Н.Б. ДУБОВА, Л.І. ПЕДОРЧЕНКО, В.С. ПЕТРУНІН

ЗБІРНИК

ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Частина 7

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Н.Б. Дубова, Л.І. Педорченко, В.С. Петрунін

ЗБІРНИК

ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Частина 7

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як збірник завдань для студентів усіх напрямів підготовки всіх спеціальностей. Протокол №10 від “27” травня 2004 р.

Вінниця ВНТУ 2005

УДК 517.3 (075)
Д 64

Рецензенти:

П.М. Зузяк, доктор фізико-математичних наук, професор
А.А. Шиян, кандидат фізико-математичних наук
В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Н.Б. Дубова, Л.І. Педорченко, В.С. Петрупін
Д 64 Збірник індивідуальних завдань з вищої математики. Операційне числення. Ч.7. Збірник завдань. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 93 с.

У збірнику завдань наведені теоретичні відомості з операційного числення; теореми і властивості перетворення Лапласа та його застосування до розв'язання диференціальних рівнянь і систем, приклади розв'язання типових завдань і 100 різних варіантів завдань для самостійної роботи.

Навчальний посібник спрямований на розвиток і активізацію самостійної роботи студентів вищих технічних навчальних закладів.

Призначається для студентів усіх напрямів підготовки всіх спеціальностей.

УДК 517.3 (075)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Мета даного збірника завдань – активізувати самостійну роботу студентів при вивченні розділу “Операційне числення”. Цей розділ має важливе значення в курсі вищої математики, оскільки на ньому ґрунтується багато загальнотехнічних і спеціальних дисциплін.

В даний час є достатня кількість навчальної та методичної літератури з операційного числення, де викладені не тільки теоретичні відомості, але і наведені приклади розв’язання типових завдань, а також завдання для самостійної роботи. Проте вони не містять великої кількості різних варіантів завдань, тому не можна забезпечити індивідуальними завданнями студентів з трьох-чотирьох груп по 25 студентів у кожній.

Наявність великої кількості різних однотипних варіантів дає можливість забезпечити індивідуальними завданнями з даного розділу кожного студента. Ці завдання можна також використати для методичного забезпечення практичних занять та для контрольних заходів.

Наведені в збірнику пояснення до розв’язання типових завдань допоможуть студентам глибше засвоїти теоретичний матеріал.

I. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Поняття оригіналу і зображення

Нехай $f(t)$ – дійсна функція дійсного аргументу t.

Означення. Функція $f(t)$ називається оригіналом, якщо вона задовольняє такі три умови:

1) $f(t)$ і її похідна $f'(t)$ на будь-якому скінченному інтервалі осі t має скінченну кількість точок розриву першого роду;

2) $f(t) = 0$, якщо $t < 0$;

3) існують такі сталі, $M > 0$ і s_0, що $f(t) < Me^{s_0 t}$ для всіх t.

Умова 1) означає, що оригінал $f(t)$ є кусково-гладкою функцією за змінною t. Умова 2) означає, що для фізики і техніки байдуже, як ведуть себе розглядувані функції до деякого початкового моменту часу, який можна взяти за момент $t = 0$. Умова 3) накладає обмеження на характер зростання оригіналу $f(t)$, тобто вимагається, щоб $f(t)$ для $t \to +\infty$ зростала не швидше від показникової функції. При цьому число s_0 називається показником зростання функції $f(t)$.

Зауваження. Якщо $f(t)$ – комплексна функція дійсної змінної t, тобто $f(t) = f_1(t) + jf_2(t)$, то вона є оригіналом у випадку, коли її дійсна і уявна частини $f_1(t)$ та $f_2(t)$ є оригіналами.

Кожному оригіналу (комплексному чи дійсному) поставимо у відповідність функцію $F(p)$ комплексної змінної $p = s + j\omega$, визначену як інтеграл:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \tag{1}$$

Інтеграл у правій частині рівності (1) називається інтегралом Лапласа для функції $f(t)$. Функція $F(p)$ називається зображенням Лапласа. Перехід від оригіналу $f(t)$ до зображення $F(p)$ за формулою (1) називається перетворенням Лапласа.

Перетворення існує, якщо $\operatorname{Re} p = s > s_0$, причому інтеграл Лапласа збігається абсолютно для всіх $\operatorname{Re} p > s_0$ і функція $F(p)$, яка визначена в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, є в ній аналітичною.

Зауваження. Якщо функція $F(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$, то виконується рівність

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) = 0.$$

Той факт, що $F(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$, записується так:

$$F(p) \to f(t) \text{ або } f(t) \leftarrow F(p)$$

(стрілка напрямлена від зображення до оригіналу).

Крім того, використовуються і такі позначення для перетворення Лапласа:

$$\mathrm{L}(f(t)) = F(p),\ f(t) \risingdotseq F(p)$$

Відповідність між оригіналом і зображенням ми позначатимемо стрілкою ($\to$).

Найпоширенішим з оригіналів є одинична функція Хевісайда, визначена рівністю:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Використовується ще таке позначення одиничної функції – $\eta(t)$.

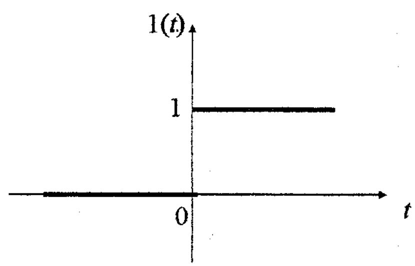


Рис. 1

Більшість елементарних функцій e^t, $\sin t$, $\cos t$ та інші не є оригіналами тільки тому, що вони не задовольняють умову 2) з означення оригіналу. Проте, якщо кожну з них помножити на одиничну функцію Хевісайда, то умова 2) буде виконуватися, тому функції $e^t\,1(t)$, $\sin t\ 1(t)$, $\cos t\ 1(t)$ вже є оригіналами. Надалі будемо розуміти наступне, якщо не виконується умова 2) для деякої функції $f(t)$, то за оригінал береться $f(t)\,1(t)$.

Властивості оригіналів і зображень.

Основні теореми операційного числення

1. *Властивість лінійності.* Якщо $f_1(t) \leftarrow F_1(p)$ і $f_2(t) \leftarrow F_2(p)$, то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p),$$

де c_1, c_2 - будь-які комплексні числа.

2. *Теорема подібності.* Якщо $f_1(t) \leftarrow F_1(p)$, то $f_1(at) \leftarrow \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$

для будь-якого числа $a > 0$.

3. *Теорема загаювання оригіналу.* Якщо $f_1(t) \leftarrow F_1(p)$ і число $t_0 > 0$, то

$$f(t - t_0) \leftarrow e^{-pt_0} F(p),$$

де $f(t - t_0) = 0$ для $t < t_0$, тобто

$$f(t - t_0)\, 1(t - t_0) \leftarrow e^{-pt_0} F(p). \qquad (3)$$

Наявність у лівій частині формули (3) одиничної загаювальної функції $1(t\text{-}t_0)$ (рис.2) перетворює в нуль функцію $f(t\text{-}t_0)$ для $t < t_0$.

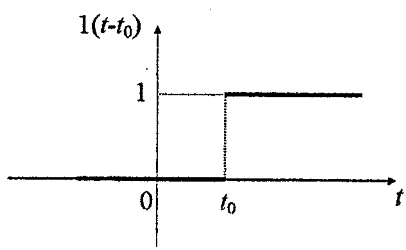


Рис.2

4. *Теорема зсунення зображення* (або *згасання оригіналу*). Якщо $f(t) \leftarrow F(p)$, то для будь-якого комплексного числа p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \leftarrow F(p - p_0). \tag{4}$$

5. *Теорема про диференціювання оригіналу.* Якщо $f(t) \leftarrow F(p)$ і $f'(t)$ є оригіналом, то

$$f'(t) \leftarrow pF(p) - f(0). \tag{5}$$

Застосовуючи формулу (5) n-1 раз, дістанемо загальну формулу:

$$f''(t) \leftarrow p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0),\ \ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \tag{6}$$

При цьому вважається, що $f^{(n)}(t)$ є оригіналом.

6. *Теорема про інтегрування оригіналу.* Якщо $f(t) \leftarrow F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftarrow \frac{F(p)}{p}. \tag{7}$$

7. *Теорема про диференціювання зображення.* Якщо $f(t) \leftarrow F(p)$, то

$$(-t) f(t) \leftarrow \frac{dF(p)}{dp}. \tag{8}$$

8. *Теорема про інтегрування зображення.* Якщо $f(t) \leftarrow F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow \int_p^{+\infty} F(q)dq. \tag{9}$$

При цьому вважається, що $\frac{f(t)}{t}$ є оригіналом.

9. *Теорема про згортку оригіналів* (*множення зображень*). Якщо

$$f_1(t) \leftarrow F_1(p) \quad \text{і} \quad f_2(t) \leftarrow F_2(p),$$

то

$$F_1(p)F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau. \tag{10}$$

Інтеграл у правій частині формули (10) називається згорткою функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$, яка позначається символом $f_1(t) * f_2(t)$.

Зауваження. Згортка – комутативна, тобто $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$.

10. *Теорема про згортку зображень* (*множення оригіналів*). Якщо

$$f_1(t) \leftarrow F_1(p) \text{ і } f_2(t) \leftarrow F_2(p),$$

то

$$f_1(t)f_2(t) \leftarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(z)F_2(p-z)dz, \qquad (11)$$

де інтегрування здійснюється вздовж вертикальної прямої Re $z = c > s_0$, а p – комплексна змінна така, що $\operatorname{Re} p > c + s_0$.

Інтеграл у правій частині формули (11) називається згорткою двох зображень $F_1(p)$ і $F_2(p)$, яка позначається символом $F_1(p) * F_2(p)$.

Зауваження. Інтеграл у правій частині формули (10) обчислюється за допомогою основної теореми про лишки [2].

11. *Формула Дюамеля.* Якщо $f_1(t) \leftarrow F_1(p)$, $f_2(t) \leftarrow F_2(p)$, то

$$pF_1(p)F_2(p) \rightarrow f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau. \qquad (12)$$

Інтеграл у правій частині формули (12) називається інтегралом Дюамеля.

Зауваження. Оскільки функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$ рівноправні, то формулу (12) можна записати і так:

$$pF_1(p)F_2(p) \rightarrow f_2(t)f_1(0) + \int_0^t f_2(\tau)f_1'(t-\tau)d\tau. \qquad (12)$$

Інтеграл Дюамеля застосовується для інтегрування диференціальних рівнянь.

12. *Теорема про зображення періодичного оригіналу.* Якщо $f(t)$ – періодична з періодом T функція-оригінал, то зображення $F(p)$ визначається за формулою:

$$F(p) = \frac{\psi(p)}{1-e^{-pt}}, \qquad (13)$$

де $\psi(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt.$

Таблиця зображень елементарних функцій

$$1(t) \leftarrow \frac{1}{p};\qquad sh\omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2-\omega^2};$$

$$t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}};\qquad ch\omega t \leftarrow \frac{p}{p^2-\omega^2};$$

$$e^{at} \leftarrow \frac{1}{p-a};\qquad e^{p_0 t}\cos\omega t \leftarrow \frac{p-p_0}{(p-p_0)^2+\omega^2};$$

$$\sin\omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2};\qquad e^{p_0 t}\sin\omega t \leftarrow \frac{\omega}{(p-p_0)^2+\omega^2}.$$

$$\cos\omega t \leftarrow \frac{p}{p^2+\omega^2};$$

Відновлення оригіналу за заданим зображенням

При використанні операційного числення часто доводиться розв'язувати обернену задачу: за заданим зображенням $F(p)$ необхідно відновити оригінал $f(t)$. Цю задачу можна розв'язувати такими методами:

1) безпосередньо за допомогою таблиці;

2) за допомогою таблиці з використанням властивостей зображень.

У багатьох випадках зображення є правильним дробом відносно змінної p. Розклавши його на суму простих дробів, зведемо це зображення до лінійної комбінації табличних зображень. Тоді оригінал знаходимо для кожного простого дробу, використовуючи відповідні властивості зображень.

Загальним прийомом розв'язування поставленої задачі є застосування теорем про лишки.

Загальний спосіб визначення оригіналу за зображенням.

Теорема обернення

Теорема. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а $F(p)$ – її зображенням, то в будь-якій точці t, де оригінал $f(t)$ неперервний, має місце формула:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(p)e^{pt}dp, \tag{14}$$

де інтегрування здійснюється вздовж будь-якої нескінченної прямої $\mathrm{Re}p = c$, яка лежить у півплощині абсолютної збіжності інтеграла Лапласа від $f(t)$.

Вважається, що $F(p)$ – функція аналітична в усій комплексній площині p, за винятком скінченного числа особливих точок, і задовольняє умову:

$$\lim_{p\to\infty}F(p)=0.$$

При цьому вважається, що в нескінченно віддаленій точці $p=\infty$ функція $F(p)$ – аналітична.

Зауваження. Інтеграл у правій частині формули (14) називається інтегралом Бромвича.

Оскільки інтеграл Бромвича

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(p)e^{pt},p=p_k\right],$$

де $p=p_k$ $(k=\overrightarrow{1,n})$ - особливі точки, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(p)e^{pt},p=p_k\right], \tag{15}$$

тобто оригінал обчислюється за формулою (15).

Найчастіше особливими точками є полюси.

Число p_0 називається полюсом m-го порядку функції $F(p)$, якщо

$$F(p)=\frac{\psi(p)}{(p-p_0)^m},$$

де $\psi(p_0)\neq 0$.

Лишок у полюсі m-го порядку визначається за формулою:

$$\operatorname{Res}\left[F(p), p=p_0\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to p_0}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left[F(p)(p-p_0)^m\right]. \qquad (16)$$

З цієї формули для $m = 1$ отримуємо формулу, за якою обчислюється лишок у полюсі першого порядку (в простому полюсі).

$$\operatorname{Res}\left[F(p), p=p_0\right]=\lim_{p\to p_0}\left[F(p)(p-p_0)\right]. \qquad (17)$$

Крім цієї формули, для обчислення лишку в простому полюсі функції $F(p)=\dfrac{\psi(p)}{\varphi(p)}$ ($p = p_0$ – простий корінь знаменника, $\psi(p_0) \neq 0$) зручно використовувати формулу:

$$\operatorname{Res}\left[F(p), p=p_0\right]=\frac{\psi(p_0)}{\varphi'(p_0)}. \qquad (18)$$

Зауваження. Нехай p_k *і* $\overline{p_k}$ – комплексно-спряжені полюси функції $F(p)$. Тоді суму лишків у цих полюсах зручно обчислювати за формулою:

$$\operatorname{Res}\left[F(p), p=p_k\right]+\operatorname{Res}\left[F(p), p=\overline{p_k}\right]=2\operatorname{Re}\operatorname{Res}\left[F(p), p=p_k\right], \qquad (19)$$

тобто, сума лишків у цьому випадку дорівнює подвоєній дійсній частині лишку в одному із полюсів.

Питання для самоконтролю

1. Яка функція називається оригіналом і які умови вона повинна задовольняти?

2. Чи будуть оригіналами функції:

а) $f(t)=e^{-5t^2}\cdot 1(t)$, б) $f(t)=P_n(t)\cdot e^t\cdot 1(t)$,

де $P_n(t)$ – многочлен n-го степеня, 1(t) – одинична функція Хевісайда?

3. Який графік має одинична функція Хевісайда?

4. Що таке зображення оригіналу?

5. Чи правильне твердження, що зображення суми оригіналів дорівнює сумі їх зображень?

6. Чи правильне твердження, що при множенні оригіналу на сталий множник його зображення також потрібно помножити на цей множник?

7. Яке зображення має оригінал $f(t-t_o)$, $(t>t_o)$, якщо зображення $f(t)$ дорівнює $F(p)$?

8. Зображення оригіналу $f(t)$ дорівнює $F(p)$. Яким буде зображення $e^{-\alpha t}\cdot f(t)$, $(\alpha>0)$?

9. Зображення оригіналу $f(t)$ дорівнює $F(p)$. Яким буде зображення $\frac{df(t)}{dt}$, якщо $f(0)=2$?

10. Яким буде зображення оригіналу $\int_o^t f(\tau)d\tau$, якщо зображення $f(t)$ дорівнює $F(p)$?

11. Зображення оригіналу $f(t)$ дорівнює $F(p)$. Яким буде зображення $f(at+b)$, де a і b – сталі?

12. $F(p)$ - Зображення оригіналу $f(t)$. Яким оригіналам відповідають зображення $\frac{dF(p)}{dp}$ і $\int_p^\infty F(q)dq$?

13. Що таке згортка оригіналів? Чи буде згортка оригіналів оригіналом?

14. Яким чином зображення згортки оригіналів виражається через зображення самих оригіналів?

15. Як знайти зображення $t\cdot f(t)$, якщо відомо, що оригіналу $f(t)$ відповідає зображення $F(p)$?

16. $F(p)$ – зображення оригіналу $f(t)$. Якому оригіналу відповідає зображення: а) $\frac{F(p)}{p}$, б) $pF(p)-f(0)$?

17. Що таке обернене перетворення Лапласа?

18. За якою формулою оригінал можна виразити через обернене перетворення Лапласа?

19. Що таке інтеграл Бромвича?

20. За якою формулою можна знайти оригінал заданого зображення за допомогою лишків?

21. Як найпростіше обчислити суму лишків у комплексно-спряжених полюсах?

22. Для розв'язування яких диференціальних рівнянь можна застосувати операційне числення: а) лінійних, б) нелінійних?

23. Чи можна розв'язувати задачі Коші для систем лінійних диференціальних рівнянь за допомогою операційного числення?

24. Що таке інтеграл Дюамеля і як він застосовується для розв'язування диференціальних рівнянь?

25. Чи можна застосувати інтеграл Дюамеля для розв'язання задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з ненульовими початковими умовами?

II. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

1. Знайти зображення оригіналу:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t < 0,\ t > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо зображення цієї функції через $F(p)$, тоді за означенням зображення

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^1 te^{-pt}dt + \int_1^{+\infty} 0e^{-pt}dt = \int_0^1 te^{-pt}dt = \left| \begin{array}{l} u = t,\ dV = e^{-pt}dt, \\ du = dt,\ V = -\dfrac{1}{p}e^{-pt} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}(e^{-p} - 1) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

2. Знайти зображення оригіналу:

$$f(t) = te^{2t} \cdot \cos 4t \cdot \cos t,$$

використовуючи властивості оригіналу.

Розв'язання. Спочатку перетворимо добуток косинусів у суму, матимемо:

$$\cos 4t \cdot \cos t = \frac{1}{2}(\cos 5t + \cos 3t).$$

Як відомо,

$$\cos 5t \leftarrow \frac{p}{p^2+25}, \quad \cos 3t \leftarrow \frac{p}{p^2+9}.$$

За теоремою про диференціювання зображення

$$(-t)\cdot\cos 5t \leftarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+25}\right) = \frac{p^2+25-2p\,p}{(p^2+25)^2} = -\frac{p^2-25}{(p^2+25)^2},$$

звідки

$$t\cdot\cos 5t \leftarrow \frac{p^2-25}{(p^2+25)^2}.$$

Аналогічно

$$(-t)\cdot\cos 3t \leftarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+9}\right) = \frac{p^2+9-2p\cdot p}{(p^2+9)^2} = -\frac{p^2-9}{(p^2+9)^2},$$

звідки

$$t\cdot\cos 3t \leftarrow \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}.$$

Тоді за теоремою лінійності дістанемо, що

$$t\cdot\cos 4t\cdot\cos t = \frac{1}{2}t\cdot\cos 5t + \frac{1}{2}t\cdot\cos 3t \leftarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2-25}{(p^2+25)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}.$$

Нарешті, за теоремою зсунення ($p_0 = 2$) матимемо:

$$e^{2t}\cdot t\cdot\cos 4t\cdot\cos t \leftarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{(p-2)^2-25}{((p-2)^2+25)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(p-2)^2-9}{((p-2)^2+9)^2}.$$

3. За заданим зображенням $F(p)$ відновити оригінал, використовуючи властивості зображень:

$$F(p) = \frac{2(p-1)}{[(p-1)^2+1]^2}.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{1}{p^2+1} \to sint.$$

Неважко помітити, що $\frac{-2p}{(p^2+1)^2}$ є похідною від функції $\frac{1}{p^2+1}$.

Дійсно,

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{-2p}{(p^2+1)^2}.$$

За теоремою про диференціювання зображення матимемо, що

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) \to (-t)\cdot\sin t,$$

тобто

$$\frac{-2p}{(p^2+1)^2} \to (-t)\cdot\sin t \quad \text{або} \quad \frac{2p}{(p^2+1)^2} \to t\cdot\sin t.$$

Нарешті, скориставшись теоремою зсунення ($p_0 = 1$), дістанемо:

$$F(p) = \frac{2(p-1)}{[(p-1)^2+1]^2} \to t\cdot\sin t\cdot e^t,$$

тобто

$$f(t) = t\cdot e^t\cdot\sin t.$$

4. За заданим зображенням $F(p) = \frac{3}{(p-2)(p+1)(p^2+4)}$ відновити оригінал:

а) за допомогою розкладання на прості дроби;

б) за допомогою лишків.

Розв'язання. а) Розкладемо $F(p)$ на суму простих дробів, дістанемо:

$$F(p) = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+1} + \frac{Mp+N}{p^2+4}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, M і N. Для цього зведемо дроби в правій частині рівності до спільного знаменника і, прирівнюючи після цього чисельники, дістанемо тотожну рівність:

$$3 = A(p+1)(p^2+4) + B(p-2)(p^2+4) + (Mp+N)(p-2)(p+1).$$

Надаючи p окремих значень (зокрема, таких, при яких вирази в дужках дорівнювали б нулю), а також, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p, дістанемо:

$$\begin{array}{l|lll}
p=-1 & 3=B(-3)\cdot 5 & \Rightarrow & B=-1/5, \\
p=2 & 3=A\cdot 3\cdot 8 & \Rightarrow & A=1/8, \\
p=0 & 3=4A-8B-2N & \Rightarrow & N=1/2(4A-8B-3)=-9/20, \\
p^3 & 0=A+B+M & \Rightarrow & M=-A-B=3/40.
\end{array}$$

Таким чином,

$$F(p)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{3}{40}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}.$$

Скориставшись властивістю лінійності і таблицею зображень елементарних функцій, дістанемо:

$$f(t)=\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{3}{40}\cos 2t-\frac{9}{40}\sin 2t.$$

б) $p_1 = 2$, $p_2 = -1$, $p_3 = 2j$, $p_4 = -2j$ – полюси першого порядку функції $F(p)$. Оригінал $f(t)$ дорівнює сумі лишків функції $F(p)e^{pt}$ в усіх особливих точках, тобто

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},\ p=p_k\right].$$

Скористаємося формулою (17) для обчислення лишків у полюсах:

$$\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},\ p=p_0\right]=\lim_{p\to p_0}\left[F(p)e^{pt}(p-p_0)\right].$$

Дістанемо

$$\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},\ p_2=-1\right]=\lim_{p\to -1}\left[\frac{3e^{pt}}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}\cdot(p+1)\right]=$$

$$=\lim_{p\to -1}\frac{3e^{pt}}{(p-2)(p^2+4)}=\frac{3e^{2t}}{-3\cdot 5}=-\frac{1}{5}e^{-t}.$$

Оскільки $p_3 = 2j$ і $p_4 = -2j$ – комплексно-спряжені числа, то сума лишків функції $F(p)e^{pt}$ у цих точках дорівнює подвоєній дійсній частині лишку в точці $p_3 = 2j$. Для обчислення лишку $\text{Res}\left[F(p)e^{pt},\ p_3 = 2j\right]$ скористаємося формулою (18):

$$\text{Res}\left[F(p),\ p = p_0\right] = \frac{\psi(p_0)}{\psi'(p_0)}.$$

У даному випадку

$$\psi(p) = \frac{3e^{pt}}{(p-2)(p+1)},\quad \varphi(p) = p^2 + 4,$$

$$\psi(2j) = \frac{3e^{2jt}}{(2j-2)(2j+1)} = \frac{3e^{2jt}(-6+2j)}{(-6-2j)(-6+2j)} = \frac{3(-6+2j)e^{2jt}}{40},$$

$$\varphi'(p) = 2p,\ \varphi'(2j) = 4j.$$

Отже,

$$\text{Res}\ \left[F(p)e^{pt},\ p = 2j\right] = \frac{3(-6+2j)e^{2jt}}{40\cdot 4j} = \frac{3(-3j-1)}{80\cdot j^2}e^{2jt} = \frac{3(1+3j)}{80}e^{2jt}.$$

Знайдемо подвійну дійсну частину цього лишку. Для цього застосуємо формулу Ейлера до множника e^{2jt}, матимемо:

$$e^{2jt} = \cos 2t + j\sin 2t.$$

Тоді

$$\text{Res}\ \left[F(p)e^{pt},\ p = 2j\right] = \frac{3(1+3j)}{80}(\cos 2t + j\sin 2t) =$$

$$= \frac{3}{80}(\cos 2t - 3\sin 2t) + j\frac{3}{80}(3\cos 2t + \sin 2t).$$

Звідки

$$\text{Re}\text{Res}\ \left[F(p)e^{pt},\ p_3 = 2j\right] = \frac{3}{80}(\cos 2t - 3\sin 2t)$$

Таким чином,

$$f(t) = \frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{3}{40}(\cos 2t - 3\sin 2t).$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння:

а) операційним методом;

б) за допомогою інтеграла Дюамеля.

$$y'' + y' = e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язання. а) Нехай $y(t) \leftarrow Y(p)$, тоді

$$y'(t) \leftarrow pY(p), \quad y''(t) \leftarrow p^2 Y(p), \quad e^{-2t} \leftarrow \frac{1}{p+2}.$$

Підставивши замість y, y', y'', e^{-2t} їхні зображення, дістанемо:

$$p^2 Y(p) + pY(p) = \frac{1}{p+2}.$$

Знайдемо з цього рівняння зображення $Y(p)$

$$(p^2 + p) \cdot Y(p) = \frac{1}{p+2},$$

звідки

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}.$$

Для відновлення оригіналу розкладемо це зображення на суму простих дробів:

$$\frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B і C.

$$1 = A(p+1)(p+2) + Bp(p+2) + Cp(p+1).$$

$$\begin{array}{l|lll} p=0 & 1 = 2A & \Rightarrow & A = \frac{1}{2}, \\ p=-1 & 1 = B(-1)\cdot 1 & \Rightarrow & B = -1, \\ p=-2 & 1 = C(-2)(-1) & \Rightarrow & C = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Таким чином,

$$Y(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+2}.$$

Тоді

$$y(t)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}.$$

б) Нехай потрібно розв'язати за допомогою інтеграла Дюамеля лінійне диференціальне рівняння

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=f(t) \qquad (20)$$

для

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=...=y^{(n-1)}(0)=0. \qquad (21)$$

Спочатку розв'яжемо допоміжне рівняння з тією ж лівою частиною і з правою частиною, рівною 1.

$$z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+a_2z^{(n-2)}+...+a_nz=1 \qquad (22)$$

для

$$z(0)=z'(0)=z''(0)=...=z^{(n-1)}(0)=0. \qquad (23)$$

Запишемо диференціальні рівняння (20) і (22) в зображеннях

$$p^nY(p)+a_1p^{n-1}Y(p)+a_2p^{n-2}Y(p)+...+a_nY(p) \;=\; F(p),$$

$$p^nZ(p)+a_1p^{n-1}Z(p)+a_2p^{n-2}Z(p)+...+a_nZ(p) \;=\; \frac{1}{p}.$$

Звідки

$$Y(p) \;=\; \frac{F(p)}{Q_n(p)}, \qquad (24)$$

$$Z(p) \;=\; \frac{1}{pQ_n(p)}, \qquad (25)$$

де $Q_n(p)=p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+...+a_n$ – многочлен n-го степеня від p.

З рівностей (24) і (25) знаходимо, що

$$Y(p) \;=\; pF(p)Z(p) \qquad (26)$$

Скористаємося формулою (12), матимемо

$$pF(p)Z(p)=Y(p)\to f(t)z(0)+\int_0^t f(\tau)z'(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)z'(t-\tau)d\tau,$$

оскільки $z(0)=0$, тобто

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)\, z'(t-\tau)\, d\tau. \tag{27}$$

Розв'яжемо тепер наше диференціальне рівняння за допомогою інтеграла Дюамеля. Складемо допоміжне рівняння:

$$z''(t) + z'(t) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0.$$

Нехай $z(t)$ – його розв'язок і $z(t) \leftarrow Z(p)$.

Тоді

$$z'(t) \leftarrow pZ(p),$$
$$z''(t) \leftarrow p^2 Z(p),$$
$$1(t) \leftarrow \frac{1}{p}.$$

Запишемо рівняння в зображеннях:

$$p^2 Z(p) + pZ(p) = \frac{1}{p}.$$

Знайдемо зображення $Z(p)$:

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2+p)} = \frac{1}{p^2(p+1)}.$$

Для відновлення оригіналу $z(t)$ за зображенням $Z(p)$ скористаємося формулою (15). Оскільки зображення $Z(p)$ має два полюси: $p = 0$ – двократний полюс і $p = -1$ – полюс першого порядку, то

$$z(t) = \text{Res}\left[Z(p)e^{pt},\ p=0\right] + \text{Res}\left[Z(p)e^{pt},\ p=-1\right],$$

$$\text{Res}\left[Z(p)e^{pt},\ p=0\right] = \lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}e^{pt}p^2\right] =$$

$$= \lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{p+1}\right] = \lim_{p\to 0}\frac{te^{pt}(p+1)-e^{pt}}{(p+1)^2} = t-1;$$

$$\text{Res}\left[Z(p)e^{pt},\ p=-1\right] = \lim_{p\to -1}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}e^{pt}(p+1)\right] = \lim_{p\to -1}\frac{e^{pt}}{p^2} = e^{-t}.$$

Отже,

$$z(t) = t - 1 + e^{-t}, \quad z'(t) = 1 - e^{-t}.$$

Нехай $y(t)$ – розв'язок вихідного рівняння, тоді

$$y(t) = \int_0^t e^{-2\tau}(1-e^{-(t-\tau)})d\tau = \int_0^t (e^{-2\tau} - e^{-t-\tau})d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-2\tau}d\tau - e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau = -\frac{e^{-2\tau}}{2}\Bigg|_0^t + e^{-t}e^{-\tau}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} + e^{-2t} - e^{-t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t},$$

тобто

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}.$$

6 . Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + y' = \cos t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

а) операційним методом;

б) за допомогою інтеграла Дюамеля.

Розв'язання. а) Нехай $y(t)$ – шуканий розв'язок і $y(t) \leftarrow Y(p)$, тоді

$$y'(t) \leftarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 2$$

$$y''(t) \leftarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p + 1,$$

$$\cos t \leftarrow \frac{p}{p^2+1}.$$

Запишемо диференціальне рівняння в зображеннях, дістанемо:

$$p^2Y(p) - 2p + 1 + pY(p) - 2 = \frac{p}{p^2+1}$$

або

$$(p^2 + p)Y(p) = \frac{p}{p^2+1} + 2p + 1.$$

Знайдемо зображення $Y(p)$.

$$Y(p) = \frac{p + (2p+1)(p^2+1)}{(p^2+p)(p^2+1)} = \frac{2p^3 + p^2 + 3p + 1}{p(p+1)(p^2+1)}.$$

Відновимо оригінал $y(t)$ за зображенням $Y(p)$.

Перший спосіб. Розкладемо $Y(p)$ на суму простих дробів.

$$\frac{2p^3+p^2+3p+1}{p(p+1)(p^2+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C і D. Для цього зведемо дроби у правій частині рівності до спільного знаменника і, прирівнюючи після цього чисельники, дістанемо тотожну рівність:

$$2p^3+p^2+3p+1=A(p+1)(p^2+1)+Bp(p^2+1)+(Cp+D)p(p+1).$$

$$\begin{array}{r|l}
p=0 & 1=A \quad \Rightarrow \quad A=-1, \\
p=-1 & 3=-2B \quad \Rightarrow \quad B=-3/2, \\
p^3 & 2=A+B+C \quad \Rightarrow \quad C=2-A-B=-1/2, \\
p^2 & 1=A+C+D. \quad \Rightarrow \quad D=1-A-C=1/2.
\end{array}$$

Таким чином, маємо:

$$Y(p)=\frac{1}{p}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}.$$

Знаходимо оригінал кожного доданка правої частини:

$$\frac{1}{p}\to 1(t),\ \frac{1}{p+1}\to e^{-t},\ \frac{p}{p^2+1}\to\cos t,\ \frac{1}{p^2+1}\to\sin t.$$

Скориставшись властивістю лінійності зображень, дістанемо:

$$Y(p)\to y(t)=1+\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t,$$

тобто

$$y(t)\ =\ 1+\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$$

– шуканий розв'язок задачі Коші.

Другий спосіб: $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=j$, $p_4=-j$ – полюси першого порядку функції $Y(p)$. Оригінал $y(t)$ дорівнює сумі лишків функції $Y(p)e^{pt}$ в усіх особливих точках, тобто

$$y(t)=\sum_{k=1}^{4}\text{Res}\left[Y(p)\,e^{pt},\ p=p_k\right].$$

Скористаємося формулою (17) для обчислення лишків у простих полюсах:

$$\operatorname{Res}\left[Y(p)e^{pt},\ p=p_0\right] = \lim_{p\to p_0}\left[Y(p)e^{pt}(p-p_0)\right]$$

Отримаємо:

$$\operatorname{Res}\left[Y(p)e^{pt},\ p_1=0\right] = \lim_{p\to 0}\left[\frac{2p^3+p^2+3p+1}{p(p+1)(p^2+1)}e^{pt}\cdot p\right]=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{(2p^3+p^2+3p+1)e^{pt}}{(p+1)(p^2+1)}=1;$$

$$\operatorname{Res}\left[Y(p)e^{pt},\ p_2=-1\right] = \lim_{p\to -1}\left[\frac{2p^3+p^2+3p+1}{p(p+1)(p^2+1)}e^{pt}\cdot(p+1)\right]=$$

$$=\lim_{p\to -1}\frac{(2p^3+p^2+3p+1)\,e^{pt}}{p(p^2+1)}=\frac{3}{2}e^{-t};$$

$$\operatorname{Res}\left[Y(p)e^{pt},\ p_2=\mathrm{j}\right] = \lim_{p\to \mathrm{j}}\left[\frac{2p^3+p^2+3p+1}{p(p+1)(p-\mathrm{j})(p+\mathrm{j})}e^{pt}\cdot(p-\mathrm{j})\right]=$$

$$=\lim_{p\to \mathrm{j}}\frac{(2p^3+p^2+3p+1)e^{pt}}{p(p+1)(p+\mathrm{j})}=\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}(\mathrm{j}+1)2\mathrm{j}}e^{\mathrm{j}t}=\frac{\mathrm{j}e^{\mathrm{j}t}}{-2(1+\mathrm{j})}=\frac{\mathrm{j}(1-\mathrm{j})}{-4}e^{\mathrm{j}t}=$$

$$=-\frac{1+\mathrm{j}}{4}(\cos t+\mathrm{j}\sin t)=-\frac{1}{4}(\cos t-\sin t)+\mathrm{j}\frac{1}{4}(-\cos t-\sin t).$$

Оскільки $p_3=j$ і $p_4=-j$ – комплексно-спряжені числа, то сума лишків функції $Y(p)e^{pt}$ у цих точках дорівнює подвоєній дійсній частині лишку в точці $p_3=j$, тобто:

$$\operatorname{Res}\left[Y(p)e^{pt},\ p_2=\mathrm{j}\right]+\operatorname{Res}\left[Y(p)e^{pt},\ p_2=-\mathrm{j}\right]=$$

$$=2\operatorname{Re}\operatorname{Res}\left[Y(p)e^{pt},\ p_2=\mathrm{j}\right]=2\left(-\frac{1}{4}\right)(\cos t-\sin t)=\frac{1}{2}(\sin t-\cos t).$$

Таким чином,

$$y(t)=1+\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t.$$

б) Розв'яжемо задачу Коші за допомогою інтеграла Дюамеля, звівши її до задачі з нульовими початковими умовами.

Нехай потрібно знайти розв'язок $y(t)$ рівняння;

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t), \tag{28}$$

що задовольняє початкові умови

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \tag{29}$$

Покладемо

$$x(t) = y(t) - y(0) - y'(0)t = y(t) - y_0 - y_1 t. \tag{30}$$

Тоді

$$x'(t) = y'(t) - y_1, \; x''(t) = y''(t)$$

і рівняння (28) матиме вигляд:

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_1 y_1 + a_2 (x(t) + y_0 + y_1 t) = f(t)$$

або

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f_1(t),$$

де

$$f_1(t) = f(t) - a_1 y_1 - a_2 y_0 - a_2 y_1 t.$$

З рівності (30) при $t = 0$ дістанемо:

$$x(0) = y(0) - y_0 = y_0 - y_0 = 0,$$

а

$$x'(0) = y'(0) - y_1 = y_1 - y_1 = 0.$$

Таким чином, ми отримали задачу Коші з нульовими початковими умовами вигляду:

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f_1(t), \; x(0) = 0, \; x'(0) = 0.$$

Розв'яжемо тепер дану задачу Коші

$$y'' + y' = \cos t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

за допомогою інтеграла Дюамеля. Покладемо

$$x(t) = y(t) - y(0) - y'(0)t = y(t) - 2 + t,$$

тоді

$$x'(t) = y'(t) + 1_1, \ \ x''(t) = y''(t).$$

Звідки

$$y(t) = x(t) - t + 2,$$

$$y'(t) = x'(t) - 1, y''(t) = x''(t).$$

Отримаємо рівняння:

$$x''(t) + x'(t) - 1 = \cos t$$

або

$$x''(t) + x'(t) = \cos t + 1, \ \ x(0) = 0, \ \ x'(0) = 0.$$

Ми маємо задачу Коші з нульовими початковими умовами, причому

$$f_1(t) = \cos t + 1.$$

Складаємо допоміжне рівняння:

$$z''(t) + z'(t) = 1, \ \ z(0) = 0, \ z'(0) = 0.$$

Нехай $z(t)$ – його розв'язок і $z(t) \leftarrow Z(p)$, тоді

$$z'(t) \leftarrow pZ(p),$$

$$z''(t) \leftarrow p^2 Z(p),$$

$$1(t) \leftarrow \frac{1}{p}.$$

Запишемо диференціальне рівняння в зображеннях:

$$p^2 Z(p) + pZ(p) = \frac{1}{p}.$$

Знайдемо зображення $Z(p)$:

$$(p^2 + p)Z(p) = \frac{1}{p} \ \Rightarrow \ Z(p) = \frac{1}{p(p^2 + p)} = \frac{1}{p^2(p+1)}.$$

Відновимо оригінал z(t) за зображенням Z(p):

$$\frac{1}{p+1} \to e^{-t} \ \Rightarrow \ \frac{1}{p(p+1)} \to \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^t = -e^{-t} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p^2(p+1)} \to \int_0^t (-e^{-\tau} + 1) d\tau = (e^{-\tau} + \tau)\Big|_0^t = e^{-t} + t + 1.$$

Отже,

$$z(t) = e^{-t} + t + 1, \quad z'(t) = -e^{-t} + 1.$$

Нехай $x(t)$ – розв'язок задачі Коші з нульовими початковими умовами. Скориставшись інтегралом Дюамеля (27), дістанемо, що

$$x(t) = \int_0^t f_1(\tau) z'(t-\tau) d\tau = \int_0^t (\cos\tau + 1)(1 + e^{-(t-\tau)}) d\tau =$$

$$= \int_0^t (\cos\tau + 1 - \cos\tau \cdot e^{-t} e^{\tau)} + e^{-t} e^{\tau}) d\tau = \int_0^t \cos\tau \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t d\tau - e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \cos t \, d\tau - e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = \sin\tau \Big|_0^t + \tau \Big|_0^t - e^{-t} \cdot e^{\tau} \Big|_0^t -$$

$$e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \cos\tau \, d\tau = \sin t + t - e^{-t}\,(e^t + 1) - e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \cdot \cos\tau \, d\tau =$$

$$= \sin t + t + 1 + e^{-t} - e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \cdot \cos\tau \, d\tau.$$

Обчислимо інтеграл:

$$\int_0^t e^{\tau} \cos\tau d\tau = \left| \cos\tau = \frac{e^{j\tau} + e^{-j\tau}}{2} \right| = \int_0^t e^{\tau} \frac{e^{j\tau} + e^{-j\tau}}{2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t (e^{\tau} e^{j\tau} + e^{\tau} e^{-j\tau}) d\tau = \frac{1}{2} \left(\int_0^t e^{(1+j)\tau} d\tau + \int_0^t e^{(1-j)\tau} d\tau \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(1+j)\tau}}{1+j} \Bigg|_0^t + \frac{e^{(1-j)\tau}}{1-j} \Bigg|_0^t \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(1+j)t} - 1}{1+j} + \frac{e^{(1-j)t} - 1}{1-j} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1-j}{2} (e^t e^{jt} - 1) + \frac{1+j}{2} (e^t e^{-jt} - 1) \right] =$$

$$= \frac{1-j}{4} \left[e^t (\cos t + j \sin t) - 1 \right] + \frac{1+j}{4} \left[e^t (\cos t - j \sin t) - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{4} (e^t \cos t + j e^t \sin t - 1 - j e^t \cos t + e^t \sin t + j +$$
$$+ e^t \cos t - j e^t \sin t - 1 + j e^t \cos t + e^t \sin t - j) =$$

$$= \frac{1}{4} (2e^t \cos t - 2 + 2e^t \sin t) = \frac{1}{2} (e^t \cos t + e^t \sin t - 1).$$

Отже,

$$x(t)=\sin t+t-1+e^{-t}-e^{-t}\cdot\frac{1}{2}(e^{t}\cos t+e^{t}\sin t-1)=$$

$$=\sin t+t-1+e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^{-t}=t-1+\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t.$$

Тоді

$$y(t)=x(t)+2-t=t-1+\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t+2-t=$$
$$=1+\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$$

або

$$y(t)=1+\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t.$$

7. Розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь операційним методом:

$$\begin{cases} y'=2x+3y, \\ x'=\ \ x-\ y, \end{cases} \qquad x(0)=1, \quad y(0)=0.$$

Розв'язання. Нехай $x(t)\leftarrow X(p), \quad y(t)\leftarrow Y(p).$

Тоді

$$x'(t)\leftarrow pX(p)-1, \quad y'(t)\leftarrow pY(p).$$

Запишемо систему в зображеннях:

$$\begin{cases} pY(p) \quad =2X(p)+3Y(p), \\ pX(p)-1= \ X(p)-\ Y(p) \end{cases} \text{або} \quad \begin{cases} -2X(p)+(p-3)Y(p)=0, \\ (p-1)X(p)+ \qquad Y(p)=1. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & p-3 \\ p-1 & 1 \end{vmatrix}=-2-(p-1)(p-3)=-2-p^2+4p-3=4p-p^2-5;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & p-3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(p-3);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ p-1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Тоді

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-(p-3)}{4p-p^2-5} = \frac{p-3}{p^2-4p+5};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{4p-p^2-5} = \frac{2}{p^2-4p+5}.$$

Відновимо оригінали за зображеннями $X(p)$ та $Y(p)$. Для цього виділимо повний квадрат у знаменнику цих функцій, дістанемо:

$$X(p) = \frac{(p-2)-1}{(p-2)^2+1}; \quad Y(p) = \frac{2}{(p-2)^2+1}.$$

Оскільки

$$\frac{p}{p^2+1} \to \cos t, \quad \frac{1}{p^2+1} \to \sin t,$$

то, скориставшись теоремою зсунення ($p_o = 2$), дістанемо

$$\frac{p-2}{(p-2)^2+1} \to e^{2t}\cos t, \quad \frac{1}{(p-2)^2+1} \to e^{2t}\sin t.$$

Отже,

$$X(p) = \frac{(p-2)-1}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2}{(p-2)^2+1} - \frac{1}{(p-2)^2+1} \to e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t,$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p-2)^2+1} = 2\frac{1}{(p-2)^2+1} \to 2e^{2t}\sin t,$$

тобто

$$x(t) = e^{2t}(\cos t - \sin t),$$
$$y(t) = 2e^{2t}\sin t.$$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

якщо функція $f(t)$ задана графічно (рис.3).

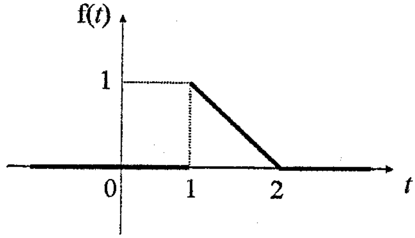


Рис.3

Розв'язання. Запишемо $f(t)$ аналітично:

$$f(t)=\begin{cases} 2-t, & 1\le t\le 2, \\ 0, & t<1, \ t>2. \end{cases}$$

Використовуючи одиничну функцію Хевісайда, запишемо функцію-оригінал $f(t)$ одним аналітичним виразом. Неважко помітити, що дану функцію можна отримати, помноживши функцію $2-t$ на одиничний імпульс $1(t-1) - 1(t-2)$.

Отже,

$$f(t) = f_1(t)\,[1(t-1) - 1(t-2)] = (2-t)\,[1(t-1) - 1(t-2)] =$$
$$= -(t-2)\,1(t-1) + (t-2)\,1(t-2) = -(t-1-1)\,1(t-1) + (t-2)\,1(t-2) =$$
$$= -(t-1)\,1(t-1) + 1(t-1) + (t-2)\,1(t-2),$$

тобто

$$f(t) = 1(t-1) - (t-1)\,1(t-1) + (t-2)\,1(t-2).$$

Покажемо побудову графіка функції $f(t)$ у динаміці (рис.4).

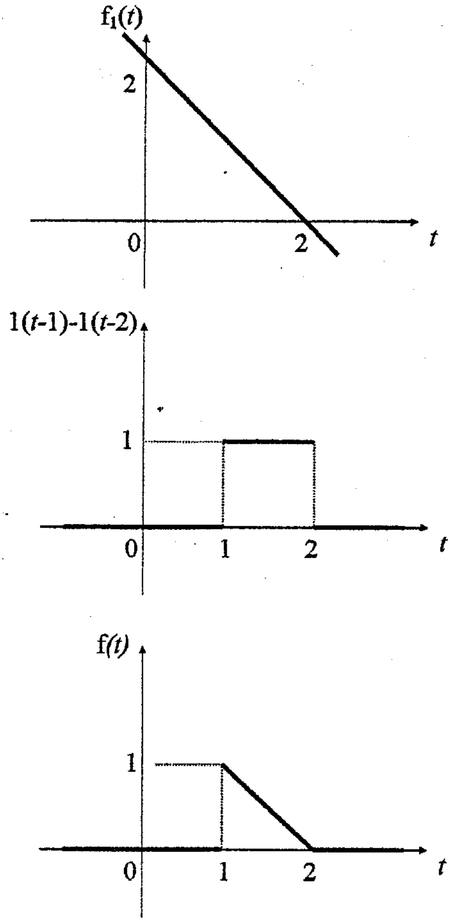


Рис.4

Знайдемо зображення оригіналу $f(t)$. Застосовуючи формулу (3) з теореми загаювання, дістанемо:

$$f(t) \leftarrow \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

Нехай зображення $y(t)$ є $Y(p)$, тобто

$$y(t) \leftarrow Y(p),$$

тоді

$$y'(t) \leftarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1;$$
$$y''(t) \leftarrow p^2Y(p) - p\,y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p.$$

Запишемо диференціальне рівняння в зображеннях:

$$p^2Y(p) - p + Y(p) = \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2}$$

або

$$(p^2+1)Y(p) = p + \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2},$$

звідки

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{e^{-p}}{p(p^2+1)} - \frac{e^{-p}}{p^2(p^2+1)} + \frac{e^{-2p}}{p^2(p^2+1)}.$$

Відновимо оригінал $y(t)$ за зображенням $Y(p)$.

$$\frac{p}{p^2+1} \to \cos t, \quad \frac{1}{p^2+1} \to \sin t,$$

тоді

$$\frac{1}{p(p^2+1)} \to \int_0^t \sin\tau\, d\tau = -\cos\tau\big|_0^t = -(\cos t - 1) = 1 - \cos t,$$

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} \to \int_0^t (1-\cos\tau)d\tau = \tau\big|_0^t - \sin\tau\big|_0^t = t - \sin t.$$

За теоремою загаювання матимемо:

$$\frac{e^{-p}}{p(p^2+1)} \to [1 - \cos(t-1)]\,1(t-1);$$

$$\frac{e^{-p}}{p^2(p^2+1)} \to [t - 1 - \sin(t-1)]\,1(t-1);$$

$$\frac{e^{-2p}}{p^2(p^2+1)} \to [t - 2 - \sin(t-2)]\,1(t-2).$$

Отже,

$$y(t) = \cos t\ 1(t) + [1-\cos(t-1)]\,1(t-1) - [t-1-\sin(t-1)]\,1(t-1) +$$
$$+ [t-2-\sin(t-2)]\,1(t-2)$$

або

$$y(t) = \cos t\ 1(t) + [2 - t - \cos(t-1) + \sin(t-1)]\ 1(t-1) +$$
$$[t - 2 - \sin(t-2)]\ 1(t-2).$$

ІІІ. ВАРІАНТИ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Знайти зображення оригіналу:

1. $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & t < 0,\ t > 2. \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 2, & 1 \le t \le 2, \\ 0, & t < 1,\ t > 2. \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t < 0,\ t > 1. \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} 3t, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} t + 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t < 0,\ t > 1. \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} e^{t-1}, & 1 \le t, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$

7. $f(t) = \begin{cases} ch\, t, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

8. $f(t) = \begin{cases} 4, & 2 \le t \le 6, \\ 0, & t < 2,\ t > 6. \end{cases}$

9. $f(t) = \begin{cases} \sin 2t, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} 4, & 1 \le t \le 3, \\ 0, & t < 1,\ t > 3. \end{cases}$

11. $f(t) = \begin{cases} e^{t-2}, & t \ge 2, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$

12. $f(t) = \begin{cases} t - 3, & 0 \le t \le 3, \\ 0, & t < 0,\ t > 3. \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} e^{t}, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t < 0,\ t > 1. \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & t < 0,\ t > 2. \end{cases}$

15. $f(t) = \begin{cases} e^{t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

16. $f(t) = \begin{cases} sh\, t, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

17. $f(t) = \begin{cases} 2 - t, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & t < 0,\ t > 2. \end{cases}$

18. $f(t) = \begin{cases} 3, & 1 \le t \le 4, \\ 0, & t < 1,\ t > 4. \end{cases}$

19. $f(t) = \begin{cases} t + 2, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

20. $f(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t < 0,\ t > 1. \end{cases}$

21. $f(t)=\begin{cases}\cos 3t\ , & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

22. $f(t)=\begin{cases}t-1\ , & 0\leq t\leq 1,\\ 0, & t<0,\ t>1.\end{cases}$

23. $f(t)=\begin{cases}5\ , & 2\leq t\leq 4,\\ 0, & t<2,\ t>4.\end{cases}$

24. $f(t)=\begin{cases}sh\ 2t, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

25. $f(t)=\begin{cases}\sin 3t, & 0\leq t\leq \dfrac{\pi}{3},\\ 0, & t<0,\ t>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

26. $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leq t\leq 2,\\ 0, & t<0,\ t>2.\end{cases}$

27. $f(t)=\begin{cases}t^2\ , & 0\leq t\leq 1,\\ 0, & t<0,\ t>1.\end{cases}$

28. $f(t)=\begin{cases}t+2, & 1\leq t\leq 2,\\ 0, & t<1, t>2.\end{cases}$

29. $f(t)=\begin{cases}-2, & 1\leq t\leq 2,\\ 0, & t<1, t>2.\end{cases}$

30. $f(t)=\begin{cases}t-1, & 1\leq t\leq 3,\\ 0, & t<1, t>3.\end{cases}$

31. $f(t)=\begin{cases}sh3\ t, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

32. $f(t)=\begin{cases}\cos 3t, & 0\leq t\leq \dfrac{\pi}{6},\\ 0, & t<0,\ t>\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$

33. $f(t)=\begin{cases}ch3\ t, & t\geq 0,\\ 0, & t>0.\end{cases}$

34. $f(t)=\begin{cases}-3, & 1\leq t\leq 3,\\ 0, & t<1, t>3.\end{cases}$

35. $f(t)=\begin{cases}t-2, & 2\leq t\leq 3,\\ 0, & t<2, t>3.\end{cases}$

36. $f(t)=\begin{cases}e^{t-3}, & 1\leq t\leq 3,\\ 0, & t<1, t>3.\end{cases}$

37. $f(t)=\begin{cases}-4, & 0\leq t\leq 2,\\ 0, & t<0, t>2.\end{cases}$

38. $f(t)=\begin{cases}t, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

39. $f(t)=\begin{cases}e^{2t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

40. $f(t)=\begin{cases}t+2, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

41. $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

42. $f(t)=\begin{cases}\sin 5t\ , & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

43. $f(t)=\begin{cases} e^{-2t}, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

44. $f(t)=\begin{cases} \sin 5t, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

45. $f(t)=\begin{cases} \cos t, & 0\leq t\leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t<0,\ t>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

46. $f(t)=\begin{cases} -5, & 0\leq t\leq 2, \\ 0, & t<0,\ t>2. \end{cases}$

47. $f(t)=\begin{cases} t^2, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

48. $f(t)=\begin{cases} (t-1)^2, & 1\leq t\leq 2, \\ 0, & t<0,\ t>2. \end{cases}$

49. $f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0\leq t\leq \pi, \\ 0, & t<0,\ t>\pi. \end{cases}$

50. $f(t)=\begin{cases} t-3, & 1\leq t\leq 3, \\ 0, & t<1,\ t>3. \end{cases}$

51. $f(t)=\begin{cases} t, & 0\leq t\leq 2, \\ 0, & t<0,\ t>2. \end{cases}$

52. $f(t)=\begin{cases} e^{-3t}, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

53. $f(t)=\begin{cases} 5, & 0\leq t\leq 3, \\ 0, & t<0,\ t>3. \end{cases}$

54. $f(t)=\begin{cases} \sin t, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

55. $f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

56. $f(t)=\begin{cases} 3-t, & 2\leq t\leq 3, \\ 0, & t<2,\ t>3. \end{cases}$

57. $f(t)=\begin{cases} 2t-4, & 2\leq t\leq 3, \\ 0, & t<2,\ t>3. \end{cases}$

58. $f(t)=\begin{cases} \cos t, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

59. $f(t)=\begin{cases} 6, & 2\leq t\leq 4, \\ 0, & t<2,\ t>4. \end{cases}$

60. $f(t)=\begin{cases} 2t-4, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

61. $f(t)=\begin{cases} 6-2t, & 1\leq t\leq 3, \\ 0, & t<1,\ t>3. \end{cases}$

62. $f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

63. $f(t)=\begin{cases} e^{-3t}, & t\geq 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

64. $f(t)=\begin{cases} 4-2t, & 0\leq t\leq 2, \\ 0, & t<0,\ t>2. \end{cases}$

65. $f(t)=\begin{cases}6, & 0\le t\le 2,\\ 0, & t<0,\ t>2.\end{cases}$

66. $f(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 1\le t\le 2,\\ 0, & t<1,\ t>2.\end{cases}$

67. $f(t)=\begin{cases}\sin 4t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

68. $f(t)=\begin{cases}\cos 2t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

69. $f(t)=\begin{cases}4-2t, & 1\le t\le 2,\\ 0, & t<1,\ t>2.\end{cases}$

70. $f(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 0\le t\le 1,\\ 0, & t<0,\ t>1.\end{cases}$

71. $f(t)=\begin{cases}2t, & t\ge 1,\\ 0, & t<1.\end{cases}$

72. $f(t)=\begin{cases}\sin 4t, & 0\le t\le \dfrac{\pi}{8},\\ 0, & t<0,\ t>\dfrac{\pi}{8}.\end{cases}$

73. $f(t)=\begin{cases}\cos 5t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

74. $f(t)=\begin{cases}8, & 2\le t\le 3,\\ 0, & t<2,\ t>3.\end{cases}$

75. $f(t)=\begin{cases}4-t, & 2\le t\le 4,\\ 0, & t<2,\ t>4.\end{cases}$

76. $f(t)=\begin{cases}\sin 2t, & 0\le t\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & t<0,\ t>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

77. $f(t)=\begin{cases}\cos 2t, & 0\le t\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & t<0,\ t>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

78. $f(t)=\begin{cases}t-4, & 4\le t\le 6,\\ 0, & t<4,\ t>6.\end{cases}$

79. $f(t)=\begin{cases}e^{5t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

80. $f(t)=\begin{cases}sh\,2t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

81. $f(t)=\begin{cases}6, & 0\le t\le 2,\\ 0, & t<0,\ t>2.\end{cases}$

82. $f(t)=\begin{cases}3-t, & 1\le t\le 3,\\ 0, & t<1,\ t>3.\end{cases}$

83. $f(t)=\begin{cases}e^{4t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

84. $f(t)=\begin{cases}4-t, & 0\le t\le 4,\\ 0, & t<0,\ t>4.\end{cases}$

85. $f(t)=\begin{cases} e^{t-3}, & t\ge 3, \\ 0, & t<3. \end{cases}$

86. $f(t)=\begin{cases} \sin 4t, & t\ge 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

87. $f(t)=\begin{cases} t-4, & 4\le t\le 6, \\ 0, & t<4,\ t>6. \end{cases}$

88. $f(t)=\begin{cases} 4t, & 0\le t\le 1, \\ 0, & t<0,\ t>1. \end{cases}$

89. $f(t)=\begin{cases} \cos 6t, & t\ge 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

90. $f(t)=\begin{cases} e^{2-t}, & t\ge 2, \\ 0, & t<2. \end{cases}$

91. $f(t)=\begin{cases} t-5, & 5\le t\le 6, \\ 0, & t<5,\ t>6. \end{cases}$

92. $f(t)=\begin{cases} \sin 6t, & t\ge 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

93. $f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & t<0,\ t>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

94. $f(t)=\begin{cases} 5-t, & 0\le t\le 5, \\ 0, & t<0,\ t>5. \end{cases}$

95. $f(t)=\begin{cases} e^{-4t}, & t\ge 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

96. $f(t)=\begin{cases} 4t, & 0\le t\le 1, \\ 0, & t<0,\ t>1. \end{cases}$

97. $f(t)=\begin{cases} e^{1-t}, & t\ge 1, \\ 0, & t<1. \end{cases}$

98. $f(t)=\begin{cases} \cos 2t, & 0\le t\le \dfrac{3\pi}{2}, \\ 0, & t<0,\ t>\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$

99. $f(t)=\begin{cases} \sin 5t, & 0\le t\le \dfrac{\pi}{5}, \\ 0, & t<0,\ t>\dfrac{\pi}{5}. \end{cases}$

100. $f(t)=\begin{cases} t^2, & 0\le t\le 3, \\ 0, & t<0,\ t>3. \end{cases}$

Завдання 2. Знайти зображення оригіналу, використовуючи властивості оригіналу:

1. $f(t)=t^2e^{3t}$.

2. $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2\tau d\tau$.

3. $f(t)=t\cos 3t$.

4. $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)\sin\tau\, d\tau$.

5. $f(t)=e^{3t}\sin t.$

6. $f(t)=e^{2t}\sin^2 t.$

7. $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}.$

8. $f(t)=t^2e^{-2t}.$

9. $f(t)=\int\limits_0^t(\tau+1)\cos 2\tau\,d\tau.$

10. $f(t)=t\sin 2t.$

11. $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}.$

12. $f(t)=(t+1)e^{4t}.$

13. $f(t)=e^{2t}\sin 2t\cos 3t.$

14. $f(t)=\int\limits_0^t\tau^2e^{\tau}\,d\tau.$

15. $f(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}.$

16. $f(t)=\int\limits_0^t sh\tau\,d\tau.$

17. $f(t)=t\cos 2t.$

18. $f(t)=e^{-t}\cos 2t.$

19. $f(t)=t\,sht.$

20. $f(t)=e^{4t}\sin 3t.$

21. $f(t)=t^2\,sht.$

22. $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}.$

23. $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}.$

24. $f(t)=e^{-3t}\cos t\cos 2t.$

25. $f(t)=\int\limits_0^t\tau\,ch\tau\,d\tau.$

26. $f(t)=(t^2+1)e^{3t}.$

27. $f(t)=\int\limits_0^t\cos 3\tau\,d\tau.$

28. $f(t)=(t+1)\sin 3t.$

29. $f(t)=e^{-t}\cos t.$

30. $f(t)=(t^2-1)e^{-2t}.$

31. $f(t)=e^t\cos 3t\cos 5t.$

32. $f(t)=\int\limits_0^t\tau\,sh2\tau\,d\tau.$

33. $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}.$

34. $f(t)=\int\limits_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau.$

35. $f(t)=e^{2t}t\sin 3t.$

36. $f(t)=\int\limits_0^t \cos 5\tau\,d\tau.$

37. $f(t)=\dfrac{ch\,t-1}{t}.$

38. $f(t)=t^2e^{-5t}.$

39. $f(t)=\dfrac{\cos 2t-\cos 3t}{t}.$

40. $f(t)=t^2\,ch 5t.$

41. $f(t)=\int\limits_0^t \sin^2\tau\,d\tau.$

42. $f(t)=e^t\sin 3t\cos t.$

43. $f(t)=e^{-2t}\cos 5t.$

44. $f(t)=\dfrac{1-\cos 2t}{t}.$

45. $f(t)=\int\limits_0^t (\tau-1)e^{4\tau}\,d\tau.$

46. $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)e^{-3\tau}\,d\tau.$

47. $f(t)=t^2\cos 4t.$

48. $f(t)=e^{-3t}\cos 2t.$

49. $f(t)=t^3e^{2t}.$

50. $f(t)=e^{5t}\sin 3t.$

51. $f(t)=\dfrac{\sin^2 3t}{t}.$

52. $f(t)=\dfrac{\sin 4t-\sin 2t}{t}.$

53. $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2e^{-3\tau}\,d\tau.$

54. $f(t)=e^{-t}t\sin 4t.$

55. $f(t)=(t-1)e^{3t}.$

56. $f(t)=\dfrac{sh\,t}{t}.$

57. $f(t)=(t+1)\cos 3t.$

58. $f(t)=\int\limits_0^t (\tau-1)e^{2\tau}\,d\tau.$

59. $f(t)=t\,ch 2t.$

60. $f(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{t}.$

61. $f(t)=e^{-3t}\cos 2t\cos 5t.$

62. $f(t)=e^{3t}t\sin 2t.$

63. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\cos 2\tau\, d\tau.$

64. $f(t)=t^2\sin 3t.$

65. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\cos 5\tau\, d\tau.$

66. $f(t)=e^{4t}\sin t\sin 2t.$

67. $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 3t}{t}.$

68. $f(t)=\dfrac{ch 2t-1}{t}.$

69. $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{5\tau}\, d\tau.$

70. $f(t)=e^{-t}\,t\,\sin 4t.$

71. $f(t)=e^{2t}\,t\,\cos 3t.$

72. $f(t)=\dfrac{e^{3t}-e^{t}}{t}.$

73. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\sin 3\tau\, d\tau.$

74. $f(t)=e^{-6t}\cos^2 t.$

75. $f(t)=\int\limits_0^t \tau e^{4\tau}\, d\tau.$

76. $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2 2\tau\, d\tau.$

77. $f(t)=\dfrac{e^{4t}-e^{3t}}{t}.$

78. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\, sh 3\tau\, d\tau.$

79. $f(t)=\dfrac{1-\cos 4t}{t}.$

80. $f(t)=e^{2t}\,t\,\cos 3t.$

81. $f(t)=\dfrac{\cos 3t-\cos 4t}{t}.$

82. $f(t)=e^{-5t}\sin 4t\cos 2t.$

83. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\, sh 5\tau\, d\tau.$

84. $f(t)=e^{-t}\cos t\,\cos 5t.$

85. $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)e^{3\tau}\, d\tau.$

86. $f(t)=\dfrac{\sin^2 4t}{t}.$

87. $f(t)=\int\limits_0^t \tau e^{-5\tau}\, d\tau.$

88. $f(t)=\dfrac{e^{4t}-e^{2t}}{t}.$

89. $f(t)=e^{-3t}\,t\,\sin 5t.$

90. $f(t)=\dfrac{e^{5t}-e^{t}}{t}.$

91. $f(t)=e^{4t}\,t\,\cos 2t.$

92. $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-6\tau}\,d\tau.$

93. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\, ch 4\tau\,d\tau.$

94. $f(t)=\int\limits_0^t \sin 4\tau\,d\tau.$

95. $f(t)=\dfrac{1-\cos 6t}{t}.$

96. $f(t)=e^{-4t}\sin t\sin 5t.$

97. $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{t}.$

98. $f(t)=e^{6t}\sin^2 t.$

99. $f(t)=\dfrac{\sin 3t-\sin 2t}{t}.$

100. $f(t)=\int\limits_0^t (\tau-1)\cos 3\tau\,d\tau.$

Завдання 3. За заданим зображенням $F(p)$ знайти оригінал, використовуючи властивості зображення.

1. $F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+1)^2}.$

2. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p(p+1)^3}.$

3. $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2+4p+5}.$

4. $F(p)=\dfrac{4p-3}{p^2+2p+2}.$

5. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-2)^2}.$

6. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)^2}.$

7. $F(p)=\dfrac{3}{p^2-2p+2}.$

8. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+16)(p-1)}.$

9. $F(p)=\dfrac{8p^2}{(p^2+9)^2}.$

10. $F(p)=\dfrac{2p^2}{(p^2+25)^2}.$

11. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p+5)^2}.$

12. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p(p+4)^2}.$

13. $F(p)=\dfrac{4p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

14. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+16)^2}$.

15. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^2-4p+9}$.

16. $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{p(p+1)^2}$.

17. $F(p)=\dfrac{e^{-5p}}{p(p+3)^2}$.

18. $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2-4p+5}$.

19. $F(p)=\dfrac{3}{p^2-6p+10}$.

20. $F(p)=\dfrac{5p}{(p^2+9)(p^2+1)}$.

21. $F(p)=\dfrac{2p}{(p+4)^2}$.

22. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p+2)^2}$.

23. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p-2)}$.

24. $F(p)=\dfrac{3}{(p+3)(p^2+4)}$.

25. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2-2p+2}$.

26. $F(p)=\dfrac{2}{p^2-2p+5}$.

27. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p(p-1)}$.

28. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)(p-3)}$.

29. $F(p)=\dfrac{5p}{(p^2+25)(p^2+1)}$.

30. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p(p-2)^2}$.

31. $F(p)=\dfrac{2}{p^2-4p+5}$.

32. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

33. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p+3)^2}$.

34. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p-3)^3}$.

35. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+16)(p^2+1)}$.

36. $F(p)=\dfrac{4}{(p^2+9)(p-2)}$.

37. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2-6p+10}$.

38. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^3}$.

39. $F(p)=\dfrac{3}{p^2-p+1}$.

40. $F(p)=\dfrac{6}{(p+4)(p^2+4)}$.

41. $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p^2+9)}$.

42. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p-3)^2}$.

43. $F(p)=\dfrac{2e^{-2p}}{p^3(p-1)}$.

44. $F(p)=\dfrac{2}{(p+2)(p^2+1)}$.

45. $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2+2p+2}$.

46. $F(p)=\dfrac{p-4}{p^2-2p+2}$.

47. $F(p)=\dfrac{2p}{(p-1)(p^2+9)}$.

48. $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-4p+5}$.

49. $F(p)=\dfrac{3e^{-2p}}{p^4}$.

50. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{(p+1)^3}$.

51. $F(p)=\dfrac{p+1}{(p-3)^3}$.

52. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p(p+1)^2}$.

53. $F(p)=\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+4}$.

54. $F(p)=\dfrac{5}{(p+5)(p^2+1)}$.

55. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+25)^2}$.

56. $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2+4)(p^2+2)}$.

57. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p^2+9)}$.

58. $F(p)=\dfrac{3p}{(p+2)^2}$.

59. $F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+2)(p^2+9)}$.

60. $F(p)=\dfrac{2p-3}{(p-2)^2(p+1)}$.

61. $F(p)=\dfrac{3}{(p+2)^3}$.

62. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p-1)^3}$.

63. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-4)^2}$.

64. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+3)^2}$.

65. $F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+3)(p-4)}$.

66. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p(p^2+1)}$.

67. $F(p)=\dfrac{e^{-5p}}{p^2+4}$.

68. $F(p)=\dfrac{4p}{(p+1)(p^2+16)}$.

69. $F(p)=\dfrac{5}{(p-3)^3}$.

70. $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{(p-1)(p^2+4)}$.

71. $F(p)=\dfrac{4p}{(p^2+2)^2}$.

72. $F(p)=\dfrac{2}{(p^2+2)(p^2+1)}$.

73. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2+2}$.

74. $F(p)=\dfrac{3p}{(p-1)(p+2)^2}$.

75. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p^2+4)}$.

76. $F(p)=\dfrac{5p-1}{p(p-1)^2}$.

77. $F(p)=\dfrac{p}{(p-2)(p^2+1)}$.

78. $F(p)=\dfrac{3p}{(p+1)(p+4)^2}$.

79. $F(p)=\dfrac{2p}{(p-4)^3}$.

80. $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{p(p+2)^2}$.

81. $F(p)=\dfrac{6}{(p+1)(p-5)^2}$.

82. $F(p)=\dfrac{4}{(p^2+1)(p+6)}$.

83. $F(p)=\dfrac{3e^{-p}}{(p+5)^2}$.

84. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p-4)^3}$.

85. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+3)^2}$.

86. $F(p)=\dfrac{2}{(p^2+3)^2}$.

87. $F(p)=\dfrac{7}{p(p-5)^2}$.

88. $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{(p-1)^3}$.

89. $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2+36)^2}$.

90. $F(p)=\dfrac{6}{(p+3)^3}$.

91. $F(p)=\dfrac{8}{p(p+1)^2}$.

92. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+3)(p-3)}$.

93. $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{p(p-1)^2}$.

94. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p+2)^3}$.

95. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+3)^2}$.

96. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+36)^2}$.

97. $F(p)=\dfrac{p}{(p-5)^3}$.

98. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p(p-4)^2}$.

99. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p+4)^3}$.

100. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p-6)}$.

Завдання 4. За заданим зображенням $F(p)$ знайти оригінал:

а) за допомогою розкладання на прості дроби;

б) за допомогою лишків.

1. $F(p)=\dfrac{3p+2}{(p-1)(p^2+4)(p+3)}$.

2. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2-4)(p^2+1)}$.

3. $F(p)=\dfrac{p-2}{p(p+2)(p^2+1)}$.

4. $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2+4)(p+3)}$.

5. $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p-3)(p^2+9)(p+1)}$.

6. $F(p)=\dfrac{p+5}{p(p-1)(p^2+3)}$.

7. $F(p)=\dfrac{2-3p}{p(p+3)(p^2+1)}$.

8. $F(p)=\dfrac{p}{(p-2)(p+1)(p^2+9)}$.

9. $F(p)=\dfrac{4}{(p-2)(p-3)(p^2+4)}$.

10. $F(p)=\dfrac{p}{(p+3)(p-1)(p^2+3)}$.

11. $F(p)=\dfrac{p+3}{p(p+2)(p^2+8)}$.

12. $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p+3)(p^2+1)}$.

13. $F(p)=\dfrac{4p+5}{(p-3)(p+1)(p^2+4)}$.

14. $F(p)=\dfrac{p}{(p-4)(p+1)(p^2+9)}$.

15. $F(p)=\dfrac{3-p}{(p+1)(p-2)(p^2+5)}$.

16. $F(p)=\dfrac{3p+4}{p(p-3)(p^2+8)}$.

17. $F(p)=\dfrac{p+2}{p(p-1)(p^2+3)}$.

18. $F(p)=\dfrac{1-p}{(p-2)(p+3)(p^2+1)}$.

19. $F(p)=\dfrac{p-4}{(p-1)(p+2)(p^2+9)}$.

20. $F(p)=\dfrac{2p}{(p+1)(p-4)(p^2+2)}$.

21. $F(p)=\dfrac{3p}{(p+3)(p-1)(p^2+4)}$.

22. $F(p)=\dfrac{2-p}{(p+1)(p-3)(p^2+9)}$.

23. $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p+3)(p-2)(p^2+5)}$.

24. $F(p)=\dfrac{p+4}{p(p-4)(p^2+1)}$.

25. $F(p)=\dfrac{p-1}{p(p+3)(p^2+1)}$.

26. $F(p)=\dfrac{5p}{(p-2)(p+3)(p^2+4)}$.

27. $F(p)=\dfrac{3p}{(p-1)(p+2)(p^2+9)}$.

28. $F(p)=\dfrac{4p+1}{p(p-3)(p^2+9)}$.

29. $F(p)=\dfrac{2p+1}{p(p+4)(p^2+5)}$.

30. $F(p)=\dfrac{3p-4}{(p+3)(p-1)(p^2+2)}$.

31. $F(p)=\dfrac{6}{(p+3)(p-4)(p^2+1)}$.

32. $F(p)=\dfrac{3}{(p+1)(p-2)(p^2+9)}$.

33. $F(p)=\dfrac{1-p}{p(p+4)(p^2+9)}$.

34. $F(p)=\dfrac{3+p}{(p-3)(p+4)(p^2+4)}$.

35. $F(p)=\dfrac{3-p}{(p+1)(p-2)(p^2+8)}$.

36. $F(p)=\dfrac{3p+1}{(p-3)(p+4)(p^2+1)}$.

37. $F(p)=\dfrac{2p+1}{p(p+4)(p^2+5)}$.

38. $F(p)=\dfrac{3p+2}{(p+1)(p-5)(p^2+4)}$.

39. $F(p)=\dfrac{6}{(p-5)(p+1)(p^2+4)}$.

40. $F(p)=\dfrac{6p+5}{(p-1)(p+5)(p^2+4)}$.

41. $F(p)=\dfrac{3p+5}{(p-1)(p+3)(p^2+2)}$.

42. $F(p)=\dfrac{p+4}{(p-2)(p+6)(p^2+1)}$.

43. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p(p-2)(p^2+5)}$.

44. $F(p)=\dfrac{3}{(p+1)(p-5)(p^2+9)}$.

45. $F(p)=\dfrac{3p}{(p+3)(p-4)(p^2+1)}$.

46. $F(p)=\dfrac{1-p}{(p+2)(p-3)(p^2+4)}$.

47. $F(p)=\dfrac{2p+2}{(p+5)(p-3)(p^2+4)}$.

48. $F(p)=\dfrac{4}{(p+4)(p-1)(p^2+9)}$.

49. $F(p)=\dfrac{6p+5}{p(p-1)(p^2+3)}$.

50. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+5)(p-1)(p-3)}$.

51. $F(p)=\dfrac{2p+4}{(p+3)(p-1)(p^2+1)}$.

52. $F(p)=\dfrac{3p-1}{(p+2)(p-4)(p^2+9)}$.

53. $F(p)=\dfrac{1}{p(p-6)(p^2+4)}$.

54. $F(p)=\dfrac{5p}{(p+2)(p-4)(p^2+9)}$.

55. $F(p)=\dfrac{4-p}{(p+3)(p-2)(p^2+1)}$.

56. $F(p)=\dfrac{2-p}{p(p+4)(p^2+8)}$.

57. $F(p)=\dfrac{4p+1}{p(p+5)(p^2+3)}$.

58. $F(p)=\dfrac{2p+5}{(p+4)(p-3)(p^2+4)}$.

59. $F(p)=\dfrac{5p+4}{(p-4)(p+2)(p^2+1)}$.

60. $F(p)=\dfrac{5}{p(p-4)(p^2+5)}$.

61. $F(p)=\dfrac{3p+4}{p(p^2+4)(p-5)}$.

62. $F(p)=\dfrac{3-p}{(p+1)(p^2+9)(p-2)}$.

63. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{(p-1)(p^2+2)(p+3)}$.

64. $F(p)=\dfrac{p-3}{(p+3)(p-2)(p^2+4)}$.

65. $F(p)=\dfrac{2p+5}{p(p^2+3)(p-1)}$.

66. $F(p)=\dfrac{6p+2}{(p^2+1)(p^2-4)}$.

67. $F(p)=\dfrac{3p+6}{p(p-5)(p^2+1)}$.

68. $F(p)=\dfrac{2p+7}{(p-1)(p^2+9)(p-5)}$.

69. $F(p)=\dfrac{5p+3}{p(p-4)(p^2+4)}$.

70. $F(p)=\dfrac{3}{p(p-5)(p^2+1)}$.

71. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p+1)(p^2+4)(p-3)}$.

72. $F(p)=\dfrac{3p-4}{(p+3)(p^2+1)(p-1)}$.

73. $F(p)=\dfrac{p^2+3}{p(p-4)(p^2+1)}$.

74. $F(p)=\dfrac{2}{(p+5)(p-1)(p^2+4)}$.

75. $F(p)=\dfrac{5}{(p^2-1)(p^2+9)}$.

76. $F(p)=\dfrac{p+4}{(p-3)(p+1)(p^2+25)}$.

77. $F(p)=\dfrac{p-1}{(p^2+16)(p-3)(p+1)}$.

78. $F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+1)(p-1)(p^2+25)}$.

79. $F(p)=\dfrac{5p+2}{p(p-5)(p^2+9)}$.

80. $F(p)=\dfrac{p^2+2}{p(p^2+16)(p-3)}$.

81. $F(p)=\dfrac{4}{p(p^2+1)(p-6)}$.

82. $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2-4)(p^2+4)}$.

83. $F(p)=\dfrac{p^2+p}{(p^2+9)(p-1)(p-3)}$.

84. $F(p)=\dfrac{2p^2+3}{p(p-4)(p^2+16)}$.

85. $F(p)=\dfrac{6}{(p^2-16)(p^2+1)}.$

86. $F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+9)(p^2-1)}.$

87. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p-6)(p^2+4)}.$

88. $F(p)=\dfrac{p^2+3}{p(p-2)(p^2+1)}.$

89. $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2+4)(p^2-1)}.$

90. $F(p)=\dfrac{5p}{(p-2)(p+5)(p^2+9)}.$

91. $F(p)=\dfrac{3p^2+5}{p(p+6)(p^2+4)}.$

92. $F(p)=\dfrac{2p^2+p}{(p-3)(p+2)(p^2+1)}.$

93. $F(p)=\dfrac{p^2+2}{p(p^2+16)(p-3)}.$

94. $F(p)=\dfrac{4}{p(p^2+9)(p-6)}.$

95. $F(p)=\dfrac{3}{p(p-5)(p^2+4)}.$

96. $F(p)=\dfrac{2p+1}{p(p^2+1)(p-3)}.$

97. $F(p)=\dfrac{6p+1}{p(p^2+25)(p-4)}.$

98. $F(p)=\dfrac{p^2+3}{(p^2+1)(p^2-9)}.$

99. $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2-4)(p^2+9)}.$

100. $F(p)=\dfrac{3p+6}{(p+4)(p-5)(p^2+9)}.$

Завдання 5. Розв'язати диференціальне рівняння:

а) операційним методом;

б) за допомогою інтеграла Дюамеля, якщо y(0) = 0, y'(0) = 0:

1. $y''-4y=\sin t.$

2. $y''-y=e^{2t}.$

3. $y''+2y=e^{t}.$

4. $y''-2y'=e^{3t}.$

5. $y''-2y'+y=t.$

6. $y''-2y'-3y=\cos t.$

7. $y''+y'=\sin t.$

8. $y''+3y'=e^{-t}.$

9. $y''+y=3.$

10. $y''+y'=e^{2t}.$

11. $y'' - 3y' + 2y = 2t.$

12. $y'' + 2y' + y = 4.$

13. $y'' + 4y = e^t.$

14. $y'' + 3y' - 4y = \sin 2t.$

15. $y'' - 3y' = \cos t.$

16. $y'' - y' = e^{-3t}.$

17. $y'' - 2y' + y = 3.$

18. $y'' - 4y' = e^{-t}.$

19. $y'' + 3y' - 4y = t.$

20. $y'' + 9y = 2.$

21. $y'' + y' = e^t.$

22. $y'' - 3y' + 2y = \sin t.$

23. $y'' - y' - 6y = 3t.$

24. $y'' - y' = 4.$

25. $y'' + y' - 6y = \cos 2t.$

26. $y'' + 5y' = e^{-2t}.$

27. $y'' - 9y' = \sin 3t.$

28. $y'' - 5y' = 3e^{3t}.$

29. $y'' - 5y' + 6y = 5t.$

30. $y'' - 2y' - 8y = \sin 3t.$

31. $y'' - 5y' + 4y = e^{-t}.$

32. $y'' - 2y' - 3y = 2\cos t.$

33. $y'' + 9y = 2.$

34. $y'' + 2y' - 8y = e^{3t}.$

35. $y'' + y' - 2y = 3\sin t.$

36. $y'' - 9y = 2t.$

37. $y'' + 4y' + 3y = 4.$

38. $y'' + 6y' + 8y = \cos 2t.$

39. $y'' + 3y' + 2y = \sin t.$

40. $y'' + 6y' = 3e^t.$

41. $4y'' + 4y' + y = 1.$

42. $y'' + 4y = e^{-t}.$

43. $y'' - 3y' + 2y = \cos 3t.$

44. $4y'' - 4y' + y = 4.$

45. $y'' + 4y = 3.$

46. $2y'' - 5y' + 2 = 3.$

47. $y'' - 4y = \sin t.$

48. $y'' - 3y' - 4y = \cos 2t.$

49. $y'' + 4y' = 2t.$

50. $2y'' + 3y' - 2y = 6.$

51. $y'' + 2y' - 3y = 2\cos 3t.$ 52. $y'' - 6y' = e^{-2t}.$

53. $y'' - 4y' + 3y = \sin 2t.$ 54. $y'' + y = 4.$

55. $2y'' + 5y' + 2y = 2.$ 56. $y'' + 16y = 3.$

57. $y'' - y' - 2y = t.$ 58. $y'' - 5y' = 2e^{t}.$

59. $y'' + 5y' + 4y = 3t.$ 60. $y'' + 5y' + 4y = 3t.$

61. $y'' + 6y' + 9 = t - 1.$ 62. $y'' - 4y' = 5.$

63. $y'' - 6y' + 5y = 3t.$ 64. $y'' + 9y = 2t.$

65. $y'' + 4y' = e^{t}.$ 66. $y'' - 6y' + 9y = 4.$

67. $y'' + 4y = 4t.$ 68. $y'' + 4y' + 4y = 2.$

69. $y'' - y' = e^{3t}.$ 70. $y'' - 6y' + 5y = \sin t.$

71. $y'' + y' = 3\cos t.$ 72. $y'' - 2y' + y = 3t.$

73. $y'' + 5y' + 4y = \sin 2t.$ 74. $y'' + 3y' = \cos 3t.$

75. $y'' - 5y' + 4y = 5.$ 76. $y'' - 6y' = 2e^{-t}.$

77. $y'' + 4y = t + 1.$ 78. $y'' - y = 3.$

79. $2y'' - 3y' - 2y = 5.$ 80. $y'' - 2y' = e^{3t}.$

81. $y'' + y = e^{3t}.$ 82. $y'' + 2y' = 3\cos 2t.$

83. $2y'' - 3y' + y = t.$ 84. $y'' - 4y = 2e^{t}.$

85. $y'' + 3y' = \sin t.$ 86. $y'' + 5y' + 6y = 2.$

87. $y'' - y = \sin 2t.$ 88. $2y'' + 3y' + y = 5t.$

89. $y'' + 9y = t + 1.$ 90. $y'' + 4y' = e^{2t}.$

91. $y'' - 4y' + 4y = 3.$

92. $y'' - 3y' + 2y = 5t.$

93. $y'' - y' - 6y = 4.$

94. $2y'' + y' - y = \sin t.$

95. $y'' + 3y' + 2y = 4t.$

96. $y'' - 5y' = 4\cos t.$

97. $y'' - 5y' + 6y = 1.$

98. $y'' + y = 5t.$

99. $y'' - y = 2t.$

100. $2y'' - y' - y = \cos t.$

Завдання 6. Розв'язати задачу Коші:

а) операційним методом;

б) за допомогою інтеграла Дюамеля.

1. $y'' + y = e^{2t}$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0.$
2. $y'' - 2y' - 3y = 2$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1.$
3. $y'' - 4y = 4t$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1.$
4. $y'' - y' = \cos 2t$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 2.$
5. $y'' + 9y = e^{-2t}$, $\quad y(0) = 2$, $\quad y'(0) = 4.$
6. $y'' - 3y' + 2y = 3$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0.$
7. $y'' + 4y = e^{-t}$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 2.$
8. $y'' + 3y' + 2y = 2$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = -2.$
9. $y'' - 2y' = \cos t$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = -1.$
10. $y'' + 2y' - 3y = 3$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1.$
11. $y'' + y' = 3t$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = -1.$
12. $y'' - 2y' = e^{t}$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 2.$
13. $y'' - y' - 2y = 2t$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1.$

14. $y'' + 4y = 4e^{-2t}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.$

15. $y'' - 4y = 8t$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

16. $y'' - 4y' + 3y = 6$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

17. $y'' + 3y' = e^{2t}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

18. $y'' - y' = 5\cos 2t$, $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

19. $y'' - 4y' = e^{t}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$

20. $y'' - 2y' + y = e^{-2t}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

21. $y'' - y = \sin t$, $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0.$

22. $y'' + 4y = 2e^{t}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

23. $y'' + y' = e^{3t}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

24. $y'' + y = 3e^{2t}$, $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

25. $y'' + y = 5e^{-2t}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.$

26. $y'' + 2y' + y = \sin t$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$

27. $y'' - 2y' + y = e^{-t}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$

28. $y'' - 4y = 2\sin t$, $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

29. $y'' - y' - 2y = \cos t$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

30. $y'' + 2y' + y = t^2$, $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

31. $y'' + 4y = 2$, $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

32. $y'' - 2y' + y = t$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

33. $y'' + y' = \sin t$, $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0.$

34. $y'' - 4y' + y = t$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

35. $y'' + y' = e^{2t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

36. $y'' + 3y' - 4y = \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

37. $y'' - 9y = \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

38. $y'' + 9y = 3t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

39. $2y'' - 5y' + 2y = 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$:

40. $y'' - 3y' + 2y = \sin 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

41. $y'' + 3y' = 4e^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

42. $y'' + 2y' - 3y = 6$, $y(0) = 2$. $y'(0) = 1$.

43. $y'' + 4y = e^{2t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

44. $y'' - 3y' = \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

45. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

46. $y'' - y = 3\sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) =1$.

47. $y'' + y = 2t$, $y(0) = 2$, $y(0) = 0$.

48. $y'' - 4y' = 5e^{3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

49. $y'' + 2y' = 2e^{-3t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

50. $y'' + y' - 6y = 4\cos 3t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

51. $y'' - 4y = 6t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

52. $y'' - 5y' + 4y = 6$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

53. $y'' + 6y' = 3e^{-2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

54. $y'' - y' - 6y = 3\sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

55. $y'' + 16y = 2e^{t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

56. $y'' + 5y' + 4y = 8$, $\quad$ y(0) = 2, $\quad$ y′(0) = 3.

57. $y'' + 7y' = 5\sin t$, $\quad$ y(0) = 0, $\quad$ y′(0) = 7.

58. $y'' - 4y' + 3y = 9$, $\quad$ y(0) = 1, $\quad$ y′(0) = 6.

59. $y'' + 2y'' + 5y = e^{2t}$, $\quad$ y(0) = -1, $\quad$ y′(0) = 1.

60. $y'' + 2y' = 13\cos 3t$, $\quad$ y(0) = 2, $\quad$ y′(0) = 0.

61. $y'' - 4y = 5\sin t$, $\quad$ y(0) = 2, $\quad$ y′(0) = 1.

62. $y'' - 4y'' + 5y = e^{t}$, $\quad$ y(0) = 0, $\quad$ y′(0) = 1.

63. $y'' - 3y' = \cos t$, $\quad$ y(0) = 1/2, $\quad$ y′(0) =5/2.

64. $y'' + y' - 6y = 18$, $\quad$ y(0) = 2, $\quad$ y′(0) = 5.

65. $y'' - 2y' + 2y = 4$, $\quad$ y(0) = 3, $\quad$ y′(0) = -1.

66. $y'' + 5y'' - 14y = e^{-t}$, $\quad$ y(0) = 1, $\quad$ y′(0) = 5.

67. $y'' + 3y' = 26\cos 2t$, $\quad$ y(0) = 1, $\quad$ y′(0) = 6.

68. $y'' + 4y = 8e^{-2t}$, $\quad$ y(0) = 0, $\quad$ y′(0) = 2.

69. $y'' + 4y' + 3y = 3t + 1$, $\quad$ y(0) = 3, $\quad$ y′(0) = 1.

70. $y'' - 2y' + 5y = 10$, $\quad$ y(0) = 0, $\quad$ y′(0) = 2.

71. $4y'' - 4y'' + y = 9e^{-t}$, $\quad$ y(0) = 2, $\quad$ y′(0) = 1.

72. $y'' + y' = 10\sin 5t$, $\quad$ y(0) = 1, $\quad$ y′(0) = -2.

73. $y'' - 6y' + 9y = 12$, $\quad$ y(0) = 2, $\quad$ y′(0) = -2.

74. $y'' + 2y' - 3y = 6t + 2$, $\quad$ y(0) = -3, $\quad$ y′(0) = 2.

75. $y'' - 2y'' + 10y = 15e^{2t}$, $\quad$ y(0) = 2, $\quad$ y′(0) = 3.

76. $y'' + y = 3e^{-2t}$, $\quad$ y(0) = 3, $\quad$ y′(0) = 1.

77. $y'' - 2y' + y = 10\sin 2t$, y(0) = -1, y'(0) = -2.

78. $y'' + y' - 12y = 13\cos 2t$, y(0) = -1, y'(0) = 2.

79. $y'' + 5y'' = e^{4t}$, y(0) = 0, y'(0) = 6.

80. $y'' + 4y' + 8y = 12$, y(0) = 2, y'(0) = -2.

81. $2y'' + y' - y = t - 2$, y(0) = 1, y'(0) = -2.

82. $2y'' + 3y' + y = 12\sin 3t$, y(0) = -1, y'(0) = -3.

83. $y'' + 4y' = 15\cos 3t$, y(0) = 1, y'(0) = 4.

84. $2y'' + 5y' + 2y = 6$, y(0) = 0, y'(0) = 4.

85. $2y'' + y'' - y = 7e^{3t}$, y(0) = 1, y'(0) = -2.

86. $y'' - 8y' = 13\cos t$, y(0) = 1, y'(0) = 8.

87. $y'' + 16y = 8t + 4$, y(0) = 1/2, y'(0) = 1.

88. $y'' + 5y' = 6e^{-3t}$, y(0) = 3, y'(0) = 2.

89. $2y'' - 3y' + y = 5\sin t$, y(0) = 3, y'(0) = 0.

90. $y'' + y' - 12y = t$, y(0) = 1/2, y'(0) = -1.

91. $y'' - 16y = \cos 4t$, y(0) = -1, y'(0) = 4.

92. $y'' - 4y'' = 8e^{2t}$, y(0) = 1, y'(0) = 0.

93. $y'' + y = e^{-2t}$, y(0) = 0, y'(0) = 2.

94. $5y'' + 6y' + y = 5$, y(0) = 3, y'(0) = -1.

95. $y'' - 5y' - 14y = 10e^{-3t}$, y(0) = 2, y'(0) = -3.

96. $y'' - 6y' + 9y = 3$, y(0) = 3, y'(0) = -1.

97. $y'' - 9y' = e^{-t}$, y(0) = 3/2, y'(0) = 1/2.

98. $y'' - 2y' - 8y = 17\cos t,$ $\quad$ $y(0) = -1,$ $\quad$ $y'(0) = 1.$

99. $5y'' - 6y' + y = 4\sin t,$ $\quad$ $y(0) = 1,$ $\quad$ $y'(0) = -1.$

100. $y'' + 25y = t,$ $\quad$ $y(0) = 1,$ $\quad$ $y'(0) = 2.$

Завдання 7. Розв'язати систему рівнянь операційним методом:

1. $\begin{cases} y' = 3x - 2y, \\ x' = 2x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

2. $\begin{cases} x' - y = 1, \\ y' = 2x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

3. $\begin{cases} 4x' = 4x + y, \\ y' = 8x - 2, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = -1.$

4. $\begin{cases} 3x' = 2y + x, \\ y' = 1 + x, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

5. $\begin{cases} x' = y - 2x, \\ y' = 6x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

6. $\begin{cases} x' = 3x - 4y, \\ 2y' = x, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = -1.$

7. $\begin{cases} x' = 2 + y, \\ 3y' = x + 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

8. $\begin{cases} x' = 3x + 5y, \\ y' = -x - 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

9. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1,\ y(0) = -1.$

10. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 7x - 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = -1.$

11. $\begin{cases} x' = 4x - 7y + 1, \\ y' = 2x - 5y, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

12. $\begin{cases} 2x' + y' = 2x + 1, \\ y' = 2x + t, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 0.$

13. $\begin{cases} x' = 3x - 4y, \\ y' = x - y + 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

14. $\begin{cases} x' - y' = -2y + 2t, \\ x' + y' = x + 2, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

15. $\begin{cases} -y' = x + 2, \\ x' = x - 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

16. $\begin{cases} x' - y' = y + e^t, \\ 3x' + y' = -x + 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

17. $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = -1.$

18. $\begin{cases} 2x' + y' = -y + e^t, \\ 2x' + y' = -2x + t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \ \ y(0) = 0.$

19. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 3x - 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \ y(0) = -1.$

20. $\begin{cases} 2x' + y' = x + 2, \\ -x' + y' = 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \ \ y(0) = 1.$

21. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \ y(0) = 0.$

22. $\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \ y(0) = 0.$

23. $\begin{cases} x' = -x + y + 1, \\ y' = 4x - y + t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \ y(0) = 0.$

24. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 3x - 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \ y(0) = 2.$

25. $\begin{cases} x' + y' = 3x + 2, \\ x' + 2y' = 2x + t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \ \ y(0) = 1.$

26. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -3x - 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1, \ y(0) = 0.$

27. $\begin{cases} x' + 2y = -x + t, \\ y' = x + y + 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

28. $\begin{cases} x' + y' = -2x + t, \\ y' + 4x' = -2y + 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

29. $\begin{cases} x' + y' = -4x + 1, \\ y' + x' = -y + t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

30. $\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = -1.$

31. $\begin{cases} x' - y' = -y + 1, \\ y' - x' = -2x + t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

32. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases}$ $\quad x(0) = -2,\ y(0) = 0.$

33. $\begin{cases} x' = 2x + 4y, \\ y' = 3x - 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

34. $\begin{cases} x' - y' = 2y + t, \\ y' - x' = x + 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

35. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

36. $\begin{cases} x' - y' = -y + e^{-t}, \\ -x' + 2y' = x + 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

37. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 5x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

38. $\begin{cases} 2x' - y' = e^{-t} - y, \\ -4x' + 2y' = t - x, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

39. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

40. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

41. $\begin{cases} 2x' + y' = 2 - y, \\ x' + y' = x + e^{t}, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

42. $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = 3x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

43. $\begin{cases} x' + 2y' = e^{t} - y, \\ x' + y' = t - y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

44. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

45. $\begin{cases} x' - 2y' = e^{t} - y, \\ 2x' - 3y' = 1 - x, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

46. $\begin{cases} x' = -x + 6y, \\ y' = x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = -1.$

47. $\begin{cases} x' - y' = x + t, \\ x' - y' = 1 - y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

48. $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ \ y(0) = 1.$

49. $\begin{cases} 2x' + y' = 1 - x - y, \\ 3x' + 2y' = -y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

50. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - x, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$

51. $\begin{cases} x' + y = t, \\ y' + x = e^t, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = -1.$

52. $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 2.$

53. $\begin{cases} x' - y' = 2x - 2t, \\ 2y' = -x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

54. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - x + 1, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 1.$

55. $\begin{cases} x' = -7x - 6y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = -1.$

57. $\begin{cases} x' = -y + e^t, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

58. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 2, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ \ y(0) = 1.$

59. $\begin{cases} x' + y' = y + e^t, \\ 2x' + y' = -2y + t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

60. $\begin{cases} x' = 2y + e^{-t}, \\ y' = x + y + 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

61. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ \ y(0) = -2.$

62. $\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = x - y + 3, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2,\ \ y(0) = -1.$

63. $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = x + y + e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

64. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ \ y(0) = 2.$

65. $\begin{cases} x' = 2x + y + t, \\ y' = -x + e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

66. $\begin{cases} x' = 2x + y + 3, \\ y' = 9x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 2.$

67. $\begin{cases} x' - 2y' = x + 2t, \\ y' = -x + y + 3, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

68. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$

69. $\begin{cases} x' = 2x + y + t, \\ y' = 1 - x, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

70. $\begin{cases} x' = 2y - y + e^{-t}, \\ y' = x + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

71. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 2x - y + t, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = -2.$

72. $\begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = 2x - y + t, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

73. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 3x + 6y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 1.$

74. $\begin{cases} x' = x - 8y, \\ y' = 3y - x, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$

75. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = t - x, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 1.$

76. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1, \;\; y(0) = 1.$

77. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 2x + 3, \end{cases}$ $x(0) = 1, \;\; y(0) = 0.$

78. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 2y - 6x, \end{cases}$ $x(0) = 0, \;\; y(0) = -1.$

79. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + e^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = -1, \;\; y(0) = 0.$

80. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 9x - 4y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \;\; y(0) = 0.$

81. $\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = 2x - e^{t}, \end{cases}$ $x(0) = 0, \;\; y(0) = 0.$

82. $\begin{cases} x' = y + 2, \\ y' = 2x - y + t, \end{cases}$ $x(0) = 0, \;\; y(0) = 0.$

83. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4x - y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \;\; y(0) = 0.$

84. $\begin{cases} x' = 3 - y, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, \;\; y(0) = 0.$

85. $\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = 2x - 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \ \ y(0) = 2.$

86. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 2x + e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \ \ y(0) = 0.$

87. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \ \ y(0) = -1.$

88. $\begin{cases} x' = 3x + y + 1, \\ y' = -2x + t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \ \ y(0) = 0.$

89. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -7x - 6y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \ \ y(0) = 2.$

90. $\begin{cases} x' = -x + 2y + 1, \\ y' = 2x - y + t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \ \ y(0) = 2.$

91. $\begin{cases} x' = 2x + 2y, \\ y' = 3x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1, \ \ y(0) = 1.$

92. $\begin{cases} x' = y - 2x, \\ y' = 3x + e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \ \ y(0) = 0.$

93. $\begin{cases} x' = 3y - x + t, \\ y' = 2x + e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \ \ y(0) = 0.$

94. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -x + 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \ \ y(0) = 1.$

95. $\begin{cases} x' = 2y - x + 1, \\ y' = x + e^{-t}, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

96. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$ $\qquad x(0) = -1,\ \ y(0) = 0.$

97. $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = 2x - y + 2, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

98. $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = 2x - t, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 1,\ \ y(0) = 1.$

99. $\begin{cases} x' = 3y + e^{-t}, \\ y' = 4y - x + 3, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 0,\ \ y(0) = 0.$

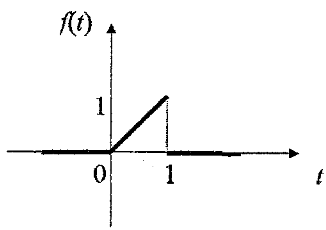
100. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = x + 2, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$

Завдання 8. Розв'язати задачу Коші

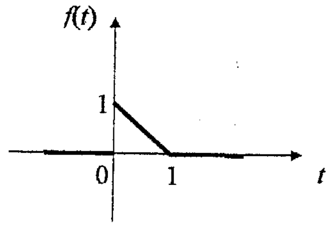
$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t),\ \ y(0) = y_0,\ \ y'(0) = y'_0,$$

якщо функція $f(t)$ задана графічно.

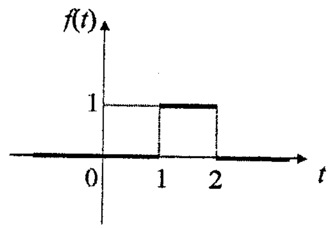
1. $y'' + 4y = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



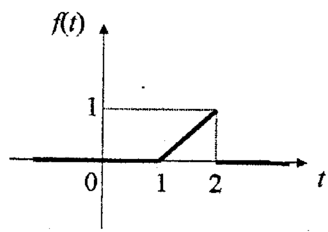
2. $y'' + y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



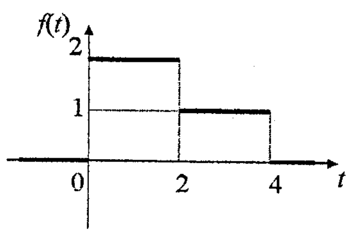
3. $y'' - 2y' + y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



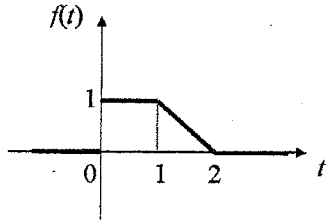
4. $y'' - 2y' = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



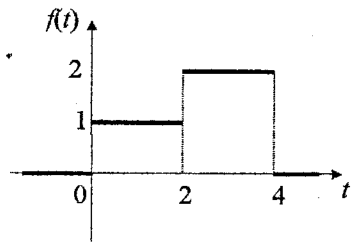
5. $y'' + 3y' + 2y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



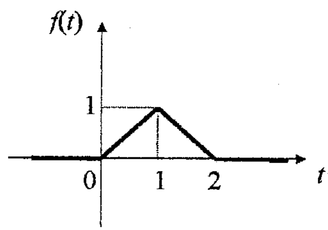
6. $y'' + y = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



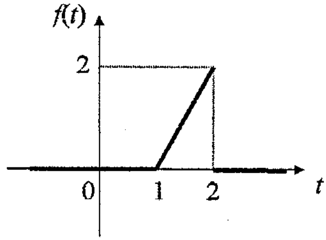
7. $y'' - 2y' - 3y = f(t)$,
$y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$



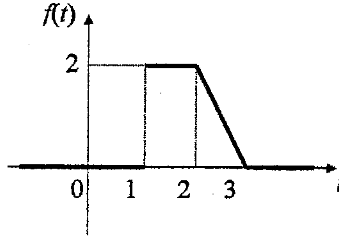
8. $y'' - y' = f(t)$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$



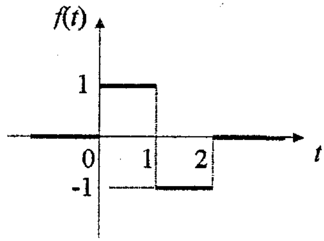
9. $y'' + 9y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



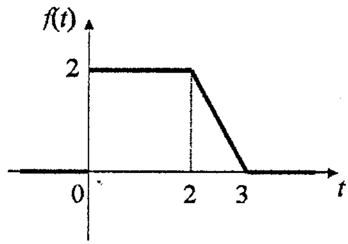
10. $y'' - y' = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$



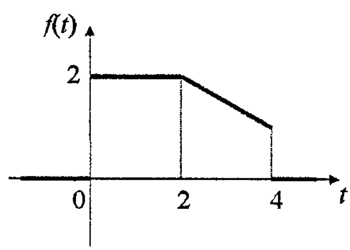
11. $y'' + 2y' + y = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



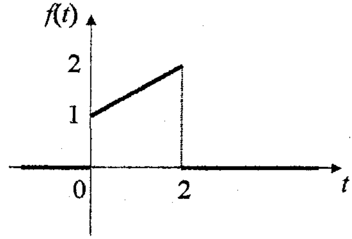
12. $y'' + y' - 2y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



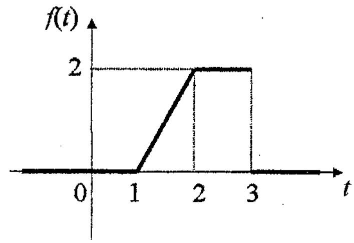
13. $y'' + 3y' = f(t)$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$



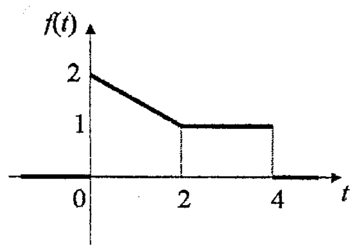
14. $y'' - 4y' = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$



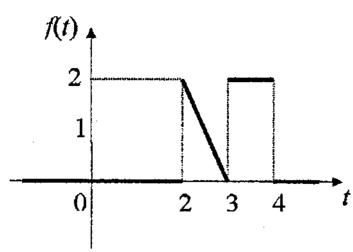
15. $y'' - 3y' = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



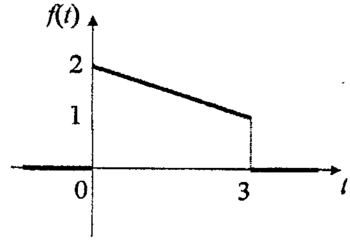
16. $y'' - 2y' - 3y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



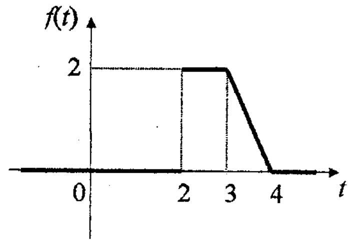
17. $y'' + y = f(t)$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$



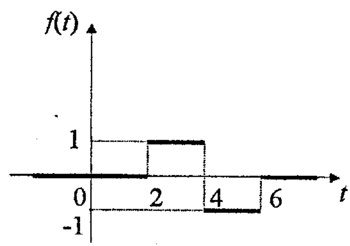
18. $y'' + 2y' = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = -2.$



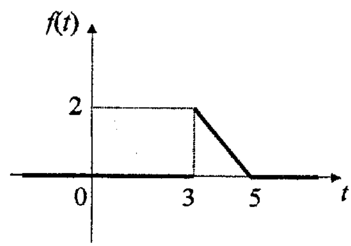
19. $y'' - 4y' = f(t),$
$y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$



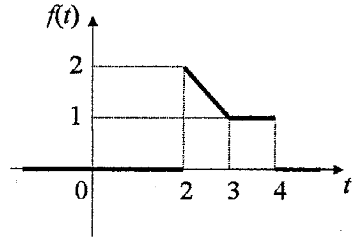
20. $y'' - 4y' + 4y = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



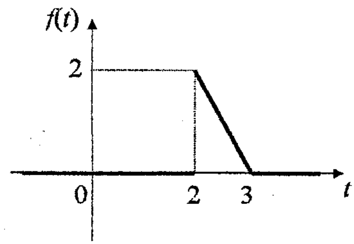
21. $y'' - 9y' = f(t),$
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$



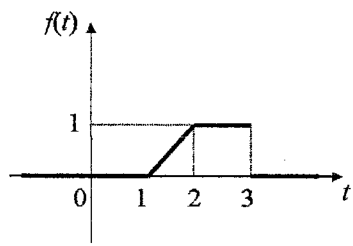
22. $y'' - 4y' = f(t)$,
$y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$



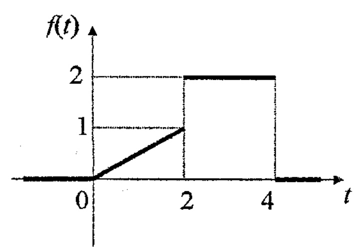
23. $y'' + 5y' = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



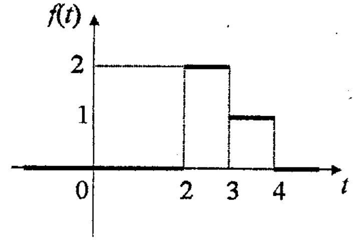
24. $y'' + 25y = f(t)$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$



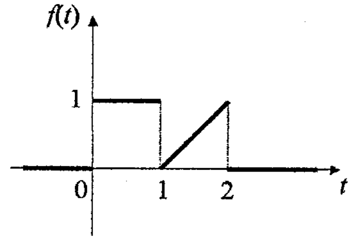
25. $y'' - 3y' + 2y = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



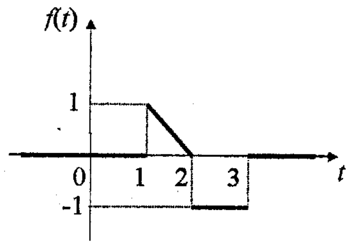
26. $y'' + 4y' + 4y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



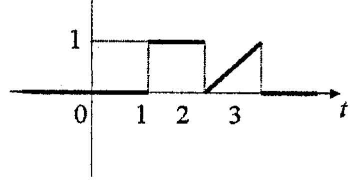
27. $y'' + 3y' - 4y = f(t)$,
$y(0) = -3,\ y'(0) = 0.$



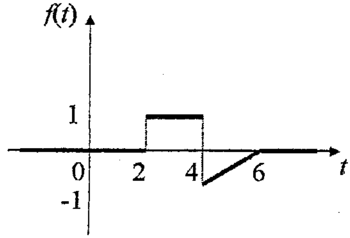
28. $y'' + 3y' = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$



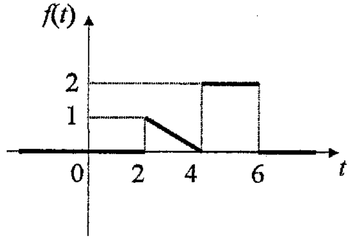
29. $y'' - 6y' + 9y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



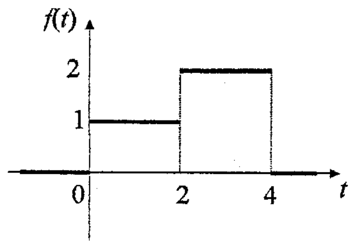
30. $y'' + 4y = f(t)$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$



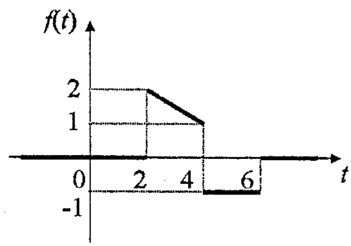
31. $y'' - 3y' - 4y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



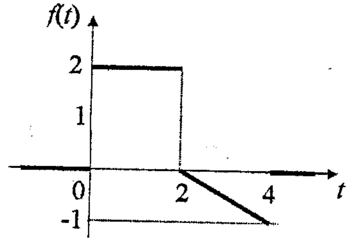
32. $y'' - 5y' = f(t)$,
$y(0) = -3,\ y'(0) = 0.$



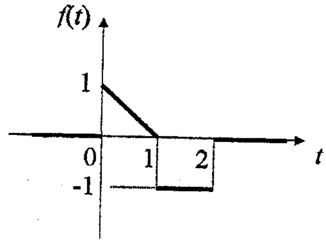
33. $y'' + 4y' + 3y = f(t)$,
$y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$



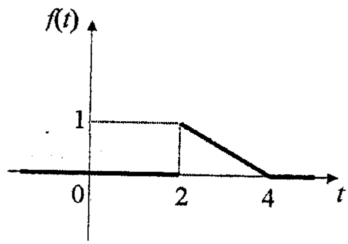
34. $y'' - 6y' + 5y = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



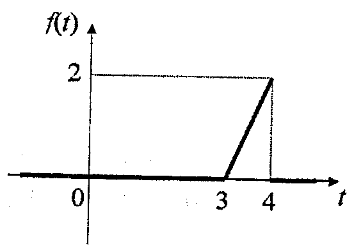
35. $y'' - y' - 6y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



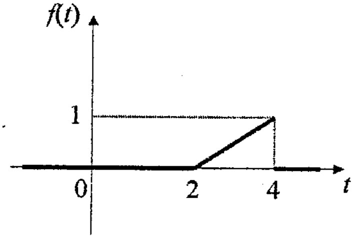
36. $y'' + 4y' = f(t)$,
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$



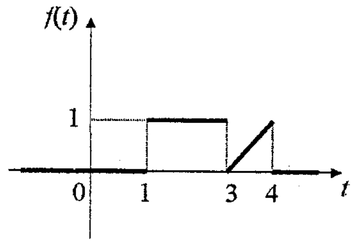
37. $y'' - 4y' - 5y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$



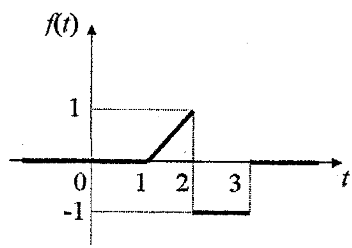
38. $y'' + 6y' + 9y = f(t),$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



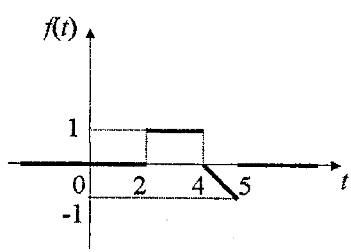
39. $y'' + y' - 6y = f(t),$
$y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$



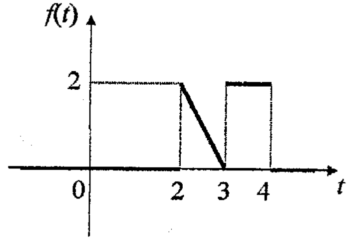
40. $y'' - 16y = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$



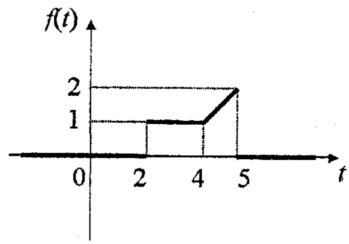
41. $y'' + 6y' + 5y = f(t),$
$y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$



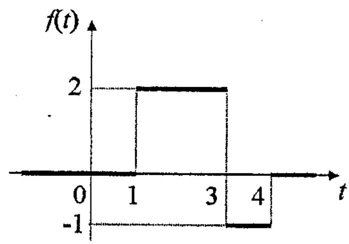
42. $y'' + 36y = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$



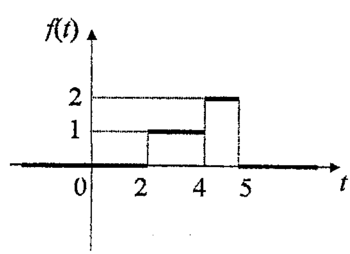
43. $y'' + 4y' - 5y = f(t),$
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$



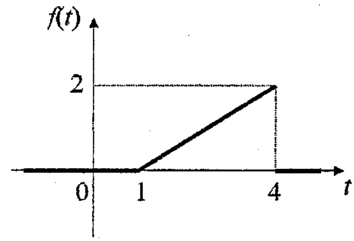
44. $y'' - 5y' + 4y = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = -3.$



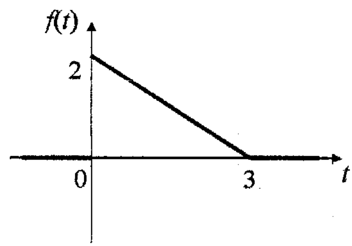
45. $y'' - 36y = f(t),$
$y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$



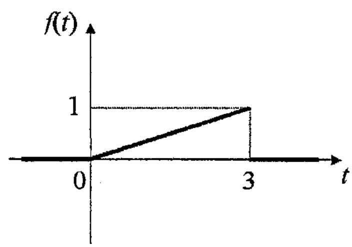
46. $y'' - 6y' = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$



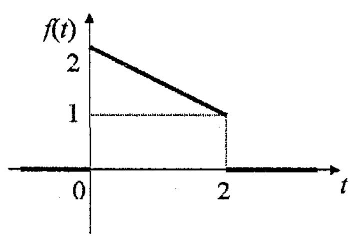
47. $y'' + 6y' = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$



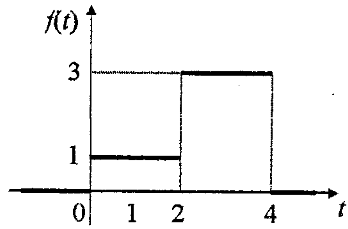
48. $y'' - 2y' - 8y = f(t),$
$y(0) = -4,\ y'(0) = 0.$



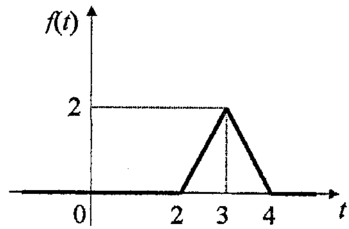
49. $y'' - 6y' - 7y = f(t),$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



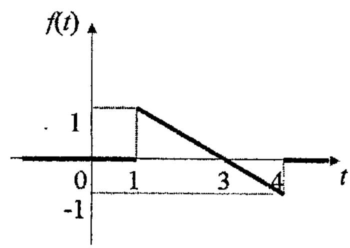
50. $y'' - 7y' + 12y = f(t)$,
$y(0) = -3,\ y'(0) = 0.$



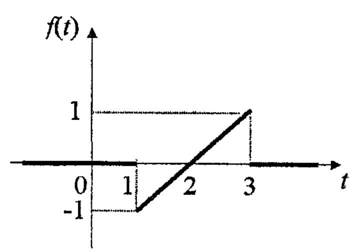
51. $y'' + 8y' = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$



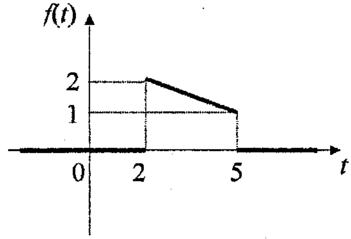
52. $y'' - y' - 20y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



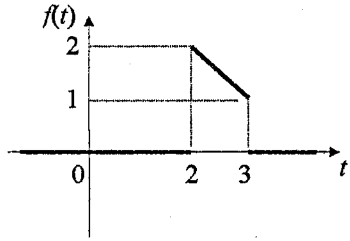
53. $y'' + 2y' - 8y = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



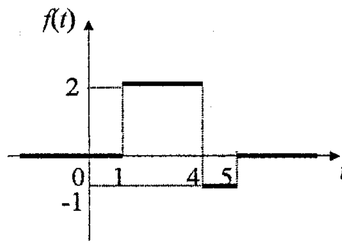
54. $y'' + y' = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$



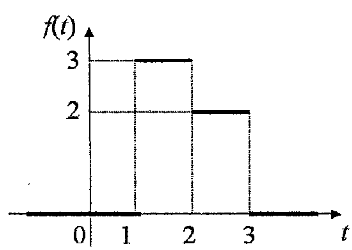
55. $y'' - y' - 12y = f(t)$,
$y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$



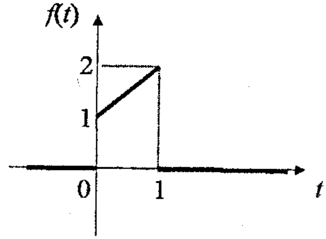
56. $y'' + 7y' + 12y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



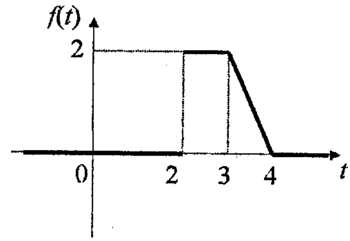
57. $y'' + y' - 12y = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



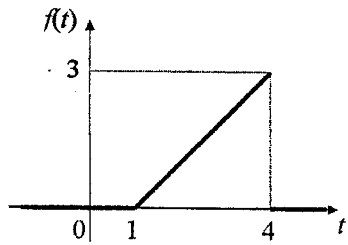
58. $y'' + 9y' = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$



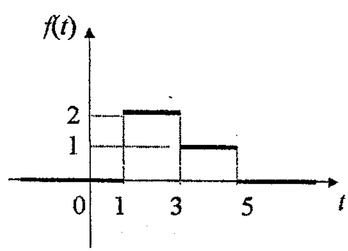
59. $y'' + y' - 20y = f(t),$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



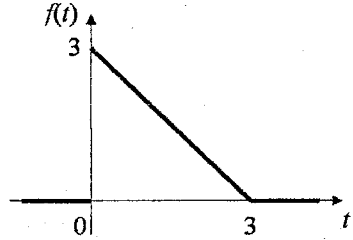
60. $y'' + 4y = f(t),$
$y(0) = -3,\ y'(0) = 0.$



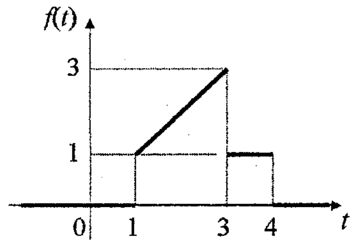
61. $y'' - 10y' + 25y = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



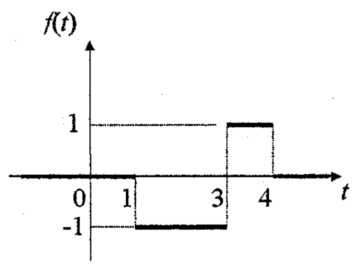
62. $y'' + 8y' = f(t)$,
$y(0) = -4,\ y'(0) = 0.$



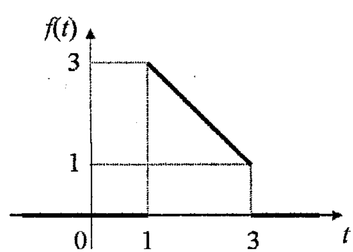
63. $y'' + 49y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$



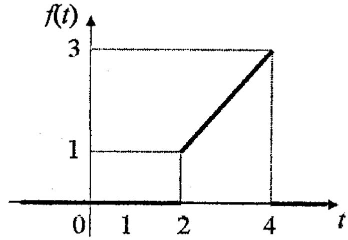
64. $y'' - 4y' + 13y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



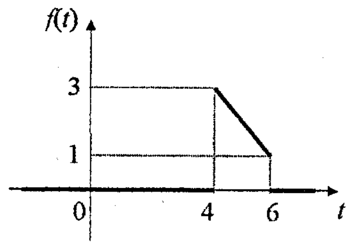
65. $y'' - \dfrac{13}{2}y' + 3y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



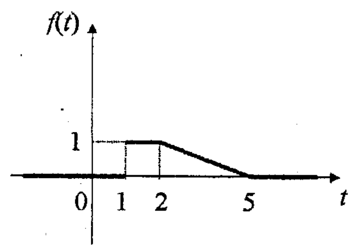
66. $y'' - y' = f(t),$
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$



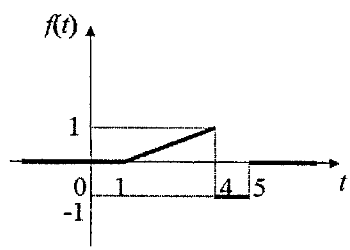
67. $y'' + 25y = f(t),$
$y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$



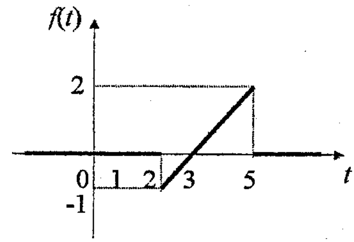
68. $y'' + \frac{11}{2}y' - 3y = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$



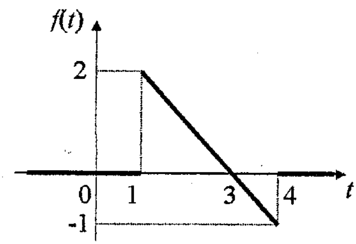
69. $y'' + 6y' - 7y = f(t),$
$y(0) = -3,\ y'(0) = 0.$



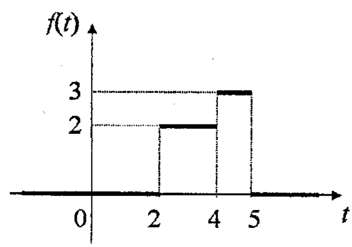
70. $y'' + 7y' = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



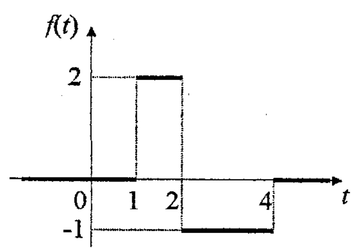
71. $y'' + 8y' + 7y = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



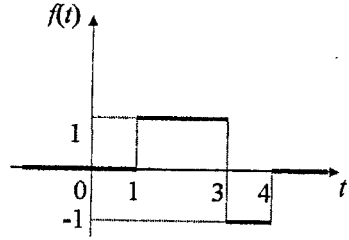
72. $y'' - 9y' + 8y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$



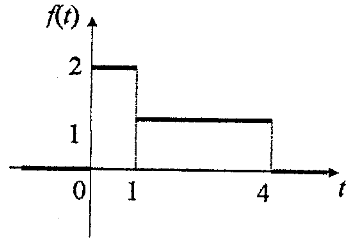
73. $y'' + 4y' + 13y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



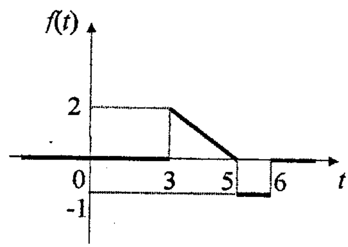
74. $y'' - 2y' + 10y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



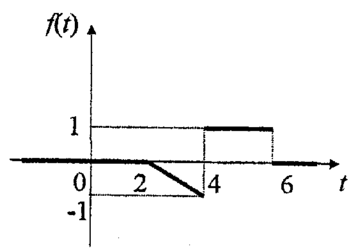
75. $y'' + 6y' + 10y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



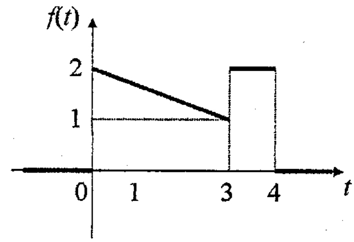
76. $y'' - 7y' = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$



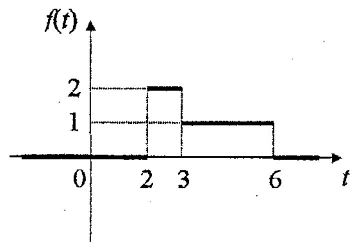
77. $y'' + 9y' + 8y = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



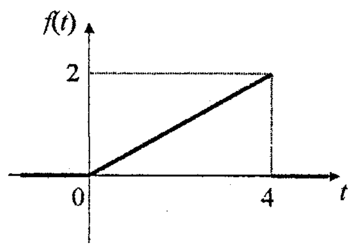
78. $y'' - \dfrac{17}{2} y' + 4y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



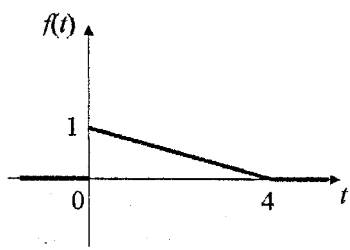
79. $y'' - 4y' + 5y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



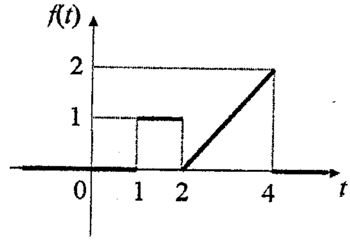
80. $y'' - 3y' = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$



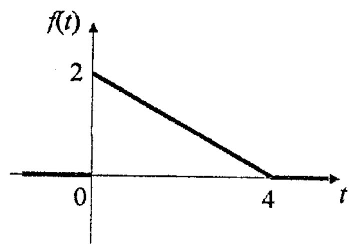
81. $y'' + 10y' + 9y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$



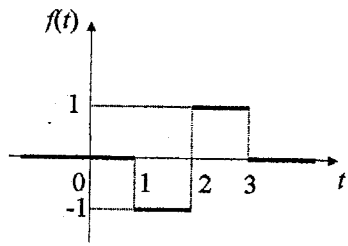
82. $y'' + 4y' + 5y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



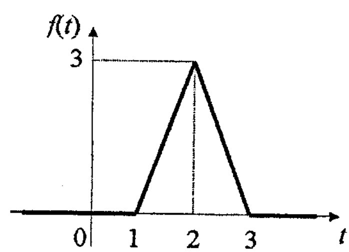
83. $y'' + 8y' = f(t)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$



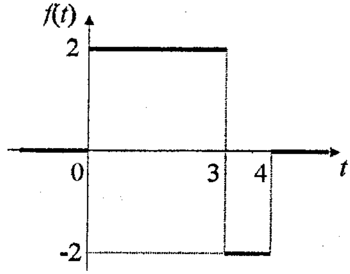
84. $y'' + 2y' + 2y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



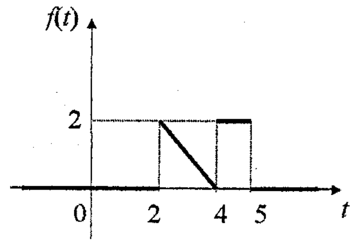
85. $y'' + 3y' = f(t)$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$



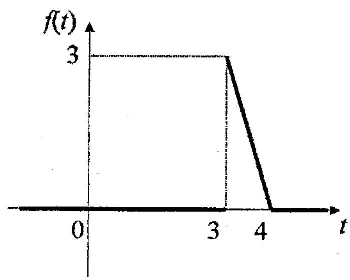
86. $y'' + 2y' + 10y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



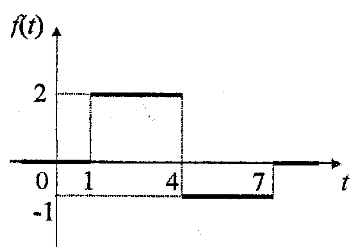
87. $y'' + \dfrac{15}{2}y' - 4y = f(t)$,
$y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$



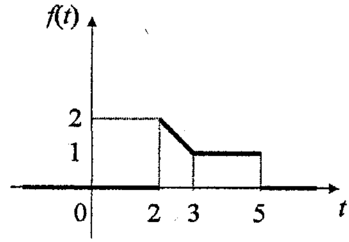
88. $y'' + 8y' - 9y = f(t)$,
$y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$



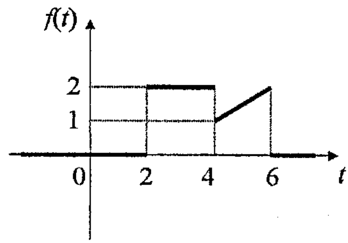
89. $y'' - 2y' + 2y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$



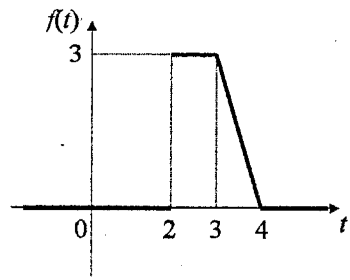
90. $y'' - 10y' + 9y = f(t)$,
$y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$



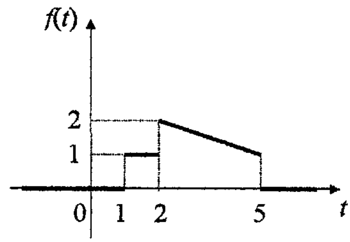
91. $y'' - 8y' = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$



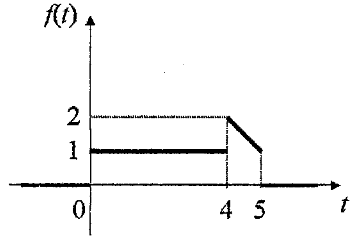
92. $y'' + 9y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$



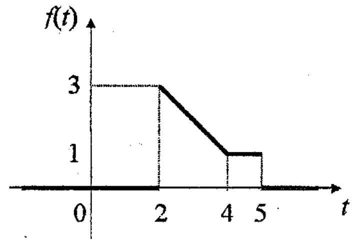
93. $y'' - 4y' - 12y = f(t)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$



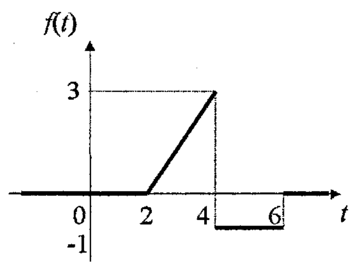
94. $y'' - 6y' = f(t),$
$y(0) = 4,\ y'(0) = 0.$



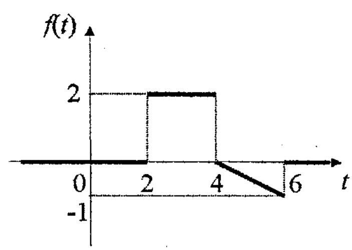
95. $y'' + 2y' + y = f(t),$
$y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$



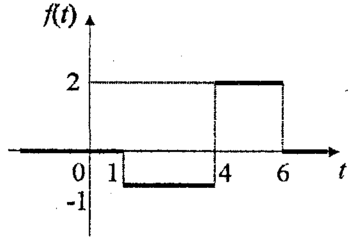
96. $y'' + \frac{7}{2}y' - 2y = f(t),$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



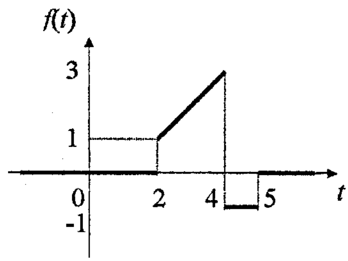
97. $y'' + 36y = f(t),$
$y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$



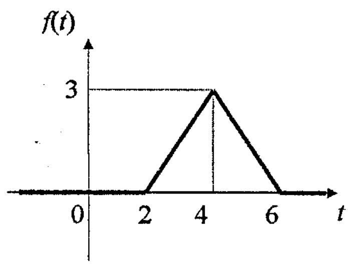
98. $y'' + 8y' - 9y = f(t),$
$y(0) = 0,\ y'(0) = -2.$



99. $y'' + 4y' - 12y = f(t),$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$



100. $$y'' - \frac{5}{2}y' + y = f(t),$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$



Список літератури

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.2. – М.: Наука, 1985.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985.

3. Высшая математика (специальные разделы): Пособие для студентов / Под ред. П.И.Чинаева. – К.: Высшая шк., 1981.

4. Специальные разделы математического анализа: Сборник задач по математике для втузов / Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1986.

5. П.Ф. Овчинников, Б.М.Лисицын, В.М.Михайленко. Высшая математика.Учеб. пособие /Под общ. ред. П.Ф. Овчинникова. – К.: Выща шк., 1989.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II –М. : Высшая школа, 1986.

Навчальне видання

Надія Борисівна Дубова
Лідія Іванівна Педорченко
Віктор Семенович Петрунін

ЗБІРНИК
ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ
Частина 7

Збірник завдань

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор В.О. Дружиніна

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 16.09.2005 р.
Формат 29,7×42 1/4
Друк різографічний
Тираж 75 прим.
Зам. № 2005-152

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 5.2

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ