + \frac{a_{ij}a_{in}}{a_{ij}}x_n = \frac{a_{ij}b_i}{a_{ij}}; \tag{4.24}$$

3) рівняння (4.24) віднімемо від k–го рівняння вихідної системи:

$$\left(a_{k1} - \frac{a_{kj}a_{i1}}{a_{ij}}\right)x_1 + \left(a_{k2} - \frac{a_{kj}a_{i2}}{a_{ij}}\right)x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + \left(a_{kn} - \frac{a_{kj}a_{in}}{a_{ij}}\right)x_n = b_k - \frac{a_{kj}b_i}{a_{ij}}.$$

Введемо позначення:

$$a'_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{kj}a_{il}}{a_{ij}} = \frac{a_{ij}a_{kl} - a_{kj}a_{il}}{a_{ij}},\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad b'_{kl} = b_k - \frac{a_{kj}b_i}{a_{ij}} = \frac{b_k a_{ij} - a_{kj}b_i}{a_{ij}}.$$

Тоді

$$a'_{k1}x_1 + a'_{k2}x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a'_{kn}x_n = b'_k \ (k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, \mathrm{m}). \tag{4.25}$$

Отже, в результаті перетворень 1) – 3) вихідну систему зведено до еквівалентної системи

$$\begin{gathered} a'_{k1}x_1 + a'_{k2}x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a'_{kn}x_n = b'_k, \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 + \frac{a_{i2}}{a_{ij}}x_2 + \ldots + 1 \cdot x_j + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n = \frac{b_i}{a_{ij}}. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Зведення вихідної системи до системи (4.26) називають *кроком послідовних виключень* Гаусса – Жордана. Усі обчислення зручніше виконувати тоді, коли задану та всі наступні системи записувати у вигляді таблиць.

Запишемо таблиці, що відповідають вихідній системі та системі (4.26) (відповідно табл. 4.4 і 4.5).

У табл. 4.4 розв'язувальний елемент a_{ij} візьмемо в рамку; i–й рядок та j–й стовпець називатимемо відповідно *разв'язувальним рядком* та *разв'язувальним стовпцем.*

Таблиця 4.4

x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	b_i
a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...
a_{i1}	a_{i2}	...	$\boxed{a_{ij}}$	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m

Таблиця 4.5

x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	b_i'
a_{11}'	a_{12}'	...	0	...	a_{1n}'	b_1'
a_{21}'	a_{22}'	...	0	...	a_{2n}'	b_i'
...	...	...	...	...	...	...
$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}$	$\frac{a_{i2}}{a_{ij}}$	...	1	...	$\frac{a_{in}}{a_{ij}}$	$\frac{b_i'}{a_{ij}}$
...	...	...	...	...	...	...
a_{m1}'	a_{m2}'	...	0	...	a_{mn}'	b_m'

Алгоритм кроку перетворень Гауса-Жордана, тобто перехід від табл. 4.4 до табл. 4.5, такий:

1) усі елементи розв'язувального рядка табл. 4.4 ділимо на розв'язувальний елемент $a_{ij} \neq 0$ і результат записуємо в i–й рядок табл. 4.5;

2) усі елементи розв'язувального стовпця, крім a_{ij} *замінюємо* нулями;

3) решту елементів табл. 4.5 обчислюємо за формулами:

$$a_{kl}' = (a_{ij}a_{kl} - a_{kj}a_{ij})/a_{ij},\ b_k' = (b_k a_{ij} - a_{kj}b_i)/a_{ij}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n).$$

Елементи a_k' і b_k' зручно обчислювати за правилом прямокутника. Розглянемо прямокутник, одна з вершин котрого лежить в елементі, на місці якого обчислюється новий, а протилежна – в розв'язувальному елементі; дві інші вершини лежать відповідно: одна в розв'язувальному рядку, а друга – розв'язувальному стовпці (рис.4.1.).

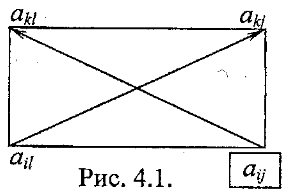


Рис. 4.1.

Елемент a_{kl}' (або b_k') *дорівнює* добутку розв'язувального елементу на протилежний йому елемент мінус добуток двох інших елементів і весь цей вираз ділиться на розв'язувальний елемент a_{ij}.

Зауваження.

1. Як розв'язувальний елемент зручно брати елемент, що дорівнює 1.

2. Якщо $a_{il} = 0$, *то* $a_{kl}' = a_{kl} - \frac{a_{kj} \cdot 0}{a_{ij}} = a_{kl}$, *тобто 1–й стовпець табл.4.4*

записують без будь–яких змін у l–й стовпець табл.4.5.
3. Якщо $a_{kj} = 0$, *то* $a'_{kl} = a_{kl} - \frac{0 \cdot a_{il}}{a_{ij}}$, $b_k' = b_k - \frac{0 \cdot b_i}{a_{ij}} = b_k$, *тобто k–й рядок табл.4.4 без змін записують в k–й рядок табл.4.5.*

Правильність обчислень можна проконтролювати в такий спосіб. Нехай a_{ij} – розв'язувальний елемент, а α_i – сума всіх елементів i–го рядка в табл.4.5:

$$\alpha_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Покажемо, що в табл.4.5:

$$\beta_k = a'_{k1} + a'_{k2} + \ldots + a'_{kn} + b'_k \ (k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m)$$

обчислюється за формулою

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{a_{kj}\alpha_i}{a_{ij}},$$

тобто за тією самою формулою, за якою обчислюються всі елементи табл.4.5. Справді, оскільки в табл. 4.5

$$a'_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{kj} \cdot a_{il}}{a_{ij}} \ (l = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m); \quad b_k' = b_k - \frac{a_{kj} \cdot b_i}{a_{ij}},$$

то

$$\beta_k = a'_{k1} + a'_{k2} + \ldots + a'_{kn} + b'_k = a_{k1} - \frac{a_{kj} \cdot a_{i1}}{a_{ij}} + a_{k2} - \frac{a_{kj} \cdot a_{i2}}{a_{ij}} + \ldots + a_{kn} - \frac{a_{kj} \cdot a_{in}}{a_{ij}} +$$

$$+ b_k - \frac{a_{kj} \cdot b_i}{a_{ij}} = a_{k1} + a_{k2} + \ldots + a_{kn} + b_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + b_i) = \alpha_k - \frac{a_{kj} \cdot \alpha_i}{a_{ij}}.$$

Отже, щоб проконтролювати правильність кроку перетворень Гаусса-Жордана в табл. 4.4 і 4.5, записують контрольний стовпець K. У табл. 4.5 елементи контрольного стовпця обчислюють як суму

$$\beta_k = a'_{k1} + a'_{k2} + \ldots + a'_{kn} + b'_k,$$

а також за формулою

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{a_{kj}\alpha_i}{a_{ij}}.$$

Якщо при цьому значення β_k збігаються, то елементи k–го рядка обчислено правильно.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$ методом Гаусса–Жордана [3].

Розв'язання. Результати обчислення подано в таблиці 4.6

Таблиця 4.6

x_1	x_2	x_3	b_i	K
2	–4	3	1	2
$\boxed{1}$	–2	4	2	6
3	–1	5	3	9
0	0	$\boxed{-5}$	–5	–10
1	–2	4	3	6
0	5	–7	–7	–9
0	0	1	1	2
1	–2	0	–1	–2
0	$\boxed{5}$	0	0	5
0	0	1	1	2
1	0	0	–1	0
0	1	0	0	1

Отже, система сумісна і має розв'язок $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$.

Обчислення оберненої матриці методом Гаусса–Жордана

Нехай задано неособливу квадратну матрицю порядку n

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими, записану у векторно–матричній формі $AX=B$, де X – вектор–стовпець невідомих; B – вектор–стовпець вільних членів. За допомогою цієї системи знайдемо обернену матрицю

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покладемо послідовно $B=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, ..., $B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$.

Якщо $B=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, то $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\\ \vdots\\c_{n1}\end{pmatrix}$.

Якщо $B=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, то $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{12}\\c_{22}\\ \vdots\\c_{n2}\end{pmatrix}$.

Якщо $B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$, то $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{1n}\\c_{2n}\\ \vdots\\c_{nn}\end{pmatrix}$.

Таким чином, розв'язки n систем $AX=B$ при

$$B=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \dots,\ B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

визначають відповідно 1–й, 2–й, ..., n–й стовпці обернено матриці A^{-1}.

Ці n систем, що відрізняються тільки вільними членами, можна розв'язувати одночасно і методом Гаусса–Жордана, записавши їх в одній таблиці. Стовпці вільних членів утворюють одиничну матрицю E. Якщо розв'язувальні елементи вибирати по головній діагоналі, то після n кроків перетворень Гаусса–Жордана в таблиці на місці матриці A дістанемо одиничну матрицю E, а на місці одиничної матриці – обернену матрицю A^{-1}. Якщо розв'язувальні елементи вибирати довільно, то в останній таблиці треба рядки переставити так, щоб матриця стала одиничною.

Якщо обернену матрицю знаходять за методом Гаусса– Жордана, то не треба досліджувати задану матрицю на особливість чи на неособливість, обчислюючи її визначник. Якщо можливе число кроків перетворень r менше від порядку матриці n ($r < n$), то матриця особлива і оберненої немає.

Приклад 1. Знайти обернену матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання наведено у таблиці 4.7

Таблиця 4.7

A	E	K
3 −1 0	1 0 0	3
−2 $\boxed{1}$ 1	0 1 0	1
2 −1 4	0 0 1	6
$\boxed{1}$ 0 1	1 1 0	4
−2 1 1	0 1 0	1
0 0 5	0 1 1	7
1 0 1	1 1 0	4
0 1 3	2 3 0	9
0 0 5	0 1 $\boxed{1}$	7
1 0 0	$1\ \frac{4}{5}\ -\frac{1}{5}$	$\frac{13}{5}$
0 1 0	$2\ \frac{12}{5}\ -\frac{3}{5}$	$\frac{24}{5}$
0 0 1	$0\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 18 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо табл. 4.8 і виконаємо над її елементами максимально можливе число кроків перетворень Гаусса-Жордана.

У таблиці виконано $r = 3$ кроків виключень Гаусса-Жордана, а $n = 4 (r < n)$, тому матриця A є особливою і оберненої матриці A^{-1} немає.

Зазначимо, що за допомогою виключень методу Гаусса-Жордана можна також обчислити визначники n–го порядку.

Таблиця 4.8

A	E	K
$\begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 18 & 2 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 23 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & \boxed{-1} \\ 0 & -4 & -10 & 5 \\ 0 & 20 & 5 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -9 \\ 15 \\ -11 \\ 29 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 1 \\ 0 & 36 & \boxed{15} & 0 \\ 0 & 36 & 15 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -9 \\ -15 \\ 64 \\ 59 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{36}{15} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{1}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{15} & \frac{5}{15} & \frac{1}{15} & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{7}{15} \\ \frac{19}{3} \\ \frac{64}{15} \\ -5 \end{matrix}$

Згідно з властивістю 5 визначників кожний крок перетворень Гаусса-Жордана не змінює величини визначника, якщо множити його на розв'язувальний елемент. Виконуючи над елементами визначника n кроків перетворень Гаусса-Жордана, зводимо його до вигляду, коли всі елементи кожного рядка і стовпця, крім одного (який дорівнює одиниці), дорівнюють нулю. Переставивши в такому визначнику рядки або стовпці між собою, зведемо його до діагонального вигляду. Якщо при перетвореннях визначника дістаємо рядок або стовпець, складений з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

4.4.5. Схема Халецького

Нехай система лінійних рівнянь дана в матричному вигляді

$$Ax = b, \tag{4.27}$$

де $A = [a_{ij}]$ – квадратна матриця порядку n, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$ – вектори–стовпці.

Представимо матрицю A в вигляді добутку нижньої трикутної матриці $C = [c_{ij}]$ із з'єднаною діагоналлю, тобто

$$A = CB, \tag{4.28}$$

де $C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$,

і елементи c_{ij} та b_{ij} визначають за формулами

$$c_{i1} = a_{i1}, \; c_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} b_{kj} \text{ при } 1 < j \le i, \tag{4.29}$$

$$b_{ij} = a_{1j}/c_{11}, \; b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} b_{kj} / c_{ii} \text{ при } 1 < i < j. \tag{4.30}$$

Рівняння (4.27) можна записати в такому вигляді:

$$CBx = b. \tag{4.31}$$

Добуток Bx є вектором–стовпцем, котрий позначимо через y:

$$Bx = y. \tag{4.32}$$

Тоді рівняння (4.33) перепишемо у вигляді

$$Cy = b, \tag{4.33}$$

або

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ a_{3,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}. \tag{4.33'}$$

Тут елементи $c_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ відомі, тому що матриця A системи (4.29) вважається вже розкладеною на добуток двох трикутних матриць C и B [формули (4.29) і (4.30)].

Перемноживши матриці в лівій частині рівності (4.33'), одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_{11} y_{11} = a_{1,n+1}, \\ c_{21} y_1 + c_{22} y_2 = a_{2,n+1}, \\ c_{31} y_1 + c_{32} y_2 + c_{33} y_3 = a_{3,n+1}, \\ c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + c_{n3} y_3 + \dots + c_{nn} y_n = a_{n,n+1}, \end{cases} \tag{4.34}$$

звідки одержуємо такі формули для визначення невідомих:

$$y_1 = a_{1,n+1}/c_{11}; \; y_i = a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} y_k \Big/ c_{ii}, i > 1. \tag{4.35}$$

Невідомі y_i зручно обчислювати разом з елементами b_{ij}.

Після того як всі $y_i (i = 1, 2, ..., n)$ визначені за формулами (4.35), підставляємо їх у рівняння (4.32):

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Помноживши, одержимо систему

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n = y_1, \\ x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = y_2, \\ x_3 + \dots + b_{3n}x_n = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = y_n. \end{cases} \quad (4.36)$$

Оскільки коефіцієнти b_{ij} визначені [див. формулу (4.30)], то значення невідомих, починаючи з останнього, обчислюємо за такими формулами:

$$x_n = y_n, \; x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}x_k, \; i < n. \quad (4.37)$$

Цей метод одержав назву *схема Халецького*. У схемі застосовується звичайний контроль за допомогою сум [1 – 4]. Під час розв'язання рівнянь за схемою Халецького зручно користуватися таблицею 4.9.

Таблиця 4.9

	x_1	x_2	x_3	x_4	Вільні члени	$\sum$	x_1	x_2	x_3	x_4	Вільні члени	$\sum$
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{15}	1	2	–1	2	4	8
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{25}	2	3	–1	4	6	14
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{35}	4	5	–3	8	12	26
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{45}	2	3	–2	3	6	12
II	c_{11} 1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	$y_1 = b_{15}$	b_{16}	1 1	2	-1	2	4	8
	c_{21}	c_{22} 1	b_{23}	b_{24}	$y_2 = b_{25}$	b_{26}	2	-1 1	-1	0	2	2
	c_{31}	c_{32}	c_{33} 1	b_{34}	$y_3 = b_{35}$	b_{36}	4	-3	-2 1	0	-1	0
	c_{41}	c_{42}	c_{34}	c_{44} 1	$y_4 = b_{45}$	b_{46}	2	-1	-1	-1 1	1	2
III	x_1	x_2	x_3	x_4			-1	1	-1	1		

Приклад. Використовуючи схему Халецького, розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \quad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$$

Розв'язання

В I розділ таблиці вписуємо матрицю коефіцієнтів, її вільні члени і контрольні суми.

Далі заповнюємо розділ II за правилом, тобто спочатку знайдемо 1–й стовпець матриці *C*, потім 2–й рядок матриці *B*, 2–й стовпець матриці *C*, 3–й рядок матриці *B* тощо.

У розділі III визначаємо x_i.

Поточний контроль здійснюється за допомогою стовпця $\sum$, над яким виконуються ті ж дії , що і над стовпцем вільних членів.

1) Елементи 1–го стовпця матриці *C* знаходимо за формулою

$$c_{i1} = a_{i1} \ (i = 1,2,3,4)$$

Далі переписуємо 1–й стовпець розділу I у 1–й стовпець розділу II:

$$c_{11} = a_{11} = 1, c_{21} = a_{21} = 2, c_{31} = a_{31} = 4, c_{41} = a_{41} = 2.$$

2) Елементи 1–го рядка матриці *B* знаходимо за формулою

$$b_{ij} = a_{1j} / c_{11} \ (j = 2,3,4,5,6), \text{ тобто}$$

$$b_{12} = a_{12} / c_{11} = 2; \ b_{13} = a_{13} / c_{11} = -1; \ b_{14} = a_{14} / c_{11} = 2;$$

$$y_1 = b_{15} = a_{15} / c_{11} = 4; \ b_{16} = a_{16} / c_{11} = 8;$$

$$b_{16} = 1 + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} = 1 + 2 - 1 + 2 + 4 = 8.$$

3) Елементи 2–го стовпця матриці *B* знаходимо за формулою

$$c_{j2} = a_{j2} - c_{j1}b_{12} \ (i = 2,3,4) \text{ тобто}$$

$$c_{22} = a_{22} - c_{21}b_{12} = 3 - 2 \cdot 2 = -1; \ c_{32} = a_{32} - c_{31}b_{12} = 5 - 4 \cdot 2 = -3;$$

$$c_{42} = a_{42} - c_{41}b_{12} = 3 - 2 \cdot 2 = -1;$$

4) Елементи 2–го рядка матриці *B* знаходимо за формулою

$$b_{2j} = \frac{a_{2j} - c_{21}b_{1j}}{c_{22}} \ (j = 3,4,5,6),$$

$$b_{23} = \frac{a_{23} - c_{21}b_{13}}{c_{22}} = \frac{-1 - 2 \cdot (-1)}{-1} = -1; \ b_{24} = \frac{a_{24} - c_{21}b_{14}}{c_{22}} = \frac{4 - 2 \cdot 2}{-1} = 0;$$

$$y_2 = b_{25} = \frac{a_{25} - c_{21}b_{15}}{c_{22}} = \frac{6 - 2 \cdot 4}{-1} = 2;$$

$$b_{26} = \frac{a_{26} - c_{21}b_{16}}{c_{22}} = \frac{14 - 2 \cdot 8}{-1} = 2;$$

$$b_{26} = 1 + b_{23} + b_{24} + b_{25} = 1 - 1 + 0 + 2.$$

5) Елементи 3–го стовпця матриці C знаходимо за формулою

$$c_{i3} = a_{i3} - c_{i1}b_{13} - c_{i2}b_{23} \quad (i = 3,4),$$

тобто
$$c_{33} = a_{33} - c_{31}b_{13} - c_{32}b_{23} = 3 - 4 \cdot (-1) - (-3)(-1) = -2;$$
$$c_{43} = a_{43} - c_{41}b_{13} - c_{42}b_{23} = -2 - 2 \cdot (-1) - (-1)(-1) = 1.$$

6) Елементи 3–го рядка матриці B знаходимо за формулою

$$b_{3j} = \frac{a_{3j} - c_{31}b_{1j} - c_{32}b_{2j}}{c_{33}} \quad (j = 4,5,6),$$

тобто
$$b_{34} = \frac{a_{34} - c_{31}b_{14} - c_{32}b_{24}}{c_{33}} = \frac{8 - 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 0}{-2} = 0;$$
$$y_3 = b_{35} = \frac{a_{35} - c_{31}b_{15} - c_{32}b_{25}}{c_{33}} = \frac{12 - 4 \cdot 4 - (-3) \cdot 2}{-2} = -1;$$
$$b_{36} = \frac{a_{36} - c_{31}b_{16} - c_{32}b_{26}}{c_{33}} = \frac{26 - 4 \cdot 8 - (-3) \cdot 2}{-2} = 0;$$
$$b_{36} = 1 + b_{34} + b_{35} = 1 + 0 - 1 = 0.$$

7) Елементи 4–го стовпця матриці C знаходимо за формулою

$$c_{44} = a_{44} - c_{41}b_{14} - c_{42}b_{24} - c_{43}b_{34},$$

тобто $c_{44} = 3 - 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 - 4 \cdot 0 = -1.$

8) Елементи 4–го рядка матриці B знаходимо за формулою

$$b_{4j} = \frac{a_{4j} - c_{41}b_{1j} - c_{42}b_{2j} - c_{43}b_{3j}}{c_{44}} \quad (j = 5,6),$$

тобто
$$y_4 = b_{45} = \frac{a_{45} - c_{41}b_{15} - c_{42}b_{25} - c_{43}b_{35}}{c_{44}} = \frac{6 - 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 - (-1)(-1)}{-1} = 1;$$

$$b_{46} = \frac{a_{46} - c_{41}b_{16} - c_{42}b_{26} - c_{43}b_{36}}{c_{44}} = \frac{12 - 2 \cdot 8 - (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 0}{-1} = 2;$$
$$b_{46} = 1 + b_{45} = 1 + 1 = 2.$$

9) Обчислюємо x_i за формулою $x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}x_k;\ i = 1,2,3,4,$

де $y_1 = 4,\ y_2 = 2,\ y_3 = -1,\ y_4 = 1.$

Маємо:
$$x_4 = y_4 = 1;$$
$$x_3 = y_3 - b_{34}x_4 = -1 - 0 \cdot 1 = -1;$$
$$x_2 = y_2 - b_{23}x_3 - b_{24}x_4 = 2 - (-1)(-1) - 0 \cdot 1 = 1;$$
$$x_1 = y_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4 = 4 - 2 \cdot 1 - (-1)(-1) - 2 \cdot 1 = -1.$$

Отже, $x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1;\ x_4 = 1.$

4.4.6. Метод квадратних коренів

Цей метод використовують для знаходження розв'язку СЛАР

$$Ax = b, \tag{4.38}$$

в якій матриця $A = (a_{ij})$ симетрична, тобто елементи, симетричні відносно головної діагоналі, рівні між собою: $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j=1,2,...n)$ [1]. Відомо, що симетричну матрицю A завжди можна подати у вигляді добутку двох взаємно транспонованих трикутних матриць

$$A = T'T, \tag{4.39}$$

де $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & ... & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & ... & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & ... & t_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & t_{nn} \end{pmatrix}$; $T' = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 & ... & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & ... & t_{nn} \end{pmatrix}$.

Якщо тепер перемножити матриці T' і T, а потім прирівняти відповідні елементи матриць у рівності (4.39), то для знаходження $n(n+1)/2$ елементів t_{ij} $(i = 1,2,...,n;\ j = i,i+1,...,n)$ матриці T дістанемо систему $n(n+1)/2$ рівнянь:

$$\begin{cases} t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + ...t_{ii}^2 = a_{ii}(i = 1,2,...,n) \\ t_{1i}t_{1j} + t_{2i}t_{2j} + ...t_{ii}t_{ij} = a_{ij}(i = 1,2,...,n;\ j = i+1, i+2,...,n; i < j). \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо послідовно елементи матриці T (i T'). Маємо

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, t_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{t_{11}}(j = 2,3,...,n), \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}(1 < i \text{ £ } n), \\ t_{ji} = (a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}/t_{ii})(i < j), \\ t_{ij} = 0(i > j). \end{cases} \tag{4.40}$$

З рівності (4.38) випливає, що система (4.38) рівносильна двом системам рівнянь з трикутними матрицями $T'y = b$ і $Tx = y$.

Розв'язавши систему $T'y = b$ з нижньою трикутною матрицею T', знайдемо

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}y_k}{t_{ii}}(1 < i \le n). \tag{4.41}$$

Розв'язавши потім систему $Tx = y$ з верхньою трикутною матрицею T, знайдемо шуканий розв'язок системи (4.38)

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}},\; x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} t_{ik}x_k}{t_{ii}} (1 \le i < n). \qquad (4.42)$$

Всі обчислення за формулами (4.40)–(4.42) доцільно виконувати за спеціальною схемою (табл. 4.10), в якій забезпечується проміжний і заключний контролі введенням контрольних і рядкових сум. У методі квадратних коренів, як і в методі Гаусса, поряд з системою (4.40) одночасно розв'язують допоміжну систему

$$A\overline{x} = s. \qquad (4.43)$$

Таблиця 4.10

Крок перетворення	Рядок	Коефіцієнти при змінних				Вільний член	Контроль	
		x_1	x_2	…	x_n		Контрольна сума	Рядкова сума
1	2	3	4	…	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$
1	1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1	s_1	
	2		a_{22}		a_{2n}	b_2	s_2	
	…	…	…	…	…	…	…	
	n				a_{nn}	b_n	s_n	
2	$n+1$	t_{11}	t_{12}	…	t_{1n}	y_1	z_1	σ_1
	$n+2$		t_{12}	…	t_{2n}	y_2	z_2	σ_2
	…			…	…	…	…	…
	$2n$				t_{nn}	y_n	z_n	σ_n
3	$2n+1$				1	x_n	$\overline{x}_n$	$1+x_n$
	…			…	…	…	…	…
	$3n-1$		1			x_2	$\overline{x}_2$	$1+x_2$
	$3n$	1				x_1	$\overline{x}_1$	$1+x_1$

Системи (4.38 і 4.43) мають однакову матрицю коефіцієнтів A, але різні вільні члени: в системі (4.38) – це числа $b_i \; (i = 1,2,...,n)$, а в системі (4.43) – числа

$$s_i = b_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad (i = 1,2,...,n) \tag{4.44}$$

Розв'язки цих систем зв'язані співвідношенням:

$$\overline{x}_i = x_i + 1 \quad (i = 1,2,...,n). \tag{4.45}$$

Оскільки система (4.43) рівносильна двом системам з трикутними матрицями $T_z' = s \quad T\overline{x} = z$ то елементи вектора z обчислюють за формулами

$$z_1 = \frac{s_1}{t_{11}}, \quad z_i = \frac{s_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} z_{ki}}{t_{ii}} \quad (1 < i \le n), \tag{4.46}$$

а елементи вектора $\overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{z_n}{t_{nn}}, \quad \overline{x}_i = \frac{z_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik} \overline{x}_k}{t_{ii}} \quad (1 \le i < n). \tag{4.47}$$

Поточний контроль здійснюють порівнянням контрольних сум z_i (стовпець $n+4$) з розрядковими сумами σ_i (стовпець $n+5$), які обчислюють за формулами

$$\sigma_i = y_i + \sum_{k=i}^{n} t_{ik} \quad (i = 1,2,3\ldots,n). \tag{4.48}$$

Якщо обчислення виконано правильно, то суми збігаються, або внаслідок округлення проміжних обчислень відрізняються між собою на 1–2 одиниці молодшого розряду. Всі проміжні обчислення доцільно виконувати з 1–2 запасними цифрами.

Заключний контроль, як і у методі Гаусса, можна здійснити двояко. Або перевірити виконання рівностей (4.45), або (і) обчислити непогодження, підставивши знайдений розв'язок у систему (4.38).

Розрахункова таблиця 4.10 складається з трьох частин. У першій частині записано коефіцієнти і вільні члени системи (4.38), а також обчислені за формулами (4.44) контрольні суми $s_i (i = 1,2,\ldots,n)$ (рядкові суми можна не записувати, бо вони збігаються з контрольними); у другій – знайдені за формулами (4.40 коефіцієнти $t_{ij} (i = 1,2,\ldots,n; j = = i+1, i+2,\ldots,n)$ матриці T, обчислені за формулами (4.41 і 4.46) вектори y і z, а також обчислені за формулами (4.48) рядкові суми $\sigma_i (i = 1,2,\ldots,n)$; у третій – обчислені за формулами (4.42) і (4.47) вектори x і $\overline{x}$. Дві перші частини – прямий хід, а третя – зворотний.

Приклад. Методом квадратних коренів розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3,45x_1 + 0,78x_2 - 0,97x_3 = 3,229, \\ 0,78x_1 + 2,63x_2 - 0,89x_3 = 4,026, \\ -0,97x_1 - 0,89x_2 + 2,41x_3 = 5,030, \end{cases} \qquad (4.49)$$

коефіцієнти і вільні члени якої точні числа.

Розв'язання. Всі проміжні обчислення виконуємо з шістьма десятковими знаками, а остаточний результат подамо з п'ятьма десятковими знаками.

Прямий хід. Спочатку в перші три рядки табл. 4.11 заносимо коефіцієнти системи (4.49), а в 7–й стовпець заносимо суми коефіцієнтів

Таблиця 4.11

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3,45	0,78	–0,97	3,229	6,489	
	2		2,63	–0,89	4,026	6,546	
	3			2,41	5,030	5,580	
2	4	1,857418	0,419938	–0,522230	1,738435	3,493559	3,493561
	5		1,566414	–0,428173	2,104147	3,242388	3,242388
	6			1,397835	4,892424	6,290259	6,290259
3	7			1	3,500001	4,500001	4,500001
	8		1		2,300000	3,300000	3,300000
	9	1			1,399999	2,399998	2,399999

і вільних членів кожного рядка (контрольні суми), обчислені за формулами (4.44). Далі переходимо до обчислення за формулами (4.40) елементів t_{ik} матриці T. Для $n = 3$ ці формули набирають вигляду

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \; t_{12} = \frac{a_{11}}{t_{11}}, \; t_{13} = \frac{a_{13}}{t_{11}},$$

$$t_{22} = \sqrt{a_{22} - t_{12}^2}, \; t_{23} = \frac{a_{23} - t_{12}t_{13}}{t_{22}}, \; t_{33} = \sqrt{a_{33} - t_{13}^2 - t_{23}^2}.$$

За цими формулами знаходимо:

$$t_{11} = 1,857418, \; t_{12} = 0,419938, \; t_{13} = -0,522230,$$

$$t_{22} = 1,566414, \; t_{23} = -0,428173, \; t_{33} = 1,397835.$$

Якщо $n = 3$, то з формул (4.41) і (4.46) для обчислення елементів векторів

y і z дістаємо

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, \quad y_2 = \frac{b_2 - t_{12}y_1}{t_{22}}, \quad y_3 = \frac{b_3 - t_{13}y_1 - t_{23}y_2}{t_{33}},$$

$$z_1 = \frac{s_1}{t_{11}}, \quad z_2 = \frac{s_2 - t_{12}z_1}{t_{22}}, \quad z_3 = \frac{s_3 - t_{13}z_1 - t_{23}z_2}{t_{33}}.$$

Звідси маємо

$$y_1 = 1{,}738435, \quad y_2 = 2{,}104147, \quad y_3 = 4{,}892424;$$

$$z_1 = 3{,}493559, \quad z_2 = 3{,}242388, \quad z_3 = 6{,}290259.$$

Поточний контроль здійснюємо, порівнюючи значення контрольних (стовпець 7) і рядкових (стовпець 8) сум. Рядкові суми обчислюють за формулами (4.48), які для $n = 3$ набирають вигляду

$$t_{11} + t_{12} + t_{13} + y_1 = \sigma_1, \quad t_{22} + t_{23} + y_2 = \sigma_2, \quad t_{33} + y_3 = \sigma_3.$$

Найбільша розбіжність між контрольною і рядковою сумами дорівнює двом одиницям шостого десяткового розряду, що є результатом округлення проміжних результатів і цілком допустимо.

Зворотний хід. З формул (4.42) і (4.47) для обчислення елементів векторів x і $\overline{x}$ для $n = 3$ дістаємо

$$x_3 = \frac{y_3}{t_{33}}, \quad x_2 = \frac{y_2 - t_{23}x_3}{t_{22}}, \quad x_1 = \frac{y_1 - t_{13}x_3 - t_{12}x_2}{t_{11}};$$

$$\overline{x}_3 = \frac{z_3}{t_{33}}, \quad \overline{x}_2 = \frac{z_2 - t_{23}\overline{x}_3}{t_{22}}, \quad \overline{x}_1 = \frac{z_1 - t_{13}\overline{x}_3 - t_{12}\overline{x}_2}{t_{11}}.$$

Користуючись цими формулами, знаходимо

$$x_3 = 3{,}500001, \quad x_2 = 2{,}300000, \quad x_1 = 1{,}399999;$$

$$\overline{x}_3 = 4{,}500001, \quad x_2 = 3{,}300000, \quad x_1 = 2{,}399998.$$

Контроль обчислень здійснюємо перевіркою співвідношень (4.44). Всі обчислення заведемо в табл. 4.11.

З табл. 4.11 видно, що з точністю до $0{,}5 \cdot 10^{-5}$ $x_1 = 1{,}40000$, $x_2 = 2{,}30000$, $x_3 = 3{,}50000$. Підставивши ці значення в систему (4.49) впевнимось, що вони задовольняють систему точно, адже відповідні непогодження дорівнюють нулю.

4.5. Ітераційні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

4.5.1. Метод ітерацій

Наближені методи розв'язання СЛАР дозволяють отримувати значення коренів системи з заданою точністю у вигляді межі послідовності декількох векторів. Процес побудови такої послідовності називається *ітераційним* (таким, що повторюється). Ефективність використання наближених методів залежить від вибору початкового вектора і швидкості сходимості процесу [1, 3, 4, 5].

Нехай дана система n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4.50}$$

Запишемо систему (4.52) в матричному вигляді:

$$Ax = b, \tag{4.51}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Представимо, що діагональні елементи $a_{ii} \neq 0 \ (i = 1,2,\ldots,n)$, виразимо x_1 через перше рівняння системи, x_2 – через друге рівняння тощо. В результаті отримаємо систему, еквівалентну системі (4.52):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_{11}}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}. \end{cases} \tag{4.52}$$

Позначимо $b_i / a_{ii} = \beta_i; \ -a_{ij} / a_{ii} = \alpha_{ij}$, де $i = 1,2,\ldots,n; \ j = 1,2,\ldots,n$. Тоді система (4.52) запишеться так:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}. \end{cases} \tag{4.52'}$$

Система (4.52') називається системою, приведеною до *нормального вигляду.*

Введемо позначення $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$.

Запишемо систему (4.52') в матричній формі:

$$x = \beta + \alpha x,$$

або

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{4.53}$$

Розв'яжемо систему (4.53) методом послідовних наближень. За нульове наближення візьмемо стовпець вільних членів:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ – нульове наближення,}$$

Далі побудуємо матриці–стовпці

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \text{ – перше наближення;}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \text{ – друге наближення}$$

Взагалі, будь–яке $(k+1)$– те наближення розраховують за формулою

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n). \tag{4.54}$$

Якщо в послідовність наближень $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(k)}$ має границю $x = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$, то ця границя є розв'язком системи (4.52), оскільки в силу властивостей границі $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$, тобто $x = \alpha + \beta x$.

Приклад 1. Методом ітерації з точністю до 10^{-1} розв'язати систему

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Δ 1) Приведемо систему до нормального вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2; \end{cases} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}; \ \beta = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}.$$

2) Будуємо послідовні наближення. Нульові наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}.$$

Перше наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{bmatrix}.$$

Друге наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{bmatrix}.$$

Третє наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,99 \\ 1,01 \\ 1,01 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, $x_1 = 2,99$, $x_2 = 1,01$, $x_3 = 1,01$ і з точністю до 10^{-1} отримуємо $x_1 = 3,0$, $x_2 = 1,0$, $x_3 = 1,0$.

Приклад 2. Методом ітерації з точністю до 10^{-3} розв'язати систему

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9, \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7, \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4. \end{cases} \tag{*}$$

1) Приведемо систему до нормального вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1,9}{7,6} - \dfrac{0,5}{7,6}x_2 - \dfrac{2,4}{7,6}x_3, \\ x_2 = \dfrac{9,7}{9,1} - \dfrac{2,2}{9,1}x_1 - \dfrac{4,4}{9,1}x_3, \\ x_3 = \dfrac{-1,4}{5,8} + \dfrac{1,3}{5,8}x_1 - \dfrac{0,2}{5,8}x_2, \end{cases} \quad \text{або} \begin{cases} x_1 = 0,25 - 0,065x_2 - 0,3158x_3, \\ x_2 = 1,0659 - 0,2418x_1 - 0,4847x_2, \\ x_3 = -0,2414 + 0,2241x_1 - 0,3448x_2; \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,065 & -0,3158 \\ -0,2418 & 0 & -0,4847 \\ 0,2241 & -0,3448 & 0 \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -1,0659 \\ -0,2414 \end{bmatrix}.$$

Зазначимо, що лінійну систему можна привести до нормального вигляду також записавши коефіцієнти при x_1, x_2, x_3 у відповідних рівняннях системи (*) у вигляді kx, де k – число, близьке до коефіцієнта при відповідному невідомому і на яке легко розділити коефіцієнти при невідомих і вільні члени.

Наприклад:

$10x_1 = 7,6x_1 + 2,4x_1$ (в першому рівнянні),

$10x_2 = 9,1x_2 + 0,9x_2$ (в другому рівнянні),

$10x_3 = 5,8x_3 + 4,2x_3$ (в третьому рівнянні).

Перепишемо систему (*) так:

$$\begin{cases} 10x_1 = 1,9 + 2,4x_1 - 0,5x_2 - 2,4x_3, \\ 10x_2 = 9,7 - 2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3, \\ 10x_3 = -1,4 + 1,3x_1 - 0,2x_2 + 4,2x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3, \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3, \\ 10x_3 = -0,14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3. \end{cases}$$

Матриця α і вектор β приймають вигляд

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix}.$$

2) Послідовно знаходимо

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2207 \\ 1,0771 \\ -0,1935 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,2207 \\ 1,0771 \\ -0,1935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2359 \\ 1,1034 \\ -0,2141 \end{bmatrix};$$

Таким чином, з точністю до 10^{-3} отримаємо

$$x_1 = 0,236; x_2 = 1,103; x_3 = -0,214.$$

4.5.2. Умови збіжності ітераційного процесу

Нехай дана приведена до нормального вигляду система лінійних рівнянь $x = \beta + \alpha x$. Умова збіжності ітераційного процесу така: *якщо сума модулів елементів рядків або стовпців менше одиниці, то процес ітерації для даної системи збігається до єдиного розв'язку незалежно від вибору початкового вектора.*

Отже, умову збіжності можна записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|, < 1 \ (i = 1,2,\ldots,n) \text{ або } \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|, < 1 \ (j = 1,2,\ldots,n).$$

Приклад. Для системи

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ 10x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2. \end{cases}$$

ітераційний процес збіжний, оскільки

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{aligned} &|\alpha_{11}| + |\alpha_{21}| + |\alpha_{31}| = 0,2 + 0,2 = 0,4 < 1; \\ &|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| + |\alpha_{32}| = 0,125 + 0,2 = 0,325 < 1; \\ &|\alpha_{13}| + |\alpha_{23}| + |\alpha_{33}| = 0,125 + 0,2 = 0,325 < 1. \end{aligned}$$

Аналогічно можна було б перевірити виконання збіжності, взявши суми модулів елементів рядків.

Процес ітерації свідомо збігається, якщо елементи матриці α задовольняють нерівності $|\alpha_{ij}| < 1/n;$ де n – кількість невідомих даної системи. В даному прикладі $n = 3$ і всі елементи $|\alpha_{ij}| < 1/3.$

Збіжність ітераційного процесу зв'язана з нормами матриці α такими співвідношеннями. *Якщо виконується одна з умов:*

$$\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$$

або $$\|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$

або $$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1,$$

то процес ітерації лінійної системи зводиться до єдиного розв'язку.

Так, в розглянутому вище прикладі норма

$$\|\alpha\|_2 = \max(0,4;0,325;0,325) = 0,4 < 1,$$

тобто ітераційний процес збігається.

4.5.3. Оцінювання похибки методу ітерацій

Якщо задано допустиму похибку обчислень ε і x_i – вектор точних значень невідомих лінійної системи, а $x_i^{(k)}$ є k–е наближене значення невідомих, обчислених методом ітерації, то для оцінювання похибки $\left\|x_i - x_i^{(k)}\right\| \le \varepsilon$ методу застосовується формула

$$\left\|x_i - x_i^{(k)}\right\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|} \cdot \|\beta\|, \qquad (4.55)$$

де $\|\alpha\|$ – одна із трьох норм матриці α; $\|\beta\|$ – та ж норма вектору β, а k – число ітерацій, необхідне для досягнення заданої точності. При цьому передбачається, що послідовні наближення $x_i^{(j)}$ (де j=0, 1, …; k, i=1, 2, …, n) обчислюються точно, в них відсутні похибки округлення.

Приклад. Показати, що для системи $\begin{cases} 9,9x_1 - 1,5x_2 + 2,6x_3 = 0, \\ 0,4x_1 + 13,6x_2 - 4,2x_3 = 8,2, \\ 0,7x_1 + 0,4x_2 + 7,1x_3 = -1,3. \end{cases}$

ітераційний процес збігається і визначити, скільки ітерацій потрібно виконати, щоб знайти невідомі з точністю до 10^{-4}.

Розв'язання

1) Приведемо систему до нормального вигляду

$$\begin{cases} 10x_1 = 0,1x_1 + 1,5x_2 - 2,6x_3, \\ 20x_2 = -0,4x_1 + 6,4x_2 + 4,2x_3 + 8,2, \\ 10x_3 = 0,7x_1 - 0,4x_2 + 2,9x_3 - 1,3. \end{cases}$$

або $$\begin{cases} x_1 = 0,01x_1 + 0,15x_2 - 0,26x_3, \\ x_2 = -0,02x_1 + 0,32x_2 + 0,21x_3 + 0,41, \\ x_3 = -0,07x_1 - 0,04x_2 + 0,29x_3 - 0,13. \end{cases}$$

2) Матриця системи

$$\alpha=\begin{bmatrix}0,01 & 0,15 & -0,26\\ -0,02 & 0,32 & 0,21\\ -0,07 & -0,04 & 0,29\end{bmatrix}.$$

Застосовуючи норму $\|\alpha\|_2$, отримаємо

$\|\alpha\|_2=max(0,1;0,51;0,76)=0,76<1$. Отже, ітераційний процес для даної системи збігається.

3) Маємо $\beta=\begin{bmatrix}0\\ 0,41\\ -0,13\end{bmatrix}$, $\|\beta\|_2=0+0,41+0,13=0,54$.

4) Застосовуючи формулу (4.55), знаходимо

$$\left\|x-x^{(k)}\right\|\le\frac{\|\alpha\|_2^{k+1}\cdot\|\beta\|_2}{1-\|\alpha\|_2}=\frac{0,76^{k+1}\cdot 0,54}{0,46}\le 10^{-4};$$

$$0,76^{k+1}\cdot 0,54\le 10^{-4}\cdot 0,46;0,76^{k+1}\le\frac{10^{-4}\cdot 46}{54};$$

$$(k+1)\lg 0,76\le\lg 46-\lg 54-4;$$

$$-(k+1)\cdot 0,1192\le 1,6628-1,7324-2=-4,0696;$$

$$k+1>\frac{4,0696}{0,1192}=32,9;\ k>32,9;\ k=33.$$

Теоретична оцінка числа ітерацій, необхідних для забезпечення заданої точності, практично виявляється завищеною [4].

4.5.4. Метод Зейделя

Метод Зейделя є модифікацію методу послідовних наближень. В методі Зейделя при обчисленні (k+1)–го наближеного невідомого $x_i (i>1)$ враховуються уже знайдені раніше (k+1)–і наближення невідомих $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$.

Нехай дана лінійна система, приведена до нормального вигляду:

$$\begin{cases}x_1=\beta_1+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+...+\alpha_{1n}x_n,\\ x_2=\beta_1+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+...+\alpha_{1n}x_n,\\ x_3=\beta_1+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+...+\alpha_{1n}x_n,\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ x_n=\beta_n+\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+...+\alpha_{nn}x_n.\end{cases}\tag{4.56}$$

Вибираємо довільно початкові наближення невідомих $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ і підставляємо в перше рівняння системи (4.56):

$$x_1^{(1)}=\beta_1+\alpha_{11}x_1^{(0)}+\alpha_{12}x_2^{(0)}+...+\alpha_{1n}x_n^{(0)};$$

отримуємо перше наближення $x_1^{(1)}$ і підставляємо в друге рівняння системи (4.56):

$$x_2^{(1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(1)}+\alpha_{22}x_2^{(0)}+...+\alpha_{2n}x_n^{(0)};$$

отримуємо перші наближення $x_1^{(1)}$ і $x_2^{(1)}$ і підставляємо в третє рівняння системи (4.56):

$$x_3^{(1)}=\beta_3+\alpha_{31}x_1^{(1)}+\alpha_{32}x_2^{(1)}+...+\alpha_{3n}x_n^{(0)}$$

і так далі.

Насамкінець

$$x_n^{(1)}=\beta_n+\alpha_{n1}x_1^{(1)}+\alpha_{n2}x_2^{(1)}+...+\alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)}+\alpha_{nn}x_n^{(0)}.$$

Аналогічно будуємо другі, треті і наступні ітерації. Таким чином, припустимо, що k–е наближення $x^{(k)}_i$ відоме. Методом Зейделя будуємо $(k+1)$–е наближення за формулами

$$x_1^{(k+1)}=\beta_1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(k+1)}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{2j}x_j^{(k)},$$

. . . .

$$x_n^{(k+1)}=\beta_n+\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{nj}x_j^{(k+1)}+\alpha_{nn}x_n^{(k)},$$

де k=0, 1, 2, ..., n.

Приклад. Методом Зейделя з точністю до 10^{-3} розв'язати систему

$$\begin{cases}7,6x_1+0,5x_2+2,4x_3=1,9,\\ 2,2x_1+9,1x_2+4,4x_3=9,7,\\ -1,3x_1+0,2x_2+5,8x_3=-1,4.\end{cases}$$

Розв'язання

1) Приведемо систему до нормального вигляду:

$$\begin{cases}10x_1=1,9+2,4x_1-0,5x_2-2,4x_3,\\ 10x_2=9,7-2,2x_1+0,9x_2-4,4x_3,\\ 10x_3=-1,4+1,3x_1-0,2x_2+4,2x_3.\end{cases}\text{ або }\begin{cases}x_1=0,19+0,24x_1-0,05x_2-0,125x_3,\\ x_2=0,97-0,22x_1+0,09x_2-0,44x_3,\\ x_3=-0,14+0,13x_1-0,02x_2+0,42x_3.\end{cases}$$

2) За нульові наближення візьмемо відповідні значення вільних членів:

$$x_1^{(0)}=0,19;\ x_2^{(0)}=0,97;\ x_3^{(0)}=-0,14.$$

3) Будуємо ітерації за методом Зейделя.

Перші наближення:

$$x_1^{(1)}=0,19+0,24\cdot0,19-0,05\cdot0,97-0,24\cdot(-0,14)=0,2207,$$

$$x_2^{(1)}=0,97-0,22\cdot0,2207+0,09\cdot0,97-0,44\cdot(-0,14)=1,0703,$$

$$x_3^{(1)}=-0,14+0,13\cdot0,2207-0,02\cdot1,0703+0,42\cdot(-0,14)=-0,1915.$$

Другі наближення:

$$x_1^{(2)} = 0,19 + 0,24 \cdot 0,2207 - 0,05 \cdot 1,0703 - 0,24 \cdot (-0,1915) = 0,2354,$$

$$x_2^{(2)} = 0,97 - 0,22 \cdot 0,2354 + 0,09 \cdot 1,0703 - 0,44 \cdot (-0,1915) = 1,0988,$$

$$x_3^{(2)} = -0,14 + 0,13 \cdot 0,2354 - 0,02 \cdot 1,0988 + 0,42 \cdot (-0,1915) = -0,2118.$$

Розв'язок цього прикладу приведено в табл. 4.12.

Таблиця 4.12

Номер ітерації	x_1	x_2	x_3	Номер ітерації	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	–0,14	5	0,2467	1,1138	–0,2237
1	0,2207	1,0703	–0,1915	6	0,2472	1,1143	–0,2241
2	0,2354	1,0988	–0,2118	7	0,2474	1,1145	–0,2243
3	0,2424	1,1088	–0,2196	8	0,2475	1,1145	–0,2243
4	0,2454	1,1124	–0,2226				

Побудова ітерації закінчується, коли досягнутий заданий ступінь точності, тобто коли ми отримали однакові значення в двох ітераціях підряд. В даному прикладі це ітерації 7 і 8.

Остаточна відповідь: $x_1 \approx 0,248$; $x_2 \approx 1,114$; $x_3 \approx -0,224$.

4.5.5. Умови збіжності процесу Зейделя

Процес Зейделя для лінійної системи $x = \beta + \alpha x$ так , як і процес послідовних наближень, *збігається до єдиного розв'язку при будь–якому виборі початкового наближення, якщо хоч би одна із норм матриці α менше одиниці.*

Процес Зейделя часто збігається до єдиного розв'язку швидше ніж метод процесу простої ітерації.

Приклад 2. Перевірити чи збігається процес Зейделя для системи, яка розглянута в прикладі 1.

Розв'язання

1) Після приведення системи до нормального вигляду отримаємо матрицю

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix}.$$

2) Знайдемо $\|\alpha\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_j^n |\alpha_{ij}| < 1 = \max(0,53;\ 0,75;\ 0,57) = 0,75 < 1$. Отже, процес ітерації для даної системи збігається до єдиного розв'язку, не дивлячись на те, що $\|\alpha\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_j^n |\alpha_{ij}| < 1 = \max(0,59;\ 0,16;\ 1,1) = 1,1 > 1$.

Оцінювання похибки процесу Зейделя.

Нехай дана лінійна система $x=\beta+\alpha x$. Якщо x_i – точні значення її невідомих, а x_i^k – k–е наближення, обчислене за методом Зейделя, то для оцінювання похибки цього методу застосовується формула

$$\left\|x-x^{(k)}\right\|_1 \le \frac{\|\alpha\|_1^{(k)}}{1-\|\alpha\|_1}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_1. \qquad (4.57)$$

Приклад. Підрахувати, скільки ітерацій за методом Зейделя необхідно виконати, щоб з точністю до 10^{-4} знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} 9,9x_1-1,5x_2+2,6x_3=0, \\ 0,4x_1+13,6x_2-4,2x_3=8,2, \\ 0,7x_1+0,4x_2+7,1x_3=-1,3. \end{cases}$$

Розв'язання. 1) Приведемо систему до нормального вигляду:

$$\begin{cases} x_1=0,01x_1+0,15x_2-0,26x_3, \\ x_2=0,41-0,02x_1+0,32x_2+0,21x_3, \\ x_3=-0,13-0,07x_1-0,04x_2+0,29x_3. \end{cases}$$

2) За нульові наближення приймемо стовпчик вільних членів $x_1^{(0)}=0;\ x_2^{(0)}=0,41;\ x_3^{(0)}=-0,13$ і обчислюємо перші наближення:

$$x_1^{(1)}=0,01\cdot 0+0,15\cdot 0,41-0,26\cdot(-0,13)=0,0953;$$

$$x_2^{(1)}=0,41-0,02\cdot 0,0953+0,32\cdot 0,41+0,21\cdot(-0,13)=0,5120;$$

$$x_3^{(1)}=-0,13-0,07\cdot 0,0953-0,04\cdot 0,5120+0,29\cdot(-0,13)=-0,1948.$$

3) Матриця $\alpha=\begin{bmatrix} 0,01 & 0,15 & -0,26 \\ -0,02 & 0,32 & 0,21 \\ -0,07 & -0,04 & 0,29 \end{bmatrix}$.

Отже, $\|\alpha\|_1=max(0,42;\ 0,55;\ 0,40)=0,55$. Оскільки

$$x^{(0)}\begin{bmatrix} 0 \\ 0,41 \\ -0,13 \end{bmatrix} \text{ і } x^{(1)}=\begin{bmatrix} 0,0953 \\ 0,5120 \\ -0,1948 \end{bmatrix}, \text{ то } (x^{(1)}-x^{(0)})=\begin{bmatrix} 0,0953 \\ 0,1120 \\ -0,0648 \end{bmatrix}=0,1120.$$

4) за формулою (4.57) визначаємо k:

$$10^{-4}\le\frac{0,55^k}{0,45}\cdot 0,1120;\ 10^{-4}\cdot 0,45\le 0,55^k\cdot 0,1120;$$

$$-4\lg\cdot 10+\lg 0,45\le k\lg 0,55+\lg 0,1120;$$

$$-4-0,3468\le k(-0,2596-0,9508);\ k\ge\frac{4,3468}{1,2104}=3,59;\ k=4.$$

аналогічно можна виконувати оцінювання методу Зейделя за нормою $\|\alpha\|_2$.

4.5.6. Приведення системи лінійних рівнянь до вигляду, зручного для ітерацій

Процеси послідовних наближень і Зейделя для лінійної системи $x=\beta+\alpha x$ збігається до єдиного розв'язку незалежно від вибору початкового вектора, якщо

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1\ (i=1,2,...,n) \text{ або } \sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1\ (j=1,2,...,n).$$

Отже, для збіжності вищевказаних ітераційних процесів достатньо, щоб значення елементів α_{ij} матриці α при $i\neq j$ були невеликими за абсолютною величиною. Це рівнозначно тому, що якщо для лінійної системи $Ax=b$ модулі діагональних коефіцієнтів кожного рівняння системи більше суми модулів всіх наступних коефіцієнтів (не враховуючи вільних членів), то ітераційні процеси для цієї системи збігаються, тобто якщо дана система $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,2,...,n)$, причому $\left|a_{ii}\right|>\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|$, то процеси простої ітерації і Зейделя для цієї системи збігаються [4].

Застосовуючи елементарні перетворення, лінійну систему $Ax=b$ можна замінити такою еквівалентною системою $x=\beta+\alpha x$, для якої умови збіжності будуть виконані.

Приклад. Привести до вигляду, зручного для ітерацій, таку систему

$$\begin{cases}0{,}9x_1+2{,}7x_2-3{,}8x_3=2{,}4, & (\text{А})\\ 2{,}5x_1+5{,}8x_2-0{,}5x_3=3{,}5, & (\text{Б})\\ 4{,}5x_1-2{,}1x_2+3{,}2x_3=-1{,}2. & (\text{В})\end{cases}$$

Розв'язання

1) із заданої системи виділяємо рівняння з коефіцієнтами, модулі яких більші суми модулів наступних коефіцієнтів системи. Кожне виділене рівняння вписуємо в такий рядок нової системи, щоб найбільший за модулем коефіцієнт виявився діагональним.

В рівнянні (Б) коефіцієнт при x_2 за модулем більше суми модулів наступних коефіцієнтів. Приймаємо рівняння (Б) за друге рівняння нової системи: $2{,}5x_1+5{,}8x_2-0{,}5x_3=3{,}5$, (II)

2) із залишених невикористаних рівнянь системи утворюємо лінійно незалежні між собою комбінації. Так, за перше рівняння нової системи можна взяти лінійну комбінацію (2В)+(А), тоді матимемо

$$9{,}9x_1-1{,}5x_2+2{,}6x_3=0. \quad (\text{I})$$

За третє рівняння нової системи можна прийняти лінійну комбінацію (2А)–(Б), тобто

$$0{,}7x_1+0{,}4x_2+7{,}1x_3=-1{,}3. \quad (\text{III})$$

3) В результаті отримаємо перетворену систему лінійних рівнянь (I), (II), (III), еквівалентну вихідній і задовольняє умови збіжності іте-

раційного процесу: $\begin{cases} 9,9x_1 - 1,5x_2 + 2,6x_3 = 0, \\ 2,5x_1 + 5,8x_2 - 0,5x_3 = 3,5, \\ 0,7x_1 + 0,4x_2 + 7,1x_3 = -1,3. \end{cases}$

Приводячи цю систему до нормального вигляду, отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = 0,1x_1 + 0,15x_2 - 0,26x_3, \\ x_2 = 0,35x_1 - 0,21x_2 + 0,42x_3 + 0,05, \\ x_3 = -0,13x_1 - 0,07x_2 - 0,04x_3 + 0,29; \end{cases} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,15 & -0,26 \\ 0,35 & -0,21 & 0,42 \\ -0,13 & -0,07 & -0,04 \end{bmatrix};$$

$$\|\alpha\|_2 = \max(0,58;\ 0,43;\ 0,72) = 0,72 < 1.$$

Тепер слід лише розв'язати систему одним з ітераційних методів.

4.6. Контрольні питання

1. Що називають розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
2. Наведіть означення сумісної та несумісної СЛАР.
3. Яку СЛАР називають визначеною, а яку невизначеною?
4. Які СЛАР називають еквівалентними?
5. Перерахуйте елементарні перетворення над СЛАР.
6. Поясніть, яку СЛАР називають погано обумовленою, а яку добре обумовленою.
7. Наведіть теорему Кронекера-Капеллі та два її наслідки.
8. В якому випадку СЛАР не має розв'язку, має один розв'язок, або має більше одного розв'язку?
9. Наведіть класифікацію методів розв'язання СЛАР.
10. Які методи розв'язання СЛАР називають точними? Перерахуйте кілька точних методів.
11. Наведіть загальний алгоритм розв'язання СЛАР за формулами Крамера. Які переваги та недоліки цього методу?
12. Наведіть алгоритм розв'язання СЛАР за методом Гаусса. Які переваги та недоліки цього методу?
13. Наведіть алгоритм розв'язання СЛАР за методом головних елементів. Чим даний метод відрізняється від методу Гаусса?
14. Наведіть алгоритм розв'язання СЛАР за методом Гаусса-Жордана. Які переваги та недоліки цього методу?
15. Наведіть алгоритм розв'язання СЛАР за схемою Халецького. В яких випадках доцільно застосовувати цю схему?
16. Наведіть алгоритм розв'язання СЛАР за методом квадратних коренів. Коли застосовують даний метод та в чому його переваги?
17. Які методи розв'язання СЛАР називають наближеними? Наведіть приклади наближених методів.
18. Наведіть алгоритм розв'язання СЛАР за методом простої ітерації. Коли застосовують даний метод та в чому його переваги?

19. Наведіть умови збіжності ітераційного процесу розв'язання СЛАР.
20. Яким чином оцінюють похибки методу ітерацій?
21. Наведіть алгоритм розв'язання СЛАР за методом Зейделя. В чому його переваги та недоліки?
22. Наведіть умови збіжності процесу Зейделя?
23. Наведіть рівняння оцінки похибки розв'язання СЛАР за методом Зейделя.
24. Наведіть загальний алгоритм приведення системи лінійних рівнянь до вигляду, який зручний для ітерацій.
25. Наведіть порівняльний аналіз відомих Вам методів розв'язання СЛАР.

4.7. Завдання

Задача 1. Реалізувати універсальний алгоритм розв'язання СЛАР за формулами Крамера. За допомогою складеної програми розв'язати систему згідно з нижченаведеним варіантом.

1. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}\right\}.$

2. $\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$

3. $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 14 \end{aligned}\right\}.$

4. $\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}\right\}.$

5. $\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}\right\}.$

6. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -1 \end{aligned}\right\}.$

7. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 &= 9 \end{aligned}\right\}.$

8. $\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}.$

9. $\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 11x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}\right\}.$

10. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_3 &= -8 \end{aligned}\right\}.$

11. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}.$

12. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}.$

13. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}.$

14. $\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 6x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}.$

15. $$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+3x_3+2x_4=1 \\ x_1-2x_2-3x_3+4x_4=2 \\ 3x_1+4x_2+6x_3+8x_4=5 \\ 5x_1-8x_2+9x_3+4x_4=-1 \end{array}\right\}.$$

16. $$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3-2x_4=3 \\ 2x_1-x_2-9x_3+4x_4=6 \\ 3x_1+2x_2-x_3+5x_4=1 \\ 11x_1+x_2+6x_3+15x_4=-9 \end{array}\right\}.$$

17. $$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4+x_5=8 \\ 3x_1+x_2-2x_3-4x_4-5x_5=0 \\ 4x_1-2x_2-x_3+3x_4+2x_5=17 \\ 5x_1+3x_2-6x_3-2x_4-4x_5=11 \end{array}\right\}.$$

18. $$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=1 \\ 2x_2-x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=-5 \\ -2x_2+x_3-2x_4+x_5=6 \\ x_1-2x_3-2x_5=7 \end{array}\right\}.$$

19. $$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2+x_6=1 \\ x_1+x_2-x_3-x_5=1 \\ x_1-x_2-x_4-x_6=1 \end{array}\right\}.$$

20. $$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=21 \\ x_1+x_2-x_3-x_4-x_5+x_6=3 \\ x_1+2x_2+x_3-3x_4-4x_5+5x_6=2 \\ 3x_1-x_2-2x_3+6x_4+x_5-x_6=24 \\ 4x_1+3x_2-8x_3+5x_4-2x_5+x_6=19 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4-3x_5-7x_6=5 \end{array}\right\}.$$

21. $$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3+x_4=4 \\ 3x_1+6x_2-5x_3+3x_4=5 \\ 3x_1+2x_2+7x_3+x_4=11 \\ 2x_1+4x_2+2x_3+3x_4=6 \end{array}\right\}.$$

22. $$\left.\begin{array}{r} x_1-x_2+3x_3+2x_4=11 \\ 4x_1+6x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2+2x_3-x_4=3 \\ 5x_1-x_2+2x_3+x_4=2 \end{array}\right\}.$$

23. $$\left.\begin{array}{r} x_1-x_2+3x_3+2x_4=11 \\ 10x_2-13x_3-8x_4=-45 \\ 5x_2-7x_3-7x_4=-30 \\ 4x_2-13x_3-9x_4=-53 \end{array}\right\}.$$

24. $$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+x_3=8 \\ -x_1+x_2-x_3=-2 \\ 3x_1+3x_2=9 \end{array}\right\}.$$

25. $$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=2 \\ -x_1+x_2+2x_3=2 \\ x_1+3x_2+2x_3=6 \end{array}\right\}.$$

26. $$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+3x_2+x_3=4 \end{array}\right\}.$$

27. $$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+x_3=5 \\ -x_1+2x_2+2x_3=-3 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=8 \end{array}\right\}.$$

28. $$\left.\begin{array}{l} 226{,}795x_1+0{,}125x_2+30{,}71x_3=8{,}387 \\ 0{,}125x_1+30{,}71x_2+0{,}5x_3=127{,}108 \\ 30{,}71x_1+0{,}5x_2+7x_3=45{,}04 \end{array}\right\}.$$

29. $$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+x_3=2 \\ -x_1+3x_2+2x_3=3 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \end{array}\right\}.$$

30. $$\left.\begin{array}{r} x_1-4x_2-x_4=6 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=3 \end{array}\right\}.$$

Задача 2. Напишіть програму обернення матриці А (Таблиця 4.13) і розв'яжіть систему АХ=В методом Гаусса, обмежуючись трьома знаками після коми. Принявши знайдений методом Гаусса розв'язок за початкове наближення, уточненіть його до 8-9 знаків методом простої ітерації. Підрахуйте теоретично кількість ітерацій, що слід виконати для досягнення заданої точності і порівняйте їх з практично отриманими даними.

Таблиця 4.13

Вар.	Матриця А				Матриця В	Вар.	Матриця А				Матриця В
1	0,63	1	0,11	0,34	2,08	2	1	0,47	-0,11	0,55	1,33
	0,17	1,18	-0,45	0,11	0,17		0,42	1	0,35	0,17	1,29
	0,31	-0,15	1,17	-2,35	1,28		-0,25	0,67	1	0,36	2,11
	0,58	0,21	-3,45	-1,18	0,05		0,54	-0,32	-0,74	1	0,10
3	0,77	0,04	-0,21	0,18	1,24	4	0,79	-0,12	0,34	0,16	-0,64
	-0,45	1,23	-0,06	0	-0,88		-0,34	1,18	-0,17	0,18	1,42
	-0,26	-0,34	1,11	0	0,62		-0,16	-0,34	0,85	0,31	-0,42
	-0,05	0,26	-0,34	1,12	-1,17		-0,12	0,26	0,08	0,75	0,83
5	-0,68	-0,18	0,02	0,21	-1,83	6	-0,58	-0,32	0,03	0	-0,44
	0,16	-0,88	-0,14	0,27	0,65		0,11	-1,26	-0,36	0	-1,42
	0,37	0,27	-1,02	-0,24	-2,23		0,12	0,08	-1,14	-0,24	0,83
	0,12	0,21	-0,18	-0,75	1,13		0,15	-0,35	-0,18	0	1,42
7	-0,83	0,31	-0,18	0,22	1,71	8	-0,87	0,27	-0,22	-0,18	-1,21
	-0,21	-0,67	0	0,22	-0,62		-0,21	-1	-0,45	0,18	0,33
	0,32	-0,18	-0,95	-0,19	0,89		0,12	0,13	-0,33	0,18	0,48
	0,12	0,28	-0,14	-1	-0,94		0,33	-0,41	0	-1	1,21
9	-0,81	-0,07	0,38	-0,21	0,81	10	-1	0,22	-0,11	0,31	-2,7
	-0,22	-0,92	0,11	0,33	0,64		0,38	-1	-0,12	0,22	1,5
	0,51	-0,07	-0,81	-0,11	1,71		0,11	0,23	1	-0,51	1,2
	0,33	-0,41	0	-1	1,21		0,17	-0,21	0,31	-1	0,17
11	-0,93	-0,08	0,11	-1,18	0,51	12	-0,95	-0,06	-0,12	0,14	2,17
	0,18	-0,48	0	0,21	-1,17		0,04	-1,12	0,08	0,11	1,4
	0,13	0,31	-1	-0,21	1,02		0,11	0,12	0	1,03	0,8
	0,08	0	-0,33	-0,72	0,28		0,34	0,08	-1,06	0,14	2,1
13	0	-0,19	0,27	-0,88	1,2	14	-0,88	-0,23	0,25	-0,16	1,24
	-0,33	-1	-0,07	0,21	0,92		0,33	0,03	-0,84	-0,32	-1,15
	0,11	0	1,03	-0,42	0,92		0,14	-0,66	-0,18	0,24	0,89
	-0,92	-0,03	0	-0,04	1,2		0,12	-0,05	0	-0,85	0,57
15	0,12	-1	0,32	-0,18	0,72	16	-0,86	0,23	0,18	0,17	1,42
	0,08	-0,12	-0,77	0,32	0,58		0,12	-1,14	0,08	0,09	0,83
	0,25	0,22	0,14	-1	-1,56		0,16	0,24	-1	-0,35	-1,21
	-0,77	-0,14	0,06	-0,12	-1,21		0,23	-0,08	0,05	-0,75	-0,65

Продовження таблиці 4.13

Вар.	Матриця A	Матриця B	Вар.	Матриця A	Матриця B
17	76 21 6 -34 12 -114 8 9 16 24 -100 -35 23 -8 5 -75	-142 83 -121 85	18	-83 27 -13 -11 5 -68 13 24 9 54 127 36 13 27 34 156	-21 26 23 49
19	1 2 3 9 2 1 9 4 3 9 1 4 9 1 3 4	1,11 1,16 1,24 1,55	20	-1 0,28 -0,17 0,06 0,52 -1 0,12 0,17 0,17 -0,18 -0,79 0 0,11 0,22 0,03 -0,95	142 117 0,81 -0,72
21	76 21 6 -34 12 -114 8 9 16 24 -100 35 23 -8 5 -75	142 83 121 85	22	-83 27 -13 -11 5 -68 13 24 9 54 127 36 13 27 34 156	142 26 23 49
23	25 3 5 4 5 4 3 25 3 25 4 5 4 5 25 3	1,11 1,16 1,24 1,55	24	0,12 -1 0,32 -0,18 0,08 -0,12 -0,77 0,32 0,25 0,02 0,14 -1 -0,77 -0,14 0,06 -0,12	0,72 0,58 -1,56 -1,21
25	-0,86 0,23 0,18 0,17 0,12 -1,14 0,08 0,09 0,16 0,24 -1 -0,35 0,23 -0,08 0,05 -0,75	1,42 0,83 -1,21 -0,65	26	-0,93 -0,08 0,11 -1,18 0,18 -0,48 0 0,21 0,13 0,31 -1 -0,21 0,08 0 -0,33 -0,72	0,51 -1,17 1,02 0,28
27	1 2 3 1 3 6 -5 3 3 2 7 1 2 4 2 3	4 5 11 6	28	2 -4 1 1 1 2 5 2 5 3 -1 8 6 -1 -6 9	3 5 2 1
29	0,79 -0,12 0,34 0,16 -0,34 1,18 -0,17 0,18 -0,16 -0,34 0,85 0,31 -0,12 0,26 0,08 0,75	-0,64 1,42 -0,42 0,83	30	0 -0,19 0,27 -0,88 -0,33 -1 -0,07 0,21 0,11 0 1,03 -0,42 -0,92 -0,03 0 -0,04	1,2 0,92 0,92 1,2

Задача 3. Принявши знайдений методом Гаусса розв'язок попередньої задачі за початкове наближення, виконайте уточнення розв'язку до 8-9 знаків методом Зейделя. Підрахуйте теоретично кількість ітерацій, що слід виконати для досягнення заданої точності і порівняйте їх з практично отриманими даними. За яким з ітераційних методів розв'язок отримано з меншою кількістю ітерацій?

Задача 4. За методом головного елементу, розв'язати системи рівнянь:

1. $\left.\begin{aligned} 0,40x_1+0,21x_2+0,128x_3&=0\\ x_1+0,40x_2+0,35x_3&=1\\ 0,52x_1+0,75x_2+0,40x_3&=0\end{aligned}\right\}.$

2. $\left.\begin{aligned} 0,50x_1+0,21x_2+0,128x_3&=0\\ x_1+0,50x_2+0,35x_3&=1\\ 0,52x_1+0,75x_2+0,50x_3&=0\end{aligned}\right\}.$

3. $$\left.\begin{array}{l} 0{,}70x_1+0{,}21x_2+0{,}128x_3=0 \\ x_1+0{,}70x_2+0{,}35x_3=1 \\ 0{,}52x_1+0{,}75x_2+0{,}70x_3=0 \end{array}\right\}.$$

4. $$\left.\begin{array}{l} 0{,}7x_1+0{,}21x_2+0{,}128x_3+2x_4=1 \\ x_1+0{,}7x_2+0{,}35x_3+1{,}2x_4=0 \\ 0{,}52x_1+0{,}75x_2+0{,}7x_3+1{,}39x_4=1 \\ 0{,}87x_1+0{,}92x_2+0{,}64x_3+0{,}7x_4=0 \end{array}\right\}.$$

5. $$\left.\begin{array}{l} 0{,}5x_1+0{,}21x_2+0{,}128x_3+2x_4=1 \\ x_1+0{,}5x_2+0{,}35x_3+1{,}2x_4=0 \\ 0{,}52x_1+0{,}75x_2+0{,}5x_3+1{,}39x_4=1 \\ 0{,}87x_1+0{,}92x_2+0{,}64x_3+0{,}5x_4=0 \end{array}\right\}.$$

6. $$\left.\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-0{,}1x_3-x_4=1{,}68 \\ x_1-10x_2+3x_3-0{,}621x_4=0 \\ x_1-0{,}826x_2+7x_3-x_4=1{,}328 \\ x_1-x_2+x_3-6x_4=4{,}322 \end{array}\right\}.$$

7. $$\left.\begin{array}{l} 2x_1+0{,}3261x_2+0{,}1931x_3-x_4=1{,}3412 \\ x_1-9x_2+0{,}3674x_3+3x_4=1{,}9367 \\ x_1+0{,}6931x_2+4{,}8652x_3+x_4=2{,}3654 \\ x_1-x_2+1{,}0392x_3-6{,}9347x_4=1{,}9362 \end{array}\right\}.$$

8. $$\left.\begin{array}{l} 371x+91y+35z=391 \\ 91x+35y+7z=43 \\ 35x+7y+7z=59 \end{array}\right\}.$$

9. $$\left.\begin{array}{l} 99x+35y+15z=181{,}1 \\ 35x+15y+5z=64{,}7 \\ 15x+5y+5z=24{,}8 \end{array}\right\}.$$

10. $$\left.\begin{array}{l} 99x-35y+15z=-66{,}9 \\ 35x-15y+5z=-24{,}5 \\ 15x-5y+5z=-4{,}5 \end{array}\right\}.$$

11. $$\left.\begin{array}{l} 115x+27y+19z=100 \\ 27x+19y+3z=6{,}2 \\ 19x+3y+6z=25{,}6 \end{array}\right\}.$$

12. $$\left.\begin{array}{l} 115x-27y+19z=-19{,}3 \\ 27x-19y+3z=-25{,}3 \\ 19x-3y+6z=-11{,}9 \end{array}\right\}.$$

13. $$\left.\begin{array}{l} 980x+224y+56z=-1009{,}4 \\ 224x+56y+14z=-210{,}4 \\ 56x+14y+7z=-62{,}8 \end{array}\right\}.$$

14. $$\left.\begin{array}{l} 1650x+316y+66z=530{,}5 \\ 316x+66y+16z=110{,}5 \\ 66x+16y+5z=26{,}5 \end{array}\right\}.$$

15. $$\left.\begin{array}{l} 42{,}634x+0{,}398y+11{,}48z=-50{,}512 \\ 0{,}398x+11{,}48y+0{,}2z=-0{,}154 \\ 11{,}48x+0{,}2y+5z=-8{,}02 \end{array}\right\}.$$

16. $$\left.\begin{array}{l} 41{,}8285x+0{,}001y+11{,}25z=53{,}123 \\ 0{,}001x+11{,}25y+0{,}1z=0{,}102 \\ 11{,}25x+0{,}1y+5z=16{,}3 \end{array}\right\}.$$

17. $$\left.\begin{array}{l} 87{,}526x-17{,}576y+18z=20{,}148 \\ 17{,}576x-18y+2{,}6z=28{,}98 \\ 18x-2{,}6y+6z=11{,}4 \end{array}\right\}.$$

18. $$\left.\begin{array}{l} 173{,}343x+14{,}166y+27{,}1z=564{,}453 \\ 14{,}166x+27{,}1y+0{,}6z=-105{,}893 \\ 27{,}1x+0{,}6y+7z=111{,}89 \end{array}\right\}.$$

19. $$\left.\begin{array}{l} 87{,}526x+17{,}576y+18z=37{,}023 \\ 17{,}576x+18y+2{,}6z=-5{,}67 \\ 18x-2{,}6y+6z=3{,}2 \end{array}\right\}.$$

20. $$\left.\begin{array}{l} 173{,}343x-14{,}166y+27{,}1z=6{,}071 \\ -14{,}166x+27{,}1y-0{,}6z=125{,}682 \\ 27{,}1x-0{,}6y+7z=48{,}81 \end{array}\right\}.$$

21. $$\left.\begin{array}{l} 0{,}4x_1+0{,}21x_2+0{,}128x_3+2x_4=1 \\ x_1+0{,}5x_2+0{,}35x_3+1{,}2x_4=0 \\ 0{,}52x_1+0{,}7x_2+0{,}5x_3+1{,}39x_4=0 \\ 0{,}87x_1+0{,}92x_2+0{,}64x_3+0{,}5x_4=0 \end{array}\right\}.$$

22. $$\left.\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-0{,}1x_3-x_4=1{,}88 \\ x_1-10x_2+0{,}3x_3-0{,}621x_4=0 \\ x_1-0{,}86x_2+7x_3-x_4=1{,}32 \\ x_1-4x_2+x_3-6x_4=4{,}322 \end{array}\right\}.$$

23. $\left.\begin{aligned} x_1+0,3261x_2+0,131x_3-x_4=1,3412 \\ x_1-9x_2+0,374x_3+3x_4=1,9367 \\ x_1+0,6931x_2+4,8652x_3+2x_4=2,3654 \\ x_1-x_2+0,0392x_3-6,9347x_4=1,9362 \end{aligned}\right\}.$ 24. $\left.\begin{aligned} 341x+91y+35z=391 \\ 91x+35y+3z=43 \\ 35x+7y+7z=59 \end{aligned}\right\}.$

25. $\left.\begin{aligned} 11x+35y+15z=181,1 \\ 35x+15y+5z=44,7 \\ 15x+5y+5z=4,8 \end{aligned}\right\}.$ 26. $\left.\begin{aligned} 99x-35y+11z=-6,9 \\ 35x-15y+5z=-24,5 \\ 15x-5y+10z=-4,5 \end{aligned}\right\}.$

27. $\left.\begin{aligned} 115x+17y+19z=98 \\ 23x+19y+3z=6,2 \\ 19x+y+6z=25,6 \end{aligned}\right\}.$ 28. $\left.\begin{aligned} 110x-27y+19z=-11,3 \\ 27x-10y+3z=-25,3 \\ 19x-3y+4z=-11,9 \end{aligned}\right\}.$

29. $\left.\begin{aligned} 980x+220y+56z=-109,4 \\ 224x+56y+14z=-2100,4 \\ 56x+16y+7z=-62,8 \end{aligned}\right\}.$ 30. $\left.\begin{aligned} 226,795x+0,125y+30,71z=8,387 \\ 0,125x+30,71y+0,5z=127,108 \\ 30,71x+0,5y+7z=45,04 \end{aligned}\right\}.$

Задача 5. Напишіть програму розв'язання СЛАР CX=D. Для несиметричної матриці C (таблиця 4.14) застосуйте схему Халецького, а для симетричної – методом квадратних коренів.

Таблиця 4.14

Вар	Матриця C	Матриця D	Вар	Матриця C	Матриця D
1	1 2 3 2 3 5 3 5 9	13 4 17	2	1 2 3 1 4 9 1 8 27	0,55 1,35 3,55
3	0,42 1,43 0,27 1,43 -0,84 0,93 0,27 0,93 -0,48	1 2 3	4	0,64 0,54 -0,33 0,54 -0,92 0,24 -0,33 0,24 0,78	3 2 1
5	0,5 1,77 0,39 0,84 1,79 0,95 0,24 1,03 -0,41	1,5 2,5 3	6	0,19 0,51 0,86 0,51 0,32 0,95 0,86 0,95 -0,12	0,35 0,42 0,45
7	0,64 1,54 -0,33 1,54 -0,92 0,24 -0,33 0,24 0,78	0,3 0,2 0,1	8	0,55 1,77 0,39 0,84 1,79 0,95 0,24 1,03 -0,41	1,5 2,5 3
9	0,59 1,77 1,39 0,84 1,79 0,95 1,24 1,03 -0,41	1,5 2,5 3	10	1,42 1,43 0,27 1,43 -0,84 0,93 0,27 0,93 -0,48	0,1 0,2 0,3
11	-0,93 -0,08 0,11 0,18 -0,48 0 0,13 0,31 -1	1,18 0,21 0,210	12	-1 -0,07 0,21 1 0,03 -0,42 -0,03 1 -0,04	0,92 0,92 1,2

Продовження таблиці 4.14

Вар	Матриця C	Матриця D	Вар	Матриця C	Матриця D
13	-1 -0,07 0,21 0,07 0,03 -0,42 0,21 0,42 -0,04	0,92 0,92 1,2	14	0,08 -0,12 -0,77 0,25 0,22 0,14 -0,77 -0,14 0,06	0,32 -1 -0,12
15	0,08 0,25 -0,77 0,25 0,22 0,14 -0,77 0,14 0,06	0,32 -1 -0,12	16	1 2 3 2 4 9 3 9 5	0,55 0,35 0,55
17	1 2 4 1 4 16 1 8 64	0,55 1,35 3,55	18	0,64 0,53 -0,33 0,53 -0,92 0,23 -0,33 0,23 0,78	3 2 1
19	5 3 1 3 5 3 1 3 5	11 17 19	20	11 12 13 12 13 15 13 15 19	13 4 17
21	1 2 4 2 4 7 3 6 14	0,55 1,35 3,55	22	1,64 0,53 -0,33 0,53 -0,92 0,23 -0,33 0,23 1,78	3 2 1
23	15 13 11 13 15 13 11 13 15	11 17 19	24	0,08 0,25 -1,77 0,25 0,22 0,14 -1,77 0,14 0,06	0,32 -1 -0,12
25	11 21 31 21 41 91 31 91 51	0,55 0,35 0,55	26	142 143 27 143 -84 93 27 93 -48	10 20 30
27	371 91 35 91 35 7 35 7 7	391 43 59	28	0,4 0,21 0,128 1 0,4 0,35 0,52 0,75 0,4	0 1 0
29	1 1 1 -1 1 2 1 3 6	2 2 6	30	1 2 1 2 1 -1 3 3 1	4 -1 4

ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшенко М, Я,, Головань М. С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
2. Гулин А. В., Самарський А. А. Численные методы – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Гетьманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001. – 256 с.
4. Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О.П., Смирнов Г. Л. Вычислительная математика. – М.: Вища шк., 1985. – 472 с.
5. Волков Е. А. Численне методы – М.: Наука, 1987. – 248 с.
6. Методи обчислень: Практикум на ЕОМ: Навч. посібник /. Бурківска В. Л, Войцехівський С. О., Гаврилюк І. П. та ін. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.
7. Численные методы. Учеб. пособие/ Коварцев А. Н. Самарский муниципальный комплекс непрерывного образования. Самара, 1998.-134с.
8. Маликов В. Т., Кветный Р. Н.. Вычислительные методы и применение ЭВМ: Учеб. пособие. – К.: Выща шк., 1989. – 213 с.
9. Хемминг Р. В. Численные методи для научных работников и инженеров.– М.: Наука, 1968. – 400 с.
10. Краскевич В. Е., Зеленский К. Х. Гречко В. И. Численные методы в инженерныых исследованиях К.: Вища шк., 1986. – 263 с.
11. Калитки Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
12. Гусак А. А. Элементы методов вычислений. – 2–е изд., Минск.: Изд–во БГУ, 1982. – 166 с.
13. Методы вычислений на ЭВМ.: Справочное пособие / Иванов В.В. К.: Наукова думка.– 1986. – 584 с.
14. Дубовий В. М., Кветний Р. Н. Основи застосування ЕОМ у інженерній діяльності. К.: ІСД МО України, 1994. – 285 с.
15. Бахвалов Н. С. Жидков Н. П. Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
16. Жалдак М. І., Рамський Ю. С. Чисельні методи математики: Посібник для самоосвіти вчителів. – К.: 1984. - 206 с.

Навчальне видання

Ігор Ростиславович Арсенюк
Олександр Митрофанович Роїк
Георгій Олегович Лосєв

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ

Частина 1

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено І. Р. Арсенюком

Редактор О.Д. Скалоцька

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 15.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 22.03.05р.
Формат 29,7х42 1/4
Друк різографічний
Тираж 75 прим.
Зам. № 2005-045

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 5.26

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 15.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ