І. Р. Арсенюк, О. М. Роїк, В. І. Месюра

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ

Частина 2

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. Р. Арсенюк, О. М. Роїк, В. І. Месюра

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ

Частина 2

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальності 7.080404 "Інтелектуальні системи прийняття рішень". Протокол № 7 від 24 лютого 2005 р.

Вінниця ВНТУ 2005

УДК 519
А 85

Р е ц е н з е н т и:

В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор
О. Н. Романюк, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

І. Р. Арсенюк, О. М. Роїк, В. І. Месюра
А85 **Математичні методи дослідження об'єктів та систем. Частина 2.** Навчальний посібник.– Вінниця: ВНТУ, 2005.– 128 с.

В посібнику розглянуто основні методи розв'язання нелінійних рівнянь та систем нелінійних рівнянь, наведені основні питання інтерполяції, чисельного диференціювання та інтегрування функцій, а також методи чисельного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.

Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри та програмою дисципліни ”Математичні методи дослідження об'єктів та систем”

УДК 519

ЗМІСТ

5 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

5.1 Постановка задачі

Нехай задано рівняння з однією змінною

$$f(x)=0. \qquad (5.1)$$

Знайти точні значення коренів даного рівняння можна лише для найпростіших функцій: алгебраїчних многочленів не вище четвертого степеня, деяких многочленів степеня $n \geq 5$ і деяких трансцендентних функцій [4, 12].

Універсальних методів для знаходження точних значень коренів алгебраїчних рівнянь степеня $n \geq 5$ і трансцендентних рівнянь не існує. Крім того, розв'язуючи практичні задачі, часто отримують рівняння з коефіцієнтами, які є наближеними числами. Тоді постановка задачі знаходження точних коренів немає смислу. Отже, важливого значення набувають наближені методи знаходження коренів рівняння з достатньою для практики точністю. Задача знаходження коренів рівняння (5.1) вважається розв'язаною, якщо корені обчислені із наперед заданою точністю.

Нехай x^* – точний корінь, а $\bar{x}$ – його наближене значення. Кажуть, що корінь $\bar{x}$ обчислено з наперед заданою точністю ε, якщо $|x^* - \bar{x}| \leq \varepsilon$. Нехай, $x^* \in [a,\ b]$ і $b - a \leq \varepsilon$, тоді a і b – наближені значення кореня x^* відповідно з недостачею і надлишком з точністю ε. При цьому за наближене значення $\bar{x}$ з точністю ε можна взяти будь-яке число з відрізка $[a;\ b]$.

Знаходження наближених коренів рівняння (5.1) складається з двох етапів [4, 12]: 1) відокремлення коренів, тобто знаходження досить малих відрізків, на кожному з яких міститься тільки один корінь рівняння; 2) обчислення коренів з наперед заданою точністю.

Зазначимо, що корені рівняння (5.1) можуть бути дійсними і комплексними. Далі розглянемо обчислення лише дійсних коренів рівняння (5.1).

5.2 Класифікація нелінійних рівнянь

Класифікація нелінійних рівнянь наведена на рис. 5.1. Розглянемо означення та приклади різних типів нелінійних рівнянь.

Функція є *алгебраїчною*, якщо для отримання значення функції за даним значенням x слід виконати арифметичні операції і операції піднесення до степеня з раціональним показником.

Алгебраїчна функція є *раціональною* відносно змінної x, якщо над x не виконується ніяких інших дій, крім додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до цілого степеня. Наприклад:

$$f_1(x) = x^3 + 15x^2 - 1200x + 4;\ \ f_2(x) = (x-4)(x+5);\ \ f_3(x) = \frac{3}{x+7} + \frac{4x+3}{3x^2+5}.$$

Якщо у раціональну функцію змінна x не входить як дільник або не входить у вираз, який є дільником – функція є *цілою раціональною*. Вона визначена на всій числовій осі. Так, функції: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, (де: n – натуральне число або нуль, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – будь-які дійсні числа, причому $a_0 \neq 0$; $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x+8}{3}$ – є цілими раціональними.

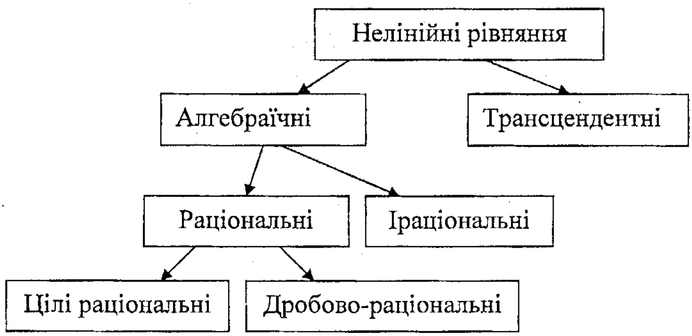


Рисунок 5.1 – Класифікація нелінійних рівнянь

Якщо в раціональній функції хоча б один раз зустрічається ділення на змінну x або змінна x не входить у вираз, який є дільником, то така функція є *дробово-раціональною.*

Так, наприклад функція

$$y = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n},$$

де m – натуральне число або нуль; n – натуральне число; $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ – будь-яке дійсне число $(a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$ – є дробово-раціональною функцією, що визначена на всій числовій осі, за винятком тих точок, в яких знаменник перетворюється на нуль.

Функція є *іраціональною,* якщо для отримання значення функції за даним значенням x необхідно виконати, крім чотирьох арифметичних дій (всіх або деяких), ще й обчислення кореня. При цьому функція буде іраціональною лише тоді, коли аргумент x знаходиться під знаком радикалу. Так, функція $y = \dfrac{3x^2 - \sqrt{x-1}}{7x-4}$ – іраціональна, а $y = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}x}$ – ні.

Другий великий клас функцій – *трансцендентні* функції. До них відносяться всі неалгебраїчні функції: показникова a^x; логарифмічна $\log_a x$; тригонометричні $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$; зворотні тригонометричні $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$ тощо.

5.3 Відокремлення та уточнення коренів

На сьогодні відомі точні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь (лінійних, квадратних, біквадратних), а також найпростіших трансцендентних рівнянь (тригонометричних, логарифмічних, показникових) [4, 12]. Проте, навіть для алгебраїчних рівнянь степеня n ($n \geq 5$) задача пошуку розв'язку у вигляді виразу з кінцевою кількістю алгебраїчних дій над деякими числами, є нерозв'язною. У цих випадках застосовують методи, що дозволяють знайти наближений розв'язок із заданою точністю. Наближені методи застосовують і тоді, коли точні методи вимагають складних і громіздких обчислень, наприклад, при розв'язанні алгебраїчних рівнянь третього і вищого степенів. З практичної точки зору такі наближені розв'язки не поступаються точним. Нехай, наприклад, при розв'язанні деякого квадратного рівняння знайдено точне значення одного з коренів $x = \sqrt{3}$. Щоб скористатися цим результатом при розв'язанні практичної задачі, слід замінити $\sqrt{3}$ його наближеним значенням із необхідною для задачі точністю.

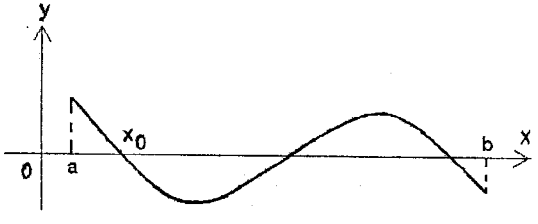
Будь-яке рівняння з одним невідомим може бути записано у вигляді

$$f(x) = 0, \tag{5.2}$$

де $f(x)$ – функція дійсних чи комплексних змінних (тут і нижче будемо вважати, що $f(x)$ – функція дійсних змінних).

Коренем рівняння (5.2) є таке значення $x = x_0$, при якому функція $f(x)$ перетворюється в нуль, тобто $f(x_0) = 0$. Дійсний корінь рівняння (5.2) геометрично є абсцисою точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox.

Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку *[a, b]*, а її значення на кінцях відрізка мають різні знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то на даному відрізку знайдеться, принаймні, одна точка x_0, така, що $f(x_0) = 0$, тобто на відрізку [a, b] є щонайменше один корінь рівняння $f(x) = 0$, (рис.5.2). Геометрично це означає, що якщо графік безперервної функції розташований по різні сторони від осі Ох, то він перетинає вісь, принаймні, в одній точці $x = x_0$ (рис.5.2).



Нехай рівняння (5.2) є алгебраїчним, тобто

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{5.3}$$

де $a_0, a_1, \ldots a_n$ – дійсні числа ($a_0 > 0$).

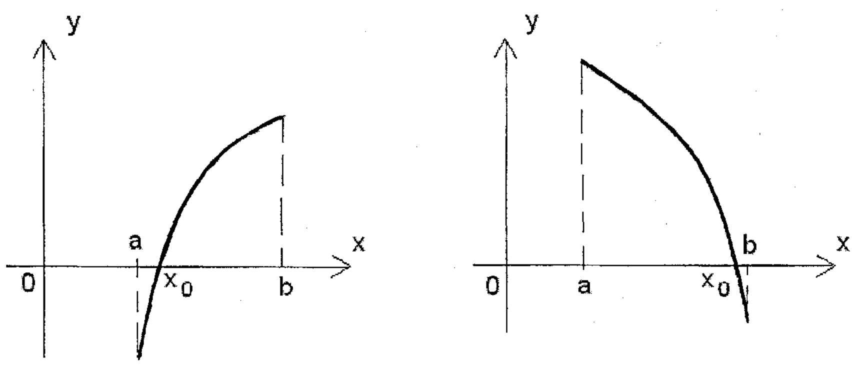
Будь-яке алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів, враховуючи і комплексні корені. Якщо $a+ib$ – корінь рівняння (5.3), то $a-ib$ – також корінь даного рівняння, тобто рівняння може мати тільки парне число комплексних коренів. Алгебраїчне рівняння (5.3) при непарному n має, щонайменше, один дійсний корінь.

Розглянемо деякі з методів пошуку дійсних коренів рівняння, в основі яких покладено ідею послідовного уточнення початкового наближення кореня. Попередньо зупинемося на питанні відокремлення коренів рівнянь.

5.4 Методи відокремлення коренів

Відокремити корінь рівняння – означає знайти такий інтервал, в середині якого є корінь даного рівняння, і цей корінь – єдиний на даному інтервалі.

Для відокремлення коренів рівняння (4.1) застосовують такий критерій: якщо на відрізку *[a, b]* функція $f(x)$ безперервна і монотонна, а її значення на його кінцях мають різні знаки, то на розглянутому відрізку існує один і тільки один корінь даного рівняння (рис. 5.2) [4, 12]. Достатня ознака монотонності функції на цьому відрізку – збереження знака похідної функції. Якщо $f'(x)>0$, функція монотонно зростає на даному відрізку (рис. 5.3, а); якщо $f'(x)<0$ – монотонно спадає (рис. 5.3, b). Якщо на відрізку *[a, b]* функція $f(x)$ не змінює знак, але у деякій точці x_0 цього відрізка перетворюється в нуль, то, або $f'(x_0)=0$ (рис. 5.4, а), або $f'(x_0)$ не існує (рис. 5.4, б). В обох випадках точка x_0 є точкою екстремуму; корінь рівняння (5.2) – границя проміжку монотонності функції $f(x)$.



a b

Рисунок 5.3

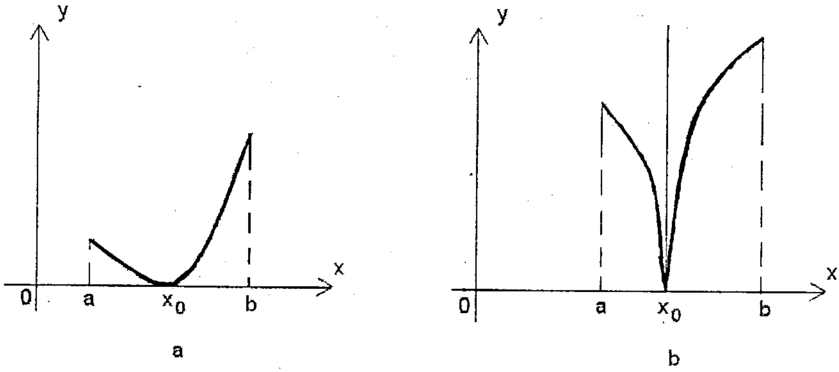


Рисунок 5.4

Відокремлення коренів рівняння (5.2) можна виконати графічно. Для цього слід побудувати графік функції $y = f(x)$, за яким можна судити про те, в яких інтервалах знаходяться його точки перетину з віссю Ох. У деяких випадках рівняння (5.2) слід подати в еквівалентному вигляді

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{5.4}$$

з таким розрахунком, щоб графіки функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ будувалися простіше, ніж графік $y = f(x)$.

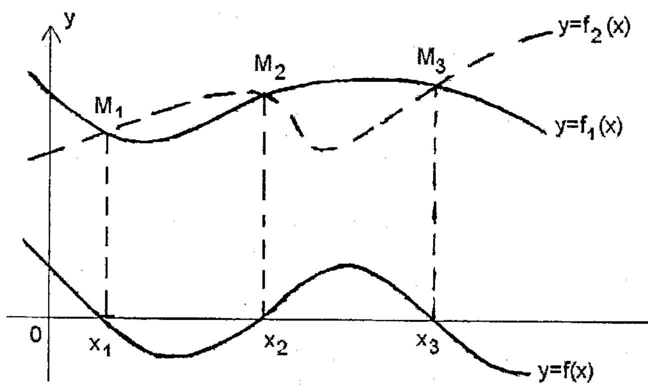


Рисунок 5.5

Знайти корінь рівняння (5.2) означає знайти абсцису точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю абсцис. Корінь рівняння (5.4) визначається як абсциса точки перетину графіків функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. При цьому в силу еквівалентності рівнянь (5.2) і (5.4) абсциси відповідних точок рівні між собою.

Якщо рівняння є алгебраїчним, то під час визначення границь коренів можна застосовувати нижченаведені правила [3, 4, 12].

Усі дійсні корені рівняння (5.4), якщо вони існують, містяться в інтервалі (-K$_0$, K$_0$), причому число K$_0$ визначається формулою

$$K_0 = 1 + A / a_0, \tag{5.5}$$

де A – найбільше з чисел $|a_1|$, $|a_2|,\dots,|a_n|$...

Знаючи лише верхню границю додатних коренів будь-якого многочлена, можна вказати інтервали, у яких знаходяться його додатні та від'ємні корені. Разом з многочленом

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \tag{5.6}$$

для якого число K$_0$ служить верхньою границею його додатних коренів, розглядають багаточлени:

$$\varphi_1(x) = x^n f(1/x); \tag{5.7}$$

$$\varphi_2(x) = f(-x); \tag{5.8}$$

$$\varphi_3(x) = x^n f(-1/x), \tag{5.9}$$

де $f(x)$ визначається за формулою (5.6).

Нехай верхніми границями додатних коренів цих многочленів будуть відповідно числа ДО$_1$, ДО$_2$, ДО$_3$. Тоді всі додатні корені многочлена $f(x)$ задовольняють нерівність

$$1/K_1 < x < K_0, \tag{5.10}$$

а всі від'ємні – нерівність

$$-K_2 < x < -1/K_3. \tag{5.11}$$

Для додатних коренів рівняння (5.2) точніше верхня границя може бути отримана за формулою Маклорена

$$K' = 1 + \sqrt[m]{M / a_0}, \tag{5.12}$$

де M – максимум модуля від'ємних коефіцієнтів рівняння; m – номер першого з від'ємних коефіцієнтів.

Кращий результат у порівнянні з вищенаведеними двома результатами дає метод Ньютона, відповідно з яким число $c>0$ буде верхньою границею додатних коренів рівняння (5.2), якщо

$$f(c) > 0, f'(c) > 0, \dots f^{(n-1)}(c) > 0. \tag{5.13}$$

Під час визначення кількості додатних коренів рівняння (5.3) користуються теоремою Декарта [4, 12]. Число додатних коренів многочлена, з врахуванням їх кратностей, дорівнює кількості змін знаків у системі коефіцієнтів цього многочлена (коефіцієнти, що дорівнюють нулю не враховуються) або менше за це число на парне число.

Якщо в деякому інтервалі виявляється кілька коренів, для їх відокремлення можна застосовувати табличний спосіб, що вимагає обчислення значень многочлена $f(x)$ при різних значеннях x. Найпростіше розв'язок цієї задачі можна отримати за схемою Горнера, яка основана на тому, що при діленні полінома $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ на x-x_0 коефіцієнти частки $q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + ... + b_{n-1}$ і залишок r визначаються формулами:

$$b_0 = a_0, b_k = x_0 \cdot b_{k-1} + a_k (k = 1,2,...,n-1), \; r = x_0 b_{n-1} + a_n = f(x_0). \quad (5.14)$$

Обчислення при цьому розташовуються у вигляді схеми Горнера:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & a_0 & a_1 & a_2 & ... & a_{n-1} & a_n \\ \hline x_0 & b_0 & b_1 = x_0 a_0 + a_1 & b_2 = x_0 b_1 + a_2 & ... & b_{n-1} = x_0 b_{n-2} + a_{n-1} & r = x_0 b_{n-1} + a_n = f(x_0) \end{array}. \quad (5.15)$$

5.4.1 Загальні властивості алгебраїчних рівнянь

Запишемо алгебраїчне рівняння n-ого степеня:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (5.16)$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня; n – найбільший степінь при невідомому; $a_0, a_1, ..., a_n$ – дійсні коефіцієнти. Як відомо, будь-яке число ξ, що перетворює многочлен в нуль (тобто, $P_n(\xi)=0$), є коренем многочлена. ξ є коренем многочлена $P_n(x)$ тільки тоді, коли $P_n(x)$ ділиться без залишку на $x-\xi$. Якщо при цьому $P_n(x)$ ділиться без залишку на $(x-\xi^{n-1})^k$ $(k \geq 1)$, але вже не ділиться на $(x-\xi^{n-1})$, то ξ називається *k-кратним* коренем (або коренем кратності k) многочлена $P_n(x)$. Корені кратності $k=1$ є простими коренями многочлена.

Виникає запитання: чи будь-який многочлен має корені? Відповідь на нього дає нижченаведена теорема.

Теорема 1 (основна теорема алгебри). *Будь-який многочлен з будь-якими числовими коефіцієнтами, степінь якого не менший одиниці, має хоча б один корінь, у загальному випадку комплексний.*

З теореми 1 випливає наслідок: *будь-який многочлен $P_n(x)$ степені n $(n>1)$ з будь-якими числовими коефіцієнтами має рівно n коренів, дійсних або комплексних, якщо кожний з коренів рахувати стільки разів, скільком дорівнює його кратність.*

Таким чином, корені алгебраїчного рівняння (5.16) можуть бути як дійсними, так і комплексними. Останні мають властивість *парної спряженості*, тобто якщо рівняння (5.16) має комплексний корінь $\xi=\alpha+\beta i$ (де α і β – дійсні числа) кратності k, то воно має і комплексний корінь $\bar{\xi} = \alpha - \beta i$ також кратності k. Модулі цих коренів однакові: $|\xi| = |\bar{\xi}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Якщо рівняння (5.16) має комплексні корені, то їх кількість – парна. Тому будь-яке алгебраїчне рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має, принаймні, один дійсний корінь.

Перш ніж обчислювати корені алгебраїчного рівняння, спочатку необхідно: а) визначити кількість коренів, що має дане рівняння; б) знайти область існування коренів (установити верхню і нижню границі розташування коренів). Після цього можна приступити до відокремлення коренів і їх уточнення.

5.4.2 Визначення кількості дійсних коренів алгебраїчного рівняння

Кількість дійсних додатних коренів алгебраїчного рівняння (5.16) можна визначити приблизно за правилом Декарта: *кількість дійсних додатних коренів алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ з дійсними коефіцієнтами (кожен підраховується стільки разів, яка його кратність) або дорівнює числу змін знака в послідовності коефіцієнтів рівняння $P_n(x)=0$, або на парне число менша (коефіцієнти, що дорівнюють нулю не враховуються).*

Кількість від'ємних коренів рівняння дорівнює числу змін знака в послідовності коефіцієнтів $P_n(-x)$ або на парне число менша.

Якщо рівняння повне, то кількість його додатних коренів дорівнює числу змін знака в послідовності коефіцієнтів або на парне число менша, а кількість від'ємних коренів – кількості сталості знака або на парне число менша.

Приклад 1. Визначити кількість додатних та від'ємних коренів рівняння $x^5-17x^4+12x^3+7x^2-x+1=0$.

Згідно з основною теоремою алгебри це рівняння має п'ять коренів (з них хоча б один є дійсним). Рівняння є повним, послідовність знаків коефіцієнтів така: +, –, +, +, –, +. Знак змінюється чотири рази. Отже, додатних коренів або 4, або 2, або жодного. Кількість сталостей знака дорівнює 1; отже, дане рівняння має один від'ємний корінь.

Приклад 2. Визначити кількість дійсних додатних та від'ємних коренів рівняння $x^6-3x^4+x^3+x^2-1=0$.

Дане рівняння має шість коренів. Послідовність знаків: +, -, +, +,- має місце три зміни знака – отже, додатних коренів або 3, або 1. Далі, для многочлена $P_n(-x)= x^6-3x^4+x^3+x^2-1$ послідовність знаків така: +, -, -, +, -. Тут також маємо три зміни знака, тому від'ємних коренів або 3, або 1.

Точнішу кількість коренів алгебраїчного рівняння можна визначити за допомогою теореми Штурма [4, 12].

Оскільки кратні корені рівняння завжди можуть бути виділені як спільні корені рівнянь $P_n(x)=0$ і $P'_n(x)=0$, без обмеження спільності можна вважати, що задане рівняння $P_n(x)=0$ має лише прості корені.

Нехай для даного алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ будь-яким способом встановлено, що всі його дійсні корені знаходяться в інтервалі (a, b) (a і b – дійсні числа, які не є коренями рівняння і $a<b$). Знайдемо першу похідну $P'_n(x)$ і поділимо на неї многочлен $P_n(x)$. Залишок від ділення $P_n(x)$ на $P'_n(x)$ візьмемо з протилежним знаком і позначимо його через $R_1(x)$.

Потім так само ділимо $P'_n(x)$ на $R_1(x)$, отриманий залишок беремо з протилежним знаком і позначаємо через $R_2(x)$. Розділивши $R_1(x)$ на $R_2(x)$ і знову взявши залишок з протилежним знаком, одержимо $R_3(x)$. Процес ділення продовжуємо доти, поки не буде отриманий залишок, що є постійною величиною. Цю величину також беремо з протилежним знаком. Одержуємо послідовність функцій

$$P_n(x),\ P'_n(x),\ R_1(x),\ R_2\ (x),\ \ldots,\ R_{m-1}(x),\ R_m=const,$$

яка називається *системою Штурма.* В цю послідовність підставляємо замість x спочатку a, потім b і підраховуємо кількість змін знака в обох випадках (позначимо отримані числа відповідно через $W(a)$ і $W(b)$).

Теорема 2 (теорема Штурма). *Якщо дійсні числа a і b (a<b) не є коренями многочлена $P_n(x)$, який немає кратних коренів, то $W(a)>W(b)$ і різниця $W(a)-W(b)$ дорівнює числу дійсних коренів многочлена $P_n(x)$, розташованих між a і b.*

За допомогою теореми Штурма можна визначити кількість від'ємних коренів рівняння $P_n(x)=0$, тобто кількість його дійсних коренів в інтервалі $(-\infty, 0)$, а також кількість додатних коренів в інтервалі $(0, +\infty)$. Теорема Штурма застосовується також і для відокремлення коренів. Функції, що входять у систему Штурма, можна множити і ділити на довільні додатні числа. Це значно спрощує роботу, коли виконується ділення із залишком.

Приклад 3. Визначити кількість дійсних коренів рівняння $5x^3-20x+3=0$, а також відокремити ці корені, користуючись теоремою Штурма.

Складаємо систему функцій Штурма. Маємо $P_n(x)=5x^3-20x+33$; $P'_n(x)=15x^2-20$. Для визначення $R_1(x)$ помножимо $P_n(x)$ на 3 і потім поділимо на $P'_n(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 15x^3-60x+9 & 15x^2-20 \\ \cline{2-2} \mp 15x^3 \pm 20x & \quad x \\ \hline -40x+9 & \end{array}$$

Виходить, $R_I(x)=40x-9$ (залишок взятий з протилежним знаком). Помножимо $P'(x)$ на 8 і розділимо цей добуток на $R_I(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 120x^2-160 & 40x-9 \\ \cline{2-2} \mp 120x^2 \pm 27x & 3x+27 \\ \hline 40(27x-160) & \\ \hline 40\cdot 27x - 40\cdot 160 & \\ \mp 40\cdot 27x \pm 9\cdot 27 & \\ \hline - & \end{array}$$

Оскільки останній залишок є постійним числом зі знаком "-" (а нас у цьому випадку цікавить саме знак постійного залишку), змінюємо його на протилежний, тобто на "+".

Складаємо таку таблицю знаків функцій, що входять у систему Штурма:

Таблиця 5.1

X	$P_n(x)$	$P'(x)$	$R_1(x)$	R_2	$W(x)$
$-\infty$	-	+	-	+	3
0	+	-	-	+	2
$+\infty$	+	+	+	+	0

З таблиці видно, що в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ містяться три дійсних корені, оскільки $W(-\infty)-W(+\infty)=3-0=3$. З них один корінь – від'ємний ($W(-\infty)-W(0)=3-2=1$), а два – додатні ($W(0)-W(+\infty)=2-0=2$). Використовуючи теорему Штурма, відокремимо корені, скоротивши інтервали – до довжини, рівної 1:

Таблиця 5.2

X	$P_n(x)$	$P'(x)$	$R_1(x)$	R_2	$W(x)$
$-\infty$	-	+	-	+	3
-3	-	+	-	+	3
-2	+	+	-	+	2
-1	+	-	+	+	2
0	+	-	-	+	2
1	-	-	+	+	1
2	+	+	+	+	0

З таблиці 5.2 видно, що корені розташовані в інтервалах
$(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(1,2)$.

Слід зазначити, що звужувати відрізки існування коренів доцільно застосовуючи певні правила. Саме такі правила і викладені нижче.

5.4.2 Знаходження області існування коренів алгебраїчного рівняння

Правило кільця. *Нехай дано алгебраїчне рівняння*

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

де $a_0, a_1,\ldots, a_n$ – дійсні коефіцієнти і нехай $A = max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, $B = = max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$. Тоді корені рівняння розташовані в круговому кільці $r<|X|<R$, де

$$r=\frac{1}{1+B/|a_n|};\ R=1+\frac{A}{|a_0|}.$$

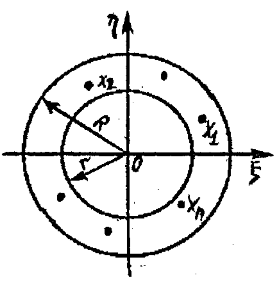


Рисунок – 5.5

При цьому r – нижня, а R – верхня границя додатних коренів алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ і $-R$, $-r$ відповідно нижня і верхня границя від'ємних коренів (рис. 5.5).

Приклад 1. Визначити границі коренів рівняння $5x^3-20x+3=0$.

Тут $|a_0|=5$, $A=20$, $|a_n| = 3$, $B=20$, тобто

$$R=1+\frac{A}{|a_0|}=1+\frac{20}{5}=5;\quad r=\frac{1}{1+B/|a_n|}=\frac{1}{1+20/3}=\frac{3}{23}\approx 0.013.$$

Тоді, якщо дійсні корені рівняння $5x^3$-$20x+3=0$ існують (а вони обов'язково існують, тому що рівняння непарного степеня), то вони розташовані в інтервалі $(-5;\ 5)$. При цьому від'ємні корені знаходяться в інтервалі $(-5; -0{,}013)$, а додатні – в інтервалі $(0{,}013;\ 5)$.

Під час розв'язання рівнянь зручно спочатку встановити границі коренів, а потім вже застосовувати теорему Штурма. За правилом кільця ці границі визначаються дуже приблизно.

Покажемо прийом точнішого визначення границь дійсних коренів алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$. Якщо R_1 – верхня границя додатних коренів $P_n(x)$, R_2 – верхня границя додатних коренів $P_n(-x)$, $R_3>0$ – верхня границя додатних коренів $x^nP_n(1/x)$ і R_4 – верхня границя додатних коренів $x^nP_n(-1/x)$, то усі ненульові дійсні корені рівняння $P_n(x)=0$ (якщо вони існують) розташовані усередині інтервалів $(-R_2,-1/R_4)$ і $(1/R_3, R_1)$.

Для визначення верхньої границі додатних коренів алгебраїчного рівняння можна скористатися методами Лагранжа або Ньютона [4, 12].

Метод Лагранжа. *Якщо коефіцієнти многочлена*

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

задовольняють умови $a_0>0$, $a_0, a_1,\ldots, a_{m-1}\geq 0$, $a_m<0$, *то верхня границя додатних коренів рівняння* $P_n(x)=0$ *знаходиться за формулою* $R=1+\sqrt[m]{B/a_0}$, *де* B *– найбільше з абсолютних значень від'ємних коефіцієнтів* $P_n(x)$.

Приклад 2. Методом Лагранжа визначити границі додатних і від'ємних коренів рівняння $8x^4-8x^2-32x+1=0$.

Тут $a_0=8>0$; $a_1=0$; $a_2=-8<0$; $a_3=-32$; $a_4=1$, $m=2$ (номер першого з від'ємних коефіцієнтів), $B=32$. Отже, $R_1=1+\sqrt{32/8}=3$.

Розглянемо многочлен $P_n(-x)=8x^4-8x^2+32x+1$. Аналогічно знайдемо, що для нього верхньою границею додатних коренів є $R_2=1+\sqrt{8/8}=2$.

Далі, для многочлена $x_4\cdot P_n(1/x)=x^4-32x^3-8x^2+8$ маємо: $a_0=1>0$; $a_1=-32<0$, тобто: $m=1$, $B=32$; $R_3=1+32=33$.

Нарешті, для многочлена $x^4P_n(-1/x)=x^4-32x^3-8x^2+8$ маємо: $a_0=1>0$; $a_1=-32<0$; $a_2=-8$; $a_3=0$; $a_4=8$, тобто $m=2$. Тому $R_4=1+\sqrt{8}=1+2\sqrt{2}=3,828$.

Отже, якщо рівняння $8x^4-8x^2+32x+1=0$ має дійсні корені, то вони обов'язково лежать в інтервалах $(-2, -1/3,828)$ і $(1/33,3)$.

Метод Ньютона.

Якщо при $x=c$ *многочлен* $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ *і його похідні* $P'_n(x), P''_n(x),\ldots$ *приймають додатні значення, то* c *є верхньою границею додатних коренів рівняння* $P_n(x)=0$.

Приклад 3. Методом Ньютона визначити верхню границю додатних коренів рівняння $8x^4-8x^2-32x+1=0$.

Знаходимо $P(x)=8x^4-8x^2-32x+1=0$; $P_n'(x)=32x^3-16x-32$;
$P_n''(x)=96x^2-16$; $P_n'''(x)=192x$; $P_n''''(x)=192$.

Перевірці підлягають значення $x>0$. При $x=c=1$ маємо $P(1)<0$. Отже, проводити далі перевірку для $x=1$ не потрібно. Перевіримо значення $x=c=2$: $P(2)>0$; $P'(2)>0$; $P'(2)>0$; $P'''(2)>0$; $P''''>0$. Таким чином, верхньою границею додатних коренів є число 2, тобто $R=2$. За нижню границю можна взяти число, обернене до R тобто $r=1/2$.

5.5 Методи уточнення коренів

5.5.1 Метод Хорд

Нехай на відрізку [a, b] знаходиться єдиний дійсний корінь рівняння $f(x)=0$, причому функція $f(x)$ неперервна на цьому відрізку. Як перше наближення кореня даного рівняння можна взяти абсцису x_1 точки перетину з віссю Ох хорди, що з'єднує кінці А*[a, f(a)], B[b, f(b)]* дуги графіка функції $f(x)$ на вказаному відрізку (рис. 5.6, 5.7).

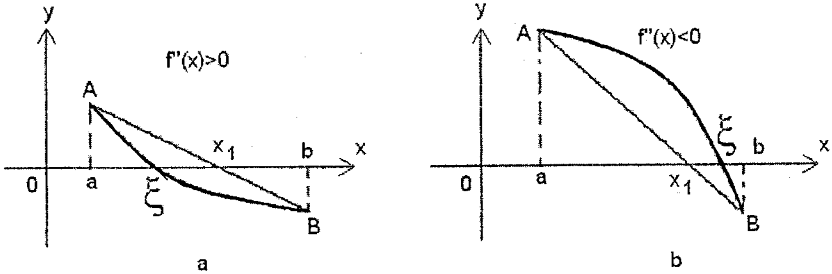


Рисунок 5.6

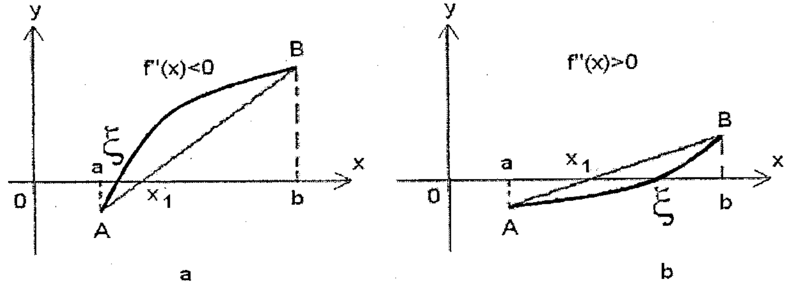


Рисунок 5.7

Рівняння хорди *AB* має вигляд: $\dfrac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\dfrac{x-a}{b-a}$. Поклавши в ньому $y_1=0$, одержимо перше наближення кореня

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a) \qquad (5.17)$$

Точка x_1 буде тим ближче до шуканого кореня ξ, чим менша кривизна графіка функції, тобто чим менша $|f''(x)|$ і більша $|f'(x)|$ на відрізку *[a, b]*. Взаєморозташування точок x_1 і ξ визначається порівнянням знаків $f(a)$, $f(b)$ і $f(x_1)$. Якщо ж на відрізку *[a, b]* зберігається знак не тільки першої, а й другої похідної функції $f(x)$, тобто на цьому відрізку функція не лише монотонна, а й її графік не має точок перегину, взаємне розташування точок

x_1 і ξ можна установити і без перевірки знака $f(x_1)$. Точка x_1 завжди ближче точки ξ до того кінця відрізка *[a, b]*, в якому знак функції обернений знаку її другої похідної (див. рис. 5.6, 5.7, а, б).

Для одержання другого наближення x_2 формулу (5.21) необхідно застосувати до того з відрізків $[a, x_1]$, $[x_1, b]$, на кінцях якого функція $f(x)$ має значення протилежних знаків.

Аналогічно обчислюються і наступні наближення. Так, якщо відоме *(n-1)*-е наближення, то *n*-е можна обчислити за формулою:

$$x_n = \frac{bf(x_{n-1}) - x_{n-1}f(b)}{f(x_{n-1}) - f(b)} (n = 1,2,3...) \qquad (5.18)$$

(рис. 5.8), коли $f(b)f''(x) > 0$.

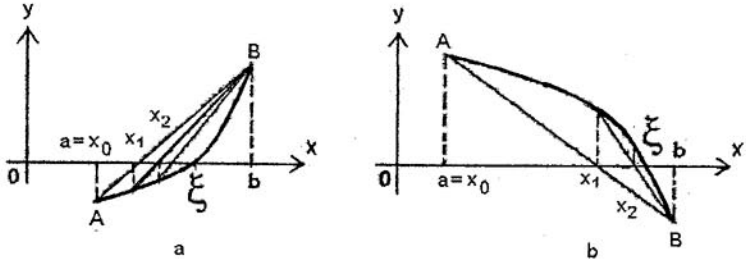


Рисунок 5.8

Або за формулою
$$x_n = \frac{af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)} \qquad (5.19)$$

(рис. 5.9), коли $f(a)f''(x) > 0$.

У першому випадку за початкове наближення приймається a, тобто $x_0=a$, у другому – b, тобто $x_0= b$.

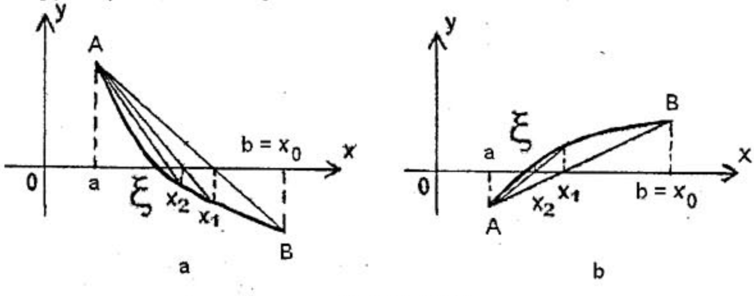


Рисунок 5.9

Послідовність чисел $x_n(n=1, 2, 3,...)$ збігається до кореня ξ, тобто $\lim x_n = \xi$.

Обчислення наближень x_1, x_2, x_3,... слід робити доти, поки два послідовних наближення x_k, x_{k+1} не будуть збігатися на задане число знаків. Для проміжних викладок слід брати один-два запасних знаків.

Якщо функція $f(x)$ має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ на відрізку *[a, b]*, то оцінка абсолютної похибки визначається за формулою

$$|\xi - x_n| \le |f(x_n)| / \mu, \tag{5.20}$$

де $\mu = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$.

Приклад 1. Методом хорд знайти корінь рівняння $x^3 - 2x + 7 = 0$. Відокремлюючи корені даного рівняння вищерозглянутими способами, визначаємо, що єдиний дійсний корінь знаходиться на відрізку *[-3, -2]*; дійсно, $f(-3) = -27 + 6 + 7 < 0, f(-2) = -8 + 4 + 7 > 0$. Розглянувши середину цього відрізка, одержимо $f(-2,5) = (-2,5)^3 - 2(-2,5) + 7 = -3,625 < 0$. Це означає, що корінь належить відрізку *[-2,5; -2]*. Продовжуючи аналогічні міркування, знаходимо відрізок *[-2,3; -2,2]*, якому належить корінь, оскільки $f(-2,3) \cdot f(-2,2) < 0$. На цьому відрізку похідні $f'(x) = 3x^2 - 2$ і $f''(x) = 6x$ зберігають знак. Оскільки $f(-2,3) \cdot f''(-2,3) > 0$, використовуємо формулу (5.19), вважаючи $x_0 = -2,2$. Прийнявши, що $f(x_0) = f(-2,2) = 0,752,$ $a = -2,3, f(a) = f(-2,3) = -0,567$ за даною формулою одержимо результати, наведені в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$A \cdot f(x_{n-1})$	$X_{n-1} f(a)$	$af(x_{n-1}) - x_{n-1} \cdot f(a)$	$f(x_{n-1}) - f(a)$	x_n
1	*-2,2*	*0,752*	*-1,7296*	*1,2474*	*-2,9770*	*1,319*	*-2,25701*
2	*-2,25701*	*0,016558*	*-0,038083*	*1,279725*	*-1,317809*	*0,583558*	*-2,258231*
3	*-2,258231*	*0,000371*	*-0,000853*	*1,280417*	*-1,281270*	*0,567371*	*-2,258259*

Отже, знайдений корінь рівняння $\xi = -2,258$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^3 - 0,9x + 0,6 = 0$ з точністю до 10^{-4}.

Оскільки графіки функцій $y = x^3$ і $y = 0,9x - 0,6$ перетинаються в єдиній точці, дане рівняння має дійсний корінь на відрізку [*-2, 1*]. Оскільки $f(-1,2) < 0, f(-1,1) > 0$, корінь належить відрізку [*-1,2; -1,1*], на якому $f''(x) = 6x < 0$. Тут виконується нерівність $f(-1,2) f''(x) > 0$, тому можна скористатися формулою (5.19). Щоб скоротити кількість обчислень, укажемо відрізок меншої довжини, на якому знаходитися корінь. Оскільки $f(-1,186) < 0, f(-1,185) > 0$, то корінь рівняння розташований на відрізку

[-1,186; -1,185], довжина якого дорівнює 0,001.

За формулою (5.19) обчислюємо значення кореня рівняння (табл. 5.4).

Таблиця 5.4

n	I	II(I.I)	III(II.I)	IV(I.(-0,9))	V(III+IV+0,6)
	x_{n-1}	x^2_{n-1}	x^3_{n-1}	$-0,9x_{n-1}$	$f(x_{n-1})$
1	-1,185	1,40422	-1,66400	1,06650	0,00250
2	-1,18570	1,40591	-1,66700	1,06739	0,00014
3	-1,18572	1,40593	-1,66704	1,06715	0,00011
4	-1,18573	1,40596	-1,66709	1,06716	0,00007

n	VI	VII	VIII(VI-VII)	IX	X
	$af(x_{n-1})$	$X_nf(a)$	$af(x_{n-1})-x_{n-1}f(a)$	$f(a)-f(x_{n-1})$	x_{n-1}
1	-0,00297	0,00955	-0,01252	0,01056	-1,18570
2	-0,00017	0,00956	-0,00973	0,00820	-1,18572
3	-0,00013	0,00956	-0,00969	0,00817	-1,18573

Оцінимо абсолютну похибку за формулою (5.20).

Оскільки $f(x_3)=f(-1,18573)=0,00007, \min\limits_{a\le x\le b} f'(x)=\min\limits_{a\le x\le b}\left|3x^2-0,9\right|=$

$=3,31269(a=-1,186;b=-1,185)$, то $\left|\xi-x_3\right|\le\dfrac{0,00007}{3,31269}\approx 0,00002<0,0001,$

тобто корінь обчислений із заданою точністю.

5.5.2 Метод дотичних і його модифікації

Метод дотичних (або метод Ньютона) [4, 12]. Нехай на відрізку $[a, b]$ знаходиться єдиний корінь рівняння $f(x)=0$. Проведемо дотичну до кривої $y=f(x)$ в точці $A[a, f(a)]$ до перетину з віссю Ox (рис. 5.10). Рівняння дотичної, що проходить через точку A, буде таким: $y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$. Якщо $f'(a)\neq 0$, то з цього рівняння (при $b=0$) знаходимо абсцису x_1 точки перетину дотичної з віссю Ox:

$$x_1=a-f(a)/f'(a)$$

Абсцису x_1 точки перетину можна взяти як наближене значення кореня.

Якщо проведемо дотичну через відповідну точку $A_1[x_1, f(x_1)]$ і знайдемо точку перетину з віссю Ox, одержимо друге наближення кореня x_2. Аналогічно визначаються наступні наближення.

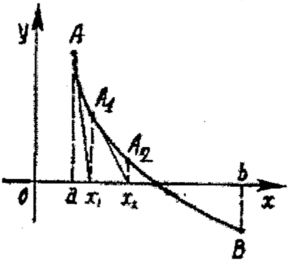


Рисунок 5.10

Застосовуючи метод дотичних, n-і наближення знаходять за формулою

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n), \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \qquad (5.21)$$

причому за нульове наближення x_0 приймається таке значення з відрізка $[a, b]$, для якого виконується умова

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0. \qquad (5.22)$$

Обчислення проводять доти, поки не перестануть змінюватися десяткові знаки, що зберігаються у відповіді. Для проміжних викладок слід брати один-два запасних знаків. Оцінка похибки визначається за формулою

$$|x_n-\xi|\le f(x_n)/\mu, \qquad (5.23)$$

де $\mu=\min\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$.

Наближене обчислення кореня за методом дотичних, визначення номера n наближення x_n, при якому буде досягнена задана точність, можна здійснити на основі такої теореми.

Нехай для рівняння $f(x)=0$ і початкового наближення x_0 шуканого кореня виконуються умови:

1) $f'(x_0)\neq 0$ і $|1/f'(x_0)|\le B$; 2) $|f(x_0)/f'(x_0)|\le\eta$;

3) $|f''(x)|\le K$, на відрізку $|x-x_0|\le\delta$; 4) $h=BK\eta\le\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta\le\delta$.

Тоді дане рівняння має корінь, що належить відрізку $|x-x_0|\le\delta$,

де $\delta=2\eta/(1+\sqrt{1-2h})$. Цей корінь може бути отриманий як межа послідовності, кожен член якої знаходиться за формулою (5.21). Оцінка похибки визначається формулою

$$|x_n-\xi|\le\frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}\eta \qquad (5.24)$$

Недоліком методу дотичних є те, що на кожній ітерації треба обчислювати не тільки значення функції $f(x)$, а й значення її похідної $f'(x)$. В таких випадках похідну $f'(x_k)$ замінюють її наближеним значенням

$$f'(x_n)=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}.$$

Підставивши наближене значення похідної у формулу (5.21), отримаємо

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})},\ k=1,2,3,\ldots$$

Метод, оснований на застосуванні останньої формули, отримав назву *методу січних*. Геометрично наближення x_{n+1} дістають як абсцису точки перетину осі Ox і січної, що проходить через точки $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ та $(x_n, f(x_n))$.

Алгоритм методу січних починається із задання двох початкових наближень x_0 і x_1 які вибирають на відрізку ізоляції шуканого кореня. Тому складність цього методу полягає у знаходженні таких x_0 і x_1 *досить близьких до кореня, щоб метод був збіжний.*

Якщо похідна $f'(x)$ мало змінюється на відрізку $[a, b]$, то кількість обчислень за методом Ньютона можна зменшити, коли значення похідних $f'(x_n)$ у точках x_n $(n=1,2, \ldots)$ замінити значенням $f'(x_0)$ в точці x_0. Тоді формула (5.21) набере вигляду

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Приклад 1. З точністю до п'яти десяткових знаків після коми обчислити більший від'ємний корінь рівняння $x^3-12x-8=0$.

Графічно відокремлюючи корені даного рівняння, бачимо, що рівняння має три дійсних корені, більший від'ємний корінь належить відрізку $[-1, 0]$. Можна вказати відрізок меншої довжини, на якому знаходиться корінь, обчисливши значення многочлена $f(x)=x^3-12x-8$ за допомогою схеми Горнера (табл. 5.5)

Таблиця 5.5

x \ a_K	*1*	*0*	*-12*	*-8*	*f(x)*
-0,6	*1*	*-0,6*	*-11,64*	*-1,016*	–
-0,7	*1*	*0,7*	*-11,51*	*-0,057*	+
-0,65	*1*	*-0,65*	*-11,5775*	*-0,474625*	–

Таким відрізком є відрізок $[-0,7; -0,65]$. Оскільки $f''(x)=6x$, $f''(-0,65)<0$, $f(-0,65)<0$, $f(-0,65)\cdot f''(-0,65)>0$, тобто виконана умова (5.22), то як нульове наближення беремо $x_0 = 0,65$. За формулою (5.21) обчислюємо послідовні наближення, зафіксовані в табл. 5.6.

Таблиця 5.6

n	x_n	$f(x_n)$	$\dfrac{1}{f'(x_n)}$	$\Delta = \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	*- 0,65*	*- 0,474625*	*- 0,093175*	*0,044223*	*- 0,694223*
1	*- 0,694223*	*- 0,003902*	*- 0,094759*	*0,000370*	*- 0,694593*
2	*- 0,694593*	*- 0,000003*	*- 0,095711*	*0,0000003*	*- 0,694593*

З таблиці видно, що шуканий корінь $\xi = -0,694593$.

Зауваження. Два інших корені даного рівняння можна знайти аналогічно: спочатку відокремити кожний з них на відрізку досить малої довжини, потім обчислити за допомогою методу дотичних. Можна знайти і по-іншому. Розділивши многочлен $x^3-12x-8$ на $(x-\xi)$, одержимо квадратне рівняння, корені якого можна прийняти за початкові наближення двох інших коренів вихідного рівняння, а потім обчислити їх за методом дотичних.

Приклад 2. З точністю до п'яти десяткових знаків після коми знайти додатний корінь рівняння $th\,x+x^2-3,487=0$.

Графічно і методом проб визначаємо, що додатний корінь даного рівняння знаходиться на відрізку $[1,6;\ 1,7]$, тому що $f(1,6)=-0,00533<0$, $f(1,7)=0,33241>0$. Як початкове наближення візьмемо лівий кінець відрізка $[1,6;\ 1,7]$, тобто $x_0=1,6$. Перевіримо, чи виконуються умови теореми , сформульованої на початку даного підрозділу, для функції $f(x)=thx+x^2-3,487$ і початкового значення кореня $x_0=1,6$.

Випишемо попередньо вирази для першої і другої похідної даної функції: $f'(x)=1/ch^2x+2x$, $\quad f''(x)=2\left(1-shx/ch^3x\right)$. При $x_0=1,6$: $f'(x_0)=$ $=f'(1,6)=3,35\neq 0$, $\quad \left|1/f'(x_0)\right|<0,3$; $\quad y=0,3\cdot\left|f(x_0)/f'(x_0)\right|=0,0053/3,35<0,0053\cdot$ $\cdot 0,3<0,0017$, $\eta=0,0017$, $\left|f''(x)\right|\le 2$ для всіх $x\ge 0; K=2$;

$$h=BK\eta=0,3\cdot 2\cdot 0,0017=0,00102<0,5\,.$$

Таким чином, всі умови теореми виконані. Отже, на відрізку $|x-x_0|<2\eta=0,0034$, тобто на відрізку $[1,5966;\ 1,6034]$, розташовано корінь даного рівняння. Щоб обчислити його із заданою точністю, за допомогою формули (5.24) визначимо число n. За умовою задачі n повинне бути таким, при якому виконується нерівність $1/2^{n-1}\cdot(2h)^{2^n-1}\eta\le 0,5\cdot 10^{-5}$, або $1/2^{n-1}\cdot(0,002)^{2^n-1}0,0017\le 0,5\cdot 10^{-5}$, оскільки $\eta=0,0017$ і $h=0,001$. Ця нерівність виконується при $n=2$. За формулою (5.21) знаходимо x_1 і x_2:

$$x_1=1,6-\frac{f(1,6)}{f'(1,6)}=1,6-\frac{0,0053}{3,350524}=1,601590,\quad x_2=1,601590-\frac{0,00003}{3,353298}=1,601581\cdot$$

Отже, корінь рівняння $\xi=1,601581$.

5.5.3 Комбінований метод хорд та дотичних

У методах хорд і дотичних вихідний відрізок $[a,\ b]$, на якому знаходиться корінь рівняння $f(x)=0$ замінюється відрізком $[a,\ x_1]$ або $[x_1, b]$, де x_1 – точка, що розташована ближче до кореня, ніж кінці відрізка, і т.д. Очевидно, більший ефект можна отримати при наближенні до кореня одночасно з двох сторін. Це досягається застосування комбінованого методу, що полягає в одночасному використанні методів хорд і дотичних. Комбінований метод зручно застосовувати, якщо на вихідному відрізку $[a,\ b]$ друга похідна $f''(x)$ зберігає знак. У цьому випадку дотична перетинає вісь Ox з боку опуклості, а хорда – з боку увігнутості графіка функції $y=f(x)$ (рис. 5.11). Наближення за методом дотичних будуть розташовуватися з однієї сторони

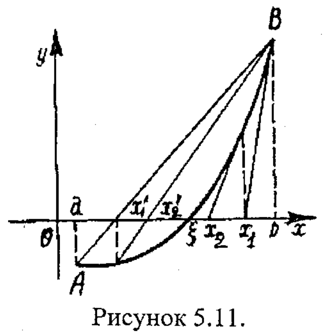


Рисунок 5.11.

кореня, а наближення за методом хорд – з іншої. Таким чином, одержуємо усе вужчі відрізки, усередині яких розташований корінь. Довжина останнього з відрізків дає величину абсолютної похибки наближеного значення кореня. Одночасне оцінювання похибки одержуваного наближення дає велику зручність під час застосування комбінованого методу.

Приклад 1. Комбінованим методом (з точністю до шести десяткових знаків) розв'язати рівняння $x^3+4x+3=0$.

Графічно відокремлюючи корені рівняння, бачимо, що єдиний дійсний корінь даного рівняння розташовано на відрізку $[-1; 0]$. Табличним способом, за допомогою схеми Горнера, знаходимо відрізок меншої довжини, якому належить корінь (табл. 5.7).

Таблиця 5.7

x \ a_k	1	0	4	3	$f(x)$
0,6	1	- 0,6	4,36	0,384	+
0,7	1	-0,7	4,49	-0,143	-

Отже, корінь знаходиться на відрізку $[-0,7; -0,6]$. Перевіримо, для якої з цих двох точок виконується умова $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$. Оскільки $f''(x)=6x$, $f''(-0,7)=-0,42$, $f(-0,7)=-0,143$ і $f(-0,7)\cdot f''(-0,7)>0$, то, застосовуючи метод Ньютона, потрібно покласти $x_0=-0,7$. За методом Ньютона при $x=-0,7$ знаходимо: $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-0,7-\dfrac{-0,143}{5,47}=-0,673858$,

$$x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)=-0,673858+0,001421/5,362254=-0,673593$$

За методом хорд, поклавши $x_0'=-0,6$, $a=-0,7$, одержимо:

$$x_1'=\frac{x_0'f(a)-af(x_0')}{f(a)-f(x_0')}=\frac{-0,6\cdot(-0,143)+0,7\cdot 0,384}{-0,143-0,384}=-0,672865$$

$$x_2'=\frac{x_1'f(a)-af(x_1')}{f(a)-f(x_1')}=\frac{-0,672865\cdot(-0,143)+0,7\cdot 0,003902}{-0,143-0,003902}=-0,673585$$

Отже, корінь знаходиться на відрізку $[-0,67350; -0,673585]$. Покладаючи, що $a=-0,673593$, користаючись формулою

$$x_3'=x_2'-\frac{f(x_2')}{f(a)-f(x_2')}(a-x_2'),$$

одержуємо $x_3'=-0,673585+1\cdot 0,000008=-0,673593$. Таким чином, корінь даного рівняння $\xi=-0,673593$.

Приклад 2. Комбінованим методом знайти менший додатний корінь рівняння $x^3-3x^2+1=0$ (з точністю до шести десяткових знаків).

Шуканий корінь знаходиться на відрізку $[0,6;\ 0,7]$. Для методу Ньютона $x_0=0,7$, для методу хорд $x'_0=0,6$, $b=0,7$.

За відповідними формулами знаходимо:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,7 - \frac{-0,127}{-2,73} = 0,653480$$

$$x'_1 = \frac{x'_0 f(b) - bf(x'_0)}{f(b) - f(x'_0)} = \frac{0,6\cdot(-0,127) - 0,7\cdot 0,136}{-0,127 - 0,136} = 0,651711$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,653480 - \frac{-0,002049}{-2,639772} = 0,652704$$

$$x'_2 = \frac{x'_1 f(b) - bf(x'_1)}{f(b) - f(x'_1)} = \frac{0,651711\cdot(-0,002049) - 0,653480\cdot 0,002618}{-0,002049 - 0,002618} = 0,652668$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,652704 - \frac{-0,0000006}{-2,6381579} = 0,6527037$$

$$x'_3 = x'_2 - \frac{f(x'_2)}{f(x_2) - f(x'_2)}(x_2 - x'_2) = 0,652668 -$$

$$-\frac{0,0000944}{-0,0000006 - 0,0000944}(0,652704 - 0,652668) = 0,65270377$$

Отже, менший додатний корінь ξ даного рівняння задовольняє нерівність $0,65270377 < \xi < 0,65270378$.

Зауваження. Значення функції $f(x)=x^3-3x^2+1$ і її похідної $f'(x)=3x^2-6x$ у точках x_0, x_1, x_2, x'_0, x'_1, x'_2 обчислені за допомогою схеми Горнера (табл.5.8).

Таблиця 5.8

x \ a_k	1	-3	0	1
0,7	1 1	-2,3 -1,6	-1,61 -2, 73 ($f'(x_0)$)	-0,127 $=f(x_0)$
0,653480	1 1	-2,34652 -1,69304	-1,533404 -2,6397772$f'(x_1)$	-0,002049$=f(x_1)$
0,652704	1 1	-2,347296 -1,69304	-1,532089 -2,6381579	-0,0000006$=f(x_2)$
0,6	1	-2,4	-1,44	0,136$=f(x'_0)$
0,651711	1	-2,348289	-1,530406	0,002618$=f(x'_1)$
0,652668	1	-2,347332	-1,532028	0,0000944 $=f(x'_2)$

5.5.4 Метод ітерацій

Нехай будь-яким способом, наприклад графічним чи табличним, отримано наближене значення x_0 кореня рівняння

$$f(x) = 0, \tag{5.25}$$

уточнення кореня можна одержати за так званим методом послідовних наближень чи ітерацій. Для цього рівняння (5.25) подамо у вигляді

$$x = \varphi(x), \tag{5.26}$$

що завжди можна зробити і навіть багатьма способами, наприклад,

$$x = x + cf(x), \tag{5.27}$$

де c – довільна постійна.

Нехай число x_1 є результатом підстановки x_0 у праву частину рівності (5.26): $x_1=\varphi\ (x_0)$, далі $x_2=\varphi\ (x_1)$ і т.д., x_n отримуємо з x_{n-1} за формулою

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \tag{5.28}$$

Цей процес послідовного обчислення чисел x_n $(n = 1, 2, ...)$ за формулою (5.32) називається методом послідовних наближень. або ітерацій.

Умови, при яких описаний процес збігається (тобто при збільшенні n можна одержати наближення, яке відрізняється від дійсного значення кореня ξ не більше, ніж на величину похибки), визначаються такою теоремою.

Якщо на відрізку, що містить корінь ξ рівняння (5.25), а також усі його послідовні наближення $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, що обчислюються за методом ітерацій, виконана умова

$$|\varphi'(x)| \le m < 1 \tag{5.29}$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, тобто процес ітерацій збігається.

Геометрична інтерпретація

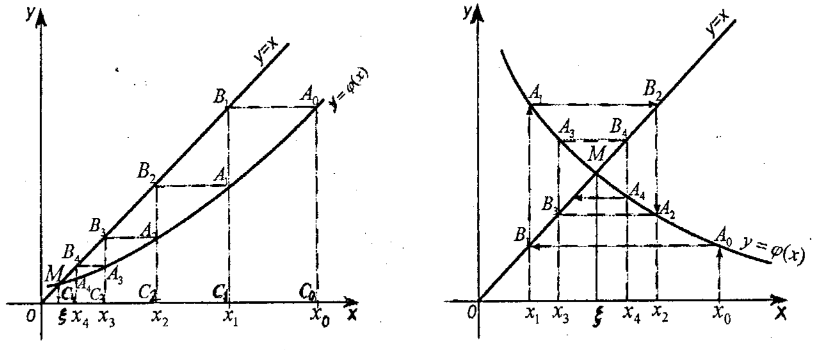
Нехай задано рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ – неперервна функція. Приведемо це рівняння до вигляду $x=\varphi(x)$ і побудуємо графіки функцій $y=x$ і $y=\varphi(x)$. Абсциса точки перетину графіків цих функцій є істинним коренем ξ (рис. 5.12).

Виберемо $x_0 \in [a,b]$ і визначимо $\varphi(x_0)$. Послідовність точок, що знаходяться на кривій $y=\varphi(x)$, позначити через A_i $(i=0,1,2,...)$, а послідовність точок, що лежать на прямій $y= x$ – через B_i $(i=1,2,3,...)$

З точки $A_0(x_0;\varphi(x_0))$ проведемо пряму, паралельну осі OX до перетину з прямою $y=x$ і отримаємо точку $B_1(x_1;\varphi(x_0))$.

Дійсно, $A_0C_0=\varphi(x_0)=B_1C_1$, оскільки $A_0B_1 \| OC_0$, $B_1C_1 \| A_0C_0$. Але $OC_1=B_1C_1$ (ΔOC_1B_1 – прямокутний і рівнобедрений, оскільки пряма $y=x$ є бісектрисою координатного кута). Отже, $x_1 = \varphi(x_0)$.

Проведемо $A_1B_2 \,||\, OC_1$ і повторюючи вищесказані судження, переконаємось, що $x_2 = \varphi(x_1)$.



а) б)

Рисунок 5.12

На рис. 5.12 а побудовано збіжний ітераційний процес. Крива перетинає бісектрису $y=x$ в точці M з абсцисою ξ і при $x>\xi$ лежить під бісектрисою, а $\varphi'(x)$задовольняє умові $0<\varphi'(x)<1$. Послідовність наближень $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ (загальні абсциси точок графіків обох функцій) *монотонно спадає*. Кожне наступне наближення x_n, ближче до істинного кореня, ніж попереднє x_{n-1}. Ламана лінія $A_0B_1A_1B_2A_2...$ має вигляд "драбини".

На рис. 5.12 б) похідна $\varphi'(x)<0$, але за абсолютною величиною менша одиниці $|\varphi'(x)|<1$. Ітераційний процес також збігається, але наближення *коливаються* біля точного значення кореня. Ламана лінія $A_0B_1A_1B_2A_2...$ має вигляд "спіралі".

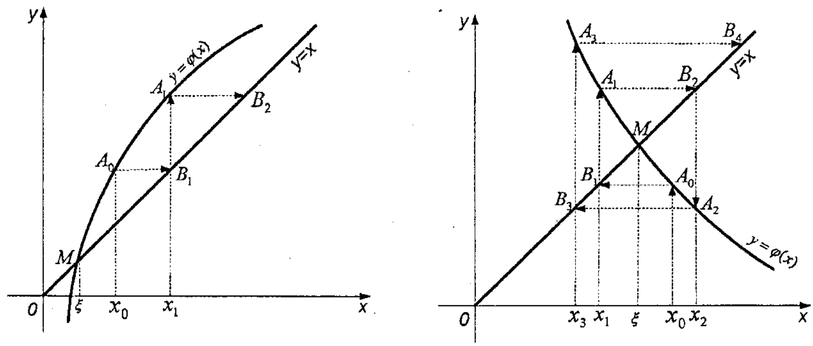
Отже, якщо в деякій ділянці (a, b) кореня ξ рівняння $x=\varphi(x)$ похідна $\varphi'(x)$ зберігає постійний знак і виконана нерівність $|\varphi'(x)| \le q < 1$, причому $\varphi'(x)>0$, то послідовні наближення

$$x_n = \varphi(x_{n-1})(n=1,2,...),\ x_0 \in [a,b]$$

збігаються до кореня монотонно. В такому випадку, коли $\varphi'(x)<0$, послідовні наближення коливаються біля ξ.

На рис. 5.13 а показано розбіжний ітераційний процес. Тут $\varphi'(x)>1$. Крива перетинає бісектрису $y=x$ в точці М при $x>\xi$, що лежить над бісектрисою.

На рис. 5.13 б показано розбіжний ітераційний процес для випадку $|\varphi'(x)|>1$. Послідовні наближення віддаляються від точного значення кореня ξ.



а) б)

Рисунок 5.13

Приклад 1. Методом ітерацій знайти менший додатний корінь рівняння $x^3-5x+1=0$.

Графічно відокремлюючи корені даного рівняння, знаходимо, що рівняння має три дійсних корені, що належать відрізкам *[-3; –2], [0; 1], [2; 3]*. Знайдемо менший додатний корінь, що належить відрізку *[0; 1]*. Укажемо відрізок меншої довжини, на якому знаходиться корінь. Оскільки $f(0)=1>0$, $f(1/2)=1/8-5/2+1=-11/8<0$, корінь знаходиться на відрізку *[0; 0,5]*

Дане рівняння приведемо до вигляду (5.26): $x=1/5\,(x^3+1)$ або $x=\varphi(x)$, де $\varphi(x)=1/5(x^3+1)$. Оскільки $\varphi'(x)=3x^2/5$, $\max\limits_{0\le x\le 0,5}|\varphi'(x)|=3/20<1$, то умова (5.29) виконується і процес ітерацій буде збігатися. Взявши як нульове наближення середину відрізка [0; 0,5], тобто прийнявши $x_0=0,25$, обчислення наступних наближень виконаємо за формулою $x_{n-1}=\dfrac{1}{5}(x_n^3+1)$

Результати цих обчислень подані у таблиці 5.9, з якої видно, що шуканий корінь $\xi=0,20164$.

Таблиця 5.9

n	x_n	X_n^3	X_n^3+1	$\frac{1}{5}(X_n^3+1)=x_{n+1}$
0	0,25	0,01563	1,01563	0,20313
1	0,20313	0,00838	1,00838	0,20168
2	0,20168	0,00821	1,00821	0,20164
3	0,20164	0,00820	1,00820	0,20164

Зауваження. Під час знаходження двох інших коренів методом ітерацій уже не можна застосовувати формулу $x=\varphi(x)$, де $\varphi(x)=\frac{1}{5}(x^3+1)$, тому що

$\max\limits_{2<|x|<3}|\varphi'(x)|=\max\limits_{2<|x|<3}\left|\frac{3x^2}{5}\right|=\frac{27}{5}>1$. В цьому випадку дане рівняння слід показати в іншому вигляді, наприклад $x=\sqrt[3]{5x-1}$; для функції $\varphi(x)=\sqrt[3]{5x-1}$ на відрізках: [-3; -2], [2; 3] умова (5.29) буде виконуватися.

Приклад 2. Методом ітерацій знайти від'ємний корінь рівняння $x^4+x-3=0$.

Дане рівняння має два дійсних корені; від'ємний корінь знаходиться на відрізку [$-1,5$; $-1,4$], оскільки для його кінців виконується умова $f(-1,5)\cdot f(-1,4)<0$. Рівняння запишемо у вигляді $x=x+3(x^4+x-3)$, де c – постійна.

Виберемо значення постійної так, щоб для функції $\varphi(x)=x+c(x^4+x-3)$ виконувалася умова $\max\limits_{-1,5<x<-1,4}|\varphi'(x)|=q<1$. Як таке значення можна взяти $c=0{,}1$; тоді $\varphi(x)=0{,}1x^4+1{,}1x-0{,}3$, $\varphi'(x)=0{,}4x^3+1{,}1$,

$$\max\limits_{-1,5<x<-1,4}|\varphi'(x)|=0{,}25<1$$

Прийнявши $x_o=-1{,}45$, обчислимо наступні наближення за формулою

$$x_{n+1}=0{,}1x^4{}_n+1{,}1x_n-0{,}3$$

і запишемо результати (табл. 5.10), де $\xi=-1{,}45262$ – корінь рівняння.

Таблиця 5.10

n	x_n	x_n^2	x_n^4	$0{,}1x_n^4$	$1{,}1x_n$	x_{n+1}
0	-1,45	2,1025	4,4206	0,44205	-1,595	-1,45295
1	-1,45295	2,11106	4,45657	0,44566	-1,59825	-1,45259
2	-1,45259	2,11002	4,45218	0,44522	-1,59785	-1,45263
3	-1,45263	2,11013	4,45265	0,44527	-1,59789	-1,45262
4	-1,45262	2,11011	4,45256	0,44526	-1,59788	-1,45262

5.6 Розв'язання систем нелінійних рівнянь

На відміну від систем лінійних рівнянь для систем нелінійних рівнянь (СНР) не існує прямих методів розв'язання, і тому завжди застосовуються ітераційні методи [8, 11]. У загальному випадку система подається у вигляді

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n)=0;$$
$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n)=0;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Саме до такого вигляду приводяться багато задач в автоматиці, електроніці, інформаційно-вимірювальній техніці, наприклад, у задачі про розробку моделі електронних пристроїв тощо.

5.6.1 Метод простої ітерації. Метод простої ітерації (або послідовних наближень) для розв'язання СНР є розвитком аналогічного методу для розв'язання одного рівняння [8]. Він базується на припущенні, що систему можна привести до вигляду

$$x_1^*=q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$
$$x_2^*=q_2(x_1^*, x_2, \ldots, x_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^*=q_n(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n);$$

Структура алгоритму показана на рис. 5.14.

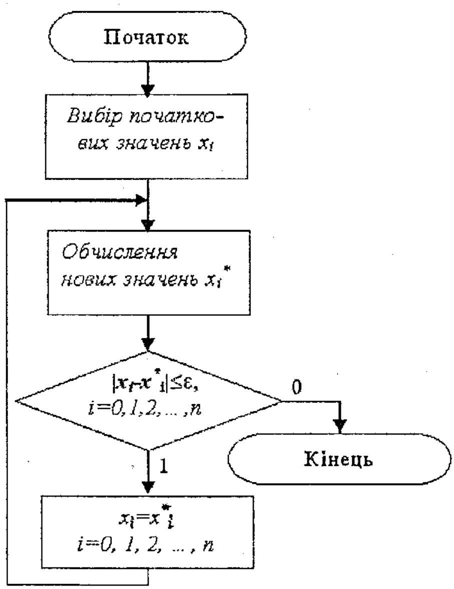


Рисунок 5.14

Цей різновид методу простої ітерації побудований аналогічно методу Зейделя для систем лінійних рівнянь, коли для обчислення кожного наступного значення невідомих використовуються нові знайдені значення попередніх невідомих.

Тепер детально зупинимось на основних кроках процесу розв'язання СНР, з відповідним прикладом [10]. Розглянемо векторне рівняння

$$F(x)=0, \tag{5.30}$$

де F – вектор-функція, x – вектор.

$$F=[F_1, F_2, \ldots, F_n]^T.$$

Перетворимо рівняння (5.30) до вигляду

$$x=g(x), \tag{5.31}$$

де $g=[g_1, g_2, \ldots, g_n]^T$.

Наближений процес, який розв'язує рівняння (5.31), запишемо у вигляді

$$x^{k+1}=g(x^k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{5.32}$$

Відображення g: $X \to X$, де X – банахів простір, називається стисненим, якщо для будь-яких x^1, $x^2 \in X$ виконується рівність

$$||g(x^1)-g(x^2)|| \le q||x^1-x^0||;\ \ q<1. \tag{5.33}$$

Якщо відображення g: $X \to X$ – стиснене, то рівняння (5.32) має єдиний розв'язок x^*:

$$||x^*-x^m|| \leq q^m/(1-q)||x^1-x^0||. \qquad (5.34)$$

У досить малій області розв'язку x^* рівняння (5.31) для наближень методом простої ітерації

$$x^{m+1}-x^*=g(x^m)-g(x^*) \approx B(x^m-x^*), \qquad (5.35)$$

де $B=\left[\partial g_i / \partial x_j\right]\Big|_{x^*}$; $i,j=\overline{1,n}$

Таким чином, умова збіжності методу послідовних наближень має вигляд

$$||B||=q<1. \qquad (5.36)$$

У цьому випадку відображення g буде стисненим, а наближення x^k будуть збігатися до розв'язку x^* зі швидкістю геометричної прогресії.

Аналогом методу Зейделя при розв'язуванні нелінійних систем рівнянь є наближений процес, згідно з яким послідовні наближення визначаються із відношень

$$\begin{cases} x_1^{k+1}=g_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k); \\ x_2^{k+1}=g_2(x_1^{k+1}, x_2^k, \ldots, x_n^k); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i^{k+1}=g_i(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, \ldots, x_n^k); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{k+1}=g_n(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{n-1}^{k+1}, x_n^k) \end{cases} \qquad (5.37)$$

Метод послідовних наближень є методом першого порядку, тобто $||x^{k+1}-x^*|| \leq C||x^k-x^*||$, C – постійна величина.

Під час розв'язання систем нелінійних рівнянь необхідно визначити прийнятне початкове наближення. Для випадку двох рівнянь з двома невідомими початковими наближеннями знаходять графічно. Для випадків систем рівнянь з великим числом рівнянь відокремлення коренів може бути виконано іншими методами.

Приклад 1. Розглянемо систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \sin(x+1)-y=0{,}5; \\ x^2+y^2=1. \end{aligned}\right\} \qquad (5.38)$$

Дана система описує графіки функцій, що зображені на рис 5.15. Знайдемо її розв'язок за методом Зейделя (5.37). Представимо систему рівнянь (5.38) у вигляді (5.39):

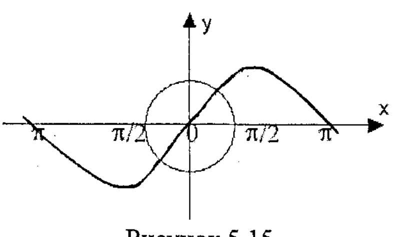


Рисунок 5.15

$$\left.\begin{aligned} x &= g_1(x,y) = \sqrt{1-y^2}\,; \\ y &= g_2(x,y) = \sin(x+1) - 0,5. \end{aligned}\right\} \qquad (5.39)$$

Для визначення початкового наближення x^0, y^0, що належить області збіжності $D=\{a<x<b,\ c<y<d\}$, побудуємо графіки функцій:

$$\text{при } x=1 \quad y=\sin 2-0,5=0,41;$$
$$\text{при } x=0,8 \quad y=\sin 1,9-0,5=0,47.$$

Розв'язок задачі будемо шукати в області $D=\{0,8<x<1,\ 0,41<y<0,47\}$.

Визначимо матрицю B:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \cos(x+1); \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}; \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0;$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos(x+1) & 0 \\ 0 & -y/\sqrt{1-y^2} \end{bmatrix};$$

$$\|B\|_1 = \max_{x,y\in D}\left\{\cos(x+1);\ \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right\} = \max\left\{\cos 1,14;\ \frac{0,41}{\sqrt{1-0,41^2}}\right\} = q_1 = 0,45 < 1.$$

Таким чином, процес послідовних наближень (5.39) збігається в області D.

Переходимо до реалізації процесу

$$x^{k+1}=g_1(x^k,\ y^k)=\sqrt{1-\left(y^k\right)^2};$$
$$y^{k+1}=g_2(x^{k+1},\ y^k)=\sin(x^{k+1}+1)-0,5.$$

Вибираємо $x^0=0,85;\ y^0=0,46$;

$$x^1=\sqrt{1-\left(y^0\right)^2} = 0,887;\ y^1 = \sin(x^1+1)-0,5 = 0,450;$$
$$x^2=\sqrt{0,7975} = 0,893;\ y^2 = \sin 1,893 - 0,5 = 0,448;$$
$$x^3=\sqrt{0,7973} = 0,894;\ y^3 = 0,448;$$

Перевірка: $x^2{}_1+y^2{}_1=0,2007+0,7992=0,9999.$

Таким чином, з точністю до $\Delta=0,001$ розв'язок задачі (5.38) в області D такий: $x^*=0,895;\ y^*=0,448$.

Насамкінець зауважимо, що метод простої ітерації має свої недоліки [8]. Наприклад, якщо вихідні значення невідомих досить значно відрізняються від правильного розв'язку, то процес не буде збіжним. Зі збільшенням числа невідомих область збіжності (область, у якій задані вихідні значення збігаються до розв'язку) зменшується, і у випадку великих систем збіжність забезпечується лише в тому випадку, коли вихідні значення дуже близькі до шуканого розв'язку.

5.6.2 Метод Ньютона

Метод Ньютона є найрозповсюдженішим методом розв'язання СНР. Він забезпечує набагато швидшу збіжність, ніж метод простої ітерації. В його основі покладено зображення всіх n рівнянь у вигляді рядів Тейлора [8]:

$$f_1(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n)=f_1(x_1,\ldots,x_n)+\Delta x_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}+R_n;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n)=f_n(x_1,\ldots,x_n)+\Delta x_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial f_{n1}}{\partial x_n}+R_n,$$

де R_n – члени другого і вищих порядків.

Якщо прирости змінних Δx_i такі, що f_i приймає значення, близьке до кореня, то будемо вважати, що ліві частини цих рівнянь перетворюються в нулі.

Таким чином, задача зводиться до пошуку такої сукупності приростів Δx_i, при якій досягається зазначена мета. Відкинувши R_n задача зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 \ldots \partial f_1/\partial x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial f_n/\partial x_1 \ldots \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \ldots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \ldots \\ -f_n \end{bmatrix}.$$

У цій системі матрицю часткових похідних, що називається матрицею Якобі, і вектор-стовпець правої частини можна оцінити для будь-якого наближеного розв'язку. Знайдені Δx_i використовуються як поправки до вихідного наближеного розв'язку

$$x_1=x_1+\Delta x_1;\ x_2=x_2+\Delta x_2;\ \ldots;\ x_n=x_n+\Delta x_n.$$

Кінцева ітераційна формула має вигляд

$$x^{(n+1)}=x^{(n)}+W^{1}(x^{(n)})\,F(x^{(n)}),$$

де $x^{(n)}$, $x^{(n+1)}$ – вектори-стовпці наближених розв'язків системи відповідно на (n) і (n-1) кроці ітераційного процесу; $F(x^{(n)})$ – вектор-стовпець значень функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$ для наближення значень $x^{(n)}$; $W^{1}(x)$ – матриця, обернена матриці Якобі $W(x)$.

Якщо всі $\Delta x_i \to 0$, то розрахунок припиняється, у протилежному випадку нові значення використовуються як наближені значення коренів, і процес повторюється доти, поки не буде знайдено розв'язок або стане ясно, що процес є розбіжним.

Структура алгоритму показана на рис. 5.16.

Під час перевірки збіжності слід користуватися умовою

$$\Delta x_i / x_i \le \varepsilon,$$

де ε – допустима похибка розв'язку.

Далі детальніше зупинимося на обчислювальній схемі методу Ньютона [10]. Розглянемо нелінійний оператор $F{:}X\to X$, X – банахів простір і лінійний оператор $G{:}X\to X$.

Означення. Оператор G назвемо похідною оператора $F(x)$ в точці $x \in X$, якщо

$$\lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \in X}} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Gh\|x}{\|h\|x} = 0. \qquad (5.40)$$

Позначимо похідну оператора $F(x)$ через $F'(x)=G$.

Нехай x^* – розв'язок рівняння (5.30),

x^k – деяке наближення до розв'язку x^*.

Якщо значення $||x^*-x^k||x$ мале, то у припущенні існування $F'(x)$ з урахуванням (5.40) напишемо:

$F(x^k)+F'(x^k)(x^*-x^k) \approx F(x^*)$,

або

$F(x^k)+F'(x^k)(x^*-x^k) \approx 0.$ (5.41)

У припущенні існування $[F'(x)]^{-1}$

$x^{k+1}=x^k-[F'(x^k)]^{-1}F(x^k)$.

Наближений процес (5.41) називається методом Ньютона.

Позначимо область $D \subset X$:

$D=\{x||x-x^*||<a\}$.

Нехай виконуються такі умови:

$F'(x)$ – оператор стиснення, тобто

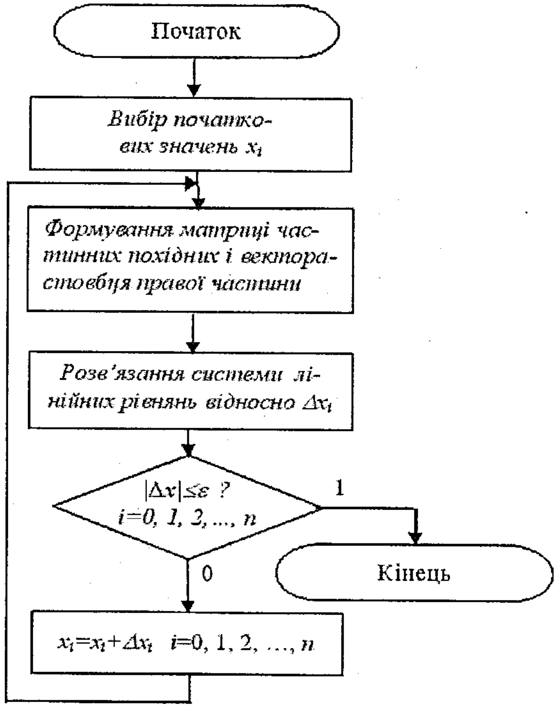


Рисунок 5.16

$$||F'(x^*)-F'(y)||x<q||x-y||x, \quad x, y \in D; \qquad (5.42)$$

$$||F'(x)||x<b, \; x \in D; \qquad (5.43)$$

$$||[F'(x_0)^{-1}F(x_0)||x \le c_0. \qquad (5.44)$$

Тоді процес послідовних наближень (5.41) збігається до розв'язку x^* з оцінкою похибки $||x^{k-}x^*||x \le 1/d(d||x^0-x^*||x)^2; \quad d=bq.$

При цьому

$$||x^* - x_0||_x \le 1/d(1-\sqrt{1-2dc_0}) = a_0 \le a \qquad (5.45)$$

Звідси, визначивши a_0, оцінюємо необхідну кількість N наближень для досягнення заданої точності Δ розв'язку x^* (5.31):

$$a_0^{2^N} < d\Delta, \text{ або } N < \log_2 p;\ p = \frac{\lg(d\Delta)}{\lg a_0}. \qquad (5.46)$$

Обчислювальна схема реалізації методу Ньютона (5.41) [10].

1. Знайти $F'(x)$;
2. Знайти область $D=\{x: \|x-x^*\|<a\}$ графічно або аналітично при $n>2$;
3. Для обраного початкового наближення $x^0 \in D$ обчислити

$$\|F'(x_0)\|x = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{df_i(x^0)}{dx^0{}_j} \right| = b_0 \qquad (5.47)$$

4. Визначити $\qquad F'(x_0)]^{-1} = \left[\varphi_{ij}(x^0)\right]_1^n. \qquad (5.48)$

5. Знайти $\qquad \|[F'(x^0)]^{-1}F(x^0)\|_x = \max_{1\le i\le n} \left|m_i(x^0)\right| = c_0 \qquad (5.49)$

6. Визначити перше наближення:

$$x_i^1 = x_i^0 - \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x^0) f_i(x^0);\ i = \overline{1,n}. \qquad (5.50)$$

7. Знайти з (5.42): $q_1 = \max_{1\le i\le n} \left|x_i^1 - x_i^0\right|; \qquad (5.51)$

$$q_2 = \max_{1\le i\le n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[f_{ij}(x^1) - f_{ij}(x^0) \right] \right\}; \qquad (5.52)$$

$$q = q_2 / q_1 \qquad (5.53)$$

8. Знайти коефіцієнт a_0 за формулою (5.45) $a_0=(1-\sqrt{1-2b_0qc_0})/b_0q$.

9. Оцінити кількість наближень N: $p = \lg\dfrac{(b_0q\Delta)}{\lg a_0};\ N = \log_2 p.$

10. Реалізувати процес послідовних наближень (5.41) для $\kappa=1,2,...,N$.

Приклад 1. З точністю Δ=0,001 знайти за методом Ньютона розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0; \\ f_2(x,y) = x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0 \end{cases} \qquad (5.54)$$

.Знайдемо $F'(x, y)$: $\qquad F'(x,y) = \begin{bmatrix} 2(x+1)2y \\ 2x2(y-2) \end{bmatrix}.$

Знайдемо область D. Оскільки графіки функцій $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ кола радіусом 2 і 3 відповідно з центрами в точках (-1;0) і (0;2), область D має вигляд D=$\{0,8 < x < 0,9; -0,9 > y > -1\}$. Як початкове наближення оберемо $x^0=0,8$; $y^0=-0,9$.

Знайдемо матрицю $[F'(x_0)]^{-1}$: $\quad [F'(x,y)]^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(x,y)}\begin{bmatrix} y-2 & -y \\ -x & x+1 \end{bmatrix};$

$$\Delta(x,y) = 2(y-2x)-4.$$

Для системи (5.54) процес послідовних наближень (5.31) має вигляд:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \frac{1}{\Delta(x^k,y^k)}\left[y^k f_2(x^k,y^k) - (y^k-2) f_1(x^k,y^k)\right], \\ y^{k+1} &= y^k + \frac{1}{\Delta(x^k,y^k)}\left[x^k f_1(x^k,y^k) - (x^k+1) f_2(x^k,y^k)\right]. \end{aligned} \qquad (5.55)$$

Розрахуємо b_0: $\left\|F'(x^0)\right\|_1 = \max\{5.4;7.4\} = 7.4 = b_0.$

Знайдемо c_0: $\left[F'(x^0)\right]^{-1} F(x^0) = \begin{bmatrix} 0.011 \\ -0.006 \end{bmatrix};\ c_0 = 0.011.$

Визначимо x^1 і y^1:

$$x^1 = 0.8 + 1/9(-0.9*0.05 + 2.9*0.5) = 0.8 + 0.0111 = 0.8111;$$

$$y^1 = -0.9 + 1/9(0.8*0.05 - 1.8*0.05) = -0.9 - 0.0056 = -0.9056.$$

Знайдемо q: $\quad q_1 = \max\{0.0334;0.0334\}; q_1 = 0.0334;$

$$q_2 = \max\{0.0111;0.0056\} = 0.0111;\ q = 0.0111/0.0334 = 0.332;$$

Розрахуємо радіус збіжності a_0:

$$d = b_0 q = 2.4568; a_0 = 1/2.4568(1-\sqrt{1-0.0545}) = 0.0113;$$

$$N \ge (-\lg\Delta - \lg d)/\lg a_0 = 1.4; N = 2.$$

Реалізуємо процес послідовних наближень (5.55):

$$f_1(x^1,y^1) = 1.479 + 1.6222 - 3 = 0.1012;$$

$$f_2(x^1,y^1) = 1.479 + 3.6224 - 5 = 0.1014;$$

$$\Delta(x^1,y^1) = -4 - 2*2.5278 = -9.0556;$$

$$x^1 = 0.8111 - 1/9.0556(-0.9056*0.1014 + 2.9056*0.1012) = 0.7889;$$

$$y^1 = -0.9056 - 1/9.0556(0.8111*0.1012 - 1.8111*0.1014) = -0.8845.$$

Таким чином, один з розв'язків системи з точністю Δ=0,001:

$$x^*=0{,}789;\ y^*= -0{,}894.$$

Аналогічно можна знайти й інший розв'язок системи.

Зауважимо, що для методу Ньютона теж існує проблема збіжності. Величина області збіжності обернено пропорційна ступеню складності і числу рівнянь. Існують способи оцінювання області збіжності і вибору вихідного наближення [8].

Якщо в цьому методі точні значення похідних знайти не вдається, то можна користуватися їх наближеними значеннями, знайденими методом січних.

5.6.3 Метод збурення параметрів

Метод збурення параметрів реалізує алгоритм, що дозволяє за допомогою ітерацій одержати розв'язок СНР. Його ефективність не залежить від вибору початкового наближення. Суть цього методу полягає в наступному [8]. Спочатку поряд із системою рівнянь

$$f_j(x_i)=0, \quad i=1,2,...,n; \quad j=1,2,...,n,$$

розглянемо

$$g_j(x_i)=0,$$

розв'язок якої відомий. Потім, змінюючи рівняння $g_j = 0$, перетворимо його у рівняння $f_j = 0$ за допомогою кінцевого числа послідовних малих збільшень параметрів:

$$g_j^{(k)}(x_i)= g_j^{(k-1)}(x_i)+[f_j(x_i) -g_j^{(k-1)}(x_i)]\frac{k}{N}, \quad (k=1,2,\dots,N).$$

Розв'язання $x_i^{(0)}$ вихідної системи рівнянь $g_j^{(0)}(x_i)$ можна використовувати як вихідні значення змінних для ітераційного розв'язування системи $g_j^{(1)}(x_i)$. Ця система мало відрізняється від попередньої, і можна зробити висновок, що збіжність буде забезпечена. У процесі розрахунку розв'язок $x_i^{(k-1)}$ використовується як вихідний для одержання розв'язку x_i^k. Коли $k=N$, система перетворюється у вихідну. Оскільки для цього перетворення часто потрібно багато кроків, метод може вимагати великих затрат комп'ютерного часу. Але його перевага в тому, що при малій кількості кроків збіжність на кожному кроці досягається всього за кілька ітерацій [8].

5.7 Вибір методу розв'язання нелінійних рівнянь і систем

При виборі методу і розробці алгоритму розв'язання нелінійних рівнянь і систем в першу чергу слід враховувати порядок рівняння, характер зміни функції $f(x)$ (гладкість, розривність), вимоги до точності і швидкості отримання розв'язку, наявні ресурси комп'ютера [8].

Найшвидший метод, котрий дозволяє значно скоротити обсяг обчислень як для рівнянь, так і для систем – це метод Ньютона. При складності обчислення похідних він може бути замінений методом січних. Однак ці методи мають ряд обмежень і їх застосування ефективне лише для гладких функцій.

При невідомому характері зміни $f(x)$ найнадійнішим методом є метод половинного ділення.

В залежності від порядку рівняння може бути рекомендоване використання таких методів [8]: при порядку від 3 до 5 – Ньютона; від 6 до 85 – січних; понад 85 – спеціальні методи.

Замість складання власного алгоритму іноді зручно користуватися наявним у розпорядженні стандартним математичним забезпеченням комп'ютера або пакетами прикладних програм.

5.8 Контрольні питання

1. Які рівняння називають нелінійними? Що означає розв'язати рівняння?
2. Наведіть класифікацію нелінійних рівнянь з відповідними прикладами.
3. Наведіть загальний алгоритм розв'язання нелінійних рівнянь.
4. Що означає відокремити корені рівняння? Наведіть методи відокремлення коренів, а також їх переваги та недоліки.
5. Наведіть загальні властивості алгебраїчних рівнянь.
6. Наведіть основну теорему алгебри.
7. Покажіть з відповідними прикладами як визначити кількість дійсних коренів алгебраїчного рівняння.
8. Наведіть теорему Штурма та проілюструйте її застосування на відповідному прикладі.
9. Як за правилом кільця можна знайти область існування коренів алгебраїчного рівняння?
10. Як за правилом Лагранжа знайти область існування коренів алгебраїчного рівняння?
11. Наведіть правило Ньютона для знаходження області існування коренів алгебраїчного рівняння.
12. Наведіть відомі Вам методи уточнення коренів нелінійних рівнянь, а також їх переваги та недоліки.
13. Наведіть геометричну інтерпретацію методів послідовного наближення та половинного ділення. Які недоліки та переваги цих методів?
14. Наведіть загальний алгоритм методів хорд та Ньютона.
15. Наведіть геометричну інтерпретацію методів хорд та Ньютона.
16. Які модифікації методу Ньютона Ви знаєте? Дайте стислу характеристику цим методам та порівняйте з методом Ньютона.
17. Наведіть алгоритм комбінаційного методу уточнення коренів нелінійного рівняння.
18. Наведіть та дайте геометричну інтерпретацію ітераційного методу уточнення коренів нелінійного рівняння. Яка швидкість збіжності цього методу?
19. Дайте означення системи нелінійних рівнянь. Що називають розв'язком системи рівнянь?
20. Які методи розв'язання систем нелінійних рівнянь Ви знаєте?
21. Наведіть загальний алгоритм методу послідовних наближень для розв'язання систем нелінійних рівнянь (СНР).
22. Наведіть обчислювальну схему методу послідовних наближень для розв'язання СНР.
23. Наведіть загальний алгоритм методу Ньютона для розв'язання СНР.
24. Наведіть обчислювальну схему методу Ньютона для розв'язання СНР.
25. Наведіть стислий порівняльний аналіз відомих Вам методів розв'язання нелінійних рівнянь та їх систем.

5.9 Завдання

Задача 1. Напишіть програму відокремлення коренів нелінійного рівняння $f(x)=0$ згідно з варіантом, заданим у таблиці 5.11.

Таблиця 5.11

$f(x)\equiv P_4(x)=x_4+a_3x^3+a^2x_2+a_1x+a_0$				
Вар.	a_3	a_2	a_1	a_0
1	-3,055105	-18,06895	4,002429	4,722482
2	-3,406111	10,89372	-1,752935	-3,423612
3	2,93309	9,274868	-10,32081	0,422098
4	16,28542	-2,771356	-27,95304	-11,33921
5	-3,055105	-18,06895	4,002429	4,722482
6	-3,406111	10,89372	-1,752935	-3,423612
7	2,93309	9,274868	-10,32081	0,422098
8	16,28542	-2,771356	-27,95304	-11,33921
9	-3,055105	-18,06895	4,002429	4,722482
10	-3,406111	10,89372	-1,752935	-3,423612
11	2,93309	9,274868	-10,32081	0,422098
12	16,28542	-2,771356	-27,95304	-11,33921
13	-3,055105	-18,06895	4,002429	4,722482
14	-3,406111	10,89372	-1,752935	-3,423612
15	2,93309	9,274868	-10,32081	0,422098
16	16,28542	-2,771356	-27,95304	-11,33921
17	-3,055105	-18,06895	4,002429	4,722482
18	-3,406111	10,89372	-1,752935	-3,423612
19	2,93309	9,274868	-10,32081	0,422098
20	16,28542	-2,771356	-27,95304	-11,33921
21	-3,406111	10,89372	-1,752935	-3,423612
22	2,93309	9,274868	-10,32081	0,422098
23	16,28542	-2,771356	-27,95304	-11,33921
24	-3,055105	-18,06895	4,002429	4,722482
25	-3,406111	10,89372	-1,752935	-3,423612
26	2,93309	9,274868	-10,32081	0,422098
27	16,28542	-2,771356	-27,95304	-11,33921
28	-3,055105	-18,06895	4,002429	4,722482
29	-3,055105	-18,06895	4,002429	4,722482
30	60,24546	-122,0716	105,6798	-30,19201

Задача 2. Напишіть програму уточнення коренів нелінійного рівняння, згідно з варіантом, заданим у таблиці 5.11 методом проб. Точність обчислення коренів $\varepsilon=10^{-3}$.

Задача 3. Напишіть програму уточнення коренів нелінійного рівняння, згідно з варіантом, заданим у таблиці 5.12 методом половинного ділення. Точність обчислення коренів $\varepsilon=10^{-4}$. Підрахуйте кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності.

Таблиця 5.12

Вар.	$f(x)$	$g(x)$	$[a, b]$
1	$(\sin x)^2-\frac{5}{6}\sin x+\frac{1}{6}$	$(\sin x)^2-\sin x+\frac{1}{4}$	[0;1]
2	$(\sin x)^2+\frac{7}{12}\sin x+\frac{1}{12}$	$(\sin x)^2+\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{9}$	[-1;0]
3	$(\sin x)^2-\frac{1}{30}\sin x-\frac{1}{30}$	$(\sin x)^2-\frac{2}{5}\sin x+\frac{1}{25}$	[-0,5;-0,5]
4	$(\cos x)^2+\frac{2}{35}\cos x-\frac{1}{35}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{7}\cos x+\frac{1}{49}$	[0;2]
5	$(\cos x)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)\cos x+\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{2}$	[0;1,5]
6	$(\cos x)^2+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{18}$	$(\cos x)^2+\frac{1}{3}\cos x+\frac{1}{36}$	[0;2]
7	$(\ln x)^2-5\ln x+6$	$(\ln x)^2-4\ln x+4$	[5;25]
8	$(\ln x)^2-\ln x-2$	$(\ln x)^2+2\ln x+1$	[0,1;10]
9	$(\ln x)^2-\frac{3}{4}\ln x+\frac{1}{8}$	$(\ln x)^2-\ln x+\frac{1}{4}$	[0,1;2]
10	$(tgx)^2+(\sqrt{3}-1)tgx-\sqrt{3}$	$(tgx)^2-2tgx+1$	[1,2;1]
11	$(tgx)^2-28/9\cdot tgx+1/3$	$(tgx)^2-6tgx+9$	[0;1,5]
12	$(tgx)^2-\frac{53}{6}tgx-\frac{3}{2}$	$(tgx)^2-\frac{1}{3}tgx+\frac{1}{36}$	[-0,5;1,5]
13	x^4-7x^2+10	x^4-4x^2+4	[0;3]
14	$x^4-\frac{10}{3}x^2+1$	x^4-6x^2+9	[0;2]
15	$x^4-\frac{13}{2}x^2+3$	$x^4-x^2+\frac{1}{4}$	[0;3]
16	$(\sin x)^2+\frac{5}{6}\sin x+\frac{1}{6}$	$(\sin x)^2+\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{9}$	[-1;0]

Продовження таблиці 5.12

17	$(\sin x)^2-\frac{7}{12}\sin x+\frac{1}{12}$	$(\sin x)^2-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{16}$	*[0;1]*
28	$(\sin x)^2+\frac{1}{30}\sin x-\frac{1}{30}$	$(\sin x)^2+\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{36}$	[*-0,5;0,5*]
19	$(\cos x)^2-\frac{2}{35}\cos x-\frac{1}{35}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{25}$	*[0;3]*
20	$(\cos x)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)\cos x-\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\cos x)^2-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{16}$	*[0;2]*
21	$(\cos x)^2-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{18}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{9}$	*[0;2]*
22	$(\lg x)^2+\frac{5}{3}\lg x-\frac{2}{3}$	$(\lg x)^2-\frac{2}{3}\lg x+\frac{1}{9}$	*[0,001;3]*
23	$(\lg x)^2-\lg x-\frac{3}{4}$	$(\lg x)^2-3\lg x+\frac{9}{4}$	[0,1;35]
24	$(\lg x)^2+\frac{3}{4}\lg x-\frac{1}{4}$	$(\lg x)^2+2\lg x+1$	*[0,01;3]*
25	$(tgx)^2-(1+\frac{1}{\sqrt{3}})tgx+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(tgx)^2-2tgx+1$	*[0;1]*
26	$(tgx)^2-\frac{7}{4}tgx-\frac{1}{2}$	$(tgx)^2+\frac{1}{2}tgx+\frac{1}{16}$	[*-0,5;1,5*]
27	$(tgx)^2+\frac{37}{6}tgx+1$	$(tgx)^2+12tgx+36$	[*-1,5;0*]
28	x^4-11x^2+24	x^4-6x^2+9	*[1;3]*
29	$x^4-\frac{26}{5}x^2+1$	x^4-10x^2+25	*[0;3]*
30	$x^4-\frac{21}{2}x^2+5$	$x^4-x^2+\frac{1}{4}$	*[0;5]*

Задача 4. Напишіть програму уточнення коренів нелінійного рівняння, заданого у задачі 3 методом хорд. Точність обчислення коренів $\varepsilon=10^{-5}$. Підрахуйте кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності.

Задача 5. Напишіть програму уточнення коренів нелінійного рівняння, згідно з варіантом, заданим у таблиці 5.13 методом Ньютона. Точність обчислення коренів $\varepsilon=10^{-5}$. Підрахуйте кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності.

Таблиця 5.13

$f(x) \equiv P_5(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$					
Вар.	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	*4,545004*	*-3,055105*	*-18,06895*	*4,002429*	*4,722482*
2	*-2,656764*	*-3,406111*	*10,89372*	*-1,752935*	*-3,423612*
3	*-4,556062*	*2,93309*	*9,274868*	*-10,32081*	*0,422098*
4	*7,809249*	*16,28542*	*-2,771356*	*-27,95304*	*-11,33921*
5	*4,545004*	*-3,055105*	*-18,06895*	*4,002429*	*4,722482*
6	*-2,656764*	*-3,406111*	*10,89372*	*-1,752935*	*-3,423612*
7	*-4,556062*	*2,93309*	*9,274868*	*-10,32081*	*0,422098*
8	*7,809249*	*16,28542*	*-2,771356*	*-27,95304*	*-11,33921*
9	*4,545004*	*-3,055105*	*-18,06895*	*4,002429*	*4,722482*
10	*-2,656764*	*-3,406111*	*10,89372*	*-1,752935*	*-3,423612*
11	*-1,556062*	*2,93309*	*9,274868*	*-10,32081*	*0,422098*
12	*2,809249*	*16,28542*	*-2,771356*	*-27,95304*	*-11,33921*
13	*3,545004*	*-3,055105*	*-18,06895*	*4,002429*	*4,722482*
14	*-8,656764*	*-3,406111*	*10,89372*	*-1,752935*	*-3,423612*
15	*-4,556062*	*2,93309*	*9,274868*	*-10,32081*	*0,422098*
16	*7,809249*	*16,28542*	*-2,771356*	*-27,95304*	*-11,33921*
17	*4,545004*	*-3,055105*	*-18,06895*	*4,002429*	*4,722482*
18	*-2,656764*	*-3,406111*	*10,89372*	*-1,752935*	*-3,423612*
19	*-4,556062*	*2,93309*	*9,274868*	*-10,32081*	*0,422098*
20	*4,809249*	*16,28542*	*-2,771356*	*-27,95304*	*-11,33921*
21	*2,656764*	*-3,406111*	*10,89372*	*-1,752935*	*-3,423612*
22	*4,556062*	*2,93309*	*9,274868*	*-10,32081*	*0,422098*
23	*-7,809249*	*16,28542*	*-2,771356*	*-27,95304*	*-11,33921*
24	*-4,545004*	*-3,055105*	*-18,06895*	*4,002429*	*4,722482*
25	*-2,656764*	*-3,406111*	*10,89372*	*-1,752935*	*-3,423612*
26	*-4,556062*	*2,93309*	*9,274868*	*-10,32081*	*0,422098*
27	*7,809249*	*16,28542*	*-2,771356*	*-27,95304*	*-11,33921*
28	*-4,545004*	*-3,055105*	*-18,06895*	*4,002429*	*4,722482*
29	*4,545004*	*-3,055105*	*-18,06895*	*4,002429*	*4,722482*
30	*-13,0072*	*60,24546*	*-122,0716*	*105,6798*	*-30,19201*

Задача 6. Напишіть програму уточнення коренів нелінійного рівняння, згідно з варіантом, заданого у таблиці 5.12 комбінованим методом. Точність обчислення коренів $\varepsilon=10^{-5}$. Підрахуйте кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності.

Задача 7. Напишіть програму уточнення коренів нелінійного рівняння, заданого у задачі 5 методом ітерації. Точність обчислення коренів $\varepsilon=10^{-5}$.

Підрахуйте кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності.

Задача 8. Написати програму для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2(a_1 x + b_1) \\ x = y^2(a_2 y + b_2) \end{cases}$$ з точністю ε.

Значення параметрів даної системи і похибки ε наведені в таблиці 5.14.

Таблиця 5.14

Варіант	a_1	a_2	b_1	b_2	ε
1	*10*	*20*	*19*	*36*	*0.005*
2	*100*	*100*	*10*	*20*	*0.002*
3	*150*	*150*	*5*	*10*	*0.001*
4	*100*	*50*	*10*	*30*	*0.001*
5	*50*	*100*	*15*	*20*	*0.001*

Задача 9. Написати програму для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{cases}$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Значення параметрів системи наведені в таблиці 5.15

Таблиця 5.15

Варіант	R	a	b	c	d
1	5	4	4	1	1
2	5	5	5	1	2
3	5	7	7	2	1
4	5	5	5	2	-1
5	5	8	4	2	1

Задача 10. Написати програму для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = -1 \\ x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = d \end{cases}$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$. Значення параметрів системи наведені в таблиці 5.16

Таблиця 5.16

Варіант	a	b	c	d
1	*1*	*1*	*1*	*3*
2	*1*	*2*	*3*	*49/36*
3	*2*	*1*	*3*	*49/36*
4	*2*	*3*	*3*	*17/36*
5	*2*	*3*	*2*	*11/18*

Задача 11. Написати програму для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ cx+ay+bz=0 \\ (x+b)^2+(y+c)^2+(z+a)^2=a^2+b^2+c^2 \end{cases}$$ з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Значення параметрів системи наведені в таблиці 5.17

Таблиця 5.17

Вар.	a	b	c	Вар.	a	b	c	Вар.	a	b	c
1	5	4	3	3	2.5	4	5	5	2	2	1
2	5	2	4	4	1	2	3.5				

Задача 12. Написати програму для розв'язання нижченаведених систем нелінійних рівнянь із заданими початковими наближеннями та точністю:

а) $\begin{cases} x=lg(y/z)+1 \\ y=0.4+z^2-2x^2 \\ z=2+xy/20 \end{cases}$ при $\begin{matrix} x^{(0)}=1.2; y^{(0)}=2.4 \\ z^{(0)}=2.1; \varepsilon=10^{-4} \end{matrix}$.

б) $\begin{cases} x+x^2-2yz=0.1 \\ y-y^2+3xz=0.2 \\ z+z^2+2xy=0 \end{cases}$ при $\begin{matrix} x^{(0)}=y^{(0)}=z^{(0)}=0 \\ \varepsilon=10^{-5} \end{matrix}$.

в) $\begin{cases} 3x^2+1.5y^2+z^2-5=0 \\ 6xyz-x+5y+3z=0 \\ 5xz-yz-1=0 \end{cases}$ при $\begin{matrix} x^{(0)}=1.25; y^{(0)}=0 \\ z^{(0)}=0.25; \varepsilon=10^{-4} \end{matrix}$.

Задача 13. Написати програму для розв'язання системи нелінійних рівнянь
$\begin{cases} x=\cos y+0.85 \\ y=\sin x-1.32 \end{cases}$ з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Задача 14. Написати програму для розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона $\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0 \\ 2x_1^2+x_2^2+4x_3=0 \\ 3x_1^2-4x_2-x_3^2=0 \end{cases}$ з точністю $\varepsilon=10^{-5}$.

За початкове наближення розв'язку прийміть $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0.5$

Задача 15. Методом Ньютона з точністю $\varepsilon=10^{-6}$ знайти усі корені системи рівнянь $\begin{cases} f_1(x_1;x_2)=0; \\ f_2(x_1;x_2)=0. \end{cases}$. Варіанти завдань наведені у таблиці 5.18.

Таблиця 5.18.

Вар.	Система рівнянь	Вар.	Система рівнянь
1	$\sin(x_1+x_2)-x_2-1.2=0$ $2x_1+\cos x_2-2=0$	16	$\sin(0.5x_1+x_2)-1.2x_1-1=0$ $x_1^2+x_2^2-1=0$
2	$\cos(x_1-1)+x_2-0.5=0$ $\sin x_1+2x_2-2=0$	17	$\tan(x_1x_2+0.3)-x_1^2=0$ $0.9x_1^2+2x_2^2-1=0$
3	$\sin x_1+2x_2-2=0$ $\cos x_1+x_2-1.5=0$	18	$\sin(x_1+x_2)-1.3x_1-1=0$ $x_1^2+0.2x_2^2-1=0$
4	$\cos x_1+x_2-1.5=0$ $2x_1-\sin(x_2-0.5)-1=0$	19	$\tan(x_1x_2)-x_1^2=0$ $0.8x_1^2+2x_2^2-1=0$
5	$\sin(x_1+1.5)-x_2+2.9=0$ $\cos(x_2-2)+x_1=0$	20	$\sin(x_1+x_2)-1.5x_1-0.1=0$ $3x_1^2+x_2^2-1=0$
6	$\cos(x_1+0.5)+x_2-0.8=0$ $\sin x_2-2x_1-1.6=0$	21	$\tan(x_1x_2)-x_1^2=0$ $0.7x_1^2+2x_2^2-1=0$
7	$\sin(x_1-1)+x_2-0.1=0$ $x_1-\sin(x_2+1)-0.8=0$	22	$\sin(x_1+x_2)-1.2x_1-0.1=0$ $x_1^2+x_2^2-1=0$
8	$\cos(x_1+x_2)+2x_2=0$ $x_1+\sin x_2-0.6=0$	23	$\tan(x_1x_2+0.2)-x_1^2=0$ $0.6x_1^2+2x_2^2-1=0$
9	$\cos(x_1+0.5)-x_2-2=0$ $\sin x_2-2x_1-1=0$	24	$\sin(x_1+x_2)-x_1+0.1=0$ $x_2-\cos(3x_1)+0.1=0$
10	$\sin(x_1+x_2)-x_2-1.5=0$ $x_1+\cos(x_2-0.5)-0.5=0$	25	$\cos(x_1+0.5)+x_2-1=0$ $\sin x_2-2x_1-2=0$
11	$\sin(x_2+1)-x_1-1.2=0$ $2x_1^2+x_2-2=0$	26	$\cos(x_2-2)+x_1=0$ $\sin(x_1+0.5)-x_2+2.9=0$
12	$\cos(x_2-1)+x_1-0.5=0$ $x_2-\cos x_1-3=0$	27	$\sin(x_1-1)+x_2-1.5=0$ $x_1-\sin(x_2-1)-1=0$
13	$\tan(x_1x_2+0.4)-x_1^2=0$ $0.6x_1^2+2x_2^2-1=0$	28	$\sin(x_2+1)-x_1-1=0$ $2x_2+\cos x_1-0.5=0$
14	$\sin(x_1+x_2)-1.6x_1-1=0$ $x_1^2+x_2^2-1=0$	29	$\cos(x_2-1)+x_1-0.8=0$ $x_2-\cos x_1-2=0$
15	$\tan(x_1x_2+0.1)-x_1^2=0$ $x_1^2+2x_2^2-1=0$	30	$\cos(x_1-1)+x_2-1=0$ $\sin x_2+2x_1-1.6=0$

6 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ

6.1 Основні поняття теорії наближення функцій

Теорією і практикою наближення, або, як ще говорять, *апроксимації,* функцій слід користуватися при розв'язанні багатьох практичних задач [1, 4, 12].

Нехай, наприклад, у процесі деякого експерименту в дискретні моменти часу $x_0, x_1, ..., x_N$ отримані значення $f_0, f_1, ..., f_N$ деякої величини $f(x)$. Потрібно відновити функцію $f(x)$ при інших $x \neq x_i (i = 0, 1, ..., N)$. Подібна ж задача виникає при багаторазовому обчисленні на ЕОМ однієї і тієї ж складної функції f у різних точках. Замість цього часто буває доцільно обчислити функцію f у невеликій кількості характерних точок x_i, а в інших точках обчислити її значення за простішим правилом, використовуючи інформацію про вже відомі значення $f_i = f(x_i)$.

Іншими поширеними прикладами апроксимації функцій є задачі визначення похідної $f'(x)$ та інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за заданими значеннями f_i.

При складанні алгоритмів стандартних програм для обчислення елементарних і спеціальних функцій знову ж таки виникає задача наближення функцій.

Класичний підхід до розв'язання подібних задач полягає в тому, щоб, використовуючи наявну інформацію про функції f, розглянути іншу функцію φ, порівняно близьку, в деякому смислі, до f, що дозволяє виконати над нею відповідну операцію та отримати оцінку похибки такої «аналітичної заміни».

У процесі чисельної реалізації цього підходу необхідно розглянути такі чотири основних питання [4]:

1. Питання про наявну інформацію щодо функції f, тобто про вигляд, в якому задана функція f.

2. Питання про клас апроксимуючих функцій, тобто про те, якими функціями φ буде апроксимована функція f.

3. Питання про близькість апроксимованої (функції до якої слід знайти наближену функцію) і апроксимуючої (функції, яка замінює вихідну) функцій, тобто про вибір критерію узгодження, який повинна задовольняти функція φ.

4. Питання про похибки, тобто про визначення різниці між точним і наближеним значеннями.

В питанні про інформацію щодо функції f розрізняють два основних випадки: або функція задана аналітично, або у вигляді таблиці. Графічний спосіб задання функції відносять або до першого, або до другого випадку в залежності від конкретної задачі. Далі ми будемо розглядати на відрізку *[a, b]* безперервні разом з достатньою кількістю своїх похідних функції $f_i = f(x_i)$, які набувають значення $f_i = f(x_i)$ у вузлах x_i заданої сітки

$$A_N : \{ a \le x_0 < x_1 < ... < x_N \le b \}. \tag{6.1}$$

В питанні про клас апроксимуючих функцій слід керуватися двома головними факторами: по-перше, апраксимуюча функція повинна відображати характерні риси апроксимованої, а по-друге, бути досить зручною при виконанні над нею необхідних операцій.

У чисельному аналізі широке застосування мають три групи апроксимуючих функцій [1, 4]:

1) функції вигляду $1, x, ..., x^n$, лінійні комбінації яких породжують клас усіх многочленів степеня не вищого за *n;*

2) тригонометричні функції $\sin a_i x$ і $\cos a_i x$, які породжують ряди Фур'є та інтеграл Фур'є;

3) експоненціальні функцій $e^{a_i x}$, що визначають явище типу розпаду і накопичення, що часто зустрічаються в реальних ситуаціях.

Нижче ми зупинимося докладніше на многочленній апроксимації, тобто будемо приймати як апроксимуючу функцію многочлен деякого степеня *n.*

У цьому випадку апроксимуюча функція зазвичай позначається $P_n(x)$ і має вигляд

$$\varphi(x) \equiv P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{6.2}$$

Питання про критерії узгодження полягає в тому, щоб визначити деяким чином «відстань» між апроксимованою і апроксимуючою функціями, а потім із усього класу апроксимуючих функцій вибрати ту, для якої ця «відстань» є мінімальною [4].

Одним з поширених критеріїв узгодження є *критерій Чебишева,* оснований на понятті відстані як максимальної величини відхилення функції φ від функції f у вузлах x_i.

$$\rho_1 = \max_{0 \le i \le N} \left| f(x_i) - \varphi(x_i) \right|. \tag{6.3}$$

Найбільший інтерес викликає окремий випадок, коли для апроксимуючої функції відстань $\rho_1 = 0$. Це означає, що для табульованої функції $y = f(x)$, заданої своїми значеннями $y_i = f_i = f(x_i)$, $(i=\overline{1,N})$, потрібно побудувати апроксимуючу функцію $\varphi(x)$, яка збігається у вузлах x_i, зі значеннями заданої функції $y = f(x)$, тобто таку, що $\varphi(x_i) = y_i$.

Такий спосіб апроксимації, оснований на критерії збігу f і φ у вузлах x_i, називається *інтерполюванням* (або *інтерполяцією).* Якщо аргумент x, для якого визначається наближене значення функції, належить відрізку $[x_0, x_N]$, то задача визначення значення функції в точці x називається *інтерполяцією у вузькому смислі.* Якщо ж аргумент x знаходиться за межами відрізка $[x_0, x_N]$, то поставлена задача називається *екстраполюванням (або екстраполяцією).*

Геометрично задача інтерполяції для функції одної змінної $y = f(x)$ означає побудову на площині xOy кривої, що проходить через точки з координатами $(x_1; y_1), ..., (x_N; y_N)$ (рис. 6.1)

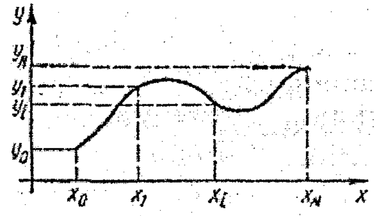


Рис. 6.1

Приведемо ще один приклад критерію узгодження [4]. Введемо поняття відстані між f і φ як суми квадратів їх відхилень у вузлових точках:

$$\rho = \sum_{i=0}^{N} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2.$$

Тепер як апроксимуючу функцію виберемо ту, для якої ρ мінімальне. Цей критерій доцільно використовувати у випадку великої кількості інформації, заданої з невисокою точністю; метод апроксимації, оснований на цьому критерії часто називають методом найменших квадратів. До його переваг слід віднести простоту і послідовність математичної теорії.

Нарешті, останнє питання – про точність одержуваного результату – у багатьох випадках є основним. Дійсно, в остаточному підсумку якість методу визначається в першу чергу швидкістю отримання розв'язку з необхідною точністю, або, як ще говорять, швидкістю збіжності. Тому зрозуміло, що вибір вузлових точок, клас апроксимуючих функцій і критерій узгодження повинні бути підпорядкованими одному питанню – про необхідну точність.

На перший погляд питання про точність одержуваного розв'язку здається досить простим: необхідно, щоб наближений розв'язок відрізнявся від точного не більше ніж на задане e. Однак питання про можливість якзавгодно точного наближення функції, що залежить від перерахованих вище параметрів (вузли x_i, клас функцій φ, критерій узгодженості f і φ), у загальному випадку залишається відкритим і підлягає дослідженню для кожного конкретного процесу апроксимації.

6.2 Інтерполяція за допомогою многочленів

Розглянемо докладніше задачу інтерполяції функції f за допомогою алгебраїчних многочленів. У цьому випадку апроксимуюча функція φ зазвичай позначається $P_n(x)$ і має вигляд

$$\varphi(x) \equiv P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} . \tag{6.4}$$

Вибір конкретного значення n здебільшого визначається властивостями апроксимуючої функції, необхідною точністю, а також вузлами інтерполяції [1, 4, 12]. Надалі ми побачимо, що на вибір значення n істотний вплив робить і обчислювальний процес, що вносить у результат додаткову похибку.

Як критерій узгодження приймається умова збігу f і φ у вузлових точках.

Природно припустити, що для однозначного визначення $n+1$ коефіцієнтів a_k, многочлена P_n необхідною умовою є збіг f і P_n в $n+1$ вузлових точках:

$$f(x_i) = P_n(x_i) \quad (i = 0,1,...,n). \tag{6.5}$$

Многочлен $P_n(x)$, що задовольняє умови (6.5), називається *інтерполяційним многочленом.* Щоб підкреслити його залежність від функції f, його часто позначають $P_n(f,x)$.

Під *похибкою інтерполяції* Δ_1 у випадку, коли необхідно обчислити значення функції $f(x)$ в одній точці x^* – будемо розуміти абсолютну величину різниці між точним і наближеним значеннями:

$$\Delta_1 = \left| f(x^*) - P_n(x^*) \right|. \tag{6.6}$$

В тому ж випадку, коли інтерполяція здійснюється на всьому відрізку $[a, b]$, як похибка приймається максимальне відхилення многочлена P_n від функції f на розглянутому відрізку:

$$\Delta_2 = \max_{[a,b]} \left| f(x) - P_n(x) \right|.$$

Отже, розглянемо наступну задачу інтерполяції. На сітці $\Lambda_n : a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$ у вузлах x_i задано значення $f_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,...,n)$ функції f. Потрібно побудувати інтерполяційний многочлен P_n, що збігається з f в вузлах x_i, та оцінити похибку Δ_1.

Існування і єдиність інтерполяційного многочлена випливають із нижченаведеної теореми.

Теорема. *Нехай:* 1) *на відрізку* $[a,b]$ *задана сітка* $\Lambda_n : a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$; 2) *задані довільні числа* c_i $(i = 0,1,...,n)$. *Тоді існує і притому єдиний многочлен* P_n *степеня не вищого n, що приймає у вузлах* x_i *задані значення* c_i.

З умов для визначення невідомих коефіцієнтів a_k многочлена P_n одержуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + \ldots + a_n = c_i (i = 0, 1, \ldots, n). \qquad (6.7)$$

Визначник цієї системи
$$W = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_0^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ . & . & \ldots & . & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix} \qquad (6.8)$$

є визначник Вандермонда [4], котрий, як відомо з алгебри, відмінний від нуля, якщо виконано умову $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Ця умова для розглянутої сітки Λ_n виконується. Отже, система (6.7) має єдиний розв'язок (єдиний набір коефіцієнтів a_k).

Очевидно, якщо у якості чисел c_i задати значення f_i функції f у вузлах x_i, то ми одержимо твердження про існування й єдиність інтерполяційного многочлена $P_n(f, x)$.

Коефіцієнти a_k інтерполяційного многочлена (6.4) можна визначити, поклавши в системі (6.7) $c_i = f_i$ і розв'язавши її, наприклад, за формулами Крамера [1]:

$$a_k = \Delta_k / W \qquad (6.9)$$

Тут Δk – визначник, що виходить з W заміною стовпця членів, що містять $(n-k)$-й степінь x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, на стовпець f_i вільних членів системи (6.7):

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} x_0^n & \ldots & x_0^{n-k+1} & f_0 & x_0^{n-k-1} & \ldots & 1 \\ x_1^n & \ldots & x_1^{n-k+1} & f_1 & x_1^{n-k-1} & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^n & \ldots & x_n^{n-k+1} & f_n & x_n^{n-k-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} \qquad (6.10)$$

Підставивши отримані значення a_k у рівність (6.4), приходимо до нової форми подання інтерполяційного многочлена $P_n(f, x)$:

$$\begin{vmatrix} P_n & 1 & x & \ldots & x^n \\ f_0 & 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n & 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.11)$$

Відзначимо, що на практиці зазвичай використовуються інтерполяційні многочлени першого і другого степеня. При цьому говорять про *лінійну* і *квадратичну інтерполяцію.*

Приклад. За вузлами x_0, x_1, x_2 і відповідним значенням функції f_0, f_1, f_2 побудувати інтерполяційний многочлен, подавши його у вигляді лінійної комбінації значень f_i $(i=0,\ 1,\ 2)$.

Відповідно до формули (6.11) маємо $\begin{vmatrix} P_2 & 1 & x & x^2 \\ f_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ f_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ f_n & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$. Розклавши визначник за елементами 1-го стовпця, отримаємо

$$P_2 \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} - f_0 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} + f_0 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} - f_0 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Враховуючи, що $\begin{vmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 \\ 1 & x_k & x_k^2 \end{vmatrix} = (x_j - x_i)(x_k - x_i)(x_k - x_j)$,

остаточно знаходимо

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

6.3 Похибка інтерполяційних процесів

Нехай функція f апроксимується інтерполяційним многочленом, тобто

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – залишковий член інтерполяційної формули

$$f(x) \approx P_n(x). \tag{6.12}$$

Залишковий член залежить від багатьох факторів – від властивостей функції f, параметрів інтерполяції, положення точки інтерполяції [1, 4]. Тому вивчення $R_n(x)$ є складною задачею. Насамперед при цьому необхідно відповісти на питання про чисельну міру похибки. Якщо точка інтерполяції x^* фіксована, то за міру похибки природно прийняти величину $\Delta_I = |R_n(x^*)|$. Якщо ж точка x^* заздалегідь невідома, а інтерполяція здійснюється на відрізку $[a,\ b]$, то за міру похибки доцільно прийняти величину

$$\Delta_I = \max_{[a,b]} |R_n(x)|. \tag{6.13}$$

В залежності від конкретної задачі можуть бути обрані й інші міри похибки.

Оцінювання міри похибки, як правило, виконується не для окремо взятої функції, а для цілого класу функцій, що мають певні загальні властивості. Виведемо явний вираз для оцінки похибки (6.13) інтерполяційної формули (6.12) для класу функцій C^{n+1}, які мають на відрізку $[a, b]$ безперервну похідну порядку $n+1$. З цією метою доведемо таку теорему.

Теорема. Нехай: 1) вузли x_i ($i=0, 1, \ldots$) різні і разом з x* належать відрізку $[a, b]$; 2) функція f має на відрізку $[a, b]$ безперервну похідну порядку $n+1$. Тоді існує така точка $\xi \in (a, b)$, що

$$R_n(x^*)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x^*-x_i). \tag{6.14}$$

Відзначимо, що якщо x^* збігається з одним з вузлів, то співвідношення (6.14) виконується, тому що його права і ліва частини дорівнюють нулю. Тому далі будемо вважати, що $x^*\neq x_i$ ($i=0, 1, \ldots, n$). Розглянемо допоміжну функцію

$$\psi(x)=f(x)-P_n(x)-k\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \tag{6.15}$$

де k – постійна, вибрана так, щоб функція ψ перетворювалась в нуль при $x=x^*$, тобто $\psi(x^*)=0=f(x^*)-P_n(x^*)-k\prod_{i=0}^{n}(x^*-x_i)$. Звідки

$$k=\frac{f(x^*)-P_n(x^*)}{\prod_{i=0}^{n}(x^*-x_i)}=\frac{R_n(x^*)}{\prod_{i=0}^{n}(x^*-x_i)}. \tag{6.16}$$

В силу такого вибору k функція ψ на відрізку $[a, b]$, принаймні, $n+2$ рази перетворюється в нуль у точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Тоді, використовуючи теорему Ролля, можна стверджувати, що похідна ψ' на інтервалі (a, b) перетворюється в нуль, принаймні, $n+1$ раз, похідна ψ'' – принаймні, n раз і т.д. до похідної $\psi^{(n+1)}$, яка перетвориться в нуль, принаймні, в одній точці. Нехай це точка $\xi \in (a, b)$. Диференціюючи тепер праву і ліву частини співвідношення (6.15) $n+1$ раз за x; і поклавши потім $x=\xi$, у лівій частині одержимо нуль, тому що $\psi^{(n+1)}(\xi)=0$. Перший доданок правої частини дає значення похідної в точці $\xi : f^{(n+1)}(\xi)$. Другий доданок правої частини дає нуль як похідна $(n+1)$-го порядку від многочлена степеня не вищого n. Третій доданок є добуток постійної k на многочлен $(n+1)$-го степеня зі старшим коефіцієнтом 1; похідна $(n+1)$-го порядку від цього многочлена, як відомо, дорівнює $(n+1)!$. Отже, підсумовуючи все сказане, маємо

$$0=f^{(n+1)}(\xi)-k(n+1)!.$$

Підставляючи сюди замість, k його вираз (6.16), одержимо співвідношення (6.14).

Нехай тепер для визначеності

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}; x \in [a,b]. \tag{6.17}$$

Використовуючи це обмеження і тільки що доведену теорему, приходимо до такої оцінки похибки для фіксованої точки x^*.

$$\Delta_1 = \left|R_n(x^*)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}\left|x^* - x_i\right|. \tag{6.18}$$

Тепер побудова рівномірної на всьому відрізку $[a, b]$ оцінки $|R_n|$ для фіксованої сітки Λ_n є досить простою, а саме

$$\Delta_1 = \max_{[a;b]}\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{[a;b]}\left|\omega_n(x)\right|, \tag{6.19}$$

де $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Приклад 1. На відрізку $[-1, 1]$ одержати рівномірну оцінку відхилення функції $f = 1 - \cos(\pi x/2)$ від її інтерполяційного многочлена, побудованого по вузлах $x_i = -1 + 2i/n$ $(i = 0, 1, ..., n;\ n = 2, 3, 4)$.

Насамперед відзначимо, що для даної функції на заданому відрізку $M_{n+1} = (\pi/2)^{n+1}$. Тому в силу оцінки (6.19) розв'язання задачі зводиться до оцінювання величини $\max\limits_{[-1,1]}\left|\omega_n(x)\right|$, що можна виконати за допомогою звичайних правил математичного аналізу.

1. Розглянемо випадок $n = 2$.

Тоді $\omega_2(x) = (x+1)x(x-1)$; $\omega_2'(x) = 3x^2 - 1$. Коренями многочлена $\omega_2'(x)$ є $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0{,}5774$. Підставляючи отримані значення в ω_2, маємо $\max\left|\omega_2(x)\right| = \left|\omega_2(x1)\right| = 2/\sqrt{27} \approx 0{,}3849$ і, отже $\Delta_1 \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{\sqrt{27}} \approx 0{,}25.$

2. Нехай тепер $n = 3$.

В цьому випадку $\omega_3(x) = (x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$; $\omega_3'(x) = 4x^3 - \frac{20}{9}x.$

Коренями многочлена $\omega_3'(x)$ є $x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm\sqrt{5/3} \approx \pm 0{,}7454$. Легко перевірити, що максимальне значення $\left|\omega_3(x)\right|$ досягається в точках x_2, x_3:

$\max\limits_{[-1,1]}\left|\omega_3(x)\right| = \left|\omega_3(x_2)\right| = 16/81 \approx 0{,}1975.$ Тому $\Delta_1 \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{16}{81} \approx 0{,}05.$

3. Для $n = 4$ оцінювання виконаємо як у випадку 1 і оцінку $\omega_4(x) = (x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$ зведемо до оцінки, отриманої в п. 1.

Дійсно, в силу непарності $\omega_4(x)$ можна обмежитися пошуком максимального значення $|\omega_4(x)|$ на відрізку $[0,\ 1]$. При цьому

$$\max_{[0,1]}|\omega_4(x)| < 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\max_{[0,1]}\left|x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\right|.$$

Заміняючи в правій частині отриманої нерівності змінну за формулою $x = 1/2\cdot(y+1)$ і з врахуванням результатів п. 1, одержимо

$$3\max_{[0,1]}\left|x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right| = \frac{3}{8}\max_{[-1,1]}|(y+1)y(y-1)| = \frac{1}{\sqrt{48}} \approx 0,1443.$$

Таким чином, $\max\limits_{[-1,1]}|\omega_4(x)| < 1/\sqrt{48} \approx 0,1443$, а $\Delta_1 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^5\cdot\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{\sqrt{48}} \approx 0,012.$

Приведений приклад, здавалося б, підтверджує припущення про те, що оцінка (6.19) є практично правильною і такою, що приймає малі значення для більшості функцій при досить великих n. Однак у багатьох випадках це не так [4].

Справа в тому, що лише для обмеженого класу функцій (наприклад, для цілих функцій) похідні досить високого порядку малі. Для більшості функцій деякі з похідних високого порядку мають тенденцію зростати як $n!$. Розглянемо, наприклад функцію $y = \ln x$. Для неї $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

Отже, навіть поблизу точок, де крива $y = \lg x$ виглядає гладкою, її похідні досить високих порядків стають дуже великими і поводяться як $n!$.

Недоліком многочленної апроксимації є відсутність, як правило, фізичного змісту, що зазвичай приводить до корисних узагальнень.

З іншого боку, простота і глибокий розвиток теорії многочленної апроксимації у поєднанні з мінімумом обчислень роблять цей вид наближення зручним інструментом під час розв'язання різних задач, тим більше, що досвід практичних розрахунків приводить до одержання гарного результату від наближення многочленами, хоча залишковий член або взагалі важко оцінити, або його оцінка занадто завищена.

Таким чином, розглянуто лише один бік питання про похибку – вплив властивостей функції f на величину Δ_1. Питання щодо залежності похибки від розташування вузлів сітки тісно пов'язано із властивостями многочленів Чебишева [4], і тому до детального вивчення цієї проблеми слід повернутися після розглядання цих многочленів. Тут же обмежимося однією з можливих оцінок величини $|\omega_n(x)|$ на фіксованій сітці Λ_n. Нехай x знаходиться між x_k і x_{k+1}. Покладемо $\max\limits_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) = h$, тоді

$$|\omega_n(x)| = \prod_{i=0}^{n}|x-x_i| < (k+1)!\ \ (n-k)!h^{n+1} \le n!h^{n+1}. \qquad (6.20)$$

Тому нерівність (6.18) можна записати у вигляді

$$\Delta_1 = \max_{[a;b]} |R_{i},(x)| < \frac{M_{n+1}}{n+1} h^{n+1}. \qquad (6.21)$$

Зазначимо, що оцінка (6.20) досить неточна і її можна поліпшити [4].

Приклад 2. З якою точністю можна обчислити $\sqrt{117}$ за допомогою інтерполяційного многочлена для функції $y=\sqrt{x}$, вибравши як вузли інтерполяції $x_0=100,\ x_1=121,\ x_2=144$?

Насамперед визначимо $M_3 = \max\limits_{[100;144]} |(\sqrt{x})'''|$. Для цього знаходимо

$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$; $y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$; $y''' = \frac{3}{8}x^{-5/2}$. Звідки $M_3 = \frac{3}{8}\cdot 100^{-5/2} = \frac{3}{8}\cdot 10^{-5}$.

З цього на основі співвідношення (6.18) маємо

$$\Delta_1 \le \frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{3!}|(117-100)(117-121)(117-144)| \approx 0{,}12\cdot 10^{-2}$$

6.4 Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Нехай в точках x_i (i=0, 1, …, n) ($x_i \ne x_j$, якщо $i \ne j$) задано значення функції f: $y_i = f(x)$ (i=0, 1, …, n). Треба побудувати многочлен $L_n(x)$ степеня n, який у вузлах x, (i=0,1, …, n) набуває тих самих значень, що й функція f, тобто

$$L_n(x_i)=y_i,\ (i=0,1,\ \dots,\ n). \qquad (6.22)$$

Шукатимемо інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ у вигляді

$$L_n(x_i)= a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + a_1(x-x_o)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \dots + a_i(x-x_o)\cdot$$
$$\cdot(x-x_1)\ \dots\ (x-x_{i+1})(x-x_{i+1}) + \dots + a_n(x-x_n) + a_i(x-x_1)(x-x_{n-1}), \qquad (6.23)$$

де коефіцієнти a_i $(i=\overline{0,n})$ невідомі. Кожний доданок виразу (6.23) є многочленом степеня n, причому при кожному з коефіцієнтів a_i $(i=\overline{0,n})$ множника $x-x_i$ немає.

Визначимо коефіцієнти a_i $(i=\overline{0,n})$, використавши умову (6.22). Поклавши в (6.23) $x-x_0$, дістанемо $L_n(x)=y_0=a_0(x_1-x_0)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)$, звідки $a_0 = \dfrac{y_0}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$

Якщо в (5.4) покласти x–x_1, то $L_n(x)=y_1=a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)$, а отже $a_1 = \dfrac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$

Аналогічно обчислюємо

$$a_i = \frac{y_i}{(x_1-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}\quad (i=2,\ 3,\ \dots,\ n).$$

Підставивши ці значення коефіцієнтів a_i $(i=\overline{0,n})$ в (6.23), дістанемо вираз інтерполяційного многочлена

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}y_i \qquad (6.24)$$

Многочлен $L_n(x)$ вигляду (6.24) називають *інтерполяційним многочленом Лагранжа,* а наближену рівність

$$f(x)\approx L_n(x) \qquad (6.25)$$

– *інтерполяційною формулою Лагранжа.*

Інтерполяційний многочлен Лагранжа можна записати компактніше. Для цього введемо многочлен $(n+1)$-го степеня вигляду

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \qquad (6.26)$$

Продиференціювавши за x цей добуток, дістанемо:

$$\omega'_{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n) \qquad (6.26')$$

Поклавши тут $x-x_i$ $(i=\overline{0,n})$, матимемо

$$\omega'_{n+1}(x)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n) \qquad (6.27)$$

Підставивши (6.26) і (6.26') в (6.25), знайдемо

$$L_n(x)=\omega_{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} \qquad (6.28)$$

Вирази $\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$ $(i=\overline{0,n})$, що є коефіцієнтами при y_i, $(i=\overline{0,n})$ у многочлені Лагранжа, називають *коефіцієнтами Лагранжа.*

Розглянемо два окремих випадки інтерполяційної формули Лагранжа (6.23).

1. Нехай n=1, тобто значення функції задано в двох вузлах x_o і x_i. Позначимо ці значення y_0 *і* y_1. Тоді з формули (6.25) дістанемо

$$f(x)\approx\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 \qquad (6.29)$$

Формула (6.29) є *формулою лінійного інтерполювання.* При лінійному інтерполюванні дуга кривої y=f(x) на відрізку [x_0; x_1] замінюється відрізком прямої (6.29), що лежить між точками (x_0; y_0) і (x_i; y_i).

2. Нехай n=2. Функцію задано в трьох вузлах x (i= 0, 1, 2) значеннями y_i (i= 0, 1, 2). У цьому випадку формула (6.25) набуває вигляду

$$f(x)\approx\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \qquad (6.30)$$

Формулу (5.30) називають *формулою квадратичного інтерполювання.* Під час квадратичного інтерполювання дуга кривої y=f(x) на відрізку [x_0; x_1] замінюється дугою параболи, що проходить через точки (x_i; y_i) (i=0, 1, 2).

Оцінювання похибки інтерполяційної формули Лагранжа

Якщо функція f на відрізку $[a;\ b]$ є многочленом степеня, що менше або дорівнює n, то з єдиності інтерполяційного многочлена випливає, що інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ тотожно дорівнює f, тобто $f(x) - L_n(x) \equiv 0$, $x \in [a;\ b]$.

Якщо f на відрізку $[a;\ b]$, який містить вузли інтерполяції x_i $(i=\overline{0,n})$, не є многочленом степеня, що менший або дорівнює n, то різниця

$$R_n(f, x) = f(x) - L_n(x) \qquad (6.31)$$

дорівнюватиме нулю лише у вузлах інтерполяції x_i, $(i=\overline{0,n})$, а в інших точках відрізка $[a;\ b]$ вона відмінна від тотожного нуля. Функцію $R_n(f, x)$, яка характеризує точність наближення функції f інтерполяційним многочленом $L_n(x)$, називають *залишковим членом* інтерполяційної формули Лагранжа (6.25), або *похибкою інтерполяції.* Якщо відомий аналітичний вираз функції f, то можна оцінити $R_n(f, x)$.

Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо вузли інтерполювання x_i, $(i=\overline{0,n})$ різні і належать відрізку $[a;\ b]$, а функція f диференційована $n+1$ раз на відрізку $[a;\ b]$, то для будь-якої точки $x \in [a;\ b]$ існує така точка ξ (a; b), що для похибки інтерполювання справедлива рівність

$$R_n(f,x) \approx \left[\left(\omega_{n+1} - (x) \right) / (n+1)! \right] \cdot f^{(n+1)}(\xi), \qquad (6.32)$$

де $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$u(x) = f(x) - L_n(x) - k\omega_{n+1}(x), \qquad (6.33)$$

де k – стала, яку доберемо пізніше.

Вузли інтерполювання x_i, $(i=\overline{0,n})$ є коренями функції u. Доберемо тепер сталу k так, щоб функція u на відрізку $[a;\ b]$ мала $(n+2)$-й корінь у довільній, але фіксованій точці $\bar{x} \neq x_i$, $(i=\overline{0,n})$. Тоді $u(\bar{x})$-0, або $f(\bar{x})-L_n(\bar{x})-k\omega_{n+1}(\bar{x})=0$. Оскільки $k\omega_{n+1}(\bar{x}) \neq 0$, то досить покласти

$$k = \left[f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) \right] / \omega_{n+1}(\bar{x}) \qquad (6.34)$$

При такому значенні k функція u на відрізку $[a;\ b]$ має $n+2$ коренів і дорівнює нулю на кінцях кожного з відрізків $[x_0;\ x_1]$, $[x_1;\ x_2]$, ..., $[x_i;\ \bar{x}]$, $[\bar{x};\ x_{i+1}]$, ..., $[x_{n-1};\ x_n]$.

За теоремою Ролля на кожному з цих відрізків є принаймні одна точка, в якій похідна $u'(x)$ дорівнює нулю. Тому на $(a;\ b)$ похідна $u'(x)$ дорівнює нулю не менше ніж n+1 раз, похідна другого порядку $u''(x)$ – не менше ніж n раз і т.д., нарешті похідна $u^{(n+1)}(x)$ – щонайменше один раз – у точці, розташованій між найбільшим і найменшим з чисел x_0, x_1, ..., x_n і $\bar{x}$

Нехай ξ корінь похідної $u^{(n+1)}(x)$, тобто $u^{(n+1)}(\xi)=0$. Продиференціювавши за x функцію $u(x)$ (6.14) n+1 раз і врахувавши, що $L_n^{(n+1)}(x) = 0$, а $\omega_{n+1}^{(n+1)}(x)=(n+1)!$, дістанемо $u^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!$. Звідси, якщо $x = \xi$, маємо

$\omega_{n+1}^{(n+1)}(x)=(n+1)!$, дістанемо $u^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-k(n+1)!$. Звідси, якщо $x=\xi$, маємо

$$f^{(n+1)}(\xi)-k(n+1)!=0, \text{ або } k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Порівнявши це значення k з (6.34), знайдемо

$$\frac{f(\bar{x})-L_n(\bar{x})}{\omega_{n+1}(\bar{x})}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \text{ тобто } f(\bar{x})-L_n(\bar{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\bar{x}).$$

Але точка x – довільна, тому останню формулу можна записати ще й так:

$$R(f,x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

де точка ξ залежить від x і $\xi\in(a;\ b)$. Ця формула справедлива для всіх точок відрізка $[a;\ b]$, включаючи й вузли інтерполювання. У вузлах інтерполювання x_i, ($i=0, 1, ..., n$) похибка інтерполювання $R(f,\ x_i)=0$ ($i=0, 1, ..., n$). Теорему доведено.

Якщо $M_{n+1}=\max\limits_{x\in[a;b]}|f^{(n+1)}(x)|$, то для абсолютної похибки інтерполяційної формули Лагранжа дістаємо таку оцінку:

$$|R(f,x)|=|f(x)-L_n(x)|=\frac{M_n+1}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|, \tag{6.35}$$

З формули (6.32) дістаємо, зокрема, що залишковий член формули лінійного інтерполювання (6.29) дорівнює

$$R_1(f,x)=\frac{\omega_2(x)}{2!}f''(x), \text{ де } \omega_2(x)=(x-x_0)(x-x_1), \xi\in(x_0;x_1),$$

а залишковий член формули квадратичного інтерполювання (6.30)

$$R_2(f,x)=\frac{\omega_3(x)}{3!}f'''(\xi), \text{ де } \omega_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \xi\in(x_0;x_2).$$

З формули (6.35) видно, що абсолютна похибка інтерполяційної формули Лагранжа пропорційна добутку двох множників M_{n+1} і $|\omega^{(n+1)}(x)|$, з яких M_{n+1} залежить лише від функції f, а величина другого, $|\omega^{(n+1)}(x)|$, визначається виключно вибором вузлів інтерполювання. Зменшити величину абсолютної похибки інтерполяційної формули Лагранжа можна таким вибором вузлів інтерполювання, за якого множник $|\omega^{(n+1)}(x)|$ набуває найменшого максимального значення на відрізку $[a;\ b]$.

Чебишев П. Л. довів, що величина $\max\limits_{[a;b]}|\omega^{(n+1)}(x)|$ має найменше значення, якщо вузлами інтерполювання є числа $x_k=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi_k$, де $\xi_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ $(k=0,1,...,n)$ – нулі многочлена Чебишева $T_{m+1}(t)=\cos(n+1)\arccos t$. Вони дійсні, різні, належать відрізку $(-1;\ 1)$ і зосереджуються біля кінців інтервалу [1].

Доведено, що за такого вибору вузлів інтерполювання

$$|\omega_2(x)| \le 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Навіть і тепер не можна гарантувати, що абсолютна похибка інтерполяційної формули Лагранжа буде якзавгодно мала при досить великому значенні n.

Таблиця 6.1

i	0	1	2	3
x_i	1	3	4	6
y_i	10	6	8	5

Приклад 1. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа третього степеня для функції f, заданої табл. 6.1, і знайти наближене значення функції в точці $x = 2$.

Розв'язання. Користуючись формулою (6.24), дістанемо

$$L_3(x) \approx 10\frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} + 6\frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} + 8\frac{(x-1)}{(4-1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(x-4)(x-6)}{(4-3)(4-6)} + 5\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} = \frac{1}{6}(-3x^3+32x^2-101x+132),$$

а $f(2)=L_3(2)=5{,}6666666$.

Отже, щоб побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа, треба виконати значну обчислювальну роботу. Обсяг її дуже зростає тоді, коли треба підвищувати порядок многочлена: якщо до заданої системи вузлів інтерполювання x_i ($i = 0, 1, ..., n$) додати ще хоч один вузол x_{n+1}, то для нової системи вузлів x_i ($i = 0, 1, ..., n$) многочлен Лагранжа треба будувати заново.

Організація обчислень за інтерполяційною формулою Лагранжа. Якщо значення інтерполяційного многочлена Лагранжа треба обчислити лише в одній точці $x \ne x_i$ ($i=0, 1, ..., n$), де x_i ($i=0, 1, ..., n$) – вузли інтерполювання, то немає потреби явно будувати сам многочлен. Досить формулу (6.24) подати у вигляді $L_n(x) = \omega_{n+1}(x)\sum_{k=0}^{n}(y_k/P_k)$,

де $P_k = (x - x_k)\,\omega'_{n+1}(x)$ (k=0, 1, … n),

і всі обчислення виконувати за обчислювальною схемою табл. 6.2.

За цією схемою обчислюють:

1) різниці $x_i - x_j$ $(i \ne j)$ і $x_i - x_j$ $(i,j = 0, 1, ..., n)$;
2) добутки множників по рядках P_i ($i = 0, 1, ..., n$);
3) частки Y_i/P_i ($i = 0, 1, ..., n$);
4) суму $S = \sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{P_i}$;
5) добуток діагональних елементів (підкреслених у табл. 6.2 рискою), які дають значення многочлена $\omega_{n+1}(x)$ у точці x;
6) значення многочлена Лагранжа в точці x.

Таблиця 6.2

i	x_i	Різниці $x - x_i, x_i - x_j$						P_i	Y_i	Y_i/P_i
0	x_0	$\underline{x-x_0}$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	...	$x_0 - x_{n-1}$	$x_0 - x_n$	P_0	Y_0	Y_0/P_0
1	x_1	$x_1 - x_0$	$\underline{x - x_1}$	$x_1 - x_2$	...	$x_1 - x_{n-1}$	$x_1 - x_n$	P_1	Y_1	Y_1/P_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...		...
n	x_n	$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	...	$x_n - x_{n-1}$	$\underline{x - x_n}$	P_n	Y_n	Y_n/P_n
$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ $\quad S = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{P_i}$										
$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) * S,$										

Для кожного нового значення аргумента x або при підвищенні порядку многочлена (а це приведе до залучення нових вузлів) всі обчислення виконують заново, що дуже збільшує обсяг обчислювальної роботи. Значно спростити і зменшити її можна скориставшись інтерполяційною схемою Ейткіна, за якою в процесі обчислення поступово залучаються нові вузли x, поки самі обчислення не покажуть, що необхідної точності досягнуто.

Приклад 2. Значення функції f задано у таблиці 6.3.

Таблиця 6.3

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	0.5	1.0	1,3	1.5	1.7	1.9
y_i	1	1,6487	2,7183	3.6693	4,4817	5,4739	6,6859

Використовуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа 6-го степеня обчислити значення функції в точці x=1,1 і похибку такої апроксимації.

Розв'язання. Оскільки треба обчислити значення інтерполяційного многочлена Лагранжа лише в одній точці, то немає потреби будувати многочлен в явному вигляді. Тому виконаємо обчислення за обчислювальною схемою табл. 6.2. В результаті дістанемо табл. 6.4.

Таблиця 6.4

i	x_i	Різниці x_i-x_j (i<j)							P_i	Y_i	Y_i/P_i
0	0	1.1	-0.5	-1.0	-1,3	-1.5	-1.7	-1,9	3,464175	1	0,288669
1	0,5	0.5	0,6	-0,5	-0,8	-1.0	-1.2	-1,4	-0,2016	1,6487	-8,1780753
2	1.0	1,0	0,5	0,1	-0.3	-0,5	-0,7	-0.9	0,004725	2,7183	575,30158
3	1.3	1,3	0.8	0,3	-0.2	-0,2	-0,4	-0,6	0,0029952	3,6693	1225,06
4	1.5	1.5	1.0	0.5	0,2	-6,4	-0,2	-0.4	-0,0048	4.4817	-933.6875
5	1.7	1.7	1.2	0,7	0.4	0,2	-0,6	-0,2	0,0137088	5.4739	399,29826
6	1.9	1.9	1.4	0,9	0,6	0.4	0.2	-0,8	-0,0919296	6.6859	-72,728479
ω_7 = 0,0025344 $\quad$ S = 1185,3544											
$e^{1,1} = L_6(1,1)$=3,0041625											

Округливши результат, дістанемо $e^{1,1} = 3,0042$, що збігається з табличним значенням п'ятизначних математичних таблиць.

Для оцінювання похибки інтерполяції скористаємось нерівністю (6.35), яка набирає вигляду $|R_6(1,1)| \le \frac{M_7}{7!}|\omega_7(1,1)|$.

Похідна сьомого порядку від функції e^x дорівнює e^x. На відрізку $[0;\ 1,9]$ функція e^x зростає, тому $1 \le e^x \le 6,6859$, $M_7 = 6,6859$, $|\omega_7(1,1)| = 0,0025344$,

$$|R_6(1,1)| \le \frac{6,6859}{5040} \cdot 0.0025344 = 0,0000033 < 0,000005.$$

Отже, всі п'ять десяткових знаків наближеного числа правильні. Таку високу точність наближення маємо, по-перше внаслідок високого порядку інтерполяційного многочлена Лагранжа і, по-друге, тому, що значення $x=1,1$ належить серединному відрізку $[1,0;\ 1,3]$ (а для серединних відрізків точність наближення значно вища, ніж для крайніх) і, крім того, x лежить близько до вузла інтерполювання $x_2 = 1,0$.

6.5 Скінченні різниці

Вище ми розглядали різні питання теорії інтерполяції на довільній сітці вузлів. На практиці наявна інформація про функцію (у вигляді її значень) часто задається на рівномірній сітці, тобто для рівновіддалених вузлів. У цьому випадку не лише спрощуються форми інтерполяційних многочленів, а й скорочується сам обчислювальний процес, що є не менш істотним з практичної точки зору фактом. При побудові інтерполяційних многочленів на рівномірній сітці використовуються величини, які називають *скінченними різницями* [4].

Розглянемо рівномірну сітку з кроком h: $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, у вузлах якої задані значення $f_i = f(x_i)$ функції $f(x_i)$.

У математичній літературі використовуються три типи скінченних різниць: *спадні різниці* $\Delta^k f_i$ – для інтерполяції вперед; *зростаючі різниці* $\nabla^k f_i$ – для інтерполяції назад; *центральні різниці* $\delta^k f_i = f^k_i$ – для побудови центральних інтерполяційних формул.

Скінченною різницею першого порядку називається різниця між значеннями функції в даному вузлі й у попередньому [4]:

$$\begin{aligned} f_1 - f_0 &= \Delta f_0 = \nabla f_1 = \delta f_{1/2} = f^1_{1/2}, \\ f_2 - f_1 &= \Delta f_1 = \nabla f_2 = \delta f_{3/2} = f^1_{3/2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{i+1} - f_i &= \Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+1/2} = f^1_{i+1/2}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Це визначення можна записати в іншій формі:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i; \quad \nabla f_i = f_i - f_{i-1}; \quad \delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}. \tag{6.37}$$

Скінченною різницею другого порядку називається різниця між значеннями першої скінченної різниці в даному вузлі й у попередньому:

$$\Delta^2 f_i=\Delta f_{i+1}-\Delta f_i;\quad \nabla^2 f_i=\nabla f_i-\nabla f_{i-1};\quad \delta^2 f_i=f^2_i=\delta f_{i+1/2}-\delta f_{i-1/2}. \qquad (6.38)$$

Аналогічно визначаються скінченні різниці довільного порядку k:

$$\Delta^k f_i=\Delta^{k-1} f_{i+1}-\Delta^{k-1} f_i;\ \nabla^k f_i=\nabla^{k-1} f_i-\nabla^{k-1} f_{i-1};\ \delta^k f_i=f^k_i=\delta^{k-1} f_{i+1/2}-\delta^{k-1} f_{i-1/2}. \qquad (6.39)$$

У деяких розглянутих нижче інтерполяційних формулах поруч з різницями (6.38) використовуються середні арифметичні сусідніх кінцевих різниць того самого порядку:

$$\mu f^k_i=(1/2)\,(f^k_{i+1/2}-f^k_{i-1/2});\qquad \mu f^k_{i+1/2}=(1/2)\,(f^k_{i+1}-f^k_i). \qquad (6.40)$$

Перша з цих величин використовується при непарному значенні k, а друга – при парному.

Скінченні різниці функції f зручно записати у вигляді таблиць. При цьому зростаючі і спадні скінченні різниці записують у вигляді горизонтальних таблиць (табл. 6.5 і 6.6), а центральні скінченні різниці – у вигляді центральних таблиць (табл. 6.7).

Таблиця 6.5

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^2 f$
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^2 f_0$
x_0+h	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^2 f_1$	...
x_0+2h	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	...	
x_0+3h	f_3	Δf_3	...		
x_0+4h	f_4	...			
...	..	...	...	...	....

Таблиця 6.6

X	f	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$
...	...	...	...	...	...
x_0-4h	f_{-4}	...			
x_0-3h	f_{-3}	∇f_{-3}	...		
x_0-2h	f_{-2}	∇f_{-2}	$\nabla^2 f_{-2}$	...	
x_0-h	f_{-1}	∇f_{-1}	$\nabla^2 f_{-1}$	$\nabla^3 f_{-1}$	...
x_0	f_0	∇f_0	$\nabla^2 f_0$	$\nabla^3 f_0$	$\nabla^4 f_0$

Таблиця 6.7

x	f	δf	$\delta^2 f$	$\delta^3 f$	$\delta^4 f$
x_0-2h	f_{-2}				
		$\delta f_{-3/2}$			
x_0-h	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		
		$\delta f_{-1/2}$		$\delta^3 f_{-1/2}$	
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$	
x_0+h	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{3/2}$			
x_0+2h	f_2				
...	...	...	...		

Розглянемо деякі властивості скінченних різниць [4].

1. *Спадні, зростаючі і центральні різниці пов'язані між собою такими співвідношеннями:*

$$\Delta^k f_i = \nabla^k f_{i+h} = \delta^k f_{i+k/2}, \tag{6.41}$$

які легко доводяться за допомогою методу математичної індукції виходячи з визначення скінченних різниць (6.39).

Для k=1 співвідношення (6.38) очевидні, оскільки в силу рівностей (6.41) маємо

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i; \quad \nabla f_{i+1} = f_{i+1} - f_i; \quad \delta f_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i.$$

Нехай тепер співвідношення (6.41) правильні для будь-якого $k \le m-1$. Покажемо, що в цьому випадку вони будуть правильні і для k = m, а отже, для всіх k. Використовуючи рівності (6.39) і припущення про справедливість (6.41) для $k \le m — 1$, маємо

$$\Delta^m f_i = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i = \nabla^{m-1} f_{i+m} - \nabla^{m-1} f_{i+m-1} = \nabla^m f_{i+m},$$

$$\Delta^m f_i = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i = \delta^{m-1} f_{i+\frac{m+1}{2}} - \delta^{m-1} f_{i+\frac{m-1}{2}} = \delta^m f_{i+\frac{m}{2}}.$$

2. *Скінченна різниця задовольняє рівність*

$$\Delta(af + bg)_i = a\Delta f_i + b\Delta g_i, \tag{6.42}$$

де a і b – постійні.

Дійсно, $\Delta(af+bg)_i = af_{i+1} + bg_{i+1} - (af_i + bg_i) = a\Delta f_i + b\Delta g_i$. Ця властивість означає, зокрема, що скінченна різниця суми або різниці двох функцій дорівнює відповідно сумі або різниці скінченних різниць цих функцій, а також що скінченна різниця добутку функції на постійний множник дорівнює добутку цього множника на скінченну різницю функції.

3. *Скінченна різниця пов'язана з відповідною похідною співвідношенням*

$$\Delta^k f_i = h^k f^{(k)}(\xi); \quad \xi \in (x_i;\ x_i + kh). \tag{6.43}$$

Як наслідок рівності (6.43) одержуємо, що скінченні різниці порядку n від многочлена степеня n постійні і дорівнюють $h^n n!a_0$, а скінченні різниці кожного вищого порядку дорівнюють нулю (a_0 – коефіцієнт многочлена при старшому степені x).

4. Скінченна *різниця порядку* k *може бути подана у вигляді такої лінійної комбінації значень* f_i:

$$\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1) j C_k^j f_{i+k-j}, \tag{6.44}$$

де $C_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$, (причому $0!=1$).

Скористаємося методом математичної індукції. Для $k=1$ це співвідношення очевидне, оскільки воно є визначення першої скінченної різниці:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Нехай тепер рівність (6.44) правильна для деякого $k=m$. Тоді

$$\Delta^{m+1} f_i = \Delta^m f_{i+1} - \Delta^m f_i = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j f_{i+1+m-j} - \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j f_{i+m-j} =$$

$$= C_m^0 f_{i+1+m} + \sum (-1)^j (C_m^j + C_m^{j-1}) f_{i+1+m-j} + (-1)^{m+1} C_{m+1}^{m+1} f_i = \sum (-1)^j (C_{m+1}^j f_{i+m+1-j}.$$

Ми використовували властивості сполучень: $C_m^{j-1} = C_{m+1}^j - C_m^j$, де $C_m^0 = C_{m+1}^0 = C_{m+1}^{m+1} = 1$. Таким чином, якщо рівність (6.44) правильна для $k=m$, то вона буде правильною і для $k=m+1$.

Приклад 1. Скласти горизонтальну таблицю скінченних різниць функції $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$ від початкового значення $x=0$, прийнявши крок $h=1$.

Припускаючи, що $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ ...$, знаходимо відповідні значення:

x	0	1	2	3	4	5	...
y	-1	2	17	50	107	194	...

Знайдемо скінченні різниці першого порядку:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 2 - (-1) = 3;$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 17 - 2 = 15;$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 50 - 17 = 33;$

$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 107 - 50 = 57;$

$\Delta y_4 = y_5 - y_4 = 194 - 107 = 87;...$

Знайдемо скінченні різниці другого порядку:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 15 - 3 = 12;$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 33 - 15 = 18;$

$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 57 - 33 = 24;$

$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = 87 - 57 = 30;...$

Знайдемо скінченні різниці третього порядку:

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 18 - 12 = 6;$

$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 24 - 18 = 6;$

$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = 30 - 24 = 6;...$

Ми бачимо, що скінченні різниці третього порядку $\Delta^3 y_0$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^3 y_2$ постійні. Це пояснюється тим, що функція $f(x)$ є многочлен третього степеня. Третю скінченну різницю можна обчислити також за формулою

$$\Delta^n P_n(x) = n!\, a_0 h^n,$$

тобто $\Delta^3 P_3(x) = 3!\cdot 1\cdot 1^3 = 6$, а скінченні різниці четвертого порядку дорівнюють нулю.

Складемо таблицю скінченних різниць:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	-1	3	12	6	0
1	2	15	18	6	0
2	17	33	24	6	
3	50	57	30		
4	107	87			
5	194				

Надалі при обчисленнях доцільно відразу ж заносити скінченні різниці в таблицю.

Оскільки вихідні значення функції f_i, як правило, задаються з деякою похибкою ε, зумовленою похибками округлення або випадковими похибками – доцільно розглянути вплив цих факторів на похибки скінченних різниць вищих порядків.

Таблиця 6.8

...	...	...	...
f^k_{i-2}			
	$f^{k+1}_{i-3/2}$		
f^k_{i-1}		$f^{k+2}_{i-1}+\varepsilon$	
	$f^{k+1}_{i-1/2}+\varepsilon$		$f^{k+3}_{i-1/2}-3\varepsilon$
$f^k_i+\varepsilon$		$f^{k+2}_i-2\varepsilon$	
	$f^{k+1}_{i+1/2}-\varepsilon$		$f^{k+3}_{i+1/2}+3\varepsilon$
f^k_{i+1}		$f^{k+1}_{i+1}+\varepsilon$	
	$f^{k+1}_{i+3/2}$		
f^k_{i+2}			
...			

Почнемо з впливу випадкових похибок і похибок округлення. Нехай замість f_i^k ми одержали $f_i^k+\varepsilon$. Тоді таблиця скінченних різниць прийме вигляд, даний у таблиці 6.8.

У силу рівності (6.44) це означає, що похибка ε у різниці порядку k поширюється далі на різниці порядку $k + m$ з коефіцієнтами $(-1)^j C_m^j$.

Якщо ж усі вихідні значення f_i задано з однією і тією ж похибкою ε, то ця похибка поширюється на різниці порядку m з коефіцієнтом 2^m і швидко зростає із зростанням $m(\Delta(f_i^m)) = 2_\varepsilon^m$.

Якщо похідні досить високих порядків функції f залишаються обмеженими, то з формули (6.43) випливає, що відповідні скінченні різниці f_i^m спадають з ростом m. Тому природно наступить такий момент, коли похибки скінченних різниць, внесені або за рахунок округлення, або за рахунок неточності вихідної інформації, стануть порівняннi із значеннями скінченних різниць або навіть перевищать їх. Отже, інформація, що міститься у таблиці цих різниць, є інформацією про різниці похибок, а не функції, і використання її стане недоцільним. При цьому кажуть, що порядок останніх скінченних різниць, які ще доцільно використовувати в обчисленнях, є *порядок правильності таблиці скінченних різниць.*

Приклад 2. Дано таблицю значень функції $f = \sin x$:

x	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°
f	0,7198	0,7314	0,7431	0,7547	0,7660	0,7771	0,7880

Усі приведені знаки є правильними у вузькому смислі. Скласти таблицю скінченних різниць і визначити порядок правильності таблиці.

Таблиця 6.9

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5	f^6
46°	0,7193						
		121					
47°	0,7314		-4				
		117		3			
48°	0,7431		-1		-5		
		116		-2		8	
49°	0,7547		-3		3		-12
		113		1		-4	
50°	0,7660		-2		-1		
		111		0			
51°	0,7771		-2				
		109					
52°	0,7880						
	0,00005	1	2	4	8	16	32

Обчислюємо скінченні різниці і складаємо таблицю 6.9. Зазначимо, що скінченні різниці прийнято записувати в одиницях останнього розряду значень функції.

В останньому рядку приведеної таблиці наведені відповідні абсолютні похибки. Очевидно, що абсолютні величини третіх скінченних різниць порівнянні зі своєю похибкою, а абсолютні величини наступних різниць суттєво менші за їх похибки. Тому порядок правильності табл. 6.9 дорівнює 2. Недоцільність використання скінченних різниць вище другого порядку в приведеному прикладі можна підтвердити і у такий спосіб. Оскільки вихідні дані f_i задані з похибкою $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, то скінченні різниці, що за абсолютною величиною менші за цю похибку, то розрахунок немає сенсу. З іншого боку, використовуючи рівність (6.43), одержимо $\Delta^k f_i \approx (\pi / 180)^{k+1}$, і тому порядок правильності табл. 6.9 визначається нерівностями

$$(\pi / 180)^k > 0{,}5 \cdot 10^{-4} \geq (\pi / 180)^{k+1},$$

які виконуються при $k = 2$.

У загальному випадку порядком правильності таблиці скінченних різниць є найменше значення k, що задовольняє нерівність

$$h^{k+1}M_{k+1} \le \varepsilon, \text{ де } M_\nu = \max_{[x_i, x_{i+\nu}]} \left| f^{(\nu)}(x) \right|. \qquad (6.45)$$

Ми розглянули вплив похибки вихідної інформації на степінь інтерполяційного многочлена. Крім того, якщо значення f_i задані приблизно за будь-яких причин, обчислення значення многочлена $P_n(x^*)$ не може бути виконано абсолютно точно – то ми одержуємо лише наближене значення $\overline{P}_n(x^*)$ для точного P_n (x^*). При цьому обчислювальна похибка $\Delta_2(\overline{P}_n) = \left| P_n(x^*) - \overline{P}_n(x^*) \right|$ оцінюється за загальними правилами обчислення похибки функції.

Розглянемо, наприклад, многочлен Лагранжа $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$.

Нехай потрібно обчислити L_n (x^*) при заданих значеннях f_i і їх похибках ε_i. Величини коефіцієнтів Лагранжа $l_i(x)$ протабульовані для рівновіддалених вузлів і їх можна вважати точними числами, оскільки вони отримані з точних значень вузлів і точного x^*. Тому для многочлена Лагранжа маємо

$$\Delta_2(\overline{L_n}) \le \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \left| l_i(x^*) \right|.$$

У випадку, коли всі ε_i однакові та рівні ε, отримуємо

$$\Delta_2(\overline{L_n}) \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n} \left| f_i(x^*) \right|$$

Аналогічно можна знайти обчислювальну похибку і для інших форм інтерполяційного многочлена.

Приклад 3. На відрізку [-1, 1] одержати рівномірну оцінку обчислювальної похибки значень інтерполяційного многочлена Лагранжа, побудованого для функції $f = \cos$ $(\pi x/2)$ по вузлах x_0 =-1/2, x=0, x_2 =

Оскільки $f_0 = f_2 = 1/\sqrt{2} = 0{,}707 \pm 0{,}0002$, а $f_1 = 1$ є точне число, то шукана обчислювальна похибка має вигляд

$$\Delta_2(\overline{L}_2) = 0{,}0002 \left| \frac{x^*\left(x^* - \frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)} \right| + 0{,}0002 \left| \frac{\left(x^* + \frac{1}{2}\right)x^*}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}} \right| =$$

$$= 0{,}0004 \left[\left| x^*\left(x^* - \frac{1}{2}\right) \right| + \left| \left(x^* + \frac{1}{2}\right)x^* \right| \right]$$

Неважко показати, що на відрізку [-1; 1] $\Delta_2(\overline{L}_2)$ приймає максимальне значення у точках $x^* = \pm 1$, і тому шукана оцінка $\Delta_2(\overline{L}_2) = 0{,}0008$.

6.6 Інтерполяційні многочлени Стірлінга і Бесселя

Спочатку зупинимося на важливому з погляду похибки інтерполяції питанні про вибір вузлів інтерполяції при фіксованому степені многочлена. Розглянемо вираз для залишкового члена інтерполяційного многочлена [4]:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x^*-x_i);\quad \xi\in(x_0,x_n).$$

Оскільки відрізок інтерполяції зазвичай невеликий, то похідна $f^{(n+1)}(n)$ має невеликий діапазон зміни. Отже, діапазон зміни величини похибки визначається здебільшого добутком

$$|\omega_n(x^*)|=\prod_{i=0}^{n}|x^*-x_i|.$$

Ця величина буде мінімальною, якщо за вузли інтерполяції взяти вузли, найближчі до x^*. Таким чином, при парному степені $n=2k$ інтерполяційного многочлена варто взяти найближчий до точки x^* вузол і по k вузлів ліворуч і праворуч від нього, а при непарному степені $n=2k+1$ по $k+1$ вузлові ліворуч і праворуч від точки x^*.

Перейдемо тепер до задачі побудови інтерполяційного многочлена для функції f, заданої своїми значеннями f_i у вузлах x_i рівномірної сітки з кроком h.

Нехай точка x^* розташована неподалік деякого вузла, що позначимо x_0. Потрібно побудувати інтерполяційний многочлен парного степеня. У силу вищесказаного як вузли інтерполяції варто вибрати сітку, симетричну щодо вузла x_0.

$$\ldots,x_{-k},\ldots,x_{-1},x_0,x_1,\ldots,x_k,\ldots$$

Введемо нову змінну t, за допомогою якої початок відліку переноситься в точку x_0:

$$t=(x-x_0)/h, \tag{6.46}$$

при цьому $t^*=(x^*-x_0)/h.$

Побудуємо інтерполяційний многочлен у формі

$$P_{2k}(x)=P_{2k}(x_0+th)=a_0+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+\ldots+\frac{a_{2k-1}}{(2k-1)!}t(t^2-1^2)\ldots$$

$$\ldots(t^2-(k-1)^2)+\frac{a_{2k}}{(2k)!}t^2(t^2-1^2)\ldots(t^2-(k-1)^2). \tag{6.47}$$

Невідомі коефіцієнти a_i визначимо з умов збігу многочлена P_{2k} і функції f у вузлах x_i. При цьому помітимо, що співвідношення (6.46) ставить у відповідність вузлові x_i величину $t=i$. Наприклад, вузлові x_0 відповідає $t=0$, а вузлові x_{-3} відповідає $t=-3$.

Таким чином, для визначення коефіцієнтів a_i одержуємо систему лінійних рівнянь

$$P_{2k}(x_0+ih)=f_i \ (i=0,\ \pm 1,\ ...,\ \pm k). \qquad (6.48)$$

Структура цієї системи така, що a_0 безпосередньо знаходиться з першого рівняння системи (6.48):

$$P_{2k}(x_0)=a_0=f_0,$$

а визначення інших коефіцієнтів зводиться до послідовного розв'язку системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$P_{2k}(x_0+h)=f_0+a_1+\frac{a_2}{2}=f_1,\ P_{2k}(x_0-h)=f_0-a_1+\frac{a_2}{2}=f_{-1}.$$

Звідси $a_1=\mu f_0^1,\ a_2=\mu f_0^2,$

де $\mu f_i^k=0.5(f_{i+1/2}^k+f_{i-1/2}^k),\ \ \mu f_{i+1/2}^k=0.5(f_{i+1}^k+f_i^k),$

Продовжуючи цей процес, зазначимо, що на j-му кроці визначник системи рівнянь щодо коефіцієнтів a_{2j-1} і a_{2j} має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Отже, всі коефіцієнти a_i многочлена (6.47) однозначно визначаються системою рівнянь (6.48), і в силу теореми про єдиність, многочлен (6.47) є інтерполяційним для функції f.

В результаті нескладних перетворень приходимо до таких виразів для коефіцієнтів [4]:

$$a_0=f_0,\ a_{2j-1}=\mu f_0^{2j-1},\ a_{2j}=f_0^{2j} \quad (j=1,\ 2,\ ...\ ). \qquad (6.49)$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у вираз (6.47), одержимо *інтерполяційний многочлен Стірлінга,* який зазвичай позначають S_{2k}:

$$S_{2k}=f_0=\mu f_0^1 t+\frac{1}{2!}f_0^2 t^2+...+\frac{\mu f_0^{2k-1}}{(2k-1)!}t(t^2-1^2)...$$

$$...(t^2-(k-1)^2)+\frac{f_0^{2k}}{(2k)!}t^2(t^2-1^2)...(t^2(t^2-1^2). \qquad (6.50)$$

Оскільки многочлен Стірлінга є лише новою формою інтерполяційного многочлена Лагранжа, побудованого по вузлах $x_{-k},...,x_k$, то в силу формули (6.14) його залишковий член щодо змінної t можна подати у вигляді

$$R_{2k}=\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}h^{2k+1}\prod_{i=-1}^{k}(t-i);\ \xi\in(x_{-k},x_k), \qquad (6.51)$$

а оцінку похибки наближеного значення $P_{2k}(x)=S_{2k}(t)$ (похибки методу) – у вигляді

$$\Delta_1 = |f(x) - S(t)| \le \frac{M_{2k+1}}{(2k+1)!} h^{2k+1} \left| t(t^2 - 1^2)...(t^2 - k^2) \right|, \qquad (6.52)$$

де $M_{2k+1} = \max\limits_{[x_{-k}, x_k]} \left| f^{(2k+1)}(x) \right|$.

Нехай тепер точка інтерполяції x^* розташована між вузлами x_0 і x_1 поблизу точки $(x_0 + x_1)/2$. Потрібно побудувати інтерполяційний многочлен непарного степеня. Тоді, як було відзначено вище, сітка, що мінімізує похибку, симетрична щодо точки $(x_0 + x_1)/2$, тобто відносно точки $t = 1/2$.

Отже, на сітці $..., x_{-k}, ..., x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ..., x_{k+1}, ...$ відносно змінної t, що визначається формулою (6.36), будуємо інтерполяційний многочлен у такій формі:

$$P_{2k+1}(x) = P_{2k}(x_0 + th) = b_0 + \frac{b_1}{1!}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{b_2}{2!} t(t-1) + ... + \frac{b_{2k}}{(2k)!} t(t^2 - 1^2)...$$

$$...(t^2 - (k-1)^2)(t^* - k) + \frac{b_{2k}}{(2k+1)!} t(t^2 - 1^2)...(t^2 - (k-1)^2)(t - k). \qquad (6.53)$$

Невідомі коефіцієнти b_i визначаються з умов збігу значень многочлена P_{2k+1} значеннями функції f у вузлах x_i.

Таким чином, для визначення коефіцієнтів b_i маємо систему лінійних рівнянь

$$P_{2k+1}(x_0 + ih) = f_i \quad (i = -k, ..., 0, 1, ..., k+1). \qquad (6.54)$$

Структура цієї системи така, що її розв'язок зводиться до послідовного розв'язування системи двох рівнянь з двома невідомими

$$P_{2k+1}(x_0) = b_0 - \frac{b_1}{2} = f_0, \; P_{2k+1}(x_1) = b_0 + \frac{b_1}{2} = f_1,$$

звідки $b_0 = \mu f_{1/2}$, $b_1 = f^1_{1/2}$.

Продовжуючи цей процес далі, помітимо, що на j-у кроці визначник системи рівнянь щодо коефіцієнтів b_{2j-2}, b_{2j-1} відмінний від нуля, що легко показати аналогічно тому, як це було зроблено при побудові многочлена Стірлінга. Отже, всі коефіцієнти b_i многочлена (6.53) однозначно визначаються системою рівнянь (6.54) і в силу теореми про єдиність многочлен (6.53) є інтерполяційним для функції f.

Нескладні перетворення дають такі вирази для коефіцієнтів [4]:

$$b_{2j-2} = \mu f^{2j-2}_{1/2}, \; b_{2j-1} = f^{2j-1}_{1/2} (j = 1,2,...). \qquad (6.55)$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у вираз (6.53), одержимо *інтерполяційний многочлен Бесселя,* який зазвичай позначають B_{2k+1}:

$$B_{2k+1}(t)=\mu f_{1/2}+\frac{f_{1/2}^1}{1!}\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{\mu f_{1/2}^1}{2!}t(t-1)+\frac{f_{1/2}^3}{3!}t(t-1)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\mu f_{1/2}^1}{2!}t(t-1)+\frac{f_{1/2}^3}{3!}t(t-1)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\frac{\mu f_{1/2}^{2k}}{(2k)!}t(t^2-1^2)\ldots$$

$$\ldots(t^2-(k-1)^2)(t-k)+\frac{f_{1/2}^{2k+1}}{(2k+1)!}t(t^2-1^2)\ldots(t^2-(k-1)^2)(t-k)\left(t-\frac{1}{2}\right). \quad (6.56)$$

Оскільки многочлен Бесселя є ще одною формою подання інтерполяційного многочлена Лагранжа, побудованого по вузлах $x_{-k},\ldots,x_{k+1}$, то в силу формули (6.36), його залишковий член відносно змінної t можна записати у вигляді

$$R_{2k+1}=\frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!}h^{2k+2}\prod_{i=-k}^{k+1}(t-i);\ \xi\in(x_{-k};x_{k+1}), \quad (6.57)$$

а оцінку похибки наближеного значення $P_{2k+1}(x)=B_{2k+1}(t)$ (похибки методу) – у вигляді

$$\Delta_I=\left|f(x)-B_{2k+1}(t)\right|\le\frac{M_{2k+2}}{(2k+2)!}h^{2k+2}\prod_{i=-k}^{k+1}(t-i);\ \xi\in(x_{-k};x_{k+1}), \quad (6.58)$$

де $M_{2k+2}=\max\limits_{[x_{-k},x_{k+1}]}\left|f^{(2k+2)}(x)\right|$.

Таким чином, розглянуто два інтерполяційних многочлени: многочлен Стірліга, що використовується при побудові многочлена парного степеня і будується за непарним числом вузлів, і многочлен Бесселя, що використовується при побудові многочлена непарного степеня і будується за парним числом вузлів.

Якщо ж степінь многочлена фіксований не жорстко, тобто може бути як парний, так і непарний, то доцільно використовувати многочлен Стірлінга у випадку, коли

$$|t^*|=|x^*-x_0|/h\le 0,25, \quad (6.59)$$

Тобто коли точка інтерполяції x^* розташована ближче до вузла x_0, ніж до середини між вузлами. Многочлен Бесселя варто використовувати у випадку, коли

$$0,25\le t^*\le 0,75, \quad (6.60)$$

тобто коли точка інтерполяції x^* розташована ближче до середини між вузлами x_0 і x_1. Одна з умов (6.59) або (6.60) завжди може бути забезпечена вибором відповідного вузла в якості x_0.

Приклад. Використовуючи відповідний інтерполяційний многочлен, обчислити в точках $x_2^*=48,63^0$ і $x_2^*=49,19^0$ значення функції $f=\sin x$, заданої в даній таблиці з кроком у 1^0, яка містить значення f_i з чотирма правильними у вузькому смислі знаками. Оцінити похибку результату.

У прикладі 2 розділу 6.5 було встановлено, що порядок правильності заданої таблиці є 2. Тому недоцільно будувати інтерполяційний многочлен вище другого степеня, тобто слід або будувати многочлен Стірлінга другого степеня, або многочлен Бесселя першого степеня.

Оскільки точка $x_1^* = 48,63$ розташована ближче до середини між вузлами 48^0 і 49^0, то при обчисленні $\sin x_1^*$ як x_0 варто вибрати вузол 48^0 і скористатися многочленом Бесселя; при цьому $t_1^* = (x_1^* - x_0)h^{-1} = 0,63.$ Точка $x_2^* = 49,19^0$ розташована поблизу кута 49^0, тому при обчисленні $\sin_2^*$ в якості центрального варто вибрати вузол $x_0 = 49^0$ і скористатися многочленом Стерлінга, при цьому $t_2^* = (x_2^* - x_0)h^{-1} = 0,19.$

Отже, використовуючи вищесказане, формули (6.56) і (6.60), а також дані таблиці, маємо

$$B_1(0,63) = \frac{0,7431 + 0,7547}{2} + \frac{0.0116}{11} \cdot 0,13 = 0,750408;$$

$$S_2(0,19) = 0,7547 + \frac{0,0116 + 0,0113}{2 \cdot 1!} 0,19 + \frac{-0,0003}{2!} \cdot 0,19^2 = 0,7568809.$$

Оцінимо тепер похибки методу відповідно за формулами (6.58), (6.52):

$$\Delta_1(B_1) < \frac{0,76}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \cdot 0,63 \cdot 0,37 = 0,27 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_1(S_2) < \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \cdot 0,19\left|0,19^2 - 1^2\right| = 0,2 \cdot 10^{-6}.$$

Враховуючи похибки значень функції і її скінченних різниць, приведені в таблиці, одержимо величини обчислювальних похибок:

$$\Delta_1(B_1) = 0,5 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 0,13 = 0,63 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_1(S_2) = 0,510^{-4} + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 0,19 + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 0,19^2 = 0,73 \cdot 10^{-4}.$$

При округленні значень $B_1(0,63)$ і $S_2(0,19)$ до чотирьох знаків одержуємо похибки округлення $\Delta_3(B_1) = 0,08 \cdot 10^{-4};\ \Delta_3(S_2) = 0,11 \cdot 10^{-4}$.

Поєднуючи всі знайдені погрішності, остаточно маємо $48,63^0 = 0,7509 \pm 0,0001;\ \sin 49,19^0 = 0,7569 \pm 0,0001$.

Зауваження. В деяких випадках для мінімізації сумарної похибки доцільно використовувати інтерполяційний многочлен, степінь якого вище порядку правильності таблиці скінченних різниць. Це пояснюється таким чином. Обчислювальна похибка зі збільшенням степеня многочлена природно зростає. У той же час зменшення похибки методу може бути настільки різким, що спричинить за собою зменшення і сумарної похибки.

6.7 Перший і другий інтерполяційні многочлени Ньютона

Якщо точка інтерполяції x^* знаходиться на початку або в кінці таблиці, то не завжди можна вибрати достатню кількість вузлів ліворуч і праворуч від x^* для побудови необхідних скінченних різниць. Тоді використовуються спеціальні форми інтерполяційного многочлена.

Нехай точка x^* розташована поблизу першого вузла сітки $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$. Розглянемо змінну t, що визначається співвідношенням (6.36), і побудуємо інтерполяційний многочлен у такій формі:

$$P_k(x) = P_k(x_0 + th) = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t(t-1) + \ldots + \frac{a_k}{k!}t \ldots (t-k+1). \quad (6.61)$$

Невідомі коефіцієнти a_i визначимо з умов збігу многочлена P_k і функції f у вузлах x_i. При цьому нагадаємо, що вузлу x_i відповідає величина $t = i$. Таким чином, для визначення коефіцієнтів a_i одержуємо систему лінійних рівнянь

$$P_k(x_0 + ih) = f_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, k). \quad (6.62)$$

Структура цієї системи така, що a_0 визначається безпосередньо з першого рівняння системи (6.62), a_1 – з другого при вже визначеному a_0 і т. д. Дійсно, приймаючи $i = 0$, з першого рівняння системи (6.62) знаходимо $P_k(x_0) = a_0 = f_0$, з другого рівняння при $i = 1$ маємо

$$P_k(x_0 + h) = f_0 + \frac{a_1}{1!} \cdot 1 = f_1; a_1 = \Delta f_0.$$

Продовжуючи цей процес далі, в результаті нескладних перетворень отримаємо такі вирази для коефіцієнтів:

$$a_0 = f_0; \quad a_i = \Delta^i f_0; \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \quad (6.63)$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів у рівність (6.61), одержимо *перший інтерполяційний многочлен Ньютона*, який зазвичай позначається N_k^1:

$$N_k^1(t) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}t(t-1) + \ldots + \frac{\Delta^k f_0}{k!}t(t-1)\ldots(t-k+1). \quad (6.64)$$

Залишковий член у силу формули (6.14) відносно змінної t можна подати у вигляді

$$R_h = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}h^{k+1}(t+1)\ldots(t-k); \; \xi \in (x_0, x_k), \quad (6.65)$$

а оцінку похибки наближеного значення $N_k^1(t)$ (похибки методу) – у вигляді

$$\Delta_1 = \left| f(x) - N_k^1(t) \right| \le \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}h^{k+1}\left| t(t-1)\ldots(t-k) \right|, \quad (6.66)$$

де $M_{k+1} = \max\limits_{[x_0, x_k]} \left| f(k+1)(x) \right|$.

Нехай тепер точка x^* розташована поблизу останнього вузла сітки $...x_{-k},...,x_{-1},x_0$. Для цієї сітки, знову використовуючи змінну t, яка визначається співвідношенням (6.36), побудуємо інтерполяційний многочлен у такій формі:

$$P_k(x)=P_k(x_0+th)=a_0+\frac{a_1}{z!}t+\frac{a_2}{2!}t(t+1)+...+\frac{a_k}{k!}t...(t+k-1). \qquad (6.67)$$

Невідомі коефіцієнти a_i визначимо з умов збігу многочлена P_k і функції f у вузлах x_i. При цьому зазначимо, що вузлу x_{-i} відповідає значення $t=-i$. Таким чином, для визначення коефіцієнтів одержимо систему лінійних рівнянь

$$P_k(x_0-ih)=f_i, \quad (i=0,1,...,k). \qquad (6.68)$$

Структура цієї системи така, що a_0 визначається безпосередньо з першого рівняння системи (6.68), a_1 – з другого при вже визначеному a_0 і т. д. Дійсно, приймаючи $i=0$, з першого рівняння системи (6.68) знаходимо $P_k(x_0)=a_0=f_0$, з другого рівняння при $i=1$ маємо

$$P_k(x_0-h)=f_0+\frac{a_1}{1!}1=f_{-1}; \; a1=\nabla f_0.$$

Продовжуючи цей процес далі, одержимо такі вирази для коефіцієнтів:

$$a_0=f_0; \; a_i=\nabla^i f_0; \; (i=1,2,...,k). \qquad (6.69)$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у рівність (6.67), одержимо *другий інтерполяційний многочлен Ньютона,* який зазвичай позначається як N_k^{II}:

$$N_k^{II}(t)=f_0+\frac{\nabla f_0}{1!}t+\frac{\nabla^2 f_0}{2!}t(t+1)...+\frac{\nabla^k f_0}{k!}t(t+1)...(t+k-1) \qquad (6.70)$$

із залишковим членом

$$R_k=\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}h^{k+1}t(t+1)...(t+k); \quad \xi\in(x_{-k},x_0), \qquad (6.71)$$

і оцінкою похибки наближеного значення

$$\Delta_l=\left|f(x)-N^{II}(t)\right|\le\frac{M_{k+1}}{(k+1)!}h^{k+1}\left|t(t+1)...(t+k)\right|, \qquad (6.72)$$

де $M_{k+1}=\max\limits_{[x_{-k},x_0]}\left|f^{(k+1)}(x)\right|$.

Формули (6.54) і (6.60) часто називають відповідно *інтерполяційними формулами Ньютона для інтерполяції вперед та назад.*

Приклад. Скласти відповідні інтерполяційні многочлени й обчислити в точках $x_1^*=0,63$ і $x_2^*=1,35$ значення функції $f=3^x$, заданої у вигляді нижченаведеної таблиці, що містить значення f_i з чотирма правильними в широкому смислі знаками:

x	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
f	1,732	2,280	3,000	3,948	5.196

Оцінити похибку результату.

Доповнимо задану таблицю значеннями скінченних різниць, помістивши в останньому рядку значення похибок відповідних скінченних різниць.

Таблиця 6.10

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
0,50	1,732	548	172	56	16
0,75	2,280	720	228	72	
1,00	3,000	948	300		
1,25	3,948	1248			
1,50	5,196				
	0,001	2	4	8	16

Оскільки четверта скінченна різниця збігається зі своєю похибкою, задану функцію з погляду обчислювальної похибки недоцільно апроксимувати многочленом степеня вище третього.

Оскільки $x_1^* = 0,63$ розташовано на початку таблиці, а $x_2^* = 1,35$ – наприкінці її, то для обчислення $f_1^* = 3^{0,63}$ слід використовувати перший, а для обчислення $f_2^* = 3^{1,35}$ – другий інтерполяційний многочлен Ньютона.

Отже, приймаючи $x_0 = 0.5$, обчислимо $t_1^*(x_0^* - x)/h = (0,63 - 0,5)/$ $/0,25 = 0,52$. Підставляючи отримане значення у вираз (6.64) для першого інтерполяційного многочлена Ньютона і використовуючи величини скінченних різниць з таблиці, маємо

$$N_3^I(0,52) = 1,732 + \frac{0,548}{1!} \cdot 0,52 + \frac{0,172}{2!} \cdot 0,52 \cdot (-0,48) +$$
$$+ \frac{0,056}{3!} \cdot 0,52(-0,48)(-1,48) = 1,9989420. \qquad (6.73)$$

Аналогічно, при $x_0 = 1,50$, обчислимо $t_2^* = \dfrac{(1,35 - 1,50)}{0,25} = -0,60$ і, використовуючи вираз (6.60) для другого інтерполяційного многочлена Ньютона, одержимо

$$N_3^{II}(-0,60) = 5,196 + \frac{1,248}{1!} \cdot (-0,60) + \frac{0,300}{2!} \cdot (-0,60) \cdot 0,40 +$$
$$+ \frac{0,072}{3!} \cdot (-0,60) \cdot 0,40 \cdot 1,40 = 4,407168. \qquad (6.74)$$

Оцінимо похибку методу відповідно до формул (6.66) і (6.72):

$$\Delta_1(N_3^I) < \frac{4\ln^4 3}{4!}\cdot 0,25^4\cdot 0,52\cdot 0,48\cdot 1,48\cdot 2,48 = 0,0009,$$
$$\Delta_1(N_3^{II}) < \frac{5,2\ln^4 3}{4!}\cdot 0,25^4\cdot 0,60\cdot 0,40\cdot 1,40\cdot 2,40 = 0,001. \quad (6.75)$$

Враховуючи величини похибок f^k, приведені в таблиці, оцінимо обчислювальні похибки:

$$\Delta_2(N_3^I) < 0,001 + 0,0011 + 0,0005 + 0,0005 = 0,0031;$$
$$\Delta_2(N_3^{II}) < 0,001 + 0,0012 + 0,0005 + 0,0005 = 0,0032. \quad (6.76)$$

Округляючи значення $N_3^I(0,52)$ і $N_3^{II}(-0,60)$ до чотирьох знаків, отримаємо похибки округлення: $\Delta_3(N_3^I) = 0,06\cdot 10^{-3}$; $\Delta_3(N_3^{II}) = 0,2\cdot 10^{-3}$. Поєднуючи всі знайдені похибки, остаточно маємо

$$3^{0,63} = 1,999 \pm 0,005;$$
$$3^{1,35} = 4,407 \pm 0,005.$$

6.8 Ітераційно-інтерполяційний метод Ейткіна

Нехай функцію f, яка в точках x_i набуває значень $y_i=f(x_i)$ (i=0, 1, ..., n), задано таблично і треба обчислити її значення в точці $x \in [x_0; x_n]$, яка не збігається з вузлами інтерполювання x_i (i= 0, 1, ..., n). У цьому випадку немає потреби шукати у явному вигляді загальний вираз многочлена Лагранжа, а лише вміти обчислити його значення в точці x. Це можна зробити, використавши так звану *інтерполяційну схему Ейткіна,* особливістю якої є однотипність обчислень [1, 4].

Якщо функцію f задано в двох точках x_0 і x_1 (її значення відповідно дорівнюють y_0 і y_1), то її значення в точці $x \in (x_0; x_1)$ можна обчислити за формулою лінійного інтерполювання (6.39). Якщо значення функції f в точці x позначити через $P_{0,1}$, то формулу лінійного інтерполювання (6.39) можна подати в рівносильній формулі

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix},$$

права частина якої містить визначник другого порядку. Легко впевнитись, що

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x_0 \\ y_1 & x_1 - x_0 \end{vmatrix} = y_0,\ P_{0,1}(x_1) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x_1 \\ y_1 & x_1 - x_1 \end{vmatrix} = y_1.$$

Нехай тепер функцію f задано в трьох точках $x_0, x_1\ x_2$ (відповідні значення $y_0, y_1\ y_2$) і треба обчислити її значення в точці $x \in (x_0; x_2)$, $x \neq x_1$. У цьому випадку за схемою Ейткіна в точці x спочатку обчислюють значення двох лінійних многочленів

$$P_{0,1}(x)=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix} \text{ і } P_{1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix},$$

а потім значення квадратичного тричлена вигляду

$$P_{0,1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_0-x \\ P_{1,2}(x) & x_2-x \end{vmatrix}. \tag{6.77}$$

Безпосередня перевірка доводить, що $P_{0,1}(x_0)=y_0$, $P_{0,1}(x_1)=y_1$, $P_{1,2}(x_1)=y_1$, $P_{1,2}(x_2)=y_2$, $P_{0,1,2}(x_0)=y_0$, $P_{0,1,2}(x_1)=y_1$, $P_{0,1,2}(x_2)=y_2$.

Тепер переконаємось, що $P_{0,1,2}(x)$ збігається з інтерполяційним многочленом Лагранжа другого порядку. Справді, оскільки

$$P_{0,1}(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1,\quad P_{1,2}(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2,$$

то, розкривши визначник другого порядку формули (6.77), дістанемо

$$P_{0,1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_0}\left[\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1\right)(x_2-x)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2\right)(x_0-x)\right]=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

Ця схема узагальнюється на інтерполяційні многочлени вищих степенів. Якщо функцію f задано в чотирьох вузлах, то кубічне інтерполювання здійснюється за формулою

$$P_{0,1,2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x_0-x \\ P_{1,2,3}(x) & x_3-x \end{vmatrix},$$

де $P_{0,1,2}(x)$ і $P_{0,1,3}(x)$ – значення квадратичних тричленів у точці $x\in(x_0;\,x_3)$, $x\neq x_0$, $x\neq x_2$. Тут значення многочлена $P_{0,1,2}(x)$ обчислюється за формулою (6.77), а значення $P_{1,2,3}(x)$ – за формулою

$$P_{1,2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_1}\begin{vmatrix} P_{1,2}(x) & x_1-x \\ P_{2,3}(x) & x_3-x \end{vmatrix},\quad P_{2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_2}\begin{vmatrix} y_2 & x_2-x \\ y_3 & x_3-x \end{vmatrix}$$

Виконуючи перевірку бачимо, що $P_{1,2,3}(x_1)=y_1$, $P_{1,2,3}(x_2)=y_2$, $P_{1,2,3}(x_3)=y_3$, $P_{0,1,2,3}(x_i)=y_i$, $(i=0,1,2,3)$ і $P_{0,1,2,3}(x)$ збігається з кубічним інтерполяційним многочленом Лагранжа.

Взагалі, якщо в $(n+1)$-му вузлах інтерполювання x_i $(i=0,1,\ldots,n)$ функція набуває значень y_i, $(i=0,1\ldots,n)$, то значення інтерполяційного многочлена степеня n в точці $x\in(x_0;\,x_n)$, що не збігається з вузлами інтерполювання, можна обчислити за формулою

$$P_{1,2,\ldots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,\ldots,n-1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,\ldots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix},$$

де $P_{0,1,\ldots,n-1}(x)$ і $P_{1,2,\ldots,n}(x)$ – значення інтерполяційних многочленів (n-1)-го степеня, обчислених у точці x на попередньому кроці обчислень. Легко впевнитись, що $P_{0,1,\ldots,n}(x_i) = y_i$, ($i$ = 0,1..., n) і $P_{0,1,\ldots,n}(x)$ збігається з інтерполяційним многочленом Лагранжа n-го степеня.

Отже, для обчислення в точці x значення інтерполяційного многочлена n-го степеня за схемою Ейткіна, треба в ній обчислити значення n лінійних, n-1 квадратичних, n-2 кубічних многочленів і т. д., два многочлени (n-1)-го степеня і один многочлен n-го степеня. Всі ці многочлени виражають через визначник 2-го порядку, а це робить обчислення однотипними і циклічними.

Приклад 1. За схемою Ейткіна обчислити з табличною точністю значення функції cos(0,28), якщо функцію задано табл. 6.11.

Таблиця 6.11

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y_i	0,98007	0,95534	0.92106	0,87758	0,82534	0,76484

Обчислення припинити, коли значення двох послідовних многочленів збігатимуться.

Розв'язання.

Виконавши обчислення з однією запасною цифрою, маємо

$$P_{0,1}(0,28) = \frac{1}{0,3-0,2}\begin{vmatrix} 0,98007 & 0,2-0,28 \\ 0,95534 & 0,3-0,28 \end{vmatrix} = \frac{1}{0,1}\begin{vmatrix} 0,98007 & -0,08 \\ 0,95534 & 0,02 \end{vmatrix} = 0,960286,$$

$$P_{1,2}(0,28) = \frac{1}{0,1}\begin{vmatrix} 0,95534 & 0,3-0,28 \\ 0,92106 & 0,4-0,28 \end{vmatrix} = \frac{1}{0,1}\begin{vmatrix} 0,95534 & 0,02 \\ 0,92106 & 0,12 \end{vmatrix} = 0,962196,$$

$$P_{0,1,2}(0,28) = \frac{1}{0,4-0,2}\begin{vmatrix} 0,960286 & -0,08 \\ 0,962196 & 0,12 \end{vmatrix} = 0,961050.$$

Оскільки $P_{0,1}(0,28) \neq P_{0,1,2}(0,28)$, то використовуємо вузол x_3 = 0,5 і обчислюємо додатково

$$P_{2,3}(0,28) = \frac{1}{0,1}\begin{vmatrix} 0,92106 & 0,12 \\ 0,87758 & 0,22 \end{vmatrix} = 0,973236,$$

$$P_{1,2,3}(0,28) = \frac{1}{0,2}\begin{vmatrix} 0,962196 & 0,02 \\ 0,973236 & 0,22 \end{vmatrix} = 0,961092,$$

$$P_{0,1,2,3}(0,28) = \frac{1}{0,3}\begin{vmatrix} 0,961050 & -0,08 \\ 0,961092 & 0,22 \end{vmatrix} = 0,961061.$$

Але $P_{0,1,2,3}(0,28) \neq P_{0,1,2}(0,28)$, тому використовуємо наступний вузол x_4=0,6 і обчислюємо додатково

$$P_{3,4}(0,28) = \frac{1}{0,1}\begin{vmatrix} 0,87758 & 0,22 \\ 0,82534 & 0,32 \end{vmatrix} = 0,992508,$$

$$P_{2,3,4}(0,28) = \frac{1}{0,2}\begin{vmatrix} 0,973236 & 0,12 \\ 0,992508 & 0,32 \end{vmatrix} = 0,961673,$$

$$P_{1,2,3,4}(0,28) = \frac{1}{0,3}\begin{vmatrix} 0,961061 & -0,08 \\ 0,961053 & 0,32 \end{vmatrix} = 0,961059,$$

$$P_{0,1,2,3,4}(0,28) = \frac{1}{0,4}\begin{vmatrix} 0,961061 & -0,08 \\ 0,961053 & 0,32 \end{vmatrix} = 0,961059.$$

Округливши значення $P_{0,1,2,3}(0,28) \neq P_{0,1,2,3,4}(0,28)$ до п'ятого десяткового розряду, дістанемо: $P_{0,1,2,3}(0,28) \neq P_{0,1,2,3,4}(0,28) = 0,96106$, що відповідає табличному значенню.

Значення інтерполяційного многочлена в точці x доцільно обчислювати за схемою табл. 6.12.

Таблиця 6.12

i	x_i	y_i	x_i-x	$r_{i,j}+1,i+2...,1+j$					
				$j=1$	$j=2$	$j=3$	$J=4$	$j=5$	$j=6$
0	x_0	y_0	x_0-x	$P_{0,1}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	$P_{1,2,3,4}(x)$	$P_{0,1,2,3,4}(x)$	$P_{0,1,2,3,4,5}(x)$	$P_{0,1,2,3,4,5,6}(x)$
1	x_1	y_1	x_1-x	$P_{1,2}(x)$	$P_{1,2,3}(x)$	$P_{2,3,4,5}(x)$	$P_{1,2,3,4,5}(x)$	$P_{1,2,3,4,5,6}(x)$	
2	x_2	y_2	x_2-x	$P_{2,3}(x)$	$P_{2,3,4}(x)$	$P_{3,4,5,6}(x)$	$P_{2,3,4,5,6}(x)$		
3	x_3	y_3	x_3-x	$P_{3,4}(x)$	$P_{3,4,5}(x)$	$P_{4,5,6,7}(x)$			
4	x_4	y_4	x_4-x	$P_{4,5}(x)$	$P_{4,5,6}(x)$				
5	x_5	y_5	x_5-x	$P_{5,6}(x)$					
6	x_6	y_6	x_6-x						

В обчисленнях за цією схемою нові вузли x_i (що відповідає переходу до інтерполяційних многочленів вищих степенів) залучають доти, поки самі обчислення не покажуть, що необхідної точності вже досягнуто.

Обчислення значення функції $cos(0,28)$ за схемою Ейткіна подано в табл. 6.13.

Таблиця 6.13

i	x_i	y_i	x_i-x	$r_{i,j}+1,i+2...,1+j$			
				$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
0	0,2	0,98007	-0,08	0,960286	0,961050	0,961061	0,961059
1	0,3	0,95534	0,02	0,962196	0,961092	0,961053	
2	0,4	0.92106	0.12	0,973236	0.961673		
3	0,5	0,87758	0,22	0,992508			
4	0,6	0,82534	0.32				
5	0,7	0,76484	0.42				

6.9 Контрольні запитання

1. Наведіть означення та приклади застосування апроксимації.
2. Охарактеризуйте основні питання, які необхідно вирішити під час чисельної реалізації наближення функції.
3. Які три групи апроксимуючих функцій частіше за все застосовують у чисельному аналізі? Яким чином для кожної конкретної задачі вибрати потрібну групу апроксимуючих функцій?
4. Наведіть та охарактеризуйте основні критерії узгодження, які застосовують під час апроксимації функцій.
5. Назвіть в чому відмінність інтерполяції від екстраполяції.
6. Наведіть геометричну інтерпретацію задачі інтерполяції функції однієї змінної.
7. Що розуміють під похибкою апроксимації? Від яких факторів вона залежить?
8. Яку інтерполяцію називають лінійною, а яку квадратичною?
9. Від чого залежить і чим визначається залишковий член інтерполяційної формули?
10. Як оцінити значення залишкового члена інтерполяційної формули? Наведіть відповідні формули.
11. Наведіть інтерполяційну формулу многочлена Лагранжа.
12. Наведіть переваги та недоліки інтерполяції за допомогою многочлена Лагранжа.
13. Як оцінити залишковий член інтерполяційної формули Лагранжа?
14. Наведіть означення та приклади застосування скінченних різниць.
15. Яки три типа скінченних різниць застосовують в математиці? Наведіть відповідні формули.
16. Які властивості скінченних різниць Ви знаєте?
17. Наведіть формулу інтерполяційного многочлена Стірлінга. В яких випадках його доцільно застосовувати?
18. Наведіть формулу інтерполяційного многочлена Бесселя. В яких випадках його доцільно застосовувати?
19. Наведіть формули першого та другого інтерполяційного многочлена Ньютона.
20. В чому різниця між першим і другим інтерполяційними многочленами Ньютона? В яких випадках користуються першим, а в яких другим інтерполяційним многочленом?
21. Наведіть алгоритм обчислень за інтерполяційною схемою Ейткіна.
22. Наведіть переваги та недоліки інтерполяційної схеми Ейткіна.
23. Наведіть порівняльний аналіз застосування різних інтерполяційних многочленів.

6.10 Завдання

Задача 1.

a) Для таблично заданої функції (табл. 6.14) побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа і обчислити його значення в точках x_1, x_2, x_3.

b) Оцінити похибку побудованого многочлена в одній з точок x_1, x_2, x_3.

c) Обчислити точне значення заданої функції у вузлах x_1, x_2, x_3 і порівняти фактичну похибку з теоретичною.

Для інтерполювання у таблиці 6.14 взято такі функції:
sin(x) – для варіантів 1, 6, 11, 16, 21, 26; cos(x) – 2, 7, 12, 17, 22, 27;
exp(x) – 3, 8, 13, 18, 23, 28; exp(-x) – 4, 9, 14, 19, 24, 29;
sh(x) – 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Таблиця 6.14

i	Вар. \ $X(i)$	1	2	3	4	5
0	0,1	0,0998334	0,995004	1,10517	0,904837	0,I00167
1	0,5	0,479426	0,877583	1,64872	0,606531	0,521095
2	0,8	0,717356	0,696707	2,22554	0,449329	0,888106
3	1,3	0,963558	0,267499	3,6693	0,272532	1,69838
4	1,8	0,973848	-0,227202	6,04965	0,165299	2,94217
5	2,6	0,515501	-0,856889	13,4637	0,0742736	6,69473

x_1=0,2; x_2=1,4; x_3=1,5

i	Вар. \ $X(i)$	6	7	8	9	10
0	0,1	0,0998334	0,995004	1,10517	0,904837	0,100167
1	0,6	0,564642	0,825336	1,82212	0,548812	0,636654
2	1,2	0,932039	0,362358	3,32012	0,301194	1,50946
3	1,8	0,973848	-0,227202	6,04965	0,165299	2,94217
4	2,6	0,515501	-0,856889	13,4637	0,0742736	6,69473
5	3	0,14112	-0,989992	20,0855	0,0497871	10,0179

x_1=0,3; x_2=1,5; x_3=2,8

i	Вар. \ $X(i)$	11	12	13	14	15
0	0,3	0,29552	0,955336	1,34986	0,740818	0,30452
1	0,9	0,783327	0,62161	2,4596	0,40657	1,02652
2	1,5	0,997495	0707372	4,48169	0,22313	2,12928
3	2	0,909297	-0,416147	7,38906	0,135335	3,62686
4	2,5	0,598472	-0,801144	12,1825	0,082085	6,0502
5	3,1	0,0415807	-0,999135	22,198	0,0450492	11,0765

x_1=0,5; x_2=1,7; x_3=2,9

Продовження таблиці 6.14

i	Вар. / $x(i)$	16	17	18	19	20
0	1	0,841471	0,540302	2,71828	0,367879	1,1752
1	1,5	0,997495	0,0707372	4,48169	0,22313	2,12928
2	2,3	0,745705	-0,6662'6	9,97418	0,100259	4,93696
3	3	0,14112	-0,989992	20,0855	0,0497871	10,0179
4	3,6	-0,44252	-0,896758	36,5982	0,0273237	18,2855
5	4,5	-0,97753	-0,210796	90,0171	0,011109	45,003
x_1=1,2; x_2=2,7; x_3=4,3						
i	Вар. / $x(i)$	21	22	23	24	25
0	1	0,841471	0,540302	2,71828	0,367879	1,1752
1	1,6	0,999574	-0,0291995	4,95303	0,201897	2,37557
2	2,5	0,598472	-0,801144	12,1825	0,082085	6,0502
3	3,1	0,0415807	-0,999135	22,198	0,0450492	11,0765
4	3,8	-0,611858	-0,790968	44,7012	0,0223708	22,3394
5	4,5	-0,97753	-0,210796	90,0171	0,011109	45,003
x_1=1,3; x_2=2,7; x_3=4,3						
i	Вар. / $x(i)$	26	27	28	29	30
0	1	0,841471	0,540302	2,71828	0,367879	1,1752
1	1,5	0,997495	0,0707372	4,48169	0,22313	2,1292S
2	2,4	0,675463	-0,737394	11,0232	0,090718	5,46623
3	3	0,14112	-0,989992	20,0855	0,0497871	10,0179
4	3,9	-0,687766	-0,725932	49,4024	0,0202419	24,6911
5	4,5	-0,97753	-0,210796	90,0171	0,011109	45,003
x_1=1,2; x_2=2,8; x_3=4,3						

Задача 2. Побудувати інтерполяційний многочлен для функцій заданих таблично (див. табл. 6.14). Оцінити похибку отриманого многочлена у точці x_3.

7 ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ

7.1 Постановка задачі чисельного диференціювання

При розв'язанні багатьох практичних задач виникає необхідність одержати значення похідних різних порядків функції f, заданої у вигляді таблиці або складного аналітичного виразу. У цих випадках застосувати безпосередньо методи диференціального числення або неможливо, або важко. Тоді використовують наближені методи чисельного диференціювання [1, 4, 5, 11].

Найпростіші вирази для похідних виходять у результаті диференціювання інтерполяційних формул.

Отже, розглянемо таку задачу. На сітці $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ у вузлах x_i задані значення f_i функції f, безперервно диференційованої $n+1+m$ разів. Потрібно обчислити похідну $f^{(m)}(x^*)$, $x^* \in [a,b]$ і оцінити похибку.

Один з можливих способів розв'язання цієї задачі. Побудуємо для функції f по вузлах x_i $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ інтерполяційний многочлен із залишковим членом R_n, так що

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x). \tag{7.1}$$

Продиференціюємо праву і ліву частини співвідношення (7.1) m раз і покладемо $x=x^*$:

$$f^{(m)}(x^*)=P_n^{(m)}(x^*)+R_n^{(m)}(x^*). \tag{7.2}$$

Для досить гладких функцій, тобто для функцій з обмеженими похідними, достатньої кількості вузлів і достатньої точності обчислень, величина $R_n^{(m)}(x^*)$ мала і $P_n^{(m)}(x^*)$ є гарним наближенням для $f^{(m)}(x^*)$, так що можна покласти

$$f^{(m)}(x^*)\approx P_n^{(m)}(x^*). \tag{7.3}$$

У практичних розрахунках чисельне диференціювання є дуже чуттєвим до похибок у вихідній інформації, відкидання членів ряду і до інших подібних операцій. Крім того, висока точність інтерполяції (мализна $R_n(x)$) зовсім не гарантує високої точності інтерполяційної формули для похідних (малості $R_n^{(m)}(x)$). Тому чисельне диференціювання слід застосовувати обережно і, як правило, для невеликих m.

Враховуючи сказане, а також те, що обчислення вищих похідних може бути зведене до послідовного обчислення нижчих, детальніше зупинемось на одержанні розрахункових формул для f' і f'' у вузлах рівномірної сітки. Для одержання похідних у вузлових точках доцільно використовувати інтерполяційний многочлен Стірлінга і його залишковий член (див. формули (6.50) і (6.51)). Так, диференцюючи многочлен Стірлінга і його залишковий член за x і приймаючи $x^* = x_0$ $(t^* = 0)$, одержимо такі вирази для похідної:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h^2}\mu f_0^1 \pm \frac{M_3}{6}h^2 \quad (k = 1); \tag{7.4}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\mu f_0^1 - \frac{\mu f_0^3}{6}\right) \pm \frac{M_3}{30}h^4 \quad (k = 2). \tag{7.5}$$

Диференцюючи многочлен Стірлінга два рази за x, і обчислюючи значення другої похідної в точці $x^* = x_0$, маємо

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}f_0^2 \pm \frac{M_3}{12}h^2 \quad (k = 1); \tag{7.6}$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(f_0^2 - \frac{1}{12}f_0^4\right) \pm \frac{M_6}{90}h^4 \quad (k = 2). \tag{7.7}$$

Для обчислення похідної точно в середині між вузлами $x^* = x_0 + h/2$ застосовують многочлен Бесселя. У цьому випадку відповідні формули для похідної мають вигляд

$$f'\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{h}f_{1/2}^1 \pm \frac{M_3}{24}h^2 \quad (k = 1); \tag{7.8}$$

$$f'\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{h}\left(f_{1/2}^1 - \frac{1}{24}f_{1/2}^3\right) \pm \frac{3M_5}{640}h^4 \quad (k = 2). \tag{7.9}$$

Практичний інтерес викликають також так звані формули однобічного диференціювання, що дозволяють обчислити $f'(x_0)$ по вузлах $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, k, \ldots$ або $i = 0, -1, \ldots, -k, \ldots)$. Побудову цих формул зручно провести за допомогою першого і другого інтерполяційних многочленів Ньютона.

Диференцюючи перший многочлен Ньютона за x і обчислюючи значення похідної в точці $x = x_0$ $(t = 0)$ для $k = 1$ і $k = 2$ одержимо відповідно такі формули:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\Delta f_0 \pm \frac{1}{2}M_2 h \tag{7.10}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right) \pm \frac{1}{3}M_3 h^2 \tag{7.11}$$

Аналогічно, диференціюючи другий многочлен Ньютона, для $k = -1$ і $k = -2$ відповідно маємо

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\nabla f_0 \pm \frac{1}{2}M_2 h \tag{7.12}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\nabla f_0 - \frac{1}{2}\nabla^2 f_0\right) \pm \frac{1}{3}M_3 h^2 \tag{7.13}$$

7.2 Особливості чисельного диференціювання

Приведемо знову усі формули другого порядку, виразивши скінченні різниці, які входять до їх складу, безпосередньо через значення функції f_i. Враховуючи (7.4), (7.6) та (7.8) маємо:

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \pm \frac{M_3}{6} h^2 \qquad (7.14)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \pm \frac{M_4}{12} h^2 \qquad (7.15)$$

$$f'(x_0 + \frac{h}{2}) = \frac{f_1 - f_0}{h} \pm \frac{M_3}{24} h^2 \qquad (7.16)$$

Співвідношення (7.11) та (7.13) відповідно дають

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) \pm \frac{M_3}{3} h^2 \qquad (7.17)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}) \pm \frac{M_3}{3} h^2 \qquad (7.18)$$

З приведених вище формул видно, що зі зменшенням кроку сітки зменшується і похибка методу. Однак якщо значення функції f_i задані приблизно, наприклад з однаковою абсолютною похибкою ε, то при використанні формул чисельного диференціювання сумарна похибка буде містити додатковий доданок, обернено пропорційний h_m (m – порядок похідної). Тому зменшення h доцільне лише у певних межах.

Ілюструючи сказане, розглянемо праву частину формули (7.16). Сумарна похибка її складає

$$\Delta = \frac{M_3}{24} h^2 + \frac{2\varepsilon}{h}. \qquad (7.19).$$

Прирівнюючи $\Delta'(h)$ нулю, одержуємо точку екстремуму функції $\Delta(h)$:

$$h_0 = 2\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}} \approx 2{,}9\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{M_3}}. \qquad (7.20)$$

Оскільки $\Delta''(h) > 0$, то h_0 – точка мінімуму $\Delta(h)$, причому

$$\Delta(h_0) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{3} M_3 \varepsilon^2} \approx \sqrt[3]{M_3 \varepsilon^2}. \qquad (7.21)$$

Це співвідношення, зокрема, означає, що ні при якому h не можна гарантувати, що похибка результату є величиною $o(\varepsilon^{2/3})$.

Аналогічно, з формули (7.15), для оптимального кроку одержуємо вираз

$$h_0 = 2\sqrt[4]{\frac{3\varepsilon}{M_4}} \approx 2{,}6\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{M_4}}, \qquad (7.22)$$

а з формул (7.17) і (7.18) – вираз

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{M_3}} \approx 1,8\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{M_3}}.$$

Таким чином, при обчисленні похідних попередньо варто визначити оптимальний крок вихідної таблиці значень f_i.

Приклад 1. Обчислити $f'(1,4)$ і $f'(1,4)$ для функції $f = ln\ x$, заданої у вигляді таблиці

x	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
f	0,1823	0,2626	0,3364	0,4054	0,4700

Яка містить значення f_i з усіма правильними в широкому смислі знаками. Оцінити похибку результату.

Для обчислення необхідних похідних застосуємо відповідно формули (7.5) і (7.2). Тоді, використовуючи рівності (7.10) і (7.9), а також вихідні дані, одержимо такі значення для оптимального кроку:

$$h_{01} = \sqrt[3]{\frac{6\cdot 10^{-4}}{0,73}} \approx 0,1 \text{ при обчисленні } f'(1,6)$$

$$h_{02} = \sqrt[4]{\frac{48\cdot 10^{-4}}{2,1}} \approx 0,22 \text{ при обчисленні } f''(1,4).$$

Оскільки табличні дані не дозволяють вибрати величину кроку 0,22, то за h_2 приймаємо найближче можливе число 0,2. Отже,

$$f'(1,6) = \frac{1}{0,2}(3\cdot 0,4700 - 4\cdot 0,4054 + 0,3364) = 0,624,$$

причому сумарна похибка не перевищує

$$\Delta = \frac{0,73}{3}\cdot 0,1^2 + \frac{4\cdot 10^{-4}}{0,1} = 0,007.$$

$$f''(1,4) = \frac{1}{0,2^2}(0,4700 - 2\cdot 0,3364 + 0,1823) = -0,512,$$

причому сумарна похибка не перевищує

$$\Delta = \frac{2,9}{12}\cdot 0,2^2 + \frac{4\cdot 10^{-4}}{0,2^2} = 0,02$$

Приведені оцінки похибки хоча і є, як правило, занадто завищеними, але вказують на те, що операція пошуку другої похідної є менш надійною, ніж першої.

У деяких практичних випадках для визначення похідної задається тільки таблиця значень функції. Тоді оцінити похибку неможливо. Наближені значення похідних обчислюються безпосередньо за однією з формул (7.4) – (7.13) без врахування похибки.

Приклад 2. Обчислити $f'(1{,}3)$, $f''(1{,}4)$ для функції $f(x)$, заданої у вигляді такої таблиці:

x	$1{,}2$	$1{,}3$	$1{,}4$	$1{,}5$	$1{,}6$
$y=f(x)$	$0{,}18$	$0{,}26$	$0{,}34$	$0{,}41$	$0{,}47$

На підставі формул (7.4) і (7.6) відповідно одержуємо:

$$f'(1{,}3)=\frac{1}{0{,}1}\cdot\frac{1}{2}(0{,}34-0{,}26+0{,}26-0{,}18)=0{,}8$$

$$f''(1{,}4)=\frac{1}{0{,}1^2}(0{,}41-0{,}34-0{,}34+0{,}26)=-1.$$

7.3 Постановка задачі чисельного інтегрування

Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$I=\int_a^b f(x)dx. \tag{7.23}$$

З курсу математичного аналізу відомо, що для неперервної на відрізку $[a, b]$ функції f інтеграл (7.23) існує і дорівнює різниці значень первісної F для функції f у точках b і a:

$$I=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{7.24}$$

Однак у переважній більшості практичних задач первинну не вдається виразити через елементарні функції [1, 4]. Крім того, функція f часто задається у вигляді таблиці її значень для певних значень аргументу. Усе це породжує потребу в наближених методах обчислення інтеграла (7.24), які можна умовно розділити на аналітичні і чисельні [4]. Перші, полягають у наближеній побудові первинної і подальшому використанні формули (7.24). Другі ж дозволяють безпосередньо знайти числове значення інтеграла, ґрунтуючись на відомих значеннях підінтегральної функції (а іноді і її похідних) у заданих точках, які називають вузлами. Далі ми зупинимося лише на чисельних методах інтегрування функцій. Сам процес чисельного визначення інтеграла називається квадратурою, а відповідні формули – квадратурними формулами.

В залежності від способу задання підінтегральної функції будемо розглядати два різних (в смислі реалізації) випадки чисельного інтегрування.

Задача I. На відрізку $[a, b]$ у вузлах x_i задані значення f_i, деякої функції f, що належить певному класу F. Потрібно приблизно обчислити інтеграл (7.23), і оцінити похибку отриманого значення.

Так зазвичай ставиться задача чисельного інтегрування в тому випадку, коли підінтегральна функція задана у вигляді таблиці.

Задача II. На відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ задана у вигляді аналітичного виразу. Потрібно обчислити інтеграл (7.23) із заданою гранично припустимою похибкою ε.

Один з можливих способів розв'язання сформульованих задач оснований на використанні різних квадратурних формул вигляду

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \equiv I_n \qquad (7.25)$$

з відомим залишковим членом $R_n|f| = I - I_n$ або його оцінкою.

У загальному випадку як вузлові точки x_i, так і вагові множники (ваги) A_i наперед не відомі і підлягають визначенню при виведенні кожної конкретної квадратурної формули (7.25) на основі вимог, що висуваються до неї.

По суті, задача чисельного інтегрування еквівалентна оцінюванні середнього значення функції. Дійсно, середнє значення функції на відрізку $[a, b]$ визначається так:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Тому $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\overline{f}$.

В свою чергу, визначення середнього значення функції – це статистична задача, що містить проблеми послідовної вибірки і планування експерименту. Зважаючи на складність такої постановки питання обмежимося лише класичними методами чисельного інтегрування, основаними на попередньому визначенні як вузлових точок, у яких повинна бути задана інформація про інтегруючу функцію, так і на самій інформації.

Перейдемо тепер до алгоритмів розв'язання сформульованих вище задач.

Алгоритм розв'язання задачі I.

1. Вибирають конкретну квадратурну формулу (7.25) і обчислюють I_n. Якщо значення функції f_i задані наближено, то обчислюють лише наближене значення $\overline{I_n}$ для точного I_n.

2. Наближено приймають, що $I \approx \overline{I_n}$.

3. Користуючись конкретним виразом для залишкового члена або оцінкою його для вибраної квадратурної формули, обчислюють похибку методу

$$\Delta_1 = |I - I_n| = |R_n|.$$

4. Визначають похибку обчислення $\overline{I_n}$:

$$\Delta_2 = \left|I_n - \overline{I_n}\right|$$

за похибками наближених значень f_i.

5. Знаходять повну абсолютну похибку наближеного значення I_n:

$$\Delta = \left| I_n - \overline{I_n} \right| \leq \Delta_1 + \Delta_2$$

6. Одержують розв'язок задачі у вигляді

$$I = \overline{I_n} \pm \Delta .$$

Для достатньо гладких функції, тобто, для функцій з обмеженою зміною похідних, похибка квадратурних формул (7.25) для достатньо великих n, як правило, мала. Тому при достатній точності початкових значень f_i і при достатній точності обчислення $\overline{I_n}$ можна очікувати, що $\overline{I_n}$ буде хорошим наближенням для I. На цих міркуваннях і оснований наступний алгоритм.

Алгоритм розв'язання задачі II.

1. Зображають ε у вигляді суми трьох від'ємних доданків:

$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

де ε_1 – гранично допустима похибка методу; ε_2 – гранично допустима похибка обчислення $\overline{I_n}$; ε_3 – гранично допустима похибка округлення результату.

2. Вибирають n в квадратурній формулі так, щоб виконувалась нерівність

$$\Delta_1 = \left| I - I_n \right| = \left| R_n \right| \leq \varepsilon_1 .$$

3. Обчислюють f_i з такою точністю, щоб при підрахунку I_n за формулою (7.25) забезпечити виконання нерівності:

$$\Delta_2 = \left| I_n - \overline{I_n} \right| \leq \varepsilon_2 .$$

Для цього, очевидно, досить обчислити всі f_i з абсолютною похибкою

$$\frac{\varepsilon}{(b-a)\sum_{i=1}^{n} \left| A_i \right|} .$$

4. Знайдену в пункті 3 величину $\overline{I_n}$ округляють (якщо $\varepsilon_3 \neq 0$) з гранично допустимою похибкою ε_3 до величини $\overline{\overline{I_n}}$.

5. Одержують розв'язок задачі у вигляді

$$I = \overline{\overline{I_n}} \pm \varepsilon .$$

Використані в алгоритмах обох задач квадратурні формули будуються, як вже було сказано, на підставі тих або інших критеріїв, що визначають положення вузлових точок і величини вагових множників. Такими критеріями можуть бути: зображення інтеграла у вигляді інтегральної суми; апроксимація підінтегральної функції (наприклад, многочленом) з подальшим інтегруванням апроксимуючої функції; вимога, щоб формула (7.25) була абсолютно точною для певного класу функцій і т. д.

7.4 Найпростіші квадратурні формули

Формули прямокутників. Як відомо, визначений інтеграл є границею інтегральних сум:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{\max h_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot f(\xi_i), \qquad (7.26)$$

кожна з якої відповідає деякому розбиттю D_n: $a=x_0 < x_1 < \ldots < x_n=b$ відрізка $[a, b]$ і довільному набору точок $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для кожного розбиття $h_i=x_i-x_{i-1}$.

Обмежуючись кінцевим числом доданків у правій частині рівності (7.26) і приймаючи як набір ξ_i ті чи інші значення аргументу з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, можна отримати різні формули наближеного інтегрування. Так, приймаючи як набір ξ_i значення лівих чи правих кінців відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, одержимо відповідно ***загальні формули лівих та правих прямокутників*** ($h_i=1/n=const$):

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\cdot f_i \equiv I_L; \qquad (7.27)$$

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}\cdot f_i \equiv I_R. \qquad (7.28)$$

Назви цих формул пов'язані з їх геометричною інтерпретацією. Якщо у площині xOy побудувати криву $y=f(x)$, розбити відрізок $[a, b]$ на n частин точками x_i сітки D_n, то формула лівих прямокутників як наближене значення інтеграла дасть сумарну площу заштрихованих прямокутників на рис. 7.1; а формула правих прямокутників – сумарну площу заштрихованих прямокутників на рис. 7.2.

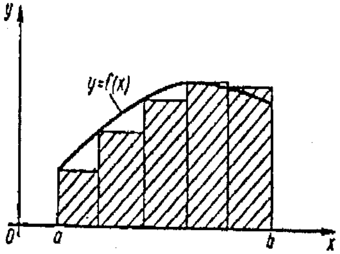


Рисунок 7.1

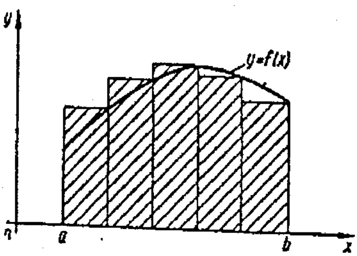


Рисунок 7.2

Знайдемо вираз для залишкового члена наближеної формули (7.27). З цією метою зобразимо інтеграл, що входить у ліву частину співвідношення (7.27), у вигляді суми:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \qquad (7.29)$$

Припускаючи, що функція $f(x)$ диференційована на відрізку $[a;\ b]$, запишемо для неї на кожному з відрізків $[x_{i-1};\ x_i]$ формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x)=f_i+(x-x_i)\cdot f'(\eta_i); \qquad \eta_i\in(x_{i-1};\ x_i). \tag{7.30}$$

Підставимо у праву частину співвідношення (7.29) замість функції f її зображення (7.30) і виконаємо інтегрування, використовуючи другу теорему про середнє значення функції [1]:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i+\frac{h^2}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}f''(\eta_i);\ \overline{\eta_i}\in(x_{i-1},\ x_i).$$

В силу неперервності другої похідної існує така точка $\eta\in(a,b)$, що

$$\sum_{i=1}^{n}f'(\overline{\eta_i})=nf'(\eta)=\frac{b-a}{h}f'(\eta).$$

Використовуючи це співвідношення, остаточно маємо

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f_i+\frac{b-a}{2}hf'(\eta). \tag{7.31}$$

Порівнюючи формули (7.27) і (7.31), одержуємо вираз для залишкового члена квадратурної формули (7.27):

$$R_n[f]=I-I_n=\frac{b-a}{2}hf'(\eta). \tag{7.32}$$

Таким чином, оцінку похибки квадратурної формули (7.27) можна отримати з такої формули:

$$\Delta_1=\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i\right|\le\frac{b-a}{2}hM_1, \tag{7.33}$$

де $M_1=\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|$.

Вираз для залишкового члена наближеної формули (7.28) відрізняється від залишкового члена наближеної формули (7.27) протилежним знаком.

Приклад 1. З допомогою формул лівих і правих прямокутників, обчислити $\int_1^9\frac{dx}{x+2}$, приймаючи $n=4$.

Оскільки $a=1$ і $b=9$, то крок $h=(b-a)/n=2$; тоді точками розбиття є $x_0=1$, $x_1=3$, $x_2=5$, $x_3=7$, $x_4=9$, а значення підінтегральної функції $f(x)=1/(x+2)$ у цих точках такі:

$$y_0=f(x_0)=1/3;\ y_1=f(x_1)=1/5;$$

$$y_2=f(x_2)=1/7;\ y_3=f(x_3)=1/9;\ y_4=f(x_4)=1/11.$$

Далі знайдемо числове значення інтеграла, користаючись формулою (7.27):

$$I_L = \frac{b-a}{n}\cdot\left(y_0 + y_1 + y_2 + y_3\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right) \approx 1{,}6024.$$

Якщо ж обчислення визначеного інтеграла зробити за формулою (7.28), одержимо

$$I_R = \frac{b-a}{n}\cdot\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right) \approx 1{,}1053.$$

Найчастіше використовують формулу, основану на ідеї подання визначеного інтеграла у вигляді інтегральної суми, тобто *формулу прямокутників,* де як ξ_i приймають середини відрізків $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Для рівномірної сітки $(h_i=h)$ ця формула має такий вигляд:

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} \equiv I_n, \qquad (7.34)$$

де $f_{i-1/2} = f\left(x_i - \frac{h}{2}\right);\quad x_0 = a, x_n = b.$

Знайдемо вираз для залишкового члена наближеної формули (7.34). З цією метою зобразимо інтеграл, що входить у ліву частину співвідношення (7.34), у вигляді суми (7.29). Припускаючи, що функція $f(x)$двічі диференційована, тобто $f\in C^2\left[a;\ b\right]$, запишемо для функції $f(x)$ на кожному з відрізків $\left[x_{i-1};\ x_i\right]$ формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x) = f_{i-1/2} + \left(x - x_i + h/2\right)\cdot f'_{i-1/2} + \frac{\left(x - x_i + h/2\right)^2}{2} f''\left(\eta_i\right); \qquad (7.35)$$

де $\eta_i \in \left(x_{i-1};\ x_i\right)$.

Підставимо у праву частину співвідношення (7.29) замість функції f її зображення (7.35) і виконаємо інтегрування, використовуючи другу теорему про середнє значення функції:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} + \frac{h^3}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n} f''\left(\eta_i\right);\ \overline{\eta_i} \in \left(x_{i-1},\ x_i\right).$$

В силу неперервності другої похідної існує така точка $\eta \in (a,b)$, що

$$\sum_{i=1}^{n} f''\left(\overline{\eta_i}\right) = nf''(\eta) = \frac{b-a}{h} f''(\eta).$$

Використовуючи це співвідношення, остаточно маємо

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f_{i-1/2} + \frac{b-a}{24}h^2 f''(\eta). \qquad (7.36)$$

Порівнюючи формули (7.34) і (7.36), одержуємо вираз для залишкового члена квадратурної формули (7.34):

$$R_n[f] = I - I_n = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\eta). \qquad (7.37)$$

Таким чином, оцінку похибки квадратурної формули (7.34) можна отримати з формули:

$$\Delta_l = \left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f_{i-1/2} \right| \le \frac{b-a}{24} h^2 M_2, \qquad (7.38)$$

де $M_2 = \max_{[a,b]} \left| f''(x) \right|$.

Отримані вирази для залишкового члена (7.37) і похибки (7.38) показують, що формула (7.34) є точною для будь-якої лінійної функції, оскільки друга похідна такої функції дорівнює нулю, а отже, залишковий член і похибка також дорівнюють нулю.

Покажемо, що отримана оцінка не може бути поліпшена, тобто що існує функція, для якої похибка обчислення інтеграла за формулою (7.34) у точності дорівнює правій частині (7.38). Для цього як інтегруючу функцію розглянемо $f = x^2$ і застосуємо до неї формулу (7.34):

$$I_n = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{2i-1}{2} h \right)^2.$$

Розкривши дужки під знаком суми і виконавши необхідні підсумовування, одержимо $I_n = \frac{b^3 - a^3}{3} - (b-a)\frac{h^3}{12}$. З іншого боку, безпосереднє інтегрування функції x^2 дає $I = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

Склавши різницю між точним значенням інтеграла і наближеним, для залишкового члена одержимо вираз $I - I_n = (b-a)\frac{h^2}{12}$

Повертаючись до оцінювання похибки (7.38) і зауважуючи, що для функції x^2 друга похідна (а отже, і M_2) дорівнює 2, одержуємо для похибки те ж саме значення $\Delta_l = (b-a)\frac{h^2}{12}$, тобто оцінка похибки (7.38) досягається на параболі $y=x^2$. Цей результат можна поширити і на довільну параболу в силу лінійності операції інтегрування і того факту, що для лінійних функцій формула (7.34) є точною.

Оцінка (7.38) не враховує похибок, пов'язаних з обчисленням I_n. Похибка Δ_l відбиває розходження між точною формулою Ньютона-Лейбниця і наближеною формулою (7.34), тобто є похибкою методу.

Перейдемо тепер до оцінювання похибки наближеного значення $\overline{I_n}$. Якщо значення функції, що використовуються в квадратурній формулі, отримані приблизно або обчислення з якихось причин не можуть бути виконані абсолютно точно – це спричиняє появу обчислювальної похибки і похибки округлення. Нехай, наприклад, значення $f_{i-1/2}$ у формулі (7.34) обчислені з однаковою абсолютною похибкою ε; тоді сумарна обчислювальна похибка $\overline{I_n}$ складе

$$\Delta_2 = (b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\varepsilon = (b-a)\varepsilon. \tag{7.39}$$

Відзначимо характерну властивість цієї похибки: вона не залежить від числа відрізків розбиття усього відрізка інтегрування, а лише пропорційна його довжині.

Приклад 2. Обчислити за допомогою формули прямокутників інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, приймаючи $n=4$. Оцінити похибку отриманого наближеного значення.

За заданими межами інтегрування і числом розбивок n визначимо крок:
$h=(1-0)/4=0,25$. Далі, на підставі формули (7.34), маємо

$$I_L = 0,25\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right].$$

Обчисливши необхідні значення функції з трьома правильними у вузькому смислі знаками ($\varepsilon = 0,0005$), одержимо

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,25(0,889+0,727+0,615+0,533) = 0,691.$$

Похибку методу оцінимо за формулою (7.38), для чого попередньо знайдемо максимум абсолютної величини другої похідної підінтегральної функції:

$$M_2 = \max_{[0,1]}\left|\left(\frac{1}{1+x}\right)''\right| = \max_{[0,1]}\frac{2}{(1+x)^3} = 2.$$

Таким чином, похибка методу $\Delta_1 \le (1/24)\cdot 0,25^2 \cdot 2 \approx 0,0053.$

Користаючись формулою (7.39), знайдемо обчислювальну похибку

$$\Delta_2 \le 1\cdot 0,0005 = 0,0005.$$

Отже, за повну похибку наближеного значення інтеграла можна прийняти $\Delta=\Delta_1+\Delta_2=0,006$, а остаточну відповідь записати у вигляді

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,691 \pm 0,006.$$

Для порівняння приведемо кілька знаків точного значення обчисленого інтеграла: $\ln 2 = 0,693147...$

Приклад 3. За допомогою формули прямокутників обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, з точністю до 10^{-3}.

Застосовуючи алгоритм розв'язання задачі 2 з розділу 7.1, зобразимо сумарну похибку у вигляді суми трьох додатків: $0.0009+0.00005+$ $+0.00005$. Далі виберемо n з умови

$$\Delta_I = \frac{b-a}{24} h^2 M_2 = \frac{b-a}{24}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 M_2 \le 0.0009$$

Розв'язуючи цю нерівність відносно n, при b-a=1 і M_2=2 отримаємо $n \ge 10$.

Складемо таблицю значень функції $1/(x+1)$ з чотирма правильними знаками у вузькому смислі:

0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
0,9254	0,8696	0,8000	0,7407	0,6897	0,6452	0,6061	0,5714	0,5405	0,5128

Використовуючи формулу прямокутників (7.29), отримаємо

$$\bar{I}_{10} = 0,1(0,9524+0,8696+0,8000+0,7407+0,6897+0,6452+0,6061+$$
$$+0,5714+0,5405+0,5128=0,69284,$$

Округливши отриманий результат, маємо I=$0,6928 \pm 0,001$.

Формула трапецій. Перейдемо тепер до іншого способу побудови квадратурних формул, який полягає у використанні апроксимації підінтегральної функції інтерполяційним многочленом. Розглянемо найпростіший випадок апроксимації многочленом першого степеня з вузлами у точках a і b.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}\left[f(b) - f(a)\right] + (x-a)(x-b)\frac{f''(\eta)}{2};\ \bar{\eta} \in (a,\ b).$$

Інтегруючи праву і ліву частини цієї рівності і використовуючи другу теорему про середнє значення функції при інтегруванні останнього доданка правої частини, одержуємо

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta);\ \eta \in (a,\ b).$$

Таким чином, припускаючи, що відрізок інтегрування малий, одержуємо квадратурну формулу, яка називається ***формулою трапецій:***

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{12}\left[f(a) + f(b)\right] \equiv I_2 \qquad (7.40)$$

із залишковим членом

$$R_2[f] = I - I_2 = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta;)\eta \in (a,b) \qquad (7.41)$$

Використовуючи вираз (7.41) для залишкового члена, оцінку похибки квадратурної формули (7.40) можна зобразити у вигляді

$$I=\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right|\le\frac{(b-a)^3}{12}M_2, \qquad (7.42)$$

де $M_2=\max\limits_{[a,b]}\left|f''(x)\right|$.

Отримані вирази для залишкового члена (7.41) і похибки (7.42) показують, що квадратурна формула (7.40) є точною для всіх лінійних функцій, оскільки друга похідна таких функцій дорівнює нулю, а отже, дорівнюють нулю залишковий член і похибка.

Аналогічно тому, як це було зроблено для оцінювання (7.38), можна показати, що й оцінка (7.42) покращується, тому що вона досягається на довільній параболі.

Оцінка обчислювальної похибки при розрахунках за формулою (7.40) для випадку, коли значення функції обчислені з однаковою точністю ε, має вигляд

$$\Delta_2 =\le\frac{b-a}{2}(\varepsilon+\varepsilon)=(b-a)\varepsilon. \qquad (7.43)$$

Відзначимо, що обчислювальні похибки квадратурних формул (7.40) і (7.34) однакові.

Приклад 4. Обчислити за допомогою формули трапецій інтеграл $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$. Оцінити похибку отриманого наближеного значення.

На підставі формули (7.40) маємо $I_2=0,5\left[f(0)+f(1)\right]$. Обчисливши необхідні значення функції, одержимо

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}\approx 0,5(1+0,5)=0,75$$

Похибку методу оцінимо за формулою (7.42), використовуючи значення M=2, що отримано у прикладі 2:

$$\Delta_1\le\frac{1^3}{12}\cdot 2\approx 0,17.$$

Обчислювальна похибка дорівнює нулю оскільки значення функції I_2 знайдені абсолютно точно.

Отже, остаточно маємо $\int_0^1\frac{dx}{1+x}=0,75+0,17.$

Відзначимо, що у прикладі 3 розв'язок був отриманий не такий точний, як у прикладі 2. Однак не слід робити поспішних висновків, тому що використання у прикладі 3 формули трапецій має і свої переваги. По-перше, якщо підінтегральна функція задана у вигляді таблиці її значень у вузлах x_i, то для використання формули прямокутників необхідно визначити значення цієї функції ще й у точках $x_i \pm h/2$, а це вносить додаткові труднощі і додаткову похибку. По-друге, у прикладі 3 значення підінтегральної функції були обчислені лише у двох точках, в той час як у прикладі 2 – в чотирьох точках, що, природно, потребує більшого часу.

Приведені міркування показують, що цінність квадратурної формули визначається не тільки формою її залишкового члена (або похибки), а й іншими факторами, наприклад часом розрахунків.

Інші види квадратурних формул. Розглянемо ще один спосіб побудови квадратурних формул, що полягає у поданні інтеграла як лінійної комбінації значень підінтегральної функції і її похідних у деяких вузлах x_i з подальшим визначенням невідомих коефіцієнтів (вагових множників).

Нехай, наприклад, ми будуємо квадратурну формулу вигляду

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx (b-a)\cdot\left[A_1\cdot f(a)+A_2\cdot f(b)+A_3\cdot f'(a)+A_4\cdot f'(b)\right]. \quad (7.44)$$

Визначимо вагові множники A $(i=1, 2, 3, 4)$ так, щоб формула (7.44) була точною для довільних многочленів нульового, першого, другого і третього степеня. В силу лінійності операцій інтегрування і диференціювання ця умова буде виконана, якщо вона виконується для многочленів $1, x, x^2, x^3$. Підставляючи ці многочлени замість $f(x)$ у співвідношення (7.44), за умови його точного виконання, одержуємо таку систему лінійних рівнянь відносно A_i:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ aA_1 + bA_2 + A_3 + A_4 = \dfrac{1}{2}(a+b), \\ a^2A_1 + b^2A_2 + 2aA_3 + 2bA_4 = \dfrac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right), \\ a^3A_1 + b^3A_2 + 3a^2A_3 + 3b^2A_4 = \dfrac{1}{4}\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right). \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$A_1 = A_2 = 1/2; \quad A_3 = -A_4 = (b-a)/12.$$

Таким чином, шукана квадратурна формула має вигляд

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+(b-a)\frac{f'(a)-f'(b)}{12}\right] \equiv I_4. \quad (7.45)$$

Знайдемо вираз для залишкового члена цієї формули. Зобразимо функцію, що інтегрується, у вигляді суми інтерполяційного многочлена Ерміта [11] третього степеня з двома двократними вузлами a і b і залишковим членом. Потім проінтегруємо праву і ліву частини цього подання на відрізку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b H_3(x)dx + \int_a^b \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4!} f^4(\bar{\eta})dx; \quad \bar{\eta} \in (a, b).$$

Перший доданок правої частини дає праву частину квадратурної формули (7.45) оскільки ця формула є точною для всіх многочленів третього степеня, а отже, і для многочлена Ерміта $H_3(x)$. Другий доданок правої частини дає вираз для залишкового члена формули (7.45). Використовуючи другу теорему про середнє значення функції і виконуючи інтегрування, одержимо

$$R_4[f] = I - I_4 = \frac{(b-a)^5}{720} f^4(\eta); \quad \eta \in (a,b). \tag{7.46}$$

Отриманий вираз для залишкового члена дозволяє описати оцінку похибки квадратурної формули (7.45) у вигляді

$$\Delta_1 = |I - I_4| \le \frac{(b-a)^5}{720} M_4, \quad M_4 = \max_{[a,b]} |f^4(x)|. \tag{7.47}$$

Оцінка (7.46) не може покращитися, оскільки вона досягається на довільному многочлені четвертого степеня, що неважко довести, аналогічно тому, як це було зроблено для оцінки (7.38).

Для оцінки обчислювальної похибки результату, отриманої за формулою (7.45), припустимо, що значення функції задані з точністю ε_1 а значення похідних з точністю ε_2. Тоді обчислювальна похибка складає

$$\Delta_2 \le (b-a)\varepsilon_1 + \frac{(b-a)^2}{6}\varepsilon_2. \tag{7.48}$$

Приклад 5. Обчислити за допомогою квадратурної формули (7.45) інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Визначити похибку отриманого наближеного значення.

Обчисливши необхідні значення підінтегральної функції і її похідних за формулою (7.45), знаходимо

$$I_4 = 1 \cdot \left(\frac{1+0,5}{2} + 1 \cdot \frac{-1+0,25}{12} \right) = 0,6875.$$

Похибку методу визначимо за формулою (7.47), для чого попередньо знайдемо максимум абсолютної величини четвертої похідної підінтегральної функції $M_4 = 24$: $\Delta_1 \le \frac{1^5}{720} \cdot 24 \approx 0,034.$

Обчислювальна похибка, дорівнює нулю, оскільки значення функції і похідних обчислені абсолютно точно.

Таким чином, округляючи наближені значення інтеграла і похибки, остаточно одержуємо $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,69 \pm 0,04.$

В усіх розглянутих вище квадратурних формулах, вузли квадратури були заздалегідь фіксовані. Тепер розглянемо випадки, коли положення усіх вузлів, так само як і усі вагові множники, вважаються вільними параметрами. Щоб наступні викладення були не занадто складними, але в той же час не зовсім тривіальними, будемо шукати значення інтеграла у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot\left[A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)\right]. \tag{7.49}$$

Для визначення чотирьох вільних параметрів A_1, A_2, x_1 і x_2 поставимо вимогу, щоб формула (7.49) була абсолютно точною для всіх многочленів нульового, першого, другого і третього степенів. У силу лінійності операції інтегрування і правої частини співвідношення (7.49), для того щоб квадратурна формула (7.49) була точною для всіх многочленів третього степеня, необхідно і достатньо, щоб вона була точною для функцій $1, x, x^2, x^3$. Отже, повинні виконуватися співвідношення

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ x_1 A_1 + x_2 A_2 = \dfrac{1}{2}(a+b), \\ x_1^2 A_1 + x_2^2 A_2 = \dfrac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right), \\ x_1^3 A_1 + x_2^3 A_2 = \dfrac{1}{4}\left(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3\right). \end{cases},$$

що є нелінійною системою рівнянь відносно параметрів, які обчислюємо: A_1, A_2, x_1, x_2.

Розв'язок даної системи

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2},\quad x_1 = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{7.50}$$

Отже, квадратурна формула (7.49) приймає такий вигляд

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\cdot\left[f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] \equiv I_4. \tag{7.52}$$

Формули такого типу, коли не тільки вагові множники, але і вузли заздалегідь не фіксуються, називаються *гаусовими*.

Знайдемо вираз для залишкового члена формули (7.52). Для цього подамо функцію, що інтегрується, у вигляді суми інтерполяційного многочлена Ерміта третього степеня з двома двократними вузлами x_1 і x_2, що визначаються співвідношеннями (7.50) і залишкового члена. Проінтегрувавши праву і ліву частини цього подання на відрізку *(a, b)*, одержимо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b H_3(x)dx + \int_a^b \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)^2}{4!} f(\overline{\eta})dx; \quad \overline{\eta} \in (a,b).$$

Перший доданок правої частини дає праву частину квадратурної формули (7.51) у силу того, що ця формула є точною для всіх многочленів третього степеня, а отже, і для $H_3(x)$. Другий доданок правої частини дає залишковий член формули (7.51). Використовуючи другу теорему про середнє значення функції і виконуючи інтегрування, маємо

$$R_2[f] = I - I_2 = \frac{(b-a)^5}{4320} f^4(\eta); \ \eta \in (a,b).$$

Отже, оцінка похибки знаходиться із співвідношення

$$\Delta_1 = |I - I_2| = \frac{(b-a)^5}{4320} M_4; \ M_4 = \max_{[a,b]} |f^4(x)|. \qquad (7.53)$$

Отриману оцінку не можна покращити, тому що вона досягається на довільному многочлені четвертого степеня. Це неважко показати прямими викладеннями, як це було зроблено для оцінки (7.38).

Якщо у формулі (7.51) значення вузлів визначені практично точно, а значення функції – з абсолютною похибкою ε, то для обчислювальної похибки при використанні формули (7.27) одержимо той же вираз, що і для обчислювальної похибки при використанні формул (7.52) і (7.40):

Приклад 6. Обчислити за допомогою квадратурної формули (7.51) інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Оцінити похибку отриманого наближеного значення.

Спочатку визначимо вузли квадратурної формули:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.2113249\ldots; \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.7886751\ldots;$$

Тепер, обчисливши необхідні значення функції, що інтегрується, з точністю до трьох правильних знаків у вузькому смислі, скористаємося формулою (7.51): $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{2}(0.826 + 0.559) = 0.6925.$

Похибку методу оцінимо за формулою (7.53), для чого використаємо знайдене у прикладі 2 значення максимуму абсолютної величини четвертої похідної $M_4 = 24$: $\Delta_1 \le \frac{1^5}{4320} \cdot 24 \approx 0,0056.$

Обчислювальну похибку можна знайти за формулою (7.49), враховуюче на те, що точність обчислення значень функції, яка інтегрується, дорівнює $0,0005$.

Таким чином, сумарна погрішність є $A = A_1 + A_2 = 0,0061$. Нарешті, округляючи наближене значення інтеграла, остаточно маємо

$$I = 0,692 \pm 0,007.$$

Основна мета даного розділу – показати на простих прикладах, як виводяться різні формули чисельного інтегрування. Зрозуміло, що ми не розглянули всі способи побудови формул. У той же час приведені приклади є характерними, тому використовуючи їх можна самостійно побудувати конкретну квадратурну формулу, яка буде найбільше відповідати заданій практичній задачі.

7.5 Формула Сімпсона

Для того, щоб побудувати триточкову квадратурну формулу з рівновіддаленими вузлами для обчислення наближеного значення $\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx$,

де $f(x)$ – неперервна на $[x_0 - h; x_0 + h]$ разом зі своїми похідними до четвертого порядку включно, можна використати інтерполяційний многочлен Лагранжа 2-го порядку, графік якого проходить через точки $(x_0 - h; f(x_0 - h))$, $(x_0; f(x_0))$ і $(x_0+h; f(x_0+h))$ і проінтегрувати його за x в межах від $x_0 - h$ до x_0+h.

Проте нижче таку квадратичну формулу будуватимемо, користуючись методом невизначених коефіцієнтів [1]. Цей метод, крім того, дає змогу досить просто обчислити її залишковий член. Отже, побудуємо квадратичну формулу вигляду

$$\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = 2h(A(f(x_0-h)+f(x_0+h))+Bf(x_0))+R(f), \qquad (7.54)$$

де A і B – невідомі коефіцієнти, а $R(f)$ – залишковий член.

Щоб дістати рівняння, з яких можна визначити коефіцієнти A і B, подамо функції $f(x), f(x_0-h)$ і $f(x_0+h)$ в околі точки x_0 за допомогою формули Тейлора. Маємо

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) +$$

$$+\frac{(x-x_0)^4}{4!}f^{(IV)}(x_0+\theta h),$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(IV)}(x_0-\theta_2 h),$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(IV)}(x_0+\theta_3 h),$$

$0<\theta,\ \theta_2,\ \theta_3 <1.$

Підставляємо ці значення функцій $f(x)$, $f(x_0-h)$, $f(x_0+h)$ у (7.54) і зважаючи на те, що

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = 2hf(x_0)+\frac{2h^3}{3!}f''(x_0)+\frac{2h^5}{5!}f^{(IV)}(x_0+\theta_1 h),\ 0<\theta_1<1,$$

тут за загальною теоремою про середнє

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{(x-x_0)^4}{4!}f^{(IV)}(x_0+\theta h)dx = \frac{2h^5}{5!}f^{(IV)}(x_0+\theta_1 h),\ 0<\theta_1<1,$$

для залишкового члена $R(f)$ дістанемо:

$$R(f)=2h((1-2A-B)f(x_0)+h^2\left(\frac{1}{3!}-A\right)f''(x_0)+$$

$$+\frac{h_4}{4!}\left(\frac{1}{5}f^{(IV)}(x_0+\theta_1 h)-A\left(f^{(IV)}(x_0-\theta_2 h)+f^{(IV)}(x_0+\theta_3 h)\right)\right).$$

Невідомі коефіцієнти A і B доберемо так, щоб

$$\begin{cases}1-2A-B=0,\\ 1/3!-A=0.\end{cases}$$

Звідси знаходимо A=1/6, B=2/3.

За цих значень A і B залишковий член квадратурної формули (7.54)

$$R(f)=\frac{2h^5}{4!}\left(\frac{1}{5}f^{(IV)}(x_0+\theta_1 h)-\frac{1}{6}\left(f^{(IV)}(x_0-\theta_2 h)+f^{(IV)}(x_0+\theta_3 h)\right)\right).$$

Але $f^{(IV)}$ неперервна на $[x_0-h,\ x_0+h]$, тому існує точка $\xi\in[x_0-h,\ x_0+h]$ така, що

$$\frac{\frac{1}{5}f^{(IV)}(x_0+\theta_1 h)-\frac{1}{6}\left(f^{(IV)}(x_0-\theta_2 h)+f^{(IV)}(x_0+\theta_3 h)\right)}{1/5+2(-1/6)}=f^{(IV)}(\xi).$$

Отже,

$$R(f)=-\frac{h^5}{90}f^{(IV)}(\xi),\ \ x_0-h\le\xi\le x_0+h. \qquad (7.55)$$

Отже, триточкову квадратурну формулу (7.54) можна записати так:

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx=\frac{h}{3}\left(f(x_0-h)+4f(x_0)+f(x_0+h)\right)-\frac{h^5}{90}f^{(IV)}(\xi), \qquad (7.56)$$

Це і є *квадратурна формула Сімпсона* або формула парабол із залишковим членом. Вона точна для многочлена третього степеня, бо похідна четвертого порядку від такого многочлена дорівнює нулю. З формули (7.55) легко знайти таку оцінку для абсолютної похибки чисельного інтегрування за формулою Сімпсона:

$$|R(f)|\le\frac{h^5}{90}M_4,\ \ M_4=\max_{[x_0-h;x_0+h]}\left|f^{(IV)}(x)\right|.$$

Якщо треба обчислити $\int\limits_a^b f(x)dx$ з достатньою точністю, то відрізок $[a;\ b]$ ділять на $2n$ рівних відрізків завдовжки $h=(b-a)/2n$ і до кожного з відрізків $[x_{2k};\ x_{2k+2}]$; $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ застосовують формулу Сімпсона (7.56). Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx=\frac{h}{3}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2}))-\frac{h^5}{90}\sum_{k=0}^{n-1}f^{(IV)}(\xi_k)=$$

$$=\frac{h}{3}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{2k+1}))-\frac{h^5}{90}\sum_{k=0}^{n-1}f^{(IV)}(\xi_k),$$

де $\xi_k\in[x_{2k};\ x_{2n+1}]$; $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$.

Оскільки $f^{(IV)}(x)$ неперервна на відрізку [a,b], то існує точка $\xi\in$[a; b] така, що $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f^{(IV)}(\xi_k)=f^{(IV)}(\xi),\xi\in[a;\ b]$.

Таким чином отримаємо ***узагальнену формулу Сімпсона*** (парабол) із залишковим членом вигляду:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{2k+1}))-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(IV)}(\xi).\quad(7.57)$$

Залишковий член узагальненої формули Сімпсона

$$R(f)=-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(IV)}(\xi)=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(IV)}(\xi),\ \ h=\frac{b-a}{2n}\qquad(7.58)$$

Звідси отримаємо таку оцінку абсолютної похибки чисельного інтегрування за узагальненою формулою Сімпсона:

$$|R(f)|\le\frac{h^4}{180}(b-a)M_4=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}M_4;\ \ M_4=\max_{[a;b]}\left|f^{(IV)}(x)\right|.\qquad(7.59)$$

Якщо наближене значення інтеграла треба обчислити з точністю ε>0, то відповідний крок інтегрування h визначається нерівністю

$$h\le\sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}},$$

або, що те саме, відрізок $[a;\ b]$ треба поділити на n рівних частин, де

$$h\le\sqrt[4]{\frac{(b-a)^5M_4}{2880\varepsilon}},\qquad(7.60)$$

За узагальненою формулою Сімпсона обчислимо наближене значення інтеграла

$$\int\limits_0^1 x\cos xdx=\sin 1+\cos 1-1=0{,}38177334$$

з кроком $h=0{,}1$ і оцінимо повну абсолютну похибку Δ_I. За формулою (7.57), опускаючи проміжні обчислення знайдемо: $I_{см}=\mathbf{0{,}38177448\approx0{,}3817745}$.

Для того, щоб оцінити залишковий член $R(f)$ формули Сімпсона за формулою (7.59), треба знайти похідну четвертого порядку від функції $f(x)=x\cdot cosx$. Маємо

$$f^{(IV)}(x)=4\sin x+x\cos x,$$

звідси

$$\left|f^{(IV)}(x)\right|=4\left|\sin x\right|+\left|x\right|\left|\cos x\right|<4+1=5;\quad M_4=\max_{[0;1]}\left|f^{(IV)}(x)\right|=5.$$

Тому для залишкового члена $R(f)$ за формулою (7.59) ($a=0;\ b=1;\ h=0,1;$ $M_4=5$) дістанемо $|R(f)|\leq 0,278\cdot 10^{-5}$.

Похибка остаточного округлення $\Delta_0=0,2\cdot 10^{-7}$, а неусувна похибка

$$\tilde{R}=\Delta_f\sum_{k=1}^{n}\left|A_k\right|=\Delta_f\cdot\frac{h}{3}\cdot 6n=2nh\Delta_f=(b-a)\Delta_f=0,5\cdot 10^{-7},$$

оскільки $(b-a)/2n=h$, а значення підінтегральної функції f у вузлах x_k ($k=0,$ $1, ..., 10$) обчислювали з точністю $0,5\cdot 10^{-7}$, тобто $\Delta_f=0,5\cdot 10^{-7}$.

Отже, повна абсолютна похибка чисельного інтегрування функції $f(x)=x\cdot cosx$ дорівнюватиме:

$$\Delta_f=R(f)+\tilde{R}+\Delta_0=0,278\cdot 10^{-5}+0,5\cdot 10^{-7}+0,2\cdot 10^{-7}=0,285\cdot 10^{-5}<0,3\cdot 10^{-5}.$$

Отже, обчислене за формулою Сімпсона для n=10, h=0,1 наближене значення інтеграла (7.57) має п'ять правильних значущих цифр, тобто

$$\int_0^1 x\cos x\,dx=0,381774\pm 0,000003$$

(у відповіді збережено одну сумнівну цифру).

Найбільший внесок у повну абсолютну похибку узагальненої формули Сімпсона вносить залишковий член $R(f)$. Тому для визначення кількості відрізків n розбиття $[a;\ b]$, яке гарантує обчислення наближеного значення інтеграла з точністю $\varepsilon>0$, досить скористатися формулою (7.56). Звичайно, всі проміжні обчислення при цьому слід виконувати з точністю, більшою за ε.

Наприклад, щоб обчислити наближене значення інтеграла (5.57) з точністю $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-4}$ (з чотирма правильними десятковими знаками), треба відрізок [0; 1] поділити не менше як на три рівні частини, бо за формулою (6.56) (a=0; b=1; M_4=5) маємо

$$n>\sqrt[4]{\frac{5\ 10^4}{0.5\ 2880}}=5\sqrt[4]{\frac{1}{18}}=5\ 0,48549176=2,4274588\approx 3.$$

Обчислимо інтеграл (7.57) за формулою (7.53), поклавши $n=2,\ 4,\ 8,\ 16$ (це відповідає $h=0,25;\ 0,125;\ 0,0625;\ 0,03125$). Знайдемо $I_2=0,38182200;$ $I_4=0,38177633;\ I_8=0,38177346;\ I_{16}=0,38177333$. А це означає, що I_2 має три, I_4 – п'ять, I_8 – шість, а I_{16} – вісім правильних значущих десяткових цифр.

7.6 Порівняння і практичне оцінювання похибки квадратурних формул

Вище розглянуто деякі квадратурні формули. Узагальнені формули трапецій і Сімпсона – це формули замкненого типу, середніх прямокутників – відкритого типу, а лівих і правих прямокутників – напівзамкненого і напіввідкритого типу. Як вже було зазначено, точне значення інтеграла визначають за формулами: лівих і правих прямокутників – якщо підінтегральна функція стала; середніх прямокутників і трапецій – якщо підінтегральна функція лінійна, і за формулою Сімпсона – якщо підінтегральною функцією є многочлен степеня, не вищого за третій [1].

Точність квадратурної формули характеризується порядком залишкового члена R(f) стосовно степеня кроку інтегрування h. З формул (7.32) – (7.37), (7.41) і (7.58) видно, що $R(f)$ квадратурних формул залежить від кроку інтегрування h і $R(f)\to 0$ $(h\to 0)$. Кажуть, що $R(f)$ має порядок p (p – натуральне число) відносно h, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(f)}{h^p}=M\neq 0,$$

і це записують так: $R(f)=O(h^p)$.

Отже, залишкові члени формул лівих і правих прямокутників відносно h мають перший порядок: $R(f)=O(h)$, середніх прямокутників і трапецій – другий: $R(f)=O(h^2)$, а Сімпсона – четвертий: $R(f)=O(h^4)$. Квадратурну формулу вважають тим точнішою, чим більший порядок її залишкового члена $R(f)$. З вищерозглянутих квадратурних формул найбільш точною є формула Сімпсона, а найбільш неточними – лівих і правих прямокутників. Точність формул середніх прямокутників і трапецій однакова [1].

Як було зазначено вище, іноді оцінити залишковий член $R(f)$ квадратурної формули дуже важко або взагалі неможливо, наприклад тоді, коли функцію задано графічно чи таблично і аналітичний вираз її невідомий, або коли функцію задано складним аналітичним виразом і її похідні важко оцінити. Але якщо похідну певного порядку знайдено, то оцінити її за модулем на відрізку інтегрування завжди можна, побудувавши за допомогою комп'ютера таблицю значень похідної. Оцінити $R(f)$ квадратурної формули можна й тоді, коли не вдається оцінити зверху модуль похідної підінтегральної функції. Важливо лише знати порядок $R(f)$ відносно кроку інтегрування h. Для цього використовують *метод подвійного перерахунку* [1].

Нехай залишковий член деякої квадратурної формули має порядок p відносно кроку інтегрування h, тобто $R(f)=O(h^p)$, $p\in N$. Припустимо також, що похідна, яка проходить до залишкового члена $R(f)$, на відрізку інтегрування $[a; b]$ змінюється мало, а тому наближено її можна вважати сталою. Тоді залишковий член $R(f)$ набере вигляду

$$R(f)=Mh^p,$$

де M – деяка невідома стала.

Якщо відрізок $[a;\ b]$ поділити на n і $2n$ рівні частини ($h=(b-a)/n$, $h/2=(b-a)/2n$) і обчислити за квадратурною формулою наближені значення I_n і I_{2n} інтеграла

$$I=\int_a^b f(x)dx,$$

а відповідні їм залишкові члени позначити через $R_n(f)$ і $R_{2n}(f)$, то дістанемо дві рівності

$$I=I_n+R_n(f)=I_n+Mh^p;\ I=I_{2n}+R_{2n}(f)=I_{2n}+M(h/2)^p. \tag{7.61}$$

Ці рівності можна розглядати як лінійну систему рівнянь відносно I та M. Виключивши з цієї системи I, знайдемо для M значення

$$M=(2^p/(2^p-1))\cdot((I_{2n}-I_n)h^p).$$

Підставивши це значення M у вираз для $R_{2n}(f)$, дістанемо

$$R_{2n}(f)=(I_{2n}-I_n)/(2^p-1). \tag{7.62}$$

Отже, залишковий член квадратурної формули пропорційний різниці двох наближених значень інтеграла, обчислених за цією ж квадратурною формулою з кроками h і $h/2$. Таку оцінку похибки квадратурної формули називають *правилом Рунге.* Якщо тепер (7.62) підставити у друге рівняння системи (7.61), то знайдемо уточнене значення інтеграла

$$I_{n,2n}=I_{2n}+(I_{2n}-I_n)/2^p-1. \tag{7.63}$$

Обчислення наближеного значення інтеграла за формулою (7.63) називають *екстраполяцією за Річардсоном.* Якщо $I_n\neq I_{2n}$, то уточнене значення $I_{n,2n}$ ніколи не лежить між I_n і I_{2n} . Якщо $I_{2n}> I_n$, то з формули (7.63) випливає, що $I_{n,2n}>I_{2n}=max\{I_n, I_{2n}\}$. Отже, наближення $I_{n,2n}$ визначають з наближень I_n та I_{2n} в результаті операції екстраполяції, тому й сам спосіб обчислення $I_{n,2n}$ назвали екстраполяцією.

У таблиці 7.1 для квадратурних формул, розглянутих вище, подано значення порядку р залишкового члена відносно кроку h, формули для обчислення значень залишкового члена $R_{2n}(f)$ і уточненого значення інтеграла $I_{n,2n}$.

Таблиця 7.1

Узагальнена квадратурна формула	p	$R_{2n}(f)$	$I_{n,2n}$
Лівих і правих прямокутників	1	$I_{2n}-I_n$	$I_{2n}+(I_{2n}-I_n)$
Середніх прямокутників і трапецій	2	$1/3(I_{2n}-I_n)$	$I_{2n}+1/3(I_{2n}-I_n)$
Сімпсона	4	$1/15(I_{2n}-I_n)$	$I_{2n}+1/15(I_{2n}-I_n)$

З таблиці 7.1 видно, що для обчислення наближеного значення інтеграла з точністю $\varepsilon>0$ методом подвійного перерахунку треба:

1. Обчислити наближені значення інтеграла I_n та I_{2n} з кроком
$$h=(b-a)/n \text{ і } h/2=(b-a)/2n.$$

2. За формулою (7.52) обчислити наближене значення похибки $R_{2n}(f)$ чисельного інтегрування.
3. Порівняти $R_{2n}(f)$ з ε. Якщо $|R_{2n}(f)|< \varepsilon$, то за формулою (7.53) обчислити уточнене значення інтеграла $I_{n,2n}$ і процес обчислень припинити. Якщо $|R_{2n}(f)|\geq \varepsilon$, то, зберігши значення I_{2n}, відрізок $[a; b]$ поділити на $4n$ рівних частин і обчислити $R_{4n}(f)$, яке знову порівнюється з ε. Цей процес послідовного збільшення вдвічі числа вузлів квадратурної формули (зменшення вдвічі кроку інтегрування) продовжують доти, поки на певному кроці k не виконуватиметься нерівність $\left|R_{2n}^{k}(f)\right|< \varepsilon$.

Отже, очевидно, що цей алгоритм має циклічний характер.

Приклад 1. Використавши правило Рунге і екстраполяцію за Річардсоном, обчислити довжину дуги еліпса $(x^2/9)+(y^2/4)=1$ за квадратурними формулами [1].

Розв'язання. Відомо, що довжина l дуги еліпса

$$l = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt,$$

де $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ – ексцентриситет еліпса. Якщо в останньому інтегралі замінити незалежну змінну за формулою $t=\pi/2-\tau$, то дістанемо:

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 \tau}\,d\tau = E(\varepsilon^2),$$

де $E(\varepsilon^2)$ – так званий повний еліптичний інтеграл другого роду. Отже, довжина дуги еліпса $l=4aE(\varepsilon^2)$.

За умовою $a=3$, $b=2$, $\varepsilon^2=5/9$, тому $l = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{5}{9}\sin^2 t}\,dt = 4aE\left(\frac{5}{9}\right)$.

Для того, щоб обчислити наближене значення інтеграла $E\left(\frac{5}{9}\right)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{5}{9}\sin^2 t}\,dt$, знайдемо спочатку значення функції $f(t)=\sqrt{1-\frac{5}{9}\sin^2 t}$ на відрізку $[0;\pi/2]$ з кроком $h=\pi/24$ (табл. 7.2).

Користуючись цією таблицею, знаходимо:

1. За формулою лівих прямокутників:

а) $n=3$, $h=\pi/6=0{,}52359876$, $E_3=h(f_0+f_4+f_8)= \pi/6\cdot 2{,}6917233=1{,}4093830$;

б) $n=6$, $h=\pi/12=0{,}26179938$,

$E_6=h(f_0+f_2+f_4+f_6+f_8+f_{10})=h(f_0+\Sigma_2)=\pi/12\cdot 5{,}2167929=1{,}3657531$,

$R_6(f)=(E_6\text{-}E_3)=-0,0436299,\ \ E_{3,6}=E_6+E_6(f)=1,3221232;$

в) $n=12,\ h=\pi/24=0,13089969,$

$$E_{12}=h\sum_{k=0}^{11} fk=h(f_0+\Sigma_1+\Sigma_2)=\pi/24\cdot 10,266919=1,3439365,$$

$R_{12}(f)=E_{12}\text{-}E_6=-0,0218166,\ \ E_{6,12}=E_{12}+R_{12}(f)=1,3221199.$

Отже, $E_{3,6}$ і $E_{6,12}$ мають по шість правильних значущих цифр, тому $E(5/9)=1,32212$.

Таблиця 7.2

№ пор.	t_i	$sin\ t_i$	$f_i=f(t_i)$		
0	0	0	1		
1	$\pi/24=0,13089969$	$0,13052619$		$0,99525624$	
2	$\pi/12=0,26179938$	$0,25881903$			$0,98121598$
3	$\pi/8=0,39269907$	$0,38268343$		$0,95845751$	
4	$\pi/6=0,52359876$	$0,50000000$			$0,92796072$
5	$5\pi/24=0,65449845$	$0,60876144$		$0,89113208$	
6	$\pi/4=0,78539815$	$0,70710681$			$0,84983657$
7	$7\pi/24=0,91629783$	$0,79335334$		$0,80642922$	
8	$\pi/3=1,0471975$	$0,86602543$			$0,76376259$
9	$3\pi/8=1,1780972$	$0,92387955$		$0,72512323$	
10	$5\pi/12=1,3089969$	$0,96592582$			$0,69401700$
11	$11\pi/24=1,4398965$	$0,99144484$		$0,67372806$	
12	$\pi/2=1,5707963$	1	$0,66666667$		
		$2n=12$	$\Sigma_0=1,6666667$	$\Sigma_1=5,0501264$	$\Sigma_2=4,21679286$
		$2n'=6$	$\Sigma'_0=1,6666667$	$\Sigma'_1=2,5250696$	$\Sigma'_2=1,6917233$

2. За формулою правих прямокутників:

а) $n=3,\ h=\pi/6=0,52359876,\ E_3=h(f_4+f_8+f_{12})=\pi/6\cdot 2,3583900=1,2348501;$

б) $n=6,\ h=\pi/12=0,26179938,$

$E_6=h(f_2+f_4+f_6+f_8+f_{10}+f_{12})=h(f_{12}+\Sigma_2)=\pi/12\cdot 4,8834596=1,2784867,$

$R_6(f)=(E_6\text{-}E_3)=\ 0,0436366,\ \ E_{3,6}=E_6+E_6(f)=1,3221233;$

в) $n=12,\ h=\pi/24=0,13089969,$

$$E_{12}=h\sum_{k=0}^{12} fk=h(f_{12}+\Sigma_1+\Sigma_2)=\pi/24\cdot 9,9335859=1,3003033,$$

$R_{12}(f)=E_{12}\text{-}E_6=\ 0,0218163,\ \ E_{6,12}=E_{12}+R_{12}(f)=1,3221196.$

Як бачимо, і за формулою правих прямокутників наближене значення $E(5/9)=1,32212$, де всі цифри правильні.

3. За формулою трапецій:

а) $n=3,\ h=\pi/6=0,52359876,\ h/2=\pi/12=0.26179938;$

$E_3=h/2(f_0+2(f_4+f_8)+f_{12})=\pi/12\cdot 5,0501133=1,3221165;$

б) $n=6,\ h=\pi/12,\ h/2=\pi/24=0{,}13089969,$

$E_6=h/2(f_0+2(f_2+f_4+f_6+f_8+f_{10})+f_{12})=h/2(\Sigma_0+2\Sigma_2)=\pi/24\cdot 10{,}10025239=$
$=1{,}3221195,\ R_6(f)=1/3(E_6-E_3)=\ 0{,}0000011,\ E_{3,6}=E_6+E_6(f)=1{,}3221209;$

в) $n=12,\ h=\pi/24,\ h/2=\pi/48=0{,}065449845=6{,}5449845\cdot 10^{-2},$

$$E_{12}=h/2(f_0+2\sum_{k=1}^{11} f_k+f_{12})=h/2(\Sigma_0+2(\Sigma_1+\Sigma_2))=\pi/48\cdot 20{,}2005051=1{,}3221204,$$

$R_{12}(f)=1/3(E_{12}-E_6)=1/3\cdot 0{,}00000006=0{,}00000002\approx 0,$
$E_{6,12}=E_{12}=1{,}3221204.$

Отже, $E(5/9)=1{,}32212$, де всі цифри є правильними.

4. За формулою Сімпсона:

а) $n=3,\ h=\pi/12,\ h/3=\pi/36=0{,}087266461=8{,}7266461\cdot 10^{-2},$
$E_3=h/3(f_0+4(f_2+f_6+f_{10})+2(f_4+f_8)+f_{12})=\ =h/3(\Sigma'_0+4\Sigma'_1+2\Sigma'_1)=(\pi/36)\cdot$
$\cdot(1{,}6666667+4\cdot 10{,}100278+2\cdot 1{,}6917233)==\pi/36\cdot 15{,}150391=1{,}3221210;$

б) $n=6,\ h=\pi/24,\ h/3=\pi/72=4{,}3633230\cdot 10^{-2},$
$E_6=h/3(\Sigma_0+4\Sigma_1+2\Sigma_2)=\pi/72\cdot 30{,}300758=1{,}3221199,$
$R_6(f)=\ 1/15(E_6-E_3)=\ 1/15\cdot 0{,}1\cdot 10^{-6}\approx 0,\ E_{3,6}=E_6=1{,}3221199\approx 1{,}32212.$

Для порівняння наведено значення інтеграла E(5/9), обчислене за формулою лінійного інтерполювання (5.32) на основі табличних даних для функції $E(\varepsilon^2)$, взятих із "П'ятизначних математичних таблиць" Б. І. Сегала і К. А. Семендяєва:

k	ε^2	*E*	ΔE
0	*0,55226*	*1,32384*	*-0,00303*
1	*0,55805*	*1,32081*	*-0,00303*
2	*0,56328*	*1,31778*	

Наше значення $\varepsilon^2=5/9=0,(5)$ лежить між $\varepsilon^2_0=0{,}55226$ і $\varepsilon^2_1=0{,}55805$. Значення $E_0=1{,}32384$, $\Delta E_0=-0{,}00303$, $h=\varepsilon^2_1-\varepsilon^2_0=0{,}00579$, $\varepsilon^2-\varepsilon^2_0=5/9-0{,}55226=$ $=0{,}00330$. Тоді за формулою лінійної інтерполяції маємо:

$$E(5/9)=E_0+\Delta E_0/h(\varepsilon^2-\varepsilon^2_0)=1{,}32384+(-303/579)\cdot 0{,}00330=1{,}322113.$$

Після округлення до п'ятого десяткового розряду маємо: $E(5/9)=1{,}32211$, що добре узгоджується з виконаними вище обчисленнями.

Отже, екстраполяція за Річардсоном – потужний і універсальний алгоритм підвищення точності чисельного інтегрування функцій. Навіть у таких методах низького порядку точності, як методи лівих і правих прямокутників, її застосування дає змогу дістати результат досить високого порядку точності при мінімальних обсягах обчислювальної роботи. Саме тому метод експлуатації за Річардсоном з розвитком комп'ютерів дістав значний розвиток у багатьох розділах обчислювальної математики [1].

7.7 Контрольні запитання

1. В яких випадках застосовують чисельне диференціювання?
2. Як отримують найпростіші вирази для похідних?
3. Наведіть кілька найпростіших формул чисельного диференціювання.
4. Як залежить точність чисельного диференціювання від кроку сітки?
5. Наведіть постановку чисельного інтегрування.
6. Наведіть та охарактеризуйте два випадки чисельного інтегрування, які розрізняють залежності від способу задання підінтегральної функції.
7. Перерахуйте найпростіші квадратурні формули чисельного інтегрування.
8. Наведіть загальні формули лівих, правих та середніх прямокутників з відповідною геометричною інтерпретацією.
9. Наведіть вирази для визначення похибок при обчисленні інтегралу за формулами лівих, правих та середніх прямокутників.
10. Наведіть загальну формулу трапецій, її геометричну інтерпретацією, та вираз для оцінювання похибки інтегрування за даною формулою.
11. Які формули чисельного інтегрування називають гаусовими?
12. Наведіть узагальнену квадратурну формулу Сімпсона та оцінювання абсолютної похибки чисельного інтегрування за нею.
13. З якою метою застосовують метод подвійного перерахунку? Наведіть алгоритм цього методу.
14. Від яких чинників залежить точність квадратурних формул?
15. Наведіть правило Рунге.
16. Наведіть порівняльну характеристику відомих Вам квадратурних формул.

7.8 Завдання

Задача 1. Методом чисельного диференціювання знайти першу похідну у точці, заданій викладачем. Для функції заданої у вигляді таблиці згідно з індивідуальним варіантом.

1

X	0.525	0.526	0.527	0.528
F(X)	0.50121	0.50208	0.50294	0.50381

2

X	50	55	60	65
F(X)	1.6990	1.7404	1.7782	1.8129

3

X	0.325	0.326	0.327	0.328
F(X)	0.50121	0.50208	0.50294	0.50381

4

X	20	25	30	35
F(X)	1.6990	1.7404	1.7782	1.8129

5

X	0.525	0.526	0.527	0.528
F(X)	0.50121	0.50208	0.50294	0.50381

6

X	5	10	15	20
F(X)	1.500	1.604	1.782	1.812

7

X	0.825	0.826	0.827	0.828
F(X)	0.70121	0.70208	0.70294	0.70381

8

X	10	15	20	25
F(X)	1.6990	1.7404	1.7782	1.8129

9

X	0.825	0.826	0.827	0.828
F(X)	0.90121	0.90208	0.90294	0.90381

10

X	12	17	22	27
F(X)	1.6990	1.7404	1.7782	1.8129

Задача 2. За узагальненою формулою середніх прямокутників:

а) обчислити значення інтеграла за вказаним розбиттям відрізка інтегрування $[a;\ b]$ на N_0 рівних частин і оцінити залишковий член;

б) з точністю $\varepsilon>0$ визначити n і обчислити наближене значення інтеграла для $N\geq n$ (N вибрати так, якщо це дозволяють умови задачі, щоб $(b\text{-}a)$ ділилося на нього точно).

Задача 3. За узагальненою формулою Сімпсона обчислити значення інтеграла із заданою точністю $\varepsilon>0$, виходячи з вказаного значення N_0. Крок інтегрування h визначається рівністю $h=(b-a)/(2N_0)$. Значення кроку інтегрування h, що забезпечує вказану точність, визначити за допомогою подвійного перерахунку з поділом відрізка $[a;\ b]$ на N і $2N$ частин. Надрукувати межі інтегрування, послідовність пар $(N,\ I_N)$, $(2N,\ I_{2N})$ і т.д., а також остаточне значення $R=1/15\cdot|\,I_{2N}-I_N\,|$.

Задача 4. Побудувати алгоритм обчислення наближеного значення інтеграла за узагальненою формулою трапецій і написати відповідну програму. За цією програмою обчислити наближене значення інтеграла при заданому N_0 (кількість відрізків інтегрування) і оцінити залишковий член; обчислити наближене значення інтеграла з точністю $\varepsilon>0$ подвоєнням кількості вузлів інтегрування N_0, $2N_0$, $4N_0$ і т. д. до виконання нерівності $|R(f)| \approx |I_{2n} - I_n|/3 < \varepsilon$. Надрукувати межі інтегрування, послідовні пари чисел (N_0, I_{N0}), ($2N_0$, I_{2N0}) і т. д., а також $|R(f)| \approx |I_{2N} - I_N|/3$. Назвати правильні цифри обчисленого значення інтеграла. Порівняти обчислене значення інтеграла з тим значенням, яке отримують за формулою Ньютона-Лейбніца.

Таблиця 7.3

Вар.	F(x)	a	b	N_0	ε
1	$e^x \cos x$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$
2	$x^2 e^{-x}$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
3	$x^2 \mathrm{arctg} x$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
4	$e^{\sin x} \sin 2x$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
5	$e^{\cos 2x} \cos x$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
6	$e^x/(1+x)$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
7	$(1+x)^{3/2} e^{-x}$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
8	$e^x/(3+2\cos x)$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
9	$e^{\cos x}(1+x)$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
10	$(1+x)\ln^2(1+x)$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$
11	$(1+x^2)e^{\mathrm{arctg} x}$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-7}$
12	$e^{\sin x} \sin(\cos x)$	0	1	6	$0{,}5 \cdot 10^{-7}$
13	$\sin x \sqrt{1+x^2}$	0	1	6	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
14	$x^2 + 2\ln x$	1	2	8	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
15	$x^2 \cos(x/2)$	1	2	8	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
16	$x^2 \sin(1+x^2)$	0	1	6	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$
17	$x \cos x^2$	0	1	6	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$
18	$\cos x/(1+\sin^3 x)$	0	1	6	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
19	$(1-x^2)\ln(1+x)$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$
20	$\sqrt{1+x}\, \cos x$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
21	$\sqrt{1+x}\, \sin x$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
22	$e^{-x}/(1+x)$	1	2	10	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$
23	$\mathrm{arctg} x/(1+x^2)$	0	1	10	$0{,}5 \cdot 10^{-4}$
24	$x \ln^2 x$	2	3	8	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
25	$\sqrt{1-(7/16)\sin^2 x}$	0	$\pi/2$	6	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
26	$\arcsin e^{-(x/8)}$	1	7	6	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
27	$\arccos e^{-(x/6)}$	2	7	5	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$
28	$\ln(2+\mathrm{tg}(x+10))$	0	14	7	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
29	$5x \sin x^2$	0	2	10	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$
30	$3x^3 \cos x^2$	0	1	5	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$

8 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Велика кількість наукових і технічних проблем приводить до інтегрування диференціальних рівнянь. На жаль, диференціальні рівняння, які можна проінтегрувати відомими методами, зустрічаються порівняно рідко. У зв'язку з цим важливого значення набувають наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь.

Наближені методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь можна розбити на два класи. Одні з них дають наближене розв'язання у вигляді аналітичного виразу, інші – у вигляді таблиці чисельних значень. Першу групу методів називають аналітичною, а другу – чисельною.

Розглянемо використання найпростіших чисельних методів. Очевидно, що питання про знаходження наближених розв'язків $y=y(x)$ рівняння $y'=f(x, y)$, що задовольняє умову $y(x_0)=y_0$, можна ставити, якщо цей розв'язок існує і він єдиний. Як відомо, достатньою умовою існування і єдиності цього розв'язку є неперервність функції $f(x, y)$ в області, що розглядається, і обмеженість її частинної похідної за y [12].

8.1 Метод Ейлера

Нехай необхідно розв'язати задачу Коші: знайти розв'язок диференціального рівняння [12]

$$y' = f(x,y), \tag{8.1}$$

що задовольняє умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \text{ тобто } y(x_0) = y_0. \tag{8.2}$$

При чисельному розв'язанні рівняння (8.1) задача ставиться так: в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, знайти наближення y_n до значень точного розв'язку $y(x_n)$. Різниця $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = h$ називається кроком сітки. В багатьох випадках приймають величину h постійною, тоді

$$x_n = x_0 + nh \quad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{8.3}$$

Наближено можна вважати, що права частина рівняння (8.1) залишається постійною на кожному з відрізків між точками ділення.

Метод Ейлера полягає у безпосередній заміні похідної різницевим відношенням за наближеною формулою

$$\Delta y / \Delta x = f(x,y)$$

В силу зроблених припущень на першому відрізку шуканий розв'язок наближено зображається лінійною функцією

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f(x_0,y_0), \quad y - y_0 = f(x_0,y_0)(x - x_0), \quad y = y_0 + (x - x_0) f(x_0,y_0) \tag{8.4}$$

в окремому випадку, при $x = x_1$ отримуємо $y_1 = y_0 + hf(x_0,y_0)$.

Рівність (8.4) означає, що на відрізку $[x_0, x_0 + h]$ шукану інтегральну криву $y = y(x)$ наближено заміняють прямолінійним відрізком, що виходить із початкової точки $M(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом $f(x_0, y_0)$. Аналогічно знаходимо приближене значення $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$.

Для точки $x_n = x_0 + nh$ отримуємо

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \tag{8.5}$$

Таким чином, як наближену шукану інтегральну криву отримуємо ломану лінію з вершинами у точках $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_n(x_n, y_n)$.

Обчислення наближень y_n шуканого розв'язку $y(x)$ за формулою (8.4) є *звичайним методом Ейлера*. Цей метод дає досить грубо наближений розв'язок задачі Коші. Він зазвичай використовується у випадку, коли потрібно отримати наближене уявлення про розв'язок на невеликому проміжку.

Якщо функція $f(x, y)$ у рівнянні (1) на деякому відрізку у області, що розглядається, є неперервною за x і задовольняє умову Ліпшиця за y

$$\left|\left(f(x, y_2) - f(x, y_1)\right)\right| \le K\left|y_2 - y_1\right|, \; K = const,$$

і крім того, $\left|\dfrac{df}{dx}\right| \le N$, $N = const$; $\left|\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right| \le N_1$, $N_1 = const$,

то похибка звичайного методу Ейлера оцінюється за формулою

$$\left|\varepsilon_n\right| = \left|y_n - y(x_n) \le \frac{hN}{2K}\left[e^{K(x_n - x_0)} - 1\right]\right| \tag{8.6}$$

Приклад 1. За допомогою методу Ейлера знайти розв'язок рівняння $y' = y + x^2$, що задовольняє умову $y(0)=1$ в перших п'яти точках відрізку [0; $0{,}5$], при $h = 0{,}1$.

Оскільки $x_k = x_0 + kh$, де $k = 0, 1, 2, ...,$ то $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; $x_3 = 0{,}3$; $x_4 = 0{,}4$. Значення шуканої функції $y = y(x)$, що задовольняє умови даної задачі Коші, знаходимо за формулою (8.5). Результати обчислень зведені у таблицю 8.1.

Таблиця 8.1

i	x_i	x_i^2	y_i	$f(x_i, y_i) = y_i + x_i^2$	$hf(x_i, y_i) = 0.1\cdot(y_i + x_i^2)$	$y_i + 1 = y_i + hf(x_i, y_i)$
0	0	0	1	1	0.1	1.1
1	0.1	0.01	1.1	1.11	0.111	1.211
2	0.2	0.04	1.211	1.251	0.1251	1.3361
3	0.3	0.09	1.3361	1.4261	0.1426	1.4787
4	0.4	0.16	1.4787	1.6387	0.1639	1.6426

Примітка. Точний розв'язок рівняння $y' = y + x^2$, що задовольняє умову $y(0) = 1$, виражається формулою $y = 3e^x - x^2 - 2x - 2$, відповідно $y(0,4) = 3e^{0,4} - (0,4)^2 - 2(0,4) - 2 = 1,5154$.

Приклад 2. Знайти розв'язок рівняння $y' = 2x - y$, для якого $y(1) = 1$, в п'яти точках відрізку $[1,\ 2]$, прийнявши $h = 0,1$. Отримані значення уточнити за допомогою інтеграційної обробки за формулою

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right].. \qquad (8.7)$$

За формулою (8.5) знаходимо шукані значення розв'язку (табл. 8.2)

Таблиця 8.2

i	y_i	x_i	$2x_i$	$2x_i - y_1$	$2x_i - y_1$	$y_i + 1$
0	*1*	*1*	*2*	*1*	*0,1*	*1,1*
1	*0.1*	*1,1*	*2,2*	*1,1*	*0,11*	*1,21*
2	*0.21*	*1,2*	*2,4*	*1,19*	*0,119*	*1,329*
3	*0.329*	*1,3*	*2,6*	*1,271*	*0,1271*	*1,4561*
4	*0.4561*	*1,4*	*2,8*	*1,3439*	*0,1344*	*1,5905*

Значення y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, отримані методом Ейлера, уточнюємо за формулою (8.7), результати подані у табл. 8.3.

Таблиця 8.3

i	k	$y_i^{(k)}$	x_i	$2x_i$	$2x_i - y_i$	x_{i+1}	$y_{i+1}^{(k-1)}$	$2x_{i+1}$	$2x_{i+1} - y_{i+1}^{(k-1)}$	$\sum$	$\frac{h}{2}\Sigma$	y_{i+1}^k
0	*1*	*1*	*1*	*2*	*1*	*1,1*	*1,1*	*2,2*	*1,1*	*2,1*	*0,105*	*1,105*
	2	*1*	*1*	*2*	*1*	*1,1*	*1,1*	*2,2*	*1,095*	*2,095*	*0,1048*	*1,1048*
1	*1*	*1,1*	*1,1*	*2,2*	*1,1*	*1,2*	*1,21*	*2,4*	*1,19*	*2,29*	*0,1145*	*1,2145*
	2	*1,1*	*1,1*	*2,2*	*1,1*	*1,2*	*1,2145*	*2,4*	*1,1855*	*2,2855*	*0,1143*	*1,2143*
2	*1*	*1,21*	*1,2*	*2,4*	*1,19*	*1,3*	*1,329*	*2,6*	*1,271*	*2,461*	*0,1231*	*1,3331*
	2	*1,21*	*1,2*	*2,4*	*1,19*	*1,3*	*1,3331*	*2,6*	*1,2669*	*2,4569*	*0,1228*	*1,3328*
3	*1*	*1,329*	*1,3*	*2,6*	*1,271*	*1,4*	*1,4561*	*2,8*	*1,3439*	*2,6149*	*0,1307*	*1,4597*
	2	*1,329*	*1,3*	*2,6*	*1,271*	*1,4*	*1,4561*	*2,8*	*1,3403*	*2,6113*	*0,1306*	*1,4596*
4	*1*	*1,4561*	*1,4*	*2,8*	*1,3439*	*1,5*	*1,5905*	*3,0*	*1,4095*	*2,7534*	*0,1377*	*1,5938*
	2	*1,4561*	*1,4*	*2,8*	*1,3439*	*1,5*	*1,5938*	*3,0*	*1,4062*	*2,7501*	*0,1375*	*1,5936*

8.2 Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта – один з найбільш використовуваних методів підвищеної точності.

Нехай необхідно знайти чисельний розв'язок рівняння (8.1), що задовольняє умову (8.2). Припустимо, що в точці x відомо $y(x)$; нехай $h > 0$. Позначимо

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x), \tag{8.8}$$

де $y(x+h)$ потрібно обчислити. Зобразимо різницю $\Delta y(x)$ у вигляді суми „виправлень" k_j з коефіцієнтом p_j:

$$\Delta y = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \ldots + p_r k_r,$$

де

$$k_1 = hf(x, y)$$
$$k_2 = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k_r = hf(x + \alpha_r h, y + \beta_{r1} k_1 + \beta_{r2} + \ldots + \beta_{rr} k_{r-1})$$

Коефіцієнти p_j, α_j, β_{ji}^{*} отримують при порівнянні розкладання Δy і k_{i1} за степенем h.

У випадку $r = 4$

$$\left.\begin{aligned} &k_1 = hf(x, y); \\ &k_2 = hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}); \\ &k_3 = hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}); \\ &k_4 = hf(x + h, y + k_3); \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{8.10}$$

При $x = x_0$ за допомогою формул (8.8) – (8.10) знаходимо $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

Аналогічно отримуємо такі наближення:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_1, \ (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{8.11}$$

де

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i); \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} &k_2^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}); \\ &k_3^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}); \\ &k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}); \end{aligned} \tag{8.13}$$

Для рівняння $y' = f(x, y)$ правильна така оцінка похибки методу Рунге-Кутта:

$$\left|y_1 - y(x_1)\right| < \frac{6MN\left|x_1 - x_0\right|^5 \left|N^5 - 1\right|}{N-1}, \tag{8.14}$$

де M, N – постійні, такі, що в області $\left|x_1 - x_0\right| < \alpha$, $\left|y - y_0\right| < b$ виконуються нерівності

$$\left|f(x,y)\right| < M \left|\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial x^k}\right| < \frac{N}{M^{k-1}} (i+k \le 3) \tag{8.15}$$

$$\left|x - x_0\right| N < 1,\ aM \le b,\ h \le a$$

Метод Рунге-Кутта використовується для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Нехай дана система двох рівнянь

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y,z) \\ z' &= g(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

з початковими умовами: $y(x_0) = y_0$; $z(x_0) = z_0$. (8.17)

Визначаючи паралельно числа λ_n і μ_n за формулами

$$\lambda_n = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);\quad \mu_n = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \tag{8.18}$$

де

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_n, y_n, z_n\right); \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{k_1}{2}\right); \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{k_2}{2}\right); \\ k_4 &= \left(x_n + h, y_n + k_3, z_n + k_3\right); \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= hg\left(x_n, y_n, z_n\right) \\ l_2 &= hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) \\ l_3 &= hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right) \\ l_4 &= hg\left(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3\right) \end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

знаходять

$$y_{n+1} = y_n + \lambda_n,\ z_{n+1} = z_n + \mu_n \tag{8.21}$$

Метод Рунге-Кутта використовується також при розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків.

Приклад 1. Методом Рунге-Кутта знайти розв'язок задачі Коші для рівняння $y' = y - x^2$, $y(1) = 0$, $x \in [1,\ 2]$, у перших п'яти точках, взявши $h = 0,1$.

В силу умови $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $f(x,y) = y - x^2$, тому $f(x_0, y_0) = y_0 - x_0{}^2 =$. $= 0 - 1 = -1$. За формулами (8.13) знаходимо

$$k_1^1 = hf(x_0, y_0) = 0,1 \cdot (-1) = -0,1;$$

$$k_2^1 = 0,1 \cdot f(1,05; -0,05) = 0,1\left\{(-0,05) - (1,05)^2\right\} = -0,1152;$$

$$k_3^1 = 0,1 \cdot f(1,05; -0,0576) = 0,1\left([-0,0576] - (1,05)^2\right) = -0,1160;$$

$$k_4^1 = 0,1 \cdot f(1,1; -0,1160) = 0,1\left[(-0,1160) - (1,1)^2\right] = -0,1326.$$

За формулою (8.12) обчислимо Δy_0:

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left[(-0.1) + 2(-0.1152) + 2(-0.1160) + 2(0.1326)\right] = -0.1158$$

і за формулою $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ – значення y_1: $y_1 = 0 + (-0.1158) = -0.1158$.

Таким чином, отримане наближене значення розв'язку при $x_1 = x_0 + h = 1,1$, $y_1 = -0,158$.

За допомогою формул (8.13) при $i = 1$ знайдемо наближене значення y_2 при $x_2 = 1,2$, розв'язавши нову задачу для того ж рівняння $y' = y - x^2$, $y(1,1) = -0.1158$.

Аналогічно знаходимо y_3, y_4, y_5. Розв'язки початкової задачі подані у таблиці 8.4.

Приклад 2. Методом Рунге-Кутта знайти розв'язок задачі Коші для рівняння $y' = 3x + y$, $y(0) = -1$, $x \in [0,1]$. Розв'язок знайти з чотирма правильними знаками.

Крок h вибираємо згідно з оцінкою, визначеною формулами (8.14). В даному випадку маємо: $a = 0.1$; $b = 1.5$; $M = 0.5$; $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 3$; $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 1$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right| = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right| = 0, \left|\frac{\partial^{i=kf}}{\partial x^i \partial y^k}\right| \le \frac{N}{M^{k-1}},\ i = 1,\ k = 0,3 < \frac{N}{M},\ тому\ N > 2$$

Нехай $N = 2,1$; крок h знаходимо із співвідношення

$$0,5 \cdot 10^{-3} \le \frac{5 \cdot 37 \cdot 1,5 \cdot 2,1 \cdot h^5 \left|(2,1)^5 - 1\right|}{2,1 - 1}$$

Отримуємо $h = 0,1$.

Як у попередньому прикладі, за допомогою формул (8.13) знаходимо значення y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 (таблиця 8.5).

Таблиця 8.4

i	x_i	y_i	x_i^2	$f(x_i,y_i)= = y_i - x_i^2$	$k_j = h^* * f(x_i,y_i)$	p_j	$S=\sum_{i=1}^{4} p_j k_j$	$\Delta y_i = \frac{1}{6}S$
0	1	0	1	-1	-0,1	1		
	1,05	-0,05	1,1025	-1,1525	-0,1152	2		
	1,05	-0,576	1,1025	-1,1601	-0,1160	2		
	1,1	-0,1160	1,21	-1,3260	-0,1326	1	-0,6950	-0,1158
$x_1 = x_0 + h = 1,1;\ y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -0,1158$								
1	1,1	-0,1158	1,21	-1,3258	-0,1326	1		
	1,15	-0,1821	1,3225	-1,5046	-0,1505	2		
	1,15	-0,1910	1,3225	-1,5135	-0,1514	2		
	1,2	-0,2672	1,44	-1,7072	-0,1707	1	-0,9071	-0,1501
$x_2 = x_0 + 2h = 1,2;\ y_2 = y_1 + \Delta y_1 = -0,1158 + (-0,1501) = -0,2659$								
2	1,2	-0,2659	1,44	-1,7059	-0,1706	1		
	1,25	-0,3512	1,5625	-1,9137	-0,1914	2		
	1,25	-0,3616	1,5625	-1,9241	-0,1924	2		
	1,3	-0,4583	1,69	-2,1483	-0,2148	1	-1,1150	-0,1925
$x_3 = x_0 + 3h = 1,3;\ y_3 = y_2 + \Delta y_2 = -0,2659 + (0,1925) = -0,4584$								
3	1.3	-0,4584	1,69	-2,1484	-0,2148	1		
	1.35	-0,5858	1,8225	-2,3883	-0,2388	2		
	1.35	-0,5778	1,8225	-2,4003	-0,2400	2		
	1.4	-0,6984	1,96	-2,6584	-0,2658	1	-1,4382	-0,2397
$x_4 = x_0 + 4h = 1,4;\ y_4 = y_3 + \Delta y_3 = -0,4584 + (-0,2397) = -0,6981$								
4	1,4	-0,6981	1,96	-2,6581	-0,2658	1		
	1,45	-0,8310	2,1025	-2,9335	-0,2934	2		
	1,45	-0,8448	2,1025	-2,9473	-0,2947	2		
	1,5	-0,9928	2,25	-3,2428	-0,3243	1	-1,7663	-0,2944
$x_5 = x_0 + 5h = 1,5;\ y_5 = y_4 + \Delta y_4 = -0,6981 + (-0,2944) = -0,9925$								

Примітка. Точний розв'язок $y' = 3x + y$, що задовольняє умову $y = -1$ при $x = 0$, виражається формулою $y = 2e^x - 3x - 3$. Відповідно $y(0,5) = = 2e^{0,5} 3 \cdot 0,5 - 3 = 2 \cdot 1,6487 - 1,5 - 3 = -1,2026$. Цей результат збігається з результатом, обчисленим за методом Рунге-Кутта ($y_5 = -1,20257$).

Таблиця 8.5

i	x_i	y_i	$3x_i$	$3x_i+y_i$	k_j	p_j	$S=\sum_{i=1}^{4} p_j k_j$	$\Delta y_i = \frac{1}{6}S$
0	0	-1	0	-1	-0,1	1	-0,1	
	0,05	-1,05	0,15	-0,9	-0,09	2	-0,18	
	0,05	-1,045	1,15	-0,895	-0,0895	2	-0,1790	
	0,1	-1,0895	0,3	-0,7895	-0,07895	1	-0,07895	-0,08966
$x_1=0,1;\quad y_1=y_0+\Delta y_0=-1+(-0,08966)=-1,08966$								
1	0,1	-1,08966	0,3	-0,78966	-0,07897	1	-0,07897	
	0,15	-1,12915	0,45	-0,67915	-0,06792	2	-0,13584	
	0,15	-1,12362	0,45	-0,67362	-0,06736	2	-0,13472	
	0,2	-1,15702	0,6	-0,55702	-0,5570	1	-0,05570	-0,06754
$x_2=0,2;\quad y_2=y_1+\Delta y_1=-1,08966+(-0,06754)=-1,15720$								
2	0,2	-1,15720	0,6	-0,55720	-0,05572	1	-0,05572	
	0,25	-1,18506	0,75	-0,43506	-0,04651	2	-0,08702	
	0,25	-1,17896	0,75	-0,42896	-0,04290	2	-0,08580	
	0,3	-1,20010	0,9	-0,30010	-0,03001	1	-0,03001	-0,04309
$x_3=0,3;\quad y_3=y_2+\Delta y_2=-1,15720+(-0,04309)=-1,20029$								
3	0,3	-1,20029	0,9	-0,30029	-0,03003	1	-0,03003	
	0,35	-1,21531	1,05	-0,16531	-0,01653	2	-0,03306	
	0,35	-1,20856	1,05	-0,15856	-0,01586	2	-0,03172	
	0,4	-1,21615	1,2	-0,01615	-0,00162	1	-0,00162	-0,01607
$x_4=0,4;\quad y_4=y_3+\Delta y_3=-1,20029+(-0,01607)=-1,21636$								
4	0,4	-1,21636	1,2	-0,01636	-0,00164	1	-0,00164	
	0,45	-1,21717	1,35	0,13283	0,01328	2	0,02656	
	0,45	-1,20971	1,35	0,14029	0,01403	2	0,02806	
	0,5	-1,20232	1,5	0,29768	0,02977	1	0,02977	0,01379
$x_5=0,5;\quad y_5=y_4+\Delta y_4=-1,21636+0,01379=-1,20257$								

8.3 Екстраполяційний метод Адамса

Метод оснований на другій інтерполяційній формулі Ньютона. Використовуємо цю формулу для похідної $y'(x)$ від розв'язку диференціального рівняння $y'=f(x,y)$:

$$y'(x)=y'_n+\Delta y'_{n-1}\frac{x-x_n}{h}+\frac{\Delta^2 y'_{n-2}}{h}\cdot\left(\frac{x-x_n}{h}+1\right)+\frac{\Delta^3 y'_{n-3}}{3!}\cdot\left(\frac{x-x_n}{h}+1\right)\cdot\left(\frac{x-x_n}{h}+2\right). \quad (8.22)$$

У формулі ми обмежились чотирма членами, в другому вигляді записали $x-x_{n-1}$, $x-x_{n-2}$ і прийняли до уваги, що $x_{n-1}=x_n-h$, $x_{n-2}=x_n-2h$, Інтегрування формули (8.22) від x_n до $x_{n+1}=x_n+h$ після підстановки

$\left(x-x_n\right)/h=S$ приводить до формули

$$y_{n+1}=y_n+\left(y'_n+\frac{1}{2}\Delta y_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 y_{n-3}\right)\cdot h \qquad (8.23)$$

Похибка формули (8.23) має порядок h^5. Формула (8.23) використовується таким чином. Спочатку будь-яким способом, наприклад за допомогою методу Ейлера, знаходять значення $y_1=y(x_0+h)$, $y_2=y(x_0+2h)$, $y_3=y(x_0+3h)$,. Потім обчислюють значення $y'_0=f(x_0,y_0)$, $y'_1=f(x_1,y_1)$, $y'_3=f(x_3,y_3)$, (відзначимо, що функція $f(x,y)$ невідома: це права частина рівняння $y'=f(x,y)$, за допомогою цих значень знаходять

$$\Delta y'_0=y'_1-y'_0, \Delta y'_1, \Delta y'_2; \quad \Delta^2 y'_0=\Delta y'_1-\Delta y'_0, \Delta^2 y'_0; \quad \Delta^3 y'_0=\Delta^2 y'_1-\Delta^2 y'_0.$$

При $n=3$, за формулою (8.23) знаходимо y_4, а за допомогою $y_4=f(x_4,y_4)$ отримуємо $\Delta\ y'_0=y'_4-y'_3$, $\Delta^2 y'_2$, $\Delta^3 y'_1$. За формулою (8.23), поклавши в неї $n=4$, обчислимо y_5, потім $y'_5=f(x_5,y_5)$ і т. д.

Примітка. Оскільки $\Delta y_n=y_{n+1}-y_n$, формулу (8.23) можна переписати у вигляді

$$\Delta y_n=h\left(y'_n+\frac{1}{2}\Delta y'_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 y'_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 y'_{n-3}\right),$$

або

$$\Delta y_n=\eta_n+\frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}, \qquad (8.24)$$

де

$$\eta_n=hf(x_n,y_n). \qquad (8.25)$$

Приклад 1. Використавши результати прикладів, поданих у розділі 8.1 і уточнивши їх за допомогою ітераційної обробки за формулою (8.7), екстраполяційним методом Адамса знайти розв'язок задачі Коші $y'=y+x^2$, $y(0)=1$ у таких п'яти точках відрізку $[0;1]$, при $x_6=0,6$, $x_7=0,7$, ..., $x_{10}=1$.

Використовуючи формулу (8.7), уточнюємо результати, отримані у прикладі 1 розділу 8.1:

$$y_1^{(1)}=1,1055; zy_1^{(2)}=1,1058;\ y_2^{(1)}=1,2241;\ y_2^{(2)}=1,2248;$$
$$y_3^{(1)}=1,3593;\ y_3^{(2)}=1,3605;\ y_4^{(1)}=1,5150;\ y_4^{(2)}=1,5167;$$
$$y_5^{(1)}=1,6953;\ y_5^{(2)}=1,6978.$$

Обчислимо різницю $\Delta y_n=y_{n+1}-y_n;\ (n=0,1,\ ...,\ 5)$, значення η_n (при тих же n) за формулою (8.25) і різниці $\Delta\eta$, $\Delta^2\eta$, $\Delta^3\eta$. Результати обчислень заносимо в таблицю (табл. 8.6)

Знаючи x_5 і y_5, знаходимо $f(x_5,y_5)=y_5+x_5^{\ 2}=1,6978+0,25=1,9478$

і $\eta_5 = hf(x_5, y_5) = 0{,}1 \cdot 1{,}9478 = 0{,}1948$.

Обчислюємо:

$$\Delta\eta_4 = \eta_5 - \mu_4 = 0{,}1948 - 0{,}1677 = 0{,}0271,$$

$$\Delta^2\eta_3 = \Delta\eta_4 - \Delta\eta_3 = 0{,}0271 - 0{,}0226 = 0{,}0045,$$

$$\Delta^3\eta_2 = \Delta^2\eta_3 - \Delta^2\eta_2 = 0{,}0045 - 0{,}0040.$$

Таблиця 8.6

n	x_n	y_n	Δy_n	η_n	$\Delta\eta_{n-1}$	$\Delta^2\eta_{n-2}$	$\Delta^3\eta_{n-3}$
0	0	1		0,1			
			0,1058		0,0116		
1	0,1	1,1058		0,1116		0,0033	
			0,1190		0,0149		0,0004
2	0,2	1,2248		0,1265		0,0037	
			0,1357		0,0186		0,0003
3	0,3	1,3605		0,1451		0,0040	
			0,1569		0,0226		
4	0,4	1,5167		0,1677			
			0,2104				
5	0,5	1,6978					

За формулою (8.24) знаходимо

$$\Delta y_5 = \eta_5 + \frac{1}{2}\Delta\eta_4 + \frac{5}{12}\Delta\eta_4 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_3 + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_2 + 0{,}1948 + + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0271 + \frac{5}{12}0{,}0045 + \frac{3}{8}0{,}005 = 0{,}2105,$$

відповідно, $y_6 = y_5 + \Delta y_5 = 1{,}6978 + 0{,}2105 = 1{,}9083$.

Таким чином, можна продовжити таблицю, записавши в кожному стовбці відповідне число.

Знаючи x_6 і y_6 знаходимо $f(x_6, y_6) = y_6 + x^2{}_6 = 1{,}9083 + 0{,}36 = 2{,}2683$. Обчислюємо далі

$$\Delta\eta_5 = 0{,}0320,\ \Delta^2\eta_4 = 0{,}0049,\ \Delta^3\eta_3 = 0{,}0004,\ \Delta y_6 = 0{,}2449,\ y_7 = 2{,}1532$$

Аналогічно знаходимо $y_8 = 2{,}4388,\ y_9 = 2{,}7712,\ y_{10} = 3{,}1574$. Всі результати знаходяться в табл. 8.7

Примітка. Різниці $\Delta\eta,\ \Delta^2\eta,\ \Delta^3\eta$, записані у вигляді цілих чисел.

Таблиця 8.7

n	x_n	y_n	Δy_n	η_n	$\Delta\eta_{n-1}$	$\Delta^2\eta_{n-2}$	$\Delta^3\eta_{n-3}$
0	0	1		0,1			
			0,1058		116		
1	0,1	1,1058		0,1116		33	
			0,1190		149		4
2	0,2	1,2248		0,1265		37	
			0,1357		186		3
3	0,3	1,3605		0,1451		40	
			0,1562		226		5
4	0,4	1,5167		0,1677		45	
			0,1811		271		4
5	0,5	1,6978		0,1948		49	
			0,2105		320		6
6	0,6	1,9083		0,2268		55	
			0,2449		375		6
7	0,7	2,1532		0,2643		61	
			0,2856		436		5
8	0,8	2,4388		0,3079		66	
			0,3324		502		
9	0,9	2,7712		0,3581			
			0,3862				
10	1	3,1574					

Приклад 2. За допомогою метода Ейлера знайти розв'язок задачі Коші $y' = y + 3x$, $x \in [1,2]$, $y(1) = 0$ з кроком $h = 0,1$ у п'яти точках. Отримані значення уточнити за допомогою ітераційної обробки за формулою (8.7). Методом Адамса знайти розв'язок у таких п'яти точках.

За формулою (8.5) знаходимо значення шуканої функції у перших п'яти точках (табл. 8.8).

Таблиця 8.8

n	x_n	$y(x_n) = y_{n-1} + hf_{n-1}$	$f(x_n, y_n) = y_n + 3x_n$	$hf(x_n, y_n)$
0	1	0	3	0,3
1	1,1	0,3	3,6	0,36
2	1,2	0,66	4,26	0,426
3	1,3	1,086	4,986	0,4986
4	1,4	1,5846	5,7846	0,57846
5	1,5	2,16306	6,66306	0,66631

Отримані значення уточнюємо за допомогою формули (8.7); результати наведені у таблиці 8.9.

Складаємо таблицю, в яку заносимо x_n, y_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 5)$, обчислюємо $\Delta y_n, \eta_n = hf(x_n, y_n)$, $\Delta\eta_{n-1}$, $\Delta^2\eta_{n-2}$, $\Delta^3\eta_{n-3}$. Продовжуємо таблицю, знаходячи Δy_n $(n=6,\ 7,\ 8,\ 9)$ за допомогою формули (8.24). Результати усіх обчислень приведені у таблиці 8.10.

Таблиця 8.9

n	x_n	$y_n^{(2)}$	$f(x_n, y_n)$	x_{n+1}	$y^{(1)}{}_{n+1}$ $y^{(0)}{}_{n+1}$,	$f(x_{n+1}, y^{(0)}{}_{n+1})$ $f(x_{n+1}, y^{(1)}{}_{n+1})$	$y^{(1)}{}_{n+1}$	$y^{(2)}{}_{n+1}$
0	1	0	3	1,1 1,1	0,3	3,6	0,33	0,3315
1	1,1	0,3915	3,6315	1,2 1,2	0,66 0,72607	4,26 4,32607	0,72607	0,72938
2	1,2	0,72938	4,32938	1,3 1,3	1,086 1,19515	4,986 5,09515	1,19515	1,20061
3	1,3	1,20061	5,10061	1,4 1,4	1,5846 1,75587	5,7846 5,04487	1,74487	1,75288
4	1,4	1,75288	5,95288	1,5 1,5	2,16306 2,38368	6,66306 6,88368	2,38368	2,39470

Таблиця 8.10

n	x_n	y_n	Δy_n	$f_n(x_n, y_n) =$ $= y_n + 3x_n$	$\eta_n = hf_n$	$\Delta\eta_{n-1}$	$\Delta^2\eta_{n-2}$	$\Delta^3\eta_{n-3}$
0	1	0		3	0,3			
			0,3315			6315		
1	1,1	0,3315		3,6315	0,36315		664	
			0,39788			6979		69
2	1,2	0,72938		4,32938	0,43294		733	
			0,47123			7712		78
3	1,3	1,20061		5,10061	0,51006		811	
			0,5527			8523		174
4	1,4	1,75288		5,95288	0,59529		985	
			0,64182			9418		168
5	1,5	2,39470		6,89470	0,68947		1053	
			0,74710			10471		-9
6	1,6	3,14180		7,94180	0,79418		1044	
			0,85156			11515		154
7	1,7	3,99334		9,09334	0,90933		1198	
			0,79128			12713		145
8	1,8	4,96462		10,36462	1,03646		1343	
			1,10560			14056		
9	1,9	6,07022		11,77022	1,17702			
			1,25379					
10	2	7,32401						

Примітка. В таблиці підкреслені числа, з яких начинаються обчислення за методом Адамса:

$$f_5(x_5,y_5)=y_5+3x_5=2.39470+3\cdot 1.5=6.89470,$$

$$\eta_5=hf_5=0.68947, \Delta\eta_4=\eta_5-\eta_4=0.68847-0.59529=0.09418$$

(в таблиці записано 9418)

$\Delta^2\eta_3=\Delta\eta_4-\Delta\eta_3=0{,}09418-0{,}08523=0{,}00985$ (в таблиці 985)

$\Delta^3\eta_2=\Delta^2\eta_3\Delta^2\eta_2=0{,}00985-0{,}00811=0{,}00174$ (в таблиці 174)

$$\Delta y_5=\eta_5+\frac{1}{2}\Delta\eta_4+\frac{5}{12}\Delta\eta_4+\frac{3}{12}\Delta^2\eta_3=0{,}68947+0{,}5\cdot 0{,}09418+$$

$$+\frac{5}{12}\cdot 0{,}00174+\frac{3}{8}\cdot 0{,}00174; \quad y_6=y_5+\Delta y_5=3{,}14180.$$

8.4 Контрольні запитання

1. В яких випадках доцільно застосовувати чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь?
2. Наведіть кілька відомих Вам методів чисельного розв'язання диференціальних рівнянь.
3. Наведіть постановку задачі Коші.
4. Наведіть та дайте стислу характеристику методу Ейлера.
5. Як оцінити похибку розв'язку рівняння за методом Ейлера?
6. Наведіть та охарактеризуйте метод Рунне-Кутта.
7. Наведіть вираз для оцінювання похибки методу Рунге-Кутта.
8. В чому полягає суть екстраполяційного методу Адамса?
9. Порівняйте Відомі Вам методи чисельного розв'язання диференціальних рівнянь.

8.5 Завдання

Задача 1. Методом Ейлера розв'язати вказану задачу Коші для кожного рівняння, прийнявши $h=0{,}1$.

$1.\ y'=y+3x,\ y(0)=-1,\ x\in[0;0{,}5]$	$2.\ y'=x-2y,\ y(0)=0,\ x\in[0;1]$
$3.\ y'=2x-y,\ y(0)=2,\ x\in[0;1]$	$4.\ y'=x+y^2,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$
$5.\ y'=x^2+y^2,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$	$6.\ y'=x+2y^2,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$
$7.\ y'x-x^2-y,\ y(1)=0,\ x\in[0;1]$	$8.\ y'=x^2y+x^3,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$
$9.\ y'-\frac{xy}{x^2+1},\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$	$10.\ y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$
$11.\ y'-\frac{y}{x-1}-\frac{y^2}{x-1},\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$	$12.\ y'(y^2+x)=y,\ y(1)=1,\ x\in[1;2]$

Задача 2. Методом Рунге-Кутта, прийнявши $h=0,1$, знайти наближені розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють нижченаведені умови:

$1.\ y'=x+y,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$	$2.\ y'=x-y,\ y(0)=-1,\ x\in[0;1]$
$3.\ y'=2x-y,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$	$4.\ y'=x-y+2,\ y(1)=0,\ x\in[1;2]$
$5.\ y'=x-y+2,\ y(0)=2,\ x\in[0;1]$	$6.\ y'=x^2-y,\ y(0)=2,\ x\in[0;1]$
$7.\ y'=x^2+y,\ y(0)=-4,\ x\in[0;1]$	$8.\ y'=x^3+y,\ y(0)=-6,\ x\in[0;1]$
$9.\ y'=x^3-y,\ y(1)=0,\ x\in[1;2]$	$10.\ y'=x+y^2,\ y(1)=0,\ x\in[1;2]$
$11.\ y'=x^2-y^2,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$	$12.\ y'=x^2+y^2\ ,y(0)=-1,\ x\in[0;1]$
$13.\ y'=x^3+y^2,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$	$14.\ y'=x^3-y^2,\ y(0)=-1,\ x\in[0;1]$
$15.\ y'=x^2+y^3,\ y(0)=0,\ x\in[0;1]$	$16.\ y'=x^3+y^3,\ y(0)=0,\ x\in[0;1]$
$17.\ y'=x^3-y^3,\ y(0)=1,\ x\in[0;1]$	$18.\ y'=x+y/x,\ y(1)=0,\ x\in[1;2]$
$19.\ y'=\cos x/x,\ y(1)=1,\ x\in[1;2]$	

Методом Рунге-Кутта, прийнявши $h=0,1$, знайти наближені розв'язки наведених систем диференціальних рівнянь:

$$20.\quad \left.\begin{aligned} y' &= 2z-x; \\ z' &= x-y+z; \end{aligned}\right\}\ x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=1,\ x\in[0;1]$$

$$21.\quad \left.\begin{aligned} y' &= \frac{z+x}{y}; \\ z' &= \frac{z-x}{y}; \end{aligned}\right\}\ x_0=0,\ y_0=1,\ z_0=1,\ x\in[0;1]$$

$$22.\quad \left.\begin{aligned} y' &= \frac{z^2y}{x}; \\ z' &= \frac{z^2+y}{x}; \end{aligned}\right\}\ x_0=1,\ y_0=1,\ z_0=0,\ x\in[0;2]$$

Методом Рунге-Кутта, прийнявши $h=0,1$, знайти наближені розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку:

23. $y''-3y'=x^2,\ x_0=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

24. $y''-4y'+3y=x-1,\ x_0=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

25. $4x^3y''+y'=0,\ x_0=1,\ y(0)=1,\ y'(0)=\frac{1}{2}$.

26. $y''+xy'+x^2y+3x=0,\ x_0=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Ззадача 3. Методом Ейлера і екстраполяційним методом Адамса розв'язати вказані задачі Коші, прийнявши $h=0,1$:

1. $y'=x+y/x,\ x\in[1;2],\ y(1)=0$	2. $y'=2x-y,\ x\in[0;1],\ y(0)=1$
3. $y'=x-y+2,\ x\in[0;1],\ y(0)=2$	4. $(x+y)y'=1,\ x\in[0;1],\ y(0)=1$
5. $y'\ln x=1,\ x\in[2;3],\ y(2)=1$	6. $y'=2x+y,\ x\in[0;1],\ y(0)=1$
7. $y'=x+2y,\ x\in[0;1],\ y(0)=1$	8. $y'=y/(x-y),\ x\in[2;3],\ y(2)=1$
9. $y'=e^{-x^2},\ x\in[0;1],\ y(0)=1$	10. $y'=2y+x^2,\ x\in[1;2],\ y(1)=2$
11. $y'=3y-x^2,\ x\in[2;3],\ y(2)=3$	12. $y'=y+4x,\ x\in[3;4],\ y(3)=-2$
13. $y'=4y-3x,\ x\in[0;1],\ y(0)=1$	14. $y'=y+x^3,\ x\in[0;1],\ y(0)=-1$
15. $y'=y-x^4,\ x\in[0;1],\ y(0)=1$	16. $y'=3y+2x,\ x\in[-1;0],\ y(-1)=2$
17. $y'=2x-4y,\ x\in[-2;-1],\ y(-2)=-2$	18. $y'=y^2+2x^2,\ x\in[0;1],\ y(0)=1$
19. $y'=3x^2-y^2,\ x\in[1;2],\ y(1)=1$	20. $y'=x^3+2y^2,\ x\in[0;1],\ y(0)=1$

ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшенко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
2. Гулин А. В., Самарський А. А. Численные методы – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Гетьманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001. – 256 с.
4. Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О.П., Смирнов Г. Л. Вычислительная математика. – М.: Вища шк., 1985. – 472 с.
5. Волков Е. А. Численне методы – М.: Наука, 1987. – 248 с.
6. Методи обчислень: Практикум на ЕОМ: Навчальний посібник / Бурківска В. Л, Войцехівський С. О., Гаврилюк І. П. та ін. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.
7. Численные методы. Учеб. пособие/ Коварцев А. Н. Самарский муниципальный комплекс непрерывного образования. – Самара: Вища шк., 1998. – 134 с.
8. Маликов В. Т., Кветный Р. Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ: Учеб. пособие. – К.: Выща шк., 1989. – 213 с.
9. Хемминг Р. В. Численные методи для научных работников и инженеров.– М.: Наука, 1968. – 400 с.
10. Краскевич В. Е., Зеленский К. Х. Гречко В. И. Численные методы в инженерныых исследованиях – К.: Вища шк., 1986. – 263 с.
11. Калитки Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
12. Гусак А. А. Элементы методов вычислений. – 2–е изд., Мн.: Изд–во БГУ, 1982. – 166 с.
13. Методы вычислений на ЭВМ.: Справочное пособие / Іванов В. В. – К.: Наукова думка.– 1986. – 584 с.
14. Дубовий В. М., Кветний Р. Н. Основи застосування ЕОМ у інженерній діяльності. – К.: ІСД МО України, 1994. – 285 с.
15. Бахвалов Н. С. Жидков Н. П. Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
16. Жалдак М. І., Рамський Ю. С. Чисельні методи математики: Посібник для самоосвіти вчителів. – К.: Вища шк., 1984. – 206 с.

Навчальне видання

Ігор Ростиславович Арсенюк
Олександр Митрофанович Роїк
Володимир Іванович Месюра

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ

Частина 2

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено І. Р. Арсенюком

Редактор В. О. Дружиніна
Коректор З. В. Поліщук

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 15.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 25.06.05р.
Формат 29,7x42 1/4
Друк різографічний
Тираж 75 прим.
Зам. № 2005-108
Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 6.75

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 15.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ